

*Departament d'Astronomia i Meteorologia*

*Facultat de Física*

*Universitat de Barcelona*

Algunes aplicacions de les Wavelets  
al procés de dades en  
Astronomia i Teledetecció

Memòria presentada per

**Xavier Otazu Porter**

per optar al Grau de Doctor en Física

setembre 2001

Programa de doctorat: *Astronomia i Meteorologia*. Bienni 1994-1996.

Memòria presentada per optar al títol de *Doctor en Física*.

Tesi dirigida pel Dr. Jorge Núñez de Murga.

## Agraïments

A en Jorge Núñez, per confiar en mi des del principi, per introduir-me en el món del procés de dades, per facilitar-me tots els medis necessaris per a realitzar aquest treball, per ajudar-me en els moments més difícils i obrir-me moltes portes de cara al futur. El seu altruisme mai serà prou valorat.

Al Departament d'Astronomia per posar al meu abast els recursos tècnics i humans necessaris per a realitzar aquest treball.

Al meus companys de grup Octavi Fors, Albert Prades i Luís Berard pels interminables moments de feina, intercanvi d'idees i treball conjunt. Sense els vostres ànims, empena i bona convivència la feina mai hagués estat tant fluida i agradable.

A en Josep Maria Paredes, Marc Ribó i Marta Peracaula, pels coneixements que m'heu aportat en el món de l'anàlisi de períodes, per la vostra manera de treballar i per l'agradable feina que hem realitzat conjuntament.

Als meus companys de departament. No us puc anomenar a tots, doncs la llista seria massa llarga, però vosaltres ja sabeu qui sou. Per la convivència mútua, pels moments de descans que hem compartit junts, per les xerrades informals. En resum, per haver tingut el luxe de poder convida amb tots vosaltres. En especial als meus companys de despatx, Albert Prades, Octavi Fors i Marc Ribó, per les interminables hores de conversa i ajuda mútua.

Al C<sup>4</sup> (Centre de Computació i Comunicacions de Catalunya), i sobretot al CEPBA (Centre Europeu de Paral·lelisme de Barcelona) i el seu personal, per posar a la meua disposició maquinari totalment punter, per haver-me fet descobrir l'apassionant món de la supercomputació i la programació paral·lela, i en especial a en Oriol Riu per la seva bona disposició a atendre sempre tots els meus dubtes i problemes.

Als organitzadors, professors i companys del "Master en Teledetecció i SIG" de l'IEEC (Institut d'Estudis Espacials de Catalunya), per la bona formació rebuda i els bons moments que vam passar plegats.

Al CVC (Centre de Visió per Computador) i els seus membres per confiar en mi i donar-me el seu suport durant aquest darrer i important any.

A en Marc Ribó i en David Nofre per la seva ajuda, opinions i consells sobre aquesta memòria i la seva exposició.

A aquelles persones no vinculades al Departament d'Astronomia que un moment o altre al llarg d'aquesta etapa m'han demostrat el seu suport, els seus ànims i la seva confiança, ja siguin professors, col·laboradors, companys de feina, amics. A tots aquells que han compartit el seu temps amb mi.

També a tots aquells que no m'han mostrat el seu suport, doncs de totes les experiències se n'aprèn alguna cosa.

Finalment, als meus pares. Sense cap mena de dubte, aquesta tesi no hagués estat possible sense el seu suport incondicional. Mai els ho podré agrair prou.



# Índex

<b>1</b>	<b>Preludi ...</b>	<b>1</b>
1.1	Procés de dades en Astronomia . . . . .	2
1.2	Procés de dades en Teledetecció . . . . .	3
1.3	Perquè aquestes i no altres? <sup>1</sup> . . . . .	4
<b>2</b>	<b>Wavelets</b>	<b>7</b>
2.1	Introducció . . . . .	7
2.2	Ones i wavelets . . . . .	8
2.2.1	Anàlisi temps-freqüència . . . . .	9
2.2.2	Wavelets i Música . . . . .	9
2.2.3	Transformada de Fourier . . . . .	10
2.2.4	Tipus de Transformada Wavelet . . . . .	11
2.2.5	Notació i definicions . . . . .	12
2.3	Transformada wavelet contínua . . . . .	13
2.3.1	Definició . . . . .	13
2.4	Expansió en sèries de wavelets . . . . .	14

2.4.1	Wavelets diàdiques . . . . .	14
2.4.2	Definició . . . . .	15
2.4.3	Wavelets diàdiques compactes . . . . .	16
2.5	La transformada wavelet discreta . . . . .	18
2.5.1	Anàlisi multiresolució . . . . .	18
2.6	L'algorisme <i>à trous</i> . . . . .	22
2.6.1	L'algorisme <i>à trous</i> utilitzant la transformada de Fourier . . . . .	23
2.6.2	Recuperació de la imatge a partir de la Transformada Wavelet . . . . .	26
<b>3</b>	<b>Deconvolució d'imatges</b>	<b>27</b>
3.1	Introducció . . . . .	27
3.2	Formació de la imatge . . . . .	28
3.3	Representació de la imatge . . . . .	29
3.4	Reconstrucció de la imatge . . . . .	30
3.5	Notació . . . . .	32
3.6	El soroll . . . . .	33
3.7	Mètodes lineals de reconstrucció . . . . .	34
3.7.1	Filtre invers directe . . . . .	34
3.7.2	Mínims quadrats . . . . .	34
3.7.3	Mínims quadrats condicionats . . . . .	35
3.7.4	Filtre de Wiener . . . . .	36
3.8	Mètodes no lineals . . . . .	37

3.8.1	Mètodes de màxima versemblança . . . . .	37
3.8.2	Implementació d'una reconstrucció . . . . .	38
3.8.3	Validació creuada . . . . .	41
3.9	Per què treballar amb wavelets? . . . . .	42
3.10	Deconvolució global d'imatges . . . . .	43
3.10.1	Algorisme Gaussià . . . . .	44
3.10.2	Algorisme Poissonià . . . . .	46
3.11	Resultats dels algorismes globals . . . . .	47
3.11.1	Algorisme Gaussià . . . . .	49
3.11.2	Algorisme Poissonià . . . . .	54
3.12	Conclusions algorismes globals . . . . .	59
3.13	Deconvolució adaptativa . . . . .	60
3.13.1	Algorisme Gaussià . . . . .	62
3.13.2	Algorisme Poissonià . . . . .	63
3.14	Resultats algorismes adaptatius . . . . .	64
3.14.1	Algorisme Gaussià . . . . .	64
3.14.2	Algorisme Poissonià . . . . .	64
3.15	Conclusions algorismes adaptatius . . . . .	68
3.16	Aplicació a la detecció de lents gravitatòries . . . . .	68
3.16.1	Resultats dels mètodes . . . . .	70
3.17	Conclusions generals . . . . .	77
3.18	Vies de continuació . . . . .	77



<b>4</b>	<b>Anàlisi de períodes</b>	<b>81</b>
4.1	Mètodes PDM i CLEAN . . . . .	81
4.2	Dades equiespaiades . . . . .	83
4.2.1	Algorisme basat en wavelets . . . . .	83
4.2.2	Resultats . . . . .	85
4.2.3	Conclusions . . . . .	96
4.3	Dades no equiespaiades . . . . .	104
4.3.1	Algorisme multiresolució . . . . .	105
4.3.2	Resultats . . . . .	106
4.3.3	Discussió . . . . .	109
4.3.4	Conclusió . . . . .	109
4.4	Vies de continuació . . . . .	109
<b>5</b>	<b>Fusió de dades</b>	<b>111</b>
5.1	Fusió en Teledetecció . . . . .	111
5.2	Models RGB i IHS de representació del color . . . . .	113
5.2.1	El model RGB . . . . .	113
5.2.2	El model IHS . . . . .	115
5.3	Mètodes estàndard de fusió . . . . .	117
5.4	Mètodes basats en Wavelets . . . . .	120
5.4.1	Mètodes de substitució . . . . .	120
5.4.2	Mètodes additius . . . . .	122

---

5.5	Consideracions sobre els mètodes . . . . .	125
5.6	Resultats . . . . .	127
5.6.1	Fusió d'imatges sense efectes de temporalitat . . . . .	127
5.6.2	Fusió d'imatges amb efectes de temporalitat . . . . .	141
5.7	Temporalitat ... ? . . . . .	142
5.8	Conclusions . . . . .	154
5.9	Aplicacions astronòmiques . . . . .	156
5.10	Vies de continuació . . . . .	158
<b>6</b>	<b>Clustering</b>	<b>161</b>
6.1	Introducció . . . . .	161
6.2	Classificació d'imatges . . . . .	162
6.3	Classificació multiespectral . . . . .	163
6.3.1	Classificació no supervisada . . . . .	164
6.3.2	Classificació supervisada . . . . .	167
6.3.3	Consideracions sobre el comportament dels mètodes no super- visats . . . . .	168
6.4	Algorisme no supervisat basat en wavelets . . . . .	169
6.4.1	Selecció de candidats . . . . .	171
6.5	Resultats . . . . .	173
6.5.1	Dades sintètiques . . . . .	173
6.5.2	Dades reals . . . . .	180
6.6	Conclusions . . . . .	187

6.7	Vies de continuació . . . . .	188
<b>7</b>	<b>Conclusions</b>	<b>191</b>
7.1	Aportacions . . . . .	191
7.2	Conclusions . . . . .	193
<b>8</b>	<b>... i Fuga</b>	<b>197</b>
<b>A</b>	<b>Implementacions paral·lela i concurrent dels algorismes.</b>	<b>201</b>
A.1	Per què? . . . . .	201
A.2	SIMD i MIMD . . . . .	203
A.3	Connection Machine . . . . .	206
A.3.1	Processadors virtuals . . . . .	207
A.4	SGI Origin 2000 . . . . .	208
A.5	Deconvolució . . . . .	209
A.5.1	Algorisme Gaussià basat en wavelets . . . . .	211
A.5.2	Algorisme Poissonià basat en wavelets . . . . .	214
A.5.3	Algorisme amb màscara de detecció del senyal . . . . .	215
A.6	Períodes . . . . .	215
A.7	Fusió . . . . .	219
A.8	Clustering . . . . .	219
<b>B</b>	<b>Paral·lelització i optimització d'un algorisme pel càlcul de la Transformada Wavelet de Morlet.</b>	<b>223</b>
B.1	Plantejament . . . . .	223

---

B.2	Paral·lelització respecte $\omega$ . . . . .	224
B.3	Optimització respecte $t_\alpha$ . . . . .	225
B.4	Optimització respecte $\tau$ . . . . .	227
B.5	Consideracions . . . . .	230
B.6	Implementació . . . . .	231
B.7	Resultats . . . . .	235
B.8	Conclusions . . . . .	236
	B.8.1 Falses creences sobre el món del paral·lelisme . . . . .	236
<b>C</b>	<b>Bibliografia</b>	<b>239</b>











# Capítol 1

## Preludi ...

*Fes del 'Clave ben temperat' el teu pa de cada dia. Només amb això ja et convertiràs en un bon músic.*

- Robert Schumann

Una Transformada Wavelet és com una fuga de Johann Sebastian Bach. L'any 1722 el gran geni alemany va publicar un recull de 24 preludis i fugues sota el títol *Das Wohltemperirte Klavier* (Bach, 1722) que habitualment és traduït al català com *El clave ben temperat*, tot i que la traducció exacta és *El teclat ben temperat*. L'any 1742 es va publicar un segon volum, que juntament amb el primer formen una fita històrica mai superada formada per 48 preludis i fugues.

Una fuga és una forma musical formada per diferents veus, cadascuna paral·lela i independent de les altres, i amb un cant i frasejat diferent. Però la independència de les veus no és total: entre elles existeixen unes regles ocultes que les relacionen íntimament de manera que al realitzar-les en el món real es produeix un efecte sonor global harmoniós, agradable i amb sentit. Les wavelets defineixen una sèrie independent d'escala freqüencial, essent el contingut de cadascuna d'elles independent de la resta, però governades totes per les mateixes lleis i relacionades entre elles per tal de donar un resultat final coherent.

Però la relació entre la música i les wavelets no s'acaba aquí. Entre dues notes musicals separades per una octava justa, la relació de freqüència entre elles és exactament un factor 2, obtenint d'aquesta manera una relació de potències de 2 en canviar consecutivament d'octava. Les wavelets presenten la propietat que el pas discret d'una escala a la següent es fa segons una relació amb un factor determinat, habitualment un factor 2. Més concretament, quan es passa d'una escala a la següent tenim que la freqüència de les funcions que formen la nova base és just el doble de l'anterior i també que les funcions que formen aquesta base estan comprimides en un factor 2. Altre cop tornem a tenir una relació de potències de 2.

Es podrien interpretar les funcions que defineixen una base wavelet com les notes que defineixen l'escala d'una tonalitat musical determinada?

De manera pòstuma es va publicar *Die Kunst der Fuge* (Bach, 1751), en català *L'art de la fuga*, obra que es considera el punt culminant mai igualat en tota la història de l'art contrapuntístic, i de la fuga en particular.

## 1.1 Procés de dades en Astronomia

En el camp de l'Astronomia, no es poden reproduir experiments per a intentar comprovar directament i sota condicions controlades la validesa dels models físics que descriuen els objectes que s'estudien. Per tant, l'única alternativa que queda per a poder comprovar els models és a través de l'observació. Per aquest motiu, les dades obtingudes en una observació astronòmica són d'una utilitat i importància incalculables. Si les comparem amb dades d'altres branques científiques, les dades astronòmiques solen ser bastant pobres tant des del punt de vista de la informació que aporta la interpretació directa, com des del punt de vista estadístic. Això implica que sempre ens veiem obligats a intentar extreure la màxima informació possible de les dades que tenim, i per tant és imprescindible tenir potents eines estadístiques i mètodes matemàtics per tractar-les.

Els aspectes que s'analitzen d'aquestes dades són normalment fotomètrics i astromètrics. El nombre de fotons rebuts de la font observada sol ser la principal font d'informació, donant lloc a tècniques com la fotometria estelar, la monitorització del flux de fotons a diferents longituds d'ona, la detecció d'objectes dèbils o de baixa lluminositat superficial, etc. El problema que es presenta és que els objectes

astronòmics són de baixa lluminositat aparent, i per tant és difícil 'acumular' la quantitat de llum suficient que ens permeti realitzar bones mesures. L'aspecte astromètric és també una branca molt explotada, per exemple per a determinar òrbites de cossos menors, moviments propis d'estels, límits físics d'objectes, identificació de contrapartides a altres longituds d'ona, estructura física, etc.

Les tècniques utilitzades per a treballar amb aquests aspectes de les dades astronòmiques són molt variades. Per a enumerar-ne unes quantes, podem començar pels mètodes directes, és a dir, mesures de mida (extensió de galaxies i objectes del Sistema Solar), posició (astrometria de qualsevol tipus d'objecte) i lluminositat (fotometria). També ens podem trobar mètodes estadístics simples, com estadística de comptatges (fonts de raigs X i  $\gamma$ ), mètodes de mínims quadrats (qualsevol anàlisi de dades), etc. Podríem acabar amb metodologies modernes d'última generació com la matemàtica de conjunts difusos o fuzzy logic (anàlisi de patrons en qualsevol tipus de dades, classificació d'objectes), xarxes neuronals (deconvolució d'imatges, identificació d'objectes, classificació de galàxies, anàlisi de patrons), wavelets (anàlisi freqüencial, anàlisi de períodes, detecció d'agrupacions, anàlisi de patrons), tècniques del món de la intel·ligència artificial, i moltes altres.

## 1.2 Procés de dades en Teledetecció

El món del procés de dades en Teledetecció és bastant llunyà en els seus objectius finals del món de l'Astronomia, però no ho són pas les tècniques ni els mètodes utilitzats (Chuvieco, 1995) (Pinilla, 1995) (Campbell, 1987) (Richards, 1999). Aquests dos camps són diferents, i per tant també els seus objectius, fet que es reflexa en les seves eines, però no en els fonaments d'aquestes. En el món de la Teledetecció la informació que habitualment es busca extreure de les dades és de tipus semàntic, o dit d'una altra forma, es busca la interpretació de les dades. L'objectiu és la identificació i la interpretació: cobertes i usos del sòl, delimitació de fronteres, interpretacions geomètriques, sistemes de coordenades, etc. En resum, aspectes que no s'utilitzen en Astronomia. Per tant, les tasques que es realitzen solen ser molt diferents: correccions geomètriques i radiomètriques, classificacions multispectrals (cobertes del sòl), anàlisi morfològica (identificació de cobertes i usos del sòl), identificació d'objectes, posicionament en sistemes de coordenades (georeferenciació d'imatges, confecció de mapes), evolucions temporals de qualsevol tipus de variable

semàntica (anàlisi d'àrees urbanes i/o recursos naturals), etc.

Però els fonaments matemàtics sobre els que es basen són molt semblants, per no dir els mateixos, als utilitzats en el procés de dades astronòmiques: mètodes estadístics, conjunts difusos, xarxes neuronals, anàlisi freqüencial, wavelets, etc. Molts dels instruments científics del món de l'Astronomia són instruments originals del món de la Teledetecció, com les sondes interplanetàries que mapegen planetes, satèl·lits i cometes, instruments d'observació radar pel mapejat llunyà de la superfície de planetes i altres cossos del sistema Solar, etc. També s'ha produït la influència inversa, la introducció en la Teledetecció de conceptes i instruments astronòmics: tècniques d'observació amb cambres CCD, tècniques d'observació amb raig làser (lidar) provinents del món de la òptica adaptativa, deconvolució d'imatges, utilització d'òptica adaptativa des de satèl·lits, etc.

Per tant, no és estrany que tècniques desenvolupades inicialment amb objectius molt diferents, acabin essent utilitzades indistintament en qualsevol camp del coneixement. Potser precisament aquest és un dels motius de l'existència de la Ciència.

### 1.3 Perquè aquestes i no altres?<sup>1</sup>

Les aplicacions de les wavelets, evidentment no es restringeixen únicament al món de l'Astronomia i la Teledetecció. Qualsevol àrea de coneixement que contingui una part de procés de dades és susceptible d'utilitzar les wavelets com a eina fonamental. Podem enumerar una llista de camps i aplicacions on s'utilitzen o es poden utilitzar extensivament:

- Mecànica de fluids
- Fractals
- Compressió de dades

---

<sup>1</sup>Quan de petit estudiava a l'escola i el professor de Física estava explicant el moviment circular, va haver un detall que no vaig entendre i vaig fer una pregunta: "Per què?". El professor em va mirar fixament, i va alçar una cella mentre feia un somriure estrany. Em temia un retret. Però la seva resposta va ser: "El bon físic sempre es pregunta *per què*, mai *com*."

- Anàlisi de periodicitats
- Clustering
- Fusió de dades
- Identificació d'objectes
- Anàlisi de textures
- Deconvolució d'imatges
- Xarxes neuronals
- Senyals sismològics
- Modelització de fronts d'ones
- Interpolació de dades
- Interferometria
- Economia
- Imatges mèdiques

Com s'observa, la multidisciplinarietat de les aplicacions de les wavelets ens presenta oportunitats incalculables per a l'aplicació d'aquestes funcions, doncs és una tècnica molt nova poc explotada en l'actualitat. Evidentment, ens vam haver de restringir a unes poques aplicacions, i la guia va ser la nostra formació.

D'una banda, donat que la nostra formació bàsica és en el camp de l'Astronomia, vam atacar dos problemes de rellevància en aquest camp. Per una banda, vam treballar en el món de la deconvolució d'imatges, donada l'àmplia experiència del grup en aquest, i per l'altra en un problema que es va presentar a partir del món de les observacions de fonts de raigs X. Altrament, donat que el nostre departament es centra en les Ciències de la Terra i el Cosmos, antiga denominació de l'actual Departament d'Astronomia i Meteorologia, ens vam decantar també cap a aplicacions en el món de l'observació del nostre planeta: la Teledetecció (sense oblidar que aquesta també s'utilitza en l'observació d'objectes astronòmics). La meua formació inclou un Màster en Teledetecció impartit pel IEEC (Instituts d'Estudis Espacials de Catalunya) i 18 mesos treballant en el grup de Recerca i Desenvolupament en

Teledetecció de l'ICC (Institut Cartogràfic de Catalunya). Per tant, la formació rebuda també ha estat un criteri per a triar els temes en Teledetecció a explotar: la fusió d'imatges i la classificació de dades.

Per tant, les aplicacions finalment triades han estat

- Deconvolució d'imatges
- Anàlisi de periodicitats
- Fusió de dades
- Clustering

Aquesta multidisciplinarietat de les aplicacions triades era un dels objectius que es buscaven al principi d'aquesta tesi. D'una banda, per a poder demostrar que les wavelets són aplicables a pràcticament qualsevol camp de la Ciència que inclogui el procés de dades, d'altra banda per a seguir la tradició del nostre grup de recerca de treballar en diferents àrees del coneixement, i també per a poder explotar al màxim la formació multidisciplinària de què partíem.

# Capítol 2

## Wavelets

*Aquesta és l'essència de la bona fuga,  
cada veu ha de tenir una independència  
de les altres, però alhora ha d'estar rela-  
cionada amb elles, interaccionant amb  
elles, i finalment afectant-les segons unes  
certes normes.*

- Davitt Moroney

### 2.1 Introducció

Les funcions anomenades *wavelets* i la teoria que les envolta (Daubechies, 1992) (Meyer, 1993) (Chui, 1992) (Kaiser, 1994) (Vetterli & Kovacevic, 1995) ha estat recentment desenvolupada en el camp de la matemàtica aplicada. El seu nom va ser emprat per primer cop ara fa una mica més d'una dècada, i en els darrers deu anys l'interès per elles ha crescut de manera explosiva. Hi ha diferents motius per explicar l'èxit actual que estan vivint. D'una banda, el concepte que defineix les *wavelets* pot ser interpretat com una síntesi d'idees que es van originar durant els darrers vint o trenta anys en camps tant diferents com l'Enginyeria (*subband coding*), la Física (estats coherents, grups de renormalització) i la Matemàtica pura. Per altra banda, les *wavelets* són una eina matemàtica bastant simple i amb un gran nombre d'aplicacions. De fet, ja han incitat excitants aplicacions en l'anàlisi del senyal (sò, imatges) i l'anàlisi numèric, així com moltes altres aplicacions actualment en

desenvolupament.

## 2.2 Ones i wavelets

La Transformada de Fourier utilitza, com a funcions ortonormals per a la seva base, ones sinusoidals. Aquestes s'extenen fins a l'infinit en ambdues direccions, és a dir, les bases de la Transformada de Fourier són no nul·les en tot el seu domini, i per tant no tenen suport compacte. En canvi, els senyals de curta durada són diferents a zero durant un curt interval. A més, molts detalls importants presents en les imatges (per exemple, marges) es troben altament localitzats en l'espai, i no s'assemblen gens a les funcions base de la Transformada de Fourier. Per tant, no tenen una representació compacta en els coeficients de l'espai de Fourier (l'espectre freqüencial). Això fa que l'espai de Fourier no sigui el més adequat per a representar senyals i imatges que presenten detalls localitzats en l'espai.

D'altra banda, la Transformada de Fourier pot representar qualsevol senyal analític, fins i tot un senyal localitzat, com una suma de sinusoides. Això ho realitza amb una complexa disposició de les funcions base de forma que aquestes es cancel·len (per interferència destructiva) per tal de crear una funció nul·la en la major part de l'interval. Però això presenta un greu problema, que deixa l'espectre (espai transformat) com una distribució confusa de components.

Per a poder combatre aquest problema, els matemàtics i enginyers han explorat diverses aproximacions utilitzant transformades que tenen funcions base de durada limitada. Aquestes funcions que varien en posició i freqüència i tenen una durada limitada, s'anomenen *wavelets*.

En la figura 2.1 es mostra de manera il·lustrativa la diferència entre les ones i les wavelets. Les dues corbes superiors són ones cosinus de diferents freqüències, però de la mateixa durada. Les dues inferiors són wavelets que difereixen en freqüència i posició.

En particular (veure figura 2.6), la transformada Haar és l'exemple més antic del que avui dia s'anomena Transformada Wavelet. La funció Haar està formada per un parell de pulsos rectangulars antisimètrics, a més de ser la funció wavelet més simple coneguda.



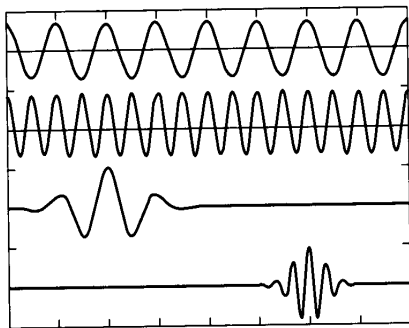


Figura 2.1: Ones i wavelets.

### 2.2.1 Anàlisi temps-freqüència

La literatura existent en el món del procés de senyal, inclou molts treballs al voltant de l'anàlisi de senyals en termes de l'espai bidimensional *temps-freqüència*. Aquesta aproximació és anterior a les transformades wavelet, però actualment ambdues es troben dins un marc comú. Segons aquesta aproximació, cada component transitori d'un senyal es mapeja cap a una posició en el pla temps-freqüència que correspon a la freqüència predominant del component i a la seva localització temporal.

En l'anàlisi d'imatges, l'espai transformat és tridimensional, espai que es pot interpretar com un conjunt o pila d'imatges. Un component localitzat es mostrarà en el nivell de la pila corresponent la freqüència predominant en aquest component. En la figura 2.2 es mostra una imatge que conté dos components localitzats, i els resultats d'aplicar dos filtres de pas de banda. En aquest cas, els dos filtres quasi aïllen completament les dues components.

### 2.2.2 Wavelets i Música

Considerem la notació musical que es mostra en la figura 2.3. Aquesta es pot interpretar com un espai temps-freqüència bidimensional. La freqüència augmenta des de baix a dalt de l'escala, mentre que el temps augmenta d'esquerra a dreta. Cada nota del pentagrama podria ser considerada com a una component wavelet present en la interpretació de la partitura. La duració de cada wavelet es codifica pel tipus de nota (blanca, negra, corxera, etc) i no per la seva extensió horitzontal.

Si analitzéssim una interpretació musical i escrivíssim la partitura, estaríem re-

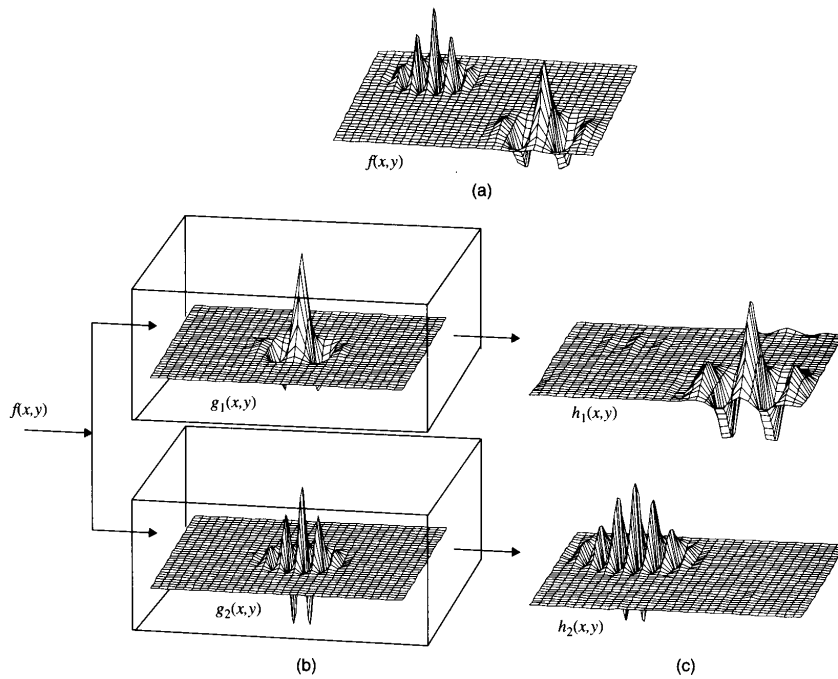


Figura 2.2: Anàlisi espai-freqüència d'una imatge  $f(x, y)$ .

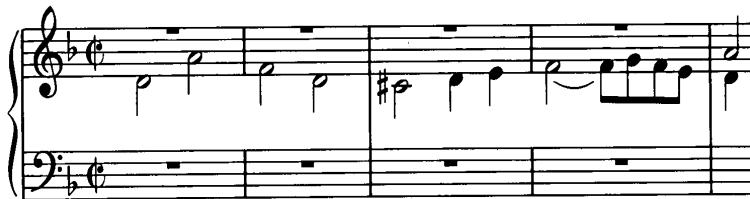


Figura 2.3: Notació musical vista com un pla temps-freqüència.

alitzant un cert tipus de Transformada Wavelet. De forma anàloga, la interpretació d'una partitura per part d'un músic pot ser vista com la transformada wavelet inversa, donat que reconstrueix el senyal a partir d'una representació temps-freqüència.

### 2.2.3 Transformada de Fourier

Existeixen tres tipus diferents, però relacionats, de Transformada de Fourier: la transformada integral de Fourier, l'expansió en sèries de Fourier, i la transformada discreta de Fourier (que a partir d'aquí anomenarem DFT).

La transformada integral de Fourier relaciona dues funcions contínues, un senyal i el seu espectre. Aquesta transformada i la seva inversa venen donades per

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-j2\pi(x\omega)}dx \quad \text{i} \quad f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)e^{j2\pi(x\omega)}d\omega ,$$

on  $j = \sqrt{-1}$ . L'expansió en sèries de Fourier representa una funció periòdica (o una funció transitòria que es pot considerar un cicle d'una funció periòdica) com una seqüència (finita o infinita) de coeficients de Fourier. Aquesta i la seva inversa s'obtenen fent  $\omega = n\Delta\omega$  una variable discreta, de manera que

$$F_n = F(n\Delta\omega) = \int_0^L f(x)e^{-j2\pi(n\Delta\omega x)}dx \quad \text{i} \quad f(x) = \Delta\omega \sum_{n=0}^{\infty} F_n e^{j2\pi(n\Delta\omega x)} ,$$

on  $L$  és el període i  $\Delta\omega = 1/L$ .

La DFT representa una funció mostrejada utilitzant un espectre també mostrejat, essent el nombre de punts (graus de llibertat) el mateix en els dos dominis. Per tant,  $x = i\Delta x$  és una variable discreta. Si una funció  $g(x)$  és de banda limitada i està mostrejada tal com requereix el teorema del mostreig, llavors  $g_i = g(i\Delta x)$ , i

$$G_k = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{i=0}^{N-1} g_i e^{-j2\pi k \frac{i}{N}} \quad \text{i} \quad g_i = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{k=0}^{N-1} G_k e^{j2\pi k \frac{i}{N}} .$$

En totes les tres tècniques de transformació, els sinus i cosinus de les diferents freqüències formen un conjunt de funcions base ortonormals. A més, cada coeficient de la transformada s'obté a partir del producte intern de la funció que es transforma i una de les funcions de la base. Per a la DFT s'utilitza un producte intern discret i unes funcions base discretes, mentre que per a les altres dues transformades s'utilitza un producte intern integral i funcions base contínues. En cada cas, la transformada inversa està formada per la suma de les funcions base amb amplituds que tenen un pes donat pels coeficients transformats. Aquest sumatori esdevé una integral en el cas de la transformada contínua de Fourier.

## 2.2.4 Tipus de Transformada Wavelet

De la mateixa manera que amb la Transformada de Fourier, existeixen els mateixos tres tipus per a la Transformada Wavelet: una transformada wavelet contínua (CWT), una expansió en sèries de wavelets, i una transformada wavelet discreta

(DWT). Però en aquest cas, la situació és una mica més complexa, donat que les funcions base wavelet poden ser o no ortogonals.

Un conjunt de funcions base wavelet poden realitzar una transformació encara que les funcions no siguin ortonormals. Això significa, per exemple, que una expansió en sèries de wavelets podria representar una funció de banda limitada per un nombre infinit de coeficients. Si aquesta seqüència de coeficients es trunca en una llargada finita, només es podrà reconstruir una aproximació de la funció original. Igualment, una transformada wavelet discreta podria necessitar més coeficients que el nombre de punts de la funció original per tal de reconstruir-la exactament, o fins i tot per a obtenir una aproximació acceptable.

### 2.2.5 Notació i definicions

Introduïm algunes definicions per tal d'aclarir el concepte de la Transformada Wavelet. De moment, ens restringim a funcions unidimensionals.

Seguint el corrent existent en la literatura sobre wavelets, utilitzem  $j$  com un índex sencer. També es pot utilitzar  $j$  per a representar el nombre imaginari  $\sqrt{-1}$ , tenint en compte en no utilitzar ambdós en la mateixa equació. La distinció s'ha de realitzar a partir del context.

Les funcions que busquem representar amb una Transformada Wavelet són les integrables quadràtiques en l'eix real, conjunt anomenat  $L^2(R)$ . Per tant, l'expressió  $f(x) \in L^2(R)$  significa

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 dx < \infty .$$

En l'anàlisi wavelet, es generen les funcions base traslladant i dilatant una funció prototip  $\psi(x)$  que anomenarem *Mother Wavelet*. Aquesta és una funció oscil·lant habitualment centrada en l'origen, i que decau ràpidament a mesura que  $|x| \rightarrow \infty$ . Per tant,  $\psi(x) \in L^2(R)$ .

## 2.3 Transformada wavelet contínua

La transformada wavelet contínua (també anomenada transformada wavelet integral), va ser introduïda per Grossman i Morlet (Grossman & Morlet, 1984).

### 2.3.1 Definició

Si  $\psi(x)$  és una funció real, amb un espectre de Fourier  $\Psi(\omega)$  que satisfà el criteri d'admissibilitat

$$C_{\Psi} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|\Psi(\omega)|^2}{|\omega|} d\omega < \infty ,$$

llavors  $\psi(x)$  s'anomena *Mother Wavelet*. S'ha de tenir en compte que, degut a la presència de  $\omega$  en el denominador, és necessari que

$$\Psi(0) = 0 \Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} \psi(x) dx = 0 . \quad (2.1)$$

A més, donat que  $\Psi(\infty) = 0$ , es veu que l'espectre d'amplituds d'una wavelet admissible és semblant a la funció de transferència d'un filtre de pas de banda (*bandpass filter*, en anglès). De fet, la resposta impulsiva d'un filtre de pas de banda amb mitjana zero (equació 2.1) que decau a zero a mesura que augmenta la freqüència, pot servir com a Mother Wavelet per aquesta transformació.

Un conjunt de funcions base wavelet,  $\{\psi_{a,b}(x)\}$ , es pot generar traslladant i escalant la Mother Wavelet  $\psi(x)$  segons

$$\psi_{a,b}(x) = \frac{1}{\sqrt{a}} \psi\left(\frac{x-b}{a}\right) , \quad (2.2)$$

on  $a > 0$  i  $b$  són nombres reals. La variable  $a$  ens indica l'escala (amplada) d'una funció base particular, mentre que  $b$  trasllada la seva posició en l'eix  $x$ .

Normalment, la Mother Wavelet  $\psi(x)$  està centrada en l'origen, de forma que  $\psi_{a,b}(x)$  està centrada en  $x = b$ . En la figura 2.4 es mostra un exemple d'aquest tipus de wavelet. En particular, aquesta ve donada per l'expressió

$$\psi(x) = \frac{2}{\sqrt{3\sqrt{\pi}}} (1 - x^2) e^{-\frac{x^2}{2}} .$$

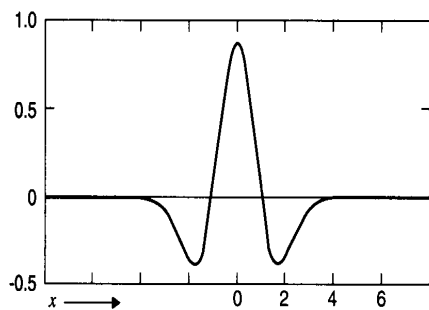


Figura 2.4: Una funció wavelet.

Per tant, la *transformada wavelet contínua* de  $f(x)$  respecte la wavelet  $\psi(x)$  és

$$W_f(a, b) = \langle f, \psi_{a,b} \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \psi_{a,b}(x) dx .$$

Els coeficients de la transformada wavelet venen donats pel producte intern de la funció amb cadascuna de les funcions de la base.

Grossman i Morlet demostren que la transformada wavelet contínua inversa és

$$f(x) = \frac{1}{C_\psi} \int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty W_f(a, b) \psi_{a,b}(x) db \frac{da}{a^2} .$$

El factor d'escala en front del terme de la dreta de l'equació 2.2 assegura que les funcions wavelet base són totes iguals, donat que

$$\left\| f\left(\frac{a-b}{a}\right) \right\| = \sqrt{\int_{-\infty}^\infty \left| f\left(\frac{x-b}{a}\right) \right|^2} = \sqrt{a} \| f(x) \| .$$

Donat que la Mother Wavelet té mitjana zero (equació 2.1), totes les translacions i escalats (equació 2.2) també tenen mitjana zero. La mitjana de  $f(x)$  s'ha de tenir en compte per separat.

## 2.4 Expansió en sèries de wavelets

### 2.4.1 Wavelets diàdiques

El segon tipus de transformada wavelet és una mica més restrictiu que el primer. En aquest cas, la Mother Wavelet es torna a traslladar i escalar per a formar les

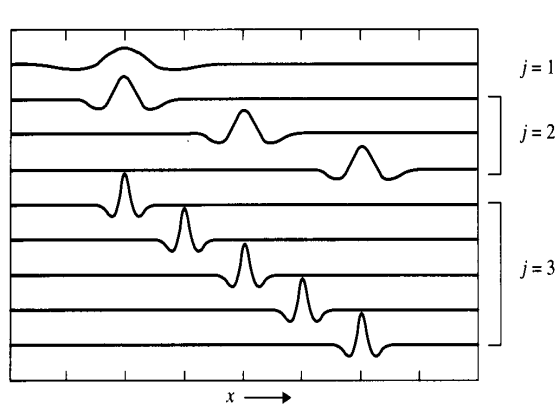


Figura 2.5: Escalats binaris i translacions diàdiques d'una wavelet.

funcions base, però aquest cop la translació i dilatació s'especifiquen amb nombres sencers en comptes de reals.

En aquesta segona definició, ens limitem a formar les funcions base a partir d'escalats binaris (dilatant amb un factor 2) i translacions diàdiques de la Mother Wavelet  $\psi(x)$ . Una translació diàdica és un desplaçament  $k/2^j$ , que és un múltiple sencer del factor binari d'escala  $i$ , per tant, de l'amplada de la wavelet. En la figura 2.5 es mostren diferents escalats binaris i translacions diàdiques.

### 2.4.2 Definició

Una funció  $\psi(x)$  és una wavelet ortogonal si el conjunt  $\{\psi_{j,k}(x)\}$  de funcions definides per

$$\psi_{j,k}(x) = 2^{\frac{j}{2}} \psi(2^j x - k) ,$$

on  $-\infty < j$  i  $k < \infty$  són sencers, formen una base ortonormal de  $L^2(\mathbb{R})$ . Els nombres sencers  $j$  i  $k$  determinen la dilatació i la translació, respectivament.

L'anterior conjunt de wavelets forma una base ortonormal si, primer,

$$\langle \psi_{j,k}, \psi_{l,m} \rangle = \delta_{j,l} \delta_{k,m} ,$$

on  $l$  i  $m$  són sencers,  $\delta_{j,k}$  és la delta de Kronecker, i  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  indica el producte intern; i

segon, si qualsevol funció  $f(x) \in L^2(\mathbb{R})$  es pot escriure com

$$f(x) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_{j,k} \psi_{j,k}(x) , \quad (2.3)$$

on els coeficients transformats venen donats per productes interns, és a dir,

$$c_{j,k} = \langle f(x), \psi_{j,k}(x) \rangle = 2^{\frac{j}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \psi(2^j x - k) dx . \quad (2.4)$$

Les equacions 2.3 i 2.4 determinen una *expansió en sèries de wavelets* de  $f(x)$  relativa a la wavelet  $\psi(x)$ .

S'ha d'observar que en aquest cas una funció contínua es representa per una seqüència doblement infinita i, en general, la transformada és sobredeterminada. Donat que les funcions base habitualment s'estenen fins l'infinit en ambdues direccions, una reconstrucció completa ha d'incloure tots els termes.

Però si  $\psi(s)$  es tria adequadament, es poden truncar les sèries sense un error d'aproximació massa gran. Si  $f(x)$  és de durada infinita i la Mother Wavelet està ben localitzada (s'apropa ràpidament a zero a mesura que s'allunya de l'origen), llavors molts dels coeficients amb  $|k|$  gran són despreziables. A més, els coeficients amb  $|j|$  gran habitualment són petits, donat que les funcions base wavelet són en aquest cas extremadament amples o estretes.

### 2.4.3 Wavelets diàdiques compactes

Si restringim  $f(x)$  i la Mother Wavelet a funcions que són zero fora de l'interval  $[0, 1]$ , llavors la família de funcions base ortonormals es pot especificar amb un únic índex,  $n$ ; és a dir,

$$\psi_n(x) = 2^{\frac{j}{2}} \psi(2^j x - k) ,$$

on  $j$  i  $k$  són funcions d' $n$  de la forma:

$$n = 2^j + k \quad \text{per a} \quad j = 0, 1, \dots \quad k = 0, 1, \dots, 2^j - 1 .$$

Per qualsevol  $n$ ,  $j$  és el sencer més gran tal que  $2^j \leq n$ , i  $k = n - 2^j$ .

D'aquesta manera la transformada inversa és

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \psi_n(x) \quad (2.5)$$



on s'assumeix que  $\psi_0(x) = 1$ . Els coeficients transformats venen donats pel producte intern

$$c_n = \langle f(x), \psi_n(x) \rangle = 2^{\frac{j}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \psi(2^j x - k) dx . \quad (2.6)$$

En aquest cas, una funció contínua es representa per una única seqüència infinita, de manera anàloga a la representació en sèries de Fourier, i l'enorme redundància de la transformada wavelet integral ja no és present. De fet, si una o unes poques  $\psi_n(x)$  són similars a  $f(x)$ , llavors es poden truncar les sèries en un nombre relativament petit de termes sense obtenir un error d'aproximació massa gran.

Aquí tenim el fonament de la transformada wavelet discreta (DWT). Si  $f(i\Delta t)$  és una funció discreta mostrejada en  $N$  punts, on  $N$  és una potència de 2, i si  $\psi(x)$  és una wavelet diàdica compacta, llavors es pot calcular una transformada wavelet discreta utilitzant versions discretes de les equacions 2.5 i 2.6. Ambdues equacions esdevenen sumatoris d' $N$  termes. La Transformada Haar és un exemple.

### La transformada Haar

La transformada Haar, és un dels primers exemples del que avui en dia s'anomena una transformada wavelet compacta, diàdica i ortonormal. Es diferencia d'altres transformades generals en que les seves funcions base s'han generat per translacions i dilatacions d'una funció bàsica (en aquest cas la Mother Wavelet). La funció Haar, que és un parell de pulsos antisimètrics, és la wavelet ortonormal amb suport compacte més simple i antiga.

Per a formar les funcions base, la Mother Wavelet es comprimeix progressivament (reduïda en escala) en potències de dos. Cada wavelet es trasllada en increments iguals a la seva amplada, de manera que el conjunt total de wavelets en una escala determinada cobreix completament l'interval. Donat que la Mother Wavelet es comprimeix en potències de dos, la seva amplitud augmenta en potències de  $\sqrt{2}$ , per tal de mantenir l'ortonormalitat. El resultat de tot això és un conjunt de funcions base ortonormals (figura 2.6).

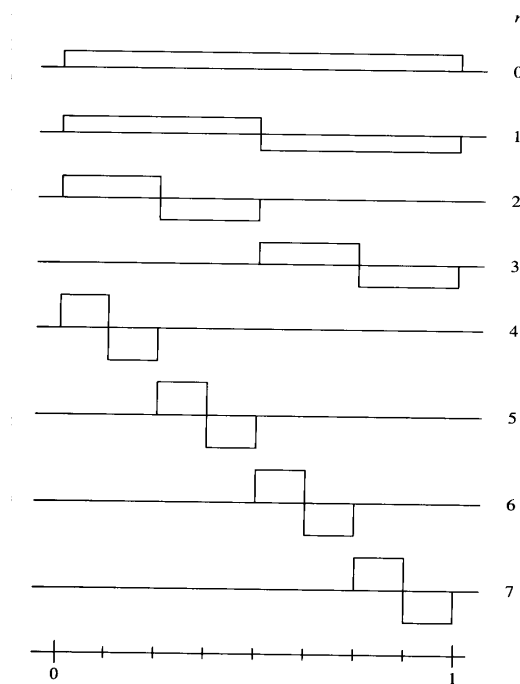


Figura 2.6: Les funcions base de la transformada Haar.

## 2.5 La transformada wavelet discreta

La DWT és la més útil per aplicacions en compressió, procés, i anàlisi d'imatges. Donat un conjunt de funcions base ortonormals, es pot calcular la DWT de la mateixa manera que es fa amb una transformació unitària, és a dir, calculant directament el producte intern. Però obtenir la Mother Wavelet adequada no és senzill. A continuació presentem la tècnica utilitzada en aquest treball; *l'anàlisi multiresolució* o *anàlisi temps-escala*, i particularment el cas de les representacions piramidals. Posteriorment es presenta l'algorisme específic utilitzat.

### 2.5.1 Anàlisi multiresolució

Molts dels desenvolupaments que precedeixen l'anàlisi amb wavelets provenen d'un camp habitualment anomenat *anàlisi multiresolució* (Mallat, 1989). Aquests desenvolupaments intentaven combatre les limitacions de la Transformada de Fourier comentades al començament d'aquest capítol. A continuació resumirem aquesta aproximació, que es mostra com el treball base que ens porta al modern anàlisi amb

wavelets.

La teoria dels bancs de filtres ofereix una terminologia molt adequada per a representar senyals formats per components oscil·latoris, com per exemple les notes musicals o certs bursts. Aquests components inclouen diversos (o molts) cicles d'oscil·lació al llarg de la seva durada. Però en l'anàlisi d'imatges, els components d'interès no són normalment oscil·latoris, sinó que inclouen només un cicle o part d'un cicle. Alguns exemples són línies, marges, i punts.

S'observa que els objectes presents en una imatge apareixen a diferents escales. Un marge, per exemple, pot ser una transició abrupta del negre al blanc o pot canviar gradualment al llarg d'una distància considerable. En general, qualsevol aproximació multiresolució en l'anàlisi i representació d'imatges intenta explotar aquesta idea.

La cartografia il·lustra perfectament aquesta aproximació. Els mapes són confeccionats habitualment a diferents escales. L'*escala* del mapa és la relació entre la mida del terreny i la de la seva representació en el mapa. A escales grans, com en el mapamundi, són visibles components com els continents o els oceans, mentre que detalls com els carrers d'una ciutat estan per sota de la resolució del mapa. A escales més petites, els detalls es fan visibles mentre que els components més grans es perden. D'aquí, que per anar d'un punt a un altre molt llunyà, es necessita un conjunt de mapes a diferents escales.

Les transformades wavelet s'han desenvolupant al voltant d'aquesta idea multiresolució. De manera semblant a l'anàlisi freqüencial, un senyal es representa en un espai de dues dimensions, però en aquest cas un dels eixos no és la freqüència, sinó l'escala. L'escalat es realitza comprimint o dilatant la Mother Wavelet per tal de formar un conjunt de funcions base.

La Mother Wavelet  $\psi(x)$  és escalada segons  $\psi(\frac{x}{a})$  (que s'eixampla quan  $a > 1$ , i es contrau quan  $a < 1$ ) per tal de formar el conjunt de funcions base. A escales  $a$  grans, les funcions base dilatades busquen característiques grans, mentre que per  $a$  petites busquen detalls fins.

## Algorismes piramidals

Suposem que hem generat, a partir d'una imatge de 1024x1024 píxels, 10 imatges addicionals promitjant successivament en blocs de 2x2 píxels, i cada cop descartem cada fila i columna parelles de píxels. Tindrem imatges de 512x512, 256x256 píxels, etc. fins a 1x1 píxel. Si llavors realitzem una detecció de marges en cada imatge, trobarem marges en la imatge original, marges una mica més grans en la imatge de, per exemple, 512x512 píxels, i només els marges més grans en les imatges més petites.

La transformada Haar són els inicis d'aquesta aproximació ja fa quasi un segle. En les seves funcions base es veu el concepte de la recerca de marges a diferents escales. El principi de la dilatació binària és en elles ben evident.

Podríem dir que tots els marges, petits i grans, apareixen en la imatge original de 1024x1024 píxels, i que per tant no necessitem canviar de resolució per a detectar-los. Però el problema és que els marges grans, aquells que es manifesten com una transició en nivells de gris que canvien de forma suau a llarga distància, són difícils de detectar amb els operadors de veïnatge habituals. Podríem escalar els detectors, però és més efectiu rescalat la imatge. A més, utilitzar un operador rescalat per buscar en una imatge d'alta resolució marges de mida gran és computacionalment poc efectiu.

S'han estudiat diverses formes d'anàlisi multiresolució sota diferents noms al llarg dels anys. Però només en els darrers anys s'han observat les similituds fonamentals entre l'anàlisi multiresolució i les aproximacions dels bancs de filtres, i tots aquests han estat unificats sota el nom de *Transformades Wavelet*.

## Codificació piramidal Laplaciana

Burt i Adelson (Burt & Adelson, 1983) van introduir un esquema piramidal de codificació basat en funcions Gaussians. En aquest, la imatge és filtrada amb un filtre de pas baix que té una resposta impulsiva Gaussiana, i el resultat es resta de la imatge original. En aquesta resta hi tenim els detalls d'alta freqüència de la imatge. La imatge suavitzada pot ser submostrejada sense pèrdua de detall. El procés es pot il·lustrar com expliquem a continuació.

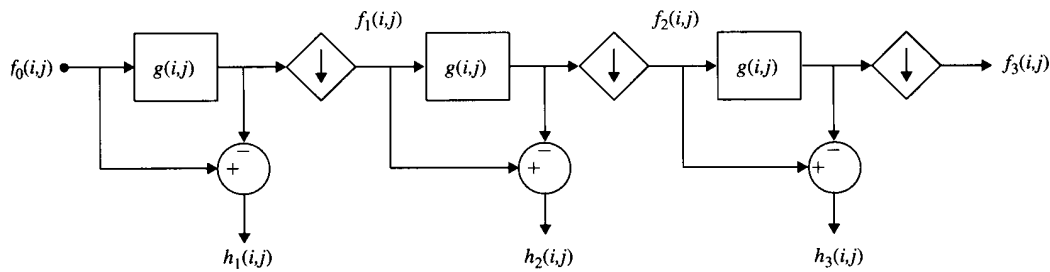


Figura 2.7: Esquema de codificació piramidal Laplaciana.

Sigui  $f_0(i, j)$  la imatge original, i sigui  $g(i, j)$  una resposta impulsiva Gaussiana d'un filtre de pas baix; llavors, a cada pas del procés de codificació, la imatge es descomposa en components de baixa i alta resolució,  $f_1(i, j)$  i  $h_1(i, j)$  respectivament, segons

$$f_1(i, j) = [f_0 * g](2i, 2j) \quad \text{i} \quad h_1(i, j) = f_0(i, j) - [f_0 * g](i, j) .$$

Aquest procés s'itera en cada imatge. Després de  $n$  iteracions en una imatge de  $N \times N$  píxels, on  $N = 2^n$ ,  $f_n(i, j)$  és un punt. La piràmide de la imatge codificada està formada per les  $h_k(i, j)$  i la imatge final de baixa freqüència  $f_n(i, j)$ . Aquest procés es mostra de forma gràfica en la figura 2.7.

La decodificació de la imatge es realitza en l'ordre invers. *Sobremostrejar* és el procés d'insertar zeros entre els punts mostrejats. Cada imatge submostrejada  $f_k(i, j)$  començant per la darrera  $f_n(i, j)$  és sobremostrejada i interpolada fent una convolució amb  $g(i, j)$ . D'aquesta forma, el resultat s'afegeix a la següent (anterior) imatge  $f_{k-1}(i, j)$ , i el procés es repeteix un altre cop en la imatge resultant. Això ens permet reconstruir la imatge original sense cap error.

Cada  $h_k(i, j)$  és la diferència de dues imatges obtingudes amb la convolució d'una única imatge amb Gaussians d'amplada simple i doble. Això és equivalent a convolucionar la imatge amb la diferència de dues Gaussians, que de fet aproximen el filtre "Laplacià d'una Gaussiana" de pas alt, d'aquí el nom d'aquest esquema de descomposició piramidal.

Tot i que la codificació piramidal Laplaciana augmenta el nombre de píxels necessari per a representar la imatge bidimensional en un 33%, es pot aconseguir un cert grau de compressió. Això és així perquè les imatges  $h_k(i, j)$  han reduït significativament la correlació i el rang dinàmic, i són, per tant, susceptibles de quantitzar i fins

i tot fer zero el valor d'algun píxel. A més, el disseny de la piràmide Laplaciana va aportar la inspiració que més tard va donar lloc a la transformada wavelet discreta.

A continuació presentem en detall l'algorisme particular que hem utilitzat en aquest treball per a realitzar la Transformada Wavelet, l'algorisme *à trous*.

## 2.6 L'algorisme *à trous*

Una de les possibles aproximacions discretes de la Transformada Wavelet es l'algorisme *à trous* (Holschneider et al., 1988) (Starck & Murtagh, 1994) (Starck et al., 1994). Assumim que les dades mostrejades  $c_0(k)$  són el producte escalar en el punt  $x = k$  de la funció  $f(x)$  amb una funció anomenada *scaling function*  $\phi(x)$  que correspon a un filtre de pas baix. El primer filtrat es realitza en una escala augmentada en un factor 2, donant el conjunt de dades  $c_1(x)$ . La diferència  $c_0(x) - c_1(x)$  conté la informació entre aquestes dues escales i el conjunt de dades associat amb la Transformada Wavelet corresponent a  $\phi(x)$ . La funció wavelet associada és doncs:

$$\frac{1}{2} \psi\left(\frac{x}{2}\right) = \phi(x) - \frac{1}{2} \phi\left(\frac{x}{2}\right) .$$

L'escala entre conjunts augmenta en un factor 2 quan es passa de l'escala  $(i - 1)(i > 0)$  a la següent. D'aquesta manera,  $c_i(k)$  ve donat per

$$c_i(k) = \sum_l h(l) c_{i-1}(k + 2^{i-1} l)$$

i la Transformada Wavelet discreta  $\omega_i(k)$  per

$$\omega_i(k) = c_{i-1}(k) - c_i(k) .$$

Els coeficients  $h(k)$  s'obtenen de la scaling function  $\phi(x)$

$$\frac{1}{2} \phi\left(\frac{x}{2}\right) = \sum_l h(l) \phi(x - l) .$$

L'algorisme que ens permet recuperar les dades en l'espai real és immediat: el darrer conjunt de dades  $c_{n_p}$  s'afegeix a cadascuna de les diferències  $\omega_i$

$$c_o(k) = c_{n_p}(k) + \sum_{j=1}^{n_p} \omega_j(k) .$$

L'algorisme à trous és fàcilment extensible a un espai 2-dimensional.

En cada escala  $j$ , obtenim un conjunt  $\omega_j(k, l)$  (que anomenem pla wavelet) que té el mateix nombre de píxels que la imatge original.

Si s'agafa una funció  $B_3$ -spline cúbica per a la scaling function, els coeficients de la màscara de convolució en una dimensió són  $(\frac{1}{16}, \frac{1}{4}, \frac{3}{8}, \frac{1}{4}, \frac{1}{16})$ , i en dos dimensions:

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{256} & \frac{1}{64} & \frac{3}{128} & \frac{1}{64} & \frac{1}{256} \\ \frac{1}{64} & \frac{1}{16} & \frac{3}{32} & \frac{1}{16} & \frac{1}{64} \\ \frac{3}{128} & \frac{3}{32} & \frac{9}{64} & \frac{3}{32} & \frac{3}{128} \\ \frac{1}{64} & \frac{1}{16} & \frac{3}{32} & \frac{1}{16} & \frac{1}{64} \\ \frac{1}{256} & \frac{1}{64} & \frac{3}{128} & \frac{1}{64} & \frac{1}{256} \end{pmatrix} .$$

Aquest algorisme no és adequat per comprimir dades, ja que el nombre de dades creix de forma desmesurada en no realitzar el procés de submostreig i, per tant, tenir cada pla wavelet el mateix nombre de píxels que la imatge original.

### 2.6.1 L'algorisme à trous utilitzant la transformada de Fourier

L'algorisme à trous per al càlcul de la transformada wavelet discreta que acabem d'exposar el podem reformular en l'espai de Fourier.

Donada una funció  $f(x)$ , la projectem cada pas  $j$  en el subespai  $V_j$ . Aquesta projecció es defineix com el producte escalar  $c_j(k)$  de  $f(x)$  amb la scaling function  $\phi(x)$  que és una versió d'una altra funció que també està dilatada i traslladada:

$$c_j(k) = \langle f(x), 2^{-j}\phi(2^{-j}x - k) \rangle .$$

Comencem amb el conjunt de productes escalars  $c_0(k) = \langle f(x), \phi(x - k) \rangle$ . Si  $\phi(x)$  presenta el que s'anomena un *cut-off* en freqüència  $\nu_c \leq \frac{1}{2}$ , llavors les dades estan ben mostrejades. En aquest cas, les dades a la resolució  $j = 1$  són

$$c_1(k) = \langle f(x), \frac{1}{2}\phi(\frac{x}{2} - k) \rangle$$

i podem calcular el conjunt  $c_1(k)$  a partir de  $c_0(k)$  amb un filtre discret  $\hat{h}(\nu)$ <sup>1</sup>

<sup>1</sup>Admetem que  $\hat{\phi}(\nu)$  és real i estrictament positiva per a  $\nu < \nu_c$ . Llavors tenim:

$$c_1(k) = \frac{1}{2} \langle f(x), \phi(\frac{x}{2} - k) \rangle .$$

$$\hat{h}(\nu) = \begin{cases} \frac{\hat{\phi}(2\nu)}{\hat{\phi}(\nu)} & \text{if } |\nu| < \nu_c \\ 0 & \text{if } \nu_c \leq |\nu| < \frac{1}{2} \end{cases}$$

i

$$\forall \nu, n \quad \hat{h}(\nu + n) = \hat{h}(\nu)$$

on  $n$  és un sencer. Per tant:

$$\hat{c}_{j+1}(\nu) = \hat{c}_j(\nu) \hat{h}(2^j \nu) .$$

El cut-off en freqüència es redueix en un factor 2 a cada pas, el que permet una reducció del nombre de dades en el mateix factor.

Els coeficients wavelet a l'escala  $j + 1$  són:

$$\hat{\omega}_{j+1}(k) = \langle f(x), 2^{-(j+1)} \psi(2^{-(j+1)}x - k) \rangle$$

i es poden calcular directament a partir de  $c_j(k)$  segons:

$$\hat{\omega}_{j+1}(\nu) = \hat{c}_j(\nu) \hat{g}(2^j \nu)$$

on  $g$  és el següent filtre discret:

$$\hat{g}(\nu) = \begin{cases} \frac{\hat{\psi}(2\nu)}{\hat{\psi}(\nu)} & \text{if } |\nu| < \nu_c \\ 1 & \text{if } \nu_c \leq |\nu| < \frac{1}{2} \end{cases}$$

i

$$\forall \nu, \forall n \quad \hat{g}(\nu + n) = \hat{g}(\nu) .$$

L'estimació de  $c_1(k)$  a partir d'una convolució discreta de  $c_0(k)$  sense aliasing és només possible si

$$\frac{1}{2} \hat{\phi}\left(\frac{x}{2}\right) = \sum_n h(n) \hat{\phi}(x - n)$$

o

$$\hat{\phi}(2\nu) = \hat{h}(\nu) \hat{\phi}(\nu) , \tag{2.7}$$

on  $\hat{h}$  és una funció 1-periòdica.

Per a  $|\nu| < \nu_c$ , podem escriure  $\hat{h}(\nu) = \frac{\hat{\phi}(2\nu)}{\hat{\phi}(\nu)}$

Per a  $|\nu| \geq \nu_c$ , la proporció no està definida però l'equació 2.7 sempre es compleix. Imposem:

- si  $|\nu| \in [\nu_c, \frac{1}{2}]$  llavors  $\hat{h}(\nu) = 0$ .

-  $\forall \nu, n \quad \hat{h}(\nu + n) = \hat{h}(\nu)$ , on  $n$  és un enter.

Per tant  $\hat{h}(\nu)$  és la Transformada de Fourier d'un filtre discret.



El rang de freqüències també es redueix en un factor 2 a cada pas. Aplicant el teorema del mostreig, podem construir una piràmide de  $N + \frac{N}{2} + \dots + 1 = 2N$  elements. Per a cada imatge analitzada el nombre d'elements és  $\frac{4}{3}N$ . La sobre-determinació no és excessivament gran.

Per a la scaling function  $\phi$  volem funcions compactes en l'espai de Fourier. Per a un espai 2-D, la scaling function es defineix per  $\hat{\phi}(u, v) = \hat{\phi}(r)$ , amb  $r = \sqrt{(u^2 + v^2)}$ . D'aquesta manera obtenim una funció isotròpica.

L'algorisme à trous de transformació wavelet en  $n_p$  escales és el següent:

- 1. Comencem amb una certa scaling function  $\phi$  i trobem  $\psi$ ,  $h$  i  $g$  numèricament.
- 2. Calculem la corresponent FFT. Anomenem  $T_0$  el vector complex resultant.
- 3. Fem  $j = 0$ . Iterem:
- 4. Multipliquem  $T_j$  per  $\hat{g}(2^j u, 2^j v)$ . Obtenim el vector  $W_{j+1}$ . La FFT inversa ens dóna els coeficients wavelet en l'escala  $2^j$ .
- 5. Multipliquem  $T_j$  per  $\hat{h}(2^j u, 2^j v)$ . Tenim el vector  $T_{j+1}$ . La seva FFT inversa ens dóna la imatge en l'escala  $2^{j+1}$ . El rang de freqüències es redueix en un factor 2.
- 6. Incrementem  $j$ .
- 7. Si  $j \leq n_p$ , tornem al pas 4.
- 8. El conjunt  $\{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_{n_p}, c_{n_p}\}$  ens descriu la Transformada Wavelet.

Si la funció wavelet és la diferència entre dues resolucions, tenim:

$$\hat{\psi}(2\nu) = \hat{\phi}(\nu) - \hat{\phi}(2\nu)$$

i

$$\hat{g}(\nu) = 1 - \hat{h}(\nu) ,$$

llavors els coeficients wavelet  $\hat{\omega}_j(\nu)$  es poden calcular a partir de  $\hat{c}_{j-1}(\nu) - \hat{c}_j(\nu)$ .

Aquest és l'algorisme utilitzat en la pràctica totalitat dels treballs presentats al llarg d'aquesta memòria. En l'Apèndix B presentem una optimització d'un algorisme de descomposició en wavelets diferent a aquest, i que s'inscriu dins de les

transformades wavelet contínues. Hem triat principalment aquest tipus de wavelet perquè és molt més fàcil de calcular la transformada wavelet d'una imatge i la seva següent reconstrucció a partir d'aquesta transformació.

### 2.6.2 Recuperació de la imatge a partir de la Transformada Wavelet

Si la funció wavelet és la diferència entre dues resolucions, un procés de reconstrucció immediat per a una transformada wavelet  $\mathcal{W} = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_{n_p}, c_{n_p}\}$  és:

$$\hat{c}_0(\nu) = \hat{c}_{n_p}(\nu) + \sum_j \hat{\omega}_j(\nu) .$$

Però aquest és un cas particular i es podria haver escollit alguna altra funció wavelet. En aquest cas la reconstrucció s'hauria de fer pas a pas, començant des del nivell de resolució més baix, i amb càlculs elaborats per anar passant d'escala a escala. Per una especificació més detallada d'aquest procés invers, referim el lector a la bibliografia.

# Capítol 3

## Deconvolució d'imatges

*Mai sabrem quins eren els sentiments més interns de Bach. Tot el que podem fer és recórrer el camí invers a través de les seves fugues, i intentar arribar a l'essència original per entendre el seu significat.*

- Tatiana Nikolayeva

### 3.1 Introducció

Quan s'observa qualsevol objecte en el cel, el que l'observador obté és una imatge distorsionada i molt allunyada de l'aspecte real que presenta l'objecte. El que s'observa no és l'objecte real, sinó una realització particular que depèn de l'instrument a través del qual s'observa. Qualsevol instrument que s'utilitzi per obtenir una imatge o qualsevol altre tipus d'observació de l'objecte dona una representació modificada de la seva estructura espacial i de la distribució de llum. El que s'observa com un núvol més o menys difús o com una imatge fantasmagòrica, podria ser un cúmulo estelar compost per milers d'estels, un objecte nebulós amb una delicada estructura o qualsevol altre objecte. Independentment de l'instrument que s'utilitzi per observar, mai s'obté una realització perfecta o exacta, donat que no existeix l'instrument d'observació perfecte.

Qualsevol instrument físic d'observació introdueix una distorsió apreciable i significativa en la mesura. Per exemple, una emulsió fotogràfica està formada per milions de grans de sals de plata. Evidentment, a partir de la fotografia obtinguda no es pot dir que l'objecte observat presenti una estructura granulosa i que estigui format per la mateixa estructura que presenten els milions de grans de l'emulsió fotogràfica. Aquests grans han de ser interpretats com la unitat mínima d'informació de la imatge. Una cambra CCD produeix centenars de milers o milions d'unitats d'informació, que en aquest cas s'anomenen *píxels*, i per tant, es veu la imatge com una col·lecció de píxels.

La nostra realitat i el nostre coneixement del món que ens envolta és simplement la realitat existent en l'instrument que utilitzem per observar aquest món, però això no implica que haguem d'acceptar aquesta limitació. La informació de l'objecte observat es troba repartida al llarg de tota la imatge, però està mal distribuïda. D'aquí sorgeix la necessitat de tenir un mètode per interpretar i redistribuir aquesta informació de la manera més propera possible a l'objecte real observat. Si coneixem el patró de resposta que dona el nostre instrument d'una font determinada, i també coneixem la imatge que l'instrument produeix de l'objecte, podem intentar trobar una representació aproximada de l'objecte original. En altres paraules, si tenim el núvol difús d'uns paràgrafs més amunt, podem redistribuir la seva informació i potser obtenir una imatge que mostri milers d'estels individuals perfectament resolts. Aquest és el principal objectiu de les tècniques de reconstrucció d'imatges, aproximar-se una mica més a l'objecte real del que ens trobem amb les dades observades.

## 3.2 Formació de la imatge

En el procés general de formació d'una imatge, deixant de banda el soroll, es presenten tres elements principals: l'objecte observat, l'instrument d'observació o sistema de formació, i la imatge final (Andrews & Hunt, 1977). En aquest procés s'accepta que existeix un objecte  $a(\xi, \eta)$ , en el sistema de coordenades  $(\xi, \eta)$  que s'anomena *pla objecte* (figura 3.1).

El sistema de formació de la imatge intercepta l'energia radiant emesa, transmesa o reflexada per l'objecte, i la transforma de tal manera que en el sistema de coordenades  $(x, y)$ , que s'anomena *pla imatge*, es forma una imatge  $p(x, y)$ . Aquest sistema

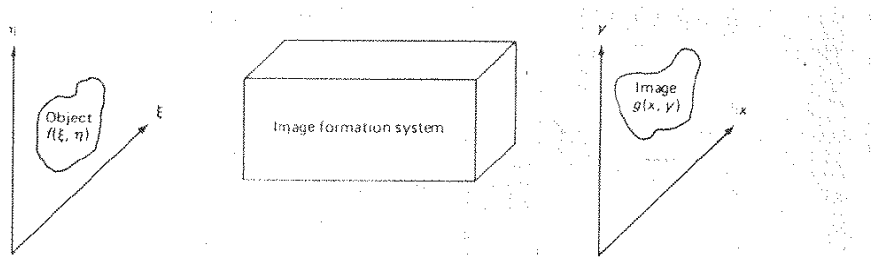


Figura 3.1: Esquema d'un sistema de formació d'imatges.

de formació d'imatges és responsable de la transformació de l'energia provinent del pla objecte en el pla imatge, i es pot postular l'existència d'una funció  $f(x, y, \xi, \eta)$  que descriu aquesta transformació. A aquesta funció de transferència l'anomenarem PSF (del terme anglès Point Spread Function). Si se suposa que aquest sistema de formació no pateix cap interferència que modifiqui la lectura de la imatge que es forma en ell (interferència que s'anomena *soroll*), la relació entre aquests tres termes és

$$p(x, y) = f(x, y, \xi, \eta) \otimes a(\xi, \eta) . \quad (3.1)$$

Com el seu nom indica, la PSF és la resposta que produeix el nostre instrument d'observació en el pla imatge d'una font puntual situada en el pla objecte. Això implica que quan observem un objecte puntual no obtenim una resposta puntual en el pla imatge  $(x, y)$ , sinó un objecte extens que presenta l'estructura de la PSF. Es pot suposar que l'objecte està format per infinits punts, i que cadascun d'ells produeix la seva pròpia PSF en el pla imatge, però no es pot treballar amb un nombre infinit de punts, sorgint aquí un nou problema: el mostreig, o sistema de representació de la imatge.

