

5 Aplicación del método y resultados

Una vez modelizada la muestra estamos en disposición de aplicar el método de ajuste para obtener el valor de los diferentes parámetros que la caracterizan. Hemos supuesto que la muestra de trabajo está extraída de una población base formada por diferentes componentes, cada una de ellas caracterizada por una luminosidad, distribución espacial, cinemática y metalicidad promedio diferentes. También se ha supuesto que los sesgos observacionales pueden diferir de una componente a otra. Estas componentes son, en primera instancia, las de las distintas poblaciones estelares presentes en el entorno solar: disco delgado, disco grueso y halo.

Abordamos la caracterización de las componentes en dos pasos:

- Un primera fase de *clasificación*, en la que tan sólo tendremos en cuenta la información astrométrica y la metalicidad, de forma que 1) el número de parámetros a ajustar es relativamente pequeño (10 por grupo) y, más importante, 2) la correlación entre dichos parámetros es de esperar que sea pequeña. Estas condiciones son de gran importancia para asegurar la estabilidad del método de ajuste. Intentar incluir las funciones de selección y la calibración de M_v desde el primer momento aumenta a prácticamente el doble el número de parámetros a ajustar e introduce importantes correlaciones entre los mismos.

Al hacer esta aproximación estamos asumiendo implícitamente que la magnitud aparente no está correlada ni con la cinemática ni con la metalicidad. En caso contrario la separación en componentes no se podría llevar a cabo sin incluir las funciones de selección.

- Una vez dividida la muestra, cada componente será tratada en más detalle, in-

roduciendo la calibración de la magnitud absoluta en función del color y los sesgos observacionales. Como cada una de las componentes obtenidas de la clasificación anterior puede tener una metalicidad promedio distinta en cada caso, no es necesario hacer depender explícitamente de la metalicidad las calibraciones de magnitud absoluta, cinemática y caracterización del sesgo observacional. La aplicación del método de máxima verosimilitud al conjunto de componentes permitirá analizar las dependencias de los resultados con la metalicidad.

Hay otra aproximación al problema que permitiría reducir el número de parámetros. Se trata de suponer que existe una única población base y modelizar la distribución espacial, la cinemática y la magnitudes absoluta, así como las funciones de selección, cómo funciones del color y la metalicidad simultáneamente. Esta aproximación, que *a priori* sería al menos válida para el disco delgado, presenta varios problemas. El primero de ellos es como definir de manera realista las funciones que reflejen dicha dependencia. Por otro lado estaríamos suponiendo implícitamente, al contrario de lo que promulgan los actuales escenarios de formación de la Galaxia, una continuidad entre las propiedades físicas del disco delgado, el disco grueso y el halo, a no ser que complicásemos sustancialmente el modelo de dependencia para permitir *discontinuidades* entre poblaciones. Por último, aún suponiendo que fuésemos capaces de modelizar todas las dependencias, quedaría el problema de la correlación entre los parámetros a ajustar. Es de esperar que las correlaciones entre una calibración de la magnitud absoluta dependiente de la temperatura y la metalicidad, y las distribuciones y funciones de selección de estas dos cantidades sea muy alta. Diversas pruebas realizadas en este sentido, tratando toda la muestra como un solo grupo y suponiendo varios tipos de dependencia, demostraron la falta de convergencia del método bajo estas circunstancias, no alcanzándose en ningún caso una solución estable. Por todo ello se desestimó esta aproximación.

En este capítulo describiremos con detalle la aplicación del método a la muestra de trabajo y los resultados que se han obtenido. La interpretación de estos resultados queda para el próximo capítulo.

Tabla 5.1: Descripción de los parámetros utilizados para identificar cada una de las componentes de la muestra

Parámetro	Descripción
$(\bar{U}, \bar{V}, \bar{W})$	Valor medio de las tres componentes de la velocidad espacial heliocéntrica (km/s)
$(\sigma_U, \sigma_V, \sigma_W)$	Dispersiones de las tres componentes de la velocidad (km/s)
Z_h	Altura patrón sobre el plano galáctico (pc)
$[Fe/H]$	Valor medio de la metalicidad
$\sigma_{[Fe/H]}$	Dispersión de la distribución de metalicidad
a	Abundancia relativa de la componente

5.1. Separación de la muestra en componentes

Ya hemos mencionado, que nuestra muestra está formada por al menos tres componentes, cada una de ellas caracterizable por su cinemática promedio, su metalicidad promedio, su distribución espacial y su distribución de luminosidad. Además, cada componente está representada en el entorno solar en una proporción determinada respecto al número total de estrellas. Todo ello supone un total de 10 parámetros libres a ajustar por componente, los cuales están detallados en la tabla 5.1.

La no inclusión de las funciones de selección en la magnitud aparente y $(V - K)$ no debería afectar a los resultados de manera sensible. Suponer que estos sesgos no afectan a la cinemática es equivalente, por un lado, a suponer que las propiedades cinemáticas de cada componente son independientes de la distancia heliocéntrica de la estrella, lo cual es razonable, al menos en un volumen restringido al entorno solar. Por otra parte el sesgo en $(V - K)$ no afectará a la cinemática a menos que nuestro modelo contemple una dependencia entre ésta y $(V - K)$ (ver capítulo 4). El único parámetro que podría quedar mal determinado es la altura patrón sobre el plano galáctico Z_h , ya que al no tener en cuenta la función de selección en la magnitud aparente estaremos calculando la altura patrón de la muestra, y no la de la población base. Sin embargo, ello no afecta a la clasificación de las estrellas de la muestra en las diferentes componentes estelares, dado que, como hemos constatado, los factores más discriminantes entre componentes son la cinemática y la metalicidad.

Tabla 5.2: Resultado de clasificar la muestra en tres componentes estelares. Promedio de 10 soluciones con diferentes valores iniciales. Entre paréntesis la dispersión de las diferentes soluciones obtenidas

Parámetro	Componente 1 (D. delgado)	Componente 2 (D. grueso)	Componente 3 (Halo)
\bar{U} (km/s)	-9.4 (± 0.0)	-13.7 (± 0.3)	-7.7 (± 1.2)
\bar{V} (km/s)	-13.1 (± 0.1)	-29.3 (± 0.8)	-163.4 (± 4.2)
\bar{W} (km/s)	-6.7 (± 0.0)	-9.0 (± 0.0)	-4.0 (± 0.1)
σ_U (km/s)	25.4 (± 0.2)	48.3 (± 0.8)	146.7 (± 3.1)
σ_V (km/s)	15.2 (± 0.2)	31.5 (± 0.7)	98.9 (± 1.3)
σ_W (km/s)	10.8 (± 0.1)	26.9 (± 0.7)	80.3 (± 1.1)
Z_h (pc)	67.9 (± 0.2)	47.7 (± 0.6)	66.1 (± 1.6)
$[\overline{Fe/H}]$	-0.04 (± 0.00)	-0.21 (± 0.01)	-1.17 (± 0.03)
$\sigma_{[Fe/H]}$	0.13 (± 0.00)	0.26 (± 0.00)	0.67 (± 0.00)
a (%)	75.0 (± 0.0)	23.3 (± 0.0)	1.7 (± 0.0)

Los resultados de ajustar nuestra muestra a tres componentes estelares se puede ver en la tabla 5.2. Se realizaron 10 ajustes diferentes por máxima verosimilitud utilizando puntos de partida diferentes.

En primera instancia podríamos asociar las tres componentes respectivamente al disco delgado, al disco grueso y al halo. Sin embargo, si comparamos estos resultados con valores típicos encontrados en la literatura vemos que existen algunas discrepancias. Una de ellas es el valor de la metalicidad promedio: mientras que el valor para el disco delgado es razonable (aproximadamente la metalicidad solar), el valor para el disco grueso es claramente superior al esperado (-0.2 en lugar de -0.6 que dan la mayoría de autores); también el valor obtenido para el halo es ligeramente superior a -1.6, valor promedio de la metalicidad del halo. Algo parecido ocurre con la cinemática, ya que deberíamos obtener un halo con una rotación prácticamente nula ($\bar{V} \approx -210$ km/s). Por último, el número total de estrellas de cada componente (75.0%, 23.3% y 1.7%, respectivamente) difiere de los valores actualmente aceptados (93.5%, 6.4% y 0.05% Robin et al. 2003). Todo parece indicar que los resultados de la tabla 5.2 no reflejan una separación de la muestra en disco delgado, disco grueso y halo suficientemente realista, sino que existe aún una mezcla de poblaciones dentro de los grupos obtenidos.

Tabla 5.3: Resultado de clasificar la muestra a cuatro componentes estelares. Promedio de 10 soluciones con diferentes valores iniciales. Entre paréntesis la dispersión de las diferentes soluciones obtenidas

Parámetro	Componente 1 (D. delgado-I)	Componente 2 (D. delgado-II)	Componente 3 (D. grueso)	Componente 4 (Halo)
\bar{U} (km/s)	-9.5 (± 0.0)	-11.4 (± 0.2)	-26.9 (± 0.2)	8.7 (± 0.1)
\bar{V} (km/s)	-12.6 (± 0.1)	-24.3 (± 0.3)	-77.5 (± 2.0)	-217.2 (± 0.6)
\bar{W} (km/s)	-6.5 (± 0.0)	-9.2 (± 0.0)	-3.7 (± 0.1)	-5.6 (± 0.2)
σ_U (km/s)	24.2 (± 0.1)	43.5 (± 0.5)	75.6 (± 0.7)	187.9 (± 0.3)
σ_V (km/s)	14.5 (± 0.1)	27.1 (± 0.3)	44.4 (± 0.5)	115.4 (± 0.3)
σ_W (km/s)	10.2 (± 0.1)	22.3 (± 0.3)	55.5 (± 0.8)	88.7 (± 0.2)
Z_h (pc)	68.8 (± 0.1)	51.9 (± 0.4)	35.5 (± 3.0)	93.0 (± 0.2)
$[\overline{Fe/H}]$	-0.04 (± 0.00)	-0.16 (± 0.00)	-0.56 (± 0.01)	-1.54 (± 0.00)
$\sigma_{[Fe/H]}$	0.12 (± 0.00)	0.23 (± 0.00)	0.28 (± 0.00)	0.63 (± 0.00)
a (%)	66.7 (± 0.0)	29.8 (± 0.0)	2.5 (± 0.0)	1.0 (± 0.0)

Hemos repetido la clasificación añadiendo una nueva componente. Los resultados se muestran en la tabla 5.3.

