

Métodos iterativos de reconstrucción tomográfica en SPECT

Carles Maria Falcon Falcon

ADVERTIMENT. La consulta d'aquesta tesi queda condicionada a l'acceptació de les següents condicions d'ús: La difusió d'aquesta tesi per mitjà del servei TDX (www.tesisenxarxa.net) ha estat autoritzada pels titulars dels drets de propietat intel·lectual únicament per a usos privats emmarcats en activitats d'investigació i docència. No s'autoritza la seva reproducció amb finalitats de lucre ni la seva difusió i posada a disposició des d'un lloc aliè al servei TDX. No s'autoritza la presentació del seu contingut en una finestra o marc aliè a TDX (framing). Aquesta reserva de drets afecta tant al resum de presentació de la tesi com als seus continguts. En la utilització o cita de parts de la tesi és obligat indicar el nom de la persona autora.

ADVERTENCIA. La consulta de esta tesis queda condicionada a la aceptación de las siguientes condiciones de uso: La difusión de esta tesis por medio del servicio TDR (www.tesisenred.net) ha sido autorizada por los titulares de los derechos de propiedad intelectual únicamente para usos privados enmarcados en actividades de investigación y docencia. No se autoriza su reproducción con finalidades de lucro ni su difusión y puesta a disposición desde un sitio ajeno al servicio TDR. No se autoriza la presentación de su contenido en una ventana o marco ajeno a TDR (framing). Esta reserva de derechos afecta tanto al resumen de presentación de la tesis como a sus contenidos. En la utilización o cita de partes de la tesis es obligado indicar el nombre de la persona autora.

WARNING. On having consulted this thesis you're accepting the following use conditions: Spreading this thesis by the TDX (www.tesisenxarxa.net) service has been authorized by the titular of the intellectual property rights only for private uses placed in investigation and teaching activities. Reproduction with lucrative aims is not authorized neither its spreading and availability from a site foreign to the TDX service. Introducing its content in a window or frame foreign to the TDX service is not authorized (framing). This rights affect to the presentation summary of the thesis as well as to its contents. In the using or citation of parts of the thesis it's obliged to indicate the name of the author.

Departament de Física Aplicada i Electrònica
Universitat de Barcelona

Programa de Micro y Optoelectrónica Física.
Bienio 1993-1995

***Métodos iterativos de reconstrucción
tomográfica en SPECT***

Carles Maria Falcon Falcon

Barcelona, septiembre de 1999.

Memoria presentada para optar al título de Doctor en Ciencias Físicas.

Realizada bajo la dirección de: Dr. Domènec Ros i Puig
Dr. Ignasi Juvells i Prades

5. Métodos de reconstrucción algebraicos

En este capítulo se expone la implementación de los algoritmos de reconstrucción algebraica y el análisis de la variación de la calidad de la reconstrucción obtenida en función de dos factores, el parámetro de relajación y el número de iteraciones en el que debe interrumpirse el proceso iterativo de reconstrucción.

5.1. Formulación matemática

Existen dos vías para la deducción del algoritmo de reconstrucción algebraica utilizado en este trabajo. En primer lugar, la discretización de las ecuaciones de la reconstrucción tomográfica, según se vio en el capítulo 2, deriva en un sistema de ecuaciones lineales. En este sentido, la reconstrucción tomográfica es equivalente a la resolución de un sistema de ecuaciones lineales. En segundo lugar, se puede enmarcar el problema dentro del análisis funcional. La implementación numérica de métodos analíticos de inversión transforma el problema analítico en un problema algebraico, ya que las funciones se sustituyen por vectores de valores numéricos y los operadores funcionales se convierten en operaciones algebraicas. Aunque ambos planteamientos son, en principio, diferentes, desembocan en un mismo algoritmo.

A continuación, se describe el método de proyecciones para la resolución de sistemas lineales (método de Kaczmarz). Posteriormente, se realiza una pequeña introducción a la teoría de inversión de problemas en espacios de Hilbert por el método POCS (*Projection Onto Convex Sets*: proyección sobre conjuntos convexos). Se comprueba que el método de las proyecciones es un caso particular de POCS. Finalmente, se describe el algoritmo de reconstrucción empleado.

5.1.1. Método de las proyecciones de Kaczmarz

Al discretizar la expresión que relaciona la imagen y sus proyecciones se obtiene el sistema lineal (ec 2-12):

$$p = A \cdot q + n \quad (\text{ec 5-1})$$

La reconstrucción tomográfica es la inversión de dicho sistema, es decir, determinar la imagen q a partir de las proyecciones p . El principal problema es que las proyecciones tienen dos componentes: la señal ($A \cdot q$) y el ruido (n). El desconocimiento del ruido hace imposible separarlo de la señal e invertir la expresión.

Una primera aproximación es ignorar la presencia de ruido. Entonces, el sistema de ecuaciones (ec 5-1) se sustituye por el sistema:

$$p = A \cdot q \quad (\text{ec 5-2})$$

Según se analizará más adelante, la inversión directa de este sistema de ecuaciones es inviable. No obstante, existen diversos algoritmos iterativos de inversión de sistemas lineales aplicables en esta situación. Entre ellos se puede citar el método del gradiente conjugado (CG: *Conjugate Gradient*) [BAK-80] [GOL-89] o el método de Landweber [STR-74] [GOL-89]. El más común y simple es el conocido con el nombre de método de las proyecciones. Fue descrito por primera vez por Kaczmarz y está explicado, por ejemplo, en [HER-80] [KAK-84] [VIE-88]. Su interpretación geométrica es la siguiente: Cada ecuación del sistema (ec 5-2) define un hiperplano de dimensión M^2-1 dentro del espacio $\mathbb{R}^{M \times M}$ de las imágenes. La solución del sistema será, por tanto, un punto común a todos estos hiperplanos; esto es, un punto que verifique todas las ecuaciones. Un método para llegar al punto de intersección de varios hiperplanos partiendo de un punto inicial arbitrario es proyectar ortogonalmente dicho

punto sobre el primer hiperplano, el punto encontrado se proyecta sobre el segundo hiperplano y así sucesivamente. Cuando se ha proyectado sobre el último hiperplano se proyecta de nuevo sobre el primero y se continúa el proceso. A modo de ejemplo, en la figura 5-1, está representado gráficamente el caso de la intersección de dos rectas en el plano.

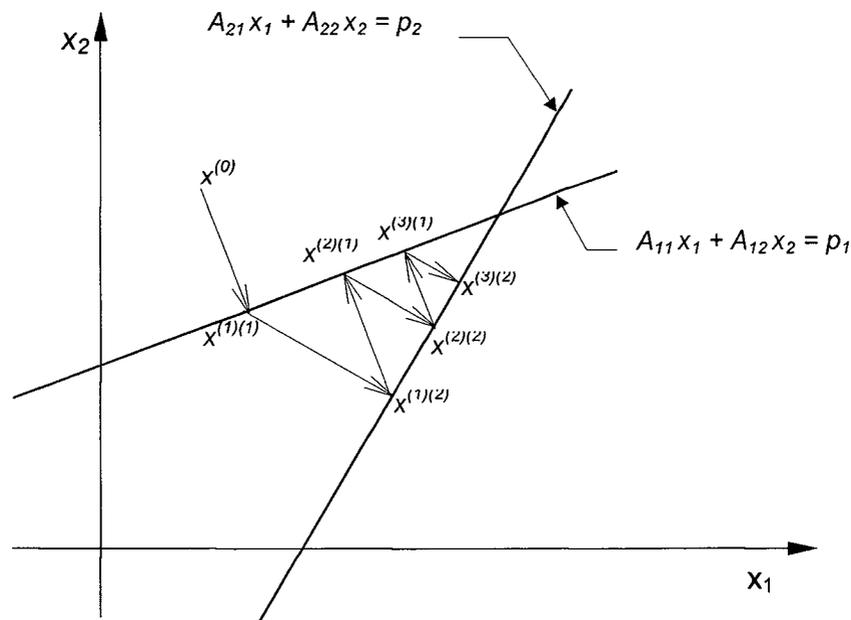


Figura 5-1 Sucesivas aproximaciones a la intersección de dos rectas mediante proyecciones ortogonales.

El algoritmo se deduce mediante la geometría analítica. Cada ecuación de un sistema genérico de ecuaciones lineales puede ser escrita como el producto escalar de una forma a_j (el subíndice j hace referencia al número de orden de la forma correspondiente, no a sus componentes) por el vector de incógnitas x igualado a un escalar c_j :

$$a_j \cdot x = c_j \quad (\text{ec 5-3})$$

La forma \mathbf{a}_j es ortogonal al hiperplano que define la ecuación (ec 5-3). Los puntos obtenidos al proyectar sucesivamente sobre los hiperplanos están indexados con dos subíndices, el primero hace referencia al número de ciclo (iteración) y el segundo al hiperplano sobre el que se está proyectando. Dado un punto de la sucesión $\mathbf{x}^{(k)(j)}$, el siguiente $\mathbf{x}^{(k)(j+1)}$ es la intersección del hiperplano correspondiente con la recta ortogonal al mismo que pasa por $\mathbf{x}^{(k)(j)}$. La ecuación vectorial de dicha recta es, por tanto:

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}^{(k)(j)} + \lambda \cdot \mathbf{a}_j \quad (\text{ec 5-4})$$

$\mathbf{x}^{(k)(j+1)}$ es la solución del sistema que forman las dos últimas ecuaciones. Puede resolverse multiplicando escalarmente la segunda ecuación por \mathbf{a}_j :

$$\mathbf{a}_j \cdot \mathbf{x} = \mathbf{a}_j \cdot \mathbf{x}^{(k)(j)} + \lambda \cdot \mathbf{a}_j^2$$

De (ec 5-3), el primer término de esta última expresión puede cambiarse por c_j . Despejando ahora λ se obtiene:

$$\lambda = \frac{c_j - \mathbf{a}_j \cdot \mathbf{x}^{(k)(j)}}{\mathbf{a}_j^2}$$

que substituido de nuevo en (ec 5-4):

$$\mathbf{x}^{(k)(j+1)} = \mathbf{x}^{(k)(j)} + \frac{c_j - \mathbf{a}_j \cdot \mathbf{x}^{(k)(j)}}{\mathbf{a}_j^2} \cdot \mathbf{a}_j \quad (\text{ec 5-5})$$

Si el sistema tiene solución, su convergencia está asegurada aunque la velocidad de convergencia depende en gran manera del orden en que se numeren los diferentes hiperplanos [KAK-84] [GUA-94] [GUA-96].

En el sistema (ec 5-2), las formas a_j que definen los hiperplanos son las filas de la matriz A , y el vector de términos independientes c es la proyección p . Con ello, la recurrencia de inversión del sistema (ec 5-2) es:

$$q_i^{(k)(j)} = q_i^{(k)(j-1)} + \frac{A_{ji} \cdot \left(p_j - \sum_{l=1}^{M \times M} A_{jl} \cdot q_l^{(k)(j-1)} \right)}{\sum_{l=1}^{M \times M} A_{jl}^2} \quad (\text{ec 5-6})$$

La resolución del sistema está sujeta a alguna restricción, por ejemplo, la no negatividad de los píxeles de la imagen u otras informaciones *a priori*, como el soporte de la función. El método de las proyecciones junto las restricciones sobre la solución es denominado ART con restricciones (*constrained ART*). La convergencia de este proceso está demostrada, por ejemplo, en [KOL-90].

5.1.2. Método de proyecciones sobre conjuntos convexos (POCS)

El método POCS es un método ideado para resolver problemas inversos en espacios de funciones. Antes de explicar este método, se realiza una breve descripción de los elementos de análisis funcional necesarios para su desarrollo. Una exposición más completa puede encontrarse en [LOU-83] [HER-87] [MAT-91] o en cualquier libro básico de análisis funcional, como [ABE-76].

Un espacio de Hilbert es un espacio lineal dotado de un producto escalar que es completo en la norma que define el producto ($\|x\| = \langle x, x \rangle^{1/2}$). Un espacio de Hilbert es a la vez un espacio vectorial y un espacio métrico,

pues la norma define una distancia: la distancia entre dos elementos de un espacio de Hilbert es la norma de su diferencia:

$$d(x, y) = \|x - y\|$$

En este tipo de estructuras tiene sentido hablar tanto de variedades lineales y ortogonalidad como de proximidad y distancia entre elementos.

Como ejemplo de espacios de Hilbert se podría citar cualquier espacio vectorial de dimensión finita dotado de un producto escalar. En particular, lo es \mathbb{R}^N , para todo valor de N , con el producto escalar euclídeo:

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = \sum_{i=1}^N x_i \cdot y_i$$

También tiene estructura de espacio de Hilbert el conjunto $L_2(\Omega)$ de las funciones reales de cuadrado integrable sobre un dominio Ω del plano con el producto escalar definido por:

$$f \cdot g = \iint_{\Omega} f(x, y) \cdot g(x, y) dx dy$$

Las imágenes entendidas como funciones analíticas son elementos de $L_2(\Omega)$, mientras que las imágenes digitalizadas son elementos del espacio vectorial $\mathbb{R}^{M \times M}$. En ambos marcos, una imagen es un elemento de un espacio de Hilbert.

La idea básica del método POCS es que cada dato disponible de la función problema define un subconjunto, el subconjunto de las funciones compatibles con ese dato [HER-87]. Si se dispone de una serie de datos, la función buscada pertenecerá a la intersección de todos los subespacios

definidos por esos datos. Cuanto mayor sea la cantidad de datos, cuanto mayor sea la información que se tenga de la función, más acotado estará el subespacio de las soluciones. Un problema de difícil resolución es cómo determinar dichos subconjuntos y su intersección. En vez de encontrar la solución general, usualmente, sólo es posible dar con soluciones particulares.

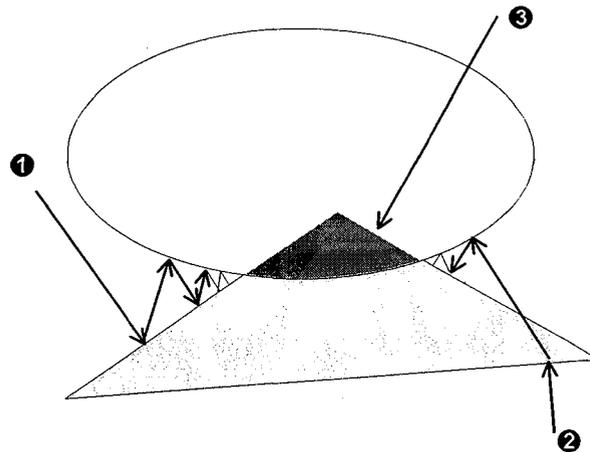


Figura 5-2. La sucesiva proyección sobre dos conjuntos convexos conduce a un punto de la intersección. El resultado final depende del punto inicial escogido.

Para encontrar una función solución es deseable que los subconjuntos de las funciones compatibles con cada dato sean conjuntos convexos¹. Si es así, se puede llegar fácilmente a la intersección partiendo de una función arbitraria proyectando² sucesivamente sobre todos los subconjuntos (método POCS). La convexidad de los conjuntos es condición suficiente para asegurar la convergencia del proceso [YOU-82] [HER-87], aunque el resultado final depende de la estimación inicial (punto de partida). En la

¹ Un conjunto C de funciones se denomina convexo, si dadas dos funciones f, g cualesquiera de C , toda función del tipo $\alpha \cdot f + (1 - \alpha) \cdot g$ con $0 \leq \alpha \leq 1$ también es de C . Su traducción geométrica a subespacios euclídeos es que si dos puntos pertenecen al subconjunto, todos los puntos del segmento que los une también pertenecen a dicho subconjunto.

² Dado C un subconjunto convexo y f una función cualquiera, entonces existe una única función g de C cuya distancia a f es estrictamente menor que la distancia de cualquier otra función de C . La función g se denomina la proyección de f sobre C . Si f es de C , la proyección de f sobre C es f mismo. En el caso euclídeo, la proyección de un punto sobre un subconjunto es el punto del subconjunto más próximo al punto inicial.

Figura 5-2 se muestra el proceso iterativo para dos conjuntos convexos del plano. Si los subconjuntos son disjuntos, el proceso iterativo converge cíclicamente a los puntos de los subconjuntos que están más próximos a los otros subconjuntos (Figura 5-3)

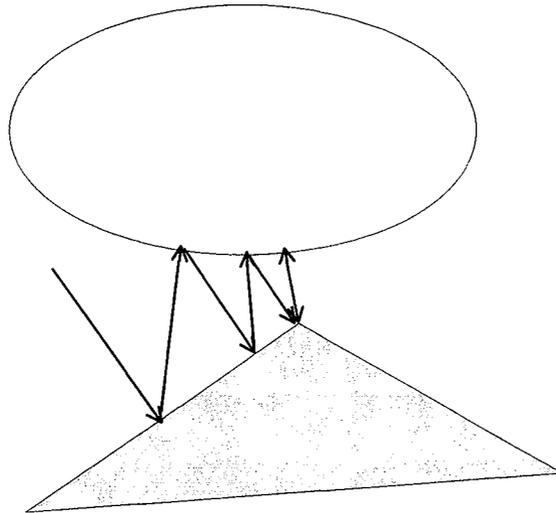


Figura 5-3. Proyecciones sucesivas sobre dos subconjuntos convexos disjuntos. El algoritmo converge hacia los puntos de mayor proximidad de ambos subconjuntos.

Como datos principales de la función se tienen sus proyecciones en distintos ángulos. Hay otro tipo de información conocida de antemano que también puede incluirse en el proceso como, por ejemplo, la no negatividad de la función solución en ningún punto, el dominio en que la función puede tener un valor distinto de cero (soporte de la función), el valor de la integral de la función (número total de cuentas), etc. Todas estas condiciones pueden ser formuladas analíticamente en el espacio de funciones [YOU-82], aunque aquí se formulan directamente en el espacio euclídeo de las imágenes y proyecciones digitalizadas. Las ecuaciones de proyección definen un hiperplano (que es convexo al ser una variedad lineal) para cada uno de los bins de la proyección. El conjunto de las imágenes que verifican la no negatividad de sus píxeles constituye el hipercuadrante definido por los semiejes positivos de todas las variables (es un conjunto convexo). El conjunto de funciones con un soporte

determinado, definen una variedad lineal de dimensión P , siendo P el número de píxeles que pueden tener un valor distinto de cero. El conjunto de imágenes que tienen un determinado número de cuentas constituye un hiperplano definido por la forma cuyas componentes son 1 y el término independiente es igual al número de cuentas. Diversos autores han propuesto otras condiciones y han demostrado que los conjuntos que definen son convexos [YOU-82] [SEZ-83] [OSK-88] [MAR-90] [SEZ-92]. Así pues, el conjunto definido por cada uno de estos datos disponibles en reconstrucción tomográfica es convexo.

Una vez definidos los subconjuntos, es preciso determinar los proyectores sobre ellos (el proyector sobre un conjunto C es el operador que conecta un elemento x con el elemento de C más próximo a x). En el caso que el conjunto sea un hiperplano el proyector ortogonal tiene exactamente la misma fórmula de la expresión (ec 5-5) [OSK-88].

La conservación de cuentas en la imagen es una condición que puede establecerse en este marco sólo en el caso que no exista atenuación, pues entonces el número de cuentas de la imagen coincide con el de las proyecciones. Si existe atenuación, el número de cuentas de la imagen (fotones emitidos) es mayor que el número de cuentas sobre las proyecciones (fotones detectados). El número de cuentas de las proyecciones es un dato del que se dispone, pero el de la imagen no es obtenible. Otras normalizaciones del número de cuentas pueden hacerse por comparación del número de cuentas de las proyecciones originales con el de las proyecciones obtenidas de la imagen reconstruida. En este caso, no es claro que el conjunto definido sea convexo y cuál es el proyector. Su inclusión podría alterar la convergencia del proceso iterativo. En cuanto a la no negatividad, el proyector se define con la relación [OSK-88]:

$$\begin{cases} q_i & \text{si } q_i \geq 0 \\ 0 & \text{si } q_i < 0 \end{cases}$$

El proceso iterativo consiste en, a partir de una estimación inicial, proyectar sobre el conjunto que define el primer dato, la función obtenida se proyecta sobre el segundo conjunto y así sucesivamente sobre todos los conjuntos. Este proceso puede repetirse tantas veces como sea necesario.

En resumen, el algoritmo de reconstrucción estudiado puede enmarcarse en el álgebra lineal o en el análisis funcional. Por una parte, es un algoritmo iterativo de inversión de sistemas algebraicos al que se ha añadido la restricción de no-negatividad para todo pixel de la imagen. Por otra, es un caso simple de una teoría general de inversión de problemas conocida con las siglas POCS. La equivalencia entre ART y POCS fue determinada por Censor [CEN-83b]. Si el sistema tiene solución, la convergencia está asegurada. En caso de incompatibilidad de los datos, el algoritmo converge cíclicamente a los puntos de cada uno de los sucesivos conjuntos que están a distancia mínima respecto al conjunto siguiente.

5.1.3. Limitaciones del método ART. Parámetro de relajación.

A continuación se expone como afecta el mal condicionamiento de la reconstrucción tomográfica en los métodos de reconstrucción algebraicos y qué medidas de regularización pueden ser adoptadas.

En primer lugar, se prescinde del ruido bajo el supuesto implícito de que si el ruido es pequeño, la solución del sistema (ec 5-2) será parecida a la solución del sistema (ec 5-1). Sin embargo, por ser un problema mal condicionado, esto no es necesariamente así. Además, al trabajar con

proyecciones con ruido, los datos no son consistentes necesariamente, el sistema aproximado (ec 5-2) no tiene por qué tener solución y, si la tiene, la solución no tiene por qué ser parecida a la de (ec 5-1). Por otra parte, ocurre que, por lo general, el sistema está subdeterminado o sobredeterminado ya que suele ocurrir que $M \neq N$ y, por tanto, la matriz A no es cuadrada. En este caso, el sistema se podría transformar a uno de matriz cuadrada multiplicando por la matriz traspuesta:

$$B \cdot q = p'$$

con $B = A^T \cdot A$ y $p' = A^T \cdot p$. No obstante, el sistema obtenido está mal condicionado, al ser su número de condición³ alto [LLA-82] [DEM-89]. Esto implica que, aunque teóricamente se puede invertir por procedimientos algebraicos, una pequeña variación en los datos proyecciones puede producir una variación muy grande en la imagen. Dado que en las proyecciones hay una componente de ruido que está indeterminada, la amplificación de esta componente produciría imágenes de calidad inaceptable. Dentro del formalismo POCS, diversos autores han propuesto formas de incorporar el tratamiento del ruido que garantizan que la imagen se mantenga a cierta distancia de las proyecciones ruidosas para que no se produzca el ajuste y amplificación del ruido [SEZ-83] [JAF-90] [MAR-90]. En ART, también han sido definidos dispositivos de regularización equivalentes [BER-86] [NAT-88] [PLA-90], basados en la regularización de Tikhonov [TIK-74]. El problema se redefine mediante la introducción de un funcional estabilizador y se busca la función que minimice este funcional en los alrededores de la solución, como, por ejemplo, la minimización de la norma de la solución o la minimización del negativo de la entropía de la solución. En [KAR-90] [DEP-91], se sumarizan algunas de las principales funciones utilizadas

con este propósito. Diversos métodos iterativos de búsqueda del mínimo de un funcional son aplicables a este tipo de problemas, como por ejemplo el método del gradiente conjugado (CG: *Conjugate Gradient*) [KAW-85] [FOR-89] [ELF-91] o el método de Landweber [STR-74] [PAN-91]. Otras modificaciones del método para suavizar las imágenes es el método SIRT (*Simultaneous Iterative Reconstruction Technique*) [GIL-72] [KAK-84] y el denominado BIP (*Block Iterative Projections* o *Block Iterative-ART*) [HER-88] [CEN-91] en los que la actualización de la imagen en cada iteración no se realiza para ajustar correlativamente cada uno de los bins de las proyecciones sino que en cada píxel se actualiza con el promedio de las correcciones necesarias para todos (SIRT) o un conjunto (BIP) de los bins simultáneamente.

El método de regularización empleado en este trabajo es de truncación del proceso iterativo [DEF-86] [BER-86] [FLE-90]. No obstante, dada la gran rapidez de convergencia del método, la imagen obtenida en una sola iteración es ya inaceptable por la amplificación excesiva del ruido. La solución pasa por ralentizar el algoritmo con un parámetro de relajación. La relajación de un método iterativo consiste en añadir a los píxeles de la imagen, en cada actualización, sólo una fracción de la corrección correspondiente, determinada por el parámetro de relajación ω :

$$q_i^{(k)(j)} = q_i^{(k)(j-1)} + \omega \cdot \frac{A_{ji} \cdot \left(p_j - \sum_{l=1}^{MnM} A_{jl} \cdot q_l^{(k)(j-1)} \right)}{\sum_{l=1}^{MnM} A_{jl}^2} \quad (\text{ec 5-7})$$

³ Se define el número de condición como el cociente entre el mayor y el menor valor propio de la matriz. Cuanto mayor sea el número de condición de la matriz peor condicionado será el sistema [BAK-80].

El parámetro de relajación debe estar comprendido entre 0 y 1⁽⁴⁾ y puede variar iteración a iteración. Al ir el algoritmo más lento, permite diferenciar el punto en que el ruido empieza a amplificarse y detener en ese momento el proceso iterativo de reconstrucción. El uso del parámetro de relajación fue introducido en reconstrucción tomográfica por Gordon [GOR-70] [GOR-74] como una estrategia para mejorar la calidad de la reconstrucción. Natterer justifica el uso de un factor de relajación muy pequeño como método de regularización del problema [NAT-86]. La convergencia de ART con relajación para $0 < \omega \leq 2$ está demostrada en [HER-78]. El uso de un parámetro de relajación próximo a cero hace que, en caso de inconsistencia, el algoritmo converja al punto de mayor proximidad a todos los conjuntos. En [CEN-83a] se comprueba que cuando el sistema es inconsistente, el método de ART con relajación fuerte converge a la función que minimiza el residuo ($\|A \cdot q - p\|^2$ solución de mínimos cuadrados).

5.1.4. El algoritmo utilizado.

El algoritmo utilizado en este trabajo es el de ART con relajación y la restricción de no negatividad de los píxeles de la imagen. En la transcripción del algoritmo, se han de tener en cuenta las siguientes consideraciones:

- En cada iteración, la imagen se actualiza $M \cdot N$ veces, ya que su valor es modificado para que coincida sucesivamente con cada uno de los bins de la proyección. Por esto la imagen lleva un doble superíndice. El índice k indica el número de iteración, mientras que el índice j , al recorrer los bins de la proyección, indica la actualización correspondiente de la imagen dentro de cada iteración.

⁴ En el caso de ser mayor que 1 se obtendría una aceleración del proceso (sobrerelajación). Si es próximo a cero, se habla de relajación fuerte y si es próximo a 1, pero inferior, de relajación débil.

- Las proyecciones obtenidas a partir de la imagen reconstruida llevan un superíndice que indica la iteración. Las proyecciones experimentales, en cambio, no llevan superíndice.

El algoritmo de reconstrucción algebraica consta de los siguientes pasos:

I. Inicialización. Como estimación inicial se toma la imagen cero (cada pixel de la imagen es cero).

$$k = 0 ; \mathbf{q}^{(1)(0)} = 0$$

II. Iteraciones:

$$k = k + 1 ; j = 0$$

a) Para cada bin de la proyección:

$$- j = j + 1$$

- Se calcula la proyección de la imagen actual sobre el bin j de la proyección:

$$p_j^{(k)(j)} = \sum_{i=1}^{M \times M} A_{ji} \cdot q_i^{(k)(j-1)}$$

- Se evalúa la diferencia de este valor con el experimental:

$$r_j^{(k)(j)} = p_j - p_j^{(k)(j)}$$

- Se reparte dicha diferencia sobre la imagen según la expresión:

$$q_i^{(k)(j)} = q_i^{(k)(j-1)} + \omega \cdot \frac{A_{ji}}{\sum_l A_{jl}^2} \cdot r_j^{(k)(j)} \quad (\text{ec 5-8})$$

- Si tras esta actualización de la imagen algún pixel tiene un valor negativo, se le asigna el valor cero (condición de no-negatividad)

b) Una vez recorrido todos los bins de la proyección, se considera que se ha efectuado una iteración.

- Se graba la imagen para su posterior evaluación.
- Si el número de iteraciones preestablecido no se ha cumplido, se realiza la asignación $q^{(k+1)(0)} = q^{(k)(i)}$ y se repite este proceso.

5.2. Descripción de las pruebas realizadas

Se ha realizado un estudio de la dependencia de la calidad de la imagen reconstruida en función de tres parámetros de la reconstrucción: el número de cuentas sobre las proyecciones, el número de iteraciones necesarias y el valor del parámetro de relajación. Para ello, han sido obtenidas unas proyecciones experimentales del modelo real de Jaszczak usando los siguientes parámetros de adquisición:

Colimador B

Número de proyecciones: 60 equiespaciadas en 360°

Tamaño de pixel: 0.4587 cm

Radio de giro de la gammacámara: 17 c

Cuentas por sección: 400 Kc.

Posteriormente, han sido generadas numéricamente proyecciones de este modelo con las degradaciones de ruido, PSF, atenuación y dispersión. Los parámetros de las proyecciones simuladas han sido los mismos que los experimentales. También han sido simulados dos conjuntos más de proyecciones con los mismos valores pero diferente número de cuentas por sección: 250 Kc en un caso y 2000 Kc en el otro. De todos los conjuntos se han realizado 10 realizaciones diferentes de ruido. Todos estos conjuntos de proyecciones, han sido corregidos de dispersión mediante una deconvolución de la SRF correspondiente.

Tanto los conjuntos de proyecciones reales como los simulados han sido reconstruidos utilizando el algoritmo descrito en el punto anterior para los valores del parámetro de relajación de 0.01, 0.02, 0.04, 0.08, 0.1, 0.14, 0.16, 0.18, 0.2, 0.25, 0.3 y 0.35. Parámetros de relajación superiores han

sido desestimados después de las primeras pruebas dados sus malos resultados. El número máximo de iteraciones usado en cada caso fue de 64, pues se ha visto que, para todas las pruebas, los mejores resultados se obtienen antes de esta iteración. Las diferentes secuencias de imágenes obtenidas han sido evaluadas mediante las FDM: *CC*, *CV*, *CON* y *SNR* (ambas en el círculo 1) al igual que en las pruebas del capítulo anterior.

5.3. Resultados obtenidos

Para cada realización de ruido y para cada factor de relajación se han evaluado las diferentes FDM para cada iteración. Los resultados de los diferentes estudios se han promediado sobre las 10 realizaciones de ruido. También se ha calculado la dispersión de todos los valores sobre las diferentes realizaciones de ruido, sin encontrarse ningún valor anormalmente alto para las FDM discutidas. Para fijar la notación, cada vez que se escriba el valor de una FDM se indica entre paréntesis la iteración en que dicha FDM alcanza ese valor. Si la FDM está definida sobre una región de interés, a continuación de la FDM se indica con un número la región de la imagen a la que se refiere.

La Figura 5-4 muestra, para el estudio simulado de 400 Kc, los valores (en promedio sobre las 10 realizaciones de ruido) de *CC*, *CONI*, *CV* y *SNRI* en función del número de iteraciones para los valores del parámetro de relajación 0.01, 0.06, 0.1, 0.14, 0.2 y 0.35. Las gráficas de las FDM respecto el número de iteraciones nos muestran un comportamiento diferenciado para las distintas FDM. Así, mientras *CC* y *SNR* son funciones que alcanzan un valor máximo y *CV* un valor mínimo (su mejor valor) tras el que empiezan a deteriorarse, *CON* es una función siempre creciente. Respecto el factor de relajación, se observa que, cuanto menor es los mejores valores de *CC*, *CV* y *SNRI* se obtienen con un número de iteraciones mayor. Así, por ejemplo, para el caso $\omega = 0.01$, ni *CC* ni *SNRI*

alcanzan su máximo en las 64 iteraciones realizadas (0.959(64) y 5.11(64), respectivamente) y CV tiene un mínimo de 14.37(9), mientras que, si $\omega = 0.1$, el valor máximo de CC es 0.963(10), el de $SNR1$ 5.13(6) y el mínimo de CV es 15.42(6). El valor máximo de $CONI$ crece con el factor de aceleración.

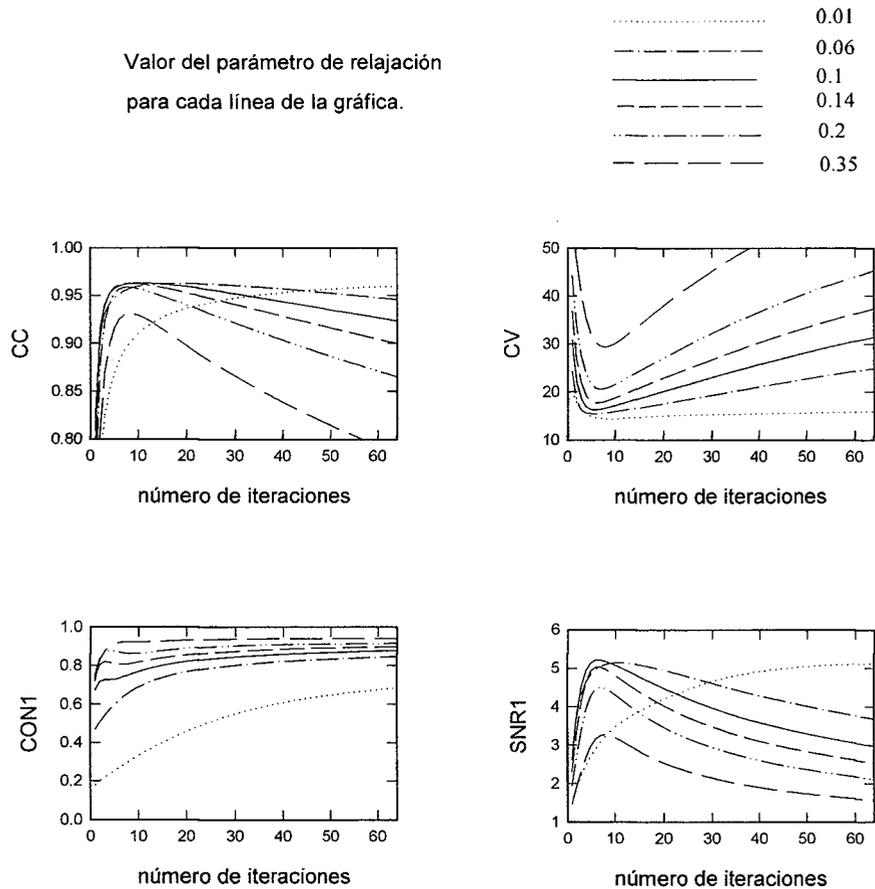


Figura 5-4. Modelo simulado (400 Kc). Valores de CC , CV , $CONI$ y $SNR1$ en función del número de iteraciones para diferentes valores del parámetro de relajación.

