UNIVERSITAT DE BARCELONA

INTERPOLACION COMPLEJA DE OPERADORES LINEALES

Memoria presentada por María Jesús Carro Rossell
para obtener el grado de Doctor en Ciencias
Matemáticas por la Universidad de Barcelona.

Departamento de Matemática Aplicada y Análisis.

INTERPOLACION COMPLEJA DE OPERADORES LINEALES

Memoria presentada por María Jesús Carro Rossell
para obtener el grado de Doctor en Ciencias
Matemáticas por la Universidad de Barcelona.

Departamento de Matemática Aplicada y Análisis.

Joan Lluís Cerdà Martín,

Catedrático de Análisis Matemático de la

Facultad de Matemáticas de la

Universidad de Barcelona,

CERTIFICA:

Que la presente memoria ha sido realizada bajo mi dirección por María Jesús Carro Rossell y que constituye su tesis para aspirar al grado de Doctor en Ciencias Matemáticas.

Barcelona, 17 de noviembre de 1987.

Indice

Introducción

El primer resultado de interpolación de operadores data del año 1911 y es debido a I. Schur. Este resultado afirma: "si L es un operador tal que

$$L : l^{\infty} \longrightarrow l^{\infty} \quad \text{y}$$
$$L : l^{1} \longrightarrow l^{1}$$

son lineales continuos, entonces, para todo $p \geq 1$, $L : l^{p} \longrightarrow l^{p}$ es también continuo y además, $\|L\|_{p,p} \leq \|L\|_{1,1}^{\frac{1}{p}} \|L\|_{\infty,\infty}^{\frac{1}{p'}}$".

Dos años más tarde, Young prueba un resultado del mismo tipo referente a espacios L^{p} y a un operador L definido por

$$L(f)(x) = \int k(x,y) f(y) \, dy.$$

La extensión de estos resultados a operadores lineales entre espacios L^{p} generales son los teoremas de Riesz-Thorin (Riesz en 1926 y Thorin, por el método complejo, en 1948) y Marcinkiewicz (usando el método real en 1939). La demostración de este último teorema, en su caso más general, es debida a Zygmund en el año 1956.

En este año A. P. Calderón y Zygmund extienden los teoremas de interpolación al caso de operadores sublineales y, en el mismo año E. M. Stein demuestra un teorema de interpolación relativo a familias analíticas de operadores.

En la década de los 60, A. P. Calderón, J. L. Lions y J. Peetre desarrollan una teoría que incluye espacios de Banach abstractos y que generaliza los resultados anteriores. Esta teoría puede ser resumida del siguiente modo. Sean $(A_0,\ A_1)$ y $(B_0,\ B_1)$ dos pares compatibles de espacios de Banach (esto es, existen dos espacios vectoriales topológicos separados $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ tales que A_0, A_1 están contenidos continuamente en $\mathcal{A}$ y B_0, B_1 en $\mathcal{B}$) y sea $L : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}$ un operador tal que su restricción a A_i da un operador continuo de A_i en B_i, $(i = 0,\ 1)$.

Un método de interpolación consiste en construir espacios de Banach A y B tales que se pueda considerar $L : A \longrightarrow B$ lineal continuo (propiedad de interpolación).

Existen dos diferentes puntos de vistas según que las técnicas empleadas sean de variable real o compleja. Según el caso, se llaman respectivamente método real (desarrollado por J. L. Lions, J. Peetre) y método complejo (desarrollado por J. L. Lions, A. P. Calderón).

Esta memoria versa sobre este último método.

Sea $\Omega = \{z \in \mathbf{C} \ ; \ 0 < Re(z) < 1\}$. En [C] se consideran los espacios de funciones analíticas con valores vectoriales siguientes:

(1) $\mathcal{F}(A_0, A_1)$ es el espacio de las funciones f definidas en $\overline{\Omega}$ con valores en el espacio de Banach $A_0 + A_1$ tales que

(i) f es analítica en Ω y su restricción a las rectas $x = j + it$ es A_j continua, $(j = 0, 1)$.

(ii) Para $j = 0, 1$, $\lim_{t \to \pm\infty} f(j + it) = 0$.

Dotado de la norma

$$\|f\|_{\mathcal{F}} = \max_j \sup_t \|f(j + it)\|_{A_j}.$$

(2) $\mathcal{F}'(A_0, A_1)$ es el espacio de funciones f definidas en $\overline{\Omega}$ con valores en $A_0 + A_1$ tales que

(i) f es analítica en Ω.

(ii) Para todo $t_1, t_2 \in \mathbf{R}$, $f(j + it_1) - f(j + it_2)$ está en A_j y además si $j = 0, 1$,

$$\max_j \left(\frac{\|f(j + it_1) - f(j + it_2)\|_{A_j}}{|t_1 - t_2|} \right) < +\infty.$$

Dotado de la norma dada por la expresión anterior.

Con la base de estos dos espacios se construyen los espacios de interpolación:

$$[A_0, A_1]_\theta = \{x \in A_0 + A_1 \ ; \ \exists f \in \mathcal{F} \text{ con } f(\theta) = x\} \quad \text{y}$$

$$[A_0, A_1]'_\theta = \{x \in A_0 + A_1 \ ; \ \exists f \in \mathcal{F}' \text{ con } f'(\theta) = x\},$$

dotados de la norma $\|x\|_\theta = \inf\{\|f\|_{\mathcal{F}} \ ; \ f(\theta) = x\}$ (análogamente $\|x\|'_\theta$).

Posteriormente, J. L. Lions ([L I]) y M. Schechter ([S]) interpretan la evaluación en θ y la derivación en θ como la distribución δ_θ y δ'_θ respectivamente, y generalizan los resultados anteriores definiendo los espacios

$$[A_0, A_1]_T = \{x \in A_0 + A_1 \ ; \ \exists f \in \mathcal{F} \text{ con } T(f) = x\},$$

donde T es una distribución con soporte compacto.

En 1982 en [C-C-R-S-W I], Coifman, Cwikel, Rochberg, Sagher y Weiss desarrollan una teoría de interpolación en la cual el par compatible de espacios de Banach del método de Calderón es sustituido por una familia de espacios de Banach.

El origen de esta teoría está basado en la importancia de las familias analíticas de operadores para espacios de Banach y en el hecho de que, en algunos casos, estas familias no actuan sobre un par de espacios de Banach sino sobre toda una familia.

En la combinación de los trabajos [C-C-R-S-W I] y [S] está el origen de esta memoria y así, estudiamos fundamentalmente los espacios del tipo

$$A^T = \{x \in \mathcal{U} \ ; \ \exists f \in \mathcal{F} \text{ con } T(f) = x\},$$

donde, en nuestro caso, $\mathcal{F}$ es el espacio definido en (1;2.3), $\mathcal{U}$ es el espacio contenedor de la familia (1;2.1) y T es un funcional analítico.

Tanto el espacio $\mathcal{F}$ de [C] como el de [C-C-R-S-W I] son "en cierto modo" subespacios de funciones de H^∞ con valores vectoriales, aunque en esta memoria vamos a considerar la posibilidad de sustituir H^∞ por H^p.

Las desigualdades 9.2 de [C], 2.4 de [C-C-R-S-W I] y 6.3 de [S] demuestran que los espacios interpolados serían equivalentes si T es de soporte finito. Sin embargo, ¿será cierta esta equivalencia en el caso general?. La respuesta es negativa (2;2.17) y la introdución del parámetro p en la definición de espacios interpolados proporciona nuevos espacios $A^{T,p}$ (entre otros) (1;3.1).[1]

La presente memoria consta de cinco capítulos y dos apéndices. Los dos primeros están dedicados a la introducción y propiedades de los espacios interpolados que incluyen (en el capítulo II) las cuestiones "típicas" de interpolación, dualidad y reiteración.

El método de [C-C-R-S-W I] es una generalización del de [C] y así, el que aquí presentamos engloba a ambos. Dedicamos el tercer capítulo a estudiar de que forma nuestro método incluye al de [S].

Los últimos capítulos están dedicados a la identificación de espacios interpolados, cuando T es de soporte finito, de familias de espacios L^p (cap. IV) y de familias de espacios que son dominio de una potencia compleja de un operador (cap. V).

[1]Las técnicas de la teoría de espacios H^p pueden ser vistas en [DU], [G].

En el apéndice I damos ejemplos de espacios de interpolación cuando el funcional T no es de soporte finito.

Finalizamos esta memoria con una aplicación de la interpolación al caso de espacios de dimensión finita. (Ap. II).

En cuanto a las notaciones:

(1) E^* representa el dual topológico de E salvo indicación expresa en otro sentido.

(2) $z \to \gamma(n.t)$ significa convergencia no tangencial de $z \in D$ hacia $e^{i\gamma} \in \Gamma$.

(3) El signo $\ll$ significa, como es habitual, la mayoración salvo constante multiplicativa.

(4) Para las citas, (n;m.p) hace referencia al capítulo n, sección m, número p. Dentro de cada capítulo se omite el índice n correspondiente.

Deseo expresar mi gratitud al Dr. Joan Cerdà por iniciarme en este tema, así como por su colaboración y dedicación en todo momento. Agradezco, también, el apoyo recibido por mis compañeros de departamento y amigos y a mis padres, sin cuya ayuda este trabajo no hubiera sido realizado.

Capítulo I

Construcción y propiedades elementales de los espacios de interpolación.

El presente capítulo consta de 5 secciones.

La primera de ellas es una breve revisión de algunos conceptos referentes al espacio $H'(D)$ de los funcionales analíticos sobre D, incluida la forma de extender $T \in H'(D)$ al espacio $H(D;\mathcal{U})$ de las funciones analíticas con valores vectoriales.

La segunda sección está dedicada a introducir el concepto de familia de interpolación y a definir espacios de funciones analíticas asociados a esta familia, los cuales son necesarios para posteriormente, en la tercera sección, definir los espacios de interpolación o espacios interpolados. Estos espacios serán de cuatro tipos: $B^{T,p}$, $B_{T,p}$, $B^{S,T,p}$ y $B_{S,T,p}$.

Para el estudio de los espacios $B_{S,T,p}$ necesitamos una relación entre los funcionales analíticos S y T. A esta relación la llamamos "dominancia" y la estudiamos en la cuarta sección.

Finalmente, dedicamos la última sección al estudio de algunas de las relaciones existentes entre diferentes espacios interpolados.

Mientras no se indique lo contrario, D será el disco unidad y Γ la circunferencia unidad.

Todos los resultados que veremos se extienden mediante la transformación conforme al caso en que D es un dominio simplemente conexo de $\mathbf{C}$ cuya frontera es una curva cerrada simple rectificable Γ. En tal caso, al considerar la integración sobre Γ, habrá que realizarla respecto de la medida harmónica $dP_z(\cdot)$ con $z \in D$ arbitrario. Véase, a este respecto, el teorema (2;1.3).

Denotaremos por $P_z(\cdot)$ (resp. $H_z(\cdot)$) el núcleo de Poison en el disco D (resp. el núcleo de Herglotz).

§1 Funcionales analíticos.

Sea T un funcional analítico sobre D, esto es, $T \in H'(D)$. Es sabido que existe una única función $h_T(\xi)$ holomorfa en $\overline{\mathbf{C}} \setminus D$ (es decir, existe un compacto $K \subset D$ tal que si

$U = \overline{\mathbf{C}} \setminus K,\ h_T \in H(U)$) tal que $h_T(\infty) = 0$, de modo que cualquiera que sea $\varphi \in H(D)$, se tiene la representación siguiente:

$$T(\varphi) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Sigma} \varphi(\xi) h_T(\xi) d\xi, \tag{1}$$

donde Σ es cualquier curva cerrada simple rectificable tal que $\Sigma \subset U \cap D$ y que contenga a K en su interior. (Véase [KO I], cap. 6, §7).

En virtud del teorema de Cauchy, la integral (1) es independiente de la curva Σ elegida.

