



ESTRATÈGIES DE RESOLUCIÓ DE PROBLEMES
MATEMÀTICS: INCIDÈNCIA DE L'ÚS DEL FOLI DE
CÀLCUL EN L'ENSENYAMENT/APRENTENTATGE
DE LA PROPORCIONALITAT

MANOLI PIFARRÉ TURMO

1999

1. 1. 1.

2.

3.

4.

5.

6.

7.

8.

9.

10.

11.

12.

13.

14.

15.

16.



Universitat de Lleida
Registre General

08 ABR. 1999

E: 1450

S:

MANOLI PIFARRÉ TURMO

**ESTRATÈGIES DE RESOLUCIÓ DE PROBLEMES
MATEMÀTICS: INCIDÈNCIA DE L'ÚS DEL FULL DE
CÀLCUL EN L'ENSENYAMENT/APRENENTATGE DE
LA PROPORCIONALITAT**

Tesi doctoral dirigida pel Dr. Jaume Sanuy Burgués



**Departament de Pedagogia i Psicologia
Universitat de Lleida
Març 1999**

Al Xavier i a la Núria

AGRAÏMENTS

El llarg procés d'elaboració d'una tesi doctoral es realitza amb la col·laboració d'un conjunt de persones. Volem dedicar els següents paràgrafs a les persones que de diferent manera i en algun grau han col·laborat en la realització del nostre treball.

En primer lloc, m'agradaria manifestar, molt especialment, el meu agraïment al Dr. Jaume Sanuy, director del treball, pel seu constant suport, atenció i ajut, i les seves valuoses orientacions, de moltes maneres i a múltiples nivells durant el procés d'elaboració d'aquest treball.

També vull expressar el meu agraïment al Dr. Eduard Martí per haver dedicat una part del seu temps a l'anàlisi de l'instrument de categorització que hem elaborat en la nostra investigació.

Igualment, voldria agrair al Dr. Carles Monereo la iniciació a l'estudi i investigació sobre estratègies d'aprenentatge, la qual cosa va facilitar que jo adquirís els coneixements previs necessaris a partir dels quals construir bona part d'aquest treball.

A la Maria Esteve li vull agrair la seva ajuda en el procés de transcripció de les dades i la seva participació com a cojutge en l'avaluació dels resultats obtinguts en la part empírica del nostre estudi.

També voldria agrair a M^a José Gros els seus consells, suggeriments i la lectura detallada de la proposta d'ensenyament/aprenentatge elaborada en aquest treball.

Voldria manifestar el meu reconeixement a Josep Baqués per l'assessorament i supervisió de l'anàlisi estadístic de les dades empíriques d'aquest estudi.

Als companys de l'àrea de Psicologia Evolutiva i de l'Educació, Àngel Huguet, Ramona Ribes i Conxita Vendrell, vull agrair el seu suport i ajut en les diferents fases d'elaboració d'aquest estudi.

Globalment, a la resta dels companys del departament de pedagogia i psicologia de la Universitat de Lleida perquè han propiciat bona part de les condicions que han fet possible la realització d'aquest treball.

També, vull agrair als Serveis Territorials del Departament d'Ensenyament de la Generalitat de Catalunya a Lleida, i en especial a Andreu Ribadulla i Núria Aragonés, membres de la Inspecció Tècnica, l'autorització per a la realització de la part empírica d'aquest treball en el centre IES Ronda.

Finalment, però no menys important, vull mostrar el meu agraïment a Antoni Olona, director de l'IES Ronda de Lleida, centre en què s'ha portat a terme la investigació i als professors de matemàtiques d'aquest centre, Joan Falguera, M^a Carme Garcia, M^a Teresa Llovera i Pere Manzanares, pel seu interès en el projecte d'investigació, la seva professionalitat, el seu entusiasme i la seva disposició per dur a terme la proposta didàctica, sense la seva col·laboració la realització d'aquest treball no hagués estat possible.

No volem acabar aquests agraïments sense fer esment dels qui han estat els veritables protagonistes d'aquest estudi, els alumnes de 3r. d'ESO del centre IES Ronda de Lleida i que han participat en aquesta investigació; a ells i als alumnes que els seguiran va adreçat aquest treball.

ÍNDIX

INTRODUCCIÓ	1
 CAPÍTOL I. LA RESOLUCIÓ DE PROBLEMES.....	11
1. La resolució de problemes en el currículum de les matemàtiques.	
Breu perspectiva històrica i delimitació conceptual	13
2. El procés de resolució de problemes: variables implicades	23
2.1. El coneixement declaratiu sobre el contingut específic del problema i la seva incidència en el procés de resolució	25
2.1.1. L'esquema de coneixement en la resolució de problemes	26
2.1.2. Organització de la informació en un esquema de coneixement.....	34
2.1.3. L'ensenyament de l'estructura del problema com a mitjà per millorar el procés de resolució.....	37
2.2. Les estratègies de resolució de problemes	42
2.2.1. Les estratègies generals de resolució de problemes.....	43
2.2.2. Les estratègies específiques en el procés de resolució de problemes	55
2.3. Metacognició i resolució de problemes	56
2.3.1. Les estratègies metacognitives en el procés de resolució de problemes	62

2.4. Els components afectius en la resolució de problemes.....	71
3. L'ensenyament/aprenentatge d'estratègies de resolució de problemes	74
3.1. Què ensenyar: anàlisi de models instruccionals per a l'ensenyament/aprenentatge d'estratègies de resolució de problemes	77
3.1.1. El model cognitiu-metacognitiu d'ensenyament del procés de resolució de problemes de F.K. Lester	78
3.1.2. El model d'ensenyament del procés de resolució de problemes d'A. H. Schoenfeld.....	85
3.2. Com ensenyar: anàlisi d'entorns instruccionals per a l'ensenyament/aprenentatge d'estratègies de resolució de problemes	90
3.2.1. La instrucció directa	92
3.2.2. La instrucció guiada	95
3.2.3. L'aprenentatge cooperatiu	97

CAPÍTOL II. L'ORDINADOR: UNA EINA PER APRENDRE..... 103

1. L'aproximació sociocultural del procés d'ensenyament/aprenentatge i el disseny d'entorns mediats per ordinador.....	107
1.1. L'aproximació sociocultural del procés d'ensenyament/aprenentatge: principals eixos teòrics.....	108
1.1.1. La mediació social en l'aprenentatge individual.....	111

1.1.2. La mediació social a través d'eines culturals	115
1.1.3. La participació activa en contextos socials i la construcció de coneixement: l'aprenentatge situat.....	118
1.1.4. Les organitzacions socials com un sistema d'aprenentatge	123
1.2. Característiques del disseny d'entorns educatius mediat per ordinador.....	126
1.2.1. L'ordinador com amplificador i reorganitzador de l'activitat cognitiva.....	127
1.2.2. Contextualització dels aprenentatges	133
1.2.3. Aprenentatge integrat en les estructures socials de la comunitat escolar: la importància de l'aprenentatge cooperatiu	134
2. Anàlisi dels diferents usos de l'ordinador en l'àmbit educatiu	137
2.1. Els programes d'exercitació i pràctica.....	143
2.2. Els programes tutorials	147
2.3. Els programes de simulació	150
2.4. Els sistemes hipertext	152
2.5. Micromons de programació: el llenguatge LOGO.....	156
2.6. El processador de textos	163
2.6.1. L'ús del processador de textos com a eina per aprendre continguts específics	164
2.6.2. L'ús del processador de textos en un entorn d'ensenyament/aprenentatge del procés de composició escrita	166
2.7. La base de dades.....	169
2.8. El full de càlcul.....	171

2.8.1. Característiques educatives del full de càlcul	172
2.8.2. Utilització educativa del full de càlcul	177
2.8.2.1. El full de càlcul i l'aprenentatge de continguts declaratius	177
2.8.2.2. El full de càlcul i l'aprenentatge de continguts procedimentals	182

CAPÍTOL III. LA RESOLUCIÓ DE PROBLEMES SOBRE PROPORCIONALITAT I L'ÚS DEL FULL DE CÀLCUL..... 189

1. L'educació matemàtica en l'etapa educativa de la secundària obligatòria.....	194
1.1. Els objectius del currículum de l'àrea de matemàtiques de l'educació secundària obligatòria	195
1.2. Els continguts del currículum de l'àrea de matemàtiques de l'educació secundària obligatòria	198
2. La proporcionalitat directa: el contingut d'aprenentatge	202
2.1. Tipologia de les relacions de proporcionalitat	203
2.1.1. Relacions de proporcionalitat i tipologia dels problemes treballades en la proposta d'ensenyament/aprenentatge	206
2.2. Les estratègies específiques per resoldre situacions de proporcionalitat	207
2.2.1. Les estratègies additives	207

2.2.2. Les estratègies multiplicatives.....	208
3. L'ensenyament/aprenentatge d'estratègies de resolució de problemes sobre proporcionalitat i l'ús del full de càlcul: antecedents.....	213
3.1. L'ordinador i la resolució de problemes sobre proporcionalitat que contenen conceptes relacionats amb la llum i les ombres.....	214
3.2. El full de càlcul i la resolució de problemes sobre proporcionalitat que contenen conceptes relacionats amb la banca	218
3.3. El full de càlcul i la resolució de problemes sobre proporcionalitat: el percentatge.....	221
3.4. Les estratègies de resolució de problemes sobre proporcionalitat i l'ús del full de càlcul: introducció al treball empíric.....	227
CAPÍTOL IV. LES ESTRATÈGIES DE RESOLUCIÓ DE PROBLEMES SOBRE PROPORCIONALITAT I L'ÚS DEL FULL DE CÀLCUL: APORTACIONS EMPÍRIQUES.....	231
1. Objectius del procés d'investigació	234
2. Hipòtesis de treball.....	236
3. Mètode.....	238
3.1. Mostra.....	238

3.2. Disseny experimental.....	239
3.3. Procediment experimental.....	243
3.3.1. Primera fase: formació dels professors de matemàtiques que participen en la investigació	244
3.3.2. Segona fase: realització de les proves d'avaluació inicial als dos grups d'alumnes. Pre-test.....	246
3.3.3. Tercera fase: intervenció. Realització de les dues propostes d'ensenyament/aprenentatge pels alumnes del grup experimental i del grup control.....	246
3.3.3.1. Anàlisi i seqüenciació dels continguts i de les activitats de les dues propostes d'ensenyament/aprenentatge	248
3.3.3.2. El procés d'ensenyament/aprenentatge d'estratègies de resolució de problemes	260
3.3.3.2.1. <i>Full de pensament</i>	260
3.3.3.2.2. <i>Les estratègies d'ensenyament utilitzades pel professor</i>	264
3.3.3.2.3. <i>Aprenentatge cooperatiu: el context col·laboratiu entre els alumnes durant el procés de resolució</i>	268
3.3.4. Quarta fase: realització de les proves d'avaluació final als dos grups d'alumnes. Post-test	268
3.4. Unitats d'anàlisi i instruments de mesura	269
3.4.1. Variable dependent 1: avaluació del resultat de l'aprenentatge	269
3.4.2. Variable dependent 2: avaluació de l'activitat cognitiva i social del procés de resolució de problemes.....	273
3.4.2.1. Definició de la metodologia d'anàlisi	275

3.4.2.2. L'instrument d'anàlisi: descripció de les categories d'anàlisi del procés de resolució d'un problema.....	278
3.4.2.2.1. <i>Categories de la dimensió cognitiva del procés de resolució de problemes</i>	280
3.4.2.2.2. <i>Categories de la dimensió metacognitiva del procés de resolució de problemes</i>	287
3.4.2.2.3. <i>Categories de la dimensió social del procés de resolució de problemes</i>	288
3.4.2.2.4. <i>Definició de les categories de l'instrument d'anàlisi</i>	293
3.4.2.3. Procés de recollida d'informació de l'activitat cognitiva i social al llarg del procés de resolució d'un problema	304
4. Anàlisi de resultats	308
4.1. Anàlisi del resultat de l'aprenentatge	309
4.1.1. Anàlisi de l'aprenentatge del contingut de la proporcionalitat en funció de les variables independents: context d'aprenentatge i professor	309
4.1.1.1. Anàlisi dels resultats obtinguts pels alumnes en la prova pre-test	312
4.1.1.2. Anàlisi dels resultats obtinguts pels alumnes en la prova post-test	316
4.1.1.2.1. <i>Anàlisi dels resultats obtinguts pels alumnes en la prova post-test en funció de la variable independent: professor</i>	319
4.1.1.2.2. <i>Anàlisi dels resultats dels alumnes en la prova post-test en funció de la variable independent: context</i>	326

4.1.1.3. Anàlisi de la “millora” en el rendiment dels alumnes després del procés d’ensenyament/aprenentatge.....	330
4.1.2. Anàlisi de l’aprenentatge del contingut de la proporcionalitat en funció de la variable independent: tipus de parella.....	334
4.1.2.1. Anàlisi dels resultats obtinguts pels alumnes en la prova post-test en funció de les variables independents: context d’aprenentatge, professor i tipus de parella	336
4.1.2.1.1. <i>Anàlisi dels resultats obtinguts pels alumnes en la prova post-test en funció de les variables independents: context d’aprenentatge i tipus de parella.....</i>	337
4.1.2.1.2. <i>Anàlisi dels resultats obtinguts pels alumnes en la prova post-test en funció de les variables independents: professor i tipus de parella.....</i>	338
4.1.2.2. Anàlisi de les puntuacions obtingudes pels alumnes en la prova post-test en funció de variable independent: tipus de parella	339
4.1.2.2.1. <i>Anàlisi dels resultats obtinguts en la prova post-test en funció dels diferents tipus de parella.....</i>	340
4.1.2.2.2. <i>Anàlisi del rendiment assolit pels diferents tipus d’alumnes (rendiment matemàtic alt o baix) en funció de la variable independent: tipus de parella</i>	344
4.2. Anàlisi del procés de resolució de problemes matemàtics.....	355
4.2.1. Anàlisi del procés de resolució de problemes: temps total (segons) dedicat a les diferents categories de l’instrument d’avaluació.....	356
4.2.1.1. Les fases de resolució.....	356
4.2.1.2. <i>Anàlisi de l’activitat cognitiva per resoldre el problema: els episodis d’accions.....</i>	359

4.2.1.3. Anàlisi de l'activitat metacognitiva.....	360
4.2.1.4. Anàlisi de l'activitat social durant la resolució del problema: tipus d'interacció	360
4.2.2. Anàlisi del procés de resolució de problemes: temps relatiu (percentatge) dedicat a les diferents categories de l'instrument d'avaluació	362
4.2.2.1. Anàlisi de l'activitat cognitiva per resoldre el problema.	362
4.2.2.1.1. <i>Anàlisi de l'activitat cognitiva durant tot el procés de resolució</i>	363
4.2.2.1.2. <i>Anàlisi de l'activitat cognitiva en les diferents fases del procés de resolució del problema</i>	367
4.2.2.2. Anàlisi de l'activitat metacognitiva.....	371
4.2.2.3. Anàlisi de l'activitat social durant el procés de resolució.....	373
4.2.2.3.1. <i>Els rols d'interacció</i>	376
5. Discussió de resultats	379
5.1. Resultat de l'aprenentatge.....	379
5.1.1. Resultat de l'aprenentatge en funció de la variable independent "context d'aprenentatge".....	384
5.1.2. Resultat de l'aprenentatge en funció de la variable independent "professor".....	387
5.1.3. Resultat de l'aprenentatge en funció de la variable independent "tipus de parella".....	388
5.2. El procés de resolució de problemes	394
5.2.1. Les accions cognitives i metacognitives per resoldre el problema.....	395

5.2.2. Característiques de la interacció.....	400
CAPÍTOL V. CONCLUSIONS	403
CAPÍTOL VI. REFERÈNCIES BIBLIOGRÀFIQUES.....	423
ANNEXOS	461
Annex 1. Propostes didàctiques	462
Annex 2: Proves d'avaluació	557
Prova pre-test.....	559
Prova post-test	565
Criteris de correcció de la prova pre-test i post-test	575
Annex 3.....	581
Exemple de transcripció del procés de resolució del problema.....	583
Exemple de la categorització del procés de resolució del problema .	590
Annex 4. Taules de resultats	593

“What does mathematics really consists of? Axioms (such as the parallel postulate)? Theorems (such as the fundamental theorem of algebra)? Proofs (such as Gödel’s proof of undecidability)? Definitions (such as the Menger definition of dimension)? Theories (such as category theory)? Formulas (such as Cauchy’s integral formula)? Methods (such as the method of successive approximations)?

Mathematics could surely not exist without these ingredients; they are all essential. It is nevertheless a tenable point of view that none of them is at the heart of the subject, that the mathematician’s main reason for existence is to solve problems, and that, therefore, what mathematics really consists of is problems and solutions.” (Halmos, 1980:519).

Introducció

El meu interès per l'estudi de les estratègies d'aprenentatge es remunta ara fa deu anys, quan compaginava els meus estudis de la llicenciatura en psicologia amb la pràctica educativa com a docent en l'àrea curricular de les matemàtiques de l'educació primària. En aquells inicis, la meua inquietud pels temes educatius i, sobretot, per estudiar i conèixer més a fons com aprenien els alumnes i com el professor¹, des de la seva activitat docent, podia potenciar, afavorir i millorar el seu aprenentatge, m'estimularen a iniciar els estudis de psicologia de l'educació.

Posteriorment, vaig tenir l'oportunitat d'aprofundir en l'estudi, la investigació i la reflexió sobre les estratègies d'aprenentatge mitjançant la realització d'activitats paral·leles als meus estudis universitaris: l'organització i la participació en congressos, la publicació d'articles i la realització de materials didàctics. La realització d'aquestes activitats s'inserien en un interès creixent i general en el món de l'educació per l'estudi de les estratègies d'aprenentatge i en el marc del principi educatiu "d'aprendre a aprendre". Una prova d'aquest progressiu interès la trobem en l'augment de la literatura sobre el tema en l'última dècada: publicacions diverses, tesis doctorals, projectes d'investigació, congressos i cursos de formació.

Aquest interès no és limitava solament a l'àmbit universitari, sinó que des de les autoritats estatals i autonòmiques en matèria educativa es proposava la Reforma

¹ Al llarg d'aquest treball, quan diem alumne, alumnes, professor o professors, ens estem referint als/les alumnes, als professors i les professores. Hem optat per utilitzar aquesta manera d'expressar-nos perquè considerem que pot facilitar la lectura del document escrit.

Educativa del sistema educatiu espanyol, la qual presentava grans canvis tant en la concepció de l'aprenentatge com en l'actuació docent.

El nou marc socioeducatiu concep l'aprenentatge des d'una perspectiva constructivista. Des d'aquest enfocament, l'aprenentatge es planteja com la construcció interna d'esquemes de coneixement. L'individu quan aprèn un nou coneixement construeix un tram de relacions entre l'estructura d'aquest nou coneixement i l'estructura dels que el subjecte ja té en el sistema cognitiu. Com més gran és el nombre i la complexitat d'aquestes relacions, més significatiu és el seu aprenentatge (Coll, 1986).

Des d'aquesta perspectiva s'emfasitza, en primer lloc, el protagonisme de l'alumne quan aprèn. Perquè es produeixi aprenentatge cal una activitat interna per part de l'alumne que construeixi una xarxa de relacions entre els nous continguts i els elements ja disponibles en el seu sistema cognitiu. En segon lloc, s'emfasitza la importància dels coneixements previs que l'alumne posseeix en el moment d'iniciar l'aprenentatge. Quan l'alumne s'enfronta a un nou contingut a aprendre, ho fa sempre partint d'uns coneixements adquirits en situacions prèvies i que utilitza com a instrument per establir relacions significatives amb el nou contingut. En tercer lloc, es dóna una gran importància a l'actuació docent en l'aprenentatge dels alumnes. El mestre realitza la funció de mediador entre el contingut a aprendre i el sistema cognitiu de l'alumne. Aquest és l'encarregat de seleccionar els nous coneixements que ensenyarà a l'alumne i d'ajudar-lo a establir relacions significatives amb els coneixements que ja sap.

En aquest marc, les estratègies d'aprenentatge són una peça important en el procés de construcció de significats. Davant d'un nou contingut a aprendre, l'alumne ha de prendre tot un conjunt de decisions, en un primer moment, seleccionant i organitzant les informacions que li arriben i, en un segon moment, elegint procediments que li permetin establir relacions significatives entre aquestes informacions. Per aconseguir que aquestes accions que realitza l'alumne

conduixin a un aprenentatge profund i significatiu és necessari que la presa de decisions sigui reflexiva i regulada per l'alumne.

Utilitzar estratègies d'aprenentatge implica un procés d'actuació reflexiu, en el qual l'alumne, davant d'una situació d'aprenentatge, selecciona un conjunt de conceptes, procediments i actituds en funció dels objectius que aquesta situació exigeix i en funció de les característiques del context en què els objectius s'han d'assolir.

Actualment, no es qüestiona la importància de les estratègies d'aprenentatge en l'adquisició de nous continguts. La situació present en la recerca en estratègies centra la seva atenció en les característiques del context d'ensenyament/aprenentatge i en quines variables d'aquest context incideixen directament en el seu aprenentatge, per exemple, contingut d'aprenentatge, característiques de les activitats i dels materials didàctics i estratègies d'ensenyament.

Una de les àrees d'investigació sobre el tema emfasitza la importància del tipus de contingut en relació al qual es posa en marxa una determinada estratègia. Des d'aquesta consideració, la recerca en estratègies fa referència a la necessitat de centrar-se en un tipus de contingut específic a l'hora d'estudiar les estratègies que es posen en marxa per realitzar una tasca determinada.

L'àrea curricular de les matemàtiques és una de les àrees del currículum escolar en què les característiques dels continguts a aprendre i de les activitats a pels alumnes requereixen que aquests siguin capaços d'articular el que s'ha anomenat "coneixement procedimental" (Paris i Newman, 1990). En aquesta àrea curricular, és molt important saber "com" resoldre un problema i quines estratègies, procediments i tècniques utilitzar per aconseguir amb èxit un determinat objectiu.

Malgrat aquesta importància del "com" en les matemàtiques, en la meua experiència com a docent d'aquesta àrea he pogut copsar que els alumnes no són competents en l'ús d'estratègies generals i específiques per resoldre problemes matemàtics. Aquesta dificultat es pot explicar fonamentalment per dos factors. En primer lloc, per la complexitat dels continguts matemàtics i del procés de resolució de problemes. Com destacarem al llarg d'aquest treball la resolució d'un problema és un procés difícil en el qual estan implicades múltiples variables; la literatura especialitzada destaca, entre les més importants: el nivell de coneixement declaratiu sobre el contingut específic del problema, les estratègies específiques i generals de resolució de problemes, les estratègies metacognives i els components afectius (Kilpatrick, 1985; Silver i Marshall, 1990; Schoenfeld, 1992; De Corte, 1990, 1993; Lester, 1994). El domini per part de l'alumne d'aquestes quatre macrovariables, durant la resolució d'un problema, no és espontani i requereix d'un procés d'ensenyament específic i continuat.

En segon lloc, les estratègies d'ensenyament utilitzades pels professors de matemàtiques se centren fonamentalment en la primera de les variables anteriorment assenyalades –el coneixement declaratiu sobre el contingut específic del problema- és a dir, es dedica una gran porció de temps i d'esforç en ensenyar conceptes matemàtics i tècniques específiques per resoldre determinats exercicis vinculats a un determinat contingut. Aquest ensenyament és dirigit per les característiques del contingut matemàtic: contingut molt jerarquitzat i amb un llenguatge formal i abstracte, no es té en compte els aprenentatges previs dels alumnes, formats a partir de la resolució de múltiples situacions de la vida quotidiana.