En la Figura 5-5, se muestra el mejor valor de cada FDM (izquierda) y el número de iteraciones en que se alcanza ese valor (derecha) en función del parámetro de relajación, para los estudios de 250 Kc (línea de puntos), 400 Kc (línea continua) y 2000 Kc (línea mixta). Analizando los resultados obtenidos con 400 Kc, el valor de CC se mantiene constante hasta valores de $\omega=0.15$ aproximadamente. A partir de ese punto, el máximo de CC alcanzado decrece, reflejando un deterioro de la calidad de la imagen. Este deterioro se pone también de manifiesto considerando CV , su valor mínimo crece con ω . El crecimiento es mayor a partir de valores de ω mayores de 0.1. Esto significa que el fondo del modelo es más no-uniforme cuanto mayor sea el parámetro de relajación. En cambio, $CONI$ crece rápidamente de $\omega=0.01$ hasta $\omega=0.1$. A partir de $\omega=0.14$, la curva de $CONI$ continua creciendo, pero su pendiente es mucho menor. Se ha de recordar, que, al ser $CONI$ una función creciente, su valor máximo está limitado por el número máximo de iteraciones realizadas, no es un máximo absoluto. En este sentido, si el número de iteraciones fuera mayor en las reconstrucciones con parámetro de relajación menor, se alcanzarían valores máximos de $CONI$ similares a los obtenidos con parámetros de relajación mayores. La gráfica de $SNRI$, que es una FDM que evalúa conjuntamente el efecto de CON y CV sobre la imagen, es plana para valores de ω menores de 0.1, valor a partir del cual decrece significativamente. En cuanto al número de iteraciones en que se alcanza el mejor valor, en la Figura 5-5 se pueden observar diferentes comportamientos para las diferentes FDM. Tanto para CC como para SNR el número de iteraciones disminuye al aumentar ω , mientras que para CV y CON , el número de iteraciones es prácticamente independiente de ω .

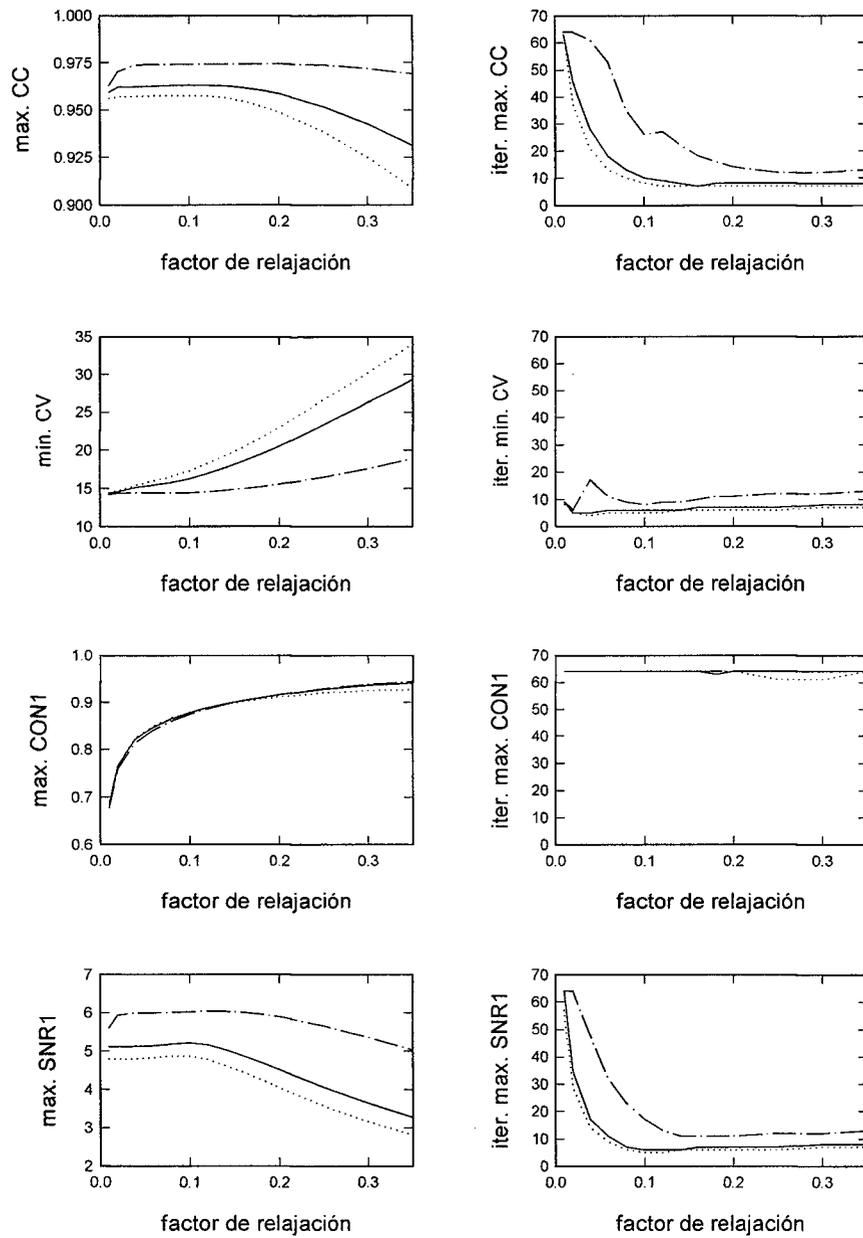


Figura 5-5. Modelo simulado. Mejores valores de las FDM e iteraciones precisas para alcanzarlos, para 250 Kc (puntos), 400 Kc (continua) y 2000 Kc (mixta).

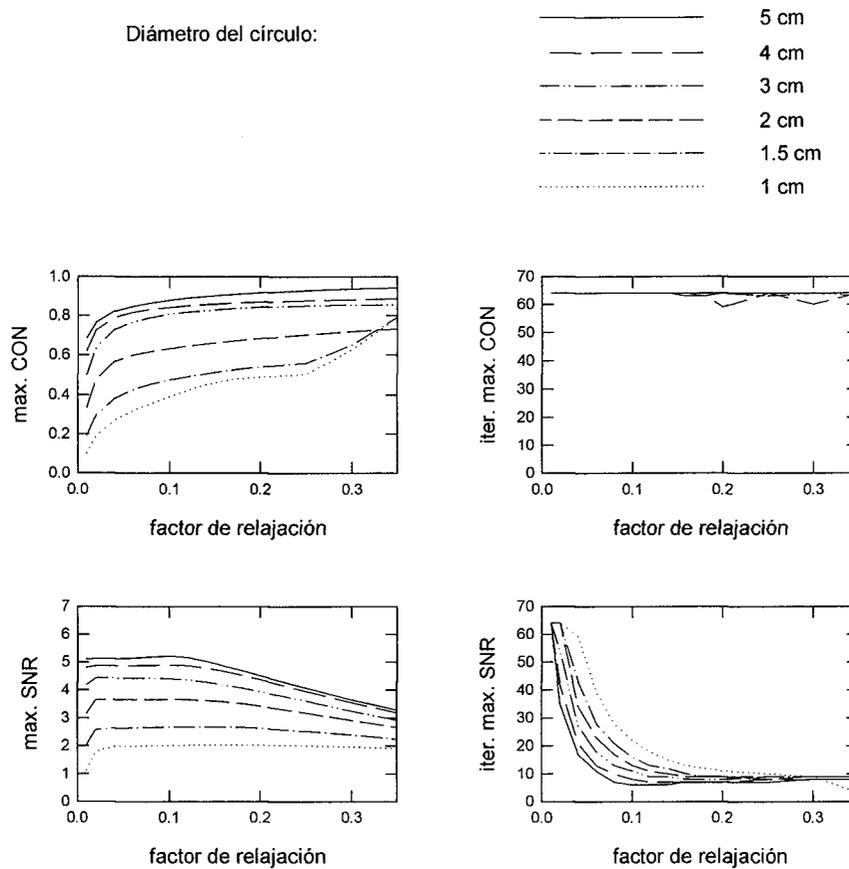


Figura 5-6. Modelo simulado (400 Kc). Valores máximos de *CON* y *SNR* y número de iteraciones necesario para alcanzarlos de los 6 círculos en función del parámetro de relajación

La Figura 5-6 muestra el comportamiento de *CON* y *SNR* para los 6 círculos de la imagen en la simulación de 400 Kc. Puede observarse que el comportamiento para los diferentes círculos es parecido, obteniéndose los mejores resultados para los de mayor tamaño. La dispersión de los valores obtenidos de las diferentes FDM en las 10 realizaciones de ruido es mayor para los círculos de menor radio. Esto indica que, para los círculos más pequeños, el resultado es más sensible a las fluctuaciones de la señal debidas a la presencia de ruido. Para el círculo menor, la

dispersión era del orden del 15% de su valor. Esto y el hecho de que este último círculo está formado por tan sólo 4 píxeles, sugiere el comportamiento anómalo que se observa para valores altos del parámetro de relajación no es un hecho muy significativo.

La Figura 5-7 muestra la confrontación de los resultados obtenidos para el modelo real con los obtenidos en la simulación. Los resultados para *CC* y *CV* son muy parecidos, con sólo pequeñas diferencias en cuanto valor del máximo y número de iteraciones. También se observa que, para ambas FDM el resultado es algo mejor en el caso simulado. El número de iteraciones para alcanzar el mejor valor son ligeramente inferiores en el caso real. Respecto a *CON* y *SNR* las gráficas muestran los resultados para los círculos de 4 y 1.5 cm de diámetro (zonas 2 y 5 respectivamente). La línea discontinua corresponde al círculo de radio 4 cm en el caso simulado, la línea de puntos corresponde al mismo círculo en el caso real. Para el círculo de 1.5 cm la línea raya-punto corresponde al caso simulado y la raya-punto-punto al caso real. El comportamiento para ambos círculos es cualitativamente igual para el caso real y simulado, aunque cuantitativamente hay pequeñas diferencias. En general, los mejores resultados corresponden al caso simulado, excepto para *CON* del círculo menor. Para los círculos menores, el efecto del ruido afecta más al resultado y la dispersión para las diferentes realizaciones de ruido es mayor.

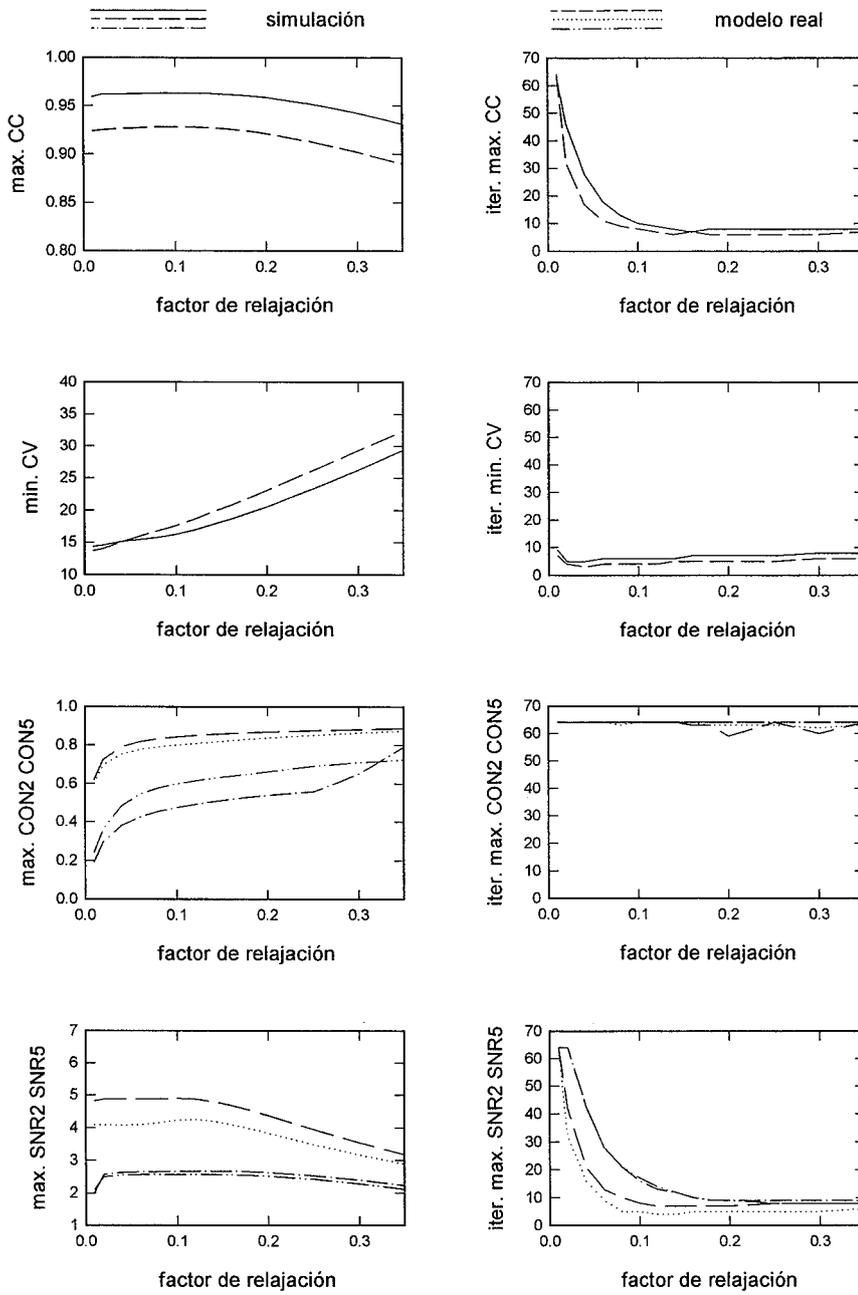


Figura 5-7. Comparación de los resultados obtenidos de las proyecciones simuladas (400 Kc) con los de las proyecciones del modelo real. Valores mejores de las FDM e iteraciones en las que se consiguen en función del parámetro de relajación.

La Figura 5-8 muestra la imagen del modelo real obtenida mediante la reconstrucción de las proyecciones experimentales bajo diferentes condiciones deducidas del estudio simulado. En todas ellas hay corrección de los efectos degradantes de la dispersión (por deconvolución de la SRF), de PSF y atenuación (incluidos en la matriz de pesos). La figura (a) es el modelo de referencia utilizado para evaluar las FDM. Las figuras (b), (c) y (d) muestran la imagen reconstruida con un parámetro de relajación igual a 0.1 después de 2, 8 y 64 iteraciones respectivamente. Puede verse la influencia del número de iteraciones en la reconstrucción. Para dos iteraciones, el contraste, especialmente el de los círculos menores, es muy bajo. La imagen parece no estar corregida de atenuación. Los bordes de la imagen están realzados respecto al centro de la misma. Esto provoca que, aunque la imagen sea muy poco ruidosa, CV sea alto, pues el valor del fondo no es uniforme. Esto concuerda con los resultados de CV expuestos en la Figura 5-4. La corrección del efecto de la atenuación, incluido en la matriz de pesos, necesita más iteraciones para manifestarse. En la figura (c) puede verse la imagen que, según los resultados obtenidos, corresponderían a una situación óptima (mejor calidad global – solución balanceada entre máximo CC y máximo CON - con el mínimo de iteraciones). En esta imagen, todos los círculos excepto el menor tienen un contraste elevado, la corrección de la atenuación ya está realizada y el fondo es bastante uniforme. Para 64 iteraciones (figura (d)), incluso el círculo pequeño presenta un elevado contraste, pero la presencia de ruido en la imagen se ha incrementado, en concordancia con lo encontrado para la simulación. La figura (e) corresponde a la reconstrucción con $\omega=0.01$ y 64 iteraciones. La imagen es prácticamente igual que en (c) mientras que se ha necesitado 8 veces más iteraciones para alcanzarla, con el consiguiente aumento de tiempo de computación. La última imagen (f) es la reconstrucción obtenida con $\omega=0.3$ y 8 iteraciones. Esta imagen presenta un mayor contraste pero un fondo más ruidoso que (c). Este hecho es consistente con los resultados encontrados en el estudio simulado.

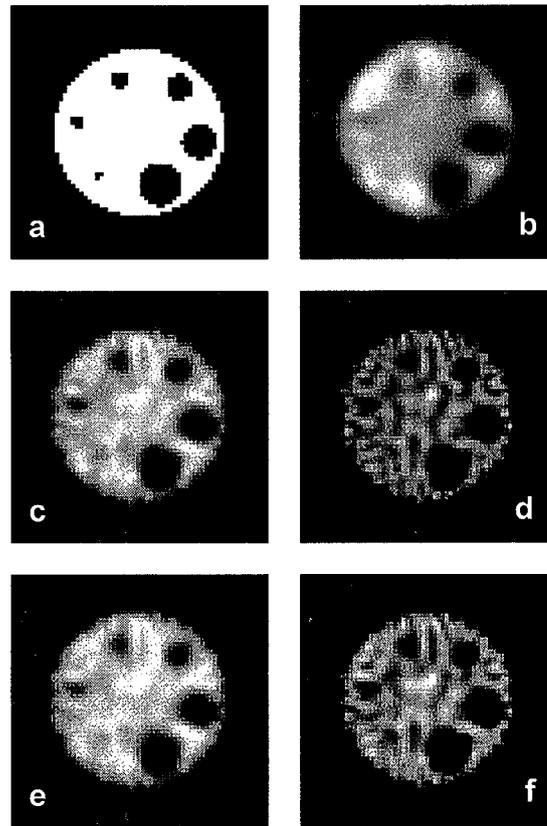


Figura 5-8. Imágenes de la reconstrucción de las proyecciones experimentales. a) Modelo de referencia (digitalización del modelo real) b) c) y d) Imagen obtenida utilizando $\omega=0.1$ y 2, 8 y 64 iteraciones respectivamente. e) Imagen con $\omega=0.01$ y 64 iteraciones. f) Imagen resultante de utilizar $\omega=0.3$ y 8 iteraciones.

5.4. Discusión de los resultados

Es destacable el diferente comportamiento de *CON* respecto *CC*, *CV* y *SNR*. La mejora de *CON* se corresponde con un deterioro de las otras tres FDM. *CON* es una FDM relacionada con la correcta distribución de las cuentas por las diferentes regiones de la imagen. La presencia de ruido no modifica, dentro de un rango, su valor, como puede comprobarse es la superposición de las gráficas de *CONI* para diferentes números de cuentas en las proyecciones (Figura 5-5). En cambio, las otras tres FDM sí que tienen una gran dependencia con el ruido sobre las proyecciones. Su deterioro aporta información sobre la progresiva amplificación del ruido sobre la imagen. Todo ello indica que debe tenerse en cuenta la FDM que

interesa optimizar para decidir el punto de truncación del proceso iterativo y el parámetro de relajación a usar. De los resultados se infiere que, para obtener una imagen bien definida, poco ruidosa, se han de realizar menos iteraciones que si desea una imagen bien contrastada. En contrapartida, el valor de *CON* alcanzado será bajo. Recíprocamente, si se desea una imagen bien contrastada, con las cuentas bien repartidas en las zonas correspondientes de la imagen, se debe iterar más, aunque sea a costa de aumentar el ruido sobre la imagen. Usualmente, para propósitos generales, se buscará un compromiso de ambos factores que mejoren globalmente varias FDM.

Se deduce que, por una parte ω y el número de iteraciones deben ser altos para que *CON* sea alto, y por otra parte *CC*, *CV* y *SNR* exigen valores de ω pequeños. Entonces, un valor de ω próximo a 0.1 equilibra los dos propósitos: *CC* y *SNR* se mantienen en sus mejores valores, *CV* todavía no se ha deteriorado significativamente, y *CON* ha alcanzado valores próximos a los óptimos. En cuanto el número de iteraciones, para $\omega = 0.1$, *CC* necesita 10 iteraciones para alcanzar su mejor valor, *CV* 6 iteraciones, *CON* 64 iteraciones y *SNR* 8 iteraciones. Esto, junto al conocimiento que se tiene del comportamiento de las FDM en función del número de iteraciones (Figura 5-4), nos permite deducir que el resultado que mejora globalmente las diferentes FDM es el obtenido en las 8-10 iteraciones. Para este número de iteraciones, *CC*, *CV* y *SNR* se hallan muy próximos a sus mejores valores y *CON* es ligeramente inferior (Figura 5-4). En función de lo que se quiera observar en la imagen, puede ser conveniente efectuar más iteraciones para mejorar *CON* en detrimento de *CV* y las otras FDM.

En la Figura 5-5 queda reflejado que el parámetro de relajación produce dos efectos sobre el proceso iterativo. En primer lugar, si el valor del parámetro de relajación es pequeño ($\omega < 0.1$) se observa que cuanto

menor es su valor mayor es el número de iteraciones necesarios para alcanzar los mejores resultados. Para este rango de valores, el efecto del parámetro de relajación es ralentizar el proceso iterativo (mismos valores en un número mayor de iteraciones). Por otra parte, si el parámetro es mayor ($\omega > 0.1$) los valores mejores de *CC*, *CV* y *SNRI* decrecen con el factor de relajación, lo que refleja el deterioro de la imagen resultante. Esto está de acuerdo con lo expuesto en la primera parte de este capítulo sobre la necesidad de utilizar un factor de relajación en ART en presencia de ruido y el uso de un factor de relajación pequeño con el fin de mejorar los resultados de este método de reconstrucción.

En cuanto a la contrastación de los resultados simulados con los experimentales, se ha de referir que el ajuste entre la imagen inicial y la imagen de referencia con la que se evalúan las FDM es mayor en el caso simulado (en que coinciden exactamente) que en el caso real. Esto justifica, en parte, los peores resultados de las FDM en el caso real respecto el simulado. Otro factor a tener en cuenta en la justificación de la diferencia de resultados experimentales y numéricos es en el conjunto de aproximaciones llevadas a cabo en la simulación de las proyecciones. Por eso, los resultados deben ser contrastados solamente de manera cualitativa. En este sentido, se puede ver que, a pesar de los factores mencionados con anterioridad, el estudio real y el simulado exhiben una buena concordancia. El comportamiento cualitativo de las curvas es igual para ambos casos (Figura 5-7).

6. Métodos de reconstrucción estadísticos

Los métodos de máxima verosimilitud fueron introducidos en la reconstrucción tomográfica de imágenes de emisión por Rockmore [ROC-76] y, posteriormente, por Shepp y Vardi [SHE-82]. Desde entonces, han tenido un gran desarrollo y una creciente aceptación como métodos robustos que permiten incorporar las correcciones de atenuación y respuesta del detector, de manera que, poco a poco, se va estandarizando su uso en equipos de gammagrafía convencionales. No obstante, hay algunos puntos que todavía no están satisfactoriamente resueltos. Este podría ser el caso, por ejemplo, de la lentitud del método o del número de iteraciones en que debe detenerse el proceso iterativo.

En este capítulo, tras una introducción al formalismo matemático y a la implementación del algoritmo, se hace un estudio de dos métodos de aceleración, la sobrerelajación y los subconjuntos ordenados (OS: *Ordered Subsets*). Se evalúa su eficacia como técnica de aceleración y su rango de validez. Paralelamente, se realiza un estudio sobre la aplicabilidad y funcionamiento de un criterio estadístico para finalizar el proceso iterativo de la reconstrucción, la validación cruzada (*CVR: cross-validation ratio*), en estos esquemas acelerados. Para ello, se estudia la evolución de la imagen en sucesivas iteraciones con el fin de determinar si el criterio *CVR* detiene el proceso en un punto idóneo, tanto al usar el algoritmo estándar como esquemas acelerados.

6.1. Formulación matemática

6.1.1. Estimadores de máxima verosimilitud

Se hace a continuación un breve resumen de la teoría de los estimadores de máxima verosimilitud. Puede encontrarse un desarrollo en [RIO-74], [CUA-81] o [CUA-96].

Sea una distribución de probabilidad de la variable aleatoria x dependiente de un parámetro $f(x; \alpha)$. Se quiere determinar el valor de ese parámetro mediante una muestra (x_1, x_2, \dots, x_N) de la variable. Para ello se construye un estimador, esto es, una función de los valores de la muestra, que nos permita conocer el valor estimado del parámetro. El método de la máxima verosimilitud (MLE- *Maximum Likelihood Estimator*), introducido por Fisher en 1950, indica que el valor que debe tomarse como estimación del parámetro α es el que hace que la probabilidad de haber observado (x_1, x_2, \dots, x_N) a partir de $f(x; \alpha)$ sea máxima. Para obtener este valor, se construye la función de verosimilitud de la muestra:

$$L(\alpha) = f(x_1; \alpha) \cdot \dots \cdot f(x_N; \alpha)$$

El estimador de máxima verosimilitud de α es el valor de este parámetro que maximiza la función de verosimilitud, es decir:

$$\frac{\partial L(\alpha)}{\partial \alpha} = 0$$

Dado que el logaritmo es una función monótona y, por tanto, el máximo del logaritmo de una función coincide con el máximo de la función, por razones de facilidad de cálculo, en vez del máximo de la verosimilitud se suele calcular el máximo de su logaritmo:

$$\frac{\partial \log L(\alpha)}{\partial \alpha} = 0$$

Si la función depende de varios parámetros $f(x; \alpha_1, \dots, \alpha_k)$, esta última expresión se generaliza con la serie de condiciones:

$$\frac{\partial \log L}{\partial \alpha_1} = 0; \frac{\partial \log L}{\partial \alpha_2} = 0; \dots; \frac{\partial \log L}{\partial \alpha_k} = 0$$

El estimador de máxima verosimilitud es consistente, en el sentido de que converge en probabilidad hacia el valor real del parámetro cuando el número de elementos de la muestra tiende a infinito.

Estos métodos pueden ser fácilmente extendidos al caso de procesos multivariantes, con una función de densidad de un vector de m variables aleatorias $x=(x^1, \dots, x^m)$ dependiente de un vector de k parámetros $\Theta=(\alpha_1, \dots, \alpha_k)$. y con una muestra formada por N observaciones m -dimensionales $x_1=(x^1_1, \dots, x^m_1), \dots, x_N=(x^1_N, \dots, x^m_N)$. La función de máxima verosimilitud de la muestra es igualmente:

$$L(\Theta) = f(x_1; \Theta) \dots f(x_N; \Theta)$$

y las ecuaciones de verosimilitud son las mismas.

6.1.2. Aplicación de los estimadores de máxima verosimilitud a la reconstrucción tomográfica.

Según se vio en el capítulo 2, la reconstrucción tomográfica puede plantearse como un problema de estimación de parámetros de funciones de probabilidad. Cada píxel emite siguiendo una ley de Poisson de parámetro proporcional a su actividad. Reconstruir la imagen significa determinar la actividad del píxel, o sea, el parámetro de la distribución de Poisson. Este parámetro se puede estimar mediante un estimador de máxima verosimilitud. Es decir, se busca la imagen (actividades de cada píxel) que maximiza la probabilidad de obtener una proyección experimental dada.

Para encontrar ese estimador, primero se ha de construir la función de verosimilitud. La función de verosimilitud es la probabilidad de encontrar la proyección experimental condicionada al valor de la imagen [ROC-76]. En el caso de que las variables aleatorias sean del tipo Poisson, la verosimilitud se calcula mediante la expresión [SHE-82] [VEK-87]:

$$L(\mathbf{q}) = P(\mathbf{p}|\mathbf{q}) = \prod_{j=1}^{M \times N} e^{-h_j} \frac{h_j^{p_j}}{p_j!} \quad (\text{ec 6-1})$$

donde

$$h_j = \sum_{i=1}^{M \times M} A_{ji} \cdot q_i$$

Las ecuaciones de verosimilitud respecto a los valores a ajustar son:

$$\frac{\partial \log L}{\partial q_1} = 0; \quad \frac{\partial \log L}{\partial q_2} = 0; \quad \dots; \quad \frac{\partial \log L}{\partial q_k} = 0 \quad (\text{ec 6-2})$$

El logaritmo de la expresión (ec 6-1) es:

$$\log L = \log \left(\prod_{j=1}^{M \times N} e^{-h_j} \frac{h_j^{p_j}}{p_j!} \right) = \sum_{j=1}^{M \times N} (-h_j + p_j \cdot \log h_j - \log p_j!)$$

y las ecuaciones de verosimilitud:

$$\frac{\partial \log L}{\partial q_i} = \sum_{j=1}^{M \times N} A_{ji} \cdot \left(\frac{p_j}{\sum_{l=1}^{M \times M} A_{jl} \cdot q_l} - 1 \right) = 0$$

que se pueden escribir de la forma:

$$\sum_{j=1}^{M \times N} \frac{p_j \cdot A_{ji}}{\sum_{l=1}^{M \times M} A_{jl} \cdot q_l} \cdot \frac{1}{\sum_{i=1}^{M \times M} A_{ji}} = 1 \quad (\text{ec 6-3})$$

Esta es la ecuación básica del algoritmo de la máxima verosimilitud, donde las incógnitas son los valores q_i de emisión de los píxeles de la imagen. Dado que no es posible la resolución directa de este sistema de ecuaciones, existen diferentes esquemas iterativos para la resolución del mismo.

Multiplicando ambos lados de la (ec 6-3) por la incógnita q , queda una ecuación de la forma:

$$x = x \cdot f(x) \quad (\text{ec 6-4})$$

Este tipo de problemas puede resolverse mediante una recurrencia del tipo:

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} \cdot f(x^{(k)}) \quad (\text{ec 6-5})$$

Este método de resolución de ecuaciones, denominado método de las aproximaciones sucesivas, sustituciones sucesivas o método iterativo simple, dependiendo de la fuente bibliográfica consultada, es muy corriente en análisis numérico. Puede encontrarse su desarrollo y propiedades en cualquier manual de análisis numérico como, por ejemplo, [DEM-77b] [BAK-80]. El algoritmo iterativo para el sistema de ecuaciones de verosimilitud se escribe:

$$q_i^{(k+1)} = q_i^{(k)} \cdot \frac{\sum_{j=1}^{N \times M} p_j \cdot A_{ji}}{\sum_{l=1}^{M \times M} A_{jl} \cdot q_l^{(k)}} \cdot \frac{1}{\sum_{j=1}^{N \times M} A_{ji}} \quad (\text{ec 6-6})$$

Una manera alternativa de desarrollar un algoritmo de resolución de las ecuaciones de verosimilitud es utilizar el algoritmo de maximización de la expectación (EM: *Expectation Maximization*). El esquema EM para el cálculo de estimadores de máxima verosimilitud fue desarrollado por Dempster [DEM-77a] y aplicado por primera vez en la reconstrucción de imágenes de emisión por Shepp y Vardi [SHE-82]. Para su aplicación, debe ser definido un conjunto de datos $\{x_{ji}\}$ asociado a los valores p_j denominado conjunto completo de datos. Cada x_{ji} representa los fotones que han sido emitidos en el píxel i -ésimo de la imagen que han sido detectados en el bin j -ésimo de las proyecciones. Por tanto:

$$p_j = \sum_{i=1}^{M \times M} x_{ji}$$

El algoritmo consta de dos pasos en cada iteración:

- Paso E (*Expectation*): Cálculo del valor esperado del logaritmo de la verosimilitud. El valor esperado del conjunto completo de datos con distribución Poisson es [SHE-82] [LAN-84] [LLA-b]:

$$x_{ji}^{(k)} = E\{x_{ji} | p, q^{(k)}\} = \frac{p_j A_{ji} q_i^{(k)}}{\sum_{h=1}^{M \times M} A_{jh} q_h^{(k)}}$$

En función del conjunto de datos $\{x_{ji}\}$, el logaritmo de la verosimilitud se expresa como:

$$\log L = \log(P(p|q)) = \sum_{j=1}^{M \times N} \sum_{i=1}^{M \times M} (-A_{ji} q_i + x_{ji} \cdot \log(A_{ji} q_i) - \log x_{ji}!)$$

Sustituyendo los datos $\{x_{ji}\}$ por su valor esperado:

$$E\left\{\log L(\mathbf{q}|\mathbf{p}, \mathbf{q}^{(k)})\right\} = \sum_{j=1}^{M \times N} \sum_{i=1}^{M \times M} \left(-A_{ji} q_i + \frac{p_j A_{ji} q_i^{(k)}}{\sum_{h=1}^{M \times M} A_{jh} q_h^{(k)}} \cdot \log(A_{ji} q_i) + t.indep.de q_i \right)$$

expresa el valor esperado del logaritmo de la verosimilitud, donde los términos independientes de las variables q_i corresponden al logaritmo del factorial de x_{ji} .

- Paso M (*Maximization*). Maximización del valor esperado del logaritmo de la verosimilitud. El máximo se consigue para el valor que anula la derivada del valor estimado del logaritmo de la verosimilitud. La solución de la ecuación es el nuevo valor estimado $q^{(k+1)}$:

$$\frac{\partial E\{\}}{\partial q_i} = \sum_{j=1}^{M \times N} \left[-A_{ji} + \frac{p_j A_{ji} q_i^{(k)}}{\sum_{h=1}^{M \times M} A_{jh} q_h^{(k)}} \frac{1}{q_i} \right] = 0$$

que tiene por solución la expresión (ec 6-6).