Respecto a la solución de tres componentes, se puede apreciar como tanto el halo como el disco grueso son ahora menos metálicos, alcanzando valores que concuerdan con los de la literatura. A su vez, la velocidad de rotación del halo es nula en un sistema de coordenadas galactocéntrico en reposo. En lo que respecta al disco delgado encontramos en esta nueva clasificación dos componentes (a las que denominaremos componentes *I* y *II* del disco delgado) de cinemática y metalicidad ligeramente diferenciadas, si bien los valores de $[\overline{Fe/H}]$ y $\sigma_{[Fe/H]}$ son compatibles con una única distribución.

5.1.1. Determinación de la solución más verosímil

A priori no conocemos el número de componentes estelares que forman nuestra muestra. Es de esperar que además del disco delgado, el disco grueso y el halo, puedan detectarse trazas de *grupos móviles* dentro del disco delgado, o que éste contenga grupos de diferente edad y cinemática. Hemos visto en el apartado anterior

Tabla 5.4: Resultado de clasificar la muestra en 5 componentes estelares. Promedio de 10 soluciones con diferentes valores iniciales. Entre paréntesis la dispersión de las diferentes soluciones obtenidas

Parámetro	Componente 1 (D. delgado-I)	Componente 2 (D. delgado-II)	Componente 3 (D. delgado-III)	Componente 4 (D. grueso)	Componente 5 (Halo)
\bar{U} (km/s)	-29.7 (± 1.7)	-0.6 (± 1.9)	-11.1 (± 1.0)	-26.4 (± 2.1)	8.5 (± 0.5)
\bar{V} (km/s)	-21.8 (± 2.5)	-6.8 (± 2.1)	-24.3 (± 1.3)	-68.1 (± 2.0)	-212.9 (± 3.4)
\bar{W} (km/s)	-6.1 (± 0.3)	-6.5 (± 0.1)	-9.1 (± 0.1)	-4.0 (± 0.8)	-6.2 (± 0.4)
σ_U (km/s)	13.2 (± 1.0)	20.6 (± 1.6)	42.3 (± 2.4)	70.5 (± 3.3)	186.0 (± 1.6)
σ_V (km/s)	8.6 (± 2.7)	12.5 (± 1.3)	25.4 (± 1.3)	45.7 (± 4.4)	115.4 (± 1.0)
σ_W (km/s)	8.9 (± 0.2)	10.6 (± 0.2)	20.9 (± 1.7)	51.4 (± 2.6)	89.0 (± 0.5)
Z_h (pc)	69.3 (± 1.4)	68.5 (± 0.6)	54.0 (± 2.6)	36.5 (± 0.8)	91.7 (± 1.2)
$[Fe/H]$	0.03 (± 0.01)	-0.06 (± 0.01)	-0.15 (± 0.02)	-0.51 (± 0.05)	-1.51 (± 0.02)
$\sigma_{[Fe/H]}$	0.08 (± 0.01)	0.12 (± 0.01)	0.23 (± 0.01)	0.29 (± 0.02)	0.64 (± 0.01)
a (%)	19.1 (± 2.8)	42.9 (± 7.3)	33.7 (± 5.3)	3.3 (± 0.1)	1.0 (± 0.0)

que una solución con tres componentes ofrece dificultades para ser interpretada a la luz del conocimiento que tenemos de las poblaciones estelares, mientras que una solución con cuatro componentes parece reproducir mucho mejor las características de dichas poblaciones. Pero, ¿es realmente la separación en cuatro componentes una solución más verosímil que la separación en tres componentes?. Para contestar a esta pregunta podemos recurrir al *test de Wilks* (ver por ejemplo Soubiran et al. (1990)).

Mediante este test es posible contrastar la hipótesis H_n (la muestra está formada por n componentes) con la hipótesis H_{n+1} (la muestra está formada por $n + 1$ componentes). Para ello definimos el *cociente de verosimilitud* λ como:

$$\lambda = \frac{\mathcal{V}_n}{\mathcal{V}_{n+1}} \quad (5.1)$$

donde \mathcal{V}_n es el valor máximo encontrado para la función de verosimilitud en el caso H_n y \mathcal{V}_{n+1} en el caso H_{n+1} .

Si H_n es cierta, $-2 \ln \lambda$ sigue asintóticamente una distribución χ_k^2 , con k igual al incremento de parámetros entre las hipótesis H_n y H_{n+1} . Es decir, si dado un nivel de significación, $-2 \ln \lambda \geq \chi_k^2$, la hipótesis H_n es rechazada.

Aplicado a nuestro caso ($k = 10$), tenemos, para un nivel de significación del 5%, $\chi_{10}^2 = 18.3$ y $-2 \ln \lambda = 516$, con lo que debemos rechazar H_3 y suponer que nuestra muestra está compuesta de cuatro componentes.

Ahora bien, ¿es la solución con cuatro componentes la más verosímil o deberíamos

buscar cinco o más grupos? En la tabla 5.4 se muestra la separación de la muestra en cinco componentes. El test de Wilks comparando esta solución con la de cuatro componentes nos dice que una separación en cinco componentes es más verosímil que en cuatro ($-2 \ln \lambda = 746$). Una comparación de las tablas 5.3 y 5.4 muestra que la diferencia básica entre ambas corresponde a la componente 1 de la tabla 5.3, que ha sido separada en dos componentes, mientras que el resto ha quedado prácticamente inalterado. Dicho de otra manera, las componentes de disco grueso y halo poseen las mismas características tanto si consideramos la muestra formada por cuatro componentes o por cinco, mientras que el disco delgado parece estar formado por varias subcomponentes que se ponen de manifiesto a medida que aumentamos el número de componentes buscadas.

Tanto la solución de cuatro grupos como la de cinco nos dan, por tanto, una separación válida de la muestra en disco delgado, disco grueso y halo, con la indicación de que el disco delgado podría estar formado por varias subcomponentes. La asignación de las estrellas individuales a cada componente galáctica (disco delgado, disco grueso y halo) es muy similar en ambos casos, con la diferencia de que en el caso de cinco componentes, al ser los grupos obtenidos más restrictivos, el número de estrellas con clasificación dudosa es mayor. Utilizaremos la solución en cinco grupos para separar nuestra muestra en disco delgado, disco grueso y halo, dejando para la sección 5.3.4 el estudio detallado del disco delgado y su subestructura.

5.2. Asignación individual a una componente estelar

Una vez disponemos de los parámetros de cada componente es posible asignar a cada estrella de la muestra una probabilidad de pertenecer a cada una de ellas. El cálculo de esta probabilidad se reduce a la aplicación del Teorema de Bayes:

Sea \mathcal{A}_i el suceso *pertenencia a la componente i* y sean $\vec{y} = (r, l, b, \mu_l, \mu_b, V_r, [Fe/H])$ los observables de la estrella que deseamos clasificar. La probabilidad que estamos buscando es la probabilidad condicionada $P(\mathcal{A}_i | \vec{y})$, es decir, la probabilidad de que la estrella pertenezca a la componente i dados unos observables \vec{y} .

Por el teorema de Bayes está probabilidad es:

$$P(\mathcal{A}_i|\vec{y}) = \frac{P(\mathcal{A}_i)P(\vec{y}|\mathcal{A}_i)}{\sum_{k=1}^{N_c} P(\mathcal{A}_k)P(\vec{y}|\mathcal{A}_k)} \quad (5.2)$$

con N_c igual al número de componentes.

Ahora bien, $P(\mathcal{A}_i)$, probabilidad de que una estrella *cualquiera* pertenezca a la componente i , no es más que el parámetro a del ajuste (ver tabla 5.1). Por otra parte, $P(\vec{y}|\mathcal{A}_i)$ (probabilidad de que una estrella perteneciente a la componente i tenga unos observables \vec{y} es lo que en el apéndice A se ha definido como $\mathcal{G}(\vec{y}|\vec{\theta}_i)$, donde $\theta_i = (\bar{U}, \bar{V}, \bar{W}, \sigma_U, \sigma_V, \sigma_W, Z_h, [\overline{Fe/H}], \sigma_{[Fe/H]})$ son los parámetros que caracterizan a dicha componente. Con todo ello, la expresión (5.2) se puede reescribir como:

$$P(\mathcal{A}_i|\vec{y}) = \frac{a_i \mathcal{G}(\vec{y}|\vec{\theta}_i)}{\sum_{k=1}^{N_c} a_k \mathcal{G}(\vec{y}|\vec{\theta}_k)} \quad (5.3)$$

Hemos asignado una componente estelar a cada una de las estrellas de la muestra aplicando la fórmula anterior. La estrella ha sido asignada a la componente de mayor probabilidad, siempre que ésta superarse el 50%. En caso contrario la estrella ha quedado sin clasificar.