Així, en l'ensenyament de les matemàtiques sovint es descuida el treball d'estratègies més generals de resolució de problemes i com utilitzar el coneixement matemàtic après en el context escolar com a eina per resoldre situacions problema de la vida quotidiana. Com a resultat d'aquest procés

d'ensenyament, diversos estudis mostren, d'una banda, les enormes dificultats que presenten els alumnes en l'aprenentatge del continguts matemàtics i el fracàs escolar en aquesta àrea curricular (per exemple, De Corte, 1990, 1993). D'altra banda, els continguts matemàtics i les estratègies treballades a l'escola per a resoldre problemes no són utilitzats pels alumnes per resoldre problemes de la vida quotidiana (Gómez-Graell, 1997; Martí, 1997).

Conscients d'aquesta problemàtica, un dels objectiu del nostre treball és aportar noves dades en l'estudi de les característiques del context d'ensenyament/aprenentatge per a que propiciï l'aprenentatge d'estratègies de resolució de problemes que siguin útils per a resoldre situacions complexes de la vida quotidiana dels alumnes de l'ensenyament secundari obligatori. Concretament, el treball vol aprofundir en l'estudi de l'ús de l'ordinador com a eina que pot afavorir l'aprenentatge i la interiorització d'estratègies de resolució de problemes matemàtics.

Dos motius han propiciat l'ús de l'eina informàtica per aconseguir els propòsits del nostre treball. En primer lloc, perquè és una eina d'ús social. Moltes de les accions que realitzem quotidianament estan mediatitzades per un ordinador, fonamentalment en les activitats relacionades amb l'àmbit de la transacció d'informació. Així, gràcies al mitjà informàtic, d'una manera ràpida i senzilla, podem consultar el saldo del compte corrent del banc, reservar una entrada per assistir a una obra de teatre o tenir accés a diferents bases de dades. No obstant, en els últims anys, és en l'àmbit de l'entreteniment en què l'ús de l'ordinador ha experimentat un major increment d'ús. Una gran quantitat de programari informàtic es genera anualment en l'apartat lúdic amb una enorme capacitat d'atracció per al públic infantil i juvenil.

El destacat paper de l'ordinador en diferents situacions de la vida diària no té una correspondència d'ús a nivell quantitatiu, ni el mateix impacte qualitatiu, en l'àmbit educatiu en què l'ús del medi informàtic es encara poc freqüent. Tot i que

en els darrers anys s'ha observat un augment de la presència física dels ordinadors en els centres escolars, aquests encara no són considerats, en termes generals, com una eina didàctica rellevant per a la consecució dels objectius educatius.

Des del nostre punt de vista, tant les característiques cognitives com el tipus d'interacció que facilita l'ús de l'ordinador creiem que poden ser utilitzats per al disseny de situacions educatives que incideixen positivament en la manera d'aprendre de l'alumne.

La literatura revisada sobre l'ús de l'ordinador -que presentem en el capítol II d'aquest treball- destaca, en primer lloc, que la resolució de problemes matemàtics amb l'ús de programes informàtic pot afavorir que l'alumne aprengui continguts declaratius i procedimentals. L'ús de l'ordinador per resoldre una tasca requereix que l'alumne conegui i sigui conscient de "què ha de fer" i "com ho ha de fer", és a dir, quins procediments i quines instruccions seleccionarà per aconseguir que l'ordinador realitzi un conjunt d'accions que permetin resoldre un determinat problema.

En segon lloc, la literatura revisada destaca que l'ordinador permet a l'alumne la representació d'una mateixa informació utilitzant diferents codis simbòlics, de manera simultània i immediata. Aquesta característica pot afavorir la comprensió i l'aprenentatge de continguts complexos, com són els continguts matemàtics, perquè pot permetre a l'alumne abstraure els elements i les relacions substancials d'un determinat contingut i elaborar una representació mental més significativa i transferible a altres situacions.

El nostre treball vol estudiar com potenciar les principals característiques cognitives i metacognitives de l'ordinador en la classe de matemàtiques. Per aconseguir aquest objectiu, hem escollit el programa informàtic del full de càlcul. L'elecció d'un programa informàtic eina com és el full de càlcul ha estat motivada, principalment, per tres raons. En primer lloc, perquè és un programa que allibera a

l'alumne d'una feina feixuga i pesada del procés de resolució d'un problema com és el càlcul. Aquesta descarrega mental de l'alumne pot permetre centrar la seva atenció en altres aspectes més complexos del procés de resolució.

En segon lloc, perquè les característiques de l'estructura del programa i el tipus d'interacció que imposa el seu ús poden afavorir l'aprenentatge d'estratègies de resolució de problemes. Entre les característiques del treball amb un full de càlcul destaquem: la representació multisimbòlica de la informació del problema – quadre de doble entrada, ús del llenguatge matemàtic, ús del llenguatge gràfic- i la necessitat que l'alumne planifiqui i reguli els procediments i instruccions que ordena a l'ordinador per a resoldre el problema.

En tercer lloc, perquè és un programa informàtic que permet múltiples concrecions educatives. El professor pot dissenyar diferents situacions d'ensenyament/aprenentatge segons els objectius pedagògics que vol aconseguir.

En el nostre treball utilitzarem el programa de full de càlcul per millorar el procés de resolució de problemes del contingut de la proporcionalitat. Els motius per seleccionar aquest continguts són dos, d'una banda, la complexitat i la dificultat del seu aprenentatge pels alumnes d'ensenyament secundari. I, d'altra banda, la importància que aquest contingut té en el currículum escolar de la secundària obligatòria. El contingut de la proporcionalitat és el nucli a partir del qual s'articulen altres continguts, tant matemàtics com de les àrees curriculars de les Ciències naturals, la Tècnica i les Ciències Socials.

Per tant, es tracta d'un contingut difícil, molt important i que requereix del disseny d'una situació d'ensenyament/aprenentatge que afavoreixi l'aprenentatge profund i significatiu per part de l'alumne.

En síntesi, el treball que presentem sorgeix de la necessitat d'aprofundir en l'estudi dels tres àmbits esmentats al llarg d'aquesta introducció: l'aprenentatge

d'estratègies de resolució de problemes, l'aprenentatge del contingut de la proporcionalitat i l'ús del full de càlcul com a eina educativa.

El nostre treball es planteja aconseguir dos objectius generals:

El primer objectiu pretén estudiar, analitzar i revisar els diferents enfocaments d'estudi, els treballs, les investigacions i les seves aportacions en el món educatiu pel que fa als tres eixos teòrics del nostre treball empíric: a) el procés de resolució de problemes i les variables implicades en aquest procés, en el qual les estratègies cognitives i metacognitives ocupen un lloc preferent; b) les potencialitats educatives de l'ordinador, en general, i del full de càlcul, en particular, com a eina afavoridora de l'aprenentatge d'estratègies cognitives i metacognitives de resolució de problemes; i c) les variables que afavoreixen el procés d'ensenyament/aprenentatge del contingut matemàtic de la proporcionalitat.

El segon objectiu general s'adreça a dissenyar i experimentar, en el context de l'ensenyament secundari obligatori, una proposta d'ensenyament/aprenentatge que potenciï l'aprenentatge d'estratègies de resolució de problemes mitjançant l'ús del programa d'ordinador del full de càlcul.

El document escrit que pretén donar resposta a aquests dos objectius l'hem estructurat en dues parts diferenciades: una primera part en la qual es presenta la revisió i l'anàlisi teòrica dels tres eixos del nostre treball -capítols I, II, i III- i una segona part en què es detalla l'estudi empíric realitzat en un context escolar -capítols IV i V.

Així, hem dedicat el primer capítol al procés de resolució de problemes tal com s'ha estudiat des de la perspectiva de la psicologia cognitiva. Hi presentem una anàlisi de les principals variables implicades en aquest procés i les característiques dels models d'ensenyament que tenen com a objectiu incorporar-les com a eina per afavorir l'aprenentatge d'aquest procés i la millorar de la resolució de problemes per part dels alumnes.

El segon capítol, l'hem dedicat a l'estudi de l'eina informàtica. Després de presentar les característiques del disseny de situacions educatives que utilitzen l'ordinador des d'una perspectiva sociocultural, analitzarem l'ús educatiu dels programes informàtics més utilitzats en el món escolar, i dediquem una especial atenció al full de càlcul, programa que hem escollit en el nostre treball.

En el tercer capítol, en primer lloc, analitzem les característiques generals del currículum de matemàtiques de l'ESO proposat pel Departament d'Ensenyament de la Generalitat de Catalunya. En segon lloc, presentem les característiques de l'ensenyament/aprenentatge del contingut de la proporcionalitat en l'ensenyament secundari obligatori. Finalment, revisem els estudis realitzats en aquesta etapa educativa i que tenen com a objectiu aportar noves dades en l'ensenyament/aprenentatge d'estratègies de resolució de problemes d'aquest contingut matemàtic amb l'ús del full de càlcul.

En el quart capítol es presenten els objectius, el disseny, els resultats i la discussió de la recerca que hem desenvolupat en l'àmbit de l'educació secundària obligatòria.

Per últim, hem dedicat el cinquè capítol a l'elaboració de les conclusions generals del treball, en les que, d'una banda, comparem les nostres intencions inicials i la consideració que ens mereixen algunes d'aquestes qüestions al finalitzar el treball i, d'altra banda, presentem les reflexions per a properes propostes sobre l'ensenyament/aprenentatge d'estratègies de resolució de problemes matemàtiques que puguin obviar algunes de les dificultats que hem constatat en la nostra investigació.

CAPÍTOL I. LA RESOLUCIÓ DE PROBLEMES

1. La resolució de problemes en el currículum de les matemàtiques. Breu perspectiva històrica i delimitació conceptual

Un dels principals objectius a aconseguir en l'àrea curricular de les matemàtiques és que els alumnes esdevinguin competents en la resolució de problemes. En la literatura especialitzada en l'ensenyament/aprenentatge de les matemàtiques trobem un gran nombre d'estudis, d'investigacions i de revisions teòriques que tenen el propòsit de trobar noves claus que ajudin a aconseguir aquest objectiu. Ara bé, en la lectura d'aquesta nombrosa bibliografia hom observa que l'expressió "resolució de problemes" ha estat utilitzada amb significats diferents i en algunes ocasions contradictoris, i se li han atorgat funcions també diferenciades per a l'aprenentatge dels continguts matemàtics. En paraules de Stanic i Kilpatrick (1989) i d'Schoenfeld (1992a):

"The term problem solving has become a slogan encompassing different views of what education is, of what schooling is, of what mathematics is, and of why we should teach mathematics in general and problem solving in particular." Stanic i Kilpatrick (1989:1)

"Problem solving and metacognition ... are perhaps the two most overworked and least understood buzzwords of the 1980s" (Schoenfeld, 1992a:336).

Aquesta diversitat en la manera d'entendre el tòpic "problem solving" dins de l'àrea de les matemàtiques podríem agrupar-la, en un intent de recensió, en tres categories contraposades amb diferents maneres de concebre l'educació

matemàtica, en general, i la resolució de problemes, en particular. Aquestes tres concepcions són: a) la resolució de problemes com una eina que desenvolupa el pensament i el raonament humà; b) una eina per a l'aprenentatge de continguts matemàtics i c) com a exploració, descobriment i creació de models matemàtics.

Aquestes tres maneres d'entendre la resolució de problemes apareixen cronològicament en moments històrics diferents i recolzades per corrents psicològiques també diferents. Malgrat aquesta diferència cronològica i teòrica, estan lluny de desaparèixer i en la pràctica educativa actual trobem exemples que totes tres perduren i, en molts casos, coexisteixen.

a) La resolució de problemes com una eina que desenvolupa el pensament i el raonament humà

Aquesta primera concepció té com a principal postulat que la resolució de problemes concrets a les aules de matemàtiques desenvolupa en els estudiants processos cognitius de resolució més generals i de més alt nivell.

Aquesta concepció està ancorada en les corrents "mentalistes" desenvolupades durant el segle XIX i començaments del segle XX, i fonamentades en les corrents filosòfiques de l'antiguitat (Stanic i Kilpatrick, 1989).

Des d'aquesta visió "mentalista" s'emfasitza el fet que la ment humana està composta per diferents habilitats o facultats, com per exemple: percepció, memòria, imaginació, comprensió, intuïció o raonament. El paper de l'escola és el d'ajudar a desenvolupar aquestes facultats. L'art, les llengües clàssiques i les matemàtiques són considerats, en un primer moment, com els millors vehicles per aconseguir aquest objectiu. Des d'aquesta concepció i en el currículum de les matemàtiques, la resolució de problemes és el millor mitjà per desenvolupar aquestes habilitats o facultats de la ment humana. Per exemple, la resolució de

problemes d'aritmètica ajuda l'individu a raonar sobre situacions abstractes (Pérez Echevarría, 1994).

En aquest context, la resolució de problemes no és un fi en si mateix, amb un valor propi per a ser treballat i potenciat a l'escola, sinó que és considerat una eina per aconseguir altres objectius més importants.

Actualment, aquesta concepció del paper de la resolució de problemes la podem trobar, d'una banda, en molts dels programes per millorar la intel·ligència -per exemple, el programa de modificabilitat cognitiva i d'enriquiment instrumental proposat i desenvolupat per Feuerstein i col·laboradors (1980, 1993)- i en molta de la bibliografia que treballa el procés de resolució de problemes -per exemple, el treball de Whimbey i Lochhead (1993), en el qual es proposen diferents mètodes i habilitats per resoldre problemes com una eina per desenvolupar processos cognitius útils per superar amb èxit altres problemes matemàtics. D'altra banda, aquesta funció formativa de les matemàtiques també queda explícitament reconeguda en els actuals currículums d'Educació Primària i Secundària, en què s'atorga a les matemàtiques una funció formadora de diferents aspectes de l'activitat intel·lectual, entre els quals destaquen: la creativitat, la intuïció, la capacitat d'anàlisi i de crítica (Generalitat de Catalunya, 1993).

b) La resolució de problemes com una eina per a l'aprenentatge de continguts matemàtics

Els grans canvis socials produïts en les primeres dècades del segle XX com a conseqüència d'una intensa industrialització, urbanització i immigració, i l'augment progressiu del nombre d'alumnes que accedien a l'escola portaren gran canvis en el currículum escolar. En els sectors acadèmics es defensa la idea que una persona ha d'estudiar només allò que li serà funcional per al seu futur rol social. L'escola i el currículum escolar passen de ser eines per desenvolupar les capacitats

psicològiques a ser transmissors de coneixements necessaris per a la “subsistència” social.

En l'àrea de les matemàtiques, aquesta nova concepció del paper de l'escola porta a emfasitzar el paper de l'aritmètica com una eina bàsica i imprescindible. En aquest context, la resolució de problemes és caracteritzada com un bon mitjà per afavorir l'adquisició de diferents conceptes i procediments matemàtics que l'alumne ha d'aprendre i desenvolupar en la vida real. Els problemes matemàtics són concebuts com un conjunt d'exercicis o tasques que ofereixen la pràctica necessària per a l'aprenentatge de determinats continguts matemàtics.

Les concepcions de l'aprenentatge com a associació entre conceptes fonamenten teòricament aquest segon paper de la resolució de problemes en el currículum matemàtic. L'aprenentatge es produeix per l'associació contingent de dos estímuls. Estímuls que són reforçats o d'ús freqüent seran apresos pel subjecte. L'exercitació i la pràctica esdeven el lema que afavoreix l'aprenentatge de continguts matemàtics.

Com assenyala Kilpatrick (1985), el concepte de problema, des d'aquesta segona perspectiva, és:

“A problem is defined generally as a situation in which a goal is to be attained and a direct route to the goal is blocked.” (Kilpatrick, 1985:2)

Aquest concepte de problema i del procés de resolució ha estat -i encara ho és actualment- molt utilitzat en l'ensenyament de les matemàtiques. Aquest tipus d'ensenyament ha consistit bàsicament a seleccionar un conjunt de problemes-tasca, organitzats de menor a major grau de dificultat, que afavoreixen la pràctica d'una tècnica o algorisme matemàtic concret.

El principal objectiu en la resolució d'aquest conjunt de problemes-tasca és aportar la pràctica suficient a l'alumne per tal d'afavorir el coneixement i el domini d'una nova tècnica matemàtica. La suma total del conjunt de tècniques que l'alumne ha de dominar configuraran el coneixement matemàtic de l'alumne i la seva competència en la resolució de problemes escolars i quotidians.

En aquest context, les matemàtiques són concebudes principalment com un conjunt de temes independents, com per exemple: aritmètica, àlgebra, geometria i funcions, cadascun amb una col·lecció de procediments que serveixen per resoldre problema.

Les funcions que realitza dins del currículum matemàtic aquesta concepció de problema i del seu procés de resolució es poden sintetitzar segons Stanic i Kilpatric (1989) en dues. En primer lloc, la resolució de problemes com a context que vehicula l'aprenentatge d'altres objectius curriculars. El procés d'instrucció es centra en el contingut matemàtic a ensenyar; amb aquest fi es seqüència l'aprenentatge d'un conjunt de fets, conceptes i procediments que l'alumne haurà de conèixer per resoldre un conjunt d'exercicis graduats d'acord amb la seva complexitat. El coneixement matemàtic s'esmicola en petites parts que segueixen l'estructura lògica del contingut, i la resolució de problemes esdevé un mitjà d'aprenentatge i no un objectiu en si mateix.

En segon lloc, la resolució de problemes com un conjunt de destreses que l'alumne ha de dominar. En aquesta segona funció, el procés de resolució de problemes ja té una vàlua, un objectiu en si mateix, però continua dominant la concepció de la resolució de problemes com un conjunt de tècniques generals que cal seqüenciar perquè siguin apreses pels alumnes.

Des d'aquesta perspectiva es dibuixa un conjunt de tècniques generals i aplicables en la resolució d'un ampli ventall de problemes. Aquestes tècniques generals són ensenyades com un contingut matemàtic més, respectant la mateixa metodologia

utilitzada per a l'ensenyament de fets i conceptes matemàtics: disseny d'un conjunt d'exercicis que proporcionaran a l'alumne la pràctica adequada per ser competent en el seu ús.

Després del procés d'instrucció, s'espera que l'alumne tingui al seu abast un conjunt de tècniques i procediments, adquirits de manera similar als fets i conceptes, que presumiblement podrà utilitzar en la resolució de problemes.

Schoenfeld (1989) destaca que l'experiència dels alumnes en la resolució de problemes matemàtics com a aplicació de tècniques correctes genera una concepció del procés de resolució de problemes caracteritzada per: a) hom ha de tenir un mètode o tècnica a punt per resoldre un problema; b) el mètode o tècnica ha de trobar la resposta en un període curt de temps; c) si no es té el mètode o tècnica matemàtica adequat ja no val la pena provar o intentar solucionar el problema; d) l'aprenentatge de les matemàtiques requereix fonamentalment pràctica i memòria.

Seguint aquest mateix fil argumental Lampert (1990) considera:

“Commonly, mathematics is associated with certainty; knowing it, with being able to get the right answer, quickly. These cultural assumptions are shaped by school experience, in which *doing* mathematics means following the rules laid down by the teacher; *knowing* mathematics means remembering and applying the correct rule when the teacher asks a question; and mathematical truth is *determined* when the answer is ratified by the teacher: Beliefs about how to do mathematics and what it means to know it in school are acquired through years of watching, listening and practicing.” (Lampert, 1990:31)

Una de les conseqüències més estudiades de l'ús d'aquesta manera d'entendre l'ensenyament/aprenentatge de les matemàtiques, en general, i de la resolució de problemes, en particular, ha estat la significativitat i la funcionalitat dels

aprenentatges dels alumnes en un context no escolar. Els resultats d'aquests estudis mostren que els alumnes utilitzen procediments diferents per resoldre situacions problema en un context escolar i en un context quotidià. Majoritàriament, les tècniques, els mètodes i els procediments matemàtics ensenyats a l'escola no tenen validesa fora de l'escola (Dissessa, 1982; Schliemann i Carraher, 1992).

c) La resolució de problemes com a exploració, descobriment i creació de models matemàtics

Finalment, en aquesta breu revisió sobre la conceptualització de la resolució de problemes dins del currículum de les matemàtiques trobem la concepció d'aquest procés com un "art" i les matemàtiques com una ciència de models que l'alumne ha de redescobrir i reconstruir, en paraules d'Abrantes (1996):

"Al finalizar una clase de arte, el niño puede decir "Éste es el dibujo que he hecho". Al finalizar una clase de inglés: "Ésta es la historia que he escrito". ¿Qué se dice después de una clase de matemáticas? "¿He hecho los cálculos correctamente?" ... Nos gustaría que fuese: "He inventado una regla con números" o "Aquí tienes un patrón que yo he observado" (Abrantes, 1996: 10-11)

Des d'aquesta perspectiva, les matemàtiques són concebudes com una disciplina viva, dinàmica, que busca solucions, que explora models i formula hipòtesis per interpretar la gran quantitat de dades que ens trobem cada dia. Les matemàtiques formen un sistema unificat de conceptes i procediments que expliquen patrons i relacions numèriques de situacions del nostre entorn. Aquests conceptes i procediments expressats en forma d'axiomes, de regles o de fórmules matemàtiques ens permeten donar significat i manipular de forma precisa i ordenada els patrons i les relacions que defineixen les esmentades situacions quotidianes.

Les matemàtiques, tal com les coneixem avui dia, són el procés d'una evolució al llarg dels anys, i es pot entendre la seva història com un descobriment de models i de relacions i una cerca progressiva d'interpretacions simbòliques exactes de situacions de la vida real. És corrent, i al llarg de la història de les matemàtiques així ha succeït, que aquests patrons i procediments es descobreixin de manera "accidental", fruit de l'anàlisi de situacions quotidianes que es representen, posteriorment, com a demostracions matemàtiques formals.

Per comprendre les estructures matemàtiques, és necessari partir de situacions problema reals i entendre tant les interrelacions entre els conceptes, com les operacions i les regles amb les quals es poden manipular i reorganitzar les dades del problema.

Segons Dossey (1992), aquesta visió més experimentalista de les matemàtiques té el seu origen en Aristòtil, per a qui el coneixement matemàtic s'obtenia de l'experiència, l'observació i l'abstracció de dades de la realitat. Aquesta visió dona suport a la concepció que l'aprenentatge matemàtic es construeix a partir de la deducció de sistemes i models que expliquen les relacions numèriques de dades extretes de situacions concretes.

La millor manera que s'apunta des d'aquesta perspectiva per ajudar l'alumne a comprendre i redescobrir els models matemàtics que ens permeten organitzar i manipular les dades del nostre entorn, és situar l'alumne en problemes de la vida quotidiana que ha de resoldre (Brown, 1996). Així, la resolució de problemes es converteix en l'eix central de l'ensenyament de les matemàtiques, i l'aprenentatge d'estratègies que el subjecte pot posar en joc per observar les regularitats de l'entorn, generar relacions entre la informació nova, interpretar situacions matemàtiques, executar procediments, axiomes o regles que permetin resoldre la situació problema és el principal objectiu educatiu. En aquest sentit es mostren les paraules de Resnick (1989):

“Becoming a good mathematical problem solver - becoming a good thinker in any domain - may be as much a matter of acquiring the habits and dispositions of interpretation and sense-making as of acquiring any particular set of skills, strategies, or knowledge. The critical observation in both the mathematical and the school contexts is that one develops one’s point of view by the process of acculturation, by becoming a member of the particular community of practice.” (Resnick, 1989:58).