El proceso iterativo resultante es convergente a una solución única incluso cuando los datos tienen ruido [WU-83] [LAN-84]. El algoritmo resultante es denominado ML-EM (*Maximum Likelihood Estimator-Expectation Maximization*)

6.1.3. Métodos de aceleración del proceso

Dada la lentitud del algoritmo original ML-EM, en los últimos años han sido propuestos numerosos procedimientos para acelerarlo [LEW-86], [KAU-87], [TAN-87], [LLA-93], [HUD-94] [WAL-96] [KAM-98]. En este trabajo se estudian un método clásico de sobrerelajación [LEW-86]

[CHE-88] [LLA-a] así como otro método más reciente, denominado el método de los subconjuntos ordenados (OS: *Ordered Subsets*) [HUD-94].

Parámetro de aceleración

Un método de acelerar un proceso iterativo como el descrito por la expresión (ec 6-5) es el uso de un parámetro de sobrerelajación [SCH-93]. Los esquemas multiplicativos de este tipo pueden incorporar un parámetro n correspondiente a una potencia a la que elevar la corrección efectuada en cada iteración:

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} \cdot \left(f(x^{(k)}) \right)^n$$

n actúa como un parámetro de relajación (subcorrección de la incógnita que produce un retraso en la convergencia del proceso iterativo) si toma valores comprendidos entre 0 y 1 y de sobrerelajación (sobrecorrección de la incógnita que provoca una aceleración en la convergencia) en caso que sea mayor que 1. El uso del parámetro de sobrerelajación hace que el número de cuentas total, que se preserva automáticamente en el algoritmo ML-EM sin aceleración, pueda alterarse durante el proceso iterativo. Para eludir esta inestabilidad, en [LLA-a] se propone el uso de un multiplicador indeterminado de Lagrange μ en las ecuaciones de verosimilitud que fuerza la conservación del número total de cuentas de la reconstrucción. El logaritmo de la verosimilitud a minimizar se reescribe:

$$\log L = \sum_{j=1}^{M \times N} \sum_{i=1}^{M \times M} \left(-A_{ji} q_i + x_{ij} \cdot \log(A_{ji} q_i) - \log x_{ij}! \right) - \mu \left(\sum_{j=1}^{M \times N} \sum_{i=1}^{M \times M} A_{ji} q_i - \sum_{j=1}^{M \times N} p_j \right)$$

A las ecuaciones de la verosimilitud tiene que añadirse la condición de minimización respecto el parámetro μ :

$$\frac{\partial E\{\}}{\partial q_i} = \sum_{j=1}^{M \times M} \left[-A_{ji} + \frac{p_j A_{ji} q_i^{(k)} 1}{\sum_{h=1}^{M \times M} A_{jh} q_h^{(k)} q_i} \right] - \mu \sum_{j=1}^{M \times N} A_{ji} = 0$$

$$\frac{\partial E\{\}}{\partial \mu} = \sum_{j=1}^{M \times N} \sum_{i=1}^{M \times M} A_{ji} q_i - \sum_{j=1}^{M \times N} p_j = 0$$

La última ecuación conlleva la conservación del número de cuentas (igualdad entre el número de cuentas de las proyecciones experimentales con el número de cuentas de la proyección calculada a partir de la imagen estimada). De las primeras ecuaciones se deduce la siguiente relación:

$$(\mu + 1) = \sum_{j=1}^{M \times N} \frac{p_j \cdot A_{ji}}{\sum_{l=1}^{M \times M} A_{jl} \cdot q_l^{(k)}} \cdot \frac{1}{\sum_{j=1}^{M \times N} A_{ji}}$$

Elevando esta expresión a la potencia n -ésima y multiplicando por q_i , la recurrencia resultante es:

$$q_i^{(k+1)} = \frac{q_i^{(k)}}{(\mu + 1)^n} \cdot \left[\sum_{j=1}^{M \times N} \frac{p_j \cdot A_{ji}}{\sum_{l=1}^{M \times M} A_{jl} \cdot q_l^{(k)}} \cdot \frac{1}{\sum_{j=1}^{M \times N} A_{ji}} \right]^n \quad (\text{ec 6-7})$$

En [LLA-a] se demuestra que este factor tiende rápidamente a cero, aunque, para evitar inestabilidad en el desarrollo de la recurrencia, puede ser conveniente calcularlo en las primeras iteraciones. En lo sucesivo, se emplearán las siglas SSA (*Successive Substitution Algorithm*) para referirse a este esquema de reconstrucción de las ecuaciones de verosimilitud.

Existe otro algoritmo muy similar derivado de la ecuación (ec 6-3). La ecuación (ec 6-4) se puede expresar de la forma:

$$x = x + x \cdot (f(x) - 1) = x \cdot (1 + (f(x) - 1))$$

y la recurrencia que lo resuelve es:

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} \cdot (1 + (f(x^{(k)}) - 1)) \quad (\text{ec 6-8})$$

Este esquema, que es totalmente análogo a (ec 6-5), puede ser acelerado mediante un parámetro de sobrerelajación:

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} \cdot (1 + n \cdot (f(x^{(k)}) - 1)) \quad n > 1$$

Aplicado a las ecuaciones de verosimilitud [LEW-86]:

$$q_i^{(k+1)} = q_i^{(k)} \cdot \left[1 + n \cdot \left(\frac{\sum_{j=1}^{M \times N} p_j \cdot A_{ji}}{\sum_{l=1}^{M \times M} A_{jl} \cdot q_l^{(k)}} \cdot \frac{1}{\sum_{j=1}^{M \times N} A_{ji}} - 1 \right) \right] \quad (\text{ec 6-9})$$

Esta variante del método de máxima verosimilitud será referenciada en adelante con las siglas AA (*Additive Algorithm*). La expresión de AA puede ser concebida como una expansión en serie de Taylor de SSA a primer orden. Llamando a al término que está entre paréntesis:

$$a = \frac{\sum_{j=1}^{M \times N} p_j \cdot A_{ji}}{\sum_{l=1}^{M \times M} A_{jl} \cdot q_l^{(k)}} \cdot \frac{1}{\sum_{j=1}^{M \times N} A_{ji}}$$

y teniendo en cuenta que la expansión lineal de a^n alrededor de $a=1$ es:

$$a^n = 1 + n \cdot (a - 1) \quad (\text{ec 6-10})$$

puede comprobarse que AA es la expansión lineal de SSA.

Subconjuntos Ordenados

En 1994, Hudson describió un esquema de aceleración del algoritmo ML-EM al que bautizó con el nombre del método de los subconjuntos ordenados (MLE-OS: *Ordered Subsets*) [HUD-94]. De esta referencia, se ha obtenido toda la información expuesta en este punto.

La idea básica de este esquema de aceleración es hacer una partición del conjunto de bins de las proyecciones en varios subconjuntos de igual tamaño provistos de un orden. Luego, en cada iteración se busca sucesivamente la estimación de la imagen que maximiza la verosimilitud de cada uno de estos subconjuntos de datos. Así, en una sola iteración los valores de los píxeles de la imagen son estimados tantas veces como subconjuntos se utilicen. Utilizar este procedimiento casi no altera el número total de operaciones efectuadas en cada iteración, mientras que el ajuste de las proyecciones a la imagen se produce en un número considerablemente inferior de iteraciones (aproximadamente del orden del número de subconjuntos utilizados).

El modo de realizar la partición de la proyección afecta al rendimiento del algoritmo. Para que éste sea óptimo se ha de procurar que cada subconjunto contenga proyecciones lo más dispersas posibles dentro del rango de ángulos de proyección. Igualmente, ha de buscarse la máxima dispersión entre las proyecciones que forman un subconjunto y las proyecciones que forman el siguiente. Por ejemplo, si el número de ángulos de proyección es 60 y se quieren utilizar 20 subconjuntos, el

primero de ellos lo formarán las proyecciones a 0, 120 y 240 grados, el segundo estará compuesto por las proyecciones a 60, 180 y 300 grados (máxima distancia entre ellos y máxima separación con las proyecciones del subconjunto anterior), el tercero a 30, 150 y 270 grados, el cuarto a 90, 210 y 330 grados y así sucesivamente.

Desde su aparición en 1994, esta variante de MLE ha adquirido gran difusión y ha sido objeto de varios estudios [LI-94], [MAN-95], [KAM-96a], [KAM-96b], [LIU-96], [BYR-97], [XIA-97], [YU-97] y [BYR-98].

6.1.4. Rango de validez de los métodos estadísticos

La formulación estadística de la reconstrucción en ECT pretendía, en un principio, abordar el problema del ruido e incorporarlo en el proceso de reconstrucción, de manera que quedara automáticamente corregido. Sin embargo, la experiencia muestra que ML-EM produce imágenes ruidosas, siendo la presencia de ruido en la imagen más importante cuanto mayor sea el ruido sobre las proyecciones [LIE-93]. El origen del ruido es la escasa estadística de cuentas en cada píxel (incertidumbre o aleatoriedad de la medida). Para clarificar esta argumentación puede plantearse, a modo de ejemplo, el siguiente problema de estimación por ML-EM: Se tiene una moneda de la que se quiere averiguar cual es la probabilidad de obtener cara o cruz al lanzarla al aire. La distribución de probabilidad que describe este proceso aleatorio es una distribución binomial de parámetro p (p probabilidad de que salga cara, $1-p$ la probabilidad de que salga cruz; $p=0.5$ si la moneda es normal). El problema consiste en estimar el parámetro p por el método de ML-EM a partir de una muestra estadística determinada. Si, por ejemplo, se lanza cuatro veces una moneda normal y se obtiene 3 caras y 1 cruz, se puede calcular fácilmente que la estimación de p , esto es, el valor de p que da una probabilidad más grande de obtener 3 caras y una cruz al lanzar la moneda cuatro veces, es $p=0.75$. Este sencillo ejemplo ilustra que, aunque el estimador de ML-

EM tenga asegurada la convergencia en probabilidad [WU-83], el hecho de disponer de un número escaso de cuentas hace que el valor del parámetro obtenido no sea necesariamente el deseado. La presencia de ruido no se soluciona con la formulación estadística del problema. Es por ello que han sido desarrollados diferentes mecanismos de regularización de la solución [DEM-89] [FES-92] [BAR-94]:

- La penalización de la verosimilitud con funciones que sirvan para controlar la suavidad de la imagen. Se trata de maximizar simultáneamente la verosimilitud y la suavidad de la imagen, mediante algún compromiso entre ambos factores. Por ejemplo, el método de Sieves [SNY-85] o el descrito en [SIL-90].
- Métodos Bayesianos. El uso de funciones de penalización de la verosimilitud permite una interpretación bayesiana de la reconstrucción [LAN-87] [ARC-95] [KAO-98]. La estimación bayesiana consiste en encontrar la imagen más probable dadas las proyecciones. Es decir, se trata de maximizar la probabilidad condicionada. Esta probabilidad está relacionada con la verosimilitud mediante el teorema de Bayes:

$$P(\mathbf{q}|\mathbf{p}) \propto P(\mathbf{p}|\mathbf{q}) \cdot P(\mathbf{q})$$

donde $P(\mathbf{q})$ es la distribución de probabilidad *a priori* de la imagen. Una muestra de las funciones de densidad *a priori* utilizadas son la entropía [MOH-88] [NUÑ-90] [WAN-92], funciones de Gibbs [GEM-84] [GRE-90] [LAN-90] [FES-92],[HEB-92] [LAL-92] [HIG-97] y otras como [LEV-87] o [LIA-89]. También ha sido propuesto el diseño de funciones de Gibbs a partir de la información anatómica conocida de antemano [GIN-93] [BOW-96].

- El filtrado de las proyecciones con un filtro paso-baja previamente a la reconstrucción [LIA-91].
- La truncación del proceso iterativo [BER-86] [DEF-86] [FLE-90]. Debe ser definido el número de iteraciones en el que detener el algoritmo.

En [VEK-87], [LLA-89], [LLA-90] son propuestos varios métodos basados en el concepto de factibilidad de la imagen reconstruida en términos de test de hipótesis. En [HEB-88] y [HEB-90] hay otros métodos propuestos basados en test Chi-cuadrado. [COA-91] propone un criterio de detención de los algoritmos ML-EM basado en un sistema de validación cruzada (*CVR: Cross Validation Ratio*).

En este trabajo se utiliza la truncación como método de regularización y se estudia la aplicabilidad del criterio *CVR* en SPECT.

Otro punto pendiente de clarificación en el uso de los métodos estadísticos es hasta qué punto se puede suponer que las distribuciones de probabilidad que intervienen son conocidas. Aunque todas las fórmulas de este capítulo se han deducido con la hipótesis que las variables aleatorias que describen tanto los píxeles de la imagen como los bins de la proyección eran del tipo Poisson, la atenuación, la dispersión, la PSF y el ruido electrónico en la detección pueden modificar las leyes de distribución de probabilidad de los bins de las proyecciones. Saber si estas variables quedan suficientemente bien descritas mediante una variable de Poisson es una cuestión de difícil resolución. La veracidad de esta suposición ha de asumirse como hipótesis de trabajo.

6.1.5. La validación cruzada como criterio de detención del proceso iterativo.

Uno de los problemas de los métodos iterativos de reconstrucción y, en particular, del algoritmo ML-EM es determinar cuando debe detenerse el proceso iterativo. Coakley [COA-91] propuso un procedimiento automático de interrupción del proceso iterativo para el cálculo de los estimadores EM utilizados en el análisis de la dispersión de neutrones, denominado validación cruzada. La aplicabilidad de este método ha sido estudiada para la reconstrucción tomográfica de imágenes de PET mediante ML-EM [LLA-1993], aunque no había sido analizada para SPECT.

Para utilizar la validación cruzada se requieren dos conjuntos independientes de proyecciones (A y B). La idea básica de la validación cruzada es reconstruir el primer conjunto de proyecciones A y utilizar el segundo conjunto B para confrontar y validar la reconstrucción. Después de cada iteración se evalúa la función de verosimilitud de las proyecciones A y B respecto a la imagen reconstruida. La verosimilitud del conjunto A – llamada verosimilitud directa- es una función creciente con el número de iteraciones, pues, si el proceso converge, el algoritmo conduce al máximo de la verosimilitud (imagen que maximiza la probabilidad de obtener las proyecciones). En cambio, la verosimilitud de la imagen reconstruida de A respecto las proyecciones B - verosimilitud cruzada -, de acuerdo con [LLA-1993], crece inicialmente, debido a que la parte de señal de las proyecciones es común a los dos conjuntos A y B, pero, tras alcanzar un valor máximo, decrece, cuando el proceso empieza a reconstruir la parte de ruido que es diferente en ambos conjuntos. El proceso debe detenerse en el punto en que la verosimilitud cruzada es máxima. Para calcular el máximo de la verosimilitud cruzada, se evalúa a cada iteración el cociente de incrementos de las verosimilitudes cruzada y directa.

$$CVR(k) = \frac{CL(k) - CL(k-1)}{DL(k) - DL(k-1)}$$

donde DL y CL son la verosimilitud directa y cruzada respectivamente (ver 3.4.3) y k hace referencia al número de iteración. CVR hace las funciones de derivada de la verosimilitud cruzada en función del número de iteraciones, ya que la verosimilitud directa es una función creciente con el número de iteraciones. El máximo de la verosimilitud cruzada se alcanza en el cero de CVR .

A la hora de utilizar *CVR* como criterio de interrupción del proceso iterativo se han de tener en cuenta las siguientes consideraciones:

Los dos conjuntos de proyecciones han de ser totalmente independientes.

Esto se consigue con una doble adquisición, ya sea temporalmente o mediante una gammacámara de doble cabezal.

- Una vez reconstruido el primer conjunto de proyecciones, los conjuntos de proyecciones A y B intercambian sus papeles: se reconstruye el conjunto B tomando como referente A. Se asume que la mejor reconstrucción posible es la suma de las reconstrucciones “óptimas” de A y B.

6.1.6. Algoritmo MLE.

A continuación se describe el algoritmo implementado. Esta descripción se hace conjuntamente para los dos algoritmos MLE-EM y MLE-OS. La variable k indica el número de iteración, la variable j el índice de los subconjuntos de proyecciones, n es el parámetro de aceleración y OS se refiere al número total de subconjuntos utilizados. El resto de variables tiene el mismo significado que en los capítulos anteriores. Para obtener el primer esquema basta con suponer $OS=1$. Para el segundo, es suficiente con hacer la asignación $n=1$. El algoritmo consta de los siguientes pasos:

I. Inicialización.

- a) Como estimación inicial se toma la imagen de máxima entropía o mínima información, es decir una imagen con un valor uniforme distinto de cero. El valor inicial de cada pixel de la imagen es el valor correspondiente a la equidistribución del número de cuentas de las proyecciones sobre la imagen, aunque debido a la atenuación no haya el mismo número de emisiones que de detecciones.

$$k = 0$$

$$nc = \sum_{j=1}^{M \times N} p_j$$

$$q^{(1)(0)} = \frac{nc}{M \cdot M}$$

- b) Se calculan los índices de los bins que componen cada subconjunto ordenado S_j .

II. Iteraciones:

$$k = k + 1$$

$$j = 0$$

- a) Para cada subconjunto de proyecciones:

- Se calcula la proyección de la imagen actual sobre el conjunto de bins correspondiente:

$$p_l^{(k)(j)} = \sum_{i=1}^{M \times M} A_{il} \cdot q_i^{(k)(j-1)} \quad l \in S_j$$

- Se actualiza la imagen según la expresión SSA o AA (adaptando para los subconjuntos ordenados la (ec 6-7) y la (ec 6-9) respectivamente). El índice i recorre todos los píxeles de la imagen:

$$q_i^{(k)(j)} = q_i^{(k)(j-1)} \cdot \left[\sum_{l \in S_j} \frac{p_l}{p_l^{(k)(j)}} \cdot A_{li} \cdot \frac{1}{\sum_{h=1}^{M \times N} A_{hi}} \right]^n$$

para SSA, y:

$$q_i^{(k)(j)} = q_i^{(k)(j-1)} \cdot \left[1 + n \cdot \left(\sum_{l \in S_j} \frac{p_l}{p_l^{(k)(j)}} \cdot A_{li} \cdot \frac{1}{\sum_{h=1}^{M \times N} A_{hi}} - 1 \right) \right]$$

para AA.

- b) Una vez recorrido todos los subconjuntos de bins de la proyección, se considera que se ha efectuado una iteración.
- Si es preciso, se corrige el número de cuentas de la imagen. Para ello, se calculan el número de cuentas nc' de las proyecciones de esta nueva imagen y se multiplican los píxeles de la imagen por el factor $\frac{nc}{nc'}$. Al ser el proyector un operador lineal, se puede asegurar que la imagen corregida por este factor tiene unas proyecciones con el mismo número de cuentas que las proyecciones experimentales.
 - Si se utiliza el esquema aditivo AA, puede que algún píxel adquiera un valor negativo. En este caso, se le asigna el valor cero.
 - Se graba la imagen para su posterior evaluación.
 - Si se requiere, se calcula CVR de la imagen actualizada respecto un segundo conjunto de proyecciones.
- c) Si el número de iteraciones preestablecido no se ha cumplido o el criterio de detención del proceso iterativo no se verifica, se realiza la asignación y se repite este proceso.

6.2. Estudio de la CVR

En primer lugar, se ha realizado el análisis de CVR como criterio de detención del proceso iterativo en imágenes de SPECT reconstruidas con el algoritmo MLE. Se ha evaluado la calidad de la imagen obtenida en la iteración que indica el criterio CVR para un conjunto de reconstrucciones. De esta manera, se ha pretendido precisar la utilidad y el margen de confianza de este mecanismo de detención del proceso iterativo de reconstrucción.

6.2.1. Pruebas realizadas

Para realizar este estudio, han sido generados numéricamente 3 conjuntos de proyecciones del modelo de Jaszczak de 100 Kc, 200 Kc y 800 Kc respectivamente, cada uno con 110 realizaciones diferentes de ruido y los mismos parámetros geométricos que el modelo real. Estas proyecciones incluyen la simulación de atenuación, PSF, dispersión y ruido, generadas según se indica en el capítulo 3. Las proyecciones han sido corregidas de dispersión por deconvolución con la SRF. Para poder utilizar *CVR*, las proyecciones correspondientes a las 10 primeras realizaciones de ruido han sido reconstruidas y sobre cada reconstrucción ha sido evaluada la verosimilitud cruzada con las proyecciones correspondientes a las 100 realizaciones de ruido restantes. La reconstrucción se ha llevado a cabo incluyendo la atenuación y la PSF en la matriz de transición. Las imágenes reconstruidas han sido evaluadas con las figuras de mérito: *CC*, *CON*, *SNR* y *CVR* definidas en el capítulo 3. Al igual que en los estudios del capítulo 4 y 5, *CON* y *SNR* se han calculado sobre el círculo 1 del modelo (ver 3.2.9).

6.2.2. Resultados obtenidos

En la Figura 6-1 se muestra la evolución de los valores de las FDM de las reconstrucciones en función del número de iteraciones, promediado sobre las 10 realizaciones de ruido. En primer lugar, se observa un comportamiento análogo al observado en los métodos iterativos estudiados en anteriores capítulos: mientras *CC* y *SNRI* alcanzan un máximo tras el que decrecen, *CONI* aumenta continuamente. Otro hecho destacable es que la evolución de las FDM es más lenta cuanto mayor es el número de cuentas de las proyecciones, es decir, cuanto menor es el ruido, menos para *CONI*, que tiene una evolución independiente del número de cuentas de las proyecciones. Esto indica que al calcular valores medios de actividad en los círculos con un número grande de

píxeles, se compensan entre sí las fluctuaciones del valor debidas el ruido.

En la Tabla 6-1, se muestra la dependencia del criterio *CVR* con la proyección particular de referencia. En el primer cuadro, se indica, para diferentes niveles de ruido, el número de iteraciones máximo, mínimo y promedio indicado por el criterio *CVR* para 100 diferentes segundas proyecciones. Se observa que la dispersión del número de iteraciones aumenta con el número de cuentas en las proyecciones, de acuerdo con la mayor lentitud en la evolución del proceso de reconstrucción observada en la Figura 6-1 para dichas proyecciones. En cada caso, los valores individuales y promedio son muy parecidos. En los tres cuadros siguientes, se muestran respectivamente los valores de tres FDM en la iteración mínima, promedio y máxima indicada por *CVR* con las 100 segundas proyecciones. Para los valores del número de iteraciones extremos, la variación de estas tres FDM es poco significativa ya que la mayoría de resultados están dentro de un intervalo en que las variaciones son mínimas. En los valores extremos, se tienen imágenes con mejor *CC* (menos ruidosas para un número de iteraciones inferior) o con mejor *CON* (más contrastadas para un número de iteraciones mayor). En la Figura 6-2 se muestra toda la evolución de la imagen con el número de iteraciones, estando ampliadas las imágenes correspondientes al número mínimo, promedio y máximo de iteraciones. En esta ampliación se pone de manifiesto las diferencias entre la primera y la última imagen válida según *CVR*. Mientras en la iteración 34 la imagen es más suave, en la iteración 56 está más contrastada (los círculos negros están mejor delimitados y su valor es inferior). Sin embargo, a pesar de estas diferencias ambas imágenes son aceptables para imágenes de propósito general. La imagen obtenida en la iteración promedio es una situación intermedia entre mayor suavidad y mayor contraste.

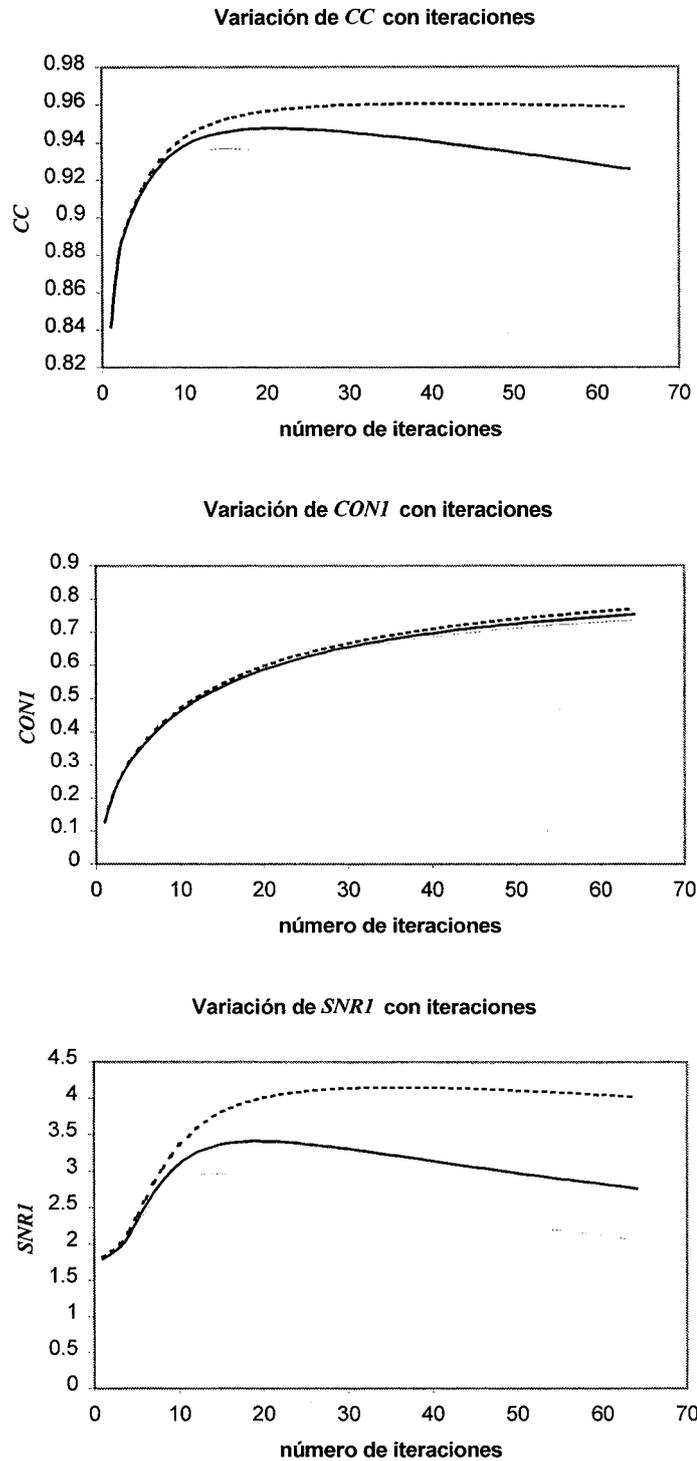


Figura 6-1. Variación de las FDM con el número de iteraciones para los modelos de 100Kc (línea delgada), 200Kc (línea gruesa) y 800Kc (línea de puntos).

| Iteraciones según CVR | 100 Kc | | 200 Kc | | 800 Kc | |
|--------------------------------|--------|-------------|--------|-------------|--------|--------------|
| | a | b | a | b | a | b |
| número de iteraciones mínimo | 26 | 24.5 | 34 | 34.9 | 65 | 69.1 |
| número de iteraciones promedio | 31.8 | 31.1 | 45.2 | 46.2 | 100.5 | 104.3 |
| número de iteraciones máximo | 41 | 39.8 | 56 | 61.3 | 144 | 143.7 |
| desviación estándar | 2.9 | 3.0 | 4.9 | 5.2 | 13.3 | 15.3 |

| Valores de CC | 100 Kc | | 200 Kc | | 800 Kc | |
|--------------------------------|--------|--------------|--------|--------------|--------|--------------|
| | a | b | a | b | a | b |
| número de iteraciones mínimo | 0.930 | 0.931 | 0.944 | 0.943 | 0.957 | 0.958 |
| número de iteraciones promedio | 0.923 | 0.924 | 0.939 | 0.937 | 0.951 | 0.953 |
| número de iteraciones máximo | 0.911 | 0.914 | 0.932 | 0.928 | 0.942 | 0.946 |

| Valores de SNRI | 100 Kc | | 200 Kc | | 800 Kc | |
|--------------------------------|--------|-------------|--------|-------------|--------|-------------|
| | a | b | a | b | a | b |
| número de iteraciones mínimo | 2.75 | 2.79 | 3.16 | 3.23 | 3.93 | 3.99 |
| número de iteraciones promedio | 2.60 | 2.64 | 2.98 | 3.04 | 3.64 | 3.72 |
| número de iteraciones máximo | 2.41 | 2.45 | 2.81 | 2.81 | 3.31 | 3.43 |

| Valores de CONI | 100 Kc | | 200 Kc | | 800 Kc | |
|--------------------------------|--------|-------------|--------|-------------|--------|-------------|
| | a | b | a | b | a | b |
| número de iteraciones mínimo | 0.63 | 0.62 | 0.64 | 0.68 | 0.77 | 0.78 |
| número de iteraciones promedio | 0.66 | 0.65 | 0.67 | 0.72 | 0.81 | 0.82 |
| número de iteraciones máximo | 0.70 | 0.69 | 0.69 | 0.75 | 0.84 | 0.84 |

Tabla 6-1. En el primer cuadro se muestra, para el modelo con 100 Kc, 200 Kc y 800 Kc, el número de iteraciones mínimo, promedio y máximo que indica el criterio CVR para una realización determinada de ruido (columnas a) y para el promedio de 10 realizaciones de ruido (columnas b) al contrastar la reconstrucción con 100 segundas proyecciones diferentes. En las restantes tablas se muestra los valores de tres FDM para el número de iteraciones mínimo, promedio y máximo que indica la primera tabla.

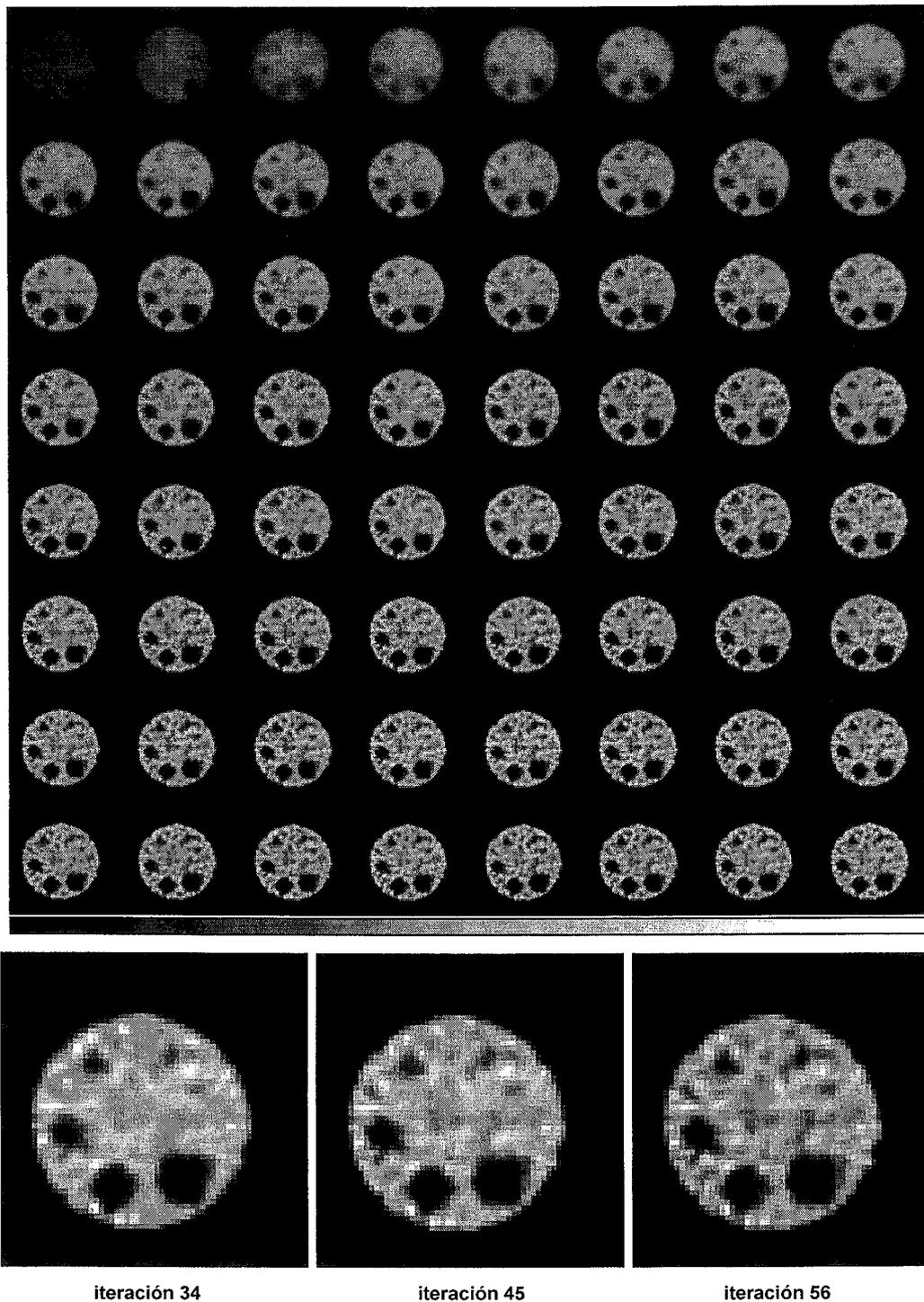


Figura 6-2. Evolución de la reconstrucción en función del número de iteraciones (dispuesto por filas) para una realización de ruido determinada (200Kc). Las tres imágenes separadas y ampliadas corresponden al número mínimo (34), promedio (45) y máximo (56) de iteraciones indicadas por C/R al cruzarse la reconstrucción con 100 segundas proyecciones distintas

6.2.3. Discusión de los resultados

El primer resultado observado es que, al igual que en ART, las diferentes FDM tienen un comportamiento dispar. Mientras *CON* es creciente, tanto *CC* como *SNR* pasan por un máximo tras el que empiezan a decrecer. No es posible, por tanto, mejorar dichas FDM simultáneamente. Aunque las cualidades a optimizar de la imagen dependen de su utilidad, para un propósito general debe encontrarse un punto de compromiso donde sus valores estén equilibrados. Los resultados observados en $CVR=0$ muestran que este criterio interrumpe el proceso iterativo en un punto donde tanto *CC* y *SNR* como *CON* están próximos a su valores óptimos. Mientras las dos primeras FDM ya han sobrepasado la iteración en la que tienen su valor máximo, *CON* todavía no lo alcanzado. Un menor número de iteraciones produciría mejores valores de *CC* y *SNR* (que reflejan menos ruido sobre la imagen) y un contraste peor. Si, por el contrario, se sobrepasa el número de iteraciones indicado por *CVR*, *CON* aumenta a costa de la disminución de *CC* y *SNR* (imágenes más ruidosas).

