CONTRIBUCIÓ A L'ESTUDI DE LES UNINORMES EN EL MARC DE LES EQUACIONS FUNCIONALS. APLICACIONS A LA MORFOLOGIA MATEMÀTICA

Tesi Doctoral

AUTOR: Daniel Ruiz Aguilera

DIRECTOR: Joan Torrens Sastre

Departament de Ciències Matemàtiques i Informàtica
Universitat de les Illes Balears
Març 2007

Daniel Ruiz Aguilera: *CONTRIBUCIÓ A L'ESTUDI DE LES UNINORMES EN EL MARC DE LES EQUACIONS FUNCIONALS. APLICACIONS A LA MORFOLOGIA MATEMÀTICA,* Tesi Doctoral

Palma, Març 2007

D. Joan Torrens Sastre, Doctor en Informàtica per la Universitat de les Illes Balears i Catedràtic d'Escola Universitària de l'àrea de Ciències de la Computació i Intel·ligència Artificial del Departament de Ciències Matemàtiques i Informàtica de la Universitat de les Illes Balears,

FA CONSTAR:

que la present memòria "CONTRIBUCIÓ A L'ESTUDI DE LES UNINORMES EN EL MARC DE LES EQUACIONS FUNCIONALS. APLICACIONS A LA MORFOLOGIA MATEMÀTICA" presentada per Daniel Ruiz Aguilera per optar al grau de Doctor en Matemàtiques, ha estat realitzada sota la seva direcció i reuneix la suficient matèria original per ser considerada com a tesi doctoral.

Palma, a 23 de març de 2007

Signat: Joan Torrens Sastre

A mis padres

ABSTRACT

Uninorms are aggregation operators that, due to its definition, can be considered as conjunctions or disjunctions, and they have been applied to many different fields. In this work, some functional equations are studied, involving uninorms, or operators defined from them as unknowns. One of them is the distributivity equation, that is solved for all the known classes of uninorms, finding solution, in particular, to one open problem in the non-standard analysis theory. Residual implications, as well as strong ones defined from uninorms are studied, obtaining solution to the distributivity equation of this implications over uninorms. As an application of all these studies, the fuzzy mathematical morphology based on uninorms is revised and deeply studied, getting a new framework in image processing, that will have to be studied in more detail in the future.

RESUM

Les uninormes són uns operadors d'agregació que, per la seva definició, es poden considerar com a conjuncions o disjuncions, i han estat aplicades a camps molt diversos. En aquest treball s'estudien algunes equacions funcionals que tenen com a incògnites les uninormes, o operadors definits a partir d'elles. Una d'elles és la distributivitat, que és resolta per les classes d'uninormes conegudes, solucionant, en particular, un problema obert en la teoria de l'anàlisi no-estàndard. També s'estudien les implicacions residuals i fortes definides a partir d'uninormes, trobant solució a la distributivitat d'aquestes implicacions sobre uninormes. Com a aplicació d'aquests estudis, es revisa i s'amplia la morfologia matemàtica borrosa basada en uninormes, que proporciona un marc inicial favorable per a un nou enfocament en l'anàlisi d'imatges, que haurà de ser estudiat en més profunditat.

RESUMEN

Las uninormas son unos operadores de agregación que, por su definición, se pueden considerar como conjunciones o disyunciones, y han sido aplicadas a campos muy diversos. En este trabajo se estudian algunas ecuaciones funcionales que tienen como incógnitas las uninormas, o operadores definidos a partir de ellas. Una de ellas es la distributividad, que se resuelve para las clases de uninormas conocidas, solucionando, en particular, un problema abierto en la teoría del análisis no estándar. También se estudian las implicaciones residuales y fuertes definidas a partir de uninormas, encontrando solución a la distributividad de estas implicaciones sobre uninormas. Como aplicación de estos estudios, se revisa y amplía la morfología matemática borrosa basada en uninormas, que proporciona un marco inicial favorable para un nuevo enfoque en el análisis de imágenes, que deberá ser estudiado en más profundidad.

PUBLICACIONS

La majoria de resultats d'aquesta memòria han estat publicats en diverses revistes, i presentats en alguns congressos nacionals i internacionals.

Les comunicacions a congressos presentades i publicades a les corresponents actes de cada congrés són:

1. *Condición de modularidad para uninormas idempotentes*, ESTYLF-2002. [81]
2. *Residual implications and co-implications from idempotent uninorms*, AGOP-2003. [83]
3. *Opening and Closing Operators in Fuzzy Morphology Using Conjunctive Uninorms*, IPMU-2004. [57]
4. *Conditional distributivity for a uninorm and a continuous t-conorm*, IPMU-2004. [84]
5. *Distributive strong implications from uninorms*, AGOP-2005. [85]
6. *Distributive residual implications from uninorms*, EUSFLAT-2005. [87]
7. *Strong implications from continuous uninorms*, IPMU-2006. [90]

Els articles publicats en revistes de difusió internacional són:

1. *Distributive idempotent uninorms*, publicat a "Int. J. Uncertainty, Fuzziness, Knowledge-Based Systems". [82]
2. *Algebraic properties of fuzzy morphological operators based on uninorms*, publicat a "Artificial Intelligence Research and Development". [56]
3. *Residual implications and co-implications from idempotent uninorms*, publicat a "Kybernetika". [86]
4. *Distributivity of strong implications over conjunctive and disjunctive uninorms*, publicat a "Kybernetika". [89]
5. *Distributivity and conditional distributivity of a uninorm and a continuous t-conorm*, publicat a "IEEE Transactions on Fuzzy Systems". [88]
6. *Distributivity of residual implications over conjunctive and disjunctive uninorms*, publicat a "Fuzzy Sets and Systems". [91]

Destacar també que, durant la realització d'aquest treball, he gaudit de la subvenció dels següents projectes: PRDIB-2002GC3-19 i PRIB-2004-9250 del Govern de les Illes Balears i MTM2006-05540 del Ministeri d'Educació i Ciència (DGI).

AGRAÏMENTS

En aquesta primera part, m'agradaria mencionar aquells que, d'una manera o d'una altra, han fet que aquest treball hagi pogut anar endavant.

Primer de tot, voldria agrair a en Joan tot el que m'ha mostrat i ensenyat durant aquests anys. La seva capacitat de feina, les seves ganes d'estudiar i de proposar nous problemes m'han ajudat molt a seguir, i a que moltes vegades, la feina es convertís en oci i diversió.

Voldria agrair a en Manolo els seus consells i el seu recolzament en el tema de la morfologia matemàtica. M'han servit molt les seves paraules d'ànim i d'encoratjament en tot moment.

Per una altra banda, vull recordar a tots els membres del grup LOBFI, i especialment a en Gaspar, amb els que he passat molt bons moments en els seminaris, discutint qüestions ben interessants, que m'han ajudat a entendre una mica més el marc on fem feina dia a dia.

També vull donar les gràcies al Departament de Ciències Matemàtiques i Informàtica, perquè fer feina en aquesta casa ha estat, i és, per mi molt agradable i senzill en tots els aspectes, i he trobat sempre facilitats per poder desenvolupar la meva tasca.

Vull fer menció especial a na Tomasa, que ja fa uns quants anys em va acollir de manera molt especial a la Universitat d'Alcalà d'Henares, unes quantes setmanes, i per les paraules d'ànims que sempre he rebut de part seva. També vull agrair l'amabilitat de n'Enric Trillas, amb el que, durant el viatge a Alcalà, vaig tenir ocasió de compartir impressions. Els seus consells em varen servir molt per donar un caire més aplicat als meus estudis.

I also would like to mention Professor Bernard De Baets, for his advises and his support to finish my Ph D. I really appreciate his kind welcome to Ghent last summer, and I hope we continue our scientific relationship in the future.

D'una manera especial vull agrair a en Marc totes les bones estones i xerrades sobre mil i un temes, que m'han servit molt per continuar endavant en els moments més complicats. Les seves paraules d'ajuda i suport han estat per mi un referent dia a dia.

Una menció apart es mereixen també tots els companys i companyes de la Societat Balear de Matemàtiques SBM-XEIX. Gràcies a les seves paraules i els seus fets, que fan que cregui cada vegada més en les bones idees i en la capacitat de dur-les endavant.

També vull recordar a tots els meus amics i les meves amigues, que he anat tenint durant tots aquests anys al meu costat, per les bones estones que hem passat, i els mals moments que hem superat. Sou una font d'inspiració constant, i una ajuda inesgotable.

I per acabar, vull mencionar els meus pares i a la meva germana, per la seva ajuda durant tota la meva vida. Sense el seu suport diari i constant aquesta feina no hagués pogut ser la realitat que és ara.

ÍNDEX

ÍNDEX DE FIGURES

ÍNDEX DE TAULES

1 INTRODUCCIÓ

El problema de l'agregació de la informació ha conegut un gran desenvolupament en els darrers anys degut principalment a que, en molts camps de l'estudi científic, arriba un moment en què resulta necessari transformar o fusionar una certa quantitat de dades en un resultat concret. Això significa ser capaç d'obtenir, a partir d'unes entrades, una sortida que estigui relacionada amb les mateixes segons el problema tractat. En particular, qualsevol procés d'inferència duu associat en algun moment un pas d'agregació de la informació obtinguda. D'aquesta manera, l'agregació està fortament relacionada amb tot tipus de sistemes basats en regles, els sistemes experts, la lògica borrosa, el raonament aproximat i d'altres.

Des del punt de vista matemàtic, aquest procés de fusió de dades en un resultat concret es modelitza mitjançant les anomenades funcions d'agregació. És a dir, funcions $F : L^n \to L$, on L és el conjunt al que pertanyen les dades que s'han d'agregar, que verifiquen determinades condicions que varien segons els diversos objectius i/o necessitats i els camps on han de ser aplicades. Així, un dels problemes principals en aquests casos és el de trobar quins tipus de funcions d'agregació són els més adequats en cada context, quines propietats haurien de tenir i quines no haurien de tenir, etc.

Els primers antecedents sobre la utilització de funcions "adequades" per agregar informació apareixen l'any 1974 quan J.J. Dujmovic ([47]) aplica mitjanes ponderades en la teoria de l'avaluació de sistemes, mentre que l'any 1981 Dombi ([45]) proposa una generalització de les mateixes on ja apareix el nom de "operador d'agregació". L'any 1980 Zimmermann i Zysno ([107]) estudien, per primera vegada, l'agregació en el marc dels conjunts borrosos amb aplicacions a la presa de decisions. Poc després, en 1982, trobem el treball d'Aczél-Alsina ([2]) sobre funcions quasi-lineals i les seves aplicacions a la "síntesi de judicis" i en 1983 el d'Aczél-Saaty ([3]) on s'analitzen quines propietats (associativa, consens, bisimetria,...) s'haurien de requerir a una funció que es vulgui utilitzar per a sintetitzar judicis. Ja bastant més endavant, s'introdueixen operadors d'agregació que resulten útils en camps tan diversos com les xarxes neuronals ([101, 14]), els sistemes de bases de dades ([103]), la presa de decisions amb múltiples criteris ([102]), l'economia ([55]), etc. Tots aquests treballs i els diferents camps d'aplicació que mostren, fan que nombrosos autors hagin dedicat els seus esforços a l'estudi d'operadors d'agregació des d'un punt de vista purament teòric i és precisament en aquest camp on cal emmarcar la investigació duta a terme en aquesta memòria.

Aquest estudi teòric es desenvolupa fortament en la dècada dels 80 coincidint amb l'expansió de les t-normes i t-conormes, que són exemples de funcions d'agregació binàries sobre [0,1]. Des d'aleshores han aparegut nombroses famílies de funcions d'agregació; unes basades en les pròpies t-normes i t-conormes, com són les combinacions lineals convexes de t-normes i t-conormes, les funcions d'agregació representables, les uninormes, els t-operadors, i generalitzacions d'aquests darrers; d'altres, basades en la mitjana aritmètica, com són les mitjanes aritmètiques ponderades, els operadors OWA, les mitjanes quasi-aritmètiques, els operadors basats en integrals de Choquet i de Sugeno, etc. Una excel·lent recopilació d'aquestes funcions es pot trobar al llibre [26]. Actualment, l'estudi de la fusió de la informació, en general, i de les funcions d'agregació, en particular, està en el seu punt màxim. Nombrosos investigadors, tant nacionals com internacionals, dediquen els seus esforços a aquest camp, augmentant de cada dia el seu interès i les seves possibilitats.

Matemàticament, el conjunt de dades a agregar és interpretat en la seva versió més àmplia com un reticle L amb màxim i mínim. En l'àmbit dels conjunts borrosos, s'agafa com a reticle L l'interval unitat $[0,1]$, però també hi ha estudis en altres dominis, com ara reticles en general, àlgebres, i, molt especialment, cadenes finites utilitzades en la modelització de l'agregació qualitativa. Centrant-nos en el interval $[0,1]$, la definició més general de funció d'agregació inclou només la condició de creixement en cada variable i una mínima condició de frontera (habitualment $F(0,\ldots,0) = 0$ i $F(1,\ldots,1) = 1$). Segons els objectius i les necessitats en cada cas, es requereix que les funcions d'agregació a utilitzar verifiquin propietats addicionals. Així per exemple, la *propietat de simetria* (commutativitat) es requereix, o no, segons que el conjunt de dades o opinions a agregar tinguin o no la mateixa fiabilitat, la *idempotència* es requereix si es pretén una propietat de consens, etc. L'estudi de propietats específiques en funcions d'agregació ha donat lloc a la resolució de certes equacions funcionals (el llibre clau sobre equacions funcionals és [1]) que, a la vegada, han permès la caracterització de diverses famílies de funcions d'agregació (veure, per exemple, [2, 4, 7, 23, 24, 51, 54, 68, 69, 74]). D'aquesta manera, les tècniques utilitzades en equacions funcionals han demostrat ser una eina adequada i potent en l'estudi de les funcions d'agregació. Com es veurà més endavant, en aquesta memòria seguirem en aquesta línia, estudiant noves equacions funcionals involucrant diversos tipus de funcions d'agregació.

Una altra propietat important en agregació és la *propietat associativa*. Encara que les funcions d'agregació són inicialment funcions n-dimensionals, en moltes ocasions es defineixen com a operadors binaris i s'extenen a un caràcter n-dimensional de forma iterativa. En aquest procés la propietat associativa d'aquests operadors resulta molt útil perquè assegura una única via per a aquesta extensió. Dos tipus de funcions d'agregació associatives, especialment importants, són els t-operadors, introduïts a [66] i també anomenats nulnormes a [24], i les uninormes, introduïdes a [106]. Les relacions entre ambdós tipus d'operadors són nombroses, alguns exemples els podem trobar a [67, 68, 69, 75]. Dels dos però, són les uninormes les que, des de la seva aparició, han estat més extensament estudiades, tant des del punt de vista teòric com de l'aplicat, on s'han mostrat útils no només en agregació de la informació, sinó en molts altres camps com ara, els sistemes experts ([36]), les xarxes neuronals ([14, 101]), la modelització de sistemes ([104]), la teoria de la mesura ([62, 78]), la morfologia matemàtica ([42, 56]), etc. Pel que fa a l'aspecte teòric, cal destacar [53], on es realitza un estudi exhaustiu de les uninormes i la seva estructura, que ve sempre donada per una combinació especial d'una t-norma i una t-conorma. També volem citar [33], on es relacionen les diferents classes d'uninormes, [34] on es caracteritzen les uninormes idempotents amb alguna continuïtat lateral, [65] on es generalitza la classificació anterior a uninormes idempotents en general, [58] on es caracteritzen les uninormes contínues a $]0,1[^2$ i, més recentment, [46] on es caracteritza una nova classe d'uninormes: aquelles que verifiquen $U(x,y) \in \{x,y\}$ en la regió $A(e)$ (veure la secció 2.2).

Tot i que les uninormes varen ser introduïdes en el marc de les funcions d'agregació, la seva relació amb les t-normes i t-conormes, així com la seva subdivisió en uninormes conjuntives i disjuntives, han fet que siguin també utilitzades en funcions en un principi pròpies de les t-normes, especialment com a connectius en lògica borrosa. En aquesta línia, s'han definit cert tipus d'implicacions, en especial les residuals i les fortes o derivades de la lògica clàssica, a partir d'uninormes (principalment representables i de $\mathcal{U}_{\min}$ i de $\mathcal{U}_{\max}$), obtenint noves implicacions amb noves propietats (veure [39]). Recentment, s'ha introduït també una nova lògica borrosa basada en uninormes ([100]) com una més dèbil que la basada en t-normes i que generalitza la lògica sub-estructural intuïcionista. Des dels dos punts de vista (com a funcions d'agregació i com a connectius lògics) resulta interessant que es puguin mantenir el màxim de les propietats que habitualment es donen en el raonament clàssic, com ja van apuntar Zimmermann i Zysno a [107]. Així, moltes d'aquestes propietats han estat estudiades per diversos tipus d'uninormes (i també t-operadors), com per exemple a [23] i a [24]. Volem destacar, en particular, les propietats de *distributivitat* (veure [68] i [70]) i de *modularitat* (veure [69]) per ser en les que apareixen solucions diferents de les ja conegudes per t-normes i t-conormes. Així, a més de les aplicacions ja esmentades, l'estudi teòric de les uninormes i de les seves propietats dóna lloc a noves aplicacions o, si més no, a nous aspectes on les uninormes poden ser utilitzades amb més (o amb diferents) expectatives que les t-normes.

En aquest context és on es pot emmarcar aquest treball: l'estudi de les uninormes en el marc de les equacions funcionals. Un estudi principalment teòric però que a la vegada està dirigit a resoldre problemes derivats d'aplicacions concretes i que intenta aprofundir en una d'aquestes aplicacions: la morfologia matemàtica borrosa. De fet, aquesta memòria pretén solucionar (i soluciona) principalment tres problemes concrets referents a uninormes, que sorgeixen d'aspectes aplicats de les mateixes, utilitzant tècniques d'equacions funcionals. Concretament, aquests problemes són:

- **Problema 1.- Distributivitat condicional.** La propietat *distributiva* ja ha estat estudiada per a molts altres tipus d'operadors, a part de les uninormes, com ara, t-normes i t-conormes a [62], [6] i [16], altres tipus de funcions d'agregació a [22], operacions pseudo-aritmètiques a [15], t-operadors i uninormes de $\mathcal{U}_{\min}$ i de $\mathcal{U}_{\max}$ a [68], etc. El motiu de ser tan estudiada és que aquesta propietat resulta essencial en diverses aplicacions com ara, el pseudo-anàlisi ([78]) i teoria de la mesura i integració ([61]). En aquests camps s'introdueix l'anomenada (S, U)-integral, on U és una uninorma i S una t-conorma contínua. Aquest tipus d'integrals, introduïdes a [61], són una generalització de la integral de Sugeno i s'han utilitzat amb èxit en la solució d'equacions diferencials, equacions amb derivades parcials i en la teoria de la informació ([79]). El punt bàsic perquè aquestes integrals tinguin les propietats necessàries radica en el fet que la uninorma U sigui *distributiva* (o almenys *condicionalment distributiva*) sobre la t-conorma S. És per això que a [94] es presentava com a problema obert el de caracteritzar les uninormes que són distributives (o almenys condicionalment distributives) sobre una t-conorma contínua. És a dir, tals que

  $$U(x, S(y, z)) = S(U(x, z), U(y, z))$$

  per a tots els $x, y, z \in [0, 1]$ amb $S(y, z) < 1$. Aquest problema obert és el primer problema que es resol en aquesta memòria i es fa en el capítol 3, per a totes les classes d'uninormes conegudes.

  Just després estudiem també en aquest mateix capítol la distributivitat entre uninormes en general, obtenint un conjunt de solucions ampli que inclouen uninormes de diversos tipus. Dediquem un apartat especial al cas d'uninormes idempotents per la seva peculiaritat, ja que en aquest cas estan incloses totes les uninormes autodistributives i també tots els parells distributius que a més coincideixen amb els parells d'uninormes que verifiquen la propietat modular. Aquest darrer estudi de la distributivitat d'uninormes en general es fa, no només per completesa de l'estudi teòric, sinó també per les possibles aplicacions que es puguin derivar, com es fa palès en el desenvolupament del capítol 4.

- **Problema 2.- Funcions d'implicació.** Un dels problemes més importants en lògica borrosa és el tractament de condicionals borrosos del tipus "Si p, aleshores q" amb p i q proposicions borroses. Habitualment això es fa a través de funcions $I : [0, 1] \times [0, 1] \to [0, 1]$ de manera que el valor de veritat del condicional s'estableix funcionalment a partir del valors de veritat de p i q. Aquestes funcions són les *funcions* *d'implicació (borroses)* o simplement *implicacions (borroses)*. Entre d'altres, dues de les maneres més utilitzades per definir aquestes implicacions són les

– *Implicacions residuals* o *R-implicacions*, definides per

$$I_T(x,y) = \sup\{z \in [0,1] \mid T(x,z) \leqslant y\}, \text{ per a tots } x,y \in [0,1],$$

on T és una t-norma (habitualment contínua per l'esquerra[1]). El seu nom és degut a que provenen dels reticles residuats basats en la propietat de residuació que, en el cas de t-normes, es pot escriure com

$$T(x,y) \leqslant z \text{ si i només si } I(x,z) \geqslant y \text{ per a tots } x,y,z \in [0,1], \tag{1.1}$$

– *Implicacions fortes* o *S-implicacions*, definides per

$$I_{S,N}(x,y) = S(N(x),y), \text{ per a tots } x,y \in [0,1],$$

on S és una t-conorma i N una negació forta. Aquestes apareixen com a una generalització de la implicació booleana clàssica $p \to q \equiv \neg p \vee q$.

Aquests tipus d'implicacions han estat extensament estudiats per molts autors, podem destacar per exemple [10, 11, 19, 21, 31, 49, 50, 80, 93, 96, 97, 98]. Una de les causes d'aquest extensiu estudi és que les implicacions no només s'utilitzen per representar els condicionals, sinó també per a realitzar inferències principalment a través del modus ponens i del modus tollens. Això fa que dites implicacions siguin essencials tant en la lògica borrosa i el raonament aproximat, com en el control borrós i en la computació amb paraules (veure [73] i les seves referències). Dins aquest context, i amb la intenció d'evitar l'explosió exponencial en diversos sistemes basats en regles borroses, s'ha proposat l'equivalència (veure [28]):

$$(p \wedge q) \to r \equiv (p \to r) \vee (q \to r). \tag{1.2}$$

Aquesta equació considerada en la lògica borrosa, es transforma en

$$I(T(x,y),z) = S(I(x,z), I(y,z)) \text{ per a tots } x,y,z \in [0,1] \tag{1.3}$$

on I és una funció d'implicació, T és una t-norma i S una t-conorma. Aquesta equació, i d'altres distributivitats relacionades, han estat resoltes a [95] i a [13] per diversos tipus d'implicacions que inclouen les R-implicacions (derivades de t-normes contínues) i les S-implicacions. Però en aquests casos es veu que les úniques solucions apareixen quan T és la t-norma mínim i S la t-conorma màxim.

El segon problema que resolem en aquesta memòria és trobar noves implicacions (en aquest cas derivades d'uninormes) que satisfan l'equació anterior per altres t-normes i t-conormes diferents del mínim i el màxim. De fet, en el capítol 4, fem l'estudi més general i resolem l'equació (1.2) modelitzant la conjunció i la disjunció per una uninorma conjuntiva i una disjuntiva respectivament. Per fer això, completem primer l'estudi de les R i S-implicacions derivades d'uninormes que es va iniciar a [39]. Tractem especialment el cas d'uninormes idempotents principalment per dos motius: per una banda la fàcil implementació d'aquest tipus d'uninormes i de les seves implicacions derivades (són sempre combinacions del mínim i el màxim) a l'hora d'aplicar-los a casos concrets, i per l'altra, la intenció d'aplicar les uninormes idempotents al camp de la morfologia matemàtica on les implicacions i les seves propietats resulten fonamentals.

1 La propietat de residuació 1.1 es verifica per una t-norma T si i només si T és contínua per l'esquerra.

- **Problema 3.- Morfologia matemàtica borrosa.** La morfologia matemàtica (clàssica) és una eina útil en l'extracció de components d'una imatge i, per tant, en la identificació d'objectes i en la detecció d'anomalies en qualsevol procés industrial automatitzat. Per una altra part, l'interès creixent d'aquestes àrees per la teoria dels conjunts borrosos i les seves tècniques, prové de la seva capacitat per representar la imprecisió i l'ambigüitat existent en les imatges.

  Les eines bàsiques de la morfologia matemàtica són els operadors morfològics. Un operador morfològic P transforma l'estructura que volem analitzar (una imatge A), mitjançant un petit objecte B anomenat *element estructurant*, en un nou objecte $P(A, B)$ (una nova imatge). La mida i la forma de B poden ser elegides pel morfologista per analitzar l'estructura de la imatge A. Els operadors morfològics bàsics són la dilatació i l'erosió (a partir dels quals s'en poden definir molts altres com ara l'obertura, la clausura, els filtres,...), operadors que estan basats en teoria de conjunts. D'aquesta manera, s'ha utilitzat la teoria dels conjunts borrosos per estendre la morfologia matemàtica clàssica ([92]) a la morfologia matemàtica borrosa ([40], [41]). S'han fet diverses aproximacions, unes basades en la inclusió de conjunts, en la *addició de Minkowski* i d'altres (veure [17] i el llibre [59], especialment els capítols 1 i 2, respectivament [77] i [35]). Una de les més esteses és la construïda per De Baets (a [32] i [35]) on utilitza t-normes contínues i les seves implicacions residuals per definir l'erosió i la dilatació borroses.

  Aquesta aproximació ha demostrat ser molt efectiva, per exemple, en la detecció de contorns. En el cas de la t-norma mínim, els resultats milloren considerablement els de la morfologia matemàtica clàssica. Però té un petit problema: la morfologia que presenta aquestes millores està basada en t-normes, per les quals els operadors morfològics no verifiquen propietats morfològiques importants, com la de dualitat (cas de la t-norma mínim). Per contra, les morfologies basades en t-normes per les quals aquestes propietats sí es verifiquen (cas de la família de les t-normes conjugades de Łukasiewicz), no aporten les mateixes millores en els resultats.

  Aquest és el tercer problema que es resol en aquesta memòria una altra vegada utilitzant uninormes. Presentem, en el capítol 5, l'estudi d'una nova morfologia borrosa basada en uninormes conjuntives, contínues per l'esquerra, que millora la basada en t-normes. En concret, presentem dues famílies d'uninormes conjuntives per les quals:

  - Per una banda, milloren els resultats de la detecció de contorns, no només de la morfologia matemàtica clàssica, sinó també de la basada en t-normes abans esmentada, incloent el cas d'agafar la t-norma mínim.
  - Per una altra banda, verifiquen totes les propietats algebraiques necessàries perquè els operadors morfològics corresponents tinguin totes les propietats morfològiques desitjables que tenen els operadors basats en les t-normes de la família de Łukasiewicz.

  Aquestes dues famílies estan incloses una, en la classe de les representables i l'altra en la classe de les idempotents, ambdues amb la característica de ser fàcils d'implementar. A més, es mostren especialment adequades en el problema de la detecció de contorns.

Per acabar, volem fer notar que hem destacat aquí els tres problemes fonamentals que han motivat aquesta memòria. Però és evident que aquest treball no es redueix simplement a la resolució d'aquests tres problemes, sinó que resol també altres qüestions relacionades que han anat apareixent en el procés i que tenen interès per elles mateixes.

Finalment, la memòria acaba amb un capítol dedicat a conclusions i treball futur.

2 PRELIMINARS

En aquests preliminars s'introdueixen les definicions i notacions bàsiques que s'empraran al llarg d'aquest treball. La primera secció està dedicada a dues operacions ben conegudes i àmpliament estudiades, les t-normes i les t-conormes. Es presenta a un apartat la caracterització de les t-normes i t-conormes contínues, que es farà servir més endavant.

A la segona secció es mencionen els conceptes bàsics de les uninormes, operador al que estan dedicats la pràctica totalitat dels resultats d'aquesta memòria, i que es poden veure com una generalització de les t-normes i t-conormes. Primer s'enumeren les classes d'uninormes conegudes, donant la caracterització de cada classe, i es dóna una visió global de totes elles. Més endavant s'estudien les propietats de dualitat en uninormes, que resultaran molt importants per al desenvolupament dels resultats posteriors.

2.1 T-NORMES I T-CONORMES

Donarem per coneguts a aquesta memòria tota una sèrie de resultats sobre t-normes i t-conormes que es poden trobar, per exemple, a [62] i a [6]. Recordem aquí només les definicions i un mínim de propietats amb l'objectiu d'establir la notació que utilitzarem al llarg de tot el treball. Comencem amb les definicions de t-norma i t-conorma.

Definició 2.1.1 *Una* t-norma *(també anomenada* norma triangular*) és una operació binària T sobre* $[0,1]$*, és a dir, una funció* $T : [0,1]^2 \to [0,1]$*, tal que per a tots* x*,* y*,* $z \in [0,1]$ *se satisfà:*

(T1) Commutativitat*:* $T(x,y) = T(y,x)$.

(T2) Associativitat*:* $T(x,T(y,z)) = T(T(x,y),z)$.

(T3) Monotonia creixent*:* $T(x,y) \leqslant T(x,z)$ *si* $y \leqslant z$.

(T4) Condició de frontera*:* $T(x,1) = x$.

Definició 2.1.2 *Una* t-conorma *(també anomenada* conorma triangular*) és una operació binària S sobre* $[0,1]$*, tal que per a tots* x*,* y*,* $z \in [0,1]$ *se satisfà:*

(S1) Commutativitat*:* $S(x,y) = S(y,x)$.

(S2) Associativitat*:* $S(x,S(y,z)) = S(S(x,y),z)$.

(S3) Monotonia creixent*:* $S(x,y) \leqslant S(x,z)$ *si* $y \leqslant z$.

(S4) Condició de frontera*:* $S(x,0) = x$.

Exemple 2.1.3 *El mínim,* $T_{\mathbf{M}}(x,y) = \min(x,y)$*, el producte* $T_{\mathbf{P}}(x,y) = x \cdot y$ *i la funció donada per* $T_{\mathbf{L}}(x,y) = \max(0, x+y-1)$ *(t-norma de Łukasiewicz) són t-normes.*
El màxim $S_{\mathbf{M}}(x,y) = \max(x,y)$*, la suma probabilística* $S_{\mathbf{P}}(x,y) = x+y-xy$ *i la funció* $S_{\mathbf{L}}(x,y) = \min(x+y,1)$ *(t-conorma de Łukasiewicz) són t-conormes.*

Les proposicions següents donen dues propietats bàsiques que satisfan les t-normes i les t-conormes en general.

Proposició 2.1.4 *Per tota t-norma* T, *tota t-conorma* S *i tot* $(x,y) \in [0,1]^2$, *se satisfà:*

$$T(x,y) \leqslant T_{\mathbf{M}}(x,y) \leqslant S_{\mathbf{M}}(x,y) \leqslant S(x,y).$$

Proposició 2.1.5 *L'única t-norma que és idempotent, és a dir, que compleix que* $T(x,x) = x$ *per a tot* $x \in [0,1]$ *és* $T_{\mathbf{M}}$*, i l'única t-conorma que és idempotent és* $S_{\mathbf{M}}$.

Una altra operació bàsica en el marc de la teoria de conjunts borrosos són les negacions fortes, definició que recordem a continuació.

Definició 2.1.6 *Una* negació forta *és una funció* $N : [0,1] \to [0,1]$ *involutiva, és a dir, que compleix* $N(N(x)) = x$ *per a tot* $x \in [0,1]$, *i decreixent.*

Una manera per poder construir t-normes (o t-conormes) és a partir d'una família de t-normes (o t-conormes), com es veu en la següent definició.

Proposició 2.1.7 ([6], definició 2.4.1, teorema 2.4.2) *Siguin* A *un conjunt d'índexs finit o numerable,* $(T_\alpha)_{\alpha\in A}$ *una família de t-normes i* $(]a_\alpha, b_\alpha[)_{\alpha\in A}$ *una família de subintervals de* $[0,1]$ *disjunts entre sí. L'operació binària definida per*

$$T(x,y) = \begin{cases} a_\alpha + (b_\alpha - a_\alpha)\cdot T_\alpha\left(\frac{x-a_\alpha}{b_\alpha-a_\alpha}, \frac{y-a_\alpha}{b_\alpha-a_\alpha}\right) & \textit{si existeix } \alpha \in A \textit{ amb } (x,y) \in [a_\alpha, b_\alpha]^2 \\ \min(x,y) & \textit{altrament,} \end{cases}$$

és una t-norma, i s'anomena la suma ordinal *de sumands* $\langle a_\alpha, b_\alpha, T_\alpha\rangle$, $\alpha \in A$. *S'escriu*

$$T = (\langle a_\alpha, b_\alpha, T_\alpha\rangle)_{\alpha\in A}.$$

De manera similar es pot definir la suma ordinal de t-conormes, canviant els valors mínims per màxims en la proposició anterior.

Ara inclourem els resultats coneguts sobre la caracterització de t-normes contínues. Resultats equivalents es poden donar per a t-conormes contínues, adaptant-los de manera convenient.

Definició 2.1.8 *Sigui* T *una t-norma. Un element* $a \in [0,1]$ *es diu un* element idempotent *de* T *si* $T(a,a) = a$. *Els elements* 0 *i* 1 *s'anomenen* elements idempotents trivials *de* T, *ja que són sempre idempotents, per a qualsevol t-norma* T, *i els elements idempotents de* $]0,1[$ *s'anomenen* elements idempotents no trivials.

Com que tota t-norma T és associativa, per *(T2)*, podem definir la "potència" n-èsima d'un element $a \in [0,1]$ per T com:

$$a_T^{(n)} = T(a, a, \ldots, a).$$

Amb aquesta notació, introduïm a continuació la definició d'element nilpotent.

Definició 2.1.9 *Sigui* T *una t-norma. Un element* $a \in [0,1]$ *es diu* element nilpotent *de* T *si existeix* $n \in \mathbb{N}$ *tal que* $a_T^{(n)} = 0$.

Ara donem les definicions de tres tipus de t-normes, que seran les peces fonamentals de la caracterització de les t-normes contínues.

Definició 2.1.10 *Sigui* T *una t-norma. Direm que és* arquimediana *si per a tot* $(x,y) \in [0,1]^2$, *existeix* $n \in \mathbb{N}$ *tal que* $x_T^{(n)} < y$.

Quan hi ha continuïtat, que una t-norma sigui arquimediana és equivalent a que no tingui elements idempotents no trivials, com es veu a continuació.

Teorema 2.1.11 ([62], teorema 2.11) *Sigui* T *una t-norma contínua.* T *és arquimediana si i només si els seus únics elements idempotents són els trivials.*

Definició 2.1.12 *Sigui* T *una t-norma.*

- *Direm que* T *és* nilpotent *si és contínua i tot* $a \in]0,1[$ *és element nilpotent.*
- *Direm que* T *és* estricta *si és estrictament creixent a* $]0,1]^2$*, és a dir, si* $x > 0$ *i* $y < z$*, llavors* $T(x,y) < T(x,z)$.

Nota 2.1.13 *Totes les t-normes estrictes són contínues i arquimedianes.*

Les t-normes arquimedianes contínues es poden dividir en dues famílies: les t-normes estrictes i les t-normes nilpotents.

Teorema 2.1.14 ([62], teorema 2.18) *Sigui* T *una t-norma arquimediana contínua. Llavors, o bé és nilpotent, o bé és estricta.*

A continuació donem els teoremes de representació de les t-normes arquimedianes contínues, que donen una manera de representar un operador binari, com són les t-normes, en termes d'una funció unària. Pels resultats següents necessitem definir la pseudo-inversa d'una funció.

Definició 2.1.15 ([6], definició 2.1.5) *Sigui* $t : [0,1] \to [0,+\infty]$ *una funció estrictament decreixent, amb* $t(1) = 0$*, llavors la seva* pseudo-inversa $t^{(-1)}$ *per la qual* $\mathrm{Dom}\, t^{(-1)} = [0,+\infty]$ *i* $\mathrm{Ran}\, t^{(-1)} = [0,1]$ *ve donada per*

$$t^{(-1)}(x) = \begin{cases} t^{-1}(x) & \text{si } 0 \leqslant x \leqslant t(0) \\ 0 & \text{si } t(0) \leqslant x \leqslant +\infty. \end{cases}$$

Una vegada introduïda la definició de pseudo-inversa, podem citar el resultat de representació de les t-normes arquimedianes contínues. Aquesta representació fou demostrada per Ling [64], com una extensió de la representació de t-normes estrictes, feta anteriorment per Aczél [1], que a la seva vegada es basa en resultats d'Abel. Per això el teorema següent de representació se sol dir habitualment "teorema d'Aczel-Ling".

Teorema 2.1.16 ([62], teorema 5.1; [6], teorema 2.1.6) *Sigui* T *una t-norma.* T *és arquimediana contínua si i només si existeix una funció estrictament decreixent* $t : [0,1] \to [0,+\infty]$*, anomenada* generador additiu continu*, amb* $t(1) = 0$ *(únic llevat d'una constant multiplicativa positiva) de manera que per a tot* $(x,y) \in [0,1]^2$*,*

$$T(x,y) = t^{(-1)}(t(x) + t(y)).$$

A més a més,

- *La t-norma* T *és estricta si i només si* $t(0) = +\infty$ *i llavors*

$$T(x,y) = t^{(-1)}(t(x) + t(y)).$$

- *La t-norma* T *és nilpotent si i només si* $t(0) < +\infty$. *En aquest cas existeix un únic generador additiu* t *tal que* $t(0) = 1$ *(anomenat* generador normalitzat*). Si* t *és el generador normalitzat, aleshores* T *ve donada per*

$$T(x, y) = t^{(-1)}(t(x) + t(y)).$$

i la funció $N_T(x) = t^{-1}(1 - t(x))$ *és una negació forta que delimita la regió zero de* T, *és a dir,*

$$T(x, y) = 0 \text{ si i només si } y \leqslant N_T(x).$$

Per acabar, donem la caracterització general de les t-normes contínues.

Teorema 2.1.17 ([62], teorema 5.11; [6], teorema 2.4.3) *Sigui* T *una t-norma contínua. Llavors* T *és suma ordinal de t-normes arquimedianes contínues.*

De manera equivalent, es pot donar el resultat anterior per a t-conormes contínues.

Teorema 2.1.18 ([62], corol·lari 5.12) *Sigui* S *una t-conorma contínua. Llavors* S *és suma ordinal de t-conormes contínues arquimedianes.*

2.2 UNINORMES

En aquesta secció presentem les uninormes, operacions que surten com a generalització de les t-normes i les t-conormes. En aquestes operacions, existeix un element neutre que està entre zero i u. En un primer moment ([106]), s'introduïren com a operadors d'agregació, però posteriorment la seva utilització ha estat més general.

Definició 2.2.1 ([106]) *Una* uninorma *és una operació binària* U *sobre* $[0, 1]$, *tal que per a tots* x, y, $z \in [0, 1]$ *se satisfà:*

(U1) Commutativitat*:* $U(x, y) = U(y, x)$.

(U2) Associativitat*:* $U(x, U(y, z)) = U(U(x, y), z)$.

(U3) Monotonia creixent*:* $U(x, y) \leqslant U(x, z)$ *si* $y \leqslant z$.

(U4) Element neutre*: Existeix* $e \in [0, 1]$ *anomenat* element neutre *tal que* $U(x, e) = x$.

Resulta obvi que l'operació U és una t-norma en el cas en què $e = 1$ i és una t-conorma quan $e = 0$. Ara donem una sèrie de resultats i definicions bàsiques sobre les uninormes.

Proposició 2.2.2 *Per a qualsevol uninorma* U, *es verifica que* $U(0, 1) \in \{0, 1\}$.

Definició 2.2.3 *Donada una uninorma* U, *es diu que és* conjuntiva *quan* $U(1, 0) = 0$ *i* disjuntiva *quan* $U(1, 0) = 1$.

Definició 2.2.4 *En general, direm que un operador binari (i en particular una uninorma)* U *és* continu per l'esquerra (dreta) *si ho són les seves seccions* $U(x, -)$ *i* $U(-, y)$.

L'estructura general d'una uninorma es presenta als resultats següents.

Proposició 2.2.5 *Sigui* U *una uninorma amb element neutre* $e \in]0, 1[$. *Definim dues operacions* T_U *i* $S_U : [0, 1]^2 \to [0, 1]$ *per*

$$T_U(x, y) = \frac{1}{e} \cdot U(e \cdot x, e \cdot y),$$
$$S_U(x, y) = \frac{1}{1 - e} \cdot (U(e + (e - 1) \cdot x, e + (e - 1) \cdot y) - e).$$

Llavors T_U *és una t-norma i* S_U *és una t-conorma, que s'anomenen t-norma i t-conorma associades a* U, *respectivament.*

Per tant, l'estructura d'una uninorma en els quadrats $[0,e]^2$ i $[e,1]^2$, està molt relacionada amb les t-normes i les t-conormes. És a dir, tenim

$$U(x,y) = e \cdot T_U(\frac{x}{e}, \frac{y}{e}), \text{ si } 0 \leqslant x, y \leqslant e$$
$$U(x,y) = e + (1-e) \cdot S_U(\frac{x-e}{1-e}, \frac{y-e}{1-e}), \text{ si } e \leqslant x, y \leqslant 1$$

per a una t-norma T_U i una t-conorma S_U.

Notació 2.2.6 *Al conjunt de totes les uninormes el notarem per* $\mathcal{U}$. *A una uninorma* U *que té element neutre* e, *t-norma associada* T *i t-conorma associada* S, *la notarem per* $U \equiv \langle T, e, S \rangle$. *En general, per dir que considerem una uninorma* U *amb element neutre* e, *escriurem* $U \in \mathcal{U}(e)$.

Proposició 2.2.7 *Sigui* U *una uninorma amb element neutre* $e \in]0,1[$. *Aleshores, per tots* $(x,y) \in [0,e] \times [e,1] \cup [e,1] \times [0,e]$ *es compleix*

$$\min(x,y) \leqslant U(x,y) \leqslant \max(x,y).$$

És a dir, una uninorma en $[0,e[\times]e,1] \cup]e,1] \times [0,e[= [0,1]^2 \setminus ([0,e]^2 \cup [e,1]^2)$ és un operador de compensació, ja que el resultat de l'agregació està entre el mínim i el màxim. A aquesta regió l'anomenarem *regió de compensació*, i la notarem per $A(e)$.

L'estructura general d'una uninorma es pot observar en la figura 1.

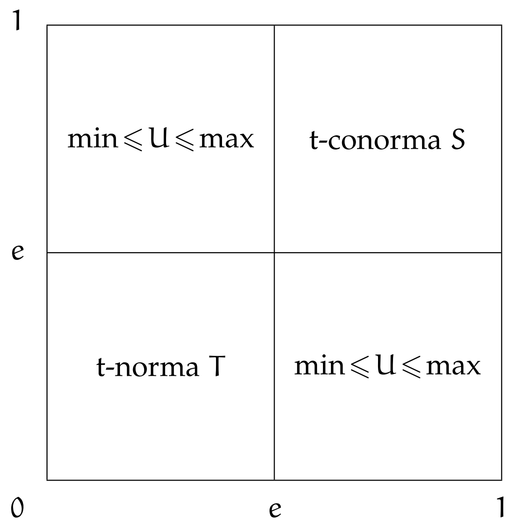

Figura 1. Estructura general d'una uninorma $U \equiv \langle T, e, S \rangle$.

Nota 2.2.8 *Com en el cas de la figura 1, els gràfics d'estructura d'uninormes, i altres operadors, que es presenten en aquest treball, si inclouen quadres (o rectangles) amb un operador de* $[0,1]^2$, *se sobreentén que estaran escalats en els intervals corresponents.*

A continuació es presenten les caracteritzacions de les famílies conegudes d'uninormes. En cada una d'elles s'imposa una certa condició que ha de complir la uninorma, i que caracteritza la família.

2.2.1 *Classes d'uninormes*

Uninormes de $\mathcal{U}_{\min}$ o de $\mathcal{U}_{\max}$

Una forma senzilla de definir una uninorma és utilitzant l'operador mínim (màxim) en la regió de compensació, $A(e)$. Són les anomenades uninormes de $\mathcal{U}_{\min}$ ($\mathcal{U}_{\max}$), que es varen caracteritzar a [53], mitjançant el teorema següent.

Teorema 2.2.9 ([53], teorema 1) *Sigui U una uninorma amb element neutre $e \in]0,1[$ i suposem que les funcions $x \mapsto U(x,1)$ i $x \mapsto U(x,0)$, amb $x \in [0,1]$, són contínues excepte (potser) en $x = e$. Aleshores*

(a) Si U és conjuntiva ($U(0,1) = 0$), U ve donada per

$$U(x,y) = \begin{cases} eT_U\left(\frac{x}{e}, \frac{y}{e}\right) & \text{si } (x,y) \in [0,e]^2 \\ e + (1-e)S_U\left(\frac{x-e}{1-e}, \frac{y-e}{1-e}\right) & \text{si } (x,y) \in [e,1]^2 \\ \min(x,y) & \text{altrament.} \end{cases} \tag{2.1}$$

(b) Si U és disjuntiva ($U(0,1) = 1$), U ve donada per

$$U(x,y) = \begin{cases} eT_U\left(\frac{x}{e}, \frac{y}{e}\right) & \text{si } (x,y) \in [0,e]^2 \\ e + (1-e)S_U\left(\frac{x-e}{1-e}, \frac{y-e}{1-e}\right) & \text{si } (x,y) \in [e,1]^2 \\ \max(x,y) & \text{altrament.} \end{cases} \tag{2.2}$$

En ambdues fórmules T_U és una t-norma i S_U és una t-conorma.

Nota 2.2.10 *En funció de les expressions (2.1) i (2.2), es poden considerar les uninormes de $\mathcal{U}_{\min}$ i de $\mathcal{U}_{\max}$ com una suma ordinal d'una t-norma (T_U) i una t-conorma (S_U).*

Notació 2.2.11 *El conjunt de les uninormes amb l'expressió (2.1) el notarem per $\mathcal{U}_{\min}$ i el conjunt de les que tenen expressió (2.2) per $\mathcal{U}_{\max}$. Notarem una uninorma de $\mathcal{U}_{\min}$ amb t-norma T_U, t-conorma S_U i element neutre e per $U \equiv \langle T_U, e, S_U\rangle_{\min}$ i de manera semblant, una uninorma de $\mathcal{U}_{\max}$ com $U \equiv \langle T_U, e, S_U\rangle_{\max}$. L'estructura d'aquestes uninormes es pot observar a la figura 2.*

Uninormes idempotents

La idempotència és una propietat fonamental a l'hora de definir operadors d'agregació. Com hem vist anteriorment, per a t-normes només se satisfà per a la t-norma mínim i per t-conormes, només per a la t-conorma màxim. Per a uninormes, aquesta propietat dóna tota una família d'operadors.

Definició 2.2.12 *Donada una uninorma U, es diu que és* idempotent *quan $U(x,x) = x$ per a tot $x \in [0,1]$.*

En aquest apartat es dóna la caracterització de les uninormes idempotents, que es basa en resultats de [29], on Czogala i Drewniak donen la forma general d'operadors idempotents, associatius, creixents amb element neutre, com es pot veure en el teorema següent.

Teorema 2.2.13 ([29]) *Sigui F un operador binari sobre $[0,1]$, idempotent, associatiu i creixent amb element neutre $e \in [0,1]$. Aleshores, existeix un operador decreixent $g : [0,1] \to [0,1]$ amb punt fix e tal que*

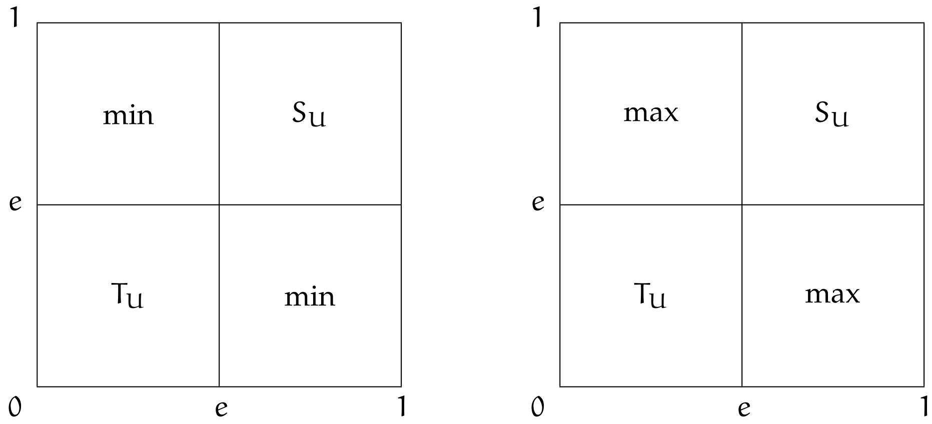

Figura 2. Estructura d'una uninorma de $\mathcal{U}_{\min}$ (esquerra) i de $\mathcal{U}_{\max}$ (dreta).

(i) $F(x, y) = \min(x, y)$ *si* $y < g(x)$,

(ii) $F(x, y) = \max(x, y)$ *si* $y > g(x)$,

(iii) $F(x, y) \in \{\min(x, y), \max(x, y)\}$ *si* $y = g(x)$.

El recíproc d'aquest resultat no ha estat demostrat fins fa poc a [65]. Concretament, es té la caracterització següent.

Teorema 2.2.14 ([65]) *Sigui* F *un operador binari sobre* $[0, 1]$. F *es associatiu, creixent respecte de cada variable, idempotent i té un element neutre* $e \in [0, 1]$ *si i només si existeix una funció decreixent* $g : [0, 1] \to [0, 1]$ *amb* $g(e) = e$, *verificant*

$$\inf\{y \mid g(y) = g(x)\} \leqslant g^2(x) \leqslant \sup\{y \mid g(y) = g(x)\}$$

per a tot $x \in [0, 1]$ *de manera que*

$$F(x, y) = \begin{cases} \min(x, y) & \textit{si } y < g(x) \textit{ ò } (y = g(x) \textit{ i } x < g^2(x)) \\ \max(x, y) & \textit{si } y > g(x) \textit{ ò } (y = g(x) \textit{ i } x > g^2(x)) \\ \min(x, y) \textit{ o } \max(x, y) & \textit{si } y = g(x) \textit{ i } x = g^2(x). \end{cases}$$

Més encara, en aquest cas F *és necessàriament commutatiu excepte potser en el conjunt de punts* (x, y) *tals que* $y = g(x)$ *amb* $x = g^2(x)$.

Nota 2.2.15 *Donada una funció* $g : [0, 1] \to [0, 1]$ *decreixent amb* $g(e) = e$, *notem que la condició sobre* g *del teorema anterior es converteix en* $g^2(x) = x$ *per a tots els* $x \in [0, 1]$ *en els que* g *és estrictament decreixent. En canvi, quan* g *és constant a un interval* (a, b) *aleshores* $g^2(x)$ *ha de ser tal que* $a \leqslant g^2(x) \leqslant b$.

Notem a més que el teorema anterior dóna una caracterització de totes les uninormes idempotents, requerint senzillament commutativitat en els punts (x, y) *tals que* $y = g(x)$ *i* $x = g^2(x)$.

Una caracterització més detallada per als casos d'uninormes idempotents contínues per l'esquerra i per la dreta es va donar als teoremes següents.

Teorema 2.2.16 ([34]) *Un operador binari* U, *sobre* $[0,1]$, *és una uninorma idempotent contínua per l'esquerra amb element neutre* $e \in [0,1]$ *si i només si existeix una funció decreixent* $g : [0,1] \to [0,1]$ *amb punt fix* e *que satisfà* $g^2(x) \geqslant x$ *per a tot* $x \leqslant g(0)$ *i* $g(x) = 0$ *per a tot* $x > g(0)$ *i tal que, per a qualssevol* $x, y \in [0,1]$, U *ve donada per*

$$U(x,y) = \begin{cases} \min(x,y) & \textit{si } y \leqslant g(x) \textit{ i } x \leqslant g(0) \\ \max(x,y) & \textit{en qualsevol altre cas.} \end{cases}$$

Teorema 2.2.17 ([34]) *Un operador binari* U, *sobre* $[0,1]$, *és una uninorma idempotent contínua per la dreta amb element neutre* $e \in [0,1]$ *si i només si existeix una funció decreixent* $g : [0,1] \to [0,1]$ *amb punt fix* e *que satisfà* $g^2(x) \leqslant x$ *per a tot* $x \geqslant g(1)$ *i* $g(x) = 1$ *per a tot* $x < g(1)$ *i tal que, per a qualssevol* $x, y \in [0,1]$, U *ve donada per*

$$U(x,y) = \begin{cases} \max(x,y) & \textit{si } y \geqslant g(x) \textit{ i } x \geqslant g(1) \\ \min(x,y) & \textit{en qualsevol altre cas.} \end{cases}$$

En vista dels teoremes anteriors, qualsevol uninorma idempotent U (amb algun tipus de continuïtat o no) està determinada (encara que no únicament) per una funció decreixent g. En el que segueix, ens referirem a aquesta funció g com la *funció associada* a U.

Notació 2.2.18 *El conjunt de totes les uninormes idempotents el notarem per* $\mathcal{U}_{\text{ide}}$, *i qualsevol uninorma idempotent* U *amb element neutre* e *i funció associada* g *la notarem per* $U \equiv \langle g, e \rangle_{\text{ide}}$.

A la figura 3 es pot observar l'estructura d'un exemple d'uninorma idempotent U amb funció associada g i element neutre e. En virtut de la nota 2.2.15, per als punts (x,y) que estan sobre la gràfica de la funció g, a la part estrictament decreixent, U pot valer o el mínim o el màxim, de manera que se satisfaci la commutativitat.

Ara donarem unes propietats de les uninormes idempotents amb algun tipus de continuïtat, que emprarem en aquest treball.

Proposició 2.2.19 ([34], Proposició 2) *Es compleix:*

(i) *Sigui una uninorma* U *idempotent contínua per la dreta amb funció associada* g. *Per a tot* $(x,y) \in [g(1),1]^2$ *és cert que*

$$g(y) \leqslant x \textit{ si i només si } g(x) \leqslant y.$$

(ii) *Sigui una uninorma* U *idempotent contínua per l'esquerra amb funció associada* g. *Per a tot* $(x,y) \in [0,g(0)]^2$ *és cert que*

$$x \leqslant g(y) \textit{ si i només si } y \leqslant g(x).$$

Uninormes representables i quasi-contínues

A diferència del que passa amb t-normes i t-conormes, és sabut que no hi ha uninormes contínues a $[0,1]^2$ amb element neutre $e \in]0,1[$. En aquest apartat i el següent mencionem classes d'uninormes que tenen continuïtat a conjunts grans. A continuació introduïm dues classes ben relacionades: la de les uninormes representables i la de les uninormes quasi-contínues.

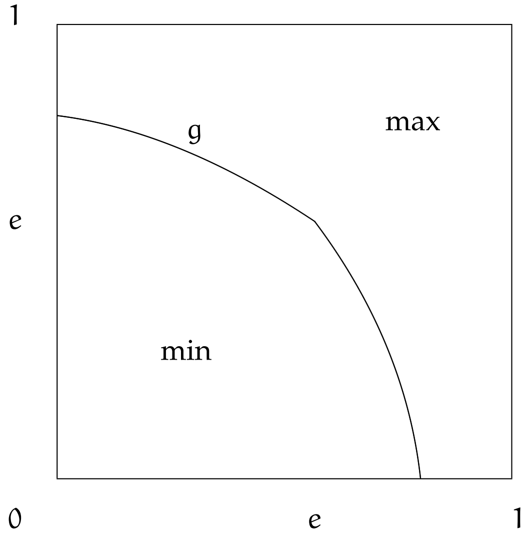

Figura 3. Estructura d'una uninorma idempotent amb funció associada g i element neutre e.

Definició 2.2.20 *Una uninorma* U *és* quasi-contínua *si és contínua a* $[0,1]^2 \setminus \{(0,1),(1,0)\}$.

La classe de les uninormes representables està caracteritzada per uninormes que tenen una representació semblant a la de les t-normes estrictes, en les que, com hem vist, existeix un generador additiu. Ara presentem la primera caracterització que es va fer d'aquestes uninormes.

Definició 2.2.21 ([53]) *Una uninorma* U*, amb element neutre* $e \in]0,1[$*, es diu* representable *si existeix una funció estrictament creixent* $h : [0,1] \to [-\infty,+\infty]$ *(que s'anomena un* generador additiu *de* U*, i és únic llevat d'una constant multiplicativa* $k > 0$*), amb* $h(0) = -\infty$*,* $h(e) = 0$ *i* $h(1) = +\infty$*, tal que* U *ve donada per*

$$U(x,y) = h^{-1}(h(x) + h(y))$$

per a tot $(x,y) \in [0,1]^2 \setminus \{(0,1),(1,0)\}$*. Tenim o bé que* $U(0,1) = U(1,0) = 0$ *ò bé que* $U(0,1) = U(1,0) = 1$.

Nota 2.2.22 *Les uninormes representables varen ser introduïdes inicialment amb un altre nom a [45]. Una uninorma representable és clarament contínua a* $[0,1]^2 \setminus \{(0,1),(1,0)\}$*, és a dir, quasi-contínua, i estrictament creixent a* $]0,1[^2$*. A més a més, existeix una negació forta* N_U *amb punt fix* e *tal que per a tots* $(x,y) \in [0,1]^2 \setminus \{(0,1),(1,0)\}$

$$U(x,y) = N_U(U(N_U(x), N_U(y))).$$

Aquesta negació forta N_U *ve donada per* $N_U(x) = h^{-1}(-h(x))$*, on* h *és un generador additiu de* U.

De manera similar, tenim la caracterització de les uninormes representables, per a generadors multiplicatius.

Proposició 2.2.23 ([53]) *Siguin* $e \in]0,1[$, $h : [0,1] \to [0,+\infty]$ *una funció estrictament creixent amb* $h(0) = 0$, $h(e) = 1$ *i* $h(1) = +\infty$ *(que s'anomena un* generador multiplicatiu *de* U*, que és únic llevat d'una constant exponencial* $k > 0$*). L'operació* U *definida per*

$$U(x,y) = h^{-1}(h(x) \cdot h(y))$$

per tot $(x,y) \in [0,1]^2 \setminus \{(0,1),(1,0)\}$ *i, o bé* $U(0,1) = U(1,0) = 0$ *ò bé* $U(0,1) = U(1,0) = 1$*, és una uninorma representable amb element neutre* e*. En aquest cas, la negació associada és* $N_U(x) = h^{-1}\left(\frac{1}{h(x)}\right)$.

També, a [53], es dóna la caracterització de les uninormes representables següent, on es relacionava per primera vegada les uninormes quasi-contínues i les representables.

Teorema 2.2.24 ([53]) *Sigui* U *una uninorma quasi-contínua amb element neutre* $e \in]0,1[$*. Llavors,* U *és representable si i només si les dues condicions següents se satisfan:*

(a) U *és estrictament creixent a* $]0,1[^2$.

(b) Existeix una negació forta N *amb punt fix* e *tal que per a tots* $(x,y) \in [0,1]^2 \setminus \{(0,1),(1,0)\}$*,*

$$U(x,y) = N(U(N(x),N(y))). \tag{2.3}$$

Nota 2.2.25 *A* [60]*, treball independent a* [53]*, el teorema anterior va quedar millorat, demostrant-se que tota uninorma quasi-contínua és estrictament creixent a* $]0,1[^2$ *(per tant la condició (a) del teorema anterior és supèrflua). Del treball de caracterització de les uninormes contínues a* $]0,1[^2$*,* [58]*, es pot deduir que la classe de les uninormes representables i les quasi-contínues coincideix, (veure apartat següent). És a dir, les dues condicions del teorema anterior són, doncs, supèrflues. En aquest treball, però, donarem a la secció 3.2.1 una demostració alternativa a partir del teorema 2.2.24, construint la negació* N *respecte de la qual* U *verifica* (2.3).

Tenim, per tant, la següent relació entre les uninormes representables i les quasi-contínues.

Teorema 2.2.26 *Sigui* U *una uninorma amb element neutre* $e \in]0,1[$*. Llavors* U *és quasi-contínua (contínua a* $[0,1] \setminus \{(0,1),(1,0)\}$*) si i només si és representable.*

Notació 2.2.27 *El conjunt de les uninormes representables el notarem per* $\mathcal{U}_{\text{rep}}$*, i a una uninorma representable amb generador additiu* h *i element neutre* e *la notarem per* $U \equiv \langle h, e\rangle_{\text{rep}}$.

Uninormes contínues a $]0,1[^2$

Després d'haver mencionat les uninormes contínues a $[0,1]^2 \setminus \{(0,1),(1,0)\}$, ara citarem les uninormes contínues a $]0,1[^2$, que varen ser caracteritzades a [58] com segueix.

Teorema 2.2.28 ([58]) *Suposem que* U *és una uninorma contínua a* $]0,1[^2$ *amb element neutre* $e \in]0,1[$*. Llavors s'ha de satisfer algun d'aquests casos:*

(a) *Existeixen* $\beta \in [0, e[$, $\alpha \in [0, \beta]$, *dues t-normes contínues* T' *i* T'' *i una uninorma representable* R *tal que* U *ve donada per la fórmula*

$$U(x,y) = \begin{cases} \alpha T'\left(\frac{x}{\alpha}, \frac{y}{\alpha}\right) & \textit{si } x,y \in [0,\alpha] \\ \alpha + (\beta-\alpha)T''\left(\frac{x-\alpha}{\beta-\alpha}, \frac{y-\alpha}{\beta-\alpha}\right) & \textit{si } x,y \in [\alpha,\beta] \\ \beta + (1-\beta)R\left(\frac{x-\beta}{1-\beta}, \frac{y-\beta}{1-\beta}\right) & \textit{si } x,y \in]\beta,1[\\ 1 & \textit{si } \min(x,y) \in]\alpha,1] \textit{ i } \max(x,y) = 1 \\ \min(x,y) \text{ ò } 1 & \textit{si } (x,y) \in \{(\alpha,1),(1,\alpha)\} \\ \min(x,y) & \textit{altrament.} \end{cases} \tag{2.4}$$

(b) *Existeixen* $\gamma \in]e, 1]$, $\delta \in [\gamma, 1]$, *dues t-conormes contínues* S' *i* S'' *i una uninorma representable* R *tal que* U *ve donada per la fórmula*

$$U(x,y) = \begin{cases} \gamma R\left(\frac{x}{\gamma}, \frac{y}{\gamma}\right) & x,y \in]0,\gamma[\\ \gamma + (\delta-\gamma)S'\left(\frac{x-\gamma}{\delta-\gamma}, \frac{y-\gamma}{\delta-\gamma}\right) & \textit{si } x,y \in [\gamma,\delta] \\ \delta + (1-\delta)S''\left(\frac{x-\delta}{1-\delta}, \frac{y-\delta}{1-\delta}\right) & \textit{si } x,y \in [\delta,1] \\ 0 & \textit{si } \max(x,y) \in [0,\delta[\textit{ i } \min(x,y) = 0 \\ \max(x,y) \text{ ò } 0 & \textit{si } (x,y) \in \{(0,\delta),(\delta,0)\} \\ \max(x,y) & \textit{altrament.} \end{cases} \tag{2.5}$$

Notació 2.2.29 *Denotarem per* $\mathcal{U}_{\mathrm{cos}}$ *la classe de totes les uninormes contínues a* $]0,1[^2$ *(en referència a* Uninorms Continuous in the Open Square*), per* $\mathcal{U}_{\mathrm{cos,min}}$ *a les que són de la forma* (2.4)*, i per* $\mathcal{U}_{\mathrm{cos,max}}$ *a les que són de la forma* (2.5)*. Una uninorma* U *de* $\mathcal{U}_{\mathrm{cos,min}}$ *la denotarem per*

$$U \equiv \langle T', \alpha, T'', \beta, (R,e)\rangle_{\mathrm{cos,min}},$$

i si és de $\mathcal{U}_{\mathrm{cos,max}}$ *per*

$$U \equiv \langle (R,e), \gamma, S', \delta, S''\rangle_{\mathrm{cos,max}},$$

per representar els seus paràmetres.

Nota 2.2.30 *Les uninormes de* $\mathcal{U}_{\mathrm{cos,min}}$ *amb* $\beta = 0$ *i les uninormes de* $\mathcal{U}_{\mathrm{cos,max}}$ *amb* $\gamma = 1$ *són les uninormes representables.*

L'estructura de les uninormes de $\mathcal{U}_{\mathrm{cos,min}}$ es pot observar a la figura 4 i la de les uninormes de $\mathcal{U}_{\mathrm{cos,max}}$ a la figura 5.

Uninormes de $\mathcal{U}_{\mathrm{mnx}}$

Una classe d'uninormes que s'ha estudiat i caracteritzat molt recentment a [46] és la formada per uninormes que en la regió de compensació, $A(e)$, són *localment internes*, és a dir, que $U(x,y) \in \{x,y\}$. En aquest treball notarem aquesta classe per $\mathcal{U}_{\mathrm{mnx}}$, en referència a que en la regió $A(e)$ s'utilitzen els operadors min i/o max.

A aquesta classe pertanyen les uninormes de $\mathcal{U}_{\min}$, $\mathcal{U}_{\max}$ i $\mathcal{U}_{\mathrm{ide}}$.

Degut a la seva publicació tan recent, no hem inclòs aquesta classe en l'estudi de forma sistemàtica, i només apareix en ocasions concretes.

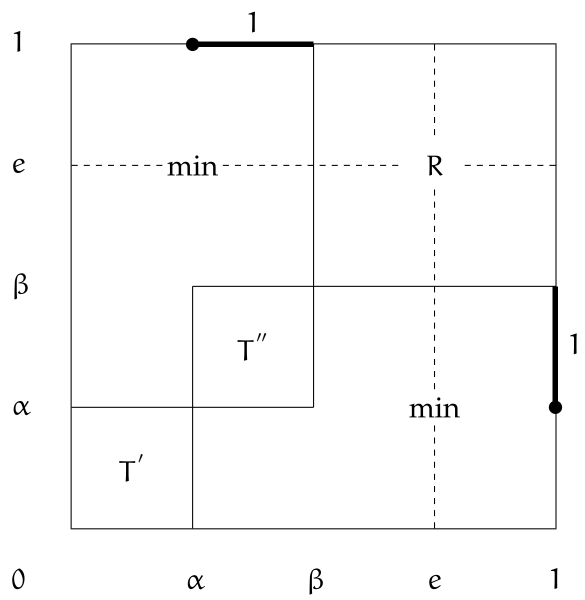

Figura 4. Estructura d'una uninorma de $\mathcal{U}_{\cos,\min}$

Uninormes de $\mathcal{U}_{\mathrm{cts}}$

La darrera classe que presentem en aquestes notes preliminars són les uninormes amb paràmetres $U \equiv \langle T, e, S\rangle$ que tenen T i S contínues. Aquesta classe ha estat presentada a [25], encara que no es coneix la caracterització definitiva. Per la seva utilitat, emprarem uninormes d'aquesta classe a diversos raonaments al llarg d'aquest estudi, i notarem aquesta classe per $\mathcal{U}_{\mathrm{cts}}$ (U*ninormes amb* C*ontinuïtat a* T *i* S).

Uninormes que pertanyen a $\mathcal{U}_{\mathrm{cts}}$ són les uninormes representables, les idempotents (tenen $T = T_{\mathbf{M}}$ i $S = S_{\mathbf{M}}$) i les uninormes de $\mathcal{U}_{\min}$ o de $\mathcal{U}_{\max}$ que tinguin les corresponents T i S contínues. Evidentment, $\mathcal{U}_{\mathrm{cts}}$ conté la classe de les uninormes contínues a $]0,1[^2$, $\mathcal{U}_{\cos}$.

Classes d'uninormes: visió global

Totes les relacions entre les diverses classes que donem en la proposició següent són resultats coneguts però que no han estat publicats, i conseqüentment no són del tot presents en la comunitat científica, i són necessàries per tenir clares les diferents connexions entre aquestes classes.

Proposició 2.2.31 *En el conjunt de totes les uninormes,* $\mathcal{U}$*, se satisfà:*

(i) $\mathcal{U}_{\min}, \mathcal{U}_{\max}, \mathcal{U}_{\mathrm{ide}} \subseteq \mathcal{U}_{\mathrm{mnx}}$,

(ii) $\mathcal{U}_{\mathrm{rep}} \subseteq \mathcal{U}_{\cos} \subseteq \mathcal{U}_{\mathrm{cts}}$,

(iii) $\mathcal{U}_{\cos} \cap \mathcal{U}_{\mathrm{mnx}} = \emptyset$,

(iv) $\mathcal{U}_{\mathrm{ide}} \subseteq \mathcal{U}_{\mathrm{cts}}$.

Al llarg d'aquest treball s'han tingut en compte aquestes consideracions, que es resumeixen a la figura 6.

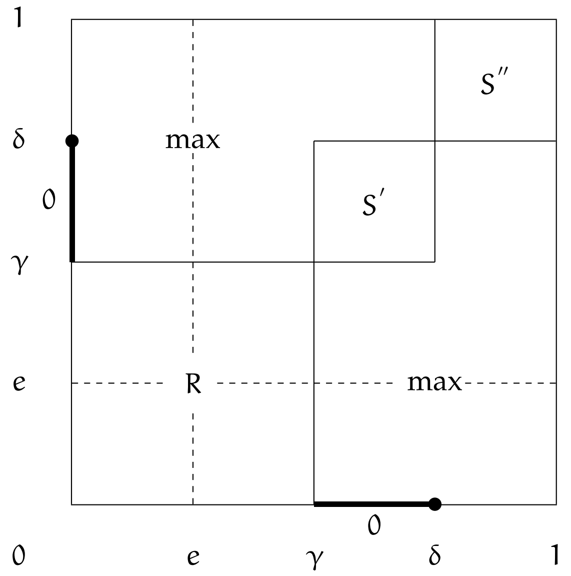

Figura 5. Estructura d'una uninorma de $\mathcal{U}_{\cos,\max}$

2.2.2 *Uninormes i dualitat*

En aquesta secció estudiem la dualitat per a uninormes, és a dir, com construir un operador dual a partir d'una uninorma U i una negació forta N, i les propietats que es poden deduir. Primer donem la definició.

Definició 2.2.32 *Siguin $U \in \mathcal{U}(e)$ i N una negació forta. Definim l'*operador dual *de U respecte de N com:*

$$\widetilde{U}_N(x,y) = N(U(N(x),N(y))),$$

per a tots $(x,y) \in [0,1]^2$.

Notació 2.2.33 *Si prenem la negació forta $N(x) = 1 - x$, l'operador dual de U respecte aquesta negació el notarem directament per $\widetilde{U}$.*

És sabut que si T és una t-norma, $\widetilde{T}$ és una t-conorma, i viceversa. De fet, $\widetilde{T_{\mathbf{M}}} = S_{\mathbf{M}}$, $\widetilde{T_{\mathbf{L}}} = S_{\mathbf{L}}$ i $\widetilde{T_{\mathbf{P}}} = S_{\mathbf{P}}$. Relacionat amb aquest fet, podem estudiar a quina classe pertany $\widetilde{U}_N$, sabent a quina pertany U. Vegem a continuació les diferents propietats de $\widetilde{U}_N$.

Teorema 2.2.34 *Siguin N una negació forta, $U \in \mathcal{U}(e)$ i considerem l'operador dual $\widetilde{U}_N$. Llavors és cert:*

(i) $\widetilde{U}_N \in \mathcal{U}(N(e))$.

(ii) $\widetilde{\widetilde{U}_N}_N = U$.

(iii) Si U és disjuntiva, llavors $\widetilde{U}_N$ és conjuntiva. Si U és conjuntiva, llavors $\widetilde{U}_N$ és disjuntiva.

(iv) Si $U \in \mathcal{U}_{\min}$ llavors $\widetilde{U}_N \in \mathcal{U}_{\max}$, i si $U \in \mathcal{U}_{\max}$ llavors $\widetilde{U}_N \in \mathcal{U}_{\min}$.

(v) Si $U \equiv \langle g, e\rangle_{\text{ide}}$, llavors $\widetilde{U} \equiv \langle N \circ g \circ N, N(e)\rangle_{\text{ide}}$.

