



Universitat de Girona

ESTUDI DE MÈTODES DE CLASSIFICACIÓ BORROSA I
LA SEVA APLICACIÓ A L'AGRUPACIÓ DE ZONES
GEOGRÀFIQUES EN BASE A DIVERSES
CARACTERÍSTIQUES INCERTES

Narcís CLARA LLORET

ISBN: 84-689-0618-2
Dipòsit legal: GI-1392-2004

Universitat de Girona
Departament d'Empresa

**Estudi de mètodes de classificació borrosa
i la seva aplicació a l'agrupació de
zones geogràfiques en base a diverses
característiques incertes**

Memòria presentada per Narcís Clara i Lloret
per optar al grau de doctor per la Universitat de Girona

Dirigida per: Joan Carles Ferrer i Comalat

Programa de doctorat:
Matemàtica aplicada a la comptabilitat i a l'empresa

Girona
Abril de 2004

Joan Carles Ferrer i Comalat, Professor Titular d'Universitat del
Departament d'Empresa de la Universitat de Girona,

CERTIFICA:

Que la memòria titulada “ Estudi de mètodes de classificació borrosa i la seva aplicació a l'agrupació de zones geogràfiques en base a diverses característiques incertes ”, que es presenta per optar al grau de Doctor per la Universitat de Girona, ha estat realitzada per Narcís Clara i Lloret, sota la direcció del Dr. Joan Carles Ferrer i Comalat.

I per tal que consti als efectes oportuns, signa aquest certificat a Girona, a 19 d'abril de 2004

Signat: Joan Carles Ferrer i Comalat

Continguts

Pròleg	15
1 Fonaments	19
1.1 La lògica borrosa	19
1.2 Connectives lògiques	21
1.2.1 Definicions	22
1.2.2 Principals t-normes i t-conormes	24
1.2.3 Desigualtats	30
1.2.3.1 Desigualtats elementals	30
1.2.3.2 Desigualtats sobre famílies parametritzades	30
1.2.4 Generadors additius	33
1.2.4.1 Anàlisi del principi del terç exclòs	35

1.2.4.2	Família generalitzada de t_{PA}	39
1.3	Subconjunts borrosos	41
1.3.1	Funció de pertinença	41
1.3.2	Operacions entre subconjunts borrosos	42
1.3.3	Cardinal	43
2	Relacions borroses	45
2.1	Introducció	45
2.1.1	Relació borrosa	46
2.1.2	Relacions n -àries	47
2.1.2.1	Projectió	48
2.1.2.2	Extensió cilíndrica	48
2.2	Relacions binàries	49
2.2.1	Introducció	49
2.2.2	Relació a nivell α	50
2.2.3	Representació formal	50
2.2.4	Inversa	51

	7
2.3	Relacions binàries sobre un mateix conjunt 51
2.3.1	Relacions de proximitat 52
2.3.2	Relacions de t -equivalència 53
2.3.2.1	Teorema de representació 53
2.3.2.2	Conjunt de particions 54
2.3.2.3	Grafs borrosos 54
2.3.2.4	Passejada a través d'un graf 56
2.3.2.5	Índex d'accessibilitat 57
2.3.2.6	Descomposició matricial 57
2.3.3	Transitivització 61
2.3.3.1	Clausura t -transitiva 62
2.3.3.2	Matriu borrosa òptima 68
2.4	Càlcul de relacions borroses 72
2.4.1	Metodologia 74
2.4.2	Organigrama general 77
2.4.2.1	Estratègia fonamental per al càlcul de $\mu_{\tilde{V}}$ 78
2.4.2.2	Altres estratègies 82

3	Mesures de semblança	85
3.1	Introducció	85
3.1.1	Mesura de semblança crisp	87
3.1.1.1	Paràmetres de semblança i de dissemblança	87
3.1.1.2	Principals mesures de semblança crisp	88
3.2	Mesures de semblança borroses	89
3.2.1	El model geomètric	90
3.2.2	Principals distàncies	92
3.3	El model conjuntista	95
3.3.1	Mesures borroses clàssiques	96
3.3.1.1	Principals mesures borroses clàssiques	97
3.3.1.2	Propietats	98
3.3.2	Mesures borroses generalitzades	100
3.3.2.1	Propietats conjuntistes de les mesures de semblança	101
3.3.2.2	Nova família de mesures de semblança	103
3.3.2.3	Verificació de les propietats	105
3.3.2.4	Exemples de mesures borroses generalitzades	112

3.3.2.5	Família de mesures d'aparellament	116
3.3.3	Superfícies de semblança	118
3.3.3.1	Definició	118
3.3.3.2	Exemples numèrics	119
4	Anàlisi de clústers	125
4.1	Introducció	125
4.2	Mètodes jeràrquics	126
4.2.1	Connexió simple	128
4.2.2	Connexió completa	128
4.2.3	Connexió mitjana	129
4.3	Clausures transitives	129
4.3.1	Clausura per t_{min}	129
4.3.2	Clausura per qualsevol t-norma	130
4.4	Nou mètode de clusterització	138
5	Afinitats	145
5.1	Introducció	145

5.2	Família i tancament de Moore	146
5.2.1	Principals definicions	146
5.2.2	Obtenció de tancaments de Moore	147
5.2.3	Tancat d'un tancament de Moore	147
5.3	Generalització per a relacions n-àries	148
5.3.1	Hipercub booleà	149
5.3.2	Connexions	149
5.3.3	Obtenció de tancaments de Moore a partir de connexions	151
5.3.4	Clausures dels tancaments de Moore	153
5.3.5	Teorema d'Isomorfisme	154
5.3.6	Reticles de Galois	155
5.3.7	Projeccions i cilindres	157
5.4	Aplicacions	158
5.4.1	Cas d'una relació ternària	158
5.4.1.1	Connexions	159
5.4.1.2	Tancaments	164
5.4.1.3	Determinació dels tancats i establiment de les clausures	169

	11
5.4.1.4	Isomorfisme 169
5.4.1.5	Reticle de Galois 170
5.4.1.6	Projeccions i cilindres 170
5.4.2	Cas d'una relació binària: L'agrupació de les comarques gironines en funció de característiques incertes de la modernitat en el treball 173
5.4.2.1	Tria de les característiques 174
5.4.2.2	Càlcul de la relació borrosa 180
5.4.2.3	Càlcul del reticle de Galois 196
5.4.2.4	Anàlisi dels resultats 200
6	Aplicació a la classificació dels països de la Unió Europea 201
6.1	Introducció 201
6.2	Expertesa 202
6.2.1	Característiques 203
6.2.2	Variables estadístiques associades a cada característica 204
6.2.3	Avaluació 206
6.3	Predicció de dades 210
6.3.1	Sèries temporals 211

6.3.2	Xarxes neuronals	213
6.4	Matrius de les relacions borroses	216
6.5	Mesures	218
6.6	Determinació dels clústers	224
6.6.1	Clústers amb clausura transitiva per t_{min}	225
6.6.2	Clústers amb clausura transitiva per t_{PA}	230
6.6.3	Clústers amb el nou mètode de clusterització i <i>MAPAR</i>	237
6.6.4	Anàlisi dels resultats	238
7	Conclusions	243
8	Annexos	247
8.1	Dades estadístiques	248
8.2	Construcció de les matrius de les relacions borroses	279
8.3	Clausures transitives	291
	Bibliografia	301

Agraïments

Qualsevol treball és la suma d'esforços que provenen de diverses direccions. Aquestes ajudes, no només de caràcter intel·lectual sinó també formals i organitzatives, han estat imprescindibles en l'elaboració d'aquesta tesi.

En primer lloc, el meu agraïment -pel suport constant i desinteressat- al director d'aquesta tesi, el Dr. Joan Carles Ferrer. Ens coneixem des que fórem universitaris i, com no podia ser d'altra manera, els moments compartits de treball han estat molt profitosos, tant en el pla personal com en el professional. La seva dedicació i coneixement professional fan que la confiança en el producte final sigui molt més alta que sense la seva participació.

En segon lloc, el meu agraïment al Dr. Xavier Bertran, a qui vull fer un esment especial: Ell va ser qui em va donar la benvinguda i amb qui vaig començar a treballar quan vaig entrar a la Universitat. El seu caràcter obert, directe i no elitista va ser un dels factors que em feren, sense dubte, la feina més agradable. Potser en altres circumstàncies estaria realitzant una tasca completament diferent i allunyada de l'àmbit universitari. En aquesta línia, poder comptar sempre amb ell - i la seva amistat - per tal de pensar i discutir sobre qualsevol problema matemàtic és una garantia impagable.

En un àmbit no tan restringit, l'estudi i divulgació que ha fet el Dr. Jaume Gil Aluja de

la matemàtica de la incertesa aplicada a l'economia, han estat per a mi un model de com cal abordar els problemes que apareixen en el plantejament i aplicació de models aplicats a l'economia en què la matemàtica de la incertesa ha demostrat tenir un paper fonamental.

Finalment, no puc deixar de citar els meus companys de despatx, la Dra. Ester Barrabés, el Sr. D. Francisco Martín i el Dr. Joan Saldaña, que han patit també les meves preguntes sobre aspectes formals de la presentació d'aquesta tesi. Ells em van convèncer sobre les eines informàtiques que calia fer servir, i ells m'han resolt molts dubtes que han aparegut. El seu consell ha estat, de ben segur, un bon consell.

Pròleg

Aquesta memòria està estructurada en sis capítols amb l'objectiu final de fonamentar i desenvolupar les eines matemàtiques necessàries per a la classificació de conjunts de subconjunts borrosos. El nucli teòric del treball el formen els capítols 3, 4 i 5; els dos primers són dos capítols de caire més general, i l'últim és una aplicació dels anteriors a la classificació dels països de la Unió Europea en funció de determinades característiques borroses.

En el capítol 1 s'analitzen les diferents connectives borroses posant una especial atenció en aquells aspectes que en altres capítols tindran una aplicació específica. És per aquest motiu que s'estudien les ordenacions de famílies de t-normes, donada la seva importància en la transitivitat de les relacions borroses. La verificació del principi del terç exclòs és necessària per assegurar que un conjunt significatiu de mesures borroses generalitzades, introduïdes en el capítol 3, siguin reflexives. Estudiem per a quines t-normes es verifica aquesta propietat i introduïm un nou conjunt de t-normes que verifiquen aquest principi.

En el capítol 2 es fa un recorregut general per les relacions borroses centrant-nos en l'estudi de la clausura transitiva per a qualsevol t-norma, el càlcul de la qual és en molts casos fonamental per portar a terme el procés de classificació. Al final del capítol s'exposa un procediment pràctic per al càlcul d'una relació borrosa amb l'ajuda d'experts i de sèries estadístiques.

El capítol 3 és un monogràfic sobre mesures borroses. El primer objectiu és relacionar les mesures (o distàncies) usualment utilitzades en les aplicacions borroses amb les mesures conjuntistes crisp. Es tracta d'un enfocament diferent del tradicional enfocament geomètric. El principal resultat és la introducció d'una família parametritzada de mesures que verifiquen unes propietats de caràcter conjuntista prou satisfactòries. L'estudi de la verificació del principi del terç exclòs té aquí la seva aplicació sobre la reflexivitat d'aquestes mesures, que són estudiades amb una certa profunditat en alguns casos particulars.

El capítol 4 és, d'entrada, un repàs dels principals resultats i mètodes borrosos per a la classificació dels elements d'un mateix conjunt de subconjunts borrosos. És aquí on s'apliquen els resultats sobre les ordenacions de les famílies de t-normes i t-conormes estudiades en el capítol 1. S'introdueix un nou mètode de clusterització, canviant la matriu de la relació borrosa cada vegada que s'obté un nou clúster. Aquest mètode permet homogeneïtzar la metodologia del càlcul de la relació borrosa amb el mètode de clusterització.

El capítol 5 tracta sobre l'agrupació d'objectes de diferent naturalesa; és a dir, subconjunts borrosos que pertanyen a diferents conjunts. Aquesta teoria ja ha estat desenvolupada en el cas binari; aquí, el que es presenta és la seva generalització al cas n-ari. Més endavant s'estudien certs aspectes de les projeccions de la relació sobre un cert espai i el recíproc, l'estudi de cilindres de relacions predeterminades. Una aplicació sobre l'agrupació de les comarques gironines en funció de certes variables borroses es presenta al final del capítol.

L'últim capítol és eminentment pràctic, ja que s'aplica allò estudiat principalment en els capítols 3 i 4 a la classificació dels països de la Unió Europea en funció de determinades característiques borroses. Per tal de fer previsions per a anys venidors s'han utilitzat sèries temporals i xarxes neuronals. S'han emprat diverses mesures i mètodes de clusterització per tal de poder comparar els diversos dendogrames que resulten del procés de clusterització.

Finalment, als annexos es poden consultar les sèries estadístiques utilitzades, la seva extrapolació, els càlculs per a la construcció de les matrius de les relacions borroses, les matrius de mesura i les seves clausures.

Capítol 1

Fonaments

1.1 La lògica borrosa

Els orígens de la lògica borrosa es van fixar el 8 de juny de 1965, data en què es va publicar el famós article de L. A. Zadeh¹: “ Fuzzy Sets ” a la revista *Information and Control* (v. [108]). Com sol passar en les diverses branques científiques, d’altres autors ja havien iniciat aquest discurs científic, com ara Lukaciewicz, precursor de la lògica multiavaluada, i Max Black, un dels primers autors a usar en els seus treballs científics la paraula *vaguetat*.

El paradigma de l’anomenada matemàtica borrosa es basa en el fet d’acceptar diferents graus de certesa per a les proposicions lògiques, és a dir, a l’aplicar els predicats a una col·lecció d’objectes, aquesta no queda dividida en dues classes -els que verifiquen el predicat i els que no el verifiquen- sinó que són permeses altres possibilitats. D’aquí prové el mot *predicat vague*²,

¹L’obra de L. A. Zadeh és immensa. Entre moltes d’altres contribucions ha estat un dels precursors de la *teoria de la possibilitat* (v. [110]), i la molt més recent teoria de la informació borrosa de la granulació (v. [111]).

²Des dels començaments fins als nostres dies, la modelització del terme vaguetat ha estat un dels objectius

que és l'eina principal de treball en la matemàtica borrosa. És el que en llenguatge més col·loquial anomenaríem els *grisos*. Aquest fet indueix a la generalització del concepte de conjunt definit a partir de la seva funció característica al de conjunt borrós, on el rang de la nova funció característica inclou l'anterior (v. [20, 70, 72, 80, 97]). Sota el concepte de conjunt borrós resideix la idea que els elements clau en el pensament humà no són els nombres sinó les etiquetes lingüístiques, les quals permeten que els objectes passin de pertànyer d'una classe a una altra de forma suau i flexible. Amb aquest nou enfocament s'aconsegueix tractar amb prou èxit un dels seus objectius prioritaris: donar les bases del raonament aproximat que utilitza premisses incertes com a instrument per formular el coneixement.

La matemàtica basada en la lògica borrosa ha demostrat gran eficàcia en molts camps aplicats. En el camp del control automàtic de processos el seu èxit ha estat, i és, impressionant (v. [47, 102]). Tot comença a principis dels anys vuitanta al Japó, quan Fuji aplica la lògica borrosa al control d'injecció química per a plantes depuradores d'aigua. El 1987, OMRON desenvolupa els primers controladors borrosos, Bosch anuncia rentadores amb el sistema *eco-fuzzy*, es fabrica un controlador borrós de maniobra per al tren-metro de Sendai al Japó; molts electrodomèstics de Panasonic, Mitsubishi, Sony, Sanyo i Cannon són comercialitzats amb l'etiqueta *fuzzy* com a garantia i modernitat. En l'àmbit més pròpiament científic, gran quantitat d'articles aplicats han estat publicats en revistes especialitzades, com ara a l'aviació civil (v. [96]), a la medicina (v. [107]), a la producció d'acer (v. [12]), als transformadors (v. [14]) i, finalment, a les ciències naturals (v. [1]).

Si en el camp de l'enginyeria i l'automatització la matemàtica borrosa aconseguia fins i tot sorprendre els més optimistes, en l'àmbit teòricopràctic de l'economia i la gestió la seva introducció pels professors Kaufmann i Gil Aluja ha estat tant o més fructífera (v. [31]-[37], [54]-[63]). Després d'aquests treballs que forneixen el contingut teòricopràctic fonamental per tal de fer front

dels fonaments de la matemàtica borrosa (v. [90, 101]).

als reptes importants de la incertesa en els fenòmens socials, s'amplien els objectius introduint els expertons (v. [59, 66]), els grafs neuronals a l'economia (v. [67]) i la teoria del caos borrosa (v. [32]). També en aquesta disciplina la quantitat de treballs publicats en tots els camps és immensa: Tan sols a títol d'exemple, citem: en el camp dels models teòrics (v. [3, 25]), de les finances (v. [9, 10, 38, 39, 98]), de la gestió d'empreses (v. [8, 61, 68, 69]), de l'anàlisi de costos (v. [71]), de la gerència (v. [112]) o del màrqueting (v. [40, 41]).

1.2 Connectives lògiques

La lògica proposicional crisp precisa definir la certesa o falsedat de les noves proposicions, generades a partir de dues predefinides. En la lògica borrosa cal fer el mateix però afegint-hi el grau de certesa. Cal, doncs, definir les valuacions de la *i*, la *o* i les altres connectives lògiques a partir de les valuacions de dues proposicions vagues. Per aquest objectiu s'utilitzen les *t-normes*, que ens defineixen la \wedge i, per tant, la intersecció de subconjunts borrosos; i les *t-conormes*, que ens defineixen la \vee i, per tant, la unió de subconjunts borrosos. Les propietats que se'ls exigeixen són les necessàries per tal que al restringir-les al conjunt $\{0, 1\}$ obtinguem les connectives clàssiques de l'àlgebra proposicional i per tal de poder concatenar el llenguatge (v. [100, 103]). És important assenyalar que no existeix cap trencament fonamental, la lògica clàssica pot ser considerada com un cas particular de la multiavaluada. A partir d'ara, $I = [0, 1]$.

1.2.1 Definicions

t-norma

$t : I \times I \longrightarrow I$ és una *t-norma* si verifica les següents propietats:

1. $\forall x, y, x', y' \in I \mid x \leq x', y \leq y' \implies t(x, y) \leq t(x', y')$ (monotonia)
 2. $\forall x, y \in I \quad t(x, y) = t(y, x)$ (simetria)
 3. $\forall x, y, z \in I \quad t(x, t(y, z)) = t(t(x, y), z)$ (associativa)
 4. $\forall x \in I \quad t(x, 1) = t(1, x) = x$ (element unitari)
- (1.1)

t-conorma

$c : I \times I \longrightarrow I$ és una *t-conorma* si verifica les següents propietats:

1. $\forall x, y, x', y' \in I \mid x \leq x', y \leq y' \implies c(x, y) \leq c(x', y')$ (monotonia)
 2. $\forall x, y \in I \quad c(x, y) = c(y, x)$ (simetria)
 3. $\forall x, y, z \in I \quad c(x, c(y, z)) = c(c(x, y), z)$ (associativa)
 4. $\forall x \in I \quad c(x, 0) = c(0, x) = x$ (element neutre)
- (1.2)

Negació

$n : I \longrightarrow I$ és una *negació* si verifica les següents propietats:

1. $n(0) = 1$ i $n(1) = 0$
 2. $\forall x, y \in I \mid x \leq y \implies n(y) \leq n(x)$
- (1.3)

Si, a més a més, es verifica $n(n(x)) = x$ direm que la negació és *involutiva*. La més usual és $n(x) = 1 - x$, i és la que usem en tots els exemples i aplicacions.

Propietats immediates

$$\begin{aligned}
1. \quad & \forall x \in I \quad t(x, x) \leq x \quad \text{i} \quad x \leq c(x, x) \\
2. \quad & \forall x \in I \quad t(x, 0) = 0 \quad \text{i} \quad c(x, 1) = 1
\end{aligned}
\tag{1.4}$$

Definicions complementàries

Siguin t i c una t-norma i una t-conorma respectivament. Aleshores:

- t és distributiva sobre $c \iff \forall x, y, z \in I \quad t(x, c(y, z)) = c(t(x, y), t(x, z))$
- c és distributiva sobre $t \iff \forall x, y, z \in I \quad c(x, t(y, z)) = t(c(x, y), c(x, z))$
- t és idempotent $\iff \forall x \in I \quad t(x, x) = x$
- c és idempotent $\iff \forall x \in I \quad c(x, x) = x$
- t absorbeix $c \iff \forall x, y \in I \quad t(x, c(x, y)) = x$
- c absorbeix $t \iff \forall x, y \in I \quad c(x, t(x, y)) = x$
- t és una t-norma arquimediana $\iff \forall x \in (0, 1) \quad t(x, x) < x$
- c és una t-conorma arquimediana $\iff \forall x \in (0, 1) \quad c(x, x) > x$
- La parella (t, c) verifica les propietats de Morgan \iff
 $\iff \forall x, y \in I \quad 1 - t(x, y) = c(1 - x, 1 - y) \quad \text{i} \quad 1 - c(x, y) = t(1 - x, 1 - y)$
- t verifica el principi del terç exclòs $\iff \forall x \in I \quad t(x, 1 - x) = 0$
- c verifica el principi de no contradicció $\iff \forall x \in I \quad c(x, 1 - x) = 1$

t-normes i t-conormes associades

Donada una t-norma t , la *t-conorma associada a t* es defineix de la següent manera:

$$c(x, y) = 1 - t(1 - x, 1 - y) \quad (1.5)$$

És immediat comprovar que es verifiquen les propietats de t-conorma. De manera similar es defineix *t-norma associada a c* , essent c una t-conorma.

La importància d'utilitzar t-normes i t-conormes associades prové del fet que si una t-norma verifica el principi del terç exclòs, aleshores la seva t-conorma associada verifica el principi de no contradicció, i viceversa. En efecte, si $t(x, 1 - x) = 0$, aleshores:

$$c(x, 1 - x) = 1 - t(1 - x, x) = 1 - 0 = 1$$

i, per tant, es verifica el principi de no contradicció. El recíproc també és immediat. És per aquesta raó que al llarg de la memòria utilitzarem t-normes i t-conormes associades.

1.2.2 Principals t-normes i t-conormes

La relació de t-normes i t-conormes és molt extensa (v. [76]). Aquí presentem les que considerem més importants, posant un especial èmfasi en les propietats que fan referència a l'ordenació i a la verificació dels principis del terç exclòs i de no contradicció, ja que són força rellevants en els capítols posteriors sobre mesures i clusterització.

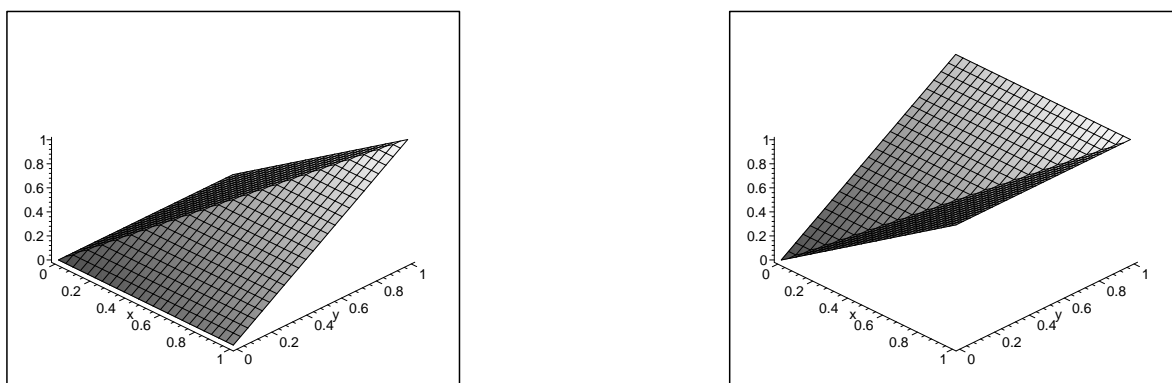
1. Producte dràstic

$$\begin{aligned}
 t_{PD}(x, y) &= \begin{cases} x & y = 1 \\ y & x = 1 \\ 0 & \text{altrament} \end{cases} \\
 c_{PD}(x, y) &= \begin{cases} x & y = 0 \\ y & x = 0 \\ 1 & \text{altrament} \end{cases}
 \end{aligned}
 \tag{1.6}$$

2. Mínim i màxim de Zadeh

$$\begin{aligned}
 t_{min}(x, y) &= \min\{x, y\} \\
 c_{max}(x, y) &= \max\{x, y\}
 \end{aligned}
 \tag{1.7}$$

Figura 1.1: t-norma i t-conorma de Zadeh



3. Producte acotat

$$\begin{aligned}
 t_{PA}(x, y) &= \max\{0, x + y - 1\} \\
 c_{PA}(x, y) &= \min\{1, x + y\}
 \end{aligned}
 \tag{1.8}$$

4. Producte algebraic

$$\begin{aligned}
 t_P(x, y) &= xy \\
 c_P(x, y) &= x + y - xy
 \end{aligned}
 \tag{1.9}$$

Figura 1.2: t-norma i t-conorma del producte acotat

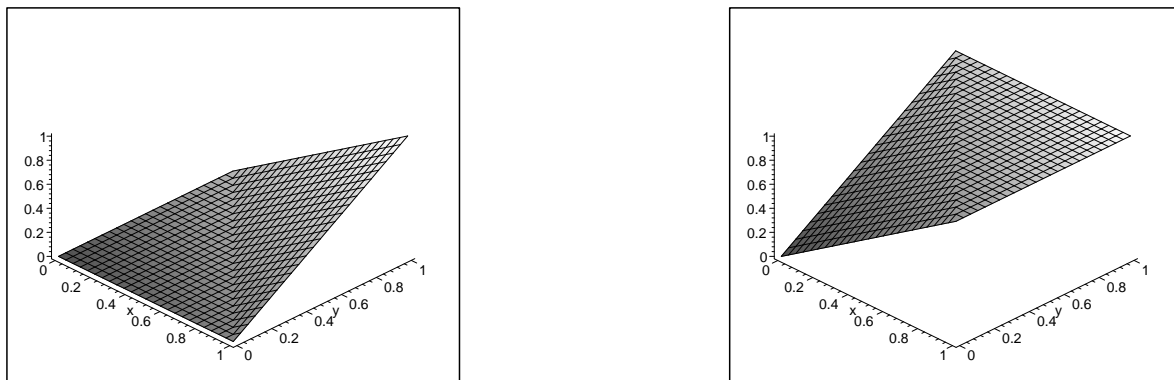
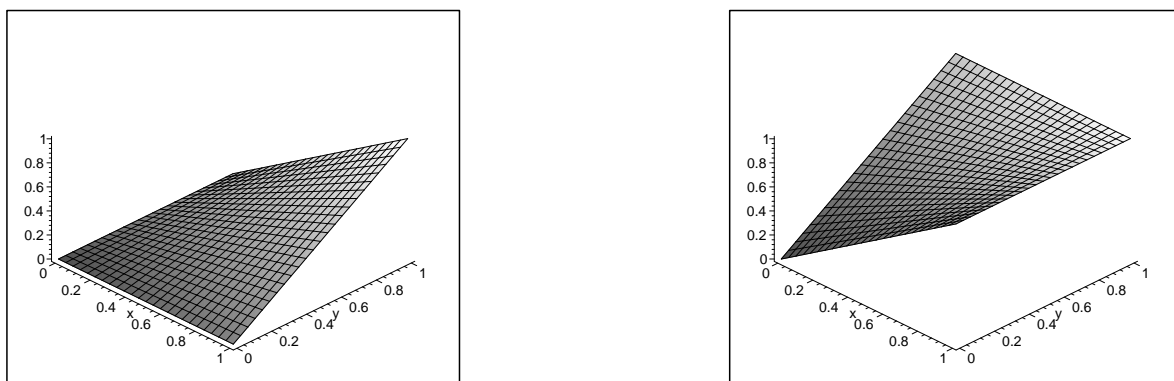


Figura 1.3: t-norma i t-conorma del producte algebraic



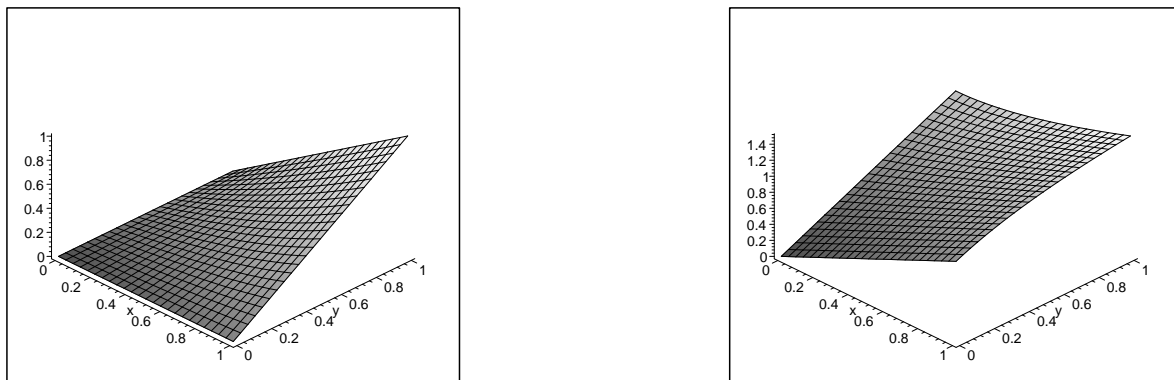
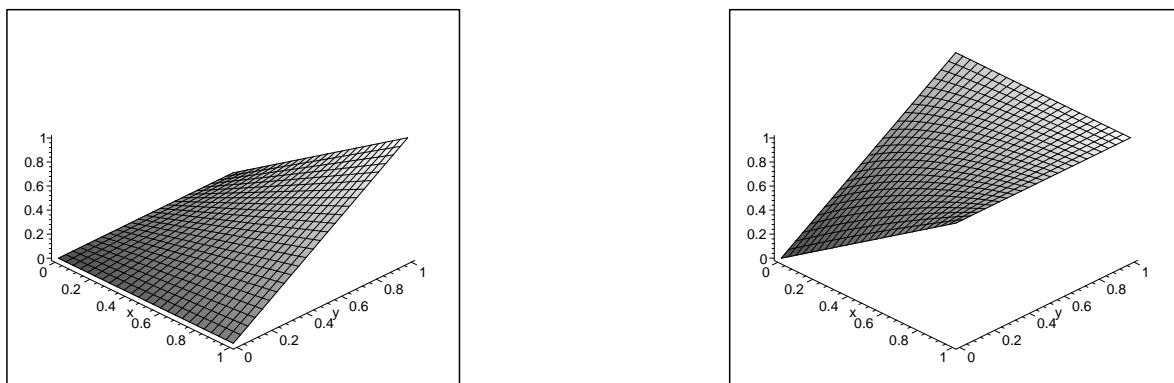
5. Producte d'Einstein

$$\begin{aligned}
 t_{PE}(x, y) &= \frac{xy}{2 - (x + y - xy)} \\
 c_{PE}(x, y) &= \frac{x + y}{1 + xy}
 \end{aligned}
 \tag{1.10}$$

6. Família de Hamacher

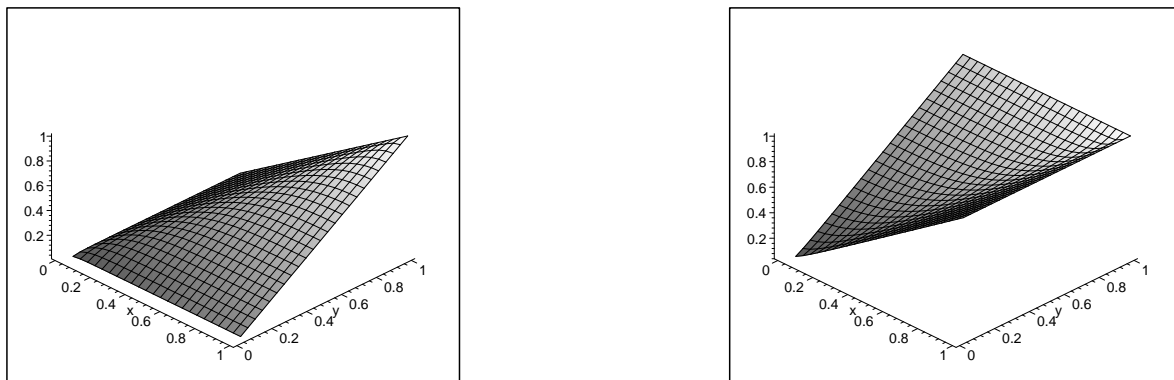
$$\begin{aligned}
 t_{H,\lambda}(x, y) &= \frac{xy}{\lambda + (1 - \lambda)(x + y - xy)} \quad \lambda > 0 \\
 c_{H,\lambda}(x, y) &= \frac{x + y - (2 - \lambda)xy}{1 - (1 - \lambda)xy} \quad \lambda > 0
 \end{aligned}
 \tag{1.11}$$

Figura 1.4: t-norma i t-conorma d'Einstein

Figura 1.5: t-norma i t-conorma de Hamacher per a $\lambda = 3$ 

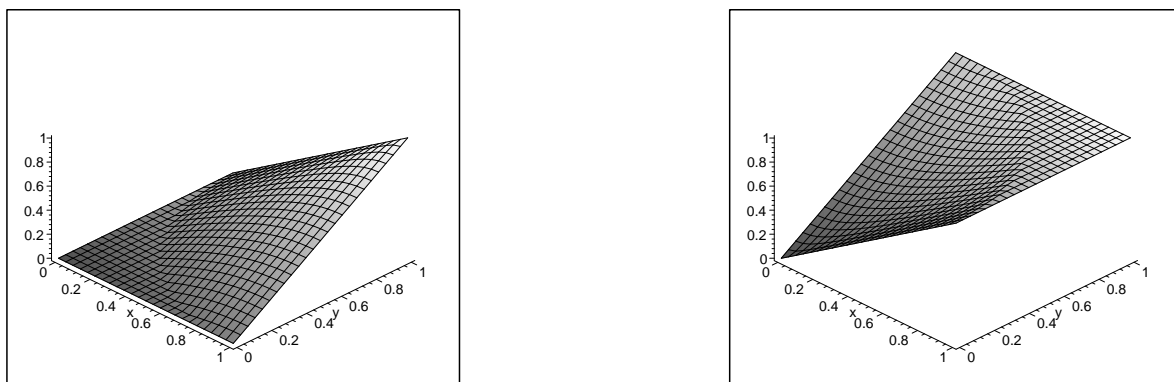
7. Família de Dombi

$$\begin{aligned}
 t_{D,\lambda}(x,y) &= \frac{1}{1 + \left(\left(\frac{1}{x} - 1 \right)^\lambda + \left(\frac{1}{y} - 1 \right)^\lambda \right)^{\frac{1}{\lambda}}} & \lambda > 0 \\
 c_{D,\lambda}(x,y) &= \frac{1}{1 + \left(\left(\frac{1}{x} - 1 \right)^{-\lambda} + \left(\frac{1}{y} - 1 \right)^{-\lambda} \right)^{-\frac{1}{\lambda}}} & \lambda > 0 \\
 t_{D,\lambda}(x,0) = t_{D,\lambda}(0,x) &= 0 \quad \text{i} \quad c_{D,\lambda}(x,0) = c_{D,\lambda}(0,x) = 1
 \end{aligned} \tag{1.12}$$

Figura 1.6: t-norma i t-conorma de Dombi per a $\lambda = 2$ 

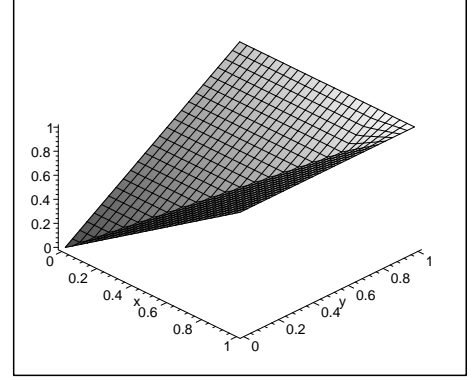
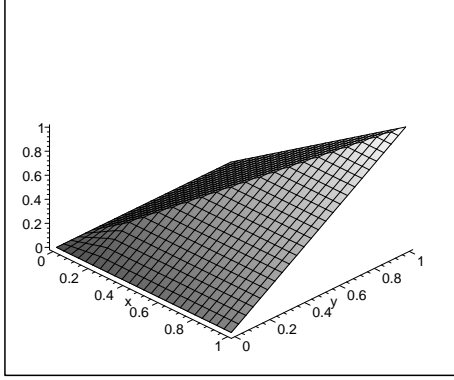
8. Família de Yager

$$\begin{aligned}
 t_{Y,\lambda}(x, y) &= 1 - \min(1, ((1-x)^\lambda + (1-y)^\lambda)^{\frac{1}{\lambda}}) & \lambda \geq 1 \\
 c_{Y,\lambda}(x, y) &= \min(1, (x^\lambda + y^\lambda)^{\frac{1}{\lambda}}) & \lambda \geq 1
 \end{aligned}
 \tag{1.13}$$

Figura 1.7: t-norma i t-conorma de Yager per a $\lambda = 2$ 

9. Família de Dubois i Prade

$$\begin{aligned}
 t_{DP,\lambda}(x, y) &= \frac{xy}{\max\{x, y, \lambda\}} & 0 \leq \lambda \leq 1 \\
 c_{DP,\lambda}(x, y) &= 1 - \frac{(1-x)(1-y)}{\max\{1-x, 1-y, \lambda\}} & 0 \leq \lambda \leq 1
 \end{aligned}
 \tag{1.14}$$

Figura 1.8: t-norma i t-conorma de Dubois i Prade per a $\lambda = 0.2$ 

Propietats immediates

1. t_{PD} és la més petita de totes les t-normes i c_{PD} la més gran de totes les t-conormes.
2. t_{min} és la més gran de totes les t-normes i c_{max} la més petita de totes les t-conormes.
3. t_{PD} i t_{PA} verifiquen el principi del terç exclòs; i, per tant, c_{PD} i c_{PA} verifiquen el principi de no contradicció.
4. t_{min} , t_P i t_{PE} no verifiquen el principi del terç exclòs; i, per tant, c_{max} , c_P i c_{PE} no verifiquen el principi de no contradicció.
5. $t_{H,1} = t_P$, $t_{H,2} = t_{PE}$, $\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} t_{H,\lambda} = t_{PD}$ i $\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} c_{H,\lambda} = c_{PD}$.
6. $\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} t_{D,\lambda} = t_{min}$, $\lim_{\lambda \rightarrow 0} t_{D,\lambda} = t_{PD}$, $\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} c_{D,\lambda} = c_{max}$ i $\lim_{\lambda \rightarrow 0} c_{D,\lambda} = c_{PD}$.
7. $t_{Y,1} = t_{PA}$, $\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} t_{Y,\lambda} = t_{min}$, $\lim_{\lambda \rightarrow 1} t_{Y,\lambda} = t_{PD}$, $c_{Y,1} = c_{PA}$, $\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} c_{Y,\lambda} = c_{max}$ i $\lim_{\lambda \rightarrow 1} c_{Y,\lambda} = t_{PD}$.
8. $t_{DP,0} = t_{min}$, $t_{DP,1} = t_P$, $c_{DP,0} = c_{max}$ i $c_{DP,1} = c_P$.

Les propietats límit es poden consultar a [76]. En les famílies de t-normes que depenen d'un paràmetre, dependent que el límit sigui t_{min} o bé t_{PD} podem conjecturar que la respectiva família

és creixent o decreixent³.

1.2.3 Desigualtats

1.2.3.1 Desigualtats elementals

Es verifica:

$$t_{PD} \leq t_{PA} \leq t_{PE} \leq t_P \leq t_{min} \quad (1.15)$$

La primera desigualtat i l'última són certes perquè són la més petita i la més gran de les t-normes. Per a la segona:

Si $\max\{0, x + y - 1\} = 0$ és trivial. Si $\max\{0, x + y - 1\} = x + y - 1$ tenim:

$$\begin{aligned} x + y - 1 &\leq \frac{xy}{2 - (x + y - xy)} = \frac{xy}{1 + (y - 1)(x - 1)} \iff \\ \iff (x + y - 1)(1 + (y - 1)(x - 1)) &\leq xy \iff (x - 1)(y - 1)(x + y - 2) \leq 0 \end{aligned}$$

La qual cosa és òbvia ja que $x, y \in I$. Per a la tercera:

$$\begin{aligned} t_{PE}(x, y) \leq t_P(x, y) &\iff \frac{xy}{2 - (x + y - xy)} \leq xy \iff \\ \iff 2 - (x + y - xy) &\geq 1 \iff x + y - xy \leq 1 \iff \\ \iff x(1 - y) &\leq 1 - y \quad \text{cert ja que } 0 \leq x \leq 1 \end{aligned}$$

1.2.3.2 Desigualtats sobre famílies parametritzades

Les famílies de Dombi i de Yager tenen en comú factors del tipus $\sqrt[\lambda]{x^\lambda + y^\lambda}$. Per tal de determinar si les anteriors famílies són creixents, decreixents o bé cap de les dues respecte del

³Evidentment, d'entrada només es tracta d'una conjectura ja que una família no té per què ser monòtona.

paràmetre λ , cal prèviament conèixer el comportament de les expressions anteriors al variar el paràmetre del qual depenen. Anem doncs a demostrar una proposició prèvia:

Proposició

$$\forall x, y \in I \quad 0 < \lambda < \mu \quad \Longrightarrow \quad \sqrt[\mu]{x^\mu + y^\mu} \leq \sqrt[\lambda]{x^\lambda + y^\lambda} \quad (1.16)$$

Demostració:

$$\begin{aligned} \sqrt[\mu]{x^\mu + y^\mu} \leq \sqrt[\lambda]{x^\lambda + y^\lambda} &\iff \frac{\sqrt[\mu]{x^\mu + y^\mu}}{\sqrt[\lambda]{x^\lambda + y^\lambda}} = \sqrt[\lambda]{\frac{(x^\mu + y^\mu)^\lambda}{(x^\lambda + y^\lambda)^\mu}} \leq 1 \iff \\ \iff \frac{(x^\mu + y^\mu)^\lambda}{(x^\lambda + y^\lambda)^\mu} &= \frac{x^{\mu\lambda}(1 + (\frac{y}{x})^\mu)^\lambda}{x^{\mu\lambda}(1 + (\frac{y}{x})^\lambda)^\mu} = \frac{(1 + z^\mu)^\lambda}{(1 + z^\lambda)^\mu} = f(z) \leq 1 \quad \forall z \in [0, +\infty) \end{aligned}$$

Vegem que $f(z) \leq 1$:

$$f(0) = 1 \text{ i } \lim_{z \rightarrow +\infty} f(z) = \lim_{z \rightarrow +\infty} \frac{(1 + z^\mu)^\lambda}{(1 + z^\lambda)^\mu} = \lim_{z \rightarrow +\infty} \frac{(1 + \frac{1}{z^\mu})^\lambda}{(1 + \frac{1}{z^\lambda})^\mu} = 1$$

$$f'(z) = \frac{\lambda\mu z^{\lambda-1}(1 + z^\lambda)^{\mu-1}(1 + z^\mu)^{\lambda-1}(z^{\mu-\lambda}(1 + z^\lambda) - (1 + z^\mu))}{(1 + z^\lambda)^{2\mu}} = 0 \iff z = 1$$

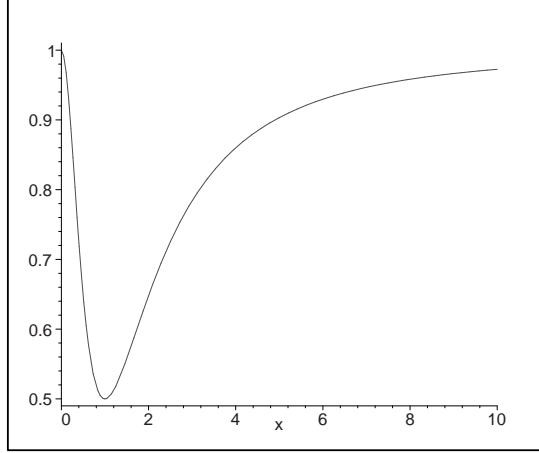
$$f(1) = 2^{\lambda-\mu} < 1$$

Per tant, queda demostrada la proposició. A la figura 1.9 hi ha representada la gràfica d' f .

Si $x, y \in (0, +\infty)$ també és cert ja que el domini d' f és el mateix; per tant:

$$0 < \lambda < \mu \quad \Longrightarrow \quad \sqrt[\mu]{\left(\frac{1}{x}\right)^\mu + \left(\frac{1}{y}\right)^\mu} \leq \sqrt[\lambda]{\left(\frac{1}{x}\right)^\lambda + \left(\frac{1}{y}\right)^\lambda}$$

$$0 < \lambda < \mu \quad \Longrightarrow \quad \sqrt[\mu]{(1-x)^\mu + (1-y)^\mu} \leq \sqrt[\lambda]{(1-x)^\lambda + (1-y)^\lambda}$$

Figura 1.9: Gràfica de la funció $f(z)$ 

Proposició

1. $\lambda < \mu \implies t_{H,\lambda} \geq t_{H,\mu}$
 2. $\lambda < \mu \implies t_{Y,\lambda} \leq t_{Y,\mu}$
 3. $\lambda < \mu \implies t_{D,\lambda} \leq t_{D,\mu}$
 4. $\lambda < \mu \implies t_{DP,\lambda} \geq t_{DP,\mu}$
- (1.17)

La segona i la tercera són immediates a partir de la proposició anterior, i la quarta també ho és a partir de les propietats de la funció max. Anem a demostrar la primera:

$$\begin{aligned}
 & t_{H,\lambda}(x, y) \geq t_{H,\mu}(x, y) \iff \\
 \iff & \frac{xy}{\lambda + (1 - \lambda)(x + y - xy)} \geq \frac{xy}{\mu + (1 - \mu)(x + y - xy)} \iff \\
 \iff & \lambda + (1 - \lambda)(x + y - xy) \leq \mu + (1 - \mu)(x + y - xy) \iff \\
 \iff & (1 - \lambda)(x + y - xy) - (1 - \mu)(x + y - xy) \leq \mu - \lambda \iff \\
 \iff & (\mu - \lambda)(x + y - xy) \leq \mu - \lambda \iff
 \end{aligned}$$

$$\iff x + y - xy \leq 1 \iff (1 - y)(x - 1) \leq 0$$

que és trivial a causa del domini de les t -normes.

1.2.4 Generadors additius

Moltes d'aquestes t -normes estan generades per funcions d'una variable anomenades *generadors additius* (v. [82]), és a dir, es verifica:

$$t(x, y) = f^{(-1)}(f(x) + f(y)) \quad (1.18)$$

on $f : [0, 1] \rightarrow [0, +\infty)$ és estrictament decreixent i continua, $f^{(-1)}$ representa la pseudoinversa d' f i $f(1) = 0$. Si f és exhaustiva, no està definit $f(0)$ i, simbòlicament, podem definir $f(0) = +\infty$ o bé $t(x, 0) = t(0, x) = 0$. Suposant que $f([0, 1]) = [0, a]$, la pseudoinversa ve definida per:

$$f^{(-1)}(x) = \begin{cases} f^{-1}(x) & x \in [0, a] \\ 0 & x \in (a, +\infty) \end{cases}$$

Observacions

- En el cas que f sigui exhaustiva (i per tant bijectiva) es verifica que $f^{(-1)} = f^{-1}$.
- Si f és un generador additiu, aleshores $g = kf$ amb $k > 0$ també ho és. Efectivament, si $f([0, 1]) = [0, a] \implies g([0, 1]) = [0, ka]$ i, per tant, el conjunt de valors pels quals $f(x) + f(y) > a$ coincideix amb el conjunt de valors pels quals $g(x) + g(y) > ka$. Per altra banda, $g = kf \implies g^{-1}(x) = f^{-1}\left(\frac{x}{k}\right)$ d'on es dedueix:

$$g^{-1}(g(x) + g(y)) = g^{-1}(kf(x) + kf(y)) = f^{-1}\left(\frac{k(f(x) + f(y))}{k}\right) = f^{-1}(f(x) + f(y)).$$

Això ens permet, en el cas que f no sigui exhaustiva, de tractar funcions amb un recorregut predeterminat el més senzill dels quals és: $f([0, 1]) = [0, 1]$, simplement escollint $k = \frac{1}{a}$.

- Com que f és estrictament decreixent, f^{-1} també ho és i $f^{(-1)}$ és decreixent.

Anem a comprovar que, efectivament, una funció t definida com a (1.18) verifica les propietats de t-norma:

1. Monotonia

$$\forall x, y, x', y' \quad | \quad x \leq x', y \leq y'$$

$$\begin{aligned} f(x) + f(y) \geq f(x') + f(y') &\implies t(x, y) = f^{(-1)}(f(x) + f(y)) \leq \\ &\leq f^{(-1)}(f(x') + f(y')) = t(x', y') \end{aligned}$$

2. Simetria

Evident a partir de la definició de t .

3. Associativa

- (a) Suposem que $f(x) + f(y) \leq 1$ i $f(y) + f(z) \leq 1$, aleshores en aquest domini $f^{(-1)} = f^{-1}$ i per tant:

$$\begin{aligned} t(t(x, y), z) &= f^{(-1)}(f(f^{(-1)}(f(x) + f(y))) + f(z)) = \\ &= f^{-1}(f(f^{-1}(f(x) + f(y))) + f(z)) = f^{-1}(f(x) + f(y) + f(z)) = \\ &= f^{-1}(f(x) + f(f^{-1}(f(y) + f(z)))) = f^{(-1)}(f(x) + f(f^{(-1)}(f(y) + f(z)))) = \\ &= t(x, t(y, z)) \end{aligned}$$

- (b) Suposem que $f(x) + f(y) > 1$, aleshores:

$$\begin{aligned} f^{(-1)}(f(x) + f(y)) &= 0 \implies f(f^{(-1)}(f(x) + f(y))) + f(z) = \\ &= 1 + f(z) \geq 1 \implies t(t(x, y), z) = f^{(-1)}(f(f^{(-1)}(f(x) + f(y))) + f(z)) = 0 \end{aligned}$$

Per al càlcul de $t(x, t(y, z)) = f^{(-1)}(f(x) + f^{(-1)}(f(y) + f(z)))$ s'han de tornar a distingir dos casos:

- i. Si $f(x) + f(y) \geq 1 \implies f^{(-1)}(f(y) + f(z)) = 0 \implies$
 $\implies f(f^{(-1)}(f(y) + f(z))) = 1 \implies$
 $\implies f^{(-1)}(f(x) + f(f^{(-1)}(f(y) + f(z)))) = t(x, t(y, z)) = 0$
- ii. Si $f(x) + f(y) < 1 \implies f^{(-1)}(f(y) + f(z)) = f^{-1}(f(y) + f(z)) \implies$
 $\implies t(x, t(y, z)) = f^{(-1)}(f(x) + f(f^{-1}(f(y) + f(z)))) =$
 $= f^{-1}(f(x) + f(y) + f(z)) = 0$ ja que $f(x) + f(y) > 1$

4. Element unitari

$$t(x, 1) = f^{(-1)}(f(x) + f(1)) = f^{-1}(f(x)) = x \text{ ja que } f(1) = 0.$$

1.2.4.1 Anàlisi del principi del terç exclòs

Estem interessats a determinar les condicions en què una t -norma verifica el principi del terç exclòs; és a dir, en quines condicions $\forall x \in [0, 1] \quad t(x, 1 - x) = 0$. Ho farem exclusivament en el cas que la t -norma vingui generada per un generador additiu.

Cas A: f exhaustiva

En aquest cas, l'única possibilitat que $0 = f^{-1}(f(x) + f(y))$ és que $f(x) + f(y) = +\infty$ d'on $x = 0$ o $y = 0$ i, per tant, no pot verificar el principi del terç exclòs.

Cas B: f no exhaustiva

Com ja hem comentat en l'apartat d'obsevacions, centrem el nostre estudi per a funcions f decreixents tals que $f([0, 1]) = [0, 1]$. Aquest cas també el subdividim en diferents subcasos:

1. Funcions inferiors a la funció $y = 1 - x$

$$\forall x \in I \quad f(x) < 1 - x \implies f(1 - x) < 1 - (1 - x) = x \implies$$

$$\begin{aligned}
&\implies f(x) + f(1-x) < 1 - x + x = 1 \implies \\
&\implies 0 = t(x, 1-x) = f^{(-1)}(f(x) + f(1-x)) = f^{-1}(f(x) + f(1-x)) \implies \\
&\implies 1 = f(0) = f(x) + f(1-x) < 1
\end{aligned}$$

Per tant, arribem a una contradicció. No existeixen t-normes d'aquestes característiques que verifiquin el principi del terç exclòs. En particular, si f és còncava en tot el seu domini, la corresponent t-norma no pot verificar el principi del terç exclòs.

2. Funcions superiors a la funció $y = 1 - x$

$$\begin{aligned}
\forall x \in I \quad f(x) > 1 - x &\implies f(1-x) > 1 - (1-x) = x \implies \\
&\implies f(x) + f(1-x) > 1 - x + x = 1 \implies \\
&\implies t(x, 1-x) = f^{(-1)}(f(x) + f(1-x)) = 0
\end{aligned}$$

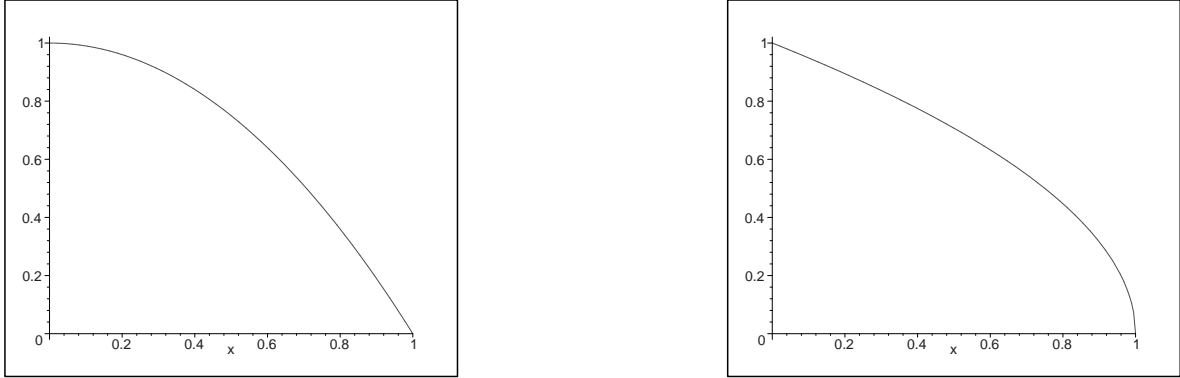
I per tant sempre verifica el principi del terç exclòs. En particular, si la funció f és convexa en tot el domini, es verifica la condició anterior. Vegem un exemple:

$$\text{Sigui } f(x) = 1 - x^2 \implies f^{-1}(x) = \sqrt{1-x}$$

$$\begin{aligned}
t_1(x, y) &= f^{(-1)}(f(x) + f(y)) = f^{(-1)}(f(x) + f(y)) = f^{(-1)}(2 - (x^2 + y^2)) = \\
&= \begin{cases} 0 & 2 - (x^2 + y^2) \geq 1 \\ f^{-1}(2 - (x^2 + y^2)) & 2 - (x^2 + y^2) \leq 1 \end{cases} \\
&= \begin{cases} 0 & x^2 + y^2 \leq 1 \\ \sqrt{x^2 + y^2 - 1} & x^2 + y^2 \geq 1 \end{cases}
\end{aligned}$$

Com que $x, y \in I$ aleshores $x^2 + (1-x)^2 \leq x + 1 - x = 1$ d'on:

$$\forall x \in I \quad t_1(x, 1-x) = 0$$

Figura 1.10: Gràfiques de les funcions f i f^{-1} en el cas 2.

3. Funcions que tallen a la funció $y = 1 - x$

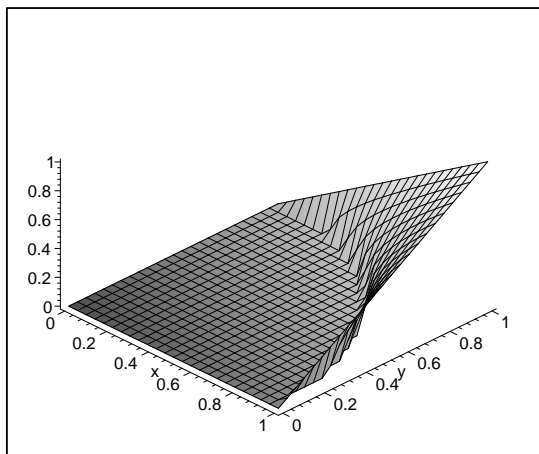
(a) Suposem $\exists x_0 < \frac{1}{2} \mid f(x_0) = 1 - x_0$, i que $\forall x \in [0, x_0]$ la funció és superior a $y = 1 - x$ i $\forall x \in [x_0, 1]$ és inferior a $y = 1 - x$. Aleshores $\exists x_1 \mid x_0 < x_1 < \frac{1}{2} \mid f(x_1) < 1 - x_1$ i $f(1 - x_1) < 1 - (1 - x_1) = x_1$ ja que $1 - x_1 > \frac{1}{2}$, d'on $f(x_1) + f(1 - x_1) < 1$ i per tant si $0 = t(x_1, 1 - x_1) = f^{-1}(f(x_1) + f(1 - x_1))$ aleshores $1 = f(0) = f(x_1) + f(1 - x_1) < 1$ i arribem a contradicció. Per tant, si la funció comença essent superior a $y = 1 - x$ forçosament no la pot tallar abans del punt 0.5. De forma recíproca, si comença essent inferior a $y = 1 - x$ no la pot tallar per primera vegada després del punt 0.5.

(b) Anem a analitzar el cas en el qual $\forall x \in I \quad 1 = f(x) + f(1 - x)$ d'on $f(\frac{1}{2}) = \frac{1}{2}$ i per tant és un punt de tall amb la recta $y = 1 - x$. Derivant, obtenim:

$f'(x) - f'(1 - x) = 0$ d'on $f''(x) + f''(1 - x) = 0$ i per tant $f''(\frac{1}{2}) = 0$. Com que la funció f és estrictament decreixent, deduïm que el punt $x = \frac{1}{2}$ és un punt d'inflexió.

Vegem un parell d'exemples on amb els subíndexs de les t-normes volem indicar el grau del polinomi de la funció generadora:

- i. El cas més simple és $f''(x) = 0$, d'on $f'(x) = -A \quad A > 0$. Imposant les condicions $f(0) = 1$ i $f(1) = 0$ obtenim la funció $f(x) = 1 - x$ que té per inversa a ella mateixa: $f^{-1}(x) = 1 - x$. Com que:

Figura 1.11: Gràfica de la t-norma t_1 

$$f^{-1}(f(x) + f(y)) = 1 - (1 - x + 1 - y) = x + y - 1$$

la t-norma generada és:

$$t_1(x, y) = \begin{cases} x + y - 1 & x + y \geq 1 \\ 0 & x + y < 1 \end{cases}$$

Per tant, $t_1(x, y) = t_{PA}(x, y)$. Hem generat la t-norma del producte acotat.

ii. El següent cas més simple és escollir $f''(x)$ com un polinomi de primer grau:

$f''(x) = -A(x - \frac{1}{2})$. Imposant les condicions descrites anteriorment i operant,

arribem a l'expressió de la funció i de la seva inversa:

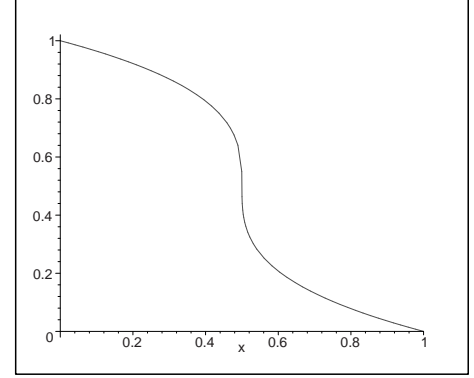
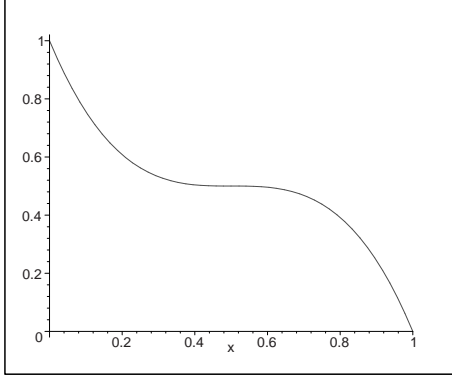
$$f(x) = 4\left(\left(\frac{1}{2}\right)^3 - \left(x - \frac{1}{2}\right)^3\right)$$

$$f^{-1}(x) = \frac{1}{2} + \sqrt[3]{\frac{1}{8} - \frac{x}{4}}$$

Finalment, obtenim l'expressió de la t-norma:

$$t_3(x, y) = \max\left\{0, \frac{1}{2} + \sqrt[3]{\left(x - \frac{1}{2}\right)^3 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^3 - \frac{1}{8}}\right\}$$

El procediment anterior es pot generalitzar canviant l'exponent 3 a l'expressió anterior per qualsevol altre nombre senar. És significatiu que per $n = 1$ obtenim la

Figura 1.12: Gràfiques de les funcions f i f^{-1} en el cas 3.

t-norma del producte acotat (v. 1.8). Els dos casos estudiats no engloben totes les possibilitats, però són prou generals com per a poder generar famílies de t-normes que verifiquin el principi del terç exclòs.

1.2.4.2 Família generalitzada de t_{PA}

De forma totalment similar a l'exemple anterior, obtenim la següent família de t-normes (amb les seves corresponents t-conormes associades), on n és un nombre senar. Siguin f i f^{-1} la funció generadora i la seva inversa definides per:

$$f(x) = 2^{n-1} \left(\left(\frac{1}{2}\right)^n - \left(x - \frac{1}{2}\right)^n \right)$$

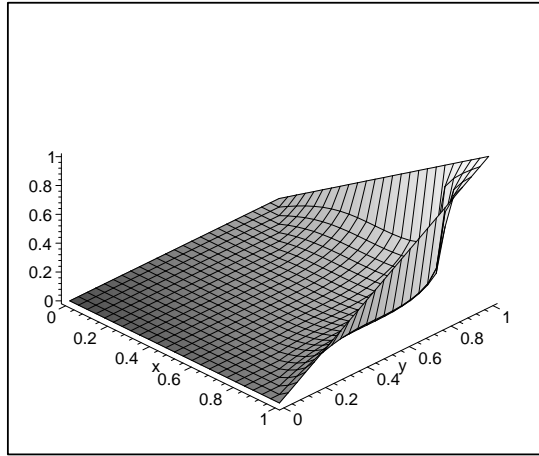
$$f^{-1}(x) = \frac{1}{2} + \sqrt[n]{\left(\frac{1}{2}\right)^n - \frac{x}{2^{n-1}}}$$

Operant de forma anàloga als casos $n = 1$ i $n = 3$ obtenim la següent família de t-normes:

$$t_n(x, y) = \max \left\{ 0, \frac{1}{2} + \sqrt[n]{\left(x - \frac{1}{2}\right)^n + \left(y - \frac{1}{2}\right)^n - \left(\frac{1}{2}\right)^n} \right\} \quad (1.19)$$

i les seves t-conormes associades:

$$c_n(x, y) = \min \left\{ 1, \frac{1}{2} - \sqrt[n]{\left(\frac{1}{2} - x\right)^n + \left(\frac{1}{2} - y\right)^n - \left(\frac{1}{2}\right)^n} \right\} \quad (1.20)$$

Figura 1.13: Gràfica de la t-norma t_3 

Les anteriors famílies verifiquen les lleis de Morgan i, per tal de comprovar-ho, primer hem d'analitzar - fixat un n - per a quins (x, y) es verifica per $t_n(x, y) > 0$ i per a quins es verifica $c_n(x, y) < 1$.

$$\begin{aligned}
 t_n(x, y) > 0 &\iff \frac{1}{2} + \sqrt[n]{\left(x - \frac{1}{2}\right)^n + \left(y - \frac{1}{2}\right)^n} - \left(\frac{1}{2}\right)^n > 0 \iff \\
 \left(x - \frac{1}{2}\right)^n + \left(y - \frac{1}{2}\right)^n - \left(\frac{1}{2}\right)^n &> -\frac{1}{2^n} \iff \left(x - \frac{1}{2}\right)^n + \left(y - \frac{1}{2}\right)^n > 0 \iff \\
 \left(x - \frac{1}{2}\right)^n &> -\left(y - \frac{1}{2}\right)^n \iff x + y > 1
 \end{aligned}$$

De forma equivalent es demostra:

$$c(x, y) < 1 \iff x + y < 1$$

Les dues condicions són incompatibles.

$$\text{Si } t(x, y) = 0 \implies 1 - t(x, y) = 1.$$

$$\text{Per altra banda, si } t(x, y) = 0 \implies x + y < 1 \implies$$

$$\implies 1 - x + 1 - y > 1 \implies c(1 - x, 1 - y) = 1$$

Per a l'altra llei de Morgan es fa de la mateixa manera. Malauradament, no es verifica que siguin distributives unes de les altres. Comprovem-ho amb un contraexemple:

Suposem que $x = 0.6$, $y = 0.3$ i $z = 0.2$. Prenem com a valor d' n , $n = 1$, aleshores la t-norma i la t-conorma són les del producte acotat. Utilitzant les fórmules (1.8) obtenim:

$$t_{PA}(x, c_{PA}(y, z)) = 0.1; \text{ i, en canvi, } c_{PA}(t_{PA}(x, y), t_{PA}(x, z)) = 0.$$

1.3 Subconjunts borrosos

En la teoria de conjunts crisp la definició d'intersecció, unió i complementari està absolutament lligada amb les connectives de la lògica proposicional. Les propietats de l'Àlgebra de Boole dels conjunts es dedueixen de forma immediata de les propietats de la lògica proposicional. Al generalitzar la lògica proposicional a la lògica borrosa ens canvien les propietats de les operacions entre conjunts borrosos, les quals esdevenen més febles, de la mateixa manera com succeeix amb les t-normes, t-conormes i negacions. La definició de subconjunt crisp a partir de la funció característica de domini en el conjunt referencial E i recorregut en $\{0, 1\}$ queda generalitzada als subconjunts borrosos prenent com a recorregut el conjunt $[0, 1]$. Anem a formalitzar-ho matemàticament.

1.3.1 Funció de pertinença

Sigui E un conjunt referencial. Un subconjunt borrós \tilde{A} ve definit per una aplicació:

$$\mu_{\tilde{A}} : E \rightarrow [0, 1] \tag{1.21}$$

anomenada *funció de pertinença*, on $\mu_{\tilde{A}}(x)$ indica el grau de pertinença de l'element x al subconjunt \tilde{A} . En el cas que E sigui finit $E = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$, el subconjunt borrós se sol representar de la forma:

$$\tilde{A} = \{(a_1, \mu_{\tilde{A}}(a_1)), (a_2, \mu_{\tilde{A}}(a_2)), \dots, (a_n, \mu_{\tilde{A}}(a_n))\}, \text{ o bé } \tilde{A} = \sum_{i=1}^n \mu_{\tilde{A}}(a_i)/a_i.$$

Si el conjunt E és numerable no finit, el sumatori esdevé indexat fins a ∞ , i en el cas continu s'utilitza el símbol integral.

1.3.2 Operacions entre subconjunts borrosos

Sigui $\tilde{\wp}(E)$ el conjunt de tots els subconjunts borrosos⁴ d' E , és a dir, $\tilde{\wp}(E) = \{\tilde{A} : \tilde{A} \subset E\}$.

Suposem que $\tilde{A}, \tilde{B} \in \tilde{\wp}(E)$, amb funcions de pertinença $\mu_{\tilde{A}}$ i $\mu_{\tilde{B}}$; t , c i n una t-norma, una t-conorma i una negació respectivament.

Intersecció, unió i complementari

Es defineixen la intersecció i la unió d' \tilde{A} i \tilde{B} com els subconjunts borrosos $\tilde{A} \cap \tilde{B}$ i $\tilde{A} \cup \tilde{B}$, i el complementari d' \tilde{A} com \tilde{A}^c tals que tenen per funció de pertinença:

$$\begin{aligned} \mu_{\tilde{A} \cap \tilde{B}}(x) &= t(\mu_{\tilde{A}}(x), \mu_{\tilde{B}}(x)) \\ \mu_{\tilde{A} \cup \tilde{B}}(x) &= c(\mu_{\tilde{A}}(x), \mu_{\tilde{B}}(x)) \\ \mu_{\tilde{A}^c}(x) &= n(\mu_{\tilde{A}}(x)) \end{aligned} \tag{1.22}$$

De la mateixa manera que en el cas de la lògica borrosa, l'estructura algebraica $(\tilde{\wp}(E), \cap, \cup)$ és més feble que la corresponent dels conjunts crisp. En aquest cas $\tilde{A} \cap \tilde{A} = \tilde{A}$ i $\tilde{A} \cup \tilde{A} = \tilde{A}$

⁴En l'àmbit crisp, el conjunt de les parts d' E és designat per $\wp(E)$, i està constituït pels subconjunts d' E , és a dir: $\wp(E) = \{A : A \subset E\}$.

només es verifiquen quan t i c són les del mínim i el màxim de Zadeh i només amb elles obtenim una estructura de reticle; però, en canvi, per a aquestes t-norma i t-conorma no es verifica $\tilde{A} \cap \tilde{A}^c = \emptyset$ ni $\tilde{A} \cup \tilde{A}^c = E$ i, per tant, no verifiquen ni el principi del terç exclòs ni el principi de no contradicció.

Inclusió

$$\tilde{A} \subset \tilde{B} \iff \forall x \in E \quad \mu_{\tilde{A}}(x) \leq \mu_{\tilde{B}}(x)$$

1.3.3 Cardinal

El cardinal d'un subconjunt crisp és el nombre dels seus elements, i coincideix amb la suma de totes les imatges de la funció característica. És aquesta segona definició la que fem servir per tal de generalitzar el concepte de cardinal als subconjunts borrosos. Suposem que E és un conjunt amb $|E| = n$ -on $||$ representa el cardinal- i \tilde{A} un subconjunt borrós d'aquest referencial. Aleshores⁵:

$$\text{card}(\tilde{A}) = |\tilde{A}| = \sum_{x \in E} \mu_{\tilde{A}}(x) \quad (1.23)$$

Propietats

1. $|\tilde{A} \cap \tilde{B}| \leq |\tilde{A}| \leq |\tilde{A} \cup \tilde{B}|$
2. $|\tilde{A} \cap \tilde{B}| \leq \sum_{x \in E} \min(\mu_{\tilde{A}}(x), \mu_{\tilde{B}}(x))$
3. $|\tilde{A} \cup \tilde{B}| \geq \sum_{x \in E} \max(\mu_{\tilde{A}}(x), \mu_{\tilde{B}}(x))$
4. $|\tilde{A} \cap \tilde{A}^c| \leq \sum_{x \in E} \min(\mu_{\tilde{A}}(x), 1 - \mu_{\tilde{A}}(x)) \leq \frac{n}{2}$

⁵Evidentment, perquè aquesta definició tingui sentit cal que E sigui finit, o bé que si és numerable no finit la sèrie sigui convergent.

$$5. |\tilde{A} \cup \tilde{A}^c| \geq \sum_{x \in E} \max(\mu_{\tilde{A}}(x), 1 - \mu_{\tilde{A}}(x)) \geq \frac{n}{2}$$

$$6. \text{ Si } t \text{ verifica el principi del terç exclòs, aleshores } |\tilde{A} \cap \tilde{A}^c| = 0$$

$$7. \text{ Si } c \text{ verifica el principi de no contradicció, aleshores } |\tilde{A} \cup \tilde{A}^c| = n$$

Totes elles són fàcilment deduïbles a partir de les definicions i de les propietats de les t-normes i de les t-conormes.

Capítol 2

Relacions borroses

2.1 Introducció

Les relacions borroses són l'eina fonamental en el camp genèric de la teoria de la decisió borrosa (v. [4, 93]). Els conceptes i resultats que desenvolupem al començament d'aquest capítol constitueixen el marc teòric comú de totes les disciplines integrades en la teoria de la decisió com ara la teoria de la classificació i de l'agrupació, que estudiem en els capítols 4 i 5, però també són aplicables a d'altres branques, com per exemple la teoria de l'assignació i de l'ordenació, en les quals juguen un paper determinant les relacions d'ordre borroses (v. [73, 109]). Més endavant, però, ens concentrem en l'estudi de les relacions d'equivalència borroses ja que, dintre d'aquest àmbit tan general, aquest tipus de relacions borroses són fonamentals en l'estudi en la teoria de la classificació, que desenvolupem en el capítol 4.

2.1.1 Relació borrosa

Siguin A_1, A_2, \dots, A_n conjunts críps. Una relació borrosa \tilde{R} en A_1, A_2, \dots, A_n és un subconjunt borrós en $A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n$ ¹ amb funció de pertinença²:

$$\mu_{\tilde{R}} : A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n \rightarrow [0, 1] \quad (2.1)$$

El valor $\mu_{\tilde{R}}(a_1, a_2, \dots, a_n)$ ens indica el grau en què els elements a_1, a_2, \dots, a_n estan relacionats.

Quan $n = 2$ s'anomena relació binària, per a $n = 3$ relació ternària, per a $n = 4$ relació quaternària, i així successivament. En general, parlem de relacions borroses n -àries. Tot i que en la definició no cal imposar la condició de finitud per als conjunts A_i , pel caràcter dels temes tractats posteriorment sempre considerarem que els conjunts que intervenen són finits i que el seu nombre també és finit.

Són diverses les formes per representar una relació binària. Les més conegudes són les represen-

¹De fet, aquesta definició és un cas particular d'una definició més general, en la qual la relació borrosa està definida entre n conjunts borrosos i no entre n conjunts críps. En aquest cas, cal imposar que el valor de la funció de pertinença en la n -pla d'elements sigui menor o igual que el mínim de les n funcions de pertinença que defineixen els n subconjunts borrosos en els n elements en qüestió (v. [80]).