Nosotros trabajaremos con curvas Σ del tipo $\partial B(0, r)$, $(0 < r < 1$) y así, podremos expresar (1) por

$$T(\varphi) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \varphi(re^{i\theta}) h_T(re^{i\theta}) re^{i\theta} d\theta.$$

El teorema de los tres círculos de Hadamard asegura que, para cualquier r mayor que un cierto r_0, existe $M \in \mathbf{R}^+$ tal que $\|h_T(r\cdot)\|_\infty \leq M$ y en consecuencia, si $\varphi \in H^\infty(D)$, existe k tal que $\|\varphi(r\cdot) h_T(r\cdot) r\|_\infty \leq k$. Aplicando convergencia dominada, podemos afirmar que, para $\varphi \in H^\infty(D)$,

$$T(\varphi) = \lim_{r \to 1} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \varphi(re^{i\theta}) h_T(re^{i\theta}) re^{i\theta} d\theta = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma h_T(\xi) \varphi(\xi) d\xi. \tag{2}$$

Supongamos ahora que la función h_T es racional, esto es, existen dos polinomios P_T y Q_T tales que $h_T(\xi) = \frac{P_T(\xi)}{Q_T(\xi)}$ y las raices de Q_T están en K. De (2), deducimos que

$$T(\varphi) = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \varphi(\xi) \frac{P_T(\xi)}{Q_T(\xi)} d\xi.$$

Puesto que $P_T \varphi \in H(D)$, la fórmula integral de Cauchy permite afirmar que

$$T(\varphi) = \sum_{\substack{1 \leq j \leq n \\ 0 \leq k \leq m(j)}} a_{kj} \delta_{z_j}^{k)}(\varphi), \tag{3}$$

siendo z_j $(1 \leq j \leq n)$ los ceros de Q_T. Esto es, T se extiende a una distribución de soporte finito. A la vista de ésto, diremos que un funcional analítico T es de soporte finito si es de la forma $\sum' a_{kj} \delta_{z_j}^{k)}$ o, lo que es equivalente, si h_T es una función racional.

Así mismo, si T es de soporte finito, llamaremos Ord T al orden de T entendida como distribución, es decir, si T cumple (3)

$$Ord\, T = \max_{1 \leq j \leq n} m(j).$$

Estamos interesados ahora en ver cómo actúa un funcional analítico T en D sobre una función $f \in H(D;\mathcal{U})$. Consideremos el espacio producto tensorial $H(D) \otimes \mathcal{U}$ dotado de la topología natural inducida por $H(D;\mathcal{U})$ y denotemos por $H(D) \otimes_\varepsilon \mathcal{U}$ el mismo espacio dotado de la topología ε ([T], cap. 43). Recordemos que un entorno de cero en $H(D) \otimes \mathcal{U}$ es de la forma

$$V_\varepsilon = \{\varphi \in H(D) \otimes \mathcal{U} \ ; \ \|\varphi(x)\|_{\mathcal{U}} \leq \varepsilon, \ \ \forall\, x \in K\},$$

donde K es un compacto de D y, un entorno de cero en $H(D) \otimes_\varepsilon \mathcal{U}$ es de la forma

$$U_{(\varepsilon,\ \delta)} = i^{-1}(W \cap i(H(D) \otimes \mathcal{U})),$$

donde i es la inyección de $H(D;\mathcal{U})$ en $L_\varepsilon(\mathcal{U}'_\tau,\ H(D))$ definida por $i(f)(u') = u'(f)$ y $W = \{\varphi \in L(\mathcal{U}'_\tau,\ H(D)) \ ; \ \varphi(A_\delta) \subset B_\varepsilon\}$, siendo $A_\delta = B_{\mathcal{U}}(0,\delta)^o$ (acotado de $\mathcal{U}'$) y B_ε un entorno de cero en H(D) ([T], cap. 42, prop. 42.2).

Es fácil ver que $f \in V_{\varepsilon\delta}$ si y sólo si $i(f) \in W(A_\delta,\ B_\varepsilon)$. En definitiva, $H(D) \otimes \mathcal{U}$ es isomorfo a $H(D) \otimes_\varepsilon \mathcal{U}$. Por otra parte, es sabido que:

(i) $H(D) \otimes \mathcal{U}$ es denso en $H(D;\mathcal{U})$.

(ii) Dado el funcional T y el operador, id, identidad en $\mathcal{U}$ existe una única aplicación lineal continua

$$T \otimes id : H(D) \otimes_\varepsilon \mathcal{U} \longrightarrow C \otimes \mathcal{U} \equiv \mathcal{U}$$

definida por $(T \otimes id)(\varphi u) = T(\varphi) \otimes u = T(\varphi)u$ (véase [T], cap. 39).

Así, T queda definido sobre $H(D;\mathcal{U})$ cuando lo identificamos con la extensión de $T \otimes id$ a $H(D;\mathcal{U})$. Esto es, $T(\sum_{j=1}^n \varphi_j b_j) = \sum_{j=1}^n T(\varphi_j) b_j$ si $\varphi_j \in H(D)$ y $b_j \in \mathcal{U}$ para todo $1 \leq j \leq n$.

(Véase también [GR], §2, n. 1, th. 6 y §3, n. 3).

§2 Familias de interpolación y espacios de funciones analíticas asociados.

DEFINICION 2.1. *Para cada* $\gamma \in \Gamma$, *sea* $B(\gamma)$ *un espacio de Banach sobre* C. *Diremos que* $\{B(\gamma)\ ,\ \gamma \in \Gamma\}$ *es una* **familia de interpolación** *sobre* Γ *con* **espacio contenedor** $\mathcal{U}$ *y* **espacio log-intersección** $\mathcal{B}$, *si se cumplen las siguientes condiciones:*

(a) $\mathcal{U}$ *es un espacio de Banach tal que, cualquiera que sea* $\gamma \in \Gamma$, $B(\gamma)$ *está contenido en* $\mathcal{U}$ *con continuidad.*

(b) *Para todo* $b \in \cap_{\gamma\in\Gamma} B(\gamma)$, *la función* $\gamma \in \Gamma \longrightarrow \|b\|_{B(\gamma)}$ *es medible.*

(c)

$$\mathcal{B} = \{b \in \cap_{\gamma\in\Gamma} B(\gamma) \ ; \ \int_\Gamma \log^+ \|b\|_{B(\gamma)} dP_z(\gamma) < +\infty\}$$

y verifica que existe una función medible $K(\cdot)$ *sobre* Γ *tal que:*

(i) $\int_\Gamma \log^+ K(\gamma) dP_z(\gamma) < +\infty$.

(ii) $\|b\|_{\mathcal{U}} \leq K(\gamma)\|b\|_{B(\gamma)}$ *para casi todo* $\gamma \in \Gamma$ *y todo* $b \in \mathcal{B}$.

EJEMPLO 2.2: Si $\Gamma = \Gamma_1 \cup ... \cup \Gamma_n$ es una unión finita de arcos disjuntos y $B(\gamma) = B_j$ para $\gamma \in \Gamma_j$, $(1 \leq j \leq n)$, la familia $\{B(\gamma) \ , \ \gamma \in \Gamma\}$ es familia de interpolación con espacio log-intersección $\cap_{j=1}^n B_j$ y $K(\cdot) = k = \max_{1\leq j\leq n} k_j$, donde k_j es la norma de la inyección de B_j en el espacio contenedor.

DEFINICION 2.3. *Definiremos el espacio de funciones*

$$\mathcal{G} = \mathcal{G}(B(\cdot), \Gamma) = \{g = \sum_{1\leq j\leq n} \varphi_j b_j \ ; \ \varphi_j \in N^+(D), \ b_j \in \mathcal{B} \ \ \forall\, 1 \leq j \leq n \ y \ \|g\|_{\mathcal{G}} < +\infty\},$$

donde $\|g\|_{\mathcal{G}} = \sup \ \mathrm{es}_{\gamma\in\Gamma} \|g(\gamma)\|_{B(\gamma)}$ *con* $g(\gamma) = \lim_{z\to\gamma(n.t)} g(z)$ *(límite no tangencial) y* $N^+(D)$ *la clase de Nevalinna (+)* ([GO], cap. IX, [G], cap. 2, §5).

PROPOSICION 2.4. *Sea* $f(\cdot)$ *una función positiva, medible sobre* Γ *tal que*

$$\int_\Gamma |\log f(\gamma)| dP_z(\gamma) < +\infty \qquad (z \in D).$$

Existe una función exterior, que denotaremos por $f^*(z)$, *cuyo límite no tangencial* $f^*(\gamma) = \lim_{z\to\gamma(n.t)} f^*(z)$ *satisface que* $|f^*(\gamma)| = f(\gamma)$ *para casi todo* $\gamma \in \Gamma$. *Dicha función es*

$$f^*(z) = \exp\left(\frac{1}{2\pi}\int_\Gamma \log f(\gamma) \ dH_z(\gamma)\right).$$

NOTA 2.5: Se verifica que $\int_\Gamma |\log \|b\|_{B(\gamma)}| dP_z(\gamma) < +\infty$ para todo $b \in \mathcal{B} \setminus \{0\}$ y todo $z \in D$ y, por tanto, existe $\varphi \in N^+(D)$ tal que $|\varphi(\gamma)| \ \|b\|_{B(\gamma)} = 1$. Esto es, si $f(\cdot) = \frac{1}{\|b\|_{B(\cdot)}}$ entonces $f^* = \varphi$.

NOTA 2.6: La función $K(\cdot)$ que aparece en la definición 2.1 satisface que

$$\int_\Gamma |\log K(\gamma)| dP_z(\gamma) < +\infty$$

para todo $z \in D$ y, por tanto, existe $K^*(z)$. Por simplicidad, denotaremos a esta función K(z).

DEFINICION 2.7. ([C-C-R-S-W I], 2.2).

Cualquiera que sea $\gamma \in \Gamma$, sea $B_0(\gamma)$ el subespacio cerrado de $B(\gamma)$ generado por $\mathcal{B}$.

Se define el espacio $\mathcal{H} = \mathcal{H}(B(\cdot), \Gamma)$ de la funciones h de D en $\mathcal{U}$ tales que:

(i) $h \in H(D; \mathcal{U})$.

(ii) $\|\frac{h(z)}{K(z)}\|_{\mathcal{U}}$ *está acotado en D.*

(iii) *Para casi todo $\gamma \in \Gamma$, existe y está en $B_0(\gamma)$ $h(\gamma) = \mathcal{U} - \lim_{z \to \gamma(n.t)} h(z)$.*

(iv) *La función $\gamma \in \Gamma \longrightarrow \|h(\gamma)\|_{B(\gamma)}$ es medible y acotada sobre Γ y así, $\mathcal{H}$ puede ser normado por*

$$\|h\|_{\mathcal{H}} = \sup \ \mathrm{es}_{\gamma \in \Gamma} \|h(\gamma)\|_{B(\gamma)}.$$

PROPOSICION 2.8. ([C-C-S-R-W I]).

(a) *$\mathcal{H}$ es un espacio de Banach que contiene a $\mathcal{G}$.*

(b) *Si $g \in \mathcal{G}$ y $z \in D$, $\|g(z)\|_{\mathcal{U}} \leq |K(z)| \ \|g\|_{\mathcal{G}}$.*

DEFINICION 2.9. ([C-C-S-R-W I]).

Se define el espacio $\mathcal{F} = \mathcal{F}(B(\cdot), \Gamma)$ como la adherencia en $\mathcal{H}$ de $\mathcal{G}$, esto es, $\mathcal{F} = \overline{\mathcal{G}}^{\mathcal{H}}$.

DEFINICION 2.10. *Dada una familia de interpolación $\{B(\gamma) \ , \ \gamma \in \Gamma\}$ con espacio contenedor $\mathcal{U}$, definimos (en analogía con la definición 2.7) el espacio $\mathcal{H}^p = \mathcal{H}^p(B(\cdot), \Gamma)$ de las funciones h de D en $\mathcal{U}$ tales que:*

(i) $h \in H(D; \mathcal{U})$.