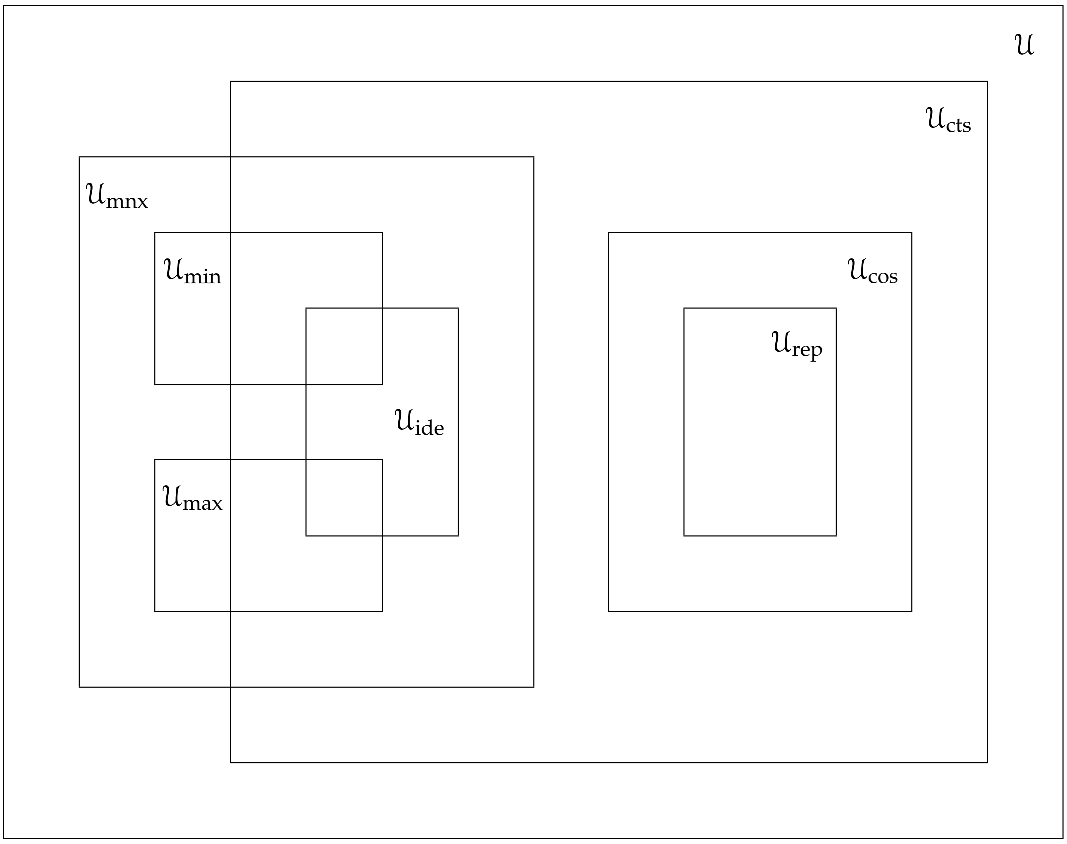

Figura 6. Esquema de les classes d'uninormes conegudes.

(vi) *Si* $U \in \mathcal{U}_{\text{cos,min}}$ *llavors* $\widetilde{U} \in \mathcal{U}_{\text{cos,max}}$*, mentre que si* $U \in \mathcal{U}_{\text{cos,max}}$ *llavors* $\widetilde{U} \in \mathcal{U}_{\text{cos,min}}$.

(vii) $U \in \mathcal{U}_{\text{cts}}$*, si i només si* $\widetilde{U}_N \in \mathcal{U}_{\text{cts}}$.

DEMOSTRACIÓ: Els tres primers apartats són prou coneguts (veure [53]) i de demostració senzilla. Tot i ser igualment senzilles, incloem les demostracions a partir del punt (iv) per completesa.

(iv) Per al primer cas, si U és una uninorma de $\mathcal{U}_{\text{min}}$, tindrem que a la regió $A(e)$, $U(x,y) = \min(x,y)$. Si considerem $\widetilde{U}_N$, podem calcular què val la uninorma a la regió $A(N(e))$. Sigui $(x,y) \in [0,N(e)[\times]N(e),1] \cup]N(e),1] \times [0,N(e)[$, llavors $(N(x),N(y)) \in]e,1] \times [0,e[\cup [0,e[\times]e,1] = A(e)$, i per tant

$$\widetilde{U}_N(x,y) = N(U(N(x),N(y))) = N(\min(N(x),N(y))) = \max(x,y),$$

i per tant $\widetilde{U}_N$ és una uninorma de $\mathcal{U}_{\text{max}}$ amb element neutre $N(e)$.
De manera semblant es pot demostrar que si $U \in \mathcal{U}_{\text{max}}$, llavors $\widetilde{U}_N \in \mathcal{U}_{\text{min}}$.

(v) Primer de tot, com que U és idempotent, es verifica que $\widetilde{U}_N$ també ho és:

$$\widetilde{U}_N(x,x) = N(U(N(x),N(x))) = N(N(x)) = x.$$

Ara, vegem quina és la funció associada a $\widetilde{U}_N$. Si posem l'expressió de $\widetilde{U}_N$:

$$\widetilde{U}_N(x,y) = N(U(N(x),N(y))) = \begin{cases} N(\min(N(x),N(y)) & \text{si } N(x) < g(N(y)) \\ N(\max(N(x),N(y)) & \text{si } N(x) > g(N(y)) \\ N(N(x)) \text{ ò } N(N(y)) & \text{altrament} \end{cases}$$
$$= \begin{cases} \max(x,y) & \text{si } x > N(g(N(y))) \\ \min(x,y) & \text{si } x < N(g(N(y))) \\ x \text{ ò } y & \text{altrament,} \end{cases},$$

podem veure que la funció $\widetilde{g}$ associada a $\widetilde{U}_N$ és precisament $\widetilde{g} = N \circ g \circ N$.

(vi) Està clar que si $U \in \mathcal{U}_{\text{cos}}$, llavors $\widetilde{U}_N \in \mathcal{U}_{\text{cos}}$, ja que també serà contínua a $]0,1[\times]0,1[$, per ser N una funció contínua. Vegem que si $U \equiv \langle T', \alpha, T'', \beta, (R,e)\rangle_{\text{cos,min}}$, aleshores se satisfà que $\widetilde{U}_N \in \mathcal{U}_{\text{cos,max}}$.

Per això, basta veure que si $(x,y) \in]0,N(\beta)[\times]N(\beta),1[\cup]N(\beta),1[\times]0,N(\beta)[$, llavors:

$$\widetilde{U}_N(x,y) = N(U(N(x),N(y))) = N(\min(N(x),N(y))) = \max(x,y),$$

i per tant $\widetilde{U}_N$ és una uninorma de $\mathcal{U}_{\text{cos,max}}$.
De manera semblant es pot demostrar que si $U \in \mathcal{U}_{\text{cos,max}}$, llavors $\widetilde{U} \in \mathcal{U}_{\text{cos,min}}$.

(vii) Si la t-norma associada T_U i la t-conorma associada S_U són contínues, llavors també ho seran $T_{\widetilde{U}_N}$ i $S_{\widetilde{U}_N}$, i per tant $U \in \mathcal{U}_{\text{cts}}$ si i només si $\widetilde{U}_N \in \mathcal{U}_{\text{cts}}$. □

Nota 2.2.35 *A partir d'ara, després d'haver vist la propietat (i) del teorema anterior, anomenarem* $\widetilde{U}_N$ *la* uninorma dual *de* U *respecte de* N.

Vegem ara el cas especial en què la negació forta N amb la qual es calcula la uninorma dual és $N(x) = 1-x$. Es tindran condicions millors per poder trobar els paràmetres de les uninormes duals.

Teorema 2.2.36 *Siguin* $U \in \mathcal{U}(e)$, $N(x) = 1-x$ *i* $\widetilde{U}$ *la uninorma dual de* U *respecte de* N. *Llavors és cert:*

(i) $\widetilde{T}_U = S_{\widetilde{U}}$ *i* $\widetilde{S}_U = T_{\widetilde{U}}$, *és a dir, si* $U \equiv \langle T, e, S\rangle$, *llavors* $\widetilde{U} \equiv \langle \widetilde{S}, 1-e, \widetilde{T}\rangle$.

(ii) $U \equiv \langle T, e, S\rangle_{\min}$ *llavors* $\widetilde{U} \equiv \langle \widetilde{S}, 1-e, \widetilde{T}\rangle_{\max}$.

(iii) $U \equiv \langle T, e, S\rangle_{\max}$ *llavors* $\widetilde{U} \equiv \langle \widetilde{S}, 1-e, \widetilde{T}\rangle_{\min}$.

(iv) $U \equiv \langle T', \alpha, T'', \beta, (R,e)\rangle_{\text{cos,min}}$ *llavors* $\widetilde{U} \equiv \langle (\widetilde{R}, 1-e), 1-\beta, \widetilde{T''}, 1-\alpha, \widetilde{T'}\rangle_{\text{cos,max}}$.

(v) $U \equiv \langle (R,e), \gamma, S', \delta, S''\rangle_{\text{cos,max}}$ *llavors* $\widetilde{U} \equiv \langle \widetilde{S''}, 1-\delta, \widetilde{S'}, 1-\gamma, (\widetilde{R}, 1-e)\rangle_{\text{cos,min}}$.

DEMOSTRACIÓ: (i) Sigui $\widetilde{T}_U$ la t-conorma dual a la t-norma T_U associada a U, llavors, per una banda, com que el neutre de U és e:

$$\widetilde{T}_U(x,y) = 1 - (T_U(1-x, 1-y)) = 1 - \frac{U(e(1-x), e(1-y))}{e}$$
$$= \frac{e - U(e(1-x), e(1-y))}{e},$$

i per l'altra $S_{\widetilde{U}}$ és la t-conorma associada a la uninorma $\widetilde{U}$, que per definició, sabent que el neutre de $\widetilde{U}$ serà $1-e$,

$$\begin{aligned} S_{\widetilde{U}}(x,y) =& \frac{\widetilde{U}(1-e+xe, 1-e+ye)-(1-e)}{1-(1-e)} = \frac{\widetilde{U}(1-e+xe,1-e+ye)+e-1}{e} \\ =& \frac{e-U(e(1-x),e(1-y))}{e}, \end{aligned}$$

amb el que queda vist que $\widetilde{T}_U = S_{\widetilde{U}}$. Similarment podríem veure que $\widetilde{S}_U = T_{\widetilde{U}}$.

(ii)-(iii) És conseqüència del demostrat al punt (i) i del teorema anterior, punt (iv).

(iv) Sigui $U \in \mathcal{U}_{\text{cos,min}}$, vegem per una banda, l'expressió de $\widetilde{U}$, emprant (2.4)

$$\begin{aligned} \widetilde{U}(x,y) =& 1-U(1-x,1-y) \\ =& \begin{cases} 1-\alpha T'\left(\frac{1-x}{\alpha},\frac{1-y}{\alpha}\right) & \text{si } 1-x, 1-y \in [0,\alpha] \\ 1-\alpha-(\beta-\alpha)T''\left(\frac{1-x-\alpha}{\beta-\alpha},\frac{1-y-\alpha}{\beta-\alpha}\right) & \text{si } 1-x,1-y \in [\alpha,\beta] \\ 1-\beta-(1-\beta)R\left(\frac{1-x-\beta}{1-\beta},\frac{1-y-\beta}{1-\beta}\right) & \text{si } 1-x,1-y \in]\beta,1[\\ 0 & \text{si } \min(1-x,1-y) \in]\alpha,1] \\ & \text{ i } \max(1-x,1-y)=1 \\ 1-\min(1-x,1-y) \text{ ò } 0 & \text{si } (1-x,1-y) \in \{(\alpha,1),(1,\alpha)\} \\ 1-\min(1-x,1-y) & \text{altrament.} \end{cases} \end{aligned}$$

I finalment, tenim

$$\widetilde{U}(x,y) = \begin{cases} 1-\alpha T'\left(\frac{1-x}{\alpha},\frac{1-y}{\alpha}\right) & \text{si } x,y \in [1-\alpha,1] \\ 1-\alpha-(\beta-\alpha)T''\left(\frac{1-x-\alpha}{\beta-\alpha},\frac{1-y-\alpha}{\beta-\alpha}\right) & \text{si } x,y \in [1-\beta,1-\alpha] \\ 1-\beta-(1-\beta)R\left(\frac{1-x-\beta}{1-\beta},\frac{1-y-\beta}{1-\beta}\right) & \text{si } x,y \in]0,1-\beta[\\ 0 & \text{si } \max(x,y) \in [0,1-\alpha[\\ & \text{ i } \min(x,y)=0 \\ \max(x,y) \text{ ò } 0 & \text{si } (x,y) \in \{(1-\alpha,0),(0,1-\alpha)\} \\ \max(x,y) & \text{altrament.} \end{cases} \tag{2.6}$$

Ara, desenvolupem la uninorma definida per $\langle(\widetilde{R},1-e),1-\beta,\widetilde{T''},1-\alpha,\widetilde{T'}\rangle_{\text{cos,max}}$, emprant l'equació (2.5),

$$\begin{cases} 1-\beta+(\beta-\alpha)\widetilde{T''}\left(\frac{x-(1-\beta)}{(1-\alpha)-(1-\beta)}, \frac{y-(1-\beta)}{(1-\alpha)-(1-\beta)}\right) & \text{si } x,y \in [1-\beta, 1-\alpha] \\ 1-\alpha+(1-(1-\alpha))\widetilde{T'}\left(\frac{x-(1-\alpha)}{1-(1-\alpha)}, \frac{y-(1-\alpha)}{1-(1-\alpha)}\right) & \text{si } x,y \in [1-\alpha, 1] \\ (1-\beta)\widetilde{R}\left(\frac{x}{1-\beta}, \frac{y}{1-\beta}\right) & x,y \in]0, 1-\beta[\\ 0 & \text{si } \max(x,y) \in [0, 1-\alpha[\\ & \text{ i } \min(x,y) = 0 \\ \max(x,y) \text{ ò } 0 & \text{si } (x,y) \in \{(0,1-\alpha),(1-\alpha,0)\} \\ \max(x,y) & \text{altrament.} \end{cases}$$

que és el mateix que

$$\begin{cases} 1-\beta+(\beta-\alpha)\widetilde{T''}\left(\frac{x-1+\beta}{\beta-\alpha}, \frac{y-1+\beta}{\beta-\alpha}\right) & \text{si } x,y \in [1-\beta, 1-\alpha] \\ 1-\alpha+\alpha\widetilde{T'}\left(\frac{x-1+\alpha}{\alpha}, \frac{y-1+\alpha}{\alpha}\right) & \text{si } x,y \in [1-\alpha, 1] \\ (1-\beta)\widetilde{R}\left(\frac{x}{1-\beta}, \frac{y}{1-\beta}\right) & x,y \in]0, 1-\beta[\\ 0 & \text{si } \max(x,y) \in [0, 1-\alpha[\text{ i } \min(x,y) = 0 \\ \max(x,y) \text{ ò } 0 & \text{si } (x,y) \in \{(0,1-\alpha),(1-\alpha,0)\} \\ \max(x,y) & \text{altrament.} \end{cases}$$

Ara, tenint en compte les definicions d'operadors duals, tindrem:

$$\begin{cases} 1-\beta+(\beta-\alpha)\left(1-T''\left(1-\frac{x-1+\beta}{\beta-\alpha}, 1-\frac{y-1+\beta}{\beta-\alpha}\right)\right) & \text{si } x,y \in [1-\beta, 1-\alpha] \\ 1-\alpha+\alpha\left(1-T'\left(1-\frac{x-1+\alpha}{\alpha}, 1-\frac{y-1+\alpha}{\alpha}\right)\right) & \text{si } x,y \in [1-\alpha, 1] \\ (1-\beta)\left(1-R\left(1-\frac{x}{1-\beta}, 1-\frac{y}{1-\beta}\right)\right) & x,y \in]0, 1-\beta[\\ 0 & \text{si } \max(x,y) \in [0, 1-\alpha[\\ & \text{ i } \min(x,y) = 0 \\ \max(x,y) \text{ ò } 0 & \text{si } (x,y) \in \{(0,1-\alpha),(1-\alpha,0)\} \\ \max(x,y) & \text{altrament.} \end{cases}$$

I per tant, la uninorma amb paràmetres $\langle(\widetilde{R}, 1-e), 1-\beta, \widetilde{T''}, 1-\alpha, \widetilde{T'}\rangle_{\text{cos,max}}$ és

$$\begin{cases} 1-\alpha-(\beta-\alpha)T''\left(\frac{1-\alpha-x}{\beta-\alpha}, \frac{1-\alpha-y}{\beta-\alpha}\right) & \text{si } x,y \in [1-\beta, 1-\alpha] \\ 1-\alpha T'\left(\frac{1-x}{\alpha}, \frac{1-y}{\alpha}\right) & \text{si } x,y \in [1-\alpha, 1] \\ 1-\beta-(1-\beta)R\left(\frac{1-\beta-x}{1-\beta}, \frac{1-\beta-y}{1-\beta}\right) & x,y \in]0, 1-\beta[\\ 0 & \text{si } \max(x,y) \in [0, 1-\alpha[\text{ i } \min(x,y) = 0 \\ \max(x,y) \text{ ò } 0 & \text{si } (x,y) \in \{(0,1-\alpha),(1-\alpha,0)\} \\ \max(x,y) & \text{altrament,} \end{cases} \tag{2.7}$$

i com que les expressions (2.6) i (2.7) coincideixen, podem afirmar que

$$\widetilde{U} \equiv \langle (\widetilde{R}, 1-e), 1-\beta, \widetilde{T''}, 1-\alpha, \widetilde{T}' \rangle_{\text{cos,max}}$$

(v) Similar al punt anterior. $\square$

3 DISTRIBUTIVITAT

3.1 INTRODUCCIÓ

La distributivitat és una propietat que ha estat extensament estudiada, tant pel que fa a connectius lògics, com pel que fa a funcions d'agregació: per a ternes de Łuckasiewicz [9], ternes de De Morgan [8, 20], mitjanes aritmètiques [6, 22], uninormes i t-operadors [16, 48, 68, 70], etcètera. En tots els casos, aquest interès és degut a les aplicacions d'aquesta propietat, no només en la lògica borrosa, sinó també en altres àmbits com ara el pseudo-anàlisi, la teoria de la mesura i la integració, o les equacions diferencials i les equacions amb derivades parcials.

Aquest capítol està dedicat a l'estudi de la distributivitat i propietats relacionades, considerant diferents tipus d'uninormes com a operadors involucrats.

Anem a introduir la definició de distributivitat en general i de parell distributiu, per a dos operadors qualssevol.

Definició 3.1.1 *Siguin* F *i* G *dos operadors binaris sobre* $[0,1]$. *Direm que* F *és* distributiu sobre G *si*

$$F(x, G(y,z)) = G(F(x,y), F(x,z)) \text{ per a tots } x, y, z \in [0,1]. \tag{D}$$

Definició 3.1.2 *Siguin* F *i* G *dos operadors binaris sobre* $[0,1]$. *Direm que* (F,G) *és un* parell distributiu *si* F *és distributiu sobre* G *i* G *és distributiu sobre* F.

La distributivitat ha estat estudiada àmpliament depenent dels operadors implicats, com hem esmentat anteriorment, i en certes ocasions s'ha considerat la distributivitat no en tot el domini de definició dels operadors.

Definició 3.1.3 *Siguin* F *i* G *dos operadors binaris sobre* $[0,1]$. *Direm que* F *és* condicionalment distributiu *sobre* G *si*

$$F(x, G(y,z)) = G(F(x,y), F(x,z)) \text{ per a tots } x, y, z \in [0,1] \text{ quan } G(y,z) < 1. \tag{CD}$$

Nota 3.1.4 *Està clar que si un operador binari* F *és distributiu sobre un altre* G*, també és condicionalment distributiu sobre* G.

La definició de distributivitat condicional prové de l'estudi de les anomenades (S,U)-integrals, definides a partir d'una t-conorma contínua S i una uninorma U, introduïdes a [60, 61, 62].

Aquest tipus d'integrals, generalització de la integral de Sugeno, són estudiades a [78] i utilitzades amb èxit a la solució d'equacions diferencials i amb derivades parcials, dins el marc de la teoria de la informació i a l'optimització [79]. El punt bàsic perquè aquestes integrals tinguin les propietats necessàries radica en el fet de que la uninorma U sigui condicionalment distributiva sobre la t-conorma S, d'aquí l'interès per aquesta propietat.

De fet, a [94], es presentava com a problema obert, el caracteritzar les uninormes (condicionalment) distributives sobre una t-conorma contínua S:

"15. *(Viceník, citat per Klement) Una uninorma* $U : [0,1]^2 \to [0,1]$ *és commutativa, associativa, creixent i té un element neutre a* $]0,1[$.

(a) *Caracteritzeu totes les uninormes distributives sobre una t-conorma donada (contínua)* S. *És a dir,* $U(x, S(y, z)) = S(U(x, y), U(x, z))$ *per a tots* x, y, z *de* $[0, 1]$.
(b) *El mateix per la distributivitat condicional, on la distributivitat és requerida sempre que* $S(y, z) < 1$."

Són aquests dos problemes els que resolem precisament a aquest capítol, considerant les diferents classes d'uninormes presentades als preliminars. Començarem donant un resultat general, per a la distributivitat d'operadors binaris qualssevol.

Proposició 3.1.5 *Sigui* F *un operador binari sobre* $[0, 1]$ *creixent. Llavors* F *és distributiu (i condicionalment distributiu) sobre l'operador màxim i també sobre l'operador mínim.*

Nota 3.1.6 *Per tant, en l'equació* (D)*, si l'operador* F *és creixent, sempre tindrem la solució* $(F, \min)$ *i* $(F, \max)$.

A continuació demostrem un lema essencial per resoldre la distributivitat per a algunes classes d'uninormes, i que relaciona la distributivitat i la dualitat.

Lema 3.1.7 *Siguin* F *i* G *dos operadors binaris sobre* $[0, 1]$, N *una negació forta, i* $\widetilde{F}_N$ *i* $\widetilde{G}_N$ *els operadors duals de* F *i* G *respecte de* N*, respectivament.* F *és distributiu sobre* G *si i només si* $\widetilde{F}_N$ *és distributiu sobre* $\widetilde{G}_N$.

DEMOSTRACIÓ: Primer demostrarem d'esquerra a dreta. Tenim que F és distributiu sobre G, vegem que $\widetilde{F}_N$ ho és sobre $\widetilde{G}_N$. Si considerem la definició d'operadors duals per N, tenim que, per a tots x, y i z:

$$\begin{aligned}
\widetilde{F}_N(x, \widetilde{G}_N(y, z)) &= N(F(N(x), N(N(G(N(y), N(z)))))) = N(F(N(x), G(N(y), N(z)))) \\
&= N(G(F(N(x), N(y)), F(N(x), N(z)))) = \\
&= N(G(N(N(F(N(x), N(y)))), N(N(F(N(x), N(z)))))) = \\
&= \widetilde{G}_N(\widetilde{F}_N(x, y), \widetilde{F}_N(x, z)),
\end{aligned}$$

és a dir, $\widetilde{F}_N$ és distributiu sobre $\widetilde{G}_N$.

De manera similar es pot veure que si $\widetilde{F}_N$ és distributiu sobre $\widetilde{G}_N$, llavors F ho és sobre G. □

Ara enumerarem els diferents resultats coneguts referents a la distributivitat, distributivitat condicional i a parells distributius, per als casos de t-normes, t-conormes i uninormes de $\mathcal{U}_{\min}$ o de $\mathcal{U}_{\max}$.

3.1.1 *Distributivitat per t-normes i t-conormes*

La distributivitat amb t-normes i/o t-conormes es resol fàcilment, i als resultats següents donem les solucions. A partir de la proposició 3.1.5, sabem que una condició suficient perquè una t-norma o t-conorma siguin distributives sobre una t-norma o una t-conorma és que el segon operador sigui el mínim o el màxim. En aquests resultats veurem que és una condició necessària.

Teorema 3.1.8 *Siguin T una t-norma i* S *una t-conorma. T és distributiva sobre* S *si i només si* $S = S_{\mathbf{M}}$.

Teorema 3.1.9 *Siguin* S *una t-conorma i T una t-norma.* S *és distributiva sobre T si i només si* $T = T_{\mathbf{M}}$.

En cas en què tinguem dos operadors de la mateixa classe, dues t-normes (o dues t-conormes), també les úniques solucions són aquelles on el segon operador és el mínim (o el màxim).

Teorema 3.1.10 *Siguin* T_1 *i* T_2 *dues t-normes.* T_1 *és distributiva sobre* T_2 *si i només si* $T_2 = T_{\mathbf{M}}$.

Teorema 3.1.11 *Siguin* S_1 *i* S_2 *dues t-conormes.* S_1 *és distributiva sobre* S_2 *si i només si* $S_2 = S_{\mathbf{M}}$.

A partir dels resultats anteriors, podem estudiar els parells distributius de t-normes i t-conormes, obtenint aquest resultat.

Corol·lari 3.1.12 *Els únics parells distributius amb t-normes i t-conormes són* $(T_{\mathbf{M}}, S_{\mathbf{M}})$, $(T_{\mathbf{M}}, T_{\mathbf{M}})$ *i* $(S_{\mathbf{M}}, S_{\mathbf{M}})$.

El cas de la distributivitat condicional d'una t-norma contínua sobre una t-conorma contínua, es resol a [62, teorema 5.21], resultat que citem a continuació.

Teorema 3.1.13 *Una t-norma contínua T és condicionalment distributiva sobre una t-conorma contínua S si i només si tenim un dels casos següents:*

(i) $S = S_{\mathbf{M}}$.

(ii) Existeix una t-norma estricta T^* *i una t-conorma nilpotent tal que el generador additiu* s *de* S^* *satisfent* $s(1) = 1$, *és també un generador multiplicatiu de* T^*, *i existeix* $a \in [0, 1[$ *tal que per a alguna t-norma* T^{**}, *tenim que* $T = (\langle 0, a, T^{**} \rangle, \langle a, 1, T^* \rangle)$ *i* $S = (\langle a, 1, S^* \rangle)$.

Nota 3.1.14 *Per tant, com es pot observar, en el cas de t-normes i t-conormes, la distributivitat condicional té tota una família de solucions noves, que no satisfan la distributivitat. De fet, introduint la condició* $S(y, z) < 1$, *les solucions que s'obtenen són amb* S *una suma ordinal del mínim i una t-conorma nilpotent.*

3.1.2 *Distributivitat per uninormes en* $\mathcal{U}_{\min}$ *o* $\mathcal{U}_{\max}$

Les solucions de l'equació de distributivitat en aquesta classe d'uninormes es va estudiar a [68] (corregit a [70]), i enumerarem a continuació els resultats obtinguts, que emprarem més endavant.

Primer, es té aquest resultat sobre on han de pertànyer dues uninormes que compleixin la distributivitat.

Teorema 3.1.15 *Siguin* U_1 *i* U_2 *dues uninormes de* $\mathcal{U}_{\min} \cup \mathcal{U}_{\max}$. *Si* U_1 *és distributiva sobre* U_2 *llavors* U_1 *i* $U_2 \in \mathcal{U}_{\min}$, *o bé,* U_1 *i* $U_2 \in \mathcal{U}_{\max}$.

Vegem ara els resultats en funció dels elements neutres.

Teorema 3.1.16 *Siguin* $U_1 \equiv \langle T_1, e_1, S_1 \rangle_{\max}$ *i* $U_2 \equiv \langle T_2, e_2, S_2 \rangle_{\max}$. *Si* $e_2 \leqslant e_1$, *llavors* U_1 *és distributiva sobre* U_2 *si i només si*

- $e_2 = 0$ *i* U_2 *és la t-conorma màxim, o bé*
- $0 \neq e_2 = e_1$ *i* U_2 *és idempotent.*

Teorema 3.1.17 *Siguin* $U_1 \equiv \langle T_1, e_1, S_1\rangle_{\max}$ *i* $U_2 \equiv \langle T_2, e_2, S_2\rangle_{\max}$. *Si* $e_1 < e_2$ *i* U_1 *és distributiva sobre* U_2, *llavors* $U_2(x,x) = x$ *per tot* $x > e_1$, *i* U_1 *ve donada per*

$$U_1(x,y) = \begin{cases} e_1 T\left(\frac{x}{e_1}, \frac{y}{e_1}\right) & \textit{si } (x,y) \in [0,e_1]^2 \\ e_1 + (e_2 - e_1)S'\left(\frac{x-e_1}{e_2-e_1}, \frac{y-e_1}{e_2-e_1}\right) & \textit{si } (x,y) \in [e_1,e_2]^2 \\ e_2 + (1-e_2)S''\left(\frac{x-e_2}{1-e_2}, \frac{y-e_2}{1-e_2}\right) & \textit{si } (x,y) \in [e_2,1]^2 \\ \max(x,y) & \textit{altrament,} \end{cases}$$

on S' *i* S'' *són t-conormes qualssevol i* T *és una t-norma qualsevol. Si a més a més* $U_2(e_1,e_1) = e_1$, *llavors* U_2 *ha de ser idempotent.*

En el cas en que la t-norma associada a U_2 sigui contínua, obtenim totes les solucions de (D) en el teorema següent.

Teorema 3.1.18 *Siguin* $U_1 \equiv \langle T_1, e_1, S_1\rangle_{\max}$ *i* $U_2 \equiv \langle T_2, e_2, S_2\rangle_{\max}$, *amb* T_2 *contínua i* $e_1 < e_2$. U_1 *és distributiva sobre* U_2, *si i només si* U_2 *és idempotent i* U_1 *ve donada per*

$$U_1(x,y) = \begin{cases} e_1 T\left(\frac{x}{e_1}, \frac{y}{e_1}\right) & \textit{si } (x,y) \in [0,e_1]^2 \\ e_1 + (e_2 - e_1)S'\left(\frac{x-e_1}{e_2-e_1}, \frac{y-e_1}{e_2-e_1}\right) & \textit{si } (x,y) \in [e_1,e_2]^2 \\ e_2 + (1-e_2)S''\left(\frac{x-e_2}{1-e_2}, \frac{y-e_2}{1-e_2}\right) & \textit{si } (x,y) \in [e_2,1]^2 \\ \max(x,y) & \textit{altrament,} \end{cases}$$

on S' *i* S'' *són t-conormes qualssevol i* T *és una t-norma qualsevol.*

De manera similar, amb dues uninormes de $\mathcal{U}_{\min}$ s'obtenen els resultats següents.

Teorema 3.1.19 *Siguin* $U_1 \equiv \langle T_1, e_1, S_1\rangle_{\min}$ *i* $U_2 \equiv \langle T_2, e_2, S_2\rangle_{\min}$. *Si* $e_1 \leqslant e_2$, *llavors* U_1 *és distributiva sobre* U_2 *si i només si*

- $e_2 = 1$ *i* U_2 *és la t-conorma mínim, o bé*
- $1 \neq e_2 = e_1$ *i* U_2 *és idempotent.*

Teorema 3.1.20 *Siguin* $U_1 \equiv \langle T_1, e_1, S_1\rangle_{\min}$ *i* $U_2 \equiv \langle T_2, e_2, S_2\rangle_{\min}$. *Si* $e_2 < e_1$ *i* U_1 *és distributiva sobre* U_2, *llavors* $U_2(x,x) = x$ *per tot* $x < e_1$, *i* U_1 *ve donada per*

$$U_1(x,y) = \begin{cases} e_2 T'\left(\frac{x}{e_2}, \frac{y}{e_2}\right) & \textit{si } (x,y) \in [0,e_2]^2 \\ e_2 + (e_1 - e_2)T''\left(\frac{x-e_2}{e_1-e_2}, \frac{y-e_2}{e_1-e_2}\right) & \textit{si } (x,y) \in [e_2,e_1]^2 \\ e_2 + (1-e_1)S\left(\frac{x-e_1}{1-e_1}, \frac{y-e_1}{1-e_1}\right) & \textit{si } (x,y) \in [e_2,1]^2 \\ \max(x,y) & \textit{altrament,} \end{cases}$$

on T' *i* T'' *són t-normes qualssevol i* S *és una t-conorma qualsevol. Si, a més a més,* $U_2(e_1,e_1) = e_1$, *llavors* U_2 *ha de ser idempotent.*

De forma semblant, tenim totes les solucions de (D) en el teorema següent, en el cas en que la t-conorma associada a U_2 sigui contínua.

Teorema 3.1.21 *Siguin* $U_1 \equiv \langle T_1, e_1, S_1 \rangle_{\min}$ *i* $U_2 \equiv \langle T_2, e_2, S_2 \rangle_{\min}$*, amb* S_2 *contínua i* $e_2 < e_1$. U_1 *és distributiva sobre* U_2 *si i només si* U_2 *és idempotent i* U_1 *ve donada per*

$$U_1(x,y) = \begin{cases} e_2 T'\left(\frac{x}{e_2}, \frac{y}{e_2}\right) & \textit{si } (x,y) \in [0,e_2]^2 \\ e_2 + (e_1 - e_2) T''\left(\frac{x-e_2}{e_1-e_2}, \frac{y-e_2}{e_1-e_2}\right) & \textit{si } (x,y) \in [e_2,e_1]^2 \\ e_2 + (1-e_1) S\left(\frac{x-e_1}{1-e_1}, \frac{y-e_1}{1-e_1}\right) & \textit{si } (x,y) \in [e_2,1]^2 \\ \max(x,y) & \textit{altrament}, \end{cases}$$

on T' *i* T'' *són t-normes qualssevol i* S *és una t-conorma qualsevol.*

Nota 3.1.22 *Per tant, en el cas d'uninormes de* $\mathcal{U}_{\min}$ *i de* $\mathcal{U}_{\max}$*, el nombre de solucions de* (D) *és molt més ampli, i no es redueix tan sols al cas de* $T_{\mathbf{M}}$ *o de* $S_{\mathbf{M}}$ *per al segon operador.*

3.2 UNINORMA AMB T-NORMA O T-CONORMA. DISTRIBUTIVITAT CONDICIONAL

En tota aquesta secció estudiarem la distributivitat i la distributivitat condicional d'una uninorma U que no sigui t-norma ni t-conorma, (és a dir, amb element neutre $e \in]0,1[$) sobre una t-conorma contínua, donant resposta així al problema obert abans esmentat. Per completar l'estudi de la distributivitat, estudiarem també el cas dual de distributivitat (condicional) sobre una t-norma contínua i els recíprocs. Dividirem l'estudi depenent de quin tipus són els operadors involucrats.

3.2.1 *Uninorma sobre t-conorma contínua*

Començarem estudiant la distributivitat condicional d'una uninorma sobre una t-conorma contínua (definició 3.1.3). Com ja hem vist anteriorment a la proposició 3.1.5, tota uninorma és (condicionalment) distributiva sobre $S_{\mathbf{M}}$.

A continuació donem aquest lema general, que emprarem en els resultats posteriors.

Lema 3.2.1 *Siguin* $U \in \mathcal{U}(e)$*, i* S *una t-conorma. Si* U *és condicionalment distributiva sobre* S *i* $S(e,e) = e$*, llavors* $S = S_{\mathbf{M}}$.

DEMOSTRACIÓ: Posem $y = z = e$ a (CD), com que $S(e,e) = e < 1$, tenim

$$U(x, S(e,e)) = S(U(x,e), U(x,e)) \text{ per tot } x \in [0,1].$$

Emprant ara que $S(e,e) = e$ i que e és l'element neutre de U,

$$U(x,e) = x = S(x,x) \text{ per tot } x \in [0,1],$$

i llavors S és la t-conorma màxim, ja que és l'única t-conorma idempotent (proposició 2.1.5). □

Dividim el nostre estudi en alguns casos, depenent del tipus d'uninorma U que és distributiva sobre la t-conorma S.

-U *uninorma de* $\mathcal{U}_{\min}$ *o de* $\mathcal{U}_{\max}$

Proposició 3.2.2 *Una uninorma* U *de* $\mathcal{U}_{\max}$ *és condicionalment distributiva sobre una t-conorma* S *si i només si* $S = S_{\mathbf{M}}$.

DEMOSTRACIÓ: Ja sabem per la proposició 3.1.5 que qualsevol uninorma U és condicionalment distributiva sobre $S_{\mathbf{M}}$.

Recíprocament, si posem $y = z = 0$ a (CD), llavors tenim per tot $x > e$,

$$x = U(x, S(0, 0)) = S(U(x, 0), U(x, 0)) = S(x, x).$$

Ara, pel creixement de S també tenim $S(e, e) = e$. Llavors, pel lema 3.2.1, $S = S_{\mathbf{M}}$. □

Nota 3.2.3 *Notem que a la proposició anterior, no és necessari que S sigui contínua, és a dir, per qualsevol uninorma U de $\mathcal{U}_{\max}$, l'única t-conorma S per la qual U és distributiva sobre S és $S_{\mathbf{M}}$.*

Proposició 3.2.4 *Una uninorma U de $\mathcal{U}_{\min}$ és condicionalment distributiva sobre una t-conorma contínua S si i només si $S = S_{\mathbf{M}}$.*

DEMOSTRACIÓ: Només necessitem demostrar d'esquerra a dreta. Per això, si $S(e, e) > e$, com que S és contínua, existeix $z < e$ tal que $S(z, z) = e < 1$.

Aplicant $y = z$ a (CD), tindrem

$$x = U(x, S(z, z)) = S(U(x, z), U(x, z)) \text{ per tot } x \in [0, 1].$$

Agafant x que verifiqui $z < e < x$ tindrem, com que $U \in \mathcal{U}_{\min}$,

$$x = S(\min(x, z), \min(x, z)) = S(z, z) = e,$$

que és una contradicció. Conseqüentment, $S(e, e) = e$, i pel lema 3.2.1, $S = S_{\mathbf{M}}$. □

-U *uninorma idempotent*

Proposició 3.2.5 *Una uninorma U amb $T_U = T_{\mathbf{M}}$ és condicionalment distributiva sobre una t-conorma contínua S si i només si $S = S_{\mathbf{M}}$.*

DEMOSTRACIÓ: Una altra vegada, sabem que U és distributiva sobre $S = S_{\mathbf{M}}$ per la proposició 3.1.5.

Recíprocament, com que S és contínua, existeix $z \leqslant e$ tal que $S(z, z) = e$ i com que $T_U = T_{\mathbf{M}}$, tenim:

$$z = U(z, S(z, z)) = S(U(z, z), U(z, z)) = S(z, z) = e$$

això és, $z = e$ i $S(e, e) = e$. Pel lema 3.2.1, ja hem acabat la demostració. □

Corol·lari 3.2.6 *Una uninorma idempotent U és condicionalment distributiva sobre una t-conorma contínua S si i només si $S = S_{\mathbf{M}}$.*

DEMOSTRACIÓ: Qualsevol uninorma idempotent U satisfà $T_U = T_{\mathbf{M}}$ i llavors el resultat s'obté de la proposició anterior. □

-U *uninorma representable*

Com ja hem mencionat als preliminars (secció 2.2.1), abans d'estudiar la distributivitat condicional d'una uninorma representable sobre una t-conorma contínua, demostrarem que les classes de les uninormes quasi-contínues i les uninormes representables són la mateixa, i per tant no caldrà fer més distincions d'ara en endavant. Primer demostrem uns lemes previs.

Lema 3.2.7 *Si U és una uninorma quasi-contínua llavors $U(x,0)=0$ per tot $x<1$ i $U(x,1)=1$ per tot $x>0$.*

Demostració: Suposem que per algun $0<a<1$, tenim $U(0,a)=b>0$. Per continuïtat, per tot $y\leqslant b$ existeix $x\leqslant a$ tal que $U(0,x)=y$, però llavors

$$U(0,y)=U(0,U(0,x))=U(0,x)=y$$

contradient que $U(0,y)=0$ per tot $y\leqslant e$. L'altra part segueix de manera similar. □

Lema 3.2.8 *Si U és una uninorma quasi-contínua, llavors:*

- $U(x,y)<1$ *quan* $x<1$ *i* $y<1$,
- $U(x,y)>0$ *quan* $x>0$ *i* $y>0$.

Demostració: Suposem que existeix (x,y) amb $x<1$ i $y<1$ tal que $U(x,y)=1$. Aleshores tenim pel creixement de U,

$$U(\max(x,y),\max(x,y))=1,$$

és a dir, existeix t tal que $e<t<1$ i $U(t,t)=1$.

Ara definim a de la manera següent:

$$a=\inf\{x\in]0,1[\ |U(x,x)=1\}.$$

Per continuïtat de U, $U(a,a)=1$, i per tant $e<a<1$. Llavors, emprant que $U(x,a)<1$ per tot $x<a$, tenim

$$U(U(x,a),a)=U(x,U(a,a))=U(x,1)=1$$

per tot $x>0$, i llavors $U(x,a)\geqslant a$.

Però $U(x,a)\leqslant a$ per tot $x<e$, perquè $a>e$, i llavors $U(x,a)=a$ per tot $x\in]0,e]$ que, utilitzant el lema 3.2.7, dóna una contradicció amb la continuïtat. L'altra part segueix de forma similar. □

La proposició següent es pot deduir de resultats de [60], però presentem aquí una demostració directa, emprant els lemes anteriors.

Proposició 3.2.9 *Suposem que U és una uninorma quasi-contínua amb element neutre $e\in]0,1[$. Llavors U és representable si i només si U és estrictament creixent a $]0,1[^2$.*

Demostració: En vista del teorema 2.2.24, si U és representable, llavors, és estrictament creixent a $]0,1[^2$.

Recíprocament, si U és quasi-contínua i estrictament creixent a $]0,1[^2$, llavors és veritat que per tot $x\in]0,1[$ existeix un únic $y\in]0,1[$ tal que $U(x,y)=e$.

Ara definim la funció $N:[0,1]\to[0,1]$

$$N(x)=\begin{cases}0 & \text{si } x=1\\ 1 & \text{si } x=0\\ y & \text{si } x\in]0,1[\text{ i } U(x,y)=e\end{cases}$$

i ara demostrarem que N és una negació forta.

- N és involutiva. Per a $x = 0, 1$ està clar. Si $x \in]0,1[$, diguem $y = N(x)$ llavors $U(x,y) = e$ i per commutativitat tenim $U(y,x) = e$. Però això vol dir que $N(y) = x$, és a dir, $N(N(x)) = x$.
- N és estrictament decreixent. Suposem $x, x' \in]0,1[$ amb $x < x'$ i $N(x) \leqslant N(x')$. Tenim llavors $N(x) = y$ amb $U(x,y) = e$ i $N(x') = y'$ amb $U(x',y') = e$. Llavors $y \leqslant y'$, però U és estrictament creixent i
$$e = U(x,y) < U(x',y) \leqslant U(x',y') = e,$$
que és una contradicció.

A més a més, U i N satisfan:

$$U(x,y) = N\left(U(N(x), N(y))\right)$$

per tot $(x,y) \in [0,1]^2 \setminus \{(0,1),(1,0)\}$. Efectivament, només necessitem demostrar

$$U\left(U(N(x), N(y)), U(x,y)\right) = e$$

a conseqüència de la definició de N.

Si $0 < x, y < 1$, emprant que U és commutativa i associativa, fàcilment tenim

$$U(U(N(x), N(y)), U(x,y)) = U(U(N(x),x), U(N(y),y)) = U(e,e) = e,$$

perquè $U(N(x),x) = e$ per tot $x \in]0,1[$, per definició de N.

Els casos $x = 0$ i $0 \leqslant y < 1$, i quan $x = 1$ i $0 < y \leqslant 1$ segueixen fàcilment utilitzant el lema 3.2.7. Ara, utilitzant el teorema 2.2.24, obtenim que U és representable. □

Notem que la negació N definida a la demostració de la proposició anterior és única, i pel teorema 2.2.24, ve donada per $N(x) = h^{-1}\left(\frac{1}{h(x)}\right)$, on h és un generador multiplicatiu de U.

La proposició següent demostra que les classes de les uninormes quasi-contínues i la classe de les uninormes representables coincideixen. Igualment, aquest resultat també es podria derivar de resultats a [58] (veure també el teorema 2.2.28), però la demostració que es presenta aquí segueix directament del teorema de representació de les uninormes representables (teorema 2.2.24).

Teorema 3.2.10 *Sigui U una uninorma amb element neutre $e \in]0,1[$. Llavors U és quasi-contínua (contínua a $[0,1] \setminus \{(0,1),(1,0)\}$) si i només si és representable.*

DEMOSTRACIÓ: Degut a la proposició anterior, només necessitem veure que qualsevol uninorma quasi contínua U és estrictament creixent a $]0,1[^2$.

Vegem ara que per tot $x, y, t \in]0,1[$, si $U(x,t) = U(y,t)$, llavors $x = y$. Pel lema 3.2.7, $U(t,0) = 0$ i $U(t,1) = 1$, i llavors, com que U és contínua a $[0,1]^2 \setminus \{(0,1),(1,0)\}$, existeix $\alpha \in]0,1[$ tal que $U(t,\alpha) = e$. Ara tenim

$$\begin{aligned} x &= U(x,e) = U(x, U(t,\alpha)) = U(U(x,t),\alpha) = U(U(y,t),\alpha) = U(y, U(t,\alpha)) \\ &= U(y,e) = y \end{aligned}$$

Llavors U és estrictament creixent a $]0,1[^2$ i per tant és representable. □

És a dir, la continuïtat a $[0,1] \setminus \{(0,1),(1,0)\}$ implica la existència d'un generador additiu, i aleshores les classes d'uninormes representables i uninormes quasi-contínues coincideixen. A partir d'ara, per tant, parlarem d'uninormes representables en lloc d'uninormes quasi-contínues.

Proposició 3.2.11 *Si una uninorma representable U és condicionalment distributiva sobre una t-conorma contínua S llavors $S = S_{\mathbf{M}}$ o S és arquimediana.*

Demostració: Suposem que S té un element idempotent no trivial $0 < z < 1$. Llavors

$$U(x,z) = U(x, S(z,z)) = S(U(x,z), U(x,z))$$

per tot $x \in [0,1]$ i aleshores $U(x,z)$ és un element idempotent de S per tot $x \in [0,1]$. Com que U és contínua a $[0,1]^2 \setminus \{(0,1),(1,0)\}$, emprant el lema 3.2.7 tenim que, variant $x \in [0,1]$, $U(x,z)$ pren tots els valors de $[0,1]$ i conseqüentment $S(t,t) = t$ per tot $t \in [0,1]$, és a dir, $S = S_{\mathbf{M}}$.

Llavors, S és arquimediana o $S = S_{\mathbf{M}}$. □

Teorema 3.2.12 *Una uninorma representable U és condicionalment distributiva sobre una t-conorma contínua S si i només si tenim un dels casos següents:*

(i) $S = S_{\mathbf{M}}$.

(ii) *S és estricta i el generador additiu s de S satisfent $s(e) = 1$, és també un generador multiplicatiu de U.*

Demostració: Primer demostrarem la suficiència. Si, per a una uninorma representable U i una t-conorma contínua S, tenim el cas *(i)*, llavors U és condicionalment distributiva sobre S per la proposició 3.1.5. Si tenim el cas *(ii)*, llavors dividim la nostra demostració en quatre casos:

- Si $x, y, z \in [0,1]$ satisfan que $(x,y), (x,z)$ i $(x, S(y,z))$ no estan a $\{(0,1),(1,0)\}$, llavors hi ha representació per a la uninorma en aquests punts. Si s és el generador additiu de S satisfent $s(e) = 1$, llavors també és un generador multiplicatiu de U. Llavors es compleix:

$$\begin{aligned} U(x, S(y,z)) &= s^{-1}(s(x) \cdot s(s^{-1}(s(y) + s(z)))) = s^{-1}(s(x) \cdot s(y) + s(x) \cdot s(z)) \\ &= s^{-1}\left(s(s^{-1}(s(x) \cdot s(y))) + s(s^{-1}(s(x) \cdot s(z)))\right) \\ &= S(U(x,y), U(x,z)). \end{aligned}$$

- Si $x = 1$ i $S(y,z) = 0$ llavors $y = 0$ i $z = 0$, i aleshores

$$U(1,0) = U(1, S(0,0)) = S(U(1,0), U(1,0)).$$

  Emprant que $U(1,0) \in \{0,1\}$, (CD) se satisfà.

- Si $x = 1$ i $S(y,z) > 0$, els casos quan $y = 0$ ò $z = 0$ són trivials, mentre que quan $y, z \neq 0$, emprant el lema 3.2.7 tenim

$$1 = U(1, S(y,z)) = S(U(1,y), U(1,z)) = S(1,1) = 1$$

  i (CD) se satisfà.

- Si $x = 0$ aleshores $U(0,t) = 0$ per tot $t < 1$, i llavors (CD) se satisfà de manera similar.

Recíprocament, si U és representable, llavors $S = S_M$ o S és arquimediana, degut a la proposició 3.2.11. Per al segon cas, sigui $s : [0,1] \to [0,+\infty]$ un generador additiu de S. Llavors, s és contínua, estrictament creixent que verifica $s(0) = 0$, $s(1) \in [0,+\infty]$ i tal que

$$S(y,z) = s^{-1}(s(y)+s(z)) \text{ si } S(y,z) < 1.$$

Ara agafem un generador multiplicatiu $\theta : [0,1] \to [0,+\infty]$, de U, θ és contínua, estrictament creixent verificant $\theta(0) = 0$, $\theta(e) = 1$ i $\theta(1) = +\infty$ tal que

$$U(x,y) = \theta^{-1}(\theta(x)\cdot\theta(y)) \text{ per tot } (x,y) \notin \{(0,1),(1,0)\}.$$

Definim la funció contínua, estrictament creixent

$$\begin{array}{rcl} f : [0,s(1)] & \to & [0,+\infty] \\ x & \mapsto & \theta(s^{-1}(x)), \end{array}$$

llavors $f(0) = 0$, $f(s(1)) = +\infty$ i $f(s(e)) = 1$. Posant $u = s(x)$, $v = s(y)$ i $w = s(z)$, tenim per una banda

$$\begin{aligned} U(x,S(y,z)) &= \theta^{-1}(\theta(x)\theta(s^{-1}(s(y)+s(z)))) \\ &= \theta^{-1}(\theta(s^{-1}(u))\cdot\theta(s^{-1}(v+w))) = \theta^{-1}(f(u)f(v+w)) \end{aligned}$$

i per l'altra

$$\begin{aligned} S(U(x,y),U(x,z)) =& s^{-1}(s(\theta^{-1}(\theta(x)\theta(y))) + s(\theta^{-1}(\theta(x)\theta(z)))) \\ =& s^{-1}(f^{-1}(f(u)f(v)) + f^{-1}(f(u)f(w))), \end{aligned}$$

de manera que l'equació de distributivitat condicional de U sobre S es pot escriure com segueix

$$f^{-1}(f(u)\cdot f(v+w)) = f^{-1}(f(u)\cdot f(v)) + f^{-1}(f(u)\cdot f(w)) \tag{3.3}$$

per tots $u,v,w \in [0,s(1)]$ i $v+w < s(1)$. Fixant $u \in]0,s(1)]$, definim la funció contínua, estrictament creixent

$$\begin{array}{rcl} g_u : [0,s(1)] & \to & [0,s(1)] \\ x & \mapsto & f^{-1}(f(u)\cdot f(x)). \end{array}$$

Ara (3.3) es pot escriure com

$$g_u(v+w) = g_u(v) + g_u(w) \text{ per tots } u,v,w \in [0,s(1)], v+w < s(1),$$

amb $g_u(0) = 0$, $g_u(s(1)) = s(1)$ i $g_u(s(e)) = u$. Aquesta és l'equació funcional de Cauchy, i la seva solució és

$$g_u(x) = k\cdot x$$

per qualque k. Emprant que $g_u(s(1)) = s(1)$, tenim que $k = 1$ ò $s(1) = +\infty$. Però, si $k = 1$, llavors $g_u(s(e)) = s(e) \neq u$. Aleshores, $s(1) = +\infty$ i S és estricta. En aquest cas,

$$k = \frac{u}{s(e)}, \text{ i també, } g_u(x) = \frac{u}{s(e)}\cdot x.$$

Com que S és estricta, podem elegir s el generador additiu de S tal que $s(e) = 1$, i llavors

$$g_u(x) = u\cdot x.$$

Emprant la definició de g_u, tenim

$$f(ux) = f(u) \cdot f(x)$$

per tot $u, x \in [0, +\infty]$, que és l'equació funcional multiplicativa de Cauchy. Això vol dir que

$$f(x) = x^p$$

per qualque $p \in]0, +\infty[$ i llavors

$$\theta(x) = s(x)^p.$$

Llavors s és també un generador multiplicatiu de U i això conclou la demostració. □

-U *uninorma de* $\mathcal{U}_{\cos}$

Ara estudiarem la distributivitat d'una uninorma a la classe $\mathcal{U}_{\cos}$ sobre una t-conorma contínua.

Proposició 3.2.13 *Siguin U una uninorma amb T_U contínua i S una t-conorma contínua. Si U és condicionalment distributiva sobre S i U té un element idempotent $a \in]0, e[$, llavors $S(y, y) = y$ per tot $y \in [0, a]$.*

Demostració: Si $S(e, e) = e$, llavors $S = S_M$ i llavors el resultat és cert. Altrament, $S(e, e) > e$ i com que S és contínua existeix $z < e$ tal que $S(z, z) = e$. Suposem $a \in]0, e[$ tal que $U(a, a) = a$.

Primer, si $S(a, a) \geqslant e$ llavors $z \leqslant a < e$ i tenim

$$a = U(a, e) = U(a, S(z, z)) = S(U(a, z), U(a, z)) = S(\min(a, z), \min(a, z)) = S(z, z) = e,$$

que és una contradicció.

Si $S(a, a) < e$, llavors $a \leqslant z < e$ i tenim

$$a = U(a, e) = U(a, S(z, z)) = S(U(a, z), U(a, z)) = S(\min(a, z), \min(a, z)) = S(a, a)$$

i llavors a és un element idempotent de S. Ara, per tot $t \in [0, 1]$

$$U(t, a) = U(t, S(a, a)) = S(U(t, a), U(t, a))$$

i com que U és contínua a $[0, e]^2$, $U(t, a)$ pren tots els valors de $[0, a]$ i llavors $S(y, y) = y$ per tot $y \in [0, a]$. □

Teorema 3.2.14 *Siguin $U \equiv \langle T', \alpha, T'', \beta, (R, e)\rangle_{\cos,\min}$ i S una t-conorma contínua. U és condicionalment distributiva sobre S si i només si tenim un dels casos següents:*

(i) $S = S_M$.

(ii) Existeix una t-conorma estricta S^* tal que el seu generador additiu s amb $s\left(\frac{e-\beta}{1-\beta}\right) = 1$ és també un generador multiplicatiu de R, i $S = (\langle \beta, 1, S^* \rangle)$.

Demostració: Si U és condicionalment distributiva sobre S, com que β és un element idempotent de U, tenim $S(x, x) = x$ per tot $x \leqslant \beta$, per la proposició anterior i conseqüentment $S = (\langle \beta, 1, S^* \rangle)$ per qualque t-conorma contínua S^*. A més a més, com que U és condicionalment distributiva sobre S, R és també condicionalment distributiva sobre S^* i llavors $S = S_M$ o S^* és estricta i el seu generador additiu s amb $s(\frac{e-\beta}{1-\beta}) = 1$ és també un generador multiplicatiu de R, pel teorema 3.2.12.

Recíprocament, agafem $U \equiv \langle T', \alpha, T'', \beta, (R, e)\rangle_{\cos,\min}$ i $S = (\langle \beta, 1, S^* \rangle)$. Veurem que U és condicionalment distributiva sobre S. Dividim la nostra demostració en diferents casos, depenent dels valors de x, y, z a (CD):

- Si $y \leqslant \beta$ llavors $S(y,z) = \max(y,z)$ i $U(x,y) \leqslant \min(x,y) \leqslant \beta$ ò $U(x,y) = 1$. Aleshores, emprant que U és creixent tenim
$$S(U(x,y), U(x,z)) = \max(U(x,y), U(x,z)) = U(x, \max(y,z)) = U(x, S(y,z)).$$
- Si $z \leqslant \beta$ és similar al cas anterior.
- Si $\beta < y, z < 1$ i $x \leqslant \beta$ llavors $U(x,y) = \min(x,y) = x = \min(x,z) = U(x,z)$ i $\beta < y \leqslant S(y,z)$. Tenim
$$S(U(x,y), U(x,z)) = S(x,x) = x = \min(x, S(y,z)) = U(x, S(y,z)).$$
- Si $y = 1$ ò $z = 1$ llavors $S(y,z) = 1$ i no hi ha res que demostrar.
- Si $\beta < x, y, z$ llavors U ve donada per R, S ve donada per S^* i llavors (CD) se satisfà una altra vegada pel teorema 3.2.12.

Llavors U és condicionalment distributiva sobre S. □

L'estructura d'una uninorma de $\mathcal{U}_{\text{cos,min}}$ condicionalment distributiva sobre una t-conorma es pot observar a la figura 7.

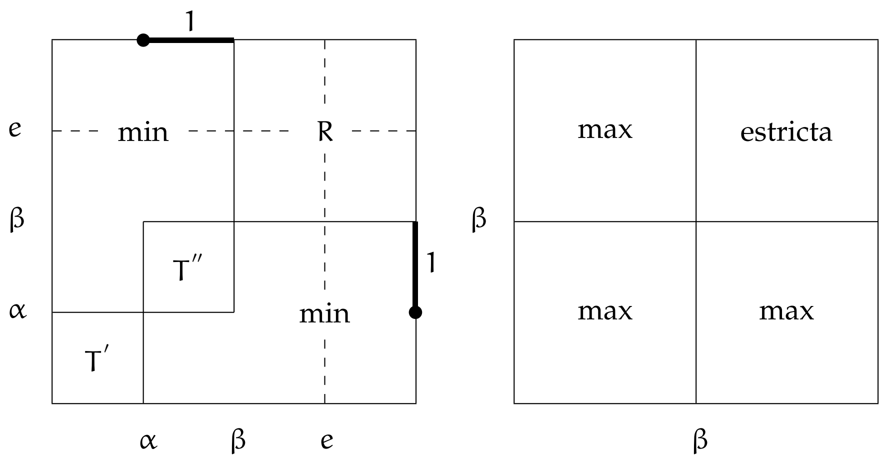

Figura 7. Uninorma U de $\mathcal{U}_{\text{cos,min}}$ (esquerra) condicionalment distributiva sobre una t-conorma contínua S (dreta).

Ara ens dedicarem a uninormes de $\mathcal{U}_{\text{cos,max}}$.

Proposició 3.2.15 *Siguin U una uninorma amb S_U contínua i S una t-conorma contínua. Si U és condicionalment distributiva sobre S i U té un element idempotent $\gamma \in]e, 1[$, llavors $S(z,z) = z$ per tot $z \in [\gamma, 1]$.*

Demostració: Sigui $\gamma \in]e, 1[$ tal que $U(\gamma, \gamma) = \gamma$. Llavors, per ser S contínua, existeix $b \leqslant \gamma$ tal que $S(b,b) = \gamma$. Aleshores tenim
$$\gamma = U(\gamma,\gamma) = U(\gamma, S(b,b)) = S(U(\gamma,b), U(\gamma,b)) = S(\max(\gamma,b), \max(\gamma,b)) = S(\gamma,\gamma).$$
Ara γ és un element idempotent de S i per tot $t \in [0,1]$
$$U(t,\gamma) = U(t, S(\gamma,\gamma)) = S(U(t,\gamma), U(t,\gamma)).$$
Agafant $t \in [e,1]$, com que S_U és contínua tenim que $S(z,z) = z$ per tot $z \in [\gamma, 1]$. □

De forma similar al teorema 3.2.14 tenim el resultat següent per a uninormes a $\mathcal{U}_{\text{cos,max}}$.

Teorema 3.2.16 *Sigui* $U \equiv \langle (R, e), \gamma, S', \delta, S'' \rangle_{\text{cos,max}}$ *una uninorma de* $\mathcal{U}_{\text{cos,max}}$ *i* S *una t-conorma contínua.* U *és condicionalment distributiva sobre* S *si i només si tenim un dels casos següents:*

(i) $S = S_{\mathbf{M}}$.

(ii) Existeix una t-conorma estricta S^* *tal que el seu generador additiu* s *amb* $s(\frac{e}{\gamma}) = 1$ *és també un generador multiplicatiu de* R *i* $S = (\langle 0, \gamma, S^* \rangle)$.

DEMOSTRACIÓ: És el resultat dual del teorema 3.2.14. □

L'estructura d'una uninorma de $\mathcal{U}_{\text{cos,max}}$ condicionalment distributiva sobre una t-conorma és pot observar a la figura 8.

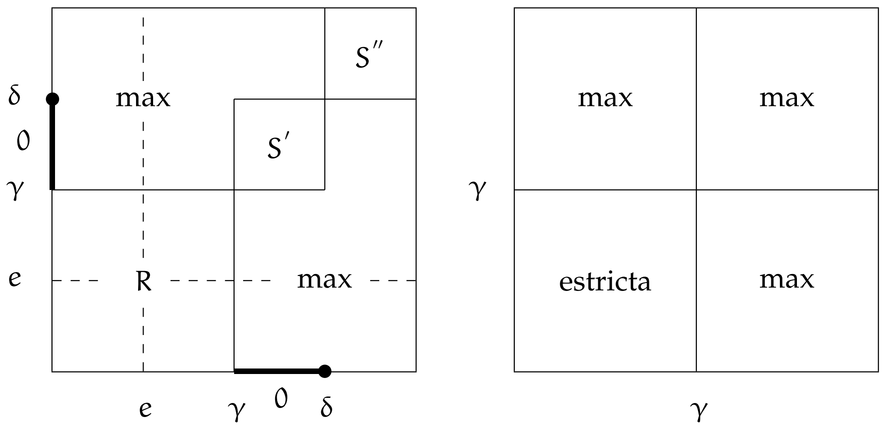

Figura 8. Uninorma U de $\mathcal{U}_{\text{cos,max}}$ (esquerra) condicionalment distributiva sobre una t-conorma contínua S (dreta).

Nota 3.2.17 *Com a conseqüència dels teoremes anteriors, qualsevol uninorma de* $\mathcal{U}_{\text{cos}}$ *només és condicionalment distributiva sobre dos tipus de t-conormes contínues:* $S_{\mathbf{M}}$ *i una suma ordinal.*

A continuació, tots els resultats d'aquest apartat s'enumeren al teorema següent.

Teorema 3.2.18 *Siguin* U *una uninorma que és, idempotent, o de* $\mathcal{U}_{\text{max}}$*, o de* $\mathcal{U}_{\text{min}}$*, o és representable, o de* $\mathcal{U}_{\text{cos}}$*, i* S *una t-conorma contínua. Les afirmacions següents són equivalents:*

(i) U *és condicionalment distributiva sobre* S.

(ii) Tenim un dels casos següents:

(a) $S = S_{\mathbf{M}}$.

(b) S *és estricta i* U *és representable, i si* s *és el generador additiu de* S *satisfent* $s(e) = 1$*, llavors* s *és també un generador multiplicatiu de* U.

(c) $U \equiv \langle T', \alpha, T'', \beta, (R, e) \rangle_{\text{cos,min}}$ *i existeix una t-conorma estricta* S^* *tal que el seu generador additiu amb* $s\left(\frac{e-\beta}{1-\beta}\right) = 1$ *és també un generador multiplicatiu de* R *i* $S = (\langle \beta, 1, S^* \rangle)$.

(d) $U \equiv \langle (R,e), \gamma, S', \delta, S'' \rangle_{\cos,\max}$ *i existeix una t-conorma estricta* S^* *tal que el seu generador additiu amb* $s\left(\frac{e}{\gamma}\right) = 1$ *és també un generador multiplicatiu de* R *i* $S = (\langle 0, \gamma, S^* \rangle)$.

Després d'haver resolt la distributivitat condicional d'una uninorma U sobre una t-conorma S, estudiarem la distributivitat d'una uninorma U sobre una t-conorma S. Sorprenentment, en tots els casos estudiats en la secció anterior, si U és condicionalment distributiva sobre S, llavors U és distributiva sobre S, com es demostra en el teorema següent.

Teorema 3.2.19 *Una uninorma* U *que és idempotent, o és de* $\mathcal{U}_{\max}$ *o és de* $\mathcal{U}_{\min}$, *o és representable, és distributiva sobre una t-conorma contínua* S *si i només si* U *és condicionalment distributiva sobre* S.

Demostració: Si una uninorma U és distributiva sobre S llavors és de manera òbvia condicionalment distributiva sobre S.

Recíprocament, sabem que qualsevol uninorma és distributiva sobre $S_{\mathbf{M}}$. Llavors, només necessitem demostrar

$$U(x, S(y,z)) = S(U(x,y), U(x,z))$$

per tot $x, y, z \in [0,1]$ tal que $S(y,z) = 1$, on S i U són com als casos *(a), (b), (c) o (d)* del teorema 3.2.18. De totes maneres, si $S(y,z) = 1$, en tots aquests casos tenim que $y = 1$ ò $z = 1$, i llavors tots els possibles casos es poden verificar fàcilment. □

Ara donarem uns quants exemples d'uninormes que són distributives i condicionalment distributives sobre una t-conorma:

Exemple 3.2.20 *Agafem la funció:*

$$s(x) = -\log_c(1-x) \text{ amb } c > 1,$$

és un generador additiu de la t-conorma estricta

$$S_{\mathbf{P}}(x,y) = x + y - xy$$

i un generador multiplicatiu de la uninorma representable disjuntiva

$$U(x,y) = \begin{cases} 1 - c^{\log_c(1-x)\log_c(1-y)} & \text{si } x \neq 1 \text{ i } y \neq 1 \\ 1 & \text{altrament} \end{cases}$$

amb element neutre de U, $e = 1 - c^{-1}$. *Com que* $s(e) = 1$, U *és distributiva i condicionalment distributiva sobre* S.

Exemple 3.2.21 *Considerem la funció*

$$s_\gamma(x) = \frac{\gamma x}{1-x}, \qquad \gamma \in]0, +\infty[$$

és un generador additiu de la t-conorma estricta

$$S_0^{\mathbf{H}}(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x(1-y) + y(1-x)}{1-xy} & \text{si } (x,y) \neq (1,1) \\ 1 & \text{si } x = y = 1 \end{cases}$$

(que és la t-conorma de Hamacher amb paràmetre 0, veure [62]) i un generador multiplicatiu de la uninorma representable conjuntiva

$$U^{[\gamma]}(x,y) = \begin{cases} 0 & \textit{si } \{x,y\} = \{0,1\} \\ \dfrac{\gamma xy}{(1-x)(1-y)+\gamma xy} & \textit{altrament.} \end{cases}$$

L'element neutre de U *és* $e = \frac{\gamma}{1+\gamma}$. *Una altra vegada, com que* $s(\frac{\gamma}{1+\gamma}) = 1$, U *és condicionalment distributiva i distributiva sobre* S.

Exemple 3.2.22 *Siguin* $e, \beta \in [0,1]$ *tal que* $0 < \beta < e$, $U \equiv \langle T', \alpha, T'', \beta, (R, e)\rangle_{\text{cos,min}}$ *amb* T' *i* T' *t-normes contínues qualssevol,* $R = U^{[\gamma]}$, *amb*

$$\gamma = \frac{1-e}{e-\beta} \in]0, +\infty[,$$

i S *la t-conorma definida per* $S = \langle(\beta, 1, S^*)\rangle$, *on* $S^* = S_0^{\mathbf{H}}$ *definida a l'exemple anterior. Llavors, com que*

$$s_\gamma\left(\frac{e-\beta}{1-\beta}\right) = 1,$$

U *és distributiva i condicionalment distributiva només sobre les t-conormes contínues* $S_{\mathbf{M}}$ *i* S.

3.2.2 *Uninorma sobre t-norma contínua*

Estudiarem aquí el cas dual de distributivitat condicional de U sobre una t-norma contínua T. Donem primer la definició.

Definició 3.2.23 *Siguin* $U \in \mathcal{U}(e)$ *i* T *una t-norma. Direm que* U *és* condicionalment distributiva *sobre* T *si*

$$U(x, T(y,z)) = T(U(x,y), U(x,z)) \textit{ per a tots } x,y,z \in [0,1] \textit{ quan } T(y,z) > 0. \tag{3.4}$$

Lema 3.2.24 *Siguin* U *una uninorma i* T *una t-norma. Llavors si* U *és condicionalment distributiva sobre* T *i* $T(e,e) = e$, *llavors* $T = T_{\mathbf{M}}$.

Demostració: Basta agafar $y = z = e$ a (3.4). □

Proposició 3.2.25 *Siguin* U *una uninorma i* T *una t-norma contínua. Si* U *és de* $\mathcal{U}_{\max}$ *o de* $\mathcal{U}_{\min}$ *o és idempotent, llavors les afirmacions següents són equivalents:*

(i) U *és distributiva sobre* T.

(ii) U *és condicionalment distributiva sobre* T.

(iii) $T = T_{\mathbf{M}}$.

Demostració: Les demostracions es poden fer fàcilment fent els duals de les anteriors per a la secció de t-conormes. □

Teorema 3.2.26 *Siguin* U *una uninorma representable i* T *una t-norma contínua. Les afirmacions següents són equivalents:*

(i) U *és distributiva sobre* T.

(ii) U *és condicionalment distributiva sobre* T.

(iii) *Tenim un dels casos següents:*

(a) $T = T_{\mathbf{M}}$.

(b) T *és estricta i si* t *és el generador additiu de* T *satisfent* $t(e) = 1$, *llavors* $\frac{1}{t}$ *és també un generador multiplicatiu de* U.

Demostració: La implicació $(i) \Rightarrow (ii)$ és trivial. Respecte a $(ii) \Rightarrow (iii)$, es pot demostrar fàcilment, com al cas de t-conormes, que si U és condicionalment distributiva sobre T llavors T ha de ser necessàriament el mínim o arquimediana. Per al segon cas, agafem $t : [0,1] \to [0,+\infty]$ el generador additiu de T tal que $t(e) = 1$. Agafem també un generador multiplicatiu $\theta : [0,1] \to [0,+\infty]$, de U. Definim la funció contínua, estrictament decreixent

$$\begin{aligned} f : [0, t(0)] &\to [0,+\infty] \\ x &\mapsto \theta(t^{-1}(x)), \end{aligned}$$

llavors $f(0) = \theta(1) = +\infty$, $f(t(0)) = \theta(0) = 0$ i $f(1) = \theta(e) = 1$. Posant $u = t(x)$, $v = t(y)$ i $w = t(z)$, l'equació de distributivitat condicional U sobre T es pot escriure com segueix

$$f^{-1}(f(u) \cdot f(v + w)) = f^{-1}(f(u) \cdot f(v)) + f^{-1}(f(u) \cdot f(w)) \tag{3.5}$$

per tot $u, v, w \in [0, t(0)]$ i $v + w < t(0)$. Fixant $u \in]0, t(0)]$, definim la funció contínua, estrictament creixent

$$\begin{aligned} g_u : [0, t(0)] &\to [0, t(0)] \\ x &\mapsto f^{-1}(f(u) \cdot f(x)), \end{aligned}$$

g_u satisfà $g_u(0) = 0$, $g_u(t(0)) = t(0)$ i $g_u(1) = u$. Ara (3.5) es pot escriure com

$$g_u(v + w) = g_u(v) + g_u(w)$$

per tot $u, v, w \in [0, t(0)]$ i $v + w < t(0)$. Això és l'equació funcional de Cauchy, i la seva solució és

$$g_u(x) = k \cdot x$$

per qualque k. Emprant que $g_u(t(0)) = t(0)$, tenim que $k = 1$ ò $t(0) = +\infty$. Però, si $k = 1$, llavors $g_u(1) = 1 \neq u$. Aleshores, $t(0) = +\infty$ i T és estricta. En aquest cas, $k = u$ i

$$g_u(x) = u \cdot x.$$

Emprant la definició de g_u, tenim

$$f(ux) = f(u) \cdot f(x)$$

per tot $u, x \in [0, +\infty]$, que és l'equació funcional multiplicativa de Cauchy. Això vol dir que $f(x) = \frac{1}{x^p}$ per qualque $p \in]0, +\infty[$ i llavors $\theta(x) = \frac{1}{t(x)^p}$. Llavors $\frac{1}{t}$ és també un generador multiplicatiu de U i això conclou la demostració.

Finalment, demostrem que $(iii) \Rightarrow (i)$. Per fer-ho, només discutirem el cas quan la uninorma admet la seva representació, ja que els altres casos es fan fàcilment. En aquest cas doncs, tenim:

$$U(x, T(y, z)) = t^{-1}\left(\frac{1}{\frac{1}{t(x)} \cdot \frac{1}{t(t^{-1}(t(y)+t(z)))}}\right) = t^{-1}(t(x) \cdot t(y) + t(x) \cdot t(z)).$$

mentre que

$$S(U(x,y),U(x,z)) = t^{-1}\left(t(U(x,y)) + t(U(x,z))\right)) = t^{-1}\left(\frac{1}{\frac{1}{t(x)t(y)}} + \frac{1}{\frac{1}{t(x)t(z)}}\right)$$
$$= t^{-1}(t(x)\cdot t(y) + t(x)\cdot t(z)). \qquad \square$$

Ara ens centrarem en el cas que $U \in \mathcal{U}_{\cos}$. Primer donarem el resultat per $U \in \mathcal{U}_{\cos,\min}$.

Teorema 3.2.27 *Siguin* $U \equiv \langle T', \alpha, T'', \beta, (R,e)\rangle_{\cos,\min}$ *i* T *una t-norma contínua.* U *és condicionalment distributiva sobre* T *si i només si tenim un dels casos següents:*

(i) $T = T_{\mathbf{M}}$.

(ii) Existeix una t-norma estricta T^* *tal que el seu generador additiu* t *satisfent* $t\left(\frac{e-\beta}{1-\beta}\right) = 1$*, és tal que* $\frac{1}{t}$ *també és un generador multiplicatiu de* R*, i* $T = (\langle \beta, 1, T^*\rangle)$.

De forma anàloga al cas de t-conormes, tenim els teoremes següents.

Teorema 3.2.28 *Siguin* $U \equiv \langle (R,e), \gamma, S', \delta, S''\rangle_{\cos,\max}$ *i* T *una t-norma contínua.* U *és condicionalment distributiva sobre* T *si i només si tenim un dels casos següents:*

(i) $T = T_{\mathbf{M}}$.

(ii) Existeix una t-norma estricta T^* *amb el seu generador additiu* t *satisfent* $t\left(\frac{e}{\gamma}\right) = 1$ *és tal que* $\frac{1}{t}$ *també és un generador multiplicatiu de* R*, i* $T = (\langle 0, \gamma, T^*\rangle)$.