### 3.3 Representació de la imatge

El sistema de coordenades objecte és un sistema continu, és a dir, l'objecte d'interès  $a(\xi, \eta)$  es descriu en un domini de suport continu  $(\xi, \eta)$ , tot i que normalment la nostra imatge es descriu en un espai discret. Per tant, es pot establir *a priori* una senzilla relació entre els dos espais (l'espai objecte i l'espai imatge) i construir un espai objecte virtual que tingui la mateixa estructura que l'espai imatge, o el que és el mateix, un espai objecte virtual amb el mateix nombre de punts (o píxels)

que l'espai imatge. En el cas que ens interessa (observacions CCD), l'espai imatge està format per una col·lecció de punts situats en una malla regular, donada per la distribució de píxels de la CCD. D'aquesta manera es pot treballar còmodament en un espai discret on les tres components  $p(x, y)$ ,  $f(x, y, \xi, \eta)$  i  $a(\xi, \eta)$  s'expressen numèricament en un sistema de coordenades equivalent. Això permet treballar, en un ordinador, amb tres matrius que tenen el mateix nombre de dades i on la mida de cada píxel és equivalent. Per exemple, si la PSF cobreix quatre píxels en el seu *espai-PSF*, també cobreix quatre píxels tant en l'espai objecte com en l'espai imatge. Si es prefereix, també es pot considerar que els espais objecte i PSF estàn descrits en el mateix sistema de coordenades, però essent aquests diferents al sistema de coordenades imatge. Per exemple, es pot tenir una imatge en una matriu de  $512 \times 512$  píxels (on es considera que cada píxel correspon a una unitat en el sistema de coordenades de l'espai imatge), i la PSF i el pla objecte en una matriu de  $1024 \times 1024$  píxels. És a dir, s'ha subdividit cada píxel-imatge (cada unitat del sistema de coordenades de l'espai imatge) en quatre píxels-objecte (quatre unitats del sistema de coordenades de l'espai objecte), i per tant el nostre objecte reconstruït final té quatre cops més píxels que la imatge original, i per tant, el doble de resolució espacial. Però aquest és un tema relacionat amb l'aproximació super-resolució, i no és l'objectiu actual d'aquest treball.

### 3.4 Reconstrucció de la imatge

En aquest punt ja tenim els conceptes fonamentals per establir la formulació bàsica de la *reconstrucció d'imatges*.

Sabem que

$$p(x, y) = f(x, y, \xi, \eta) \otimes a(\xi, \eta) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x - \xi, y - \eta) a(\xi, \eta) d\xi d\eta \quad (3.2)$$

on simplement expressem la fórmula (3.1) com una convolució explícita. Quan tenim una imatge  $p(x, y)$  i volem reconstruir-la per obtenir una estimació aproximada de l'objecte original  $a(\xi, \eta)$ , només disposem de la imatge  $p(x, y)$  i la PSF  $f(x, y, \xi, \eta)$ . Podríem pensar que coneixent dues de les funcions anteriors podem fàcilment trobar la tercera, però res més lluny de la realitat.

Un mètode molt comú per analitzar una equació com la 3.2 és amb la teoria

d'operadors. Donat un espai de funcions en el qual  $a$  està definida, i un espai de funcions en el qual  $p$  està definida, llavors el problema de la transformació de l'operador  $T$  que projecta  $a$  sobre  $p$  es pot expressar com

$$T[a] \rightarrow p \ .$$

El problema de la reconstrucció d'imatges tracta, doncs, de trobar la transformació inversa  $T^{-1}$  tal que

$$T^{-1}[p] \rightarrow a \ .$$

Tant l'existència com la unicitat de  $T^{-1}$  són importants. Si  $T^{-1}$  no existeix, llavors no hi ha cap base matemàtica per assegurar que  $a$  es pot recuperar exactament a partir de  $p$ . D'altra banda,  $T^{-1}$  pot existir però no ser única, és a dir, pot existir una família de solucions per a  $T^{-1}$ , la natura de la qual es tria en funció de  $a$ . Finalment, fins i tot si  $T^{-1}$  existeix i és única, pot estar mal condicionada, el que vol dir que una mínima pertorbació en  $p$  pot produir una pertorbació important en  $a$ . És a dir, pot existir un  $\epsilon$ , arbitràriament petit de manera que

$$T^{-1}[p + \epsilon] = a + \delta$$

on  $\delta \gg \epsilon$ ; amb  $\delta$  no despreciable.

Però això no és tot, encara hem de fer front al problema més important de la reconstrucció d'imatges: el soroll.

Considerem que el sistema de formació de la imatge sigui lineal, de manera que l'únic efecte en el procés de captura de la imatge és la introducció de soroll, o en altres paraules, a la distribució  $p$  de la imatge s'hi afegeix un procés aleatori  $n$ , que simbolitza el soroll del sensor. Per tant, ara

$$p(x, y) = f(x, y, \xi, \eta) \otimes a(\xi, \eta) + n(x, y) \ .$$

Mes endavant veurem els diferents tipus de soroll que es poden presentar.

Si  $n(x, y) = 0$  llavors  $T^{-1}$  pot ser única, i en la majoria dels casos no hi ha excessius problemes en el procés de reconstrucció. Però si  $n(x, y) \neq 0$ , llavors pot existir una  $T^{-1}$  no única, i hi hauria una família infinita de solucions en l'espai objecte que ens produirien la imatge actual. Per tant, s'ha d'intentar trobar la solució més idònia dins aquesta família infinita de candidats. Actualment existeix un gran nombre de mètodes per a l'obtenció d'aquesta solució, d'entre els que destaquen el de Màxima Entropia i el de Màxima Versemblança. Veurem en detall algun d'aquests en els següents apartats.

### 3.5 Notació

Abans de continuar, hem de definir la notació que s'utilitzarà a partir d'aquí:

$p_j, j = 1, \dots, D$	projecció (dades obtingudes)
$a_i, i = 1, \dots, B$	densitat de l'emissió de l'objecte (paràmetres a estimar)
$f_{ji}$	Point Spread Function (PSF) o probabilitat que un píxel emissor $i$ sigui detectat en el píxel sensor $j$
$b_j, j = 1, \dots, D$	background (o emissió de fons)
$n_j, j = 1, \dots, D$	soroll de lectura
$C_j, j = 1, \dots, D$	sensibilitat del sensor (flatfield)
$f'_{ji} = \frac{f_{ji}}{C_j}$	PSF corregida de flatfield
$q_i = \sum_{j=1}^D f'_{ji}$	probabilitat total de detecció per a una emissió des del píxel $i$
$h_j = \sum_{i=1}^B f'_{ji} a_i + b_j$	projecció directa
$\mathbf{p}, \mathbf{a}, \mathbf{f}, \mathbf{b}, \mathbf{n}, \mathbf{C}, \mathbf{f}', \mathbf{q}, \mathbf{h}$	vectors corresponents a cadascuna de les variables anteriors

A partir d'aquí sempre treballarem amb el mateix model: un objecte emet llum amb una intensitat donada per una distribució espacial  $\mathbf{a}$ . La llum és focalitzada per un sistema òptic sobre un detector format per detectors individuals discrets i independents. Cada detector té una eficiència quàntica diferent caracteritzada per una distribució de correcció de guany  $\mathbf{C}$ . Un cert background  $\mathbf{b}$ , provinent principalment del fons de cel però també de fonts internes del detector, és registrat juntament amb la distribució espacial  $\mathbf{a}$ . Finalment, el detector és llegit per un component electrònic que afegeix soroll de lectura Gaussià amb mitjana zero i una desviació estàndard coneguda. L'equació que descriu la formació de la imatge per aquest model és

$$\mathbf{f}' \mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{n} = \mathbf{p} \quad . \quad (3.3)$$

Aquesta equació presenta una integral de Fredholm on  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$ ,  $\mathbf{n}$  i  $\mathbf{p}$  són funcions bidimensionals i  $\mathbf{f}'$  és un operador integral amb un kernel que és la PSF corregida de flatfield. Aquestes funcions es poden representar per vectors discrets, on el detector



és un vector de  $D$  detectors individuals, i l'objecte és discretitzat en  $B$  píxels. La teoria es desenvoluparà assumint que el nombre de píxels en l'objecte i el detector són diferents, tot i que en la majoria d'aplicacions és quasi sempre el mateix. L'equació 3.3 en forma discreta és

$$\sum_{i=1}^B \frac{f_{ji}}{C_j} a_i + b_j + n_j = p_j, \quad j = 1, \dots, D \quad . \quad (3.4)$$

La majoria dels sistemes d'adquisició d'imatges utilitzats en Astronomia es descriuen per l'equació 3.4. En particular, considerarem les cambres de càrrega acoblada (CCD).

En la totalitat d'aquest treball suposem que les nostres imatges no estan afectades per correccions de flatfield  $C_j$  o background  $b_j$ , excepte on s'indiqui el contrari. És a dir,  $C_j = 1 \forall j$  i  $b_j = 0 \forall j$ . Quan es parli de  $f_{ji}$  en realitat ens referirem a  $f'_{ji}$ .

## 3.6 El soroll

Quan es reconstrueix una imatge, volem trobar un objecte  $a_i$  tal que la seva projecció  $h_j$  es correspongui amb les nostres dades  $p_j = h_j + n_j$ , o sigui,

$$h_j + n_j - p_j = \sum_{i=1}^B f'_{ji} a_i + n_j - p_j \longrightarrow 0 \quad .$$

Però només en el cas ideal on  $n_j = 0$  es pot obtenir una solució realista. Si tenim  $n_j \neq 0$ , el nostre mètode pot intentar ajustar  $h_j$  a la imatge  $p_j$ , que conté la projecció  $f_j \otimes a_i$  de l'objecte original  $a_i$  més el soroll  $n_j$ , dins una família infinita de solucions donat que no tenim una estimació de  $n_j$ . Si fóssim capaços de tenir una expressió per a  $n_j$  podríem eliminar-lo de  $p_j$ , evitant d'aquesta manera el problema. Però la realitat és molt diferent i mai coneixem  $n_j$ , o el que és el mateix, no tenim cap funció determinista que doni una expressió pel soroll en cada píxel del detector. L'únic que coneixem és l'estadística global del soroll: la probabilitat d'ocurrència.

Això fa que en els algorismes de reconstrucció el soroll s'amplifiqui, i quan s'intenta trobar un 'bon' objecte  $a_i$  el mètode aproxima la projecció  $h_j$  a la imatge sorollosa  $p_j$ . Per tant, ens veiem obligats a trobar un objecte  $a_i$  de manera que

l'amplificació del soroll sigui controlada, donat que aquest és el principal problema dels actuals mètodes de reconstrucció d'imatges.

D'altra banda, sempre es pot assumir que la distribució  $a_i$  de l'objecte prové d'un procés que presenta una energia fixa  $e_{dades}$ . Això implica que al final del procés de reconstrucció hem d'obtenir una imatge amb la mateixa energia que les dades originals, i per tant, l'energia total del soroll  $n_j$  ha de ser  $e_{soroll} \simeq 0$ . Si el soroll és soroll blanc Gaussià, això es compleix, però si el soroll presenta una distribució Poissoniana, ja no es compleix.

## 3.7 Mètodes lineals de reconstrucció

### 3.7.1 Filtre invers directe

Es pot intentar trobar una expressió senzilla pel filtre invers  $\mathbf{f}^{-1}$ . Un algorisme directe per a poder calcular la reconstrucció podria utilitzar la Transformada de Fourier. Es pot expressar l'equació (3.1) en l'espai de Fourier:

$$FT[\mathbf{p}] = FT[\mathbf{a} \otimes \mathbf{h}]$$

$$\hat{\mathbf{p}} = \hat{\mathbf{a}} \cdot \hat{\mathbf{f}}$$

on  $FT$  i el símbol  $\hat{\phantom{x}}$  significa *Transformada de Fourier* i  $\otimes$  significa convolució. Però per aquest cas els efectes del soroll són importants, donat que la nostra estimació d' $\mathbf{a}$  és

$$\mathbf{a}' = \mathbf{f}^{-1} \cdot (\mathbf{f} \cdot \mathbf{a} + \mathbf{n}) = \mathbf{a} + \mathbf{f}^{-1} \cdot \mathbf{n}$$

on  $\mathbf{f}^{-1} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{f}}$ . Fins i tot essent  $\mathbf{n}$  petit, la inversa és habitualment molt gran, produint-se una amplificació del soroll.

### 3.7.2 Mínims quadrats

Donada una imatge  $p_j$  i un soroll  $n_j$ , la primera condició per a reconstruir una imatge és trobar aquella solució que minimitzi la distància entre les dades  $p_j$  i la

projecció  $h_j$ . O el que és el mateix, trobar aquella  $a_i$  que compleix

$$\min \sum_{j=1}^D (p_j - h_j) = \min \sum_{j=1}^D \left( p_j - \sum_{i=1}^B f'_{ji} a_i \right)$$

Quan es treballa a partir d'una imatge sense soroll o poc sorollosa, aquests mètodes donen resultats bastant acceptables. Si creem un parell d'imatges sintètiques, una de l'objecte  $a_i$  i una altra de la PSF, i les convolucionem per a obtenir una imatge observada sense introduir cap mena de soroll, llavors l'objecte reconstruït  $a'_i$  és molt proper a l'original  $a_i$ .

Si definim

$$\mathbf{V} = \mathbf{f}\mathbf{a} - \mathbf{p}$$

podem minimitzar la norma

$$\|\mathbf{V}\|_p = \left( \sum_j |v_j|^p \right)^{\frac{1}{p}},$$

en particular

$$\|\mathbf{V}\|_1 = \sum_j |v_j|$$

$$\|\mathbf{V}\|_2 = \left( \sum_j |v_j|^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

En el cas  $\|\mathbf{V}\|_2$  s'obté la solució de mínims quadrats. Si minimitzem

$$W(\mathbf{a}) = \|\mathbf{p} - \mathbf{f}\mathbf{a}\|^2$$

la solució final pel nostre objecte  $\mathbf{a}$  és:

$$\mathbf{a} = (\mathbf{f}^t \mathbf{f})^{-1} \mathbf{f}^t \mathbf{p}$$

### 3.7.3 Mínims quadrats condicionats

Per a obtenir reconstruccions més acurades que no amb simples inversions, es pot utilitzar un esquema d'inversió basat en mínims quadrats condicionats, de manera que s'aconsegueix un cert control addicional sobre el procés de reconstrucció.

Més concretament, es pot minimitzar un operador lineal sobre l'objecte  $\mathbf{a}$ , diguem-ne  $Q[\mathbf{a}]$ , sota unes certes condicions. La norma  $\|\mathbf{n}\|^2$  del senyal degut al soroll es pot estimar o obtenir a partir de les dades. El problema dels mínims quadrats condicionats es pot formular com la minimització de  $\|Q[\mathbf{a}]\|^2$  subjecte a  $\|\mathbf{p} - f\mathbf{a}\|^2 = \|\mathbf{n}\|^2$ . Utilitzant el mètode dels multiplicadors de Lagrange

$$W(\mathbf{a}) = \|Q[\mathbf{a}]\|^2 + \lambda \left( \|\mathbf{p} - f\mathbf{a}\|^2 - \|\mathbf{n}\|^2 \right) ,$$

la solució final és

$$\mathbf{a} = \left( f^t f + \frac{1}{\lambda} Q^t Q \right)^{-1} f^t \mathbf{p} .$$

Si prenem  $Q$  com la identitat,  $[Q] = [I]$ , s'obté

$$\mathbf{a} = \left( f^t f + \frac{1}{\lambda} I \right)^{-1} f^t \mathbf{p}$$

que es coneix com el *filtre pseudo-invers*.

Si  $[Q] = [\phi_a]^{-\frac{1}{2}} [\phi_n]^{\frac{1}{2}}$ , on  $[\phi_a]$  i  $[\phi_n]$  representen la covariança del senyal i el soroll respectivament, s'obté un filtre de Wiener paramètric que es redueix al mètode de mínims quadrats tradicional quan  $\lambda = 1$ .

### 3.7.4 Filtre de Wiener

En aquest mètode es busca minimitzar la relació senyal-soroll sota la mateixa condició que el mètode de mínims quadrats condicionats. És a dir, utilitzant altre cop el mètode dels multiplicadors de Lagrange, però aquest cop per a minimitzar la funció

$$W(\mathbf{a}) = \|\phi_a^{-\frac{1}{2}} \phi_n^{-\frac{1}{2}} \mathbf{a}\|^2 + \lambda \left( \|\mathbf{p} - f\mathbf{a}\|^2 - \|\mathbf{n}\|^2 \right) ,$$

obtenint

$$\mathbf{a} = \left( f^t f + \frac{1}{\lambda} \phi_a^{-1} \phi_n \right)^{-1} f^t \mathbf{p} ,$$

que no és més que el filtre paramètric de Wiener.

Aquest filtre estableix el pes de l'estadística del soroll i del senyal. Presenta l'avantatge que teòricament és molt robust i computacionalment molt simple d'implementar amb una Transformada de Fourier.

## 3.8 Mètodes no lineals

### 3.8.1 Mètodes de màxima versemblança

Els mètodes lineals presentats anteriorment no es comporten correctament amb dades sorolloses, donat que el tractament que fan del soroll no és prot acurat ni estricte. Els mètodes no lineals que es presenten a continuació tenen en compte aquest i altres aspectes amb molta més cura (Lucy, 1974) (Meinel, 1986) (Núñez & Llacer, 1993). En la literatura existeixen altres mètodes que parteixen de punts de vista molt diferents (Puetter, R.C. and Piña, 1993) (White, 1993), i que poden donar resultats acceptables.

Suposem que estem observant un objecte  $\mathbf{a}$ . El nostre sistema d'observació (telescopi, cambra fotogràfica, etc.) projecta una imatge  $h_j = \sum_{i=1}^D f_{ji}a_i$  en el detector (placa fotogràfica, CCD, etc.). Deixant de banda momentàniament el soroll Poissonià intrínsec de les dades, quan el detector llegeix aquesta projecció  $h_j$  s'obté una lectura amb un cert error, que anomenarem *soroll de lectura*. La probabilitat d'obtenir un valor  $p_j$  a partir d'un valor  $h_j$  ve donada per una distribució de probabilitat determinada.

Si considerem que aquesta distribució de probabilitat és Gaussiana, tenim

$$\mathbf{P}(p_j|h_j) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(p_j-h_j)^2}{2\sigma^2}}, \quad (3.5)$$

és a dir, si llegim la projecció  $h_j$  en el píxel  $j$  obtenim un valor de lectura  $p_j$  amb una probabilitat donada per l'equació 3.5. Considerant el procés global al llarg de tot el detector, la probabilitat d'obtenir una distribució  $\mathbf{p}$  ve donada per

$$\mathbf{L} = \mathbf{P}(\mathbf{p}|\mathbf{h}) = \prod_{j=1}^D \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(p_j-h_j)^2}{2\sigma^2}}$$

on  $\prod_{j=1}^D$  és el producte al llarg de tots els píxels del detector CCD. Aquesta funció de distribució és el que s'anomena *versemblança*. Per tant, en un procés de reconstrucció, i donades unes dades  $\mathbf{p}$ , es vol trobar una projecció  $\mathbf{h}$  (que és el mateix que trobar un cert objecte  $\mathbf{a}$ ) que maximitzi aquesta probabilitat  $\mathbf{L}$ , és a dir, trobar la distribució més probable  $\mathbf{a}$  que s'ajusti a les nostres dades  $\mathbf{p}$ .<sup>1</sup>

<sup>1</sup>És important remarcar que el mètode de màxima versemblança amb soroll de lectura Gaussià

En comptes de treballar amb la versemblança  $\mathbf{L}$ , és habitual fer-ho amb el seu logaritme

$$\log \mathbf{L} = \sum_{j=1}^D -\log \sqrt{2\pi}\sigma - \frac{(p_j - h_j)^2}{2\sigma^2} . \quad (3.6)$$

D'altra banda, si reprenem el model de soroll Poissonià, pel qual  $\mathbf{P}(p_j|h_j) = e^{-h_j} \frac{(h_j)^{p_j}}{p_j!}$ , i procedim de la mateixa manera, s'obté

$$\log \mathbf{L} = \sum_{j=1}^D [-h_j + p_j \log h_j - \log(p_j!)] , \quad (3.7)$$

i si combinem ambdós models Gaussià i Poissonià (Núñez & Llacer, 1993)

$$\log \mathbf{L} = \sum_{j=1}^D \left[ -\log(\sqrt{2\pi}\sigma) - h_j + \log \sum_{k=0}^{\infty} \left( e^{-(k-p_j)^2/2\sigma^2} \frac{(h_j)^k}{k!} \right) \right] . \quad (3.8)$$

### 3.8.2 Implementació d'una reconstrucció

És necessari trobar un algorisme implementable que ens permeti obtenir, de forma raonable, una reconstrucció d'una imatge coneguda utilitzant la formulació anterior. Un dels procediments més habituals és utilitzar processos iteratius, obtenint una imatge reconstruïda a partir d'una reconstrucció anterior, i intentant arribar a convergir en una solució final.

#### Soroll de lectura Gaussià

A continuació mostrem un algorisme per a la reconstrucció d'una imatge considerant únicament el soroll de lectura Gaussià. Tenim l'expressió (3.6) :

$$\log \mathbf{L} = \sum_{j=1}^D -\log \sqrt{2\pi}\sigma - \frac{(p_j - h_j)^2}{2\sigma^2}$$

---

dóna els mateixos resultats que el mètode de mínims quadrats, donat que ambdós minimitzen la dispersió quadràtica mitjana  $\sigma^2 = \sum_{i=1}^B (p_j - h_j)^2$ , o el que és el mateix, la distància entre  $h_j$  i  $p_j$ .

tenint en compte que  $h_j = \sum_{i=1}^B f'_{ji} a_i + b_j$ . Podem introduir el lligam de conservació de l'energia per assegurar un bon comportament fotomètric global

$$\sum_{i=1}^B q_i a_i = \sum_{j=1}^D p_j - \sum_{j=1}^D b_j ,$$

on  $q_i = \sum_j \frac{f_{ji}}{c_j}$ .

D'aquesta manera, el funcional  $F$  és

$$\left\{ \begin{array}{l} F = \sum_{j=1}^D \left[ -\log \sqrt{2\pi}\sigma - \frac{(p_j - \sum_{l=1}^B f'_{jl} a_l b_j)^2}{2\sigma^2} \right] - \\ \mu \left( \sum_{i=1}^B q_i a_i - \sum_{j=1}^D p_j + \sum_{j=1}^D b_j \right) \end{array} \right. , \quad (3.9)$$

on  $\mu$  és un multiplicador de Lagrange per a la conservació de l'energia de la imatge.

Si volem trobar l'objecte  $\mathbf{a}$  que maximitza el funcional  $F$ , igualem la derivada d' $F$  a zero:

$$\frac{\partial F}{\partial a_i} = 0 .$$

Calculant aquesta derivada, igualant a zero i sumant  $a_i$  en ambdós costats de l'equació, finalment s'obté:

$$a_i^{(k+1)} = K + a_i^{(k)} + \left[ \frac{1}{q_i} \sum_{j=1}^D \left( f'_{ji} \left( p_j - \sum_{l=1}^B f'_{jl} a_l^{(k)} - b_j \right) \right) \right]^m \quad (3.10)$$

on  $K = \sum_i^D \frac{p_i - a_i}{D}$  és una constant per a conservar l'energia i  $m$  un paràmetre accelerador.

És important destacar que en aquesta expressió  $f'_{ji}$  és diferent a  $f'_{jl}$ . Quan s'utilitza  $f'_{jl}$  aquesta fa referència a la PSF, i per tant, el sumatori  $\sum_{l=1}^B f'_{jl} a_l^{(k)}$  expressa la convolució de la PSF  $\mathbf{f}$  amb l'objecte  $\mathbf{a}$  (sumant sobre l'índex  $l$ ). En canvi, quan s'utilitza  $f'_{ji}$  el sumatori  $\sum_{j=1}^B f'_{ji} (p_j - \dots)$  és la *projecció inversa* o *deprojecció* de la diferència  $(p_j - \dots)$  quan es passa de l'espai de dades a l'espai objecte (sumant sobre l'índex  $j$ ).

En altres paraules, quan l'algorisme obté la diferència entre la projecció  $h_j = \sum_{l=1}^B f'_{jl} a_l^{(k)}$  i les dades  $p_j$ , estem treballant en l'espai imatge. Ambdues pertanyen

a l'espai de dades, i cal recordar de la secció 3.2 que els sistemes de coordenades dels espais imatge i objecte poden ser diferents. Per tant, s'ha d'utilitzar la relació existent entre les dades i l'espai objecte, i convertir la diferència des de l'espai imatge cap a l'espai objecte segons  $\sum_{j=1}^D \left( f'_{ji} \left( p_j - \sum_{l=1}^B f_{jl} a_l^{(k)} \dots \right) \right)$ . Però en aquest punt, quan s'intenta trobar una bona aproximació a l'objecte  $\mathbf{a}$ , l'algorisme intenta ajustar el soroll, i per tant aquest és amplificat.

En el cas més simple, on no es considera flatfield, background ni el paràmetre d'acceleració, l'algorisme (3.10) es converteix en:

$$a_i^{(k+1)} = K + a_i^{(k)} + \sum_{j=1}^D \left( f_{ji} \left( p_j - \sum_{l=1}^B f_{jl} a_l^{(k)} \right) \right) . \quad (3.11)$$

Aquest algorisme explícit és més fàcilment implementable en un ordinador que l'anterior 3.10.

### Incorporació de soroll Poissonià

Però aquesta darrera expressió només és vàlida quan únicament es considera el soroll de lectura Gaussià. En la pràctica, aquest algorisme només dona resultats acceptables quan el nombre de comptes per píxel és molt alt, de manera que el soroll Poissonià es pot aproximar per un model Gaussià. Per tant, per aconseguir un algorisme general que contempli el soroll intrínsec Poissonià i el soroll de lectura Gaussià, hem d'incorporar l'expressió del soroll Poissonià a l'equació anterior.

L'expressió 3.8 ens dona la versemblança conjunta dels models Gaussià i Poissonià. Derivant aquesta expressió, igualant-la a zero i multiplicant per  $a_i$  en els dos termes de la igualtat, s'obté la següent expressió final per a l'algorisme (Núñez & Llacer, 1993):

$$a_i^{(k+1)} = K a_i^{(k)} \left[ \frac{1}{q_i} \sum_{j=1}^D \frac{f_{ji} p'_j}{\sum_{l=1}^B f_{jl} a_l^{(k)} + C_j b_j} \right]^m \quad (3.12)$$



on

$$p'_j = \frac{\sum_{k=0}^{\infty} k e^{-\frac{(k-p_j)^2}{2\sigma^2}} \left[ \frac{(h_j)^k}{k!} \right]}{\sum_{k=0}^{\infty} e^{-\frac{(k-p_j)^2}{2\sigma^2}} \left[ \frac{(h_j)^k}{k!} \right]}$$

i

$$K = \sum_{i=0}^D \frac{p_j - a_j}{D} .$$

### 3.8.3 Validació creuada

Tot i que teòricament s'ha de deixar evolucionar aquests algorismes intentant arribar a la convergència, o el que és el mateix, arribar a un nombre prou alt d'iteracions, a la pràctica es comprova que s'ha d'aturar l'algorisme molt abans d'arribar a la convergència per tal d'evitar l'amplificació del soroll. Aquest punt d'aturada depèn de la relació senyal-soroll i es pot calcular amb el mètode de validació creuada (Núñez & Llacer, 1993) o qualsevol altra tècnica adequada.

Per a comprendre el mètode de validació creuada, considerem el següent exemple. Suposem que dividim les nostres dades en dos conjunts de dades  $A$  i  $B$ . Aquesta divisió es pot realitzar de dues formes: a) com el resultat de dues observacions independents però successives en el temps, o b) com el resultat d'un procés anomenat *thinning* si només disposem d'un únic joc de dades Poissonià.

Un cop tenim els dos conjunts de dades, el mètode de validació creuada consisteix en reconstruir les dades  $A$  i calcular al final de cada iteració les següents dues quantitats: a) el logaritme de la versemblança del conjunt  $A$  respecte la imatge reconstruïda d' $A$  (versemblança directa), i b) el logaritme de la versemblança del conjunt  $B$  respecte la imatge reconstruïda d' $A$  (versemblança creuada). Per a calcular el logaritme de la versemblança, s'utilitza l'equació 3.8.

Mentre el procés de reconstrucció treballa amb característiques que són comunes a ambdós conjunts de dades, tant la versemblança directa com la creuada creixen. Quan en el conjunt  $A$  el procés comença a reconstruir artefactes que són provocats principalment pel soroll, la versemblança directa segueix augmentant, ja que la reconstrucció continua essent consistent amb el conjunt de dades que la va originar. En canvi, la versemblança creuada respecte el conjunt  $B$  arriba a un màxim, disminuint a partir d'aquest el seu valor. Això és degut a que es comencen a reconstruir

detalls que són específics de la fluctuació aleatòria deguda al soroll del conjunt  $A$ .

El màxim en la versemblança creuada ens dona el punt d'aturada del nostre algorisme. Després de reconstruir el conjunt  $A$ , el procés es repeteix pel conjunt  $B$ , calculant la versemblança creuada respecte el conjunt  $A$ . Un cop obtinguts els dos punts d'aturada, se sumen ambdues reconstruccions, obtenint d'aquesta manera el resultat final.

### 3.9 Per què treballar amb wavelets?

Com acabem de veure, en el camp de la deconvolució d'imatges, el soroll és el principal enemic dels algorismes de reconstrucció. A mesura que es reconstrueix una imatge el soroll s'amplifica i la imatge reconstruïda és cada cop pitjor. El control d'aquesta amplificació del soroll és necessari per tal d'evitar que el resultat final sigui inservible, o l'amplificació sigui tan extrema que la imatge reconstruïda aportï poca o menys informació que la imatge original.

En aquesta situació les funcions wavelet poden ser una gran ajuda. Hem vist en el capítol 2 que aquestes funcions tenen una localització en temps i freqüència més desitjable que la que presenta la Transformada de Fourier. També s'ha vist que la Transformada Wavelet produeix un conjunt d'imatges que poden ser tractades per separat, el que ens aporta un cert grau de paral·lelisme en la implementació de l'algorisme. Per tant, podem descomposar les dades a tractar en un conjunt de noves dades, cadascuna d'aquestes amb diferents propietats i informació espacial i freqüencial. Això ens dona una major flexibilitat, i ens permet convertir el nostre problema invers en un nou problema de reconstrucció *multicanal*, amb els avantatges i inconvenients que això implica.

Com que la Transformada Wavelet presenta una millor representació de la localització de la informació espacial i freqüencial, en la Transformada Wavelet la contribució del soroll és aïllada en un pocs plans wavelet, propietat que permet controlar la contribució del soroll si es treballa amb més cura sobre aquests plans. La contribució del soroll en una Transformada de Fourier presenta la mateixa magnitud al llarg de tot el rang de freqüències, és a dir, presenta la mateixa intensitat tant en baixes com en altes freqüències, donat que aquesta representació no ens dona informació de la localització espacial d'un detall. Però una Transformada Wavelet sí ens

dóna aquesta informació de localització espacial a més de la freqüencial. Per tant, en utilitzar la Transformada Wavelet, la contribució del soroll només és rellevant en uns pocs plans wavelet d'alta freqüència.

Tenint present aquest comportament, la primera idea a l'hora d'intentar resoldre el problema de l'amplificació del soroll, és tractar cadascun d'aquests plans wavelet de manera diferent. Per exemple, suposem que tenim un paràmetre que defineix el grau de reconstrucció de les nostres dades. Al realitzar la reconstrucció hem d'anar amb compte amb els plans de més alta freqüència, donat que aquests presenten una relació senyal-soroll molt baixa i per tant els haurem de reconstruir amb un valor del paràmetre tal que ens doni un grau de reconstrucció que no amplifiqui el soroll. En canvi, els plans de més baixa freqüència es poden reconstruir sense problemes fins que el mètode convergeixi en una solució, donat que la relació senyal-soroll és gran i l'amplificació del soroll és despreciable o inexistent.

Per tant, la primera idea és utilitzar la Transformada Wavelet per a reconstruir cada pla wavelet de manera independent, d'acord amb la informació present en cadascun d'ells i la seva relació senyal-soroll. Hem dit *primera idea*, perquè hi ha altres formes de reconstruir aquesta sèrie de plans wavelet, com veurem més endavant. Anteriorment hem exposat la possibilitat de reconstruir en menor grau els plans de major resolució (freqüències altes) per tal de poder controlar l'amplificació del soroll, però precisament aquests plans d'alta freqüència són els que presenten la informació més interessant. Per tant, si reconstruïm poc aquests plans, no avançarem massa respecte les dades originals. Una manera de solucionar aquest inconvenient és localitzar i aïllar aquella informació que prové del senyal original d'aquella que prové del soroll. En altres paraules, reconstruir de manera diferent allà on hi ha informació útil d'allà on només hi ha soroll.

Tots aquests punts de vista han estat explorats tal com s'exposa en els següents apartats.

## 3.10 Deconvolució global d'imatges

Un cop vista una visió superficial de la teoria de wavelets, una visió en detall de l'algorisme *à trous* de descomposició, i els algorismes de deconvolució segons el mètode de màxima versemblança, podem introduir les funcions wavelet en aquests

algorismes per a cadascun dels diferents tipus de soroll. D'aquesta manera presentem els nous algorismes que proposem per a la reconstrucció d'imatges utilitzant wavelets.

### 3.10.1 Algorisme Gaussià

La idea principal és descomposar les dades  $\mathbf{p}$  en  $n$  plans wavelet  $\omega_j^p$  i reconstruir cadascun d'aquests de manera independent

$$\mathbf{p} = \omega_1^p + \omega_2^p + \omega_3^p + \cdots + \omega_n^p + c_n^p .$$

Aixó ens permet millorar la flexibilitat i el control sobre l'amplificació del soroll, però d'altra banda es presenta un inconvenient en el temps de càlcul: per a reconstruir una imatge original, ens trobem que a la pràctica n'hem de reconstruir  $n+1$ . Si disposem d'un ordinador paral·lel, els algorismes que presentem permeten realitzar la reconstrucció de cada pla wavelet concurrentment (veure Apèndix A), reduint d'aquesta manera el temps de càlcul al temps necessari per a reconstruir una única imatge.

Però en aquest punt ens podem plantejar una qüestió: convolucionar un objecte  $\mathbf{a}$  amb una PSF  $\mathbf{f}$  obtenint unes dades  $\mathbf{p}$ , és el mateix que descomposar l'objecte  $\mathbf{a}$  en plans wavelet  $\omega_j^a$ ,  $j = 1, \dots, n$ , convolucionar cadascun d'aquests  $n$  plans wavelet amb la PSF  $\mathbf{f}$  obtenint un conjunt  $\omega_j^p$ ,  $j = 1, \dots, n$  i finalment sumar aquests  $n$  plans per a obtenir les dades finals  $\mathbf{p}$ ? Obtindrem en el dos casos les mateixes dades  $\mathbf{p}$ ? (veure figura 4.1).

La resposta és *sí*, perquè la nostra imatge és la suma directa d'altres imatges, i és evident que

$$\begin{aligned} \mathbf{a} \otimes \mathbf{f} &= \mathbf{p} \\ \left( \sum_j^n \omega_j^a \right) \otimes \mathbf{f} &= \sum_j^n \omega_j^p \\ \sum_j^n (\omega_j^a \otimes \mathbf{f}) &= \sum_j^n \omega_j^p . \end{aligned}$$

El que no es pot assegurar és que convolucionant el pla wavelet objecte  $\omega_j^a$  obtinguem precisament el pla wavelet imatge  $\omega_j^p$ . No és el mateix descomposar

una imatge en plans wavelet  $\omega_j^a$  i després convolucionar cadascun d'aquests, que descomposar la imatge convolucionada  $\mathbf{p}$  en plans wavelet. Descomposar primer en plans wavelet, convolucionar i sumar, sí és el mateix que convolucionar directament la primera imatge.

Però la situació que realment ens interessa és justament la inversa. És el mateix reconstruir directament les nostres dades  $\mathbf{p}$  que reconstruir cadascun dels plans wavelet i sumar-los? (veure figura 4.2). La resposta és altre cop *sí*.

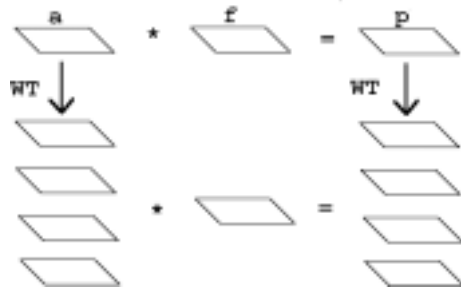


Figura 4.1

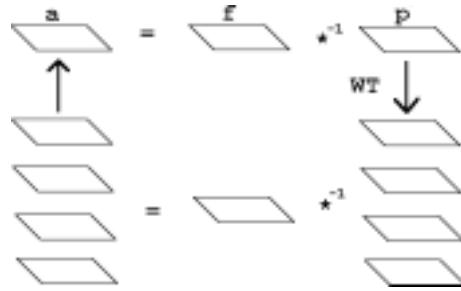


Figura 4.2

Més explícitament, és el mateix reconstruir la imatge  $\mathbf{p}$  que descomposar la nostra imatge en un nombre de plans wavelet

$$\mathbf{p} = \omega_1^p + \omega_2^p + \omega_3^p + \cdots + \omega_n^p + c_n^p$$

i reconstruir cadascun d'ells de manera independent per a obtenir una nova sèrie d'imatges que sumarem per a finalment obtenir l'objecte  $\mathbf{a}$

$$\mathbf{a} = W_1^a + W_2^a + W_3^a + \cdots + W_n^a + C_n^a$$

on  $\mathbf{W}_i^a$  és la reconstrucció del pla  $\omega_i^a$

Si tenim en compte que  $\mathbf{p} = \sum_{i_\omega=1}^{n+1} \omega_{i_\omega}^p$  i  $\mathbf{a} = \sum_{i_\omega=1}^{n+1} W_{i_\omega}^a$ , on  $\omega_{n+1}^p \equiv c_n^p$  i  $W_{n+1}^a \equiv C_n^a$  són els respectius plans residuals, podem expressar aquest algorisme modificant l'expressió 3.10 de la següent manera (Núñez & Otazu, 1996):

$$\left\{ \begin{aligned} W_{i_\omega}^{a_i, (k_{i_\omega}+1)} = & K_{i_\omega} + W_{i_\omega, i}^{a_i, (k_{i_\omega})} + \\ & + \left( \frac{1}{q_i} \sum_{j=1}^D \left( f'_{ji} \left( \omega_{i_\omega, j}^p - \sum_{l=1}^B f'_{jl} W_{i_\omega, l}^{a_i, (k_{i_\omega})} - b_j \right) \right) \right)^m \end{aligned} \right. \quad (3.13)$$

tenint en compte que  $\mathbf{a} = \sum_{i=1}^B a_i$  on  $a_i = \sum_{i_\omega=1}^{n+1} W_{i_\omega}^{a_i}$ . Per comoditat en la notació i per evitar la repetició de l'índex  $i$  en el mateix terme, expressem  $W_{i_\omega, i}^{a_i}$  de forma més compacta com  $W_{i_\omega}^{a_i}$ .

Aquesta expressió és de difícil lectura donat el gran nombre d'índexs i subíndexs que hi apareixen, però simplement reflexa el fet de deconvolucionar cada pla wavelet  $\omega_{i_\omega}^{p'}$  en un nombre  $k_{i_\omega}$  d'iteracions diferents per a cadascun d'ells.

Tot aquest desenvolupament es pot veure amb més detall en la tesina presentada per l'autor el 1996, i també a (Núñez & Otazu, 1996).

### 3.10.2 Algorisme Poissonià

En el cas d'aquest algorisme, podem modificar l'equació 3.12 de manera semblant a com ho hem fet en el cas Gaussià. Però ara no podem reconstruir cada pla wavelet per separat, doncs per a trobar la imatge reconstruïda hem de comparar les dades  $p'_j$  amb la projecció de l'objecte  $a_i$  fent una divisió. Això implica que la descomposició de l'objecte segons  $a_j = \sum_{i_\omega} W_{i_\omega}^a$  no intervé directament en l'estimació d'una nova aproximació a aquest. Definint  $p'_j = \sum_{i_\omega} \omega_{i_\omega}^{p'}$ , l'algorisme de reconstrucció queda (Núñez & Otazu, 1996):

$$a_i^{(k+1)} = K a_i^{(k)} \left[ \frac{1}{q_i} \sum_{j=1}^D \frac{f_{ji} \sum_{i_\omega} \omega_{i_\omega, j}^{p'}}{\sum_{l=1}^B f_{jl} a_l^{(k)} + C_j b_j} \right]^m. \quad (3.14)$$

El control de les iteracions de cada pla wavelet es fa en el numerador d'aquesta expressió. Suposem que volem aturar la reconstrucció global de la imatge. El que farem serà igualar el quocient a la unitat, de manera que l'estimació de l'objecte  $a_i^{k+1}$  sigui l'objecte  $a_i^k$ . Si volem aturar la reconstrucció en un pla wavelet determinat, fem  $\omega_{i_\omega}^{p'} = \omega_{i_\omega, j}^{h(k)}$ . Per a ser més explícits, si volem aturar el primer pla wavelet l'expressió 3.14 es converteix en:

$$a_i^{(k+1)} = K a_i^{(k)} \left[ \frac{1}{q_i} \sum_{j=1}^D \frac{f_{ji} (\omega_{1, j}^{h(k)} + \omega_{2, j}^{p'} + \dots)}{\sum_{l=1}^B f_{jl} a_l^{(k)} + C_j b_j} \right]^m$$

on  $\omega_{i_\omega, j}^{h(k)}$  és el pla wavelet  $i_\omega$  de la projecció  $\mathbf{h}$  de l'objecte  $\mathbf{a}$ .

### 3.11 Resultats dels algorismes globals

Per a estudiar el comportament de cadascun d'aquests nous mètodes, hem generat un conjunt d'imatges sintètiques amb uns paràmetres determinats. A (Núñez & Otazu, 1996) es mostren alguns d'aquests exemples, tot i que aquí només en mostren un. Com imatge objecte hem utilitzat una imatge del centre de la galàxia gegant M100 obtinguda pel telescopi espacial Hubble (HST), que podem veure en la figura 3.2. Utilitzant una PSF real del mateix HST (figura 3.3) hem generat un conjunt d'imatges que fan el paper de dades observades, afegint diferents models de soroll segons l'algorisme de reconstrucció que avaluem.

L'obtenció d'un valor numèric per a poder estimar la qualitat de les imatges reconstruïdes, és un problema històric al que encara no s'ha trobat una resposta definitiva. És molt difícil estimar numèricament la qualitat d'una imatge o el grau de soroll en comparació amb una altra, o fins i tot la seva resolució espacial (veure capítol 5). Històricament sempre s'han jutjat els resultats a partir de la pura inspecció visual, mètode que habitualment és suficient per veure el comportament general de l'algorisme estudiat. Però si intentem ser objectius, una de les possibles estimacions de la qualitat d'una imatge és calcular la distància entre dues imatges, o el que és el mateix, mirar quina és la correlació entre aquestes. L'expressió per a calcular la correlació entre dues imatges és la següent:

$$Corr (A/B) = \frac{\sum_{j=1}^{n_{pix}} (A_j - \bar{A})(B_j - \bar{B})}{\sqrt{\sum_{j=1}^{n_{pix}} (A_j - \bar{A})^2 \sum_{j=1}^{n_{pix}} (B_j - \bar{B})^2}} \quad (3.15)$$

on  $\bar{A}$  i  $\bar{B}$  són els valors mitjos de la corresponent imatge. Aquest valor de la correlació es troba sempre entre zero i la unitat, essent més proper a la unitat quant més s'assemblen entre elles les imatges  $A$  i  $B$ .

Per poder avaluar els avantatges que pot aportar cadascun dels algorismes que presentem, hem realitzat reconstruccions simultànies amb els mètodes basats en wavelets i amb el corresponent mètode sense la incorporació d'aquestes. És a dir, comencem comparant el mètode tradicional de reconstrucció segons un algorisme

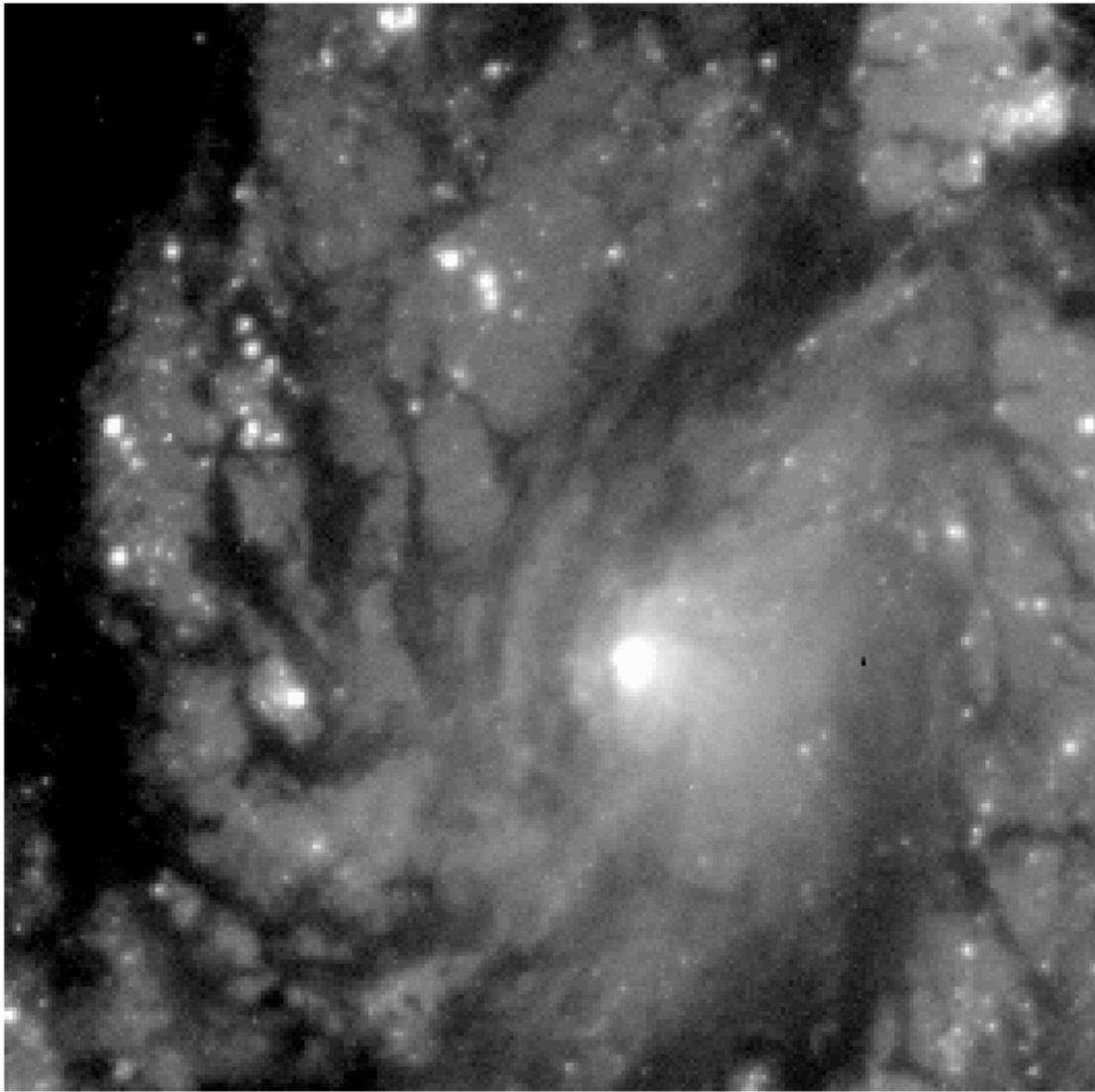


Figura 3.2: Imatge de 256x256 píxels del centre de la galàxia M100 obtinguda pel HST. Aquesta imatge la utilitzem com imatge objecte.

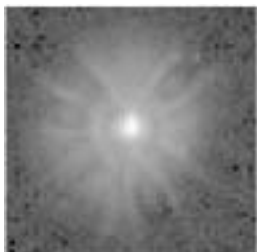


Figura 3.3: PSF del HST de 53x53 píxels, utilitzada com PSF sintètica.



Gaussià, donat per l'equació 3.10, amb l'algorisme Gaussià amb wavelets, donat per l'expressió 3.13. Fem el mateix pels algorismes Poissonians, expressions 3.12 i 3.14. D'aquesta manera podem veure directament quin és el guany que aporta la incorporació de les funcions wavelet respecte els algorismes tradicionals.

### 3.11.1 Algorisme Gaussià

Per a generar un joc de dades sintètiques hem convolucionat les figures 3.2 i 3.3. Posteriorment hem afegit dues realitzacions independents de soroll blanc Gaussià amb  $\sigma = 10$  cadascuna d'elles, obtenint d'aquesta manera un parell d'imatges sorolloses, una de les quals mostrem en la figura 3.4. Aquestes dues imatges fan el paper de dades observades.

Un cop generades aquestes dues imatges reconstruïm cadascuna d'elles segons el mètode tradicional (equació 3.10) i el mètode amb wavelets (equació 3.13).

Com s'ha comentat en un apartat anterior, la manera de trobar el punt d'aturada en el procés iteratiu de reconstrucció és calculant la versemblança creuada i aturar-nos en el punt en què aquesta és màxima. En la figura 3.5 mostrem aquesta funció en el cas de la reconstrucció obtinguda amb l'algorisme Gaussià tradicional.

Aquesta gràfica ens està dient que hem d'aturar la reconstrucció entre les iteracions 40 i 50, més exactament en la iteració 48. Per a la segona imatge sintètica, el punt d'aturada és la iteració 50. No és estrany que els dos punts d'aturada siguin tan semblants, donat que l'estadística del soroll és la mateixa en els dos casos. El resultat d'aturar en aquest punt la reconstrucció de les dues imatges sintètiques i fer la mitjana entre elles el mostrem en la figura 3.6.

En el cas de la reconstrucció obtinguda utilitzant l'algorisme basat en wavelets, s'han calculat les versemblances creuades de cada pla wavelet, o sigui, s'ha calculat la versemblança creuada del pla wavelet  $\omega_{i_\omega}^{p^B}$  amb el pla wavelet  $\omega_{i_\omega, j}^{h(k)^A}$ , o el que és el mateix, entre el  $i_\omega$ -èssim pla wavelet del segon joc de dades  $\mathbf{p}^B$  amb el  $i_\omega$ -èssim pla wavelet de la projecció  $\mathbf{h}$  de l'objecte  $\mathbf{a}$  reconstruït a partir del primer joc de dades  $\mathbf{p}^A$ . D'aquesta manera s'obté un punt d'aturada per a cada pla wavelet que es reconstrueix.

La versemblança creuada habitualment també es visualitza utilitzant la seva

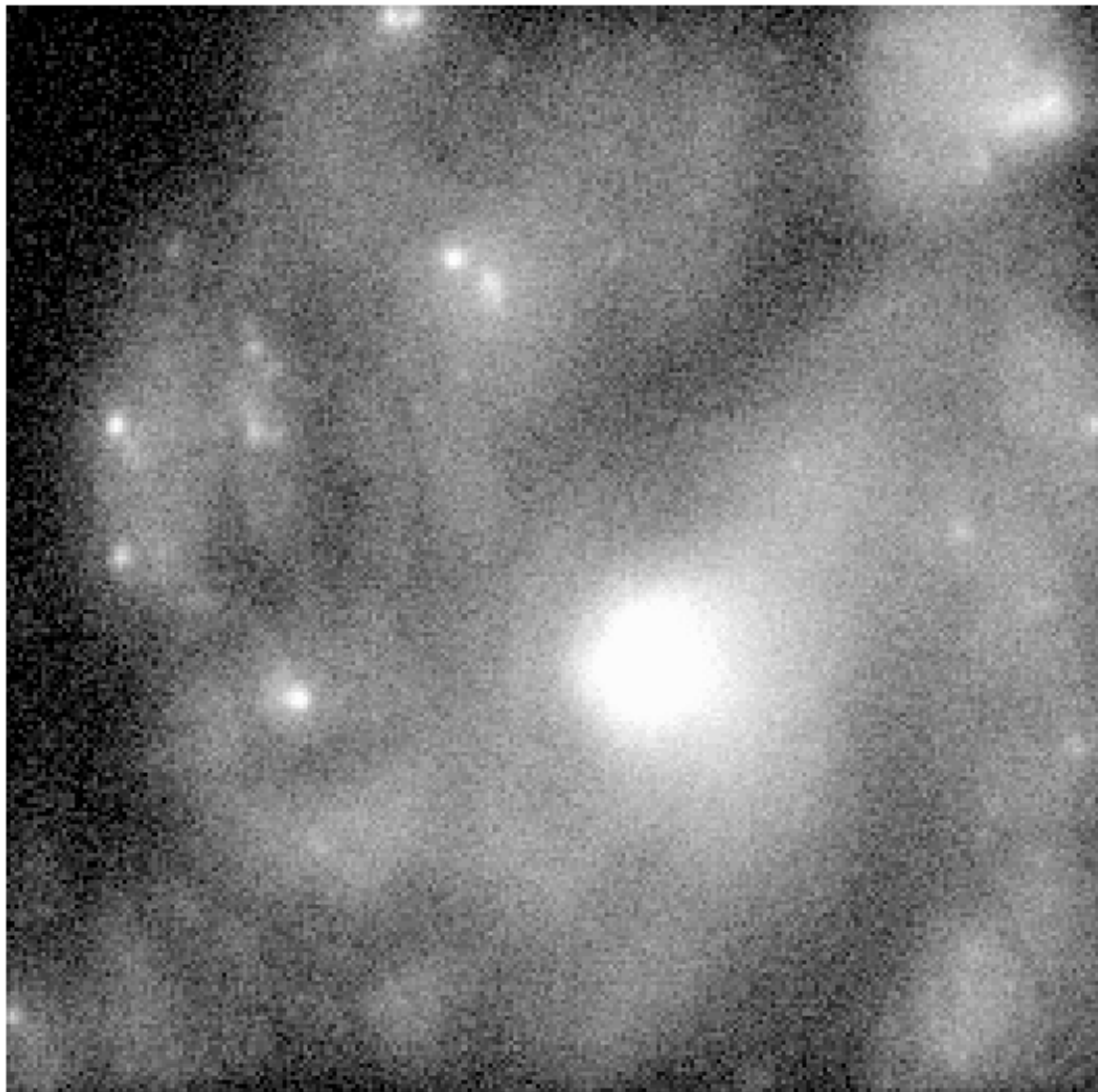


Figura 3.4: Imatge obtinguda en convolucionar la imatge de la figura 3.2 amb la PSF de la figura 3.3, i afegint soroll Gaussià amb  $\sigma = 10.0$ .

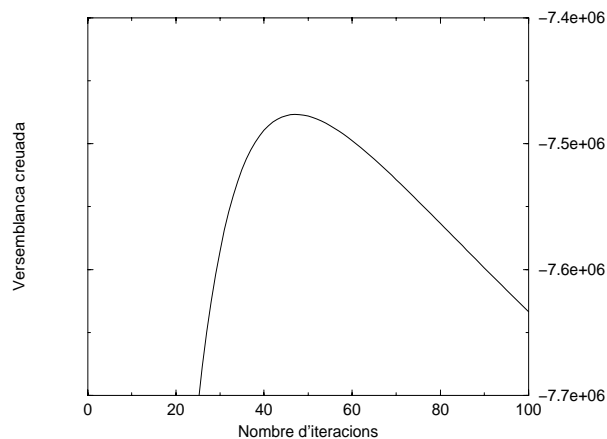


Figura 3.5: Gràfica de la versemblança creuada obtinguda quan es reconstrueix la imatge de la figura 3.4 segons el mètode Gaussià.

derivada, és a dir, mostrant l'increment d'aquesta entre iteració i iteració, d'aquesta manera es busca el punt on la funció creua el valor zero. En la figura 3.8 podem veure aquestes gràfiques per a cadascun dels plans wavelet. Els punts d'aturada per a cada pla wavelet són les iteracions 38, 48 i 56 respectivament. El darrer pla, el pla residual, encara no ha creuat el zero després de 100 iteracions, donat que és un pla de molt baixa freqüència i el soroll l'afecta molt poc, el que permet reconstruir-lo durant moltes iteracions sense perill d'augmentar la contribució del soroll. La reconstrucció final utilitzant l'algorisme basat en wavelets la mostrem en la figura 3.7.

Visualment, la diferència entre la reconstrucció utilitzant l'algorisme estàndard, que reconstrueix la imatge globalment, i el basat en wavelets no és molt evident, tot i que es pot apreciar una lleugera reducció del grau de soroll reconstruït en l'algorisme basat en wavelets. Podem veure una estimació numèrica de la qualitat de cada reconstrucció si calculem la correlació entre la imatge sintètica que fa el paper d'imatge objecte, que és el que idealment hauríem d'obtenir (figura 3.2), i cadascuna d'aquestes dues reconstruccions. En la taula 3.1 es mostren aquests valors.

Com es pot comprovar en aquesta taula, la reconstrucció utilitzant l'algorisme basat en wavelets és lleugerament més propera a l'objecte original, principalment degut a l'inferior nombre d'iteracions dels plans wavelet d'alta freqüència.

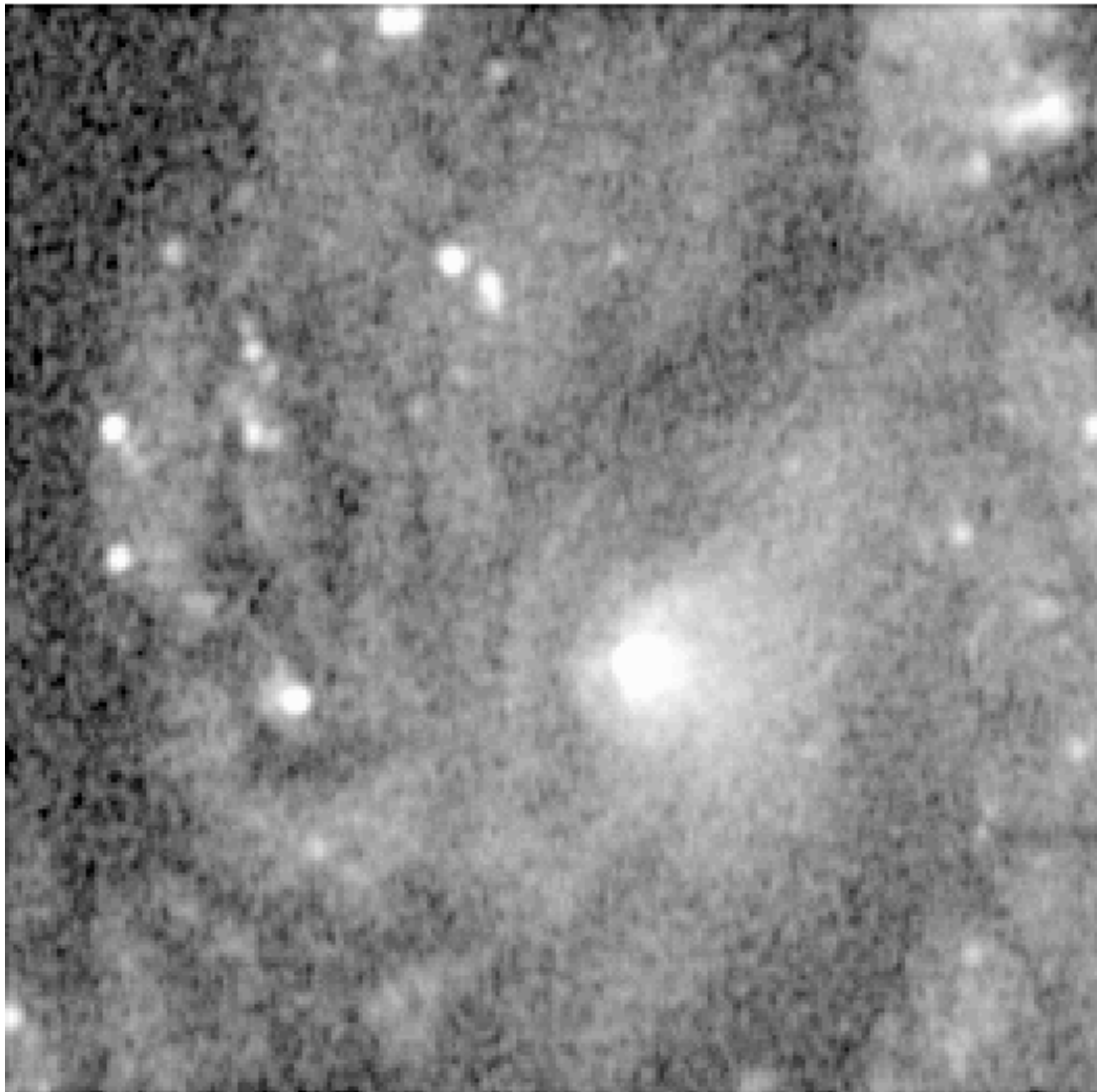


Figura 3.6: Combinació per mitjana aritmètica de dues reconstruccions realitzades utilitzant l'algorisme Gaussià estàndard, aturant cadascuna d'elles en el punt que marca la màxima versemblança creuada.

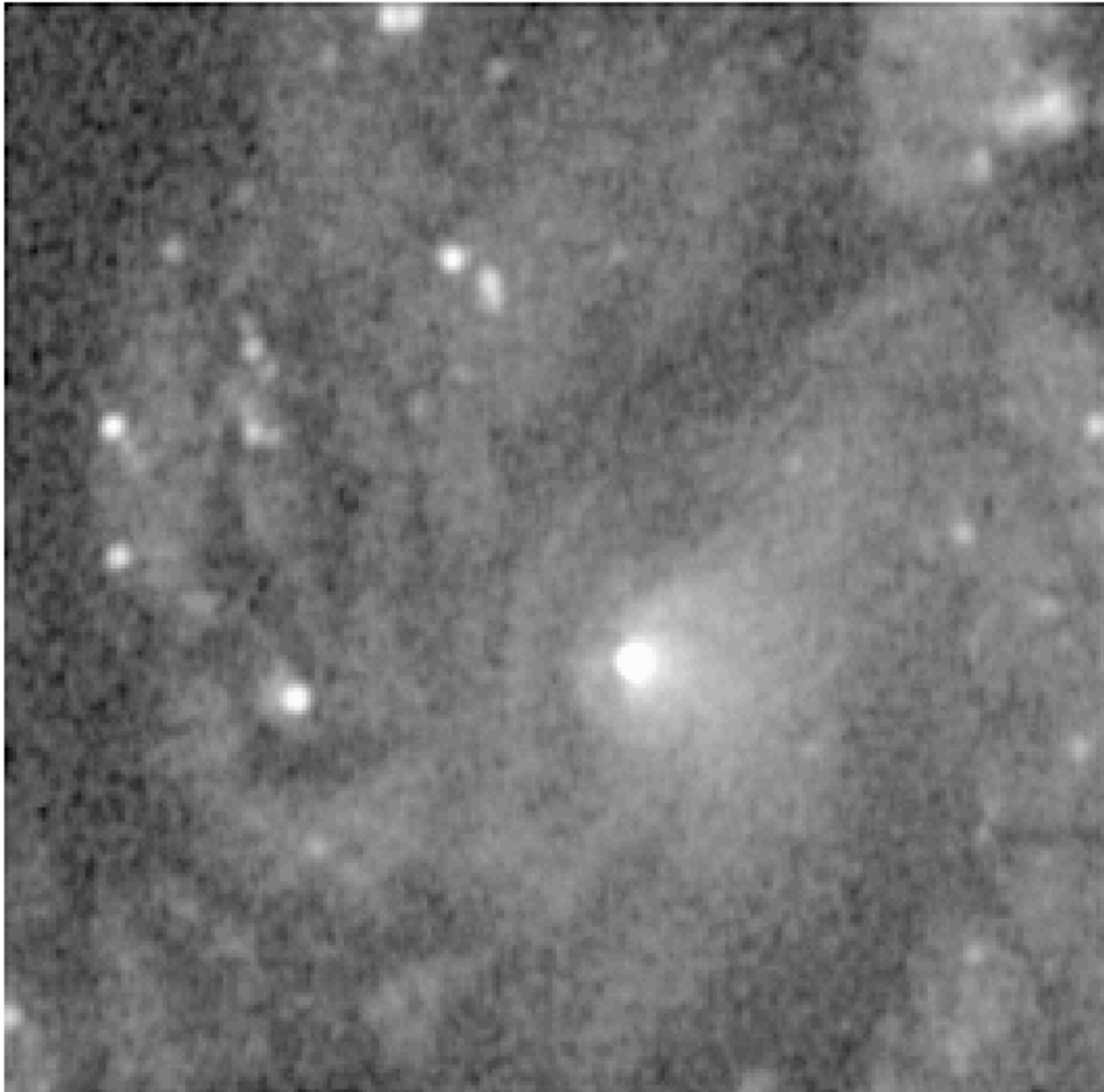


Figura 3.7: Combinació per mitjana aritmètica de dues reconstruccions realitzades utilitzant l'algorisme Gaussià basat en wavelets, aturant cadascuna d'elles en el punt que marca la màxima versemblança creuada.

Mètode	Correlació
Gaussià estàndard	0.937365
Gaussià amb wavelets	0.937845

Taula 3.1: Valors de la correlació entre la imatge objecte 3.2 i cadascuna de les reconstruccions 3.6 i 3.7.

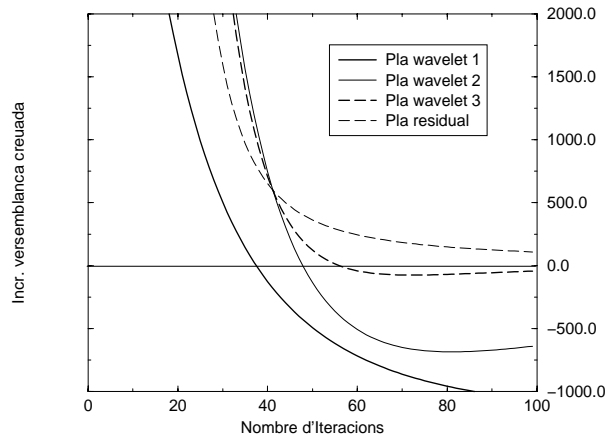


Figura 3.8: Gràfica de la derivada de la versemblança creuada de cadascun dels plans wavelet, obtinguda en reconstruir la imatge de la figura 3.4 segons el mètode Gaussià basat en wavelets. Els punts d'aturada són les iteracions 38, 48 i 56 pels plans wavelet 1, 2 i 3 respectivament. Cal recordar que el punt de tall per a la imatge global, es troba en la iteració 48.

La utilització d'un algorisme Gaussià en imatges astronòmiques és un cas poc probable, donat que les imatges astronòmiques estan principalment afectades pel soroll Poissonià. Els algorismes Gaussians tenen la seva utilitat en imatges amb un gran nombre de fotons, per exemple imatges planetàries, o imatges no astronòmiques, per exemple del món de la Teledetecció o certes imatges mèdiques. Per tant, per a imatges astronòmiques haurem de treballar en la majoria dels casos amb aquells algorismes que contemplen el soroll Poissonià. A més l'algorisme Gaussià és un cas particular del Poissonià, donat que quan el nombre de fotons és elevat, l'estadística Poissoniana es pot aproximar per una estadística Gaussiana. Per tant, en aquells casos on volguem treballar amb l'algorisme Gaussià podrem fer-ho amb el Poissonià.

### 3.11.2 Algorisme Poissonià

Per a generar el conjunt de dades sintètiques amb el que hem estudiat els algorismes Poissonians, hem procedit com en el cas dels algorismes Gaussians; és a dir, convolucionant la imatge 3.2 però aquest cop afegint els dos tipus de soroll: Poissonià i Gaussià de lectura, aquest últim amb  $\sigma = 10$ .

En aquest cas, hem reconstruït altre cop les imatges amb l'algorisme Poissonià

estàndard, equació 3.12, i el basat en wavelets, equació 3.14. En el cas de l'algorisme estàndard, el punt d'aturada de les dues imatges és la iteració 14, tal com marca la versemblança creuada.

Però en el cas de l'algorisme Poissonià el càlcul de la versemblança creuada (equació 3.8) per a cadascun dels plans wavelet no es pot realitzar. Per comoditat, tornem a reproduir aquesta equació :

$$\log \mathbf{L} = \sum_{j=1}^D \left[ -\log(\sqrt{2\pi}\sigma) - h_j + \log \sum_{k=0}^{\infty} \left( e^{-(k-p_j)^2/2\sigma^2} \frac{(h_j)^k}{k!} \right) \right]. \quad (3.16)$$

Aquesta equació suposa que els valors de les dades  $p_j$  i  $h_j$  són positius, fet que es demostra per la presència dels logaritmes i que  $\mathbf{L} \in [0, 1]$ ,  $\log \mathbf{L} < 0$ . Però els plans wavelet tenen valors negatius, el que impedeix poder utilitzar aquesta expressió per a calcular la versemblança creuada de cada pla wavelet.