²Aquesta definició és una generalització de les relacions en conjunts críps en els quals una sèrie d'elements estan relacionats o no ho estan, sense haver-hi la possibilitat de diferents graus de relació, la qual cosa equival a definir una funció:

$$\mu_R : A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n \rightarrow \{0, 1\}$$

de forma que:

$$a_1, a_2, \dots, a_n \text{ estan relacionats} \iff (a_1, a_2, \dots, a_n) \in R \iff \mu_R(a_1, a_2, \dots, a_n) = 1$$

$$a_1, a_2, \dots, a_n \text{ no estan relacionats} \iff (a_1, a_2, \dots, a_n) \notin R \iff \mu_R(a_1, a_2, \dots, a_n) = 0$$

En el cas que ens ocupa, el rang dels possibles valors esdevé tot l'interval $[0, 1]$ en lloc, únicament, de la seva frontera.

tacions matricial, sagital, en forma de graf i en forma de taula. La representació sagital és la típica representació de correspondències entre conjunts, afegint a sobre de cada fletxa el valor de la funció de pertinença que correspongui; si es fa mitjançant una taula en lloc de fer-ho amb diagrames, obtenim la representació en forma de taula. La representació mitjançant un graf és l'habitual dels grafs, però també afegint-hi el valor de la funció de pertinença corresponent a cada fletxa. La més utilitzada, però, és la representació matricial. En el cas que la relació sigui binària i $A_1 = \{a_{11}, a_{12} \dots a_{1n_1}\}$, $A_2 = \{a_{21}, a_{22} \dots a_{2n_2}\}$, els valors de la funció de pertinença els podem escriure en una matriu $A = (\alpha_{ij})$ de dimensions $n_1 \times n_2$, de forma que $\mu_{\tilde{R}}(a_{1i}, a_{2j}) = \alpha_{ij}$.

$$\begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1n_2} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2n_2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{n_11} & \alpha_{n_12} & \dots & \alpha_{n_1n_2} \end{pmatrix} \quad (2.2)$$

Com en el cas de funcions reals de més de dues variables reals, es fa molt difícil de trobar una representació adequada per a relacions borroses ternàries o n -àries. La més usual és una generalització de la matricial en la qual es formen matrius de matrius per representar els hipercubs que defineixen la relació borrosa.

2.1.2 Relacions n -àries

El fet que un problema depengui de diverses variables sol provocar la pregunta de què succeiria si el nombre de variables disminuís o s'incrementés. En el nostre cas, el que volem determinar és de quina forma queda modificat l'hipercub per la sortida o l'entrada de noves variables. Els objectes matemàtics necessaris per a l'estudi d'aquest problema són les projeccions, en cas de disminuir les variables; i les extensions cilíndriques, en cas d'augmentar-les. A les accions de disminuir i augmentar les variables les anomenarem projectar i estendre una determinada relació n -ària.

2.1.2.1 Projectió

Sigui $\{A_i\}_{i \in I}$ una família de conjunts amb $I = \{1, 2, \dots, n\} \subset \mathbb{N}$ i \tilde{R} una relació borrosa en $A_1 \times \dots \times A_n = \bigotimes_{i \in I} A_i$. Sigui $J \subset I$, aleshores la projecció de \tilde{R} en $\bigotimes_{i \in I} A_i$ sobre $\bigotimes_{i \in J} A_i$ i que denotarem per $\tilde{R} \downarrow \bigotimes_{i \in J} A_i = Y$ ve definida per:

$$\mu_{\tilde{R} \downarrow Y}(y) = \max_{x > y} \mu_{\tilde{R}}(x) \quad (2.3)$$

on $x = (x_i)_{i \in I}$, $y = (y_j)_{j \in J}$ i $x > y \Leftrightarrow x_j = y_j \quad \forall j \in J$

2.1.2.2 Extensió cilíndrica

Sigui $\{A_i\}_{i \in I}$ una família de conjunts amb $I = \{1, 2, \dots, n\} \subset \mathbb{N}$ i \tilde{R} una relació borrosa en $\bigotimes_{i \in J} A_i = Y$ i $J \subset I$. L'extensió cilíndrica $\tilde{R} \uparrow X - Y$ de \tilde{R} en $A_1 \times \dots \times A_n = \bigotimes_{i \in I} A_i = X$ es defineix com:

$$\mu_{\tilde{R} \uparrow X - Y}(x) = \mu_{\tilde{R}}(y) \quad \text{amb } y \text{ tal que } y < x \quad (2.4)$$

Propietats

Siguin $I, J \subset \mathbb{N}$ finits, $J \subset I$, $\bigotimes_{i \in I} A_i = X$ i $\bigotimes_{i \in J} A_i = Y$.

Per tal de relacionar les projeccions amb els cilindres observem que si \tilde{R} és una relació borrosa en X , aleshores:

$$\mu_{(\tilde{R} \downarrow Y) \uparrow (X - Y)}(x_0) = \mu_{\tilde{R} \downarrow Y}(y) = \max_{x > y, y < x_0} \mu_{\tilde{R}}(x) = \max_{x_j = x_0, j \in J} \mu_{\tilde{R}}(x) \geq \mu_{\tilde{R}}(x_0) \quad y < x_0 \quad (2.5)$$

Per altra banda, si \tilde{R} és una relació en Y , aleshores:

$$\mu_{(\tilde{R}\uparrow_{X-Y})\downarrow_Y}(y) = \mu_{\tilde{R}}(y) \quad (2.6)$$

La segona propietat és menys rellevant que la primera donat que el valor de la funció de pertinença no canvia.

2.2 Relacions binàries

2.2.1 Introducció

Una relació binària és una relació 2-ària, és a dir, una relació entre dos conjunts. Per tal de simplificar la notació no utilitzarem subíndexs, i anomenarem A i B els dos conjunts. L'hipercub de la matriu es redueix a una matriu 2×2 tal i com està definida a (2.2). El conjunt dels elements de la matriu s'anomena *conjunt de nivells*, o sigui³:

$$\Delta_{\tilde{R}} = \{\alpha : \exists a \in A, b \in B \mid \mu_{\tilde{R}}(a, b) = \alpha\} \quad (2.7)$$

En el nostre cas, com que el nombre d'elements dels dos conjunts és finit, també ho serà el del conjunt de nivells. És molt habitual utilitzar el que s'anomena l'escala hendecanària els elements de la qual pertanyen al conjunt: $\{0, \frac{1}{10}, \frac{2}{10}, \dots, \frac{9}{10}, 1\}$ i, per tant, Δ_R és un subconjunt de l'anterior. La gran diferència de les relacions borroses amb les clàssiques és justament el fet que els elements de la matriu ja no són zeros i uns, sinó que poden prendre altres valors en $[0, 1]$. Existeix una forma de representar les relacions borroses en la qual s'observa de manera encara més evident com les relacions clàssiques no són res més que un cas particular de les borroses. Aquesta representació l'anomenarem *representació formal* donat que no és res més que això, una representació simbòlica de la relació.

³En certs contextos s'utilitza la notació α/aRb per indicar que $\mu_R(a, b) = \alpha$.

2.2.2 Relació a nivell α

Definim R_α relació a nivell α com⁴:

$$\mu_{R_\alpha}(a, b) = \begin{cases} 1 & \mu_{\tilde{R}}(a, b) \geq \alpha \\ 0 & \mu_{\tilde{R}}(a, b) < \alpha \end{cases} \quad (2.8)$$

2.2.3 Representació formal

Tenint en compte les operacions que habitualment s'usen en els subconjunts borrosos:

$$\tilde{R} = \bigcup_{\alpha \in \Delta_{\tilde{R}}} \alpha R_\alpha \quad (2.9)$$

on $\mu_{\alpha R_\alpha}(x, y) = \alpha \mu_{R_\alpha}(x, y)$

- Exemple

$$\begin{pmatrix} 0.5 & 0.7 \\ 0 & 1 \\ 0.2 & 0.9 \end{pmatrix} = 0.2 \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cup 0.5 \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cup 0.7 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cup \\ \cup 0.9 \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cup 1 \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

⁴Observi's que és una relació crisp.

2.2.4 Inversa

Donada \tilde{R} una relació borrosa entre A i B amb funció de pertinença $\mu_{\tilde{R}}$, definim la inversa de \tilde{R} (que designem per \tilde{R}^{-1}) com la relació borrosa entre B i A que té per funció de pertinença:

$$\mu_{\tilde{R}^{-1}}(b, a) = \mu_{\tilde{R}}(a, b)$$

Si utilitzem la representació matricial és evident que $M_{\tilde{R}^{-1}} = M_{\tilde{R}}^t$, on el superíndex t significa matriu transposada.

2.3 Relacions binàries sobre un mateix conjunt

Aquesta secció està dedicada a l'estudi de les relacions borroses binàries definides sobre un mateix conjunt A , la qual cosa fa que les matrius que la defineixen siguin quadrades. La motivació és la mateixa que en el cas *crisp*, és a dir, construir particions en el cas d'una relació d'equivalència, i ordenar elements en el cas d'una relació d'ordre. Com en el cas de la teoria de relacions crisp, això és possible per a relacions que verifiquen determinades propietats⁵. Les principals són les que es defineixen a continuació:

- **Reflexiva** Una relació borrosa \tilde{R} és reflexiva ⁶ si verifica:

$$\forall a \in A \quad \mu_{\tilde{R}}(a, a) = 1 \tag{2.10}$$

- **Simètrica** Una relació borrosa \tilde{R} és simètrica ⁷ si verifica:

$$\forall a, b \in A \quad \mu_{\tilde{R}}(a, b) = \mu_{\tilde{R}}(b, a) \tag{2.11}$$

⁵Per a un estudi més general que el que aquí es realitza, es poden consultar [72, 113].

⁶Si no la verifica s'anomena irreflexiva.

⁷Si no la verifica s'anomena asimètrica.

- **Transitiva** Donada t una t -norma, una relació borrosa \tilde{R} és t -transitiva ⁸ si verifica:

$$\forall a, b \in A \quad \mu_{\tilde{R}}(a, b) \geq \max_{c \in A} t\{\mu_{\tilde{R}}(a, c), \mu_{\tilde{R}}(c, b)\} \quad (2.12)$$

Si fem servir la t -norma del mínim de Zadeh ⁹ (v. 1.7) en resulta:

$$\forall a, b \in A \quad \mu_{\tilde{R}}(a, b) \geq \max_{c \in A} \min\{\mu_{\tilde{R}}(a, c), \mu_{\tilde{R}}(c, b)\} \quad (2.13)$$

Existeixen altres conceptes importants, tal com els de relació antisimètrica, antireflexiva, ϵ -reflexiva i antitransitiva, però no són importants en l'estudi de l'agrupació d'elements, encara que sí en el d'altres problemes, com l'ordenació, en la qual és necessària la propietat antisimètrica.

2.3.1 Relacions de proximitat

Són aquelles que verifiquen les propietats *reflexiva* i *simètrica* tal i com estan definides a (2.10) i (2.11). Per a aquestes relacions es verifica que la matriu de la relació té el valor 1 a la diagonal principal i és simètrica; per tant, coincideix amb la seva transposta.

Aquestes relacions són de gran interès ja que l'estructura dels qüestionaris per conèixer l'opinió d'un grup d'experts, sobre el grau en què són semblants dos objectes, condueix a matrius que verifiquen aquestes propietats ¹⁰.

⁸Si no la verifica s'anomena no t -transitiva.

⁹En aquest cas se sol ometre el prefix *min* i es parla únicament de relació borrosa transitiva.

¹⁰Els qüestionaris emprats al capítol 6 són per conèixer la opinió dels experts sobre el grau en què un objecte verifica una certa propietat, i constitueixen el pas previ per a l'obtenció de la matriu de proximitat que ens mesura la semblança.

2.3.2 Relacions de t -equivalència

Una relació és de t -equivalència¹¹ si verifica les propietats *reflexiva*, *simètrica* i *t -transitiva* tal i com estan definides a (2.10), (2.11) i (2.12)¹². Són relacions de proximitat a les quals s'afegeix la propietat *t -transitiva*¹³. Si no es diu el contrari es considerarà que treballem amb la t -norma del mínim de Zadeh, i en aquest cas s'anomenen simplement relacions d'equivalència, ometent el prefix t_{min} .

La gran importància de les relacions d'equivalència en les relacions *crisp* és l'obtenció d'una partició del conjunt en què està definida la relació, els elements de la qual formen el *conjunt quocient*. La definició de relació d'equivalència en el cas borrós provoca que també obtinguem una partició, però ara per a cada valor de l' α tall. Obtenim, doncs, un conjunt de particions. Vegem-ho amb més precisió.

2.3.2.1 Teorema de representació

Segons la representació formal (2.9), sabem que una relació binària borrosa entre els elements d'un conjunt A , no és res més que la unió de les relacions ordinàries definides per a cada nivell d' α . Es demostra que si \tilde{R} és d'equivalència aleshores (v. [72]) $\forall \alpha \in [0, 1]$ R_α és una relació d'equivalència *crisp* i, per tant, per a qualsevol valor d' α podem construir el conjunt quocient:

$$\begin{aligned} \forall \alpha \in [0, 1] \quad A/R_\alpha &= \{\tilde{a}^\alpha \mid a \in A\} \quad \text{on} \\ \tilde{a}^\alpha &= \{b : bR_\alpha a\} = \{b : \mu_{\tilde{R}}(a, b) \geq \alpha\} \end{aligned} \tag{2.14}$$

¹¹D'altres autors les anomenen *similarity relations*. Nosaltres farem servir el mot *semblança* en el context de les *mesures de semblança*, estudiades al capítol 3.

¹²Una generalització d'aquest concepte és el de *transitivitat feble* (v. [44]).

¹³Per a un estudi molt més teòric, que demostra que aquestes relacions no són res més que un cas particular d'un conjunt més general, es pot consultar [5].

D'aquest resultat es conclou que si $\alpha \geq \beta$, aleshores $\tilde{a}^\alpha \subset \tilde{a}^\beta$ i, per tant, A/R_α és un refinament d' A/R_β . És important ressaltar que això només és possible si la t -norma per la qual la relació de proximitat és transitiva és la del mínim de Zadeh. Per qualsevol altra t -norma no podem obtenir una partició cada vegada més fina al incrementar el valor d' α (v. [106]).

2.3.2.2 Conjunt de particions

El conjunt de particions ve definit per:

$$A/\tilde{R} = \{A/R_\alpha \mid \alpha \in \Delta_{\tilde{R}}\} \quad (2.15)$$

Per a cada nivell obtenim una partició cada vegada més fina a mesura que el valor del nivell es va incrementant. El conjunt de les particions se sol representar en un diagrama en arbre, on a cada nivell hi ha els nusos de les diverses branques.

2.3.2.3 Grafs borrosos

El concepte de graf borrós està intrínsecament relacionat amb el de relació borrosa de proximitat. Entenem per *graf borrós* un conjunt definit mitjançant una parella de conjunts $G(A, f)$ on A s'anomena *conjunt de vèrtexs* $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ i f és una aplicació, $f : A \times A \rightarrow [0, 1]$, de forma que a cada element d' $A \times A$ li associem un nombre en el conjunt $[0, 1]$: si aquest nombre és diferent de zero direm que els elements corresponents estan units mitjançant una fletxa¹⁴. Això és totalment equivalent a definir una relació borrosa en A . L'avantatge resideix en el fet que podem generalitzar els resultats de grafs crisp a grafs borrosos i, així, obtenir-ne de nous. El nombre que associem entre els elements a_i i a_j el designarem per a_{ij} , que en termes

¹⁴Aquesta definició és una generalització de graf crisp on els elements estan units per una línia o no ho estan, sense permetre's que hi hagi diferents nivells de connexió.

de relacions borroses equival al grau $\mu_R(a_i, a_j)$. A més, cal que de cada element surti una fletxa cap a ell mateix amb un grau 1 (reflexiva), i que si d'un element surt una fletxa cap a un altre element amb grau α aleshores hi ha una fletxa en sentit contrari amb el mateix grau (simètrica). En aquestes condicions no dibuixarem fletxes, sinó només segments, i ometrem les fletxes d'un element en si mateix donat que ja sabem que hi són totes i a nivell 1. En termes de matrius, cal que la matriu sigui simètrica i amb 1 a la diagonal principal, és a dir, que la relació borrosa sigui de proximitat.¹⁵

Els α -talls del graf borrós vénen definits de la mateixa manera que els α -talls de la relació:

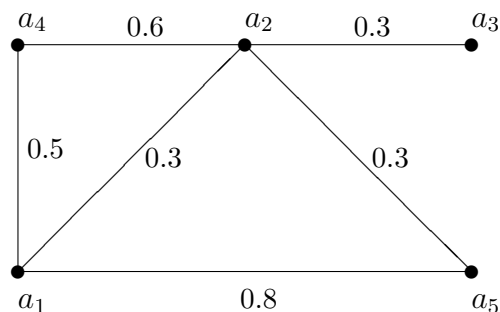
$$(a_i, a_j) \in E_\alpha \iff a_{ij} \geq \alpha \quad (2.16)$$

Aquests α -talls ens defineixen un graf crisp per a cada nivell del conjunt de nivells. Vegem un exemple de graf borrós en les seves dues representacions: matricial i mitjançant fletxes. Donat el conjunt $\{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5\}$ si la matriu ve definida per:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0.3 & 0 & 0.5 & 0.8 \\ 0.3 & 1 & 0.3 & 0.6 & 0.3 \\ 0 & 0.3 & 1 & 0 & 0 \\ 0.5 & 0.6 & 0 & 1 & 0 \\ 0.8 & 0.3 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (2.17)$$

Aleshores, el diagrama del graf és:

¹⁵Si no verifiquen alguna d'aquestes condicions s'anomenen *digrafs* en lloc de *grafs*.



2.3.2.4 Passejada a través d'un graf

Direm que (a_{i0}, \dots, a_{im}) és una *passejada* al nivell α si existeix una passejada crisp (a_{i0}, \dots, a_{im}) a E_α ¹⁶. Si no hi ha dos elements consecutius iguals en una passejada, s'anomena *camí*.

Com més gran és el valor de l' α -tall, més difícil és que trobem una passejada entre dos vèrtexs al nivell α . Si existeix una passejada al nivell α , direm que els dos vèrtexs estan α -connectats o també que cadascun d'ells és α -accessible per a l'altre. A partir d'un graf de matriu $A_{n \times n}$ podem definir un nou graf de matriu $B = (b_{ij})$, on el valor b_{ij} és tal que existeix una passejada de longitud 2 entre a_i i a_j en $E_{b_{ij}}$, i $\forall \epsilon > 0$ no existeix cap passejada de longitud 2 entre a_i i a_j en $E_{b_{ij} + \epsilon}$. En altres paraules, b_{ij} és el màxim nivell de l' α -tall tal que existeix una passejada de longitud 2 entre a_i i a_j . Es demostra (v. [79]) que $b_{ij} = \max_{k=1 \dots n} \min\{a_{ik}, a_{kj}\}$ que evidentment coincideix amb la composició de relacions borroses per la t-norma del mínim de Zadeh, d'on $B = A^2$ segons aquesta operació. Per tal de no allargar les notacions, notarem: $(b_{ij}) = (a_{ij}^2)$. Aquest és el nexa d'unió entre les relacions borroses i els grafs borrosos. Mitjançant una senzilla generalització, es pot concloure el mateix amb les passejades de longitud m . La composició d'una relació m vegades amb si mateixa i la potència m -èsima d'una matriu amb

¹⁶En termes críps (a_{i0}, \dots, a_{im}) és una passejada si $(a_{ik}, a_{ik+1}) \in E \quad \forall k \quad k = 0, \dots, m-1$. El valor m s'anomena *longitud de la passejada*.

l'operació $\max - \min$ estan intrínsecament relacionades. De la mateixa manera que per a la segona potència d' A , els elements de la m -èsima potència els designem per (a_{ij}^m) . Finalment, i utilitzant la notació matricial on $+$ vol dir \max , obtenim que els elements d' $A + A^2 + \dots + A^m$ són els màxims nivells per als quals existeix una passejada de longitud menor o igual que m per a dos vèrtexs qualssevol.

2.3.2.5 Índex d'accessibilitat

Poden existir diverses passejades per anar d'un vèrtex a un altre, i de diverses longituds. La idea és definir un nou graf (o relació borrosa, que en termes de matrius tenen la mateixa representació) a partir del nivell més gran d'accessibilitat entre dos vèrtexs. Més concretament, definim $\tilde{R}^\diamond = (r_{ij})$ de la següent manera:

$$\tilde{R}^\diamond(a_i, a_j) = r_{ij} \iff \begin{cases} a_i \text{ i } a_j \text{ són accessibles a } E_{r_{ij}} \text{ i} \\ \forall \epsilon > 0 \text{ } a_i \text{ i } a_j \text{ no són accessibles a } E_{r_{ij} + \epsilon} \end{cases} \quad (2.18)$$

La relació borrosa \tilde{R}^\diamond anteriorment definida és d'equivalència (v. [79]) i, per tant, indueix una partició per cadascun dels α -talls (v. 2.15). De la definició de \tilde{R}^\diamond es dedueix:

$$\tilde{R}^\diamond(a_i, a_j) = \max\{a_{ij}, a_{ij}^{(2)}, \dots, a_{ij}^{(n)}\} \quad (2.19)$$

2.3.2.6 Descomposició matricial

Si s'observen atentament les matrius d'equivalència, es té la impressió que els diferents elements es poden agrupar en matrius d'ordres inferiors del mateix tipus, després de reorganitzar columnes i files. En realitat, no és només una impressió, sinó que obeeix a una estructura matricial molt definida i característica només d'aquests tipus de matrius. Anem a veure-ho amb precisió:

Siguin:

$$P_n = \{A : A \text{ és una matriu d'una relació de proximitat}\}$$

$$E_n = \{A : A \text{ és una matriu d'una relació d'equivalència}\}$$

Sigui $N = \{1, 2, \dots, n\}$ el conjunt on varien els índexs d'una matriu quadrada A , és a dir, $A = (a_{ij})_{i,j \in N}$. Sigui $I(m) = \{i_1, i_2, \dots, i_m\} \subset N$ i $\bar{I}(m) = N - I(m) = \{j_1, j_2, \dots, j_{n-m}\}$ i, per tant, $\text{card}I(m) = m$ i $\text{card}\bar{I}(m) = n - m$. Definim:

$$A(I(m)) = (a_{ij})_{i,j \in I(m)}$$

$$A(\bar{I}(m)) = (a_{ij})_{i,j \in \bar{I}(m)}$$

$$A(I(m), \bar{I}(m)) = (a_{ij})_{i,j \in (I(m) \times \bar{I}(m)) \cup (\bar{I}(m) \times I(m))}$$

$A(I(m))$ i $A(\bar{I}(m))$ són matrius d'ordres $m \times m$ i $(n - m) \times (n - m)$ respectivament. En canvi, $A(I(m), \bar{I}(m))$ no és una matriu, sinó simplement una notació que correspon al conjunt d'elements que falten a les dues primeres per a completar la matriu A . La tripleta $(A(I(m)), A(\bar{I}(m)), A(I(m), \bar{I}(m)))$ s'anomena una *descomposició d' A* .

El principal resultat relatiu a la descomposició de la matriu d'una relació borrosa d'equivalència (v. [46]) ens diu el següent:

$$A \in E_n \iff \begin{cases} \exists \alpha \in [0, 1] \quad \text{i} \quad \exists (A(I(m)), A(\bar{I}(m)), A(I(m), \bar{I}(m))) \text{ tal que:} \\ \text{(a)} \quad A(I(m)) \in E_n \quad \text{i} \quad A(\bar{I}(m)) \in E_n \\ \text{(b)} \quad \forall a_{ij} \in A(I(m)) \quad a_{ij} \geq \alpha \\ \text{(c)} \quad \forall a_{ij} \in A(\bar{I}(m)) \quad a_{ij} \geq \alpha \\ \text{(d)} \quad \forall a_{ij} \in A(I(m), \bar{I}(m)) \quad a_{ij} = \alpha \end{cases} \quad (2.20)$$

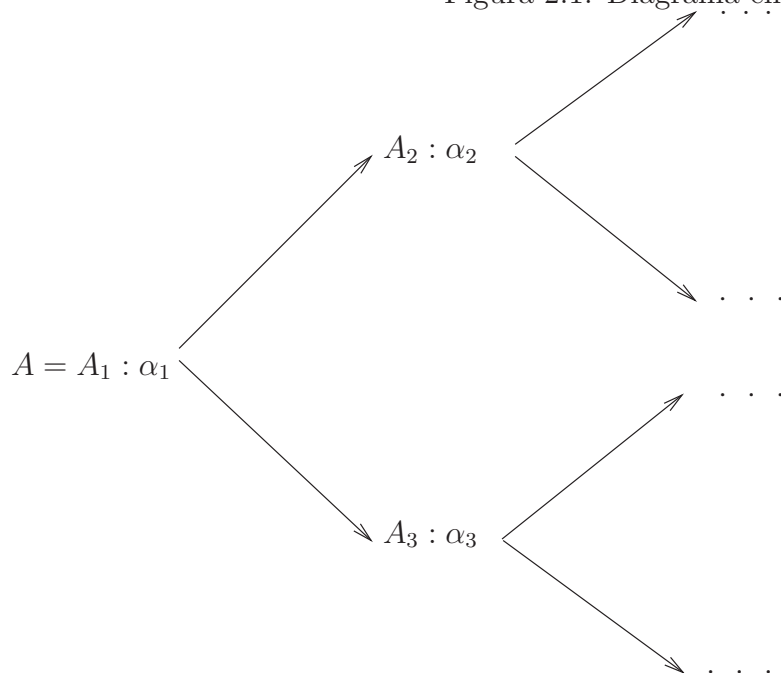
El valor α s'anomena un element α -pont. Aquest resultat és important ja que $A(I(m))$ i $A(\bar{I}(m))$ es continuen descomponent fins a arribar a matrius no descomponibles que són d'un dels dos següents tipus:

$$(1) \quad \text{ó} \quad \begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ \alpha & 1 \end{pmatrix}$$

Podem descriure els anteriors comentaris mitjançant el diagrama en arbre de la figura 2.1, tenint present que a cada bifurcació pot haver-hi dos camins (com en el diagrama) o bé només un. En el primer cas, direm que la bifurcació és d'ordre 2; i en el segon cas, que és d'ordre 1. A més, per construcció es verifica que $\alpha_1 \leq \alpha_2 \leq \dots \leq \alpha_n$ i $\alpha_i \rightarrow A_{i+1}$ significa que tots els elements d' A_{i+1} són $\geq \alpha_i$. Cada element α al final de l'arbre, correspon a una matriu del tipus:

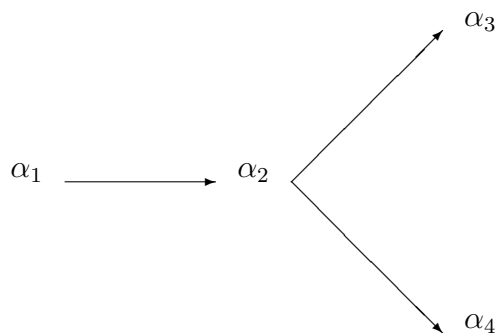
$$\begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ \alpha & 1 \end{pmatrix}$$

Figura 2.1: Diagrama en arbre



Exemple

Suposem que tenim dues bifurcacions, la primera d'ordre 1 i la segona d'ordre dos:



Per als extrems de la segona bifurcació obtenim dues matrius del tipus:

$$\begin{pmatrix} 1 & \alpha_3 \\ \alpha_3 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{i} \quad \begin{pmatrix} 1 & \alpha_4 \\ \alpha_4 & 1 \end{pmatrix}$$

que, combinades entre elles, dóna:

$$\begin{pmatrix} 1 & \alpha_3 & \alpha_2 & \alpha_2 \\ \alpha_3 & 1 & \alpha_2 & \alpha_2 \\ \alpha_2 & \alpha_2 & 1 & \alpha_4 \\ \alpha_2 & \alpha_2 & \alpha_4 & 1 \end{pmatrix} \quad (2.21)$$

la qual, aplicant-li la primera bifurcació, ens dóna finalment:

$$\begin{pmatrix} 1 & \alpha_1 & \alpha_1 & \alpha_1 & \alpha_1 \\ \alpha_1 & 1 & \alpha_3 & \alpha_2 & \alpha_2 \\ \alpha_1 & \alpha_3 & 1 & \alpha_2 & \alpha_2 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_2 & 1 & \alpha_4 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_2 & \alpha_4 & 1 \end{pmatrix} \quad (2.22)$$

El teorema de descomposició ens mostra que el nombre de diferents tipus de matrius d' E_n està caracteritzat pel seu diagrama en arbre. Per tant, construint tots els diagrames en arbre possibles obtenim tots els tipus possibles de matrius d' E_n , llevat de canvis en files i/o columnes

i en les notacions dels α_i . Si designem per $f(n)$ el nombre de classes dins d' A (grups d'elements que no tenen perquè formar una matriu) que tenen els elements iguals, i per $g(n)$ el nombre de tipus diferents de matrius, es demostra -mitjançant inducció matemàtica- que:

1. $f(n) \leq n - 1$
2. $g(1) = 1$ i $g(n) = \sum_{m=1}^{E(\frac{n}{2})} g(m)g(n-m)$

Fixem-nos, mitjançant un quants elements de la successió $g(n)$, que quan n creix, $g(n)$ creix molt de pressa: $g(2) = 1$, $g(3) = 1$, $g(4) = 2$, $g(5) = 3$, $g(6) = 6$, $g(7) = 11$, $g(8) = 24$, $g(9) = 47$, $g(10) = 103$ i així successivament.

2.3.3 Transitivització

Com hem vist (v. 2.15), donada una relació borrosa \tilde{R} amb matriu associada A , per tal que puguem aconseguir un conjunt de particions -cada vegada més fines- a diferents nivells, cal que la matriu sigui d'equivalència amb la t -norma t_{min} . Donada una matriu de proximitat, se'ns planteja el problema d'aconseguir la matriu de t -equivalència que s'hi ajusta millor. Hi ha dos camins possibles: El primer consisteix a buscar la que més s'assembla a l'original amb la condició que la inclogui, entès en el sentit que els diversos graus de pertinença no siguin menors que els originals. Això ens condueix al concepte de la clausura t -transitiva, que és la més àmpliament utilitzada. La segona possibilitat consisteix a buscar la millor aproximació en el sentit d'estar a la mínima distància. L'anomenarem aproximació òptima. Aquesta segona metodologia està subjecta a la definició de distància entre dues relacions o bé entre dues matrius però, en canvi, només la exposarem en el cas de relacions d'equivalència (la t -norma associada és la del mínim de Zadeh).

2.3.3.1 Clausura t -transitiva

Aquest concepte és relatiu a totes les relacions borroses en un conjunt E de cardinal n , encara que només l'aplicarem a relacions borroses de proximitat. Sigui \tilde{R} una relació borrosa en un conjunt E , A la seva representació matricial, i t una t -norma. \tilde{R}_t^* és la t clausura transitiva d' \tilde{R} si és la més petita de totes les relacions t -transitives que conté a \tilde{R} ; i, per tant, en el cas que \tilde{R} sigui de proximitat, és la més petita de totes les relacions de t -equivalència que conté a \tilde{R} . La seva matriu la designarem per $A_t^* = (a_{ij}^*)$. És a dir¹⁷:

$$\tilde{R}_t^* = \min\{\tilde{S} : \tilde{R} \subset \tilde{S} \text{ i } \tilde{S} \text{ és de } t\text{-equivalència}\} \quad (2.23)$$

La matriu de la t -clusura transitiva es calcula de la següent forma (v. [5, 72]):

$$A_t^* = \sum_{i=1}^n A^i \quad (2.24)$$

on $A^2 = (a_{ij}^2)$ i $a_{ij}^2 = \max_{k=1\dots n} t(a_{ik}, a_{kj})$. Per les altres potències es defineix de forma recurrent.

Donat que la relació és de proximitat, es verifica $A^{i-1} \leq A^i$ i, per tant:

$$A_t^* = A^n \quad (2.25)$$

En realitat, sovint no cal arribar fins a la n -potència, sinó que la clausura t -transitiva s'assoleix abans. Com en el cas de les relacions de t -equivalència, si ometem el subíndex t en la matriu A_t^* significa que hem utilitzat la t -norma t_{min} .

Si interpretem A com la matriu associada a un graf borrós, el significat dels elements d' A^* és el màxim nivell per al qual existeix una passejada -en el corresponent graf crisp (v. 2.18)- de qualsevol longitud entre els dos elements considerats, per tant, $A^* = A^\diamond$. És interessant observar l'equivalència entre tres conceptes a priori independents: relacions borroses amb la composició

¹⁷Per a un conjunt qualsevol que no hagués de ser forçosament finit, s'hauria de canviar min per inf.

max – min, matrius amb l'operació max – min¹⁸ i les passejades a diferents longituds dels grafs borrosos (v. 2.3.2.5).

Exemple

Sigui $E = \{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5\}$, t la t -norma del mínim de Zadeh i \tilde{R} una relació borrosa definida a E per:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0.3 & 0.9 & 0.7 & 0.1 \\ 0.3 & 1 & 0.2 & 0.4 & 0.6 \\ 0.9 & 0.2 & 1 & 0.5 & 0.8 \\ 0.7 & 0.4 & 0.5 & 1 & 0.7 \\ 0.1 & 0.6 & 0.8 & 0.7 & 1 \end{pmatrix} \tag{2.26}$$

Aquesta matriu no és d'equivalència ja que $\tilde{R}(a_1, a_2) = 0.3$, $\tilde{R}(a_1, a_4) = 0.7$ i $\tilde{R}(a_4, a_2) = 0.4$, d'on es dedueix que $\tilde{R}(a_1, a_2) \not\geq \max_{a_i \in E} \min\{\tilde{R}(a_1, a_i), \tilde{R}(a_i, a_2)\}$

Calculem A^2 :

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0.3 & 0.9 & 0.7 & 0.1 \\ 0.3 & 1 & 0.2 & 0.4 & 0.6 \\ 0.9 & 0.2 & 1 & 0.5 & 0.8 \\ 0.7 & 0.4 & 0.5 & 1 & 0.7 \\ 0.1 & 0.6 & 0.8 & 0.7 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0.3 & 0.9 & 0.7 & 0.1 \\ 0.3 & 1 & 0.2 & 0.4 & 0.6 \\ 0.9 & 0.2 & 1 & 0.5 & 0.8 \\ 0.7 & 0.4 & 0.5 & 1 & 0.7 \\ 0.1 & 0.6 & 0.8 & 0.7 & 1 \end{pmatrix} =$$

¹⁸D'altres autors, com per exemple S. Kundu (v. [74]), prefereixen la composició min – max a la max – min, però això no equival al càlcul de la clausura transitiva. També és possible de fer aquesta operació entre nombres borrosos (v. [94]).

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0.4 & 0.9 & 0.7 & 0.8 \\ 0.4 & 1 & 0.6 & 0.6 & 0.6 \\ 0.9 & 0.6 & 1 & 0.7 & 0.8 \\ 0.7 & 0.6 & 0.7 & 1 & 0.7 \\ 0.8 & 0.6 & 0.8 & 0.7 & 1 \end{pmatrix}$$

Com que $A \neq A^2$, cal calcular A^3 :

$$A^3 = A^2 A = \begin{pmatrix} 1 & 0.4 & 0.9 & 0.7 & 0.8 \\ 0.4 & 1 & 0.6 & 0.6 & 0.6 \\ 0.9 & 0.6 & 1 & 0.7 & 0.8 \\ 0.7 & 0.6 & 0.7 & 1 & 0.7 \\ 0.8 & 0.6 & 0.8 & 0.7 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0.3 & 0.9 & 0.7 & 0.1 \\ 0.3 & 1 & 0.2 & 0.4 & 0.6 \\ 0.9 & 0.2 & 1 & 0.5 & 0.8 \\ 0.7 & 0.4 & 0.5 & 1 & 0.7 \\ 0.1 & 0.6 & 0.8 & 0.7 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0.6 & 0.9 & 0.7 & 0.8 \\ 0.6 & 1 & 0.6 & 0.6 & 0.6 \\ 0.9 & 0.6 & 1 & 0.7 & 0.8 \\ 0.7 & 0.6 & 0.7 & 1 & 0.7 \\ 0.8 & 0.6 & 0.8 & 0.7 & 1 \end{pmatrix}$$

Com que $A^2 \neq A^3$, cal calcular A^4 :

$$A^4 = A^3 A = \begin{pmatrix} 1 & 0.6 & 0.9 & 0.7 & 0.8 \\ 0.6 & 1 & 0.6 & 0.6 & 0.6 \\ 0.9 & 0.6 & 1 & 0.7 & 0.8 \\ 0.7 & 0.6 & 0.7 & 1 & 0.7 \\ 0.8 & 0.6 & 0.8 & 0.7 & 1 \end{pmatrix} A = \begin{pmatrix} 1 & 0.3 & 0.9 & 0.7 & 0.1 \\ 0.3 & 1 & 0.2 & 0.4 & 0.6 \\ 0.9 & 0.2 & 1 & 0.5 & 0.8 \\ 0.7 & 0.4 & 0.5 & 1 & 0.7 \\ 0.1 & 0.6 & 0.8 & 0.7 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0.6 & 0.9 & 0.7 & 0.8 \\ 0.6 & 1 & 0.6 & 0.6 & 0.6 \\ 0.9 & 0.6 & 1 & 0.7 & 0.8 \\ 0.7 & 0.6 & 0.7 & 1 & 0.7 \\ 0.8 & 0.6 & 0.8 & 0.7 & 1 \end{pmatrix} \quad (2.27)$$

Com que $A^4 = A^3$, deduïm que $A^* = A^3$.

El mètode és senzill en si mateix; el problema radica en la computació si la matriu és prou gran. Es demostra que el temps de computació és de l'ordre $O(n^5)$. S'han establert diversos mètodes per a computar la clausura transitiva: el que necessita el mínim de temps, de l'ordre de $O(n^2)$, és el que es presenta a continuació (v. [75]).

El mètode es basa en la descomposició de matrius d'equivalència (v. 2.20). La idea consisteix a construir matrius d'equivalència d'ordre més gran a partir de dues matrius d'equivalència d'ordre més petit, la qual cosa es fa mitjançant elements α -pont. El procés és el següent:

1. D'entrada, sigui A^* la matriu buida, és a dir, que no té assignat cap element.
2. Ordenem de major a menor els elements de la part triangular superior de la matriu.
3. Assignem el valor 1 a tots els elements de la diagonal principal, és a dir:

$$\forall i \quad 1 \leq i \leq n \quad a_{ii}^* = 1.$$

4. Sigui $k = 1$.
5. Sigui a_{pq} el k -èsim element de l'ordenació del segon apartat, aleshores a_{pq} és un element pont tal i com va ser definit anteriorment. Aleshores $a_{pq}^* = a_{pq}$ i, a més a més, qualsevol altre element buit pren aquest valor si està situat en una posició tal que està ocupat algun

lloc de la columna o fila on es troba, sense tenir en compte els elements de la diagonal principal. Sigui $I = \{i : \exists a_{ij}^* i \neq j\}$ i $J = \{j : \exists a_{ij}^* i \neq j\}$. Aleshores, si designem per $a_{ij}^{*(k)}$ l'element de la matriu de clausura en el pas k -èsim, obtenim:

$$a_{ij}^{*(k)} = \begin{cases} a_{ij}^{*(k-1)} & \text{si } \exists a_{ij}^{*(k-1)} \\ a_{pq} & \text{si } (i, j) \in (I \times \{q\}) \cup (\{p\} \times J) \text{ i } a_{ij}^{*(k-1)} \text{ és buit} \\ \text{buit} & \text{altrament} \end{cases} \quad (2.28)$$

6. $k = k + 1$ (passem de k a $k + 1$).
7. Es torna al cinquè pas fins que la matriu estigui plena.

Exemple

Ho farem amb la mateixa matriu de l'exemple (2.26). Els passos que hem descrit anteriorment són:

- (a) La matriu A^* és buida.
- (b) Si ordenem de forma descendent els elements de la part triangular superior de la matriu, obtenim:

$$a_{13} = 0.9 > a_{35} = 0.8 > a_{14} = a_{45} = 0.7 > a_{25} = 0.6 > \\ > a_{34} = 0.5 > a_{24} = 0.4 > a_{12} = 0.3 > a_{23} = 0.2 > a_{15} = 0.1$$

- (c)

$$A^* = \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & 1 & & & \\ & & 1 & & \\ & & & 1 & \\ & & & & 1 \end{pmatrix}$$

- (d) L'element més gran de la sèrie del segon pas és $a_{13} = 0.9$, per tant $a_{13}^{*(1)} = a_{31}^{*(1)} = 0.9$.

La matriu queda:

$$A^* = \begin{pmatrix} 1 & & 0.9 & & \\ & & & 1 & \\ 0.9 & & & & 1 \\ & & & & & 1 \\ & & & & & & 1 \end{pmatrix}$$

- (e) El següent de la llista és $a_{35} = 0.8$, per tant $a_{35}^{*(2)} = a_{53}^{*(2)} = 0.8$, però, a més a més, a la primera fila de la cinquena columna hi ha un element ocupat; per tant, $a_{15}^{*(2)} = a_{51}^{*(2)} = 0.8$ i la matriu queda:

$$A^* = \begin{pmatrix} 1 & & 0.9 & & 0.8 \\ & & & 1 & \\ 0.9 & & & & 0.8 \\ & & & & & 1 \\ 0.8 & & 0.8 & & & & 1 \end{pmatrix}$$

- (f) El següent element de la llista és $a_{14} = 0.7$ i, com abans, queden ocupats els elements de les seves columnes que tenen algun element ocupat en les seves files:

$$A^* = \begin{pmatrix} 1 & & 0.9 & 0.7 & 0.8 \\ & & & 1 & \\ 0.9 & & & 1 & 0.7 & 0.8 \\ 0.7 & & 0.7 & 1 & 0.7 \\ 0.8 & & 0.8 & 0.7 & 1 \end{pmatrix}$$

- (g) El següent element de la llista és $a_{25} = 0.6$. Fent els càlculs de la forma descrita

anteriorment, obtenim:

$$A^* = \begin{pmatrix} 1 & 0.6 & 0.9 & 0.7 & 0.8 \\ 0.6 & 1 & 0.6 & 0.6 & 0.6 \\ 0.9 & 0.6 & 1 & 0.7 & 0.8 \\ 0.7 & 0.6 & 0.7 & 1 & 0.7 \\ 0.8 & 0.6 & 0.8 & 0.7 & 1 \end{pmatrix}$$

Com que ja no queda cap element buit, l'anterior matriu és la de la clausura transitiva, que, evidentment, ens dóna el mateix que amb el mètode de les potències.

2.3.3.2 Matriu borrosa òptima

De la classificació dels diferents tipus d' E_n que ens dóna (2.20), es tracta d'escollir quina és la millor, en el sentit que minimitzi la distància a la matriu donada, distància calculada mitjançant la norma de Fröbenius basada en la distància euclidiana. Abans ens cal saber com han de ser els elements dels diferents blocs de la matriu òptima tal i com han estat definits a la descomposició matricial. Donada $A \in P_n$, suposem que $A' \in E_n$ és la matriu borrosa òptima i que $B'_1 \dots B'_n$ són els seus diferents blocs on a dins de cadascun d'ells tots els elements són iguals i que hem anomenat α_i . Siguin $B_1 \dots B_n$ els mateixos blocs però ara corresponents a A i, per tant, els seus elements no tenen per què ser iguals. Si suposem que $B_i = \{b_{i1}, \dots, b_{il}\}$; aleshores, finalment es demostra que (v. [46]):

$$\alpha_i = \frac{b_{i1} + \dots + b_{il}}{l} \quad (2.29)$$

Sintetitzant, el procés és el següent:

1. Descriure tots els possibles diagrames en arbre que es poden dependre segons l'ordre de la matriu.

2. Per a cadascun dels diagrames en arbre, calcular els seus elements a partir del resultat (2.29).
3. Fer els canvis de files i columnes a A_i (matrius d'equivalència possibles) que ens portin al seu equivalent de la matriu original A per obtenir A'_i .
4. Calcular la norma $\|A - A'_i\|$.
5. $A' = A'_j$ si $\|A - A'_j\| = \min_{1 \leq i \leq g(n)} \|A - A'_i\|$

Exemple

Aplicarem els anteriors resultats i procediments a la matriu borrosa:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0.6 & 0.2 & 0 \\ 0.6 & 1 & 0.5 & 0 \\ 0.2 & 0.5 & 1 & 0.4 \\ 0 & 0 & 0.4 & 1 \end{pmatrix}$$

Com que $g(4) = 2$, tenim dos diagrames en arbre, un amb dues bifurcacions cadascuna d'ordre 1, i l'altre amb una bifurcació d'ordre 2. Hem d'estudiar cadascuna per separat i trobar totes les matrius d'equivalència possibles.

Primer cas

$$\alpha_1 \longrightarrow \alpha_2 \longrightarrow \alpha_3$$

Que condueix a una matriu del tipus:

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & \alpha_1 & \alpha_1 & \alpha_1 \\ \alpha_1 & 1 & \alpha_2 & \alpha_2 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & 1 & \alpha_3 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & 1 \end{pmatrix}$$

Per calcular α_1 , cal trobar la mitjana de cadascuna de les files (sense comptar l'1) i escollir el mínim. En el nostre exemple, el mínim s'assoleix a la quarta fila, i val $\alpha_1 = \frac{0.4}{3}$. Anul·lades la quarta fila i la quarta columna, obtenim la matriu:

$$B_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0.6 & 0.2 \\ 0.6 & 1 & 0.5 \\ 0.2 & 0.5 & 1 \end{pmatrix}$$

Per a aquesta nova matriu, el mínim s'assoleix a la tercera fila i val: $\alpha_2 = \frac{0.7}{2}$. Aquí acabem ja que la següent matriu és d'ordre 2 i ja és el bloc final; per tant, $\alpha_3 = 0.6$. Aleshores:

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & \frac{4}{30} & \frac{4}{30} & \frac{4}{30} \\ \frac{4}{30} & 1 & \frac{7}{20} & \frac{7}{20} \\ \frac{4}{30} & \frac{7}{20} & 1 & 0.6 \\ \frac{4}{30} & \frac{7}{20} & 0.6 & 1 \end{pmatrix}$$

Com que α_1 provenia de la quarta fila i α_2 de la tercera, ara hem d'intercanviar les files 1 i 4, les columnes 1 i 4, les files 2 i 3 i les columnes 2 i 3. Aleshores, obtenim:

$$A'_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0.6 & \frac{7}{20} & \frac{4}{30} \\ 0.6 & 1 & \frac{7}{20} & \frac{4}{30} \\ \frac{7}{20} & \frac{7}{20} & 1 & \frac{4}{30} \\ \frac{4}{30} & \frac{4}{30} & \frac{4}{30} & 1 \end{pmatrix}$$

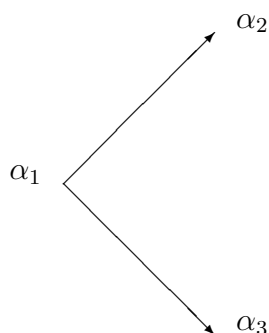
Si haguéssim agafat com a α_1 no l'element mínim sinó l'immediatament superior, tindriem:

$\alpha_1 = \frac{0.8}{3} = 0.26$. Traient la primera fila i la primera columna, ens queda la matriu:

$$B_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0.5 & 0 \\ 0.5 & 1 & 0.4 \\ 0 & 0.4 & 1 \end{pmatrix}$$

Ara, la mitjana mínima superior a l'anterior correspon a la segona fila i val $\alpha_2 = 0.45$. Traient la segona fila i la segona columna ens queda la matriu identitat; per tant, $\alpha_3 = 0$, la qual cosa és impossible per construcció, donat que els elements α_i han de constituir una seqüència creixent.

Segon cas



Representa una matriu del tipus:

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & \alpha_2 & \alpha_1 & \alpha_1 \\ \alpha_2 & 1 & \alpha_1 & \alpha_1 \\ \alpha_1 & \alpha_1 & 1 & \alpha_3 \\ \alpha_1 & \alpha_1 & \alpha_3 & 1 \end{pmatrix}$$

De l'observació directa de la matriu A es dedueix que no cal fer cap moviment de canvi de files i columnes, només cal calcular α_1 . El seu valor és la mitjana dels elements d' A que estan en

les mateixes posicions; aleshores, $\alpha_1 = \frac{0.7}{4} = 0.175$ i, per tant, obtenim la matriu:

$$A'_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0.6 & 0.175 & 0.175 \\ 0.6 & 1 & 0.175 & 0.175 \\ 0.175 & 0.175 & 1 & 0.4 \\ 0.175 & 0.175 & 0.4 & 1 \end{pmatrix}$$

Aplicant la definició de norma de Frobenius:

$$\|A - A'_1\| = \frac{\sqrt{1092}}{60} = \sqrt{0.30}$$

$$\|A - A'_2\| = \frac{\sqrt{536}}{40} = \sqrt{0.34}$$

Per tant, l'òptim és $A' = A'_1$.

Per últim, veiem que efectivament millora, en el sentit de la distància, a la clausura transitiva.

Aplicant qualsevol dels mètodes per al càlcul de la clausura transitiva d' A obtenim:

$$A^* = \begin{pmatrix} 1 & 0.6 & 0.5 & 0.4 \\ 0.6 & 1 & 0.5 & 0.4 \\ 0.5 & 0.5 & 1 & 0.4 \\ 0.4 & 0.4 & 0.4 & 1 \end{pmatrix}$$

I la seva distància a A és: $\|A - A^*\| = \sqrt{0.82}$, que és força més gran que $\|A - A'_1\|$.

2.4 Càlcul de relacions borroses

Per les posteriors aplicacions que desenvoluparem als capítols 5 i 6, i que constitueixen el nucli d'aplicació d'aquesta memòria, creiem convenient explicitar el tractament de la informació obtinguda a través d'experts.

Tradicionalment, els experts proporcionen el valor dels paràmetres que intervenen en qualsevol estudi econòmic en què la matemàtica de la incertesa hi té un paper destacable, com ara les tècniques de la classificació i de l'ordenació, i la teoria de la decisió. Són ells qui proporcionen els diferents valors de possibilitat de l'escala semàntica utilitzada. La més utilitzada és l'hendecanària ¹⁹, definida com:

valor de possibilitat	significat semàntic
0	fals
0.1	pràcticament fals
0.2	quasi fals
0.3	força fals
0.4	més fals que vertader
0.5	ni fals ni vertader
0.6	més vertader que fals
0.7	força vertader
0.8	quasi vertader
0.9	pràcticament vertader
1	vertader

Si un grup d'experts donen diversos valors de possibilitat per a una mateixa proposició vaga, la pràctica habitual consisteix a ponderar-los mitjançant pesos en funció de la importància de cada un dels experts. Si no hi ha diferències entre els experts, la ponderació esdevé la mitjana aritmètica (v. [6]). L'expert que ha estat consultat com a professional i del qual es sol·licita la seva opinió sobre el grau de certesa que afecta un cert paràmetre, ens proporciona un valor no pas expressat a l'atzar sinó després d'un procés personal subjectiu. El que proposem és

¹⁹Existeixen altres escales semàntiques, com la ternària, la quaternària i la pentanària, que es distingeixen de l'anterior per prendre 3, 4 i 5 valors en lloc dels 11 de l'hendecanària. Qualsevol altra escala pot ser considerada si es creu oportú.

intentar sistematitzar aquest procés però sense perdre el seu aspecte fonamental: la subjectivitat de l'expert. En els processos de classificació són bàsics els paràmetres que hi condueixen ja que només aquests i el model incert utilitzat són els que ens condueixen a l'agrupació. Podem afirmar que els valors de les funcions de pertinença, tot i ser valors incerts, en el nostre domini actuen com a dades del problema de la mateixa manera com les diverses magnituds ho fan en altres estudis científics.

2.4.1 Metodologia

Intentar emular la capacitat de raonament i decisió que presenta l'ésser humà utilitzant les mateixes fonts de coneixement és l'objectiu principal del que s'anomena intel·ligència artificial. Són molt conegudes tècniques com les xarxes neuronals, els algorismes genètics, l'aprenentatge automàtic o el tractament del llenguatge natural. Totes elles tenen en comú l'intent de simulació d'algunes de les capacitats humanes. En el nostre cas, el que pretenem és donar una estructura teòrica dissenyada conjuntament per l'expert i l'analista. Aquest cos ha de ser flexible per tal d'adaptar-se als canvis del problema, tenir un comportament racional per tal de poder-lo sistematitzar, estar dins d'un entorn ric i complex i poder-ne fer abstracció a fi de poder-lo utilitzar en diversos problemes de diferent naturalesa. Tot això s'assoleix combinant el que podríem anomenar la *base de fets*, on tenim totes les dades que l'expert pugui necessitar, i la *base de coneixement*, que ens dona les estratègies i regles mitjançant les quals les dades es tracten per poder obtenir els valors buscats ²⁰. El tret principal consisteix en la sinèrgia de l'expert del problema concret, que no té per què conèixer els procediments ni la matemàtica utilitzats, amb l'analista de la matemàtica de la incertesa que a priori tampoc té per què conèixer a

²⁰Aquest llenguatge no és arbitrari ja que s'utilitza habitualment en els sistemes experts. Nosaltres el fem servir únicament des d'un sentit conceptual. Aquests sistemes han estat molt desenvolupats en les dues últimes dècades (v. [18, 52]).

fons l'àmbit de coneixement en el qual l'expert humà es desenvolupa. L'analista, utilitzant un llenguatge molt proper al llenguatge ordinari, només ha de transcriure el llenguatge de l'expert a símbols i procediments que es puguin utilitzar en el tractament de les dades i els diversos models de la incertesa. La diferència fonamental amb el procés matemàtic tradicional d'aplicar algorismes a dades consisteix a inferir a partir del coneixement de l'expert. En aquest tipus de problemes és molt important l'heurística, que inclou un *back-ground* (coneixement previ) més de tipus pràctic que no pas teòric.

El principal problema consisteix a traduir el coneixement de l'expert a regles. Al ser regles borroses, encara es complica més la inferència ja que dóna lloc a la utilització de lògiques multivalents. El nostre domini basat en coneixement no sempre està suficientment estructurat, lo qual dificulta sistematitzar el coneixement, i incorpora coneixements subjectius poc definits. Aquestes són les raons per introduir-hi una part de la metodologia pròpia de certes branques de la intel·ligència artificial, com la monotorització, la diagnosi o la planificació.

Les fonts de coneixement constitueixen el nexa entre l'expert i l'analista de la incertesa. Aquestes fonts han de ser enteses com un conjunt de dades i mètodes que habitualment es troben a llibres, bases de dades, l'entorn i el propi expert. A més, es precisen coneixements adjunts, com conceptes, procediments, heurístiques, fórmules, relacions, valors estadístics i qualsevol informació útil. Tot plegat constitueix el coneixement. També cal tenir un coneixement factual, és a dir, fets que ens permeten analitzar i estudiar el problema en qüestió. En les aplicacions posteriors es tractarà de dades estadístiques i presumpcions de caràcter teòric.

Regles d'inferència

Per estudiar els coneixements heurístics de l'expert, els hem d'introduir mitjançant regles que poden afectar, o no, un fet fonamental. Aquest és el coneixement condicional. La formalització d'una regla és de la forma:

$$\text{SI [condicions] ALESHORES [conclusions]}$$

El coneixement interdependent ens serveix per relacionar els diversos elements que conformen el problema. Un exemple del cas que ens ocupa serien les diverses ponderacions de les variables que intervenen en alguna de les característiques de l'aplicació del capítol 5 per a l'agrupació de les comarques gironines en funció de característiques incertes de la modernitat en el treball. La base de fets i la base de coneixement es mantenen separades perquè hi puguem actuar de forma independent.

Les regles fonamentals del sistema són de la forma:

$$\text{SI } [A_1 \wedge A_2 \wedge \dots \wedge A_n] \text{ ALESHORES } [B] \text{ amb un grau de certesa } \alpha$$

És necessari concatenar les diverses regles per a obtenir-ne de noves. Això s'aconsegueix utilitzant alguna de les t-normes i t-conormes de la lògica borrosa, i -a partir d'elles- realitzar totes les operacions de la lògica proposicional borrosa (v. [82]). La concatenació ha d'aconseguir simular el raonament humà de l'expert, per la qual cosa la interrelació amb ell esdevé essencial. En aquest tipus de sistemes el raonament tant pot anar endavant, de forma que si s'han verificat les hipòtesis es dona per bona la tesi, com endarrere, de forma que si s'ha verificat una certa tesi el raonament verifica si les hipòtesis eren certes o no (tot plegat amb un cert grau de certesa, òbviament). En cas de no ser-ho, es deduiria que aquesta regla no és vàlida, i s'eliminaria del conjunt de regles. En les aplicacions dels capítols 5 i 6, la segona opció no té sentit ja que no es pot verificar un valor de possibilitat. Cal esmentar, a més, que el nostre sistema no té possibilitat d'aprendre i, per tant, el resultat no s'afegeix a la base de fets.

2.4.2 Organigrama general

Com ja hem indicat anteriorment, la base de fets és tot el conjunt de dades en el sentit més ampli de la paraula. El que pretenem és incorporar el tractament de dades estadístiques al càlcul de la relació borrosa entre dos conjunts.²¹

El nostre objectiu és calcular $\mu_{\tilde{R}}(A, P)$, on A és un conjunt i P una característica de la qual volem esbrinar en quin grau A la verifica. La distinció entre conjunts i característiques és artificial però ajuda a fixar l'estructura.

El nostre model és del tipus:

$$\mu_{\tilde{R}}(A, P) = \alpha\mu_{\tilde{S}}(A, P) + (1 - \alpha)\mu_{\tilde{V}}(A, P) \quad (2.30)$$

Evidentment es tracta d'una ponderació entre dues funcions de pertinença: $\mu_{\tilde{S}}$ i $\mu_{\tilde{V}}$. La funció $\mu_{\tilde{S}}$ té un caràcter totalment subjectiu, en el sentit que no hi intervenen les variables estadístiques i es calcula únicament mitjançant regles d'inferència donades per l'expert²²; $\mu_{\tilde{V}}$, en canvi, es calcula a partir de variables estadístiques i la participació de l'expert en la forma que es comentarà més endavant. Si $\alpha = 1$, $\mu_{\tilde{R}} = \mu_{\tilde{S}}$ i no es té en compte cap base de dades estadístiques, sinó només les regles d'inferència donades per l'expert, que en el cas més simple es poden reduir a donar un únic valor. I si $\alpha = 0$, aleshores $\mu_{\tilde{R}} = \mu_{\tilde{V}}$ i només es té en compte la component estadística. Anem a veure com calculem $\mu_{\tilde{V}}$.

²¹Si la relació, en lloc de ser binària, fos n-ària amb $n > 2$ es faria de forma similar.

²²Generar regles *fuzzy* a partir de dades és un procés que ja ha estat força estudiat (v. [11, 49, 83, 91]), així com el de determinar nombres borrosos (v. [30, 95]) i la modelització de com respondre a preguntes (v. [16]).

2.4.2.1 Estratègia fonamental per al càlcul de $\mu_{\bar{V}}$

Suposem que tenim r experts E_1, E_2, \dots, E_r . A cadascun d'ells se li demana que faci una llista de les variables contingudes en la base de fets que al seu entendre intervenen a l'hora de trobar el valor de possibilitat, decidint si el seu efecte és positiu o bé negatiu en la característica considerada. Fixem-nos que el nombre de variables per a cada expert pot ser diferent. Aquestes variables les anomenarem $X_{i1}, X_{i2}, \dots, X_{in_i}$, on i pren valors d'1 a r . Seguidament, se li demana a cada expert que assigni a cada variable un cert *valor d'importància* que mesura la rellevància de la variable respecte de les altres. Aquests valors els designem per $c_{i1}, c_{i2}, \dots, c_{in_i}$, que podem suposar que estan ordenats de més gran a més petit i, si es creu necessari, normalitzats.

L'expert E_i tria les variables i assigna valors d'importància:

$$\begin{aligned} &X_{i1}, X_{i2}, \dots, X_{in_i} \\ &c_{i1} : c_{i2} : \dots : c_{in_i} \end{aligned}$$

Sigui X el conjunt de totes les variables que han triat els experts:

$$X = \bigcup_{i=1..r, j=1..n_i} \{X_{ij}\} = \{X_1, \dots, X_n\} \quad (2.31)$$

Evidentment, $n \leq n_1 + n_2 + \dots + n_r$. La igualtat només es verifica si tots els experts trien variables diferents, la qual cosa pot semblar contradictòria amb el seu caràcter d'experts. Seguidament, a cada variable X_i d' X se li ha d'assignar el seu ordre d'importància dins del conjunt, i que designem per c_i . Sembla lògic fer-ho mitjançant la mitjana aritmètica $c_i = \overline{c_{ij}}$, on els c_{ij} són els corresponents de la variable en qüestió, o bé 0 si no apareix en la relació donada per l'expert E_i . El procediment també es pot invertir: primer es fa la relació de variables i després es demana l'assignació dels índexs d'importància²³. Una altra possibilitat és que els experts assignin a cada variable un valor entre 0 i 1, en funció del grau de semblança a una variable

²³També es podria fer ponderant els diversos experts, fet que no canvia l'essència del problema; en canvi, complicaria excessivament la notació i per aquesta raó no ho fem.

redundant (valor 0) o, a una d'essencial (valor 1), i a partir d'aquests valors trobar els índexs de la següent manera²⁴:

Cada variable X_i té assignat un valor v_i de l'escala hendecanària, que correspon a la ponderació dels experts del grau de pertinença d'aquesta variable en la variable borrosa que es vol avaluar. Calculem els valors màxim i mínim: v_{max} i v_{min} , i dividim l'interval $[v_{min} - 0.05, v_{max} + 0.05]$ en $10\delta + 1$ intervals que designem per Q_1, \dots, Q_p , on $\delta = v_{max} - v_{min}$ ²⁵. L'assignació dels índexs es fa de la següent manera:

$$\text{Si } v_i \in Q_j \text{ assignem a la variable } X_i \text{ el valor } c_i = j \quad (2.32)$$

Al final del procés obtenim:

$$\begin{aligned} X_1, X_2, \dots, X_n \\ c_1 : c_2 : \dots : c_n \end{aligned}$$

Cada $c_i \in \mathbb{N}$ representa una importància relativa de la variable X_i de l'ordre de:

$$\frac{c_i}{\sum_{j=1}^n c_j} \quad (2.33)$$

Per al càlcul del valor $\mu_{\tilde{V}}(A, P)$, partim d'un valor inicial que, sense perdre generalitat, podem suposar que és 0.5, i a partir del valor de les variables que hem trobat i de la seva importància l'anem ajustant, augmentant-lo o disminuint-lo. Que la variable prengui valors grans no vol dir que hàgim d'augmentar $\mu_{\tilde{V}}(A, P)$, i que si són petits l'hàgim de disminuir: això depèn de si es considera que la variable té un caràcter positiu o bé negatiu en la característica que volem avaluar. Com que el rang màxim en què pot variar el valor prefixat és $1 - 0.5 = 0.5$, acceptem

²⁴Una altra possibilitat podria ser assignar a la variable X_i el valor $c_i = 10v_i$. La que nosaltres proposem fa que se separin més els valors i que, per tant, s'accentuin les diferències.

²⁵Donat que els valors v_i són de l'escala hendecanària, deduïm que $10\delta + 1$ és un nombre natural.

una variació màxima per a cada variable X_i de:

$$V_i = \frac{c_i}{2 \sum_{j=1}^n c_j} \quad (2.34)$$

de forma que es verifica que la variació total permesa és:

$$V = \sum_{i=1}^n V_i = \sum_{i=1}^n 0.5 \frac{c_i}{\sum_{j=1}^n c_j} = 0.5$$

i, per tant, el valor estarà inclòs dins de l'interval $[0, 1]$, sempre i quan arrodonim els valors al final del procés.

En aquest punt del procediment l'expert ens ha de donar dues dades addicionals: el valor màxim i el valor mínim que, segons ell, pot prendre la variable X_i . Aquests valors els designem per $minexpX_i$ i $maxexpX_i$. També són acceptables per a aquests valors els màxims i mínims que prenen les variables. Amb aquestes dades construïm l'interval $[minexpX_i, maxexpX_i]$ i el subdividim en $2c_i + 1$ intervals de la següent forma:

$$\left\{ \begin{array}{l} I_{-c_i} = [minexpX_i, minexpX_i + b] \\ \vdots \\ I_0 = [minexpX_i + kb, minexpX_i + (c_i + 1)b] \\ \vdots \\ I_{c_i} = [minexpX_i + 2kb, minexpX_i + (2c_i + 1)b] \end{array} \right. \quad (2.35)$$

on $b = \frac{a}{2c_i + 1}$ i $a = maxexpX_i - minexpX_i$.

Regles associades a l'estratègia fonamental

En aquest punt del procés ja podem definir les regles que ens acabaran determinant els valors

de possibilitat. El conjunt de regles està íntimament lligat al d'estratègies. En realitat, formen un únic cos: la base de coneixement.

En el que hem anomenat estratègia fonamental es construeixen una sèrie d'interval per a cadascuna de les variables que hem decidit que intervenen en el càlcul. Depenent que el valor de la variable estigui en un interval o un altre, es modifica el valor de possibilitat buscat. Les regles fonamentals són de la forma:

Cas A

En el cas que la variable estadística tingui un efecte positiu a $\mu_{\tilde{V}}(A, P)$, la regla fonamental és de la forma:

SI $[X_l \in I_i]$ ALESHORES [augmentem el valor de possibilitat en $\frac{i}{n}$] $2 \sum_{j=1}^i c_j$

Cas B

En el cas que la variable estadística tingui un efecte negatiu a $\mu_{\tilde{V}}(A, P)$, la regla fonamental és de la forma:

SI $[X_l \in I_i]$ ALESHORES [disminuïm el valor de possibilitat en $\frac{i}{n}$] $2 \sum_{j=1}^i c_j$

Òbviament, si $i < 0$, en el primer cas en lloc d'augmentar disminuïm el valor de possibilitat; en canvi, en el segon cas l'augmentem en lloc de disminuir-lo.

Amb aquest procediment els valors de l'escala utilitzada són múltiples de $\frac{1}{n}$, i ens definei-

$$2 \sum_{j=1}^i c_j$$

tenen $2 \sum_{j=1}^n c_j + 1$ intervals. El procés se simplifica si $V_i = 0.1k \quad k \in \mathbb{N}$, la qual cosa ens donarà lloc a valors de l'escala hendecanària.

2.4.2.2 Altres estratègies

1. Estratègia normalitzada

Funciona com en el cas anterior, però la divisió en intervals no es fa amb uns valors prefixats per l'expert, sinó suposant que entre la mitjana menys tres vegades la desviació típica i la mitjana més tres vegades la desviació típica hi ha pràcticament tots els valors. Aquest és un fet molt conegut per a les variables aleatòries gaussianes o normals que apareixen molt freqüentment en les ciències socials. En realitat, els valors $\bar{X}_i - 3S_i$ i $\bar{X}_i + 3S_i$ fan la mateixa funció que els $\min exp X_i$ i $\max exp X_i$ donats pels experts. Aconseguim diferenciar millor els valors estadístics si usem el valor 2 en lloc de 3, això és possible si cap d'ells queda fora del nou interval. És evident que aquesta estratègia pressuposa un coneixement més aprofundit del comportament de les variables.

2. Creació de noves variables

Els experts poden creure convenient que és aconsellable la creació de noves variables a partir d'altres que estan a la base de dades. Això pot ser adequat si el que es vol és donar diferents pesos, és a dir, ponderar diverses variables que ens donen valors de la mateixa naturalesa.

3. Taula de valors

Si el nombre de variables no és gaire gran, l'expert pot considerar oportuna la construcció d'una taula on ell assigni directament els valors de possibilitat que cregui convenients per a cadascun dels valors possibles de les variables. Aquest procediment és impracticable si el nombre de variables és elevat ja que el nombre de les possibles combinacions creix molt

de pressa. A més, cal comentar que hi ha dades estadístiques que ja són borroses donat que fan servir graus de certesa: molt poc, poc, regular, força i molt ²⁶.

4. Estratificat

Una o diverses variables divideixen el domini en estrats. Un cop assignat el valor de possibilitat a un d'aquests estrats ja no pot sortir-ne per efecte de les variables ulteriors. Les altres variables només serveixen per acabar de definir el valor dintre de l'estrat al qual ha estat assignat inicialment. Aquest procediment pot ser aconsellable quan les variables que assignen els estrats són considerades pels experts com a fonamentals.

²⁶Diverses variables són d'aquest tipus en els anuaris d'Eurostat.

Capítol 3

Mesures de semblança

3.1 Introducció

En moltes disciplines aplicades s'estudia el problema de treure el soroll que s'ha generat en un determinat objecte i que el desfigura. És a dir, disposem d'un objecte i la seva imatge després de la distorsió. Reconèixer l'objecte original que hi havia abans que es produís la pertorbació és l'objectiu, fet que ens obliga a mesurar la semblança entre els dos objectes, o bé la distància, la qual cosa equival -en certa forma- a reconstruir la pertorbació. Una via de solució és construir un model matemàtic de la pertorbació per arribar a eliminar-la i reconstruir l'objecte inicial. Si, en canvi, el que volem és avaluar la semblança entre dos objectes diferents, hem de definir un conjunt d'atributs o característiques que els identifiquin, ja que amb aquest plantejament el que no podem és afirmar que existeixi una transformació que ens porta d'un a l'altre. Deduïm, doncs, que en l'àmbit de la matemàtica de la incertesa la similitud o semblança¹ s'ha de calcular entre subconjunts borrosos determinats a partir de conjunts d'atributs que descriuen els objectes

¹Una extensa descripció d'índexs en el cas bidimensional es pot trobar a [7].

que considerem.

Diversos treballs en Psicologia, com per exemple els que Tversky va realitzar amb països, figures i senyals (v. [99]), demostren que la percepció humana no segueix de forma estricta algunes de les propietats que es consideren fonamentals per mesurar la semblança entre objectes de naturalesa únicament geomètrica. La simetria és, potser, la propietat més emblemàtica d'entre elles. Per aquest motiu i altres de similars el càlcul de la semblança no és només un problema matemàtic, sinó també un problema de com modelitzar la percepció humana. Si només fos matemàtic, els nostres objectes serien inicialment vectors, matrius o qualsevol altre objecte algebraic, i, en canvi, en el nostre cas aquests elements són la representació dels objectes, però no pas ells mateixos. Un expert ens podria avaluar la semblança, i ho faria amb el seu propi judici humà, que podria ser -per exemple- asimètric. En aquests casos és aconsellable optar per un model matemàtic no simètric, que, a més, ens proporciona l'avantatge de sistematitzar tot el procés². Hem de procurar d'imitar el procés cognitiu humà de la millor manera possible. És en aquest punt on la teoria dels subconjunts borrosos ha demostrat ser d'una gran utilitat, donat que ens permet un gran nombre de possibilitats metodològiques.

A qualsevol procés d'agrupació d'objectes realitzat de forma que els elements d'un mateix grup s'assemblin més entre ells que amb els d'un altre grup -problema estudiat a l'anàlisi de clústers- li cal la matematització del concepte *assemblar-se*. Això s'aconsegueix definint *mesura de semblança*³ (o *distància*⁴) entre els elements, de forma que com més s'assemblen aquests elements, més gran és el valor de la mesura (i més petita la distància). En el present capítol estudiarem aquestes funcions.

²En aquest punt de la discussió hem de tenir en compte totes les possibilitats tot i que en el capítol 6 usarem mesures simètriques donada la naturalesa dels objectes que es volen classificar.

³També anomenada de *similitud*.

⁴Si s és una mesura de semblança, una distància d ve definida per $d = f(s) \geq 0$, on f és una funció decreixent. Molt sovint s'utilitza $d = 1 - s$ i, de forma recíproca, $s = 1 - d$.

3.1.1 Mesura de semblança crisp

Sigui $A = \{A_1, A_2, \dots, A_n\}$ el nostre conjunt de referència. Volem definir una mesura de semblança entre els diversos elements a partir de la verificació o no de diversos atributs o característiques el conjunt dels quals designem per $E = \{P_1, P_2, \dots, P_m\}$. Atès que, en aquest cas, o bé es posseeix un atribut o bé no es posseeix, cada element té associat un vector de tants components com el nombre d'atributs, els elements dels quals són nombres binaris. El valor 1 vol dir que verifica la propietat corresponent, i el 0 que no la verifica. Com que el nombre d'atributs és m , obtenim:

$$A_i \rightsquigarrow (a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{im}) \quad \text{on } a_{ij} \in \{0, 1\}$$

de forma que:

$$\begin{aligned} a_{ij} = 1 &\iff A_i \text{ verifica } P_j \\ a_{ij} = 0 &\iff A_i \text{ no verifica } P_j \end{aligned}$$

A partir d'ara utilitzarem un llenguatge que ens permetrà estendre de forma natural la definició de mesura de semblança per a conjunts crisp a subconjunts borrosos.

3.1.1.1 Paràmetres de semblança i de dissemblança

Per avaluar la semblança cal calcular el que *s'assembla* i el que *no s'assembla*. Definim:

$$v : A \rightarrow \wp(E) \tag{3.1}$$

de forma que⁵:

$$P_k \in v(A_i) \iff A_i \text{ verifica } P_k$$

Es dedueix immediatament que: $\text{card}(v(A_i)) = |v(A_i)| = \text{nombre d'atributs que verifica } A_i$.

⁵Aquesta condició en termes borrosos equival a dir que la funció de pertinença de l'element A_i en l'atribut P_k val 1.

Per tal d'establir la semblança entre dos elements $A_i, A_j \in A$, calcularem el nombre d'atributs que verifiquen i no verifiquen alhora. D'aquí la definició dels següents paràmetres⁶:

$$\begin{aligned}
 a &= |v(A_i) \cap v(A_j)| = \text{nombre d'atributs que verifiquen } A_i \text{ i } A_j \\
 b &= |v(A_i) \cap v(A_j)^c| = \text{nombre d'atributs que verifica } A_i \text{ i no verifica } A_j \\
 c &= |v(A_i)^c \cap v(A_j)| = \text{nombre d'atributs que no verifica } A_i \text{ i verifica } A_j \\
 d &= |v(A_i)^c \cap v(A_j)^c| = \text{nombre d'atributs que no verifiquen ni } A_i \text{ ni } A_j
 \end{aligned} \tag{3.2}$$

A més a més:

$$\begin{aligned}
 &(v(A_i) \cap v(A_j)) \cup (v(A_i) \cap v(A_j)^c) \cup (v(A_i)^c \cap v(A_j)) \cup (v(A_i)^c \cap v(A_j)^c) = \\
 &= (v(A_i) \cap (v(A_j) \cup v(A_j)^c)) \cup (v(A_i)^c \cap (v(A_j) \cup v(A_j)^c)) = v(A_i) \cup v(A_i)^c = E
 \end{aligned}$$

Com que la unió dels quatre subconjunts que defineixen a , b , c i d és disjunta, el seu cardinal és la suma de cardinals i, per tant, $a + b + c + d = m$.⁷

A partir dels paràmetres a , b , c i d es defineixen moltes mesures de semblança (també anomenades índexs de semblança). Vegem-ne algunes de molt citades en la bibliografia sobre mesures de semblança.

3.1.1.2 Principals mesures de semblança crisp

1. Mesura de Jackard

$$s_J(A_i, A_j) = \frac{a}{a + b + c}$$

2. Mesura de Rao

$$s_R(A_i, A_j) = \frac{a}{a + b + c + d}$$

⁶Observem que el valor de b i c coincideix amb la suma dels valors absoluts de les diferències de les components dels respectius vectors binaris.