En el caso de la solución adoptada (tabla 5.4) los resultados de la clasificación se muestran en la tabla 5.5. Vemos que 1131 estrellas no han sido clasificadas en ninguna de las componentes. Un 90% de estas estrellas no poseen medidas de la velocidad radial y sus errores relativos en la paralaje y movimientos propios son ligeramente superiores a la media de la muestra, lo cual podría dificultar la asignación a uno de los grupos. Para ver como estas estrellas *outliers* pueden afectar a la solución se realizó un nuevo ajuste excluyéndolas de la muestra. La nueva solución no difiere de la dada en la tabla 5.4, dentro de los márgenes de error.

5.3. Caracterización de las diferentes poblaciones estelares

Una vez separada la muestra en las diversas componentes estelares vamos a estudiar cada una de ellas con más detalle. El modelo a ajustar estará basado en el

Tabla 5.5: Clasificación de la muestra en las diferentes componentes estelares

Componente	Número de estrellas	%
Disco delgado	9759	87.16
Disco grueso	199	1.78
Halo	107	0.96
Sin clasificar	1131	10.10

descrito en el capítulo 4, con pequeñas modificaciones acordes a las características de cada componente. A los parámetros cinemáticos y de distribución de la metalicidad, ya descritos en la sección 5.1, añadiremos ahora los correspondientes a la calibración de la magnitud absoluta y a las funciones de selección, tal y como se describe en la tabla 5.6.

Al ajustar linealmente cada segmento de la relación magnitud absoluta - color (ver sección 4.3.1) el método ha demostrado ser más estable si utilizamos como parámetro a ajustar el valor de la función en dos puntos (x_1, x_2) , en vez de utilizar la pendiente y el punto de corte al eje y . Es decir:

$$\begin{aligned}
 f(x) &= mx + n \\
 &= \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}x + \frac{f(x_1)x_2 - f(x_2)x_1}{x_2 - x_1}
 \end{aligned}
 \tag{5.4}$$

donde $f(x)$ representa $M_v((V - K)_0)$ y x el color $(V - K)_0$.

Los puntos $x_1 \equiv (V - K)_{01}$ y $x_2 \equiv (V - K)_{02}$ están fijados, siendo entonces los parámetros a ajustar $f(x_1) \equiv M_v((V - K)_{01})$ y $f(x_2) \equiv M_v((V - K)_{02})$.

En nuestro caso los valores $(V - K)_{01}$ y $(V - K)_{02}$ se han escogido dependientes de la componente considerada, dado que el rango de $(V - K)_0$ varía de una componente a otra.

Para obtener el conjunto de parámetros que caracteriza las distintas poblaciones se realizaron diversas pruebas con modelos ligeramente diferentes. Por un lado se ensayó la utilización de 2, 3 y 4 segmentos en la relación color magnitud, variando también los puntos $(V - K)_{0i}$ de la expresión (5.4). Por otra parte, se efectuaron pruebas fijando algunos de los parámetros libres por ensayo y error.

Tabla 5.6: Descripción de los parámetros a ajustar para cada una de las componentes de la muestra (además de los descritos en la tabla 5.1)

Parámetro	Descripción
M_v^i	Valor medio de la magnitud absoluta M_v en el punto $(V - K)_{0i}$
$\sigma_{M_v^i}$	Dispersión de la magnitud absoluta en el punto $(V - K)_{0i}$
m_c	Magnitud aparente de completitud
$(V - K)_{TO}$	Color correspondiente al <i>turn-off</i>
A	Abundancia relativa del <i>turn-off</i>

Los mejores resultados se obtuvieron describiendo la relación color magnitud a través de dos segmentos. Además, se observó que los resultados reproducían mejor la muestra si se fijaban algunos de los parámetros que describen los sesgos observacionales. Esto último es debido, como ya se ha comentado en la introducción de este capítulo, a las correlaciones existentes entre los parámetros que caracterizan los sesgos observacionales y los correspondientes a las distribuciones de la magnitud aparente y el color $(V - K)_0$. Así, la magnitud de completitud m_c , el color promedio $(V - K)_{TO}$ y la abundancia relativa del *turn-off* A (ver capítulo 4), fueron considerados parámetros libres, mientras que σ_{m_c} , $\sigma_{(V-K)}^+$ y $\sigma_{(V-K)}^-$, fueron fijados por ensayo y error según la población.

Por otra parte, las distintas pruebas demostraron la dificultad de obtener un valor realista de la altura patrón Z_h de la población sobre el plano galáctico. La proximidad de las estrellas de nuestra muestra no permite trazar la densidad de estrellas perpendicular al plano galáctico con la precisión suficiente para ajustar el perfil exponencial que se ha supuesto (ver la sección 4.2.2). De esta manera, el valor de Z_h quedaba subestimado por el ajuste, por lo que decidimos fijarlo para cada una de las poblaciones a los valores hallados en la literatura.

Para obtener los valores finales de cada ajuste se realizó el promedio de 15 ajustes partiendo de valores iniciales diferentes del conjunto de parámetros. En cada uno de ellos se llevaron a cabo 15 iteraciones para la maximización de la función de verosimilitud, tal y como se describe en el apéndice A.

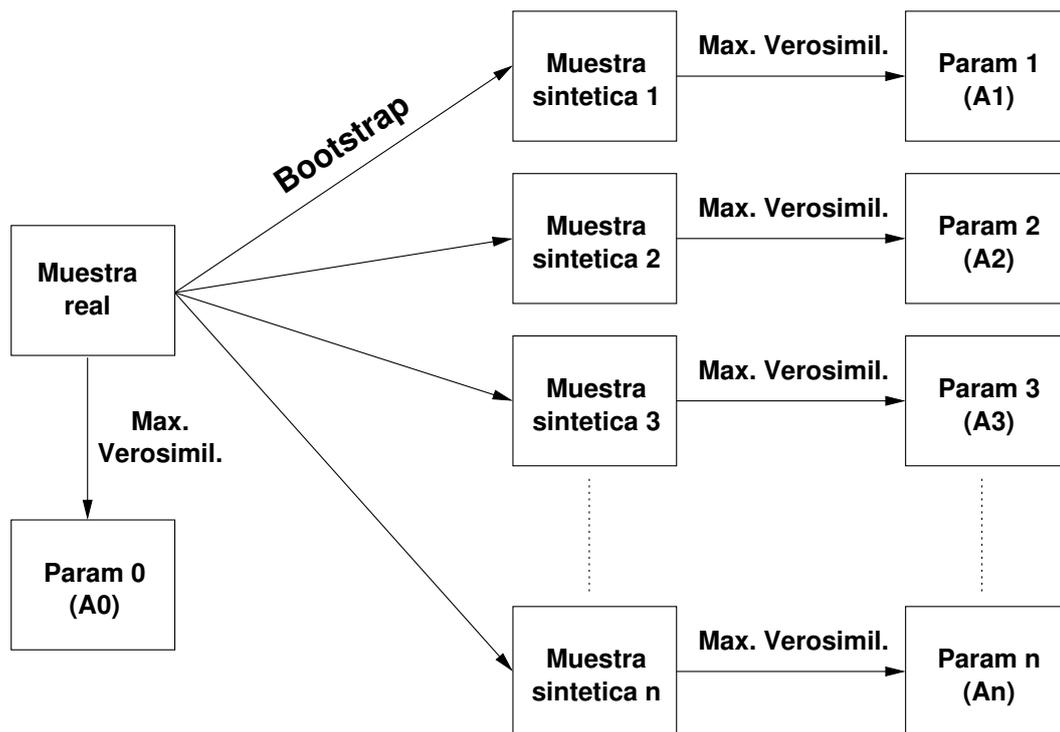


Figura 5.1: Esquema de la utilización de método *bootstrap* para la determinación de los errores de los parámetros ajustados

El tiempo de cálculo medio por ajuste fue de 30 horas de CPU en un procesador Pentium IV a 1600Hz.

5.3.1. Cálculo de errores: método *bootstrap*

Los errores observacionales de la muestra se propagan a los valores de los parámetros obtenidos mediante el ajuste de máxima verosimilitud. Nuestra muestra no es más que una realización particular del conjunto de parámetros que estamos buscando. Existen infinitas realizaciones de estos mismos parámetros que, al serles aplicadas el método de ajuste, darían como solución un conjunto de parámetros ligeramente diferentes. Estudiando la distribución de estas soluciones podemos estimar el error asociado a nuestra solución particular.

En el presente trabajo hemos abordado el problema mediante el método *bootstrap* (Press et al. 1992), cuyo esquema se muestra en la figura 5.1. En primer lugar obte-

nemos un conjunto de muestras sintéticas con el mismo número N de elementos que la muestra original, a partir de dicha muestra original. Para ello simplemente extraemos N elementos de esta última, permitiendo que un elemento pueda ser extraído más de una vez. La muestra sintética contiene por tanto elementos repetidos.

Una vez construidas las muestras sintéticas, obtenemos los correspondientes conjuntos de parámetros por máxima verosimilitud. El error asociado a nuestra solución particular se ha estimado como la desviación estándar de los n conjuntos de parámetros obtenidos.

La ventaja del método *bootstrap* frente a otros métodos como el Monte Carlo radica en que no es necesario conocer con precisión la naturaleza de los errores observacionales para obtener las muestras sintéticas. Ya hemos discutido en el capítulo 4 que en nuestro caso se han hecho ciertas simplificaciones en la modelización de los errores observacionales.