Una possible solució a aquest problema és aturar manualment la reconstrucció de cada pla wavelet en el punt que nosaltres decidim, però aquesta estimació sempre és subjectiva i no podem saber si ho estem fent de forma òptima. A més, un inconvenient afegit és que necessitem fer un seguiment de la reconstrucció de cada pla wavelet per aturar la reconstrucció en un punt determinat, sense saber si l'efecte final en la reconstrucció global de la imatge serà l'adequat.

Una altra possible solució al problema és utilitzar la versemblança creuada Gaussiana, o sigui, calcular aquesta segons l'expressió 3.6. Però després de realitzar proves utilitzant aquesta aproximació, s'ha comprovat que els resultats estan molt lluny de ser acceptables. Per tant, no ens queda altre remei que utilitzar l'aproximació manual.

Com que en el cas estàndard el punt d'aturada ha estat la iteració 14, en el cas de l'algorisme basat en wavelets hem rebaixat una mica les iteracions del primer pla (el que conté bona part del soroll), i hem augmentat de forma gradual les iteracions de la resta de plans utilitzant finalment 10, 25, 50 i 50 iteracions per a cadascun d'ells. Una de les imatges a reconstruir i el resultat d'aplicar aquestes iteracions a les dues imatges sintètiques i fer el promig, els mostrem a les figures 3.9, 3.10 i 3.11.

En la taula 3.2 mostrem les correlacions de cadascuna d'aquestes reconstruccions amb la imatge objecte sintètica.



Figura 3.9: Imatge obtinguda després de convolucionar la imatge de la figura 3.2 i la PSF de la figura 3.3. Soroll Poissonià i Gaussià amb  $\sigma = 10.0$ .

Mètode	Correlació
Poissonià estàndard	0.889477
Poissonià amb wavelets	0.903425

Taula 3.2: Valors de la correlació entre la imatge objecte 3.2 i cadascuna de les reconstruccions 3.10 i 3.11.



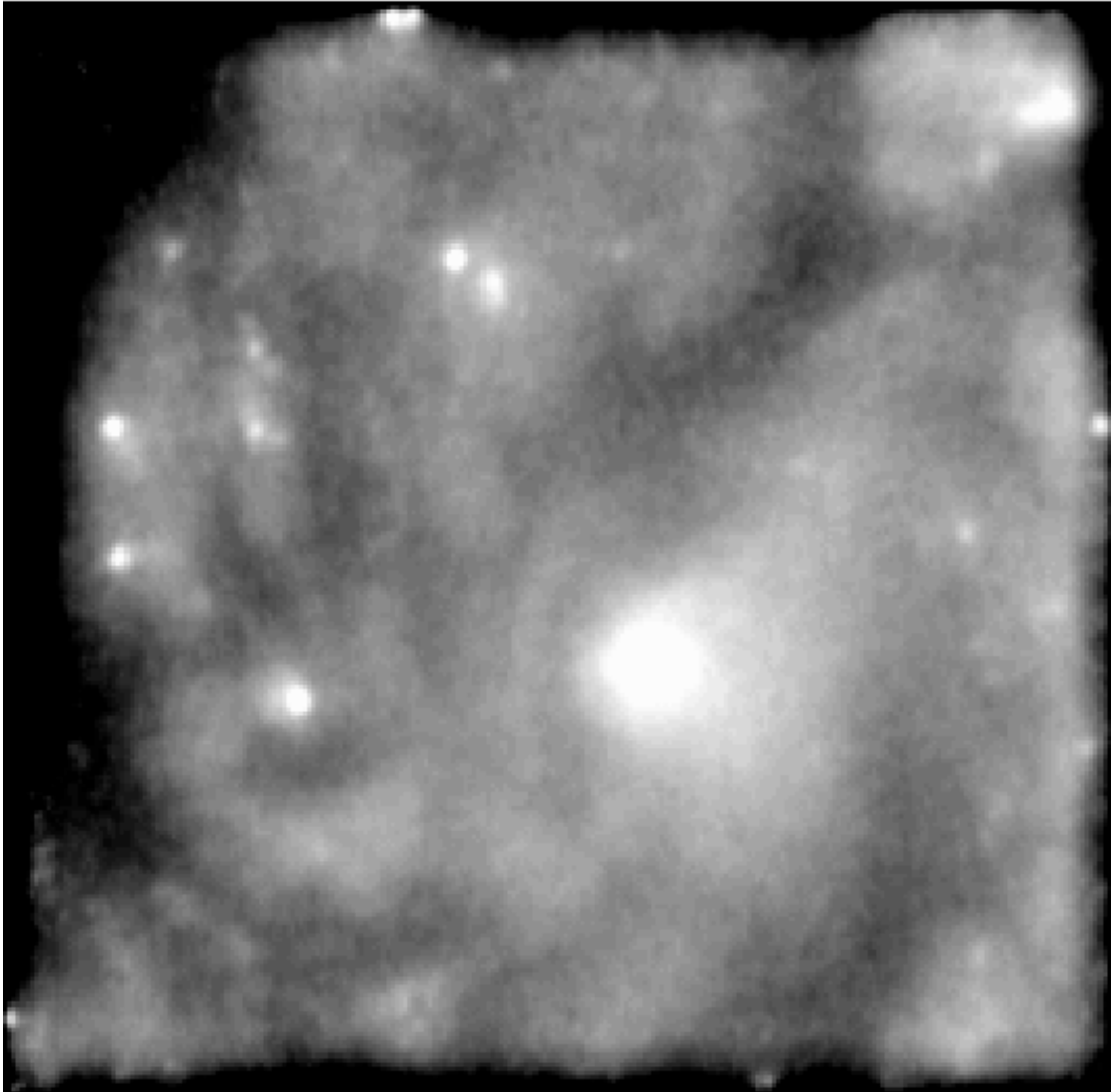


Figura 3.10: Combinació per mitjana aritmètica de dues reconstruccions realitzades utilitzant l'algorisme Poissonià estàndard, aturant cadascuna d'elles en el punt que marca la màxima versemblança creuada.

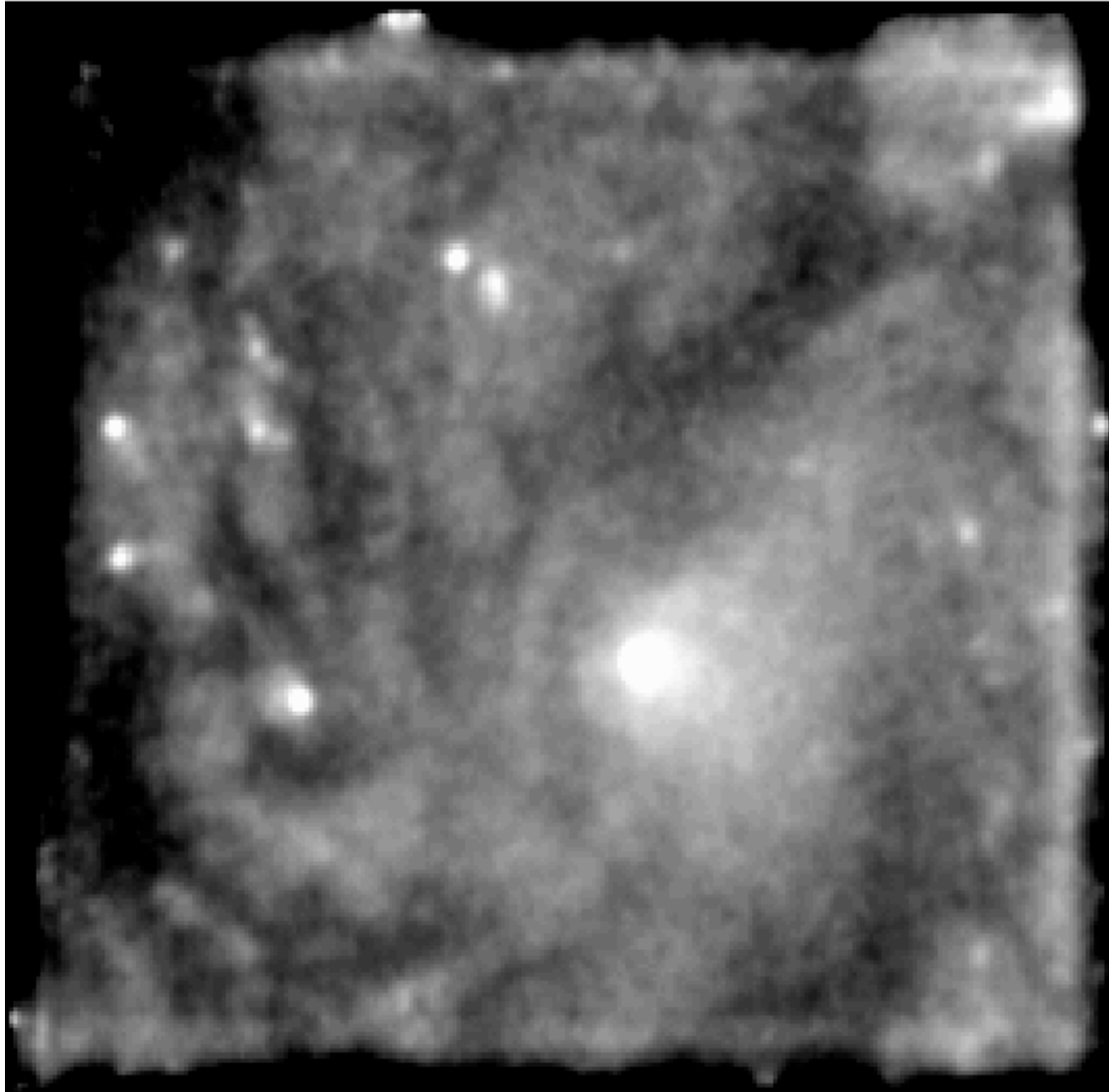


Figura 3.11: Reconstrucció utilitzant l'algorisme Poissonià amb wavelets, aturant cadascun dels plans wavelet en les iteracions 10, 25, 50 i 50. Les reconstruccions de les dues imatges sintètiques s'han combinat fent la mitjana aritmètica.

Podem veure com l'aspecte visual de la imatge reconstruïda amb el mètode basat en wavelets és millor que la del mètode Poissonià estàndard. Totes dues imatges mostren el mateix grau de soroll, però en el cas de la imatge obtinguda amb el mètode basat en wavelets veiem que el grau de reconstrucció és lleugerament superior, com s'aprecia en la mida dels estels i els límits dels braços espirals, així com en el contrast general de la imatge. Els valors de la taula 3.2 mostren altre cop que la reconstrucció utilitzant el mètode basat en wavelets és més propera a la imatge objecte que la solució que dona el mètode estàndard.

## 3.12 Conclusions algorismes globals

Els algorismes estàndard de reconstrucció no poden controlar l'amplificació del soroll, i l'única manera de controlar aquesta amplificació és aturant l'algorisme en el punt en que la versemblança creuada és màxima.

Els algorismes basats en wavelets permeten controlar l'amplificació del soroll de manera més efectiva. Els plans de més alta freqüència, on s'acumula la major part de la contribució del soroll, es reconstrueixen menys que la resta, aconseguint d'aquesta manera controlar l'amplificació del soroll i a la vegada reconstruir els detalls de freqüència lleugerament inferior, com per exemple els estels i els marges de regions extenses.

Com es pot veure en les taules de correlació, les imatges reconstruïdes amb els mètodes basats en wavelets són *més properes* a la imatge objecte que no pas les reconstruïdes amb els mètodes tradicionals.

El mètode Poissonià basat en wavelets presenta l'inconvenient que no ens permet aturar automàticament cada pla wavelet, doncs no es pot calcular la versemblança creuada d'una imatge (pla wavelet) que presenta valors negatius. Per tant, ens veiem obligats a decidir manualment quin és el punt d'aturada en la reconstrucció de cada pla wavelet. Aquest mètode presenta l'inconvenient que l'assignació del nombre d'iteracions és subjectiu, amb la incertesa que això comporta, però d'altra banda ens permet ser flexibles en la reconstrucció dels detalls de diferent freqüència, permetent d'aquesta manera reconstruir detalls poc afectats pel soroll, mentre que podem aturar ràpidament l'amplificació del soroll en els plans d'alta freqüència.

### 3.13 Deconvolució adaptativa

En els algorismes anteriors, hem plantejat uns mètodes de reconstrucció basats en una filosofia de reconstrucció global, o en altres paraules, considerem cadascun dels plans wavelet en la seva totalitat com els elements mínims individuals a reconstruir. Però considerar cadascun dels plans wavelet en tota la seva extensió com unitat mínima indivisible probablement no és la millor idea.

Com hem comentat anteriorment, la informació més important es troba en els plans d'alta freqüència, que és on també es troba localitzat el soroll. Per tant, quan es treballa amb aquests plans seria interessant poder separar la contribució del soroll de la del senyal. D'aquesta manera, es podria reconstruir el senyal d'alta freqüència sense la influència del soroll.

Per a poder plantejar inicialment el problema, primerament necessitem saber quina és la contribució del soroll a cadascun dels plans wavelet. Per a tenir una estimació d'aquesta contribució es generen diverses imatges amb soroll  $\sigma = 1$  i s'estima el soroll de cadascun dels plans wavelet obtinguts de la descomposició de cadascuna d'aquestes imatges, obtenint una sèrie  $\sigma_w$ . D'aquesta manera, obtenim la contribució del soroll a cadascun dels plans wavelet.

Donades les propietats matemàtiques de les wavelets, podem intentar detectar on hi ha una contribució important del senyal a cadascun dels plans wavelet amb un senzill càlcul. Sabem que el valor mig d'un pla wavelet és nul, i d'altra banda que la desviació estàndard d'aquest pla,  $\sigma_w$ , tindrà un valor determinat diferent a zero. Per les mateixes propietats podem dir que donada una finestra, amb una mida directament relacionada amb l'escala del pla wavelet, el valor mig en aquesta finestra és nul i la desviació estàndard ha de tenir el mateix valor que el pla wavelet sencer (o molt aproximadament), en el cas que la imatge només contingui soroll. Donada la presència d'un senyal, el valor mig seguirà essent nul, però la desviació estàndard canviarà, i més concretament augmentarà. Per tant, per a poder detectar un senyal en una subfinestra d'un pla wavelet, hem d'obtenir la desviació estàndard del conjunt de píxels que la formen. Si aquesta desviació estàndard és major que la contribució del soroll en aquest pla wavelet, això ens mostra la presència d'un senyal real.

Per tant, donat un píxel i els seus veïns, podem detectar la presència d'un senyal

si estudiem la desviació estàndard en aquest veïnatge. Podem intentar quantificar la probabilitat de presència d'un senyal real en un píxel i el seu entorn a partir l'expressió

$$m_i = \begin{cases} 1 - \exp \left\{ -\frac{\left(\frac{3}{2}(\sigma_i - \sigma_w)\right)^2}{2\sigma_w^2} \right\} & \text{si } \sigma_i - \sigma_w > 0 \\ 0 & \text{si } \sigma_i - \sigma_w \leq 0 \end{cases} \quad (3.17)$$

amb

$$\sigma_i = \sqrt{\frac{\sum_{j \in \Phi} (w_{m,j})^2}{n_f}} ,$$

on  $\sigma_i$  és la desviació estàndard calculada en la finestra  $\Phi$  centrada en el  $i$ -èssim píxel del pla wavelet on calculem aquesta probabilitat,  $j$  indica el  $j$ -èssim píxel,  $n_f$  el nombre de píxels dins aquesta finestra, i  $\sigma_w$  la desviació estàndard del soroll en el pla wavelet corresponent,  $w_m$  el  $m$ -èssim pla wavelet.

Amb l'expressió 3.17 obtenim un valor per a la probabilitat  $m_i$ , que varia entre zero i la unitat a mesura que la desviació estàndard de la nostra finestra és més gran que la del soroll. El factor  $\frac{3}{2}$  ens normalitza el numerador, de manera que quan la diferència entre les desviacions és 2 cops la desviació del soroll  $\sigma_w$  (el que vol dir que el seu valor és 3 cops més gran), aquest numerador serà 3 cops la desviació  $\sigma_w$  del denominador, i per tant el valor de l'exponencial serà aproximadament  $\frac{1}{1000}$  i  $m_i \simeq 1$ .

Tota aquesta sèrie de valors  $m_i$ , la podem interpretar com una *màscara* que s'aplica a les dades per tal d'eliminar o modificar aquelles dades que no aporten informació útil, o en altres paraules, aquelles dades contaminades pel soroll.

D'altra banda, en el nostre cas aquests plans wavelet  $w_m$  estan clarament relacionats amb la imatge residu (no residual), doncs és la que ens mostra la diferència entre la projecció  $\mathbf{h}$  i les dades  $\mathbf{p}$ , que no és més que el soroll  $\mathbf{n}$  afegit a la imatge (veure equació 3.3). Però, quina és exactament l'expressió de la variable  $w_m$ ?

El que volem assegurar és que la diferència entre el pla wavelet  $\omega^p$  (pla wavelet de les dades originals) i el pla wavelet  $\omega^h$  (pla wavelet de la projecció actual) sigui el més propera possible a l'estadística del soroll. En forma algebraica, fem

$$\omega_{m,j} = \omega_{m,j}^p - \omega_{m,j}^h . \quad (3.18)$$

Un altre avantatge que aporta aquesta tècnica és que ja no és necessari determinar el punt d'aturada en les iteracions de l'algorisme. En els mètodes anteriors ens vèiem forçats a aturar l'algorisme per evitar que el soroll s'amplifiqués. En la situació actual ja no és necessari preocupar-se pel punt d'aturada, doncs el propi algorisme 'autoregula' el nivell de reconstrucció a cada nova iteració recalculant  $m_i$ . La màscara de probabilitats  $m_i$  determina on s'ha de reconstruir i en quin grau, de manera que a mesura que ens aproximem al punt en què el residu és compatible amb l'estadística del soroll de la imatge, el nivell de reconstrucció tendeix a zero. Per tant, no ens hem de preocupar pel nombre d'iteracions que hem de donar a l'algorisme, i ens podem limitar a fixar un valor prou alt, que la pràctica mostra que es troba entre 100 i 1000 iteracions.

Però quan tenim dues imatges per poder fer una validació creuada, podem construir la màscara d'una altra manera. Podem construir una màscara que anomenem *màscara creuada*, és a dir, per a calcular la màscara utilitzem la projecció de l'objecte actual però les dades de la segona imatge. D'aquesta manera, la reconstrucció de la imatge  $A$  utilitza la imatge  $B$  per a definir la seva màscara, i la reconstrucció de la imatge  $B$  utilitza la imatge  $A$  per a construir la seva. En forma algebraica, l'expressió 3.18 ara és:

$$\omega_{m,j}^A = \omega_{m,j}^{p^B} - \omega_{m,j}^{h^A} .$$

Un cop presentat el mètode de detecció del senyal utilitzant la màscara  $m_i$ , podem incorporar aquesta detecció (o probabilitat de presència del senyal) a cadascun dels algorismes de reconstrucció presentats anteriorment.

A l'hora de comparar aquests algorismes amb els algorismes tradicionals, podem utilitzar les reconstruccions estàndard que ja tenim de l'apartat anterior, és a dir les imatges reconstruïdes de les figures 3.7 i 3.10.

### 3.13.1 Algorisme Gaussià

En el cas de l'algorisme Gaussià, podem incorporar la màscara de detecció del senyal en l'expressió 3.13 de la següent forma:

$$\left\{ \begin{aligned} W_{i_\omega}^{a, (k_{i_\omega} + 1)} = & K_{i_\omega} + W_{i_\omega, i}^{a, (k_{i_\omega})} + \\ & + \left( \frac{1}{q_i} \sum_{j=1}^D \left( f_{ji}' m_{i_\omega, j} (\omega_{i_\omega, j}^p - \sum_{l=1}^B f_{jl}' W_{i_\omega, l}^{a, (k_{i_\omega})} - b_j) \right) \right)^m \end{aligned} \right. \quad (3.19)$$

recordant que  $m$  és el paràmetre accelerador i  $m_{i_\omega, j}$  la màscara de detecció.

Donada la imatge residu (que és la que conté la informació necessària pel procés de reconstrucció), calculem la desviació estàndard  $\sigma_i$  en el veïnatge de cada píxel. Donada aquesta desviació, calculem la màscara de detecció del senyal  $m_j$ , i apliquem aquesta sobre la imatge residu com indica l'equació 3.19. Això ens modificarà la imatge residu de forma que en aquesta només hi serà present la informació provinent d'un senyal real i no del soroll, el que permet reconstruir la imatge sense incorporar la contribució d'aquest.

### 3.13.2 Algorisme Poissonià

En el cas de l'algorisme Poissonià, la incorporació de la màscara de detecció del senyal  $m_i$  a l'expressió 3.14 es realitza de la següent forma:

$$a_i^{(k+1)} = K a_i^{(k)} \left[ \frac{1}{q_i} \sum_{j=1}^D \frac{f_{ji}' \sum_{i_\omega} (\omega_{i_\omega, j}^{h(k)} + m_{i_\omega, j} (\omega_{i_\omega, j}^{p'} - \omega_{i_\omega, j}^{h(k)}))}{\sum_{l=1}^B f_{jl}' a_l^{(k)} + C_j b_j} \right]^m. \quad (3.20)$$

En aquesta expressió 3.20, modifiquem la contribució de cadascun dels plans wavelet de manera que fem variar el numerador entre els valors del pla wavelet  $\omega_{i_\omega, j}^{h(k)}$  de la projecció de l'objecte en el cas  $m_{i_\omega, j} = 0$ , i els valors del pla wavelet  $\omega_{i_\omega, j}^{p'}$  de les dades originals en el cas  $m_{i_\omega, j} = 1$ .

Mètode	Correlació
Poissonià estàndard	0.8895
Poissonià amb wavelets	0.9034
Poissonià amb wavelets i màscara	0.9527
Poissonià amb wavelets i màscara creuada	0.9541

Taula 3.3: Valors de la correlació entre la imatge objecte 3.2 i cadascuna de les reconstruccions 3.10, 3.11, 3.13 3.14

## 3.14 Resultats algorismes adaptatius

### 3.14.1 Algorisme Gaussià

Com que aquest algorisme no té gaire interès pràctic pels motius que hem exposat anteriorment (és un cas particular de l'algorisme Poissonià), no mostrem els resultats obtinguts per aquest.

### 3.14.2 Algorisme Poissonià

La imatge resultant de la reconstrucció utilitzant aquest algorisme es mostra en la figura 3.12.

Com es pot veure, l'aspecte visual d'aquesta reconstrucció és molt millor que el de la figura 3.10, obtinguda amb l'algorisme Poissonià estàndard. Però aquesta darrera imatge és la mitjana de dues reconstruccions estàndard aturades segons marca la versemblança creuada, en canvi la que acabem d'obtenir amb l'algorisme basat en wavelets que utilitza la màscara de detecció del senyal només és la reconstrucció d'una de les dues imatges sintètiques. Per tant, encara podem reconstruir la segona imatge i promitjar les dues, obtenint finalment la imatge de la figura 3.13. Podem tornar a comparar visualment aquesta amb la imatge 3.10. En la taula 3.3 podem veure les correlacions d'alguns dels mètodes anteriors i l'actual.

Utilitzant la màscara creuada de detecció del senyal, reconstruïm les dues imatges sintètiques i promitjem les imatges finals per obtenir una única reconstrucció final,



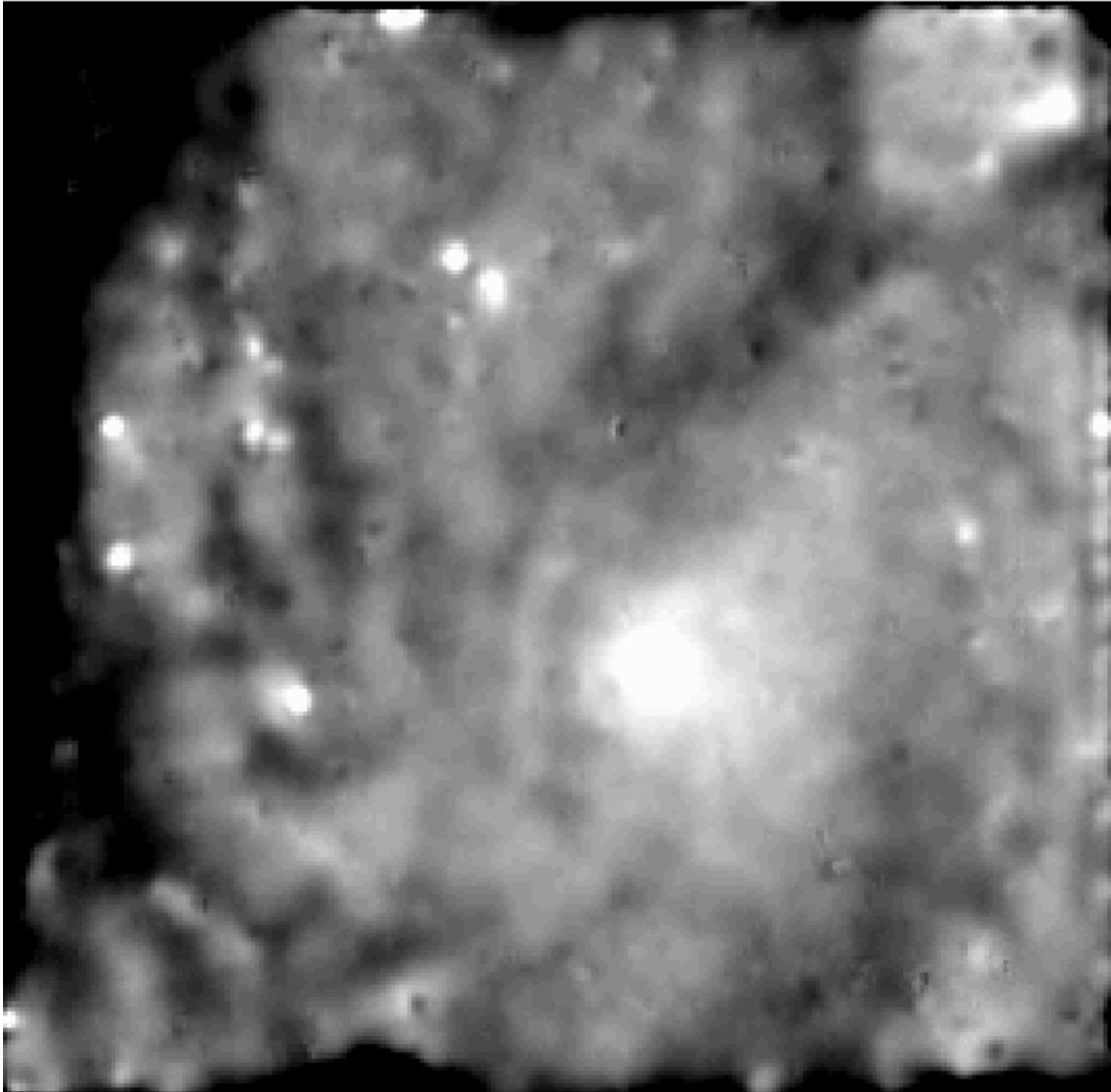


Figura 3.12: Reconstrucció obtinguda per l'algorisme Poissonià basat en wavelets utilitzant la màscara de detecció del senyal, i realitzant 100 iteracions.

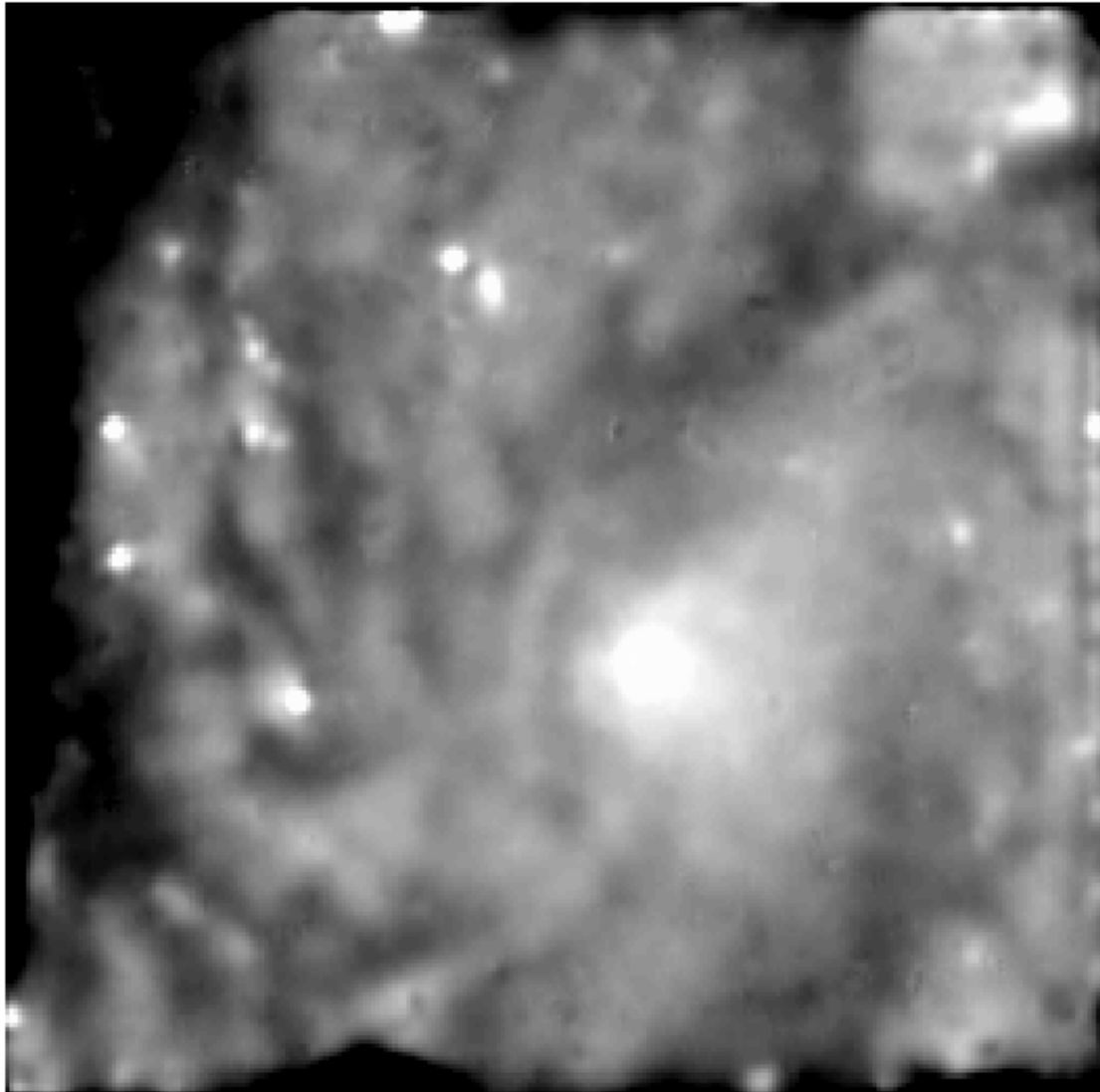


Figura 3.13: Reconstrucció utilitzant l'algorisme Poissonià basat en wavelets utilitzant la màscara de detecció del senyal i promitjant les dues reconstruccions.

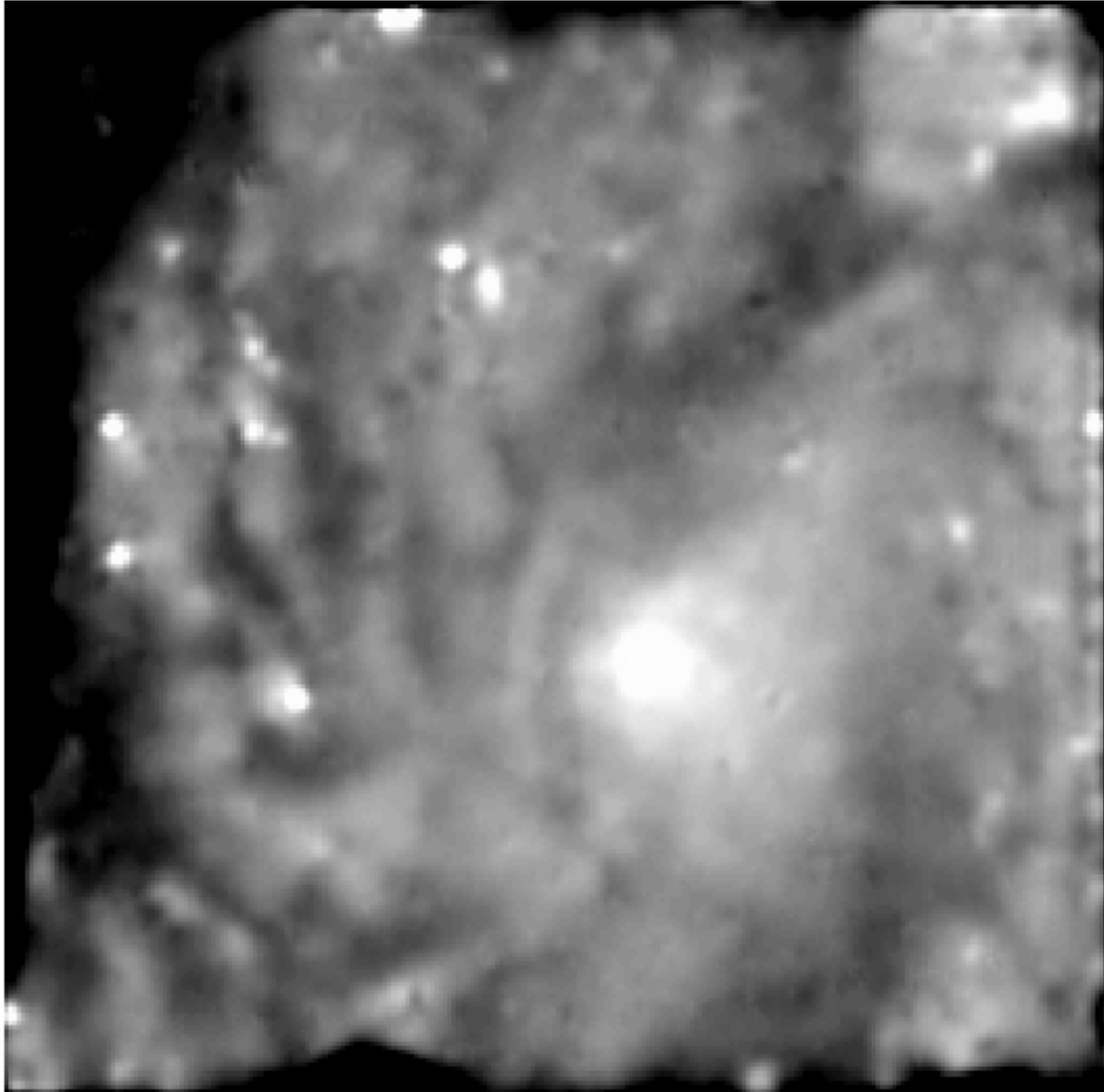


Figura 3.14: Reconstrucció utilitzant l'algorisme Poissonià basat en wavelets utilitzant la màscara creuada de detecció del senyal i promitjant les dues reconstruccions.

obtenint d'aquesta manera la imatge de la figura 3.14.

Mostrem en la taula 3.3 la correlació d'aquesta reconstrucció respecte la imatge objecte de la figura 3.2.

### 3.15 Conclusions algorismes adaptatius

Com es pot veure visualment en les imatges reconstruïdes, els algorismes basats en wavelets que utilitzen la màscara de detecció del senyal eviten clarament l'amplificació de qualsevol aportació del soroll, produint una imatge final neta d'artefactes estranys. També s'observa que el grau de reconstrucció de tots els detalls (estels, marges de zones extenses, etc) és el mateix que el de l'algorisme estàndard. Un altre avantatge d'aquest algorisme és que no necessita un punt d'aturada, doncs el grau de reconstrucció s'ajusta automàticament a cada iteració, convergint d'aquesta manera a una solució final on el residu té la mateixa estadística que el soroll original de la imatge.

En la taula de correlacions, es veu clarament com les reconstruccions obtingudes amb el nostre mètode són molt més properes a la imatge objecte simulada que les que donen els mètodes estàndard.

A (Greiner et al., 1999) es pot veure una aplicació dels algorismes de reconstrucció basats en wavelets utilitzant la màscara de detecció del senyal, concretament en la detecció d'objectes *X-ray burster*.

### 3.16 Aplicació a la detecció de lents gravitatòries

Una de les moltes aplicacions dels algorismes de reconstrucció d'imatges és en la detecció d'objectes dèbils. Un exemple actual dels camps on s'utilitzen aquestes tècniques és en la detecció de lents gravitatòries (Sabbey et al., 98), a banda de l'aplicació anteriorment anomenada (Greiner et al., 1999).

Els objectes amb una lluminositat aparent molt dèbil, apareixen submergits i contaminats pel soroll de fons de les imatges, o el que és el mateix, la seva intensitat és molt propera, i en alguns casos inferior, a la desviació estàndard del soroll. Això fa

que els algorismes de detecció d'objectes tinguin greus problemes a l'hora de detectar aquests objectes dèbils. Una solució a aquest problema és utilitzar els algorismes de reconstrucció d'imatges per tal d'intentar 'recuperar' aquests objectes perduts dins el soroll de fons. Però precisament el soroll és un dels elements amb els que no es comporten massa bé els algorismes de reconstrucció.

Quan es reconstrueixen imatges s'aconsegueix recuperar un gran nombre d'objectes inicialment indetectables, però el preu a pagar és l'augment de falses deteccions degut a l'amplificació del soroll en què aquests objectes es troben immersos. Per tant, a la pràctica ens veiem obligats a treballar amb diverses imatges per tal de poder discriminar les deteccions falses de les correctes.

Els algorismes de reconstrucció basats en wavelets que acabem de presentar eviten l'amplificació del soroll, intentant mantenir i recuperar la major part possible de la informació útil present en les dades. Per tant, semblen bons candidats per ajudar en aquesta mena de tasca, i òbviament hem avaluat el comportament dels nostres algorismes basats en wavelets davant les tècniques habituals per tal d'estimar els avantatges que poden aportar en una situació real.

La idea és reconstruir una imatge de baixa resolució i una molt baixa relació senyal-soroll, fer una detecció automàtica d'objectes i veure quants d'aquests són reals i quants són falsos. Per saber quins objectes són reals i quins no, compararem la imatge reconstruïda amb una imatge d'alta resolució, i una alta relació senyal-soroll. Aquells objectes que apareguin en els dos conjunts de dades seràn objectes reals. Procedint d'aquesta manera, podem obtenir una estimació numèrica del comportament dels algorismes.

Un dels projectes actuals per a detectar lents gravitatòries és el projecte QUEST (Sabbey et al., 98). Aquest projecte treballa amb la cambra Schmidt d'1 metre, a  $f/3$ , del CIDA (Centro de Investigaciones de Astronomia, a Venezuela). Aquesta és la tercera cambra Schmidt més gran del món i cobreix un camp de  $5 \times 5$  graus. El detector està format per un mosaic de  $4 \times 4$  detectors CCD de  $2048 \times 2048$  píxels cadascun utilitzant la tècnica d'observació drift-scanning (Gehrels et al., 86), donant una amplada final d'imatge de 2 graus i 1 arcsec/píxel.

El que s'intenta en el projecte QUEST és trobar quasars per moviments propis, variabilitat o a partir del diagrama color-color. Un cop s'ha obtingut una llista de candidats utilitzant alguna de les anteriors tècniques, s'intenta seleccionar de

les imatges brutes aquells que podrien estar lensats. Això es fa buscant aquells candidats que presenten elongacions pronunciades que podrien ser degudes a una component veïna (segona component de la lent). Malgrat tot, aquest procediment de selecció sobre les imatges presenta molts problemes, donat que la resolució de les imatges ( $2'' - 3''$ ) dificulta la discriminació correcta dels candidats. Ja que la reconstrucció d'imatges incrementa la resolució, pot ser una eina interessant a l'hora de millorar la selecció de candidats a quasars lensats.

En cas de trobar un candidat a lent gravitatòria, es realitza una segona observació de confirmació amb el telescopi WIYN de 3.5 metres a Kitt Peak. S'utilitzen imatges CCD normals (no drift-scanning) utilitzant un mosaic format per 2 detectors CCD de 2048x4096 cadascun, donant una resolució de 0.191 arsec/píxel.

Donat un parell d'imatges reals obtingudes amb aquests dos instruments, podem realitzar un estudi del comportament dels mètodes basats en wavelets que acabem de presentar en front dels mètodes estàndard de reconstrucció d'imatges. En el nostre cas hem comparat els resultats que donen el mètode de màxima versemblança Poissonià basat en wavelets amb màscara de detecció del senyal, i el mètode Richardson-Lucy, equivalent al mètode estàndard Poissonià.

### 3.16.1 Resultats dels mètodes

La detecció dels objectes presents en una imatge s'ha realitzat amb el software *sextractor*. No explicarem aquí els detalls a l'hora d'utilitzar aquest software, doncs són molts i no són l'objecte d'estudi del nostre treball.

Es comprova que el nombre d'objectes detectats abans d'una reconstrucció és inferior als que es detecten finalment en aquesta, però això comporta el perill de reconstruir senyal provinent del soroll, i per tant que moltes d'aquestes deteccions siguin falses. Com que les imatges que es reconstrueixien provenen del QUEST, per saber quines deteccions es corresponen amb objectes reals i quines no, es comparen amb les que s'obtenen de la imatge provinent del WIYN.

Per a realitzar aquest estudi s'ha reconstruït un retall d'una imatge del QUEST de 223x360 píxels, considerant un background variable estimat a partir de la mateixa imatge.

En la gràfica de la figura 3.15 mostrem el nombre total d'objectes detectats en la reconstrucció obtinguda pel mètode Richardson-Lucy juntament amb els detectats en la imatge QUEST original. Es pot observar que a mesura que augmenta el nombre d'iteracions, augmenta el nombre d'objectes detectats, essent aproximadament estable a partir de les 80 iteracions. En l'eix d'abcisses hi tenim un dels paràmetres utilitzats en el procés de la detecció d'objectes: el *threshold* (en català, *dintell de detecció*), o nombre de 'sigmes' del soroll de fons per sota del qual considerem que no podem detectar objectes. Un altre dels paràmetres del procés de detecció d'objectes és el *deblending*, relacionat amb la separabilitat dels objectes, i que hem definit com *deblending* = 0. El punt de la corba que aporta més informació és el corresponent a *threshold* = 0.5, ja que d'aquesta manera utilitzem quasi tota la informació present en la imatge, fins i tot la del soroll que hi pugui haver.

Però aquestes gràfiques ens mostren el nombre total d'objectes detectats, el que vol dir que alguns d'ells són falsos. Per a detectar els objectes falsos creuem totes aquestes deteccions amb les que s'obtenen de la imatge del WIYN. En la figura 3.16 mostrem el nombre d'objectes reals que hi ha a la gràfica 3.15. Es pot veure que el nombre d'objectes ha disminuït considerablement i, concretament pel cas de 80 iteracions i *threshold* = 0.5, el nombre de deteccions falses és exactament de 228, un 36% de les deteccions totals. Tot i així, és probable que algunes d'aquestes deteccions encara siguin fictícies, ja que el mètode Richardson-Lucy amplifica molt el soroll de fons. L'experiència demostra que dins un cercle de radi  $\simeq 3$  píxels tenim una probabilitat molt alta de trobar un màxim local en la imatge reconstruïda degut únicament a l'amplificació del soroll. Això vol dir que algun d'aquests màxims locals pot coincidir amb la posició d'un estel real per pura casualitat i que, per tant, d'una banda aquest percentatge de falses deteccions encara pot ser major i d'altra banda que el nombre d'estels realment reconstruïts pot ser menor.

En les figures 3.17 i 3.18 mostrem les mateixes gràfiques però pel mètode Poissonià basat en wavelets i amb màscara de detecció del senyal. En aquest cas el nombre de deteccions falses és de 19, només un 6% sobre les deteccions totals.

En la taula 3.4 resumim tots aquests resultats.

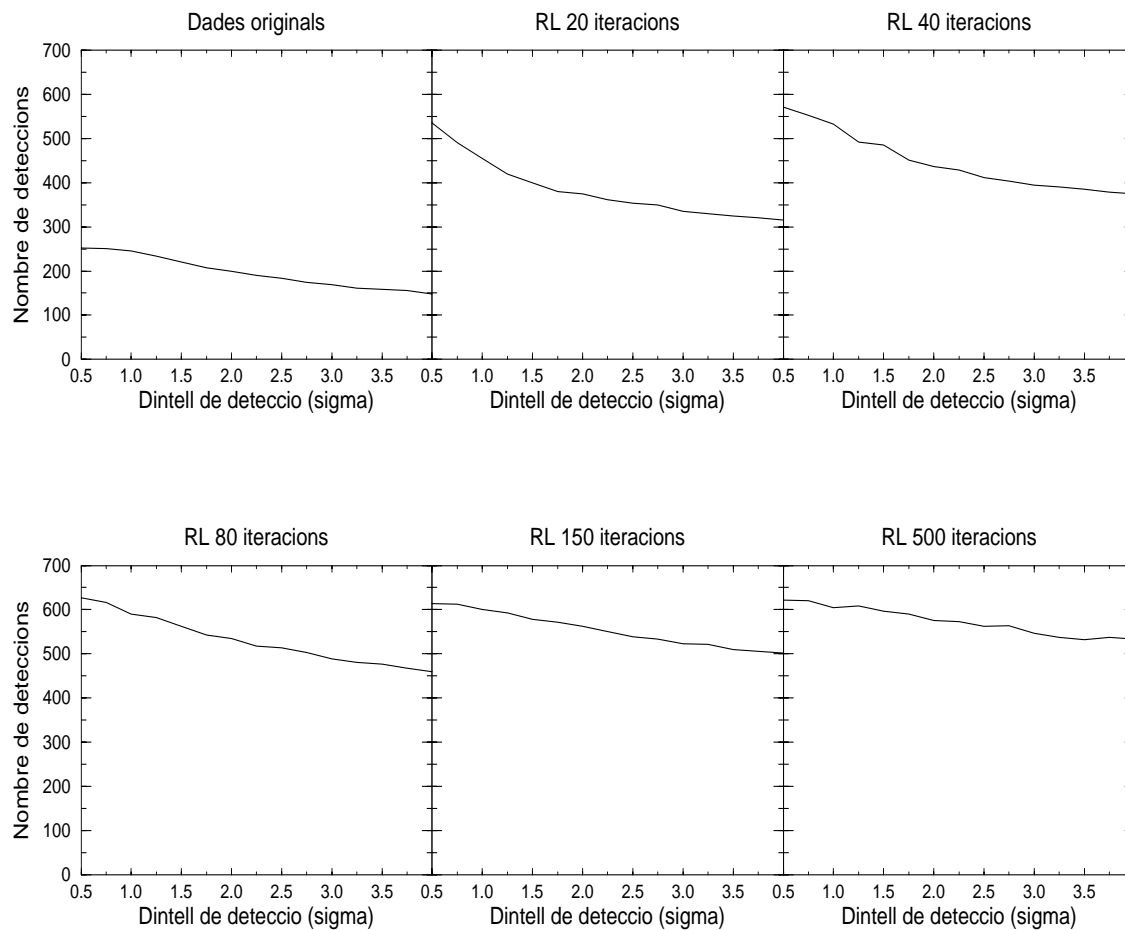


Figura 3.15: Objectes detectats en la reconstrucció de la imatge QUEST obtinguda pel mètode Richardson Lucy en diverses iteracions del mètode.



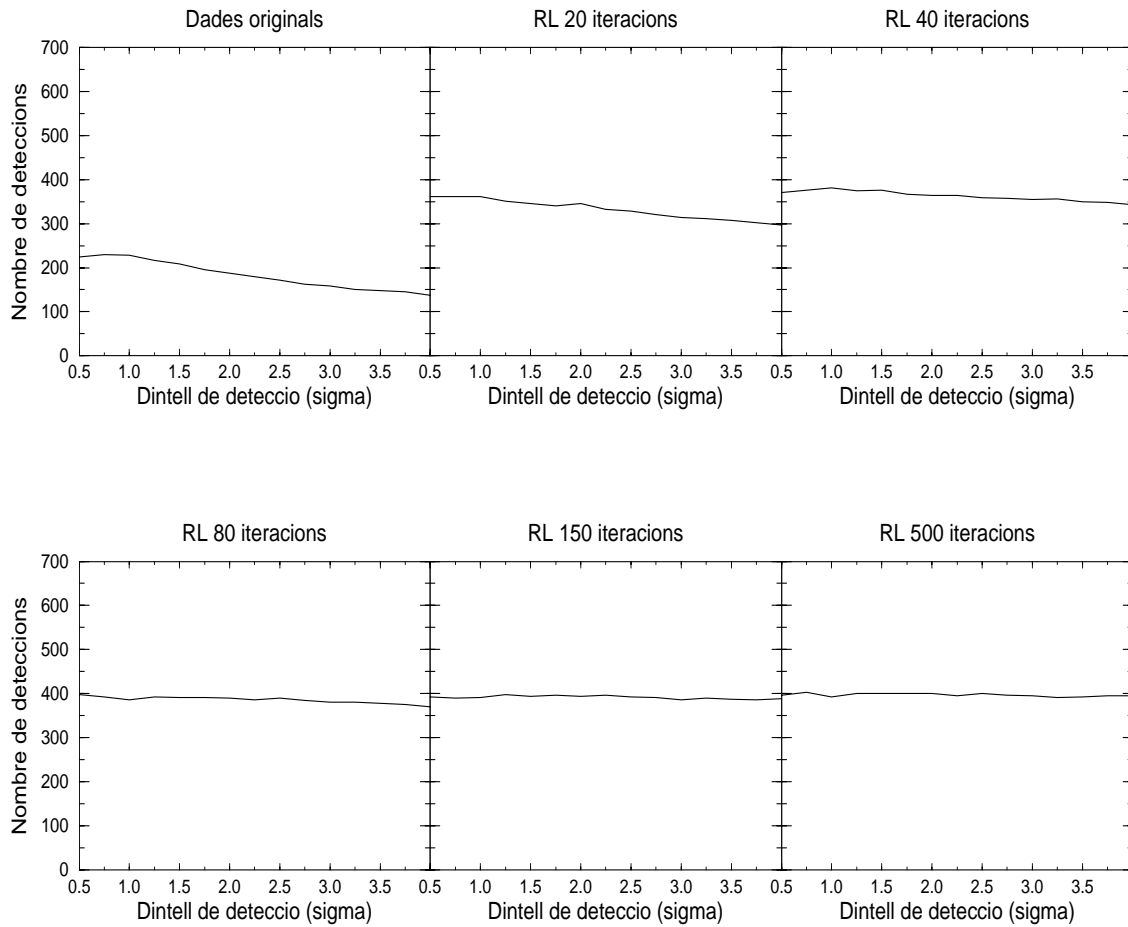


Figura 3.16: Objectes reals detectats en la reconstrucció de la imatge QUEST obtinguda pel mètode Richardson Lucy després de crear les dades de la figura 3.15 amb les deteccions de la imatge WIYN.

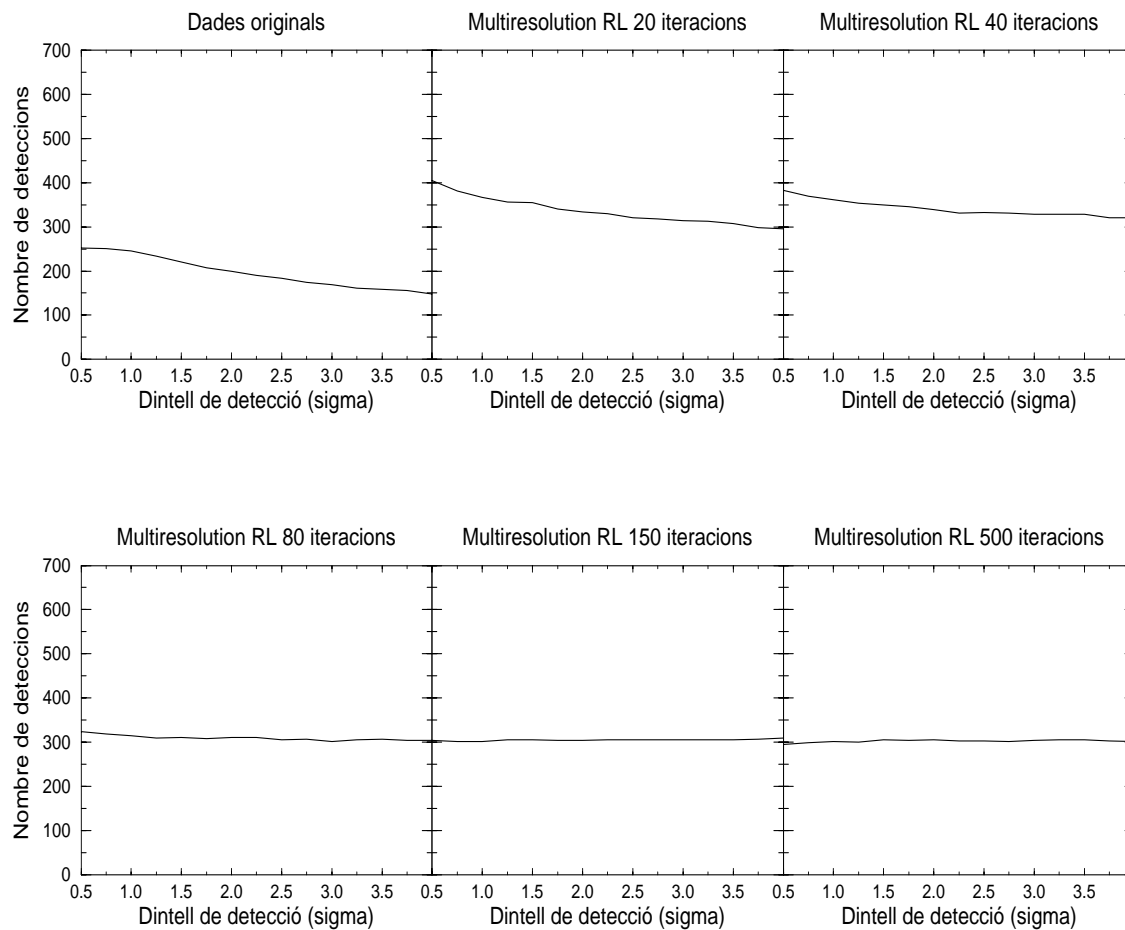


Figura 3.17: Objectes totals detectats en la reconstrucció de la imatge QUEST obtinguda pel mètode Poissonià basat en wavelets i amb màscara de detecció del senyal.

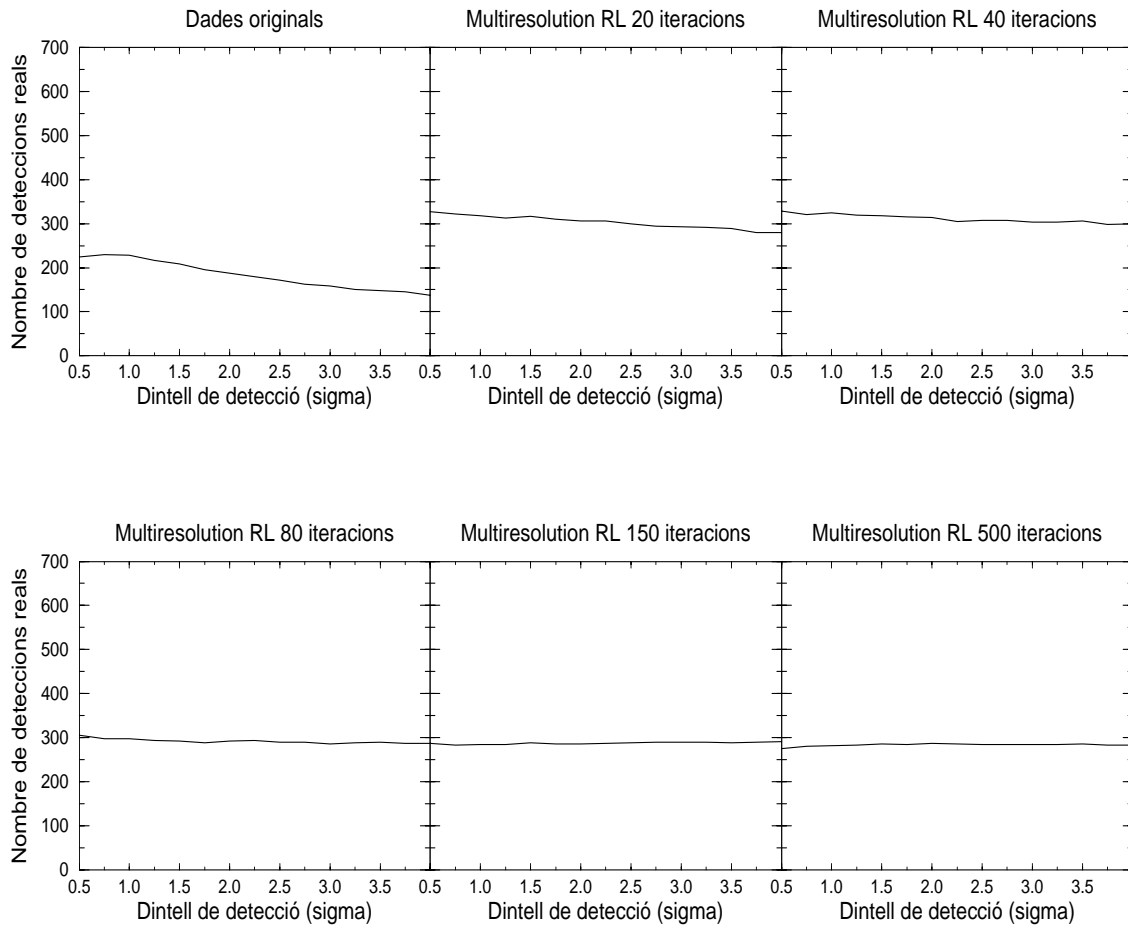


Figura 3.18: Objectes reals detectats en la reconstrucció de la imatge QUEST obtinguda pel mètode Poissonià basat en wavelets i amb màscara de detecció del senyal, després de crear les dades de la figura 3.17 amb les deteccions de la imatge WIYN.

Mètode	# deteccions totals	# deteccions falses	# deteccions correctes	% error
Richardson-Lucy	628	228	400	36%
Wavelets	324	19	305	6%

Taula 3.4: Nombre deteccions totals, deteccions falses, deteccions reals (la resta de les dues anteriors) i el percentatge d'error sobre les deteccions totals. Reconstruccions amb 80 iteracions i  $\text{threshold}=0.5$ .

Com es pot veure en aquesta taula, l'algorisme Poissonià basat en wavelets i amb màscara de detecció del senyal, dona un nombre de falses deteccions molt inferior al Richardson-Lucy. Això vol dir que el nostre mètode no reconstrueix el soroll, i que ens dona un alt grau de fiabilitat respecte els detalls reconstruïts en la imatge. Només 1 de cada 16 estels presents en la reconstrucció són falsos. En canvi el mètode Richardson-Lucy mostra molts estels que no són reals, exactament amb una proporció de 1 de cada 3. Això redueix molt la fiabilitat del mètode, el que vol dir que ens podem fiar molt poc dels resultats obtinguts.

D'altra banda, cal comentar que el mètode Richardson-Lucy afegeix molts estels falsos, però entre tots els estels detectats molts d'ells són estels reals. El nostre mètode mostra molt pocs estels falsos, però pràcticament tots els que mostra són reals, sense presentar un dèficit massa gran en el nombre d'objectes reals detectats respecte el mètode Richardson-Lucy.

A la vista d'aquests resultats, pot semblar que la millor opció és utilitzar el mètode Richardson-Lucy, donat que hem pogut separar els estels reals dels falsos gracies a la comparació amb la imatge WIYN. Però a la pràctica quasi mai ens trobarem en la situació privilegiada de disposar d'una imatge d'alta qualitat amb la que puguem comprovar els resultats. En aquest punt és quan es necessita un mètode que doni resultats fiables, que no inclogui dades falses o altament contaminades. El mètode de reconstrucció basat en wavelets aquí presentat és un d'aquests.

## 3.17 Conclusions generals

Com s'observa en les taules de correlacions, els mètodes basats en wavelets donen resultats més propers a l'objecte real que els mètodes tradicionals. L'amplificació del soroll es menor en aquells, tant en els mètodes globals en els que s'atura la reconstrucció de cada pla wavelet en un punt diferent, com en els que utilitzen la màscara de detecció del senyal, que es poden iterar sense cap límit. El mètode Richardson-Lucy amplifica el soroll, afegint molts detalls i objectes falsos en la imatge reconstruïda final.

En l'aplicació de la detecció de lents gravitatòries (o detecció d'objectes) es demostra que els mètodes basats en wavelets permeten recuperar pràcticament tots els objectes perduts en el soroll de fons de la imatge sense afegir objectes falsos ni amplificar aquest soroll de fons. Pràcticament la totalitat dels objectes que apareixen en la imatge són objectes reals, sense haver de pagar el preu de recuperar un nombre excessivament inferior. Aquests resultats ens permeten donar una gran credibilitat als resultats obtinguts amb els mètodes basats en wavelets. Això és degut a la filosofia inicial del mètode: reconstruir només allà on hi ha senyal. Això ens porta a reconstruir objectes reals, i a obtenir en la imatge reconstruïda característiques reals de l'objecte sense contaminació del soroll i pràcticament sense objectes falsos. El mètode podria haver resultat massa conservador, en el sentit que podria no haver reconstruït molts objectes reals, però tal com es demostra no ha estat així, donat que el mètode convergeix a una solució estable on el residu final té la mateixa estadística que el soroll original de la imatge.

En canvi, els mètodes tradicionals amplifiquen el soroll a la vegada que recuperen els objectes, convertint la detecció dels objectes reals en una tasca certament complicada en la presència d'un únic joc de dades.

## 3.18 Vies de continuació

En vista dels resultats obtinguts amb els mètodes basats en wavelets, de l'experiència obtinguda en treballar amb aquests mètodes i de l'abordament d'un dels problemes del projecte QUEST, es plantegen diversos reptes per ampliar l'estudi d'aquests algorismes, així com la millora dels seus resultats. Els punts més importants es

poden resumir en:

- Estudi de la conservació de la fotometria.
- Utilització d'un nombre indefinit d'imatges de partida.
- Noves tècniques per a la confecció de les màscares.
- Utilització de les wavelets en algorismes de super-resolució.
- Implementació d'algorismes basats en wavelets per a la deconvolució d'imatges interferomètriques òptiques i en Radioastronomia.
- Formulació en termes de conjunts difusos (*fuzzy sets*).
- Estudi de la contribució del soroll en el nombre de deteccions falses d'estels.

Pràcticament no hi ha estudis seriosos i sistemàtics sobre el comportament fotomètric dels mètodes de reconstrucció d'imatges. Aquest és un punt molt important per aclarir, doncs els avantatges que aporten aquests mètodes (millora en l'astrometria, detecció d'objectes, etc) es poden veure molt limitats en un camp tant important en l'Astronomia com es la fotometria. Primerament caldria fer un estudi del comportament fotomètric dels mètodes de reconstrucció clàssics (Richardson-Lucy, Màxima Entropia, etc) i a continuació l'estudi dels mètodes basats en wavelets. El futur prometedor d'aquests algorismes en el camp de la detecció d'objectes, es podria veure minvat per culpa d'un mal comportament fotomètric.

D'altra banda, els mètodes de reconstrucció sempre treballen sobre la base de disposar d'una única imatge de partida. En el cas de disposar de més d'una imatge les tècniques actuals es limiten a combinar les reconstruccions individuals fent una suma, i utilitzar com a màxim un segon joc de dades per a calcular la versemblança creuada. És necessari establir un mètode de combinació de qualsevol nombre d'imatges, i que no sigui un mètode *a posteriori* com els actuals, sinó que tota la informació de les imatges s'utilitzi en el procés de reconstrucció. La introducció de la màscara de detecció del senyal obre la possibilitat de quantificar la presència d'objectes a partir d'un nombre il·limitat d'imatges de partida. La comparació dels diferents plans wavelet de les diverses imatges i la combinació de la informació que es pot obtenir d'ells, pot donar-nos una guia cap a l'obtenció d'unes dades més properes a la realitat. Es podria aconseguir un gran pas endavant en el projecte QUEST

si es pogués combinar de forma òptima la informació de les diverses imatges que es prenen de la mateixa zona del cel. La probabilitat de detecció dels quasars candidats a ésser lensats podria incrementar-se de manera considerable.

En aquest treball, la confecció de les màscares (o la detecció dels objectes reals) s'ha realitzat a partir d'una mesura de l'estadística local de les dades. Per a obtenir una millor estimació del grau d'informació present en les dades, serien molt més útils tècniques més avançades que ja han demostrat la seva utilitat en aquest tipus de problemes. Les tècniques candidates més idònies provenen del camp de la intel·ligència artificial, com les xarxes neuronals i els conjunts difusos, essent aquests els que semblen més adequats donada l'evident incertesa i natura de les dades observacionals.

Les tècniques de super-resolució (reconstruir la imatge original en un espai objecte amb un mostreig diferent al de les dades) presenten el problema de la interpolació necessària per passar de l'espai imatge a l'espai objecte. Diverses tècniques han estat explorades (replicació de píxels, interpolació en l'espai de Fourier, etc), però cap d'elles dona resultats excessivament convincents. Una possibilitat és utilitzar les wavelets per a realitzar aquesta interpolació, ja sigui afegint plans wavelet de resolució superior sense cap tipus d'informació (imatges planes nul·les), o extrapolant els valors dels plans de resolució inferior al pla immediatament superior. Hem realitzat una exploració preliminar de la primera tècnica, obtenint uns resultats que no presenten els problemes de les tècniques habituals (aspecte quadriculat en la replicació de píxels, o efectes de Gibbs en utilitzar la Transformada de Fourier).

La deconvolució de les dades interferomètriques en Radioastronomia es realitza amb el mètode CLEAN. Aquest mètode no té una base matemàtica gaire sòlida, tot i que experimentalment s'observa que els resultats són acceptables. El principal problema del mètode CLEAN es presenta quan es treballa amb fonts extenses. Aquestes són recuperades amb molta dificultat, i per tant és necessari desenvolupar nous algorismes. Hem realitzat uns estudis preliminars, i hem observat que un dels principals inconvenients pels mètodes estadístics és la presència dels lòbuls negatius de la PSF sintètica, obtinguda de la combinació interferomètrica de les antenes. La utilització de les wavelets, donat que precisament treballem amb valors negatius, podria ajudar a l'obtenció d'un mètode per a poder treballar amb PSF's amb valors negatius.

Els fonaments dels conjunts difusos, com la incertesa, els graus de pertinença no binaris (si/no) a un determinat conjunt, variables i valors associats aproximats, etc., són ideals en aquest problema de deconvolució de dades sorolloses. Les variables que s'utilitzen en la formulació dels algorismes de deconvolució i detecció d'objectes tenen, indiscutiblement, l'aspecte d'una variable difusa.

La distribució aleatòria d'estels en un camp estelar determinat, pot estar relacionada en un percentatge, que pot ser important, amb les posicions dels estels reals presents en aquest camp. Això modifica l'estadística del nombre d'estels reals detectats quan es comparen les posicions de la distribució aleatòria i els estels reals. Es necessita un estudi detallat del comportament de l'algorisme de reconstrucció Richardson-Lucy per a poder estimar amb més precisió el comportament d'aquest mètode a l'hora de detectar objectes dèbils.



# Capítol 4

## Anàlisi de períodes

*Una fuga és una obra cíclica: una veu canta una melodia mentre una altra comença una mica més tard, repetint la mateixa melodia en harmonia amb la primera.*

- Davitt Moroney

### 4.1 Mètodes PDM i CLEAN

En Astronomia ens trobem en moltes ocasions amb detectors que presenten eficiències quàntiques molt baixes o amb un registre de fotons molt baix. Això implica que les nostres dades estan dominades pel soroll Poissonià i que, per tant, presenten una relació senyall-soroll molt baixa i una pobre estadística, el que presenta greus problemes en l'anàlisi i procés d'aquestes dades (determinació de flux, periodicitats, etc.).

Un exemple molt comú d'aquest tipus de dades són les provinents de detectors de fonts de raigs X. Sovint aquestes fonts no presenten un únic període de variabilitat, sinó diversos senyals periòdics superposats produïts per mecanismes físics també diferents, com per exemple sistemes de dos cossos que presenten eclipsis o ocultacions per discos d'acreció que precessionen.

En la literatura astronòmica trobem molts mètodes de determinació de periodicitats en els senyals, però els dos més utilitzats són els mètodes PDM (Stellingwerf, 78) i CLEAN (Roberts et al., 87). No presentem aquí el funcionament d'aquests dos algorismes, doncs no mostra cap informació rellevant per a l'exposició del treball realitzat. Referim el lector a la bibliografia esmentada. Aquests dos mètodes funcionen correctament quan es treballa amb dades que presenten un únic període, però quan es tracta de dades que presenten diferents senyals periòdics superposats, aquests mètodes mostren un comportament altament depenent de la naturalesa intrínseca de cadascun dels senyals. Cada senyal pot presentar diverses característiques espectrals (amplituds i perfils), i segons aquestes l'algorisme detecta millor un tipus de senyal o un altre.

