UNIVERSITAT DE BARCELONA

Departament de Física Aplicada i Òptica

Programa de Micro i Optoelectrònica Física

Bienni 1994-96

DISSENY D'UN PROTOCOL NUMÈRIC PER A LA CLASSIFICACIÓ INVARIANT D'IMATGES APLICANT TÈCNIQUES MULTIVARIANTS

Memòria presentada per optar al títol de doctor en Ciències Físiques

Directors:
Dr. Arturo Carnicer González
Dr. Ignacio Juvells Prades

Jordi-Roger Riba Ruíz

Barcelona, maig de 2000

Annex. Nomenclatura estadística

En aquest annex hi ha informació tant sobre la nomenclatura estadística que s'utilitza en aquest treball, com sobre els mètodes matemàtics relacionats amb les operacions amb matrius necessàries per poder desenvolupar els algorismes proposats en aquest treball.

- **Nombre d'objectes d'entrenament de la classe *i*-èssima:** n_i
- **Nombre total d'objectes del conjunt d'entrenament:** n, amb $n = \sum_{i=1}^{c} n_i$
- **Nombre de classes d'objectes:** c
- **Nombre de característiques dels objectes:** m
- **Vector de característiques de l'objecte *i*-èssim:** $x_i = (x_{i1}, x_{i2}, \ldots, x_{im})$
- **Variable aleatòria *X* d'una població *C***

  És una característica numèrica amb una certa llei de probabilitat que en el cas continu està descrita per una funció de densitat de probabilitat $f(x/C)$. La probabilitat que la variable aleatòria assoleixi valors compresos entre *a* i *b* ve donada per:

$$p(a<x<b) = \int_a^b f(x/C).dx \tag{A.1}$$

- **Mitjana d'una variable aleatòria *X***

$$\mu = \int_{-\infty}^{\infty} x.f(x/C).dx \tag{A.2}$$

- **Mitjana mostral d'una mostra de *n* valors d'una variable *X***

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i \tag{A.3}$$

- **Variància d'una variable aleatòria *X***

$$\sigma^2 = \int_{-\infty}^{\infty} (x-\mu)^2.f(x).dx \tag{A.4}$$

- **Variància mostral d'una mostra de *n* valors d'una variable *X***

$$s^2 = \frac{1}{n-1} \cdot \sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2 \tag{A.5}$$

- **Covariància entre dues variables aleatòries X_i i X_j**

  És una mesura del grau d'interdependència de les dues variables aleatòries. Es calcula segons l'expressió següent:

$$\sigma_{ij} = \int_{-\infty}^{\infty} ... \int_{-\infty}^{\infty} x_i x_j f(x_1,...,x_m) dx_1 ... dx_m \quad \text{on} \quad \sigma_{ii} = \sigma_i^2 \tag{A.6}$$

- **Matriu de variàncies-covariàncies**

  La matriu de variàncies-covariàncies d'una distribució de variables aleatòries *m*-dimensionals conté totes les covariàncies entre *m* variables aleatòries i ve donada per l'expressió següent:

$$\Sigma = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_{12} & ... & \sigma_{1m} \\ \sigma_{21} & \sigma_2^2 & ... & \sigma_{2m} \\ ... & ... & ... & ... \\ \sigma_{m1} & \sigma_{m2} & ... & \sigma_m^2 \end{pmatrix} \tag{A.7}$$

- **Covariància mostral entre dues variables X_i i X_j**

  És una mesura del grau d'interdependència de les dues variables aleatòries. Es calcula segons l'expressió següent:

$$s_{ij} = \frac{1}{n-1} \cdot \sum_{k=1}^{n} (x_{ik} - \bar{x}_i).(x_{jk} - \bar{x}_j) \tag{A.8}$$

- **Matriu de variàncies-covariàncies mostrals**

$$S = \begin{pmatrix} s_1^2 & s_{12} & \dots & s_{1m} \\ s_{21} & s_2^2 & \dots & s_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ s_{m1} & s_{m2} & \dots & s_m^2 \end{pmatrix} \tag{A.9}$$

- **Coeficient de correlació entre dues variables aleatòries X_i i X_j**

  És una mesura del grau d'interdependència lineal entre les dues variables aleatòries. Adopta valors entre -1 i 1. En el cas de ser 0, indica que les variables són linealment independents, i en el cas de valer ±1, significa que una és exactament combinació lineal de l'altra.