En todos los casos los errores de los parámetros se obtuvieron a partir de 15 muestras sintéticas.

5.3.2. Halo

Para obtener los parámetros del modelo para las estrellas del halo, n_{m_c} (ver expresión 4.13), $\sigma_{(V-K)}^+$ y $\sigma_{(V-K)}^-$ se fijaron a 4.0, 0.15 y 0.13, respectivamente. La altura sobre el plano galáctico se fijó a 20 kpc, para obtener, en la vecindad solar, una distribución espacial prácticamente uniforme. Los puntos $(V - K)_i$ escogidos para la relación color-magnitud fueron 1.0, 2.0 y 3.0. El resultado de la caracterización de las estrellas del halo se resume en la tabla 5.7.

Con este conjunto de parámetros se realizó una simulación de 10000 estrellas para evaluar la calidad del ajuste obtenido. Los histogramas de la muestra simulada se pueden ver en la figura 5.2 junto con los de la muestra. El acuerdo entre ambos conjuntos de histograma es elevado, lo cual significa que nuestro modelo es capaz de reproducir las distribuciones de los parámetros de la población y de sesgos observacionales.

El valor de la magnitud aparente de completitud encontrado ($m_c = 9.4$), más débil que el valor medio del catálogo Hipparcos (entre 7.3 y 9.0 dependiendo de

Tabla 5.7: Caracterización de las estrellas del halo. Media de 15 ajustes con puntos de partida diferentes y errores calculados mediante el método *bootstrap*. Las velocidades son heliocéntricas

Param.	Media	Error
$M_V^1(V - K = 1.0)$	4.65	± 0.36
$M_V^2(V - K = 2.0)$	6.24	± 0.25
$M_V^3(V - K = 3.0)$	8.05	± 0.78
$\sigma_{M_V^1}(V - K = 1.0)$	0.54	± 0.15
$\sigma_{M_V^2}(V - K = 2.0)$	1.06	± 0.12
$\sigma_{M_V^3}(V - K = 3.0)$	0.31	± 0.20
\bar{U} (km/s)	-3	± 15
\bar{V} (km/s)	-195	± 11
\bar{W} (km/s)	-3	± 10
σ_U (km/s)	170	± 10
σ_V (km/s)	107	± 7
σ_W (km/s)	78	± 6
$[\overline{Fe/H}]$	-1.51	± 0.06
$\sigma_{[Fe/H]}$	0.58	± 0.05
m_c	9.4	± 0.2
$(V - K)_{TO}$	1.32	± 0.01
A	595	± 240

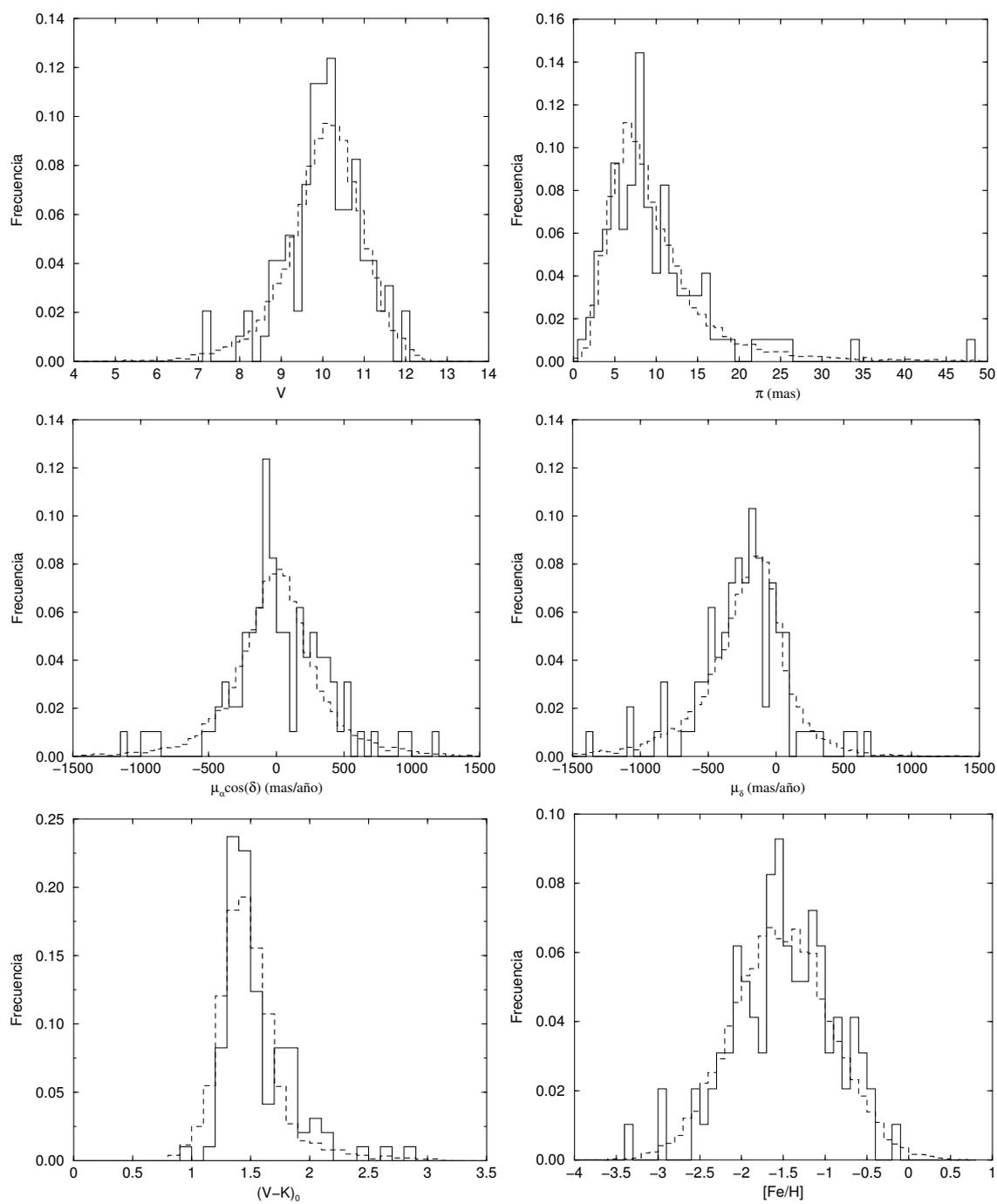


Figura 5.2: Comparación de las distribuciones de los diferentes observables correspondientes a las estrellas del halo: muestra (línea continua) y simulación a partir de los resultados de la tabla 5.7 (línea discontinua)

Tabla 5.8: Caracterización de las estrellas del disco grueso. Media de 15 ajustes con puntos de partida diferentes y errores calculados mediante el método *bootstrap*. Las velocidades son heliocéntricas

Param.	Media	Error
$M_V^1(V - K = 1.00)$	3.07	± 0.21
$M_V^2(V - K = 1.75)$	5.94	± 0.14
$M_V^3(V - K = 3.00)$	7.64	± 0.07
$\sigma_{M_V^1}(V - K = 1.00)$	0.68	± 0.17
$\sigma_{M_V^2}(V - K = 1.75)$	0.56	± 0.11
$\sigma_{M_V^3}(V - K = 3.00)$	0.20	± 0.05
$\bar{U}(\text{km/s})$	-29	± 6
$\bar{V}(\text{km/s})$	-89	± 3
$\bar{W}(\text{km/s})$	-6	± 6
$\sigma_U(\text{km/s})$	79	± 4
$\sigma_V(\text{km/s})$	37	± 3
$\sigma_W(\text{km/s})$	59	± 2
$[\text{Fe}/\text{H}]$	-0.63	± 0.02
$\sigma_{[\text{Fe}/\text{H}]}$	0.23	± 0.02
m_c	7.7	± 0.3
$(V - K)_{TO}$	1.43	± 0.01
A	183	± 320

la latitud galáctica) confirma que en nuestra muestra, y por tanto en el catálogo Hipparcos, existe un sesgo hacia las estrellas de baja metalicidad. Por el contrario, como veremos en las próximas secciones, tanto el disco grueso como el disco delgado presentan valores de m_c compatibles con la media del catálogo Hipparcos.