Per exemple, prenem un senyal sinusoidal de gran amplitud combinat amb un senyal de baixa amplitud i diferent període, amb una certa relació senyal-soroll. Si s'utilitza el mètode PDM per a detectar aquests períodes, el senyal de gran amplitud es detecta molt fàcilment, però el de baixa amplitud es perd i és indetectable fins i tot amb una relació senyal-soroll relativament alta. En canvi, si utilitzem el mètode CLEAN els dos senyals sinusoidals són detectats sense problemes, fins i tot amb relacions senyal-soroll molt baixes. Això és degut a que l'algorisme CLEAN és idoni per a detectar senyals sinusoidals, donat que descomposa el senyal en funcions sinusoidals i troba la correlació entre aquests sinusoides i el senyal que s'analitza.

Com a segon exemple prenem dos senyals de naturalesa molt diferent: un sinusoides amb una gran amplitud i de període molt llarg, i una seqüència de bursts de curt període, però amb una separació entre bursts molt gran si la comparem amb l'amplada de cadascun d'ells, per tal d'evitar que la sèrie de bursts es pugui aproximar per una funció sinusoidal. Fem que aquestes dades presentin una relació senyal-soroll igual a l'amplitud del burst. Tant el mètode PDM com el CLEAN detecten perfectament el període sinusoidal de gran amplitud, però cap dels dos és capaç de detectar la sèrie de bursts. Com més gran és la diferència entre les característiques espectrals dels senyals, més difícil és determinar el període de cadascun dels dos senyals. Més endavant veurem exemples pràctics on es presenta aquesta situació.

Per tant, quan es treballa amb senyals fins i tot poc sorollosos, els algorismes habituals donen com a resultat períodes incerts, poc rellevants o ficticis, i per tant es fa necessari obtenir algun algorisme capaç de tractar dades que presentin diferents

senyals superposats, aquests amb característiques espectrals i estadístiques molt diferents.

La filosofia de les funcions wavelet està directament lligada amb el concepte de la separabilitat de senyals de diferents propietats espectrals, i per tant ens pot permetre aïllar cadascun dels senyals presents en les nostres dades i analitzar-los separatament, evitant d'aquesta manera les influències mútues entre senyals, així com la del soroll (Ribó et al., 2000), (Otazu et al., 2001a).

## 4.2 Dades equiespaiades

En el cas que les nostres dades siguin equiespaiades en el temps, podem utilitzar algorismes de descomposició en wavelets que ens permeten obtenir la transformada inversa de manera eficient, i més concretament podem utilitzar l'algorisme *à trous* tal com es mostra en (Otazu et al., 2001a). En els casos en què les nostres dades no són equiespaiades, podem generar un conjunt de dades equiespaiades ja sigui per interpolació o reducció de les dades originals, però aquest pas degrada la informació estadística del nostre conjunt de dades, tot i que ens permet utilitzar els algorismes de descomposició en wavelets que necessitem, tal com veurem a continuació. En el cas que volguem tractar directament amb les dades brutes, podem utilitzar algorismes multiresolució que segueixen la mateixa filosofia que els algorismes de descomposició en wavelets, però aquests no ens asseguren que les dades obtingudes es puguin descriure com un desenvolupament de funcions wavelet. En aquest cas podem actuar tal com mostrem en la secció de dades no equiespaiades d'aquest mateix capítol i en (Otazu et al., 2001b).

### 4.2.1 Algorisme basat en wavelets

Donat un conjunt de dades equiespaiades que conté diferents senyals periòdics, no necessàriament sinusoidals, de diferents característiques espectrals i estadístiques, podem descomposar aquestes dades en wavelets. D'aquesta manera podem intentar aïllar cadascun d'aquests senyals i estudiar-los per separat.

Per tant, podem descriure l'esquema general de l'algorisme basat en wavelets per a l'anàlisi de períodes de la següent manera:

- Escollir un valor per a  $n$  i descomposar les dades originals  $\mathbf{p}$  en  $n$  plans wavelet  $\omega_l$  ( $l = 1, 2, \dots, n$ ).
- Determinar els períodes presents en cadascun dels anteriors  $n$  plans wavelet  $\omega_l$ .

El mètode per a determinar els períodes presents en cada pla wavelet  $\omega_l$  pot ser qualsevol dels existents, per exemple PDM i/o CLEAN. Nosaltres preferim utilitzar el mètode PDM, donat que un cop aïllats els diferents senyals, aquest mètode no depèn de la forma i perfil de cadascun d'aquests senyals. En canvi, el mètode CLEAN treballa millor amb senyals amb perfils sinusoidals, i per tant la seva eficàcia es veu limitada a aquest tipus de senyals. Si hem aïllat, per exemple, un senyal format per una sèrie de bursts, detectarem molt millor el seu període amb el mètode PDM que no pas amb el CLEAN. D'altra banda, si volem trobar el període d'un senyal que inicialment sabem que és sinusoidal, el millor mètode per detectar-lo és el CLEAN, però sovint no es disposa d'aquesta informació *a priori*.

L'algorisme que aquí presentem s'ha d'interpretar simplement com una millora dels algorismes clàssics, tant PDM i CLEAN com qualsevol altre, donat que es descomposen en wavelets les dades a analitzar abans d'utilitzar qualsevol dels algorismes de determinació de períodes.

Es podrien utilitzar altres algorismes basats en wavelets (Foster, 1996) (Szatmáry et al., 1994) per trobar periodicitats en un senyal. Aquests algorismes es basen en la discretització de la transformada wavelet contínua, és a dir, en el càlcul de la correlació de la funció wavelet que defineix la base directament sobre les dades, i per tant els resultats depenen fortament de la funció wavelet escollida. Això presenta greus problemes quan s'intenta ajustar una funció base amb una certa aparença sinusoidal a un senyal compost de, per exemple, bursts molt separats. L'única manera de detectar la periodicitat d'aquesta sèrie de bursts és trobar aquella funció base que presenti dos màxims locals separats exactament la mateixa distància que hi ha entre dos bursts. El coeficient de correlació presentarà un cert increment, però serà molt petit degut a que el mètode treballa amb una funció que no s'adapta de manera òptima a les dades que analitza. Es podria intentar utilitzar una funció wavelet que s'assemblés a aquesta dispersa sèrie de bursts, però en una situació real això implicaria un coneixement *a priori* sobre les dades que quasi mai es dona. Un altre problema d'aquesta mena d'algorismes és l'elevat temps de càlcul necessari. Per a obtenir els coeficients d'aquesta transformada s'han de realitzar operacions que

computacionalment són molt cares, el que implica temps de càlcul inacceptables (de l'ordre d'hores) per a conjunts de dades realment petits ( $\sim 1000$  punts). En l'Apèndix B mostrem l'algorisme que hem desenvolupat per optimitzar i paral·lelitzar un dels mètodes basats en wavelets utilitzats en aquest tipus d'anàlisi de periodicitats, el que es basa en la *Morlet Wavelet*.

A partir d'aquí, i per comoditat de notació, anomenarem WPDM i WCLEAN als algorismes basats en wavelets que presentem.

### 4.2.2 Resultats

Per avaluar el comportament de WPDM i WCLEAN en front de PDM i CLEAN, hem generat diversos conjunts de dades simulades que contenen dos senyals periòdics superposats. Cada conjunt de dades es compon d'una funció sinusoidal primària de gran amplitud i un senyal secundari de baixa amplitud. Pel darrer cas hem utilitzat dos tipus de funcions: sinusoides i Gaussianes. Les primeres intenen simular fonts variables amb un perfil purament sinusoidal (per exemple degut a discos d'acreció), i les segones events de tipus burst (com pulsos o eclipsis). Finalment hem afegit un soroll Gaussià blanc a aquesta combinació de senyals. S'ha incrementat el valor de la desviació estàndard d'aquest soroll fins el valor en que la detecció dels senyals periòdics és estadísticament no significativa en ambdós mètodes, clàssics i basats en wavelets.

A continuació mostrem les característiques dels senyals sintètics generats:

- Cada senyal ha estat generat com un conjunt de dades equiespaiades format per 1000 punts, separats entre ells una unitat.
- La funció sinusoidal de gran amplitud, presenta una amplitud  $A=1$  i un període  $P=108.5$  unitats ( $u$ ). S'ha triat aquest període per satisfer dues condicions: no ser un divisor exacte del nombre de punts en el conjunt de dades, i permetre la presència de més de 5 períodes sencers en el senyal simulat per garantir la possibilitat de detecció.
- Les amplituds de les funcions periòdiques de baixa amplitud (sinusoidals o Gaussianes) són  $A=0.1$  i  $A=0.5$ .

- Els períodes utilitzats per a les funcions secundàries són 13.13 i 23.11  $u$ . Es podrien utilitzar altres períodes, satisfent que no siguin harmònics del període de la funció sinusoidal de gran amplitud.
- En el cas del senyal Gaussià, hem utilitzat dos valors per a l'amplada a alçada meitat: FWHM=2  $u$  i FWHM=6  $u$ , respectivament.

En les tres primeres columnes de la taula 4.1 i 4.2 mostrem els paràmetres utilitzats per a generar cada senyal de tipus sinus+sinus. En les taules 4.3 i 4.4 les tres primeres columnes mostren els paràmetres utilitzats per a generar els senyals de tipus sinus+burst.

Quan s'intenta detectar un senyal periòdic en un joc de dades, el procediment habitual és processar les dades simultàniament amb els mètodes PDM i CLEAN. Els resultats proporcionats per ambdós mètodes s'utilitzen conjuntament per a determinar un valor pel període. Es pot utilitzar un procediment semblant amb els plans wavelet dels mètodes WPDM i WCLEAN, ja que l'ús conjunt d'aquests dos mètodes ens ajuda a discriminar entre falses deteccions i períodes reals. Per tant, quan comparem els mètodes tradicionals i els basats en wavelets ho hem de fer comparant el comportament de la combinació PDM-CLEAN amb el de la combinació WPDM-WCLEAN.

Els mètodes tradicionals PDM i CLEAN només proporcionen una única font d'informació, o el que és el mateix, un únic conjunt de dades a interpretar per tal de detectar els senyals periòdics. En canvi, els mètodes basats en wavelets ens donen diferents sortides, una per cada pla wavelet, i per tant augmenten les probabilitats de detectar un senyal periòdic i faciliten la detecció de períodes dubtosos o falsos. Podem intentar trobar un mateix període en diferents plans wavelet, el que ens ajuda a eliminar les habituals deteccions falses dels mètodes PDM i CLEAN, i ens permet detectar correctament els períodes reals.

El període primari ( $P=108.5 u$ ) és sempre detectat per tots els mètodes, i no es mostra en les taules 4.1, 4.2, 4.3 i 4.4. En aquestes, les quatre darreres columnes mostren les períodes detectats de baixa amplitud per a cada conjunt de dades utilitzant PDM, CLEAN, WPDM i WCLEAN, respectivament. Quan un període no es detecta es mostra un guió, i es mostra un interrogant quan la detecció és dubtosa o difícil. Quan s'indica un valor pel període en els mètodes basats en wavelets, també es mostren entre parèntesi els plans wavelet on es detecta.

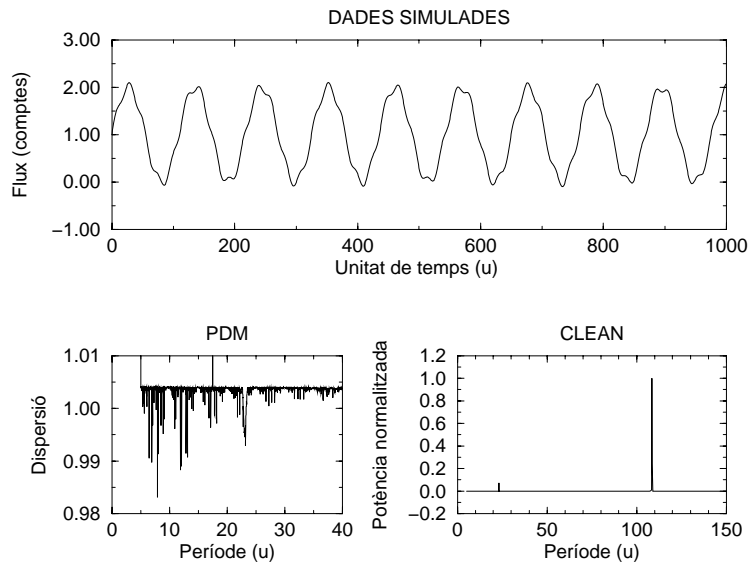


Figura 4.1: Senyal sinus+sinus amb amplituds  $A=1.0$  i  $A=0.1$ , períodes  $P=108.5$  i  $P=23.11$ , i  $\sigma_{soroll} = 0$ . Resultats dels mètodes PDM i CLEAN.

### Senyal sinus+sinus

En la figura 4.1 es mostra una realització d'un senyal sintètic format per dos senyals sinusoidals purs sense soroll, així com les sortides dels mètodes PDM i CLEAN (en el PDM es busquen mínims i els seus subharmònics, mentre que en el CLEAN es busquen màxims i els seus harmònics). En el cas del PDM, s'ha ampliat la gràfica per a intentar detectar el mínim en el període  $P=23.11$  u. És evident, fins i tot en el cas de senyals sense soroll, que el mètode PDM és incapaç de detectar el senyal secundari ( $P=23.11$  u). En canvi, CLEAN és capaç de detectar-lo fins i tot amb una potència normalitzada menor a 0.1, que és precisament la relació entre les amplituds dels dos senyals periòdics. La sortida del mètode WPDM es mostra en la figura 4.2 i la del WCLEAN en la figura 4.3. Tal com s'espera, el període secundari només es detecta en els primers plans wavelet ( $\omega_1$  a  $\omega_4$ ), mentre que el període primari  $P=108.5$  u es detecta millor en els darrers plans ( $\omega_3$  a  $\omega_6$ ). Hem treballat fins el pla  $\omega_6$ , ja que en aquest pla el període  $P=108.5$  u es detecta perfectament, i no hi ha cap motiu per seguir treballant amb valors d' $n$  més grans. Al llarg de tot aquest treball s'ha utilitzat  $n = 6$ .

Si s'observen amb atenció les taules 4.1 i 4.2 es poden observar uns certs patrons de comportament:

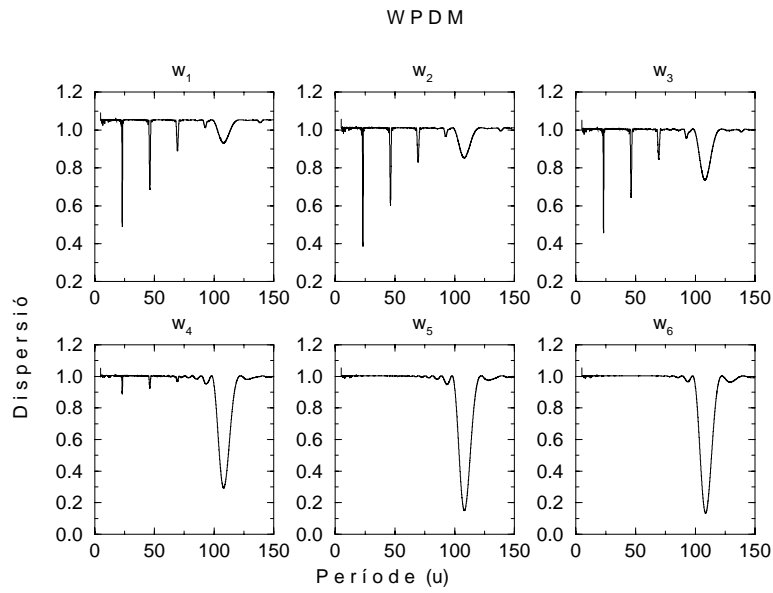


Figura 4.2: Dades de sortida del mètode WPDM per cadascun dels plans wavelet obtinguts a partir del senyal de la figura 4.1.

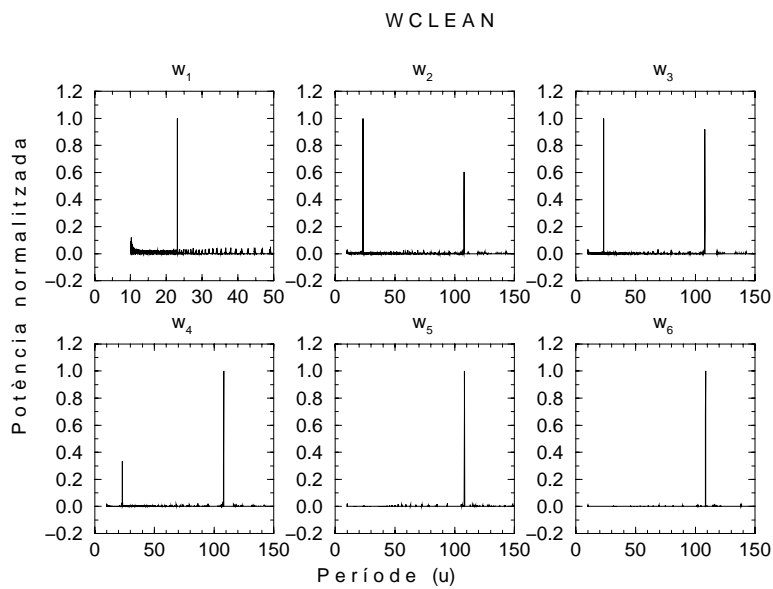


Figura 4.3: Dades de sortida del mètode WCLEAN per cadascun dels plans wavelet obtinguts a partir del senyal de la figura 4.1.



Taula 4.1: Paràmetres utilitzats per a generar el senyal sintètic de tipus sinus+sinus i els períodes detectats per a cada mètode, així com els plans wavelet en que es detecta el període. Pel senyal periòdic principal:  $A=1.0$  i  $P=108.5$ . Els paràmetres del període secundari es mostren a la primera i segona columna. Mostreig temporal equiespaiat.

Període	Amplitud	Soroll (desv. estd.)	PDM	CLEAN	WPDM	WCLEAN
13.13	0.1	0.0	-	13.13	13.13 (1,2,3)	13.13 (1,2,3)
"	"	0.1	-	13.12	13.13 (2,3)	13.13 (2,3)
"	"	0.2	-	13.11	13.11 (2,3)	13.11 (2,3)
"	"	0.4	-	13.09	13.09 (2,3)	13.09 (2,3)
"	"	0.6	-	13.09?	13.09 (3)	13.09 (2,3)
"	"	0.8	-	-	13.08 (3)	13.08 (2,3)
"	"	1.0	-	-	13.08 (3)	13.08 (2,3)
"	"	1.2	-	-	13.07 (3?)	13.07 (2?,3?)
"	"	1.4	-	-	13.07 (3?)	13.07 (2?,3?)
"	"	1.6	-	-	-	-
"	0.5	0.0	13.13	13.13	13.13 (1,2,3)	13.13 (1,2,3)
"	"	0.5	13.12	13.12	13.13 (2,3)	13.13 (2,3)
"	"	1.0	13.12	13.12	13.13 (2,3)	13.13 (2,3)
"	"	2.0	13.09	13.09	13.13 (2,3)	13.13 (2,3)
"	"	3.0	13.08?	13.08?	13.13 (2?,3)	13.13 (2,3)
"	"	4.0	-	-	13.13 (3)	13.13 (2,3)
"	"	5.0	-	-	13.13 (3)	13.13 (2?,3)
"	"	6.0	-	-	13.13 (3?)	13.13 (3?)
"	"	8.0	-	-	-	-

Taula 4.2: Paràmetres utilitzats per a generar el senyal sintètic de tipus sinus+sinus i els períodes detectats per a cada mètode, així com els plans wavelet en que es detecta el període. Pel senyal periòdic principal:  $A=1.0$  i  $P=108.5$ . Els paràmetres del període secundari es mostren a la primera i segona columna. Mostreig temporal equiespaiat.

Període	Amplitud	Soroll (desv. estd.)	PDM	CLEAN	WPDM	WCLEAN
23.11	0.1	0.0	-	23.11	23.11 (1,2,3,4)	23.11 (1,2,3,4)
"	"	0.1	-	23.12	23.11 (2,3,4)	23.11 (2,3,4)
"	"	0.2	-	23.12	23.13 (3,4)	23.13 (3,4)
"	"	0.4	-	23.12?	23.11 (3,4)	23.11 (3,4)
"	"	0.6	-	-	23.17 (3,4)	23.17 (3,4)
"	"	0.8	-	-	23.13 (3?,4)	23.13 (3?,4)
"	"	1.0	-	-	23.13 (4?)	23.11 (4?)
"	"	1.2	-	-	-	-
"	0.5	0.0	23.11	23.11	23.11 (1,2,3,4)	23.11 (1,2,3,4)
"	"	0.5	23.11	23.11	23.11 (2,3,4)	23.11 (1,2,3,4)
"	"	1.0	23.10	23.12	23.12 (2?,3,4)	23.13 (2?,3,4)
"	"	2.0	23.11	23.11	23.11 (3,4)	23.11 (3,4)
"	"	3.0	-	23.11?	23.17 (3?,4)	23.17 (3?,4)
"	"	4.0	-	-	23.13 (4?)	23.13 (4?)
"	"	5.0	-	-	-	-

- El mètode CLEAN es comporta millor que el PDM, donat que el darrer presenta greus problemes quan es treballa amb senyals periòdics superposats de baixa amplitud. Només quan l'amplitud del senyal secundari és prou propera a la del senyal primari ( $A=0.5$ ), el PDM és capaç de detectar-lo.
- En tots els mètodes, i sobretot en el cas de relacions senyal-soroll baixes, els períodes detectats són lleugerament diferents als reals.
- WPDM i WCLEAN són sempre superiors en rendiment a PDM i CLEAN. Quan CLEAN detecta marginalment el període secundari, WPDM i WCLEAN no tenen gaire problemes per detectar-lo, i funcionen prou bé amb nivells superiors de soroll. En el cas WPDM, els resultats són sempre molt millors que els del PDM.
- A mesura que creix el nivell de soroll, la detecció comença a fallar en els primers plans (freqüències altes), i només els darrers plans (freqüències baixes) estan prou lliures de soroll per a detectar-hi els períodes.
- La màxima relació entre el soroll i l'amplitud del senyal per a detectar un període amb WPDM i WCLEAN, és quasi constant donat un cert període, essent 12 pel període  $P=13.13 u$  i al voltant de 8 pel de  $23.11 u$ . El motiu d'aquesta diferència és que hi ha 76 períodes sencers en el cas del període  $P=13.13 u$ , i només 43 períodes sencers en el cas del període  $P=23.11 u$ .

### Senyal sinus+burst

En la figura 4.4 es mostra la descomposició wavelet d'un joc de dades del tipus sinus+burst. En els primers plans wavelet ( $\omega_1$  i  $\omega_2$ ) hem pogut aïllar la contribució del burst. En el pla  $\omega_3$  hi ha una contribució simultània dels dos períodes, però en els plans de més baixa resolució només hi contribueix el període més llarg ( $P=108.5u$ ).

S'ha de remarcar que l'ús de dos valors diferents pel FWHM del burst, combinat amb dos períodes ( $13.13 u$  i  $23.11 u$ ), ens dóna 4 perfils diferents. D'aquí, la durada del burst va des de valors molt petits fins valors molt alts en el següent ordre: FWHM=2  $u$  i  $P=23.11 u$ , FWHM=2  $u$  i  $P=13.13 u$ , FWHM=6  $u$  i  $P=23.11 u$ , i finalment FWHM=6  $u$  i  $P=13.13 u$ .

En vista dels resultats que es mostren en les taules 4.3 i 4.4, arribem a les següents conclusions:

Taula 4.3: Paràmetres utilitzats per a generar el senyal sintètic de tipus sinus+burst, amb una amplada pel burst Gaussià  $\text{FWHM}=2 u$ . Mostreig temporal equiespaiat.

Període	Amplitud	Soroll (desv. estd.)	PDM	CLEAN	WPDM	WCLEAN
13.13	0.1	0.0	-	13.13	13.13 (1,2,3)	13.13 (1,2,3)
"	"	0.1	-	-	13.13 (2?,3?)	13.11 (3?)
"	"	0.15	-	-	-	-
"	0.5	0.0	-	13.13	13.13 (1,2,3)	13.13 (1,2,3)
"	"	0.5	-	13.14	13.14 (2,3)	13.14 (2?,3)
"	"	0.75	-	-	13.15 (2?,3?)	-
"	"	1.0	-	-	-	-
23.11	0.1	0.0	-	23.11	23.11 (2?,3)	23.11 (2?,3)
"	"	0.1	-	-	23.11 (2?,3?)	23.11 (3?)
"	"	0.15	-	-	-	-
"	0.5	0.0	-	23.11	23.11 (2?,3,4)	23.11 (2?,3)
"	"	0.5	-	-	23.12 (2?,3?)	-
"	"	0.75	-	-	-	-
"	1.0	0.0	-	23.12	23.12 (2?,3,4)	23.12 (2?,3)
"	"	0.5	-	23.11?	23.13 (2?,3,4)	23.13 (3,4)
"	"	1.0	-	-	23.14 (2?,3?,4)	23.14 (3,4)
"	"	1.5	-	-	-	-

Taula 4.4: Paràmetres utilitzats per a generar el senyal sintètic de tipus sinus+burst, amb una amplada pel burst Gaussià FWHM=6  $u$ . Mostreig temporal equiespaiat.

Període	Amplitud	Soroll (desv. estd.)	PDM	CLEAN	WPDM	WCLEAN
13.13	0.1	0.0	-	13.13	23.12 (1,2,3)	13.13 (2,3)
"	"	0.1	-	13.13	23.13 (2,3)	13.13 (2,3)
"	"	0.2	-	13.13?	23.14 (2?,3)	13.13 (2?,3)
"	"	0.3	-	-	23.14 (3)	13.13 (2?,3?)
"	"	0.4	-	-	-	-
"	0.5	0.0	13.13	13.13	13.13 (1,2,3,4?)	13.13 (1,2,3,4?)
"	"	0.5	13.13	13.13	13.13 (2,3)	13.13 (2,3)
"	"	1.0	13.12?	13.12?	13.13 (2?,3)	13.13 (2?,3)
"	"	1.5	-	-	13.13 (2?,3)	-
"	"	2.5	-	-	-	-
23.11	0.1	0.0	-	23.11	23.11 (1,2,3,4?)	13.13 (1,2,3,4?)
"	"	0.1	-	23.12	23.11 (2,3,4?)	23.11 (2,3,4?)
"	"	0.15	-	23.12?	23.12 (2?,3,4?)	23.11 (2?,3,4?)
"	"	0.2	-	-	-	-
"	0.5	0.0	23.11	23.11	23.11 (1,2,3,4)	13.13 (1,2,3,4)
"	"	0.5	23.11	23.11	23.11 (2,3,4)	23.11 (2,3,4)
"	"	1.0	23.12?	23.12?	23.12 (3,4)	23.11 (3,4?)
"	"	1.5	-	-	23.12 (3?)	-
"	"	2.0	-	-	-	-

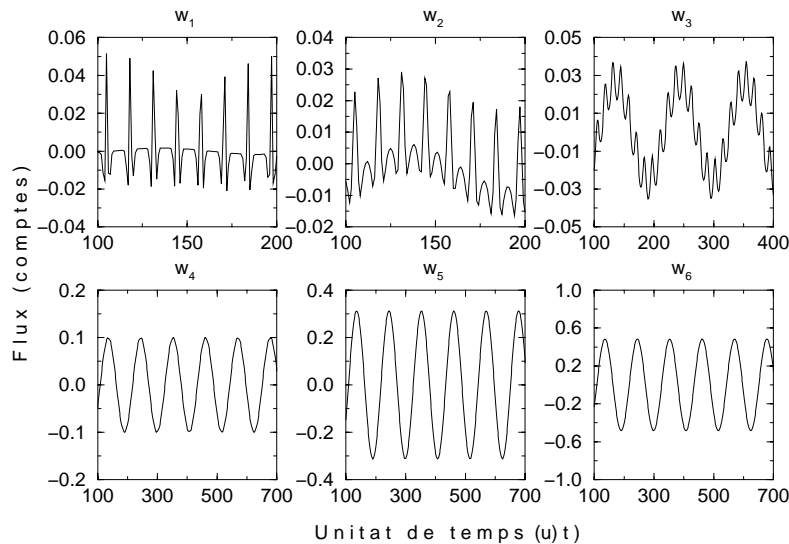


Figura 4.4: Descomposició en plans wavelet d'un senyal tipus sinus+burst amb un sinusoid amb  $P=108.5 u$ , i bursts amb  $P=13.13 u$ ,  $FWHM=2 u$  i  $A=0.1$ .

- Altre cop, hi ha un millor comportament del CLEAN que no pas del PDM, pels motius ja exposats anteriorment. No obstant, s'ha de tenir en compte que quan  $FWHM=2 u$ , PDM no detecta mai el període secundari. Només quan  $FWHM=6 u$  i  $A=0.5$ , PDM pot detectar els senyals periòdics de baixa amplitud.
- En tots els mètodes, amb relacions senyal-soroll baixes, els períodes detectats són lleugerament diferents als reals.
- WPDM i WCLEAN donen resultats sempre superiors als dels mètodes PDM i CLEAN. Quan CLEAN detecta marginalment el període secundari, WPDM i WCLEAN no tenen problemes per a detectar-lo i, a més, funcionen correctament fins i tot amb nivells de soroll superiors. En el cas WPDM, els resultats són sempre molt millors que amb PDM.
- A mesura que el soroll augmenta, les deteccions comencen a minvar en els primers plans wavelet (freqüències altes), i només els darrers (freqüències baixes) estan suficientment lliures de soroll com per a permetre la detecció dels períodes.
- En tots els casos on  $A=0.1$ , el comportament del WPDM és molt similar al del WCLEAN. En els casos  $A=0.5$ , WPDM és sempre millor que WCLEAN, ja que el senyal no és sinusoidal i l'amplitud és prou alta com per a permetre

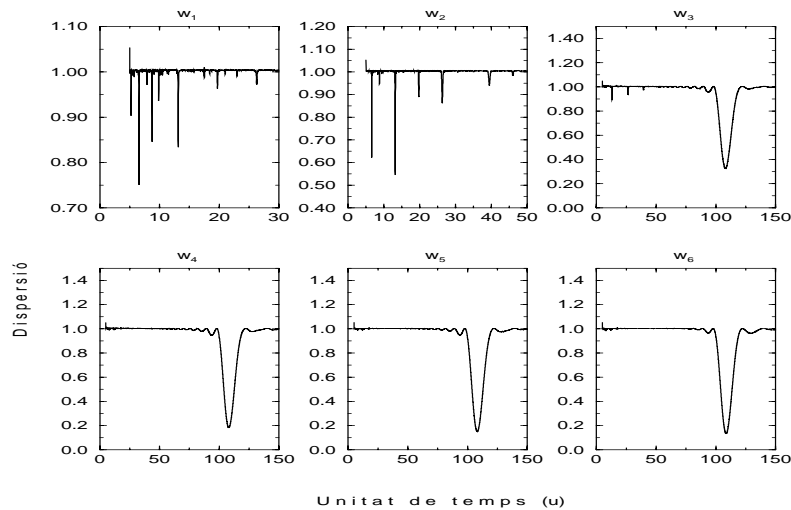


Figura 4.5: Resultat obtingut amb el mètode WPDM del senyal de la figura 4.4, on es pot apreciar la detecció de la separació entre els lòbuls negatius laterals al pic central del burst.

una bona detecció.

- Donada una amplitud del burst, la màxima relació soroll-senyal a la que arriben WPDM i WCLEAN augmenta amb la duració de la fase de FWHM.

Un efecte interessant que s'ha observat en alguns casos és la detecció, en aquells senyals generats on la contribució del soroll és petita, de períodes que no són cap dels dos períodes realment presents en les dades. En la figura 4.4 podem veure com els primers plans wavelet presenten uns petits lòbuls de valors negatius a cada costat del pic central que perfila el burst. Aquesta és una propietat intrínseca de les funcions wavelet, doncs la seva àrea total és nul·la. Aquests dos petits lòbuls fan que els mètodes d'estimació de períodes que s'utilitzen a continuació de la descomposició wavelet, sobretot el mètode PDM, vegin una periodicitat formada per la separació entre aquests dos lòbuls. Si observem els resultats obtinguts pel mètode WPDM en la figura 4.5 podem veure com apareixen els períodes que corresponen a aquesta separació entre lòbuls. En el pla wavelet  $w_1$  hi tenim períodes d'uns 4 i 6.5 dies, i en el pla  $w_2$  d'uns 6.5 dies, amb els seus corresponents harmònics.

A tall il·lustratiu, de la figura 4.6 fins a la 4.20 es mostra un exemple sencer del tipus sinus+burst, amb paràmetres:  $P=13.13 u$ ,  $FWHM=6 u$  i  $A=0.5$ . L'única diferència entre aquestes dades és el nivell de soroll, essent  $\sigma_{\text{soroll}} = 0.0$  en la figura

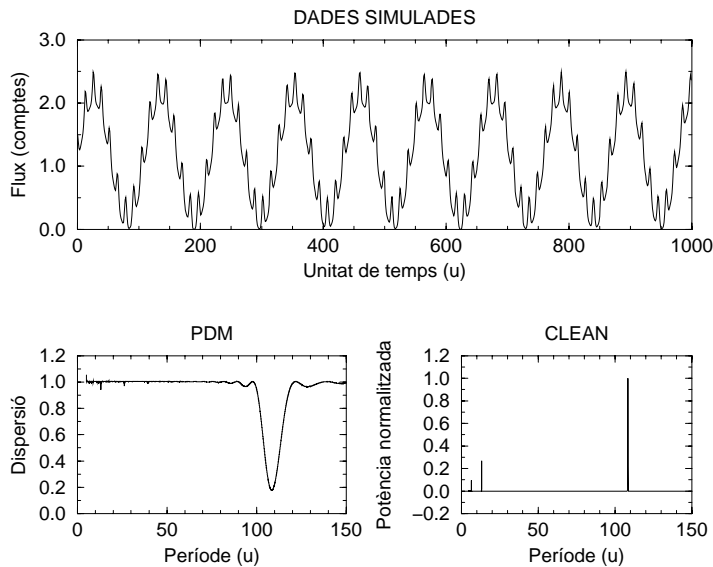


Figura 4.6: Senyal format per un sinusoide amb  $P=108.5$   $u$ , i bursts amb  $P=13.13$   $u$ ,  $\text{FWHM}=6$   $u$  i  $A=0.5$ ,  $\sigma_{\text{soroll}} = 0$ . Resultats dels mètodes PDM i CLEAN sobre aquest senyal.

4.6 fins  $\sigma_{\text{soroll}} = 2.0$  en la figura 4.10. Analitzant aquesta sèrie de resultats, es veu clarament com a mesura que s'incrementa el soroll els plans wavelet es modifiquen i deixen d'aportar informació útil. Es mostren tots els resultats que donen els mètodes PDM, CLEAN, WPDM i WCLEAN, essent evident que els mètodes PDM i CLEAN deixen de donar resultats acurats molt abans que WPDM i WCLEAN. D'altra banda, en el cas  $\sigma_{\text{soroll}} = 1.5$  el període no és detectat ni per PDM ni per CLEAN. WCLEAN tampoc el detecta: el màxim en la pla  $\omega_3$  no és prou indicatiu de la detecció d'un període i, a més, la seva posició és en el període  $P=15.5$   $u$ . L'única detecció que no presenta dubtes i amb un subharmònic és en el pla  $\omega_3$  del WPDM.

### 4.2.3 Conclusions

Els mètodes clàssics utilitzats en aquest treball (PDM i CLEAN) fallen quan treballen amb senyals periòdics superposats. Fins i tot amb relacions senyal-soroll altes o moderades, aquests mètodes no són capaços de detectar ambdós senyals periòdics. Amb els algorismes basats en wavelets que presentem és possible assolir nivells de relació senyal-soroll molt més baixos, i seguir detectant ambdós senyals periòdics i el valor dels seus períodes. En altres paraules, el límit inferior de relació senyal-soroll per a detectar ambdós períodes utilitzant els mètodes tradicionals PDM i CLEAN



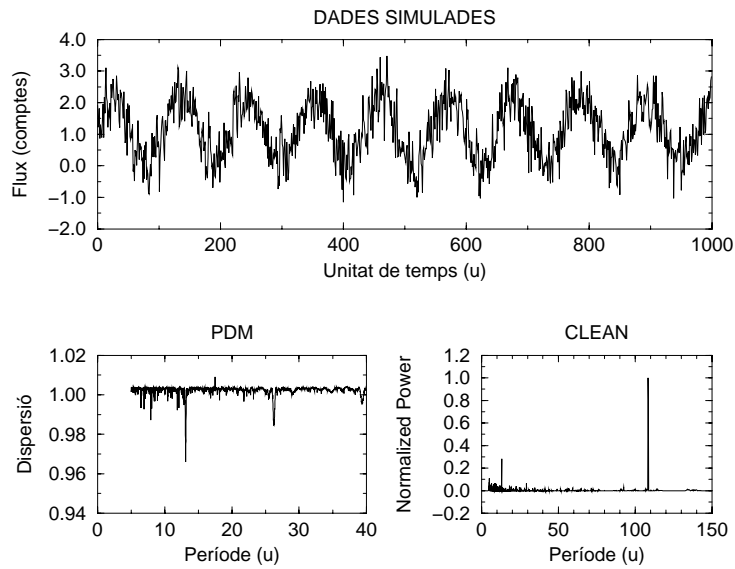


Figura 4.7: Senyal format per un sinusoides amb  $P=108.5$   $u$ , i bursts amb  $P=13.13$   $u$ ,  $\text{FWHM}=6$   $u$  i  $A=0.5$ ,  $\sigma_{\text{scroll}} = 0.5$ . Resultats dels mètodes PDM i CLEAN sobre aquest senyal.

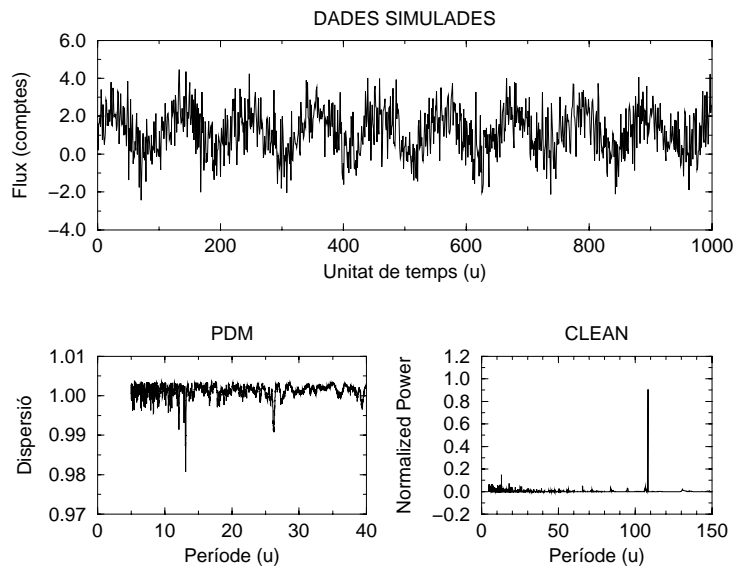


Figura 4.8: Senyal format per un sinusoides amb  $P=108.5$   $u$ , i bursts amb  $P=13.13$   $u$ ,  $\text{FWHM}=6$   $u$  i  $A=0.5$ ,  $\sigma_{\text{scroll}} = 1.0$ . Resultats dels mètodes PDM i CLEAN sobre aquest senyal.

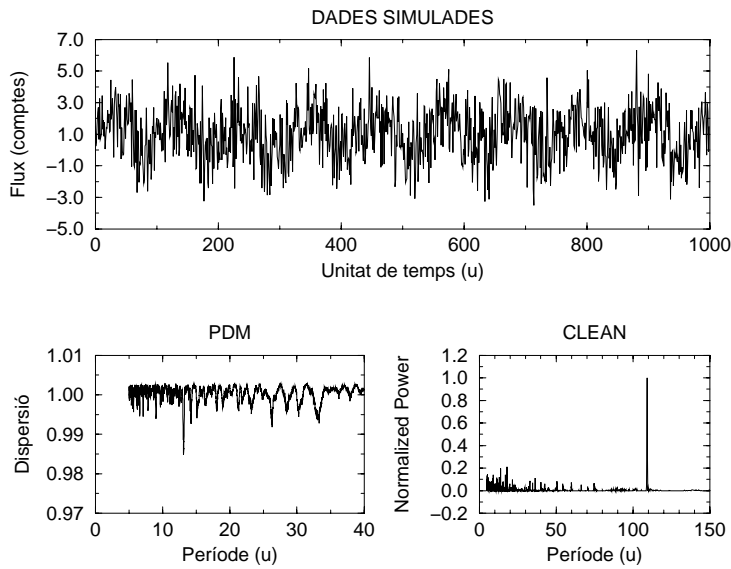


Figura 4.9: Senyal format per un sinusoid amb  $P=108.5$   $u$ , i bursts amb  $P=13.13$   $u$ ,  $FWHM=6$   $u$  i  $A=0.5$ ,  $\sigma_{soroll} = 1.5$ . Resultats dels mètodes PDM i CLEAN sobre aquest senyal.

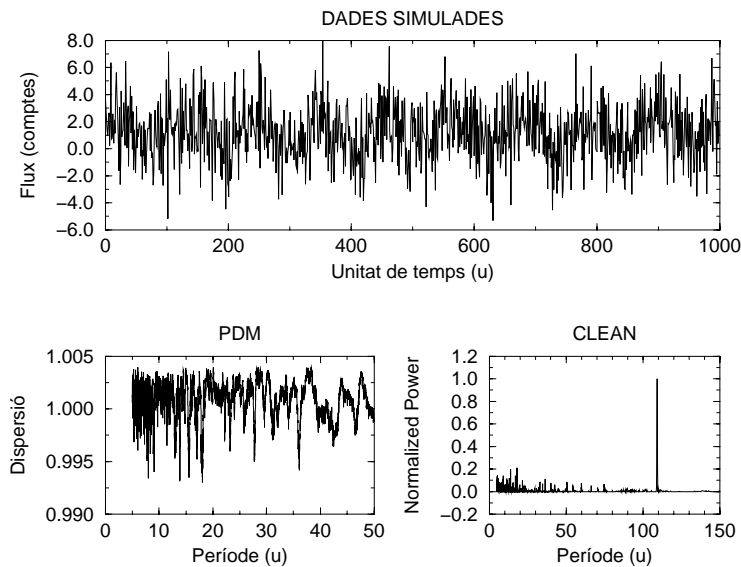


Figura 4.10: Senyal format per un sinusoid amb  $P=108.5$   $u$ , i bursts amb  $P=13.13$   $u$ ,  $FWHM=6$   $u$  i  $A=0.5$ ,  $\sigma_{soroll} = 2.0$ . Resultats dels mètodes PDM i CLEAN sobre aquest senyal.

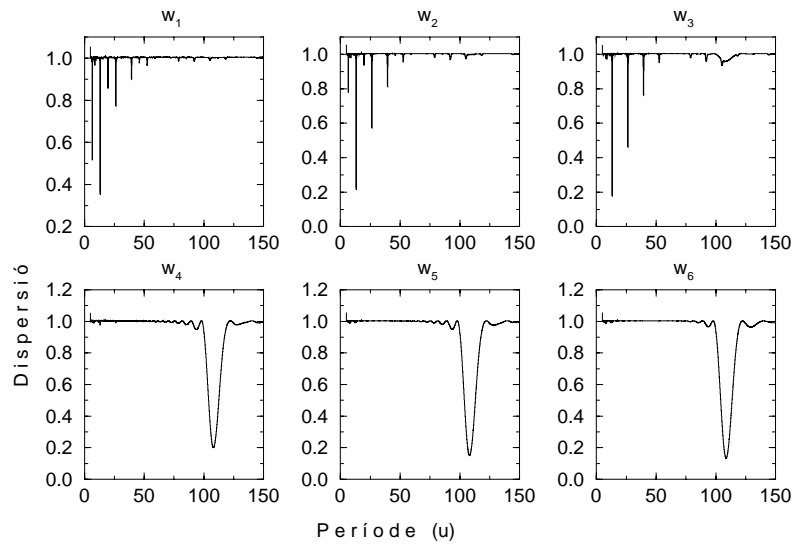


Figura 4.11: Resultat obtingut amb el mètode WPDM per a cada pla wavelet del senyal de la figura 4.6

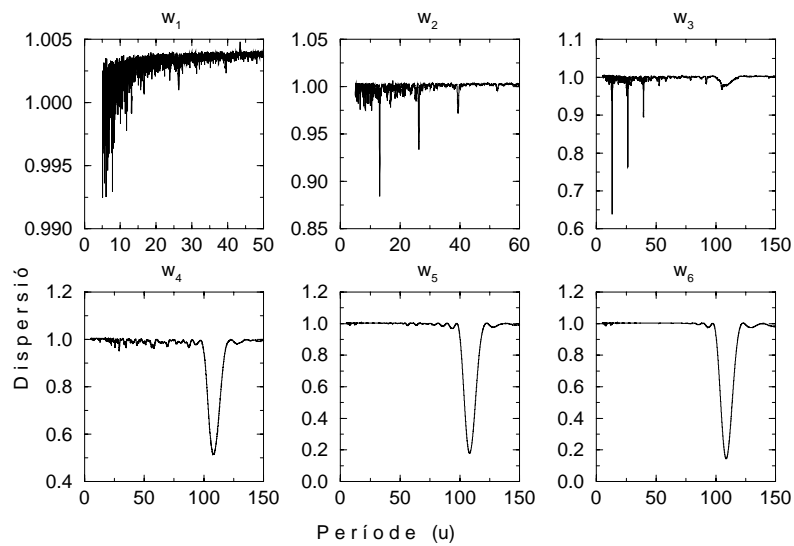


Figura 4.12: Resultat obtingut amb el mètode WPDM per a cada pla wavelet del senyal de la figura 4.7

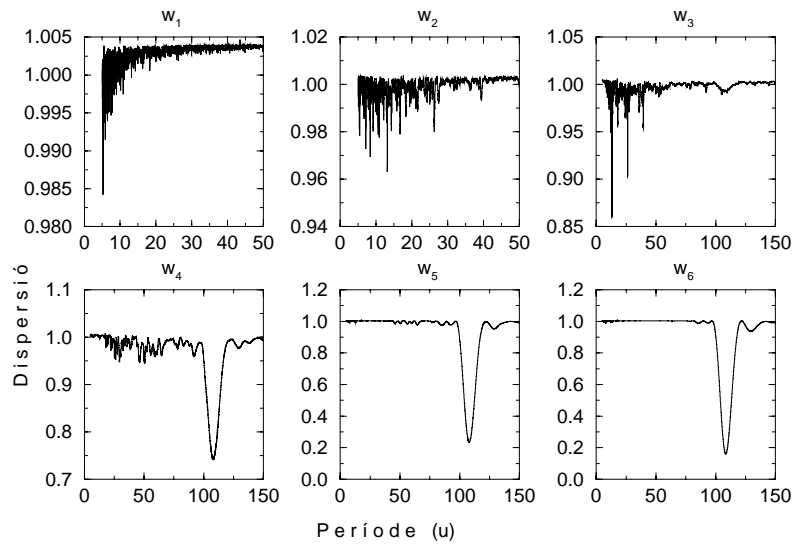


Figura 4.13: Resultat obtingut amb el mètode WPDM per a cada pla wavelet del senyal de la figura 4.8

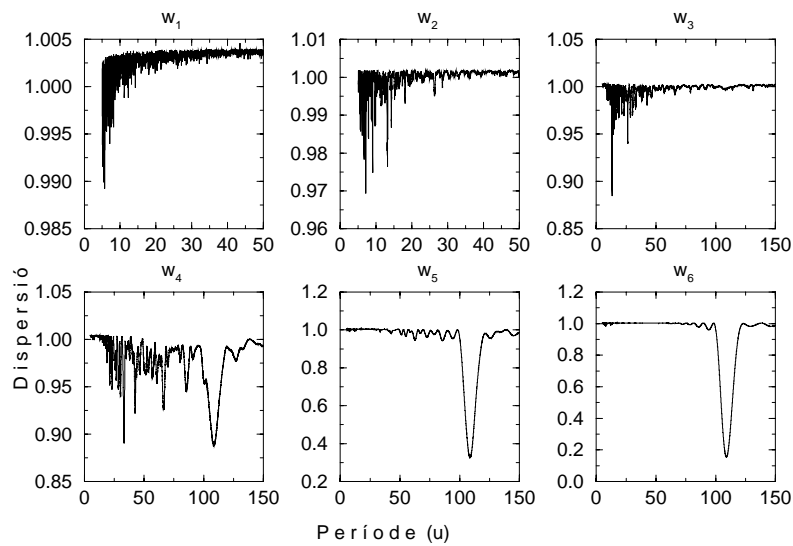


Figura 4.14: Resultat obtingut amb el mètode WPDM per a cada pla wavelet del senyal de la figura 4.9

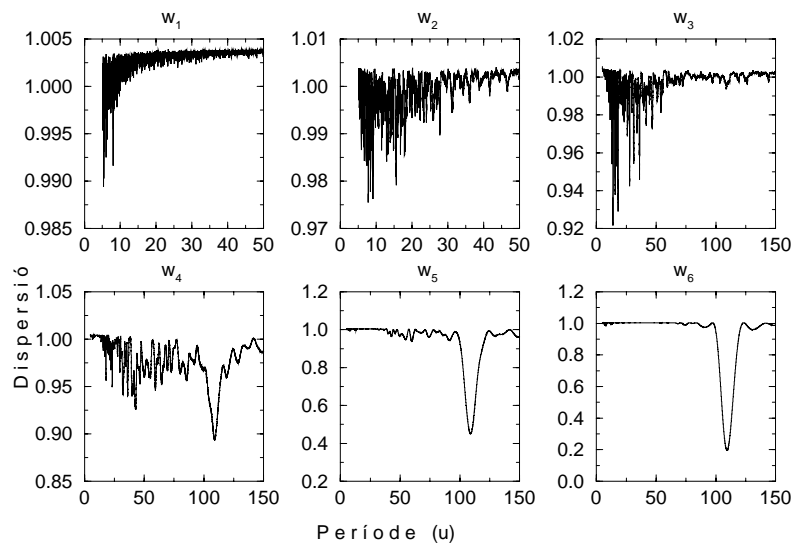


Figura 4.15: Resultat obtingut amb el mètode WPDM per a cada pla wavelet del senyal de la figura 4.10

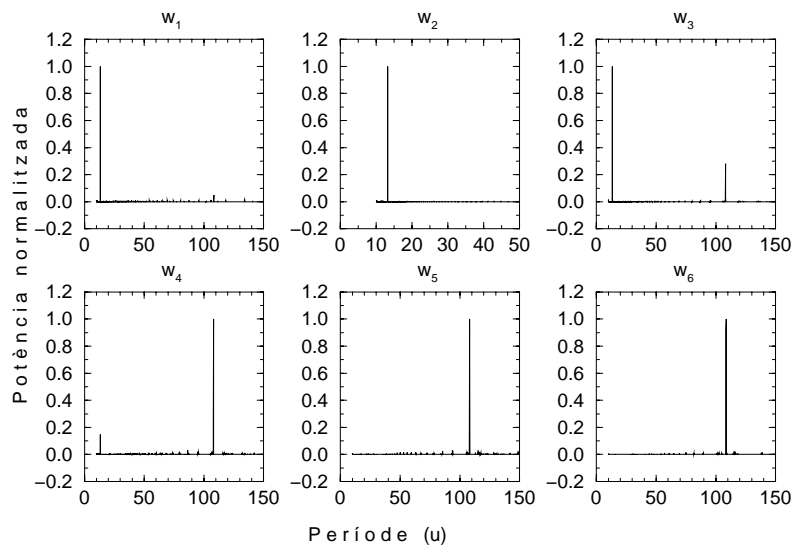


Figura 4.16: Resultat obtingut amb el mètode WCLEAN per a cada pla wavelet del senyal de la figura 4.6

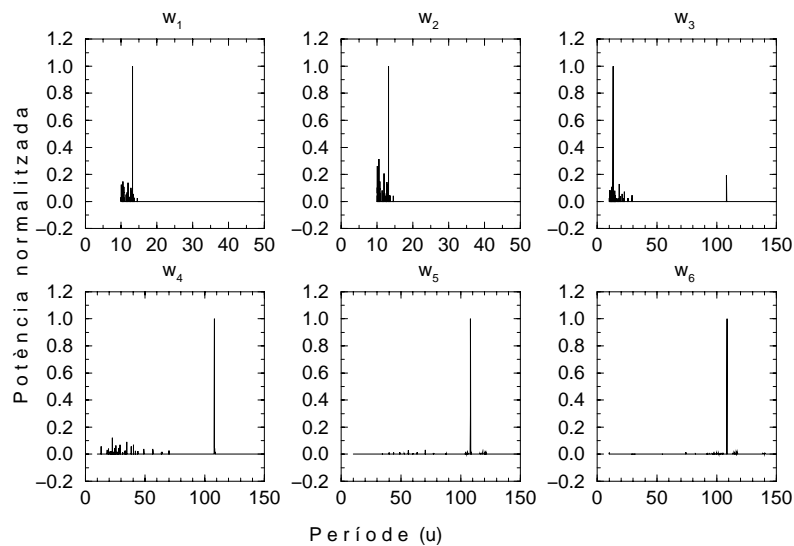


Figura 4.17: Resultat obtingut amb el mètode WCLEAN per a cada pla wavelet del senyal de la figura 4.7

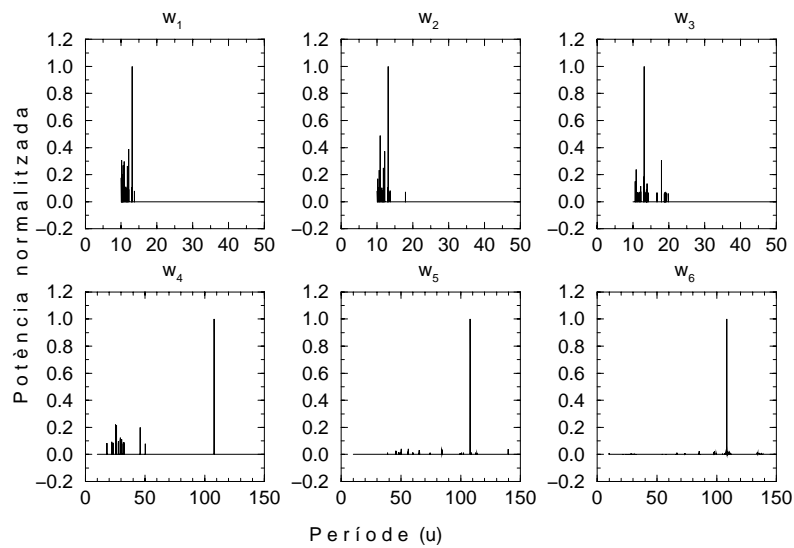


Figura 4.18: Resultat obtingut amb el mètode WCLEAN per a cada pla wavelet del senyal de la figura 4.8

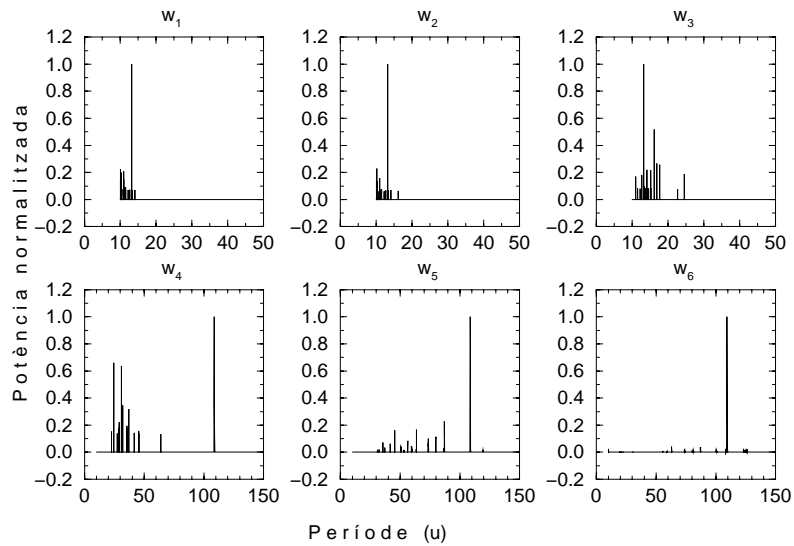


Figura 4.19: Resultat obtingut amb el mètode WCLEAN per a cada pla wavelet del senyal de la figura 4.9

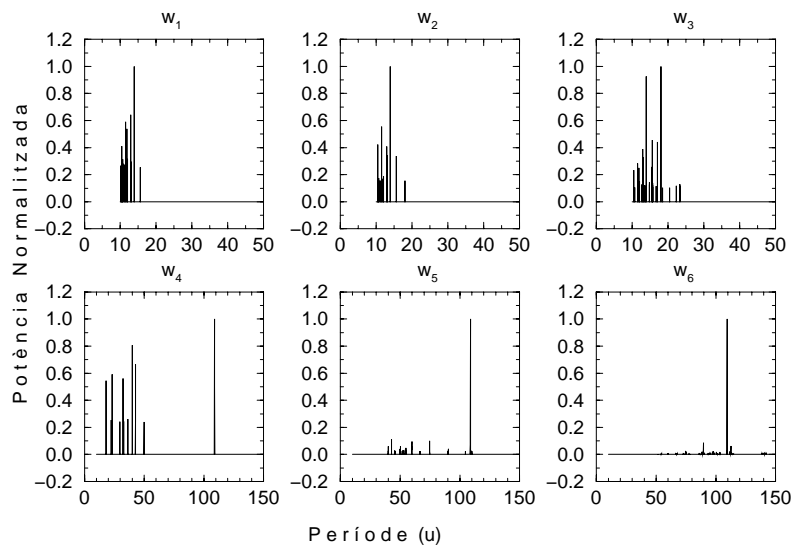


Figura 4.20: Resultat obtingut amb el mètode WCLEAN per a cada pla wavelet del senyal de la figura 4.10

és sempre major que el límit inferior a què arriben els mètodes basats en wavelets WPDM i WCLEAN. Això significa que aquests dos són molt menys sensibles al soroll del que ho són el PDM i el CLEAN, fet que ens permet detectar senyals periòdics amb alts nivells de soroll.

Un altre avantatge és la múltiple detecció de períodes al llarg dels diferents plans wavelet. Si un període es detecta marginalment en més d'un pla wavelet podem estar relativament segurs que estem detectant un senyal periòdic real. Això ens permet augmentar el nivell de confiança en la detecció.

### 4.3 Dades no equiespaiades

La majoria de dades de fonts astronòmiques, per no dir quasi totes, no presenten un mostreig temporal constant com en el cas anterior, sinó que habitualment estan irregularment mostrejades en el temps. Si es vol utilitzar l'algorisme anterior es necessita remostrejar les dades, el que implica modificar l'estadística original en utilitzar interpolacions, extrapolacions o agrupacions de dades.

Per a mantenir inalterada tota la informació present en les dades originals, necessitem un mètode que treballi directament amb aquestes dades sense modificar-les. Podem utilitzar un algorisme semblant a l'anterior, però que treballi amb dades no equiespaiades. Si ho fem així, moltes de les propietats fonamentals de la transformada wavelet discreta poden no complir-se. Tenint en compte que en aquest cas estarem treballant dins un marc de descomposició de dades més general que el de la Transformada Wavelet, podem treballar segons un esquema de descomposició multiresolució.

Cal tenir en compte que l'esquema de descomposició que utilitzem en aquest cas no és un esquema de descomposició en wavelets, donat que al treballar amb dades no equiespaiades, tota la teoria de descomposició wavelet en un espai discret de mostreig constant ja no es compleix. Tot i així, donat que l'algorisme que s'utilitza és el de Burt & Adelson (que hem vist que és la base d'un dels esquemes de descomposició wavelet), les idees que guien el treball són les mateixes.



### 4.3.1 Algorisme multiresolució

Un dels esquemes de descomposició multiresolució més coneguts és l'esquema piramidal de Burt & Adelson (Burt & Adelson, 1983) que de fet s'utilitza en moltes implementacions d'algorismes de Transformada Wavelet. La filosofia és semblant a la idea principal de la descomposició en wavelets: descomposar les dades segons el contingut freqüencial d'aquestes. Aquest esquema de descomposició és de caire general, sense cap restricció sobre el mostreig de les dades d'entrada.

L'algorisme de Burt & Adelson és el que utilitzarem per a detectar períodes en dades no equiespaiades, i funciona segons els següents passos:

- 1. Escollim un valor  $n$  pel nombre de plans freqüencials a obtenir, i triem una funció  $h$  de baixa freqüència, habitualment de tipus Gaussià o de Spline  $B_3$ .
- 2. Convolucionem  $h$  amb les dades originals  $p$ , obtenint  $c_1$ .
- 3. Calculem  $\omega_1 = p - c_1$ .
- 4. Fem  $j = 2$ .
- 5. Convolucionem  $c_{j-1}$  amb  $h$ , obtenint  $c_j$ .
- 6. Calculem  $\omega_j = c_{j-1} - c_j$ .
- 7. Incrementem  $j$ .
- 8. Si  $j < n$ , tornem al pas 5.
- 9. El conjunt  $\{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n, c_n\}$  ens descriu els diferents conjunts de dades en els quals hem descomposat les nostres dades  $p$ .

Com es pot observar, pel conjunt de dades  $\omega_j$  estem utilitzant el mateix símbol que pels plans wavelet  $\omega_j$  d'altres capítols. Ho fem així perquè la idea d'aquests canals  $\omega_j$  de diferent contingut freqüencial, obtinguts a partir de l'algorisme de Burt & Adelson, juguen el mateix paper que els plans wavelet.

Un cop obtinguts aquests canals freqüencials, es procedeix de la mateixa forma que en el cas de les dades equiespaiades. De manera resumida:

- Escollim un valor per a  $n$  i descomposem les dades originals  $p$  en  $n$  canals freqüencials  $\omega_l$  ( $l = 1, 2, \dots, n$ ), segons l'esquema de Burt & Adelson.
- Determinem els períodes presents en els  $n$  canals  $\omega_l$ .

Aquests dos mètodes, els corresponents a la utilització de cadascun dels mètodes estàndard PDM i CLEAN, els anomenarem BA-PDM i BA-CLEAN.

Els mètodes WPDM i WCLEAN es poden veure com un cas particular dels BA-PDM i BA-CLEAN respectivament, donat que en el primer cas hi tenim la restricció del mostreig equiespaiat en el temps per les dades d'entrada.

### 4.3.2 Resultats

Per a crear els diversos conjunts de dades sintètiques amb mostreig no equiespaiat, hem utilitzat un joc d'observacions d'una font de raigs X, concretament de la font LMCX-1, dut a terme pels tres detectors ASM del satèl·lit RXTE. De les dades d'aquesta font, només hem utilitzat la coordenada temporal en que va ser observada, coordenades que utilitzem com a punts on hi calcularem el nostre senyal sintètic. Per tant, el nostre senyal sintètic presentarà la mateixa distribució temporal (mostreig en l'eix d'abscisses) que les observacions de la font LMCX-1, que és en concret de 8270 punts i que cobreix un rang de 679 dies. Evidentment, les unitats que abans simplement anomenàvem  $u$ , ara són dies, i per tant els períodes dels senyals sintètics ara s'expressen directament en aquestes unitats.

#### Senyal sinus+burst

En aquest exemple, no hem generat els senyals de tipus sinus+sinus, doncs com s'ha vist en l'apartat anterior, el comportament dels mètodes basats en wavelets s'estima millor en el cas sinus+burst.

En les taules 4.5 i 4.6 es mostren els resultats obtinguts per a cada simulació.

Taula 4.5: Paràmetres utilitzats per a generar el senyal periòdic de tipus sinus+burst, utilitzant per a l'amplada del burst Gaussià  $\text{FWHM}=2 u$ . Mostreig temporal segons observacions reals de la font LMCX-1.

Període	Amplitud	Soroll (desv. estd.)	PDM	CLEAN	BA-PDM	BA-CLEAN
13.13	0.1	0	-	13.13	13.13 (1,2)	13.13 (1,2)
		0.1	-	13.13	13.13 (1,2)	13.13 (1,2)
		0.15	-	13.14	13.13 (1?,2)	13.13 (1?,2)
		0.2	-	13.15?	13.13 (1?,2)	13.13 (2)
		0.25	-	-	13.14 (1?,2)	-
		0.3	-	-	13.14 (2)	-
		0.35	-	-	13.14 (2?)	-
		0.4	-	-	-	-
	0.5	0	-	13.13	13.13 (1,2,3)	13.13 (1,2,3)
		0.5	-	13.13	13.13 (1?,2,3)	13.13 (1?,2,3)
		1.0	-	13.14?	13.13 (2,3)	13.13 (2,3)
		2.0	-	-	13.14 (2,3)	13.14 (2,3)
		2.25	-	-	13.14 (2,3?)	13.14 (2?,3)
		2.5	-	-	-	-
23.11	0.1	0	-	23.11	23.11 (2,3?)	23.11 (2,3?)
		0.1	-	23.11	23.11 (2?)	23.11 (2?)
		0.15	-	-	-	-
	0.5	0	-	23.11	23.11 (1?,2,3,4?)	23.11 (3)
		0.5	-	23.11?	23.11 (2?,3,4?)	23.11 (3)
		1.0	-	-	23.11 (2?,3,4?)	23.11 (3)
		1.25	-	-	23.11 (2?,3,4?)	23.11 (3?)
		1.5	-	-	-	-

Taula 4.6: Paràmetres utilitzats per a generar el senyal periòdic de tipus sinus+burst, utilitzant per a l'amplada del burst Gaussià FWHM=6  $u$ . Mostreig temporal segons observacions reals de la font LMCX-1.

Període	Amplitud	Soroll (desv. estd.)	PDM	CLEAN	BA-PDM	BA-CLEAN	
13.13	0.1	0	-	13.13	13.13 (1,2,3)	13.13 (1,2,3)	
		0.1	-	13.13	13.13 (1,2,3)	13.13 (1,2,3)	
		0.2	-	13.14	13.13 (1?,2,3)	13.13 (1?,2,3)	
		0.3	-	13.14	13.13 (2,3)	13.13 (2,3)	
		0.4	-	13.15?	13.14 (2,3)	13.14 (2,3)	
		0.6	-	-	13.14 (2,3)	13.14 (2?,3)	
		0.8	-	-	13.15 (3)	13.15 (2?,3)	
		0.9	-	-	-	13.15 (3)	
		1.0	-	-	-	-	
		0.5	0.5	0	13.13	13.13	13.13 (1,2,3)
0.5	13.13?			13.13	13.13 (1,2,3)	13.13 (1,2,3)	
1.0	-			13.14	13.13 (1?,2,3)	13.13 (1?,2,3)	
2.0	-			13.14	13.13 (2,3)	13.13 (2,3)	
3.0	-			13.15?	13.13 (2?,3)	13.13 (2?,3)	
4.0	-			-	13.14 (3?)	-	
5.0	-			-	-	-	
23.11	0.1	0	-	23.11	23.11 (2,3)	23.11 (2,3)	
		0.1	-	23.11	23.11 (2,3)	23.11 (2,3)	
		0.2	-	23.13	23.11 (2?,3)	23.11 (2?,3)	
		0.3	-	23.14	23.12 (3)	23.13 (3)	
		0.4	-	23.15?	23.13 (3?)	23.13 (3)	
		0.5	-	-	23.13 (3?)	-	
	0.5	0.5	0	23.11	23.11	23.11 (1,2,3,4,5)	23.11 (1,2,3,4,5)
			0.5	23.11	23.11	23.11 (2,3,4,5)	23.11 (3,4,5)
			1.0	23.11?	23.11	23.11 (2,3,4,5)	23.11 (3?,4,5)
			2.0	-	23.13	23.11 (3,4,5)	23.11 (4,5)
			2.5	-	23.13	23.11 (3,4,5)	23.11 (4,5)
			3.0	-	-	23.12 (3,4,5?)	23.11 (4,5?)
			3.5	-	-	23.12 (3,4?)	23.11 (4?)
			4.0	-	-	23.12 (3?)	-
			4.5	-	-	-	-

### 4.3.3 Discussió

En les taules 4.5 i 4.6 veiem que els mètodes BA-PDM i BA-CLEAN sempre detecten els períodes correctes quan ho fan els mètodes tradicionals PDM i CLEAN. Quan els mètodes tradicionals ja no detecten els períodes, degut al soroll present en les dades, els mètodes BA-PDM i BA-CLEAN encara ho fan, i arriben fins nivells de senyal-soroll molt més baixos que els mètodes PDM i CLEAN.

En algun d'aquests exemples també s'ha observat l'efecte degut als dos lòbuls negatius laterals al pic central del burst, igual que en el cas de les dades equiespaiades.

En línies generals, els mètodes basats en la descomposició de Burt & Adelson per a dades no equiespaiades es comporten de la mateixa manera que els basats en wavelets per dades equiespaiades. Aquest comportament és el que s'espera des d'un principi, doncs la filosofia d'aquests dos esquemes de descomposició (*à trous* i Burt & Adelson) és molt semblant.

### 4.3.4 Conclusió

Les conclusions a les quals es pot arribar respecte els mètodes basats en la descomposició multiresolució piramidal de Burt & Adelson per a dades no equiespaiades, són les mateixes que en el cas de dades equiespaiades utilitzant la l'algorisme *à trous* per a la Transformada Wavelet.

Amb els algorismes basats en la descomposició de Burt & Adelson que presentem, és possible assolir nivells de relació senyal-soroll molt més baixos que amb PDM i CLEAN i seguir detectant ambdós senyals periòdics i el valor dels seus períodes. També disfrutem de l'avantatge de la múltiple detecció de períodes al llarg dels diferents canals freqüencials.

