

ADVERTIMENT. L'accés als continguts d'aquesta tesi doctoral i la seva utilització ha de respectar els drets de la persona autora. Pot ser utilitzada per a consulta o estudi personal, així com en activitats o materials d'investigació i docència en els termes establerts a l'art. 32 del Text Refós de la Llei de Propietat Intel·lectual (RDL 1/1996). Per altres utilitzacions es requereix l'autorització prèvia i expressa de la persona autora. En qualsevol cas, en la utilització dels seus continguts caldrà indicar de forma clara el nom i cognoms de la persona autora i el títol de la tesi doctoral. No s'autoritza la seva reproducció o altres formes d'explotació efectuades amb finalitats de lucre ni la seva comunicació pública des d'un lloc aliè al servei TDX. Tampoc s'autoritza la presentació del seu contingut en una finestra o marc aliè a TDX (framing). Aquesta reserva de drets afecta tant als continguts de la tesi com als seus resums i índexs.

ADVERTENCIA. El acceso a los contenidos de esta tesis doctoral y su utilización debe respetar los derechos de la persona autora. Puede ser utilizada para consulta o estudio personal, así como en actividades o materiales de investigación y docencia en los términos establecidos en el art. 32 del Texto Refundido de la Ley de Propiedad Intelectual (RDL 1/1996). Para otros usos se requiere la autorización previa y expresa de la persona autora. En cualquier caso, en la utilización de sus contenidos se deberá indicar de forma clara el nombre y apellidos de la persona autora y el título de la tesis doctoral. No se autoriza su reproducción u otras formas de explotación efectuadas con fines lucrativos ni su comunicación pública desde un sitio ajeno al servicio TDR. Tampoco se autoriza la presentación de su contenido en una ventana o marco ajeno a TDR (framing). Esta reserva de derechos afecta tanto al contenido de la tesis como a sus resúmenes e índices.

WARNING. Access to the contents of this doctoral thesis and its use must respect the rights of the author. It can be used for reference or private study, as well as research and learning activities or materials in the terms established by the 32nd article of the Spanish Consolidated Copyright Act (RDL 1/1996). Express and previous authorization of the author is required for any other uses. In any case, when using its content, full name of the author and title of the thesis must be clearly indicated. Reproduction or other forms of for profit use or public communication from outside TDX service is not allowed. Presentation of its content in a window or frame external to TDX (framing) is not authorized either. These rights affect both the content of the thesis and its abstracts and indexes.

UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE CATALUÑA

Programa de Doctorado:

AUTOMATIZACIÓN AVANZADA Y ROBÓTICA

Tesis Doctoral

**Planificación de Movimientos en Entornos
Dinámicos o Inciertos Mediante la
Coordinación de Métodos Aleatorios de
Búsqueda y Funciones Armónicas**

Pedro Iñiguez Galbete

Director: Jan Rosell Gratacòs

Instituto de Organización y Control de Sistemas Industriales

Febrero del 2012

Resumen

En los métodos planificadores de trayectorias basados en funciones potenciales, la utilización de las funciones armónicas tiene la importante propiedad de no presentar mínimos locales. Sin embargo, la creación de planificadores basados en estas funciones armónicas se ha encontrado con serias dificultades, sobre todo cuando el número de grados de libertad es elevado.

Por este motivo, esta tesis realiza inicialmente un estudio de las propiedades más relevantes de dichas funciones armónicas; destacando aquellas que han sido la causa de su reducida aplicación en la generación de trayectorias. Al mismo tiempo, el resultado de este estudio sirve de base para la proposición de métodos compensatorios que permitan reducir las propiedades negativas de las funciones armónicas, como funciones potenciales aplicables a la generación de movimientos en robótica.

Después se considera los métodos numéricos de cálculo de las funciones armónicas, así como el coste computacional de los mismos. Con el objetivo de reducir el tiempo de cálculo, esta tesis propone una discretización jerárquica y un método eficiente de etiquetado de celdas. Por su parte, dicha discretización jerárquica, se va realizando progresivamente mediante muestreo aleatorio y descomposición de celdas, lo que genera un escenario parcialmente conocido que, sin embargo, permitirá en cierto número de casos encontrar la trayectoria buscada. Por lo tanto, esta propuesta reduce drásticamente el número de puntos de cálculo y, por consiguiente, el tiempo de computación.

La tesis completa la propuesta de un planificador combinando las técnicas de muestreo con el cálculo de funciones armónicas mediante un método de exploración aleatorio conducido (PHM), aplicado a un espacio de configuraciones discretizado jerárquicamente sobre el que se va recalculando la función armónica. De esta forma la exploración se guía hacia zonas más prometedoras, intentando obtener la solución por fases.

Índice general

1. Introducción	1
1.1. Marco	2
1.2. Antecedentes	3
1.2.1. Espacio de Configuraciones	3
1.2.1.1. Cálculo del espacio de configuraciones	3
1.2.1.2. Discretización y descomposición en celdas	5
1.2.1.3. Muestreo del espacio de configuraciones	6
1.2.2. Planificación de movimientos	7
1.2.2.1. Métodos completos	7
1.2.2.2. Métodos basados en muestreo	9
1.2.2.3. Métodos para entornos dinámicos	11
1.3. Objetivos	11
2. Planificación con funciones potenciales armónicas, subarmónicas y superarmónicas	15
2.1. Introducción	16
2.2. Propiedades afines a la generación de funciones potenciales para la planificación de movimientos en robótica	18
2.2.1. Ausencia de mínimos locales	19
2.2.1.1. Análisis en dos dimensiones	19
2.2.1.2. Análisis en n dimensiones	22
2.2.2. Concavidad, convexidad de las funciones subarmónicas y superarmónicas	24
2.2.3. Líneas de corriente y superficies equipotenciales	25
2.2.4. Superposición lineal	26
2.2.5. Curvatura de las funciones armónicas	26
2.2.6. Estabilidad de la solución	27
2.3. Problemática inherente al método	27
2.3.1. Efecto embudo y funciones armónicas	27
2.3.2. Condiciones de contorno, condiciones de solubilidad y balance global del flujo del gradiente	29
2.4. Cálculo analítico y obtención numérica de soluciones	31
2.4.1. Modelo base. Análisis de la influencia de las condiciones de contorno mediante las Funciones de Green	32
2.4.2. Obtención de soluciones mediante cálculo numérico	33
2.5. Aportación	34

3. Alternativas de moldeo de las funciones armónicas para su uso en la planificación de movimientos	37
3.1. Modelo genérico	38
3.2. Condiciones de contorno de Dirichlet. Obtención de la función de Green mediante el método de las cargas imágenes, aplicado a funciones de dos variables	39
3.2.1. Función de Green para todo el espacio	39
3.2.2. Ejemplos basados en condiciones de contorno homogéneas: Rectángulo y circunferencias obstáculo	40
3.2.3. Contorno infinito, función delta y obstáculo circular	46
3.3. Moldeo de la función potencial mediante la aplicación de condiciones de contorno no uniformes de Dirichlet	49
3.3.1. Dominio en forma de franja	49
3.3.2. Condiciones de contorno proporcional con la distancia sobre el contorno de un obstáculo circular	52
3.4. Moldeo de la función potencial mediante el uso de condiciones de contorno mixtas	52
3.4.1. Obtención de la función de Green utilizando las series de Fourier	52
3.4.2. Propuesta de moldeo	54
3.5. Moldeo de la función potencial mediante la utilización de las funciones superarmónicas y subarmónicas	54
3.5.1. Contorno infinito, función delta y obstáculo circular	54
3.5.2. Contorno infinito, función delta, obstáculos y parche en torno del punto objetivo.	57
3.5.3. Modelización de los obstáculos mediante coronas circulares.	60
3.6. Aportación	64
4. Planificación de movimientos en entornos dinámicos y cambiantes	65
4.1. Estudio analítico para condiciones iniciales y función obstáculo	65
4.2. Control de la configuración y de la trayectoria de un robot en un entorno con obstáculos móviles.	69
4.3. Distribución espacial del cambio de la función potencial debido a un cambio local	71
4.4. Aportación	77
5. Cálculo numérico de las funciones armónicas, superarmónicas y subarmónicas	79
5.1. Discretización uniforme	80
5.1.1. Ecuación en diferencias	80
5.1.2. Condiciones de contorno de Dirichlet y de Neuman	82
5.1.3. Métodos iterativos	83
5.1.3.1. Método iterativo de Jacobi	84
5.1.3.2. Método iterativo de Gaus-Seidel	85

5.1.3.3.	Método iterativo S.O.R. (Sucesive Over Relaxation)	86
5.1.4.	Cálculo en multirresolución	88
5.2.	Discretización jerárquica adaptativa	90
5.2.1.	Esquema numérico de identificación de celdas	91
5.3.	Multirresolución Jerárquica Adaptativa	93
5.3.1.	Interpolación	95
5.3.2.	Mapeado	96
5.3.3.	Algoritmos	97
5.3.3.1.	Algoritmo de cálculo de la función potencial armónica del C-espacio	97
5.3.3.2.	Algoritmo de obtención de la trayectoria	98
5.4.	Obtención de resultados	100
5.5.	Aportación	104
6.	Uso de las funciones armónicas en espacios de configuraciones explorados mediante técnicas de muestreo	105
6.1.	Planificador PHM básico	106
6.1.1.	Selección aleatoria de una celda ponderada por su tamaño: sorteo para la exploración de celdas	107
6.1.2.	Verificación y clasificación de celdas	109
6.1.3.	Algoritmo del planificador de trayectorias. Exploración pasiva de trayectorias	110
6.1.4.	Estudio de la completitud del método propuesto	112
6.1.4.1.	Modelo de población de celdas en G	113
6.1.4.2.	Probabilidad de selección condicionada por el tamaño de las celdas	115
6.1.4.3.	Probabilidad de fallo	116
6.1.4.4.	Validación	117
6.2.	Alternativas de mejora del método básico	118
6.2.1.	Exclusión de celdas del sorteo de exploración	118
6.2.2.	Exploración pasiva de trayectorias: Puntos de Apoyo y Función Potencial Auxiliar	119
6.2.3.	Resolución máxima ajustable	120
6.2.4.	Aplicación de condiciones de contorno de Neuman en los obstáculos	120
6.3.	Algoritmo del planificador PHM avanzado	121
6.4.	Exploración basada en la detección de colisión: Planificador PHM color	124
6.4.1.	Secuencia determinista de muestreo	125
6.4.2.	Clasificación probabilística de celdas	125
6.4.3.	Muestreo de celdas	127
6.4.4.	Algoritmo del planificador PHM color	129
6.5.	Reducción del tiempo de computación respecto de una discretización uniforme	131
6.6.	Aportación	131

7. Conclusiones	133
7.1. Publicaciones realizadas con el desarrollo de la tesis	134
7.2. Trabajos futuros	135
A. Demostraciones	137
A.1. Principio de localidad de una función	137
A.2. Área e integración de una hiperesfera	140
A.3. Propiedades de las funciones armónicas, superarmónicas y subarmónicas	143
A.3.1. Concavidad, convexidad de las funciones armónicas y superarmónicas	143
A.3.2. Curvatura y optimización de las trayectorias obtenidas con funciones armónicas	146
A.3.3. Condiciones de contorno de Dirichlet	148
A.3.4. Condiciones de contorno de Neuman	150
A.3.5. Condiciones de contorno mixtas (Robin o de radiación)	150
A.3.6. Estabilidad de la solución	151
A.4. Teorema de Green	152
A.5. Métodos iterativos	153
A.5.1. Método iterativo de Jacobi	153
A.5.2. Método iterativo de Gaus-Seidel	157
A.5.3. Método iterativo S.O.R	159
A.5.4. Método iterativo ponderado de Jacobi	161

Capítulo 1

Introducción

El término robótica introducido por Isaac Asimov corresponde a un concepto idealizado que supera las pragmáticas y estandarizadas definiciones, en las cuales un robot industrial es un manipulador que funciona más como una máquina repetitiva que como un sistema versátil e inteligente.

El desarrollo tecnológico de la micro electrónica y la micro informática junto con el avance en disciplinas tales como la visión artificial, elementos hápticos, integración sensorial e inteligencia artificial han permitido progresar y crear nuevas aplicaciones en robótica médica, robótica móvil, robots humanoides y microrrobótica.

Por otro lado, la necesidad de disponer de robots industriales más versátiles y autónomos que permitan operaciones de ensamblado complejas, ha impulsado la investigación y desarrollo de subsistemas inteligentes generadores de secuencias y de las trayectorias de configuraciones correspondientes: Se precisa programar a nivel de tarea y no a nivel de movimientos elementales, ahorrar tiempo de programación y realizar aplicaciones para entornos cambiantes e imprecisos.

Al mismo tiempo, las nuevas metodologías y técnicas desarrolladas permiten un nuevo enfoque en otras disciplinas, ofreciendo nuevas posibilidades en el análisis y diseño, y extendiendo el concepto de robótica hacia una idea más global.

Genéricamente, un robot es un cuerpo móvil que interacciona con otros dentro de un espacio físico. Puede estar formado por uno o varios elementos, ligados o fijos, rígidos o flexibles; pudiendo concretarse desde una pieza para ensamblar hasta un robot manipulador industrial.

En un sentido amplio, un sistema robotizado autónomo, compuesto por uno o varios brazos manipuladores, ha de ser capaz de realizar diversas operaciones previamente definidas, para lo cual necesita un sistema inteligente constituido por varios subsistemas interrelacionados jerárquicamente (figura 1.1): el Planificador de tareas, el Planificador de movimientos y el Generador de trayectorias.

Este trabajo se centra en el Planificador de movimientos y desarrolla un método nuevo denominado Probabilistic Harmonic function based Method; el cual mejora la eficiencia temporal de computación respecto de los métodos de campo de potencial que utilizan las funciones armónicas, presentando un

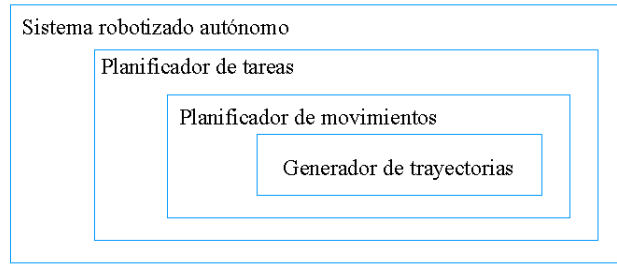


Figura 1.1: Jerarquía de funciones en un sistema robotizado.

comportamiento completo; probabilísticamente y en resolución.

1.1. Marco

En un Sistema robotizado autónomo, el subsistema Planificador de trayectorias está supeditado, jerárquicamente, al subsistema Planificador de tareas; el cual convierte un objetivo global en operaciones elementales de desplazamiento, ensamblado, mecanizado y otros.

El subsistema Planificador de movimientos debe ser capaz de generar la trayectoria entre una configuración inicial y otra final, automáticamente, sin colisiones con los objetos del entorno pero con posibles desplazamientos correctivos y contactos adaptativos de ensamblado. Esta función debe realizarse con eficiencia temporal y de forma completa; es decir, si existe una solución debe encontrarla en un tiempo mínimo y si no, debe indicar la imposibilidad del movimiento. Por su parte, el Generador de trayectorias determina la velocidades de los movimientos para cada una de las variables o articulaciones.

Los movimientos desarrollados por el robot en la ejecución de una tarea se clasifican en: movimientos gruesos de acercamiento o aproximación, en los cuales no está permitido ningún contacto con los obstáculos, (gross-motion planning) y movimientos finos (fine-motion planning) donde los contactos de acomodación mediante el control de fuerzas, en la consecución de operaciones de ensamblado, son parte esencial y donde la incertidumbre constituye un problema central.

Generalmente la planificación de movimientos se realiza en el espacio de configuraciones, donde la parametrización del robot permite representar una configuración del mismo en un punto, pudiendo ser libre o de colisión; de forma que todos los puntos libres definen el subespacio libre y todos los puntos de colisión el subespacio obstáculo. Dichos subespacios constituyen el entorno sobre el cual se planificarán los movimientos. En algunos casos sencillos de robots móviles desplazándose en el plano y algunos manipuladores, se realiza la planificación de movimientos directamente sobre el espacio físico.

1.2. Antecedentes

El estudio del estado del arte se realiza considerando que la planificación de movimientos en robótica puede separarse en dos etapas [68]:

1. Determinar el espacio de configuraciones del robot.
2. Encontrar la trayectoria libre de colisiones entre un punto inicial y otro final.

1.2.1. Espacio de Configuraciones

En robótica la planificación de movimientos se realiza usualmente en el espacio de configuraciones [68] (C-space), donde la configuración del robot se transforma en un punto mediante la parametrización de la posición o configuración física del robot, esta importante propiedad reduce un movimiento en el espacio físico a una línea en el espacio de configuraciones. El número de dimensiones del espacio de configuraciones coincide con el número de grados de libertad del robot. Así, un cuerpo rígido en el espacio 3D tiene seis grados de libertad (tres de posición y tres de orientación), por lo que el espacio de configuraciones correspondiente será de seis dimensiones y si se disponen de n cuerpos será de $6n$. También, el espacio de configuraciones correspondiente a un manipulador, formado por una cadena de n cuerpos rígidos ligados por n articulaciones, dispone de n dimensiones y una determinada configuración del mismo se transforma en un punto definido por n coordenadas [62]. En general, en el espacio físico de trabajo tendremos un número determinado de cuerpos cuyas posiciones pueden ser libres, en contacto o prohibidas, de manera que se transforman en el espacio de configuraciones en C-obstáculos cuyos contornos definen las superficies de contactos, la zona interior será prohibida y la exterior libre. La determinación del espacio de configuraciones no es trivial [22] y ha sido motivo de investigación durante las últimas décadas. La dificultad de transformación depende del número de dimensiones, de si los objetos son convexos o cóncavos y del número de vértices de los mismos, asumiendo que son poliédricos. Previamente a la obtención del espacio de configuraciones es necesario modelar los objetos existentes en el espacio de trabajo, Wise y Bowyer [94] clasifican las posibles estrategias en la obtención del espacio de configuraciones en función de la precisión en el modelado de los objetos y en la precisión de desarrollo del espacio de configuraciones.

1.2.1.1. Cálculo del espacio de configuraciones

Se han presentado varios métodos para computar el espacio de configuraciones [94]:

Computación analítica de las Superficies de Contacto: La obtención de expresiones que definan analíticamente las superficies de contacto es especialmente necesaria en movimientos de precisión; donde es preciso controlar movimientos de acomodación en contacto para la consecución de operaciones de ensamblado. Para ello es fundamental la clasificación de contactos

básicos realizada por Lozano-Pérez [68], las condiciones algebraicas de los mismos, en un determinado rango, definen las superficies de contacto simple. La intersección de estas superficies determina las aristas de contacto doble y la intersección de tres aristas un punto de contacto triple. Lozano-Pérez en [70] realiza una discretización de las variables generalizadas, con proyecciones recursivas hasta reducir el problema a dos dimensiones donde un objeto libre se desliza en contacto sobre el contorno poligonal del obstáculo. Para este caso Brost [17] describe un algoritmo que computa el espacio de configuraciones con una descripción topológica de las superficies de los C-obstáculos. Rosell, Basañez y Suárez [86] construyen el espacio de configuraciones para el caso de un polígono móvil 2D con desplazamiento y rotación, en contacto con otro polígono fijo. Las superficies 3D desarrolladas en el espacio de configuraciones se proyectan sobre el plano desplazamiento, reduciendo una dimensión y facilitando su utilización en la planificación de movimientos para ensamblaje en 2D. Hwang [46] describe un método para obtener las ecuaciones de los bordes de los obstáculos en el espacio de configuraciones basado en la aproximación de los obstáculos como poliedros de caras triangulares y los elementos del brazo manipulador como segmentos, la intersección de estos dos elementos define una ecuación de la que se obtiene las expresiones analíticas correspondientes. Maciejewski [71] realiza la computación analítica solo de los bordes de aquellos obstáculos cuya colisión es posible y determina las tangentes de las curvas, lo cual ayuda al conocimiento topológico del espacio de configuraciones. La complejidad depende del número de vértices de obstáculos y del número de grados de libertad, si se trata de un robot sólido que se desliza y gira o se trata de un brazo manipulador en 3D.

Construcción del mapa de bits del espacio de configuraciones:

Los obstáculos y espacio libre son representados en un mapa de bits por unos y ceros respectivamente, lo cual reduce drásticamente el tiempo de comprobación de colisión. Este mapa de bits puede ser obtenido discretizando las expresiones analíticas de los procedimientos anteriores, o bien observando que, cuando el robot es un objeto rígido con movimiento de translación, el espacio de configuraciones es la convolución entre el espacio de trabajo y los obstáculos. Kavraki propone en [50] el uso de la Transformada Rápida de Fourier para computar esta convolución en el caso de un robot móvil y Curto y Moreno [29] generalizan este método para el caso de robots manipuladores. Lozano-Pérez [68] muestra para el caso de un robot móvil con desplazamiento sin rotación, la obtención de los C-obstáculos por el crecimiento del perfil de los obstáculos añadiendo el del robot en contacto con el contorno, usando la suma Minkowski. Newman y Branicky [82] identifican formas elementales de objetos, en el espacio de trabajo, que son fácilmente transformables al espacio de configuraciones. Estas transformaciones de formas elementales son memorizadas como mapa de bits y combinadas para la obtención de formas más complejas. El tiempo de computación del mapa de bits, así como la memoria requerida, son función de su tamaño y resolución. Así, en canales estrechos y formas complicadas se requiere una resolución elevada y, si el número de grados de libertad es también elevado, el tiempo de computación y la memoria de almacenamiento de variables crecerán exponencialmente.

1.2.1.2. Discretización y descomposición en celdas

Son dos métodos conceptualmente distintos utilizados con fines distintos: mientras que una discretización es una cuantificación realizada con la finalidad de realizar cálculos numéricos de funciones, la descomposición en celdas es una partición conexa de regiones a las que se le hace corresponder un grafo.

La discretización puede ser regular o no regular. Si queremos un conocimiento exhaustivo del espacio de configuraciones deberemos de realizar una discretización del mismo con un paso igual o menor a la precisión requerida. Utilizando el método 2^n -tree ([102], [23], [43] y [47]) obtendremos una discretización no uniforme y jerarquizada, que se adapta a los contornos de los obstáculos con las celdillas de mayor resolución; utiliza celdas gruesas en el espacio libre y sólido de los obstáculos, reduciendo el número de puntos para el cálculo. Esta discretización jerarquizada genera celdas contenidas en el espacio libre (blancas), celdas contenidas en el interior del obstáculo (negras) y celdas que contienen el borde del obstáculo (grises), las cuales son susceptibles de ser nuevamente particionadas por el procedimiento 2^n -tree

Blanco et al [9] presentan un algoritmo que evalúa el espacio de configuraciones de un robot móvil con dos grados de libertad. Se basa en la convolución discreta del espacio de trabajo y el robot, la cual se realiza sobre una partición jerárquica quad-tree, empezando por el nivel más bajo hasta llegar a la máxima resolución. En cada paso se determina una ventana que contiene obstáculo, lo que reduce el número de puntos para el cálculo. La reducción de memoria y tiempo de cómputo es mayor cuanto menor es el número de obstáculos.

La descomposición en celdas puede ser exacta o aproximada según su unión coincida exactamente con el espacio libre o esté contenida en él. La descomposición exacta se realiza mediante celdas no solapadas y definidas por puntos significativos de los C-obstáculos. Si el espacio de configuraciones es de dos dimensiones y los C-obstáculos son polígonos, las celdas serán triángulos, rectángulos o trapecios con sus vértices coincidentes con los vértices de los C-obstáculos. Similarmente se procede para el caso de un espacio de configuraciones 3D, apareciendo en este caso celdas de formas más complejas.

La descomposición aproximada deja una cierta cantidad de espacio libre sin adjudicación de celda, por lo que los métodos planificadores basados en esta descomposición no son completos; es decir, es posible que no encuentren una trayectoria a pesar de que esta exista. Por este motivo muchos métodos de descomposición aproximada utilizan celdas de tamaño sucesivamente adaptable a los contornos de los C-obstáculos. Kambhampati y Davis [48] utilizan una descomposición en multiresolución.

También en la descomposición aproximada el método es ampliamente utilizado. Obtendremos una partición en celdas de resolución adaptable a los contornos de los obstáculos. Esta partición jerarquizada permite un etiquetado de celdas relacionadas por niveles; lo que facilita la formación del árbol de búsqueda correspondiente. Así, Harabor y Botea en [42] realizan una partición del espacio libre en celdas de diferentes tamaños que, interconectadas

transversalmente, constituyen un grafo de agentes de tamaños heterogéneos. Un algoritmo de búsqueda sobre dicho grafo obtendrá la trayectoria deseada. También Zhu y Latombe en [103] consideran la descomposición jerárquica, de celdas aproximadas, del espacio de configuraciones. Con dichas celdas obtienen el grafo de conectividad del espacio libre. Entonces diseñan nuevo algoritmo de búsqueda jerárquica, con un mecanismo para el registro de las condiciones de fallo.

Por su parte, Cai y Ferrari en [19] desarrollan un método de descomposición aproximada de celdas; en el que los obstáculos, los objetivos y la plataforma de sensores están representados como subconjuntos cerrados y acotados, en un espacio de trabajo euclídeo. El método construye un grafo de conectividad con las celdas, que se poda y se transforma en un árbol en el que se puede calcular una estrategia óptima de búsqueda.

- En los métodos jerárquicos de partición son fundamentales aquellas funciones detectoras de colisión que determinan la distancia mínima a los obstáculos [65], [92]. En algunos casos de particiones jerárquicas, sobre las que se calcula una función potencial, es importante poder disponer de una función detectora de colisión que nos reporte también la distancia de penetración para los casos de colisión. Tanto la distancia mínima al obstáculo como la distancia de penetración se computan en el espacio físico, por lo que deben de transformarse al espacio de configuraciones.

1.2.1.3. Muestreo del espacio de configuraciones

La eficiencia computacional de las funciones detectoras de colisión dan pie al enfoque basado en muestreo. Siguiendo una estrategia: aleatoria, determinista o combinación de ambas se exploran una serie de puntos del espacio de configuraciones y con la información obtenida, de colisión o libertad, de estos puntos es posible plantear métodos algorítmicos que deduzcan trayectorias libres de colisión.

Cuando el número de grados de libertad es elevado el tiempo de computación empleado en el cálculo de las superficies de contacto, la obtención del mapa de bits del espacio de configuraciones o la discretización del mismo, es también muy elevado. Por otro lado, no es necesario tener un conocimiento completo del espacio de configuraciones para obtener una trayectoria de movimiento, libre de colisiones, entre dos puntos. Simplemente con el conocimiento de un determinado número de puntos libres y de obstáculo es posible obtener, en determinadas condiciones, las trayectorias buscadas.

Con la finalidad de buscar posiciones libres y su conectividad, las funciones detectoras de colisión debe determinar si un punto en el espacio de configuraciones corresponde al espacio obstáculo o al espacio libre. Se utilizan en espacios de configuraciones con un número elevado de grados de libertad, y como función recurrente de planificadores de movimientos basados en métodos probabilísticos. En estos casos, el tiempo de computación de la trayectoria depende del tiempo de computación de la función y del número de veces que sea invocada.

Con este objetivo, Mirtich [79] describe y analiza varios algoritmos de de-

tección utilizados en la planificación de movimientos, tanto en movimientos gruesos como finos. Destaca conceptos generales como coherencia y localidad, así como la generalizada estrategia de detección de colisión en dos fases: fase ancha y fase estrecha. Mientras que Lin y Canny [65] desarrollan un algoritmo detector de colisiones muy eficiente para el caso de cálculos repetitivos, con objetos en movimiento. Realizan una descomposición de los objetos en formas básicas, sobre las que definen una serie de situaciones sencillas: par de vértices, vértice y arista, vértice y cara, par de aristas, arista y cara, dos caras. Sucesivamente va comprobando cada par de situaciones entre dos objetos, hasta encontrar la distancia mínima entre ellos. Martínez-Salvador y del Pobil [72] realizan una descomposición de los objetos en 3D mediante esferas. La simplicidad aportada por esta partición reduce el tiempo de computación en la detección de colisiones (Pérez y del Pobil [83]) y en el seguimiento de objetos en movimiento. Por su parte, Kim, Lin y Manocha [57] presentan un algoritmo incremental para estimar la distancia de penetración entre objetos convexos en 3D. Se basa en el cálculo de las sumas de Minkowski y requiere para su buen funcionamiento alta coherencia espacial y de movimiento. El conocimiento de la distancia a los obstáculos es también utilizado en el método propuesto por Gilbert y Johnson en [36], donde la idea principal consiste en expresar la fuerza de repulsión de los obstáculos en función de la distancia entre las partes que pueden colisionar.

1.2.2. Planificación de movimientos

Los métodos de planificación de movimientos existentes se pueden clasificar en función de su capacidad para encontrar una solución, lo que a su vez está relacionado con el tiempo empleado para su cálculo. Así, existen dos métodos principales que se describen a continuación: Métodos completos y Métodos basados en muestreo.

Dentro de los métodos basados en muestreo hay que distinguir, a su vez, aquellos que utilizan una ley determinista para generar las configuraciones de muestreo, y los que utilizan procedimientos aleatorios.

Además, hay que distinguir los métodos que consideran entornos estáticos de aquellos que consideran entornos dinámicos, con la posibilidad de uno o varios obstáculos en movimiento.

1.2.2.1. Métodos completos

Los métodos completos son aquellos que encuentran una solución si esta existe, y en el caso posible de que no exista lo indica mediante la devolución de una variable. Si bien esta opción es deseable el coste computacional correspondiente es elevado, especialmente si el número de grados de libertad es también elevado.

Dentro de este grupo se encuentran los métodos denominados Mapa de Carreteras, Descomposición de Celdas y los de Campos de Potencial, según la clasificación de Latombe [62]:

- Mapas de carretera.- Este método captura el espacio libre mediante una

denominada red de carreteras a la cual se conectan los puntos inicial y final, obteniéndose la trayectoria como una ruta dentro de dicho mapa.

- Descomposición en celdas.- Se basa en la descomposición del espacio libre en zonas o celdas, de tal manera que una trayectoria entre un punto inicial y otro final se encontrará a través de la sucesión de celdas contiguas que los une, siguiendo un método de búsqueda.
- Funciones potenciales y funciones potenciales armónicas.- Los métodos basados en funciones potenciales consideran el robot, representado como un punto en el espacio de configuraciones, como una partícula de carga sometida a la fuerza de un campo de potencial creado artificialmente: los obstáculos generarán fuerzas repulsivas y el punto destino generará una fuerza atractiva; de esta forma la partícula encontrará la trayectoria, libre de colisiones, siguiendo el gradiente del campo de potencial.

El método de las funciones potenciales, presentado por Khatib [56], tiene el inconveniente de que puede presentar mínimos locales, en donde la partícula de carga que representa al robot quedaría atrapada. Para intentar escapar de estos mínimos, el planificador, debe generar caminos aleatorios; tal como se expone en [62], y donde también se muestran los dos métodos numéricos utilizados para generar las funciones de navegación: Función Numérica Simple de Navegación (NF1) y Función Numérica Mejorada de Navegación (NF2). La función NF1 se computa lanzando un frente de onda equipotencial desde el punto destino, tiene el inconveniente de generar trayectorias que pasan rozando a los obstáculos, mientras que la función NF2 se genera lanzando el frente de onda desde el esqueleto del C-espacio, computado previamente.

Connolly, Burns and Weiss R. [25] plantean la utilización de la función potencial como solución de la ecuación de Laplace. Las funciones que son solución de la ecuación de Laplace se llaman funciones armónicas, y el potencial basado en dichas funciones tiene la importante propiedad de no presentar mínimos locales.

El cálculo numérico de la función potencial armónica lo realiza Masoud en [73] utilizando un grafo, cuyos nodos representan la partición conexa del espacio de configuraciones, como si fuese una red eléctrica y aplicando la segunda ley de Kirchoff (suma de corrientes igual a cero en los nodos). Así, el potencial en cualquier nodo toma el valor medio de todos sus vecinos, lo que implica la ausencia de mínimos locales para el potencial en los nodos. De forma similar lo hace Althofer, Fraser y Bugmann en [3]. Mientras que Garrido en [35] utiliza la teoría de elementos finitos sobre una malla de células triangulares.

Sobre los obstáculos se aplican las condiciones de contorno (Neuman o Dirichlet) necesarias para la existencia de una solución. Por ejemplo, en [74] a las regiones obstáculo le adjudica valor cero (condiciones de contorno de Dirichlet).

También se aplican las funciones armónicas a entornos dinámicos, como en [75, 76] donde se presenta un control dinámico de un planificador de trayec-

torias basado en funciones armónicas, aplicado a un entorno dinámico cuyos obstáculos son detectados mediante sensores. Se obtiene una señal de control del navegador sumando al gradiente del potencial un término proporcional a la velocidad de desplazamiento. Por su parte Hussein y Elnagax en [45], utilizan las ecuaciones de Maxwell para obtener una función potencial que se adapte a entornos dinámicos y que no presente zonas donde el módulo de potencial presenta valores excesivamente pequeños.

1.2.2.2. Métodos basados en muestreo

Con la finalidad de evitar el cálculo de los C-obstáculos, y siguiendo procedimientos deterministas o aleatorios, estos métodos comprueban un número determinado de puntos del espacio de configuraciones; clasificándolos como libres o de obstáculo y obteniéndose una captura parcial del espacio de configuraciones. Con esta información, siguiendo distintos métodos, se busca una trayectoria; si existe una solución la encuentran con una determinada probabilidad, que se acercará a uno según el número de exploraciones se acerca a infinito. Tienen la ventaja de ser aplicables para un número de dimensiones (grados de libertad) elevados. Dentro de este apartado se encuentran los métodos siguientes:

- Mapa de carreteras probabilístico o Probabilistic Roadmap Method (PRM) Latombe y Kavraki [52].- Crean un mapa de caminos con puntos de cruce o nodos, los cuales se determinan muestreando aleatoriamente el espacio de configuraciones, utilizando para ello funciones detectoras de colisión. Se necesita un planificador local para enlazar los nodos y los puntos inicial y final deben de enlazarse previamente con el mapa. El método PRM es un planificador de movimientos muy utilizado, que tiene buen comportamiento en los robots con muchos grados de libertad.

Van den Berg y Overmars en [8] plantean, sin embargo, que el método PRM no funciona tan bien en situaciones en las que el robot tiene que pasar a través de pasillos largos y estrechos, en el espacio de configuraciones. Esto se debe principalmente a la uniformidad de las muestras utilizadas en el planificador, de manera que en las grandes regiones abiertas caen muchas muestras y muy pocas en los pasillos estrechos. Existen diferentes métodos para sesgar el muestreo. Por ejemplo Kazemi y Mehrandezh en [54], proponen mejorar la eficiencia del método PRM mediante la utilización de una función potencial armónica; la cual se utiliza para condicionar la zona de muestreo, realizando más muestras en aquellas zonas señaladas por el camino más corto obtenido por la función armónica. De forma similar, Aamo, Kragic y Christensen en [1], proponen mejorar la eficiencia del método PRM, utilizando una función potencial artificial para polarizar o condicionar el muestreo aleatorio y conducirlo hacia regiones de pasillos.

Alternativamente, se ha planteado el uso de muestreo determinista en

vez de muestreo aleatorio. Por ejemplo, Branicky et al, en [14], proponen el método cuasi aleatorio, Quasi-random Roadmap (Q-PRM), que mejora la dispersión de las muestras obtenidas en el PRM, mediante la secuencia determinista Hamniersley, utilizada en algunos métodos numéricos. De esta manera consiguen solventar el problema persistente de los pasillos largos y estrechos, en espacios de un número de grados de libertad elevado.

- Árboles de exploración aleatoria rápida o Rapidly Exploring Random Trees (RRT), LaValle [63].- Realiza una captura del espacio libre mediante una topología en forma de árbol que evoluciona, con una resolución creciente, utilizando técnicas de muestreo aleatorio o determinista y funciones detectoras de colisión. Realiza una exploración de puntos que, si son libres, va incorporando a la estructura mediante segmentos, utilizando un algoritmo que comprueba la proximidad al punto o segmento más cercano.

En [64] se presenta el método básico, mientras que en [58] se propone la mejora de avanzar todo lo posible, desde la hoja más cercana, en la dirección de la muestra sacada aleatoriamente. En [100] se limita el espacio donde se muestrea, para garantizar que el crecimiento del árbol es posible.

- Descomposición aleatoria de celdas o Probabilistic Cell Decomposition (PCD), Lingelbach [67].- Realizan una descomposición del espacio en celdas, las cuales son muestreadas aleatoriamente y descompuestas en 2^n -tree, si se encuentran puntos libres y de obstáculo. Sobre estas celdas se realizan búsquedas en árbol hasta que se encuentra una trayectoria, o bien ha transcurrido un tiempo determinado. También Lindemann y LaValle en [66], proponen la utilización de una secuencia determinista de muestreo que presenta mejores propiedades de cobertura uniforme que la aleatoria. Con dicho muestreo se obtiene una estructura de rejillas en multirresolución, la cual permite una adaptación óptima de la descomposición en celdillas.

Burlet, Aycard y Fraichard en [18], proponen la combinación de la descomposición de celdas en quad-tree con la generación de cadenas de Markov para la obtención de trayectorias. Cada celda que forma parte de la cadena se muestrea y, si contiene obstáculo, se descompone y se repite el procedimiento.

- Combinación de métodos aleatorios y funciones potenciales.- Una de las primeras aplicaciones de los métodos aleatorios, en la planificación de movimientos en robótica, fue la generación de caminos aleatorios para intentar escapar de los mínimos locales presentes en las funciones potenciales, utilizadas en los planificadores basados en las mismas [62]. Otro enfoque es utilizar una función potencial para condicionar el muestreo aleatorio en los métodos PRM, favoreciendo la exploración de las regiones con pasillos [1], tal como se ha comentado anteriormente.

1.2.2.3. Métodos para entornos dinámicos

Estos métodos tienen en cuenta las variaciones temporales del entorno de trabajo, bien por el movimiento de los obstáculos o por el cambio de escenario. Teniendo en cuenta la velocidad de cambio del entorno en relación con el tiempo de ejecución de las trayectorias, existen dos tipos de métodos para entornos dinámicos: los que consideran la posibilidad de colisión y los que no tienen en cuenta la posibilidad de colisión:

Los planificadores que tienen en cuenta la posibilidad de colisión consideran que los desplazamiento de los obstáculos pueden intersectar con la trayectoria del robot. No tienen conocimiento de la dinámica del entorno, disponen de un sistema sensorial y se basan en un sistema de control de movimientos reactivos [26].

Los planificadores para entornos dinámicos que no tienen en cuenta la posibilidad de colisión se basan en la predicción, con un cierto grado de certidumbre, de las posiciones futuras de los obstáculos en movimiento, para lo cual precisan de una detección de las posiciones y velocidades de los mismos, así como de la memorización de datos históricos. Con este enfoque, Gao y Sun [34] proponen un planificador para robots móviles desplazándose en entornos dinámicos, realizando previsiones de los movimientos de los obstáculos y definiendo zonas peligrosas de colisión mediante la utilización de un filtro Kalman. Por su parte, Metoui et al [78] proponen un planificador robusto para robots móviles en un entorno de obstáculos dinámicos. Este planificador considera una función potencial con una fuerza de atracción al punto destino, fuerzas de repulsión de los obstáculos y una fuerza atractiva del robot móvil respecto de los obstáculos que tiene en cuenta tanto la posición como velocidad relativa.

1.3. Objetivos

La utilización de las funciones armónicas, para generar funciones potenciales, evita la aparición de mínimos locales y estas se adaptan bien a todo tipo de entornos: angostos, dinámicos e inciertos.

Sin embargo, este método usa habitualmente una discretización regular del espacio de configuraciones en forma de rejilla; sobre ella se realiza el cálculo numérico de la función y su paso debe ser el de la precisión especificada. De esta forma, si la precisión y el número de grados de libertad son elevados, el método es inviable por el tiempo de computación requerido.

El objetivo de esta tesis es superar esta limitación, diseñando métodos y algoritmos que consigan aplicar las funciones armónicas en la realización de un Planificador de movimientos de manera más eficiente, permitiendo abordar problemas con un número de grados de libertad más elevado.

A pesar del problema de eficiencia de computación de las funciones armónicas, su cálculo numérico se reduce a una suma ponderada con un cierto número de iteraciones, lo que supone un coste computacional mínimo. Además, el caso de entornos complicados plantea una dificultad que es común a todos los métodos, la obtención de trayectorias a través de pasillos largos y estrechos.

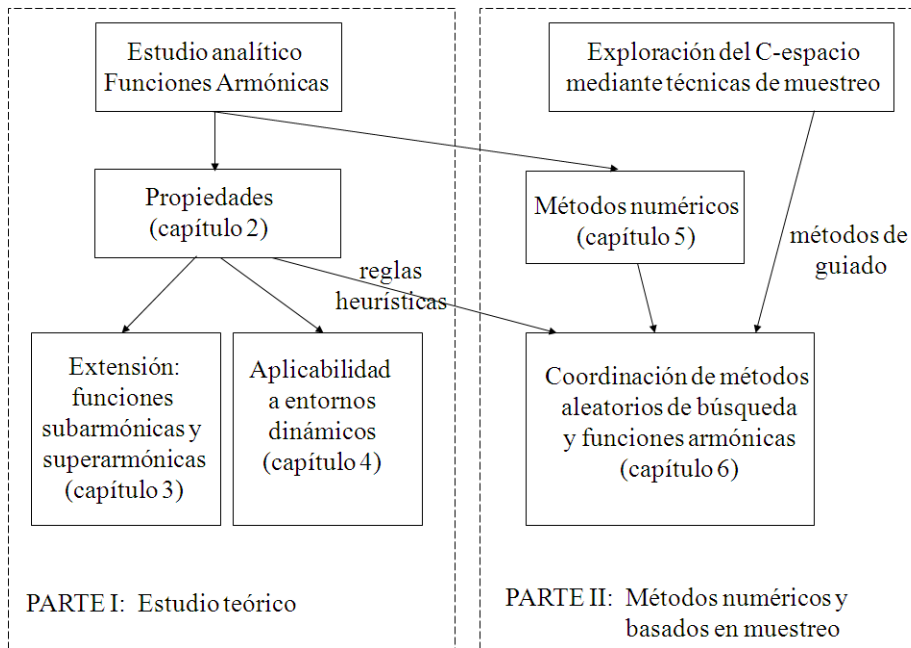


Figura 1.2: Organigrama para la consecución de los objetivos.

Por ello, con este trabajo, se pretende mejorar la metodología para hacer factible el uso de las funciones armónicas en el desarrollo de un planificador de movimientos. Así, de acuerdo con la figura 1.2, se proponen dos objetivos fundamentales con una serie de subobjetivos:

Objetivo 1.- Estudio teórico de las funciones armónicas como herramienta para la planificación de movimientos:

- Estudio de las propiedades de las funciones armónicas.
- Propuesta de moldeado para evitar inconvenientes.
- Evaluación de la aplicabilidad en entornos dinámicos.

Objetivo 2.- Estudio de métodos para la implementación eficiente de planificadores basados en funciones armónicas.

- Estudio de métodos numéricos y propuesta para el cálculo eficiente de funciones armónicas de cara a la planificación de movimientos.
- Estudio de métodos basados en muestreo para la exploración del C -espacio y su posible combinación con métodos basados en funciones armónicas.

El cálculo de trayectorias requiere métodos que reduzcan drásticamente el número de puntos de cálculo sin que por ello se pierda precisión. La utilización de las funciones armónicas en rejillas no uniformes, que discretizan el espacio de configuraciones de forma recursiva y jerarquizada, es óptima para este fin. Este método de discretización se basa en la partición 2^n -tree que de forma iterativa se adapta y define los contornos de los obstáculos, dejando los espacios libres y de obstáculos con celdas gruesas mientras los contornos se definen con celdas de paso fino, requerido por la precisión. Sin embargo, esta

discretización no se utilizará para realizar una búsqueda si no para realizar sobre él el cálculo de las funciones armónicas.

En previsión de imprecisiones y posibles variaciones en la posición del obstáculo, es necesario desarrollar una metodología que permita una adaptación en línea, la cual es posible gracias a la rapidez de cálculo de actualización del valor de la función armónica, cuando cambian ligeramente las condiciones de contorno.

Por otro lado los métodos aleatorios, aplicados a la planificación de movimientos, permiten encontrar una ruta sin necesidad de realizar una exploración exhaustiva del espacio de configuraciones. En este ámbito, los métodos aleatorios con sesgo de exploración han mostrado ser más eficientes que los puramente aleatorios, ya que en ellos existe una tendencia de base que permite un mejor comportamiento en canales estrechos y largos. Así, los métodos aleatorios condicionados o guiados por el campo de potencial, pueden realizar una exploración preferente de las zonas más prometedoras, acelerando el proceso.

La utilización coordinada de los distintos métodos comentados, se presenta como un procedimiento idóneo para desarrollar un planificador de movimientos útil y eficiente.

Capítulo 2

Planificación con funciones potenciales armónicas, subarmónicas y superarmónicas

La planificación de movimientos de un robot se realiza usualmente en el espacio de configuraciones (C-espacio), donde una configuración del robot se representa por un punto q , pudiendo corresponder a una posición libre o de colisión con un determinado obstáculo; de esta forma los obstáculos del espacio físico son representados como obstáculos en el espacio de configuraciones (C-obstáculos). También cabe la posibilidad de que el robot colisione consigo mismo, en este caso la zona de colisión sobre el espacio de configuraciones tiene la misma consideración que los demás obstáculos. Así, el movimiento del robot entre dos configuraciones, libre de colisiones con los obstáculos, se traduce en una trayectoria curvilínea del punto q sin intersecciones con los C-obstáculos.

La planificación mediante funciones potenciales consiste en definir una función sobre el espacio libre de configuraciones, cuyo gradiente actúe como un campo potencial que arrastre cualquier carga puntual situada en su dominio hasta un mínimo global donde se sitúa el punto destino. De esta forma, la trayectoria se obtiene mediante el seguimiento del gradiente, sobre la hipersuperficie de la función potencial, entre el punto inicial y final.

La función potencial creada como suma de una repulsiva respecto a los obstáculos y otra de atracción hacia el objetivo, tiene el problema de presentar mínimos locales [56], mientras que la función potencial creada como solución de la ecuación de Laplace [25] no presenta mínimos locales y es la base del presente trabajo.

En este capítulo se analizan las propiedades de las funciones armónicas, subarmónicas y superarmónicas, desde el punto de vista de su aplicación en la planificación de movimientos en robótica. Se destacan tanto aquellas propiedades que son favorables, como las que son desfavorables y han limitado su aplicación a robots con un número de grados de libertad reducido. Con el mismo enfoque se analizan también las funciones subarmónicas y superarmónicas, averiguando sus posibilidades en nuevas aplicaciones para la planificación de movimientos.

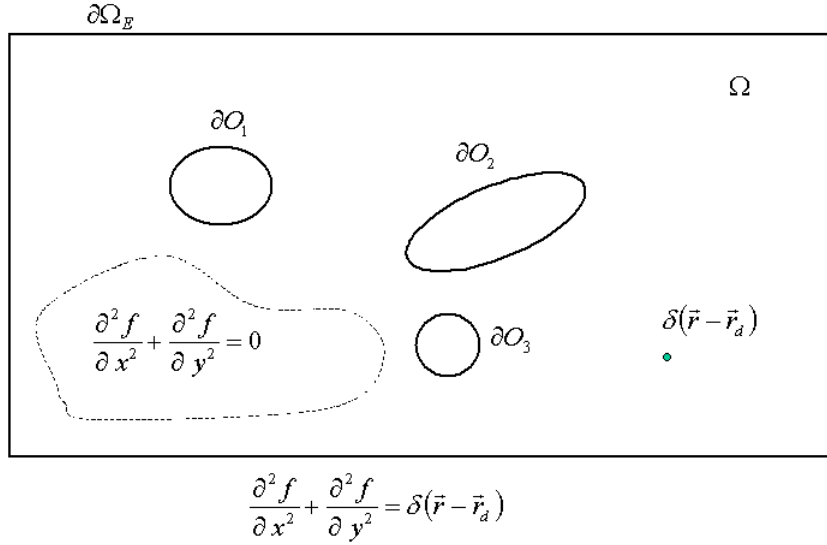


Figura 2.1: Planificación en el espacio de configuraciones, considerando los obstáculos como parte del contorno.

2.1. Introducción

Una función potencial es una función escalar $u(\mathbf{r})$ definida en un dominio $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. Para la planificación de trayectorias Ω es coincidente con el espacio libre de configuraciones y el gradiente de dicha función constituye un campo vectorial

$$\nabla u = (\partial u / \partial q_1, \dots, \partial u / \partial q_n) \quad (2.1)$$

que, para que sea útil en la planificación de trayectorias, no debe tener puntos sumidero de flujo del gradiente excepto en el punto destino P_D situado en \mathbf{r}_d . Es decir, la función potencial u debe cumplir que

$$\text{div}(\text{grad } u) \leq 0, \quad \forall \mathbf{r} \in (\Omega - P_D) \quad (2.2)$$

Lo que permite dos posibilidades en el tratamiento o modelado de los obstáculos:

I. Considerar los obstáculos junto con las condiciones de contorno. El dominio Ω no contiene los obstáculos y una función delta de Dirac se sitúa en el punto destino (figura 2.1). El contorno del espacio libre Ω se obtiene como la unión del contorno externo y los contornos de los obstáculos

$$\partial\Omega = \partial\Omega_E \cup \partial O_1 \cup \partial O_2 \cup \partial O_3 \dots \quad (2.3)$$

La función potencial se obtiene como solución de la ecuación de Poisson

$$\nabla^2 u = \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_d), \quad (2.4)$$

de forma que las líneas de corriente definidas por el gradiente de la función u , siempre terminarán en el punto situado en \mathbf{r}_d . Es decir, la función potencial

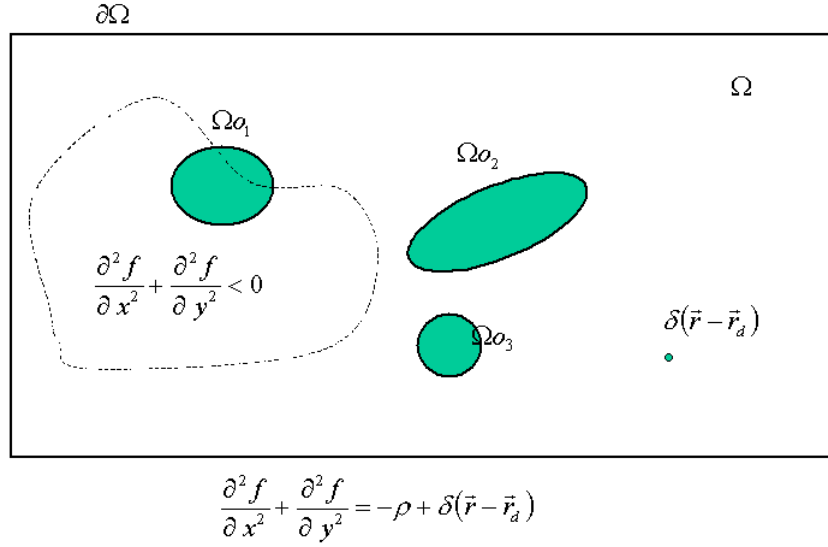


Figura 2.2: Planificación en el espacio de configuraciones, considerando los obstáculos como una función.

solo presentará un mínimo, en todo el espacio de configuraciones, situado en el punto de aplicación de la función delta.

Por otro lado, para cualquier subdominio que no contenga el punto \mathbf{r}_d se cumplirá la ecuación de Laplace

$$\nabla^2 u = 0, \quad (2.5)$$

cuya solución es una función armónica que tiene la importante propiedad de no presentar mínimos locales. Es por esto, que la construcción de una función potencial armónica servirá para obtener un algoritmo de navegación que, mediante la búsqueda del mínimo global, reporte la trayectoria deseada.

II. Considerar los obstáculos como una función ρ . En este caso el dominio Ω contiene los obstáculos, igualmente se sitúa una función delta en el punto destino (figura 2.2) y el subdominio obstáculo Ω_o se compone de la unión de los subdominios de los obstáculos

$$\Omega_o = \Omega_{o_1} \cup \Omega_{o_2} \cup \Omega_{o_3} \dots \quad (2.6)$$

Así, el modelo planteado es

$$\nabla^2 u = -\rho(\mathbf{r}) + \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_d), \quad (2.7)$$

la función ρ representa los obstáculos de forma que

$$\rho(\mathbf{r}) = \begin{cases} > 0 & \forall \mathbf{r} \subset \Omega_o \\ = 0 & \forall \mathbf{r} \notin \Omega_o \end{cases}$$

La solución de (2.7) será una función superarmónica que contendrá un número determinado de máximos y ningún mínimo. Por consiguiente, en todo el dominio solo existirá un mínimo situado en \mathbf{r}_d .

En cualquiera de los dos casos un algoritmo auxiliar de navegación obtendrá la trayectoria siguiendo el gradiente hasta alcanzar el objetivo. Esta trayectoria consistirá en una curvilínea (unidimensional), coincidente con una línea de corriente, la cual se puede representar de forma paramétrica

$$l_c = \mathbf{r}(s), \quad s \in [s_i, s_f] \quad (2.8)$$

donde s_i y s_f son los valores del parámetro en el punto inicial y final. El vector tangente, en cada punto, será igual al gradiente de la función

$$\mathbf{t}(s) = \frac{d\mathbf{r}}{ds} = \nabla u \quad (2.9)$$

y cuya curvatura, también en cada punto, será

$$\mathbf{k}(s) = \frac{d\mathbf{t}}{ds} = \frac{d(\nabla u)}{ds} \quad (2.10)$$

2.2. Propiedades afines a la generación de funciones potenciales para la planificación de movimientos en robótica

Los entornos de trabajo en robótica son complicados, de forma que la solución de la ecuación de Laplace o de Poisson se obtendrá por métodos numéricos; siendo posible la obtención de una expresión analítica de u solamente para modelos sencillos. En cualquier caso lo que importa, en este punto del estudio, es conocer las propiedades de las soluciones más que las propias soluciones, ya que así se puede conocer la viabilidad y condicionantes de la aplicación de las funciones armónicas a la planificación de movimientos. Los aspectos y propiedades principales a analizar de las funciones armónicas, aplicables al desarrollo de un planificador de trayectorias, son:

- Ausencia de mínimos locales.
- Concavidad, convexidad de las funciones armónicas y superarmónicas.
- Líneas de corriente y superficies equipotenciales.
- Regularidad de la solución; curvatura de las trayectorias.
- Condiciones de contorno, condición de solubilidad y balance global del gradiente.
- Estabilidad de la solución.
- Superposición lineal.

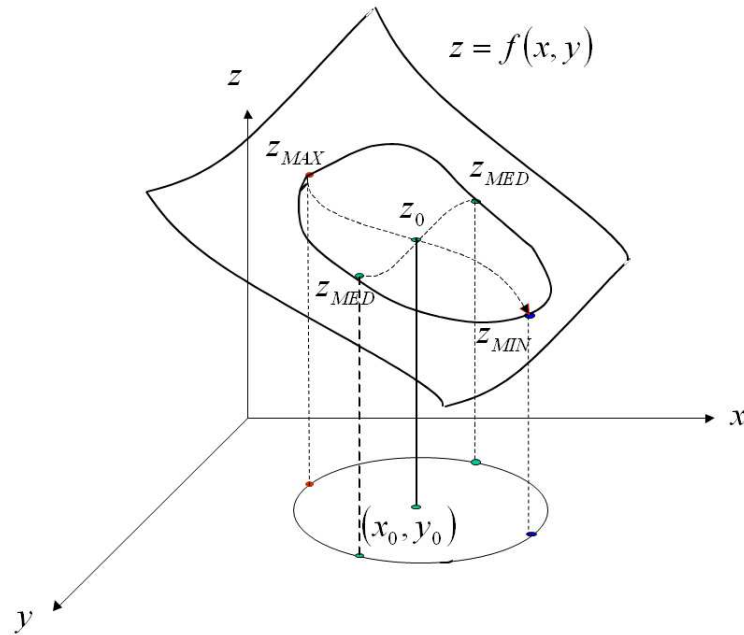


Figura 2.3: Principio de localidad de una función de dos dimensiones.

2.2.1. Ausencia de mínimos locales

Esta propiedad es esencial para la utilización de las funciones armónicas y superarmónicas en la generación de funciones potenciales, utilizadas en la planificación de trayectorias. Se cumple si y solo si para cualquier entorno próximo a todo punto del dominio, el valor mínimo de la función se encuentra sobre su frontera. Los entornos considerados serán hiperesferas centradas en el punto, cuyo radio podrá ser tan pequeño como se quiera; sobre estos entornos se analizan las propiedades del valor medio, del máximo y del mínimo.

2.2.1.1. Análisis en dos dimensiones

Como paso previo a la generalización para n dimensiones, se realiza el estudio en dos dimensiones, de esta forma se puede ilustrar los resultados mostrando una visión más intuitiva de los mismos.