En lo referente a la variación respecto el número de cuentas sobre las proyecciones, se observa que cuanto menor es la relación señal-ruido en las proyecciones, *CVR* detiene el proceso en un número inferior de iteraciones. La justificación de esta relación viene dada porque cuanto menor es la presencia de ruido, mayor puede ser el ajuste de la imagen reconstruida con las proyecciones y, por tanto, el proceso admite un mayor número de iteraciones. Recíprocamente, si la presencia de ruido es importante, la mejor imagen no debe ajustarse mucho a las proyecciones para que no se produzca el ajuste de la componente de ruido, y, por consiguiente, el número de iteraciones debe ser menor.

Del estudio en la dependencia de la *CVR* respecto la proyección de referencia, se comprueba que, si bien existe dependencia de la iteración que indica *CVR* con la proyección particular escogida, en todos los casos

la reconstrucción obtenida con el método *CVR* es aceptable para imágenes de propósito general. Según se muestra en la Tabla 6-1 y en la Figura 6-2, las variaciones de las FDM entre los números mínimos y máximo de iteraciones obtenidas con este criterio al contrastar con 100 segundas proyecciones diferentes son poco significativas. No obstante, debe tenerse en cuenta dicha dependencia al utilizar este método. Si, en función del diagnóstico a realizar, se desean imágenes poco ruidosas o muy contrastadas, no es recomendable emplear ciegamente este criterio, pues *CVR* no garantiza la minimización o maximización de estos parámetros. En este caso, debe hacerse un seguimiento de la evolución de la imagen y determinar manualmente el punto óptimo de interrupción del proceso iterativo.

6.3. Estudio del parámetro de aceleración

El objetivo de este estudio es comprobar la relación entre los algoritmos SSA y AA, comprobar el efecto del factor de aceleración en MLE y corroborar la utilidad de *CVR* como método de interrupción del proceso iterativo en imágenes de SPECT al usar esquemas acelerados.

6.3.1. Pruebas realizadas

Para realizar este estudio se han utilizado las mismas proyecciones reales utilizadas en el apartado anterior. También han sido generadas numéricamente 4 conjuntos de proyecciones de 100 Kc, 200 Kc, 400 Kc y 800 Kc respectivamente, cada uno de 20 realizaciones de ruido diferentes y los mismos parámetros geométricos que el modelo real. En estas proyecciones se han incluido la simulación de atenuación, PSF, dispersión y ruido. Las proyecciones han sido corregidas de dispersión por deconvolución de la SRF correspondiente. Para poder utilizar *CVR*, las 10 primeras realizaciones han sido reconstruidas, mientras que las 10 restantes se han utilizado como referencia, tanto en el caso real como en

el simulado. Han sido probados 4 factores de aceleración 1, 1.5, 2 y 2.5 para todas las proyecciones disponibles, con el algoritmo SSA y con AA. Algún valor del factor de aceleración mayor (3, 3.5 y 4) también ha sido probado en alguna de las proyecciones. Las imágenes reconstruidas han sido evaluadas con las figuras de mérito: *CC*, *CON*, *SNR* y *CVR*. El estudio de la primera de estas FDM permite la evaluación del factor de aceleración. Las FDM *CON* y *SNR* se han evaluado sobre los círculos 2 y 5 del modelo (ver 3.2.9), el primero en representación de los círculos mayores y el segundo de los menores, para poder de manifiesto si existe dependencia de la aceleración obtenida en la evolución de estas FDM con el tamaño del círculo.

6.3.2. Resultados obtenidos

A no ser que se especifique lo contrario, los resultados referidos en este punto corresponden a la reconstrucción de las proyecciones generadas numéricamente de 200Kc. En la Figura 6-3, se muestra la dependencia de las diferentes FDM respecto el número de iteraciones para SSA y $n=1$ (línea rayas cortas), $n=1.5$ (línea punto- raya), $n=2$ (línea continua) y $n=2.5$ (línea de puntos) y para AA y $n=2$ (triángulos). En cada caso, la línea corresponde al promedio de las 10 realizaciones de ruido. Con valores superiores del factor de aceleración se obtienen imágenes que se deterioran por inestabilidad de la solución a las pocas iteraciones. Esta degeneración del proceso iterativo para factores de aceleración grandes se refleja ya para $n=2.5$ en el comportamiento oscilante de *CVR*. Valores superiores del parámetro de aceleración han producido una fuerte inestabilidad en el proceso iterativo de reconstrucción. En cuanto al comportamiento respecto el parámetro de aceleración, para poder comparar cuantitativamente los valores de las FDM conseguidos, la Tabla 6-2 muestra para *CC* y *SNR*, el valor máximo y el número de iteraciones que precisa para alcanzarlo. Dado que el contraste es una función creciente, el valor máximo del contraste se obtiene siempre en la última

iteración, como se ve en la Figura 6-3. Los valores máximos de *CON* obtenidos para los diferentes factores de aceleración no son directamente comparables, puesto el número de iteraciones realizado se ha limitado al mismo valor en todos los casos y no es equivalente 64 iteraciones para los diferentes factores de aceleración.

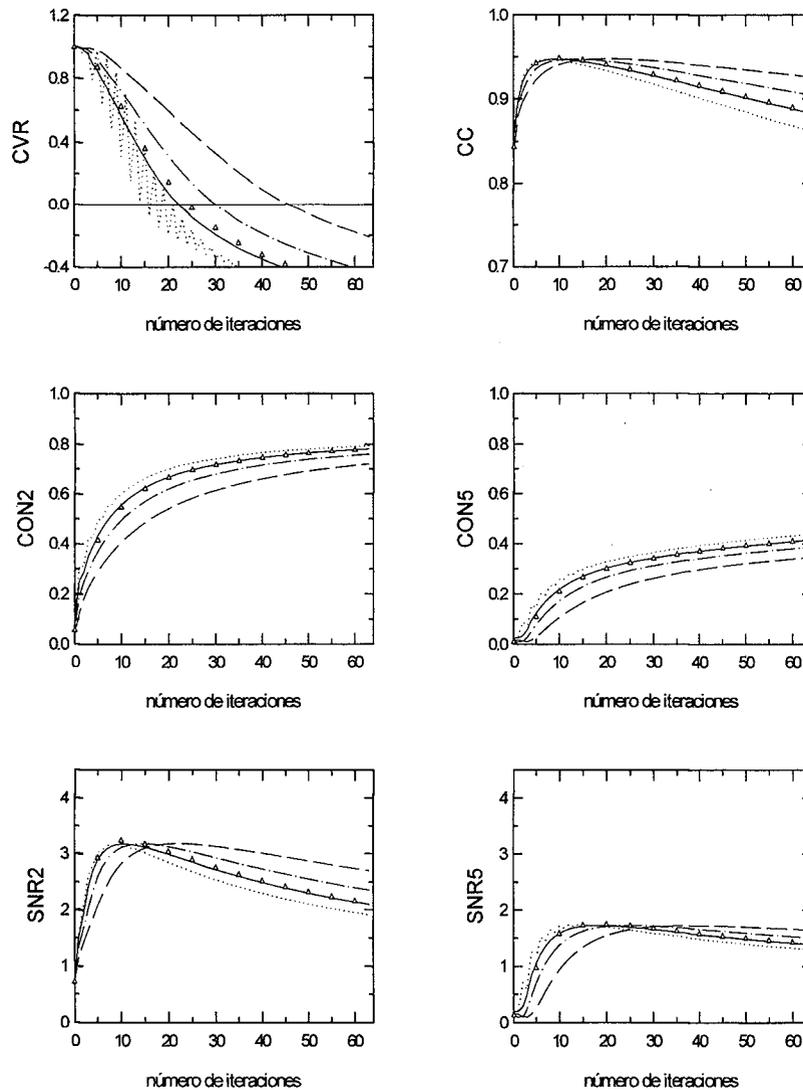


Figura 6-3. Estudio simulado con 200Kc. Representación de CVR y otras FDM respecto el número de iteraciones para SSA y $n=1$ (rayas), $n=1.5$ (punto-rayas), $n=2$ (continua) y $n=2.5$ (puntos). También están representados los valores de AA y $n=2$ (triángulos-representado cada cinco iteraciones).

En vez de mostrar el valor máximo de CON y las iteraciones, la Tabla 6-2 se muestra, para los diferentes factores de aceleración, el número de iteraciones preciso para tener el valor de CON más parecido al obtenido para $n=1$ y 64 iteraciones. También se muestra el número de iteraciones en los que CVR cambia de signo (paso por el cero). Se observa una gran coincidencia de los resultados de SSA y AA para $n=2$. Salvo una ligera discrepancia en las primeras iteraciones las diferencias entre los valores de las FDM son despreciables. Se advierte, tanto en la Figura 6-3 como en la Tabla 6-2, que los valores máximos de CC y SNR son aproximadamente los mismos para los distintos factores de aceleración y ambos algoritmos de reconstrucción mientras que el número de iteraciones requerido en cada caso es inversamente proporcional al valor de n .

| Factor | CC | | $CON2$ | | $CON5$ | | $SNR2$ | | $SNR5$ | | $CVR=0$ | |
|--------|-------|-----|--------|-----|--------|-----|--------|-----|--------|-----|---------|--|
| | Valor | Ite | Valor | Ite | Valor | Ite | Valor | Ite | Valor | Ite | Ite | |
| MLE-EM | | | | | | | | | | | | |
| 1 | 0.947 | 21 | 0.720 | 64 | 0.345 | 64 | 3.181 | 23 | 1.722 | 38 | 47 | |
| SSA | | | | | | | | | | | | |
| 1.5 | 0.947 | 14 | 0.719 | 42 | 0.344 | 42 | 3.177 | 15 | 1.724 | 25 | 32 | |
| 2 | 0.947 | 10 | 0.721 | 32 | 0.346 | 32 | 3.173 | 12 | 1.724 | 19 | 24 | |
| 2.5 | 0.947 | 9 | 0.720 | 25 | 0.345 | 25 | 3.168 | 10 | 1.736 | 15 | 17 | |
| AA | | | | | | | | | | | | |
| 1.5 | 0.948 | 14 | 0.721 | 43 | 0.346 | 43 | 3.207 | 15 | 1.732 | 27 | 32 | |
| 2 | 0.948 | 11 | 0.720 | 32 | 0.345 | 32 | 3.230 | 11 | 1.742 | 19 | 26 | |
| 2.5 | 0.948 | 9 | 0.718 | 25 | 0.343 | 25 | 3.253 | 10 | 1.758 | 15 | 23 | |

Tabla 6-2. Valores de las FDM y iteraciones necesarias para alcanzarlos para diferentes factores de aceleración. El método sin aceleración MLE-EM coincide con SSA y AA y $n=1$. De CC , $SNR2$ y $SNR5$ se muestran los valores máximos. De $CON2$ y $CON5$ los valores más próximos al obtenido para $n=1$ y 64 iteraciones. En la última columna está indicado el número de iteraciones necesarios para que CVR sea negativo.

En la Figura 6-4, está representado CC en función del número de iteraciones para $n=1$ (línea rayas cortas), para SSA $n=2$ (línea continua) y para AA y $n=2$ (triángulos). El primer conjunto de puntos está representado respecto el eje-x inferior de la gráfica (1-64 iteraciones) y los otros dos respecto el superior (1-32 iteraciones). De esta manera, se pone de manifiesto que los resultados obtenidos para $n=2$ coinciden (excepto pequeñas diferencias en las primeras iteraciones) con los obtenidos para $n=1$ con el doble de iteraciones.

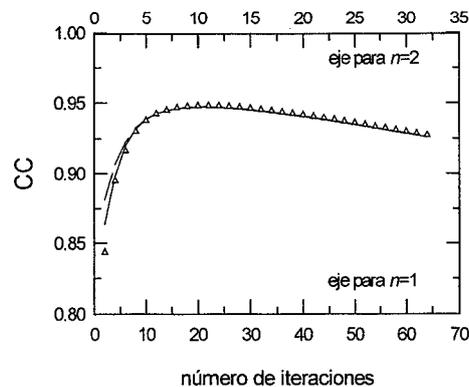


Figura 6-4. CC respecto el número de iteraciones. Para $n=2$ SSA (línea continua) y AA (triángulos- representados de 5 en 5 iteraciones) el número de iteraciones corresponde al eje x superior mientras que para $n=1$ (rayas) el eje de las x es el inferior.

Todos estos resultados son consistentes con la hipótesis que el parámetro de sobrerelajación actúa solamente como un factor de aceleración, con una aceleración inversamente proporcional a su valor, sin modificar la calidad de las imágenes reconstruidas. Con el propósito de acabar de confirmar esta premisa, se ha calculado mediante el método simplex [NEL-65] el factor de escala con que se debía contraer el eje x de las gráficas obtenidas de las diferentes FDM y factores de aceleración de 1.5, 2 y 2.5 para que coincidieran con las correspondientes al algoritmo sin aceleración ($n=1$). Los promedios sobre las FDM (calculadas en todos

los círculos) de los factores de escala del eje de las iteraciones que producen un mayor ajuste de las gráficas respecto las correspondientes a $n=1$ se muestran en la Tabla 6-3. Estos resultados están de acuerdo con la hipótesis que se pretendía verificar.

| n | 1.5 | 2 | 2.5 |
|-----|-------|-------|-------|
| SSA | 1.506 | 2.005 | 2.440 |
| AA | 1.464 | 1.906 | 2.277 |

Tabla 6-3. Valor promedio sobre todas las FDM calculadas del factor de contracción que debe experimentar el eje de las iteraciones para que la gráfica tenga un máximo ajuste con la correspondiente a $n=1$.

La Figura 6-5 ilustra la dependencia de las FDM con el número de cuentas de las proyecciones (o, equivalentemente, con el ruido sobre las proyecciones). Las curvas dibujadas corresponden a SSA y $n=2$ y 100Kc (puntos), 200Kc (continua), 400Kc (punto-rayas) y 800Kc (rayas). Se observa que el decrecimiento de CC y SNR tras el máximo es más rápido cuanto menor es el número de cuentas. Esto refleja que ambas FDM son muy sensibles a la presencia de ruido en la imagen reconstruida. No ocurre lo mismo con CON . Las curvas relativas a los diferentes números de cuentas en las proyecciones están prácticamente superpuestas, únicamente se observan pequeñas discrepancias en $CON5$ y 100Kc donde los valores de la curva son ligeramente inferiores. También se observa que cuanto mayor es el número de cuentas de las proyecciones, mayor es el número de iteraciones para las que CVR cambia de signo. La dependencia es lineal. Si se ajusta mediante una regresión lineal el número de iteraciones definido por CVR se obtiene que:

$$iteraciones = 0.0459 \cdot cuentas + 12.78$$

con un coeficiente de correlación de $r^2 = 0.9935$.

En la Figura 6-6 se comparan los resultados obtenidos de las proyecciones generadas numéricamente (línea continua) con los de las proyecciones del modelo físico (puntos) ambas reconstruidas con SSA y $n=2$. Se contempla una buena concordancia cualitativa de los resultados de ambos modelos, aunque cuantitativamente existan pequeñas diferencias.

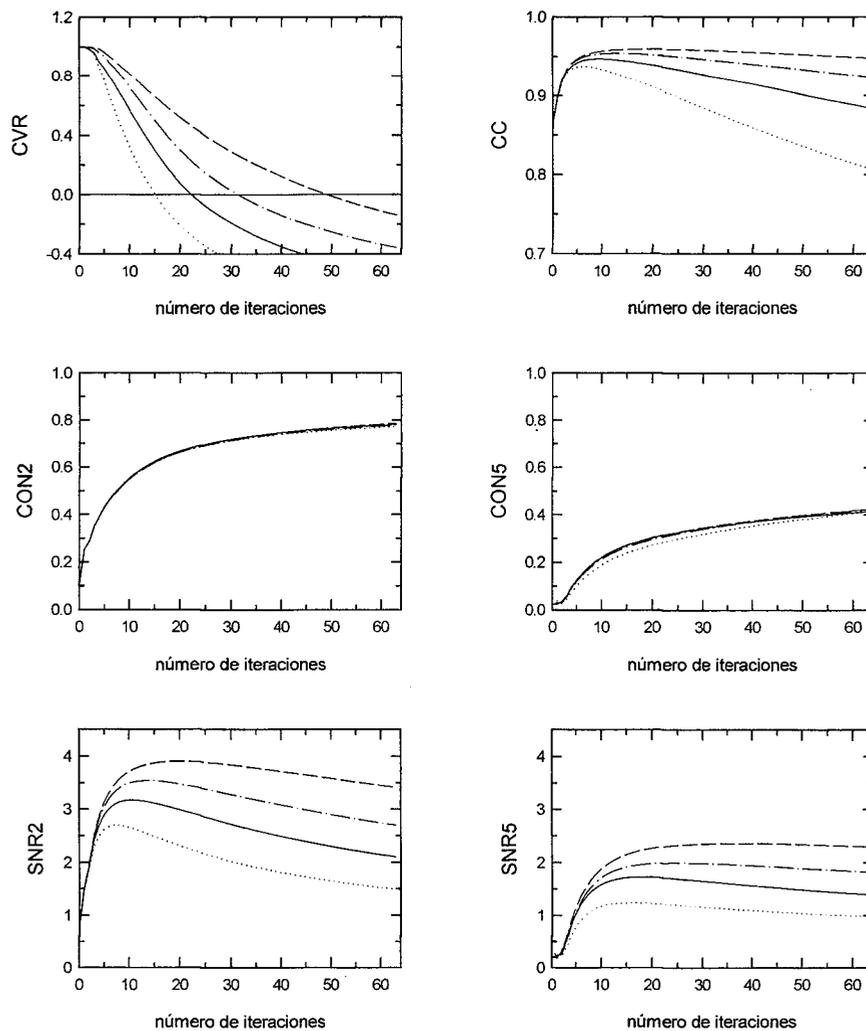


Figura 6-5. Estudios simulados. *CVR* y otras FDM en función del número de iteraciones para SSA y $n=2$ y diferentes números de cuentas en las proyecciones: 100Kc (puntos), 200Kc (línea continua), 400Kc (punto-rama) y 800Kc (rayas).

| Modelo numérico | | | | | | Modelo real | | | | | |
|-----------------|-------|-------|-------|-------|-------|-------------|-------|-------|-------|-------|-------|
| Ite | CC | CON2 | CON5 | SNR2 | SNR5 | Ite | CC | CON2 | CON5 | SNR2 | SNR5 |
| 10 | 0.946 | 0.530 | 0.201 | 3.131 | 1.514 | 11 | 0.939 | 0.566 | 0.236 | 2.838 | 1.498 |
| 27 | 0.932 | 0.700 | 0.320 | 2.848 | 1.678 | 22 | 0.930 | 0.678 | 0.331 | 2.714 | 1.670 |
| 64 | 0.883 | 0.791 | 0.414 | 2.111 | 1.399 | 64 | 0.875 | 0.765 | 0.443 | 1.974 | 1.397 |

Tabla 6-4. Valores de las FDM obtenidas en la reconstrucción del modelo real y numérico (200Kc) con SSA y $n=2$. En la primera fila de resultados se muestran los valores de las FDM en la iteración en el máximo de *CC*. La segunda está formada por los valores de las FDM correspondientes a la iteración en la que *CVR* cruza el cero. La última fila presenta los valores de las FDM en la última iteración realizada (64). Al ser *CON* una función creciente, esta última imagen es para la cual el contraste es máximo.

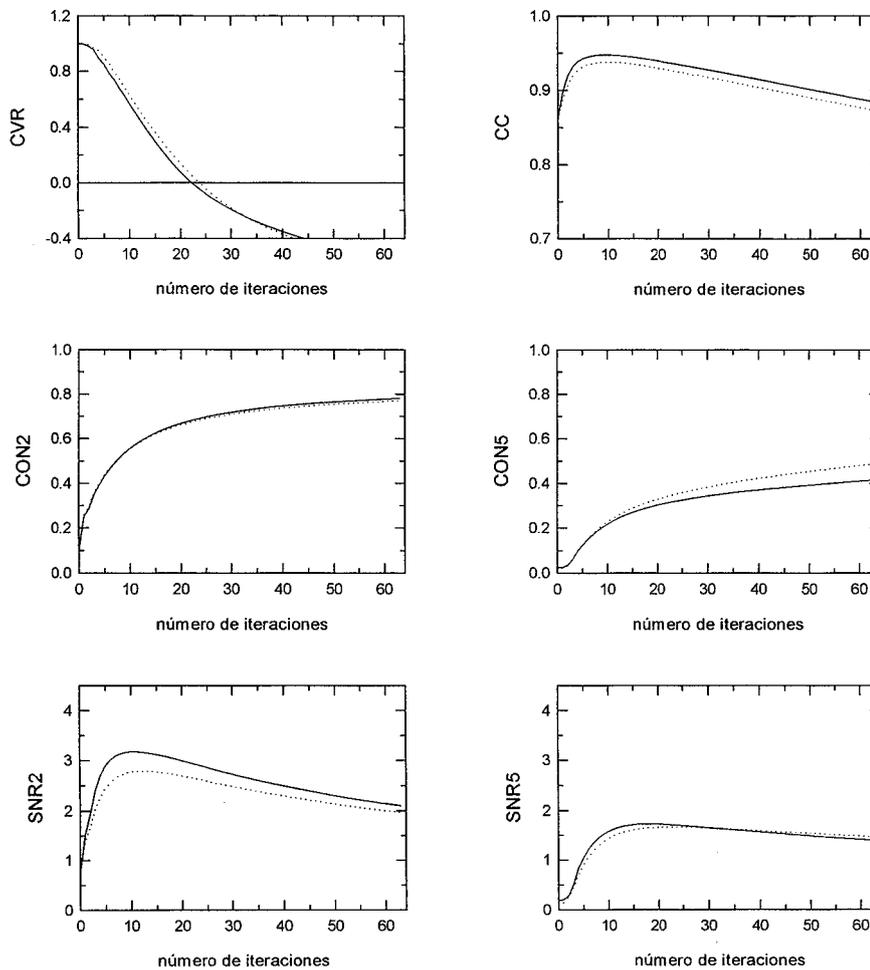


Figura 6-6. *CVR* y otras FDM respecto el número de iteraciones para SSA y $n=2$ de los modelos real (puntos) y simulado (línea continua) con 200Kc.

En la tabla 6-4 se comparan los resultados obtenidos con el modelo real y simulado (ambos con 200 Kc) para el esquema SSA con $n=2$, en el máximo de CC , en $CVR=0$ y en el máximo de CON . Se observa que el criterio CVR produce imágenes con las FDM compensadas. Respecto a la comparación entre el modelo real y el simulado, se notan pequeñas diferencias. Las FDM dependientes del ruido alcanzan resultados ligeramente superiores en el estudio simulado, mientras que CON obtiene mejores valores en el modelo real. Estas discrepancias se pueden justificar con las aproximaciones realizadas en la simulación.

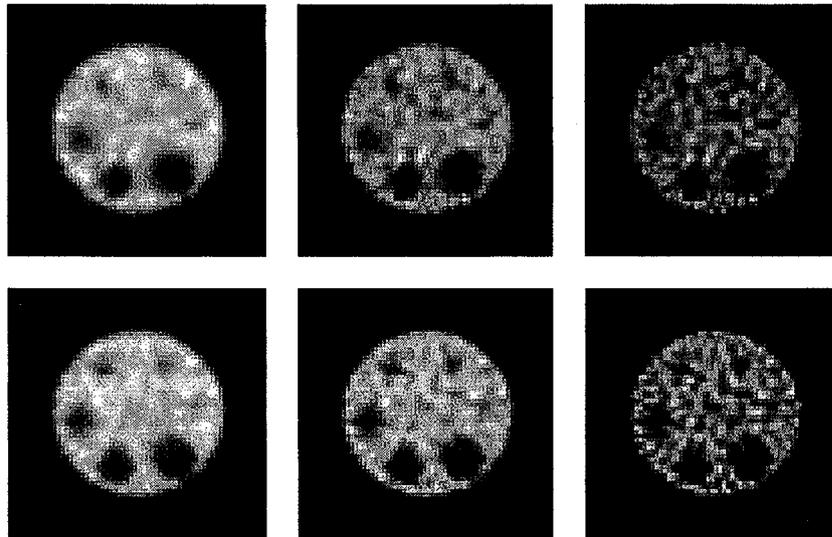


Figura 6-7. Imágenes reconstruidas del modelo numérico (200Kc) y real con SSA y $n=2$ a las iteraciones indicadas en la Tabla 6-4. En la fila superior se muestra correlativamente el modelo numérico a las 10, 27 y 64 iteraciones. Análogamente, en la inferior, se presenta la reconstrucción del modelo real a las 11, 22 y 64 iteraciones respectivamente.

La Figura 6-7 muestra las imágenes reconstruidas con SSA y $n=2$ para las proyecciones del modelo numérico (fila superior) y del modelo real (fila inferior). En cada serie, la primera imagen corresponde a la iteración donde CC alcanza su valor máximo. La imagen central es la obtenida empleando CVR como criterio de detención del proceso iterativo (iteración en la que CVR cruza el cero). La última es la imagen obtenida en la última

iteración realizada (iteración 64). En ambas series se observa un progresivo ajuste del ruido al aumentar las iteraciones y una mayor contraste de los círculos que se traduce en una mejor definición de los bordes y un valor medio más próximo a cero.

6.3.3. Discusión de los resultados

La Figura 6-3, Figura 6-4 y Tabla 6-2 muestran que los resultados de SSA y AA son muy parecidos para todos los valores del parámetro de aceleración. Se observan pequeñas diferencias localizadas en las primeras iteraciones. Esto indica, por una parte, que el comportamiento de ambos algoritmos es muy similar. Por otra parte, las pequeñas diferencias observadas en la Figura 6-4 pueden ser explicadas por el hecho que la aproximación lineal de SSA puede no ser adecuada en las primeras iteraciones por estar el término α en (ec 6-10) alejado de 1. No obstante, dada la rápida convergencia de ambas líneas, puede concluirse que la expansión lineal de SSA es válida para todo el proceso.

En lo que respecta al factor de aceleración, los resultados indican que los valores menores de 2.5 no afectan la estabilidad del algoritmo. De la Tabla 6-3 se infiere que los valores de las FDM indican que el factor de aceleración incrementa la rapidez del método en un orden aproximadamente igual a su valor (más parecido cuanto menor es su valor).

Por otra parte, el criterio *CVR* de detención del proceso iterativo tiene un comportamiento correcto al utilizarse un parámetro de aceleración inferior a 2.5. Al igual que con MLE sin aceleración, *CVR* interrumpe el proceso iterativo en un punto en que los valores de *CC*, *SNR* y *CON* están bien equilibrados. La buena concordancia entre los resultados numéricos con los reales sugiere que estos resultados son extrapolables a estudios reales.

Valores mayores de 2 del parámetro pueden hacer que el proceso iterativo llegue a ser inestable y, por tanto, no convergente, aunque en [TAN-86] se indique que valores entre 2 y 4 producen buenos resultados.

6.4. Subconjuntos ordenados.

El objetivo de este estudio es evaluar el comportamiento del algoritmo MLE-OS para imágenes de SPECT y comprobar la aplicabilidad de *CVR* como criterio de detención del proceso iterativo cuando es usado este algoritmo. En este apartado, dado que puntualmente algunas pruebas ha presentado un comportamiento anómalo de *DL*, dejando de ser una función estrictamente creciente, en vez de emplear la variable *CVR*, se han representado *DL* y *CL* por separado. El criterio *CVR* =0 equivale a maximizar *CL*.

6.4.1. Pruebas realizadas

Para realizar este estudio han sido utilizadas las mismas proyecciones, tanto las reales como las simuladas, que en el estudio MLE con parámetro de aceleración (ver 6.3.1). Dada la naturaleza de este método de aceleración y sus buenos resultados, se ha creído conveniente probarlo también para una imagen con mapa de atenuación no uniforme. Por este motivo, han sido generadas numéricamente un conjunto de proyecciones del modelo de tórax con los siguientes parámetros (análogos a los de un estudio clínico de tórax):

Colimador A de agujeros paralelos (ver 3.1)

60 proyecciones equiespaciadas en 360°.

64 bins de 0.566 cm en las proyecciones.

Radio de giro de la gammacámara de 20.4 cm.

50Kc, 100Kc, 200 Kc, 400Kc, 800Kc y 1600Kc, 20 realizaciones de ruido diferentes en cada caso.

Todos las proyecciones han sido reconstruidas utilizando 1, 2, 3, 4, 5, 6, 10, 12, 15, 20, 30 y 60 subconjuntos ordenados. Análogamente a las

pruebas realizadas en el estudio anterior, las imágenes reconstruidas han sido evaluadas con las figuras de mérito: CC , CON , SNR (sobre los círculos 2 y 5 del modelo -ver 3.2.9) y CVR .

6.4.2. Resultados obtenidos

En la Figura 6-8, las cuatro primeras gráficas corresponden a los resultados obtenidos para el modelo de Jaszczak simulado de 200Kc, mientras que las cuatro restantes corresponden a la reconstrucción del modelo real. En cada una de ellas están representados los resultados obtenidos utilizando 1 subconjunto ordenado (línea continua), 10 (círculos blancos), 20 (círculos negros), 30 (cuadrados blancos) y 60 subconjuntos ordenados (cuadrados negros). En cada gráfica se representa el valor de la FDM en función del número de iteraciones utilizados para $OS=1$. Se superponen los valores de las FDM obtenidos con los diferentes valores de OS , dispuestos sobre la iteración resultante de multiplicar el número de iteración correspondiente por el valor de OS . Esto se hace así para comprobar la hipótesis de que la utilización de un valor determinado de OS acelera en un mismo factor OS el proceso iterativo, siendo la iteración n -ésima con OS diferente de 1 equivalente a la iteración $n \cdot OS$ obtenida con un sólo subconjunto ordenado. Los valores de las FDM representadas son el promedio sobre las diez realizaciones de ruido del CC , el contraste del segundo y quinto círculo negro y la verosimilitud directa y cruzada respecto un segundo conjunto de proyecciones, distinto para cada realización de ruido. En las cuatro gráficas correspondientes al estudio real, se adjuntan también los resultados del modelo simulado con $OS=1$ (línea discontinua) a fin de poder contrastar los resultados simulados con los reales.

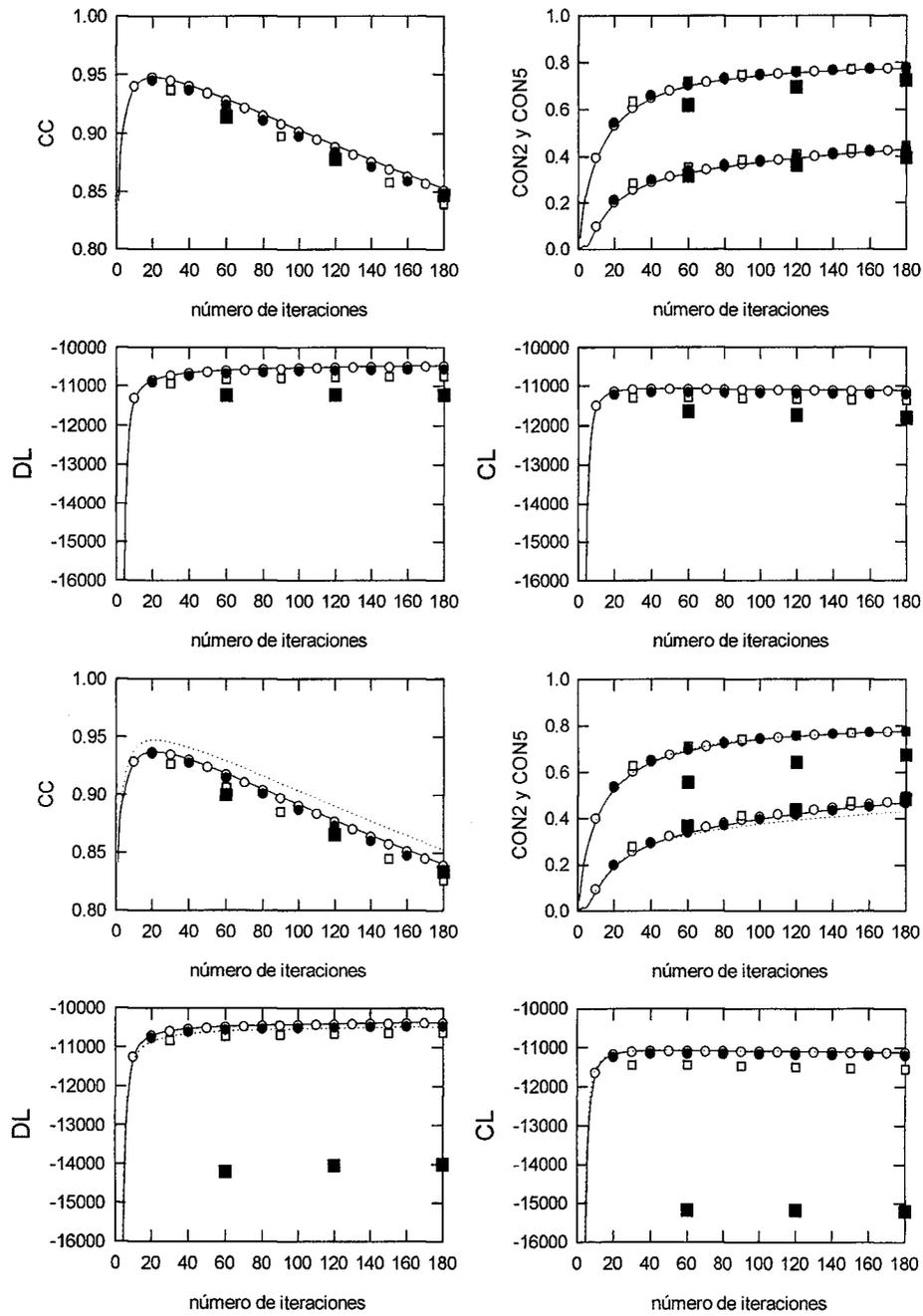


Figura 6-8. Representación de CC , $CON2$, $CON5$, DL (verosimilitud directa) y CL (verosimilitud cruzada) respecto al número de iteraciones multiplicado por OS para diferentes valores de OS . Las 4 primeras gráficas corresponden al estudio simulado (200 Kc) mientras que las 4 restantes son del estudio real. $OS=1$ (continua), $OS=10$ (círculos blancos), $OS=20$ (círculos negros), $OS=30$ (cuadrados blancos) y $OS=60$ (cuadrados negros). En los estudios reales, la línea de puntos es la referencia correspondiente al modelo simulado y $OS=1$.