A les figures 9 i 10 es poden observar les solucions de la distributivitat d'una uninorma de $\mathcal{U}_{\cos,\max}$ i $\mathcal{U}_{\cos,\min}$ sobre una t-norma contínua, respectivament.

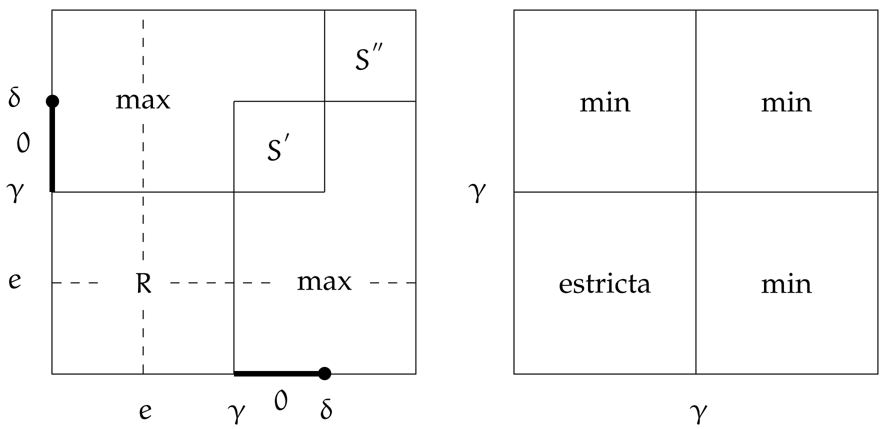

Figura 9. Uninorma U de $\mathcal{U}_{\cos,\max}$ (esquerra) condicionalment distributiva sobre una t-norma contínua T (dreta).

A continuació, englobem tots els resultats d'aquest apartat al teorema següent.

Teorema 3.2.29 *Siguin* U *una uninorma que és, idempotent, o de* $\mathcal{U}_{\max}$*, o de* $\mathcal{U}_{\min}$*, o és representable, o de* $\mathcal{U}_{\cos}$*, i* T *una t-norma contínua. Les afirmacions següents són equivalents:*

(i) U *és condicionalment distributiva sobre* T.

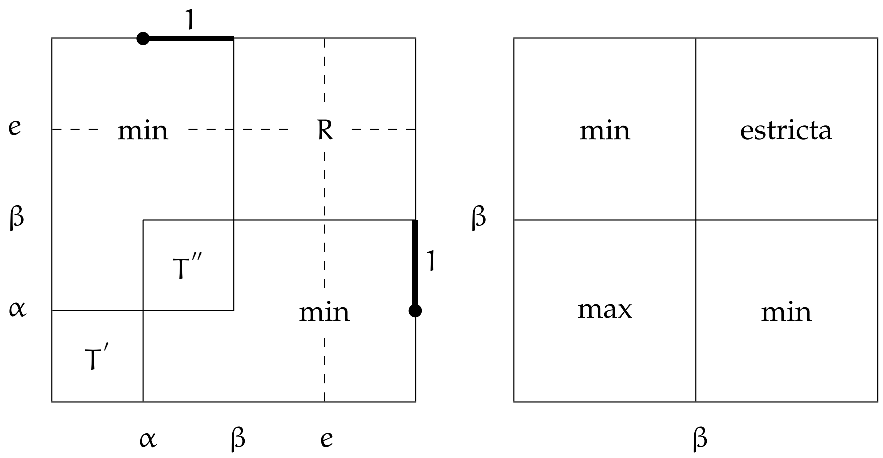

Figura 10. Uninorma U de $\mathcal{U}_{\cos,\min}$ (esquerra) condicionalment distributiva sobre una t-norma contínua T (dreta).

(ii) *U és distributiva sobre T.*

(iii) *Tenim un dels casos següents:*

(a) $T = T_{\mathbf{M}}$.

(b) *T és estricta i U és representable, i si t és el generador additiu de T satisfent $t(e) = 1$, llavors $\frac{1}{t}$ és també un generador multiplicatiu de U.*

(c) *$U \equiv \langle T', \alpha, T'', \beta, (R, e)\rangle_{\cos,\min}$ i existeix una t-norma estricta T^* tal que el seu generador additiu amb $t\left(\frac{e-\beta}{1-\beta}\right) = 1$ és també un generador multiplicatiu de R i $T = (\langle \beta, 1, T^*\rangle)$.*

(d) *$U \equiv \langle (R, e), \gamma, S', \delta, S''\rangle_{\cos,\max}$ i existeix una t-norma estricta T^* tal que el seu generador additiu amb $t\left(\frac{e}{\gamma}\right) = 1$ és també un generador multiplicatiu de R i $T = (\langle 0, \gamma, T^*\rangle)$.*

3.2.3 *t-conorma sobre uninorma*

A continuació estudiem la distributivitat d'una t-conorma sobre una uninorma. Comencem amb uns lemes.

Lema 3.2.30 *Siguin S una t-conorma i U una uninorma. Si S és distributiva sobre U llavors U és idempotent i de $\mathcal{U}_{\max}$.*

Demostració: Primer vegem que U és idempotent aplicant $y = z = 0$ a (D):

$$x = S(x, U(0, 0)) = U(S(x, 0), S(x, 0)) = U(x, x).$$

Ara, suposem que $U(0, z) = 0$ per qualque $1 > z > e$. Llavors obtenim

$$e = S(e, U(0, z)) = U(S(e, 0), S(e, z)) = S(e, z)$$

Però com que S és una t-conorma, tenim $S(e, z) \geqslant z > e$, que és una contradicció. Aleshores $U(0, z) = z$ per tot $z > e$ i llavors U és de $\mathcal{U}_{\max}$. □

El lema següent es pot deduir de l'anterior i resultats a [68]. De tota manera, degut a la seva simplicitat i per completesa, inclourem aquí la demostració.

Lema 3.2.31 *Siguin* S *una t-conorma i* U *una uninorma. Si* S *és distributiva sobre* U *llavors* $S(x,y) = \max(x,y)$ *si* $\min(x,y) \leqslant e \leqslant \max(x,y)$.

Demostració: Agafem x i y satisfent

$$\min(x,y) \leqslant e \leqslant \max(x,y) \leqslant S(x,y)$$

i llavors tenim

$$\begin{aligned}\max(x,y) &= S(\max(x,y),0) = S(\max(x,y),U(\min(x,y),0)) \\ &= U(S(\max(x,y),\min(x,y)),S(\max(x,y),0)) = U(S(x,y),\max(x,y)) = S(x,y),\end{aligned}$$

donat que U és idempotent. Llavors, $S(x,y) = \max(x,y)$ per tot (x,y) satisfent $\min(x,y) \leqslant e \leqslant \max(x,y)$. □

Ara tenim el resultat següent.

Teorema 3.2.32 *Sigui* S *una t-conorma i* U *una uninorma.* S *és distributiva sobre* U *si i només si* $S(x,y) = \max(x,y)$ *si* $\min(x,y) \leqslant e \leqslant \max(x,y)$ *i* U *és de* $\mathcal{U}_{\max}$ *i idempotent.*

Demostració: La necessitat queda demostrada pels lemes 3.2.30 i 3.2.31. La suficiència es demostra a la proposició 4.2 de [68]. □

Nota 3.2.33 *Notem que als lemes anteriors* S *és de fet una suma ordinal* $S = (\langle 0, e, S' \rangle, \langle e, 1, S'' \rangle)$ *essent* S' *i* S'' *t-conormes qualssevol (contínues o no). A la figura 11 es pot veure l'estructura general de les solucions.*

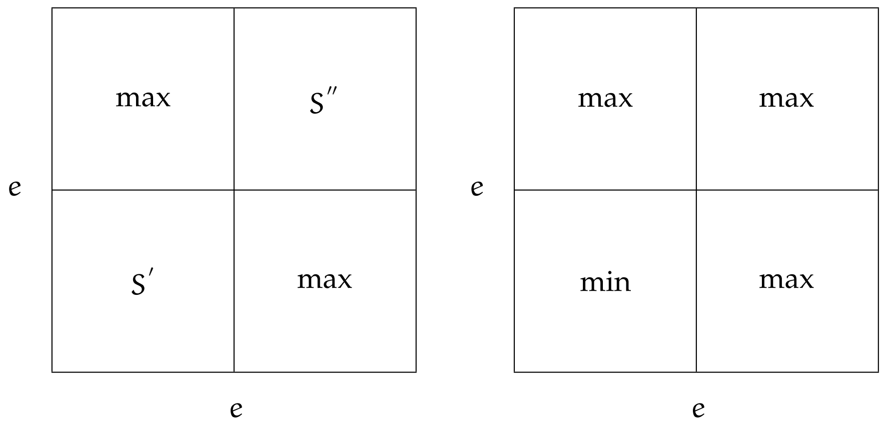

Figura 11. t-conorma S (esquerra) distributiva sobre una uninorma U (dreta).

3.2.4 *t-norma sobre uninorma*

Per acabar aquesta secció, estudiarem la distributivitat d'una t-norma sobre una uninorma. En aquest cas les demostracions són una altra vegada duals de les donades per t-conormes i obtenim el resultat general següent sense l'assumpció de continuïtat.

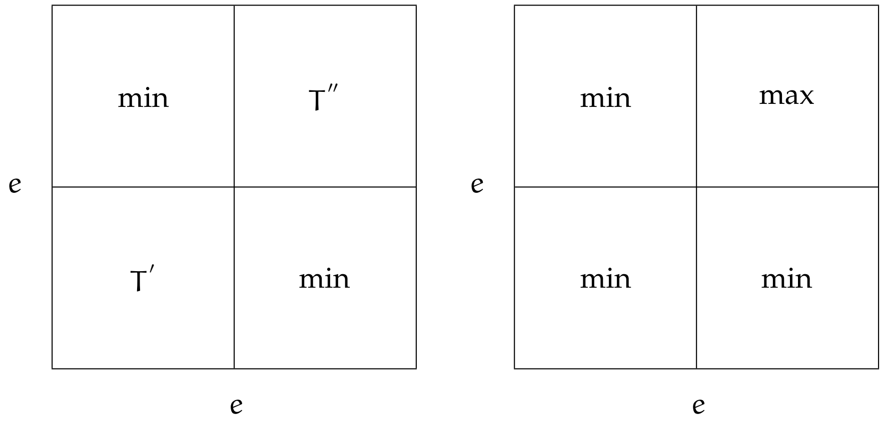

Figura 12. t-norma T (esquerra) distributiva sobre una uninorma U (dreta).

Teorema 3.2.34 *Sigui T una t-norma i U una uninorma amb element neutre e. Llavors T és distributiva sobre U si i només si U és idempotent, U és de $\mathcal{U}_{\min}$ i T és una suma ordinal de la forma $T = (\langle 0, e, T'' \rangle, \langle e, 1, T'' \rangle)$.*

A la figura 12, es pot observar l'estructura general de les solucions.
A la taula 1 es resumeixen tots els resultats obtinguts en aquesta secció.

U_1 \ U_2	t-conorma contínua	t-norma contínua	uninorma
uninorma	teorema 3.2.18 (D) $\Leftrightarrow$ (CD)	teorema 3.2.29 (D) $\Leftrightarrow$ (CD)	resolt més endavant a la secció 3.4
t-conorma	(D) $U_2 = S_{\mathbf{M}}$	(D) $U_2 = T_{\mathbf{M}}$	teorema 3.2.32
t-norma	(D) $U_2 = S_{\mathbf{M}}$	(D) $U_2 = T_{\mathbf{M}}$	teorema 3.2.34

Taula 1. Resultats de l'equació de distributivitat de t-normes i t-conormes amb uninormes.

3.3 UNINORMES IDEMPOTENTS

Ja hem comentat que l'equació de distributivitat ha estat resolta per uninormes de $\mathcal{U}_{\min}$ i de $\mathcal{U}_{\max}$. El que volem fer en aquest apartat és resoldre-la per uninormes idempotents, i deixar el cas general (uninormes en qualsevol de les classes conegudes), pel pròxim apartat. A la primera part estudiem l'equació de distributivitat per a uninormes idempotents en general, després per als casos de continuïtat lateral, i a la darrera part ens centrem en estudiar la propietat de modularitat, que en el cas d'uninormes idempotents està molt relacionada amb la distributivitat.

3.3.1 *Cas general*

Dividirem aquest estudi en tres casos, depenent dels elements neutres de les uninormes U_1 i U_2. És a dir, els casos $e_1 = e_2 = e$, $e_1 < e_2$ i $e_2 < e_1$.

El primer cas es resol en el següent teorema on es demostra, en particular, que qualsevol uninorma idempotent és auto-distributiva.

Teorema 3.3.1 *Siguin U_1 i U_2 dues uninormes idempotents amb element neutre e. Aleshores U_1 és distributiva sobre U_2 si i només si $U_1 = U_2$.*

Demostració: Primer demostrem l'auto-distributivitat. Sigui ara $U = U_1 = U_2$ una uninorma idempotent, sabem pel teorema 2.2.13 que per a tots $x, y \in [0,1]$

$$U(x,y) \in \{x,y\},$$

i aleshores:

- Si $U(x,y) = x$, tenim $U(U(x,y),x) = U(x,x) = x = U(x,y)$.
- Si $U(x,y) = y$, aleshores $U(U(x,y),x) = U(y,x)$.

Conseqüentment se segueix que

$$U(U(x,y),x) = U(x,y).$$

Aleshores, emprant associativitat, tenim que per a tots x, y i $z \in [0,1]$:

$$U(U(x,y),U(x,z)) = U(U(U(x,y),x),z) = U(U(x,y),z) = U(x,U(y,z)),$$

per tota uninorma idempotent U.

Recíprocament, vegem que si tenim dues uninormes U_1 i U_2 satisfent que U_1 és distributiva sobre U_2, aleshores $U_1 = U_2$. Per veure-ho, donats a i $b \in [0,1]$, considerem dos casos:

- Si $U_1(a,b) = b$, prenent $x = a$, $y = b$ i $z = e$ a (D) tenim:

  $$U_1(a,b) = U_1(a,U_2(b,e)) = U_2(U_1(a,b),U_1(a,e)) = U_2(b,a) = U_2(a,b),$$

  i aleshores $U_1(a,b) = U_2(a,b)$.

- Si $U_1(a,b) = a$, prenent $x = b$, $y = a$ i $z = e$ a (D) tenim, de manera similar al cas anterior,

  $$U_1(a,b) = U_1(b,a) = U_1(b,U_2(a,e)) = U_2(U_1(b,a),U_1(b,e)) = U_2(a,b).$$

Aleshores si $e_1 = e_2 = e$, es té que $U_1 = U_2$. □

De fet, les uninormes idempotents són les úniques uninormes auto-distributives, com es demostra en el resultat següent.

Teorema 3.3.2 *Una uninorma $U \in \mathcal{U}(e)$ és auto-distributiva si i només si és idempotent.*

Demostració: Pel resultat anterior, basta veure que si una uninorma és auto-distributiva aleshores és idempotent. Per això basta aplicar $y = z = e$ en (D)

$$x = U(x, U(e, e)) = U(U(x, e), U(x, e)) = U(x, x)$$

i per tant $U(x, x) = x$ per tot $x \in [0, 1]$ és a dir, U és idempotent. □

Ara anem al cas que $e_1 < e_2$. Comencem amb uns resultats parcials.

Lema 3.3.3 *Siguin* $U_1 \equiv \langle g_1, e_1 \rangle_{\text{ide}}$ *i* $U_2 \equiv \langle g_2, e_2 \rangle_{\text{ide}}$*, amb* $e_1 < e_2$*. Si* U_1 *és distributiva sobre* U_2*,* g_2 *és constant a l'interval* $[e_1, e_2]$*.*

Demostració: Suposem que g_2 no és constant a $[e_1, e_2]$ i que U_1 és distributiva sobre U_2. Llavors existeixen x i y tals que $e_1 \leqslant y < x \leqslant e_2$ i $g_2(x) < g_2(y)$ pel decreixement de g_2. Aleshores considerem $z \in [0, 1]$ tal que $g_2(x) < z < g_2(y)$. Com que g_1 i g_2 són decreixents i $g_1(e_1) = e_1$ i $g_2(e_2) = e_2$, tenim el següent

$$g_1(x) \leqslant g_1(y) \leqslant e_1 \leqslant y < x \leqslant e_2 \leqslant g_2(x) < z < g_2(y),$$

i aleshores pel teorema 2.2.14 tenim

$$U_1(x, y) = \max(x, y) = x, \quad U_1(x, z) = \max(x, z) = z,$$

que implica:

$$U_2(U_1(x, y), U_1(x, z)) = U_2(x, z) = \max(x, z) = z.$$

Per una altra part

$$U_2(y, z) = \min(y, z) = y$$

i

$$U_1(x, U_2(y, z)) = U_1(x, y) = \max(x, y) = x.$$

Això ens duu a una contradicció amb l'equació (D), i conseqüentment, si U_1 és distributiva sobre U_2, g_2 ha de ser constant a $[e_1, e_2]$. □

Nota 3.3.4 *Que* g_2 *sigui constant a l'interval* $[e_1, e_2]$ *vol dir que* $g_2(x) = e_2$ *per a tot* $x \in [e_1, e_2]$.

Proposició 3.3.5 *Siguin* $U_1 \equiv \langle g_1, e_1 \rangle_{\text{ide}}$ *i* $U_2 \equiv \langle g_2, e_2 \rangle_{\text{ide}}$*, amb* $e_1 < e_2$*. Si* U_1 *és distributiva sobre* U_2*,* g_1 *i* g_2 *satisfan les propietats següents:*

(i) $g_1(x) \leqslant g_2(x)$ *per tot* $x \in [0, 1]$.

(ii) Si $g_1(x) < g_2(x)$ *aleshores* $x \leqslant e_2$ *i* $g_2(x) = e_2$.

Demostració: Dividim la demostració de *(i)* en tres casos:

- Quan $e_1 \leqslant x \leqslant e_2$. En aquest cas el resultat és trivial perquè, pel lema anterior,

$$g_1(x) \leqslant e_1 < e_2 = g_2(x).$$

- Quan $x < e_1$. Suposem que existeix $x < e_1$ amb $g_2(x) < g_1(x)$. Aleshores podem agafar a i b satisfent $g_2(x) < a < g_1(x)$ i $e_1 < b < e_2$. Com que g_1 i g_2 són decreixents tenim

  $$g_1(a) \leqslant e_1 < b < e_2 \leqslant g_2(x) < a < g_1(x)$$

  i aleshores

  $$U_1(a, b) = \max(a, b) = a, \quad U_1(a, x) = \min(a, x) = x$$

  i

  $$U_2(U_1(a, b), U_1(a, x)) = U_2(a, x) = \max(a, x) = a.$$

  Però també

  $$U_2(b, x) = \min(b, x) = x,$$

  que implica que $U_1(a, U_2(b, x)) = U_1(a, x) = x$, obtenint una contradicció amb que U_1 i U_2 satisfacin (D).

- Finalment quan $x > e_2$. En aquest cas suposem que existeix $x > e_2$ tal que $g_2(x) < g_1(x)$ i prenem y i z satisfent $g_2(x) < y < g_1(x)$ i $e_1 < z < e_2$. Com al cas anterior, obtenim

  $$U_2(U_1(x, y), U_1(x, z)) = U_2(y, x) = x,$$

  mentre que

  $$U_1(x, U_2(y, z)) = U_1(x, y) = y,$$

  obtenint de nou una contradicció.

Llavors *(i)* queda demostrat.

Per demostrar *(ii)*, suposem $x \in [0, 1]$ tal que $g_1(x) < g_2(x)$ i dividim la demostració en dos passos:

- Primer demostrem que $x \leqslant e_2$. Suposem contràriament que $x > e_2$, pel lema anterior sabem que $g_2(e_1) = e_2 < x$ i aleshores

  $$U_2(e_1, x) = \max(e_1, x) = x$$

  d'on deduïm que $e_1 \geqslant g_2(x)$. Però ara agafant $a \in [0, 1]$ tal que $g_1(x) < a < g_2(x)$ tenim la situació següent:

  $$g_1(x) < a < g_2(x) \leqslant e_1 < e_2 = g_2(e_1) < x$$

  que implica:

  $$U_2(U_1(a, e_1), U_1(a, x)) = U_2(a, x) = a$$

  i també

  $$U_1(a, U_2(e_1, x)) = U_1(a, x) = x.$$

  Però això és una contradicció i podem concloure que no existeix cap $x > e_2$ amb $g_1(x) \neq g_2(x)$.

- Finalment, demostrem que $g_2(x) = e_2$. Pel pas anterior tenim que $x \leqslant e_2$ i podem distingir dos casos:
  - quan $x \in [e_1, e_2]$, pel lema anterior, ja sabem que $g_2(x) = e_2$ i aleshores no hi ha res per demostrar.
  - quan $x < e_1$. Suposem que $g_2(x) > e_2$. Podem agafar y satisfent $g_2(x) > y > \max(g_1(x), e_2)$ i aleshores tenim
    $$U_2(U_1(x,y), U_1(x, e_1)) = U_2(y, x) = x$$
    i també
    $$U_1(x, U_2(y, e_1)) = U_1(x, y) = y$$
    obtenint contradicció.

  Aleshores necessàriament $g_2(x) = e_2$ per tot x tal que $g_1(x) < g_2(x)$.

Llavors *(ii)* queda demostrat. □

Proposició 3.3.6 *Siguin $U_1 \equiv \langle g_1, e_1\rangle_{\text{ide}}$ i $U_2 \equiv \langle g_2, e_2\rangle_{\text{ide}}$, amb $e_1 < e_2$. Si U_1 és distributiva sobre U_2, g_1 i g_2 satisfan la propietat següent:*
Si existeixen x i z satisfent $g_1(z) = g_2(z) = x$ i $g_1(x) = g_2(x) = z$, llavors $U_1(x,z) = U_2(x,z)$.

Demostració: Considerem x i $z \in [0, 1]$ amb:

$$z = g_1(x) = g_2(x) \qquad \text{i} \qquad x = g_1(z) = g_2(z)$$

i suposem que $U_1(x,z) \neq U_2(x,z)$. Clarament, $x \neq z$ perquè U_1 i U_2 són idempotents i podem suposar $x < z$, ja que el cas $z < x$ segueix per commutativitat.

Aleshores, suposem $x < z$ i dividim el nostre raonament en tres casos:

- Si $z \leqslant e_2$. Aleshores tenim també que $x \leqslant e_2$ i aleshores $g_2(x) = z \geqslant e_2$ perquè g_2 és decreixent. Això vol dir que $z = e_2$ i llavors $x = g_2(e_2) = e_2$, que és una contradicció, perquè $x < z$.

- Si $x \geqslant e_1$. Aleshores de manera similar obtenim la contradicció $x = z = e_1$.

- Si $x < e_1 < e_2 < z$. En aquest cas tenim la situació següent:

  $$x < e_1 = g_1(e_1) < e_2 = g_2(e_1) < z = g_1(x)$$

  i distingim entre dos casos:

  1. Si $U_1(x,z) = z$ i $U_2(x,z) = x$ obtenim contradicció perquè
     $$U_2(U_1(x, e_1), U_1(x,z)) = U_2(x,z) = x$$
     mentre que
     $$U_1(x, U_2(e_1, z)) = U_1(x,z) = z.$$
  2. Si $U_1(x,z) = x$ i $U_2(x,z) = z$. En aquest cas obtenim també una contradicció perquè
     $$U_1(z, U_2(x, e_1)) = U_1(z,x) = x$$
     però
     $$U_2(U_1(z,x), U_1(z, e_1)) = U_2(x,z) = z.$$

Per tant $U_1(x,z) = U_2(x,z)$. □

Les dues proposicions anteriors ens donen condicions necessàries perquè U_1 sigui distributiva sobre U_2, amb U_1 i U_2 uninormes idempotents. Demostrem ara que són suficients.

Teorema 3.3.7 *Siguin* $U_1 \equiv \langle g_1, e_1 \rangle_{\text{ide}}$ *i* $U_2 \equiv \langle g_2, e_2 \rangle_{\text{ide}}$. *Si* $e_1 < e_2$, *aleshores* U_1 *és distributiva sobre* U_2 *si i només si se satisfan les propietats següents:*

(i) $g_1(x) \leqslant g_2(x)$ *per a tot* $x \in [0, 1]$.

(ii) *Si* $g_1(x) < g_2(x)$ *aleshores* $g_2(x) = e_2$ *i* $x \leqslant e_2$.

(iii) *Si existeixen* x *i* z *satisfent* $g_1(z) = g_2(z) = x$ *i* $g_1(x) = g_2(x) = z$, *aleshores* $U_1(x, z) = U_2(x, z)$.

En particular, en aquests casos, g_2 *és constantment igual a* e_2 *a l'interval* $[e_1, e_2]$.

DEMOSTRACIÓ: Com ja hem dit, si U_1 i U_2 satisfan l'equació (D), aleshores g_1 i g_2 satisfan les propietats *(i)*, *(ii)*, *(iii)*, per les proposicions anteriors, de les quals es deriva també que $g_2(x) = e_2$ per a tot $x \in [e_1, e_2]$.

Recíprocament, considerem $U_1 \equiv \langle g_1, e_1 \rangle_{\text{ide}}$ i $U_2 \equiv \langle g_2, e_2 \rangle_{\text{ide}}$ satisfent *(i)*, *(ii)*, *(iii)*. Demostrarem que U_1 és distributiva sobre U_2 distingint quatre casos:

1) Si $U_1(x, y) = U_1(x, z) = x$, aleshores:

$$U_2(U_1(x, y), U_1(x, z)) = U_2(x, x) = x \quad \text{i} \quad U_1(x, U_2(y, z)) = x$$

i llavors U_1 i U_2 satisfan (D).

2) Si $U_1(x, y) = y$ i $U_1(x, z) = z$ aleshores tenim:

$$U_2(U_1(x, y), U_1(x, z)) = U_2(y, z) \quad \text{i } U_1(x, U_2(y, z)) = U_2(y, z),$$

i en aquest cas també se satisfà (D).

3) Si $U_1(x, y) = x$ i $U_1(x, z) = z$, vegem que (D) se satisfà si algun dels valors de x, y, z coincideixen.

- Si $x = y$, aleshores
$$\begin{aligned} U_1(x, U_2(x, z)) &= U_2(x, z) \\ U_2(U_1(x, x), U_1(x, z)) &= U_2(x, z), \end{aligned}$$
ja que $U_2(x, z) \in \{x, z\}$.
- Si $x = z$, aleshores
$$\begin{aligned} U_1(x, U_2(y, x)) &= x \\ U_2(U_1(x, y), U_1(x, x)) &= U_2(x, x) = x \end{aligned}$$
ja que $U_2(y, x) \in \{x, y\}$.
- Si $y = z$, aleshores tenim $U_1(x, z) = U_1(x, y) = x = z$ i se segueix que $x = y = z$ i es compleix (D) trivialment.

Aleshores, pels casos en què x, y, z són tots diferents, tindrem les sis possibilitats següents, depenent de l'ordre de x, y, z:

(a) $x < y < z$ (b) $x < z < y$
(c) $y < x < z$ (d) $y < z < x$
(e) $z < x < y$ (f) $z < y < x$

(a) Quan $x < y < z$. Com que $U_1(x,y) = \min(x,y) = x$ i $U_1(x,z) = \max(x,z) = z$, tenim

$$g_1(z) \leqslant x < y \leqslant g_1(x) \leqslant z. \tag{3.6}$$

A més a més, per la propietat *(i)*, $g_1(z) \leqslant g_2(z)$ i tenim les següents dues possibilitats:

– $g_1(z) < g_2(z)$. En aquest cas, per la propietat *(ii)*, tenim $z \leqslant e_2$ i $g_2(z) = e_2$ i llavors, com que $y < z$,

$$U_1(x, U_2(y,z)) = U_1(x,y) = x$$

mentre que

$$U_2(U_1(x,y), U_1(x,z)) = U_2(x,z) = x$$

i l'equació (D) és satisfeta.

– $g_1(z) = g_2(z)$. En aquest cas, tenim a partir de (3.6) que

$$U_1(x, U_2(y,z)) = U_1(x,z) = z$$

i per una altra part

$$U_2(U_1(x,y), U_1(x,z) = U_2(x,z).$$

* Si $g_2(z) < x$ o $g_2(x) < z$, aleshores $U_2(x,z) = z$.
* Si $g_1(z) = g_2(z) = x$ i $g_2(x) > z$, com que $g_1(x) \leqslant z < g_2(x)$, la propietat *(ii)* ens assegura que $x \leqslant e_2 = g_2(x)$ però això és una contradicció perquè $z < e_2$ i $g_2(z) = x < z < e_2$.
* Si $g_1(z) = g_2(z) = x$ i $g_2(x) = z > g_1(x)$, obtenim una contradicció similar.
* Si $g_1(z) = g_2(z) = x$ i $g_2(x) = z = g_1(x)$, aleshores la propietat *(iii)* ens diu que $U_2(x,z) = U_1(x,z) = z$.

Conseqüentment la equació (D) també se satisfà.

(b) Quan $x < z < y$, aquest cas no es pot donar, ja que

$$U_1(x,y) = x \text{ vol dir que } y \leqslant g_1(x)$$

$$U_1(x,z) = z \text{ vol dir que } z \geqslant g_1(x)$$

i per tant, que $y \leqslant z$, que dóna una contradicció.

(c) En el cas en què $y < x < z$, llavors

$$U_1(x,y) = x \text{ vol dir que } x \geqslant g_1(y) \text{ i } y \geqslant g_1(x)$$

$$U_1(x,z) = z \text{ vol dir que } z \geqslant g_1(x) \text{ i } x \geqslant g_1(z).$$

– Si $g_1(z) < g_2(z)$, aleshores $g_2(z) = e_2$ i $z \leqslant e_2$ i per tant tenim

$$y < x < z \leqslant e_2 = g_2(z)$$

i llavors obtenim

$$U_2(U_1(x,y), U_1(x,z)) = U_2(x,z) = x$$

i també

$$U_1(x, U_2(y,z)) = U_1(x,y) = x$$

- Si $g_1(z) = g_2(z) \leqslant g_1(x) \leqslant y$, distingim dos casos:
  * Si $g_2(z) < y < x$, llavors $U_2(x,z) = z$ i $U_1(x, U_2(y,z)) = U_1(x,z) = z$.
  * Si $g_2(z) = y < x$, tindrem que $U_2(x,z) = z$. Ara distingim dos casos més:
    · Si $g_1(y) = g_2(y)$ aleshores tenim $g_1(y) = g_2(y) \leqslant x < z$ i

$$U_1(x, U_2(y,z)) = U_1(x,z) = z$$

i queda vist aquest cas.

    · Si $g_1(y) < g_2(y)$, aleshores $g_2(y) = e_2$ i $y \leqslant e_2$. Si suposem $z \leqslant e_2 = g_2(y)$, tenim $y = g_2(z) \geqslant e_2$, que és una contradicció. Així, necessàriament tenim $z > e_2$ i aleshores

$$U_1(x, U_2(y,z)) = U_1(x,z) = z.$$

(d) El cas en què $y < z < x$, tampoc es pot donar, ja que

$$U_1(x,y) = x \text{ vol dir que } g_1(x) \leqslant y$$

$$U_1(x,z) = z \text{ vol dir que } z \geqslant g_1(x)$$

i per tant, que $z \leqslant y$, que dóna una contradicció.

(e) Si $z < x < y$, aleshores

$$U_1(x,y) = x \text{ vol dir que } x \leqslant g_1(y) \text{ i } y \leqslant g_1(x)$$

per tant, tenim les desigualtats següents, emprant la propietat *(i)*:

$$z < x \leqslant g_1(y) \leqslant g_2(y)$$

que implica

$$U_1(x, U_2(y,z)) = U_1(x,z) = z$$

i també

$$z < x < y \leqslant g_1(x) \leqslant g_2(x)$$

que vol dir

$$U_2(U_1(x,y), U_1(x,z)) = U_2(x,z) = z.$$

(f) Si $z < y < x$, aleshores

$$U_1(x,z) = z \text{ vol dir que } z \leqslant g_1(x) \text{ i } x \leqslant g_1(z),$$

emprant la condició *(i)*, tenim

$$y < x \leqslant g_1(z) \leqslant g_2(z)$$

i per tant

$$U_1(x, U_2(y,z)) = U_1(x,z) = z$$

i ara haurem de calcular

$$U_2(U_1(x,y), U_1(x,z)) = U_2(x,z).$$

- Si $g_1(z) < g_2(z)$, aleshores $x < g_2(z)$ i per tant $U_2(x,z) = \min(x,z) = z$.
- Si $g_1(x) < g_2(x)$, llavors $z < g_2(x)$ i $U_2(x,z) = \min(x,z) = z$.
- Si $x < g_1(z) = g_2(z)$, aleshores $U_2(x,z) = \min(x,z) = z$.

- Si $z < g_1(x) = g_2(x)$, aleshores $U_2(x,z) = \min(x,z) = z$.
- Si $z = g_1(x) = g_2(x)$ i $x = g_1(z) = g_2(z)$, aleshores emprant la condició *(iii)*, $U_2(x,z) = U_1(x,z) = z$.

Aleshores $U_2(x,z) = z$ en tots els casos, i (D) se satisfà.

4) Si $U_1(x,y) = y$ i $U_1(x,z) = x$, és el mateix cas que l'anterior, canviant z per y i y per z.

Per tant podem concloure que U_1 és distributiva sobre U_2 si se satisfan les propietats *(i)-(ii)-(iii)*. □

Exemple 3.3.8 *Considerem les funcions g_1 i g_2 definides per:*

$$g_1(x) = \begin{cases} 1-x & \textit{si } x < 0.25 \text{ ò } x > 0.75 \\ 0.25 & \textit{si } x \in [0.25, 0.75] \end{cases}$$

$$g_2(x) = \begin{cases} 1-x & \textit{si } x < 0.25 \text{ ò } x > 0.75 \\ 0.5 & \textit{si } x \in [0.25, 0.5] \\ 0.25 & \textit{si } x \in]0.5, 0.75] \end{cases}$$

i siguin $U_1 \equiv \langle g_1, e_1 \rangle_{\mathrm{ide}}$ i $U_2 \equiv \langle g_2, e_2 \rangle_{\mathrm{ide}}$, generades a partir de g_1 i g_2 com segueix:

$$U_1(x,y) = \begin{cases} \min(x,y) & \textit{si } y < g_1(x) \textit{ o } (g_1(x) = y \textit{ i } x < 0.25 \textit{ o } x > 0.75) \\ \max(x,y) & \textit{altrament} \end{cases}$$

$$U_2(x,y) = \begin{cases} \min(x,y) & \textit{si } y < g_2(x) \textit{ o } (g_2(x) = y \textit{ i } x > 0.5 \textit{ o } x < 0.75) \\ \max(x,y) & \textit{altrament} \end{cases}$$

Tenim que $e_1 = 0.25$ i $e_2 = 0.5$ i és fàcil veure que U_1 i U_2 satisfan les propietats (i) i (ii) del teorema. Emperò, no satisfan la condició (iii), ja que, per $x = 0.125$ i $z = 0.875$ tenim:

$$g_1(z) = g_2(z) = x = 0.125, \quad z = g_1(x) = g_2(x) = 0.875,$$

mentre que

$$U_1(0.125, 0.875) = \min(x,z) = 0.125, \quad U_2(0.125, 0.875) = \max(x,z) = 0.875.$$

Conseqüentment, U_1 i U_2 ens donen un exemple d'uninormes en què U_1 no és distributiva sobre de U_2, de fet tenim

$$U_1(0.875, U_2(0.125, 0.25)) = U_1(0.875, 0.125) = 0.125$$

i per l'altra banda

$$U_2(U_1(0.875, 0.125), U_1(0.875, 0.125)) = U_2(0.125, 0.875) = 0.875.$$

Les funcions g_1 i g_2 d'aquest exemple es poden observar a la figura 13.

Notem que només canviant $U_2(x,y)$ de manera que $U_2(x,y) = \min(x,y)$ quan $y = g_2(x)$ i $x < 0.25$ o $x > 0.75$, llavors U_1 seria distributiva sobre U_2, (o canviant $U_1(x,y)$ de manera que $U_1(x,y) = \max(x,y)$ en tots aquests punts).

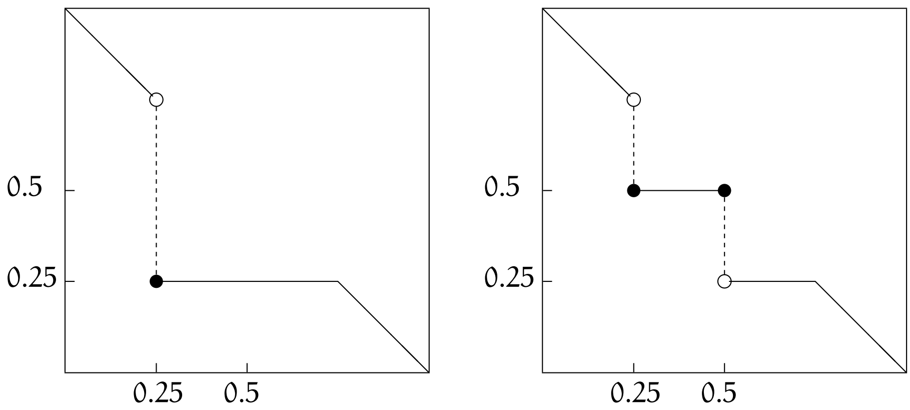

Figura 13. Funcions g_1 (esquerra) i g_2 (dreta) associades a U_1 i U_2 de l'exemple 3.3.8.

Per acabar, queda el cas en què $e_2 < e_1$. Aquest cas es pot derivar de l'anterior per dualitat, com veurem a continuació.

Teorema 3.3.9 *Siguin* $U_1 \equiv \langle g_1, e_1 \rangle_{\text{ide}}$ *i* $U_2 \equiv \langle g_2, e_2 \rangle_{\text{ide}}$. *Si* $e_1 > e_2$, *aleshores* U_1 *és distributiva sobre* U_2 *si i només si se satisfan les propietats següents:*

(i) $g_2(x) \leqslant g_1(x)$ *per a tot* $x \in [0, 1]$.

(ii) *Si* $g_2(x) < g_1(x)$ *llavors* $g_2(x) = e_2$ *i* $x \geqslant e_2$.

(iii) *Si existeixen* x *i* z *satisfent* $g_1(z) = g_2(z) = x$ *i* $g_1(x) = g_2(x) = z$, *aleshores* $U_1(x, z) = U_2(x, z)$.

En particular, en aquests casos, g_2 *és constantment igual a* e_2 *a l'interval* $[e_2, e_1]$.

DEMOSTRACIÓ: Considerem les uninormes duals respecte de N: $\widetilde{U}_{1,N}$ i $\widetilde{U}_{2,N}$ (definició 2.2.32). Sabem pel teorema 2.2.34 que són uninormes idempotents amb elements neutres $\widetilde{e}_1 = N(e_1)$ i $\widetilde{e}_2 = N(e_2)$. Siguin $\widetilde{g}_1$ i $\widetilde{g}_2$ les corresponents funcions associades a $\widetilde{U}_{1,N}$ i $\widetilde{U}_{2,N}$. Sabem que $\widetilde{g}_i(x) = N(g_i(N(x)))$ per a $i = 1, 2$. Ara, com que U_1 és distributiva sobre U_2, pel lema 3.1.7, $\widetilde{U}_{1,N}$ és distributiva sobre $\widetilde{U}_{2,N}$.

Aleshores, com que $\widetilde{e}_1 < \widetilde{e}_2$, podem aplicar el teorema anterior i obtenim que U_1 i U_2 satisfan (D) si i només ho fan $\widetilde{U}_{1,N}$ i $\widetilde{U}_{2,N}$, és a dir, si i només si es verifica:

(i) $\widetilde{g}_1(t) \leqslant \widetilde{g}_2(t)$ per a tot $t \in [0, 1]$.

(ii) Si $\widetilde{g}_1(t) < \widetilde{g}_2(t)$ llavors $\widetilde{g}_2(t) = \widetilde{e}_2$ i $t \leqslant \widetilde{e}_2$.

(iii) Si existeixen t i v satisfent $\widetilde{g}_1(v) = \widetilde{g}_2(v) = t$ i $\widetilde{g}_1(t) = \widetilde{g}_2(t) = v$, llavors $\widetilde{U}_{1,N}(t, v) = \widetilde{U}_{2,N}(t, v)$.

I emprant les igualtats $\widetilde{g}_i(t) = N(g_i(N(t)))$ i $\widetilde{e}_i = N(e_i)$, obtenim que U_1 és distributiva sobre U_2 si i només si

(i) $N(g_1(N(t))) \leqslant N(g_2(N(t)))$ per a tot $t \in [0, 1]$.

(ii) Si $N(g_1(N(t))) < N(g_2(N(t)))$ llavors $N(g_2(N(t))) = N(e_2)$ i $t \leqslant N(e_2)$.

(iii) Si existeixen t i v que satisfan $N(g_1(N(v))) = N(g_2(N(v))) = t$ i a la vegada també $N(g_1(N(t))) = N(g_2(N(t))) = v$, llavors és compleix la igualtat $N(U_1(N(t), N(v))) = N(U_2(N(t), N(v)))$.

Tot això és equivalent a

(i) $g_1(N(t)) \geqslant g_2(N(t))$ per a tot $t \in [0, 1]$,

(ii) Si $g_1(N(t)) > g_2(N(t))$ llavors $g_2(N(t)) = e_2$ i $N(t) \geqslant e_2$

(iii) Si existeixen t i v satisfent $g_1(N(v)) = g_2(N(v)) = N(t)$ i $g_1(N(t)) = g_2(N(t)) = N(v)$, aleshores es compleix la igualtat $U_1(N(t), N(v)) = U_2(N(t), N(v))$.

Ara, com que el rang de t i de v és $[0, 1]$, fent el canvi $x = N(t)$ i $z = N(v)$, s'obté el resultat. □

Finalment, acabem aquesta part amb el problema dels parells distributius. Emprant els teoremes anteriors, tenim el resultat següent.

Teorema 3.3.10 *Siguin* $U_1 \equiv \langle g_1, e_1 \rangle_{\text{ide}}$ *i* $U_2 \equiv \langle g_2, e_2 \rangle_{\text{ide}}$, *amb* $e_2 < e_1$. *Aleshores* (U_1, U_2) *és un parell distributiu si i només si se satisfan les propietats següents:*

(i) g_2 *és constant a* $[e_2, e_1]$, *és a dir,* $g_2(x) = e_2$ *per tot* $x \in [e_2, e_1]$.

(ii) g_1 *és constant a* $[e_2, e_1]$, *és a dir,* $g_1(x) = e_1$ *per tot* $x \in [e_2, e_1]$.

(iii) $g_1(x) = g_2(x)$ *per tot* $x \in [0, 1] \backslash [e_2, e_1]$.

(iv) *Si existeixen* x *i* z *satisfent* $g_1(z) = g_2(z) = x$ *i* $g_1(x) = g_2(x) = z$, *llavors* $U_1(x, z) = U_2(x, z)$.

Demostració: Una aplicació successiva dels teoremes 3.3.7 i 3.3.9 demostra el resultat. En efecte, si U_1 és distributiva sobre U_2, aleshores

- $g_2(x) \leqslant g_1(x)$ per a tot $x \in [0, 1]$.
- Si $g_2(x) < g_1(x)$ aleshores $g_2(x) = e_2$ i $x \geqslant e_2$
- Si existeixen x i z satisfent $g_1(z) = g_2(z) = x$ i $g_1(x) = g_2(x) = z$, aleshores $U_1(x, z) = U_2(x, z)$.

Igualment, si U_2 és distributiva sobre U_1, en aquest cas $e_2 < e_1$, i per tant haurem d'aplicar el teorema 3.3.7, és a dir

- $g_2(x) \leqslant g_1(x)$ per a tot $x \in [0, 1]$.
- Si $g_2(x) < g_1(x)$ llavors $g_1(x) = e_1$ i $x \leqslant e_1$.
- Si existeixen x i z satisfent $g_1(z) = g_2(z) = x$ i $g_1(x) = g_2(x) = z$, aleshores $U_1(x, z) = U_2(x, z)$.

d'aquestes propietats anteriors, tenim trivialment els dos primers punts, ja que $g_2(e_2) = e_2 < e_1 = g_1(e_1) \leqslant g_1(e_2)$ i aleshores $g_1(e_2) = e_1$ i podem escriure que

$$g_2(e_1) \leqslant g_2(e_2) = e_2 < e_1 = g_1(e_1)$$

i per tant $g_2(e_1) = e_2$. Ara, si $x \in [0, 1] \setminus [e_2, e_1]$ i $g_2(x) < g_1(x)$ tindríem contradicció, perquè voldria dir que $x \leqslant e_1$ i $x \geqslant e_2$. Llavors $g_1(x) = g_2(x)$ per tot $x \in [0, 1] \setminus [e_2, e_1]$. La darrera propietat es desprén directament. □

Vegem ara un exemple de família de parells distributius d'uninormes idempotents.

Exemple 3.3.11 *Considerem* $0 < e_2 < e_1 < 1$*, llavors construïm el següent parell distributiu d'uninormes idempotents com segueix. Primer donem les funcions associades*

$$g_1(x) = \begin{cases} \left(\frac{e_1 - 1}{e_2}\right) x + 1 & \textit{si } x < e_2 \\ e_1 & \textit{si } x \in [e_2, e_1] \\ \frac{e_2}{e_1 - 1}(x - 1) & \textit{si } x > e_1 \end{cases} \qquad g_2(x) = \begin{cases} \left(\frac{e_1 - 1}{e_2}\right) x + 1 & \textit{si } x < e_2 \\ e_2 & \textit{si } x \in [e_2, e_1] \\ \frac{e_2}{e_1 - 1}(x - 1) & \textit{si } x > e_1 \end{cases}$$

i les uninormes definides per:

$$U_1(x,y) = \begin{cases} \min(x,y) & \textit{si } y \leqslant g_1(x) \\ \max(x,y) & \textit{altrament.} \end{cases}$$

$$U_2(x,y) = \begin{cases} \min(x,y) & \textit{si } y < g_2(x) \\ \min(x,y) & \textit{si } g_2(x) = y \textit{ i } (x < e_2 \textit{ o } x > e_1) \\ \max(x,y) & \textit{altrament.} \end{cases}$$

Aleshores (U_1, U_2) *és un parell distributiu perquè satisfà les propietats del teorema. Les funcions* g_1 *i* g_2 *d'aquest exemple es poden veure en la figura 14.*

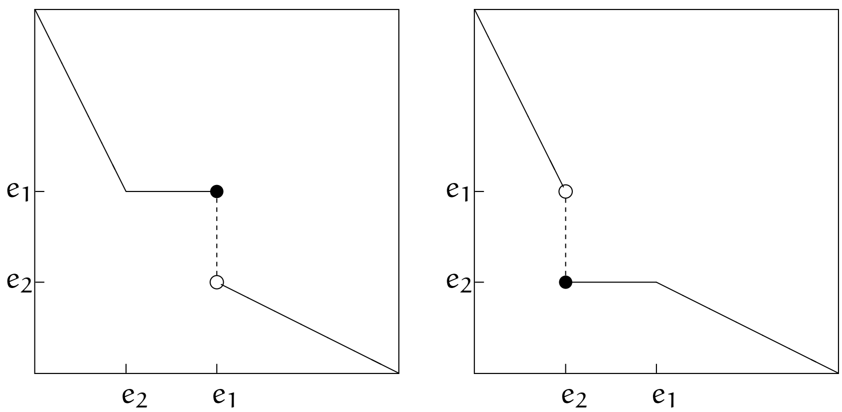

Figura 14. Funcions g_1 (esquerra) i g_2 (dreta) associades a les uninormes de l'exemple 3.3.11 que formen un parell distributiu.

$U_1 \equiv \langle g_1, e_1 \rangle_{\text{ide}}$ $U_2 \equiv \langle g_2, e_2 \rangle_{\text{ide}}$	U_1 distributiva sobre U_2	(U_1, U_2) parell distributiu
$e_1 = e_2$	$U_1 = U_2$ (teorema 3.3.1)	$U_1 = U_2$ (teorema 3.3.1)
$e_1 < e_2$	teorema 3.3.7	-
$e_2 < e_1$	teorema 3.3.9	teorema 3.3.10

Taula 2. Resultats de la distributivitat i parells distributius per a uninormes idempotents.

En la taula 2 es pot observar un resum de les solucions de (D) i dels parells distributius per a uninormes idempotents.

3.3.2 *Casos de continuïtat lateral*

A continuació estudiem els casos especials d'uninormes idempotents contínues per l'esquerra i contínues per la dreta, que tenen uns resultats més simples.

Corol·lari 3.3.12 *Siguin $U_1 \equiv \langle g_1, e_1 \rangle_{\text{ide}}$ i $U_2 \equiv \langle g_2, e_2 \rangle_{\text{ide}}$, amb $e_1 < e_2$. Si U_2 és contínua per la dreta, aleshores U_1 és distributiva sobre U_2 si i només si $U_2 = T_{\mathbf{M}}$.*

Demostració: Sabem, per la proposició 3.1.5 que qualsevol uninorma idempotent és distributiva sobre la uninorma mínim.

Recíprocament, com que U_2 és contínua per la dreta, sabem que (vegeu 2.2.19)

$$g_2(y) \leqslant x \Leftrightarrow g_2(x) \leqslant y \quad \text{per tots } x,\ y \in [g_2(1), 1].$$

El lema 3.3.3 ens diu que g_2 és constant a $[e_1, e_2]$, i que $g_2(e_1) = e_2$. Aleshores, si $g_1(1) = g_2(1)$ tenim:

$$g_2(1) = g_1(1) \leqslant g_1(e_1) = e_1 \ \text{ i } \ g_2(1) \leqslant g_2(e_2) = e_2,$$

i emprant la condició anterior, com que e_1, $e_2 \in [g_2(1), 1]$, tenim

$$g_2(e_1) \leqslant e_2 \Leftrightarrow g_2(e_2) = e_2 \leqslant e_1$$

que és una contradicció. Conseqüentment $g_1(1) < g_2(1)$, però aleshores tenim $g_2(1) = e_2$ i $1 \leqslant e_2$ per la proposició 3.3.5. Llavors $e_2 = 1$ i això implica que $U_2 = T_{\mathbf{M}}$. □

Corol·lari 3.3.13 *Siguin $U_1 \equiv \langle g_1, e_1 \rangle_{\text{ide}}$ i $U_2 \equiv \langle g_2, e_2 \rangle_{\text{ide}}$, amb $e_1 < e_2$. Si U_2 és contínua per l'esquerra i U_1 és contínua per la dreta, llavors U_1 és distributiva sobre U_2 si i només si*

- $g_1(x) \leqslant g_2(x)$ *per tot* $x \in [0, 1]$, *i*
- $g_2(x) = \begin{cases} e_2 & \text{si } x \leqslant e_2 \\ 0 & \text{si } x > e_2 \end{cases}$ *(és a dir, $U_2 \in \mathcal{U}_{\max}$).*

DEMOSTRACIÓ: Si U_1 i U_2 satisfan (D) ja sabem que $g_1(x) \leqslant g_2(x)$. Per demostrar l'altra condició, distingim quatre casos:

- Si $g_1(0) < g_2(0)$, aleshores per la proposició 3.3.5 tenim que $g_2(0) = e_2$ i com que U_2 és contínua per l'esquerra, el teorema 2.2.16 directament demostra que:

$$g_2(x) = \begin{cases} e_2 & \text{si } x \leqslant e_2 \\ 0 & \text{si } x > e_2 \end{cases}$$

- Si $g_1(0) = g_2(0) = e_2$, el teorema 2.2.16 una altra vegada demostra el resultat.

- Si $e_2 < g_1(0) = g_2(0) < 1$, sabem que per tot $x \in (g_2(0), 1]$, $g_2(x) = 0$ perquè g_2 és contínua per l'esquerra. Com que $g_1(x) \leqslant g_2(x)$, també tenim $g_1(x) = 0$ per tot $x \in (g_1(0), 1]$. Però, si g_1 és contínua per la dreta, $g_1(g_1(0)) = 0$ i com que $g_1(0) > e_2$, tenim $g_2(g_1(0)) = g_1(g_1(0)) = 0$ per la condició *(ii)* de la proposició 3.3.5. Aleshores, agafant $x = 0$ i $z = g_1(0)$ tenim la situació següent:

$$U_1(x, z) = U_1(0, g_1(0)) = \max(0, g_1(0)) = g_1(0)$$

$$U_2(x, z) = U_2(0, g_1(0)) = \min(0, g_1(0)) = 0.$$

  És a dir, $U_1(0, g_1(0)) = g_1(0) > e_2 > 0 = U_2(0, g_1(0))$, i això és una contradicció amb la condició *(iii)* del teorema 3.3.7 i llavors aquesta possibilitat no pot passar.

- Si $e_2 < g_1(0) = g_2(0) = 1$ tenim que $g_2(1) = g_1(1)$ aplicant la condició *(ii)* en el teorema 3.3.7.

  Suposem que $g_2(1) = g_1(1) > 0$, llavors tenim, emprant que U_1 és contínua per la dreta, $g_1(x) = 1$ per tot $x \in [0, g_1(1)[$, i com que $g_1(x) \leqslant g_2(x)$, $g_2(x) = g_1(x) = 1$ per tot $x \in [0, g_1(1)[$. Com que U_2 és contínua per l'esquerra, $g_2(g_2(1)) \geqslant 1$ i per tant $g_2(g_1(1)) = g_2(g_2(1)) = 1$. Si $g_1(g_1(1)) < g_2(g_1(1))$, tenim per la condició *(ii)* que $g_2(g_1(1)) = e_2 < 1$, llavors $g_1(g_1(1)) = g_2(g_1(1)) = 1$.

  Ara agafem $x = g_1(1)$ i $z = 1$ i tenim que $g_1(x) = g_2(x) = z$ i $g_1(z) = g_2(z) = g_1(1)$, però la condició *(iii)* del teorema 3.3.7 no se satisfà perquè:

$$U_2(1, g_1(1)) = \min(1, g_1(1)) = g_1(1) \leqslant e_2 < 1$$

  mentre que

$$U_1(1, g_1(1)) = \max(1, g_1(1)) = 1.$$

  Per una altra banda, si $g_1(1) = g_2(1) = 0$ com que $g_1(0) = g_2(0) = 1$, obtenim també una contradicció amb la condició *(iii)* del teorema 3.3.7 perquè:

$$U_1(1, 0) = \max(1, 0) = 1 \neq U_2(1, 0) = \min(1, 0) = 0$$

  Aleshores aquest cas no és possible.

Llavors l'única possibilitat és que

$$g_2(x) = \begin{cases} e_2 & \text{si } x \leqslant e_2 \\ 0 & \text{si } x > e_2 \end{cases}$$

o equivalentment, que $U_2 \in \mathcal{U}_{\max}$.

Recíprocament, vegem que les condicions *(i)*, *(ii)*, *(iii)* del teorema se satisfan:

(i) $g_1(x) \leqslant g_2(x)$ per tot $x \in [0,1]$ és una condició.

(ii) Si $g_1(x) < g_2(x)$, com que $g_2(x) \neq 0$ tenim que $x \leqslant e_2$ i que $g_2(x) = e_2$ per la definició de g_2.

(iii) Vegem que en aquest cas no existeixen x i z tals que $g_1(x) = g_2(x) = z$ i $g_1(z) = g_2(z) = x$. Com que $g_2(x) \in \{0, e_2\}$, l'única possibilitat aquí seria $x = 0$ i $z = e_2$. Però llavors hauria de ser $g_1(0) = g_2(0) = e_2$ i $g_1(e_2) = g_2(e_2) = 0$ que no és cert, perquè $g_2(e_2) = e_2 > e_1 \geqslant 0$. □

Corol·lari 3.3.14 *Siguin* $U_1 \equiv \langle g_1, e_1 \rangle_{\text{ide}}$ *i* $U_2 \equiv \langle g_2, e_2 \rangle_{\text{ide}}$, *amb* $e_1 < e_2$. *Si ambdues* U_1 *i* U_2 *són contínues per l'esquerra, aleshores* U_1 *és distributiva sobre* U_2 *si i només si*

- $g_1(x) \leqslant g_2(x)$ *per tot* $x \in [0,1]$,
- *si* $g_1(x) < g_2(x)$ *llavors* $g_2(x) = e_2$ *i* $x \leqslant e_2$

Demostració: Només necessitem provar que quan U_1 i U_2 són contínues per l'esquerra, aleshores la condició *(iii)* del teorema 3.3.7 se satisfà sempre. Suposem que existeixen x i z satisfent:

$$x = g_1(z) = g_2(z) \leqslant g_1(0),\ g_2(0)$$

$$z = g_1(x) = g_2(x) \leqslant g_1(0),\ g_2(0)$$

Llavors, per definició d'uninormes contínues per l'esquerra, tenim que:

$$U_1(x,z) = U_2(x,z) = \min(x,z),$$

i per tant la condició *(iii)* del teorema 3.3.7 se satisfà per uninormes idempotents U_1 i U_2 contínues per l'esquerra. □

Exemple 3.3.15 *Considerem les funcions següents:*

$$g_1(x) = \begin{cases} 0.75 - x & \textit{si } x \in [0, 0.25] \cup]0.5, 0.75] \\ 0.65 - x & \textit{si } x \in]0.25, 0.4] \\ 0.25 & \textit{si } x \in]0.4, 0.5] \\ 0 & \textit{si } x \in]0.75, 1] \end{cases}$$

$$g_2(x) = \begin{cases} 0.75 - x & \textit{si } x \in [0, 0.25] \cup]0.5, 0.75] \\ 0.4 & \textit{si } x \in]0.25, 0.4] \\ 0.25 & \textit{si } x \in]0.4, 0.5] \\ 0 & \textit{si } x \in]0.75, 1] \end{cases}$$

Tenim que els punts fixos són $e_1 = 0.325$ *i* $e_2 = 0.4$. *Llavors, pel corol·lari anterior, agafant* U_1 *i* U_2 *les uninormes contínues per l'esquerra amb* g_1 *i* g_2 *les funcions associades respectives, tenim que satisfan* (D). *Les funcions* g_1 *i* g_2 *es poden observar a la figura 15.*

Siguin ara $U_1 \equiv \langle g_1, e_1 \rangle_{\text{ide}}$ i $U_2 \equiv \langle g_2, e_2 \rangle_{\text{ide}}$, amb $e_2 < e_1$. La dualitat canvia continuïtat per l'esquerra en continuïtat per la dreta i recíprocament, els corol·laris següents segueixen trivialment.

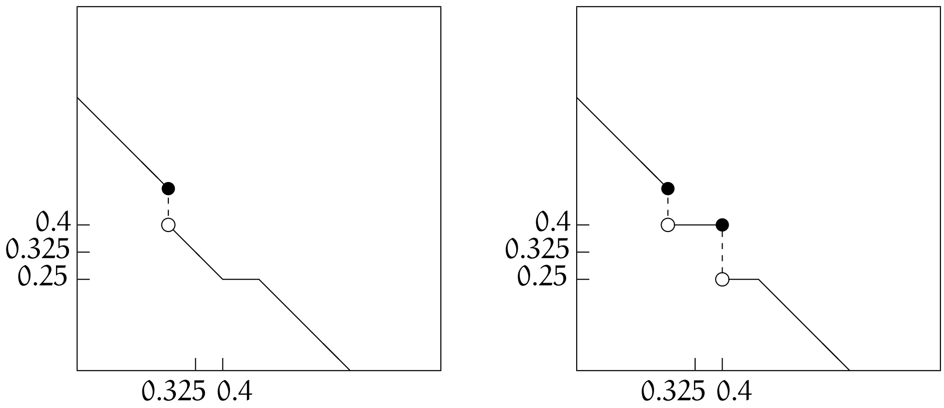

Figura 15. Funcions g_1 i g_2 corresponents a uninormes contínues per l'esquerra que satisfan l'equació (D).

Corol·lari 3.3.16 *Siguin* $U_1 \equiv \langle g_1, e_1 \rangle_{\mathrm{ide}}$ *i* $U_2 \equiv \langle g_2, e_2 \rangle_{\mathrm{ide}}$, *amb* $e_2 < e_1$. *Si* U_2 *és contínua per l'esquerra, aleshores* U_1 *és distributiva sobre* U_2 *si i només si* $U_2 = S_{\mathbf{M}}$.

Corol·lari 3.3.17 *Siguin* $U_1 \equiv \langle g_1, e_1 \rangle_{\mathrm{ide}}$ *i* $U_2 \equiv \langle g_2, e_2 \rangle_{\mathrm{ide}}$, *amb* $e_2 < e_1$. *Si* U_2 *és contínua per la dreta, i* U_1 *és contínua per l'esquerra, aleshores* U_1 *és distributiva sobre* U_2 *si i només si*

- $g_2(x) = \begin{cases} 1 & \textit{si } x < e_2 \\ e_2 & \textit{si } x \geqslant e_2 \end{cases}$ *(és a dir,* $U_2 \in \mathcal{U}_{\min}$*).*
- $g_2(x) \leqslant g_1(x)$ *per tot* $x \in [0, 1]$.

Corol·lari 3.3.18 *Siguin* $U_1 \equiv \langle g_1, e_1 \rangle_{\mathrm{ide}}$ *i* $U_2 \equiv \langle g_2, e_2 \rangle_{\mathrm{ide}}$, *amb* $e_2 < e_1$. *Si ambdues* U_1 *i* U_2 *són contínues per la dreta, aleshores* U_1 *és distributiva sobre* U_2 *si i només si*

- $g_2(x) \leqslant g_1(x)$ *per tot* $x \in [0, 1]$
- *Si* $g_2(x) < g_1(x)$ *llavors* $g_2(x) = e_2$ *i* $x \geqslant e_2$.

Exemple 3.3.19 *Considerem les funcions següents:*

$$g_1(x) = \begin{cases} 1 & \textit{si } 0 \leqslant x < 0.25 \\ 1.25 - x & \textit{si } 0.25 \leqslant x \leqslant 0.5 \textit{ ò } 0.75 \leqslant x \leqslant 1 \\ 0.75 & \textit{si } 0.5 < x \leqslant 0.6 \\ 1.35 - x & \textit{si } 0.6 < x < 0.75 \end{cases}$$

$$g_2(x) = \begin{cases} 1 & \textit{si } 0 \leqslant x < 0.25 \\ 1.25 - x & \textit{si } 0.25 \leqslant x \leqslant 0.5 \textit{ ò } 0.75 \leqslant x \leqslant 1 \\ 0.75 & \textit{si } 0.5 < x \leqslant 0.6 \\ 0.6 & \textit{si } 0.6 < x < 0.75 \end{cases}$$

Tenim que els punts fixos són $e_1 = 0.675$ *i* $e_2 = 0.6$. *Llavors, pel corol·lari anterior, agafant* U_1 *i* U_2 *les uninormes contínues per la dreta amb* g_1 *i* g_2 *les funcions associades respectives, tenim que satisfan* (D). *Les funcions* g_1 *i* g_2 *es poden observar a la figura 15. Les uninormes* U_1 *i* U_2 *són les* N*-duals de les de l'exemple 3.3.15 per a* $N(x) = 1 - x$.

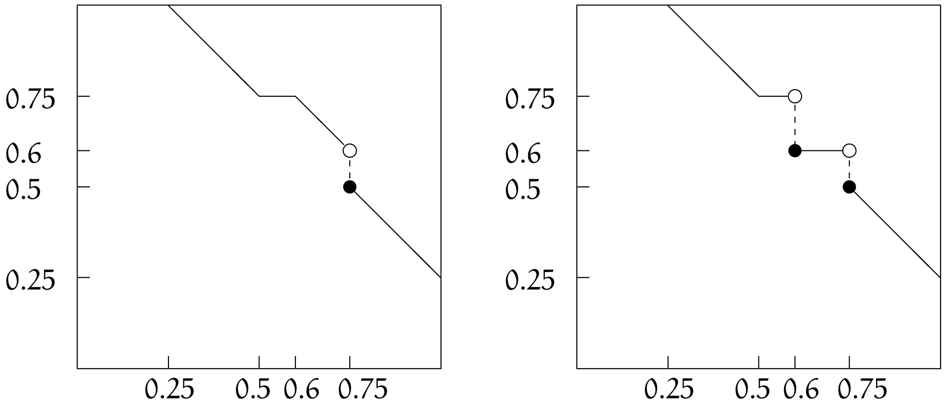

Figura 16. Funcions g_1 i g_2 corresponents a uninormes contínues per la dreta que satisfan l'equació (D).

Per acabar, estudiem els casos de parells distributius (U_1, U_2) quan U_1 i U_2 tenen algun tipus de continuïtat lateral.

Corol·lari 3.3.20 *Siguin* $U_1 \equiv \langle g_1, e_1\rangle_{\text{ide}}$ *i* $U_2 \equiv \langle g_2, e_2\rangle_{\text{ide}}$*, contínues per l'esquerra amb* $e_1 < e_2$*. Aleshores* (U_1, U_2) *és un parell distributiu si i només si* $U_1 = S_{\mathbf{M}}$ *i* $U_2 \in \mathcal{U}_{\max}$.

Corol·lari 3.3.21 *Siguin* $U_1 \equiv \langle g_1, e_1\rangle_{\text{ide}}$ *contínua per l'esquerra, i* $U_2 \equiv \langle g_2, e_2\rangle_{\text{ide}}$ *contínua per la dreta amb* $e_1 < e_2$*. Aleshores* (U_1, U_2) *és un parell distributiu si i només si* $U_1 = S_{\mathbf{M}}$ *i* $U_2 = T_{\mathbf{M}}$.

Corol·lari 3.3.22 *Siguin* $U_1 \equiv \langle g_1, e_1\rangle_{\text{ide}}$ *contínua per la dreta, i* $U_2 \equiv \langle g_2, e_2\rangle_{\text{ide}}$ *contínua per l'esquerra* $e_1 < e_2$*. Aleshores* (U_1, U_2) *és un parell distributiu si i només si* $U_1 \in \mathcal{U}_{\min}$ *i* $U_2 = \min$ *o bé* $U_1 = S_{\mathbf{M}}$ *i* $U_2 \in \mathcal{U}_{\max}$.

Corol·lari 3.3.23 *Siguin* $U_1 \equiv \langle g_1, e_1\rangle_{\text{ide}}$ *i* $U_2 \equiv \langle g_2, e_2\rangle_{\text{ide}}$*, contínues per la dreta amb* $e_1 < e_2$*. Aleshores* (U_1, U_2) *és un parell distributiu si i només si* $U_1 \in \mathcal{U}_{\min}$ *i* $U_2 = T_{\mathbf{M}}$.

Nota 3.3.24 *Com es pot desprendre dels corol·laris anteriors, un parell distributiu d'uninormes idempotents amb algun tipus de continuïtat implica directament que una d'elles sigui la t-norma mínim o la t-conorma màxim.*

A continuació incloem les taules de resum dels resultats de l'equació (D), per a uninormes idempotents amb algun tipus de continuïtat. La taula 3 resumeix les solucions de les uninormes U_1 i U_2, quan $U_1 \equiv \langle g_1, e_1\rangle_{\text{ide}}$ és distributiva sobre $U_2 \equiv \langle g_2, e_2\rangle_{\text{ide}}$, amb $e_1 < e_2$. La taula 4 és per al cas en què $U_1 \equiv \langle g_1, e_1\rangle_{\text{ide}}$ sigui distributiva sobre $U_2 \equiv \langle g_2, e_2\rangle_{\text{ide}}$ quan $e_2 < e_1$. En la taula 5 posem de les solucions per a parells distributius d'uninormes idempotents (U_1, U_2), on es compleix $e_1 < e_2$.

3.3.3 *Parells distributius i modularitat*

Ara estudiem la modularitat per a uninormes idempotents, està molt relacionada amb la distributivitat.

Definició 3.3.25 *Siguin* $U_1 \equiv \langle g_1, e_1\rangle_{\text{ide}}$ *i* $U_2 \equiv \langle g_2, e_2\rangle_{\text{ide}}$*. Direm que* U_1 *és modular respecte de* U_2 *si*

$$U_1(x, U_2(y, z)) = U_2(U_1(x, y), z) \quad \textit{per a tots } z \leqslant x. \tag{M}$$

$U_2 \equiv \langle g_2, e_2 \rangle_{ide}$ / $U_1 \equiv \langle g_1, e_1 \rangle_{ide}$	contínua per l'esquerra	contínua per la dreta
contínua per l'esquerra	corol·lari 3.3.14	$U_2 = T_{\mathbf{M}}$ (corol·lari 3.3.12)
contínua per la dreta	corol·lari 3.3.13	

Taula 3. Resultats de la distributivitat, quan les uninormes tenen algun tipus de continuïtat lateral, i $e_1 < e_2$.

$U_2 \equiv \langle g_2, e_2 \rangle_{ide}$ / $U_1 \equiv \langle g_1, e_1 \rangle_{ide}$	contínua per la dreta	contínua per l'esquerra
contínua per la dreta	corol·lari 3.3.18	$U_2 = S_{\mathbf{M}}$ (corol·lari 3.3.16)
contínua per l'esquerra	corol·lari 3.3.17	

Taula 4. Resultats de la distributivitat, quan les uninormes tenen algun tipus de continuïtat lateral, i $e_2 < e_1$.

$U_2 \equiv \langle g_2, e_2 \rangle_{ide}$ / $U_1 \equiv \langle g_1, e_1 \rangle_{ide}$	contínua per la dreta	contínua per l'esquerra
contínua per la dreta	$U_1 \in \mathcal{U}_{min}$ i $U_2 = T_{\mathbf{M}}$	$U_1 \in \mathcal{U}_{min}$ i $U_2 = T_{\mathbf{M}}$ $U_1 = S_{\mathbf{M}}$ i $U_2 \in \mathcal{U}_{max}$
contínua per l'esquerra	$U_1 = S_{\mathbf{M}}$ i $U_2 = T_{\mathbf{M}}$	$U_1 = S_{\mathbf{M}}$ i $U_2 \in \mathcal{U}_{max}$

Taula 5. Resultats dels parells distributius, quan les uninormes tenen algun tipus de continuïtat lateral.

Ara resoldrem l'equació funcional (M). Primer vegem la relació que ha d'existir necessàriament entre els elements neutres.

Proposició 3.3.26 *Siguin $U_1 \equiv \langle g_1, e_1 \rangle_{\text{ide}}$ i $U_2 \equiv \langle g_2, e_2 \rangle_{\text{ide}}$ tals que U_1 és modular respecte de U_2. Llavors $e_1 \geqslant e_2$ i en el cas en què $e_1 = e_2$, es té que $U_1 = U_2$.*

Demostració: Suposem que $e_1 < e_2$, aleshores posant $e_1 = y = z \leqslant x = e_2$ a (M), tindrem:

$$U_1(e_2, U_2(e_1, e_1)) = U_2(U_1(e_2, e_1), e_1)$$

és a dir, $U_1(e_2, e_1) = U_2(e_2, e_1) = e_1$, per ser U_2 idempotent. Però també tenim que $U_1(e_2, e_1) = e_2$, arribant a $e_2 = e_1$, que és una contradicció amb el que havíem suposat, $e_1 < e_2$.

Vegem ara el cas en què $e_1 = e_2 = e$. Posant $y = e$ a (M) tenim:

$$U_1(x, U_2(e, z)) = U_2(U_1(x, e), z)$$

per a tot $z \leqslant x$, és a dir, $U_1(x, z) = U_2(x, z)$ per a tot $x \leqslant z$. Per commutativitat tenim que $U_1 = U_2$. □

Aquest darrer resultat es pot generalitzar per a qualsevol tipus d'uninormes.

Teorema 3.3.27 *Siguin U_1 i U_2 dues uninormes amb elements neutres e_1 i e_2. Si $e_1 = e_2 = e$, U_1 és modular respecte de U_2 si i només si $U_1 = U_2$.*

Demostració: Basta reproduir la demostració anterior, per a uninormes qualssevol. □

Ara estudiem el cas en què $e_2 < e_1$. Tenim els següents resultats de necessitat en funció de g_1 i g_2.

Proposició 3.3.28 *Siguin $U_1 \equiv \langle g_1, e_1 \rangle_{\text{ide}}$ i $U_2 \equiv \langle g_2, e_2 \rangle_{\text{ide}}$, amb $e_2 < e_1$. Si U_1 és modular respecte de U_2, llavors*

$$g_2(x) \leqslant g_1(x) \textit{ per a tot } x \in [0, 1].$$

Demostració: Suposem que existeix x tal que $e_1 \leqslant x$ i que $g_1(x) < g_2(x)$. Llavors existeix z que compleix la condició següent:

$$g_1(x) < z < g_2(x) \leqslant e_2 < e_1 \leqslant x$$

ja que $g_2(x) \leqslant e_2$ per ser g_2 decreixent.

També podem dir que $z < g_2(x) \leqslant g_2(e_1)$ de nou pel decreixement de g_2. Emprant la caracterització d'uninormes idempotents, podem afirmar que:

$$U_1(x, U_2(e_1, z)) = U_1(x, \min(e_1, z)) = U_1(x, z) = \max(x, z) = x,$$

però per altra part

$$U_2(U_1(x, e_1), z) = U_2(x, z) = \min(x, z) = z,$$

amb el que arribem a que no es compliria l'equació (M).