⁷Com veurem més endavant, aquesta és una de les propietats que en el context borrós no es verifica.

3. Mesura d'aparellament

$$s_A(A_i, A_j) = \frac{a + d}{a + b + c + d}$$

Com que $b + c = |v(A_i) \Delta v(A_j)|$ on el símbol Δ vol dir diferència simètrica de $v(A_i)$ i $v(A_j)$.

Aleshores:

$$s_A(A_i, A_j) = 1 + \frac{a + d}{a + b + c + d} - 1 = 1 - \frac{b + c}{a + b + c + d} = 1 - \frac{|v(A_i) \Delta v(A_j)|}{m}$$

En aquestes condicions $\frac{|v(A_i) \Delta v(A_j)|}{m}$ pot ser interpretada com una distància que, al generalitzar-ho en el context borrós, s'anomena distància de Hamming.

4. Mesura de Dice

$$s_D(A_i, A_j) = \frac{a}{a + 0.5b + 0.5c}$$

5. Mesura de Sokal i Sneath

$$s_{SS}(A_i, A_j) = \frac{a}{a + 2b + 2c}$$

3.2 Mesures de semblança borroses

El principal objectiu previ a la teoria de clústers és trobar la semblança entre diversos conjunts de dades per tal de determinar la conveniència d'agrupar-los o no en un clúster. De forma anàloga al cas crisp, cada conjunt de $A = \{A_1, A_2, \dots, A_n\}$ ve representat per un subconjunt borrós \tilde{A}_i que pren valors en un conjunt de característiques $E = \{P_1, P_2, \dots, P_m\}$, és a dir:

$$\tilde{A}_i \rightsquigarrow (\mu_{\tilde{A}_i}(P_1), \mu_{\tilde{A}_i}(P_2), \dots, \mu_{\tilde{A}_i}(P_m))$$

Com en el cas crisp, mesurar la semblança o la dissemblança són processos simètrics ja que d'una d'elles podem obtenir l'altra mitjançant una funció decreixent que mantingui les propietats. En

matemàtiques la manera habitual d'avaluar la dissemblança és mitjançant distàncies, la més coneguda de les quals és la distància euclidiana ⁸. Si, per contra, el que es vol és avaluar la semblança entre objectes parlarem de mesura de semblança o similitud. Les distàncies s'usen en aquells problemes on es creu necessari que es verifiquin les tres condicions que les defineixen: minimalitat, simetria i desigualtat triangular. Això sol ser necessari en problemes de caire estrictament geomètric. En canvi, en problemes on, com ja hem comentat, la percepció humana hi té un paper destacat poden ser més adequades altres funcions.

Definir les propietats que volem que verifiquin les mesures de semblança borroses és senzill, però, a l'afeblir considerablement l'estructura booleana dels conjunts crisp, no és fàcil que es verifiquin. És per aquest motiu que, per a segons quines aplicacions, a vegades s'utilitzen mesures que no verifiquen totes les propietats de les mesures que es dedueixen a partir de distàncies. Aquestes mesures seran estudiades en la secció 3.3.

3.2.1 El model geomètric

En el model geomètric el concepte primari és el de distància, i, a partir d'ell, es defineix *mesura de semblança* de forma natural. En aquest model s'interpreta un subconjunt borrós \tilde{A} com una m -pla d' \mathbb{R}^m . El principal atractiu és la verificació d'unes propietats molt fortes, a canvi d'assimilar els objectes a subconjunts borrosos i d'interpretar aquests únicament com elements d' \mathbb{R}^m . Seguidament, vegem quins són els principals conceptes d'aquest model.

Sigui $\tilde{P}(E)$ el conjunt de tots els subconjunts borrosos d'un referencial E .

⁸D'altres, com la de Mahalanobis o la de Minkowski, són molt utilitzades en Estadística o Teoria de la Mesura.

Distància

Considerem $d : \tilde{P}(E) \times \tilde{P}(E) \longrightarrow [0, 1]$

$$d \text{ és una distància} \iff \begin{cases} 1. \quad \forall \tilde{A} \quad d(\tilde{A}, \tilde{A}) = 0 \quad (\text{minimalitat}) \\ 2. \quad \forall \tilde{A}, \tilde{B} \quad d(\tilde{A}, \tilde{B}) = d(\tilde{B}, \tilde{A}) \quad (\text{simètrica}) \\ 3. \quad \forall \tilde{A}, \tilde{B}, \tilde{C} \quad d(\tilde{A}, \tilde{C}) \leq d(\tilde{A}, \tilde{B}) + d(\tilde{B}, \tilde{C}) \\ \quad \quad \quad (\text{desigualtat triangular}) \end{cases} \quad (3.3)$$

Distància mètrica

Una distància mètrica és una distància que, a més, verifica la següent propietat:

$$d(\tilde{A}, \tilde{B}) = 0 \iff \tilde{A} = \tilde{B} \quad (3.4)$$

Propietat ultramètrica

$$\forall \tilde{A}, \tilde{C} \in \tilde{P}(E) \quad d(\tilde{A}, \tilde{C}) \leq \min_{\tilde{X} \in \tilde{P}(E)} \max\{d(\tilde{A}, \tilde{X}), d(\tilde{X}, \tilde{C})\} \quad (3.5)$$

Aquesta propietat és més forta que la desigualtat triangular, és a dir, si aquesta es verifica també es verifica la desigualtat triangular:

$$d(\tilde{A}, \tilde{C}) \leq \min_{\tilde{X} \in \tilde{P}(E)} \max\{d(\tilde{A}, \tilde{X}), d(\tilde{X}, \tilde{C})\} \leq \max\{d(\tilde{A}, \tilde{B}), d(\tilde{B}, \tilde{C})\} \leq d(\tilde{A}, \tilde{B}) + d(\tilde{B}, \tilde{C})$$

Les dues primeres desigualtats són trivials, i la tercera és certa ja que $d(\tilde{A}, \tilde{B})$ i $d(\tilde{B}, \tilde{C})$ són positius i un d'ells coincideix amb $\max\{d(\tilde{A}, \tilde{B}), d(\tilde{B}, \tilde{C})\}$.

Aquestes propietats són analitzades amb més deteniment en el capítol 4.

3.2.2 Principals distàncies

Suposem que \tilde{A} i \tilde{B} són dos conjunts borrosos amb funcions de pertinença $\mu_{\tilde{A}}$ i $\mu_{\tilde{B}}$ respectivament, tals que prenen valors en P_1, P_2, \dots, P_m .

1. Distància Euclidiana

$$d_E(\tilde{A}, \tilde{B}) = \sqrt{\sum_{i=1}^m (\mu_{\tilde{A}}(P_i) - \mu_{\tilde{B}}(P_i))^2} \quad (3.6)$$

2. Distància L^1

$$d_{L^1}(\tilde{A}, \tilde{B}) = \sum_{i=1}^m |\mu_{\tilde{A}}(P_i) - \mu_{\tilde{B}}(P_i)| \quad (3.7)$$

3. Distància de Hamming

$$d_H(\tilde{A}, \tilde{B}) = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m |\mu_{\tilde{A}}(P_i) - \mu_{\tilde{B}}(P_i)| \quad (3.8)$$

La distància de Hamming⁹ no és res més que la distància L^1 dividida per m .

4. Distància de Minkowski

$$d_K(\tilde{A}, \tilde{B}) = \sqrt[p]{\sum_{i=1}^m |\mu_{\tilde{A}}(P_i) - \mu_{\tilde{B}}(P_i)|^p} \quad p > 0 \quad (3.9)$$

Per a $p = 1$ obtenim la distància L^1 , i per a $p = 2$ la distància euclidiana.

5. Distància de Mahalanobis

$$d_M(\tilde{A}, \tilde{B}) = \sqrt{\sum_{i,j=1, i \neq j}^m (\mu_{\tilde{A}}(P_i) - \mu_{\tilde{B}}(P_i))c_{ij}(\mu_{\tilde{A}}(P_j) - \mu_{\tilde{B}}(P_j))} \quad (3.10)$$

⁹En molts de textos d_{L^1} és la distància de Hamming i d_H és la distància relativa de Hamming. Hem suprimit el terme *relativa* donat que sempre usem aquesta.

On c_{ij} són els components de la matriu inversa de les variàncies i covariàncies de les variables $(\mu_{\tilde{A}}(P_i), \mu_{\tilde{B}}(P_i))_{i=1, \dots, m}$, és a dir: $(c_{ij}) = (\sigma_{ij})^{-1}$.

Si $u = (\mu_{\tilde{A}}(P_i))$, $v = (\mu_{\tilde{B}}(P_i))$ i $M = (\sigma_{ij})$ aleshores:

$$d_M(\tilde{A}, \tilde{B}) = \sqrt{(u - v)^t M^{-1} (u - v)}$$

Mesura de semblança associada a una distància

Sigui d una distància. Com ja hem indicat, una mesura de semblança s associada a d s'obté a partir de $s = f(d)$, on f és una funció decreixent. En particular, en el cas més habitual en què $s = 1 - d$, resulta la següent definició¹⁰:

$$s \text{ és una mesura de semblança associada a la distància } d \iff \begin{cases} s : \tilde{P}(E) \times \tilde{P}(E) \longrightarrow [0, 1] \text{ i verifica:} \\ 1. \quad \forall \tilde{A} \quad s(\tilde{A}, \tilde{A}) = 1 \quad (\text{reflexiva}) \\ 2. \quad \forall \tilde{A}, \tilde{B} \quad s(\tilde{A}, \tilde{B}) = s(\tilde{B}, \tilde{A}) \quad (\text{simètrica}) \\ 3. \quad \forall \tilde{A}, \tilde{B}, \tilde{C} \quad s(\tilde{A}, \tilde{C}) \geq s(\tilde{A}, \tilde{B}) + s(\tilde{B}, \tilde{C}) - 1 \\ \quad \quad \quad (\text{desigualtat triangular}) \end{cases} \quad (3.11)$$

Mesura de semblança associada a una distància mètrica

Sigui d una distància mètrica. En aquest cas, la mesura de semblança s associada a d , anomenada mesura de semblança associada a una mètrica d , verifica:

$$s(\tilde{A}, \tilde{B}) = 1 \iff \tilde{A} = \tilde{B}$$

Al generalitzar les mesures de semblança crisp - introduïdes anteriorment a l'apartat 3.1.1 - al

¹⁰El terme *desigualtat triangular* no sol ser utilitzat per a mesures de semblança, sinó per a distàncies, però, com que és equivalent a la propietat de la desigualtat triangular per a distàncies, creiem convenient anomenar-lo de la mateixa manera.

context borrós, i que analitzarem en la següent secció, se solen perdre la primera i la tercera propietats que defineixen les mesures de semblança borroses associades a una distància. Per aquest motiu es defineixen dues versions més febles de mesura de semblança associada a una distància, que anomenarem simplement *mesura de semblança borrosa* i *mesura borrosa*:

Mesura de semblança borrosa

Sigui: $s : \tilde{P}(E) \times \tilde{P}(E) \longrightarrow [0, 1]$

$$s \text{ és una mesura de semblança borrosa} \iff \begin{cases} 1. \forall \tilde{A}, \tilde{B} & 0 \leq s(\tilde{A}, \tilde{B}) \leq 1 \\ 2. \forall \tilde{A}, \tilde{B} & s(\tilde{A}, \tilde{B}) = s(\tilde{B}, \tilde{A}) \\ & \text{(simètrica)} \end{cases} \quad (3.12)$$

Si una mesura de semblança borrosa verifica la propietat reflexiva es pot interpretar com una relació borrosa de proximitat, és per aquest motiu que en aquest cas no se'n dona una definició explícita.

Mesura borrosa

En el cas de que es verifiqui només la primera propietat s'anomenen simplement *mesura borrosa*¹¹. És a dir:

$$s \text{ és una mesura borrosa} \iff \forall \tilde{A}, \tilde{B} \quad 0 \leq s(\tilde{A}, \tilde{B}) \leq 1 \quad (3.13)$$

¹¹No confondre aquest concepte amb el de *mesura de borrositat* que està lligat al d'*entropia*.

3.3 El model conjuntista

Considerant els subconjunts borrosos únicament com a m -ples de nombres reals¹² en l'interval $[0, 1]$, coneixem gran varietat de distàncies i, per tant, de mesures; a més, moltes d'elles són distàncies¹³. L'enfocament que donem a partir d'ara és més conjuntista i prové de la generalització de les mesures de semblança crisp, tot i que la verificació de les propietats de les mesures de semblança associades a distàncies és evidentment desitjable.

Com que els atributs són borrosos, no podem establir si un objecte posseeix o no un determinat atribut: El posseeix, però només en un cert grau. Una de les implicacions immediates d'aquest plantejament és que ara no obtenim vectors els components dels quals són binaris, sinó que pertanyen a tot l'interval $[0, 1]$. La definició dels quatre paràmetres (v. [79]) es fa servir per generalitzar-los, utilitzant fórmules anàlogues a (3.2) i la definició de cardinal per a subconjunts borrosos. Puix que els conjunts involucrats són interseccions, hem de fer servir t -normes. Obtenim les següents fórmules¹⁴:

$$\begin{aligned}
 a &= |\tilde{A}_i \cap \tilde{A}_j| = \sum_{k=1}^m t(\mu_{\tilde{A}_i}(P_k), \mu_{\tilde{A}_j}(P_k)) \\
 b &= |\tilde{A}_i \cap \tilde{A}_j^c| = \sum_{k=1}^m t(\mu_{\tilde{A}_i}(P_k), n(\mu_{\tilde{A}_j}(P_k))) \\
 c &= |\tilde{A}_i^c \cap \tilde{A}_j| = \sum_{k=1}^m t(n(\mu_{\tilde{A}_i}(P_k)), \mu_{\tilde{A}_j}(P_k)) \\
 d &= |\tilde{A}_i^c \cap \tilde{A}_j^c| = \sum_{k=1}^m t(n(\mu_{\tilde{A}_i}(P_k)), n(\mu_{\tilde{A}_j}(P_k)))
 \end{aligned} \tag{3.14}$$

¹²En el cas de treballar amb nombres borrosos continus es poden definir els índexs mitjançant el càlcul integral (v. [85]).

¹³Distàncies L_1 , L_p , Mahalanobis, etc.

¹⁴També es fan servir les notacions: $\tilde{A}_i \cap \tilde{A}_j^c = \tilde{A}_i - \tilde{A}_j$ i $\sum_{k=1}^m t(\mu_{\tilde{A}_i}(P_k), \mu_{\tilde{A}_j}(P_k)) = \sum_{k=1}^m t(\mu_k(A_i), \mu_k(A_j))$.

Com s'ha vist anteriorment, tot i que la definició dels quatre paràmetres és molt lògica, hi ha força indefinició a l'hora de definir les diferents mesures de semblança. Quan ho generalitzem a subconjunts borrosos, apareix una nova indefinició a l'haver de triar entre les moltes t-normes, t-conormes i negacions que es coneixen. El coneixement de les propietats que volem que verifiquin i el problema concret que volem estudiar ens han d'ajudar en aquesta tria.

Ja hem comentat que en les mesures crisp és indiferent calcular a , b , c i d per separat i fer les sumes i proporcions corresponents, que fer primerament les interseccions i unions corresponents i després fer el cardinal, ja que en el context crisp $|X \cup X^c| = |X| + |X^c| = |E|$ i $|X \cap X^c| = 0$, essent E el conjunt referencial. El que acabem de dir no és cert en el cas borrós, a menys que les connectives utilitzades verifiquin el principi del terç exclòs, com ara les connectives de Lukaciewicz (v. 1.8). En particular, $a + b + c + d = m$ no té per què verificar-se en el context borrós. Per tant, en general:

$$\begin{aligned} & |(\tilde{A}_i \cap \tilde{A}_j) \cup (\tilde{A}_i \cap \tilde{A}_j^c) \cup (\tilde{A}_i^c \cap \tilde{A}_j) \cup (\tilde{A}_i^c \cap \tilde{A}_j^c)| \neq \\ & \neq |\tilde{A}_i \cap \tilde{A}_j| + |\tilde{A}_i \cap \tilde{A}_j^c| + |\tilde{A}_i^c \cap \tilde{A}_j| + |\tilde{A}_i^c \cap \tilde{A}_j^c| \end{aligned}$$

Depenent del moment en què fem la generalització en l'àmbit borrós, ens podem plantejar dos tipus de generalitzacions que anomenarem mesures borroses clàssiques i mesures borroses generalitzades.

3.3.1 Mesures borroses clàssiques

En aquest enfocament es tracta d'utilitzar les propietats distributives, així com els principis del terç exclòs i de no contradicció dels conjunts crisp, abans de fer la generalització als subconjunts borrosos. És una generalització feble, la qual cosa ens simplifica les fórmules (per a una anàlisi més aprofundida (v. [79])). De fet, si no s'apliquen les propietats conjuntistes abans de la

generalització, a més de cardinals d'interseccions també s'obtenen cardinals d'unions en lloc de suma de cardinals. Aquest procediment és especialment important en la generalització de la mesura de semblança d'aparellament. De la seva versió final com el cardinal de la diferència simètrica dividit per m , obtenim la mesura de semblança, que, restada d'1, ens dóna la distància de Hamming; en canvi, si fem la generalització en el pas anterior, no l'obtenim.

3.3.1.1 Principals mesures borroses clàssiques

Suposem que tenim dos subconjunts borrosos¹⁵ \tilde{A} i \tilde{B} .

1. Mesura de Jackard

En el cas crisp, $s_J(A, B) = \frac{a}{a + b + c} = \frac{|v(A) \cap v(B)|}{|v(A) \cup v(B)|}$

Per tant, aplicant-ho a subconjunts borrosos queda definit com:

$$s_J(\tilde{A}, \tilde{B}) = \frac{|\tilde{A} \cap \tilde{B}|}{|\tilde{A} \cup \tilde{B}|} = \frac{\sum_{k=1}^m t(\mu_{\tilde{A}}(P_k), \mu_{\tilde{B}}(P_k))}{\sum_{k=1}^m c(\mu_{\tilde{A}}(P_k), \mu_{\tilde{B}}(P_k))} \quad (3.15)$$

Utilitzant la t-norma i t-conorma de Zadeh, s'esdevé:

$$s_J(\tilde{A}, \tilde{B}) = \frac{\sum_{k=1}^m \min\{\mu_{\tilde{A}}(P_k), \mu_{\tilde{B}}(P_k)\}}{\sum_{k=1}^m \max\{\mu_{\tilde{A}}(P_k), \mu_{\tilde{B}}(P_k)\}}$$

¹⁵Com que les mesures de semblança estan definides per a parells d'elements, per tal de simplificar la notació deixarem d'utilitzar subíndexs a menys que no sigui estrictament necessari.

En canvi, usant les connectives del producte acotat obtenim:

$$s_J(\tilde{A}, \tilde{B}) = \frac{\sum_{k=1}^m \max\{0, \mu_{\tilde{A}}(P_k) + \mu_{\tilde{B}}(P_k) - 1\}}{\sum_{k=1}^m \min\{1, \mu_{\tilde{A}}(P_k) + \mu_{\tilde{B}}(P_k)\}}$$

2. Mesura d'aparellament

De la interpretació del cas crisp obtenim:

$$s_A(\tilde{A}, \tilde{B}) = 1 - \frac{\sum_{k=1}^m |\mu_{\tilde{A}}(P_k) - \mu_{\tilde{B}}(P_k)|}{m} = 1 - d_H(\tilde{A}, \tilde{B}) \quad (3.16)$$

On $d_H(\tilde{A}, \tilde{B})$ és la distància de Hamming entre \tilde{A} i \tilde{B} .

3. Mesura de Rao

De la verificació de la propietat $a + b + c + d = m$ en el cas crisp, generalitzem al aplicar-ho a subconjunts borrosos i obtenim:

$$s_R(\tilde{A}, \tilde{B}) = \frac{\sum_{k=1}^m t(\mu_{\tilde{A}}(P_k), \mu_{\tilde{B}}(P_k))}{m} \quad (3.17)$$

Utilitzant la t-norma de Zadeh obtenim:

$$s_R(\tilde{A}, \tilde{B}) = \frac{\sum_{k=1}^m \min\{\mu_{\tilde{A}}(P_k), \mu_{\tilde{B}}(P_k)\}}{m}$$

3.3.1.2 Propietats

1. $s_R(\tilde{A}, \tilde{B}) \leq s_J(\tilde{A}, \tilde{B})$. És immediata a partir de les definicions d' s_R i s_J .

2. Si usem les connectives de Zadeh, s_J és reflexiva i simètrica. Per tant, és una mesura de semblança borrosa que dóna lloc a una matriu de proximitat. Vegem-ho:

$$s_J(\tilde{A}, \tilde{A}) = \frac{\sum_{k=1}^m \min\{\mu_{\tilde{A}}(P_k), \mu_{\tilde{A}}(P_k)\}}{\sum_{k=1}^m \max\{\mu_{\tilde{A}}(P_k), \mu_{\tilde{A}}(P_k)\}} = \frac{\sum_{k=1}^m \mu_{\tilde{A}}(P_k)}{\sum_{k=1}^m \mu_{\tilde{A}}(P_k)} = 1$$

La simetria és evident.

D'altra banda, si usem les connectives del producte acotat, s_J és òbviament simètrica, però, en canvi, no és reflexiva:

$$s_J(\tilde{A}, \tilde{A}) = \frac{\sum_{k=1}^m \max\{0, \mu_{\tilde{A}}(P_k) + \mu_{\tilde{A}}(P_k) - 1\}}{\sum_{k=1}^m \min\{1, \mu_{\tilde{A}}(P_k) + \mu_{\tilde{A}}(P_k)\}} < 1$$

Per tant, és una mesura de semblança borrosa que no dóna lloc a una matriu de proximitat.

3. s_A és reflexiva i simètrica. Per tant, és una mesura de semblança borrosa que dóna lloc a una matriu de proximitat. Vegem la reflexiva:

$$s_A(\tilde{A}, \tilde{A}) = 1 - \frac{\sum_{k=1}^m |\mu_{\tilde{A}}(P_k) - \mu_{\tilde{A}}(P_k)|}{m} = 1 - d_H(\tilde{A}, \tilde{A}) = 1$$

La simetria és evident. Com ja hem comentat anteriorment, en realitat es tracta de la mesura de semblança borrosa associada a la distància de Hamming.

4. Per a qualsevol t-norma, s_R és simètrica però no és reflexiva. En particular per a t_{min} , és evidentment simètrica, però en canvi:

$$s_R(\tilde{A}, \tilde{A}) = \frac{\sum_{k=1}^m \min\{\mu_{\tilde{A}}(P_k), \mu_{\tilde{A}}(P_k)\}}{m} = \frac{\sum_{k=1}^m \mu_{\tilde{A}}(P_k)}{m} \leq 1$$

Com en el cas de la mesura de Jackard definida a partir de les connectives del producte acotat, s_R no defineix una matriu de proximitat.

Exemples

Siguin $\tilde{A} = (0.9, 0.2, 0, 0.6, 0.1, 0.8, 1, 0.3)$ i $\tilde{B} = (0.1, 0.5, 0.8, 0.4, 1, 0, 0.7, 0.9)$, aleshores:

$$s_J(\tilde{A}, \tilde{B}) = \frac{\sum_{k=1}^m \min\{\mu_{\tilde{A}}(P_k), \mu_{\tilde{B}}(P_k)\}}{\sum_{k=1}^m \max\{\mu_{\tilde{A}}(P_k), \mu_{\tilde{B}}(P_k)\}} = \frac{0.1 + 0.2 + 0 + 0.4 + 0.1 + 0 + 0.7 + 0.3}{0.9 + 0.5 + 0.8 + 0.6 + 1 + 0.8 + 1 + 0.9} = \frac{1.8}{6.5} = 0.277$$

$$s_A(\tilde{A}, \tilde{B}) = 1 - \frac{\sum_{k=1}^m |\mu_{\tilde{A}}(P_k) - \mu_{\tilde{B}}(P_k)|}{m} = 1 - d_H(\tilde{A}, \tilde{B}) = 1 - \frac{0.8 + 0.3 + 0.8 + 0.2 + 0.9 + 0.8 + 0.3 + 0.6}{8} = \frac{3.3}{8} = 0.413$$

$$s_R(\tilde{A}, \tilde{B}) = \frac{\sum_{k=1}^m \min\{\mu_{\tilde{A}}(P_k), \mu_{\tilde{B}}(P_k)\}}{m} = \frac{1.8}{8} = 0.225$$

En el cas que la mesura de semblança s no sigui reflexiva, es pot definir \hat{s} de forma que aquesta sí que ho sigui:

Reflexivització

$$\hat{s}(\tilde{A}, \tilde{B}) = \begin{cases} s(\tilde{A}, \tilde{B}) & \text{si } \tilde{A} \neq \tilde{B} \\ 1 & \text{si } \tilde{A} = \tilde{B} \end{cases} \quad (3.18)$$

3.3.2 Mesures borroses generalitzades

A l'apartat anterior hem descrit una manera d'obtenir mesures i mesures de semblança sobre subconjunts borrosos. Es basa en la generalització de mesures conjuntistes crisp, la seva representació a partir de cardinals i l'aplicació de les propietats crisp de la teoria de conjunts, abans de passar als subconjunts borrosos. En aquest apartat, - que a diferència de l'anterior

- podem considerar que és una generalització forta i d'aquí el mot generalitzades, retrobem la idea fonamental: calcular el que tenen de semblant i de dissemblant dos objectes, en aquest cas dos subconjunts borrosos. Calculem separatament a , b , c i d , i després definim les mesures. Parlem de mesures perquè moltes d'elles no són simètriques (ni reflexives) tot i que el seu rang està inclòs en l'interval $[0, 1]$.

3.3.2.1 Propietats conjuntistes de les mesures de semblança

Suposem que tenim dos subconjunts borrosos \tilde{A} i \tilde{B} , que vénen determinats per dues m -ples tals que els seus components pertanyen a l'interval $[0, 1]$. Volem determinar unes *mesures de semblança*, s , a partir de les expressions (3.14) de forma que verifiquin una sèrie de propietats addicionals que ens siguin útils en les nostres aplicacions ¹⁶. Aquestes propietats, que constitueixen una generalització d'unes propietats més febles pensades per a un conjunt de mesures més reduït (v. [99]), són les següents:

1. Funcionalitat

Sigui:

$$\begin{aligned} f : \tilde{P}(E) \times \tilde{P}(E) \times \tilde{P}(E) \times \tilde{P}(E) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (\tilde{X}, \tilde{Y}, \tilde{Z}, \tilde{T}) &\longrightarrow f(\tilde{X}, \tilde{Y}, \tilde{Z}, \tilde{T}) \end{aligned}$$

La semblança s'avalua comparant el que tenen en comú i de diferent els dos subconjunts borrosos que volem comparar. És a dir:

$$s(\tilde{A}, \tilde{B}) = f(\tilde{A} \cap \tilde{B}, \tilde{A}^c \cap \tilde{B}^c, \tilde{A} - \tilde{B}, \tilde{B} - \tilde{A}) \tag{3.19}$$

¹⁶Recordem que des del punt de vista geomètric clàssic es demanen unes altres propietats: minimalitat, simetria i desigualtat triangular.

2. Monotonia

Direm que una mesura de semblança és monòtona si $\forall \tilde{A}, \tilde{B}, \tilde{C}, \tilde{D} \in \tilde{P}(E)$ es verifica:

$$\left. \begin{array}{l} \tilde{A} \cap \tilde{C} \subset \tilde{A} \cap \tilde{B} \\ \tilde{A}^c \cap \tilde{C}^c \subset \tilde{A}^c \cap \tilde{B}^c \\ \tilde{A} - \tilde{B} \subset \tilde{A} - \tilde{C} \\ \tilde{B} - \tilde{A} \subset \tilde{C} - \tilde{A} \end{array} \right\} \implies s(\tilde{A}, \tilde{B}) \geq s(\tilde{A}, \tilde{C}) \quad (3.20)$$

Aquestes condicions s'han d'interpretar com el fet que \tilde{A} s'assembla més a \tilde{B} que a \tilde{C} si les característiques comunes i no comunes d' \tilde{A} i \tilde{B} inclouen les comunes i no comunes d' \tilde{A} i \tilde{C} . A més, cal que les característiques que les diferencien siguin menys en el primer cas que en el segon.

A causa de l'analogia entre les notacions dels subconjunts borrosos i els crisp, podria semblar que alguna de les quatre condicions de les hipòtesis de la monotonia és supèrflua. Vegem amb un contraexemple que no és així. Suposem que:

$\mu(a) = 0.7$, $\mu(b) = 0.8$, $\mu(c) = 0.4$, d'on $1 - \mu(a) = 0.3$, $1 - \mu(b) = 0.2$, $1 - \mu(c) = 0.6$,
 $\min(\mu(a), \mu(c)) = 0.4 \leq 0.7 = \min(\mu(a), \mu(b))$, $\min(\mu(a), 1 - \mu(b)) = 0.2 \leq 0.6 = \min(\mu(a), 1 - \mu(c))$,
 $\min(\mu(b), 1 - \mu(a)) = 0.3 \leq 0.3 = \min(\mu(c), 1 - \mu(a))$ i en canvi: $\min(1 - \mu(a), 1 - \mu(c)) = 0.3 \not\leq 0.2 = \min(1 - \mu(a), 1 - \mu(b))$.

3. Independència

Direm que X té una certa similitud amb Y i ho expressarem $X \simeq Y$ si $\exists \tilde{Z}, \tilde{U}, \tilde{V}, \tilde{W} \in \tilde{P}(E)$ tals que es verifica alguna de les següents propietats:

$$f(\tilde{X}, \tilde{U}, \tilde{V}, \tilde{W}) = f(\tilde{Y}, \tilde{U}, \tilde{V}, \tilde{W})$$

$$f(\tilde{Z}, \tilde{X}, \tilde{V}, \tilde{W}) = f(\tilde{Z}, \tilde{Y}, \tilde{V}, \tilde{W})$$

$$f(\tilde{Z}, \tilde{U}, \tilde{X}, \tilde{W}) = f(\tilde{Z}, \tilde{U}, \tilde{Y}, \tilde{W})$$

$$f(\tilde{Z}, \tilde{U}, \tilde{V}, \tilde{X}) = f(\tilde{Z}, \tilde{U}, \tilde{V}, \tilde{Y})$$

On f és una funció del tipus de les definides en la funcionalitat.

A més, direm que (\tilde{A}, \tilde{B}) i (\tilde{C}, \tilde{D}) estan d'acord en un, dos, tres o quatre components sempre que una, dues, tres o quatre de les següents condicions es verifiquin:

$$\text{condició 1: } \tilde{A} \cap \tilde{B} \simeq \tilde{C} \cap \tilde{D} \quad \text{condició 2: } \tilde{A}^c \cap \tilde{B}^c \simeq \tilde{C}^c \cap \tilde{D}^c$$

$$\text{condició 3: } \tilde{A} - \tilde{B} \simeq \tilde{C} - \tilde{D} \quad \text{condició 4: } \tilde{B} - \tilde{A} \simeq \tilde{D} - \tilde{C}$$

En aquestes condicions la independència es formula de la següent manera:

$\forall \tilde{A}, \tilde{B}, \tilde{C}, \tilde{D}, \tilde{A}', \tilde{B}', \tilde{C}', \tilde{D}' \in \tilde{P}(E)$, si (\tilde{A}, \tilde{B}) i (\tilde{C}, \tilde{D}) així com (\tilde{A}', \tilde{B}') i (\tilde{C}', \tilde{D}') estan d'acord en els mateixos tres components i (\tilde{A}, \tilde{B}) i (\tilde{A}', \tilde{B}') així com (\tilde{C}, \tilde{D}) i (\tilde{C}', \tilde{D}') ho estan en el que queda, aleshores direm que s és una mesura de semblança independent si es verifica la següent condició:

$$s(\tilde{A}, \tilde{B}) \geq s(\tilde{C}, \tilde{D}) \implies s(\tilde{A}', \tilde{B}') \geq s(\tilde{C}', \tilde{D}') \quad (3.21)$$

3.3.2.2 Nova família de mesures de semblança

Ara, definirem un conjunt de funcions f dependents de paràmetres tals que es verifiquin les condicions imposades anteriorment. Més endavant, comprovarem que per a valors concrets d'aquests paràmetres obtenim una generalització dels índexs clàssics, com el de Jaccard, Sneath, Rao i molts altres que es troben habitualment en els manuals.

Com ja hem comentat anteriorment, cada subconjunt borrós té associada la m-pla formada pels valors de les funcions de pertinença de les característiques que ens representen el conjunt. És a dir:

$$\tilde{A} \rightsquigarrow (\mu_{\tilde{A}}(P_1), \mu_{\tilde{A}}(P_2), \dots, \mu_{\tilde{A}}(P_m))$$

$$\tilde{B} \rightsquigarrow (\mu_{\tilde{B}}(P_1), \mu_{\tilde{B}}(P_2), \dots, \mu_{\tilde{B}}(P_m))$$

La idea consisteix a considerar una funció φ , $\varphi : \tilde{P}(E) \longrightarrow [0, +\infty]$ que verifiqui:

$$\tilde{A} \subset \tilde{B} \implies \varphi(\tilde{A}) \leq \varphi(\tilde{B}) \quad (3.22)$$

i, d'aquí, definir¹⁷:

$$s(\tilde{A}, \tilde{B}) = \frac{\alpha\varphi(\tilde{A} \cap \tilde{B}) + \beta\varphi(\tilde{A}^c \cap \tilde{B}^c)}{\gamma\varphi(\tilde{A} \cap \tilde{B}) + \delta\varphi(\tilde{A}^c \cap \tilde{B}^c) + \lambda\varphi(\tilde{A} - \tilde{B}) + \mu\varphi(\tilde{B} - \tilde{A})}$$

On $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \lambda, \mu$ són nombres reals positius. Aquest conjunt de mesures les anomenarem *mesures generalitzades* donat el seu caràcter molt ampli al variar φ i el conjunt de paràmetres. Sota determinades condicions, que més endavant analitzarem, podran ser mesures borroses o mesures de semblança borroses tal i com les hem definit a l'inici de l'apartat 3.3. Si fem l'extensió natural del cas crisp al borrós, φ coincideix amb el cardinal, que -òbviament- verifica la condició (3.22). Obtenim:

$$\varphi(\tilde{C}) = \sum_{k=1}^m \mu_{\tilde{C}}(P_k) = |\tilde{C}|$$

El valor de φ en les interseccions i diferències utilitzades es calcula emprant la t-norma que correspongui. Finalment, l'expressió és del tipus:

$$s(\tilde{A}, \tilde{B}) = \frac{\alpha|\tilde{A} \cap \tilde{B}| + \beta|\tilde{A}^c \cap \tilde{B}^c|}{\gamma|\tilde{A} \cap \tilde{B}| + \delta|\tilde{A}^c \cap \tilde{B}^c| + \lambda|\tilde{A} - \tilde{B}| + \mu|\tilde{B} - \tilde{A}|} \quad (3.23)$$

¹⁷El motiu pel qual els paràmetres $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \lambda$ i μ d'entrada no estiguin lligats per cap condició respon al fet que, en el cas crisp, existeixen mesures de semblança per a valors molt diferents dels paràmetres, com ja hem comprovat.

$$s(\tilde{A}, \tilde{B}) = \frac{\sum_{k=1}^m \alpha t(\mu_{\tilde{A}}(P_k), \mu_{\tilde{B}}(P_k)) + \beta t(n(\mu_{\tilde{A}}(P_k)), n(\mu_{\tilde{B}}(P_k)))}{\sum_{k=1}^m \gamma t(\mu_{\tilde{A}}(P_k), \mu_{\tilde{B}}(P_k)) + \delta t(n(\mu_{\tilde{A}}(P_k)), n(\mu_{\tilde{B}}(P_k))) + \lambda t(\mu_{\tilde{A}}(P_k), n(\mu_{\tilde{B}}(P_k))) + \mu t(n(\mu_{\tilde{A}}(P_k)), \mu_{\tilde{B}}(P_k))}$$

Si utilitzem la negació habitual $n(\mu_i(A)) = 1 - \mu_i(A)$, obtenim la fórmula:

$$s(\tilde{A}, \tilde{B}) = \frac{\sum_{k=1}^m \alpha t(\mu_{\tilde{A}}(P_k), \mu_{\tilde{B}}(P_k)) + \beta t(1 - \mu_{\tilde{A}}(P_k), 1 - \mu_{\tilde{B}}(P_k))}{\sum_{k=1}^m \gamma t(\mu_{\tilde{A}}(P_k), \mu_{\tilde{B}}(P_k)) + \delta t(1 - \mu_{\tilde{A}}(P_k), 1 - \mu_{\tilde{B}}(P_k)) + \lambda t(\mu_{\tilde{A}}(P_k), 1 - \mu_{\tilde{B}}(P_k)) + \mu t(1 - \mu_{\tilde{A}}(P_k), \mu_{\tilde{B}}(P_k))}$$

Per tal d'abreujar la notació en els següents paràgrafs farem servir el símbol de cardinal $| \quad |$ en lloc de la suma i la t-norma.

El nostre objectiu consisteix en trobar el conjunt més ampli de paràmetres de forma que les funcions s definides anteriorment verifiquin les propietats de funcionalitat, monotonia i independència.

3.3.2.3 Verificació de les propietats

1. Funcionalitat

És evident que de la definició de $s(\tilde{A}, \tilde{B})$ es dedueix immediatament la funcionalitat:

$$s(\tilde{A}, \tilde{B}) = f(\tilde{A} \cap \tilde{B}, \tilde{A}^c \cap \tilde{B}^c, \tilde{A} - \tilde{B}, \tilde{B} - \tilde{A})$$

2. Monotonia

$$\forall \tilde{A}, \tilde{B}, \tilde{C}, \tilde{D} \in \tilde{P}(E)$$

$$\begin{aligned}
& \left\{ \begin{array}{l} \tilde{A} \cap \tilde{C} \subset \tilde{A} \cap \tilde{B} \\ \tilde{A}^c \cap \tilde{C}^c \subset \tilde{A}^c \cap \tilde{B}^c \\ \tilde{A} - \tilde{B} \subset \tilde{A} - \tilde{C} \\ \tilde{B} - \tilde{A} \subset \tilde{C} - \tilde{A} \end{array} \right. \implies \left\{ \begin{array}{l} |\tilde{A} \cap \tilde{C}| \leq |\tilde{A} \cap \tilde{B}| \\ |\tilde{A}^c \cap \tilde{C}^c| \leq |\tilde{A}^c \cap \tilde{B}^c| \\ |\tilde{A} - \tilde{B}| \leq |\tilde{A} - \tilde{C}| \\ |\tilde{B} - \tilde{A}| \leq |\tilde{C} - \tilde{A}| \end{array} \right. \implies \\
& \implies \left\{ \begin{array}{l} \alpha\lambda|\tilde{A} \cap \tilde{B}||\tilde{A} - \tilde{B}| \geq \alpha\lambda|\tilde{A} \cap \tilde{C}||\tilde{A} - \tilde{B}| \\ \beta\lambda|\tilde{A}^c \cap \tilde{B}^c||\tilde{A} - \tilde{B}| \geq \beta\lambda|\tilde{A} - \tilde{B}||\tilde{A}^c \cap \tilde{C}^c| \\ \alpha\mu|\tilde{A} \cap \tilde{B}||\tilde{B} - \tilde{A}| \geq \alpha\mu|\tilde{B} - \tilde{A}||\tilde{A} \cap \tilde{C}| \\ \beta\mu|\tilde{A}^c \cap \tilde{B}^c||\tilde{B} - \tilde{A}| \geq \beta\mu|\tilde{B} - \tilde{A}||\tilde{A}^c \cap \tilde{C}^c| \end{array} \right.
\end{aligned}$$

Anem a trobar una condició suficient per tal que es verifiqui la condició de monotonia. Malauradament, com veurem, no serà una condició necessària; per contra, ens definirà una família de mesures de semblança que englobarà la gran majoria dels índexs crisp que es descriuen en la bibliografia de referència.

$$\begin{aligned}
s(\tilde{A}, \tilde{B}) \geq s(\tilde{A}, \tilde{C}) & \iff \frac{\alpha|\tilde{A} \cap \tilde{B}| + \beta|\tilde{A}^c \cap \tilde{B}^c|}{\gamma|\tilde{A} \cap \tilde{B}| + \delta|\tilde{A}^c \cap \tilde{B}^c| + \lambda|\tilde{A} - \tilde{B}| + \mu|\tilde{B} - \tilde{A}|} \geq \\
& \geq \frac{\alpha|\tilde{A} \cap \tilde{C}| + \beta|\tilde{A}^c \cap \tilde{C}^c|}{\gamma|\tilde{A} \cap \tilde{C}| + \delta|\tilde{A}^c \cap \tilde{C}^c| + \lambda|\tilde{A} - \tilde{C}| + \mu|\tilde{C} - \tilde{A}|} \iff \\
& \iff \alpha\gamma|\tilde{A} \cap \tilde{B}||\tilde{A} \cap \tilde{C}| + \beta\gamma|\tilde{A}^c \cap \tilde{B}^c||\tilde{A} \cap \tilde{C}| + \alpha\delta|\tilde{A} \cap \tilde{B}||\tilde{A}^c \cap \tilde{C}^c| + \beta\delta|\tilde{A}^c \cap \tilde{B}^c||\tilde{A}^c \cap \tilde{C}^c| + \\
& \quad + \alpha\lambda|\tilde{A} \cap \tilde{B}||\tilde{A} - \tilde{B}| + \beta\lambda|\tilde{A}^c \cap \tilde{B}^c||\tilde{A} - \tilde{B}| + \alpha\mu|\tilde{A} \cap \tilde{B}||\tilde{B} - \tilde{A}| + \beta\mu|\tilde{A}^c \cap \tilde{B}^c||\tilde{B} - \tilde{A}| \geq \\
& \geq \alpha\gamma|\tilde{A} \cap \tilde{B}||\tilde{A} \cap \tilde{C}| + \beta\gamma|\tilde{A}^c \cap \tilde{C}^c||\tilde{A} \cap \tilde{B}| + \alpha\delta|\tilde{A} \cap \tilde{C}||\tilde{A}^c \cap \tilde{B}^c| + \beta\delta|\tilde{A}^c \cap \tilde{C}^c||\tilde{A}^c \cap \tilde{B}^c| + \\
& \quad + \alpha\lambda|\tilde{A} \cap \tilde{C}||\tilde{A} - \tilde{B}| + \beta\lambda|\tilde{A}^c \cap \tilde{C}^c||\tilde{A} - \tilde{B}| + \alpha\mu|\tilde{A} \cap \tilde{C}||\tilde{B} - \tilde{A}| + \beta\mu|\tilde{A}^c \cap \tilde{C}^c||\tilde{B} - \tilde{A}|
\end{aligned}$$

Simplificant els termes comuns i considerant les condicions anteriors, obtenim que si es verifica:

$$\begin{aligned}
& \beta\gamma|\tilde{A}^c \cap \tilde{B}^c||\tilde{A} \cap \tilde{C}| + \alpha\delta|\tilde{A} \cap \tilde{B}||\tilde{A}^c \cap \tilde{C}^c| \geq \\
& \geq \beta\gamma|\tilde{A}^c \cap \tilde{C}^c||\tilde{A} \cap \tilde{B}| + \alpha\delta|\tilde{A} \cap \tilde{C}||\tilde{A}^c \cap \tilde{B}^c|
\end{aligned}$$

aleshores es verifica $s(\tilde{A}, \tilde{B}) \geq s(\tilde{A}, \tilde{C})$. Aquesta condició és equivalent a:

$$|\tilde{A} \cap \tilde{B}||\tilde{A}^c \cap \tilde{C}^c|(\alpha\delta - \gamma\beta) + |\tilde{A}^c \cap \tilde{B}^c||\tilde{A} \cap \tilde{C}|(\beta\gamma - \alpha\delta) \geq 0$$

D'on establim les condicions suficients:

$$\alpha\delta - \gamma\beta \geq 0 \quad \text{i} \quad \beta\gamma - \alpha\delta \geq 0$$

Per tant, si es verifiquen les anteriors desigualtats, aleshores es verifica la condició de monotonia, encara que per a qualsevol negació n el recíproc no és cert. D'aquí es dedueix immediatament la següent condició suficient per tal que es verifiqui la monotonia:

Condició suficient de monotonia

$$\alpha\delta = \gamma\beta \tag{3.24}$$

Fixem-nos que si $\alpha = \gamma$ i $\beta = \delta$ l'anterior condició es verifica. Acceptar les anteriors condicions només implica acceptar que les ponderacions dels elements comuns en el numerador i en el denominador són les mateixes.

Anem a demostrar una proposició prèvia a la independència sobre $\tilde{X} \simeq \tilde{Y}$ en el nostre cas particular.

Proposició

Si es verifica la condició suficient de monoticitat $\alpha\delta = \gamma\beta$ i $\lambda \neq 0$ o $\mu \neq 0$, aleshores:

$$\forall \tilde{X}, \tilde{Y} \in \tilde{\wp}(E) \quad \tilde{X} \simeq \tilde{Y} \quad \implies \quad |\tilde{X}| = |\tilde{Y}| \tag{3.25}$$

Demostració:

$$\text{Per hipòtesis: } f(\tilde{Z}, \tilde{U}, \tilde{V}, \tilde{W}) = \frac{\alpha|\tilde{Z}| + \beta|\tilde{U}|}{\gamma|\tilde{Z}| + \delta|\tilde{U}| + \lambda|\tilde{V}| + \mu|\tilde{W}|}$$

Donada la definició de $\tilde{X} \simeq \tilde{Y}$, hem de distingir quatre casos:

(a) $f(\tilde{X}, \tilde{U}, \tilde{V}, \tilde{W}) = f(\tilde{Y}, \tilde{U}, \tilde{V}, \tilde{W})$

$$f(\tilde{X}, \tilde{U}, \tilde{V}, \tilde{W}) = f(\tilde{Y}, \tilde{U}, \tilde{V}, \tilde{W}) \implies$$

$$\begin{aligned} &\implies \frac{\alpha|\tilde{X}| + \beta|\tilde{U}|}{\gamma|\tilde{X}| + \delta|\tilde{U}| + \lambda|\tilde{V}| + \mu|\tilde{W}|} = \frac{\alpha|\tilde{Y}| + \beta|\tilde{U}|}{\gamma|\tilde{Y}| + \delta|\tilde{U}| + \lambda|\tilde{V}| + \mu|\tilde{W}|} \implies \\ &\implies \alpha(|\tilde{X}| - |\tilde{Y}|)(\delta|\tilde{U}| + \lambda|\tilde{V}| + \mu|\tilde{W}|) + \beta\gamma|\tilde{U}|(|\tilde{Y}| - |\tilde{X}|) = 0 \implies \\ &\implies (|\tilde{X}| - |\tilde{Y}|)((\alpha\delta - \gamma\beta)|\tilde{U}| + \lambda|\tilde{V}| + \mu|\tilde{W}|) = 0 \implies |\tilde{X}| = |\tilde{Y}| \end{aligned}$$

$$(b) f(\tilde{Z}, \tilde{X}, \tilde{V}, \tilde{W}) = f(\tilde{Z}, \tilde{Y}, \tilde{V}, \tilde{W})$$

$$f(\tilde{Z}, \tilde{X}, \tilde{V}, \tilde{W}) = f(\tilde{Z}, \tilde{Y}, \tilde{V}, \tilde{W}) \implies$$

$$\begin{aligned} &\implies \frac{\alpha|\tilde{Z}| + \beta|\tilde{X}|}{\gamma|\tilde{Z}| + \delta|\tilde{X}| + \lambda|\tilde{V}| + \mu|\tilde{W}|} = \frac{\alpha|\tilde{Z}| + \beta|\tilde{Y}|}{\gamma|\tilde{Z}| + \delta|\tilde{Y}| + \lambda|\tilde{V}| + \mu|\tilde{W}|} \implies \\ &\implies \beta(|\tilde{X}| - |\tilde{Y}|)(\gamma|\tilde{Z}| + \lambda|\tilde{V}| + \mu|\tilde{W}|) + \alpha\delta|\tilde{Z}|(|\tilde{Y}| - |\tilde{X}|) = 0 \implies \\ &\implies (|\tilde{X}| - |\tilde{Y}|)((\gamma\beta - \alpha\delta)|\tilde{Z}| + \lambda|\tilde{V}| + \mu|\tilde{W}|) = 0 \implies |\tilde{X}| = |\tilde{Y}| \end{aligned}$$

$$(c) f(\tilde{Z}, \tilde{U}, \tilde{X}, \tilde{W}) = f(\tilde{Z}, \tilde{U}, \tilde{Y}, \tilde{W})$$

$$f(\tilde{Z}, \tilde{U}, \tilde{X}, \tilde{W}) = f(\tilde{Z}, \tilde{U}, \tilde{Y}, \tilde{W}) \implies$$

$$\begin{aligned} &\implies \frac{\alpha|\tilde{Z}| + \beta|\tilde{U}|}{\gamma|\tilde{Z}| + \delta|\tilde{U}| + \lambda|\tilde{X}| + \mu|\tilde{W}|} = \frac{\alpha|\tilde{Z}| + \beta|\tilde{U}|}{\gamma|\tilde{Z}| + \delta|\tilde{U}| + \lambda|\tilde{Y}| + \mu|\tilde{W}|} \implies \\ &\implies \lambda(|\tilde{X}| - |\tilde{Y}|)(\alpha|\tilde{Z}| + \beta|\tilde{U}|) = 0 \implies |\tilde{X}| = |\tilde{Y}| \end{aligned}$$

$$(d) f(\tilde{Z}, \tilde{U}, \tilde{V}, \tilde{X}) = f(\tilde{Z}, \tilde{U}, \tilde{V}, \tilde{Y})$$

Per simetria es fa igual que el cas (c).

Independència

En les condicions de la formulació (3.21), hem de demostrar:

$$s(\tilde{A}, \tilde{B}) \geq s(\tilde{C}, \tilde{D}) \implies s(\tilde{A}', \tilde{B}') \geq s(\tilde{C}', \tilde{D}')$$

Sabem que (\tilde{A}, \tilde{B}) i (\tilde{C}, \tilde{D}) així com (\tilde{A}', \tilde{B}') i (\tilde{C}', \tilde{D}') estan d'acord en els mateixos tres components, i que (\tilde{A}, \tilde{B}) i (\tilde{A}', \tilde{B}') així com (\tilde{C}, \tilde{D}) i (\tilde{C}', \tilde{D}') ho estan en el que queda. A més, suposarem que es verifica la condició suficient per a la monotonia, que és justament la de la proposició anterior: $\alpha\delta = \beta\gamma$. A fi d'abreujar el llenguatge utilitzarem la següent notació:

$$\begin{aligned} \tilde{A} \cap \tilde{B} &= \tilde{X} & \tilde{A}' \cap \tilde{B}' &= \tilde{X}' & \tilde{C} \cap \tilde{D} &= \tilde{U} & \tilde{C}' \cap \tilde{D}' &= \tilde{U}' \\ \tilde{A}^c \cap \tilde{B}^c &= \tilde{Y} & \tilde{A}'^c \cap \tilde{B}'^c &= \tilde{Y}' & \tilde{C}^c \cap \tilde{D}^c &= \tilde{V} & \tilde{C}'^c \cap \tilde{D}'^c &= \tilde{V}' \\ \tilde{A} - \tilde{B} &= \tilde{Z} & \tilde{A}' - \tilde{B}' &= \tilde{Z}' & \tilde{C} - \tilde{D} &= \tilde{W} & \tilde{C}' - \tilde{D}' &= \tilde{W}' \\ \tilde{B} - \tilde{A} &= \tilde{T} & \tilde{B}' - \tilde{A}' &= \tilde{T}' & \tilde{D} - \tilde{C} &= \tilde{R} & \tilde{D}' - \tilde{C}' &= \tilde{R}' \end{aligned}$$

Per tal de fer la demostració hem de tornar a distingir quatre casos corresponents a les quatre possibles combinacions de quatre elements en grups de tres:

Cas A

$$\begin{aligned} \tilde{X} &\simeq \tilde{U} & \tilde{X}' &\simeq \tilde{U}' & \tilde{T} &\simeq \tilde{T}' \\ \tilde{Y} &\simeq \tilde{V} & \tilde{Y}' &\simeq \tilde{V}' & \text{i} & \tilde{R} &\simeq \tilde{R}' \\ \tilde{Z} &\simeq \tilde{W} & \tilde{Z}' &\simeq \tilde{W}' \end{aligned}$$

De la demostració de la proposició anterior sabem que el símbol \simeq equival a la igualtat entre el cardinal dels conjunts.

$$\begin{aligned} &s(\tilde{A}, \tilde{B}) \geq s(\tilde{C}, \tilde{D}) \implies \\ \implies &\frac{\alpha|\tilde{X}| + \beta|\tilde{Y}|}{\gamma|\tilde{X}| + \delta|\tilde{Y}| + \lambda|\tilde{Z}| + \mu|\tilde{T}|} \geq \frac{\alpha|\tilde{U}| + \beta|\tilde{V}|}{\gamma|\tilde{U}| + \delta|\tilde{V}| + \lambda|\tilde{W}| + \mu|\tilde{R}|} \implies \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\implies \frac{\alpha|\tilde{X}| + \beta|\tilde{Y}|}{\gamma|\tilde{X}| + \delta|\tilde{Y}| + \lambda|\tilde{Z}| + \mu|\tilde{T}|} \geq \frac{\alpha|\tilde{X}| + \beta|\tilde{Y}|}{\gamma|\tilde{X}| + \delta|\tilde{Y}| + \lambda|\tilde{Z}| + \mu|\tilde{R}|} \implies \\
&\implies |\tilde{T}| \leq |\tilde{R}| \implies |\tilde{T}'| \leq |\tilde{R}'| \implies \frac{\alpha|\tilde{X}'| + \beta|\tilde{Y}'|}{\gamma|\tilde{X}'| + \delta|\tilde{Y}'| + \lambda|\tilde{Z}'| + \mu|\tilde{T}'|} \geq \\
&\geq \frac{\alpha|\tilde{U}'| + \beta|\tilde{V}'|}{\gamma|\tilde{U}'| + \delta|\tilde{V}'| + \lambda|\tilde{W}'| + \mu|\tilde{R}'|} \implies s(\tilde{A}', \tilde{B}') \geq s(\tilde{C}', \tilde{D}')
\end{aligned}$$

Cas B

$$\begin{aligned}
\tilde{X} &\simeq \tilde{U} & \tilde{X}' &\simeq \tilde{U}' & \tilde{Z} &\simeq \tilde{Z}' \\
\tilde{Y} &\simeq \tilde{V} & \tilde{Y}' &\simeq \tilde{V}' & \tilde{W} &\simeq \tilde{W}' \\
\tilde{T} &\simeq \tilde{R} & \tilde{T}' &\simeq \tilde{R}'
\end{aligned}$$

Evidentment és idèntic al cas anterior ja que, llevat dels paràmetres, el paper que hi juga la intersecció de dos subconjunts i la intersecció dels seus complementaris en la funció és totalment simètric al cas anterior.

Cas C

$$\begin{aligned}
\tilde{X} &\simeq \tilde{U} & \tilde{X}' &\simeq \tilde{U}' & \tilde{Y} &\simeq \tilde{Y}' \\
\tilde{Z} &\simeq \tilde{W} & \tilde{Z}' &\simeq \tilde{W}' & \tilde{V} &\simeq \tilde{V}' \\
\tilde{T} &\simeq \tilde{R} & \tilde{T}' &\simeq \tilde{R}'
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&s(\tilde{A}, \tilde{B}) \geq s(\tilde{C}, \tilde{D}) \implies \\
&\implies \frac{\alpha|\tilde{X}| + \beta|\tilde{Y}|}{\gamma|\tilde{X}| + \delta|\tilde{Y}| + \lambda|\tilde{Z}| + \mu|\tilde{T}|} \geq \frac{\alpha|\tilde{U}| + \beta|\tilde{V}|}{\gamma|\tilde{U}| + \delta|\tilde{V}| + \lambda|\tilde{W}| + \mu|\tilde{R}|} \implies \\
&\implies \frac{\alpha|\tilde{X}| + \beta|\tilde{Y}|}{\gamma|\tilde{X}| + \delta|\tilde{Y}| + \lambda|\tilde{Z}| + \mu|\tilde{T}|} \geq \frac{\alpha|\tilde{X}| + \beta|\tilde{V}|}{\gamma|\tilde{X}| + \delta|\tilde{V}| + \lambda|\tilde{Z}| + \mu|\tilde{T}|} \implies \\
&\alpha\delta|\tilde{X}|(|\tilde{V}| - |\tilde{Y}|) + \beta\gamma|\tilde{X}|(|\tilde{Y}| - |\tilde{V}|) + \beta(|\tilde{Y}| - |\tilde{V}|)(\lambda|\tilde{Z}| + \mu|\tilde{T}|) \geq 0 \implies \\
&\implies (\alpha\delta - \gamma\beta)|\tilde{X}||\tilde{V}| + (\gamma\beta - \alpha\delta)|\tilde{X}||\tilde{Y}| + \beta(|\tilde{Y}| - |\tilde{V}|)(\lambda|\tilde{Z}| + \mu|\tilde{T}|) \geq 0 \implies \\
&\implies (\alpha\delta - \gamma\beta)(|\tilde{X}||\tilde{V}| - |\tilde{X}||\tilde{Y}|) + \beta(|\tilde{Y}| - |\tilde{V}|)(\lambda|\tilde{Z}| + \mu|\tilde{T}|) \geq 0
\end{aligned}$$

Si apliquem la condició $\alpha\delta - \beta\gamma = 0$ a l'anterior desigualtat, ens queda:

$$\beta(|\tilde{Y}| - |\tilde{V}|)(\lambda|\tilde{Z}| + \mu|\tilde{T}|) \geq 0 \implies |\tilde{Y}| \geq |\tilde{V}| \implies |\tilde{Y}'| \geq |\tilde{V}'|$$

Per altra banda, fent els mateixos càlculs, de la condició

$$s(\tilde{A}', \tilde{B}') \geq s(\tilde{C}', \tilde{D}')$$

Arribem a $|\tilde{Y}'| \geq |\tilde{V}'|$, que justament és el que acabem de demostrar.

Cas D

$$\begin{aligned} \tilde{Y} &\simeq \tilde{V} & \tilde{Y}' &\simeq \tilde{V}' & \tilde{X} &\simeq \tilde{X}' \\ \tilde{Z} &\simeq \tilde{W} & \tilde{Z}' &\simeq \tilde{W}' & \tilde{U} &\simeq \tilde{U}' \\ \tilde{T} &\simeq \tilde{R} & \tilde{T}' &\simeq \tilde{R}' \end{aligned}$$

Aquest cas és idèntic al cas C.

Propietats immediates

1. De la definició d'aquestes mesures generalitzades es dedueix immediatament que si $\alpha = \gamma$ i $\beta = \delta$ aleshores són mesures borroses ja que el cardinal d'un conjunt és sempre positiu; encara que no són simètriques. De fet, seria lògic que les anteriors condicions sempre fossin certes i, per tant, només treballaríem amb quatre paràmetres. La utilització de sis paràmetres en lloc de quatre és per tal de recollir casos en què termes del denominador no es troben en el numerador, com és el cas de la mesura de Rao.
2. Si $\lambda = \mu$, obtenim mesures simètriques. Per tant, si treballem en condicions de no simetria es tracta d'escollir aquests dos paràmetres amb valor diferent.
3. En les condicions dels dos apartats anteriors ($\alpha = \gamma, \beta = \delta$ i $\lambda = \mu$) obtenim mesures de semblança borroses que verifiquen de forma addicional la funcionalitat, la monotonia i la independència.

4. La condició reflexiva es verifica si $\alpha = \gamma$, $\beta = \delta$ i utilitzem com a t -norma una que verifiqui el principi del terç exclòs. Les més conegudes són les connectives de Lukaciewicz. En el capítol 1 ja hem trobat condicions suficients per generar t -normes amb aquestes propietats. La condició de la desigualtat triangular serà tractada en el següent capítol, ja que està relacionada amb el procés de clustering.
5. De les propietats anteriors es dedueix que per $\alpha = \gamma$, $\beta = \delta$, $\lambda = \mu$ i usant una t -norma que verifiqui el principi del terç exclòs, obtenim mesures de semblança borroses que donen lloc a matrius de proximitat; i, a més, verifiquen les propietats de funcionalitat, monotonia i independència.

3.3.2.4 Exemples de mesures borroses generalitzades

De les expressions de les mesures crisp, es dedueixen les següents mesures borroses generalitzades:

1. Mesura d'aparellament

$$s_A(\tilde{A}, \tilde{B}) = \frac{|\tilde{A} \cap \tilde{B}| + |\tilde{A}^c \cap \tilde{B}^c|}{|\tilde{A} \cap \tilde{B}| + |\tilde{A}^c \cap \tilde{B}^c| + |\tilde{A} - \tilde{B}| + |\tilde{B} - \tilde{A}|} \quad (3.26)$$

2. Mesura de Rao

$$s_R(\tilde{A}, \tilde{B}) = \frac{|\tilde{A} \cap \tilde{B}|}{|\tilde{A} \cap \tilde{B}| + |\tilde{A}^c \cap \tilde{B}^c| + |\tilde{A} - \tilde{B}| + |\tilde{B} - \tilde{A}|} \quad (3.27)$$

3. Mesures generalitzades de Tversky

$$s_T(\tilde{A}, \tilde{B}) = \frac{|\tilde{A} \cap \tilde{B}|}{|\tilde{A} \cap \tilde{B}| + \lambda|\tilde{A} - \tilde{B}| + \mu|\tilde{B} - \tilde{A}|} \quad (3.28)$$

Les tres mesures següents són casos particulars d'aquestes, però d'una especial rellevància:

4. Mesura de Jackard

$$s_J(\tilde{A}, \tilde{B}) = \frac{|\tilde{A} \cap \tilde{B}|}{|\tilde{A} \cap \tilde{B}| + |\tilde{A} - \tilde{B}| + |\tilde{B} - \tilde{A}|} \quad (3.29)$$

5. Mesura de Dice

$$s_D(\tilde{A}, \tilde{B}) = \frac{|\tilde{A} \cap \tilde{B}|}{|\tilde{A} \cap \tilde{B}| + 0.5|\tilde{A} - \tilde{B}| + 0.5|\tilde{B} - \tilde{A}|} \quad (3.30)$$

6. Mesura de Sokal i Sneath

$$s_{SS}(\tilde{A}, \tilde{B}) = \frac{|\tilde{A} \cap \tilde{B}|}{|\tilde{A} \cap \tilde{B}| + 2|\tilde{A} - \tilde{B}| + 2|\tilde{B} - \tilde{A}|} \quad (3.31)$$

Finalment introduïm una nova família de la qual estudiarem algunes propietats més endavant.

7. Família de mesures d'aparellament

$$s_{AG}(\tilde{A}, \tilde{B}) = \frac{|\tilde{A} \cap \tilde{B}| + |\tilde{A}^c \cap \tilde{B}^c|}{|\tilde{A} \cap \tilde{B}| + |\tilde{A}^c \cap \tilde{B}^c| + \lambda|\tilde{A} - \tilde{B}| + \mu|\tilde{B} - \tilde{A}|} \quad (3.32)$$

Per $\lambda = 1$ i $\mu = 1$ obtenim $s_{AG} = s_A$. Són evidentment una extensió de la mesura d'aparellament i d'aquí el seu nom¹⁸.

Del que hem vist fins ara, és immediat comprovar que les anteriors mesures de semblança verifiquen les condicions de funcionalitat, monoticitat i independència ja que verifiquen (3.24), llevat de la mesura de Rao.

Propietats

1. Per a t-normes que verifiquin el principi del terç exclòs, s_A , s_T , s_{AG} , s_J , s_D i s_{SS} són reflexives.
2. s_A , s_R , s_J , s_D i s_{SS} són simètriques. Per a $\lambda = \mu$, s_T i s_{AG} són simètriques.
3. s_{AG} i s_R estan ben definides, en el sentit que el denominador no s'anul·la mai; llevat de casos molt especials com el d'utilitzar la t-norma del producte acotat i en condicions de màxima incertesa donat que $\max\{0, 0.5 + 0.5 - 1\} = 0$, $\max\{0, (1 - 0.5) + 0.5 - 1\} = 0$, $\max\{0, 0.5 + (1 - 0.5) - 1\} = 0$ i $\max\{0, (1 - 0.5) + (1 - 0.5) - 1\} = 0$.

És per aquestes raons que és recomanable utilitzar s_{AG} per a $\lambda = \mu$ ja que es tracta de mesures de semblança borroses que verifiquen les propietats de funcionalitat, monotonia i independència, i generen matrius de proximitat. Si no hi ha motius per a discriminar entre la importància de les característiques que són comunes de les que les diferencien, el més natural és mesurar la semblança mitjançant s_A ($\lambda = \mu = 1$).

Exemples

Suposem $\tilde{A} = (0.9, 0.2, 0, 0.6, 0.1, 0.8, 1, 0.3)$ i $\tilde{B} = (0.1, 0.5, 0.8, 0.4, 1, 0, 0.7, 0.9)$

¹⁸Sempre que no s'indiquin els valors de λ i μ , el mot *mesura d'aparellament* fa referència a s_A

Amb la t-norma del mínim de Zadeh i la negació habitual:

$$|\tilde{A} \cap \tilde{B}| = 0.1 + 0.2 + 0 + 0.4 + 0.1 + 0 + 0.7 + 0.3 = 1.8$$

$$|\tilde{A}^c \cap \tilde{B}^c| = 0.1 + 0.5 + 0.2 + 0.1 + 0 + 0.2 + 0 + 0.1 = 1.2$$

$$|\tilde{A} - \tilde{B}| = 0.9 + 0.2 + 0 + 0.6 + 0 + 0.8 + 0.3 + 0.1 = 2.9$$

$$|\tilde{B} - \tilde{A}| = 0.1 + 0.5 + 0.8 + 0.4 + 0.2 + 0 + 0 + 0.7 = 2.7$$

$$s_A(\tilde{A}, \tilde{B}) = 0.35, s_J(\tilde{A}, \tilde{B}) = 0.24, s_R(\tilde{A}, \tilde{B}) = 0.21, s_D(\tilde{A}, \tilde{B}) = 0.39, s_{SS}(\tilde{A}, \tilde{B}) = 0.14,$$

$$s_T(\tilde{A}, \tilde{B}) = \frac{1.8}{1.8 + 2.9\lambda + 2.7\mu}, s_{T'}(\tilde{A}, \tilde{B}) = \frac{3}{3 + 2.9\lambda + 2.7\mu}$$

Amb la t-norma del producte algebraic i la negació habitual:

$$|\tilde{A} \cap \tilde{B}| = 0.09 + 0.1 + 0 + 0.36 + 0.1 + 0 + 0.7 + 0.27 = 1.62$$

$$|\tilde{A}^c \cap \tilde{B}^c| = 0.09 + 0.4 + 0.2 + 0.06 + 0.2 + 0.07 = 1.02$$

$$|\tilde{A} - \tilde{B}| = 0.81 + 0.1 + 0.54 + 0.8 + 0.3 + 0.03 = 2.58$$

$$|\tilde{B} - \tilde{A}| = 0.01 + 0.4 + 0.8 + 0.04 + 0.9 + 0.63 = 2.78$$

$$s_A(\tilde{A}, \tilde{B}) = 0.33, s_J(\tilde{A}, \tilde{B}) = 0.23, s_R(\tilde{A}, \tilde{B}) = 0.20, s_D(\tilde{A}, \tilde{B}) = 0.38, s_{SS}(\tilde{A}, \tilde{B}) = 0.13,$$

$$s_T(\tilde{A}, \tilde{B}) = \frac{1.62}{1.62 + 2.58\lambda + 2.78\mu}, s_{AG}(\tilde{A}, \tilde{B}) = \frac{2.64}{2.64 + 2.58\lambda + 2.78\mu}$$

Amb la t-norma del producte acotat i la negació habitual:

$$|\tilde{A} \cap \tilde{B}| = 0.3 + 0.1 + 0.7 + 0.2 = 1.3$$

$$|\tilde{A}^c \cap \tilde{B}^c| = 0.3 + 0.2 + 0.2 = 0.7$$

$$|\tilde{A} - \tilde{B}| = 0.8 + 0.5 + 0.8 + 0.3 = 2.4$$

$$|\tilde{B} - \tilde{A}| = 0.3 + 0.8 + 0.9 + 0.6 = 2.6$$

$$s_A(\tilde{A}, \tilde{B}) = 0.29, s_J(\tilde{A}, \tilde{B}) = 0.21, s_R(\tilde{A}, \tilde{B}) = 0.19, s_D(\tilde{A}, \tilde{B}) = 0.34, s_{SS}(\tilde{A}, \tilde{B}) = 0.12,$$

$$s_T(\tilde{A}, \tilde{B}) = \frac{1.3}{1.3 + 2.4\lambda + 2.6\mu}, s_{AG}(\tilde{A}, \tilde{B}) = \frac{2}{2 + 2.58\lambda + 2.78\mu}$$

Anem a fer un estudi més aprofundit de les mesures d'aparellament generalitzades.

3.3.2.5 Família de mesures d'aparellament

Aquestes mesures tenen la particularitat que per $\lambda \neq \mu$ no són simètriques i, per tant, poden ser utilitzades en la modelització de situacions on el judici humà tampoc és simètric. El que volem és estudiar el comportament d'aquestes mesures en un parell de casos particulars: el primer, quan un dels dos subconjunts borrosos verifica amb grau de pertinença 1 totes les característiques, que anomenarem *prototípica*, i l'altre, quan existeix la màxima incertesa en els diferents atributs. Quan hi pugui haver dubte de quina t-norma s'està utilitzant, s'afegirà una tercera lletra al subíndex d's per tal d'indicar-ho.

Prototípica

Suposem que $\tilde{A} = (1, 1, \dots, 1)$. i \tilde{B} qualsevol.

$$s_{AG}(\tilde{A}, \tilde{B}) =$$

$$= \frac{\sum_{k=1}^m t(\mu_{\tilde{A}}(P_k), \mu_{\tilde{B}}(P_k)) + t(1 - \mu_{\tilde{A}}(P_k), 1 - \mu_{\tilde{B}}(P_k))}{\sum_{k=1}^m t(\mu_{\tilde{A}}(P_k), \mu_{\tilde{B}}(P_k)) + t(1 - \mu_{\tilde{A}}(P_k), 1 - \mu_{\tilde{B}}(P_k)) + \lambda t(\mu_{\tilde{A}}(P_k), 1 - \mu_{\tilde{B}}(P_k)) + \mu t(1 - \mu_{\tilde{A}}(P_k), \mu_{\tilde{B}}(P_k))} =$$

$$= \frac{\sum_{k=1}^m t(1, \mu_{\tilde{B}}(P_k)) + t(0, 1 - \mu_{\tilde{B}}(P_k))}{\sum_{k=1}^m t(1, \mu_{\tilde{B}}(P_k)) + t(0, 1 - \mu_{\tilde{B}}(P_k)) + \lambda t(1, 1 - \mu_{\tilde{B}}(P_k)) + \mu t(0, \mu_{\tilde{B}}(P_k))}$$

A partir de les propietats de les t -normes deduïm:

$$s_{AG}(\tilde{A}, \tilde{B}) = \frac{\sum_{k=1}^m \mu_{\tilde{B}}(P_k)}{\sum_{k=1}^m \mu_{\tilde{B}}(P_k) + \lambda \sum_{k=1}^m (1 - \mu_{\tilde{B}}(P_k))} = \frac{\sum_{k=1}^m \mu_{\tilde{B}}(P_k)}{(1 - \lambda) \sum_{k=1}^m \mu_{\tilde{B}}(P_k) + \lambda m}$$

I, per tant, el se valor no depèn ni de la t -norma ni de μ ¹⁹.

En el cas que $\tilde{B} = (1, 1, \dots, 1)$ es dedueix immediatament que $s_{AG}(\tilde{A}, \tilde{B}) = 1$.

Màxima incertesa

Cas A

Suposem $\tilde{A} = \tilde{B} = (0.5, 0.5, \dots, 0.5)$. En aquest cas el valor de la mesura no és constant, fins i tot no té per què estar definit, com ocorre quan la t -norma és la del producte acotat. Sí, en canvi, que pren un valor constant en la t -norma del mínim de Zadeh i en la t -norma del producte algebraic. Vegem-ho.

En aquest cas:

$$s_{AGM}(\tilde{A}, \tilde{B}) = \frac{m}{m + 0.5\lambda m + 0.5\mu m} = \frac{1}{1 + 0.5(\lambda + \mu)}$$

$$s_{AGP}(\tilde{A}, \tilde{B}) = \frac{0.25m + 0.25m}{0.25m + 0.25m + 0.25\lambda m + 0.25\mu m} = \frac{1}{1 + 0.5(\lambda + \mu)}$$

¹⁹En realitat, aquest resultat també és cert per a la mesura de Jackard donat que les termes que s'anul·len en $s_{AG}(\tilde{A}, \tilde{B})$ són justament els que falten en la definició de $s_J(\tilde{A}, \tilde{B})$.

On els subíndexs M i P es refereixen respectivament a les t-normes del mínim de Zadeh i del producte algebraic.

Cas B

Suposem $\tilde{A} = (0.5, 0.5, \dots, 0.5)$, \tilde{B} qualsevol i $\lambda = \mu = 1$, aleshores:

$$s_A(\tilde{A}, \tilde{B}) = \frac{\sum_{k=1}^m t(0.5, \mu_{\tilde{B}}(P_k)) + t(1 - 0.5, 1 - \mu_{\tilde{B}}(P_k))}{\sum_{k=1}^m t(0.5, \mu_{\tilde{B}}(P_k)) + t(1 - 0.5, 1 - \mu_{\tilde{B}}(P_k)) + t(0.5, 1 - \mu_{\tilde{B}}(P_k)) + t(1 - 0.5, \mu_{\tilde{B}}(P_k))} = 0.5$$

3.3.3 Superfícies de semblança

3.3.3.1 Definició

Suposem que $E = \{P_1, P_2\}$ i que a través d'un procés d'expertatge l'expert no ens expressa la seva opinió només mitjançant un valor entre 0 i 1, sinó que ho fa mitjançant un nombre borrós; és a dir, $\mu_{\tilde{A}}(P_k)$ $k = 1, 2$ és un nombre borrós, i, per tant, $\mu_{\tilde{A}}(P_k) = \mu_{\tilde{A}}(P_k)(x)$. Siguin doncs $\mu_{\tilde{A}}(P_1)(x)$ i $\mu_{\tilde{A}}(P_2)(y)$ els nombres borrosos assignats per l'expert, i $\mu_{\tilde{B}}(P_1)$ i $\mu_{\tilde{B}}(P_2)$ dos valors de referència que defineixen un altre subconjunt borrós \tilde{B} . La representació de la mesura de semblança entre \tilde{A} i \tilde{B} és una superfície que té com a domini el producte cartesià dels dominis dels nombres borrosos proporcionats per l'expert, i que representarem per D_1 i D_2 ²⁰. Per tant:

$$s(\tilde{A}, \tilde{B}) = s(\tilde{A}, \tilde{B})(x, y) \quad (x, y) \in D_1 \times D_2 \quad (3.33)$$

²⁰En el cas general d' m components, ens trobem en un espai de dimensió $m + m + 1 = 2m + 1$.