Els treballs de Polya (1945) relatius a la formulació del concepte de procediment heurístic són el punt de partida de la concepció del procés de resolució de problemes com a exploració, descobriment i creació de models matemàtics. Els procediments heurístics¹ són maneres generals d’afrontar una situació problema, són procediments que guien l’acció i que poden facilitar la resolució del problema. Aquest concepte és enriquit pels estudis realitzats a partir del paradigma del processament de la informació amb l’anàlisi de les habilitats i les estratègies cognitives de resolució de problemes utilitzades per subjectes experts en un camp determinat. Des d’aquest corrent psicològic s’emfasitza la necessitat d’ensenyar el coneixement i el repertori d’estratègies necessàries per resoldre un problema en un camp conceptual determinat. Posteriorment, els estudis que emfasitzen la construcció social del coneixement aportaran la necessitat de no separar l’aprenentatge individual del context social en què aquest té lloc. Aquesta visió culturalista aporta la idea que l’aprenentatge de les matemàtiques és una activitat de caire social i que el procés de socialització és una variable molt important en el desenvolupament d’estratègies de resolució de problemes.

¹ Els procediments heurístics seran estudiats amb més detall en l’apartat 2.2.1 d’aquest primer capítol.

La necessitat de dissenyar situacions educatives que tinguin en compte aquesta dimensió cognitiva i social assenyalada en els anteriors paràgrafs marcarà les línies de treball, des d'aquesta tercera perspectiva, sobre la conceptualització de les matemàtiques i del procés de resolució de problemes.

El nostre treball parteix d'aquesta tercera concepció de l'ensenyament/aprenentatge de les matemàtiques i del procés de resolució. Com hem començat a destacar, el disseny d'una situació educativa en l'àrea de les matemàtiques que tingui com a objectiu treballar des d'aquesta tercera perspectiva ha de tenir en compte una gran quantitat de variables, de caire cognitiu i social. L'objectiu del següent apartat és analitzar quines són les principals variables cognitives que estan implicades en l'aprenentatge del procés de resolució de problemes i que seran marc de referència per al disseny de la proposta educativa que presentem en el nostre treball d'investigació. Les variables socials que incideixen en l'aprenentatge seran estudiades en el capítol II.

2. El procés de resolució de problemes: variables implicades

Al llarg d'aquest segon apartat intentarem esgranar quines són les principals variables que influeixen en la resolució amb èxit d'un problema matemàtic. Aquest objectiu, però, presenta una gran complexitat si tenim en compte la prolífica investigació realitzada en les últimes dècades des de la psicologia cognitiva i social sobre la competència en el procés de resolució de problemes en una gran varietat d'àmbits, i que ha destacat la importància de múltiples i diferents variables implicades en aquest procés.

“By its very nature, problem solving is an extremely complex form of human endeavor that involves much more than the simple recall of facts or the application of well-learned procedures. Furthermore, the ability to solve mathematics problems develops slowly over a very period of time because success depends on much more than mathematical content knowledge. Problem solving performance seems to be a function of several interdependent categories of factors (e.g., knowledge acquisition and utilization, control, beliefs, affects, and sociocultural contexts). These categories overlap (e.g., it is not possible to completely separate affects, beliefs, and sociocultural contexts), and they interact in a variety of ways.” (Lester, 1994:668-669).

Som conscients que no és possible considerar en aquest treball tota literatura existent sobre el tòpic “problem solving”; així, en aquest apartat pretenem fer una revisió de les principals variables que, des d'aquesta extensa bibliografia, s'han

destacat com a més influents en el procés de resolució de problemes i que han guiat el nostre estudi.

La investigació realitzada des de la psicologia cognitiva destaca la importància que tenen sobre el procés de resolució de problemes les quatre variables o dimensions següents (Kilpatrick, 1985; Silver i Marshall, 1990; Schoenfeld, 1992a; De Corte, 1990, 1993; Lester, 1994, entre les revisions més recents realitzades des del camp de les matemàtiques):

1. El coneixement declaratiu sobre el contingut específic del problema.
2. Les estratègies generals i específiques que els experts utilitzen durant el procés de resolució d'un problema.
3. El paper de la metacognició com a variable que guia i millora el procés de resolució de problemes.
4. La importància de les variables individuals en la resolució d'un problema, com per exemple: creences, concepcions errònies, experiència prèvia, motivació.

Dedicarem els propers apartats a revisar la incidència de les variables anteriorment assenyalades en el procés de resolució de problemes.

2.1. El coneixement declaratiu sobre el contingut específic del problema i la seva incidència en el procés de resolució

“Research on cognitive skills has taught us ... that there is no such thing as expertness without knowledge - extensive and accessible knowledge” (Simon, 1980:82).

La cita amb la qual iniciem aquest apartat és una de les principals conclusions a què arriben nombroses recerques que tenen com a principal objectiu estudiar les variables que incideixen en el procés de resolució de problemes. El rol que desenvolupa el coneixement declaratiu del contingut específic del problema en aquest procés s’ha analitzat sobretot a partir de la comparació de les diferències entre experts i novells en la resolució de problemes en diferents àmbits. Des d’aquestes investigacions s’ha estudiat principalment com aquests dos grups de subjectes organitzen el seu coneixement i quina influència té aquesta organització en l’èxit o fracàs en la resolució d’un problema.

Les primeres investigacions realitzades al voltant de les característiques del procés de resolució de subjectes experts i novells ja varen aportar dades concloents que demostraven que el coneixement base per resoldre un problema és quantitativament i qualitativament diferent entre aquests dos grups de subjectes. Els primers tenen un coneixement més ampli, més ben organitzat, d’accés més flexible i immediat que els novells (DeGroot, 1965; Chase i Simon, 1973; Chi, Glaser i Rees, 1982; Chi, Glasser i Farr, 1988, entre les investigacions més destacades).

Dedicarem aquest apartat, en primer lloc, a estudiar les diferències en el coneixement declaratiu entre experts i novells, i les analitzarem fonamentalment en dues àrees: a) la informació prèvia que té el subjecte sobre el camp específic de

coneixement sobre el qual versa el problema i les estratègies específiques més adequades per resoldre'l; b) l'organització i la facilitat d'accés a aquesta informació. En segon lloc, analitzarem la incidència que han tingut les conclusions sobre les característiques del coneixement declaratiu d'un subjecte expert en el disseny de situacions instruccionals que tenen com a objectiu ensenyar i millorar el procés de resolució de problemes d'alumnes novells en un àmbit específic.

2.1.1. L'esquema de coneixement en la resolució de problemes

La importància del coneixement previ en la resolució de problemes es comença a perfilar en les investigacions realitzades a partir dels postulats teòrics del corrent psicològic de la gestalt. A partir d'estudis sobre percepció, la teoria de la gestalt defensa que la ment humana interpreta totes les sensacions i experiències del món exterior seguint uns principis organitzadors que ajuden a comprendre-les. La percepció humana no es pot explicar a partir de la suma dels estímuls que es reben a través dels diferents sentits, sinó que el subjecte aporta alguna cosa única que fa que la percepció sigui més que la suma dels estímuls que rep.

Partint d'aquest postulat, la investigació en el camp de la resolució de problemes porta els psicòlegs de la gestalt a destacar la importància de l' "insight" en el procés de resolució. L'insight és definit com la comprensió i reorganització de les diferents parts d'un problema com un tot global que permet determinar quines habilitats es poden aplicar per resoldre'l i permet dirigir la conducta de qui resol per arribar a trobar la solució d'un problema. En l'insight es reorganitzen els diferents elements del problema de manera que el subjecte pot veure les interrelacions entre els elements i té la informació necessària per a definir quins procediments pot utilitzar per resoldre'l. Si el subjecte no aconsegueix formar aquest insight i obtenir l'estructura fonamental del problema, la situació no té significat i el problema és irresoluble.

En la resolució de problemes familiars pel subjecte, aquest reconeix l'estructura ràpidament i la formació de l'insight és més immediata i senzilla -i el procés de resolució també- a diferència dels problemes no familiars.

Aquest corrent psicològic emfasitza la importància de l'estructura del problema o insight en el procés de resolució de problemes, però la manca d'explicació sobre els mecanismes individuals que intervenen en el procés de resolució -per exemple: com es produeix la comprensió de l'estructura del problema, quins processos mentals intervenen, com es guarden les diferents estructures dels problemes en la memòria o com es reconeixen- fa difícil poder dissenyar situacions instruccionals que ensenyin a formar estructures de problemes o insights que guiïn el procés de resolució, i millorar així, l'èxit de la resolució de les persones novelles.

Els corrents psicològics de caire més cognitivista, encapçalats pel processament de la informació, explicaran el paper que juga el coneixement previ sobre el problema en el procés de resolució i estudiaran quines variables afavoreixen l'emmagatzematge i la recuperació d'aquesta informació tan útil en la resolució eficaç de problemes.

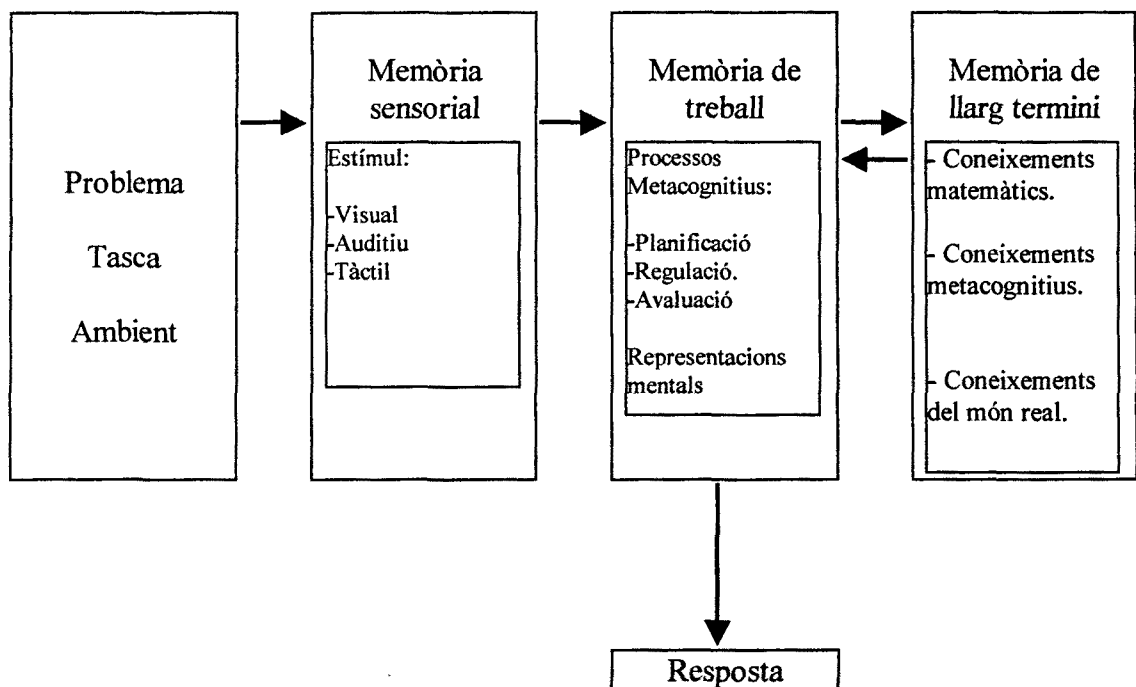
Així, des d'aquesta perspectiva, s'atorga una especial rellevància als processos de codificació, representació i recuperació de la informació en la memòria. Els subjectes són considerats com a processadors de la informació; la ment humana construeix representacions simbòliques d'aquesta informació que després podrà utilitzar en altres situacions, en paraules de Bruner:

“Si queremos sacar partido de nuestro contacto con las regularidades recurrentes del entorno, debemos representárnoslas de alguna manera. Dejar de lado este tema diciendo que se trata de “memoria pura y simple” supone no entender el problema. Porque lo más importante de la memoria no es su almacenamiento de la experiencia pasada, sino la recuperación de lo que es relevante, en un formato que se pueda utilizar. Esto depende de cómo se codifica y se procesa la

experiencia anterior, para que pueda ser relevante y aprovechable en el presente cuando se necesite. El producto final de tal sistema de codificación y procesamiento es lo que podemos llamar representación.” (Bruner, 1987:56)

Els estudis sobre l'estructura de la memòria i com es processen i s'hi organitzen diferents tipus d'informació durant el procés de resolució d'un problema són rellevants per explicar l'èxit o el fracàs davant d'una situació problemàtica.

La majoria dels models que descriuen el processament de la informació durant la resolució de problemes inclouen tres components, representats en el gràfic I.1 (Silver, 1987):



Gràfic I.1. Estructura de la memòria. Adaptat de Silver (1987:37).

a) La informació que arriba dels sentits (sobretot el visual) sobre el context del problema és registrada, en un primer moment, en la memòria sensorial. La informació rellevant per resoldre el problema i definida per les interrelacions entre

els diferents fets i conceptes inclosos en la temàtica de l'enunciat serà traspassada a la memòria de treball. Aquesta informació desenvolupa principalment la funció de tenir informació externa activada sobre l'enunciat del problema: objectius, informació rellevant de l'enunciat (per exemple: dades conegudes), informació auxiliar i/o relacionada (per exemple: taules, notes), que permet examinar l'adequació en l'activació d'altra informació més rellevant de la memòria a llarg termini per resoldre el problema específic.

b) La informació que s'activen des de l'estructura memòria a llarg termini per resoldre un problema concret pot representar informació conceptual, procedimental o actitudinal. Així s'activa fets, conceptes, tipus o estructures de problemes, procediments heurístics o algorísmics, però també es poden activar creences, opinions sobre les matemàtiques o sobre un mateix com a subjecte que resol un tipus de problema.

A la informació activada de la memòria a llarg termini i rellevant per resoldre un problema concret només s'hi accedeix des de la memòria de treball o memòria a curt termini.

c) La memòria de treball és l'estructura en què es realitza la major part de les funcions cognitives implicades en la resolució d'un problema. És el lloc on la informació externa obtinguda de l'enunciat del problema i l'activada de la memòria a llarg termini interactuen i permeten al subjecte la creació d'una representació mental del problema que guiarà el procés de resolució.

Així, tenint en compte l'estructura de la memòria i el seu processament durant la resolució de problemes, la formació d'una representació mental del problema que permeti la seva resolució serà en funció de:

- L'organització de la informació emmagatzemada en la memòria a llarg termini. Una bona organització permetrà una millor activació de la informació necessària per resoldre el problema.
- L'organització de la informació que arriba a través dels sentits i que fa referència al context de l'enunciat del problema.
- Els processos cognitius que es posen en joc per controlar el flux d'informació que entra i surt de la memòria a curt termini, com per exemple: reconèixer, comparar, organitzar. Recordem que la capacitat de la memòria a curt termini és limitada; així, la gestió de la informació que està activada en aquesta estructura de memòria i que és necessària per resoldre el problema serà molt important.

La construcció d'aquesta representació mental és un procés dinàmic que el subjecte va redefinint i elaborant a mesura que resol el problema mitjançant els processos de monitorització i avaluació².

La funció que desenvolupa en el procés de resolució de problemes la construcció d'aquesta representació abstracta d'un conjunt d'informació relacionada entre si és molt important, i així s'ha destacat en l'extensa investigació sobre el tema.

Un estudi clàssic realitzat per DeGroot (1965) demostra que la superioritat dels jugadors experts d'escacs sobre els novells es deu principalment a les diferències en la construcció de representacions significatives de les relacions entre les diferents peces d'escacs. DeGroot demanava a jugadors d'escacs experts i a jugadors novells la reproducció de la posició de peces en el tauler d'escacs en dues

² Processos que estudiarem en l'apartat 2.3 d'aquest capítol en què analitzarem la importància de les estratègies metacognitives en el procés de resolució de problemes.

situacions diferents: una en què es reproduïa una situació de joc i una altra en què les peces es col·locaven d'una manera arbitrària. Es va observar que els jugadors experts eren capaços de reproduir la posició de fins a 25 peces sense error en la primera situació, mentre que els jugadors novells només eren capaços de col·locar 6 peces; en canvi, quan les peces d'escacs no reproduïen una situació significativa de joc d'escacs, tant els jugadors experts com els novells eren capaços de reproduir la posició d'unes 6 peces.

Les conclusions d'aquest estudi demostren que la superioritat dels experts en aquesta tasca de memòria a curt termini no es deu a una capacitat de memòria més gran sinó a l'habilitat dels jugadors experts per reconèixer esquemes significatius de les diferents posicions de les peces i utilitzar aquests esquemes, en comptes de la posició individual de les diferents peces d'escacs, per resoldre la tasca. Quan l'expert, per les característiques de les posicions de les peces d'escacs, no és capaç d'organitzar-les de manera significativa, recorda la posició d'un nombre de peces similar al que recorden els novells.

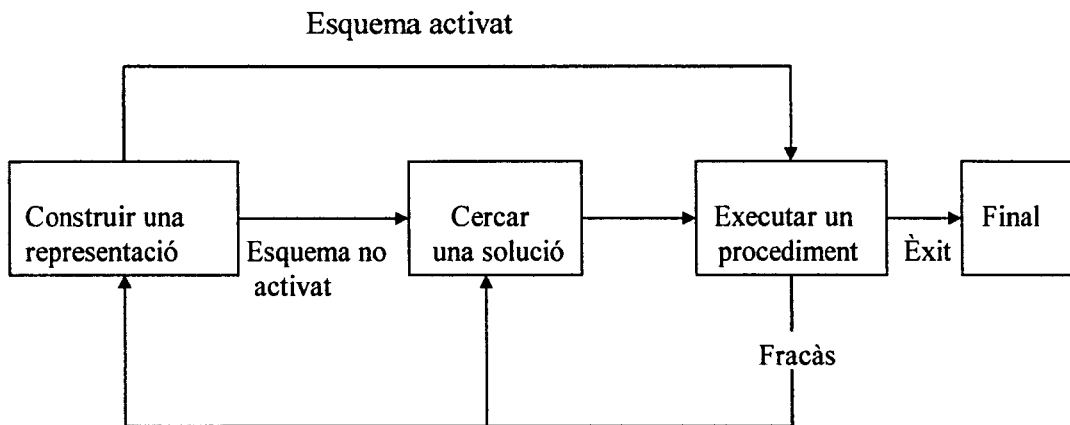
Conclusions similars també s'obtenen en altres camps d'estudi. Per exemple, Hinsley, Hayes i Simon (1977) demostren la importància de l'organització del coneixement previ en la resolució de problemes matemàtics. Aquests autors demanen a diferents subjectes que categoritzin un problema a partir de les primeres tres paraules de l'enunciat, és a dir, que infereixin quina informació els aportarà l'enunciat, quin serà l'objectiu a calcular i quins algorismes hauran d'utilitzar.

En aquest estudi els autors demostren que els subjectes són capaços de categoritzar, de manera immediata i a partir de la lectura de les primeres paraules de l'enunciat, en tipologies de problemes, d'inferir informació i de predir les estratègies de resolució i els algorismes a utilitzar. El subjectes tenien una quantitat d'informació sobre cada tipus de problema que era potencialment útil per trobar el procediment adequat i solucionar la situació problemàtica, ja que podia ser

utilitzada per: dirigir l'atenció cap a elements importants de l'enunciat del problema, fer hipòtesis sobre el procés per solucionar-lo o recuperar informació rellevant.

De Corte i Verschaffel (1993) arriben a les mateixes conclusions en la resolució de problemes aritmètics verbals que implicaquen l'ús d'una única operació amb nens de sis anys. Aquests autors presenten als alumnes una bateria de vuit problemes que es resolen amb la mateixa operació aritmètica però amb estructura semàntica diferent, i que, per tant, impliquen una representació diferent de la situació inicial del problema. Aquests autors troben diferències pel que fa a l'èxit en la resolució dels diferents problemes presentats: els alumnes tenien més dificultats per resoldre aquells problemes que implicaven disposar d'un coneixement conceptual més complex sobre la situació definida en l'enunciat del problema, tot i que es podien resoldre amb l'ús de la mateixa operació aritmètica.

La importància d'un esquema previ en el procés de resolució de problemes porta Gick (1986) a distingir dos camins o processos per resoldre un problema, representats en el gràfic I-2, tenint en compte l'existència o no d'un esquema previ sobre el problema a resoldre pel subjecte.



Gràfic I-2: Procés de resolució de problemes. Adaptat de Gick (1986:101)

Davant l'enunciat d'un problema i en una primera fase, el subjecte que el resol construeix la representació de l'espai del problema, realitzant accions cognitives com extreure informació sobre les dades i l'objectiu al qual s'ha d'arribar o buscar relacions significatives entre les dades. En aquest procés de construcció d'una representació del problema, determinades característiques del problema poden activar un esquema de coneixement guardat en la memòria a llarg termini. En aquest cas, la resolució del problema estarà dirigida per un esquema previ, i la persona que el resol passarà directament al tercer pas de l'esquema: la implementació de procediments per resoldre el problema; executarà el conjunt de procediments adequats per resoldre un problema d'aquella tipologia, amb una escassa cerca de procediments per solucionar-lo.

Si l'activació d'un esquema no es produeix, el subjecte haurà de passar per la segona fase del gràfic, i haurà de fer ús del conjunt de procediments algorísmics i heurístics que coneix i triar i adaptar aquells que millor poden encaixar per resoldre el problema.

En aquest apartat hem analitzat la importància del coneixement previ sobre l'estructura del problema i el context definit en l'enunciat; aquest coneixement realitza la funció de guia del procés de resolució. Un segon nucli d'investigacions ha incidit en l'estudi de quines característiques de l'organització de la informació en un esquema de coneixement afavoreixen una millor resolució d'un problema. En el següent apartat passem a estudiar aquestes característiques.

2.1.2. Organització de la informació en un esquema de coneixement

La importància de la categorització dels problemes en esquemes de coneixement i l'habilitat d'evocar un esquema en el moment de resoldre un problema com una eina eficaç per resoldre'l satisfactòriament porten a desenvolupar un conjunt d'estudis que tenen com a objectiu conèixer com s'organitza la informació en esquemes de coneixement i com s'activa i es recupera per resoldre una nova situació. La finalitat última d'aquests estudis és ensenyar a les persones novelles a seleccionar i organitzar la informació rellevant per resoldre un problema d'un camp específic en esquemes de coneixement.

Chi, Feltovich i Glaser (1981) van estudiar el procés de categorització de problemes de física entre experts i novells; es va demanar als dos grups que categoritzessin un conjunt de problemes de física d'acord amb la similitud dels procediments per resoldre'ls. Els novells categoritzaven els problemes tenint en compte aspectes superficials i creant esquemes més simples carregats de coneixement declaratiu, com per exemple plànols inclinats o fricció. En canvi, els experts categoritzaven els problemes a partir dels principis fonamentals de la física involucrats en els diferents problemes, creant esquemes més complexos que contenien tant coneixement declaratiu com procedimental (mètodes de resolució més rellevants), com per exemple conservació de l'energia o la tercera llei de Newton. Els experts centraven la formació dels esquemes en els principis

fonamentals de la física, aspectes generals i molt aplicables a altres situacions. En canvi, la creació dels esquemes pels novells es centrava en aspectes molt concrets, sovint no essencials i, per tant, poc generalitzables i utilitzables en altres situacions.

Es va arribar a conclusions similars des d'altres investigacions realitzades en camps de coneixement diferents, com per exemple des de les matemàtiques; Schoenfeld i Herrmann (1982) van comparar les categoritzacions de 32 problemes matemàtics realitzades per professors (experts) i per estudiants (novells). Les conclusions de l'estudi mostren que hi ha un alt grau d'acord entre les categoritzacions realitzades pels professors, les quals es basaven en l'estructura dels problemes i els procediments per resoldre'ls. En canvi, les categoritzacions dels estudiants eren molt diferents entre si i es basaven en aspectes més secundaris dels problemes presentats.