Si suposem ara que existeix $x \leqslant e_1$ tal que $g_1(x) < g_2(x)$, s'arriba a contradicció de forma similar. □

Proposició 3.3.29 *Siguin $U_1 \equiv \langle g_1, e_1 \rangle_{\text{ide}}$ i $U_2 \equiv \langle g_2, e_2 \rangle_{\text{ide}}$, amb $e_2 < e_1$. Si U_1 és modular respecte de U_2, aleshores* *(i)* $g_2(x) = e_2$ *per a tot* $x \in [e_2, e_1]$.

(ii) $g_1(x) = e_1$ *per a tot* $x \in [e_2, e_1]$.

Demostració: Demostrarem només *(i)* ja que *(ii)* es fa de forma similar. Suposem, pel contrari, que existeix $y \in [e_2, e_1]$ tal que $g_2(y) < e_2$. Llavors existeixen x, z complint que: $g_2(y) < z < x < e_2$, i tenim:

$$U_1(x, U_2(y, z)) = U_1(x, y) = \min(x, y) = x,$$

ja que $x < y \leqslant e_1$.

I per altra part tenim que:

$$U_2(U_1(x, y), z) = U_2(x, z) = \min(x, z) = z$$

perquè $z < x < e_2$.

Però això vol dir que no es compleix l'equació (M), arribant a contradicció. □

Proposició 3.3.30 *Siguin* $U_1 \equiv \langle g_1, e_1 \rangle_{\text{ide}}$ *i* $U_2 \equiv \langle g_2, e_2 \rangle_{\text{ide}}$ *amb* $e_2 < e_1$. *Si* U_1 *és modular respecte de* U_2 *aleshores*

(i) $g_2(x) = g_1(x)$ *per a tot* $x > e_1$,

(ii) $g_2(x) = g_1(x)$ *per a tot* $x < e_2$.

Demostració: Vegem primer *(i)*. Suposem que existeix x tal que $e_1 < x$ i $g_1(x) > g_2(x)$ (sabem per la proposició 3.3.28 que $g_2(x) \leqslant g_1(x)$). Vegem que arribem a contradicció distingint els casos següents:

- Si $g_1(x) \leqslant e_2$, llavors existeix z amb $g_2(x) < z < g_1(x) \leqslant e_2 < e_1 < x$, i tenim:

  $$U_1(x, U_2(e_2, z)) = U_1(x, z) = \min(x, z) = z,$$

  i per altra part:

  $$U_2(U_1(x, e_2), z)) = U_2(x, z) = \max(x, z) = x,$$

  ja que per la proposició anterior $g_1(e_2) = e_1$, que és menor que x. Això significa que (U_1, U_2) no compleixen l'equació (M).

- Si $g_1(x) > e_2$, llavors existeix z tal que $e_1 < z < x$, i tenim:

  $$U_1(x, U_2(e_2, z)) = U_1(x, z) = \max(x, z) = x,$$

  ja que $g_1(x) \leqslant e_1 < z$. En canvi,

  $$U_2(U_1(x, e_2), z)) = U_2(e_2, z) = z,$$

  perquè $e_2 < g_1(x)$. És a dir, (U_1, U_2) no compleixen l'equació (M).

Respecte l'apartat *(ii)* dividim la demostració en alguns passos:

- Vegem primer que $g_2(x) \geqslant e_1$ per a tot $x < e_2$. Suposem que existeix $x < e_2$ tal que $g_2(x) < e_1$, aleshores podem prendre z tal que $e_2 \leqslant g_2(x) < z < e_1$. Tenim que $g_2(z) = e_2$ per la proposició anterior, per tant, per per un costat $x < g_2(z)$, és a dir $U_2(x, z) = \min(x, z) = x$, però per l'altre $z > g_2(x)$, el que vol dir que $U_2(x, z) = \max(x, z) = z$, amb el que arribem a contradicció. És a dir, $g_2(x) \geqslant e_1$ per a tot $x < e_2$.

- Vegem ara que $g_2(x) = g_1(x)$ per a tot $x < e_2$. Suposem que existeix $x < e_2$ tal que $g_2(x) < g_1(x)$. Pel pas anterior, $e_1 \leqslant g_2(x)$ i per tant, existeix z tal que:

  $$x < e_2 < e_1 \leqslant g_2(x) < z < g_1(x),$$

  amb el que tenim:

  $$U_1(z, U_2(e_2, x)) = U_1(z, x) = x$$

  i per altra part:

  $$U_2(U_1(z, e_2), x)) = U_2(z, x) = z$$

  perquè $g_1(e_2) = e_1 < z$. Amb això arribem de nou a contradicció, ja que U_1 no seria modular respecte de U_2. □

Proposició 3.3.31 *Siguin* $U_1 \equiv \langle g_1, e_1 \rangle_{\text{ide}}$ *i* $U_2 \equiv \langle g_2, e_2 \rangle_{\text{ide}}$ *amb* $e_2 < e_1$, *amb* U_1 *modular respecte de* U_2. *Aleshores, si existeixen* x, z *tals que* $g_1(z) = g_2(z) = x$ *i* $g_1(x) = g_2(x) = z$ *és necessari que* $U_1(x, z) = U_2(x, z)$.

Demostració: Suposem que existeixen x i z tals que satisfan: $g_1(z) = g_2(z) = x$ i $g_1(x) = g_2(x) = z$. Podem suposar a més, sense pèrdua de generalitat, que $z < x$, ja que si $z = x$, tindríem que $g_1(x) = g_2(x) = x$ i això voldria dir que $e_1 = e_2$ i això és una contradicció.

Tenim que $z < e_2$, ja que si $z \geqslant e_2$ tindríem que $g_2(z) = x \leqslant e_2 \leqslant z$, que contradiu el que hem suposat.

També tenim que $x > e_1$, ja que si $x \leqslant e_1$ aleshores $g_1(x) = z \geqslant e_1 \geqslant x$, que contradiu que $z < x$.

Tenim aleshores que $z < e_2 < e_1 < x$ i llavors existeix y tal que:

$$z < e_2 = g_2(y) < y < e_1 = g_1(y) < x$$

i per un costat tenim:

$$U_1(x, U_2(y, z)) = U_1(x, z)$$

i per l'altre:

$$U_2(U_1(x, y), z)) = U_2(x, z)$$

i si se satisfà l'equació (M) aleshores necessàriament $U_1(x, z) = U_2(x, z)$. □

Amb els resultats anteriors podem establir ja la caracterització dels parells (U_1, U_2) verificant que U_1 és modular respecte de U_2.

Teorema 3.3.32 *Siguin* $U_1 \equiv \langle g_1, e_1 \rangle_{\text{ide}}$ *i* $U_2 \equiv \langle g_2, e_2 \rangle_{\text{ide}}$ *dues uninormes idempotents amb* $e_2 < e_1$. *Llavors* U_1 *és modular respecte de* U_2 *si i només si:*

(i) $g_1(x) = e_1$ *per a tot* $x \in [e_2, e_1]$.

(ii) $g_2(x) = e_2$ *per a tot* $x \in [e_2, e_1]$.

(iii) $g_2(x) = g_1(x)$ *per a tot* $x \in [0, 1] \backslash [e_2, e_1]$.

(iv) *Si existeixen* x, z *tals que* $g_1(x) = g_2(x) = z$ *i* $g_1(z) = g_2(z) = x$ *aleshores* $U_1(x, z) = U_2(x, z)$.

DEMOSTRACIÓ: La necessitat queda demostrada a partir dels resultats anteriors.

La suficiència la demostrarem fent casos. Suposem x, y, z de manera que $z \leqslant x$, demostrarem que si U_1 i U_2 són uninormes idempotents que satisfan les propietats anteriors, aleshores

$$U_1(x, U_2(y,z)) = U_2(U_1(x,y), z).$$

Primer farem els casos en què x, y, z siguin tots diferents.

- Si $U_2(y,z) = y$ i $U_1(x,y) = y$, aleshores

$$U_1(x, U_2(y,z)) = U_1(x,y) = y = U_2(y,z) = U_2(U_1(x,y), z).$$

- Si $U_2(y,z) = y$ i $U_1(x,y) = x$, llavors

$$U_1(x, U_2(y,z)) = U_1(x,y) = x$$

  i per l'altra banda tenim

$$U_2(U_1(x,y), z) = U_2(x,z)$$

  per tant, hem de calcular $U_2(x,z)$. Distingirem casos:

  1. Si $y < z < x$. Com que $U_1(x,y) = x = \max(x,y)$, això vol dir que $g_1(x) \leqslant y < z$, i com que $g_2(x) \leqslant g_1(x)$ per a tot x, tindrem que $g_2(x) < z$ i per tant $U_2(x,z) = x$, com volíem veure.
  2. Si $z < y < x$. A partir de $U_2(y,z) = y$, es pot deduir que $g_2(z) \leqslant y < x$, i per tant $U_2(x,z) = x$.
  3. Si $z < x < y$. A partir de que $U_2(y,z) = y$, podem deduir que $g_2(y) \leqslant z < x < y$, i per tant $y > e_2$. Ara distingim dos casos
     - Si $y \leqslant e_1$, aleshores $e_2 < y \leqslant e_1$, i per tant $g_2(y) = e_2$, és a dir $e_2 \leqslant z < x < y \leqslant e_1$, i llavors $g_2(z) = e_2 < x$. Això implicarà $U_2(x,z) = x$.
     - Si $y > e_1 > e_2$, tenim que $g_1(y) = g_2(y)$. Però tenim per una banda, com que $U_1(x,y) = x$, $x \leqslant g_1(y)$ i

$$z < x \leqslant g_1(y) = g_2(y),$$

       per l'altra

$$z \geqslant g_2(y)$$

       que dóna una contradicció, per tant aquest cas no se pot donar.

- Si $U_2(y,z) = z$ i $U_1(x,y) = y$, aleshores

$$U_1(x, U_2(y,z)) = U_1(x,z)$$

  i per una altra banda

$$U_2(U_1(x,y), z) = U_2(y,z) = z,$$

  per tant, hem de calcular $U_1(x,z)$. Tornem a considerar els casos següents:

  1. Si $y < z < x$. De $U_2(y,z) = z$, podem deduir que $z > y \geqslant g_2(z)$ i, per tant, $e_2 < z$. De $U_1(x,y) = y$, es pot deduir igualment que $y < x \leqslant g_1(y)$ i aleshores $y < e_1$. A continuació distingim casos:
     - Si $z \leqslant e_1$, aleshores $e_2 < z \leqslant e_1$ i per tant, per la propietat que compleix g_2, $g_2(z) = e_2$ i aleshores $y \geqslant e_2$, i també $g_1(y) = e_1$, i tenim la següent sèrie de desigualtats:

$$e_2 \leqslant y < z < x \leqslant e_1 = g_1(y) = g_1(x)$$

       i per tant $U_1(x,z) = z$.

  - Si $z > e_1$, tindrem que $g_1(z) = g_2(z)$, i també $g_1(x) = g_2(x)$, ja que $x > z > e_1$ i aleshores
$$y \leqslant g_1(x) = g_2(x) \leqslant e_2$$
i per tant $y \leqslant e_2$. Si ara $y = e_2$, tindríem que $x \leqslant g_1(e_2) = e_1$, però això donaria una contradicció, aleshores $y < e_2$, i per tant $g_1(y) = g_2(y)$. Arribem també a contradicció, perquè $z \geqslant g_2(y)$ i per l'altra banda $z < x \leqslant g_1(y) = g_2(y)$, i aleshores aquest cas no es pot donar.

2. Si $z < y < x$. A partir de que $U_1(x, y) = y = \min(x, y)$, es pot deduir que $z < y \leqslant g_1(x)$ i per tant $U_1(x, z) = z$.
3. Si $z < x < y$. Com que $U_2(y, z) = z = \min(y, z)$, tindrem $x < y \leqslant g_2(z) \leqslant g_1(z)$, i això voldrà dir que $U_1(x, z) = z$.

- Si $U_2(y, z) = z$ i $U_1(x, y) = x$, tindrem $U_1(x, U_2(y, z)) = U_1(x, z)$, mentre que $U_2(U_1(x, y), z) = U_2(x, z)$ i per tant, haurem de veure si $U_1(x, z) = U_2(x, z)$. Distingim de nou els casos següents:
  - Si $y < z < x$. Com que $U_2(y, z) = z$, es pot concloure que $x > y \geqslant g_2(z)$ i $U_2(x, z) = x$. De manera similar, de $U_1(x, y) = x$, podem dir que $g_1(x) \leqslant y < z$ i $U_1(x, z) = x$, arribant a veure que $U_2(x, z) = U_1(x, z)$.
  - Si $z < y < x$. Per una part, de $U_2(y, z) = z$ podem extreure que $z < y \leqslant g_2(z)$ i aleshores $z < e_2$, i per les propietats que compleixen U_1 i U_2, $g_2(z) = g_1(z)$. Per una altra part, $U_1(x, y) = x$ vol dir que $x > y \geqslant g_1(x)$ i per tant $x > e_1$, i aleshores $g_1(x) = g_2(x)$. Ara, si $g_1(z) = g_2(z) \neq x$ o bé $g_1(x) = g_2(x) \neq z$, tindrem que $U_1(x, z) = U_2(x, z)$, ja que seran en tots dos casos o el mínim o el màxim. I si per cas contrari $g_1(z) = g_2(z) = x$ i $g_1(x) = g_2(x) = z$, la igualtat $U_1(x, z) = U_2(x, z)$ ens l'assegura una de les propietats que satisfan U_1 i U_2.
  - Si $z < x < y$. Aleshores, de $U_2(y, z) = z$ podem deduir que $x < y \leqslant g_2(z)$ i per tant
$$U_2(x, z) = z.$$
De $U_1(x, y) = x$, podem treure que $z < y \leqslant g_1(x)$, i també que
$$U_1(x, z) = z$$
amb el que veiem que $U_1(x, z) = U_2(x, z)$.

Vegem ara els casos en què x, y o z coincideixen.

- Si $x = y$, aleshores hem de veure que
$$U_1(x, U_2(x, z)) = U_2(U_1(x, x), z) = U_2(x, z)$$
per tot $z \leqslant x$. Distingim dos casos
  - Si $U_2(x, z) = x$, aleshores queda clar que la igualtat és certa.
  - Si $U_2(x, z) = z$, hem de veure que $U_1(x, z) = z$. Com que $U_2(x, z) = \min(x, z) = z$, vol dir, emprant les propietats *(i), (ii), (iii)*, que $z \leqslant g_2(x) \leqslant g_1(x)$ i que $x \leqslant g_2(z) \leqslant g_1(z)$. Ara distingim dos casos:
    * Si $z < g_2(x)$, o $x < g_2(z)$, o $g_2(z) < g_1(z)$, o $g_2(x) < g_1(x)$, vol dir que
$$U_2(x, z) = \min(x, z) = z,$$
com volíem veure.

  * Si $z = g_2(x) = g_1(x)$ i $x = g_1(z) = g_2(z)$, per la propietat *(iv)*, tindrem que $U_1(x,z) = U_2(x,z)$.

- Si $x = z$, volem veure
$$U_1(x, U_2(y,x)) = U_2(U_1(x,y),x).$$
  - Si $U_2(y,x) = x$, tindrem, com que $U_1(x,y) \in \{x,y\}$
$$U_1(x, U_2(y,x)) = U_1(x,x) = x$$
    i també
$$U_2(U_1(x,y),x) = x.$$
  - Si $U_2(y,x) = y$, tindrem per una banda
$$U_1(x, U_2(y,x)) = U_1(x,y)$$
    i per l'altra
$$U_2(U_1(x,y),x) = U_1(x,y).$$
- Si $y = z$, aleshores hem de veure que
$$U_1(x, U_2(y,y)) = U_2(U_1(x,y),y)$$
  amb $y \leqslant x$, és a dir,
$$U_1(x,y) = U_2(U_1(x,y),y).$$
  - Si $U_1(x,y) = y$, aleshores
$$U_1(x,y) = U_2(U_1(x,y),y) = U_2(y,y) = y = U_1(x,y).$$
  - Si $U_1(x,y) = x$, tenim
$$U_2(U_1(x,y),y) = U_2(x,y)$$
    i per tant hem de veure què val $U_2(x,y)$. Com que $y \leqslant x$, tenim que $x \geqslant g_1(y) \geqslant g_1(x)$, és a dir $x \geqslant e_1$. Si $x = e_1$ es pot veure que en aquest cas $U_1(x,y) = y$, i tornaríem al cas anterior. Per tant $x > e_1$ i $g_1(x) = g_2(x) \leqslant e_2$. També es dedueix que $y \geqslant g_1(x)$. Distingim dos casos
    * Si $g_1(x) < y$, aleshores $U_2(x,y) = x$.
    * Si $g_1(x) = g_2(x) = y \leqslant e_2$, tenim per tant $g_1(y) = g_2(y)$ i ara, si $g_1(y) = g_2(y) > x$, tindrem $U_2(x,y) = x$ i si $g_1(y) = g_2(y) = x$, tindrem per la darrera propietat que $U_1(x,y) = U_2(x,y)$ i haurem acabat.

Per tant, en tots els casos es pot comprovar que dues uninormes idempotents U_1 i U_2 satisfent les propietats, fan que U_1 sigui modular respecte de U_2. □

En vista del teorema anterior i la caracterització dels parells distributius (teorema 3.3.10), tenim el corol·lari següent.

Corol·lari 3.3.33 *Siguin $U_1 \equiv \langle g_1, e_1\rangle_{\text{ide}}$ i $U_2 \equiv \langle g_2, e_2\rangle_{\text{ide}}$, amb $e_2 < e_1$. U_1 és modular respecte de U_2 si i només si (U_1, U_2) formen un parell distributiu.*

Exemple 3.3.34 *Considerem les uninormes de l'exemple 3.3.11. Aquestes uninormes compleixen les condicions imposades pel teorema i, per tant, U_1 és modular respecte de U_2 i (U_1, U_2) formen un parell distributiu. En la figura 14 es poden observar les funcions g_1 i g_2.*

Com es pot veure, en aquesta família U_1 és sempre contínua per l'esquerra però U_2 no té cap continuïtat lateral.

Exemple 3.3.35 *A continuació veurem una altra família de parells d'uninormes* (U_1, U_2) *en les que és* U_1 *qui no presenta cap continuïtat lateral.*

Siguin ara e_1 *i* e_2 *dos nombres reals en* $[0,1]$ *amb* $0 < e_2 < e_1 < 1$. *Considerem les funcions següents* $g_1, g_2 : [0,1] \to [0,1]$:

$$g_1(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x < e_2 \\ e_1 & \text{si } x \in [e_2, e_1] \\ e_2 & \text{si } x > e_1 \end{cases} \qquad g_2(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x < e_2 \\ e_2 & \text{si } x \in [e_1, 1] \end{cases}$$

i les uninormes definides per:

$$U_1(x,y) = \begin{cases} \min(x,y) & \text{si } y < g_1(x) \text{ o } (g_1(x) = y \text{ i } x \leqslant e_1) \\ \max(x,y) & \text{altrament,} \end{cases}$$

$$U_2(x,y) = \begin{cases} \max(x,y) & \text{si } y \geqslant e_2 \text{ i } x \geqslant e_2 \\ \min(x,y) & \text{altrament.} \end{cases}$$

Aquestes uninormes compleixen les condicions imposades pel teorema i, per tant, U_1 *és modular respecte de* U_2, *i a la vegada* (U_1, U_2) *formen un parell distributiu. En la figura 17 es poden observar les funcions* g_1 *i* g_2. *En aquest cas* $U_2 \in \mathcal{U}_{\min}$ *i* U_1 *no presenta cap continuïtat lateral.*

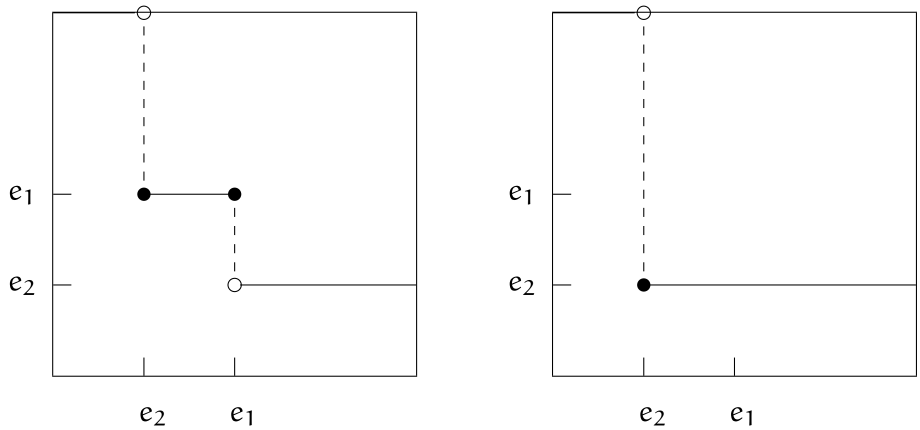

Figura 17. Funcions $g_1(x)$ i $g_2(x)$ de l'exemple 3.3.35.

3.4 UNINORMES: CAS GENERAL

A continuació estudiarem la distributivitat d'una uninorma U_1 amb element neutre $e_1 \in]0,1[$ sobre una uninorma U_2 amb element neutre $e_2 \in]0,1[$, és a dir, U_1 i U_2 no són ni t-normes ni t-conormes, i a més pertanyen a alguna de les classes $\mathcal{U}_{\text{ide}}$, $\mathcal{U}_{\text{rep}}$, $\mathcal{U}_{\min}$, $\mathcal{U}_{\max}$ o $\mathcal{U}_{\cos}$.

Començarem amb alguns lemes inicials. El primer es refereix al cas en què $e_1 = e_2 = e$.

Lema 3.4.1 *Siguin* U_1 *i* $U_2 \in \mathcal{U}(e)$. *Si* U_1 *és distributiva sobre* U_2, *llavors* U_2 *és idempotent i* $U_1(x,y) = U_2(x,y)$ *per a tot* $(x,y) \in [0,e] \times [e,1] \cup [e,1] \times [0,e]$.

DEMOSTRACIÓ: Agafem $y = z = e$ a (D), i obtenim directament $U_2(x,x) = x$ i per tant U_2 és idempotent. A més a més, agafant $z = e$ tenim:

$$U_1(x,y) = U_1(x, U_2(y,e)) = U_2(U_1(x,y), U_1(x,e)) = U_2(U_1(x,y), x) \tag{3.8}$$

per a tot $x, y \in [0,1]$.

Ara, demostrarem que $U_1(x,y) \in \{x,y\}$ a $[0,e] \times [e,1] \cup [e,1] \times [0,e]$. És trivial quan $x = e$ o $y = e$. Per una altra banda, si $x < e < y$ demostrarem primer que $U_1(x,y) \neq e$. Si, pel contrari suposem que $U_1(x,y) = e$ obtenim de l'equació (3.8) que $e = U_1(x,y) = U_2(U(x,y),x) = U_2(e,x) = x$, que és una contradicció. Ara tenim les dues possibilitats següents:

- Si $x \leqslant U_1(x,y) < e < y$. Com que U_2 és idempotent, l'equació (3.8) assegura que

$$U_1(x,y) = \min(U_1(x,y), x) = x.$$

- Si $x < e < U_1(x,y) \leqslant y$. Per commutativitat, també tenim de (3.8) que

$$U_1(x,y) = U_1(y,x) = U_2(U_1(y,x), y) \tag{3.9}$$

  i per tant $U_1(x,y) = \max(U_1(y,x), y) = y$.

Llavors, hem provat que $U_1(x,y) \in \{x,y\}$ a $[0,e] \times [e,1] \cup [e,1] \times [0,e]$. Finalment, tenim una altra vegada dues possibilitats a $[0,e] \times [e,1] \cup [e,1] \times [0,e]$:

- Si $U_1(x,y) = x$. Per l'equació (3.9) tenim $U_1(x,y) = U_2(U_1(y,x), y) = U_2(x,y)$.
- Si $U_1(x,y) = y$. Per l'equació (3.8) tenim $U_1(x,y) = U_2(U_1(x,y), x) = U_2(y,x)$. $\square$

Nota 3.4.2 *El resultat anterior assegura que U_1 ha de ser una uninorma de la classe $\mathcal{U}_{mnx}$ amb la mateixa g associada a U_2.*

El lema següent demostra que l'element neutre de U_2 és un element idempotent de U_1.

Lema 3.4.3 *Siguin U_1 i U_2 dues uninormes. Si U_1 és distributiva sobre U_2, llavors $U_1(e_2, e_2) = e_2$.*

DEMOSTRACIÓ: Basta posar $x = e_2$, $y = e_1$ i $z = e_2$ a l'equació (D)

$$U_1(e_2, U_2(e_1, e_2)) = U_2(U_1(e_2, e_1), U_1(e_2, e_2)), \text{ que és, } e_2 = U_1(e_2, e_2)$$

Ara podem considerar que $e_1 \neq e_2$ i per resoldre l'equació (D) suposarem que U_1 pertany a alguna de les classes presentades als preliminars.

- U_1 *representable*

El lema següent demostra que no hi ha solucions de l'equació (D) quan U_1 és representable.

Lema 3.4.4 *Siguin U_1 i U_2 dues uninormes. Si U_1 és distributiva sobre U_2, llavors U_1 no pot ser representable.*

DEMOSTRACIÓ: Ara distingim dos casos:

- Si $e_1 = e_2$, U_2 és idempotent i U_1 coincideix amb U_2 a $[0,e] \times [e,1] \cup [e,1] \times [0,e]$ pel lema 3.4.1, i conseqüentment U_1 no pot ser representable.
- Si $e_1 \neq e_2$, una altra vegada U_1 no pot ser representable, aquesta vegada perquè e_2 és un element idempotent de U_1, i sabem que els únics elements idempotents d'una uninorma representable són: 0, 1 i el seu element neutre. $\square$

- U_1 *idempotent, de* $\mathcal{U}_{\max}$ *o de* $\mathcal{U}_{\min}$

Ara estudiarem el cas en que U_1 sigui o bé una uninorma idempotent, o bé de $\mathcal{U}_{\max}$, o bé de $\mathcal{U}_{\min}$. En els tres casos obtindrem que U_2 ha de ser una uninorma idempotent. Comencem pel cas en què U_1 sigui una uninorma idempotent.

Lema 3.4.5 *Siguin* $U_1 \equiv \langle g_1, e_1 \rangle_{\text{ide}}$ *i* $U_2 \in \mathcal{U}_{\text{cts}}$. *Si* U_1 *és distributiva sobre* U_2, *llavors* U_2 *és idempotent.*

DEMOSTRACIÓ: Primer, agafant $y = z = e_1$ a (D) obtenim

$$U_2(x,x) = U_1(x, U_2(e_1,e_1)) \quad \text{per a tot} \quad x \in [0,1]. \tag{3.10}$$

Aleshores, tenim tres possibilitats:

- Si $U_2(e_1,e_1) = e_1$, llavors U_2 és idempotent per l'equació anterior.
- Si $U_2(e_1,e_1) > e_1$. Ara demostrarem que en aquest cas arribem a contradicció. Realment, si $U_2(e_1,e_1) > e_1$ necessàriament tenim $g_1(U_2(e_1,e_1)) \leqslant e_1$.
  - Per una banda, per a tot $x \in [0,1]$ tal que $g_1(U_2(e_1,e_1)) < x < U_2(e_1,e_1)$ tenim per la proposició 2.2.14
    $$U_1(x, U_2(e_1,e_1)) = \max(x, U_2(e_1,e_1)) = U_2(e_1,e_1)$$
    que es redueix a $U_2(x,x) = U_2(e_1,e_1)$ per l'equació (3.10). Això implica en particular que $x > e_2$ per a tots aquests valors, i conseqüentment, $e_2 \leqslant g_1(U_2(e_1,e_1))$.
  - Per una altra banda, per a tot $x < g_1(U_2(e_1,e_1))$ tenim també per la proposició 2.2.14 que
    $$U_1(x, U_2(e_1,e_1)) = \min(x, U_2(e_1,e_1)) = x$$
    que implica $U_2(x,x) = x$ per a tot $x < g_1(U_2(e_1,e_1))$.

  Ara, la continuïtat de U_2 a $[e_2,1]^2$ dóna una contradicció.
- Si $U_2(e_1,e_1) < e_1$. Llavors, de manera semblant arribem a contradicció amb el fet de que U_2 és contínua a $[0,e_2]^2$.

Aleshores, tenim demostrat que U_2 ha de ser idempotent. □

Hem vist així que, si U_1 és idempotent, també ho ha de ser U_2, i en aquest cas les solucions de la distributivitat els hem donat a la secció anterior.

Ara estudiem el cas en què U_1 és una uninorma de $\mathcal{U}_{\max}$.

Lema 3.4.6 *Siguin* $U_1 \in \mathcal{U}_{\max}$ *i* $U_2 \in \mathcal{U}_{\text{cts}}$. *Si* U_1 *és distributiva sobre* U_2, *llavors* U_2 *és idempotent.*

DEMOSTRACIÓ: Com que $U_1 \in \mathcal{U}_{\max}$, per a tot $x > e_1$ tenim

$$U_1(x, U_2(e_1,0)) = U_2(U_1(x,e_1), U_1(x,0)) = U_2(x,x).$$

Ara distingim dos casos:

- Si $e_1 < e_2$, llavors tenim $U_2(x,x) = U_1(x, U_2(e,0)) = U_1(x,0) = x$.
- Si $e_1 \geqslant e_2$ llavors $U_2(e_1,0) \in [0,e_1]$. Com que $U_1(x,y) = x$ per a tot (x,y) tal que $y \leqslant e_1 < x$ està clar que $U_1(x, U_2(e_1,0)) = x$ i conseqüentment $U_2(x,x) = x$.

Llavors $U_2(x,x) = x$ per a tot $x > e_1$ i per la continuïtat de U_2 a $[e_2, 1]^2$ i a $[0, e_2]^2$, tenim que $U_2(e_1, e_1) = e_1$. Però ara, agafant $y = z = e_1$ a l'equació de distributivitat, obtenim $U_2(x,x) = x$ per a tot $x \in [0,1]$, és a dir, U_2 és idempotent. $\square$

Lema 3.4.7 *Siguin* $U_1 \in \mathcal{U}_{\max}$ *i* $U_2 \in \mathcal{U}_{\text{cts}}$. *Si* U_1 *és distributiva sobre* U_2 *i* $e_1 \leqslant e_2$, *llavors* $U_2 \in \mathcal{U}_{\max}$, *i per tant ve donada per l'expressió*

$$U_2(x,y) = \begin{cases} \min(x,y) & \text{si } x,y \in [0,e_2]^2 \\ \max(x,y) & \text{altrament.} \end{cases}$$

DEMOSTRACIÓ: Primer de tot, sabem que U_2 ha de ser idempotent pel lema anterior. Aleshores, sigui g_2 la funció associada a U_2. El cas $e_1 = e_2$ se segueix del lema 3.4.1. Per una altra banda, si $e_1 < e_2$ llavors $g_2(e_1) \geqslant e_2$ i dividim la demostració en cinc passos:

(i) Primer demostrem que $g_2(e_1) = e_2$. Suposem al contrari que $g_2(e) > e_2$, llavors existeixen x i z tals que
$$e_1 < e_2 < x < z < g_2(e_1)$$
i per a aquests valors tenim
$$U_1(x, U_2(e_1,z)) = U_1(x, \min(e_1,z)) = U_1(x,e_1) = x$$
però, com que $e_2 < x < z \leqslant U_1(x,z)$,
$$U_2(U_1(x,e_1), U_1(x,z)) = U_2(x, U_1(x,z)) = \max(x, U_1(x,z)) = U_1(x,z) > x,$$
que dóna una contradicció amb l'equació (D). Llavors $g_2(e_1) = e_2$.

(ii) Vegem ara que $g_2(x) \leqslant e_1$ per a tot $x > e_2$. Pel decreixement de g_2 i el pas anterior, $g_2(x) = e_2$ per a tot $x \in [e_1, e_2]$. Aleshores, per a tot $x > e_2 = g_2(e_1)$, tenim $U_2(e_1, x) = \max(x, e_1) = x$. Per tant, efectivament, $g_2(x) \leqslant e_1$ per a tot $x > e_2$.

(iii) Ara, demostrarem que $g_2(x) = 0$ per a tot $x > e_2$. Suposem que $0 < g_2(x)$ per algun $x > e_2$. Existeix z tal que
$$0 < z < g_2(x) \leqslant e_1 < e_2 = g_2(e_1) < x$$
i llavors, per una banda
$$U_1(z, U_2(e_1,x)) = U_1(z,x) = x$$
i per l'altra
$$U_2(U_1(z,e_1), U_1(z,x)) = U_2(z,x) = z$$
que és una contradicció. Llavors, $g_2(x) = 0$ per a tot $x > e_2$.

(iv) A continuació demostrem que $g_2(x) = e_2$ per a tot $x \in]0, e_2]$. El pas anterior demostra que
$$U_2(x,y) = \max(x,y) \text{ per a tots } x > e_2 \quad \text{i} \quad y > 0.$$
Aleshores, quan $y > 0$, tenim per commutativitat que $U_2(y,x) = \max(y,x)$, demostrant que $g_2(y) \leqslant x$, per a tot $x > e_2$. Conseqüentment, $g_2(y) \leqslant e_2$ per a tot $y > 0$ i també $g_2(y) = e_2$ per a tot $0 < y \leqslant e_2$ emprant el decreixement de g_2 i el pas (ii) anterior.

(v) Finalment, demostrem que $g_2(0) = e_2$. Si suposem que $g_2(0) > e_2$ podem agafar un element x tal que $0 < e_1 < e_2 < x < g_2(0)$ i per a aquest valor, tenim

$$U_1(0, U_2(e_1, x)) = U_1(0, x) = x$$

mentre que

$$U_2(U_1(0, e_1), U_1(0, x)) = U_2(0, x) = 0,$$

obtenint una contradicció.

Agafant tots els passos anteriors, tenim

$$g_2(x) = \begin{cases} e_2 & \text{si } x \leqslant e_2 \\ 0 & \text{altrament} \end{cases}$$

que vol dir que $U_2 \in \mathcal{U}_{\max}$. Finalment, com que U_2 també és idempotent, tenim que

$$U_2(x, y) = \begin{cases} \min(x, y) & \text{si } (x, y) \in [0, e_2]^2 \\ \max(x, y) & \text{altrament.} \end{cases},$$

amb el que acabem la demostració. □

Lema 3.4.8 *Siguin $U_1 \in \mathcal{U}_{\max}$ i $U_2 \in \mathcal{U}_{\text{cts}}$. Si U_1 és distributiva sobre U_2 i $e_2 < e_1$, llavors U_2 és l'única uninorma idempotent possible amb funció associada g_2 donada per*

$$g_2(x) = \begin{cases} e_1 & si\ x < e_2 \\ e_2 & si\ e_2 \leqslant x \leqslant e_1 \\ 0 & si\ x > e_1 \end{cases} \tag{3.11}$$

És a dir, U_2 ve donada per

$$U_2(x, y) = \begin{cases} \min(x, y) & si\ \min(x, y) < e_2\ i\ \max(x, y) \leqslant e_1 \\ \max(x, y) & altrament. \end{cases} \tag{3.12}$$

A més a més, la uninorma U_1 verifica $U_1(x, y) = \min(x, y)$ si $\min(x, y) \leqslant e_2 \leqslant \max(x, y) \leqslant e_1$.

Demostració: Ja sabem que U_2 ha de ser idempotent, diguem $U_2 \equiv \langle g_2, e_2 \rangle_{\text{ide}}$, i demostrem que g_2 ha de venir donada per l'equació (3.11) en diversos passos.

(i) Demostrem primer que $g_2(x) = e_2$ per a tot $x \in [e_2, e_1]$. Com que $e_2 < e_1$ tenim $g_2(e_1) \leqslant e_2$. Suposem que $g_2(e_1) < e_2$ i agafem x, z tal que $g_2(e_1) < z < x < e_2 < e_1$. Per una banda,

$$U_1(x, U_2(e_1, z)) = U_1(x, \max(e_1, z)) = U_1(x, e_1) = x$$

i per una altra, com que $U_1(x, z) \leqslant \min(x, z) = z < x < e_2$,

$$U_2(U_1(x, e_1), U_1(x, z)) = U_2(x, U_1(x, z)) = \min(x, U_1(x, z)) = U_1(x, z) < x$$

obtenint una contradicció. Aleshores, $g_2(e_1) = e_2$ i per decreixement tenim $g_2(x) = e_2$ per a tot $x \in [e_2, e_1]$.

(ii) Demostrem ara que $g_2(x) = e_1$ per a tot $x < e_2$. Pel pas anterior, i emprant la commutativitat, deu ser $g_2(x) \geqslant e_1$ per a tots aquests valors. Suposem llavors que existeix $x < e_2$ tal que $g_2(x) > e_1$ i agafem z tal que $x < e_2 = g_2(e_1) < e_1 < z < g_2(x)$. Obtenim una altra vegada una contradicció, degut a que $U \in \mathcal{U}_{\max}$, tenim

$$U_1(x, U_2(e_1, z)) = U_1(x, z) = z$$

i també

$$U_2(U_1(x, e_1), U_1(x, z)) = U_2(x, z) = x.$$

(iii) El pas anterior també prova, per commutativitat de U_2, que $g_2(x) = 0$ per a tot $x > e_1$.

Aleshores, g_2 ha de venir donada per l'equació (3.11) i ara és trivial veure que l'única uninorma idempotent que té associada la funció g_2 és la donada a l'enunciat del lema.

Finalment, només queda demostrar que $U_1(x, y) = \min(x, y)$ quan $\min(x, y) \leqslant e_2 \leqslant \max(x, y) \leqslant e_1$. Per veure això, agafem $x \leqslant e_2 \leqslant y \leqslant e_1$. Tenim $U_1(x, U_2(y, e_1)) = U_1(x, e_1) = x$ mentre que, com que $U_1(x, y) \leqslant x$,

$$U_2(U_1(x, y), U_1(x, e_1)) = U_2(U_1(x, y), x) = \min(U_1(x, y), x) = U_1(x, y)$$

que és $U_1(x, y) = x$ el que volíem demostrar. □

Ara ens centrem en el cas de que U_1 sigui una uninorma de $\mathcal{U}_{\min}$. En aquest cas els resultats seran duals del cas anterior, i es poden deduir fàcilment emprant el lema 3.1.7 i el teorema 2.2.36, com veurem.

Lema 3.4.9 *Siguin $U_1 \in \mathcal{U}_{\min}$ i $U_2 \in \mathcal{U}_{cts}$. Si U_1 és distributiva sobre U_2, llavors U_2 és idempotent.*

Demostració: Com que U_1 és distributiva sobre U_2, emprant el lema 3.1.7, sabem que $\widetilde{U}_1$ també és distributiva sobre $\widetilde{U}_2$, representant per $\widetilde{U}_1$ i $\widetilde{U}_2$ les respectives uninormes duals de U_1 i U_2 respecte de la negació forta $N(x) = 1 - x$. Com que U_1 és de $\mathcal{U}_{\min}$, llavors $\widetilde{U}_1$ és de $\mathcal{U}_{\max}$ pel teorema 2.2.34, i si U_2 és de $\mathcal{U}_{cts}$, també $\widetilde{U}_2$ ho serà, pel teorema 2.2.34. Aleshores podem aplicar el lema 3.4.6, que ens assegura que $\widetilde{U}_2$ serà idempotent. I aplicant de nou el teorema de dualitat, U_2 ha de ser idempotent. □

Lema 3.4.10 *Siguin $U_1 \in \mathcal{U}_{\min}$ i $U_2 \in \mathcal{U}_{cts}$. Si U_1 és distributiva sobre U_2 i $e_2 \leqslant e_1$, llavors $U_2 \in \mathcal{U}_{\min}$.*

Demostració: Raonant de la mateixa manera que a la demostració del lema anterior, $\widetilde{U}_1$ és distributiva sobre $\widetilde{U}_2$, on $\widetilde{U}_1 \in \mathcal{U}_{\max}$, $\widetilde{U}_2 \in \mathcal{U}_{cts}$ i $\tilde{e}_1 \leqslant \tilde{e}_2$. Aleshores podem aplicar el lema 3.4.7, i tindrem que que $\widetilde{U}_2 \in \mathcal{U}_{\max}$. I aplicant de nou el teorema de dualitat, $U_2 \in \mathcal{U}_{\min}$, com volíem veure. □

Lema 3.4.11 *Siguin $U_1 \in \mathcal{U}_{\min}$ i $U_2 \in \mathcal{U}_{cts}$. Si U_1 és distributiva sobre U_2 i $e_1 < e_2$, llavors U_2 és l'única uninorma idempotent possible amb funció associada g_2 donada per*

$$g_2(x) = \begin{cases} e_1 & si\ x > e_2 \\ e_2 & si\ e_1 \leqslant x \leqslant e_2 \\ 1 & si\ x < e_1 \end{cases} \tag{3.13}$$

És a dir, U_2 ve donada per

$$U_2(x,y) = \begin{cases} \max(x,y) & \textit{si } e_2 < \max(x,y) \textit{ i } e_1 \leqslant \min(x,y) \\ \min(x,y) & \textit{altrament.} \end{cases} \tag{3.14}$$

A més a més, la uninorma $U_1(x,y) = \max(x,y)$ si $e_1 \leqslant \min(x,y) \leqslant e_2 \leqslant \max(x,y) \leqslant e_1$.

Demostració: Igual que als lemes anteriors, tenim que si U_1 és distributiva sobre U_2, $\widetilde{U}_1$ és distributiva sobre $\widetilde{U}_2$, on $\widetilde{U}_1 \in \mathcal{U}_{\max}$, $\widetilde{U}_2 \in \mathcal{U}_{cts}$ i $\widetilde{e}_2 < \widetilde{e}_1$. Aleshores podem aplicar el lema 3.4.8, i com que $\widetilde{U}_2$ és idempotent, tindrem que U_2 també ho és, i $U_2 \equiv \langle g_2, e_2\rangle_{ide}$, on

$$g_2(x) = N(\widetilde{g}_2(N(x))) = \left\{\begin{array}{ll} N(\widetilde{e_1}) & \text{si } N(x) < \widetilde{e_2} \\ N(\widetilde{e_2}) & \text{si } \widetilde{e_2} \leqslant N(x) \leqslant \widetilde{e_1} \\ N(1) & \text{si } N(x) > \widetilde{e_1} \end{array}\right\} = \begin{cases} e_1 & \text{si } x > e_2 \\ e_2 & \text{si } e_1 \leqslant x \leqslant e_2 \\ 1 & \text{si } x < e_1. \end{cases}$$

També tindrem que $\widetilde{U}_1$ ha de ser tal que $\widetilde{U}_1(x,y) = \min(x,y)$ si $\min(x,y) \leqslant \widetilde{e}_2 \leqslant \max(x,y) \leqslant \widetilde{e}_1$, que es tradueix a que $U_1(x,y) = \max(x,y)$ si $e_1 \leqslant \min(x,y) \leqslant e_2 \leqslant \max(x,y)$, com volíem veure. □

En vista dels lemes anteriors, i tenint en compte els teoremes 3.1.16 i 3.1.17 sobre distributivitat a $\mathcal{U}_{\max}$, els teoremes 3.1.19 i 3.1.20 sobre distributivitat a $\mathcal{U}_{\min}$ i els teoremes 3.3.7 i 3.3.9 sobre distributivitat a uninormes idempotents, podem donar totes les solucions de l'equació (D) per a aquestes classes.

Teorema 3.4.12 *Siguin $U_1 \in \mathcal{U}_{ide} \cup \mathcal{U}_{\min} \cup \mathcal{U}_{\max} \cup \mathcal{U}_{rep}$ i $U_2 \in \mathcal{U}_{cts}$. Llavors U_1 és distributiva sobre U_2 si i només si $U_2 \in \mathcal{U}_{ide}$, diguem $U_2 \equiv \langle g_2, e_2\rangle_{ide}$, i se satisfà un dels casos següents:*

(i) $U_1 \in \mathcal{U}_{ide}$, *diguem* $U_1 \equiv \langle g_1, e_1\rangle_{ide}$, *i*

- *(a)* *Si* $e_1 < e_2$, *llavors*
  1. $g_1(x) \leqslant g_2(x)$ *per a tot* $x \in [0,1]$.
  2. *Si* $g_1(x) < g_2(x)$ *llavors* $g_2(x) = e_2$ *i* $x \leqslant e_2$.
  3. *Si existeixen* x *i* z *satisfent* $g_1(z) = g_2(z) = x$ *i* $g_1(x) = g_2(x) = z$, *llavors* $U_1(x,z) = U_2(x,z)$.
- *(b)* *Si* $e_1 = e_2$, *llavors* $U_1 = U_2$.
- *(c)* *Si* $e_1 > e_2$, *llavors*
  1. $g_2(x) \leqslant g_1(x)$ *per a tot* $x \in [0,1]$.
  2. *Si* $g_2(x) < g_1(x)$ *llavors* $g_2(x) = e_2$ *i* $x \geqslant e_2$.
  3. *Si existeixen* x *i* z *satisfent* $g_1(z) = g_2(z) = x$ *i* $g_1(x) = g_2(x) = z$, *llavors* $U_1(x,z) = U_2(x,z)$.

(ii) $U_1 \in \mathcal{U}_{\max}$ *i*

- *(a)* *Si* $e_1 \leqslant e_2$, *llavors* $U_2 \in \mathcal{U}_{\max}$ *i* U_1 *ve donada per*

$$U_1(x,y) = \begin{cases} e_1 T\left(\frac{x}{e_1}, \frac{y}{e_1}\right) & \textit{si } (x,y) \in [0,e_1]^2 \\ e_1 + (e_2 - e)S'\left(\frac{x-e_1}{e_2-e_1}, \frac{y-e_1}{e_2-e_1}\right) & \textit{si } (x,y) \in [e_1,e_2]^2 \\ e_2 + (1-e_2)S''\left(\frac{x-e_2}{1-e_2}, \frac{y-e_2}{1-e_2}\right) & \textit{si } (x,y) \in [e_2,1]^2 \\ \max(x,y) & \textit{altrament.} \end{cases} \tag{3.15}$$

(b) *Si* $e_1 > e_2$*, llavors* U_1 *ve donada per*

$$U_1(x,y) = \begin{cases} e_2 T'\left(\frac{x}{e_2}, \frac{y}{e_2}\right) & \text{si } (x,y) \in [0,e_2]^2 \\ e_2 + (e_1 - e_2)T''\left(\frac{x-e_2}{e_1-e_2}, \frac{y-e_2}{e_1-e_2}\right) & \text{si } (x,y) \in [e_2,e_1]^2 \\ e_1 + (1-e_1)S\left(\frac{x-e_1}{1-e_1}, \frac{y-e_1}{1-e_1}\right) & \text{si } (x,y) \in [e_1,1]^2 \\ \min(x,y) & \text{si } \min(x,y) \leqslant e_2 \leqslant \max(x,y) \leqslant e_1 \\ \max(x,y) & \text{altrament,} \end{cases} \tag{3.16}$$

i U_2 *i* g_2 *són com al lema 3.4.8.*

(iii) $U_1 \in \mathcal{U}_{\min}$ *i*

(a) *Si* $e_1 \geqslant e_2$*, llavors* $U_2 \in \mathcal{U}_{\min}$ *i* U_1 *ve donada per*

$$U_1(x,y) = \begin{cases} e_2 T'\left(\frac{x}{e_1}, \frac{y}{e_1}\right) & \text{si } (x,y) \in [0,e_2]^2 \\ e_2 + (e_1 - e_2)T''\left(\frac{x-e_2}{e_1-e_2}, \frac{y-e_2}{e_1-e_2}\right) & \text{si } (x,y) \in [e_2,e_1]^2 \\ e_1 + (1-e_1)S\left(\frac{x-e_2}{1-e_1}, \frac{y-e_1}{1-e_1}\right) & \text{si } (x,y) \in [e_1,1]^2 \\ \min(x,y) & \text{altrament.} \end{cases} \tag{3.17}$$

(b) *Si* $e_1 < e_2$*, llavors* U_1 *ve donada per*

$$U_1(x,y) = \begin{cases} e_1 T\left(\frac{x}{e_1}, \frac{y}{e_1}\right) & \text{si } (x,y) \in [0,e_1]^2 \\ e_1 + (e_2 - e_1)S'\left(\frac{x-e_1}{e_2-e_1}, \frac{y-e_1}{e_2-e_1}\right) & \text{si } (x,y) \in [e_1,e_2]^2 \\ e_2 + (1-e_2)S\left(\frac{x-e_2}{1-e_2}, \frac{y-e_2}{1-e_2}\right) & \text{si } (x,y) \in [e_2,1]^2 \\ \max(x,y) & \text{si } e_1 \leqslant \min(x,y) \leqslant e_2 \leqslant \max(x,y) \\ \min(x,y) & \text{altrament,} \end{cases} \tag{3.18}$$

i U_2 *i* g_2 *són com al lema 3.4.11.*

DEMOSTRACIÓ: D'esquerra a dreta és una conseqüència directa dels lemes anteriors, els teoremes 3.1.16, 3.1.17, 3.1.19, 3.1.20, 3.3.7 i 3.3.9. Recíprocament, els casos *(i)-(a)*, *(i)-(b)*, *(i)-(c)* estan demostrats als teoremes 3.3.7 i 3.3.9, mentre que els casos *(ii)-(a)*, *(iii)-(a)* estan demostrats a [68] i [70]. Aleshores, només queda demostrar la distributivitat dels casos *(ii)-(b)*, *(iii)-(b)*.

Si tenim U_1 i U_2 uninormes com al cas *(ii)-(b)*, és un simple càlcul veure que compleixen l'equació (D).

El cas *(iii)-(b)* surt per dualitat del cas anterior. □

Nota 3.4.13 *Les solucions de (ii)-(a), (ii)-(b), (iii)-(a), (iii)-(b) del teorema anterior es poden observar a les figures 18, 19, 20, 21, respectivament. A la taula 6 es resumeixen els resultats obtinguts a aquesta part.*

U_1	$e_1 < e_2$	$e_1 = e_2$	$e_2 < e_1$
$U_1 \equiv \langle h_1, e_1 \rangle_{\text{rep}}$	No hi ha solucions		
$U_1 \equiv \langle g_1, e_1 \rangle_{\text{ide}}$	teorema 3.3.7	$U_1 = U_2$	teorema 3.3.9
$U_1 \equiv \langle T_1, e_1, S_1 \rangle_{\max}$	U_1 com a (3.15) $U_2 \in \mathcal{U}_{\max} \cap \mathcal{U}_{\text{ide}}$	$U_2 \in \mathcal{U}_{\max} \cap \mathcal{U}_{\text{ide}}$	U_1 com a (3.16) U_2 com a (3.12)
$U_1 \equiv \langle T_1, e_1, S_1 \rangle_{\min}$	U_1 com a (3.18) $U_2 \in \mathcal{U}_{\min} \cap \mathcal{U}_{\text{ide}}$	$U_2 \in \mathcal{U}_{\max} \cap \mathcal{U}_{\text{ide}}$	U_1 com a (3.17) U_2 com a (3.14)

Taula 6. Resultats de la distributivitat entre uninormes, per als casos en que U_1 sigui de $\mathcal{U}_{\text{rep}}$, $\mathcal{U}_{\text{ide}}$, $\mathcal{U}_{\max}$ ò $\mathcal{U}_{\min}$.

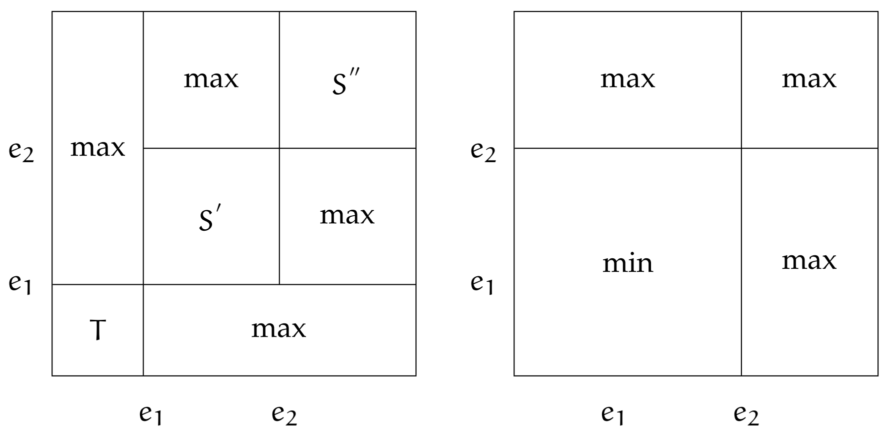

Figura 18. Estructura general d'una uninorma U_1 de $\mathcal{U}_{\max}$ (esquerra), que és distributiva sobre una uninorma U_2 (dreta), amb elements neutres $e_1 \leqslant e_2$.

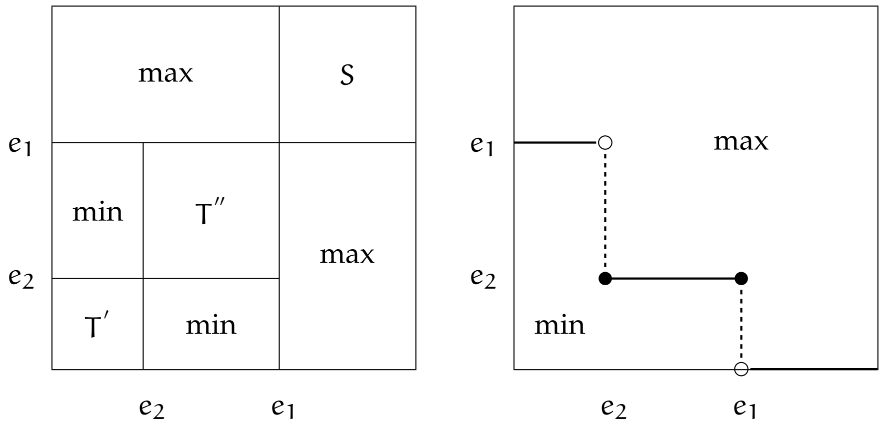

Figura 19. Estructura general d'una uninorma U_1 de $\mathcal{U}_{\max}$ (esquerra), que és distributiva sobre una uninorma U_2 (dreta), amb elements neutres $e_2 < e_1$.

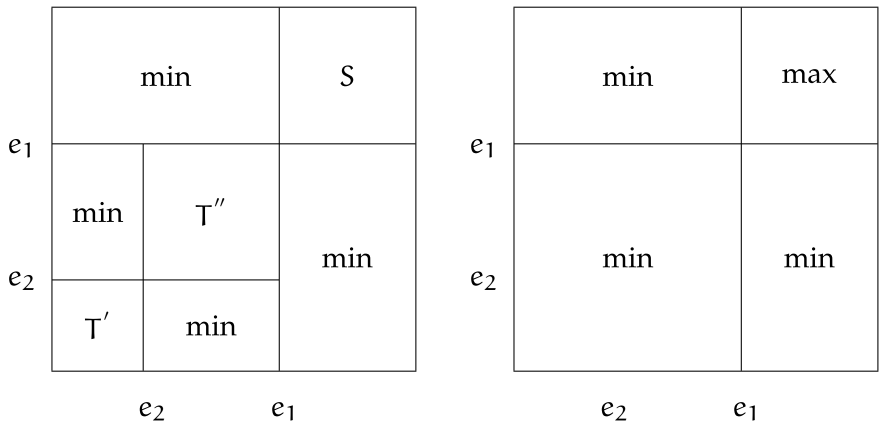

Figura 20. Estructura general d'una uninorma U_1 de $\mathcal{U}_{\min}$ (esquerra), distributiva sobre una uninorma U_2 (dreta), amb elements neutres $e_2 \leqslant e_1$.

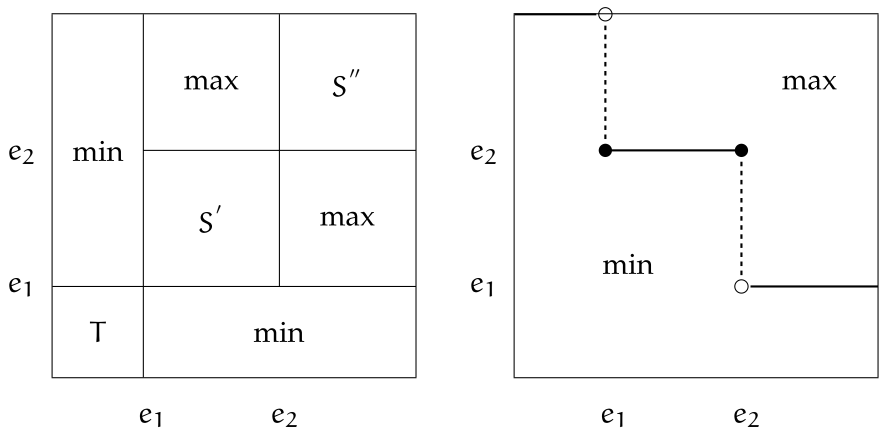

Figura 21. Estructura general d'una uninorma U_1 de $\mathcal{U}_{\min}$ (esquerra), que és distributiva sobre una uninorma U_2 (dreta), amb elements neutres $e_1 < e_2$.

- U_1 *de* $\mathcal{U}_{\cos,\max}$

Ara considerarem el cas en què $U_1 \in \mathcal{U}_{\cos}$. En aquest cas no es tindrà que necessàriament U_2 sigui idempotent. Primer resoldrem la distributivitat per al cas en què $U_1 \in \mathcal{U}_{\cos,\max}$, i el en què $U_1 \in \mathcal{U}_{\cos,\min}$ es resoldrà de manera directa per dualitat. Suposarem que $e_2 > 0$, ja que el cas $e_2 = 0$ està resolt a la secció 3.2.1.

Lema 3.4.14 *Siguin* $U_1 \equiv \langle (R, e_1), \gamma, S_1', \delta, S_1'' \rangle_{\cos,\max}$, $U_2 \in \mathcal{U}(e_2)$, *tals que* U_1 *és distributiva sobre* U_2. *Llavors* $\gamma \leqslant e_2$.

Demostració: Suposem que $e_2 < \gamma$, com que U_1 és de $\mathcal{U}_{\cos,\max}$, els seus elements idempotents menors que γ, són e_1 i 0. Pel lema 3.4.3, e_2 és un element idempotent de U_1. Com que $e_2 > 0$, haurà de ser $e_1 = e_2$, però llavors pel lema 3.4.1 U_2 ha de ser idempotent i $U_2(x, y) = U_1(x, y)$ per a tot $(x, y) \in [0, e_1] \times [e_1, 1] \cup [e_1, 1] \times [0, e_1]$, que dóna una contradicció amb la definició de U_1. D'aquesta manera, $\gamma \leqslant e_2$. □

Lema 3.4.15 *Siguin* $U_1 \equiv \langle (R, e_1), \gamma, S_1', \delta, S_1'' \rangle_{\cos,\max}$, $U_2 \in \mathcal{U}_{cts}$, *tals que* U_1 *és distributiva sobre* U_2. *Llavors* $U_2(e_1, e_1) > 0$.

Demostració: Sabem pel lema anterior que $e_1 < \gamma \leqslant e_2$ i, si $U_2(e_1, e_1) = 0$, llavors tenim

$$U_1(x, U_2(e_1, e_1)) = U_1(x, 0) \text{ per a tot } x \in [0, 1]$$

però per una altra banda, com que U_1 és distributiva sobre U_2,

$$U_1(x, U_2(e_1, e_1)) = U_2(U_1(x, e_1), U_1(x, e_1)) = U_2(x, x)$$

i llavors, $U_2(x, x) = U_1(x, 0)$ que contradiu la continuïtat de T_{U_2} i S_{U_2}. Llavors, podem concloure que $U_2(e_1, e_1) > 0$. □

Lema 3.4.16 *Siguin* $U_1 \equiv \langle (R, e_1), \gamma, S_1', \delta, S_1'' \rangle_{\cos,\max}$, *i* $U_2 \in \mathcal{U}_{cts}$, *tals que* U_1 *és distributiva sobre* U_2. *Llavors* $U_2(x, x) = x$ *per a tot* $x \in [\gamma, 1]$.

Demostració: Sabem pel lema anterior, que $0 < U_2(e_1, e_1) \leqslant e_1 < \gamma \leqslant e_2$. Llavors per a tot $x \geqslant \gamma$, tenim, per definició de $U_1 \in \mathcal{U}_{\text{cos,max}}$:

$$U_1(x, U_2(e_1, e_1)) = \max(x, U_2(e_1, e_1)) = x,$$

però també, perquè U_1 és distributiva sobre U_2,

$$U_1(x, U_2(e_1, e_1)) = U_2(x, x),$$

i llavors $U_2(x, x) = x$ per a tot $x \in [\gamma, 1]$. □

Corol·lari 3.4.17 *Siguin $U_1 \equiv \langle (R, e_1), \gamma, S_1', \delta, S_1'' \rangle_{\text{cos,max}}$, i $U_2 \in \mathcal{U}_{\text{cts}}$, tals que U_1 és distributiva sobre U_2. Llavors U_2 no és representable, ni de $\mathcal{U}_{\text{cos}}$.*

Lema 3.4.18 *Siguin $U_1 \equiv \langle (R, e_1), \gamma, S_1', \delta, S_1'' \rangle_{\text{cos,max}}$, i $U_2 \in \mathcal{U}(e_2)$, tals que U_1 és distributiva sobre U_2. Llavors, per a tots $0 < y < e_2 < z$, tenim que $U_2(y, z) \neq y$.*

Demostració: Suposem que existeix $z > e_2$ tal que per qualque $0 < y < e_2 < z$ tenim $U_2(y, z) = y$. Podem agafar x tal que $0 < y < e_2 < x < z$, i llavors, emprant el lema 3.4.3, i l'estructura de U_1, tenim, per un costat:

$$U_1(x, U_2(y, z)) = U_1(x, y) = \max(x, y) = x,$$

però per l'altre, tenim

$$U_2(U_1(x, y), U_1(x, z)) = U_2(x, U_1(x, z)) \geqslant U_2(x, z) \geqslant z > x$$

que dóna una contradicció, i llavors el resultat queda demostrat. □

Lema 3.4.19 *Siguin $U_1 \equiv \langle (R, e_1), \gamma, S_1', \delta, S_1'' \rangle_{\text{cos,max}}$, i $U_2 \in \mathcal{U}_{\text{mnx}}$, tals que U_1 és distributiva sobre U_2, i $\gamma \leqslant e_2 < \delta$. Llavors, si $U_2(x, 0) = U_1(x, 0)$ per a tot $x \in [0, 1]$.*

Demostració: Dividim la demostració en alguns casos:

- Si $x \leqslant e_2$, per definició de U_1, tenim $U_2(x, 0) = U_1(x, 0) = 0$.
- Si $e_2 < x < \delta$. Agafem z tal que $0 < z < \gamma \leqslant e_2 < x < \delta$. Llavors tenim,

  $$U_1(x, 0) = U_1(x, U_2(z, 0)) = U_2(U_1(x, z), U_1(x, 0)) = U_2(\max(x, z), 0) = U_2(x, 0).$$

  on a la tercera igualtat hem emprat que $U_1 \in \mathcal{U}_{\text{cos,max}}$.
- Si $\delta < x$, agafem algun y satisfent $e_2 < y < \delta < x$, i llavors tenim

  $$U_2(x, 0) = U_2(U_1(x, 0), U_1(y, 0)) = U_1(U_2(x, y), 0) = U_1(\max(x, y), 0) = U_1(x, 0).$$

- Queda el cas en què $\delta = x$, en el que distingirem dos casos:
  - Considerem que $U_1(0, \delta) = \delta$. Agafem y satisfent $0 < y < e_2 < \delta$. Pel lema anterior, $U_2(\delta, y) \neq y$, i com que $U_2 \in \mathcal{U}_{\text{mnx}}$, $U_2(\delta, y) = \delta$. Ara podem escriure:

    $$\delta = U_1(0, \delta) = U_1(0, U_2(\delta, y)) = U_2(U_1(0, \delta), U_1(0, y)) = U_2(\delta, 0),$$

    és a dir, $U_1(0, \delta) = U_2(0, \delta)$.

– Considerem, pel contrari que $U_1(0,\delta) = 0$. Ara, prenent $0 < z \leqslant \gamma \leqslant e_2 < \delta$:

$$\begin{aligned} U_1(\delta,0) &= U_1(\delta, U_2(z,0)) = U_2(U_1(\delta,z), U_1(\delta,0)) \\ &= U_2(\max(\delta,z),0) = U_2(\delta,0). \end{aligned}$$

Per tant, $U_1(x,0) = U_2(x,0)$, per a tot $x \in [0,1]$. □

Corol·lari 3.4.20 *Siguin $U_1 \equiv \langle (R,e_1), \gamma, S_1', \delta, S_1'' \rangle_{\cos,\max}$, i $U_2 \in \mathcal{U}_{mnx}$, tals que U_1 és distributiva sobre U_2, i $\gamma \leqslant e_2 < \delta$. Llavors U_2 ha de venir donada per*

$$U_2(x,y) = \begin{cases} \gamma T(\frac{x}{\gamma}, \frac{y}{\gamma}) & \textit{si } (x,y) \in [0,\gamma]^2 \\ \max(x,y) & \textit{si } \max(x,y) > e_2 \textit{ i } \min(x,y) > 0 \\ U_1(x,y) & \textit{si } x = 0 \textit{ ò } y = 0 \\ \min(x,y) & \textit{altrament.} \end{cases} \tag{3.19}$$

Demostració: El resultat se segueix dels lemes anteriors. □

Lema 3.4.21 *Siguin $U_1 \equiv \langle (R,e_1), \gamma, S_1', \delta, S_1'' \rangle_{\cos,\max}$, i $U_2 \in \mathcal{U}(e_2)$, tals que U_1 és distributiva sobre U_2, i $\delta \leqslant e_2$. Llavors $U_2(x,0) = x$ per a tot $x > e_2$, que és, U_2 ha de ser de $\mathcal{U}_{\max}$.*

Demostració: Suposem que existeix $x > e_2$ tal que $U_2(0,x) = 0$, llavors podem agafar $\delta \leqslant e_2 < z < x$, i podem escriure, per una banda:

$$U_1(z, U_2(0,x)) = U_1(z,0) = z$$

i per l'altra:

$$U_2(U_1(z,0), U_1(z,x)) = U_2(z, U_1(z,x)) \geqslant U_2(z,x) = x > z$$

que dóna una contradicció. Llavors, $U_2(0,x) = x$ per a tot $x > e_2$. □

Corol·lari 3.4.22 *Siguin $U_1 \equiv \langle (R,e_1), \gamma, S_1', \delta, S_1'' \rangle_{\cos,\max}$, i siguin $U_2 \in \mathcal{U}(e_2)$, tals que U_1 és distributiva sobre U_2, i $\delta \leqslant e_2$. Si U_2 és de $\mathcal{U}_{cts}$, llavors $U_2 \in \mathcal{U}_{\max}$ i existeix una t-norma T tal que U_2 ha de venir donada per*

$$U_2(x,y) = \begin{cases} \gamma T(\frac{x}{\gamma}, \frac{y}{\gamma}) & \textit{si } (x,y) \in [0,\gamma]^2 \\ \max(x,y) & \textit{si } \max(x,y) \geqslant e_2 \\ \min(x,y) & \textit{altrament.} \end{cases} \tag{3.20}$$

Demostració: Pel lema anterior, està clar que U_2 ha de ser de $\mathcal{U}_{\max}$ i el resultat segueix del lema 3.4.16. □

Teorema 3.4.23 *Siguin $U_1 \equiv \langle (R,e_1), \gamma, S_1', \delta, S_1'' \rangle_{\cos,\max}$, i $U_2 \in \mathcal{U}_{mnx} \cup \mathcal{U}_{cts}$. Llavors, U_1 és distributiva sobre U_2 si i només si*

- $e_2 \geqslant \gamma$,
- $U_1(e_2,e_2) = e_2$,
- *existeix una t-norma T tal que R és distributiva sobre T (que vol dir, $T = \min$ o T és estricta i, si t és el generador additiu de T satisfent $t(\frac{e_1}{\gamma}) = 1$ llavors $\frac{1}{t}$ és també un generador multiplicatiu de R),*

- *Se satisfà un dels casos següents:*
  - *(i)* $e_2 < \delta$ *i llavors* U_2 *ve donada per l'equació* (3.19), *o*
  - *(ii)* $\delta \leqslant e_2$ *i llavors* U_2 *ve donada per l'equació* (3.20).

Demostració: La implicació directa és conseqüència dels resultats anteriors, i tenint en compte les solucions de la distributivitat per uninormes representables del teorema 3.2.26.

Recíprocament, és un càlcul comprovar que quan U_1 i U_2 són com a l'enunciat, U_1 és distributiva sobre U_2. □

L'estructura general de U_1 i U_2 tal que U_1 és distributiva sobre U_2 es pot observar a la figura 22 per al cas *(i)*, i la figura 23 per al cas *(ii)*.

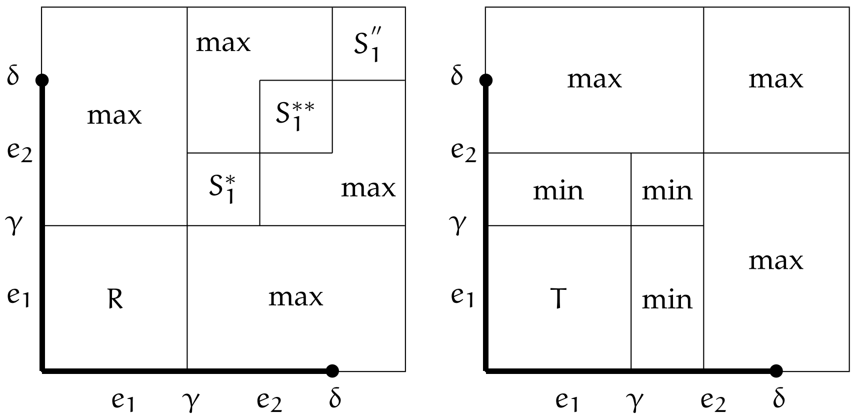

Figura 22. $U_1 \in \mathcal{U}_{\cos,\max}$ (esquerra) distributiva sobre $U_2 \in \mathcal{U}_{\mathrm{mnx}}$ (dreta), amb $\gamma \leqslant e_2 < \delta$.

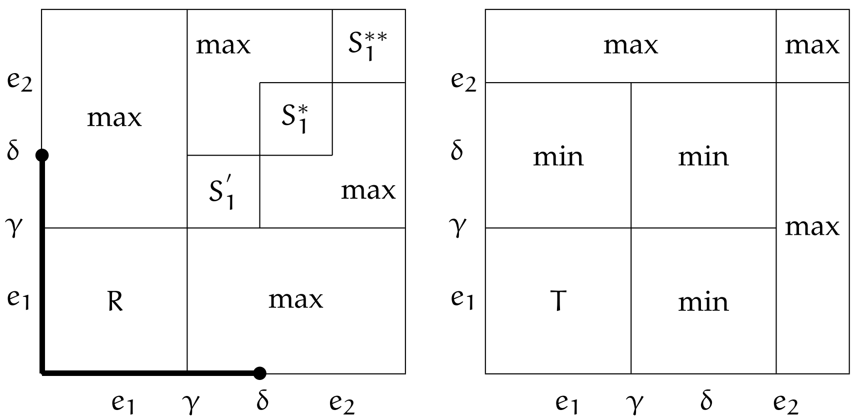

Figura 23. $U_1 \in \mathcal{U}_{\cos,\max}$ (esquerra) distributiva sobre $U_2 \in \mathcal{U}_{\max}$ (dreta), amb $\delta \leqslant e_2$.

- U_1 *de* $\mathcal{U}_{\cos,\min}$

Tot seguit considerem el cas que $U_1 \in \mathcal{U}_{\cos,\min}$. Per dualitat, emprant el teorema 2.2.34 obtindrem els resultats duals als fets per $U_1 \in \mathcal{U}_{\cos,\max}$.

Lema 3.4.24 *Siguin* $U_1 \equiv \langle T_1', \alpha, T_1'', \beta, (R, e_1)\rangle_{\cos,\min}$, *i* $U_2 \in \mathcal{U}(e_2)$, *tals que* U_1 *és distributiva sobre* U_2. *Llavors* $e_2 \leqslant \beta$.

Demostració: Emprant el lema 3.1.7, sabem que si U_1 és distributiva sobre U_2, llavors $\widetilde{U}_1$ ho serà sobre $\widetilde{U}_2$.
A més, pel teorema 2.2.36, $\widetilde{U}_1 \in \mathcal{U}_{\cos,\max}$, amb paràmetres $\widetilde{U}_1 \equiv \langle(\widetilde{R}, 1-e_1), N(\beta), \widetilde{T}_1'', 1-\alpha, \widetilde{T}_1'\rangle_{\cos,\max}$ i llavors podrem emprar el lema 3.4.14 i tindrem que $1-\beta \leqslant 1-e_2$, és a dir, $e_2 \leqslant \beta$, com volíem veure. □

Lema 3.4.25 *Siguin* $U_1 \equiv \langle T_1', \alpha, T_1'', \beta, (R, e_1)\rangle_{\cos,\min}$, *i* $U_2 \in \mathcal{U}_{cts}$, *tals que* U_1 *és distributiva sobre* U_2. *Llavors* $U_2(e_1, e_1) < 1$.