El primer resultado destacable en los dos estudios (simulado y real) es que para los valores de OS menores (10 y 20) hay una perfecta superposición de los resultados con los de $OS=1$, de acuerdo con la premisa expuesta en [HUD-94] referente a que el factor de aceleración producido por el uso de subconjuntos ordenados coincide con el valor de OS . No obstante, se observa también que para valores mayores de OS , los valores de las FDM alcanzados son peores, denotando una peor calidad de la imagen. Este hecho no es debido a que, para valores de OS altos, el factor de aceleración no sea igual al valor de OS . En efecto, si se mira el comportamiento de CC y $CON2$ para $OS=60$ en las dos primeras gráficas de la Figura 6-8, se observa que la gráfica de CC indicaría que $OS=60$ acelera un factor mayor que 60, mientras que la gráfica $CON2$ indica lo contrario.

En la Figura 6-9, se expresan los resultados análogos obtenidos del modelo digital de tórax. Se aprecian los mismos comportamientos que en el modelo de Jaszczak simulado y real. La única pequeña diferencia, difícil de justificar, es el mejor comportamiento de CC a un número de iteraciones para $OS=60$ respecto valores menores de OS .

Las gráficas de la Figura 6-10 representan los mismos resultados que la Figura 6-8 para el estudio simulado de Jaszczak con 50 Kc y 800 Kc respectivamente. En primeras las cuatro gráficas, correspondientes a 50Kc, se observa que para $OS= 60, 30$ e incluso 20, los valores obtenidos de CC , DL i CL son peores respecto los conseguidos con $OS=1$. Contrariamente, en las cuatro inferiores (correspondientes a 800 Kc, los valores de las FDM se mantienen para valores altos de OS . Sólo $OS=60$ presenta resultados claramente inferiores que los de $OS=1$ para algunas FDM. Comparando las cuatro gráficas correspondientes a 50 Kc, con las de 800Kc y las de la Figura 6-8 (200 Kc), se observa que el número de subconjuntos utilizables sin que se produzca una degradación de la

imagen es mayor cuanto mayor sea el número de cuentas, es decir, cuanto mayor sea la relación señal-ruido en las proyecciones.

Las Figuras 6-11 y 6-12 muestran las imágenes correspondientes al máximo de CC para el modelo de Jaszczak simulado (200 Kc) y el modelo de tórax con el mismo número de cuentas utilizando valores de $OS=1, 10, 20, 30$ y 60 . Puede observarse, en concordancia con lo visto en las gráficas de la Figura 6-8, la total equivalencia de las 3 primeras imágenes, correspondientes a $OS=1$ y 21 iteraciones, $OS=10$ y 2 iteraciones y $OS=20$ y 1 iteración, y la peor calidad de las dos últimas, correspondientes a $OS=30$ y $OS=60$ y una iteración.

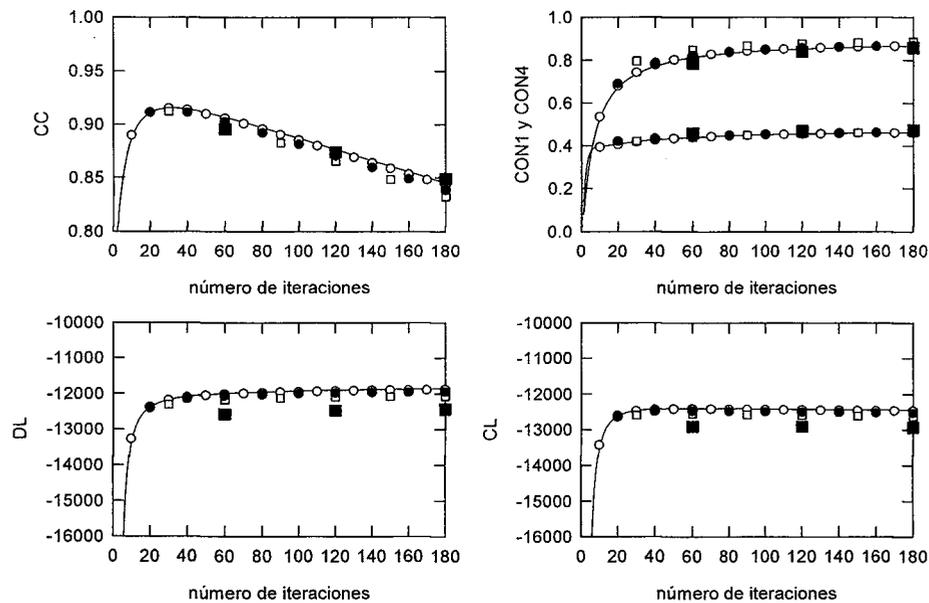


Figura 6-9. Resultados obtenidos a partir del modelo simulado de tórax. Representación de CC , $CON1$, $CON4$, DL (verosimilitud directa) y CL (verosimilitud cruzada) respecto al número de iteraciones multiplicado por OS para diferentes valores de OS : $OS=1$ (continua), $OS=10$ (círculos blancos), $OS=20$ (círculos negros), $OS=30$ (cuadrados blancos) y $OS=60$ (cuadrados negros)

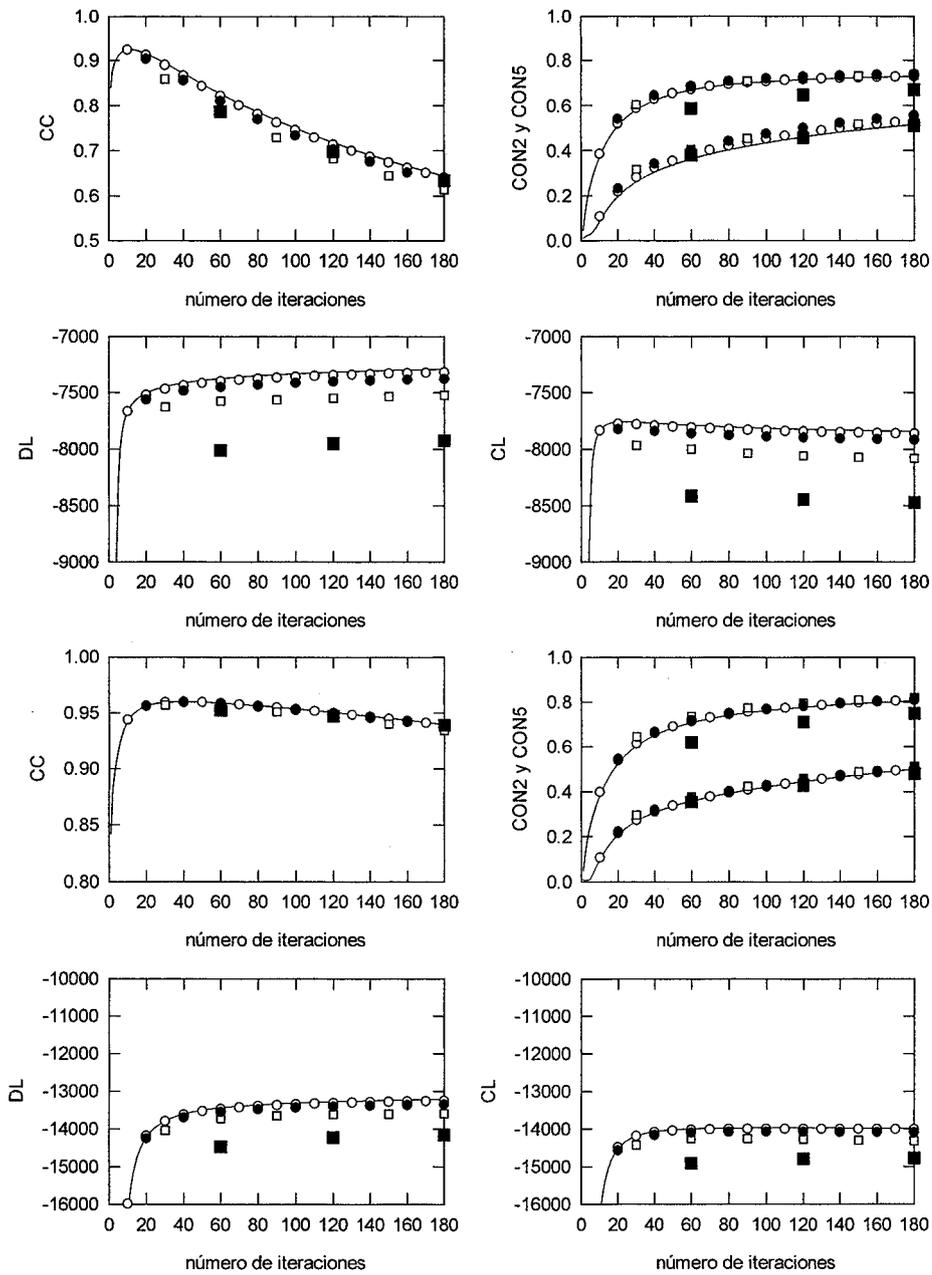


Figura 6-10. Representación de CC , $CON2$, $CON5$, DL (verosimilitud directa) y CL (verosimilitud cruzada) respecto el número de iteraciones multiplicado por OS para diferentes valores de OS . Las 4 primeras gráficas corresponden al estudio simulado con 50Kc mientras que las 4 segundas son del estudio simulado con 800Kc. $OS=1$ (continua), $OS=10$ (círculos blancos), $OS=20$ (círculos negros), $OS=30$ (cuadrados blancos) y $OS=60$ (cuadrados negros).

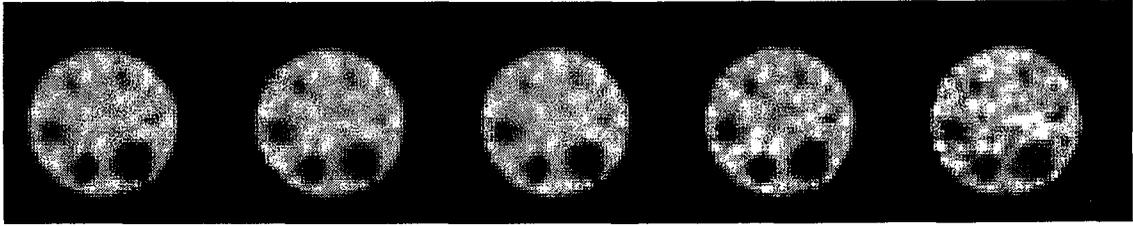


Figura 6-11. Correlativamente, imágenes obtenidas para $OS=1$ y 21 iteraciones, $OS=10$ y 2 iteraciones, y $OS=20$, 30 y 60 y 1 iteración para el modelo de Jaszczak simulado y 200 Kc.



Figura 6-12. Correlativamente, imágenes obtenidas para $OS=1$ y 62 iteraciones, $OS=10$ y 6 iteraciones, $OS=20$ $OS=30$ y 2 iteraciones y $OS=60$ y 1 iteración para el modelo de tórax simulado y 200 Kc (iteración para el máximo de CC).

En la Figura 6-13 se representa para el modelo de Jaszczak simulado y 50, 200 y 800Kc (gráfica primera), para el modelo real (gráfica intermedia) y para el modelo simulado de tórax con 50, 200 y 800Kc (gráfica inferior) el número de iteraciones para alcanzar el máximo de CL (equivalente a $CVR=0$) en función del número de subconjuntos ordenados utilizados en escala semilogarítmica. Los valores están promediados sobre 10 realizaciones de ruido. Se representa también mediante una línea continua la función número de iteraciones con $OS=1$ dividido por OS . Según la premisa que OS actúa como un factor de aceleración, el número de iteraciones precisas para alcanzar el máximo de CL debe ser el número de iteraciones necesitado con $OS=1$ dividido por el factor de aceleración, es decir, OS . Los puntos deben superponerse a la gráfica continua para verificar esta premisa. En el modelo real, a su vez, se dibuja los valores obtenidos con el modelo simulado equivalente.

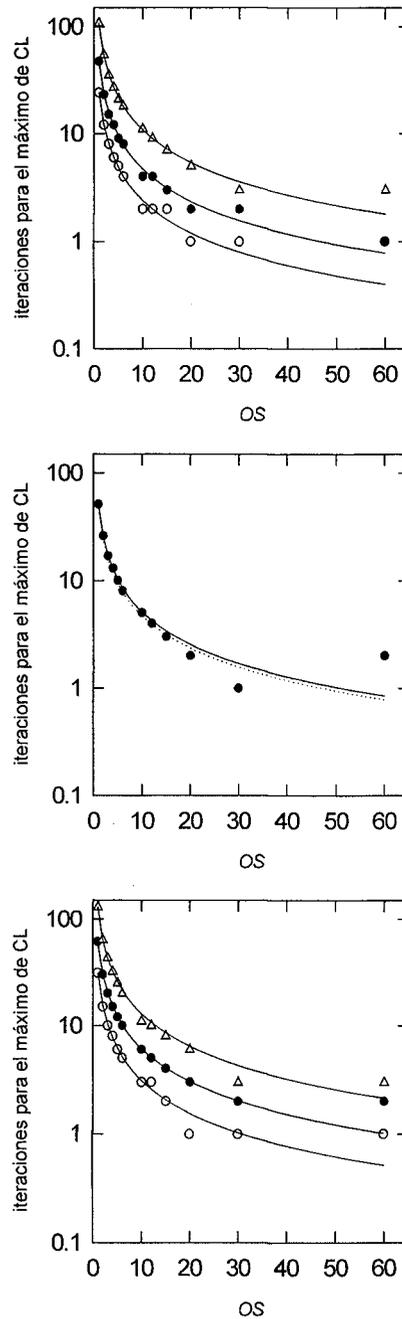


Figura 6-13. Representación en escala logarítmica del número de iteraciones para alcanzar el máximo de CL en función del número de subconjuntos empleados. Los valores encontrados están representados por símbolos. La línea continua es la curva predicha por la teoría (número de iteraciones de $OS=1$ dividido por OS). La primera figura corresponde al modelo de Jaszczak simulado para 50 Kc (círculos blancos), 200 Kc (círculos negros) y 800 Kc (triángulos). La segunda figura corresponde al modelo real. La línea discontinua muestra los resultados del modelo numérico equivalente. La tercera figura corresponde al modelo simulado de tórax para 50 Kc (círculos blancos), 200 Kc (círculos negros) y 800 Kc (triángulos)

Se observa en las tres gráficas que, para los valores menores de OS , el ajuste entre los puntos experimentales y la predicción teórica es muy buena. Las discrepancias, sin ser muy significativas, se producen para valores de OS grandes. Se observa, también, que el valor de OS en que aparecen las primeras discordancias es menor para números de cuentas inferiores, tanto en el modelo de Jaszczak como en el modelo de tórax. Finalmente, puede destacarse que el ajuste entre el modelo real y el modelo simulado equivalente es bueno. En el mismo sentido, en la Tabla 6-5 se muestra, para un realización de ruido determinada, el valor de las diferentes FDM en el punto de corte indicado por CVR . Se observa, que para valores de OS bajos, los valores de las FDM son análogos. Además, si el número de iteraciones equivalentes (el producto de las iteraciones por el número de subconjuntos empleados) es menor, entonces CC es ligeramente superior y CON inferior y viceversa. Esto demuestra la compatibilidad del criterio CVR con el uso de subconjuntos ordenados. No obstante, si el número de subconjuntos es grande, este buen comportamiento se rompe, ya que se obtienen imágenes con un CC claramente inferior y un CON no necesariamente superior.

| | $OS=1$ | $OS=10$ | $OS=20$ | $OS=30$ | $OS=60$ |
|------------------------|--------|---------|---------|---------|---------|
| Modelo simulado | | | | | |
| iteración | 48 | 4 | 2 | 1 | 1 |
| CC | 0.937 | 0.940 | 0.937 | 0.937 | 0.906 |
| $CON2$ | 0.690 | 0.666 | 0.690 | 0.645 | 0.701 |
| $CON5$ | 0.240 | 0.241 | 0.241 | 0.272 | 0.167 |
| Modelo físico | | | | | |
| iteración | 51 | 5 | 3 | 2 | 1 |
| CC | 0.922 | 0.922 | 0.913 | 0.902 | 0.897 |
| $CON2$ | 0.640 | 0.647 | 0.671 | 0.690 | 0.527 |
| $CON5$ | 0.389 | 0.397 | 0.404 | 0.399 | 0.439 |
| Modelo de tórax | | | | | |
| iteración | 59 | 6 | 3 | 2 | 2 |
| CC | 0.902 | 0.900 | 0.896 | 0.891 | 0.866 |
| $CON2$ | 0.803 | 0.809 | 0.816 | 0.850 | 0.856 |
| $CON5$ | 0.414 | 0.416 | 0.424 | 0.403 | 0.452 |

Tabla 6-5. Valores de las diferentes FDM en el punto de corte indicado por el criterio CVR para diferentes imágenes. Todos los modelos corresponden a 200 Kc.

En la Figura 6-14 pueden observarse las imágenes correspondientes a los modelos y al número de iteraciones indicado en la Tabla 6-5 dispuestos en el mismo orden.

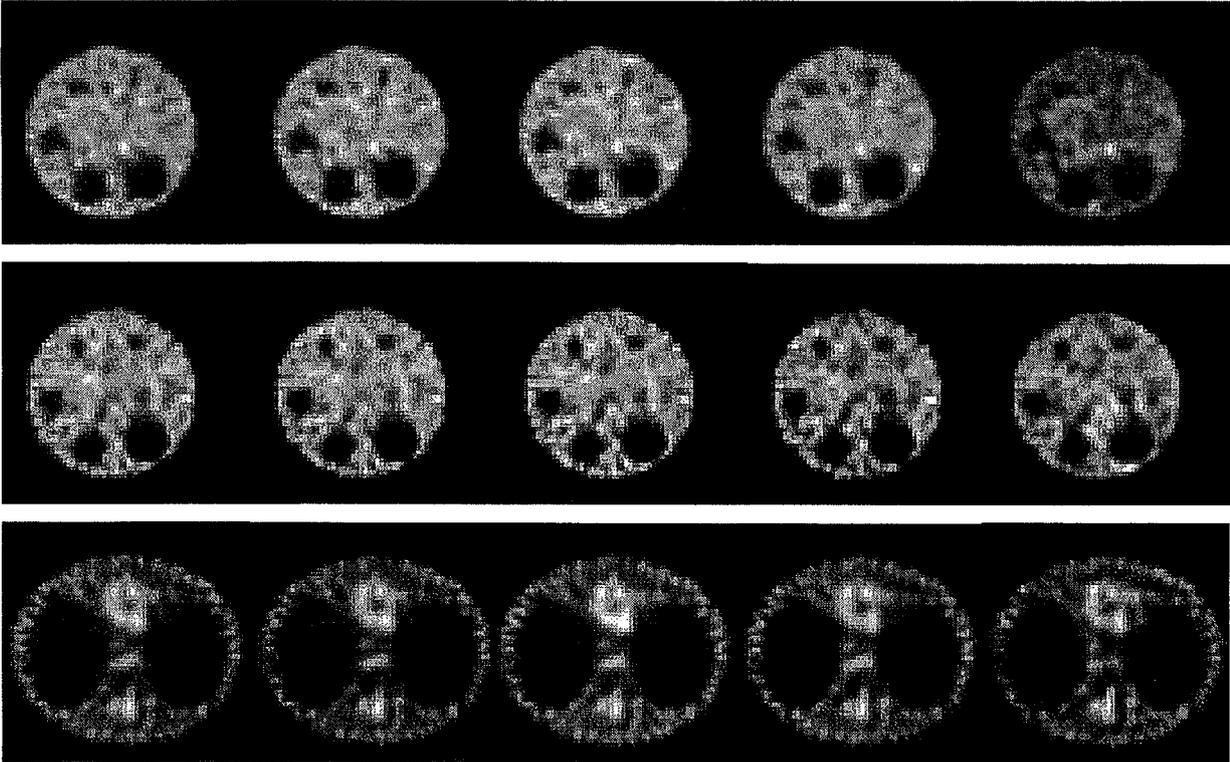


Figura 6-14 Imágenes obtenidas con el criterio *CVR* para los modelos simulado 200Kc (primera fila), modelo real (segunda fila) y modelo simulado de tórax 200Kc (tercera fila). Las diferentes imágenes corresponden, sucesivamente a valores de $OS=1, 10, 20, 30$ y 60 . El número de iteraciones se puede encontrar en la tabla 6-5.

6.4.3. Discusión de los resultados.

Los resultados obtenidos indican que el uso de subconjuntos ordenados acelera el proceso de reconstrucción un factor igual al número de subconjuntos empleados si el número de subconjuntos es bajo. No obstante, si el número de subconjuntos ordenados es grande, OS deja de actuar únicamente como un factor de aceleración y se obtienen reconstrucciones la calidad inferior. Esto sugiere que hay un valor máximo

Optimización de OS

de OS utilizable que optimiza la reconstrucción en el sentido que obtiene los mejores resultados mediante un mínimo de iteraciones. La utilización de un valor superior de OS produce imágenes de peor calidad. Este valor depende, entre otros factores, del número de cuentas de la imagen, es decir de la relación señal-ruido de la misma. Cuanto mayor sea el número de cuentas, más subconjuntos pueden utilizarse sin que se produzca la degradación de la imagen. Por ejemplo, para las imágenes de 800 Kc podría utilizarse un valor de $OS=20$, que aceleraría la reconstrucción un factor 20 sin degradar la imagen. Por otra parte, si el número de cuentas es menor, el valor máximo de OS utilizable es inferior. Según se muestra en la Figura 6-10, el resultado de $OS=20$ es inferior que para valores menores de esta variable. En tal caso, es conveniente utilizar un valor de $OS=10$.

Otro aspecto que se ha de tener en cuenta es que, aunque OS se comporte como factor de aceleración dentro de un determinado rango de valores, no siempre será deseable utilizar su valor óptimo por sobrepasar el número de iteraciones en que obtenemos la mejor imagen. Por ejemplo, si una FDM obtiene sus valores óptimos alrededor de la iteración 30 y se utiliza $OS=20$, tanto con una iteración como con 2 se obtendrían peores resultados que con $OS=10$ y 3 iteraciones. Si la evolución de esta FDM es rápida, este hecho puede tener gran importancia.

Finalmente, se comprueba que, para los valores de OS válidos (en los que no se produce degradación de la imagen), el criterio CVR interrumpe el proceso iterativo en un punto equivalente al obtenido con MLE ($OS=1$). Por tanto, este método de detención de la reconstrucción es compatible con el uso de subconjuntos ordenados.

7. Comparación de resultados.

Una vez estudiados los diferentes métodos de reconstrucción implementados, la FBP con corrección de la atenuación por el método de Chang iterativo, ART con restricción de no negatividad y parámetro de relajación y los esquemas acelerados de MLE, podría parecer interesante llevar a cabo un estudio comparativo de los mismos para determinar con cuál de los métodos se obtienen mejores resultados. No obstante, según se ha visto en los capítulos precedentes, no tiene sentido hacerlo para el caso general, sino para casos concretos. En efecto, cuando se mejoran los valores de determinadas FDM, simultáneamente se empeoran los valores de otras. En cada caso, según el tipo y la utilidad de la imagen, se han de determinar las características a optimizar [CEN-87][DEM-89]. Existen, además de la optimización de las FDM, otros factores que condicionan la elección de un método u otro, como la disponibilidad o no del mapa de atenuación o la relación calidad-coste en tiempo y recursos informáticos necesarios. Por tanto, no se pretende establecer un criterio de elección de métodos de reconstrucción, sino un procedimiento que permita establecer, mediante la realización de estudios simulados, sus prestaciones y los parámetros que optimizan su rendimiento en cada situación concreta y, de esta manera, poder evaluar la conveniencia o no de su uso.

En este capítulo, en primer lugar, se comparan los resultados obtenidos para el modelo de Jaszczak en los capítulos 4, 5 y 6. El método estándar utilizado en la rutina clínica, la FBP sin corrección de atenuación, o con corrección de atenuación no iterativa, se toma como referencia para poder precisar la mejoría debida al uso de los diferentes métodos iterativos. Posteriormente, se profundiza sobre los rasgos comunes a los diferentes métodos de reconstrucción y se muestra una relación de los principales artículos donde han sido comparados diferentes métodos de reconstrucción, ya sea desde un punto de vista práctico como teórico.

Para concluir, como ejemplo de aplicación de la metodología desarrollada en este trabajo, se generan y comparan los resultados obtenidos para un estudio de cuantificación de captación de un determinado fármaco por tumores pulmonares.

7.1. Comparación de los resultados de los capítulos 4, 5 y 6

A continuación se muestra una selección de resultados de los capítulos 4, 5 y 6. También se muestran algunos resultados no incluidos en los mencionados capítulos, en particular las pruebas con el colimador B para ART. Las pruebas del modelo de tórax no se incluyen por ser muy parecidas a las de la aplicación del apartado 7.2. No se han tenido en cuenta los factores de aceleración. Sólo se ha pretendido ver las prestaciones de los métodos, independientemente del número de iteraciones necesarias. La discusión sobre la velocidad de los métodos de reconstrucción no ha sido considerada, pues el tiempo de ejecución depende del número de iteraciones y éste de la aceleración aplicable al proceso de reconstrucción en cada caso concreto. No obstante, según lo observado, no existe mucha diferencia entre métodos. Para realizar 64 iteraciones sobre el equipo informático descrito en el apartado 3.3, el tiempo de cálculo requerido es aproximadamente de 3 minutos en IFBP, 3'5 minutos en ART y 4 minutos en MLE.

7.1.1. Recopilación de resultados para el modelo de Jaszczak

En la Figura 7-1 se muestra la evolución de CC , $CONI$ y $SNRI$ en función del número de iteraciones para el modelo de Jaszczak simulado con 200 Kc y el modelo real, reconstruido con ML-EM (línea continua), ART con parámetro igual a 0.1 (línea discontinua) y IFBP con filtro de Metz y exponente igual a 1 (línea de puntos). Estas gráficas ponen de manifiesto, en primer lugar, la misma evolución de las FDM. Sin tener en cuenta la velocidad de convergencia, que como se ha visto anteriormente es

regulable en los tres métodos, *CC* y *SNRI* alcanzan un valor máximo tras el que empeoran, mientras que *CONI* aumenta continuamente.

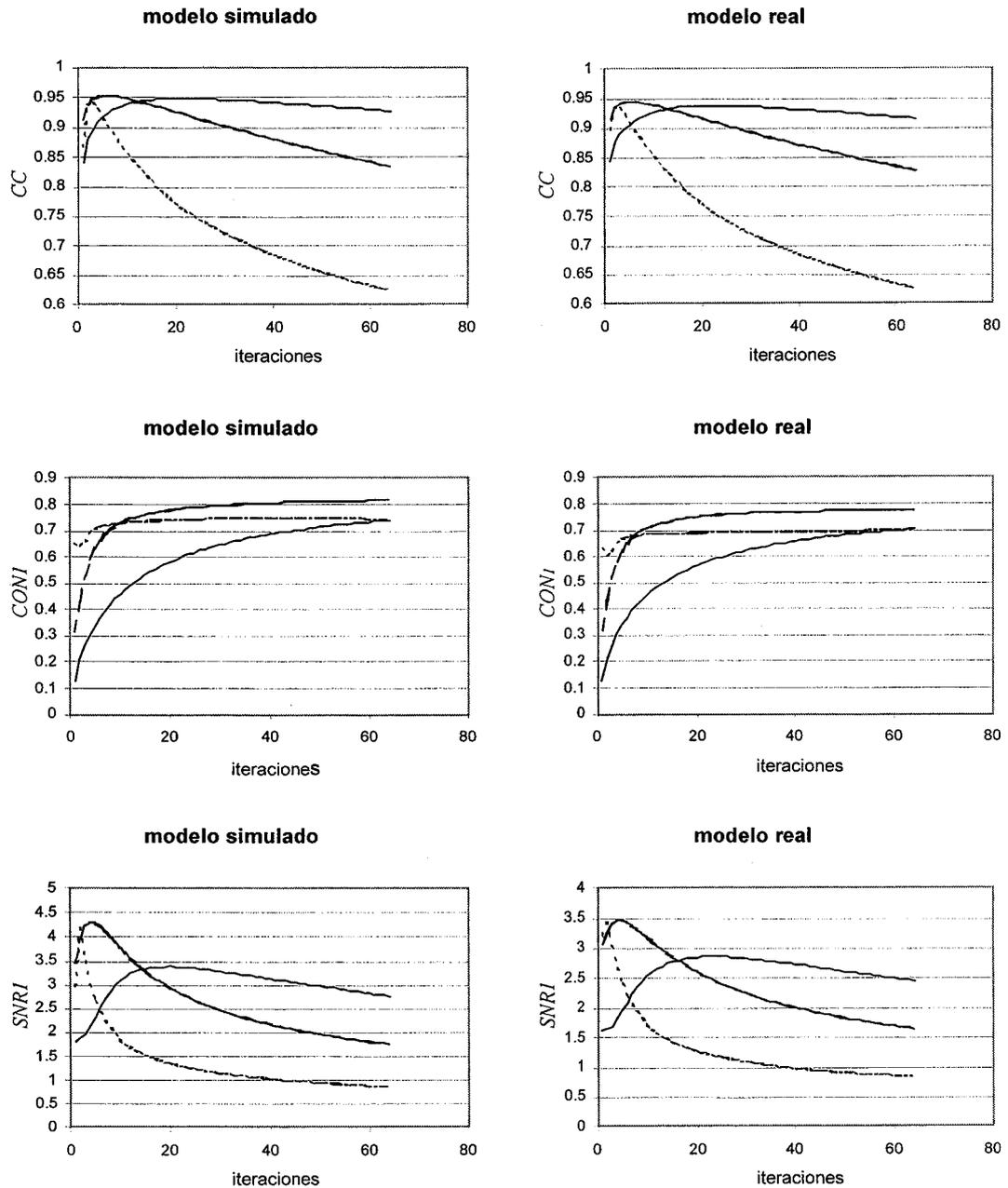


Figura 7-1. Evolución de las diferentes FDM en función de las iteraciones para el modelo de Jaszczak simulado 200 Kc (primera columna de gráficas) y el modelo real (segunda columna). La línea gruesa corresponde a la reconstrucción con MLE, la línea delgada a ART y la línea discontinua IFBP.