Un estudi més recent, realitzat en el camp de la genètica per Smith (1992), aporta noves dades sobre com s'organitza el coneixement segons el grau d'expertesa del subjecte. Aquest autor analitza l'organització del coneixement en la resolució de problemes sobre genètica de tres tipus de subjectes: professors d'universitat, persones que treballen en el camp de l'assessorament genètic i estudiants universitaris. Aquesta investigació es realitza a partir de l'anàlisi de dades quantitatives (èxit o fracàs en la resolució dels problemes) i dades qualitatives (encerclament de les paraules claus de l'enunciat del problema, descripció del procés de resolució del problema, descripció i resum del tipus de problema resolt).

Les conclusions a les quals arriba aquest autor confirmen les dades obtingudes en anteriors estudis sobre el tema. Els estudiants (subjectes novells en el camp de la genètica) categoritzen i resolen els problemes tenint en compte aspectes superficials del problema, com l'organisme sobre el que versa l'enunciat, enunciat literal o el format de pregunta final. En canvi, els dos grups d'experts (professors i

professionals del món del treball) categoritzen i resolen els problemes a partir de principis conceptuals de la matèria.

Com a aspecte més rellevant, l'estudi detecta importants diferències en l'organització del coneixement entre els dos tipus d'experts. Els professionals del món del treball, a priori, presentaven més similituds amb els estudiants que amb els professors de facultat pel que fa en al procés de categorització i de resolució. Els estudiants resolen els problemes utilitzant l'estratègia de mitjans/finalitat, molt utilitzada per subjectes novells, el procés de resolució tendeix a reduir la distància entre les dades conegudes (enunciat del problema) i desconegudes (pregunta del problema). Aquesta estratègia també s'observa en la resolució dels experts que pertanyen al món del treball, en canvi, no s'observa en el procés de resolució dels experts-professors universitaris.

L'explicació a aquest fet es troba en les diferències en els objectius que la resolució de problemes té en els dos col·lectius d'experts. Pels professors d'universitat la resolució de problemes de genètica és un mitjà per estructurar la informació conceptual, no un fi en si mateix. Aquest fet propicia que la resolució dels problemes tingui un enfocament clarament conceptual. En canvi, pels professionals del món del treball la resolució de problemes és un fi en si mateix. La resolució d'un problema no es fa amb una aproximació conceptual sinó amb una aproximació molt lligada al context concret que planteja el problema, és a dir, es parteix de les característiques conegudes del problema subjecte que tenen al davant i característiques i anomalies genètiques que presenta, entre altres, per deduir i conèixer les dades desconegudes, dades que facilitaran la predicció d'un pronòstic i un tractament adequat.

Malgrat la semblança en l'ús de l'estratègia de mitjans/finalitat en els experts del món professional i els estudiants, s'observen moltes diferències en la qualitat d'ús d'aquesta estratègia per aquests dos grups de subjectes. Els experts del món del

treball, a diferència dels estudiants, presenten un enfocament conceptual a l'hora d'analitzar les dades conegudes i desconegudes del problema, fet que no s'observa en els estudiants.

Així, les característiques del context en què una determinada informació ha de ser utilitzada actuen com un dels eixos vertebradors en l'organització de la informació en la memòria. Diferències en les característiques del context en què una informació ha de ser utilitzada produiran diferències en la seva organització (Clancey, 1997).

Com a conclusió de les investigacions realitzades sobre l'organització de la informació continguda en un esquema, es pot afirmar que, perquè aquesta sigui útil per a la resolució d'una nova situació, ha de fer referència a aspectes estructurals del tema sobre el qual tracta i ha de contenir informació ben organitzada de caire conceptual, procedimental i condicional.

2.1.3. L'ensenyament de l'estructura del problema com a mitjà per millorar el procés de resolució

Les conclusions dels estudis que s'han recollit en els anteriors apartats, i que han destacat la importància que té en el procés de resolució d'un problema el coneixement previ ben organitzat sobre el contingut i el context que es presenta en l'enunciat del problema a resoldre, haurien de tenir conseqüències i implicacions en el procés d'ensenyament/aprenentatge d'estratègies de resolució de problemes.

Un programa d'ensenyament que tingui com a objectiu millorar la competència dels alumnes en la resolució de problemes hauria d'incorporar, segons Mayer (1985), la instrucció explícita sobre l'estructura de l'enunciat dels problemes, com per exemple: contingut matemàtic sobre el qual versen, objectiu, condicions que

imposen, relacions entre les proposicions de l'enunciat o procediments de solució. Aquest ensenyament ajudaria els alumnes a guardar la informació sobre les diferents tipologies de problemes de manera organitzada i en una situació semblant podria ser activada i ajudar en la resolució del problema amb èxit.

En paraules de Mayer (1985), aquest objectiu es podria aconseguir si els programes d'instrucció incloguessin els següents propòsits:

- “1. Problem-solving performance will increase if students are given practice in recognizing problems types, for exemple, naming or categorizing problems.
2. *Recognition* training is enhanced when exercises contain a mixture of problem types rather than having all problems solvable by the same procedure.
3. Problem-solving performance will increase if students are given practice in representing problems -whether concretely, in pictures, in symbols, or in words.
4. Problem-solving performance will increase if students are given practice in selecting relevant and irrelevant information in a problem.” (Mayer, 1985:129)

L'argument que justifica la introducció de les característiques de l'estructura del problema en un programa d'ensenyament de resolució de problemes és que existeixen determinats esquemes bàsics que vertebraren els enunciats dels problemes i les relacions numèriques que contenen. Si l'alumne coneix i identifica l'estructura del problema, la representació i comprensió de la situació plantejada seran les adequades i tindrà més probabilitats d'executar correctament la seqüència de procediments matemàtics que el conduiran a la solució.

La incorporació del treball de l'esquema de l'enunciat del problema com una eina que ajuda a millorar el procés de resolució de problemes dels alumnes ha potenciat la investigació en dues àrees d'estudi. En primer lloc, analitzar en diferents continguts matemàtics els diversos tipus o esquemes de problemes que es poden

plantejar als alumnes. En aquest sentit, destaquen els treballs realitzats en el camp dels problemes additius (Greeno i Jhonson, 1984) i en el camp dels problemes multiplicatius (Noelting, 1980; Vergnaud, 1983). El nostre estudi parteix de l'anàlisi d'aquests treballs per conèixer i delimitar les relacions matemàtiques i l'estructura dels problemes de proporcionalitat, anàlisi que detallarem en el capítol III d'aquest document escrit.

En segon lloc, l'estudi i identificació dels processos cognitius implicats en l'aprenentatge i formació d'un esquema d'un problema. Aquesta segona línia d'estudi assenyala els processos de representació de l'enunciat del problema com a processos necessaris per a comprendre la situació del problema. En aquest sentit, ha proliferat un conjunt d'estudis que té com a objectiu general millorar les estratègies dels alumnes per arribar a una representació coherent de l'enunciat del problema. Esmentem, per exemple, el treball d'Orrantia *et al.* (1995, 1997) que dissenya un programa d'instrucció amb cinc tipus d'ajudes per aconseguir una representació significativa de problemes additius dels alumnes de primer cicle d'educació primària.

La primera ajuda, que els autors anomenen "ajuda textual", consisteix en el fet que el professor reescriu l'enunciat del problema d'una altra manera més comprensible per als alumnes i que mostra de forma més evident l'estructura i les relacions matemàtiques del problema. La segona ajuda, anomenada "representació lingüística del problema", consisteix a separar de l'enunciat del problema el que es coneix (dades del problema) i el que es desconeix (pregunta). La tercera ajuda, anomenada "representació figurativa", pretén ensenyar l'alumne a representar l'esquema d'alt nivell o de relació matemàtica descrit en l'enunciat del problema amb l'ús d'un dibuix específic per a cada tipus de problema i significatiu de la relació matemàtica descrita en l'enunciat. Les dues ajudes restants fan referència al procés de presa de decisions que ha de fer l'alumne tant en la planificació dels

procediments matemàtics que ha d'escollir per resoldre els problemes com en la revisió, control i avaluació del procés seguit.

En aquesta mateixa línia de treball es situa la revisió i síntesi de Jitendra i Ping (1997) de diferents estudis sobre instrucció en resolució de problemes numèrics a alumnes amb dificultats en aquest camp. Aquests autors destaquen l'ús de tècniques de representació com una eina que ajuda els alumnes, d'una banda, a identificar, traduir i representar les relacions semàntiques de l'enunciat del problema i, d'altra banda, a seleccionar i executar les operacions aritmètiques correctes.

La importància de la instrucció explícita de l'estructura del problema ha portat a dissenyar programes d'ensenyament en què, en un primer moment, es treballen diferents exemples o models de problemes en els quals s'expliciten les seves característiques i es suggereix l'estratègia de resolució. Posteriorment, es demana a l'alumne que resolgui diferents problemes similars als exemples treballats. Aquest ha de comparar les característiques dels problemes a resoldre amb els exemples prèviament estudiats, i ha de construir una representació significativa de l'estructura del problema que inclogui principalment el tipus d'objectiu del problema i les estratègies de resolució més adequades per resoldre'l. L'objectiu d'aquest procés d'ensenyament és que l'alumne, davant de problemes similars, activi l'esquema construït i la seva resolució sigui més ràpida i eficaç.

Aquest disseny instruccional basat en el treball de problemes model és molt extens en l'ensenyament de la matemàtica i es troba present en la majoria de llibres de text d'aquesta àrea curricular. Ara bé, molts autors destaquen els resultats poc satisfactoris d'aquest sistema d'ensenyament. El principal handicap que s'assenyala és que l'alumne, com a subjecte novell, fa una analogia entre el problema a resoldre i l'exemple treballat basada en aspectes superficials del problema, la qual cosa propicia que esculli un procediment de resolució inadequat (Gick, 1986).

Altres autors defensen l'ensenyament de l'esquema d'un problema mitjançant l'ús de mètodes d'ensenyament indirectes (Schoenfeld, 1985; Gick, 1986), concretament l'ús d'una metodologia que emfasitzi l'ensenyament dels procediments generals i específics que cal utilitzar, com i quan utilitzar-los. Amb aquest tipus de mètodes els alumnes arriben a deduir indirectament l'estructura del problema que permet utilitzar un determinat procediment. Diferents estudis demostren que, després que els alumnes segueixin un curs que té com a objectiu ensenyar procediments de resolució de problemes, els alumnes també milloren en la classificació i categorització dels problemes (Schoenfeld i Herrmann, 1982).

Aquesta metodologia tampoc està exempta de dificultats en l'aprenentatge de l'estructura del problema. Dues són les principals crítiques que es destaquen. En primer lloc, el coneixement que es genera en els mètodes indirectes és molt implícit i inconscient per part de l'alumne. L'alumne no és capaç de descriure el coneixement que adquireix si no li és ensenyat directament. En segon lloc, són mètodes que no són vàlids per a tots els alumnes, ja que requereixen un alt grau d'abstracció de similituds entre problemes.

En síntesi, la incorporació en els programes d'ensenyament del procés de resolució de problemes d'activitats que fomentin que els alumnes guardin informació útil sobre l'estructura del problema i aplicable a altres situacions, ha de realitzar-se seguint els principis de construcció de coneixement significatiu i s'ha d'evitar que l'alumne es quedi en una anàlisi superficial del problema i apliqui els procediments de resolució de manera rutinària i arbitrària (Schoenfeld, 1992a).

El nostre estudi, recollint les conclusions de les investigacions exposades en aquest apartat, ha elaborat una proposta didàctica que pretén ensenyar estratègies de representació i comprensió de l'enunciat d'un problema. Sintèticament, aquest ensenyament es realitza a partir del treball específic de dos tipus de problemes: problemes amb una estructura d'incògnita i una de comparació; de l'ensenyament

de les estratègies de representació de: separar de l'enunciat del problema el què es coneix i el què es desconeix i organització de les dades i les accions per resoldre el problema en una estructura de quadre de doble entrada; i de l'ús del full de càlcul.

2.2. Les estratègies de resolució de problemes

La resolució d'un problema és un procés complex i difícil que consisteix en un conjunt de processos de pensament i d'accions que combinen, d'una banda, el que s'ha anomenat "patró heurístic" (Krulik i Rudnick, 1989) o manera general d'aproximar-se a la solució, descrit per un conjunt d'estratègies generals de resolució que el subjecte utilitza de manera sistemàtica davant d'una situació problemàtica i, d'altra banda, estratègies específiques o accions molt lligades a les característiques concretes del problema, com per exemple, procediments sobre el contingut matemàtic sobre el qual versa o situació descrita.

L'esforç de molts investigadors ha estat classificar i agrupar les estratègies i comportaments generals i específics dels experts en la resolució de problemes amb l'objectiu de sistematitzar-los i d'afavorir el seu ensenyament/aprenentatge. La hipòtesi que guia el treball en aquest camp d'estudi és que l'augment del repertori d'estratègies dels alumnes millorarà el seu rendiment en la resolució de problemes.

En aquest apartat revisarem les principals investigacions i aportacions realitzades sobre les estratègies que tenen una major incidència en la resolució amb èxit d'un problema. Dividirem aquesta revisió en dos blocs: les estratègies generals i les estratègies específiques.

2.2.1. Les estratègies generals de resolució de problemes

En l'àmbit educatiu existeix un gran interès en conèixer les estratègies i procediments generals que són necessaris posar en joc per resoldre les tasques escolars de les diferents àrees curriculars amb l'objectiu de poder sistematitzar el seu ensenyament. En aquest sentit, citem, per exemple, els treballs de Pozo i Postigo (1993) i Pastor (1993). Ambdós treballs realitzen una anàlisi exhaustiva de les estratègies i procediments generals de les diferents àrees del currículum escolar. L'objectiu últim és organitzar els continguts procedimentals tenint en compte criteris que puguin ser vàlids per planificar el seu ensenyament.

Pozo i Postigo (1993) analitzen i organitzen les diferents estratègies i procediments generals del currículum escolar tenint en compte la funció que aquests realitzen dins del procés i de les activitats d'aprenentatge. D'acord amb aquest criteri, aquests autors diferencien cinc tipus de propòsits o estratègies generals que corresponen a cinc fases o etapes del processament de la informació durant l'aprenentatge. Cadascuna d'aquestes generals agrupa un conjunt de procediments o accions més simples. Les cinc estratègies identificades per aquests autors són les següents:

1. "Adquisición de la información.
2. Interpretación de la información.
3. Análisis de la información y realización de inferencias.
4. Comprensión y organización conceptual de la información.
5. Comunicación de información". (Pozo i Postigo, 1993:53).

En aquesta mateixa línia, Pastor (1993) analitza els diferents procediments proposats en el Disseny Curricular Base de la Generalitat de Catalunya en totes les àrees curriculars amb l'objectiu de proposar una classificació que ordeni d'alguna manera la multidimensionalitat del saber fer i orienti la tasca del professor en el procés d'ensenyament/aprenentatge de procediments. Aquesta anàlisi es realitza a dos nivells: un nivell intra-àrea i un nivell inter-àrea. Aquest autor proposa la classificació dels diferents procediments curriculars en les onze categories que es detallen a continuació, cadascuna d'elles inclou altres procediments:

- I. “Procedimientos que suponen una actividad motriz evidente.
- II. Procedimientos que implican habilidades cognitivas básicas.
- III. Procedimientos para la recogida de información.
- IV. Procedimientos para el tratamiento de la información.
- V. Procedimientos para la expresión de la información.
- VI. Procedimientos para interpretar y seguir instrucciones y normas.
- VII. Procedimientos para medir y calcular.
- VIII. Procedimientos para la orientación espacial.
- IX. Procedimientos para leer y escribir.
- X. Procedimientos para favorecer la creatividad.
- XI. Procedimientos para la planificación”. (Pastor, 1993:134).

En l'àrea de les matemàtiques s'han portat a terme diferents estudis que analitzen les estratègies generals o heurístiques de resolució de problemes que utilitzen els experts amb l'objectiu d'ensenyar-les als alumnes i millorar el seu rendiment en l'àrea de les matemàtiques. Uns dels primers treballs realitzats des d'aquesta

perspectiva són els estudis de Polya (1945), estudis que han inspirat una bona part de la investigació realitzada dins del tòpic de “problem solving”.

La paraula heurístic és d'origen grec i significa “que serveix per conèixer o per descobrir”. Seguint les paraules de Polya, els heurístics són procediments generals que encaren cap a una possible solució del problema; no són una "recepta" sinó que són guies pràctiques que poden ajudar a solucionar el problema. D'aquesta definició es desprèn que són procediments relativament independents del contingut específic sobre el qual versa el problema, i que, per tant, s'espera que es puguin utilitzar per resoldre moltes situacions diferents. La transferència d'aquestes estratègies és un dels objectius més assenyalats en el seu ensenyament. Ara bé, perquè l'alumne sigui capaç de transferir l'ús d'una estratègia general per resoldre diferents tipus de situacions problema, aquest no pot aplicar aquest tipus d'estratègies d'una manera literal, sinó que és necessària una adaptació en cada situació i una construcció i interpretació per part de l'individu a través de l'experiència (Pérez Echevarría i Pozo, 1994).

Els procediments heurístics cal diferenciar-los dels procediments algorísmics, els quals provenen del llenguatge matemàtic, i suposen una seqüència d'accions ordenades segons unes regles que porten a la solució de problemes d'un tipus específic. Si davant un problema es tria adequadament un procediment algorísmic i s'aplica de manera apropiada, sense cometre errors aritmètics ni mecànics, s'obté la resposta correcta.

Polya (1945) defineix la resolució d'un problema matemàtic com un procés heurístic de quatre fases o etapes: comprensió del problema, disseny d'un pla per descobrir la solució, execució del pla i revisió de les accions i els procediments realitzats per obtenir el resultat. En els estudis de Polya, aquest model té un marcat caire seqüencial, però investigacions posteriors sobre la resolució de problemes per subjectes experts destaquen que aquest procés no és seqüencial, sinó que els

experts van d'una fase a una altra segons el tipus de problema i els resultats que es van obtenint (Schoenfeld, 1985; Artzt i Armour-Thomas, 1992; Lester, 1994, entre altres).

En cada etapa, el subjecte que resol el problema pot utilitzar diferents procediments que l'ajudin a aconseguir l'objectiu de cada fase i resoldre el problema amb èxit. Dedicarem els propers paràgrafs a analitzar les característiques de les quatre fases d'aquest model de resolució de problemes.

1r. Entendre el problema

Aquesta fase o moment del procés de resolució implica aconseguir dos objectius. En primer lloc, la comprensió gramatical i semàntica de cadascuna de les proposicions del problema amb l'objectiu d'entendre les condicions i l'objectiu que l'enunciat planteja. En segon lloc, la informació extreta ha de permetre una representació mental del problema. Aquesta representació implica l'agrupament de les diferents proposicions del problema, prèviament enteses, de manera significativa per a l'individu. Aquest esquema mental servirà de mitjancer entre l'enunciat del problema i la solució, guiant en la selecció i l'aplicació d'estratègies de resolució de problemes (Heller i Hungate, 1985).

Per aconseguir aquests objectius l'alumne pot utilitzar procediments heurístics com: subratllar la informació més important de l'enunciat del problema, parafrasejar l'enunciat, dibuixar un esquema-figura de la situació descrita en el problema i separar les proposicions del problema en dades, incògnita i condicions.

Diversos estudis demostren la dificultat dels estudiants de diferents nivells educatius per extreure la informació, sobretot de tipus semàntic, de les proposicions dels problemes matemàtics, i, en conseqüència, la dificultat per a traduir-la a una nomenclatura matemàtica que afavoriria la resolució del problema (per exemple: Greeno, 1980; Soloway, Lochhead i Clement, 1982).

Aquests estudis argumenten que la causa d'aquestes dificultats dels estudiants per comprendre el problema es troba en les estratègies que s'utilitzen en aquesta fase inicial de la resolució de problemes. Aquest argument també s'utilitza en les investigacions que estudien les diferències entre les actuacions dels experts i les dels novells en la resolució de problemes; aquestes investigacions demostren que els novells dediquen menys temps que els experts a comprendre el problema, i que la qualitat de les estratègies utilitzades també és inferior.

Els experts, abans de començar a escriure anotacions matemàtiques per resoldre el problema, passen pel que Larkin (1981) anomena com a període "d'anàlisi qualitativa", en el qual dediquen una quantitat de temps important a dibuixar representacions esquemàtiques de la situació descrita en el problema. Aquestes accions permeten a l'expert arribar a una representació del problema de tipus semàntic i descontextualitzada del contingut específic del problema. L'anàlisi qualitativa els ajuda a buscar relacions generals en les proposicions del problema i lligams amb els coneixements previs, els quals fan la funció de guia durant el procés de resolució.

En canvi, els subjectes novells dediquen molt poc temps en aquesta fase, són molt impulsius, cerquen una solució prematura realitzant ràpidament anotacions matemàtiques. La representació del problema és més de tipus sintàctic i molt contextualitzada en els detalls concrets i en els continguts específics del problema. Les relacions entre les proposicions del problema i els coneixements previs són pobres i escasses.

La importància de la representació en la resolució de problemes ha portat al disseny de programes d'ensenyament que treballen específicament aquesta variable del procés de resolució. En aquest sentit destaquem l'estudi realitzat per Larkin (1981) en què es dissenya un programa instruccional que ensenya a estudiants universitaris de física, els processos utilitzats per experts en la representació de

problemes d'aquest àmbit. En aquesta instrucció es treballaven quatre tipus de representació: a) la representació del contingut verbal del problema; b) la representació de la situació física del problema; b) les representacions abstractes sobre conceptes de física, i d) la representació quantitativa en forma d'equacions matemàtiques que permetien resoldre el problema.

Els resultats d'aquest estudi conclouen que el rendiment en la resolució de problemes de física dels estudiants millora significativament després del període instruccional.

2n. Dissenyar un pla de resolució

L'objectiu d'aquesta fase és perfilar un pla de resolució. Per aconseguir-ho s'insisteix que l'alumne primer construeixi una representació mental significativa de l'espai descrit en el problema que li permeti, posteriorment, seleccionar aquells procediments més adients per trobar la solució al problema.

En la representació mental del problema juga un paper molt important la comprensió lingüística (tant sintàctica com semàntica), aspecte esmentat en l'apartat anterior de comprensió del problema, i l'articulació dels coneixements previs de l'individu, tant conceptuals com procedimentals.

Els coneixements previs ajudaran l'individu a categoritzar el problema en una tipologia concreta, tenint en compte tot un conjunt de característiques del problema, com per exemple: els conceptes implícits implicats, l'estructura del problema i el llenguatge que utilitza. Aquesta categorització activarà diferents maneres de resoldre el problema que l'individu coneix, les quals considerarà i n'explorarà la utilitat per solucionar el problema plantejat.

En aquesta fase s'emfasitza l'aprenentatge de procediments heurístics com: separar les dades conegudes de les desconegudes; buscar un problema semblant i conegut i

valorar la possibilitat d'utilitzar les mateixes estratègies o amb petites adaptacions per resoldre el problema actual; dividir el problema amb petites parts.

3r. Desenvolupar el pla de resolució

En aquesta fase l'alumne ha de portar a terme el pla de resolució. Polya facilita el seu aprenentatge mitjançant preguntes sobre la revisió i el control del procés que es segueix.

En el model heurístic de resolució de problemes de Polya no s'assenyalen procediments concrets a realitzar en aquesta fase. Investigacions posteriors, sobretot a partir de la introducció del concepte de la metacognició, donaran una major importància a aquesta fase del procés de resolució, i es dissenyaran processos instruccionals específics per ajudar l'alumne a revisar el procés de resolució del problema.