5.3.3. Disco grueso

El ajuste de las estrellas del disco grueso presentó más dificultades que en el caso del halo. En el caso de que el disco grueso se hubiese formado a partir de más de un episodio de acreción sobre el disco de la Galaxia deberíamos ajustar esta población a través de varias componentes, con cinemática y metalicidad (y

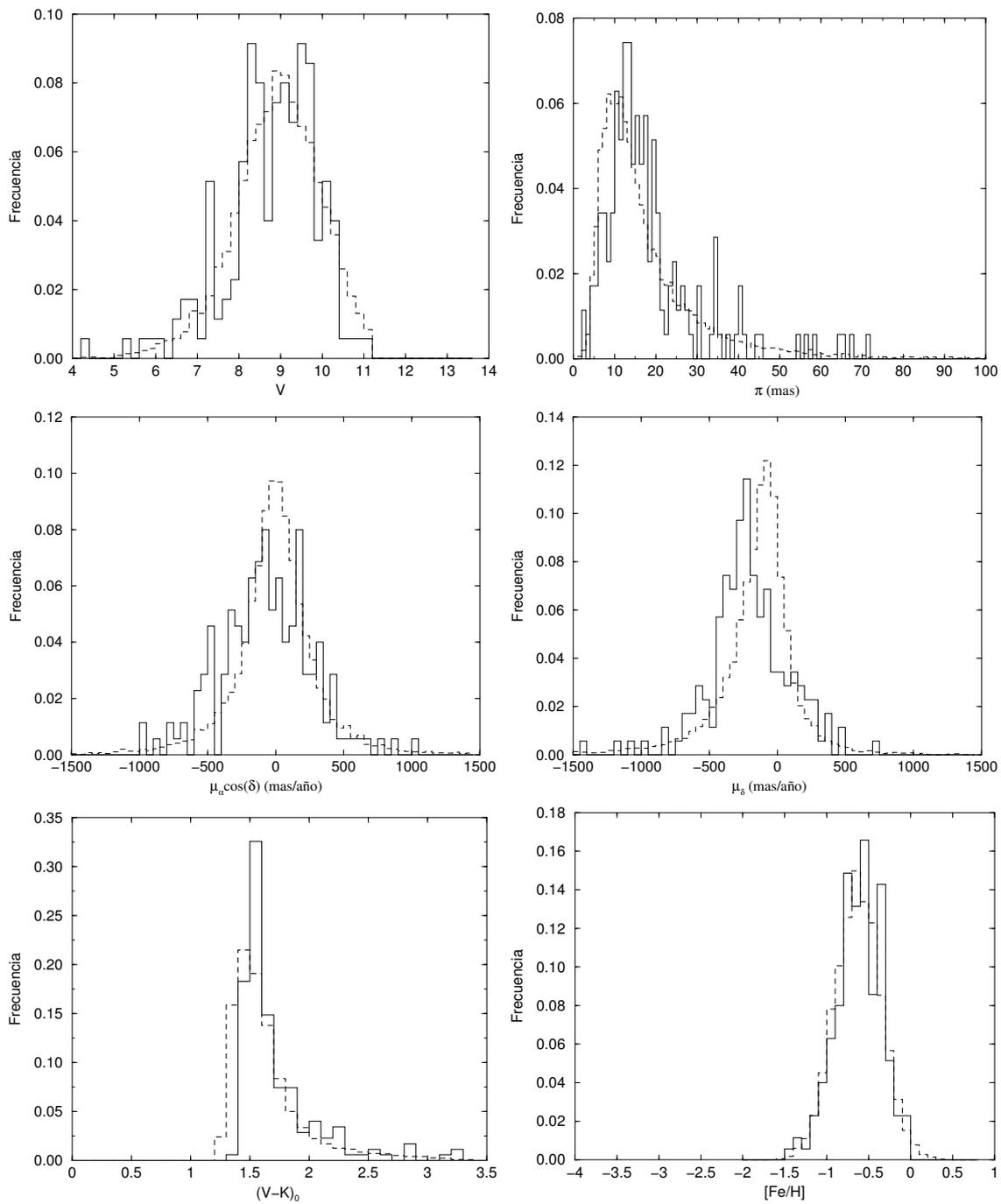


Figura 5.3: Comparación de las distribuciones de los diferentes observables correspondientes a las estrellas del disco grueso: muestra (línea continua) y simulación a partir de los resultados de la tabla 5.8 (línea discontinua)

quizá también distribución de color) ligeramente diferentes. Sin embargo, el escaso número de estrellas de las que disponemos para caracterizar esta población (inferior a 200), ha demostrado inviable un ajuste que contenga más parámetros que los necesarios para describir una única componente.

En este caso el valor de Z_h se fijó a un valor de 850 pc, valor promedio de las estimaciones más recientes (Norris 1999; Robin et al. 2003), y los parámetros del sesgo observacional n_{m_c} , $\sigma_{(V-K)}^+$ y $\sigma_{(V-K)}^-$ se fijaron a 3.5, 0.2 y 0.8, respectivamente. Los puntos $(V - K)_i$ de la relación color magnitud son 1.00, 1.75 y 3.00. Con estos valores se obtuvo el conjunto de parámetros que se muestra en la tabla 5.8.

Los histogramas de la muestra real y de una muestra simulada compuesta de 10000 estrellas calculada a partir de los valores de la tabla 5.8 se muestra en la figura 5.3. Se puede apreciar que en esta ocasión algunos de los histogramas muestran discrepancias, en especial el del movimiento propio en declinación. Estas discrepancias podrían ser debidas a la presencia de subcomponentes dentro de la población, que nuestro modelo no es capaz de reproducir con un sólo grupo. En cualquier caso, otros histogramas como el de magnitud aparente, metalicidad y, en menor medida, paralaje, muestran una similitud que parece indicar que nuestro modelo es capaz de reproducir las características promedio del disco grueso de la Galaxia.

5.3.4. Disco delgado

Hemos visto en la sección 5.1 que nuestro modelo divide al disco delgado en varias subcomponentes con, al menos, cinemática y metalicidad diferentes. Será por tanto necesario ajustar un conjunto de parámetros a cada una de estas subcomponentes.

La primera decisión a tomar es el número de grupos en que dividiremos el disco delgado. Si pensamos que la naturaleza de estos grupos puede obedecer a la propia evolución dinámica del disco o a diferentes grupos de edad asociados a diferentes procesos de calentamiento del disco (Freeman y Bland-Hawthorn 2002), es obvio que es muy difícil conocer *a priori* en cuantas subcomponentes debemos dividir el disco delgado.

Sin embargo el propio método impone limitaciones al número de grupos que es posible tratar. Por una parte, al aumentar el número de grupos hacemos que cada uno de ellos tenga unas propiedades con dispersiones menores, con lo que son más el

número de estrellas que quedan sin clasificar. Por otra parte, hemos comprobado que a partir de un cierto número de subcomponentes, los nuevos grupos que aparecen son grupos residuales formados por estrellas *outliers*. Después de varias pruebas estimamos que la solución más estable corresponde a dividir el disco delgado en tres subgrupos.

Una vez fijado el número de grupos, debemos decidir si tratamos el disco delgado conjuntamente, planteando un modelo con tres grupos y ajustando simultáneamente los parámetros que los caracterizan, incluyendo la calibración de magnitud absoluta y los sesgos observacionales, o bien dividimos primero el disco en dichos grupos (de acuerdo a los resultados de la sección 5.1) y realizamos el ajuste de cada uno de ellos por separado.

La primera solución parece en principio la más adecuada, puesto que en la obtención de los tres grupos (que podrían diferir ligeramente de los descritos en la tabla 5.4) se utilizaría la información de la calibración de luminosidad y los sesgos observacionales. Sin embargo, como ya había sucedido en el caso de intentar ajustar disco delgado, disco grueso y halo simultáneamente, nos encontramos con el problema del gran número de parámetros y las correlaciones entre ellos. Así, los varios intentos realizados de tratar simultáneamente los tres grupos demostraron que, con el modelo utilizado, la separación obedecía más a una clasificación por temperatura que a un separación por cinemática y metalicidad, hecho fácilmente constatable al analizar los diagramas HR e histogramas de distribución de cada una de los grupos.

No quedó, por tanto, otra opción que realizar un ajuste por separado de cada uno de los tres grupos, estando cada uno de ellos formado por las estrellas asignadas a los tres grupos de la tabla 5.4 pertenecientes al disco delgado.

Como en los casos anteriores la solución obtenida para cada uno de los tres grupos es el promedio de 15 ajustes realizados con puntos de partida diferentes. Los errores se calcularon utilizando el método del *bootstrap*. El resultado se muestra en la tabla 5.9.

Los valores de n_{m_c} se fijaron a 5.5 para los dos primeros grupos y 6.0 para el tercero. $\sigma_{(V-K)}^+$ y $\sigma_{(V-K)}^-$ se fijaron a 0.14 y 0.72, 0.13 y 0.51, y 0.2 y 0.47 para las componentes I, II y III, respectivamente. Los puntos $(V - K)_i$ de la relación color magnitud son 1.00, 1.75 y 3.00. Para las tres componentes se utilizó $Z_h = 300$ pc.

Tabla 5.9: Caracterización de las estrellas del disco delgado. Media de 15 ajustes con puntos de partida diferentes y errores calculados mediante el método *bootstrap*. Los valores de a están calculados a partir del número de estrellas asignado a cada grupo sobre el total de la muestra. Las velocidades son heliocéntricas

Param.	Componente I		Componente II		Componente III	
	Media	Error	Media	Error	Media	Error
$M_V^1(V - K = 1.00)$	3.39	± 0.04	3.57	± 0.16	3.36	± 0.45
$M_V^2(V - K = 1.75)$	5.38	± 0.05	5.41	± 0.17	5.71	± 0.08
$M_V^3(V - K = 3.00)$	7.72	± 0.09	7.87	± 0.12	7.70	± 0.04
$\sigma_{M_V^1}(V - K = 1.00)$	0.67	± 0.02	0.71	± 0.08	0.62	± 0.15
$\sigma_{M_V^2}(V - K = 1.75)$	0.77	± 0.04	0.80	± 0.08	0.85	± 0.08
$\sigma_{M_V^3}(V - K = 3.00)$	0.37	± 0.12	0.58	± 0.14	0.37	± 0.08
\bar{U} (km/s)	-32	± 0.3	3	± 5.2	-13	± 0.9
\bar{V} (km/s)	-21	± 0.2	-4	± 3.1	-28	± 0.7
\bar{W} (km/s)	-6	± 0.2	-6	± 0.3	-10	± 1.1
σ_U (km/s)	10	± 0.2	16	± 3.1	42	± 5.7
σ_V (km/s)	6	± 0.2	11	± 1.7	23	± 3.1
σ_W (km/s)	7	± 0.2	10	± 0.2	20	± 3.8
$[\overline{Fe/H}]$	0.06	± 0.003	-0.07	± 0.002	-0.19	± 0.005
$\sigma_{[Fe/H]}$	0.05	± 0.002	0.10	± 0.003	0.25	± 0.004
m_c	7.5	± 0.1	7.5	± 0.1	7.6	± 0.1
$(V - K)_{TO}$	0.95	± 0.01	0.93	± 0.01	1.43	± 0.04
A	920	± 145	1150	± 100	5800	± 2100
a (%)	0.17		0.43		0.26	
# estrellas	1964		4842		2953	

La calidad del ajuste se ha evaluado de nuevo comparando los histogramas de la muestra para las cantidades observables, con los de una muestra simulada a partir de los parámetros obtenidos para cada grupo (figuras 5.4, 5.5 y 5.6). En general, la concordancia entre ambos conjuntos de histogramas es buena. La mayor discrepancia se da en la distribución de $(V - K)$, en especial para las componentes I y II. Como ya hemos mencionado existe una alta correlación entre las funciones de distribución del color y la magnitud absoluta y el sesgo observado, que podría afectar a la determinación de la función de distribución de $(V - K)$.