De las gráficas de la Figura 7-1 se ha extraído la tabla 7-1 de valores máximos. Las dos primeras filas son el valor de las FDM para FBP (primer punto de la gráfica de IFBP) y para FBP aplicando Chang 1 vez (segundo punto de la gráfica de IFBP). Después se muestran los valores máximos que alcanzan cada una de las FDM. Este valor máximo se alcanza a una iteración diferente para cada FDM y cada método de reconstrucción. En las tres últimas filas se ha querido evaluar las FDM sobre la imagen mejor de la serie, entendiendo por imagen mejor una solución de compromiso entre la maximización de CC y la de CON según lo discutido en los respectivos capítulos (en el caso de MLE, corresponde a la iteración encontrada en el estudio de CRV del apartado 6.2). Sobre los resultados de la tabla, puede comprobarse cómo los métodos iterativos mejoran los valores de FBP y FBP con la aplicación no iterativa del método de Chang. Solamente MLE tiene un valor más bajo de $SNRI$ que FBP en el modelo real. El bajo valor de esta FDM es debido a la suavidad de las imágenes de MLE. Globalmente el método que da mejores resultados es ART aunque la diferencia, como puede apreciarse en las imágenes de la Figura 7-2, no es importante. Dado el crecimiento de $CONI$, su valor máximo no es absoluto, sino que es el valor a la iteración 64.

| | | Modelo simulado 200 Kc | | | Modelo real | | |
|--------------------|----------|------------------------|--------|--------|-------------|--------|--------|
| | | CC | $CONI$ | $SNRI$ | CC | $CONI$ | $SNRI$ |
| Valores máximos | FBP | 0.867 | 0.653 | 2.962 | 0.897 | 0.626 | 3.212 |
| | FBP+Ch | 0.937 | 0.644 | 4.183 | 0.934 | 0.605 | 3.443 |
| | MLE | 0.948 | 0.741 | 3.387 | 0.937 | 0.702 | 2.866 |
| | ART | 0.953 | 0.815 | 4.310 | 0.945 | 0.776 | 3.464 |
| | IFBP | 0.940 | 0.746 | 4.183 | 0.934 | 0.698 | 3.443 |
| Mejor imagen | MLE (46) | 0.938 | 0.705 | 3.033 | 0.927 | 0.673 | 2.663 |
| | ART (8) | 0.951 | 0.704 | 3.989 | 0.942 | 0.685 | 3.325 |
| | IFBP (3) | 0.940 | 0.659 | 3.501 | 0.934 | 0.624 | 3.033 |

Tabla 7-1. Resultados de los diferentes métodos de reconstrucción para el modelo de Jaszczak simulado (200Kc) y para el modelo real. En primer lugar, se muestra los resultados para FBP y FBP con corrección de atenuación por el método de Chang sin iterar; las tres filas siguientes corresponden a los valores máximos alcanzados por las diferentes FDM en los métodos iterativos (independientemente de la iteración al que lo alcanzan); las tres últimas muestran los valores de las FDM para la "mejor" imagen de la

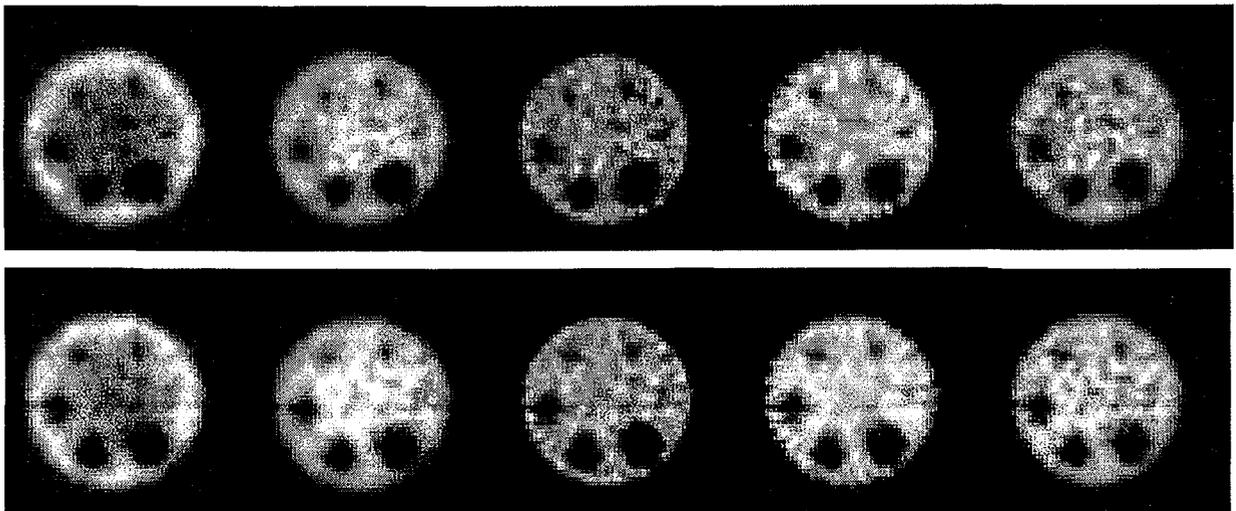


Figura 7-2 Imágenes obtenidas con los diferentes métodos. La primera fila corresponde al modelo simulado (200 Kc) y la segunda al modelo real. En cada fila, la primera imagen corresponde a FBP, la segunda a FBP con aplicando una sola vez la el método de Chang de corrección de atenuación, la tercera es MLE a la iteración 46, la cuarta ART a la iteración 8 y la última IFBP a la tercera iteración.

7.1.2. Discusión de los resultados

En la Figura 7-1 y en los diferentes estudios realizados en los capítulos 4, 5 y 6 sobre la calidad de la imagen reconstruida en función del número de iteraciones en los diferentes métodos iterativos, se han puesto de manifiesto un conjunto de rasgos comunes. En todos los casos, la convergencia de la reconstrucción hacia la imagen ideal es parcial, es decir, aproximación en las primeras iteraciones y divergencia a partir de una iteración dada. Igualmente, el comportamiento de las diferentes FDM es similar. Mientras *CC*, *SNR* y *CV*, muy dependientes del ruido, tienen un valor máximo tras el cual se degradan, *CON*, menos dependiente del ruido, parece tener una evolución diferente, mejorando continuamente su valor (en realidad, en pruebas realizadas con un número muy grande de iteraciones –de 800 a 2000, según el caso– se observa también una degradación de *CON*). Estos fenómenos son inherentes al problema de reconstrucción tomográfica de proyecciones con ruido. Diversos autores han realizado estudios teóricos donde se predicen, parcial o totalmente,

alguno de estos efectos como, por ejemplo, [LOU-83][CEN-87][DEF-88][NAT-88][VIE-88][DEM-89][FLE-90] o [BAR-94]. Como se ha mencionado en los capítulos precedentes, dada la naturaleza mal condicionada de la reconstrucción tomográfica, debe buscarse, en cada caso, un mecanismo de regularización de la solución. La presencia de ruido en las proyecciones hace que la mejor reconstrucción (la imagen más parecida al modelo original) no sea la que mejor se ajusta a las proyecciones, solución de mínimos cuadrados (LS= *Least Squares*)¹, ya que el ruido tiende a amplificarse mucho sobre la reconstrucción [CEN-83][NAT-88][DEM-89]. Esta regularización es la responsable de las diferencias entre los diversos métodos iterativos de reconstrucción dado que la mayoría de ellos convergen hacia la misma solución LS (en [VIE-88] se demuestra que tanto MLE como ART convergen hacia esa solución). En este sentido, si se deseara la solución LS no habría diferencia entre escoger un método u otro. Contrariamente, los procesos iterativos regularizados sí pueden producir imágenes diferentes según el método de reconstrucción y de regularización empleado y tiene sentido estudiar sus prestaciones por separado.

Resumiendo lo dicho en el capítulo 3 y siguientes sobre la regularización de los procesos iterativos de reconstrucción, ésta puede conseguirse por dos vías:

- Introduciendo un condicionamiento sobre la solución, mediante la minimización o maximización de algún funcional como la norma de la solución o la entropía, que garantice su suavidad. En este caso, por más que se itere, este funcional mantendrá la solución siempre suficientemente “alejada de los datos”, es decir, que el ajuste con las proyecciones experimentales no sea máximo, y la solución será suave [TIT-85][DEM-89]. La distancia a la solución LS viene calibrada por el

¹ Solución que minimiza la diferencia entre la proyección calculada a partir de la imagen y las proyecciones experimentales, es decir, $\|A \cdot q - p\|^2$ es mínimo.

parámetro de regularización.

- Se demuestra en [FLE-90] que cualquier regularización es equivalente a la truncación de un proceso iterativo. Este hecho puede interpretarse de la siguiente manera: según se ha mencionado en el capítulo 4, el ruido en ECT es blanco, es decir, que tiene una descomposición espectral uniforme [BAR-81] [ROS-95a]. Dado que en las imágenes con que se trabaja en SPECT las componentes de baja y media frecuencia tienen mucho más peso que las de alta frecuencia, es en la alta frecuencia donde el ruido predomina sobre la señal. En los procesos iterativos de reconstrucción, primero son reconstruidas las bajas frecuencias de la imagen y posteriormente las altas frecuencias [LOU-83] [DEF-88] [PAN-91]. Por tanto, la componente de alta frecuencia del ruido, que es la que degrada la imagen, no empieza a ajustarse hasta al cabo de unas iteraciones. Al interrumpir el proceso de reconstrucción antes de que se produzca este ajuste, se obtiene una imagen suave. El parámetro de regularización que permite optar por un mayor ajuste o una mayor suavidad es el número de iteraciones. En este sentido, para tener un parámetro de regularización que permita modular la solución, es bueno tener mecanismos que posibiliten el control de la velocidad de convergencia del proceso iterativo (exponente del filtro en IFBP, parámetro de relajación en ART y parámetro de sobrerelajación o número de subconjuntos ordenado en MLE). Por otra parte, cuanto menos ruido exista sobre las proyecciones, más alta será la frecuencia en la que el ruido prevalezca sobre la señal y, por consiguiente, más iteraciones se podrán realizar sin que se degrade la imagen.

Sobre los resultados de la tabla 7-1 y las imágenes de la Figura 7-2, puede suponerse que para este tipo de imágenes y para un propósito general bastaría con realizar FBP con la corrección de Chang no iterativa, pues produce imágenes de suficiente calidad a bajo coste (para aplicar el método de Chang una sola vez no es preciso calcular la matriz de pesos –

el proyector- con todas las ventajas que ello conlleva). No obstante, si se quiere mejor calidad, cualquier método, y en particular ART, mejoran los resultados de la reconstrucción.

7.2. Ejemplo de aplicación

Aparte de una compilación de los resultados de los capítulos 4, 5 y 6, en este capítulo se realiza la simulación de un estudio real de neoplasias pulmonares, para ilustrar la metodología desarrollada en este trabajo sobre el uso de los diferentes métodos de reconstrucción en situaciones concretas. El estudio médico persigue cuantificar el nivel de captación de ^{99m}Tc -tetrofosmina por neoplasias pulmonares, a fin de determinar si la mayor o menor captación de este fármaco significa la mayor o menor eficacia del tratamiento del tumor mediante quimioterapia.

Sobre este tipo de estudio se prueban los tres métodos iterativos desarrollados en este trabajo (MLE-OS, ART, IFBP) y se comparan los resultados con los obtenidos con el método estándar (FBP) para determinar las prestaciones, ventajas e inconvenientes de cada uno de ellos. Las proyecciones utilizadas son simuladas numéricamente según lo expuesto en el capítulo 3. De esta manera, se puede conocer exactamente los valores de las FDM previsibles sobre la reconstrucción (no así si se trabajara con estudios reales) y evaluar objetivamente los métodos iterativos.

7.2.1. Descripción de las pruebas realizadas

Ha sido generado el modelo numérico que muestra la Figura 7-3 a partir del ajuste mediante elipses de una reconstrucción del estudio real de un paciente con un tumor pulmonar. Dado que no se podía determinar directamente la actividad de cada zona, ésta ha sido fijada mediante una técnica de prueba-error de manera que, empleando el mismo método de reconstrucción con los mismos parámetros que en el estudio real, se

obtuviera el mismo número de cuentas relativo en cada región de la imagen respecto el existente en el estudio real. Para llevar a cabo un estudio de linealidad, se han simulado imágenes con diferente actividad: 3, 6, 9 y 12 veces más actividad en el tumor (zona más clara en el pulmón izquierdo) que en el fondo pulmonar (elipses oscuras). Los parámetros de adquisición (tipo de colimador: B, radio de giro de la gammacámara: 23 cm, tamaño de píxel: 0.7373 y número de cuentas en las proyecciones: 170 Kc) coincidían con los del estudio real. La dispersión ha sido simulada por convolución. Los métodos de reconstrucción empleados han sido la retroproyección filtrada con un filtro de Metz con los exponentes 0.2, 1 y 3 y corrección de atenuación mediante el método de Chang iterativo, ART con los parámetros de relajación 0.01, 0.1 y 0.4 y MLE-OS con 5 y 10 subconjuntos. En todos los casos se ha fijado el número máximo de iteraciones en 16 y se han reconstruido 100 realizaciones de ruido diferentes, pues la dispersión era importante. El parámetro evaluado ha sido uno usualmente empleado en este tipo de pruebas, el cociente de la actividad del tumor respecto la actividad del pulmón contrario que será referenciado con las siglas *CVM* (cociente de valores medios)². Para evitar



Figura 7-3 Imagen numérica proveniente del ajuste mediante elipses de la sección reconstruida de un tórax real. Las dos elipses oscuras interiores representan los pulmones y la mancha clara del pulmón de la izquierda el tumor.

² Es más usual hacer el cociente de la actividad del tumor respecto la zona contralateral (simétrica) del otro pulmón. No obstante, proceder así en este caso haría que los resultados tuvieran mucha más dispersión (dependencia de la realización de ruido concreta), ya que el tumor ocupa pocos píxeles y la actividad de la zona contralateral es muy escasa.

los efectos de contorno, la actividad del tumor se ha evaluado en el 25% de píxeles de mayor actividad.

7.2.2. Resultados obtenidos

De todas las pruebas realizadas, han sido escogidas MLE-OS con 10 subconjuntos ordenados, ART con parámetro de relajación 0.4 y IFBP con exponente del filtro de Metz=1 para mostrar los resultados, puesto que las demás pruebas, salvo ART utilizando el parámetro 0.01, mucho más lento, daban resultados muy parecidos a un número distinto de iteraciones. Para el caso de IFBP, la primera iteración corresponde al resultado de la FBP sin corrección de atenuación. Es, por tanto, el valor que se obtendría con la reconstrucción estándar. En la Figura 7-4, se muestran los valores obtenidos con los tres métodos de reconstrucción para la imagen con actividad tumoral relativa al pulmón igual a 6. La línea corresponde al promedio de diez realizaciones de ruido y las barras de error representan la desviación estándar. Lo primero que puede comprobarse es que la evolución de los tres métodos, con estos parámetros de reconstrucción, es muy parecida. En todos los casos, la dispersión en las primeras iteraciones es pequeña y, a medida que se produce el ajuste, aumenta. Según se puede comprobar en la tabla 7-2, los valores relativos de la dispersión son muy parecidos para niveles similares de ajuste (alrededor del 12%). El problema de la dispersión en los resultados va relacionado directamente con el ruido sobre las proyecciones. Para comprobar esta premisa, se ha generado un conjunto de proyecciones con un número de cuentas 20 veces superior (cuanto mayor es el número de cuentas, menor es la importancia relativa del ruido) y se ha obtenido una dispersión mucho menor (el 4.35%).

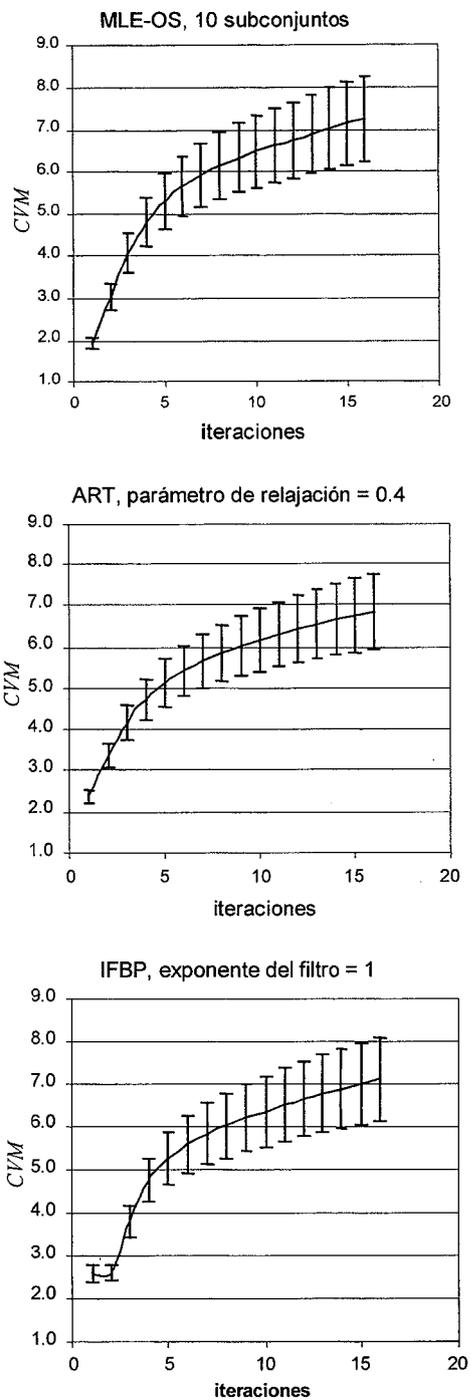


Figura 7-4. Evolución de *CVM* en función del número de iteraciones para los tres métodos de reconstrucción. La línea representa el promedio sobre las 100 realizaciones de ruido. Las barras de error representan la dispersión. El primer valor de la tercera gráfica corresponde a FBP.

| Iteración | MLE-OS, 10 subc | | ART, parám.= 0.4 | | IFBP, expon=1 | |
|-----------|-----------------|--------|------------------|--------|---------------|--------|
| | <i>CVM</i> | %disp | <i>CVM</i> | %disp | <i>CVM</i> | %disp |
| 1 | 1.936 | 6.875 | 2.369 | 6.186 | 2.578 | 7.297 |
| 2 | 3.055 | 10.122 | 3.349 | 8.683 | 2.588 | 7.271 |
| 3 | 4.074 | 11.522 | 4.155 | 9.929 | 3.797 | 9.806 |
| 4 | 4.811 | 12.083 | 4.729 | 10.591 | 4.765 | 10.720 |
| 5 | 5.308 | 12.374 | 5.130 | 11.015 | 5.260 | 11.394 |
| 6 | 5.659 | 12.575 | 5.425 | 11.294 | 5.578 | 11.863 |
| 7 | 5.923 | 12.720 | 5.655 | 11.548 | 5.822 | 12.259 |
| 8 | 6.136 | 12.841 | 5.846 | 11.788 | 6.026 | 12.574 |
| 9 | 6.318 | 12.939 | 6.010 | 12.010 | 6.203 | 12.820 |
| 10 | 6.478 | 13.101 | 6.156 | 12.211 | 6.360 | 12.991 |
| 11 | 6.624 | 13.289 | 6.290 | 12.396 | 6.504 | 13.110 |
| 12 | 6.760 | 13.461 | 6.414 | 12.563 | 6.638 | 13.231 |
| 13 | 6.890 | 13.630 | 6.530 | 12.729 | 6.763 | 13.359 |
| 14 | 7.014 | 13.791 | 6.639 | 12.886 | 6.882 | 13.456 |
| 15 | 7.134 | 13.953 | 6.741 | 13.031 | 6.994 | 13.542 |
| 16 | 7.248 | 14.114 | 6.839 | 13.175 | 7.102 | 13.602 |

Tabla 7-2. Valores de *CVM* respecto el número de iteraciones para los tres métodos iterativos. La primera columna es el valor promedio sobre 100 realizaciones y la segunda el porcentaje que representa la dispersión sobre el promedio. Sombreado el valor más próximo al exacto (en este caso 6).

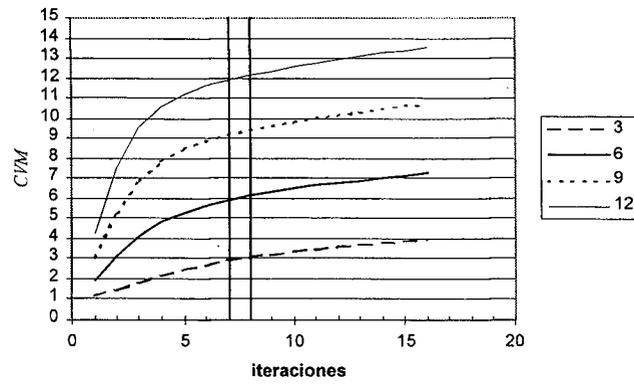
Otro factor a tener en cuenta es si el número de iteraciones para el que se consigue el valor correcto depende o no de la actividad del tumor. En este caso, la aplicación de métodos iterativos resultaría conflictiva ya que no podría determinarse el número de iteraciones necesario puesto que dependería de una información desconocida *a priori*. En la Figura 7-4 se grafican simultáneamente los resultados obtenidos con los tres métodos de reconstrucción para diferentes valores de actividad del tumor (el número indica la actividad del tumor relativa al fondo del pulmón) promediados sobre 100 realizaciones de ruido. Se puede comprobar que, para MLE-OS, los mejores resultados se obtienen prácticamente a la misma iteración (7-8), mientras que tanto para ART como para IFBP, el número de iteraciones necesarios para recuperar la actividad exacta en el tumor crece con el valor de esta actividad. Esto invalida la utilidad de estos dos métodos para este tipo de estudios. Sí que hay dependencia del número de iteraciones al que se recupera el valor exacto con el número total de cuentas de la imagen. En las pruebas realizadas con mayor número de cuentas, el número de iteraciones precisas era mayor

(por ejemplo 18-19 para 3400 Kc). Este factor, sin embargo, es conocido a priori. Dadas unas proyecciones, mirando el número de cuentas total puede determinarse las iteraciones necesarias.

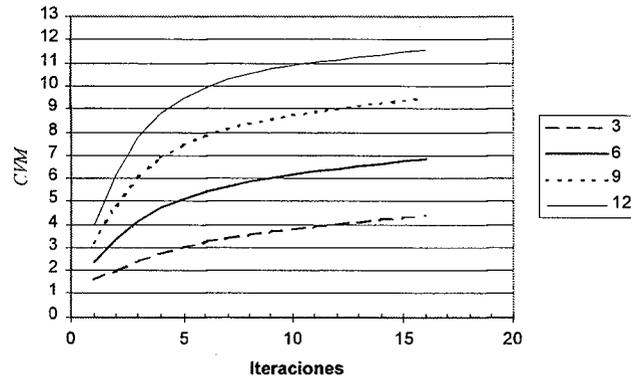
La tabla 7-3 muestra la comparación de los valores obtenidos con el método estándar y con MLE-OS y 10 subconjuntos ordenados a la séptima iteración. Aparte del valor obtenido (en promedio) se muestra la dispersión y el coeficiente de regresión de los valores obtenidos con los teóricos, para poder discernir si en ambos métodos se mantiene la proporcionalidad de la actividad del tumor en la reconstrucción. La recta de regresión ha sido forzada a pasar por el origen. Se observa linealidad en ambos casos, pero siendo mucho mejor en el método iterativo. Otro dato que se pone de manifiesto en esta tabla, es que la dispersión decrece con la actividad del tumor. Como cabría esperar, al haber más cuentas, hay más estadística y los resultados no fluctúan tanto.

Finalmente la Figura 7-5 muestra las imágenes obtenidas para FBP, MLE-OS y 10 subconjuntos (7 iteraciones), ART con parámetro de relajación de 0.4 (9 iteraciones) y IFBP con exponente 1 (8 iteraciones). Aunque se aprecian diferencias entre los distintos métodos iterativos, sobre todo MLE-OS respecto los otros dos, éstas no se reflejan en el valor de *CVM*.

MLE-OS, 10 subconjuntos. Resultados para diferentes niveles de actividad del tumor



ART, parámetro=0.4. Resultados para diferentes niveles de actividad del tumor



IFBP, exponente 1. Resultados para diferentes niveles de actividad del tumor

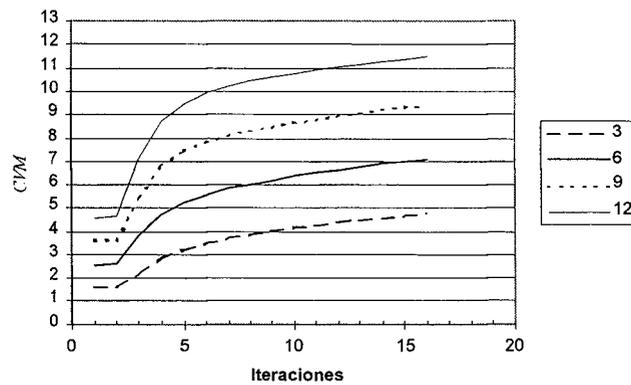


Figura 7 4- Evolución de *CVM* en relación al número de iteraciones para diferentes valores teóricos de este parámetro para MLE-OS con 10 subconjuntos, ART y parámetro=0.4 y IFBP, exponente=1. El resultado es el promedio de 100 realizaciones diferentes de ruido.

| | valor teórico=3 | | valor teórico=6 | | valor teórico=9 | | valor teórico=12 | | r^2 |
|-----------------|-----------------|--------|-----------------|--------|-----------------|--------|------------------|-------|--------|
| | <i>CVM</i> | %disp | <i>CVM</i> | %disp | <i>CVM</i> | %disp | <i>CVM</i> | %disp | |
| FBP sin iterar | 1.589 | 8.221 | 2.578 | 7.297 | 3.605 | 6.457 | 4.608 | 5.101 | 0.9568 |
| MLE-OS (iter 7) | 2.867 | 16.211 | 5.923 | 12.720 | 9.149 | 11.659 | 11.920 | 9.910 | 0.9989 |

Tabla 7-3. Valores obtenidos mediante FBP y MLE-OS con 10 subconjuntos y 7 iteraciones. En la última columna se muestra el coeficiente de regresión del valor obtenido con el teórico para cada método.

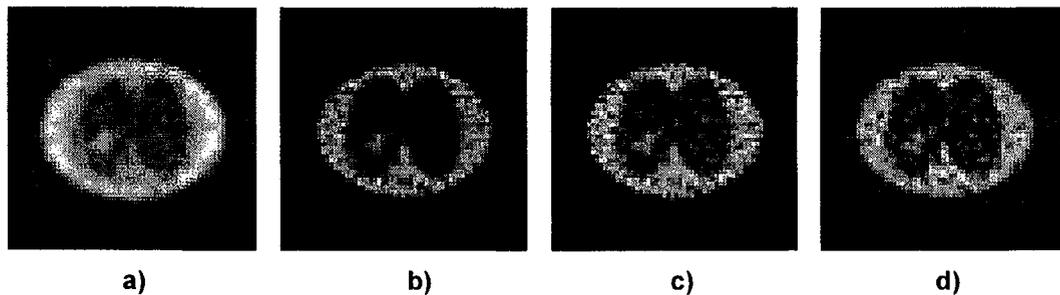


Figura 7-5. Imágenes correspondientes a una realización de ruido determinada del modelo con *CVM* teórico=6 reconstruido con: a) FBP, b) MLE-OS -iteración 7-, c) ART -iteración 9- y d) IFBP -iteración 8-.

7.2.3. Discusión de los resultados

El primer hecho destacable es que con FBP, el método estándar, no se recupera el valor exacto de actividad. No obstante, la actividad del tumor en la imagen reconstruida mantiene linealidad respecto el valor teórico ($r^2=0.9568$).

Al utilizar métodos iterativos, se puede recuperar el valor exacto, en un número de iteraciones determinado. En el caso de MLE-OS, a diferencia de los otros dos métodos, ese número de iteraciones es independiente de la actividad del tumor. La dependencia del número de iteraciones a realizar con la actividad del tumor inhabilita los métodos ART y IFBP. En efecto, aunque recuperen en cada caso el valor exacto, se debería poder

estimar de antemano la actividad del tumor para poder determinar el número de iteraciones a realizar.

Otro factor a tener en cuenta es que a medida que se itera el resultado es más dependiente de la realización de ruido particular. Aunque en promedio los resultados mejoran (la linealidad respecto la actividad del tumor es muy buena para los promedios: $r^2=0.9989$), la dispersión de los resultados debida al ruido aumenta con el número de iteraciones. Se comprueba que la dispersión es consecuencia directa del ruido observando los resultados obtenidos con unas proyecciones con un número de cuentas 20 veces superior, donde la dispersión es claramente inferior. La dispersión en la iteración donde se obtiene el valor correcto es algo menos del doble que en el caso de la FBP.

De todo ello se deduce que existen dos factores contrapuestos, la fiabilidad y la recuperación del valor exacto. En caso de preferirse poca dispersión a costa de obtener valores más alejados de los teóricos, la FBP es suficiente, pues mantiene una buena linealidad con la actividad del tumor. Por lo contrario, si se desea obtener un resultado más próximo al valor teórico es preciso iterar, aún a costa de perder cierta fiabilidad en los resultados. También sería posible encontrar, si fuera necesario, una solución de compromiso entre ambos factores utilizando MLE-OS con un número menor de iteraciones del indicado con anterioridad. Este estudio está pendiente de nuevas pruebas, en particular del nivel de dependencia del valor de *CVM* obtenido, tanto con FBP como con MLE-OS con las condiciones de adquisición: tamaño de píxel, radio de giro de la gammacámara, colimador, posición y condiciones físicas del paciente (dimensiones del tórax, obesidad) etc. Al modificar estos parámetros, no debería variar el valor de *CVM* encontrado con los diferentes métodos de reconstrucción para garantizar que el valor esta FDM está unívocamente relacionado con la actividad de emisión, esto es, con la concentración del radiofármaco y no depende de otros factores

8. Conclusiones

8.1. Capítulo 3: Simulación de proyecciones.

Se ha construido un simulador de proyecciones que permite incluir el efecto de la atenuación, de la PSF, de la dispersión y del ruido. Para ello se ha creado un programa que calcula la matriz de pesos o transición y otro programa que genera las proyecciones a partir de una imagen numérica y dicha matriz de pesos. Tanto las diferentes pruebas a las que se ha sometido el simulador como la comparación cualitativa de los resultados obtenidos de proyecciones reales y de proyecciones simuladas avalan la correcta implementación del mismo y la adecuación de las aproximaciones realizadas. Existen, no obstante, pequeñas diferencias cuantitativas entre los resultados obtenidos de proyecciones numéricas y proyecciones reales justificables por las diferentes aproximaciones llevadas a cabo.

A su vez, se ha implementado un programa que evalúa objetivamente, mediante el cálculo de diferentes figuras de mérito, la calidad de la imagen reconstruida.

8.2. Capítulo 4: IFBP

Se ha implementado un programa de reconstrucción por el método IFBP, retroproyección filtrada con corrección de atenuación por el método de Chang iterativo.

Se ha realizado un estudio de la calidad de la reconstrucción en función del exponente del filtro de Metz y del número de iteraciones. Se concluye que:

- Siempre que el exponente sea suficientemente bajo, no se observa dependencia de la calidad de la reconstrucción en función del exponente, pero sí del número de iteraciones (imágenes con los

mismos valores de las FDM a un número diferente de iteraciones). Cuanto menor es el exponente, mayor número de iteraciones deben realizarse para obtener una imagen de características iguales. En este contexto, el exponente puede ser considerado como un factor de aceleración.

- Cuando el exponente sobrepasa un valor máximo la calidad de la reconstrucción es inferior.
- El rango de valores del exponente con los que se obtienen los mejores resultados depende del ruido sobre las proyecciones: a mayor número de cuentas, mayor puede ser el exponente.
- Si el mapa de atenuación es uniforme, se puede escoger el exponente de manera que sea necesaria una sola iteración para alcanzar resultados aceptables, sin que sea preciso implementar el operador proyección, aunque procediendo de esta manera, se prima *CON* sobre *CC*, es decir, se obtienen imágenes con mejor contraste y mayor presencia de ruido. El uso de exponentes menores permite optar por imágenes menos ruidosas y peor contraste o imágenes más ruidosas y de mayor contraste.
- Si el mapa de atenuación es no uniforme, los mejores resultados se obtienen después de más de una iteración. En este caso, debe implementarse el operador proyección necesario para la realización de varias iteraciones.

8.3. Capítulo 5: ART

Se ha implementado un método iterativo de reconstrucción, la reconstrucción algebraica con condición de no negatividad, dependiente de dos parámetros: el número de iteraciones y el parámetro de relajación.

Se ha realizado un estudio de la dependencia de la calidad de la imagen reconstruida en función de ambos parámetros. Las conclusiones que se obtienen de este estudio son:

- Respecto del número de iteraciones, se comprueba que el comportamiento de las diferentes FDM es distinto. En particular, el comportamiento de *CON* es opuesto al de las otras FDM consideradas. Mientras *CON* es creciente las otras FDM tienen un máximo tras el cual decrecen. Si la aplicación clínica lo requiere, puede conseguirse un mejor valor de *CON* aumentando el número de iteraciones en detrimento de las demás FDM (imágenes más ruidosas).
- En cuanto al factor de relajación, se observa, para valores altos del parámetro, una notable mejoría de la calidad de la imagen al ir disminuyendo su valor. No obstante, existe un valor a partir del cual la reducción del parámetro de relajación no conlleva un aumento de la calidad de la reconstrucción, siendo necesaria, por otra parte, una mayor cantidad de iteraciones para conseguir imágenes análogas.
- Combinando ambos factores, se concluye que existe un rango de valores de ambos parámetros en los que la calidad de la reconstrucción mejora globalmente. Para el modelo empleado en este capítulo, se comprueba que los mejores resultados se encuentran para un factor de relajación del orden de 0.1 y un número de iteraciones del orden de 8. Los mismos resultados pueden obtenerse disminuyendo el factor de relajación y aumentando el número de iteraciones, pero a costa de aumentar el tiempo de reconstrucción.

8.4. Capítulo 6: MLE

Se ha implementado un método iterativo de reconstrucción por estimación de máxima verosimilitud con el criterio de detención *CVR*. Se han implementado dos esquemas de aceleración de este método, la sobrerelajación (SSA y AA) y los subconjuntos ordenados (MLE-OS).

Sobre el criterio *CVR*, se concluye que:

- *CVR* es un buen criterio de detención del proceso iterativo para imágenes de propósito general, pues en ningún caso produce

imágenes de mala calidad. Además, este criterio no requiere ningún tipo de información *a priori* de la imagen, siendo una ventaja más del uso de los métodos de reconstrucción estadísticos.

- La iteración de interrupción del proceso iterativo indicada por *CVR* depende de la proyección tomada de referencia. Aunque la variación no es importante, este criterio puede producir imágenes más suaves o más ruidosas y contrastadas dependiendo de la proyección de referencia. Este hecho debe ser tenido en cuenta cuando se quiera maximizar uno de estos criterios.

Del parámetro de sobrerrelajación, se ha realizado un estudio de la dependencia de la calidad de la imagen reconstruida en función del número de iteraciones y del valor del mismo, así como de la aplicabilidad del criterio de la *CVR* como método de detención del proceso iterativo. Las conclusiones que se obtienen de este estudio son:

- El comportamiento de las diferentes FDM respecto el número de iteraciones es análogo al observado en ART.
- El rango de factores de aceleración utilizables va de 1 a 2.5. Factores superiores deben desestimarse al deteriorarse las reconstrucciones a las pocas iteraciones. El factor 2.5 produce un comportamiento oscilatorio de la *CVR*, por lo que se desaconseja su uso si se desea utilizar la *CVR*.
- Las imágenes obtenidas con SSA y AA obtienen valores de las FDM muy parecidos. Puesto que AA no aporta ninguna mejora respecto SSA, se recomienda el uso de este segundo esquema puesto que la no-negatividad de la imagen está garantizada al ser un esquema multiplicativo.
- En el rango de valores de 1 a 2.5 del factor de aceleración, se comprueba que las diferentes FDM sobre las imágenes alcanzan los mismos valores a un número de iteraciones que es inversamente proporcional a dicho factor. Se concluye que, a diferencia de ART, el

parámetro de relajación no mejora la calidad de la imagen y se comporta únicamente como un factor de aceleración.