Proposición 1. Principio de localidad de una función: Dada una función $f(x, y)$, definida en un dominio $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ y de clase C^2 . Dado un disco de radio R centrado en (x_0, y_0) : $D = \{(x, y) \in \Omega \mid \|(x - x_0, y - y_0)\| < R\}$. Entonces se cumple que:

$$f(x_0, y_0) = \frac{1}{2\pi R} \oint_L f(x, y) dl - \frac{R^2}{4} \operatorname{div}(\operatorname{grad} f)_0 \quad (2.11)$$

donde la integral de línea se realiza sobre la circunferencia contorno del disco, tal como se muestra en la figura 2.3.

Esta sugerente expresión dice que el valor de una función (de clase C^2) en un punto es igual a su valor medio sobre una circunferencia centrada en dicho punto de radio R , menos un término proporcional a la divergencia del gradiente (laplaciana) en el mismo punto.

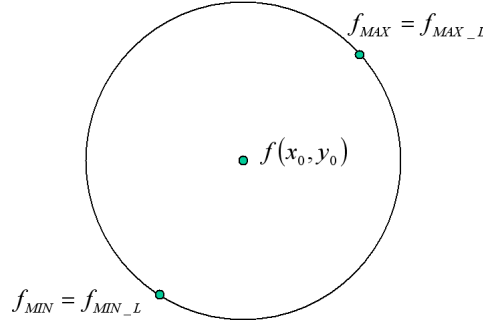


Figura 2.4: Entorno de un punto (x_0, y_0) en una función armónica.

La demostración de esta proposición se realiza en el apéndice A.1.

Funciones armónicas: En el caso de funciones armónicas se cumple la ecuación de Laplace:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0 \quad \Rightarrow \quad \text{div}(\text{grad } f) = 0 \quad \forall (x, y) \in \Omega \quad (2.12)$$

Siendo $f_{MED(L)}$, $f_{MIN(L)}$ y $f_{MAX(L)}$ los valores medio, mínimo y máximo de f sobre la circunferencia de radio R , respectivamente, la ecuación (2.11) da

$$f(x_0, y_0) = \frac{1}{2\pi R} \oint_L f(x, y) dl = \frac{f_{MED(L)}}{2\pi R} \oint_L dl = f_{MED(L)} \quad (2.13)$$

Cumpléndose la desigualdad

$$\frac{1}{2\pi R} f_{MIN(L)} \oint_L dl < \frac{1}{2\pi R} \oint_L f(x, y) dl < \frac{1}{2\pi R} f_{MAX(L)} \oint_L dl \quad (2.14)$$

$$f_{MIN(L)} < f_0 < f_{MAX(L)} \quad (2.15)$$

Es decir, el valor de la función en el centro es el valor medio de los valores sobre la circunferencia y, por tanto, está comprendido entre el mínimo y el máximo que se encuentran sobre la circunferencia (figura 2.4).

De esta forma se puede formar una sucesión concatenada de esferas, tal que cada una contenga en su interior el valor mínimo de la esfera precedente, de tal forma que esta sucesión de esferas (figura 2.5) termina cuando la última tiene el mínimo sobre el contorno del dominio, lo que supone la ausencia de máximos y mínimos locales en todo el dominio.

Por ello, las trayectorias generadas mediante el seguimiento del gradiente de una función potencial armónica, definida en el dominio del espacio de configuraciones con un contorno $\partial\Omega$ y una función δ situada en el punto objetivo, no caerán en mínimos locales y tendrán siempre solución.

Cabe la posibilidad de existencia de puntos de ensilladura, pero estos no suponen un problema porque el seguimiento del gradiente siempre encontraría una salida, siguiendo una de las vertientes.

Funciones subarmónicas: Las funciones subarmónicas se definen como aquellas que son solución de la ecuación de Poisson

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \rho(x, y), \quad (2.16)$$

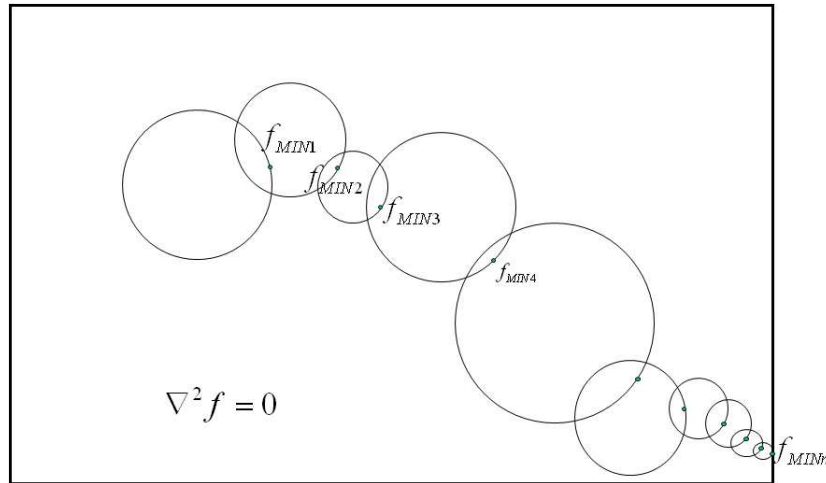


Figura 2.5: Mínimo en el contorno para una función armónica.

tal que

$$\rho(x, y) \geq 0 \quad \forall (x, y) \in \Omega \quad (2.17)$$

Es decir

$$\operatorname{div}(\operatorname{grad} f) = \rho(x, y) \geq 0 \quad \forall (x, y) \in \Omega \quad (2.18)$$

Sustituyendo esta condición en la expresión del Principio de localidad de una función (ecuación 2.11), se obtiene

$$f(x_0, y_0) = \frac{1}{2\pi R} \oint_L f(x, y) dl - \frac{1}{2 \cdot 2!} \rho(x_0, y_0) R^2 \quad (2.19)$$

de donde se deduce la desigualdad

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi R} f_{MIN(L)} \oint_L dl - \frac{1}{2 \cdot 2!} \rho(x_0, y_0) R^2 < \\ \frac{1}{2\pi R} \oint_L f(x, y) dl - \frac{1}{2 \cdot 2!} \rho(x_0, y_0) R^2 < \\ \frac{1}{2\pi R} f_{MAX(L)} \oint_L dl - \frac{1}{2 \cdot 2!} \rho(x_0, y_0) R^2 \end{aligned} \quad (2.20)$$

$$f_{MIN(L)} - \lambda < f_0 < f_{MAX(L)} - \lambda, \quad \lambda = \frac{1}{2 \cdot 2!} \rho(x_0, y_0) R^2 \geq 0 \quad (2.21)$$

Es decir, el valor máximo de la función se encuentra en la frontera y el mínimo en el interior o en la frontera (figura 2.6).

Funciones superarmónicas: Las funciones subarmónicas son solución de

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -\rho(x, y) \quad | \quad \rho(x, y) \geq 0 \quad \forall (x, y) \in \Omega \quad (2.22)$$

Y sustituyendo

$$\operatorname{div}(\operatorname{grad} f) = -\rho(x, y) \quad (2.23)$$

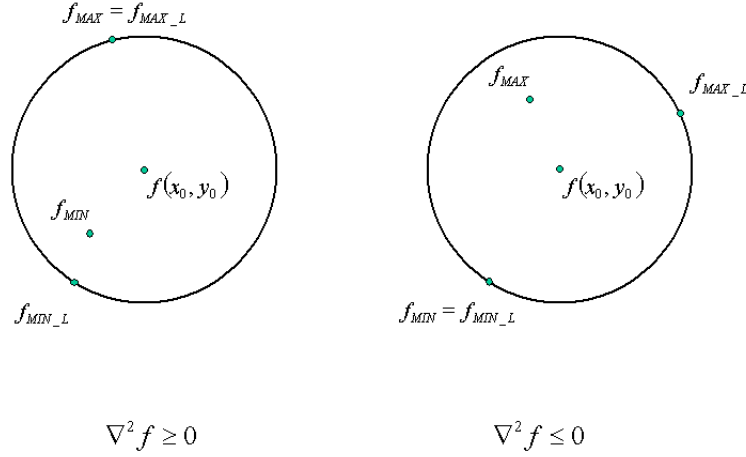


Figura 2.6: Funciones subarmónicas y superarmónicas

en la ecuación 2.12, se tiene

$$f(x_0, y_0) = \frac{1}{2\pi R} \oint_L f(x, y) dl + \frac{1}{2 \cdot 2!} \rho(x_0, y_0) R^2 \quad (2.24)$$

de donde se deduce

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi R} f_{MIN(L)} \oint_L dl + \frac{1}{2 \cdot 2!} \rho(x_0, y_0) R^2 < \\ \frac{1}{2\pi R} \oint_L f(x, y) dl + \frac{1}{2 \cdot 2!} \rho(x_0, y_0) R^2 < \\ \frac{1}{2\pi R} f_{MAX(L)} \oint_L dl + \frac{1}{2 \cdot 2!} \rho(x_0, y_0) R^2 \end{aligned} \quad (2.25)$$

$$f_{MIN(L)} + \lambda < f_0 < f_{MAX(L)} + \lambda, \quad \lambda = \frac{1}{2 \cdot 2!} \rho(x_0, y_0) R^2 \geq 0 \quad (2.26)$$

Es decir el valor mínimo de la función se encuentra en la frontera y máximo en el interior o en la frontera (figura 2.6)

Esta importante propiedad permite la utilización de las funciones superarmónicas, igual que las armónicas, para la generación de trayectorias libres de colisiones y sin mínimos locales.

2.2.1.2. Análisis en n dimensiones

Considerar una función potencial de n variables:

$$u = f(q_1, q_2, \dots, q_n), \quad (2.27)$$

analítica en el dominio $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, con un contorno $\partial\Omega$ sobre el que se impondrán unas condiciones a la función.

Las coordenadas se pueden expresar vectorialmente, $\mathbf{r} = (q_1, q_2, \dots, q_n)$ y la distancia euclidiana entre dos puntos como $d = \|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2\|$

Generalización del Principio de localidad de una función: Dada una función $f(\mathbf{r})$, definida en un dominio $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ y de clase C^∞ . Dado un disco de radio R centrado en (\mathbf{r}_0) : $D = \{\mathbf{r} \in \Omega \mid \|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0\| < R\}$. Entonces se cumple que:

$$f(\mathbf{r}_0) = \frac{1}{S} \oint_S f(\mathbf{r}_0 + R\mathbf{n})dS - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{R^{2n}}{2 \cdot (2n)!} (\nabla^{2n} f)_{\mathbf{r}_0} \quad (2.28)$$

Esta expresión es la generalización de la 2.11 y la demostración de su validez se muestra en el apéndice A.1.

Funciones armónicas: Las funciones armónicas cumplen $\nabla^2 f = 0$, en todo punto perteneciente al dominio, aplicando esta condición al principio de localidad (ecuación 2.28), se obtiene la *propiedad del valor medio* para una función multivariada:

$$f(\mathbf{r}_0) = \frac{1}{S} \oint_S f(\mathbf{r}_0 + R\mathbf{n})dS \quad (2.29)$$

Por lo tanto, el valor de una función armónica en cualquier punto de un volumen determinado no será ni máximo ni mínimo, encontrándose estos sobre la superficie cerrada que limita dicho volumen:

$$\frac{f_{MIN(S)} \oint_S dS}{S} < \frac{\oint_S f(\mathbf{r}_0 + R\mathbf{n})dS}{S} < \frac{f_{MAX(S)} \oint_S dS}{S} \quad (2.30)$$

$$f_{MIN(S)} < f(\mathbf{r}_0) < f_{MAX(S)} \quad (2.31)$$

Funciones subarmónicas: Igual que para el caso de dos dimensiones, las funciones subarmónicas para n dimensiones son solución de

$$\nabla^2 f = \rho(q_1, q_2, \dots, q_n) \quad | \quad \rho(q_1, q_2, \dots, q_n) \geq 0 \quad \forall (q_1, q_2, \dots, q_n) \in \Omega \quad (2.32)$$

Aplicado al principio de localidad (ecuación 2.28), se tiene:

$$f(\mathbf{r}_0) = \frac{\oint_S f(\mathbf{r}_0 + R\mathbf{n})dS}{S} - \rho \frac{R^2}{4} \quad (2.33)$$

Con respecto a los valores máximo y mínimo en la hiperesfera, se cumple la desigualdad:

$$\frac{f_{MIN(S)} \oint_S dS}{S} - \rho \frac{R^2}{4} < \frac{\oint_S f(\mathbf{r}_0 + R\mathbf{n})dS}{S} - \rho \frac{R^2}{4} < \frac{f_{MAX(S)} \oint_S dS}{S} - \rho \frac{R^2}{4} \quad (2.34)$$

$$f_{MIN(S)} - \rho \frac{R^2}{4} < f(\mathbf{r}_0) < f_{MAX(S)} - \rho \frac{R^2}{4} \quad (2.35)$$

Es decir, máximo en la frontera y mínimo en el interior o en la frontera (figura 2.6)

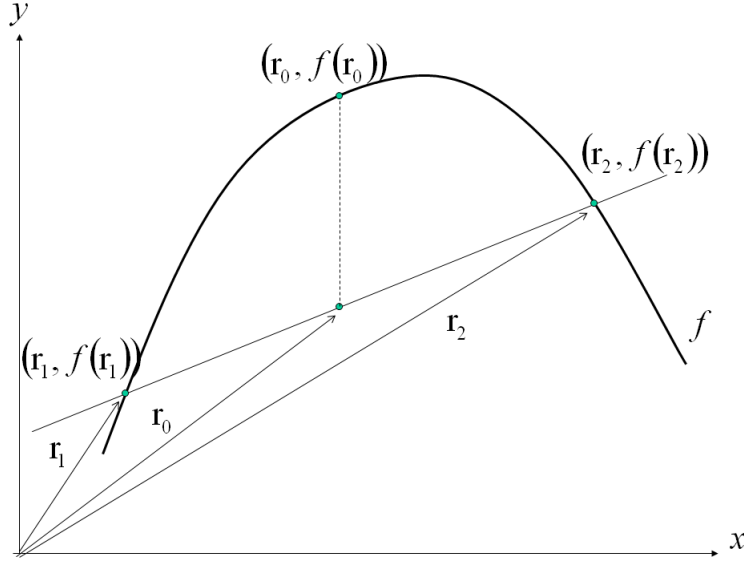


Figura 2.7: Función convexa. $\mathbf{r}_0 = \mathbf{r}_1(1 - \vartheta) + \mathbf{r}_2\vartheta$, $0 \leq \vartheta \leq 1$

Funciones superarmónicas: Similarmente, las funciones superarmónicas cumplen

$$\nabla^2 f = -\rho(q_1, q_2, \dots, q_n) \quad | \quad \rho(q_1, q_2, \dots, q_n) \geq 0 \quad \forall (q_1, q_2, \dots, q_n) \in \Omega \quad (2.36)$$

$$f(\mathbf{r}_0) = \frac{\oint_S f(\mathbf{r}_0 + R\mathbf{n})dS}{S} + \rho \frac{R^2}{4} \quad (2.37)$$

Y la desigualdad que involucra a los valores máximo y mínimo

$$\frac{f_{MIN(S)} \oint_S dS}{S} + \rho \frac{R^2}{4} < \frac{\oint_S f(\mathbf{r}_0 + R\mathbf{n})dS}{S} + \rho \frac{R^2}{4} < \frac{f_{MAX(S)} \oint_S dS}{S} + \rho \frac{R^2}{4} \quad (2.38)$$

$$f_{MIN(S)} + \rho R \frac{V}{S} < f(\mathbf{r}_0) < f_{MAX(S)} + \rho R \frac{V}{S} \quad (2.39)$$

De donde se deduce que el mínimo se sitúa en la frontera y el máximo en el interior o en la frontera (figura 2.6).

2.2.2. Concavidad, convexidad de las funciones subarmónicas y superarmónicas

La propiedad del valor medio y del mínimo, que cumplen las funciones armónicas y superarmónicas, posibilita su utilización en la generación de funciones potenciales definidas en el dominio del espacio de configuraciones. Para saber más respecto al comportamiento del campo vectorial determinado por el gradiente de dicha función vectorial es necesario estudiar la concavidad y convexidad de dicha función. Así, el cumplimiento de la desigualdad de Jensen [13] (ecuación 2.41 y figura 2.7) determina la no concavidad de las funciones armónicas y superarmónicas, lo cual significa que la variación

del módulo del gradiente no cambiará de decreciente a creciente en ninguna dirección. Por consiguiente tampoco existirán mínimos locales en todo el dominio de la función.

Por lo tanto, para $\sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2} \geq 0$, se cumple la desigualdad de Jensen para las funciones cóncavas:

$$f(\mathbf{r}_1(1 - \vartheta) + \mathbf{r}_2\vartheta) \leq f(\mathbf{r}_1)(1 - \vartheta) + f(\mathbf{r}_2)\vartheta, \quad 0 \leq \vartheta \leq 1 \quad (2.40)$$

Y para $\sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2} \leq 0$, se cumple la desigualdad de Jensen para las funciones convexas (figura 2.7):

$$f(\mathbf{r}_1(1 - \vartheta) + \mathbf{r}_2\vartheta) \geq f(\mathbf{r}_1)(1 - \vartheta) + f(\mathbf{r}_2)\vartheta, \quad 0 \leq \vartheta \leq 1 \quad (2.41)$$

donde \mathbf{r}_1 y \mathbf{r}_2 son dos puntos cualesquiera del espacio.

La demostración de esta propiedad se muestra en el apéndice A.3.1.

2.2.3. Líneas de corriente y superficies equipotenciales

En todos los puntos de una superficie equipotencial S_{eq} , el valor de la función es el mismo: $f(\mathbf{r}) = Const \quad \forall \mathbf{r} \in S_{eq}$. Por lo que la derivada direccional, en todo punto de S_{eq} , con respecto a cualquier vector \mathbf{v} contenido en dicha superficie será cero:

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}} = \nabla f \cdot \mathbf{v} = 0 \quad \rightarrow \quad \nabla f \perp \mathbf{v} \quad (2.42)$$

por lo que las líneas de corriente y las superficies equipotenciales son también ortogonales.

Además la ecuación de Laplace dice que

$$\nabla^2 u = \text{div}(\text{grad } u) = 0, \quad (2.43)$$

lo que determina que las líneas de corriente no se cortarían, ya que la divergencia del gradiente es nula en todo punto del dominio.

Para un entorno del espacio de configuraciones modelado por la ecuación de Poisson, con condiciones de contorno definidas sobre los obstáculos y una función delta independiente situada en el punto objetivo, la función solución dispondrá de infinitas líneas de corriente que confluirán en el punto objetivo. De esta forma la trayectoria, libre de colisiones, se superpondrá sobre una de estas líneas que, partiendo del punto configuración inicial, llegará a dicho punto objetivo.

La posibilidad de corregir la trayectoria pasando de una línea de corriente a otra próxima, a través de una superficie equipotencial, ofrece un método para diseñar un control reactivo para abordar entornos dinámicos o inciertos.

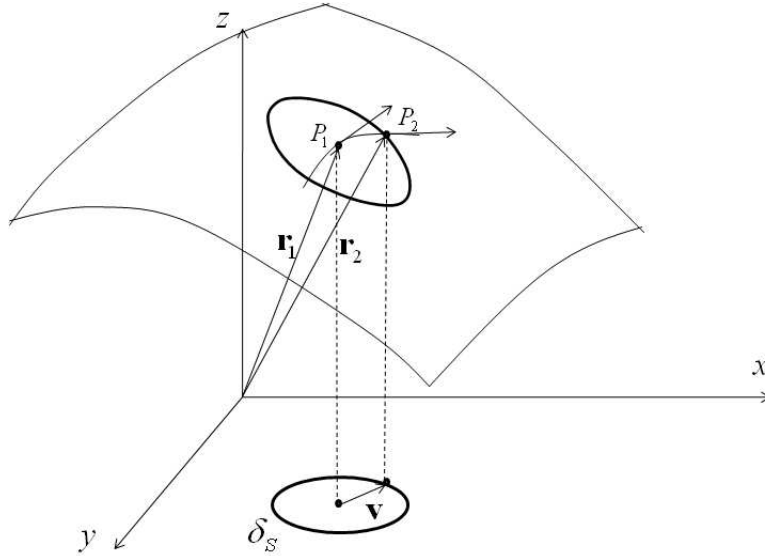


Figura 2.8: Estudio de la curvatura.

2.2.4. Superposición lineal

Por la propiedad de linealidad del laplaciano se deduce que la combinación lineal de varias funciones armónicas es, a su vez, una función armónica: Dado un dominio $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ y dada una serie de funciones $u_i : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, donde $i = 1, 2, 3, \dots, k$. Si cada una de las funciones u_i es armónica en el dominio, entonces la combinación lineal de ellas también lo es

$$\nabla^2 \left(\sum_{i=1}^k \lambda_i u_i \right) = \sum_{i=1}^k \lambda_i (\nabla^2 u_i) = 0 \quad (2.44)$$

Esta propiedad permite aplicar el principio de superposición a la solución de la ecuación de Laplace o de Poisson; tal como se hace con las funciones de Green, lo que facilita el estudio de la influencia de las condiciones de contorno, así como del modelado de los obstáculos como funciones independientes en las ecuaciones sub y superarmónicas.

2.2.5. Curvatura de las funciones armónicas

Una trayectoria sobre el espacio de configuraciones quedará definida por una curvilínea tal que el vector tangente en cada punto de la misma tendrá la misma dirección que el gradiente de la función en el mismo punto. La curvatura de esta línea, en el espacio de configuraciones, determinará las aceleraciones que experimentará el robot para la consecución de la trayectoria.

Interesa saber como son de “suaves” las trayectorias obtenidas a partir de las funciones armónicas. Resulta que para el caso de dichas funciones potenciales armónicas esta curvatura será reducida, lo que proporcionará trayectorias con aceleraciones menores para los actuadores que impulsan las articulaciones, lo cual puede redundar en un menor consumo de energía y menos problemas de mantenimiento.

De acuerdo con la figura 2.8, considerando dos puntos próximos de una curvilínea obtenida sobre una hipersuperficie de una función potencial genérica, la curvatura de la curvilínea en la dirección \mathbf{v} es

$$K_{1\mathbf{v}} = \lim_{\mathbf{r}_2 \rightarrow \mathbf{r}_1} \left\{ \frac{1}{|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|} \left[\frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}}(\mathbf{r}_2) - \frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}}(\mathbf{r}_1) \right] \right\} = \frac{\partial^2 f}{\partial \mathbf{v}^2}(\mathbf{r}_1) \quad (2.45)$$

Entonces, teniendo en cuenta que la Laplaciana de una función es la divergencia de su gradiente, y que por consiguiente ésta se define en el entorno de un punto, se integra sobre una superficie esférica de radio muy pequeño δ_R y se obtiene la curvatura media de Gauss:

$$K_{1MG} = \lim_{\delta_R \rightarrow 0} \left\{ \frac{1}{\delta_S} \oint_{\delta_S} K_{1\mathbf{v}} d\delta_S \right\} = \frac{1}{2} \nabla^2 f, \quad (2.46)$$

tal como se demuestra en el apéndice A.3.2. Esta curvatura media será mínima (cero) si se cumple la ecuación de Laplace. Por lo tanto, utilizando las funciones armónicas para generar funciones potenciales auxiliares, obtendremos trayectorias “suaves”, lo que supone aceleraciones suaves para el robot en la ejecución de movimientos.

2.2.6. Estabilidad de la solución

La solución de la ecuación de Laplace o de Poisson experimenta pequeñas variaciones frente a pequeñas variaciones de las condiciones de contorno o pequeñas variaciones de la función independiente, esta propiedad facilita la utilización de las funciones potenciales armónicas en el diseño de planificadores de trayectorias en entornos cambiantes.

En el apéndice A.3.6 se analiza esta propiedad.

2.3. Problemática inherente al método

Una vez obtenida la función potencial, la trayectoria se obtiene por seguimiento del gradiente; por lo que la distribución del mismo, y la existencia de zonas donde su módulo pueda alcanzar valores extremadamente bajos, puede presentar serios problemas para la computación de trayectorias.

Este efecto es característico de las funciones armónicas, está presente en la naturaleza (campos eléctricos y gravitatorios) y supone la principal desventaja en su utilización para la planificación de trayectorias en robótica. Con la finalidad de conservar una visión intuitiva del mismo se le denomina efecto embudo.

2.3.1. Efecto embudo y funciones armónicas

Con la finalidad de ilustrar el problema fundamental, presentado en la utilización de las funciones armónicas como funciones potenciales para la

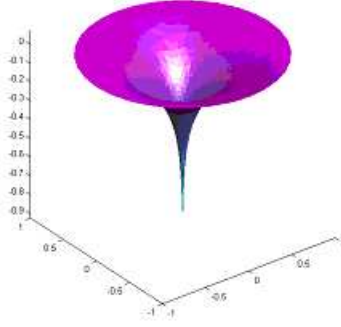


Figura 2.9: Efecto embudo.

generación de movimientos en robótica, se considera el modelo simplificado siguiente:

$$\nabla^2 u = \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_d), \quad (2.47)$$

considerando todo el espacio y situando la función delta en el origen de coordenadas ($\mathbf{r}_d = 0$).

Aplicando el teorema de la divergencia al gradiente de la función; para un hipervolumen esférico V centrado también en el origen de coordenadas, limitado por la hipersuperficie esférica correspondiente S , de radio R

$$\oint_S \nabla u \cdot d\mathbf{S} = \int_V (\nabla \cdot \nabla u) dV = \int_V \delta(\mathbf{r}) dV = 1 \quad (2.48)$$

Por la simetría del problema $\nabla u \cdot d\mathbf{S} = |\nabla u| dS$ y $|\nabla u| = \text{constante}$, por lo que se tiene:

$$\oint_S \nabla u \cdot d\mathbf{S} = |\nabla u| \oint_S dS = |\nabla u| S, \quad (2.49)$$

sustituyendo en 2.48 se tiene que $|\nabla u| S = 1$ y

$$\boxed{\nabla u = \frac{1}{S_n} \mathbf{r}_u} \quad (2.50)$$

Siendo \mathbf{r}_u el vector unitario en la dirección del radio de la hiperesfera, apuntando al exterior y aplicado a un punto de la superficie de la misma.

La expresión de la superficie de una hiperesfera en n dimensiones se obtiene en el apéndice A.2 y vale:

$$S_n = \frac{\pi^{\frac{n}{2}} n r^{n-1}}{\Gamma\left(\frac{n}{2} + 1\right)} \quad (2.51)$$

Así, el módulo del gradiente decrece con el aumento del radio de la hiperesfera y este decrecimiento es más rápido cuanto mayor es el número de variables de la función potencial.

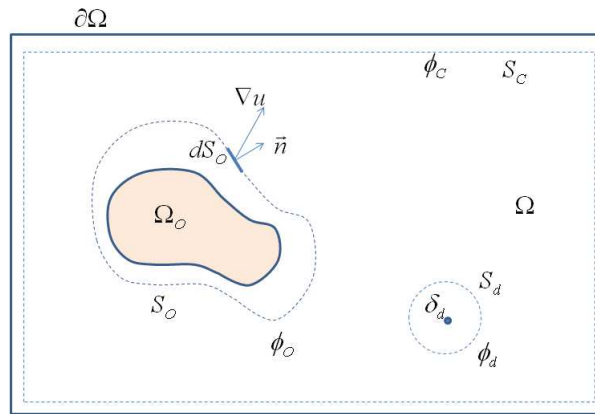


Figura 2.10: Balance del flujo del gradiente.

De esta forma, para un número de grados de libertad elevado, el gradiente se hace tan pequeño que, a una cierta distancia r , la propia precisión numérica del ordenador puede no ser suficiente para discriminarlo.

Además, el efecto embudo puede provocar que los métodos numéricos de relajación, utilizados en el cálculo de las funciones armónicas, requieran un número muy elevado de iteraciones y un tiempo de computación también muy elevado.

2.3.2. Condiciones de contorno, condiciones de solubilidad y balance global del flujo del gradiente

Las condiciones de contorno aplicables al modelo, para la obtención de la función potencial, no pueden ser cualesquiera si no que deben cumplir con unas determinadas condiciones denominadas condiciones de solubilidad o de compatibilidad; las cuales surgen de aplicar el teorema de la divergencia al campo vectorial creado por el gradiente de la función, en todo el dominio.

Considerando el modelo genérico (ecuación 2.7)

$$\nabla^2 u = -\rho(\mathbf{r}) + \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_d), \quad |\rho(\mathbf{r})| > 0 \quad \forall \mathbf{r} \in \Omega \quad (2.52)$$

aplicable a un dominio Ω con un contorno también genérico $\partial\Omega$ (figura 2.10). Considerando el campo vectorial

$$\mathbf{g}(\mathbf{r}) = \nabla u(\mathbf{r}), \quad \forall \mathbf{r} \in \Omega \quad (2.53)$$

aplicando a \mathbf{g} el teorema de la divergencia

$$\int_V (\nabla \cdot \mathbf{g}) dV = \oint_S \mathbf{g} \cdot d\mathbf{S}, \quad (2.54)$$

considerando todo el dominio Ω y su contorno $\partial\Omega$, se tiene

$$\int_{\Omega} (\nabla^2 u) d\Omega = \oint_{\partial\Omega} \nabla u \cdot d(\partial\Omega), \quad (2.55)$$

ahora, teniendo en cuenta que $\nabla u \cdot \mathbf{n} = \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}$ y 2.52

$$\int_{\Omega} [-\rho(\mathbf{r}) + \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_d)] d\Omega = \oint_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} d\partial\Omega, \quad (2.56)$$

de donde, se deduce

$$\oint_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} dS = 1 - \int_{\Omega_o} \rho(\mathbf{r}) d\Omega_o \quad (2.57)$$

que son las **condiciones de solubilidad** de la ecuación 2.52 e imponen restricciones a las condiciones de contorno, que deben cumplirlas para que exista una solución.

Similarmente, aplicando 2.55 a un contorno formado por $S_C \cup S_O \cup S_d$, tal como se muestra en la figura 2.10, se tiene

$$\oint_{S_C} \nabla u \cdot d\mathbf{S}_C - \oint_{S_O} \nabla u \cdot d\mathbf{S}_O - \oint_{S_d} \nabla u \cdot d\mathbf{S}_d = 0, \quad (2.58)$$

donde cada término representa los flujos de gradiente que atraviesa cada superficie

$$\phi_C = \phi_O + \phi_d, \quad (2.59)$$

expresión que representa el **balance global del flujo del gradiente**, donde

$$\phi_O = - \int_{\Omega_o} \rho(r) d\Omega_o \quad (2.60)$$

y

$$\phi_d = \int_{\Omega_d} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_d) d\Omega_d = 1 \quad (2.61)$$

Con las funciones superarmónicas hay más posibilidades de jugar con el balance del flujo del gradiente para conseguir una distribución del mismo más homogéneo.

Las posibles condiciones de contorno son las **de Dirichlet** ($u = g$ en $\partial\Omega$), las **de Neuman** ($\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} = g$) y las **mixtas** ($\alpha u + \beta \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} = g$). El tratamiento detallado con la demostración de solución única se muestra en los apartados del apéndice A.3.3, A.3.4 y A.3.5.

La posibilidad de combinar las condiciones de contorno de Dirichlet y de Neuman, de forma que haya intervalos del mismo donde se aplique una u otra, permite controlar la distribución del flujo (derivada direccional) en distintos tramos del contorno y por consiguiente en el dominio.

Considerando el modelo:

$$\begin{cases} \nabla^2 u = \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_d) & \forall \mathbf{r} \in \Omega \\ \alpha(\xi) u + \beta(\xi) \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} = h & \forall \xi \in \partial\Omega \end{cases}$$

donde ξ parametriza el contorno y h es una función genérica. Realizando

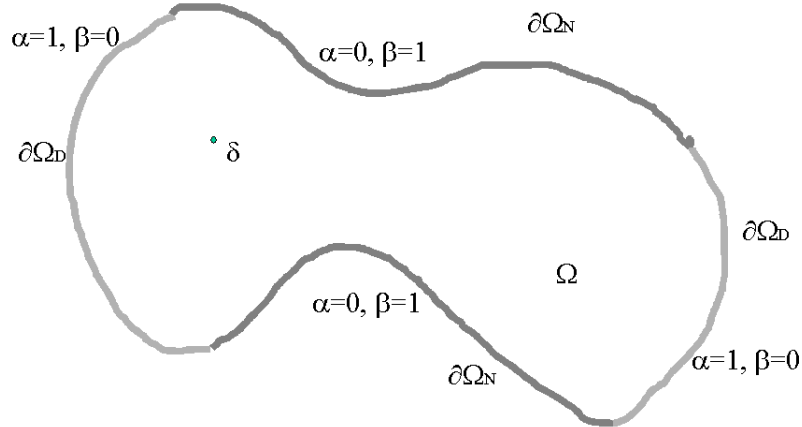


Figura 2.11: Condiciones de contorno mixtas.

una partición del contorno en función de la condición fijada (figura 2.11)

$$\partial\Omega = \partial\Omega_D + \partial\Omega_N, \quad (2.62)$$

la expresión del flujo neto en todo el contorno será, teniendo en cuenta el balance global del flujo del gradiente:

$$\oint_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} d\partial\Omega = \oint_{\partial\Omega_D} \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} d\partial\Omega + \oint_{\partial\Omega_N} \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} d\partial\Omega = \oint_{\partial\Omega_D} \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} d\partial\Omega + 0 = 1, \quad (2.63)$$

Con lo que es posible, mediante la gestión adecuada de las condiciones de contorno, localizar el “flujo disponible” (y por tanto el gradiente) en zonas convenientes, quizás alejadas del punto destino (apartado 3.4)

2.4. Cálculo analítico y obtención numérica de soluciones

Con la finalidad de ilustrar las propiedades de las funciones armónicas relativas a la planificación de movimientos en robótica, es adecuado realizar el cálculo analítico de algunos modelos básicos. La utilización de las funciones de Green es idónea para este fin, ya que permite discernir entre las distintas partes que afectan a la solución y completarla mediante una simple suma. La utilización del teorema de Green permite aislar la influencia de las condiciones de contorno sobre la función potencial y sus propiedades en el dominio del espacio de configuraciones, la proposición de distintos modelos de C-espacios con obstáculos regulares y las condiciones de compatibilidad serán la base para la exploración de propiedades de la función potencial ante distintas situaciones de contorno. En el apéndice A.4 se muestra, para consulta, el teorema de Green.

Función de Green

Se define la función de Green, o respuesta impulsional, como la solución de

$$\nabla^2 G = \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_p), \quad (2.64)$$

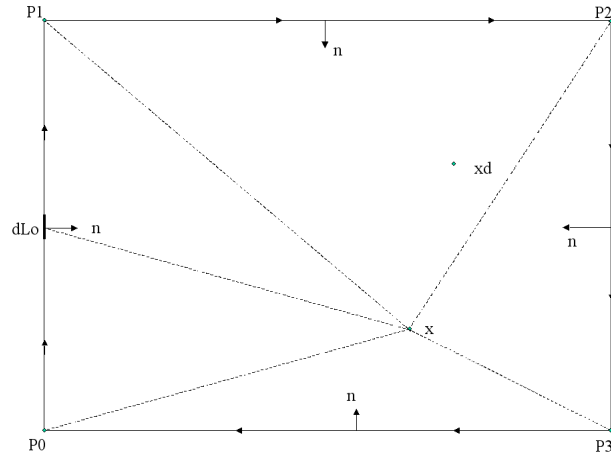


Figura 2.12: Contorno rectangular y función delta.

con $\mathbf{r} = (q_1, q_2, q_3, \dots, q_n)$, condiciones de contorno homogéneas ($G = 0$) y $\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_p)$ función delta situada en \mathbf{r}_p .

La función de Green será función de la variable posición \mathbf{r} y del punto de situación de la función delta \mathbf{r}_p , $G(\mathbf{r}, \mathbf{r}_p)$. En general, la posición de la función delta será considerada como variable, dependiendo del modelo a resolver.

2.4.1. Modelo base. Análisis de la influencia de las condiciones de contorno mediante las Funciones de Green

El modelo básico (sin considerar obstáculos) está constituido por un C-espacio con dominio rectangular donde se define una función potencial u que cumple con la ecuación de Poisson $\nabla^2 u = \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_d)$, con la función delta situada en el punto objetivo destino de la trayectoria.

Para aislar en la solución la influencia de las condiciones de contorno se utilizan las funciones de Green; de manera que en el mismo dominio se define, además de la función potencial u , otra función G con la que se completa el modelo:

$$\left. \begin{aligned} \nabla^2 G &= \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_p), \text{ con condiciones de contorno homogéneas} \\ \nabla^2 u &= \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_d), \text{ con condiciones de contorno no homogéneas} \end{aligned} \right\}$$

Donde $G(\mathbf{r}, \mathbf{r}_p)$ es una función de Green genérica, solución de $\nabla^2 G = \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_p)$, donde \mathbf{r}_p será un punto considerado como variable, en contraste con $g(\mathbf{r} - \mathbf{r}_d)$, que es la función solución de $\nabla^2 g = \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_d)$, donde \mathbf{r}_d es el punto fijo de posición de la función delta que marcará el mínimo global objetivo.

Utilizando la 2ª ecuación de Green (ecuación A.76) con las funciones u y

$G(\mathbf{r}, \mathbf{r}_p)$, se obtiene:

$$\begin{aligned} \int_V (u \nabla^2 G - G \nabla^2 u) dV_p &= \oint_S \left(u \frac{\partial G}{\partial \mathbf{n}} - G \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} \right) dS_p \\ \int_V (u \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_p) - G(\mathbf{r}, \mathbf{r}_p) \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_d)) dV_p &= \oint_S \left(u \frac{\partial G}{\partial \mathbf{n}} - G \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} \right) dS_p \\ u(\mathbf{r}_p) - G(\mathbf{r}_d, \mathbf{r}_p) &= \oint_S \left(u \frac{\partial G}{\partial \mathbf{n}} - G \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} \right) dS_p \end{aligned}$$

por otro lado, las funciones de Green cumplen con la propiedad $G(\mathbf{r}_d, \mathbf{r}_p) \equiv G(\mathbf{r}_p, \mathbf{r}_d)$ y $G(\mathbf{r}_p, \mathbf{r}_d) \equiv g(\mathbf{r}_p, \mathbf{r}_d)$, con lo cual

$$u(\mathbf{r}_p) = g(\mathbf{r}_p, \mathbf{r}_d) + \oint_S u \frac{\partial G}{\partial \mathbf{n}} - \oint_S G \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} dS, \quad (2.65)$$

donde, en el segundo miembro de la igualdad, el primer término representa la influencia de la respuesta impulsional, el segundo representa la influencia de las condiciones de contorno de Dirichlet y el tercero la influencia de las condiciones de contorno de Neuman.

Sin embargo, puesto que $G = 0$ en el contorno $\partial\Omega$, se tiene:

$$\boxed{u(\mathbf{r}_p) = g(\mathbf{r}_p, \mathbf{r}_d) + \oint_S u \frac{\partial G}{\partial \mathbf{n}} dS} \quad (2.66)$$

El hecho de que G valga cero en el contorno (condiciones de contorno homogéneas) facilita y hace posible la obtención de la función de Green para los modelos sencillos estudiados, pero el término correspondiente a las condiciones de contorno de Neuman queda anulado. Por este motivo, su estudio se realizará mediante el uso de las series de Fourier en el apartado 3.4.

Con la utilización de funciones potenciales superarmónicas el modelo base presentado es

$$\left. \begin{aligned} \nabla^2 G &= \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_p), \text{ con condiciones de contorno homogéneas} \\ \nabla^2 u &= \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_d) - \rho(\mathbf{r}), \text{ con condiciones de contorno no homogéneas} \end{aligned} \right\}$$

Y la expresión obtenida de la 2ª ecuación de Green es:

$$\boxed{u(\mathbf{r}_p) = g(\mathbf{r}_p, \mathbf{r}_d) + \int_V G \rho dV + \oint_S u \frac{\partial G}{\partial \mathbf{n}} dS} \quad (2.67)$$

Igual que para las funciones potenciales armónicas el término $\oint_S u \frac{\partial G}{\partial \mathbf{n}} dS$ representa la influencia de las condiciones de contorno.

2.4.2. Obtención de soluciones mediante cálculo numérico

La obtención de soluciones utilizando las ecuaciones 2.66 y 2.67 es factible mediante la utilización de los métodos numéricos de integración clásicos y un

programa de cálculo como el MATLAB. El contorno y los obstáculos deben estar constituidos por formas geométricas regulares globales o por tramos de forma que sea posible parametrizar y definir variables de integración que recorran el contorno y el volumen para posteriormente realizar la integración numérica. Puesto que el objetivo es obtener soluciones que sirvan para representar gráficamente la influencia de las condiciones de contorno y de la función ρ , se plantean modelos básicos sencillos en 2D. En este caso la solución genérica es

$$u(\mathbf{r}_p) = g(\mathbf{r}_p, \mathbf{r}_d) + \int_S G \rho dS + \oint_C u \frac{\partial G}{\partial \mathbf{n}} dl \quad (2.68)$$

Para poder obtener soluciones mediante procedimientos numéricos es necesario parametrizar la superficie y la curva cerrada de integración

$$\oint_C u \frac{\partial G}{\partial \mathbf{n}} dl = \int_a^b u \frac{\partial G}{\partial \mathbf{n}} |\mathbf{r}'(t)| dt, \quad (2.69)$$

donde

$$u \frac{\partial G}{\partial \mathbf{n}} = f[\mathbf{r}(t)] \quad (2.70)$$

Para poder calcular numéricamente la integral de contorno, primero se discretiza el integrando como función del parámetro t y después se calcula la integral utilizando el método numérico correspondiente (algoritmo 2.1)

```

for t=1:TM
    y(t) = f [rvec(t)]
end;
Io = trapz(t, y)
```

Algoritmo 2.1: Cálculo numérico de la integral de contorno mediante MATLAB

2.5. Aportación

En este capítulo se ha realizado un estudio taxonómico de las propiedades de las funciones armónicas aplicadas a la generación de movimientos en robótica, diferenciando aquellas que son favorables de las que plantean una seria limitación para su uso como funciones potenciales. Asimismo el capítulo presenta la metodología para el cálculo analítico de las funciones armónicas con el objetivo de validar las aportaciones que se harán de cara a su mejor adecuación a la planificación de movimientos.

- Una función potencial debe tener como principal cualidad, para la obtención de trayectorias en el espacio de configuraciones, la ausencia de mínimos locales en el dominio en el que está definida. Esta cualidad determina que un planificador de trayectorias basado en funciones armónicas será completo; es

decir siempre encontrará una solución si ésta existe.

- Las trayectorias obtenidas mediante el uso de las funciones armónicas serán suaves: es decir, la curvatura de las curvilíneas obtenidas como proyección sobre el espacio de configuraciones por el seguimiento del gradiente de la función armónica, serán óptimamente reducidas para cualquier tipo de entorno.
- Para determinadas condiciones de contorno la ecuación de Poisson planteada, sobre cualquier entorno posible del C-espacio, tendrá solución y ésta será única. De otra manera, para que exista una solución, las condiciones de contorno planteadas (valor y derivada de la función) no pueden ser cualesquiera; debiendo de cumplir estas unas determinadas condiciones denominadas condiciones de solubilidad.
- Variando ligeramente las condiciones de contorno la solución experimenta, también, una ligera variación. Esta propiedad permite la aplicación de las funciones armónicas en entornos cambiantes, así como la implementación de algoritmos en los que la exploración del C-espacio se va realizando sucesivamente.
- La distribución del gradiente, en principio, será desigual; obteniéndose zonas donde este tomará valores extremadamente bajos y obligando (si el punto inicial se encuentra en ellas) a tiempos de computación inadmisiblemente altos, especialmente si el número de grados de libertad es elevado, lo que haría inviable el método. Será necesario, por tanto, desarrollar un método que contrarreste este problema.

Capítulo 3

Alternativas de moldeo de las funciones armónicas para su uso en la planificación de movimientos

Teniendo en cuenta las condiciones de solubilidad que debe de cumplir todo modelo, la aplicación de condiciones de contorno no uniformes de Dirichlet y mixtas suponen un recurso de moldeo de la función potencial como solución de un modelo formado por la ecuación de Poisson y sus condiciones de contorno.

La utilización de subdominios en los cuales la función potencial será definida como armónica, superarmónica y subarmónica, es el otro recurso utilizable para la obtención de una función potencial con una distribución de gradiente más eficiente.

Con la finalidad de solucionar el problema de las regiones planas o bajo gradiente se propone la utilización de las funciones subarmónicas y superarmónicas, juntamente con el establecimiento *adecuado* de las condiciones de contorno.

En este capítulo se cumplen los siguientes objetivos:

1. Estudiar el efecto de las condiciones de contorno de Dirichlet sobre el moldeo de la función potencial (apartado 3.3).
2. Estudiar el efecto de las condiciones de contorno de Dirichlet no uniformes sobre el moldeo de la función potencial (apartado 3.4).
3. Estudiar el efecto de las condiciones de contorno mixtas (Dirichlet-Neuman) sobre el moldeo de la función potencial (apartado 3.5).
4. Estudiar el efecto de la utilización de las funciones sub y superarmónicas, por subregiones, en el moldeo de la función potencial (apartado 3.6).

3.1. Modelo genérico

En este punto, es conveniente plantear un modelo genérico que contemple todas las posibilidades de modelado de los obstáculos y del contorno, con la finalidad de estudiar e ilustrar las propiedades en cada caso.

El modelo genérico planteado se aplica sobre un dominio Ω particionado en tres subdominios o regiones: región subarmónica Ω_P , región superarmónica Ω_O y región homogénea Ω_H ; con un contorno particionado en dos zonas: zona donde se aplica las condiciones de contorno de Dirichlet $\partial\Omega_D$ y zona donde se aplica las condiciones de contorno de Neuman $\partial\Omega_N$

$$\begin{cases} \nabla^2 u = \rho(\mathbf{r}) + \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_d) & \text{en } \Omega \\ \alpha u + \beta \frac{\partial u}{\partial \bar{n}} = h & \text{en } \partial\Omega \end{cases}$$

donde $\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_d)$ modela el punto objetivo situado en \mathbf{r}_d , $\rho(\mathbf{r})$ modela las regiones sub y superarmónicas:

$$\rho(\mathbf{r}) = \begin{cases} -\rho_O & \forall \mathbf{r} \in \Omega_O \text{ y } \rho_O > 0 \\ \rho_P & \forall \mathbf{r} \in \Omega_P \text{ y } \rho_P > 0 \\ 0 & \forall \mathbf{r} \notin (\Omega_O \cup \Omega_P) \end{cases}$$

y

$$\begin{cases} \alpha = 1, \beta = 0 & \forall \mathbf{r} \in \partial\Omega_D \\ \alpha = 0, \beta = 1 & \forall \mathbf{r} \in \Omega_N \end{cases}$$

Aplicando la 2ª ecuación del teorema de Green (tal como se hace en el apartado 2.4.1)

$$u(\mathbf{r}_p) = g(\mathbf{r}_p, \mathbf{r}_d) + \int_V \rho G dV + \oint_S \left(u \frac{\partial G}{\partial \bar{n}} - G \frac{\partial u}{\partial \bar{n}} \right) dS, \quad (3.1)$$

donde:

- G es la función de Green o respuesta impulsional del modelo:

$$\begin{cases} \nabla^2 G = \delta(\mathbf{r}_p - \mathbf{r}_d) & \forall \mathbf{r}_d \in \Omega \\ \text{condiciones de contorno homogéneas} & \text{en } \partial\Omega \end{cases}$$

- $g(\mathbf{r}, \mathbf{r}_d)$ es la respuesta a la función delta situada en el punto objetivo:

$$g(\mathbf{r}, \mathbf{r}_d) = G(\mathbf{r}, \mathbf{r}_d) \quad (3.2)$$

- La integral de volumen determina la influencia de las regiones sub y superarmónicas.

- La integral de superficie representa las condiciones de contorno:

$$\text{Condiciones de contorno de Dirichlet: } - \oint_S \left(u \frac{\partial G}{\partial n} \right) dS$$

$$\text{Condiciones de contorno de Neuman: } \oint_S \left(G \frac{\partial u}{\partial n} \right) dS$$

Como se aprecia en la ecuación 3.1, la parte fundamental del método es la obtención de la función de Green, lo cual sólo es posible para modelos sencillos. De todas formas el objetivo es ilustrar las propiedades de las funciones armónicas, sub y superarmónicas, así como la aplicación de distintas condiciones de contorno, y esto es posible mediante el estudio de modelos básicos.

Para poder analizar las distintas condiciones de contorno, la obtención de la función de Green se realizará mediante el método de las cargas imagen (condiciones de contorno de Dirichlet) y mediante las series de Fourier (condiciones de contorno de Dirichlet y de Neuman), en ambos casos se plantearán modelos representativos sencillos y se obtendrá resultados utilizando métodos numéricos mediante el programa MATLAB.

3.2. Condiciones de contorno de Dirichlet. Obtención de la función de Green mediante el método de las cargas imágenes, aplicado a funciones de dos variables

Mediante el **método de las imágenes** se puede obtener la función de Green, en un dominio con condiciones de contorno homogéneas, utilizando la función de Green de todo el espacio; las sucesivas cargas imagen son réplicas especulares ficticias, que se forman fuera del dominio al considerar el contorno como si fuera un espejo. De esta forma se puede explorar las propiedades de la solución de forma más intuitiva y sacar conclusiones respecto de la relación entre la distribución del gradiente y las condiciones de contorno.

Para que el método sea factible, y produzca soluciones observables, se aplica a dominios en dos dimensiones.

3.2.1. Función de Green para todo el espacio

De la ecuación 2.50 se obtiene la función de Green para todo el espacio, para un espacio de n dimensiones:

$$\frac{\partial g}{\partial(\mathbf{r} - \mathbf{r}_d)} = \left(\frac{1}{S} \frac{(\mathbf{r} - \mathbf{r}_d)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_d|} \right) \cdot \frac{(\mathbf{r} - \mathbf{r}_d)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_d|} = \frac{1}{S} \quad (3.3)$$

$$\boxed{g(\mathbf{r}, \mathbf{r}_d) = \int \frac{dR}{S}} \quad (3.4)$$

donde $R = |\mathbf{r} - \mathbf{r}_d|$. Para $n = 2$, se tiene:

$$g(\mathbf{r}, \mathbf{r}_d) = \int \frac{dR}{2\pi R} = \frac{1}{2\pi} \ln R + C \quad (3.5)$$

y para $n > 2$, teniendo en cuenta 2.51:

$$g(\mathbf{r}, \mathbf{r}_d) = \frac{\Gamma\left(\frac{n}{2} + 1\right)}{n\pi^{\frac{n}{2}}} \int \frac{dR}{R^{n-1}} = -\frac{\Gamma\left(\frac{n}{2} + 1\right)}{n(n-2)\pi^{\frac{n}{2}}R^{n-2}} + C \quad (3.6)$$

para un espacio infinito, en ambos casos.

3.2.2. Ejemplos basados en condiciones de contorno homogéneas: Rectángulo y circunferencias obstáculo

- **Dominio semiplano.** Aplicando el método a la obtención de la función de Green en un dominio definido por el semiplano $y < 0$, con condiciones de contorno homogéneas en $y = 0$, obtenemos la carga imagen tal como se muestra en la figura 3.1a. La función buscada es la solución de

$$\nabla^2 G = \delta_0 - \delta_I \quad (3.7)$$

aplicada a todo el espacio. De acuerdo con el principio de superposición, la respuesta es la suma de las dos respuestas individuales:

$$G = \frac{1}{2\pi} \ln |\mathbf{r} - \mathbf{r}_0| - \frac{1}{2\pi} \ln |\mathbf{r} - \mathbf{r}_I| = \frac{1}{2\pi} \ln \frac{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_I|} \quad (3.8)$$

De manera que para $y = 0$, $|\mathbf{r} - \mathbf{r}_I| = |\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|$ y $G = \frac{1}{2\pi} \ln 1 = 0$

- **Dominio franja.** Para un dominio determinado por la franja $0 < y < L$, las cargas imagen de δ_0 se obtienen considerando dos espejos situados en $y = 0$ y $y = L$, tal como se muestra en la figura 3.1b. De esta forma se obtienen infinitas imágenes cuyo signo de carga es alternado consecutivamente y el modelo aplicado a todo el espacio es:

$$\nabla^2 G = \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i \delta_{2i} + \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^{(i+1)} \delta_{2i+1} \quad (3.9)$$

cuya solución es:

$$G = \frac{1}{2\pi} \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i \ln |\mathbf{r}_{2i}| + \frac{1}{2\pi} \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i \ln \frac{1}{|\mathbf{r}_{2i+1}|} = \frac{1}{2\pi} \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i \ln \frac{|\mathbf{r}_{2i}|}{|\mathbf{r}_{2i+1}|} \quad (3.10)$$

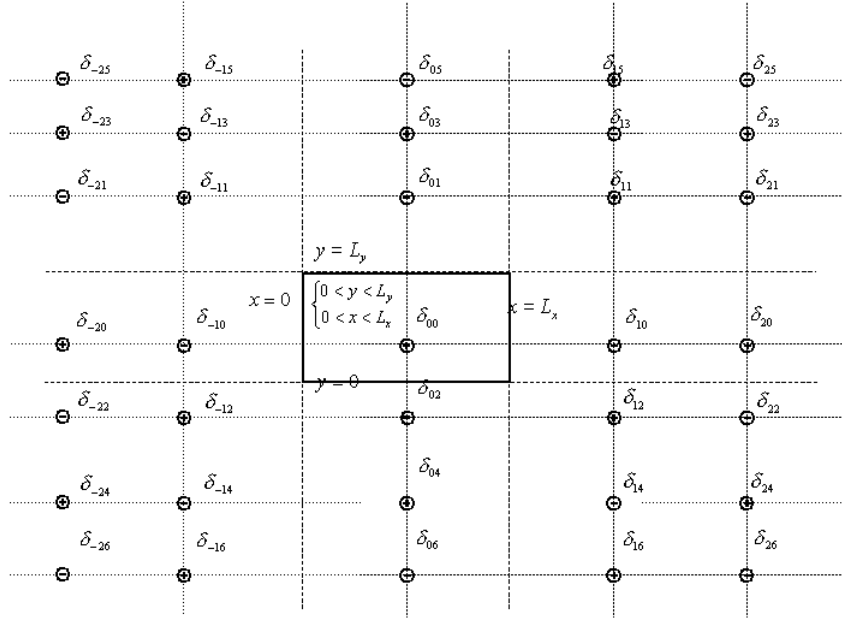


Figura 3.2: Método de las imágenes para la obtención de la función de Green. Dominio rectangular

Los términos correspondientes a las cargas imágenes más alejadas tienen un influencia despreciable y se puede prescindir de ellos. Es decir, conforme $i \cdot L$ es más grande el término del sumatorio correspondiente es más pequeño, cumpliéndose que

$$\lim_{iL \rightarrow \infty} \ln \frac{[(x - x_0)^2 + (y - 2iL - y_0)^2]}{[(x - x_0)^2 + (y + 2iL + y_0)^2]} = 0 \quad (3.17)$$

- **Dominio rectángulo.** Un dominio definido por un rectángulo delimitado por

$$\begin{cases} 0 < x < L_x \\ 0 < y < L_y \end{cases}$$

se puede considerar como la intersección de dos franjas, y las cargas imagen de δ_0 se pueden obtener como las réplicas sobre los espejos situados en $x = 0$, $x = L_x$, $y = 0$ y $y = L_y$ (figura 3.2). La posición de las sucesivas cargas imágenes presentan una ley de recurrencia, de forma que es posible obtener una expresión como un doble sumatorio de una serie:

$$\nabla^2 G = \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^{(i+j)} \delta_{(2i,2j)} - \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^{(i+j)} \delta_{(2i+1,2j+1)} \quad (3.18)$$

$$\nabla^2 G = \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^{(i+j)} [\delta_{(2i,2j)} - \delta_{(2i+1,2j+1)}] \quad (3.19)$$

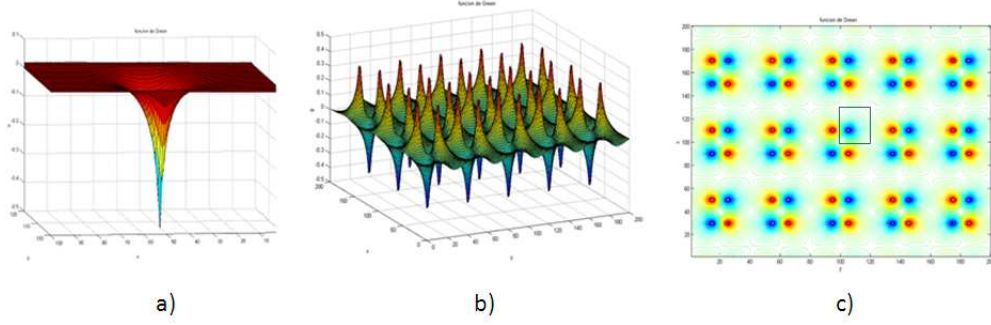


Figura 3.3: Función potencial de Green con cargas imágenes para un dominio rectangular: a) Función de Green, b) Función potencial de las cargas imagen, c) Situación de las cargas imagen.

cuya solución es:

$$G = \frac{1}{2\pi} \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^{(i+j)} \ln \frac{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_{(2i,2j)}|}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_{(2i+1,2j+1)}|} \quad (3.20)$$

de manera que para $x = 0$, $x = L_x$, $y = 0$, $y = L_y$, se cumple que

$$|\mathbf{r} - \mathbf{r}_{(2i+1,2j+1)}| = |\mathbf{r} - \mathbf{r}_{(2i,2j)}| \quad \forall i, j | i, j = 0, 1, 2, \dots \quad (3.21)$$

por lo que en el contorno:

$$G = \frac{1}{2\pi} \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^{(i+j)} \ln 1 = 0 \quad (3.22)$$

Los términos correspondientes a las cargas imágenes mas alejadas tienen un influencia despreciable, siendo nula en el infinito; por lo que se puede tener una aproximación razonable manteniendo unos pocos términos.