Dejamos para el próximo capítulo la interpretación de los parámetros obtenidos.

5.3.5. Uniformidad de las componentes

El método de separación de la muestra nos asegura que los grupos encontrados presentarán una cinemática y una distribución de metalicidad diferenciada. ¿Podemos además extraer alguna conclusión sobre la distribución de edades de las estrellas pertenecientes a cada grupo?.

Esta pregunta se puede responder observando la relación entre los parámetros cinemáticos y la temperatura, tal como se ha discutido en la sección 4.3.3. Si existe una dispersión de edades dentro del grupo, y además esta dispersión depende de la temperatura, tendremos un comportamiento similar al mostrado en las figuras 4.8 y 4.9 del capítulo 4. Si por el contrario no hay dispersión de edades o esta depende poco de la temperatura, deberá existir poca o nula dependencia entre los parámetros cinemáticos y el color $(V - K)$.

El estudio de lo expuesto en el párrafo anterior a cada uno de los grupos encontrados, para analizar su uniformidad en términos de edad, se muestra en las figuras 5.7 y 5.8.

En el caso del disco delgado las tendencias son prácticamente inexistentes, excepto para la tercera componente. Dentro de ésta los parámetros cinemáticos varían claramente con el color. Parece pues que mientras para las componentes I y II el rango de edades no depende del color, la tercera componente sigue reflejando la discontinuidad de Párenago (ver sección 4.3.3), debida a una mezcla de edades distinta para cada temperatura. Esta componente muestra una mayor dispersión de metalicidades en comparación con las otras componentes, lo cual también indicaría

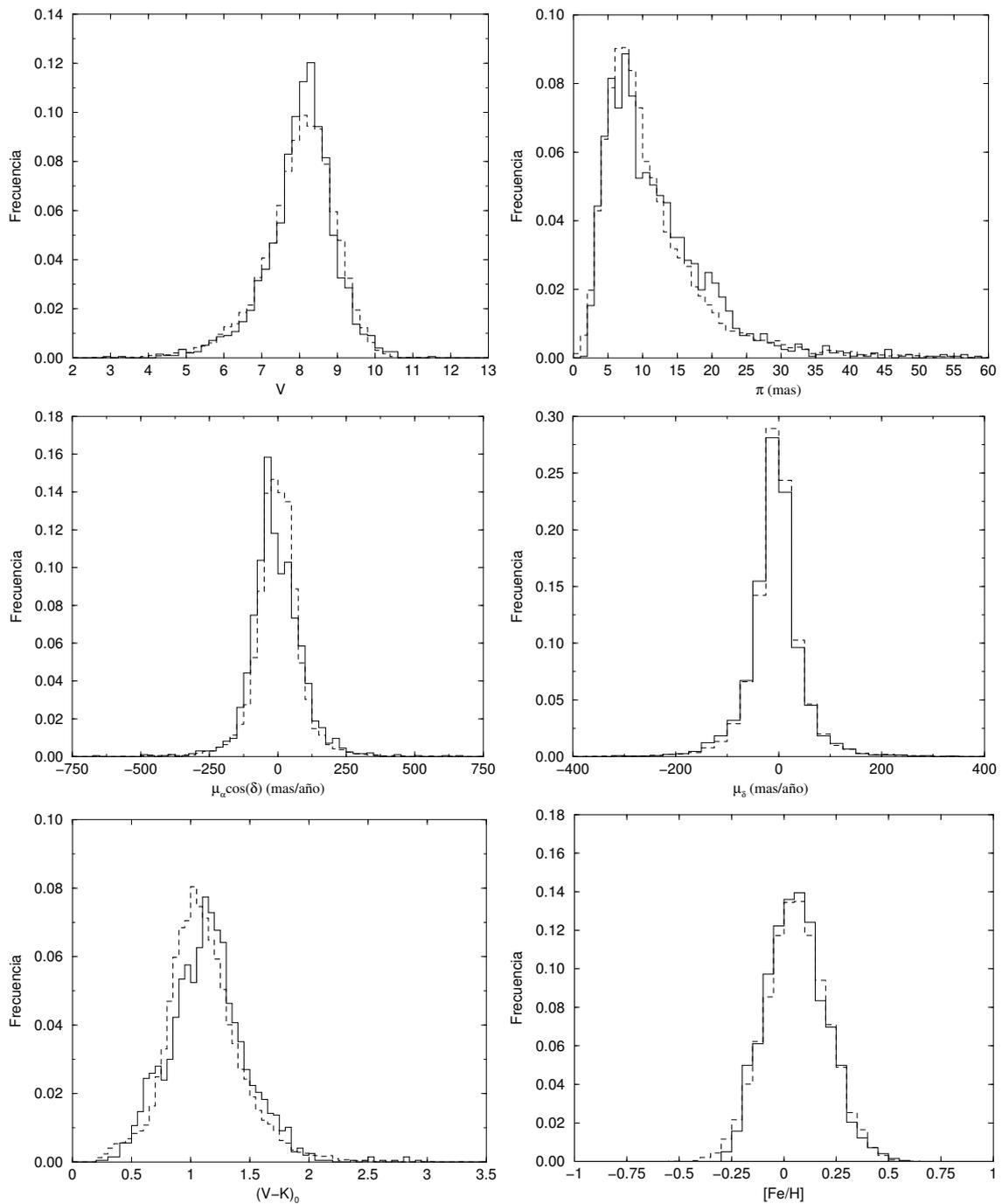


Figura 5.4: Comparación de las distribuciones de los diferentes observables correspondientes a las estrellas del disco delgado (componente I): muestra (línea continua) y simulación a partir de los resultados de la tabla 5.9 (línea discontinua)

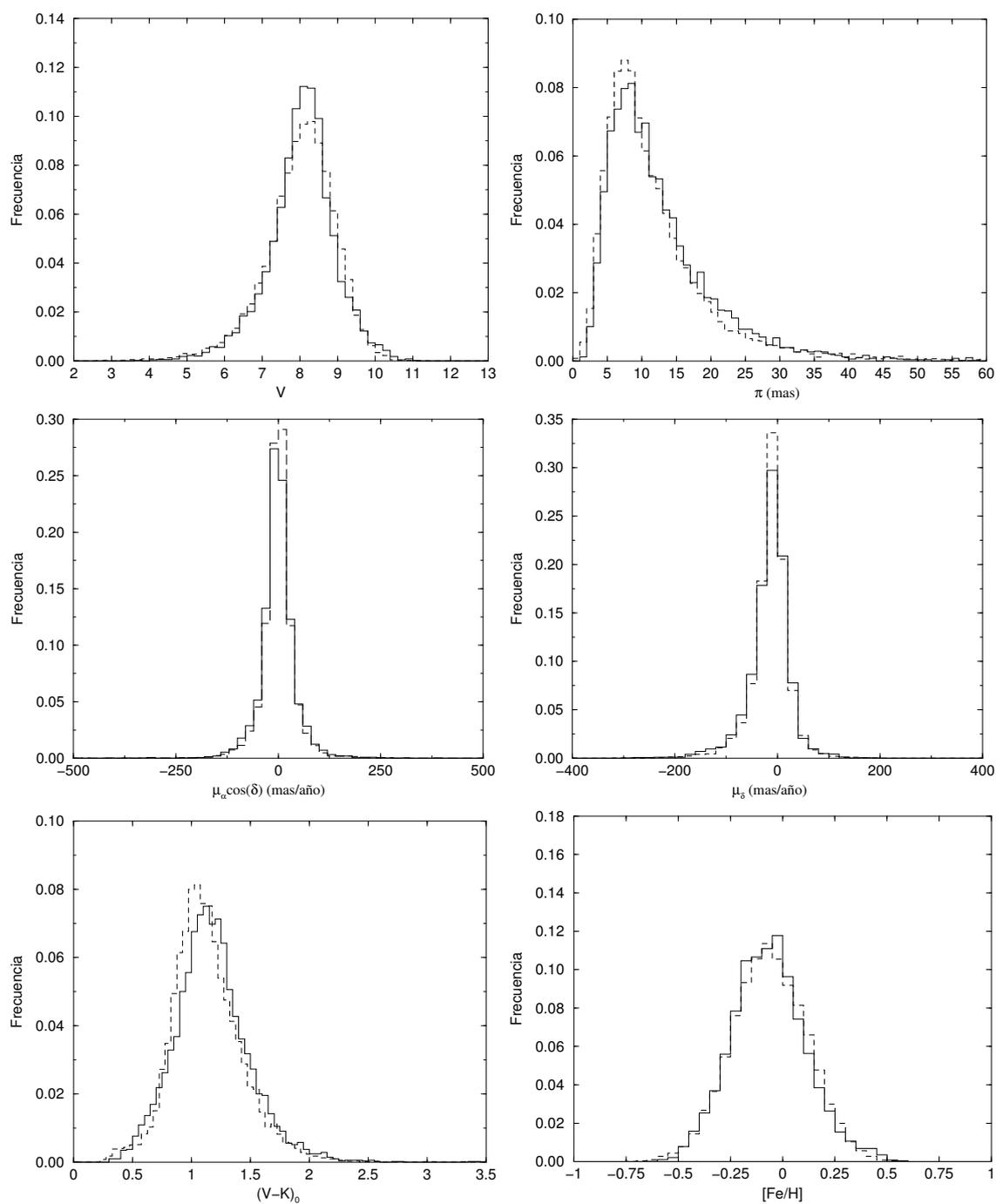


Figura 5.5: Comparación de las distribuciones de los diferentes observables correspondientes a las estrellas del disco delgado (componente II): muestra (línea continua) y simulación a partir de los resultados de la tabla 5.9 (línea discontinua)