(ii) *La función $\phi : D \longrightarrow \mathcal{U}$ definida por $\phi(z) = \frac{h(z)}{K(z)}$ está en $H^p_w(D; \mathcal{U})$, esto es, para cada $l \in \mathcal{U}'$, $l(\frac{h}{k}) \in H^p(D)$ ([B], cap. 2 §2).*

(iii) *Para casi todo $\gamma \in \Gamma$, existe y está en $B_0(\gamma)$ $h(\gamma) = \mathcal{U} - \lim_{z \to \gamma(n.t)} h(z)$.*

(iv) *La función $\gamma \in \Gamma \longrightarrow \|h(\gamma)\|_{B(\gamma)}$ es medible y está en $L^p(\Gamma)$.*

En estas condiciones, $\mathcal{H}^p$ puede ser dotado de la norma

$$\|h\|_{\mathcal{H}^p} = \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \|h(\gamma)\|^p_{B(\gamma)} d\gamma \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Observemos que si $p = \infty$, $\mathcal{H}^p = \mathcal{H}$

PROPOSICION 2.11. *$\mathcal{H}^p$ es un espacio de Banach.*

DEMOSTRACION:

Obviamente es un espacio normado. Veamos la completitud: sea $(h_n)_n$ una sucesión de Cauchy en $\mathcal{H}^p$, se cumple pues que

$$\|h_n - h_m\|_{\mathcal{H}^p} = \left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \|h_n(\gamma) - h_m(\gamma)\|^p_{B(\gamma)} d\gamma\right)^{\frac{1}{p}} \tag{4}$$

converge a cero cuando n, m tienden a infinito (observemos que, para cada $n \in N$, existe un conjunto $\Gamma_n \subset \Gamma$ de medida nula tal que $h_n(\gamma)$ está definido y pertenece a $B_0(\gamma)$ para todo $\gamma \in \Gamma_n$ y así, existe un conjunto $\Gamma_0 = \cup_{n\in N}\Gamma_n$ de medida nula tal que, para cada $\gamma \in \Gamma \setminus \Gamma_0$ y para todo $n \in N$, $h_n(\gamma)$ está definido). En virtud de (4), existe una parcial $(h_{n_k})_k$ de $(h_n)_n$ tal que $h_{n_k}(\gamma)$ converge en $B(\gamma)$ a un límite $w(\gamma)$ que, en virtud de (iii), está en $B_0(\gamma)$ para casi todo $\gamma \in \Gamma$. Además,

$$\lim_{k\to+\infty}\left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \|h_{n_k}(\gamma) - w(\gamma)\|^p_{B(\gamma)} d\gamma\right)^{\frac{1}{p}} = 0,$$

de lo cual ya deducimos que la función $\gamma \in \Gamma \longrightarrow \|w(\gamma)\|_{B(\gamma)}$ está en $L^p(\Gamma)$.

En virtud de 2.1 (ii), tenemos que

$$\lim_{k\to+\infty}\left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \left\|\frac{h_{n_k}(\gamma)}{K(\gamma)} - \frac{w(\gamma)}{K(\gamma)}\right\|^p_{\mathcal{U}} d\gamma\right)^{\frac{1}{p}} = 0. \tag{5}$$

Por otra parte, la hipótesis (ii) nos permite afirmar que, para cada $l \in \mathcal{U}'$ y para cada $h \in \mathcal{H}^p$, $l(\frac{h}{K})$ está en $H^p(D)$ y así,

$$\left|l\left(\frac{h(z)}{K(z)}\right)\right| \leq \left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \left|l\left(\frac{h(\gamma)}{K(\gamma)}\right)\right|^p dP_z(\gamma)\right)^{\frac{1}{p}} \quad \forall 1 \leq p < +\infty, \forall z \in D.$$

Consecuentemente,

$$\left\|\frac{h(z)}{K(z)}\right\|_{\mathcal{U}} \leq \left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \left\|\frac{h(\gamma)}{K(\gamma)}\right\|^p_{\mathcal{U}} dP_z(\gamma)\right)^{\frac{1}{p}}, \tag{6}$$

de modo que para cada compacto $K \subset D$, existe $C_k > 0$ tal que

$$\sup_{z\in K}\left\|\frac{h(z)}{K(z)}\right\|_{\mathcal{U}} \leq C_k\left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \left\|\frac{h(\gamma)}{K(\gamma)}\right\|^p_{\mathcal{U}}\, d\gamma\right)^{\frac{1}{p}}$$

y así, en virtud de (5), la sucesión $(\frac{h_{n_k}}{K})_k$ converge uniformemente sobre cada compacto $K \subset D$ en $\mathcal{U}$-norma a una función $G(z) \in H(D;\mathcal{U})$. Es más, para cada $l \in \mathcal{U}'$, $\left(l(\frac{h_{n_k}}{K})\right)_k$ converge a l(G) en norma H^p y, de nuevo en virtud de (5),

$$\lim_{k\to+\infty} l\left(\frac{h_{n_k}(\gamma)}{K(\gamma)}\right) = l\left(\frac{w(\gamma)}{K(\gamma)}\right) \qquad \text{para casi todo } \gamma \in \Gamma.$$

Por consiguiente, $\lim_{z\to\gamma(n.t)} l(G(z)) = l(\frac{w(\gamma)}{K(\gamma)})$ y

$$l(G(z)) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} l(\frac{w(\gamma)}{K(\gamma)})dP_z(\gamma) = l\left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{w(\gamma)}{K(\gamma)}dP_z(\gamma)\right)$$

para cada $l \in \mathcal{U}'$. Esto es,

$$G(z) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{w(\gamma)}{K(\gamma)}dP_z(\gamma).$$

En definitiva, existe $\mathcal{U} - \lim_{z\to\gamma(n.t)} G(z)$ y es igual a $\frac{w(\gamma)}{K(\gamma)}$ para casi todo $\gamma \in \Gamma$.

Definamos $W(z) = K(z)G(z)$ se cumple:

(i) $W \in H(D;\mathcal{U})$.

(ii) Para cada $l \in \mathcal{U}'$, $l(\frac{W(z)}{K(z)}) = l(G(z)) \in H^p(D)$ y así, $\frac{W}{K} \in H^p_w(D;\mathcal{U})$.

(iii) Existe $\lim_{z\to\gamma(n.t)} W(z) = w(\gamma)$ y está en $B_0(\gamma)$ para casi todo $\gamma \in \Gamma$.

(iv) La función $\gamma \in \Gamma \longrightarrow \|w(\gamma)\|_{B(\gamma)}$ está en $L^p(\Gamma)$ y se cumple

$$\lim_{k\to+\infty}\|h_{n_k} - w\|_{\mathcal{H}^p} = \lim_{k\to+\infty}\left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\|h_{n_k}(\gamma) - w(\gamma)\|^p_{B(\gamma)}d\gamma\right)^{\frac{1}{p}} = 0.$$

Se deduce, de ello, que $W \in \mathcal{H}^p$ y $(h_{n_k})_k$ converge a W en norma $\mathcal{H}^p$. Por tanto, $(h_n)_n$ converge a W en norma $\mathcal{H}^p$ y, a fortiori, $\mathcal{H}^p$ es de Banach. El caso $p = +\infty$ es la proposición 2.8 ∎

DEFINICION 2.12. *Definimos $\mathcal{G}^p = \mathcal{G}^p(B(\cdot),\Gamma)$ el espacio de las funciones analíticas con valores en $\mathcal{B}$ de la forma $g = \sum' \varphi_j b_j$ tal que $\varphi_j \in N^+(D)$, $b_j \in \mathcal{B}$ para todo j y*

$$\int_0^{2\pi}\|g(\gamma)\|^p_{B(\gamma)}d\gamma < +\infty,$$

dotado de la norma

$$\|g\|_{\mathcal{G}^p} = \left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\|g(\gamma)\|^p_{B(\gamma)}d\gamma\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Si $p = +\infty$, $\mathcal{G}^p = \mathcal{G}$. Estos espacios no son en general completos y definimos $\mathcal{F}^p = \mathcal{F}^p(B(\cdot),\Gamma)$ como la clausura de $\mathcal{G}^p$ en $\mathcal{H}^p$ (obviamente $\mathcal{G}^p \subseteq \mathcal{H}^p$).

PROPOSICION 2.13.

(a) *Para cada* $p \geq 1$, $g \in \mathcal{G}^p$ *y* $z \in D$,

$$\|g(z)\|_{\mathcal{U}} \leq (C(z))^{\frac{1}{p}} \|g\|_{\mathcal{G}^p},$$

siendo $C(z) = |K(z)|^p \sup \operatorname{es}_{\gamma \in \Gamma} |P_z(\gamma)| \leq |K(z)|^p \frac{1+|z|}{1-|z|}$.

(b) *Se tiene el mismo resultado para cada* $f \in \mathcal{F}^p$.

DEMOSTRACION:

Basta combinar (6) con el hecho de que $\mathcal{G}^p$ y $\mathcal{F}^p$ son subespacios de $\mathcal{H}^p$. ∎

COROLARIO 2.14. *Los espacios de funciones* $\mathcal{G}^p$, $\mathcal{F}^p$ *y* $\mathcal{H}^p$ *están contenidos con continuidad en* $H(D; \mathcal{U})$.

§3 Espacios interpolados .

Espacio $\mathbf{B}^{\mathbf{T},\mathbf{p}}$.

DEFINICION 3.1. *Llamamos* $B^{T,p}$ *al subespacio de* $\mathcal{U}$ *siguiente:*

$$B^{T,p} = \{x \in \mathcal{U} \ ; \ \exists f \in \mathcal{F}^p \ \text{con} \ T(f) = x\}$$

dotado de la norma

$$\|x\|_{B^{T,p}} = \inf\{\|f\|_{\mathcal{F}^p} \ ; \ T(f) = x \ , \ f \in \mathcal{F}^p\}.$$

Puesto que dada $f \in \mathcal{F}^p$, existe $(g_n)_n$ en $\mathcal{G}^p$ tal que $\lim_{n \to \infty} g_n = f$, tenemos que $T(f) = \mathcal{U} - \lim_n T(g_n)$ donde, si $g_n = \sum' \varphi_j^n b_j^n$, es claro que $T(g_n) = \sum' T(\varphi_j^n) b_j^n$.

PROPOSICION 3.2. $B^{T,p}$ *es un espacio de Banach.*

DEMOSTRACION:

Obvio pues $B^{T,p}$ es isométrico a $\mathcal{F}^p / Kert \ T$. ∎

PROPOSICION 3.3. *Se verifica que* $B^{T,p}$ *está contenido en* $\mathcal{U}$ *continuamente con norma menor o igual que* $\|KT\|_p$, *donde*

$$\|KT\|_p = \inf\{C \geq 0 \ ; \ \|KT(\varphi)\|_{\mathcal{U}} \leq C\|\varphi\|_p \ \forall \varphi \in H^p(D)\}.$$

DEMOSTRACION:

Dado $x \in B^{T,p}$ y $\varepsilon > 0$, existe $f \in \mathcal{F}^p$ tal que $T(f) = x$ y $\|f\|_{\mathcal{F}^p} \leq \|x\|_{B^{T,p}} + \varepsilon$. Ahora bien, si $f \in \mathcal{F}^p$, $f \in \mathcal{H}^p$ y así, en virtud de 2.10 (ii), $\frac{f}{K} \in \mathcal{H}^p_w(D;\mathcal{U})$. En consecuencia,

$$\|x\|_{\mathcal{U}} = \|T(f)\|_{\mathcal{U}} = \sup_{\|l\|_{\mathcal{U}'}\leq 1} |l(T(f))| = \sup_{\|l\|_{\mathcal{U}'}\leq 1} |l(KT(\frac{f}{K}))| =$$

$$= \sup_{\|l\|_{\mathcal{U}'}\leq 1} |KT(l(\frac{f}{K}))| \leq \sup_{\|l\|_{\mathcal{U}'}\leq 1} \|KT\|_p \|l(\frac{f}{K})\|_p =$$

$$= \|KT\|_p \|\frac{f}{K}\|_{\mathcal{H}^p_w(D;\mathcal{U})} \leq \|KT\|_p \left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \|\frac{f(\gamma)}{K(\gamma)}\|^p_{\mathcal{U}} d\gamma\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Se tiene, en virtud de 2.1 (ii), que para cada $g \in \mathcal{G}^p$ y para casi todo $\gamma \in \Gamma$,

$$\|g(\gamma)\|_{\mathcal{U}} \leq K(\gamma)\|g(\gamma)\|_{B(\gamma)}$$

y puesto que para cada $f \in \mathcal{F}^p$, existe una sucesión $(g_n)_n$ en $\mathcal{G}^p$ tal que $\lim_n g_n = f$, tenemos que $\|g_n(\gamma) - g_m(\gamma)\|_{\mathcal{U}} \leq K(\gamma)\|g_n(\gamma) - g_m(\gamma)\|_{B(\gamma)}$ para casi todo $\gamma \in \Gamma$. Ahora bien,

$$\lim_{n,m} \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \|g_n(\gamma) - g_m(\gamma)\|^p_{B(\gamma)} d\gamma = 0$$

y así, existe una parcial $(g_{n_k})_k$ que seguiremos denotando $(g_n)_n$ tal que $g_n(\gamma)$ es convergente en $B(\gamma)$ y, a fortiori, en $\mathcal{U}$, para casi todo $\gamma \in \Gamma$. Puesto que $f = \lim_n g_n$ tenemos que $f(\gamma) = \mathcal{U} - \lim_n g_n(\gamma) = B(\gamma) - \lim_n g_n(\gamma)$ y así, para cada $\varepsilon > 0$, existe $n \in \mathbf{N}$ tal que $\|f(\gamma) - g_n(\gamma)\|_{\mathcal{U}} \leq \varepsilon$. En consecuencia,

$$\|f(\gamma)\|_{\mathcal{U}} \leq \|g_n(\gamma)\|_{\mathcal{U}} + \varepsilon \leq K(\gamma)\|g_n(\gamma)\|_{B(\gamma)} + \varepsilon \leq K(\gamma)(\|f(\gamma)\|_{B(\gamma)} + \varepsilon) + \varepsilon.$$