- Aunque el estudio del número de iteraciones al cual interrumpir el proceso iterativo debe hacerse en función de la finalidad de la imagen, se puede concluir que la CVR es un método de detención eficaz tanto para SSA como para AA, pues produce imágenes con valores compensados de las FDM de comportamiento opuesto (*CON* respecto *CC* o *SNR*).

También se ha realizado un estudio de la dependencia de la calidad de la imagen respecto el número de subconjuntos ordenados en que se divide las proyecciones y el número de iteraciones en MLE-OS. Del mismo se extraen las siguientes conclusiones:

- Utilizando un número pequeño de subconjuntos ordenados el método MLE-OS acelera el método MLE en un factor igual al número de subconjuntos utilizados.
- Si el número de subconjuntos empleado es excesivo, la imagen resultante es de calidad inferior a la conseguida con MLE.
- El número máximo de subconjuntos utilizables depende, entre otros factores, de la importancia del ruido sobre las proyecciones. Cuanto menor es la presencia de ruido, mayor es el número de subconjuntos ordenados que se puede utilizar sin que se produzca una pérdida de calidad en la reconstrucción.
- El criterio *CVR* de interrupción del proceso iterativo es compatible con la utilización de subconjuntos ordenados mientras el número de subconjuntos ordenados utilizados se mantenga dentro del rango de valores en que la reconstrucción tiene la misma calidad que con MLE. Si se utiliza un número de subconjuntos superior, *CVR* puede presentar comportamientos anómalos.

8.5. Capítulo 7: Comparación de métodos

En vista a los resultados de los tres capítulos anteriores se extraen las siguientes conclusiones:

- Los procesos iterativos mejoran los resultados de FBP. En particular, es notable la corrección de la atenuación.
- La convergencia del proceso iterativo es parcial en los tres casos. Tras mejorar en las primeras iteraciones, la imagen empeora si se prolonga el proceso iterativo más allá de un determinado número de iteraciones.
- Aunque existen pequeñas diferencias, el comportamiento de las diversas FDM en función de las iteraciones es muy parecido en los tres métodos iterativos. Tanto *CC* como *SNR* alcanzan su valor máximo a las pocas iteraciones, mientras que *CON* mantiene su crecimiento.
- En los tres métodos existe un parámetro para regular la velocidad de convergencia. En los tres, sin embargo, existe un valor máximo de ese parámetro, dependiente básicamente de la cantidad de ruido sobre las proyecciones y que puede ser determinado mediante estudios simulados, a partir del cual los resultados obtenidos son peores.

A nivel teórico se concluye que:

- La interrupción del proceso iterativo es un método de regularización. Al ser reconstruidas en primer lugar las componentes de baja frecuencia (estructura general de la imagen) y posteriormente las de alta frecuencia (detalles), dado que la componente de ruido afecta principalmente a las altas frecuencias, la truncación del proceso iterativo elimina la amplificación de ruido sobre la reconstrucción.
- El parámetro de regularización es el número de iteraciones en combinación con la velocidad de convergencia del método. Aumentando el número de iteraciones se consigue ajustar más la imagen a las proyecciones a costa de amplificar el ruido. Por el contrario, disminuyendo el número de iteraciones, se consiguen imágenes más suaves, pero con menor resolución y contraste.

En la aplicación a la cuantificación de la actividad de emisión de un tumor pulmonar se concluye que:

- El método FBP empleado usualmente en este tipo de estudios no recupera el valor de la actividad del tumor.
- Los métodos iterativos sí recuperan dicho valor, pero sólo MLE-OS lo hace a un número de iteraciones independiente de la actividad del tumor. En consecuencia, el desconocimiento a priori de esa actividad hace que únicamente pueda utilizarse MLE-OS.
- Aunque el valor encontrado no sea correcto, la actividad del tumor en la imagen reconstruida mantiene para FBP una buena linealidad respecto el valor teórico.
- Debido al ruido en las proyecciones, los resultados tienen un cierta dispersión, siendo más elevada cuanto mayor sea el ajuste. Con niveles de ajuste similares, se obtienen dispersiones del mismo orden independientemente del algoritmo utilizado. La dispersión aumenta con el número de iteraciones y disminuye con la actividad del tumor.

8.6. Publicación de los resultados de esta tesis.

Los resultados de este trabajo han dado lugar a los artículos [ROS-95b] [ROS-96] [FAL-98] [FAL-99c] y a las comunicaciones a congresos [FAL-93] [LLO-93] [ROS-93] [FAL-94a] [FAL-94b] [JUV-94] [FAL-95a] [FAL-95b] [FAL-96] [FAL-97] [JUV-97a] [JUV-97b] [ROS-98] [FAL-99a] [FAL-99b].

8.7. Desarrollo futuro de las investigaciones.

Los temas que quedan abiertos a posteriores investigaciones son muchos. No obstante, las líneas a desarrollar en un futuro inmediato quedan enmarcadas por el proyecto de la CICYT: SAF99/0137.

Esta previsto mejorar la simulación mediante la implementación de un programa que genere proyecciones de 512 bins de una imagen

digitalizada a 512x512, para que, posteriormente, las proyecciones se reconviertan, por agrupación de bins, en proyecciones de 64 o 128 bins. De esta manera se pretende mejorar el parecido entre las proyecciones reales y las simuladas, sobre todo en los objetos de dimensión pequeña. También está previsto mejorar la simulación de la dispersión. Otra línea de investigación en la obtención de proyecciones en la que se está trabajando es la simulación basada en métodos de Monte Carlo. Esta simulación se podría utilizar tanto para obtener proyecciones como para evaluar el método utilizado hasta el momento.

De los métodos de reconstrucción, está pendiente el estudio de las diferentes variantes de los algoritmos utilizados. Se hará especial atención a la optimización del método MLE-OS. Así mismo, se implementará la reconstrucción tridimensional con interrelación de las diferentes secciones.

La tercera, y principal, vía de desarrollo de este trabajo está en la aplicación a estudios clínicos. Se pretende aplicar el par simulación-reconstrucción implementado, con las sucesivas mejoras que se realicen, para determinar las mejores condiciones de trabajo en estudios reales de perfusión cerebral y miocárdica. Para ello, deben realizarse modelaciones numéricas precisas de las partes del cuerpo a simular y de las disfunciones a evaluar, debe validarse la reconstrucción tomográfica con mapa de atenuación obtenido por transmisión simultáneamente a la adquisición, ha de ser implementado un programa que genere la matriz de pesos para los colimadores fan-beam utilizados en SPECT cerebral y debe ser desarrollado una interfase que permita a los facultativos que estén poco familiarizados con los lenguajes de programación el uso de estos programas.

Apéndice A: Siglas, abreviaturas y nombres de variables.

- A*: Variable que representa la matriz de pesos.
- AA*: *Additive Algorithm*. Variante de MLE.
- ART*: *Algebraic Reconstruction Techniques*. Métodos de reconstrucción algebraicos.
- CC*: Coeficiente de Correlación.
- CL*: *Cross Likelihood*. Verosimilitud cruzada.
- CON*: Contraste.
- CV*: Coeficiente de Variación.
- CVM*: Cociente de Valores Medios.
- CVR*: *Cross Validation Ratio*. Cociente entre la verosimilitudes cruzada y directa.
- DL*: *Direct Likelihood*. Verosimilitud directa.
- ECT*: *Emission Computed Tomography*. Tomografía computerizada de emisión.
- EM*: *Expectation Maximization*. Maximización del valor esperado.
- FBP*: *Filtered Back Projection*. Retroproyección filtrada.
- FDM*: Figuras (funciones) de mérito.
- FFT*: *Fast Fourier Transform*. Algoritmo de la transformada de Fourier.
- IFBP*: *Iterative Filtered Back Projection*. Métodos iterativos de corrección en FBP.
- Kc*: Kilocuentas. (1 Kc=1000c).
- M*: Variable que representa el número de filas y columnas de la imagen digitalizada. Número de bins para la proyección en cada ángulo.
- MLE*: *Maximum Likelihood Estimation*.Reconstrucción por el método de la máxima verosimilitud.
- MLE-OS*: *Maximum Likelihood Estimation with Ordered Subsets*.Reconstrucción por MLE utilizando subconjuntos ordenados.
- N*: Variable que representa el número de ángulos de proyección.
- OS*: Variable que indica el número de subconjuntos ordenados utilizados.
- p*: Variable que representa las proyecciones.
- PET*: *Positron Emission Tomography*. Tomografía por Emisión de Positrones.
- POCS*: *Projection Onto Convex Sets*. Proyecciones sobre subconjuntos convexos.
- PSF*: *Point Spread Function*. Respuesta del detector a un punto emisor.
- q*: Variable que representa la imagen.
- SNR*: *Signal-to-Noise Ratio*. Relación Señal-Ruido.
- SPECT*: *Single Photon Emission Computed Tomography*. Tomografía por Emisión de Fotón Único.
- SRF*: *Scattering Response Function*. Función que modeliza la dispersión de fotones.
- SSA*: *Successive Substitution Algorithm*. Variante de MLE.
- TC*: Tomografía Computerizada.
- TF*: Transformada de Fourier.

Bibliografía

- [ABE-76] L.Abellanas, A.Galindo. "Introducción a la Teoría de Operadores Lineales en Espacios de Hilbert", Universidad Complutense de Madrid, Madrid, 1976.
- [AND-89] A.H.Andersen. "Algebraic Reconstruction in CT from Limited Views", *IEEE Trans Med Imag*, **8**: 50-55, (1989).
- [APE-88] "APEX SPECT Manual: 5. Back Projection Filters", manual de las gammacámaras APEX-SPECT de Elscint, 1988.
- [ARC-95] G.Archer, M.D.Titterington. "On Some Bayesian Regularizations Methods for Image Restoration", *IEEE Trans Image Process*, **4**: 989-995, (1995).
- [AXE-84] B.Axelsson, P.Msaki, A.Israelsson, "Subtraction of Compton Scattered Photons in Single Photon Emission Computerized Tomography", *J Nucl Med*, **25**: 490-494, (1984).
- [BAI-87] D.L.Bailey, B.F.Hutton, P.J.Walker. "Improved SPECT Using Simultaneous Emission and Transmission Tomography", *J Nucl Med*, **28**: 844-851, (1987).
- [BAK-80] N.Bakhvalov. "Métodos Numéricos", Ed Paraninfo, Madrid, 1980.
- [BAR-81] H.H.Barret, W.Swindell. "Radiological Imaging", Academic Press, New York, 1981.
- [BAR-94] H.H.Barret, D.W.Wilson, B.M.W.Tsui. "Noise Properties of EM Algorithm: I. Theory", *Phys Med Biol*, **39**: 833-846, (1994).
- [BAR-97] L.R.Barnden, P.L.Ong, C.C.Rowe. "Simultaneous Emission Transmission Tomography Using Technetium-99m for both Emission and Transmission", *Eur J Nucl Med*, **24**: 1390-1397, (1997).
- [BEC-82] J.W.Beck, R.J.Jaszczak, R.E.Coleman, C.F.Starmer, L.W.Nolte. "Analysis of SPECT Including Scatter and Attenuation Using Sophisticated Monte Carlo Modeling Methods", *IEEE Trans Nucl Sci*, **NS-29**: 506-511, (1982).
- [BEE-93] F.J.Beekman, E.G.J.Eijkman, M.A.Viergever, G.F.Borm, E.T.P.Slijpen. "Object Shape Dependent PSF Model for SPECT Imaging", *IEEE Trans Nucl Sci*, **40**: 31-39, (1993).
- [BEL-79] S.Bellini, M.Piacentini, C.Cafforio, F.Rocca. "Compensation of Tissue Absorption in Emission Tomography", *IEEE Trans Acoust Speech Sinal Process*, **ASSP-27**: 213-218, (1979).
- [BEN-70] R.Bender, S.H.Bellman, R.Gordon. "ART and the Ribosome: A Preliminary Report on the Three-Dimensional Structure of Individual Ribosomes Determined by Algebraic Reconstruction Technique", *J Theor Biol*, **29**: 483-487, (1970).
- [BER-86] M.Bertero. "Regularization Methods for Linear Inverse Problems", publicado en el libro [INV-86]: 52- 112.
- [BOT-93] E.H.Botvinick, Y.Y.Zhu, W.J.O'Connell, M.W.Dae. "A Quantitative Assessment of Patient Motion and Its Effect on Myocardial Perfusion SPECT Images", *J Nucl Med*, **34**: 303-310, (1993).

-
- [BRO-89] G.Brozolo, M.Vitaletti. "Conjugate Gradient Subroutines for the IBM 3090 Vector Facility", *IBM J Res Develop*, **33**: 125-135, (1989).
- [BUV-95] I.Buvat, M.Rodríguez-Villafuerte, A.Todd-Pokropek, H.Benali, R.Di Paola. "Comparative Assessment of Nine Scatter Correction Methods Based on Spectral Analysis Using Monte Carlo Simulations", *J Nuc Med*, **36**: 1476-1488, (1995).
- [BYR-97] C.L.Byrne. "Convergent Block Iterative Algorithms for Image Reconstruction from Inconsistent Data", *IEEE Trans Imag Process*, **6**: 1296-1304, (1997).
- [BYR-98] C.L.Byrne. "Accelerating the EMLL Algorithm and Related Iterative Algorithms by Rescaled Block-Iterative Methods", *IEEE Trans Imag Process*, **7**: 100-109, (1998).
- [CAO-96] Z.J.Cao, L.E.Holder, C.C.Chen. "Optimal Number of Views in 360° SPECT Imaging", *J Nucl Med*, **37**: 1740-1744, (1996).
- [CAR-86] J.M.Carazo, J.L.Carrascosa. "Information Recovery in Missing Angular Data Cases: an Approach by the Convex Projection Method in Three Dimensions", *J Microscopy*, **145**: 23-43, (1986).
- [CEN-79] Y.Censor, D.E.Guftanson, A.Lent, H.Tuy. "A New Approach to the Emission Computerized Tomography Problem: Simultaneous Calculation of Attenuation and Activity Coefficients", *IEEE Trans Nucl Sci*, **NS-26**: 2775-2779, (1979).
- [CEN-81] Y.Censor. "Row-Action Methods for Huge and Sparse Systems and their Applications", *SIAM Rev*, **23**: 444-466, (1981).
- [CEN-83a] Y.Censor, P.P.B.Eggermont, D.Gordon. "Strong Under-relaxation in Kaczmarz's Method for Inconsistent Systems", *Numer Math*, **41**: 83-92, (1983).
- [CEN-83b] Y.Censor. "Finite Series- Expansion Reconstruction Methods", *Proc IEEE*, **71**: 409-419, (1983).
- [CEN-87] Y.Censor. "On Some Optimization Techniques in Image Reconstruction from Projections", *Appl Numer Math*, **3**: 365-391, (1987).
- [CEN-91] Y.Censor. "On Variable Block Algebraic Reconstruction Techniques", publicado en el libro [MAT-91]: 133-140.
- [CHA-78] L.T.Chang. "A Method for Attenuation Correction in Radionuclide Computer Tomography", *IEEE Trans Nucl Sci*, **NS-25**: 638-643, (1978).
- [CHA-79] L.T.Chang. "Attenuation Correction and Incomplete Projection in Single Photon Emission Computed Tomography" *IEEE Trans Nucl Sci*, **NS-26**: 2780-2789, (1979).
- [CHE-88] C.T.Chen, C.E.Metz, X.Hu. "Maximum Likelihood Reconstruction in PET and TOFPET", publicado en el libro [MAT-88]: 319-329.
- [CHO-90] E.S.Chornoboy, C.J.Chen, M.I.Miller, T.R.Miller, D.L.Snyder. "An Evaluation of Maximum Likelihood Reconstruction for SPECT", *IEEE Trans Med Imag*, **9**: 99-110, (1990).
- [COA-91] K.J Coakley. "A Cross-Validation Procedure for Stopping the EM Algorithm and Deconvolution of Neutron Depth Profile Spectra", *IEEE Trans Nucl Sci*, **38**: 9-15, (1991).

-
- [COO-92] J.A.Cooper, P.H.Neumann, B.K.McCandless. "Effect of Patient Motion on Tomographic Myocardial Perfusion Imaging", *J Nucl Med*, **33**: 1566-1571, (1992).
- [CRO-95] B.Y.Croft, B.M.W.Tsui. "Nuclear Medicine", Publicado en el libro *"The Biomedical Engineering Handbook"*, J.D.Bronzino (Edt), CRC Press and IEEE Press, Florida, 1995.
- [CUA-81] C.M.Cuadras. *"Métodos de Análisis Multivariante"*, Ed. Eunibar, Barcelona, 1981.
- [CUA-96] C.M.Cuadras, B.Echeverría, J.Mateo, P.Sánchez. *"Fundamentos de Estadística. Aplicaciones a las Ciencias Humanas"*, EUB.S.L. Barcelona, 1996.
- [DAV-83] Davison. "The Ill-Conditioned Nature of the Limited Angle Tomography Problem", *SIAM J Appl Math*, **43**: 428-448 (1983).
- [DEB-88] M.De Belder. "The Evaluation of Image Processing Algorithms for Use in Medical Imaging", publicado en el libro [MAT-88]: 401-414.
- [DEF-88] M.Defrise. "Possible Criteria for Choosing the Number of Iterations in Some Iterative Reconstruction Methods", publicado en el libro [MAT-88]: 293-303.
- [DEM-77a] A.P.Dempster, N.M.Laird, D.B.Rubin. "Maximum Likelihood from Incomplete Data via the EM Algorithm", *J Roy Statist Soc B*, **39**: 1-38, (1977).
- [DEM-77b] B.P.Deminovich, I.A.Maron. *"Cálculo Numérico Fundamental"*, Ed Paraninfo, Madrid, 1977.
- [DEM-89] G.Demoment. "Image Reconstruction and Restoration: Overview of Common Estimation Structures and Problems", *IEEE Trans Acoust Speech Signal Process*, **ASSP-37**: 2024-2036, (1989).
- [DEP-91] A.R.De Pierro. "Multiplicative Iterative Methods in Computed Tomography", publicado en el libro [MAT-91]: 167-186.
- [DEV-90] D.J.de Vries, S.C.Moore, R.E.Zimmerman, S.P.Mueller, B.Friedland, R.C.Lanza. "Development and Validation of a Monte Carlo Simulation of Photon Transport in an Anger Camera", *IEEE Trans Med Imag*, **9**: 430-438, (1990).
- [DOM-80] F.M.Domenech-Torné, J.Setoain, P.Galofré y otros. *"Medicina Nuclear. Aplicaciones Diagnósticas de los Isótopos Radiactivos"*, Monografías Médicas, Editorial Científico-Médica, Barcelona, 1980.
- [DUT-80] J.Dutreix, A. Desgrez, B.Bok, C.Chevalier. *"Física y Biofísica: Radiaciones"*, Editorial AC, Madrid, 1980.
- [ELF-91] T.Elfving. "Constrained Regularized Least Squares Problems", publicado en el libro [MAT-91]: 153-166.
- [ENG-86] R.English, S.Brown. *"SPECT, Single-Photon Emission Computed Tomography: a Primer"*, The Society of Nuclear Medicine, New York, 1986.
- [FAL-93] C. Falcón, X. Llovet, I. Juvells, D. Ros, J. Pavia. "Efecto de la pérdida de información angular en la reconstrucción de imágenes de SPECT", XXIV Reunión Bienal de la Real Sociedad Española de Física. Jaca, 27 Septiembre-1 Octubre, 1993. Publicado en el libro de Actas del Congreso.

- [FAL-94a] C.Falcón, D.Ros, I.Juvells, J.Pavía. "Relaxation Parameters in SPECT Iterative Reconstruction Algorithms", European Association of Nuclear Medicine Congress 1994. Düsseldorf, 20-24 Agosto, 1994. Publicado en *Eur J Nucl Med*, **21**: 872, (1994).
- [FAL-94b] C.Falcón, D.Ros, I.Juvells, J.Pavía. "Técnicas eficientes de reconstrucción algebraica en SPECT", IV Reunión Nacional de Optica, Granada, 14-16 Septiembre, 1994. Publicado en el libro de Actas del Congreso, pg 31-32.
- [FAL-95a] C.Falcón, D.Ros, I.Juvells, J.Pavía. "Algoritmes iteratius aplicats a la reconstrucció d'imatges gammagràfiques d'SPECT", XI Trobades Científiques de la Mediterrània. L'Optica cap a l'any 2000, Maó, 13-15 Septiembre, 1995. Publicado en el libro de Actas del Congreso, pg 81-84.
- [FAL-95b] C.Falcón, D.Ros, I.Juvells, J.Pavía. "Métodos Algebraicos de Reconstrucción Tomográfica en SPECT. Influencia del número de iteraciones", XIII Congreso anual de la Agrupación Española de Bioingeniería, Barcelona, 26-27 Octubre, 1995. Publicado en el libro de Actas del Congreso, pg 31-32.
- [FAL-96] C. Falcón, D. Ros, I. Juvells, J. Pavía. "Image Quality in SPECT. Comparison of Iterative Algorithms Using Figures of Merit", European Association of Nuclear Medicine Congress 1996, Copenhagen, 14-18 September, 1996. Publicado en *Eur J Nucl Med*, **23**: 1241, (1996).
- [FAL-97] C. Falcón, D. Ros, I. Juvells, J. Pavía. "A Cross-Validation Stopping Rule for Accelerated Maximum Likelihood Estimation Reconstruction Algorithms in SPET", World Congress on Medical Physics and Biomedical Engineering, Nice, 14-19 Septiembre, 1997. Publicado en *Med Biol Eng Comput*, **35**, supplement part 2: 811 (1997).
- [FAL-98] C.Falcon, I.Juvells, J.Pavía, D.Ros. "Evaluation of a Cross-Validation Stopping Rule in MLE SPECT Reconstruction", *Phys Med Biol*, **43**: 1271-1283, (1998).
- [FAL-99a] C.Falcon, D.Fuster, I.Juvells, D.Ros, J.Pavía. "Assessment of the OS-EM Iterative Algorithm in the Quantification of the Relative Uptake of Hot Spots. A Simulation Study", European Association of Nuclear Medicine Congress 1999, Barcelona, 9-12 Octubre, 1999.
- [FAL-99b] C.Falcon, I.Juvells, J.Pavía, D.Ros. "Correcció d'Atenuació i PSF amb el Mètode de Chang Iteratiu a les Imatges d'SPECT Reconstruïdes amb Retroprojecció Filtrada", XV Trobades Científiques de la Mediterrània. Jornades de Recerca en Biofísica i Bioenginyeria: Noves Tecnologies a Medicina, Maó, 20-22 Setembre, 1999.
- [FAL-99c] C.Falcon, I.Juvells, J.Pavía, D.Ros. "OS-EM in SPECT Reconstruction, Assessment of the Image Quality as a Function of the Number of Subsets", *Phys Med Biol*,(sometido)
- [FAR-90] A.Faridani. "An Application of a Multidimensional Sampling Theorem to Computed Tomography", publicado en el libro *Integral Geometry and Tomography. Proceedings of a Joint Summer Research Conference, held June 24-30 1989*, E.Grinberg, E.T.Quinto (Eds.), Contemporary Mathematics **113**, American Mathematical Society, Providence, 1990.
- [FES-92] J.A.Fessler, N.H.Clinthorne, W.L.Rogers. "Regularized Emission Image Reconstruction Using Imperfect Side Information", *IEEE Trans Nucl Sci*, **39**: 1464-1471, (1992).
- [FLE-90] H.E.Fleming. "Equivalence of Regularization and Truncated Iteration in Solution of Ill-Posed Image Reconstruction Problems", *Linear Algebra Appl*, **130**: 133-150, (1990).

- [FLO-84] C.E.Floyd, R.J.Jaszczak, C.C.Harris, R.E.Coleman, "Energy and Spatial Distribution of Multiple Order Compton Scatter in SPECT: a Monte Carlo Investigation", *Phys Med Biol*, **29**, n 10: 1217-1230, (1984)
- [FLO-85] C.E.Floyd, R.J.Jaszczak, K.L.Greer, R.E.Coleman. "Deconvolution of Compton Scatter in SPECT", *J Nucl Med*, **26**: 403-408, (1985).
- [FOR-89] A.R.Formiconi, A.Pupi, A.Passeri, "Compensation of Spatial System Response in SPECT with Conjugate Gradient Reconstruction Technique", *Phys Med Biol*, **34**: 69-84, (1989).
- [FRE-84] "*Freeman and Johnson's Clinical Radionuclide Imaging*" (3ª edición). L.M.Freeman (Ed.), Grune & Stratton Inc, Orlando, 1984.
- [FRE-90] E.C.Frey, B.M.W.Tsui. "Parameterization of the Scatter Response Function in SPECT Imaging Using Monte Carlo Simulation", *IEEE Trans Nucl Sci*, **37**: 1308-1315, (1990).
- [FRE-91] E.C.Frey, B.M.W.Tsui. "Spatial Properties of Scatter Response Function in SPECT", *IEEE Trans Nucl Sci*, **38**: 789-794, (1991).
- [FRE-93] E.C.Frey, Z.W.Ju, B.M.W.Tsui. "A Fast Projector-Backprojector Pair Modeling the Asymmetric, Spatially Varying Scatter Response Function for Scatter Compensation in SPECT Imaging", *IEEE Trans Nucl Sci*, **NS-40**: 1192-1197, (1993).
- [GEL-88] M.J.Gelfand, S.R.Thomas. "*Effective Use of Computers in Nuclear Medicine*", McGraw-Hill, New York, 1988.
- [GEM-84] S.Geman, D.Geman. "Stochastic Relaxation, Gibbs Distributions and the Bayesian Restoration of Images", *IEEE Trans Pattern Anal and Machine Intell*, **PAMI-6**: 712-741, (1984).
- [GIL-72] P.Gilbert. "Iterative Methods for the Three-Dimensional Reconstruction of an Object from Projections", *J Theor Biol*, **36**: 105-117, (1972).
- [GIL-91] D.R.Guillabd, R.J.Jazczak, T.G.Turkington, K.L.Greer, R.E.Coleman. "Quantitative SPECT Imaging With Indium-111", *IEEE Trans Nucl Sci*, **38**: 761-766, (1991).
- [GLI-91] S.J.Glick, B.C.Penney, M.A.King. "Filtering of SPECT Reconstructions Made Using Bellini's Attenuation Correction Method: a Comparison of Three Pre-Reconstruction Filters and Post-Reconstruction Wiener Filter", *IEEE Trans Nucl Sci*, **38**: 663-669, (1991).
- [GOL-89] G.H.Golub, C.F.Van Loan. "*Matrix Computations*" (second edition). Johns Hopkins University Press, London, 1989.
- [GON-77] R.C.González, P.Wintz. "*Digital Image Processing*", Addison-Wesley, Massachusetts, 1977.
- [GOR-70] R.Gordon, R.Bender, G.T.Herman. "Algebraic Reconstruction Techniques (ART) for Three-Dimensional Electron Microscopy and X-Ray Photography", *J Theor Biol*, **29**: 471-481, (1970).
- [GOR-74] R.Gordon, "A Tutorial on ART (Algebraic Reconstruction Techniques)", *IEEE Trans Nucl Sci*, **NS-21**: 78-93, (1974).
- [GRE-90] P.J.Green. "Bayesian Reconstruction from Emission Tomography Data Using a Modified EM Algorithm", *IEEE Trans Med Imag*, **9**: 84-93, (1990).

-
- [GUA-94] H.Guan, R.Gordon. "A Projection Access Order for Speedy Convergence of ART (Algebraic Reconstruction Technique): A Multilevel Scheme for Computed Tomography" *Phys Med Biol*, **39**: 2005-2022, (1994).
- [GUA-96] H.Guan, R.Gordon. "Computed Tomography Using Algebraic Reconstruction Techniques (ARTs) with Different Projection Access Schemes: A Comparison Study under Practical Situations", *Phys Med Biol*, **41**: 1727-1723, (1996).
- [GUI-91] D.R.Guilland, B.M.W.Tsui, C.E.Metz, R.J.Jaszczak, J.R.Perry. "An Evaluation of Maximum Likelihood-Expectation Maximization Reconstruction for SPECT by ROC Analysis", *J Nucl Med*, **33**: 451-457, (1991).
- [GUL-81] G.T.Gullberg, T.F.Budinger. "The Use of Filtering Methods to Compensate for Constant Attenuation in Single-Photon Emission Computed Tomography", *IEEE Trans Biomed Engin*, **BME-28**: 142-157, (1981).
- [GUL-85] G.T.Gullberg, R.H.Huesman, J.A.Malko, N.J.Pelc, T.F.Budinger. "An Attenuated Projector-Backprojector for Iterative SPECT Reconstruction", *Phys Med Biol*, **30**: 799-816, (1985).
- [HAN-90] K.M.Hanson. "Method of Evaluating Image-Recovery Algorithms Based on Task Performance", *J Opt Soc Am A*, **7**: 1294-1304, (1990).
- [HAR-84] C.C.Harris, K.L.Greer, R.J.Jaszczak, C.E.Floyd, E.C.Fearnow, R.E.Coleman. "^{99m}Tc Attenuation Coefficients in Water-Filled Phantoms Determined with Gamma Cameras", *Med Phys*, **11**: 681-685, (1984).
- [HEB-88] T.J.Hebert, R.Leahy, M.Singh. "Fast MLE for SPECT Using an Intermediate Polar Representation and a Stopping Criterion", *IEEE Trans Nucl Sci*, **35**: 615-619, (1988).
- [HEB-90] T.J.Hebert. "Statistical Stopping Criteria for Iterative Maximum Likelihood Reconstruction of Emission Images", *Phys Med Biol*, **35**: 1221-1232, (1990).
- [HEB-92] T.J.Hebert, S.S.Gopal. "The GEM MAP Algorithm with 3-D SPECT System Response", *IEEE Trans Med Imag*, **11**: 81-90, (1992).
- [HEB-94] T.J.Hebert, S.S.Gopal. "Maximum Likelihood Preprocessing for Improved Filtered Back-Projection Reconstruction", *J Comput Assist Tomogr*, **18**: 283-291, (1994).
- [HER-78] G.T.Herman, A.Lent, P.H.Lutz. "Relaxation Methods for Image Reconstruction", *Comm ACM*, **21**: 152-158, (1978).
- [HER-80] G.T.Herman. "*Image Reconstructions from Projections*", Academic Press, New York, 1980.
- [HER-87] G.T.Herman, H.K.Tuy, K.J.Langerberg, P.C.Sabatier. "*Basic Methods of Tomography and Inverse Problems*", Malvern Physics Series, Adam Hilger, Bristol, 1987.
- [HER-88] G.T.Herman, H.Levkowitz. "Initial Performance of Block-Iterative Reconstruction Algorithms", publicado en el libro [MAT-88]: 305-317.
- [HER-89] G.T.Herman, D.Yeung. "Evaluators of Image Reconstruction Algorithms", *Int J Imag Syst Tech*, **1**: 187-195, (1989).
- [HER-90] A.O.Hero, L.Shao. "Information Analysis of Single Photon Emission Computed Tomography with Count Losses", *IEEE Trans Med Imag*, **9**: 117-127, (1990).

- [HER-91a] G.T.Herman, D.Odhner. "Performance Evaluation of an Iterative Image Reconstruction Algorithm for Positron Emission Tomography", *IEEE Trans Med Imag*, **10**: 336-346, (1991).
- [HER-91b] G.T.Herman, D.Odhner. "Evaluation of Reconstruction Algorithms", publicado en el libro [MAT-91]: 215-228.
- [HER-93] G.T.Herman, L.B.Meyer. "Algebraic Reconstruction Techniques can be made Computationally Efficient", *IEEE Trans Med Imag*, **12**: 600-609, (1993).
- [HIG-97] D.M.Higdon, J.E.Browser, V.E.Johnson, T.G.Turkington, D.R.Gilland, R.J.Jaszczak. "Fully Bayesian Estimation of Gibbs Hiperparameters for Emission Computed Tomography Data", *IEEE Trans Med Imag*, **16**: 516-526, (1997).
- [HUD-94] H.M.Hudson, R.S.Larkin. "Accelerated Image Reconstruction Using Ordered Subsets Projection Data", *IEEE Trans Med Imag*, **13**: 601-609, (1994).
- [HUT-97] B.F.Hutton, H.M.Hudson, F.J.Beekman. "A Clinical Prespective of Accelered Statitical Reconstruction", *Eur J Nucl Med*, **24**: 797-808, (1997).
- [INO-89] T.Inouye, K.Kose, A.Hasegawa. "Image Reconstruction Algorithm for Single-Photon Emission Computed Tomography with Uniform Attenuatiomn", *Phys Med Biol*, **34**: 299-304, (1989).
- [INV-86] *"Inverse Problems. Lectures Given at the 1st 1986 Session of the CIME Held at Montecatini Terme, Italy, May 28- June5, 1986"*, A.Dold, B.Eckmann (Eds), Lecture Notes in Mathematics **1225**, Ed. Springer-Verlag, Berlin, 1986.
- [JAF-90] J.S.Jaffe. "Limited Angle Reconstruction Using Stabilized Algorithms", *IEEE Trans Med Imag*, **9**: 338-344, (1990).
- [JAS-80] R.J.Jaszczak, R.E.Coleman, C.B.Lim. "Single Photon Emission Computed Tomography (SPECT); History and Physical Attributes", *IEEE Trans Nuc Sci*, **NS-27**: 1137-1153, (1980).
- [JAS-84] R.J.Jaszczak, K.J.Greer, C.E.Floyd, C.C.Harris, R.E.Coleman. "Improved SPECT Quantification Using Compensation for Scatter Photons", *J Nucl Med*, **25**: 893-900, (1984).
- [JAS-85] R.J.Jaszczak, C.E.Floyd, R.E.Coleman. "Scatter Compensation Techniques for SPECT", *IEEE Trans Nuc Sci*, **NS-32**: 786-793, (1985).
- [JER-77] A.J.Jerri. "The Shannon Sampling Theorem-Its Various Extensions and Applications: A Tutorial Review", *Proc IEEE*, **65**: 1565-1596, (1977).
- [JOY-84] L.S.Joyce, W.L.Root. "Precision Bound in Superresolution Processing", *J Opt Soc Am A*, **1**: 149-168, (1984).
- [JUV-94] I.Juvells, C.Falcón, D.Ros, J.Pavía, A.García. "Corrección de las degradaciones producidas por la atenuación, la dispersión y la respuesta del detector en imágenes de SPECT", IV Reunión Nacional de Optica, Granada, 14-16 Septiembre, 1994. Publicado en el libro de Actas del Congreso, pg 15-16.
- [JUV-97a] I. Juvells, C. Falcón, J. Pavía, D. Ros. "Assessment of the Image Quality in Ordered Subsets SPET Reconstruction", European Association of Nuclear Medicine Congress 1997, Glasgow, 23-27 Agost, 1997. Publicado en *Eur J Nucl Med*, **24**: 1036, (1997).