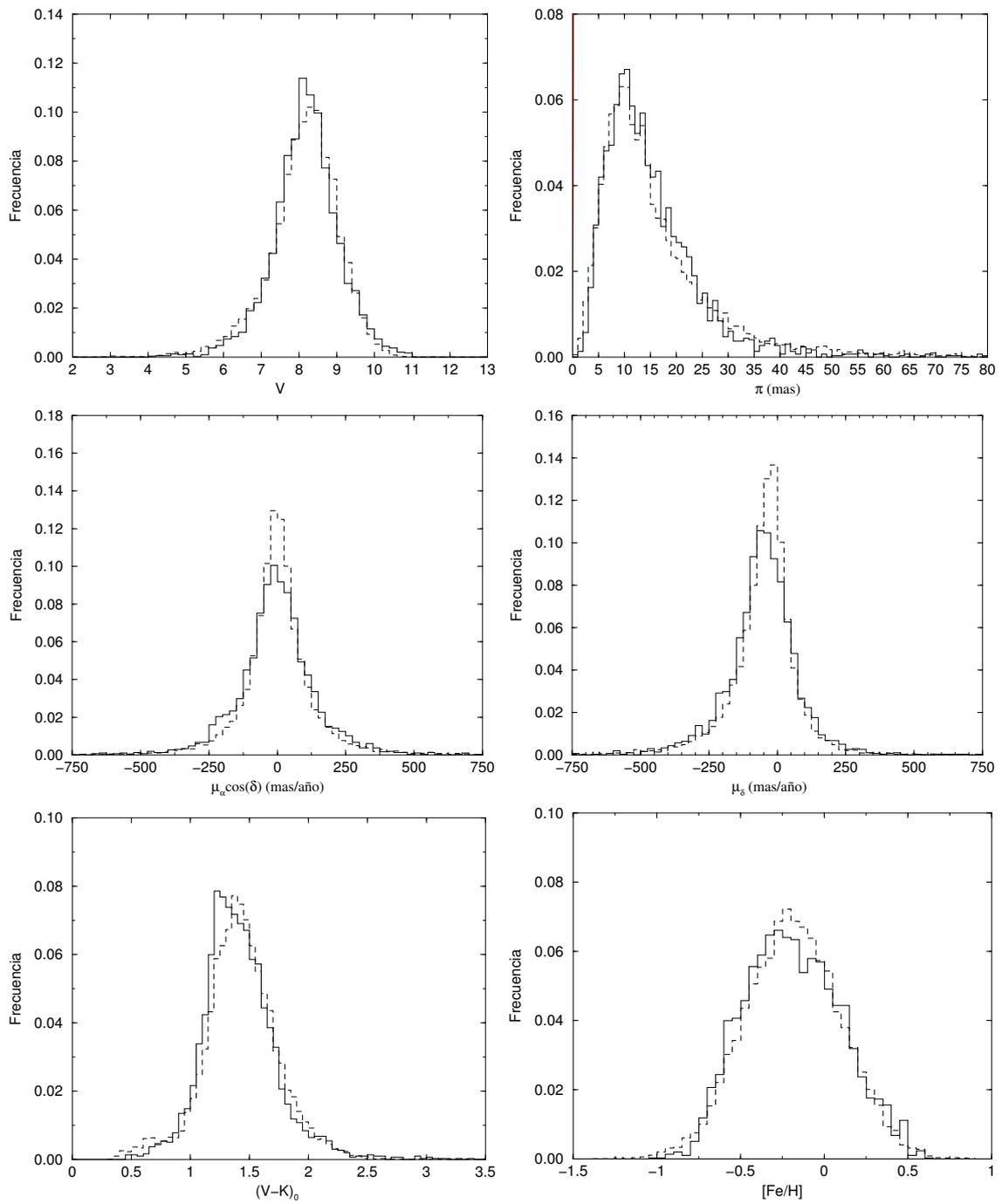


Figura 5.6: Comparación de las distribuciones de los diferentes observables correspondientes a las estrellas del disco delgado (componente III): muestra (línea continua) y simulación a partir de los resultados de la tabla 5.9 (línea discontinua)

la presencia de estrellas con edades más dispares.

El disco grueso y el halo tampoco muestran relación entre los parámetros cinemáticos y $(V - K)_0$, lo cual en este caso significaría que se trata de componentes con estrellas comprendidas en un rango de edades no demasiado amplio, como discutiremos en el capítulo 6.

Estos resultados son también una justificación *a posteriori* de la independencia entre los parámetros cinemáticos y la temperatura que hemos supuesto al modelizar la muestra ¹.

Como conclusión podemos decir, por tanto, que las componentes encontradas, además de mostrar cinemáticas diferenciadas (criterio que hemos utilizado para su separación), también se corresponden a distribuciones de edad diferenciadas. En el próximo capítulo veremos como obtener la edad característica de cada componente.

5.4. Determinación de la distancia más verosímil

Cada una de las estrellas de la muestra dispone de un valor de su paralaje trigonométrica, con el correspondiente error asociado. De manera inmediata es posible, por tanto, estimar su distancia como el inverso de la paralaje, aunque como hemos visto en la sección 4.5 éste será un valor sesgado. Sin embargo, disponemos también de información cinemática y fotométrica de la estrella, y, llegados a este punto, podemos asignar cada una de las estrellas a una población estelar. ¿Puede esta información adicional mejorar la estimación de la distancia individual de la estrella, corrigiendo por ejemplo el sesgo en la distancia asociado a la paralaje (ver sección 4.5) u otros sesgos observacionales?

Tal y como se explica en el apéndice A, la ley de distribución de los valores intrínsecos libres de error \vec{y} y de los valores observados \vec{y}' viene dada por

$$\tilde{\mathcal{F}}(\vec{y}', \vec{y} | \vec{\theta}) = \mathcal{F}(\vec{y} | \vec{\theta}) \epsilon(\vec{y}' | \vec{y}) S(\vec{y}') \quad (5.5)$$

con:

¹La relación entre cinemática y metalicidad queda reflejada al separar la muestra en grupos de metalicidad. Dentro de cada grupo esta relación es prácticamente inexistente.

$$- \vec{y} = (m, C_1, C_2, r, l, b, \mu_l, \mu_b, v_r)$$

$$- \vec{y}' = (m', C'_1, C'_2, r', l', b', \mu'_l, \mu'_b, v'_r)$$

- $\vec{\theta}$ los valores estimados por máxima verosimilitud de los parámetros que caracterizan el grupo considerado al cual hemos asignado la estrella

- $\epsilon(\vec{y}'|\vec{y})$ la función de distribución de los errores observados

- $S(\vec{y}')$ la función de selección sobre las cantidades observadas

Los valores observados \vec{y}' son los valores de la estrella de la cual queremos estimar su distancia, por lo que la expresión (5.5) es en realidad función únicamente de los valores intrínsecos libres de error \vec{y} , es decir $\tilde{\mathcal{F}}(\vec{y}|\vec{y}', \vec{\theta})$.

La ley de densidad marginal de cada una de las variables que componen el vector \vec{y} se obtiene integrando sobre todos los valores posibles del resto de las variables. En particular, para la distancia r , la función de densidad marginal será:

$$\mathcal{R}(r) = \int_{(m, C_1, C_2, l, b, \mu_l, \mu_b, v_r)} \mathcal{F}(\vec{y}|\vec{\theta}) \epsilon(\vec{y}'|\vec{y}) S(\vec{y}') dm dC_1 dC_2 dl db d\mu_l d\mu_b dv_r \quad (5.6)$$

Definiremos la *distancia más verosímil* de la estrella como la esperanza de r , dada la ley de densidad anterior:

$$\bar{r} = \int_0^{\infty} r \mathcal{R}(r) dr \quad (5.7)$$

El momento de segundo orden de $\mathcal{R}(r)$ nos proporciona el error de \bar{r} :

$$\epsilon_{\bar{r}}^2 = \int_0^{\infty} (r - \bar{r})^2 \mathcal{R}(r) dr \quad (5.8)$$

Esta estimación de la distancia ofrece algunas ventajas, como es utilizar toda la información disponible y ser no sesgada, en la medida en que el modelo utilizado haya tenido en cuenta los sesgos observacionales de la muestra.