Esto es, $\|f(\gamma)\|_{\mathcal{U}} \leq K(\gamma)\|f(\gamma)\|_{B(\gamma)}$ para casi todo $\gamma \in \Gamma$. Se deduce que

$$\|T(f)\|_{\mathcal{U}} \leq \|KT\|_p \left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \|f(\gamma)\|^p_{B(\gamma)} d\gamma\right)^{\frac{1}{p}} = \|KT\|_p \|f\|_{\mathcal{F}^p}$$

y, por la elección de f, se tiene que, cualquiera que sea $\varepsilon > 0$,

$$\|x\|_{\mathcal{U}} = \|T(f)\|_{\mathcal{U}} \leq \|KT\|_p(\|x\|_{B^{T,p}} + \varepsilon).$$

Si hacemos tender ε a cero obtenemos el resultado buscado. ∎

NOTA 3.4: Observemos que si $T = \delta_{z_0}$ $(z_0 \in D)$ y $p = +\infty$, entonces $\|KT\|_\infty = \|K\delta_{z_0}\|_\infty = |K(z_0)|\ \|x\|_{B[z_0]}$ como está probado en ([C-C-R-S-W I], 2.3).

Espacio $\mathbf{B_{T,p}}$.

LEMA 3.5. *Para cada $b \in \mathcal{B}$, existe $g \in \mathcal{G}^p$ tal que $T(g) = b$.*

DEMOSTRACION:

Dado $b \in \mathcal{B} \setminus \{0\}$, consideremos la función exterior

$$\varphi_b(z) = \exp\left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log \frac{1}{\|b\|_{B(\gamma)}} dH_z(\gamma)\right). \tag{7}$$

Se cumple que $\varphi_b b \in \mathcal{G}^p$ para todo $1 \leq p \leq \infty$. Además, para cada $\varphi \in H^\infty(D)$, $\varphi\varphi_b b \in \mathcal{G}^p$ y $\|\varphi\varphi_b b\|_{\mathcal{G}^p} \leq \|\varphi\|_p$. Si $T(\varphi\varphi_b)$ fuese cero para toda $\varphi \in H^\infty(D)$, tendríamos que el funcional $\varphi_b T$ sería idénticamente nulo y puesto que $\varphi_b(z) \neq 0$ para todo $z \in D$, T sería nulo. En consecuencia, existe $\varphi \in H^\infty(D)$ tal que $T(\varphi\varphi_b) \neq 0$ y, por tanto, $b = T(\frac{\varphi\varphi_b b}{T(\varphi\varphi_b)})$. Por último, puesto que $\frac{\varphi\varphi_b b}{T(\varphi\varphi_b)} \in \mathcal{G}^p$ obtenemos el resultado deseado. ∎

DEFINICION 3.6. *Definimos $B_{T,p}$ como el espacio completado de $\mathcal{B}$ respecto de la norma*

$$\|b\|_{B_{T,p}} = \inf\{\|g\|_{\mathcal{G}^p} \ ; \ T(g) = b \ , \ g \in \mathcal{G}^p\}.$$

NOTA 3.7: En general $B_{T,p}$ no está contenido con continuidad en $\mathcal{U}$. Un ejemplo, para el caso $T = \delta_{z_0}$, puede ser visto en ([C-C-R-S-W I], Ap. 1).

Espacios $\mathbf{B_{T,p,\infty}}$ y $\mathbf{B^{T,p,\infty}}$.

DEFINICION 3.8. *Llamaremos $\mathcal{G}^{\infty,p}$ al subespacio de $\mathcal{G}^p$ tal que si $g \in \mathcal{G}^{\infty,p}$, g es de la forma $\sum' \varphi_j b_j$, donde $\varphi_j \in H^\infty(D)$ para todo j. Así mismo, llamaremos $\mathcal{F}^{\infty,p}$ a la adherencia de $\mathcal{G}^{\infty,p}$ en $\mathcal{H}^p$.*

LEMA 3.9. *Para cada $b \in \mathcal{B}$, existe $g \in \mathcal{G}^{\infty,p}$ tal que $T(g)=b$.*

DEMOSTRACION:

Enteramente análoga a la del lema 3.5 sin más que sustituir la función φ_b por

$$\varphi_b^1(z) = \exp\left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log \frac{1}{\|b\|_{B(\gamma)}K(\gamma)} dH_z(\gamma)\right).$$

Observemos que $\varphi_b^1 \in H^\infty(D)$ puesto que, para casi todo $\gamma \in \Gamma$, $|\varphi_b^1(\gamma)| \leq \frac{1}{\|b\|_{\mathcal{U}}}$. ∎

DEFINICION 3.10. *Definimos*

(a) $B^{T,p,\infty} = \{x \in \mathcal{U} \ ; \ \exists f \in \mathcal{F}^{\infty,p} \ con \ T(f) = x\}$ *dotado de la norma*

$$\|x\|^{B^{T,p,\infty}} = \inf\{\|f\|_{\mathcal{F}^p} \ ; \ T(f) = x \ , \ f \in \mathcal{F}^{\infty,p}\}.$$

(b) $B_{T,p,\infty}$ *el espacio completado de* $\mathcal{B}$ *respecto de la norma*

$$\|b\|_{B_{T,p,\infty}} = \inf\{\|g\|_{\mathcal{F}^p} \ ; \ T(g) = b \ , \ g \in \mathcal{G}^{\infty,p}\}.$$

La primera pregunta que surge es qué relación existe entre los espacios $B^{T,p}$, $B_{T,p}$, $B^{T,p,\infty}$ y $B_{T,p,\infty}$. Sabemos que si $T = \delta_{z_0}$ y $p = +\infty$, los espacios $B_{T,p}$ y $B_{T,p,\infty}$ son equivalentes ([C-C-R-S-W I], 2.5). En nuestro caso, tenemos el siguiente resultado:

PROPOSICION 3.11. *Para todo* $1 \leq p \leq \infty$ *y todo* $T \in H'(D)$, *se verifica:*

(a) *Para cada* $b \in \mathcal{B}$, $\|b\|_{B_{T,p}} \leq \|b\|_{B_{T,p,\infty}}$.

(b) $B^{T,p,\infty}$ *está contenido con continuidad en* $B^{T,p}$ *con norma menor o igual que 1.*

(c) *Para cada* $g \in \mathcal{G}^p$, *existe* $(g_n)_n$ *en* $\mathcal{G}^{\infty,p}$ *tal que* $\|g_n\|_{\mathcal{G}^p} \leq \|g\|_{\mathcal{G}^p}$ *y* $\lim_n T(g_n) = T(g)$ *en cualquier espacio que contenga a* $\mathcal{B}$.

(d) *Los espacios* $B_{T,p}$ *y* $B_{T,p,\infty}$ *son equivalentes.*

En virtud de (d), de ahora en adelante siempre podremos suponer $g \in \mathcal{G}^{\infty,p}$ cuando trabajemos con el espacio $B_{T,p}$.

DEMOSTRACION:

Los apartados (a) y (b) son consecuencia inmediata del hecho de que $\mathcal{G}^{\infty,p}$ y $\mathcal{F}^{\infty,p}$ sean subespacios de $\mathcal{G}^p$ y $\mathcal{F}^p$ respectivamente.

(c) Sea $g = \sum_{j=1}^N \varphi_j b_j$. Consideremos la función medible $\alpha(\cdot) = \max_{j=1}^N |\varphi_j(\cdot)|$. Se cumple que

$$\int_0^{2\pi} |\log\ \alpha(\gamma)| dP_z(\gamma) \leq \sum_{j=1}^N \int_0^{2\pi} |\log\ |\varphi_j(\gamma)|\ | dP_z(\gamma) < +\infty.$$

Sea $\alpha_M(\gamma) = \frac{1}{\alpha(\gamma)}\chi_{\{\gamma;\alpha(\gamma)>M\}} + \chi_{\{\gamma;\alpha(\gamma)\leq M\}}$. Es claro que la sucesión $(|\log\ \alpha_M|)_M$ está mayorada por la función integrable $|\log\ \alpha|$. Consideremos la función $\alpha_M^*(z)$ definida en 2.4 y sea K un compacto de D. Sea $r > 0$ tal que $K \subset \overline{B}(0,r)$. Se cumple que existe una constante C_k tal que, para todo $z \in K$,

$$\left| \int_0^{2\pi} (\log\ \alpha_M(\gamma))\, dH_z(\gamma) \right| \leq C_k \int_0^{2\pi} |\log\ \alpha_M(\gamma)| d\gamma,$$

y puesto que $\lim_M \alpha_M(\gamma) = 1$ para casi todo $\gamma \in \Gamma$, tenemos, por convergencia dominada, que el miembro de la izquierda tiende a cero y, por tanto, deducimos que $\alpha_M^*(z)$ converge a 1 uniformemente sobre todo compacto de D. En consecuencia, para cada $\varphi \in H(D)$, $\lim_M T(\alpha_M^* \varphi) = T(\varphi)$.

Definamos la sucesión de funciones $g_M(z) = \alpha_M(z)^* g(z) = \sum'(\alpha_M^* \varphi_j) b_j$. Se cumple que:

(i) $\|\alpha_M^* \varphi_j\|_\infty = \sup\ \mathrm{es}_{\gamma\in\Gamma} |\alpha_M^*(\gamma)\varphi_j(\gamma)| \leq M$ para todo $1 \leq j \leq N$ y, por tanto, $\alpha_M^* \varphi_j$ está en $H^\infty(D)$, esto es, $g_M \in \mathcal{G}^{\infty,p}$.

(ii) Puesto que $\|\alpha_M(\cdot)\|_\infty \leq 1$, $\|g_M\|_{\mathcal{G}^p} \leq \|g\|_{\mathcal{G}^p}$.

Obviamente, se obtiene, de ello, el apartado (c).

(d) Se deduce, de (c), que para cada $g \in \mathcal{G}^p$ y $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbf{N}$ tal que si $n \geq n_0$,

$$\|T(g)\|_{B_{T,p,\infty}} \leq \varepsilon + \|T(g_n)\|_{B_{T,p,\infty}} \leq \varepsilon + \|g_n\|_{\mathcal{G}^p} \leq \varepsilon + \|g\|_{\mathcal{G}^p}.$$

Luego $\|T(g)\|_{B_{T,p,\infty}} \leq \|T(g)\|_{B_{T,p}}$. Combinando este resultado con (a), concluimos que, para cada $b \in \mathcal{B}$, $\|b\|_{B_{T,p}} = \|b\|_{B_{T,p,\infty}}$ y así, los espacios completados son isométricos. ∎

PROPOSICION 3.12. *Los espacios $B^{T,p}$ y $B^{T,p,\infty}$ son equivalentes para todo $p \geq 1$.*

DEMOSTRACION:

Sabemos que $B^{T,p,\infty}$ está contenido con continuidad en el espacio $B^{T,p}$. Veamos el recíproco: sea $x \in B^{T,p}$ y sea $f \in \mathcal{F}^p$ tal que $T(f) = x$. Sea $(g_n)_n$ en $\mathcal{G}^p$ tal que $f = \mathcal{F}^p - \lim_n g_n$. Para cada par de índices n, m, sea $(B_{m,n}^k)_k$ la sucesión de funciones, construida como en 3.11 (c), asociada a la función $g_n - g_m$. Se cumple que $B_{m,n}^k(g_n - g_m)$ está en $\mathcal{G}^{p,\infty}$ y que $(B_{m,n}^k)_k$ converge a 1 uniformemente sobre compactos de D cuando k tiende a infinito. Entonces:

$$\|T(g_n) - T(g_m)\|_{B^{T,p,\infty}} = \lim_k \|T(B_{m,n}^k(g_n - g_m))\|_{B^{T,p,\infty}} \leq$$
$$\leq \lim_k \|B_{m,n}^k(g_n - g_m)\|_{\mathcal{F}^p} \leq \|g_n - g_m\|_{\mathcal{F}^p}.$$

Por tanto, $(T(g_n))_n$ es una sucesión de Cauchy en $B^{T,p,\infty}$ y, a fortiori, convergente.