## 4.4 Vies de continuació

El primer tema que s'ha d'abordar és la utilització d'altres esquemes de descomposició en wavelets. Els perfils dels senyals periòdics que busquem poden ser aproxi-

madament coneguts si coneixem el procés físic que origina aquest senyal periòdic. Per exemple, podem modelitzar els eclipsis d'un estel binari o els bursts d'activitat per Gaussians. Per tant, la funció Mother Wavelet idònea serà aquella que més s'assembli al senyal periòdic que volem detectar.

També s'hauria d'estudiar el comportament d'aquests algorismes en la detecció de qualsevol nombre de senyals periòdics superposats, i no només de 2 senyals com hem fet aquí.

# Capítol 5

## Fusió de dades

*La fuga és l'art de realitzar el doble miracle de crear una melodia feta de dues o tres veus diferents amb caràcter de síntesi, i de donar vida a unes formes de polifonia en què les diverses parts formen, amb la seva íntima coordinació, una única veu, un únic discurs.*

- Alfredo Casella

### 5.1 Fusió en Teledetecció

Molts cops ens trobem en situacions en les quals tenim dades provinents de diferents sensors amb característiques molt diferents. Per exemple, podem tenir dades provinents de sensors especialment preparats per enregistrar informació d'alta resolució espacial (satèl·lit IKONOS, sensors aerotransportats, etc), o de sensors dedicats a recollir informació espectral (LANDSAT, CASI, etc). També podem estar interessats en qualsevol combinació d'informacions provinents de fonts diferents, per exemple imatges classificades, llegendes, o qualsevol altre tipus d'informació qualitativa (Otazu & Arbiol, 2000). La resolució de problemes d'aquest tipus és particularment important en Teledetecció, donat l'ampli ventall de fonts de dades que s'utilitzen: des d'imatges en l'espectre visible preses des de satèl·lits, passant per imatges radar en sensors aerotransportats, fins a dades descriptives en llegendes de mapes.

Però històricament la situació més habitual és la de disposar de dades provinents de detectors que recullen informació de tipus espacial i espectral, buscant aconseguir amb la fusió un joc de dades que presenti alhora una alta resolució espacial i espectral. Per exemple, el satèl·lit SPOT-PAN obté imatges pancromàtiques d'alta resolució espacial (amb un píxel de 10 m de costat), mentre que el LANDSAT-TM dóna imatges multiespectrals de baixa resolució espacial (píxel de 30 m) si les comparem amb les del SPOT. Per a poder aconseguir una imatge multiespectral d'alta resolució espacial hem de recórrer a solucions provinents del camp de la fusió de dades. La idea principal és extreure la informació d'alta resolució present en la imatge pancromàtica que no és present en la imatge multiespectral i incorporar-la en aquesta (Núñez et al., 1998) (Núñez et al., 1999).

S'han realitzat nombroses aproximacions a aquest problema (Chávez, 1991) (Shettigara, 1992) (Wald et al., 1997) i les solucions majoritàriament adoptades són les que es basen en la utilització de transformades del color de tipus intensitat-to-saturació, habitualment conegudes com Transformades IHS o LHS.

Però els mètodes de fusió basats en les transformades IHS o LHS donen unes solucions finals que presenten una considerable degradació espectral. Aquest problema és particularment greu i patent en Teledetecció quan les dades a fusionar han estat adquirides en instants molt separats en el temps. Aquesta degradació espectral inhabilita la fusió final per a tasques de classificació, precisament una de les més importants.

En els darrers anys els mètodes multiresolució han estat particularment útils a l'hora d'analitzar i processar imatges, i actualment es confirmen com una de les tècniques de futur més potents dins el camp del procés de dades i de la Teledetecció en particular. Ja actualment, altres autors han proposat noves aproximacions a la fusió d'imatges utilitzant algorismes basats en aproximacions multiresolució de la Transformada Wavelet 2-dimensional (Wald et al., 97), però amb punts de partida diferents als nostres i de naturalesa matemàtica diferent a la del treball que aquí presentem.

Abans d'exposar els algorismes basats en wavelets que proposem, hem de veure alguns conceptes teòrics, i a partir d'aquests el funcionament dels algorismes de fusió de dades més utilitzats fins l'actualitat.



## 5.2 Models RGB i IHS de representació del color

La finalitat d'un model de color és facilitar l'especificació dels colors d'una manera estàndard generalment acceptada per la comunitat que hi treballa. En essència, un model de color és una especificació d'un sistema de coordenades 3-D i un subespai en aquest sistema on cada color ve representat per un punt.

Molts dels models de color que s'utilitzen avui en dia estan concebuts i orientats per a ser aplicats en un cert *hardware* (com monitors d'ordinador o impressores) o en aplicacions on l'objectiu final és la manipulació del color. Els models orientats a *hardware* més utilitzats a la pràctica, són el RGB (acrònim en anglès de vermell, verd i blau), CMY i YIQ. Entre els models més utilitzats per a la manipulació del color trobem el HSV (hue, saturation, value) i el IHS (intensity, hue, saturation). D'entre tots aquests, els més utilitzats en el camp del procés d'imatges en general són el RGB, el YIQ i el IHS.

En aquest treball els que ens interessin són el RGB i el IHS, models que passem a explicar breument.

### 5.2.1 El model RGB

En el model RGB, cada color es representa en les seves tres components espectrals primàries: vermell, verd i blau. Aquest sistema està basat en un sistema de coordenades Cartesià. El subespai de color que ens interessa és el cub que es mostra en la figura 5.1 en el qual els colors primaris es troben en tres vèrtexs; els colors cyan, magenta i groc als altres tres vèrtex, el negre a l'origen de coordenades, i el blanc al vèrtex més allunyat de l'origen. En aquest model, l'escala de grisos va del negre al blanc al llarg de la línia que uneix aquests dos punts, i la resta de colors són punts situats en l'interior del cub. Per conveniència, se suposa que tots els colors han estat normalitzats de manera que el cub de la figura 5.1 és el cub unitat. És a dir, tots els valors de  $R$ ,  $G$  i  $B$  pertanyen a l'interval  $[0, 1]$ .

Les imatges descrites en el model de color RGB es poden descomposar en tres *plans-imatge* diferents, un per a cada color primari. Un dels millors exemples de la utilitat del model RGB es pot trobar en el procés d'imatges aèries i multispectrals, i en especial de les imatges del satèl·lit LANDSAT. Les imatges són preses per sen-

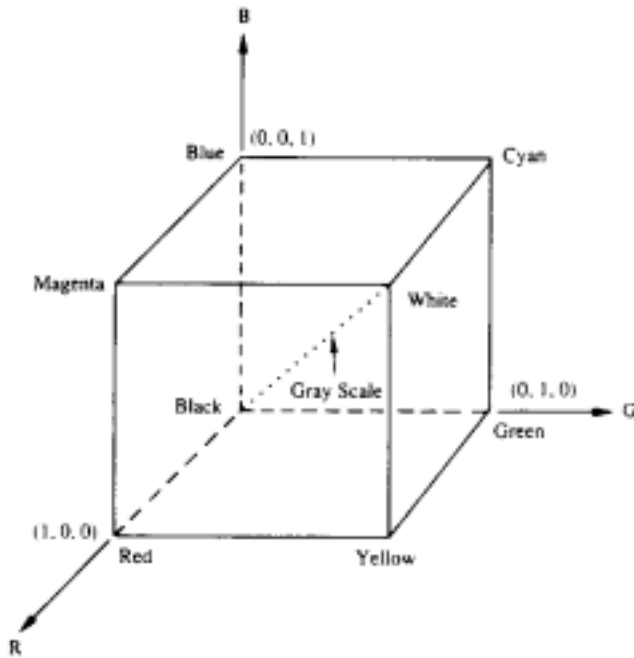


Figura 5.1: Cub de colors RGB. Els punts que es troben al llarg de la diagonal principal són nivells de gris, des de negre a l'origen fins blanc al punt  $(1,1,1)$ .

sors que treballen en diferents rangs espectrals o finestres. Dos d'aquestes finestres es troben aproximadament a la regió de l'espectre que correspon als colors verd i vermell; les altres finestres del satèl·lit corresponen a la regió infraroja i el blau, però aquesta última aporta molt poca informació. Algunes d'aquestes finestres es combinen per a obtenir finalment una representació RGB que facilita la seva representació en pantalles a color.

Suposem, que volem augmentar el contrast en una imatge de color d'una cara humana, on part d'aquesta es troba a l'ombra. El procediment normal a utilitzar és l'equalització de l'histograma, però donat que tenim tres imatges i que l'equalització de l'histograma es realitza només sobre valors pancromàtics, la solució immediata és l'equalització de l'histograma en cadascuna de les tres imatges o canals espectrals. Però procedint d'aquesta manera, la radiometria de cadascuna de les tres imatges serà modificada de manera diferent, donant com a resultat un canvi en les seves intensitats relatives. El resultat net serà que característiques rellevants de la imatge en color, com tons suaus, no tindran un aspecte natural. Per tant, es necessita un model de color més adequat per a aquest tipus de problemes, i entre les possibles alternatives trobem el model IHS.

### 5.2.2 El model IHS

En aquest model, el color es descomposa en tres components anomenades *intensitat* ( $I$ ), *to* ( $H$ ) i *saturació* ( $S$ ). El  $to$  és l'atribut que descriu un color pur (groc, taronja, vermell, etc), mentre que la saturació dóna una idea del grau en què el color és diluït amb la llum blanca. La utilitat d'aquest mètode es justifica pels següents motius. Primer, la intensitat és aïllada de la informació del color. I segon, les components de  $to$  i saturació estan íntimament relacionades amb la percepció que els humans tenim del color. Aquestes característiques fan del mètode IHS una eina ideal per a desenvolupar algorismes de procés d'imatges basats en alguna de les propietats de la percepció del color que té el sistema visual humà.

Com ja s'ha dit abans, el model RGB està definit respecte un cub unitat. En canvi, les components de color del model IHS estan definides respecte un triangle (veure figura 5.2). En aquesta figura es pot veure que el  $to$   $H$  del punt que simbolitza el color  $P$  és l'angle que forma el vector que es mostra respecte l'eix del color vermell. Per tant, quan  $H = 0$  el color és el vermell, quan  $H = 60$  el color és el groc, etc. La saturació  $S$  del color  $P$  és el grau en què el color està diluït amb el blanc, i és proporcional a la distància de  $P$  al centre del triangle. Com més lluny estigui el color  $P$  del centre del triangle, més saturat estarà el color. La intensitat  $I$  es mesura respecte la línia perpendicular al triangle i que passa a través del seu centre. Les intensitats que es troben per sota d'aquest triangle varien entre un  $to$  fosc del color en qüestió fins al negre. De manera inversa, les que es troben per sobre del triangle tendeixen cap al color blanc.

La representació d'aquestes tres components IHS en un espai 3-D ens forma una figura piramidal de tres cares, tal com veiem en la figura 5.2. Qualsevol punt que es trobi en la superfície d'aquest triangle és un color pur saturat.

### Relacions entre RGB i IHS

A partir de les definicions anteriors, i fent les oportunes transformacions geomètriques (González & Woods, 1996), podem deduir les expressions que relacionen les tres components del model IHS amb el model RGB:

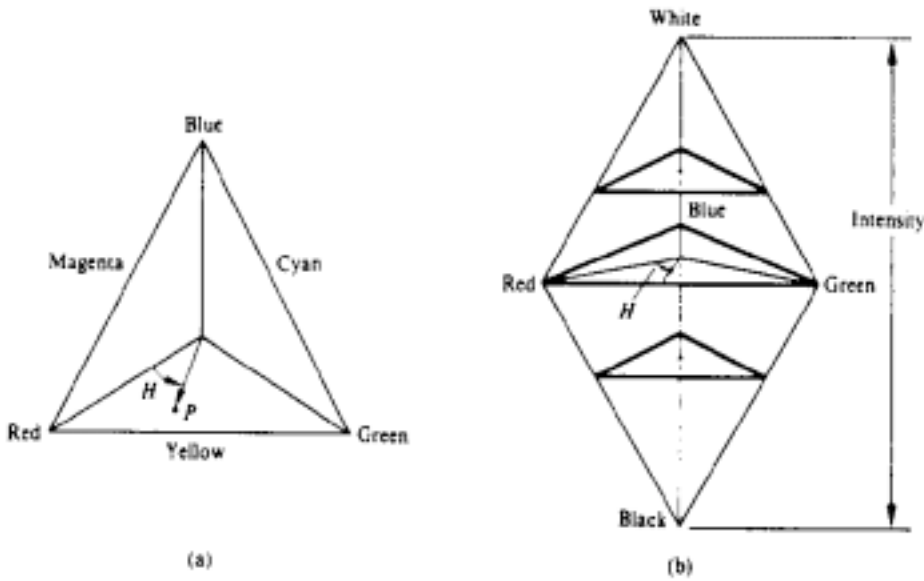


Figura 5.2: Polígon del color IHS. En l'interior del sòlid hi tenim els diferents colors, alhora que canvien les intensitats en la direcció de l'eix vertical.

$$\begin{cases} I = \frac{(R+G+B)}{3} \\ S = 1 - \frac{3}{(R+G+B)}[\min(R, G, B)] \\ H = \arccos \left\{ \frac{\frac{1}{2}[(R-G)+(R-B)]}{[(R-G)^2+(R-B)(G-B)]^{\frac{1}{2}}} \right\} \end{cases}$$

De manera similar, podem deduir les expressions inverses que relacionen les tres components del model RGB amb el model IHS. En aquest cas, com que treballem amb funcions trigonomètriques, hem de definir aquesta correspondència de manera una mica diferent, depenent del valor del paràmetre de to  $H$ .

Si  $0^\circ < H \leq 120^\circ$

$$\begin{cases} R = L \left[ 1 + \frac{S \cos H}{\cos(60^\circ - H)} \right] \\ G = 3L - (R + B) \\ B = L(1 - S) \end{cases}$$

Si  $120^\circ < H \leq 240^\circ$

$$\begin{cases} H = H - 120^\circ \\ R = L(1 - S) \\ G = L \left[ 1 + \frac{S \cos H}{\cos(60^\circ - H)} \right] \\ B = 3L - (R + G) \end{cases}$$

Si  $240^\circ < H \leq 360^\circ$

$$\begin{cases} H = H - 240^\circ \\ R = 3L - (G + B) \\ G = L(1 - S) \\ B = L \left[ 1 + \frac{S \cos H}{\cos(60^\circ - H)} \right] \end{cases}$$

### 5.3 Mètodes estàndard de fusió

Els mètodes estàndard de fusió estan basats en la transformació de canals multispectrals RGB en components de la família IHS i la substitució del canal d'intensitat (Smith, 78). Els passos habituals a seguir són:

- Registrar i redimensionar la imatge multispectral de baixa resolució de forma que sigui superposable a la imatge pancromàtica d'alta resolució. Aquest registre es realitza remostrejant els píxels multispectrals utilitzant punts de control i fent una interpolació polinomial bicúbica, limitant l'error final a 0.25 píxels.
- Transformar les bandes RGB de la imatge multispectral en components IHS.
- Modificar l'histograma de la imatge pancromàtica tenint en compte les diferències radiomètriques entre aquesta i la imatge multispectral, degudes a diferències espectrals, condicions atmosfèriques, il·luminació, etc. Això normalment es realitza amb la igualació dels histogrames de la imatge pancromàtica i el canal d'intensitat de la transformada IHS de la imatge multispectral i, més exactament, modificant l'histograma de la imatge pancromàtica per igualar-lo al de la multispectral.
- Substituir la component d'intensitat de la imatge multispectral per la imatge pancromàtica i finalment realitzar la transformada inversa per a obtenir la imatge final fusionada RGB.

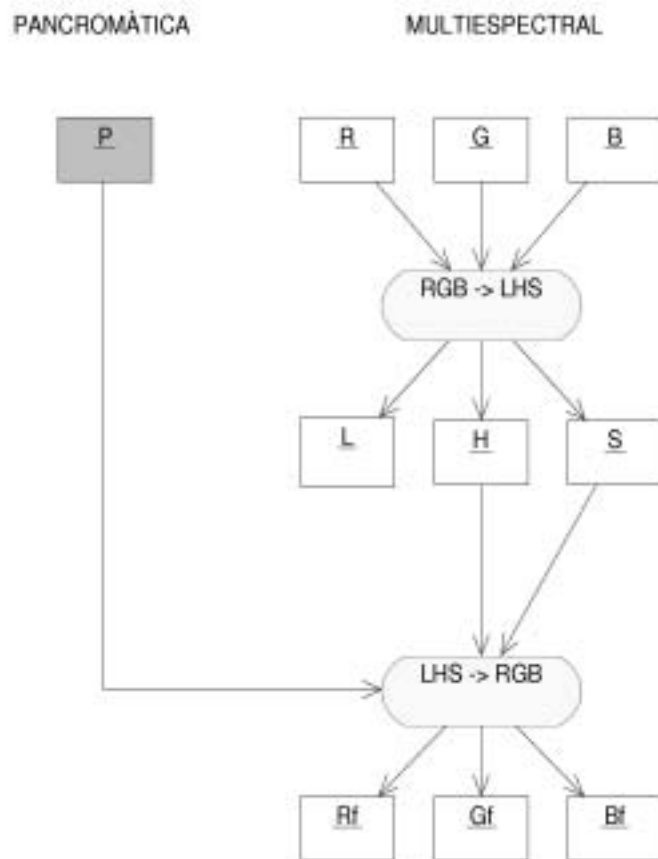


Figura 5.3: Diagrama d'activitats dels algorismes clàssics de fusió basats en la substitució del canal d'intensitat.

Podem veure una representació gràfica del funcionament d'aquests mètodes en la figura 5.3<sup>1</sup>.

Però els resultats obtinguts amb aquests mètodes depenen fortament del sistema IHS utilitzat per a la representació del color.

A partir d'aquí suposarem que els valors RGB estan sempre dins el rang  $[0, 255]$ .

<sup>1</sup>Cal remarcar que aquest diagrama d'activitats no és del tot correcte segons la definició del llenguatge UML (Booch et al., 1998) donat que, entre altres motius, no hi ha un punt d'inici i un final pel flux d'activitats. Tot i així, hem representat aquest algorisme d'aquesta manera perquè creiem que és la manera més intuïtiva, i gràficament menys elaborada, de mostrar-lo.

La intensitat pot estar definida de diferents formes. Les més utilitzades són:

$$I = \max(R, G, B)$$

$$L = \frac{R+G+B}{3}$$

$$L' = \frac{\max(R,G,B)+\min(R,G,B)}{2} .$$

Els sistemes basats en aquestes definicions els anomenarem IHS, LHS i L'HS, respectivament. El primer sistema, també conegut com Hexàgon de Smith (Smith, 78), ignora dues de les components a l'hora de calcular la intensitat, i per tant dona la mateixa intensitat tant per a un color pur, per exemple (255,0,0), com per a un píxel blanc (255,255,255). En canvi, el segon sistema, basat en la  $L$  i conegut com Triangle de Smith (Smith, 78), dona una intensitat màxima  $L = 255$  per a un píxel blanc però  $L = 85$  per a un píxel pur. El tercer sistema, basat en la  $L'$  (ACM, 1979) dona  $L' = 255$  per a un píxel blanc però  $L' = 125$  per a un color pur.

D'altra banda, la transformació IHS basada en la primera definició del canal d'intensitat  $I$  mostra un comportament estrany i incòmode en certs casos. Per exemple, suposem que tenim un píxel amb valors RGB (100,150,200), transformem-lo al sistema L'HS, afegim 10 comptes (sobre un màxim de 255) a la component  $L'$  i fem la transformada inversa. El resultat final dona uns valors RGB (115,160,205), és a dir, el canal amb el valor inicial més baix (en aquest cas  $R$ ) és el que mostra l'increment més gran, mentre que el canal amb el valor inicial més alt ( $B$ ) és el que ha estat menys afectat. Si fem el mateix pel mètode IHS obtenim un valor final (100,150,210) on l'increment de comptes només s'ha realitzat únicament sobre el canal que té major nombre de comptes. Però si transformem els mateixos valors RGB (100,150,200) al sistema LHS, afegim altre cop 10 comptes a la component  $L$  i fem la transformada inversa, els valors RGB finalment obtinguts són (107,160,213). En aquest cas l'increment de 10 comptes es reparteix de forma proporcional a cadascun dels valors  $R$ ,  $G$  i  $B$ .

Per tant, *a priori* creiem que és preferible treballar amb la definició  $L = \frac{R+G+B}{3}$ , tot i que en aquest treball també hem utilitzat les definicions de  $I$  i  $L'$  per a poder comparar resultats entre diferents mètodes de fusió basats en cadascuna de les definicions del canal d'intensitat.

## 5.4 Mètodes basats en Wavelets

La metodologia basada en wavelets que proposem, es fonamenta en el fet que en la Transformada Wavelet les imatges  $c_l (l = 1, \dots, n)$  (veure capítol 2) són versions de la imatge original a escales consecutives. Per tant, els primers plans wavelet de la imatge pancromàtica d'alta resolució contenen la informació de detall i resolució espacial no present en la imatge multiespectral de baixa resolució. Aquí es pot entreveure clarament la idea d'intentar localitzar aquella informació que es troba en la imatge d'alta resolució i que li manca a la imatge de baixa resolució, és a dir, establir quina és la diferència d'informació entre imatges.

Proposem dues formes generals de realitzar la fusió basada en wavelets: les aproximacions substitutives i les additives (tot i que si les analitzem en detall podríem especialitzar-les finalment en quatre).

### 5.4.1 Mètodes de substitució

#### Substitució en RGB

En el mètode de substitució, alguns dels plans wavelet de la imatge multiespectral són substituïts pels corresponents plans de la imatge pancromàtica tal com es mostra en el següent algorisme:

- Registrar, igual que en els mètodes tradicionals, la imatge de baixa resolució a la mateixa mida que la imatge d'alta resolució de forma que siguin directament superposables.
- Fer una igualació d'histogrames entre la imatge pancromàtica i la component d'intensitat de la imatge multiespectral, igual que en els mètodes estàndard. Anomenem *PAN* a la imatge pancromàtica i *R*, *G*, *B* a cadascun dels tres canals de la imatge multiespectral.
- Descomposar el tres canals *R*, *G*, *B* de la imatge multiespectral en  $n$  plans wavelet (o nivells de resolució):

$$R = \sum_{l=1}^n w_{Rl} + R_r$$



$$G = \sum_{l=1}^n w_{Gl} + G_r$$

$$B = \sum_{l=1}^n w_{Bl} + B_r .$$

A la pràctica normalment s'utilitza  $n = 2$  o  $n = 3$ , però més endavant veurem quin és el criteri a seguir a l'hora de definir aquest valor.

- Descomposar la imatge pancromàtica d'alta resolució de manera semblant:

$$PAN = \sum_{l=1}^n w_{Pl} + PAN_r .$$

- Substituir els primers plans wavelet de la descomposició dels canals  $R$ ,  $G$  i  $B$  pels plans equivalents de la descomposició pancromàtica, i fer la Transformada Wavelet Inversa:

$$R_{new} = \sum_{l=1}^n w_{Pl} + R_r$$

$$G_{new} = \sum_{l=1}^n w_{Pl} + G_r$$

$$B_{new} = \sum_{l=1}^n w_{Pl} + B_r .$$

En aquest primer mètode se substitueixen els primers plans wavelet (informació d'alta freqüència) de la imatge multiespectral de baixa resolució pels plans equivalents de la imatge pancromàtica d'alta resolució. El que estem fent en aquest cas és substituir la informació d'alta freqüència de la imatge de baixa resolució (informació pràcticament inexistent) per la informació d'alta freqüència (o alta resolució) que realment ens interessa i que aporta la imatge pancromàtica.

Anomenem SWRGB a aquest mètode.

### Substitució en L

En aquesta segona versió de l'algorisme de substitució es procedeix de forma semblant al mètode anterior SWRGB, però aquest cop substituint els primers plans wavelet del canal d'intensitat de la imatge multiespectral pels corresponents plans

de la imatge pancromàtica, en comptes de fer-ho sobre cadascun dels tres canals  $R$ ,  $G$  i  $B$ :

$$L = \sum_{l=1}^n w_{Ll} + L_r$$

$$L_{new} = \sum_{l=1}^n w_{Pl} + L_r .$$

Anomenem SWI, SWL' i SWL a les diferents versions d'aquest mètode al utilitzar les respectives definicions del canal d'intensitat.

### 5.4.2 Mètodes additius

Una altra possibilitat a l'hora de realitzar una fusió basada en wavelets, és afegir directament els primers plans wavelet de la imatge d'alta resolució a la imatge de baixa resolució, en comptes de substituir-los.

#### Addició en RGB

Un primer mètode consisteix en afegir la informació d'alta resolució directament als tres canals RGB, procedint de la següent manera:

- Registrar, igual que abans, la imatge de baixa resolució a la mateixa mida que la imatge d'alta resolució de forma que siguin directament superposables.
- Igualar els histogrames de la imatge pancromàtica i la component d'intensitat de la imatge en color. Anomenen  $PAN$  a la imatge pancromàtica i  $R$ ,  $G$  i  $B$  als tres canals de la imatge multispectral.
- Descomposar en wavelets la imatge pancromàtica:

$$PAN = \sum_{l=1}^n w_{Pl} + PAN_r .$$

- Afegir els primers plans wavelet de la descomposició anterior a cadascun dels canals  $R$ ,  $G$  i  $B$ , i fer la Transformada Wavelet Inversa:

$$R_{new} = \sum_{l=1}^n w_{Pl} + R$$

$$G_{new} = \sum_{l=1}^n w_{Pl} + G$$

$$B_{new} = \sum_{l=1}^n w_{Pl} + B \ .$$

En aquest mètode, el que estem fent és considerar que la imatge multispectral original és el pla wavelet residual de la imatge fusionada final que volem obtenir.

Anomenem AWRGB a aquest mètode.

### Addició en L

Una altra possibilitat, que nosaltres considerem com la millor opció de totes, és afegir la informació d'alta resolució directament a la component d'intensitat de la imatge multispectral de baixa resolució. La manera de procedir és semblant a la del mètode AWRGB:

- Registrar i igualar els histogrames igual que en els mètodes anteriors, i descomposar en wavelets la imatge pancromàtica:

$$PAN = \sum_{l=1}^n w_{Pl} + PAN_r \ .$$

- Transformar els canals RGB de la imatge multispectral en una representació de la família IHS, preferiblement en el sistema LHS.
- Afegir els primers plans wavelet de la descomposició pancromàtica a la component  $L$  i fer la Transformada Wavelet Inversa:

$$L_{new} = \sum_{l=1}^n w_{Pl} + L \ .$$

- Transformar la imatge fusionada del sistema IHS al sistema RGB.

En aquest mètode, i de manera semblant al mètode AWRGB, el que estem fent és considerar que el canal  $L$  de la imatge multispectral original és el pla wavelet residual del canal  $L$  de la imatge fusionada final que volem obtenir.

Anomenarem AWI, AWL' i AWL a les diferents versions d'aquest mètode en utilitzar les respectives definicions pel canal d'intensitat. Podem veure una representació gràfica del funcionament d'aquests algorismes en la figura 5.4.

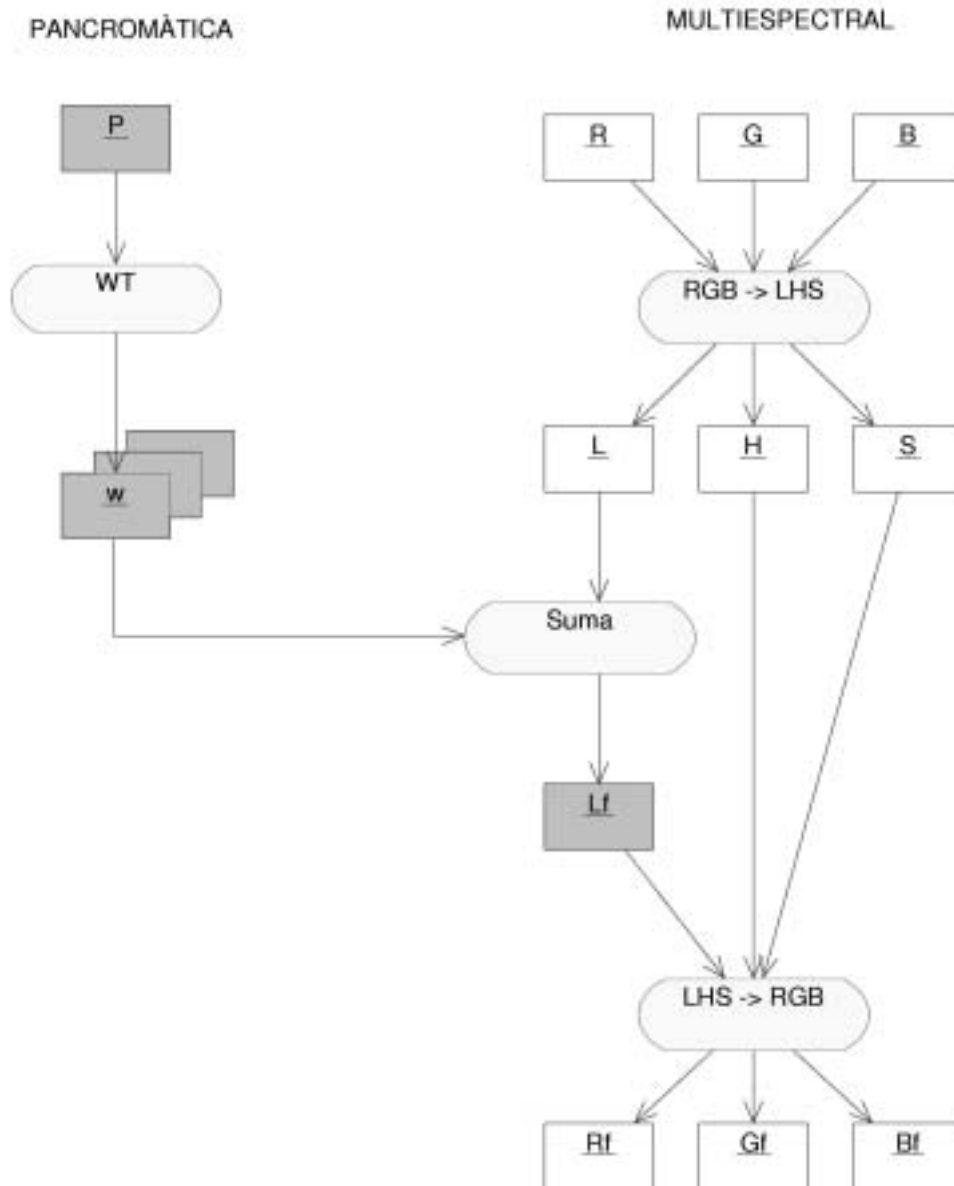


Figura 5.4: Diagrama d'activitats dels algorismes additius de fusió basats en wavelets (AWI, AWL' i AWL), on els primers plans wavelet de la imatge panromàtica s'afegeixen al canal d'intensitat de la imatge multispectral.

## 5.5 Consideracions sobre els mètodes

Tal com s'ha explicat anteriorment, es pot utilitzar qualsevol dels sistemes IHS, LHS o L'HS per a representar la component d'intensitat en cadascun dels mètodes de fusió anteriorment exposats. Però com s'ha dit abans, *a priori* considerem el sistema LHS com el més adequat.

En els mètodes de substitució, els plans wavelet obtinguts de la descomposició dels canals de la imatge multiespectral de baixa resolució són eliminats i substituïts pels corresponents plans de la imatge pancromàtica d'alta resolució. En canvi, en els mètodes additius, tota la informació espacial present en la imatge multiespectral es conserva, donat que aquests plans wavelet no s'eliminen. Per tant, un dels principals avantatges dels mètodes additius sobre els de substitució és que la informació de detall present en tots dos sensors es conserva i s'utilitza conjuntament.

La principal diferència entre afegir els plans wavelet als canals RGB i afegir-los a la component d'intensitat és que en el primer cas el que s'està afegint és informació purament pancromàtica, ja que en afegir el mateix valor a tots tres canals RGB, s'està esbiaixant la informació espectral (o de color) del píxel cap el color gris. En canvi, en afegir la informació d'alta resolució al canal d'intensitat, es preserva molta de la informació espectral (o de color) del píxel. Per tant, des del punt de vista teòric, afegir informació al canal d'intensitat és molt millor que afegir-la als canals RGB.

Per tant, es poden resumir els avantatges teòrics dels mètodes additius basats en wavelets en front dels mètodes tradicionals, en els següents punts:

- La informació multiespectral (o de color) de la imatge original es conserva en la imatge fusionada final, donat que només es modifica el canal d'intensitat.
- Els plans wavelet (excepte la imatge residual) tenen mitjana zero. Per tant, el flux total de la imatge multiespectral de baixa resolució resta inalterat i es conserva en la imatge fusionada final. Localment aquesta propietat també es compleix aproximadament. Aquest és possiblement un dels punts més importants, juntament amb l'anterior.
- Tota la resolució espacial present en la imatge pancromàtica és afegida a la imatge multiespectral sense descartar ni eliminar informació d'aquesta. Per

tant, s'utilitza tota la informació espacial present en les dues imatges.

- Els mètodes basats en wavelet additius en la intensitat es poden considerar com una millora dels mètodes clàssics IHS i LHS, en el sentit que la component d'intensitat no és substituïda per la imatge pancromàtica, sinó que només aquella informació d'alta resolució i aquells detalls d'alta freqüència no presents en la imatge multispectral són introduïts en la imatge final en afegir els primers plans wavelet de la imatge pancromàtica en la component d'intensitat.
- Els mètodes basats en wavelets es veuen afectats en molt menor grau per efectes de temporalitat, és a dir, pel fet que les imatges hagin estat preses en moments molt diferents i que les respostes radiomètriques i les condicions de la zona observada hagin canviat durant aquest període de temps. Aquest efecte és molt acusat en el canal d'intensitat.

Aquest darrer efecte temporal presenta greus problemes quan es treballa amb mètodes clàssics de fusió d'imatges no basats en wavelets. De fet, la motivació inicial d'aquest treball va ser trobar una solució prou satisfactòria a aquesta mena de problemes.

És important tenir en compte que el mètode AWL permet la fusió de dades que presenten una relació entre les seves resolucions tant diàdica com no diàdica, donat que inicialment s'han de registrar les imatges de forma que tinguin la mateixa mida de píxel. Per tant es pot utilitzar l'algorisme *à trous* per fusionar conjunts de dades no diàdiques.

Una de les qüestions que sorgeixen a l'hora d'aplicar aquests mètodes és quants plans wavelet hem d'afegir a la imatge multispectral. Donada la naturalesa de l'algorisme de descomposició en wavelets utilitzat (*à trous*), la diferència de resolució entre un pla wavelet i el següent és d'un factor 2. Això vol dir que la resolució que té el pla wavelet  $w_1$  és el doble de la resolució de la imatge original. Per tant, per a obtenir una imatge que tingui 3 cops la resolució de la imatge original necessitem la informació present en el segon pla wavelet  $w_2$ . En aquest cas incorporarem una certa informació redundant, però es comprova que això no representa cap problema a l'hora de fusionar les imatges ni cap alteració greu dels resultats finals obtinguts.

## 5.6 Resultats

Hem aplicat l'anterior metodologia a dos jocs de dades diferents. En un cas hem fusionat imatges multiespectrals i pancromàtiques provinents d'un mateix satèl·lit, en aquest cas el LANDSAT-7, adquirides en el mateix moment i que per tant no presenten efectes de temporalitat. En l'altre cas hem fusionat imatges provinents de dos sensors diferents preses en instants diferents, i per tant imatges que presenten efectes de temporalitat, concretament imatges provinents dels satèl·lits SPOT i LANDSAT-TM.

A partir de cada parell d'imatges hem creat un parell d'imatges sintètiques, cadascuna de resolució inferior a la corresponent imatge original. D'aquesta manera podem comparar el resultat de fusionar el parell d'imatges de resolució inferior amb la imatge multiespectral d'alta resolució, que és precisament la que es vol recuperar. En els següents apartats es mostra en més detall la confecció d'aquestes imatges.

### 5.6.1 Fusió d'imatges sense efectes de temporalitat

En aquest exemple, hem fusionat imatges que no presenten efectes de temporalitat, donat que van ser adquirides en el mateix moment per la mateixa plataforma espacial, però a través de dos sensors individuals diferents. Són imatges provinents del satèl·lit LANDSAT-7, i més concretament dels seus dos sensors LANDSAT-ETM (multiespectral), i LANDSAT-PAN (pancromàtic). En aquest cas són imatges de les rodalies del volcà Vesubi, prop de Nàpols.

Una altra particularitat d'aquest parell d'imatges, és que el factor de resolució entre elles dues és exactament un factor 2. La descomposició en wavelets en un sol pla ens portarà directament a una imatge que tindrà exactament el doble de resolució que l'anterior, justament la situació actual.

Si es fusiona una imatge multiespectral LANDSAT-ETM de 30 m de resolució amb una imatge pancromàtica de 15 m, s'obté una imatge final multiespectral de 15 m de resolució. Donat que no existeixen imatges LANDSAT-ETM multiespectrals de 15 m de resolució amb les que poder comparar la fusió obtinguda, l'avaluació del comportament de la metodologia proposada per a fusionar imatges no és una tasca fàcil. Per a solucionar aquest problema s'ha aplicat la metodologia a un nivell de

resolució inferior, és a dir, utilitzant una imatge sintètica LANDSAT-PAN de 30 m de resolució i una imatge sintètica LANDSAT-ETM de 60 m, obtingudes totes dues a partir de la degradació de dues imatges reals de 15 m i 30 m, respectivament. A les figures 5.5 i 5.6 mostrem aquestes dues imatges. El resultat de fusionar aquestes dues imatges és una imatge multiespectral de 30 m de resolució que és directament comparable a la imatge LANDSAT-ETM original, també de 30 m (figura 5.13).

Per tant, hem de fusionar les imatges LANDSAT-PAN i LANDSAT-ETM que han estat degradades a 30 i 60 m, respectivament. Tal com indica la metodologia a seguir, les imatges han estat convenientment registrades i la imatge LANDSAT-PAN ha estat radiomètricament corregida per a presentar un histograma semblant al de la imatge LANDSAT-ETM. Per a poder comparar els resultats i veure quin és el mètode que presenta un millor comportament, s'han utilitzat les tres definicions d'intensitat  $I$ ,  $L$  i  $L'$ . S'ha realitzat la fusió amb tots els mètodes anteriorment exposats, tant amb els mètodes estàndard com amb els basats en wavelets.

La figura 5.13 ens mostra la imatge LANDSAT-ETM original. Aquesta imatge és la que volem recuperar i obtenir amb el mètode de fusió, per tant, hem de comparar les imatges fusionades amb aquesta imatge. En les figures 5.7 a 5.12 mostrem les imatges fusionades obtingudes per cadascun dels mètodes.

Observant les imatges fusionades, és evident que els mètodes que presenten una informació espectral més propera a la imatge LANDSAT-ETM original són els mètodes basats en wavelets. Les figures 5.7 a 5.9, que corresponen als resultats obtinguts pels mètodes estàndard, presenten unes tonalitats de color molt llunyanes a les de la imatge LANDSAT-ETM, no essent així en les imatges obtingudes amb els mètodes basats en wavelets i en especial el mètode AWL, figura 5.12.

D'entre els resultats obtinguts pels mètodes basats en wavelets, s'observa que visualment la diferència entre ells és gairebé inapreciable. Només mostrem els resultats que donen els mètodes additius, doncs a simple vista és difícil observar les diferències amb els mètodes substitutius. Aquest comportament és lògic, doncs en afegir o substituir alguns dels plans d'alta freqüència de la imatge multiespectral estem modificant molt poc la seva informació. En certa manera, podem pensar que no fem més que perfilar millor els marges de la imatge multiespectral, i per tant només modifiquem la imatge allà on realment ho necessitem. Les diferències existents entre els diferents mètodes només les podrem observar amb comparacions numèriques entre imatges.



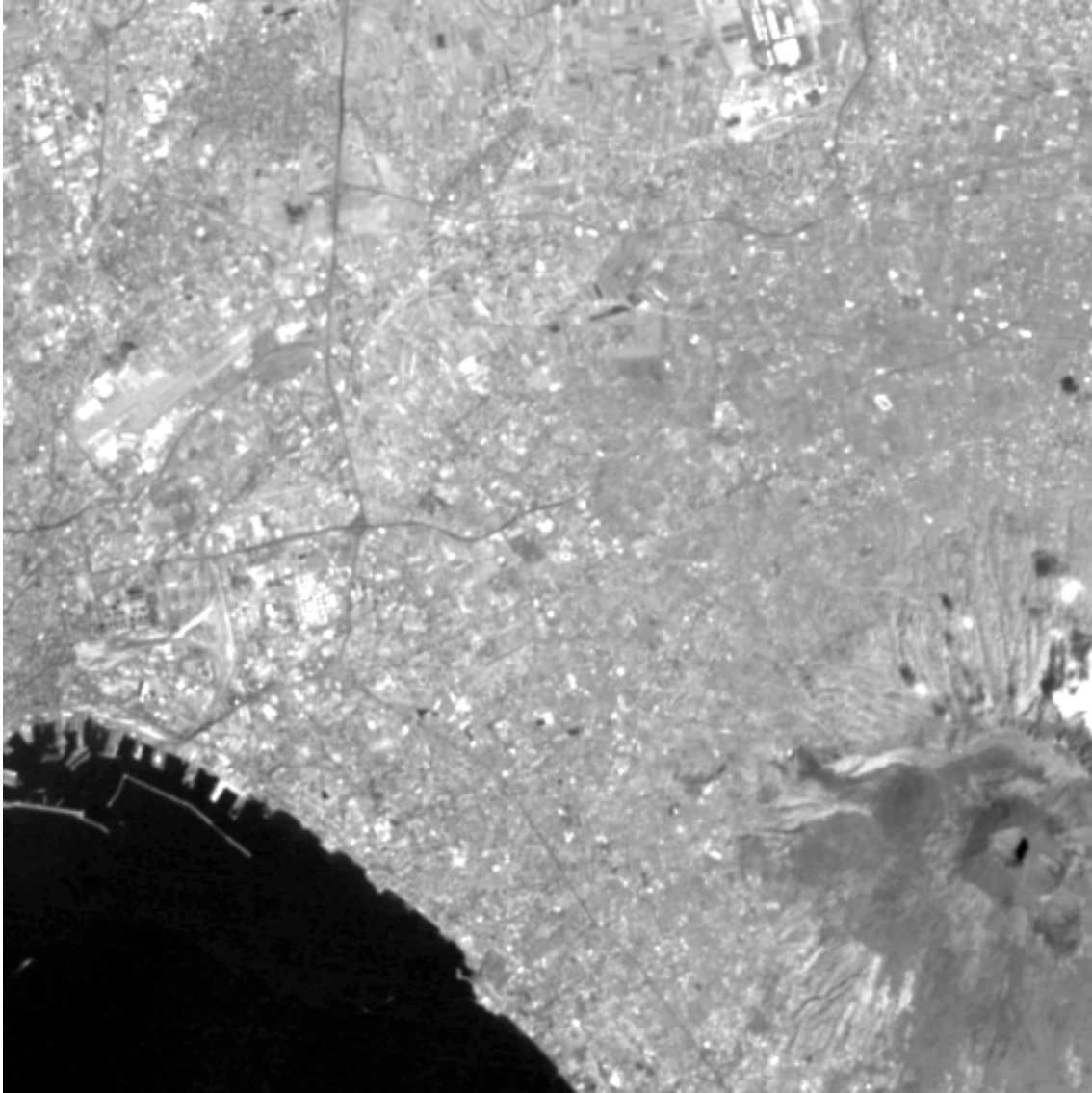


Figura 5.5: Imatge LANDSAT-PAN de Nàpols degradada a 30 m de resolució.

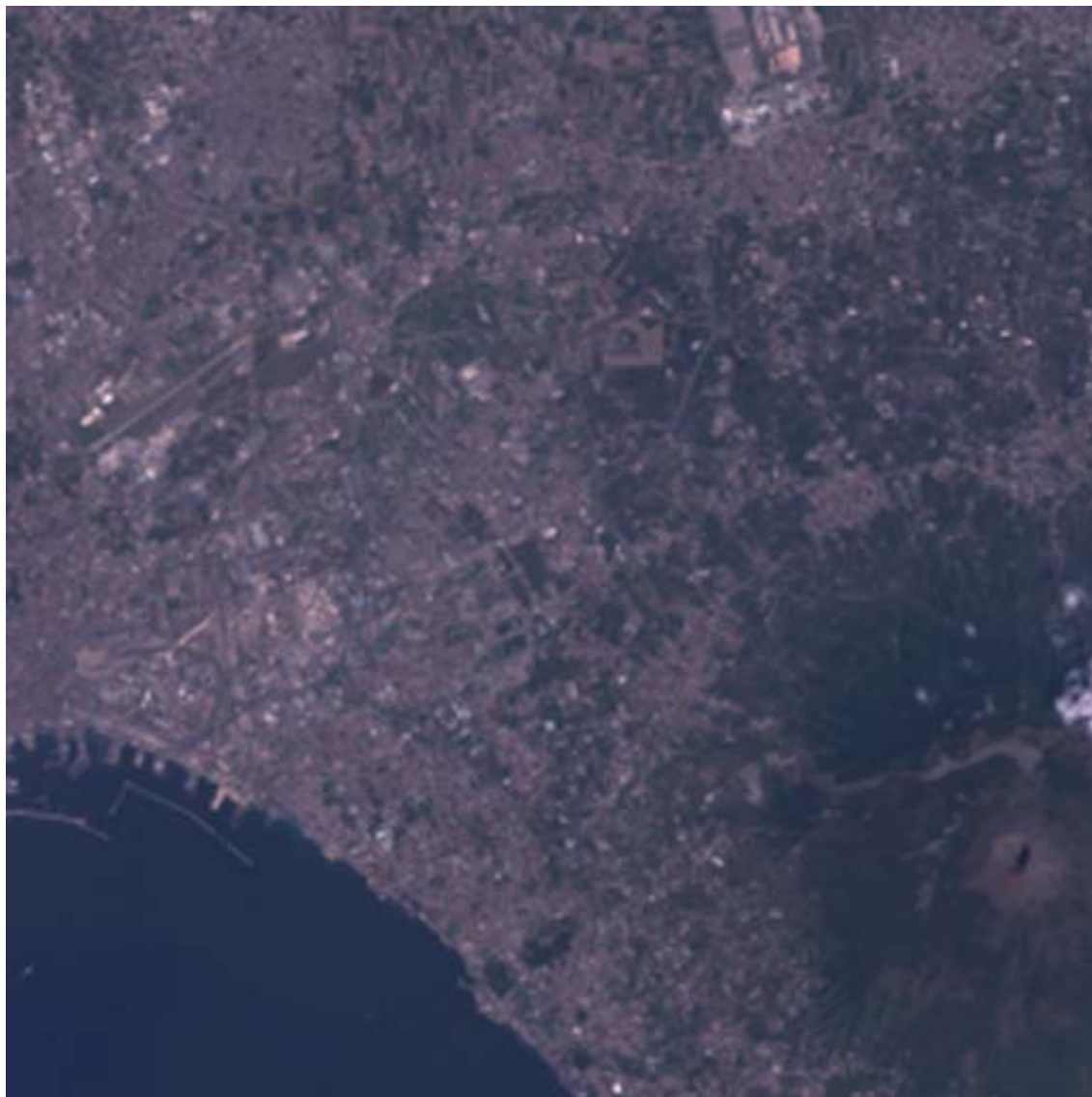


Figura 5.6: Imatge LANDSAT-ETM de Nàpols degradada a 60 m de resolució.

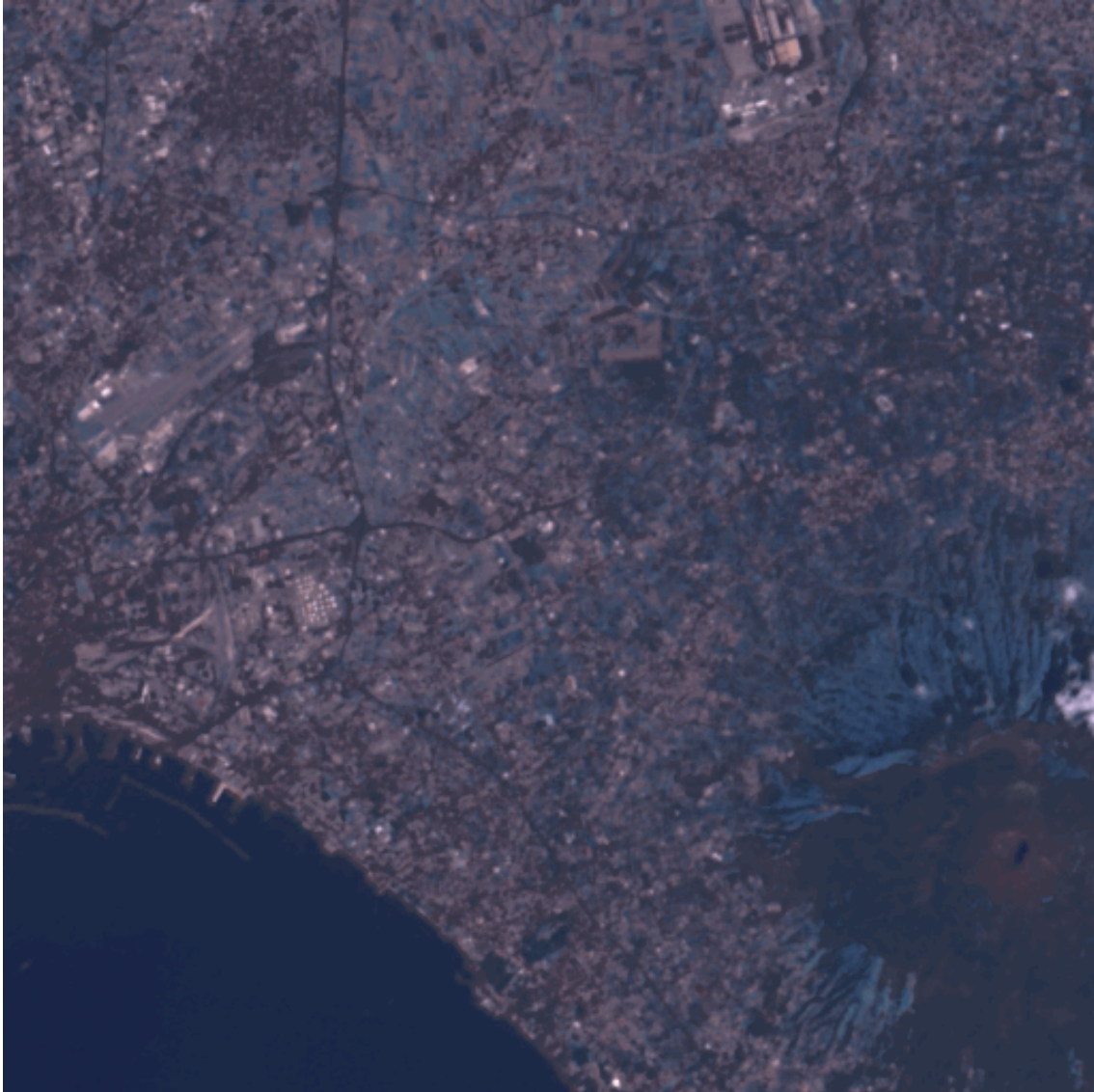


Figura 5.7: Imatge de Nàpols fusionada a 30 m de resolució segons el mètode IHS.





Figura 5.8: Imatge de Nàpols fusionada a 30 m de resolució segons el mètode L'HS.



Figura 5.9: Imatge de Nàpols fusionada a 30 m de resolució segons el mètode LHS.

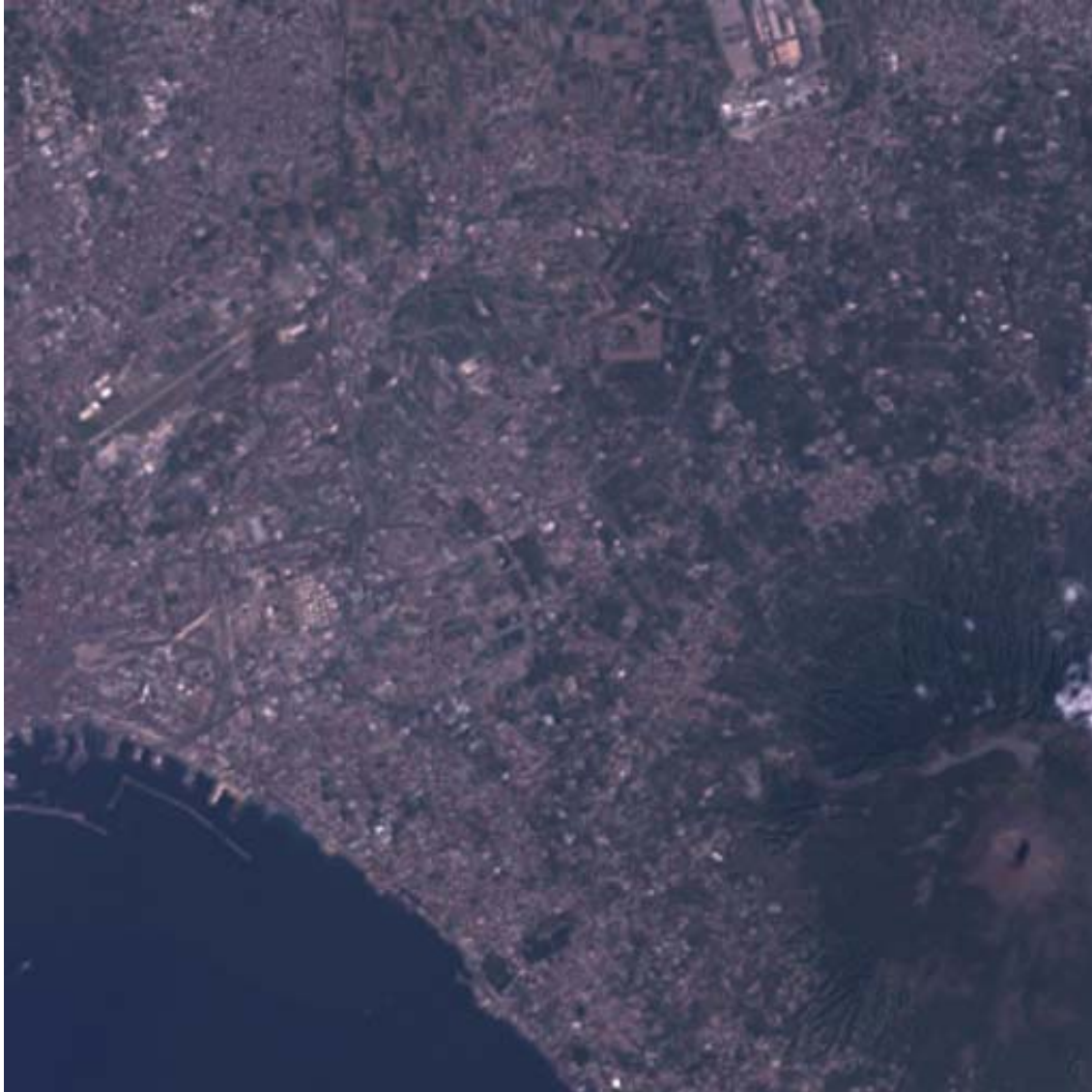


Figura 5.10: Imatge de Nàpols fusionada a 30 m de resolució segons el mètode AWI.



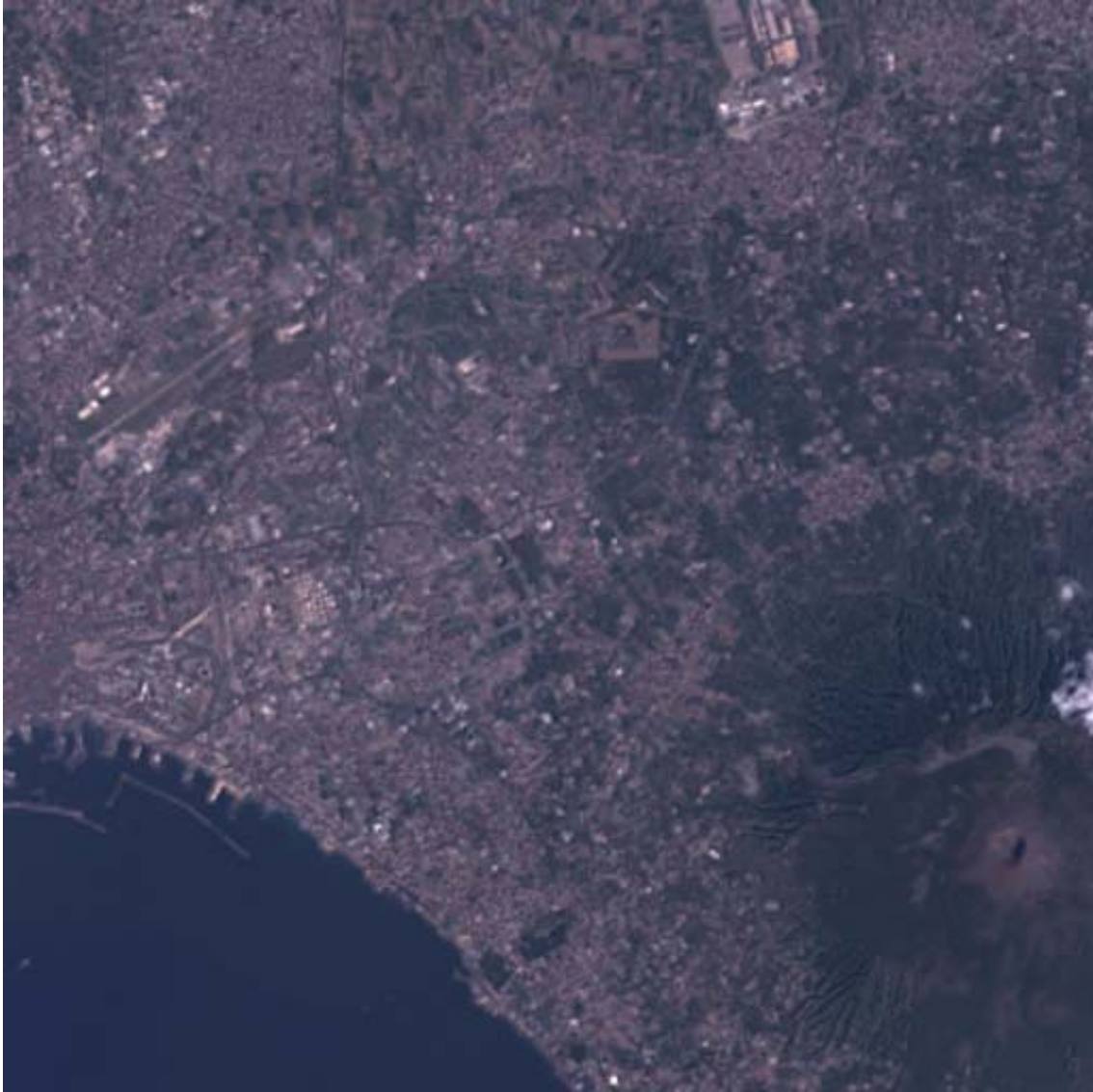


Figura 5.11: Imatge de Nàpols fusionada a 30 m de resolució segons el mètode AWL'.

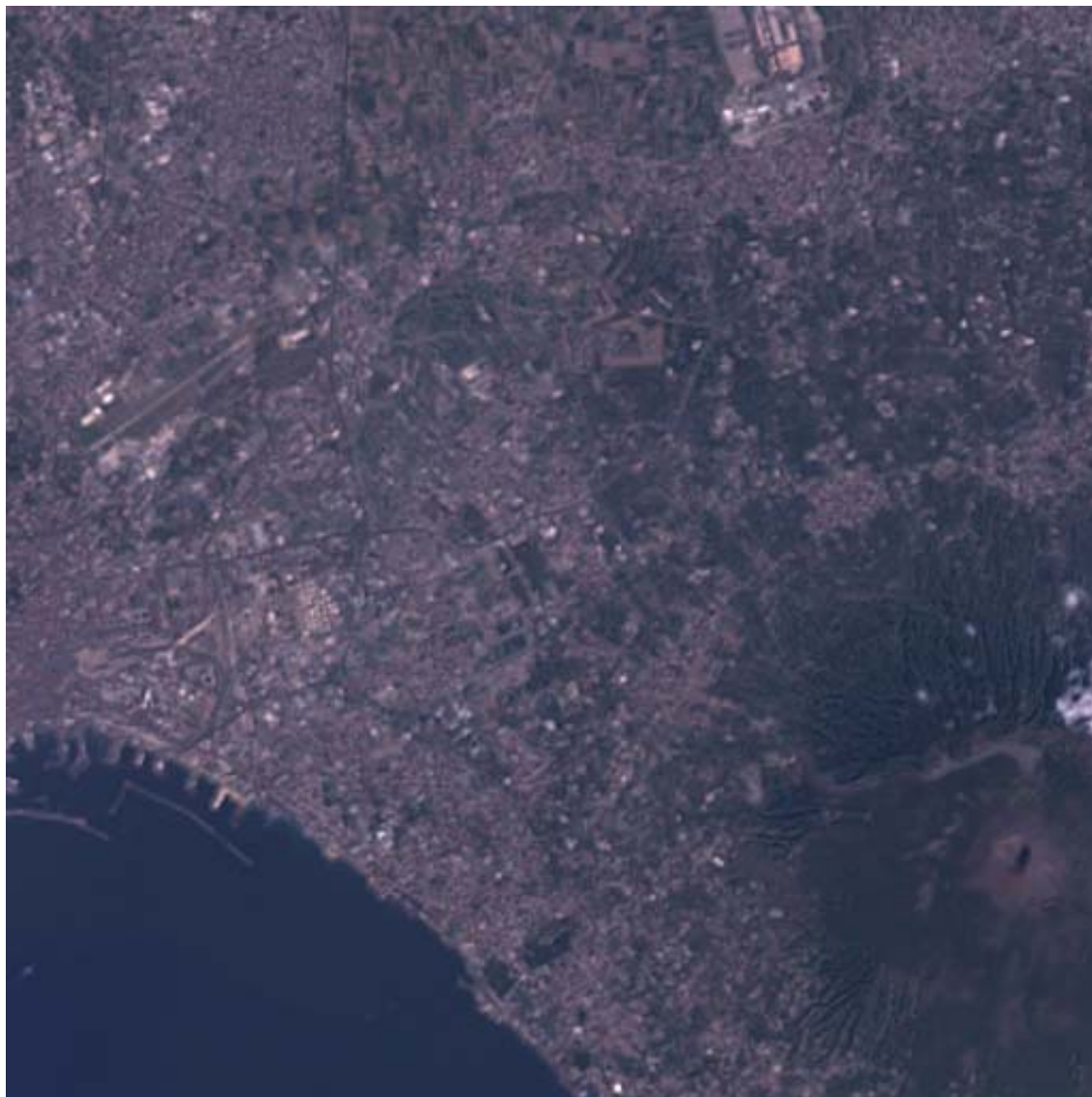


Figura 5.12: Imatge de Nàpols fusionada a 30 m de resolució segons el mètode AWL.



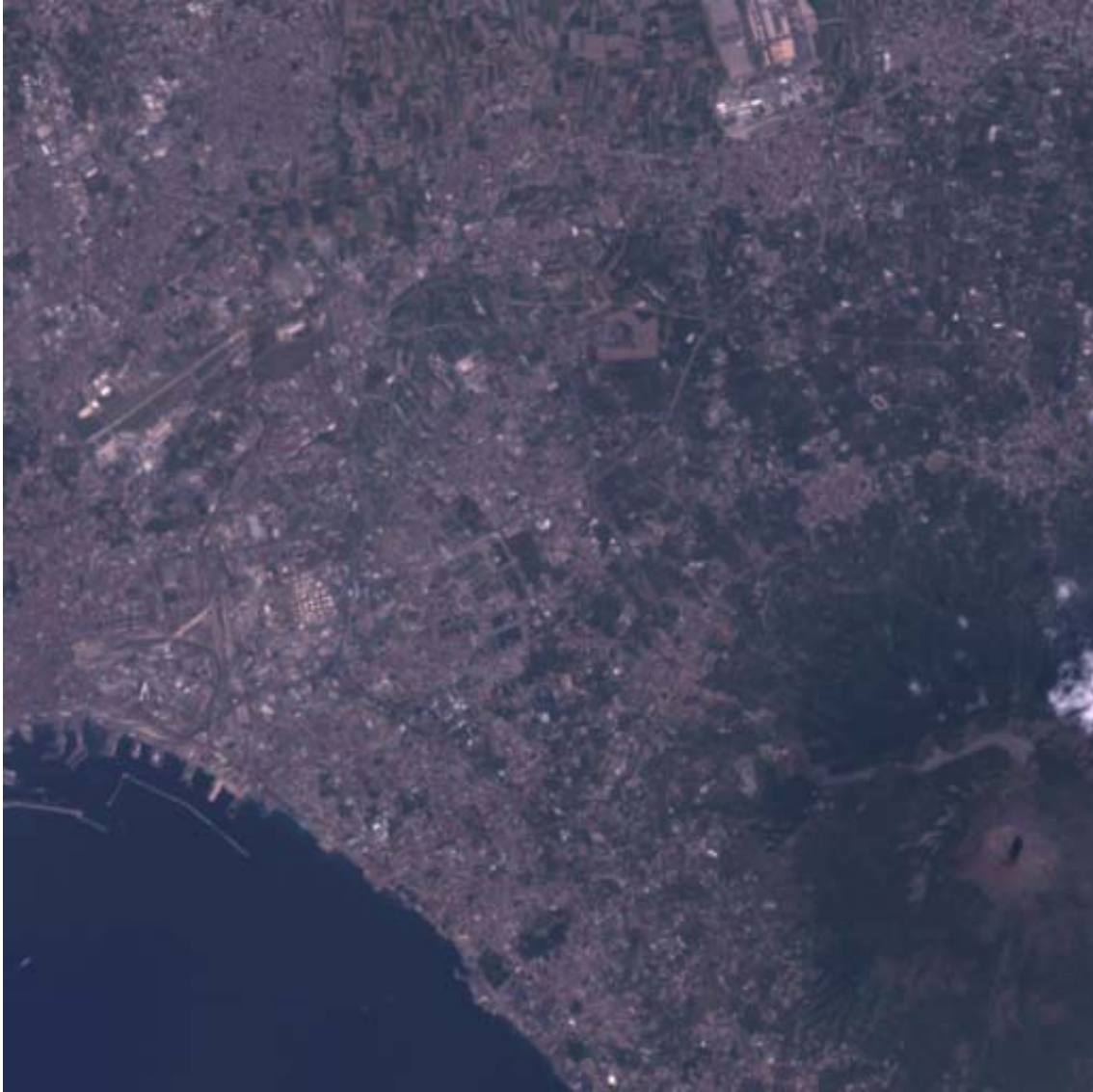


Figura 5.13: Imatge LANDSAT-ETM de Nàpols de 30 m de resolució.

No existeixen mètodes directes que permetin establir quina és la resolució espacial d'una imatge de forma acurada. Es podrien utilitzar mètodes basats en l'anàlisi espectral de Fourier, però presentarien moltes ambigüitats a l'hora d'establir una definició prou concreta. Per tant, l'únic mètode per a jutjar si la resolució de la imatge fusionada és la desitjada és un judici visual.

Una possible solució per a intentar realitzar aquesta comparació i quantificar de forma objectiva el comportament dels diferents mètodes, és calcular la correlació entre cadascuna de les diferents solucions amb la imatge LANDSAT-ETM original a 30 m. Per a calcular el coeficient de correlació entre dues imatges utilitzem l'expressió

$$\text{Corr} (A/B) = \frac{\sum_{j=1}^{n\text{pix}} (A_j - \bar{A})(B_j - \bar{B})}{\sqrt{\sum_{j=1}^{n\text{pix}} (A_j - \bar{A})^2 \sum_{j=1}^{n\text{pix}} (B_j - \bar{B})^2}} ,$$

on  $\bar{A}$  i  $\bar{B}$  són els valors mitjans del corresponent joc de dades. Aquesta expressió és la mateixa que la 3.15.

El primer que cal tenir en compte d'aquesta expressió és que el què realment mesura és la diferència entre els valors radiomètrics d'un canal, és a dir, la informació espectral. Aquesta variable no ens dona una mesura directa ni una idea de la resolució espacial que té la nostra imatge, sinó de la proximitat en valors radiomètrics que tenen les imatges que comparem. Per tant, el que dona aquesta correlació és la proximitat espectral entre imatges i no la resolució espacial.

La taula 5.1 mostra la correlació entre les diferents solucions i la imatge LANDSAT-ETM original a 30 m de resolució.

La primera fila ens dona la correlació entre la imatge LANDSAT-ETM degradada a 60 m i l'original a 30 m. És una manera de veure com hem modificat la qualitat espectral de la imatge en degradar-la.

Les tres següents files de la taula 5.1 mostren la correlació entre cadascun dels canals RGB de les solucions estàndard (IHS, L'HS, LHS) i les corresponents bandes de la imatge LANDSAT-ETM original de 30 m de resolució. La millor aproximació entre els mètodes estàndard la dona el mètode IHS. Les quatre següents files mostren les correlacions entre els mètodes de substitució basats en wavelets i la imatge LANDSAT-ETM.