Demostració: Raonant igual que a la demostració del lema anterior, $\widetilde{U}_1$ és distributiva sobre $\widetilde{U}_2$, $\widetilde{U}_1$ és de $\mathcal{U}_{\cos,\max}$, i $\widetilde{U}_2$ és de $\mathcal{U}_{cts}$. Llavors podem emprar el lema 3.4.15, i tindrem que $\widetilde{U}_2(1-e_1, 1-e_1) > 0$, i emprant la definició de $\widetilde{U}_2$, es té que $U_2(e_1, e_1) < 1 - 0 = 1$, com volíem demostrar. □

Lema 3.4.26 *Siguin* $U_1 \equiv \langle T_1', \alpha, T_1'', \beta, (R, e_1)\rangle_{\cos,\min}$, *i* $U_2 \in \mathcal{U}_{cts}$, *tals que* U_1 *és distributiva sobre* U_2. *Llavors* $U_2(x, x) = x$ *per a tot* $x \in [0, \beta]$.

Demostració: Seguint el mateix procediment que a les demostracions dels lemes anteriors, podem aplicar el lema 3.4.16 per a $\widetilde{U}_1$ i $\widetilde{U}_2$, i llavors tindrem que $\widetilde{U}_2(x, x) = x$ per a tot $x \in [1-\beta, 1]$, i fent el canvi de variable $y = 1-x$, tenim que $U_2(y, y) = y$ per a tot $y \in [0, \beta]$, i el lema queda demostrat. □

Corol·lari 3.4.27 *Siguin* $U_1 \equiv \langle T_1', \alpha, T_1'', \beta, (R, e_1)\rangle_{\cos,\min}$, *i* $U_2 \in \mathcal{U}_{cts}$, *tals que* U_1 *és distributiva sobre* U_2. *Llavors* U_2 *no és ni representable, ni de* $\mathcal{U}_{\cos}$.

Lema 3.4.28 *Siguin* $U_1 \equiv \langle T_1', \alpha, T_1'', \beta, (R, e_1)\rangle_{\cos,\min}$, *i* $U_2 \in \mathcal{U}(e_2)$, *tals que* U_1 *és distributiva sobre* U_2. *Per a tots* $y < e_2 < z < 1$ *tenim que* $U_2(y, z) \neq z$.

Demostració: Tenim que $\widetilde{U}_1$ és distributiva sobre $\widetilde{U}_2$, i llavors, pel lema 3.4.18, tindrem que per a tots $0 < y < 1-e_2 < z$ és cert que $\widetilde{U}_2(y, z) \neq y$. Llavors això vol dir que per a tots $1-z < e_2 < 1-y < 1$ se compleix que $U_2(1-y, 1-z) \neq 1-y$, que és equivalent al que volíem demostrar. □

Lema 3.4.29 *Siguin* $U_1 \equiv \langle T_1', \alpha, T_1'', \beta, (R, e_1)\rangle_{\cos,\min}$, *i* $U_2 \in \mathcal{U}_{mnx}$, *tals que* U_1 *és distributiva sobre* U_2 *amb* $\alpha < e_2 \leqslant \beta$. *Llavors* $U_2(x, 1) = U_1(x, 1)$ *per a tot* $x \in [0, 1]$.

Demostració: Sabem que $\widetilde{U}_1$ és distributiva sobre $\widetilde{U}_2$, i també tindrem $1-\beta \leqslant e_2 < 1-\alpha$, i podem aplicar el lema 3.4.19. □

Corol·lari 3.4.30 *Siguin* $U_1 \equiv \langle T_1', \alpha, T_1'', \beta, (R, e_1)\rangle_{\cos,\min}$, *i* $U_2 \in \mathcal{U}_{mnx}$, *tals que* U_1 *és distributiva sobre* U_2, *i* $\alpha < e_2 \leqslant \beta$. *Llavors* U_2 *ha de venir donada per*

$$U_2(x, y) = \begin{cases} \beta + (1-\beta)S\left(\frac{x-\beta}{1-\beta}, \frac{y-\beta}{1-\beta}\right) & \text{si } (x, y) \in [\beta, 1]^2 \\ \min(x, y) & \text{si } \min(x, y) < e_2 \text{ i } \max(x, y) < 1 \\ U_1(x, y) & \text{si } x = 1 \text{ ò } y = 1 \\ \max(x, y) & \text{altrament.} \end{cases} \tag{3.21}$$

DEMOSTRACIÓ: Es tracta de fer el procediment seguit a les demostracions anteriors, fent el dual del corol·lari 3.4.20 □

Lema 3.4.31 *Siguin* $U_1 \equiv \langle T_1', \alpha, T_1'', \beta, (R, e_1)\rangle_{\text{cos,min}}$, *i* $U_2 \in \mathcal{U}(e_2)$, *tals que* U_1 *és distributiva sobre* U_2, *i* $e_2 \leqslant \alpha$. *Llavors* $U_2(x, 1) = x$ *per a tot* $x < e_2$, *que és,* U_2 *ha de ser de* $\mathcal{U}_{\text{min}}$.

DEMOSTRACIÓ: Resultat dual de 3.4.21. □

Corol·lari 3.4.32 *Siguin* $U_1 \equiv \langle T_1', \alpha, T_1'', \beta, (R, e_1)\rangle_{\text{cos,min}}$, *i siguin* $U_2 \in \mathcal{U}(e_2)$, *tals que* U_1 *és distributiva sobre* U_2, *i* $e_2 \leqslant \alpha$. *Si* U_2 *és de* $\mathcal{U}_{\text{cts}}$, *llavors* $U_2 \in \mathcal{U}_{\text{min}}$ *i existeix una t-conorma* S *tal que* U_2 *ha de venir donada per*

$$U_2(x, y) = \begin{cases} \beta + (1-\beta)S\left(\frac{x-\beta}{1-\beta}, \frac{y-\beta}{1-\beta}\right) & \textit{si } (x, y) \in [\beta, 1]^2 \\ \min(x, y) & \textit{si } \min(x, y) \leqslant e_2 \\ \max(x, y) & \textit{altrament.} \end{cases} \tag{3.22}$$

DEMOSTRACIÓ: Resultat dual de 3.4.22. □

Teorema 3.4.33 *Siguin* $U_1 \equiv \langle T_1', \alpha, T_1'', \beta, (R, e_1)\rangle_{\text{cos,min}}$, *i* $U_2 \in \mathcal{U}_{\text{mnx}} \cup \mathcal{U}_{\text{cos}}$. *Llavors,* U_1 *és distributiva sobre* U_2 *si i només si*

- $e_2 \leqslant \beta$,
- $U_1(e_2, e_2) = e_2$,
- *existeix una t-conorma* S *tal que* R *és distributiva sobre* S *(que vol dir,* $S = \max$ *ò* S *és estricta i, si* s *és el generador additiu de* S *satisfent* $s(\frac{e_1-\beta}{1-\beta}) = 1$, *és també un generador multiplicatiu de* R*),*
- *Se satisfà un dels casos següents:*
  (i) $e_2 > \alpha$ *i llavors* U_2 *ve donada per l'equació* (3.21), *ò*
  (ii) $e_2 \leqslant \alpha$ *i llavors* U_2 *ve donada per l'equació* (3.22).

DEMOSTRACIÓ: Dual del teorema 3.4.23. □

L'estructura general de U_1 i U_2 tal que U_1 és distributiva sobre U_2 es pot observar a la figura 24 per al cas *(i)*, i la figura 25 per al cas *(ii)*.

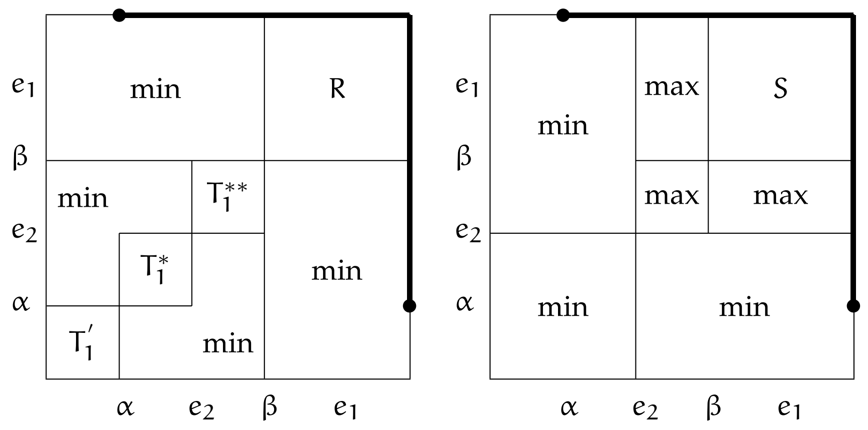

Figura 24. $U_1 \in \mathcal{U}_{\text{cos,min}}$ (esquerra) distributiva sobre $U_2 \in \mathcal{U}_{\text{mnx}}$ (dreta), amb $\alpha < e_2 \leqslant \beta$.

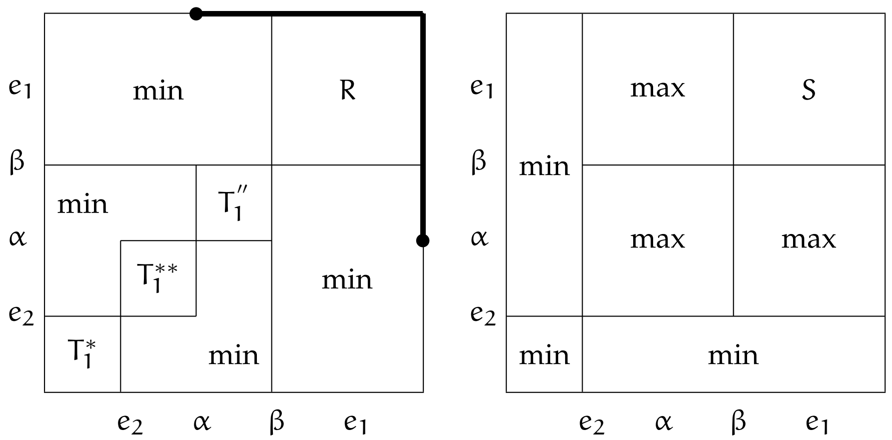

Figura 25. $U_1 \in \mathcal{U}_{\text{cos,min}}$ (esquerra) distributiva sobre $U_2 \in \mathcal{U}_{\text{min}}$ (dreta), amb $e_2 \leqslant \alpha$.

3.5 CONCLUSIONS

Des del treball de Zimmermann i Zysno ([107]), és ben reconeguda la conveniència de que els operadors utilitzats en lògica borrosa i d'altres relacionats (com ara les funcions d'agregació) verifiquin el màxim de propietats habituals en la lògica clàssica. Una d'aquestes propietats especialment important és la distributivitat llargament estudiada per molts autors ([9, 8, 16, 20, 22, 48, 68, 70])

En aquest capítol hem resolt l'equació funcional de la distributivitat (D) quan F i G són uninormes de diverses classes, o bé t-normes o t-conormes. S'han obtingut en alguns casos solucions desconegudes fins al moment. El cas més important, és el cas de la distributivitat i la distributivitat condicional d'una uninorma sobre una t-conorma (contínua). Per al cas d'una uninorma representable, obtenim que hi ha solucions quan la t-conorma és estricta. A més a més, obtenim solucions de la distributivitat amb una t-conorma que és suma ordinal d'una t-conorma estricta amb altres t-conormes qualssevol, quan la uninorma és contínua a $]0,1[^2$.

També són de destacar les solucions obtingudes quan els operadors F i G són uninormes idempotents, ja que les solucions dels parells distributius coincideixen amb les de la modularitat, i per tant s'obté tota una família de parelles d'uninormes que satisfan ambdues propietats: la modularitat d'una sobre l'altra, i la de formar un parell distributiu.

Un altre punt important és el de les solucions obtingudes quan es consideren dues uninormes en *sentit estricte*, és a dir, que no siguin ni t-normes ni t-conormes. En una gran part dels casos, de forma semblant al resultat que s'obté per a t-normes i t-conormes, el segon operador involucrat ha de ser idempotent, encara que depenent de a quina classe pertanyi la primera uninorma, s'obtenen condicions més restrictives. L'únic cas on no s'obtenen solucions (llevat quan considerem el cas del màxim) és quan el primer operador és una uninorma representable que, com hem vist, és distributiu sobre una t-conorma estricta.

L'estudi de totes les possibles solucions de l'equació de distributivitat, que s'ha fet en aquest capítol es pot aplicar als camps següents, com hem esmentat anteriorment:

- *Semianells condicionalment distributius (veure [78]).* En la teoria del pseudo-anàlisi i les mesures pseudo-additives, una possibilitat consisteix en definir un *semianell condicionalment distributiu*, de la manera següent.

  Definició 3.5.1 *Sigui U una uninorma i S una t-conorma. Si satisfan (CD), llavors direm que $(S, U, [0, 1])$ és un semianell condicionalment distributiu.*

  A 3.2.18 s'han trobat les solucions de (CD) de semianells condicionalment distributius (els casos de $\mathcal{U}_{\text{cos,min}}$ i $\mathcal{U}_{\text{cos,max}}$), i que es poden emprar com a tals.

- (S, U)-*integral*. En el context de la definició anterior, es va proposar a [61] la definició de (S, U)-integral, que es basa en semianells condicionalment distributius. Per tant, amb aquestes noves solucions es podrien construir noves (S, U)-integrals, i estudiar les seves propietats. Notem que aquestes integrals s'han utilitzat ja amb èxit en la resolució de determinades equacions amb derivades parcials, i també en camps com ara la mesura de la informació.

- *Distributivitat amb implicacions (capítol següent)*. Un dels camps on s'ha proposat una equació de distributivitat ha estat en el de les implicacions borroses. Aquest és un problema que s'ha resolt per al cas de t-normes i t-conormes, i les implicacions que es poden construir a partir d'elles, però l'estudi de la distributivitat fet en aquest capítol, dóna solució al cas de que se considerin uninormes i implicacions definides a partir d'elles. És a aquest problema al que es dedica el capítol següent.

4 FUNCIONS D'IMPLICACIÓ

4.1 INTRODUCCIÓ

Uns dels connectius més utilitzats i estudiats en la lògica borrosa són les funcions d'implicació que modelen els condicionals de la lògica clàssica. Com hem comentat a la introducció, la seva importància es veu reforçada perquè s'utilitzen també per realitzar inferències a través del modus ponens i el modus tollens. La majoria d'aquestes funcions d'implicació es construeixen a partir de t-normes i t-conormes. Principalment, es distingeixen dos tipus d'implicacions: les implicacions residuals (o R-implicacions) a partir de t-normes, i les implicacions fortes (o S-implicacions) a partir de t-conormes (veure subsecció 4.1.1).

Recentment, també s'han estudiat les R i S implicacions derivades d'uninormes, especialment de les de les classes $\mathcal{U}_{\min}$, $\mathcal{U}_{\max}$ o representables (veure subsecció 4.1.2).

En aquest capítol ampliarem aquest estudi a les uninormes idempotents i les contínues a $]0,1[^2$, estudiant les propietats de distributivitat esmentades a la introducció.

Donem primer la definició general de funció d'implicació.

Definició 4.1.1 *Un operador binari* $I : [0,1] \times [0,1] \to [0,1]$ *és una* funció d'implicació, *o simplement una* implicació, *si satisfà:*

- I *és decreixent en la primera secció i creixent en la segona.*

- I *satisfà:*
$$I(0,0) = I(1,1) = 1 \quad i \quad I(1,0) = 0.$$

Nota 4.1.2 *De la definició es dedueix immediatament que* $I(x,1) = 1$, *i que* $I(0,x) = 1$, *per a tot* $x \in [0,1]$, *en particular es té que* $I(0,1) = 1$, *i llavors* $I\,|_{\{0,1\}^2}$ *coincideix amb la implicació booleana clàssica.*

Hi haurà dues propietats molt importants que voldrem estudiar d'una funció d'implicació, i ara citem les definicions.

Definició 4.1.3 *Siguin* I *una funció d'implicació i* N *una negació forta. Direm que* I *satisfà la* propietat de contraposició *respecte de* N *si*

$$I(N(y), N(x)) = I(x,y) \quad \textit{per a tots } x,y \in [0,1]. \tag{4.1}$$

Definició 4.1.4 *Sigui* I *una funció d'implicació. Direm que* I *satisfà el* principi d'intercanvi *si*

$$I(x, I(y,z)) = I(y, I(x,z)) \quad \textit{per a tots } x,y,z \in [0,1]. \tag{4.2}$$

4.1.1 *Implicacions a partir de t-normes i t-conormes*

Una manera de generar funcions d'implicació a partir de t-conormes és generalitzant la identitat $x \to y \equiv \neg x \vee y$, de la lògica clàssica.

Definició 4.1.5 *Siguin* S *una t-conorma i* N *una negació forta. La* implicació forta, *també anomenada* S-implicació, *associada a* S *i* N *és l'operador donat per*

$$I_{S,N}(x,y) = S(N(x), y).$$

Una altra manera de generar funcions d'implicació, en aquest cas a partir de t-normes, és la *residuació*, que definim a continuació.

Definició 4.1.6 *Sigui* T *una t-norma. La* implicació residual, *o* R-implicació, *associada a* T *és l'operador donat per*

$$I_T(x,y) = \sup\{z \in [0,1] \mid T(x,z) \leqslant y\}.$$

Nota 4.1.7 *Aquesta implicació prové dels reticles residuats, i habitualment es defineix per a t-normes contínues per l'esquerra, ja que llavors es verifica la* propietat de residuació*:*

$$T(x,y) \leqslant z \textit{ si i només si } I_T(x,z) \geqslant y \quad \text{per a tots } x,y,z \in [0,1].$$

També es pot definir, de manera equivalent, l'operador de residuació a partir de t-conormes.

Definició 4.1.8 *Sigui* S *una t-conorma. Denotarem per* R_S *l'*operador residual *associat a la t-conorma* S*, és a dir*

$$R_S(x,y) = \sup\{z \in [0,1] \mid S(x,z) \leqslant y\}.$$

Sobre si els operadors definits anteriorment són funcions d'implicació, tenim la proposició següent.

Proposició 4.1.9 *Donades una t-norma* T*, una t-conorma* S *i una negació forta* N*, la R-implicació* I_T *i la S-implicació* $I_{S,N}$ *són funcions d'implicació.*

Exemple 4.1.10 *A continuació donem les implicacions generades a partir de les t-normes i t-conormes introduïdes a l'exemple 2.1.3, i la negació forta* $N(x) = 1 - x$*.*

1. *A partir de la t-norma mínim,* $T_\mathbf{M}$*, i de la t-conorma màxim,* $S_\mathbf{M}$*, tenim:*

$$I_{S_\mathbf{M},N}(x,y) = \max(1-x,y), \qquad I_{T_\mathbf{M}}(x,y) = \begin{cases} 1 & \textit{si } x \leqslant y \\ y & \textit{altrament,} \end{cases}$$

   anomenades respectivament implicació de Kleene-Dienes *i* implicació de Gödel*.*

2. *Si prenem la t-norma producte,* $T_\mathbf{P}$*, i la seva t-conorma dual per* N*, la suma probabilística* $S_\mathbf{P}$*, obtenim:*

$$I_{S_\mathbf{P},N}(x,y) = 1 - x + xy, \qquad I_{T_\mathbf{P}}(x,y) = \begin{cases} 1 & \textit{si } x \leqslant y \\ \dfrac{y}{x} & \textit{altrament,} \end{cases}$$

   anomenades respectivament implicació de Reichenbach *i* implicació de Goguen*.*

3. *Si prenem la t-norma i la t-conorma de Łukasiewicz,* $T_\mathbf{L}$ *i* $S_\mathbf{L}$ *es tenen:*

$$I_{S_\mathbf{L},N}(x,y) = \min(1-x+y,1), \qquad I_{T_\mathbf{L}}(x,y) = \min(1-x+y,1).$$

   En aquest cas $I_{S_\mathbf{L},N}$ *i* $I_{T_\mathbf{L}}$ *coincideixen i s'anomena* implicació de Łukasiewicz*.*

Entre les propietats més importants que verifiquen I_T i $I_{S,N}$ podem destacar que $I_{S,N}$ satisfà la *propietat de contraposició* i el *principi d'intercanvi*. Si T és contínua per l'esquerra, $I_T(x,y)$ satisfà també el *principi d'intercanvi*

Per una altra part, en general, agafant S la t-conorma N-dual de T, $I_{S,N}$ i I_T no coincideixen. Tenim el resultat següent per al cas de t-normes contínues.

Teorema 4.1.11 ([50], teorema 1) *Siguin* T *una t-norma contínua,* N *una negació forta, i* S *la t-conorma* N*-dual de* T*. Llavors,* $I_{S,N} = I_T$ *si i només si existeix un automorfisme* $\phi : [0,1] \to [0,1]$ *tal que*

$$T(x,y) = \phi^{-1}(\max(\phi(x) + \phi(y) - 1, 0)),$$

(és a dir, una ϕ*-transformació de la t-norma de Łukasiewicz, que són les t-normes contínues arquimedianes nilpotents). En aquest cas la negació forta* N *ve donada per:*

$$N(x) = \phi^{-1}(1 - \phi(x))$$

i la implicació resultant és:

$$I_T(x,y) = \phi^{-1}(\min(1 - \phi(x) + \phi(y), 1)).$$

A continuació citem un resultat important sobre implicacions residuals a partir de t-normes, que ens servirà més endavant.

Proposició 4.1.12 *Siguin* T *una t-norma contínua i* I_T *la seva implicació residual.*

(i) *([52], teorema 1.14)* $I_T(x,y) = 1$ *si i només si* $x \leqslant y$ *(només és necessària la continuïtat per l'esquerra).*

(ii) *([43], teorema 7) Si* T *és arquimediana amb generador additiu* h*,* I_T *ve donada per*

$$I_T(x,y) = \begin{cases} 1 & \textit{si } x \leqslant y, \\ h^{-1}(h(y) - h(x)) & \textit{altrament.} \end{cases}$$

(iii) *([43], teorema 8) Si* T *conté un sumand ordinal arquimedià* T_{ab} *a l'interval* $[a,b] \subset [0,1]$*, amb generador additiu* $h_{ab} : [a,b] \to [0,+\infty]$ *llavors, en aquest interval,* I_T *ve donada per*

$$I_T(x,y) = \begin{cases} 1 & \textit{si } a \leqslant x \leqslant y \leqslant b, \\ h_{ab}^{-1}(h_{ab}(y) - h_{ab}(x)) & \textit{altrament.} \end{cases}$$

Nota 4.1.13 *Notem que, per les expressions anteriors, és fàcil veure que quan* T *és arquimediana no estricta (és a dir,* $h(0) < \infty$*,* I_T *és contínua, mentre que per t-normes estrictes, amb* $h(0) = \infty$*,* I_T *no és contínua al punt* $(0,0)$*. En qualsevol cas, quan* T *té un sumand ordinal arquimedià* T_{ab}*, fixat* $c \in]a,b[\subset]0,1[$*, com que* $h_{ab}(c) < \infty$*, la secció* $I_T(-,c)$ *és estrictament decreixent a l'interval* $[c,b]$*, prenent tots els valors de*

$$\lim_{x \to c^+} I_T(x,c) = \lim_{x \to c^+} h_{ab}^{-1}(h_{ab}(c) - h_{ab}(x)) = b \qquad \textit{fins a} \qquad I_T(b,c) = c,$$

però I_T *no és contínua quan* $b < 1$ *perquè* $I_T(c,c) = 1$.

4.1.2 *Implicacions a partir d'uninormes de* $\mathcal{U}_{\min}$*,* $\mathcal{U}_{\max}$ *i representables*

De manera similar a l'apartat anterior, a partir d'uninormes es poden definir dos tipus d'operadors d'implicació. El primer tipus serà a partir d'uninormes disjuntives, i obtindrem les *implicacions fortes*.

Definició 4.1.14 *Siguin* U *una uninorma disjuntiva i* N *una negació forta , l'operador donat per*

$$I_{U,N}(x,y) = U(N(x),y) \textit{ per a tots } x,y \in [0,1] \tag{4.3}$$

és una funció d'implicació, anomenada la implicació forta de U i N.

Per la definició de $I_{U,N}$, i com que U és commutativa, podem assegurar que $I_{U,N}$ satisfà el principi d'intercanvi i la contraposició respecte de N, com podem veure a la proposició següent.

Proposició 4.1.15 *Siguin U una uninorma disjuntiva, N una negació forta i $I_{U,N}$ la implicació forta de U i N. Llavors $I_{U,N}$ satisfà la contraposició respecte de N i satisfà el principi d'intercanvi.*

De manera semblant a l'apartat anterior, es pot definir un operador emprant la propietat de residuació a partir d'uninormes.

Definició 4.1.16 *Sigui U una uninorma. L'*operador residual *de U és l'operador donat per*

$$R_U(x,y) = \sup\{z \in [0,1] \mid U(x,z) \leqslant y\} \text{ per a tots } x,y \in [0,1]. \tag{4.4}$$

Mentre que l'operador definit a (4.3) és sempre una implicació, l'operador residual d'una uninorma no ho és sempre. En aquest sentit, tenim la següent condició necessària i suficient.

Proposició 4.1.17 ([37], proposició 7) *Sigui $U \in \mathcal{U}(e)$. L'operador binari definit a (4.4) és una implicació si i només si, per a tot $z \in [0,1[$, $U(0,z) = 0$ (o equivalentment, per a tot $z \in]e,1[$, $U(0,z) = 0$).*

Nota 4.1.18 *A la condició de la proposició anterior, no queda determinat el valor de $U(0,1)$. És evident que totes les uninormes conjuntives verifiquen aquesta condició, però també la verifiquen algunes uninormes disjuntives. Per exemple, les uninormes representables, però també, com veurem més endavant, algunes uninormes idempotents i algunes uninormes de $\mathcal{U}_{\cos}$.*

Ara podem definir la implicació residual d'una uninorma de la manera següent.

Definició 4.1.19 *Sigui U una uninorma tal que satisfà $U(0,x) = 0$ per a tot $x < 1$. La implicació residual (o la R-implicació) de U és l'operador donat per*

$$I_U(x,y) = \sup\{z \in [0,1] \mid U(x,z) \leqslant y\} \text{ per a tots } x,y \in [0,1]. \tag{4.5}$$

Tenim les propietats següents de les implicacions residuals sobre una uninorma U.

Proposició 4.1.20 ([39]) *Sigui U una uninorma conjuntiva i I_U la seva implicació residual. Per a tots $x,y,z \in [0,1]$ tenim*

(i) *La segona secció de I_U és contínua per la dreta,*

(ii) $y \leqslant I_U(x, U(x,y))$,

(iii) *Si U és contínua per l'esquerra se satisfà:*

- *La propietat de residuació: $U(x,y) \leqslant z$ si i només si $y \leqslant I_U(x,z)$.*
- *La primera secció de I_U és contínua per l'esquerra*
- *I_U satisfà el principi d'intercanvi $I_U(x, I_U(y,z)) = I_U(y, I_U(x,z))$,*
- $U(x, I_U(x,y)) \leqslant y$,
- $I_U(U(x,y),z) = I_U(x, I_U(y,z))$.

En aquesta part ens dedicarem a esmentar els resultats coneguts sobre implicacions residuals d'uninormes de les classes de $\mathcal{U}_{\min}$, $\mathcal{U}_{\max}$ i representables (excloent les que siguin t-normes o t-conormes, ja que les hem tractat a la secció anterior), resultats publicats a [37, 38] i [39].

Per a les uninormes de $\mathcal{U}_{\min}$ tenim el resultat següent.

Teorema 4.1.21 ([37], teorema 4) *Sigui* $U \equiv \langle T, e, S \rangle_{\min}$. *Aleshores la seva implicació residual* I_U *ve donada per*

$$I_U(x, y) = \begin{cases} 1 & si\ 0 \leqslant x < e\ i\ x \leqslant y \\ eI_T\left(\frac{x}{e}, \frac{y}{e}\right) & si\ 0 \leqslant x < e\ i\ x > y \\ y & si\ y \leqslant e \leqslant x \\ e & si\ e \leqslant y < x \\ e + (1-e)R_S\left(\frac{x-e}{1-e}, \frac{y-e}{1-e}\right) & si\ e \leqslant x \leqslant y. \end{cases} \quad (4.6)$$

L'estructura d'aquestes I_U es pot veure a la figura 26.

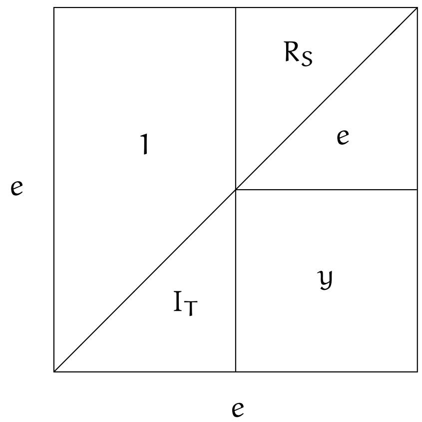

Figura 26. Estructura de la implicació residual I_U d'una uninorma U de $\mathcal{U}_{\min}$ amb element neutre $0 < e < 1$.

Per a uninormes representables, es va caracteritzar la seva implicació residual en el resultat següent.

Teorema 4.1.22 ([37], teorema 5) *Sigui* $U \equiv \langle h, e \rangle_{\text{rep}}$. *Aleshores la seva implicació residual* I_U *ve donada per*

$$I_U(x, y) = \begin{cases} h^{-1}(h(y) - h(x)) & si\ (x, y) \in [0, 1]^2 \setminus \{(0, 0), (1, 1)\} \\ 1 & altrament. \end{cases}$$

La relació entre les implicacions residuals i les implicacions fortes, es va estudiar per al cas d'uninormes representables, obtenint aquest resultat.

Proposició 4.1.23 ([37], proposició 9) *Siguin* $U \equiv \langle h, e \rangle_{\text{rep}}$ *disjuntiva, i* $U^* \equiv \langle h, e \rangle_{\text{rep}}$ *conjuntiva. Llavors la igualtat següent se satisfà*

$$I_{U^*} = I_U = I_{U, N_U},$$

on N_U *és la negació associada a* U, *és a dir* $N_U(x) = h^{-1}(-h(x))$, *per a tot* $x \in [0, 1]$.

Quant a la contraposició i el principi d'intercanvi, gràcies a la proposició anterior i la proposició 4.1.15 tenim el corol·lari següent per a uninormes representables.

Corol·lari 4.1.24 *Sigui* $U \equiv \langle h, e \rangle_{\text{rep}}$, *i* I_U *la seva implicació residual. Llavors* I_U *satisfà la contraposició respecte de* N_U *i el principi d'intercanvi.*

4.2 IMPLICACIONS FORTES

En aquesta secció estudiarem propietats relatives a les implicacions fortes definides a partir d'uninormes disjuntives. Primer començarem donant l'estructura de les implicacions fortes derivades d'uninormes de la classe de $\mathcal{U}_{\cos}$, i a continuació estudiarem la distributivitat d'aquestes implicacions sobre uninormes disjuntives i conjuntives.

4.2.1 *A partir d'uninormes de* $\mathcal{U}_{\cos}$

Com hem vist a l'apartat anterior, per poder tenir una implicació forta a partir d'una uninorma U i una negació forta N, necessitem que la uninorma sigui disjuntiva. Notem que, per a una uninorma $U \in \mathcal{U}_{\cos}$, U és disjuntiva si i només si tenim un dels casos següents:

a) $U \equiv \langle 0, T, \beta, (R, e)\rangle_{\cos,\min}$, amb $\alpha = 0$ (conseqüentment només una t-norma T és necessària a la seva expressió), i $U(1,0) = 1$.

b) $U \equiv \langle (R, e), \gamma, S', \delta, S''\rangle_{\cos,\max}$, amb $U(1,0) = 1$.

En ambdós casos, l'estructura general de la implicació forta derivada a partir d'aquestes uninormes es pot calcular fàcilment i les donem en les dues proposicions següents, respectivament. Les demostracions en ambdues proposicions són càlculs.

Proposició 4.2.1 *Si* $U \equiv \langle 0, T, \beta, (R, e)\rangle_{\cos,\min}$ *és una uninorma disjuntiva de* $\mathcal{U}_{\cos,\min}$, *llavors* $I_{U,N}$ *ve donada per*

$$I_{U,N}(x,y) = \begin{cases} \beta T\left(\frac{N(x)}{\beta}, \frac{y}{\beta}\right) & \textit{si } x \in [N(\beta), 1] \textit{ i } y \in [0, \beta] \\ \beta + (1-\beta) R\left(\frac{N(x)-\beta}{1-\beta}, \frac{y-\beta}{1-\beta}\right) & \textit{si } x \in]0, N(\beta)[\textit{ i } y \in]\beta, 1[\\ 1 & \textit{si } x = 0 \textit{ ò } y = 1 \\ \min(N(x), y) & \textit{altrament.} \end{cases}$$

Proposició 4.2.2 *Si* $U \equiv \langle (R, e), \gamma, S', \delta, S''\rangle_{\cos,\max}$ *és una uninorma disjuntiva, llavors* $I_{U,N}$ *ve donada per*

$$I_{U,N}(x,y) = \begin{cases} \gamma + (\delta-\gamma) S'\left(\frac{N(x)-\gamma}{\delta-\gamma}, \frac{y-\gamma}{\delta-\gamma}\right) & \textit{si } x \in [N(\delta), N(\gamma)] \textit{ i } y \in [\gamma, \delta] \\ \delta + (1-\delta) S''\left(\frac{N(x)-\delta}{1-\delta}, \frac{y-\delta}{1-\delta}\right) & \textit{si } x \in [0, N(\delta)] \textit{ i } y \in [\delta, 1] \\ \gamma R\left(\frac{N(x)}{\gamma}, \frac{y}{\gamma}\right) & \textit{si } x \in]N(\gamma), 1[\textit{ i } y \in]0, \gamma[\\ 0 & \textit{si } x = 1, y \in [0, \gamma[, \textit{ o } y = 0, x \in]N(\delta), 1] \\ 0 \textit{ ò } \max(N(x), y) & \textit{si } (x,y) = (1, \delta) \textit{ o } (x,y) = (N(\delta), 0) \\ \max(N(x), y) & \textit{altrament.} \end{cases}$$

Es pot observar l'estructura general de $I_{U,N}$ on $U \in \mathcal{U}_{\cos,\min}$ i $U \in \mathcal{U}_{\cos,\max}$ a les figures 27 i 28, respectivament.

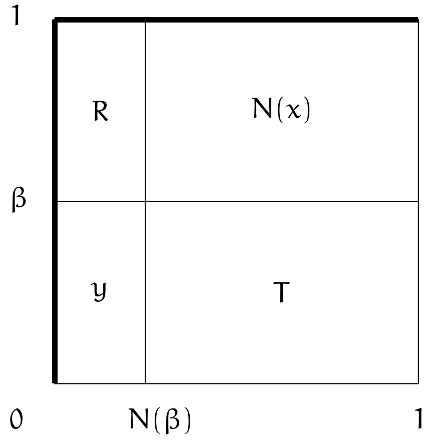

Figura 27. $I_{U,N}$ amb $U \in \mathcal{U}_{\text{cos,min}}$, on els operadors R i T de la figura són aplicats al parell $(N(x), y)$.

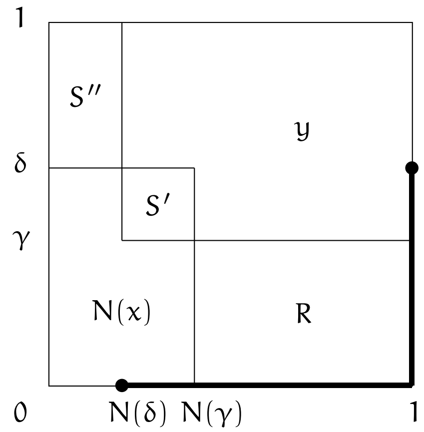

Figura 28. $I_{U,N}$ amb $U \in \mathcal{U}_{\text{cos,max}}$, on els operadors R, S i S'' són aplicats al parell $(N(x), y)$.

4.2.2 *Distributivitat d'implicacions fortes sobre uninormes*

La propietat que volem estudiar, com hem comentat al problema 2 de la introducció, és la distributivitat de funcions d'implicació sobre uninormes conjuntives i disjuntives, és a dir, per al cas d'implicacions fortes:

$$I_{U,N}(U_c(x,y),z) = U_d(I_{U,N}(x,z), I_{U,N}(y,z)) \tag{4.7}$$

per a tots $x, y, z \in [0,1]$, on U_c i U_d són uninormes, tals que U_c és conjuntiva i U_d és disjuntiva. Aquesta mateixa equació ha estat resolta per t-normes i t-conormes a [95], tant per a implicacions fortes com per a residuals. Però en ambdós casos les úniques solucions apareixen quan la t-norma és el mínim i la t-conorma és el màxim.

En aquest apartat resoldrem aquesta equació, considerant la uninorma U d'una de les classes descrites als preliminars, i les t-normes i t-conormes associades a U_c i U_d són contínues, i veurem com apareixen noves solucions no trivials fins i tot per a t-normes.

Primer, tenim el resultat següent, que farà essencials els resultats de la secció de distributivitat.

Teorema 4.2.3 *Siguin U, U_c i U_d uninormes, amb U i U_c disjuntives, U_c conjuntiva, N una negació forta i $I_{U,N}$ la implicació forta de U i N. Tenim que $I_{U,N}$, U_c i U_d satisfan l'equació (4.7) si i només si U_c i U_d són N-duals i U és distributiva sobre U_d.*

DEMOSTRACIÓ: Suposem primer que $I_{U,N}$, U_c i U_d satisfan l'equació (4.7). Basta posar $z = e$ en aquesta equació i obtenim

$$I_{U,N}(U_c(x, y), e) = U_d(I_{U,N}(x, e), I_{U,N}(y, e)).$$

És a dir, com que $I_{U,N}(x, e) = U(N(x), e) = N(x)$, tenim

$$N(U_c(x, y)) = U_d(N(x), N(y)),$$

Això implica que U_c i U_d són N-duals. A més a més, d'aquesta dualitat tenim, per una banda

$$I_{U,N}(U_c(x, y), z) = U(N(U_c(x, y)), z) = U(U_d(N(x), N(y)), z)$$

i, per una altra

$$U_d(I_{U,N}(x, z), I_{U,N}(y, z)) = U_d(U(N(x), z), U(N(y), z)).$$

Com que l'equació (4.7) és certa, obtenim la distributivitat de U sobre U_d.

Recíprocament, si U_c i U_d són N-duals, tornant enrere els raonaments anteriors, podem veure que la distributivitat de U sobre U_d implica l'equació (4.7). □

Llavors, per tenir les solucions de (4.7), hem de resoldre l'equació de distributivitat (D), d'una uninorma disjuntiva U sobre una uninorma disjuntiva U_d:

$$U(x, U_d(y, z)) = U_d(U(x, y), U(x, z)) \tag{4.8}$$

per a tots $x, y, z \in [0, 1]$. A continuació adaptarem els resultats del capítol de distributivitat per a una uninorma U distributiva sobre U_d, ambdues disjuntives. Per fer-ho, distingirem els casos següents:

- U és una t-conorma, S.
- U_d és una t-conorma (i conseqüentment U_c és una t-norma).
- U i U_d són uninormes amb elements neutres e i e_d respectivament, de manera que $e, e_d \in]0, 1[$.

Cas U t-conorma

En aquest cas, considerem S una t-conorma, N una negació forta, $I_{S,N}$ la implicació forta generada per S i N, U_c una uninorma conjuntiva i U_d una disjuntiva. Per resoldre l'equació

$$I_{S,N}(U_c(x, y), z) = U_d(I_{S,N}(x, z), I_{S,N}(y, z)) \tag{4.9}$$

per a tots $x, y, z \in [0, 1]$, només necessitem trobar quines t-conormes S són distributives sobre la uninorma disjuntiva U_d. Aquest problema l'hem resolt al capítol anterior, a la subsecció 3.2.3, obtenint com a resultat final el teorema 3.2.32, i de les solucions d'aquest teorema podem deduir el resultat següent.

Teorema 4.2.4 *Siguin* S *una t-conorma,* N *una negació forta i* $I_{S,N}$ *la implicació forta de* S *i* N*. Siguin* U_c *una uninorma conjuntiva i* U_d *una disjuntiva amb elements neutres* e_c *i* e_d *respectivament. Llavors,* $I_{S,N}$*,* U_c *i* U_d *satisfan l'equació (4.9) si i només si* U_d *és una uninorma idempotent de* $\mathcal{U}_{max}$*,* U_c *i* U_d *són* N*-duals i* $S = (\langle 0, e_d, S_1 \rangle, \langle e_d, 1, S_2 \rangle)$*, on* S_1 *i* S_2 *són t-conormes qualssevol.*

Nota 4.2.5 *A la figura 29 podem observar l'estructura de* S*,* U_c *i* U_d*, de manera que* $I_{S,N}$*,* U_c *i* U_d *satisfan l'equació (4.9).*

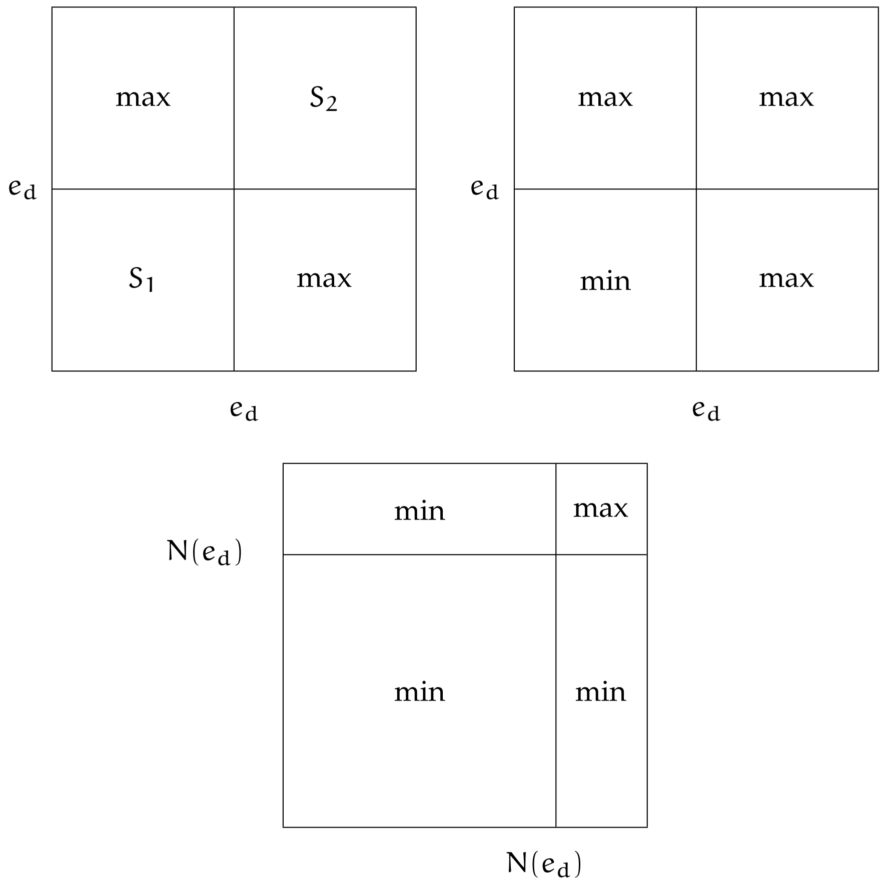

Figura 29. Estructura general d'una t-conorma S (dalt, esquerra), una uninorma disjuntiva U_d (dalt, dreta) i una uninorma conjuntiva U_c (baix), de manera que $I_{S,N}$, U_c i U_d satisfan l'equació (4.9), essent $e_c = N(e_d)$.

Cas U_d *t-conorma*

Ara considerarem el cas en que U sigui una uninorma disjuntiva amb element neutre $e \in]0,1[$, N una negació forta, $I_{U,N}$ la implicació forta generada per U i N, T una t-norma, i S una t-conorma. De nou, per resoldre l'equació

$$I_{U,N}(T(x,y),z) = S(I_{U,N}(x,z), I_{U,N}(y,z)) \tag{4.10}$$

per a tots $x, y, z \in [0,1]$, només haurem de cercar quines uninormes disjuntives U són distributives sobre una t-conorma S. En el nostre estudi, hem resolt aquest problema a la subsecció 3.2.1. De les solucions del teorema 3.2.19 i 3.2.18 podem deduir totes les solucions de l'equació (4.10).

Teorema 4.2.6 *Sigui* U *una uninorma disjuntiva amb element neutre* $e \in]0,1[$ *que és idempotent, de* $\mathcal{U}_{max}$*, representable, o de* $\mathcal{U}_{cos}$*. Siguin* N *una negació forta,* $I_{U,N}$ *la implicació forta generada per* U *i* N*,* T *una t-norma, i* S *una t-conorma contínua. Llavors,* $I_{U,N}$*,* T *i* S *satisfan l'equació (4.10) si i només si* T *i* S *són* N*-duals i tenim algun dels casos següents:*

(a) $S = \max$, $T = \min$,

(b) S *és estricta,* U *és representable, i si* s *és el generador additiu de* S *satisfent* $s(e) = 1$*, llavors* s *és també un generador multiplicatiu de* U*,*

(c) $U \equiv \langle 0, T, \beta, (R, e)\rangle_{\cos,\min}$ *i existeix una t-conorma estricta* S^* *tal que el seu generador additiu amb* $s\left(\frac{e-\beta}{1-\beta}\right) = 1$ *és també un generador multiplicatiu de* R *i* $S = (\langle \beta, 1, S^*\rangle)$*.*

(d) $U \equiv \langle (R, e), \gamma, S', \delta, S''\rangle_{\cos,\max}$ *i existeix una t-conorma estricta* S^* *tal que el seu generador additiu amb* $s\left(\frac{e}{\gamma}\right) = 1$ *és també un generador multiplicatiu de* R *i* $S = (\langle 0, \gamma, S^*\rangle)$*.*

Nota 4.2.7 *Notem que només les solucions quan considerem implicacions derivades de t-conormes requereixen que* T *i* S *siguin el mínim i el màxim. Pel contrari, aquí tenim implicacions fortes que satisfan (4.10) amb* T *i* S *estrictes, i,* T *i* S *sumes ordinals.*

Cas U *i* U_d *uninormes*

Ara, U denotarà una uninorma disjuntiva amb element neutre $e \in]0,1[$, N una negació forta, i $I_{U,N}$ la implicació forta generada per U i N. També, U_c denotarà una uninorma conjuntiva i U_d una disjuntiva amb elements neutres e_c i e_d, respectivament, tals que $0 < e_c, e_d < 1$. Ara, per resoldre l'equació

$$I_{U,N}(U_c(x, y), z) = U_d(I_{U,N}(x, z), I_{U,N}(y, z)) \tag{4.11}$$

per a tots $x, y, z \in [0,1]$ necessitem trobar quines uninormes disjuntives U són distributives sobre uninormes disjuntives U_d. És a dir, voldrem estudiar l'equació de distributivitat

$$U(x, U_d(y, z)) = U_d(U(x, y), U(x, z)) \tag{4.12}$$

per a uninormes disjuntives. Aquesta equació (sense la restricció de que U i U_d siguin disjuntives) s'ha resolt a la subsecció 3.3.1. A continuació adaptarem els resultats obtinguts als teoremes 3.4.12, 3.4.23 i 3.4.33 per a uninormes disjuntives.

Teorema 4.2.8 *Siguin* $U \equiv \langle T, e, S\rangle \in \mathcal{U}_{ide} \cup \mathcal{U}_{max} \cup \mathcal{U}_{rep} \cup \mathcal{U}_{cos}$ *disjuntiva,* N *una negació forta i* $I_{U,N}$ *la implicació forta generada per* U *i* N*. Siguin* $U_c \equiv \langle T_c, e_c, S_c\rangle$ *conjuntiva i* $U_d \equiv \langle T_d, e_d, S_d\rangle$ *disjuntiva de* $\mathcal{U}_{cts}$*. Llavors* $I_{U,N}$*,* U_c *i* U_d *satisfan l'equació (4.7) si i només si* U_c *i* U_d *són* N*-duals, i tenim algun dels casos següents:*

(i) U *i* $U_d \in \mathcal{U}_{ide}$*, diguem* $U \equiv \langle g, e\rangle_{ide}$ *i* $U_d \equiv \langle g_d, e_d\rangle_{ide}$*, respectivament, i*

(a) Si $e < e_d$*, llavors*

1. $g(x) \leqslant g_d(x)$ *per a tot* $x \in [0,1]$*.*
2. *Si* $g(x) < g_d(x)$ *llavors* $g_d(x) = e_d$ *i* $x \leqslant e_d$*.*
3. *Si existeixen* x *i* z *satisfent* $g(z) = g_d(z) = x$ *i* $g(x) = g_d(x) = z$*, llavors* $U(x, z) = U_d(x, z)$*.*

(b) Si $e = e_d$*, llavors* $U = U_d$*.*

(c) *Si* $e > e_d$, *llavors*

1. $g_d(x) \leqslant g(x)$ *per a tot* $x \in [0,1]$.
2. *Si* $g_d(x) < g(x)$ *llavors* $g_d(x) = e_d$ *i* $x \geqslant e_d$.
3. *Si existeixen* x *i* z *satisfent* $g(z) = g_d(z) = x$ *i* $g(x) = g_d(x) = z$, *llavors* $U(x,z) = U_d(x,z)$.

(ii) $U \in \mathcal{U}_{\max}$, $U_d \in \mathcal{U}_{ide}$ *i*

(a) *Si* $e \leqslant e_d$, *llavors* $U_d \in \mathcal{U}_{\max}$ *i* U *ve donada per*

$$U(x,y) = \begin{cases} eT\left(\frac{x}{e}, \frac{y}{e}\right) & \text{si } (x,y) \in [0,e]^2 \\ e + (e_d - e)S'\left(\frac{x-e}{e_d-e}, \frac{y-e}{e_d-e}\right) & \text{si } (x,y) \in [e,e_d]^2 \\ e_d + (1-e_d)S''\left(\frac{x-e_d}{1-e_d}, \frac{y-e_d}{1-e_d}\right) & \text{si } (x,y) \in [e_d,1]^2 \\ \max(x,y) & \text{altrament.} \end{cases}$$

(b) *Si* $e > e_d$, *llavors* U *ve donada per*

$$U(x,y) = \begin{cases} e_dT'\left(\frac{x}{e_d}, \frac{y}{e_d}\right) & \text{si } (x,y) \in [0,e_d]^2 \\ e_d + (e - e_d)T''\left(\frac{x-e_d}{e-e_d}, \frac{y-e_d}{e-e_d}\right) & \text{si } (x,y) \in [e_d,e]^2 \\ e + (1-e)S\left(\frac{x-e}{1-e}, \frac{y-e}{1-e}\right) & \text{si } (x,y) \in [e,1]^2 \\ \min(x,y) & \text{si } \min(x,y) \leqslant e_d \leqslant \max(x,y) \leqslant e \\ \max(x,y) & \text{altrament,} \end{cases}$$

i U_d *i* g_d *són com al lema* 3.4.8.

(iii) $U \equiv \langle (R,e), \gamma, S', \delta, S'' \rangle_{\cos,\max}$, *i* $U_d \in \mathcal{U}_{cts}$ *i se satisfà:*

- $e_d \geqslant \gamma$,
- $U(e_d, e_d) = e_d$,
- *existeix una t-norma* T *tal que* R *és distributiva sobre* T *(que vol dir,* $T = \min$ *o* T *és estricta i, si* t *és el generador additiu de* T *satisfent* $t(\frac{e}{\gamma}) = 1$ *llavors* $\frac{1}{t}$ *és també un generador multiplicatiu de* R*),*
- *Se satisfà un dels casos següents:*
  (i) $e_d < \delta$ *i llavors* U_d *ve donada per l'equació* (3.19), *o*
  (ii) $\delta \leqslant e_d$ *i llavors* U_d *ve donada per l'equació* (3.20).

(iv) $U \equiv \langle 0, T, \beta, (R,e) \rangle_{\cos,\min}$, $U_d \in \mathcal{U}_{cts}$, *i se satisfà*

- $e_d \leqslant \beta$,
- $U(e_d, e_d) = e_d$,
- *existeix una t-conorma* S *tal que* R *és distributiva sobre* S *(que vol dir,* $S = \max$ *ò* S *és estricta i, si* s *és el generador additiu de* S *satisfent* $s(\frac{e-\beta}{1-\beta}) = 1$*, és també un generador multiplicatiu de* R*),*
- U_d *ve donada per*

$$U_d(x,y) = \begin{cases} \beta + (1-\beta)S\left(\frac{x-\beta}{1-\beta}, \frac{y-\beta}{1-\beta}\right) & \text{si } (x,y) \in [\beta,1]^2 \\ \min(x,y) & \text{si } \min(x,y) < e_d \text{ i } \max(x,y) < 1 \\ \max(x,y) & \text{altrament.} \end{cases}$$

$U \backslash U_d$	t-conorma	uninorma
t-conorma	$U_d = \max$ Veure [95]	teorema 4.2.4
uninorma	teorema 4.2.6	teorema 4.2.8

Taula 7. Resultats de la distributivitat d'implicacions fortes sobre uninormes.

Tots els resultats de l'equació de distributivitat d'implicacions fortes sobre uninormes (4.7) es resumeixen a la taula 7.

4.2.3 *Altres distributivitats*

Per acabar amb aquesta secció, estudiarem diverses equacions de distributivitat, relacionades amb l'estudiada a l'apartat anterior. Aquestes equacions també es varen estudiar a [13] per al cas de t-normes i t-conormes. Aquestes equacions són les derivades de les següents equivalències de la lògica clàssica:

$$(p \vee q) \to r \equiv (p \to r) \wedge (q \to r),$$
$$p \to (q \wedge r) \equiv (p \to q) \wedge (p \to r),$$
$$p \to (q \vee r) \equiv (p \to q) \vee (p \to r).$$

En el nostre context, esdevenen, respectivament,

$$I_{U,N}(U_d(x,y),z) = U_c(I_{U,N}(x,z), I_{U,N}(y,z)), \tag{4.13}$$
$$I_{U,N}(x, U_c(y,z)) = U'_c(I_{U,N}(x,y), I_{U,N}(x,z)), \tag{4.14}$$
$$I_{U,N}(x, U_d(y,z)) = U'_d(I_{U,N}(x,y), I_{U,N}(x,z)). \tag{4.15}$$

per a tots $x, y, z \in [0,1]$. Notem que l'equació (4.15) és dual de l'equació resolta a l'apartat anterior i pot ser fàcilment resolta a través de dualitat. Efectivament, siguin $I_{U,N}$ una implicació forta i U_d, U'_d uninormes disjuntives. Llavors I, U_d i U'_d satisfan l'equació (4.15) si i només si

$$I_{U,N}(N(x), U_d(N(y), N(z))) = U'_d(I_{U,N}(N(x), N(y)), I_{U,N}(N(x), N(z)))$$

per a tots $x, y, z \in [0,1]$. Això és equivalent a

$$I_{U,N}(N(x), N(U_c(y,z))) = U'_d(I_{U,N}(N(x), N(y)), I_{U,N}(N(x), N(z)))$$

on U_c és la uninorma N-dual de U_d. Com que $I_{U,N}$ és una implicació forta, satisfà la contraposició respecte de N (veure proposició 4.1.15) i llavors l'equació anterior és equivalent a

$$I(U_c(y,z), x) = U'_d(I(y,x), I(z,x))$$

que és exactament (4.7). Llavors, les solucions de l'equació (4.15) deriven directament del teorema 4.2.8, com segueix.

Teorema 4.2.9 *Siguin* $U \equiv \langle T, e, S\rangle \in \mathcal{U}_{ide} \cup \mathcal{U}_{max} \cup \mathcal{U}_{rep} \cup \mathcal{U}_{cos}$ *disjuntiva,* N *una negació forta i* $I_{U,N}$ *la implicació forta generada per* U *i* N*. Siguin* $U_d \equiv \langle T_d, e_d, S_d\rangle$ *i* $U_d' \equiv \langle T_d', e_d', S_d'\rangle$ *disjuntives de* $\mathcal{U}_{cts}$*. Llavors* $I_{U,N}$*,* U_d *i* U_d' *satisfan l'equació (4.15) si i només si* $U_d = U_d'$ *i es verifica un dels quatre casos del teorema 4.2.8.*

Respecte a les equacions (4.13) i (4.14), són duals l'una de l'altra, i per tant només necessitem resoldre una d'elles, ja que l'altra restarà solucionada per dualitat. Ens centrarem en l'equació (4.13). De manera similar al cas estudiat a la secció anterior, obtenim la caracterització següent.

Teorema 4.2.10 *Siguin* $U \equiv \langle T, e, S\rangle$ *disjuntiva,* N *una negació forta,* $I_{U,N}$ *la implicació forta de* U *i* N*,* $U_d \equiv \langle T_d, e_d, S_d\rangle$ *disjuntiva i* $U_c \equiv \langle T_c, e_c, S_c\rangle$ *conjuntiva. Llavors,* $I_{U,N}$*,* U_d *i* U_c *satisfan l'equació (4.13) si i només si* U_c *i* U_d *són* N*-duals i* U *és distributiva sobre* U_c*.*

Demostració: Similar a la demostració del teorema 4.2.3. □

Ara, per tant, el problema és resoldre la distributivitat d'una uninorma disjuntiva sobre una conjuntiva, és a dir,

$$U(x, U_c(y,z)) = U_c(U(x,y), U(x,z)) \quad \text{per a tots} \quad x,y,z \in [0,1]. \tag{4.16}$$

on U és una uninorma disjuntiva i U_c és conjuntiva.

Distingirem els casos en què U o U_c siguin t-normes o t-conormes.

Cas U *t-conorma*

En aquest cas, no tindrem solucions, ja que segons el teorema 3.2.32, no hi ha cap t-conorma distributiva sobre uninormes conjuntives.

Cas U_c *t-norma*

En aquest cas, pels resultats de la secció 3.2.2, tenim les solucions següents.

Teorema 4.2.11 *Siguin* $U \equiv \langle T, e, S\rangle \in \mathcal{U}_{ide} \cup \mathcal{U}_{max} \cup \mathcal{U}_{rep} \cup \mathcal{U}_{cos}$ *disjuntiva,* N *una negació forta i* $I_{U,N}$ *la implicació forta generada per* U *i* N*. Siguin* S *una t-conorma i* T *una t-conorma. Llavors* $I_{U,N}$*,* T *i* U_d *satisfan l'equació (4.13) si i només si* S *i* T *són* N*-duals, i tenim algun dels casos següents:*

(i) $T = T_{\mathbf{M}}$.

(ii) $U \in \mathcal{U}_{rep}$*,* T *és estricta, i si* T *és el generador additiu de* T *satisfent* $t(e) = 1$*, llavors* $\frac{1}{t}$ *és també un generador multiplicatiu de* U*.*

(iii) $U \equiv \langle 0, T, \beta, (R, e)\rangle_{\cos,\min}$*, i existeix una t-norma estricta* T^* *tal que el seu generador additiu* t *satisfent* $t\left(\frac{e-\beta}{1-\beta}\right) = 1$*, és tal que* $\frac{1}{t}$ *també és un generador multiplicatiu de* R*, i* $T = (\langle \beta, 1, T^*\rangle)$.

(iv) $U \equiv \langle (R, e), \gamma, S', \delta, S''\rangle_{\cos,\max}$*, i existeix una t-norma estricta* T^* *amb el seu generador additiu* t *satisfent* $t\left(\frac{e}{\gamma}\right) = 1$ *és tal que* $\frac{1}{t}$ *també és un generador multiplicatiu de* R*, i* $T = (\langle 0, \gamma, T^*\rangle)$.

Cas U *i* U_c *uninormes*

En aquest cas, els elements neutres e i e_c són ambdós a $]0, 1[$. Restringint els resultats de la secció 3.4 per al cas en què U_1 sigui disjuntiva i U_2 conjuntiva, no s'obté cap solució. Distingim els diferents casos a continuació.

(i) Quan les uninormes U i U_c són com al cas *(i)* del teorema 3.4.12. És evident que el cas *(b)* no és solució, ja que implicaria que $U = U_c$, que no pot ser ja que una és una uninorma conjuntiva i l'altra disjuntiva.

   Per al cas $e < e_c$, com que U_c és conjuntiva, tindríem que $g_c(0) = 1$, i com que U és disjuntiva, $g(1) = 0$. Ara, com que $g_c(1) \geqslant g(1)$, pel punt *2.*, si $g_c(1) > g(1)$, tindríem que $1 \leqslant e_2$, que no pot ser, i llavors tenim $g_c(1) = 0$. Raonant també amb aquest punt, obtenim que si $g(0) < 1$, llavors $g_c(0) = e_c = 1$, que és contradicció amb el que suposem des d'un començament. Llavors tindríem que $g_c(0) = g(0) = 1$ i $g_c(1) = g(1) = 0$, amb la qual cosa obtindríem, pel punt *3.* que $U(0, 1) = U_c(0, 1)$, arribant una contradicció amb el fet de que una uninorma sigui conjuntiva i l'altra disjuntiva. Per tant el cas *(i)-(a)* no dóna cap solució.

   Per al cas $e_c < e$, raonant de manera semblant al cas *(a)*, com que U_c és conjuntiva, tindríem que $g_c(0) = 1$, i com que U és disjuntiva, $g(1) = 0$. Com que $g(0) \geqslant g_c(0) = 1$, pel punt *1.*, tenim que $g(0) = 1$. També, pel mateix punt $g(1) = 0 \geqslant g_c(1)$, obtenint també $g(1) = g_c(1) = 0$. Ara, pel punt *3.* arribem a $U(0, 1) = U_c(0, 1)$, una altra vegada contradient el fet de que una uninorma sigui conjuntiva i l'altra disjuntiva. Per tant el cas *(i)-(c)* tampoc dóna cap solució.

(ii) Si les uninormes U i U_c són com al cas *(ii)*, tampoc arribem a tenir solucions, ja que al cas *(ii)-(a)* la uninorma U_c necessita ser de $\mathcal{U}_{max}$, i per tant no és conjuntiva, i al cas *(ii)-(b)* també es tendria que $U_c(0, 1) = 1$, que no pot ser a una uninorma conjuntiva.

(iii) Al cas *(iii)*, U ha de ser de $\mathcal{U}_{min}$, i en aquesta classe no hi ha uninormes disjuntives.

(iv) Si la uninorma disjuntiva U és disjuntiva a $\mathcal{U}_{cos,max}$, podríem utilitzar el teorema 3.4.23, però en aquest cas U mai pot ser conjuntiva, pels corol·laris 3.4.20 i 3.4.22. Per tant aquí tampoc apareixen solucions.

(v) Si la uninorma disjuntiva U és disjuntiva a $\mathcal{U}_{cos,min}$, és a dir $U \equiv \langle 0, T, \beta, (R, e)\rangle_{cos,min}$, tampoc obtenim solucions. Primer de tot, notem que perquè U sigui disjuntiva de $\mathcal{U}_{cos,min}$ és necessari que $\alpha = 0$. Ara, si tenim el cas del corol·lari 3.4.30, arribem a que U_c hauria de ser disjuntiva, cosa que dóna una contradicció. Si tenim el cas del corol·lari 3.4.32, tindríem que U_c és una t-conorma, que ens dóna una contradicció, ja que U_c l'hem considerat conjuntiva.

Per tant, no hi ha cap uninorma U disjuntiva distributiva sobre U_c conjuntiva, per als casos que considerem, sempre que els elements neutres de U i U_c siguin $e, e_c \in]0, 1[$.

4.3 IMPLICACIONS RESIDUALS

4.3.1 *A partir d'uninormes idempotents*

A continuació farem l'estudi de les implicacions residuals a partir d'uninormes idempotents. A [38] es donen resultats parcials per a implicacions residuals definides a partir d'uninormes idempotents contínues per l'esquerra o per la dreta. En aquesta secció donarem els resultats generals, sense tenir en compte cap tipus de continuïtat lateral.

Comencem restringint el resultat de la proposició 4.1.17 per a uninormes idempotents.

Proposició 4.3.1 *Sigui* $U \equiv \langle g, e\rangle_{\text{ide}}$. I_U *és una funció d'implicació si i només si* $g(0) = 1$.

Demostració: És clar que $U(0, z) = 0$ per a tot $z \in [0, 1[$ si i només si $g(0) = 1$, i basta aplicar la proposició 4.1.17. □

Nota 4.3.2 *Notem que les uninormes idempotents verificant la condició anterior poden ser tan conjuntives com disjuntives.*

Ara donem l'estructura general d'una implicació residual definida a partir d'una uninorma idempotent. El resultat inclou el teorema 8 de [38] com un cas particular, ja que en dit resultat s'estudia per a uninormes idempotents contínues per l'esquerra o per la dreta.

Teorema 4.3.3 *Sigui* $U \equiv \langle g, e\rangle_{\text{ide}}$ *amb* $g(0) = 1$. *La implicació residual* I_U *ve donada per:*

$$I_U(x, y) = \begin{cases} \min(g(x), y) & \text{si } y < x \\ \max(g(x), y) & \text{si } y \geqslant x. \end{cases} \tag{4.17}$$

Demostració: Dividim la demostració en quatre casos.

- Quan $y < x$ i $y < g(x)$. En aquest cas, tenim $U(x, y) = \min(x, y) = y$. Si agafem z satisfent $y < z$, tindrem $U(x, z) \in \{x, z\} > y$, i llavors
$$I_U(x, y) = \sup\{z \in [0, 1] \mid U(x, z) \leqslant y\} = y.$$
- Si $y < x$ i $y \geqslant g(x)$. Si agafem z tal que $z < g(x) \leqslant y < x$, tindrem $U(x, z) = \min(x, z) = z < y$; però si z satisfà $g(x) < z$, llavors $U(x, z) = \max(x, z) \geqslant x > y$, i podem concloure que
$$I_U(x, y) = \sup\{z \in [0, 1] \mid U(x, z) \leqslant y\} = g(x).$$
- Si $y \geqslant x$ i $y > g(x)$. Ara, $U(x, y) = \max(x, y) = y$. Però si agafem z satisfent $g(x) < y < z$, llavors $U(x, z) = \max(x, z) = z > y$, i aleshores
$$I_U(x, y) = \sup\{z \in [0, 1] \mid U(x, z) \leqslant y\} = y.$$
- Quan $y \geqslant x$ i $y \leqslant g(x)$. En aquest cas, si agafem z satisfent $z < g(x)$ llavors $U(x, z) = \min(x, z) = x \leqslant y$, però si z satisfà $y < g(x) < z$, llavors $U(x, z) = \max(x, z) = z > y$, i podem dir
$$I_U(x, y) = \sup\{z \in [0, 1] \mid U(x, z) \leqslant y\} = g(x).$$

Ara, dels passos anteriors, l'expressió (4.17) segueix fàcilment. □

Com a conseqüència del teorema anterior obtenim el corol·lari següent.

Corol·lari 4.3.4 *Totes les uninormes idempotents amb el mateix element neutre* e *i la mateixa funció associada* g, *amb* $g(0) = 1$, *tenen la mateixa implicació residual, donada per l'expressió* (4.17).

Nota 4.3.5 *Notem que el corol·lari anterior no dóna contradicció amb el teorema 8 de* [38], *ja que allà l'expressió del cas (ii) és realment la mateixa que els casos (i) i (iii), que també coincideix amb l'expressió* (4.17).

Exemple 4.3.6 *Ara podem donar l'expressió de* I_U *quan* U *és una uninorma idempotent i membre de* $\mathcal{U}_{\min}$. *En aquest cas, la funció associada a* U *és*

$$g(x) = \begin{cases} 1 & \textit{si } x < e \\ e & \textit{si } x \geqslant e \end{cases}$$

i I_U *és:*

$$I_U(x, y) = \begin{cases} y & \textit{si } y < x \textit{ i } y \leqslant e \\ e & \textit{si } y < x \textit{ i } y > e \\ y & \textit{si } y \geqslant x \textit{ i } x \geqslant e \\ 1 & \textit{si } y \geqslant x \textit{ i } x < e \end{cases}$$

que es pot observar a la figura 30.

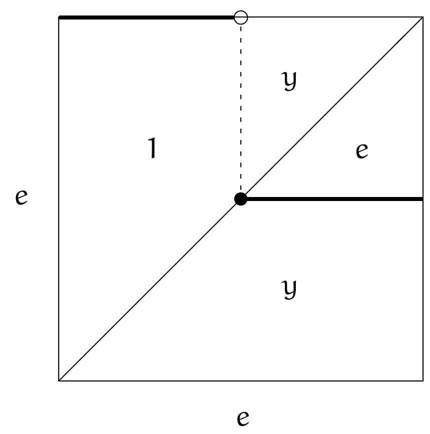

Figura 30. I_U quan U és una uninorma idempotent de $\mathcal{U}_{\min}$.

La proposició següent es pot derivar per resultats de [38] i també es pot deduir trivialment del teorema 4.3.3.

Proposició 4.3.7 *Siguin* $U \equiv \langle g, e \rangle_{\text{ide}}$ *amb* $g(0) = 1$, *i* I_U *la seva implicació residual. Llavors*

(i) $I_U(e, y) = y$ *per tot* $y \in [0, 1]$.

(ii) $I_U(x, y) \geqslant e$ *si* $x \leqslant y$.

(iii) (Modus Ponens) $U(x, I_U(x, y)) \leqslant y$ *per tot* $(x, y) \in [0, 1]^2$ *si i només si* U *és contínua per l'esquerra, i en aquest cas,* U *és conjuntiva.*

Proposició 4.3.8 *Siguin* $U \equiv \langle g, e \rangle_{\text{ide}}$ *amb* $g(0) = 1$, *i* I_U *la seva implicació residual. Llavors*

(i) $I_U(x, .)$ *és contínua per la dreta, mentre que* $I_U(., y)$ *és contínua per l'esquerra si i només si ho és* g.

(ii) $I_U(x, x) = \max(x, g(x))$.

(iii) $I_U(x,y) \geqslant y$ *si i només si* $y \geqslant x$ *o* ($y < x$ *i* $y \leqslant g(x)$)

(iv) $I_U(x, g(x)) = g(x)$.

(v) $I_U(x, e) = g(x)$.

Demostració: Tots els resultats es desprenen del teorema 4.3.3 □

Un cas especial, que caracteritzem d'algunes maneres en les proposicions següents, és quan la funció associada g és una negació forta N. És especialment interessant, ja que en aquest cas tenim un munt de bones propietats.

Proposició 4.3.9 *Siguin* $U \equiv \langle g, e\rangle_{\text{ide}}$ *amb* $g(0) = 1$, I_U *la seva implicació residual i* $N : [0,1] \to [0,1]$ *una negació forta. Llavors*

$$I_U(x,e) = N(x) \quad \textit{per tot} \quad x \in [0,1]$$

si i només si $g = N$. *A més a més, en aquest cas tenim*

$$I_U(x, N(x)) = N(x) \quad \textit{per tot} \quad x \in [0,1]. \tag{4.18}$$

Demostració: Se segueix dels punts *(iv)* i *(v)* de la proposició anterior. □

Nota 4.3.10 *La propietat descrita a l'expressió (4.18) ha estat estudiada recentment a [19] per implicacions residuals de t-normes, degut a la seva aplicabilitat al camp d'estudi d'indicadors de grau d'inclusió construïts a partir d'implicacions.*

Una altra propietat també satisfeta quan $g = N$ és una negació forta, és la contraposició respecte de N.

Aquesta propietat ha estat estudiada a [38] pels casos d'uninormes idempotents contínues per l'esquerra i per la dreta. Pel cas general tenim la proposició següent.

Proposició 4.3.11 *Siguin* $U \equiv \langle g, e\rangle_{\text{ide}}$ *amb* $g(0) = 1$, I_U *la seva implicació residual i* N *una negació forta. Llavors* I_U *té contraposició respecte de* N *si i només si* $g = N$.

Demostració: Quan $g = N$, per una banda tenim:

$$I_U(x,y) = \begin{cases} \min(N(x), y) & \text{si } y < x \\ \max(N(x), y) & \text{si } y \geqslant x \end{cases}$$

i per l'altra

$$\begin{aligned} I_U(N(y), N(x)) &= \begin{cases} \min(N(N(y)), N(x)) & \text{si } N(x) < N(y) \\ \max(N(N(y)), N(x)) & \text{si } N(x) \geqslant N(y) \end{cases} \\ &= \begin{cases} \min(y, N(x)) & \text{si } y < x \\ \max(y, N(x)) & \text{si } y \geqslant x \end{cases} \end{aligned}$$

i això demostra que I_U té contraposició respecte de N.

Recíprocament, demostrem primer que $N(e) = e$. Tenim, emprant que I_U té contraposició respecte de N,

$$e = I_U(e,e) = I_U(N(e), N(e)) = \max\{g(N(e)), N(e)\}.$$

Ara, si $N(e) \geqslant g(N(e))$, la igualtat anterior ens diu que $e = N(e)$. Si $N(e) < g(N(e))$, llavors $g(N(e)) = e$ i $N(e) < e$. Conseqüentment, per tot $x \in (N(e), e)$ tenim $g(x) = e$ i també $N(x) \in (N(e), e)$ i podem escriure que

$$x = I_U(e, x) = I_U(N(x), N(e)) = \min(g(N(x)), N(e)) = N(e)$$

que dóna una contradicció.