$$\rho_{ij} = \frac{\sigma_{ij}}{\sigma_i . \sigma_j} \tag{A.10}$$

- **Coeficient de correlació mostral entre dues variables X_i i X_j**

$$r_{ij} = \frac{s_{ij}}{s_i . s_j} \tag{A.11}$$

- **Distribució normal univariant**

$$f(x) = \frac{1}{\sigma.\sqrt{2.\pi}} \cdot e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2.\sigma^2}} \tag{A.12}$$

- **Distribució normal univariant mostral**

$$f(x) = \frac{1}{s.\sqrt{2.\pi}} \cdot e^{-\frac{(x-\bar{x})^2}{2.s^2}} \tag{A.13}$$

- **Distribució normal multivariant**

$$f(x) = \frac{1}{(2.\pi)^{m/2}.|\Sigma|^{1/2}} \cdot e^{-\frac{1}{2}.(x-\mu)^T.\Sigma^{-1}.(x-\mu)} \tag{A.14}$$

x i μ són vectors de m dimensions i $|\Sigma|$ és el determinant de la matriu de variàncies-covariàncies.

- **Distribució normal multivariant mostral**

$$f(x) = \frac{1}{(2.\pi)^{m/2}.|S|^{1/2}} \cdot e^{-\frac{1}{2}.(x-\bar{x})^T.S^{-1}.(x-\bar{x})} \qquad \text{(A.15)}$$

x i $\bar{x}$ són vectors de m dimensions i $|S|$ és el determinant de la matriu de variàncies-covariàncies mostrals.

- **Diagonalització d'una matriu quadrada**

Donada una matriu quadrada $A_{(n,n)}$, perquè sigui diagonalitzable cal que tingui n vectors propis linealment independents. La matriu diagonal (Σ) tindrà a la diagonal els n valors propis de la matriu A.

Els vectors i valors propis d'una matriu compleixen:

$$A.v_i = \lambda_i.v_i, \qquad \text{(A.16)}$$

on v_i i λ_i són els vectors i valors propis, respectivament.

Propietats de les matrius quadrades diagonalitzables:

1.- Determinant(A) = $\prod_{i=1}^{n} \lambda_i$ (A.17)

2.- Traça(A) = $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i$ (A.18)

3.- $A = V.\Sigma.V^{-1}$, on V és la matriu les columnes de la qual són els vectors propis de la matriu A, ordenats de major a menor valor propi, i Σ és una matriu diagonal els elements de la diagonal de la qual són els valors propis de la matriu A, ordenats de més gran a més petit.

4.- $A^m = V.\Sigma^m.V^{-1}$ (A.19)

5.- $\Sigma = V^{-1}.A.V$ (A.20)

- **Descomposició d'una matriu en valors singulars (Singular Value Decomposition, SVD)**

La descomposició en valors singulars o SVD és una tècnica útil per determinar els valors i vectors propis d'una matriu, en general no quadrada, així com per invertir-la. Si tenim una matriu $A_{(n,m)}$ no quadrada, en general amb $n \geq m$, la descomposició d'aquesta en valors singulars resulta:

$$\mathrm{SVD}(A) = U_{(n,m)}.\Sigma_{(m,m)}.V^T{}_{(m,m)} \tag{A.22}$$

Les matrius anteriors compleixen:

U: matriu ortogonal: ($U^T.U = I_m$). Els seus vectors columna són vectors propis de $A.A^T$.

V: matriu quadrada ortogonal ($V^T.V = V.V^T = I_m$). Els seus vectors columna són vectors propis de $A^T.A$.

Σ: matriu diagonal. La seva diagonal conté els valors singulars $\sqrt{\lambda_j}$, ordenats de major a menor.

La descomposició en valors singulars és aplicable a tota matriu $A_{(n,m)}$, amb $n \geq m$. En el cas que $n < m$, es té $\sqrt{\lambda_j} = 0$, per $j = n+1...,m$. Les corresponents columnes de la matriu U també seran nul·les.