Imatges	Correlació		
	R	G	B
$TM_{60m}/TM_{orig.}$	0.994	0.997	0.999
$IHS/TM_{orig.}$	0.983	0.980	0.981
$L'HS/TM_{orig.}$	0.970	0.963	0.964
$LHS/TM_{orig.}$	0.968	0.961	0.962
$SWRGB/TM_{orig.}$	0.994	0.997	0.998
$SWI/TM_{orig.}$	0.995	0.998	0.998
$SWL'/TM_{orig.}$	0.995	0.997	0.998
$SWL/TM_{orig.}$	0.995	0.997	0.998
$AWRGB/TM_{orig.}$	0.996	0.996	0.994
$AWI/TM_{orig.}$	0.995	0.997	0.998
$AWL'/TM_{orig.}$	0.995	0.997	0.998
$AWL/TM_{orig.}$	0.994	0.997	0.997

Taula 5.1: Correlació entre els mètodes estàndard (IHS, L'HS, LHS), els mètodes de substitució (SWRGB, SWI, SWL', SWL), i els mètodes additius (AWRGB, AWI, AWL', AWL) amb la imatge LANDSAT-ETM de Nàpols original de 30 m de resolució ( $TM_{orig.}$ ).

Les quatre darreres files mostren la correlació entre els resultats dels mètodes additius basats en wavelets (AWRGB, AWI, AWL', AWL) i la imatge LANDSAT-ETM. En el cas AWRGB l'histograma de la imatge pancromàtica s'ha modificat de manera que fos semblant al del canal  $L$  de la imatge multiespectral. Podríem haver escollit qualsevol de les definicions de la intensitat per a fer aquesta modificació de l'histograma, però hem escollit la definició  $L$  donat que creiem que és la més adequada. Les correlacions dels mètodes basats en wavelets, tant els de substitució com els additius, són clarament millors que les dels mètodes estàndard. Això significa que els mètodes additius preserven les característiques espectrals de la imatge multiespectral molt millor que els mètodes estàndard IHS, LHS i L'HS.

Però el primer que sorprèn és que tots els mètodes basats en wavelets donen resultats quasi iguals, quan a priori esperàvem que el mètode AWL (basat en la definició  $L$  pel canal d'intensitat) fos la que donés millors resultats. D'altra banda, els valors de la correlació són molt alts, quasi iguals al valor de les correlacions entre la imatge original i la degradada. El que podem deduir d'aquest fet és que en el cas de fusionar imatges que no presenten efectes de temporalitat, qualsevol dels mètodes basats en wavelets donen resultats de la mateixa qualitat. La possible explicació a aquest fet és doble. D'una banda, en aquest exemple la relació de resolució entre les imatges pancromàtica i multiespectral és únicament d'un factor 2 el que implica, com hem comentat anteriorment, que només hem utilitzat el primer pla wavelet de la descomposició de la imatge pancromàtica. En afegir aquest pla a la component d'intensitat de la imatge multiespectral, estem modificant radiomètricament aquesta molt lleument. D'altra banda, els efectes de temporalitat no existeixen, el que vol dir que els mètodes de fusió no 'pateixen' tant a l'hora de fusionar i no modifiquen excessivament la informació espectral.

És important remarcar que la correlació del canal  $R$  del mètode AWRGB és major que la del AWL, tot i que això es veu compensat pels majors valors dels canals  $G$  i sobretot del  $B$ . No obstant, tal i com s'ha dit anteriorment, considerem que afegir la informació d'alta resolució a la component  $L$  (mètode AWL) és molt millor que afegir-la a cadascun dels tres canals RGB (mètode AWRGB), donat que aquest darrer introdueix un biaix cap els tons grisos.

### 5.6.2 Fusió d'imatges amb efectes de temporalitat

En aquest nou exemple hem utilitzat imatges provinents de dos sensors diferents i adquirides en diferents èpoques de l'any. Les imatges pancromàtiques SPOT que hem utilitzat tenen una resolució (mida del píxel) de 10 m, mentre que les LANDSAT-TM tenen una resolució de 30 m. Les imatges LANDSAT-TM han estat convertides a valors RGB utilitzant les següents transformacions:  $R = \frac{B_5+B_7}{2}$ ,  $G = \frac{B_3+B_4}{2}$ ,  $B = \frac{B_1+B_2}{2}$ , on  $B_i$  és l' $i$ -èssim canal espectral del satèl·lit LANDSAT. Com veurem més endavant, la metodologia de fusió que aquí presentem no necessita estrictament aquesta transformació prèvia, i es pot treballar directament sobre els 7 canals originals LANDSAT-TM. Tot i així, en els exemples que aquí es mostren només s'han utilitzat els 6 més habituals donat que un d'ells aporta molt poca informació (el canal blau), i s'han transformat les dades en el sistema RGB per ser aquesta situació una de les més freqüents.

En aquest exemple, s'han utilitzat imatges d'una escena sobre Argentina que inclou zones urbanes i extensions forestals i de cultius. Les imatges LANDSAT-TM i SPOT van ser preses en diferents èpoques de l'any, el que implica que els indesitjables i problemàtics efectes temporals són presents en les dades. Això presenta un repte als algorismes de fusió, que és precisament el que es vol intentar solventar amb aquest treball, ja que aquest és l'escenari més habitual quan s'intenten integrar imatges provinents de diferents sensors.

La imatge pancromàtica té una resolució espacial de 10 m, mentre que la multiespectral presenta una resolució de 30 m. Degradem aquestes dues imatges per obtenir un nou parell de 30 i 90 m de resolució, respectivament. D'aquesta manera, i de manera semblant a l'exemple anterior, fusionarem les imatges de 30 i 90 m per a obtenir una imatge multiespectral de 30 m de resolució que podrem comparar directament amb la imatge multiespectral original del sensor LANDSAT-TM.

En la figura 5.15 es mostra la imatge LANDSAT-TM degradada a 90 m de resolució, i en la figura 5.14 la SPOT degradada a 30 m. Com es pot apreciar, la resolució de la imatge SPOT és clarament superior a la de la imatge LANDSAT-TM. És fàcilment observable que aquestes dues imatges van ser preses en diferents èpoques de l'any. Ens podem fixar, per exemple, en el llac de la part superior de la imatge, o en els evidents canvis en la reflectivitat d'alguns camps de conreu. També hi ha algunes estructures en la imatge SPOT que no eren presents quan es

va adquirir la imatge LANDSAT-TM.

A les figures 5.16 a 5.21 mostrem les imatges fusionades obtingudes amb cadascun dels mètodes de fusió i la taula final de correlacions.

El primer que ens pot sobtar és que certs detalls, per exemple el marge intern del llac, no han estat recuperats ni millorats. Això es deu a que en la imatge SPOT d'on s'extreu la informació d'alta resolució, aquest marge intern no existeix donat que en el moment en què es va adquirir aquesta imatge el llac presentava una major extensió, quedant coberta per l'aigua la zona que ocupava el marge en el moment en què es va prendre la imatge LANDSAT-TM. És evident que no podem obtenir informació d'allà on no n'hi ha, i per tant no podem recuperar el marge del llac. Altres zones de la imatge presenten efectes semblants. Però en aquelles zones on la imatge SPOT presenta detalls, aquests últims han estat incorporats a la imatge fusionada, com per exemple el riu que està connectat al llac, carreteres, el nucli urbà, camps de conreu, etc. Per tant, aquest tipus d'efecte de temporalitat sobre la resolució espacial de les imatges és impossible d'eliminar, tant en els mètodes estàndard com en els basats en wavelets.

La taula 5.2 mostra la correlació entre les diferents solucions i la imatge LANDSAT-TM original a 30 m de resolució.

El primer que cal destacar és que altre cop els mètodes basats en wavelets són clarament superiors als estàndard, tant pel seu aspecte visual com pels valors de les respectives correlacions.

Però a diferència de l'exemple anterior, les correlacions dels mètodes additius són majors que les obtingudes pels mètodes substitutius. A més, el mètode AWL és clarament superior als mètodes AWI i AWL'.

Aquest cop trobem un exemple que està d'acord amb la teoria que la component  $L$  representa millor la component d'intensitat que les components  $I$  i  $L'$ .

## 5.7 Temporalitat ... ?

Dir que les imatges no tenen efectes de temporalitat és una afirmació sense significat, sempre i quan no tinguem una definició prou acurada del que significa un



Figura 5.14: Imatge SPOT d'Argentina degradada a 30 m de resolució.



Figura 5.15: Imatge LANDSAT-TM d'Argentina degradada a 90 m de resolució.





Figura 5.16: Imatge d'Argentina fusionada a 30 m segons el mètode IHS.



Figura 5.17: Imatge d'Argentina fusionada a 30 m segons el mètode L'HS.





Figura 5.18: Imatge d'Argentina fusionada a 30 m segons el mètode LHS.



Figura 5.19: Imatge d'Argentina fusionada a 30 m segons el mètode AWI.





Figura 5.20: Imatge d'Argentina fusionada a 30 m segons el mètode AWL'.



Figura 5.21: Imatge d'Argentina fusionada a 30 m segons el mètode AWL.





Figura 5.22: Imatge LANDSAT-TM d'Argentina original a 30 m de resolució.

Imatges	Correlació		
	R	G	B
$TM_{90m}/TM_{orig.}$	0.900	0.869	0.904
$IHS/TM_{orig.}$	0.418	0.303	0.355
$L'HS/TM_{orig.}$	0.588	0.373	0.374
$LHS/TM_{orig.}$	0.667	0.373	0.418
$SWRGB/TM_{orig.}$	0.663	0.475	0.618
$SWI/TM_{orig.}$	0.649	0.323	0.432
$SWL'/TM_{orig.}$	0.730	0.514	0.555
$SWL/TM_{orig.}$	0.765	0.536	0.593
$AWRGB/TM_{orig.}$	0.861	0.715	0.752
$AWI/TM_{orig.}$	0.804	0.635	0.707
$AWL'/TM_{orig.}$	0.835	0.690	0.754
$AWL/TM_{orig.}$	0.848	0.717	0.776

Taula 5.2: Correlació entre els mètodes estàndard (IHS, L'HS, LHS), els mètodes de substitució (SWRGB, SWI, SWL', SWL), i els mètodes additius (AWRGB, AWI, AWL', AWL) amb la imatge LANDSAT-TM original de 30 m de resolució ( $TM_{orig.}$ ).



efecte temporal. La imatge d'alta resolució del canal pancromàtic del LANDSAT-7 en l'exemple de Nàpols presenta uns valors radiomètrics molt elevats en unes muntanyes, que són precisament les que en la imatge fusionada final mostren uns colors blaus molt exagerats, mentre que en la imatge multiespectral original es veu clarament que tenen un to molt fosc. Això vol dir que, en cas que les imatges hagin estat preses en el mateix moment, el que és realment important per a definir un efecte de temporalitat és la sensibilitat espectral del sensor pancromàtic, és a dir, la finestra de l'espectre electromagnètic que cobreix aquest sensor. En el cas de la imatge de Nàpols és evident que la imatge pancromàtica no correspon exactament al que hauria de ser el canal d'intensitat L de la imatge multiespectral, i que la resposta radiomètrica de la pancromàtica és molt diferent a la de la multiespectral. El que hauríem de tenir és un sensor pancromàtic amb una resposta en l'espectre electromagnètic semblant a la combinació dels canals de la imatge multiespectral. En l'exemple de les imatges d'Argentina, la imatge pancromàtica ens la proporcionava el satèl·lit SPOT, que sabem que té precisament una finestra espectral molt ampla i que abarca tot l'espectre visible. Això vol dir que la imatge pancromàtica s'assembla molt a la combinació dels tres canals visibles de la imatge multiespectral LANDSAT-TM, i per tant és molt semblant també al canal d'intensitat d'aquesta. En el cas de la imatge de Nàpols la finestra espectral del sensor pancromàtic del satèl·lit LANDSAT-7 no cobreix tot el rang de la zona visible de l'espectre electromagnètic, i per tant no s'assembla a la combinació dels canals espectrals del sensor multiespectral. Això ens porta a la situació en què les muntanyes s'observen com zones amb un baix nivell radiomètric en els canals multiespectrals, però en canvi presenten una alta resposta en el sensor pancromàtic. Evidentment, aquesta diferent resposta radiomètrica també ens la podem trobar en imatges preses en moments molt diferents, ampliant l'espectre de possibles efectes temporals.

Aquest efecte en les respostes espectrals dels sensors, ens porta a una situació de relativa paradoxa, on ens trobem que imatges preses en el mateix moment poden presentar efectes que fins ara hem anomenat de temporalitat. Per tant, la definició de temporalitat demana una revisió exhaustiva. Vistos alguns dels problemes de 'temporalitat' presents en les imatges de l'exemple d'Argentina, entre ells els del marge del llac, hauríem de considerar només com a efectes de temporalitat aquells que impliquen un canvi de forma o geometria dels objectes presents en la imatge, i fonamentalment del marge. Alguns exemples d'aquest canvis són: canvis en llacs, rius, marges de conreus, carreteres, zones urbanes, etc. Els canvis radiomètrics que no representin un canvi en un marge no haurien de ser considerats com efectes de

temporalitat.

Per tant, creiem que tant la definició com l'estudi d'aquests 'efectes de temporalitat' requereixen una anàlisi acurada i exhaustiva, tant des de la vessant lingüística de la definició, com des de la dels efectes que comporten en el mètodes de fusió.

## 5.8 Conclusions

Després d'analitzar els exemples, arribem a la conclusió que els mètodes estàndard de fusió, que es basen en la substitució del canal d'intensitat de la imatge multiespectral per la imatge pancromàtica, no són adequats per a obtenir imatges fusionades multiespectrals. En canvi, els mètodes basats en wavelets donen resultats sempre superiors als dels mètodes estàndard.

Com hem vist, els mètodes additius de fusió de dades basats en wavelets són més adequats per a fusionar imatges que els mètodes tradicionals basats en la substitució de components. Aquests mètodes combinen una imatge pancromàtica d'alta resolució amb una imatge multiespectral de baixa resolució afegint alguns plans wavelet de la imatge pancromàtica a la component d'intensitat de imatge la multiespectral. Entre els diferents mètodes basats en wavelets estudiats, el basat en la component d'intensitat  $L = \frac{R+G+B}{3}$  (mètode AWL) és el que ofereix millors resultats, conservant tota la informació de les dues imatges. Aquesta metodologia es pot interpretar com una millora dels mètodes estàndard IHS i LHS en el sentit que la intensitat de la imatge multiespectral no és totalment substituïda per la imatge pancromàtica, sinó que la informació d'alta resolució és injectada en la imatge multiespectral de baixa resolució donant lloc a una imatge multiespectral final que conté i preserva tota la informació espectral de la darrera i tota la informació espacial de la primera.

Per tant, podem resumir les conclusions en els següents punts:

- Considerem que el model de representació del color LHS és millor que els mètodes IHS i L'HS per a representar la imatge multiespectral.
- Els mètodes estàndard basats en la substitució del canal d'intensitat, sigui

quina sigui la definició d'aquest, no donen resultats satisfactoris, doncs degraden la informació espectral.

- Els mètodes basats en wavelets sempre donen millors resultats que els mètodes estàndard, tant si hi ha efectes de temporalitat com si no, i independentment de la definició utilitzada pel canal d'intensitat.
- D'entre els mètodes basats en wavelets, els additius ofereixen millors resultats que els substitutius.
- D'entre tots els mètodes de fusió estudiats, el mètode AWL ens ofereix sempre els millors resultats.

Després de tota aquesta exposició cal destacar un fet, que possiblement és el més important i interessant de tots. Aquesta metodologia no és únicament aplicable a imatges amb tres canals RGB, sinó que es pot aplicar a imatges multispectrals de  $n$ -canals espectrals. L'única diferència amb la metodologia anteriorment descrita és que l'obtenció d'un canal d'intensitat no és realment necessària. En el cas d'imatges multispectrals, el que s'ha de fer en el procés de substitució o addició dels plans wavelet de la imatge pancromàtica és repartir aquesta contribució proporcionalment als valors radiomètrics de cadascun dels canals espectrals, mantenint d'aquesta manera tota la informació multispectral (o de *color*) present en la imatge, i deixant de banda el fet d'haver de definir un canal d'intensitat  $L$ . De fet, aquesta repartició proporcional és el que fa la definició  $L$  pel canal d'intensitat. Això ens permet fusionar imatges multispectrals de qualsevol nombre de canals, donant una imatge multispectral final que conserva totes les característiques multispectrals de la imatge original i tota la resolució espacial de la imatge d'alta resolució.

També podem aplicar aquesta metodologia a la fusió de tota mena de dades, siguin o no imatges. Suposem que tenim una imatge que presenta una zona on la qualitat o resolució de les dades és deficient, per exemple degut a problemes de seeing atmosfèric o a defectes de l'instrument d'observació. A partir de diferents imatges podem aconseguir una imatge final que presenti la suma de les zones de millor resolució de totes les imatges, és a dir, una imatge final a plena resolució.

## 5.9 Aplicacions astronòmiques

Com que aquesta filosofia és aplicable a qualsevol tipus de dades en les que tingui sentit utilitzar la fusió, hem realitzat un primer estudi de la seva aplicació en el camp de la fotometria astronòmica.

Habitualment es realitzen campanyes d'observació que es reparteixen àmpliament en el temps, i amb observacions que presenten qualitats molt variables al llarg de la campanya, ja sigui degut a simples efectes de seeing o a la utilització de diferents instruments d'observació. Això fa que cadascun dels jocs de dades es tracti aïlladament, és a dir, que cadascuna de les observacions es redueixi i s'estudii sense utilitzar informació dels altres jocs de dades. Desgraciadament, això redueix la utilitat d'un joc de dades simplement per les condicions particulars que presenta. Un exemple és la variació de seeing que podem tenir en nits diferents i que pot fer inútils certs jocs de dades.

En certes situacions, aquesta tècnica de fusió d'imatges pot ésser molt útil, per exemple en l'obtenció de mapes estel·lars, cartografiats de cossos del Sistema Solar, imatges multiespectrals en alta resolució o síntesi d'imatges a partir d'observacions simultànies amb diferents instruments o condicions de seeing.

Però un dels camps més importants d'aplicació que *a priori* presenta més interès és la fotometria. Aplicant aquestes tècniques podríem intentar fer fotometria sense tenir en compte el seeing, només aconseguint un cop una única imatge d'alta resolució. Per exemple podríem tenir una molt bona estimació de les posicions dels estels d'un camp estel·lar a partir d'una imatge aconseguida en condicions atmosfèriques excel·lents o a partir d'un instrument de major resolució angular. A partir d'aquesta situació, podríem fer posteriors observacions (encara que també poden ser observacions anteriors) amb qualsevol mena d'instrument per molt baixa que fos la seva qualitat, resolució o les condicions de seeing atmosfèric. Suposem que fem una observació d'un estel que es troba dins un camp estel·lar molt poblat, i que en un moment  $t$  presenta un flux de llum  $f$ , aconseguint una imatge de molt alta resolució  $r$  i aïllant l'estel dels seus veïns. En un altre temps  $t'$ , l'estel presenta un flux  $f'$ , però amb una resolució  $r'$  tant pobre que la mesura d'aquest flux és impossible degut a que la seva imatge es confon amb la dels estels veïns. Amb el mètode anteriorment presentat es podria intentar recuperar la mesura del flux  $f'$  en el temps  $t'$ , ja que podríem aconseguir una imatge amb resolució  $r$  gràcies a l'alta

resolució de la primera imatge i a la informació fotomètrica de la segona.

Però fent estudis amb imatges sintètiques no hem obtingut resultats satisfactoris. Un dels efectes que hem observat en els estels, després de realitzar la fusió, són unes ales Gaussianes amb un alt flux de fotons. És a dir, tot i la reducció de la mida de l'estel queda llum residual al voltant d'aquest. A l'hora d'ajustar Gaussians per a realitzar l'estudi fotomètric de l'estel aquestes ales compliquen molt l'ajust, ja que l'estel ja no presenta una forma Gaussiana. Això fa que la contribució d'aquestes ales extenses es consideri llum de fons de cel. Es pot intentar reduir aquest efecte afegint un major nombre de plans wavelet, fent que aquestes ales tinguin valors negatius, però l'efecte final és el mateix: una mala estimació del nivell de fons de cel. D'altra banda, hem intentat fer fotometria d'apertura per intentar eliminar l'efecte de la forma no Gaussiana de l'estel, però tampoc hem obtingut resultats positius.

L'explicació que trobem és que la Transformada Wavelet és lineal. Suposem que tenim un senyal  $f(t)$  que descomposem en wavelets, obtenint els diferents plans  $w_i(t)$ . La descomposició d'un senyal  $2f(t)$  ens donarà uns plans wavelet  $2w_i(t)$ . Això vol dir que si tenim una imatge de baixa resolució d'un estel  $f'(t)$  que equival al pla wavelet residual  $2w_r(t)$  ( $f'(t) = 2w_r(t)$ ) però li afegim uns plans wavelet  $w(t)$  que hem obtingut d'una imatge d'alta resolució, no recuperarem el senyal  $2f(t)$  desitjat. Per a aconseguir això hauríem d'afegir els plans  $2w(t)$  per a recuperar la funció  $2f(t)$  desitjada. En notació matemàtica:

$$f(t) = \sum_{i=0}^n w_i + w_r \Rightarrow 2f(t) = \sum_{i=0}^n 2w_i + 2w_r .$$

Tenim una observació

$$f'(t) = 2w_r$$

i volem recuperar  $2f(t)$  fusionant  $f'(t)$  amb  $f(t)$ , per tant

$$f'_{fus} = \sum_{i=0}^n w_i + f'(t) = \sum_{i=0}^n w_i + 2w_r \neq 2f(t) ,$$

demostra que és impossible recuperar exactament la funció desitjada  $2f(t)$  a partir de la fusió de  $f'$  i els plans wavelet de  $f(t)$ .

En el cas d'imatges en què s'igualen els histogrames (exemples de Teledetecció),

ja hem modificat prèviament la funció  $f'(t)$  de forma que aconseguim una  $\frac{f'(t)}{2} = w_r$  i recuperem la imatge original  $f(t)$ :

$$f'_{fus} = \sum_{i=0}^n w_i + \frac{f'(t)}{2} = \sum_{i=0}^n w_i + w_r = f(t)$$

Però en el cas d'imatges astronòmiques aquesta igualació de l'histograma s'hauria de fer localment, donat que certs estels no hauran canviat el seu flux lluminós però d'altres sí, perdent d'aquesta manera tota la informació fotomètrica relativa entre els estels de la imatge.

Això no vol dir que les imatges dels satèl·lits LANDSAT i SPOT que hem obtingut no tinguin una fotometria correcta. El flux de llum original es preserva perfectament, donat que els plans wavelet tenen una energia nul·la, però la distribució espacial no està perfectament reorganitzada. En els mètodes estàndard ni tant sols es preserva el flux total de la imatge, obtenint les inacceptables imatges fusionades finals.

En resum, per a poder aplicar aquestes tècniques a la fotometria astronòmica, s'ha d'estudiar la utilització d'altres esquemes de descomposició en wavelets.

## 5.10 Vies de continuació

La feina feta en el món de la fusió de dades és, de totes les que es presenten en aquest treball, la que més portes ens ha deixat obertes per a futures exploracions. Resumim breument en la següent llista les principals vies de continuació:

- Aplicacions en la fotometria astronòmica.
- Fusió de sensors hiperespectrals per a dimensions  $n > 3$ .
- Fusió de qualsevol nombre de sensors, no únicament dos.
- Incorporació de la resposta de les finestres espectrals dels sensors.
- Estudi en l'impacte de les classificacions del terreny.

- Incorporació de conjunts difusos en la formulació del procés de fusió i els estudis sobre classificació.
- Esquemes no diàdics de descomposició wavelet.
- Significat precís del concepte resolució, i estimació automàtica de la relació de resolucions entre imatges.
- Revisió i definició del terme *temporalitat*.

Tot i que, com acabem de veure, les tècniques de fusió de dades no semblen gaire idònies per a la fusió fotomètrica d'imatges astronòmiques, no creiem que aquesta porta estigui definitivament tancada. Els mètodes de descomposició en wavelets basats en esquemes de descomposició piramidal potser no són els més adequats, però caldria explorar altres esquemes de Transformada Wavelet. La possibilitat de poder fer fotometria sense haver de resoldre espacialment els objectes observats, és massa temptadora i important com per no seguir treballant-hi. La possibilitat de limitar-se a observar, sense necessitat d'utilitzar instruments que ofereixin una gran resolució angular, i d'acumular tanta llum com sigui possible independentment de l'instrument utilitzat i les condicions de seeing, obriria un nou camp en l'observació fotomètrica d'objectes no resolts espacialment.

En el camp de la Teledetecció ja hi ha noves vies que s'estan explorant en l'actualitat. Una d'elles és en la fusió de sensors hiperespectrals ( $n$  canals espectrals). En aquest treball hem treballat sobre un esquema espectral de tipus RGB o LHS, però aquests sistemes de color pocs cops es corresponen amb la informació espectral subministrada pels sensors que s'utilitzen habitualment. El primer pas és coneixer la resposta espectral de tots els sensors utilitzats en el procés de fusió. D'aquesta manera, la informació present en la imatge d'alta resolució es reparteix proporcionalment en els diferents canals espectrals d'acord amb la quantitat d'informació d'aquest canal espectral present en la imatge d'alta resolució. Per exemple, si la imatge d'alta resolució només cobreix l'espectre visible, no s'ha d'incorporar aquesta informació als canals infrarojos de baixa resolució, doncs el tipus d'informació és completament diferent.

A més, un punt interessant és la fusió simultània de  $n$  sensors, i no únicament de dos.

També s'ha començat a estudiar la millora en classificació espectral que presenten les imatges fusionades en front de les originals. En altres paraules, veure si les classificacions de les cobertes del sòl de les imatges fusionades són millors que les de les imatges de baixa resolució.

Relacionada amb la classificació, una altra de les tècniques importants a aplicar és la teoria dels conjunts difusos (*fuzzy sets*). Les definicions dels graus de pertinença d'un element a un conjunt (o classe-llegenda) estan directament relacionades amb el grau d'informació que cada canal espectral aporta a un píxel concret. En l'actualitat hi ha algunes aplicacions dels conjunts difusos al camp de la fusió de dades i la classificació multiespectral, però cap en algorismes de fusió basats en wavelets. No cal dir que la pròpia natura multicanal de les descomposicions wavelets està directament relacionada amb el concepte dels graus de pertinença dels conjunts difusos.

Un altre camp a explorar és la utilització d'esquemes no diàdics de descomposició wavelet. En general, no es presenten relacions de resolució entre imatges que siguin potències de 2, tot i que com s'ha demostrat aquest fet no afecta la qualitat dels resultats obtinguts amb esquemes diàdics. De fet ja hem realitzat una primera aproximació en aquest aspecte, i hem obtingut uns resultats molt esperançadors.

Relacionat amb els esquemes no diàdics i les imatges que presenten una relació de resolucions no diàdica, hem iniciat un estudi per a determinar de forma automàtica la relació de resolucions entre un conjunt d'imatges. El terme *resolució* s'utilitza de forma poc correcta, ja que habitualment s'utilitza simplement per fer referència a la mida del píxel de la imatge. Aquest ús és clarament incorrecte, donat que la resolució real d'una imatge ve donada per la PSF de l'instrument amb què s'han obtingut les dades. Tot i tenir clara aquesta definició, no hi ha processos estrictament definits per a poder determinar quina és la resolució d'una imatge, aspecte molt important a tenir en compte tant en problemes de fusió com en molts d'altres en imatges de Teledetecció. Per tant, és necessari un mètode que determini de forma automàtica, i únicament a partir d'un conjunt d'imatges, quina és la relació de resolucions que aquestes presenten. L'estudi que hem iniciat, utilitza el concepte *multiresolució* de les wavelets, tot i que de moment no estem treballant estrictament amb aquestes funcions.

Tal com s'ha comentat en l'apartat dedicat als efectes de temporalitat, cal una revisió de la seva definició i un estudi exhaustiu dels seus efectes en les imatges fusionades.



# Capítol 6

## Clustering

*L'Art de la Fuga ha de ser interpretat molts cops si volem veure, escoltar, sentir, descobrir i treure a la llum les maravelles internes que s'amaguen sota la seva deceptiva lucidesa.*

- Charles Rosen

### 6.1 Introducció

El camp de l'anàlisi de dades es pot dividir, de manera general, en tres nivells de diferent complexitat. El primer nivell consisteix en una simple anàlisi freqüencial. En el segon nivell es realitza el reconeixement de patrons, en el qual les dades s'agrupen segons criteris de similaritat. Aquests dos nivells corresponen al camp de l'anàlisi exploratori de dades, que tracta amb les dades sense assumir cap model matemàtic *a priori* que intenti explicar l'estructura d'aquestes. En el tercer nivell, les dades són analitzades segons un model matemàtic en el qual, a través de regressions, s'estudien i s'estableixen les relacions entre aquestes. El *clustering* pertany al segon nivell de complexitat.

L'objectiu del *clustering* és repartir o agrupar un conjunt de dades o objectes en clusters, que també podríem anomenar subgrups, grups o classes. Aquest procés ha d'agrupar dades que estiguin relacionades entre elles i que presentin fortes sem-

blances, definides aquestes per les variables que descriuen les dades.

Aquesta partició o agrupació ha de tenir les següents propietats:

- Homogeneïtat dins els clusters, és a dir, les dades que pertanyen a un determinat cluster han de ser el més semblants possible.
- Heterogeneïtat entre clusters, és a dir, les dades que pertanyen a clusters diferents han de ser tan diferents com sigui possible.

Un dels camps que està més relacionat amb les tècniques de clustering és el de la classificació de dades.

## 6.2 Classificació d'imatges

La classificació digital d'imatges és el procés d'assignar píxels a classes (Campbell, 1987) (Richards, 1999) (Bryan, 1979). Normalment cada píxel es tracta com una unitat individual formada per diferents valors distribuïts en diferents bandes espectrals. Comparant aquests píxels amb altres que tenen una identitat coneguda, és possible crear grups de píxels (també anomenats *classes*) que mostren les categories qualitatives que l'usuari vol extreure d'aquestes dades. Aquestes classes formen regions en un mapa o imatge, i per tant després d'aquesta classificació la imatge digital es presenta com un mosaic de parcel·les uniformes, cadascuna d'elles amb un símbol o color.

La classificació d'imatges sempre ha estat un tema important dins els camps de la Teledetecció, l'anàlisi d'imatges i el reconeixement de patrons. En alguns casos la pròpia classificació pot esdevenir l'objecte d'anàlisi o estudi.

El terme *classificació* ens suggereix vagament la idea d'un programa informàtic que implementa un procediment específic per a classificar imatges. Al llarg dels anys els científics han ideat diversos tipus de classificació. La manera més simple és considerar cada píxel individualment, assignant-lo a una classe basant-se en els valors mesurats en les diverses bandes espectrals. Alguns cops aquests classificadors s'han anomenat classificadors espectrals o puntuals, donat que consideren cada píxel com una unitat d'observació aïllada dels seus veïns. Tot i que els classificadors puntuals

ofereixen certs avantatges, com poden ser la simplicitat i l'economia de mitjans, no són capaços d'aprofitar la informació present en les relacions que existeixen entre cada píxel i els seus veïns. Un intèrpret humà, per exemple, pot obtenir poca informació utilitzant només un mètode puntual, donat que obté menys informació a partir de les intensitats individuals dels píxels que no pas de les formes o patrons formats per píxels adjacents. Aquesta darrera característica és el que, dins el context de la interpretació d'imatges, s'anomena textura.

Es poden diferenciar, principalment, dos tipus de mètodes de classificació: els mètodes supervisats i els no supervisats. Els mètodes supervisats necessiten una interacció considerable amb l'analista, que és qui ha de guiar la classificació identificant àrees en la imatge que sap que pertanyen a una determinada categoria. En canvi, la classificació no supervisada ho fa amb una interacció mínima, buscant grups presents en la imatge que es podrien qualificar com grups "més naturals". Però les dues estratègies no són tan diferents com suggereix aquesta definició, i alguns mètodes no cauen clarament dins cap d'aquestes categories. Aquests mètodes es coneixen com classificadors híbrids, i comparteixen característiques d'ambdós mètodes.

## 6.3 Classificació multispectral

Com acabem de veure, un dels mètodes per a classificar una imatge que està formada per diferents canals d'informació, que poden ser diferents finestres en l'espectre electromagnètic, és la *classificació supervisada*. Aquest mètode habitualment inclou un altre mètode també molt utilitzat, que és la *classificació no supervisada*.

Un dels mètodes més utilitzats de classificació no supervisada es coneix amb el nom de *ISODATA* (Ball & Hall, 1965) (Bryan, 1979) (Swain & Davis, 1978). Considerant que la imatge a classificar té  $n$  canals, es pot construir un espai  $n$ -dimensional on cada eix ve determinat per cadascun d'aquests canals. Cada píxel de la imatge és un punt en aquest espai, on la projecció en cadascun dels eixos és el valor d'aquest píxel en el corresponent canal de la imatge. D'aquesta manera, s'obté una distribució de punts en aquest espai  $n$ -dimensional que caracteritza a la imatge, podent suposar que punts veïns estan relacionats amb característiques físiques semblants. Per tant, en el procés de classificació el que es vol aconseguir és agrupar aquests punts en diferents grups o clusters. Cal remarcar, que habitualment es produeix un abús de llenguatge, utilitzant els termes *classe*, *grup* i *cluster* per a

designar el mateix concepte.

El procés de classificació es basa sempre en la resposta a la mateixa pregunta: "Pertany el píxel a un determinat cluster?". Aquesta pregunta es pot respondre trobant la distància multiespectral entre dos píxels o punts  $n$ -dimensionals. Si la distància entre A i C és major que la de B a C, llavors es diu que B i C pertanyen al mateix grup, i A es defineix com un membre d'una classe separada.

Aquesta distància multiespectral entre píxels es pot utilitzar per a definir els membres d'un grup. Hi ha diferents mètodes per a calcular distàncies en espais multidimensionals. La manera més simple és calculant la distància Euclidiana, que té l'expressió:

$$D_{ab} = \sum_{i=1}^n (a_i - b_i)^2 ,$$

on  $i$  és una de les  $n$  bandes espectrals, i  $a$  i  $b$  són els píxels. Es poden adoptar altres definicions de distància, com per exemple la distància de Mahalanobis, però la més utilitzada és l'Euclidiana.

### 6.3.1 Classificació no supervisada

Donat un joc de dades, els algorismes de classificació no supervisada calculen milers de distàncies per a determinar la similaritat entre els píxels i els grups de la imatge. Per tant, les mesures de distància són el nucli i la part més important de la classificació no supervisada.

Un mètode de classificació no supervisada treballa iterativament buscant una assignació de píxels en categories. L'usuari pot fixar alguns paràmetres d'aquesta assignació, com el nombre de clusters a generar o certes restriccions numèriques per a distingir entre un grup i els seus veïns utilitzant les distàncies multiespectrals. Una seqüència habitual de recerca de centres espectrals pot començar amb un nombre fixat de centres, triats de aleatòriament. Es troben distàncies entre píxels i centres espectrals, i es troben unes estimacions inicials per als centres dels clusters. Una classe pot ser representada per un sol punt en l'espai  $n$ -dimensional (que es pot anomenar *centroide espectral*), i que es pot considerar el centre de masses de cadascun

dels clusters que acabem de trobar. En la següent iteració, cada píxel s'assigna al centroe més proper segons la definició de distància que s'hagi adoptat, i d'aquesta manera la imatge es torna a reclassificar. Això es repeteix fins que no es detecten canvis en les posicions dels centroides o els canvis són de magnitud inferior als establerts per l'usuari. Podem veure una representació gràfica del funcionament d'aquests mètodes en la figura 6.1, en aquest cas es mostra l'algorisme ISODATA, que és el més utilitzat en la comunitat científica per a classificacions no supervisades.

De fet, l'algorisme que acabem de descriure no és l'ISODATA, sinó el *k-means*. L'ISODATA és una versió d'aquest algorisme en la qual es fusionen clusters si la distància entre ells és inferior a un valor fixat per l'usuari. Però això implica l'existència d'una informació *a priori* sobre l'estadística de les dades, que se suposa que no es té mai. En tot cas, en aquesta situació l'ISODATA deixa de ser un mètode completament no-supervisat, i per a que sigui així aquest valor ha de ser nul. En aquest darrer cas ens trobem en un algorisme k-means pur. Per tant, veiem que l'algorisme k-means és un cas particular de l'ISODATA. En aquest treball, i donat que volem treballar amb algorismes no supervisats purs, farem un lleuger abús de llenguatge i parlarem del mètode ISODATA, quan en realitat hauriem de parlar de k-means, donat que utilitzarem un ISODATA particular.

Hi ha diferents procediments de classificació no supervisada, però quasi tots utilitzen aquesta estratègia general. Es poden aconseguir optimitzacions a nivell de temps computacional, però tots comparteixen el fet de mesurar distàncies en un espai de dades n-dimensional, identificar centroides de classes i establir diferències entre classes.

Un cop trobats els centres espectrals es passa a una fase d'assignació on cada píxel és associat a un d'aquests centres utilitzant diferents eines estadístiques. Una tècnica pot ser assignar cada píxel al centre més proper, però això pot donar resultats poc desitjables. Una de les més utilitzades és la de la classificació per màxima versemblança. A partir de les característiques de cadascun d'aquests centres, com posició, dispersió, etc., s'estima la probabilitat que un píxel sigui classificat correctament dins una classe. Llavors s'assigna cada píxel a la classe que maximitza aquesta probabilitat.

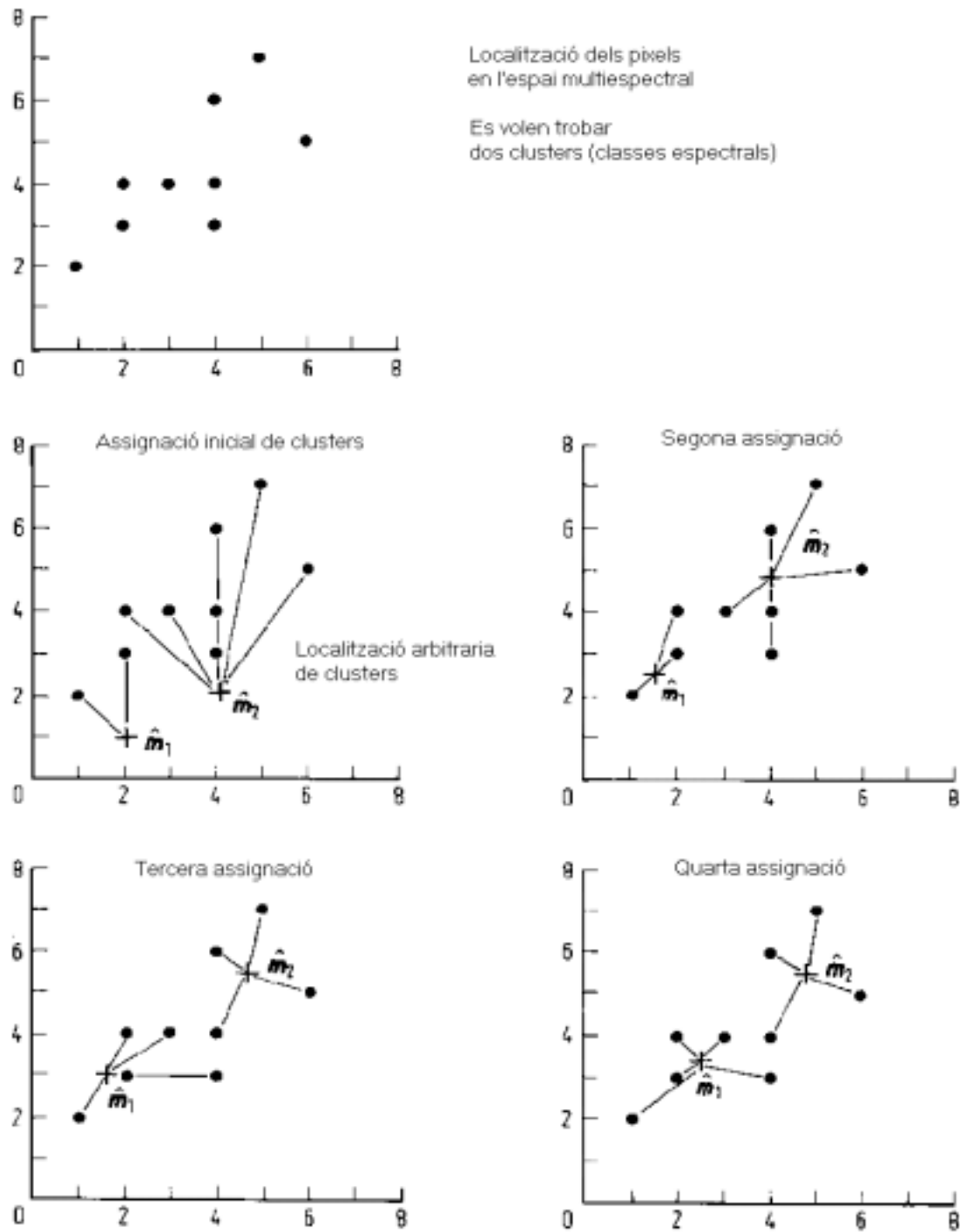


Figura 6.1: Representació gràfica de l'algorisme de classificació no supervisada ISO-DATA.

### 6.3.2 Classificació supervisada

Un cop feta aquesta classificació no supervisada, es poden definir unes àrees d'entrenament en la imatge, que no són més que àrees on es coneix la classe-llegenda present en aquella zona. Un cop fet això es poden combinar aquestes àrees junt amb la classificació obtinguda del procés de classificació no supervisat i obtenir una classificació final amb les classes-llegenda desitjades. Per a facilitar la nomenclatura, a aquestes classes-llegenda finals les anomenarem *grups* i a les classes provinents de la classificació no supervisada simplement com a *classes*. En aquest procés d'assignació de classes a grups, s'obté una estadística de la distribució de classes dins les àrees d'entrenament de cada grup, obtenint així una estimació de la probabilitat que una classe determinada sigui assignada correctament a un grup. D'aquesta manera es pot reassignar cada classe a aquell grup que maximitza la probabilitat de pertinença. Evidentment necessitem un nombre elevat de classes per tal de poder separar diferents característiques de la imatge, evitar possibles confusions espectrals o tenir grups que continguin informació de característiques físicament diferents. Aquesta manera de procedir s'anomena *classificació supervisada*, donat que l'usuari humà extern defineix les àrees d'entrenament, i per tant el seu nombre i les seves característiques espectrals.

El nom de *supervisada* prové de la definició d'aquestes àrees d'entrenament. En aquestes és on s'estableix la probabilitat d'assignació entre classes i grups, i per tant realment és l'usuari qui guia i defineix la correspondència final entre classes i grups.

Es pot estimar la bondat o encert d'una classificació final calculant l'estadístic  $\kappa$ , entre altres mètodes. Aquest es calcula a partir de la matriu de confusió obtinguda en estudiar l'estadística de la imatge classificada dins unes àrees de test definides prèviament i de les que es coneix el grup o classe-llegenda al qual pertanyen, de manera semblant a les àrees d'entrenament utilitzades en la classificació supervisada. Si anomenem  $\mathbf{x}_{ij}$  a la matriu de confusió, l'índex  $\kappa$  es calcula a partir de la següent expressió:

$$\kappa = \frac{n \sum_k \mathbf{x}_{kk} - \sum_k \mathbf{x}_{k+} \mathbf{x}_{+k}}{n^2 - \sum_k \mathbf{x}_{k+} \mathbf{x}_{+k}}$$

on  $\mathbf{x}_{i+} = \sum_j \mathbf{x}_{ij}$  (suma de totes les columnes de la fila  $i$ ) i  $\mathbf{x}_{+j} = \sum_i \mathbf{x}_{ij}$  (suma de totes les files de la columna  $j$ ), i  $n$  el nombre de files i columnes (nombre de classes).

Aquest estimador té valors tant més propers a la unitat com millor és l'ajust,

i és preferible a la informació que donen els percentils d'encert. Si es realitza una classificació purament aleatòria sobre  $N$  classes, s'obté un percentil d'encerts aproximat de  $100/N$  %. Per exemple, si es tenen només 2 classes, en una classificació purament aleatòria s'obtindrà un 50% de píxels ben classificats. Però en una classificació purament aleatòria sempre s'obté  $\kappa = 0$  el que indica que la classificació és totalment inexacta i que els clusters obtinguts no tenen absolutament cap significat.

### 6.3.3 Consideracions sobre el comportament dels mètodes no supervisats

Els mètodes tradicionals no supervisats, com l'ISODATA presenten certs problemes a l'hora d'obtenir els diferents centres espectrals. Un dels problemes més freqüents és el fet de no poder detectar clusters que estan immersos dins d'altres. Per exemple, prenem un joc de dades format per un cluster molt poblat amb una distribució Gaussiana en l'espai multiespectral i una desviació estàndard  $\sigma \gg 1$ . Si li proporcionem al mètode un alt nombre de clusters inicials, els situarà més o menys uniformement distribuïts en l'espai multiespectral, i utilitzarà quasi el mateix nombre de clusters que li hagi indicat l'usuari. Prenem ara un segon joc de dades format per un cluster molt poc poblat amb un perfil Gaussià i  $\sigma \ll 1$ . Combinant aquests dos jocs de dades obtenim una distribució de punts conjunta que s'assembla força a la distribució original del primer cluster, tot i que presenta una lleugera deformació respecte la Gaussiana principal.

Per tant, donat aquest joc de dades, en intentar detectar el cluster poc poblat ens trobem davant una tasca pràcticament impossible d'aconseguir. Les posicions dels centroides obtingudes en una classificació on només s'utilitza el primer cluster no es veuen afectades per les petites variacions en la seva distribució introduïdes en el segon joc de dades pel cluster secundari poc poblat. Aquest comportament és degut a la manera de treballar dels mètodes de classificació no supervisada, que com es pot deduir de l'explicació anterior, es basen en la mobilitat de diferents centres de masses. Aquests mètodes es poden interpretar com mètodes que busquen el centre de masses d'un univers. Podem definir diferents universos, trobar els seus centres de masses, i redefinir les seves poblacions incorporant partícules massives d'universos veïns a partir de les distàncies de la partícula al centre de cada univers. L'objectiu principal de cada univers és trobar el seu centre gravitacional posseint tantes partícules com sigui possible, competint d'aquesta manera amb universos



veïns i arribant a despreciar i no tenir en compte les petites inhomogeneïtats locals internes pertanyents a la seva distribució de masses. Precisament el que es vol trobar són aquestes petites inhomogeneïtats, però aquestes són ignorades per aquest tipus de mètodes de classificació no supervisada. Polítiques d'actuació competitives i fagocitàries no porten mai a un bon fi i sempre requereixen solucions finals difícils i compromeses.

Per tant, en els mètodes habituals de classificació no supervisada alguns clusters són emmascarats per clusters veïns més poblats o més extensos, restant els primers indetectables. Això ens suggereix la necessitat d'obtenir un nou mètode que no requereixi un usuari extern que li subministri el nombre inicial de clusters. Busquem un mètode que sigui capaç de detectar aquests clusters emmascarats, així com la seva estadística, i de treballar sense cap mena d'informació *a priori*, sense interaccionar amb l'exterior i treballant únicament a partir de la informació intrínseca de les dades a analitzar.

## 6.4 Algorisme no supervisat basat en wavelets

Sabem que la Transformada Wavelet presenta la propietat d'aïllar detalls de diferent contingut freqüencial, per tant pot ser una eina molt útil a l'hora de detectar, discriminar, localitzar i analitzar clusters en l'espai multiespectral (Otazu & Núñez, 2001).

Donada una distribució de punts en un espai multiespectral, els clusters se situen prop de les zones de màxima densitat. El concepte de densitat ràpidament ens suggereix un altre concepte, el d'histograma, i per extensió la idea que els clusters es troben prop dels màxims d'aquest histograma. Cada cluster contribueix a la densitat de punts en l'espai multiespectral segons defineix la seva estadística. Clusters molt concentrats es mostren com detalls d'alta freqüència en l'espai multiespectral, mentre que els clusters més o menys dispersos com detalls de baixa freqüència. Si es realitza una Transformada Wavelet d'aquest histograma multiespectral, les diferents contribucions de cadascun d'aquests clusters s'aïllaran en diferents plans wavelet, i aquest procés d'aïllament vindrà determinat pel contingut freqüencial dels diferents clusters en l'histograma multiespectral.

Per tant, la idea és trobar els clusters en l'espai wavelet en comptes d'intentar

trobar-los directament en l'espai multiespectral, tal com fan els algorismes habituals. L'espai multiespectral es descomposa en un cert nombre de nous espais (plans wavelet), cadascun d'aquests contenint informació estadística de caire diferent. Per a detectar els clusters caldrà buscar màxims locals en cadascun dels plans wavelet de la descomposició de l'histograma multiespectral. Cada màxim local en un pla wavelet ens revelarà la presència d'un detall, objecte, senyal o contribució important en aquest pla, per tant aquest màxim ens estarà indicant la possible existència i localització d'un cluster. Un cop aïllada la contribució d'un cluster determinat en un pla wavelet, podem mesurar directament la seva posició, extensió i forma, és a dir, la seva estadística (posició, matriu de covariances, etc.). Per tant, l'obtenció de la Transformada Wavelet d'un histograma multiespectral ens permetrà detectar, localitzar i obtenir l'estadística dels clusters de manera automàtica i molt més còmodament que els mètodes habituals.

També és interessant remarcar que en cada pla wavelet podem trobar contribucions de clusters amb diferent estadística i població. En els mètodes estàndard el nombre de punts realment pertanyents a un cluster és molt important a l'hora de detectar aquest cluster. Excepte per valors de la població extremadament baixos, aquest problema no és important ni afecta al present algorisme, i de fet, aquesta és una de les principals motivacions d'aquest treball, junt amb el fet de no haver de subministrar el nombre inicial de clusters.

A l'hora d'implementar els algorismes de Transformada Wavelet s'han de tenir en compte certs aspectes. Cada pla wavelet està format per  $l^n$  valors, on  $n$  és el nombre de canals espectrals i  $l$  és el nombre de bins utilitzats per a calcular l'histograma (normalment  $l < 256$ ). Però per a  $n > 3$ ,  $l^n$  és excessivament gran per a que els ordinadors actuals treballin còmodament amb aquesta quantitat de dades, el que demana trobar alguna solució a aquest problema. Una solució parcial seria reduir el nombre de bins, però per a  $n > 3$  això no presenta un impacte final important en la reducció de dades a processar. Una solució realista i que dona resultats prou acceptables, és fer una anàlisi de components principals per a reduir la dimensionalitat del joc de dades  $n$ -dimensional original abans de confeccionar l'histograma.

La idea de trobar clusters a partir de la forma de l'histograma ha estat prèviament estudiada per (Letts, 1978), però en aquest cas els clusters es defineixen únicament en els màxims locals de l'histograma. Aquesta aproximació és clarament massa

conservadora i presenta greus irregularitats, com el fet que en una situació extrema un canvi molt petit en el nombre de píxels en un bin de l'histograma pot arribar a definir un màxim local o no. De fet, el treball basat en wavelets que aquí es presenta es pot interpretar com una millora d'aquest mètode, tot i que amb una filosofia i plantejament molt diferents, donat que volem trobar els clusters que estan immersos o emmascarats i que no es manifesten com màxims locals en l'histograma. Anomenarem WAVCLUS al mètode de classificació no supervisada basat en wavelets que presentem. En la figura 6.2 es mostra una representació gràfica del funcionament d'aquest algorisme.

### 6.4.1 Selecció de candidats

Els màxims locals de la descomposició wavelet de l'histograma són candidats a cluster, però és necessari discriminar entre falses deteccions i clusters autèntics. Moltes d'aquestes falses deteccions són degudes al soroll present en els bins de l'histograma, és a dir, a les petites variacions entre bins veïns, habitualment degudes a un nombre insuficient de píxels per bin. Aquestes variacions les podem anomenar *soroll*.

En els diferents plans wavelet de la descomposició de l'histograma  $n$ -dimensional o multiespectral existeixen coeficients que són deguts a la contribució d'aquest soroll, per tant hem de detectar i establir quins coeficients són deguts al soroll i quins provenen d'autèntics clusters. La contribució dels clusters, com la de qualsevol senyal, està present en major o menor grau al llarg dels diversos plans wavelet, i la seva posició està directament relacionada amb l'autèntica posició del senyal. Però els coeficients deguts al soroll no presenten cap tipus de correlació al llarg dels plans wavelet, el que vol dir que per a detectar i discriminar els coeficients provinents d'un senyal d'entre els que provenen del soroll, hem de buscar correlacions entre coeficients al llarg dels diferents plans wavelet. En un primer pas podem obtenir una estimació *a priori* del soroll en l'histograma, i estudiar la propagació d'aquest al llarg dels diferents plans wavelet, de la mateixa manera que es va fer en el capítol 3. Aquells màxims locals que estiguin per sota de la contribució del soroll poden ésser descartats com a possibles clusters, i només els màxims amb valors superiors a aquest nivell de soroll queden com candidats potencials a cluster. Després d'eliminar certs candidats a partir de l'estimació del soroll, hem de buscar coeficients clarament correlacionats al llarg dels diferents plans wavelet.

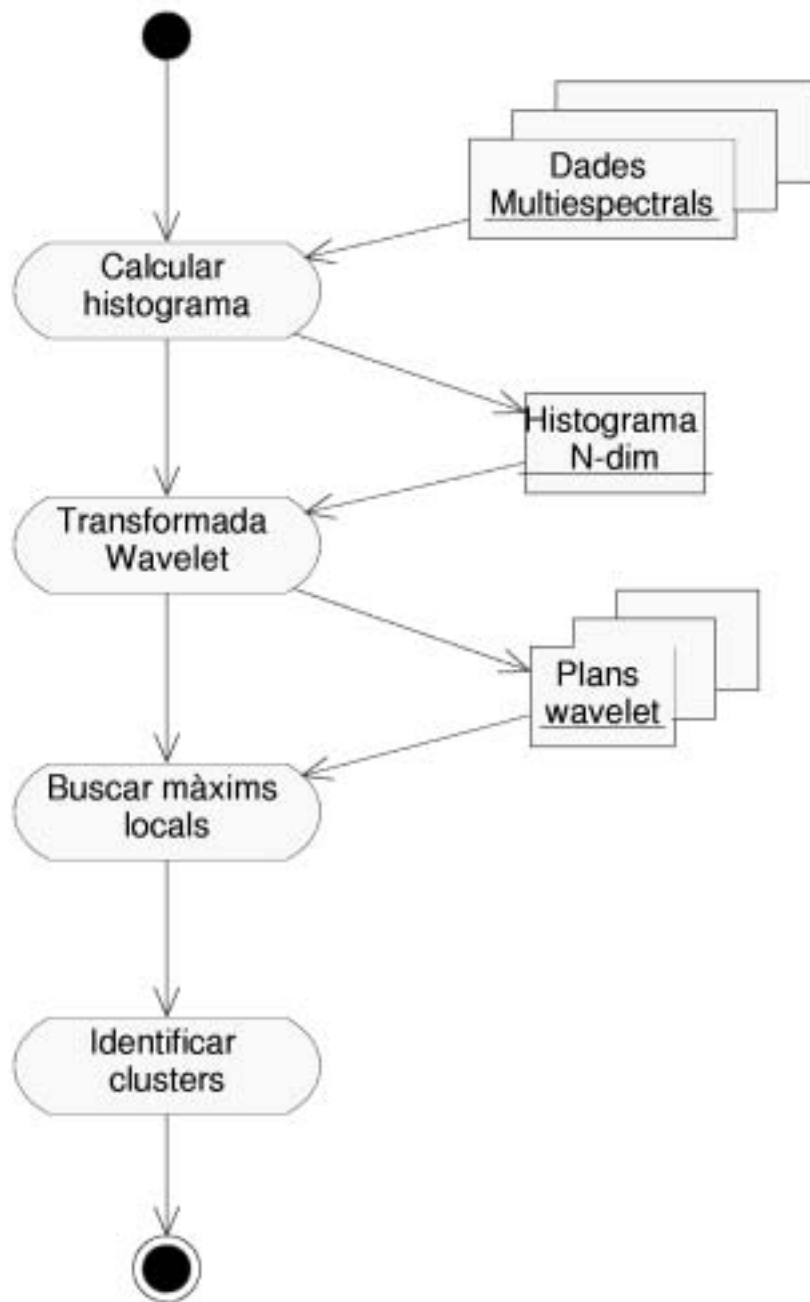


Figura 6.2: Representació gràfica de l'algorisme WAVCLUS de classificació no supervisada basat en wavelets.

Donat un coeficient wavelet  $C_i$  que és un màxim local en el pla wavelet  $w_i$ , busquem uns màxims locals  $C_{i-1}$  i  $C_{i+1}$  dins una finestra centrada en la posició de  $C_i$  però colocada en els plans wavelet  $w_{i-1}$  i  $w_{i+1}$  respectivament. Si no trobem cap màxim en cap d'aquestes dues finestres, el màxim  $C_i$  és descartat i eliminat com a cluster potencial. Si es troba algun màxim en  $w_{i-1}$  o  $w_{i+1}$  i el valor del coeficient  $C_i$  és major que  $C_{i-1}$  i  $C_{i+1}$ , llavors  $C_i$  és un cluster. Quan un cluster és detectat en un pla wavelet determinat, això ens està indicant que el cluster en qüestió té una estadística directament relacionada amb aquest pla wavelet, és a dir, el seu contingut freqüencial i per tant la seva matriu de covariances està relacionada amb la freqüència i mida característica del senyal en aquest pla wavelet particular. D'altra banda, si trobem màxims dins de la finestra en els plans  $w_{i-1}$  i  $w_{i+1}$ , però el valor de  $C_i$  és menor que  $C_{i-1}$  o  $C_{i+1}$ , llavors  $C_i$  no és un cluster, però està directament relacionat amb un cluster que molt probablement serà detectat en algun altre pla wavelet (probablement  $C_{i-1}$  o  $C_{i+1}$ ). Un cop trobats i etiquetats els clusters en els diferents plans wavelet, es poden estimar molt més còmodament les seves estadístiques.

## 6.5 Resultats

Per a estudiar el comportament i la precisió de l'algorisme WAVCLUS que hem presentat i el tradicional algorisme ISODATA, s'han generat diversos jocs de dades sintètiques. D'altra banda, també s'ha utilitzat un joc de dades reals obtingudes amb un sensor multispectral, concretament del satèl·lit LANDSAT-TM. Aquest darrer exemple ens serveix per a comprovar el comportament dels dos algorismes amb un tipus de dades molt habitual.

### 6.5.1 Dades sintètiques

Per a poder tenir una estimació objectiva de la bondat del mètode WAVCLUS, hem utilitzat un joc de dades sintètiques i hem comparat els seus resultats amb els que dóna un dels mètodes més utilitzats, per no dir el que més, a l'hora de fer classificacions no supervisades, l'ISODATA. Cada joc de dades conté diversos clusters que s'han creat com distribucions Gaussians, cadascuna d'elles amb diferents valors estadístics de posició, matriu de covariances i població en l'espai  $n$ -dimensional. Per a facilitar la visualització i comprensió dels exemples s'han utilitzat diferents

nombres per a la dimensionalitat de les dades, en particular  $n = 1, 2, 3$ . En cada joc de dades hem creat 3 clusters amb diferent estadística per tal de tenir clusters altament influenciats pels seus veïns, és a dir, clusters que se superposen en l'espai  $n$ -dimensional i que es poden considerar com a clusters submergits o emmascarats per altres. També s'han creat clusters amb diferent nombre de poblacions, per tal de veure la importància del nombre de punts pertanyents a un cluster en el procés de detecció d'aquest.

La idea és tenir, primerament, un cluster altament poblat, prop del 90% del total dels punts i que presenta un ampli rang de valors en els diferents canals espectrals. Prop d'aquest cluster primari n'hem creat un segon, amb el 9% dels punts, amb un rang de variació inferior, i finalment un cluster marginal amb molt pocs punts, un 1% del total i més concentrat. Els dos darrers clusters queden emmascarats pel cluster primari, i cap dels dos es pot detectar pel mètode de Letts de recerca de màxims locals en l'histograma.

Sabent a quin cluster hem d'assignar un píxel determinat, podem construir una matriu de confusió i calcular la precisió del mètode de classificació estudiat obtenint el valor percentil d'assignacions correctes i l'índex  $\kappa$ .

Començant amb un simple histograma 1-dimensional, hem creat una imatge amb tres clusters. Les imatges tenen una mida de 1024x1024 píxels, i els valors radiomètrics varien entre 0 i 32, havent triat aquest darrer valor per poder utilitzar amplades unitat pels bins de l'histograma i que aquests fossin prou poblats. L'histograma obtingut presenta un perfil Gaussià amb unes ales sensiblement alterades pels dos clusters secundaris, veure figura 6.3.

Realitzem les classificacions pels mètodes ISODATA i WAVCLUS i estimem la precisió dels mètodes obtenint els valors percentils i l'índex  $\kappa$  a partir de les matrius de confusió, taules 6.1, 6.2 i 6.3, respectivament. En el cas del mètode ISODATA el nombre d'iteracions per assolir la convergència del mètode ha estat de 40 iteracions.

A la tercera columna de la taula 6.1 podem veure que les posicions dels clusters detectats pel mètode WAVCLUS coincideixen amb les posicions dels clusters originals. Això és degut a que el mètode WAVCLUS troba màxims locals en unes dades (en l'histograma) que estan mostrejades amb valors iguals a la mida del bin utilitzat per a confeccionar l'histograma. Això vol dir que si per exemple el cluster es trobés en la posició  $x = 15.3$  no detectaríem el cluster en aquesta posició, sinó en el bin de

		Cluster	WAVCLUS	ISODATA
Estadística	A	x=15 $\sigma = 5.0$ p=90%	x=15 $\sigma = 5.5$	x=16 $\sigma = 2.0$
	B	x=25 $\sigma = 2.0$ p=9%	x=25 $\sigma = 1.5$	x=23.4 $\sigma = 2.5$
	C	x=5 $\sigma = 1.0$ p=1%	x=5 $\sigma = 0.6$	x=9.4 $\sigma = 2.5$
% encerts			82%	52%
$\kappa$			0.41	0.19

Taula 6.1: Resultats obtinguts amb dades 1-dimensionals. A la tercera columna hi tenim els valors reals de l'estadística dels clusters i el tant per cent de punts que pertanyen a aquest cluster. A les dues següents columnes hi tenim els valors trobats pels mètodes WAVCLUS i ISODATA, respectivament. Dades obtingudes a partir d'una imatge de 1024x1024 píxels.

		Cluster real		
		A	B	C
Cluster assignat	A	756575	7078	0
	B	78840	87294	0
	C	108304	0	10485

Taula 6.2: Matriu de confusió per a la classificació segons el mètode WAVCLUS d'una imatge de 1024x1024 píxels.

		Cluster real		
		A	B	C
Cluster assignat	A	441736	168	0
	B	188407	94204	0
	C	313576	0	10485

Taula 6.3: Matriu de confusió per a la classificació segons el mètode ISODATA d'una imatge de 1024x1024 píxels.

l'histograma més proper a aquest valor,  $x = 15$ . Per tal d'aconseguir una estimació més acurada de la posició del cluster, podem ajustar una Gaussiana o calcular el centre de masses amb els punt veïns al màxim local. El mètode WAVCLUS només detecta aquests tres clusters, el que significa que s'ha evitat la detecció de màxims ficticis deguts al soroll de quantització i població en generar l'histograma. La desviació estàndard d'aquests clusters està molt ben estimada pel mètode WAVCLUS, i més tenint en compte que es tracta d'un mètode no supervisat i que els dos clusters secundaris estan inmersos dins el cluster principal, el que dificulta l'estimació de l'estadística d'aquests.

Fins i tot sabent *a priori* que només hi ha tres clusters en les dades (situació inicial en la que normalment no ens hi trobem mai abans d'una classificació no supervisada), el mètode ISODATA ha estat forçat a treballar amb només tres clusters, donant-li d'aquesta manera un cert avantatge sobre el WAVCLUS. Tot i així, el mètode ISODATA és incapaç de detectar correctament aquests tres clusters i les seves posicions, i els distribueix més o menys uniformement al llarg de l'espai 1-dimensional de l'histograma. Aquest fet es veu justificat pel fet que les desviacions estàndard dels tres clusters són pràcticament iguals. El que és evident és que si el mètode ISODATA hagués estat forçat a treballar amb un nombre de clusters  $n \neq 3$ , no hagués trobat correctament les seves posicions i els clusters haurien estat distribuïts altre cop uniformement al llarg de l'eix d'abcisses de l'histograma. Això és el mateix que dividir l'histograma en intervals regulars, fet que no aporta cap mena informació útil.

En la figura 6.3 es mostren els diferent plans de la descomposició wavelet i l'histograma creat en aquest exemple. Al voltant del valor  $x = 5$  podem veure que hi ha un màxim molt evident en els dos primers plans wavelet,  $\omega_1$  i  $\omega_2$  respecti-



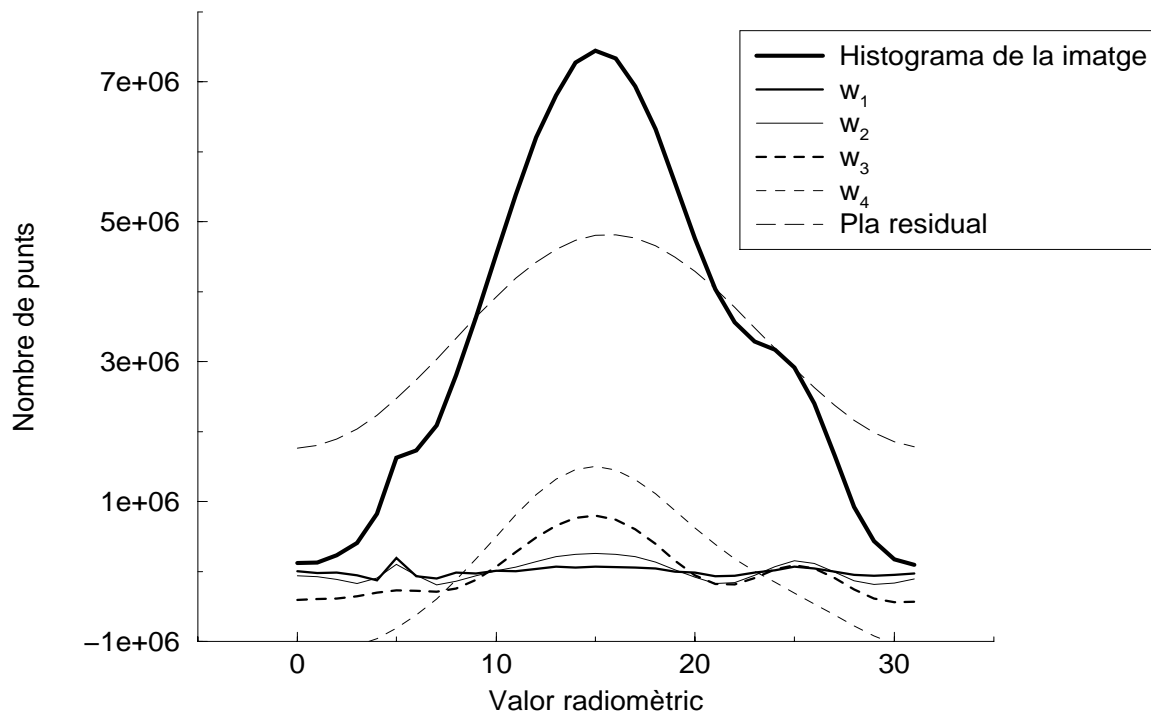


Figura 6.3: Descomposició wavelet de l'histograma 1-dimensional utilitzat com a exemple.

vament. Al voltant de  $x = 25$  hi ha també un màxim al segon i tercer pla wavelet, el que indica que aquest candidat a cluster és més ample que el que es troba a  $x = 5$ . El cluster central a  $x = 15$  és clarament visible en els dos darrers plans wavelet i en el residual.

Els valors percentils d'incert i l'índex  $\kappa$  obtinguts a partir d'aquestes dades es mostren en la taula 6.1, i aquesta ens mostra altre cop que el mètode WAVCLUS és molt més precís que l'ISODATA a l'hora de trobar els clusters.

Procedim de la mateixa manera pels casos 2-dimensional i 3-dimensional, obtenint els resultats que es mostren en les taules 6.4 i 6.5 respectivament. En el cas 3-dimensional, s'ha obtingut també una segona classificació realitzant prèviament un PCA (anàlisi de components principals) quedant-nos amb les dues primeres components. D'aquesta forma reduïm la quantitat de dades a processar. Com s'ha comentat anteriorment, quan  $n > 3$  aquestes dades són inabordables amb els ordinadors actuals.