Por supuesto si el error en la paralaje trigonométrica es nulo, el valor de \bar{r} coincide con el inverso de la paralaje ($r_{tri} = 1/\pi$), puesto que entonces la ley de distribución marginal de r queda reducida a una delta de Dirac ($\mathcal{R}(r) = \delta(r - r_{tri})$). La *distancia más verosímil* será especialmente útil en el caso de tener errores grandes

en la paralaje, donde la información cinemática y fotométrica adicional puede ayudar a obtener una mejor determinación de la distancia.

Como ejemplo supongamos dos estrellas que tengan idéntico valor de la paralaje trigonométrica y de su error. Si no dispusiéramos de ninguna información adicional asignaríamos a ambas la misma distancia, r_{tri} . Ahora bien, supongamos que una de ellas presenta una cinemática y metalicidad típica del disco delgado y la otra del halo. Esta información suplementaria provoca que, dados los errores observacionales y las características que conocemos de ambas poblaciones (distribución espacial, cinemática, etc), la distancia *más probable* de las dos estrellas difiera, asignando a cada una de ellas una distancia en la que se ha tenido en cuenta la pertenencia a una población estelar determinada. En términos de probabilidad no es más que calcular la probabilidad de que la estrella tenga una distancia r *condicionada* a que dicha estrella pertenezca a una población dada. El valor de dicha probabilidad obviamente cambiará por el hecho de haber considerado la condición de pertenencia a la población.

La distancia más verosímil será utilizada en el próximo capítulo para la construcción de los diagramas HR de cada una de las componentes galácticas.

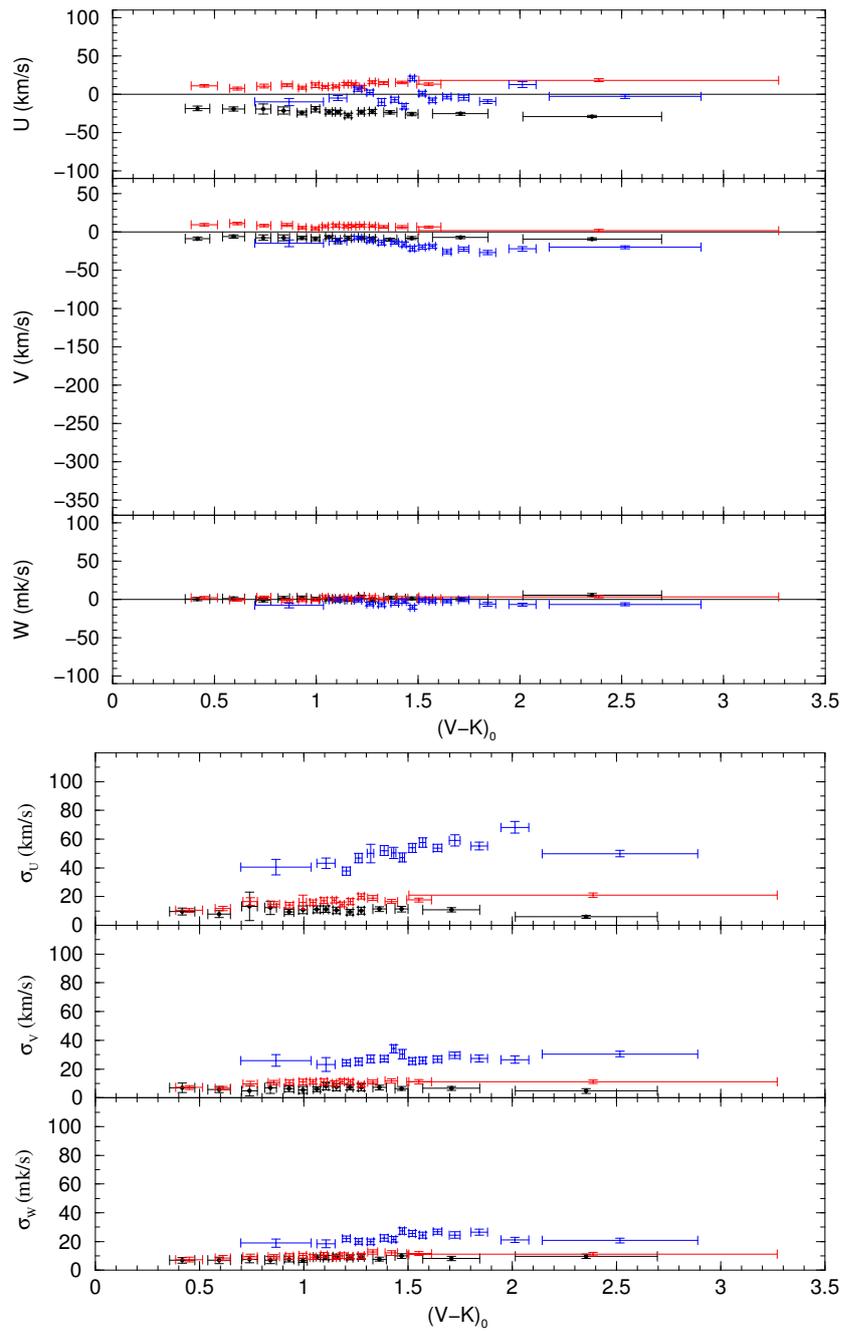


Figura 5.7: Parámetros cinemáticos en función de $(V-K)_0$ para las tres subcomponentes del disco delgado (I negro, II rojo y III azul). Los intervalos de $(V-K)_0$ se han escogido de tal forma que el número de estrellas en cada uno sea constante. Las barras de error horizontales representan la dispersión $(V-K)_0$ dentro de cada intervalo, mientras que las verticales representan el error observacional en las componentes de la velocidad promediadas, calculado a partir de los errores individuales en los movimientos propios, velocidades radiales y distancias

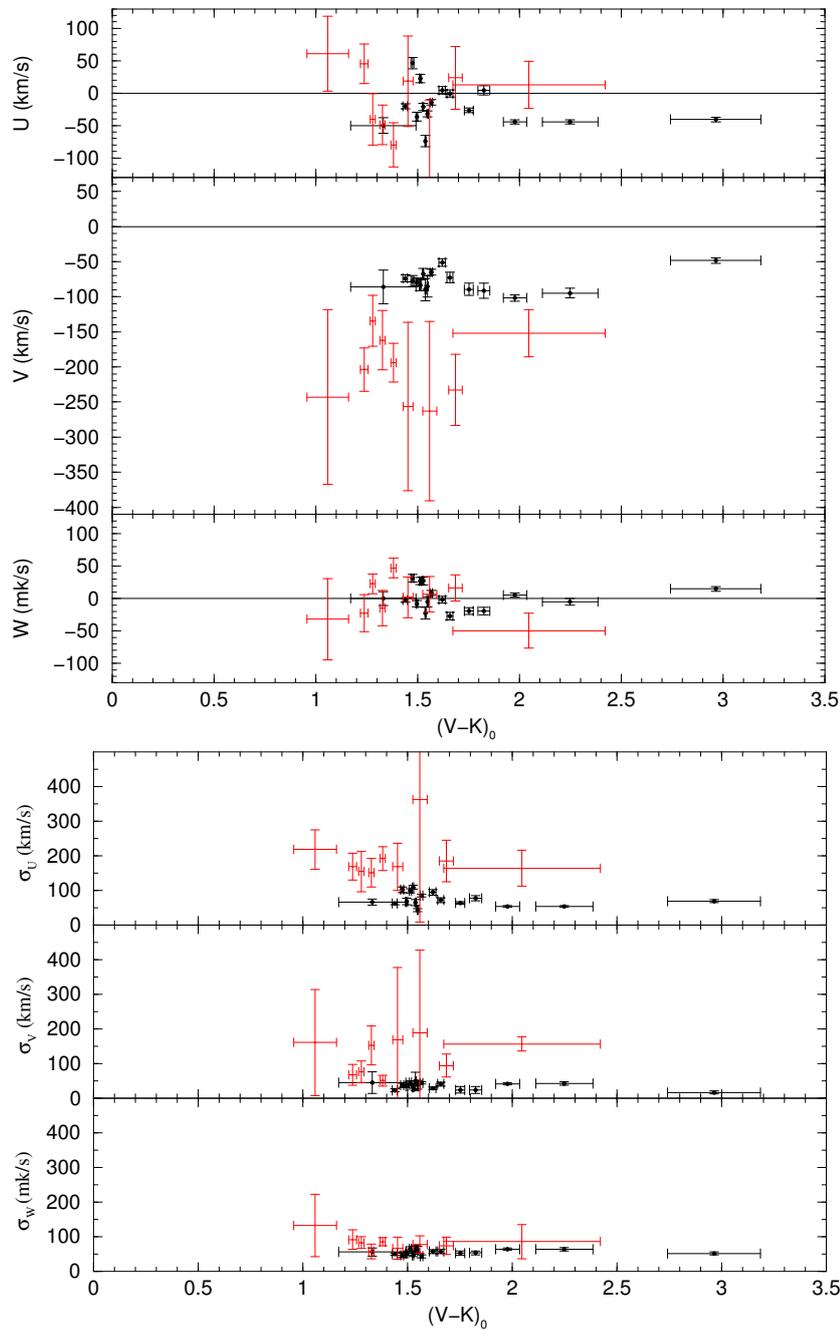


Figura 5.8: Parámetros cinemáticos en función de $(V - K)_0$ para el disco grueso (negro) y el halo (rojo). Los intervalos y barras de error se han calculado análogamente a la figura 5.7