Claramente, $x = T(f) = B^{T,p,\infty} - \lim_n T(g_n)$ y en consecuencia, $x \in B^{T,p,\infty}$ y $\|x\|_{B^{T,p,\infty}} \leq \|x\|_{B^{T,p}}$ ∎

Espacio $\mathbf{B^{S,T,P}}$.

Sean S y T dos funcionales analíticos sobre D no nulos. Llamemos

$$\mathcal{S}^p = \{f \in \mathcal{F}^p \ ; \ \exists x \in \mathcal{U} \text{ y } fS = xT\}$$

con la norma inducida por $\mathcal{F}^p$.

PROPOSICION 3.13. *$\mathcal{S}^p$ es de Banach.*

DEMOSTRACION:

Puesto que $\mathcal{F}^p$ es de Banach, basta ver que $\mathcal{S}^p$ es cerrado en $\mathcal{F}^p$.

Sea $(f_n)_n \subset \mathcal{S}^p$ tal que $\mathcal{F}^p - \lim_n f_n = f$. Se cumple que, para cada $n \in \mathbf{N}$, existe $x_n \in \mathcal{U}$ tal que $f_n S = x_n T$. Consecuentemente,

$$\|x_n - x_m\|_{\mathcal{U}} |T(\phi)| = \|T(\phi x_n) - T(\phi x_m)\|_{\mathcal{U}} = \|S(\phi f_n) - S(\phi f_m)\|_{\mathcal{U}} \overset{(3.3)}{\leq}$$
$$\leq \|KS\|_p \|\phi(f_n - f_m)\|_{\mathcal{G}^p} \leq \|KS\|_p \|\phi\|_\infty \|f_n - f_m\|_{\mathcal{G}^p}$$

y así, puesto que el último miembro tiende a cero cuando n y m tienden a infinito, tomando $\phi \in H^\infty(D)$ tal que $T(\phi) \neq 0$, deducimos que $(x_n)_n$ es de Cauchy en $\mathcal{U}$ y, por tanto, existe $x \in \mathcal{U}$ tal que $x = \lim_n x_n$. Además,

$$(fS)(\phi) = S(f\phi) = \lim_n S(f_n\phi) = \lim_n (f_nS)(\phi) = \lim_n (x_nT)(\phi) = \lim_n T(\phi)x_n = xT(\phi)$$

para toda $\phi \in H(D)$. En definitiva, existe $x \in \mathcal{U}$ tal que $fS = xT$ y, por tanto, $f \in \mathcal{S}^p$. ∎

Consideremos ahora el operador $\Lambda^p : \mathcal{S}^p \longrightarrow \mathcal{U}$ definido por $\Lambda^p(f) = x$, siendo $x \in \mathcal{U}$ tal que $xT = fS$. Observemos, en primer lugar, que dicho operador está bien definido pues si $xT = x'T$, $x = x'$.

PROPOSICION 3.14. *Se verifica que $\Lambda^p : \mathcal{S}^p \longrightarrow B^{S,p}$ es lineal continuo y $\|\Lambda^p\| \leq \frac{1}{\|T\|_\infty}$.*

DEMOSTRACION:

Si $f \in \mathcal{S}^p$, entonces $\Lambda^p(f)T = fS$ y, por tanto, para cada $\phi \in H^\infty(D)$, $\Lambda^p(f)T(\phi) = S(f\phi)$. En consecuencia, para cada $\phi \in H^\infty(D)$ con $T(\phi) \neq 0$, se tiene que

$$\Lambda^p(f) = \frac{S(f\phi)}{T(\phi)} = S\left(\frac{\phi}{T(\phi)}f\right).$$

Puesto que $\frac{\phi}{T(\phi)}f \in \mathcal{F}^p$, se deduce que $\Lambda^p(f) \in B^{S,p}$. Además, obviamente Λ^p es lineal y

$$\|\Lambda^p(f)\|_{B^{S,p}} = \|\frac{S(f\phi)}{T(\phi)}\|_{B^{S,p}} \leq \|\frac{f\phi}{T(\phi)}\|_{\mathcal{F}^p} \leq \frac{\|\phi\|_\infty}{|T(\phi)|}\|f\|_{\mathcal{F}^p}$$

para toda $\phi \in H^\infty(D)$ tal que $T(\phi) \neq 0$. Por tanto, por definición de $\|T\|_\infty$, deducimos el resultado buscado. ∎

DEFINICION 3.15. *Definimos el espacio* $B^{S,T,p} = \Lambda^p(\mathcal{S}^p) \cong \mathcal{S}^p/Ker\ \Lambda^p$ *dotado de la norma*

$$\|x\|_{B^{S,T,p}} = \inf\{\|f\|_{\mathcal{F}^p}\ ;\ f \in \mathcal{F}^p \text{ y } fS = xT\}.$$

COROLARIO 3.16. *Para todo* $1 \leq p \leq +\infty$ *y cualesquiera que sean los funcionales* S *y* T*, se cumple:*

(a) $B^{S,T,p}$ *es un espacio de Banach.*

(b) $B^{S,T,p}$ *está contenido continuamente en* $B^{S,p}$ *con norma menor o igual que* $\frac{1}{\|T\|_\infty}$.

Otro ejemplo de espacio interpolado lo veremos en 4.13.

§4 Funcionales analíticos dominantes.

DEFINICION 4.1. *Dados dos funcionales analíticos* S *y* T *sobre* D *diremos que* S *domina a* T *respecto de la familia de interpolación* $\{B(\gamma)\ ,\ \gamma \in \Gamma\}$ *si y sólo si para cada* $b \in \mathcal{B}$*, existe* $g \in \mathcal{G}(B(\cdot),\Gamma)$ *tal que* $S(g\varphi) = bT(\varphi)$ *para toda* $\varphi \in H(D)$.

Si $B = \{b_i\ ,\ i \in I\}$ es una base de $\mathcal{B}$ basta poner en 4.1 que, para cada $i \in I$, existe $g_i \in \mathcal{G}$ tal que $S(g_i\varphi) = b_iT(\varphi)$ para toda $\varphi \in H(D)$ y todo $i \in I$. De ahora en adelante cuando pongamos $\{b_i\}_{i\in I}$ hacemos referencia a una base de $\mathcal{B}$.

Mientras no indiquemos lo contrario, supondremos que S domina a T respecto de la familia $\{B(\gamma)\ ,\ \gamma \in \Gamma\}$ con espacio log-intersección $\mathcal{B}$.

PROPOSICION 4.2. *Si S domina a T entonces existe $\phi \in N^+(D)$ tal que $\phi S = T$.*

DEMOSTRACION:

Si S domina a T, para todo $i \in I$, existe $g_i \in \mathcal{G}$ tal que $S(g_i\varphi) = b_i T(\varphi)$ para cada $\varphi \in H^\infty(D)$.

Supongamos que

$$g_i = \sum_{j=1}^{n_i} \varphi_j^i b_j^i \qquad (b_j^i \in \{b_i\}_{i\in I}),$$

entonces $S(g_i\varphi) = \sum_{j=1}^{n_i} S(\varphi_j^i \varphi) b_j^i = b_i T(\varphi)$. Puesto que B es base, se deduce que existe $k \in \{1, ..., n_i\}$ tal que $S(\varphi_k^i \varphi) = T(\varphi)$ para toda $\varphi \in H(D)$, $b_k^i = b_i$ y $S(\varphi_j^i \varphi) = 0$ *si* $j \neq k$.

En consecuencia, existe $\phi \in N^+(D)$ $(\phi = \varphi_k^i)$ tal que $\phi S = T$. ∎

LEMA 4.3. *Dados $z_0 \in D$ y $m \in \mathbb{N}$, se cumple que, para cada $b \in \mathcal{B}$, existe $\phi_b \in N^+(D)$ tal que $\phi_b b \in \mathcal{B}$, $\phi_b(z_0) \neq 0$ y $\phi_b^{k)}(z_0) = 0$ para todo $k \in \{1, ..., m\}$.*

DEMOSTRACION:

Sea $\Psi_b(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log \|b\|_{B(\gamma)} dH_z(\gamma)$ y consideremos

$$\phi_b(z) = \exp\left(\Psi_b(z) - \sum_{k=1}^{m} (z - z_0)^k \frac{\Psi_b^{k)}(z_0)}{k!} \right). \tag{8}$$

Se cumple que $\phi_b \in N^+(D)$ y

$$\lim_{z \to \gamma(n.t)} |\phi_b(z)| = \frac{1}{\|b\|_{B(\gamma)} | \exp\left(\sum_{k=1}^{m} (e^{i\gamma} - z_0)^k \frac{1}{k!} \Psi_b^{k)}(z_0) \right) |}.$$

Por tanto, es claro que sup $\mathrm{es}_{\gamma \in \Gamma} |\phi_b(\gamma)| \, \|b\|_{B(\gamma)} < +\infty$ y en consecuencia, $\phi_b b \in \mathcal{G}$. Las propiedades restantes son obvias. ∎

COROLARIO 4.4. *Se verifica que para cada $n, m \in \mathbb{N}$ $(n > m)$, $z_0 \in D$ y para cada $b \in \mathcal{B}$, existe $g \in \mathcal{G}$ tal que $g^{n-m)}(z_0) = b$ y $g^{j)}(z_0) = 0$ para $1 \leq j \leq n$, $j \neq n - m$.*

DEMOSTRACION:

Basta tomar

$$g(z) = \frac{(z - z_0)^{n-m}}{(n - m)! \phi_b(z_0)} \phi_b(z) b,$$

donde $\phi_b(z)$ es la función dada en (8). ∎

COROLARIO 4.5. *Para cada* $n \in \mathbb{N}$, $(\lambda_0, \lambda_1, ..., \lambda_n) \in \mathbb{C}^{n+1}$ *y para cada* $b \in \mathcal{B}$, *existe* $\Psi_b \in N^+(D)$ *tal que* $\Psi_b b \in \mathcal{G}$ *y* $\Psi_b^{k)}(z_0) = \lambda_k$ *para* $k \in \{0, ..., n\}$.

DEMOSTRACION:

Considerar

$$\Psi_b(z) = \frac{P(z)}{\phi_b(z_0)}\phi_b(z)b,$$

donde $P(z) = \lambda_0 + \lambda_1(z - z_0) + ... + \frac{\lambda_n}{n!}(z - z_0)^n$ y ϕ_b como en (8) con $m = n$. ∎

NOTA 4.6: En ([S], 2) se define el siguiente concepto: si S y T son dos distribuciones de soporte finito, se dice que T está contenida en S, y se expresa por $T \subseteq S$, si y sólo si $Sop\ T$ está contenido en $Sop\ S$ y el orden de T es menor o igual que el de S en todo punto del soporte de T. Pues bien:

PROPOSICION 4.7. *Sean S y T dos funcionales analíticos. Si ambos son de soporte finito entonces S domina a T si y sólo si $T \subseteq S$.*

DEMOSTRACION:

Si S domina a T tenemos, en virtud de 4.2, que existe $\phi \in N^+(D)$ tal que $T = \phi S$ y, por tanto, es claro que $T \subseteq S$.

Recíprocamente, si $T \subseteq S$, existen dos funcionales analíticos S_T y S^* tales que $S = S_T + S^*$, $Sop\ S_T = Sop\ T$, $Sop\ S^* \cap Sop\ T = \emptyset$ y el orden de T es menor o igual que el orden de S_T en todo punto del soporte.

Supongamos que $Sop\ S^* = \{z_1, ..., z_n\}$ y consideremos $w(z) = \prod_{j=1}^{n}(z - z_j)^p$, siendo $p > Ord\ S^*$. Entonces $wS^* = 0$ y así, si vemos que wS_T domina a T tendremos que, para todo $b \in \mathcal{B}$, existe $g \in \mathcal{G}$ tal que $wS_T(g\varphi) = bT(\varphi)$ para toda $\varphi \in H^\infty(D)$ y, puesto que $wg \in \mathcal{G}$ y

$$S(\ (wg)\varphi\ ) = S_T(\ (wg)\varphi\ ) + S^*(\ (wg)\varphi\ ) = S_T(wg\varphi) = bT(\varphi),$$

habremos acabado la demostración. Como $Sop\ (wS_T) = Sop\ T$ y $Ord\ T \leq Ord\ (wS_T)$ en cada punto del soporte, la proposición quedará probada si demostramos que si $Sop\ T = Sop\ S$ y $Ord\ T \leq Ord\ S$ en cada punto del soporte entonces S domina a T.