4rt. Avaluar

En aquesta fase es potencia l'avaluació del procés i del resultat obtingut mitjançant l'ús d'estratègies generals d'avaluació, com per exemple: analitzar la lògica del resultat aconseguit, cercar una altra manera de resoldre el problema i demostrar la correcció del resultat. Un segon aspecte d'aquesta fase és la transferència del procés seguit a altres problemes, analitzant els aspectes del procés de resolució més generals i, per tant, aplicables a altres situacions.

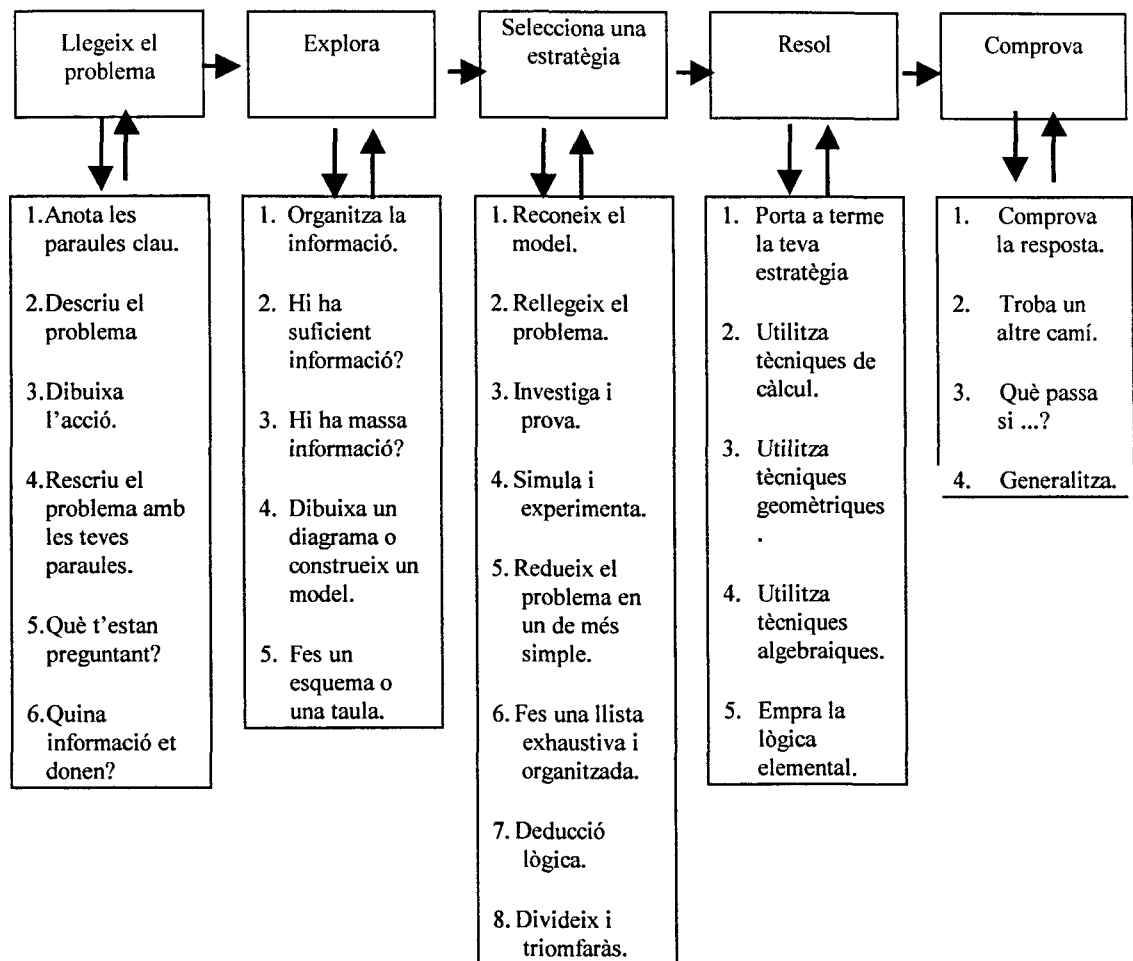
El model proposat per Polya ha estat el referent teòric per a la investigació posterior sobre el procés de resolució de problemes i el suport per al disseny d'altres models. Si es revisen les bases de dades, es poden trobar centenars de referències sobre diferents models de resolució de problemes. No és l'objectiu d'aquest treball fer una revisió exhaustiva d'aquests treballs, però, a tall d'exemple, volem destacar els quatre següents, els quals per les seves característiques han estat

un referent teòric en el disseny de la proposta d'ensenyament/aprenentatge que estudiem en el nostre treball d'investigació.

En primer lloc, volem fer esment del model de Bransford i Stein (1986). Aquests autors aporten el model que anomenen "IDEAL" per resoldre problemes i que correspon a les inicials dels processos cognitius que es treballen: identificar potencials problemes; definir i representar el problema amb precisió; explorar diferents vies o mètodes de resolució del problema; actuar conforme a un pla de resolució i avaluar els resultats aconseguits d'acord amb l'adequació als objectius del problema.

En cadascuna de les fases, els autors proposen procediments que el subjecte pot realitzar per aconseguir l'objectiu de la fase i indiquen els errors més freqüents que es cometien.

En segon lloc, el model de Krulik i Rudnick (1989) és un dels models que ha seguit de manera fidel el proposat per Polya. Divideix el procés de resolució en cinc fases heurístiques i en cadascuna d'elles proposa la seqüència de procediments que el subjecte pot realitzar per aconseguir-n els objectius. Les fases i els procediments proposats es detallen en el següent perfil:



Gràfic I-3: Model d'ensenyament d'estratègies generals de resolució de problemes en el model de Krulik i Rudnick (1989:24).

En tercer i quart lloc, els models de Schoenfeld (1985) i Lester (1985)³, els quals prenen com a punt de partida les fases heurístiques proposades per Polya i incorporen procediments de planificació, monitorització i control del procés de

³ Ambdós models s'exposen amb més detall en l'apartat 3.1 d'aquest capítol, dedicat a l'anàlisi dels models instruccionals d'estratègies de resolució de problemes.



resolució de problemes com a eina clau per aconseguir l'aprenentatge d'estratègies de resolució de problemes.

En síntesi, el model de resolució de problemes proposat per Polya i els que s'han elaborat amb posterioritat seguint els seus principis fonamentals, es basen, en primer lloc, en l'observació i l'estudi detallat dels processos utilitzats per experts quan resolen problemes desconeguts o d'una certa dificultat. I, en segon lloc, a extraure els processos uniformes, constants i generals que serveixen per construir i proposar un model ideal de resolució de problemes. En aquest model es defineix el conjunt de processos cognitius, habilitats i competències necessaris per resoldre un problema i s'estructura en etapes o fases que faciliten el seu ensenyament/aprenentatge.

Aquesta premissa bàsica fonamentada en l'estudi de les estratègies generals utilitzades pels experts i el disseny de models o programes d'instrucció basats en les conclusions d'aquests estudis com una eina eficaç per millorar el procés de resolució dels alumnes ha estat molt qüestionada en la investigació especialitzada en aquest camp. Entre les principals crítiques destaquem les quatre següents:

En primer lloc, es tracta de models formals construïts a càrrec d'un a priori, que és el procés ideal, conceptual o lògic de resoldre problemes. Són models a través dels quals es concreta una teoria excessivament basada en el procés de raonament matemàtic: l'heurístic-deductiu, en aquests models l'ensenyament de la resolució de problemes està viciat per la pròpia deformació professional del matemàtic immers en demostracions lògiques, rigoroses i coherents, i el procés de resolució de problemes és tractat més com un procés lògic-matemàtic coherent que com un procés personal, en el qual els factors de caire cultural, social i cognitiu són també molt importants (Alonso, González i Sáenz, 1988).

En segon lloc, els models teòrics de resolució de problemes estan basats en el paradigma didàctic de procés-producte, en què un dels principals objectius de l'ensenyament d'estratègies heurístiques de resolució de problemes és dotar els alumnes d'estratègies generals que els facilitin la resolució de qualsevol tipus de problemes, esperant una millora correlacional de l'eficiència resolutiva. Treballs posteriors que estudien la incidència que té l'ensenyament/aprenentatge d'heurístics en el rendiment matemàtic aporten resultats contradictoris sobre la seva eficàcia.

Per exemple, Begle (1979), recollint els resultats de 75 estudis empírics en estratègies de resolució de problemes afirma, que no hi ha evidència empírica que algunes estratègies generals de resolució de problemes millorin el procés de resolució de tots els alumnes. En aquesta mateixa línia, es situa la meta-anàlisi elaborada a partir de 487 estudis sobre resolució de problemes i realitzada per Hembree (1992), en què no s'observa un millor rendiment dels alumnes que han seguit programes d'ensenyament d'estratègies generals de resolució de problemes.

En tercer lloc, Schoenfeld (1985) destaca, a partir d'un exhaustiu estudi de les característiques dels programes d'instrucció d'estratègies heurístiques de resolució de problemes, que aquests programes no tenen en compte l'ensenyament d'estratègies més específiques i vinculades al contingut del problema. Una estratègia heurística és una etiqueta que engloba tot un conjunt d'estratègies més específiques. L'ensenyament d'un heurístic comporta l'ensenyament dels diferents passos o estratègies més específiques que hi estan implicades, més relacionades amb el contingut o matèria específica de què tracta el problema.

El coneixement sobre com ajustar l'estratègia general a les característiques del camp conceptual específic és un factor decisiu de l'èxit dels experts. Aquestes estratègies més específiques i estretament relacionades amb el contingut del problema són les que guien les decisions dels experts durant la resolució (Chi, *et al.* 1981; Gick, 1986; Smith, 1992). És poc realista pensar en l'ensenyament

d'estratègies generals, aplicables a qualsevol tipus de problema, com a eina única que millori el procés de resolució.

Finalment, la quarta crítica destacada dels programes d'instrucció d'estratègies heurístiques ha estat l'èmfasi excessiu en l'ensenyament d'una col·lecció d'estratègies sense atendre a com i quan utilitzar-les.

En la resolució d'un problema l'individu ha de prendre un conjunt de decisions en què d'alguna o altra manera, ha de triar i utilitzar de manera significativa els seus recursos, com per exemple: decidir el camí a seguir segons les característiques del problema, decidir quines estratègies poden portar a la solució (i quines no), canviar d'estratègia quan convingui i monitoritzar tot el procés de resolució.

La capacitat de prendre aquest tipus de decisions té a veure amb la habilitat de l'individu per monitoritzar, regular i controlar el procés de resolució. Aquesta habilitat va ser definida per Flavell (1976) com a metacognició.

Estudis posteriors destaquen l'important rol que juguen les decisions metacognitives en la resolució de problemes (Lester, 1985, 1994; Schoenfeld, 1985, 1992a; Delclos i Harrington, 1991; King, 1994, 1997) i emfasitzen la necessitat de dissenyar programes d'instrucció de resolució de problemes que incorporin el seu ensenyament.

Dedicarem un posterior apartat a exposar la importància de l'ensenyament d'estratègies metacognitives en la resolució de problemes de matemàtiques.

2.2.2. Les estratègies específiques en el procés de resolució de problemes

Les crítiques sorgides a partir de nombrosos estudis realitzats per avaluar l'eficàcia de l'ensenyament d'estratègies generals o heurístics de resolució de problemes emfasitzen la necessitat d'ensenyar, paral·lelament, estratègies específiques de resolució de problemes, molt vinculades a un camp conceptual específic, i que són necessàries per gestionar la informació d'un contingut concret i resoldre els problemes en què aquest contingut està implicat.

L'estudi d'aquest tipus d'estratègies s'ha desenvolupat a partir de dues orientacions teòriques diferents: l'organització lògica de la disciplina en qüestió i els estudis sobre els diferents processos cognitius que es posen en joc en la realització de tasques concretes de les diferents àrees disciplinars realitzats des del processament de la informació.

Des del primer enfocament, l'estudi sobre els procediments específics que l'alumne ha de conèixer en una disciplina concreta i la manera com es seqüencia el seu aprenentatge es realitza a partir de dues anàlisis. D'una banda, s'estudia l'organització de la informació en disciplines concretes, també anomenada "estructura lògica del contingut", i s'estableixen els procediments específics que l'alumne ha de dominar per accedir a una determinada informació. D'altra banda, s'estudia la construcció psicogenètica d'un contingut específic pels alumnes, també anomenada "estructura psicològica", i s'estableixen els procediments psicològics que intervenen en el procés de construcció del coneixement (Pozo *et al.* 1991).

El segon enfocament té el seu origen en les investigacions sobre els processos cognitius implicats en activitats complexes, com per exemple, la lectura, l'escriptura o la resolució de problemes matemàtics (Resnick, Wang i Kaplan,

1973; Schoenfeld, 1985; Bereiter i Scardamalia, 1987; Paris i Newman, 1990). En aquests estudis es formula i es contrasta empíricament un model teòric que explica els processos cognitius que s'activen en realitzar una activitat complexa. Aquests models permeten formular hipòtesis sobre les operacions cognitives necessàries en cada tasca, que són les que definiran les estratègies específiques necessàries per resoldre una activitat determinada.

L'ensenyament d'estratègies específiques lligades a continguts concrets pot córrer el risc, segons Derry (1990), de dissenyar situacions educatives que emfasitzin l'aprenentatge de seqüències ordenades i prefixades de procediments aplicats algorímicament per resoldre una tasca. Segons aquest autor, les situacions d'ensenyament/aprenentatge d'estratègies específiques han de garantir la presa de decisions sobre els procediments més adequats i la seva seqüenciació, a partir de l'anàlisi de les característiques de la tasca.

El treball d'investigació que presentem pretén recollir les consideracions que hem destacat en aquest apartat. En aquest sentit, un dels objectius del nostre estudi és el disseny d'una proposta didàctica que integri l'ensenyament/aprenentatge d'estratègies generals i d'estratègies específiques per resoldre problemes sobre el contingut matemàtic de la proporcionalitat.

2.3. Metacognició i resolució de problemes

En l'anterior apartat hem deixat palès que el fet de tenir un repertori ampli d'estratègies no és una eina suficient per resoldre amb èxit un problema. En el procés de resolució és necessari posar en joc un conjunt de variables que tenen a veure amb el com, quan i en quines condicions s'utilitzen els propis recursos per resoldre satisfactòriament una situació problemàtica. En el camp de la psicologia

cognitiva, aquestes variables s'han anomenat: "driving forces", habilitats directives "managerial skills", habilitats executives o metacognitives. En aquest sentit es mostren les paraules de Schoenfeld (1985), un dels autors de reconegut prestigi internacional per les seves valuoses aportacions en l'estudi del procés cognitiu de resolució de problemes:

"As the person begins to work on a problem, it may be the case that some of the heuristic techniques that appear to appropriate are not. (...) If the problem solver chooses to implement one or more inappropriate strategies and pursues them to the exclusion of other possibilities, then the problem-solving attempt will fail. (...) In consequence, having a mastery of individual heuristic strategies is only one component of successful problem solving. Selecting and pursuing the right approaches, recovering from inappropriate choices, and in general monitoring and overseeing the entire problem-solving process, is equally important. One needs to be efficient as well as resourceful." (Schoenfeld, 1985:98-99).

És un tòpic datar l'inici de la utilització del terme metacognició en els treballs de Flavell (1970) sobre l'estudi de la memòria. En aquests treballs Flavell defineix aquest concepte psicològic com "el coneixement d'un mateix en relació amb els propis processos i productes cognitius o amb tot el que està relacionat amb ells".

Des d'aleshores, un gran nombre d'estudis realitzats des de diferents perspectives psicològiques han aportat gran quantitat d'enfocaments d'investigació i de noves dades sobre el concepte de metacognició. Aquest mosaic d'investigacions, la complexitat per definir el concepte i delimitar l'indars clars entre les diferents variables que hi poden estar implicades, i el gran nombre de processos cognitius susceptibles de portar el prefix meta: meta-memòria, meta-aprenentatge, meta-atenció, meta-representació, meta-llenguatge... han creat una confusió conceptual al voltant d'aquest terme psicològic (Brown, 1987; Moreno, 1989; Martí, 1995).

Ara bé, existeix un consens en el fet de diferenciar dues grans dimensions de l'activitat metacognitiva, molt relacionades entre si, i que defineixen dues línies d'investigació sobre aquest concepte psicològic. D'una banda, el coneixement sobre els propis processos cognitius, i d'altra banda, la regulació dels processos cognitius, els quals passem a estudiar a continuació.

a) Estudis que investiguen el coneixement que té la persona sobre els seus processos cognitius, és a dir, el coneixement declaratiu sobre el funcionament psicològic general.

En aquest grup d'estudis el coneixement metacognitiu és entès com una reflexió personal sobre l'estat dels propis coneixements i dels propis processos cognitius.

Aquest tipus de coneixement faria referència a “què és el que sabem”, a “saber que”, apropant-se més a un coneixement declaratiu de l'activitat cognitiva. Brown (1987) el defineix com un coneixement estable -no varia d'una situació a una altra-, temàtic -el subjecte pot verbalitzar i reflexionar sobre aquest coneixement amb altres persones-, fal·lible -es pot tenir un coneixement erroni sobre el funcionament de la pròpia cognició-, i que es desenvolupa tardanament, ja que requereix que el subjecte consideri els propis processos cognitius com a objecte de pensament i de reflexió.

Aquesta vessant de la metacognició desenvolupa el que Monereo (1992) anomena "autoimatge cognitiva" i que té una gran importància a l'hora que l'individu controlï el seu entorn i faci prediccions d'èxit davant una tasca concreta, influenciant en l'estat motivacional de l'estudiant.

L'aproximació al coneixement del funcionament cognitiu pot produir-se, segons Flavell (1976, 1987, 1992), a partir de l'anàlisi de tres tipus de variables i de les seves interaccions respectives: variables de la persona, variables de la tasca i variables de l'estratègia.

El coneixement sobre les variables de la persona fa referència a tot allò que un pot considerar sobre si mateix i sobre altres persones com a éssers cognitius. Pot ser subcategoritzat en coneixements sobre les diferències intraindividuals, diferències interindividuals, de comparació de la manera d'actuar de diferents persones (per exemple, un company és millor en l'aprenentatge de conceptes matemàtics que lingüístics) i universals sobre les característiques generals dels processos cognitius (per exemple, no es pot entendre el que una altra persona diu si no se l'escolta atentament).

Nisbet i Shucksmith (1987) també diferencien dues vessants en el coneixement sobre les variables personals: el coneixement sobre les qualitats i capacitats permanents d'un mateix (per exemple, recordar millor una informació si es pot llegir que si es pot escoltar) i el coneixement de processos i estats transitoris, molt lligat a les característiques d'una tasca concreta.

El coneixement sobre les variables de la tasca fa referència al fet de saber com les característiques de la informació d'una tasca afecten la manera de representar-nos-la i d'operar amb ella; per exemple, sabem que haurem de fer un major esforç per processar informació nova i difícil que per processar informació familiar i fàcil.

Dins de l'aprenentatge escolar, Moreno (1989) destaca la importància de tres subcategories de les variables de la tasca: el coneixement dels objectius de la tasca, ja que en ells es basarà la planificació de les accions que permetran a l'alumne assolir-los i resoldre amb èxit la tasca proposada; el grau de dificultat, i la familiaritat.

El coneixement sobre les variables de l'estratègia fa referència al coneixement que s'adquireix sobre les estratègies que són més efectives per assolir els objectius d'una tasca. Amb l'edat, aquest tipus de coneixement augmenta en quantitat de coneixement adquirit i acumulat, en perfeccionament i generalització, i en

intensificació dels lligams d'unió entre les finalitats cognitives d'una tasca i el coneixement metacognitiu respecte a l'ús estratègic de la informació per aconseguir els objectius (Flavell, 1976; 1987).

Flavell i altres autors que estudien el coneixement declaratiu sobre la pròpia cognició, tot i que destaquen aquesta taxonomia tripartida com una manera aclaridora per estudiar i entendre el tipus de coneixement implicat en aquesta vessant de la metacognició, també assenyalen que la major part del coneixement metacognitiu implica l'existència d'interaccions o de combinacions entre les tres variables assenyalades. Així, davant la resolució d'una tasca, és poc probable que un individu consideri aquestes variables per separat; l'essència de la complexa activitat cognitiva és la capacitat de combinar i equilibrar aquestes variables interactivament (Flavell, 1992; Mayor, Suengas i González, 1993).

b) La segona vessant de l'activitat metacognitiva fa referència al coneixement relacionat amb el control i amb la regulació del propi coneixement i/o dels propis processos cognitius. L'objectiu dels estudis realitzats des d'aquesta segona perspectiva és conèixer com la metacognició ajuda a gestionar de manera eficaç les accions que han de permetre resoldre amb èxit una tasca concreta, és a dir, es refereix a l'aspecte procedimental del coneixement, "al saber com" (Martí, 1995).

Brown (1987) defineix aquest coneixement com relativament inestable -molt lligat a les característiques de la tasca concreta-, no tematitzable -saber com fer una cosa no implica necessàriament que les accions puguin ser conscients i que el subjecte pugui reflexionar sobre elles- i relativament independent de l'edat del subjecte -els processos de regulació s'observen en nens de diferents edats i en adults-.

Els processos essencials encarregats de la regulació i del control dels processos cognitius que diferents autors destaquen dins d'aquesta segona vessant de la

metacognició són la planificació, el control i l'avaluació (Flavell, 1976, 1992; Moreno, 1989; Mayor, Suengas i González, 1993; Martí, 1995).

La planificació és l'organització prèvia dels processos i de les accions que facilitaran la resolució d'una tasca. Equival a dissenyar i seleccionar per endavant els procediments més adequats per resoldre una tasca i permet estructurar i organitzar la pròpia resolució.

Moreno (1990) diferencia dos subprocessos dins de la planificació. D'una banda, el plantejament o metaplà, també anomenada estratègia central (Brown, 1987), que seria l'estratègia metacognitiva més general i que té a veure amb el conjunt de decisions sobre com encarar el problema en general. D'altra banda, la decisió sobre quines són les accions més desitjables que cal realitzar per planificar de manera més específica els mitjans i la seva seqüència d'utilització per assolir els objectius de la tasca.

Els processos de control es manifesten durant la resolució de la tasca i poden referir-se a activitats de verificació, rectificació i revisió de l'estratègia utilitzada.

Els processos d'avaluació dels resultats fan referència a les accions que es realitzen un cop acabada la resolució de la tasca i que tenen com a objectiu avaluar els resultats de l'estratègia utilitzada en termes d'eficàcia.

2.3.1. Les estratègies metacognitives en el procés de resolució de problemes

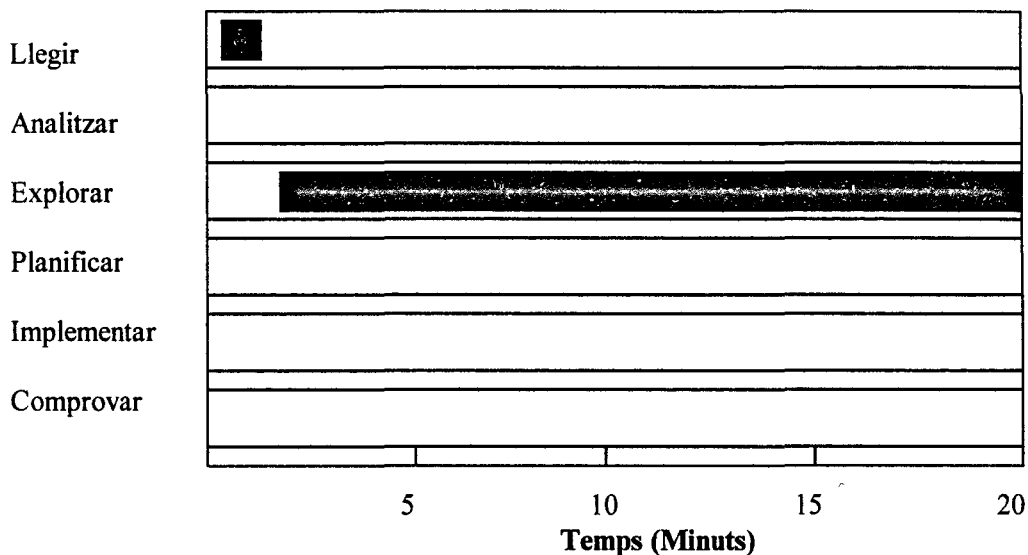
El concepte de la metacognició ha rebut una gran atenció en el camp de la resolució de problemes. Treballs com els de Lesh (1985), Garofalo i Lester (1985), Lester (1985), Schoenfeld, (1985, 1987, 1989, 1992a, 1992b), Lester i Mau (1993) i King (1991; 1997), entre els autors més destacats, tenen com a objectiu investigar la incidència que té en la resolució amb èxit de problemes la consciència, el control i l'avaluació dels propis recursos utilitzats durant el procés de resolució. Els resultats que s'obtenen i les conclusions que s'extrauen en aquests estudis emfasitzen la importància de les estratègies metacognitives en la resolució amb èxit de problemes matemàtics; en paraules d'Schoenfeld (1992a:355) "It's not just what you know; it's how, when, and whether you use it".