Finalment, per tal de definir un valor real mitjà de tots els valors de la superfície de semblança, el podem calcular amb l'expressió:

$$s_0(\tilde{A}, \tilde{B}) = \frac{\int_{D_1 \times D_2} s(\tilde{A}, \tilde{B})(x, y) dx dy}{\int_{D_1 \times D_2} dx dy}$$

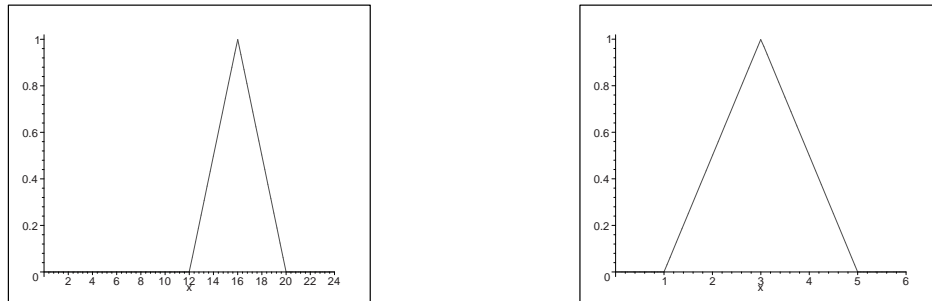
D'aquesta manera aconseguiríem tenir la semblança entre dos subconjunts borrosos expressada amb un sol valor. De les propietats de $s(\tilde{A}, \tilde{B})(x, y)$ es dedueix immediatament que:

$$0 \leq s_0(\tilde{A}, \tilde{B}) \leq 1$$

3.3.3.2 Exemples numèrics

Les figures 3.2-3.7 han estat calculades utilitzant les t-normes del mínim de Zadeh, del producte algebraic i del producte acotat; i utilitzant les mesures generalitzades de Jackard i d'aparellament. Com a nombres borrosos continus suposem que els experts ens han expressat la seva opinió mitjançant dos nombres triangulars: $T_1 = (12, 16, 20)$ i $T_2 = (1, 3, 5)$, aleshores els dominis corresponents són: $D_1 = [12, 20]$, $D_2 = [1, 5]$ i $D = D_1 \times D_2 = [12, 20] \times [1, 5]$.

Figura 3.1: Nombres triangulars T_1 i T_2



En la figura 3.1 hi ha la representació de la funció de pertinença dels dos nombres triangulars. D'esquerra a dreta, els gràfics de les superfícies de semblança de les diferents figures estan calculats per al cas prototípic, de màxima incertesa, i una altra mesura, que en aquest cas ha estat $(0.85, 0.31)$. Això s'ha fet així per veure gràficament que, al canviar de forma accentuada un valor, la mesura queda força afectada. Òbviament, si la t -norma és la del producte acotat només hi ha dues superfícies, ja que per a màxima incertesa no està definida.

Figura 3.2: Mesura de Jackard per a t_{\min}

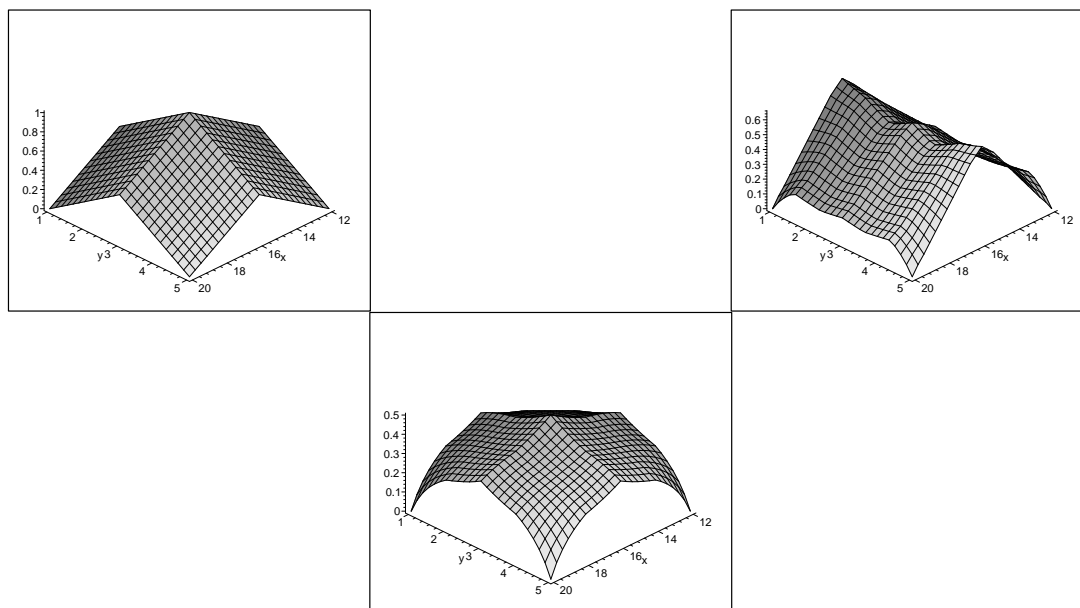
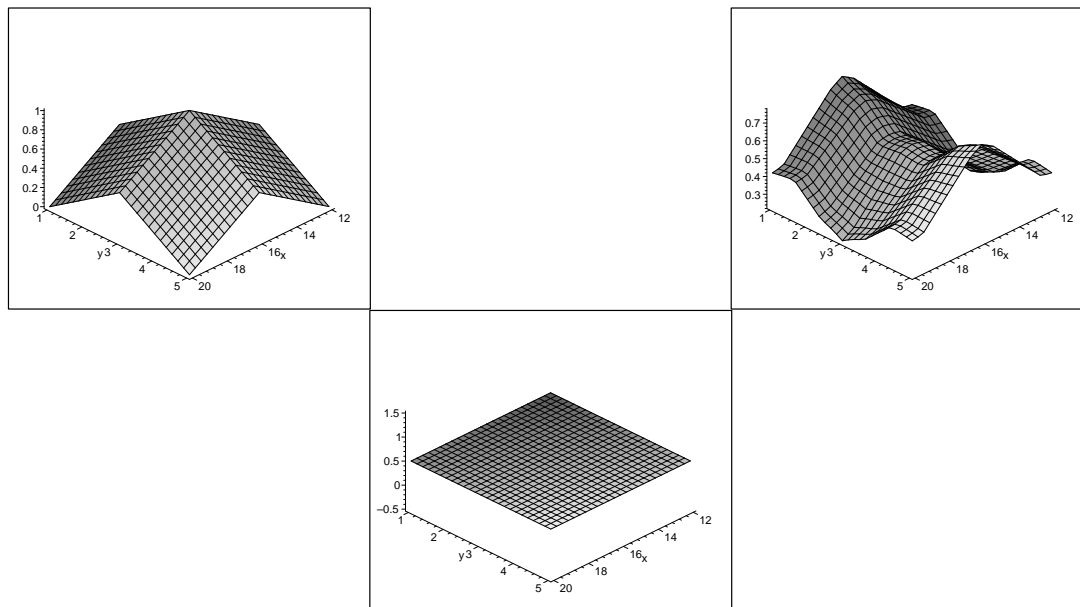


Figura 3.3: Mesura d'aparellament per a t_{\min}



Observi's que en el cas prototípic la superfície de semblança no depèn de la t -norma utilitzada, així com tampoc de la mesura, donat que hem usat les mesures generalitzades de Jackard i d'aparellament. Com ja hem vist anteriorment, si calculem les mesures d'aparellament amb la condició de màxima incertesa i la t -norma és la del mínim de Zadeh o la del producte algebraic, la mesura de semblança dóna $\frac{1}{1 + 0.5(\lambda + \mu)}$; si, a més a més, $\lambda = \mu = 1$ (mesura d'aparellament), aleshores $\frac{1}{1 + 0.5(\lambda + \mu)} = 0.5$, la qual cosa també és certa encara que un dels subconjunts borrosos no sigui el de màxima incertesa (v. cas B). És per aquesta raó que les superfícies de semblança en el cas de la mesura d'aparellament tenen per gràfica el pla $z = 0.5$.

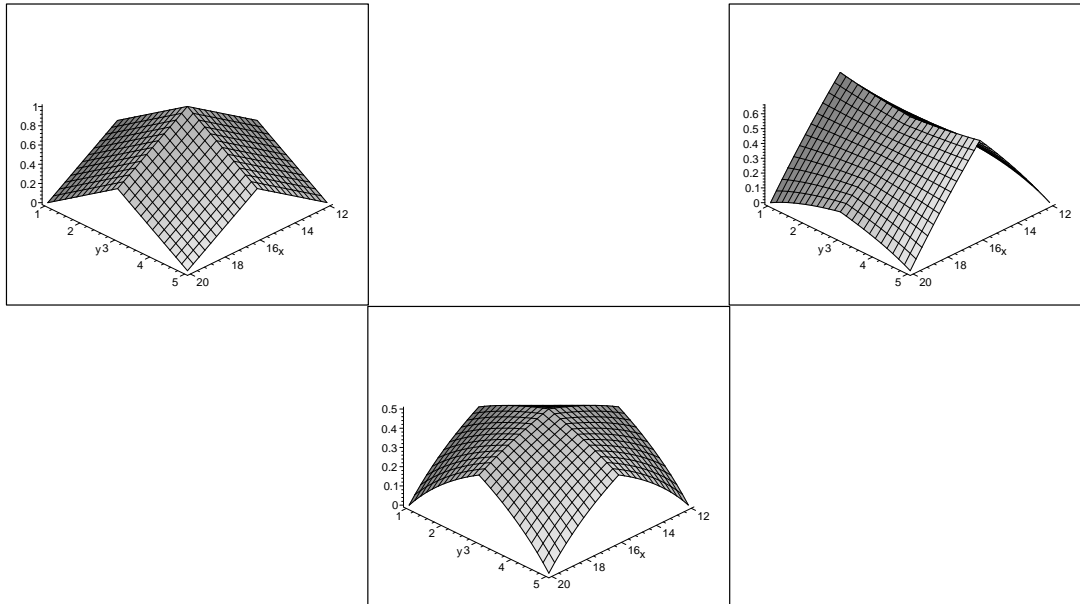
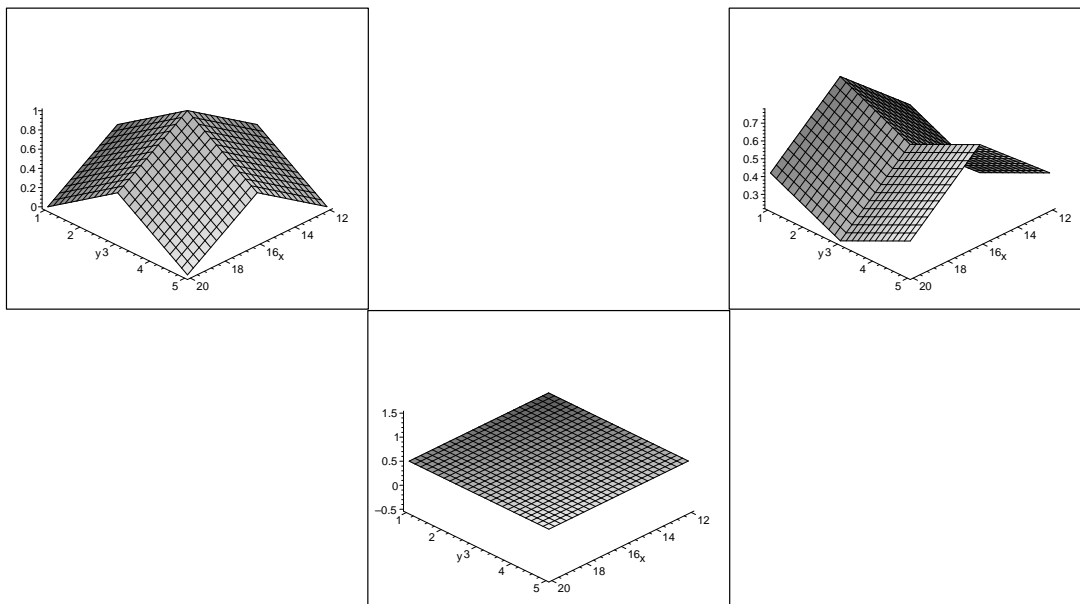
Figura 3.4: Mesura de Jackard per a t_P Figura 3.5: Mesura d'aparellament per a t_P 

Figura 3.6: Mesura de Jackard per a t_{PA}

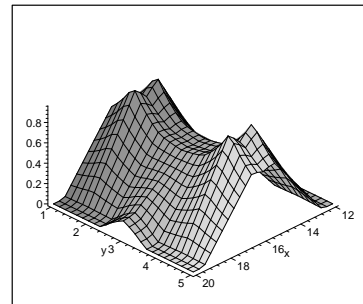
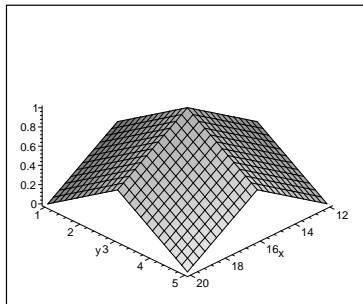
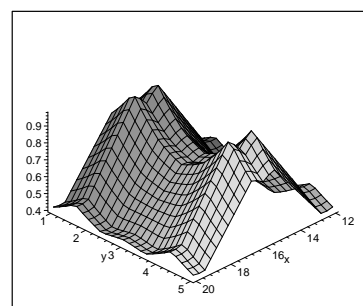
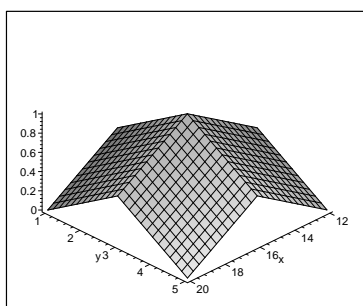


Figura 3.7: Mesura d'aparellament per a t_{PA}



Capítol 4

Anàlisi de clústers

4.1 Introducció

L'anàlisi de clústers és una de les principals tècniques de reconeixement de patrons (v. [15, 43, 46, 104, 105]). La teoria dels subconjunts borrosos aplicada a l'anàlisi de clústers dóna una idea de la incertesa de la pertinença d'un objecte a un clúster. Estudiarem els mètodes que sorgeixen de les relacions borroses representades mitjançant matrius.

L'objectiu de l'anàlisi de clústers és l'agrupació, a diferents nivells, d'objectes A_1, A_2, \dots, A_n que defineixen un conjunt $A = \{A_1, A_2, \dots, A_n\}$. Aquests objectes vénen representats per subconjunts borrosos $\tilde{A}_1, \tilde{A}_2, \dots, \tilde{A}_n$ ¹, els quals prenen valors en un conjunt de característiques P_1, P_2, \dots, P_m que ens defineixen un altre conjunt $E = \{P_1, P_2, \dots, P_m\}$. Aquest model defineix una relació binària determinada per una matriu $n \times m$. Un cop obtinguda la matriu de la relació borrosa entre objectes i característiques, es tracta d'aconseguir una matriu de mesura (o de

¹Per tal de no complicar la notació, sempre ens referirem als objectes, encara que treballem amb els subconjunts borrosos.

distància) entre els objectes; això és possible utilitzant alguna de les mesures de semblança del capítol 3. El resultat és una matriu $n \times n$, que sol descriure una relació borrosa de proximitat entre els objectes. És en aquest punt on comença el procés de clusterització, que es veu afectat per la tria de la mesura de semblança. Les mesures associades a distàncies han estat i són molt utilitzades (v. [53]), en particular, la distància euclidiana (v. [28]) i la de Minkowski (v. [45]); nosaltres farem el nostre estudi amb les mesures introduïdes en el capítol anterior. Existeixen dos tipus de mètodes, jeràrquics² i no jeràrquics, que parteixen de filosofies diferents. La diferència consisteix que en els primers no es prefixa el nombre de clústers i, en canvi, en els segons sí que es fa. Els mètodes jeràrquics són els més àmpliament utilitzats i seran el nostre objecte d'estudi durant aquest capítol.

4.2 Mètodes jeràrquics

Un clúster ha de ser entès com un grup d'objectes similars amb la condició que no coneixem informació sobre les classes d'agrupament a priori del processament. Els objectes s'agrupen només en funció dels elements que contenen. Sembla no només lògic, sinó obligat, agrupar els elements de forma que la mesura de semblança entre ells sigui màxima (o la distància sigui mínima³). El principal problema arriba un cop hem agrupat els dos primers elements; llavors, el nostre conjunt de referència ha canviat: El cardinal que era n ha disminuït ja que dos elements han estat agrupats formant un nou clúster, d'on el nostre conjunt referencial conté $n - 1$ elements. D'alguna manera hem de tornar a definir la mesura de semblança entre aquest nou element i tots els altres. La forma en què es realitza aquesta definició condiciona tot el procés de clusterització.

²El terme jeràrquic també es utilitza per tal d'ordenar criteris en base a preferències. Un exemple es troba a [19], que és una fuzzificació del mètode λ_{max} de Saaty.

³En els exemples, tant ho farem d'una manera com de l'altra.

Hi ha diversos mètodes, però tots ells tenen en comú que són processos iteratius. Anem a enumerar els diversos passos:

1. Es parteix d' n clústers $\{\Delta_i = \{A_i\}\}_{i=1\dots n}$, cadascun d'ells format per només un element, i s'avalua $s(\Delta_i, \Delta_j) = s(A_i, A_j)$ per a cada parell d'elements mitjançant alguna de les mesures introduïdes en el capítol 3 i tals que defineixen una relació borrosa de proximitat. Si Λ^1 és el conjunt de clústers en el primer estadi, tenim: $\Lambda^1 = \{\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_n\}$.
2. Es busquen Δ_k i Δ_l tals que:

$$s(\Delta_k, \Delta_l) = \max_{\Delta_i, \Delta_j \in \Lambda^1, i \neq j} s(\Delta_i, \Delta_j) \quad (4.1)$$

Aquests dos clústers s'agrupen en un nou clúster, que anomenarem⁴ $\Delta_{kl} = \Delta_k \cup \Delta_l$ i designem per Λ^2 al nou conjunt de clústers (si estiguéssim en el pas iteratiu p designariem per Λ^p al nou conjunt de clústers). És evident que aquest procés fa que a cada iteració obtinguem un clúster nou per dos d'antics. Finalment, es reactualitza el càlcul de la semblança amb algun dels mètodes que s'exposaran a continuació; això provoca que la matriu quadrada de la mesura de semblança redueixi les seves dimensions d' $n \times n$ a $(n - 1) \times (n - 1)$.

3. Es repeteix l'anterior pas fins que el cardinal del conjunt de clústers és u.

És necessari que en cada pas de l'anterior procés es guardi la informació sobre a quin semblança s'han unit dos clústers, fet que ens permetrà -més endavant- de construir diagrames, anomenats *dendogrames*, en els quals veurem a quin nivell de possibilitat, que pot ser interpretat com un α -tall, s'uneixen els clústers entre si per formar nous clústers.

⁴Tot i que el nombre de subíndexs va creixent, aquesta notació té l'avantatge de saber en tot moment quins dels elements originals estan agrupats.

4.2.1 Connexió simple

Aquest és el mètode més conegut i utilitzat. La forma de calcular la mesura de semblança entre clústers és la següent:

$$s(\Delta, \Gamma) = \max_{x \in \Delta, y \in \Gamma} s(x, y) \quad (4.2)$$

L'anterior fórmula obliga a calcular la mesura de semblança entre dos clústers a partir de les mesures dels clústers simples; una manera més eficient és la que ara comentarem: Si estem en el moment p del procés iteratiu i $\Delta, \Gamma \in \Lambda^p$ el conjunt de clústers i Δ i Γ són tals que $s(\Delta, \Gamma) = \max_{\Theta, \Omega \in \Lambda^p} s(\Theta, \Omega)$, aleshores formem el nou clúster $\Sigma = \Delta \cup \Gamma$, i llavors:

$$\forall \Phi \in \Lambda^p \quad \Phi \neq \Delta, \Gamma \quad s(\Sigma, \Phi) = \max\{s(\Delta, \Phi), s(\Gamma, \Phi)\} \quad (4.3)$$

Equivalentment amb distàncies⁵

$$d(\Delta, \Gamma) = \min_{x \in \Delta, y \in \Gamma} d(x, y) \quad (4.4)$$

$$\forall \Phi \in \Lambda^p \quad \Phi \neq \Delta, \Gamma \quad d(\Sigma, \Phi) = \min\{d(\Delta, \Phi), d(\Gamma, \Phi)\} \quad (4.5)$$

4.2.2 Connexió completa

$$s(\Delta, \Gamma) = \min_{x \in \Delta, y \in \Gamma} s(x, y) \quad (4.6)$$

$$\forall \Phi \in \Lambda^p \quad \Phi \neq \Delta, \Gamma \quad s(\Sigma, \Phi) = \min\{s(\Delta, \Phi), s(\Gamma, \Phi)\} \quad (4.7)$$

⁵L'equivalència entre la utilització de mesures de semblança i distàncies prové del fet que:

$$\max(x, y) = 1 - \min(1 - x, 1 - y)$$

o equivalentment amb distàncies:

$$d(\Delta, \Gamma) = \max_{x \in \Delta, y \in \Gamma} d(x, y) \quad (4.8)$$

$$\forall \Phi \in \Lambda^p \quad \Phi \neq \Delta, \Gamma \quad d(\Sigma, \Phi) = \max\{d(\Delta, \Phi), d(\Gamma, \Phi)\} \quad (4.9)$$

4.2.3 Connexió mitjana

$$s(\Delta, \Gamma) = \frac{1}{|\Delta||\Gamma|} \sum_{x \in \Delta, y \in \Gamma} s(x, y) \quad (4.10)$$

$$\forall \Phi \in \Lambda^p \quad \Phi \neq \Delta, \Gamma \quad s(\Sigma, \Phi) = \frac{|\Delta|}{|\Sigma|} s(\Delta, \Phi) + \frac{|\Gamma|}{|\Sigma|} s(\Gamma, \Phi) \quad (4.11)$$

4.3 Clausures transitives

4.3.1 Clausura per t_{min}

Equivalència t_{min} -transitivitat amb la ultramètrica

$$\forall x, z \in A \quad d(x, z) \leq \min_{y \in A} \max\{d(x, y), d(y, z)\} \quad \iff$$

$$\forall x, y, z \in A \quad d(x, z) \leq \max\{d(x, y), d(y, z)\} \quad \iff$$

$$\iff \forall x, y, z \in A \quad d(x, z) \leq d(x, y) \quad \text{ó} \quad d(x, z) \leq d(y, z) \quad \iff$$

$$\iff \forall x, y, z \in A \quad 1 - d(x, y) \leq 1 - d(x, z) \quad \text{ó} \quad 1 - d(y, z) \leq 1 - d(x, z) \quad \iff$$

$$\iff \forall x, y, z \in A \quad s(x, y) \leq s(x, z) \quad \text{ó} \quad s(y, z) \leq s(x, z) \quad \iff$$

$$\iff \forall x, y, z \in A \quad \min_{y \in A} \{s(x, y), s(y, z)\} \leq s(x, z)$$

$$\iff s(x, z) \geq \max_{y \in A} \{\min\{s(x, y), s(y, z)\}\}$$

Teorema d'equivalència

El principal resultat pel que fa referència al mètode de la connexió simple, i la raó per la qual és tan utilitzat, consisteix en l'equivalència entre ell i la clausura transitiva per la t -norma del mínim de Zadeh d'una relació de proximitat (v. [79]). En realitat, els següents tres mètodes ens condueixen a la mateixa partició:

- a) El mètode de la connexió simple.
- b) La clausura transitiva d'una relació borrosa de proximitat per la t -norma del mínim de Zadeh.
- c) Els components connectats d'un graf borrós (v. apartat 2.3.2.4).

La demostració d'aquest resultat és prou coneguda (v. [79]) i l'ometem en aquesta memòria.

Donat que el mètode de la connexió simple és equivalent al càlcul de la clausura transitiva mitjançant la t -norma del mínim de Zadeh, analitzarem amb més detall la relació entre les clausures transitives respecte d'una t -norma i les propietats que verifiquen les mesures.

4.3.2 Clausura per qualsevol t -norma

La propietat ultramètrica és la que ens permet fer particions cada vegada més fines per a cada nivell $\alpha \in [0, 1]$. Per aconseguir-ho, hem d'obtenir obligatòriament la clausura transitiva amb la t -norma t_{min} , que és la més gran de totes les t -normes i l'única que verifica la propietat ultramètrica. Si escollim una t -norma més petita perdem la propietat ultramètrica, però, com veurem en aquest apartat, si és més gran que la del producte acotat encara mantenim la propietat de la desigualtat triangular. Per a t -normes més petites que la del producte acotat

ja no es verifica la desigualtat triangular i, per tant, sembla que no és aconsellable el seu ús. Des del punt de vista únicament de la distància, sembla, doncs, que hem d'escollir una t -norma entre la del mínim de Zadeh i la del producte acotat. Si escollim la del mínim de Zadeh, tenim diverses maneres d'aconseguir la clusterització: clausura transitiva, components connectats d'un graf borrós, i mètode de la connexió simple. Si n'hem escollit una altra, no podem aconseguir una partició única per a cada valor entre 0 i 1. Més endavant veurem un mètode degut a Miin-Shen Yang i Hsing-Mei Shih (v. [106]), que -utilitzant la t_{PA} clausura transitiva- ens permet fer una clusterització, encara que perdem la unicitat i sense aconseguir un conjunt de particions, cadascuna d'elles més fina que l'anterior a l'anar incrementant el valor d' α . Finalment, presentarem un exemple per comprendre que a vegades és millor perdre alguna propietat considerada fonamental, com les dues comentades anteriorment, per tal d'obtenir uns resultats acceptables en el sentit d'aconseguir una major diferenciació entre els elements.

Ordenació de les t -transitivitats

Donades dues t -normes t_1 i t_2 , es verifica:

$$t_1 \leq t_2 \implies (t_2 - \text{transitivitat} \implies t_1 - \text{transitivitat}) \quad (4.12)$$

Aquesta propietat, tot i ser senzilla de demostrar, té molta importància perquè ens pot ajudar a acotar quines t -normes són admissibles si volem que la mesura utilitzada verifiqui la propietat de t -transitivitat. Vegem-ho:

$$t_1 \leq t_2 \iff \forall x, y, z \in A \quad t_1(s(x, y), s(y, z)) \leq t_2(s(x, y), s(y, z))$$

Aleshores:

$$\begin{aligned} t_2 - \text{transitivitat} \implies s(x, z) &\geq \max_{y \in A} \{t_2(s(x, y), s(y, z))\} \geq \\ &\geq \max_{y \in A} \{t_1(s(x, y), s(y, z))\} \implies t_1 - \text{transitivitat} \end{aligned}$$

És aquí on les desigualtats entre t -normes prenen tot el seu sentit i importància. De la propietat (1.15) es dedueix immediatament:

$$t_{min}\text{-transitivitat} \implies t_P\text{-transitivitat} \implies t_{PE}\text{-transitivitat} \implies t_{PA}\text{-transitivitat}$$

I de (1.17) obtenim:

1. $\lambda < \mu$ $t_{H,\lambda}$ - transitivitat \implies $t_{H,\mu}$ - transitivitat
2. $\lambda < \mu$ $t_{Y,\mu}$ - transitivitat \implies $t_{Y,\lambda}$ - transitivitat
3. $\lambda < \mu$ $t_{D,\mu}$ - transitivitat \implies $t_{D,\lambda}$ - transitivitat
4. $\lambda < \mu$ $t_{DP,\lambda}$ - transitivitat \implies $t_{DP,\mu}$ - transitivitat

Equivalència t_{PA} -transitivitat amb desigualtat triangular

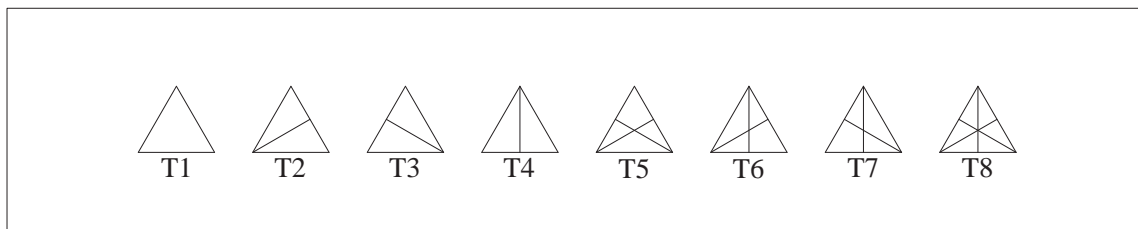
Com ja hem comentat, aquesta equivalència és important en el sentit que afeblir més la distància perdent la propietat de la desigualtat triangular no sembla aconsellable i, per tant, tampoc ho serà escollir una t -norma més petita que la del producte acotat. Vegem-ho:

$$\begin{aligned} \forall x, y, z \in A \quad d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z) &\iff 1 - s(x, z) \leq 1 - s(x, y) + 1 - s(y, z) \iff \\ \iff s(x, z) \geq s(x, y) + s(y, z) - 1 \quad \text{i} \quad s(x, z) \geq 0 &\iff \\ \iff \forall x, y, z \in A \quad s(x, z) \geq \max\{0, s(x, y) + s(y, z) - 1\} & \\ \iff \forall x, z \in A \quad s(x, z) \geq \max_{y \in A} \{\max\{0, s(x, y) + s(y, z) - 1\}\} = \max_{y \in A} \{t_{PA}(s(x, y), s(y, z))\} & \end{aligned}$$

Exemple

Suposem que construïm triangles equilàters amb totes les possibles combinacions de bisectrius. En total, en tenim vuit, que designarem per T1, T2, T3, T4, T5, T6, T7, T8. Un amb cap bisectriu, tres amb una bisectriu, tres més amb dues bisectrius, i , finalment, un amb tres bisectrius. La figura 4.1 representa els vuit triangles:

Figura 4.1: Triangles equilàters



El que volem és formar clústers que incloguin els triangles que més s'assemblin. Dos triangles diferents tenen, com a molt, tres bisectrius diferents; en conseqüència, comptant el nombre de bisectrius diferents que tenen dos triangles, sembla lògic definir la següent mesura de semblança $S = (s_{ij})$:

$$S = \begin{matrix} & \begin{matrix} \text{T1} & \text{T2} & \text{T3} & \text{T4} & \text{T5} & \text{T6} & \text{T7} & \text{T8} \end{matrix} \\ \begin{matrix} \text{T1} \\ \text{T2} \\ \text{T3} \\ \text{T4} \\ \text{T5} \\ \text{T6} \\ \text{T7} \\ \text{T8} \end{matrix} & \begin{pmatrix} 1 & 0.67 & 0.67 & 0.67 & 0.33 & 0.33 & 0.33 & 0 \\ 0.67 & 1 & 0.33 & 0.33 & 0.67 & 0.67 & 0 & 0.33 \\ 0.67 & 0.33 & 1 & 0.33 & 0.67 & 0 & 0.67 & 0.33 \\ 0.67 & 0.33 & 0.33 & 1 & 0 & 0.67 & 0.67 & 0.33 \\ 0.33 & 0.67 & 0.67 & 0 & 1 & 0.33 & 0.33 & 0.67 \\ 0.33 & 0.67 & 0 & 0.67 & 0.33 & 1 & 0.33 & 0.67 \\ 0.33 & 0 & 0.67 & 0.67 & 0.33 & 0.33 & 1 & 0.67 \\ 0 & 0.33 & 0.33 & 0.33 & 0.67 & 0.67 & 0.67 & 1 \end{pmatrix} \end{pmatrix}$$

Com que $0.33 = S_{51} < 0.67 = \max_{j=1\dots5} \min\{S_{5j}, S_{j1}\}$, resulta que S no és min-transitiva. Anem a trobar la seva clausura transitiva amb el mètode de les potències:

$$S^4 = \begin{pmatrix} 1 & 0.67 & 0.67 & 0.67 & 0.67 & 0.67 & 0.67 & 0.67 \\ 0.67 & 1 & 0.67 & 0.67 & 0.67 & 0.67 & 0.67 & 0.67 \\ 0.67 & 0.67 & 1 & 0.67 & 0.67 & 0.67 & 0.67 & 0.67 \\ 0.67 & 0.67 & 0.67 & 1 & 0.67 & 0.67 & 0.67 & 0.67 \\ 0.67 & 0.67 & 0.67 & 0.67 & 1 & 0.67 & 0.67 & 0.67 \\ 0.67 & 0.67 & 0.67 & 0.67 & 0.67 & 1 & 0.67 & 0.67 \\ 0.67 & 0.67 & 0.67 & 0.67 & 0.67 & 0.67 & 1 & 0.67 \\ 0.67 & 0.67 & 0.67 & 0.67 & 0.67 & 0.67 & 0.67 & 1 \end{pmatrix} = S^3$$

Per tant, ja hem assolit la clausura transitiva d' S . Els clústers que obtenim són:

Si $0 < \alpha \leq 0.67$, obtenim un sol clúster: $\{T1, T2, T3, T4, T5, T6, T7, T8\}$.

Si $0.67 < \alpha \leq 1$, obtenim set clústers: $\{T1\}$, $\{T2\}$, $\{T3\}$, $\{T4\}$, $\{T5\}$, $\{T6\}$, $\{T7\}$ i $\{T8\}$.

No sembla que per a cap α obtinguem resultats acceptables, ja que o bé els agrupem tots, o bé els separem tots; en canvi, la nostra percepció ens diu que hi ha triangles més semblants que d'altres. El següent mètode permet obtenir millors resultats en aquests casos.

Mètode de clusterització amb t -norma t_{PA}

Aquest mètode (v. [106]) és un mètode iteratiu. Els passos són els següents:

1. Suposem que tenim $S = S^{(0)}$ una matriu de proximitat (reflexiva i simètrica) de dimensions $n \times n$, sigui $I = \{1, 2, \dots, n\}$ el conjunt d'índexs. Com ja hem comentat, si t és una t -norma tal que $t_{PA} \leq t$, aleshores la distància que defineix la clausura transitiva d' S per a t verifica la desigualtat triangular. Aleshores, és lògic calcular la clausura transitiva per la t -norma del producte acotat ja que és la més feble possible que verifica la desigualtat triangular. Escollim un llindar α .

2. Sigui $S = S^{(1)}$ la clausura t_{PA} -transitiva d' S .
3. Definim $s_{ii}^{(2)} = 0$ i $s_{ij}^{(2)} = 0$ si $s_{ij}^{(1)} < \alpha$. És a dir, considerem que per sota d'un cert llindar dos elements no són semblants.
4. Escollim $p, q \in I$ tal que $s_{pq}^{(2)} = \max\{s_{ij}^{(2)} \mid i < j, i, j \in I\}$. Fixem-nos que aquest màxim pot ser assolit per diversos elements, en aquest cas s'escullen p i q de forma aleatòria. Si $s_{pq}^{(2)} \neq 0$, aleshores ajuntem p i q en un clúster que anomenem $C = \{p, q\}$ i anem al pas 5. En cas contrari, tots els índexs de I formen clústers separats.
5. Escollim $r \in I - C$ de forma que:

$$\sum_{i \in C} s_{ir}^{(2)} = \max\left\{\sum_{i \in C} s_{ij}^{(2)} \mid j \in I - C \text{ amb } s_{ij}^{(2)} \neq 0 \quad \forall i \in C\right\}$$

Si existeix r , formem el nou clúster i tornem al pas 4. El més important és l'obligació que tots els $s_{ij}^{(2)} \neq 0$ ja que per ajuntar-se al clúster s'obliga l'element a tenir alguna semblança al nivell α amb tots els elements del clúster.

6. Fem ara $I = I - C$ i tornem al pas 4.

Vegem els resultats d'aquest mètode en l'exemple dels triangles. Anem a calcular la matriu t_{PA} -transitiva:

$$S^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0.67 & 0.67 & 0.67 & 0.33 & 0.33 & 0.33 & 0 \\ 0.67 & 1 & 0.33 & 0.33 & 0.67 & 0.67 & 0 & 0.33 \\ 0.67 & 0.33 & 1 & 0.33 & 0.67 & 0 & 0.67 & 0.33 \\ 0.67 & 0.33 & 0.33 & 1 & 0 & 0.67 & 0.67 & 0.33 \\ 0.33 & 0.67 & 0.67 & 0 & 1 & 0.33 & 0.33 & 0.67 \\ 0.33 & 0.67 & 0 & 0.67 & 0.33 & 1 & 0.33 & 0.67 \\ 0.33 & 0 & 0.67 & 0.67 & 0.33 & 0.33 & 1 & 0.67 \\ 0 & 0.33 & 0.33 & 0.33 & 0.67 & 0.67 & 0.67 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0.67 & 0.67 & 0.67 & 0.33 & 0.33 & 0.33 & 0 \\ 0.67 & 1 & 0.33 & 0.33 & 0.67 & 0.67 & 0 & 0.33 \\ 0.67 & 0.33 & 1 & 0.33 & 0.67 & 0 & 0.67 & 0.33 \\ 0.67 & 0.33 & 0.33 & 1 & 0 & 0.67 & 0.67 & 0.33 \\ 0.33 & 0.67 & 0.67 & 0 & 1 & 0.33 & 0.33 & 0.67 \\ 0.33 & 0.67 & 0 & 0.67 & 0.33 & 1 & 0.33 & 0.67 \\ 0.33 & 0 & 0.67 & 0.67 & 0.33 & 0.33 & 1 & 0.67 \\ 0 & 0.33 & 0.33 & 0.33 & 0.67 & 0.67 & 0.67 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0.67 & 0.67 & 0.67 & 0.33 & 0.33 & 0.33 & 0 \\ 0.67 & 1 & 0.33 & 0.33 & 0.67 & 0.67 & 0 & 0.33 \\ 0.67 & 0.33 & 1 & 0.33 & 0.67 & 0 & 0.67 & 0.33 \\ 0.67 & 0.33 & 0.33 & 1 & 0 & 0.67 & 0.67 & 0.33 \\ 0.33 & 0.67 & 0.67 & 0 & 1 & 0.33 & 0.33 & 0.67 \\ 0.33 & 0.67 & 0 & 0.67 & 0.33 & 1 & 0.33 & 0.67 \\ 0.33 & 0 & 0.67 & 0.67 & 0.33 & 0.33 & 1 & 0.67 \\ 0 & 0.33 & 0.33 & 0.33 & 0.67 & 0.67 & 0.67 & 1 \end{pmatrix}$$

I, per tant, la clausura t_{PA} -transitiva d' S és ella mateixa. Sigui $I = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ el conjunt dels índexs, on cada índex i representa el corresponent triangle T_i . Escollim $\alpha = 0.55$.

$$S^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 & 0.67 & 0.67 & 0.67 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.67 & 0 & 0 & 0 & 0.67 & 0.67 & 0 & 0 \\ 0.67 & 0 & 0 & 0 & 0.67 & 0 & 0.67 & 0 \\ 0.67 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.67 & 0.67 & 0 \\ 0 & 0.67 & 0.67 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.67 \\ 0 & 0.67 & 0 & 0.67 & 0 & 0 & 0 & 0.67 \\ 0 & 0 & 0.67 & 0.67 & 0 & 0 & 0 & 0.67 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.67 & 0.67 & 0.67 & 0 \end{pmatrix}$$

El màxim és 0.67 i, de forma aleatòria, escollim $s_{21}^{(2)} = 0.67 \neq 0$; per tant, $C = \{1, 2\}$, $I - C = \{3, 4, 5, 6, 7, 8\}$. En totes les expressions $s_{31}^{(2)} + s_{32}^{(2)}$, $s_{41}^{(2)} + s_{42}^{(2)}$, $s_{51}^{(2)} + s_{52}^{(2)}$, $s_{61}^{(2)} + s_{62}^{(2)}$, $s_{71}^{(2)} + s_{72}^{(2)}$, $s_{81}^{(2)} + s_{82}^{(2)}$ hi ha algun dels seus elements igual a 0 i, per tant, l'element r de $I - C$ no existeix. Ja tenim el primer clúster: $\Delta_1 = \{T1, T2\}$.

El nou conjunt d'índexs és $I = I - C = \{3, 4, 5, 6, 7, 8\}$. S'assoleix el màxim a 0.67 $\neq 0$ i, de

forma aleatòria, escollim l'element $s_{35}^{(2)} = 0.67$, en aquest cas $C = \{3, 5\}$, i també $s_{34}^{(2)} + s_{54}^{(2)}$, $s_{36}^{(2)} + s_{56}^{(2)}$ i $s_{37}^{(2)} + s_{57}^{(2)}$, $s_{38}^{(2)} + s_{58}^{(2)}$ tenen algun dels seus elements igual a zero. El nou clúster és $\Delta_2 = \{T3, T5\}$.

El nou conjunt d'índexs és $I = I - C = \{4, 6, 7, 8\}$. Assolim el màxim a $s_{46}^{(2)} = 0.67 \neq 0$ i $C = \{4, 6\}$, i també $s_{47}^{(2)} + s_{48}^{(2)}$ i $s_{67}^{(2)} + s_{68}^{(2)}$ tenen algun dels seus elements igual a zero. Aleshores, $\Delta_3 = \{T4, T6\}$. Finalment, com que $s_{78}^{(2)} \neq 0$ obtenim el clúster: $\Delta_4 = \{T7, T8\}$.

És del tot evident que no hi ha unicitat en el procés, però, almenys en aquest exemple, obtenim millors resultats que amb la clausura max – min, ja que aconseguim que T2 no estigui amb T7, T3 amb T6, T4 amb T5, ni T1 amb T8, que són les parelles de triangles amb màximes diferències donat que no comparteixen cap bisectriu.

4.4 Nou mètode de clusterització

Aquest mètode ha estat concebut a partir d'una sèrie de comentaris i observacions de S. Miyamoto (v. [79]). Si analitzem el procés de clusterització en les seves tres etapes fonamentals -creació de la matriu de la relació borrosa entre objectes i característiques, càlcul de la mesura de semblança entre els elements del conjunt, i finalment el procés de clusterització pròpiament dit, que fonamentalment consisteix en el càlcul de la mesura de semblança entre clústers- ens adonem que els dos últims són de la mateixa naturalesa: Avaluen la semblança entre diversos elements. En el primer cas, entre elements d'un conjunt, i en el segon, entre subconjunts d'aquest conjunt. En realitat, aquesta diferència no és essencial i, en canvi, els mètodes de la primera part i els de la segona són radicalment diferents. El que ens proposem és donar una metodologia comuna per a tots dos processos.

Les mesures de semblança introduïdes en el capítol 3 ho són en un model conjuntista, utilitzant

el cardinal de la intersecció de les possibles combinacions entre els dos conjunts i els seus complementaris. Donat que a l'agrupar dos clústers el que obtenim és un nou conjunt unió dels dos anteriors, sembla lògic aplicar la metodologia del capítol 3 al procés de clusterització. Així, obtindrem una estructura teòrica més homogènia que no pas aplicant mètodes diversos i, a vegades, sense relació. Recordem que la mesura entre dos objectes en realitat es fa entre dos subconjunts borrosos que els representen. Analitzem amb més detall aquest procés.

Correspondència entre objectes i subconjunts borrosos d'atributs

Recordem quina és la relació entre objectes i atributs:

Siguin $A = \{A_1, A_2, \dots, A_n\}$ el conjunt d'objectes i $E = \{P_1, P_2, \dots, P_m\}$ el d'atributs o característiques, i $\tilde{\wp}(E)$ el conjunt dels subconjunts borrosos d' E .

$$\begin{array}{lcl} A & \longrightarrow & \tilde{\wp}(E) \\ A_i & \longrightarrow & \tilde{A}_i \quad \text{tal que} \quad E \xrightarrow{\mu_{\tilde{A}_i}} [0, 1] \\ & & P_j \longrightarrow \mu_{\tilde{A}_i}(P_j) \end{array}$$

On $\mu_{\tilde{A}_i}(P_j)$ ens indica el grau en què l'objecte A_i verifica l'atribut P_j , o bé el grau en què l'atribut P_j és verificat per l'objecte A_i . El que pretenem és definir la funció de pertinença per a clústers.

Correspondència entre clústers i subconjunts borrosos d'atributs

Sigui $\Delta = \{A_i\}_{i \in I^*} \in \wp(A)$ un clúster amb $I^* \subset I = \{1, 2, \dots, n\}$.

$$\begin{array}{lcl} \wp(A) & \longrightarrow & \tilde{\wp}(E) \\ \Delta & \longrightarrow & \tilde{\Delta} \quad \text{tal que} \quad E \xrightarrow{\mu_{\tilde{\Delta}}} [0, 1] \\ & & P_j \longrightarrow \mu_{\tilde{\Delta}}(P_j) = \frac{\sum_{i \in I^*} \mu_{\tilde{A}_i}(P_j)}{|\Delta|} \end{array}$$

Mesures de semblança entre clústers

Si Γ i Λ són dos clústers on els seus elements vénen donats per subconjunts borrosos

$\Gamma = \{\tilde{g}, \tilde{g} \in \Gamma\}$ i $\Lambda = \{\tilde{h}, \tilde{h} \in \Lambda\}$, definim:

$$s(\Gamma, \Lambda) = \frac{\alpha|\Gamma \cap \Lambda| + \beta|\Gamma^c \cap \Lambda|^c}{\gamma|\Gamma \cap \Lambda| + \delta|\Gamma^c \cap \Lambda^c| + \lambda|\Gamma \cap \Lambda^c| + \mu|\Gamma^c \cap \Lambda|} \quad (4.13)$$

Cal, doncs, definir la funció de pertinença d'un clúster, sense confondre-ho amb la unió de dos subconjunts borrosos, la qual cosa ha estat realitzada a l'anterior apartat. La diferència consisteix que mentre $\tilde{A} \cup \tilde{B} \in \tilde{P}(E)$, $\{\tilde{A}, \tilde{B}\} \subset \tilde{P}(E)$.

Malauradament, no existeixen fórmules que ens actualitzin la matriu de mesures de semblança a partir de l'estadi anterior. És necessari recalculer la funció de pertinença del nou clúster i tornar a buscar les mesures de semblança entre aquest nou element i els altres.

Algorisme per al nou mètode de clusterització

El procés iteratiu dels mètodes clàssics queda aquí modificat de la següent manera:

1. Es calcula la matriu de semblança entre objectes $s_{ij} = (s(A_i), s(A_j))$ i $l = 0$.
2. $l = l + 1$ i es troba $\alpha = \max_{i \neq j} \{s(A_i), s(A_j)\}$. Es guarda el seu valor.
3. Es forma el clúster $\Delta_l = \{A_p, A_q\}$ de manera que $s(A_p, A_q) = \alpha$. En cas que hi hagi més de dos elements que verifiquin la condició, es tria la parella a l'atzar.
4. Es calcula la funció de pertinença del clúster de l'apartat anterior: $\mu_{\Delta_l(P_k)}, k = 1, \dots, m$.
5. Es calcula $s(\Delta_l, \Delta_i)$ per a $i \neq l, p, q$.
6. Si només tenim un clúster, aturem el procés. En cas contrari, tornem a (2).

Observacions

- El quart pas fa que canviem d'espai i de funció de pertinença, i és la gran diferència amb els altres mètodes.
- Si el màxim és assolit per més de dos clústers, s'agrupen de forma aleatòria i, per tant, es perd la unicitat del procés. En el cas d'utilitzar escales amb un gran nombre de possibilitats, això és molt poc freqüent.
- Com que la relació borrosa és canviada d'un pas a l'altre, els valors màxims de la mesura (o mínims de la distància) fan referència a matrius diferents i, per tant, no tenim una ordenació dels nivells de semblança com tenim en el cas de la connexió simple.

Exemple

Siguin $A = \{A_1, A_2, A_3, A_4, A_5\}$ el conjunt d'objectes al qual volem aplicar el procés de clusterització, i $E = \{P_1, P_2\}$ el conjunt d'atributs. Els elements d' A vénen determinats per les respectives funcions de pertinença:

$$\tilde{A}_1 = 1/P_1 + 0.9/P_2$$

$$\tilde{A}_2 = 0.2/P_1 + 0/P_2$$

$$\tilde{A}_3 = 0.2/P_1 + 0.5/P_2$$

$$\tilde{A}_4 = 0.8/P_1 + 0.3/P_2$$

$$\tilde{A}_5 = 0.8/P_1 + 0.5/P_2$$

En aquest exemple farem servir la mesura d'aparellament clàssica, és a dir, la mesura associada a la distància de Hamming. Com que les matrius són simètriques, només especifiquem els elements de sota la diagonal principal:

$$d(A_i, A_j) = d_H(\tilde{A}_i, \tilde{A}_j) = \frac{|\mu_{\tilde{A}_i}(P_1) - \mu_{\tilde{A}_j}(P_1)| + |\mu_{\tilde{A}_i}(P_2) - \mu_{\tilde{A}_j}(P_2)|}{2}$$

La matriu de distàncies és:

$$\begin{array}{c} \\ A_1 \\ A_2 \\ A_3 \\ A_4 \\ A_5 \end{array} \begin{pmatrix} & A_1 & A_2 & A_3 & A_4 & A_5 \\ 0 & & & & & \\ 0.85 & 0 & & & & \\ 0.6 & 0.25 & 0 & & & \\ 0.4 & 0.45 & 0.4 & 0 & & \\ 0.3 & 0.55 & 0.3 & 0.1 & 0 & \end{pmatrix}$$

Obtenim la distància mínima $d(A_4, A_5) = 0.1$ i formem el nou clúster $\Delta_1 = \{A_4, A_5\}$. Calculem la funció de pertinença d'aquest nou clúster:

$$\mu_{\tilde{\Delta}_1}(P_1) = \mu_{\widetilde{\{A_4, A_5\}}}(P_1) = \frac{\mu_{\tilde{A}_4}(P_1) + \mu_{\tilde{A}_5}(P_1)}{2} = \frac{0.8 + 0.8}{2} = 0.8$$

$$\mu_{\tilde{\Delta}_1}(P_2) = \mu_{\widetilde{\{A_4, A_5\}}}(P_2) = \frac{\mu_{\tilde{A}_4}(P_2) + \mu_{\tilde{A}_5}(P_2)}{2} = \frac{0.3 + 0.5}{2} = 0.4$$

La nova matriu de distàncies queda:

$$\begin{array}{c} \\ A_1 \\ A_2 \\ A_3 \\ \Delta_1 \end{array} \begin{pmatrix} & A_1 & A_2 & A_3 & \Delta_1 \\ 0 & & & & \\ 0.85 & 0 & & & \\ 0.6 & 0.25 & 0 & & \\ 0.35 & 0.5 & 0.35 & 0 & \end{pmatrix}$$

La distància mínima és: $d(A_2, A_3) = 0.25$, d'on formem el clúster $\Delta_2 = \{A_2, A_3\}$, que té com a funció de pertinença:

$$\mu_{\tilde{\Delta}_2}(P_1) = \mu_{\widetilde{\{A_2, A_3\}}}(P_1) = \frac{\mu_{\tilde{A}_2}(P_1) + \mu_{\tilde{A}_3}(P_1)}{2} = \frac{0.2 + 0.2}{2} = 0.2$$

$$\mu_{\tilde{\Delta}_2}(P_2) = \mu_{\widetilde{\{A_2, A_3\}}}(P_2) = \frac{\mu_{\tilde{A}_2}(P_2) + \mu_{\tilde{A}_3}(P_2)}{2} = \frac{0 + 0.5}{2} = 0.25$$

La nova matriu de distàncies és:

$$\begin{matrix} & A_1 & \Delta_2 & \Delta_1 \\ \begin{matrix} A_1 \\ \Delta_2 \\ \Delta_1 \end{matrix} & \begin{pmatrix} 0 & & \\ 0.725 & 0 & \\ 0.35 & 0.375 & 0 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

El valor mínim és: $d(A_1, \Delta_1) = 0.35$ i, per tant, el nou clúster és: $\Delta_3 = \{A_1, A_4, A_5\}$, que té com a funció de pertinença:

$$\begin{aligned} \mu_{\tilde{\Delta}_3}(P_1) &= \mu_{\widetilde{\{A_1, A_4, A_5\}}}(P_1) = \frac{\mu_{\tilde{A}_1}(P_1) + \mu_{\tilde{A}_4}(P_1) + \mu_{\tilde{A}_5}(P_1)}{3} = \frac{1 + 0.8 + 0.8}{3} = 0.83 \\ \mu_{\tilde{\Delta}_1}(P_2) &= \mu_{\widetilde{\{A_4, A_5\}}}(P_2) = \frac{\mu_{\tilde{A}_1}(P_2) + \mu_{\tilde{A}_4}(P_2) + \mu_{\tilde{A}_5}(P_2)}{3} = \frac{0.9 + 0.3 + 0.5}{3} = 0.56 \end{aligned}$$

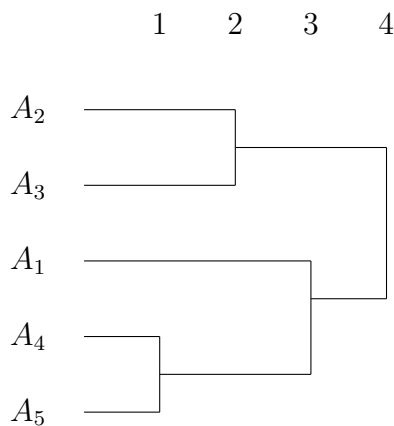
La nova matriu de distàncies és:

$$\begin{matrix} & \Delta_2 & \Delta_3 \\ \begin{matrix} \Delta_2 \\ \Delta_3 \end{matrix} & \begin{pmatrix} 0 & \\ \frac{128}{240} & 0 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

Òbviament, al nivell $\frac{128}{240}$ s'agrupen tots els elements en un sol clúster.

Obtenim el dendograma de la figura 4.1, on el valors 1, 2, 3 i 4 simplement indiquen en quin moment de la iteració es forma el cluster, sense significar cap valor de distància.

Figura4.1: Dendograma de l'exemple



Capítol 5

Afinitats

5.1 Introducció

En el procés de *clustering* s'obté una classificació d'un conjunt d'elements a partir de diverses característiques definides per a subconjunts borrosos. El que no s'aconsegueix és determinar quines d'aquestes característiques són les que fan homogenis els elements del clúster. La teoria de les afinitats (v. [31, 64]) aconseguix agrupar els elements del conjunt però, a més a més, els associa un subconjunt de característiques. Segons la definició donada per J. Gil Aluja (v. [31]), *Les afinitats són aquelles agrupacions homogènies a determinats nivells, estructurades ordenadament, que lliguen elements de dos conjunts de diferent naturalesa, relacionats per la pròpia essència dels fenòmens que representen.* En l'apartat 5.3 d'aquest capítol ens proposem generalitzar aquesta teoria per a relacions n-àries ¹.

¹En el cas que \tilde{R} sigui una relació ternària, la generalització ja va ser publicada amb anterioritat (v. [17]).

5.2 Família i tancament de Moore

5.2.1 Principals definicions

Família de Moore

Sigui A un conjunt. Una família de Moore és un subconjunt de les parts d'un conjunt A , de manera que A hi pertany, i també la intersecció de dos elements qualssevol de la família.

$$M \subset \wp(A) \text{ és una família de Moore} \iff \begin{cases} A \in M \\ \forall S, T \in M \implies S \cap T \in M \end{cases} \quad (5.1)$$

Tancament de Moore

Un tancament de Moore és una aplicació del conjunt de les parts d'un conjunt A en si mateix $f : \wp(A) \longrightarrow \wp(A)$ de forma que es verifiquin les següents propietats:

- **Extensivitat**

Qualsevol subconjunt d' A està contingut en la seva imatge.

$$\forall S \in \wp(A) \implies S \subset f(S) \quad (5.2)$$

- **Idempotència**

Al compondre el tancament de Moore amb si mateix s'obté la mateixa funció.

$$\forall S \in \wp(A) \quad f^2(S) = f(f(S)) = f(S) \quad (5.3)$$

- **Isotonia**

Es conserva la inclusió a l'aplicar f a un parell de conjunts.

$$\forall S, T \in \wp(A) \quad S \subset T \implies f(S) \subset f(T) \quad (5.4)$$

5.2.2 Obtenció de tancaments de Moore

Donada una família de Moore M , l'aplicació que a cada subconjunt d' A li correspon la intersecció de tots els elements de la família de Moore que contenen el subconjunt, és un tancament de Moore.

$$\begin{aligned} f : \wp(A) &\longrightarrow \wp(A) \\ S &\longrightarrow \bigcap_{X \in M, S \subset X} X \end{aligned} \tag{5.5}$$

Comprovem que es verifiquen les tres propietats que defineixen un tancament de Moore:

- Extensivitat

$$S \subset X \implies S \subset \bigcap_{X \in M, S \subset X} X \implies S \subset f(S)$$

Observem que: $S \in M \implies S = f(S)$

- Idempotència

$$f(S) = \bigcap_{X \in M, S \subset X} X \implies f(f(S)) = f(S)$$

- Isotonia

$$\begin{aligned} S \subset T &\implies \{X : T \subset X\} \subset \{X : S \subset X\} \implies \\ &\bigcap_{X \in M, S \subset X} X \subset \bigcap_{X \in M, T \subset X} X \implies f(S) \subset f(T) \end{aligned}$$

5.2.3 Tancat d'un tancament de Moore

Definició

Sigui f un tancament de Moore. Definim:

$$S \in \wp(A) \text{ és un tancat d}'f \iff f(S) = S \tag{5.6}$$

Altres propietats són les següents:

1. Sigui f un tancament de Moore. De la idempotència es dedueix que qualsevol conjunt imatge té per imatge a ell mateix i, per tant, qualsevol imatge és un tancat.
2. Els tancats d'un tancament de Moore formen una família de Moore que s'anomena clausura del tancament de Moore. Comprovem que es verifiquen les propietats:

$$(a) \quad A \subset f(A) \quad \Longrightarrow \quad A = f(A).$$

(b) La intersecció de clausures és una clausura.

i. Per l'extensivitat: $S \cap T \subset f(S \cap T)$

ii. Per la isotonia:

$$\left. \begin{array}{l} S \cap T \subset S \quad \Longrightarrow \quad f(S \cap T) \subset f(S) \\ S \cap T \subset T \quad \Longrightarrow \quad f(S \cap T) \subset f(T) \end{array} \right\} \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow f(S \cap T) \subset f(S) \cap f(T) = S \cap T$$

3. Sigui $S \in \wp(A)$. El tancat més petit que conté S és $f(S)$. Això és a causa de la definició d' $f(S)$, ja que per ser una imatge és un tancat. Donat que és la intersecció de tots els elements de la família, que a la vegada són també clausures, és la més petita de totes elles. És a dir:

$$f(f(S)) = f(S) \quad \Longrightarrow \quad f(S) \text{ és una clausura}$$

$$S \subset T \text{ i } T \text{ clausura} \quad \Longrightarrow \quad f(S) \subset f(T) = T$$

5.3 Generalització per a relacions n-àries

En el capítol 2 hem estudiat les relacions n-àries i la seva representació mitjançant matrius en el cas de relacions binàries (v. 2.2), i de hipercubs en el cas més general de dimensió

$k_1 \times k_2 \times \cdots \times k_n$, on $A_i = \{a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{ik_i}\}$, $k_i = \text{card}(A_i)$ i \tilde{R} és una relació borrosa en $A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n$. Els elements de la matriu els anomenarem $\mu_{i_1 i_2 \dots i_n}$, i a la pràctica corresponen habitualment a elements de l'escala hendecanària. En aquest apartat presentem la generalització de la Teoria de les Afinitats per a relacions n -àries.

5.3.1 Hipercub booleà

Com el seu nom indica, l'hipercub booleà d'una relació borrosa és un hipercub de les mateixes dimensions que la relació borrosa els elements del qual són 1 o 0. Per tal d'assignar un dels dos valors anteriors, el que es fa és escollir un valor llindar θ a partir del qual considerarem que els valors estan relacionats i, per tant, assignarem el valor 1 per a la relació entre aquests dos elements, és a dir:

$$\begin{cases} \text{Si } \mu_{i_1 i_2 \dots i_n} \geq \theta & \text{assignem el valor 1.} \\ \text{Si } \mu_{i_1 i_2 \dots i_n} < \theta & \text{assignem el valor 0.} \end{cases} \quad (5.7)$$

Els elements de la nova matriu anteriorment definida els representarem per $\beta_{i_1 i_2 \dots i_n}$.

5.3.2 Connexions

Donada una relació borrosa \tilde{R} , fixem un llindar θ , $0 \leq \theta \leq 1$. En el cas de relacions entre dos conjunts, es parla de connexions a la dreta i a l'esquerra. Quan les relacions són n -àries, això no és possible donat que el nombre de connexions creix molt ràpidament en funció d' n .

Definició

Una connexió $f_{i_1 \dots i_l}$ és una aplicació definida per²:

$$f_{i_1 \dots i_l} : \wp(A_{i_1} \times \dots \times A_{i_l}) \longrightarrow \wp(A_1 \times \dots \times \hat{A}_{i_1} \times \dots \times \hat{A}_{i_l} \times \dots \times A_n) \quad (5.8)$$

$$f_{i_1 \dots i_l}(S) = \{(a_{1j_1} \dots a_{i_1 \hat{j}_{i_1}} \dots a_{i_l \hat{j}_{i_l}} \dots a_{nj_n}) : \forall (a_{i_1 j_{i_1}} \dots a_{i_l j_{i_l}}) \in S \quad \beta_{j_1 \dots j_n} = 1\}$$

En una relació n-ària el nombre de connexions és $2(2^{n-1} - 1)$. Quan $l = 1$ podem parlar de primera, segona . . . , n-èsima connexió. Per exemple, la primera connexió ve definida per:

$$f_1 : \wp(A_1) \longrightarrow \wp(A_2 \times \dots \times A_n)$$

$$f_1(S) = \{(a_{2j_2} \dots a_{nj_n}) : \forall a_{1j_1} \in S \quad \beta_{j_1 j_2 \dots j_n} = 1\}$$

I així successivament amb totes les altres.

Propietats

Suposem que f és una connexió. Les següents propietats ens descriuen de forma prou clara quin tipus de comportament tenen aquestes funcions:

1. A partir de les anteriors definicions es comprova que, si obtenim les imatges dels simplets³, podem obtenir totes les altres imatges fent la intersecció de les imatges dels seus simplets.

$$y \in f(S) \iff \text{les corresponents } \beta \text{ per a qualsevol element d'S són } 1 \iff$$

$$\iff \forall x \in S \quad y \in f(\{x\}) \iff y \in \bigcap_{x \in S} f(\{x\})$$

2. De l'anterior propietat és immediat que, si un conjunt està inclòs en un altre, aleshores la imatge del segon està inclosa en la imatge del primer.

$$S \subset T \implies \bigcap_{x \in T} f(\{x\}) \subset \bigcap_{x \in S} f(\{x\}) \implies f(T) \subset f(S)$$

²El símbol \hat{a} indica que l'element a no hi és present.

³Conjunts formats per un sol element.

5.3.3 Obtenció de tancaments de Moore a partir de connexions

El paper que juguen les connexions és fonamental ja que, al compondre-les entre elles, ens generen tancaments de Moore. Del domini i el recorregut d'aquestes funcions es dedueix que no es poden compondre dues connexions qualssevol; això només és possible en el cas binari⁴, ja que el nombre de connexions es redueix a dos: f^+ i f^- . Analitzem-ho amb deteniment:

Definició

Les possibles composicions de connexions són aplicacions del tipus:

$$g_{i_1 \dots i_l} : \wp(A_{i_1} \times \dots \times A_{i_l}) \longrightarrow \wp(A_{i_1} \times \dots \times A_{i_l})$$

definides per:

$$g_{i_1 \dots i_l} = f_{1 \dots \hat{i}_1 \dots \hat{i}_l \dots n} \circ f_{i_1 \dots i_l} \quad (5.9)$$

Propietats

$$1. f_{i_1 \dots i_l} \circ g_{i_1 \dots i_l} = g_{1 \dots \hat{i}_1 \dots \hat{i}_l \dots n} \circ f_{i_1 \dots i_l}$$

Aquesta propietat és immediata a partir de la definició.

$$2. f_{i_1 \dots i_l} \circ g_{i_1 \dots i_l} = f_{i_1 \dots i_l}$$

Per demostrar-la anem a comprovar les dues inclusions:

a)

$$\begin{aligned} g_{i_1 \dots i_l}(S) &= f_{1 \dots \hat{i}_1 \dots \hat{i}_l \dots n}(f_{i_1 \dots i_l}(S)) = \\ &= f_{1 \dots \hat{i}_1 \dots \hat{i}_l \dots n} \{(a_{1j_1} \dots a_{i_1 \hat{j}_{i_1}} \dots a_{i_l \hat{j}_{i_l}} \dots a_{nj_n}) : \forall (a_{i_1 j_{i_1}} \dots a_{i_l j_{i_l}}) \in S \quad \beta_{j_1 \dots j_n} = 1\} = \\ &= \{(a_{i_1 j_{i_1}} \dots a_{i_l j_{i_l}}) : \forall (a_{1j_1} \dots a_{i_1 \hat{j}_{i_1}} \dots a_{i_l \hat{j}_{i_l}} \dots a_{nj_n}) \in f_{i_1 \dots i_l}(S) \quad \beta_{j_1 \dots j_n} = 1\} \supset S \end{aligned}$$

⁴Per a la teoria de les connexions en el cas binari (v. [?]).

Per tant:

$$S \subset g_{i_1 \dots i_l}(S) \implies f_{i_1 \dots i_l}(g_{i_1 \dots i_l}(S)) \subset f_{i_1 \dots i_l}(S)$$

b) Per a l'altra inclusió:

$$f_{i_1 \dots i_l}(S) \subset f_{i_1 \dots i_l}(g_{i_1 \dots i_l}(S)) = f_{i_1 \dots i_l}(f_{1 \dots \hat{i}_1 \dots \hat{i}_l \dots n}(f_{i_1 \dots i_l}(S)))$$

La demostrarem pel contrarecíproc:

Suposem que $\exists(a_{1p_1} \dots a_{i_1 \hat{p}_{i_1}} \dots a_{i_l \hat{p}_{i_l}} \dots a_{np_n}) \in f_{i_1 \dots i_l}(S)$, però en canvi:

$$(a_{1p_1} \dots a_{i_1 \hat{p}_{i_1}} \dots a_{i_l \hat{p}_{i_l}} \dots a_{np_n}) \notin f_{i_1 \dots i_l}(f_{1 \dots \hat{i}_1 \dots \hat{i}_l \dots n}(f_{i_1 \dots i_l}(S)))$$

aleshores:

$$\exists(a_{i_1 q_{i_1}} \dots a_{i_l q_{i_l}}) \in (f_{1 \dots \hat{i}_1 \dots \hat{i}_l \dots n}(f_{i_1 \dots i_l}(S))) \mid \beta_{1p_1 \dots i_1 q_{i_1} \dots i_l q_{i_l} \dots np_n} = 0 \quad (*)$$

$$\text{Si } (a_{i_1 q_{i_1}} \dots a_{i_l q_{i_l}}) \in (f_{1 \dots \hat{i}_1 \dots \hat{i}_l \dots n}(f_{i_1 \dots i_l}(S))) \implies$$

$$\implies \forall(a_{1j_1} \dots a_{i_1 \hat{j}_{i_1}} \dots a_{i_l \hat{j}_{i_l}} \dots a_{nj_n}) \in f_{i_1 \dots i_l}(S)$$

$$\text{D'on: } \beta_{1j_1 \dots i_1 q_{i_1} \dots i_l q_{i_l} \dots nj_n} = 1$$

En particular per $(a_{1p_1} \dots a_{i_1 \hat{p}_{i_1}} \dots a_{i_l \hat{p}_{i_l}} \dots a_{np_n}) \in f_{i_1 \dots i_l}(S)$ obtenim:

$$\beta_{1p_1 \dots i_1 q_{i_1} \dots i_l q_{i_l} \dots np_n} = 1, \text{ la qual cosa és contradictòria amb } (*).$$

Proposició

$g_{i_1 \dots i_l}$ són tancaments de Moore.

Anem a comprovar les tres condicions que defineixen un tancament de Moore:

- Extensivitat

$$\begin{aligned} g_{i_1 \dots i_l}(S) &= f_{1 \dots \hat{i}_1 \dots \hat{i}_l \dots n}(f_{i_1 \dots i_l}(S)) = \\ &= f_{1 \dots \hat{i}_1 \dots \hat{i}_l \dots n} \{ (a_{1j_1} \dots a_{i_1 \hat{j}_{i_1}} \dots a_{i_l \hat{j}_{i_l}} \dots a_{nj_n}) : \forall (a_{i_1 j_{i_1}} \dots a_{i_l j_{i_l}}) \in S \quad \beta_{j_1 \dots j_n} = 1 \} = \\ &= \{ (a_{i_1 j_{i_1}} \dots a_{i_l j_{i_l}}) : \forall (a_{1j_1} \dots a_{i_1 \hat{j}_{i_1}} \dots a_{i_l \hat{j}_{i_l}} \dots a_{nj_n}) \in f_{i_1 \dots i_l}(S) \quad \beta_{j_1 \dots j_n} = 1 \} \supset S \end{aligned}$$

- Isotonia

$$\begin{aligned}
S \subset T &\implies X = \bigcap_{e \in T} f_{i_1 \dots i_l}(\{e\}) \subset \bigcap_{e \in S} f_{i_1 \dots i_l}(\{e\}) = Y \implies \\
&\implies \bigcap_{u \in Y} f_{1 \dots \hat{i}_1 \dots \hat{i}_l \dots n}\{u\} \subset \bigcap_{u \in X} f_{1 \dots \hat{i}_1 \dots \hat{i}_l \dots n}\{u\} \implies \\
&\implies f_{1 \dots \hat{i}_1 \dots \hat{i}_l \dots n}(Y) \subset f_{1 \dots \hat{i}_1 \dots \hat{i}_l \dots n}(X) \implies \\
&\implies f_{1 \dots \hat{i}_1 \dots \hat{i}_l \dots n}(f_{i_1 \dots i_l}(S)) \subset f_{1 \dots \hat{i}_1 \dots \hat{i}_l \dots n}(f_{i_1 \dots i_l}(T)) \implies g_{i_1 \dots i_l}(S) \subset g_{i_1 \dots i_l}(T)
\end{aligned}$$

- Idempotència

$$\text{De l'extensivitat: } S \subset g_{i_1 \dots i_l}(S) \implies g_{i_1 \dots i_l}(S) \subset g_{i_1 \dots i_l}^2(S)$$

L'altra inclusió es demostra a partir de la segona propietat que verifiquen els tancaments de Moore:

$$\begin{aligned}
&f_{i_1 \dots i_l}(S) \subset f_{i_1 \dots i_l}(g_{i_1 \dots i_l}(S)) \implies \\
&\implies f_{1 \dots \hat{i}_1 \dots \hat{i}_l \dots n}(f_{i_1 \dots i_l}(g_{i_1 \dots i_l}(S))) \subset f_{1 \dots \hat{i}_1 \dots \hat{i}_l \dots n}(f_{i_1 \dots i_l}(S)) \implies \\
&\implies g_{i_1 \dots i_l}^2(S) \subset g_{i_1 \dots i_l}(S)
\end{aligned}$$

5.3.4 Clausures dels tancaments de Moore

Per a cada tancament de Moore $g_{i_1 \dots i_l}$, volem trobar tots els seus tancats, el conjunt dels quals anomenarem la seva clausura, que representarem per:

$$\Omega(A_{i_1} \times \dots \times A_{i_l}, g_{i_1 \dots i_l})$$

Proposició

$$\Omega(A_1 \times \dots \times \hat{A}_{i_1} \times \dots \times \hat{A}_{i_l} \times \dots \times A_n, g_{1 \dots \hat{i}_1 \dots \hat{i}_l \dots n}) = \bigcup_{S \in \wp(A_{i_1} \times \dots \times A_{i_l})} f_{i_1 \dots i_l}(S) \quad (5.10)$$

i la seva fórmula dual:

$$\Omega(A_{i_1} \times \cdots \times A_{i_l}, g_{i_1 \dots i_l}) = \bigcup_{S \in \wp(A_1 \times \cdots \times \hat{A}_{i_1} \times \cdots \times \hat{A}_{i_l} \times \cdots \times A_n)} f_{1 \dots \hat{i}_1 \dots \hat{i}_l \dots n}(S)$$

Per demostrar-ho veurem que es verifiquen les dues inclusions:

$$\begin{aligned} \text{(a)} \quad f_{i_1 \dots i_l}(g_{i_1 \dots i_l}(S)) = f_{i_1 \dots i_l}(S) &\implies f_{i_1 \dots i_l}(f_{1 \dots \hat{i}_1 \dots \hat{i}_l \dots n}(f_{i_1 \dots i_l}(S))) = f_{i_1 \dots i_l}(S) \implies \\ &\implies g_{1 \dots \hat{i}_1 \dots \hat{i}_l \dots n}(f_{i_1 \dots i_l}(S)) = f_{i_1 \dots i_l}(S) \implies \\ &f_{i_1 \dots i_l}(S) \text{ és un tancat per } g_{1 \dots \hat{i}_1 \dots \hat{i}_l \dots n} \implies \\ \implies \bigcup_{S \in \wp(A_{i_1} \times \cdots \times A_{i_l})} f_{i_1 \dots i_l}(S) &\subset \Omega(A_1 \times \cdots \times \hat{A}_{i_1} \times \cdots \times \hat{A}_{i_l} \times \cdots \times A_n, g_{1 \dots \hat{i}_1 \dots \hat{i}_l \dots n}) \\ \text{(b)} \quad S \text{ és un tancat per } g_{1 \dots \hat{i}_1 \dots \hat{i}_l \dots n} &\implies g_{1 \dots \hat{i}_1 \dots \hat{i}_l \dots n}(S) = S \implies \\ &\implies f_{i_1 \dots i_l}(f_{1 \dots \hat{i}_1 \dots \hat{i}_l \dots n}(S)) = S \end{aligned}$$

De forma idèntica es demostra la fórmula dual.