Con un razonamiento enteramente análogo al empleado anteriormente para "anular" a S^*, podemos suponer que $Sop\ T = Sop\ S = \{z_0\}$ y $Ord\ T \leq Ord\ S$, esto es,

$$S = \sum_{k=0}^{n} a_k \delta_{z_0}^{k)} \quad , \quad T = \sum_{j=0}^{m} c_j \delta_{z_0}^{j)} \qquad m \leq n.$$

Si vemos que S domina a $\delta_{z_0}^{j)}$ para todo $0 \leq j \leq m$, tendremos que, dado $b \in \mathcal{B}$, existe $g_j \in \mathcal{G}$ tal que $g_j S = b\delta_{z_0}^{j)}$ y así, bastará tomar $g = \sum_{j=0}^{m} c_j g_j$ para obtener el resultado buscado.

S domina a $\delta_{z_0}^{j)}$ si y sólo si, para cada $b \in \mathcal{B}$, existe $g \in \mathcal{G}$ tal que

$$S(g\varphi) = \sum_{k=0}^{n} a_k \delta_{z_0}^{k)}(g\varphi) = b\varphi^{j)}(z_0) \qquad \varphi \in H(D).$$

Luego se ha de cumplir que, para toda $\varphi \in H(D)$,

$$\sum_{k=0}^{n} a_k \left(\sum_{p=0}^{k} \binom{k}{p} g^{k-p)}(z_0) \varphi^{p)}(z_0) \right) = b\varphi^{j)}(z_0),$$

equivalentemente

$$\sum_{p=0}^{n} \left(\sum_{k \geq p} a_k \binom{k}{p} g^{k-p)}(z_0) \right) \varphi^{p)}(z_0) = b\varphi^{j)}(z_0),$$

es decir,

$$\sum_{p=0}^{n} \left(\sum_{q=0}^{n-p} a_{q+p} \binom{q+p}{p} g^{q)}(z_0) \right) \varphi^{p)}(z_0) = b\varphi^{j)}(z_0),$$

lo que equivale a

$$\sum_{q=0}^{n-p} a_{q+p} \binom{q+p}{p} g^{q)}(z_0) = 0 \qquad \forall p \neq j$$

$$\sum_{q=0}^{n-j} a_{q+j} \binom{q+j}{j} g^{q)}(z_0) = b.$$

Si llamamos $(\lambda_0, ..., \lambda_n)$ a la solución del sistema:

$$\begin{aligned}
&a_0x_0 + a_1x_1 + \quad . \; . \; . \; + a_nx_n = 0\\
&a_1x_0 + \binom{2}{1}a_2x_1 + \quad . \; . \; . \; + \binom{n}{n-1}a_nx_{n-1} = 0\\
&. \; . \; .\\
&a_{j-1}x_0 + \quad . \; . \; . \; = 0\\
&a_jx_0 + \binom{j+1}{1}a_{j+1}x_1 + ... + \binom{n}{n-1}a_nx_{n-j} = 1\\
&a_{j+1}x_0 + \; . \; . \; = 0\\
&. \; . \; .\\
&a_nx_0 = 0
\end{aligned}$$

tenemos que la función g, que estamos buscando, ha de verificar que $g^{k)}(z_0) = \lambda_k b$ para todo $0 \leq k \leq n$; función que sabemos que existe en virtud de 4.5. ∎

En virtud del resultado anterior, expresaremos que S domina a T por $T \subseteq S$ tanto si son de soporte finito como si no lo son.

EJEMPLO 4.8: Sea $n \geq m$ y $z_0 \in D$. Se cumple que

$$B^{\delta^n_{z_0},\delta^m_{z_0}} = \{x \in \mathcal{U} \; ; \; \exists f \in \mathcal{F} \; con \; f^{n-m)}(z_0) = x \; , \; f^{k)}(z_0) = 0 \;\; \forall k \leq n, k \neq n-m\}.$$

DEMOSTRACION:

Si $x \in B^{\delta^n_{z_0},\delta^m_{z_0}}$, existe $f \in \mathcal{F}(B(\cdot),\Gamma)$ tal que $(f\varphi)^{n)}(z_0) = x\varphi^{n)}(z_0)$ para toda φ de $H^\infty(D)$. Particularizando para funciones φ del tipo $(z - z_0)^p$ obtenemos el resultado buscado. El recíproco es obvio. ∎

Para tratar de obtener resultados sobre funcionales analíticos que dominan a otros funcionales cuando no son de soporte finito, veamos, en primer lugar, un lema de caracterización de los mismos.

LEMA 4.9. *Dado un funcional analítico T en D, se cumple que T no es de soporte finito si y solamente si, cualquiera que sea el funcional analítico S, existe una sucesión $(f_n)_n$ de funciones holomorfas tales que $(f_nT)_n$ converge a S en $H'(D)$.*

DEMOSTRACION:

Sea $\mathcal{P}$ el subespacio de $H(D)$ formado por las funciones polinómicas y sea $H'(D)$ dotado de la topología débil τ_σ. Consideremos el operador lineal continuo

$$L_T : \mathcal{P} \longrightarrow (H'(D), \tau_\sigma)$$

definido por $L_T(P) = PT$. Es sabido que $N(L_T) = \{0\}$ si y sólo si $L'_T(H(D))$ es denso en $\mathcal{P}' = H'(D)$, donde L'_T es la aplicación traspuesta de L_T, la cual está definida por $L'_T(f) = fT$ ([KO II], §32). Por tanto, $N(L_T) = \{0\}$ si y sólo si, para cada $S \in H'(D)$, existe $(f_n)_n$ en $H(D)$ convergente hacia S en $H'(D)$.

Ahora bien, $N(L_T) \neq \{0\}$ si y sólo si existe un polinomio P no nulo tal que $PT = 0$.

Supongamos que existe tal polinomio P y que $P(z) = c\prod_{j=0}^{n}(z - z_j)^{m(j)}$. Llamemos, para cada $k \in \{0, ..., n\}$,

$$S_k = \prod_{j=k}^{n}(z - z_j)^{m(j)}T.$$

Se cumple que $(z-z_{k-1})^{m(k-1)}S_k = S_{k-1}$. Así, $(z-z_0)^{m(0)}S_1 = 0$ y en consecuencia, S_1 es un funcional analítico de orden $m(0)$ y soporte $\{z_0\}$, esto es, existen a_k^1 $(0 \le k \le m(0)$) tales que $S_1 = \sum_{k=0}^{m(0)} a_k^1 \delta_{z_0}^{k)}$. Por tanto, para cada $\varphi \in H(D)$, existen b_{jl}^2 $(0 \le j \le 1,\ 0 \le l \le m(j))$ tales que

$$S_2\left((z - z_1)^{m(1)}\frac{\varphi(z) - \sum_{l=0}^{m(1)}\varphi^{l)}(z_1)\frac{(z-z_1)^l}{l!}}{(z - z_1)^{m(1)}}\right) =$$

$$= \sum_{k=0}^{m(0)} a_k^1\delta_{z_0}^{k)}\left(\frac{\varphi(z) - \sum_{l=0}^{m(1)}\varphi^{l)}(z_1)\frac{(z-z_1)^l}{l!}}{(z - z_1)^{m(1)}}\right) = \sum_{j=0}^{1}\sum_{l=0}^{m(j)} b_{jl}^2\delta_{z_j}^{l)}(\varphi)$$

y así, existen a_{jl}^2 $(j = 0, 1,\ \ 0 \le l \le m(j)$) tales que $S_2 = \sum_{j=0}^{1}\sum_{l=0}^{m(j)} a_{jl}^2\delta_{z_j}^{l)}$, esto es, S_2 es de soporte finito $\{z_0, z_1\}$ y de orden $\max\{m(0), m(1)\}$.

Supongamos que S_{k-1} es de la forma $S_{k-1} = \sum_{j=0}^{k-2}\sum_{l=0}^{m(j)} a_{jl}^{k-1}\delta_{z_j}^{l)}$. Tendremos entonces que

$$S_k\left((z - z_{k-1})^{m(k-1)}\frac{\varphi(z) - \sum_{l=0}^{m(k-1)}\varphi^{l)}(z_{k-1})\frac{(z-z_{k-1})^l}{l!}}{(z - z_{k-1})^{m(k-1)}}\right) =$$

$$= S_{k-1}\left(\frac{\varphi(z) - \sum_{l=0}^{m(k-1)}\varphi^{l)}(z_{k-1})\frac{(z-z_{k-1})^l}{l!}}{(z - z_{k-1})^{m(k-1)}}\right)$$

y así, existen b^k_{jl} $(0 \le j \le k-1,\ 0 \le l \le m(j)\ )$ tales que $S_k = \sum_{j=0}^{k-1} \sum_{l=0}^{m(j)} b^k_{jl} \delta^{l)}_{z_j}$.

Deducimos que, para todo $0 \le k \le n$, existen a^k_{jl} $(0 \le j \le (k-1)\ ,\ 0 \le l \le m(j)\ )$ tales que

$$S_k = \sum_{j=0}^{k-1} \sum_{l=0}^{m(j)} a^k_{jl} \delta^{l)}_{z_j}$$

y, por tanto, $S_n = (z - z_n)^{m(n)} T$ es de soporte finito. En consecuencia, concluimos que T es de soporte finito. ∎

COROLARIO 4.10. *Dado un funcional analítico T en D existe una función $\phi \in H^\infty(D)$, no idénticamente nula tal que $\phi T = 0$ si y sólo si T es de soporte finito.*

DEMOSTRACION:

Si consideramos el operador lineal continuo

$$L_T : H^\infty(D) \longrightarrow H'(D)$$

definido por $L_T(\phi) = \phi T$, y seguimos el mismo razonamiento que en el lema 4.9, obtenemos que $N(L_T) = \{0\}$ si y sólo si $L_T'(H(D))$ es denso en $H'(D)$ y, en virtud del citado lema, esto ocurre si y sólo si T no es de soporte finito. Por tanto, T es de soporte finito si y sólo si $N(L_T) \ne \{0\}$ o, equivalentemente, existe $\phi \in H^\infty(D)$ no idénticamente nula tal que $\phi T = 0$. ∎

PROPOSICION 4.11. *Si $T \subseteq S$ ambos son de soporte finito o ninguno de ellos lo es.*

DEMOSTRACION:

En virtud de 4.2, si $T \subseteq S$, existe $\phi \in N^+(D)$ tal que $\phi S = T$. Si T es de soporte finito, existe $\Psi \ne 0$ tal que $\Psi T = 0$ y así, $\Psi \phi S = 0$ y puesto que $\Psi \phi \ne 0$ se deduce, de 4.10, que S es de soporte finito. Del mismo modo se procede si S es de soporte finito. ∎

PROPOSICION 4.12. *Sean S y T dos funcionales analíticos. Si S y T no son de soporte finito, se cumple que $T \subseteq S$ si y sólo si existe $\Psi \in N^+(D)$ tal que, para todo $b \in \mathcal{B}$, $\Psi b \in \mathcal{G}$ y $\Psi S = T$.*

DEMOSTRACION:

Si $T \subseteq S$, para cada $i \in I$, existe $g_i \in \mathcal{G}$ tal que, para toda función $\varphi \in H(D)$, $S(g_i\varphi) = b_iT(\varphi)$.

Supongamos que $g_i = \sum_{j=1}^{n} \varphi_j^i b_j^i$. Entonces,

$$S(g_i\varphi) = \sum_{j=1}^{n} S(\varphi_j^i\varphi)b_j^i = b_iT(\varphi)$$

y en consecuencia, existe $k \in \{1,..,n\}$ tal que, para toda $\varphi \in H(D)$, $S(\varphi_k^i\varphi) = T(\varphi)$ y si $j \neq k$, $S(\varphi_j^i\varphi) = 0$.

Puesto que S no es de soporte finito necesariamente $\varphi_j^i = 0$ si $j \neq k$ y por consiguiente, $g_i = b_i\varphi_i$. En definitiva, para cada $i \in I$, existe $\varphi_i \in N^+(D)$ tal que $\varphi_i b_i \in \mathcal{G}$ y $\varphi_i S = T$.