En especial, els treballs de Schoenfeld han aportat dades molt importants a les diferències en el procés de resolució de subjectes experts i novells quant a les estratègies metacognitives que ambdós grups posen en joc durant aquest procés i les conseqüències que aquestes poden tenir en la resolució amb èxit del problema. L'estudi i la comparació de les diferències en el procés de resolució entre subjectes experts i novells s'ha realitzat mitjançant l'enregistrament en vídeo i posterior anàlisi d'aquest procés.

En aquests estudis Schoenfeld (1989, 1992a, 1992b) analitza parelles d'alumnes que tenen un ampli coneixement declaratiu dels procediments a utilitzar en la resolució d'un problema sobre geometria; en anteriors sessions havien estudiat la resolució d'aquest tipus de problemes en les classes de matemàtiques i en un examen posterior els alumnes analitzats havien obtingut molt bons resultats. Es demana als alumnes que resolguin en veu alta i conjuntament un problema sobre geometria que es presenta en un context diferent al dels problemes realitzats durant

les classes de matemàtiques. Les característiques del procés de resolució observades en aquests alumnes es presenten en el gràfic I-4.

Episodi



Gràfic I-4: Característiques del procés de resolució de problemes no familiars dels alumnes.

Adaptat de Schoenfeld (1992a:356)

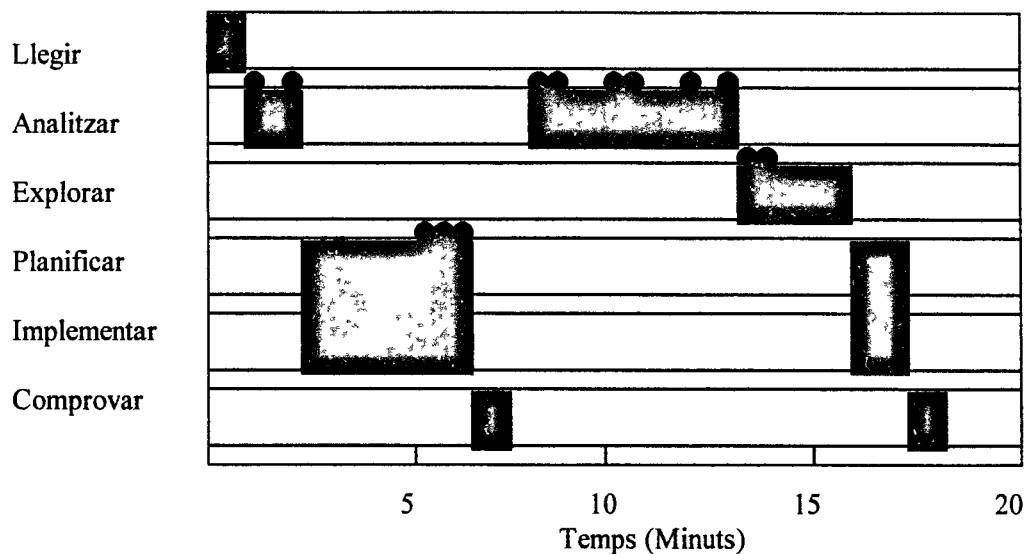
Com s'observa en el gràfic I-4, els alumnes llegeixen el problema en un espai molt curt de temps, fan una conjectura i executen un procediment de resolució durant vint minuts. Al llarg d'aquest període de temps, els alumnes realitzen complicats càlculs per trobar la solució. Malgrat l'evidència que el procediment triat no dóna bons resultats, continuen insistentment amb el procediment matemàtic escollit. Al finalitzar el temps assignat per la resolució del problema, l'experimentador els pregunta si aquest procediment els hagués pogut portar a trobar la solució. Els alumnes no poden contestar a la pregunta.

Els alumnes, durant un llarg període de temps, realitzen accions “a cegues”, sense qüestionar-se en cap moment si el procediment és adequat o si poden trobar algun altre procediment que els porti a la solució correcta.

Schoenfeld (1989, 1992a, 1992b) conclou que malgrat que, els alumnes coneixen els procediments adequats per resoldre el problema plantejat, no aconsegueixen l'èxit perquè no són capaços de gestionar i d'ajustar el seu coneixement a una nova situació problema, de regular i d'avaluar l'eficàcia de tot el procés de resolució.

Aquest procés de resolució d'un subjecte novell es compara amb les característiques que presenta un subjecte expert. En aquest cas, es demana a un expert en matemàtiques que resolgui un problema també sobre geometria. En la investigació participa una persona experta en la resolució de problemes matemàtics, però no experta en la resolució de problemes sobre geometria, amb l'objectiu que el problema a resoldre sigui poc familiar, i es trobi en una situació similar als alumnes novells. Les característiques del procés de resolució de l'expert es troben representades en el gràfic I-5.

Episodi



Gràfic I-5: Característiques del procés de resolució de problemes no familiars per experts.

Adaptat de Schoenfeld (1992a:356)

El procés de resolució de l'expert mostra grans diferències respecte al procés del novell. Com s'observa en el gràfic I-5, en primer lloc, l'expert utilitza més de la meitat del temps disponible per crear una representació significativa del problema i analitzar els possibles procediments de resolució, accions definides en els episodis d'anàlisi i d'exploració; és a dir, l'expert pensa més que no pas actua.

En segon lloc, l'expert explicita un gran nombre de comentaris sobre l'estat del procés de resolució i l'adequació d'un procediment. Aquests comentaris que expressen consciència i regulació del procés es marquen en el gràfic amb rodones. El moment en què l'expert realitza aquests comentaris autoreguladors són molt significatius. Si observem el gràfic, aquests es produeixen majoritàriament en l'episodi d'anàlisi, en què fan referència a la necessitat d'entendre bé la situació del

problema, i en l'episodi de planificació/implementació, en què fan referència a la revisió i el control del procés de resolució.

En tercer lloc, l'expert considera i executa diferents procediments per resoldre el problema, alguns d'ells incorrectes.

Schoenfeld conclou que les principals diferències entre el procés de resolució de l'expert i del novell són atribuïbles a les estratègies metacognitives desenvolupades per l'expert que li permeten gestionar i utilitzar de manera més eficient el coneixement necessari per resoldre un problema poc familiar.

Baxer, Elder i Glaser (1996), en un estudi més recent arriben, a conclusions similars a les exposades per Schoenfeld. Aquests autors comparen el procés de resolució de problemes de ciències d'alumnes amb un alt i un baix nivell de competència i destaquen que el procés de resolució de problemes dels primers es diferencia del segons en:

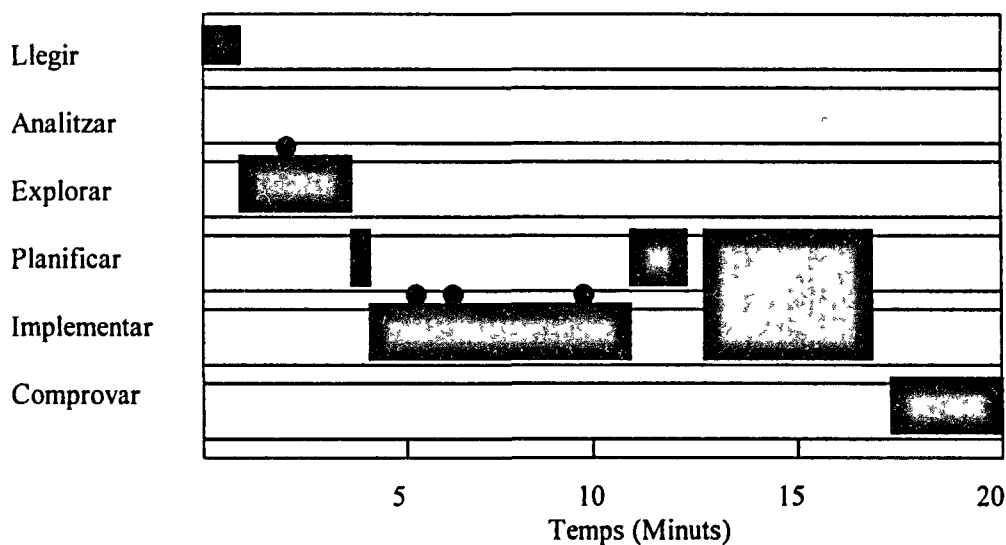
- a) Les explicacions sobre el procés de resolució són més coherents i es fonamenten en aspectes principals dels continguts sobre el quals versa el problema.
- b) Generen un pla de resolució que és guiat per una representació adequada del problema i per possibles procediments a executar.
- c) Executen procediments que són rellevants pels objectius del problema.
- d) Reajusten i regulen les seves accions d'acord amb els resultats que van obtenint.

En síntesi, els estudis assenyalats fins aquest moment destaquen la importància de les estratègies metacognitives en la resolució amb èxit de problemes. Aquesta conclusió és també corroborada per un altre nucli d'investigacions centrades a estudiar la millora en el procés de resolució que experimenten els subjectes novells quan es dissenyen programes d'instrucció que incorporen

l'ensenyament/aprenentatge explícit d'estratègies metacognitives, programes que analitzarem en els següents paràgrafs.

Els estudis de Schoenfeld (1989, 1992a) també mostren els canvis experimentats en el procés de resolució d'alumnes després de seguir un curs d'ensenyament d'estratègies de resolució en el qual es fa un èmfasi molt especial en el desenvolupament d'estratègies metacognitives⁴. L'anàlisi del procés de resolució dels alumnes després del curs mostra que aquest s'apropa a les característiques observades en els subjectes experts, com es pot observar en el gràfic I-6.

Episodi



Gràfic I-6: Característiques del procés de resolució dels alumnes després del programa d'instrucció en estratègies metacognitives. Adaptat de Schoenfeld (1992a:357).

⁴ Una explicació detallada de les característiques del programa d'ensenyament es presenta en l'apartat 3.1 d'aquest capítol.

King (1991) també obté bons resultats en la resolució de problemes matemàtics amb alumnes d'ensenyament primari quan aquests segueixen un programa instruccional que té com a objectiu desenvolupar l'aprenentatge d'estratègies cognitives i metacognitives de resolució de problemes. En aquest estudi, l'autora dissenya un material didàctic que consisteix en un conjunt de preguntes sobre diferents aspectes del procés per resoldre problemes matemàtics sobre geometria i en l'ús de programes informàtics específics (els programes utilitzats són: Safari Search, The Pond, Rocky's Boots i The Factory). L'objectiu d'aquest programa d'ensenyament és que els alumnes siguin conscients, es qüestionin i reflexionin sobre les diferents accions que realitzen per resoldre un problema i aprenguin a planificar-les, controlar-les i avaluar-les.

Els resultats aconseguits mostren, en primer lloc, millors resultats en la resolució de problemes en els alumnes que han seguit la instrucció sobre el procés de resolució de problemes amb preguntes guiades que en els alumnes que no l'han seguit. En segon lloc, aquesta autora destaca que el guiatge del procés de resolució mitjançant preguntes també promou un millor procés de resolució; entre els indicadors d'aquest guany destaquen: una major activació de coneixements previs, l'anàlisi dels components del problema, la recerca de diferents tipus d'estratègies de resolució i l'avaluació de possibles alternatives de resolució.

En aquest mateix sentit es mostra l'estudi realitzat per Delclos i Harrington (1991) en el que es dissenya un programa d'ensenyament d'estratègies de resolució de problemes amb l'ús d'un programa informàtic anomenat "Rocky's Boots". L'alumne ha de resoldre diferents tipus de problemes en què ha de saber gestionar les condicions lògiques de "i (and), o (or), no (not)". Aquest programa instruccional es divideix en dues fases. En una primera fase s'ensenyen estratègies generals de resolució de problemes seguint el model de Bransford i Stein (1986).

La segona fase consisteix en la resolució de diferents problemes presentats en el programa informàtic amb l'ajut d'una guia amb preguntes sobre diferents accions del procés de resolució, les quals fan referència a estratègies a realitzar en tres moments d'aquest procés: abans, durant i després, amb l'objectiu que els alumnes desenvolupin estratègies de planificació, de regulació i d'avaluació.

Aquests autors divideixen una mostra de trenta alumnes de deu i dotze anys en tres grups, un grup control que no segueix cap tipus d'instrucció en resolució de problemes; un primer grup experimental que realitza només la primera fase del programa d'ensenyament i que consisteix en una instrucció en estratègies generals de resolució de problemes, i un segon grup experimental que segueix les dues fases del programa d'ensenyament -una primera fase que consisteix en una instrucció en estratègies generals de resolució de problemes i una segona fase en què s'ensenyen estratègies metacognitives de planificació, regulació i avaluació.

Els resultats obtinguts en aquest estudi destaquen que el grup d'alumnes que ha seguit l'ensenyament d'estratègies metacognitives obté millors resultats en la resolució de problemes que els alumnes que no l'han seguit. Aquest grup d'alumnes és capaç de resoldre problemes més complexos que els altres dos grups d'alumnes i utilitza menys temps per resoldre'ls.

La influència de les estratègies metacognitives en la resolució de problemes també es estudiada per Swanson (1990). Aquest autor destaca que el coneixement metacognitiu sobre el procés de resolució de problemes pot compensar nivells baixos d'aptitud general. Per validar aquesta hipòtesi aquest autor dissenya un procés d'investigació format per quatre grups d'alumnes d'educació primària, en un disseny experimental distribuït en un 2 (alt-baix nivell d'aptitud general) x 2 (alt-baix nivell d'habilitat metacognitiva); en el procés d'investigació participen 56 alumnes.

Es demana als alumnes que resolguin diferents problemes sobre la construcció d'un pèndol; han d'esbrinar quines variables determinen la freqüència i l'oscil·lació del pèndol. Els alumnes poden modificar la llargada de la corda i el pes de la bola. Un examinador demana als alumnes que expliquin com pensen el problema i les accions que realitzen. L'estudi recull dades durant el procés de resolució del problema amb l'enregistrament en àudio del que expliquen els alumnes i l'observació d'un examinador. Posteriorment, es categoritzen les accions i les verbalitzacions dels alumnes durant el procés de resolució del problema. L'anàlisi de resultats mostra que els alumnes amb un nivell d'aptitud general baix, però amb un coneixement metacognitiu alt, obtenen millors resultats en la resolució del problema que els alumnes amb un nivell d'aptitud general alt i un coneixement metacognitiu baix.

En síntesi, les investigacions realitzades des del camp de la resolució de problemes han aportat dades concloents sobre la importància de les estratègies metacognitives en la resolució de problemes. Aquests estudis també mostren la necessitat de treballar i millorar els dos aspectes següents en l'ensenyament d'aquest tipus d'estratègies, en primer lloc, els autors destaquen que el desenvolupament d'aquestes estratègies requereix un període llarg de temps i, per tant, per aconseguir resultats satisfactoris i duradors cal dissenyar estudis que tinguin en compte aquest factor (Lester, 1985; Schoenfeld, 1992a).

En segon lloc, la transferència de les estratègies apreses a altres situacions també ha quedat molt qüestionada, principalment quan l'objectiu del procés d'ensenyament és dotar d'un repertori d'estratègies metacognitives generals i aplicables a un gran nombre de situacions. En aquest sentit, diferents estudis qüestionen la hipòtesi que aquestes estratègies estan relacionades amb habilitats cognitives generals (Perkins i Salomon, 1989; Pressley i Ghatala, 1990). Al contrari, la hipòtesi que l'ús d'aquestes estratègies està dirigida per les característiques específiques de la tasca, del domini sobre el qual tracta i de les

disposicions afectives de la persona que la resol es confirma en un gran nombre d'estudis (Schraw, Potenza i Nebelsick-Gullet, 1993; Jackendoff, 1992; Schraw *et al.* 1995). En aquest sentit, Schraw *et al.* (1995) es refereix, concretament, al procés de monitorització com un “idiosyncratic phenomenon that varies from person to person and from test to test, rather than a general skill. pp. 434”.

2.4. Els components afectius en la resolució de problemes

A pesar de la importància dels components afectius en el procés de resolució de problemes, la recerca en aquest camp s'ha centrat fonamentalment en l'estudi dels components cognitius implicats en aquest procés. De Corte (1993) argumenta que l'educació de les matemàtiques registra els mateixos mals que la psicologia de la instrucció en general, amb una orientació unilateral a les variables i processos cognitius.

En aquest sentit, McLeod (1990) assenyala que els processos cognitius implicats en la resolució de problemes són particularment susceptibles a la influència dels components afectius. Aquest autor destaca les actituds, les emocions i les creences com els components o reaccions afectives implicats en l'aprenentatge de les matemàtiques. Aquests tres components difereixen entre ells en la intensitat d'afecte, l'estabilitat i la càrrega cognitiva. El concepte de creença presenta poca càrrega afectiva i el d'emoció té una major càrrega. Les creences i les actituds es mostren com a conceptes molt estables i resistents al canvi, i les emocions s'alteren ràpidament. Finalment els tres aspectes afectius difereixen en la càrrega cognitiva: les creences tenen un fort component cognitiu que disminueix en el cas de les actituds i les emocions.

Per Schoenfeld (1987), les creences són el pont entre els components cognitius i els afectius. Aquest pont es materialitza quan es consideren les creences com un aspecte de la metacognició (Schoenfeld, 1987, 1992a; McLeod, 1990). En aquest sentit, es diferencia entre creences sobre un mateix i sobre les matemàtiques i el seu aprenentatge. Les primeres s'identifiquen amb la vessant declarativa del coneixement metacognitiu, és a dir, amb el coneixement sobre les pròpies capacitats i limitacions cognitives.

Les creences sobre les matemàtiques i el seu aprenentatge es formen a partir de la instrucció i tenen una influència negativa o que produeix inhibició en la resolució de problemes. Bermejo (1996) assenyala que les creences sobre les matemàtiques més generalitzades entre els alumnes són que els continguts d'aquesta àrea curricular són importants, difícils i basats en regles. És indubtable que aquestes creences generen un conjunt de reaccions molt diferents a les que produïrien si es pensés que les matemàtiques no són importants, són fàcils i es fonamenten en un raonament lògic.

En aquest mateix sentit es manifesta Schoenfeld (1992a) quan assenyala que les creences dels alumnes davant la resolució d'un problema matemàtic tenen una conseqüència en la manera d'actuar i, per tant, d'aprendre.

El sistema de creences juga un important paper en les accions que l'individu realitzarà per resoldre el problema. Així, les creences sobre les matemàtiques o sobre l'èxit en la resolució de problemes estan estretament vinculades amb l'actitud i la confiança, dos components del domini afectiu (McLeod, 1985). La influència de les actituds positives o negatives en l'aprenentatge de les matemàtiques ha estat el centre d'interès en un gran nombre d'estudis (De Corte, 1993), que permeten sostenir que les actituds positives generen un millor aprenentatge que les negatives.

Malgrat que som conscients de la importància dels components afectius en el procés de resolució de problemes, l'estudi d'aquesta variable no es pot incloure en els objectius i en el disseny d'investigació proposat en el nostre treball. Així, el nostre estudi es centrarà, fonamentalment, a aportar noves dades quant a l'ensenyament/aprenentatge d'estratègies cognitives i metacognitives de resolució de problemes sobre el contingut declaratiu de la proporcionalitat directa.

Dedicarem el proper apartat a analitzar les principals variables del procés d'ensenyament que poden afavorir un millor aprenentatge d'estratègies per resoldre problemes matemàtics.

3. L'ensenyament/aprenentatge d'estratègies de resolució de problemes

L'anàlisi de les característiques del procés de resolució de problemes realitzat al llarg d'aquest segon capítol ha destacat les diferents variables que poden explicar la resolució de problemes amb èxit dels experts. Aquesta anàlisi ha mostrat, en primer lloc, que el coneixement necessari per resoldre problemes és molt més ric, més extens i més complex del que hom pot imaginar a priori. En segon lloc, una bona part d'aquest coneixement roman de manera tàcita en l'expert que el posseeix i s'activa de manera inconscient i poc voluntària. Aquest fet fa que el seu ensenyament no sigui una tasca fàcil, perquè el professor, com a subjecte expert, té un coneixement automatitzat al llarg del temps, i l'ha de fer explícit durant la instrucció ja que es tracta d'un coneixement necessari perquè els alumnes puguin arribar a resoldre amb èxit els problemes.

En tercer lloc, el subjecte expert coneix un ampli repertori d'estratègies de resolució generals i específiques que sap aplicar, realitzant les adaptacions i modificacions necessàries, per resoldre diferents tipus de problemes que es presenten en contextos diversos.

Els programes d'ensenyament del procés i de les estratègies de resolució de problemes hauran d'incorporar aquestes variables, però en cap cas pot ser una transmissió de les accions que realitzen els experts. L'objectiu últim de la instrucció no pot ser ensenyar els novells a ser experts, perquè, d'una banda, és una fita impossible d'aconseguir. L'actuació experta es construeix de manera gradual al cap de llargs períodes de temps. És impossible transmetre aquesta

construcció en períodes relativament curts de temps i amb instrucció directa. D'altra banda, cal una teoria de l'ensenyament/aprenentatge del procés de resolució de problemes que faci incidència no solament en les característiques de l'actuació experta sinó també en el processos de construcció que aquest ha realitzat.

Tenint en compte les anàlisis precedents i les limitacions assenyalades, en aquest apartat pretenem analitzar els components que s'haurien de tenir en compte en un programa d'ensenyament/aprenentatge d'estratègies de resolució de problemes, i que fan referència a "què, com i quan ensenyar" i "què, com i quan avaluar". En aquest apartat ens centrarem fonamentalment en els components que fan referència a "què ensenyar" i a "com ensenyar".

Pel que fa al component "on ensenyar", creiem que les anàlisis precedents en les quals hem destacat la importància que té en el procés de resolució el coneixement previ del contingut específic sobre el qual versa el problema defineixen les característiques d'aquest component. En aquest sentit, hem emfasitzat, d'una banda, que el coneixement previ, perquè sigui útil per a la resolució d'un nou problema, ha de contenir informació ben organitzada de tipus declaratiu, procedimental i condicional. D'altra banda, aquest coneixement organitzat es construeix a partir de la resolució de problemes en diferents contextos en què s'analitzin de manera conscient els aspectes generals i transferibles a la resolució d'altres tipus de problemes, i els aspectes específics del problema concret que s'està resolent.