Llavors, emprant que $N(e) = e$, tenim per tot $x \in [0, 1]$

$$g(x) = I_U(x, e) = I_U(N(e), N(x)) = I_U(e, N(x)) = N(x). \qquad \square$$

Exemple 4.3.12 *Considerem la negació forta* $N(x) = 1 - x$ *i la uninorma contínua per la dreta* $U \equiv \langle N, \frac{1}{2} \rangle_{ide}$. *En aquest cas tenim*

$$U(x, y) = \begin{cases} \min(x, y) & \textit{si } y < 1 - x \\ \max(x, y) & \textit{si } y \geqslant 1 - x \end{cases}$$

i la seva implicació residual

$$I_U(x, y) = \begin{cases} \min(1 - x, y) & \textit{si } y < x \\ \max(1 - x, y) & \textit{si } y \geqslant x \end{cases}$$

satisfà la contraposició respecte de N *per la proposició anterior. Aquesta implicació residual es pot observar a la figura 31.*

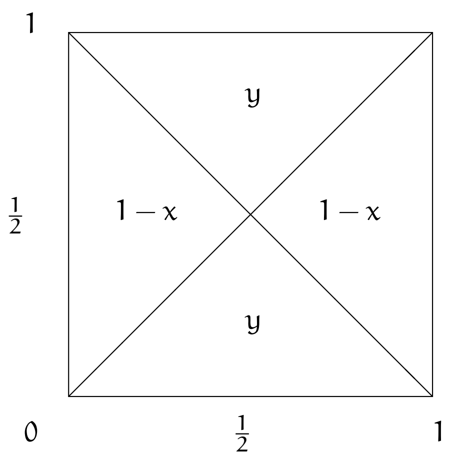

Figura 31. I_U amb $U \equiv \langle N, \frac{1}{2} \rangle_{\mathrm{ide}}$ i $N(x) = 1 - x$.

En la proposició següent es relaciona la implicació residual de certes uninormes contínues per la dreta o per l'esquerra amb una implicació forta concreta.

Proposició 4.3.13 [38] *Siguin* N *una negació forta i* U_r (U_l) *la uninorma contínua per la dreta (esquerra) amb* N *com a funció associada. Llavors les igualtats següents són certes:*

$$I_{U_r, N} = I_{U_r} = I_{U_l}.$$

Pel corol·lari 4.3.4 queda clar que el resultat anterior es pot generalitzar per qualsevol uninorma idempotent $U \equiv \langle g, e \rangle_{\text{ide}}$ com segueix.

Proposició 4.3.14 *Siguin* N *una negació forta, i* $U \equiv \langle N, e \rangle_{ide}$. *Llavors la igualtat següent se satisfà:*

$$I_{U_r,N} = I_U.$$

A més a més, es pot demostrar una versió més general d'aquest resultat.

Proposició 4.3.15 *Siguin* N *una negació forta i* $U \equiv \langle g, e \rangle_{\text{ide}}$. *Llavors* $I_{U,N} = I_U$ *si i només si* $g = N$ *i* U *és contínua per la dreta.*

Demostració: Si $g = N$ i U és contínua per la dreta, tenim $U = U_r$ i la proposició anterior demostra que $I_{U,N} = I_U$. Recíprocament, si $I_{U,N} = I_U$ tenim per un costat

$$I_{U,N}(x, e) = U(N(x), e) = N(x)$$

i per l'altre, emprant la propietat *(v)* de la proposició 4.3.8,

$$I_U(x, e) = g(x).$$

Llavors $g(x) = N(x)$ per tot $x \in [0, 1]$. A més a més aplicant $I_{U,N}(x, x) = I_U(x, x)$ per tot x obtenim, emprant ara la proposició 4.3.8 *(ii)*,

$$U(N(x), x) = \max(N(x), x)$$

seguint d'aquí la continuïtat per la dreta de U. □

Per acabar aquesta secció, estudiarem el principi d'intercanvi (definició 4.1.4).

Proposició 4.3.16 *Sigui* $U \equiv \langle N, e \rangle_{ide}$ *amb* N *una negació forta. Llavors* I_U *verifica el principi d'intercanvi.*

Demostració: Com es diu al corol·lari 4.3.4, si agafem dues uninormes amb la mateixa funció associada, tenen la mateixa implicació residual. Llavors, si agafem $U_r = (e, N)$:

$$U_r(x, y) = \begin{cases} \min(x, y) & \text{si } y < N(x) \\ \max(x, y) & \text{si } y \geqslant N(x). \end{cases}$$

Ara sabem que $I_U = I_{U_r}$ i, per la proposició anterior, que $I_{U_r,N} = I_{U_r}$. Llavors

$$I_U(x, y) = I_{U_r,N}(x, y) = U_r(N(x), y).$$

Ara, emprant que U_r és associativa i commutativa, tenim

$$\begin{aligned} I_U(x, I_U(y, z)) &= U_r(N(x), U_r(N(y), z)) = U_r(U_r(N(x), N(y)), z)) \\ &= U_r(U_r(N(y), N(x)), z)) = U_r(N(y), U_r(N(x), z)) \\ &= I_U(y, I_U(x, z)), \end{aligned}$$

per tot x, y, z de $[0, 1]$. □

Totes les uninormes idempotents tals que les seves implicacions residuals satisfan aquesta important propietat, incloent conseqüentment aquelles donades en la proposició anterior, són caracteritzades en el teorema següent.

Teorema 4.3.17 *Sigui* $U \equiv \langle g, e\rangle_{\text{ide}}$ *amb* $g(0) = 1$. *Llavors* I_U *satisfà el principi d'intercanvi si i només si la següent propietat se satisfà:*

$$\textit{si } g(g(x)) < x \textit{ per algun } x \in [0,1], \textit{ llavors } x > e \textit{ i } g(x) = e. \tag{4.19}$$

Demostració: Primer, suposem que I_U satisfà el principi d'intercanvi, i $a \in [0,1]$ tal que $g(g(a)) < a$. Ara dividim la demostració en alguns casos.

- Primer notem que $a \neq e$ perquè $g(g(e)) = e$.
- Si $a < g(a)$, llavors tenim $g(g(a)) < a < g(a)$ i per un costat

  $$\begin{aligned} I_U(a, I_U(g(a), a)) &= I_U(a, \min(g(g(a)), a)) = I_U(a, g(g(a))) \\ &= \min(g(g(a)), g(a)) = g(g(a)), \end{aligned}$$

  i per una altra banda

  $$\begin{aligned} I_U(g(a), I_U(a, a)) &= I_U(g(a), \max(g(a), a)) = I_U(g(a), g(a)) \\ &= \max(g(g(a)), g(a)) = g(a). \end{aligned}$$

  I llavors $g(a) = g(g(a))$, però això ens duu a una contradicció.
- Si $a > g(a)$, llavors $g(a) \leqslant g(g(a)) < a$, i tenim per un costat

  $$I_U(a, I_U(g(a), g(g(a)))) = I_U(a, g(g(a))) = \min(g(g(a)), g(a)) = g(a),$$

  i per un altre,

  $$\begin{aligned} I_U(g(a), I_U(a, g(g(a)))) &= I_U(g(a), \min(g(a), g(g(a)))) = I_U(g(a), g(a)) \\ &= \max(g(g(a)), g(a)) = g(g(a)). \end{aligned}$$

  I llavors $g(a) = g(g(a))$, que vol dir que $g(a) = e$ i $a > e$, perquè e és l'únic punt fix de g.

En qualsevol cas, si I_U satisfà el principi d'intercanvi, satisfà (4.19).
Recíprocament, suposem que g satisfà (4.19). Com que $I_U(x, y) \in \{g(x), y\}$, dividim la demostració en alguns casos depenent dels valors de $I_U(x, z)$ i $I_U(y, z)$.

1) Si $I_U(y, z) = z$ i $I_U(y, z) = z$. Tenim:

   $$I_U(x, I_U(y, z)) = I_U(x, z) = z = I_U(y, z) = I_U(y, I_U(x, z))$$

   i llavors el principi d'intercanvi se satisfà.

2) $I_U(y, z) = z$ i $I_U(x, z) = g(x)$. Llavors, per una banda tenim

   $$I_U(x, I_U(y, z)) = I_U(x, z) = g(x)$$

   i per una altra

   $$I_U(y, I_U(x, z)) = I_U(y, g(x)).$$

   Ara estudiem el valor de $I_U(y, g(x))$.

   - Si $z < y$ llavors $I_U(y, z) = \min(g(y), z) = z$ i conseqüentment $z \leqslant g(y)$.
     * Si $z < x$ llavors $I_U(x, z) = \min(g(x), z) = g(x)$ i aleshores $z \geqslant g(x)$. Emprant que $g(x) \leqslant z < y$ i $g(x) \leqslant z \leqslant g(y)$ podem calcular el valor de $I_U(y, g(x))$:

       $$I_U(y, g(x)) = \min(g(y), g(x)) = g(x).$$

* Si $z \geqslant x$ llavors tenim que $x \leqslant z \leqslant g(y)$ i $x \leqslant z < y$ que vol dir que $g(y) \leqslant g(x)$.
  · Si $x \neq g(y)$ llavors $x < g(y)$. Per definició d'uninorma idempotent, això vol dir que $y \leqslant g(x)$ i llavors

$$I_U(y, g(x)) = \max(g(y), g(x)) = g(x).$$

  · Si $x = g(y)$ llavors $g(y) \leqslant g(x) = g(g(y))$ i tenim

$$I_U(y, g(x)) = I_U(y, g(g(y))) = \begin{cases} \min(g(y), g(g(y))) & \text{si } g(g(y)) < y \\ \max(g(y), g(g(y))) & \text{si } g(g(y)) \geqslant y \end{cases}$$
$$= \begin{cases} g(y) & \text{si } g(g(y)) < y \\ g(g(y)) & \text{si } g(g(y)) \geqslant y. \end{cases}$$

Ara, emprant que g satisfà (4.19), si $g(g(y)) < y$, tindrem $y > e$ i $g(y) = e$, d'on

$$g(g(y)) = g(e) = e = g(y) = I_U(y, g(x)).$$

Conseqüentment,

$$I_U(y, g(x)) = g(g(y)) = g(x).$$

– Si $z \geqslant y$ la demostració és similar al cas anterior.

I en qualsevol cas $I_U(y, g(x)) = g(x)$ i el principi d'intercanvi se satisfà.

3) Si $I_U(y, z) = g(y)$ i $I_U(x, z) = z$. Aquest cas és similar a l'anterior perquè x i y juguen un paper simètric a l'equació (4.2).

4) Si $I_U(y, z) = g(y)$ i $I_U(x, z) = g(x)$. Tenim per una banda

$$I_U(x, I_U(y, z)) = I_U(x, g(y)),$$

i per una altra

$$I_U(y, I_U(x, z)) = I_U(y, g(x)).$$

– Si $x \neq g(y)$ i $y \neq g(x)$, per definició, si $x > g(y)$ llavors $y \geqslant g(x)$ però $y \neq g(x)$, i aleshores si $x > g(y)$ llavors $y > g(x)$. De manera similar, tenim que si $y > g(x)$, llavors $x < g(y)$. És a dir, $y > g(x)$ si i només si $x > g(y)$. Llavors,

$$I_U(x, g(y)) = \begin{cases} \min(g(x), g(y)) & \text{si } x > g(y) \\ \max(g(x), g(y)) & \text{si } x < g(y) \end{cases}$$

i

$$I_U(y, g(x)) = \begin{cases} \min(g(x), g(y)) & \text{si } y > g(x) \\ \max(g(x), g(y)) & \text{si } y < g(x) \end{cases}$$

són iguals, i el principi d'intercanvi se satisfà.

– Si $y = g(x)$ tenim que:

$$I_U(y, g(x)) = I_U(g(x), g(x)) = \max(g(g(x)), g(x))$$

i

$$\begin{aligned} I_U(x, g(y)) = I_U(x, g(g(x))) &= \begin{cases} \max(g(x), g(g(x))) & \text{si } g(g(x)) \geqslant x \\ \min(g(x), g(g(x))) & \text{si } g(g(x)) < x \end{cases} \\ &= \max(g(x), g(g(x))) \end{aligned}$$

perquè el cas $g(g(x)) < x$ implicaria que $x > e$ i $g(x) = e = g(g(x))$, ja que g satisfà (4.19). Aleshores $I_U(x, g(y)) = I_U(y, g(x))$.

– Si $x = g(y)$, el cas és similar a l'anterior.

Conseqüentment si g satisfà (4.19) llavors I_U satisfà el principi d'intercanvi. □

Nota 4.3.18 *Com ja hem comentat anteriorment (proposició 4.1.20), per a tota uninorma contínua per l'esquerra U, la seva implicació residual I_U verifica el principi d'intercanvi ([39]). En el nostre cas, les uninormes idempotents contínues per l'esquerra satisfan $g(g(x)) \geqslant x$ per a tot x, i per tant, també satisfan la condició (4.19) del teorema. Notem que al teorema anterior hem trobat uninormes no contínues per l'esquerra tals que la seva implicació residual I_U satisfà el principi d'intercanvi. En particular, les uninormes idempotents de $\mathcal{U}_{\min}$ (que són contínues per la dreta) satisfan la condició del teorema anterior i per tant, les seves implicacions residuals satisfan el principi d'intercanvi.*

Funcions de co-implicació i dualitat

En aquesta part estudiarem els operadors anomenats *co-implicacions residuals* definits a partir d'uninormes idempotents, i les seves propietats. Com veurem, la dualitat jugarà un paper molt important en aquest cas.

Definició 4.3.19 *Un operador binari $J : [0,1] \times [0,1] \to [0,1]$ s'anomena una funció de co-implicació o simplement una co-implicació si satisfà:*

- *J és decreixent en la primera secció i creixent en la segona.*
- *$J(0,0) = J(1,1) = 0$ i $J(0,1) = 1$.*

Mentre que les implicacions residuals es poden veure com a generalitzacions borroses de les implicacions clàssiques ($p \to q$), les co-implicacions residuals generalitzen la co-implicació clàssica ($p \not\leftarrow q$).

Definició 4.3.20 *Sigui U una uninorma. Denotarem per J_U l'operació binària donada per:*

$$J_U(x, y) = \inf\{z \in [0,1] \mid U(x, z) \geqslant y\}.$$

Direm que J_U és la co-implicació residual de U si J_U és una funció de co-implicació.

De manera similar al cas de funcions d'implicació, es poden demostrar els resultats següents.

Proposició 4.3.21 *Sigui $U \equiv \langle g, e \rangle_{\text{ide}}$. J_U és una funció de co-implicació si i només si $g(1) = 0$.*

Teorema 4.3.22 *Sigui $U \equiv \langle g, e \rangle_{\text{ide}}$ amb $g(1) = 0$. La co-implicació residual J_U ve donada per:*

$$J_U(x, y) = \begin{cases} \min(g(x), y) & \text{si } y \leqslant x \\ \max(g(x), y) & \text{si } y > x \end{cases} \tag{4.20}$$

Nota 4.3.23 *Comparant* (4.17) *i* (4.20) *podem observar que, donada una uninorma amb* g *com a funció associada satisfent* $g(0) = 1$ *i* $g(1) = 0$*, ambdues* I_U *i* J_U *coincideixen llevat al conjunt de punts* (x, x).

Ara, sigui J una co-implicació, aleshores l'operador dual

$$\widetilde{J}(x, y) = N(J(N(x), N(y)))$$

és una implicació. A més a més, donada una uninorma idempotent $U \equiv \langle g, e \rangle_{ide}$ amb $g(1) = 0$, tenim que les següent igualtats es mantenen, per a qualsevol negació forta N:

$$\widetilde{J_U} = I_{\widetilde{U}} \qquad \text{i} \qquad \widetilde{I_U} = J_{\widetilde{U}}.$$

És a dir, per a qualsevol uninorma $U \equiv \langle g, e \rangle_{ide}$ amb $g(1) = 0$, l'operador dual d'una co-implicació residual J_U de U, és la implicació residual de $\widetilde{U}$ (notem que si $g(1) = 0$ aleshores $\widetilde{g}(0) = 1$).

Nota 4.3.24 *Notem que el cas especial de* $g = N$, U *i* $\widetilde{U}$ *tenen la mateixa funció associada,* N*, i conseqüentment* $\widetilde{J_U} = I_U$.

D'aquesta dualitat es pot veure que cada resultat per implicacions demostrat en la secció anterior té el seu resultat corresponent per co-implicacions. Aquí demostrem el resultat corresponent al principi d'intercanvi.

Teorema 4.3.25 *Sigui* $U \equiv \langle g, e \rangle_{ide}$ *una uninorma idempotent amb* $g(1) = 0$*. Els següents punts són equivalents:*

i) J_U *satisfà el principi d'intercanvi.*

ii) $I_{\widetilde{U}}$ *satisfà el principi d'intercanvi.*

iii) Si $x < g(g(x))$ *per algun* $x \in [0, 1]$*, aleshores* $x < e$ *i* $g(x) = e$.

DEMOSTRACIÓ: Per a tots x, y, $z \in [0, 1]$ tenim que si J_U satisfà el principi d'intercanvi

$$\begin{aligned} I_{\widetilde{U}}(x, I_{\widetilde{U}}(y, z)) &= \widetilde{J_U}(x, \widetilde{J_U}(y, z)) = N(J_U(N(x), N(\widetilde{J_U}(y, z)))) \\ &= N(J_U(N(x), N(N(J_U(N(y), N(z)))))) = \\ &= N(J_U(N(x), J_U(N(y), N(z)))) = \\ &= N(J_U(N(y), J_U(N(x), N(z)))) = \\ &= N(J_U(N(y), N(N(J_U(N(x), N(z)))))) = \\ &= \widetilde{J_U}(y, \widetilde{J_U}(x, z)) = I_{\widetilde{U}}(y, I_{\widetilde{U}}(x, z)), \end{aligned}$$

llavors $I_{\widetilde{U}}$ satisfà el principi d'intercanvi. Recíprocament, una demostració similar demostra que si $I_{\widetilde{U}}$ satisfà el principi d'intercanvi, J_U també, i tenim equivalència entre *i)* i *ii)*.

Ara, aplicant el teorema 4.3.17, sabem que $I_{\widetilde{U}}$ satisfà el principi d'intercanvi si i només si les afirmacions següents són certes:

$$\text{Si } x > \widetilde{g}(\widetilde{g}(x)) \text{ per algun } x \in [0,1], \text{ llavors } x > \widetilde{e} \text{ i } \widetilde{g}(x) = \widetilde{e}$$

$$\Updownarrow$$

$$\text{Si } x > N(g(N(N(g(N(x)))))) \text{ per algun } x \in [0,1], \text{ llavors } x > N(e) \text{ i } N(g(N(x))) = N(e),$$

$$\Updownarrow$$

$$\text{Si } x > N(g(g(N(x)))) \text{ per algun } x \in [0,1], \text{ llavors } x > N(e) \text{ i } g(N(x)) = e,$$

$$\Updownarrow$$

$$\text{Si } N(x) < g(g(N(x))) \text{ per algun } x \in [0,1], \text{ llavors } N(x) < e \text{ i } g(N(x)) = e,$$

$$\Updownarrow$$

$$\text{Si } N(x) < g(g(N(x))) \text{ per algun } N(x) \in [0,1], \text{ llavors } N(x) < e \text{ i } g(N(x)) = e,$$

$$\Updownarrow$$

$$\text{Si } x < g(g(x)) \text{ per algun } x \in [0,1], \text{ llavors } x < e \text{ i } g(x) = e,$$

i conseqüentment, *ii)* és equivalent a *iii)*. □

Nota 4.3.26 *Ara tenim que donada una uninorma idempotent de $\mathcal{U}_{max}$ (uninorma contínua per l'esquerra i disjuntiva), la seva co-implicació residual J_U satisfà el principi d'intercanvi.*

Exemple 4.3.27 *Considerem la negació forta $N(x) = \sqrt{1-x^2}$, i U la uninorma contínua per la dreta $U \equiv \left\langle N, \frac{\sqrt{2}}{2} \right\rangle_{ide}$, donada per l'expressió:*

$$U(x,y) = \begin{cases} \min(x,y) & si\ y < \sqrt{1-x^2} \\ \max(x,y) & si\ y \geqslant \sqrt{1-x^2} \end{cases}$$

la seva implicació residual

$$I_U(x,y) = \begin{cases} \min(\sqrt{1-x^2},y) & si\ y < x \\ \max(\sqrt{1-x^2},y) & si\ y \geqslant x \end{cases}$$

i la seva co-implicació residual

$$J_U(x,y) = \begin{cases} \min(\sqrt{1-x^2},y) & si\ y \leqslant x \\ \max(\sqrt{1-x^2},y) & si\ y < x \end{cases}$$

que es pot observar a la figura 32. Notem que l'única diferència entre I_U i J_U és al conjunt de punts $\{(x,x)/x \in [0,1]\}$. En aquest cas, I_U i J_U satisfan el principi d'intercanvi i totes dues satisfan la propietat de contraposició respecte de N.

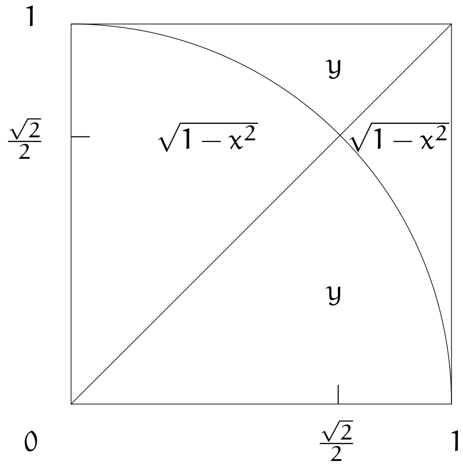

Figura 32. J_U amb $U \equiv \left\langle N, \frac{\sqrt{2}}{2} \right\rangle_{\text{ide}}$ i $N(x) = \sqrt{1-x^2}$.

4.3.2 *A partir d'uninormes de $\mathcal{U}_{\cos}$*

Ara estudiarem les implicacions residuals definides a partir d'uninormes en $\mathcal{U}_{\cos}$. Com hem fet amb el cas d'uninormes idempotents, restringirem els resultats de la proposició 4.1.17 per a uninormes de $\mathcal{U}_{\cos}$.

Proposició 4.3.28 *Sigui $U \in \mathcal{U}_{\cos}$. I_U és una funció d'implicació si i només si:*

(i) $U \equiv \langle T', \alpha, T'', \beta, (R, e) \rangle_{\cos,\min}$, *o bé,*

(ii) $U \equiv \langle (R, e), \gamma, S, 1 \rangle_{\cos,\max}$, *és a dir, quan* $\delta = 1$.

Ara donarem la forma explícita d'aquestes implicacions residuals, per a cada un dels casos de la proposició anterior.

Teorema 4.3.29 *Si* $U \equiv \langle T', \alpha, T'', \beta, (R, e) \rangle_{\cos,\min}$, *llavors* I_U *ve donada per*

$$I_U(x, y) = \begin{cases} \beta I_{T_U}\left(\frac{x}{\beta}, \frac{y}{\beta}\right) & \text{si } x \in [0, \beta] \text{ i } y < x \\ 1 & \text{si } x \in [0, \beta] \text{ i } y \geqslant x \\ y & \text{si } (x, y) \in]\beta, 1[\times [0, \beta] \\ \beta + (1-\beta) I_R\left(\frac{x-\beta}{1-\beta}, \frac{y-\beta}{1-\beta}\right) & \text{si } (x, y) \in]\beta, 1[^2 \\ 1 & \text{si } y = 1 \\ y & \text{si } x = 1 \text{ i } y \leqslant \alpha \\ \alpha & \text{si } x = 1 \text{ i } y > \alpha. \end{cases} \tag{4.21}$$

L'estructura d'aquestes implicacions es pot observar a la figura 33. Ara estudiem el segon cas, en que $U \in \mathcal{U}_{\cos,\max}$.

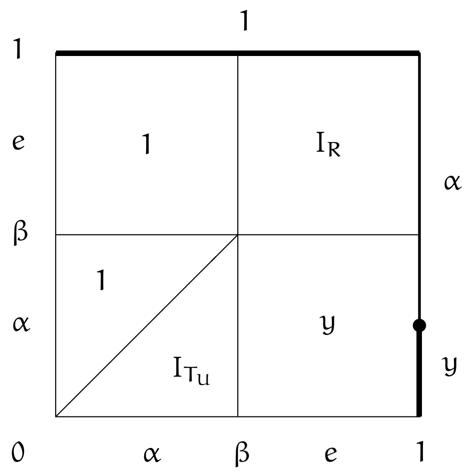

Figura 33. Estructura de I_U, amb $U \in \mathcal{U}_{\text{cos,min}}$.

Teorema 4.3.30 *Si* $U \equiv \langle (R, e), \gamma, S, 1\rangle_{\text{cos,max}}$, *llavors* I_U *ve donada per*

$$I_U(x,y) = \begin{cases} \gamma I_R\left(\frac{x}{\gamma}, \frac{y}{\gamma}\right) & \textit{si } (x,y) \in]0,\gamma]^2 \\ \gamma + (1-\gamma)R_S\left(\frac{x-\gamma}{1-\gamma}, \frac{y-\gamma}{1-\gamma}\right) & \textit{si } (x,y) \in]\gamma,1[^2 \textit{ i } y \geqslant x \\ 0 & \textit{si } x \in]\gamma,1[\textit{ i } y < x \\ y & \textit{si } (x,y) \in]0,\gamma] \times [\gamma,1[\\ 1 & \textit{si } y = 1 \textit{ ò } x = 0 \\ 0 & \textit{si } y = 0 \textit{ i } x \neq 0 \end{cases} \tag{4.22}$$

L'estructura d'aquestes implicacions es pot observar a la figura 34.

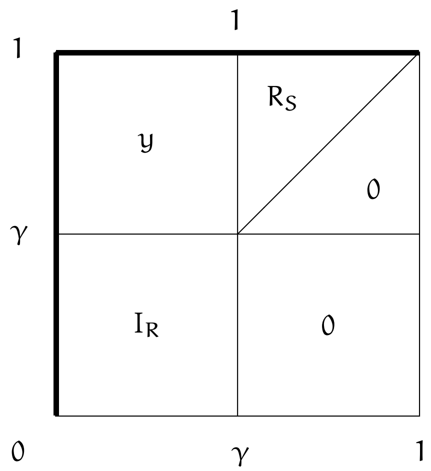

Figura 34. Estructura de I_U, amb $U \in \mathcal{U}_{\text{cos,max}}$.

Podem estudiar ara les dues propietats d'implicacions que hem esmentat anteriorment: el principi d'intercanvi i la contraposició, per aquestes implicacions que hem presentat en els dos teoremes anteriors. Quant al principi d'intercanvi, sabem que les uninormes contínues per l'esquerra seran tals que la seva implicació residual satisfarà el principi d'intercanvi, i en el cas de les uninormes de $\mathcal{U}_{\cos}$ es transforma en el resultat següent.

Teorema 4.3.31 *Sigui* U *una uninorma de* $\mathcal{U}_{\cos}$ *tal que* $U(0,x)=0$ *per a tot* $x<1$*. Si tenim un dels casos següents,*

(i) $U \equiv \langle T', \alpha, T'', \beta, (R,e)\rangle_{\cos,\min}$*, amb* $\alpha=\beta$ *i* $U(\alpha,1)=U(1,\alpha)=\alpha$*.*

(ii) $U \equiv \langle (R,e), \gamma, S, 1\rangle_{\cos,\max}$*, conjuntiva, és a dir* $U(0,1)=U(1,0)=0$*.*

llavors U *és contínua per l'esquerra i llavors* I_U *satisfà el principi d'intercanvi.*

Sobre la propietat de contraposició, obtenim el teorema següent.

Teorema 4.3.32 *Sigui* U *una uninorma de* $\mathcal{U}_{\cos}$ *tal que* $U(0,x)=0$ *per a tot* $x<1$*. Llavors* I_U *satisfà la contraposició respecte d'una negació* N *si i només si* U *és representable i* $N=N_U$*.*

DEMOSTRACIÓ: Primer de tot, sabem pel corol·lari 4.1.24, que si U és representable, llavors satisfà la contraposició respecte de N_U. Per demostrar el recíproc, distingirem dos casos.

(i) Si $U \equiv \langle T', \alpha, T'', \beta, (R,e)\rangle_{\cos,\min}$, suposem que existeix una negació forta N per la qual I_U satisfà la contraposició. Llavors, aplicant $x=y$ a l'equació de contraposició (4.1) tindrem

$$I_U(x,x) = I_U(N(x), N(x)). \tag{4.23}$$

Ara calculem, emprant l'equació (4.21), el valor de $I_U(x,x)$, sabent que la uninorma R té element neutre $\frac{e-\beta}{1-\beta}$

$$I_U(x,x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \leqslant \beta \\ e & \text{si } \beta < x < 1 \\ 1 & \text{si } x = 1. \end{cases}$$

Com que N és una negació forta, existeix un punt fix de N, que anomenem z, és a dir $N(z)=z$. Ara vegem que si $\beta \neq 0$, existeix sempre x tal que $x<\beta<N(x)$ tot distingint tres casos:

- Si $z=\beta$, llavors podem agafar $0<x<1$ tal que $x<\beta=N(\beta)<N(x)$.
- Si $z<\beta$, llavors podem agafar $0<x<1$ tal que $x<N(\beta)<z<\beta<N(x)$.
- Si $\beta<z$, llavors podem agafar $0<x<1$ tal que $x<\beta<z<N(\beta)<N(x)$.

Llavors en qualsevol cas, existeix x de manera que $x<\beta<N(x)$, i si es compleix la contraposició respecte de N, per l'equació (4.23) s'hauria de tenir que $1=e$, però això ens duria a contradicció, perquè llavors U seria una t-norma, i no de $\mathcal{U}_{\cos,\min}$. D'aquesta manera $\beta=0$ i llavors U és representable.

(ii) Si $U \equiv \langle (R,e), \gamma, S', \delta, S''\rangle_{\cos,\max}$, seguint un raonament semblant al cas anterior, sabem, ara per l'equació (4.22) i tenint en compte que l'element neutre de R és $\frac{e}{\gamma}$,

$$I_U(x,x) = \begin{cases} e & \text{si } x < \gamma \\ \gamma & \text{si } x = \gamma \\ \gamma + (1-\gamma) R_S\left(\frac{x-\gamma}{1-\gamma}, \frac{x-\gamma}{1-\gamma}\right) & \text{si } \gamma < x < 1 \\ 1 & \text{si } x = 1. \end{cases}$$

I de forma semblant al cas anterior, si $\gamma \neq 1$ existeix x_0 de manera que $x_0 < \gamma < N(x_0)$, i si es compleix (4.23), tindríem que $e = \gamma + (1-\gamma)R_S(\frac{x_0-\gamma}{1-\gamma}, \frac{x_0-\gamma}{1-\gamma})$, però això dóna contradicció, ja que $e < \gamma$.

Per tant, $\gamma = 1$ i llavors U és representable, com volíem veure. $\square$

4.3.3 *Distributivitat d'implicacions residuals sobre uninormes*

Com hem comentat, a [95] aquesta equació es va resoldre quan la conjunció és una t-norma contínua, la disjunció una t-conorma contínua i la implicació és una implicació forta derivada a partir d'una altra t-conorma contínua o una implicació residual derivada a partir d'una t-norma contínua.

Ara, de manera semblant al que hem fet a l'apartat 4.2.2, resoldrem l'equació

$$I_U(U_c(x,y),z) = U_d(I_U(x,z), I_U(y,z)), \tag{4.24}$$

per a tots $x, y, z \in [0,1]$, on U és una uninorma que satisfaci la proposició 4.1.17, U_c és una uninorma conjuntiva, i U_d és una disjuntiva. Totes les uninormes estaran a una de les classes que s'han citat als preliminars.

Per resoldre l'equació distingirem diferents casos

(i) Quan U és representable (conjuntiva o disjuntiva),

(ii) quan U és una t-norma,

(iii) quan U és de $\mathcal{U}_{\min}$,

(iv) quan $U \equiv \langle g, e\rangle_{\text{ide}}$ és idempotent amb $g(0) = 1$,

(v) quan U és de $\mathcal{U}_{\cos,\min}$ i

(vi) quan U és de $\mathcal{U}_{\cos,\max}$, amb $\delta = 1$.

Per tant dividirem el nostres raonaments en sis parts, dedicades a cada un d'aquests casos.

(i) Quan U és representable

Aquest cas es pot reduir al mateix problema d'implicacions fortes. Efectivament, suposem que U és una uninorma representable amb element neutre $e \in]0,1[$ i generador additiu h. Si denotem per U^* la uninorma representable disjuntiva amb el mateix generador additiu h, sabem, pel teorema 4.1.23 que

$$I_U(x,y) = I_{U^*,N_U}(x,y) = U^*(N_U(x),y) \quad \text{per a tots } x,y \in [0,1]$$

on N_U és la negació forta donada per $N_U(x) = h^{-1}(-h(x))$. És a dir, I_U és de fet una implicació forta, i per a aquest tipus d'implicacions la distributivitat ha estat resolta als teoremes 4.2.6 i 4.2.8, i per tant obtenim el resultat següent.

Teorema 4.3.33 *Sigui $U \in \mathcal{U}_{\text{rep}}$ amb element neutre $e \in]0,1[$, i I_U la seva implicació residual. Siguin U_c una uninorma conjuntiva i U_d una disjuntiva. Llavors, I_U, U_c i U_d satisfan l'equació (4.24) si i només si U_c i U_d són una t-norma i una t-conorma, diguem T i S, respectivament, són N_U-duals i tenim un dels dos casos següents*

(a) $S = \max$, $T = \min$,

(b) *S és estricta tal que, si s és el generador additiu de S amb $s(e) = 1$, llavors s és també un generador multiplicatiu de U.*

(ii) Quan U és una t-norma

Per als casos (ii), (iii), (iv), el procés seguit és molt similar, primer comencem amb uns lemes per establir condicions necessàries per obtenir solucions. Encara que els primers passos consisteixen en demostrar que U_c i U_d han de ser idempotents, la demostració a cada cas és diferent, i per això fem les demostracions separadament.

Per tant, en aquest cas considerarem que U és una t-norma T. El primer lema es pot demostrar fàcilment en general, assumint només continuïtat per l'esquerra.

Lema 4.3.34 *Siguin T una t-norma contínua per l'esquerra, U_c una uninorma conjuntiva i U_d una disjuntiva. Si I_T, U_c i U_d satisfan (4.24), llavors U_d és idempotent i $U_c = \min$.*

Demostració: Si posem $x = y = 1$ a l'equació (4.24) obtenim

$$z = I_T(U_c(1,1),z) = U_d(I_T(1,z), I_T(1,z)) = U_d(z,z)$$

per a tot $z \in [0,1]$, és a dir, U_d és idempotent.

Demostrem ara que U_c ha de ser una t-norma. Suposem pel contrari que $e_c < 1$, llavors existeixen x i z tals que $e_c < x < z < 1$ i per aquests valors tenim:

$$z = I_T(1,z) = I_T(U_c(x,1),z) = U_d(I_T(x,z), I_T(1,z)) = U_d(1,z) = 1,$$

que és una contradicció.

Per acabar la demostració, és suficient veure que U_c és idempotent. Suposem que existeix $t \in]0,1[$ tal que $U_c(t,t) < t$ i agafem a tal que $U_c(t,t) < a < t$. Llavors tenim $I_T(U_c(t,t),a) = 1$ mentre que $I_T(t,a) < 1$ (per proposició 4.1.12, (i) i sabent que T és contínua per l'esquerra) però, per una altra banda, com que U_d és idempotent

$$1 = I_T(U_c(t,t),a) = U_d(I_T(t,a), I_T(t,a)) = I_T(t,a)$$

que ens duu a una contradicció. Llavors U_c és idempotent i $U_c = \min$. □

Lema 4.3.35 *Siguin T una t-norma contínua, U_c una uninorma conjuntiva i U_d una disjuntiva. Si I_T, U_c i U_d satisfan (4.24), llavors $T(x,x) = x$ per a tots $x \leqslant e_d$.*

Demostració: Si I_T, U_c i U_d satisfan (4.24), sabem pel lema anterior que $U_c = \min$ i U_d és idempotent. Llavors, suposem ara que existeix algun $\alpha \leqslant e_d$ amb $T(\alpha,\alpha) < \alpha$. Això implica que T té un sumand ordinal arquimedià continu $T_{a,b}$ al subinterval $[a,b]$ contenint α amb $a < e_d$. Llavors, agafant z_0 tal que $a < z_0 < \min(e_d, b)$, sabem per la nota 4.1.13 que $I_T(x,z_0)$ és estrictament decreixent en la primera secció a l'interval $]z_0,b]$, agafant tots els valors de b a z_0. Llavors podem elegir x_0 tal que $z_0 < I_T(x_0,z_0) < \min(e_d,b)$ i per aquest valor tenim

$$\begin{aligned} I_T(x_0,z_0) &= I_T(U_c(x_0,1),z_0) = U_d(I_T(x_0,z_0), I_T(1,z_0)) = U_d(I_T(x_0,z_0),z_0) \\ &= \min(I_T(x_0,z_0),z_0) = z_0, \end{aligned}$$

obtenint contradicció. Llavors, $T(x,x) = x$ per a tots $x \leqslant e_d$ i el lema queda demostrat. □

Ara, el resultat per a t-normes és com segueix.

Teorema 4.3.36 *Siguin T una t-norma contínua, I_T la seva implicació residual, U_c una uninorma conjuntiva i U_d una disjuntiva. Llavors, I_T, U_c i U_d satisfan (4.24) si i només si $U_c = \min$, U_d és idempotent i $T(x,x) = x$ per a tots $x \leqslant e_d$.*

DEMOSTRACIÓ: Si I_T, U_c i U_d satisfan (4.24) el resultat queda clar pels lemes anteriors. Recíprocament, suposem que $U_c = \min$, U_d és idempotent i $T(x,x) = x$ per a tots $x \leqslant e_d$. En aquest cas, l'equació (4.24), emprant el decreixement de I_T a la primera secció, es redueix a

$$U_d(I_T(x,z), I_T(y,z)) = I_T(\min(x,y), z) = \max(I_T(x,z), I_T(y,z)).$$

Tanmateix, si $z \leqslant e_d$, llavors ambdues $I_T(x,z)$ i $I_T(y,z)$ estan a $\{1, z\}$, mentre que, quan $z > e_d$, ambdós valors, $I_T(x,z)$ i $I_T(y,z)$, són més grans o iguals a e_d. En tots dos casos U_d ve donada pel màxim i el teorema queda demostrat. □

Exemple 4.3.37 *La condició de continuïtat sobre* T *és essencial al lema 4.3.35 i el teorema 4.3.36. Sense aquesta assumpció, hi ha altres solucions de l'equació (4.24). Per exemple, és suficient agafar* T *la t-norma dràstica,* U_c *qualsevol t-norma i* U_d *qualsevol uninorma idempotent. Llavors* I_T *ve donada per*

$$I_T(x,y) = \begin{cases} 1 & \textit{si } x < 1 \\ y & \textit{altrament,} \end{cases}$$

i és fàcil veure que I_T, U_c *i* U_d *satisfan l'equació (4.24).*

Notem que la condició sobre T en el teorema anterior és equivalent a dir que T ha de ser una suma ordinal de la forma $(\langle e_d, 1, T_1 \rangle)$, on T_1 és una t-norma contínua qualsevol. Aquesta família de t-normes, juntament a les seves implicacions residuals es pot observar a la figura 35. Notem també que el cas extrem $e_d = 0$ dóna $U_c = \min$, $U_d = \max$ i llavors qualsevol uninorma funciona, obtenint les solucions de [95].

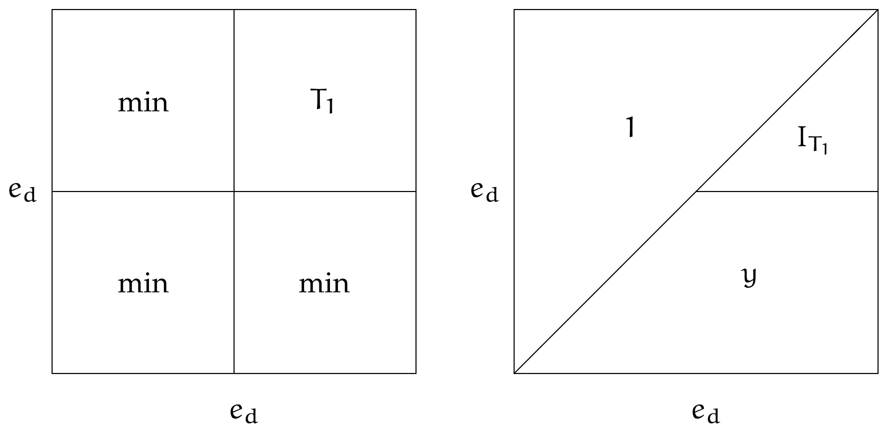

Figura 35. Una t-norma T (esquerra) i la seva implicació residual I_T (dreta) tals que I_T, min i U_d satisfan (4.24), on U_d és una uninorma idempotent qualsevol amb element neutre e_d.

(iii) Quan U *és de* $\mathcal{U}_{\min}$

En tota aquesta secció, $U \equiv \langle T, e, S \rangle_{\min}$ és una uninorma de $\mathcal{U}_{\min}$, I_U és la seva implicació residual (amb expressió donada a l'equació (4.6)). Igual que a l'apartat anterior, arribarem a que U_c i U_d seran uninormes idempotents.

Lema 4.3.38 *Siguin* U_c *una uninorma conjuntiva i* U_d *una disjuntiva. Si* I_U, U_c *i* U_d *satisfan (4.24) llavors* U_d *és idempotent,* $U_c(e,e) = e$ *i* $e \leqslant e_c$.

Demostració: Primer de tot, posem $x = y = e$ a (4.24), i obtenim, per a tot $z \in [0, 1]$,

$$I_U(U_c(e, e), z) = U_d(I_U(e, z), I_U(e, z)) = U_d(z, z). \tag{4.25}$$

Ara, fent $x = y = 1$ a (4.24), tenim

$$I_U(1, z) = U_d(I_U(1, z), I_U(1, z)),$$

mentre que per la fórmula (4.6),

$$I_U(1, z) = \begin{cases} z & \text{si } z \leqslant e \\ e & \text{si } 1 > z > e \\ 1 & \text{si } z = 1. \end{cases}$$

Llavors és cert que $U_d(z, z) = z$ per a tots $z \leqslant e$. Tindrem per tant, que per a tots $z \leqslant e$, l'equació (4.25) es pot escriure com $I_U(U_c(e, e), z) = z$ i, en particular, per $z = e$ obtenim

$$I_U(U_c(e, e), e) = e. \tag{4.26}$$

De tota manera, una altra vegada per la fórmula (4.6) tenim

$$I_U(x, e) = \begin{cases} 1 & \text{si } x < e \\ e & \text{si } x \geqslant e. \end{cases} \tag{4.27}$$

i l'equació (4.26) assegura que $U_c(e, e) \geqslant e$.

Per una altra banda, agafant $x = e_c$ i $y = z = e$ a (4.24) se dedueix que

$$e = I_U(U_c(e_c, e), e) = U_d(I_U(e_c, e), I_U(e, e)) = U_d(I_U(e_c, e), e)$$

i llavors $I_U(e_c, e) = e$ (altrament, tindríem $I_U(e_c, e) = 1$ per (4.27) i per tant que $U_d(1, e) = e$, obtenint contradicció). Una altra vegada l'equació (4.27) implica ara que $e_c \geqslant e$, i $U_c(e, e) \leqslant e$.

Per les dues desigualtats podem escriure que $U_c(e, e) = e$. Ara, aplicant això a (4.25), podem dir que $U_d(z, z) = z$ per a tot z, i llavors U_d és idempotent. □

Lema 4.3.39 *Suposem que S_U és contínua i sigui U_c una uninorma conjuntiva i U_d una disjuntiva. Si I_U, U_c i U_d satisfan (4.24), llavors U_c és idempotent.*

Demostració: Primer, emprant que U_d és idempotent i (4.24), obtenim

$$I_U(x, z) = U_d(I_U(x, z), I_U(x, z)) = I_U(U_c(x, x), z) \tag{4.28}$$

per a tots $x, z \in [0, 1]$.

Ara, suposem que existeix $x \in [0, 1]$ tal que $U_c(x, x) \neq x$. Per el lema anterior, tenim $x \neq e$. Ara dividim la demostració en alguns casos:

(i) Si $U_c(x, x) < x < e \leqslant e_c$, llavors hi ha algun z que satisfà $U_c(x, x) < z < x < e$ i aleshores tenim
$$I_U(x, z) = \sup\{y | U(x, y) \leqslant z\} \leqslant e$$
però $I_U(U_c(x, x), z) = 1$, contradient (4.28).

(ii) Si $e \leqslant U_c(x,x) < x < e_c$, existeix z amb $e \leqslant U_c(x,x) < z < x$. Per continuïtat de S_U deu existir una $y_0 > e$ tal que $U(U_c(x,x), y_0) = z$ i llavors,

$$I_U(U_c(x,x), z) = \sup\{y | U(U_c(x,x), y) \leqslant z\} \geqslant y_0 > e,$$

però $I_U(x,z) = e$ per (4.6), i obtenim de nou una contradicció amb (4.28).

(iii) Si $U_c(x,x) < e < x < e_c$, llavors agafant $z = e$ obtenim $I_U(U_c(x,x), e) = 1$ mentre que $I_U(x,e) = e$, i això contradiu (4.28).

(iv) Si $e \leqslant e_c < x < U_c(x,x)$, llavors hi ha un z tal que $x < z < U_c(x,x)$. Per continuïtat de S_U tenim, similarment al pas (ii),

$$I_U(x,z) = \sup\{y | U(x,y) \leqslant z\} > e$$

i $I_U(U_c(x,x), z) = e$, que és una contradicció.

Llavors, per a tot $x \in [0,1]$ tenim $U_c(x,x) = x$ i U_c és idempotent. □

Ara distingim dos casos: quan U_c és una t-norma, que equival a $e_c = 1$, i quan $e_c < 1$. Primer resolem el cas en què U_c és una t-norma.

Lema 4.3.40 *Suposem que T_U és contínua i sigui $U_c = \min$ i U_d una uninorma idempotent disjuntiva. Si I_U, U_c i U_d satisfan (4.24) llavors $e_d \leqslant e$ i $U(x,x) = x$ per a tots $x \leqslant e_d$.*

DEMOSTRACIÓ: Suposem que $e < e_d$ i agafem x, z tals que $e < z < x < e_d$. Llavors, com que $U_c = \min$, tenim emprant (4.6), que

$$I_U(U_c(x,e), z) = I_U(\min(x,e), z) = I_U(e,z) = z$$

mentre que

$$U_d(I_U(x,z), I_U(e,z)) = U_d(e,z) = \min(e,z) = e$$

obtenint contradicció. Llavors tenim demostrat que $e_d \leqslant e$. Per una altra banda notem que per a tots $x \leqslant e_d$, $U(x,x)$ ve donada per la seva t-norma associada T_U i llavors, un raonament similar al del lema 4.3.35 demostra que $U(x,x) = x$ per a tots aquests valors. □

Notem de nou que la condició sobre U donada al lema anterior és equivalent a dir que $U(x,y) = \min(x,y)$ per a tots x, y tals que $\min(x,y) \leqslant e_d$ i $\max(x,y) \leqslant e$. Això és, U ha de venir donada per

$$U(x,y) = \begin{cases} e + (1-e) S_U\left(\frac{x-e}{1-e}, \frac{y-e}{1-e}\right) & \text{si } x, y \in [e,1] \\ e_d + (e - e_d) T_1\left(\frac{x-e_d}{e-e_d}, \frac{y-e_d}{e-e_d}\right) & \text{si } x, y \in [e_d, e] \\ \min(x,y) & \text{altrament.} \end{cases} \tag{4.29}$$

per una t-norma contínua T_1. S'entén que en el cas especial que $e_d = e$, la segona expressió a l'equació (4.29) desapareix i llavors la uninorma U es converteix en una uninorma de $\mathcal{U}_{\min}$ amb t-norma associada $T_U = \min$.

Teorema 4.3.41 *Siguin $U \equiv \langle T, e, S \rangle_{\min}$ amb $e < 1$, T_U i S_U contínues, i I_U la seva implicació residual. Siguin U_c una t-norma i $U_d \equiv \langle T_d, e_d, S_d \rangle$ una uninorma disjuntiva. Llavors, I_U, U_c i U_d satisfan (4.24) si i només si $U_c = \min$, U_d és idempotent amb $e_d \leqslant e$ i U ve donada per l'equació (4.29).*

Demostració: Els lemes anteriors demostren la implicació de esquerra a dreta. Per demostrar el recíproc notem que

- Quan $z \leqslant e_d$, ambdós $I_T(x,z), I_T(y,z)$ són z ò 1 i conseqüentment (4.24) és satisfà trivialment perquè U_d és disjuntiva.
- Quan $z > e_d$, llavors $I_T(x,z), I_T(y,z) \geqslant z > e_d$ i conseqüentment

$$U_d(I_T(x,z), I_T(y,z)) = \max(I_T(x,z), I_T(y,z)) = I_T(\min(x,y),z)$$

  i (4.24) també se satisfà en aquest cas. □

La família d'uninormes U del teorema anterior, juntament amb les seves implicacions residuals es poden observar a la figura 36.

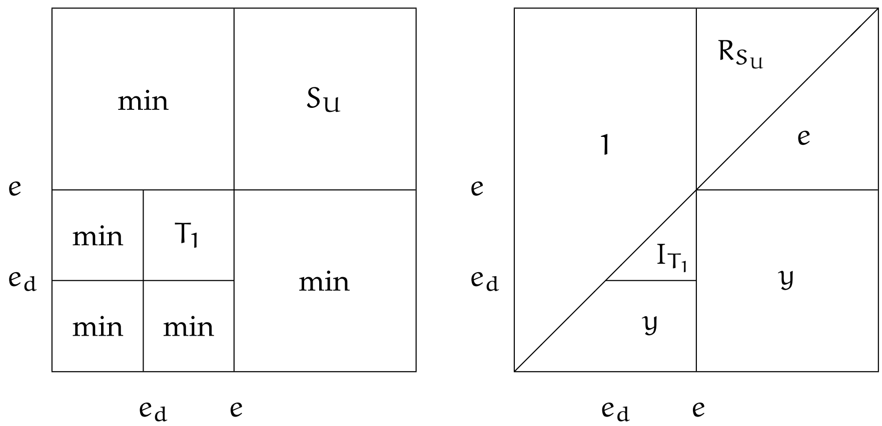

Figura 36. Una uninorma U (esquerra) de $\mathcal{U}_{min}$ i la seva implicació residual I_U (dreta) tals que I_U, min i U_d satisfan (4.24), on U_d és una uninorma idempotent amb element neutre e_d.

Ara, estudiem el cas quan U_c no és una t-norma, que vol dir, quan $0 < e_c < 1$.

Lema 4.3.42 *Suposem que S_U és contínua i siguin $U_c \equiv \langle T_c, e_c, S_c\rangle_{\min}$ una uninorma conjuntiva amb $0 < e_c < 1$ i $U_d \equiv \langle T_d, e_d, S_d\rangle$ una disjuntiva. Si I_U, U_c i U_d satisfan (4.24), llavors $e = e_c < e_d$.*

Demostració: Pels lemes 4.3.38 i 4.3.39, sabem que U_d i U_c són idempotents, i que $e \leqslant e_c$.
Suposem que $e_d \leqslant e$. Podem agafar x, y, z satisfent

$$e_d \leqslant e \leqslant e_c < y < z < x < 1.$$

Llavors $U_c(x,y) = x$ perquè U_c és idempotent, $I_U(x,z) = e$ de (4.6), i per continuïtat de S_U, deu existir un $y_0 > e$ tal que $U(y, y_0) = z$ i llavors,

$$I_U(y,z) = \sup\{x | U(y,x) \leqslant z\} \geqslant y_0 > e.$$

Llavors, com que U_d és idempotent, tenim

$$I_U(U_c(x,y),z) = I_U(x,z) = e \quad \text{mentre que} \quad U_d(I_U(x,z), I_U(y,z)) = I_U(y,z) > e$$

i això és una contradicció. Llavors $e < e_d$.

Ara, suposem que $e_d < e_c$, llavors $e < e_d < e_c$, i posant $x = e_c$, $y = e$ i $z = e_d$ a (4.24), obtenim una contradicció emprant (4.6) com que

$$I_U(U_c(e_c, e), e_d) = I_U(e, e_d) = e_d$$

i

$$U_d(I_U(e_c, e_d), I_U(e, e_d)) = U_d(e, e_d) = e,$$

i conseqüentment, $e_c \leqslant e_d$.

Ajuntant tot això, tenim

$$e \leqslant e_c \leqslant e_d,$$

i si $e < e_c$, podem agafar x, z tals que $e < z < x < e_c \leqslant e_d$ i llavors

$$z = I_U(e, z) = I_U(U_c(x, e), z) = U_d(I_U(x, z), I_U(e, z)) = U_d(e, z) = e$$

que és de nou una contradicció, i podem concloure que $e = e_c$. □

Lema 4.3.43 *Suposem que S_U és contínua i sigui $U_c \equiv \langle T_c, e_c, S_c \rangle$ una uninorma conjuntiva amb $0 < e_c < 1$ i $U_d \equiv \langle T_d, e_d, S_d \rangle$ una disjuntiva. Si I_U, U_c i U_d satisfan (4.24), llavors $T_U = \min$ i $U(x, x) = x$ per a tot $x \geqslant e_d$.*

Demostració: Per demostrar que T_U és el mínim, agafem $z < x < e = e_c < e_d$, i emprant $y = e$ a (4.24) tenim

$$I_U(x, z) = I_U(U_c(x, e), z) = U_d(I_U(x, z), I_U(e, z)) = U_d(I_U(x, z), z).$$

Ara, com $z \leqslant I_U(x, z) \leqslant e < e_d$, tenim que $U_d(I_U(x, z), z) = z$, i llavors $I_U(x, z) = z$, que vol dir que $T_U = \min$.

Per una altra banda, si hi ha algun $x \geqslant e_d$ tal que $U(x, x) > x$ llavors, per continuïtat de S_U, deu existir un interval $[a, b]$ amb $b > e_d$ en el qual S_U és arquimediana. Però llavors, agafant $\max(e_d, a) < z < b$, tenim que $I_U(x, z)$ és estrictament decreixent en la primera secció, agafant tots els valors de $I_U(a, z) = z$ fins a $I_U(z, z) = a$, aplicant el resultat dual per a t-conormes de la proposició 4.1.12 (iii). Llavors, podem elegir x tal que $e_d < I_U(x, z) < z$ i llavors, per (4.24), obtenim per aquests valors

$$I_U(x, z) = I_U(U_c(x, e), z) = U_d(I_U(x, z), I_U(e, z)) = \max(I_U(x, z), z) = z$$

que és una contradicció, demostrant que $U(x, x) = x$ per a tot $x \geqslant e_d$. □

Una altra vegada, les condicions del lema anterior asseguren que U ha de venir donada per

$$U(x, y) = \begin{cases} \min(x, y) & \text{si } \min(x, y) \leqslant e \\ e + (e_d - e) S_1\left(\frac{x-e}{e_d-e}, \frac{y-e}{e_d-e}\right) & \text{si } x, y \in [e, e_d] \\ \max(x, y) & \text{altrament.} \end{cases} \tag{4.30}$$

per a una t-conorma contínua S_1.

Lema 4.3.44 *Suposem que S_U és contínua i sigui $U_c \equiv \langle T_c, e_c, S_c \rangle$ una uninorma conjuntiva amb $0 < e_c < 1$ i $U_d \equiv \langle T_d, e_d, S_d \rangle$ una disjuntiva. Si I_U, U_c i U_d satisfan (4.24), llavors U_c ha de ser de $\mathcal{U}_{\min}$ i $U_d \equiv \langle g_d, e_d \rangle_{\text{ide}}$ és tal que $g_d(e) = 1$.*

DEMOSTRACIÓ: Sabem que U_c i U_d són idempotents, diguem $U_c \equiv \langle g_c, e_c \rangle_{ide}$ i $U_d \equiv \langle g_d, e_d \rangle_{ide}$, amb $e = e_c < e_d < 1$. Ara, agafant y, z tals que $e_d < z < y$, tenim

$$I_U(U_c(e,y),z) = I_U(y,z) = e \quad \text{mentre que} \quad U_d(I_U(e,z), I_U(y,z)) = U_d(z,e).$$

Això és, $U_d(e,z) = e$ per a tot $z > e_d$ que necessàriament implica $g_d(e) = 1$.

Finalment, suposem que per algun $x < e = e_c < y$ se satisfà $U_c(x,y) = y$. Llavors, tenim

$$I_U(U_c(x,y),e) = I_U(y,e) = e \quad \text{i} \quad U_d(I_U(x,e), I_U(y,e)) = U_d(1,e) = 1$$

obtenint contradicció. Llavors, U_c és de $\mathcal{U}_{min}$. □

Teorema 4.3.45 *Siguin $U \equiv \langle T, e, S \rangle_{min}$ amb $e < 1$ i S contínua, i I_U la seva implicació residual. Siguin $U_c \equiv \langle T_c, e_c, S_c \rangle$ una uninorma conjuntiva amb $0 < e_c < 1$ i $U_d \equiv \langle T_d, e_d, S_d \rangle$ disjuntiva. Llavors, I_U, U_c i U_d satisfan (4.24), si i només si U_c és idempotent de $\mathcal{U}_{min}$, U_d és idempotent amb funció associada g_d tal que $g_d(e) = 1$, $e = e_c < e_d$, i U ve donada per l'equació (4.30).*

DEMOSTRACIÓ: La implicació directa es desprén dels lemes anteriors. El recíproc és fàcil de veure distingint alguns casos. □

La família d'uninormes U del teorema anterior, juntament amb les seves implicacions residuals es poden observar a la figura 37.

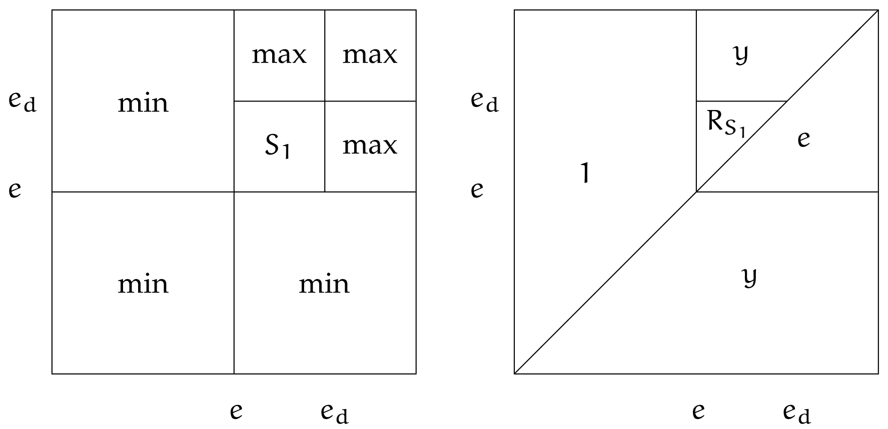

Figura 37. Una uninorma U (esquerra) de $\mathcal{U}_{min}$ i la seva implicació residual I_U (dreta) tals que I_U, U_c i U_d satisfan (4.24), on U_c és idempotent de $\mathcal{U}_{min}$ amb $e_c = e$ i $U_d \equiv \langle g_d, e_d \rangle_{ide}$ amb $e_d > e$ i $g_d(e) = 1$.

(iv) Quan U és idempotent

En aquest apartat, considerarem $U \equiv \langle g, e \rangle_{ide}$ amb $0 < e < 1$ i I_U la seva implicació residual. Recordem que, per a una uninorma $U \equiv \langle g, e \rangle_{ide}$, I_U ve donada per (veure teorema 4.3.3):

$$I_U(x,y) = \begin{cases} \max(g(x), y) & \text{si } x \leqslant y \\ \min(g(x), y) & \text{si } x > y. \end{cases}$$

Primer de tot obtenim el lema següent.

Lema 4.3.46 *Siguin U_c una uninorma conjuntiva i U_d una disjuntiva amb T_d i S_d contínues. Si I_U, U_c i U_d satisfan (4.24) llavors U_c i U_d són idempotents i són g-duals, és a dir,*

$$g(U_c(x,y)) = U_d(g(x), g(y)),$$

per a tots $x, y \in [0,1]$.

Demostració: Agafant $x = y = e$ a (4.24) obtenim

$$I_U(U_c(e,e), z) = U_d(z,z) \quad \text{per a tots} \quad z \in [0,1]. \tag{4.31}$$

Demostrarem de l'equació anterior que $U_c(e,e) = e$. Suposem al contrari que $U_c(e,e) \neq e$, tenim dues possibilitats:

- $U_c(e,e) < e \leqslant g(U_c(e,e))$. Notem que de les equacions (4.17) i (4.31) podem deduir fàcilment:
  - $U_d(z,z) = z$ per a tot $z < U_c(e,e)$,
  - $U_d(z,z) = z$ per a tot $z > g(U_c(e,e))$, i
  - $U_d(z,z) = g(U_c(e,e))$ per a tot z tals que $U_c(e,e) \leqslant z \leqslant g(U_c(e,e))$

  que és una contradicció perquè T_d i S_d són contínues.
- $g(U_c(e,e)) \leqslant e < U_c(e,e)$. Aquest cas es pot demostrar similarment.

Llavors, $U_c(e,e) = e$ i llavors es dedueix de l'equació (4.31) que U_d ha de ser idempotent.

Per una altra banda, agafant $x = y$ a (4.24) i com que U_d és idempotent, tenim

$$I_U(U_c(x,x), z) = I_U(x,z) \quad \text{per a tots} \quad x, z \in [0,1]. \tag{4.32}$$

Suposem que hi ha $x < e_c$ tal que $U_c(x,x) < x$. Per a tot z tal que $U_c(x,x) < z < x < e_c$ obtenim de (4.17) que $I_U(x,z) = \min(g(x), z)$ mentre que $I_U(U_c(x,x), z) = \max(g(U_c(x,x)), z)$. Com que $g(x) \leqslant g(U_c(x,x))$, això dóna una contradicció amb l'equació (4.32). Una contradicció similar s'obté si suposem que hi ha $x > e_c$ tal que $U_c(x,x) > x$ i conseqüentment, U_c ha de ser també idempotent.

Finalment, agafant $z = e$ a (4.24) tenim $I_U(U_c(x,y), e) = U_d(I_U(x,e), I_U(y,e))$, d'on podem deduir $g(U_c(x,y)) = U_d(g(x), g(y))$ per a tots $x, y \in [0,1]$, utilitzant la proposició 4.3.8 (v). □

En els següents dos lemes distingim els casos quan $e_c \leqslant e_d$ i quan $e_d \leqslant e_c$ separadament.

Lema 4.3.47 *Sigui $U_c \equiv \langle g_c, e_c \rangle_{\text{ide}}$ i $U_d \equiv \langle g_d, e_d \rangle_{\text{ide}}$ amb U_c conjuntiva i U_d disjuntiva. Suposem que $e_c \leqslant e_d$. Si I_U, U_c i U_d satisfan (4.24) llavors se satisfà:*

(i) $e_c \leqslant g(e_d) \leqslant e \leqslant g(e_c) \leqslant e_d$, *i o bé* $g(e_c) = e_d$ *o bé* $g(e_d) = e_c$.

(ii) *Per a tot* $x < e_c$ *se satisfà* $g(x) > e_d$ *i* $U_d(x, g(x)) = g(x)$.

(iii) *Per a tot* $e_d < x < y$ *se satisfà* $U_d(x, g(y)) = g(y)$.

Demostració: Dividim la demostració en alguns passos.

- Agafem $x = e_c$, $y = e$ i $z = e_d$ a (4.24), se segueix que $I_U(e_c, e_d) = e_d$. Com que $e_c \leqslant e_d$ deduïm de l'equació (4.17) que $g(e_c) \leqslant e_d$. Suposem ara que $e < e_c$. Llavors podem agafar x, y, z tals que $g(e_c) \leqslant e < x < z < y < e_c \leqslant e_d$ i per a aquests valors:

  $$z = I_U(x,z) = I_U(U_c(x,y), z) = U_d(I_U(x,z), I_U(y,z)) = U_d(z, g(y)) = g(y)$$

  que és una contradicció, i conseqüentment queda demostrat que $e_c \leqslant e \leqslant g(e_c) \leqslant e_d$.

- Suposem ara que hi ha $x < e_c$ tals que $g(x) \leqslant e_d$. Podem elegir y, z tals que

$$x < z < y < e_c \leqslant e \leqslant g(e_c) \leqslant g(y) \leqslant g(x) \leqslant e_d$$

d'on obtenim

$$g(x) = I_U(x,z) = I_U(U_c(x,y),z) = U_d(I_U(x,z), I_U(y,z)) = U_d(g(x),z)$$

que és de nou una contradicció. Llavors, $g(x) > e_d$ per a tots $x < e_c$, que és,

$$U(x, e_d) = \min(x, e_d) = x \quad \text{per a tots} \quad x < e_c$$

i, per commutativitat això implica $g(e_d) \geqslant x$ per a tots $x < e_c$, o equivalentment $g(e_d) \geqslant e_c$.

- Per acabar la demostració de (i), si suposem $g(e_c) < e_d$ llavors

$$U(e_c, e_d) = \max(e_c, e_d) = e_d$$

i, per commutativitat, tenim també $e_c \geqslant g(e_d)$ que juntament amb el pas previ demostra que $g(e_d) = e_c$. Llavors tenim o bé $g(e_c) = e_d$ o bé $g(e_d) = e_c$.

- Ara, per a tot $x < e_c$, tenim per una banda que

$$I_U(U_c(x, e_c), x) = I_U(x,x) = \max(g(x), x) = g(x)$$

i per una altra banda, emprant que $e_c \leqslant e \leqslant g(e_c)$,

$$U_d(I_U(x,x), I_U(e_c,x)) = U_d(g(x), \min(g(e_c), x)) = U_d(g(x), x).$$

Llavors, per l'equació (4.24) obtenim $U_d(g(x), x) = g(x)$ per a tots $x < e_c$ i (ii) és demostrat.

- Per demostrar (iii), notem que agafant $e_d < x < y$ tenim

$$I_U(U_c(e,y),x) = I_U(y,x) = \min(g(y),x) = g(y)$$

i

$$U_d(I_U(e,x), I_U(y,x)) = U_d(x, g(y))$$

obtenint $U_d(x, g(y)) = g(y)$. □

Lema 4.3.48 *Siguin* $U_c \equiv \langle g_c, e_c \rangle_{\text{ide}}$ *i* $U_d \equiv \langle g_d, e_d \rangle_{\text{ide}}$ *amb* U_c *conjuntiva i* U_d *disjuntiva. Suposem que* $e_d \leqslant e_c$. *Si* I_U, U_c *i* U_d *satisfan* (4.24) *llavors*

(i) $e_d \leqslant g(e_c) \leqslant e \leqslant g(e_d) \leqslant e_c$, *i o bé* $g(e_c) = e_d$ *o* $g(e_d) = e_c$.

(ii) Per a tot $y < x < e_d$ *se satisfà* $U_d(x, g(y)) = g(y)$.

(iii) Per a tot $e_c < x$ *se satisfà* $g(x) < e_d$ *i* $U_d(x, g(x)) = g(x)$.

Demostració: Similar al lema anterior. □

Fins ara només hem donat condicions necessàries per tal que I_U, U_c i U_d satisfacin l'equació (4.24), quan U és idempotent. Ara discutirem les condicions suficients. Primer de tot, notem que ja sabem algunes solucions quan U és idempotent, que poden ser derivades a partir dels casos anteriors. Efectivament,

- Quan g és una negació forta N, sabem que la implicació residual I_U coincideix amb la implicació forta derivada a partir de la uninorma idempotent contínua per la dreta $U_r \equiv \langle N, e \rangle_{ide}$ (veure proposició 4.3.15) i, del teorema 4.2.8, obtenim que I_U, U_c i U_d satisfan l'equació (4.24) quan $U_d = U_r$ i U_c és la N-dual de U_r (que necessàriament és la uninorma idempotent contínua per l'esquerra $U_l \equiv \langle N, e \rangle_{ide}$).

- Quan U és idempotent de $\mathcal{U}_{min}$ i $U_c = \min$ tenim del teorema 4.3.41 que $I_U, \min$ i U_d satisfan l'equació (4.24) quan U_d és idempotent amb $e_d \leqslant e$.

- Quan U és idempotent de $\mathcal{U}_{min}$ i U_c és idempotent de $\mathcal{U}_{min}$ amb $e_c < 1$, tenim, del teorema 4.3.45, que I_U, U_c i U_d satisfan l'equació (4.24) quan $U_d = (e_d, g_d)$ és idempotent amb $e = e_c < e_d$ i $g_d(e) = 1$.

A més a més, en el cas en que U és idempotent, hi ha moltes més solucions de l'equació (4.24) que les que hem posat anteriorment, com demostra la proposició següent (notem que les solucions presentades en aquesta proposició satisfan les condicions necessàries donades en els lemes 4.3.46 i 4.3.47).

Proposició 4.3.49 *Siguin* $U \equiv \langle g, e \rangle_{ide}$, $U_c \equiv \langle g_c, e_c \rangle_{ide}$ *i* $U_d \equiv \langle g_d, e_d \rangle_{ide}$ *amb* $e_c \leqslant e \leqslant e_d$ *tals que*

- $g(x) = 1$ *per a tot* $x < e_c$ *i* $g(x) = e_c$ *per a tot* $x \geqslant e_d$,

- U_c *és de* $\mathcal{U}_{min}$,

- g_d *ve donada per*

$$g_d(x) = \begin{cases} 1 & si\ x < e_d \\ e_d & si\ e_d \leqslant x < 1 \\ 0 & si\ x = 1. \end{cases}$$

Llavors I_U, U_c *i* U_d *satisfan* (4.24).

DEMOSTRACIÓ: És una simple comprovació, considerant tots els casos possibles. □

Nota 4.3.50 *De la proposició anterior,* U_c *i* U_d *queden determinades completament perquè satisfacin l'equació* (4.24)*, però en el cas de* U*, no és així. Notem que, a l'interval* $[e_c, e_d[$*,* g *pot ser qualsevol funció decreixent sense cap condició addicional apart de les donades al teorema* 2.2.14*. Un exemple senzill es pot donar considerant, per exemple,* $g(x) = e_d + e_c - x$ *per a tot* $x \in [e_c, e_d]$*. Aquest exemple es pot veure a la figura* 38*.*

Notem que una caracterització completa de l'equació (4.24) quan U és idempotent queda encara oberta, encara que moltes solucions, així com algunes condicions necessàries han estat donades en aquesta secció.

(v) Quan U *és de* $\mathcal{U}_{cos,min}$

Ara estudiarem el cas en que la uninorma U de l'equació (4.24) sigui de $\mathcal{U}_{cos,min}$.

Lema 4.3.51 *Siguin* $U_c \in \mathcal{U}(e_c)$*,* U_d *una uninorma disjuntiva,* $U \equiv \langle T', \alpha, T'', \beta, (R, e) \rangle_{cos,min}$ *i* I_U *la seva implicació residual. Si satisfan* (4.24)*, llavors* U_c *és una t-norma.*

DEMOSTRACIÓ: Dividim la demostració en dues passes:

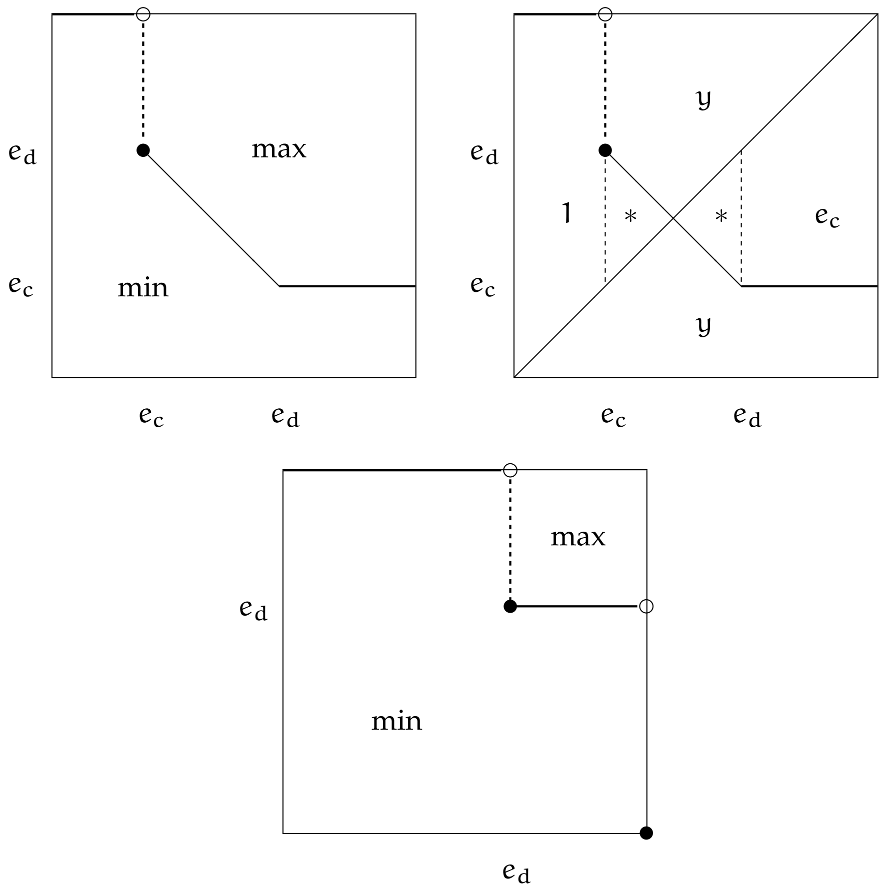

Figura 38. Una uninorma idempotent U (dalt-esquerra), la seva implicació residual I_U (dalt-dreta) i la uninorma idempotent U_d (baix) de l'exemple donades a la nota 4.3.50, tals que I_U, U_c i U_d satisfan (4.24), on U_c és idempotent de $\mathcal{U}_{\min}$. Aquí $*$ equival a $e_d + e_c - x$.