Por consiguiente, cualesquiera que sean i, j, $(\varphi_i - \varphi_j)S = 0$ y, así, $\varphi_i = \varphi_j$. LLamando $\Psi = \varphi_i$ obtenemos el resultado buscado. El recíproco es obvio. ∎

DEFINICION 4.13. *Si $T \subseteq S$, tiene sentido considerar el espacio $B_{S,T,p}$ como el completado de $\mathcal{B}$ respecto de la norma*

$$\|b\|_{B_{S,T,p}} = \inf\{\|g\|_{\mathcal{G}^p} \ ; \ gS = bT \ , \ g \in \mathcal{G}^p\}.$$

§5 Relaciones entre espacios interpolados.

Resultados relativos al funcional analítico KT.

PROPOSICION 5.1. *Sea $T \in H'(D)$ y $K \in H^\infty(D)$.*

(a) *El espacio $B^{KT,p}$ está contenido continuamente en $B^{T,p}$ con norma menor o igual que $\|K\|_\infty$.*

(b) *Para cada $b \in \mathcal{B}$, $\|b\|_{B_{T,p}} \leq \|K\|_\infty \|b\|_{B_{KT,p}}$.*

DEMOSTRACION:

(a) Sea $x \in B^{KT,p}$. Por definición de este espacio, dado $\varepsilon > 0$, existe $f \in \mathcal{F}^p$ tal que $KT(f) = x$ y $\|f\|_{\mathcal{F}^p} \leq \|x\|_{B^{KT,p}} + \varepsilon$. Se deduce, de ello, que $T(Kf) = x$ y puesto que $Kf \in \mathcal{F}^p$ tenemos que $x \in B^{T,p}$. Además,

$$\|x\|_{B^{T,p}} \leq \|Kf\|_{\mathcal{F}^p} \leq \|K\|_\infty \|f\|_{\mathcal{F}^p} \leq \|K\|_\infty (\|x\|_{B^{KT,p}} + \varepsilon).$$

Esto es, para todo $\varepsilon > 0$, $\|x\|_{B^{T,p}} \leq \|K\|_{\infty}(\|x\|_{B^{KT,p}} + \varepsilon)$. Debido a la arbitrariedad de ε, obtenemos el resultado buscado.

(b) Totalmente análogo. ∎

COROLARIO 5.2. *Si la función K es invertible en $H^{\infty}(D)$, los espacios $B^{KT,p}$ y $B_{KT,p}$ son respectivamente equivalentes a $B^{T,p}$ y $B_{T,p}$.*

En el caso general no siempre se verifican las desigualdades inversas a las de 5.1. Basta considerar, por ejemplo, $T = \delta_0$ y $K(z) = z$. Es claro que el espacio $B^{KT} = \{0\}$.

Resultados relativos al funcional analítico suma de un número finito de funcionales.

Dados $\{T^j\ ,\ 1 \leq j \leq n\} \subset H'(D)$, definiremos el espacio $\sum_j B_{T^j,p}$ como el completado de $\mathcal{B}$ respecto de la norma suma.

PROPOSICION 5.3. *Sean T^1, $T^2, \ldots$, T^n n funcionales analíticos en D y sea $T = T^1 + T^2 + \ldots + T^n$.*

(a) *El espacio $B^{T,p}$ está contenido continuamente en el espacio suma $B^{T^1,p} + B^{T^2,p} + \ldots + B^{T^n,p}$ con norma menor o igual que n.*

(b) *Para cada $b \in \mathcal{B}$, $\|b\|_{B_{T^1,p}+B_{T^2,p}+\ldots+B_{T^n,p}} \leq n\|b\|_{B_{T,p}}$.*

DEMOSTRACION:

(a) Sea $x \in B^{T,p}$. Dado $\varepsilon > 0$, existe $f \in \mathcal{F}^p$ tal que $T(f) = x$ y $\|f\|_{\mathcal{F}^p} \leq \|x\|_{B^{T,p}+\varepsilon}$.

En consecuencia, $x = T^1(f) + T^2(f) + \ldots + T^n(f) = x_1 + x_2 + \ldots + x_n$, donde es claro que $x_j = T^j(f) \in B^{T_j,p}$ para todo $1 \leq j \leq n$ y, por tanto, $x \in \sum_{j=1}^{n} B^{T^j,p}$. Además,

$$\|x\|_{\sum_{j=1}^{n} B^{T^j,p}} \leq \sum_{j=1}^{n} \|x_j\|_{B^{T^j,p}} \leq \sum_{j=1}^{n} \|f\|_{\mathcal{F}^p} = n\|f\|_{\mathcal{F}^p} \leq n(\|x\|_{B^{T,p}} + \varepsilon)$$

y así, debido a la arbitrariedad de ε, deducimos que $\|x\|_{\sum_{j=1}^{n} B^{T^j,p}} \leq n\|x\|_{B^{T,p}}$ para todo $x \in B^{T,p}$, como queríamos probar.

(b) Totalmente análogo. ∎

Obviamente, no siempre se verifican las desigualdades inversas a 5.3. Bastaría considerar en el caso n=2, $T^1 = -T^2$; el espacio $B^{T^1+T^2,p} = \{0\}$.

PROPOSICION 5.4. *Dados T^1 y T^2 dos funcionales analíticos en D, se cumple:*

(a) *$B^{T^1,p} + B^{T^2,p}$ está contenido continuamente en $B^{T^1+T^2,p} + B^{T^1-T^2,p}$ con norma menor o igual que 1.*

(b) *$B^{T^1,p} + B^{T^2,p}$ es equivalente al espacio $B^{T^1+T^2,p} + B^{T^1-T^2,p}$.*

DEMOSTRACION:

(a) Sea $x \in B^{T^1,p} + B^{T^2,p}$. Dado $\varepsilon > 0$, existen $x_1 \in B^{T^1,p}$ y $x_2 \in B^{T^2,p}$ tales que

$$x = x_1 + x_2 \;\text{ y }\; \|x_1\|_{B^{T^1,p}} + \|x_2\|_{B^{T^2,p}} \leq \|x\|_{B^{T^1,p}+B^{T^2,p}} + \varepsilon.$$

Ahora bien, dado $j = 1,\ 2$, puesto que $x_j \in B^{T^j,p}$ se cumple que existe $f_j \in \mathcal{F}^p$ tal que $T^j(f_j) = x_j$ y $\|f_j\|_{\mathcal{F}^p} \leq \|x_j\|_{B^{T^j,p}} + \varepsilon$.

Entonces

$$(T^1 + T^2)(f_1 + f_2) = x + T^1(f_2) + T^2(f_1) = x_1' \in B^{T^1+T^2,p} \quad \text{y}$$

$$(T^1 - T^2)(f_1 - f_2) = x - T^1(f_2) - T^2(f_1) = x_2' \in B^{T^1-T^2,p}.$$

Por tanto, $x = \frac{1}{2}(x_1' + x_2') \in B^{T^1+T^2,p} + B^{T^1-T^2,p}$ y

$$\begin{aligned}
\|x\|_{B^{T^1+T^2,p}+B^{T^1-T^2,p}} &\leq \frac{1}{2}\left(\|x_1'\|_{B^{T^1+T^2,p}} + \|x_2'\|_{B^{T^1-T^2,p}}\right) \leq \\
&\leq \frac{1}{2}\left(\|f_1 + f_2\|_{\mathcal{F}^p} + \|f_1 - f_2\|_{\mathcal{F}^p}\right) \leq \\
&\leq \|f_1\|_{\mathcal{F}^p} + \|f_2\|_{\mathcal{F}^p} \leq \|x_1\|_{B^{T^1,p}} + \|x_2\|_{B^{T^2,p}} + 2\varepsilon \leq \\
&\leq \|x\|_{B^{T^1,p}+B^{T^2,p}} + 3\varepsilon.
\end{aligned}$$

En consecuencia, cualquiera que sea ε, se cumple que

$$\|x\|_{B^{T^1+T^2,p}+B^{T^1-T^2,p}} \leq \|x\|_{B^{T^1,p}+B^{T^2,p}} + 3\varepsilon,$$

de lo cual se deduce el resultado buscado.

(b) Basta combinar los resultados 5.2, 5.3 y (a). ∎

PROPOSICION 5.5. *Supongamos que $T \in H'(D)$ admite una descomposición del tipo*

$$T = \sum_{n=1}^{N} T^n,$$

donde, para cada $1 \le n \le N$, $T^n = \tau_n T$ *con* τ_n *una función de* $H^\infty(D)$. *Entonces, los espacios* B^T *y* B_T *son equivalentes a los espacios suma* $\sum_{n=1}^N B^{T^n}$ *y* $\sum_{n=1}^N B_{T^n}$ *respectivamente.*

DEMOSTRACION:

En virtud de 5.3, tenemos que el espacio $B^{T,p}$ está contenido con continuidad en el espacio suma $\sum_{n=1}^N B^{T^n,p}$ y puesto que, en virtud de 5.1, $B^{T^n,p}$ está contenido continuamente en $B^{T,p}$ obtenemos uno de los resultados buscados. Es más, de la combinación de los resultados anteriormente mencionados, deducimos la siguiente relación entre las normas:

$$\frac{1}{n}\|x\|_{\sum_{n=1}^N B^{T^n,p}} \le \|x\|_{B^{T,p}} \le \left(\max_{1\le n\le N}\|\tau_n\|_\infty\right)\|x\|_{\sum_{n=1}^N B^{T^n,p}}.$$

Idéntica relación obtenemos para las normas de los elementos de $\mathcal{B}$ en los espacios $B_{T,p}$ y $\sum_{n=1}^N B_{T^n,p}$ y de ello deducimos la equivalencia de los mismos. ∎

NOTA 5.6: Si $T \in H'(D)$ de soporte finito, es claro que cada uno de sus sumandos $\delta_{z_j}^{l)}$ está contenido en T y, por tanto, existe una función $\tau \in H^\infty(D)$ tal que $\delta_{z_j}^{l)} = \tau T$ (véase, por ejemplo, ([S], 4.4)). En consecuencia, tenemos el siguiente resultado:

COROLARIO 5.7. *Si* T *es un funcional analítico de soporte finito* $\{z_0, z_1, ..., z_N\}$, *esto es,*

$$T = \sum_{j=0}^{N}\sum_{l=0}^{m(j)} a_{jl}\delta_{z_j}^{l)},$$

se verifica que $B^T \equiv \sum_{j=0}^N \sum_{l=0}^{m(j)} B^{\delta_{z_j}^{l)}}$. *Análogamente con los espacios* B_T.

Observemos el corolario anterior hace referencia a los espacios B^T y B_T y no a los espacios $B^{T,p}$ y $B_{T,p}$. Esto no le resta generalidad pues como veremos en (2;2.11) todos estos espacios son equivalentes.

Resultados relativos a la derivada de un funcional analítico dado.

PROPOSICION 5.8. *Sean* $T \in H'(D)$ *y* $\tau \in H^\infty(D)$. *Se verifica:*

(a) *El espacio* $B^{\partial(\tau T),p}$ *está contenido continuamente en el espacio suma* $B^{\partial T,p} + B^{\tau' T,p}$ *con norma menor o igual que* $\|\tau\|_\infty + 1$.

(b) $B^{\tau' T,p}$ *está contenido continuamente en* $B^{\partial T,p} + B^{\partial(\tau T),p}$. *Análogamente:*

(c) *Para cada* $b \in \mathcal{B}$, $\|b\|_{B_{\partial T,p}+B_{\tau' T,p}} \le (\|\tau\|_\infty + 1)\|b\|_{B_{\partial(\tau T),p}}$

(d) *Para cada* $b \in \mathcal{B}$, $\|b\|_{B_{\partial T,p}+B_{\partial(\tau T),p}} \le \|b\|_{B_{\tau' T,p}}$.

DEMOSTRACION:

(a) Sea $x \in B^{\partial(\tau T),p}$. Dado $\varepsilon > 0$, existe $f \in \mathcal{F}^p$ tal que $T(\tau f') = x$ y $\|f\|_{\mathcal{F}^p} \leq \|x\|_{B^{\partial(\tau T),p}} +$ ε. Se tiene, pues, que $x = T((\tau f)') - T(\tau' f)$ y, por tanto, $x \in B^{\partial T,p} + B^{\tau' T,p}$. Además,

$$\|x\|_{B^{\partial T,p}+B^{\tau' T,p}} \leq \|\tau f\|_{\mathcal{F}^p} + \|f\|_{\mathcal{F}^p} \leq (\|\tau\|_\infty + 1)\|f\|_{\mathcal{F}^p} \leq (\|\tau\|_\infty + 1)(\|x\|_{B^{\partial(\tau T),p}} + \varepsilon)$$

En definitiva, cualquiera que sea $\varepsilon > 0$, $\|x\|_{B^{\partial T,p}+B^{\tau' T,p}} \leq (\|\tau\|_\infty + 1)(\|x\|_{B^{\partial(\tau T)}} + \varepsilon)$ y haciendo ε tender a cero obtenemos el resultado buscado.