Aquestes consideracions sorgides a partir d'acurats treballs d'investigació assenyalen la importància de dissenyar programes d'ensenyament/aprenentatge d'estratègies de resolució de problemes en les diferents àrees curriculars i amb la finalitat d'aprendre els diferents continguts de cadascuna de les àrees. En aquests programes caldria fer un treball paral·lel d'estratègies específiques vinculades a un

camp conceptual concret i estratègies més generals i transferibles a la resolució de diferents tipus de problemes (Schoenfeld, 1992a). Des del nostre punt de vista, aquestes conclusions deixen buida de contingut la discussió que en determinats moments ha sorgit al voltant del fet d'ensenyar estratègies de resolució de problemes com un contingut transversal i interdisciplinar o bé com un contingut específic.

Pel que fa a l'estudi del component "què, com i quan avaluar", aquest està molt interrelacionat amb la resposta als components "què i com ensenyar", des del nostre punt de vista, cal avaluar les diferents dimensions que s'ensenyen. Dedicarem l'apartat 3.4 del capítol IV del nostre treball a l'anàlisi del procés d'avaluació, però podem apuntar que és necessari dissenyar instruments que avaluïn els tres tipus de coneixement que, en anteriors apartats hem destacat com a importants en el procés de resolució de problemes: el coneixement declaratiu, procedimental i condicional.

3.1. Què ensenyar: anàlisi de models instruccionals per a l'ensenyament/aprenentatge d'estratègies de resolució de problemes

La revisió sobre les principals variables que incideixen en la resolució d'un problema ha destacat la importància, d'una banda, del coneixement declaratiu sobre el contingut del problema a resoldre, i d'altra banda, de les estratègies cognitives, tant de tipus general com específic per un contingut concret, i de les estratègies metacognitives.

Els diferents programes d'instrucció d'estratègies de resolució de problemes han incorporat aquestes variables identificades en l'actuació experta. En aquesta mateixa línia Pressley, Harris i Marks (1992) assenyalen que una bona instrucció en estratègies de resolució de tasques ha d'incloure l'ensenyament de l'estratègia en si i del coneixement metacognitiu rellevant per al seu bon ús en diferents situacions; aquest coneixement inclou aspectes sobre el com, el quan i el perquè de l'ús d'una estratègia determinada. En aquest mateix fil argumental es situen Paris i Winograd (1990); segons aquests autors l'ensenyament efectiu d'estratègies que millorin l'aprenentatge ha d'incloure "skill and will" (pàg.31).

Jitendra i Ping (1997), a partir d'una revisió de diferents treballs que pretenen millorar les estratègies de resolució de problemes numèrics d'alumnes amb dificultats, també destaquen l'obtenció de millors resultats quan en els programes d'ensenyament s'incorpora el component cognitiu i el metacognitiu.

Un cop identificats els components que un programa d'ensenyament/aprenentatge d'estratègies de resolució de problemes ha d'incloure, és necessari estudiar com es poden integrar i articular aquests components en un model

d'ensenyament/aprenentatge. En el camp de la resolució de problemes matemàtics destaquen els models dissenyats per dos dels autors més rellevants en el camp de les matemàtiques: Schoenfeld (1985, 1992a) i Lester (1985, 1989, 1992,), Lester i Mau (1993). Aquests models han servit de marc teòric per a l'elaboració de la proposta d'ensenyament/aprenentatge que analitzem en el nostre treball d'investigació.

3.1.1. El model cognitiu-metacognitiu d'ensenyament del procés de resolució de problemes de F. K. Lester

El model cognitiu-metacognitiu de Lester (1985) destaca la interacció entre el component cognitiu i el metacognitiu en els diferents moments o fases del procés de resolució. Les variables que defineixen el component metacognitiu d'aquest model realitzen una funció de guia de les variables o accions cognitives.

El component cognitiu d'aquest model està basat en les fases de resolució de problemes proposades per Polya (1945), i el component metacognitiu es defineix a partir de les variables metacognitives destacades per Flavell i Wellman (1977), les quals passem a estudiar a continuació.

a) El component cognitiu

El component cognitiu del model d'ensenyament de Lester està format per quatre categories d'accions cognitives: orientació, organització, execució i verificació, les quals corresponen a una redefinició de les quatre fases proposades per Polya, amb l'objectiu d'emfasitzar la interacció i la interdependència entre les diferents accions que un subjecte realitza per resoldre un problema.

Les categories cognitives definides en el model i els procediments heurístics proposats en cadascuna d'elles són els següents:

Orientació: Accions encaminades a avaluar i entendre l'estat inicial del problema: estratègies de comprensió, anàlisi de la informació, representació inicial, avaluació del nivell de dificultat i de les possibilitats d'èxit.

Organització: Planificació de les accions per resoldre el problema: Identificació d'objectius, planificació global i planificació local (amb l'objectiu de portar a terme la planificació global).

Execució: Portar a terme la planificació i regulació de les actuacions per resoldre el problema d'acord amb els objectius proposats en l'enunciat: disseny d'accions locals, monitorització del progrés i de la consistència de les planificacions, intercanvi de decisions i revisió de la consistència de les decisions preses durant la resolució.

Verificació: Avaluació de tot el procés de resolució i dels resultats obtinguts: avaluació de l'orientació i de l'organització i avaluació de l'execució.

b) El component metacognitiu

Lester integra en els components cognitius exposats anteriorment les variables metacognitives més rellevants que influeixen a l'hora de guardar i recuperar la informació en la memòria, trobades en les investigacions portades a terme per Flavell i Wellman (1977) en els estudis sobre metamemòria. En aquests estudis es destaca la importància de les variables de la tasca, de la persona i de l'estratègia en les actuacions dels subjectes per resoldre una tasca de memòria.

Les variables de la tasca fan referència al coneixement sobre els factors i les condicions que fan que una tasca sigui més difícil de recordar que una altra; les variables de la persona versen sobre el coneixement de les capacitats i limitacions de cada individu; i les variables de l'estratègia es refereixen al coneixement que té el subjecte sobre estratègies útils per recordar informació.

Lester descriu i incorpora la influència de les tres variables metacognitives en el procés de resolució de problemes matemàtics de la següent manera:

Variables de la persona: En aquest apartat s'inclouen tres aspectes individuals:

- * L'entramat de creences que l'individu ha adquirit en la resolució d'altres problemes.
- * Característiques afectives que poden influir en el procés de resolució (per exemple: motivació, ansietat, perseverança)
- * Avaluació de les capacitats i limitacions de l'individu per resoldre un tipus concret de problema.

Variables de la tasca: La consciència de l'individu sobre les característiques de la tasca que influiran en la seva actuació per resoldre-la inclouen l'anàlisi de cinc categories o subvariables:

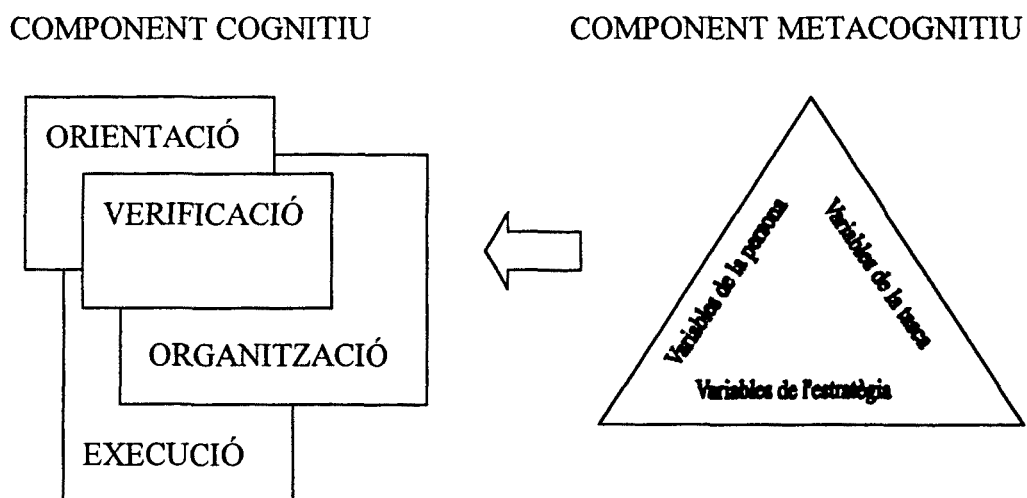
- * Variables del contingut: variables associades amb el contingut matemàtic de què tracta el problema (equacions, trencats...).
- * Variables del context: variables associades amb la presentació del problema, no matemàtiques, familiarització amb la situació que presenta l'enunciat del problema.
- * Variables d'estructura: relacions lògiques entre els diferents elements de l'enunciat del problema.
- * Variables sintàctiques: relacions entre les paraules, dificultat de les paraules i de la simbologia que presenta l'enunciat del problema.
- * Variables de procés: processos i operacions mentals que s'han de realitzar per resoldre el tipus de problema concret.

Variables de l'estratègia: En aquest apartat s'inclouen les variables associades amb la consciència de l'individu sobre la utilitat de determinades estratègies per comprendre, organitzar, planificar, avaluar i resoldre el problema. Per exemple: la consciència del subjecte que fer un esquema li és útil per entendre el problema.

Lester defensa la interacció entre les diferents variables metacognitives descrites durant la resolució d'un problema. Aquesta interacció guia la presa de decisions i les accions cognitives que realitza el subjecte durant el procés de resolució. Per exemple, la interacció entre les variables de la tasca i de l'estratègia poden fer prendre consciència a l'individu que un enunciat del problema llarg requereix més d'una lectura. La interacció entre la tasca i les variables personals poden fer prendre consciència a l'individu que un determinat tipus de problema li resulta més difícil de resoldre.

c) Funcionament del model

La interacció entre les diferents variables metacognitives i la seva funció de guia de les accions cognitives en les diferents fases de resolució d'un problema són els aspectes més destacats del funcionament del model. En el gràfic I-7 es representa el funcionament del model i la interacció de les diferents variables descrites. En aquesta representació es pot observar, en primer lloc, la interacció de les tres variables metacognitives i la seva crucial importància en la presa de decisions sobre les diferents accions cognitives a realitzar per resoldre el problema. En segon lloc, la representació gràfica de les diferents categories cognitives mostra que aquestes no s'activen durant el procés de resolució en fases o etapes compartimentades i diferenciades, sinó que aquestes poden aparèixer amb una certa simultaneïtat i circularitat, de manera que, per exemple, el subjecte pot estar executant un pla, i al mateix temps, adonar-se que potser no ha entès bé l'enunciat del problema i utilitzar alguna estratègia que l'ajudi a entendre'l millor .



Gràfic I-7: Interacció de les variables cognitives i metacognitives del model d'ensenyament/aprenentatge del procés de resolució de problemes de Lester (adaptat de Lester 1985:65)

En la taula I-1 es presenta un exemple de com i quan les variables metacognitives poden guiar les accions cognitives per resoldre un problema.

ACCIONS COGNITIVES	DECISIONS METACOGNITIVES
<p>Orientació: Comportament estratègic per avaluar i entendre el problema.</p> <p>Estratègies de comprensió.</p> <p>Anàlisi de la informació.</p> <p>Representació inicial.</p> <p>Avaluació del nivell de dificultat i de les possibilitats d'èxit.</p>	<p>Em fixaré en les paraules clau, m'ajudaran a decidir què he de fer en aquest problema.</p> <p>Els números d'aquest problema són massa grans per mi. Hi ha massa números, aquest problema no s'assembla a cap dels que he fet abans. No sé com solucionar-lo.</p>
<p>Organització: Planificació del comportament i elecció de les diferents accions i estratègies a seguir per resoldre el problema.</p> <p>Identificació d'objectius</p> <p>Planificació global</p> <p>Planificació local (amb l'objectiu de portar a terme la planificació global)</p>	<p>Crec que el problema em demana per un resultat. Potser si trobo una quantitat l'hauré resolt. Em sembla que és un problema de suma. No n'estic segur, primer provaré de sumar aquestes quantitats.</p>
<p>Execució: Regulació del comportament per confirmar la consecució del objectius planificats.</p> <p>Disseny d'accions locals.</p> <p>Monitorització del progrés i de la consistència de les planificacions.</p> <p>Intercanvi de decisions, revisió de la consistència de les decisions preses durant la resolució.</p>	<p>És millor que vagi més a poc a poc per resoldre aquest problema. És més difícil del que hem pensava. Aquesta operació no em serveix per resoldre aquest problema, el resultat és massa gran. El tinc que tornar a llegir. És millor que aquests passos els torni a escriure.</p>
<p>Verificació: Avaluació de les decisions preses i dels resultats obtinguts en l'execució de la planificació.</p> <p><u>A. Avaluació de l'orientació i de l'organització</u></p> <p>Adequació de la representació del problema</p> <p>Adequació de la presa de decisions</p> <p>Consistència dels plans i dels objectius</p> <p><u>B. Avaluació de l'execució.</u></p> <p>Comprovació dels resultats de les accions locals</p> <p>Consistència dels resultats intermitjos amb el plantejament del problema</p> <p>Consistència dels resultats finals amb les condicions del problema</p>	<p>És millor que revisi tots els passos, el resultat final no s'adequa al que hem demana el problema. No estic segur d'haver entès el problema, serà millor que me'l torni a llegir. Pensava que era un problema de suma, però m'he equivocat. L'he de tornar a fer.</p>

Taula I-1: Interacció de les variables cognitives i metacognitives durant la resolució d'un problema. Adaptat de Lester (1985:63)

Per aconseguir que els alumnes aprenguin les estratègies cognitives i metacognitives de resolució de problemes exposades en aquest model instruccional s'emfasitza la importància que el professor utilitzi les estratègies d'ensenyament idònies per afavorir el seu aprenentatge. Segons Lester (1989), el professor ha de desenvolupar tres funcions en l'ensenyament d'estratègies de resolució de problemes:

- a) Ha de facilitar l'aprenentatge d'estratègies, bé amb la seva instrucció directa, bé amb el disseny de materials o de seqüències instruccionals adequades.
- b) Ha de ser un model, el mestre, quan resol tasques davant dels alumnes, ha de ser un model de pensament per aquests, fent incidència en el procés de resolució, en les estratègies que utilitza i en els factors que intervenen en la presa de decisions.
- c) Ha de ser un monitor extern que, en un primer moment, fa la funció de suport, "bastida", ajudant l'alumne a posar en marxa determinades actuacions cognitives que sense l'ajuda externa no podria realitzar, i que, en un segon moment, anirà retirant l'ajuda gradualment a mesura que l'alumne sigui capaç d'utilitzar-les de manera autònoma.

3.1.2. El model d'ensenyament del procés de resolució de problemes d'A. H. Schoenfeld

Schoenfeld (1985, 1992) elabora un model d'ensenyament a partir de les investigacions que estudien les característiques del procés de resolució de subjectes experts. En aquestes investigacions, s'observen certes regularitats en el procés de resolució dels experts, tant en les variables que els permeten seleccionar les estratègies de resolució correctes com en el tipus d'estratègies escollides. A partir d'aquest comportament sistemàtic que presenten els experts, Schoenfeld dissenya un model d'ensenyament dividit en sis fases o, en paraules de l'autor, "episodis heurístics". Cada episodi representa un objectiu general, que dirigeix l'acció del subjecte per resoldre el problema. En cada episodi es treballen els procediments més utilitzats pels experts per aconseguir cada objectiu.

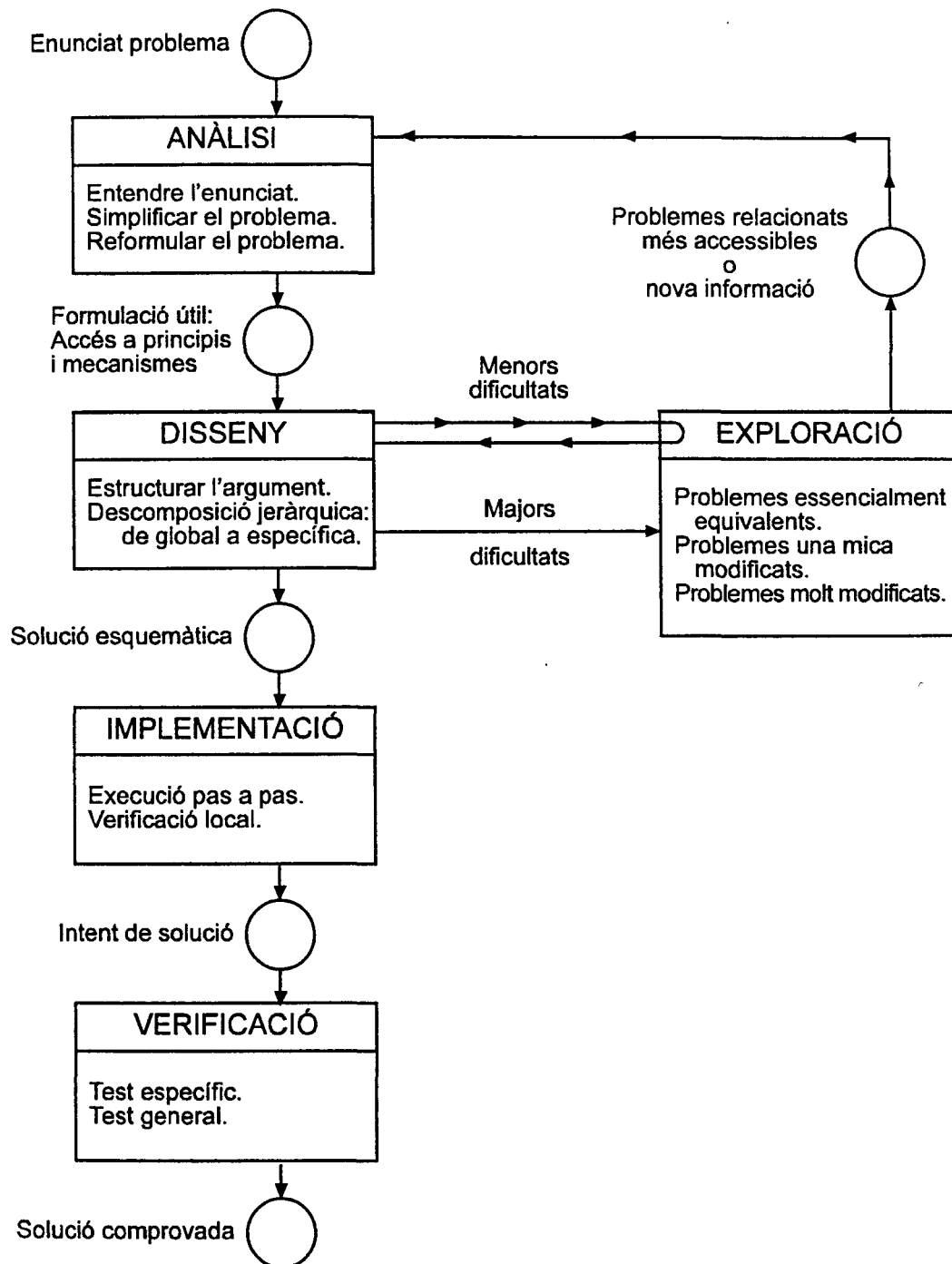
L'anàlisi del procés de resolució de problemes de persones expertes porta Schoenfeld a destacar l'important paper que realitzen les decisions metacognitives dels experts durant el procés de resolució d'un problema. En aquest sentit, l'objectiu general del model d'ensenyament de Schoenfeld és afavorir l'aprenentatge per part dels alumnes d'estratègies metacognitives a partir del treball dels procediments heurístics. En cadascun dels diferents episodis heurístics definits per aquest autor, l'alumne ha de seleccionar, de manera conscient, controlada i d'acord amb les característiques del problema, uns procediments que li permetin aconseguir l'objectiu general de cada episodi.

Per aconseguir aquest objectiu general, el model d'ensenyament/aprenentatge d'aquest autor desenvolupa un conjunt d'estratègies d'ensenyament, entre les quals destaquen els següents: el professor mostra com resoldre un problema, en veu alta exposa com pensa el problema, com selecciona els diferents procediments i com pren les decisions; anàlisi de vídeos d'alumnes mentre resolen un problema;

resolució d'un problema de manera conjunta per part del professor i el grup classe, en la qual es discuteixen les diferents accions a realitzar; resolució de problemes en petits grups d'alumnes en què s'han de justificar les diferents accions que es realitzen.

Així, a l'igual del model proposat per Lester, en el model de Schoenfeld hi ha una interacció entre el component cognitiu i metacognitiu per resoldre un problema. Però, a diferència del model proposat per Lester, en el model de Schoenfeld ambdós components estan molt més interrelacionats, no hi ha una separació explícita.

En el gràfic I-8 es presenten els diferents episodis heurístics del procés de resolució de problemes proposat per Schoenfeld. La representació d'aquest model i la manera de portar-lo a terme emfasitza el fet que els diferents episodis de resolució no han de tenir una seqüència lineal, sinó que els experts tornen diferents vegades a un mateix episodi, és a dir, el subjecte pot anar de manera circular d'un episodi a un altre.



Gràfic I-8: Model d'ensenyament de les estratègies de resolució d'un problema. Adaptat de Schoenfeld (1985:110).

- a) Anàlisi. L'objectiu d'aquest primer episodi és copsar les principals informacions o la situació representada en l'enunciat del problema: on s'ha d'arribar, quines dades aporta l'enunciat, en quin context matemàtic es situa el problema, entre els aspectes més rellevants. Per aconseguir aquest objectiu es treballen diferents procediments, entre els quals es destaquen: llegir, representar en un dibuix o un diagrama la situació del problema, dividir el problema en altres de més simples.
- b) Disseny. L'objectiu d'aquest episodi és planificar tot el procés de resolució. Aquest episodi ha d'aportar la perspectiva global de la resolució del problema, de les accions a executar i de l'ordre en què s'han de realitzar. Per aconseguir aquest objectiu l'alumne pot realitzar procediments com per exemple: buscar diferents maneres de resoldre el problema, justificar-les, inferir el resultat de manera qualitativa si executa uns procediments de càlcul concrets.
- c) Exploració. L'objectiu d'aquest episodi és explorar quins procediments dels que coneixem poden encaixar per resoldre la situació plantejada en l'enunciat del problema. Aquest episodi ens aportarà informació per planificar el procés de resolució. Per aconseguir aquest objectiu l'alumne pot realitzar procediments com per exemple: buscar problemes similars més senzills i analitzar el procés per resoldre'ls, reformular l'enunciat del problema utilitzant una altra anotació, reorganitzar les dades conegudes i desconegudes del problema.
- d) Implementació. Aquest episodi consisteix a posar en marxa el que ha estat prèviament explorat i planificat.
- e) Verificació. Aquest episodi consisteix a revisar i avaluar el procés de resolució. Aquest episodi fa referència a verificar durant i després de l'episodi de la implementació. Els objectius d'aquest episodi són trobar possibles errors,

descobrir altres maneres de resoldre el problema i evidenciar possibles connexions amb altres tipus de problemes.

En el nostre treball incorporem les principals tesis exposades per Lester i Schoenfeld sobre la interacció de les accions cognitives i metacognitives en la resolució d'un problema. En aquest sentit, tant en el procés d'ensenyament/aprenentatge -concretat amb l'acció del professor i el full de pensament que guia la resolució de l'alumne- com en l'anàlisi i avaluació d'aquest procés, no hem diferenciat les accions cognitives de les metacognitives. Així, durant el procés d'ensenyament/aprenentatge s'insisteix que l'alumne realitzi parades, controls i decisions metacognitives en les diferents fases o episodis suggerits en la guia de pensament. En el procés d'avaluació, concretat en diferents categories que corresponen a accions o a grups d'accions per resoldre el problema, qualsevol d'elles pot ser realitzada "metacognitivament", és a dir, l'alumne la pot realitzar de manera conscient i controlada.