- Primer de tot, suposem que $e_c \leqslant \beta$, llavors tindríem, agafant $x = e_c$ i $y = z = e$ a (4.24),
$$U_d(I_U(e_c, e), I_U(e, e)) = I_U(U_c(e_c, e), e),$$
que vol dir
$$U_d(1, e) = I_U(e, e),$$
perquè $e_c \leqslant \beta < e$. Aquesta darrera igualtat implica $e = 1$, que és una contradicció. Llavors $\beta < e_c$.

- Ara, suposem que $e_c < 1$. Llavors podem agafar y_0 tal que $e_c < y_0 < 1$ amb $I_U(e_c, z) > I_U(y_0, z)$ per a tot $z > \beta$, perquè $\beta < e_c < y_0$, pel raonament anterior.
Com que I_U és contínua a $[\beta, 1]^2$, existeix z_0 tal que $I_U(e_c, z_0) > I_U(y_0, z_0) \geqslant e_d$, i aleshores tenim, posant $x = e_c$, $y = y_0$, i $z = z_0$ a (4.24):
$$U_d(I_U(e_c, z_0), I_U(y_0, z_0)) = I_U(U_c(e_c, y_0), z_0) = I_U(y_0, z_0)$$
però també tenim:
$$U_d(I_U(e_c, z_0), I_U(y_0, z_0)) \geqslant \max(I_U(e_c, z_0), I_U(y_0, z_0)) > I_U(y_0, z_0),$$
que és una contradicció. Llavors podem dir que $e_c = 1$, que és, U_c és una t-norma.□

A partir d'ara considerarem que U_c és una t-norma contínua.

Lema 4.3.52 *Siguin U_c una t-norma, U_d una uninorma disjuntiva amb element neutre e_d. Considerem a més $U \equiv \langle T', \alpha, T'', \beta, (R, e)\rangle_{\text{cos,min}}$ i I_U la seva implicació residual. Si satisfan (4.24), llavors $e_d \leqslant \alpha$ i $U_d(z, z) = z$ per a tots $z \leqslant \alpha$.*

Demostració: Agafant $x = 1$, $y = e$ a (4.24) tenim:

$$z = I_U(e, z) = I_U(T(1, e), z) = U_d(I_U(1, z), I_U(e, z)) = \begin{cases} U_d(\alpha, z) & \text{si } z \geqslant \alpha \\ U_d(z, z) & \text{si } z \leqslant \alpha \end{cases}$$

Ara, si $\alpha < e_d$ tindríem $U_d(\alpha, e_d) = e_d = \alpha$, que és una contradicció. Llavors, $U_d(z, z) = z$ per a tots $z \leqslant \alpha$, i $e_d \leqslant \alpha$. □

Lema 4.3.53 *Siguin U_c una t-norma, $U_d \in \mathcal{U}(e_d)$ disjuntiva, $U \equiv \langle T', \alpha, T'', \beta, (R, e)\rangle_{\text{cos,min}}$ i I_U la seva implicació residual. Si satisfan l'equació (4.24), llavors $U(x, x) = x$ per a tots $x \leqslant e_d$.*

Demostració: Suposem que hi ha $x \leqslant e_d$ tal que $U(x, x) < x$, que és, $T(\frac{x}{e}, \frac{x}{e}) < \frac{x}{e}$ i per continuïtat existirà un interval $[a, b]$ tal que $a < x < b$ i la restricció de T a l'interval interval $[\frac{a}{e}, \frac{b}{e}]$ és arquimediana. Ara, fixat z_0 tal que $a < z_0 < x$ i tenint en compte la nota 4.1.13, $I_U(-, z_0)$ pren tots els valors des de z_0 fins a b. Llavors, sigui x_0 tal que $a < z_0 < I_U(x_0, z_0) < \min(e_d, b)$, tenim per una banda

$$I_U(U_c(x_0, 1), z_0) = I_U(x_0, z_0)$$

mentre que, per una altra banda,

$$U_d(I_U(x_0, z_0), I_U(1, z_0)) = U_d(I_U(x_0, z_0), z_0) = \min(I_U(x_0, z_0), z_0) = z_0$$

obtenint contradicció. □

Lema 4.3.54 *Siguin U_c una t-norma, $U_d \equiv \langle T_d, e_d, S_d\rangle$ disjuntiva. A més a més, siguin $U \equiv \langle T', \alpha, T'', \beta, (R, e)\rangle_{\text{cos,min}}$ i I_U la seva implicació residual. Si satisfan (4.24), llavors $U_c(e, e) > \beta$ i $U_d(x, x) = U_c(x, x) = x$ per a tots $x \leqslant \beta$. És a dir, U_c ha de ser una suma ordinal $U_c = \langle(\beta, 1, T_0)\rangle$ per alguna t-norma contínua T_0, $T_d = \min$ i S_d ha de ser també una suma ordinal $S_d = \langle(\frac{\beta - e_d}{1 - e_d}, 1, S_0)\rangle$.*

Demostració: Donarem la demostració en alguns passos.

- Primer demostrem que $U_c(e, e) > \beta$. Suposem pel contrari que $U_c(e, e) \leqslant \beta$, llavors

  $$1 = I_U(U_c(e, e), \beta) = U_d(I_U(e, \beta), I_U(e, \beta)) = U_d(\beta, \beta).$$

  Llavors, com que $e > \beta$ tenim $U_d(e, e) = 1$. Com que U_c és contínua, podem agafar x tal que $1 > x > \beta$ amb $1 > U_c(x, x) > \beta$, però llavors:

  $$I_U(U_c(x, x), x) = U_d(I_U(x, x), I_U(x, x)) = U_d(e, e) = 1$$

  obtenint una contradicció perquè I_U és estrictament creixen a $[\beta, 1]^2$ (en aquesta regió, U ve donada per la uninorma representable R i llavors podem aplicar la proposició 4.1.22).

- Tot seguit demostrarem que $U_d(x,x) = x$ per a tot $x \leqslant \beta$. Agafant $x = y = e$ a (4.24) obtenim
$$I_U(U_c(e,e),z) = U_d(I_U(e,z), I_U(e,z)) = U_d(z,z).$$
Ara, per a tots $z \leqslant \beta$, $I_U(U_c(e,e),z) = z$ pel pas anterior i conseqüentment $U_d(z,z) = z$ per a tot $z \leqslant \beta$. Això implica directament que $T_d = \min$ i que S_d és una suma ordinal de la forma $S_d = \langle(\frac{\beta - e_d}{1-e_d}, 1, S_0)\rangle$.

- Finalment, demostrem que $U_c(x,x) = x$ per a tots $x \leqslant \beta$. Suposem pel contrari que hi ha algun $x \leqslant \beta$ tal que $U_c(x,x) < x$ i agafem z tal que $U_c(x,x) < z < x < \beta$. Per a aquests valors tenim $I_U(x,z) \leqslant \beta$ i llavors, emprant el pas anterior,
$$1 = I_U(U_c(x,x),z) = U_d(I_U(x,z), I_U(x,z)) = I_U(x,z)$$
obtenint de nou una contradicció. Llavors, $U_c(x,x) = x$ per a tot $x \leqslant \beta$ i conseqüentment U_c és una suma ordinal de la forma $U_c = \langle(\beta, 1, T_0)\rangle$. □

Teorema 4.3.55 *Siguin $U_c \equiv \langle T_c, e_c, S_c\rangle$ i $U_d \equiv \langle T_d, e_d, S_d\rangle$ conjuntiva i disjuntiva respectivament. Siguin $U \equiv \langle T', \alpha, T'', \beta, (R, e)\rangle_{\cos,\min}$ i I_U la seva implicació residual. Llavors, U_c, U_d i I_U satisfan (4.24) si i només existeix una t-norma contínua T_0 i una t-conorma contínua S_0 tals que:*

(i) U_c *és la t-norma donada per la suma ordinal* $U_c = \langle(\beta, 1, T_0)\rangle$,

(ii) $e_d \leqslant \alpha$, $T_d = \min$ *i* $S_d = \langle(\frac{\beta - e_d}{1-e_d}, 1, S_0)\rangle$,

(iii) $U(x,x) = x$ *per a tot* $x \leqslant e_d$ *i*

(iv) T_0, S_0 *i* I_R *satisfan l'equació (4.24), és a dir,* T_0 *i* $S_=$ *són* N_R*-duals i:*
  - $T_0 = \min$ *i* $S_0 = \max\,\eth$,
  - S_0 *és estricta i si* s *és el seu generador additiu amb* $s(\frac{e-\beta}{1-\beta}) = 1$ *llavors* s *és també un generador multiplicatiu de* R.

Demostració: Suposem primer que U_c, U_d i I_U satisfan (4.24). Llavors, $(i) - (iii)$ segueixen directament dels lemes anteriors. Per una altra banda, com que U_c, U_d i I_U satisfan l'equació (4.24) en particular per a tots $x, y, z \geqslant \beta$, derivem que T_0, S_0 i R han de satisfer també l'equació (4.24) i els punts següents segueixen dels resultats d'aquesta equació per uninormes representables donats al teorema 4.3.33.

Recíprocament, degut a la seva simetria, només necessitem demostrar l'equació (4.24) per valors $x \leqslant y$ i podem fer-ho distingint alguns casos:

- Si $x \leqslant \beta$, llavors $U_c(x,y) = \min(x,y) = x$. Per una altra banda,
  - Quan $z \geqslant x$ llavors $I_U(x,z) = 1$ i l'equació (4.24) segueix trivialment perquè U_d és disjuntiva.
  - Quan $z < x, e_d$ tenim $I_U(x,z) = I_U(y,z) = z$ i (4.24) segueix perquè $U_d(z,z) = z$.
  - Quan $e_d \leqslant z < x$ tenim $I_U(x,z), I_U(y,z) \in]e_d, \beta]$. Però U_d ve donada pel màxim per aquests valors i de nou (4.24) se satisfà.

- Si $\beta \leqslant x$, l'equació (4.24) se satisfà perquè T_0 S_0 i I_R també la satisfan. □

L'estructura de les solucions del teorema anterior es pot observar a la figura 39.

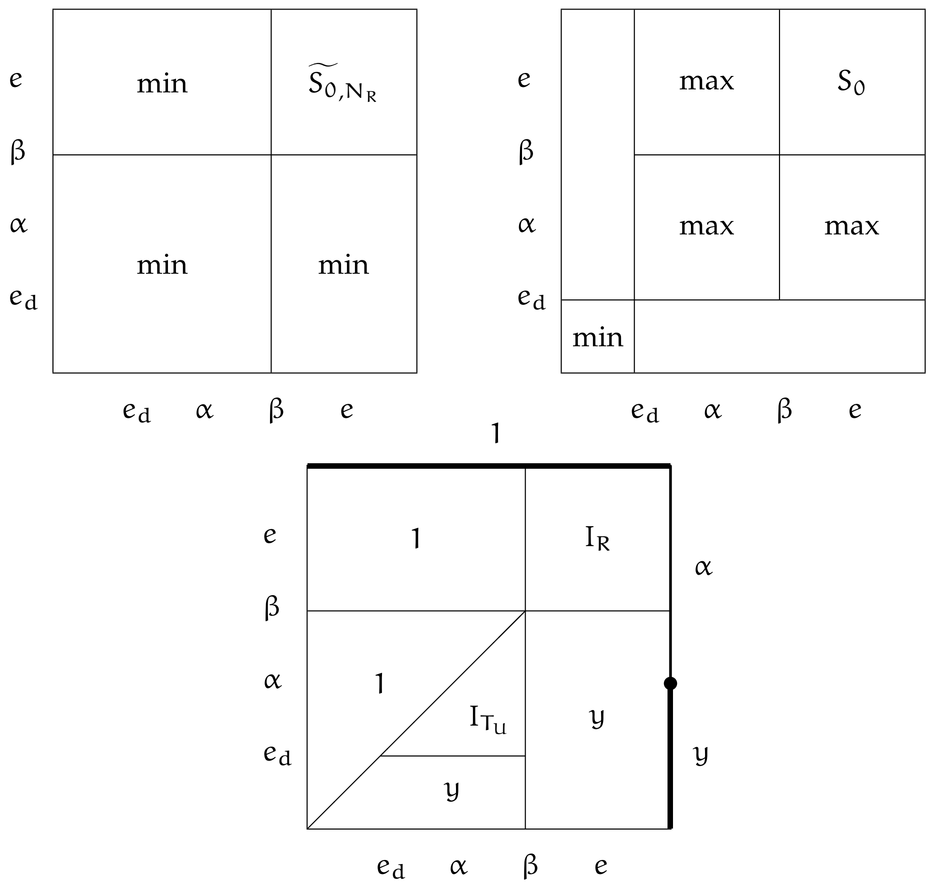

Figura 39. Estructura de U_c (dalt-esquerra), U_d (dalt-dreta) i I_U (baix), amb $U \in \mathcal{U}_{\text{cos,min}}$, que satisfan l'equació (4.24).

(vi) Quan U *és de* $\mathcal{U}_{\text{cos,max}}$

Recordem que en aquest cas, hem de tenir una uninorma U amb $\delta = 1$, és a dir, els paràmetres de la uninorma seran $U \equiv \langle (R, e), \gamma, S, 1\rangle_{\text{cos,max}}$. Obtenim noves solucions amb raonaments similars a la secció anterior.

Lema 4.3.56 *Siguin* $U_c \in \mathcal{U}(e_c)$ *i* $U_d \in \mathcal{U}(e_d)$ *uninormes conjuntiva i disjuntiva respectivament. Siguin* $U \equiv \langle (R, e), \gamma, S, 1\rangle_{\text{cos,max}}$ *i* I_U *la seva implicació residual. Si satisfan (4.24), llavors* $e_d = 0$*, que vol dir que* U_d *ha de ser una t-conorma, i* $U_d(x, x) = x$ *per a tot* $x \geqslant \gamma$*.*

Demostració: Demostrem primer que $e_d = 0$. Suposem pel contrari que $e_d > 0$, llavors:

- Si $e_c \geqslant \gamma$ tenim $I_U(U_c(e_c, e), z) = I_U(e, z) = z$ mentre que per a tots $z < e_c$,

$$U_d(I_U(e_c, z), I_U(e, z)) = U_d(0, z).$$

  Per tant, obtenim $U_d(0, z) = z$ per a tot $z < e_c$, que és una contradicció.

- Si $e_c < \gamma$ podem agafar un y_0 tal que $0 < y_0 < e_c < \gamma$. Però llavors existirà $z_0 < \gamma$ tal que $I_U(e_c, z_0) < I_U(y_0, z_0) < e_d$ i llavors

$$I_U(U_c(e_c, y_0), z_0) = I_U(y_0, z_0)$$

mentre que

$$U_d(I_U(e_c, z_0), I_U(y_0, z_0)) \leqslant \min(I_U(e_c, z_0), I_U(y_0, z_0)) = I_U(e_c, z_0) < I_U(y_0, z_0),$$

obtenint de nou contradicció.

Llavors, $e_d = 0$ i finalment, per a tots $z \geqslant \gamma$ tenim

$$z = I_U(0, z) = I_U(U_c(0, 0), z) = U_d(I_U(0, z), I_U(0, z)) = U_d(z, z). \qquad \square$$

Lema 4.3.57 *Siguin $U_c \in \mathcal{U}(e_c)$ conjuntiva, U_d una t-conorma, $U \equiv \langle (R, e), \gamma, S, 1\rangle_{\text{cos,max}}$ conjuntiva i I_U la seva implicació residual. Si satisfan (4.24), llavors $e_c > \gamma$ i U_c és de $\mathcal{U}_{\min}$ amb $U_c(x, x) = x$ per a tot $x \geqslant \gamma$.*

DEMOSTRACIÓ: Donem la demostració en alguns passos

- Primer demostrem que $e_c > \gamma$. Suposem que $e_c \leqslant \gamma$ i agafem z tal que $\gamma < z < 1$. Llavors per una banda $I_U(U_c(e_c, 1), z) = I_U(1, z) = 0$, i per una altra $U_d(I_U(e_c, z), I_U(1, z)) = U_d(z, 0) = z$, que dóna una contradicció.
- Ara demostrem que $U_c(1, x) = x$ per a tots $x > \gamma$. Suposem que existeix $x > \gamma$ tal que $U_c(1, x) > x > \gamma$, podem agafar z tal que $x < z < U_c(1, x)$ i per a aquest z tenim

  $$0 = I_U(U_c(1, x), z) = U_d(I_U(1, z), I_U(x, z)) = U_d(0, I_U(x, z)) = I_U(x, z) > 0$$

  obtenint contradicció.
- Pel pas anterior tenim pel creixement que U_c és de $\mathcal{U}_{\min}$.
- Finalment demostrem que $U_c(x, x) = x$ per a tot $x \geqslant \gamma$. Ho demostrem distingint dos casos:
  - Suposem existeix $x \geqslant \gamma$ tals que $U_c(x, x) < x$ i agafem z_0 tals que $U_c(x, x) < z_0 < x$. Llavors

    $$I_U(U_c(x, x), z_0) = U_d(I_U(x, z_0), I_U(x, z_0)) = U_d(0, 0) = 0$$

    que és una contradicció amb que $U_c(x, x) < z_0$.
  - Suposem ara que existeix $x \geqslant \gamma$ tal que $U_c(x, x) > x$. Similarment, agafant z_0 tal que $x < z_0 < U_c(x, x)$ tenim

    $$0 = I_U(U_c(x, x), z_0) = U_d(I_U(x, z_0), I_U(x, z_0)) = I_U(x, z_0)$$

    que de nou és una contradicció perquè $x < z_0$ i conseqüentment $I_U(x, z_0) \geqslant \gamma$. $\square$

Lema 4.3.58 *Siguin $U_c \in \mathcal{U}(e_c)$ conjuntiva, U_d una t-conorma, $U \equiv \langle (R, e), \gamma, S, 1\rangle_{\text{cos,max}}$ i I_U la seva implicació residual. Si satisfan (4.24), llavors $U(x, x) = x$ per a tots $x \geqslant e_c$.*

DEMOSTRACIÓ: Suposem $U(x, x) > x$ per algun $x \geqslant e_c$. Existeix un interval $[a, b]$ contenint x i $U(x, x)$ en el què I_U és estrictament monòtona. Però llavors, agafant z tals que $e_c < x < z < U(x, x)$, tenim

$$I_U(U_c(x, U(x, x)), z) = I_U(U(x, x), z) = 0$$

i també

$$U_d(I_U(x, z), I_U(U(x, x), z)) = U_d(I_U(x, z), 0) = I_U(x, z)$$

obtenint una contradicció. $\square$

Teorema 4.3.59 *Sigui* $U_c \equiv \langle T_c, e_c, S_c\rangle$ *i* U_d *conjuntiva i disjuntiva respectivament. Sigui* $U \equiv \langle (R,e), \gamma, S, 1\rangle_{\text{cos,max}}$ *i* I_U *la seva implicació residual. Llavors,* U_c, U_d *i* I_U *satisfan* (4.24) *si i només existeix una t-norma contínua* T_0 *i una t-conorma contínua* S_0 *tals que:*

(i) U_d *és la t-conorma donada per la suma ordinal* $U_d = \langle (0, \gamma, S_0)\rangle$,

(ii) U_c *és de* $\mathcal{U}_{\min}$ *amb* $e_c > \gamma$, $S_c = \max$ *i* $T_c = \langle (0, \frac{\gamma}{e_c}, T_0)\rangle$,

(iii) $U(x,x) = x$ *per a tot* $x \geqslant e_c$ *i*

(iv) T_0, S_0 *i* I_R *satisfan l'equació* (4.24), *és a dir,* T_0 *i* S_0 *són* N_R*-duals i:*

- $T_0 = \min$ *i* $S_0 = \max$ *ò,*
- S_0 *és estricta i si* s *és el seu generador additiu amb* $s(\frac{e_c}{\gamma}) = 1$ *llavors* s *és també un generador multiplicatiu de* R.

Demostració: És similar a la demostració del teorema 4.3.55 □

L'estructura de les solucions del teorema anterior es pot observar a la figura 40.

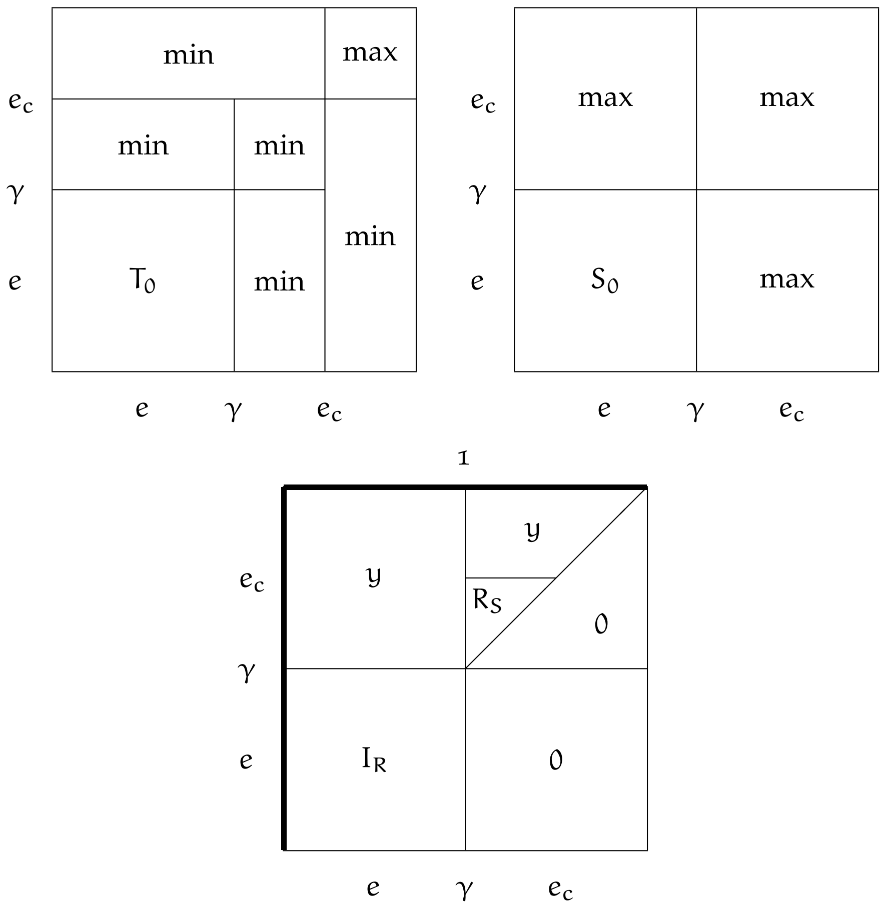

Figura 40. Estructura de U_c (dalt-esquerra), U_d (dalt-dreta) i I_U (baix), amb $U \in \mathcal{U}_{\text{cos,max}}$, que satisfan l'equació (4.24).

Tots els resultats de l'equació de distributivitat d'implicacions sobre uninormes (4.24) es resumeixen en el quadre 8.

U	Solució de (4.24)
$U \equiv \langle h, e \rangle_{\text{rep}}$	teorema 4.3.33
$U = T$	teorema 4.3.36
$U \equiv \langle T, e, S \rangle_{\min}$ $U_c = T$	teorema 4.3.41
$U \equiv \langle T, e, S \rangle_{\min}$ $e_c < 1$	teorema 4.3.45
$U \equiv \langle g, e \rangle_{\text{ide}}$	No resolt totalment solucions parcials, proposició 4.3.49
$U \equiv \langle T', \alpha, T'', \beta, (R, e) \rangle_{\cos,\min}$	teorema 4.3.55
$U \equiv \langle (R, e), \gamma, S, 1 \rangle_{\cos,\max}$	teorema 4.3.59

Taula 8. Resultats de les solucions de la distributivitat d'implicacions residuals sobre uninormes.

4.4 CONCLUSIONS

Les funcions d'implicació són una eina fonamental en la lògica borrosa i el raonament aproximat, bàsicament per dues raons principals. Per una banda, aquestes funcions s'utilitzen per representar els condicionals. Concretament, cada regla de la forma "Si ... aleshores ..." en sistemes borrosos és interpretada a través d'una funció d'implicació. Així, depenent del context i de la pròpia regla, diferents implicacions poden ser adequades en cada cas. Per una altra banda, les implicacions s'utilitzen també per realitzar inferències en el raonament aproximat, normalment a través de les regles d'inferència del *modus ponens* i del *modus tollens*. és evident doncs que l'elecció de la implicació no es pot fer independentment de la regla d'inferència que s'ha d'utilitzar.

Tot això fa que siguin necessaris diferents models o tipus d'implicacions (un estudi recent sobre el tema és [73]). No només els ja esmentats R, S, QL i D-implicacions (veure [63, 73, 5, 71],...) sinó també d'altres com les de Mamdani-Larsen ([73]), les de Yager ([105]), etc. Una argumentació contundent sobre la necessitat de tots aquests models, i fins i tot de nous models d'implicacions, es pot trobar a [99] on es veu com diverses lleis, vàlides en àlgebres de Boole i en alguns reticles ortomodulars, quan les estudiem en lògica borrosa no tenen solucions per cap d'aquests tipus d'implicacions.

Una altra via per introduir noves funcions d'implicació ve donada per les implicacions definides a partir de funcions d'agregació en general i uninormes en particular, principalment del tipus residual (R) i fortes (S).[1] Seguint aquesta via, en aquest capítol, hem introduït les R i S-implicacions derivades d'uninormes idempotents i d'uninormes contínues en $]0,1[^2$ i hem estudiat les seves propietats.

Entre aquestes propietats cal destacar l'equació de distributivitat (1.3) que ha estat proposada a [28] com una eina eficaç per evitar l'explosió combinatòria en diversos sistemes basats en regles borroses. Amb les implicacions usuals s'ha vist a [95] que les úniques solucions requereixen $T = T_{\mathbf{M}}$ i $S = S_{\mathbf{M}}$. En canvi, s'ha vist també en aquest capítol que amb R i S-implicacions derivades d'uninormes es poden trobar moltes més solucions utilitzant, com a conjuncions i disjuncions, tot tipus de t-normes i t-conormes i també uninormes.

Cal recordar a més a més, que les implicacions són molt útils, no només en els camps de la lògica borrosa i el raonament aproximat, sinó també en molts altres com ara, les equacions relacionals borroses, el control borrós, la computació amb paraules, la morfologia matemàtica borrosa i el tractament d'imatges, etc. és precisament en aquest darrer camp en el que veurem, en el pròxim capítol, com les uninormes i les seves implicacions derivades (residuals i fortes) són una eina potent per aplicar especialment en la detecció de contorns. Les propietats d'aquestes implicacions estudiades en aquest capítol seran fonamentals en els resultats del següent.

1 Tot i que també es pot trobar un primer treball dedicat a QL i D-implicacions derivades d'uninormes a [72].

5 MORFOLOGIA MATEMÀTICA

5.1 INTRODUCCIÓ

La identificació d'objectes, l'extracció de trets en objectes i detecció d'anomalies en processos industrials automàtics estan molt connectats amb el reconeixement de formes i llavors amb els sistemes de reconeixement o de visió. En aquest context la morfologia matemàtica és una eina útil per a l'extracció de les components d'una imatge que són útils en la representació i descripció de les regions de les formes, com ara límits, esquelets, o tancats convexos.

Les eines bàsiques de la morfologia són les operacions morfològiques. Una operació morfològica P transforma l'estructura que volem analitzar, A (una imatge) a través d'un objecte petit B, anomenat "element estructurant", amb el que volem trobar l'estructura de A, en un nou objecte $P(A, B)$ (una nova imatge). La mida i la forma de B es pot elegir pel morfologista per analitzar l'estructura de A. Les operacions morfològiques bàsiques són la dilatació i l'erosió. Aquestes operacions es basen en la teoria de conjunts i varen ser desenvolupades originalment per imatges binàries (blanc i negre) i després esteses amb èxit a imatges en escala de grisos ([92]).

De tota manera, les formes en una imatge mai són definides d'una manera nítida, i la incertesa pot aparèixer en cada nivell de l'anàlisi de la imatge i el reconeixement de patrons. Pot passar en un nivell molt baix en la sortida del sensor, i es pot estendre en tot el procés en els nivells mitjans i superiors. Un sistema de reconeixement o de visió per computador ha de tenir la suficient flexibilitat per poder processar la incertesa en cada un d'aquests nivells, d'aquesta manera el sistema pot retenir tanta informació de les dades com li sigui possible, a cada nivell. Com que el primer pas essencial del sistema de reconeixement o del sistema de visió és la extracció de trets, el mètode emprat hauria de tenir una previsió per representar i manipular les incerteses. La teoria dels conjunts borrosos dóna un mecanisme per representar i manipular la incertesa i l'ambigüitat. Les operacions borroses i les seves propietats, així com les regles d'inferència borroses han trobat considerables aplicacions en anàlisi d'imatges i reconeixement de patrons (per exemple, es pot veure a [59], [27] i [76]).

Per poder fer això, la morfologia matemàtica borrosa és una extensió alternativa de la morfologia binària i la morfologia en escala de grisos ([92]) emprant conceptes i tècniques de la teoria de conjunts borrosos. Alguns investigadors han introduït operacions morfològiques alternatives (veure per exemple [17], [32], [40] i [41]). Bloch i Maître ([17]) segueixen un enfocament emprant t-normes i les implicacions fortes associades, amb una negació involutiva. La inclusió de conjunts borrosos va ser emprada per Zadeh, Sinha i Dougherty, Kitainik i Bandler i Kohout per poder definir les operacions morfològiques borroses . "L'addició de Minkowsky" va ser emprada inicialment per De Baets i altres a [40], [41]. Es poden trobar més detalls a [59], [27] i les referències mencionades allà.

En aquest capítol ens fixem en el marc general de la morfologia matemàtica borrosa construïda per De Baets a [32] on s'utilitzen "conjuncions" i "implicacions" per poder definir la "erosió borrosa" i la "dilatació borrosa", sense forçar relacions de dualitat entre aquestes operacions, i obtenint bones propietats pels corresponents operadors de clausura borrosa i obertura borrosa.

El nostre principal objectiu és estudiar aquest marc general quan emprem uninormes conjuntives. Un primer intent va aparèixer a [42] on De Baets i altres empren uninormes conjuntives i les seves implicacions residuals per construir les operacions morfològiques borroses. Tenint en compte que la dualitat i la idempotència són indispensables pel desenvolupament posterior de la morfologia matemàtica, es demostra a [42] que les uninormes representables conjuntives, que són contínues per l'esquerra, són convenients per ser emprades en aquest marc. Però hi ha una altra classe coneguda d'uninormes conjuntives que també són adequades en aquest sentit, com provem aquí: les uninormes idempotents. Llavors, l'objectiu principal d'aquest capítol serà la de construir una morfologia basada en uninormes conjuntives (incloent per tant les representables com les idempotents), tenint en compte les propietats morfològiques i algebraiques dels operadors morfològics borrosos i anant més enllà de l'estudiat per De Baets a [42].

El capítol s'organitza com segueix. Primer, a la secció 5.2, presentem el marc general iniciat per De Baets a [32]. Més endavant, a la secció 5.3, s'estudien les propietats morfològiques i algebraiques satisfetes pels operadors morfològics basats en uninormes conjuntives per l'esquerra, seguint una estructura similar a l'emprada a [77]. Investiguem en aquesta secció (veure [56]) quines "uninormes conjuntives" (com a cas particular de conjuncions) es necessiten elegir per poder preservar les propietats algebraiques i morfològiques necessàries per obtenir una morfologia matemàtica "bona". A la secció següent, 5.4, l'objectiu és estudiar, seguint el marc presentat a la secció anterior, la caracterització i les propietats algebraiques de la "clausura borrosa" i la "obertura borrosa", objectes borrosos tancats i oberts, quan emprem uninormes conjuntives. S'obtenen propietats similars a les descrites per De Baets a [30] per conjuncions particulars i, en un context més general per Bodenhofer a [18]. A la secció 5.5, demostrem que quan prenem una uninorma representable conjuntiva obtenim l'anomenada "llei d'idempotència generalitzada" per a la clausura i l'obertura borroses (veure [35] i [57]). En un context més general, demostrem després que quan agafem una uninorma contínua per l'esquerra també obtenim aquesta "llei d'idempotència generalitzada". D'aquesta manera, generalitzem tant els resultats de la secció anterior com els obtinguts per De Baets a [35], emprant t-normes contínues. Tot això es demostra inicialment en el cas en que els rangs de les imatges siguin conjunts finits, però veurem que pel cas de t-normes contínues el resultat també és cert sense aquesta restricció.

La part més important d'aquest capítol està a la secció 5.6, on incloem els resultats experimentals. Hem implementat els operadors morfològics derivats de certes uninormes conjuntives (representables i idempotents) que verifiquen totes les propietats esmentades en les seccions anteriors. En aquesta secció es fa un estudi comparatiu, i es veu que els resultats obtinguts a la detecció de contorns en els nostres casos són millors que en els casos clàssics derivats de t-normes de la família de Łukasiewicz (que són les úniques que també satisfan les propietats).

5.2 OPERADORS MORFOLÒGICS BASATS EN UNINORMES

De les definicions d'erosió i dilatació clàssiques ([59]), està clar que la intersecció i la inclusió juguen un paper molt important. La idea de De Baets ([32]) va ser la de fer borrosos els operadors lògics que hi prenien part, és a dir, la conjunció booleana i la implicació booleana, obtenint un procés de borrositat correcte.

Per això, una imatge en escala de grisos n-dimensional es pot modelar com una funció de $\mathbb{R}^n \to [0,1]$. Es requereix que els valors grisos de la imatge pertanyin a l'interval unitat, per poder considerar la imatge com un objecte borrós. Agafant, per tant dues imatges n-dimensionals A i B, una conjunció C, que en aquest capítol serà un operador binari sobre $[0,1]$, creixent, que generalitza la conjunció booleana clàssica, i una implicació I, (definició 4.1.1), tenim les definicions següents.

Definició 5.2.1 *La* dilatació borrosa $D_C(A, B)$ *i l'*erosió borrosa $E_I(A, B)$ *de* A *per* B *són les imatges en escala de grisos definides per*

$$D_C(A, B)(y) = \sup\{C(B(x - y), A(x)) | x \in \mathbb{R}^n\} = \sup_x C(B(x - y), A(x))$$
$$E_I(A, B)(y) = \inf\{I(B(x - y), A(x)) | x \in \mathbb{R}^n\} = \inf_x I(B(x - y), A(x)).$$

Definició 5.2.2 *La* clausura borrosa $C_{C,I}(A, B)$ *i l'*obertura borrosa $O_{C,I}(A, B)$ *de* A *per* B *són les imatges en escala de grisos definides per*

$$C_{C,I}(A, B)(y) = E_I(D_C(A, B), -B)(y)$$
$$O_{C,I}(A, B)(y) = D_C(E_I(A, B), -B)(y).$$

De la mateixa manera que a la definició anterior, les definicions anteriors es poden escriure en termes de suprems i ínfims:

$$C_{C,I}(A, B)(y) = \inf_x I(B(y - x), \sup_z C(B(z - x), A(z)))$$
$$O_{C,I}(A, B)(y) = \sup_x C(B(y - x), \inf_z I(B(z - x), A(z))).$$

Notem que la reflexió $-B$ d'un conjunt borrós n-dimensional B està definit com $-B(x) = B(-x)$, per a tot $x \in \mathbb{R}^n$.

Nota 5.2.3 *A partir d'una conjunció* C *i una negació* N*, s'obté una implicació mitjançant*

$$I_{C,N}(x, y) = N(C(x, N(y))), \text{ per a tots } x, y \in [0, 1],$$

i viceversa, a partir d'una implicació I *i una negació* N*, obtenim un conjunció* C *mitjançant l'expressió*

$$C_{I,N}(x, y) = N(I(x, N(y))), \text{ per a tots } x, y \in [0, 1].$$

Òbviament, com que tota uninorma conjuntiva és una conjunció, podem emprar uninormes conjuntives i les seves implicacions associades per definir operadors morfològics borrosos seguint les definicions anteriors.

Nota 5.2.4 *Notem que si* U *és una uninorma conjuntiva, llavors la implicació* $I_{U,N}$ *és la implicació forta obtinguda a partir de* N*, i de la uninorma (disjuntiva)* U^**,* N*-dual de* U*, que també denotem per* $I_{U^*,N}$ *(veure definició 4.1.14).*

A continuació, investiguem (veure [56]) quines uninormes conjuntives han de ser elegides per poder preservar les propietats algebraiques i morfològiques, tals com dualitat, monotonia, interacció amb la unió i la intersecció, invariància sobre translacions i escalatges, extensió i idempotència, propietats d'inclusió, commutativitat i associativitat de la dilatació borrosa, combinacions de dilatació i erosió, propietat del coneixement local i la propietat d'adjunció. A més a més, anant més enllà del que va fer De Baets a [42], a la secció següent es donen condicions suficients i/o necessàries sobre les uninormes conjuntives per poder garantir totes aquestes propietats.

5.3 PROPIETATS ALGEBRAIQUES DELS OPERADORS MORFOLÒGICS

En aquesta secció donarem condicions suficients i/o necessàries sobre les uninormes conjuntives per poder garantir propietats similars a les que es tenen a la morfologia matemàtica binària i en escala de grisos.

Donada una negació forta N, definim $(co_N A)(x) = N(A(x))$ el N-complement $co_N A$ d'un conjunt borrós A. Dues operacions morfològiques P i Q es diuen N-duals si per qualssevol dos objectes en escala de grisos A i B se satisfà que $P(A, B) = co_N Q(co_N A, B)$.

Tots els resultats d'aquesta part són vàlids per uninormes conjuntives contínues per l'esquerra i les seves implicacions residuals I_U. De tota manera, és conegut que la dilatació borrosa i l'erosió borrosa són N-duals si i només si $I = I_{C,N}$ (o equivalentment $C = C_{I,N}$), a més a més, si la dilatació borrosa i l'erosió borrosa són N-duals, llavors també ho seran la clausura borrosa i l'obertura borrosa ([32]). Per tant, per tenir dualitat entre els operadors morfològics borrosos, necessitem emprar uninormes satisfent

$$I_U = I_{U,N}.$$

Sabem que aquesta propietat és satisfeta per a dos tipus d'uninormes (veure el teorema 4.1.23 i la proposició 4.3.14), que recordem a la proposició següent (veure [39] ò [83]).

Proposició 5.3.1 *La identitat*

$$I_U = I_{U,N} \tag{5.1}$$

se satisfà en cada un dels casos següents

(i) Si $U \equiv \langle h, e \rangle_{\text{rep}}$ *és conjuntiva i* N *és la negació obtinguda del generador additiu* h *de* U *per*

$$N(x) = h^{-1}(-h(x)).$$

(ii) Si N *és una negació forta i* U *és la uninorma idempotent contínua per l'esquerra* $U \equiv \langle N, e \rangle_{\text{ide}}$.

Nota 5.3.2 *Cal tenir en compte que en el cas (ii),* $I_{U,N}$ *coincideix amb la implicació forta* $I_{U^*,N}$*, segons la nota 5.2.4. En aquest cas, clarament* U^* *és la uninorma idempotent contínua per la dreta* $U^* \equiv \langle N, e \rangle_{\text{ide}}$.

Nota 5.3.3 *Dins la família de les uninormes contínues a* $]0, 1[^2$*, n'hi ha de contínues per l'esquerra que també poden ser utilitzades en aquest context, obtenint una "bona" morfologia matemàtica. Però dissortadament, no n'hi ha cap (llevat de les representables) que verifiquin la condició (5.1) (veure teorema 4.3.32), perdent així la propietat de dualitat (com en el cas de les t-normes no nilpotents).*

Per tant, aquests els dos tipus d'uninormes conjuntives constatats en la proposició anterior són les que compleixen les condicions imposades, i seran les més adequades per al nostre estudi. En aquest sentit, volem notar que es verifica la proposició següent, que utilitzarem al llarg d'aquesta secció.

Proposició 5.3.4 *Sigui* $U \in \mathcal{U}(e)$*. Les afirmacions següents són equivalents*

(i) U *és contínua per l'esquerra;*

(ii) per tot $(a, b) \in [0, 1]^2$, $U(a, I_U(a, b)) \leqslant b$*;*

(iii) per tot $(a, b, c) \in [0, 1]^3$, $U(I_U(a, b), I_U(b, c)) \leqslant I_U(a, c)$.

DEMOSTRACIÓ:
- L'equivalència *(i)*⇔ *(ii)* és similar a un resultat conegut per a t-normes, veure per exemple [44].
- Per demostrar *(iii)*⇒ *(ii)*, basta posar (e, a, b) en *(iii)*.

- Per demostrar *(ii)*⇒ *(iii)*, per definició de I_U, només necessitem demostrar que per tot $a, b, c \in [0, 1]$
$$U(a, U(I_U(a, b), I_U(b, c))) \leqslant c.$$
Ara, emprant l'associativitat i la monotonia de U amb *(ii)*, tenim:
$$U(a, U(I_U(a, b), I_U(b, c))) = U(U(a, I_U(a, b)), I_U(b, c))) \leqslant U(b, I_U(b, c)) \leqslant c. \quad \square$$

Notem que les proposicions següents (de 5.3.5 a 5.3.11) són realment casos particulars dels inclosos, per exemple, a [77]. Per tant, no inclourem la demostració aquí, o només notarem que les uninormes emprades satisfan les propietats requerides sobre la conjunció.

Proposició 5.3.5 *Sigui U una uninorma conjuntiva i I_U la seva implicació residual. Les afirmacions següents són certes:*

(i) La dilatació borrosa D_U és creixent en totes dues variables.

(ii) L'erosió borrosa E_I és creixent en la primera variable i decreixent en la segona.

(iii) La clausura borrosa C_{U,I_U} i l'obertura borrosa O_{U,I_U} són ambdues creixents en la primera variable.

Les dues proposicions següents són relatives a les propietats d'interacció amb la unió i la intersecció de Zadeh. Per una família arbitrària $(A_i)_{i \in I}$ de conjunts borrosos, la unió i la intersecció de Zadeh es defineixen per:

$$\bigcup_{i \in I} A_i(x) = \sup_{i \in I} A_i(x) \quad \text{i} \quad \bigcap_{i \in I} A_i(x) = \inf_{i \in I} A_i(x).$$

Proposició 5.3.6 *Sigui U una uninorma conjuntiva, contínua per l'esquerra i I_U la seva implicació residual. Sigui A una imatge en escala de grisos i sigui B un element estructurant en escala de grisos. A més, sigui $(A_i)_{i \in I}$ un conjunt arbitrari d'imatges en escala de grisos i sigui $(B_i)_{i \in I}$ una família arbitrària d'elements estructurants en escala de grisos. Llavors se satisfà*

$$D_U(\bigcup_{i \in I} A_i, B) = \bigcup_{i \in I} D_U(A_i, B), \qquad E_{I_U}(\bigcup_{i \in I} A_i, B) \supseteq \bigcup_{i \in I} E_{I_U}(A_i, B),$$
$$D_U(A, \bigcup_{i \in I} B_i) = \bigcup_{i \in I} D_U(A, B_i), \qquad E_{I_U}(A, \bigcup_{i \in I} B_i) = \bigcap_{i \in I} E_{I_U}(A, B_i),$$
$$D_U(\bigcap_{i \in I} A_i, B) \subseteq \bigcap_{i \in I} D_U(A_i, B) \qquad E_{I_U}(\bigcap_{i \in I} A_i, B) = \bigcap_{i \in I} E_{I_U}(A_i, B).$$

DEMOSTRACIÓ: Com que U és contínua per l'esquerra, la segona secció de I_U és contínua per la dreta i la primera és contínua per l'esquerra per la proposició 4.1.20. Llavors, els resultats es demostren fàcilment a partir de les definicions. $\square$

Proposició 5.3.7 *Sigui U una uninorma conjuntiva i I_U la seva implicació residual. Sigui A una imatge en escala de grisos i sigui B un element estructurant en escala de grisos. A més a més, sigui $(A_i)_{i=1}^k$ una família finita d'imatges en escala de grisos. Llavors és cert*

$$C_{U,I_U}(\bigcup_{i=1}^{k} A_i, B) \supseteq \bigcup_{i=1}^{k} C_{U,I_U}(A_i, B), \qquad O_{U,I_U}(\bigcup_{i=1}^{k} A_i, B) \supseteq \bigcup_{i=1}^{k} O_{U,I_U}(A_i, B),$$
$$C_{U,I_U}(\bigcap_{i=1}^{k} A_i, B) \subseteq \bigcap_{i=1}^{k} C_{U,I_U}(A_i, B), \qquad O_{U,I_U}(\bigcap_{i=1}^{k} A_i, B) \subseteq \bigcap_{i=1}^{k} O_{U,I_U}(A_i, B).$$

La translació $T_v(A)$ de un conjunt borrós A per $v \in \mathbb{R}^n$ es defineix per $T_v(A)(x) = A(x - v)$, l'escalatge $H_\lambda(A)$ de un conjunt borrós A per $\lambda > 0$ es defineix per $H_\lambda(A)(x) = A(\frac{1}{\lambda}(x))$. És cert, per [77] (veure també [32]) que les quatre operacions morfològiques bàsiques són invariants sobre translacions i escalatges, com es pot veure en la proposició següent.

Proposició 5.3.8 *Sigui* U *una uninorma conjuntiva i* I_U *la seva implicació residual. Siguin* A *una imatge en escala de grisos,* B *un element estructurant en escala de grisos i* $v \in \mathbb{R}^n$*. Llavors se satisfà:*

$$D_U(T_v(A), B) = T_v(D_U(A, B)), \qquad D_U(A, T_v(B)) = T_{-v}(D_U(A, B)),$$
$$D_U(T_v(A), T_v(B)) = D_U(A, B).$$

L'erosió borrosa $E_{I_U}(A, B)$ *satisfà les mateixes relacions. La clausura borrosa* C_{U,I_U} *satisfà*

$$C_{U,I_U}(T_v(A), B) = T_v(C_{U,I_U}(A, B)), \qquad C_{U,I_U}(A, T_v(B)) = C_{U,I_U}(A, B),$$
$$C_{U,I_U}(T_v(A), T_v(B)) = T_v(C_{U,I_U}(A, B)),$$

l'obertura borrosa O_{U,I_U} *satisfà les mateixes relacions que les anteriors operacions.*

Proposició 5.3.9 *Sigui* U *una uninorma conjuntiva i* I_U *la seva implicació residual. Siguin* A *una imatge en escala de grisos,* B *un element estructurant en escala de grisos i* $\lambda > 0$*. Llavors es satisfà:*

$$D_U(H_\lambda(A), H_\lambda(B)) = H_\lambda(D_U(A, B)), \qquad C_{U,I_U}(H_\lambda(A), H_\lambda(B)) = H_\lambda(C_{U,I_U}(A, B)),$$
$$E_I(H_\lambda(A), H_\lambda(B)) = H_\lambda(E_I(A, B)), \qquad O_{U,I_U}(H_\lambda(A), H_\lambda(B)) = H_\lambda(O_{U,I_U}(A, B)).$$

Com en cas binari i en el cas d'escala de grisos, aquesta propietat també es manté per $\lambda < 0$. Per $\lambda = -1$, obtenim el cas especial següent.

Proposició 5.3.10 *Sigui* U *una uninorma conjuntiva i* I_U *la seva implicació residual. Sigui* A *una imatge en escala de grisos i* B *un element estructurant en escala de grisos, llavors es manté*

$$-D_U(A, B) = D_U(-A, -B), \qquad -E_I(A, B) = E_I(-A, -B),$$
$$-C_{U,I_U}(A, B) = C_{U,I_U}(-A, -B), \qquad -O_{U,I_U}(A, B) = O_{U,I_U}(-A, -B).$$

Ara estudiem la propietat de coneixement local. Molt sovint, no coneixem tota la informació d'una imatge donada A (és a dir, no veiem tota la imatge) sinó que tan sols veiem una part d'ella, un petit quadrat Z (square frame). Ens interessa veure si es poden aplicar els operadors morfològics a aquesta part concreta. Aquest principi per a la dilatació i l'erosió borroses s'expressa a la proposició següent i està adaptada de [32], rebent el nom de principi de coneixement local. Notem $d_B = \sup B = \{x \in \mathbb{R}^n \mid B(x) > 0\}$.

Proposició 5.3.11 *Siguin* U *una uninorma conjuntiva i* I_U *la seva implicació residual. Siguin* A *una imatge en escala de grisos,* B *un element estructurant en escala de grisos i* Z *una màscara binària. Llavors se satisfà que*

$$D_C(A \cap Z, B) \cap E_{I_U}(Z, d_B) = D_C(A, B) \cap E_{I_U}(Z, d_B),$$
$$E_{I_U}(A \cap Z, B) \cap E_{I_U}(Z, d_B) = E_{I_U}(A, B) \cap E_{I_U}(Z, d_B).$$

Aquesta propietat és important des d'un punt de vista computacional, ja que ens permet implementar els algorismes per computar la dilatació i l'erosió borroses definides anteriorment.

Els resultats següents són una altra vegada similars als que apareixen a [77], però en aquest cas es requereix una demostració adaptada i conseqüentment està inclosa. L'extensivitat de la dilatació borrosa i l'anti-extensivitat de l'erosió borrosa queden assegurades en la proposició següent.

Proposició 5.3.12 *Siguin U una uninorma conjuntiva amb element neutre $e \in]0,1[$, I_U la seva implicació residual i B un element estructurant en escala de grisos tal que $B(0) = e$. Llavors les inclusions següents es satisfan:*

$$E_{I_U}(A,B) \subseteq A \subseteq D_U(A,B).$$

DEMOSTRACIÓ: Com que I_U és la implicació residual de U, satisfà que $I_U(e,x) = x$ per a tot x. Llavors

$$\begin{aligned} E_{I_U}(A,B)(y) &= \inf_x I_U(B(x-y),A(x)) \leqslant I_U(B(0),A(y)) = I_U(e,A(y)) \\ &= A(y) = U(e,A(y)) = U(B(0),A(y)) \leqslant \sup_x U(B(x-y),A(x)) \\ &= D_U(A,B)(y). \end{aligned}$$

□

Proposició 5.3.13 *Siguin U una uninorma conjuntiva contínua per l'esquerra, I_U la seva implicació residual, A una imatge en escala de grisos i B un element estructurant en escala de grisos, llavors es satisfà*

(i) La clausura borrosa C_{U,I_U} és extensiva: $A \subseteq C_{U,I_U}(A,B)$.

(ii) L'obertura borrosa O_{U,I_U} és anti-extensiva: $O_{U,I_U}(A,B) \subseteq A$.

(iii) La clausura borrosa i l'obertura borrosa són idempotents, és a dir:

$$C_{U,I_U}(C_{U,I_U}(A,B),B) = C_{U,I_U}(A,B), \quad O_{U,I_U}(O_{U,I_U}(A,B),B) = O_{U,I_U}(A,B).$$

DEMOSTRACIÓ: La primera propietat se segueix de la definició i tenint en compte que, per la proposició 4.1.20, I_U satisfà

$$y \leqslant I_U(x,U(x,y)) \quad \text{per tot} \quad (x,y) \in [0,1]^2.$$

Similarment, (ii) es pot derivar pel fet que, per continuïtat per l'esquerra, emprant una altra vegada la proposició 4.1.20 U satisfà

$$U(x,I_U(x,y)) \leqslant y.$$

Per poder demostrar (iii), tenim una inclusió immediatament emprant (i):

$$C_{U,I_U}(C_{U,I_U}(A,B),B) \supseteq C_{U,I_U}(A,B).$$

L'altra inclusió és conseqüència de l'anti-extensivitat de l'obertura borrosa, les definicions dels operadors borrosos i la monotonia de l'erosió borrosa, que és

$$\begin{aligned} C_{U,I_U}(C_{U,I_U}(A,B),B) &= E_{I_U}(D_U(C_{U,I_U}(A,B),B),-B) \\ &= E_{I_U}(D_U(E_{I_U}(D_U(A,B),-B),B),-B) \\ &= E_{I_U}(O_{U,I_U}(D_U(A,B),-B),-B) \\ &\subseteq E_{I_U}(D_U(A,B),-B) = C_{U,I_U}(A,B). \end{aligned}$$

De manera similar es pot demostrar la idempotència de l'obertura borrosa. □

Proposició 5.3.14 *Siguin U una uninorma conjuntiva, amb element neutre $e \in]0,1[$ i I_U la seva implicació residual. Sigui A una imatge en escala de grisos i B un element estructurant en escala de grisos tal que existeix $z \in \mathbb{R}^n$ tal que $B(z) = e$, llavors és cert*

$$E_{I_U}(A,B) \subseteq D_U(A,B).$$

DEMOSTRACIÓ: Semblant a la demostració de la proposició 5.3.12. □

Proposició 5.3.15 *Siguin* U *una uninorma conjuntiva, amb element neutre* $e \in]0,1[$ *i* I_U *la seva implicació residual. Siguin* A *una imatge en escala de grisos i* B *un element estructurant en escala de grisos tal que* $B(0) = e$*, llavors se satisfà*

$$\begin{aligned} &D_U(A,B) \supseteq C_{U,I_U}(A,B), \quad D_U(A,B) \supseteq O_{U,I_U}(A,B), \quad D_U(A,B) \supseteq O_{U,I_U}(A,-B), \\ &E_{I_U}(A,B) \subseteq O_{U,I_U}(A,B), \quad E_{I_U}(A,B) \subseteq C_{U,I_U}(A,B), \quad E_{I_U}(A,B) \subseteq C_{U,I_U}(A,-B). \end{aligned}$$

DEMOSTRACIÓ: Només demostrem la primera inclusió, ja que les altres es demostren de manera similar. Per a tot $y \in \mathbb{R}^n$ tenim:

$$\begin{aligned} C_{U,I_U}(A,B)(y) &= \inf_x I_U(B(y-x), \sup_z U(B(z-x), A(z))) \\ &\leqslant I_U(B(0), \sup_z U(B(z-y), A(z))) = \sup_z U(B(z-y), A(z)) = D_U(A,B)(y). \end{aligned}$$ □

Proposició 5.3.16 *Siguin* U *una uninorma conjuntiva, amb element neutre* $e \in]0,1[$ *i sigui* I_U *la seva implicació residual. Siguin* A *una imatge en escala de grisos i* B *un element estructurant en escala de grisos tal que* $B(0) = e$*, llavors se satisfà que*

$$E_{I_U}(A,B) \subseteq O_{U,I_U}(A,B) \subseteq A \subseteq C_{U,I_U}(A,B) \subseteq D_U(A,B).$$

DEMOSTRACIÓ: S'obté d'ajuntar alguns dels resultats de les proposicions anteriors. □

Proposició 5.3.17 *Sigui* U *una uninorma conjuntiva contínua per l'esquerra, i siguin* A, B *i* C *imatges en escala de grisos. Llavors se satisfà que*

$$D_U(A, D_U(B,C)) = D_U(D_U(A,B), -C)$$

i

$$D_U(A,B) = -D_U(B,A).$$

DEMOSTRACIÓ: Emprant la continuïtat per l'esquerra, se segueix fàcilment de l'associativitat i la commutativitat de la uninorma U. □

Les combinacions de dilatacions i erosions s'estudien en les proposicions següents.

Proposició 5.3.18 *Siguin* U *una uninorma conjuntiva contínua per l'esquerra,* I_U *la seva implicació residual i* A, B *i* C *imatges en escala de grisos. Llavors es satisfà:*

$$D_U(D_U(A,B),C) = D_U(D_U(A,C),B), \;\; E_{I_U}(E_{I_U}(A,B),C) = E_{I_U}(E_{I_U}(A,C),B).$$

DEMOSTRACIÓ: Emprant la proposició 5.3.10 i l'anterior, obtenim la primera igualtat:

$$\begin{aligned} D_U(D_U(A,B),C) &= D_U(A, D_U(B,-C)) = D_U(A, -D_U(-C,B)) \\ &= D_U(A, D_U(C,-B)) = D_U(D_U(A,C),B). \end{aligned}$$

Per demostrar la segona part, notem que com que U és contínua per l'esquerra, la implicació residual I_U satisfà el principi d'intercanvi (proposició 4.1.20) i també, la segona secció és contínua per la dreta. Llavors, aplicant les definicions i emprant aquests fets el resultat es dedueix fàcilment. □

Proposició 5.3.19 *Siguin* U *una uninorma conjuntiva contínua per l'esquerra i* I_U *la seva implicació residual. Llavors es satisfà:*

$$E_{I_U}(A, D_U(B, -C)) = E_{I_U}(E_{I_U}(A, B), C).$$

Demostració: Emprant la proposició 4.1.20 i les propietats de la implicació I_U tenim:

$$\begin{aligned}
E_{I_U}(A, D_U(B, -C))(y) &= \inf_x I_U(D_U(B, -C)(x-y), A(x)) \\
&= \inf_x I_U(\sup_z U(C(-z+x-y), B(z)), A(x)) \\
&= \inf_x \inf_z I_U(C(-z+x-y), I_U(B(z), A(x))) \\
&= \inf_{z'} \inf_x I_U(C(z'-y), I_U(B(x-z'), A(x))) \\
&= \inf_{z'} I_U(C(z'-y), \inf_x I_U(B(x-z'), A(x))) \\
&= \inf_{z'} I_U(C(z'-y), E_{I_U}(A, B)(z')) \\
&= E_{I_U}(E_{I_U}(A, B), C)(y).
\end{aligned}$$

□

Encara que la dilatació i erosió borroses, per una elecció convenient de la conjunció i la implicació, són duals, això no significa que es pugui utilitzar lliurement la cancel·lació en les igualtats morfològiques borroses. En particular, la igualtat $A = E_I(B, C)$ no implica necessàriament $D_C(A, -C) = B$. De tota manera, la proposició següent indica que una relació d'inclusió es manté.

Proposició 5.3.20 *Siguin* U *una uninorma conjuntiva contínua per l'esquerra i* I_U *la seva implicació residual. Llavors és cert que*

$$A \subseteq E_{I_U}(B, C) \text{ si i només si } D_U(A, -C) \subseteq B.$$

Demostració: Com que U és contínua per l'esquerra, sabem, per la proposició 4.1.20, que per a tots x, y, $z \in [0, 1]$,

$$U(x, z) \leqslant y \text{ si i només si } z \leqslant I_U(x, y)$$

i, d'aquesta equivalència, el resultat segueix de manera trivial. □

5.4 objectes borrosos oberts i tancats

La idempotència de l'obertura i la clausura borroses quan agafem U una uninorma conjuntiva contínua per l'esquerra i I_U la seva implicació residual motiva, com en el cas de la morfologia matemàtica clàssica, les definicions següents.

Definició 5.4.1 *Siguin* A *i* B *dues imatges en escala de grisos. Direm que* A *és* B-tancat *(respectivament* B-obert*) si* $C_{U,I_U}(A, B) = A$ *(respectivament* $O_{U,I_U}(A, B) = A$*).*

Observem que, com a conseqüència de la proposició 5.3.13, $C_{U,I_U}(A, B)$ és B-tancat i $O_{U,I_U}(A, B)$ és B-obert. A més a més, tenim la proposició següent que va ser avançada per De Baets a [35] sense demostració. La incloem aquí per completesa.

Proposició 5.4.2 *Sigui* U *una uninorma conjuntiva contínua per l'esquerra i* I_U *la seva implicació residual. Llavors se satisfà:*

(i) A *és* B*-obert si i només si existeix un objecte borrós* F *tal que* $A = D_U(F, -B)$.

(ii) A *és* B*-tancat si i només si existeix un objecte borrós* F *tal que* $A = E_{I_U}(F, -B)$.

Demostració: Suposem que A és B-obert. Per definició de la obertura borrosa, elegint $F = E_{I_U}(A, B)$ tenim un objecte borrós satisfent que $D_U(F, -B) = A$. Suposem ara que A es pot representar per $A = D_U(F, -B)$ per qualque objecte borrós F. De la proposició 5.3.13 sabem que $O_{U,I_U}(A, B) \subseteq A$. Per poder demostrar l'altra inclusió, emprant la proposició 4.1.20 i que I_U és creixent en la segona variable, tenim:

$$\begin{aligned}
E_{I_U}(A, B)(y) &= \inf_x I_U(B(x-y), A(x)) = \inf_x I_U(B(x-y), D_U(F, -B)(x)) \\
&= \inf_x I_U(B(x-y), \sup_z U(B(x-z), F(z))) \\
&\geqslant \inf_x I_U(B(x-y), U(B(x-y), F(y))) \\
&\geqslant F(y).
\end{aligned}$$

Per tant, hem demostrat que $F \subseteq E_{I_U}(A, B)$. Llavors, per la proposició 5.3.5 tenim que

$$A = D_U(F, -B) \subseteq D_U(E_{I_U}(A, B), -B) = O_{U,I_U}(A, B).$$

Emprant les dues desigualtats, obtenim que $A = O_{U,I_U}(A, B)$, i per tant A és B-obert. Un argument similar demostra (ii). □

Com ja va remarcar Bodenhofer a [18] els operadors d'obertura i clausura només tenen sentit si l'obertura sempre dóna un resultat obert, i l'operador de clausura dóna un resultat tancat. A més a més, és desitjable tenir "propietats d'extrems". Vegem ara que aquest darrer requeriment també se satisfà pels nostres operadors d'obertura i de clausura.

Proposició 5.4.3 *Sigui* U *una uninorma conjuntiva contínua per l'esquerra i* I_U *la seva implicació residual. Llavors se satisfà:*

(i) $O_{U,I_U}(A, B)$ *és el major subconjunt borrós* B*-obert de* A.

(ii) $C_{U,I_U}(A, B)$ *és el menor superconjunt borrós* B*-tancat de* A.

Demostració: (i) Sabem que $O_{U,I_U}(A, B)$ és B-obert, i, per la proposició 5.3.13 que

$$O_{U,I_U}(A, B) \subseteq A.$$

Considerem ara que $E \subseteq A$ i E és B-obert. Llavors, com que E és B-obert tenim $E = O_{U,I_U}(E, B)$. Per la proposició 5.3.5 O_{U,I_U} és creixent en la primera secció, llavors

$$E = O_{U,I_U}(E, B) \subseteq O_{U,I_U}(A, B).$$

(ii) Sabem que $C_{U,I_U}(A, B)$ és B-tancat i $A \subseteq C_{U,I_U}(A, B)$. Sigui E un superconjunt B-tancat de A, $A \subseteq E$. També, per la proposició, 5.3.5 sabem que C_{U,I_U} és creixent en la primera variable, llavors

$$C_{U,I_U}(A, B) \subseteq C_{U,I_U}(E, B) = E,$$

perquè E és B-tancat. Aleshores $C_{U,I_U}(A, B)$ ha de ser el menor superconjunt B-tancat de A. □

Considerem ara breument la preservació de la B-obertura i de la B-clausura per interseccions i unions, respectivament.

Proposició 5.4.4 *Siguin* U *una uninorma conjuntiva contínua per l'esquerra i* I_U *la seva implicació residual. Siguin* A_1 *i* A_2 *dues imatges en escala de grisos i* B *un element estructurant en escala de grisos. Llavors, se satisfà:*

(i) Si A_1 *i* A_2 *són ambdós* B*-oberts llavors,* $A_1 \cup A_2$ *és* B*-obert.*

(ii) Si A_1 *i* A_2 *són ambdós* B*-tancats llavors,* $A_1 \cap A_2$ *és* B*-tancat.*

DEMOSTRACIÓ: (i) Si A_1 i A_2 són B-oberts llavors, $O_{U,I_U}(A_1, B) = A_1$ i $O_{U,I_U}(A_2, B) = A_2$. Per la proposició 5.3.6 tindrem que

$$\begin{aligned} A_1 \cup A_2 &= O_{U,I_U}(A_1, B) \cup O_{U,I_U}(A_2, B) \\ &= D_U(E_{I_U}(A_1, B), -B) \cup D_U(E_{I_U}(A_2, B), -B) \\ &= D_U(E_{I_U}(A_1, B) \cup E_{I_U}(A_2, B), -B) \\ &\subseteq D_U(E_{I_U}(A_1 \cup A_2, B), -B) = O_{U,I_U}(A_1 \cup A_2, B), \end{aligned}$$

llavors $A_1 \cup A_2 \subseteq O_{U,I_U}(A_1 \cup A_2, B)$. L'altra inclusió és una conseqüència de la proposició 5.3.13. Llavors, $A_1 \cup A_2 = O_{U,I_U}(A_1 \cup A_2, B)$ i $A_1 \cup A_2$ és un conjunt borrós B-obert.

(ii) Ara assumirem que A_1 i A_2 són conjunts borrosos B-tancats. Aleshores, $A_1 = C_{U,I_U}(A_1, B)$ i $A_2 = C_{U,I_U}(A_2, B)$. Llavors, emprant la proposició 5.3.6 obtenim el següent:

$$\begin{aligned} A_1 \cap A_2 &= C_{U,I_U}(A_1, B) \cap C_{U,I_U}(A_2, B) \\ &= E_{I_U}(D_U(A_1, B), -B) \cap E_{I_U}(D_U(A_2, B), -B) \\ &= E_{I_U}(D_U(A_1, B) \cap D_U(A_2, B), -B) \\ &\supseteq E_{I_U}(D_U(A_1 \cap A_2, B), -B) = C_{U,I_U}(A_1 \cap A_2, B). \end{aligned}$$

Llavors, $A_1 \cap A_2 \supseteq C_{U,I_U}(A_1 \cap A_2, B)$ i per tant, emprant la proposició 5.3.13, $A_1 \cap A_2 = C_{U,I_U}(A_1 \cap A_2, B)$ i per tant $A_1 \cap A_2$ és un conjunt borrós B-tancat. □

Les proposicions anteriors són vàlides per qualsevol uninorma conjuntiva contínua per l'esquerra. De tota manera, si volem tenir dualitat entre els objectes tancats i oberts, necessitem de nou les dues classes d'uninormes de la proposició 5.3.1.

Proposició 5.4.5 *Sigui* U *una uninorma conjuntiva satisfent la condició (i) o (ii) de la proposició 5.3.1 llavors,* A *és* B*-obert si i només si el seu* N*-complement,* $co_N A$*, és* B*-tancat.*

DEMOSTRACIÓ: Demostrarem la implicació de dreta a esquerra. Assumirem que $co_N A$ és B-tancat, $C_{U,I_U}(co_N A, B) = co_N A$. Fent el complementari als dos membres, com que N és un operador involutiu, i la clausura i l'obertura borroses són N-duals, llavors obtenim

$$O_{U,I_U}(A, B) = co_N C_{U,I_U}(co_N A, B) = co_N(co_N(A))$$

és a dir, A és B-obert. El recíproc es pot demostrar similarment. □

5.5 LLEI D'IDEMPOTÈNCIA GENERALITZADA

Continuant amb l'estudi de les propietats que satisfan aquests operadors morfològics, una de les propietats importants és la llei idempotència generalitzada, que es satisfà per a l'obertura i la clausura en el cas clàssic. En aquesta secció demostrarem que, emprant uninormes contínues per l'esquerra, que inclouen les representables conjuntives, així com les de la proposició 5.3.1, l'obertura i clausura borroses satisfan aquesta llei. Primer necessitem uns resultats previs.

Proposició 5.5.1 *Sigui* U *una uninorma contínua per l'esquerra. Llavors* U *i* I_U *satisfan*

$$I_U(x, U(y, z)) \geqslant U(I_U(x, y), z)$$

per tot $x, y, z \in [0, 1]$.

DEMOSTRACIÓ: Si demostrem

$$U(x, U(I_U(x, y), z)) \leqslant U(y, z)$$

per tot $x, y, z \in [0, 1]$, llavors la proposició queda demostrada. Emprant *(ii)* de la proposició 5.3.4, tenim que per tot $x, y, z \in [0, 1]$

$$U(x, U(I_U(x, y), z)) = U(U(x, I_U(x, y)), z) \leqslant U(y, z). \qquad \square$$

Proposició 5.5.2 *Sigui* U *una uninorma contínua per l'esquerra. Per tots* $a, b, c, d, e, f \in [0, 1]$, *si* $U(a, I_U(b, c)) \geqslant d$, *i* $U(e, I_U(f, b)) \geqslant a$ *llavors*

$$U(e, I_U(f, c)) \geqslant d.$$

DEMOSTRACIÓ: Emprant la proposició 5.3.4, tenim per tots $a, b, c, d, e, f \in [0, 1]$:

$$\begin{aligned} d &\leqslant U(a, I_U(b, c)) \leqslant U(U(e, I_U(f, b)), I_U(b, c)) = U(e, U(I_U(f, b), I_U(b, c))) \\ &\leqslant U(e, I_U(f, c)). \end{aligned} \qquad \square$$

Proposició 5.5.3 *Sigui* U *una uninorma contínua per l'esquerra. Per a tots* $a, b, c, d, e, f, g, h \in [0, 1]$, *si* $U(a, I_U(b, c)) \geqslant d$, $U(c, I_U(e, f)) \leqslant g$, *i* $U(d, I_U(e, f)) \geqslant h$, *aleshores* $U(a, I_U(b, g)) \geqslant h$.

DEMOSTRACIÓ: Emprant les proposicions 5.3.4 i 5.5.1, tenim per tots $a, b, c, d, e, f, g, h \in [0, 1]$:

$$\begin{aligned} h &\leqslant U(d, I_U(e, f)) \leqslant U(U(a, I_U(b, c)), I_U(e, f)) = U(a, U(I_U(b, c), I_U(e, f))) \\ &\leqslant U(a, I_U(b, U(c, I_U(e, f)))) \leqslant U(a, I_U(b, g)). \end{aligned} \qquad \square$$

La demostració dels resultats relatius a les inclusions d'obertures borroses de les dues proposicions següents són molt similars a les donades per De Baets a [35] per t-normes contínues, emprant en el nostre cas les proposicions 5.3.4 i 5.5.1. Respecte a les inclusions relatives a la clausura borrosa, les seves demostracions se segueixen de la dualitat, garantida per la proposició 5.3.1.

Proposició 5.5.4 *Sigui* U *una uninorma conjuntiva satisfent la condició (i) o (ii) de la proposició 5.3.1 i* I_U *la seva implicació residual. Si* A *és* B*-obert i* $\mathrm{Ran}(A)$ *i* $\mathrm{Ran}(B)$ *són conjunts finits, llavors per qualsevol objecte borrós* F *se satisfà:*

$$O_{U,I_U}(F, A) \subseteq O_{U,I_U}(F, B) \subseteq F$$

i de manera dual

$$F \subseteq C_{U,I_U}(F, B) \subseteq C_{U,I_U}(F, A).$$

Proposició 5.5.5 *Sigui* U *una uninorma conjuntiva satisfent la condició (i) o (ii) de la proposició 5.3.1 i* I_U *la seva implicació residual. Si* A *és* B*-obert i* $\mathrm{Ran}(A)$ *i* $\mathrm{Ran}(B)$ *són conjunts finits,llavors per qualsevol objecte borrós* F *és cert:*

$$O_{U,I_U}(O_{U,I_U}(F,B),A) = O_{U,I_U}(O_{U,I_U}(F,A),B) = O_{U,I_U}(F,A)$$

i de manera dual

$$C_{U,I_U}(C_{U,I_U}(F,B),A) = C_{U,I_U}(C_{U,I_U}(F,A),B) = C_{U,I_U}(F,A).$$

Nota 5.5.6 *Les proposicions anteriors són també vàlides per qualsevol t-norma contínua per l'esquerra (millorant els resultats de De Baets a [59]) també com per qualsevol uninorma representable conjuntiva i qualsevol uninorma idempotent contínua per l'esquerra, ja que totes elles són uninormes contínues per l'esquerra.*

En aquesta part tractarem d'eliminar la condició de que $\mathrm{Ran}(A)$ i $\mathrm{Ran}(B)$ siguin conjunts finits en la proposició 5.5.4 en el cas de que treballem amb una conjunció contínua. Seguint un procediment similar a l'emprat per De Baets a [35] per a t-normes contínues, però diferent en el fons, podem generalitzar el resultat eliminant aquesta condició.