La ecuación 3.20 puede expresarse en términos de x e y como:

$$G(x, y) = \frac{1}{4\pi} \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^{(i+j)} \ln \frac{[(x - 2jL_x - x_0)^2 + (y - 2 \cdot i \cdot L_y - y_0)^2]}{[(x - 2 \cdot j \cdot L_x - x_0)^2 + (y + 2iL_y + y_0)^2]} \quad (3.23)$$

Utilizando la ecuación 3.1, para $\rho = 0$ y G dada por la ecuación 3.23, mediante el MATLAB y sus funciones numéricas, se obtiene la solución que se representa en la figura 3.3.

- **Dominio exterior a una circunferencia.** La obtención de la función de Green por el método de las imágenes se realiza de acuerdo con el modelo de la figura 3.4. Esta función será la solución de

$$\nabla^2 G = \delta_0 - \delta_I \quad (3.24)$$

Considerando la circunferencia centrada en el origen y de acuerdo con el principio de superposición, la respuesta es la suma de las dos respuestas

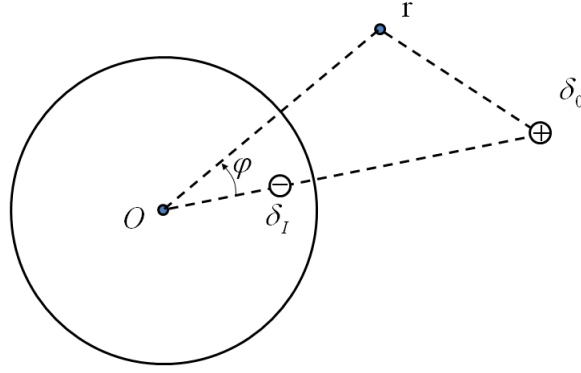


Figura 3.4: Contorno infinito, función delta y obstáculo circular. Carga imagen.

individuales:

$$G = \frac{1}{2\pi} \ln |\mathbf{r} - \mathbf{r}_0| - \frac{1}{2\pi} \ln |\mathbf{r} - \mathbf{r}_I| + C = \frac{1}{4\pi} \ln \frac{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|^2}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_I|^2} + C \quad (3.25)$$

De manera que para $|\mathbf{r}| = R$, G debe valer cero. Lo cual será cierto si se cumple que

$$|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|^2 = k|\mathbf{r} - \mathbf{r}_I|^2, \quad (3.26)$$

sobre la circunferencia y $C = -(1/4\pi) \ln k$.

Se demuestra que esto se cumple para una posición de la imagen sobre la línea radial que une el centro de la circunferencia y la carga, tal que:

$$r_I = \frac{r_0}{R^2} \quad (3.27)$$

y

$$k = \frac{R^2}{r_0^2} \quad (3.28)$$

Así, la función de Green será:

$$G = \frac{1}{4\pi} \ln \left[\frac{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|^2 R^2}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_I|^2 r_0^2} \right] \quad (3.29)$$

y aplicando el teorema de los cosenos, se tiene:

$$G = \frac{1}{4\pi} \ln \left[\frac{R^2 r^2 + r_0^2 - 2rr_0 \cos \varphi}{r_0^2 r^2 + r_I^2 - 2rr_I \cos \varphi} \right] \quad (3.30)$$

Puesto que $r_I = \frac{R^2}{r_0}$,

$$G = \frac{1}{4\pi} \ln \left[\frac{R^2}{r_0^2} \frac{r^2 + r_0^2 - 2rr_0 \cos \varphi}{r^2 + R^4/r_0^2 - 2r(R^2/r_0) \cos \varphi} \right], \quad (3.31)$$

donde φ es el ángulo entre \mathbf{r} y \mathbf{r}_0 y, donde se observa que para $r = R$ se cumple que $G = 0$ (en la figura 3.5 se muestra la representación gráfica de esta función).

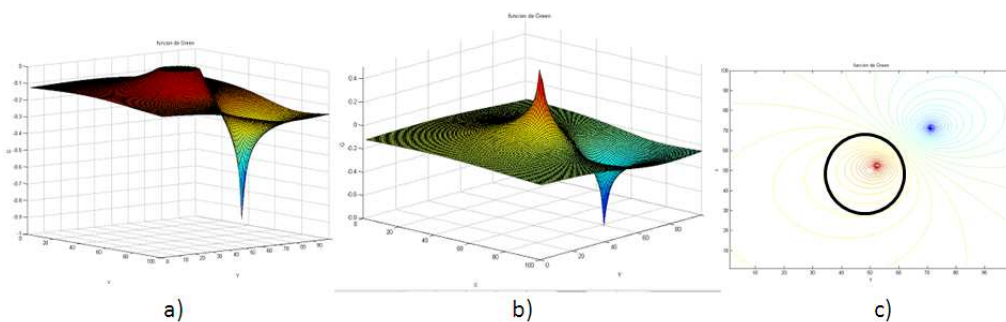


Figura 3.5: Función potencial de Green para un dominio exterior a una circunferencia: a) Función de Green, b) Función potencial de las cargas, c) Situación de las carga imagen.

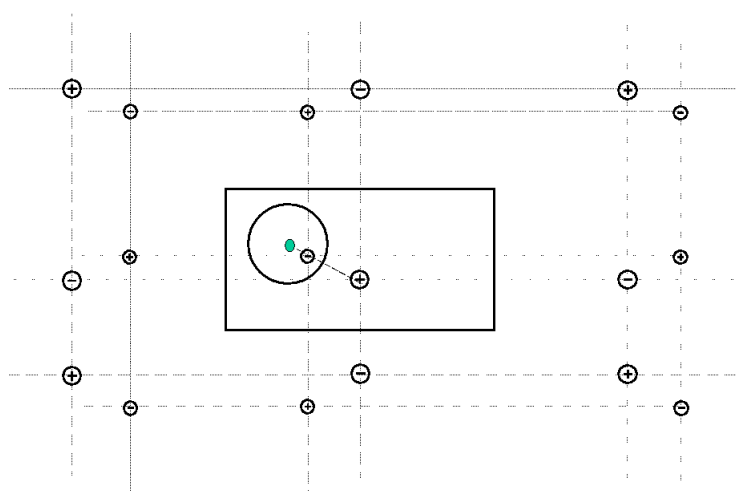


Figura 3.6: Cargas imagen para la obtención de la función de Green en un dominio comprendido entre un rectángulo y una circunferencia interior.

- Domnio rectángulo con una circunferencia interior.** En este modelo el contorno esta formado por un contorno exterior rectangular (dominio del espacio de configuraciones) y un contorno interior circular que representa un obstáculo.

Según la figura 3.6, las cargas imagen se forman por las distintas réplicas especulares. Excepto la primera carga imagen, en el interior de la circunferencia obstáculo, todas las réplicas se concentran en un reducido espacio y, por ser el signo de estas alternado, se considera su efecto neutro o nulo. Por lo tanto, el modelo válido aproximado es

$$\nabla^2 G \simeq \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^{(i+j)} [\delta_{0(2i,2j)} - \delta_{0(2i+1,2j+1)} + \delta_{I(2i+1,2j+1)} - \delta_{I(2i,2j)}] \quad (3.32)$$

cuya solución es, aplicando superposición:

$$G \simeq \frac{1}{2\pi} \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^{(i+j)} \ln \left[\frac{|\mathbf{r}_{0(2i,2j)}| |\mathbf{r}_{I(2i+1,2j+1)}|}{|\mathbf{r}_{0(2i+1,2j+1)}| |\mathbf{r}_{I(2i,2j)}|} \right] \quad (3.33)$$

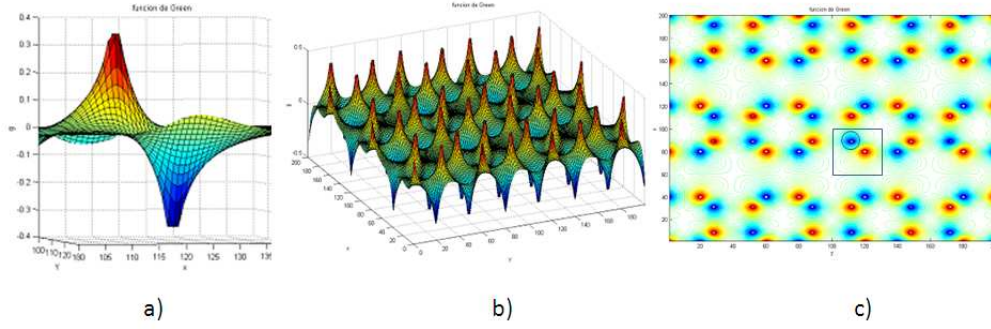


Figura 3.7: Función potencial de Green para un dominio comprendido entre un rectángulo y una circunferencia interior: a) Función de Green (incluyendo el potencial dentro del obstáculo), b) Función potencial de las cargas, c) Situación de las cargas imagen.

de manera que para $x = 0$, $x = L_x$, $y = 0$, $y = L_y$, se cumple que

$$|\mathbf{r}_{0(2i+1,2j+1)}| = |\mathbf{r}_{0(2i,2j)}| \quad y \quad |\mathbf{r}_{I(2i+1,2j+1)}| = |\mathbf{r}_{I(2i,2j)}|; \quad \forall i, j | i, j = 0, 1, 2, \dots \quad (3.34)$$

por lo que en el contorno:

$$G \simeq \frac{1}{2\pi} \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^{(i+j)} \ln 1 = 0 \quad (3.35)$$

Por su parte también $G \simeq 0$ en la circunferencia; ya que la influencia de las cargas especulares exteriores al rectángulo inducirán, a su vez, imágenes en el interior a la circunferencia aglutinadas cerca del centro, cancelándose por tanto unas a otras.

La función 3.33 puede expresarse en términos de x e y como:

$$G(x, y) \simeq \frac{1}{4\pi} \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^{(i+j)} \ln \left[\frac{[(x - 2jL_x - x_{00})^2 + (y - 2iL_y - y_{00})^2]}{[(x - 2jL_x - x_{00})^2 + (y + 2iL_y + y_{00})^2]} \right. \\ \left. \frac{[(x - 2jL_x - x_{0I})^2 + (y + 2iL_y + y_{0I})^2]}{[(x - 2jL_x - x_{0I})^2 + (y - 2iL_y - y_{0I})^2]} \right] \quad (3.36)$$

La programación, mediante MATLAB, de la solución se representa en la figura 3.7, en ella se aprecia el cumplimiento de las suposiciones y del resultado, tanto de las cargas imagen, de las condiciones de contorno homogéneas, como de la función de Green obtenidas.

3.2.3. Contorno infinito, función delta y obstáculo circular

En este caso se puede considerar el obstáculo como el contorno. Es decir, existirá un contorno interno circular y la integral de circulación del contorno

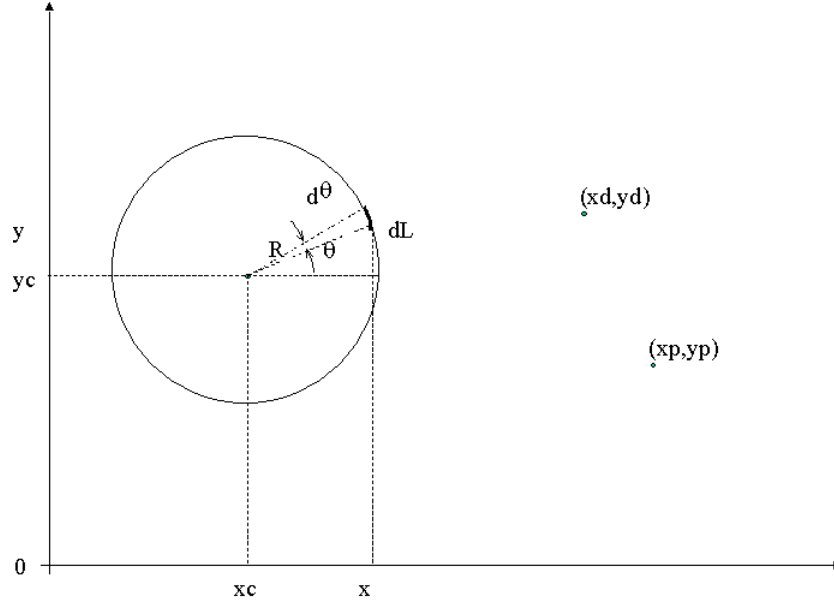


Figura 3.8: Obstáculo circular.

será la de la circunferencia interna (figura 3.8), ya que el gradiente de G en el infinito es cero. De esta forma, la expresión global del potencial será, para condiciones de contorno genéricas de Dirichlet:

$$u = g + \oint_O f(\mathbf{r}) \frac{\partial G}{\partial \mathbf{n}} dS \quad (3.37)$$

Para un espacio de 2 dimensiones:

Dada la ecuación 3.31:

$$G = \frac{1}{4\pi} \ln \left[\frac{R^2}{r_0^2} \frac{r^2 + r_0^2 - 2rr_0 \cos \varphi}{r^2 + R^4/r_0^2 - 2r(R^2/r_0) \cos \varphi} \right], \quad (3.38)$$

para evaluar la integral de contorno, que determina la influencia de las condiciones de contorno, se obtiene la derivada de la función de Green con respecto a \mathbf{r}_0 en el contorno:

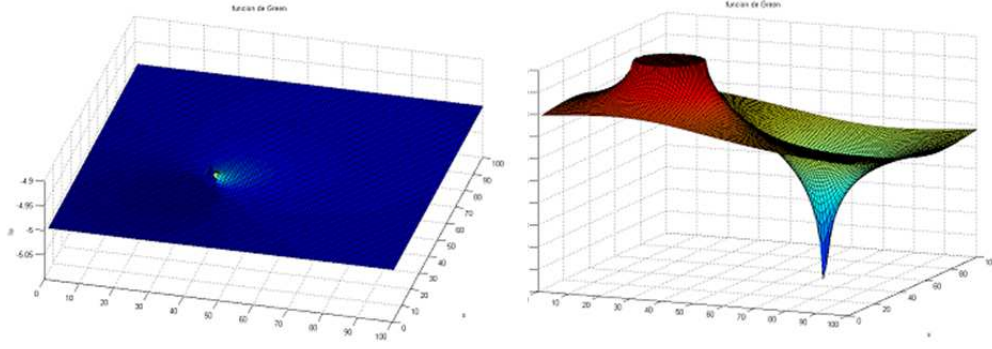
$$\left. \frac{\partial G}{\partial r_0} \right|_{r_0=R} = \frac{R}{2\pi} \frac{1 - (r/R)^2}{r^2 + R^2 - 2Rr \cos \varphi} \quad (3.39)$$

Por lo tanto la aportación de las condiciones de contorno ($f(\mathbf{r}_0)$) a la solución de la ecuación en derivadas parciales viene dada por la integral:

$$I_O(r, \theta) = \oint_O f(r_0) \left. \frac{\partial G}{\partial r_0} \right|_{r_0=R} dL = \frac{R}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\theta_0) \frac{1 - (r/R)^2}{r^2 + R^2 - 2Rr \cos(\theta - \theta_0)} R d\theta_0 \quad (3.40)$$

$$I_O(r, \theta) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\theta_0) \frac{R^2 - r^2}{r^2 + R^2 - 2Rr \cos(\theta - \theta_0)} d\theta_0 \quad (3.41)$$

denominada integral de Poisson. A una distancia elevada del contorno circular, la influencia de sus condiciones de contorno se uniformiza a un valor



a) Término aportado por la integral del contorno del obstáculo.

b) Función potencial solución del modelo.

Figura 3.9: Condiciones de contorno constante ($u_C = K_C = 5$) para un obstáculo circular.

constante:

$$\lim_{r \rightarrow \infty} I_O(r, \theta) = -\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\theta_0) d\theta_0 = -f_{MED}(\theta_0), \quad (3.42)$$

que es el valor medio de las condiciones de contorno y que es independiente de la posición del punto como función de θ .

Aplicando el teorema del valor medio para integrales del producto de dos funciones, para n dimensiones en general se cumple:

$$I_{O_{MED}} = \oint_S f(\mathbf{r}_C) \frac{\partial G}{\partial \mathbf{n}} dS = f_{MED}(\mathbf{r}_C) \oint_S \left(\frac{\partial G}{\partial \mathbf{n}} \right) dS = u_{medio} \cdot 1 = \frac{\oint_S f(\mathbf{r}_C) dS}{S}$$

$$I_{O_{MED}} = \frac{\oint_S f(\mathbf{r}_C) dS}{S} \quad (3.43)$$

Además, teniendo en cuenta que $u(r, \theta) = g(r, \theta) + I_O(r, \theta)$, se cumple:

$$\oint_O \frac{\partial I_O}{\partial r} dS = 0 \quad (3.44)$$

para cualquier superficie cerrada que envuelva el obstáculo, lo que quiere decir que:

- El balance de la derivada de la función influencia I_O , se compensará haciéndose cero. Es decir, si la pendiente de salida del obstáculo tiene un valor elevado en alguna zona, puede provocar que la pendiente entrante en otra determine mínimos locales sobre el contorno.

Condiciones de contorno: valor constante de la función potencial sobre el contorno de un obstáculo circular

Para $u_C = K_C$, la influencia que tiene sobre la solución viene dada por

$$I_O(r, \theta) = K_C \oint_O \left. \frac{\partial G}{\partial r_0} \right|_{r_0=R} dL = \frac{K_C R}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{1 - (r/R)^2}{r^2 + R^2 - 2Rr \cos(\theta - \theta_0)} R d\theta_0 = K_C \quad (3.45)$$

resultado coherente con las condiciones de solubilidad, ya que

$$K_C \oint_O \left. \frac{\partial G}{\partial r_0} \right|_{r_0=R} dL = K_C \cdot 1 = K_C \quad (3.46)$$

El valor constante de la integral determina que:

- La influencia, de un valor contante de las condiciones de contorno, sobre el gradiente de la función potencial, es nula en todo el dominio y solo afecta al valor de la función en una constante sumatoria, figura 3.9.

3.3. Moldeado de la función potencial mediante la aplicación de condiciones de contorno no uniformes de Dirichlet

La aplicación de condiciones de contorno de Dirichlet no uniformes tiene un efecto de moldeado sobre la función potencial solución que es necesario conocer. El contorno genérico a tener en cuenta, está formado por un contorno rectangular externo $\partial\Omega_R$ y un contorno interno definido por los obstáculos $\partial\Omega_O$. Sobre el dominio limitado por este contorno se aplica la ecuación de Poisson $\nabla^2 u = \delta(\mathbf{r}_d)$.

Las condiciones de contorno no uniformes de Dirichlet suponen que el valor de la función potencial en el contorno será función del punto considerado:

$$\left. \begin{aligned} u(\mathbf{r})|_C &= f(\mathbf{r}_C) \\ \oint_S \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} dS &= 1 \end{aligned} \right\}$$

Aplicando la segunda ecuación de Green se obtiene la solución:

$$u = g + \oint_S f(\mathbf{r}) \frac{\partial G}{\partial \mathbf{n}} dS \quad (3.47)$$

Inicialmente se estudian varios modelos básicos y se extraen las conclusiones generales que se tendrán en consideración a la hora de diseñar el algoritmo planificador.

3.3.1. Dominio en forma de franja

La función de Green viene dada por la expresión 3.16, donde el término genérico del sumatorio es:

$$G_i(x, y; x_p, y_p) = \frac{1}{4\pi} \ln \frac{(x - x_p)^2 + (y - 2iL - y_p)^2}{(x - x_p)^2 + (y + 2iL + y_p)^2} \quad (3.48)$$

y sus derivadas en la dirección normal del contorno, $y_p = L$ y $y_p = 0$:

$$\left. \frac{\partial G_i(x, y; x_p, y_p)}{\partial y_p} \right|_{y_p=L} = -\frac{1}{4\pi} \left[\frac{2(y - (2i + 1)L)}{(x - x_p)^2 + (y - (2i + 1)L)^2} + \frac{2(y + (2i + 1)L)}{(x - x_p)^2 + (y + (2i + 1)L)^2} \right], \quad (3.49)$$

$$\left. \frac{\partial G_i(x, y; x_p, y_p)}{\partial(-y_p)} \right|_{y_p=0} = \frac{1}{4\pi} \left[\frac{2(y - 2 \cdot i \cdot L)}{(x - x_p)^2 + (y - 2 \cdot i \cdot L)^2} + \frac{2(y + 2 \cdot i \cdot L)}{(x - x_p)^2 + (y + 2 \cdot i \cdot L)^2} \right] \quad (3.50)$$

De esta forma se obtiene la integral de contorno:

$$\oint_S f(\mathbf{r}) \frac{\partial G}{\partial \mathbf{n}} dS = \sum_{i=1}^{\infty} (-1)^i \int_{-\infty}^{+\infty} f(r_p) \left. \frac{\partial G_i}{\partial y_p} \right|_{y_p=L} dx_p + \sum_{i=1}^{\infty} (-1)^i \int_{-\infty}^{+\infty} f(r_p) \left. \frac{\partial G_i}{\partial(-y_p)} \right|_{y_p=0} dx_p \quad (3.51)$$

Condiciones de contorno dependientes de la distancia, para un dominio en franja: $u_C|_{y=L} = u_C|_{y=0} = k \cdot |x - x_0|$

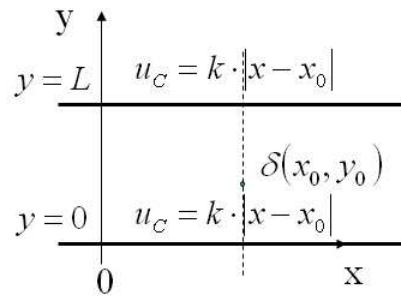
En este modelo el valor de la función potencial en el contorno es proporcional a la distancia respecto de la situación de la función delta.

$$\oint_S f(\mathbf{r}) \frac{\partial G}{\partial \mathbf{n}} dS = k \sum_{i=1}^{\infty} (-1)^i \int_{-\infty}^{+\infty} |x - x_0| \left. \frac{\partial G_i}{\partial y_p} \right|_{y_p=L} dx_p + k \sum_{i=1}^{\infty} (-1)^i \int_{-\infty}^{+\infty} |x - x_0| \left. \frac{\partial G_i}{\partial(-y_p)} \right|_{y_p=0} dx_p \quad (3.52)$$

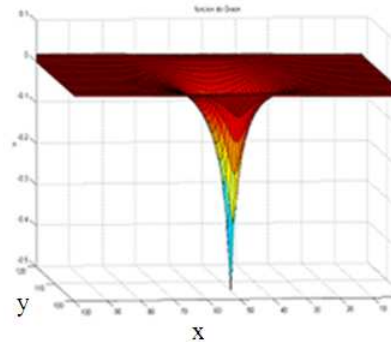
En la figura 3.10 se muestran el modelo y los resultados. Se observa que es posible modular la derivada tangencial en el contorno, mientras que el balance global de la derivada normal en el mismo permanece constante.

En este caso la derivada normal aportada por las condiciones de contorno es cero en todo el contorno y por lo tanto no existe un flujo de paso interferente, sin embargo:

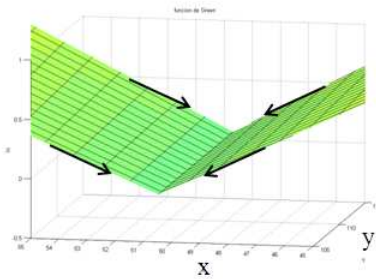
- Se establece una derivada tangencial que garantiza la existencia de un gradiente elevado incluso en los puntos alejados del destino, lo cual es un efecto deseable.



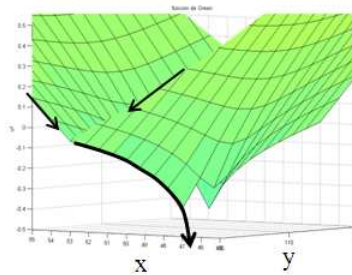
a) Dominio franja y función delta.



b) Función de Green.



c) Término correspondiente a la integral de contorno.



d) Función potencial solución del modelo.

Figura 3.10: Condiciones de contorno dependiente de la distancia para un dominio franja.

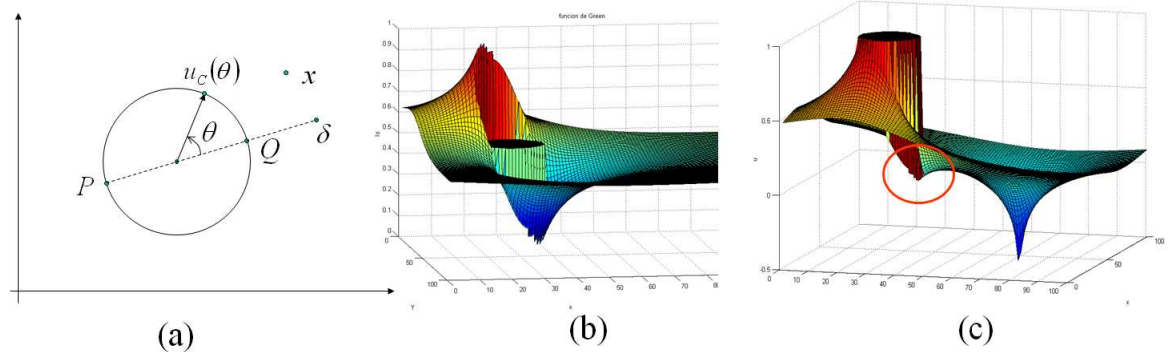


Figura 3.11: Condiciones de contorno función de la distancia sobre el perímetro de un obstáculo circular: (a) Contorno del obstáculo circular. (b) Término correspondiente a la integral de contorno. (c) Función potencial, señalando el mínimo sobre el contorno.

3.3.2. Condiciones de contorno proporcional con la distancia sobre el contorno de un obstáculo circular

Con la finalidad de establecer una derivada tangencial sobre el contorno obstáculo, que determine un gradiente favorable en el entorno próximo, se fija $u_C = k \cdot l(\theta_0)$ de forma que la referencia se encuentre sobre una línea que una el punto destino con el centro de la circunferencia y que intersecta la misma en los puntos P y Q (figura 3.11). La dependencia lineal tendrá su valor máximo en el punto P y valdrá cero en el punto Q

$$I_O(r, \theta) = \oint_O k \cdot l(\theta_0) \left. \frac{\partial G}{\partial r_0} \right|_{r_0=R} dL = \frac{k}{2\pi} \int_0^{2\pi} l(\theta_0) \frac{R^2 - r^2}{r^2 + R^2 - 2Rr \cos(\theta - \theta_0)} d\theta_0 \quad (3.53)$$

- La influencia que tiene estas condiciones de contorno, sobre la distribución del gradiente, es favorable ya que en conjunto se observa una cierta modulación en la dirección del punto destino, sin embargo aparece la posibilidad (si se acentúa demasiado el afecto) de un mínimo local en el punto Q sobre el contorno.

3.4. Moldeado de la función potencial mediante el uso de condiciones de contorno mixtas

En el caso de un dominio rectangular, con obstáculos formando parte del contorno, es preferible utilizar las series de Fourier para obtener la función de Green ya que nos permitirá aplicar condiciones de contorno tanto de Dirichlet como de Neuman.

3.4.1. Obtención de la función de Green utilizando las series de Fourier

Con la finalidad de poder estudiar la influencia que tienen las condiciones de contorno de Neuman en la distribución del gradiente, se propone obtener la función de Green solución del siguiente modelo:

$$\left\{ \begin{array}{l} \nabla^2 G = \delta(x - x_0, y - y_0) \quad \text{en } \Omega \\ G(0, y) = 0 \quad y \quad G(L, y) = 0, \quad 0 < y < H \\ \frac{\partial G}{\partial y}(x, 0) = 0 \quad y \quad \frac{\partial G}{\partial y}(x, H) = 0, \quad 0 < x < L \end{array} \right.$$

Puesto que el flujo total del gradiente en el contorno es constante e igual a uno, con estas condiciones de contorno mixtas se trata de ilustrar como es posible distribuir este gradiente de forma idónea para la consecución del principal objetivo que es la obtención de trayectorias en el menor tiempo

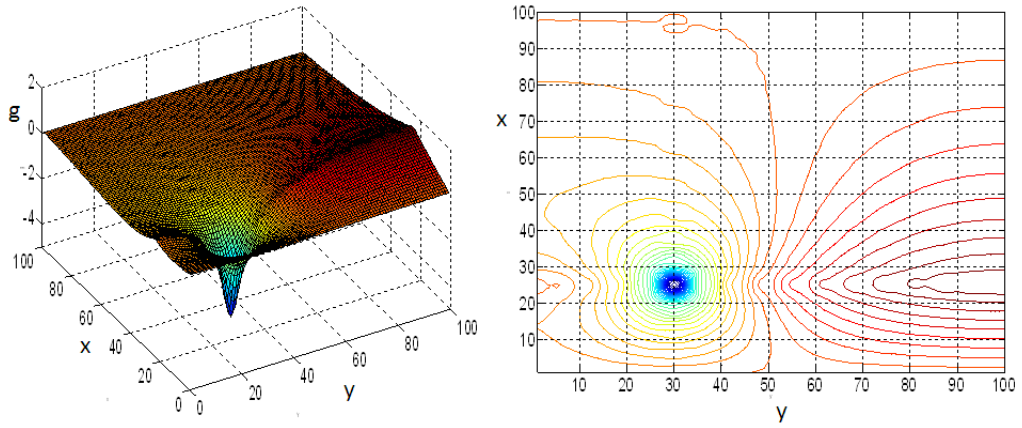


Figura 3.12: Función potencial de Green para un dominio rectangular y condiciones de contorno mixtas.

posible.

Aplicando las series de Fourier, la solución sería

$$g(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} a_{mn} \sin\left(\frac{m\pi x}{L}\right) \cos\left(\frac{n\pi y}{H}\right) \quad (3.54)$$

donde cada término de la serie se corresponde con las autofunciones que cumplen las condiciones de contorno. Para poder sustituir en la ecuación en derivadas parciales, se obtiene

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2 g}{\partial x^2} &= - \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} a_{mn} \frac{m^2 \pi^2}{L^2} \sin\left(\frac{m\pi x}{L}\right) \cos\left(\frac{n\pi y}{H}\right) \\ \frac{\partial^2 g}{\partial y^2} &= - \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} a_{mn} \frac{n^2 \pi^2}{H^2} \sin\left(\frac{m\pi x}{L}\right) \cos\left(\frac{n\pi y}{H}\right) \end{aligned} \right\}$$

De la misma forma, se tiene

$$\delta(x - x_0, y - y_0) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} c_{mn} \sin\left(\frac{m\pi x}{L}\right) \cos\left(\frac{n\pi y}{H}\right), \quad (3.55)$$

donde

$$c_{mn} = \frac{4}{LH} \int_0^H \left\{ \delta(y - y_0) \cos\left(\frac{n\pi y}{H}\right) \int_0^L \delta(x - x_0) \sin\left(\frac{m\pi x}{L}\right) dx \right\} dy \quad (3.56)$$

y, por las propiedades de la función delta

$$c_{mn} = \frac{4}{LH} \sin\left(\frac{m\pi x_0}{L}\right) \cos\left(\frac{n\pi y_0}{H}\right) \quad (3.57)$$

Así, sustituyendo en la ecuación en derivadas parciales e igualando término a término (cada término es solución) se obtiene

$$a_{mn} = - \frac{4 \sin\left(\frac{m\pi x_0}{L}\right) \cos\left(\frac{n\pi y_0}{H}\right)}{LH \left(\frac{m^2}{L^2} + \frac{n^2}{H^2}\right)} \quad (3.58)$$

que es la amplitud de cada término de la serie, su valor decrece con la suma de los cuadrados de m y n , de forma que para su cálculo y representación gráfica (figura 3.12) solamente se utilizaron los veinte primeros términos. También en este caso son necesarios pocos términos de la serie para su cálculo y representación.

3.4.2. Propuesta de moldeado

Se observa el efecto interesante de que el bloqueo del flujo del gradiente en una zona del contorno, impuesto por las condiciones de contorno de Neuman, se compensa por un aumento del mismo en la zona donde se aplica las condiciones de contorno de Dirichlet.

Este efecto puede ser utilizado convenientemente para obtener una distribución del gradiente de la función potencial más eficiente:

- Aplicando condiciones de contorno de Dirichlet en los límites del dominio y de Neuman en los obstáculos contenidos en su interior, se conseguirá que el módulo del gradiente en los pasillos formados entre obstáculos no sea excesivamente reducido y que, por consiguiente, sea posible la obtención de trayectorias a través de ellos.

3.5. Moldeado de la función potencial mediante la utilización de las funciones superarmónicas y subarmónicas

La utilización de las funciones superarmónicas y subarmónicas, para modelar los obstáculos y el espacio libre, es el otro recurso disponible para obtener soluciones de la función potencial con una distribución del gradiente más eficiente.

En principio, utilizando las funciones de Green y la herramienta MATLAB, se obtienen soluciones numéricas de modelos sencillos. De ellos se extraen conclusiones que son la base para el diseño del modelado utilizado.

3.5.1. Contorno infinito, función delta y obstáculo circular

En lugar de considerar un obstáculo genérico circular como parte del contorno, al cual se le atribuyen unas condiciones de contorno determinadas, se le puede hacer corresponder una función ρ de forma que obtengamos una función de Poisson (subarmónica) como modelo

$$\nabla^2 u = \rho(\mathbf{r} - \mathbf{r}_O) + \delta(\mathbf{r}_d), \quad (3.59)$$

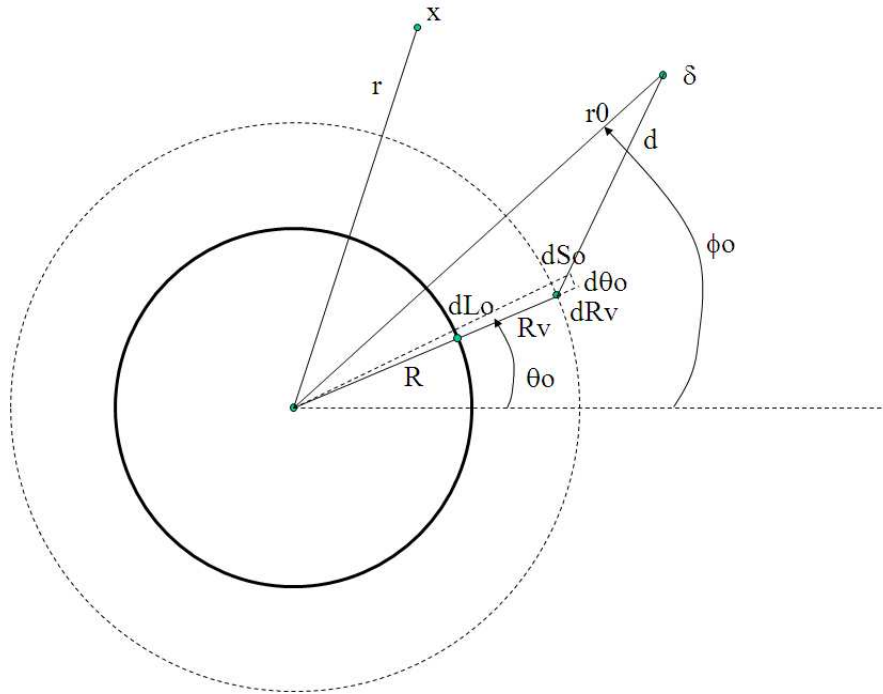


Figura 3.13: Integración de contorno y de volumen.

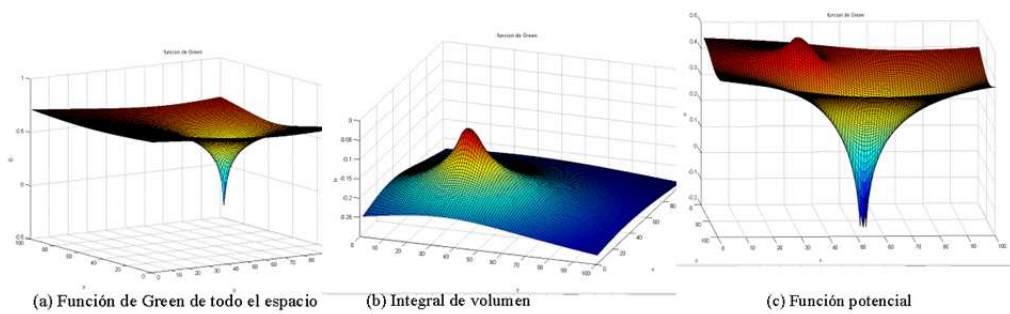


Figura 3.14: Modelado de un obstáculo circular como función superarmónica.

donde ρ tomará un valor constante dentro del obstáculo circular, centrado en \mathbf{r}_O , y valdrá cero en el resto

$$\rho(\mathbf{r} - \mathbf{r}_O) = \begin{cases} -\rho_k, & \forall \mathbf{r} \in |\mathbf{r} - \mathbf{r}_O| \leq R \text{ y } \rho_k > 0 \\ 0, & \forall \mathbf{r} \in |\mathbf{r} - \mathbf{r}_O| > R \end{cases}$$

Entonces, la solución del modelo será

$$u(\mathbf{r}) = g(\mathbf{r}, \mathbf{r}_d) + I_V(\mathbf{r}) \quad (3.60)$$

Siendo I_V la integral de volumen que representa la influencia de la función obstáculo

$$I_V(\mathbf{r}) = -\rho_k \int_V G(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0) dV_0, \quad (3.61)$$

donde la función de Green de todo el espacio, es

$$G(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0) = \frac{1}{2\pi} \ln [d_0] \quad (3.62)$$

donde $d_0 = |\mathbf{r} - \mathbf{r}_V|$ y la respuesta a la función δ es $g(\mathbf{r}, \mathbf{r}_d) = G(\mathbf{r}, \mathbf{r}_d)$

Entonces

$$I_V(\mathbf{r}) = -\frac{\rho_k}{2\pi} \int_V \ln [d_0] dV_0, \quad (3.63)$$

Pasando a coordenadas paramétricas (figura 3.13)

$$\begin{cases} \mathbf{r} = (r, \theta) \\ \mathbf{r}_0 = (r_0, \theta_0) \\ dV_0 \equiv dA_0 = dL dR_V = R_V d\theta_0 dR_V \\ d_0^2 = r^2 + R_V^2 - 2rR_V \cos(\theta - \theta_0) \end{cases}$$

se tiene

$$I_V(r, \theta) = -\frac{\rho_k}{4\pi} \int_0^R \left[R_V \int_0^{2\pi} \ln [r^2 + R_V^2 - 2rR_V \cos(\theta - \theta_0)] d\theta_0 \right] dR_V \quad (3.64)$$

Por la simetría del problema se cumple $I_V(r, \theta) \equiv I_V(r)$

La función potencial, solución de la ecuación 3.64, tiene un único máximo en el interior del obstáculo, situado en el centro.

Considerando únicamente el obstáculo y aplicando el teorema de la divergencia a una esfera centrada en \mathbf{r}_O

$$\oint_S \nabla u dS = \int_V (\nabla \cdot \nabla u) dV, \quad (3.65)$$

para dos dimensiones

$$\oint_L \nabla u dL = \int_S -\rho_k dS \quad (3.66)$$

y teniendo en cuenta la simetría del modelo, se tiene

$$\nabla u L_r = -\rho_k S_r \quad (3.67)$$

Para $r \leq R$

$$\nabla u = -\rho_k \frac{S_r}{L_r} = -\frac{\rho_k}{2} r \quad (3.68)$$

Para $r > R$

$$\nabla u = -\frac{R^2 \rho_k}{2} \cdot \frac{1}{r} \quad (3.69)$$

(el signo negativo indica que el sentido es saliente del obstáculo)

Es decir, en el punto \mathbf{r}_O se cumple que $r = 0$ y $\nabla u = 0$, además $\nabla^2 u < 0$ por lo que, teniendo en cuenta el principio del máximo, existirá un máximo en dicho punto. Por otro lado, para $\mathbf{r} \neq \mathbf{r}_O$ se cumple que $r \neq 0$ y $\nabla u \neq 0$, por lo que solo existirá un máximo.

A la vista de los resultados obtenidos (figura 3.14) se puede deducir que:

- Es posible modelar los obstáculos como funciones superarmónicas, en lugar de modelarlos como contorno interno. El contorno de los mismos no está tan definido, pero se garantizará un gradiente de alejamiento en la superficie de los mismos, de tal manera que la trayectoria que se genera mediante el seguimiento de dicho gradiente, permanecerá alejada del obstáculo. La principal ventaja radica en que cada obstáculo actúa como fuente de flujo de gradiente, constituyendo un recurso para el moldeado del mismo, tal que se eviten regiones planas en el dominio.

3.5.2. Contorno infinito, función delta, obstáculos y parche en torno del punto objetivo.

El modelo planteado considera el punto destino, como siempre, por $\delta(\mathbf{r}_d)$ sin embargo, los obstáculos ya no formarán parte del contorno, sino que vendrán representados por una región $\Omega_O \subset \Omega$ donde la función potencial u será superarmónica y

$$\Omega_O = \Omega_{O_1} \cup \Omega_{O_2} \cup \Omega_{O_3} \cup \dots \cup \Omega_{O_n}, \quad (3.70)$$

donde Ω_{O_i} representa el subdominio donde se ubica el obstáculo O_i .

También se definirá otra región $\Omega_P \subset \Omega$, situada estratégicamente en torno de la función delta donde la función u será subarmónica, de forma que se creará un pozo de potencial que reforzará el efecto de atracción sobre el objetivo.

Es decir, la función potencial es solución de la ecuación de Poisson

$$\nabla^2 u = \rho(\mathbf{r}) + \delta(\mathbf{r}_d), \quad (3.71)$$

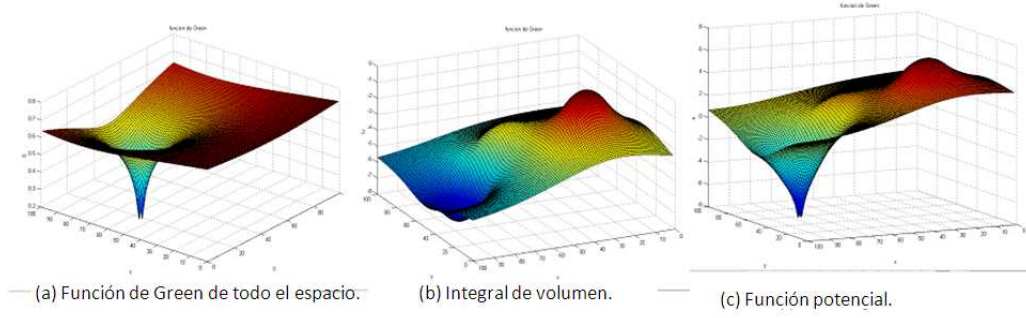


Figura 3.15: Modelado de dos obstáculos circulares como función de volumen y utilización de un parche circular.

donde

$$\rho(\mathbf{r}) = \begin{cases} -\rho_O & \forall \mathbf{r} \in \Omega_O \text{ y } \rho_O > 0 \\ \rho_P & \forall \mathbf{r} \in \Omega_P \text{ y } \rho_P > 0 \\ 0 & \forall \mathbf{r} \notin (\Omega_O \cup \Omega_P) \end{cases}$$

tal que ρ_O y ρ_P son valores constantes y positivos. Considerando la influencia, sobre la solución, del obstáculo O_i

$$\nabla^2 u_i = \rho(\mathbf{r}), \quad (3.72)$$

tal que

$$\rho(\mathbf{r}) = \begin{cases} -\rho_{O_i} & \forall \mathbf{r} \in \Omega_{O_i} \text{ y } \rho_{O_i} > 0 \\ 0 & \forall \mathbf{r} \notin \Omega_{O_i} \end{cases}$$

y del pozo de potencial P

$$\nabla^2 u_p = \rho(\mathbf{r}), \quad (3.73)$$

tal que

$$\rho(\mathbf{r}) = \begin{cases} \rho_P & \forall \mathbf{r} \in \Omega_P \text{ y } \rho_P > 0 \\ 0 & \forall \mathbf{r} \notin \Omega_P \end{cases}$$

y aplicando el principio de superposición, se obtiene la solución influencia de los obstáculos en un punto cualquiera del dominio

$$u = \sum_{i=1}^n u_i + u_p \quad (3.74)$$

Similarmente, el gradiente en un punto será la suma vectorial

$$\nabla u = \sum_{i=1}^n \nabla u_i + \nabla u_p \quad (3.75)$$

Por otro lado, es conveniente homogeneizar la influencia de los obstáculos en la solución y en el gradiente resultante, de manera que la repulsión producida por un obstáculo no dependa de su tamaño, para ello se define el concepto de masa de un obstáculo como

$$M_{O_i} = \rho_{O_i} V_{O_i} \quad (3.76)$$

de forma que, para un obstáculo aislado, el flujo del gradiente que atraviesa una esfera que lo contiene es

$$\phi_{O_i} = \oint_S \nabla u_i \cdot d\mathbf{S} = \int_V \nabla^2 u_i dV = -\rho_{O_i} V_{O_i} = -M_{O_i} \quad (3.77)$$

Para un obstáculo aislado circular (2D), el valor máximo situado en el centro sería

$$u_{MAXO_i} = u_{CO_i} + \frac{\rho_{O_i}}{4} R_{O_i}^2 = u_{CO_i} + \frac{M_{O_i}}{4\pi}, \quad (3.78)$$

Debiéndose cumplir, para uniformizar la influencia de los obstáculos, que

$$M_{O_i} = M_{O_j} = K_M \quad \forall (i, j) \in [n, n] \quad y \quad | \quad i \neq j \quad (3.79)$$

Lo que supone que el valor constante dado a la función densidad (ρ_{O_i}) deberá ser ponderado:

$$\rho_{O_i} = \frac{K_M}{V_{O_i}} \quad (3.80)$$

El establecimiento de la región parche en torno del objetivo debe de realizarse teniendo en cuenta la función que debe desempeñar:

- Acentuar el gradiente en el dominio sin crear mínimos locales.

Para cumplir este fin, la región parche debe estar confinada por los obstáculos, debe tener un tamaño reducido y su valor ρ no debe ser muy elevado. De este modo se minimiza el riesgo de mínimo local pero no se anula, con la modelización mediante coronas propuesta en la sección siguiente se elimina este riesgo.

En el caso ideal del ejemplo en 2D, el parche es un círculo centrado en el objetivo y los obstáculos son también modelados como círculos.

Por último, el balance global (obstáculos, parche y función delta) del flujo, será

$$\phi_G = \oint_{S_G} \nabla u \cdot d\mathbf{S} = \int_{V_G} \nabla^2 u dV = 1 + M_P - M_O \quad (3.81)$$

donde M_P es la masa del parche, con signo contrario a la masa de los obstáculos y valor $M_P = \rho_P V_P$.

Este flujo global ϕ_G , interesa que tenga un cierto valor positivo que deberá aportar el contorno (en este caso situado en el infinito por simplicidad), de esta forma existirá un gradiente mínimo en todo el dominio.

Con la finalidad de que exista un determinado gradiente en el dominio que

conduzca hacia el punto objetivo, el contorno debe aportar un gradiente definido por una Densidad Media de Flujo en el Contorno

$$DMFC = \frac{\phi_G}{L_{CONT}} = K \quad (3.82)$$

donde ϕ_G es el flujo global del gradiente aportado por el contorno, que cumple

$$\phi_G = 1 + M_{CP} - M_{CO} \quad (3.83)$$

Entonces la fijación de ϕ_G condiciona el valor de ρ_P

$$\rho_P = \frac{M_P}{V_P} = \frac{\phi_G - 1 + M_O}{V_P} \quad (3.84)$$

En resumen y a la vista de los resultados, se concluye:

- La definición de una zona Ω_P , en torno de la función delta, donde la función será subarmónica, supone la generación de un pozo de potencial que acentúa el gradiente en todo el dominio.
- Manejando adecuadamente M_P y M_O se puede obtener un déficit positivo del balance del flujo entre los obstáculos, el pozo de potencial y la función δ ; lo que determina la necesidad de aportación de flujo del gradiente por parte del contorno y, por consiguiente, una mejora del mismo en el dominio.
- El hecho de poder definir la masa de cada obstáculo, hace el procedimiento más flexible para su combinación con los métodos de exploración aleatoria del espacio de configuraciones; en los cuales se obtiene información parcial del entorno, en etapas sucesivas (capítulo 6)

3.5.3. Modelización de los obstáculos mediante coronas circulares.

La mayor facilidad para determinar la superficie de contorno en lugar del volumen, tanto de los obstáculos como del pozo de potencial, así como una mejor definición de los contornos, sugiere la utilización de superficies de contorno en lugar de volúmenes para modelar los obstáculos y el pozo de potencial.

Así, utilizando la misma idea de modelización del apartado anterior, se realiza la modificación de las regiones de volúmenes a coronas

$$\left\{ \begin{array}{l} \Omega_{O_i} \rightarrow \Omega_{CO_i} \\ \Omega_P \rightarrow \Omega_{CP} \end{array} \right.$$

La definición de masa de las coronas será, similarmente

$$\left\{ \begin{array}{l} M_{CO_i} = \rho_{CO_i} S_{CO_i} \\ M_{CP} = \rho_{CP} S_{CP} \end{array} \right.$$

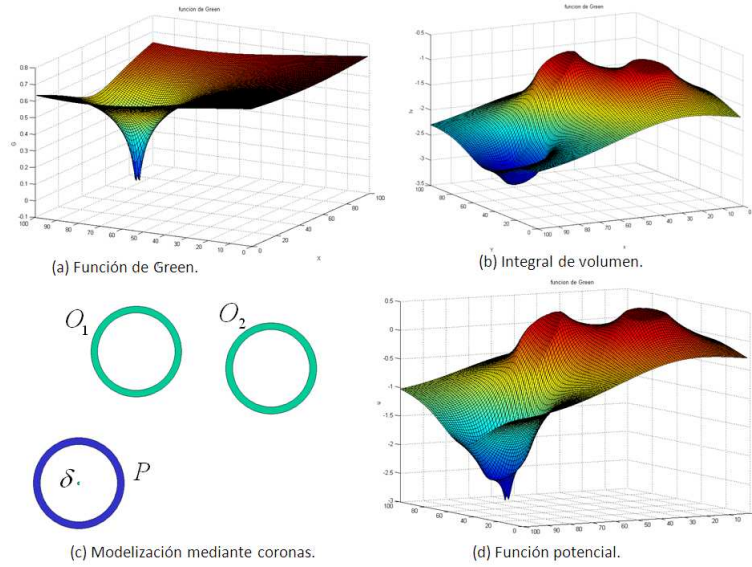


Figura 3.16: Modelización de los obstáculos y pozo de potencial mediante coronas circulares.

La modelización de un obstáculo mediante una función superarmónica, en forma de corona circular, vendrá dada por

$$\nabla^2 u = \rho(\mathbf{r} - \mathbf{r}_O), \tag{3.85}$$

donde ρ tomará un valor constante negativo dentro de la corona circular, centrada en \mathbf{r}_O , y valdrá cero en el resto

$$\rho(\mathbf{r} - \mathbf{r}_O) = \begin{cases} -\rho_k, & \forall \mathbf{r} \in R_1 \leq |\mathbf{r} - \mathbf{r}_O| \leq R_2 \\ 0, & \forall \mathbf{r} \in (|\mathbf{r} - \mathbf{r}_O| < R_1) \cup (|\mathbf{r} - \mathbf{r}_O| > R_2) \end{cases}$$

Para $r < R_1$

$$\nabla u = 0 \quad \rightarrow \quad u = Constante \tag{3.86}$$

Para $R_1 \leq r \leq R_2$

$$\nabla u = -\rho_k \frac{S_r}{L_r} = -\frac{\rho_k}{2} \left(r - \frac{R_1^2}{r} \right) \tag{3.87}$$

y

$$u = u_{R_2} - \int_{R_2}^r \nabla u dr' = u_{R_2} + \frac{\rho_k}{4} (R_2^2 - r^2) - \frac{\rho_k R_1^2}{2} \ln \left[\frac{r}{R_2} \right] \tag{3.88}$$

El valor máximo del potencial se obtiene para $r = R_1$

$$u_{MAXCO_i} = u_{R_2} + \frac{\rho_k}{4} (R_2^2 - R_1^2) - \frac{\rho_k R_1^2}{2} \ln \left[\frac{R_1}{R_2} \right] = u_{R_2} + \frac{M_{CO_i}}{4\pi} - \frac{\rho_k R_1^2}{2} \ln \left[\frac{R_1}{R_2} \right], \tag{3.89}$$

donde la masa de la corona vale

$$M_{CO_i} = \rho_{CO_i} S_{CO_i} \approx \rho_{CO_i} e L_{CO_i}, \quad (3.90)$$

ya que el espesor de la corona e será bastante inferior al radio interior. De todas formas, como el objetivo es dar una cierta uniformidad a la influencia de los obstáculos, con una aproximación es suficiente.

Para $r > R_2$

$$\nabla u = -\frac{(R_2^2 - R_1^2) \rho_k}{2} \cdot \frac{1}{r} = -\frac{M_{CO_i}}{2\pi} \cdot \frac{1}{r} \quad (3.91)$$

con el valor máximo del módulo del gradiente en $r = R_2$

$$\nabla u = -\frac{(R_2^2 - R_1^2) \rho_k}{2R_2^2} = -\frac{M_{CO_i}}{2\pi R_2^2} \quad (3.92)$$

Imponiendo la condición de que la influencia de todos los obstáculos sea la misma: $M_{O_i} = K_M$, el valor ponderado de la función ρ para la corona representativa del obstáculo O_i será

$$\rho_{CO_i} = \frac{K_M/e}{L_{CO_i}} \quad (3.93)$$

El producto escalar entre el gradiente y el vector normal, en cualquier punto del contorno, debe ser positivo (gradiente saliente del contorno)

$$(\nabla u \cdot \mathbf{n})|_P > 0 \quad \forall P \in Cont, \quad (3.94)$$

pero, aplicando condiciones de Dirichlet, el gradiente en un punto del contorno es la suma vectorial de los gradientes aportados por los obstáculos ∇u_{CO_i} , por la corona pozo ∇u_{CP} y por la función delta ∇u_d , de acuerdo con el principio de superposición.

Para evitar que $\nabla u \cdot \mathbf{n} < 0$ en uno o varios puntos del contorno, debe de cumplirse que $DMFC \gg 0$. Pero esta condición no es suficiente, ya que puede ocurrir que un determinado obstáculo esté muy próximo al contorno

$$d(O_i, CONT) < \lambda_{MIN} \quad (3.95)$$

y su gradiente (saliente del mismo) supere el gradiente medio global del contorno, en este caso se producirían mínimos locales en el contorno. Esta situación se puede evitar de alguna de las maneras siguientes:

- Anexionando el obstáculo al contorno.- Tiene la pega de que el pasillo entre el obstáculo y el contorno queda eliminado.
- Aplicando al obstáculo condiciones de contorno de Neuman.- Es siempre un buen recurso para aplicar en los casos problemáticos y difíciles. Además, si aplicamos Neuman a un obstáculo, el balance del gradiente que tiene que aportar el contorno aumenta. Tiene la pega que las trayectorias pueden pasar rozando el obstáculo.

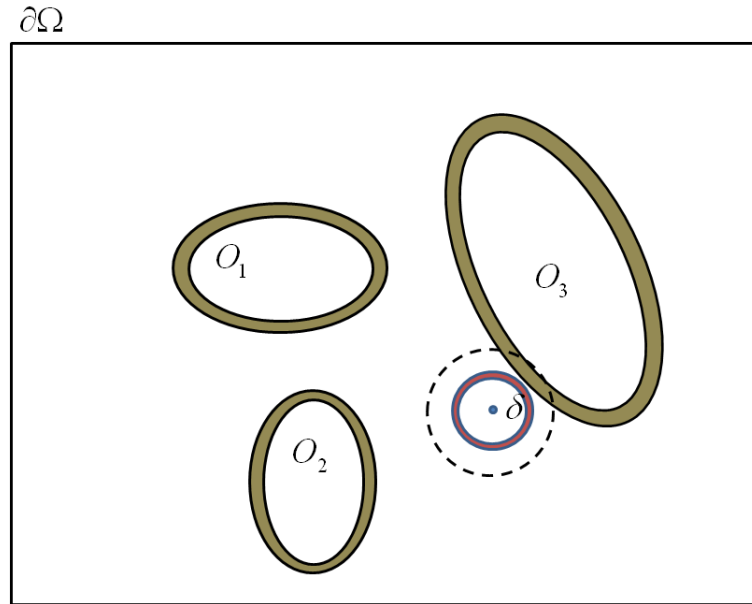


Figura 3.17: Adaptación de la capa de pozo de potencial a un obstáculo próximo.