El treball de Schoenfeld ha tingut una major incidència fonamentalment en el disseny de la proposta d'ensenyament/aprenentatge en la metodologia d'ensenyament utilitzada pels professors i en l'elaboració del full de pensament que guia els procediments a utilitzar per l'alumne. Aquest full ha estat dividit en cinc moments o episodis que corresponen a una adaptació i redefinició dels episodis proposats per aquest autor.

La importància de l'actuació docent –ressaltada pels dos models exposats- en l'aprenentatge per part dels alumnes d'estratègies de resolució de problemes justifica la importància d'analitzar les diferents metodologies d'ensenyament que el professor pot desenvolupar per aconseguir aquest objectiu; aquesta anàlisi la realitzarem en el proper apartat.

3.2. Com ensenyar: Anàlisi d'entorns instruccionals per a l'ensenyament/aprenentatge d'estratègies de resolució de problemes

Per aconseguir l'aprenentatge de l'alumne d'estratègies cognitives i metacognitives de resolució de problemes, destacades en els anteriors apartats, ha proliferat el disseny de diferents contextos instruccionals que aborden l'ensenyament d'estratègies des de metodologies i perspectives teòriques diferents. L'anàlisi de diferents treballs d'investigació que tenen com a objectiu millorar les estratègies de resolució de problemes porta a identificar l'ús de tres entorns instruccionals: la instrucció directa, la instrucció guiada i l'aprenentatge cooperatiu. En la taula I-2 es presenta de manera resumida la revisió que hem realitzat d'una part d'aquests treballs, en la qual es mostren els entorns instruccionals utilitzats per ensenyar estratègies de resolució sobre problemes específics a una determinada mostra d'alumnes. Com es pot observar la majoria dels treballs analitzats opten per utilitzar una combinació d'entorns instruccionals per aconseguir els objectius d'ensenyament/aprenentatge proposats en cada estudi. Aquest fet també s'observa en altres estudis de revisió i d'anàlisi consultats, com per exemple, el realitzat per Hembree (1992) o per Jitendra i Ping (1997).

Estudi	Entorns instruccionals	Alumnes	Contingut matemàtic
Schoenfeld (1985, 1987)	Instrucció directa. Instrucció guiada. Interacció en parelles	Alumnes d'educació secundària.	Figures geomètriques
King (1991, 1994)	Instrucció directa. Instrucció guiada. Interacció en parelles	46 alumnes de 5è curs d'educació primària.	Figures geomètriques i organització espacial.
Delclos i Harrington (1991)	Instrucció directa. Instrucció guiada. Interacció en parelles	Alumnes de 5è i 6è curs d'educació primària.	Figures geomètriques i organització espacial.
Duren i Cherrington (1992)	Interacció en petits grups	126 alumnes d'ensenyament secundari	Àlgebra.
Amigues i Agostinelli (1992)	Interacció en parelles	96 alumnes d'ensenyament secundari	Circuits elèctrics.
Montague, Marquard i LeBlanc (1993)	Instrucció directa Instrucció guiada	72 alumnes d'ensenyament secundari	Aritmètica.
Harper (1993)	Instrucció directa Interacció en parelles	52 alumnes d'ensenyament secundari	Aritmètica.
Villaseñor i Kepner (1993)	Instrucció guiada	24 grups classe d'educació primària	Aritmètica.
Brenner (1995)	Instrucció directa Interacció en parelles	157 alumnes d'ensenyament secundari	Àlgebra.
Jitendra i Hoff (1996)	Instrucció directa Instrucció guiada	6 alumnes amb dificultats d'educació primària.	Aritmètica.
Carpenter (1996)	Instrucció guiada	Alumnes d'educació primària	Aritmètica.
Shaw (1997)	Instrucció directa Interacció en parelles	Projecte amb alumnes d'educació secundària	Aritmètica.
Montague (1997)	Instrucció directa Instrucció guiada	Alumnes d'ensenyament secundari	Aritmètica.

Taula I-2: Entorns instruccionals utilitzats en treballs que tenen com a objectiu millorar el procés de resolució de problemes matemàtics.

El nostre treball incorpora l'ús d'aquests tres entorns instruccionals en la proposta d'ensenyament/aprenentatge dissenyada en el nostre estudi, la concreció d'aquests mètodes d'ensenyament en el nostre treball s'exposa en el capítol III, apartat 4.2.3. A continuació exposem les principals característiques d'aquests tres contextos instruccionals.

3.2.1. La instrucció directa

Un gran nombre d'investigacions han dissenyat programes instruccionals consistents a donar als alumnes explicacions clares i directes sobre diferents aspectes del procediment i del seu ús en la resolució de determinades tasques escolars.

La principal premissa d'aquest primer plantejament es basa en la consideració del professor com a centre del procés d'ensenyament/aprenentatge. Les explicacions del professor han de proporcionar la informació necessària a l'alumne per garantir un bon aprenentatge de l'estratègia.

Winograd i Hare (1988) detallen les següents característiques que ha de tenir la instrucció directa per aconseguir un bon aprenentatge d'estratègies per part de l'alumne:

- a) Explicació per part del professor de les característiques de l'estratègia. Aquesta explicació ha d'incloure:
 - Coneixement declaratiu: descripció de l'estratègia, característiques més rellevants i principals objectius i propòsits que es poden aconseguir amb l'ús adequat de l'estratègia.

- Coneixement procedimental: com utilitzar l'estratègia; explicació detallada dels diferents passos en què es divideix.
 - Coneixement condicional: quan i en quines condicions l'estratègia pot ser utilitzada; explicació detallada de les característiques del context que fan possible l'ús de l'estratègia i de la forma d'avaluar si l'ús de l'estratègia ha estat útil i adequat per a la resolució d'una tasca concreta.
- b) Proporcionar la pràctica necessària en diferents tasques i situacions que permeti a l'alumne extraure els aspectes generals -i, per tant, transferibles a altres situacions de l'estratègia que està aprenent- dels aspectes específics molt vinculats a la tasca concreta que està resolent.
- c) Aportar el feed-back informatiu necessari de l'execució de l'estratègia de l'alumne que permeti resoldre possibles errors.

L'ús adequat d'aquesta perspectiva d'ensenyament requereix que el professor conegui, amb un alt nivell d'expertesa, les característiques de les estratègies que ensenya i les necessitats cognitives que han de ser apreses pels alumnes, coneixement imprescindible per seqüenciar-les i adequar-les a les característiques dels seus alumnes.

Aquesta exigència pot comportar dues limitacions en l'ús adequat d'aquesta estratègia d'ensenyament. D'una banda, la dificultat del professor per portar al nivell de la consciència els diferents coneixements que formen part d'una estratègia. Com a bon expert en l'ús d'una estratègia té una part d'aquest coneixement en el terreny dels processos automàtics amb poc grau de consciència. D'altra banda, l'explicació directa dels diferents aspectes que possibiliten l'ús d'una estratègia complexa pot suposar esmicolar-la en petites fases i subhabilitats, la utilització aïllada i fragmentada de les quals no és comparable al que representa entendre i posar en funcionament l'estratègia en una situació concreta.

Malgrat aquestes dues limitacions, la instrucció directa, utilitzada en un primer moment del procés instruccional i combinada amb altres mètodes d'ensenyament, els quals explicarem a continuació, ha estat molt utilitzada i ha obtingut bons resultats en diferents investigacions que tenien com a objectiu l'aprenentatge d'estratègies de resolució de problemes per part dels alumnes. En aquest sentit destaquen els treballs, ressenyats en anteriors apartats, de Schoenfeld (1985, 1987) i King, (1991). Els treballs de Montague *et al.* (1993) i Montague (1997) amb alumnes d'ensenyament secundari amb dificultats en l'aprenentatge de continguts matemàtics relaten els bons resultats als quals arriben els alumnes en la resolució de problemes numèrics de dues i tres operacions amb una metodologia que combina la instrucció directa i la instrucció guiada. En aquesta mateixa línia es situa el treball de Jitendra i Hoff (1996) que aconsegueix bons resultats en la resolució de problemes numèrics amb alumnes d'ensenyament secundari amb dificultats en l'aprenentatge de les matemàtiques quan es combinen les estratègies metodològiques de la instrucció directa i la guiada.

El treball de Harper (1993) aconsegueix bons resultats en la resolució de problemes numèrics amb alumnes d'ensenyament secundari quan combina la instrucció directa d'estratègies de resolució amb el treball i la interacció a classe en petits grups.

3.2.2. La instrucció guiada

Un segon entorn instruccional està representat per les investigacions fortament influenciades per les idees de Vigotsky i col·laboradors (Vigotsky, 1979; Wertsch, 1985) en què es defensa que l'alumne aprèn en situacions interpersonals⁵. Des d'aquesta perspectiva s'emfasitza el paper de la interacció entre professor i alumne i el guiatge que realitza el primer en el procés d'aprenentatge de l'alumne.

La intervenció educativa destinada a promoure l'ús de determinades estratègies es realitza a través del disseny de situacions interpersonals d'aula, en què el professor situa la instrucció en la "zona de desenvolupament proper" (Vigotsky, 1979). Aquesta zona ve definida com la distància entre el desenvolupament actual de l'alumne, determinat per la resolució d'un problema de manera independent, i el desenvolupament potencial, determinat per la resolució d'un problema amb ajut d'altres persones. El professor, mitjançant el diàleg i diferents ajuts pedagògics, modela l'ús efectiu d'estratègies de resolució de problemes. La reducció i retirada progressiva d'aquests ajuts permetran a l'alumne l'ús independent d'aquestes estratègies i la resolució amb èxit de nous problemes.

Des d'aquesta perspectiva s'emfasitza la importància en el disseny i planificació dels ajuts pedagògics que han de facilitar la transferència de la responsabilitat del professor a l'alumne.

En el camp de l'ensenyament/aprenentatge d'estratègies de resolució de problemes aquest guiatge del professor i els ajuts que aquest proporciona han tingut diferents

⁵ En el segon capítol del nostre treball aprofundirem en l'estudi dels principals eixos teòrics desenvolupats a partir de la perspectiva sociocultural del procés d'ensenyament/aprenentatge.

concrecions segons els objectius de cadascun dels diferents treballs, entre les quals destaquem les següents:

a) Modelatge. Un expert, mestre o un company més avançat explica verbalment el procés de resolució d'una tasca, servint de model d'actuació. En l'explicació, el model explicita quines accions cognitives realitza i quines variables (persona, tasca i context) són rellevants en la presa de decisions sobre la utilització d'una determinada estratègia.

b) Autointerrogació. Aquest mètode consisteix en la formulació d'interrogants orientats a optimitzar el procés cognitiu que segueix l'alumne a l'hora de realitzar una tasca determinada. Aquests interrogants es presenten en forma de guies que intenten regular externament el procés de resolució de l'estudiant.

L'objectiu d'aquesta interrogació és, d'una banda, afavorir la reflexió sobre les pròpies decisions, el control i la regulació de les pròpies actuacions, i d'una altra banda, aconseguir que l'alumne utilitzi aquest procediment de manera autònoma i independent.

El treball de King (1991) pot ser un exemple d'aplicació d'aquest mètode d'ensenyament. En aquest estudi l'autora proporciona als alumnes un conjunt de qüestions que tenen com a objectiu que la seva resposta guï i millori el procés de resolució. Els alumnes treballen en parelles; un dels membres fa d'interrogador i l'altre resol el problema a partir de la resposta a les preguntes plantejades. En aquest cas, les preguntes fan referència a estratègies de planificació, de monitorització i d'avaluació.

c) Anàlisi i discussió del procés de resolució. Aquest mètode consisteix a analitzar i discutir el procés de pensament seguit en la resolució d'una tasca amb l'objectiu que l'alumne sigui conscient de la bondat i eficàcia dels seus propis mecanismes de resolució, de manera que pugui, en cas necessari, modificar-los.

Aquests tres mètodes d'ensenyament de manera combinada han estat utilitzats en gran nombre d'estudis, entre els quals destaquem, d'una banda, el treball de Carpenter (1996) realitzat amb alumnes d'educació primària, per a la resolució de problemes numèrics. L'estudi aconsegueix bons resultats en la resolució d'aquest tipus de problemes i en la millora del que l'autor anomena "pensament crític" dels alumnes per resoldre problemes. I d'altra banda, el treball de Villaseñor i Kepner (1993) mostra els bons resultats aconseguits per un grup experimental format per dotze grups classe en la resolució de problemes aritmètics, després de rebre una instrucció guiada en estratègies cognitives i metacognitives per resoldre aquests tipus de problemes, i en comparació amb un grup control format també per dotze grups classe.

3.2.3. L'aprenentatge cooperatiu

El tercer enfocament instruccional emfasitza la facilitació de l'intercanvi social i l'aprenentatge compartit entre iguals. Aquest entorn instruccional es centra bàsicament en l'alumne; s'afavoreix l'aprenentatge per part de l'alumne de determinades estratègies a partir del conflicte que s'origina en les activitats grupals. L'oportunitat dels estudiants d'aprendre a través de la interacció amb altres companys, i no solament amb el professor, és un tòpic pel qual els investigadors en educació han mostrat un gran interès (per exemple: Bovet, Parrat-Dayan i Vonèche, 1989; Rogoff, 1993; Dimant i Bearison, 1991; Ellis i Gauvain, 1992; Lacasa i Herranz, 1995).

Per explicar el tipus d'aprenentatge promogut en la interacció entre iguals, Webb (1982) destaca la importància de les següents variables: característiques de l'ajuda entre els alumnes durant la resolució d'una tasca, els processos cognitius que s'estimulen en el treball en grup i les variables socioemocionals implicades en el treball grupal.

En primer lloc, parlarem de les característiques de l'ajuda que presenten els alumnes en entorns cooperatius. Webb (1989), en una revisió de 19 estudis sobre aprenentatge de diferents continguts matemàtics en petits grups en què es relacionava el tipus d'interacció entre els diferents membres del grup i l'aprenentatge aconseguit mostra que:

a) El tipus d'ajuda que es faciliten els alumnes durant el procés de resolució pot presentar diferents nivells de complexitat. Aquesta autora destaca les següents ajudes: ajuda amb un alt nivell d'elaboració, explicacions, descripcions de com resoldre el problema; ajuda amb un baix nivell d'elaboració: aporta el resultat o la manera exacta de resoldre el problema; ajuda que aporta informació procedimental sobre la resolució del problema; ajuda que aporta informació condicional, i, finalment, ajuda amb un contingut no acadèmic.

b) Hi ha un millor aprenentatge, tant per l'alumne que rep l'ajut com per l'alumne que el dona, quan el tipus d'ajut és d'un alt nivell d'elaboració. Aquest tipus d'ajut potencia en l'alumne que el dona un conjunt de processos que afavoreixen l'aprenentatge. Així, quan s'explica alguna cosa a un company, aquest ha de clarificar, organitzar i, possiblement, reorganitzar un material. Per citar un exemple, en els processos de clarificació i organització del material, l'alumne que ajuda pot descobrir aprenentatges anteriors incorrectes. Resoldre aquests errors implica la recerca de nova informació i la reestructuració de l'aprenentatge anterior, i, consegüentment, també implica aprendre millor.

c) La correlació de l'ajut rebut i l'aprenentatge aconseguit pels diferents membres del grup depèn de dos factors: la qualitat de l'ajut rebut i l'adequació de l'ajut al requeriment demanat per l'alumne. Així, per exemple, l'alumne que comet un error en el procés de resolució i demana com millorar-lo, si rep informació sobre com utilitzar el procediment per resoldre el problema, aquest ajut no l'ajudarà a trobar

on ha comès l'error d'aplicació del procediment i no tindrà relació amb el rendiment.

King (1991, 1994, 1997) demostra que, quan la interacció i l'ajuda entre iguals és estructurada, com per exemple, mitjançant preguntes i respostes, la qualitat de l'aprenentatge és major. Fer preguntes és considerat, segons aquesta autora, com un mecanisme crític que facilita la comprensió, la resolució de problemes i la creativitat. Aquesta afirmació s'avalua a partir del fet que els experts en la resolució d'un problema es van fent preguntes sobre aquest procés, que generalment és un diàleg intern, però que pot ser extern en qualsevol moment. En aquest sentit, aquesta autora ha dissenyat diferents situacions educatives que afavoreixen l'aprenentatge d'estratègies de resolució de problemes a partir de preguntes i respostes sobre aquest procés i de manera estructurada entre les parelles d'alumnes.

En segon lloc, parlem de la naturalesa dels processos cognitius que s'estimulen en el treball en grup. Així, Doisse (1990) suggereix que el treball en grup genera diferents maneres d'aprendre a resoldre un problema, el que s'ha anomenat aprenentatge sociocognitiu, perquè el canvi cognitiu es produeix en un context social. Aquest aprenentatge es produeix a partir de la confrontació de diferents perspectives individuals de resolució, i la seva coordinació possibilita una nova aproximació per resoldre el problema, més complexa i millor adaptada que qualsevol de les anteriors per separat. La discussió i el conflicte cognitiu que es generen en els diferents membres del grup per buscar una manera de resolució única i que s'ha de consensuar facilita la reestructuració de les idees individuals i el seu progrés.

En tercer lloc, destaquem les variables socioemocionals que medien en les situacions cooperatives. Una de les queixes que amb més insistència proclamen els professors i els investigadors educatius en l'àrea de les matemàtiques és l'actitud

negativa i l'escassa motivació que mostren els alumnes per l'aprenentatge dels continguts d'aquesta àrea. Aquestes variables emocionals influeixen en els pobres resultats als quals s'arriba en l'avaluació del rendiment acadèmic dels alumnes.

Una de les explicacions d'aquest fet és la manera d'ensenyar les matemàtiques, la qual es basa en un coneixement estàtic, fragmentat i molt allunyat d'altres disciplines i dels problemes que es presenten en la vida quotidiana, en què els alumnes tenen poques oportunitats de descobrir els conceptes i procediments matemàtics.

Stodolsky (1991) argumenta que la manera en què s'ensenyava influència la manera en què s'aprèn un determinat contingut. L'ansietat que presenten els alumnes a les classes de matemàtiques és conseqüència de les estratègies d'ensenyament que s'utilitzen en aquesta àrea curricular, en la qual predomina la instrucció amb tot el grup classe i la realització d'exercicis sobre procediments concrets.

Una de les estratègies instruccionals que s'apunta per corregir el problema esmentat és l'ús del treball en petits grups. La distribució de la responsabilitat, el poder i el coneixement de manera més igualitària entre els diferents membres del grup propicia una interacció recíproca que facilita la instrucció entre els seus membres. L'augment de la motivació i la reducció de l'ansietat que comporta l'activitat cooperativa permet un millor aprenentatge i un posterior ús de les estratègies apreses (Forman, 1989; Perlmutter *et al.*, 1989).

L'ús de l'aprenentatge cooperatiu és una constant en molts dels treballs que tenen com a objectiu estudiar i millorar el procés de resolució de problemes dels alumnes; s'obtenen resultats molt positius. Citem, per exemple, el treball realitzat per Amigues i Agostinelli (1992), que comparen la resolució de problemes sobre circuits elèctrics amb ordinador per alumnes que treballen individualment i en parelles. Les conclusions a què arriben aquests autors són que la resolució de

problemes no familiars és molt millor quan els alumnes treballen en parelles que quan ho fan individualment; el tipus d'estratègia utilitzada per les parelles per resoldre aquest tipus de problemes s'ajusta més a les característiques de la tasca i el procés de resolució és molt més reflexiu i controlat que els alumnes que treballen individualment, els quals presenten un procés de resolució guiat per estratègies properes a l'assaig-error.

Shaw (1997) obté bons resultats en la resolució de problemes aritmètics amb alumnes d'educació primària quan aquests resolen problemes de manera cooperativa en petits grups i reflexionant sobre el procés de resolució amb la tècnica anomenada "K-W-D-L" (what we now - what we want to know - what we did - what we learned).

Brenner (1995), en un estudi en què compara les estratègies de resolució de problemes sobre àlgebra entre dos grups d'alumnes de l'últim curs d'educació primària quan segueixen un programa d'instrucció en estratègies de resolució d'aquest tipus de problemes en petits grups i quan no el segueixen, observa, en primer lloc, petites diferències entre els dos grups d'alumnes en la resolució correcta de problemes d'àlgebra. En segon lloc, obté més bons resultats el grup que ha seguit el programa d'instrucció en l'ús d'estratègies de representació d'informació mentre resolen el problema que el grup control.

Hem dedicat el primer capítol del nostre treball a revisar els principals treballs sobre l'ensenyament/aprenentatge del procés de resolució d'un problema. En primer lloc, hem iniciat aquest capítol delimitant el concepte de problema del qual parteix el nostre estudi i l'hem definit com un procés d'exploració, descobriment i creació de models matemàtics. En segon lloc, hem revisat les principals variables



implicades en la resolució amb èxit d'un problema matemàtic. I, finalment, hem repassat els principals components d'un model d'ensenyament/aprenentatge d'estratègies de resolució de problemes.

Dedicarem el proper capítol a estudiar les possibilitats educatives de l'ús de l'ordinador, en general, i del full de càlcul, en particular, com a eina mediatra de l'ensenyament/aprenentatge d'estratègies de resolució de problemes matemàtics.

CAPÍTOL II. L'ORDINADOR: UNA EINA PER APRENDRE

Un dels objectius generals del nostre treball pretén estudiar l'ensenyament/aprenentatge d'estratègies de resolució de problemes matemàtics amb l'ús del programa informàtic del full de càlcul.

En les últimes dècades, s'han realitzat un gran nombre d'investigacions que pretenen estudiar les diferents funcions educatives que el programari informàtic pot desenvolupar per facilitar i millorar l'aprenentatge dels alumnes. Al darrera d'aquest conjunt investigacions trobem com a principal hipòtesi de treball el fet que l'ordinador pot realitzar funcions molt més importants que la d'augmentar l'eficàcia o la rapidesa dels alumnes en la resolució d'algunes tasques escolars. Aquesta eina pot desenvolupar funcions d'amplificador i reorganitzador de l'activitat cognitiva de l'alumne.

L'objectiu d'aquest segon capítol és revisar les principals investigacions i aportacions educatives que s'han fet al voltant de l'ús de l'ordinador com afavoridor de l'aprenentatge escolar amb la finalitat de crear el marc teòric que ens permeti dissenyar i analitzar una situació d'ensenyament/aprenentatge que utilitzi aquesta eina per aprendre estratègies de resolució de problemes.

Aconseguir aquest objectiu està lluny de ser una tasca fàcil perquè l'ordinador no és una eina unitària i global, sinó que permet diferents possibilitats d'ús segons les característiques del programari que s'utilitzi i del disseny de les diferents variables que intervenen en el procés d'ensenyament/aprenentatge. A més a més, si tenim en compte que aquest programari informàtic ha evolucionat molt en els últims vint anys, i que actualment es troba en una carrera de canvi vertiginosa, es fa difícil parlar de l'eina informàtica com quelcom genèric i amb unes característiques estables i permanents.

En aquest marc, estructurarem la nostra anàlisi en dues parts ben diferenciades. En la primera part, estudiarem els rols educatius que pot desenvolupar l'ordinador des

d'una perspectiva teòrica sociocultural. Aquest estudi aportarà els principals eixos teòrics que ens permetran dissenyar una situació d'ensenyament/aprenentatge que utilitzi l'eina informàtica com a mediatra de l'aprenentatge escolar.

En la segona part, estudiarem l'ús educatiu dels principals "tipus" o formats de programes informàtics, així com les investigacions més destacades realitzades amb cadascun d'ells i els resultats aconseguits, aprofundint en l'ús de programes informàtics anomenats "eina", categoria a la qual pertany el programa del full de càlcul que utilitzarem en el nostre treball. L'objectiu d'aquesta segona revisió teòrica és conèixer quines variables del procés d'ensenyament/aprenentatge poden incidir de manera positiva en l'aprenentatge dels alumnes quan s'utilitza l'eina informàtica.