Com es pot observar, en aquests casos el mètode WAVCLUS també és superior

		Cluster	WAVCLUS	ISODATA
Estadística	A	$x=(15,15)$ $\sigma = (5.0, 5.0)$ p=90%	$x=(15,15)$ $\sigma = (6.7, 6.8)$	$x=(16.8,10.7)$ $\sigma = (3.7, 3.4)$
	B	$x=(25,25)$ $\sigma = (2.0, 2.0)$ p=9%	$x=(25,25)$ $\sigma = (3.8, 3.8)$	$x=(22.0,21.8)$ $\sigma = (3.7, 3.7)$
	C	$x=(15,5)$ $\sigma = (0.5, 1.0)$ p=1%	$x=(15,5)$ $\sigma = (2.2, 2.4)$	$x=(11.1,17.1)$ $\sigma = (3.4, 3.7)$
% encerts			85%	47%
$\kappa$			0.51	0.17

Taula 6.4: Resultats obtinguts amb dades 2-dimensionals. A la tercera columna hi tenim els valors reals de l'estadística dels clusters. A les dues següents columnes hi tenim els valors trobats pels mètodes WAVCLUS i ISODATA, respectivament. Dades obtingudes a partir de dues imatges de 1024x1024 píxels.

a l'ISODATA, però abans cal comentar certs aspectes.

En el cas 2-dimensional, cal tornar a recordar que el mètode WAVCLUS ha detectat aquests tres clusters i cap altre més, el que demostra la seva habilitat a l'hora de detectar els clusters i no ésser influenciat pel soroll de les dades o la detecció fictícia de clusters. Les posicions obtingudes pels clusters són sempre correctes, no així amb el mètode ISODATA, que les ha col·locat en llocs molt llunyans de la seva posició correcta. També veiem que el mètode ISODATA assigna la mateixa desviació estàndard als tres clusters, el que ens està dient altre cop que distribueix els clusters de manera més o menys uniforme i assignant a tots ells una estadística molt semblant. Les desviacions estàndard assignades pel mètode WAVCLUS no presenten un grau d'exactitud tant alt com en el cas 1-dimensional, però tot i així són prou bones si tenim en compte que treballem amb un mètode completament automàtic i no supervisat. El percentil d'encerts totals i l'índex  $\kappa$  tornen a ser favorables al mètode WAVCLUS.

Exactament el mateix ens trobem en el cas 3-dimensional. El mètode WAVCLUS troba aquests tres clusters i cap altre més. Les posicions són correctes i les desvia-

		Cluster	WAVCLUS	ISODATA
Estadística	A	$x=(15,15,15)$ $\sigma = (5, 5, 5)$ p=90%	$x=(15,15,15)$ $\sigma = (7.3, 7.3, 7.4)$	$x=(16.8,10.7,12.9)$ $\sigma = (3.7, 4.2, 4.6)$
	B	$x=(25,25,25)$ $\sigma = (2, 2, 2)$ p=9%	$x=(25,25,25)$ $\sigma = (3.6, 3.6, 3.6)$	$x=(22.7,22.5,22.5)$ $\sigma = (3.6, 4.1, 4.1)$
	C	$x=(15,5,5)$ $\sigma = (0.5, 1, 1)$ p=1%	$x=(15,5,5)$ $\sigma = (2.3, 2.4, 2.4)$	$x=(11.5,16.6,15.9)$ $\sigma = (3.5, 4.2, 4.6)$
% encerts			96%	52%
$\kappa$			0.82	0.21
			PCA (2 components)	
% encerts			85%	46%
$\kappa$			0.52	0.17

Taula 6.5: Resultats obtinguts amb dades 3-dimensionals. A la tercera columna hi tenim els valors reals de l'estadística dels clusters. A les dues següents columnes hi tenim els valors trobats pels mètodes WAVCLUS i ISODATA. Dades obtingudes a partir de tres imatges de 1024x1024 píxels.

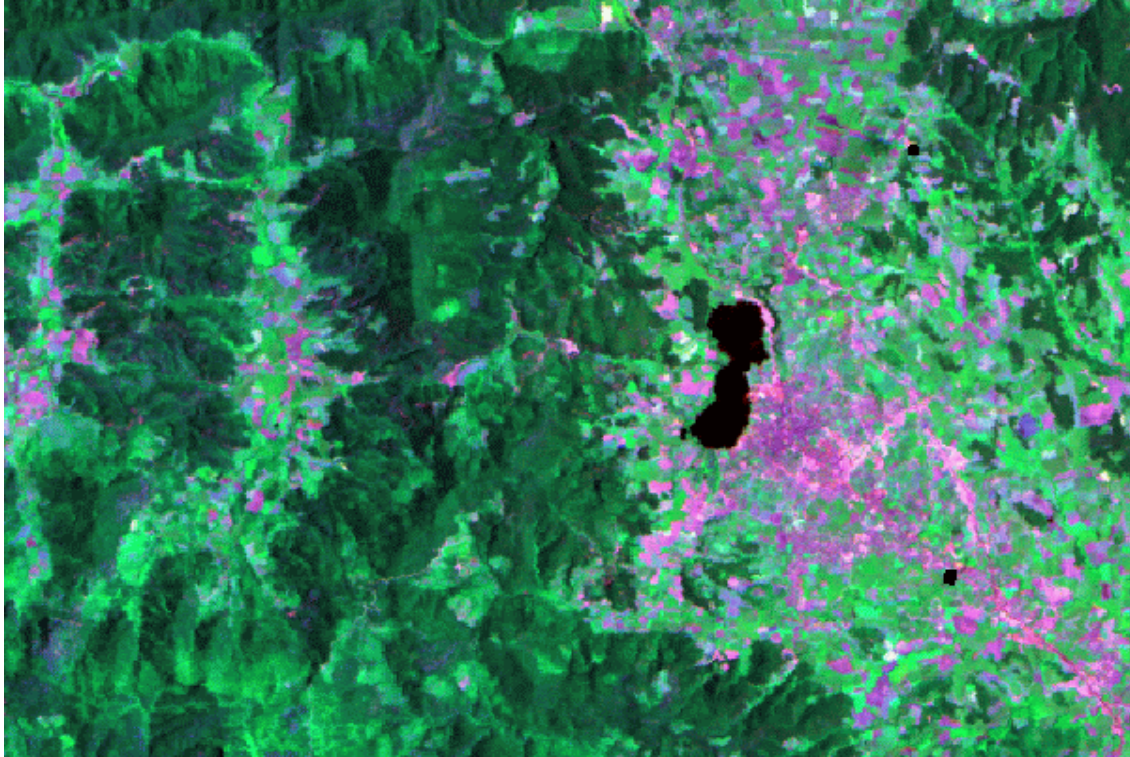


Figura 6.4: Composició en fals color dels voltants de Banyoles, utilitzant els canals 3, 4 i 5 del satèl·lit LANDSAT-TM. Imatge utilitzada per a ser classificada pels mètodes ISODATA i WAVCLUS.

cions estàndard guarden una relació amb l'estadística dels clusters reals. El mètode ISODATA torna a fallar tant en la posició dels clusters com en la seva estadística. Els percentils i l'índex  $\kappa$  tornen a ser clarament favorables al mètode WAVCLUS.

### 6.5.2 Dades reals

Després de veure el comportament d'aquests dos mètodes amb dades sintètiques, on hi tenim un entorn perfectament controlat, podem intentar avaluar el comportament d'aquests mètodes de classificació amb dades reals. Per a realitzar aquesta prova s'ha utilitzat una imatge dels voltants de Banyoles fent servir els canals 3, 4 i 5 del satèl·lit LANDSAT-TM, imatge que podem veure en la figura 6.4. Com a àrea de veritat-terreny per a l'entrenament i el test, hem utilitzat el mapa d'usos del sòl de l'Institut Cartogràfic de Catalunya, figura 6.5.

Altres cops utilitzem els algorismes ISODATA i WAVCLUS per a obtenir les respectives classificacions del sòl, però aquest cop hem definit prèviament 5 tipus de cobertes de sòl: aigua, bosc escleròfil, bosc aciculifoli, conreu de secà i sòl urbà. En el procediment inicial de classificació no supervisada, per a l'algorisme ISODATA hem definit 30 clusters i un nombre màxim de 40 iteracions. En el cas de l'algorisme WAVCLUS, aquest ha estat forçat a treballar amb un histograma de 128 bins per canal, i amb els plans wavelet  $i = 2, 3, 4$ . El primer pla  $i = 1$  no ha estat utilitzat per tal d'eliminar les contribucions aleatòries en la variabilitat de l'histograma degudes al mostreig de l'espai 3-dimensional format pels tres canals espectrals. També s'ha obtingut una classificació reduint la dimensionalitat de les dades realitzant una anàlisi de components principals de la mateixa manera que amb les dades sintètiques, és a dir, realitzant el PCA sobre les dades originals i abans de la confecció de l'histograma, quedant-nos finalment amb les dues primeres components.

L'algorisme WAVCLUS automàticament ens detecta 15 clusters. Amb l'ajuda d'un ortofotomapa multiespectral d'alta resolució espacial a escala 1:25000 s'ha comprovat que moltes d'aquestes 15 classes estan clarament i directa relacionades amb variacions en la resposta espectral d'alguns dels anteriors tipus de cobertes, a més de detectar clarament les 5 cobertes anteriorment definides. Per exemple, algunes de les classes detectades pel mètode WAVCLUS estan relacionades amb diferents densitats de bosc, conreus abandonats que habitualment es confonen amb cobertes de matoll o conreu de secà, i algunes espècies vegetals de conreu. Això ens demostra que el mètode WAVCLUS és capaç de detectar clusters que estan directament relacionats amb classes espectrals existents en el món real, i fins i tot detectar alguns artefactes de les dades com per exemple ombres de núvols.

En la taula 6.6 hi mostrem els índexs  $\kappa$  obtinguts per a les dues classificacions supervisades finals amb les 5 cobertes del sòl definides inicialment. A les figures 6.6 i 6.7 mostrem el resultat de les classificacions supervisades finals havent utilitzat per al procés de classificació no supervisada els mètodes ISODATA i WAVCLUS, respectivament.

La precisió obtinguda pels dos mètodes de classificació no supervisada en aquest exemple real és molt similar entre ells, degut a que les 5 classes definides són radiomètricament molt diferents. Les subtils diferències radiomètriques exposades anteriorment (lleugers canvis de reflectivitat en les cobertes, ombres, etc) s'han per-

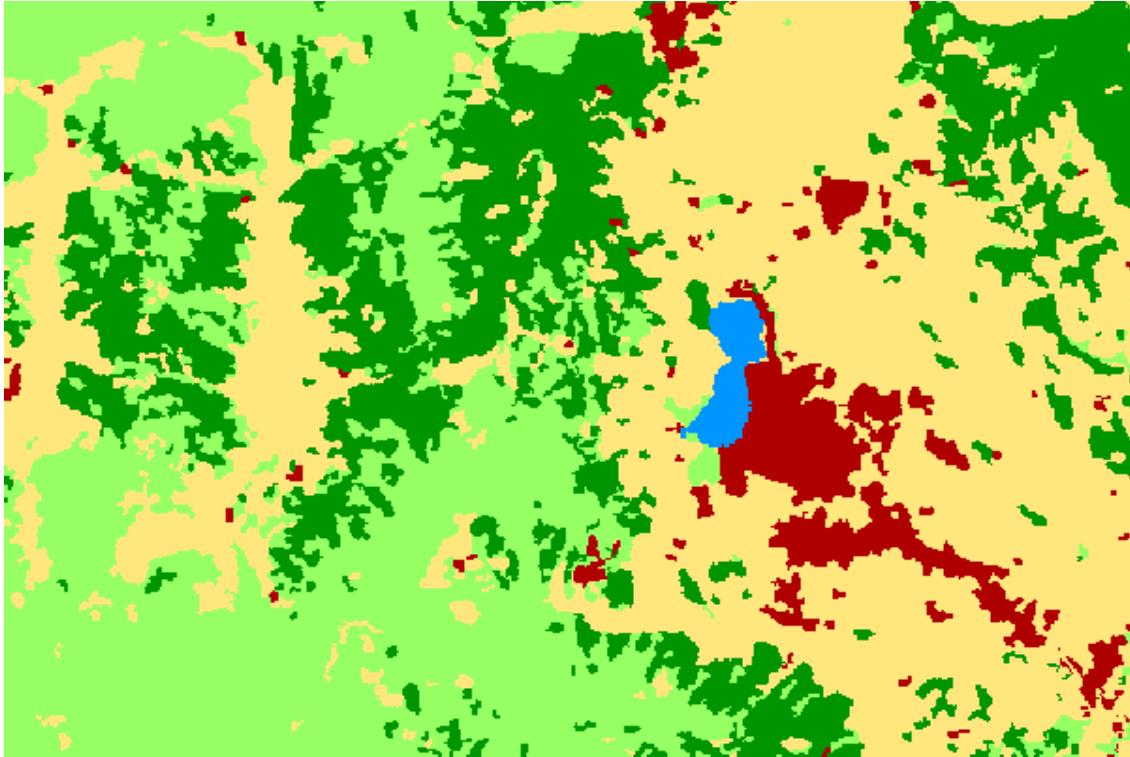


Figura 6.5: Imatge veritat-terreny, obtinguda del mapa d'usos del sòl de l'Institut Cartogràfic de Catalunya.

	WAVCLUS	ISODATA
% encerts	39%	36%
$\kappa$	0.151	0.147

	PCA (2 components)	
% encerts	37%	35 %
$\kappa$	0.128	0.120

Taula 6.6: Índex  $\kappa$  de la classificació supervisada de la imatge LANDSAT-TM de Banyoles pels mètodes ISODATA i WAVCLUS. Calculat sobre les 5 cobertes del sòl definides inicialment.

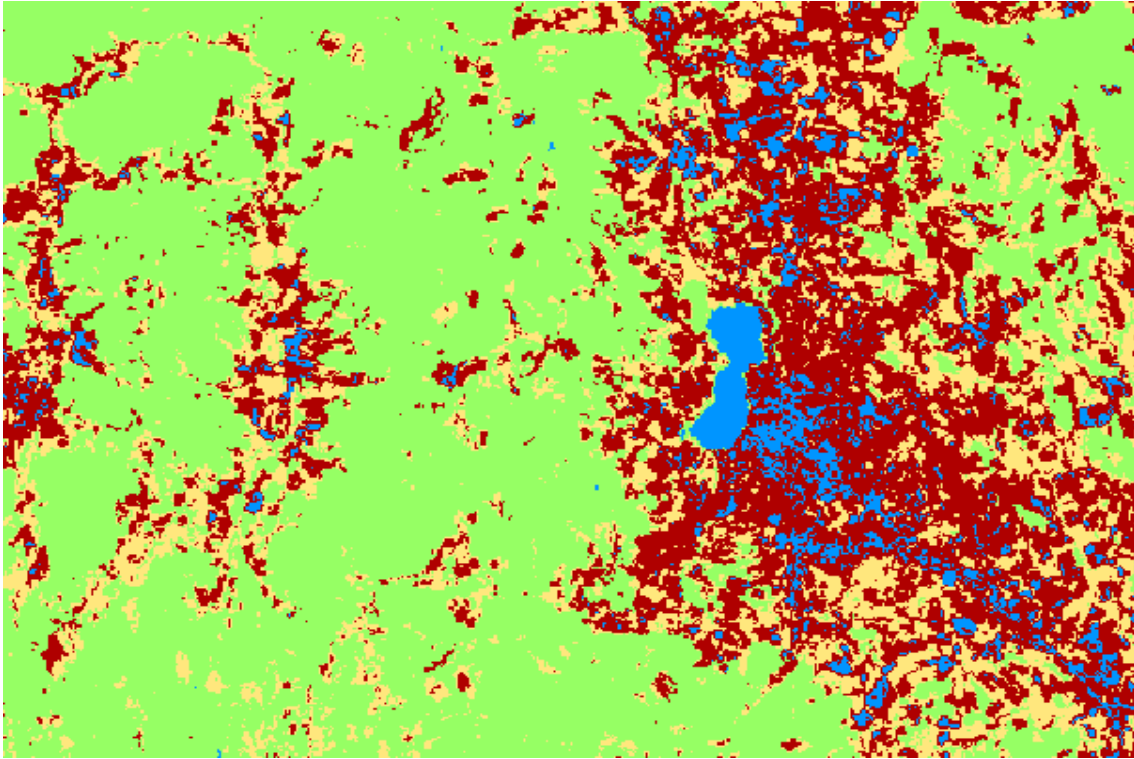


Figura 6.6: Classificació supervisada de la imatge 6.4, utilitzant el mètode ISODATA pel procés de classificació no supervisada.

		Cluster real				
		Urbà	Aciculifoli	Aigua	Escleròfil	Conreu
Cluster assignat	Urbà	6201	12555	355	7721	39176
	Aciculifoli	0	0	0	0	0
	Aigua	1313	1821	1245	468	5641
	Escleròfil	3243	31322	150	61364	38261
	Conreu	2351	10449	80	9274	23106

Taula 6.7: Matriu de confusió per a la classificació segons el mètode ISODATA de la imatge de Banyoles (fig 6.4).

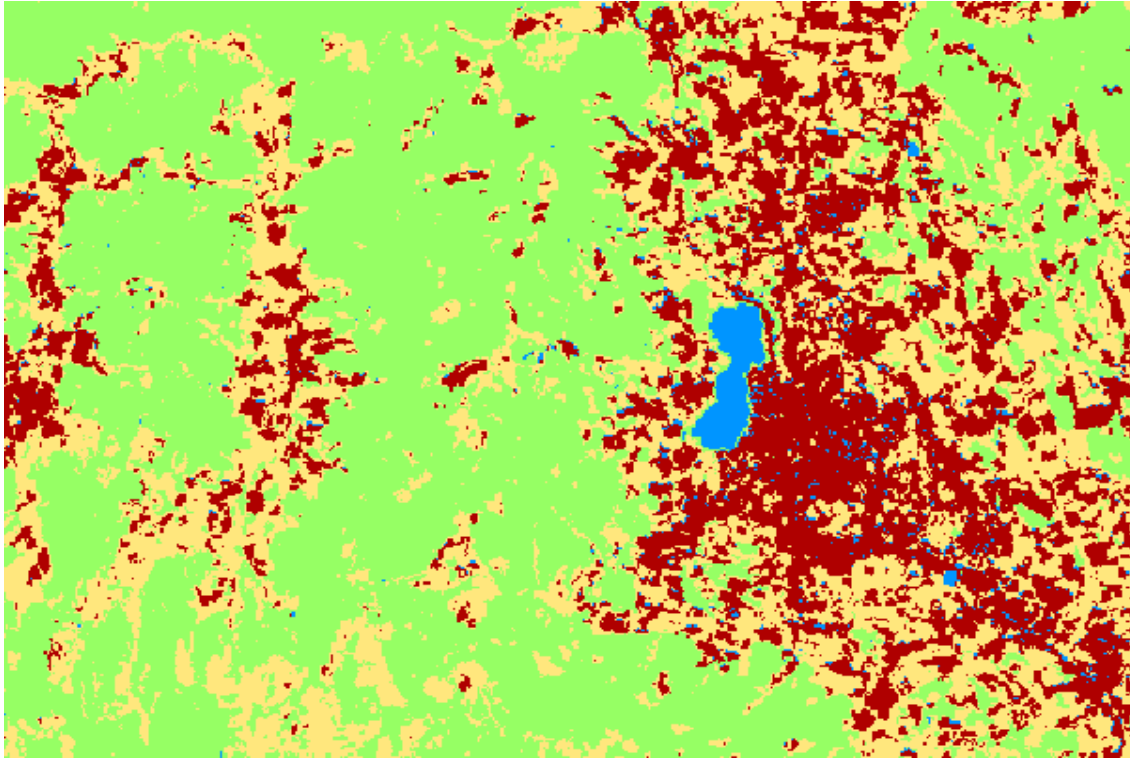


Figura 6.7: Classificació supervisada de la imatge 6.4, utilitzant el mètode WAVCLUS pel procés de classificació no supervisada.

		Cluster real				
		Urbà	Aciculifoli	Aigua	Escleròfil	Conreu
Cluster assignat	Urbà	5191	9629	349	4648	32141
	Aciculifoli	0	0	0	0	0
	Aigua	662	586	1126	187	1549
	Escleròfil	3250	29683	197	56891	35794
	Conreu	4005	16249	158	17101	36700

Taula 6.8: Matriu de confusió per a la classificació segons el mètode WAVCLUS de la imatge de Banyoles (fig. 6.4).



dut en aquesta definició de 5 classes, però hem procedit d'aquesta manera per tal de demostrar que el comportament del mètode WAVCLUS quan es treballa amb les classes habitualment utilitzades per les cobertes del sòl per part de la comunitat científica i amb conjunció amb algorismes de classificació supervisada, dóna resultats tant satisfactoris com els obtinguts amb els mètodes tradicionals. Els resultats no han de ser superiors, donat que el procés de supervisió per part de l'usuari és el que guia i determina completament la classificació final. Però la millor precisió del mètode WAVCLUS es demostra en el fet de trobar automàticament aquestes 15 classes, i que només amb 15 classes és capaç de donar els mateixos resultats que l'ISODATA amb 30 classes. Si aquestes 15 classes haguessin estat definides per un usuari humà en el procés de classificació supervisada, aquestes classes haguessin estat igualment obtingudes en una classificació final utilitzant l'algorisme ISODATA pel procés de classificació no supervisada, i hauríem obtingut també 15 classes, però que no haguessin estat les mateixes que les obtingudes pel mètode WAVCLUS i que probablement tampoc haguessin tingut massa sentit físic en el món real.

Però el fet més sorprenent és que aïlladament, el mètode WAVCLUS aconsegueix uns resultats superiors als de l'algorisme ISODATA. La imatge obtinguda amb el mètode ISODATA presenta 30 classes, i l'obtinguda pel mètode WAVCLUS només en té 15. Això vol dir que *a priori* la subdivisió del mètode WAVCLUS és menys fina i presentarà més inconvenients al procés d'assignació de cadascuna d'aquestes classes a les 5 classes-llegenda finals. Però el resultat esperat és justament el contrari, i obtenim una millor classificació supervisada final utilitzant les 15 classes del mètode WAVCLUS que no amb les 30 de l'ISODATA. Això demostra la precisió i connexió entre les classes no supervisades i la realitat del món físic.

Es important tenir en compte certs aspectes sobre aquestes imatges i el fet que els valors de l'índex  $\kappa$  siguin tant baixos. Habitualment, en classificacions d'imatges LANDSAT-TM multiespectrals s'aconsegueixen un percentils d'encerts al voltant del 75% o 80%. En aquest exemple sobre Banyoles s'han obtingut valors molt més baixos, però això és degut al fet que en el present exemple només s'han utilitzat 3 dels 7 canals del sensor LANDSAT-TM. Això ens elimina canals molt útils a l'hora de classificar terrenys, com és el cas del canal 7 en l'infraroig. En qualsevol cas, en el present treball es volen comparar els valors relatius obtinguts en una classificació simultànea per dos algorismes de classificació diferents, i per tant els valors absoluts no són tant importants.

També s'ha de tenir en compte el tipus de dades que s'han utilitzat per a definir les àrees d'entrenament i test, figura 6.5. Les dades que s'han utilitzat en aquest exemple s'ha de suposar que son prou acurades. Aquestes dades s'han obtingut a partir d'imatges multispectrals del satèl·lit LANDSAT-TM preses en diferents èpoques de l'any i amb dades de camp. Les dades multitemporals son molt útils per a obtenir classificacions de terreny, i són més útils com més separades en el temps hagin estat preses, al contrari del que passava en el cas de la fusió d'imatges (capítol 5). Diferents tipus de cobertes presenten diferents respostes espectrals al llarg de l'any, com per exemple els conreus ja que podem tenir conreus de diferents vegetals en la mateixa zona o conreus amb espècies vegetals en diferents estats de creixement. Altres zones poden no presentar canvis en la seva resposta expectral, com alguns tipus d'arbres o el sol urbà o nu. Per tant, les diferents evolucions de les respostes espectrals d'un píxel determinat ens ajuden a discriminar entre diferents tipus de cobertes. Aquests efectes temporals han estat aprofitats per a la confecció del mapa d'usos del sòl utilitzat, a més d'afegir dades de camp allà on en hi havia de disponibles, situació que no ha estat així en el cas de la nostra imatge de Banyoles. Per tant, és evident que la nostra imatge es troba en una situació molt desfavorable davant de les habituals imatges LANDSAT-TM utilitzades per a confeccionar una classificació del sòl mínimament precisa.

Aquesta inferior qualitat de les nostres dades, provoca que la classe *urbà* estigui molt dispersa al llarg de la classificació final. El sòl urbà i certs tipus de conreu tenen respostes espectrals molt semblants, el que fa que no poguem distingir entre un i l'altre. Amb imatges preses en diferents èpoques de l'any i amb més canals espectrals s'hagués aconseguit separar molt millor aquestes dues cobertes de sòl.

Un dels principals efectes de la classificació supervisada és que, com a màxim, s'obté en el resultat final el mateix nombre de classes que l'usuari defineix *a priori*, per això s'anomena a supervisada. Si en comptes de 5 cobertes de sòl n'haguéssim definit 20, en el punt final de la classificació haguéssim obtingut un nombre de cobertes del sòl molt proper a 20, però amb una confusió entre elles molt elevada, el que ens indicaria que aquestes cobertes o no existeixen o estan mal definides. Per tant, sempre s'acaben trobant tantes cobertes com l'usuari defineix, el que dona una incertesa molt gran sobre el nombre de classes realment presents en les dades. El mètode WAVCLUS dona una primera aproximació i limitació al nombre de classes amb un cert sentit dins les nostres dades, facilitant d'aquesta manera la tasca de trobar un nombre de classes adequat per a la classificació supervisada i també per

tal que aquestes siguin fiables i tinguin un cert sentit físic.

Un altre punt important a destacar és el fet que la classe *aciculifoli* ha estat ignorada en les dues classificacions, o el que és el mateix, l'estadística de la reassignació dels clusters provinents de la classificació no supervisada a cadascuna de les cinc classes-llegenda definides prèviament ha desestimat aquesta classe, donat que cap cluster ni grup de clusters es correlaciona clarament amb aquesta classe. Aquesta classe sabem que existeix en la realitat, però en aquesta imatge LANDSAT és impossible detectar-la pels motius exposats anteriorment respecte la qualitat i utilitat d'aquesta imatge.

Les classificacions obtingudes després de realitzar el PCA són raonablement bones. Tot i donar un resultat sensiblement inferior, no tenim una pèrdua dramàtica de fiabilitat.

## 6.6 Conclusions

El punt important és que el mètode WAVCLUS dona resultats semblants al mètode ISODATA en efectuar una classificació supervisada, però d'altra banda és clarament superior a aquest en el procés de la classificació no supervisada, objectiu que perseguíem inicialment. El mètode WAVCLUS, a diferència de l'ISODATA, no depèn de la intervenció d'un usuari humà extern. Aquesta darrera situació ens portaria a una classificació que estaria esbiaixada segons el criteri aplicat per la persona que realitza la classificació.

En el cas d'una classificació no supervisada, com en l'exemple presentat amb dades sintètiques, els índexs  $\kappa$  calculats a partir de les classificacions obtingudes pels mètodes ISODATA i WAVCLUS, demostren que la precisió del mètode WAVCLUS és clarament superior a la del mètode ISODATA però, a més, el mètode WAVCLUS té l'avantatge afegit de determinar automàticament el nombre de clusters sense necessitat que un usuari extern li subministri aquest valor, eliminant també d'aquesta manera l'únic paràmetre lliure que té una classificació no supervisada. L'estadística dels clusters obtinguts pel mètode WAVCLUS és molt millor que l'obtinguda pel mètode ISODATA.

Donada la propietat del mètode WAVCLUS de detectar automàticament el nom-

bre de clusters presents en les dades, veiem que aquest és un mètode idoni per tractar dades sobre les que l'usuari no té cap mena d'informació *a priori*. També és un mètode adequat per realitzar classificacions automatitzades i ràpides, situació que es presenta habitualment quan el nombre de dades a tractar és elevat i es desconeix la seva natura intrínseca.

Com que el mètode WAVCLUS treballa únicament a partir de l'histograma de la imatge, s'han de tenir en compte les modificacions i manipulacions prèvies que hagi pogut tenir el conjunt de dades a classificar. Els habituals estiraments d'histograma per tal de millorar el contrast visual de les imatges són molt perillosos, i en aquesta situació el mètode WAVCLUS pot detectar clusters ficticis o carents de qualsevol mena de sentit espectral o físic. Si veiem l'histograma com una funció matemàtica, la pitjor situació en la que ens podem trobar és modificar l'histograma i obtenir valors nuls, o sigui, bins de l'histograma sense cap píxel. En aquest cas el mètode WAVCLUS detecta un canvi sobtat en l'histograma (detall principalment d'alta freqüència, i per tant concentrat en els primers plans de la seva Transformada Wavelet) que és interpretat com la presència d'un cluster. Un altre cas que es pot presentar és que l'histograma no sigui una funció suau (de vegades degut a la quantització dels bins de l'histograma, a l'escàs nombre de píxels en aquests bins o a la compressió de l'histograma), del qual el cas anterior és un cas particular de funció no suau però degut a altres motius. Aquests canvis sobtats es manifesten en la Transformada Wavelet com pics i valls, i són interpretats com clusters pel mètode WAVCLUS. El mètode ISODATA també es veu afectat per modificacions en l'histograma, però no en el mateix grau que el mètode WAVCLUS. Aquest és un punt dèbil del mètode WAVCLUS, però amb un seguiment de les manipulacions fetes a les dades, i essent aquestes realitzades amb molta cura de no modificar el perfil de la funció que descriu l'histograma, el mètode es mostra robust i acurat.

## 6.7 Vies de continuació

La possibilitat de classificar de manera completament automàtica un conjunt de dades, presenta unes possibilitats d'evolució pràcticament il·limitades en camps molt diferents: des de la pròpia Teledetecció, passant per la visió per ordinador, fins a la medicina aplicada. Exposem a continuació unes quantes possibles vies d'exploració:

- Millorar la determinació de l'estadística dels clusters utilitzant els plans wavelet anterior i posterior.
- Nous mètodes per a la detecció dels clusters (fuzzy sets).
- Resoldre el problema de la dimensionalitat.
- Identificació automàtica d'objectes en escenes reals.
- Estudi de la xarxa de fibrina en la coagulació de la sang sota l'acció d'agents anticoagulants.

L'estimació de l'estadística dels clusters, s'ha realitzat només en un pla wavelet, però la contribució dels clusters és present en diferents plans wavelet. Per tant, per aconseguir una millor estimació dels paràmetres que descriuen un cluster, també s'hauria d'utilitzar la contribució d'aquest cluster en altres plans wavelet, i concretament en els plans anterior i posterior del pla en què s'ha detectat.

D'altra banda, la discriminació dels màxims locals que poden estar relacionats amb clusters reals es podria realitzar amb altres tècniques. Una de les tècniques de classificació més explorades en l'actualitat és la que utilitza tècniques de lògica difusa i conjunts difusos (*fuzzy clustering*) (Höppner et al., 1999). L'estudi de la distribució dels màxims locals produïts per un cluster al llarg dels diferents plans wavelet, és directament reflexable en les diferents variables lingüístiques i en els graus de pertinença dels conjunts difusos. La fusió d'aquests dos camps podria portar nova llum sobre els processos de classificació.

Però un dels problemes més importants dels mètodes de classificació basats en wavelets aquí presentats és el de la dimensionalitat de les dades. Quan es presenten dades amb una dimensió  $d \geq 4$ , els ordinadors actuals tenen molts problemes per a treballar amb la quantitat d'informació necessària per atacar aquesta mena de problemes. De moment, hem pensat explorar tres vies diferents per a la solució d'aquest problema. Una és la reducció del nombre de dades emmagatzemades en memòria utilitzant tècniques d'optimització extrema. Tot i així, aquesta solució no sembla ser la més adequada, doncs quan s'hagi de treballar amb  $d \sim 10$  ja no hi haurà tècniques d'optimització informàtica vàlides. Una segona opció és la reducció de la dimensionalitat de les dades fins a valors acceptables. Tot i així, la reducció dràstica de la dimensionalitat és evident que quasi sempre comportarà una reducció en la informació útil i en la qualitat dels resultats obtinguts. Per tant, l'única opció que

ara per ara ens sembla viable és la utilització d'altres algorismes de descomposició en wavelets, de manera que el nombre de dades necessàries no creixi tan desmesuradament. Això ens porta a un replantejament de certs aspectes de l'algorisme, tot i que la filosofia original segueix essent sempre la mateixa: descomposar la distribució  $n$ -dimensional de les dades en diferents nivells de resolució.

En el camp de la visió per computador, i per extensió en qualsevol problema que necessiti d'un procés de dades que inclogui una classificació o un procés de clustering, un dels problemes més comuns és la identificació d'objectes, ja siguin patrons (*pattern analysis*) o la detecció d'objectes (identificació de persones, interpretació d'escenes, lectura de signes manuscrits, robòtica, etc). Un mètode de classificació automàtica pot ajudar a millorar aquests problemes

Una de les aplicacions en les que s'està treballant actualment és en l'estudi de la malla de fibrina en sang coagulada. Els estudis de l'efectivitat dels agents anticoagulants necessiten de costosos processos bioquímics d'estimació d'una superfície protrombòtica coberta per la malla de fibrina. La superfície coberta per aquesta malla dona una estimació directa de l'efectivitat de l'agent anticoagulant en estudi. Donat l'alt cost econòmic i en temps per a poder obtenir aquesta estimació, una de les tècniques que es comencen a utilitzar en l'actualitat és l'anàlisi d'imatges de mostres de superfícies tractades amb aquests agents. El procés d'aquestes imatges requereix de la classificació de la malla de fibrina (prèviament fet una anàlisi de textures) en diversos graus de densitat. Aquesta classificació ha de ser el més ràpida i objectiva possible donat que en els intents fets fins l'actualitat es necessita d'un interpret humà per a delimitar les diverses zones de densitat de fibrina. Un mètode de classificació automàtic per a delimitar aquestes zones sense necessitat d'un usuari extern humà acceleraria el procediment, augmentaria la fiabilitat en reduir la subjectivitat humana, i reduiria els costos de manera dràstica.

# Capítol 7

## Conclusions

*A través de les fugues de Bach he descobert que mai deixes d'aprendre, i que profunditzant en el nostre interior es viatja a través d'una ruta que no té límits, fronteres, ni una destinació final concreta.*

- Rosalyn Tureck

### 7.1 Aportacions

Les idees i aportacions novedoses d'aquest treball ja han estat exposades en cadascun dels capítols d'aquesta memòria, però potser està prou justificat un resum o extracció dels conceptes aportats en una petita llista. Hi ha conceptes i eines que ja existien en l'inici de la tesi, i que per tant no representen cap contribució important, però sobre aquests conceptes s'han aplicat idees noves que han donat el seu fruit i que han representat aportacions novedoses en el seu camp.

A continuació mostrem una llista amb els nous conceptes que s'han aportat a cadascun dels diferents camps:

## Deconvolució

- Incorporació de les wavelets als algorismes Gaussians i Poissonians, deconvolucionant cada pla wavelet de forma diferent.
- Definició d'una màscara de detecció del senyal.

## Períodes

- Detecció de períodes directament sobre les dades de cadascun dels plans wavelets.
- Descomposició en wavelets com a pas previ als mètodes clàssics.

## Fusió

- Fusió d'imatges afegint els plans wavelet a les dades de baixa de resolució, en comptes de substituir-los.
- Utilització del canal d'intensitat per als algorismes de fusió d'imatges.
- Utilització de l'algorisme *à trous* per a treballar amb imatges amb relacions de mida, i per tant resolució, no diàdiques.

## Clustering

- Utilització de les wavelets en el camp de la classificació multispectral en Teledetecció.
- Utilització de les wavelets per a trobar subgrups en l'histograma.
- Tècnica per a la detecció de clusters al llarg dels plans wavelet i l'estimació automàtica del nombre de clusters.

De manera semblant podem fer un resum o llista de les conclusions a les que hem arribat en cadascun dels temes en què hem treballat, però ...



## 7.2 Conclusions

Un cop vist el treball realitzat en els diferents camps en què hem utilitzat les wavelets, ens podem fer la pregunta: *Què en podem conclure de tot plegat?*

Seria molt difícil donar una única resposta, o fins i tot arribar a justificar-ne alguna de les moltes que en podríem donar. Ens podríem limitar a escollir la via tradicional, la més ortodoxa, i que com a tal no presenta complicacions: reorganitzar i factoritzar les idees i conclusions particulars extretes de cadascuna de les aplicacions presentades. Dir que les conclusions són que hem aconseguit uns nous resultats i models que són lleugerament millors que els que existien fins l'actualitat és el desitjable en una tesi, però no deixa de ser una demostració de conformisme, un comportament ortodoxe, i una actitud totalment oposada a l'esperit real d'un treball científic. Això no seria més que una barroera enumeració i repetició de conceptes, que d'altra banda serien limitats en la seva utilitat (qui estigui interessat en aquest punt de vista, no li cal més que revisitar les conclusions particulars en cadascun dels apartats). Per tant, potser podríem plantejar-nos les conclusions des d'un altre punt de vista, amb més visió de futur i amb una mentalitat més oberta.

L'aplicabilitat de les funcions wavelet demostra ser tan universal i de caire tan general, que es fa difícil, per no dir impossible, arribar a intuir les possibilitats reals d'una tècnica tímidament explotada en un reduït nombre de camps del coneixement.

La primera aproximació realitzada (deconvolució d'imatges) ens ha donat en el passat, i ens obre de cara al futur, un ventall de possibilitats tan ampli, que es fa realment difícil arribar a enumerar fins i tot les línies generals d'explotació. El simple fet de descomposar les dades en plans wavelet i fer una primera exploració d'aquests ens va suggerir, tal com hem vist, intentar una primera aproximació simple: deconvolucionar aprofitant la multiplicitat d'informació que ofereixen les wavelets. El següent pas va ser aprofitar aquesta multiplicitat i les relacions internes que existeixen entre els plans wavelet, definint la màscara de detecció del senyal. Només aquest concepte dóna lloc a la utilització de les wavelets en el camp de detecció del senyal, i per extensió a la detecció de patrons (clustering), detecció d'objectes i altres camps de la intel·ligència artificial (Luger & Stubblefield, 1993) (Russell & Norvig, 1996). Tots aquests camps es poden retroalimentar mútuament, donant lloc a noves tècniques de detecció *intel·ligent* del senyal, idea explotada en la darrera aplicació en el món del clustering. Tot això deixant de banda l'explotació dels camps

ja comentats de la interferometria, fotometria, monitorització, super-resolució, etc.

L'aplicació en el camp de la detecció de senyals periòdics, suggereix la descripció i caracterització de senyals a partir de la seva natura, i per tant de noves vies d'exploració en el món de la taxonomia.

La tercera aplicació obre noves vies en el camp de fusió de dades, totes elles relacionades amb els nous conceptes ja intuïts en l'aplicació de la deconvolució: aïllament i combinació d'informació. Simplement la 'rutinària' tasca d'evolucionar de manera natural aquests algorismes, tal com s'ha descrit en el corresponent capítol, obre tota una nova via de treball (extensió a  $n$  canals, finestres espectrals, classificacions, etc) per a un grup d'investigadors.

L'aplicació en el món del clustering és potser la que ens obre la ment d'una manera més evident. La possibilitat de tractar les dades únicament i exclusiva a partir de la informació que contenen està íntimament lligada, per no dir que és el mateix, amb les tècniques d'intel·ligència artificial que tracten els conceptes per sí mateixos, i no com a instàncies d'un model predeterminat que intenta descriure'ls. L'autonomia, autosuficiència i autodeterminació dels conceptes es converteix en una realitat.

La pròpia natura multicanal de la Transformada Wavelet ens porta de forma natural a altres camps del procés de dades, com l'anàlisi textural a diferents escales, la interpolació de dades, les connexions intercapa en xarxes neuronals (Bishop, 1995) (Kohonen, 1989) (Kosko, 1992b) (Freeman & Skapura, 1991), l'aplicació de conjunts difusos (Zadeh, 1965a) (Zadeh, 1965b) (Klir & Yuan, 1995) (Kosko, 1992a) en la descripció de la multiplicitat d'informació, etc. Tota aquesta interdisciplinarietat evident, la influència mútua i l'intercanvi d'idees entre diferents disciplines ens apropa a l'Enginyeria, on les idees sempre es poden exportar a altres camps, *produint* d'aquesta manera noves tècniques, aplicacions i resultats. Qualsevol camp en què tinguem dades que són susceptibles de ser interpretades des de diferents punts de vista, és un nou camp d'exploració i d'adaptació de les wavelets completament verge.

Les wavelets ens permeten mirar els objectes des d'un nou angle, com a objectes que mostren diferents vessants que depenen del punt de vista que s'utilitzi. I les portes que se'ns obren no ens restringeixen al camp de les wavelets, sinó que simplement ens porten, ens guien i ens suggereixen noves alternatives i àrees d'exploració.

En resum, massa noves idees i punts de vista per a massa pocs recursos inicials.

El futur és més que prometedor, és una realitat innegable. Només és necessari atrevir-se a explorar-lo sense limitacions i sense treves. La satisfacció està garantida.

... i com podem tancar el cercle connectant el punt de partida original amb el punt d'arribada actual? ...



# Capítol 8

## ... i Fuga

*El Clave ben Temperat i l'Art de la Fuga han estat, i seguiran essent, la Bíblia de la Música occidental.*

- Tatiana Nikolayeva

En el concurs de piano celebrat a Leipzig l'estiu de 1950, en commemoració del 200 aniversari de la mort de J.S. Bach, la pianista russa Tatiana Nikolayeva va rebre el primer premi en interpretar la totalitat dels 48 preludis i fugues de *El Clave ben Temperat*. El compositor rus Dimitry Shostakovich va quedar tant impressionat per la seva interpretació que va compondre per a ella els seus *24 preludis i fugues* (Shostakovich, 1951). Aquests van ésser inspirats i composts a l'estil de *El Clave ben Temperat*, de fet les notes de l'acord inicial del primer preludi coincideixen exactament amb les del mestre alemany, però utilitzant el rus el llenguatge i les formes estilístiques del segle XX.

Potser el gran geni alemany ja treballava amb wavelets molt primitives, com la *Haar Wavelet*, i el rus va estrenar les més modernes, com la família de les *Daubechies Wavelets*; simples en forma i expressió però no menys dotades de perfecció les primeres, i riques, elaborades i plenes de subtileses les segones.

L'Art i la Ciència, potser són un mateix concepte.

Fuga 24

This image shows a page of handwritten musical notation for a fugue. The title "Fuga 24" is written in cursive at the top left. The score consists of seven systems, each with two staves. The notation is dense and complex, characteristic of a fugue, with multiple voices and intricate rhythmic patterns. The paper appears aged and slightly stained.

This image shows a page of handwritten musical notation, numbered 199 in the top right corner. The page contains ten systems of music, each consisting of two staves. The notation is dense and includes various rhythmic values, clefs, and dynamic markings. The word "Fine" is written in a cursive hand in the lower right quadrant of the page, followed by a large, stylized signature. The paper appears aged and slightly yellowed.





# Apèndix A

## Implementacions paral·lela i concurrent dels algorismes.

*Les fugues de Bach poden ser interpretades perfectament en un instrument actual d'última generació. No ens hem de restringir a instruments originals d'època, ja que la seva obra és essencialment abstracta i no depèn de les sonoritats específiques d'aquells.*

- Rosalyn Tureck

### A.1 Per què?

Donada la natura multicanal de la Transformada Wavelet, el nombre de dades a processar pels algorismes presentats creix en un factor donat pel nombre de plans wavelet en què es descomposen les dades, i en alguns casos fins i tot de forma exponencial.

Es podria pensar que, ja que la nostra feina és la recerca científica, no estem massa condicionats pel temps que hem de dedicar a obtenir resultats. Si en canvi, fóssim en un entorn de producció, on el temps és el factor principal, podríem pensar que necessitaríem forçosament utilitzar aquells medis que ens proporcionin resultats

en el menor temps possible. Doncs, res més lluny de la realitat. El nostre criteri és precisament el contrari.

En un entorn de producció les condicions de treball són conegudes, finites i estan perfectament controlades. La feina a realitzar i els productes a obtenir són també finits i acotats, i per tant coneguts i controlats. Tot s'intenta predir i controlar al màxim, i tant els medis materials com el seu impacte en la nostra feina són coneguts, predibles i assumibles. Per tant, en aquest entorn es pot incloure el temps destinat a l'obtenció de resultats (temps de càlcul en el nostre cas) com un factor perfectament previst i incorporat en el nostre entorn. Això implica que la utilització de màquines paral·leles no és un factor crític o problemàtic.

Però en el cas de la recerca científica, precisament el que no hi ha és control, predicció, límits, ni un entorn conegut i de comportament predible. El nombre de dades a processar, el nombre de vegades que haurem d'executar el nostre programa (i per tant d'esperar) i el temps que això ens portarà es completament desconegut, incontrolable i, *a priori*, no acotat o de límits desconeguts. Per tant, precisament en aquesta situació és quan hem d'intentar eliminar o reduir l'impacte que els medis materials poden produir en la nostra feina. En aquests casos necessitem respostes immediates a problemes que, d'altra banda, poden ser *a posteriori* interpretats com secundaris. Precisament per tractar amb problemes que en podríem anomenar *punters* o d'*última generació*, és molt probable que ens desmarquem dels mitjans materials utilitzats fins l'actualitat, i per tant necessitem eines avançades no necessàries, per altra part, en el món de la producció. Personalment, el primer problema que em vaig trobar només començar amb aquest treball, va ser la inevitable optimització d'un senzill càlcul per a poder utilitzar de manera còmoda l'algorisme en què es trobava.

Com a mostra, només cal veure quin nombre d'entitats destinades a la producció utilitzen aquestes màquines en front del nombre de centres de recerca.

Per tant, la utilització de superordinadors i de tècniques de programació paral·lela i concurrent, van ésser assumides des del principi d'aquest treball. Els recursos que teníem al nostre abast eren els que ens oferia el C<sup>4</sup>, consorci en el qual hi participa la Universitat de Barcelona, i per tant, ràpidament vam començar a treballar amb ells. Inicialment teníem dos arquitectures disponibles: les màquines de memòria compartida (MIMD, Multiple Instruction Multiple Data), i les de memòria distribuïda (SIMD, Single Instruction Multiple Data).

Però, per què utilitzem els dos termes *paral·lela* i *concurrent*? Podríem utilitzar-ne només un, donat que ambdós termes són pràcticament sinònims. Però precisament perquè són *pràcticament* sinònims fem la distinció. El terme programació *paral·lela* fa referència a conjunts d'instruccions iguals que s'executen en la mateixa màquina com a processos independents. En canvi, programació *concurrent* és un concepte més general, donat que fa referència a fluxes d'execució independents, que poden fins i tot ésser executats en màquines diferents i físicament allunyades. Un exemple pot ésser una arquitectura client-servidor en la qual una màquina central reparteix diferents feines a màquines esclaves.

El cas de programació concurrent que ens interessa no és tant general, tot i que podríem distribuir les feines en màquines connectades per una xarxa, i ens hem centrat en la programació multifil (en anglès *multithreading*). En aquesta cada fluxe d'execució pot ésser diferent, és a dir, poden ser instruccions i algorismes diferents, però s'executen en la mateixa màquina. La diferència amb la programació paral·lela és que en aquest cas no es creen nous processos, sinó que tots els *threads* comparteixen la mateixa pila i adreces de memòria. Això ofereix diferents avantatges. Primerament fa que la interacció entre threads sigui molt més eficient que entre processos, i d'altra banda, el codi és completament portable entre màquines seqüencials i paral·leles. Podem executar el mateix codi sense ni un sol canvi tant en una màquina seqüencial, per exemple un PC, com en una màquina paral·lela, per exemple un Cray o una SGI O-2000. Aquesta darrera característica de portabilitat els fa tremendament atractius i, sobretot, útils. Particularment, hem treballat amb l'estàndard POSIX Threads (Butenhof, 1997).

D'altra banda, també hem treballat intensivament en un entorn paral·lel, és a dir, amb processos que executen la mateixa instrucció sobre conjunts de dades diferents.

## A.2 SIMD i MIMD

Els superordinadors de memòria compartida, tal com el seu nom indica, són màquines en les quals els seus processadors comparteixen les dades, i per tant poden accedir simultàniament a aquestes. Aquestes dades estan disponibles per a tots els processadors, i tots poden llegir i escriure en elles a la vegada. Això presenta uns certs avantatges i uns certs inconvenients. El principal avantatge és que no s'ha de fer una partició explícita de les dades en el codi font del programa en els di-

versos processadors. Això fa que l'estil de codificació intuïtiu pels humans (l'estil seqüencial amb el que hem treballat tota la vida) sigui directament aplicable en el codi dels programes destinats a aquestes màquines. A conseqüència d'això, els programes seqüencials confeccionats pel programador són fàcilment i ràpidament adaptables a aquestes màquines.

Però hi ha dos greus inconvenients. El primer és que existeix el perill d'accedir, i per tant modificar, simultàniament a una dada determinada des de diferents processadors alhora. Això fa que les nostres dades estiguin corruptes i, en la pràctica, que el programa presenti errors que no podem reproduir repetidament més d'un cop, donat que a cada execució l'error que ens apareix és diferent a l'anterior. D'altra banda, l'inconvenient més greu és el tecnològic. Per a poder aconseguir que diversos processadors comparteixin les dades en memòria la comunicació entre aquests es fa habitualment a través d'un *crossbar*, el mètode més ràpid existent en l'actualitat. Aquest *crossbar* té un límit pràctic d'uns 64 o 128 processadors com a màxim. Això ens limita la velocitat de procés i el nombre de processadors a utilitzar.

En l'altre àmbit, les màquines de memòria distribuïda tenen, com el seu nom indica, la memòria distribuïda al llarg dels seus processadors. Això vol dir que cada processador només pot accedir a la memòria que té assignada, sense que la resta de processadors puguin accedir-hi. Aquestes màquines també tenen els seus avantatges i els seus inconvenients. Els inconvenients són que la seva programació és molt més costosa. Primerament el programador ha d'adquirir l'habilitat d'atacar de manera diferent el procés d'analitzar, dissenyar i implementar el seu codi, habilitat 'paral·lela' força poc intuïtiva. Per tant, l'inconscient i els costums adquirits al llarg d'anys de programació seqüencial poden trair al programador. Ens trobem davant un canvi de mentalitat. D'altra banda, aquestes noves tècniques requereixen de nous llenguatges de programació, que tampoc són gens semblants als habituals llenguatges 'seqüencials'. En resum, tot això requereix un esforç addicional que molts cops el programador (que en el món de la recerca científica és habitualment també l'usuari), no estigui disposat a destinar temps per aquesta nova formació. A més, els codis ja existents per a màquines seqüencials no són fàcilment adaptables a aquesta mena de màquines, i més ben dit, quasi sempre requereixen de la seva reprogramació total. D'altra banda, el nostre problema ha de tenir un grau intrínsec de paral·lelisme igual o superior al del nombre de processadors disponibles, situació que no sempre es presenta. Però evidentment el procés d'imatges és una d'aquestes situacions, donat que podem mapejar cada píxel de la imatge en un processador.

Però d'altra banda, els avantatges són enormes. Primerament, la idea és tenir un gran nombre de processadors molt senzills. La potència de càlcul de cadascun d'ells pot ser tan simple com la d'una calculadora de butxaca, però el rendiment conjunt de tots ells pot ser infinitament superior al de qualsevol altre ordinador. No existeix absolutament cap tipus de límit tecnològic per a aquestes màquines. A diferència de les màquines de memòria compartida, la comunicació entre processadors és molt senzilla, i no presenta el límit tecnològic d'aquelles amb el seu crossbar. En les màquines de memòria distribuïda l'únic límit és l'econòmic. Podem fabricar una màquina amb tants processadors com volguem i amb tota la potència de càlcul que volguem <sup>1</sup>.

Evidentment, l'arquitectura que vam escollir inicialment va ser la de memòria distribuïda (SIMD). Diem inicialment perquè posteriorment ens vam veure obligats a abandonar-la. Malauradament, degut als inconvenients anteriorment comentats, aquesta arquitectura no va tenir èxit entre els programadors, i l'arquitectura de memòria compartida (MIMD), es va acabar imposant. El mercat de màquines SIMD va tancar i aquestes van quedar en desús i sense manteniment. Al final, l'entorn ens va obligar, després de 2 anys de feina, a migrar tot el nostre codi cap a màquines MIMD.

Des d'un punt de vista totalment personal, em permeto el luxe d'opinar sobre aquest desgraciat fet. Per un cop, la comunitat científica s'ha equivocat estrepitosament. La possibilitat de trencar els límits computacionals i eliminar-ne qualsevol possible frontera no ha estat suficient argument per a que els investigadors dediquessin els seus esforços a explotar aquesta nova via. L'home és un animal, i

---

<sup>1</sup>Físicament aquest límit per a la potència de càlcul existeix, i va ser establert per Hans Bremermann l'any 1962, per simples consideracions basades en la teoria quàntica. Suposant que l'estat d'un bit es pot representar com el valor de l'spin d'un electró, la proposició és: "Cap sistema de procés de dades, vivent o artificial, pot processar més de  $2 \cdot 10^{47}$  bits per segon per gram de massa".

Utilitzant aquest límit, Bremermann calcula el nombre total de bits processats per un hipotètic ordinador que tingués la mateixa massa que la Terra, durant un període de temps igual al que s'estima per a l'edat del nostre planeta. Com que la massa de la Terra és d'uns  $6 \cdot 10^{27}$  g, i l'edat és d'uns  $10^{10}$  anys, aquest ordinador imaginari no hauria estat capaç de processar més de  $2.56 \cdot 10^{92}$  bits, o si ho arrodonim a la potència de 10 superior, uns  $10^{93}$  bits. Aquest nombre s'anomena *límit de Bremermann*, i aquells problemes que requereixen processar més de  $10^{93}$  bits s'anomenen *problemes transcomputacionals*. De fet, molt problemes que treballen amb sistemes de mida moderada necessiten una quantitat de càlcul superior a aquest nombre. Aquests problemes s'estudien en una disciplina anomenada *teoria de la complexitat computacional*, que va emergir els anys 60 com una branca de la teoria general dels algorismes.

com a tal, s'equivoca. En aquest cas, la mandra i la comoditat (el segon argument és perfectament vàlid) han estat els causants d'aquest pas enrera. Els pocs entusiastes de les màquines SIMD que queden/quedem, són vistos com una espècie de gent rara que viu en una torre d'ivori. Res més lluny de la realitat, potser són els únics que s'atreveixen a anar una mica més enllà sense que el sacrifici personal sigui un impediment (no és precisament aquest l'esperit de la recerca científica?..).

En el cas de la màquina SIMD utilitzada, vam treballar amb un ordinador *Connection Machine 2* de la firma *Thinking Machines*. És una màquina de 2048 processadors amb 128 Kb de memòria en cada processador, i un pic teòric de 1.28 Gflops/s. La codificació es va realitzar utilitzant el llenguatge *C\**.

En el cas de la MIMD, hem/estem treballant amb una *SGI Origin 2000* de la firma *Sillicon Graphics*, formada per 64 processadors MIPS R10000, cadascun amb 4Mb de cache, i un pic teòric de 32 Gflops/s. El llenguatge utilitzat és el *C++*, i eventualment *C* i *FORTRAN*. També hem treballat amb la *Sun Ultra Enterprise-3000*, amb 6-CPU's, del nostre Departament d'Astronomia i Meteorologia, però ha estat en moments molt puntuals.

Quasi tota la programació s'ha fet orientada a objectes (Meyer, 2000), quan s'ha utilitzat el llenguatge *C++* (Stroustrup, 1997), intentant trencar d'aquesta forma el mite que la orientació a objectes no és adequada per al càlcul matemàtic.

### A.3 Connection Machine

En aquest tipus d'ordinador existeixen diversos processadors, cadascun d'ells amb una memòria associada, i tots actuant sota la direcció d'un ordinador seqüencial anomenat *front end*. Cada processador guarda informació per a un node de dades en la seva memòria local, i tots els processadors poden executar la mateixa operació en tots els nodes de dades en el mateix moment. Per exemple, un programa de gràfics pot guardar cada píxel en un node o processador, que cada processador executi una instrucció determinada sobre aquest píxel, i que tots els processadors l'executin a la vegada en els seus corresponents píxels.

En la Connection Machine (que a partir d'aquí anomenarem CM) el *front end* és un ordinador seqüencial estàndard, habitualment una Sun-4 o algun tipus de VAX.

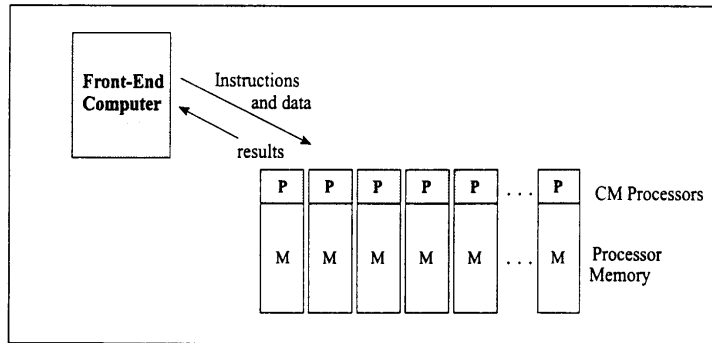


Figura A.1: Interaccions i arquitectura general de la Connection Machine.

Un bus de dades connecta el front end a la CM. Els programes confeccionats per a la CM resideixen i s'executen des del front end. El codi seqüencial s'executa en el front end, mentre que el paral·lel s'executa en els processadors CM. En la figura A.1 podem veure una representació gràfica d'aquesta arquitectura.

### A.3.1 Processadors virtuals

Diferents models de CM tenen un nombre diferent de processadors. Però això no limita la mida del conjunt de dades que el programa pot processar, donat que la CM treballa amb un sistema de *processadors virtuals*. La CM pot dividir la memòria associada a cada processador físic per a crear un múltiple de potències de 2 del conjunt total de processadors. Una CM amb, per exemple, 16 000 processadors físics pot treballar com si tingués 32 000, 64 000, o més processadors.

Aquests processadors estan interconnectats per un sistema de comunicacions d'alta velocitat anomenat *router*. El router permet a cada processador enviar un missatge a qualsevol altre processador, i tots els processadors a la vegada. A més, la CM té un model de comunicació més ràpid anomenat *grid communication*, que permet als processadors comunicar-se amb els seus veïns. Si visualitzem cada processador com un punt en un espai  $n$ -dimensional, i les connexions entre ells com arestes, la seva topologia correspon a la d'un hipercub de dimensió  $n$ .

En la figura A.2 hi podem veure una representació artística de la distribució d'una màquina d'uns quants centenars de milers de processadors.

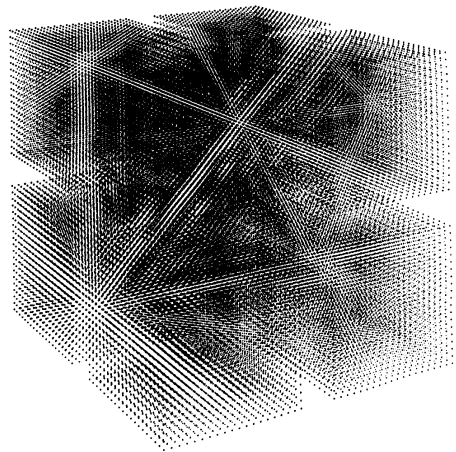


Figura A.2: Representació artística d'una possible distribució de processadors en una CM formada per uns centenars de milers d'aquests.

## A.4 SGI Origin 2000

Aquesta és una màquina de memòria compartida. Però el que la diferencia de la resta d'aquestes màquines és que físicament els processadors i la memòria estan distribuïts, i no existeix un únic banc de memòria comú al que hi accedeixen els processadors. Què vol dir exactament això?

En les màquines de memòria distribuïda, cada processador té assignada una memòria a la qual només hi pot accedir el processador corresponent. En canvi, en la SGI Origin-2000 (que a partir d'aquí anomenarem O-2000) tot i ser de memòria compartida, els processadors i els bancs de memòria es troben agrupats en petits nodes o clusters. Cada processador té associats físicament uns bancs de memòria, però aquests poden ser accedits pels altres processadors. Aquesta arquitectura és totalment transparent al programador, ja que a nivell de programació la màquina és una simple MIMD. Si es vol aprofitar al màxim aquest *agrupament-distribució* físic, el programador ha de tenir en compte aquestes agrupacions, per tal que processadors físicament separats accedeixin el mínim possible a bancs de memòria físicament allunyats. A les figures A.3, A.4 i A.5 podem veure diferents arquitectures per a diferents nombres de processadors. Per a ser exactes, el concepte *lluny* no existeix en l'O-2000, donat que per a un nombre superior a 64 processadors, la connexió



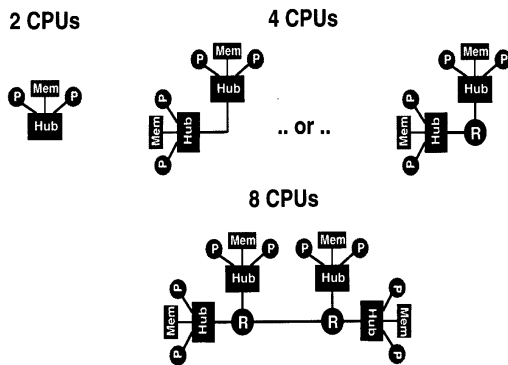


Figura A.3: Distribució i connexions entre processadors i bancs de memòria en una SGI Origin-2000, per a 2, 4 i 8 processadors.

interna entre processadors es fa a través d'un router (figura A.5), però això ja són detalls que no són excessivament importants per a nosaltres.

A continuació exposem l'algorísmica de la implementació en aquests ordinadors dels diferents algorismes utilitzats en cadascun dels capítols previs. Els algorismes es mostren gràficament en diagrames d'activitat del llenguatge UML (Booch et al., 1998). Per facilitar la claredat dels diagrames, no es mostren tots els elements, sobretot els fluxes d'objectes. Només es mostren els que considerem importants per a entendre el diagrama, i per tant no es poden prendre com una anàlisi detallada de l'algorisme en qüestió.

## A.5 Deconvolució

La simple implementació seqüencial dels algorismes clàssics no basats en wavelets ja és susceptible de ser abordada en el marc dels superordinadors paral·lels, donat que al treballar amb imatges superiors a 1024x1024 píxels, el temps de càlcul habitual necessari per a obtenir una reconstrucció és de l'ordre d'unes desenes de minuts (ja havent optimitzat personalment l'algorisme en un factor 10). Aquest temps creix de forma exponencial en augmentar proporcionalment la mida de la imatge a reconstruir. En descomposar les dades en plans wavelet, el temps de càlcul es multiplica pel nombre de plans wavelet utilitzats, portant-nos a temps de càlcul de l'ordre d'hores. Per tant, l'aplicabilitat d'aquests algorismes ve limitada per la mida

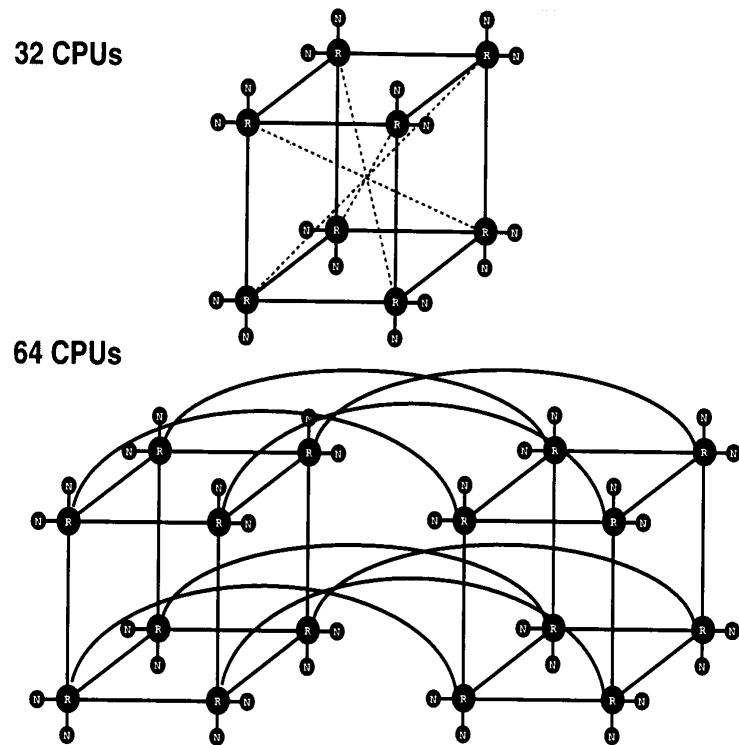


Figura A.4: Distribució i connexions entre processadors i bancs de memòria en una SGI Origin-2000, per a 32 i 64 processadors.

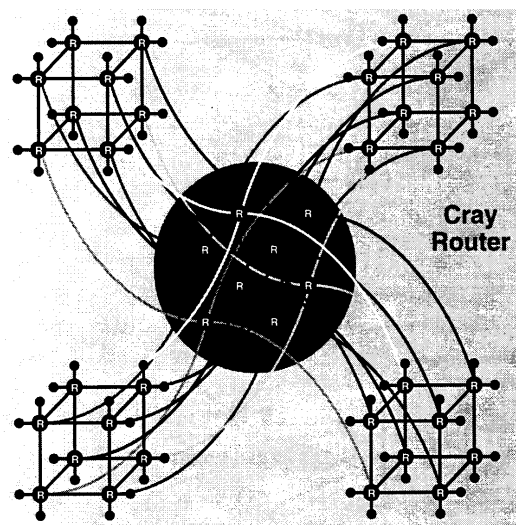


Figura A.5: Distribució i connexions entre processadors i bancs de memòria en una SGI Origin-2000, per a més de 64 processadors.

de la imatge a reconstruir, i el nombre de plans wavelet a utilitzar.

### A.5.1 Algorisme Gaussià basat en wavelets

Tornem a exposar a continuació l'expressió 3.13 que explicita aquest algorisme:

$$\left\{ \begin{aligned} W_{i_\omega}^{a_i, (k_{i_\omega}+1)} = & K_{i_\omega} + W_{i_\omega, i}^{a_i, (k_{i_\omega})} + \\ & + \left( \frac{1}{q_i} \sum_{j=1}^D \left( f'_{ji} (\omega_{i_\omega, j}^p - \sum_{l=1}^B f'_{jl} W_{i_\omega, l}^{a_i, (k_{i_\omega})} - b_j) \right) \right)^m. \end{aligned} \right. \quad (\text{A.1})$$

#### Connection Machine-2

En aquesta màquina el paral·lisme d'aquest algorisme es fa sobre els píxels de la imatge, és a dir, sobre els índexs  $i$ ,  $j$  i  $l$ . De fet, totes les implementacions paral·leles d'algorismes sobre aquesta arquitectura es realitzen de manera semblant. Tenim un grau de paral·lisme virtual igual al nombre de píxels, tot i que a la pràctica estem limitats pel nombre físic de processadors. En la figura A.6 hi veiem el seu diagrama d'activitats.

Com es veu, el càlcul relatiu a la projecció inversa de les dades no està dins una zona paral·lela. De fet aquest càlcul sí que es realitza en paral·lel, donat que s'utilitzen mòduls propis de la CM-2 que ja estan preparats per a treballar amb tots els processadors de la CM per a calcular la FFT global. Per tant, de fet no hem deixat la zona paral·lela. D'altra banda, dos bucles tanquen la zona paral·lela, un el que itera sobre el nombre d'iteracions del pla wavelet particular, i l'altre sobre cadascun dels plans wavelet, índexs  $k_{i_\omega}$  i  $i_\omega$  respectivament.

#### Origin-2000

En aquest cas, el paral·lisme es realitza a nivell dels plans wavelet, o sigui, sobre l'índex  $i_\omega$ . Per tant, podem aplicar tot el procés de reconstrucció sencer a cadascun dels plans wavelet. En la figura A.7 mostrem el diagrama d'activitats d'aquest algorisme.