- Reducir ρ en el obstáculo implicado y aumentarlo en la Corona del Pozo de potencial CP , para hacer que $|\nabla u_i| < |\nabla u_{MED}|$

Por lo tanto, en la utilización de las funciones sub y superarmónicas para la planificación de movimientos en robótica, la modelización mediante coronas o capas superficiales es idónea porque:

- Permite mejorar la distribución del gradiente en el dominio sin perder la definición de los contornos.
- La homogeneización de la influencia de los obstáculos es más fácil mediante la estimación aproximada de la longitud de sus contornos.
- La utilización de una corona de atracción de potencial, en torno de la función delta destino, mejora el gradiente sin el peligro de aparición de un mínimo local ya que, el gradiente aportado por la corona en su interior es nulo y su influencia nula en esa región.

Así, el modelo básicamente considera el contorno (al cual se le aplican condiciones de contorno homogéneas de Dirichlet) y los obstáculos que quedan definidos por regiones en forma de capas o coronas donde la función potencial será superarmónica, además una capa en torno del punto destino donde la función será subarmónica que reforzará el gradiente de atracción hacia el objetivo.

La obtención de la región capa denominada pozo de atracción CP , debe realizarse teniendo en cuenta el espacio libre disponible en torno del punto objetivo; estableciendo una distancia mínima a los obstáculos d_{MIN} y una cierta distancia máxima al punto objetivo d_{MAX} . Así, la capa pozo estará comprendida dentro de la corona, centrada en el punto objetivo, de radio

mínimo d_{MIN} y de radio máximo d_{MAX} , sin que interseque con los obstáculos en ningún punto, tal como se muestra en la figura 3.17.

Este método de representación de obstáculos, mediante funciones superarmónicas, es presentado por Iñiguez y Rosell en la publicación [6] del apartado 7.1.

3.6. Aportación

En este capítulo se ha realizado el estudio, con obtención numérica de resultados, de la influencia de las condiciones de contorno en las propiedades de la solución de la ecuación de Laplace. Igualmente se han analizado las propiedades de las funciones superarmónicas y subarmónicas. De esta manera, las aportaciones de este capítulo se resumen en los siguientes ítems:

- Se han desarrollado implementaciones para el cálculo analítico de funciones armónicas en entornos simples en 2D: Utilizando las funciones de Green para resolver la ecuación de Poisson en distintos modelos básicos del espacio de configuraciones, y utilizando el MATLAB como herramienta de cálculo numérico, se han calculado e ilustrado gráficamente distintas situaciones sobre las que se han podido extraer conclusiones fundamentales para el moldeado del gradiente.
- Se ha propuesto el uso de condiciones de contorno de Dirichlet no uniformes como una opción para el moldeado del gradiente en las funciones armónicas. Basándose en esta posibilidad se ha desarrollado un método para la obtención de funciones potenciales aplicables a la planificación de movimientos; la posibilidad de aparición de un mínimo puntual en el contorno, así como un determinado coste computacional, son los puntos débiles del procedimiento.
- Se ha propuesto la utilización de condiciones de contorno mixtas, con zonas donde se aplican condiciones de contorno de Dirichlet y zonas donde se aplican condiciones de contorno de Neuman, que permiten modelar el gradiente de la función potencial resultante, de forma que se puede garantizar un gradiente mínimo en zonas alejadas del objetivo.
- Se ha propuesto una opción novedosa, independientemente de las condiciones de contorno, para el moldeado del gradiente:
La utilización de funciones superarmónicas y subarmónicas. El modelado de obstáculos mediante funciones superarmónicas, así como la definición de una región subarmónica en torno del punto objetivo, permite moldear el gradiente por efecto de balanceado de masas positivas y negativas. Basándose en estas propiedades se ha desarrollado otro método para la obtención de funciones potenciales.

Capítulo 4

Planificación de movimientos en entornos dinámicos y cambiantes

En un entorno dinámico, constituido por obstáculos en movimiento, es posible obtener una función potencial dependiente del tiempo que sirva para la planificación de trayectorias:

Modelando el espacio de configuraciones mediante la ecuación del calor, de forma que los obstáculos móviles se correspondan con una función generadora de calor, su solución da una función potencial con la que es posible predecir la trayectoria de un obstáculo y crear los movimientos reactivos que eviten colisiones, tanto si el robot está en movimiento como si está en reposo. En el apartado 4.1 se realiza el análisis de un modelo matemático básico y en el 4.2 se deduce un método de control que corrige la posición o la trayectoria del robot, evitando colisiones con un obstáculo en movimiento.

Por otro lado, un método que utilizase una exploración aleatoria incremental en un entorno estático; en cada paso exploraría un poco más del espacio de configuraciones, obteniéndose ligeras variaciones del mismo. Utilizando una función potencial sobre este entorno cambiante, se realizarían actualizaciones del cálculo de dicha función potencial: Cada nuevo cálculo parte de un valor inicial que es calculado en el paso anterior. Por la **propiedad de estabilidad de la solución**, el nuevo valor de la función potencial diferirá poco del anterior y el tiempo de computación será muy reducido. En el apartado 4.3 se realiza un análisis teórico de los casos presentados.

4.1. Estudio analítico para condiciones iniciales y función obstáculo

Un entorno dinámico, en el espacio de configuraciones, formado por un obstáculo en movimiento y contorno en el infinito, puede ser modelado por la ecuación del calor; con una función como foco generador de calor en movimiento, en representación de un obstáculo móvil, y unas determinadas

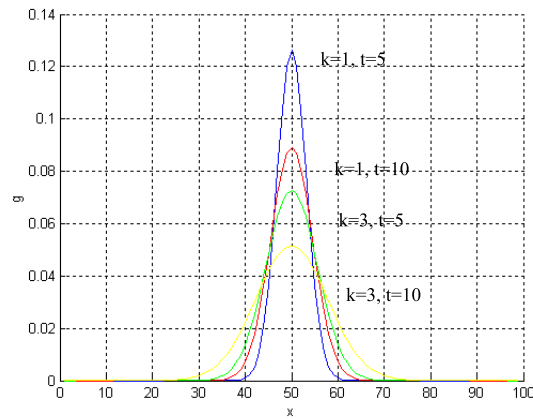


Figura 4.1: Función influencia de difusión.

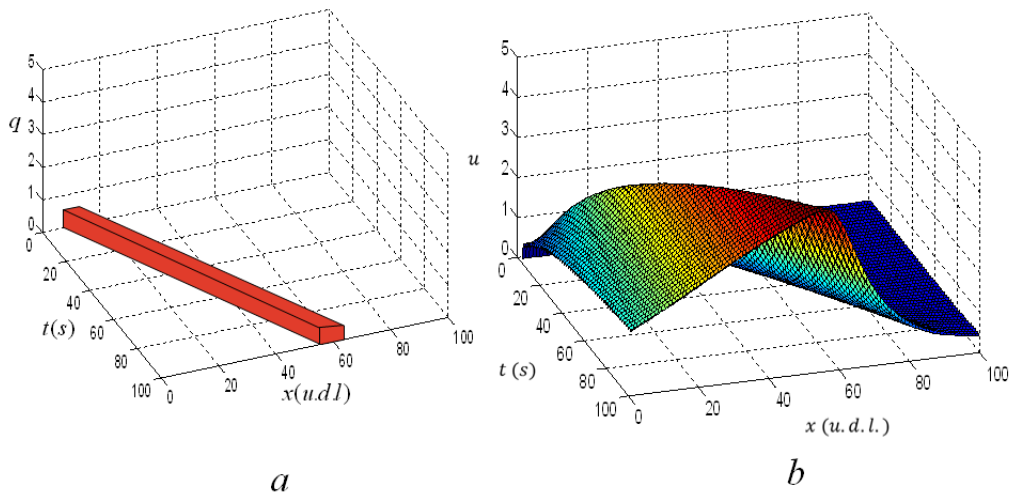


Figura 4.2: a) Función generadora de calor, modelo de un obstáculo en movimiento. b) Solución de la función obstáculo en movimiento.

condiciones iniciales. La obtención de una expresión analítica para la función potencial solución de la Ecuación en Derivadas Parciales (EDP) y la representación gráfica correspondiente mediante MATLAB, permite extraer conclusiones que sirvan de base para el diseño de la estrategia de control de trayectorias en entornos dinámicos.

La complejidad del planteamiento requiere la consideración de un modelo para una variable, con $q(x, t)$ como función generadora que representa el obstáculo en movimiento:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = k \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + q(x, t), & -\infty < x < \infty \\ c.i. \quad u(x, 0) = f(x) \end{cases}$$

Aplicando la transformada de Fourier \mathcal{F} respecto de la variable x :

$$\begin{cases} F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-j\omega x} dx \\ f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)e^{j\omega x} d\omega \end{cases}$$

se obtiene la Ecuación diferencial Ordinaria (EDO)

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t}U(\omega, t) + k\omega^2 U(\omega, t) = Q(\omega, t) \\ \text{c.i. } U(\omega, 0) = F(\omega) \end{cases}$$

cuya solución será la suma de la solución homogénea más la solución particular

$$U(\omega, t) = U_h + U_p \quad (4.1)$$

donde

$$U_h = c(\omega)e^{-k\omega^2 t} \quad (4.2)$$

y la solución particular será

$$U_p = e^{-k\omega^2 t} \int_0^t Q(\omega, \tau)e^{k\omega^2 \tau} d\tau, \quad (4.3)$$

tal como se puede demostrar sustituyendo en la EDO y teniendo en cuenta el primer principio de cálculo.

Por lo tanto, la solución completa será

$$U(\omega, t) = c(\omega)e^{-k\omega^2 t} + e^{-k\omega^2 t} \int_0^t Q(\omega, \tau)e^{k\omega^2 \tau} d\tau, \quad (4.4)$$

donde

$$c(\omega) = U(\omega, 0) = F(\omega) \quad (4.5)$$

Sustituyendo

$$U(\omega, t) = F(\omega)e^{-k\omega^2 t} + e^{-k\omega^2 t} \int_0^t Q(\omega, \tau)e^{k\omega^2 \tau} d\tau \quad (4.6)$$

Finalmente, aplicando el teorema de convolución y teniendo en cuenta

$$e^{-k\omega^2 t} \xrightarrow{\mathcal{F}^{-1}} \sqrt{\frac{\pi}{kt}} e^{-\frac{x^2}{4kt}} \quad (4.7)$$

se obtiene la solución de la EDP

$$u(x, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(\bar{x}) \sqrt{\frac{\pi}{kt}} e^{-\frac{(x-\bar{x})^2}{4kt}} d\bar{x} + \frac{1}{2\pi} \int_0^t \int_{-\infty}^{\infty} q(\bar{x}, \tau) \sqrt{\frac{\pi}{k(t-\tau)}} e^{-\frac{(x-\bar{x})^2}{4k\tau}} d\bar{x} d\tau \quad (4.8)$$

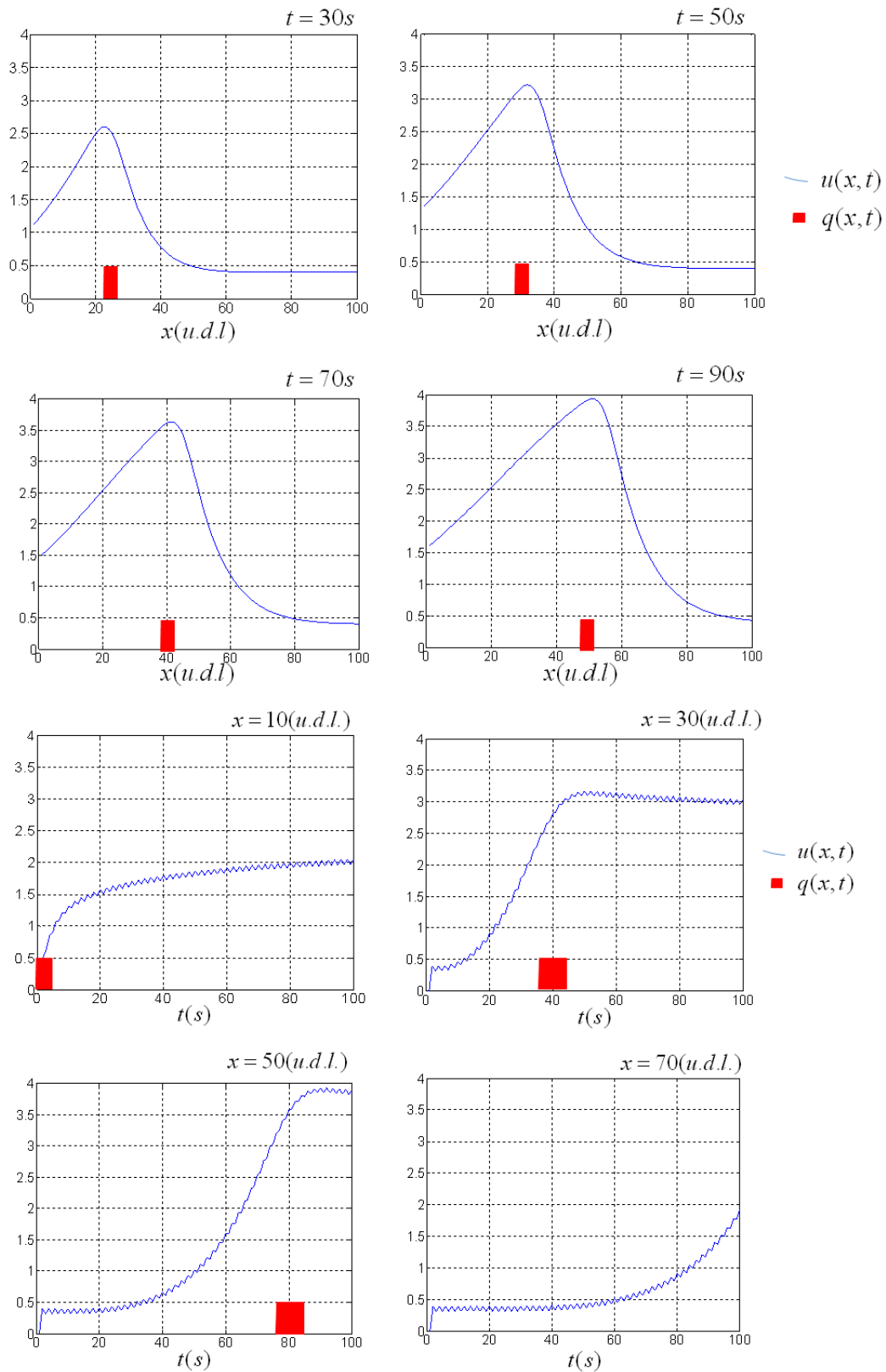


Figura 4.3: Función potencial y función obstáculo en movimiento. Tomando como parámetro el tiempo o la distancia en la solución mostrada en 4.2b. ($a = 5m$ y $v = 0,5m/s$)

El primer término integral representa la influencia de las condiciones iniciales:

$$u_d = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(\bar{x}) \sqrt{\frac{\pi}{kt}} e^{-\frac{(x-\bar{x})^2}{4kt}} d\bar{x} \quad (4.9)$$

que se difunden dependiendo de k mediante la función influencia:

$$g(x, \bar{x}, t) = \sqrt{\frac{\pi}{kt}} e^{-\frac{(x-\bar{x})^2}{4kt}} \quad (4.10)$$

representada en la figura 4.1.

El segundo término integral representa la influencia de la función $q(x, t)$ generadora de calor:

$$u_c = \frac{1}{2\pi} \int_0^t \int_{-\infty}^{\infty} q(\bar{x}, \tau) \sqrt{\frac{\pi}{k(t-\tau)}} e^{-\frac{(x-\bar{x})^2}{4k(t-\tau)}} d\bar{x} d\tau \quad (4.11)$$

Suponiendo un obstáculo en movimiento representado por la función:

$$q(x, t) = \begin{cases} 1, & \text{para } x_0 + vt - \frac{a}{2} < x < x_0 + vt + \frac{a}{2} \\ 0, & \text{para el resto} \end{cases}$$

donde x_0 es la posición inicial del centro del obstáculo, v su velocidad de desplazamiento y a su anchura (figura 4.2a)

Entonces, el término integral (4.11) valdrá

$$u_c = \frac{1}{2\pi} \int_0^t \int_{x_0+vt-\frac{a}{2}}^{x_0+vt+\frac{a}{2}} \sqrt{\frac{\pi}{k(t-\tau)}} e^{-\frac{(x-\bar{x})^2}{4k(t-\tau)}} d\bar{x} d\tau \quad (4.12)$$

Su representación gráfica, obtenida por métodos numéricos con MATLAB, se muestra en las figuras 4.2b y 4.3 para $a = 5u.d.l.$ y $v = 0,5m/s$.

4.2. Control de la configuración y de la trayectoria de un robot en un entorno con obstáculos móviles.

De acuerdo con los resultados cualitativos obtenidos en el apartado anterior, un obstáculo en movimiento (representado por un foco de calor, también en movimiento) producirá una función potencial (solución de la ecuación del calor) que presentará una asimetría en la distribución de las curvas de nivel (y en el gradiente) con respecto a dicho obstáculo en movimiento: estas se concentrarán en el frente del movimiento y se separarán en la estela del mismo.

El navegador que obtenga trayectorias a partir de esta función potencial dinámica, deberá evitar las colisiones mediante la deducción de movimientos correctores reactivos en respuesta al acercamiento de un determinado obstáculo; para ello seguirá la evolución puntual de la función potencial correspondiente a la posición actual del robot:

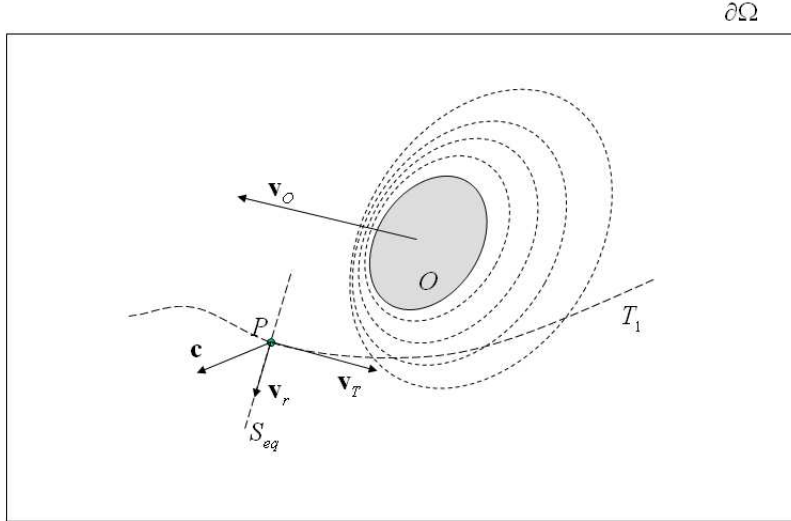


Figura 4.4: Función potencial y obstáculo en movimiento: \mathbf{v}_0 , velocidad del obstáculo O . T_1 , trayectoria prevista inicialmente. \mathbf{v}_T , velocidad prevista en el punto P . \mathbf{c} , velocidad de acercamiento detectada en el punto P . \mathbf{v}_r , velocidad reactiva.

- Si un obstáculo se acerca a un punto el valor de la función aumentará en dicho punto y la variación temporal relativa por cada coordenada (derivada temporal del gradiente), determinará el vector dirección de acercamiento o alejamiento (figura 4.4). Este vector se utilizará para generar el movimiento reactivo corrector, en caso de acercamiento; bien de la trayectoria o bien de la posición del robot.

Para diseñar el esquema de control, el primer paso es considerar la velocidad de acercamiento-alejamiento del obstáculo (\mathbf{c}) en un punto de la trayectoria (P), dicha velocidad se define como la derivada temporal del gradiente:

$$\mathbf{c} = \frac{d}{dt} (\nabla u) \quad (4.13)$$

De esta velocidad se deduce una fuerza de colisión virtual de repulsión, dada por

$$\mathbf{f}_V = K_f \cdot \mathbf{c} \quad (4.14)$$

donde K_f es la matriz de amortiguamiento, que relaciona el vector velocidad \mathbf{c} con el vector fuerza de colisión virtual \mathbf{f}_V .

Similarmente a como se hace en el caso de colisión física ([18] y [19]) interesa obtener la proyección de esta fuerza sobre la superficie equipotencial que pasa por el punto P (representado por S_{eq} en la figura 4.4)

$$\mathbf{v}_r = k_r (\mathbf{v}_T \times (\mathbf{f}_V \times \mathbf{v}_T)), \quad (4.15)$$

donde \mathbf{v}_T es la velocidad nominal de la trayectoria sobre una línea de corriente ($\mathbf{v}_T = v_T \frac{\nabla u}{|\nabla u|}$) y k_r es una constante real positiva. Así, el vector \mathbf{v}_r indica el camino de alejamiento de la trayectoria actual, situada sobre una línea de corriente, a una nueva línea de corriente que igualmente conducirá al

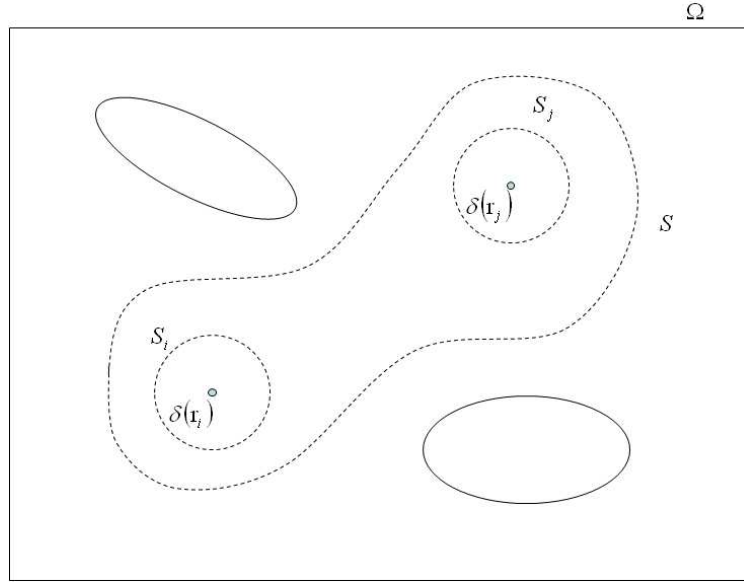


Figura 4.6: Cambio de posición del punto destino.

- Cambio de posición del punto destino.- Suponiendo que se ha encontrado una trayectoria (partiendo de su función potencial) con destino en el punto \mathbf{r}_i , y que se encuentra otra que enlace este punto con el situado en \mathbf{r}_j , interesa conocer la distribución espacial del cambio de la función potencial, debido únicamente al cambio de posición del punto destino.

Realizando la diferencia de modelos, se obtiene

$$\left. \begin{array}{l} \nabla^2 u = \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i) \quad \text{en } \Omega \\ u = g \quad \text{en } \partial\Omega \end{array} \right\} (-) \left. \begin{array}{l} \nabla^2 u' = \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_j) \quad \text{en } \Omega \\ u = g \quad \text{en } \partial\Omega \end{array} \right\} (=)$$

$$\left. \begin{array}{l} \nabla^2 v = \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i) - \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_j) \quad \text{en } \Omega \\ v = 0 \quad \text{en } \partial\Omega \end{array} \right\},$$

que es el modelo diferencia, con condiciones de contorno homogéneas y donde $v = u - u'$ es la función diferencia entre la nueva y la vieja función potencial.

Para evaluar, de forma cualitativa, la distribución espacial del cambio de la función potencial consideramos primero el entorno exterior a los dos puntos, el anterior y el actual, para ello aplicamos el teorema de la divergencia al modelo diferencial en una superficie que englobe a dichos puntos (figura 4.6)

$$\oint_S \nabla v \cdot d\vec{S} = \int_V (\nabla^2 v) dV = \int_V (\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i) - \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_j)) dV = 0 \quad (4.17)$$

$$\oint_S \nabla v \cdot d\vec{S} = \oint_S (\nabla v \cdot \mathbf{n}) dS = \oint_S \frac{\partial v}{\partial \mathbf{n}} dS, \quad (4.18)$$

sustituyendo en la anterior

$$\oint_S \frac{\partial v}{\partial \mathbf{n}} dS = 0 \quad (4.19)$$

y aplicando el teorema del valor medio para integrales

$$\left(\frac{\partial v}{\partial \mathbf{n}} \right)_{MED} = 0 \quad (4.20)$$

que indica que el valor medio de la derivada direccional normal de la función potencial diferencia, en torno de una superficie que engloba los dos puntos de cambio, es cero; considerando además que las condiciones de contorno del modelo diferencial son homogéneas, se tiene en cierto modo la condición cualitativa de que los efectos del cambio en entornos alejados es muy pequeña o nula.

También se puede ver que se cumple en cualquier punto del C-espacio (no coincidentes con los puntos \mathbf{r}_i y \mathbf{r}_j)

$$v = u - u' \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial v}{\partial \mathbf{n}} = \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} - \frac{\partial u'}{\partial \mathbf{n}} \quad \forall \mathbf{n}, \quad (4.21)$$

donde $\partial/\partial \mathbf{n}$ es la derivada en la dirección \mathbf{n} . Considerando el modelo $\nabla^2 u = \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i)$ con condiciones de contorno en el infinito, para una superficie de integración S_i centrada en el punto \mathbf{r}_i , se tiene

$$\oint_{S_i} \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} dS = 1 \quad \Rightarrow \quad \left(\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} \right)_{MED} = \frac{1}{S_i} \quad (4.22)$$

cuanto mayor es el número de variables del C-espacio y mayor es el radio de la hiperesfera de integración más pequeño es el valor de la derivada direccional. El mismo razonamiento sirve para u' y, utilizando la superficie de integración S , se cumple

$$\oint_S \frac{\partial v}{\partial \mathbf{n}} dS = \oint_S \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} dS - \oint_S \frac{\partial u'}{\partial \mathbf{n}} dS \quad (4.23)$$

Con lo cual se concluye que el cambio de u a u' se concentra principalmente (independientemente de las condiciones de contorno) en los entornos próximos de las zonas donde ha desaparecido $\delta(\mathbf{r}_i)$ y donde ha aparecido $\delta(\mathbf{r}_j)$.

- Cambio de posición de un obstáculo.- En este caso, a diferencia del apartado 4.1, no cuenta la variable tiempo; mientras dura el proceso de cálculo de una trayectoria, las posiciones tanto del punto destino como de los obstáculos se consideran invariables, constituyendo un escenario de cálculo (i). La posibilidad de que algún obstáculo cambie (normalmente de forma ligera) su posición en el C-espacio da lugar a un escenario de cálculo nuevo ($i + 1$).

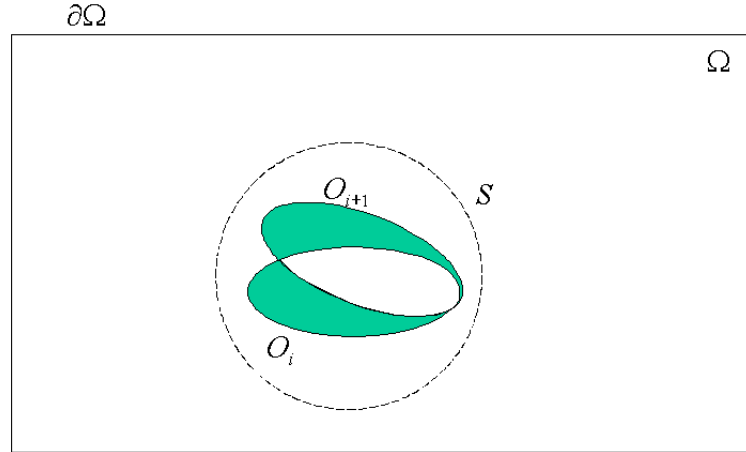


Figura 4.7: Cambio de posición de un obstáculo.

En ambas posibilidades de modelado de los obstáculos, como contorno y como función, se obtiene el mismo resultado: la influencia del cambio se atenúa con la distancia, tanto más cuanto mayor es el número de grados de libertad.

En la figura 4.7, el obstáculo O se desplaza ligeramente de la posición O_i a la posición O_{i+1} de forma que una zona será coincidente y otra desaparece de la fase i para aparecer en la fase $i + 1$, únicamente esta zona de cambio será la que afecte a la variación de la función potencial en el nuevo escenario de cálculo.

- *Obstáculo modelado como contorno interior.*- Para un obstáculo modelado como contorno interior a un dominio Ω

$$\left. \begin{array}{l} \nabla^2 u = \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_d) \quad \text{en } \Omega \\ u = f \quad \text{en } \partial\Omega \end{array} \right\},$$

donde el obstáculo O está definido por el contorno $\partial\Omega_O$. La solución será

$$u(\mathbf{r}) = g(\mathbf{r}, \mathbf{r}_d) + I_O \quad (4.24)$$

La aportación (como suma) a la solución dada por el obstáculo viene dada por la integral

$$I_O = \oint_{\partial\Omega_O} f(\mathbf{r}_c) \frac{\partial G}{\partial \mathbf{n}} dS, \quad (4.25)$$

donde G es la función de Green y \mathbf{r}_c representa la posición de un punto cualquiera del contorno del obstáculo.

Si $f(\mathbf{r}_c) = k$, $\forall \mathbf{r}_c \in \partial\Omega_O$, la integral valdrá

$$I_O = k \oint_{\partial\Omega_O} \frac{\partial G}{\partial \mathbf{n}} dS = k \cdot 1 = k, \quad \forall \mathbf{r} \notin O, \quad (4.26)$$

esto es así independientemente de la posición del obstáculo. En cuanto al otro término de la solución $g(\mathbf{r} - \mathbf{r}_d)$, es coincidente con la función de Green situada en \mathbf{r}_d y, atendiendo a su método de obtención mediante las cargas imagen, existirá una carga imagen neta negativa ($-\delta$) en el interior del obstáculo, de forma que aplicando el teorema de la divergencia a una superficie que contenga dicho obstáculo se cumplirá

$$\oint_S \nabla u \cdot d\mathbf{S} = \int_V (-\delta) dV = -1, \quad (4.27)$$

$$\oint_S \nabla u \cdot d\mathbf{S} = \oint_S (\nabla u \cdot \mathbf{n}) dS = \oint_S \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} dS = -1 \quad (4.28)$$

aplicando el teorema del valor medio

$$\left(\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} \right)_{MED} = -\frac{1}{S} \quad (4.29)$$

que indica que el valor medio de la derivada direccional normal de la función potencial, en torno de una superficie que engloba al obstáculo, es inversamente proporcional a dicha superficie.

En conclusión: el efecto que tiene en la función potencial un cambio de posición de un obstáculo (modelado como contorno interior) es apreciable en el entorno próximo de (figura 4.6)

$$O_\epsilon = (O_i \cup O_{i+1}) - (O_i \cap O_{i+1}), \quad (4.30)$$

y es muy pequeño en el entorno situado a partir de cierta distancia.

- *Obstáculo modelado como función.*- Para el caso del movimiento de un obstáculo modelado como función, se obtiene el modelo diferencia

$$\left. \begin{array}{l} \nabla^2 u = \rho_i(\mathbf{r}) \quad \text{en } \Omega \\ u = g \quad \text{en } \partial\Omega \end{array} \right\} (-) \quad \left. \begin{array}{l} \nabla^2 u' = \rho_{i+1}(\mathbf{r}) \quad \text{en } \Omega \\ u = g \quad \text{en } \partial\Omega \end{array} \right\} (=)$$

$$\left. \begin{array}{l} \nabla^2 v = \rho_\epsilon(\mathbf{r}) \quad \text{en } \Omega \\ v = 0 \quad \text{en } \partial\Omega \end{array} \right\},$$

donde

$$\rho_\epsilon = \begin{cases} > 0, & \forall \mathbf{r} \in O_\epsilon \\ = 0, & \forall \mathbf{r} \notin O_\epsilon \end{cases}$$

Aplicando el teorema de la divergencia al modelo diferencia, con una

superficie que englobe al obstáculo función en las dos posiciones (figura 4.6)

$$\oint_S \nabla v \cdot d\mathbf{S} = \int_V \rho_\epsilon(\mathbf{r}) dV \quad (4.31)$$

Suponiendo que la función ρ que modela el obstáculo tiene un valor constante ($\rho = k$)

$$\oint_S \frac{\partial v}{\partial \mathbf{n}} dS = kV_\epsilon(\mathbf{r}) \Rightarrow \left(\frac{\partial v}{\partial \mathbf{n}} \right)_{MED} = \frac{kV_\epsilon(\mathbf{r})}{S}, \quad (4.32)$$

donde V_ϵ es el volumen diferencial del movimiento (O_ϵ) y S es la superficie de integración, cuyo radio es considerado como variable para indicar la decreciente influencia del cambio conforme nos alejamos del mismo.

- Aparición de un nuevo obstáculo.- La exploración continuada del C -espacio puede dar lugar a la aparición de nuevos obstáculos y, por tanto, al cambio del entorno de cálculo. La aparición de un obstáculo en el entorno tiene un tratamiento y unas consecuencias similares al movimiento de un obstáculo; la influencia que tendrá en la variación de la función potencial será importante en el entorno del mismo y será cada vez más débil conforme nos alejamos del mismo.

Para el caso de un *obstáculo modelado como contorno interior* el efecto sobre la función potencial será, en cuanto a la integral de contorno

$$I_O = \oint_{\partial\Omega_O} f(\mathbf{r}_c) \frac{\partial G}{\partial \mathbf{n}} dS = (f(\mathbf{r}_c))_{MED}, \quad (4.33)$$

y en cuanto a su aportación a la función de Green se cumple igualmente

$$\left(\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} \right)_{MED} = -\frac{1}{S}, \quad (4.34)$$

donde S es cualquier superficie que rodee el obstáculo, por ejemplo una función esférica de radio R .

Obstáculo modelado como función.- Si un determinado entorno, modelado por $\nabla^2 u = \rho(\mathbf{r})$ y condiciones de contorno en el infinito, experimenta una variación con la aparición de un obstáculo modelado por la función ρ_O , el valor de la función potencial cambiará

$$\nabla^2 u' = \rho(\mathbf{r}) + \rho_O(\mathbf{r}) \quad (4.35)$$

Para ver la influencia de este cambio a una cierta distancia del nuevo obstáculo se restan las dos ecuaciones anteriores

$$\nabla^2 (u' - u) = \rho_O(\mathbf{r}), \quad (4.36)$$

y aplicando el teorema de la divergencia en una superficie esférica, de radio R , que contenga a ρ_O

$$\oint_S \nabla v \cdot d\mathbf{S} = \int_V (\nabla^2 v) dV = \int_V \rho_O(\mathbf{r}) dV = \rho_O V_O, \quad (4.37)$$

para $v = u' - u$. Por la simetría del modelo planteado, el gradiente será de módulo constante y normal a la superficie esférica de integración en cada punto de la misma.

$$(|\nabla v|)_{MED} = \frac{\rho_O V_O}{S} \quad (4.38)$$

El módulo del gradiente, debido al nuevo obstáculo aparecido, es inversamente proporcional a R^{n-1} para n dimensiones. Por lo tanto, la influencia del nuevo obstáculo en la función potencial será muy pequeña a partir de una cierta distancia, con lo cual sólo será necesario **refrescar** el cálculo en una pequeña zona en torno del mismo, reduciéndose el tiempo de cómputo.

4.4. Aportación

En este capítulo se ha particularizado el estudio de las Funciones Armónicas para la planificación de movimientos en entornos dinámicos, llegando a las siguientes conclusiones:

- Cuando los entornos son dinámicos y los obstáculos pueden moverse a una determinada velocidad, es posible obtener una función potencial superarmónica (sin mínimos locales) modelando el obstáculo como una función generadora de calor que se desplaza a una determinada velocidad; dimensionando adecuadamente la constante de difusión, es posible que la derivada temporal venga acotada, que tengamos una función potencial dinámica pero siempre superarmónica, de forma que no presente mínimos locales.

Además, utilizando esta función potencial dinámica, se propone un esquema de control reactivo virtual que sirva para corregir las trayectorias (y configuraciones estáticas de reposo) evitando las colisiones físicas.

- Cuando los entornos son cambiantes; bien por el cambio de posición del punto destino, bien por el desplazamiento de un obstáculo o por la aparición de uno nuevo, el cambio correspondiente de la función potencial se localiza principalmente en el entorno próximo de aquellas zonas que han cambiado y a partir de una cierta distancia la percepción de este cambio es más débil. El tiempo de computación global se verá reducido si se dedica un mayor número de iteraciones de cómputo a refrescar el valor del potencial en el entorno próximo donde se ha producido el cambio.

Capítulo 5

Cálculo numérico de las funciones armónicas, superarmónicas y subarmónicas

Para obtener la solución numérica de la ecuación de Poisson se deduce una ecuación en diferencias definida sobre una discretización del espacio. Para la resolución de esta ecuación en diferencias existen dos métodos:

I) Métodos directos, que utilizan una notación matricial, con resoluciones algebraicas como son los métodos de Gauss y sus derivados. Están limitados en cuanto al número de puntos de cálculo utilizados.

II) Los métodos de relajación de Jacobi, de Gauss-Seidel y de SOR, se usan cuando el número de puntos de cálculo es muy elevado ya que permiten obtener una solución válida con un número de iteraciones limitado. Se corresponden con la resolución clásica de ecuaciones en diferencias lo que ofrece una visión física del método, permitiendo extraer expresiones analíticas sobre las que se deducen propiedades utilizables en la reducción del tiempo de cálculo.

La multirresolución es un método donde la ecuación en diferencias, utilizada para el cálculo, se define sobre rejillas uniformes con distintas resoluciones; el cálculo coordinado y correctivo, en las distintas rejillas, permite reducir el tiempo de cómputo basándose en las propiedades de los métodos de relajación.

En este capítulo se propone el cálculo de la ecuación en diferencias sobre una discretización jerárquica en multirresolución del espacio, lo que permite una reducción importante del número de puntos de cálculo y el aprovechamiento de las propiedades de la multirresolución.

En primer lugar, en el apartado 5.1, se obtiene la expresión de la ecuación en diferencias, sobre una discretización uniforme; que servirá de base para la definición de los distintos métodos de relajación.

Después, en el apartado 5.2, se introduce como nuevo método de cálculo, la discretización y multirresolución jerárquica adaptativa.

5.1. Discretización uniforme

En una discretización uniforme el espacio queda particionado por una rejilla constituida por celdillas regulares c de lado h , en las que la función potencial toma un determinado valor.

5.1.1. Ecuación en diferencias

A una determinada rejilla regular de resolución h (Ω^h), le corresponde una plantilla de cálculo mostrada en la figura 5.1. Utilizando Taylor para dos variables, el valor del potencial en un punto (q_1, q_2) respecto del potencial en otro punto próximo (q_{10}, q_{20}) , es:

$$\begin{aligned}
 u(q_1, q_2) = & u(q_{10}, q_{20}) + \frac{1}{1!} \frac{\partial u}{\partial q_1} \Big|_{(q_{10}, q_{20})} (q_1 - q_{10}) + \frac{1}{1!} \frac{\partial u}{\partial q_2} \Big|_{(q_{10}, q_{20})} (q_2 - q_{20}) + \\
 & \frac{1}{2!} \frac{\partial^2 u}{\partial q_1^2} \Big|_{(q_{10}, q_{20})} (q_1 - q_{10})^2 + \frac{1}{2!} \frac{\partial^2 u}{\partial q_2^2} \Big|_{(q_{10}, q_{20})} (q_2 - q_{20})^2 + \\
 & \frac{2}{2!} \frac{\partial^2 u}{\partial q_1 \partial q_2} \Big|_{(q_{10}, q_{20})} (q_1 - q_{10})(q_2 - q_{20}) + \dots \quad (5.1)
 \end{aligned}$$

Aplicado a la disposición en cruz de la figura 5.1:

$$\left\{ \begin{array}{l}
 u(q_{10} + h, q_{20}) = u(q_{10}, q_{20}) + \frac{1}{1!} \frac{\partial u}{\partial q_1} h + \frac{1}{2!} \frac{\partial^2 u}{\partial q_1^2} h^2 + \frac{1}{3!} \frac{\partial^3 u}{\partial q_1^3} h^3 + \dots \\
 u(q_{10} - h, q_{20}) = u(q_{10}, q_{20}) - \frac{1}{1!} \frac{\partial u}{\partial q_1} h + \frac{1}{2!} \frac{\partial^2 u}{\partial q_1^2} h^2 - \frac{1}{3!} \frac{\partial^3 u}{\partial q_1^3} h^3 + \dots \\
 u(q_{10}, q_{20} + h) = u(q_{10}, q_{20}) + \frac{1}{1!} \frac{\partial u}{\partial q_2} h + \frac{1}{2!} \frac{\partial^2 u}{\partial q_2^2} h^2 + \frac{1}{3!} \frac{\partial^3 u}{\partial q_2^3} h^3 + \dots \\
 u(q_{10}, q_{20} - h) = u(q_{10}, q_{20}) - \frac{1}{1!} \frac{\partial u}{\partial q_2} h + \frac{1}{2!} \frac{\partial^2 u}{\partial q_2^2} h^2 - \frac{1}{3!} \frac{\partial^3 u}{\partial q_2^3} h^3 + \dots
 \end{array} \right.$$

donde las derivadas están evaluadas en el punto (q_{10}, q_{20}) .

Sumando las cuatro ecuaciones, tenemos la siguiente ecuación en diferencias:

$$\begin{aligned}
 u(q_{10} + h, q_{20}) + u(q_{10} - h, q_{20}) + u(q_{10}, q_{20} + h) + u(q_{10}, q_{20} - h) = \\
 4u(q_{10}, q_{20}) + \frac{2}{2!} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial q_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial q_2^2} \right) h^2 \quad (5.2)
 \end{aligned}$$

ya que los términos correspondientes a las derivadas de orden impar se anulan, y se consideran nulas la suma de derivadas de orden cuatro y superiores.

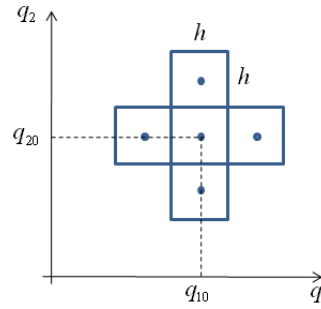


Figura 5.1: Discretización uniforme: Disposición 4 vecinos en cruz.

Generalizando para n dimensiones y considerando la discretización del espacio con N divisiones por cada variable:

$$\mathbf{q}_j = (j_1, j_2, \dots, j_l, \dots, j_n)h \quad | \quad j_l \in \{0, 1, \dots, N-1\} \quad (5.3)$$

$$\sum_{i=1}^{2n} u_{\mathbf{q}_{ji}} = 2nu_{\mathbf{q}_j} + \frac{2h^2}{2!} (\nabla^2 u)_{\mathbf{q}_j}, \quad (5.4)$$

representando con el subíndice i cada una de las celdillas vecinas de acuerdo con las disposiciones en cruz, obteniéndose

$$\boxed{u_{\mathbf{q}_j} = \frac{1}{2n} \sum_{i=1}^{2n} u_{\mathbf{q}_{ji}} - \frac{h^2}{2!n} (\nabla^2 u)_{\mathbf{q}_j} \quad \forall \mathbf{q}_j \in \Omega^h} \quad (5.5)$$

Siendo esta ecuación en diferencias utilizable computacionalmente en el cálculo de la función en un espacio, el cual dispondrá de unas determinadas condiciones de contorno.

Para las funciones armónicas se cumple la ecuación de Laplace ($\nabla^2 u = 0$), válida en todo punto del dominio, obteniéndose

$$u_{\mathbf{q}_j} = \frac{1}{2n} \sum_{i=1}^{2n} u_{\mathbf{q}_{ji}}, \quad (5.6)$$

en donde se cumple la propiedad del valor medio, por consiguiente, en ningún punto del dominio existirá un mínimo, ni un máximo.

La ecuación de Poisson ($\nabla^2 u = \rho(\mathbf{r})$) modela las funciones superarmónicas ($\rho(\mathbf{r}) < 0$) y la subarmónicas ($\rho(\mathbf{r}) > 0$). Así, se obtiene

$$u_{\mathbf{q}_j} = \frac{1}{2n} \sum_{i=1}^{2n} u_{\mathbf{q}_{ji}} - \frac{h^2}{2!n} \rho_0, \quad (5.7)$$

donde: $\rho_0 = \rho(\mathbf{q}_j)$

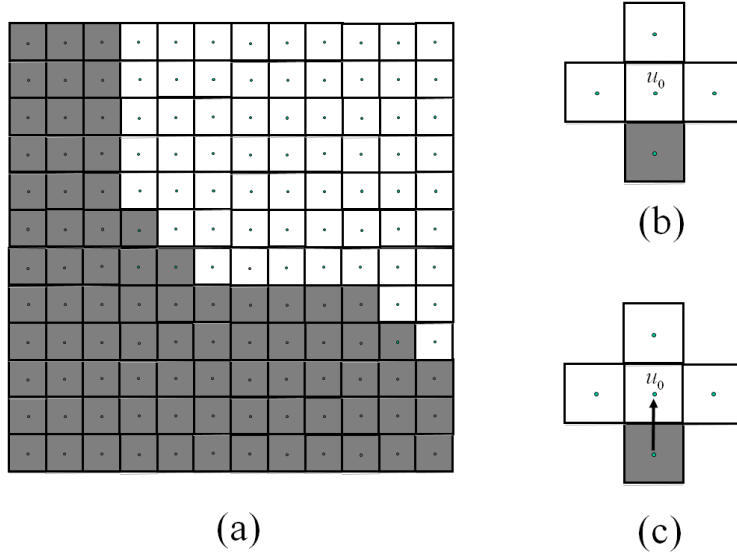


Figura 5.2: Cálculo del potencial de una celda vecina a otra obstáculo, en una discretización uniforme. (b) Condiciones de contorno de Dirichlet. (c) Condiciones de contorno de Neuman.

5.1.2. Condiciones de contorno de Dirichlet y de Neuman

Para condiciones de contorno de Dirichlet, dadas por

$$u(\mathbf{r}) = u_C, \quad \forall \mathbf{r} \in \partial\Omega, \quad (5.8)$$

aplicadas en un espacio discretizado uniformemente (figura 5.2a), las celdas correspondientes a la discretización del contorno afectan al valor del potencial de las celdas vecinas del espacio libre, de forma que un número determinado de celdillas dentro del sumatorio pertenecerán al contorno de \mathcal{C} -obstáculo, cumpliéndose que

$$u_{\mathbf{q}_j} = \frac{1}{2n} \left(\sum_{i=1}^{N_L} u_{\mathbf{q}_{ji}} + \sum_{j=1}^{N_C} u_C \right) - \frac{h^2}{2In} \rho_0, \quad (5.9)$$

donde $u_{\mathbf{q}_j}$ (u_0 en la figura 5.2b) es el potencial de una celdilla vecina del contorno, $u_{\mathbf{q}_{ji}}$ es el potencial de una celdilla vecina libre y u_C es el potencial de la celdilla vecina contorno. N_L es el número de celdillas vecinas libres y N_C el de celdillas contorno

$$N_L + N_C = 2n \quad (5.10)$$

Para condiciones de contorno de Neuman, dadas por

$$\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}(\mathbf{r}) = N_u, \quad \forall \mathbf{r} \in \partial\Omega, \quad (5.11)$$

aplicadas en un espacio discretizado uniformemente, el vector normal al contorno (\mathbf{n}) de un \mathcal{C} -obstáculo discretizado, se refiere a las celdillas que contienen el contorno, de manera que en un punto queda adjudicado a la celdilla

que lo contiene y apunta a una única celdilla contigua del espacio libre (figura 5.2c), a la que influye en su cálculo de la manera siguiente:

$$\frac{u_{obs} - u_{\mathbf{q}_j}}{\Delta q} = N_u, \quad (5.12)$$

de donde

$$u_{obs} = u_{\mathbf{q}_j} + N_u \Delta q \quad (5.13)$$

y

$$u_{\mathbf{q}_j} = \frac{1}{N_L} \left(\sum_{i=1}^{N_L} u_{\mathbf{q}_{ji}} + \sum_{i=1}^{N_C} u_{obs} \right) = \frac{1}{N_L} \left(\sum_{i=1}^{N_L} u_{\mathbf{q}_{ji}} + \sum_{i=1}^{N_C} N_u \Delta q \right) \quad (5.14)$$

Donde $\Delta q = h$.

Lo habitual es que N_u valga cero, en cuyo caso el cálculo se simplifica: las celdillas de contorno quedan excluidas del cálculo del valor medio, en sus celdillas vecinas del espacio libre. En contrapartida las trayectorias se aproximarán a los obstáculos.

5.1.3. Métodos iterativos

Son los métodos numéricos utilizados para encontrar la solución de la ecuación de Poisson y se corresponden, básicamente, con la discretización de la ecuación del calor:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \nabla^2 u - \rho(\mathbf{r}) \quad (5.15)$$

Aplicando diferencias progresivas en el tiempo, para la obtención de la derivada temporal

$$\frac{\partial u}{\partial t} \approx \frac{u_{\mathbf{q}_j}^{k+1} - u_{\mathbf{q}_j}^k}{\Delta t} \quad (5.16)$$

Utilizando las ecuaciones (5.5), (5.15) y (5.16), se obtiene el modelo genérico de los métodos iterativos

$$\boxed{u_{\mathbf{q}_j}^{k+1} = u_{\mathbf{q}_j}^k + s \left[\sum_{i=1}^{2n} u_{\mathbf{q}_{ji}}^k - 2n u_{\mathbf{q}_j}^k \right] - (\Delta t) \rho_0, \quad \forall \mathbf{q}_j \in \Omega^h} \quad (5.17)$$

donde

$$s = \frac{\Delta t}{h^2} \quad (5.18)$$

y n es el número de variables.

En régimen permanente no hay variación temporal de la función

$$u_{\mathbf{q}_j}^{k+1} = u_{\mathbf{q}_j}^k = u_{\mathbf{q}_j} \quad (5.19)$$

y la solución de la ecuación del calor se corresponde con la solución de la ecuación de Poisson expresada en (5.7)

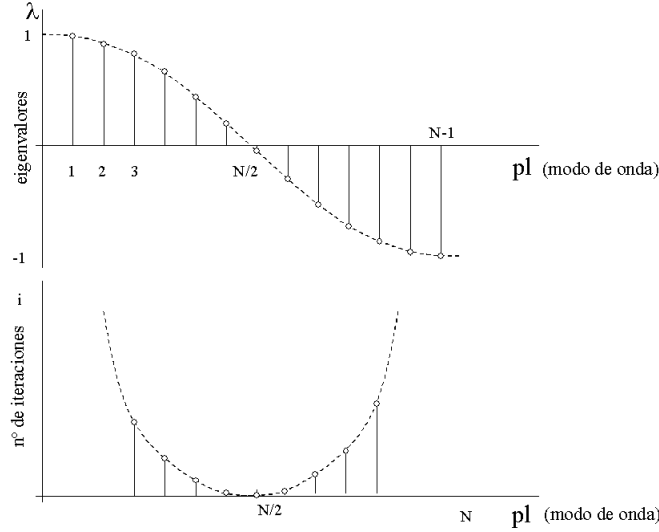


Figura 5.3: Eigenvalores e iteraciones en función de número de onda para el método de Jacobi.

5.1.3.1. Método iterativo de Jacobi

Haciendo ($s = 1/2n$) y, teniendo en cuenta que el tiempo es irrelevante en este caso en cuanto a que no afecta a la solución, ($\Delta t = 1$) en la ecuación (5.17) se obtiene el método recursivo de Jacobi para la ecuación de Poisson (para la ecuación de Laplace ρ_0 vale cero)

$$\boxed{u_{\mathbf{q}_j}^k = \frac{1}{2n} \sum_{i=1}^{2n} u_{\mathbf{q}_{ji}}^{k-1} - \rho_0, \quad \forall \mathbf{q}_j \in \Omega^h} \quad (5.20)$$

obteniéndose valores cada vez más aproximados a la solución buscada.

Restando la ecuación aproximada de la exacta:

$$\left. \begin{aligned} u_{\mathbf{q}_j} &= \frac{1}{2n} \sum_{i=1}^{2n} u_{\mathbf{q}_{ji}} - \rho_0 \\ u_{\mathbf{q}_j}^k &= \frac{1}{2n} \sum_{i=1}^{2n} u_{\mathbf{q}_{ji}}^{k-1} - \rho_0 \end{aligned} \right\},$$

se obtiene la ecuación de diferencias del error:

$$e_{\mathbf{q}_j}^k = \frac{1}{2n} \sum_{i=1}^{2n} e_{\mathbf{q}_{ji}}^{k-1}, \quad (5.21)$$

donde ($e_{\mathbf{q}_j}^k = u_{\mathbf{q}_j} - u_{\mathbf{q}_j}^k$) tiende a cero conforme $u_{\mathbf{q}_j}^k$ tiende a $u_{\mathbf{q}_j}$ y

$$u_{\mathbf{q}_j} = \frac{1}{2n} \sum_{i=1}^{2n} u_{\mathbf{q}_{ji}}^{k-1} - \rho_0 + e_{\mathbf{q}_j}^k \quad (5.22)$$

La solución de la ecuación (5.22) se obtiene en el apéndice (A.5.1) y vale

$$e_{\mathbf{q}_j}^k = \sum_{p_l=1}^{N-1} \prod_{l=1}^n \lambda^k \sin\left(\frac{p_l \pi}{N} j_l\right) \quad (5.23)$$

donde N es el número de particiones de la discretización, p_l es el modo o número de onda ($p_l = 1, 2, 3, \dots, N - 1$) y λ son los eigenvalores (figura 5.3)

$$\lambda = \frac{1}{n} \sum_{l=1}^n \cos\left(\frac{p_l \pi}{N}\right) \quad (5.24)$$

La solución del error se muestra como una serie de Fourier (para una función de n variables) cuyas componentes se van aproximando iterativamente a cero. Puesto que ($-1 < \lambda < 1$), se cumple que ($\lim_{k \rightarrow \infty} e = 0$) y el método converge (apéndice A.5.1 ecuación A.110), a una velocidad determinada por:

$$K = 2N^2 \frac{\log 2}{\pi^2}, \quad (5.25)$$

donde K es el número de iteraciones necesarias para reducir el error a la mitad. Se aprecia que la velocidad de convergencia es muy baja, independiente del número de variables.

De la expresión anterior también se deduce que cuanto menor sea N (rejilla mas gruesa) mayor será la velocidad de convergencia. Esta cuestión es muy importante a la hora de diseñar algoritmos en multirresolución.

Además, si los armónicos de la ecuación del error (5.24) tienen un número de onda (p_l) próximo a $N/2$, la atenuación de los mismos es más rápida (figura 5.3)

5.1.3.2. Método iterativo de Gaus-Seidel

Este método modifica el de Jacobi de forma que utiliza los valores de la función en aquellas celdillas vecinas, que justamente se acaban de calcular en la iteración presente, en lugar de utilizar los valores correspondientes a la iteración anterior. Con este fin el orden de cálculo, de celdillas, se realiza en diagonal: se van incrementando correlativamente cada una de las variables. Así, este método utiliza, para la ecuación de Poisson, la expresión de cálculo siguiente:

$$u_{\mathbf{q}_j}^k = \frac{1}{2n} \sum_{i=1}^n u_{\mathbf{q}_{ji-}}^k + \frac{1}{2n} \sum_{i=1}^n u_{\mathbf{q}_{ji+}}^{k-1} - \rho_0 \quad (5.26)$$

donde $u_{\mathbf{q}_{ji-}}^k$ representa los valores de las celdillas vecinas, que se han calculado en la iteración actual k y $u_{\mathbf{q}_{ji+}}^{k-1}$ representa los valores de las celdillas vecinas, que se han calculado en la iteración anterior ($k - 1$).

Entonces, si se resta (como antes) la expresión recursiva de la exacta

$$\left. \begin{aligned} u_{\mathbf{q}_j} &= \frac{1}{2n} \sum_{i=1}^{2n} u_{\mathbf{q}_{ji}} - \rho_0 \\ u_{\mathbf{q}_j}^k &= \frac{1}{2n} \sum_{i=1}^n u_{\mathbf{q}_{ji-}}^k + \frac{1}{2n} \sum_{i=1}^n u_{\mathbf{q}_{ji+}}^{k-1} - \rho_0 \end{aligned} \right\},$$

se obtiene

$$\left\{ \begin{aligned} e_{\mathbf{q}_j}^k &= \frac{1}{2n} \sum_{i=1}^n e_{\mathbf{q}_{ji-}}^k + \frac{1}{2n} \sum_{i=1}^n e_{\mathbf{q}_{ji+}}^{k-1} \\ u_{\mathbf{q}_j} &= \frac{1}{2n} \sum_{i=1}^n u_{\mathbf{q}_{ji-}}^k + \frac{1}{2n} \sum_{i=1}^n u_{\mathbf{q}_{ji+}}^{k-1} - \rho_0 + e_{\mathbf{q}_j}^k \end{aligned} \right.$$

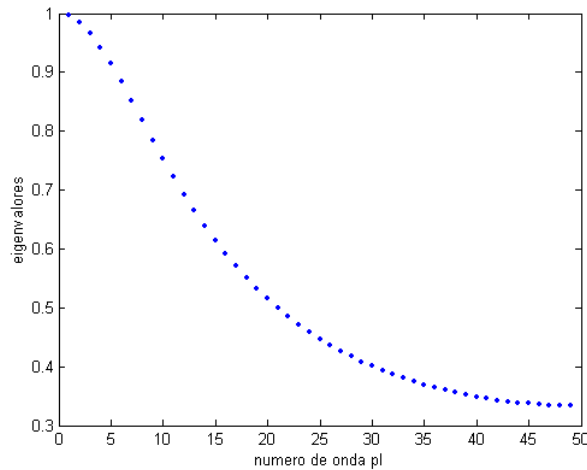


Figura 5.4: Eigenvalores en función de número de onda para el método Gauss-Seidel y $N = 50$.