- [JUV-97b] I.Juvells, C.Falcón, D. Ros, J.Pavía. "Reconstrucción de imágenes de SPECT por máxima verosimilitud. Comparación de algoritmos de aceleración", V Reunión Nacional de Óptica. València, 16-18 Septiembre, 1997. Publicado en el libro de Actas del Congreso, pg 139-140.
- [KAK-84] A.C.Kak, "Image Reconstruction from Projections", publicado en el libro "*Digital Image Processing Techniques*", M.P. Ekstrom (Ed), Academic Press, Orlando, 1984: 111-170.
- [KAM-96a] C.Kamphuis, F.J.Beekman, M.A.Viergever. "Evaluation of OS-EM versus ML-EM for 1D, 2D and Fully 3D SPECT Reconstruction", *IEEE Trans Nucl Sci*, **43**: 2018-2024, (1996).
- [KAM-96b] C.Kamphuis, F.J.Beekman, M.A.Viergever. "Accelerated Fully 3D SPECT Reconstruction Using Dual Matrix Ordered Subsets Strategy", *J Nucl Med*, **37**: 62P, (1996).
- [KAM-98] C.Kamphuis, F.J.Beekman, P.P.van Rijk, M.A.Viergever. "Dual Matrix Ordered Subsets Reconstruction for Accelerated 3D Scatter Compensation in Single-Photon Emission Tomography", *Eur J Nucl Med*, **25**: 8-18, (1998).
- [KAO-98] C.M.Kao, X.Pan, C.T.Chen. "Image Restoration and Reconstruction with a Bayesian Approach", *Med Phys*, **25**: 600-612, (1998).
- [KAR-90] N.B.Karayiannis, A.N.Venetsanopoulos. "Regularization Theory in Image Restoration. The Stabilizing Functional Approach", *IEEE Trans Acoust Speech Signal Process*, **38**: 1155-1179, (1990).
- [KAU-87] L.Kaufman. "Implementing and Accelerating the EM Algorithm for Positron Emission Tomography", *IEEE Trans Med Imag*, **MI-6**: 37-51, (1987).
- [KAW-85] S.Kawata, O.Nalgliocu. "Constrained Reconstruction by the Conjugate Gradient Method", *IEEE Trans Med Imag*, **MI-4**: 65-71, (1985).
- [KIN-91] M.A.King, S.J.Glick, B.C.Penney. "Activity Quantitation in SPECT: A Comparison of Three Attenuation Correction Methods in Combination With Pre-Reconstruction Restoration Filtering", *IEEE Trans Nucl Sci*, **38**: 755-760, (1991).
- [KIN-92] M.A.King, G.J.Hademenos, S.J.Glick. "A Dual-Photopeak Window Method for Scatter Correction", *J Nucl Med*, **33**: 605-612, (1992).
- [KIN-94] P.E.Kinahan, J.S.Karp. "Figures of Merit for Comparing Reconstruction Algorithms with a Volume-Imaging PET Scanner", *Phys Med Biol*, **39**: 631-642, (1994).
- [KNO-83] G.F.Knoll. "Single-Photon Emission Computed Tomography", *Proc IEEE*, **71**: 320-329, (1983).
- [KOL-90] I.Koltracht, P.Lancaster. "Constraining Strategies for Linear Iterative Processes", *IMA J Numer Anal*, **10**: 555-567, (1990).
- [KOR-88] K.F.Koral, X.Wang, W.L.Rogers, N.H.Clinthorne, X.Wang. "SPECT Compton-Scattering Correction by Analysis of Energy Spectra", *J Nuc Med*, **29**: 195-202, (1988).
- [LAL-92] D.S.Lalush, B.M.W.Tsui. "Attenuation and Detector Response Compensations Used with Gibbs Prior Distributions for Maximum A Posteriori SPECT Reconstruction", *IEEE Trans Nucl Sci*, **39**: 1454-1459, (1992).

-
- [LAL-94] D.S.Lalush, B.M.W.Tsui. "Improving the Convergence of Iterative Filtered Backprojection Algorithms", *Med Phys*, **21**: 1283-1286, (1994).
- [LAN-84] K.Lange, R.Carson. "EM Reconstruction Algorithms for Emission and Transmission Tomography", *J Comput Assist Tomogr*, **8**: 306-316, (1984).
- [LAN-87] K.Lange, M.Bahn, R.Little. "A Theoretical Study of Some Maximum Likelihood Algorithms for Emission and Transmission Tomography", *IEEE Trans Med Imag*, **MI-6**: 106-114 (1987).
- [LAN-90] K.Lange. "Convergence of EM Reconstruction Algorithms with Gibbs Smoothing", *IEEE Trans Med Imag*, **9**: 439-446 (1990).
- [LEV-87] E.Levitan, G.Herman. "A Maximum A Posteriori Probability Expectation Maximization Algorithm for Image Reconstruction in Emission Tomography", *IEEE Trans Med Imag*, **MI-6**: 185-192, (1987).
- [LEW-83] R.M.Lewitt. "Reconstruction Algorithms: Transform Methods", *Proc IEEE*, **71**: 390-408, (1983).
- [LEW-86] R.M.Lewitt, G.Muehlechner. "Accelerated Iterative Reconstruction for Positron Emission Tomography Based on the EM Algorithm for Maximum Likelihood Estimation", *IEEE Trans Med Imag*, **5**: 16-22, (1986).
- [LI-94] J.Li, R.J.Jaszczak, K.L.Greer, R.E.Coleman. "Implementation of an Accelerated Algorithm for Cone Beam SPECT", *Phys Med Biol*, **39**: 643-653, (1994).
- [LIA-89] Z.Liang, R.Jaszczak, K.Greer. "On Bayesian Image Reconstruction from Projections: Uniform and Nonuniform A Priori Source Information", *IEEE Trans Med Imag*, **MI-8**: 227-235, (1989).
- [LIA-91] Z.Liang. "Implementation of Linear Filters for Iterative Penalized Maximum Likelihood SPECT Reconstruction", *IEEE Trans Nucl Sci*, **38**: 606-611, (1991).
- [LIA-92] Z.Liang, T.G.Turkington, D.R.Gilland, R.J.Jaszczak, R.E.Coleman. "Simultaneous Compensation for Attenuation, Scatter and Detector Response for SPECT Reconstruction in Three Dimensions", *Phys Med Biol*, **37**: 487-603, (1992).
- [LIA-93] Z.Liang. "Compensation for Attenuation, Scatter and Detector Response in SPECT reconstruction via iterative FBP Methods", *Med Phys*, **20**: 1097-1106, (1993).
- [LIE-93] S.C.Liew, B.H.Hasegawa, J.K.Brown, T.F.Lang. "Noise Propagation in SPECT Images Reconstructed Using an Iterative Maximum-Likelihood Algorithm", *Phys Med Biol*, **38**: 1713-1726, (1993).
- [LIN-91] J.M.Links, T.L.Frank, L.C.Becker. "Effect of Differential Tracer Washout During SPECT Acquisition", *J Nucl Med*, **32**: 2353-2357, (1991).
- [LIU-96] Y.H.Liu, A.J.Sinusas, J.A.Browne, F.J.Wackers. "Accelerated SPECT Image Reconstruction Using a Modified Ordered Subsets Expectation Maximization method: a Fast Line Search Strategy", *J Nucl Med*, **37**: 62P, (1996).
- [LJU-89] M.Ljungberg, S.E.Strand. "A Monte Carlo Program for the Simulation of Scintillation Camera Characteristics", *Computer Methods and Programs in Biomedicine*, **29**: 257-272, (1989).

-
- [LJU-90a] M.Ljungberg, P.Msaki, S.E.Strand. "Comparison of Dual-Window and Convolution Scatter Correction Techniques Using Monte Carlo Methods", *Phys Med Biol*, **35**: 1099-1110, (1990).
- [LJU-90b] M.Ljungberg, S.E.Strand. "Attenuation Correction in SPECT Based on Transmission Studies and Monte Carlo Simulations of Build-Up Functions", *J Nucl Med*, **31**: 493-500, (1990).
- [LLA-a] J.Llacer. "Image Reconstruction in the Sciences and Industry: The State of the Art", Lawrence Berkeley Laboratory. University of California, (comunicación interna, documento no publicado).
- [LLA-b] J.Llacer, E.Veklerov, K.J.Coakley, E.J.Hoffman, J.Núñez. "Optimization of Maximum Likelihood Estimator Images for PET: I. Algorithm Implementation", Lawrence Berkeley Laboratory. University of California, (comunicación interna, documento no publicado).
- [LLA-82] J.Llacer. "Tomographic Image Reconstruction by Eigenvector Decomposition: Its Limitations and Areas of Applicability", *IEEE Trans Med Imag*, **MI-1**: 34-42, (1982).
- [LLA-89] J.Llacer, E.Veklerov. "Feasible Images and Practical Stopping Rules for Iterative Algorithms in Emission Tomography", *IEEE Trans Med Imag*, **8**: 186-193, (1989).
- [LLA-90] J.Llacer. "On the Validity of Hypothesis Testing for Feasibility of Image Reconstruction", *IEEE Trans Med Imag*, **9**: 226-230, (1990).
- [LLA-93] J.Llacer, E.Veklerov, K.J.Coakley, E.J.Hoffman, J.Núñez. "Statistical Analysis of Maximum Likelihood Estimator Images of Human Brain FDG PET Studies", *IEEE Trans Med Imag*, **12**: 215-231, (1993).
- [LLO-93] X. Llovet, C. Falcón, D. Ros, I. Juvells, J. Pavía. "Algoritmos iterativos de reconstrucción tomográfica en SPECT. Determinación del número de iteraciones a partir de la optimización de la relación señal/ruido de las imágenes", XXIV Reunión Bienal de la Real Sociedad Española de Física, Jaca, 27 Septiembre-1 Octubre, 1993. Publicado en el libro de Actas del Congreso.
- [LOG-75] B.F.Logan. "The Uncertainty Principle in Reconstructing Functions from Projections" *Duke Math J*, **42**: 661-706, (1975).
- [LOU-81] A.K.Louis. "Ghosts in Tomography. The Null Space of Radon Transform", *Math Meth in Appl Sci*, **3**: 1-10, (1981).
- [LOU-83] A.K.Louis, F.Natterer. "Mathematical Problems of Computer Tomography" *Proc IEEE*, **71**: 379-389, (1983).
- [MAD-91] W.R.Madych. "Image Reconstruction in Hilbert Space", publicado en el libro [MAT-91]: 15-45.
- [MAE-88] G.Maess. "Projection Methods Solving Rectangular Systems of Linear Equations", *J Comput Appl Math*, **24**: 107-119, (1988).
- [MAI-83] M.Maisey. "*Medicina Nuclear. Aspectos Clínicos*", Ediciones Doyma, Barcelona, 1983.
- [MAN-87] S.H.Manglos, R.J.Jaszczak, C.E.Floyd, L.J.Hahn, K.L.Greer, E.Coleman. "Nonisotropic Attenuation in SPECT: Phantom Test of Quantitative Effects and Compensation Techniques", *J Nucl Med*, **28**: 1584-1591, (1987).

- [MAN-88a] S.H.Manglos, R.J.Jaszczak, C.E.Floyd. "Weighted Backprojection Implemented with a Non-Uniform Attenuation Map for Improved SPECT Quantitation", *IEEE Trans Nucl Sci*, **35**: 625-628, (1988).
- [MAN-88b] S.H.Manglos, R.J.Jaszczak, C.E.Floyd, L.J.Hahn, K.L.Greer, E.Coleman. "A Quantitative Comparison of Attenuation-Weighted Backprojection with Multiplicative and Iterative Postprocessing Attenuation Compensation in SPECT", *IEEE Trans Med Imag*, **7**: 127-134, (1988).
- [MAN-95] S.H.Manglos, G.M.Gagne, A.Krol, F.D.Thomas, R.Narayanaswamy. "Transmission Maximum-Likelihood Reconstruction with Ordered Subsets for Cone Beam CT", *Phys Med Biol*, **40**: 1225-1241, (1995).
- [MAR-90] C.P.Mariadassou, B.Yegnanarayana. "Image Reconstruction from Noisy digital Holograms", *IEEE Proc*, **137**. Pt F: 351-356, (1990).
- [MAS-89] J.Mas, R.B.Younes, R.Bidet. "Improvement of Quantification in SPECT Studies by Scatter and Attenuation Compensation", *Eur J Nucl Med*, **15**: 351-356, (1989).
- [MAT-57] R.L.Mather. "Gamma-Ray Collimator Penetration and Scattering Effects", *J Appl Phys*, **28**: 1200-1207, (1957).
- [MAT-88] *"Mathematics and Computer Science in Medical Imaging"*, Proceedings of the NATO Advanced Study Institute on Mathematics and Computer Science in Medical Imaging, held in Ciocco, Italy, September 21-October 4, 1986. M.A.Viergever, A.Todd-Pokropek (Eds). NATO ASI Series **F39**, Springer-Verlag, Berlin, 1988.
- [MAT-91] *"Mathematical Methods in Tomography. Proceedings of a Conference held in Oberwolfach, Germany, 5-11 June, 1990"*, G.T.Herman, A.K.Louis, F.Natterer (Eds). Lecture Notes in Mathematics **1497**, Ed. Springer-Verlag, Berlin, 1991.
- [MAZ-93] A.Maze, J.Le Cloirec, Y.Bizais, P.Briandet, P.Bourget. "Iterative Reconstruction Methods for Nonuniform Attenuation Distribution in SPECT", *J.Nucl Med*, **34**: 1204-1209, (1993).
- [MET-80] C.E.Metz, F.B.Atkins, R.N.Beck. "The Geometric Transfer Function Component for Scintillation Camera Collimators with Straight Parallel Holes", *Phys Med Biol*, **25**: 1059-1070, (1980).
- [MET-86] F.A.Mettler Jr, M.J.Guibertau. *"Essentials of Nuclear Medicine Imaging"* (2ª edición). Grune & Stratton Inc, Orlando, 1986.
- [MILL-85] M.I.Miller, D.L.Snyder, T.R.Miller. "Maximum Likelihood Reconstruction for Single-Photon Emission Computed-Tomography", *IEEE Trans Nucl Sci*, **NS-32**: 769-778, (1985).
- [MILL-92] T.R.Miller, J.W.Wallis. "Clinically Important Characteristics of Maximum-Likelihood Reconstruction", *J Nucl Med*, **33**: 1678-1684, (1992).
- [MIN-87] K.Minato, YN.Tang, G.W.Bennett, A.B.Brill. "Automatic Contour Detection Using a 'Fixed-Point Hachimura-Kuwahara Filter' for SPECT Attenuation Correction", *IEEE Trans Med Imag*, **MI-6**: 126-133, (1987).
- [MOH-88] A.Mohammad-Djafari, G.Demoment. "Maximum Entropy Reconstruction in X-Ray and Diffraction Tomography", *IEEE Trans Med Imag*, **MI-7**: 345-354, (1988).

- [MSA-87] P.Msaki, B.Axelsson, C.Dahl, S.A.Larsson. "Generalized Scatter Correction in SPECT Using Point Scatter Distribution Functions", *J Nucl Med*, **28**: 1861-1969, (1987).
- [MSA-89] P.Msaki, B.Axelsson, S.A.Larsson. "Some Physical Factors Influencing the Accuracy of Convolution Scatter Correction in SPECT", *Phys Med Biol*, **34**: 283-298, (1989).
- [MÜL-96] M.Müller, G.R.Arce. "Truncation Artifacts in Tomographic Reconstructions from Projections", *Appl Opt*, **35**: 3902-3914, (1996).
- [MUR-93] K.Murase, S.Tanada, T.Inoue, Y.Sugawara, K.Hamamoto. "Improvement of Brain Single Photon Emission Tomography (SPET) Using Transmission Data Acquisition in Four-Head SPET Scanner", *Eur J Nucl Med*, **20**: 32-38, (1993).
- [MUR-94] K.Murase, S.Tanada, Y.Sugawara, W.N.Tauxe, K.Hamamoto. "An Evaluation of the Accelerated Expectation Maximization Algorithms for Single-Photon Emission Tomography Image Reconstruction", *Eur J Nucl Med*, **21**: 597-603, (1994).
- [NAT-86] F.Natterer. "Numerical Treatment of Ill-Posed Problems", publicado en el libro [INV-86]: 142-167.
- [NAT-88] F.Natterer. "Regularization Techniques in Medical Imaging", publicado en el libro [MAT-88]: 127-141.
- [NEL-65] J.A.Nelder, R.Mead "A Simplex Method for Function Minimization", *Computer Journal*, **7**: 308-313, (1965).
- [NUÑ-90] J.Núñez, J.Llacer. "A Fast Reconstruction Algorithm for Emission Tomography with Entropy Prior Converging Feasible Images", *IEEE Trans Med Imag*, **MI-9**: 159-171, (1990).
- [NUÑ-91] J.Núñez, J.Llacer. "Maximum Likelihood Estimator and Bayesian Reconstruction Algorithms with Likelihood Cross-Validation", First Annual Conference on Astronomical Data Analysis Software and Systems, Tucson, Arizona, November 6-8, 1991.
- [OGA-84] K.Ogawa, M.Nakajima, S.Yuta. "A Reconstruction Algorithm from Truncated Projections" *IEEE Trans Med Imag*, **3**: 34-40, (1984).
- [OPP-89] B.E. Oppenheim, C. Appledorn. "Effective use of Computers in Nuclear Medicine", M.J.Gelfand and S.R.Thomas (ed.), McGraw-Hill, New York, 1988.
- [OSK-88] P.Oskoui-Fard, H.Stark. "Tomographic Image Reconstruction Using the Theory of Convex Projections", *IEEE Trans Med Imag*, **MI-1**: 45-58, (1988).
- [PAN-91] T.S.Pan, A.E.Yagle. "Numerical Study of Multigrid Implementations of Some Iterative Image Reconstruction Algorithms", *IEEE Trans Med Imag*, **10**: 572-588, (1991).
- [PAN-93] X.Pan, W.H.Wong, C.T.Chen, J.Liu. "Correction for Photon Attenuation in SPECT: Analytical Framework, Average Attenuation Factors and a New Hybrid Approach", *Phys Med Biol*, **38**: 1219-1234, (1993).
- [PAN-96] X.Pan, C.E.Metz, C.T.Chen. "A Class of Analytical Methods That Compensate for Attenuation and Spatially-Variant Resolution in 2D SPECT", *IEEE Trans Nucl Sci*, **43**: 2244-2254, (1996).

- [PHY-87] "Physics and Engineering of Medical Imaging", Proceeding of the NATO Advanced Study Institute on Physics and Engineering of Medical Imaging, Maratea, Italy, 23 September-5 October, 1984. R.Guzzardi (Ed), Martinus Mijhoff Publishers, Dordrecht, 1987.
- [PLA-90] R.Plato, G.Vainikko. "On the Regularization of Projection Methods for Solving Ill-Posed Problems", *Numer Math*, **57**: 63-79, (1990).
- [PRA-76] W.K.Pratt. "Digital Image Processing", John Wiley & Sons, New York, 1978.
- [PRE-92] W.H.Press, S.A.Teukolsky, W.T.Vetterling, B.P.Flannery. "Numerical Recipes in C: The Art of Scientific Computing" (Second Edition), Cambridge University Press, Cambridge, 1992.
- [PUC-97] R.Puchal. "Filtros de Imagen en Medicina Nuclear", Ediciones Eurobook S.L., Madrid, 1997.
- [RAD-86] J.Radon. "On the Determination of Functions from their Integrals Values along Certain Manifolds", *IEEE Trans Med Imag*, **MI-5**: 170-176, (1986). Traducción al inglés del artículo original de J.Radon "Über die Bestimmung von Funktionen durch ihre Integralwerte Längs gewisser Mannigfaltigkeiten", *Berichte Saechsische Akademie der Wissenschaften*, **69**: 262-277, (1917).
- [RIO-74] S.Rios. "Métodos Estadísticos", Ed del Castillo, Madrid, 1974.
- [ROC-76] A.J.Rockmore, A.Macovski. "A Maximum Likelihood Approach to Emission Image Reconstruction from Projections", *IEEE Trans Nucl Sci*, **NS-23**: 1428-1432, (1976).
- [ROS-90] M.S.Rosenthal, L.J.Henry. "Scattering in Uniform Media", *Phys Med Biol*, **35**: 265-274, (1990).
- [ROS-93] D.Ros, I. Juvells, J. Pavía, X. Llovet, C. Falcón, A. García. "Quantificació d'imatges de SPECT", 9 Trobades Científiques de la Mediterrània, Maó, 22-24 Septiembre, 1993.
- [ROS-95a] M.S.Rosenthal, J.Cullom, W.Hawkins, S.C.Moore, B.M.W.Tsui, M.Yester. "Quantitative SPECT Imaging: A Review and Recommendations by the Focus Committee of the Society of Nuclear Medicine Computer and Instrumentation Council", *J Nucl Med*, **36**: 1489-1513, (1995).
- [ROS-95b] D.Ros, I.Juvells, J.Pavía, C.Falcón. "Tècniques de Reconstrucció d'Imatges en SPECT" *Rev Cat Fís*, **8**: 15-22, (1995).
- [ROS-96] D.Ros, C.Falcón, I.Juvells, J.Pavía. "The Influence of a Relaxation Parameter on SPECT Iterative Reconstruction Algorithms", *Phys Med Biol*, **41**: 925-37, (1996).
- [ROS-98] D.Ros, C.Falcón, I.Juvells, J.Pavía. "A Cross-Validation Stopping Rule for Ordered Subsets Reconstruction Algorithms in SPET" European Association of Nuclear Medicine Congress 1998, Berlin, 30 August -4 September, 1998. Publicado en *Eur J Nucl Med*, **25**: 1144, (1998).
- [SCH-93] P.Schmidlin, H.Ostertag, W.J.Lorenz. "Speeding Iterative Reconstruction in Nuclear Medical Imaging", *Z MedPhys*, **3**: 190-195, (1993).
- [SEZ-82] M.I.Sezan, H.Stark. "Image Restoration by the Method of Convex Projections: Part 2- Applications and Numerical Results", *IEEE Trans Med Imag*, **MI-1**: 95-101, (1982).
- [SEZ-83] M.I.Sezan, H.Stark. "Image Restoration by Convex Projections in the Presence of Noise", *Appl Opt*, **22**: 2781-2789, (1983).

-
- [SEZ-84] M.I.Sezan, H.Stark. "Tomographic Image Reconstruction from Incomplete View Data by Convex Projections and Direct Fourier Inversion", *IEEE Trans Med Imag*, **MI-3**: 91-98, (1984).
- [SEZ-92] M.I.Sezan. "An Overview of Convex Projections Theory and its Application to Image Recovery Problems", *Ultramicroscopy*, **40**: 55-67, (1992).
- [SHE-74] L.A.Shepp, B.F.Logan. "The Fourier Reconstruction of a Head Section", *IEEE Trans Nucl Sci*, **NS-21**: 21-34, (1974).
- [SHE-82] L.A.Shepp, Y.Vardi. "Maximum Likelihood Reconstruction for Emission Tomography", *IEEE Trans Med Imag*, **MI-1**: 113-122, (1982).
- [SID-85] R.L.Siddon. "Fast Calculation of the Exact Radiological Path for a Three-Dimensional CT Array", *Med Phys*, **12**: 252-255, (1985).
- [SIL-90] B.W.Silverman, M.C.Jones, D.W.Nychka. "A Smoothed EM Approach to Indirect Estimation Problems, With Particular Reference to Stereology and Emission Tomography", *J R Statist Soc*, **52**: 271-324, (1990).
- [SIN-88] M.Singh, M.Horne, D.Maneval, J.Amarthey, R.Brechner. "Non-Uniform Attenuation and Scatter Correction in SPECT", *IEEE Trans Nucl Sci*, **35**: 767-771, (1988).
- [SMI-73] P.R.Smith, T.M.Peters, R.H.T.Bates. "Image Reconstruction from Finite Number of Projections", *J Phys A: Nucl Gen*, **6**: 361-382, (1973).
- [SMI-77] K.T.Smith, D.C.Solmon, S.L.Wagner. "Practical and Mathematical Aspects of the Problem of Reconstructing Objects from Radiographs", *Bull Amer Math Soc*, **83**: 1227-1270, (1977).
- [SMI-97] R.J.Smith, J.S.Karps, G.Muehlehner, E.Gualtieri, F.Bernard. "Singles Transmission Scans Performed Post-Injection for Quantitative Whole Body PET Imaging", *IEEE Trans Nucl Sci*, **NS-35**: 1329-1335, (1997).
- [SNY-85] D.L.Snyder, M.I.Miller. "The Use of Sieves to Stabilize Images Produced with the EM Algorithm for Emission Tomography", *IEEE Trans Nucl Sci*, **NS-32**: 3864-3872, (1985).
- [SNY-87] D.L.Snyder, M.I.Miller, L.J.Thomas, D.G.Politte. "Noise and Edge Artifacts in Maximum-Likelihood Reconstruction for Emission Tomography", *IEEE Trans Med Imag*, **MI-6**: 228-238, (1987).
- [STA-88] J.A.Stamos, W.L.Rogers, N.H.Clinthorne, K.F.Koral. "Object-Dependent Performance Comparison of Two Iterative Reconstruction Algorithms", *IEEE Trans Nucl Sci*, **35**: 611-614, (1988).
- [STA-89] H.Stark, P.Oskoui. "High Resolution Image Recovery from Image-Plane Arrays, Using Convex Projections", *J Opt Soc Am A*, **6**: 1715-1726, (1989).
- [STR-74] O.N.Strand. "Theory and Methods Related to the Singular Function Expansion and the Landweber's Iteration for Integral Equations of the First Kind", *SIAM J Numer Anal*, **11**: 798-825, (1974).
- [TAM-81] K.C.Tam, V.Pérez-Méndez. "Tomographical Imaging with Limited-Angle Input", *J Opt Soc Am*, **71**: 582-592, (1981).

- [TAN-86] E.Tanaka, N.Nohara, T.Tomitani, M.Yamamoto. "Utilization of Non-Negativity Constrains in Reconstruction of Emission Tomograms", publicado en el libro "*Information Processing in Medical Imaging*", S.L.Bacharach (Ed), Martinus Nijhoff Publishers, Dordrecht, 1986: 379-393.
- [TAN-87] E.Tanaka. "A Fast Reconstruction Algorithm for Stationary Positron Emission Tomography Based on a Modified EM Algorithm", *IEEE Trans Med Imag*, **MI-6**: 98-105 (1987).
- [TER-80] M.M.Ter-Pogossian, M.E.Raichle, B.E.Sobel. "Tomografía de Emisión de Positrones", *Investigación y Ciencia*. **51**: 88-101, (1980).
- [TIH-63] A.N.Tihonov. "Solution of Incorrectly Formulated Problems and the Regularization Method", *Sov Math Dokl*. **4**: 1035-1038, (1963).
- [TIK-74] A.Tikhonov, V.Arsénine. "*Méthodes de Résolution de Problèmes Mal Posés*", Ediciones Mir, Moscú, 1974.
- [TIT-85] D.M.Titterington. "General Structure of Regularization Procedures in Image Reconstruction", *Astron Astrophys*, **144**: 381-387, (1985).
- [TSU-84] B.M.W.Tsui. "Interactions of Collimation, Sampling and Filtering on SPECT Spatial Resolution", *IEEE Trans Nucl Sci*, **NS-31**: 527-532, (1984).
- [TSU-89] B.M.W.Tsui, G.T.Gullberg, E.R.Edgerton, J.G.Ballard, J.R.Perry, W.H.McCartney, J.Berg. "Correction of Nonuniform Attenuation in Cardiac SPECT Imaging", *J Nucl Med*, **30**: 497-507, (1989).
- [TSU-91] B.M.W.Tsui, X.Zhao, E.C.Frey, G.T.Gullberg. "Comparison Between ML-EM and WLS-CG Algorithm for SPECT Image Reconstruction", *IEEE Trans Nucl Sci*, **38**: 1766-1772, (1991).
- [TSU-94] B.M.W.Tsui, X.Zhao, E.C.Frey, W.H.McCartney. "Quantitative Single-Photon Emission Computed Tomography: Basics and Clinical Considerations", *Sem Nucl Med*, **24**: 38-65, (1994).
- [TUB-63] M.Tubiana, J.Dutreix, A.Dutreix, P.Jockey. "*Bases Physiques de la Radiothérapie et de la Radiobiologie*", Masson et C. Ed, París, 1963.
- [VEK-87] E.Veklerov, J.Llacer. "Stopping Rule for the MLE Algorithm based on Statistical Hypothesis Testing", *IEEE Trans Med Imag*, **MI-6**: 313-319, (1987).
- [VEK-88] E.Veklerov, J.Llacer, E.J.Hoffman. "MLE Reconstruction of Brain Phantom Using a Monte Carlo Transition Matrix and Statistical Stopping Rule", *IEEE Trans Nucl Sci*, **35**: 603-607, (1988).
- [VIE-88] M.A.Viergerver. "Introduction to Discrete Reconstruction Methods in Medical Imaging", publicado en el libro [MAT-88]: 41-65.
- [WAL-81] T.E.Walters, W.Simon, D.A.Chesler, J.A.Correia. "Attenuation Correction in Gamma Emission Computed Tomography", *J Comput Assist Tomogr*, **5**: 89-94, (1981).
- [WAL-96] S.H.Walrandt, L.R.van Elmbt, S.Pauwels. "A Non-Negative Fast Multiplicative Algorithm in 3D Scatter-Compensated SPET Reconstruction", *Eur J Nucl Med*, **23**: 1521-1526, (1996).

-
- [WAN-92] Y.Wang, L.Wu. "Multicriterion Maximum Entropy Image Reconstruction from Projections", *IEEE Trans Med Imag*, **11**: 70-75, (1992).
- [WEL-97] A.Welch, R.Clack, F.Natterer, G.T.Gullberg. "Attenuation Correction in SPECT Without Transmission Measurements", *IEEE Trans Med Imag*, **16**: 572-580, (1997).
- [WIL-93] D.W.Wilson, B.M.W.Tsui. "Noise Properties of Filtered-Backprojection and ML-EM Reconstructed Emission Tomographic Images", *IEEE Trans Nucl Sci*, **40**: 1198-1203, (1993).
- [WU-83] C.F.J.Wu. "On the Convergence Properties of the EM Algorithm", *Ann Statist*, **11**: 95-103, (1983).
- [XIA-97] W.Xia, S.J.Glick, T.S.Pan, E.J.Soares, D.S.Luo. "Region of Interest Evaluation of SPECT Image Reconstruction Methods Using a Realistic Brain Phantom", *IEEE Trans Nucl Sci*, **44**: 1336-1341, (1997).
- [XU-93] X.L.Xu, J.S.Liow, S.C.Strother. "Iterative Algebraic Reconstruction for Emission Computed Tomography: A Unified Framework and its Application to Positron Emission Tomography", *Med Phys*, **20**: 1675-1684, (1993).
- [YAN-88] J.C.Yanch, M.A.Flower, S.Webb. "A Comparison of Deconvolution and Windowed Subtraction Techniques for Scatter Compensation in SPECT", *IEEE Trans Med Imag*, **MI-7**: 13-20, (1988).
- [YOU-82] D.C.Youla, H.Webb. "Image Restoration by the Method of Convex Projections: Part 1-Theory", *IEEE Trans Med Imag*, **MI-1**: 81-94, (1982).
- [YU-97] D.C.Yu, W.Chang, T.S.Pan. "A Study of Reconstruction Accuracy of a Cardiac SPECT System with Multi-Segmental Collimation". *IEEE Trans Nucl Sci*, **44**: 1403-1408, (1997).
- [ZAR-92] J.R.Zaragoza. "*Física e Instrumentación Médicas*", Ed. Científicas y Técnicas SA, Masson-Salvat Medicina, Barcelona, 1992.
- [ZEN-91] G.L.Zeng, G.T.Gullberg, B.M.W.Tsui, J.A.Terry. "Three-dimensional Iterative Reconstruction Algorithms with Attenuation and Geometric Point Response Correction", *IEEE Trans Nucl Sci*, **38**: 693-702, (1991).



Departament de Física Aplicada i Electrònica
Facultat de Física

***Métodos iterativos de reconstrucción
tomográfica en SPECT***

Carles Maria Falcon Falcon

Barcelona, septiembre de 1999.