5.3.5 Teorema d'Isomorfisme

Es verifica el següent isomorfisme entre clausures:

$$\Omega(A_{i_1} \times \cdots \times A_{i_l}, g_{i_1 \dots i_l}) \simeq \Omega(A_1 \times \cdots \times \hat{A}_{i_1} \times \cdots \times \hat{A}_{i_l} \times \cdots \times A_n, g_{1 \dots \hat{i}_1 \dots \hat{i}_l \dots n}) \quad (5.11)$$

Demostració:

$$\begin{aligned} f_{i_1 \dots i_l} : \Omega(A_{i_1} \times \cdots \times A_{i_l}, g_{i_1 \dots i_l}) &\longrightarrow \Omega(A_1 \times \cdots \times \hat{A}_{i_1} \times \cdots \times \hat{A}_{i_l} \times \cdots \times A_n, g_{1 \dots \hat{i}_1 \dots \hat{i}_l \dots n}) \\ f_{1 \dots \hat{i}_1 \dots \hat{i}_l \dots n}(S) &\longrightarrow f_{i_1 \dots i_l}(f_{1 \dots \hat{i}_1 \dots \hat{i}_l \dots n}(S)) = g_{1 \dots \hat{i}_1 \dots \hat{i}_l \dots n}(S) \end{aligned}$$

Anem a comprovar que l'aplicació anterior verifica les propietats que defineixen un isomorfisme:

- Ben definida

Està ben definida a causa de la proposició anterior.

- Injectiva

$$\begin{aligned}
 f_{i_1 \dots i_l}(f_{1 \dots \hat{i}_1 \dots \hat{i}_l \dots n}(S)) &= f_{i_1 \dots i_l}(f_{1 \dots \hat{i}_1 \dots \hat{i}_l \dots n}(T)) \implies \\
 g_{1 \dots \hat{i}_1 \dots \hat{i}_l \dots n}(S) &= g_{1 \dots \hat{i}_1 \dots \hat{i}_l \dots n}(T) \implies \\
 \implies f_{1 \dots \hat{i}_1 \dots \hat{i}_l \dots n}(g_{1 \dots \hat{i}_1 \dots \hat{i}_l \dots n}(S)) &= f_{1 \dots \hat{i}_1 \dots \hat{i}_l \dots n}(g_{1 \dots \hat{i}_1 \dots \hat{i}_l \dots n}(T)) \implies \\
 f_{1 \dots \hat{i}_1 \dots \hat{i}_l \dots n}(S) &= f_{1 \dots \hat{i}_1 \dots \hat{i}_l \dots n}(T)
 \end{aligned}$$

- Exhaustiva

$$\begin{aligned}
 \forall T \in \Omega(A_1 \times \dots \times \hat{A}_{i_1} \times \dots \times \hat{A}_{i_l} \times \dots \times A_n, g_{1 \dots \hat{i}_1 \dots \hat{i}_l \dots n}) \quad T &= f_{i_1 \dots i_l}(S) \implies \\
 \implies g_{1 \dots \hat{i}_1 \dots \hat{i}_l \dots n}(f_{i_1 \dots i_l}(S)) &= f_{i_1 \dots i_l}(S) = T \implies \\
 \implies T = f_{i_1 \dots i_l}(f_{1 \dots \hat{i}_1 \dots \hat{i}_l \dots n}(f_{i_1 \dots i_l}(S))) &| \quad f_{1 \dots \hat{i}_1 \dots \hat{i}_l \dots n}(f_{i_1 \dots i_l}(S)) \in \Omega(A_{i_1} \times \dots \times A_{i_l}, g_{i_1 \dots i_l})
 \end{aligned}$$

5.3.6 Reticles de Galois

Un reticle de Galois és un conjunt ordenat (X, \leq) tal que, per a cada parella d'elements, existeix el suprem i l'ínfim. És a dir:

$$(X, \leq) \text{ és un reticle de Galois} \iff \left\{ \begin{array}{l} a) \quad \forall x \in X \quad x \leq x \\ b) \quad \forall x, y \in X \quad x \leq y \text{ i } y \leq x \implies x = y \\ c) \quad \forall x, y, z \in X \quad x \leq y \text{ i } y \leq z \implies x \leq z \\ d) \quad \forall x, y \in X \quad \exists \inf\{x, y\}, \sup\{x, y\} \end{array} \right. \quad (5.12)$$

Tots els conjunts totalment ordenats són reticles de Galois ja que, donats dos elements, sempre existeixen el més gran i el més petit, que coincideixen amb el suprem i l'ímfim.

Ara veurem com el conjunt $\wp(A_{i_1} \times \cdots \times A_{i_l}) \times \wp(A_1 \times \cdots \times \hat{A}_{i_1} \times \cdots \times \hat{A}_{i_l} \times \cdots \times A_n)$ té una estructura de reticle de Galois, amb les ordenacions que es defineixen a continuació:

Ordenacions

$$\forall X_1, X_2 \in \wp(A_{i_1} \times \cdots \times A_{i_l}) \quad \forall Y_1, Y_2 \in \wp(A_1 \times \cdots \times \hat{A}_{i_1} \times \cdots \times \hat{A}_{i_l} \times \cdots \times A_n)$$

$$(X_1, Y_1) \leq_1 (X_2, Y_2) \iff X_1 \subset X_2 \quad \text{i} \quad Y_2 \subset Y_1 \quad (5.13)$$

$$(X_1, Y_1) \leq_2 (X_2, Y_2) \iff X_2 \subset X_1 \quad \text{i} \quad Y_1 \subset Y_2 \quad (5.14)$$

De les propietats reflexiva, antisimètrica i transitiva de la inclusió de conjunts, es dedueixen de forma immediata les mateixes propietats per a \leq_1 i \leq_2 . Per completar l'estructura de reticle de Galois ens cal justificar l'existència de suprem i ímfim per a qualsevol parella d'elements. Això és a causa de la introducció dels elements $(A_{i_1} \times \cdots \times A_{i_l}, \emptyset)$ i $(\emptyset, A_1 \times \cdots \times \hat{A}_{i_1} \times \cdots \times \hat{A}_{i_l} \times \cdots \times A_n)$, que són el màxim i el mínim, i el mínim i el màxim de \leq_1 i \leq_2 respectivament; per tant, sempre seran cotes superiors o inferiors de qualsevol subconjunt del conjunt:

$$\wp(A_{i_1} \times \cdots \times A_{i_l}) \times \wp(A_1 \times \cdots \times \hat{A}_{i_1} \times \cdots \times \hat{A}_{i_l} \times \cdots \times A_n)$$

aleshores, sempre existirà el suprem i l'ímfim. Del que hem exposat anteriorment no es pot deduir que aquests elements hagin de ser forçosament el suprem i l'ímfim d'un subconjunt de la relació: Pot ser que existeixin altres cotes superiors o inferiors, i, per tant, que la mínima cota superior o la màxima cota inferior siguin altres elements. Tampoc és cert que, donats dos elements qualssevol, hagin d'estar relacionats, ja que les ordenacions introduïdes anteriorment són d'ordre parcial, no total. A més, l'isomorfisme descrit en l'anterior secció conserva aquestes

dues ordenacions. Aquest isomorfisme se sol representar, en la forma habitual dels reticles, com una xarxa els elements de la qual estan units si estan relacionats, és a dir, ordenats.

Per tant, podem formar un reticle de forma que en cada punt de la xarxa s'hi trobin dos elements pertanyents als conjunts $\Omega(A_{i_1} \times \cdots \times A_{i_l}, g_{i_1 \dots i_l})$ i $\Omega(A_1 \times \cdots \times \hat{A}_{i_1} \times \cdots \times \hat{A}_{i_l} \times \cdots \times A_n, g_{1 \dots \hat{i}_1 \dots \hat{i}_l \dots n})$ respectivament, amb la condició de que aquests dos elements són imatge i antiimatge per el isomorfisme $f_{i_1 \dots i_l}$. Les agrupacions són doncs entre elements de diferent naturalesa (objectes i característiques per exemple) i estan ordenades mitjançant el reticle de Galois.

5.3.7 Projeccions i cilindres

Les operacions de projecció i extensió descrites en el capítol 2 tenen un efecte en els reticles de Galois. En aquesta secció enumerem i comentem breument aquests efectes. Suposem que \tilde{R} és una relació borrosa n-ària.

Operació $\tilde{R} \uparrow \downarrow$

Amb el símbol $\tilde{R} \uparrow \downarrow$ volem indicar l'operació d'extensió i projecció (v. 2.3, 2.4), i en aquest ordre. Si a \tilde{R} li apliquem l'operació extensió obtenint el corresponent cilindre, i aquest el projectem sobre el primer espai, obtenim els mateixos reticles que per a \tilde{R} , atès que la matriu de la relació \tilde{R} no ha canviat.

Operació $\tilde{R} \downarrow \uparrow$

En el cas contrari a l'apartat anterior, és a dir, si primer la projectem i després l'estenem, no és cert que obtinguem els mateixos reticles, però sí que podem enunciar algunes propietats que enumerem a continuació:

1. Com que els elements de la funció de pertinença d' $\tilde{R} \downarrow \uparrow$ són més grans que els d' R , els elements de l'hipercub booleà també ho són (tots els uns es mantenen però algun 0 s'ha pogut convertir en 1). Si designem per $f_{i_1 \dots i_l}$ les connexions d' \tilde{R} , i per $\bar{f}_{i_1 \dots i_l}$ les d' $\tilde{R} \downarrow \uparrow$, obtenim:

$$\forall S \in \wp(A_{i_1} \times \dots \times A_{i_l}) \quad f_{i_1 \dots i_l}(S) \subset \bar{f}_{i_1 \dots i_l}(S)$$

2. Donat que les clausures s'obtenen a partir de les imatges de les connexions, de la propietat anterior deduïm que les clausures d' $\tilde{R} \downarrow \uparrow$ contenen les d' \tilde{R} .
3. $\bar{g}_{i_1 \dots i_l}(S) = \bar{f}_{1 \dots \hat{i}_1 \dots \hat{i}_l \dots n}(\bar{f}_{i_1 \dots i_l}(S)) \subset \bar{f}_{1 \dots \hat{i}_1 \dots \hat{i}_l \dots n}(f_{i_1 \dots i_l}(S))$
4. El nombre de clausures no té per què mantenir-se, com es podrà comprovar en l'exemple de la relació ternària de la següent secció.
5. No hi ha cap tancat per a $\tilde{R} \downarrow \uparrow$ que no tingui inclòs algun tancat per a \tilde{R} . Per tant, al realitzar la projecció i posteriorment fer-ne l'extensió, pot provocar que en certa forma es perdi informació.

5.4 Aplicacions

En aquesta secció presentem dos exemples: El primer consisteix en una relació ternària els elements de la qual són arbitraris. El segon és una relació binària els elements de la qual han estat calculats seguint el procediment descrit en el capítol 2 (v. 2.31, 2.33, 2.35).

5.4.1 Cas d'una relació ternària

Considerem tres conjunts que, per tal d'abreujar la notació, no indexarem. Els designem per E , F i G . Els seus cardinals són 3, 2 i 3, i els definim com: $E = \{x_1, x_2, x_3\}$, $F =$

$\{y_1, y_2\}$ i $G = \{z_1, z_2, z_3\}$. Sigui \tilde{R} la relació ternària que ens ve donada per un hipercub de dimensió tres, també anomenat matriu tridimensional, i la representarem mitjançant tres matrius bidimensionals, una per a cada element d' E . Els valors associats són arbitraris i únicament tenen l'objectiu de mostrar el procediment emprat, però, si haguessin estat donats per experts, aquest fet no canviaria el procediment.

Matriu tridimensional de la relació ternària

$$\begin{array}{ccc}
 z_1 & z_2 & z_3 \\
 y_1 \begin{pmatrix} 0.7 & 0.4 & 0.6 \\ 0.3 & 0.8 & 0.7 \end{pmatrix} & y_1 \begin{pmatrix} 0.5 & 0.9 & 0.8 \\ 0.7 & 0.6 & 0.4 \end{pmatrix} & y_1 \begin{pmatrix} 0.7 & 0.3 & 0.9 \\ 1 & 0.6 & 0.2 \end{pmatrix} \\
 x_1 & x_2 & x_3
 \end{array}$$

Matriu booleana tridimensional

Escollint com a valor llindar per a totes les característiques $\theta = 0.6$, obtenim les següents matrius booleanes (v. 5.7):

$$\begin{array}{ccc}
 z_1 & z_2 & z_3 \\
 y_1 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} & y_1 \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} & y_1 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \\
 x_1 & x_2 & x_3
 \end{array}$$

5.4.1.1 Connexions

$$\begin{array}{llll}
 f_1 : \wp(E) & \longrightarrow & \wp(F \times G) & f_{23} : \wp(F \times G) & \longrightarrow & \wp(E) \\
 f_2 : \wp(F) & \longrightarrow & \wp(E \times G) & f_{13} : \wp(E \times G) & \longrightarrow & \wp(F) \\
 f_3 : \wp(G) & \longrightarrow & \wp(E \times F) & f_{23} : \wp(E \times F) & \longrightarrow & \wp(G)
 \end{array}$$

De la definició de connexió de la secció anterior (v. 5.8) obtenim:

$$f_1(A) = \{(y_j, z_k) : \forall x_i \in A \quad \beta_{ijk} = 1\}$$

$$f_2(B) = \{(x_i, z_k) : \forall y_j \in B \quad \beta_{ijk} = 1\}$$

$$f_3(C) = \{(x_i, y_j) : \forall z_k \in C \quad \beta_{ijk} = 1\}$$

$$f_{12}(S_3) = \{z_k : \forall (x_i, y_j) \in S_3 \quad \beta_{ijk} = 1\}$$

$$f_{13}(S_2) = \{y_j : \forall (x_i, z_k) \in S_2 \quad \beta_{ijk} = 1\}$$

$$f_{23}(S_1) = \{x_i : \forall (y_j, z_k) \in S_1 \quad \beta_{ijk} = 1\}$$

En les anteriors condicions tindrem tres isomorfismes. Donat que els càlculs són de la mateixa naturalesa en els tres casos, només en farem un. Anem a calcular f_1 i f_{23} , que són les connexions necessàries per a l'isomorfisme $\Omega(E, g_1) \simeq \Omega(F \times G, g_{23})$.

$$f_1(\emptyset) = F \times G$$

$$f_1(\{x_1\}) = \{(y_1, z_1), (y_1, z_3), (y_2, z_2), (y_2, z_3)\}$$

$$f_1(\{x_2\}) = \{(y_1, z_2), (y_1, z_3), (y_2, z_1), (y_2, z_2)\}$$

$$f_1(\{x_3\}) = \{(y_1, z_1), (y_1, z_3), (y_2, z_1), (y_2, z_2)\}$$

$$f_1(\{x_1, x_2\}) = \{(y_1, z_3), (y_2, z_2)\}$$

$$f_1(\{x_1, x_3\}) = \{(y_1, z_1), (y_1, z_3), (y_2, z_2)\}$$

$$f_1(\{x_2, x_3\}) = \{(y_1, z_3), (y_2, z_1), (y_2, z_2)\}$$

$$f_1(\{x_1, x_2, x_3\}) = \{(y_1, z_3), (y_2, z_2)\}$$

$$f_{23}(\emptyset) = E$$

$$f_{23}(\{(y_1, z_1)\}) = \{x_1, x_3\}$$

$$f_{23}(\{(y_1, z_2)\}) = \{x_2\}$$

$$f_{23}(\{(y_2, z_1)\}) = \{x_2, x_3\}$$

$$f_{23}(\{(y_2, z_2)\}) = \{x_1, x_2, x_3\}$$

$$f_{23}(\{(y_1, z_3)\}) = \{x_1, x_2, x_3\}$$

$$f_{23}(\{(y_2, z_3)\}) = \{x_1\}$$

$$f_{23}(\{(y_1, z_1), (y_1, z_2)\}) = \emptyset$$

$$f_{23}(\{(y_1, z_1), (y_2, z_1)\}) = \{x_3\}$$

$$f_{23}(\{(y_1, z_1), (y_2, z_2)\}) = \{x_1, x_3\}$$

$$f_{23}(\{(y_1, z_1), (y_1, z_3)\}) = \{x_1, x_3\}$$

$$f_{23}(\{(y_1, z_1), (y_2, z_3)\}) = \{x_1\}$$

$$f_{23}(\{(y_1, z_2), (y_2, z_1)\}) = \{x_2\}$$

$$f_{23}(\{(y_1, z_2), (y_2, z_2)\}) = \{x_2\}$$

$$f_{23}(\{(y_1, z_2), (y_1, z_3)\}) = \{x_2\}$$

$$f_{23}(\{(y_1, z_2), (y_2, z_3)\}) = \emptyset$$

$$f_{23}(\{(y_2, z_1), (y_2, z_2)\}) = \{x_2, x_3\}$$

$$f_{23}(\{(y_2, z_1), (y_1, z_3)\}) = \{x_2, x_3\}$$

$$f_{23}(\{(y_2, z_1), (y_2, z_3)\}) = \emptyset$$

$$f_{23}(\{(y_2, z_2), (y_1, z_3)\}) = \{x_1, x_2, x_3\}$$

$$f_{23}(\{(y_2, z_2), (y_2, z_3)\}) = \{x_1\}$$

$$f_{23}(\{(y_1, z_3), (y_2, z_3)\}) = \{x_1\}$$

$$f_{23}(\{(y_1, z_1), (y_1, z_2), (y_2, z_1)\}) = \emptyset$$

$$f_{23}(\{(y_1, z_1), (y_1, z_2), (y_2, z_2)\}) = \emptyset$$

$$f_{23}(\{(y_1, z_1), (y_1, z_2), (y_1, z_3)\}) = \emptyset$$

$$f_{23}(\{(y_1, z_1), (y_1, z_2), (y_2, z_3)\}) = \emptyset$$

$$f_{23}(\{(y_1, z_1), (y_2, z_1), (y_2, z_2)\}) = \{x_3\}$$

$$f_{23}(\{(y_1, z_1), (y_2, z_1), (y_1, z_3)\}) = \{x_3\}$$

$$f_{23}(\{(y_1, z_1), (y_2, z_1), (y_2, z_3)\}) = \emptyset$$

$$f_{23}(\{(y_1, z_1), (y_2, z_2), (y_1, z_3)\}) = \{x_1, x_3\}$$

$$f_{23}(\{(y_1, z_1), (y_2, z_2), (y_2, z_3)\}) = \{x_1\}$$

$$f_{23}(\{(y_1, z_1), (y_1, z_3), (y_2, z_3)\}) = \{x_1\}$$

$$f_{23}(\{(y_1, z_2), (y_2, z_1), (y_2, z_2)\}) = \{x_2\}$$

$$f_{23}(\{(y_1, z_2), (y_2, z_1), (y_1, z_3)\}) = \{x_2\}$$

$$f_{23}(\{(y_1, z_2), (y_2, z_1), (y_2, z_3)\}) = \emptyset$$

$$f_{23}(\{(y_1, z_2), (y_2, z_2), (y_1, z_3)\}) = \{x_2\}$$

$$f_{23}(\{(y_1, z_2), (y_2, z_2), (y_2, z_3)\}) = \emptyset$$

$$f_{23}(\{(y_1, z_2), (y_1, z_3), (y_2, z_3)\}) = \emptyset$$

$$f_{23}(\{(y_2, z_1), (y_2, z_2), (y_1, z_3)\}) = \{x_2, x_3\}$$

$$f_{23}(\{(y_2, z_1), (y_2, z_2), (y_2, z_3)\}) = \emptyset$$

$$f_{23}(\{(y_2, z_1), (y_1, z_3), (y_2, z_3)\}) = \emptyset$$

$$f_{23}(\{(y_2, z_2), (y_1, z_3), (y_2, z_3)\}) = \{x_1\}$$

$$f_{23}(\{(y_1, z_1), (y_1, z_2), (y_2, z_1), (y_2, z_2)\}) = \emptyset$$

$$f_{23}(\{(y_1, z_1), (y_1, z_2), (y_2, z_1), (y_1, z_3)\}) = \emptyset$$

$$f_{23}(\{(y_1, z_1), (y_1, z_2), (y_2, z_1), (y_2, z_3)\}) = \emptyset$$

$$f_{23}(\{(y_1, z_1), (y_1, z_2), (y_2, z_2), (y_1, z_3)\}) = \emptyset$$

$$f_{23}(\{(y_1, z_1), (y_1, z_2), (y_2, z_2), (y_2, z_3)\}) = \emptyset$$

$$f_{23}(\{(y_1, z_1), (y_1, z_2), (y_1, z_3), (y_2, z_3)\}) = \emptyset$$

$$f_{23}(\{(y_1, z_1), (y_2, z_1), (y_2, z_2), (y_1, z_3)\}) = \{x_3\}$$

$$f_{23}(\{(y_1, z_1), (y_2, z_1), (y_2, z_2), (y_2, z_3)\}) = \emptyset$$

$$f_{23}(\{(y_1, z_1), (y_2, z_1), (y_1, z_3), (y_2, z_3)\}) = \emptyset$$

$$f_{23}(\{(y_1, z_1), (y_2, z_2), (y_1, z_3), (y_2, z_3)\}) = \{x_1\}$$

$$f_{23}(\{(y_1, z_2), (y_2, z_1), (y_2, z_2), (y_1, z_3)\}) = \{x_2\}$$

$$f_{23}(\{(y_1, z_2), (y_2, z_1), (y_2, z_2), (y_2, z_3)\}) = \emptyset$$

$$f_{23}(\{(y_1, z_2), (y_2, z_1), (y_1, z_3), (y_2, z_3)\}) = \emptyset$$

$$f_{23}(\{(y_1, z_2), (y_2, z_2), (y_1, z_3), (y_2, z_3)\}) = \emptyset$$

$$f_{23}(\{(y_2, z_1), (y_2, z_2), (y_1, z_3), (y_2, z_3)\}) = \emptyset$$

$$f_{23}(\{(y_1, z_1), (y_1, z_2), (y_2, z_1), (y_2, z_2), (y_1, z_3)\}) = \emptyset$$

$$f_{23}(\{(y_1, z_1), (y_1, z_2), (y_2, z_1), (y_2, z_2), (y_2, z_3)\}) = \emptyset$$

$$f_{23}(\{(y_1, z_1), (y_1, z_2), (y_2, z_1), (y_1, z_3), (y_2, z_3)\}) = \emptyset$$

$$f_{23}(\{(y_1, z_1), (y_1, z_2), (y_2, z_2), (y_1, z_3), (y_2, z_3)\}) = \emptyset$$

$$f_{23}(\{(y_1, z_1), (y_2, z_1), (y_2, z_2), (y_1, z_3), (y_2, z_3)\}) = \emptyset$$

$$f_{23}(\{(y_1, z_2), (y_2, z_1), (y_2, z_2), (y_1, z_3), (y_2, z_3)\}) = \emptyset$$

$$f_{23}(\{(y_1, z_1), (y_1, z_2), (y_2, z_1), (y_2, z_2), (y_1, z_3), (y_2, z_3)\}) = \emptyset$$

5.4.1.2 Tancaments

$$(a) \quad g_1 = f_{23} \circ f_1$$

$$g_1(\emptyset) = \emptyset$$

$$g_1(\{x_1\}) = \{x_1\}$$

$$g_1(\{x_2\}) = \{x_2\}$$

$$g_1(\{x_3\}) = \{x_3\}$$

$$g_1(\{x_1, x_2\}) = \{x_1, x_2, x_3\}$$

$$g_1(\{x_1, x_3\}) = \{x_1, x_3\}$$

$$g_1(\{x_2, x_3\}) = \{x_2, x_3\}$$

$$g_1(\{x_1, x_2, x_3\}) = \{x_1, x_2, x_3\}$$

(b) $g_{23} = f_1 \circ f_{23}$

$$g_{23}(\emptyset) = \{(y_1, z_3), (y_2, z_2)\}$$

$$g_{23}(\{(y_1, z_1)\}) = \{(y_1, z_1), (y_1, z_3), (y_2, z_2)\}$$

$$g_{23}(\{(y_1, z_2)\}) = \{(y_1, z_2), (y_1, z_3), (y_2, z_1), (y_2, z_2)\}$$

$$g_{23}(\{(y_2, z_1)\}) = \{(y_2, z_1), (y_2, z_2), (y_1, z_3)\}$$

$$g_{23}(\{(y_2, z_2)\}) = \{(y_2, z_2), (y_1, z_3)\}$$

$$g_{23}(\{(y_1, z_3)\}) = \{(y_2, z_2), (y_1, z_3)\}$$

$$g_{23}(\{(y_2, z_3)\}) = \{(y_1, z_1), (y_1, z_3), (y_2, z_2), (y_2, z_3)\}$$

$$g_{23}(\{(y_1, z_1), (y_1, z_2)\}) = F \times G$$

$$g_{23}(\{(y_1, z_1), (y_2, z_1)\}) = \{(y_1, z_1), (y_1, z_3), (y_2, z_1), (y_2, z_2)\}$$

$$g_{23}(\{(y_1, z_1), (y_2, z_2)\}) = \{(y_1, z_1), (y_1, z_3), (y_2, z_2)\}$$

$$g_{23}(\{(y_1, z_1), (y_1, z_3)\}) = \{(y_1, z_1), (y_1, z_3), (y_2, z_2)\}$$

$$g_{23}(\{(y_1, z_1), (y_2, z_3)\}) = \{(y_1, z_1), (y_1, z_3), (y_2, z_2), (y_2, z_3)\}$$

$$g_{23}(\{(y_1, z_2), (y_2, z_1)\}) = \{(y_1, z_2), (y_1, z_3), (y_2, z_2), (y_2, z_3)\}$$

$$g_{23}(\{(y_1, z_2), (y_2, z_2)\}) = \{(y_1, z_2), (y_1, z_3), (y_2, z_1), (y_2, z_2)\}$$

$$g_{23}(\{(y_1, z_2), (y_1, z_3)\}) = \{(y_1, z_2), (y_1, z_3), (y_2, z_1), (y_2, z_2)\}$$

$$g_{23}(\{(y_1, z_2), (y_2, z_3)\}) = F \times G$$

$$g_{23}(\{(y_2, z_1), (y_2, z_2)\}) = \{(y_1, z_3), (y_2, z_1), (y_2, z_2)\}$$

$$g_{23}(\{(y_2, z_1), (y_1, z_3)\}) = \{(y_1, z_3), (y_2, z_1), (y_2, z_2)\}$$

$$g_{23}(\{(y_2, z_1), (y_2, z_3)\}) = F \times G$$

$$g_{23}(\{(y_2, z_2), (y_1, z_3)\}) = \{(y_1, z_3), (y_2, z_2)\}$$

$$g_{23}(\{(y_2, z_2), (y_2, z_3)\}) = \{(y_1, z_1), (y_1, z_3), (y_2, z_2), (y_2, z_3)\}$$

$$g_{23}(\{(y_1, z_3), (y_2, z_3)\}) = \{(y_1, z_1), (y_1, z_3), (y_2, z_2), (y_2, z_3)\}$$

$$g_{23}(\{(y_1, z_1), (y_1, z_2), (y_2, z_1)\}) = F \times G$$

$$g_{23}(\{(y_1, z_1), (y_1, z_2), (y_2, z_2)\}) = F \times G$$

$$g_{23}(\{(y_1, z_1), (y_1, z_2), (y_1, z_3)\}) = F \times G$$

$$g_{23}(\{(y_1, z_1), (y_1, z_2), (y_2, z_3)\}) = F \times G$$

$$g_{23}(\{(y_1, z_1), (y_2, z_1), (y_2, z_2)\}) = \{(y_1, z_1), (y_1, z_3), (y_2, z_1), (y_2, z_2)\}$$

$$g_{23}(\{(y_1, z_1), (y_2, z_1), (y_1, z_3)\}) = \{(y_1, z_1), (y_1, z_3), (y_2, z_1), (y_2, z_2)\}$$

$$g_{23}(\{(y_1, z_1), (y_2, z_1), (y_2, z_3)\}) = F \times G$$

$$g_{23}(\{(y_1, z_1), (y_2, z_2), (y_1, z_3)\}) = \{(y_1, z_1), (y_1, z_3), (y_2, z_2)\}$$

$$g_{23}(\{(y_1, z_1), (y_2, z_2), (y_2, z_3)\}) = \{(y_1, z_1), (y_1, z_3), (y_2, z_2), (y_2, z_3)\}$$

$$g_{23}(\{(y_1, z_1), (y_1, z_3), (y_2, z_3)\}) = \{(y_1, z_1), (y_1, z_3), (y_2, z_2), (y_2, z_3)\}$$

$$g_{23}(\{(y_1, z_2), (y_2, z_1), (y_2, z_2)\}) = \{(y_1, z_2), (y_1, z_3), (y_2, z_1), (y_2, z_2)\}$$

$$g_{23}(\{(y_1, z_2), (y_2, z_1), (y_1, z_3)\}) = \{(y_1, z_2), (y_1, z_3), (y_2, z_1), (y_2, z_2)\}$$

$$g_{23}(\{(y_1, z_2), (y_2, z_1), (y_2, z_3)\}) = F \times G$$

$$g_{23}(\{(y_1, z_2), (y_2, z_1), (y_1, z_3)\}) = (y_1, z_2), (y_1, z_3), (y_2, z_1), (y_2, z_2)$$

$$g_{23}(\{(y_1, z_2), (y_2, z_2), (y_2, z_3)\}) = F \times G$$

$$g_{23}(\{(y_1, z_2), (y_1, z_3), (y_2, z_3)\}) = F \times G$$

$$g_{23}(\{(y_2, z_1), (y_2, z_2), (y_1, z_3)\}) = \{(y_1, z_3), (y_2, z_1), (y_2, z_2)\}$$

$$g_{23}(\{(y_2, z_1), (y_2, z_2), (y_2, z_3)\}) = F \times G$$

$$g_{23}(\{(y_2, z_1), (y_1, z_3), (y_2, z_3)\}) = F \times G$$

$$g_{23}(\{(y_2, z_2), (y_1, z_3), (y_2, z_3)\}) = \{(y_1, z_1), (y_1, z_3), (y_2, z_2), (y_2, z_3)\}$$

$$g_{23}(\{(y_1, z_1), (y_1, z_2), (y_2, z_1), (y_2, z_2)\}) = F \times G$$

$$g_{23}(\{(y_1, z_1), (y_1, z_2), (y_2, z_1), (y_1, z_3)\}) = F \times G$$

$$g_{23}(\{(y_1, z_1), (y_1, z_2), (y_2, z_1), (y_2, z_3)\}) = F \times G$$

$$g_{23}(\{(y_1, z_1), (y_1, z_2), (y_2, z_2), (y_1, z_3)\}) = F \times G$$

$$g_{23}(\{(y_1, z_1), (y_1, z_2), (y_2, z_2), (y_2, z_3)\}) = F \times G$$

$$g_{23}(\{(y_1, z_1), (y_1, z_2), (y_1, z_3), (y_2, z_3)\}) = F \times G$$

$$g_{23}(\{(y_1, z_1), (y_2, z_1), (y_2, z_2), (y_1, z_3)\}) = \{(y_1, z_1), (y_1, z_3), (y_2, z_1), (y_2, z_2)\}$$

$$g_{23}(\{(y_1, z_1), (y_2, z_1), (y_2, z_2), (y_2, z_3)\}) = F \times G$$

$$g_{23}(\{(y_1, z_1), (y_2, z_1), (y_1, z_3), (y_2, z_3)\}) = F \times G$$

$$g_{23}(\{(y_1, z_1), (y_2, z_2), (y_1, z_3), (y_2, z_3)\}) = \{(y_1, z_1), (y_1, z_3), (y_2, z_2), (y_2, z_3)\}$$

$$g_{23}(\{(y_1, z_2), (y_2, z_1), (y_2, z_2), (y_1, z_3)\}) = \{(y_1, z_2), (y_1, z_3), (y_2, z_1), (y_2, z_2)\}$$

$$g_{23}(\{(y_1, z_2), (y_2, z_1), (y_2, z_2), (y_2, z_3)\}) = F \times G$$

$$g_{23}(\{(y_1, z_2), (y_2, z_1), (y_1, z_3), (y_2, z_3)\}) = F \times G$$

$$g_{23}(\{(y_1, z_2), (y_2, z_2), (y_1, z_3), (y_2, z_3)\}) = F \times G$$

$$g_{23}(\{(y_2, z_1), (y_2, z_1), (y_1, z_3), (y_2, z_3)\}) = F \times G$$

$$g_{23}(\{(y_1, z_1), (y_1, z_2), (y_2, z_1), (y_2, z_2), (y_1, z_3)\}) = F \times G$$

$$g_{23}(\{(y_1, z_1), (y_1, z_2), (y_2, z_1), (y_2, z_2), (y_2, z_3)\}) = F \times G$$

$$g_{23}(\{(y_1, z_1), (y_1, z_2), (y_2, z_1), (y_1, z_3), (y_2, z_3)\}) = F \times G$$

$$g_{23}(\{(y_1, z_1), (y_1, z_2), (y_2, z_2), (y_1, z_3), (y_2, z_3)\}) = F \times G$$

$$g_{23}(\{(y_1, z_1), (y_2, z_1), (y_2, z_2), (y_1, z_3), (y_2, z_3)\}) = F \times G$$

$$g_{23}(\{(y_1, z_2), (y_2, z_1), (y_2, z_2), (y_1, z_3), (y_2, z_3)\}) = F \times G$$

$$g_{23}(\{(y_1, z_1), (y_1, z_2), (y_2, z_1), (y_2, z_2), (y_1, z_3), (y_2, z_3)\}) = F \times G$$

5.4.1.3 Determinació dels tancats i establiment de les clausures

De la definició (5.6) obtenim els següents conjunts de clausures:

$$\Omega(E, g_1) = \{\emptyset, \{x_1\}, \{x_2\}, \{x_3\}, \{x_1, x_3\}, \{x_2, x_3\}, \{x_1, x_2, x_3\}\}$$

$$\begin{aligned} \Omega(F \times G, g_{23}) = & \{\emptyset, \{(y_2, z_2), (y_1, z_3)\}, \{(y_1, z_1), (y_1, z_3), (y_2, z_2)\}, \\ & \{(y_1, z_3), (y_2, z_1), (y_2, z_2)\}, \{(y_1, z_1), (y_2, z_1), (y_2, z_2), (y_1, z_3)\}, \\ & \{(y_1, z_1), (y_1, z_3), (y_2, z_2), (y_2, z_3), \{(y_1, z_2), (y_1, z_3), (y_2, z_1), (y_2, z_2)\}, F \times G\} \end{aligned}$$

5.4.1.4 Isomorfisme

De (5.11) obtenim la següent aplicació bijectiva entre els dos conjunts de clausures dels tanca-ments de Moore. A més, sabem que conserva les dues ordenacions definides a (5.13, 5.14):

$$f_1 : \Omega(E, g_1) \longrightarrow \Omega(F \times G, g_{23})$$

$$\emptyset \longrightarrow F \times G$$

$$\{x_1\} \longrightarrow \{(y_1, z_1), (y_1, z_3), (y_2, z_2), (y_2, z_3)\}$$

$$\{x_2\} \longrightarrow \{(y_1, z_2), (y_1, z_3), (y_2, z_1), (y_2, z_2)\}$$

$$\{x_3\} \longrightarrow \{(y_1, z_1), (y_2, z_1), (y_2, z_2), (y_1, z_3)\}$$

$$\{x_1, x_3\} \longrightarrow \{(y_1, z_1), (y_1, z_3), (y_2, z_2)\}$$

$$\{x_2, x_3\} \longrightarrow \{(y_1, z_3), (y_2, z_1), (y_2, z_2)\}$$

$$\{x_1, x_2, x_3\} \longrightarrow \{(y_2, z_2), (y_1, z_3)\}$$

5.4.1.5 Reticle de Galois

De (5.12) obtenim l'ordenació parcial que constitueix un reticle de Galois i que presentem gràficament a la fig. 5.1. Observi's que en cada nus de la xarxa hi ha dos subconjunts, el primer és subconjunt d' E i el segon ho és d' $F \times G$, que són imatge i antiimatge per l'isomorfisme f_1 (o f_{23} que és la seva inversa) entre les dues clausures. Obtindríem dos reticles més amb les altres dues parelles de connexions: f_2 i f_{13} , i, f_3 i f_{12} .

5.4.1.6 Projeccions i cilindres

Calculem $\tilde{R} \downarrow (F \times G)$, projecció d' \tilde{R} sobre $F \times G$:

$$\mu_{\tilde{R} \downarrow (F \times G)}(y) = \max_{x > y} \mu_{\tilde{R}}(x)$$

$$\mu_{\tilde{R} \downarrow (F \times G)}(y_1, z_1) = \max\{\mu_{\tilde{R}}(x_1, y_1, z_1), \mu_{\tilde{R}}(x_2, y_1, z_1), \mu_{\tilde{R}}(x_1, y_1, z_3)\} =$$

$$= \max\{0.7, 0.5, 0.7\} = 0.7$$

De la mateixa forma s'aconsegueixen tots els altres valors de la funció de pertinença; al final del procés resulta la matriu:

$$\begin{array}{c} z_1 \quad z_2 \quad z_3 \\ y_1 \begin{pmatrix} 0.7 & 0.9 & 0.9 \end{pmatrix} \\ y_2 \begin{pmatrix} 1 & 0.6 & 0.7 \end{pmatrix} \end{array}$$

Un cop obtinguda aquesta projecció, si l'estenem una altra vegada a una relació borrosa a $E \times F \times G$, obtenim:

$$\mu_{(\tilde{R} \downarrow (F \times G)) \uparrow (E \times F \times G - F \times G)}(x_i, y_j, z_k) = \mu_{\tilde{R} \downarrow (F \times G)}(y_i, z_k)$$

La nova matriu tridimensional és:

$$\begin{array}{ccc}
 z_1 & z_2 & z_3 \\
 y_1 \begin{pmatrix} 0.7 & 0.9 & 0.9 \\ 1 & 0.6 & 0.7 \end{pmatrix} & y_1 \begin{pmatrix} 0.7 & 0.9 & 0.9 \\ 1 & 0.6 & 0.7 \end{pmatrix} & y_1 \begin{pmatrix} 0.7 & 0.9 & 0.9 \\ 1 & 0.6 & 0.7 \end{pmatrix} \\
 x_1 & x_2 & x_3
 \end{array}$$

Només cal observar-la per adonar-se que s'ha perdut informació. Si escollim el mateix valor llindar $\theta = 0.6$, obtenim les següents matrius booleanes:

$$\begin{array}{ccc}
 z_1 & z_2 & z_3 \\
 y_1 \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} & y_1 \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} & y_1 \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \\
 x_1 & x_2 & x_3
 \end{array}$$

Com que tots els elements són

iguals a la unitat, deduïm:

$$\forall A \in \wp(E) \quad f_1(A) = F \times G$$

$$\forall S \in \wp(F \times G) \quad f_{23}(S) = E$$

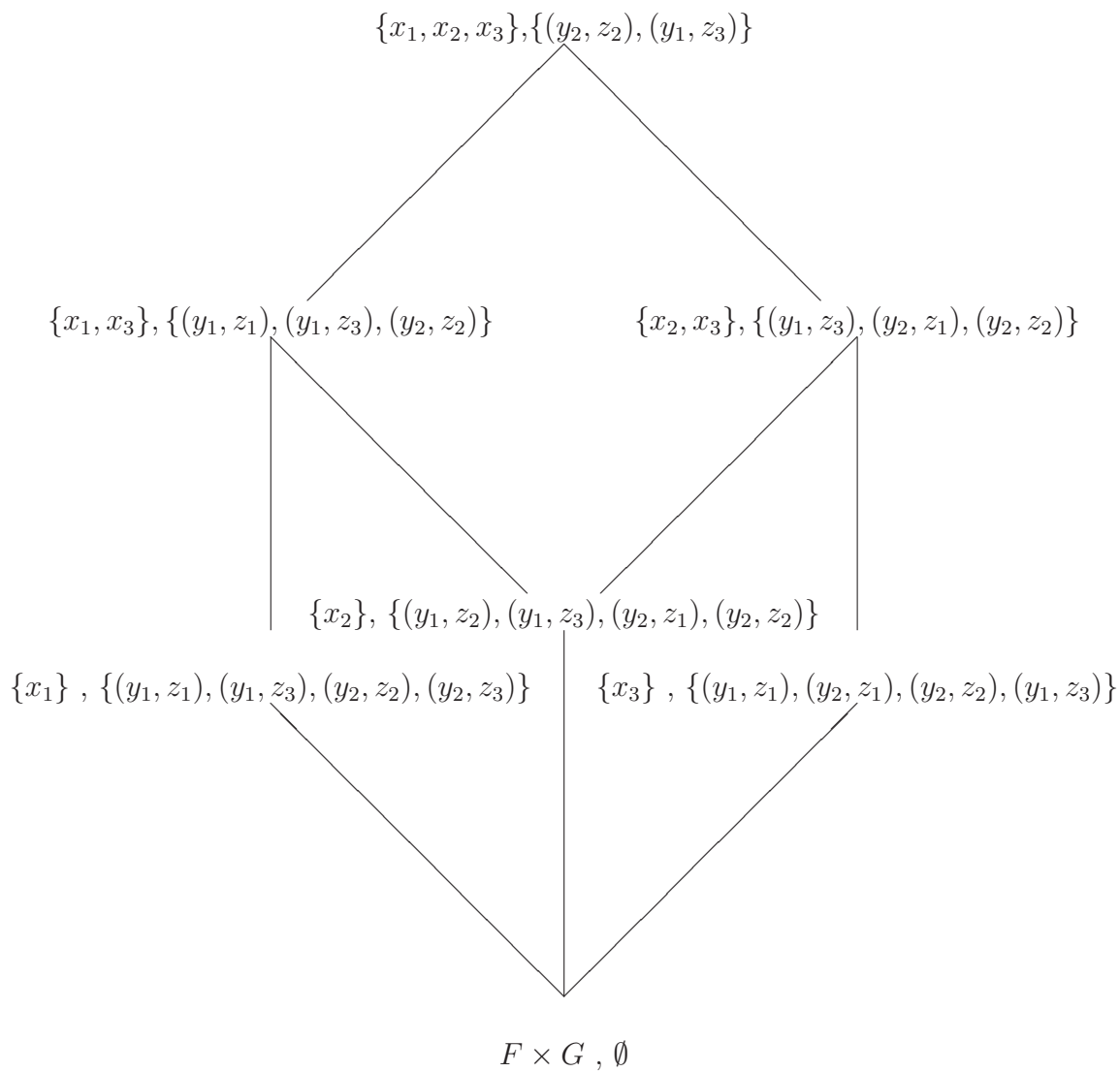
$$\forall A \in \wp(E) \quad g_1(A) = f_{23}(f_1(A)) = E$$

$$\forall S \in \wp(F \times G) \quad f_1(f_{23}(S)) = F \times G$$

Dels resultats anteriors obtenim que les úniques clausures són E i $F \times G$, per tant, el reticle de Galois es redueix a un únic element.

En canvi, si fem la composició primer d'extensió i seguida de projecció, ja hem vist que obtenim la mateixa matriu original, per la qual cosa obviem els càlculs en aquest cas.

Figura 5.1: Reticle de Galois per a la relació borrosa ternària



5.4.2 Cas d'una relació binària: L'agrupació de les comarques gironines en funció de característiques incertes de la modernitat en el treball

Aquest és un exemple⁵ escollit per implementar la teoria de les afinitats per a una relació binària. Amb el nom de comarques gironines entenem la regió geogràfica que comprèn les comarques de l'Alt Empordà (AE), el Baix Empordà (BE), la Garrotxa (GA), el Gironès (GI), el Pla de l'Estany (PE), el Ripollès (RI) i la Selva (SV). Per tant, no és equivalent a les comarques de la província de Girona. Aquesta terminologia és la utilitzada en tots els treballs i estadístiques de la Generalitat de Catalunya. Segons la llei 1/1995 del 16 de març del Pla Territorial General de Catalunya, van quedar fixats sis àmbits que faciliten una anàlisi més detallada i apropiada que les províncies, i actualment està en estudi l'establiment de 7 vegueries. Les dades descrites a les diferents taules van ser publicades a l'any 1998 (v. [50, 51]).

Considerem doncs el conjunt de les 7 comarques:

$$E = \{AE, BE, GA, GI, PE, RI, SV\}$$

I el següent conjunt de característiques:

$$F = \{DD, MP, EO, PD, CH\}$$

on els elements del conjunt E signifiquen Alt Empordà, Baix Empordà, Garrotxa, Gironès, Pla de l'Estany, Ripollès i Selva respectivament; i els del conjunt F són les característiques incertes de la modernitat en el treball: diversitat demogràfica (DD), mobilitat poblacional (MP), estructura ocupacional (EO), participació laboral de la dona (PD), i capital humà (CH).

⁵Ha estat publicat en una versió reduïda (v. [26]).

5.4.2.1 Tria de les característiques

A la bibliografia són molts els comentaris i interpretacions sobre el que és i significa la modernitat en el treball (v. [42]). Discriminar quines són les característiques fonamentals ha estat un dels objectius: Moltes altres podrien haver estat utilitzades però creiem que amb les que s'han emprat ja es posseeix prou informació per obtenir uns resultats fiables i genèrics.

- Diversitat demogràfica

El fenomen migratori és una de les constants dels últims decennis. Les poblacions amb escàs o pobríssim nivell adquisitiu tendeixen a buscar nous horitzons fora de les seves fronteres, tant nacionals com regionals, i les societats molt desenvolupades cerquen mà d'obra forània. El fenomen emigratori és propi de societats subdesenvolupades, i l'immigratori, de les desenvolupades. En general parlem de migracions, és a dir, de fluxos de població entre ens regionals, nacionals o -fins i tot- supranacionals.

El dinamisme immigratori a Catalunya en el darrer segle i, sobretot, en els anys seixanta i a principi dels setanta és prou conegut (v. [92]), i ha configurat un tipus de població diferent a l'anterior. A partir del 1975, quan es produí el tancament del cicle demogràfic, aquest fenomen s'aturà, però fou substituït per un altre de molt més suau encara que qualitativament molt important, d'immigració africana i d'altres llocs extrapeninsulars (v. [92]). De llavors ençà, el saldo migratori amb la resta d'Espanya ha estat pràcticament zero. En aquests moments hi ha un fenomen migratori molt important dins de Catalunya, però no l'hem tingut en compte ja que afecta fonamentalment l'àrea metropolitana de Barcelona i les comarques adjacents. El creixement de la immigració procedent de fora d'Europa és un fet prou conegut; ara bé, les dades estadístiques són encara parcials i poc fiables, i, per tant, difícilment traduïbles a un estudi numèric coherent. La diversitat racial i cultural que aquest fet representa és el que li dóna la suficient entitat com per

tenir-lo present com una variable imprescindible en aquesta característica. En termes absoluts encara és poc important, molt menys que en altres països, com Alemanya. La distribució d'aquesta immigració per edats demostra el que la vida quotidiana i la nostra percepció ja ens deixa intuir: està íntimament lligada al treball, en realitat n'és la causa directa. La classe modal la formen els individus d'edat compresa entre els 25 i els 35 anys, que és quan es produeix la màxima activitat econòmica.

Si ens aturem a pensar en les comarques gironines i prenem com a base 100 per al total de Catalunya, l'índex de creixement demogràfic d'aquestes comarques a causa de la immigració extracomunitària ha estat 120, raó de més per considerar aquesta variable.

L'opinió pública és especialment sensible a aquest tipus d'immigració, principalment a la provinent dels països del Sud i, en especial, del Marroc. Però també n'hi ha de la resta d'Europa: alguns immigrants són antics emigrants espanyols o catalans que retornen a la llar després d'un llarg període. Molt pocs, provenen d'altres zones del món, com Àsia. Els hem englobat amb els dels països del Sud, no per la seva semblança, que no la tenen, sinó per les diferències culturals, religioses i racials amb la resta de gironins que sí que comparteixen amb la resta de països del Sud.

Aquesta immigració, tot i ser quantitativament minsca, no podíem deixar de tenir-la en compte perquè produeix un imaginari estereotipat en la majoria de la població occidental. El fet que les dades siguin parcials no impedeix descobrir els trets fonamentals que se'n dedueixen, i encara més en un treball que utilitza fonamentalment dades i models incerts o borrosos.

- Mobilitat poblacional

En els censos i padrons catalans hi ha una pregunta sobre la mobilitat per raons de feina, exactament de la llar al lloc de treball. És a aquest tipus de mobilitat a què fem referència, encara que no és l'únic que actua en el mercat de treball: també ho fan la mobilitat de

mercaderies i informacions, de les quals -malauradament- no tenim suficient informació general ni, molt menys, comarcalitzada. El desplaçament d'individus pel territori és el concepte que fem servir, com també ho és en la bibliografia especialitzada.

Fenòmens com la concentració industrial en polígons o àrees diverses són propis de societats planificadores i organitzades, i, per tant, modernes. Aquesta característica fa que l'assalariat s'hagi de moure per accedir al lloc de treball. Els desplaçaments d'un individu de la primera residència al lloc de treball, als llocs de compra habitual i als llocs on es relaciona amb d'altres individus configuren el que s'anomena *espai de vida*. Aquest espai no és aleatori o desorganitzat; ans al contrari, ve coordinat i definit pels hàbits i responsabilitats de l'individu. Està organitzat a l'entorn de les relacions socials del treball; com més desenvolupada és una societat, més opcions dóna a la seva gent, més disponibilitat i diversitat de transport existeix en el territori i més gran és l'espai de vida. Tot això és cert en termes relatius. Les excepcions no contradiuen mai cap argument de tipus general. Nosaltres ens restringirem al desplaçament per motius laborals, tot i que els altres també caracteritzen una societat moderna.

Sovint, els diversos factors s'entrecreuen. Està comprovat que, dintre del conjunt de les persones adultes no jubilades, les que tenen un espai de vida més petit són les mestresses de casa, la quantitat de les quals també influeix sobre la variable que descriu la participació de la dona, que es tractarà més endavant. És l'única diferència significativa entre home i dona pel que fa a l'espai de vida, ja que quan ambdós formen part de la població activa no solen fer les seves activitats socials en llocs gaire diferents. La formació intel·lectual, el nivell d'estudis assolit i la capacitat socioeconòmica de l'individu fan que el seu espai de vida també s'incrementi. Tot aquest bagatge intel·lectual és propi de societats molt desenvolupades, ja que només en elles la majoria de la població té accés a estudis universitaris i a guanys personals elevats. Són aquestes les condicions necessàries perquè el lloc de treball es trobi significativament lluny del residencial. Nosaltres hem considerat que

significativament lluny del residencial es pot assimilar a fora de Catalunya. Encara que en termes absoluts aquests desplaçaments són pocs, sí que tenen un caràcter qualitatiu important. És per això que se'ls ha donat més importància que als intracomarcals.

- Estructura ocupacional

La divisió espacial de la producció, és a dir, la globalització o internacionalització dels espais productius i la innovació tecnològica de la microelectrònica que ha creat la nova economia, producte de la innovació tecnològica, constitueixen el darrer gran canvi socioeconòmic. L'aprofundiment de la divisió tècnica del treball dins de l'empresa fa que es modifiqui la divisió sectorial tradicional, producte de la revolució industrial, per anar cap a una més gran pes del sector terciari. A Catalunya, el pes de l'activitat primària -agricultura i pesca- s'ha reduït significativament en termes de valor productiu. Aquest procés ha estat general en tot el territori i a les comarques gironines en particular. És un fet clàssic en totes les evolucions d'una societat poc desenvolupada cap a una de molt més desenvolupada. Evidentment, si el nivell primari és molt baix vol dir que els altres, o algun d'ells, són molt alts. Si volem estudiar el comportament de societats modernes, hem d'avaluar el grau d'industrialització i terciarització de la seva productivitat. La hipòtesi fonamental passa per acceptar que en una societat molt desenvolupada els sectors industrial i de serveis -o terciari- han de ser molt importants. La poca terciarització o industrialització pot portar, a llarg termini, problemes en les capes productives, encara que actualment no se n'observin. Es poden produir fenòmens d'excessiva dependència exterior, sobretot per la manca de tècnics especialitzats. Un altre factor a tenir en compte és que la productivitat assentada en un determinat territori provoca una més gran estabilitat de residència en el territori i, per tant, dificulta els moviments migratoris, la qual cosa és nociva -com ja hem comentat en el primer apartat- en la consolidació del progrés general.

- Participació laboral de la dona

El canvi és un concepte intrínsecament lligat a la modernitat. Canvi i progrés van íntimament lligats, encara que el segon no és conseqüència obligatòria del primer: la història és plena de canvis que han produït un retrocés. Ara bé, si ens referim a desenvolupament socioeconòmic, el progrés va associat a la igualtat d'oportunitats. Un dels principals obstacles per a la plena inserció de la dona en el món laboral és el repartiment amb els homes de les tasques domèstiques. D'aquí la intensa relació entre modernitat i participació de la dona en el món laboral. Les dades de països com Alemanya, el Regne Unit o Suècia per una banda, i Marroc, Síria o Indonèsia per una altra, acaben de refermar aquesta hipòtesi.

Aquest accés de la dona al mercat del treball es produeix essencialment per canvis socio-culturals que afecten tota la població. Hi ha una correlació claríssima entre l'increment general del nivell d'estudis durant els últims 10 anys i el gran increment de població activa femenina durant aquest mateix període. Heus aquí un nou argument per considerar aquesta característica com una de les més fonamentals.

És cert que raons socioculturals i econòmiques influeixen molt en l'arribada de la dona al treball, i que moltes vegades es produeix una dualitat de feines, a l'empresa i a casa. D'altres vegades la remuneració és força inferior a la de l'altre sexe. Obtenir alguna variable que permeti valorar la qualitat de feina del sexe femení és, doncs, una qüestió a tenir en compte. A les diverses bases de dades comarcalitzades que hem consultat, ens hem inclinat per relativitzar la variable principal -que no pot ser cap altra que el percentatge de dones ocupades- amb el percentatge de dones empresàries. Encara que poques, el seu valor sí que dóna una idea de la possibilitat que elles tenen per aconseguir feines tan creatives i ben remunerades com les que puguin aconseguir els homes. El fet que l'estabilitat laboral sigui difícil per a tothom i a totes les comarques és un factor que no ens permet discriminar entre el treball masculí i el femení.

- Capital humà

A principis dels anys noranta, l'informe IRDAC (Industrial Research and Development Advisory Committee) va publicar les principals mancances que, al seu parer, existien a Europa en relació a USA en termes de capital humà. La insuficiència de qualificacions era la més important. L'IRDAC alertava sobre la possible manca d'obra qualificada, tècnics i científics. Ara es parla d'una manca de tècnics informàtics, que per exemple a Alemanya es proposa solventar amb l'arribada de tècnics indis. Una vegada més, la immigració com a causa del manteniment i millora del desenvolupament de les societats modernes. En els grans canvis socioeconòmics de finals del segle XX, els països desenvolupats centren cada vegada més esforços i recursos en el que podem anomenar el capital humà. La gran competitivitat dels mercats ha revaloritzat encara molt més la vàlua personal dels treballadors. Per *capital humà* entenem el conjunt de qualitats o competències culturals, intel·lectuals i professionals que configuren la idea abstracta del treballador modern: molt ben qualificat, obert a noves idees, dinàmic i preparat per afrontar canvis. En el mercat laboral actual pot resultar molt més productiu un bon tècnic en noves tecnologies, gestió de la qualitat i expert en organització, que no pas la fidelitat incondicional i la disciplina de treballadors sense iniciativa. Això és traslladable a l'àmbit personal. Pot progressar molt millor algú molt ben preparat intel·lectualment i professionalment, encara que sense patrimoni, que no pas algú amb patrimoni o negoci familiar però que, sense una direcció moderna i eficaç, es veurà sobrepassat pels esdeveniments i no es podrà adaptar a les noves idees. No cal dir que una combinació de les dues condicions és gairebé tenir la clau de l'èxit assegurat. Però, i amb caràcter general, la primordial és la primera. D'aquí ve l'elecció de la variable principal per obtenir els valors de possibilitat per mesurar el grau de compliment de la característica a cada comarca. En l'àmbit en el qual ens trobem, la proporció de diplomats i llicenciats és una molt bona aproximació al valor real del capital humà d'un col·lectiu, en aquest cas d'una comarca. En aquesta societat tan summament

materialista, el nivell de recursos monetaris per persona també dona la pauta del valor d'aquest *capital humà*.

5.4.2.2 Càlcul de la relació borrosa

Variables estadístiques

Donat que el nombre de variables no és gaire gran, no creiem necessari d'indexar-les. Aquestes variables es poden consultar a [50] i [51].

%IC= “ nombre percentual d'individus de la comarca nascuts en ella o a les altres ”

%IF = “ nombre percentual d'individus de la comarca nascuts a l'Àfrica o Àsia ”

PA = “ població activa ”

DAC = “ nombre de desplaçaments a d'altres comarques ”

DAFC = “ nombre de desplaçaments a fora de Catalunya ”

DDC = “ nombre de desplaçaments des d'altres comarques cap a la comarca ”

T = “ nombre de persones que es traslladen en transport públic o privat cap a la feina ”

ILA = “ índex de localització de l'agricultura ”

ILI = “ índex de localització de la indústria ”

ILC = “ índex de localització de la construcció ”

ILS = “ índex de localització dels serveis ”

PDA = “ població activa de dones ”

DE = “ nombre de dones empresàries ”

PA > 25 = “ població activa més gran de 25 anys ”

D = “ nombre de diplomats ”

L = “ nombre de llicenciats ”

RE = “ rendiments mitjans declarats per habitant ”

Noves variables:

VA = “ valor total dels desplaçaments ” = DAC + DDC + 3DAFC

ID = “ índex de desplaçaments ” = VA/PA

%T = “ percentatge de T en PA ”

U = “ universitaris ” = D + L

%PDA = “ percentatge de dones actives sobre el total de la població activa ”

%DE = “ percentatge de dones empresàries dins del conjunt de les dones actives ”

%U = “ percentatge d'universitaris sobre la població activa de més grans de 25 anys ”

Paràmetres de l'expert

- En una societat avançada ideal, el 50% de les persones actives són dones.

- En una societat subdesenvolupada, el 6% de les persones actives són dones ⁶.
- $minexpX_i$ i $maxexpX_i$ per a totes les variables.

A partir del que hem exposat anteriorment, anem a calcular els diferents valors de la relació borrosa entre el conjunt de les comarques i el de les característiques de la modernitat en el treball. Utilitzarem l'expressió (2.30) amb $\alpha = 0$. Per al càlcul de $\mu_{\tilde{V}}$ aplicarem l'estratègia fonamental (v. 2.33) que conduirà a una subdivisió en intervals (v. 2.35); així com la confecció d'una taula de valors exhaustiva per a l'estructura ocupacional, l'estratègia normalitzada per a una variable de la diversitat demogràfica, la creació d'una nova variable per a la mobilitat poblacional i, finalment, una divisió en estrats per a la participació laboral de la dona.

1. Diversitat demogràfica

Per a aquesta característica hem tingut en compte dues variables: %IC i %IF. Si la variable %IF hagués estat considerada en els individus de fora de les comarques gironines, es verificaria $\%IC + \%IF = 100$, i aquest lligam faria que el procés en el càlcul del valor incert no tingués sentit. Això quedarà palès seguidament, quan s'apliqui la metodologia anteriorment explicada. Els valors de les variables es troben a la taula 5.1; les taules 5.2 i 5.4 mostren la divisió en subinterval·ls; i, finalment, els valors de possibilitat es poden consultar a la taula 5.5.

Es parteix del valor prefixat 0.5 i es modifica sumant o restant múltiples de 0.1 en funció del valor de les dues variables. El caràcter de %IC és negatiu i el de %IF és positiu.

Acceptem que la variable %IC té una rellevància 3:2 respecte de la variable %IF, la qual

⁶Es considera que no hi ha cap societat, per subdesenvolupada que sigui, que tingui un percentatge de dones actives inferior al 6%.

Taula 5.1: Variables per a la diversitat demogràfica

	AE	BE	GA	GI	PE	RI	SV
%IC	71.47	71.65	85.95	76.25	87.42	81.53	71.85
%IF	1.67	2.41	0.8	1.68	0.66	0.92	0.88

cosa ens condueix a l'ús de l'escala hendecanària. Obtenim (v. 2.33):

$$\frac{c_1}{c_1 + c_2} = \frac{3}{5} \implies V_1 = 0.5 \frac{3}{5} = 0.1k_1 \implies k_1 = 3$$

$$\frac{c_2}{c_1 + c_2} = \frac{2}{5} \implies V_1 = 0.5 \frac{2}{5} = 0.1k_2 \implies k_2 = 2$$

Com que $minexp\%IC = 50$ i $maxexp\%IC = 92$ obtenim:

$$a = 92 - 50 = 42, \text{ nombre d'intervalos} = 2k_1 + 1 = 7 \text{ i } b = \frac{42}{7} = 6$$

Taula 5.2: Divisió en subintervalos per a %IC

	I	II	III	IV	V	VI	VII
%IC	< 56	[56,62)	[62,68)	[68,74)	[74,80)	[80,86)	> 86
Incr %IC	+0.3	+0.2	+0.1	0	-0.1	-0.2	-0.3

La regla de decisió és:

SI $[68 + 6i < \%IC < 74 + 6i]$ ALESHORES [disminuim el valor d'incertesa en $0.1i$]

Per a la variable %IF utilitzem els paràmetres estadístics *mitjana*, *desviació tipus* i *rang* per trobar els intervals.

$$\%IF + 2S_{\%IF} = 1.29 + 1.3 = 2.59 \text{ i } \%IF - 2S_{\%IF} = 0.$$

Taula 5.3: Valors estadístics per a %IF

mitjana=1.29	desviació tipus=0.65	rang=1.75
--------------	----------------------	-----------

Nombre d'interval = $2k_2 + 1 = 5$.

Taula 5.4: Divisió en subinterval per a %IF

	I	II	III	IV	V
%IF	< 0.51	[0.51,1.03)	[1.03,1.55)	[1.55,2.07)	> 2.07
Incr %IF	-0.2	-0.1	0	+0.1	+0.2

2. Mobilitat poblacional

Com ja hem comentat en el primer apartat, aquesta és una de les característiques que en l'actualitat es considera que representa de forma més important el caràcter modern de l'estructura del treball en una zona determinada. Com en el cas anterior, es tenen en compte dos tipus de dades: nombre de persones desplaçades pel treball cap a fora de la comarca i nombre de trajectes a causa del treball. La taula de la primera variable ens

Taula 5.5: Valors de possibilitat per a la diversitat demogràfica

	AE	BE	GA	GI	PE	RI	SV
Incr %IC	0	0	-0.2	-0.1	-0.3	-0.2	0
Incr %IF	+0.1	+0.2	-0.1	+0.1	-0.1	-0.1	-0.1
valor de possibilitat	0.6	0.7	0.2	0.5	0.1	0.2	0.4

permet tractar els desplaçaments anuals de la comarca cap enfora i viceversa; en canvi, la taula de la segona ens dóna el nombre total de persones desplaçades per motiu del treball, sense distingir entre públic i privat. Els valors de les variables es troben a les taules 5.6 i 5.7; les taules 5.8 i 5.9 mostren la divisió en subinterval; i, finalment, els valors de possibilitat es poden consultar a la taula 5.10.

Taula 5.6: Variables per a la mobilitat poblacional (I)

	AE	BE	GA	GI	PE	RI	SV
PA	36068	36813	18709	51732	9482	10422	42386
DAC	3200	4896	1756	7155	2114	1408	8202
DAFC	326	187	39	148	23	34	162
DDC	2190	2433	1340	10377	1319	803	7032
VA	6368	7890	3213	17976	3502	2313	15720
ID	0.18	0.21	0.17	0.35	0.37	0.22	0.37

Com en el cas de la diversitat demogràfica, donem el valor 0.5 com a valor de partida per a totes les comarques, i anem variant el valor en funció que l'índex i el tant per cent de població desplaçada pel treball siguin elevats o no. Aquí també hem considerat el valor

Taula 5.7: Variables per a la mobilitat poblacional (II)

	AE	BE	GA	GI	PE	RI	SV
PA	36068	36813	18709	51732	9482	10422	42386
T	25030	27187	13791	38982	7717	6468	30388
%T	69.40	73.85	73.71	75.35	81.39	62.06	71.69

3:2 com a índex de la importància de la primera variable (ID) respecte de la segona (%T) (v. 2.33). El caràcter de les dues variables és positiu. Fer servir el transport públic o privat per anar a treballar ha esdevingut, en certa forma, un hàbit força generalitzat; en canvi, traslladar-se fora de la comarca és molt més significatiu. Tornen a sortir 7 intervals per a la primera variable, i cinc per a la segona.

Taula 5.8: Divisió en subinterval·ls per a ID

	I	II	III	IV	V	VI	VII
ID	< 0.07	[0.07, 0.14)	[0.14, 0.21)	[0.21, 0.28)	[0.28, 0.35)	[0.35, 0.42)	> 0.42
Incr ID	-0.3	-0.2	-0.1	0	+0.1	+0.2	+0.3

3. Estructura ocupacional

Per a aquesta variable hem cregut convenient crear un ordre jeràrquic entre els diversos sectors econòmics clàssics: Serveis, Indústria, Construcció i Agricultura. Es considera que, en l'estructura socioeconòmica d'una societat moderna, els serveis i la indústria són els que donen la pauta de desenvolupament, seguits de la construcció i l'agricultura. Per valorar-los, hem utilitzat l'*índex de localització*, que ve definit com “ el quocient del

Taula 5.9: Divisió en subinterval·ls per a %T

	I	II	III	IV	V
%T	< 65	[65, 70)	[70, 75)	[75, 80)	> 80
Incr %T	-0.2	-0.1	0	+0.1	+0.2

Taula 5.10: Valors de possibilitat per a la mobilitat poblacional

	AE	BE	GA	GI	PE	RI	SV
Incr ID	-0.1	0	-0.1	+0.2	+0.2	0	+0.2
Incr %T	-0.1	0	0	+0.1	+0.2	-0.2	0
valor de possibilitat	0.3	0.5	0.4	0.8	0.9	0.3	0.7

percentatge de l'ocupació del sector a la comarca entre el percentatge de l'ocupació del sector a Catalunya ". El que hem dit anteriorment equival a acceptar que l'estructura socioeconòmica catalana en el seu conjunt és moderna, fet que entenem que és totalment versemblant. Aquests índexs ens divideixen cada sector en quatre grups -cas de l'agricultura i la construcció- o cinc grups -cas de la indústria i els serveis-. Això està justificat pel fet que són els mateixos grups que utilitza la Generalitat de Catalunya a l'hora de publicar les estadístiques. Els valors des índexs es troben a les taules 5.11, 5.12, 5.13 i 5.14; la taula 5.15 assigna un índex a cada comarca; les taules 5.16, 5.17 i 5.18 donen la definició dels valors de possibilitat; i, finalment, els valors de possibilitat es poden consultar a la taula 5.19.

Taula 5.11: Índexs per a l'agricultura

	poca	regular	força	molta
agricultura	1	2	3	4
	< 1	[1, 4)	[4, 8)	> 8

Taula 5.12: Índexs per a la indústria

	molt poca	poca	regular	força	molta
indústria	1	2	3	4	5
	< 0.5	[0.5, 0.75)	[0.75, 1)	[1, 1.25)	> 1.25

Taula 5.13: Índexs per a la construcció

	poca	regular	força	molta
construcció	1	2	3	4
	< 1	[1, 1.5)	[1.5, 2)	> 2

Taula 5.14: Índexs per als serveis

	molt poca	poca	regular	força	molta
serveis	1	2	3	4	5
	< 0.6	[0.6, 0.8)	[0.8, 1)	[1, 1.2)	> 1.2

Taula 5.15: Assignació dels índexs a les comarques

	AE	BE	GA	GI	PE	RI	SV
agricultura	2	2	2	1	2	2	2
indústria	2	2	5	3	4	5	3
construcció	3	4	2	2	2	2	2
serveis	4	3	2	4	2	2	3

Taula 5.16: Valors de possibilitat per a l'estructura ocupacional (I)

indústria	construcció	serveis	valor	indústria	construcció	serveis	valor
1	1	1	0	3	3	1	0.4
1	1	2	0.1	3	3	2	0.6
1	1	3	0.2	3	3	3	0.7
1	1	4	0.3	3	3	4	0.8
1	1	5	0.4	3	3	5	0.8
1	2	1	0.1	3	4	1	0.5
1	2	2	0.2	3	4	2	0.6
1	2	3	0.3	3	4	3	0.7
1	2	4	0.4	3	4	4	0.8
1	2	5	0.4	3	4	5	0.8
1	3	1	0.1	4	1	1	0.3
1	3	2	0.3	4	1	2	0.5
1	3	3	0.5	4	1	3	0.7

En aquest cas hem optat per obtenir una taula on hi ha tots els casos possibles (100) i donar un valor a cada un d'ells. L'agricultura no ha estat tinguda en compte ja que és una característica objectivament molt poc adequada per mesurar el grau de modernitat de l'estructura socioeconòmica i que presenta a més, una gran homogeneïtat en el conjunt de les comarques gironines, la qual cosa fa que sigui irrellevant a l'hora de discriminar-les. De tota manera, aquesta és una decisió de l'expert. A efectes pràctics, i en el cas de voler fer una taula general, resulta que el nombre de casos es redueix molt: passa de 400 a 100.

Taula 5.17: Valors de possibilitat per a l'estructura ocupacional (II)

indústria	construcció	serveis	valor	indústria	construcció	serveis	valor
1	3	4	0.6	4	1	4	0.8
1	3	5	0.6	4	1	5	0.8
1	4	1	0.3	4	2	1	0.6
1	4	2	0.4	4	2	2	0.7
1	4	3	0.5	4	2	3	0.8
1	4	4	0.6	4	2	4	0.8
1	4	5	0.6	4	2	5	0.9
2	1	1	0.1	4	3	1	0.6
2	1	2	0.2	4	3	2	0.7
2	1	3	0.3	4	3	3	0.8
2	1	4	0.4	4	3	4	0.9
2	1	5	0.4	4	3	5	0.9
2	2	1	0.2	4	4	1	0.6
2	2	2	0.4	4	4	2	0.7
2	2	3	0.5	4	4	3	0.8
2	2	4	0.6	4	4	4	0.9
2	2	5	0.6	4	4	5	1.0
2	3	1	0.3	5	1	1	0.5
2	3	2	0.4	5	1	2	0.6
2	3	3	0.6	5	1	3	0.7
2	3	4	0.7	5	1	4	0.8
2	3	5	0.7	5	1	5	0.8
2	4	1	0.3	5	2	1	0.6
2	4	2	0.5	5	2	2	0.7
2	4	3	0.6	5	2	3	0.8

Taula 5.18: Valors de possibilitat per a l'estructura ocupacional (III)

indústria	construcció	serveis	valor	indústria	construcció	serveis	valor
2	4	4	0.7	5	2	4	0.9
2	4	5	0.7	5	2	5	0.9
3	1	1	0.2	5	3	1	0.6
3	1	2	0.3	5	3	2	0.7
3	1	3	0.4	5	3	3	0.8
3	1	4	0.4	5	3	4	0.9
3	1	5	0.5	5	3	5	1.0
3	2	1	0.3	5	4	1	0.6
3	2	2	0.5	5	4	2	0.7
3	2	3	0.6	5	4	3	0.8
3	2	4	0.7	5	4	4	1.0
3	2	5	0.7	5	4	5	1.0

Taula 5.19: Valors de possibilitat de les comarques per a l'estructura ocupacional

comarca	AE	BE	GA	GI	PE	RI	SV
valor de possibilitat	0.4	0.6	0.7	0.7	0.7	0.7	0.6

Taula 5.20: Variables per a la participació laboral de la dona

	AE	BE	GA	GI	PE	RI	SV
PA	36068	36813	18709	51732	9482	10422	42386
PDA	13165	13192	7448	20738	3499	4226	15611
%PDA	36.50	35.84	39.81	40.09	36.90	40.55	36.83
DE	2890	2652	1261	2600	614	889	2736
%DE	21.95	20.10	16.93	12.78	17.55	21.04	17.53

Taula 5.21: Divisió en subinterval·s per a %PDA

Int	< 10	10-14	14-18	18-22	22-26	26-30	30-34	34-38	38-42	42-46	> 46
valor	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0

4. Participació laboral de la dona

Partim d'uns valors teòrics sobre el percentatge de dones actives en una societat absolutament desenvolupada i en el d'una de totalment subdesenvolupada, que, si consultem la base de fets, són del 50% i 6% respectivament. Com a hipòtesi, estimem un ordre jeràrquic en què la primera variable considerada és primordial; per tant, dividim l'interval $[0, 1]$ tenint en compte només el valor d'aquesta. Després, acabem d'afinar amb l'altra variable. En aquest cas també totes les variables tenen caràcter positiu. Els valors de les variables es troben a la taula 5.20; la taula 5.21 mostra la divisió en subinterval·s; i, finalment, els valors de possibilitat es poden consultar a la taula 5.22.

El percentatge de dones empresàries acaba de determinar els valors de possibilitat per a

Taula 5.22: Valors de possibilitat per a la participació laboral de la dona

	AE	BE	GA	GI	PE	RI	SV
valor inicial	0.7	0.7	0.8	0.8	0.7	0.8	0.7
Incr %DE	0	0	-0.1	-0.1	-0.1	0	-0.1
valor de possibilitat	0.7	0.7	0.7	0.7	0.6	0.8	0.6

la variable estudiada, amb un possible increment (o disminució) del tipus $0.1k$, en funció que hi hagi moltes o poques dones empresàries. És a dir, s'accepta com a hipòtesi de treball que un gran percentatge de dones empresàries sobre el total de dones, facilita a aquest grup una més gran adaptabilitat a la societat moderna. En el nostre cas, hem cregut convenient no accentuar gaire aquest valor i hem agafat $k = 1$. La regla és la següent:

SI [%DE < 20] ALESHORES [valor = valor - 0.1]

SI [20 < %DE < 30] ALESHORES [valor = valor]

SI [%DE > 30] ALESHORES [valor = valor + 0.1]

5. Capital humà

En aquest paràgraf hem intentat reflectir com ha de ser la composició de la població des del punt de vista dels recursos humans que posseeixen els seus integrants. Com a premissa, s'ha acceptat que la formació intel·lectual dels individus és la característica essencial i necessària que han de tenir. Aquest fet provoca que, un cop situada una determinada comarca en un estrat de poca, regular, força o molta *riquesa intel·lectual personal*, s'hagi pres la decisió que cap altra variable la podrà canviar d'estrat: Només es podran fer correccions dins dels estrats. Els valors de les variables es troben a les taules

Taula 5.23: Variables principals per al capital humà

	AE	BE	GA	GI	PE	RI	SV
$PA > 25$	35095	36202	18159	50883	9127	10267	41477
U	6381	6542	3133	13170	1998	1756	5824
$\%U$	18.18	18.07	17.25	25.88	21.89	17.01	14.14

Taula 5.24: Definició dels estrats per a $\%U$

estrat I	estrat II	estrat III	estrat IV
$\%U < 11$	$11 < \%U < 18$	$18 < \%U < 25$	$25 < \%U$

5.23 i 5.26; i, les taules 5.24 i 5.25 mostren l'estratificació.

Un cop assignada cada comarca a un estrat concret, acabem fixant el seu valor de possibilitat proporcionalment a $\%U$ i, finalment considerant una nova variable de benestar econòmic, que en aquest cas hem escollit com els rendiments mitjans declarats per habitant, ja que considerem que aquesta variable resulta molt adequada per valorar el nivell de promoció i desenvolupament de l'individu. Aquests valors, en milers de pessetes (dades anteriors al 2001), es poden observar a la taula 5.26.