Tal como se muestra en el apéndice (A.5.2), la solución es como antes (ecuación 5.24), pero los eigenvalores, en este caso, vienen dados por

$$|\lambda| = \sqrt{\frac{1}{5 - 4 \cos\left(\frac{pl\pi}{N}\right)}}, \quad pl = 1, 2, 3, \dots, N - 1, \quad (5.27)$$

sus valores, en función del número de onda, vienen representados en la figura 5.4.

También en este caso ($-1 < \lambda < 1$) y ($\lim_{k \rightarrow \infty} e = 0$); en el apéndice (A.5.2), ecuación (A.129), se demuestra que el número de iteraciones necesario para reducir el error a la mitad vale

$$K = N^2 \frac{\log 2}{\pi^2}, \quad (5.28)$$

lo que supone una reducción respecto al método de Jacobi de 2.

En este caso, como se aprecia en la figura 5.4, cuanto mayor es el número de onda, menor es el valor de λ y más rápidamente se atenúa el armónico correspondiente; actuando como un filtro paso bajo. Así, si se establecen unas condiciones iniciales aleatorias, con componentes en alta frecuencia, más rápidamente se alcanzará el valor deseado.

5.1.3.3. Método iterativo S.O.R. (Sucesive Over Relaxation)

Este método incorpora, respecto del anterior, un parámetro de relajación (ω) de la manera siguiente:

$$u_{\mathbf{q}_j}^k = (1 - \omega)u_{\mathbf{q}_j}^{k-1} + \frac{\omega}{2n} \left[\sum_{i=1}^n u_{\mathbf{q}_{ji-}}^k + \sum_{i=1}^n u_{\mathbf{q}_{ji+}}^{k-1} \right] - \rho_0 \quad (5.29)$$

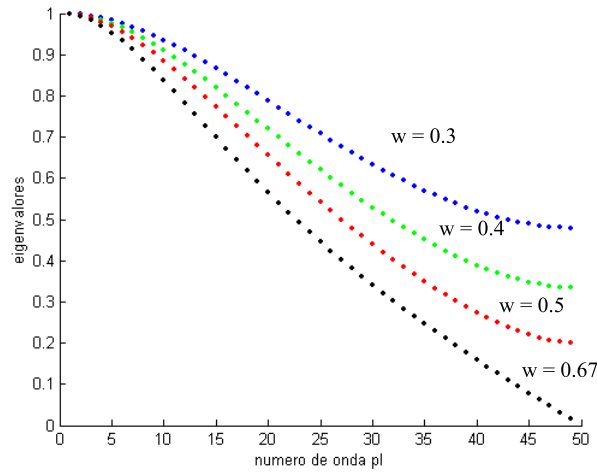


Figura 5.5: Eigenvalores en función de número de onda para el método S.O.R. y $N = 50$.

para la ecuación de Laplace ρ_0 vale cero. Nuevamente, restando la expresión de relajación de la expresión exacta

$$\left. \begin{aligned} u_{\mathbf{q}_j} &= (1 - \omega)u_{\mathbf{q}_j} + \frac{\omega}{2n} \left[\sum_{i=1}^n u_{\mathbf{q}_{ji-}} + \sum_{i=1}^n u_{\mathbf{q}_{ji+}} \right] - \rho_0 \\ u_{\mathbf{q}_j}^k &= (1 - \omega)u_{\mathbf{q}_j}^{k-1} + \frac{\omega}{2n} \left[\sum_{i=1}^n u_{\mathbf{q}_{ji-}}^k + \sum_{i=1}^n u_{\mathbf{q}_{ji+}}^{k-1} \right] - \rho_0 \end{aligned} \right\},$$

se obtiene

$$u_{\mathbf{q}_j} = u_{\mathbf{q}_j}^k + e_{\mathbf{q}_j}^k = (1 - \omega)u_{\mathbf{q}_j}^{k-1} + \frac{\omega}{2n} \left[\sum_{i=1}^n u_{\mathbf{q}_{ji-}}^k + \sum_{i=1}^n u_{\mathbf{q}_{ji+}}^{k-1} \right] - \rho_0 + e_{\mathbf{q}_j}^k \quad (5.30)$$

y la expresión del error

$$e_{\mathbf{q}_j}^k = (1 - \omega)e_{\mathbf{q}_j}^{k-1} + \frac{\omega}{2n} \sum_{i=1}^n e_{\mathbf{q}_{ji-}}^k + \frac{\omega}{2n} \sum_{i=1}^n e_{\mathbf{q}_{ji+}}^{k-1} \quad (5.31)$$

cuyos eigenvalores (de la solución se obtienen en el apéndice (A.5.3)) valen

$$|\lambda| = \sqrt{\frac{(1 - \omega)^2 + \left(\frac{\omega}{2}\right)^2 + (1 - \omega)\omega \cos\left(\frac{pl\pi}{N}\right)}{1 + \left(\frac{\omega}{2}\right)^2 - \omega \cos\left(\frac{pl\pi}{N}\right)}} \quad (5.32)$$

En la figura 5.5 se muestra los eigenvalores en función del número de onda, para distintos valores del parámetro ω . Se observa, también, como los armónicos, componentes del error, de alta frecuencia se atenúan más rápidamente, existiendo un valor óptimo de ω que minimiza $|\lambda|^2$:

$$\omega = \left(\frac{1}{2\cos\frac{pl\pi}{N} - 1} \right) \left(2 - 2\sqrt{2}\sqrt{1 - \cos\frac{pl\pi}{N}} \right) \quad (5.33)$$

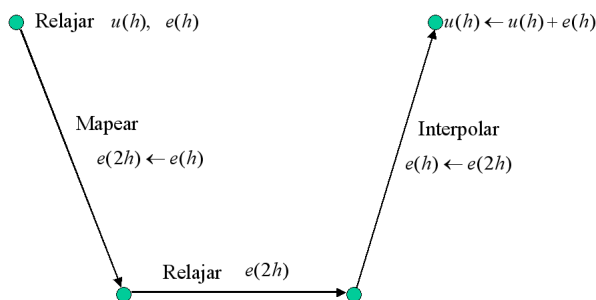


Figura 5.7: Corrección con rejilla gruesa.

iteración, se define el residuo (en una celdilla i) como:

$$r_i^k = u_i^k - u_i^{k-1} \quad | \quad k = 1, 2, 3, \dots \quad (5.35)$$

Para obtener una relación iterativa del error, relacionada con el residuo, se tiene en cuenta que:

$$e_i^k = u_i - u_i^k \quad (5.36)$$

y

$$r_i^k = (u_i - e_i^k) - (u_i - e_i^{k-1}) = -e_i^k + e_i^{k-1} \quad (5.37)$$

de donde, se obtiene:

$$\boxed{e_i^k = e_i^{k-1} - r_i^k} \quad (5.38)$$

para cada celdilla i .

La idea básica del cálculo en multirresolución es la siguiente (figura 5.7):

1. Realizar unas pocas iteraciones sobre una rejilla de resolución h (Ω^h) para obtener una aproximación de la función u y del error e . Por ejemplo, para el método de Jacobi se utilizarían las ecuaciones (5.20), (5.21) y (5.22). Donde los valores iniciales u_i^0 se establecen de forma aleatoria, ya que su espectro de armónicos de Fourier es uniforme y, por tanto, sus componentes de alta frecuencia serán atenuados rápidamente con las primeras iteraciones.
2. Disminuir la resolución a $2h$ y transferir (mapear) el error: $e(2h) \leftarrow e(h)$
3. Realizar unas pocas iteraciones sobre Ω^{2h} , utilizando la ecuación (5.21), para obtener una aproximación del error e .
4. Aumentar la resolución, nuevamente, a h e interpolar los valores del error: $\Omega^{2h} \rightarrow \Omega^h$
5. Corregir la aproximación: $u^k \leftarrow u^k + e^k$

De una manera recursiva se puede ir relajando y mapeando de rejillas más finas a rejillas más gruesas, para seguidamente volver interpolando y corrigiendo siguiendo un ciclo en V (figura 5.8). Se consigue una solución con

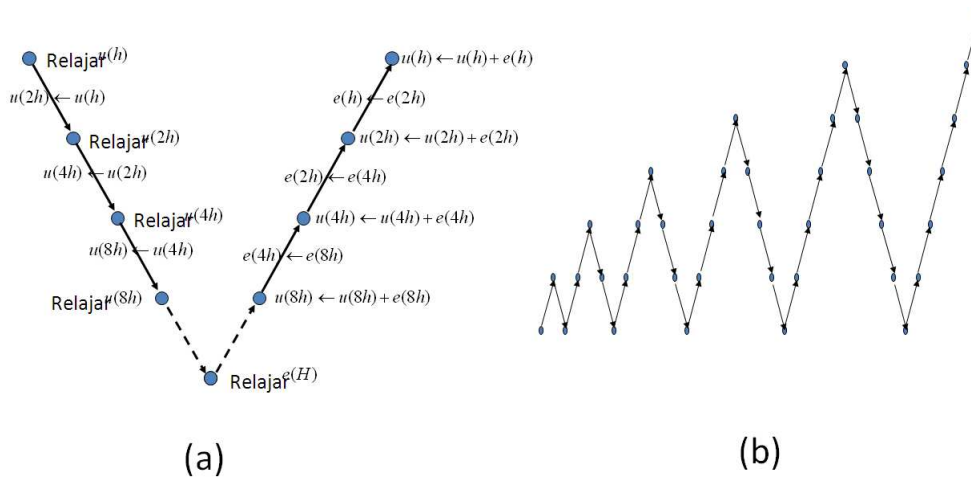


Figura 5.8: Multirresolución: (a) Ciclo V. (b) Ciclo FMG.

menos iteraciones si los valores iniciales son buenos, para ello se comienza relajando en la resolución más gruesa y sucesivamente se va interpolando hacia rejillas más finas donde se vuelve a relajar, se mapea y vuelve a relajar en la rejilla gruesa. Sucesivamente se va aumentando la amplitud del ciclo hasta alcanzar la solución en la rejilla fina. Este método recursivo se denomina Full Multigrid (FMG) [15].

5.2. Discretización jerárquica adaptativa

Puesto que el objetivo es obtener una función potencial auxiliar que sirva para obtener una trayectoria por seguimiento del gradiente, no se precisa resolución excepto en los contornos de los obstáculos. Por este motivo resulta óptima una discretización jerárquica adaptativa; la cual, sucesivamente, subdivide las celdas que contienen contorno de obstáculo hasta alcanzar la máxima resolución prefijada (figura 5.9). Con esta discretización se obtiene una reducción máxima de los puntos de cálculo ya que en los espacios vacíos se adaptarán celdas de máximo tamaño, representando un solo punto de cálculo.

Las ventajas obtenidas con esta discretización son:

- Optimiza la discretización fina, concentrándola en el contorno de los obstáculos.
- Con una resolución máxima en los contornos, puntos inicial y final, el número de puntos de cálculo se reduce en los espacios vacíos y sólidos.
- El número de iteraciones necesarias en los métodos de relajación es menor cuanto menor es el número de celdas de cálculo.

Para obtener esta discretización recursiva y adaptativa se precisa una función detectora de colisiones que reporte la distancia de colisión; con ella se

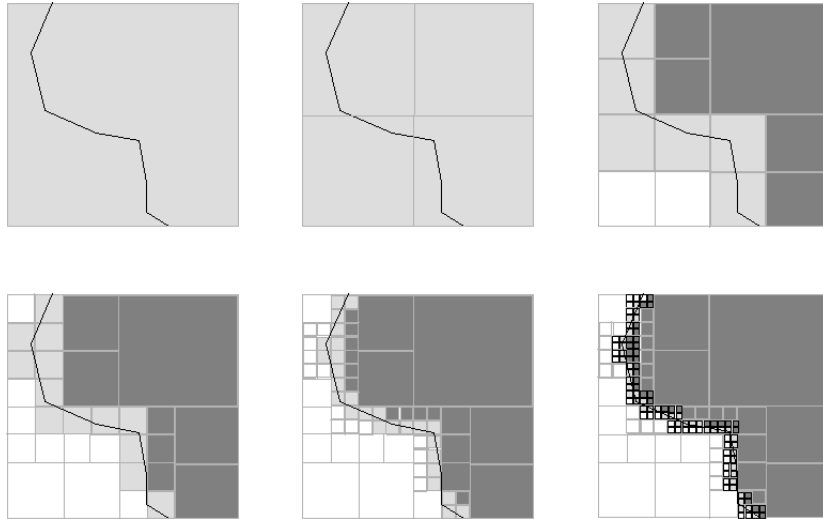


Figura 5.9: Niveles de discretización jerárquica adaptativa al contorno.

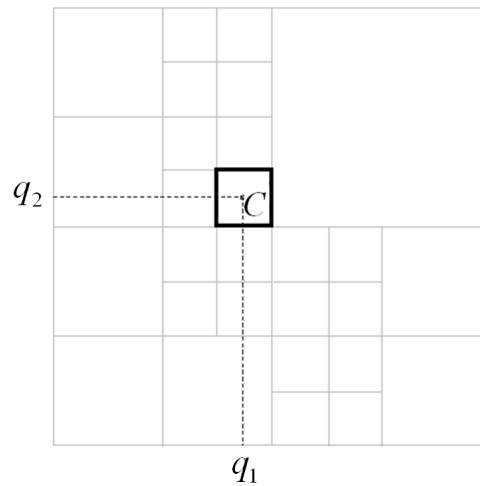


Figura 5.10: C debe identificar unívocamente una celda, en tamaño y posición.

determina si una celda corresponde a una celda libre, obstáculo o mixta.

5.2.1. Esquema numérico de identificación de celdas

Para poder calcular el valor de la función en cada celda de la discretización, es preciso ubicar su posición en el espacio. Mientras que en una discretización regular esta queda determinada por sus coordenadas, en una discretización jerárquica es necesario establecer un convenio numérico que identifique unívocamente una celda, tanto su tamaño como su situación en el espacio de configuraciones. Así, en la figura 5.10, a una determinada celda c le corresponderán unas coordenadas (q_1, q_2) y un determinado tamaño. Con la finalidad de poder representar cada celda, se establecen distintos niveles de partición ($m \in \mathbb{N}$) tal que $(0 \leq m \leq M)$, donde M será el máximo nivel de partición.

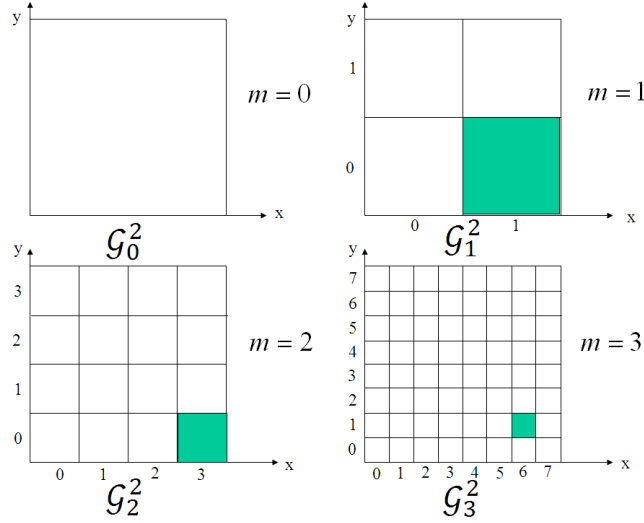


Figura 5.11: Rejillas para diferentes niveles de partición, en un espacio de configuraciones 2D. Las celdas marcadas se refieren al ejemplo expresado en la ecuación (5.48)

Y, para un espacio de n dimensiones, a cada nivel de partición m le corresponderá una rejilla regular denominada \mathcal{G}_m^n (figura 5.11), que contendrá 2^{nm} celdas del tipo c_m^n , con sus coordenadas cartesianas:

$$\mathbf{q}_m = (q_{m1}, q_{m2}, \dots, q_{mi}, \dots, q_{mn}) \quad (5.39)$$

De esta forma, cualquier celdilla de una discretización jerárquica, vendrá unívocamente identificada por su nivel de partición m (tamaño) y sus coordenadas dentro de la rejilla \mathcal{G}_m^n , a la que pertenece:

$$c = c_m^n \equiv \{m, (q_{m1}, q_{m2}, \dots, q_{mi}, \dots, q_{mn})\} \quad (5.40)$$

Y, el conjunto de rejillas necesarias para la discretización jerárquica, en un espacio de n dimensiones con un nivel máximo de partición M , será:

$$\mathcal{G}^n = (\mathcal{G}_0^n, \mathcal{G}_1^n, \dots, \mathcal{G}_M^n), \quad (5.41)$$

Por ejemplo, en la figura 5.10 la celda c pertenece a la rejilla \mathcal{G}_3^2 y sus coordenadas son (3, 4), es decir:

$$c = c_3^2 \equiv \{m, (q_{m1}, q_{m2})\} = \{3, (3, 4)\} \quad (5.42)$$

En una discretización jerárquica adaptativa, si una celda c_m^n debe subdividirse, generará 2^n celdas del tipo c_{m+1}^n (incluidas en ella), cuyas coordenadas valdrán:

$$q_{(m+1)i} = 2 \cdot q_{mi} + l_{(m+1)i} \quad | \quad l_{(m+1)i} \in \{0, 1\}, \quad (5.43)$$

$\forall i \in \{1, 2, \dots, n\}$ y $m \in \{0, 1, 2, \dots, M-1\}$

Inversamente, cualquier celda c_m^n estará incluida en otra del tipo c_{m-1}^n de coordenadas:

$$q_{(m-1)i} = \text{int} \left(\frac{q_{mi}}{2} \right) \quad \forall i \in \{1, 2, \dots, n\} \quad \forall m \in \{0, 1, 2, \dots, M-1\} \quad (5.44)$$

De esta forma, la simplicidad de codificación de celdas presentada, junto con la utilización de la Multirresolución Jerárquica Adaptativa, permitirá una buena eficiencia de computación de la ecuación de Poisson.

Las coordenadas de las celdas del tipo $c_{(m+h)}^n$, contenidas en una determinada celda c_m^n , se obtienen utilizando recursivamente la ecuación (5.47):

$$q_{(m+h)i} = 2^h q_{mi} + 2^{h-1} l_{(m+1)i} + 2^{h-2} l_{(m+2)i} + \dots + 2^1 l_{(m+h-1)i} + 2^0 l_{(m+h)i} \quad (5.45)$$

y, expresado matricialmente:

$$\begin{pmatrix} q_{(m+h)1} \\ q_{(m+h)2} \\ \vdots \\ q_{(m+h)n} \end{pmatrix} = 2^h \begin{pmatrix} q_{m1} \\ q_{m2} \\ \vdots \\ q_{mn} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} l_{(m+1)1} & l_{(m+2)1} & \dots & l_{(m+h)1} \\ l_{(m+1)2} & l_{(m+2)2} & \dots & l_{(m+h)2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ l_{(m+1)n} & l_{(m+2)n} & \dots & l_{(m+h)n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2^{(h-1)} \\ 2^{(h-2)} \\ \vdots \\ 2^0 \end{pmatrix} \quad (5.46)$$

donde

$$\mathbf{A}_{m+h}^n = \begin{pmatrix} l_{(m+1)1} & l_{(m+2)1} & \dots & l_{(m+h)1} \\ l_{(m+1)2} & l_{(m+2)2} & \dots & l_{(m+h)2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ l_{(m+1)n} & l_{(m+2)n} & \dots & l_{(m+h)n} \end{pmatrix} \quad (5.47)$$

es la matriz binaria de coordenadas, cuyas columnas representan las coordenadas de ubicación en cada nivel con respecto al anterior.

Por ejemplo, en la figura 5.11, la celda del tipo c_3^2 de coordenadas (6, 1), está contenida en otra del tipo c_1^2 de coordenadas (1, 0) y relacionadas entre ellas por la expresión:

$$\begin{pmatrix} q_{(3)1} \\ q_{(3)2} \end{pmatrix} = 2^2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2^1 \\ 2^0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (5.48)$$

donde la matriz binaria de coordenadas

$$\mathbf{A}_{2+1}^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (5.49)$$

tiene en su segunda columna las coordenadas (0, 1) correspondientes a la posición de la celda (6, 1) del nivel 3, respecto de la celda (3, 0) del nivel 2 que la contiene y en la primera columna tiene las coordenadas (1, 0) correspondientes a la posición de la celda (3, 0) del nivel 2, respecto de la celda (1, 0) del nivel 1 que la contiene.

Rosell e Iñiguez, en la publicación [1] del apartado 7.1, proponen un método de etiquetado y cálculo de las funciones armónicas, utilizadas en la planificación de movimientos en robótica.

5.3. Multirresolución Jerárquica Adaptativa

En esta tesis se propone utilizar la técnica de multirresolución aplicada a la discretización jerárquica. Para ello es necesario definir un nuevo método de multirresolución denominado Multirresolución Jerárquica Adaptativa, que se basará en los principios siguientes:

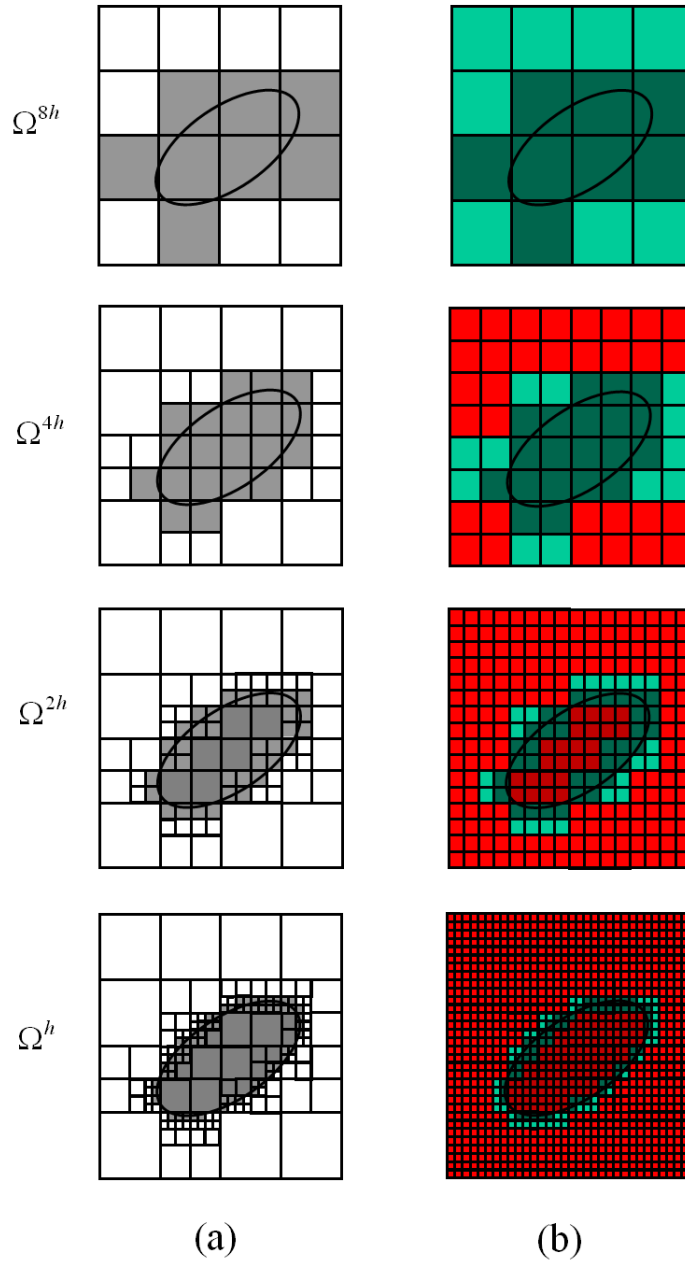


Figura 5.12: Multirresolución Jerárquica Adaptativa. Las figuras de la columna (a) representan las distintas fases (de arriba a abajo) de discretización jerárquica, y las de las columna (b) son sus correspondientes para el cálculo en discretización uniforme.

- Tal como se muestra en la figura 5.12, las rejillas de la multirresolución uniforme se adaptan a la discretización jerárquica. Mientras que en la multirresolución uniforme los puntos de cálculo de una rejilla son coincidentes (están autocontenidos) en los puntos de otra rejilla de mayor resolución (figura 5.6), en la multirresolución jerárquica adaptativa los puntos de cálculo son los puntos centrales de las celdillas, de manera que estos no serán coincidentes en los distintos niveles de resolución, figura 5.13.
- El cálculo del potencial y del error se realiza sobre las rejillas uniformes, como en la multirresolución uniforme. Pero en un determinado nivel de resolución, solo se calculan las celdillas que no están contenidas en una celda de la discretización jerárquica correspondiente, celdas verdes en la figura 5.12.
- Las celdillas contenidas en otra de la discretización jerárquica tendrán su mismo valor de potencial, y no será necesario calcular, celdas rojas en la figura 5.12.
- El paso de una rejilla a la siguiente más fina $\Omega^h \leftarrow \Omega^{2h}$ se realiza interpolando, ponderando con la distancia, en las celdillas que les corresponde subdivisión (figura 5.13) y manteniendo el mismo valor en las que deben permanecer sin refinamiento, celdas rojas en la figura 5.12.

En la figura 5.12 se ilustra los distintos niveles de discretización uniformes afectadas por los distintos niveles de discretización jerárquica.

Iñiguez y Rosell en la publicación [2] de 7.1, proponen un método de cálculo en multirresolución jerárquica adaptativa.

5.3.1. Interpolación

Al pasar de una discretización gruesa a la siguiente más fina, se obtienen los valores intermedios sobre la rejilla fina mediante una interpolación (figura 5.13a). Esta interpolación puede ser simplemente pasar el valor de la celda de menor resolución a las de mayor resolución, contenidas en ella (si no hay partición jerárquica), o bien obtener los valores de las celdas realizando una interpolación lineal ponderada, respecto de un parámetro, de los valores de las celdas vecinas (si hay partición jerárquica). Para obtener dicho parámetro de ponderación α_i correspondiente a la celda c_i , se considera la distancia euclídea

$$d^2(c_0, c_i) = d_1^2 + d_2^2 + \cdots + d_j^2 + \cdots + d_n^2 \quad (5.50)$$

Donde

$$d_j = |q_j(c_i) - q_j(c_0)|, \quad (5.51)$$

Así, el parámetro de ponderación α_i correspondiente a la celda c_i , será

$$\alpha_i = D - d(c_i, c_0), \quad (5.52)$$

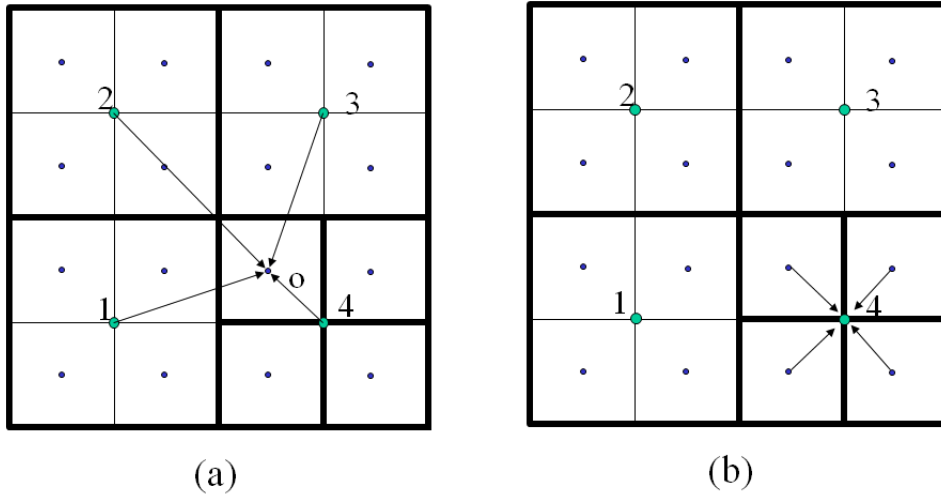


Figura 5.13: Ejemplos de interpolación en una discretización jerárquica adaptativa: (a) Interpolación. (b) Mapeado.

donde D vale, para n dimensiones:

$$D = \sum_{i=1}^{2n} d(c_i, c_0) \quad (5.53)$$

de manera que el peso de cada celda sea proporcional a su cercanía al punto de cálculo c_0 .

Con lo que se tiene:

$$u_0 = \frac{\sum_{i=1}^{2n} \alpha_i u_i}{\sum_{i=1}^{2n} \alpha_i}, \quad (5.54)$$

5.3.2. Mapeado

Inversamente, al pasar de una discretización fina a la siguiente más gruesa, es necesario transferir o mapear los valores previamente calculados. Puesto que con la discretización en celdillas propuesta no coinciden los puntos, también será necesario realizar una interpolación lineal si existe subdivisión de celdas, en este caso la interpolación será no ponderada ya que los puntos involucrados serán equidistantes y por lo tanto no es necesario realizar cálculo de distancias. Por ejemplo, el punto 4 de la figura 5.13b, como punto central de su celda, se computará como el valor medio de los cuatro puntos de sus subceldas, los cuales son equidistantes al mismo.

En el caso de multirresolución con rejillas uniformes los puntos de cálculo se sitúan en los nodos de intersección (figura 5.6) y son coincidentes en distintas resoluciones, por lo que el mapeado es directo sin necesidad de cálculos. Sin embargo, el ahorro de puntos de cálculo iterativo obtenido con la multirresolución jerárquica compensa el coste adicional del mapeado.

5.3.3. Algoritmos

Los algoritmos necesarios para el cálculo de la función potencial, solución de la ecuación de Poisson, se utilizarán posteriormente en el capítulo 6 para la obtención del planificador de trayectorias.

5.3.3.1. Algoritmo de cálculo de la función potencial armónica del C-espacio

Sobre una discretización jerárquica adaptativa del C-espacio se realiza el cálculo de la función potencial utilizando el método de multirresolución presentado en el subapartado (5.2.2).

La función base definida como

- CalcularPotencialCespacioMV($nivelJMin, nivelJMax$)

realizará un cálculo de ida y vuelta en V entre un nivel de resolución grueso definido por la variable $nivelJMin$ y un nivel de resolución fino definido por $nivelJMax$ (algoritmo 5.1). Estos dos niveles de resolución estarán comprendidos entre el mínimo y el máximo corrientes del proceso.

Las funciones utilizadas por el algoritmo son:

- $potencialRejilla(i, nivelJ)$: calcula en $iter$ iteraciones el potencial de la rejilla de nivel jerarquico $nivelJ$, utilizando el método de relajación S.O.R.
- $mapearRejilla(nivelJ, nivelJ + 1)$: mapea el potencial de la rejilla de nivel ($nivelJ$) a la de nivel ($nivelJ+1$), siguiendo el procedimiento presentado en el subapartado (5.2.2.2).
- $errorPotencialRejilla(i, nivelJMax)$: calcular en i iteraciones el error sobre la rejilla ($nivelJMax$), utilizando las expresiones del residuo (5.42 y 5.43).
- $interpolarRejilla(nivelJ, nivelJ-1)$: realiza una interpolación para transferir los valores de la rejilla ($nivelJ$) a ($nivelJ-1$), tal como se muestra en el apartado (5.2.2.1).
- $corregirRejilla(nivelJ - 1)$: corrige los valores interpolados sumando el error calculado ($u^k \leftarrow u^k + e^k$).

De esta forma, la función general

- CalcularPotencialCespacioMJC ($nivelJMin, nivelJMax$)

utilizará la función base, descrita en el algoritmo 5.1, para realizar el método recursivo denominado Multirresolución Jerárquica Completa (MJC) el cual efectúa un ciclo en V creciente (figura 5.8b), tal como se detalla en el apartado 5.2.

```

CalcularPotencialCespacioMV(nivelJMin,nivelJMax)
begin
  for (nivelJ = nivelJMin to nivelJMax - 1) do
    (PotencialRejilla) ← potencialRejilla(iter, nivelJ);
    (PotencialRejilla) ← mapearRejilla(nivelJ, nivelJ + 1);
  end;

  (errorPotencialRejilla) ← errorPotencialRejilla(iter, nivelJMax);

  for (nivelJ = nivelJMax to nivelJMin - 1) do
    (PotencialRejilla) ← interpolarRejilla(nivelJ, nivelJ - 1);
    (PotencialRejilla) ← corregirRejilla(nivelJ - 1);
  end;
end;

```

Algoritmo 5.1: Cálculo del potencial sobre una discretización jerárquica adaptativa, utilizando el método de Multirresolución en V.

```

CalcularPotencialCespacioMJC(nivelJMin,nivelJMax)
begin
  (PotencialRejilla) ←
    inicializaPotencialAleatorioRejilla(nivelJMax);

  for i = 1 to (nivelJMax - nivelJMin) do
    (PotencialRejilla) ←
      CalcularPotencialCespacioMV(nivelJMax - i, nivelJMax);
  end;

end;

```

Algoritmo 5.2: Cálculo del potencial sobre una discretización jerárquica adaptativa, utilizando el método de Full Multigrid (FMG).

Donde:

- *inicializaPotencialAleatorioRejilla(nivelJMax)*

inicializa con valores aleatorios la variable vectorial *PotencialRejilla* en su máxima resolución.

5.3.3.2. Algoritmo de obtención de la trayectoria

Una vez calculada la función potencial, sobre la discretización jerárquica, siguiendo el gradiente de la misma se obtiene el canal de trayectoria, el cual estará constituido por un conjunto de celdas concatenadas de diversos tamaños que enlaza la celdilla de inicio (c_{ini}) con la celdilla final (c_{fin}).

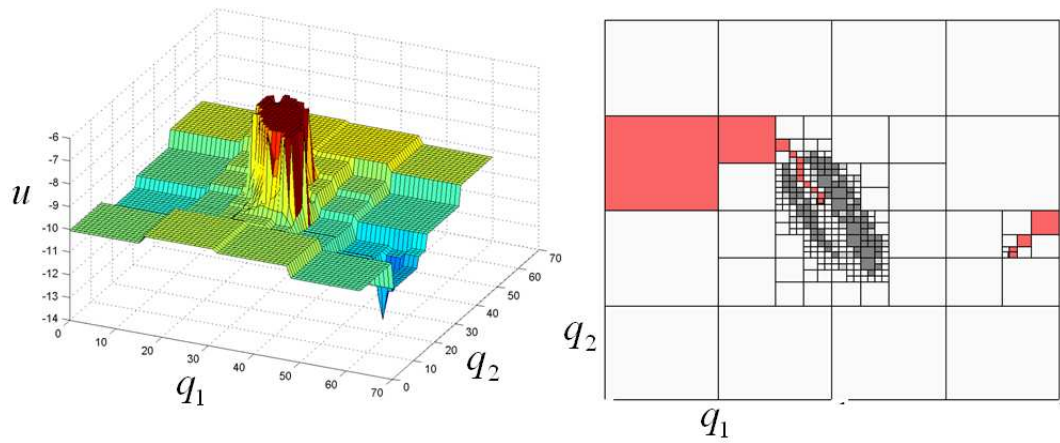


Figura 5.14: Función potencial y canal de trayectoria.

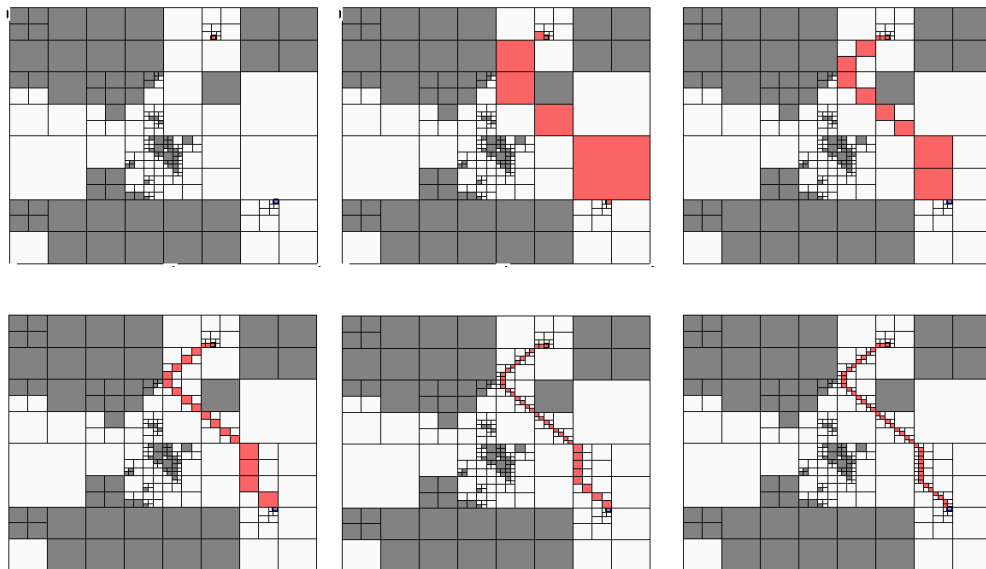


Figura 5.15: Refinamiento del canal.

La función $\text{TrayectoriaFina}(\text{Trayectoria})$, obtiene en refinamientos consecutivos la trayectoria en su máxima resolución (algoritmo 5.3), para ello se le pasa el canal a través de la variable Trayectoria y devuelve en la misma variable la trayectoria deseada.

Las funciones utilizadas por el algoritmo son:

- $\text{resolucion}(\text{Trayectoria})$: devuelve valor cierto cuando todas las celdas que componen la variable Trayectoria son de la máxima resolución.
- $\text{particion}(\text{Trayectoria})$: devuelve las celdas de Trayectoria después de realizar una partición 2^n de aquellas que no estén con la máxima resolución.
- $\text{calculoPotencial}(\text{Canal})$: realiza y devuelve el cálculo del potencial en el dominio definido por las celdas de la variable vectorial Canal , considerando contorno la parte exterior del mismo.
- $\text{canalTrayectoria}(\text{Canal}, b_{ini}, b_{fin})$: devuelve el nuevo canal de trayectoria obtenido en el dominio formado por Canal , con la celda inicial y final indicadas.

```

Trayectoria(Canal, bini, bfin)
begin
  while ¬resolucion(Trayectoria) do
  begin
    (Canal) ← particion(Trayectoria);
    (Canal) ← calculoPotencial(Canal);
    (Trayectoria) ← canalTrayectoria(Canal, bini, bfin);
  end;
  return Trayectoria
end;
```

Algoritmo 5.3: Algoritmo para la obtención de la trayectoria a partir del canal.

5.4. Obtención de resultados

La inexistencia de aplicaciones que permitan implementar los algoritmos presentados en este capítulo, ha hecho necesario desarrollar una mediante la cual se puede obtener resultados numéricos y gráficos en distintos entornos. La herramienta de programación utilizada ha sido Visual C++ de Microsoft.

- En la figura 5.14 se muestra, en 2D, un ejemplo de entorno discretizado jerárquicamente, con la función potencial calculada modelando los obstáculos como contorno, para unas condiciones de contorno de Neuman y suponiendo continuidad cíclica de la variable q_1 del espacio de configuraciones.

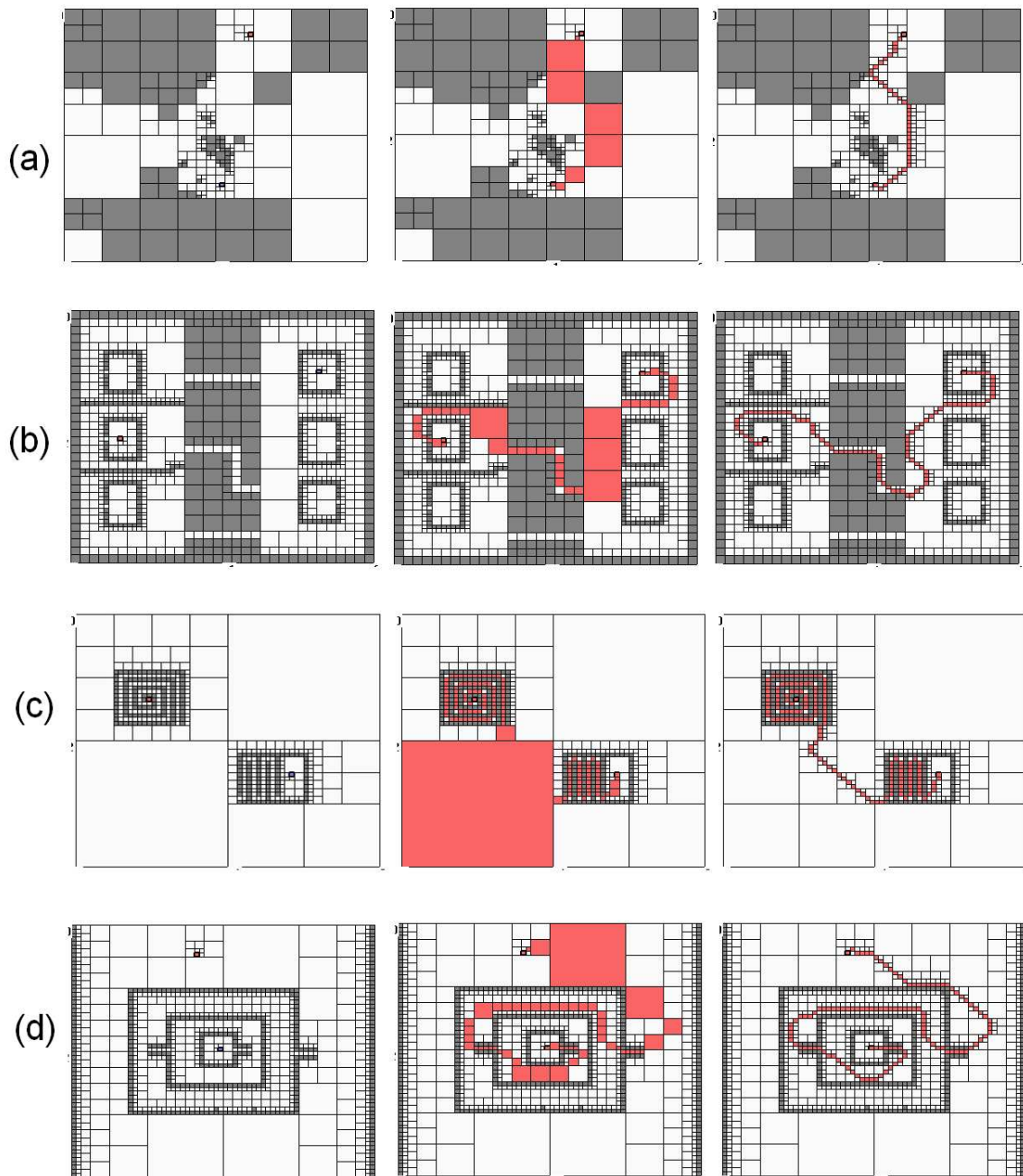


Figura 5.16: Aplicaciones distintos escenarios.

- En la figura 5.15 se muestra un ejemplo en 2D, de los pasos seguidos (de izquierda a derecha y de arriba hacia abajo) para la obtención de una trayectoria en máxima resolución, partiendo del canal de trayectoria.
- En la figura 5.16 se muestra, también en 2D, la obtención de trayectorias en distintos entornos con grados de dificultad extremos (excepto el caso a), con lo que se puede corroborar el alto grado de eficiencia del método en lo que se refiere a la obtención de trayectorias. En los cuatro casos planteados (a, b, c y d) se modelan los obstáculos como contorno, el punto inicial como valor elevado y el punto final como valor bajo y utilizan condiciones de contorno de Neuman. Se muestra primero la figura del entorno (completamente discretizado) con los dos puntos extremos de la trayectoria requerida, la siguiente figura incorpora el canal de trayectoria encontrado y la tercera figura muestra la trayectoria obtenida por refinamiento del canal. En este ejemplo se constata la conveniencia de utilizar condiciones de contorno de Neuman en los pasillos largos y estrechos, tal como se analiza en el apartado (2.3.2).
- En la figura 5.17 se muestra, gráficamente, los resultados computacionales (número de iteraciones) obtenidos para tres tipos de entornos planteados: (a) entorno muy fragmentado, (b) medianamente fragmentado y (c) poco fragmentado con pasillos estrechos. El método iterativo utilizado es el S.O.R. estudiado en el apartado 5.1.4.3, donde con un entorno regular simple se obtuvo una (ω) óptima. Sin embargo en este ejemplo se estudia su influencia para distintos entornos complicados, por lo que se hace variar entre cero y uno a intervalos de una centésima. Las condiciones de contorno planteadas serán mixtas

$$u(\mathbf{r}) = \alpha u_D + (1 - \alpha) \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}(\mathbf{r}), \quad \forall \mathbf{r} \in \partial\Omega \quad (5.55)$$

donde el parámetro α se hace variar también entre cero y uno, a intervalos de una centésima. Así, un punto de la superficie indica el número de iteraciones realizadas para encontrar una trayectoria, con un determinado valor de α y de ω . El número de puntos de la superficie (10^4 puntos) representa el número de realizaciones o trayectorias encontradas. Entonces, se observa que existe un valor óptimo del parámetro ω (situado en la parte más baja del valle de las figuras 3D), el cual varía ligeramente con respecto a α y también con respecto al tipo de entorno. También se observa, con respecto a las condiciones de contorno, una situación óptima para ($\alpha = 1$) correspondiente a las condiciones de contorno de Neuman, conforme α disminuye aumentan el número de iteraciones hasta alcanzar un máximo, disminuyendo después con una pendiente que depende del tipo de entorno, pero que no llega hasta el mínimo de Neuman.

- En la figura 5.18 se muestra la discretización jerárquica de un entorno que modeliza los obstáculos como funciones real positivas con forma de coronas y en torno al punto destino, fijado a un valor bajo, se sitúa una corona atractiva como una función real negativa, además se consideran condiciones de contorno en el infinito. En el apartado 3.7.3 se propone este enfoque

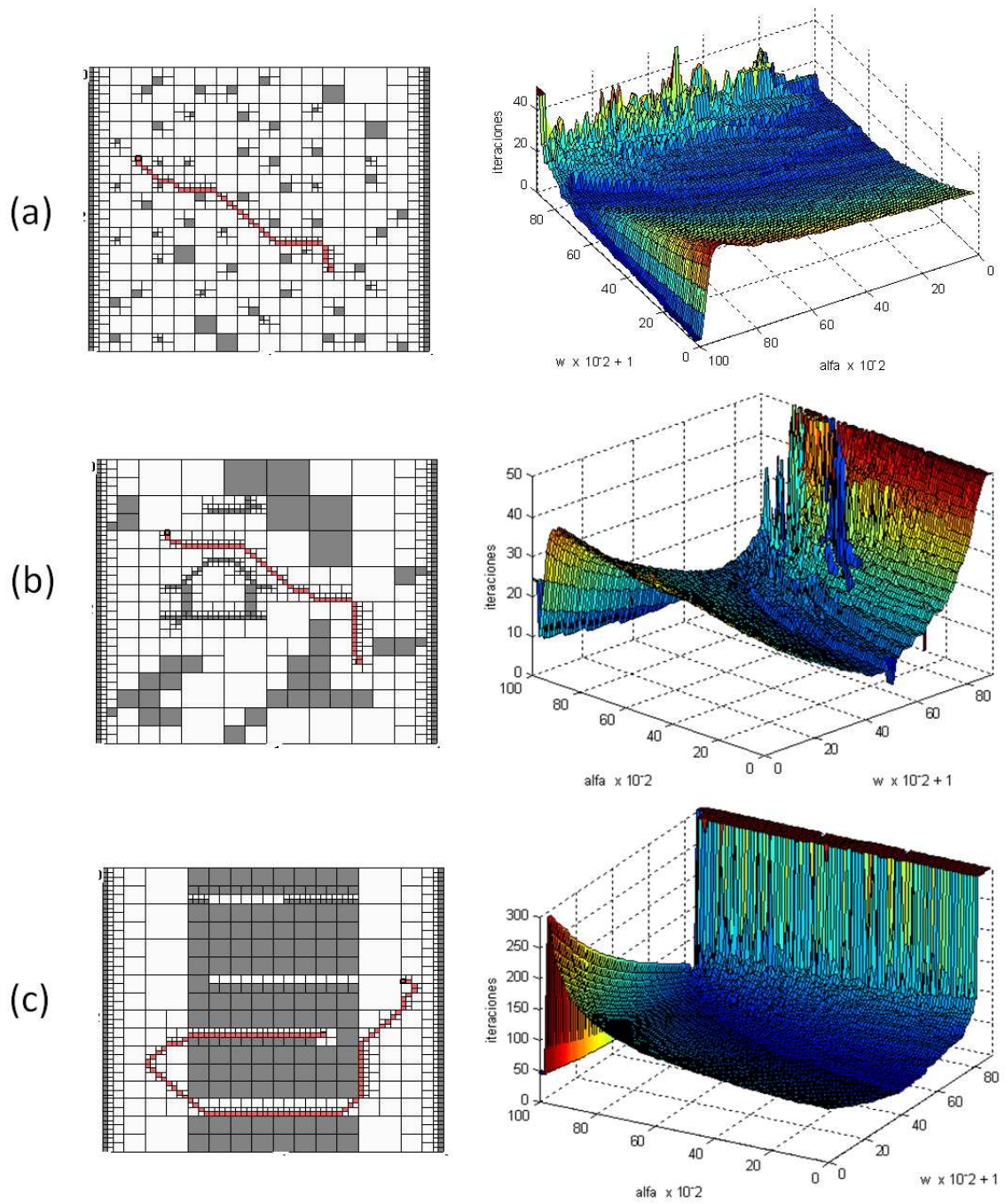


Figura 5.17: Iteraciones distintos escenarios.

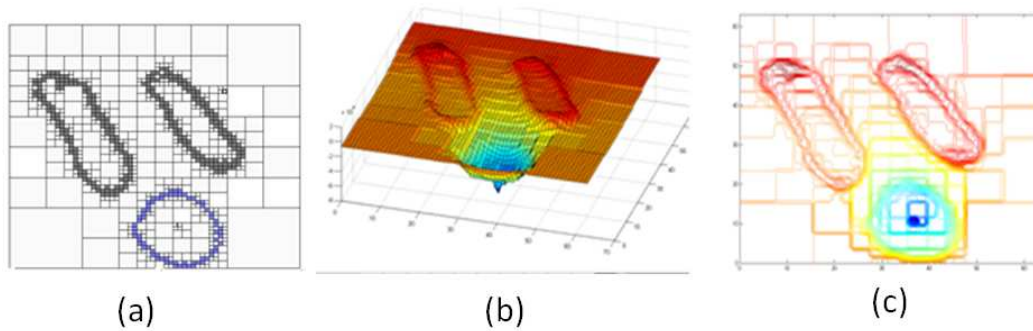


Figura 5.18: Planificador mediante anillos.

con el que se obtiene una distribución del gradiente que no presenta zonas excesivamente planas.

5.5. Aportación

En este capítulo se han estudiado los métodos numéricos para el cálculo de las funciones armónicas, subarmónicas y superarmónicas:

- Se han estudiado los distintos métodos de relajación, así como la relación existente entre la velocidad de convergencia de los mismo y el grado de resolución.
- En este capítulo también se ha propuesto un método numérico novedoso para el cálculo de las funciones armónicas, subarmónicas y superarmónicas, basado en métodos de multiresolución aplicados a una discretización jerárquica adaptativa. Con este método numérico se obtiene una reducción de ciclos de iteración al mismo tiempo que una reducción de puntos de cálculo, todo ello conservando la máxima resolución en los contornos; condición necesaria para obtener funciones potenciales que sirvan para generar trayectorias próximas a los obstáculos, tal como sería el caso en pasillos estrechos.

Capítulo 6

Uso de las funciones armónicas en espacios de configuraciones explorados mediante técnicas de muestreo

Con la discretización jerárquica adaptativa, introducida en el apartado 5.2, se consigue una reducción del número de celdillas de cálculo respecto de la discretización uniforme. Esta reducción es tanto menor cuanto mayor es el contorno de obstáculos (figura 6.1a, b y c) y, el número de celdillas totales crecerá exponencialmente con el número de grados de libertad del C-espacio. Por este motivo, es costoso computacionalmente el calcular de forma exacta o aproximada (con cierta resolución) todo el espacio de configuraciones; mientras que los métodos de muestreo son eficientes ya que no modelan el C-espacio, solo captan con curvas unidimensionales la conectividad del espacio libre del C-espacio.

En esta tesis se presenta un nuevo planificador basado en la combinación de métodos de muestreo con los métodos basados en funciones armónicas.

Esta combinación se basa en un entrelazado entre el cálculo de funciones armónicas sobre un espacio discretizado jerárquicamente y la exploración de

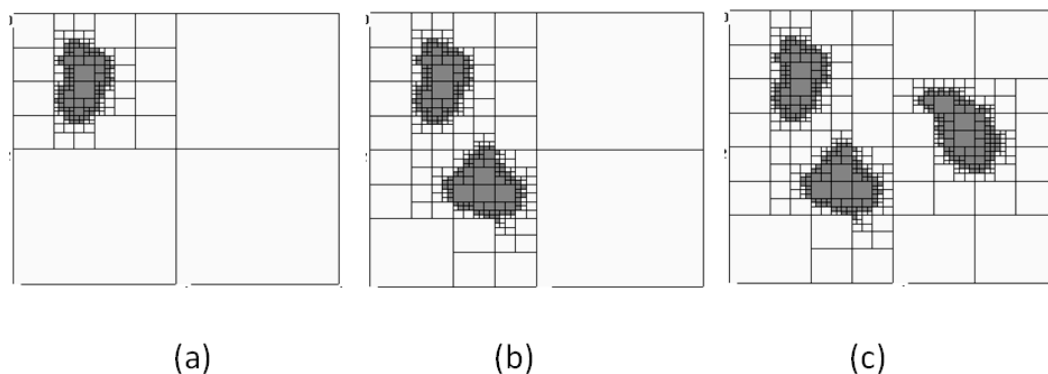


Figura 6.1: Discretización jerárquica completa del C-espacio en 2D: Efecto del crecimiento del contorno sobre la discretización.

dicho espacio mediante muestreo.

Para ello se utiliza un tipo de muestreo que, en lugar de muestrear si una configuración es libre o de colisión, se muestrea si una celdilla de discretización es libre, de obstáculo o de contorno.

Así, en el apartado 6.1 se presenta un planificador que utiliza una función detectora de colisión que también devuelve la distancia de colisión, mientras que en apartado (6.4) se presenta una alternativa de planificador, que utiliza una función detectora de colisión que no devuelve la distancia de colisión.

6.1. Planificador PHM básico

El método de planificación propuesto, denominado “Probabilistic Harmonic Function Method” (PHM), resuelve la trayectoria utilizando una función potencial armónica calculada sobre una discretización jerárquica adaptativa del C-espacio; el cual es explorado de manera aleatoria con el nuevo tipo de muestreo de celdas, propuesto en este apartado, con el que se obtiene un conocimiento parcial del entorno en zonas y en resolución. Los obstáculos forman parte del contorno, sobre el que se aplica condiciones de contorno Dirichlet, y en el punto destino se sitúa la función delta.

Inicialmente el espacio de configuraciones es desconocido; únicamente un punto de situación y otro de destino (figura 6.2a), ambos de máxima resolución, se establecen determinando una discretización inicial que reporta una serie de celdas de distinto tamaño y contenido también desconocido. El muestreo aleatorio de estas celdas definirá la situación y forma de los obstáculos progresivamente. Suponiendo que se muestrean las celdas c_1 , c_2 y c_3 (figura 6.2b), estas se identifican como libre, obstáculo y de contorno respectivamente; c_3 se subdivide generando 2^n celdas que se añaden al conjunto de celdas de contenido desconocido (figura 6.2c).

De esta forma, en la discretización del C-espacio, se establecen tres tipos o conjuntos de celdas:

- Celdas de contenido desconocido (grises)

$$G = \{c_{G_1}, c_{G_2}, \dots, c_{G_{N_G}}\}, \quad (6.1)$$

- Celdas pertenecientes a los obstáculos (negras)

$$B = \{c_{B_1}, c_{B_2}, \dots, c_{B_{N_B}}\} \quad (6.2)$$

- Celdas pertenecientes al espacio libre (blancas)

$$W = \{c_{W_1}, c_{W_2}, \dots, c_{W_{N_W}}\} \quad (6.3)$$

Los conjuntos de celdas G , B y W se definirán como variables vectorizadas, que estarán formadas por los códigos o etiquetas de las celdas correspondientes, pudiendo ser estas de máxima resolución o no, dependiendo del nivel de discretización.