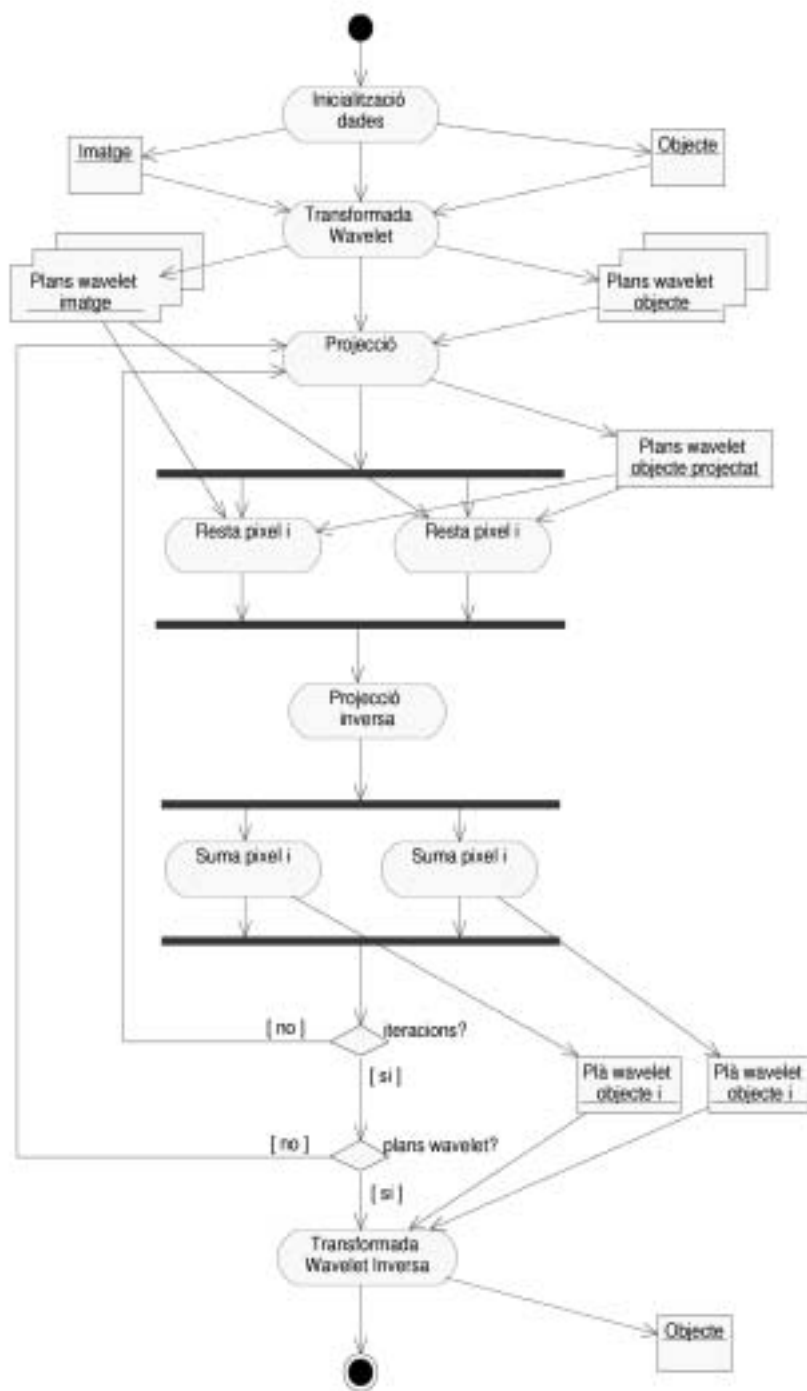


Figura A.6: Diagrama d'activitats de l'algorisme paral·lel de reconstrucció Gaussià basat en wavelets, per a la màquina CM-2.

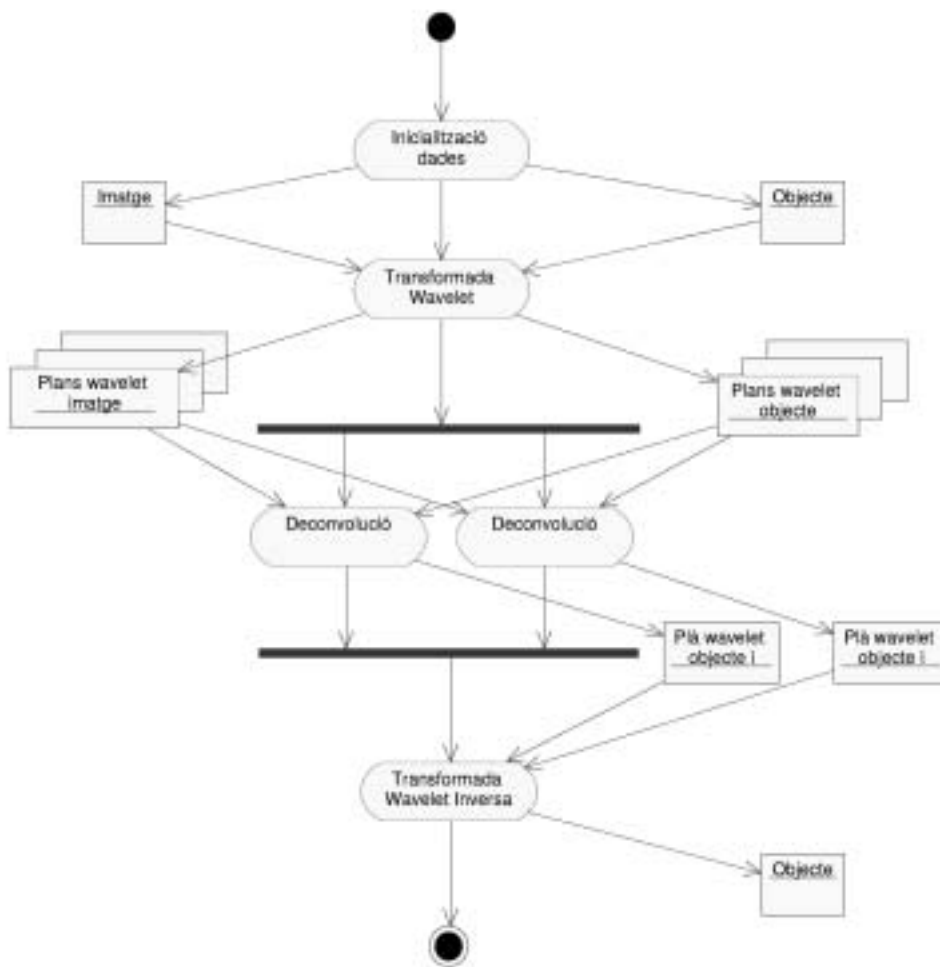


Figura A.7: Diagrama d'activitats de l'algorisme paral·lel de reconstrucció Gaussiana basat en wavelets, per a la màquina O-2000.

La major part de la càrrega, per no dir tota, es troba en l'activitat *Deconvolució*, el que vol dir que el nostre programa tindrà un grau de paral·lisme  $n$ . En una màquina seqüencial trigariem  $n$  cops en reconstruir una imatge del que trigariem fent-ho amb un algorisme clàssic no basat en wavelets, és a dir, reconstruint la imatge global en comptes de tots i cadascun dels seus plans wavelet. Però en paral·litzar, aconseguim reduir el temps de càlcul en un factor  $n$ , i per tant, tornem a trigar el mateix en reconstruir una imatge seqüencialment, que els  $n$  plans wavelet en paral·lel.

En aquest diagrama no apareixen explícitament les decisions o bifurcacions dels bucles, que en aquest cas són sobre els píxels i les iteracions del mètode, és a dir, sobre els índexs  $i, j, l$  i  $k_{i\omega}$ . Aquests bucles són implícits en l'activitat *Deconvolució*, i per tant es realitzen internament en cada processador.

### A.5.2 Algorisme Poissonià basat en wavelets

Reproduïm l'expressió 3.14:

$$a_i^{(k+1)} = K a_i^{(k)} \left[ \frac{1}{q_i} \sum_{j=1}^D \frac{f_{ji} \sum_{i\omega} \omega_{i\omega,j}^{p'}}{\sum_{l=1}^B f_{jl} a_l^{(k)} + C_j b_j} \right]^m. \quad (\text{A.2})$$

#### CM-2

En aquest cas, l'algorisme és pràcticament igual al del cas anterior (figura A.6). L'única diferència és que hem de canviar les activitats *Resta píxel i* i *Suma píxel i* per *Divisió píxel i* i *Multipliació píxel i*. Per tant no el tornem a reproduir.

#### O-2000

Però en el cas de l'O-2000 les coses canvien. En aquest algorisme no podem aplicar tot el procés de deconvolució sobre cada pla wavelet de forma independent, és a dir, sobre l'índex  $i_\omega$ . Al final de cada iteració hem d'obtenir una aproximació a l'objecte original  $a$  per, a continuació, tornar a projectar-lo i descomposar-lo en els

seus plans wavelet. Per tant, aquí hi tenim un punt de sincronització que ens tanca la regió paral·lela. Aquest punt de sincronització impedeix que s'assoleixi el grau de paral·lelisme  $n$  que buscàvem, però tot i així el temps de càlcul es redueix de manera apreciable. Això és degut a la paral·lelització de la projecció inversa que inclou una FFT, càlcul computacionalment car. Podem veure gràficament aquest algorisme en la figura A.8.

### A.5.3 Algorisme amb màscara de detecció del senyal

Reproduïm l'expressió 3.20:

$$a_i^{(k+1)} = K a_i^{(k)} \left[ \frac{1}{q_i} \sum_{j=1}^D \frac{f_{ji} \sum_{i_\omega} \left( \omega_{i_\omega, j}^{h(k)} + m_{i_\omega, j} (\omega_{i_\omega, j}^{p'} - \omega_{i_\omega, j}^{h(k)}) \right)}{\sum_{l=1}^B f_{jl} a_l^{(k)} + C_j b_j} \right]^m. \quad (\text{A.3})$$

Aquest algorisme, té un aspecte quasi igual a l'anterior (Poissonià basat en wavelets). L'única diferència és la màscara de detecció del senyal en el numerador de l'expressió. Per tant, a l'algorisme hi afegim el càlcul de la màscara per a cada pla wavelet. Altre cop, la paral·lelització es realitza sobre l'índex  $i_\omega$ .

En la figura A.9 hi mostrem el diagrama d'activitats.

## A.6 Períodes

En aquests algorismes, la descomposició en plans wavelet ens permet altre cop paral·lelitzar sobre aquests. Això ho fem tant en el cas WPDM com en el WCLEAN, i evidentment ho podem fer sobre qualsevol mètode de detecció de períodes que utilitzem per a detectar les periodicitats en cadascun dels plans wavelet. Tal com hem comentat en el capítol 4, existeixen mètodes directes de detecció de períodes basats en la Transformada Wavelet. En l'Apèndix B mostrem la paral·lelització de la descomposició wavelet d'un d'aquests algorismes.

En la figura A.10 hi mostrem el diagrama d'activitats.

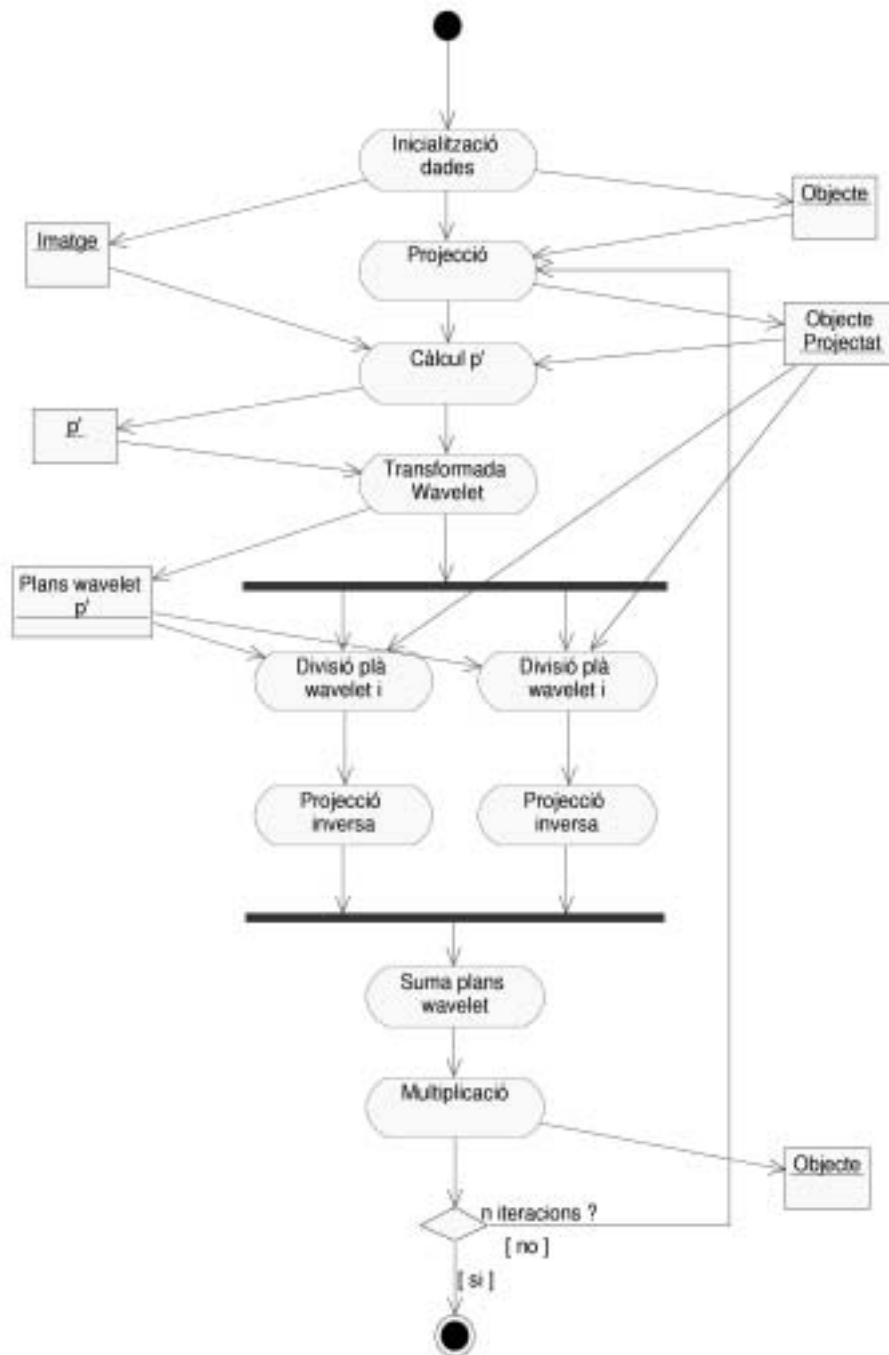


Figura A.8: Diagrama d'activitats de l'algorisme paral·lel de reconstrucció Poissoniana basat en wavelets, per a la màquina O-2000.



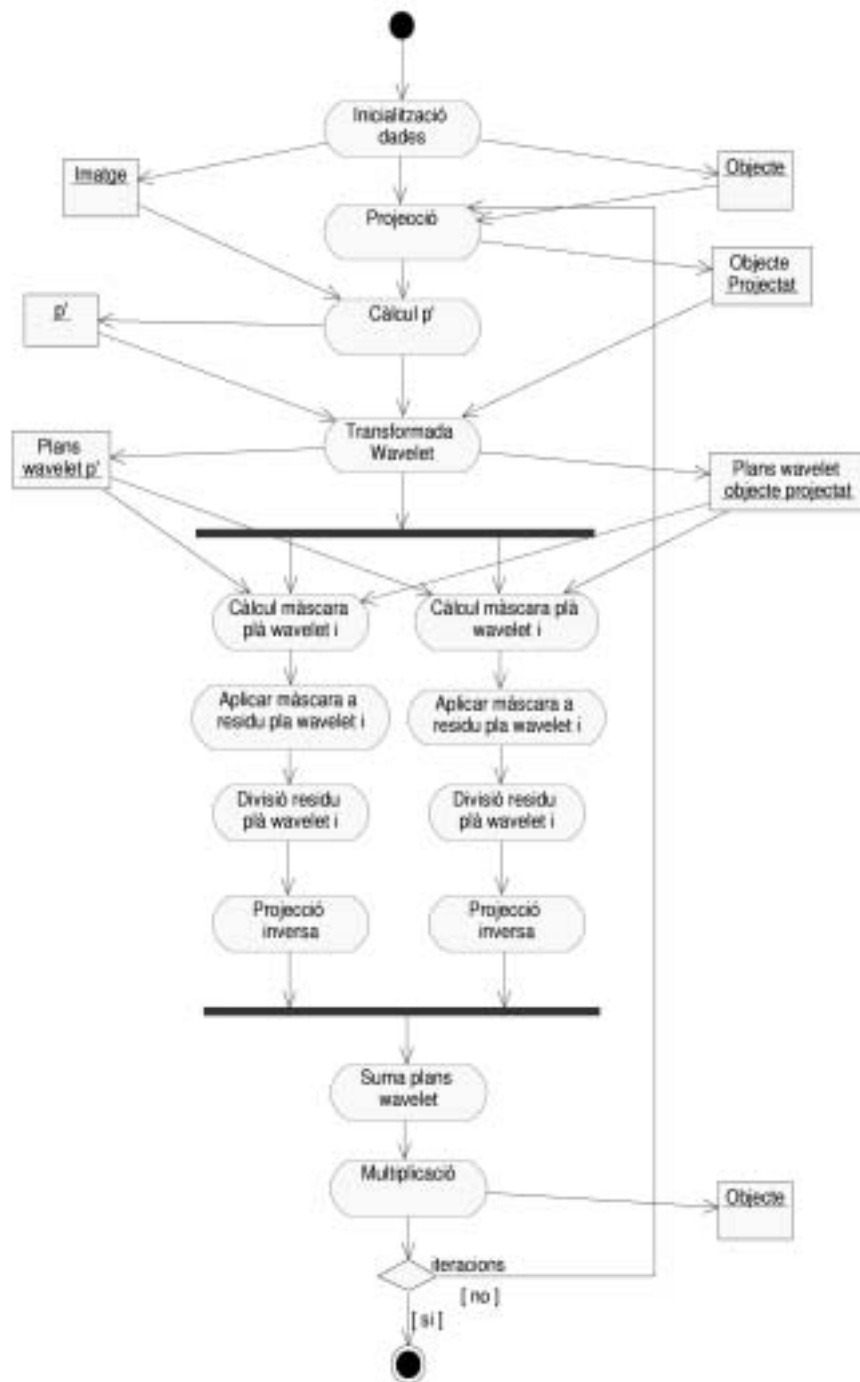


Figura A.9: Diagrama d'activitats de l'algorisme paral·lel de reconstrucció Poissoniana basat en wavelets amb màscara de detecció del senyal, per a la màquina O-2000.

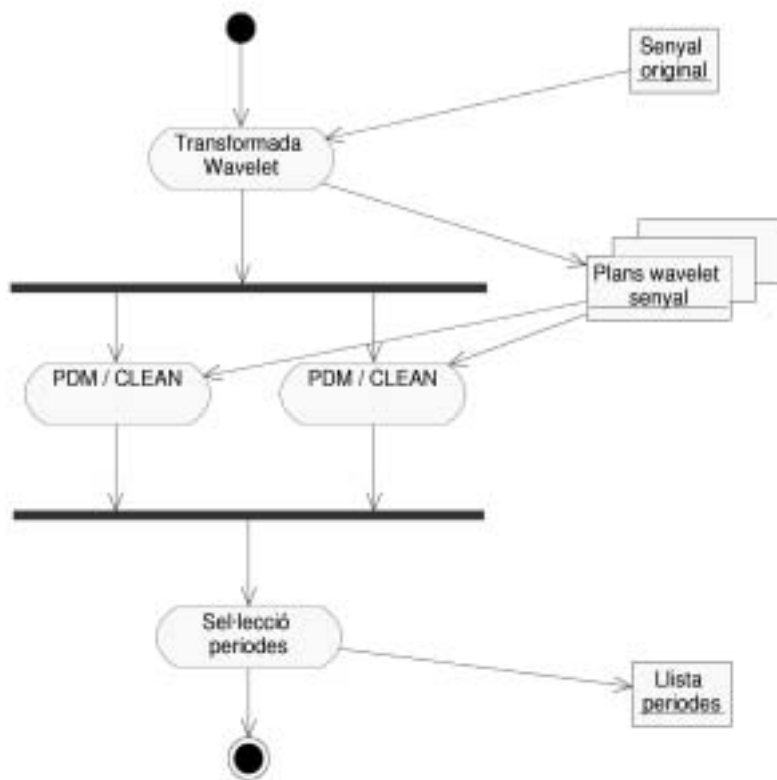


Figura A.10: Diagrama d'activitats dels algorismes paral·lels de detecció de períodes basats en wavelets WPDM i WCLEAN, per a la màquina O-2000.

## A.7 Fusió

En aquest cas no hem realitzat cap paral·lelització dels algorismes de fusió basats en wavelets. Podríem dividir l'escena a fusionar en diversos fragments, i fusionar cadascun d'ells en paral·lel, però donat que les imatges amb què hem treballat no tenien mides exageradament grans, a la pràctica no ha estat necessari paral·lelitzar els algorismes. El temps de càlcul en ordinadors seqüencials és d'un ordre de magnitud  $\sim 10^1$  sg, per tant no guanyem gaire en termes absoluts pel fet de paral·lelitzar. En canvi, el grau de paral·lelització potencial és molt elevat, donat que podem subdividir la imatge en tants trossos com volguem. Per tant, podríem reduir el temps de càlcul en tantes parts com les que subdividim la imatge, i per tant en els corresponents ordres de magnitud. Aquesta aproximació és interessant implementar-la quan es treballa amb imatges grans,  $n_{pixels} > (10^3)^2$ .

## A.8 Clustering

Aquest algorisme és en el qual la utilització de màquines paral·leles és més important. Primerament, el càlcul de la Transformada Wavelet de l'histograma, quan el nombre de dimensions és  $n = 3$ , és computacionalment car. Però el més car és la recerca de màxims locals en cadascun dels plans wavelet. Aquí és on els algorismes utilitzen més temps de CPU, i per tant és necessari utilitzar màquines paral·leles per a la seva implementació. En el nostre cas, hem utilitzat programació *multithreading*. En aquests algorismes la mida de la imatge original no és important pel temps de càlcul final, donat que es treballa pràcticament sempre en l'espai de l'histograma.

En la figura A.11 hi mostrem el diagrama d'activitats.

Aquest algorisme paral·lel aplicat a una imatge de 1024x1024 píxels formada per 3 canals espectrals, i descomposada en 3 plans wavelet (i per tant, utilitzant 3 processadors), necessita unes 7 hores de càlcul. En una màquina seqüencial necessita al voltant de les 17 hores. Aquest temps és tan alt degut principalment a dos factors. El primer és que cada pla wavelet conté  $128^3 \sim 2 \cdot 10^6$  píxels, i si cadascun d'ells està representat per un nombre real (4 bytes) implica que cada pla wavelet ocupa 8 Mb de memòria. El cache de memòria, de 4 Mb en la O-2000, es incapaç de ser eficient amb aquesta quantitat de dades (problema clàssic en el món de la computació d'alt

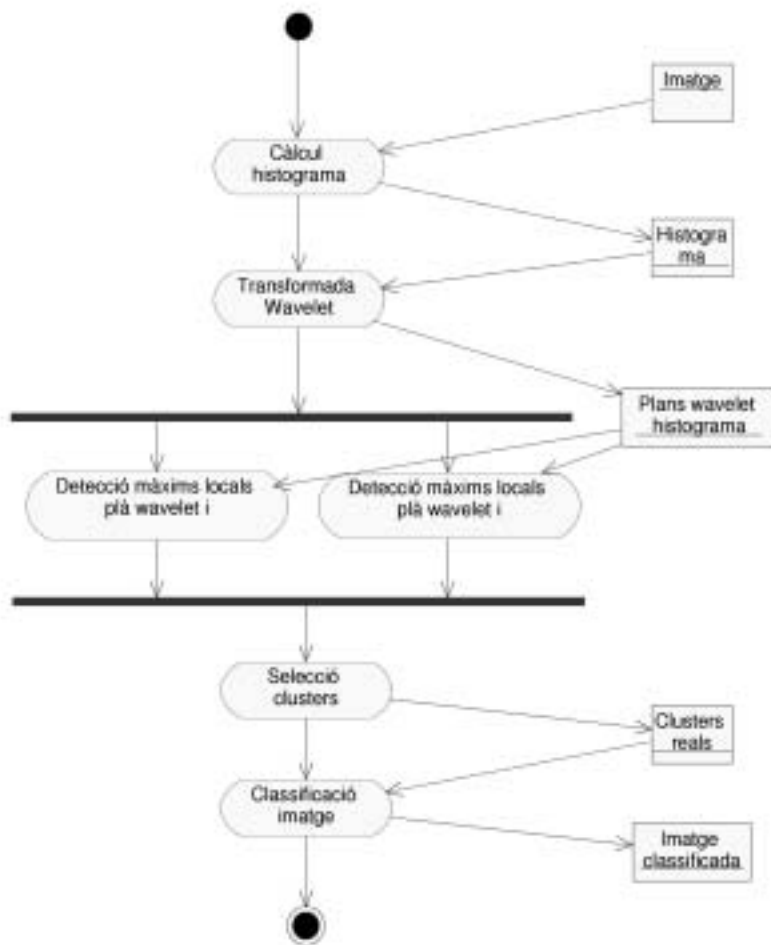


Figura A.11: Diagrama d'activitats de l'algorisme WAVCLUS paral·lelitzat, per a la màquina O-2000.

rendiment). Però el segon factor, de fet el més important, és que per a cadascun d'aquests  $2 \cdot 10^6$  píxels s'han de realitzar  $3^3 = 27$  comparacions amb els píxels veïns, el que vol dir un total de  $128^3 \cdot 27 \sim 5.6 \cdot 10^7$  comparacions. *A priori* no sembla un nombre gaire elevat d'operacions, però el problema és que una comparació és una de les operacions computacionalment més cares que existeixen,  $\sim 10^{-3}$  sg. Això fa que el temps total de càlcul sigui  $5.6 \cdot 10^7 \cdot 10^{-3} = 5.6 \cdot 10^4$  sg  $\sim 15$  hores. Però aquest és el temps que necessitem per a cada pla wavelet, per tant, si  $n_{i_\omega} = 3$  llavors tenim un temps de càlcul  $\sim 45$  hores, quasi dos dies sencers. En la pràctica no hem trigat 45 hores, el que vol dir que el temps per a cada comparació és lleugerament inferior a  $\sim 10^{-3}$  sg, tot i que l'ordre de magnitud segueix essent correcte.

Això ho podríem solucionar reduint la mida dels plans wavelet a, per exemple,  $64^3$  píxels. Això redueix dràsticament el temps de càlcul a 59 minuts ( $\sim 1$  hora), però també l'efectivitat del mètode. En reduir el nombre de bins de l'histograma, estem disminuint el poder resolutiu radiomètric, i per tant la qualitat de les dades i la precisió del mètode.



## Apèndix B

# Paral·lelització i optimització d'un algorisme pel càlcul de la Transformada Wavelet de Morlet.

*L'Art Musical no sorgeix del material  
'amb què' es fan les coses, sinó del procés  
de 'com es fan'.*

- Rosalyn Tureck

### B.1 Plantejament

A continuació presentem l'algorisme que hem desenvolupat pel càlcul de la Transformada Wavelet de Morlet (Otazu & Núñez, 2001).

Donada una sèrie temporal consistent en  $N$  valors  $x(t_\alpha)$  presos en un conjunt discret d' $N$  instants  $\{t_\alpha; \alpha = 1, 2, \dots, N\}$ , l'aproximació discreta d'una Transformada Wavelet contínua es pot expressar com:

$$W(\omega, \tau; x(t)) = \sqrt{\omega} \sum_{\alpha=1}^N x(t_\alpha) f^*(\omega(t_\alpha - \tau)) \quad (\text{B.1})$$

on  $\omega$  es la freqüència assignada a la wavelet, i  $\tau$  és la posició on calculem el valor d'aquesta Transformada Wavelet.

La Wavelet de Morlet es defineix com:

$$f(z) = e^{-c\omega^2(t-\tau)^2} (e^{i\omega(t-\tau)} - e^{-1/4c}) \quad (\text{B.2})$$

on habitualment  $c = \frac{1}{8\pi^2}$ . Per tant, si introduïm B.2 en B.1 obtenim per a la part real i la imaginària

$$\text{Re}(W) = \sqrt{\omega} \sum_{\alpha=1}^N x(t_\alpha) e^{-c\omega^2(t_\alpha-\tau)^2} \cos(\omega(t_\alpha - \tau)) \quad (\text{B.3})$$

i

$$\text{Im}(W) = -\sqrt{\omega} \sum_{\alpha=1}^N x(t_\alpha) e^{-c\omega^2(t_\alpha-\tau)^2} \sin(\omega(t_\alpha - \tau)) \quad (\text{B.4})$$

el que ens descriu la Transformada Wavelet de Morlet de la funció original discreta  $x(t_\alpha)$ , en el temps  $\tau$  i a la freqüència  $\omega$ . Podem expressar aquests sumatoris de forma més compacta:

$$\text{Re}(W) = \sqrt{\omega} \sum_{\alpha=1}^N x(t_\alpha) S_{re}(t_\alpha, \tau) \quad (\text{B.5})$$

i

$$\text{Im}(W) = -\sqrt{\omega} \sum_{\alpha=1}^N x(t_\alpha) S_{im}(t_\alpha, \tau) \quad (\text{B.6})$$

on  $S_{re}(t_\alpha, \tau) = e^{-c\omega^2(t_\alpha-\tau)^2} \cos(\omega(t_\alpha - \tau))$  i  $S_{im}(t_\alpha, \tau) = e^{-c\omega^2(t_\alpha-\tau)^2} \sin(\omega(t_\alpha - \tau))$ .

Com es pot observar a partir d'aquestes expressions, per a cada punt  $(\omega, \tau)$  de la Transformada Wavelet de Morlet s'ha de calcular  $N$  cops (tal com indica el sumatori) un parell d'exponencials i un parell de funcions trigonomètriques. Computacionalment aquestes funcions són molt cares en temps de càlcul, i per tant es requereix trobar un algorisme adequat per accelerar al màxim aquest càlcul.

## B.2 Paral·lelització respecte $\omega$

En total hi ha 3 paràmetres que varien en aquest càlcul,  $\omega$ ,  $\alpha$  i  $\tau$ . Com es pot veure fàcilment, per cada paràmetre  $\omega$  hem de variar els valors de  $\alpha$  i  $\tau$ , per tant



podem paral·lelitzar el codi respecte  $\omega$ . Això vol dir que si volem calcular els valors de les equacions B.3 i B.4 per a una sèrie de  $n_\omega$  valors d' $\omega$ , podem aconseguir una reducció del temps de càlcul en un factor  $n_\omega$ . Idealment, en una màquina de memòria distribuïda amb un nombre de processadors  $n_{proc} < n_\omega$  podríem dividir el temps de càlcul per  $n_{proc}$ . Un exemple d'aplicabilitat podrien ser màquines del tipus Connection Machine, que tenen típicament  $2048 < n_\omega < 65536$ .

### B.3 Optimització respecte $t_\alpha$

Però a part de la paral·lelització respecte  $\omega$  podem accelerar el càlcul respecte  $t_\alpha$  i  $\tau$ , que és el més interessant.

Si utilitzem  $c = \frac{1}{8\pi^2}$ , i tenim en compte que  $\omega = 2\pi\nu$ , podem expressar per a la part imaginària

$$S_{im}(t_\alpha, \tau) = \sin[2\pi\nu(t_\alpha - \tau)] \exp[-0.5\nu^2(t_\alpha - \tau)^2] .$$

Per comoditat substituïm  $t \equiv t_\alpha$ ,  $A \equiv 2\pi\nu(t - \tau)$ ,  $B \equiv -0.5\nu^2(t_\alpha - \tau)^2$ , i per tant podem expressar l'equació anterior com:

$$S_{im}(t, \tau) = \sin A \exp B . \quad (\text{B.7})$$

Podem fer el mateix pel cas real obtenint

$$S_{re}(t, \tau) = \cos A \exp B . \quad (\text{B.8})$$

Si el mostreig  $t_\alpha$  de les dades d'entrada és equiespaiat, podem intentar calcular el valor d'un dels termes del sumatori  $S(t_{\alpha+1}, \tau)$  a partir del valor anterior  $S(t_\alpha, \tau)$ . Com hem dit, estem suposant que les dades son equiespaidades, per tant podem definir  $t_{\alpha+1} = t_\alpha + \Delta t$ , i aplicant-ho a l'expressió de  $S(t_{\alpha+1}, \tau)$  obtenim:

$$S_{im}(t_{\alpha+1}, \tau) = \sin[2\pi\nu(t + \Delta t - \tau)] \exp[-0.5\nu^2(t + \Delta t - \tau)^2]$$

$$S_{im}(t_{\alpha+1}, \tau) = \sin[2\pi\nu(t - \tau) + 2\pi\nu\Delta t] \exp[-0.5\nu^2(t + \Delta t - \tau)^2]$$

$$S_{im}(t_{\alpha+1}, \tau) = \sin[2\pi\nu(t - \tau) + 2\pi\nu\Delta t] \exp[-0.5\nu^2(t^2 + 2t\Delta t + \Delta t^2 - 2t\tau - 2\tau\Delta t + \tau^2)]$$

$$S_{im}(t_{\alpha+1}, \tau) = \sin[2\pi\nu(t - \tau) + 2\pi\nu\Delta t] \exp[-0.5\nu^2(t^2 + \tau^2 - 2t\tau) - 0.5\nu^2(2t\Delta t + \Delta t^2 - 2\tau\Delta t)] .$$

Definint  $A' \equiv 2\pi\nu\Delta t$  i  $B' \equiv -0.5\nu^2(2t\Delta t + \Delta t^2 - 2\tau\Delta t)$  podem simplificar l'expressió anterior, quedant

$$S_{im}(t_{\alpha+1}, \tau) = \sin[A + A'] \exp[B + B'] ,$$

on hi podem aplicar les regles aritmètiques corresponents al sinus d'una suma i l'exponencial d'una suma,

$$S_{im}(t_{\alpha+1}, \tau) = [\sin A \cos A' + \cos A \sin A'] \exp B \exp B' .$$

Desenvolupant i reordenant aquesta expressió obtenim

$$S_{im}(t_{\alpha+1}, \tau) = \sin A \exp B \cos A' \exp B' + \cos A \exp B \sin A' \exp B' ,$$

on podem substituir les equacions B.7 i B.8, obtenint finalment

$$S_{im}(t_{\alpha+1}, \tau) = S_{im}(t_{\alpha}, \tau) \cos A' \exp B' + S_{re}(t_{\alpha}, \tau) \sin A' \exp B' . \quad (B.9)$$

Podem operar de manera semblant per a la part real  $S_{re}(t_{\alpha+1}, \tau)$ , obtenint l'expressió final

$$S_{re}(t_{\alpha+1}, \tau) = S_{re}(t_{\alpha}, \tau) \cos A' \exp B' - S_{im}(t_{\alpha}, \tau) \sin A' \exp B' . \quad (B.10)$$

Aquestes expressions ens donen els valors de  $S_{im}(t_{\alpha+1}, \tau)$  i  $S_{re}(t_{\alpha+1}, \tau)$  a partir dels seus valors anteriors  $S_{im}(t_{\alpha}, \tau)$  i  $S_{re}(t_{\alpha}, \tau)$ , respectivament. Veiem que els valors reals i imaginari depenen mútament entre ells, el que vol dir que hem de realitzar el càlcul dels dos valors a la vegada. Només hem d'aplicar un factor de correcció que ve donat pels tres termes  $\cos A'$ ,  $\exp B'$  i  $\sin A'$ . A primer cop de vista podríem pensar que no em guanyat gran cosa o que fins i tot n'hem perdut, ja que abans per cada valor de  $S_{im}(t_{\alpha}, \tau)$  havíem de calcular dos termes (un *sinus* i una *exponencial*) en canvi ara n'hem de calcular tres. Però la diferència és que abans d'aquesta optimització aquests dos termes eren diferents per cada  $\alpha$ , el que implica executar explícitament una funció *sinus* i una *exponencial* que en temps de càlcul són molt cares, en canvi ara, d'aquests tres termes dos són constants al llarg de tots els valors d' $\alpha$  ( $\sin A'$  i  $\cos A'$ ) ja que no depenen de  $t$ , i per tant no hem de realitzar cap

operació per calcular-los. Tot i així, per a cada valor d' $\alpha$  encara hem de calcular  $\exp B'$  donat que  $B'$  depèn de  $t$ .

Per a calcular  $\exp B'$  per a cada valor d' $\alpha$  podem intentar actuar de manera semblant a com hem fet ara, és a dir, podem calcular  $\exp[B'(t_{\alpha+1})]$  a partir de  $\exp[B'(t_\alpha)]$ :

$$\begin{aligned}
 \exp[B'(t_\alpha)] &= \exp\{-0.5\nu^2\Delta t[2(t-\tau) + \Delta t]\} \\
 \exp[B'(t_{\alpha+1})] &= \exp\{-0.5\nu^2\Delta t[2(t+\Delta t-\tau) + \Delta t]\} \\
 \exp[B'(t_{\alpha+1})] &= \exp\{-0.5\nu^2\Delta t[2(t-\tau) + \Delta t + 2\Delta t]\} \\
 \exp[B'(t_{\alpha+1})] &= \exp\{-0.5\nu^2\Delta t[2(t-\tau) + \Delta t]\} \exp\{-0.5\nu^2\Delta t^2\} \\
 \exp[B'(t_{\alpha+1})] &= \exp B'(t_\alpha) \exp\{-0.5\nu^2\Delta t^2\} . \tag{B.11}
 \end{aligned}$$

Aquesta darrera expressió ens dóna el valor de  $\exp[B'(t_{\alpha+1})]$  a partir del seu valor anterior  $\exp B'(t_\alpha)$  només multiplicant aquest per un valor constant  $\exp\{-0.5\nu^2\Delta t^2\}$ .

Combinant l'equació B.11 amb cadascuna de les equacions B.10 i B.9, obtenim finalment

$$S_{im}(t_{\alpha+1}, \tau) = \exp\{-0.5\nu^2\Delta t^2\} \{S_{im}(t_\alpha, \tau) \cos(2\pi\nu\Delta t) + S_{re}(t_\alpha, \tau) \sin(2\pi\nu\Delta t)\}$$

i

$$S_{re}(t_{\alpha+1}, \tau) = \exp\{-0.5\nu^2\Delta t^2\} \{S_{re}(t_\alpha, \tau) \cos(2\pi\nu\Delta t) - S_{im}(t_\alpha, \tau) \sin(2\pi\nu\Delta t)\}$$

## B.4 Optimització respecte $\tau$

El procés d'optimització respecte  $t_\alpha$  que acabem de veure suposa que treballem amb una  $\tau$  fixa, i incrementem  $t_\alpha$  de forma constant. Això implica que les dades

d'entrada han de tenir un mostreig  $t_\alpha$  constant, o el que és el mateix, un mostreig equiespaiat. En canvi la sortida pot tenir un mostreig  $\tau$  qualsevol, per exemple no equiespaiat. Això ens limita l'aplicabilitat d'aquest mètode única i exclusivament a dades equiespaiades, que no són precisament el tipus de dades més habituals.

Per tant, és necessari trobar un mètode que accepti dades d'entrada no equiespaiades, o el que és el mateix, un mostreig  $t_\alpha$  no constant. L'única manera de poder optimitzar l'algorisme amb aquesta restricció sobre el paràmetre  $t_\alpha$  és optimitzar sobre el paràmetre  $\tau$ . Això ens imposarà una restricció sobre el mostreig  $\tau$  de les dades de sortida: aquest mostreig  $\tau$  ha de ser constant, o el que és el mateix, les dades de sortida seran dades equiespaiades.

Per a optimitzar sobre el paràmetre  $\tau$  procedim de forma semblant a com ho hem fet sobre el paràmetre  $t_\alpha$ , però aquest cop intentant trobar el valor de  $S(t, \tau + \Delta\tau)$  a partir de  $S(t, \tau)$ .

Comencem amb el sumatori imaginari  $S_{im}$ :

$$S_{im}(t, \tau) = \sin[2\pi\nu(t - \tau)] \exp[-0.5\nu^2(t - \tau)^2]$$

$$S_{im}(t, \tau + \Delta\tau) = \sin[2\pi\nu(t - \tau - \Delta\tau)] \exp[-0.5\nu^2(t - \tau - \Delta\tau)^2]$$

$$S_{im}(t, \tau + \Delta\tau) = \sin[2\pi\nu(t - \tau) - 2\pi\nu\Delta\tau] \exp[-0.5\nu^2(t^2 + \tau^2 - 2t\tau - 2t\Delta\tau - 2\tau\Delta\tau + \Delta\tau^2)] .$$

Recordant que abans hem definit  $A \equiv 2\pi\nu(t - \tau)$ ,  $B \equiv -0.5\nu^2(t - \tau)^2$ ,

$$S_{im}(t, \tau + \Delta\tau) = \sin[A - A'] \exp[-0.5\nu^2(t - \tau)^2 - 0.5\nu^2(2\tau - 2t + \Delta\tau)] .$$

Definint  $A' \equiv 2\pi\nu\Delta\tau$  i  $B' \equiv -0.5\nu^2\Delta\tau(2\tau - 2t + \Delta\tau)$  podem simplificar l'expressió anterior, quedant:

$$S_{im}(t, \tau + \Delta\tau) = \sin[A - A'] \exp[B + B']$$

$$S_{im}(t, \tau + \Delta\tau) = \{\sin A \cos A' - \cos A \sin A'\} \exp B \exp B'$$

$$S_{im}(t, \tau + \Delta\tau) = \sin A \cos A' \exp B \exp B' - \cos A \sin A' \exp B \exp B'$$

$$S_{im}(t, \tau + \Delta\tau) = \sin A \exp B \cos A' \exp B' - \cos A \exp B \sin A' \exp B' .$$

Recordant de les equacions B.7 i B.8 que  $S_{im}(t, \tau) = \sin A \exp B$  i  $S_{re}(t, \tau) = \cos A \exp B$ , finalment obtenim

$$S_{im}(t, \tau + \Delta\tau) = S_{im}(t, \tau) \cos A' \exp B' - S_{re}(t, \tau) \sin A' \exp B' . \quad (\text{B.12})$$

Podem operar de manera semblant pel cas real obtenint

$$S_{re}(t, \tau + \Delta\tau) = S_{re}(t, \tau) \cos A' \exp B' + S_{im}(t, \tau) \sin A' \exp B' . \quad (\text{B.13})$$

Aquí tornem a tenir el problema que  $B'$  no és una constant i depèn dels valors de  $t$  i  $\tau$ . Per tant, hem de tornar a trobar una manera de calcular el valor de  $B'(t, \tau + \Delta\tau)$  a partir de  $B'(t, \tau)$ . Procedim de manera semblant al cas de la  $B'$  optimitzada respecte  $t_\alpha$ :

$$\begin{aligned} \exp[B'(\tau)] &= \exp\{-0.5\nu^2\Delta\tau[2(\tau - t) + \Delta\tau]\} \\ \exp[B'(\tau + \Delta\tau)] &= \exp\{-0.5\nu^2\Delta\tau[2(\tau + \Delta\tau - t) + \Delta\tau]\} \\ \exp[B'(\tau + \Delta\tau)] &= \exp\{-0.5\nu^2\Delta\tau[2(\tau - t) + 2\Delta\tau + \Delta\tau]\} \\ \exp[B'(\tau + \Delta\tau)] &= \exp\{-0.5\nu^2\Delta\tau[2(\tau - t) + \Delta\tau]\} \exp\{-0.5\nu^2\Delta\tau^2\} \\ \exp[B'(\tau + \Delta\tau)] &= \exp B'(\tau) \exp\{-0.5\nu^2\Delta\tau^2\} . \end{aligned} \quad (\text{B.14})$$

Per tant, combinant l'equació B.14 amb cadascuna de les equacions B.13 i B.12, obtenim finalment:

$$S_{im}(t_\alpha, \tau + \Delta\tau) = \exp\{-0.5\nu^2\Delta\tau^2\} \{S_{im}(t_\alpha, \tau) \cos(2\pi\nu\Delta\tau) - S_{re}(t_\alpha, \tau) \sin(2\pi\nu\Delta\tau)\}$$

i

$$S_{re}(t_\alpha, \tau + \Delta\tau) = \exp\{-0.5\nu^2\Delta\tau^2\} \{S_{re}(t_\alpha, \tau) \cos(2\pi\nu\Delta\tau) + S_{im}(t_\alpha, \tau) \sin(2\pi\nu\Delta\tau)\}$$

## B.5 Consideracions

Mirant les equacions B.5 i B.6, podem pensar que una manera d'accelerar aquest càlcul seria utilitzant la FFT per tal de fer la convolució entre les dades  $x(t_\alpha)$  i els termes  $S(t_\alpha, \tau)$ . Però utilitzar la FFT no és adequat donat que en els nostres mètodes el nombre d'operacions a realitzar  $N_{optim} = O\{n\}$  on  $n$  és el nombre de punts de les nostres dades, mentre que si utilitzem la FFT el nombre d'operacions  $N_{FFT} = O\{n \log n\}$ .

De fet, quan implementem aquests algorismes, ens trobem que  $N_{optim} \ll O\{n\}$ . Els termes  $S(t_\alpha, \tau)$  són la contribució de la Morlet Wavelet, per tant, aquests termes només contribuiran al resultat final quan  $S(t_\alpha, \tau) \neq 0$ , o més ben dit  $S(t_\alpha, \tau) \gg 0$ . La Morlet Wavelet és una funció relativament concentrada en el temps, el que vol dir que els punts allunyats del punt on situem la Morlet Wavelet no contribuiran al coeficient wavelet calculat per aquest punt. Això vol dir que el nombre de termes  $S(t_\alpha, \tau)$  que hem de calcular no varia en  $\alpha = 0, \dots, N$  com mostra el sumatori, sinó només al llarg d'aquells termes tals que  $S(t_\alpha, \tau) \gg 0$ . Aquestes termes són deguts a la contribució que aporten els punts veïns al punt que estem tractant, i per tant reduïm el càlcul del sumatori a només els punts més propers al punt que estem processant. Per tant, encara reduïm molt més el nombre d'operacions a realitzar.

Evidentment, com més estreta (alta freqüència) sigui la Morlet Wavelet utilitzada ( $\nu \gg 1$ ) menys punts veïns utilitzarem i menys operacions haurem de realitzar. D'altra banda, com més ampla (baixa freqüència) sigui la Morlet Wavelet utilitzada, més operacions haurem de realitzar, augmentant aquest valor fins el límit superior, que és  $N$ .

D'altra banda, no ens queda més remei que treballar només amb els valors veïns al punt on treballem. Si l'algorisme utilitzés tots els punts presents a les dades, i comencés el càlcul per un punt molt llunyà al punt que es processa, és molt probable que comencés obtenint un valor molt proper a zero. Analíticament potser no seria zero, però computacionalment sí, degut a l'arrodoniment dels valors en un ordinador. Això impediria al mètode trobar els valors correctes que s'obtenen a partir d'aquest, i per tant s'obtindria un resultat final incorrecte. Per tant, és necessari començar el càlcul amb valors suficientment significatius per tal de poder obtenir valors correctes en les següents iteracions. Això només es pot aconseguir si es comença amb punts propers al punt que s'està processant.

L'optimització respecte  $t_\alpha$  demana que el mostreig  $t_\alpha$  de les dades d'entrada siguin equiespaiades, però ens permet que el mostreig  $\tau$  de les dades de sortida sigui qualsevol. En el cas de l'optimització respecte  $\tau$ , el mètode ens permet que el mostreig  $t_\alpha$  de les dades d'entrada sigui qualsevol (fins i tot no equiespaiat) però ens obliga a que el mostreig  $\tau$  de les dades de sortida sigui equiespaiat.

D'aquestes dues possibilitats la més interessant és la segona, ja que mai podrem assegurar que el mostreig de les dades d'entrada sigui equiespaiat, i el més probable és que siguin precisament dades no equiespaiades. Això ens imposa que les dades de sortida siguin equiespaiades, però no és una restricció massa important, ja que molts cops és desitjable que sigui així per a facilitar posteriors processaments de les dades. En cas que les dades d'entrada siguin equiespaiades i volguem mantenir aquest mostreig en les dades de sortida, podem seguir utilitzant aquest mètode d'optimització, donat que la sortida serà equiespaiada, igual que l'entrada.

## B.6 Implementació

A continuació mostrem una implementació en C++ del mètode d'optimització respecte  $\tau$ . La paral·lelització respecte  $\omega$  és implícita, doncs un dels paràmetres d'entrada de la funció és precisament la freqüència. Donada l'eloqüent i expressiva sintaxi del llenguatge C++, aquest codi és fàcilment adaptable a altres llenguatges de programació.

```
template<class T_X, class T_Y, class T_C>
void CWT1D(FUNCIÓ<T_X, T_Y> &fF, FUNCIÓ<T_X, T_C> &fcCWT, float freq,
  BOOL fEquiEsp)
{
    double dist=1.0/freq*4.0;

    double Pi=acos(-1.0);
    double Pi2F=2.0*Pi*freq;
    double F2=freq*freq;
```

```
int *ini;

ini=new int [fF.nPunts()];

for(int k=0;k<fF.nPunts();++k)
    ini[k]=0;

    // Si les dades de sortida son equiespaiades
    // entrem en l'algorisme optimitzat

if(fEquiEsp)
{

    int jin=0;

    for(int k=0;k<fF.nPunts();++k) // temps
    {
        j=jin;
        while(j<fcCWT.nPunts()) //tau
        {
            if((fcCWT.X(j)-fF.X(k))>-dist)
            {
                ini[k]=j;
                jin=j;
                j=fcCWT.nPunts();
            }
            ++j;
        }
    }

    for(j=0;j<fcCWT.nPunts();++j)
    {
        fcCWT.Y(j).Real()=T_C();
        fcCWT.Y(j).Imag()=T_C();
    }
}
```



```
for(k=0;k<fF.nPunts();++k) // temps
{
    double x;
    double tau;
    double deltatau=fcCWT.X(1)-fcCWT.X(0);
    double dA,dAp,dB,dBp;

    x=fF.X(k);
    tau=fcCWT.X(ini[k]);
    dA=Pi2F*(x-tau);
    dAp=Pi2F*deltatau;
    dB=-0.5*F2*(x-tau)*(x-tau);
    dBp=-0.5*F2*( deltatau*deltatau+2*tau*deltatau-2*x*deltatau);

    double sinA,sinAp,cosA,cosAp,expB,expBp;
    sinA=sin(dA);
    sinAp=sin(dAp);
    cosA=cos(dA);
    cosAp=cos(dAp);
    expB=exp(dB);
    expBp=exp(dBp);
    double expC=exp(-0.5*F2*2.0*deltatau*deltatau);

    double expBpAnt;
    double ValSinAnt;
    double ValCosAnt;
    double ValTmp;
    expBpAnt=expBp;
    ValSinAnt=sinA*expB;
    ValCosAnt=cosA*expB;

    fcCWT.Y(ini[k]).Imag()+=(T_C)( fF.Y(k)*ValSinAnt );
    fcCWT.Y(ini[k]).Real()+=(T_C)( fF.Y(k)*ValCosAnt );
}
```

```
for(j=ini[k]+1;j<fcCWT.nPunts();++j) // tau
{
    fcCWT.Y(j).Imag()+=(T_C)fF.Y(k)*( ValSinAnt*cosAp*expBpAnt -
                                     ValCosAnt*sinAp*expBpAnt );
    fcCWT.Y(j).Real()+=(T_C)fF.Y(k)*( ValCosAnt*cosAp*expBpAnt +
                                     ValSinAnt*sinAp*expBpAnt );
    ValTmp=ValSinAnt;
    ValSinAnt=ValSinAnt*cosAp*expBpAnt-ValCosAnt*sinAp*expBpAnt;
    ValCosAnt=ValCosAnt*cosAp*expBpAnt+ValTmp*sinAp*expBpAnt;
    expBpAnt*=expC;
}
}

// Si les dades de sortida NO son equiespaiades
// realitzem el calcul directe

else
{
    for(int j=0;j<fcCWT.nPunts();++j)
    {
        fcCWT.Y(j).Real()=T_C();
        fcCWT.Y(j).Imag()=T_C();

        for(int k=0;k<fF.nPunts();++k)
        {
            fcCWT.Y(j).Imag()+=(T_C)( fF.Y(k) *
                                     sin( Pi2F*(fF.X(k)-fcCWT.X(j)) ) *
                                     exp( -0.5*F2* (fF.X(k)-fcCWT.X(j)) *
                                     (fF.X(k)-fcCWT.X(j)) ) );
            fcCWT.Y(j).Real()+=(T_C)( fF.Y(k) *
                                     cos( Pi2F*(fF.X(k)-fcCWT.X(j)) ) *
                                     exp( -0.5*F2* (fF.X(k)-fcCWT.X(j)) *
                                     (fF.X(k)-fcCWT.X(j)) ) );
        }
    }
}
```

```

}

delete []ini;

}

```

## B.7 Resultats

Podem avaluar el guany real en temps, entre utilitzar aquesta optimització respecte  $\tau$  i fer el càlcul directe, si executem aquest codi. En la taula B.1 podem veure els temps de càlcul obtinguts per a cada mètode.

Mètode	Temps de càlcul (sg)
Seqüencial no optimitzat	1487 ( $\simeq$ 25 minuts)
Seqüencial optimitzat	58.7
Paral·lel optimitzat 4 CPU's	16.6
Paral·lel optimitzat 8 CPU's	8.9
Paral·lel optimitzat 16 CPU's	4.8

Taula B.1: Temps de càlcul per a cadascuna de les implementacions de l'algorisme.

## B.8 Conclusions

Amb un cop d'ull a la taula B.1 es veu ràpidament que el temps de càlcul entre la implementació del mètode seqüencial no optimitzat i l'optimitzada segons  $\tau$  és molt gran, i més concretament el factor entre ells és  $\frac{1487}{58.7} = 25.3$ . Aquests dos valors són els que realment ens interessin, donat que són els que mesuren l'autèntic guany en temps d'execució de l'algorisme que proposem.

A tall purament il·lustratiu, també mostrem els temps de càlcul obtinguts per a l'execució de l'algorisme optimitzat paral·lelitzat en  $\omega$ . Mostrem diferents graus de paral·lelisme, en concret 4, 8 i 16, donat que són el nombre de CPU's que es troben habitualment a la pràctica (concretament en la *SGI Origin-2000* que hem utilitzat). Es pot comprovar que el temps de càlcul per a cadascuna d'aquestes execucions paral·leles no presenta exactament el grau de paral·lelisme que cabria esperar. A la pràctica és molt difícil aconseguir els graus de paral·lelisme teòrics, donat que s'han de tenir en compte factors físics en l'execució com poden ser la càrrega real de la màquina, el compartiment de recursos amb altres programes, efectes de speed-up, overhead, etc.

Per a demostrar l'autèntica utilitat de les màquines paral·leles, podem veure com en el món real es poden obtenir temps de càlcul realment baixos comparats amb el temps de càlcul original seqüencial no optimitzat. Per a ser exactes, utilitzant simultàniament l'optimització aquí presentada i el paral·lelisme, obtenim un factor de guany net real de  $\frac{1487}{4.8} = 310$ .

### B.8.1 Falses creences sobre el món del paral·lelisme

Amb aquests resultats és absurd seguir insistint en la vella i desgraciadament tant repetida excusa de *Trigo menys en executar 'n' cops el meu programa que en refer el codi per a optimitzar-lo i paral·lelitzar-lo amb un guany 'n'*. Desgraciadament aquesta és una errònia creença molt estesa entre la comunitat científica, que creiem és més deguda a la manca de pràctica i desconeixement del món del paral·lelisme i l'optimització d'algorismes, la 'mandra' d'aprendre una tècnica nova, i la manca d'informació i falsos rumors extesos al voltant d'aquest món per part de gent que el desconeix, que no a la manca de guanys que es poden obtenir o a la dificultat intrínseca d'aquestes tècniques.

Si aquesta creença fos justificada i realista, hauríem d'executar el codi seqüencial sense optimitzar durant  $1487 * 310 = 460970$  segons = 128 hores = 5 dies. Comparem aquest temps amb les 4 hores destinades al desenvolupament e implementació d'aquest algorisme, afegint-hi els 1487 segons = 25 minuts de les 310 execucions de l'algorisme optimitzat en paral·lel. A partir d'aquest punt, cada execució de l'algorisme seqüencial sense optimitzar representa 25 minuts, mentre que en el codi optimitzat paral·lel, només representa uns escasíssims 5 segons.

Calculem-ho d'una altra manera. Per a desenvolupar aquest algorisme hem trigat 4 hores. Durant aquestes 4 hores hauríem executat  $\frac{4*60*60}{1487} = 9.7$  cops l'algorisme seqüencial sense optimitzar, però a partir d'aquest punt, cada cop que executem l'algorisme no optimitzat, utilitzarem 25 minuts de càlcul. Si haguéssim 'perdut' el temps optimitzant i paral·lelitzant l'algorisme, només utilitzaríem 5 segons. Resumint, si i només si estem totalment i absoluta segurs que no executarem el nostre algorisme més de 9.7 cops (algú pot assegurar que no ha executat mai més de 9.7 cops el seu programa?), és millor utilitzar l'algorisme seqüencial no optimitzat, en cas contrari, al cap de 4 hores de la primera execució tindrem un guany net constant en velocitat d'un factor 310. Interessant, oi? ...

No cal dir tampoc que l'altra sentència *D'aquí poc existiran màquines més ràpides que em permetran executar el codi original en el mateix temps que l'optimitzat* també mostra una falta de visió. Salts en velocitat de processament en un factor 25 no es produeixen en poc temps. D'altra banda, si disposem d'un algorisme optimitzat al qual li hem dedicat un cert temps de desenvolupament, sempre serà més eficient en un moment donat que el no optimitzat, i sobre la mateixa màquina sempre estarem un pas més endavant que la resta d'implementadors.

L'estancament i el conformisme no són, precisament, les millors receptes a aplicar en el món de la recerca científica.



# Apèndix C

## Bibliografia

- *Andrews, H.C. and Hunt, B.R.:* "Digital Image Restoration". Book. Prentice Hall Signal Processing Series. 1977.
- *ACM (Association for Computer Machinery):* "Status report of the graphics standard planning committee". Computer Graphics, vol. 12, pp. 12-19. 1978.
- *Bach, J.S.:* "Das wohltemperirte Clavier. Oder Praeludia, und Fugen durch alle Tone und Semitona, So wohl tertiam majorem oder Ut Re Mi anlangend, als auch tertiam minorem oder Re Mi Fa betreffend. Zum Nützen und Gebrauch del Lehrbegierigen Musicalischen Jugend, als auch derer in diesem studio schon habil seyenden besonderem Zeitvertreib auffgesetzt und verfertigt von Johann Sebastian Bach. p.t. Hochf. Anhalt-Cöthenischen Capel-Meistern und Directore derer Cammer Musiquen. Anno 1722.". Cöthen, 1722.
- *Bach, J.S.:* "Die Kunst der Fuge". Published by Carl Philipp Emanuel Bach, Leipzig, 1751.
- *Ball, G.H. and Hall, D.J.:* "A novel method of data analysis and pattern classification". Book. Stanford Research Institute. Menlo Park, California, 1965.
- *Bishop, C.M.:* "Neural Networks for Pattern Recognition". Book. Prentice Hall. Upper Saddle River, NJ., 1995.

- *Booch, G., Jacobson, I. and Rumbaugh, J.:* "The Unified Modeling Language. User Guide.". Book. Addison-Wesley Pub. 1998.
- *Bryan, J.:* "On the clustering of multidimensional pictorial data". Pattern Recognition, 11, pp. 115-125, 1979.
- *Burt, P.J. and Adelson, E.H.:* "The Laplacian pyramid as a compact image code". IEEE Trans. Commun., vol COMM-31, pp. 532-540, april, 1983.
- *Butenhof, D.:* "Programming with POSIX Threads.". Book. Addison-Wesley Pub. 1997.
- *Campbell, J.B.:* "Introduction to Remote Sensing". Book. Ed. Guilford Press. 1987.
- *Chávez et al.:* "Comparison of three different methods to merge multi-resolution and multispectral data: LANDSAT-TM and SPOT panchromatic". Photogramm. Eng. and Remote Sensing, vol. 57, no. 3, pp. 295-303. 1991.
- *Chuvienco, E.:* "Fundamentos de teledetección espacial". 2 ed. Book. Ed Rialp, 1995.
- *Chui, C.H.:* "An introduction to Wavelets". Collection "Wavelet Analysis and its application". Book. Boston Academic Press, Harcourt Brace Jovanovich, Publisher, 1992.
- *Daubechies, I.:* "Ten lectures on Wavelets". Book. CBMS-NSF Regional Conference Series in Applied Mathematics. Society for Industrial and Applied Mathematics. 1992.
- *Foster, G.:* "Wavelets for period analysis of unevenly sampled time series". AJ, vol. 112, n. 4, p. 1709, octubre 1996.
- *Freeman, J.A. and Skapura, D.M.:* "Neural Networks. Algorithms, applications and programming techniques". Book. Addison-Wesley, 1991.
- *González, R.C. and Woods, R.E.:* "Tratamiento digital de imágenes". Book. Addison-Wesley/Diaz de Santos. Boston, MA., 1996.



- *Greiner, J., Castro-Tirado, A.J., Boller, Th., Duerbeck, H.W., Covino, S., Israel, G.L., Linden-Vornle, M.J.D. and Otazu, X.:* "X-ray and optical-to-infrared follow-up observations of the transient X-ray burster SAX J1810.8-2609".  
Mon. Not. R. Astron. Soc., 308 L17-L21, 1999.
- *Grossman, A. and Morlet, J.:* "Decomposition of Hardy Functions into Square Integrable Wavelets of Constant Shape".  
SIAM J. Appl. Math., 15: 723-736, 1984.
- *Holschneider, M., Kronland-Martinet, R., Morlet, J. and Tchamitchian, Ph.:* "The algorithm a trous".  
CPT-88/P.2215. pp 1-22. Berlin, 1988.
- *Höppner, F., Klawonn, F., Kruse, R. and Runkler, T.:* "Fuzzy cluster analysis". Book.  
John Wiley & Sons, 1999.
- *Kaiser, G.:* "A friendly guide to wavelets". Book.  
Birkhauser. Boston, MA., 1994.
- *Klir, G.J. and Yuan, B.:* "Fuzzy Sets and Fuzzy Logic: Theory and applications". Book.  
Prentice Hall. Upper Saddle River, NJ., 1995.
- *Kohonen, T.:* "Self-Organization and Associative Memory". 3rd edition. Book. Springer Series in Information Sciences. Ed. Springer-Verlag, 1989.
- *Kosko, B.:* "Neural Networks and fuzzy systems: a dynamical systems approach to machine intelligence". Book.  
Prentice Hall. Englewood Cliffs, NJ., 1992a.
- *Kosko, B.:* "Neural Networks for signal processing". Book.  
Prentice Hall. London, 1992b.
- *Letts, P.A.:* "Unsupervised Classification in the Aries Image Analysis System".  
Proceedings 5<sup>th</sup> Canadian symposium on Remote Sensing, pp. 61-71, 1978.
- *Luger, G.F. and Stubblefield, W.A.:* "Artificial Intelligence. Structures and strategies for complex problem solving". 2nd edition. Book. Benjamin Cummings Pub. Co., Inc. 1993.

- *Lucy, L.B.*: "An iterative technique for the rectification of observed distributions".  
AJ, **79**, pp 745-759, 1974.
- *Mallat, S.G.*: "A theory for multiresolution signal decomposition: the wavelet representation".  
IEEE Pattern Analysis on Machine Intelligence, vol 11, n 7, july, pp 674-693, 1989.
- *Meinel, E.S.*: "Origins of linear and nonlinear recursive restoration algorithms".  
J. Opt. Soc. Am. A, Vol 3, No 6, June, 1986.
- *Meyer, B.*: "Object-Oriented Software Construction, 2nd Edition." Book.  
Prentice Hall, 2000.
- *Meyer, Y.*: "Wavelets: Algorithms & Applications". Book.  
Society for Industrial and Applied Mathematics, 1993.
- *Núñez, J. and Llacer, J.*: "A General Bayesian Image Reconstruction Algorithm with Entropy Prior. Preliminary Application to HST Data".  
PASP, **105**, pp 1192-1208, October, 1993.
- *Núñez, J. and Otazu, X.*: "Multiresolution Image Reconstruction using Wavelets".  
Vistas in Astronomy. Vol 40. pp. 555-562, 1996
- *Núñez, J. and Otazu, X.*: "Multiresolution Image Reconstruction by Wavelet Decomposition".  
Proceedings of the 3rd IEEE Signal Processing Society International Symposium on Time-Frequency and Time-Scale Analysis, Paris. pp 281, 1996.
- *Núñez, J. and Otazu, X.*: "Two approaches for Controlling Noise Amplification in Image Reconstruction".  
Proceedings of 5th International Workshop on Data Analysis in Astronomy. CCSEM Center, Erice (Italy). World Scientific Publishing Co., 1996.
- *Núñez, J., Otazu, X., Fors, O., and Prades, A.*: "Fusion and reconstruction of LANDSAT and SPOT images using wavelets".  
Invited lecture at Fusion of Earth data Conference. Sophia-Antipolis (France), January-98. Proceedings of Fusion of Earth data Conference, 1998.

- *Núñez, J., Otazu, X., Fors, O., Prades, A., Palà, V. and Arbiol, R.:* "Image Fusion using additive multiresolution wavelet decomposition. Applications to SPOT+LANDSAT images".  
JOSA serie A. Vol 16, No 3, March 1999. pp 467-474, 1999.
- *Núñez, J., Otazu, X., Fors, O., Prades, A., Palà, V. and Arbiol, R.:* "Multiresolution based image fusion with additive wavelet decomposition".  
IEEE Trans. on Geoscience and Remote Sensing. Vol 37, No 3. May 1999, pp 1204-1211.
- *Otazu, X., and Arbiol, R.:* "Land use map production by fusion of multispectral classification of LANDSAT images and texture analysis of high resolution images".  
Proceedings of the XIXth ISPRS Congress and Exhibition. Amsterdam, July, 2000.
- *Otazu, X. and Núñez, J.:* "Algoritmo de clasificación no supervisada basado en wavelets".  
Lectura invitada al IX Congreso Nacional de Teledetección. Lleida, septiembre, 2001.
- *Otazu, X. and Núñez, J.:* "Wavelet based cluster analysis algorithm for unsupervised classification".  
Submitted to PE&RS in February 2001.
- *Otazu, X., Ribó, M., Paredes, J.M., Núñez, J., and Peracaula, M.:* "Determination of superimposed periods using wavelets".  
Submitted to MNRAS in August 2001a.
- *Otazu, X., Ribó, M., Paredes, J.M., Núñez, J., and Peracaula, M.:* "Determination of superimposed periods in unevenly spaced data using wavelets".  
In preparation. 2001b.
- *Otazu, X.:* "Optimized and parallelized algorithm for obtention of Morlet Wavelet Transform."  
Submitted to Journal of Numerical Algorithms in August 2001.
- *Pinilla, C.:* "Elementos de teledetección". Book.  
Ed Ra-ma. 1995.

- *Puetter, R.C. and Piña, R.K.*: "Pixon Based Image Restoration".  
In The Restoration of HST Images and Spectra-II. Proceedings of a workshop held at The STScI, Baltimore, November 1993.
- *Ribó, M., Peracaula, M., Paredes, J.M., Núñez, J. and Otazu, X.*: "Long-term X-ray variability study of SMC X-1".  
Proceedings of "The 4th INTEGRAL workshop 'Exploring the Gamma-ray Universe' ", ESA-SP. October, 2000.
- *Richards, J.A.*: "Remote Sensing digital Image Analysis, An Introduction".  
3rd edition. Book.  
Ed. Springer-Verlag. 1999.
- *Roberts, D.H., Lehár, J. and Dreher, J.W.*: "Time series analysis with Clean - Part one - Derivation of a Spectrum".  
AJ, vol. 93, no. 4 / Abril 1987, p. 968.
- *Russell, S. and Norvig, P.*: "Artificial Intelligence, a modern approach". Book.  
Prentice-Hall, 1995.
- *Sabbey, C.N., Coppi, P. and Oemler, A.*: "Data acquisition for a 16 CCD drift-scan survey"  
PASP 110, 1067. 1998.
- *Shettigara, V.K.*: "A Generalized component substitution technique for spatial enhancement of multispectral images using a higher resolution data set".  
Photogramm. Eng. and Remote Sensing, vol. 58, pp. 561-567. 1992.
- *Shostakovich, D.*: "24 Preludes and Fugues, op 87". Leningrad. 1951.
- *Smith, A.R.*: "Color gamut transformation pairs".  
Computer Graphics, vol. 12, pp. 12-19. 1978.
- *Starck, J.L. and Murtagh, F.*: "Image restoration with noise supression using the wavelet transform"  
A&A, **288**, 342. 1994.
- *Starck, J.L., Bijaoui, A, Lopez, B. and Perrier, C.*:  
"Image reconstruction by the wavelet transform applied to aperture synthesis"  
A&A, **283**, 349. 1994

- *Stellingwerf, R.L.:* "Period determination using phase dispersion minimization".  
ApJ, part 1, vol. 224, sept. 15, p. 953-960. 1978.
- *Stroustrup, B.* "C++ Programming Language, 3rd edition". Book. Addison Wesley, 1997.
- *Szatmáry, K., Vinkó, J. and Gál, J.:* "Application of wavelet analysis in variable star research. I. Properties of the wavelet map of simulated star light curves".  
A&A Suppl., 108, p. 377. 1994.
- *Vetterli, M. and Kovacevic, J.:* "Wavelets and subband coding". Book. Prentice Hall. Englewood Clifs, NJ. 1995.
- *Wald L., Ranchin, T. and Mangolini, M.:* "Fusion of satellite images of different spatial resolution: Assessing the quality of resulting images".  
Photogramm. Eng. and Remote Sensing, vol. 63, no. 6, pp. 691-699. 1997.
- *White, R.:* "Image Restoration Using the Damped Richardson Lucy Method".  
In The Restoration of HST Images and Spectra-II. Proceedings of a workshop held at The STScI, Baltimore, November 1993.
- *Zadeh, L. A.:* "Fuzzy sets and systems".  
Fox, J., ed., System Theory. Polytechnic Press, Brooklyn, NY, pp. 29-37, 1965a.
- *Zadeh, L. A.:* "Fuzzy sets".  
Information and control, 8(3), pp. 338-353, 1965b.