Taula 5.25: Estratificació per a $\%U$

estrat I			estrat II			estrat III			estrat IV	
0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0

Taula 5.26: Rendiments mitjans declarats per habitant

AE	BE	GA	GI	PE	RI	SV
2029	2040	2003	2368	2126	2013	2002

La regla de decisió emprada ha estat:

SI [rendiments < 2033] ALESHORES [valor = valor - 0.1]

SI [2033 < rendiments < 2153] ALESHORES [valor = valor]

SI [rendiments > 2153] ALESHORES [valor = valor + 0.1]

Els valors dins dels estrats, els increments corresponents a les anteriors regles, i els valors de possibilitat al final del procés es mostren a la taula 5.27.

Amb els valors de possibilitat que acabem d'obtindre per a les cinc característiques borroses, ja podem definir la matriu de la relació borrosa entre les comarques gironines i les variables incertes de la modernitat en el treball per tal d'efectuar l'estudi teòric descrit en el capítol 5. El procés consisteix en el càlcul de la matriu booleana, les connexions, els tancaments de Moore i les seves clausures, l'isomorfisme entre clausures, i, finalment, el reticle de Galois.

Taula 5.27: Valors de possibilitat per al capital humà

	AE	BE	GA	GI	PE	RI	SV
estrat	III	III	II	IV	III	II	II
valor estrat	0.6	0.6	0.5	0.9	0.7	0.6	0.4
Incr RE	-0.1	0	-0.1	+0.1	0	-0.1	-0.1
valor de possibilitat	0.5	0.6	0.4	1.0	0.7	0.5	0.3

5.4.2.3 Càlcul del reticle de Galois

Matriu de la relació borrosa

Dels càlculs del darrer apartat, obtenim la matriu A de la relació borrosa entre comarques i característiques de la modernitat en el treball:

$$A = \begin{matrix} & \begin{matrix} DD & MP & EO & PD & CH \end{matrix} \\ \begin{matrix} AE \\ BE \\ GA \\ GI \\ PE \\ RI \\ SV \end{matrix} & \left(\begin{array}{ccccc} 0.6 & 0.3 & 0.4 & 0.7 & 0.5 \\ 0.7 & 0.5 & 0.6 & 0.7 & 0.6 \\ 0.2 & 0.4 & 0.7 & 0.7 & 0.4 \\ 0.5 & 0.8 & 0.7 & 0.7 & 1.0 \\ 0.1 & 0.9 & 0.7 & 0.6 & 0.7 \\ 0.2 & 0.3 & 0.7 & 0.8 & 0.5 \\ 0.4 & 0.7 & 0.6 & 0.6 & 0.3 \end{array} \right) \end{matrix}$$

Matriu booleana associada a A

Considerant el llindar $\theta_i = 0.6$ per a totes les característiques, obtenim la matriu booleana (v. 5.7):

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Clausures dels tancaments de Moore associats a la matriu **B**

En el cas binari només hi ha dues connexions (v. 5.8), anomenades *connexió a la dreta* i *a l'esquerra*, que indiquem per f^+ i f^- ; amb dos tancaments associats (v. 5.9): $f_1 = f^- \circ f^+$ i $f_2 = f^+ \circ f^-$. Els càlculs són llargs i ja han estat realitzats en el cas de la relació ternària anterior; per tant, seguidament, presentem les seves clausures directament (v. 5.10):

$$\begin{aligned} \Omega(E, f_1) = \bigcup_{A \in \wp(F)} f^-(A) = & \{\emptyset, \{BE\}, \{AE, BE\}, \{GI, PE\}, \{BE, GI, PE\}, \\ & \{GI, PE, SV\}, \{BE, GA, GI, PE, RI, SV\}, E \} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Omega(F, f_2) = \bigcup_{A \in \wp(E)} f^+(A) = & \{\{PD\}, \{DD, PD\}, \{EO, PD\}, \{MP, EO, PD\}, \\ & \{EO, PD, CH\}, \{MP, EO, PD, CH\}, \{DD, EO, PD, CH\}, F \} \end{aligned}$$

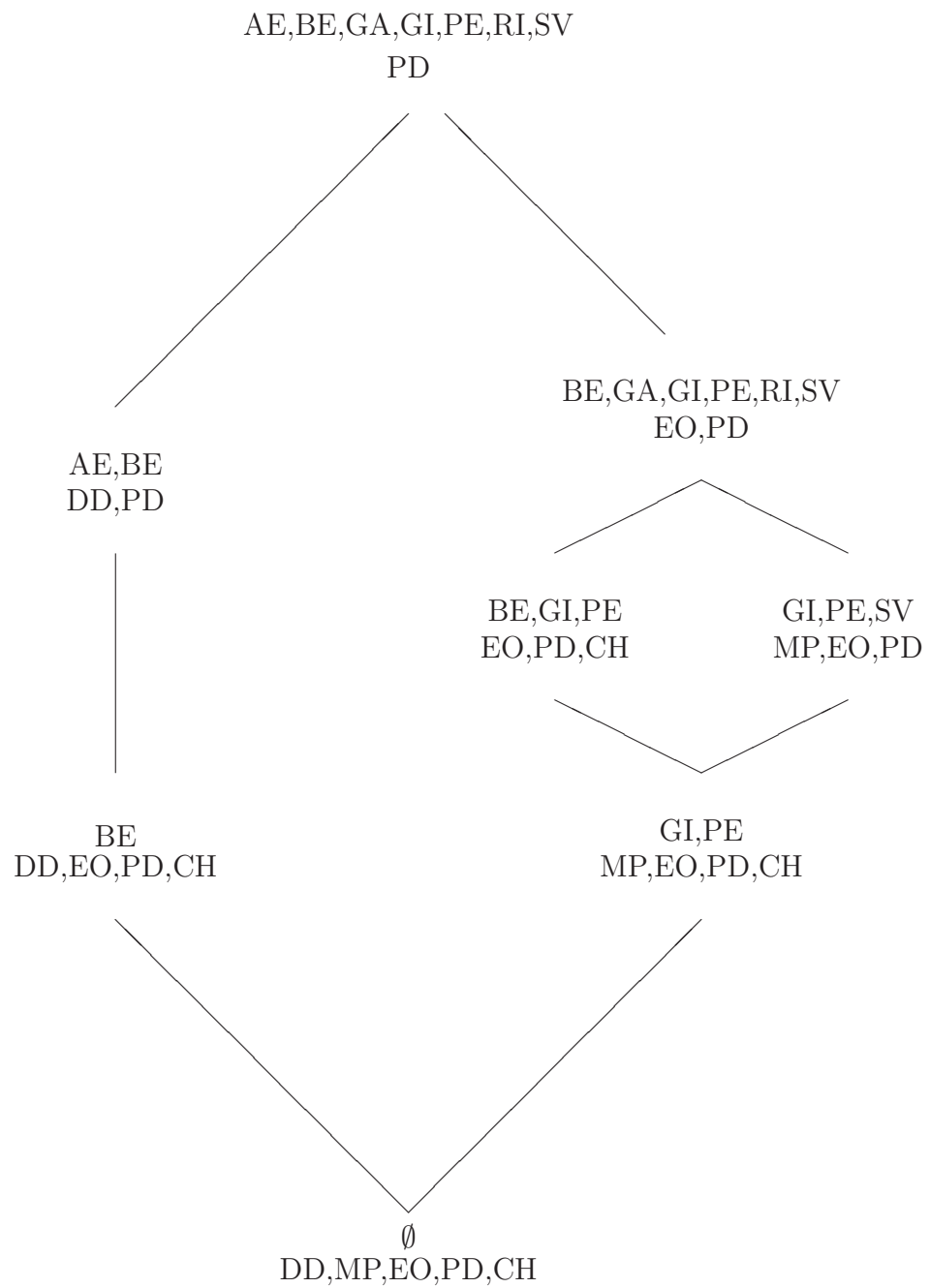
Isomorfisme

Obtenim el següent isomorfisme (v. 5.11) entre els dos conjunts de clausures:

$$\begin{aligned}
 \Omega(E, f_1) &\longleftrightarrow \Omega(F, f_2) \\
 \emptyset &\longleftrightarrow F \\
 \{BE\} &\longleftrightarrow \{DD, EO, PD, CH\} \\
 \{AE, BE\} &\longleftrightarrow \{DD, PD\} \\
 \{GI, PE\} &\longleftrightarrow \{MP, EO, PD, CH\} \\
 \{BE, GI, PE\} &\longleftrightarrow \{EO, PD, CH\} \\
 \{GI, PE, SV\} &\longleftrightarrow \{MP, EO, PD\} \\
 \{BE, GA, GI, PE, RI, SV\} &\longleftrightarrow \{EO, PD\} \\
 E &\longleftrightarrow \{PD\}
 \end{aligned}$$

Aquest isomorfisme ens agrupa les diferents comarques i característiques; a més a més, ens assigna cadascuna de les agrupacions de les comarques a una agrupació de característiques de la modernitat en el treball, com també ho fa recíprocament, és a dir, a cada agrupació de les característiques els associa una agrupació de les comarques. Aquesta és l'essència del concepte d' isomorfisme. La figura 5.2 ens mostra la representació del reticle de Galois en un diagrama en arbre, on es presenta una ordenació entre les diverses comarques, en funció de les característiques que comparteixen.

Figura 5.2: Reticle de Galois per a la relació borrosa binària



5.4.2.4 Anàlisi dels resultats

- La característica que valora la participació de la dona en el treball no ens permet discriminar entre les diverses comarques ja que totes elles la tenen. En realitat, el suprem del reticle de Galois el formen el conjunt de totes les comarques agrupades mitjançant aquesta característica.
- S'observa l'agrupació del les dues comarques de l'Empordà sota la característica de la diversitat demogràfica. Cap altra agrupació ha estat aconseguida amb aquesta característica, llevat de la formada únicament pel Baix Empordà.
- El Gironès i el Pla de l'Estany conformen una altra agrupació encara més homogènia, ja que ho són amb totes les característiques, llevat de la de la diversitat demogràfica. Això no pot estranyar gens, tenint en compte el passat recent com a comarca unificada i la gran relació entre les dues capitals, que tenen un gran pes específic a les dues comarques.
- Si no tenim en compte la mobilitat poblacional, la comarca del Baix Empordà s'agrupa amb les dues anteriors; si, en canvi, deixem de tenir en compte el capital humà, és la comarca de la Selva la que s'hi agrupa.
- Obtenim una gran agrupació de comarques, en realitat totes llevat de l'Alt Empordà, si volem una afinitat amb la participació de la dona i l'estructura ocupacional.
- Les comarques del Ripollès i l'Alt Empordà només apareixen en una de les agrupacions, la qual cosa ens fa pensar que possiblement són les menys semblants a totes les altres des del punt de vista de la modernitat en el treball. En realitat, l'Alt Empordà només s'agrupa amb la seva homòloga del Sud, llevat del cas del suprem.

Capítol 6

Aplicació a la classificació dels països de la Unió Europea

6.1 Introducció

En aquest capítol fem una aplicació¹ dels conceptes teòrics introduïts als quatre primers capítols per classificar els països de la Unió Europea a partir de determinades variables socioeconòmiques. Als països objectes del nostre estudi els designem amb la següent nomenclatura: B = Bèlgica, DK = Dinamarca, D = Alemanya, EL = Grècia, E = Espanya, F = França, IRL = Irlanda, I = Itàlia, NL = Holanda, A = Àustria, P = Portugal, FIN = Finlàndia, S = Suècia i UK = Regne Unit. Aquesta és la nomenclatura emprada per l'Eurostat². No hi hem inclòs Luxemburg, donat que moltes de les dades estan interrelacionades amb les d'altres països, i no ha

¹Un treball preliminar ha estat publicat amb anterioritat (v. [27]).

²Departament de la Comissió Europea encarregat de fer els estudis estadístics dels països membres de la Unió Europea.

estat possible de trobar-ne d'homologables i sense la influència dels mateixos països. Les dades utilitzades han estat recollides de diferents anuaris estadístics (v. [21]-[24], [86]-[89]) i se'ls han aplicat els procediments descrits en el capítol 2 per tal de trobar les matrius de les relacions borroses. Posteriorment, s'han calculat les matrius de semblança en els casos que creiem més significatius, i, finalment, s'han calculat els clústers seguint alguns dels procediments descrits en el capítol 4. Les relacions borroses, les relacions de semblança i les agrupacions, les hem fet a partir de les dades recollides dels anys 1995, 1999 i 2003. Com que les dades de l'any 2003 encara no estan disponibles en el moment d'elaborar aquesta memòria, ens hem valgut de prediccions realitzades utilitzant sèries temporals i xarxes neuronals. Per últim, cal comentar que no ha estat possible d'obtenir un conjunt prou gran de variables que els experts consideressin importants i que, alhora, tinguessin unes sèries cronològiques prou àmplies com perquè les prediccions fossin altament fiables³. En aquesta situació hem prioritzat el fet que el conjunt de variables sigui prou gran: disposem per al nostre estudi de 30 variables, encara que en algunes d'elles només es disposa de 3 o 4 dades.

6.2 Expertesa

L'objectiu és avaluar a través d'experts el grau de compliment de diverses característiques, que més endavant especificarem, en els diversos països de la Unió Europea que hem esmentat en l'apartat anterior. La metodologia consisteix a associar a cada característica diverses variables estadístiques i assignar a cadascuna d'elles un valor entre 0 i 1, de forma que 0 significa que la variable és irrellevant, i 1, que és essencial en l'avaluació de la característica considerada. Òbviament, els valors entre 0 i 1 ens donen el grau d'importància o rellevància de la variable estadística (com més gran és el grau, més rellevant és la variable en la configuració de la

³El conjunt de les variables estadístiques considerades ens ve restringit per les sèries d'estadístiques periòdiques publicades en les publicacions especialitzades.

característica).

6.2.1 Característiques

1. Desenvolupament humà

En aquesta característica volem avaluar el grau de desenvolupament cultural que posseeix cadascun dels diversos països. Altres variables que també es podrien associar a aquesta definició estan considerades en la característica *qualitat de vida*.

2. Qualitat de vida

En aquesta característica volem que quedin reflectits els aspectes socials (llevat de la cultura) que donen una més gran qualitat a la vida de les persones. Aquests aspectes són: la salut, el medi ambient i el nivell de renda.

3. Integració social

En les societats desenvolupades la població valora com a desitjable el fet de reduir la marginalitat dels seus integrants més *febles*. És aquest concepte el que es vol determinar en aquesta característica.

4. Igualtat entre gèneres

L'absència de desigualtat entre homes i dones, i el grau de participació de les dones en la presa de decisions és el que volem analitzar en aquesta característica. En segons quins aspectes aquesta característica podria ésser recollida en la integració social, però creiem que és més correcte considerar-la com una característica específica, degut a la seva importància social i al fet que afecta a la meitat de la població. Si alguna variable pren un valor superior per al col·lectiu de les dones que per als homes, considerarem que hi ha igualtat.

5. Desenvolupament tecnològic

En aquesta característica no només hi incloem el grau d'implementació de les noves tecnologies, sinó també el grau de coneixement i desenvolupament de tots els aspectes relacionats amb la investigació i l'accés a la tecnologia.

6.2.2 Variables estadístiques associades a cada característica

1. Desenvolupament humà

X_1 = “ % del PNB dedicat a l'educació ”

X_2 = “ Ràtio bruta de matriculació a l'educació primària, secundària i universitària ”

X_3 = “ Títols i diplomes per milió de persones actives ”

X_4 = “ Nombre mitjà de llengües estrangeres estudiades per alumne de secundària ”

X_5 = “ Índex de desenvolupament humà donat pel PNUD ⁴ ”

2. Qualitat de vida

X_6 = “ % del PNB dedicat a la salut ”

X_7 = “ Esperança de vida en néixer ”

X_8 = “ Nombre mitjà de cigarretes disponibles al mercat per persona ”

X_9 = “ Taxa d'accidents de treball amb més de tres dies d'absència ”

X_{10} = “ % de persones que viuen en vivendes superpoblades ”

X_{11} = “ PNB per càpita ”

X_{12} = “ % d'escombraries reciclades ”

X_{13} = “ Emissions de CO_2 (en tones per habitant) ”

⁴Sigles que corresponen al Programa de les Nacions Unides per al Desenvolupament.

3. Integració social

X_{14} = “ Taxa d’atur ”

X_{15} = “ % de persones ocupades a temps parcial ”

X_{16} = “ Taxa d’atur per a joves menors de 25 anys ”

X_{17} = “ Despeses totals en protecció social per habitant ”

X_{18} = “ % del PNB dedicat a ajuda al desenvolupament (Assistència oficial per al desenvolupament) ”

4. Igualtat entre gèneres

X_{19} = “ Comparació dels nivells d’atur entre homes i dones ”

X_{20} = “ Comparació, entre els percentatges d’homes i dones, que componen la ràtio bruta de matriculació combinada a l’educació primària, secundària i universitària ”

X_{21} = “ Comparació dels ingressos pel treball entre homes i dones ”

X_{22} = “ % de dones amb càrrecs administratius i executius ”

X_{23} = “ % de dones professionals i tècniques ”

5. Desenvolupament tecnològic

X_{24} = “ % del PNB dedicat a R+D ”

X_{25} = “ % de llocs de treball de serveis de forta concentració de coneixement ”

X_{26} = “ % de llocs de treball en manufactures d’alta tecnologia ”

X_{27} = “ Patents d’alta tecnologia per milió de persones actives ”

X_{28} = “ Consum d’energia per habitant ”

X_{29} = “ % d’internautes sobre el total de la població ”

X_{30} = “ % d’abonats a la telefonia mòbil sobre el total de la població ”

6.2.3 Avaluació

La classificació dels objectes -en el nostre cas es tracta dels països de la Unió Europea- s'obté després d'un procés dividit en diverses etapes. La primera d'elles consisteix en la construcció de la relació borrosa entre objectes i característiques segons el model teòric del capítol 2 (v. 2.30) amb $\alpha = 0$, i, per tant, ens cal calcular $\mu_{\tilde{v}}$, que correspon a la utilització de variables estadístiques amb la participació d'experts en la forma que ara comentarem: En el nostre cas, 5 experts, membres àmpliament reconeguts en l'àmbit de la sociologia i l'economia, han participat en el procés, determinant les valuacions relatives al grau d'incidència que té, al seu parer, cadascuna de les variables -que defineixen el conjunt X (v. 2.31)- en la configuració de les característiques principals i que ens serviran de base per realitzar la nostra classificació. Els experts han efectuat aquestes valuacions mitjançant l'escala hendecanària (v. secció 2.4). Les taules 6.1, 6.3, 6.5, 6.7 i 6.9 ens mostren aquestes valuacions obtingudes pels cinc experts, que representem per A, B, C, D i E. Així mateix, s'hi mostren el seu valor mitjà -aproximat als valors de l'escala hendecanària- i els corresponents índexs (v. 2.32).

1. Desenvolupament humà

Taula 6.1: Expertesa per al desenvolupament humà

	A	B	C	D	E	suma	valor mitjà	índex
X_1	0.6	0.8	0.9	0.9	0.8	4	0.8	3
X_2	0.7	0.9	0.9	0.9	0.5	3.9	0.8	3
X_3	0.8	0.7	0.3	0.7	0.7	3.2	0.6	1
X_4	0.4	0.9	0.7	0.8	0.6	3.4	0.7	2
X_5	0.3	0.8	NC	0.9	0.6	2.6	0.6	1

Per a l'escala i el nombre de subinterval p , amb $p = 10\delta + 1$ (v. apartat 2.4.2.1) obtenim els

valors de la taula 6.2.

Taula 6.2: Escala per al desenvolupament humà

mínim	màxim	p	$\sum_{i=1}^5 c_i$	escala
0.6	0.8	3	10	0.05

No s'observen diferències prou significatives entre les diverses variables, això fa que els índexs no siguin gaire diferents. L'escala resultant té gairebé el doble de valors que l'hendecanària.

2. Qualitat de vida

Taula 6.3: Expertesa per a la qualitat de vida

	A	B	C	D	E	suma	valor mitjà	índex
X_6	0.3	0.8	0.9	0.9	0.8	3.7	0.7	5
X_7	0.3	0.9	0.8	0.8	0.6	3.4	0.7	5
X_8	0	0.7	0.2	0.3	0.2	1.4	0.3	1
X_9	0.3	0.9	0.4	0.7	0.5	2.8	0.6	4
X_{10}	0.3	0.8	0.7	0.8	0.8	3.4	0.7	5
X_{11}	0.7	0.7	0.8	0.6	0.8	3.6	0.7	5
X_{12}	0.3	0.8	0.7	1	0.6	3.4	0.7	5
X_{13}	0.3	0.8	0.2	0.8	0.9	3	0.6	4

Per a l'escala i el nombre de subinterval p , obtenim els valors de la taula 6.4.

Totes les variables tenen un pes semblant, llevat de la variable “ Nombre mitjà de cigarretes disponibles al mercat per persona ”, que és, clarament, molt menys rellevant que les altres.

Taula 6.4: Escala per a la qualitat de vida

mínim	màxim	p	$\sum_{i=1}^8 c_i$	escala
0.3	0.7	5	34	1/68

Donat que el rang en què varien els índexs és gran, l'escala resultant té molts valors.

3. Integració social

Taula 6.5: Expertesa per a la integració social

	A	B	C	D	E	suma	valor mitjà	índex
X_{14}	0.7	0.9	0.7	1	0.9	4.2	0.8	3
X_{15}	0.6	0.6	0.4	0.8	0.6	3	0.6	1
X_{16}	0.7	0.5	0.6	0.9	0.7	3.4	0.7	2
X_{17}	0.7	0.7	0.8	1	0.8	4	0.8	3
X_{18}	0.6	0.8	0.3	1	0.5	3.2	0.6	1

Per a l'escala i el nombre de subinterval p , obtenim els valors de la taula 6.6.

Taula 6.6: Escala per a la integració social

mínim	màxim	p	$\sum_{i=1}^5 c_i$	escala
0.6	0.8	3	10	0.05

Els comentaris que es poden fer per a aquesta variable borrosa són idèntics que per al desenvolupament humà.

4. Igualtat entre gèneres

Taula 6.7: Expertesa per a la igualtat entre gèneres

	A	B	C	D	E	suma	valor mitjà	índex
X_{19}	0.7	0.8	0.7	0.7	0.8	3.7	0.7	1
X_{20}	0.8	0.9	0.3	0.9	0.7	3.6	0.7	1
X_{21}	0.8	0.8	0.8	0.8	0.9	4.1	0.8	2
X_{22}	0.8	0.7	0.7	0.9	0.8	3.9	0.8	2
X_{23}	0.8	0.7	0.7	0.9	0.3	3.4	0.7	1

Per a l'escala i el nombre de subinterval p , obtenim els valors de la taula 6.8.

Taula 6.8: Escala per a la igualtat entre gèneres

mínim	màxim	p	$\sum_{i=1}^7 c_i$	escala
0.7	0.8	2	7	$1/14$

Aquesta és la variable en què els experts es posen més d'acord en l'homogeneïtat dels valors de les variables estadístiques tot i que la variable “ Comparació, entre els percentatges d'homes i dones, que componen la ràtio bruta de matriculació combinada a l'educació primària, secundària i universitària ” fa discrepar fortament els experts, però, al fer la mitjana, els resultats no queden gaire afectats. L'escala resultant és la que s'assembla més a l'hendecanària que no pas en la resta de casos.

5. Desenvolupament tecnològic

Per a l'escala i el nombre de subinterval p , obtenim els valors de la taula 6.10.

Taula 6.9: Expertesa per al desenvolupament tecnològic

	A	B	C	D	E	suma	valor mitjà	índex
X_{24}	0.7	0.9	0.4	1	0.8	3.8	0.8	5
X_{25}	0.4	0.9	0.2	0.8	0.4	2.7	0.5	2
X_{26}	0.5	0.8	0.2	0.9	0.9	3.3	0.7	4
X_{27}	0.7	0.9	0.7	0.7	0.9	3.9	0.8	5
X_{28}	0.3	0.7	0.1	0.6	0.2	1.9	0.4	1
X_{29}	0.7	0.1	0.5	0.6	0.6	2.5	0.5	2
X_{30}	0.2	0.7	0.1	0.6	0.5	2.1	0.4	1

Taula 6.10: Escala per al desenvolupament tecnològic

mínim	màxim	p	$\sum_{i=1}^8 c_i$	escala
0.4	0.8	5	20	$1/40$

Els resultats mostren que el comportament d'aquesta variable borrosa és similar al de la qualitat de vida; en el sentit d'haver-hi variables molt importants i d'altres gairebé irrelevantes. L'escala resultant també consta de molts valors.

6.3 Predicció de dades

Per tal de poder fer prediccions dels valors de les variables considerades per a anys dels quals encara no disposem de dades estadístiques, cal extrapolar els valors d'aquestes als anys considerats. En el nostre cas, ho hem fet per a l'any 2003. La metodologia que s'ha seguit consisteix a

aplicar sèries temporals o xarxes neuronals. Anem a exposar quina ha estat la motivació que ens ha fet decidir per una de les dues possibilitats. El principal problema amb què ens hem trobat ha estat la migrada llargada de les sèries estadístiques dels corresponents anuals de l'Eurostat i del PNUD. Aquesta manca de dades cronològiques fa que sigui impossible d'aplicar models ARIMA de sèries temporals, ni tampoc d'entrenar xarxes neuronals amb un nombre suficient de dades i després validar-les amb les restants. En aquestes condicions hem decidit, d'entrada, d'optar per un model de sèrie temporal amb tendència lineal, és a dir, fer servir la regressió lineal. Aquest model s'accepta si $R^2 \geq 0.49$ (on R representa el coeficient de correlació de Pearson), la qual cosa equival que el coeficient de correlació de Pearson sigui major que 0.7 o menor que -0.7 . En aquest cas, comparem els errors MAPE i MSE de la regressió lineal, que es defineixen a les fórmules (6.1) i (6.2), amb les altres sèries temporals. Si amb la nova sèrie temporal els dos errors són més petits que els inicials, l'acceptem com a nou model; en cas contrari, ens quedem amb el model de tendència lineal. En aquestes condicions s'ha comprovat empíricament que les diferències en les prediccions són molt petites. Si $R^2 < 0.49$ utilitzarem xarxes neuronals. Si el nombre de dades és superior o igual a 10 farem servir dues tercers parts de les dades per entrenar la xarxa, i l'altra tercera part per validar-la. En cas contrari només l'entrenarem. En les següents seccions explicarem més detalladament les dues formes d'extrapolar dades, amb un especial èmfasi en les xarxes neuronals, ja que aquest procediment és molt menys conegut que el de les sèries temporals.

6.3.1 Sèries temporals

Existeixen nombrosos manuals sobre sèries temporals (v. [81]); per tant, aquí només explicarem aquells tipus de sèries que hem usat en el nostre treball. Els càlculs han estat fets amb el paquet estadístic Minitab. Una sèrie temporal és una col·lecció de valors d'una variable ordenada en el temps. El nostre enfocament és descriptiu donat que no considerem cap component aleatori, i

per tal que les prediccions siguin fiables, cal que les condicions estructurals, que han fet que la tendència sigui de forma suau en el passat, es mantinguin invariants. En general, es considera que la sèrie temporal és el producte de l'agregació de diversos elements:

1. Tendència.

Moviments de tipus secular de caràcter relativament suau que s'observen a l'avaluar la variable a llarg termini. Sol venir donada per funcions monòtones de caràcter suau: lineals, parabòliques, exponencials i allisats exponencials. Les designem, respectivament, per ST(TL), ST(Q), ST(EXP) i ST(SES).

2. Component cíclic.

Són oscil·lacions d'amplitud i freqüència variables. Són moviments plurianuals. Les designem per ST(D(n)), on n indica el període del component cíclic.

3. Estacionalitat.

Són components periòdics dins de l'any. En el nostre cas, no els podem tenir en compte ja que les dades de les que disposem són anuals.

La més utilitzada en el nostre cas ha estat la de tendència lineal ja que les altres, tal i com hem comentat anteriorment, només ho han estat si els dos errors esmentats són menors. Aquests errors, MAPE i MSE, que són els acrònims de *mean square error* i *mean absolute percentage error* respectivament, i que ja hem esmentat anteriorment, vénen donats per les fórmules:

$$\text{MAPE} = 100 \frac{\sum_{i=1}^n |y_i - \hat{y}_i|/y_i}{n} \quad (6.1)$$

$$\text{MSE} = \frac{\sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y}_i)^2}{n} \quad (6.2)$$

on y_i representen els valors de les variables, \hat{y}_i les prediccions obtingudes mitjançant les sèries temporals i n el nombre de dades de què disposem.

6.3.2 Xarxes neuronals

Les xarxes neuronals van ser introduïdes a la dècada del 80 per tal de simular el raonament lògic dels éssers humans. No farem una exposició detallada del tema ja que la bibliografia general és molt àmplia i coneguda (v. [29, 48, 84]), així com també la seva utilització en la matemàtica *fuzzy* (v. [2, 13]).

Una xarxa neuronal està formada per diverses capes, cadascuna d'elles formada per diverses neurones. La primera capa rep els senyals d'entrada (*inputs*) i l'última dona les sortides (*outputs*). Si \vec{X} és el vector d'entrada, aleshores el vector de sortida en la següent capa és \vec{Y} amb $\vec{Y} = f(W \cdot \vec{X} + \vec{b})$, on W és la matriu de pesos, \vec{b} és el vector dels biaixos, i f és la funció de transferència. Per tal que la xarxa aprengui de certs patrons preestablerts, es modifiquen els pesos de forma que l'error disminueixi. La forma en què es fa aquest procediment dona lloc a diverses arquitectures de xarxes i diversos processos d'aprenentatge.

En el nostre cas, hem triat el model de xarxa anomenat *backpropagation* (Rumelharts, Huiton & Williams 1986) atès que permet obtenir sortides a partir d'entrades desconegudes. Recordem que el nostre objectiu és predir valors de variables numèriques en anys en què es desconeixen; per tant, aquesta propietat s'adapta perfectament al nostre objectiu. A més, està recomanada especialment per aproximar funcions amb un nombre finit de discontinuïtats (v. [77]). Els càlculs han estat realitzats amb el paquet informàtic Matlab, apropiat per a diversos càlculs matemàtics i, en particular, per operar amb xarxes neuronals.

Característiques bàsiques del model de xarxa *backpropagation*

1. És una xarxa *feedforward*, la qual cosa vol dir que les neurones d'una capa reben senyals d'entrada de la capa anterior i n'envien a la capa posterior.
2. És una xarxa *off line*, és a dir, els pesos es mantenen fixos després de l'etapa d'entrenament.
3. És una xarxa supervisada per correcció d'error, és a dir, existeix un agent extern que controla l'aprenentatge i ajusta els pesos en funció de la diferència entre els valors desitjats i els obtinguts. En aquest cas, la propagació de l'error és cap enrere.
4. És heteroassociativa: Associa informacions d'entrada amb informacions de sortida.

En el nostre cas, a l'última capa sempre hi ha una sola neurona, ja que desitgem obtenir un sol valor. Les funcions de transferència de les capes intermèdies sempre són sigmoïdals, i la darrera és lineal per tal que pugui donar valors en \mathbb{R} , i no només en $[0, 1]$. Tot i així, per tal de fer un procés de càlcul més adient, en molts casos s'ha fet un escalatge de les variables. El nombre de capes intermèdies a vegades s'ha hagut d'ampliar per tal de minimitzar adequadament la funció objectiu. Ha resultat més eficient aquest mètode que afegir neurones a les capes intermèdies.

Procés d'aprenentatge

Es tracta de minimitzar una *funció objectiu* que, per defecte, és l'error quadràtic mitjà assignat a la fórmula (6.2).

El mètode més habitual per minimitzar l'error és el del gradient descendent, tot i que també es poden utilitzar tècniques estàndard d'optimització numèrica que milloren la rapidesa de l'entrenament. Nosaltres hem optat per aquesta darrera opció utilitzant un mètode de quasi-Newton, molt recomanat per a xarxes petites en el manual de MATLAB (v. [77]). El procediment per

calcular un valor a partir dels anteriors és:

$$x_{k+1} = x_k - A_k^{-1}g_k$$

on g_k és el gradient i A_k^{-1} és la inversa de la matriu hessiana de la funció objectiu. Avaluat aquesta matriu és realment complicat, ja que a vegades dona lloc a valors excessivament propers a zero i no es pot computar. Aquest problema ha aparegut en alguna de les variables que s'han predit, i s'ha solucionat canviant algun dels paràmetres necessaris per a la computació, o bé afegint-hi una nova capa de neurones. Els paràmetres més àmpliament utilitzats han estat: 10^{-6} per al factor que multiplica el gradient a cada pas, 10^{-9} per al valor mínim del gradient, 10^{-2} per al valor de la funció objectiu a partir del qual es considera entrenada la xarxa, tot i que moltes vegades s'ha aconseguit un valor més petit que 10^{-6} , i, finalment, 1000 com a valor màxim per al número d'iteracions.

Com ja hem indicat anteriorment, en els casos de les variables per les que disposem de 10 o més dades, les hem dividit en dos grups: el primer, amb dues tercers parts de les dades, i l'altre, amb la tercera part restant. Un cop entrenada la xarxa en el primer grup, s'ha avaluat l'error en el segon grup utilitzant (6.1), el valor obtingut l'hem anomenat EE, i s'ha validat la xarxa en el cas que aquest error hagi estat inferior al 30%. Aquest és un procediment molt habitual en l'aplicació de les xarxes neuronals.

6.4 Matrius de les relacions borroses

Siguin $\tilde{R}(95)$, $\tilde{R}(99)$ i $\tilde{R}(03)$ les relacions borroses entre països de la Unió Europea i les característiques de l'expertesa. Tenint en compte les valoracions dels experts, aplicant el procediment descrit en el capítol 2 amb $\alpha = 0$ (v. 2.30, 2.31, 2.34) a les dades dels anuaris estadístics, i extrapolant-les en les formes indicades per a l'any 2003 (v. annex 8.1), obtenim la subdivisió en intervals (v. 2.35), que es poden consultar a l'annex 8.2. A partir d'aquests resultats calculem, mitjançant les regles associades a l'estratègia fonamental de l'apartat 2.4.2.1, les matrius de les relacions borroses, que anomenem $M(95)$, $M(99)$ i $M(03)$. Aquestes matrius permetran establir les mesures de semblança entre els països de la Unió Europea descrites a l'apartat 6.5.

$$M(95) = \begin{matrix} & \begin{matrix} D.H & Q.V & I.S & I.G & D.T \end{matrix} \\ \begin{matrix} B \\ DK \\ D \\ EL \\ E \\ F \\ IRL \\ I \\ NL \\ A \\ P \\ FIN \\ S \\ UK \end{matrix} & \left(\begin{matrix} 0.55 & 0.56 & 0.60 & 0.36 & 0.40 \\ 0.70 & 0.59 & 0.90 & 0.64 & 0.48 \\ 0.40 & 0.71 & 0.75 & 0.36 & 0.48 \\ 0.20 & 0.41 & 0.40 & 0.21 & 0 \\ 0.25 & 0.33 & 0.10 & 0.29 & 0.10 \\ 0.60 & 0.69 & 0.65 & 0.50 & 0.43 \\ 0.40 & 0.46 & 0.45 & 0.29 & 0.25 \\ 0.15 & 0.59 & 0.45 & 0.43 & 0.18 \\ 0.65 & 0.49 & 0.75 & 0.43 & 0.45 \\ 0.45 & 0.71 & 0.80 & 0.36 & 0.25 \\ 0.20 & 0.24 & 0.50 & 0.64 & 0.03 \\ 0.90 & 0.49 & 0.45 & 0.79 & 0.78 \\ 0.70 & 0.85 & 0.80 & 0.86 & 0.75 \\ 0.45 & 0.43 & 0.55 & 0.64 & 0.43 \end{matrix} \right) \end{matrix} \quad (6.3)$$

$$M(99) = \begin{matrix} & D.H & Q.V & I.S & I.G & D.T \\ B & \left(\begin{matrix} 0.75 & 0.56 & 0.45 & 0.29 & 0.40 \\ DK & 0.80 & 0.51 & 0.90 & 0.57 & 0.48 \\ D & 0.45 & 0.69 & 0.65 & 0.43 & 0.53 \\ EL & 0 & 0.35 & 0.20 & 0.14 & 0 \\ E & 0.30 & 0.37 & 0.10 & 0.29 & 0.10 \\ F & 0.55 & 0.63 & 0.40 & 0.36 & 0.38 \\ IRL & 0.30 & 0.41 & 0.60 & 0.43 & 0.28 \\ I & 0.05 & 0.46 & 0.30 & 0.50 & 0.20 \\ NL & 0.50 & 0.72 & 0.80 & 0.21 & 0.40 \\ A & 0.45 & 0.71 & 0.80 & 0.29 & 0.33 \\ P & 0.35 & 0.28 & 0.60 & 0.50 & 0.05 \\ FIN & 0.95 & 0.44 & 0.50 & 0.79 & 0.83 \\ S & 0.90 & 0.79 & 0.70 & 0.71 & 0.85 \\ UK & 0.60 & 0.50 & 0.55 & 0.64 & 0.43 \end{matrix} \right) \end{matrix} \quad (6.4)$$

$$M(03) = \begin{matrix} & D.H & Q.V & I.S & I.G & D.T \\ B & \left(\begin{matrix} 0.75 & 0.57 & 0.50 & 0.50 & 0.40 \\ DK & 0.70 & 0.47 & 0.95 & 0.64 & 0.48 \\ D & 0.35 & 0.72 & 0.50 & 0.29 & 0.53 \\ EL & 0 & 0.46 & 0.10 & 0.21 & 0.05 \\ E & 0.25 & 0.31 & 0.15 & 0.36 & 0.10 \\ F & 0.45 & 0.72 & 0.45 & 0.43 & 0.35 \\ IRL & 0.20 & 0.44 & 0.60 & 0.79 & 0.35 \\ I & 0.15 & 0.49 & 0.20 & 0.64 & 0.23 \\ NL & 0.35 & 0.66 & 0.70 & 0.50 & 0.40 \\ A & 0.30 & 0.81 & 0.75 & 0.29 & 0.35 \\ P & 0.40 & 0.47 & 0.60 & 0.29 & 0.05 \\ FIN & 0.85 & 0.44 & 0.30 & 0.57 & 0.83 \\ S & 0.85 & 0.75 & 0.60 & 0.57 & 0.83 \\ UK & 0.55 & 0.53 & 0.45 & 0.71 & 0.45 \end{matrix} \right) \end{matrix} \quad (6.5)$$

6.5 Mesures

Hem calculat la semblança entre els països de la Unió Europea mitjançant quatre mesures borroses de semblança: tres de clàssiques i una de generalitzada. De les clàssiques hem triat la de Jackard (v. 3.15) i la d'aparellament (v. 3.16); a més, la primera ha estat calculada amb dues t-normes diferents: la del mínim de Zadeh i la del producte acotat. Per altra banda, per al càlcul de la mesura d'aparellament generalitzada (v. 3.26) hem usat la t-norma del producte acotat. Les anomenem $MJMIN$, $MJPA$, $MAPAR$ i $MAPARG$ respectivament. Totes elles defineixen matrius de mesures de semblança borroses de proximitat entre els països de la Unió Europea, llevat de $MJPA$, que no és reflexiva, per la qual cosa li hem aplicat el procés de reflexivització (v. 3.18). Els càlculs han estat realitzats amb la confecció de petits programes amb el paquet informàtic de tractament de dades matemàtiques Maple.

$$MJMIN(95) = \begin{matrix} & B & DK & D & EL & E & F & IRL & I & NL & A & P & FIN & S & UK \\ \begin{matrix} B \\ DK \\ D \\ EL \\ E \\ F \\ IRL \\ I \\ NL \\ A \\ P \\ FIN \\ S \\ UK \end{matrix} & \left(\begin{array}{cccccccccccccc} 1. & .7 & .8 & .5 & .4 & .9 & .7 & .7 & .8 & .8 & .5 & .6 & .6 & .8 \\ .7 & 1. & .8 & .4 & .3 & .8 & .6 & .5 & .8 & .7 & .5 & .7 & .8 & .8 \\ .8 & .8 & 1. & .5 & .4 & .8 & .7 & .6 & .8 & .9 & .4 & .6 & .7 & .7 \\ .5 & .4 & .5 & 1. & .6 & .4 & .7 & .6 & .4 & .5 & .6 & .4 & .3 & .5 \\ .4 & .3 & .4 & .6 & 1. & .4 & .6 & .5 & .4 & .4 & .5 & .3 & .3 & .4 \\ .9 & .8 & .8 & .4 & .4 & 1. & .6 & .6 & .9 & .8 & .5 & .6 & .7 & .8 \\ .7 & .6 & .7 & .7 & .6 & .6 & 1. & .7 & .7 & .7 & .5 & .5 & .5 & .7 \\ .7 & .5 & .6 & .6 & .5 & .6 & .7 & 1. & .6 & .7 & .6 & .5 & .5 & .6 \\ .8 & .8 & .8 & .4 & .4 & .9 & .7 & .6 & 1. & .8 & .5 & .7 & .7 & .8 \\ .8 & .7 & .9 & .5 & .4 & .8 & .7 & .7 & .8 & 1. & .5 & .5 & .6 & .7 \\ .5 & .5 & .4 & .6 & .5 & .5 & .5 & .6 & .5 & .5 & 1. & .5 & .4 & .6 \\ .6 & .7 & .6 & .4 & .3 & .6 & .5 & .5 & .7 & .5 & .5 & 1. & .8 & .7 \\ .6 & .8 & .7 & .3 & .3 & .7 & .5 & .5 & .7 & .6 & .4 & .8 & 1. & .6 \\ .8 & .8 & .7 & .5 & .4 & .8 & .7 & .6 & .8 & .7 & .6 & .7 & .6 & 1. \end{array} \right) \end{matrix}$$

$$MJMIN(99) = \begin{matrix} & B & DK & D & EL & E & F & IRL & I & NL & A & P & FIN & S & UK \\ \begin{matrix} B \\ DK \\ D \\ EL \\ E \\ F \\ IRL \\ I \\ NL \\ A \\ P \\ FIN \\ S \\ UK \end{matrix} & \left(\begin{matrix} 1. & .7 & .7 & .3 & .5 & .8 & .6 & .5 & .7 & .7 & .5 & .6 & .6 & .8 \\ .7 & 1. & .7 & .2 & .4 & .7 & .6 & .5 & .7 & .7 & .5 & .7 & .7 & .8 \\ .7 & .7 & 1. & .3 & .4 & .8 & .7 & .5 & .8 & .8 & .6 & .6 & .7 & .8 \\ .3 & .2 & .3 & 1. & .5 & .3 & .3 & .5 & .3 & .3 & .3 & .2 & .2 & .3 \\ .5 & .4 & .4 & .5 & 1. & .5 & .6 & .5 & .4 & .4 & .5 & .3 & .3 & .4 \\ .8 & .7 & .8 & .3 & .5 & 1. & .7 & .6 & .7 & .8 & .5 & .6 & .6 & .8 \\ .6 & .6 & .7 & .3 & .6 & .7 & 1. & .6 & .6 & .7 & .8 & .5 & .5 & .7 \\ .5 & .5 & .5 & .5 & .5 & .6 & .6 & 1. & .4 & .5 & .6 & .4 & .4 & .6 \\ .7 & .7 & .8 & .3 & .4 & .7 & .6 & .4 & 1. & .9 & .5 & .5 & .6 & .7 \\ .7 & .7 & .8 & .3 & .4 & .8 & .7 & .5 & .9 & 1. & .6 & .5 & .6 & .7 \\ .5 & .5 & .6 & .3 & .5 & .5 & .8 & .6 & .5 & .6 & 1. & .5 & .5 & .6 \\ .6 & .7 & .6 & .2 & .3 & .6 & .5 & .4 & .5 & .5 & .5 & 1. & .8 & .7 \\ .6 & .7 & .7 & .2 & .3 & .6 & .5 & .4 & .6 & .6 & .5 & .8 & 1. & .7 \\ .8 & .8 & .8 & .3 & .4 & .8 & .7 & .6 & .7 & .7 & .6 & .7 & .7 & 1. \end{matrix} \right) \end{matrix}$$

$$MJMIN(03) = \begin{matrix} & B & DK & D & EL & E & F & IRL & I & NL & A & P & FIN & S & UK \\ \begin{matrix} B \\ DK \\ D \\ EL \\ E \\ F \\ IRL \\ I \\ NL \\ A \\ P \\ FIN \\ S \\ UK \end{matrix} & \left(\begin{matrix} 1. & .8 & .7 & .3 & .4 & .8 & .6 & .5 & .8 & .6 & .6 & .7 & .8 & .8 \\ .8 & 1. & .6 & .3 & .4 & .6 & .7 & .5 & .7 & .6 & .6 & .7 & .7 & .8 \\ .7 & .6 & 1. & .3 & .4 & .8 & .6 & .5 & .8 & .8 & .7 & .6 & .7 & .7 \\ .3 & .3 & .3 & 1. & .5 & .3 & .3 & .5 & .3 & .3 & .5 & .3 & .2 & .3 \\ .4 & .4 & .4 & .5 & 1. & .5 & .5 & .6 & .4 & .4 & .5 & .4 & .3 & .4 \\ .8 & .6 & .8 & .3 & .5 & 1. & .6 & .6 & .8 & .8 & .7 & .6 & .7 & .8 \\ .6 & .7 & .6 & .3 & .5 & .6 & 1. & .7 & .7 & .6 & .6 & .5 & .6 & .7 \\ .5 & .5 & .5 & .5 & .6 & .6 & .7 & 1. & .6 & .5 & .5 & .5 & .4 & .6 \\ .8 & .7 & .8 & .3 & .4 & .8 & .7 & .6 & 1. & .8 & .7 & .6 & .7 & .7 \\ .6 & .6 & .8 & .3 & .4 & .8 & .6 & .5 & .8 & 1. & .7 & .4 & .6 & .6 \\ .6 & .6 & .7 & .5 & .5 & .7 & .6 & .5 & .7 & .7 & 1. & .4 & .5 & .6 \\ .7 & .7 & .6 & .3 & .4 & .6 & .5 & .5 & .6 & .4 & .4 & 1. & .8 & .7 \\ .8 & .7 & .7 & .2 & .3 & .7 & .6 & .4 & .7 & .6 & .5 & .8 & 1. & .7 \\ .8 & .8 & .7 & .3 & .4 & .8 & .7 & .6 & .7 & .6 & .6 & .7 & .7 & 1. \end{matrix} \right) \end{matrix}$$

$$MJPA(95) = \begin{matrix} & B & DK & D & EL & E & F & IRL & I & NL & A & P & FIN & S & UK \\ \begin{matrix} B \\ DK \\ D \\ EL \\ E \\ F \\ IRL \\ I \\ NL \\ A \\ P \\ FIN \\ S \\ UK \end{matrix} & \left(\begin{array}{cccccccccccccc} 1 & .2 & .1 & 0 & 0 & .1 & 0 & 0 & .1 & .2 & 0 & .2 & .3 & 0 \\ .2 & 1 & .2 & .1 & 0 & .3 & .1 & .1 & .2 & .2 & .2 & .3 & .5 & .2 \\ .1 & .2 & 1 & .1 & 0 & .2 & .1 & .1 & .2 & .2 & .1 & .2 & .3 & .1 \\ 0 & .1 & .1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & .1 & 0 & 0 & .1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & .1 & .1 & 0 \\ .1 & .3 & .2 & 0 & 0 & 1 & .1 & .1 & .2 & .2 & .1 & .3 & .4 & .1 \\ 0 & .1 & .1 & 0 & 0 & .1 & 1 & 0 & .1 & .1 & 0 & .1 & .2 & 0 \\ 0 & .1 & .1 & 0 & 0 & .1 & 0 & 1 & .1 & .1 & 0 & .1 & .2 & 0 \\ .1 & .2 & .2 & 0 & 0 & .2 & .1 & .1 & 1 & .2 & .1 & .2 & .3 & .1 \\ .2 & .2 & .2 & .1 & 0 & .2 & .1 & .1 & .2 & 1 & .1 & .2 & .3 & .1 \\ 0 & .2 & .1 & 0 & 0 & .1 & 0 & 0 & .1 & .1 & 1 & .1 & .2 & .1 \\ .2 & .3 & .2 & 0 & .1 & .3 & .1 & .1 & .2 & .2 & .1 & 1 & .5 & .2 \\ .3 & .5 & .3 & .1 & .1 & .4 & .2 & .2 & .3 & .3 & .2 & .5 & 1 & .3 \\ 0 & .2 & .1 & 0 & 0 & .1 & 0 & 0 & .1 & .1 & .1 & .2 & .3 & 1 \end{array} \right) \end{matrix}$$

$$MJPA(99) = \begin{matrix} & B & DK & D & EL & E & F & IRL & I & NL & A & P & FIN & S & UK \\ \begin{matrix} B \\ DK \\ D \\ EL \\ E \\ F \\ IRL \\ I \\ NL \\ A \\ P \\ FIN \\ S \\ UK \end{matrix} & \left(\begin{array}{cccccccccccccc} 1 & .2 & .1 & 0 & 0 & .1 & 0 & 0 & .2 & .2 & 0 & .2 & .3 & .1 \\ .2 & 1 & .2 & 0 & 0 & .2 & .1 & .1 & .3 & .3 & .2 & .4 & .4 & .2 \\ .1 & .2 & 1 & 0 & 0 & .1 & .1 & 0 & .2 & .2 & .1 & .3 & .3 & .1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & .1 & .1 & 0 \\ .1 & .2 & .1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & .1 & .1 & 0 & .2 & .3 & .1 \\ 0 & .1 & .1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & .1 & .1 & .1 & .1 & .2 & 0 \\ 0 & .1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & .1 & .1 & 0 & .1 & .1 & 0 \\ .2 & .3 & .2 & 0 & 0 & .1 & .1 & .1 & 1 & .2 & .1 & .2 & .3 & .1 \\ .2 & .3 & .2 & 0 & 0 & .1 & .1 & .1 & .2 & 1 & .1 & .2 & .3 & .1 \\ 0 & .2 & .1 & 0 & 0 & 0 & .1 & 0 & .1 & .1 & 1 & .2 & .2 & .1 \\ .2 & .4 & .3 & 0 & .1 & .2 & .1 & .1 & .2 & .2 & .2 & 1 & .5 & .3 \\ .3 & .4 & .3 & 0 & .1 & .3 & .2 & .1 & .3 & .3 & .2 & .5 & 1 & .3 \\ .1 & .2 & .1 & 0 & 0 & .1 & 0 & 0 & .1 & .1 & .1 & .3 & .3 & 1 \end{array} \right) \end{matrix}$$

$$MJPA(03) = \begin{matrix} & B & DK & D & EL & E & F & IRL & I & NL & A & P & FIN & S & UK \\ \begin{matrix} B \\ DK \\ D \\ EL \\ E \\ F \\ IRL \\ I \\ NL \\ A \\ P \\ FIN \\ S \\ UK \end{matrix} & \left(\begin{array}{cccccccccccccc} 1 & .2 & .1 & 0 & 0 & .1 & .1 & 0 & .1 & .1 & .1 & .2 & .3 & .1 \\ .2 & 1 & .1 & 0 & 0 & .2 & .2 & .1 & .2 & .2 & .1 & .3 & .4 & .2 \\ .1 & .1 & 1 & .1 & 0 & .1 & .1 & .1 & .1 & .2 & .1 & .2 & .2 & .1 \\ 0 & 0 & .1 & 1 & 0 & .1 & 0 & 0 & 0 & .1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ .1 & .2 & .1 & .1 & 0 & 1 & .1 & .1 & .1 & .2 & .1 & .1 & .2 & .1 \\ .1 & .2 & .1 & 0 & 0 & .1 & 1 & .1 & .2 & .2 & .1 & .1 & .2 & .1 \\ 0 & .1 & .1 & 0 & 0 & .1 & .1 & 1 & .1 & .1 & 0 & .1 & .1 & .1 \\ .1 & .2 & .1 & 0 & 0 & .1 & .2 & .1 & 1 & .2 & .1 & .1 & .2 & .1 \\ .1 & .2 & .2 & .1 & 0 & .2 & .2 & .1 & .2 & 1 & .2 & .1 & .3 & .1 \\ .1 & .1 & .1 & 0 & 0 & .1 & .1 & 0 & .1 & .2 & 1 & .1 & .1 & 0 \\ .2 & .3 & .2 & 0 & 0 & .1 & .1 & .1 & .1 & .1 & .1 & 1 & .3 & .2 \\ .3 & .4 & .2 & 0 & 0 & .2 & .2 & .1 & .2 & .3 & .1 & .3 & 1 & .3 \\ .1 & .2 & .1 & 0 & 0 & .1 & .1 & .1 & .1 & .1 & 0 & .2 & .3 & 1 \end{array} \right) \end{matrix}$$

$$MAPAR(95) = \begin{matrix} & B & DK & D & EL & E & F & IRL & I & NL & A & P & FIN & S & UK \\ \begin{matrix} B \\ DK \\ D \\ EL \\ E \\ F \\ IRL \\ I \\ NL \\ A \\ P \\ FIN \\ S \\ UK \end{matrix} & \left(\begin{array}{cccccccccccccc} 1 & .8 & .9 & .7 & .7 & .9 & .9 & .8 & .9 & .9 & .7 & .7 & .7 & .9 \\ .8 & 1 & .8 & .6 & .6 & .9 & .7 & .7 & .9 & .8 & .7 & .8 & .8 & .8 \\ .9 & .8 & 1 & .7 & .7 & .9 & .8 & .8 & .9 & .9 & .7 & .6 & .7 & .8 \\ .7 & .6 & .7 & 1 & .9 & .7 & .9 & .9 & .7 & .7 & .9 & .6 & .5 & .7 \\ .7 & .6 & .7 & .9 & 1 & .6 & .8 & .8 & .7 & .7 & .8 & .5 & .4 & .7 \\ .9 & .9 & .9 & .7 & .6 & 1 & .8 & .8 & .9 & .9 & .7 & .7 & .8 & .9 \\ .9 & .7 & .8 & .9 & .8 & .8 & 1 & .9 & .8 & .9 & .8 & .7 & .6 & .9 \\ .8 & .7 & .8 & .9 & .8 & .8 & .9 & 1 & .8 & .8 & .8 & .6 & .6 & .8 \\ .9 & .9 & .9 & .7 & .7 & .9 & .8 & .8 & 1 & .9 & .7 & .8 & .8 & .9 \\ .9 & .8 & .9 & .7 & .7 & .9 & .9 & .8 & .9 & 1 & .7 & .6 & .7 & .8 \\ .7 & .7 & .7 & .9 & .8 & .7 & .8 & .8 & .7 & .7 & 1 & .6 & .5 & .8 \\ .7 & .8 & .6 & .6 & .5 & .7 & .7 & .6 & .8 & .6 & .6 & 1 & .8 & .8 \\ .7 & .8 & .7 & .5 & .4 & .8 & .6 & .6 & .8 & .7 & .5 & .8 & 1 & .7 \\ .9 & .8 & .8 & .7 & .7 & .9 & .9 & .8 & .9 & .8 & .8 & .8 & .7 & 1 \end{array} \right) \end{matrix}$$

$$MAPAR(99) = \begin{matrix} & B & DK & D & EL & E & F & IRL & I & NL & A & P & FIN & S & UK \\ \begin{matrix} B \\ DK \\ D \\ EL \\ E \\ F \\ IRL \\ I \\ NL \\ A \\ P \\ FIN \\ S \\ UK \end{matrix} & \left(\begin{array}{cccccccccccccc} 1 & .8 & .8 & .6 & .7 & .9 & .8 & .7 & .8 & .8 & .7 & .7 & .7 & .9 \\ .8 & 1 & .8 & .5 & .6 & .8 & .8 & .6 & .8 & .8 & .7 & .8 & .8 & .9 \\ .8 & .8 & 1 & .6 & .7 & .9 & .9 & .7 & .9 & .9 & .8 & .7 & .8 & .8 \\ .6 & .5 & .6 & 1 & .9 & .7 & .7 & .8 & .6 & .6 & .8 & .4 & .3 & .6 \\ .7 & .6 & .7 & .9 & 1 & .8 & .8 & .8 & .7 & .7 & .8 & .5 & .4 & .7 \\ .9 & .8 & .9 & .7 & .8 & 1 & .8 & .8 & .9 & .9 & .8 & .7 & .7 & .9 \\ .8 & .8 & .9 & .7 & .8 & .8 & 1 & .8 & .8 & .8 & .9 & .7 & .6 & .8 \\ .7 & .6 & .7 & .8 & .8 & .8 & .8 & 1 & .7 & .7 & .8 & .6 & .5 & .8 \\ .8 & .8 & .9 & .6 & .7 & .9 & .8 & .7 & 1 & 1 & .7 & .6 & .7 & .8 \\ .8 & .8 & .9 & .6 & .7 & .9 & .8 & .7 & 1 & 1 & .8 & .6 & .7 & .8 \\ .7 & .7 & .8 & .8 & .8 & .8 & .9 & .8 & .7 & .8 & 1 & .6 & .6 & .8 \\ .7 & .8 & .7 & .4 & .5 & .7 & .7 & .6 & .6 & .6 & .6 & 1 & .9 & .8 \\ .7 & .8 & .8 & .3 & .4 & .7 & .6 & .5 & .7 & .7 & .6 & .9 & 1 & .8 \\ .9 & .9 & .8 & .6 & .7 & .9 & .8 & .8 & .8 & .8 & .8 & .8 & .8 & 1 \end{array} \right) \end{matrix}$$

$$MAPAR(03) = \begin{matrix} & B & DK & D & EL & E & F & IRL & I & NL & A & P & FIN & S & UK \\ \begin{matrix} B \\ DK \\ D \\ EL \\ E \\ F \\ IRL \\ I \\ NL \\ A \\ P \\ FIN \\ S \\ UK \end{matrix} & \left(\begin{array}{cccccccccccccc} 1 & .8 & .8 & .6 & .7 & .9 & .8 & .7 & .9 & .8 & .8 & .8 & .8 & .9 \\ .8 & 1 & .7 & .5 & .6 & .7 & .8 & .7 & .8 & .7 & .7 & .7 & .7 & .8 & .8 \\ .8 & .7 & 1 & .7 & .7 & .9 & .8 & .7 & .9 & .9 & .8 & .7 & .8 & .8 \\ .6 & .5 & .7 & 1 & .9 & .7 & .7 & .8 & .6 & .7 & .8 & .6 & .4 & .6 \\ .7 & .6 & .7 & .9 & 1 & .8 & .7 & .9 & .7 & .7 & .8 & .6 & .5 & .7 \\ .9 & .7 & .9 & .7 & .8 & 1 & .8 & .8 & .9 & .9 & .8 & .7 & .8 & .9 \\ .8 & .8 & .8 & .7 & .7 & .8 & 1 & .8 & .8 & .8 & .8 & .7 & .7 & .8 \\ .7 & .7 & .7 & .8 & .9 & .8 & .8 & 1 & .8 & .7 & .8 & .7 & .6 & .8 \\ .9 & .8 & .9 & .6 & .7 & .9 & .8 & .8 & 1 & .9 & .8 & .7 & .8 & .8 \\ .8 & .7 & .9 & .7 & .7 & .9 & .8 & .7 & .9 & 1 & .8 & .6 & .7 & .7 \\ .8 & .7 & .8 & .8 & .8 & .8 & .8 & .8 & .8 & .8 & 1 & .6 & .6 & .8 \\ .8 & .7 & .7 & .6 & .6 & .7 & .7 & .7 & .7 & .6 & .6 & 1 & .9 & .8 \\ .8 & .8 & .8 & .4 & .5 & .8 & .7 & .6 & .8 & .7 & .6 & .9 & 1 & .8 \\ .9 & .8 & .8 & .6 & .7 & .9 & .8 & .8 & .8 & .7 & .8 & .8 & .8 & 1 \end{array} \right) \end{matrix}$$

$$MAPARG(95) = \begin{matrix} & B & DK & D & EL & E & F & IRL & I & NL & A & P & FIN & S & UK \\ \begin{matrix} B \\ DK \\ D \\ EL \\ E \\ F \\ IRL \\ I \\ NL \\ A \\ P \\ FIN \\ S \\ UK \end{matrix} & \left(\begin{matrix} 1. & .5 & .7 & .5 & .5 & .7 & .6 & .6 & .7 & .7 & .4 & .4 & .5 & .4 \\ .5 & 1. & .6 & .3 & .2 & .7 & .4 & .4 & .7 & .6 & .5 & .6 & .7 & .6 \\ .7 & .6 & 1. & .5 & .4 & .7 & .6 & .6 & .6 & .8 & .4 & .4 & .6 & .4 \\ .5 & .3 & .5 & 1. & .8 & .4 & .8 & .7 & .5 & .6 & .7 & .2 & .2 & .5 \\ .5 & .2 & .4 & .8 & 1. & .4 & .7 & .7 & .4 & .5 & .7 & .3 & .2 & .5 \\ .7 & .7 & .7 & .4 & .4 & 1. & .4 & .5 & .7 & .7 & .4 & .5 & .6 & .5 \\ .6 & .4 & .6 & .8 & .7 & .4 & 1. & .7 & .5 & .7 & .6 & .3 & .3 & .5 \\ .6 & .4 & .6 & .7 & .7 & .5 & .7 & 1. & .5 & .7 & .7 & .2 & .4 & .5 \\ .7 & .7 & .6 & .5 & .4 & .7 & .5 & .5 & 1. & .6 & .4 & .5 & .6 & .5 \\ .7 & .6 & .8 & .6 & .5 & .7 & .7 & .7 & .6 & 1. & .5 & .3 & .5 & .5 \\ .4 & .5 & .4 & .7 & .7 & .4 & .6 & .7 & .4 & .5 & 1. & .4 & .3 & .6 \\ .4 & .6 & .4 & .2 & .3 & .5 & .3 & .2 & .5 & .3 & .4 & 1. & .7 & .5 \\ .5 & .7 & .6 & .2 & .2 & .6 & .3 & .4 & .6 & .5 & .3 & .7 & 1. & .5 \\ .4 & .6 & .4 & .5 & .5 & .5 & .5 & .5 & .5 & .5 & .6 & .5 & .5 & 1. \end{matrix} \right) \end{matrix}$$

$$MAPARG(99) = \begin{matrix} & B & DK & D & EL & E & F & IRL & I & NL & A & P & FIN & S & UK \\ \begin{matrix} B \\ DK \\ D \\ EL \\ E \\ F \\ IRL \\ I \\ NL \\ A \\ P \\ FIN \\ S \\ UK \end{matrix} & \left(\begin{matrix} 1. & .6 & .5 & .5 & .5 & .7 & .4 & .4 & .6 & .6 & .4 & .4 & .5 & .5 \\ .6 & 1. & .5 & .3 & .3 & .5 & .4 & .3 & .6 & .6 & .5 & .6 & .7 & .6 \\ .5 & .5 & 1. & .4 & .4 & .5 & .6 & .4 & .7 & .7 & .5 & .4 & .6 & .4 \\ .5 & .3 & .4 & 1. & .8 & .5 & .6 & .8 & .5 & .5 & .7 & .2 & .2 & .4 \\ .5 & .3 & .4 & .8 & 1. & .6 & .7 & .7 & .5 & .5 & .7 & .3 & .2 & .4 \\ .7 & .5 & .5 & .5 & .6 & 1. & .5 & .6 & .6 & .6 & .4 & .4 & .4 & .4 \\ .4 & .4 & .6 & .6 & .7 & .5 & 1. & .7 & .6 & .6 & .8 & .3 & .3 & .5 \\ .4 & .3 & .4 & .8 & .7 & .6 & .7 & 1. & .5 & .5 & .6 & .2 & .2 & .5 \\ .6 & .6 & .7 & .5 & .5 & .6 & .6 & .5 & 1. & .9 & .5 & .4 & .5 & .5 \\ .6 & .6 & .7 & .5 & .5 & .6 & .6 & .5 & .9 & 1. & .5 & .3 & .5 & .5 \\ .4 & .5 & .5 & .7 & .7 & .4 & .8 & .6 & .5 & .5 & 1. & .4 & .3 & .5 \\ .4 & .6 & .4 & .2 & .3 & .4 & .3 & .2 & .4 & .3 & .4 & 1. & .8 & .6 \\ .5 & .7 & .6 & .2 & .2 & .4 & .3 & .2 & .5 & .5 & .3 & .8 & 1. & .6 \\ .5 & .6 & .4 & .4 & .4 & .4 & .5 & .5 & .5 & .5 & .5 & .6 & .6 & 1. \end{matrix} \right) \end{matrix}$$

$$\text{MAPARG}(03) = \begin{matrix} & B & DK & D & EL & E & F & IRL & I & NL & A & P & FIN & S & UK \\ \begin{matrix} B \\ DK \\ D \\ EL \\ E \\ F \\ IRL \\ I \\ NL \\ A \\ P \\ FIN \\ S \\ UK \end{matrix} & \left(\begin{array}{cccccccccccccc} 1. & .6 & .4 & .4 & .4 & .6 & .4 & .4 & .5 & .5 & .5 & .5 & .6 & .6 \\ .6 & 1. & .3 & .3 & .3 & .4 & .5 & .4 & .5 & .5 & .5 & .5 & .6 & .6 \\ .4 & .3 & 1. & .6 & .5 & .7 & .4 & .5 & .7 & .7 & .6 & .4 & .5 & .3 \\ .4 & .3 & .6 & 1. & .8 & .6 & .5 & .7 & .5 & .6 & .7 & .4 & .3 & .4 \\ .4 & .3 & .5 & .8 & 1. & .5 & .6 & .7 & .5 & .5 & .7 & .4 & .2 & .5 \\ .6 & .4 & .7 & .6 & .5 & 1. & .5 & .6 & .7 & .7 & .6 & .4 & .5 & .5 \\ .4 & .5 & .4 & .5 & .6 & .5 & 1. & .7 & .6 & .6 & .6 & .3 & .4 & .6 \\ .4 & .4 & .5 & .7 & .7 & .6 & .7 & 1. & .5 & .5 & .6 & .4 & .3 & .6 \\ .5 & .5 & .7 & .5 & .5 & .7 & .6 & .5 & 1. & .8 & .6 & .3 & .5 & .5 \\ .5 & .5 & .7 & .6 & .5 & .7 & .6 & .5 & .8 & 1. & .7 & .3 & .5 & .4 \\ .5 & .5 & .6 & .7 & .7 & .6 & .6 & .6 & .6 & .7 & 1. & .3 & .3 & .3 \\ .5 & .5 & .4 & .4 & .4 & .4 & .3 & .4 & .3 & .3 & .3 & 1. & .7 & .5 \\ .6 & .6 & .5 & .3 & .2 & .5 & .4 & .3 & .5 & .5 & .3 & .7 & 1. & .5 \\ .6 & .6 & .3 & .4 & .5 & .5 & .6 & .6 & .5 & .4 & .3 & .5 & .5 & 1. \end{array} \right) \end{matrix}$$

6.6 Determinació dels clústers

Per al procés de clusterització, hem usat les clausures transitives per a la t-norma del mínim de Zadeh i per a la del producte acotat, ja que -com vam veure al capítol 4- són equivalents a la verificació de la propietat ultramètrica i a la desigualtat triangular. Les clausures transitives han estat realitzades amb la confecció de petits programes amb el paquet matemàtic Maple, prèviament comprovats en exemples coneguts. Els resultats es poden consultar a l'annex 8.3. Finalment, hem aplicat el nou mètode de clusterització introduït a la secció 4.4, del qual hem obviat de fer explícits els càlculs ja que, evidentment, són totalment anàlegs als efectuats en l'exemple de la secció 4.4. No hem cregut convenient d'aplicar els diferents mètodes de classificació a totes les matrius de mesures de semblança obtingudes en l'anterior secció ja que

creiem que aquest nivell de càlcul és suficient per tenir una visió general dels resultats a què donen lloc les diferents metodologies estudiades.

6.6.1 Clústers amb clausura transitiva per t_{min}

Les figures 6.1 fins a 6.9 són la representació dels clústers obtinguts amb la clausura t-min per a les mesures *MJMIN*, *MAPAR* i *MAPARG*. En totes elles els països de la Unió Europea estan representats en l'eix d'abscisses; en l'eix d'ordenades hi ha representada la distància, de forma que si dues semirectes que surten de dos països conflueixen en un cert punt d'ordenada y significa que formen un clúster per a aquest valor de distància, o bé el formen en un valor $1-y$ de mesura de semblança. Aquestes representacions, com ja hem comentat amb anterioritat, s'anomenen dendogrames.