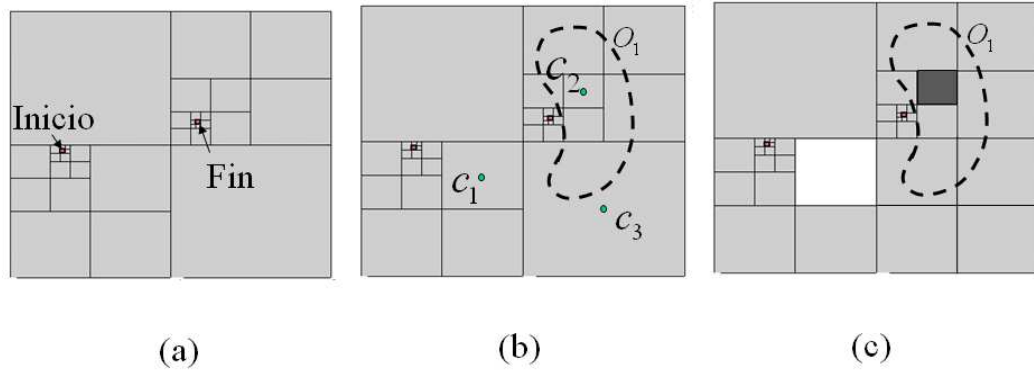


Figura 6.2: Muestreo y clasificación de celdas del C-espacio en 2D.

El muestreo aleatorio se realiza sobre el conjunto de celdas grises (G) cuyo número, partiendo de un número (N_G) reducido (figura 6.2a), crece inicialmente y posteriormente se va reduciendo, mientras los C-obstáculos se van definiendo progresivamente.

Sobre este escenario discretizado jerárquicamente, se aplican las condiciones

```

Sorteo( $G$ )
begin
   $F \leftarrow$  FuncionIntegral ( $G$ );
   $r \leftarrow$  random ( $0, 1$ );
   $\{c_{G_k} \leftarrow G\}$  tal que  $\{F(c_{G_k}) \leq r\}$ ;
  return  $c_{G_k}$ 
end;
```

Algoritmo 6.1: Algoritmo del sorteo para el muestreo aleatorio de una celda perteneciente a G .

de Dirichlet y se calcula una función potencial V (apartado 5.2.4), que se utiliza para buscar un canal de trayectoria; lo cual puede ocurrir con un conocimiento parcial del entorno y una reducción del número de puntos de cálculo.

Con este enfoque se puede obtener un planificador completo, probabilísticamente y en resolución. Dicho planificador se desarrolla en los subapartados siguientes, y es presentado por Iñiguez y Rosell en la publicación [3] del apartado 7.1.

6.1.1. Selección aleatoria de una celda ponderada por su tamaño: sorteo para la exploración de celdas

Sea c_{G_k} una celda perteneciente al conjunto G , la probabilidad de selección de c_{G_k} vendrá determinada por el peso $\omega(c_{G_k})$, que tendrá en cuenta el tamaño de dicha celda. Suponiendo que c_{G_k} es una celda de nivel de partición m_k ,

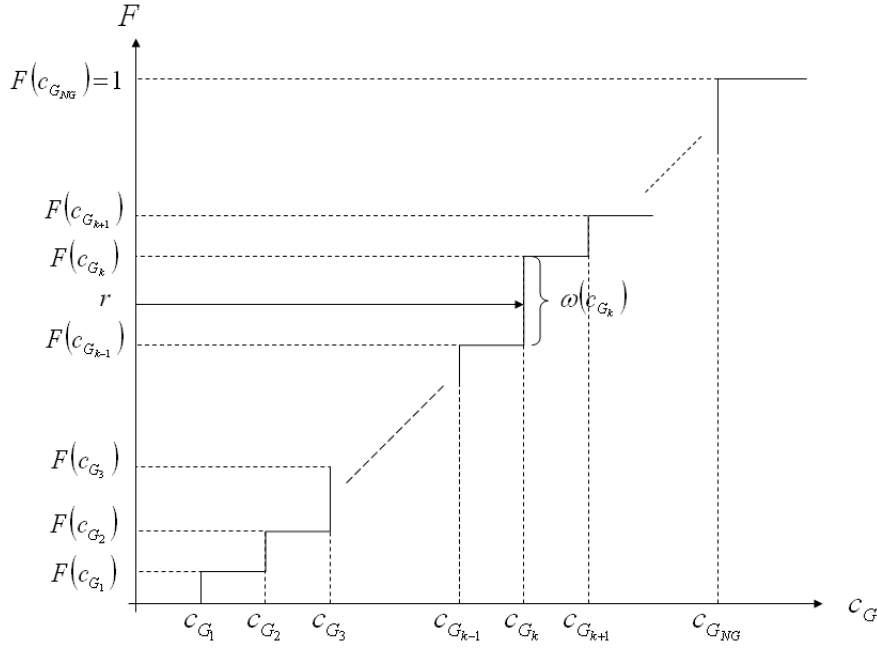


Figura 6.3: Muestreo aleatorio utilizando la función integral $F(c_k)$.

entonces el peso $\omega(c_{G_k})$ se expresa como:

$$\omega(c_{G_k}) = \frac{V_{c_{G_k}}}{V_T} = \frac{1}{2^{m_k n}}, \quad (6.4)$$

donde $V_{c_{G_k}}$ es el volumen de la celdilla c_{G_k} en la rejilla \mathcal{G}_m^n y V_T es el volumen total de todas las celdillas perteneciente a \mathcal{G}_m^n . Es decir, la probabilidad de selección de una celda se incrementará con el tamaño de la misma; de esta forma se producirá una rápida caracterización de los contornos de los obstáculos, ya que la incertidumbre de las celdas grandes parcialmente libres será despejada antes.

El sorteo efectuado en la operación de muestreo se realiza utilizando una función integral $F(c_{G_k})$ definida sobre el conjunto de celdas G

$$F(c_{G_k}) = \sum_{i=1}^k \omega(c_{G_i}) \quad \forall c_{G_i} \in G \quad y \quad 1 \leq k \leq N_G \quad (6.5)$$

Así, el valor máximo de esta función integral se obtendrá para la última celda de G ($c_{G_{NG}}$), y valdrá:

$$F_{max} = F(c_{G_{NG}}) = 1 \quad (6.6)$$

El procedimiento de muestreo aleatorio o sorteo se implementa de la manera siguiente: Se obtiene un número aleatorio (r), comprendido entre cero y uno, utilizando la función integral $F(c_{G_k})$ se extrae la celdilla correspondiente (c_{G_k} en el ejemplo de la figura 6.3 y algoritmo 6.1).

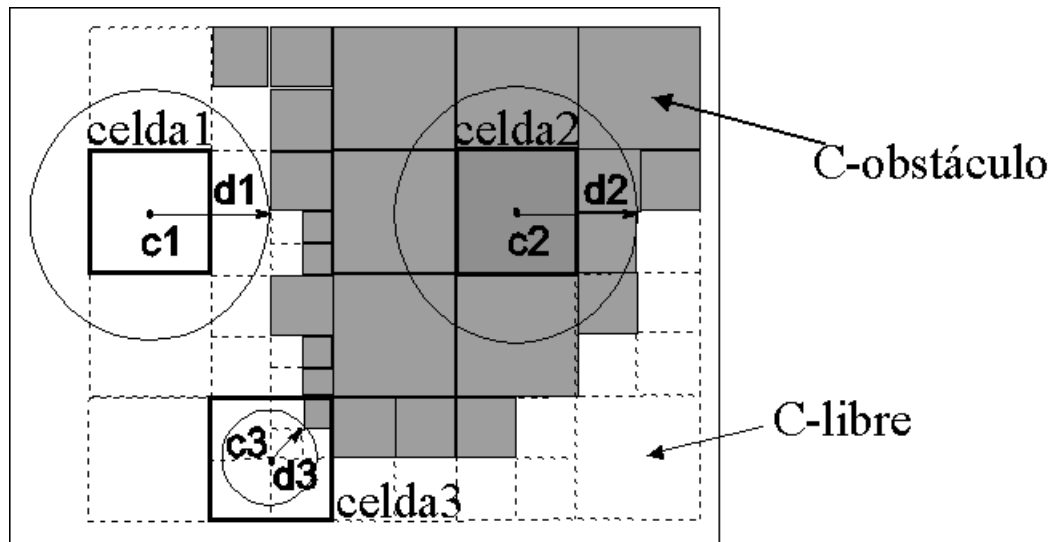


Figura 6.4: Clasificación de las celdas en el espacio de configuraciones.

6.1.2. Verificación y clasificación de celdas

La celda c_{G_k} , extraída por sorteo (con ponderación del tamaño) de G , se verifica y se identifica como celda libre, obstáculo o contorno. La configuración del robot correspondiente a su centro se pasa a la función detectora de colisión, la cual reportará la distancia de colisión (d_k) sobre el espacio de configuraciones (esta distancia será positiva si la configuración corresponde al espacio libre y negativa si corresponde al espacio obstáculo). Entonces, de acuerdo con la figura 6.4, la celda se clasifica como:

- Celda libre: Celda inscrita en la circunferencia de radio d_k y $d_k > 0$ (celda c_1)
- Celda obstáculo: Celda inscrita en la circunferencia de radio d_k y $d_k < 0$ (celda c_2)
- Celda contorno: Celda no inscrita en la circunferencia de radio d_k (celda c_3)

Las celdas clasificadas como libre y obstáculo se clasifican como celdas W y B respectivamente, mientras que la celda contorno se subdivide y las 2^n celdas resultantes se clasifican como celdas de contenido desconocido G . El apartado 6.2 describe este procedimiento, usando las siguientes funciones:

- $\text{DistanciaColision}(c_G)$: devuelve la distancia mínima (en el C-espacio) del centro de la celda c_G al contorno del obstáculo más próximo.
- $\text{Particion}(c_G)$: devuelve la partición de la celda c_G .

```

VerificaClasifica ( $c_G$ )
begin
   $d \leftarrow \text{DistanciaColision}(c_G)$ ;
  if ( $|d| \geq D$ ) then
    if ( $d > 0$ ) then ( $W \leftarrow W \cup c_G$ );
    else ( $B \leftarrow B \cup c_G$ );
  else {
    ( $c_{G_1}, c_{G_2}, \dots, c_{G_H}$ )  $\leftarrow$  Particion ( $c_G$ );
     $G \leftarrow G \cup (c_{G_1}, c_{G_2}, \dots, c_{G_H})$ ;
  }
end;

```

Algoritmo 6.2: Algoritmo para la verificación y clasificación de celdas. D es la distancia diagonal de la celda a verificar.

6.1.3. Algoritmo del planificador de trayectorias. Exploración pasiva de trayectorias

Combinando el método anterior de exploración de celdas, el cálculo de funciones potenciales armónicas sobre una discretización jerárquica y la exploración pasiva de trayectorias (consistente en calcular trayectorias sobre zonas parcialmente desconocidas del C-espacio y evaluación posterior) se diseña el generador de trayectorias (algoritmo 6.3):

- Inicialmente, se establece la posición de los puntos inicial y final definidos por sendas celdas de máxima partición, c_{ini} y c_{fin} . Con el resto del C-espacio se realiza una discretización jerárquica (figura 6.5a), clasificando todas las celdas como de contenido desconocido (grises), excepto c_{ini} y c_{fin} .
- Después de la exploración de N_E celdas (figura 6.5b), se aplican las condiciones de contorno de Dirichlet en los obstáculos (celdas negras) y se calcula la función potencial (V_{WG}) sobre la discretización actual, considerando las celdas grises como libres, y se realiza la búsqueda de un canal trayectoria (figura 6.5c).
- Las celdas grises pertenecientes a este canal de trayectoria, serán

```

PlanificadorTrayectoria( $c_{ini}, c_{fin}$ )
begin
  ( $c_{ini}, c_{fin}$ )  $\leftarrow$  MarcaInicioFin;
   $G \leftarrow$  DiscreInicial ( $c_{ini}, c_{fin}$ );
   $B \leftarrow \emptyset$ ;
   $W \leftarrow \emptyset$ ;
   $Trayectoria \leftarrow \emptyset$ ;
   $i \leftarrow 0$ ;
  do {
    for  $j = 1$  to  $N_E$ 
      ( $c_G$ )  $\leftarrow$  Sorteo( $G$ );
      VerificaClasifica( $c_G$ );
    end for
     $V_{WG} \leftarrow$  CalculaPotencial( $G, W, B, c_{fin}$ );
     $Canal \leftarrow$  CanalTrayectoria( $V_{WG}$ );
     $Libre \leftarrow$  CompruebaClasifica( $Canal$ );
    if ( $Libre == TRUE$ )
       $Trayectoria \leftarrow$  Trayectoria( $Canal$ );
      return  $Trayectoria$ ;
    end if
    ++ $i$ ;
  } while (( $Libre == FALSE$ ) AND ( $i < N_I$ ));
  return  $Trayectoria$ ;
end;

```

Algoritmo 6.3: Algoritmo planificador de trayectorias, PHM básico.

comprobadas y clasificadas. Si el canal de trayectoria queda interrumpido, por celdas subdivididas y clasificadas como grises, se reinicia el procedimiento. Repitiendo el proceso hasta que se encuentre un canal de trayectoria libre o se hayan realizado un número de iteraciones dado (N_I).

- Por último, el canal de trayectoria encontrado se refina hasta obtener la trayectoria con la máxima resolución (figura 6.5d). Para ello se sigue el método presentado en el subapartado 5.2.3.2.

Para realizar estas tareas el algoritmo cuenta con las siguientes funciones:

- $CalculaPotencial(G, W, B, c_{fin})$: calcula la función potencial considerando las celdas grises junto con las celdas libres.
- $CanalTrayectoria(V_{WG})$: utilizando una función de navegación (por seguimiento del gradiente del potencial) intenta encontrar un canal de trayectoria: si lo encuentra devuelve los códigos de las celdas que lo componen en la variable vector $Canal$ y si no devuelve ($Canal = \emptyset$).

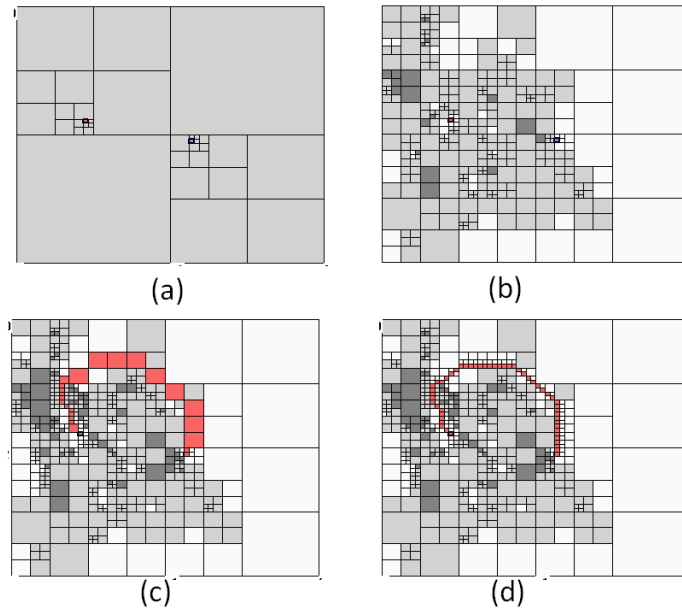


Figura 6.5: Secuencia ejemplo del método PHM básico.

- $\text{CompruebaClasifica}(\text{Canal})$: cada una de las celdas grises que forman parte del canal son verificadas: si son todas libres devuelve ($\text{Libre} = \text{TRUE}$) y si no devuelve ($\text{Libre} = \text{FALSE}$).
- $\text{DiscreInicial}(c_{ini}, c_{fin})$: partiendo del conocimiento de la posición de las celdas inicial y final, con la máxima resolución, obtiene una discretización jerárquica inicial del todo el espacio, en celdas grises de contenido desconocido (figura 6.5a)
- $\text{Trayectoria}(\text{Canal})$: partiendo del Canal de trayectoria obtiene la trayectoria compuesta por celdillas de la máxima resolución (figura 6.5d)

6.1.4. Estudio de la completitud del método propuesto

Desde un punto de vista dinámico pueden verse las celdas contorno de un determinado nivel de partición como poblaciones de generaciones sucesivas (figura 6.6), de forma que la población de la generación correspondiente al nivel m dará lugar a la población de la generación siguiente ($m + 1$). El similar sería: una celda-individuo seleccionado al azar, el cual pertenece a una generación determinada m , genera 2^n hijos pertenecientes a la generación ($m + 1$) y muere.

En un instante determinado coexisten distintas generaciones próximas, creciendo en población la generación más joven mientras se van extinguiendo las más viejas. Al mismo tiempo, se observa un crecimiento demográfico global hasta alcanzar un máximo, descendiendo después hasta la extinción total de la especie ya que la generación de celdas de máxima resolución mueren sin descendencia.

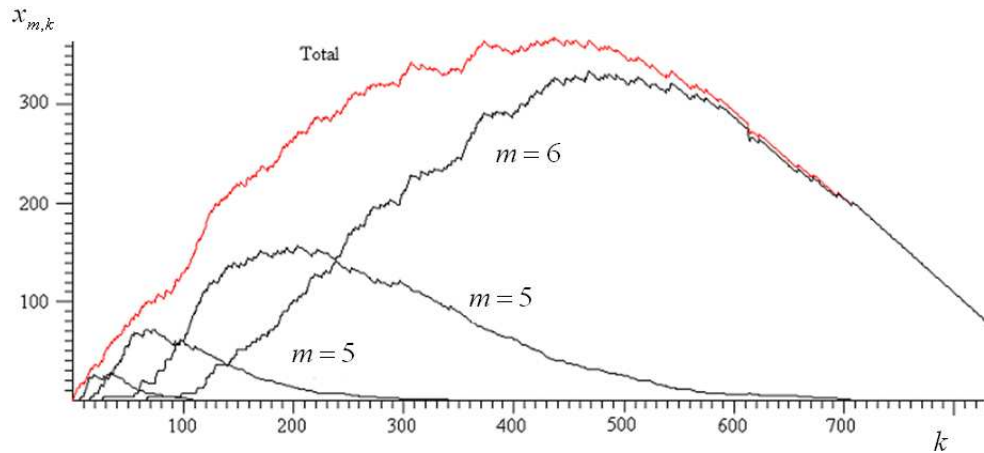


Figura 6.6: Ejemplo de evolución de la población de celdas en G .

Este estudio se desarrolla en los subapartados siguientes, y es presentado por Iñiguez y Rosell en la publicación [3] del apartado 7.1.

6.1.4.1. Modelo de población de celdas en G

La probabilidad de que una determinada m -celda sea explorada es obtenida estudiando la evolución de las poblaciones de las celdas parcialmente libres en sus distintos niveles jerárquicos. En primer lugar se obtiene el modelo de crecimiento de poblaciones para una determinada tasa de nacimientos y muertes, para ello se define la nomenclatura siguiente:

- $x_{m,k}$: es la población o número de celdas de nivel m en G después de k celdas exploradas.
- P_m : es la probabilidad de que una m -celda sea parcialmente libre.
- $P_{x_{m,k}}$: es la probabilidad de que en el paso k el algoritmo seleccione la población $x_{m,k}$.
- $P_{m,k}$: es la probabilidad de que en el paso k el algoritmo seleccione una determinada celda perteneciente a la población $x_{m,k}$.
- $P_{m,1..k}$: es la probabilidad de que en k pasos el algoritmo seleccione una determinada celda perteneciente a la población $x_{m,k}$.

Cuando una m -celda de G es seleccionada y evaluada como parcialmente libre, entonces se subdivide en 2^n ($m + 1$)-celdas hijas y se retornan a G , eliminándose la m -celda progenitora. Por lo tanto se cumplen las siguientes consideraciones:

- $x_{m,k}$: decrementa en uno si en el paso $(k - 1)$ una m -celda ha sido seleccionada.

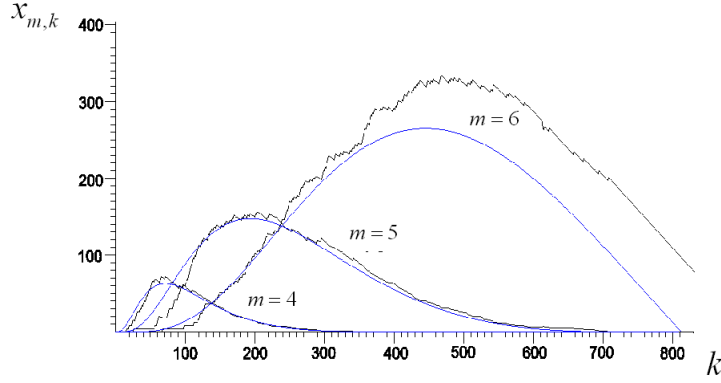


Figura 6.7: Modelo de población de celdas en G.

- $x_{m,k}$: incrementa en 2^n si en paso $(k-1)$ una $(m-1)$ -celda ha sido seleccionada y clasificada como parcialmente libre.
- $x_{m,k}$: permanece constante si en el paso $(k-1)$ no han sido seleccionadas una m -celda ni una $(m-1)$ -celda, o sí ha sido seleccionada una $(m-1)$ -celda y no era parcialmente libre.

Por lo tanto, la población o número de celdas parcialmente libres de nivel jerárquico (generación) m vendrá dada por el siguiente modelo probabilístico:

$$\begin{aligned}
 x_{m,k} = & (x_{m,k-1} - 1) \cdot P_{x_{m,k}} + \\
 & (x_{m,k-1} + 2^n) \cdot P_{x_{m-1,k}} \cdot P_{m-1} + \\
 & x_{m,k-1} \cdot (1 - P_{x_{m,k}} - P_{x_{m-1,k}}) + \\
 & x_{m,k-1} \cdot P_{x_{m-1,k}} \cdot (1 - P_{m-1}) \quad (6.7)
 \end{aligned}$$

En la figura 6.6 se muestra un ejemplo de evolución de poblaciones y en la figura 6.7 se muestra la estimación de poblaciones mediante el modelo probabilístico propuesto.

Considerando un espacio de configuraciones de n dimensiones con una discretización jerárquica de M niveles, el número de celdas existentes en un nivel m tal que $m \leq M$ es de 2^{nm} m -celdas. Si N_m es el número de m -celdas que contienen parte del contorno, entonces la probabilidad de que una m -celda sea parcialmente libre es:

$$P_m = \frac{N_m}{2^{nm}} \quad (6.8)$$

Este valor será estimado muestreando un número s_m de m -celdas y verificando el número de celdas g_m parcialmente libres encontradas, entonces P_m se estima como:

$$P_m \simeq \frac{g_m}{s_m} \quad (6.9)$$

Las M -celdas que son parcialmente libres son consideradas como celdas obstáculo, puesto que son de máxima resolución, por lo tanto se cumple:

$$P_M = 0 \quad (6.10)$$

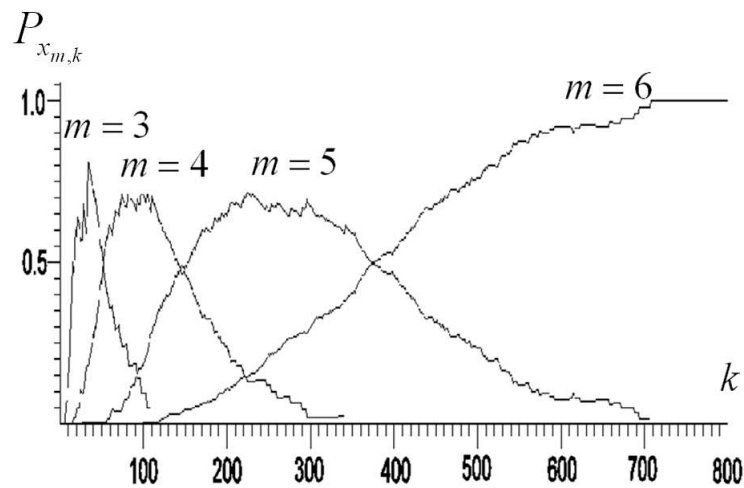


Figura 6.8: Probabilidad $P_{x_{m,k}}$ de seleccionar la población $x_{m,k}$ para $m = 3, 4, 5$ y 6 .

6.1.4.2. Probabilidad de selección condicionada por el tamaño de las celdas

En un espacio discretizado jerárquicamente el tamaño de las celdas es heterogéneo y depende del nivel jerárquico de partición. Para una C-espacio de n dimensiones, si se considera unitario el tamaño del hipervolumen de una M -celda, el tamaño de una celda de nivel de partición m viene dado por el hipervolumen

$$V_m = 2^{n(M-m)} \quad (6.11)$$

Por lo tanto el muestreo aleatorio debe ser hecho considerando el tamaño de las celdas. Primero se selecciona la población de un determinado nivel jerárquico y después se escoge una celda de esta generación para ser explorada:

- a) Sea $V_{m,k}$ el volumen de todas las m -celdas de G en el paso k . La probabilidad $P_{x_{m,k}}$ depende del volumen $V_{m,k}$ con respecto al total del volumen de celdas en G :

$$P_{x_{m,k}} = \frac{V_{m,k}}{\sum_{j=1}^M V_{j,k}} = \frac{2^{n(M-m)} \cdot x_{m,k}}{\sum_{j=1}^M 2^{n(M-j)} \cdot x_{j,k}} = \frac{2^{-nm} \cdot x_{m,k}}{\sum_{j=1}^M 2^{-nj} \cdot x_{j,k}} \quad (6.12)$$

En la figura 6.8 se muestra un ejemplo de la evolución real de $P_{x_{m,k}}$ y en la figura 6.9 su estimación, utilizando el modelo de población (ecuación 6.7)

- b) La probabilidad de seleccionar una m -celda de $x_{m,k}$ es:

$$P_{m,k} = \frac{1}{x_{m,k}} \quad (6.13)$$

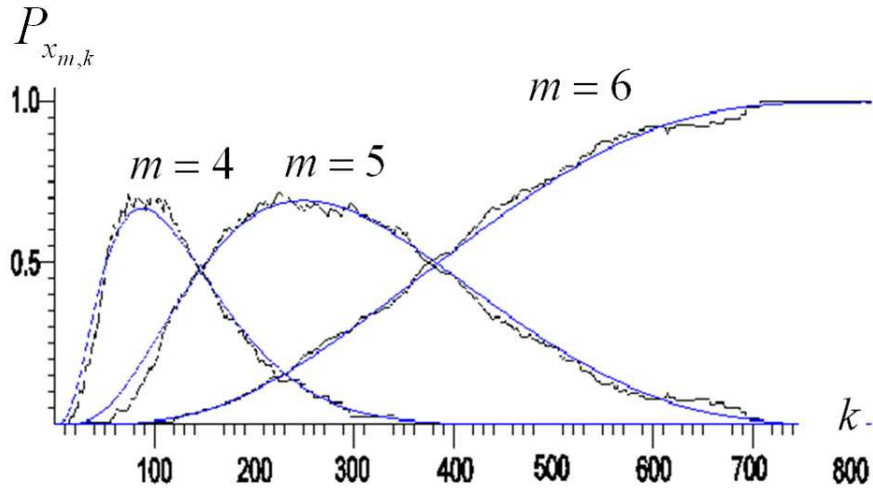


Figura 6.9: Estimación de la probabilidad $P_{x_{m,k}}$ para $m = 4, 5$ y 6 .

El producto de las dos anteriores da la probabilidad de que en el paso k el algoritmo seleccione una m -celda de G . De aquí, la probabilidad de explorar una determinada m -celda de G en k tiradas es (figura 6.10):

$$P_{m,1..k} = 1 - \prod_{j=1}^k (1 - P_{x_{m,j}} P_{m,j}) \quad (6.14)$$

6.1.4.3. Probabilidad de fallo

Asumiendo que existe una ruta entre dos configuraciones c_i y c_f formada por una cadena de celdas cuyos tamaños serán iguales o superiores al de una M -celda, el objetivo es determinar el número mínimo k de iteraciones del algoritmo tal que la probabilidad de fallo del planificador permanezca dentro de un límite dado.

Sea D_m el número de m -celdas del canal, y $D = \sum_{m=1}^L D_m$ el número total de celdas del canal. Entonces la probabilidad de fallo, después de k iteraciones, será:

$$P(\text{Fallo}) = 1 - \prod_{m=1}^M (P_{m,1..k})^{D_m} \quad (6.15)$$

Puesto que la probabilidad de seleccionar una m -celda del canal disminuye con el tamaño de la misma, se considera el peor caso en el que el canal estará formado por D_M M -celdas. Entonces, la probabilidad de fallo será:

$$P(\text{Fallo}) \leq 1 - (P_{M,1..k})^{D_M} \quad (6.16)$$

Para una determinada cota de fallo ($P(\text{Fallo}) \leq \delta$), se deberá cumplir

$$P_{M,1..k} \geq (1 - \delta)^{(1/D_M)} \quad (6.17)$$

El número de iteraciones k del algoritmo se obtiene aplicando iterativamente la ecuación (6.14) para ($m = M$) hasta que se cumpla la desigualdad anterior.

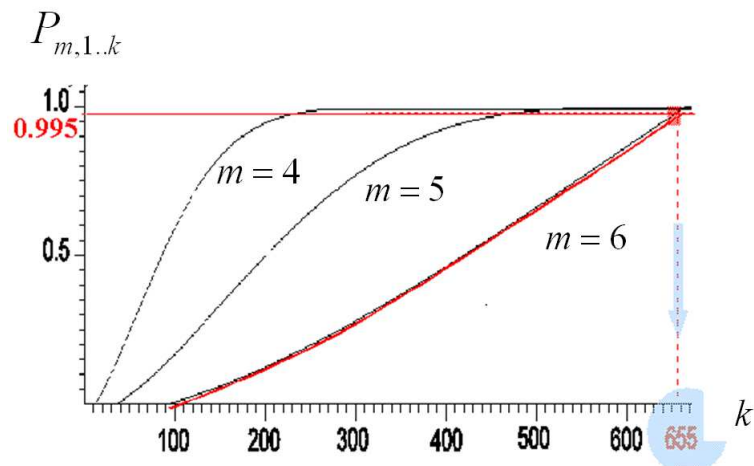


Figura 6.10: Probabilidad de seleccionar una m -celda en k intentos (ecuación (6.14)). La curva correspondiente al nivel M es utilizada para obtener el número de iteraciones necesarias.

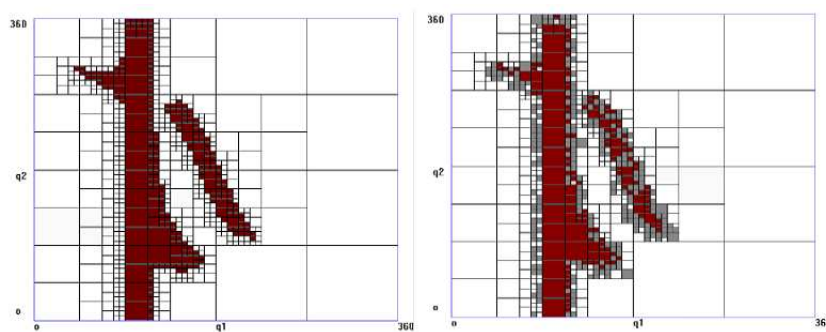


Figura 6.11: Ejemplo de C-espacio para dos números de muestras: a) $k = 825$ (exploración exhaustiva) y b) $k=80$.

6.1.4.4. Validación

Los resultados experimentales se han obtenido sobre un espacio de configuraciones de dos dimensiones, con dos obstáculos y una discretización no regular, jerárquica adaptativa con ($M = 6$) niveles (figura 6.11). En la figura 6.11a se han realizado el número de muestras necesarias para efectuar una exploración exhaustiva, mientras que en 6.11b se ha realizado una exploración parcial obteniéndose celdas libres, obstáculo y parcialmente libres. Suponiendo una cota de fallo ($\delta = 0,1$) y dos configuraciones c_i y c_f para ser conectadas a través de un canal compuesto por ($D = 20$) celdas, la probabilidad de que una m -celda sea parcialmente libre es estimada como:

m	1	2	3	4	5	6
$P_m = \frac{g_m}{s_m}$	1	0.66	0.69	0.59	0.45	0

Usando estos valores, la figura 6.7 muestra la población estimada de m -celdas parcialmente libres computadas utilizando la ecuación (6.7), la figura 6.9

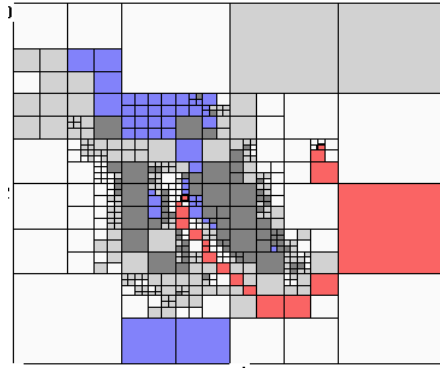


Figura 6.12: Canal de trayectoria con exclusión de celdas.

muestra la evolución de las probabilidades estimadas utilizando la ecuación (6.12).

El número de iteraciones debe ser tal que se cumpla:

$$P_{m,1..k} \geq (1 - \delta)^{(1/D)} = 0,9^{1/20} = 0,995 \quad (6.18)$$

Aplicando iterativamente la ecuación (6.14), esta condición se satisface para $k \geq 655$ (figura 6.10).

Utilizando este valor de k , el algoritmo 6.3 (PlanificadorTrayectoria) se ha utilizado para explorar el \mathcal{C} -espacio. El resultado se muestra en la figura 6.11b donde la función armónica se ha calculado sobre libres y se ha utilizado para encontrar la trayectoria entre c_i y c_f .

6.2. Alternativas de mejora del método básico

Sobre el esquema básico del planificador propuesto en el apartado (6.1) caben métodos de mejora basados en reglas heurísticas. La aplicación de estos métodos permite la realización de un planificador más eficiente en tiempo de ejecución. En los subapartados siguientes se proponen varias posibilidades de mejora (algunas ya estudiadas) y se aplican en el apartado (6.3), en el diseño del algoritmo de un planificador avanzado. En las publicaciones [4 y 5] del apartado 7.1, Rosell e Iñiguez proponen alternativas de mejora del planificador PHM básico.

6.2.1. Exclusión de celdas del sorteo de exploración

Considerando los obstáculos como contorno y utilizando condiciones de contorno de Dirichlet, el valor de V_{WG} se incrementa monótonicamente desde el punto final hasta los \mathcal{C} -obstáculos. Solamente aquellas celdas con un valor de V_{WG} más bajo que el de la celda inicial deben ser consideradas para el muestreo, ya que el canal de trayectoria es encontrado siguiendo el gradiente de la función V_{WG} . De esta forma, aquellas celdas de G con valores de potencial superiores al de la celda inicial pueden excluirse del sorteo, reduciéndose

el tiempo de exploración.

Es decir, aquellas celdas que cumplen:

$$c_{G_i} \in G \quad | \quad V_{WG}(c_{G_i}) > V_{WG}(c_{ini}), \quad (6.19)$$

son transferidas al conjunto

$$A = \{c_{A_1}, c_{A_2}, \dots, c_{A_{NA}}\}, \quad (6.20)$$

quedando excluidas del sorteo de muestreo, considerándose como celdas obstáculo. De esta manera se acelera el proceso; a no ser que estas nuevas celdas bloqueen un posible camino hacia el objetivo y por tanto el algoritmo no encuentre un camino libre, en cuyo caso todas las celdas del conjunto A se devuelven al conjunto G , continuando la búsqueda.

En la figura 6.12 se muestra un ejemplo (para 2D) donde se ha encontrado una trayectoria después de haber excluido un número de celdas (azules) que cumplieran la condición (6.19).

6.2.2. Exploración pasiva de trayectorias: Puntos de Apoyo y Función Potencial Auxiliar

En el apartado (6.1.3) se presentó el método para la exploración de trayectorias: considerando las celdas grises como libres se obtiene una trayectoria, y aquellas celdas grises pertenecientes a dicha trayectoria serán comprobadas a posteriori.

Si la trayectoria queda interrumpida por celdas subdivididas y clasificadas como grises, las celdas extremos de los trozos de trayectoria resultantes serán consideradas *celdas de apoyo* para la exploración subsiguiente, clasificándose dentro del conjunto Y

$$Y = \{c_{Y_1}, c_{Y_2}, \dots, c_{Y_{NY}}\}, \quad (6.21)$$

que incluirá también las celdas inicial y final.

Estas celdas de apoyo serán prefijadas a valores bajos de una nueva función potencial

$$V_{WGY} = V_{WGY}(c_k) \quad | \quad c_k \in (W \cup G), \quad (6.22)$$

la cual se utilizará para modular las probabilidades de selección en el sorteo de exploración de celdas y que será solución de la ecuación de Laplace; considerando los obstáculos como contorno y aplicando condiciones de contorno de Dirichlet, con valor alto para el contorno ($V_{contorno}$) y bajo para los puntos de apoyo (V_{apoyo}).

Si la probabilidad de selección de una celda es inversamente proporcional al valor de la función potencial V_{WGY} , entonces los entornos de los puntos de apoyo serán explorados antes, conduciéndose la exploración hacia aquellas zonas más prometedoras de contener caminos libres.

Con este planteamiento, la función integral para el sorteo de celdas dependerá del peso

$$\omega(c_k) = \omega_1(c_k) \cdot \omega_2(c_k), \quad (6.23)$$

donde $\omega_1(c_k)$ es el peso correspondiente al tamaño (ecuación (6.4)) y

$$\omega_2(c_k) = \frac{V_{contorno} - V_{WGY}(c_k)}{V_{contorno} - V_{apoyo}}, \quad (6.24)$$

que tendrá un valor comprendido entre cero (para las celdas de contorno) y uno (para las celdas de apoyo). La función integral para el sorteo de celdas, se obtiene como en la ecuación (6.5):

$$F(c_k) = \sum_{i=1}^k \omega(c_i) \quad \forall c_i \in G \quad y \quad 1 \leq k \leq NG \quad (6.25)$$

Por último, con la finalidad de aprovechar la recursividad en el cálculo de las funciones armónicas, se memorizarán en variables distintas las funciones potenciales calculadas para la obtención de trayectorias (V_{WG}) y las calculadas para obtener probabilidades (V_{WGY}).

6.2.3. Resolución máxima ajustable

Teniendo en cuenta que, en la discretización jerárquica adaptativa del C -espacio, es posible prefijar la máxima resolución alcanzable (figura 5.12) y teniendo en cuenta que las posibles trayectorias no siempre necesitarán de una resolución máxima lo más fina posible; entonces resultará eficiente, respecto a la reducción de puntos de cálculo, el ajuste pasivo del parámetro identificativo de la máxima resolución (M).

Con la finalidad de reducir al máximo el número de puntos de cálculo, la máxima resolución alcanzable en el proceso de discretización jerárquica se aplica con un criterio basado en reglas:

- La máxima resolución posible se aplicará siempre a los puntos inicial y destino.
- La máxima resolución aplicable a los contornos será variable por fases de búsqueda, comenzando por una resolución más gruesa y afinando según va abanzando el proceso sin obtención de resultado.

6.2.4. Aplicación de condiciones de contorno de Neuman en los obstáculos

La aplicación de condiciones de contorno de Dirichlet en los límites del C -espacio y de Neuman en los obstáculos (figuras 5.17 y 5.18) consigue que los pasillos formados entre ellos no se cieguen, conservando un gradiente longitudinal mínimo que permita el paso de trayectorias.

6.3. Algoritmo del planificador PHM avanzado

Aplicando las mejoras del apartado anterior al planificador PHM básico se obtiene el planificador PHM avanzado (algoritmo 6.5), donde la búsqueda de trayectoria es conducida por zonas más prometedoras, y donde se produce una reducción de puntos de cálculo. Mientras que los puntos básicos del algoritmo son conservados, se destacan en **negrita** los puntos nuevos de mejora:

- Inicialmente, se establece la posición de los puntos inicial y final definidos por sendas celdas de máxima partición, c_{ini} y c_{fin} . Con el resto del C-espacio se realiza una discretización jerárquica, clasificando las celdas como de contenido desconocido. **Además se establece un índice de máxima resolución (M) que, en principio, no será el máximo posible.**
- **El conjunto de celdas de apoyo estará formado inicialmente por las celdas c_{ini} y c_{fin} .**
- **Las celdas de apoyo serán prefijadas a valores bajos de potencial y se calculará la función potencial auxiliar (V_{WGY}), la cual se utilizará para modular las probabilidades de selección en la próxima exploración.**
- Después de la exploración de N_E celdas, se aplican las condiciones de contorno de Dirichlet en la frontera del C-espacio, Neuman en los obstáculos y se calcula la función potencial (V_{WG}) sobre la discretización actual, considerándose las celdas grises como libres, y realizándose la búsqueda de un canal trayectoria.
- Las celdas grises pertenecientes a este canal de trayectoria, serán comprobadas y clasificadas. **Si el canal de trayectoria queda interrumpido por celdas subdivididas y clasificadas como grises, las celdas extremo de los trozos resultantes serán consideradas celdas de apoyo.**
- **Utilizando la función potencial V_{WG} y teniendo en cuenta la ecuación (6.19), se obtiene el conjunto (A) de celdas que se excluirán del próximo sorteo.**
- **Si no se obtiene el canal de trayectoria y el conjunto A es no vacío; entonces se restituyen los elementos de dicho conjunto al de celdas grises.**
- Después se incrementa el índice de máxima partición (M), si se ha llegado al máximo (M_M) se aplica un anillo de atracción en torno del punto destino y se vuelve al principio, repitiéndose el proceso hasta que se encuentre un canal de trayectoria libre o se

hayan realizado un número de iteraciones dado (N_I).

El procedimiento detallado se muestra en el algoritmo (6.5), donde las nuevas funciones incluidas en el algoritmo del planificador PHM avanzado son:

- $\text{CalculaPotencial}(G, W, B, Y)$: calcula la función potencial auxiliar (V_{GWY}) considerando las celdas grises junto con las celdas libres y las celdas de apoyo incluidas en el conjunto Y .
- $\text{ObtencionCeldasA}(V_{WG})$: obtiene las celdas que serán incluidas en el conjunto A y que serán excluidas del próximo sorteo.

```

PlanificadorTrayectoria( $c_{ini}, c_{fin}$ )
begin
  ( $c_{ini}, c_{fin}$ )  $\leftarrow$  MarcaInicioFin;
   $G \leftarrow$  DiscreInicial ( $c_{ini}, c_{fin}$ );
   $B \leftarrow \emptyset$ ;  $W \leftarrow \emptyset$ ;  $A \leftarrow \emptyset$ ;  $P \leftarrow \emptyset$ ;  $Y \leftarrow \{c_{ini}, c_{fin}\}$ ;  $Trayectoria \leftarrow \emptyset$ ;
   $i \leftarrow 0$ ;  $M \leftarrow M_I$ ;
  do {
    for  $j = 1$  to  $N_E$ 
       $V_{GWY} \leftarrow$  CalculaPotencial( $G, W, B, Y, P$ );
      ( $c_G$ )  $\leftarrow$  Sorteo( $G, V_{GWY}$ );
      VerificaClasifica( $c_G$ );
    end for
    AplicarCondicionesContorno( $G, W, B, c_{fin}$ );
     $V_{WG} \leftarrow$  CalculaPotencial( $G, W, B, c_{fin}$ );
     $Canal \leftarrow$  CanalTrayectoria( $V_{WG}$ );
    if ( $Canal \neq \emptyset$ )
      ( $Libre, Y$ )  $\leftarrow$  CompruebaClasifica( $Canal$ );
      if ( $Libre == TRUE$ )
         $Trayectoria \leftarrow$  Trayectoria( $Canal$ );
        return  $Trayectoria$ ;
      else
         $A \leftarrow$  ObtencionCeldasA ( $V_{WG}$ );
         $G \leftarrow (G - A)$ ;
      end if
       $++i$ ;
      if ( $M < M_M$ )
         $++M$ ;
      end if
    else
       $G \leftarrow (G \cup A)$ ;
    end if
  } while (( $Libre == FALSE$ ) AND ( $i < N_I$ ));
  return  $Trayectoria$ ;
end;
```

Algoritmo 6.5: Algoritmo panificador de trayectorias, PHM avanzado.

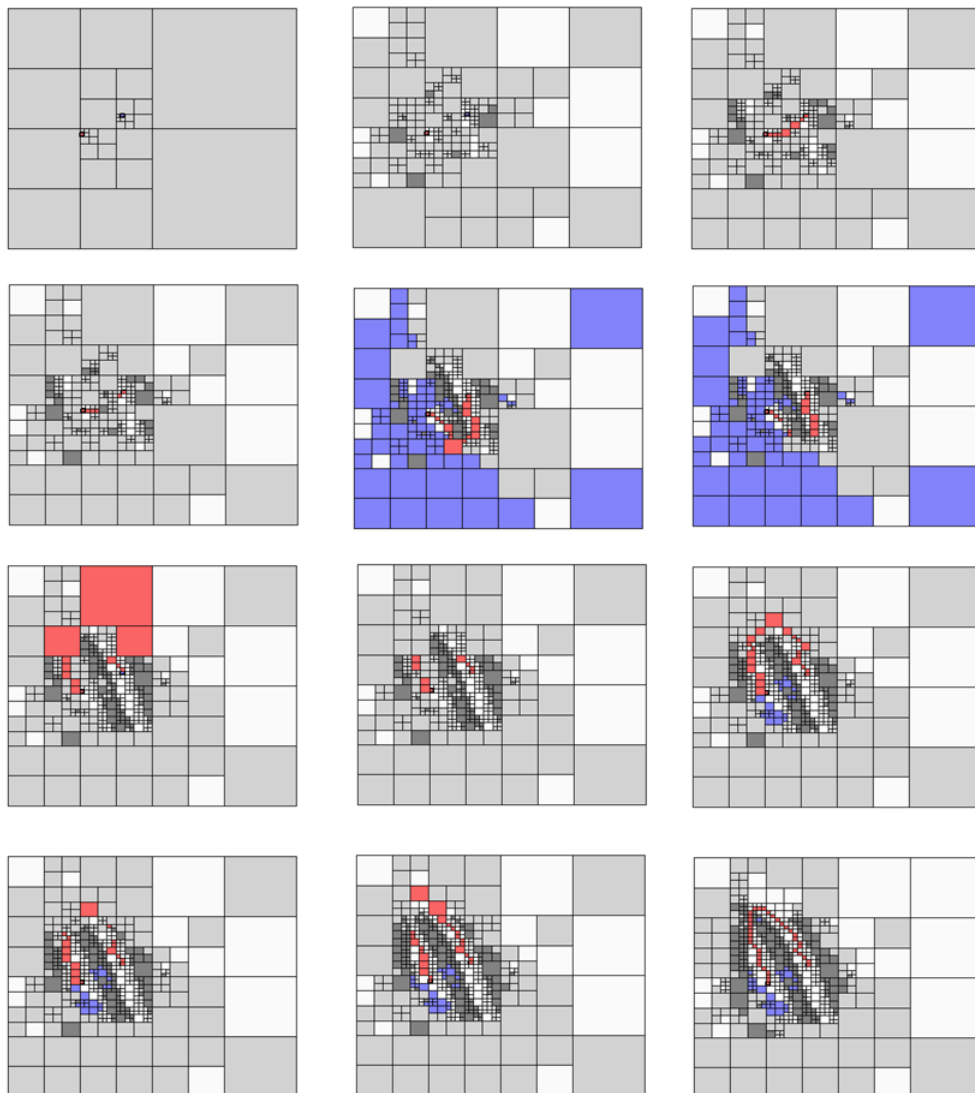


Figura 6.13: Secuencia ejemplo del planificador PHM avanzado.
Progreso de la secuencia: de izquierda a derecha y de arriba hacia abajo.
Las celdas grises son de contenido desconocido, las negras son de obstáculo, las blancas son de espacio libre, las azules son las celdas que se excluyen del sorteo de muestreo y las rojas son las celdas de la trayectoria.

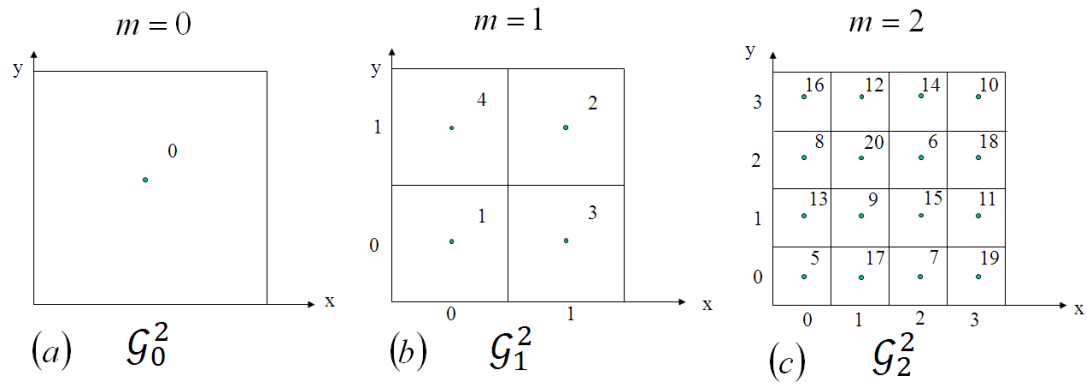


Figura 6.14: Secuencia determinista de muestreo en 2D. El número indica el orden de la secuencia.

En la figura 6.13 se muestra un ejemplo de ejecución de la implementación del planificador PHM avanzado (la lectura de la secuencia de las figuras se realiza de izquierda a derecha y de arriba a abajo)

6.4. Exploración basada en la detección de colisión: Planificador PHM color

En el planificador de trayectorias PHM se necesita disponer de una función detectora de colisión que devuelva la distancia de colisión tanto positiva, si el punto de configuración muestreado está en el espacio libre, como negativa (penetración) si el punto cae en el espacio obstáculo. La obtención de una función de este tipo entraña una dificultad no resuelta actualmente, por eso se propone un método alternativo basado en funciones detectoras de colisión que no devuelven la distancia de colisión.

En este apartado se considera un planificador que realiza una clasificación probabilística de celdas: Una determinada celda se considera libre o de obstáculo, con una probabilidad dada, en función de la existencia de colisión o no en una serie de puntos obtenidos por muestreo y pertenecientes a dicha celda. Para un número limitado de puntos de muestreo del subespacio cubierto por una celda, se obtiene una cobertura más uniforme de muestreo utilizando algún método determinista de muestreo, que realizando un muestreo aleatorio. Por este motivo, en el subapartado siguiente, se propone un procedimiento que sirve para generar, secuencialmente, puntos pertenecientes a cualquier celda; de forma que cada punto estará separado lo más posible de sus predecesores y será coincidente con el punto central de una subcelda descendiente. Este método es presentado por Iñiguez y Rosell en la publicación [4] del apartado 7.1.

6.4.1. Secuencia determinista de muestreo

La secuencia determinista de muestreo

$$S_m^n(k) = \{s_1, s_2, s_3, \dots, s_k, \dots\}, \quad (6.26)$$

aplicada a una celda c_m^n , provee una ordenación de códigos de celdas cuyos centros son muestras que cubren incrementalmente y uniformemente dicha celda.

El elemento genérico de la secuencia (s_k) , vendrá expresado por:

$$s_k = \{(m+h), \mathbf{q}_{(m+h)(k)}\} \quad (6.27)$$

Es decir, s_k viene definido por el nivel de rejilla $(m+h)$ y las coordenadas de la celdilla sobre dicha rejilla $\mathbf{q}_{(m+h)(k)}$, de acuerdo con el esquema numérico de identificación de celdas presentado en el apartado 5.2.1.

En el ejemplo de la figura 6.14, las primeras a muestrear de la celda c_0^2 , que contiene todo el \mathcal{C} -espacio en $2D$, son:

$$S_0^2(k) = \{\{1, (0, 0)\}, \{1, (1, 1)\}, \{1, (0, 1)\}, \{1, (1, 0)\}, \{2, (0, 0)\}, \{2, (2, 2)\}, \{2, (2, 0)\}, \{2, (0, 2)\}, \{2, (1, 1)\}, \{2, (3, 3)\}, \dots\} \quad (6.28)$$

Y la secuencia generada para muestrear la celda etiquetada con $\{1, (1, 0)\}$ es:

$$S_1^2(k) = \{\{2, (2, 0)\}, \{2, (3, 1)\}, \{2, (3, 0)\}, \{2, (2, 1)\}, \dots\} \quad (6.29)$$

6.4.2. Clasificación probabilística de celdas

La clasificación de una m -celda se realiza dependiendo del resultado de la comprobación de colisiones del punto configuración de su centro y de los centros de sus subceldas. Las configuraciones son consecutivamente obtenidas por la secuencia determinista de muestreo $S_m^n(k)$, donde el máximo número de configuraciones generada para la clasificación de celdas es:

$$J = \sum_{i=m}^M 2^{n(i-m)} \quad (6.30)$$

que se corresponde con el número de celdas compuesto por la m -celda y todas sus subceldas de niveles comprendidos entre $m+1$ y M . La clasificación de una celda se realiza habiendo generado y evaluado solamente $j < J$ configuraciones, y esta clasificación es actualizada cada vez que se toman nuevas muestras.

Suponiendo que se han generado j configuraciones y que se han detectado libres, entonces la celda puede clasificarse como libre con un cierto grado de certidumbre que se denominará color de certidumbre y que se define como:

$$C_{color} = \frac{j}{J} \quad (6.31)$$

Puede realizarse una clasificación análoga si todas las j configuraciones son detectadas como obstáculo. En el ejemplo de la figura 6.15a se muestra la

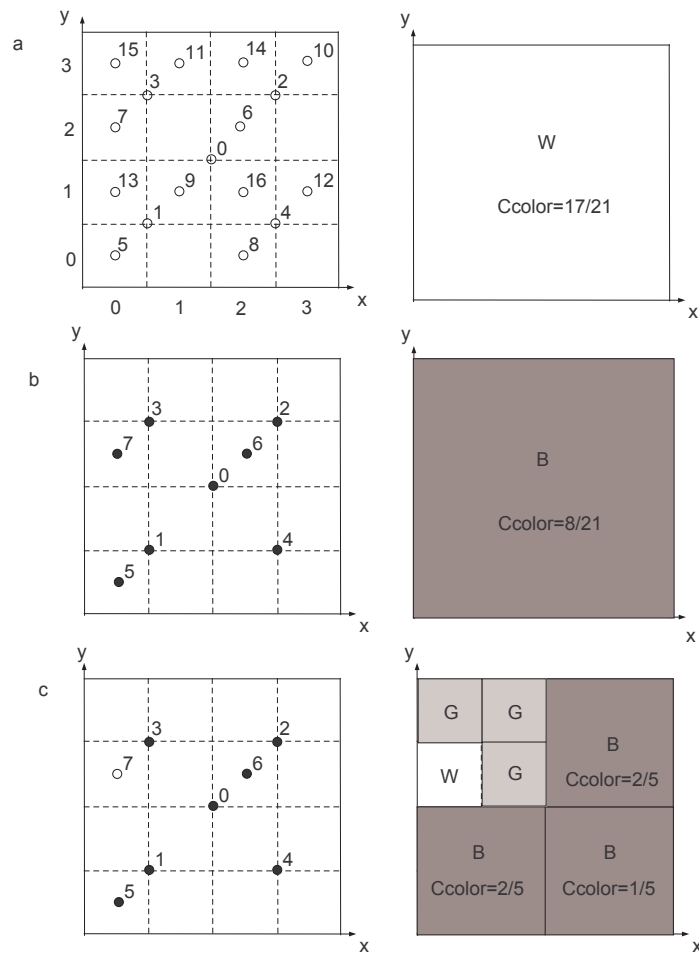


Figura 6.15: Clasificación de celdas: a) Celda libre. b) Celda obstáculo. c) Celda subdividida en libre, obstáculo y subceldas desconocidas.

clasificación como celda libre W con ($C_{color} = 17/21$) y la figura 6.15b muestra la clasificación de una celda obstáculo B con ($C_{color} = 8/21$).

Cuando todas las J configuraciones son comprobadas como libres de colisión u obstáculo, el color de la celda es conocido con certeza (hasta el máximo nivel de resolución), entonces ($C_{color} = 1$). Las celdas que todavía no han sido exploradas son agrupadas en G y les corresponde ($C_{color} = 0$).

Cuando algunas de las j configuraciones son comprobadas como libres y otras como obstáculo, la celda no puede ser clasificada como libre ni como obstáculo puesto que contiene configuraciones libres y configuraciones obstáculo. En este caso la celda se subdivide en subceldas y así consecutivamente hasta obtener celdas con configuraciones solamente libres o solamente obstáculo, o sin ninguna muestra. En el primero de los dos casos las subceldas son clasificadas como libres u obstáculo (con su propio grado de certidumbre), y las subceldas vacías son clasificadas como subceldas desconocidas. Como ejemplo, la figura 6.15c muestra una celda donde las siete primeras muestras se clasifican como obstáculo pero la octava (muestra número 7) se clasifica como libre. La celda se particiona en: una M -celda blanca con ($C_{color} = 1$), dos celdas negras con ($C_{color} = 2/5$), una celda negra con ($C_{color} = 1/5$) y tres M -celdas grises.

6.4.3. Muestreo de celdas

El muestreo de celdas se realiza con el objetivo de explorar el \mathcal{C} -espacio desconocido y encontrar una canal a través de las celdas libres, desde una celda b_{ini} a una celda destino b_{fin} . Esta exploración de celdas debe de hacerse de forma que sea posible encontrar solución habiendo explorado un número de celdas lo menor posible.