Sigui quin sigui el grau de singularitat d'una matriu A qualsevol, es pot fer la descomposició en valors singulars donada per l'expressió (A.22). A més a més, la descomposició en valors singulars és un mètode molt utilitzat per determinar la inversa d'una matriu (consulteu [Pre92]).

- **Inversa generalitzada d'una matriu**

Quan una matriu no és quadrada, la seva inversa es pot calcular per diferents mètodes i, en general, no és única. Si es té una matriu $A_{(n,m)}$, la seva inversa generalitzada es designa per A^- i pot complir:

1.- $A.A^-.A = A$ (A.23)

2.- $A^-.A.A^- = A^-$ (A.24)

3.- $(A.A^-)^T = A.A^-$ (A.25)

4.- $(A^-.A)^T = A^-.A$ (A.26)

Normalment s'agafa la inversa generalitzada donada per l'expressió 1.

Fent la descomposició en valors singulars de la matriu A, resulta que:

$$A = U.\Sigma.V^T \quad \text{i, per tant,} \quad A^- = V.\Sigma^-.U^T,$$

$$\text{amb } \Sigma^- = \mathrm{diag}(1/\sqrt{\lambda_1}\ ,\ 1/\sqrt{\lambda_2}\ ,...,1/\sqrt{\lambda_r}\ ,0,...,0) \text{ i } \mathrm{rang}(A) = r.$$

Propietats de la inversa generalitzada:

1.- $A.A^- = U.\Sigma.V^T.V.\Sigma^-.U^T = U.\ \Sigma.\ \Sigma^-.U^T = U.U^T = I_n$.

2.- $A^-.A = V.\Sigma^-.U^T.U.\Sigma.V^T = V.\Sigma^-.\Sigma.V^T = V.V^T = I_m$.

- **Distància**

La distància entre dos punts o dos vectors es pot definir de diferents maneres. La distància no és un concepte universal.

Distància euclidiana

La distància euclidiana és segurament l'expressió més utilitzada per calcular la distància entre dos punts. Suposa un espai isòtrop i la seva expressió ve donada per:

$$d_E = \sqrt{(\vec{x} - \vec{y})^T . (\vec{x} - \vec{y})} \; . \qquad \text{(A.27)}$$

Distància de Mahalanobis

La distància de Mahalanobis és invariant a translacions, girs i canvis d'escala de les coordenades de les dades, fet que la fa molt interessant per calcular distàncies relatives entre objectes individuals i el centre d'una classe d'objectes, o per calcular la distància entre diferents classes. Es calcula a partir de l'expressió següent:

$$d_M = \sqrt{(\vec{x} - \vec{\mu})^T . S^{-1} . (\vec{x} - \vec{\mu})} \; , \qquad \text{(A.28)}$$

on $\vec{x}$ és un objecte individual, S és la matriu de variàncies-covariàncies de la classe i $\vec{\mu}$ és el centre de la classe a la qual calculem la distància.

Per entendre el significat de la distància de Mahalanobis, l'estudiarem en el cas d'una dimensió. Desenvolupant l'expressió (A.28) per al cas d'una dimensió, resulta:

$$d_M = \sqrt{(x - \mu) . \frac{1}{\sigma^2} . (x - \mu)} = \frac{x - \mu}{\sigma} \; . \qquad \text{(A.29)}$$

En una dimensió, la distància de Mahalanobis és el nombre de desviacions estàndard que separen l'objecte del centre de la classe en qüestió. Per tant, en calcular la distància entre un objecte i el centre d'una classe, la distància de Mahalanobis té en compte el grau de dispersió dels objectes de la classe a la qual calculem la distància.

En el cas de dues dimensions, les expressions que s'obtenen són més complexes, resultant:

$$d_M = \sqrt{\frac{\sigma_y^2 . (x - \mu_x)^2 + \sigma_x^2 . (y - \mu_y)^2 - 2 . s_{xy} . (x - \mu_x) . (y - \mu_y)}{\sigma_x^2 . \sigma_y^2 - s_{xy}^2}} \; . \qquad \text{(A.30)}$$

Si les variables fossin independents, es tindria $s_{xy} = 0$ i l'expressió resultant seria:

$$d_M = \sqrt{\frac{(x - \mu_x)^2}{\sigma_x^2} + \frac{(y - \mu_y)^2}{\sigma_y^2}} \; . \qquad \text{(A.31)}$$