Figura 6.1: Dendograma de MJMIN(95) i clausura t-min

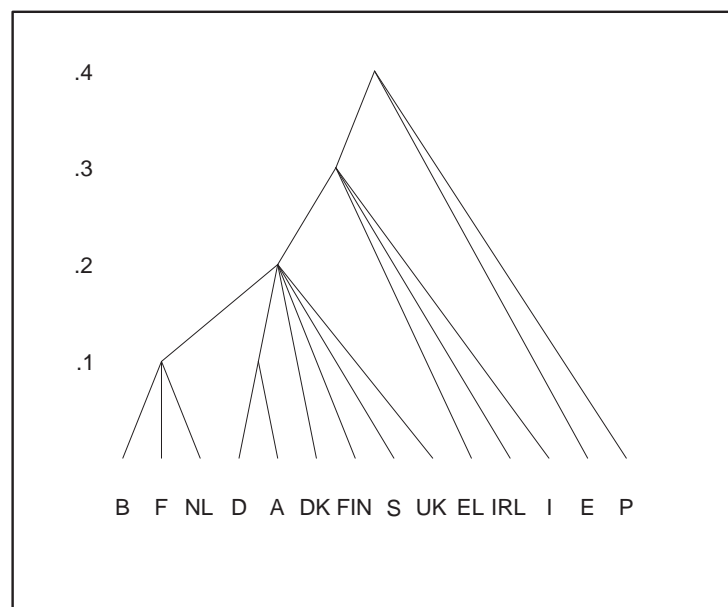


Figura 6.2: Dendograma de MJMIN(99) i clausura t-min

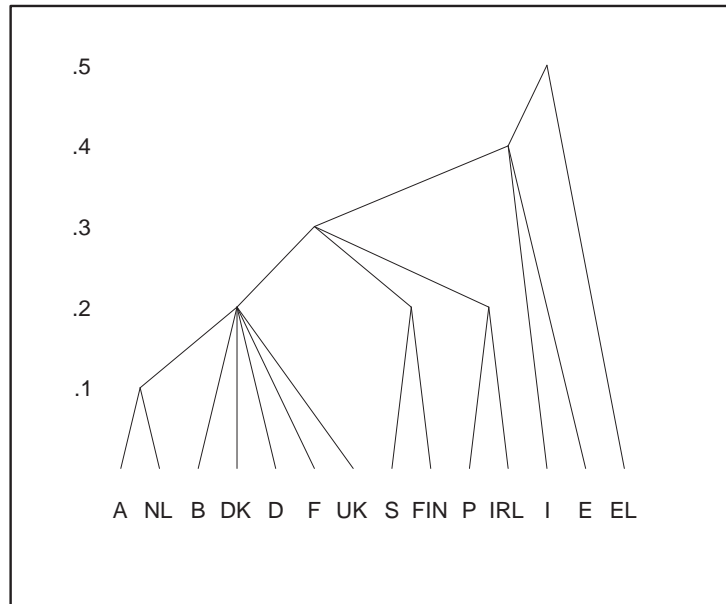


Figura 6.3: Dendrograma de MJMIN(03) i clausura t-min

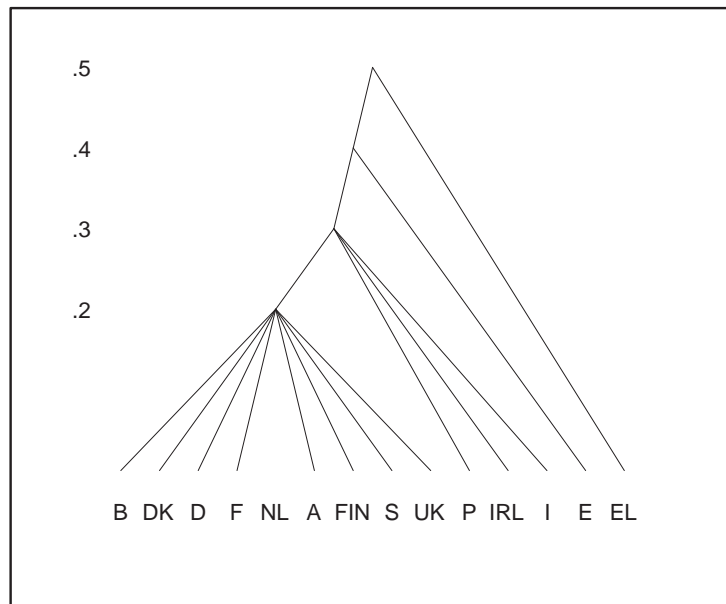


Figura 6.4: Dendograma de MAPAR(95) i clausura t-min

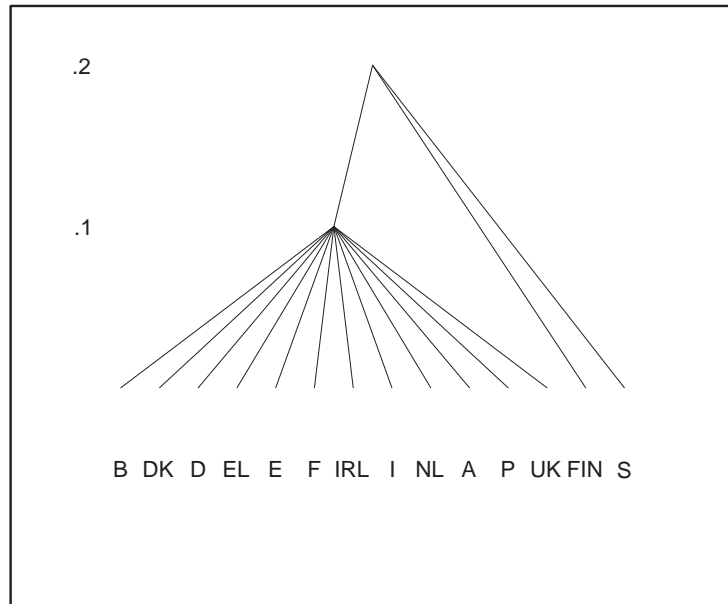


Figura 6.5: Dendograma de MAPAR(99) i clausura t-min

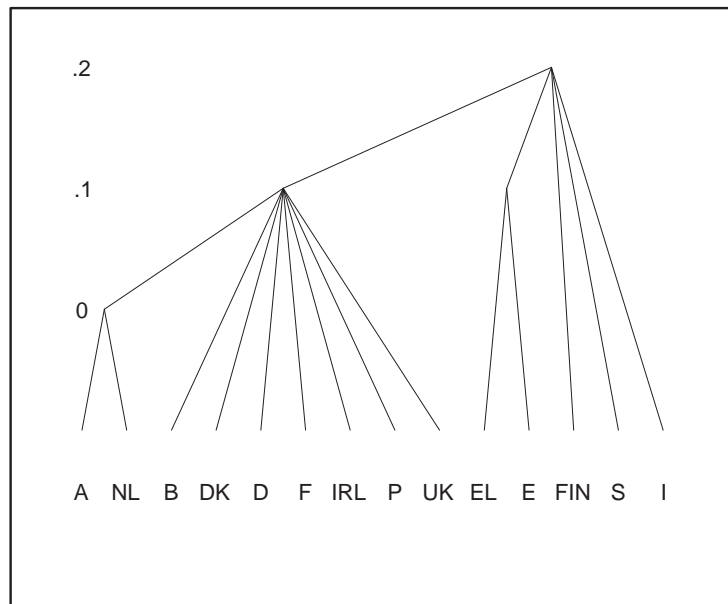


Figura 6.6: Dendograma de MAPAR(03) i clausura t-min

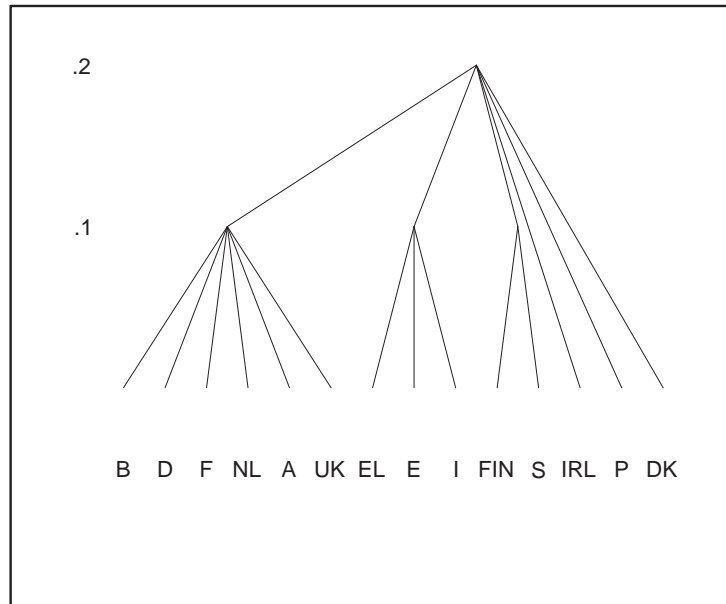


Figura 6.7: Dendrograma de MAPARG(95) i clausura t-min

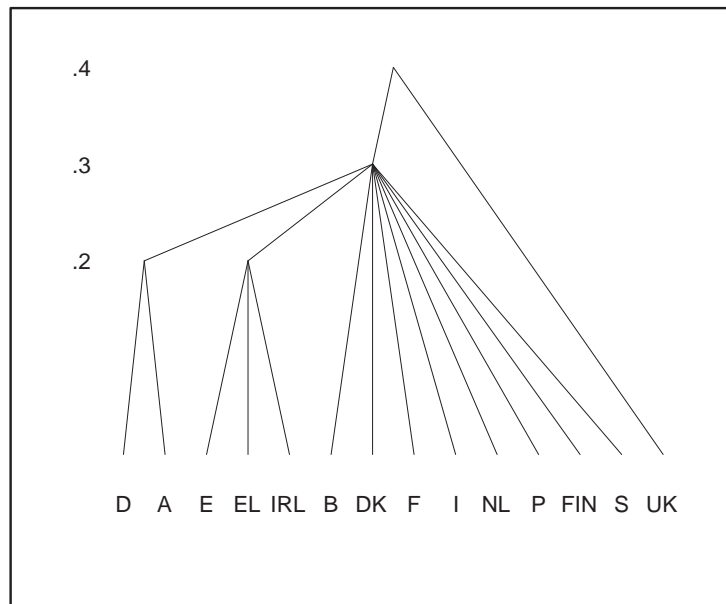


Figura 6.8: Dendograma de MAPARG(99) i clausura t-min

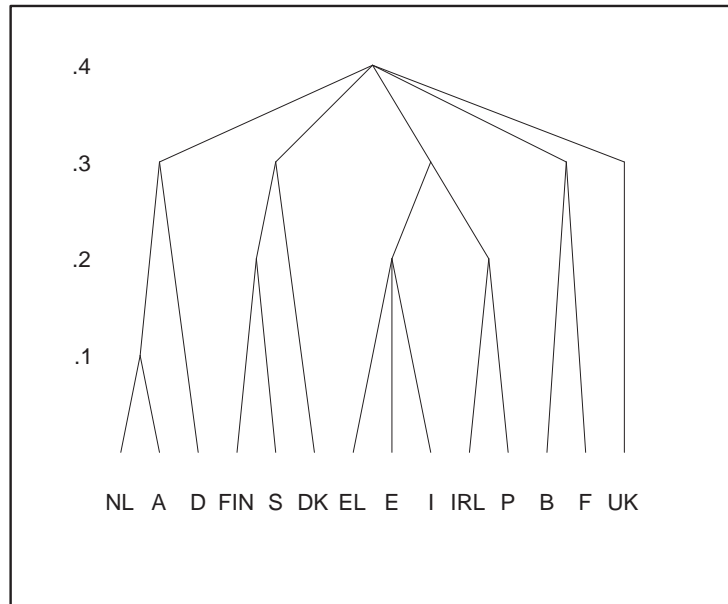
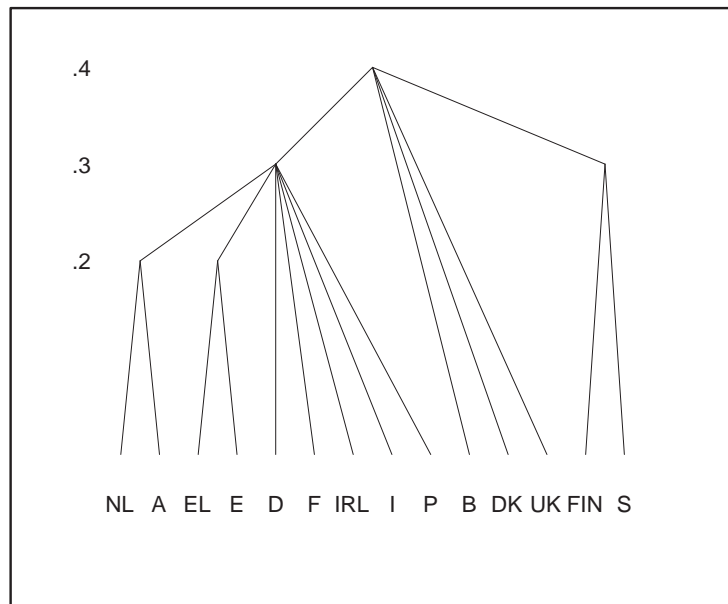


Figura 6.9: Dendograma de MAPARG(03) i clausura t-min



6.6.2 Clústers amb clausura transitiva per t_{PA}

A diferència dels dendogrames, on d indicava la distància, en els següents clústers α indica el grau de semblança. Hem fet els càlculs per a *MJMIN*, *MJPA* i *MAPARG*.

Clústers amb *MJMIN*

1. Any 1995

$$\alpha \leq 0.3$$

$$\{B, DK, D, EL, E, F, IRL, I, NL, A, P, FIN, S, UK\}$$

$$0.3 < \alpha \leq 0.4$$

$$\{B, DK, D, F, IRL, I, NL, A, P, FIN, S, UK\}, \{EL, E\}$$

$$0.4 < \alpha \leq 0.5$$

$$\{B, DK, D, F, IRL, I, NL, A, FIN, S, UK\}, \{EL, E, P\}$$

$$0.5 < \alpha \leq 0.6$$

$$\{B, DK, D, F, NL, A, S, UK\}, \{EL, IRL, I\}, \{E\}, \{FIN\}, \{P\}$$

$$0.6 < \alpha \leq 0.7$$

$$\{B, DK, D, F, NL, A, UK\}, \{IRL, I\}, \{FIN, S\}, \{E\}, \{P\}, \{EL\}$$

$$0.7 < \alpha \leq 0.8$$

$$\{B, D, F, NL, A\}, \{DK, UK\}, \{IRL, I\}, \{FIN, S\}, \{E\}, \{P\}, \{EL\}$$

$$0.8 < \alpha \leq 0.9$$

$$\{B, F\}, \{DK\}, \{D\}, \{EL\}, \{E\}, \{IRL\}, \{I\}, \{NL\}, \{A\}, \{P\}, \{FIN\}, \{S\}, \{UK\}$$

$$0.9 < \alpha \leq 1$$

$$\{B\}, \{DK\}, \{D\}, \{EL\}, \{E\}, \{F\}, \{IRL\}, \{I\}, \{NL\}, \{A\}, \{P\}, \{FIN\}, \{S\}, \{UK\}$$

2. Any 1999

$$\alpha \leq 0.2$$

$\{B, DK, D, EL, E, F, IRL, I, NL, A, P, FIN, S, UK\}$

$$0.2 < \alpha \leq 0.3$$

$\{B, DK, D, E, F, IRL, I, NL, A, P, FIN, S, UK\}, \{EL\}$

$$0.3 < \alpha \leq 0.4$$

$\{B, DK, D, F, IRL, I, NL, A, P, FIN, S, UK\}, \{EL, E\}$

$$0.4 < \alpha \leq 0.5$$

$\{B, DK, D, F, IRL, P, NL, A, FIN, S, UK\}, \{EL, E, I\}$

$$0.5 < \alpha \leq 0.6$$

$\{B, DK, D, F, IRL, NL, A, UK\}, \{FIN, S\}, \{P, I\}, \{EL\}, \{E\}$

$$0.6 < \alpha \leq 0.7$$

$\{B, DK, D, F, NL, A, UK\}, \{IRL, P\}, \{FIN, S\}, \{E\}, \{I\}, \{EL\}$

$$0.7 < \alpha \leq 0.8$$

$\{D, NL, A\}, \{B, F, UK\}, \{IRL, P\}, \{FIN, S\}, \{DK\}, \{E\}, \{I\}, \{EL\}$

$$0.8 < \alpha \leq 0.9$$

$\{A, NL\}, \{DK\}, \{D\}, \{EL\}, \{E\}, \{IRL\}, \{I\}, \{B\}, \{F\}, \{P\}, \{FIN\}, \{S\}, \{UK\}$

$$0.9 < \alpha \leq 1$$

$\{B\}, \{DK\}, \{D\}, \{EL\}, \{E\}, \{F\}, \{IRL\}, \{I\}, \{NL\}, \{A\}, \{P\}, \{FIN\}, \{S\}, \{UK\}$

3. Any 2003

$$\alpha \leq 0.2$$

$\{B, DK, D, EL, E, F, IRL, I, NL, A, P, FIN, S, UK\}$

$$0.2 < \alpha \leq 0.3$$

$$\{B, DK, D, E, F, IRL, I, NL, A, P, FIN, S, UK\}, \{EL\}$$

$$0.3 < \alpha \leq 0.4$$

$$\{B, DK, D, F, IRL, I, NL, A, P, FIN, S, UK\}, \{EL, E\}$$

$$0.4 < \alpha \leq 0.5$$

$$\{B, DK, D, F, IRL, P, NL, A, S, UK\}, \{EL, E, I\}, \{FIN\}$$

$$0.5 < \alpha \leq 0.6$$

$$\{B, DK, D, F, IRL, NL, A, P, UK\}, \{FIN, S\}, \{E, I\}, \{EL\}$$

$$0.6 < \alpha \leq 0.7$$

$$\{D, F, NL, A, P\}, \{B, DK, FIN, S, UK\}, \{IRL, I\}, \{E\}, \{EL\}$$

$$0.7 < \alpha \leq 0.8$$

$$\{D, F, NL, A\}, \{B, DK, UK\}, \{FIN, S\}, \{IRL\}, \{E\}, \{I\}, \{EL\}, \{P\}$$

$$0.8 < \alpha \leq 1$$

$$\{B\}, \{DK\}, \{D\}, \{EL\}, \{E\}, \{F\}, \{IRL\}, \{I\}, \{NL\}, \{A\}, \{P\}, \{FIN\}, \{S\}, \{UK\}$$

Clústers amb MJPA

1. Any 1995

$$\alpha \leq 0.1$$

$$\{B, DK, D, F, NL, A, FIN, S\}, \{P, UK\}, \{EL\}, \{E\}, \{IRL\}, \{I\}$$

$$0.1 < \alpha \leq 0.2$$

$$\{DK, D, F, NL, A, FIN, S\}, \{B\}, \{P\}, \{UK\}, \{EL\}, \{E\}, \{IRL\}, \{I\}$$

$$0.2 < \alpha \leq 0.3$$

$\{DK, F, FIN, S\}, \{B\}, \{D\}, \{NL\}, \{A\}, \{P\}, \{UK\}, \{EL\}, \{E\}, \{IRL\}, \{I\}$

$0.3 < \alpha \leq 0.5$

$\{FIN, S\}, \{B\}, \{DK\}, \{F\}, \{D\}, \{NL\}, \{A\}, \{P\}, \{UK\}, \{EL\}, \{E\}, \{IRL\}, \{I\}$

$0.5 < \alpha \leq 1$

$\{B\}, \{DK\}, \{D\}, \{EL\}, \{E\}, \{F\}, \{IRL\}, \{I\}, \{NL\}, \{A\}, \{P\}, \{FIN\}, \{S\}, \{UK\}$

2. Any 1999

$\alpha \leq 0.1$

$\{B, DK, D, F, NL, A, FIN, S, UK\}, \{P, IRL\}, \{EL\}, \{E\}, \{I\}$

$0.1 < \alpha \leq 0.2$

$\{DK, D, NL, A, FIN, S\}, \{B\}, \{F\}, \{P\}, \{UK\}, \{EL\}, \{E\}, \{IRL\}, \{I\}$

$0.2 < \alpha \leq 0.4$

$\{DK, FIN, S\}, \{B\}, \{D\}, \{F\}, \{NL\}, \{A\}, \{P\}, \{UK\}, \{EL\}, \{E\}, \{IRL\}, \{I\}$

$0.4 < \alpha \leq 0.5$

$\{FIN, S\}, \{B\}, \{DK\}, \{F\}, \{D\}, \{NL\}, \{A\}, \{P\}, \{UK\}, \{EL\}, \{E\}, \{IRL\}, \{I\}$

$0.5 < \alpha \leq 1$

$\{B\}, \{DK\}, \{D\}, \{EL\}, \{E\}, \{F\}, \{IRL\}, \{I\}, \{NL\}, \{A\}, \{P\}, \{FIN\}, \{S\}, \{UK\}$

3. Any 2003

$\alpha \leq 0.1$

$\{B, DK, D, IRL, NL, A, FIN, S, UK\}, \{F, I\}, \{P\}, \{EL\}, \{E\}$

$0.1 < \alpha \leq 0.2$

$\{DK, FIN, S, UK\}, \{IRL, NL, A\}, \{B\}, \{D\}, \{F\}, \{P\}, \{EL\}, \{E\}, \{I\}$

$0.2 < \alpha \leq 0.3$

$$\{DK, FIN, S\}, \{B\}, \{D\}, \{F\}, \{NL\}, \{A\}, \{P\}, \{UK\}, \{EL\}, \{E\}, \{IRL\}, \{I\}$$

$$0.3 < \alpha \leq 0.4$$

$$\{DK, S\}, \{B\}, \{FIN\}, \{F\}, \{D\}, \{NL\}, \{A\}, \{P\}, \{UK\}, \{EL\}, \{E\}, \{IRL\}, \{I\}$$

$$0.4 < \alpha \leq 1$$

$$\{B\}, \{DK\}, \{D\}, \{EL\}, \{E\}, \{F\}, \{IRL\}, \{I\}, \{NL\}, \{A\}, \{P\}, \{FIN\}, \{S\}, \{UK\}$$

Clústers amb MAPARG

1. Any 1995

$$\alpha \leq 0.2$$

$$\{B, DK, D, EL, E, F, IRL, I, NL, A, P, FIN, S, UK\}$$

$$0.2 < \alpha \leq 0.4$$

$$\{B, DK, D, F, IRL, I, NL, A, P, S, UK\}, \{EL, E\}, \{FIN\}$$

$$0.4 < \alpha \leq 0.5$$

$$\{B, DK, D, F, NL, A, S\}, \{EL, E, I, IRL, P, UK\}, \{FIN\}$$

$$0.5 < \alpha \leq 0.6$$

$$\{B, D, F, NL, A\}, \{EL, E, I, IRL, P\}, \{DK, FIN, S\}, \{UK\}$$

$$0.6 < \alpha \leq 0.7$$

$$\{B, D, F, A\}, \{DK, NL\}, \{EL, E, IRL\}, \{I, P\}, \{FIN, S\}, \{UK\}$$

$$0.7 < \alpha \leq 0.8$$

$$\{D, A\}, \{EL, E\}, \{B\}, \{DK\}, \{F\}, \{IRL\}, \{I\}, \{NL\}, \{P\}, \{FIN\}, \{S\}, \{UK\}$$

$$0.8 < \alpha \leq 1$$

$$\{B\}, \{DK\}, \{D\}, \{EL\}, \{E\}, \{F\}, \{IRL\}, \{I\}, \{NL\}, \{A\}, \{P\}, \{FIN\}, \{S\}, \{UK\}$$

2. Any 1999

$$\alpha \leq 0.2$$

$\{B, DK, D, EL, E, F, IRL, I, NL, A, P, FIN, S, UK\}$

$$0.2 < \alpha \leq 0.3$$

$\{B, DK, D, F, IRL, I, NL, A, P, UK\}, \{EL, E\}, \{FIN, S\}$

$$0.3 < \alpha \leq 0.4$$

$\{B, D, F, IRL, I, NL, A, P, UK\}, \{EL, E\}, \{DK, FIN, S\}$

$$0.4 < \alpha \leq 0.5$$

$\{D, IRL, NL, A, P\}, \{DK, FIN, S, UK\}, \{EL, E, F, I\}, \{B\}$

$$0.5 < \alpha \leq 0.6$$

$\{D, IRL, NL, A\}, \{DK, FIN, S, UK\}, \{EL, E, P, I\}, \{B, F\}$

$$0.6 < \alpha \leq 0.7$$

$\{D, NL, A\}, \{EL, E, I\}, \{IRL, P\}, \{B, F\}, \{FIN, S\}, \{DK\}, \{UK\}$

$$0.7 < \alpha \leq 0.8$$

$\{NL, A\}, \{FIN, S\}, \{EL, E\}, \{D\}, \{IRL\}, \{I\}, \{P\}, \{B\}, \{F\}, \{DK\}, \{UK\}$

$$0.8 < \alpha \leq 0.9$$

$\{NL, A\}, \{B\}, \{DK\}, \{D\}, \{EL\}, \{E\}, \{F\}, \{IRL\}, \{I\}, \{P\}, \{FIN\}, \{S\}, \{UK\}$

$$0.9 < \alpha \leq 1$$

$\{B\}, \{DK\}, \{D\}, \{EL\}, \{E\}, \{F\}, \{IRL\}, \{I\}, \{NL\}, \{A\}, \{P\}, \{FIN\}, \{S\}, \{UK\}$

3. Any 2003

$$\alpha \leq 0.2$$

$\{B, DK, D, EL, E, F, IRL, I, NL, A, P, FIN, S, UK\}$

$$0.2 < \alpha \leq 0.3$$

$$\{B, DK, D, EL, E, F, IRL, I, NL, A, P, FIN, UK\}, \{S\}$$

$$0.3 < \alpha \leq 0.4$$

$$\{B, D, EL, E, F, IRL, I, NL, A, P\}, \{DK, FIN, S, UK\}$$

$$0.4 < \alpha \leq 0.5$$

$$\{D, EL, E, F, I, NL, A, P\}, \{DK, FIN, S, UK\}, \{IRL, UK\}$$

$$0.5 < \alpha \leq 0.6$$

$$\{D, F, NL, A, P\}, \{EL, E, I\}, \{FIN, S\}, \{IRL, UK\}, \{B, DK\}$$

$$0.6 < \alpha \leq 0.7$$

$$\{D, F, NL, A\}, \{EL, E, I\}, \{FIN, S\}, \{P\}, \{IRL\}, \{UK\}, \{B\}, \{DK\}$$

$$0.7 < \alpha \leq 0.8$$

$$\{NL, A\}, \{EL, E\}, \{D\}, \{F\}, \{I\}, \{FIN\}, \{S\}, \{P\}, \{IRL\}, \{UK\}, \{B\}, \{DK\}$$

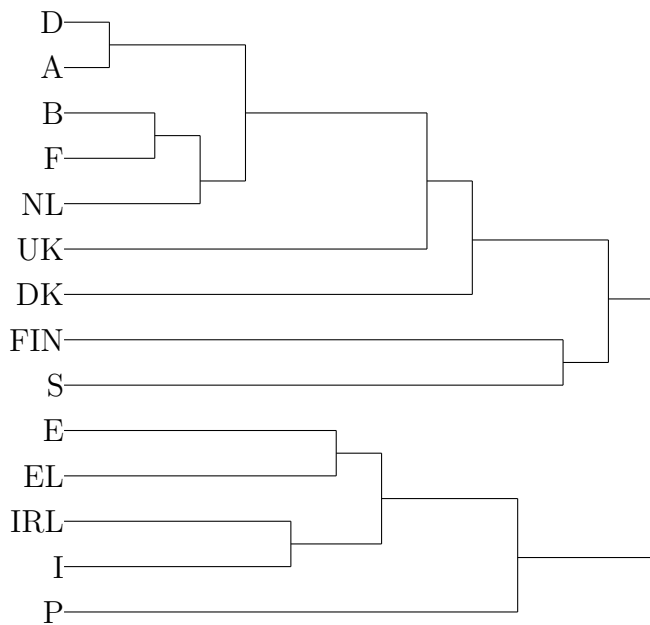
$$0.8 < \alpha \leq 1$$

$$\{B\}, \{DK\}, \{D\}, \{EL\}, \{E\}, \{F\}, \{IRL\}, \{I\}, \{NL\}, \{A\}, \{P\}, \{FIN\}, \{S\}, \{UK\}$$

6.6.3 Clústers amb el nou mètode de clusterització i MAPAR

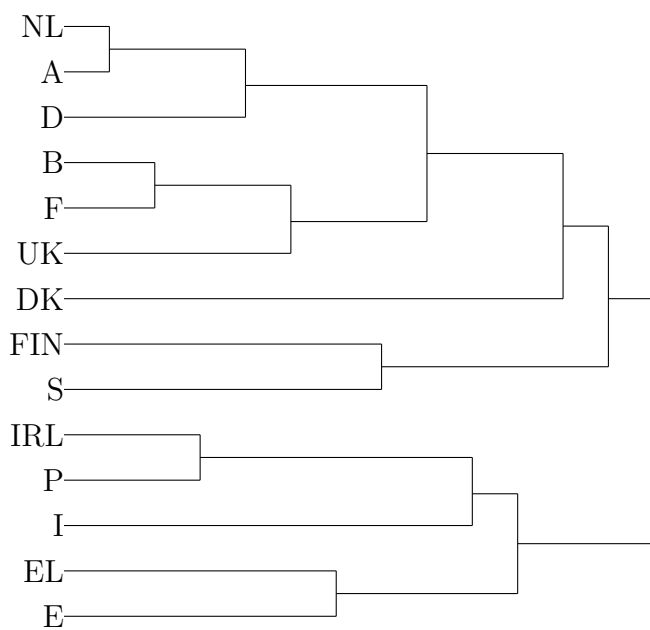
Any 1995

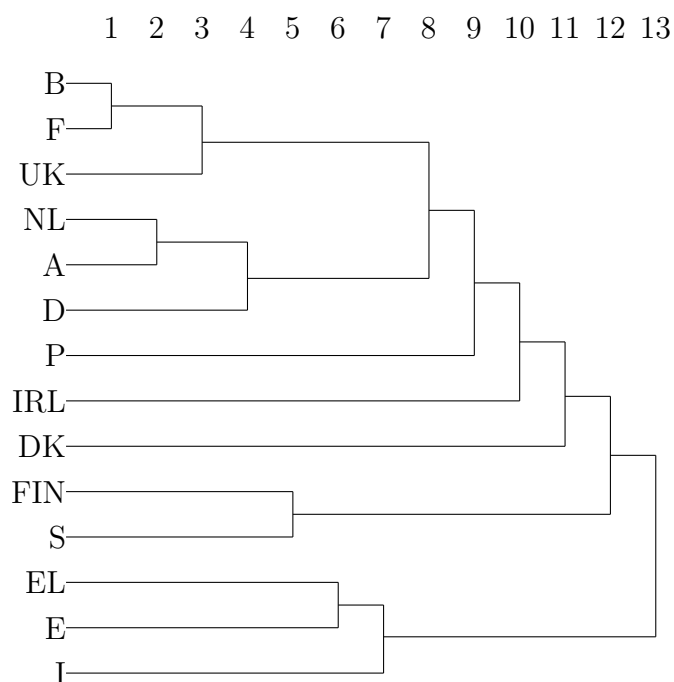
1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13



Any 1999

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13



Any 2003**6.6.4 Anàlisi dels resultats**

Ara exposarem les línies generals dels resultats a partir dels clústers. Només amb una anàlisi superficial de les diverses agrupacions obtingudes ja es dedueix que la gran majoria vénen donades per motius geogràfics; és per aquesta raó que hem englobat els països per la seva afinitat geogràfica. D'aquesta manera, Grècia, Espanya i Itàlia formen els països mediterranis; Bèlgica, França, Holanda, Alemanya i Àustria, els països centrals; Finlàndia, Suècia i Dinamarca, els nòrdics; i Portugal, Irlanda i el Regne Unit, els de l'oest europeu. És obvi que aquests conjunts de països formen una partició de la Unió Europea que ajuda a sintetitzar la discussió⁵, tot i que països com França, Dinamarca i Portugal comparteixen diversos àmbits geogràfics.

Any 1995

⁵En la discussió només fem referència a allò que considerem més rellevant.

A distància 0.2, amb MJMIN-t-min⁶ hi ha una gran agrupació de països centrals, nòrdics i un de l'oest (UK); els mediterranis i la resta de països de l'oest s'agrupen després amb els altres. Amb MJMIN-t-pa, i per a $\alpha = 0.75$, la gran agrupació es trenca entre els centrals per una banda, diverses agrupacions de dos països, i, finalment, Espanya, Portugal i Grècia formen simplets.

Amb MAPAR-t-min només es distingeixen dos països nòrdics (FIN i S) de la resta; en canvi, amb MAPAR-nm s'observa que primer s'agrupen els països centrals (nivell 4), al nivell 10 s'agrupen els mediterranis amb dos de l'oest (IRL i P), mentre que al primer grup se n'hi afegeixen un de l'oest (Regne Unit) i un de nòrdic (DK), els dos nòrdics restants s'agrupen entre ells al nivell 11, i, finalment, queden dos grups: els mediterranis més Irlanda i Portugal per una banda, i els altres formant un segon grup.

Amb MAPARG-t-min, abans que s'agrupin gairebé tots, s'observa homogeneïtat entre Àustria i Alemanya, i entre Espanya, Grècia i Irlanda; amb MAPARG-t-pa i per a $\alpha = 0.55$, s'agrupen els mediterranis amb Irlanda i Portugal, els centrals entre ells, els nòrdics formen un altre grup, i el Regne Unit constitueix un simplet.

Amb MJPA-t-pa i per a $\alpha = 0.05$, s'agrupen els centrals amb els nòrdics, dos de l'oest (Portugal i Regne Unit), i els mediterranis i Irlanda formen simplets.

Any 1999

A distància 0.2, amb MJMIN-t-min s'agrupen els països centrals amb un de l'oest (Regne Unit) i un de nòrdic (Dinamarca), dos d'atlàntics (Portugal i Irlanda), dos de nòrdics (Suècia i Finlàndia) i, al final, tots els anteriors s'ajunten amb els països mediterranis. Amb MJMIN-t-

⁶Aquesta nomenclatura vol dir que hem calculat la clausura transitiva mitjançant la t -norma t_{min} ; de forma idèntica, MJMIN-t-pa indica que hem fet la clausura transitiva per la t -norma t_{PA} ; l'abreviació *nm* indica que s'ha utilitzat el nou mètode del capítol 5.

pa, i per a $\alpha = 0.55$, s'agrupen els països centrals amb dos de l'oest (UK i IRL) i un de nòrdic (DK), la resta de nòrdics, i Portugal amb Itàlia.

Amb MAPAR-t-min i per a $d = 0.1$, s'agrupen els països centrals amb els de l'oest i un de nòrdic (DK), i dos de mediterranis (Grècia i Espanya); en canvi, amb MAPAR-nm s'observa una més gran diferenciació: els països centrals s'agrupen amb un de l'oest (Regne Unit) al nivell 8, els països nòrdics s'hi afegeixen a nivell 12, i els mediterranis amb Irlanda i Portugal s'uneixen a nivell 10.

Amb MAPARG-t-min i per a $d = 0.3$, s'agrupen els països nòrdics, els països centrals excepte França i Bèlgica, França amb Bèlgica, i els mediterranis amb Irlanda i Portugal. Amb MAPARG-t-pa i per a $\alpha = 0.55$, s'agrupen tres països centrals amb Irlanda, els nòrdics amb el Regne Unit, els països mediterranis amb Portugal, i França amb Bèlgica⁷.

Amb MJPA-t-pa i per a $\alpha = 0.05$, s'agrupen els països centrals amb els països nòrdics i el Regne Unit, dos països de l'oest (Portugal i Irlanda), i els països mediterranis formen simples.

Any 2003

A distància 0.2, amb MJMIN-t-min, primer s'agrupen els països centrals amb els nòrdics i el Regne Unit, després amb dos de l'oest (Portugal i Irlanda) i Itàlia, i, finalment, amb els dos mediterranis que queden (Grècia i Espanya). Amb MJMIN-t-pa, i per a $\alpha = 0.55$, s'agrupen els centrals amb els de l'oest i Dinamarca, els nòrdics excepte Dinamarca, i dos de mediterranis (Espanya i Itàlia).

Amb MAPAR-t-min i per a $d = 0.1$, s'agrupen els països centrals juntament amb el Regne Unit, els mediterranis, i dos de nòrdics. Amb MAPAR-nm i a nivell 8, s'observa quelcom de semblant: s'agrupen els centrals amb el Regne Unit, dos de nòrdics, i els mediterranis.

⁷MAPARG-t-min i MAPARG-t-pa amb $\alpha = 0.55$ s'assemblen molt.

Amb MAPARG-t-min i per a $d = 0.3$, s'agrupen els centrals -llevat de Bèlgica- amb els mediterranis i dos de l'oest; en canvi, amb MAPARG-t-pa i per a $\alpha = 0.55$, s'observa una més gran diferenciació: s'agrupen els països mediterranis, els centrals sense Bèlgica però amb Portugal, els nòrdics sense Dinamarca, dos països de l'oest (Irlanda i el Regne Unit), i Bèlgica amb Dinamarca.

Amb MJPA-t-pa i per a $\alpha = 0.15$, s'agrupen els nòrdics amb un de l'oest (Regne Unit), i dos de centrals (Holanda i Àustria) amb Irlanda; els altres formen simplets.

Capítol 7

Conclusions

1. Tot i el nombre indeterminat de t -normes, és possible d'ordenar les més usuals, així com les famílies de Hamacher, Yager, Dombi i Dubois & Prade, per tal de poder ordenar les corresponents t -transitivitats.
2. La t -norma més rellevant que verifica el principi del terç exclòs és la del producte acotat. Es poden generar famílies de t -normes que verifiquin aquest principi a partir dels generadors additius. La seva importància radica en el fet que són essencials per a la reflexivitat de les mesures de semblança generalitzades; en cas contrari, cal efectuar un procés de reflexivització de la mesura de semblança.
3. La construcció d'un model mixt de relació borrosa obtinguda a partir de valors que provenen exclusivament de l'avaluació dels experts, i valors provinents -amb la participació dels experts- de variables estadístiques, és molt eficient per sistematitzar el càlcul de les matrius de les relacions borroses. En cap cas es perd el valor subjectiu dels càlculs, donat que els experts decideixen quines són les variables estadístiques que intervenen en el procés, la seva importància relativa i la ponderació entre les dues parts.

4. El recorregut de la funció característica diferencia el caràcter borrós d'un conjunt del d'un conjunt ordinari; és, per tant, una diferenciació conjuntista, lògica. Les mesures de semblança generalitzades, introduïdes al capítol 3, permeten de fer una extensió conjuntista de les mesures de semblança crisp. Les propietats que verifiquen -funcionalitat, monotonia i independència- les fan molt aptes per mesurar la semblança entre subconjunts borrosos. Aquestes mesures són relacions borroses de proximitat si la t-norma utilitzada verifica el principi del terç exclòs i per a restriccions molt generals dels paràmetres que les defineixen. Són, per tant, mesures de semblança fàcilment aplicables. En un estat previ de generalització, també són molt rellevants altres mesures que defineixen relacions borroses de proximitat: la mesura de Jackard clàssica amb la t-norma del mínim de Zadeh, i la mesura clàssica d'aparellament, que equival a la utilització de la distància de Hamming.
5. Es pot estendre el concepte de mesura de semblança per a valors discrets a mesures de semblança per a valors continus, la qual cosa dóna lloc a superfícies de semblança. En aquest cas també és possible assignar un nombre entre 0 i 1 per al valor de la mesura entre els dos subconjunts borrosos.
6. Com és sabut, la clausura transitiva amb la t-norma del mínim de Zadeh dóna lloc a una partició única del conjunt referencial per a cada valor de semblança; l'únic inconvenient és que a vegades no aconsegueix fer particions prou fines. En aquest cas, una altra via adequada consisteix en aplicar el mètode de Miin-Shen Yang i Hsing-Mei Shih, que, a partir de la clausura transitiva amb la t-norma del producte acotat, també aconsegueix una partició, encara que amb l'inconvenient de no ser única fixat el valor de certesa. Nosaltres proposem una tercera possibilitat: Un cop obtingut un clúster, modificar la relació borrosa -per tant, també canviarà la matriu de semblança- per tornar a calcular quins clústers estan a semblança màxima (distància mínima). Aquest procés perd la unicitat, així com també el fet que els diferents valors de semblança en els quals són agrupats els diversos clústers no es poden ordenar entre ells ja que fan referència a conjunts diferents.

Tot i així, els seus resultats són esperançadors i homogenitzen tota la metodologia.

7. La teoria d'afinitats per a relacions binàries es pot estendre a relacions n -àries. Tots els conceptes i teoremes es poden generalitzar a les relacions n -àries: connexions, tancament de Moore, tancats dels tancaments de Moore, clausures i el teorema d'isomorfisme. Per aconseguir el reticle de Galois només cal determinar quina és la naturalesa dels conjunts que es volen agrupar. Si alguna de les variables no es vol tenir en compte, es pot fer la projecció i continuar el procés. Tampoc presenta cap inconvenient afegir alguna nova variable mitjançant el procés d'extensió.
8. Aplicant la teoria de les afinitats al conjunt de les comarques gironines, agrupades en funció de diverses característiques de la modernitat en el treball, s'arriba a la conclusió que el Gironès i el Pla de l'Estany reuneixen totes les característiques excepte una i, per tant, en aquest sentit són les més desenvolupades. El Baix Empordà i La Selva se'ls uneixen si deixem de tenir present, respectivament, la mobilitat poblacional i el capital humà. Finalment, l'Alt Empordà, la Garrotxa i el Ripollès només s'agrupen amb d'altres comarques si reduïm a dos el nombre de característiques. De forma secundària, podem afirmar que les dues comarques de l'Empordà són les úniques que es caracteritzen per la diversitat demogràfica; i que la participació de la dona és notable, ja que forma part de totes les agrupacions.
9. Les xarxes neuronals del tipus back-propagation són una eina prou recomanable per a l'aproximació de funcions per tal de fer prediccions de variables estadístiques. Amb un nombre suficient de valors, un cop la xarxa ha estat entrenada, l'error comès a l'aplicar-la a valors coneguts no sol excedir valors acceptables.
10. Les diferents mesures de semblança amb la t -norma del mínim de Zadeh donen lloc a resultats força semblants. En canvi, i com era previsible, a l'utilitzar la t -norma del producte acotat, els valors de semblança són molt més petits. Emprar t -normes més

petites que la del producte acotat no té gaire sentit ja que es perd la propietat de la desigualtat triangular.

11. Un cop acceptats els avantatges i els inconvenients dels diferents tipus de clusterització borrosa als països de la Unió Europea, es pot concloure que no hi ha contradiccions entre ells. Els resultats obtinguts a través dels diversos mètodes no condueixen a resultats incongruents.
12. En general, els resultats indiquen una gran semblança entre els països centrals; entre els mediterranis, encara que en menor grau donat que a vegades no s'agrupen i formen simples; i entre els països nòrdics, malgrat que Dinamarca es comporta amb més flexibilitat que Suècia i Finlàndia. Els països de l'oest són els que s'agrupen en menor mesura, ja que a vegades ho fan entre ells, a vegades amb els centrals i -fins i tot- a vegades països com Portugal o Irlanda s'agrupen amb alguns països mediterranis.
13. Encara que per fer una anàlisi cronològica només disposem de tres clústers, corresponents a 1995, 1999 i 2003, sembla que les previsions indiquen que Portugal, Itàlia, Dinamarca, Irlanda i el Regne Unit són els països més erràtics, en el sentit que formen agrupacions amb conjunts més diversos de països.

Capítol 8

Annexos

Aquests annexos contenen tot el coneixement empíric necessari per al càlcul dels clústers de les variables borroses que ens descriuen els països de la Unió Europea, així com dels dendogrames en els casos en què sigui possible. No s'hi han inclòs els càlculs pormenoritzats de forma exhaustiva, és a dir, hi ha el resultat final per a cadascun dels casos.

El primer annex conté tota la informació sobre les variables estadístiques dels anys 1995 i 1999, així com les seves extrapolacions per a l'any 2003. Les dades per a la resta d'anys es poden consultar als anuaris estadístics (v. [21] - [24], [86]-[89]).

En el segon, hi trobem la subdivisió per a cadascuna d'aquestes variables un cop avaluats els índexs de l'expertesa. Aquests intervals són els que acabaran per definir les relacions borroses.

Finalment, en el darrer annex, hi ha totes les matrius de les clausures transitives utilitzades en el procés de classificació.

Taula 8.2: Valors de la variable X_1 i mètode de predicció

	X_1 =% de despesa pública dedicada a l'educació				
	95	99(*)	03(*)	mètode d'extrapolació	MSE
B	5.7	6.2	6.6	ST(TL) $R^2 = 0.741$	-
DK	8.3	8.9	9.6	ST(TL) $R^2 = 0.786$	-
D	4.7	4.9	5.0	ST(TL) $R^2 = 0.524$	-
EL	3.7	3.9	4.7	ST(TL) $R^2 = 0.626$	-
E	5.0	5.8	6.6	ST(TL) $R^2 = 0.786$	-
F	5.9	6.4	6.7	ST(TL) $R^2 = 0.643$	-
IRL	6.3	5.6	5.5	XN(4,3,3,1)	$< 10^{-5}$
I	4.9	4.6	4.3	XN(4,3,3,1)	$< 10^{-5}$
NL	5.3	4.9	4.7	XN(4,3,3,1)	$< 10^{-5}$
A	5.5	5.4	5.2	ST(TL) $R^2 = 0.741$	-
P	5.4	6.6	7.7	ST(TL) $R^2 = 0.741$	-
FIN	7.6	9.0	10.4	ST(TL) $R^2 = 0.741$	-
S	8.0	8.8	9.4	ST(TL) $R^2 = 0.741$	-
UK	5.5	5.9	6.3	ST(TL) $R^2 = 0.741$	-
Màxim	8.3	9	10.4	-	-
Mínim	3.7	3.9	4.3	-	-
a	4.6	5.1	6.1	-	-
b	0.66	0.73	0.87	-	-

Taula 8.3: Valors de la variable X_2 i mètode de predicció

	X_2 =Ràtio bruta de matriculació a l'educació primària, secundària i universitària				
	95	99	03*	mètode d'extrapolació	MSE
B	86	109	134	ST(TL) $R^2 = 0.979$	-
DK	89	97	97	ST(TL) $R^2 = 0.607$	-
D	81	94	106	ST(TL) $R^2 = 0.992$	-
EL	82	81	81	XN(4,3,3,1)	$< 10^{-5}$
E	90	95	100	ST(TL) $R^2 = 0.981$	-
F	89	94	99	ST(TL) $R^2 = 0.988$	-
IRL	88	91	94	ST(TL) $R^2 = 0.714$	-
I	73	84	97	ST(TL) $R^2 = 0.891$	-
NL	91	102	113	ST(TL) $R^2 = 0.971$	-
A	87	90	88	XN(4,3,3,1)	$< 10^{-5}$
P	81	96	112	ST(TL) $R^2 = 0.967$	-
FIN	97	103	109	ST(TL) $R^2 = 0.966$	-
S	82	101	125	ST(TL) $R^2 = 0.802$	-
UK	86	106	129	ST(TL) $R^2 = 0.939$	-
Màxim	97	109	134	-	-
Mínim	73	81	81	-	-
a	24	28	53	-	-
b	3.4	4	7.6	-	-

Taula 8.4: Valors de la variable X_3 i mètode de predicció

	X_3 =Demandes de títols per milió de persones actives					
	95	99	03*	mètode d'extrapolació	MSE	MAPE
B	227.6	273.9	377.1	ST(TL) $R^2 = 0.845$	-	-
DK	223.8	250.9	348.9	ST(TL) $R^2 = 0.967$	-	-
D	355.0	493.1	518	ST(SES)	2736.6	9.75
EL	10.2	14.8	18.8	ST(TL) $R^2 = 0.754$	-	-
E	30.6	42.6	60.9	ST(TL) $R^2 = 0.902$	-	-
F	223.1	257.5	282.7	ST(TL) $R^2 = 0.509$	-	-
IRL	92.5	124.1	158.2	ST(TL) $R^2 = 0.907$	-	-
I	116.5	143.3	177.4	ST(TL) $R^2 = 0.824$	-	-
NL	247.7	311.0	369.7	ST(TL) $R^2 = 0.497$	-	-
A	210.1	256.0	279.4	ST(EXP)	541.7	7.79
P	3.3	5.9	7.1	ST(TL) $R^2 = 0.728$	-	-
FIN	367.6	454.9	632.8	ST(TL) $R^2 = 0.890$	-	-
S	391.4	479.2	742.6	ST(TL) $R^2 = 0.862$	-	-
UK	162.3	189.3	209.6	ST(TL) $R^2 = 0.548$	-	-
Màxim	391.4	493.1	742.6	-	-	-
Mínim	3.3	5.9	7.1	-	-	-
a	388.1	487.2	735.5	-	-	-
b	129.4	162.4	245.2	-	-	-

Taula 8.5: Valors de la variable X_4 i mètode de predicció

	X_4 =Nombre mitjà de llengües estrangeres estudiades per alumne de secundària				
	95*	99	03*	mètode d'extrapolació	MSE
B	1.7	2.2	3.1	ST(TL) $R^2 = 0.696$	-
DK	1.6	2.4	3	ST(TL) $R^2 = 0.853$	-
D	1.3	1.4	1.6	ST(TL) $R^2 = 0.800$	-
EL	1.7	1.2	0.7	ST(TL) $R^2 = 0.800$	-
E	1	1.1	1.2	ST(TL) $R^2 = 0.600$	-
F	1.6	1.9	2.3	ST(TL) $R^2 = 0.600$	-
IRL	1.1	0.9	0.8	ST(TL) $R^2 = 0.600$	-
I	1.3	1.1	0.9	ST(TL) $R^2 = 0.800$	-
NL	1.9	1.5	0.9	ST(TL) $R^2 = 0.600$	-
A	1	1.7	2.6	ST(TL) $R^2 = 0.800$	-
P	1.2	1.3	1.3	XN(4,3,3,1)	$< 10^{-5}$ -
FIN	2.3	2.9	3.5	ST(TL) $R^2 = 0.882$	-
S	1.7	2.2	2.9	ST(TL) $R^2 = 0.600$	-
UK	1.4	1.5	1.3	XN(4,3,3,1)	$< 10^{-5}$ -
Màxim	2.3	2.9	3.5	-	-
Mínim	1	0.9	0.7	-	-
a	1.3	2	2.8	-	-
b	0.26	0.4	0.56	-	-

Taula 8.6: Valors de la variable X_5 i mètode de predicció

	X_5 =Índex de desenvolupament humà donat pel PNUD			
	95	99	03*	mètode d'extrapolació
B	0.925	0.935	0.952	ST(TL) $R^2 = 0.900$
DK	0.905	0.921	0.932	ST(TL) $R^2 = 0.935$
D	0.905	0.921	0.932	ST(TL) $R^2 = 0.739$
EL	0.867	0.881	0.891	ST(TL) $R^2 = 0.943$
E	0.893	0.908	0.921	ST(TL) $R^2 = 0.954$
F	0.913	0.924	0.937	ST(TL) $R^2 = 0.964$
IRL	0.891	0.916	0.940	ST(TL) $R^2 = 0.995$
I	0.895	0.909	0.923	ST(TL) $R^2 = 0.991$
NL	0.921	0.931	0.945	ST(TL) $R^2 = 0.949$
A	0.908	0.921	0.929	ST(TL) $R^2 = 0.845$
P	0.853	0.874	0.899	ST(TL) $R^2 = 0.977$
FIN	0.907	0.925	0.936	ST(TL) $R^2 = 0.970$
S	0.924	0.936	0.954	ST(TL) $R^2 = 0.922$
UK	0.914	0.923	0.949	ST(TL) $R^2 = 0.922$
Màxim	0.925	0.936	0.954	-
Mínim	0.853	0.874	0.891	-
a	0.072	0.062	0.063	-
b	0.024	0.021	0.021	-

Taula 8.7: Valors de la variable X_6 i mètode de predicció

	$X_6 = \% \text{ del PNB dedicat a la salut}$						
	95	99	03	mètode d'extrapolació	MSE	MAPE	EE
B	8.7	8.8	9.58	ST(TL) $R^2 = 0.771$	-	-	-
DK	8.2	8.4	8.14	XN(6,3,1)	$< 10^{-6}$		1.2
D	10.2	10.9*	11.8	ST(TL) $R^2 = 0.855$	-	-	-
EL	8.9	9.1*	9.8	ST(TL) $R^2 = 0.544$	-	-	-
E	7.0	7.0*	7.02	XN(12,6,1)	$< 10^{-6}$	-	9.03
F	9.6	9.4	9.9	ST(TL) $R^2 = 0.515$	-	-	-
IRL	7.3	6.8	6.8	XN(8,4,1)	$< 10^{-6}$	-	10.21
I	7.9	8.2	8.22	XN(6,3,1)	$< 10^{-6}$	-	4.37
NL	6.3	8.7	8.7	XN(6,3,1)	$< 10^{-6}$	-	2.16
A	8.5	8.2	9.0	ST(TL) $R^2 = 0.537$	-	-	-
P	7.6	8.0	8.7	ST(TL) $R^2 = 0.819$	-	-	-
FIN	7.5	6.8	6.0	ST(TL) $R^2 = 0.697$	-	-	-
S	8.1	8.0*	7.7	ST(TL) $R^2 = 0.606$	-	-	-
UK	6.9	6.9	6.9	XN(6,3,1)	$< 10^{-6}$	-	12.97
Màxim	10.2	10.9	11.8	-	-	-	-
Mínim	6.3	6.8	6.0	-	-	-	-
a	3.9	4.1	5.8	-	-	-	-
b	0.35	0.37	0.53	-	-	-	-

Taula 8.8: Valors de la variable X_7 i mètode de predicció

	X_7 =Esperança de vida en néixer			
	95	99	03*	mètode d'extrapolació
B	76.8	77.6	78.5	ST(TL) $R^2 = 0.956$
DK	75.25	76.6	77.05	ST(TL) $R^2 = 0.853$
D	76.5	77.7	78.82	ST(TL) $R^2 = 0.990$
EL	77.65	78.05	78.70	ST(TL) $R^2 = 0.884$
E	77.9	78.9	79.78	ST(TL) $R^2 = 0.988$
F	77.9	78.65	79.61	ST(TL) $R^2 = 0.986$
IRL	75.65	76.50	77.06	ST(TL) $R^2 = 0.957$
I	78.1	78.95	79.93	ST(TL) $R^2 = 0.965$
NL	77.5	77.9	78.25	ST(TL) $R^2 = 0.778$
A	76.85	78.05	79.13	ST(TL) $R^2 = 0.989$
P	74.9	75.55	76.33	ST(TL) $R^2 = 0.887$
FIN	76.5	77.4	78.5	ST(TL) $R^2 = 0.976$
S	78.8	79.5	80.47	ST(TL) $R^2 = 0.973$
UK	76.6	77.4	78.21	ST(TL) $R^2 = 0.962$
Màxim	78.8	79.5	80.47	-
Mínim	74.9	75.55	76.33	-
a	3.9	3.95	4.14	-
b	0.355	0.359	0.376	-

Taula 8.9: Valors de la variable X_8 i mètode de predicció

	X_8 =Nombre mitjà de cigarretes disponibles al mercat, per persona					
	95	99	03*	mètode d'extrapolació	MSE	EE
B	1585	1206	859	ST(TL) $R^2 = 0.596$	-	-
DK	1702	1605	1656	XN(8,4,1)	6×10^{-3}	2.95
D	1654	1687	1695	XN(8,4,1)	8.8×10^{-3}	2.36
EL	2937	2853	2890	XN(10,5,1)	2.8×10^{-3}	2.62
E	1989	2284	2086	XN(10,5,1)	10^{-2}	10.87
F	1519	1427	1216	ST(TL) $R^2 = 0.962$	-	-
IRL	1680	1733	1744	XN(10,5,1)	1.8×10^{-3}	2.64
I	1531	1625	1583	XN(10,5,1)	9.9×10^{-4}	3.25
NL	1075	1058	887	ST(TL) $R^2 = 0.672$	-	-
A	1568	1919	1741	XN(10,5,1)	9.6×10^{-3}	15.26
P	1638	1653	1651	XN(12,6,6,1)	1.3×10^{-4}	1.94
FIN	1016	934	553	ST(TL) $R^2 = 0.866$	-	-
S	920	644	336	ST(TL) $R^2 = 0.901$	-	-
UK	1552	1400	1259	ST(TL) $R^2 = 0.831$	-	-
Màxim	2937	2853	2890	-	-	-
Mínim	920	644	336	-	-	-
a	2017	2209	2554	-	-	-
b	672.3	736.3	851.3	-	-	-

Taula 8.10: Valors de la variable X_9 i mètode de predicció

	X_9 =Taxa d'accidents de treball amb més de tres dies d'absència			
	95*	99*	03*	mètode d'extrapolació
B	4925	5149	5373	ST(TL) $R^2 = 0.75$
DK	2365	3371	4377	ST(TL) $R^2 = 0.75$
D	5028	4944	4860	ST(TL) $R^2 = 0.75$
EL	4376	2658	920	ST(TL) $R^2 = 0.75$
E	6618	7164	7710	ST(TL) $R^2 = 0.75$
F	5053	4893	4733	ST(TL) $R^2 = 0.75$
IRL	1545	1411	1277	ST(TL) $R^2 = 0.75$
I	4097	4107	4117	ST(TL) $R^2 = 0.75$
NL	4394	3812	3230	ST(TL) $R^2 = 0.75$
A	5453	2895	397	ST(TL) $R^2 = 0.75$
P	8163	4973	1783	ST(TL) $R^2 = 0.75$
FIN	3210	3480	3750	ST(TL) $R^2 = 0.75$
S	947	1405	1863	ST(TL) $R^2 = 0.75$
UK	1659	1483	1307	ST(TL) $R^2 = 0.75$
Màxim	8163	7164	7710	-
Mínim	947	1405	397	-
a	7216	5759	7313	-
b	801.8	639.9	812.6	-

Taula 8.11: Valors de la variable X_{10} i mètode de predicció

	X_{10} =% de persones que tenen almenys tres problemes a la vivenda				
	95	99*	03*	mètode d'extrapolació	MSE
B	16	12	9	ST(TL) $R^2 = 0.942$	-
DK	8	14	20	ST(TL) $R^2 = 0.942$	-
D	10	16	21	ST(TL) $R^2 = 0.519$	-
EL	24	44	59	ST(TL) $R^2 = 0.703$	-
E	25	33	99	XN(3,2,1)	$< 10^{-6}$
F	20	16	11	ST(TL) $R^2 = 0.973$	-
IRL	10	29	44	ST(TL) $R^2 = 0.834$	-
I	19	34	45	ST(TL) $R^2 = 0.729$	-
NL	14	2	0	ST(TL) $R^2 = 0.893$	-
A	12	17	21	ST(TL) $R^2 = 0.942$	-
P	38	33	28	ST(TL) $R^2 = 0.923$	-
FIN	20	18	23	XN(3,2,1)	$< 10^{-6}$
S	10	10	20	XN(3,2,1)	$< 10^{-6}$
UK	22	6	0	ST(TL) $R^2 = 0.942$	-
Màxim	38	44	99	-	-
Mínim	8	2	0	-	-
a	30	42	99	-	-
b	2.73	3.82	9	-	-

Taula 8.12: Valors de la variable X_{11} i mètode de predicció

	X_{11} =PNB per càpita				
	95	99	03*	mètode d'extrapolació	MSE
B	16428	25443	28603	ST(TL) $R^2 = 0.799$	-
DK	22247	25869	27240	ST(TL) $R^2 = 0.918$	-
D	20275	23742	26624	ST(TL) $R^2 = 0.921$	-
EL	5020	15414	19388	ST(TL) $R^2 = 0.766$	-
E	9141	18079	21435	ST(TL) $R^2 = 0.783$	-
F	18069	22897	24645	ST(TL) $R^2 = 0.779$	-
IRL	13134	25918	30111	ST(TL) $R^2 = 0.847$	-
I	15392	22172	24756	ST(TL) $R^2 = 0.813$	-
NL	17325	24215	26353	ST(TL) $R^2 = 0.830$	-
A	18109	25089	27364	ST(TL) $R^2 = 0.831$	-
P	5175	16064	20681	ST(TL) $R^2 = 0.757$	-
FIN	18460	23096	26840	XN(4,3,3,1)	$< 10^{-6}$
S	19521	22636	24620	XN(4,3,3,1)	$< 10^{-6}$
UK	13445	22093	25666	ST(TL) $R^2 = 0.776$	-
Màxim	22247	25918	30111	-	-
Mínim	5020	15414	19388	-	-
a	17227	10504	10723	-	-
b	1566.1	954.9	974.8	-	-

Taula 8.13: Valors de la variable X_{12} i mètode de predicció

	$X_{12}=\%$ d'escombraries reciclades				
	95	99*	03*	mètode d'extrapolació	MSE
B	52	56.5	62	ST(TL) $R^2 = 0.695$	-
DK	56	65.1	72.7	ST(TL) $R^2 = 0.743$	-
D	71	88.3	100	ST(TL) $R^2 = 0.991$	-
EL	28	31.9	36.1	ST(TL) $R^2 = 0.924$	-
E	36.5	49.8	43.3	XN(8,4,1)	$< 10^{-6}$
F	44	50.4	55.8	ST(TL) $R^2 = 0.845$	-
IRL	23	27.1	32	ST(TL) $R^2 = 0.919$	-
I	40.5	29.2	26.0	XN(8,4,1)	$< 10^{-6}$
NL	74.5	83.2	92.9	ST(TL) $R^2 = 0.971$	-
A	71	84.6	97.2	ST(TL) $R^2 = 0.925$	-
P	39.5	43.1	47.9	ST(TL) $R^2 = 0.732$	-
FIN	44	52.9	59.5	ST(TL) $R^2 = 0.765$	-
S	60	79.7	96.4	ST(TL) $R^2 = 0.936$	-
UK	31	37.3	42.4	ST(TL) $R^2 = 0.929$	-
Màxim	74.5	88.3	100	-	-
Mínim	23	27.1	26	-	-
a	51.5	61.2	74	-	-
b	4.68	5.56	6.73	-	-

Taula 8.14: Valors de la variable X_{13} i mètode de predicció

	X_{13} =Emissions de CO_2 (tones per habitant)					
	95	99*	03*	mètode d'extrapolació	MSE	EE
B	12.4	12.9	13.4	ST(TL) $R^2 = 0.772$	-	-
DK	11.6	13.7	15.1	ST(TL) $R^2 = 0.567$	-	-
D	11.1	10.7	10	ST(TL) $R^2 = 0.597$	-	-
EL	8.6	8.8	9	ST(TL) $R^2 = 0.842$	-	-
E	6.5	6.10	6.11	XN(8,4,1)	$< 10^{-6}$	4.02
F	6.6	6.8	5	XN(8,4,1)	1.1×10^{-2}	2.25
IRL	9.6	9.9	10.2	ST(TL) $R^2 = 0.828$	-	-
I	7.7	8.1	9	XN(8,4,1)	$< 10^{-6}$	6.05
NL	11.5	11.9	12.5	ST(TL) $R^2 = 0.813$	-	-
A	7.9	8.2	6.1	XN(8,4,1)	1.1×10^{-2}	6.48
P	5.2	5.3	5.6	ST(TL) $R^2 = 0.574$	-	-
FIN	11.9	12.9	15	XN(12,6,6,1)	6.4×10^{-3}	10.18
S	6.6	7.1	7.5	ST(TL) $R^2 = 0.692$	-	-
UK	9.4	9.4	9	ST(TL) $R^2 = 0.510$	-	-
Màxim	12.4	13.7	15	-	-	-
Mínim	5.2	5.3	5	-	-	-
<i>a</i>	7.2	8.4	10	-	-	-
<i>b</i>	0.8	0.93	1.11	-	-	-

Taula 8.15: Valors de la variable X_{14} i mètode de predicció

	X_{14} =Taxa d'atur						
	95	99	03	mètode d'extrapolació	MSE	MAPE	EE
B	9.9	8.8	9.2	XN(12,6,6,1)	6.2×10^{-4}	-	3.91
DK	7.2	5.2	3.5	ST(TL) $R^2 = 0.708$	-	-	-
D	8.2	8.6	11.2	XN(12,6,6,1)	$< 10^{-6}$	-	8.67
EL	9.2	11.6	13.1	ST(TL) $R^2 = 0.961$	-	-	-
E	22.9	15.9	14	XN(12,6,6,1)	$< 10^{-6}$	-	6.23
F	11.7	11.2	10.6	XN(12,6,6,1)	$< 10^{-6}$	-	4.03
IRL	12.3	5.6	2.6	ST(TL) $R^2 = 0.816$	-	-	-
I	11.6	11.3	13	ST(D(4)) ($R^2 = 0.558$)	0.53	6.19	-
NL	6.9	3.4	3.2	ST(D(4)) ($R^2 = 0.510$)	0.75	14.27	-
A	3.9	3.9	3.7	XN(12,6,6,1)	$< 10^{-6}$	-	2.69
P	7.3	4.5	4.1	XN(12,6,6,1)	$< 10^{-6}$	-	2.01
FIN	15.4	10.2	13.1	XN(12,6,6,6,1)	$< 10^{-6}$	-	15.86
S	8.8	7.2	5.6	XN(12,6,6,1)	$< 10^{-6}$	-	24.26
UK	8.7	6.1	5.5	XN(12,6,6,1)	$< 10^{-6}$	-	8.41
Màxim	22.9	15.9	14	-	-	-	-
Mínim	3.9	3.4	2.6	-	-	-	-
a	19	12.5	11.4	-	-	-	-
b	2.71	1.79	1.63	-	-	-	-

Taula 8.16: Valors de la variable X_{15} i mètode de predicció

	X_{15} =% de persones ocupades a temps parcial						
	95	99	03*	mètode d'extrapolació	MSE	MAPE	EE
B	13.6	19.8	21.4	ST(TL) $R^2 = 0.840$	-	-	-
DK	21.6	20.8	21.5	ST(D(5)) ($R^2 = 0.496$)	0.15	1.50	-
D	16.3	19.0	20.7	ST(TL) $R^2 = 0.913$	-	-	-
EL	4.8	6.1	4.6	XN(12,6,6,1)	$< 10^{-6}$	-	10.82
E	7.5	8.3	10.1	ST(TL) $R^2 = 0.879$	-	-	-
F	15.6	17.2	19.8	ST(TL) $R^2 = 0.927$	-	-	-
IRL	12.1	16.7	19.6	ST(TL) $R^2 = 0.909$	-	-	-
I	6.4	7.9	9.3	ST(TL) $R^2 = 0.939$	-	-	-
NL	37.3	39.4	43.6	ST(TL) $R^2 = 0.964$	-	-	-
A	13.9	16.8	19.0	ST(TL) $R^2 = 0.956$	-	-	-
P	7.5	11.0	13.3	ST(D(5)) ($R^2 = 0.907$)	0.147	4.02	-
FIN	11.8	12.2	12.3	ST(D(3)) ($R^2 = 0.495$)	0.041	1.62	-
S	25.1*	23.8	21.9	ST(TL) $R^2 = 0.866$	-	-	-
UK	24.1	24.8	26.4	ST(TL) $R^2 = 0.894$	-	-	-
Màxim	37.3	39.4	43.6	-	-	-	-
Mínim	4.8	6.1	4.6	-	-	-	-
<i>a</i>	32.5	33.3	39	-	-	-	-
<i>b</i>	10.83	11.1	13	-	-	-	-

Taula 8.17: Valors de la variable X_{16} i mètode de predicció

	X_{16} =Taxa d'atur per a joves menors de 25 anys						
	95	99	03*	mètode d'extrapolació	MSE	MAPE	EE
B	23.9	23.7	3.7	XN(12,6,6,1)	6×10^{-4}	-	20.11
DK	10.6	9.6	6.5	ST(TL) $R^2 = 0.656$	-	-	-
D	8.8	9.1	8.0	XN(12,6,6,1)	$< 10^{-6}$	-	7.10
EL	28.5	31.3	34.9	ST(D(5)) ($R^2 = 0.815$)	-	-	-
E	42.5	29.5	26.2	XN(12,6,6,1)	$< 10^{-6}$	-	7.02
F	27.6	24.0	20.0	XN(12,6,6,1)	$< 10^{-6}$	-	5.26
IRL	19.5	8.4	5.1	ST(TL) $R^2 = 0.567$	-	-	-
I	33.7	32.6	29.6	ST(SES) ($R^2 = 0.521$)	1.16	3.09	-
NL	12.0	7.1	5.4	XN(12,6,6,1)	$< 10^{-6}$	-	6.97
A	5.6	5.4	5.3	XN(12,6,6,1)	$< 10^{-6}$	-	6.04
P	16.6	9.0	8.9	XN(12,6,6,1)	$< 10^{-6}$	-	23.79
FIN	29.7	21.4	21.4	XN(12,6,6,1)	$< 10^{-6}$	-	5.40
S	19.0	13.6	11.2	XN(12,6,6,1)	$< 10^{-6}$	-	22.91
UK	15.9	13.2	12.5	XN(12,6,6,1)	$< 10^{-6}$	-	4.74
Màxim	42.5	32.6	34.9	-	-	-	-
Mínim	5.6	5.4	3.7	-	-	-	-
<i>a</i>	36.9	24.1	31.2	-	-	-	-
<i>b</i>	7.38	4.82	6.24	-	-	-	-

Taula 8.18: Valors de la variable X_{17} i mètode de predicció

	X_{17} =Despeses totals en protecció social per habitant						
	95	99*	03*	mètode d'extrapolació	MSE	MAPE	EE
B	5867	6619	7381	ST(TL) $R^2 = 0.80$	-	-	-
DK	8494	9601	11182	ST(TL) $R^2 = 0.921$	-	-	-
D	6655	7140	8532	ST(TL) $R^2 = 0.912$	-	-	-
EL	19.15	2555	3085	ST(TL) $R^2 = 0.941$	-	-	-
E	2478	2809	3085	ST(D(5)) ($R^2 = 0.637$)	11160	3.5	-
F	6267	6924	8147	ST(TL) $R^2 = 0.960$	-	-	-
IRL	2767	3570	4232	ST(TL) $R^2 = 0.983$	-	-	-
I	3606	4898	5056	ST(D(5)) $R^2 = 0.562$	43309	4.7	-
NL	6340	6665	7529	ST(TL) $R^2 = 0.896$	-	-	-
A	6526	7347	8596	ST(TL) $R^2 = 0.899$	-	-	-
P	1730	2395	3030	ST(TL) $R^2 = 0.977$	-	-	-
FIN	6158	6193	6207	XN(12,6,6,1)	$< 10^{-6}$	-	2.64
S	7316	8042	8037	XN(12,6,6,1)	$< 10^{-6}$	-	6.80
UK	4111	5398	6441	ST(D(4)) ($R^2 = 0.869$)	61848	5.4	-
Màxim	8494	9601	11182	-	-	-	-
Mínim	1730	2395	3030	-	-	-	-
a	6764	7206	8152	-	-	-	-
b	966.3	1029.4	1164.6	-	-	-	-

Taula 8.19: Valors de la variable X_{18} i mètode de predicció

	$X_{18} = \% \text{ del PNB dedicat a ajuda al desenvolupament}$				
	95*	99	03*	mètode d'extrapolació	MSE
B	0.34	0.30	0.35	XN(4,3,3,1)	$< 10^{-6}$
DK	1.02	1.01	1.11	XN(4,3,3,1)	$< 10^{-6}$
D	0.34	0.26	0.16	ST(TL) $R^2 = 0.808$	-
EL	0.13	0.15	0.18	ST(TL) $R^2 = 0.600$	-
E	0.13	0.23	0.24	XN(4,3,3,1)	$< 10^{-6}$
F	0.51	0.39	0.25	ST(TL) $R^2 = 0.948$	-
IRL	0.26	0.31	0.32	XN(4,3,3,1)	$< 10^{-6}$
I	0.51	0.15	0.51	XN(4,3,3,1)	$< 10^{-6}$
NL	0.82	0.79	0.76	ST(TL) $R^2 = 0.891$	-
A	0.25	0.26	0.35	XN(4,3,3,1)	$< 10^{-6}$
P	0.21	0.26	0.32	ST(TL) $R^2 = 0.700$	-
FIN	0.33	0.33	0.31	XN(4,3,3,1)	$< 10^{-6}$
S	0.89	0.70	0.49	ST(TL) $R^2 = 0.962$	-
UK	0.29	0.23	0.20	ST(TL) $R^2 = 0.563$	-
Màxim	1.02	1.01	1.11	-	-
Mínim	0.13	0.15	0.16	-	-
a	0.89	0.86	0.95	-	-
b	0.297	0.287	0.317	-	-

Taula 8.20: Valors de la variable X_{19} i mètode de predicció

	X_{19} =Comparació del nivells d'atur entre homes i dones						
	95	99	03*	mètode d'extrapolació	MSE	MAPE	EE
B	1.68	1.4	0.99	ST(D(5)) ($R^2 = 0.74$)	0.023	7.27	-
DK	1.53	1.33	1.26	XN(12,6,6,1)	$< 10^{-6}$	-	11.65
D	1.35	1.11	0.88	ST(TL) $R^2 = 0.921$	-	-	-
EL	2.27	2.35	2.13	ST(TL) $R^2 = 0.567$	-	-	-
E	1.68	2.05	2.1	XN(12,6,6,1)	$< 10^{-6}$	-	7.12
F	1.44	1.40	1.39	XN(12,6,6,1)	$< 10^{-6}$	-	7.96
IRL	1.02	0.96	0.88	ST(TL) $R^2 = 0.869$	-	-	-
I	1.82	1.79	1.60	ST(TL) $R^2 = 0.753$	-	-	-
NL	1.51	1.92	1.62	XN(12,6,6,1)	3×10^{-2}	-	11.66
A	1.61	1.38	1.23	ST(TL) $R^2 = 0.802$	-	-	-
P	1.26	1.33	1.34	XN(12,6,6,1)	7.4×10^{-3}	-	7.1
FIN	0.96	1.1	1.36	ST(D(5)) ($R^2 = 0.923$)	0.00198	4.3	-
S	0.80	0.99	0.86	XN(12,6,6,1)	10^{-2}	-	14.84
UK	0.69	0.79	0.73	XN(12,6,6,1)	3.1×10^{-3}	-	8.92
Màxim	2.27	2.35	2.13	-	-	-	-
Mínim	0.69	0.79	0.73	-	-	-	-
a	1.58	1.56	1.4	-	-	-	-
b	0.527	0.52	0.467	-	-	-	-

Taula 8.21: Valors de la variable X_{20} i mètode de predicció

	X_{20} =Comparació, entre els percentatges d'homes i dones, que componen la ràtio bruta de matriculació combinada a l'educació primària, secundària i universitària				
	95	99	03*	mètode d'extrapolació	MSE
B	1	1.04	1.08	ST(TL) $R^2 = 0.767$	-
DK	1.04	1.07	1.10	ST(TL) $R^2 = 0.966$	-
D	0.95	0.98	1.02	ST(TL) $R^2 = 0.771$	-
EL	0.96	1.01	1.06	ST(TL) $R^2 = 0.895$	-
E	1.08	1.08	1.13	XN(4,3,1)	$< 10^{-6}$
F	1.05	1.03	1.0	ST(TL) $R^2 = 0.771$	-
IRL	1.02	1.04	1.06	XN(4,3,1)	$< 10^{-6}$
I	1.03	1.07	1.09	ST(TL) $R^2 = 0.639$	-
NL	0.95	0.96	1.20	XN(4,3,1)	$< 10^{-6}$
A	0.97	0.99	1.01	ST(TL) $R^2 = 0.771$	-
P	1.09	1.05	1.01	ST(TL) $R^2 = 0.584$	-
FIN	1.09	1.09	1.05	XN(4,3,1)	$< 10^{-6}$
S	1.04	1.13	1.24	ST(TL) $R^2 = 0.737$	-
UK	1.01	1.12	1.23	ST(TL) $R^2 = 0.757$	-
Màxim	1.09	1.13	1.24	-	-
Mínim	0.95	0.96	1.0	-	-
a	0.14	0.17	0.24	-	-
b	0.0467	0.0567	0.08	-	-

Taula 8.22: Valors de la variable X_{21} i mètode de predicció

	X_{21} =Ràtio entre el PIB de la dona i el PIB mitjà				
	95	99	03*	mètode d'extrapolació	MSE
B	33.6	61	56.6	XN(4,3,1)	$< 10^{-6}$
DK	41.8	82.2	79.1	XN(4,3,1)	$< 10^{-6}$
D	34.8	66.7	51.4	XN(4,3,1)	$< 10^{-6}$
EL	31.8	61	72.7	XN(4,3,1)	$< 10^{-6}$
E	29.7	59.4	52.7	XN(4,3,1)	$< 10^{-6}$
F	39.1	76.5	79.4	XN(4,3,1)	$< 10^{-6}$
IRL	26.8	55.4	88.9	XN(4,3,1)	$< 10^{-6}$
I	31.2	61.5	63.2	XN(4,3,1)	$< 10^{-6}$
NL	34.1	67.7	67.1	XN(4,3,1)	$< 10^{-6}$
A	33.6	65.5	69.3	XN(4,3,1)	$< 10^{-6}$
P	34.2	69.5	54.7	XN(4,3,1)	$< 10^{-6}$
FIN	42	79.7	80.1	XN(4,3,1)	$< 10^{-6}$
S	44.7	80.9	85	XN(4,3,1)	$< 10^{-6}$
UK	37.6	75.8	75.9	XN(4,3,1)	$< 10^{-6}$
Màxim	44.7	82.2	88.9	-	-
Mínim	26.8	55.4	51.4	-	-
<i>a</i>	17.9	26.8	38.5	-	-
<i>b</i>	3.58	5.36	7.5	-	-

Taula 8.23: Valors de la variable X_{22} i mètode de predicció

	X_{22} =% de dones amb càrrecs administratius i executius				
	95*	99	03*	mètode d'extrapolació	MSE
B	14.7	19	19.7	XN(4,3,1)	$< 10^{-6}$
DK	17.5	23.1	29.8	ST(TL) $R^2 = 0.881$	-
D	23.9	26	25.8	XN(4,3,1)	$< 10^{-6}$
EL	19.0	25.0	21.4	XN(4,3,1)	$< 10^{-6}$
E	15.8	31	32.2	XN(4,3,1)	2.4×10^{-6}
F	5.7	16	27	ST(TL) $R^2 = 0.879$	-
IRL	14.7	34	48.2	ST(TL) $R^2 = 0.603$	-
I	56.4	49	44.4	ST(TL) $R^2 = 0.632$	-
NL	35.2	23	22.6	XN(4,3,1)	$< 10^{-6}$
A	22.2	26	15.8	XN(4,3,1)	$< 10^{-6}$
P	30.5	32	31.2	XN(4,3,1)	$< 10^{-6}$
FIN	23.8	29	32.6	ST(TL) $R^2 = 0.650$	-
S	38.5	29	14.1	ST(TL) $R^2 = 0.514$	-
UK	33	33	33	XN(4,3,1)	$< 10^{-6}$
Màxim	56.4	49	48.2	-	-
Mínim	5.7	16	14.1	-	-
<i>a</i>	50.7	33	34.1	-	-
<i>b</i>	10.14	6.6	6.82	-	-

Taula 8.24: Valors de la variable X_{23} i mètode de predicció

	$X_{23}=\%$ de dones professionals i tècniques				
	95*	99	03*	mètode d'extrapolació	MSE
B	51.3	50	74.6	XN(4,3,1)	$< 10^{-6}$
DK	71.9	50	79.3	XN(4,3,1)	$< 10^{-6}$
D	48.5	50	50.9	ST(TL) $R^2 = 0.60$	-
EL	43.1	46	48.4	ST(TL) $R^2 = 0.917$	-
E	38.4	44	61.5	XN(4,3,1)	$< 10^{-6}$
F	40.6	42.3	44.2	ST(TL) $R^2 = 0.985$	-
IRL	44	50	54.6	ST(TL) $R^2 = 0.610$	-
I	5.4	43	65.4	ST(TL) $R^2 = 0.594$	-
NL	43.4	46	48.9	ST(TL) $R^2 = 0.965$	-
A	53.9	49	57.7	XN(4,3,1)	$< 10^{-6}$
P	52.7	51	49.3	ST(TL) $R^2 = 0.657$	-
FIN	63.30	62	61	ST(TL) $R^2 = 0.740$	-
S	71.4	49	23.3	ST(TL) $R^2 = 0.797$	-
UK	43.4	45	46.6	ST(TL) $R^2 = 0.734$	-
Màxim	71.9	62	79.3	-	-
Mínim	5.4	42.3	23.3	-	-
a	66.5	19.7	56	-	-
b	22.17	6.57	18.67	-	-