Con este objetivo se establece una probabilidad de muestreo de una celda c_k condicionada por el peso $\omega(c_k)$:

$$\omega(c_k) = \omega_1(c_k) \cdot \omega_2(c_k) \cdot \omega_3(c_k) \quad (6.32)$$

Estos pesos tienen en cuenta los tres items siguientes:

- La probabilidad de muestrear una celda incrementa con su tamaño, tal como se propuso en la sección 6.11, ecuación (6.4). Es decir, si c_k es una m -celda entonces:

$$\omega_1(c_k) = 2^{-mn} \quad (6.33)$$

- Utilizando la ecuación (6.24):

$$\omega_2(c_k) = \frac{V_{contorno} - V_{WGY}(c_k)}{V_{contorno} - V_{apoyo}}, \quad (6.34)$$

- La probabilidad de muestrear una celda debe incrementarse con la incertidumbre de color:

$$\omega_3(c_k) = 1 - C_{color} \quad (6.35)$$

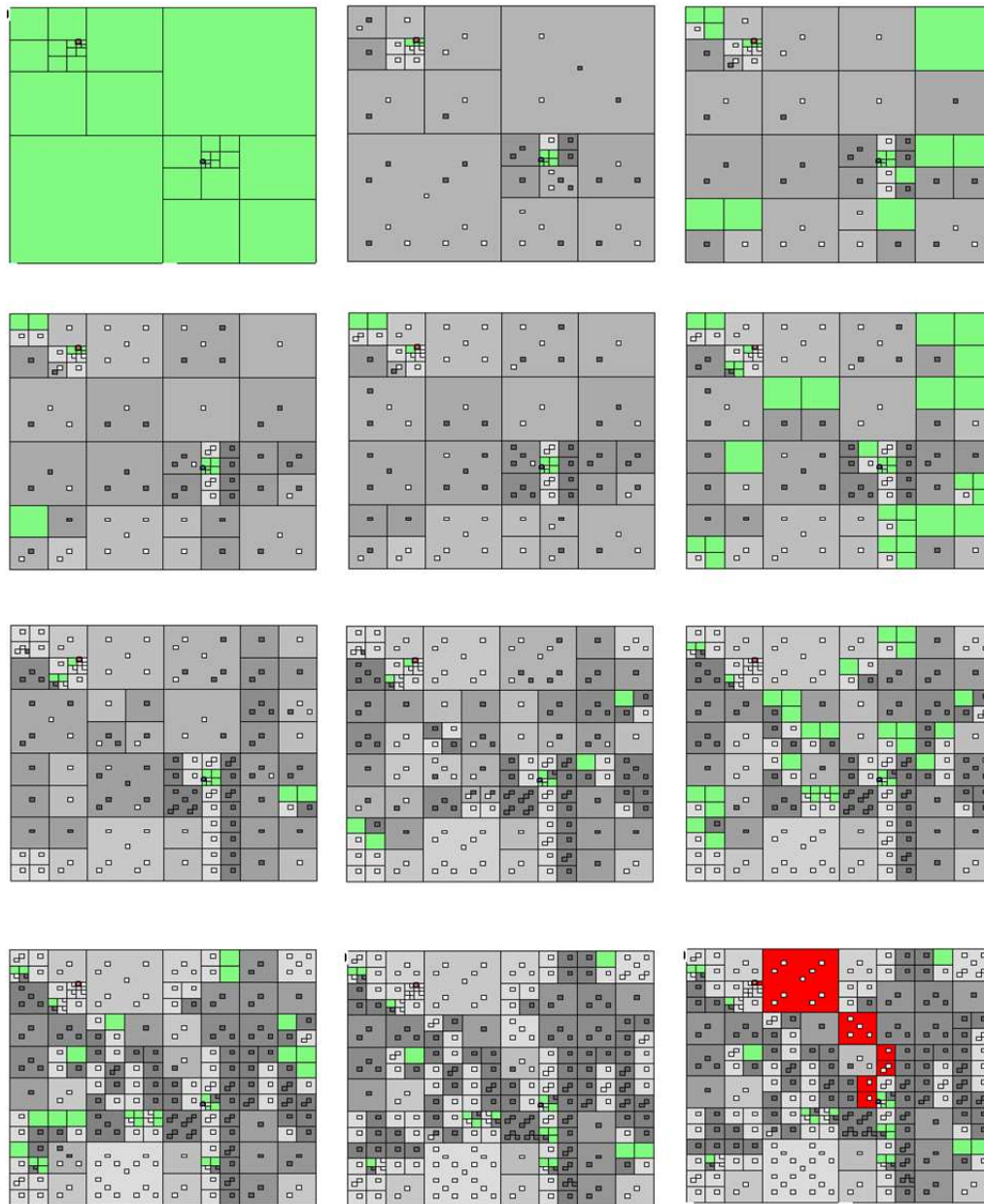


Figura 6.16: Ejemplo del planificador PHM color, secuencia de izquierda a derecha y de arriba abajo: Las celdas verdes no tienen ningún punto de muestreo. Las blancas son aquellas en las que se ha comprobado todos sus posibles puntos de muestreo y han resultado libres, mientras que serían negras si hubiesen resultado de obstáculo. Las celdas gris claro son aquellas en las que se han comprobado un número de puntos más pequeño de los posibles y han resultado libres, mientras que si hubiesen resultado de obstáculo serían gris oscuro. Las celdas con puntos libres y de obstáculo se subdividen. Y las celdas rojas corresponden al canal de trayectoria.

Las celdas grises tienen $\omega_3(c_k) = 1$ y las celdas cuya certidumbre de color es $C_{color} = 1$ tienen $\omega_3(c_k) = 0$ y no serán seleccionadas para el muestreo.

La función integral para el sorteo de celdas, se obtiene como en la ecuación (6.5):

$$F(c_k) = \sum_{i=1}^k \omega(c_i) \quad \forall c_i \in G \quad y \quad 1 \leq k \leq NG \quad (6.36)$$

Finalmente, el muestreo se realiza utilizando la función integral $F(c_k)$ definida sobre las celdas que entran en el sorteo y siguiendo el procedimiento explicado en el apartado (6.1.1).

6.4.4. Algoritmo del planificador PHM color

El algoritmo de planificación explora iterativamente el \mathcal{C} -espacio e intenta encontrar una trayectoria usando las funciones armónicas como guía. Para ello dispone de las etapas siguientes:

- Muestra un número de celdas del \mathcal{C} -espacio siguiendo el procedimiento del apartado 6.4.3 y la selección de un punto de muestreo, dentro de la celda, siguiendo la secuencia determinista del apartado 6.4.1.
- Clasifica las celdas muestreadas siguiendo el procedimiento detallado en el apartado 6.4.2. De acuerdo con los resultados obtenidos en el muestreo de una celda, se actualiza la certidumbre de color o se particiona en subceldas.
- Computa la función armónica sobre las celdas grises y blancas, fijando las celdas negras a un valor alto y la celda destino a un valor bajo.
- Encuentra un canal de celdas entre c_{ini} y c_{fin} siguiendo el gradiente o máxima pendiente. Si el canal no existe vuelve al paso 1.
- El canal solución encontrado se compone de celdas, en general de diferentes tamaños, blancas (cada una con su color de incertidumbre) y/o celdas grises (totalmente inexploradas). Entonces:
 1. Mientras existan celdas en el canal de tamaño superior a la máxima resolución (M -celdas), se cambia el dominio del \mathcal{C} -espacio por el subdominio definido por el canal encontrado.
 2. Se llama recursivamente a la función principal del algoritmo, volviendo al paso anterior.

En el ejemplo de la figura 6.16 se muestra un \mathcal{C} -espacio 2D en diferentes fases del algoritmo planificador de trayectorias leídas de izquierda a derecha y de arriba a abajo. La primera figura muestra la situación inicial con una discretización no regular cubriendo todo el \mathcal{C} -espacio, efectuada sobre la disposición conocida de c_{ini} y c_{fin} . La última figura muestra el canal solución

obtenido que enlaza la celda inicial y final.

```

PlanificadorTrayectoriaColor( $c_{ini}, c_{fin}$ )
begin
  ( $c_{ini}, c_{fin}$ )  $\leftarrow$  MarcaInicioFin;
   $G \leftarrow$  DiscreInicial ( $c_{ini}, c_{fin}$ );
   $B \leftarrow \emptyset$ ;  $W \leftarrow \emptyset$ ;  $Y \leftarrow \{c_{ini}, c_{fin}\}$ ;  $Trayectoria \leftarrow \emptyset$ ;
   $i \leftarrow 0$ ;  $M \leftarrow M_I$ ;
  do {
    for  $j = 1$  to  $N_E$ 
       $V_{WGY} \leftarrow$  CalculaPotencial( $G, W, B, Y$ );
      ( $c_G$ )  $\leftarrow$  Sorteio( $G, V_{WGY}$ );
      ChequeoDeterministaClasifica( $c_G$ );
    end for
    AplicarCondicionesContorno( $G, W, B, c_{fin}$ );
     $V_{WG} \leftarrow$  CalculaPotencial( $G, W, B, c_{fin}$ );
     $Canal \leftarrow$  CanalTrayectoria( $V_{WG}$ );
    if ( $Canal \neq \emptyset$ )
      ( $Libre$ )  $\leftarrow$  CompruebaResolucionCanal( $Canal$ );
      if ( $Libre == TRUE$ )
         $Trayectoria \leftarrow$  Trayectoria( $Canal$ );
        return  $Trayectoria$ ;
      else if
        PlanificadorTrayectoriaColor( $c_{ini}, c_{fin}$ );
      end if
    end if
  } while (( $Libre == FALSE$ ) AND ( $i < N_I$ ));
  return  $Trayectoria$ ;
end;
```

Algoritmo 6.6: Algoritmo panificador de trayectorias PHM color.

En el algoritmo 6.6 se muestra el procedimiento detallado del planificador PHM color, donde las nuevas funciones utilizadas son:

- ChequeoDeterministaClasifica(c_G): siguiendo la secuencia determinista, presentada en el apartado 6.4.1, comprueba un punto dentro de una celda. De acuerdo con el resultado actualiza la variable color y, si procede, subdivide la celda.
- CompruebaResolucionCanal($Canal$): comprueba la resolución de todas las celdas que componen el canal, si son todas de la máxima resolución devuelve TRUE y sino devuelve FALSE.

6.5. Reducción del tiempo de computación respecto de una discretización uniforme

La base del método propuesto en esta tesis es la descomposición aleatoria de celdas en 2^n -tree; obteniéndose una discretización parcial del espacio de configuraciones sobre la que se calcula, en multirresolución jerárquica, una función potencial armónica, subarmónica o superarmónica.

Tal como se aprecia en la figura 6.1, la reducción de celdas de discretización (que serían puntos de cálculo) respecto de una discretización regular, es tanto mayor cuanto menor es el contorno total de obstáculo, es decir, el espacio libre y el espacio de obstáculo están agrupados (figura 5.9)

Por otro lado, cuanto mayor es el número de grados de libertad, mayor será el número de celdillas de máxima resolución, contenidas en una celda de un determinado nivel de partición m (en un espacio de n dimensiones y nivel máximo de partición M , una celda de nivel de partición m contiene $2^{(M-m)n}$ celdillas de máxima resolución).

Por consiguiente, la reducción de puntos de cálculo en el espacio libre (al no particionar celdas que no contengan obstáculo) y en el espacio obstáculo (al no particionar celdas contenidas completamente en un obstáculo) será mayor cuanto mayor sea el número de grados de libertad. Esto es así porque el contorno es el único que requiere la máxima discretización, y este siempre es de una dimensión menos que el espacio al que pertenece.

En contrapartida a la importante reducción de puntos de cálculo, se requiere un método de identificación de celdas que debe ser lo más sencillo posible para que el precio pagado no sea excesivo. Este requisito lo cumple el método propuesto en esta tesis en el subapartado 5.2.1.

6.6. Aportación

En este capítulo se presenta el planificador de trayectorias basado en la combinación del uso de las funciones armónicas, calculadas sobre una multirresolución jerárquica adaptativa, y la aplicación de métodos aleatorios guiados. Varias son las aportaciones que, para la obtención de este planificador, se proponen en este capítulo:

- Realización del estudio probabilístico del método de muestreo propuesto utilizando un modelo poblacional de celdas.
- Obtención de un método probabilístico de muestreo de celdas, dirigido y condicionado por una función potencial armónica. En este caso se presupone que la función detectora de colisión utilizada reporta la distancia de colisión.
- Propuesta de otro planificador aplicable para el caso común de utilizar funciones detectoras de colisión que no reportan distancia de colisión. En este método se plantea la exploración probabilística de celdas, también guiada por una función potencial, pero en este caso cada vez que se selecciona una

celda se muestrea un punto de la misma, siguiendo una secuencia determinista. Cada celda se clasifica y procesa dependiendo de la relación de puntos, libres y de obstáculos obtenidos.

Capítulo 7

Conclusiones

Las distintas aportaciones de cada capítulo a la tesis han sido referenciadas al final de los mismos; así que en este capítulo, dedicado a las conclusiones, se destacan las consideradas más relevantes.

En la figura 7.1 se reproduce el organigrama del planteamiento de objetivos y desarrollo de la tesis, así como la situación de los capítulos en dicho contexto, para centrar las aportaciones principales obtenidas:

1. Como primera propuesta fundamental, en el capítulo 3, se obtienen alternativas compensatorias de la distribución del gradiente, basadas en la utilización de funciones subarmónicas y superarmónicas, que reduce los inconvenientes de los métodos clásicos de planificación de movimientos basados en funciones armónicas.
2. En el capítulo 4 se analiza la función potencial, dependiente del tiempo, como solución de un modelo que incluye un obstáculo móvil, en base al cual se diseña una estrategia de control correctivo de posición y de movimientos en entornos con obstáculos móviles.
3. En el capítulo 5, como tercera propuesta fundamental, se plantea una discretización jerárquica adaptativa en multirresolución y por fases, que reduce drásticamente el número de puntos de cálculo requeridos en la solución numérica de las funciones armónicas, posibilitando su uso para problemas con un número de grados de libertad mayor que los resueltos habitualmente mediante estos métodos.
4. Como cuarta y última propuesta fundamental, en el capítulo 6, se propone la combinación de técnicas de muestreo con el cálculo de funciones armónicas mediante un método de exploración aleatorio guiado (PHM) aplicado a un espacio de configuraciones discretizado jerárquicamente sobre el que se va recalculando la función armónica, permitiendo encontrar soluciones de forma más rápida al centrarse solamente en la parte del espacio relevante al problema.

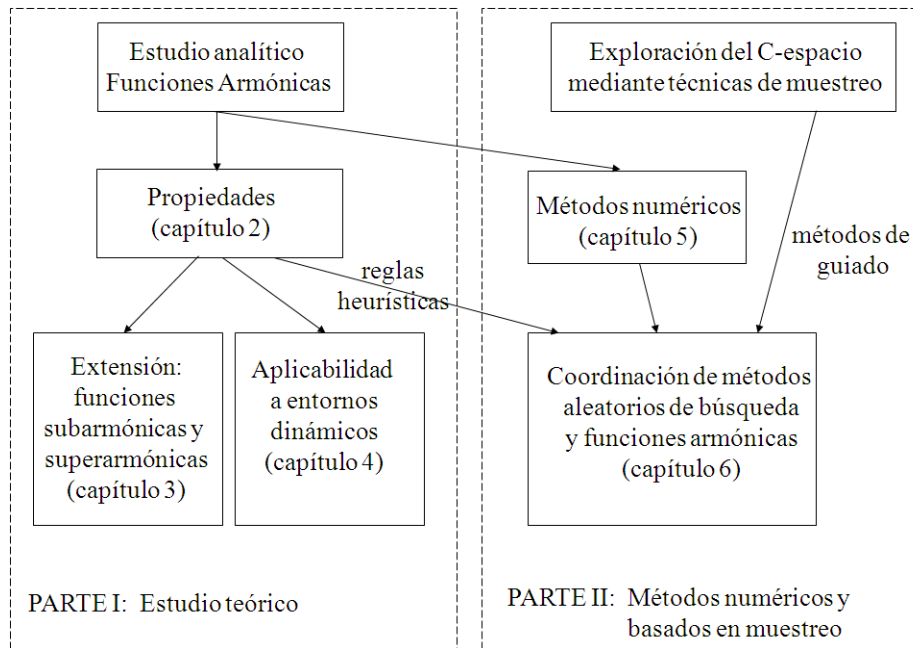


Figura 7.1: Organigrama del desarrollo de la tesis.

7.1. Publicaciones realizadas con el desarrollo de la tesis

Las publicaciones afines, más representativas, realizadas durante el desarrollo de la tesis son las siguientes:

[1] Rosell J. and Iñiguez P. (2002) *A Hierarchical and Dynamic Method to Compute Harmonic Functions for Constrained Motion Planning*. Proceedings of the IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems, IROS'02, pp. 2334-2340.

En este trabajo se introduce el cálculo de las funciones armónicas en un espacio de configuraciones discretizado jerárquicamente, siguiendo el método presentado en el apartado 5.2.

[2] Iñiguez P. and Rosell J. (2003) *Probabilistic Harmonic-function-based Method for Robot Motion Planning*. Proceedings of the IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems, IROS'03.

En esta publicación se propone el planificador Probabilistic Harmonic-function-based Method (PHM), el cual plantea la intercalación de métodos de muestreo aleatorio y de cálculo de funciones armónicas, tal como se describe en el apartado 6.1.

[3] Iñiguez P. and Rosell J. (2003) *Combining Harmonic Functions and Random Sampling in Robot Motion Planning: A performance Evaluation*. Proceedings of the IEEE Symposium on Assembly and Task Planning, pp. 253-258.

Aquí se realiza una evaluación teórica del método anterior, obteniendo la relación entre la probabilidad de fallo y el número de muestras, tal como se

detalla en el apartado 6.1.4.

[4] P. Iñiguez and J. Rosell (2005) *Combining Harmonic Functions and Random Sampling in Robot Motion Planning: A lazy approach*. Proceedings of the IEEE Symposium on Assembly and Task Planning - ISATP 2005.

Fundamentalmente, este trabajo mejora al anterior realizando un control pasivo y algorítmico de la resolución máxima aplicable a la discretización jerárquica, mientras intenta encontrar una trayectoria, y controlando las regiones donde focalizar el interés, mejorando así la eficiencia computacional, estas mejoras están incluidas en los apartados 6.2 y 6.3.

[5] J. Rosell and P. Iñiguez (2005) *Path Planning using Harmonic Functions and Probabilistic Cell Decomposition*. Proceedings of the IEEE Int. Conf. on Robotics and Automation - ICRA 2005, pp. 1815-1820.

Best Paper Award Finalist.

Este trabajo presenta la extensión del planificador PHM considerando el caso de detectores de colisión sin información de distancia. Mediante el uso de muestreo determinista se evalúa la probabilidad de que una celda sea libre o de colisión, y se adapta el método a esta incertidumbre. Este enfoque es desarrollado en el apartado 6.4.

[6] Iñiguez P. and Rosell J. (2009) *Path planning using sub- and super-harmonic functions*. Proceedings of the 40th International Symposium on Robotics, ISR'09 , pp.319-324.

En este trabajo se plantea la utilización de las funciones superarmónicas para simular los obstáculo y las subarmónicas para generar un pozo de potencial en un entorno próximo al punto destino. De esta forma la funciones potenciales obtenidas presentarán muchas menos zonas planas que las obtenidas con las funciones armónicas. En el apartado 3.5 se analiza esta propuesta.

7.2. Trabajos futuros

Dentro de esta tesis, varias son las líneas sobre las que se podría incidir con la finalidad de desarrollar trabajos que permitan mejorar el planificador de trayectorias propuesto:

- Incorporación de las propuestas en entornos de planificación que incluyan el modelado geométrico de problemas reales y posible adaptación para el caso de disponer solo de distancias de colisión positivas (no de penetración).
- Aplicación a problemas de robótica móvil mediante la adaptación del método a situaciones en las que el entorno solo se conoce parcialmente y del que se puede recabar más información mediante los sensores del robot.

Apéndice A

Demostraciones

Con la finalidad de obtener una mayor claridad de exposición, en este apéndice se sitúan las demostraciones matemáticas de las proposiciones, teoremas y ecuaciones más relevantes, utilizadas en el desarrollo de la tesis. Sin embargo, a pesar de presentarse en el apéndice, el contenido de los apartados A.1, A.2 y A.3 son también aportaciones básicas obtenidas en la consecución de los objetivos de la tesis.

A.1. Principio de localidad de una función

Proposición para dos dimensiones:

Dada una función $f(x, y)$, definida en un dominio $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ y de clase C^2 . Dado un disco de radio R centrado en (x_0, y_0) : $D = \{(x, y) \in \Omega \mid \|x - x_0, y - y_0\| < R\}$. Entonces se cumple que:

$$f(x_0, y_0) = \frac{1}{2\pi R} \oint_L f(x, y) dl - \frac{R^2}{4} \operatorname{div}(\operatorname{grad} f)_0 \quad (\text{A.1})$$

donde la integral de línea se realiza sobre la circunferencia contorno del disco.

Prueba: Aplicando Taylor en el punto P_0 de la superficie $z = f(x, y)$, de clase C^2 :

$$\begin{aligned} f(x, y) = f(x_0, y_0) + \frac{1}{1!} \frac{\partial f}{\partial x} \Big|_{(x_0, y_0)} (x - x_0) + \frac{1}{1!} \frac{\partial f}{\partial y} \Big|_{(x_0, y_0)} (y - y_0) + \\ \frac{1}{2!} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \Big|_{(x_0, y_0)} (x - x_0)^2 + \frac{1}{2!} \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \Big|_{(x_0, y_0)} (y - y_0)^2 + \\ \frac{2}{2!} \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \Big|_{(x_0, y_0)} (x - x_0)(y - y_0) \quad (\text{A.2}) \end{aligned}$$

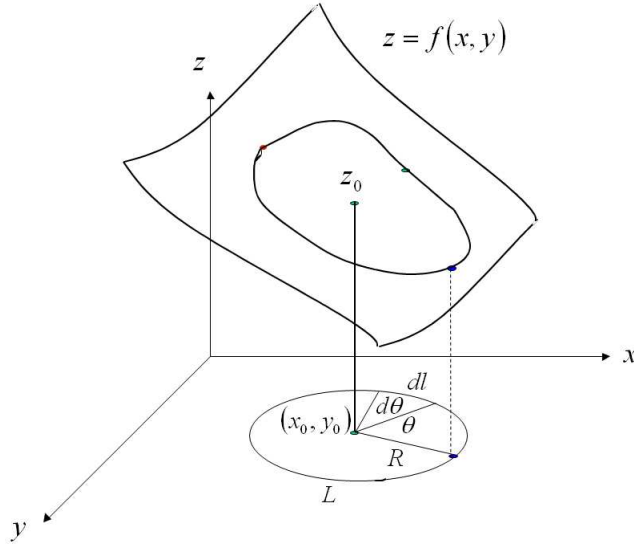


Figura A.1: Principio de localidad de una función.

Integrando en torno de la circunferencia $(x_0 + R\cos\theta, y_0 + R\sin\theta, 0)$, teniendo en cuenta que $dl = R d\theta$ (figura A.1):

$$\begin{aligned} \oint_L f(x, y) dl &= f(x_0, y_0) \int_0^{2\pi} R d\theta + \frac{1}{1!} \frac{\partial f}{\partial x} \int_0^{2\pi} R \cos\theta R d\theta + \frac{1}{1!} \frac{\partial f}{\partial y} \int_0^{2\pi} R \sin\theta R d\theta + \\ &\quad \frac{1}{2!} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \int_0^{2\pi} R^2 \cos^2\theta R d\theta + \frac{1}{2!} \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \int_0^{2\pi} R^2 \sin^2\theta R d\theta + \\ &\quad \frac{2}{2!} \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \int_0^{2\pi} R^2 \cos\theta \sin\theta R d\theta \quad (\text{A.3}) \end{aligned}$$

Los términos correspondientes a la derivadas impares y cruzadas se anulan:

$$\oint_L f(x, y) dl = f(x_0, y_0) 2\pi R + \frac{1}{2!} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \right) \pi R^3, \quad (\text{A.4})$$

despejando se obtiene la expresión A.1.

Proposición para n dimensiones:

Sea $u = f(q_1, q_2, \dots, q_n)$ una función de n variables, definida en un dominio Ω en \mathbb{R}^n e infinitamente derivable. Sea una bola $B \in \mathbb{R}^n$, centrada en $\mathbf{r}_0 = (q_{10}, q_{20}, \dots, q_{n0})$ y de radio R . El valor de la función en \mathbf{r}_0 vendrá dada por la expresión

$$f(\mathbf{r}_0) = \frac{1}{S_n} \oint_S f(\mathbf{r}_0 + R\mathbf{v}) dS - \frac{R^2}{2 \cdot 2!} \nabla^2 f(\mathbf{r}_0) - \frac{R^4}{8 \cdot 4!} \nabla^4 f(\mathbf{r}_0) - \dots \quad (\text{A.5})$$

Prueba: Aplicando Taylor en el punto $r_0 = (q_{10}, q_{20}, \dots, q_{n0})$ siguiendo la dirección del vector unitario \mathbf{v} (figura A.2)

$$f(\mathbf{r}_0 + t\mathbf{v}) = f(\mathbf{r}_0) + \frac{1}{1!} \frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}} t + \frac{1}{2!} \frac{\partial^2 f}{\partial \mathbf{v}^2} t^2 + \frac{1}{3!} \frac{\partial^3 f}{\partial \mathbf{v}^3} t^3 + \dots \quad (\text{A.6})$$

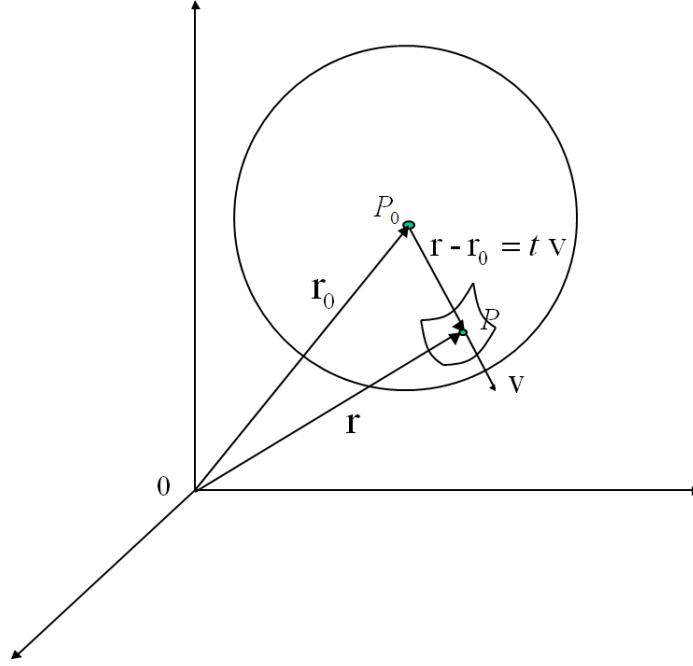


Figura A.2: Hipersfera centrada en el punto P_0

donde t es un escalar y las derivadas direccionales son sobre la dirección señalada por el vector $\mathbf{v} = (h_1, h_2, \dots, h_n)$.

Integrando en una hipersfera centrada en el punto, de radio $t = R$

$$\oint_S f(\mathbf{r}_0 + R\mathbf{v})dS = f(\mathbf{r}_0) \oint_S dS + \frac{R}{1!} \oint_S \frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}} dS + \frac{R^2}{2!} \oint_S \frac{\partial^2 f}{\partial \mathbf{v}^2} dS + \frac{R^3}{3!} \oint_S \frac{\partial^3 f}{\partial \mathbf{v}^3} dS + \dots \quad (\text{A.7})$$

Las derivadas direccionales deben permanecer dentro de la integral, puesto que el vector \mathbf{v} apunta al diferencial dS sobre la superficie de integración (figura A.2)

Utilizando la expresión de la derivada direccional:

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}} = \nabla u \cdot \mathbf{v} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial q_i} h_i \quad (\text{A.8})$$

y aplicando la regla de la cadena

$$\frac{\partial^2 f}{\partial \mathbf{v}^2} = \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial q_i \partial q_j} h_i h_j \quad (\text{A.9})$$

$$\frac{\partial^3 f}{\partial \mathbf{v}^3} = \sum_{i,j,k=1}^n \frac{\partial^3 f}{\partial q_i \partial q_j \partial q_k} h_i h_j h_k \quad (\text{A.10})$$

se obtiene:

$$\oint_S f(\mathbf{r}_0 + R\mathbf{v})dS = f(\mathbf{r}_0) \oint_S dS + \frac{R}{1!} \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial q_i} \oint_S h_i dS + \frac{R^2}{2!} \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial q_i \partial q_j} \oint_S h_i h_j dS + \frac{R^3}{3!} \sum_{i,j,k=1}^n \frac{\partial^3 f}{\partial q_i \partial q_j \partial q_k} \oint_S h_i h_j h_k dS + \dots \quad (\text{A.11})$$

Los términos correspondientes a la derivadas impares y cruzadas se anulan, mientras que permanecen los correspondientes a las derivadas pares:

Aplicando el teorema del valor medio a la parte integral del primer sumatorio

$$\oint_S h_i dS = h_{iMED} \oint_S dS = h_{iMED} S = \frac{S}{\pi} \int_0^\pi 1 \cdot \cos \theta d\theta = 0, \quad (\text{A.12})$$

y en la parte integral del segundo sumatorio, si $i \neq j$, se cumple

$$\oint_S h_i h_j dS = S(h_i h_j)_{MED} = S h_{iMED} h_{jMED} = 0 \quad (\text{A.13})$$

ya que q_i y q_j son ortogonales, y si $i = j$

$$\oint_S h_i h_j dS = \oint_S h_i^2 dS = S h_{iMED}^2 = \frac{S}{\pi} \int_0^\pi \cos^2 \theta d\theta = \frac{S}{2} \quad (\text{A.14})$$

y

$$\oint_S h_i^4 dS = S h_{iMED}^4 = \frac{S}{\pi} \int_0^\pi \cos^4 \theta d\theta = \frac{S}{8} \quad (\text{A.15})$$

Similarmente ocurre con los demás términos, con lo cual la expresión (A.11) se simplifica

$$\oint_S f(\mathbf{r}_0 + R\mathbf{v})dS = f(\mathbf{r}_0)S + S \frac{R^2}{2 \cdot 2!} \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial q_i^2} + S \frac{R^4}{8 \cdot 4!} \sum_{i=1}^n \frac{\partial^4 f}{\partial q_i^4} + \dots \quad (\text{A.16})$$

$$\oint_S f(\mathbf{r}_0 + R\mathbf{v})dS = f(\mathbf{r}_0)S + S \frac{R^2}{2 \cdot 2!} \nabla^2 u + S \frac{R^4}{8 \cdot 4!} \nabla^4 u + \dots \quad (\text{A.17})$$

y, aislando $f(\mathbf{r}_0)$ se obtiene (A.5).

A.2. Área e integración de una hiperesfera

La ecuación de una hiperesfera en n dimensiones, centrada en el origen, es:

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + \dots + x_n^2 = r^2 \quad (\text{A.18})$$

y, el vector unitario normal:

$$\mathbf{v} = \frac{x_1}{r}\mathbf{x}_1 + \frac{x_2}{r}\mathbf{x}_2 + \frac{x_3}{r}\mathbf{x}_3 + \cdots + \frac{x_n}{r}\mathbf{x}_n \quad (\text{A.19})$$

Cuya divergencia es:

$$\text{div } \mathbf{v} = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}\mathbf{x}_1 + \frac{\partial}{\partial x_2}\mathbf{x}_2 + \frac{\partial}{\partial x_3}\mathbf{x}_3 + \cdots + \frac{\partial}{\partial x_n}\mathbf{x}_n \right) \cdot \left(\frac{x_1}{r}\mathbf{x}_1 + \frac{x_2}{r}\mathbf{x}_2 + \frac{x_3}{r}\mathbf{x}_3 + \cdots + \frac{x_n}{r}\mathbf{x}_n \right)$$

$$\text{div } \mathbf{v} = \frac{n}{r} \quad (\text{A.20})$$

Aplicando el teorema de la divergencia:

$$\int_V (\nabla \cdot \mathbf{v}) dV = \oint_S \mathbf{v} \cdot d\mathbf{S} \quad (\text{A.21})$$

se obtiene: $\frac{n}{r} \int_V dV = 1 \cdot \oint_S dS \Rightarrow$

$$\boxed{\frac{n}{r} V_n = S_n} \quad (\text{A.22})$$

que relaciona el volumen (V_n) con la superficie (S_n) de una hiperesfera de n dimensiones y radio r .

Para el espacio tridimensional, la ecuación de la superficie esférica es: $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$, y tomando x como parámetro, se obtiene: $y^2 + z^2 = r^2 - x^2$, que es la superficie de un círculo.

Por lo tanto el volumen del cilindro diferencial es:

$$dV_3 = \pi(r^2 - x^2)dx, \quad (\text{A.23})$$

y el volumen de la esfera, será:

$$V_3 = \pi \int_{-r}^{+r} (r^2 - x^2)dx, \quad (\text{A.24})$$

donde realizando el cambio: $x = r \cos \vartheta$, se obtiene:

$$V_3 = \pi r^3 \int_0^\pi \sin^3 \vartheta d\vartheta \quad (\text{A.25})$$

Esta integral se resuelve utilizando el cambio: $t = \cos \vartheta$, obteniéndose:

$$V_3 = \frac{4}{3}\pi r^3, \quad (\text{A.26})$$

y

$$S_3 = \frac{3}{r}V_3 = 4\pi r^2 \quad (\text{A.27})$$

Siguiendo el mismo procedimiento para $n = 4$, se tiene:

1º- Ecuación de la hiperesfera: $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = r^2$

2º- Parametrizando respecto a x_1 , tenemos la esfera: $x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = r^2 - x_1^2$

3º- Hipercapa esférica diferencial: $dV_4 = \frac{4\pi}{3}(r^2 - x_1^2)^{\frac{3}{2}}dx_1$

4º- Volumen de la hiperesfera 4d: $V_4 = \frac{4\pi}{3} \int_{-r}^{+r} (r^2 - x_1^2)^{\frac{3}{2}}dx_1$

5º- Realizando el mismo cambio que antes ($x_1 = r \cos \vartheta$), se obtiene:

$$V_4 = \frac{4}{3}\pi r^4 \int_0^\pi \sin^4 \vartheta d\vartheta \quad (\text{A.28})$$

6º- Volumen de la hiperesfera:

$$V_4 = \frac{\pi^2}{2}r^4 \quad (\text{A.29})$$

7º- Superficie de la hiperesfera:

$$S_4 = \frac{4}{r}V_4 = 2\pi^2 r^3 \quad (\text{A.30})$$

Y repitiendo el procedimiento para $n = 5$, se tiene:

$$V_5 = \frac{\pi^2 r^5}{2} \int_0^\pi \sin^5 \vartheta d\vartheta \quad (\text{A.31})$$

$$V_5 = \frac{8\pi^2}{15}r^5 \quad (\text{A.32})$$

$$S_5 = \frac{5}{r}V_4 = \frac{8\pi^2}{3}r^4 \quad (\text{A.33})$$

Siguiendo el método de inducción sobre n , se obtienen las expresiones genéricas:

$$V_n = k_n r^n \int_0^\pi \sin^n \vartheta d\vartheta \quad (\text{A.34})$$

$$\boxed{V_n = k_{n+1} r^n} \quad (\text{A.35})$$

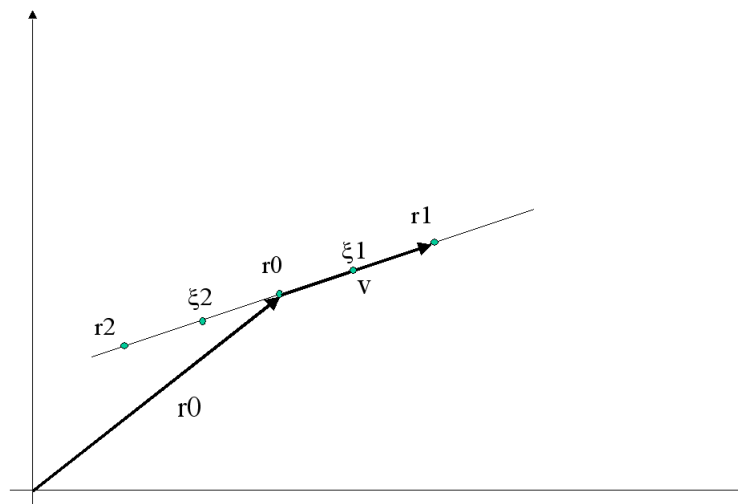


Figura A.3: Estudio de la convexidad.

$$S_n = nk_{n+1}r^{n-1} \tag{A.36}$$

Donde k_{n+1} es:

$$k_{n+1} = \frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n}{2} + 1\right)} \tag{A.37}$$

y la función $\Gamma(x)$ es:

$$\Gamma(x) = \int_{0+}^{+\infty} t^{x-1}e^{-t} dt; \quad x \in (0, +\infty) \tag{A.38}$$

También, teniendo en cuenta las ecuaciones (A.34) y (A.22) se tiene:

$$S_n = nk_n r^{n-1} \int_0^\pi \sin^n \vartheta d\vartheta \tag{A.39}$$

Las expresiones (A.34) y (A.39) parametrizan la integración de una hipersfera en función de una única variable.

A.3. Propiedades de las funciones armónicas, superarmónicas y subarmónicas

A.3.1. Concavidad, convexidad de las funciones armónicas y superarmónicas

Considerando tres puntos alineados (\mathbf{r}_0 , \mathbf{r}_1 y \mathbf{r}_2) en \mathbb{R}^n (figura A.3), de forma que \mathbf{r}_0 tiene una posición variable intermedia, cuya expresión paramétrica

se puede definir de dos maneras:

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{r}_0 &= \mathbf{r}_1 + (\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1)\vartheta \\ \mathbf{r}_0 &= \mathbf{r}_2 - (\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1)(1 - \vartheta) \end{aligned} \right\}, \quad 0 < \vartheta < 1$$

sumando y simplificando, se tiene

$$\mathbf{r}_0 = \mathbf{r}_1(1 - \vartheta) + \mathbf{r}_2\vartheta \quad (\text{A.40})$$

para $0 < \vartheta < 1$.

Esta expresión nos dice que

$$\left\{ \begin{aligned} |\mathbf{r}_0 - \mathbf{r}_1| &= |\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1| \vartheta \\ |\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_0| &= |\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1| (1 - \vartheta) \end{aligned} \right.$$

Definiendo sobre el mismo espacio una función analítica $f(\mathbf{r})$ y aplicando Taylor (considerando hasta la primera derivada y resto de Lagrange) al punto \mathbf{r}_0 para obtener el valor de la función en el punto \mathbf{r}_2 :

$$f(\mathbf{r}_2) = f(\mathbf{r}_0) + \frac{1}{1!} \frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}}(\mathbf{r}_0) |\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_0| + \frac{1}{2!} \frac{\partial^2 f}{\partial \mathbf{v}^2}(\xi_2) |\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_0|^2 \quad (\text{A.41})$$

donde \mathbf{v} es el vector unitario

$$\mathbf{v} = \frac{\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1}{|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|} = (h_1, h_2, h_3, \dots, h_n) \quad (\text{A.42})$$

y ξ_2 es el punto intermedio del resto de Lagrange (figura A.3)

Ahora aplicamos Taylor al punto \mathbf{r}_1 , también con respecto al punto \mathbf{r}_0 :

$$f(\mathbf{r}_1) = f(\mathbf{r}_0) - \frac{1}{1!} \frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}}(\mathbf{r}_0) |\mathbf{r}_0 - \mathbf{r}_1| + \frac{1}{2!} \frac{\partial^2 f}{\partial \mathbf{v}^2}(\xi_1) |\mathbf{r}_0 - \mathbf{r}_1|^2 \quad (\text{A.43})$$

Las dos expresiones (A.41 y A.43) se pueden poner en función de \mathbf{r}_1 , \mathbf{r}_2 y ϑ

$$\left\{ \begin{aligned} f(\mathbf{r}_2) &= f(\mathbf{r}_0) + \frac{1}{1!} \frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}}(\mathbf{r}_0) |\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1| (1 - \vartheta) + \frac{1}{2!} \frac{\partial^2 f}{\partial \mathbf{v}^2}(\xi_2) |\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|^2 (1 - \vartheta)^2 \\ f(\mathbf{r}_1) &= f(\mathbf{r}_0) - \frac{1}{1!} \frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}}(\mathbf{r}_0) |\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1| \vartheta + \frac{1}{2!} \frac{\partial^2 f}{\partial \mathbf{v}^2}(\xi_1) |\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|^2 \vartheta^2 \end{aligned} \right.$$

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{f(\mathbf{r}_2)}{(1-\vartheta)} &= \frac{f(\mathbf{r}_0)}{(1-\vartheta)} + \frac{1}{1!} \frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}}(\mathbf{r}_0) |\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1| + \frac{1}{2!} \frac{\partial^2 f}{\partial \mathbf{v}^2}(\xi_2) |\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|^2 (1 - \vartheta) \\ \frac{f(\mathbf{r}_1)}{\vartheta} &= \frac{f(\mathbf{r}_0)}{\vartheta} - \frac{1}{1!} \frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}}(\mathbf{r}_0) |\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1| + \frac{1}{2!} \frac{\partial^2 f}{\partial \mathbf{v}^2}(\xi_1) |\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|^2 \vartheta \end{aligned} \right.$$

Sumando las dos anteriores, se obtiene:

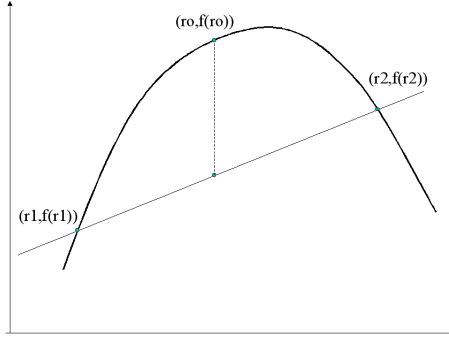


Figura A.4: Función convexa.

$$\frac{f(\mathbf{r}_2)}{(1-\vartheta)} + \frac{f(\mathbf{r}_1)}{\vartheta} = \frac{f(\mathbf{r}_0)}{(1-\vartheta)} + \frac{f(\mathbf{r}_0)}{\vartheta} + \frac{1}{2!} \frac{\partial^2 f}{\partial \mathbf{v}^2}(\xi_2) |\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|^2 (1-\vartheta) + \frac{1}{2!} \frac{\partial^2 f}{\partial \mathbf{v}^2}(\xi_1) |\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|^2 \vartheta$$

Simplificando, y teniendo en cuenta (A.40):

$$f(\mathbf{r}_2)\vartheta + f(\mathbf{r}_1)(1-\vartheta) = f(\mathbf{r}_1(1-\vartheta) + \mathbf{r}_2\vartheta) + \frac{1}{2!} \frac{\partial^2 f}{\partial \mathbf{v}^2}(\xi_2) |\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|^2 (1-\vartheta) + \frac{1}{2!} \frac{\partial^2 f}{\partial \mathbf{v}^2}(\xi_1) |\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|^2 \vartheta$$

Por lo tanto, si y solo si $\frac{\partial^2 f}{\partial \mathbf{v}^2} \geq 0$ para cualquier \mathbf{v} , se cumple la desigualdad de Jensen:

$$f(\mathbf{r}_1(1-\vartheta) + \mathbf{r}_2\vartheta) \leq f(\mathbf{r}_1)(1-\vartheta) + f(\mathbf{r}_2)\vartheta \quad (\text{A.44})$$

para las funciones cóncavas.

Y, si y solo si $\frac{\partial^2 f}{\partial \mathbf{v}^2} \leq 0$ para cualquier \mathbf{v} , se cumple la desigualdad de Jensen:

$$f(\mathbf{r}_1(1-\vartheta) + \mathbf{r}_2\vartheta) \geq f(\mathbf{r}_1)(1-\vartheta) + f(\mathbf{r}_2)\vartheta \quad (\text{A.45})$$

para las funciones convexas.

Ahora se debe relacionar la derivada direccional segunda con las funciones armónicas, subarmónicas y superarmónicas. Para ello, teniendo en cuenta la regla de la cadena de derivación, se obtiene:

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} h_i \quad (\text{A.46})$$

y

$$\frac{\partial^2 f}{\partial \mathbf{v}^2} = \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} h_i h_j = \mathbf{v}^T H(f) \mathbf{v} \quad (\text{A.47})$$

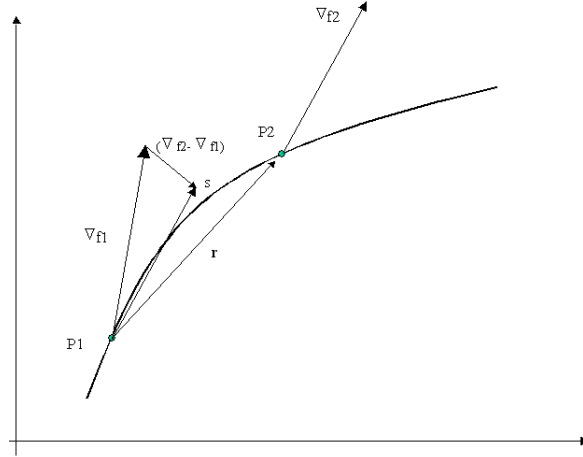


Figura A.5: Estudio de la curvatura.

Puesto que se debe cumplir, para las funciones cóncavas:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial \mathbf{v}^2} \geq 0; \quad \forall \mathbf{v} \quad (\text{A.48})$$

$H(f)$ debe ser semidefinida positiva, condición que se cumple si y solo si $\nabla^2 f \geq 0$ ([13] página 71), es decir

$$\frac{\partial^2 f}{\partial \mathbf{v}^2} \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{v}^T H(f) \mathbf{v} \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad \nabla^2 f \geq 0 \quad (\text{A.49})$$

que son las funciones subarmónicas.

Y para funciones convexas:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial \mathbf{v}^2} \leq 0 \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{v}^T H(f) \mathbf{v} \leq 0 \quad \Leftrightarrow \quad \nabla^2 f \leq 0 \quad (\text{A.50})$$

que son las funciones superarmónicas.

A.3.2. Curvatura y optimización de las trayectorias obtenidas con funciones armónicas

De acuerdo con la figura A.5, consideramos dos puntos próximos de una curvilínea obtenida sobre una hipersuperficie de una función potencial genérica.

Primero aplicamos Taylor (para $n = 1$ y resto de Lagrange) al punto P_2 con respecto al punto P_1 :

$$f(\mathbf{r}_2) = f(\mathbf{r}_1) + \frac{1}{1!} \frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}}(\mathbf{r}_1) r + \frac{1}{2!} \frac{\partial^2 f}{\partial \mathbf{v}^2}(\xi) r^2 \quad (\text{A.51})$$

donde ξ es un punto situado entre el punto P_2 y el P_1 sobre el vector \mathbf{v} .
Ahora aplicamos Taylor al punto P_1 con respecto al punto P_2 :

$$f(\mathbf{r}_1) = f(\mathbf{r}_2) - \frac{1}{1!} \frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}}(\mathbf{r}_2)r + \frac{1}{2!} \frac{\partial^2 f}{\partial \mathbf{v}^2}(\xi)r^2 \quad (\text{A.52})$$

Sumando las dos expresiones, se obtiene:

$$\left[\frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}}(\mathbf{r}_2) - \frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}}(\mathbf{r}_1) \right] r = \frac{\partial^2 f}{\partial \mathbf{v}^2}(\xi)r^2 \quad (\text{A.53})$$

y, de aquí:

$$\frac{1}{r} \left[\frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}}(\mathbf{r}_2) - \frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}}(\mathbf{r}_1) \right] = \frac{\partial^2 f}{\partial \mathbf{v}^2}(\xi) \quad (\text{A.54})$$

Haciendo tender el punto P_2 al P_1 se obtiene la curvatura de una curvilínea que pasando por el punto P_1 sigue la dirección del vector \mathbf{v}

$$K_{1\mathbf{v}} = \left. \frac{\partial^2 f}{\partial \mathbf{v}^2} \right|_1 \quad (\text{A.55})$$

Ahora, teniendo en cuenta que:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial \mathbf{v}^2} = \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} h_i h_j = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2} h_i^2 + 2 \sum_{i=1}^n \sum_{j=i+1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} h_i h_j \quad (\text{A.56})$$

donde \mathbf{v} es el vector unitario:

$$\mathbf{v} = \frac{\mathbf{r}}{r} = (h_1, h_2, h_3, \dots, h_n) \quad (\text{A.57})$$

Sustituyendo en A.55, tenemos:

$$K_{1\mathbf{v}} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2} h_i^2 + 2 \sum_{i=1}^n \sum_{j=i+1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} h_i h_j \quad (\text{A.58})$$

La curvatura media, en el punto P_1 , se obtiene integrando sobre una superficie esférica de radio muy pequeño δ_R

$$K_{1M} = \frac{1}{\delta_S} \oint_{\delta_S} K_{1\mathbf{v}} d\delta_S = \frac{1}{\delta_S} \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2} \oint_{\delta_S} h_i^2 d\delta_S + \frac{2}{\delta_S} \sum_{i=1}^n \sum_{j=i+1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} \oint_{\delta_S} h_i h_j d\delta_S \quad (\text{A.59})$$

donde, teniendo en cuenta las ecuaciones (A.13) y (A.14)

$$\oint_{\delta_S} h_i h_j d\delta_S = 0 \quad (\text{A.60})$$

$$\oint_{\delta_S} h_i^2 d\delta_S = \frac{\delta_S}{2} \quad (\text{A.61})$$

Y en el límite; haciendo que el radio de la esfera, que rodea el punto y que está centrada en él, tienda a cero, se obtiene la curvatura media de Gauss:

$$K_{1MG} = \lim_{\delta_R \rightarrow 0} \left\{ \frac{1}{\delta_S} \oint_{\delta_S} K_{1v} d\delta_S \right\} = \frac{1}{2} \nabla^2 f, \quad (\text{A.62})$$

Esta curvatura será mínima (cero) si se cumple la ecuación de Laplace

$$\sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2} = 0 \quad \Rightarrow \quad K_{1M} = 0 \quad (\text{A.63})$$

Por lo tanto, utilizando las funciones armónicas para generar funciones potenciales auxiliares, obtendremos trayectorias suaves. Es decir, el grado de curvatura de las mismas será óptimo, lo que supone aceleraciones mínimas para el robot en la ejecución de movimientos y, por lo tanto, tiempos de posicionamiento mínimos.

A.3.3. Condiciones de contorno de Dirichlet

La ecuación de Poisson ($\nabla^2 u = \rho$) aplicada en un dominio Ω , con las condiciones de contorno de Dirichlet ($u = g$ en $\partial\Omega$), tiene solución y esta es única:

Condiciones de contorno homogéneas

Suponiendo una función armónica $\nabla^2 u = 0$, definida en un dominio Ω del C-espacio limitado por un contorno $\partial\Omega$, se obtiene una relación directa entre las condiciones de contorno y la distribución del gradiente.

$$\int_{\Omega} |\nabla u|^2 dV = \oint_{\partial\Omega} u \frac{\partial u}{\partial \vec{n}} dS, \quad (\text{A.64})$$

donde la integral de volumen se denomina Integral de Dirichlet. De esta relación se deduce:

- Si $u = 0$ en la superficie $\partial\Omega$ entonces $u = 0$ en Ω

Esto es así ya que se cumple

$$\oint_{\partial\Omega} u \frac{\partial u}{\partial \vec{n}} dS = 0, \quad (\text{A.65})$$

y por tanto la integral de Dirichlet es nula

$$\int_{\Omega} |\nabla u|^2 dV = 0, \quad (\text{A.66})$$

por lo que el gradiente será cero en todo el dominio:

$$\nabla u = 0 \quad \forall r \in \Omega, \quad (\text{A.67})$$

y la función potencial u será constante e igual a cero en Ω .

Existencia de solución

Dado el modelo no homogéneo

$$\begin{cases} \nabla^2 u = 0 & \text{en } \Omega \\ u = g & \text{en } \partial\Omega \end{cases}$$

existirá una función u cuyo gradiente será distinto de cero en, al menos, algún subdominio de Ω

$$\int_{\Omega} |\nabla u|^2 d\Omega = \oint_{\partial\Omega} g \frac{\partial u}{\partial \vec{n}} d\partial\Omega \neq 0 \Rightarrow |\nabla u| \neq 0, \quad (\text{A.68})$$

por lo tanto $u \neq 0$ para alguna región de Ω .

Para un modelo formado por la ecuación de Poisson y condiciones de contorno homogéneas

$$\begin{cases} \nabla^2 u = \rho & \text{en } \Omega \\ u = 0 & \text{en } \partial\Omega \end{cases}$$

se tiene

$$\int_{\Omega} |\nabla u|^2 d\Omega = - \int_{\Omega} (u \nabla^2 u) dV \neq 0 \Rightarrow |\nabla u| \neq 0, \quad (\text{A.69})$$

y $u \neq 0$ para alguna región de Ω .

Existencia de solución única

Suponiendo $v = u_1 - u_2$, donde u_1 y u_2 son soluciones, se tiene

$$\begin{cases} \nabla^2 v = 0 & \text{en } \Omega \\ v = 0 & \text{en } \partial\Omega \end{cases}$$

y aplicando

$$\int_{\Omega} (f \nabla^2 f + |\nabla f|^2) dV = \oint_{\partial\Omega} f \frac{\partial f}{\partial \vec{n}} dS, \quad (\text{A.70})$$

al modelo, se tiene

$$\int_{\Omega} |\nabla v|^2 d\Omega = \oint_{\partial\Omega} v \frac{\partial v}{\partial \vec{n}} d\partial\Omega = 0 \Rightarrow |\nabla v| = 0, \quad (\text{A.71})$$

donde se deduce que $v = \text{constante}$. Pero, como $v = 0$ en el contorno v será nula en todo el dominio y, por tanto, $u_1 = u_2$ también en todo el dominio. Lo que implica: que si existe una solución para el modelo Dirichlet, esta será única.

A.3.4. Condiciones de contorno de Neuman

La ecuación de Poisson ($\nabla^2 u = \rho$) aplicada en un dominio Ω , con las condiciones de contorno de Neuman ($\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} = g$ en $\partial\Omega$), también tiene solución y esta es única:

Existencia de solución única

Utilizando el mismo procedimiento anterior se obtiene que

$$u_1 - u_2 = k \quad (\text{A.72})$$

Es decir, puesto que se fija la derivada de la función en el contorno, la diferencia de dos soluciones del modelo de Neuman difieren en una constante.

Derivada cero en el contorno

Suponiendo una función armónica $\nabla^2 u = 0$, definida en un dominio Ω del C-espacio limitado por un contorno $\partial\Omega$.

- Si $\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} = 0$ en $\partial\Omega$ entonces u es constante en Ω

También se cumple

$$\oint_{\partial\Omega} u \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} dS = 0, \quad (\text{A.73})$$

y la integral de Dirichlet también es nula

$$\int_{\Omega} |\nabla u|^2 dV = 0, \quad (\text{A.74})$$

por lo que el gradiente también será cero en todo el dominio:

$$\nabla u = 0 \quad \forall r \in \Omega, \quad (\text{A.75})$$

y la función potencial u será constante en Ω .

A.3.5. Condiciones de contorno mixtas (Robin o de radiación)

La posibilidad de combinar las condiciones de contorno de Dirichlet y de Neuman, de forma que haya intervalos del mismo donde se aplique una u otra, permite controlar la distribución del flujo (derivada direccional) en distintos tramos del contorno y por consiguiente en el dominio.

Considerando el modelo:

$$\begin{cases} \nabla^2 u = \delta(\mathbf{r}_0) & \text{en } \Omega \\ \alpha(\xi) u + \beta(\xi) \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} = g & \text{en } \partial\Omega \end{cases}$$

y realizando una partición del contorno en función de la condición fijada (figura A.6)

$$\partial\Omega = \partial\Omega_D + \partial\Omega_N \quad (\text{A.76})$$

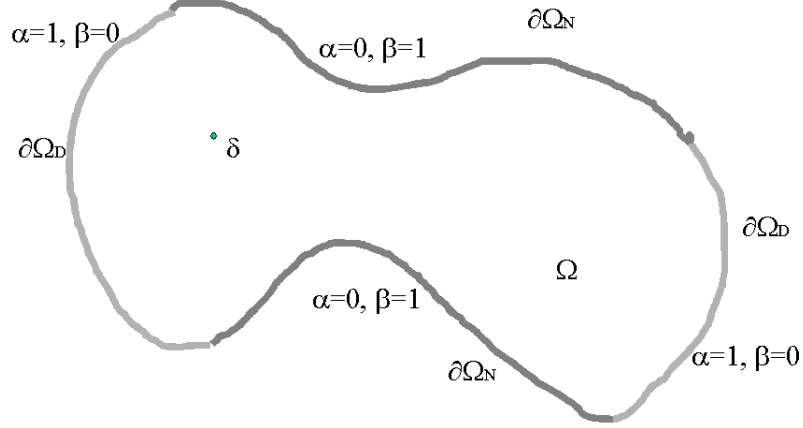


Figura A.6: Condiciones de contorno de Robin, mixtas o de radiación.