Proposició 5.5.7 *Sigui* T *una t-norma contínua i sigui* I_T *la seva implicació residual. Si* A *és* B*-obert llavors per qualsevol objecte borrós* F *és cert:*

$$O_{T,I_T}(F,A) \subseteq O_{T,I_T}(F,B) \subseteq F,$$

i de manera dual

$$F \subseteq C_{T,I_T}(F,B) \subseteq C_{T,I_T}(F,A).$$

Demostració: Per ser A un conjunt B-obert, es verifica que

$$\begin{aligned} A(y) = O_{T,I_T}(A,B)(y) &= \sup_x T\left(B(y-x), \inf_z I_T(B(z-x),A(z))\right) \\ &= \sup_x \inf_z T\left(B(y-x), I_T(B(z-x),A(z))\right). \end{aligned}$$

Donat $\varepsilon > 0$, existeix x_ε tal que

$$\inf_z T\left(B(y-x_\varepsilon), I_T(B(z-x_\varepsilon),A(z))\right) > A(y) - \varepsilon.$$

Per tant existeix x_ε tal que per

$$T\left(B(y-x_\varepsilon), I_T(B(z-x_\varepsilon),A(z))\right) > A(y) - \varepsilon, \text{ per tot } z. \tag{5.2}$$

Volem veure que $O_{T,I_T}(F,A) \subseteq O_{T,I_T}(F,B)$ per això és suficient veure que

$$\text{si per a tot } \alpha \in]0,1], \; O_{T,I_T}(F,A)(y) = \alpha \text{ llavors } O_{T,I_T}(F,B)(y) \geqslant \alpha$$

Sigui $\alpha \in]0,1]$ arbitrari però fix i sigui y tal que

$$O_{T,I_T}(F,A)(y) = \alpha.$$

De forma similar a com hem obtingut (5.2), existeix x'_ε tal que

$$T\left(A(y-x'_\varepsilon), I_T(A(z-x'_\varepsilon),F(z))\right) > \alpha - \varepsilon, \text{ per tot } z. \tag{5.3}$$

Considerem x'_ε i apliquem (5.2) a $y - x'_\varepsilon$, de forma que obtenim que existeix x^1_ε tal que

$$T\left(B(y - x'_\varepsilon - x^1_\varepsilon), I_T(B(z - x^1_\varepsilon), A(z))\right) > A(y - x'_\varepsilon) - \varepsilon, \text{ per tot } z. \tag{5.4}$$

Considerem ara x^1_ε. Volem veure que

$$O_{T,I_T}(F, B)(y) = \sup_x T\left(B(y - x), \inf_z I_T(B(z - x), F(z))\right) \geqslant \alpha - \varepsilon$$

pel que és suficient veure que

$$T\left(B(y - x'_\varepsilon - x^1_\varepsilon), \inf_z I_T(B(z - x^1_\varepsilon), F(z))\right) > \alpha - \varepsilon$$

és a dir,

$$T\left(B(y - x'_\varepsilon - x^1_\varepsilon), I_T(B(z - x^1_\varepsilon), F(z))\right) > \alpha - \varepsilon, \text{ per tot } z.$$

Per (5.3) i com que T és contínua per l'esquerra, donat $\varepsilon > 0$, existeix $\delta > 0$ tal que

$$T\left(A(y - x'_\varepsilon) - \delta, I_T(A(z - x'_\varepsilon), F(z))\right) \geqslant \alpha - \varepsilon, \text{ per tot } z. \tag{5.5}$$

Considerant $y - x'_\varepsilon$ i $\delta > 0$ aplicant (5.5), existeix x^1_δ pel qual

$$T\left(B(y - x'_\varepsilon - x^1_\delta), I_T(B(z - x^1_\delta), A(z))\right) > A(y - x'_\varepsilon) - \delta, \text{ per tot } z. \tag{5.6}$$

Aplicant (5.6) a $z - x'_\varepsilon$:

$$T\left(B(y - x'_\varepsilon - x^1_\delta), I_T(B(z - x'_\varepsilon - x^1_\delta), A(z - x'_\varepsilon))\right) > A(y - x'_\varepsilon) - \delta \tag{5.7}$$

Si considerem (5.5) i (5.7) i apliquem la proposició 5.5.2, obtenim

$$T\left(B(y - x'_\varepsilon - x^1_\delta), I_T(B(z - x'_\varepsilon - x^1_\delta), F(z))\right) \geqslant \alpha - \varepsilon, \text{ per tot } z. \tag{5.8}$$

Es pot observar que (5.8) es verifica per a tot z ja que, (5.7) es verifica per a tot z, $z - x'_\varepsilon$ i (5.5) també és per a tot z; a més (5.8) ens garanteix l'existència d'un $\overline{x}$ tal que

$$T\left(B(y - \overline{x}), I_T(B(z - \overline{x}), F(z))\right) \geqslant \alpha - \varepsilon, \text{ per tot } z$$

d'on

$$T\left(B(y - \overline{x}), \inf_z I_T(B(z - \overline{x}), F(z))\right) \geqslant \alpha - \varepsilon$$

així

$$\sup_x T\left(B(y - x), \inf_z I_T(B(z - x), F(z))\right) \geqslant \alpha - \varepsilon$$

o, el que és el mateix,

$$O_{T,I_T}(F, B)(y) \geqslant \alpha - \varepsilon \quad (\text{per tot } \varepsilon > 0)$$

i per tant

$$O_{T,I_T}(F, B)(y) \geqslant \alpha,$$

el que acaba la demostració. □

Gràcies a la proposició anterior podem enunciar ara l'anomenada *Idempotència Generalitzada* per a t-normes contínues eliminant la condició, restrictiva i que no apareix al *cas crisp*, de que els rangs siguin finits.

Teorema 5.5.8 *Sigui* T *una t-norma contínua i sigui* I_T *la seva implicació residual. Si* A *és* B*-obert, llavors per qualsevol objecte borrós* F *se satisfà:*

$$O_{T,I_T}(O_{T,I_T}(F,B),A) = O_{T,I_T}(O_{T,I_T}(F,A),B) = O_{T,I_T}(F,A)$$

i de manera dual

$$C_{T,I_T}(C_{T,I_T}(F,B),A) = C_{T,I_T}(C_{T,I_T}(F,A),B) = C_{T,I_T}(F,A)$$

DEMOSTRACIÓ: La demostració d'aquest teorema és idèntica a la feta en el *cas crisp*, però la incloem per claredat. Considerem un objecte borrós F, la proposició 5.3.13 ens garanteix que $O_{T,I_T}(F,B) \subseteq F$. Com que l'obertura és una funció creixen en el seu primer argument (veure la proposició 5.3.5), tenim garantit que

$$O_{T,I_T}(O_{T,I_T}(F,B),A) \subseteq O_{T,I_T}(F,A).$$

Per una banda, com que A és un conjunt B-obert, la proposició 5.5.7 implica que

$$O_{T,I_T}(F,A) \subseteq O_{T,I_T}(F,B).$$

Per una altra banda, la idempotència de l'obertura borrosa, que ve donada per la proposició 5.3.13, ens permet assegurar que

$$O_{T,I_T}(F,A) = O_{T,I_T}(O_{T,I_T}(F,A),A) \subseteq O_{T,I_T}(O_{T,I_T}(F,B),A).$$

D'ambdues inclusions obtenim la igualtat, el que acaba la demostració. $\square$

5.6 RESULTATS EXPERIMENTALS

En aquesta secció presentarem alguns experiments mostrant les diferències entre els operadors morfològics bàsics emprant uninormes diferents. Els exemples presentats il·lustren la influència de l'elecció de la parella (U, I_U) emprant uninormes conjuntives idempotents i representables.

Una de les aplicacions que implementem és el gradient morfològic

$$D_U(A,B) \setminus E_{I_U}(A,B),$$

que serveix com a eina per a la detecció de contorns. En efecte, gràcies a la proposició 5.3.16, si $B(0) = e$, se satisfà $E_{I_U}(A,B) \subseteq A \subseteq D_U(A,B)$, amb el que aquesta operació morfològica serveix com a una imatge de contorns adequada.

Presentarem els resultats seguint el plantejament de Nachtegael i Kerre a [77], i a tots els resultats utilitzarem l'element estructurant B, representat per la matriu següent

$$B = e \cdot \begin{pmatrix} 0.86 & 0.86 & 0.86 \\ 0.86 & 1.00 & 0.86 \\ 0.86 & 0.86 & 0.86 \end{pmatrix} \tag{5.9}$$

on e és l'element neutre de la uninorma. Es pot observar que $B(0) = e$ i, com hem comentat, podrem emprar el gradient morfològic $D_U(A,B) \setminus E_{I_U}(A,B)$ quan utilitzem la morfologia borrosa basada en uninormes.

Els resultats són comparats amb els que s'obtenen amb la morfologia construïda amb parella (T_L, I_{T_L}), que és la representant de l'única classe de t-normes, les nilpotents, que garanteix la satisfacció de totes les propietats per tenir una bona morfologia matemàtica borrosa, en particular la dualitat entre operadors morfològics.

Els resultats són comparats també amb un dels enfocaments clàssics en morfologia matemàtica en escala de grisos, l'anomenat enfocament umbra (*umbra approach*), i que breument introduïm a continuació. En primer lloc, necessitem introduir la dilatació i l'erosió binàries, des d'un punt de vista clàssic. En tota aquesta part, T_y és la translació de l'objecte B de $\mathbb{R}^n$ pel vector $y \in \mathbb{R}$.

Definició 5.6.1 *Sigui* A *una imatge binària i* B *un element estructurant binari. La dilatació binària* $D(A, B)$ *i l'erosió binària* $E(A, B)$ *venen donades per:*

$$
\begin{aligned}
D(A, B) &= \{y \in \mathbb{R}^n \mid T_y(B) \cap A \neq \emptyset\} \\
E(A, B) &= \{y \in \mathbb{R}^n \mid T_y(B) \subseteq A\}
\end{aligned}
$$

A continuació posem la definició de dilatació i erosió de l'enfocament umbra. Donada una imatge A, denotem per d_A al domini de A.

Definició 5.6.2 ([77], definició 7) *Sigui* A *una imatge en escala de grisos, i* B *un element estructurant en escala de grisos. La* u*-dilatació* $D_u(A, B)$ *i la* u*-erosió* $E_u(A, B)$ *són les imatges en escala de grisos definides per:*

$$
\begin{aligned}
D_u(A, B)(y) &= \sup\{A(x) + B(x - y) \mid x \in T_y(d_B) \cap d_A\}, \text{ per a } y \in D(d_A, d_B) \\
E_u(A, B)(y) &= \inf\{A(x) - B(x - y) \mid x \in T_y(d_B)\}, \text{ per a } y \in E(d_A, d_B).
\end{aligned}
$$

on D *i* E *són la dilatació i l'erosió binàries.*

Al primer conjunt d'experiments, mostrem els resultats obtinguts d'aplicar l'erosió, dilatació i el gradient morfològic a la imatge mostrada a la figura 41, fent ús de diferents uninormes i les seves implicacions residuals, de la parella (T_L, I_{T_L}), i de l'enfocament umbra.

Figura 41. Imatge d'entrada emprada en els experiments.

Per tant, seguint el que hem comentat anteriorment, a la figura 42 mostrem, d'esquerra a dreta, la dilatació borrosa, l'erosió borrosa, i l'operador gradient borrós, $D_U(A, B) \setminus E_{I_U}(A, B)$, emprant diferents uninormes idempotents. Des de dalt a baix hem emprat $U \equiv \langle N, e\rangle_{\text{ide}}$ i I_U, on $N(x) = \sqrt{1 - x^2}$ i $N(x) = 1 - x$, respectivament, (els elements neutres corresponents són $e = \frac{\sqrt{2}}{2}$ i $e = 0.5$). Baix d'aquestes imatges, trobem els resultats d'utilitzar la parella (T_L, I_{T_L}) i l'enfocament umbra, on l'element estructurant és el mateix que al cas de les uninormes, emprant $e = 1$.

A la figura 43 tenim la mateixa estructura que al cas anterior. Emprem tres uninormes representables conjuntives diferents amb el mateix element neutre $e = 0.5$, la t-norma de Łukasiewicz T_L, i l'enfocament umbra respectivament. Des de dalt fins baix, emprem les uninormes representables definides a partir dels generadors additius $h(x) = \ln\left(\frac{x}{1-x}\right)$, $h_c(x) = \ln(\frac{-1}{c}\ln(1-x))$ amb $c = \ln 2$ i $h_e(x) = \frac{x-e}{x(1-x)}$ amb $e = 0.5$ a més de la parella (T_L, I_{T_L}) i l'enfocament umbra amb l'element estructurant (5.9), amb $e = 1$.

En la comparació de les imatges de gradient es pot observar que, si bé en totes les imatges es detecten els contorns més forts, a les de les uninormes representables i idempotents es poden observar els contorns més suaus, que no són detectats pels altres dos enfocaments (el de la t-norma de Łuckasiewicz i l'enfocament umbra), que pot ser una avantatge, depenent de les aplicacions.

Figura 42. Des de dalt fins baix, la dilatació, erosió i gradient borrosos obtinguts emprant uninormes idempotents amb negacions fortes $N(x) = \sqrt{1-x^2}$ i $N(x) = 1-x$, la parella (T_L, I_{T_L}) i l'enfocament umbra.

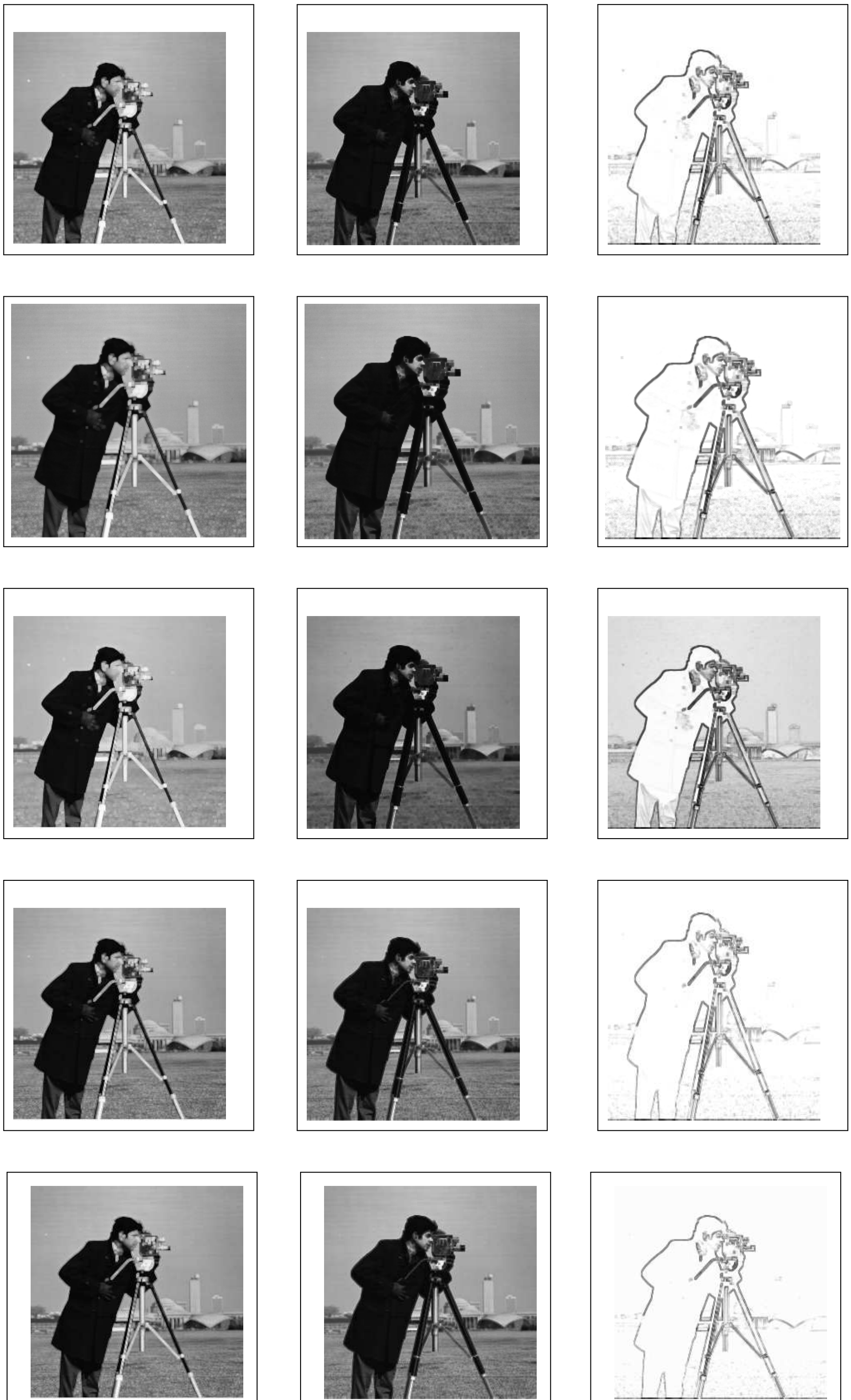

Figura 43. Dilatació borrosa, erosió borrosa i gradient borrós obtinguts emprant uninormes representables conjuntives amb generadors additius $h(x) = \ln\left(\frac{x}{1-x}\right)$, $h_c(x) = \ln(\frac{-1}{\ln 2}\ln(1-x))$ i $h(x) = \frac{x-0.5}{x(1-x)}$, la parella (T_L,I_{T_L}) i l'enfocament umbra.

A una segona part d'experiments, mostrem els diferents gradients borrosos obtinguts a partir de cinc imatges, les figures 45, 46, 47, 48, 49, i que més endavant comentarem per separat. A la figura 44 representem l'esquema seguit a totes figures. Posem a la primera fila la imatge original i els gradients morfològics obtinguts amb la parella (T_L, I_{T_L}), i amb l'enfocament umbra. A la segona fila posem els obtinguts amb les uninormes representables $U \equiv \langle \ln\left(\frac{x}{1-x}\right), 0.5\rangle_{\text{rep}}$, $U \equiv \langle \ln\left(-\frac{1}{\ln 2} \cdot \ln(1-x)\right), 0.5\rangle_{\text{rep}}$ i $U \equiv \langle \frac{x-0.5}{x(1-x)}, 0.5\rangle_{\text{rep}}$. A la darrera fila posem el gradient morfològic obtingut amb les uninormes idempotents $U \equiv \langle 1-x, 0.5\rangle_{\text{ide}}$ i $U \equiv \langle \sqrt{1-x^2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\rangle_{\text{ide}}$.

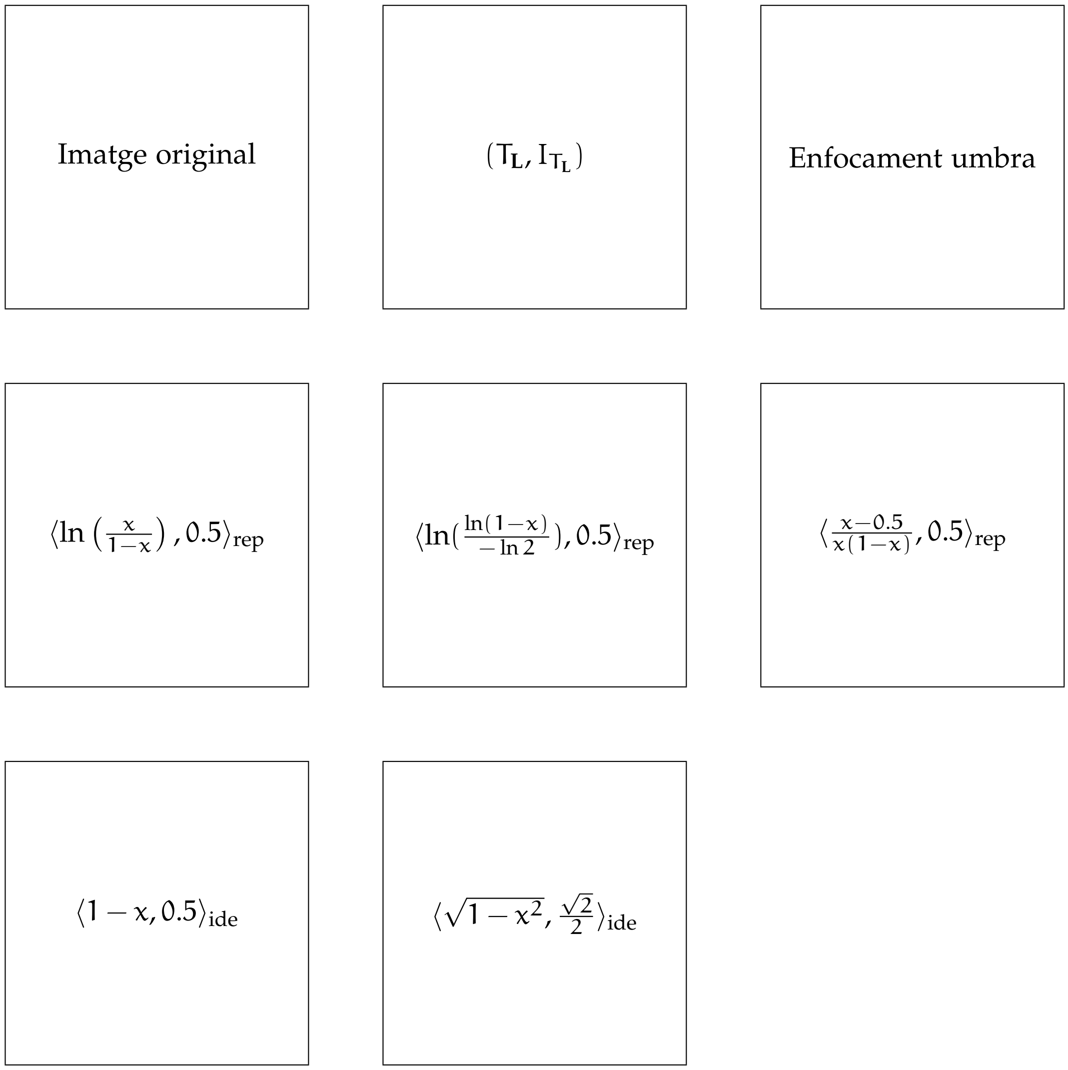

Figura 44. Esquema seguit en els experiments sobre gradients morfològics.

A la figura 45, es presenten els gradients morfològics obtinguts, seguint l'esquema de la figura 44, a una imatge de cromosomes, que es veu al cantó superior esquerre. Es pot observar com el resultat de la morfologia basada en t-normes dóna un imatge de gradient on no es detecta cap cromosoma i, amb el gradient associat a la morfologia clàssica es detecten totes les estructures cromosomàtiques. Amb les uninormes, en tots els casos s'obtenen resultats on es detecten les mateixes formes que al cas clàssic. Es pot observar, per al cas d'uninormes, que per a les idempotents aquestes formes es detecten molt millor que per a les representables.

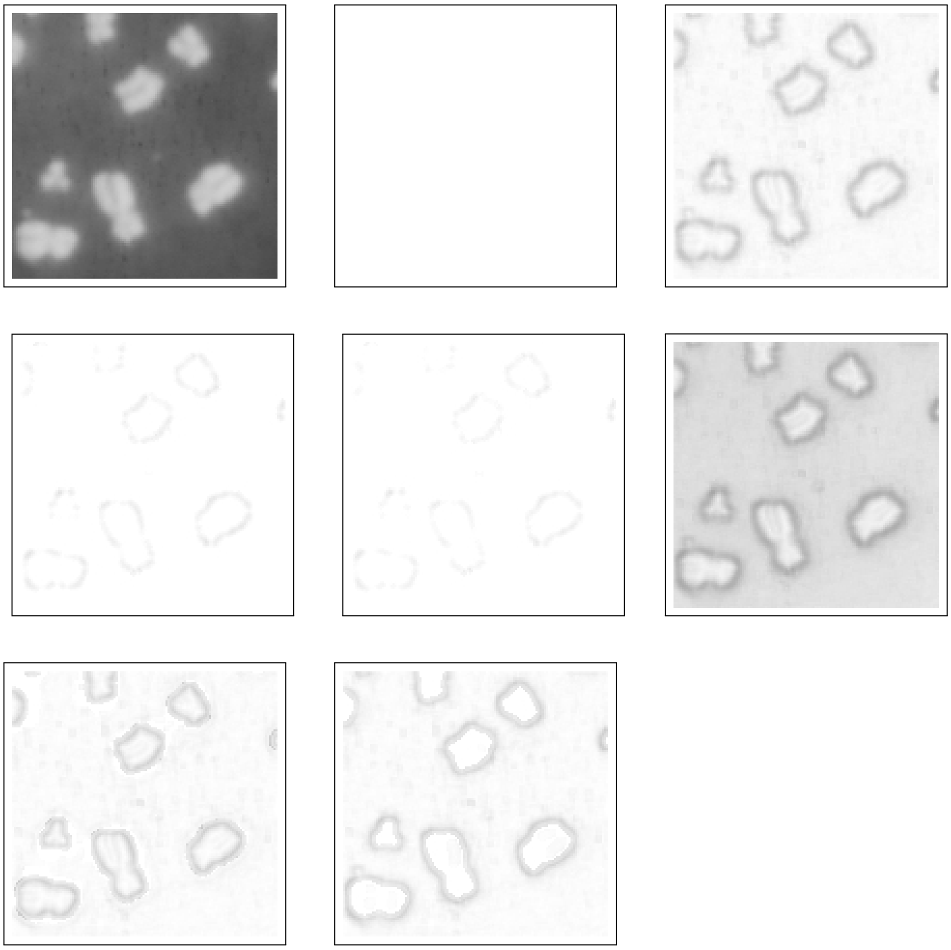

Figura 45. Imatges de contorn per a una imatge de cromosomes (superior esquerra) per diverses morfologies matemàtiques, seguint l'esquema de la figura 44.

La següent figura (46) ens mostra els resultats obtinguts amb una imatge esborronada artificialment, emprant un sistema semblant a l'anterior imatge. Es pot observar com, una altra vegada, els resultats de la morfologia basada en uninormes millora els resultats de la t-norma, que en aquest cas dóna uns contorns molt suaus, mentre que per els resultats comparats amb els de l'enfocament umbra també són semblants, encara que per a aquest enfocament queden més marcats els contorns.

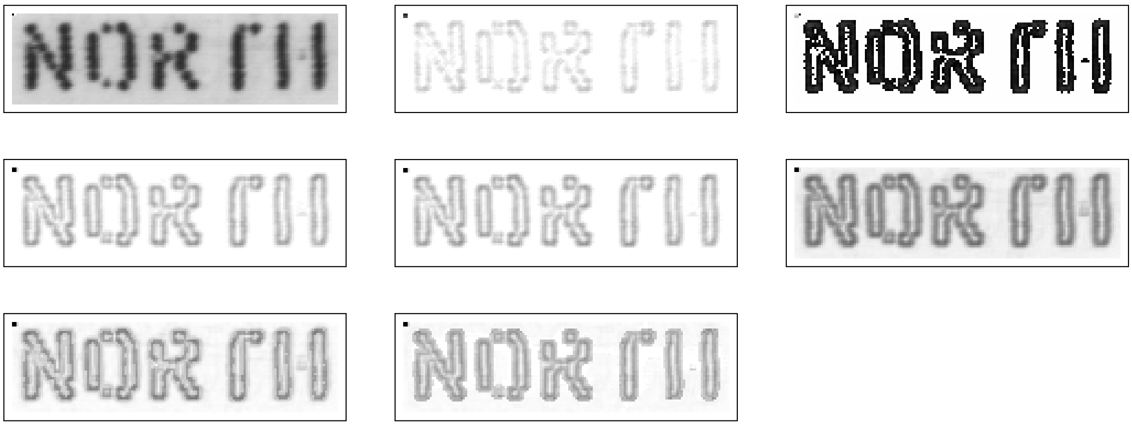

Figura 46. Imatges de contorn per a una imatge esborronada artificialment (superior esquerra) per diverses morfologies matemàtiques, seguint l'esquema de la figura 44.

Una imatge molt diferent a les vistes fins ara es mostra al cantó superior esquerre de la figura 47, que correspon a les cèl·lules d'un múscul. Ara podem dir que a les imatges de contorn obtingudes amb les uninormes idempotents i representables es milloren els resultats, tant per a t-normes com per a l'enfocament umbra, ja que els contorns d'algunes cèl·lules es difonen en els dos primers enfocaments, mentre que amb els d'uninormes gairebé es poden observar els contorns de totes les cel·lules. A més a més, hi ha una pèrdua d'estructures en l'enfocament clàssic que amb les imatges de contorn per a les uninormes es mantenen.

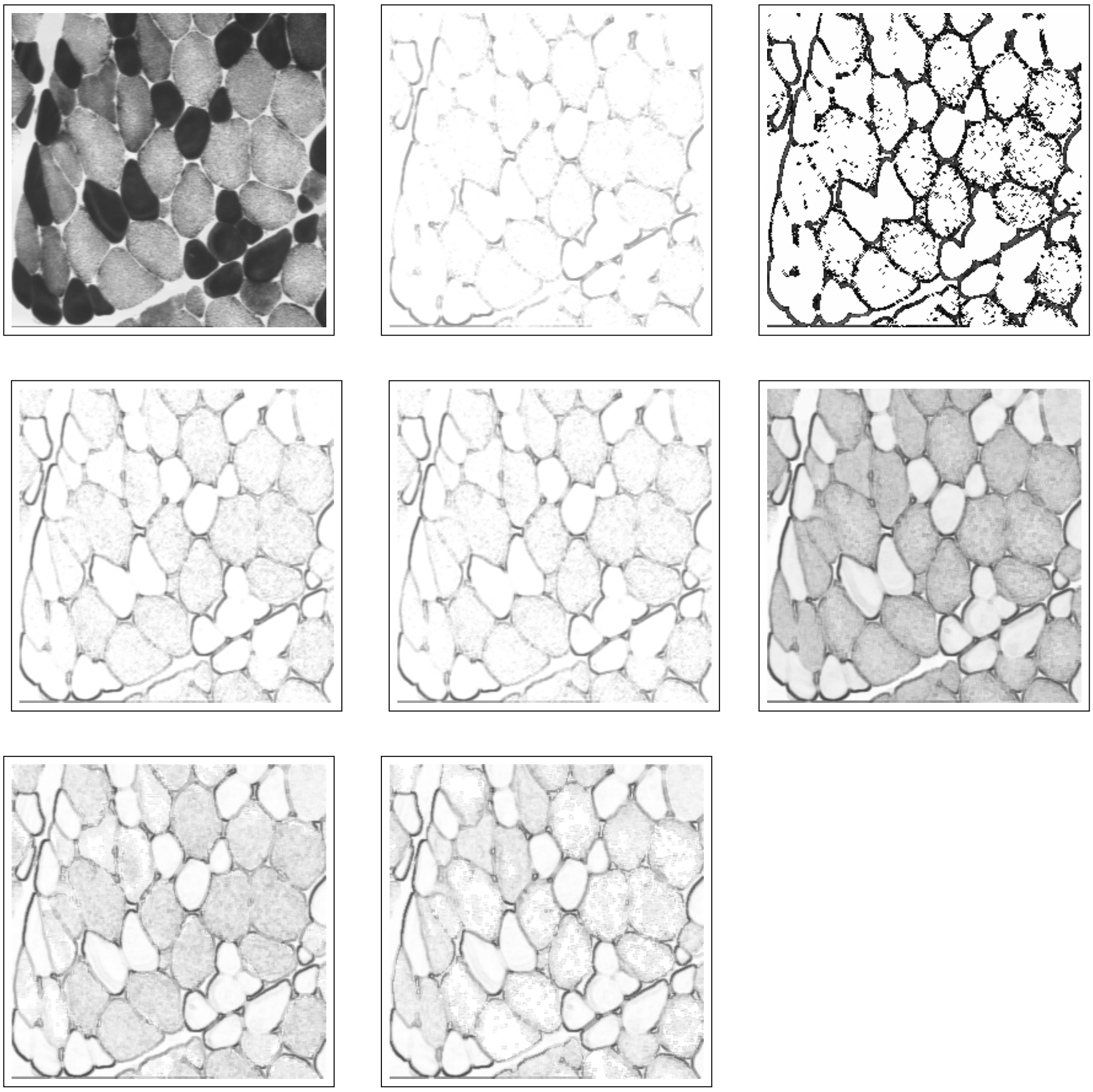

Figura 47. Imatges de contorn d'una imatge de cèl·lules d'un múscul (superior esquerre) per diverses morfologies matemàtiques, seguint l'esquema de la figura 44

La figura 48, correspon a una radiografia d'un maluc, en el qual hi ha hagut fractures, que es poden entreveure a la dreta. En aquest cas, els resultats són molt favorables als gradients de les uninormes. Tant al cas de les t-normes com al cas de l'enfocament umbra, no es poden distingir cap de les estructures que componen la imatge, i per tant no són útils per a un posterior anàlisi. En canvi, amb les uninormes es poden veure els contorns de les estructures òssies, fins i tot, observant-se la petita fractura superior.

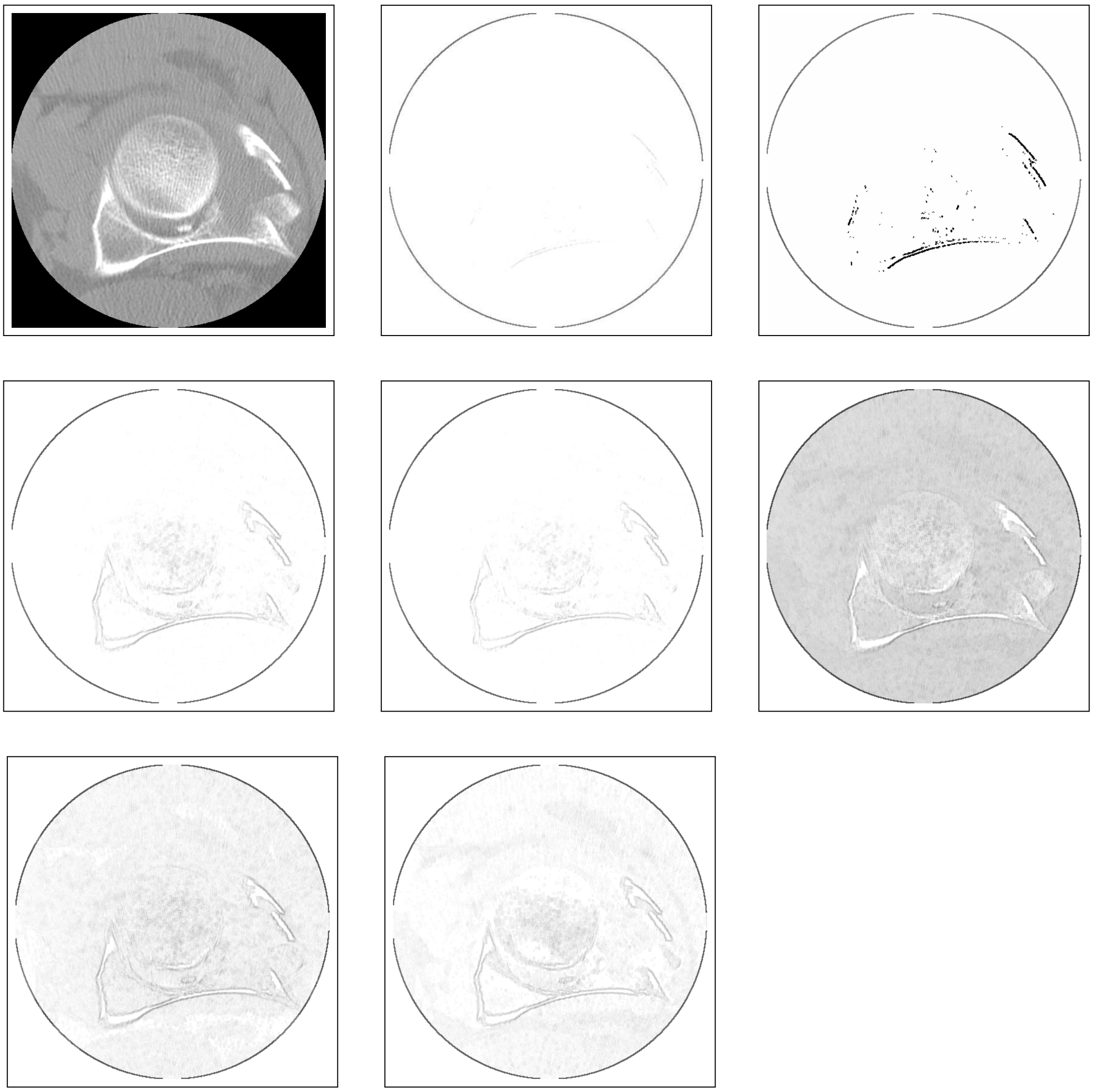

Figura 48. Imatges de contorn d'una imatge d'un maluc (superior esquerre), per diverses morfologies matemàtiques, seguint l'esquema de la figura 44

Per acabar, la figura 49 és d'un conjunt d'eritròcits. Aquí els resultats obtinguts amb les t-normes fan desaparèixer algunes estructures, i fins i tot no es detecten les formes completes de qualque eritròcit. En canvi, en al cas de l'enfocament umbra, podem observar tots els contorns dels eritròcits de la imatge, resultat semblant al gradient obtinguts amb les uninormes, que són considerablement millors que el de la t-norma.

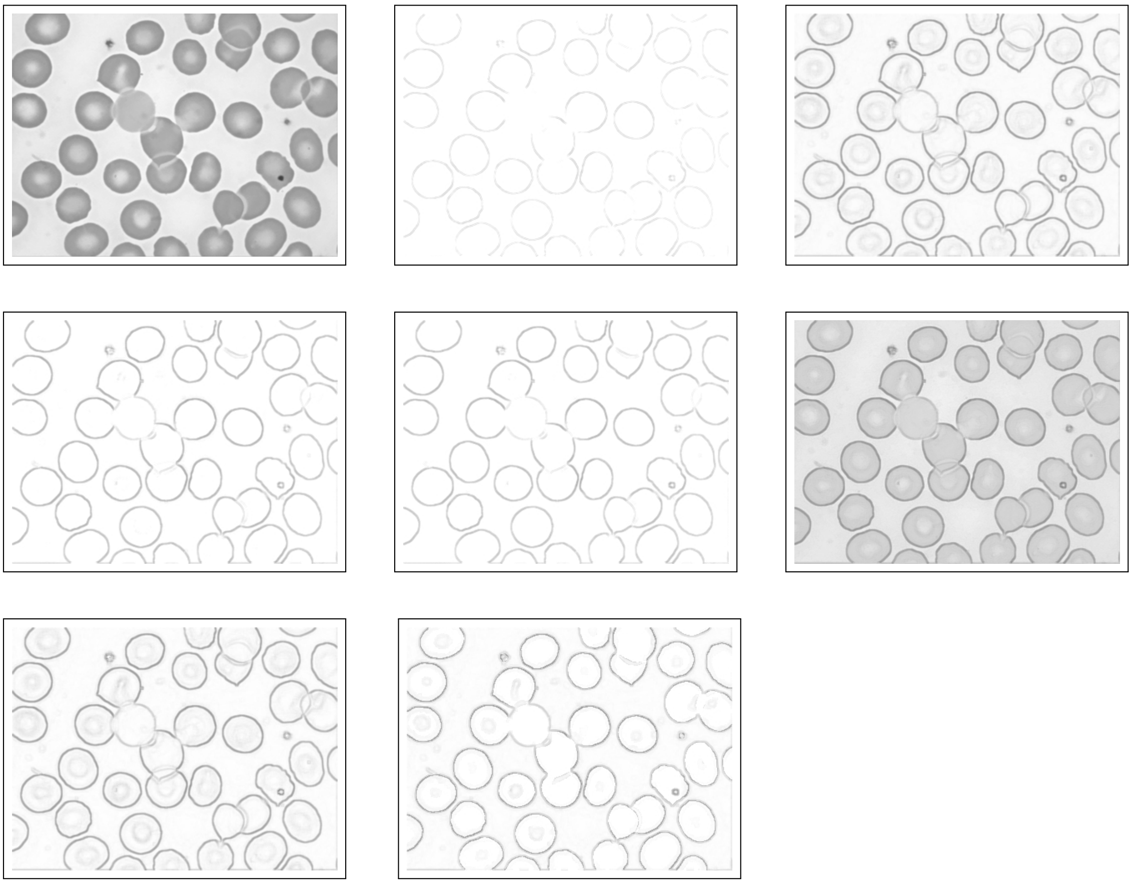

Figura 49. Gradients morfològics d'una imatge d'eritròcits (superior esquerre), per diverses morfologies matemàtiques, seguint l'esquema de la figura 44.

Una vegada visualitzats i estudiat aquests resultats experimentals, podem concloure que la morfologia matemàtica borrosa basada en uninormes idempotents i representables, es mostra inicialment com una bona eina per a la detecció de contorns, tot millorant l'enfocament presentat per a t-normes, i també millorant i en tot cas igualant les imatges de contorn obtingudes amb el cas clàssic. Aquests resultats ens permeten pensar que aquesta morfologia matemàtica borrosa pot ser una eina útil per a l'anàlisi i processament d'imatges.

5.7 CONCLUSIONS

Hem demostrat que és possible emprar uninormes conjuntives contínues per l'esquerra per poder construir una morfologia matemàtica borrosa que satisfà les mateixes propietats bàsiques que la morfologia matemàtica clàssica binària i en escala de grisos. Hem demostrat que les propietats necessàries per obtenir una "bona" morfologia se satisfan en qualsevol dels casos següents:

- Quan emprem una uninorma representable $U \equiv \langle h, e \rangle_{\text{rep}}$ i la seva negació associada

$$N_U(x) = h^{-1}(-h(x)).$$

- Quan emprem la uninorma idempotent contínua per l'esquerra $U \equiv \langle N, e \rangle_{\text{ide}}$ amb una negació forta qualsevol N.

En particular, emprant aquest tipus d'uninormes tenim dualitat i idempotència dels operadors morfològics borrosos, també tenim anti-extensivitat de l'obertura borrosa i extensivitat de la clausura borrosa. Les propietats algebraiques es corresponen amb el que la intuïció ens diu que han de tenir els efectes d'expansió, contracció i escalatge sobre una imatge. De fet, l'extensivitat expressa que una transformació expandeix un conjunt, mentre que l'anti-extensivitat formalitza la contracció. A més a més, totes aquestes propietats, juntament amb el creixement són les propietats matemàtiques necessàries per representar els filtres. Llavors, aquests resultats ens condueixen a la possibilitat de derivar filtres morfològics borrosos que tinguin les mateixes propietats que en la morfologia clàssica. Per una altra banda, per la proposició 5.3.14 se segueix que $D_U(A, B) \setminus E_{I_U}(A, B)$ ens servirà com una detecció de contorns de la imatge A (com un gradient morfològic borrós). Aquest gradient és el que hem implementat per diverses uninormes dels dos tipus esmentats, obtenint millores considerables respecte dels resultats emprant morfologia matemàtica clàssica (enfocament umbra) i la borrosa basada en t-normes.

També, per la proposició 5.3.8 i la proposició 5.3.9 es demostra que els operadors morfològics borrosos són invariants sobre translacions i escalatges. La invariància sobre translacions implica que les operacions morfològiques borroses són independents de l'elecció de l'origen, mentre que la invariància sobre escalatges significa que aquestes operacions són independents de l'escala emprada. Llavors, l'element estructurant només depèn de la seva forma i això es pot emprar per realitzar transformacions direccionals, que són útils en granulometria.

6 CONCLUSIONS I TREBALL FUTUR

En aquesta memòria s'ha fet un estudi en profunditat d'una sèrie de qüestions relacionades amb les uninormes, des d'una vessant més teòrica, i des d'una altra més aplicada.

En una primera part, dedicada a l'estudi de l'equació de distributivitat, s'ha resolt aquesta equació i d'altres relacionades, per a les classes d'uninormes conegudes. És el cas de la distributivitat condicional d'una uninorma sobre una t-conorma, problema obert proposat a l'any 2002, i d'importància en el camp de l'anàlisi no-estàndard i la teoria de la mesura. En la resolució d'aquesta equació s'han trobat una sèrie de solucions desconegudes fins al moment. Per completar aquest estudi s'han resolt la resta de possibilitats de distributivitat d'una t-norma o una t-conorma amb una uninorma. A continuació s'ha estudiat la distributivitat per al cas d'uninormes idempotents, tot obtenint una família de solucions, i s'ha resolt el problema de trobar parells distributius d'uninormes idempotents. Sorprenentment, aquests parells distributius satisfan a la vegada la propietat de modularitat. Seguint amb l'estudi de la distributivitat, s'ha resolt per a les diferents eleccions del primer operador, considerant-lo en les diferents classes conegudes d'uninormes. És de destacar que en la gran majoria de casos s'obtenen solucions no trivials (en les que el segon operador ha de ser el màxim o el mínim), fent que aquestes solucions siguin d'especial interès per a les seves aplicacions posteriors.

En una segona part, orientada a les funcions d'implicació definides a partir d'uninormes, s'han estudiat les implicacions fortes i les residuals. En la part d'implicacions fortes, es donen les expressions d'aquestes implicacions per a uninormes de $\mathcal{U}_{\cos}$ i, gràcies a l'estudi de la distributivitat fet a la primera part, s'ha pogut resoldre l'equació de distributivitat d'aquestes implicacions sobre uninormes conjuntives i disjuntives, equació important en el camp dels sistemes basats en regles borroses. S'han obtingut resultats importants, sobretot en el cas que s'involucri una implicació a partir d'una uninorma, sobre una t-norma i una t-conorma. En relació a aquesta equació funcional de distributivitat, també s'han resolt tres equacions de distributivitat semblants. Sobre les implicacions residuals, s'ha aconseguit estudiar les propietats bàsiques que satisfan les definides a partir d'uninormes idempotents, tot resolent quines d'aquestes implicacions satisfan el principi d'intercanvi i la contraposició. S'ha completat un estudi similar per a les uninormes de $\mathcal{U}_{\cos}$, i s'ha resolt l'equació de distributivitat, abans esmentada, per a aquestes implicacions. A l'igual que en les implicacions fortes, s'obtenen solucions d'implicacions residuals que satisfan la distributivitat sobre t-normes i t-conormes.

En la darrera part d'aquesta memòria, s'ha presentat una morfologia matemàtica borrosa basada en uninormes conjuntives contínues per l'esquerra, que es basa en estudis anteriors, fets per a t-normes i conjuncions. S'han descrit amb èxit les propietats que se satisfan amb aquesta morfologia, tot obtenint resultats favorables, pel que es pot considerar una *bona* morfologia, ja que se satisfan les propietats bàsiques que són certes per al cas clàssic, i que per a t-normes només són satisfetes per a t-normes nilpotents. Una d'aquestes propietats importants que es verifica és la llei d'idempotència generalitzada. Continuant amb aquest estudi, s'han fet una sèrie de primers estudis experimentals, dedicats a la implementació de l'obertura, clausura i gradients borrosos. L'estudi comparatiu dels resultats obtinguts amb la morfologia matemàtica borrosa basada en uninormes amb els enfocaments clàssics i a l'enfocament de t-normes, són tan favorables per a l'enfocament d'uninormes aquí presentat, que ens fan pensar que pot ser aplicada a l'anàlisi i processament d'imatges, i que es mereix un estudi en profunditat de totes les propietats que se satisfan.

Volem destacar que s'ha començat un estudi, juntament amb els professors B. De Baets i J. C. Fodor, per tal de compilar tots els resultats coneguts sobre uninormes, i donar així una imatge global d'aquests operadors. Fruit d'aquest treball ha estat introduir una nova notació, que esperem sigui estàndard, i que ha estat utilitzada en aquesta memòria, per primera vegada.

Per una altra banda, a partir dels resultats presentats en aquesta memòria, hi ha tota una sèrie de qüestions que poden ser interessants per avançar en l'estudi de les uninormes.

Sobre l'estudi teòric de la distributivitat i les implicacions, presentades als capítols 3 i 4, respectivament, podem distingir una sèrie de problemes per aprofundir en el coneixement de les implicacions:

- Estudiar l'equació de la distributivitat per a la classe d'uninormes recentment descrites, la classe de $\mathcal{U}_{\mathrm{mnx}}$, i per a la classe de $\mathcal{U}_{\mathrm{cts}}$, quan es publiqui la seva caracterització final.

- Estudiar les QL i D-implicacions a partir d'uninormes. Recentment s'ha començat aquest estudi a [72]. En aquest estudi, un punt a tractar seria resoldre la distributivitat presentada aquí 4.11 per aquest tipus d'implicacions.

- Sobre l'equació de distributivitat d'implicacions sobre uninormes, 4.11, resoldre-la totalment el cas en què la uninorma U amb la que es fa la implicació residual sigui idempotent.

- Estudiar les altres distributivitats (en el sentit del presentat a la secció 4.2.3) per a implicacions residuals.

- Caracteritzar les R i S-implicacions a partir d'uninormes. Molt recentment, a [12], encara sense publicar, s'ha presentat el treball on s'estudia aquest problema, pel cas de les S-implicacions.

Sobre el darrer capítol, de morfologia matemàtica borrosa, per continuar amb aquest estudi, es podrien destacar els punts següents:

- Interpretar l'equació de distributivitat per a la morfologia matemàtica aquí presentada, per poder obtenir millors resultats i propietats addicionals als ja coneguts per la morfologia matemàtica clàssica.

- Experimentació amb més imatges, tot explorant amb nous elements estructurants i diferents uninormes, amb elements neutres distints. Extreure d'aquest estudi algun tipus de regla que interpreti correctament l'efecte que té l'elecció d'aquests elements. Aquesta regla serviria per poder determinar per a quins casos és més convenient cada un d'ells.

- Comparació dels resultats experimentals amb els obtinguts per altres mètodes, ja siguin els de morfologia borrosa basada en t-normes, o bé en els basats en mètodes de morfologia clàssica; en línia amb el que s'ha presentat a la part d'experimentació del darrer capítol.

- Continuar amb l'estudi d'altres gradients i filtres morfològics bàsics, com per exemple el top-hat, filtres d'eliminació de renou, de suavitat, entre d'altres, i emprar-los en les diferents aplicacions que puguin sorgir dins de l'anàlisi d'imatges.

- En relació a aquests filtres, un aspecte interessant seria aïllar diferents parts d'una imatge, tot veient quines conclusions es poden treure de l'ús d'aquests operadors morfològics basats en uninormes.
- Obtenció de distàncies basades en els operadors morfològics, per aplicacions a la granulometria i a la segmentació d'imatges.
- Aplicar tot aquest estudi per poder construir operadors morfològics vàlids amb imatges en color, tot cercant quines propietats s'han de satisfer per obtenir una bona eina en l'anàlisi d'imatges en color.

BIBLIOGRAFIA

[1] J. Aczél. *Lectures on functional equations and their applications*. Academic Press, 1966. (Citat a les pàgines 2 i 9.)

[2] J. Aczél i C. Alsina. Characterization of some classes of quasilinear functions with applications to triangular norms and to synthesizing judgements. *Aequationes Mathemticae*, 25:313–315, 1982. (Citat a les pàgines 1 i 2.)

[3] J. Aczél i T.L. Saaty. Procedures for synthesizing ratio judgements. *Journal of Mathematical Psycology*, 27:93–102, 1983. (Citat a la pàgina 1.)

[4] C. Alsina. On a family of connectives for fuzzy sets. *Fuzzy Sets and Systems*, 16:231–235, 1985. (Citat a la pàgina 2.)

[5] C. Alsina, J.L. Castro i E. Trillas. On the characterization of S and R implications. Dins *Proceedings of sixth IFSA World Congress*, pàgines 317–319. São Paulo, Brasil, 1995. (Citat a la pàgina 132.)

[6] C. Alsina, M.J. Frank i B. Schweizer. *Associative functions. Triangular norms and copulas*. World Scientific Publishing Company, 2006. (Citat a les pàgines 3, 7, 8, 9, 10 i 25.)

[7] C. Alsina, G. Mayor, M.S. Tomás i J. Torrens. A characterization of a class of aggregation functions. *Fuzzy Sets and Systems*, 53:33–38, 1993. (Citat a la pàgina 2.)

[8] C. Alsina, G. Mayor, M.S. Tomás i J. Torrens. Subdistributive De Morgan triplets. *Serdica*, 9:258–266, 1993. (Citat a les pàgines 25 i 84.)

[9] C. Alsina i E. Trillas. On almost distributive Łukasiewicz triplets. *Fuzzy Sets and Systems*, 50:175–178, 1992. (Citat a les pàgines 25 i 84.)

[10] C. Alsina i E. Trillas. When (S, N)-implications are (T, T_1)-Conditional functions? *Fuzzy Sets and Systems*, 134:305–310, 2003. (Citat a la pàgina 4.)

[11] M. Baczyński. Residual implications revisited. Notes on the Smets-Magrez Theorem. *Fuzzy Sets and Systems*, 145:267–277, 2004. (Citat a la pàgina 4.)

[12] M. Baczyński i J. Balasubramaniam. (U,N)-implications and their characterizations. Dins *Proceedings of the EUSFLAT-07*. Ostrawa, Czech Republic, 2007. Pendent de publicació. (Citat a la pàgina 160.)

[13] J. Balasubramaniam i C.J.M. Rao. On the distributivity of implication operators over T and S norms. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 12:194–198, 2004. (Citat a les pàgines 4 i 98.)

[14] J.M. Benítez, J.L. Castro i I. Requena. Are artificial neural networks black boxes? *IEEE Transactions on Neural Networks*, 8:1156–1163, 1997. (Citat a les pàgines 1 i 2.)

[15] P. Benvenuti i R. Mesiar. Pseudo-arithmetical operations as a basis for the general measure and integration theory. *Information Sciences*, 160:1–11, 2004. (Citat a la pàgina 3.)

[16] C. Bertoluzza i V. Doldi. On the distributivity between t-norms and t-conorms. *Fuzzy Sets and Systems*, 142:85–104, 2004. (Citat a les pàgines 3, 25 i 84.)

[17] I. Bloch i H. Maître. Fuzzy mathematical morphologies: a comparative study. *Pattern Recognition*, 28:1341–1387, 1995. (Citat a les pàgines 5 i 133.)

[18] U. Bodenhofer. A unified framework of opening and closure operators with respect to arbitrary fuzzy relations. *Soft Computing*, 7:220–227, 2003. (Citat a les pàgines 134 i 142.)

[19] H. Bustince, P. Burillo i F. Soria. Automorphisms, negations and implication operators. *Fuzzy Sets and Systems*, 134:209–229, 2003. (Citat a les pàgines 4 i 103.)

[20] T. Calvo. *Contribución al estudio de ternas de De Morgan generalizadas*. Tesi Doctoral, Universidad Politécnica de Madrid, 1989. (Citat a les pàgines 25 i 84.)

[21] T. Calvo. On fuzzy quasi-implications. *The Journal of Fuzzy Mathematics*, 3:351–364, 1995. (Citat a la pàgina 4.)

[22] T. Calvo. On some solutions of the distributivity equation. *Fuzzy Sets and Systems*, 134:209–229, 1999. (Citat a les pàgines 3, 25 i 84.)

[23] T. Calvo i B. DeBaets. On the generalization of the absorption equation. *Journal of Fuzzy Mathematics*, 8:141–149, 2000. (Citat a les pàgines 2 i 3.)

[24] T. Calvo, B. DeBaets i J.C. Fodor. The functional equations of Frank and Alsina for uninorms and nullnorms. *Fuzzy Sets and Systems*, 120:385–394, 2001. (Citat a les pàgines 2 i 3.)

[25] T. Calvo, B. DeBaets i J.C. Fodor. Structure of uninorms with given continuous underlying t-norms and t-conorms. Dins E.P. Klement i R. Mesiar, editors, *Abstracts of 24th Linz Seminar on Fuzzy Sets*, pàgines 49–50. Linz, Austria, 2003. (Citat a la pàgina 18.)

[26] T. Calvo, G. Mayor i R. Mesiar, editors. *Aggregation operators. New trends and applications*, volum 97 de *Studies in Fuzziness and Soft Computing*. Physica-Verlag, Heidelberg, 2002. (Citat a la pàgina 1.)

[27] H.D. Cheng, X.H. Jiang i J. Wang. Color image segmentation: advances and prospects. *Pattern Recognition*, 34:2259–2281, 2000. (Citat a la pàgina 133.)

[28] W.E. Combs i J.E. Andrews. Combinatorial rule explosion eliminated by a fuzzy rule configuration. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 6:1–11, 1998. (Citat a les pàgines 4 i 132.)

[29] E. Czogala i J. Drewniak. Associative monotonic operations in fuzzy set theory. *Fuzzy Sets and Systems*, 12:249–269, 1984. (Citat a la pàgina 12.)

[30] B. DeBaets. Idempotent Closing and Opening Operations in Fuzzy Mathematical Morphology. Dins *Proceedings of ISUMA-NAFIPS'95*, pàgines 228–233. Maryland, USA, 1995. (Citat a la pàgina 134.)

[31] B. DeBaets. Model implicators and their characterization. Dins N. Steele, editor, *Proceedings of the First ICSC International Symposium on Fuzzy Logic*, pàgines A42–A49. ICSC Academic Press, Zrich, Switzerland, 1995. (Citat a la pàgina 4.)

[32] B. DeBaets, capítol Fuzzy morphology: a logical approach, pàgines 53–68. Kluwer Academic Publishers, *Uncertainty Analysis in Engineering and Sciences: Fuzzy Logic, Statistics, and Neural Network Approach*, 1997. (Citat a les pàgines 5, 133, 134, 136 i 138.)

[33] B. DeBaets. Uninorms: the known classes. Dins *Proc. Third International FLINS Workshop on Fuzzy Logic and Intelligent Technologies for Nuclear Science and Industry*, pàgines 411–427. World Scientific, Antwerp, Belgium, 1998. (Citat a la pàgina 2.)

[34] B. DeBaets. Idempotent uninorms. *European J. Oper. Res.*, 118:631–642, 1999. (Citat a les pàgines 2 i 14.)

[35] B. DeBaets, capítol Generalized idempotence in fuzzy mathematical morphology, pàgines 58–75. Springer-Verlag, Heidelberg, *Fuzzy techniques in image processing*, 2000. (Citat a les pàgines 5, 134, 141, 144 i 145.)

[36] B. DeBaets i J. Fodor. Van Melle's combining function in MYCIN is a representable uninorm: an alternative proof. *Fuzzy Sets and Systems*, 104:133–136, 1999. (Citat a la pàgina 2.)

[37] B. DeBaets i J.C. Fodor. On the structure of uninorms and their residual implicators. Dins *Proceedings of the 18th Linz Seminar on Fuzzy Set Theory*, pàgines 81–87. Linz, Austria, 1997. (Citat a les pàgines 90 i 91.)

[38] B. DeBaets i J.C. Fodor. Residual operators of representable uninorms. Dins H. J. Zimmermann, editor, *Proceedings of the Fifth European Congress on Intelligent Techniques and Soft Computing*, volum 1 de *ELITE*, pàgines 52–56. Aachen, Germany, 1997. (Citat a les pàgines 90, 100, 101, 102, 103 i 104.)

[39] B. DeBaets i J.C. Fodor. Residual operators of uninorms. *Soft Computing*, 3:89–100, 1999. (Citat a les pàgines 2, 4, 90, 108 i 136.)

[40] B. DeBaets, E.E. Kerre i M. Gupta. The fundamentals of fuzzy mathematical morfologies part I: basics concepts. *International J. of General Systems*, 23:155–171, 1995. (Citat a les pàgines 5 i 133.)

[41] B. DeBaets, E.E. Kerre i M. Gupta. The fundamentals of fuzzy mathematical morfologies part II: idempotence, convexity and decomposition. *International J. of General Systems*, 23:307–322, 1995. (Citat a les pàgines 5 i 133.)

[42] B. DeBaets, N. Kwasnikowska i E. Kerre. Fuzzy morphology based on uninorms. Dins *Proceedings of the seventh IFSA World Congress*, pàgines 215–220. Prague, 1997. (Citat a les pàgines 2, 133, 134 i 135.)

[43] B. DeBaets i R. Mesiar. Residual implicators of continuous t-norms. Dins *Proceedings of EUFIT'96*, pàgines 27–31. Aachen, Germany, 1996. (Citat a la pàgina 89.)

[44] B. DeBaets i R. Mesiar. Metrics and T-Equalities. *J. of Math. Anal. and App.*, 267:531–547, 2002. (Citat a la pàgina 136.)

[45] J. Dombi. Basic concepts for a theory of evaluation: The aggregative operator. *European Journal of Operational Research*, 10:282–293, 1981. (Citat a les pàgines 1 i 15.)

[46] P. Drygaś. Discussion of the structure of uninorms. *Kybernetika*, 41:213–226, 2005. (Citat a les pàgines 2 i 17.)

[47] J.J. Dujmovic. Weighted conjunctive and disjunctive means and their application in system evaluation. *Journal of the University of Belgrade*, pàgines 147–158, 1974. (Citat a la pàgina 1.)

[48] Q. Feng i Z. Bin. The distributive equation for idempotent uninorms and nullnorms. *Fuzzy Sets and Systems*, 155:446–458, 2005. (Citat a les pàgines 25 i 84.)

[49] J.C. Fodor. On fuzzy implication operators. *Fuzzy Sets and Systems*, 42:293–300, 1991. (Citat a la pàgina 4.)

[50] J.C. Fodor. Contrapositive symmetry on fuzzy implications. *Fuzzy Sets and Systems*, 69:141–156, 1995. (Citat a les pàgines 4 i 89.)

[51] J.C. Fodor i T. Calvo, capítol Aggregation Functions defined by t-norms and t-conorms, pàgines 36–48. Studies of Fuzziness. Physica Verlag, *Aggregation of evidence under fuzziness*, 1998. (Citat a la pàgina 2.)

[52] J.C. Fodor i M. Roubens. *Fuzzy preference modelling and multicriteria decision support*. System Theory, Knowledge Engineering and Problem Solving. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1994. (Citat a la pàgina 89.)

[53] J.C. Fodor, R.R. Yager i A. Rybalov. Structure of Uninorms. *Int. J. Uncertainty, Fuzziness, Knowledge-Based Systems*, 5:411–427, 1997. (Citat a les pàgines 2, 12, 15, 16 i 20.)

[54] M.J. Frank. On the simultaneous associativity of $F(x, y)$ and $x + y - F(x, y)$. *Aequationes Mathematicae*, 19:196–226, 1979. (Citat a la pàgina 2.)

[55] J.L. García-Lapresta i B. Llamazares. Majority decisions based on difference of votes. *Journal of Mathematical Economics*, 35:463–481, 2001. (Citat a la pàgina 1.)

[56] M. González, D. Ruiz-Aguilera i J. Torrens. Algebraic properties of fuzzy morphological operators based on uninorms. Dins *Artificial Intelligence Research and Development*, volum 100 de *Frontiers in Artificial Intelligence and Applications*, pàgines 27–38. IOS Press, Amsterdam, 2003. (Citat a les pàgines ix, 2, 134 i 135.)

[57] M. González, D. Ruiz-Aguilera i J. Torrens. Opening and Closing Operators in Fuzzy Morphology Using Conjunctive Uninorms. Dins *Posters of IPMU'2004, Tenth International Conference on Information Processing and Management of Uncertainty in Knowledge-Based Systems*, pàgines 13–14. Perugia, Italy, 2004. (Versió extesa: Technical Report DMI-UIB A-01-2004). (Citat a les pàgines ix i 134.)

[58] S. Hu i Z. Li. The structure of continuous uninorms. *Fuzzy Sets and Systems*, 124:43–52, 2001. (Citat a les pàgines 2, 16 i 32.)

[59] E.E. Kerre i M. Nachtegael, editors. *Fuzzy techniques in image processing*, volum 52 de *Studies in Fuzziness and Soft Computing*. Springer-Verlag, New York, 2000. (Citat a les pàgines 5, 133, 134 i 145.)

[60] E.P. Klement, R. Mesiar i E. Pap. On the relationship of associative compensatory operators to triangular norms and conorms. *Int. J. Uncertainty, Fuzziness, Knowledge-Based Systems*, 4:129–144, 1996. (Citat a les pàgines 16, 25 i 31.)

[61] E.P. Klement, R. Mesiar i E. Pap. Integration with respect to decomposable measures, based on a conditionally distributive semiring on the unit interval. *Int. J. Uncertainty, Fuzziness, Knowledge-Based Systems*, 8:701–717, 2000. (Citat a les pàgines 3, 25 i 85.)

[62] E.P. Klement, R. Mesiar i E. Pap. *Triangular norms*. Kluwer Academic Publishers, London, 2000. (Citat a les pàgines 2, 3, 7, 9, 10, 25, 27 i 39.)

[63] G.J. Klir i B. Yuan. *Fuzzy Sets and Fuzzy Logic: Theory and Applications*. Prentice Hall, 1995. (Citat a la pàgina 132.)

[64] C.H. Ling. Representation of associative functions. *Publ. Math. Debrecen*, 12:189–212, 1965. (Citat a la pàgina 9.)

[65] J. Martín, G. Mayor i J. Torrens. On locally internal monotonic operations. *Fuzzy Sets and Systems*, 137:27–42, 2003. (Citat a les pàgines 2 i 13.)

[66] M. Mas, G. Mayor i J. Torrens. t-operators. *Int. J. Uncertainty, Fuzziness, Knowledge-Based Systems*, 7:31–50, 1999. (Citat a la pàgina 2.)

[67] M. Mas, G. Mayor i J. Torrens. t-operators and uninorms on a finite totally ordered set. *International Journal of Intellygent Systems*, 14:909–922, 1999. (Citat a la pàgina 2.)

[68] M. Mas, G. Mayor i J. Torrens. The distributivity condition for uninorms and t-operators. *Fuzzy Sets and Systems*, 128:209–225, 2002. (Citat a les pàgines 2, 3, 25, 27, 42, 43, 75 i 84.)

[69] M. Mas, G. Mayor i J. Torrens. The modularity condition for uninorms and t-operators. *Fuzzy Sets and Systems*, 126:207–218, 2002. (Citat a les pàgines 2 i 3.)

[70] M. Mas, G. Mayor i J. Torrens. Corrigendum to "The distributivity condition for uninorms and t-operators" [Fuzzy Sets and Systems, 128 (2002) 209-225]. *Fuzzy Sets and Systems*, 153:297–299, 2005. (Citat a les pàgines 3, 25, 27, 75 i 84.)

[71] M. Mas, M. Monserrat i J. Torrens. QL-implications versus D-implications. *Kybernetika*, 42:351–366, 2006. (Citat a la pàgina 132.)

[72] M. Mas, M. Monserrat i J. Torrens. Two types of implications derived from uninorms. *Fuzzy Sets and Systems*, 2007. Acceptat. (Citat a les pàgines 132 i 160.)

[73] M. Mas, M. Monserrat, J. Torrens i E. Trillas. A survey on fuzzy implication functions. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 200x. Acceptat. (Citat a les pàgines 4 i 132.)

[74] G. Mayor i J. Torrens. On a family of t-norms. *Fuzzy Sets and Systems*, 41:161–166, 1991. (Citat a la pàgina 2.)

[75] M. Monserrat i J. Torrens. On the reversibility of uninorms and t-operators. *Fuzzy Sets and Systems*, 131:303–314, 2002. (Citat a la pàgina 2.)

[76] M. Nachtegael, D. Van der Weken, D. Van De Ville i E.E. Kerre, editors, volum 122 de *Studies in Fuzziness and Soft Computing*. Springer-Verlag, *Fuzzy filters for image processing*, 2003. (Citat a la pàgina 133.)

[77] M. Nachtegael i E.E. Kerre, volum 52 de *Studies in fuzziness and soft computing*, capítol Classical and fuzzy approaches towards mathematical morphology, pàgines 3–57. Springer-Verlag, Heidelberg, *Fuzzy techniques in image processing*, 2000. (Citat a les pàgines 5, 134, 137, 138, 147 i 148.)

[78] E. Pap, capítol Pseudo-additive measures and their applications, pàgines 1403–1468. Elsevier, Amsterdam, *Handbook of Measure Theory*, 2002. (Citat a les pàgines 2, 3, 25 i 85.)

[79] E. Pap i D. Vivona, capítol Aggregation principle in the theory of nonlinear PDE, pàgines 149–158. Physica-Verlag GmbH, Heidelberg, Germany, *Technologies for constructing intelligent systems: tools*, 2002. (Citat a les pàgines 3 i 25.)

[80] D. Pei. R_0 implication: characteristics and applications. *Fuzzy Sets and Systems*, 131:297–302, 2002. (Citat a la pàgina 4.)

[81] D. Ruiz-Aguilera i J. Torrens. Condición de modularidad para uninormas idempotentes. Dins *Actas de 11 Estylf*, pàgines 177–182. León, Spain, 2002. (Citat a la pàgina ix.)

[82] D. Ruiz-Aguilera i J. Torrens. Distributive idempotent uninorms. *Int. J. Uncertainty, Fuzziness, Knowledge-Based Systems*, 11:413–428, 2003. (Citat a la pàgina ix.)

[83] D. Ruiz-Aguilera i J. Torrens. Residual implications and co-implications from idempotent uninorms. Dins *Proceedings of AGOP-2003, International Summer School on Aggregation Operators and their applications*, pàgines 149–154. Alcalà de Henares, Espanya, 2003. Versió sel·lecionada per a una edició extesa a Kybernetika, [86]. (Citat a les pàgines ix i 136.)

[84] D. Ruiz-Aguilera i J. Torrens. Conditional distributivity for a uninorm and a continuous t-conorm. Dins *Proceedings of the Tenth International Conference IPMU-2004*, volum 2, pàgines 1075–1082. Perugia, Italy, 2004. (Citat a la pàgina ix.)

[85] D. Ruiz-Aguilera i J. Torrens. Distributive strong implications from uninorms. Dins *Proceedings of the AGOP-2005, International Summer School on Aggregation Operators and their applications*, pàgines 103–108. Lugano, Suïssa, 2004. Versió sel·lecionada per a una edició extesa a Kybernetika, [89]. (Citat a la pàgina ix.)

[86] D. Ruiz-Aguilera i J. Torrens. Residual implications and co-implications from idempotent uninorms. *Kybernetika*, 40:21–38, 2004. (Citat a les pàgines ix i 168.)

[87] D. Ruiz-Aguilera i J. Torrens. Distributive residual implications from uninorms. Dins *Proceedings of the Fourth Conference of the European Society for Fuzzy Logic and Technology (EUSFLAT 2005)*, volum 2, pàgines 369–374. Barcelona, 2005. (Citat a la pàgina ix.)

[88] D. Ruiz-Aguilera i J. Torrens. Distributivity and conditional distributivity of a uninorm and a continuous t-conorm. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 14:180–190, 2006. (Citat a la pàgina ix.)

[89] D. Ruiz-Aguilera i J. Torrens. Distributivity of strong implications over conjunctive and disjunctive uninorms. *Kybernetika*, 42:319–336, 2006. (Citat a les pàgines ix i 168.)

[90] D. Ruiz-Aguilera i J. Torrens. Strong implications from continuous uninorms. Dins *Proceedings of IPMU-06*, pàgines 635–642. Paris, 2006. (Citat a la pàgina ix.)

[91] D. Ruiz-Aguilera i J. Torrens. Distributivity of residual implications over conjunctive and disjunctive uninorms. *Fuzzy Sets and Systems*, 158:23–37, 2007. (Citat a la pàgina ix.)

[92] J. Serra. *Image analysis and mathematical morphology, vols. 1, 2*. Academic Press, London, 1982,1988. (Citat a les pàgines 5 i 133.)

[93] P. Smets i P. Magrez. Implication in fuzzy logic. *International Journal Approximation Reasoning*, 16:327–347, 1987. (Citat a la pàgina 4.)

[94] L. Stout. Open problems from the Linz2000 closing session. *Fuzzy Sets and Systems*, 138:83–84, 2003. (Citat a les pàgines 3 i 25.)

[95] E. Trillas i C. Alsina. On the law $[p \wedge q \to r] \equiv [(p \to r) \vee (q \to r)]$ in fuzzy logic. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 10:84–88, 2002. (Citat a les pàgines 4, 93, 98, 114, 116 i 132.)

[96] E. Trillas, C. Alsina i A. Pradera. On MPT-implication functions for fuzzy logic. *Rev. R. Acad. Cien. Serie A. Mat.*, 98:259–271, 2004. (Citat a la pàgina 4.)

[97] E. Trillas, C. Alsina, E. Renedo i A. Pradera. On contra-symmetry and MPT condicionality in Fuzzy Logic. *International Journal of Intelligent Systems*, 20:313–326, 2005. (Citat a la pàgina 4.)

[98] E. Trillas, C. del Campo i S. Cubillo. When QM-operators are implication functions and conditional fuzzy relations. *International Journal of Intelligent Systems*, 15:647–655, 2000. (Citat a la pàgina 4.)

[99] E. Trillas, M. Mas, M. Monserrat i J. Torrens. On the representation of fuzzy if then rules. *International Journal of Approximate Reasoning*, 200x. Sotmès. (Citat a la pàgina 132.)

[100] O. Watari, M.F. Kawaguchi i M. Miyakoshi. Uninorm based logic as an extension of substructural logics FL_e. Dins *Proceedings of IPMU-2006*, pàgines 460–465. 2006. (Citat a la pàgina 2.)

[101] R.R. Yager. On the aggregation of processing units in neural networks. Dins *Proceedings of 1st IEEE Int. Conference on Neural Networks*, volum 2, pàgines 927–933. San Diego, 1987. (Citat a les pàgines 1 i 2.)

[102] R.R. Yager. On ordered weighted averaging aggregation operators in multi-criteria decision making. *IEEE Trans. Systems Man Cybernetics*, 18:183–190, 1988. (Citat a la pàgina 1.)

[103] R.R. Yager. Fuzzy quotient operator. Dins *Proceedings of 4th Int. Conference on Information Proc. Management of Uncertainty*, pàgines 317–332. Palma de Mallorca, 1992. (Citat a la pàgina 1.)

[104] R.R. Yager. Uninorms in fuzzy systems modeling. *Fuzzy Sets and Systems*, 122:167–175, 2001. (Citat a la pàgina 2.)

[105] R.R. Yager. On some classes of implication operators and their role in approximate reasoning. *Information Sciences*, 163:193–216, 2004. (Citat a la pàgina 132.)

[106] R.R. Yager i A. Rybalov. Uninorm aggregation operators. *Fuzzy Sets and Systems*, 80:111–120, 1996. (Citat a les pàgines 2 i 10.)

[107] H.J. Zimmermann i P. Zysno. Latent connectives in human decision making. *Fuzzy Sets and Systems*, 4:37–51, 1980. (Citat a les pàgines 1, 3 i 84.)