Taula 8.25: Valors de la variable X_{24} i mètode de predicció

	$X_{24}=\%$ del PNB dedicat a R+D						
	95	99	03*	mètode d'extrapolació	MSE	MAPE	EE
B	1.72	1.98	2.15	ST(TL) $R^2 = 0.933$	-	-	-
DK	1.84	2.00	2.23	ST(TL) $R^2 = 0.981$	-	-	-
D	2.26	2.44	2.40	XN(12,6,6,6,1)	1.8×10^{-3}	-	3.97
EL	0.49	0.58*	0.67	ST(TL) $R^2 = 0.820$	-	-	-
E	0.81	0.89	0.90	XN(12,6,6,6,1)	9.5×10^{-6}	-	12.6
F	2.31	2.19	2.08	ST(TL) $R^2 = 0.870$	-	-	-
IRL	1.35	1.66	2.01	ST(TL) $R^2 = 0.935$	-	-	-
I	1.00	1.04	0.82	ST(TL) $R^2 = 0.786$	-	-	-
NL	1.99	1.95*	1.95	XN(12,6,6,6,1)	$< 10^{-6}$	-	-
A	1.56	1.83	1.97	ST(TL) $R^2 = 0.928$	-	-	-
P	0.57	0.76	0.79	ST(TL) $R^2 = 0.653$	-	-	-
FIN	2.29	3.19	3.54	ST(TL) $R^2 = 0.939$	-	-	-
S	3.46	3.80	4.4	ST(TL) $R^2 = 0.973$	-	-	-
UK	1.99	1.87	1.70	ST(D(5)) ($R^2 = 0.87$)	0.0011	1.40	-
Màxim	3.46	3.80	4.4	-	-	-	-
Mínim	0.49	0.58	0.67	-	-	-	-
a	2.97	3.22	3.73	-	-	-	-
b	0.27	0.293	0.339	-	-	-	-

Taula 8.26: Valors de la variable X_{25} i mètode de predicció

	X_{25} =% de llocs de treball de serveis de forta concentració de coneixement					
	95	99	03*	mètode d'extrapolació	MSE	MAPE
B	32.86	36.72	39.21	ST(D(3)) ($R^2 = 0.931$)	0.069	0.64
DK	38.96	41.56	44.16	ST(D(3)) ($R^2 = 0.921$)	0.026	0.335
D	26.88	29.92	32.55	ST(D(3)) ($R^2 = 0.987$)	0.013	0.35
EL	20.10	22.13	23.54	ST(D(3)) ($R^2 = 0.941$)	0.012	0.43
E	21.98	24.03	25.89	ST(D(3)) ($R^2 = 0.802$)	0.099	1.25
F	33.42	34.66	35.61	ST(TL) $R^2 = 0.946$	-	-
IRL	29.19	31.19	32.42	ST(D(3)) ($R^2 = 0.817$)	0.139	0.91
I	24.01	26.21	28.45	ST(D(3)) ($R^2 = 0.991$)	0.0065	0.27
NL	36.65	39.05	40.92	ST(D(3)) ($R^2 = 0.889$)	0.111	0.76
A	25.63	27.96	30.02	ST(TL) $R^2 = 0.839$	-	-
P	21.68	18.85	16.98	ST(D(3)) ($R^2 = 0.623$)	0.46	2.61
FIN	37.27	37.41	37.92	XN(12,6,6,6,1)	$< 10^{-6}$	-
S	44.22	45.38	46.45	ST(D(3)) ($R^2 = 0.576$)	0.20	0.81
UK	36.76	39.31	41.48	ST(TL) $R^2 = 0.986$	-	-
Màxim	44.22	45.38	46.45	-	-	-
Mínim	20.10	18.85	16.98	-	-	-
a	24.12	26.53	29.47	-	-	-
b	4.824	5.306	5.894	-	-	-

Taula 8.27: Valors de la variable X_{26} i mètode de predicció

	X_{26} =% de llocs de treball en manufactures d'alta i mitjana tecnologia					
	95	99	03*	mètode d'extrapolació	MSE	MAPE
B	7.78	7.20	6.44	ST(TL) $R^2 = 0.974$	-	-
DK	7.37	6.39	5.76	ST(TL) $R^2 = 0.601$	-	-
D	10.99	10.87	11.04	XN(12,6,6,6,1)	8×10^{-3}	-
EL	2.23	2.21	2.36	XN(12,6,6,6,1)	$< 10^{-6}$	-
E	5.27	5.46	5.62	XN(12,6,6,6,1)	$< 10^{-6}$	-
F	7.20	7.24	6.85	XN(12,6,6,6,1)	$< 10^{-6}$	-
IRL	6.60	7.31	7.12	XN(12,6,6,6,1)	$< 10^{-6}$	-
I	7.46	7.62	8.08	XN(12,6,6,6,1)	$< 10^{-6}$	-
NL	5.01	4.66	4.20	ST(TL) $R^2 = 0.777$	-	-
A	6.69	6.62	6.65	XN(12,6,6,6,1)	$< 10^{-6}$	-
P	4.05	3.57	3.13	ST(D(2)) ($R^2 = 0.573$)	0.018	3.28
FIN	6.68	7.23	7.46	ST(D(2)) ($R^2 = 0.525$)	0.013	1.30
S	7.60	8.26	7.72	XN(12,6,6,6,1)	$< 10^{-6}$	-
UK	7.64	7.61	6.79	XN(12,6,6,6,1)	$< 10^{-6}$	-
Màxim	10.99	10.87	11.04	-	-	-
Mínim	2.23	2.21	2.36	-	-	-
a	8.76	8.66	8.68	-	-	-
b	0.973	0.962	0.964	-	-	-

Taula 8.28: Valors de la variable X_{27} i mètode de predicció

	X_{27} =Patents d'alta tecnologia per milió de persones actives						
	95	99	03*	mètode d'extrapolació	MSE	MAPE	EE
B	26.3	49.7	54.3	ST(TL) $R^2 = 0.858$	-	-	-
DK	25.7	53.9	60	ST(D(5)) ($R^2 = 0.849$)	22.10	19.7	-
D	28.4	73.2	91.9	ST(D(3)) ($R^2 = 0.886$)	29.7	14.1	-
EL	1.2	2.1	1.14	XN(12,6,6,6,1)	3×10^{-1}	-	26.65
E	2.7	7.4	11.2	ST(EXP) ($R^2 = 0.745$)	0.46	17.67	-
F	29.5	55.5	57.65	ST(EXP) ($R^2 = 0.675$)	24.9	11.35	-
IRL	17.0	33.6	46.36	ST(EXP) ($R^2 = 0.743$)	11.5	21.6	-
I	10.2	14.0	16.81	ST(D(3)) ($R^2 = 0.971$)	0.19	3.74	-
NL	43.2	95.4	101.05	ST(EXP) ($R^2 = 0.731$)	73.86	14.56	-
A	16.7	26.0	34.51	ST(EXP) ($R^2 = 0.826$)	3.27	11.97	-
P	0.0	0.9	1.7	ST(D(5)) ($R^2 = 0.765$)	0.15	8.0	-
FIN	93.0	234.7	278.1	ST(TL) $R^2 = 0.884$	-	-	-
S	51.8	148.5	155.4	ST(TL) $R^2 = 0.831$	-	-	-
UK	25.0	46.7	55.53	ST(EXP) ($R^2 = 0.792$)	10.9	10.4	-
Màxim	93.0	234.7	278.1	-	-	-	-
Mínim	0.0	0.9	1.7	-	-	-	-
a	93	233.8	276.4	-	-	-	-
b	8.45	21.255	25.127	-	-	-	-

Taula 8.29: Valors de la variable X_{28} i mètode de predicció

	X_{28} =Consum d'energia per habitant						
	95	99	03*	mètode d'extrapolació	MSE	MAPE	EE
B	5.0	5.6	5.8	ST(D(5)) ($R^2 = 0.873$)	0.010	1.69	-
DK	3.9	3.8	4.07	XN(12,6,6,6,1)	2.3×10^{-2}	-	9.67
D	4.1	4.1	4.18	XN(12,6,6,6,1)	3.4×10^{-3}	-	1.68
EL	2.3	2.5	2.7	ST(TL) $R^2 = 0.817$	-	-	-
E	2.6	3.0	3.0	ST(D(5)) ($R^2 = 0.872$)	0.0057	2.5	-
F	4.1	4.2	4.4	ST(D(5)) ($R^2 = 0.553$)	0.0059	1.43	-
IRL	3.1	3.7	3.8	ST(D(5)) ($R^2 = 0.903$)	0.0066	2.3	-
I	2.8	3.0	3.1	ST(D(3)) ($R^2 = 0.677$)	0.0033	1.68	-
NL	4.7	4.7	5	ST(D(5)) ($R^2 = 0.702$)	0.001	0.53	-
A	3.3	3.5	3.5	ST(D(5)) ($R^2 = 0.520$)	0.0076	2.19	-
P	2.0	2.4	2.5	ST(D(5)) ($R^2 = 0.929$)	0.0035	2.17	-
FIN	5.6	6.3	6.4	ST(D(4)) ($R^2 = 0.511$)	0.032	2.84	-
S	5.7	5.7	5.55	XN(12,6,6,6,1)	5.6×10^{-3}	-	4.06
UK	3.7	3.7	4.0	ST(D(5)) ($R^2 = 0.694$)	0.0017	0.92	-
Màxim	5.7	6.3	6.4	-	-	-	-
Mínim	2.0	2.4	2.5	-	-	-	-
a	3.7	3.9	3.9	-	-	-	-
b	1.23	1.3	1.3	-	-	-	-

Taula 8.30: Valors de la variable X_{29} i mètode de predicció

	X_{29} =% d'internautes sobre el total de la població			
	95	99	03	mètode d'extrapolació
B	1.0	13.7	36.7	ST(TL) $R^2 = 0.825$
DK	3.8	28.2	66.2	ST(TL) $R^2 = 0.897$
D	1.8	19.4	42.7	ST(TL) $R^2 = 0.928$
EL	0.8	7.1	13.7	ST(TL) $R^2 = 0.889$
E	0.4	7.2	18.7	ST(TL) $R^2 = 0.867$
F	1.6	9.6	22.4	ST(TL) $R^2 = 0.821$
IRL	1.1	11.9	35.1	ST(TL) $R^2 = 0.805$
I	1.0	8.7	28.1	ST(TL) $R^2 = 0.705$
NL	3.9	19.0	55	ST(TL) $R^2 = 0.719$
A	1.9	22.8	48.0	ST(TL) $R^2 = 0.953$
P	0.9	7.0	14.7	ST(TL) $R^2 = 0.974$
FIN	13.9	32.3	57.7	ST(TL) $R^2 = 0.923$
S	5.1	41.4	85.3	ST(TL) $R^2 = 0.984$
UK	1.9	21.0	47.3	ST(TL) $R^2 = 0.919$
Màxim	13.9	41.4	85.3	-
Mínim	0.4	7.1	13.7	-
a	13.5	34.3	71.6	-
b	2.7	6.86	14.32	-

Taula 8.31: Valors de la variable X_{30} i mètode de predicció

	X_{30} =% d'abonats a la telefonia mòbil sobre el total de la població			
	95	99	03*	mètode d'extrapolació
B	2.3	31.3	77.0	ST(TL) $R^2 = 0.893$
DK	15.8	49.9	95.4	ST(TL) $R^2 = 0.998$
D	4.6	28.6	78.1	ST(TL) $R^2 = 0.813$
EL	2.6	31.4	88.2	ST(TL) $R^2 = 0.938$
E	2.4	31.2	83	ST(TL) $R^2 = 0.872$
F	1.8	36.3	75.6	ST(TL) $R^2 = 0.938$
IRL	4.4	37.5	94.2	ST(TL) $R^2 = 0.917$
I	6.9	52.6	100	ST(TL) $R^2 = 0.967$
NL	3.3	43.8	97.6	ST(TL) $R^2 = 0.907$
A	4.3	52.5	115.8	ST(TL) $R^2 = 0.925$
P	3.4	46.8	100	ST(TL) $R^2 = 0.963$
FIN	20.4	66.8	100	ST(TL) $R^2 = 0.963$
S	23.0	57.9	100	ST(TL) $R^2 = 0.994$
UK	9.8	40.4	93.7	ST(TL) $R^2 = 0.916$
Màxim	23.0	66.8	100	-
Mínim	1.8	28.6	75.6	-
<i>a</i>	21.2	38.2	24.4	-
<i>b</i>	7.07	12.73	8.13	-

8.2 Construcció de les matrius de les relacions borroses

A partir dels índexs de l'expertesa s'obtenen les taules numerades entre 8.32 i 8.61, que ens mostren les particions dels intervals $[minexpX_i, maxexpX_i]$ per a cada variable $X_i \in X$ (v. 2.35).

Taula 8.32: Subdivisió en intervals per a la variable X_1

X_1				
95	[3.7, 4.36)	[4.36, 5.01)	[5.01, 5.67)	[5.67, 6.33)
		[6.33, 6.99)	[6.99, 7.64)	[7.64, 8.3]
99	[3.9, 4.63)	[4.63, 5.36)	[5.36, 6.09)	[6.09, 6.81)
		[6.81, 7.54)	[7.54, 8.27)	[8.27, 9]
03	[4.3, 5.17)	[5.17, 6.04)	[6.04, 6.91)	[6.91, 7.79)
		[7.79, 8.66)	[8.66, 9.53)	[9.53, 10.4]

Taula 8.33: Subdivisió en intervals per a la variable X_2

X_2				
95	[73, 76.4)	[76.4, 79.9)	[79.9, 83.3)	[83.3, 86.7)
		[86.7, 90.1)	[90.1, 93.6)	[93.6, 97]
99	[81, 85)	[85, 89)	[89, 93)	[93, 97)
		[97, 101)	[101, 105)	[105, 109]
03	[81, 88.6)	[88.6, 96.1)	[96.1, 103.7)	[103.7, 111.3)
		[111.3, 118.9)	[118.9, 126.4)	[126.4, 134]

Taula 8.34: Subdivisió en intervals per a la variable X_3

X_3			
95	[3.3, 132.7)	[132.7, 262.0)	[262.0, 391.4]
99	[5.9, 168.3)	[168.3, 330.7)	[330.7, 493.1]
03	[7.1, 252.3)	[252.3, 497.4)	[497.4, 742.6]

Taula 8.35: Subdivisió en intervals per a la variable X_4

X_4					
95	[1, 1.26)	[1.26, 1.52)	[1.52, 1.78)	[1.78, 2.04)	[2.04, 2.3]
99	[0.9, 1.3)	[1.3, 1.7)	[1.7, 2.1)	[2.1, 2.5)	[2.5, 2.9]
03	[0.7, 1.26)	[1.26, 1.82)	[1.82, 2.38)	[2.38, 2.94)	[2.94, 3.5]

Taula 8.36: Subdivisió en intervals per a la variable X_5

X_5			
95	[0.853, 0.877)	[0.877, 0.901)	[0.901, 0.925]
99	[0.874, 0.895)	[0.895, 0.915)	[0.915, 0.936]
03	[0.891, 0.912)	[0.912, 0.933)	[0.933, 0.954)

Taula 8.37: Subdivisió en intervals per a la variable X_6

X_6				
95	[6.3, 6.65)	[6.65, 7.01)	[7.01, 7.36)	[7.36, 7.72)
	[7.72, 8.07)	[8.07, 8.43)	[8.43, 8.78)	[8.78, 9.13)
		[9.13, 9.49)	[9.49, 9.84)	[9.84, 10.2]
99	[6.8, 7.17)	[7.17, 7.55)	[7.55, 7.92)	[7.92, 8.29)
	[8.29, 8.66)	[8.66, 9.04)	[9.04, 9.41)	[9.41, 9.78)
		[9.78, 10.15)	[10.15, 10.53)	[10.53, 10.9]
03	[6, 6.53)	[6.53, 7.05)	[7.05, 7.58)	[7.58, 8.11)
	[8.11, 8.64)	[8.64, 9.16)	[9.16, 9.69)	[9.69, 10.22)
		[10.22, 10.75)	[10.75, 11.27)	[11.27, 11.8]

Taula 8.38: Subdivisió en intervals per a la variable X_7

X_7				
95	[74.9, 75.253)	[75.253, 75.609)	[75.609, 75.964)	[75.964, 76.318)
	[76.318, 76.673)	[76.673, 77.027)	[77.027, 77.382)	[77.382, 77.736)
		[77.736, 78.091)	[78.091, 78.445)	[78.445, 78.8]
99	[75.55, 75.909)	[75.909, 76.268)	[76.268, 76.627)	[76.627, 76.986)
	[76.986, 77.345)	[77.345, 77.705)	[77.705, 78.064)	[78.064, 78.423)
		[78.423, 78.782)	[78.782, 79.141)	[79.141, 79.5]
03	[76.33, 76.706)	[76.706, 77.083)	[77.083, 77.459)	[77.459, 77.835)
	[77.835, 78.212)	[78.212, 78.588)	[78.588, 78.965)	[78.965, 79.341)
		[79.341, 79.717)	[79.717, 80.094)	[80.094, 80.47]

Taula 8.39: Subdivisió en intervals per a la variable X_8

X_8			
95	[920, 1592.3)	[1592.3, 2264.7)	[2264.7, 2937]
99	[644, 1380.3)	[1380.3, 2116.7)	[2116.7, 2853]
03	[336, 1187.3)	[1187.3, 2038.7)	[2038.7, 2890]

Taula 8.40: Subdivisió en intervals per a la variable X_9

X_9			
95	[947, 1748.8)	[1748.8, 2550.6)	[2550.6, 3352.3)
	[3352.3, 4154.1)	[4154.1, 4955.9)	[4955.9, 5757.7)
	[5757.7, 6559.4)	[6559.4, 7361.2)	[7361.2, 8163]
99	[1405, 2044.9)	[2044.9, 2684.8)	[2684.8, 3324.7)
	[3324.7, 3964.6)	[3964.6, 4604.4)	[4604.4, 5244.3)
	[5244.3, 5884.2)	[5884.2, 6524.1)	[6524.1, 7164]
03	[397, 1209.6)	[1209.6, 2022.1)	[2022.1, 2834.7)
	[2834.7, 3647.2)	[3647.2, 4459.8)	[4459.8, 5272.3)
	[5272.3, 6084.9)	[6084.9, 6897.4)	[6897.4, 7710]

Taula 8.41: Subdivisió en intervals per a la variable X_{10}

X_{10}				
95	[8, 10.73)	[10.73, 13.5)	[13.5, 16.2)	[16.2, 18.9)
	[18.9, 21.6)	[21.6, 24.4)	[24.4, 27.1)	[27.1, 29.1)
		[29.1, 32.6)	[32.6, 35.3)	[35.3, 38]
99	[2, 5.82)	[5.82, 9.64)	[9.64, 13.46)	[13.46, 17.28)
	[17.28, 21.1)	[21.1, 24.91)	[24.91, 28.73)	[28.73, 32.55)
		[32.55, 36.37)	[36.37, 40.19)	[40.19, 44]
03	[0, 9)	[9, 18)	[18, 27)	[27, 36)
	[36, 45)	[45, 54)	[54, 63)	[63, 72)
		[72, 81)	[81, 90)	[90, 99]

Taula 8.42: Subdivisió en intervals per a la variable X_{11}

X_{11}				
95	[5020, 6581.1)	[6581.1, 8152.2)	[8152.2, 9718.3)	[9718.3, 11284.4)
	[11284.4, 12850.5)	[12850.5, 14416.5)	[14416.5, 15982.6)	[15982.6, 17548.7)
		[17548.7, 19114.8)	[19114.8, 20630.9)	[20630.9, 22247]
99	[15414, 16368.9)	[16368.9, 17323.8)	[17323.8, 18278.7)	[18278.7, 19233.6)
	[19233.6, 20188.5)	[20188.5, 21143.5)	[21143.5, 22098.4)	[22098.4, 23053.3)
		[23053.3, 24008.2)	[24008.2, 24963.1)	[24963.1, 25918]
03	[19388, 20362.8)	[20362.8, 21337.6)	[21337.6, 22312.5)	[22312.5, 23287.3)
	[23287.3, 24262.1)	[24262.1, 25236.9)	[25236.9, 26211.7)	[26211.7, 27186.5)
		[27186.5, 28161.4)	[28161.4, 29136.2)	[29136.2, 30111]

Taula 8.43: Subdivisió en intervals per a la variable X_{12}

X_{12}				
95	[23, 27.68)	[27.68, 32.36)	[32.36, 37.05)	[37.05, 41.73)
	[41.73, 46.41)	[46.41, 51.09)	[51.09, 55.77)	[55.77, 60.45)
		[60.45, 65.14)	[65.14, 69.82)	[69.82, 74.5]
99	[27.1, 32.66)	[32.66, 38.23)	[38.23, 43.79)	[43.79, 49.35)
	[49.35, 54.92)	[54.92, 60.48)	[60.48, 66.05)	[66.05, 71.61)
		[71.61, 77.17)	[77.17, 82.74)	[82.74, 88.3]
03	[26, 32.73)	[32.73, 39.46)	[39.46, 46.19)	[46.19, 52.92)
	[52.92, 59.64)	[59.64, 66.37)	[66.37, 73.1)	[73.1, 79.83)
		[79.83, 86.56)	[86.56, 93.28)	[93.28, 100]

Taula 8.44: Subdivisió en intervals per a la variable X_{13}

X_{13}			
95	[5.2, 6)	[6, 6.8)	[6.8, 7.6)
	[7.6, 8.4)	[8.4, 9.2)	[9.2, 10)
	[10, 10.8)	[10.8, 11.6)	[11.6, 12.4]
99	[5.3, 6.23)	[6.23, 7.17)	[7.17, 8.1)
	[8.1, 9.03)	[9.03, 9.97)	[9.97, 10.9)
	[10.9, 11.83)	[11.83, 12.77)	[12.77, 13.7]
03	[5, 6.11)	[6.11, 7.22)	[7.22, 8.33)
	[8.33, 9.44)	[9.44, 10.55)	[10.55, 11.66)
	[11.66, 12.77)	[12.77, 13.88)	[13.88, 15]

Taula 8.45: Subdivisió en intervals per a la variable X_{14}

X_{14}				
95	[3.9, 6.61)	[6.61, 9.33) [14.76, 17.47)	[9.33, 12.04) [17.47, 20.19)	[12.04, 14.76) [20.19, 22.9]
99	[3.4, 5.19)	[5.19, 6.97) [10.54, 12.33)	[6.97, 8.76) [12.33, 14.11)	[8.76, 10.54) [14.11, 15.9]
03	[2.6, 4.23)	[4.23, 5.86) [9.11, 10.74)	[5.86, 7.49) [10.74, 12.37)	[7.49, 9.11) [12.37, 14]

Taula 8.46: Subdivisió en intervals per a la variable X_{15}

X_{15}		
95	[4.8, 15.63)	[15.63, 26.47) [26.47, 37.3]
99	[6.1, 17.2)	[17.2, 28.3) [28.3, 39.4]
03	[4.6, 17.6)	[17.6, 30.6) [30.6, 43.6]

Taula 8.47: Subdivisió en intervals per a la variable X_{16}

X_{16}					
95	[5.6, 12.98)	[12.98, 20.36)	[20.36, 27.74)	[27.74, 35.12)	[35.12, 42.5]
99	[5.4, 10.84)	[10.84, 16.28)	[16.28, 21.72)	[21.72, 27.16)	[27.16, 32.6]
03	[3.7, 9.94)	[9.94, 16.18)	[16.18, 22.42)	[22.42, 28.66)	[28.66, 34.9]

Taula 8.48: Subdivisió en intervals per a la variable X_{17}

X_{17}				
95	[1730, 2696.3)	[2696.3, 3662.6) [5595.1, 6561.4)	[3662.6, 4628.9) [6561.4, 7527.7)	[4628.9, 5595.1) [7527.7, 8494]
99	[2395, 3424.4)	[3424.4, 4453.9) [6512.7, 7542.1)	[4453.9, 5483.3) [7542.1, 8571.6)	[5483.3, 6512.7) [8571.6, 9601]
03	[3030, 4194.6)	[4194.6, 5359.1) [7688.3, 8852.9)	[5359.1, 6523.7) [8852.9, 10017.4)	[6523.7, 7688.3) [10017.4, 11182]

Taula 8.49: Subdivisió en intervals per a la variable X_{18}

X_{18}			
95	[0.13, 0.427)	[0.427, 0.723)	[0.723, 1.02]
99	[0.15, 0.437)	[0.437, 0.723)	[0.723, 1.01]
03	[0.16, 0.477)	[0.477, 0.793)	[0.793, 1.11]

Taula 8.50: Subdivisió en intervals per a la variable X_{19}

X_{19}			
95	[0.69, 1.217)	[1.217, 1.743)	[1.743, 2.27]
99	[0.79, 1.31)	[1.31, 1.83)	[1.83, 2.35]
03	[0.73, 1.197)	[1.197, 1.663)	[1.663, 2.13]

Taula 8.51: Subdivisió en intervals per a la variable X_{20}

X_{20}			
95	[0.95, 0.997)	[0.997, 1.043)	[1.043, 1.09]
99	[0.96, 1.017)	[1.017, 1.073)	[1.073, 1.13]
03	[1, 1.08)	[1.08, 1.16)	[1.16, 1.24]

Taula 8.52: Subdivisió en intervals per a la variable X_{21}

X_{21}					
95	[26.8, 30.38)	[30.38, 33.96)	[33.96, 37.54)	[37.54, 41.12)	[41.12, 44.7]
99	[55.4, 60.76)	[60.76, 66.12)	[66.12, 71.48)	[71.48, 76.84)	[76.84, 82.2]
03	[51.4, 58.9)	[58.9, 66.4)	[66.4, 73.9)	[73.9, 81.4)	[81.4, 88.9]

Taula 8.53: Subdivisió en intervals per a la variable X_{22}

X_{22}					
95	[5.7, 15.84)	[15.84, 25.98)	[25.98, 36.12)	[36.12, 46.26)	[46.26, 56.4]
99	[16, 22.6)	[22.6, 29.2)	[29.2, 35.8)	[35.8, 42.4)	[42.4, 49]
03	[14.1, 20.92)	[20.92, 27.74)	[27.74, 34.56)	[34.56, 41.38)	[41.38, 48.2]

Taula 8.54: Subdivisió en intervals per a la variable X_{23}

X_{23}			
95	[5.4, 27.57)	[27.57, 49.73)	[49.73, 71.9]
99	[42.3, 48.87)	[48.87, 55.43)	[55.43, 62]
03	[23.3, 41.97)	[41.97, 60.63)	[60.63, 79.3]

Taula 8.55: Subdivisió en intervals per a la variable X_{24}

X_{24}				
95	[0.49, 0.76)	[0.76, 1.03)	[1.03, 1.3)	[1.3, 1.57)
	[1.57, 1.84)	[1.84, 2.11)	[2.11, 2.38)	[2.38, 2.65)
		[2.65, 2.92)	[2.92, 3.19)	[3.19, 3.46]
99	[0.58, 0.873)	[0.873, 1.165)	[1.165, 1.458)	[1.458, 1.751)
	[1.751, 2.044)	[2.044, 2.336)	[2.336, 2.629)	[2.629, 2.922)
		[2.922, 3.215)	[3.215, 3.507)	[3.507, 3.80]
03	[0.67, 1.009)	[1.009, 1.348)	[1.348, 1.687)	[1.687, 2.026)
	[2.026, 2.365)	[2.365, 2.705)	[2.705, 3.044)	[3.044, 3.383)
		[3.383, 3.722)	[3.722, 4.061)	[4.061, 4.4]

Taula 8.56: Subdivisió en intervals per a la variable X_{25}

X_{25}					
95	[20.1, 24.924)	[24.924, 29.748)	[29.748, 34.572)	[34.572, 39.396)	[39.396, 44.22]
99	[18.85, 24.156)	[24.156, 29.462)	[29.462, 34.678)	[34.678, 40.074)	[40.074, 45.38]
03	[16.98, 22.874)	[22.874, 28.768)	[28.768, 34.662)	[34.662, 40.556)	[40.556, 46.45]

Taula 8.57: Subdivisió en intervals per a la variable X_{26}

X_{26}			
95	[2.23, 3.203)	[3.203, 4.177)	[4.177, 5.15)
	[5.15, 6.123)	[6.123, 7.097)	[7.097, 8.07)
	[8.07, 9.043)	[9.043, 10.017)	[10.017, 10.99]
99	[2.21, 3.172)	[3.172, 4.134)	[4.134, 5.097)
	[5.097, 6.059)	[6.059, 7.021)	[7.021, 7.983)
	[7.983, 8.946)	[8.946, 9.908)	[9.908, 10.87]
03	[2.36, 3.324)	[3.324, 4.289)	[4.289, 5.253)
	[5.253, 6.218)	[6.218, 7.182)	[7.182, 8.147)
	[8.147, 9.111)	[9.111, 10.076)	[10.076, 11.04]

Taula 8.58: Subdivisió en intervals per a la variable X_{27}

X_{27}				
95	[0, 8.45)	[8.45, 16.909)	[16.909, 25.364)	[25.364, 33.818)
	[33.818, 42.273)	[42.273, 50.727)	[50.727, 59.182)	[59.182, 67.636)
		[67.636, 76.091)	[76.091, 84.545)	[84.545, 93]
99	[0.9, 22.155)	[22.155, 43.409)	[43.409, 64.664)	[64.664, 85.918)
	[85.918, 107.173)	[107.173, 128.427)	[128.427, 149.682)	[149.682, 170.936)
		[170.936, 192.191)	[192.191, 213.445)	[213.445, 234.7]
03	[1.7, 26.827)	[26.827, 51.955)	[51.955, 77.082)	[77.082, 102.209)
	[102.209, 127.336)	[127.336, 152.464)	[152.464, 177.591)	[177.591, 202.718)
		[202.718, 227.845)	[227.845, 252.973)	[252.973, 278.1]

Taula 8.59: Subdivisió en intervals per a la variable X_{28}

X_{28}			
95	[2, 3.23)	[3.23, 4.47)	[4.47, 5.7]
99	[2.4, 3.7)	[3.7, 5)	[5, 6.3]
03	[2.5, 3.8)	[3.8, 5.1)	[5.1, 6.4]

Taula 8.60: Subdivisió en intervals per a la variable X_{29}

X_{29}					
95	[0.4, 3.1)	[3.1, 5.8)	[5.8, 8.5)	[8.5, 11.2)	[11.2, 13.9]
99	[7.1, 13.96)	[13.96, 20.82)	[20.82, 27.68)	[27.68, 34.54)	[34.54, 41.4]
03	[13.7, 28.02)	[28.02, 42.34)	[42.34, 56.66)	[56.66, 70.98)	[70.98, 85.3]

Taula 8.61: Subdivisió en intervals per a la variable X_{30}

X_{30}			
95	[1.8, 8.87)	[8.87, 15.93)	[15.93, 23]
99	[28.6, 41.33)	[41.33, 54.07)	[54.07, 66.8]
03	[75.6, 83.73)	[83.73, 91.87)	[91.87, 100]

8.3 Clausures transitives

Les següents matrius són algunes clausures transitives de les mesures obtingudes en la secció 6.5 del capítol 6. El símbol (*) vol dir que s'ha fet la clausura transitiva per la t -norma t_{min} , i (**) per la t -norma t_{PA} . Com en el cas de la construcció de les matrius de les relacions borroses i el càlcul de les diverses matrius de les mesures de semblança, els càlculs han estat efectuats amb la implementació de petits programes amb el paquet informàtic Maple. Aquests programes han estat prèviament validats amb matrius de clausures conegudes.

$$MJMIN^*(95) = \begin{matrix} & B & DK & D & EL & E & F & IRL & I & NL & A & P & FIN & S & UK \\ \begin{matrix} B \\ DK \\ D \\ EL \\ E \\ F \\ IRL \\ I \\ NL \\ A \\ P \\ FIN \\ S \\ UK \end{matrix} & \left(\begin{array}{cccccccccccccc} 1. & .8 & .8 & .7 & .6 & .9 & .7 & .7 & .9 & .8 & .6 & .8 & .8 & .8 \\ .8 & 1. & .8 & .7 & .6 & .8 & .7 & .7 & .8 & .8 & .6 & .8 & .8 & .8 \\ .8 & .8 & 1. & .7 & .6 & .8 & .7 & .7 & .8 & .9 & .6 & .8 & .8 & .8 \\ .7 & .7 & .7 & 1. & .6 & .7 & .7 & .7 & .7 & .7 & .6 & .7 & .7 & .7 \\ .6 & .6 & .6 & .6 & 1. & .6 & .6 & .6 & .6 & .6 & .6 & .6 & .6 & .6 \\ .9 & .8 & .8 & .7 & .6 & 1. & .7 & .7 & .9 & .8 & .6 & .8 & .8 & .8 \\ .7 & .7 & .7 & .7 & .6 & .7 & 1. & .7 & .7 & .7 & .6 & .7 & .7 & .7 \\ .7 & .7 & .7 & .7 & .6 & .7 & .7 & 1. & .7 & .7 & .6 & .7 & .7 & .7 \\ .9 & .8 & .8 & .7 & .6 & .9 & .7 & .7 & 1. & .8 & .6 & .8 & .8 & .8 \\ .8 & .8 & .9 & .7 & .6 & .8 & .7 & .7 & .8 & 1. & .6 & .8 & .8 & .8 \\ .6 & .6 & .6 & .6 & .6 & .6 & .6 & .6 & .6 & .6 & 1. & .6 & .6 & .6 \\ .8 & .8 & .8 & .7 & .6 & .8 & .7 & .7 & .8 & .8 & .6 & 1. & .8 & .8 \\ .8 & .8 & .8 & .7 & .6 & .8 & .7 & .7 & .8 & .8 & .6 & .8 & 1. & .8 \\ .8 & .8 & .8 & .7 & .6 & .8 & .7 & .7 & .8 & .8 & .6 & .8 & .8 & 1. \end{array} \right) \end{matrix}$$

$$MJMIN^{**}(95) = \begin{matrix} & B & DK & D & EL & E & F & IRL & I & NL & A & P & FIN & S & UK \\ \begin{matrix} B \\ DK \\ D \\ EL \\ E \\ F \\ IRL \\ I \\ NL \\ A \\ P \\ FIN \\ S \\ UK \end{matrix} & \left(\begin{matrix} 1. & .7 & .8 & .5 & .4 & .9 & .7 & .7 & .8 & .8 & .5 & .6 & .6 & .8 \\ .7 & 1. & .8 & .4 & .3 & .8 & .6 & .5 & .8 & .7 & .5 & .7 & .8 & .8 \\ .8 & .8 & 1. & .5 & .4 & .8 & .7 & .6 & .8 & .9 & .4 & .6 & .7 & .7 \\ .5 & .4 & .5 & 1. & .6 & .4 & .7 & .6 & .4 & .5 & .6 & .4 & .3 & .5 \\ .4 & .3 & .4 & .6 & 1. & .4 & .6 & .5 & .4 & .4 & .5 & .3 & .3 & .4 \\ .9 & .8 & .8 & .4 & .4 & 1. & .6 & .6 & .9 & .8 & .5 & .6 & .7 & .8 \\ .7 & .6 & .7 & .7 & .6 & .6 & 1. & .7 & .7 & .7 & .5 & .5 & .5 & .7 \\ .7 & .5 & .6 & .6 & .5 & .6 & .7 & 1. & .6 & .7 & .6 & .5 & .5 & .6 \\ .8 & .8 & .8 & .4 & .4 & .9 & .7 & .6 & 1. & .8 & .5 & .7 & .7 & .8 \\ .8 & .7 & .9 & .5 & .4 & .8 & .7 & .7 & .8 & 1. & .5 & .5 & .6 & .7 \\ .5 & .5 & .4 & .6 & .5 & .5 & .5 & .6 & .5 & .5 & 1. & .5 & .4 & .6 \\ .6 & .7 & .6 & .4 & .3 & .6 & .5 & .5 & .7 & .5 & .5 & 1. & .8 & .7 \\ .6 & .8 & .7 & .3 & .3 & .7 & .5 & .5 & .7 & .6 & .4 & .8 & 1. & .6 \\ .8 & .8 & .7 & .5 & .4 & .8 & .7 & .6 & .8 & .7 & .6 & .7 & .6 & 1. \end{matrix} \right) \end{matrix}$$

$$MJMIN^{**}(99) = \begin{matrix} & B & DK & D & EL & E & F & IRL & I & NL & A & P & FIN & S & UK \\ \begin{matrix} B \\ DK \\ D \\ EL \\ E \\ F \\ IRL \\ I \\ NL \\ A \\ P \\ FIN \\ S \\ UK \end{matrix} & \left(\begin{matrix} 1. & .7 & .7 & .3 & .5 & .8 & .6 & .5 & .7 & .7 & .5 & .6 & .6 & .8 \\ .7 & 1. & .7 & .2 & .4 & .7 & .6 & .5 & .7 & .7 & .5 & .7 & .7 & .8 \\ .7 & .7 & 1. & .3 & .4 & .8 & .7 & .5 & .8 & .8 & .6 & .6 & .7 & .8 \\ .3 & .2 & .3 & 1. & .5 & .3 & .3 & .5 & .3 & .3 & .3 & .2 & .2 & .3 \\ .5 & .4 & .4 & .5 & 1. & .5 & .6 & .5 & .4 & .4 & .5 & .3 & .3 & .4 \\ .8 & .7 & .8 & .3 & .5 & 1. & .7 & .6 & .7 & .8 & .5 & .6 & .6 & .8 \\ .6 & .6 & .7 & .3 & .6 & .7 & 1. & .6 & .6 & .7 & .8 & .5 & .5 & .7 \\ .5 & .5 & .5 & .5 & .5 & .6 & .6 & 1. & .4 & .5 & .6 & .4 & .4 & .6 \\ .7 & .7 & .8 & .3 & .4 & .7 & .6 & .4 & 1. & .9 & .5 & .5 & .6 & .7 \\ .7 & .7 & .8 & .3 & .4 & .8 & .7 & .5 & .9 & 1. & .6 & .5 & .6 & .7 \\ .5 & .5 & .6 & .3 & .5 & .5 & .8 & .6 & .5 & .6 & 1. & .5 & .5 & .6 \\ .6 & .7 & .6 & .2 & .3 & .6 & .5 & .4 & .5 & .5 & .5 & 1. & .8 & .7 \\ .6 & .7 & .7 & .2 & .3 & .6 & .5 & .4 & .6 & .6 & .5 & .8 & 1. & .7 \\ .8 & .8 & .8 & .3 & .4 & .8 & .7 & .6 & .7 & .7 & .6 & .7 & .7 & 1. \end{matrix} \right) \end{matrix}$$

$$MJMIN^{**}(03) = \begin{matrix} & B & DK & D & EL & E & F & IRL & I & NL & A & P & FIN & S & UK \\ \begin{matrix} B \\ DK \\ D \\ EL \\ E \\ F \\ IRL \\ I \\ NL \\ A \\ P \\ FIN \\ S \\ UK \end{matrix} & \left(\begin{array}{cccccccccccccc} 1. & .8 & .7 & .3 & .4 & .8 & .6 & .5 & .8 & .6 & .6 & .7 & .8 & .8 \\ .8 & 1. & .6 & .3 & .4 & .6 & .7 & .5 & .7 & .6 & .6 & .7 & .7 & .8 \\ .7 & .6 & 1. & .3 & .4 & .8 & .6 & .5 & .8 & .8 & .7 & .6 & .7 & .7 \\ .3 & .3 & .3 & 1. & .5 & .3 & .3 & .5 & .3 & .3 & .5 & .3 & .2 & .3 \\ .4 & .4 & .4 & .5 & 1. & .5 & .5 & .6 & .4 & .4 & .5 & .4 & .3 & .4 \\ .8 & .6 & .8 & .3 & .5 & 1. & .6 & .6 & .8 & .8 & .7 & .6 & .7 & .8 \\ .6 & .7 & .6 & .3 & .5 & .6 & 1. & .7 & .7 & .6 & .6 & .5 & .6 & .7 \\ .5 & .5 & .5 & .5 & .6 & .6 & .7 & 1. & .6 & .5 & .5 & .5 & .4 & .6 \\ .8 & .7 & .8 & .3 & .4 & .8 & .7 & .6 & 1. & .8 & .7 & .6 & .7 & .7 \\ .6 & .6 & .8 & .3 & .4 & .8 & .6 & .5 & .8 & 1. & .7 & .4 & .6 & .6 \\ .6 & .6 & .7 & .5 & .5 & .7 & .6 & .5 & .7 & .7 & 1. & .4 & .5 & .6 \\ .7 & .7 & .6 & .3 & .4 & .6 & .5 & .5 & .6 & .4 & .4 & 1. & .8 & .7 \\ .8 & .7 & .7 & .2 & .3 & .7 & .6 & .4 & .7 & .6 & .5 & .8 & 1. & .7 \\ .8 & .8 & .7 & .3 & .4 & .8 & .7 & .6 & .7 & .6 & .6 & .7 & .7 & 1. \end{array} \right) \end{matrix}$$

$$MJPA^{**}(95) = \begin{matrix} & B & DK & D & EL & E & F & IRL & I & NL & A & P & FIN & S & UK \\ \begin{matrix} B \\ DK \\ D \\ EL \\ E \\ F \\ IRL \\ I \\ NL \\ A \\ P \\ FIN \\ S \\ UK \end{matrix} & \left(\begin{array}{cccccccccccccc} 1 & .2 & .1 & 0 & 0 & .1 & 0 & 0 & .1 & .2 & 0 & .2 & .3 & 0 \\ .2 & 1 & .2 & .1 & 0 & .3 & .1 & .1 & .2 & .2 & .2 & .3 & .5 & .2 \\ .1 & .2 & 1 & .1 & 0 & .2 & .1 & .1 & .2 & .2 & .1 & .2 & .3 & .1 \\ 0 & .1 & .1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & .1 & 0 & 0 & .1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & .1 & .1 & 0 \\ .1 & .3 & .2 & 0 & 0 & 1 & .1 & .1 & .2 & .2 & .1 & .3 & .4 & .1 \\ 0 & .1 & .1 & 0 & 0 & .1 & 1 & 0 & .1 & .1 & 0 & .1 & .2 & 0 \\ 0 & .1 & .1 & 0 & 0 & .1 & 0 & 1 & .1 & .1 & 0 & .1 & .2 & 0 \\ .1 & .2 & .2 & 0 & 0 & .2 & .1 & .1 & 1 & .2 & .1 & .2 & .3 & .1 \\ .2 & .2 & .2 & .1 & 0 & .2 & .1 & .1 & .2 & 1 & .1 & .2 & .3 & .1 \\ 0 & .2 & .1 & 0 & 0 & .1 & 0 & 0 & .1 & .1 & 1 & .1 & .2 & .1 \\ .2 & .3 & .2 & 0 & .1 & .3 & .1 & .1 & .2 & .2 & .1 & 1 & .5 & .2 \\ .3 & .5 & .3 & .1 & .1 & .4 & .2 & .2 & .3 & .3 & .2 & .5 & 1 & .3 \\ 0 & .2 & .1 & 0 & 0 & .1 & 0 & 0 & .1 & .1 & .1 & .2 & .3 & 1 \end{array} \right) \end{matrix}$$

$$MJPA^{**}(99) = \begin{matrix} & B & DK & D & EL & E & F & IRL & I & NL & A & P & FIN & S & UK \\ \begin{matrix} B \\ DK \\ D \\ EL \\ E \\ F \\ IRL \\ I \\ NL \\ A \\ P \\ FIN \\ S \\ UK \end{matrix} & \left(\begin{array}{cccccccccccccc} 1 & .2 & .1 & 0 & 0 & .1 & 0 & 0 & .2 & .2 & 0 & .2 & .3 & .1 \\ .2 & 1 & .2 & 0 & 0 & .2 & .1 & .1 & .3 & .3 & .2 & .4 & .4 & .2 \\ .1 & .2 & 1 & 0 & 0 & .1 & .1 & 0 & .2 & .2 & .1 & .3 & .3 & .1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & .1 & .1 & 0 \\ .1 & .2 & .1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & .1 & .1 & 0 & .2 & .3 & .1 \\ 0 & .1 & .1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & .1 & .1 & .1 & .1 & .2 & 0 \\ 0 & .1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & .1 & .1 & 0 & .1 & .1 & 0 \\ .2 & .3 & .2 & 0 & 0 & .1 & .1 & .1 & 1 & .2 & .1 & .2 & .3 & .1 \\ .2 & .3 & .2 & 0 & 0 & .1 & .1 & .1 & .2 & 1 & .1 & .2 & .3 & .1 \\ 0 & .2 & .1 & 0 & 0 & 0 & .1 & 0 & .1 & .1 & 1 & .2 & .2 & .1 \\ .2 & .4 & .3 & 0 & .1 & .2 & .1 & .1 & .2 & .2 & .2 & 1 & .5 & .3 \\ .3 & .4 & .3 & 0 & .1 & .3 & .2 & .1 & .3 & .3 & .2 & .5 & 1 & .3 \\ .1 & .2 & .1 & 0 & 0 & .1 & 0 & 0 & .1 & .1 & .1 & .3 & .3 & 1 \end{array} \right) \end{matrix}$$

$$MJPA^{**}(03) = \begin{matrix} & B & DK & D & EL & E & F & IRL & I & NL & A & P & FIN & S & UK \\ \begin{matrix} B \\ DK \\ D \\ EL \\ E \\ F \\ IRL \\ I \\ NL \\ A \\ P \\ FIN \\ S \\ UK \end{matrix} & \left(\begin{array}{cccccccccccccc} 1 & .2 & .1 & 0 & 0 & .1 & .1 & 0 & .1 & .1 & .1 & .2 & .3 & .1 \\ .2 & 1 & .1 & 0 & 0 & .2 & .2 & .1 & .2 & .2 & .1 & .3 & .4 & .2 \\ .1 & .1 & 1 & .1 & 0 & .1 & .1 & .1 & .1 & .1 & .2 & .1 & .2 & .1 \\ 0 & 0 & .1 & 1 & 0 & .1 & 0 & 0 & 0 & 0 & .1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ .1 & .2 & .1 & .1 & 0 & 1 & .1 & .1 & .1 & .2 & .1 & .1 & .2 & .1 \\ .1 & .2 & .1 & 0 & 0 & .1 & 1 & .1 & .1 & .2 & .2 & .1 & .1 & .2 & .1 \\ 0 & .1 & .1 & 0 & 0 & .1 & .1 & 1 & .1 & .1 & 0 & .1 & .1 & .1 \\ .1 & .2 & .1 & 0 & 0 & .1 & .2 & .1 & 1 & .2 & .1 & .1 & .2 & .1 \\ .1 & .2 & .2 & .1 & 0 & .2 & .2 & .1 & .2 & 1 & .2 & .1 & .3 & .1 \\ .1 & .1 & .1 & 0 & 0 & .1 & .1 & 0 & .1 & .2 & 1 & .1 & .1 & 0 \\ .2 & .3 & .2 & 0 & 0 & .1 & .1 & .1 & .1 & .1 & .1 & 1 & .3 & .2 \\ .3 & .4 & .2 & 0 & 0 & .2 & .2 & .1 & .2 & .3 & .1 & .3 & 1 & .3 \\ .1 & .2 & .1 & 0 & 0 & .1 & .1 & .1 & .1 & .1 & .1 & 0 & .2 & .3 & 1 \end{array} \right) \end{matrix}$$

$$MAPARG^{**}(95) = \begin{matrix} & B & DK & D & EL & E & F & IRL & I & NL & A & P & FIN & S & UK \\ \begin{matrix} B \\ DK \\ D \\ EL \\ E \\ F \\ IRL \\ I \\ NL \\ A \\ P \\ FIN \\ S \\ UK \end{matrix} & \left(\begin{matrix} 1. & .5 & .7 & .5 & .5 & .7 & .6 & .6 & .7 & .7 & .4 & .4 & .4 & .5 & .4 \\ .5 & 1. & .6 & .3 & .2 & .7 & .4 & .4 & .7 & .6 & .5 & .6 & .7 & .6 \\ .7 & .6 & 1. & .5 & .4 & .7 & .6 & .6 & .6 & .8 & .4 & .4 & .6 & .4 \\ .5 & .3 & .5 & 1. & .8 & .4 & .8 & .7 & .5 & .6 & .7 & .2 & .2 & .5 \\ .5 & .2 & .4 & .8 & 1. & .4 & .7 & .7 & .4 & .5 & .7 & .3 & .2 & .5 \\ .7 & .7 & .7 & .4 & .4 & 1. & .4 & .5 & .7 & .7 & .4 & .5 & .6 & .5 \\ .6 & .4 & .6 & .8 & .7 & .4 & 1. & .7 & .5 & .7 & .6 & .3 & .3 & .5 \\ .6 & .4 & .6 & .7 & .7 & .5 & .7 & 1. & .5 & .7 & .7 & .2 & .4 & .5 \\ .7 & .7 & .6 & .5 & .4 & .7 & .5 & .5 & 1. & .6 & .4 & .5 & .6 & .5 \\ .7 & .6 & .8 & .6 & .5 & .7 & .7 & .7 & .6 & 1. & .5 & .3 & .5 & .5 \\ .4 & .5 & .4 & .7 & .7 & .4 & .6 & .7 & .4 & .5 & 1. & .4 & .3 & .6 \\ .4 & .6 & .4 & .2 & .3 & .5 & .3 & .2 & .5 & .3 & .4 & 1. & .7 & .5 \\ .5 & .7 & .6 & .2 & .2 & .6 & .3 & .4 & .6 & .5 & .3 & .7 & 1. & .5 \\ .4 & .6 & .4 & .5 & .5 & .5 & .5 & .5 & .5 & .5 & .6 & .5 & .5 & 1. \end{matrix} \right) \end{matrix}$$

$$MAPARG^{**}(99) = \begin{matrix} & B & DK & D & EL & E & F & IRL & I & NL & A & P & FIN & S & UK \\ \begin{matrix} B \\ DK \\ D \\ EL \\ E \\ F \\ IRL \\ I \\ NL \\ A \\ P \\ FIN \\ S \\ UK \end{matrix} & \left(\begin{matrix} 1. & .6 & .5 & .5 & .5 & .7 & .4 & .4 & .6 & .6 & .4 & .4 & .4 & .5 & .5 \\ .6 & 1. & .5 & .3 & .3 & .5 & .4 & .3 & .6 & .6 & .5 & .6 & .7 & .6 \\ .5 & .5 & 1. & .4 & .4 & .5 & .6 & .4 & .7 & .7 & .5 & .4 & .6 & .4 \\ .5 & .3 & .4 & 1. & .8 & .5 & .6 & .8 & .5 & .5 & .7 & .2 & .2 & .4 \\ .5 & .3 & .4 & .8 & 1. & .6 & .7 & .7 & .5 & .5 & .7 & .3 & .2 & .4 \\ .7 & .5 & .5 & .5 & .6 & 1. & .5 & .6 & .6 & .6 & .4 & .4 & .4 & .4 \\ .4 & .4 & .6 & .6 & .7 & .5 & 1. & .7 & .6 & .6 & .8 & .3 & .3 & .5 \\ .4 & .3 & .4 & .8 & .7 & .6 & .7 & 1. & .5 & .5 & .6 & .2 & .2 & .5 \\ .6 & .6 & .7 & .5 & .5 & .6 & .6 & .5 & 1. & .9 & .5 & .4 & .5 & .5 \\ .6 & .6 & .7 & .5 & .5 & .6 & .6 & .5 & .9 & 1. & .5 & .3 & .5 & .5 \\ .4 & .5 & .5 & .7 & .7 & .4 & .8 & .6 & .5 & .5 & 1. & .4 & .3 & .5 \\ .4 & .6 & .4 & .2 & .3 & .4 & .3 & .2 & .4 & .3 & .4 & 1. & .8 & .6 \\ .5 & .7 & .6 & .2 & .2 & .4 & .3 & .2 & .5 & .5 & .3 & .8 & 1. & .6 \\ .5 & .6 & .4 & .4 & .4 & .4 & .5 & .5 & .5 & .5 & .5 & .6 & .6 & 1. \end{matrix} \right) \end{matrix}$$

$$\text{MAPARG}^{**}(03) = \begin{matrix} & B & DK & D & EL & E & F & IRL & I & NL & A & P & FIN & S & UK \\ \begin{matrix} B \\ DK \\ D \\ EL \\ E \\ F \\ IRL \\ I \\ NL \\ A \\ P \\ FIN \\ S \\ UK \end{matrix} & \left(\begin{array}{cccccccccccccc}
 1. & .6 & .4 & .4 & .4 & .6 & .4 & .4 & .5 & .5 & .5 & .5 & .5 & .6 & .6 \\
 .6 & 1. & .3 & .3 & .3 & .4 & .5 & .4 & .5 & .5 & .5 & .5 & .5 & .6 & .6 \\
 .4 & .3 & 1. & .6 & .5 & .7 & .4 & .5 & .7 & .7 & .6 & .4 & .4 & .5 & .3 \\
 .4 & .3 & .6 & 1. & .8 & .6 & .5 & .7 & .5 & .6 & .7 & .4 & .4 & .3 & .4 \\
 .4 & .3 & .5 & .8 & 1. & .5 & .6 & .7 & .5 & .5 & .7 & .4 & .2 & .2 & .5 \\
 .6 & .4 & .7 & .6 & .5 & 1. & .5 & .6 & .7 & .7 & .6 & .4 & .4 & .5 & .5 \\
 .4 & .5 & .4 & .5 & .6 & .5 & 1. & .7 & .6 & .6 & .6 & .3 & .4 & .4 & .6 \\
 .4 & .4 & .5 & .7 & .7 & .6 & .7 & 1. & .5 & .5 & .6 & .4 & .3 & .3 & .6 \\
 .5 & .5 & .7 & .5 & .5 & .7 & .6 & .5 & 1. & .8 & .6 & .3 & .5 & .5 & .5 \\
 .5 & .5 & .7 & .6 & .5 & .7 & .6 & .5 & .8 & 1. & .7 & .3 & .5 & .5 & .4 \\
 .5 & .5 & .6 & .7 & .7 & .6 & .6 & .6 & .6 & .7 & 1. & .3 & .3 & .3 & .3 \\
 .5 & .5 & .4 & .4 & .4 & .4 & .3 & .4 & .3 & .3 & .3 & 1. & .7 & .7 & .5 \\
 .6 & .6 & .5 & .3 & .2 & .5 & .4 & .3 & .5 & .5 & .3 & .7 & 1. & .7 & .5 \\
 .6 & .6 & .3 & .4 & .5 & .5 & .6 & .6 & .5 & .4 & .3 & .5 & .5 & .5 & 1.
 \end{array} \right)
 \end{matrix}$$

Bibliografia

- [1] AKAY, M., COHEN, M., HUDSON, D. “ Fuzzy sets in life sciences ”. *Fuzzy Sets and Systems*, 1997, núm. 90, p. 219-224.
- [2] AYOUBI, M., ISERMANN, R. “ Neuro-fuzzy systems for diagnosis ”. *Fuzzy Sets and Systems*, 1997, núm. 89, p. 289-307.
- [3] BERTRAN, X. *Nous aspectes de la teoria dels subconjunts borrosos i l'estudi d'algunes aplicacions a models econòmics*. Barcelona: Publicaciones ETD, 2001.
- [4] BODJANOVA, S. “ Approximation of fuzzy concepts in decision making ”. *Fuzzy Sets and Systems*, 1997, núm. 85, p. 23-29.
- [5] BOIXADER, D., JACAS, J., RECASENS, J. “ Transitive closure and betweenness relations ”. *Fuzzy Sets and Systems*, 2001, núm. 120, p. 415-422.
- [6] BOJADZIEV, G., BOJADZIEV, M. *Fuzzy Logic Business, Finance, and Management*. Singapur: World Scientific, 1997.
- [7] BOUGETTAYA, A., LE VIET, Q. “ Data clustering analysis in a multidimensional space ”. *Information Sciences*, 1998, núm. 112, p. 267-295.

- [8] CASSÚ, C., FERRER, J. C., BONET, J. “ Classification of several business sectors according to uncertain characteristics ”. *Handbook of Management under Uncertainty*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 2001.
- [9] CASSÚ, C., FERRER, J. C., BONET, J., BERTRAN, X. “ Distribution of the Possibility of Risk in Determining the Marginal Efficiency of Investment in the context of Uncertainty ”. *Proceedings International Conference on Intelligent Technologies in Human - Related Sciences*, León, 1996, vol. I, p. 311-314.
- [10] CASSÚ, C., PLANAS, P., FERRER, J. C., BONET, J. “ Accumulated capital for the retirement plans in fuzzy finance mathematics ”. *Fuzzy Economic Review*, 1996, vol. I, núm. 1, p. 83-92.
- [11] CASTRO, J. L., TRILLAS, E., ZURITA, J. M. “ Non-monotonic fuzzy reasoning ”. *Fuzzy Sets and Systems*, 1998, núm. 94, p. 217-225.
- [12] CHEN, S. M. “ A new method for tool steel materials selection under fuzzy environment ”. *Fuzzy Sets and Systems*, 1997, núm. 92, p. 265-274.
- [13] CHEN, K. H., CHEN, H. L., LEE H. M. “ A multiclass neural network classifier with fuzzy teaching inputs ”. *Fuzzy Sets and Systems*, 1997, núm. 91, p. 15-35.
- [14] CHEN, A. P., LIN C. C. “ Fuzzy approaches for fault diagnosis of transformers ”. *Fuzzy Sets and Systems*, 2001, núm. 118, p. 139-151.
- [15] CHEN, T.W., GOLDOF, D. B., HALL, L. O. “ Fast fuzzy clustering ”. *Fuzzy Sets and Systems*, 1998, núm. 93, p. 49-56.
- [16] CHIANG, D. A., CHOW, L. R., HSIEN, N. C., “ Fuzzy information in extended fuzzy relational databases ”. *Fuzzy Sets and Systems*, 1997, núm. 92, p. 1-20.

- [17] CLARA, N., BERTRAN, X., COROMINAS, D. “ Theory of affinities for ternary fuzzy relations ”. *Emergent solutions for the information and knowledge economy*. León: Universidad de León - Secretariado de Publicaciones y Medios Audiovisuales, 2003.
- [18] CORTÉS, U., BÉJAR, J., MORENO, A. *Inteligencia Artificial*. Barcelona: Ed UPC, 1997.
- [19] CSUTORA, R., BUCKLEY, J. J. “ Fuzzy hierarchical analysis: the Lambda-Max method ”. *Fuzzy Sets and Systems*, 2001, núm. 120, p. 181-195.
- [20] DUBOIS, D., PRADE, H. *Fuzzy Sets and Systems, Theory and Applications*. San Diego: Academic Press, 1980.
- [21] EUROSTAT. *Annuaire 1999*. Luxembourg: Office des publications officielles des Communautés européennes, 1999.
- [22] EUROSTAT. *Annuaire 2000*. Luxembourg: Office des publications officielles des Communautés européennes, 2000.
- [23] EUROSTAT. *Annuaire 2001*. Luxembourg: Office des publications officielles des Communautés européennes, 2001.
- [24] EUROSTAT. *Annuaire 2002*. Luxembourg: Office des publications officielles des Communautés européennes, 2002.
- [25] FERRER, J. C., *Un estudi de la teoria dels subconjunts borrosos amb aplicacions a models econòmics i problemes empresarials*. Barcelona: Publicaciones ETD, 1998.
- [26] FERRER, J. C., CLARA, N., BERTRAN, X., BONET, J. “ Aplicación de la teoría de las afinidades para la agrupación de zonas geográficas a partir de características inciertas ”. *Decision Making under Uncertainty in the Global Environment of the 21th century*. Chania: C. Zapounidis, 2000.

- [27] FERRER, J. C., CLARA, N., BERTRAN, X., COROMINAS, D. “ Fuzzy Clustering of European Union in function of their quality of life ”. *New Logics for the New Economy*. Nàpols: Edizioni Scientifiche Italiane, 2001.
- [28] FLORES-SINTES, A., CADENAS, J. M., MARTIN, F. “ Detecting homogeneous groups in clustering using the Euclidean distance ”. *Fuzzy Sets and Systems*, 2001, núm. 120, p. 213-225.
- [29] FREEMAN, J. A., SKAPURA, D. M. *Redes Neuronales: Algoritmos, Aplicaciones y Técnicas de programación*. Delaware: Addison-Wesley Iberoamericana, 1991.
- [30] GIACHETTI, R. E., YOUNG, R. E. “ A parametric representation of fuzzy numbers and their arithmetic operators ”. *Fuzzy Sets and Systems*, 1997, núm. 91, p. 185-202.
- [31] GIL ALUJA, J. *Elementos para una Teoría de la Decisión en la Incertidumbre*. Santiago de Compostela: Ed Milladoiro, 1989.
- [32] GIL ALUJA, J., TEODORESCU, J., GIL LAFUENTE, A. M. *Periodicity and Chaos in Economic Fuzzy Forecasting*, Iizuka, Fukuoka: Kyushu Institute of Technology, 1992, p. 85-92.
- [33] GIL ALUJA, J. “ La incertidumbre en la Economía y la Gestión de Empresas ”. *Actas IV Congreso de la Asociación Española sobre Tecnología y Lógica Fuzzy*, Blanes, 1994.
- [34] GIL ALUJA, J. “ Modelos no numéricos de asignación en la gestión personal ”. *Actas II Congreso SIGEF*, Santiago de Compostela, 1995, núm. 2, p. 93-120.
- [35] GIL ALUJA, J. “ Towards a new concept of economic research ”. *Fuzzy Economic Review*, 1995, núm. 0, p. 5-23.
- [36] GIL ALUJA, J. “ Lances y desventuras del nuevo paradigma de la teoría de la decisión ”. *Actas III Congreso SIGEF*, Buenos Aires, 1996, núm. 1, p. 2-10.

- [37] GIL ALUJA, J. “ Towards a new paradigm of investment selection in uncertainty ”. *Fuzzy Sets and Systems*, 1996.
- [38] GIL LAFUENTE, A. M. *El análisis financiero en la incertidumbre*, Barcelona: Ed Ariel, 1990.
- [39] GIL LAFUENTE, A. M. *Fundamentos de análisis financiero*, Barcelona: Ed Ariel, 1993.
- [40] GIL LAFUENTE, A. M. “ El control de las actividades de marketing ”. *Actas III Congreso SIGEF*, Buenos Aires, 1996, núm. 3, p. 2-44.
- [41] GIL LAFUENTE, A. M. *Marketing numérico y no numérico en la incertidumbre (el producto y su entorno)*. Tesi Doctoral. Universitat de Barcelona, 1996.
- [42] GINER, S. *La societat catalana*. L’Hospitalet de Llobregat: Generalitat de Catalunya. Institut d’Estadística de Catalunya, 1998.
- [43] GÓMEZ-SKARMETA, A. F., DELGADO, M., VILA, M. A. “ About the use of fuzzy clustering techniques for fuzzy model identification ”. *Fuzzy Sets and Systems*, 1999 , núm. 106, p. 179-188.
- [44] GONZÁLEZ, L., MARÍN, A. “ Weak properties and aggregated extension of fuzzy relations ”. *Fuzzy Sets and Systems*, 1997, núm. 85, p. 311-318.
- [45] GROENEN, P. J. F., JAJUGA, K. “ Fuzzy clustering with squared Minkowski distances ”. *Fuzzy Sets and Systems*, 2001, núm. 120, p. 227-237.
- [46] GUOYAO, F. “ Optimization methods for fuzzy clustering ”. *Fuzzy Sets and Systems*, 1998, núm. 93, p. 301-309.
- [47] HEILMANN, W. R. *Fundamentals of Risk Theory*. Karlsruhe: Verlag Versicherungswirtschaft, 1988.

- [48] HILERA, J. R., MARTÍNEZ, V. J. *Redes Neuronales Artificiales*. Madrid: Ra-Ma, 1995.
- [49] IANCU, I. “ Propagation of uncertainty and imprecision in knowledge-based systems ”. *Fuzzy Sets and Systems*, 1998, núm. 94, p. 29-43.
- [50] INSTITUT D’ESTADÍSTICA DE CATALUNYA. *Estadística comarcal i municipal*. L’Hospitalet de Llobregat: Generalitat de Catalunya, 1998.
- [51] INSTITUT D’ESTADÍSTICA DE CATALUNYA. *Anuari Estadístic de Catalunya*. L’Hospitalet de Llobregat: Generalitat de Catalunya, 1999.
- [52] JACKSON, P. *Introduction to Expert Systems*. Essex: Addison-Wesley, 1999.
- [53] KAMIMURA, H., KURANO, M. “ Clustering by a fuzzy metric ”. *Fuzzy Sets and Systems*, 2001, núm. 120, p. 249-254.
- [54] KAUFMANN, A. *Introduction à la Théorie des sous-ensembles flous Tome I: Éléments théoriques de base*. Paris: Masson et Cie Ed, 1973.
- [55] KAUFMANN, A. *Introduction à la Théorie des sous-ensembles flous Tome II: Applications à la linguistique, à la logique et à la sémantique*. Paris: Masson et Cie Ed, 1975.
- [56] KAUFMANN, A. *Introduction à la Théorie des sous-ensembles flous Tome III: Applications à la classification et à la reconnaissance des formes, aux automates et aux systèmes, aux choix des critères*. Paris: Masson et Cie Ed, 1973.
- [57] KAUFMANN, A. *Introduction à la théorie des sous-ensembles flous*. Paris: Masson et Cie Editeurs, 1977.
- [58] KAUFMANN, A. *Nouvelles logiques pour l’intelligence artificielle*. Paris: Ed Hermes, 1987.
- [59] KAUFMANN, A. *Les expertons*. Paris: Ed Hermes, 1987.

- [60] KAUFMANN, A., GIL ALUJA, J. *Introducción de la teoría de los subconjuntos borrosos a la gestión de las empresas*. Santiago de Compostela: Ed Milladoiro, 1986.
- [61] KAUFMANN, A., GIL ALUJA, J. *Técnicas Operativas de Gestión para el Tratamiento de la Incertidumbre*. Barcelona: Ed Hispano Europea, 1987.
- [62] KAUFMANN, A., GIL ALUJA, J. *Models per a la recerca d'efectes oblidats*. Barcelona: Ed Milladoiro, 1988.
- [63] KAUFMANN, A., GIL ALUJA, J. *Las matemáticas del azar y de la incertidumbre*. Madrid: Ed Ceura, 1990.
- [64] KAUFMANN, A., GIL ALUJA, J. " Selection of affinities by means of fuzzy relations and Galois Lattices ". *Actas Congreso Euro XI*, Aachen, 1991.
- [65] KAUFMANN, A., GIL ALUJA, J. *Técnicas de gestión de empresa. Previsiones, decisiones y estrategias*. Madrid: Ed Pirámide, 1992.
- [66] KAUFMANN, A., GIL ALUJA, J. *Técnicas especiales para la gestión de expertos*. Santiago de Compostela: Ed Milladoiro, 1993.
- [67] KAUFMANN, A., GIL ALUJA, J. *Grafos neuronales para la economía y la gestión de las empresas*. Madrid: Ed Pirámide, 1995.
- [68] KAUFMANN, A., GIL ALUJA, J., GIL LAFUENTE, A. M. *La creatividad en la Gestión de Empresas*. Madrid: Ed Pirámide, 1994.
- [69] KAUFMANN, A., GIL ALUJA, TERCEÑO, J. A. *Matemática para la economía y la gestión de empresas*. Barcelona: Ed Foro Científico, 1994.
- [70] KAUFMANN, A., GUPTA, M. *Introduction to fuzzy arithmetic. Theory and Applications*. USA: International Thomson Computer Press, 1991.

- [71] KISSI, K. “ Cost-benefit analysis, benefit accounting and fuzzy decisions(I). Theory ”. *Fuzzy Sets and Systems*, 1997, núm. 92, p. 275-287.
- [72] KLIR, G. J. FOLGER, T. A. *Fuzzy Sets, Uncertainty, and Information*. New Jersey: Prentice Hall, 1988.
- [73] KUNDU, S. “ Similarity relations, fuzzy linear orders, and fuzzy partial orders ”. *Fuzzy Sets and Systems*, 2000, núm. 109, p. 419-428.
- [74] KUNDU, S. “ The min-max composition rule and its superiority over the usual max-min composition rule ”. *Fuzzy Sets and Systems*, 1998, núm. 93, p. 319-329.
- [75] LEE, H-S. “ An optimal algorithm for computing the max-min transitive closure of a fuzzy similarity matrix ”. *Fuzzy Sets and Systems*, 2001, núm. 123, p. 129-136.
- [76] LOWEN, R. *Fuzzy Set Theory*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1996.
- [77] MATLAB. *Reference Guide. Toolbox Neural networks*. Massachussets: MathWorks, 1992.
- [78] MEDASANI, S., KIM, J., KRISHNAPURAM, R. “ An overview of membership function generation techniques for pattern recognition ”. *International Journal of Approximate Reasoning*, 1998, núm. 19, p. 391-417.
- [79] MIYAMOTO, S. *Fuzzy Sets on Information Retrieval and Cluster Analysis*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1990.
- [80] MORDESON, J. N., NAIR, P. S. *Fuzzy Mathematics, an introduction for engineers and scientists*. Heidelberg: Physica-Verlag, 1998.
- [81] MURILLO, C. *Métodos estadísticos de series temporales*. Barcelona: SG Editores, 1994.
- [82] NGUYEN, H. T., WALKER, E. A. *A first course in fuzzy logic*. Florida: Chapman & Hall/CRC, 2000.

- [83] NOZAKI, K., ISHIBUCHI, H., TANAKA, H. “ A simple but powerful heuristic method for generating fuzzy rules from numerical data ”. *Fuzzy Sets and Systems*, 1997, núm. 86, p. 251-270.
- [84] PATTERSON, D. W. *Artificial Neural Networks, Theory and Applications*. Singapore: Prentice Hall, 1996.
- [85] PENEVA, V., POPCHEV, I. “ Comparison of clusters from fuzzy numbers ”. *Fuzzy Sets and Systems*, 1998, núm. 97, p. 75-81.
- [86] PNUD, *Informe sobre el desenvolupament humà 1999*. New York: Programa de les Nacions Unides per al Desenvolupament (PNUD), 1999.
- [87] PNUD, *Informe sobre el desenvolupament humà 2000*. New York: Programa de les Nacions Unides per al Desenvolupament (PNUD), 2000.
- [88] PNUD, *Informe sobre el desenvolupament humà 2001*. New York: Programa de les Nacions Unides per al Desenvolupament (PNUD), 2001.
- [89] PNUD, *Informe sobre el desenvolupament humà 2002*. New York: Programa de les Nacions Unides per al Desenvolupament (PNUD), 2002.
- [90] RAMIREZ, D. “ Analysis of uncertainty ”. *Fuzzy Economic Review*, 1998, vol. VIII, núm. 2.
- [91] RAVI, V., REDDY, P. J., ZIMMERMANN, H. J. “ Fuzzy rule base generation for classification and its minimization via modified threshold accepting ”. *Fuzzy Sets and Systems*, 2001, núm. 120, p. 271-279.
- [92] RECAÑO, J. *Els fluxos demogràfics entre Catalunya i l'exterior. La balança de pagaments de Catalunya*. L'Hospitalet de Llobregat: Generalitat de Catalunya, 1997.

- [93] ROUBENS, M. “ Fuzzy sets and decision analysis ”. *Fuzzy Sets and Systems*, 1997, núm. 90, p. 199-206.
- [94] SARNA, M. “ Fuzzy relation on fuzzy and non-fuzzy numbers-fast computational formulas:II ”. *Fuzzy Sets and Systems*, 1998, núm. 93, p. 63-74.
- [95] TAMAKI, F., KANAGAWA, A., OHTA, H. “ Identification of membership functions based on fuzzy observation data ”. *Fuzzy Sets and Systems*, 1998, núm. 93, p. 311-318.
- [96] TEODOROVIC, D., LUCIC, P. “ A fuzzy set theory approach to the aircrew rostering problem ”. *Fuzzy Sets and Systems*, 1998, núm. 95, p. 261-271.
- [97] TERANO, T., ASAI, K., SUGENO, M. *Fuzzy Systems Theory and Its Applications*. Boston: Academic Press, 1992.
- [98] TERCEÑO, A. “ Instrumentos para el análisis de operaciones financieras con datos inciertos ”. Tesis Doctoral: Universitat de Barcelona, 1995.
- [99] TOLIAS, Y. A., PANAS, S. M., TSOUKALAS, L. H. “ Generalized fuzzy indices for similarity matching ”. *Fuzzy Sets and Systems*, 2001, núm. 120, p. 255-270.
- [100] TRILLAS, E., GUTIÉRREZ, J. *Aplicaciones de la Lógica Borrosa*. Madrid: Consejo Superior de Investigaciones Científicas, 1992.
- [101] TZOUVARAS, A. “ Modeling vagueness by nonstandardness ”. *Fuzzy Sets and Systems*, 1998, núm. 94, p. 385-396.
- [102] WANG, L. X. *A Course in Fuzzy Systems and Control*. New Jersey: Prentice Hall PTR, 1997.
- [103] YAGER, R. R. “ Fuzzy logics and artificial intelligence ”. *Fuzzy Sets and Systems*, 1997, núm. 90, p. 193-198.

- [104] YANG, M. S., LIU, H. H. “ Fuzzy clustering procedures for conical fuzzy vector data ”. *Fuzzy Sets and Systems*, 1999, núm. 106, p. 189-200.
- [105] YANG, M. S., PAN, J. A. “ On fuzzy clustering of directional data ”. *Fuzzy Sets and Systems*, 1997, núm. 91, p. 319-326.
- [106] YANG, M. S., SHIH, H. M. “ Cluster analysis based on fuzzy relations ”. *Fuzzy Sets and Systems*, 2001, núm. 120, p. 197-212.
- [107] YAO, J. F. F., YAO, J. S. “ Fuzzy decision making for medical diagnosis based on fuzzy number and compositional rule of inference ”. *Fuzzy Sets and Systems*, 2001, núm. 120, p. 351-366.
- [108] ZADEH, L. A. “ Fuzzy Sets ”. *Information and Control*, 1965, p. 338-353.
- [109] ZADEH, L. A. *Similarity Relations and Fuzzy Orderings a Information Sciences*, 1971, núm. 3, p. 177-200.
- [110] ZADEH, L. A. “ Fuzzy sets as a basis for a Theory of Possibility ”. *Fuzzy Sets and Systems*, 1978, núm. 1, p. 3-28.
- [111] ZADEH, L. A. “ Toward a theory of fuzzy information granulation and its centrality in human reasoning and fuzzy logic ”. *Fuzzy Sets and Systems*, 1997, núm. 90, p. 111-127.
- [112] ZADEH, L. A., KACPRZYK, J. *Fuzzy Logic for the Management of Uncertainty*. New York: John Wiley & Sons, 1992.
- [113] ZIMMERMANN, H. *Fuzzy Sets and its Applications*. Massachussets: Kluwer Academic Publishers, 1991.