La expresión del flujo neto en todo el contorno será (aplicando el teorema de la divergencia):

$$\oint_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} d\partial\Omega = \oint_{\partial\Omega_D} \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} d\partial\Omega + \oint_{\partial\Omega_N} \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} d\partial\Omega = \oint_{\partial\Omega_D} \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} d\partial\Omega + 0 = 1, \quad (\text{A.77})$$

con lo que es posible localizar el flujo disponible (y por tanto el gradiente) en zonas convenientes, quizás alejadas del punto destino.

Existencia de solución única

Haciendo $v = u_1 - u_2$, donde u_1 y u_2 son soluciones, se tiene

$$\begin{cases} \nabla^2 v = 0 & \text{en } \Omega \\ \alpha v + \beta \frac{\partial v}{\partial \mathbf{n}} = 0 & \text{en } \partial\Omega \end{cases}$$

Utilizando la misma expresión que antes:

$$\int_{\Omega} (v\nabla^2 v + |\nabla v|^2) d\Omega = \oint_{\partial\Omega} v \frac{\partial v}{\partial \mathbf{n}} d\partial\Omega, \quad (\text{A.78})$$

se obtiene

$$\int_{\Omega} |\nabla v|^2 d\Omega = \oint_{\partial\Omega} v \frac{\partial v}{\partial \mathbf{n}} d\partial\Omega = - \oint_{\partial\Omega} \frac{\alpha}{\beta} v^2 d\partial\Omega \Rightarrow v = 0 \quad \text{en } \Omega \quad (\text{A.79})$$

Por tanto, $u_1 = u_2$ en todo el dominio. Es decir: si existe una solución para el modelo mixto, esta será única.

A.3.6. Estabilidad de la solución

La solución de la ecuación de Laplace o de Poisson experimenta pequeñas variaciones frente a pequeñas variaciones de las condiciones de contorno o pequeñas variaciones de la función independiente, esta propiedad facilita la utilización de las funciones potenciales armónicas en el diseño de planificadores de trayectorias en entornos cambiantes.

En primer lugar se considera variaciones pequeñas en las condiciones de contorno y se comprueba las variaciones experimentadas por la solución:

$$\left. \begin{array}{l} \nabla^2 u = \rho \quad \text{en } \Omega \\ u = g \quad \text{en } \partial\Omega \end{array} \right\} (-) \left. \begin{array}{l} \nabla^2 u' = \rho' \quad \text{en } \Omega \\ u' = g' \quad \text{en } \partial\Omega \end{array} \right\} (=) \left. \begin{array}{l} \nabla^2 v = 0 \quad \text{en } \Omega \\ v = \epsilon \quad \text{en } \partial\Omega \end{array} \right\},$$

donde $v = u - u'$ y $\epsilon = g - g'$ y, por la propiedad del mínimo y del máximo, se cumplirá que $\epsilon_{MIN} < v < \epsilon_{MAX}$ para cualquier punto del dominio Ω , lo que quiere decir que v tomará valores pequeños y por lo tanto u y u' tomarán valores próximos en todo el dominio.

De la misma forma se puede considerar variaciones pequeñas en la función ρ mientras permanecen inalterables las condiciones de contorno:

$$\left. \begin{array}{l} \nabla^2 u = \rho \quad \text{en } \Omega \\ u = g \quad \text{en } \partial\Omega \end{array} \right\} (-) \left. \begin{array}{l} \nabla^2 u' = \rho' \quad \text{en } \Omega \\ u = g \quad \text{en } \partial\Omega \end{array} \right\} (=) \left. \begin{array}{l} \nabla^2 v = \epsilon \quad \text{en } \Omega \\ v = 0 \quad \text{en } \partial\Omega \end{array} \right\},$$

si el cambio de la función ρ es pequeño y se localiza en un subdominio reducido, su influencia en la función potencial será pequeña y localizada.

A.4. Teorema de Green

Sean $f(x)$ y $g(x)$ dos funciones analíticas en un dominio, y $\mathbf{u}(x)$ un vector tal que: $\mathbf{u}(x) = f(x)\nabla g(x)$

Aplicando el teorema de la divergencia a la función vectorial $\mathbf{u}(x)$, se obtiene:

$$\begin{aligned} \int_V (\nabla \cdot \mathbf{u}) dV &= \oint_S \mathbf{u} \cdot d\mathbf{S} \Rightarrow \int_V (\nabla \cdot (f\nabla g)) dV = \oint_S (f\nabla g) \cdot d\mathbf{S} \\ &\int_V (f\nabla^2 g + \nabla f \cdot \nabla g) dV = \oint_S f \frac{\partial g}{\partial \mathbf{n}} dS \end{aligned} \quad (\text{A.80})$$

Esta es la 1ª ecuación del teorema Green. Igual que el teorema de la divergencia, es aplicable a cualquier punto interior al dominio de integración, y no es aplicable a los puntos pertenecientes a la frontera.

$$\text{Intercambiando } f \text{ y } g: \quad \int_V (g\nabla^2 f + \nabla g \cdot \nabla f) dV = \oint_S g \frac{\partial f}{\partial \mathbf{n}} dS,$$

restándola de la anterior se obtiene la 2ª ecuación del teorema Green:

$$\int_V (f\nabla^2 g - g\nabla^2 f) dV = \oint_S \left(f \frac{\partial g}{\partial \mathbf{n}} - g \frac{\partial f}{\partial \mathbf{n}} \right) dS \quad (\text{A.81})$$

Además, haciendo $f = g$ en la 1ª ecuación de Green se obtiene la importante relación:

$$\int_{\Omega} (f\nabla^2 f + |\nabla f|^2) dV = \oint_{\partial\Omega} f \frac{\partial f}{\partial \mathbf{n}} dS, \quad (\text{A.82})$$

donde la integral de volumen se denomina Integral de Dirichlet. Y haciendo $f = 1$, también en la 1ª ecuación de Green, se obtiene el teorema de Gauss:

$$\int_V (\nabla^2 g) dV = \oint_S \frac{\partial g}{\partial \mathbf{n}} dS \quad (\text{A.83})$$

A.5. Métodos iterativos

El modelo genérico, de cálculo mediante los métodos iterativos (apartado 5.1.3) se corresponde con la expresión:

$$u_{\mathbf{q}_j}^{k+1} = u_{\mathbf{q}_j}^k + s \left[\sum_{m=1}^{2n} u_{\mathbf{q}_{jm}}^k - 2n u_{\mathbf{q}_j}^k \right] - (\Delta t) \rho_0, \quad \forall \mathbf{q}_j \in \Omega^h \quad (\text{A.84})$$

donde

$$s = \frac{\Delta t}{h^2} \quad (\text{A.85})$$

y n es el número de variables.

En régimen permanente no hay variación temporal de la función

$$u_{\mathbf{q}_j}^{k+1} = u_{\mathbf{q}_j}^k = u_{\mathbf{q}_j} \quad (\text{A.86})$$

y la solución de la ecuación de difusión se corresponde con la solución de la ecuación de Poisson

$$u_{\mathbf{q}_j} = \frac{1}{2n} \sum_{m=1}^{2n} u_{\mathbf{q}_{jm}} - \frac{h^2}{2!n} \rho_0 \quad (\text{A.87})$$

A.5.1. Método iterativo de Jacobi

Haciendo ($s = 1/2n$ y $\Delta t = 1$) en la ecuación (A.79) se obtiene el método recursivo de Jacobi para la ecuación de Poisson (para la ecuación de Laplace ρ_0 vale cero)

$$u_{\mathbf{q}_j}^k = \frac{1}{2n} \sum_{m=1}^{2n} u_{\mathbf{q}_{jm}}^{k-1} - \rho_0, \quad \forall \mathbf{q}_j \in \Omega^h \quad (\text{A.88})$$

y la ecuación de diferencias del error (ecuación 5.22)

$$e_{\mathbf{q}_j}^k = \frac{1}{2n} \sum_{m=1}^{2n} e_{\mathbf{q}_{jm}}^{k-1}, \quad (\text{A.89})$$

donde ($e_{\mathbf{q}_j}^k = u_{\mathbf{q}_j} - u_{\mathbf{q}_j}^k$) tiende a cero conforme $u_{\mathbf{q}_j}^k$ tiende a $u_{\mathbf{q}_j}$ y

$$u_{\mathbf{q}_j} = \frac{1}{2n} \sum_{m=1}^{2n} u_{\mathbf{q}_{jm}}^{k-1} - \rho_0 + e_{\mathbf{q}_j}^k \quad (\text{A.90})$$

Para la ecuación (A.84) se propone una solución producto en separación de variables:

$$e_{\mathbf{q}_j}^k = h_k \phi_{\mathbf{q}_j}, \quad (\text{A.91})$$

donde $\phi_{\mathbf{q}_j}$ es una función dependiente de la posición \mathbf{q}_j .
Sustituyendo la anterior en la ecuación de diferencias del error, se obtiene

$$h_k \phi_{\mathbf{q}_j} = \frac{1}{2n} \sum_{m=1}^{2n} h_{k-1} \phi_{\mathbf{q}_{jm}} = \frac{h_{k-1}}{2n} \sum_{m=1}^{2n} \phi_{\mathbf{q}_{jm}} \quad (\text{A.92})$$

Dividiendo por $h_{k-1} \phi_{\mathbf{q}_j}$, se obtiene la separación de variables:

$$\frac{h_k}{h_{k-1}} = \frac{1}{2n} \frac{\sum_{m=1}^{2n} \phi_{\mathbf{q}_{jm}}}{\phi_{\mathbf{q}_j}} = \lambda, \quad (\text{A.93})$$

donde λ es la constante de separación que dependerá de las condiciones de contorno, por supuesto no es función del tiempo ni del espacio.

La ecuación en diferencias parciales da entonces dos en diferencias ordinarias, una en diferencias en tiempo discreto con condiciones iniciales, y otra en diferencias en el espacio con condiciones de contorno:

$$h_k - \lambda h_{k-1} = 0; \quad h_0 = 1 \quad (\text{A.94})$$

$$\frac{1}{\phi_{\mathbf{q}_j}} \sum_{m=1}^{2n} \phi_{\mathbf{q}_{jm}} = 2n\lambda; \quad \phi_0 = 0, \quad \phi_N = 0 \quad (\text{A.95})$$

La solución de la **ecuación de diferencias temporal de primer orden** es

$$h_k = \lambda^k h_0, \quad (\text{A.96})$$

dependiendo del valor de λ el procedimiento será:

$$\left\{ \begin{array}{l} \lambda < -1 \rightarrow \text{oscilatorio divergente} \\ \lambda = -1 \rightarrow \text{oscilatorio} \\ -1 < \lambda < 0 \rightarrow \text{oscilatorio convergente} \\ 0 < \lambda < 1 \rightarrow \text{exponencialmente convergente} \\ \lambda > 1 \rightarrow \text{exponencialmente divergente} \end{array} \right.$$

Para obtener la solución de la **ecuación de diferencias espacial de segundo orden** sustituiremos

$$\phi_{\mathbf{q}_j} = e^{i\theta_j} \quad (\text{A.97})$$

en (A.90), obteniéndose:

$$\sum_{m=1}^{2n} e^{i(\theta_j)_m} = 2n\lambda e^{i\theta_j} \quad (\text{A.98})$$

donde

$$\theta_j = \theta_1 j_1 + \theta_2 j_2 + \cdots + \theta_n j_n \quad (\text{A.99})$$

y

$$(\theta_j)_m = \theta_j + (\theta_1 j_1 + \theta_2 j_2 + \dots + \theta_n j_n)_m \quad (\text{A.100})$$

sustituyendo en (A.93), se tiene

$$\sum_{m=1}^{2n} e^{i(\theta_j + (\theta_1 j_1 + \theta_2 j_2 + \dots + \theta_n j_n)_m)} = 2n\lambda e^{i\theta_j}, \quad (\text{A.101})$$

$$e^{i\theta_j} \sum_{m=1}^{2n} e^{i(\theta_1 j_1 + \theta_2 j_2 + \dots + \theta_n j_n)_m} = 2n\lambda e^{i\theta_j}, \quad (\text{A.102})$$

$$\begin{aligned} & \left(\frac{e^{i(\theta_1 1 + \theta_2 \cdot 0 + \dots + \theta_n 0)} + e^{i(-\theta_1 1 + \theta_2 \cdot 0 + \dots + \theta_n 0)}}{2} \right) + \left(\frac{e^{i(\theta_1 0 + \theta_2 1 + \dots + \theta_n 0)} + e^{i(\theta_1 0 - \theta_2 1 + \dots + \theta_n 0)}}{2} \right) + \dots \\ & + \left(\frac{e^{i(\theta_1 0 + \theta_2 \cdot 0 + \dots + \theta_n 1)} + e^{i(\theta_1 0 + \theta_2 0 + \dots - \theta_n 1)}}{2} \right) = n\lambda, \end{aligned}$$

y

$$\lambda = \frac{1}{n} \sum_{l=1}^n \cos(\theta_l) \quad (\text{A.103})$$

Lo cual da dos valores de θ_l , iguales y de signo contrario. Entonces se utiliza como solución para una variable q_l

$$\phi_{q_l} = c_1 \sin(\theta_l j_l) + c_2 \cos(\theta_l j_l) \quad (\text{A.104})$$

Donde las condiciones de contorno ($\phi_{0_l} = \phi_{N_l} = 0$) implican que ($c_2 = 0$) y ($\theta_l N = p_l \pi \mid p_l = 1, 2, 3, \dots, N - 1$) Entonces ($\theta_l = p_l \pi / N$) y por consiguiente

$$\phi_{q_l} = c_1 \sin\left(\frac{p_l \pi}{N} j_l\right) \mid 0 \leq j_l \leq N \quad (\text{A.105})$$

y cada variable está discretizada de la forma ($q_l = j_l h$)

Ahora, considerando el vector posición:

$$\mathbf{q}_j = (j_1, j_2, \dots, j_l, \dots, j_n)h \quad (\text{A.106})$$

se tiene (para $c_1 = 1$)

$$\phi_{\mathbf{q}_j} = \prod_{l=1}^n \sin\left(\frac{p_l \pi}{N} j_l\right) \quad (\text{A.107})$$

Y la solución buscada será:

$$e^k_{\mathbf{q}_j} = h_0 \prod_{l=1}^n \lambda^k \sin\left(\frac{p_l \pi}{N} j_l\right), \quad (\text{A.108})$$

donde los eigenvalores (figura A.7) son

$$\lambda = \frac{1}{n} \sum_{l=1}^n \cos\left(\frac{p_l \pi}{N}\right) \quad (\text{A.109})$$

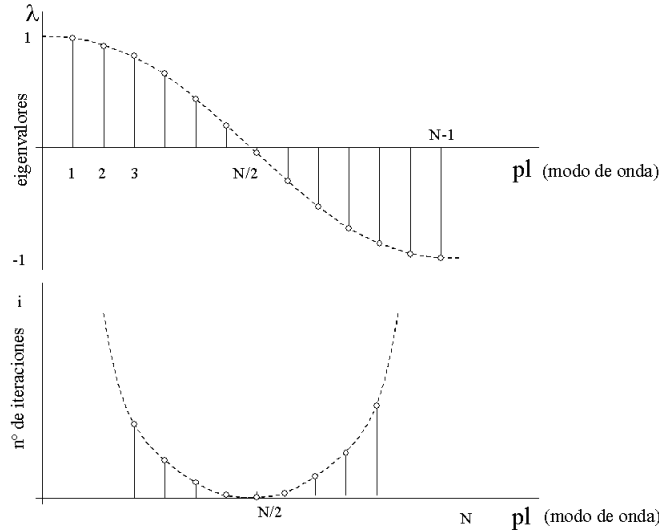


Figura A.7: Eigenvalores e iteraciones en función de n° de onda para el método de Jacobi.

Por lo tanto, aplicando el principio de superposición con todas las soluciones posibles, se tiene finalmente:

$$e_{\mathbf{q}_j}^k = h_0 \sum_{p_l=1}^{N-1} \prod_{l=1}^n \lambda^k \sin\left(\frac{p_l \pi}{N} j\right) \quad (\text{A.110})$$

que muestra la solución como una serie de Fourier que se va aproximando iterativamente a cero en cada una de sus componentes. También se puede obtener el mismo resultado aplicando la transformada discreta de Fourier a la ecuación de diferencias.

Para estudiar la convergencia suponemos $\theta_1 = \theta_2 = \dots = \theta_n = \theta_l = \frac{p_l \pi}{N}$

$$\lambda = \cos\left(\frac{p_l \pi}{N}\right), \quad p_l = 1, 2, 3, \dots, N-1 \quad (\text{A.111})$$

De aquí se deduce que $-1 < \lambda < 1$, y considerando el módulo del error se tiene

$$\lim_{k \rightarrow \infty} e^k = \lim_{k \rightarrow \infty} |\lambda|^k = 0, \quad (\text{A.112})$$

con lo cual se demuestra que el método converge.

Para determinar la velocidad de convergencia calcularemos el número de iteraciones necesarias para reducir a la mitad el error.

$$e^K = |\lambda|^K \equiv \frac{1}{2}, \quad (\text{A.113})$$

suponiendo $p_l = 1$ se obtiene, utilizando la serie de Taylor:

$$\lambda = \cos \frac{\pi}{N} \approx 1 - \frac{\pi^2}{2N^2}, \quad (\text{A.114})$$

ya que N toma un valor muy elevado. Entonces

$$\left[1 - \frac{\pi^2}{2N^2}\right]^K = \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad K = 2N^2 \frac{\log 2}{\pi^2}, \quad (\text{A.115})$$

donde se aprecia que cuanto menor sea N (rejilla mas gruesa) mayor será la velocidad de convergencia. Esta cuestión es muy importante a la hora de diseñar algoritmos en multirresolución.

Para obtener la solución de la **función potencial** suponemos unas condiciones de contorno diferente a cero.

$$\left. \begin{array}{l} \phi_{0_l} = 1 \\ \phi_{N_l} = 0 \\ \frac{d\phi_{q_l}}{dq_l}(0) = 0 \end{array} \right\}$$

y teniendo en cuenta que:

$$\left. \begin{array}{l} \phi_{q_l} = c_1 \sin(\theta_l j_l) + c_2 \cos(\theta_l j_l) \\ \frac{d\phi_{q_l}}{dq_l} = \theta_l c_1 \cos(\theta_l j_l) - \theta_l c_2 \sin(\theta_l j_l) \end{array} \right\}$$

se tiene

$$\left\{ \begin{array}{l} c_1 0 + c_2 1 = 1 \\ \theta_l c_1 1 - \theta_l c_2 0 = 0 \end{array} \right.$$

de donde se deduce que: $c_1 = 0$, $c_2 = 1$

$$c_1 \sin \theta_l N + c_2 \cos \theta_l N = 0 \quad \Rightarrow \quad \cos \theta_l N = 0 \quad (\text{A.116})$$

$$\theta_l N = (2p_l + 1) \frac{\pi}{2} \quad \Rightarrow \quad \theta_l = (2p_l + 1) \frac{\pi}{2N} \quad \text{para } p_l = 0, 1, 2, 3, \dots, N-1 \quad (\text{A.117})$$

Con lo cual, para una variable, la solución de la función potencial es

$$u_j^m = \sum_{p_l=0}^{N-1} \lambda^m \cos \left((2p_l + 1) \frac{\pi}{2N} j \right) \quad (\text{A.118})$$

Todos los armónicos se amortiguan a cero excepto el primero, correspondiente a $p_l = 0$.

A.5.2. Método iterativo de Gaus-Seidel

El esquema de cálculo obedece a la ecuación (5.27) del apartado (5.1.3.2)

$$u_{\mathbf{q}_j}^k = \frac{1}{2n} \sum_{m=1}^n u_{\mathbf{q}_{(j-)m}}^k + \frac{1}{2n} \sum_{m=1}^n u_{\mathbf{q}_{(j+)m}}^{k-1} \quad (\text{A.119})$$

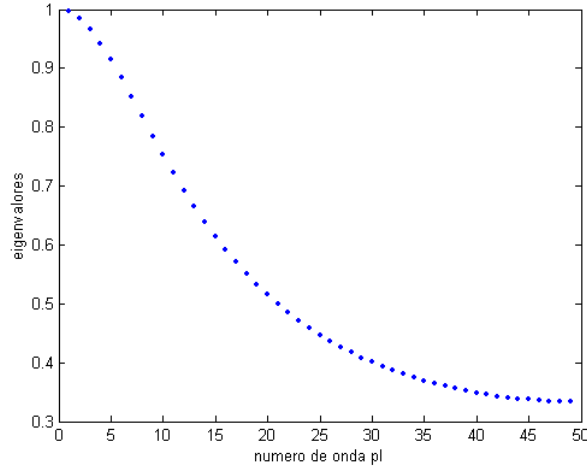


Figura A.8: Eigenvalores en función de número de onda para el método Gauss-Seidel y $N = 50$.

donde $u_{\mathbf{q}_{(j-)m}}^k$ representan los valores de la función potencial en las celdas vecinas, que se han calculado en la iteración actual (k) y $u_{\mathbf{q}_{(j+)m}}^{k-1}$ representa los valores de las celdillas vecinas, que se han calculado en la iteración anterior ($k - 1$)

La ecuación de diferencias del error es:

$$e_{\mathbf{q}_j}^k = \frac{1}{2n} \sum_{m=1}^n e_{\mathbf{q}_{(j-)m}}^k + \frac{1}{2n} \sum_{m=1}^n e_{\mathbf{q}_{(j+)m}}^{k-1} \quad (\text{A.120})$$

y

$$u_{\mathbf{q}_j} = \frac{1}{2n} \sum_{m=1}^n u_{\mathbf{q}_{(j-)m}}^k + \frac{1}{2n} \sum_{m=1}^n u_{\mathbf{q}_{(j+)m}}^{k-1} + e_{\mathbf{q}_j}^k \quad (\text{A.121})$$

Aplicando, como antes, la solución producto en separación de variables:

$$e_{\mathbf{q}_j}^k = h_k \phi_{\mathbf{q}_j}, \quad (\text{A.122})$$

se obtiene

$$h_k \phi_{\mathbf{q}_j} = \frac{1}{2n} \sum_{m=1}^n h_k \phi_{\mathbf{q}_{(j-)m}} + \frac{1}{2n} \sum_{m=1}^n h_{k-1} \phi_{\mathbf{q}_{(j+)m}} \quad (\text{A.123})$$

dividiendo por $h_{k-1} \phi_{\mathbf{q}_j}$

$$\frac{h_k}{h_{k-1}} = \frac{\frac{1}{2n} \sum_{m=1}^n \phi_{\mathbf{q}_{(j-)m}}}{\phi_{\mathbf{q}_j} - \frac{1}{2n} \sum_{m=1}^n \phi_{\mathbf{q}_{(j+)m}}} = \lambda \quad (\text{A.124})$$

de aquí se obtiene las dos ecuaciones de diferencias

$$h_k - \lambda h_{k-1} = 0 ; h_0 = 1 \quad (\text{A.125})$$

$$\frac{\frac{1}{2n} \sum_{m=1}^n \phi_{\mathbf{q}_{(j-)m}}}{\phi_{\mathbf{q}_j} - \frac{1}{2n} \sum_{m=1}^n \phi_{\mathbf{q}_{(j+)m}}} = \lambda ; \phi_0 = 0, \phi_N = 0 \quad (\text{A.126})$$

También en este caso, para la ecuación en diferencias de segundo orden, se prueba la solución:

$$\phi_{\mathbf{q}_j} = e^{i\theta\vec{j}} = e^{i(\theta_1 j_1 + \theta_2 j_2 + \dots + \theta_n j_n)} \quad (\text{A.127})$$

que substituyendo en (A.121), teniendo en cuenta (A.95), da

$$\lambda = \frac{\frac{1}{2n} \sum_{l=1}^n e^{-i\theta_l}}{1 - \frac{1}{2n} \sum_{l=1}^n e^{i\theta_l}} \quad (\text{A.128})$$

Suponiendo $\theta_1 = \theta_2 = \dots = \theta_n = \theta_l = \frac{p_l \pi}{N}$

$$\lambda = \frac{\frac{1}{2} e^{-i\theta_l}}{1 - \frac{1}{2} e^{i\theta_l}} \quad (\text{A.129})$$

$$|\lambda|^2 = \frac{e^{-i\theta_l}}{2 - e^{i\theta_l}} \cdot \frac{e^{i\theta_l}}{2 - e^{-i\theta_l}} = \frac{1}{5 - 4 \cos \theta_l} \quad (\text{A.130})$$

y los eigenvalores, mostrados en la figura (A.8), son:

$$\boxed{|\lambda| = \sqrt{\frac{1}{5 - 4 \cos\left(\frac{p_l \pi}{N}\right)}}, \quad p_l = 1, 2, 3, \dots, N - 1} \quad (\text{A.131})$$

También en este caso $-1 < \lambda < 1$ y $\lim_{k \rightarrow \infty} e^k = 0$.

Para obtener la velocidad de convergencia procedemos como antes, teniendo en cuenta que π/N es muy pequeño y utilizando aproximación de funciones por Taylor:

$$|\lambda|^2 = \frac{1}{5 - 4 \cos\left(\frac{\pi}{N}\right)} \approx \frac{1}{1 + 2\left(\frac{\pi}{N}\right)^2} \approx 1 - 2\left(\frac{\pi}{N}\right)^2 \quad (\text{A.132})$$

y

$$|\lambda| \approx 1 - \left(\frac{\pi}{N}\right)^2 \quad (\text{A.133})$$

Entonces, el número de iteraciones K necesarias para reducir el error a la mitad valdrá:

$$|\lambda|^K = \left[1 - \left(\frac{\pi}{N}\right)^2\right]^K \equiv \frac{1}{2} \Rightarrow K = N^2 \frac{\log 2}{\pi^2} \quad (\text{A.134})$$

En este caso el número de iteraciones necesarias para reducir el error a la mitad es la mitad que en el caso de Jacobi.

A.5.3. Método iterativo S.O.R

Este método incorpora, en el método de Gaus-Seidel, el parámetro ω (ecuación 5.30)

$$u_{\mathbf{q}_j}^k = (1 - \omega)u_{\mathbf{q}_j}^{k-1} + \frac{\omega}{2n} \left[\sum_{m=1}^n u_{\mathbf{q}_{(j-)m}}^k + \sum_{m=1}^n u_{\mathbf{q}_{(j+)m}}^{k-1} \right] - \rho_0 \quad (\text{A.135})$$

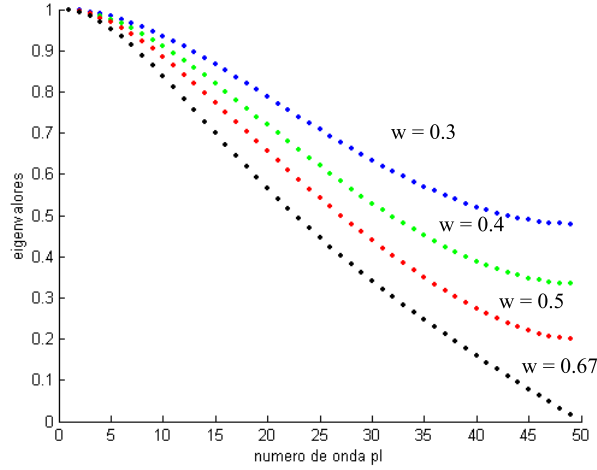


Figura A.9: Eigenvalores en función de número de onda para el método S.O.R. y $N = 50$.

Y, la expresión del error es la mostrada en la ecuación (5.32):

$$e_{\mathbf{q}_j}^k = (1 - \omega)e_{\mathbf{q}_j}^{k-1} + \frac{\omega}{2n} \sum_{m=1}^n e_{\mathbf{q}_{(j-)m}}^k + \frac{\omega}{2n} \sum_{m=1}^n e_{\mathbf{q}_{(j+)m}}^{k-1} \quad (\text{A.136})$$

Aplicando la solución ($e_{\mathbf{q}_j}^k = h_k \phi_{\mathbf{q}_j}$) a (A.129), se obtiene

$$h_k \phi_{\mathbf{q}_j} = (1 - \omega)h_{k-1} \phi_{\mathbf{q}_j} + \frac{\omega}{2n} \sum_{m=1}^n h_k \phi_{\mathbf{q}_{(j-)m}} + \frac{\omega}{2n} \sum_{m=1}^n h_{k-1} \phi_{\mathbf{q}_{(j+)m}} \quad (\text{A.137})$$

dividiendo por $h_{k-1} \phi_{\mathbf{q}_j}$

$$\frac{h_k}{h_{k-1}} = \frac{(1 - \omega)\phi_{\mathbf{q}_j} + \frac{\omega}{2n} \sum_{m=1}^n \phi_{\mathbf{q}_{(j-)m}}}{\phi_{\mathbf{q}_j} - \frac{\omega}{2n} \sum_{m=1}^n \phi_{\mathbf{q}_{(j+)m}}} = \lambda \quad (\text{A.138})$$

se obtiene las dos ecuaciones de diferencias

$$h_k - \lambda h_{k-1} = 0 ; h_0 = 1 \quad (\text{A.139})$$

$$\frac{(1 - \omega)\phi_{\mathbf{q}_j} + \frac{\omega}{2n} \sum_{m=1}^n \phi_{\mathbf{q}_{(j-)m}}}{\phi_{\mathbf{q}_j} - \frac{\omega}{2n} \sum_{m=1}^n \phi_{\mathbf{q}_{(j+)m}}} = \lambda ; \phi_0 = 0, \phi_N = 0 \quad (\text{A.140})$$

Otra vez, para la ecuación en diferencias de segundo orden (A.133), se prueba la solución:

$$\phi_{\mathbf{q}_j} = e^{i\theta \vec{j}} = e^{i(\theta_1 j_1 + \theta_2 j_2 + \dots + \theta_n j_n)} \quad (\text{A.141})$$

quedando:

$$\lambda = \frac{(1 - \omega) + \frac{\omega}{2n} \sum_{l=1}^n e^{i\theta_l}}{1 - \frac{\omega}{2n} \sum_{l=1}^n e^{-i\theta_l}} \quad (\text{A.142})$$

Suponiendo $\theta_1 = \theta_2 = \dots = \theta_n = \theta_l = \frac{p_l \pi}{N}$

$$\lambda = \frac{(1 - \omega) + \frac{\omega}{2} e^{i\theta_l}}{1 - \frac{\omega}{2} e^{-i\theta_l}} \quad (\text{A.143})$$

$$|\lambda|^2 = \frac{(1-\omega) + \frac{\omega}{2}e^{i\theta_l}}{1 - \frac{\omega}{2}e^{-i\theta_l}} \cdot \frac{(1-\omega) + \frac{\omega}{2}e^{-i\theta_l}}{1 - \frac{\omega}{2}e^{i\theta_l}} = \frac{(1-\omega)^2 + (\frac{\omega}{2})^2 + (1-\omega)\omega \cos \theta_l}{1 + (\frac{\omega}{2})^2 - \omega \cos \theta_l} \quad (\text{A.144})$$

y los valores de los eigenvalores, mostrados en la figura (A.9) para distintos valores del parámetro ω , son:

$$|\lambda|^2 = \frac{(1-\omega)^2 + (\frac{\omega}{2})^2 + (1-\omega)\omega \cos \theta_l}{1 + (\frac{\omega}{2})^2 - \omega \cos \theta_l} \quad (\text{A.145})$$

En este caso se cumple $-1 < \lambda < 1$ y $\lim_{k \rightarrow \infty} e^k = 0$.

Para obtener el valor del parámetro ω que minimice $|\lambda|^2$ consideramos que: $\cos \theta_l = \cos \frac{1 \cdot \pi}{N}$. Y haciendo $\frac{d|\lambda|^2}{d\omega} = 0$, se obtiene:

$$\omega = \left(\frac{1}{2\cos \frac{\pi}{N} - 1} \right) \left(2 - 2\sqrt{2}\sqrt{1 - \cos \frac{\pi}{N}} \right) \quad (\text{A.146})$$

sustituyendo en (A.140) y realizando aproximaciones por Taylor, se obtiene:

$$|\lambda| \approx 1 - \frac{\pi}{2N} \quad (\text{A.147})$$

Para obtener la velocidad de convergencia se procede como antes, deduciendo el número de iteraciones (K) necesarias para reducir el error a la mitad:

$$|\lambda|^K \approx \left[1 - \frac{\pi}{2N} \right]^K \equiv \frac{1}{2} \Rightarrow K = N \left(\frac{2 \log 2}{\pi} \right) \quad (\text{A.148})$$

donde se observa que N no viene elevado al cuadrado, con lo que la velocidad de convergencia mejora sustancialmente respecto del método de Gaus-Seidel.

A.5.4. Método iterativo ponderado de Jacobi

En el apartado (5.1.3.4) se presenta este método y en la ecuación (5.36) se muestra la expresión de cálculo, que introduce el parámetro de cálculo ω respecto del método de Jacobi

$$u_{\mathbf{q}_j}^k = (1-\omega)u_{\mathbf{q}_j}^{k-1} + \frac{\omega}{2n} \sum_{i=1}^{2n} u_{\mathbf{q}_{ji}}^{k-1} \quad (\text{A.149})$$

Y la ecuación (5.38) es la ecuación de diferencias del error:

$$e_{\mathbf{q}_j}^k = (1-\omega)e_{\mathbf{q}_j}^{k-1} + \frac{\omega}{2n} \sum_{i=1}^{2n} e_{\mathbf{q}_{ji}}^{k-1} \quad (\text{A.150})$$

de manera que la expresión del valor exacto de la función potencial ($u_{\mathbf{q}_j}$) es:

$$u_{\mathbf{q}_j} = (1-\omega)u_{\mathbf{q}_j}^{k-1} + \frac{\omega}{2n} \sum_{i=1}^{2n} u_{\mathbf{q}_{ji}}^{k-1} + e_{\mathbf{q}_j}^k \quad (\text{A.151})$$

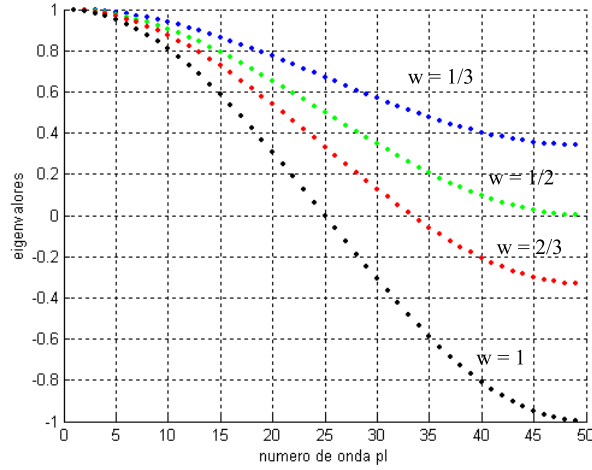


Figura A.10: Eigenvalores en función de número de onda para el método Jacobi Ponderado y $N = 50$.

Para obtener la solución de la ecuación (A.145) se aplica nuevamente el método de separación de variables, utilizando la expresión:

$$e_{\mathbf{q}_j}^k = h_k \phi_{\mathbf{q}_j} \quad (\text{A.152})$$

obteniéndose:

$$h_k \phi_{\mathbf{q}_j} = (1 - \omega) h_{k-1} \phi_{\mathbf{q}_j} + \frac{\omega}{2n} \sum_{m=1}^{2n} h_{k-1} \phi_{\mathbf{q}_{jm}} \quad (\text{A.153})$$

y dividiendo por $h_{k-1} \phi_{\mathbf{q}_j}$ se consigue la separación de variables:

$$\frac{h_k}{h_{k-1}} = (1 - \omega) + \frac{\omega \sum_{m=1}^{2n} \phi_{\mathbf{q}_{jm}}}{\phi_{\mathbf{q}_j}} = \lambda, \quad (\text{A.154})$$

Para la ecuación en diferencias espacial se prueba la solución

$$\phi_j = e^{i\theta \vec{j}} = e^{i(\theta_1 j_1 + \theta_2 j_2 + \dots + \theta_n j_n)} \quad (\text{A.155})$$

$$\lambda = (1 - \omega) + \frac{\omega}{2n} \sum_{l=1}^{2n} e^{i\theta_l} \quad (\text{A.156})$$

Suponiendo $\theta_1 = \theta_2 = \dots = \theta_n = \theta_l = \frac{pl\pi}{N}$, se obtienen los eigenvalores mostrados en la figura (A.10):

$$\lambda = (1 - \omega) + \omega \cos \frac{pl\pi}{N} = 1 - 2\omega \sin^2 \left(\frac{pl\pi}{2N} \right) \quad (\text{A.157})$$

Donde para $\omega = 2/3$, se cumple que $\lambda_{N/2} = -\lambda_N = 1/3$.

Bibliografía

- [1] Aamo D., Kragic D. and Christensen H. I. Artificial Potential Biased Probabilistic Roadmap Method. *Proceedings of the 2004 IEEE International Conference on Robotics and Automation*, pp. 461-466.
- [2] Akishita S., Kawamura S. and Hayashi K. Laplace potential for moving obstacle avoidance and approach of mobile robot. *Proceedings of the 1990 Japan-USA Symposium on Flexible Automation*, pp. 139-142.
- [3] Althofer K., Fraser D. A. and Bugmann G. Rapid path planning for robotic manipulators using an emulated resistive grid. *Electronics Letters*, 26th October 1995 Vol. 31, No. 22, pp. 1960-1961.
- [4] Barraquand J. and Latombe J. C. A Monte-Carlo Algorithm for Path Planning With Many Degrees of Freedom. *Proceedings of the 1990 IEEE International Conference of Robotics and Automation*, pp. 1712-1717.
- [5] Barraquand J. and Latombe J. C. Robot motion planning: a distributed representation approach. *The International Journal of Robotics Research*, December 1991 vol. 10, pp. 628-649.
- [6] Barraquand J., Kavraki L.E., Latombe J.C., Li T.Y. and Raghavan. A random sampling scheme for path planning. *The International Journal of Robotics Research*, 1997, vol. 16, pp. 759-774.
- [7] Belkhouche F. Reactive Path Planning in a Dynamic Environment. *IEEE Transactions on Robotics*, August 2009, vol. 25, no. 4.
- [8] Berg J. P. and Mark H. O. Using workspace information as a guide to non-uniform sampling in probabilistic roadmap planners. *Proceedings of the 2004 IEEE International Conference on Robotics and Automation*, pp. 453-460.
- [9] Blanco F. J., Moreno V., Curto B. And Therón. C-space evaluation using hierarchical data structures. *Proceedings of the 2003 IEEE The 11th International Conference on Advanced Robotics*.
- [10] Bohlin R. Path Planning in Practice; Lazy Evaluation on a Multi-resolution Grid. *Proceedings of the 2001 IEEE International Conference on Intelligent Robots and Systems*, pp.49-54.

-
- [11] Bohlin R. And Kavraki L. Path planning using lazy PRM. *Proceedings of the 2000 IEEE International Conference of Robotics and Automation*, pp. 521-528.
 - [12] Boor V., Overmars M. H. And Stappen A. F. The gaussian sampling strategy for probabilistic roadmap planners. *Proceedings of the 1999 IEEE International Conference of Robotics and Automation*, pp. 1018-1023.
 - [13] Boyd S. Convex Optimization. *Cambridge University Press*, 2004, pp. 67-112.
 - [14] Branicky M. S., Lavalley S. M., Olson K. And Yang L. Quasi-randomized path planning. *Proceedings of the 2001 IEEE International Conference of Robotics and Automation*, pp. 1481-1487.
 - [15] Briggs W. L. A Multigrid Tutorial. *Center for Applied Scientific Computing Lawrence Livermore National Laboratory*, 1999.
 - [16] Brooks R. A. Solving the find-path problem by good representation of free space. *IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics*, March/April 1983, vol. SMC-13, no. 3, pp. 190-197.
 - [17] Brost R. C. Computing Metric and Topological Properties of Configuration-Space Obstacles. *Proceedings of the 1989 IEEE International Conference of Robotics and Automation*, pp. 170-176.
 - [18] Burlet J., Aycard O. and Fraichard T.. Robust Motion Planning using Markov Decision Processes and Quadtree Decomposition. *Proceedings of the 2004 IEEE International Conference of Robotics and Automation*, pp. 2820-2825.
 - [19] Cai Ch. and Ferrari S. Information-Driven Sensor Path Planning by Approximate Cell Decomposition. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics-part B: Cybernetics*, vol. 39, no. 3, June 2009, pp. 672-689.
 - [20] Canny J. F. The Complexity of Robot Motion Planning. *MIT Press, ACM Doctoral*, 1988
 - [21] Canny J. F. On Computability of Fine Motion Plans. *Proceedings of the 1989 IEEE International Conference on Robotics and Automation*, pp. 177-182.
 - [22] Cesati M. and Wareham H. T. Parameterized complexity analysis in robot motion planning. *IEEE International Journal on Systems, Man and Cybernetics*, 1995, 1:880-885.
 - [23] Chen D. Z., Szczerba R. J. And Uhran J. J. A Framed-Quadtree Approach for Determining Euclidean Shortest Paths in a 2-D Environment. *IEEE Transactions on Robotics and Automation*, October 1997, vol. 13, no. 5, pp 668-681.

- [24] Chen M. And Zalzal A. M. S. Safety Considerations in the Optimisation of Paths for Mobile Robots Using Genetic Algorithms. *IEE Conference on Genetic Algorithms in Engineering Systems*, Conference Publication, August 2002, No. 414, pp. 299-306.
- [25] Connolly C. I., Burns J. B. And Weiss R. Path planning using Laplace's Equation. *Proceedings of the 1990 IEEE International Conference on Robotics and Automation*, pp. 2102-2106.
- [26] Connolly C. I. And Grupen R. A. Harmonic Control. *Proceedings of the 1992 International Symposium on Intelligent Control*, pp. 503-506.
- [27] Connolly C. I. And Grupen R. A. On the Applications of Harmonic Functions to Robotics. *Journal of Robotics Systems*, 1993, 10(7):931-946.
- [28] Connolly C. I. Harmonic Functions and Collision Probabilities. *The International Journal of Robotics Research*, August 1997, Vol. 16, No. 4, pp. 497-507.
- [29] Curto B. and Moreno V. Mathematical Formalism for the Fast Evaluation of the Configuration Space. *Proceedings of the 1997 IEEE International Symposium on Computational Intelligence in Robotics and Automation*, pp. 194-199.
- [30] Dale L. and Amato N. Probabilistic Roadmaps Putting It All Together. *Proceedings of the 2001 IEEE International Conference on Robotics and Automation*, pp. 1940-1947.
- [31] Erdmann M. Using Backprojections for Fine Motion Planning with Uncertainty. *The International Journal of Robotics Research*, 1986, vol. 5, 1, pp. 19-45.
- [32] Erdmann M. Randomization in Robot Tasks. *The International Journal of Robotics Research*, 1992, vol. 11, no. 5, pp. 399-436.
- [33] Fujimura K. and Samet H. A Hierarchical Strategy for Path Planning Among Moving Obstacles. *IEEE Transactions on Robotics and Automation*, 1989, vol. 5, no. 1.
- [34] Gao Y. and Sun S. Local path planning of Mobile Robots in dynamic unknown environment based on prediction of collision. *Proceedings of the 2009 IEEE International Conference on Measuring Technology and Mechatronics Automation*, pp. 84-88.
- [35] Garrido S., Moreno L., Blanco D. and Monar F. M. Robotic Motion Using Harmonic Functions and Finite Elements. *J Intell Robot Syst*, 2010, 59:57,73.
- [36] Gilbert E. G. and Johnson D. W. Distance Functions and Their Application to Robot Path Planning in the Presence of Obstacles. *IEEE Journal of Robotics and Automation*, 1985, vol. RA-1, no. 1, pp. 21-30.

- [37] Gockenbach M. S. Partial Differential Equations: Analytical and Numerical Methods. *Siam*, 2002.
- [38] Gong D., Lu L. and Li M. Robot Path Planning in Uncertain Environments Based on Particle Swarm Optimization. *IEEE 2009 Congress on Evolutionary Computation*, pp. 2127-2134.
- [39] Gottschlich S. N. and Kak A. C. Motion Planning for Assembly Mating Operations. *Proceedings of the 1991 IEEE International Conference on Robotics and Automation*, pp. 1956-1963.
- [40] Gupta K. and Pobil A. P. Practical Motion Planning in Robotics: Current Approaches and Future Directions. *Edited by Kamal Gupta and Angel P. del Pobil. 1998 John Wiley and Sons.*
- [41] Haberman R. Ecuaciones en Derivadas Parciales. Tercera edición 2003. *Prentice Hall.*
- [42] Harabor D. and Botea A. Hierarchical Path Planning for Multi-Size Agents in Heterogeneous Environments. *Proceedings of the 2008 IEEE Symposium on Computational Intelligence and Games*, pp. 258-265.
- [43] Henrich D., Wurrll C. and Wörn H. On-line path planning with optimal C-space discretization. *Proceedings of the 1998 IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems*, pp. 1479-1484.
- [44] Hjaltason G. R. And Samet H. Improved Bulk-Loading Algorithms for Quadrees. *Proceedings of the 1999 International Symposium on GIS*, pp. 110-115.
- [45] Hussein A. M. and Elnagax A. Motion Planning Using Maxwell's Equations. *Proceedings of the 2002 IEEE International Conference on Robotics and Automation*, pp. 2347-2352.
- [46] Hwang Y. K. Boundary Equations of Configuration Obstacles for Manipulators. *Proceedings of the 1990 IEEE International Conference on Robotic and Automation*, pp.298-303.
- [47] Iñiguez P. and Rosell J. Probabilistic Harmonic-function-based Method for Robot Motion Planning. *Proceedings of the 2003 IEEE International Conference on Robotics and Automation*, pp. 382-387.
- [48] Kambhampati S. and Davis L. S. Multiresolution Path Planning for Mobile Robots. *IEEE Transactions of Robotics and Automation*, September 1986, RA-2 (3), pp. 135-145.
- [49] Karnik M., Dasgupta B. And Eswaran V. A Comparative Study of Dirichlet and Neumann Conditions for Path Planning through Harmonic Functions. *Proceedings of the 2002 IEEE International Conference on Computational Science*, vol. 2, pp.442-451.

- [50] Kavraki L. E. Computation of Configuration-Space Obstacles Using the Fast Fourier Transform. *IEEE Transactions on Robotics and Automation*, 1995, vol. 11, no. 3, pp. 408-413.
- [51] Kavraki L.E., Kolountzakis M. N. and Latombe J.C. Analysis of Probabilistic Roadmaps for Path Planning. *IEEE Transactions on Robotics and Automation*, February 1998, vol. 14, no. 1, pp.166-171.
- [52] Kavraki L.E. and Latombe J.C. Probabilistic Roadmaps for Robot Path Planning. *Practical Motion Planning in Robotics: Current Approaches and Future Directions*, 1998, pp. 33-53.
- [53] Kavraki L.E., Svestka P., Latombe J.C. and Overmars M.K. Probabilistic roadmaps for path planning in high-dimensional configuration spaces. *IEEE Transactions of Robotics and Automation*, 1996, vol. 12(4), pp. 566-580.
- [54] Kazemi M. and Mehrandezh M. Robotic Navigation Using Harmonic Function-based Probabilistic Roadmap. *Proceedings of the 2004 IEEE International Conference on Robotics and Automation*, pp 4765-4770.
- [55] Khatib O. Real-Time Obstacle Avoidance for Manipulators and Mobile Robots. *International Journal of Robotics Research*, Spring 1986, 5(1) pp. 90-98.
- [56] Khatib O. Real-Time Obstacle Avoidance for Manipulators and Mobile Robots. *The International Journal of Robotics Research*, 1986, 5(1), pp. 90-98.
- [57] Kim Y. J., Lin M. C. and Manocha D. DEEP: Dual-space Expansion for Estimating Penetration depth between convex polytopes. *Proceedings of the 2002 IEEE International Conference on Robotics and Automation*, pp. 921-926.
- [58] Kuffner J. J. and LaValle S. M. RRT-Connect: An Efficient Approach to Single-Query Path Planning. *Proceedings of the 2000 IEEE International Conference on Robotics and Automation*, pp. 995-1001.
- [59] Kuroda Y. and Saitoh T. Simultaneous Adaptive Path Planning System for the Real World Application. *Proceedings of the 2009 IEEE Robotic Intelligence in Informationally Structured Space*, pp. 46-53.
- [60] Kurt D. R. and Wong A. Structuring Free Space as a Hypergraph for Roving Robot Path Planning and Navigation. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, march 1987, vol. pami-9, NO. 2.
- [61] Lamiriaux F. and Laumond J. P. On the expected complexity of random path planning. *Proceedings of the 1996 IEEE International Conference on Robotics and Automation*, pp.3014-3019.

- [62] Latombe J. C. *Robot Motion Planning*. Kluwer Academic Publishers, 1996.
- [63] LaValle S. M. *Planning Algorithms*, ch5. Cambridge University Press, 2006.
- [64] LaValle S. M. and Kuffner J. J. Rapidly-exploring random trees: Progress and prospects. *Proceedings of the 2000 Algorithmic Foundations of Robotics*.
- [65] Lin M. C. and Canny J. F. A Fast Algorithm for Incremental Distance Calculation. *Proceedings of the 1991 IEEE International Conference on Robotics and Automation*, pp. 1008-1014.
- [66] Lindemann S. R. and LaValle S. M. Incremental Low-Discrepancy Lattice Methods for Motion Planning. *Proceedings of the 2003 IEEE International Conference on Robotics and Automation*, pp. 2920-2927.
- [67] Lingelbach F. Path Planning using Probabilistic Cell Decomposition. *Proceedings of the 2004 IEEE International Conference on Robotics and Automation*, pp. 467-472.
- [68] Lozano-Pérez T. Spatial planning: A configuration space approach. *IEEE Transactions on Computers*, C(32):108-120, 1983.
- [69] Lozano-Pérez T, Mason M. T. and Taylor R. H. Automatic Synthesis of Fine-Motion Strategies for Robots. *The International Journal of Robotics Research*, 1984, 3(1), pp. 3-24.
- [70] Lozano-Pérez T. A Simple Motion-Planning Algorithm for General Robot Manipulators. *1987 IEEE Conference on Robotics and Automation*, vol. Ra-3, no. 3, pp. 224-238.
- [71] Maciejewski A. A. Path Planning and the Topology of Configuration Space. *IEEE Transactions on Robotics and Automation*, August 1993, vol. 9, no. 4, pp. 444-456.
- [72] Martínez-Salvador B. And del Pobil A. P. A Hierarchy of Detail for General Object Representation. *Practical Motion Planning in Robotics: Current Approaches and Future Directions*. Edited by Kamal John Wiley and Sons Ltd 1998.
- [73] Masoud A. A. A Discrete Harmonic Potential Approach to Motion Planning on A Weighted Graph. *2008 American Control Conference*, pp. 807-812.
- [74] Masoud A. A. Motion Planning with gamma-Harmonic Potential Fields. *Proceedings of the 2010 IEEE/ASME International Conference on Advanced Intelligent Mechatronics*, pp. 297-302.

- [75] Masoud S. A. and Masoud A. A. Motion Planning in the Presence of Directional and Regional Avoidance Constraints Using Nonlinear, Anisotropic, Harmonic Potential Fields: A Physical Metaphor. *2002 IEEE Transactions on systems, man, and cybernetics-part a: systems and humans*, vol. 32, no. 6, pp. 705-723.
- [76] Masoud A. A. Dynamic Trajectory Generation for Spatially Constrained Mechanical Systems Using Harmonic Potential Fields. *2007 IEEE International Conference on Robotics and Automation*, pp. 10-14
- [77] Meister O., Frietsch N., Ascher C. and Trommer G. F. Adaptive Path Planning for VTOL-UAVs. *IEEE A and E SYSTEMS MAGAZINE, JULY 2009*, pp. 36-41.
- [78] Metoui B. et al. Robust Path Planning for Dynamic Environment Based on Fractional Attractive Force. *Proceedings of the 2009 IEEE 6th International Multi-Conference on Systems, Signals and Devices*
- [79] Mirtich B. Efficient Algorithms for Two-Phase Collision Detection. *MERL-A Mitsubishi Electric Research Lab*, 1997, Cambridge, MA, USA.
- [80] Nagata T., Konishi K. And Zha H. Cooperative Manipulations Based on Genetic Algorithms Using Contact Information. *Proceedings of the 1995 IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems*, pp. 400-405.
- [81] Namik Kemal N., Yilmaz et al. Path Planning of Autonomous Underwater Vehicles for Adaptive Sampling Using Mixed Integer Linear Programming. *IEEE Journal of Oceanic Engineering*, vol. 33, NO. 4, october 2008, pp.522-537.
- [82] Newman W. and Branicky M. Real-time configuration space transforms for obstacle avoidance. *The International Journal of Robotics Research*, December 1991, vol. 10, no. 6, pp.650-667.
- [83] Pérez-Francisco M. And del Pobil A. P. Efficient Collision Detection for Real-World Motion Planning. *Practical Motion Planning in Robotics: Current Approaches and Future Directions*. Edited by Kamal John Wiley and Sons Ltd 1998.
- [84] Reif J. H. And Wang H. Nonuniform Discretization for Kinodynamic Motion Planning and its Applications. *SIAM Journal Computation*, 2000, vol. 30, no. 1, pp. 161-190.
- [85] Rosell J. Fine-motion planning for robotic assembly under modelling and sensing uncertainties. *Tesis Doctoral*, June 1998. Universitat Politècnica de Catalunya.
- [86] Rosell J., Basañez L. and Suárez R. Compliant-Motion Planning and Execution for Robotic Assembly. *Proceedings of the 1999 IEEE International Conference on Robotics and Automation*, pp. 2774-2779.

- [87] Sadati N. and Taheri J. Genetic Algorithm in Robot Path Planning in Crisp and Fuzzified Environments. *Proceedings of the 2002 IEEE ICIT*, pp. 175-180.
- [88] Sánchez A, Arenas J.A. and Zapata R. Non-holonomic Path Planning using a Quasi-Random PRM Approach. *Proceedings of the 2002 IEEE International Conference on Robotics and Automation*, pp. 2305-2310.
- [89] Takahashi O. and Schilling R. J. Motion Planning in a Plane Using Generalized Voronoi Diagrams. *IEEE Transactions on Robotics and Automation*, April 1989, vol. 5, no. 2, pp. 143-150.
- [90] Tisdale J., Kim Z. and Hedrick K. Autonomous UAV Path Planning and Estimation. *IEEE Robotics and Automation Magazine*, June 2009, pp. 35-42.
- [91] Trovato K. I. and Dorst L. Differential A*. *IEEE Transactions on Knowledge and Data Engineering*, November/December 2002, vol. 14, no. 6, pp. 1218-1229.
- [92] Turnbull C. and Cameron S. Computing Distances Between NURBS-defined Convex Objects. *Proceedings of the 1998 IEEE International Conference on Robotics and Automation*, pp. 3685-3690.
- [93] Tzionas P., Tsalides P. and Thanailakis A. Cellular Automata-Based Collision-Free Robot Path Planning. *Proceedings of the 1995 IFIP International Conference on Very Large Scale Integration*, pp. 823-828.
- [94] Wise K. D. and Bowyer A. A Survey of Global Configuration-Space Mapping Techniques for a Single Robot in a Static Environment. *The International Journal of Robotic Research*, August 2000, Vol. 19, no. 8, pp. 762-779.
- [95] Xiao J. and R. A. Volz. On Replanning for Assembly Tasks Using Robots in the Presence of Uncertainties. *Proceedings of the 1989 IEEE International Conference on Robotics and Automation*, pp. 638-645.
- [96] Xu J., Chen D. Z. and Szczerba R. J. A New Approach for Determining Optimal Paths in a Dynamic 2-D Environment Using Monotone Framed-Octrees. *1997 IEEE International Conference on Systems, Man and Cybernetics*, vol. 4, pp. 3744-3749.
- [97] Yang L. and La Valle S.M. A Framework for Planning Feedback Motion Strategies Based on a Random Neighborhood Graph. *Proceedings of the 2000 IEEE International Conference on Robotics and Automation*, pp. 544-549.
- [98] Yang L. and La Valle S.M. An Improved Random Neighborhood Graph Approach. *Proceedings of the 2002 IEEE International Conference on Robotics and Automation*, pp. 254-259.

-
- [99] Yang S. X., Yuan X., Meng M., Yuan G. and Li H. Real-time Planning and Control of Robots using Shunting Neural Networks. *Proceedings of the 2001 IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems*, pp. 1590-1595.
- [100] Yershova A., Jaillet L., Simeon T., and LaValle S. M. Dynamic-domain RRTs: Efficient exploration by controlling the sampling domain. *Proceedings of the 2005 IEEE International Conference on Robotics and Automation*.
- [101] Zelek J. S. Resistors, Markov Chains and Dynamic Path Planning. *Proceedings of the 2002 IEEE International Conference on Robotics and Automation*, pp. 4249-4254.
- [102] Zhang L., LaValle S. M. and Manocha D. Global Vector Field Computation for Feedback Motion Planning. *Proceedings of the 2009 IEEE International Conference on Robotics and Automation*.
- [103] Zhu D. and Latombe J. C. New Heuristic Algorithms for Efficient Hierarchical Path Planning. *IEEE Transactions on Robotics and Automation*, 1991, vol. 7, no. 1.