Los apartados (b), (c) y (d) son enteramente análogos. ∎

PROPOSICION 5.9. *Si T es de soporte finito, el espacio B^T está contenido con continuidad en el espacio $B^{\partial T}$.*

DEMOSTRACION:

En este caso $T \subseteq \partial T$ y, por tanto, existe $w \in H^\infty(D)$ tal que $w\partial T = T$. Concluimos como consecuencia de 5.1. ∎

NOTA 5.10: Si $T = \delta_{z_0}$, entonces $\partial T = \delta'_{z_0}$ y podemos tomar $w(z) = (z - z_0)$. Por tanto, en virtud de 5.1, obtenemos que $B^{\delta_{z_0}}$ está contenido en $B^{\delta'_{z_0}}$ con norma menor o igual que $\sup \mathrm{es}_{\gamma \in \Gamma} |e^{i\gamma} - z_0| = 2 - d(z_0, \Gamma)$.

En general, si $p \leq n$, el espacio $B^{\delta^{p)}_{z_0}}$ está contenido en $B^{\delta^{n)}_{z_0}}$ con norma menor o igual que $\frac{p!}{n!}(2 - d(z_0, \Gamma))^{n-p}$.

Sin embargo, en el caso $p = 0$, $n = 1$, si tomamos $w(z) = (1 - |z_0|^2)\frac{z - z_0}{1 - \bar{z}_0 z}$ es fácil ver que $B^{\delta_{z_0}}$ está contenido en $B^{\delta'_{z_0}}$ con norma menor o igual que $C = 1 - |z_0|^2$.

Veremos que la contención de $B^{\delta^{p)}_{z_0}}$ en $B^{\delta^{p+1)}_{z_0}}$ es estricta en general y, por tanto, no son ciertas las desigualdades inversas de 5.8. Basta tomar $T = \delta'_0$ y $\tau(z) = z$; obtenemos que $\tau T = \delta_0$ y $\partial T = \delta''_0$ y en consecuencia, $B^{\partial(\tau T)} = B^{\delta'_0}$ y $B^{\partial T} + B^{\tau' T} = B^{\delta''_0}$.

Enunciaremos a continuación los correspondientes resultados referentes a los espacios $B^{S,T,p}$ y $B_{S,T,p}$.

Dados $\{S,\ T^j, 1 \leq j \leq n\} \subset H'(D)$, definiremos el espacio $\cap_{j=1}^n B_{S,T^j,p}$ como el completado de B respecto de la norma $\max_j \|\cdot\|_{B_{S,T^j,p}}$.

PROPOSICION 5.11.

(a) *Si $K \in H^\infty(D)$, se tiene que el espacio $B^{KS,T,p}$ está contenido continuamente en*

$B^{S,T,p}$ *y éste, a su vez, en* $B^{S,KT,p}$; *ambas contenciones con norma menor o igual que* $\|K\|_\infty$

(b) *Para cada* $b \in \mathcal{B}$, $\|b\|_{B_{S,T,p}} \leq \|K\|_\infty \|b\|_{B_{KS,T,p}}$ *y* $\|b\|_{B_{S,KT,p}} \leq \|K\|_\infty \|b\|_{B_{S,T,p}}$.

(c) *Si* K *es invertible en* $H^\infty(D)$, *las inyecciones de los apartados anteriores son bicontinuas y así, los espacios correspondientes son equivalentes.*

En general, el espacio $B^{S,T,p}$ no está contenido continuamente en $B^{KS,T,p}$. Bastaría tomar $S = \delta_0$ y $K(z) = z$. Se tiene que $KS = 0$ y, por tanto, $B^{KS,T,p} = \{0\}$.

Así mismo, tampoco $B^{S,KT,p}$ está contenido, en general, en $B^{S,T,p}$ pues bastaría tomar K y T de manera que $KT = 0$ y en consecuencia, $B^{S,KT,p} = \mathcal{U}$.

PROPOSICION 5.12. *Sea* S *un funcional analítico sobre* D. *En las hipótesis de 5.3, se cumple que :*

(a) *El espacio* $\cap_{j=1}^n B^{S,T^j,p}$ *está contenido continuamente en* $B^{S,T,p}$ *con norma menor o igual que* n.

(b) *Para cada* $b \in \mathcal{B}$, $\|b\|_{B_{S,T,p}} \leq n\|b\|_{\cap_{j=1}^n B_{S,T^j,p}}$.

Las desigualdades inversas no son ciertas en general pues si tomamos, por ejemplo, $T^1 = -T^2$ tenemos que $B^{S,T^1+T^2,p} = \mathcal{U}$ y $\cap_{j=1}^2 B^{S,T^j,p} = B^{S,T^1,p}$.

PROPOSICION 5.13. *En las hipótesis de 5.5, si* S *es un funcional analítico sobre* D *que domina a* T^n *para todo* $1 \leq n \leq N$, *tenemos que los espacios* $B^{S,T,p}$ *y* $B_{S,T,p}$ *son respectivamente equivalentes a* $\cap_{n=1}^N B^{S,T^n,p}$ *y* $\cap_{n=1}^N B_{S,T^n,p}$.

COROLARIO 5.14. *En las hipótesis de 5.7, si* S *es un funcional analítico que domina a* T, *se verifican las siguientes equivalencias:*

$$B^{S,T,p} \equiv \cap_{j=0}^N \cap_{l=0}^{m(j)} B^{S,\delta_{z_j}^{l}} \quad y \quad B_{S,T,p} \equiv \cap_{j=0}^N \cap_{l=0}^{m(j)} B_{S,\delta_{z_j}^{l}}.$$

PROPOSICION 5.15. *Sean* S *y* T *en* $H'(D)$. *Supongamos que* S *admite una descomposición del tipo* $S = \sum_{n=1}^N S^n$, *donde* $S^n = \tau_n S$ *y* τ_n *es una función invertible en* $H^\infty(D)$ *para todo* $1 \leq n \leq N$. *Entonces, supuesto que* S *domina a* T, *tenemos las equivalencias siguientes:*

$$B^{S,T,p} \equiv \cap_{n=1}^N B^{S^n,T,p} \quad y \quad B_{S,T,p} \equiv \cap_{n=1}^N B_{S^n,T,p}.$$

Obviamente, en general no es cierto que $B^{S^1+\dots+S^N,T,p} \equiv \cap_{j=1}^{N} B^{S^j,T,p}$ puesto que si tomamos $S^1 = 0$, tenemos que $B^{S^1,T,p} = \{0\}$ y en consecuencia, el segundo espacio se reduce a $\{0\}$.

Observemos también que la proposición 5.15 no puede aplicarse al caso en que S es de soporte finito pues, en este caso, las funciones τ_n existentes son de $H^\infty(D)$ pero no sus inversas.

Para finalizar este apartado veamos un resultado referente a algunas relaciones entre espacios $B^{T,p}, B_{T,p}$ y $B^{S,q}$, $B_{S,q}$.

PROPOSICION 5.16.

(a) *Para cada $q < p$, $B^{T,p}$ está contenido continuamente en $B^{T,q}$ con norma menor o igual que 1.*

(b) *Análogamente, para cada $b \in \mathcal{B}$, $\|b\|_{B_{T,q}} \leq \|b\|_{B_{T,p}}$.*

(c) *Sean p y p' exponentes conjugados. Si $K \in H^p(D)$, $B^{KT,p'}$ está contenido continuamente en $B^{T,1}$ con norma menor o igual que $\|K\|_p$.*

(d) *En las hipótesis de (c), para cada $b \in \mathcal{B}$, $\|b\|_{B_{T,1}} \leq \|K\|_p \|b\|_{B_{KT,p'}}$.*

(e) *Si $K \in H^p(D)$, B^{KT} está contenido continuamente en $B^{T,p}$ con norma menor o igual que $\|K\|_p$.*

(f) *Para cada $b \in \mathcal{B}$, $\|b\|_{B_{T,p}} \leq \|K\|_p \|b\|_{B_{KT}}$.*

DEMOSTRACION:

Todos los apartados son obvios sin más que tener en cuenta que $\mathcal{F}^p$ está contenido continuamente en $\mathcal{F}^q$ con norma menor o igual que 1. El resto de la demostración se basa en desigualdades integrales que incluyen la de Hölder. ∎

Capítulo II

Interpolación, Dualidad y Reiteración.

Este capítulo consta de tres secciones. En ellas estudiamos cada una de las tres cuestiones "típicas" de la teoría de la interpolación que dan el título al capítulo.

La primera de ellas, dedicada a la interpolación en sí, está dividida, a su vez, en tres apartados: operadores lineales, operadores multilineales y familias analíticas de operadores.

En la segunda estudiamos la dualidad de los espacios $B^{T,p}$ y $B_{T,p}$. Los casos $1 \leq p < +\infty$ pueden ser estudiados en conjunto (Teor. 2.4), sin embargo, el caso $p = +\infty$ precisa de otros argumentos tales como la utilización de la transformada de Gelfand (Teor. 2.5).

Basándonos en los resultados obtenidos, probamos la "no" equivalencia, en general, de los espacios $\{B_{T,p},\ 1 \leq p \leq +\infty\}$ (Teor. 2.17) y, de este modo, queda justificada la introducción del parámetro p en nuestras definiciones.

Finalmente, en la última sección, estudiamos la fórmula de reiteración. El teorema 3.1 es una generalización de ([C-C-R-S-W I], 5.2).

§1 Interpolación.

Enunciamos los resultados para el caso $p = +\infty$. Todos los cálculos son análogos para el caso $p < \infty$.

Interpolación de operadores lineales.

TEOREMA 1.1. *Sean* $\{A(\gamma)\ ,\ \gamma \in \Gamma\}$ *y* $\{B(\gamma)\ ,\ \gamma \in \Gamma\}$ *dos familias de espacios de interpolación con espacios contenedores* $\mathcal{U}$, $\mathcal{V}$ *y espacios log-intersección* $\mathcal{A}$ *y* $\mathcal{B}$ *respectivamente. Sea* $L : \mathcal{A} \longrightarrow \cap_{\gamma \in \Gamma} B(\gamma)$ *un operador lineal tal que, para cada* $a \in \mathcal{A}$ *y para casi todo* $\gamma \in \Gamma$,

$$\|L(a)\|_{B(\gamma)} \leq M(\gamma)\|a\|_{A(\gamma)},$$

con M *una función medible sobre* Γ *cuyo logaritmo es integrable.*

Dado $T \in H'(D)$, consideremos el funcional analítico GT, donde

$$G(z) = \exp\left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} -\log\ M(\gamma)\ dH_z(\gamma)\right). \tag{1}$$

En estas condiciones:

(a) *L admite una extensión lineal de norma menor o igual que 1 a $L : A_{GT} \longrightarrow B_T$.*

(b) *Si L es restricción de $L : \mathcal{U} \longrightarrow \mathcal{V}$ lineal, continua, entonces $L : A^{GT} \longrightarrow B^T$ es de norma menor o igual que 1.*

(c) *L admite una extensión lineal de norma menor o igual que 1 a $L : A_{GT,T} \longrightarrow B_{T,T}$.*

(d) *En la hipótesis de (b), $L : A^{GT,T} \longrightarrow B^{T,T}$ es de norma menor o igual que 1.*

DEMOSTRACION:

La demostración de (a) y (c) se deducirá de la de (b) y (d) respectivamente, pues, en los primeros casos basta ver que los operadores

$$L : (\mathcal{A},\ \|\cdot\|_{A_{GT}}) \longrightarrow (\mathcal{B},\ \|\cdot\|_{B_T}) \qquad \text{y}$$
$$L : (\mathcal{A},\ \|\cdot\|_{A_{GT,T}}) \longrightarrow (\mathcal{B},\ \|\cdot\|_{B_{T,T}})$$

son continuos y de esta forma existen las respectivas extensiones continuas a los espacios completados. Esto, como veremos, queda implícito en la demostración de (b) y (d).

(b) Sea $a \in A^{GT}$. Dado $\varepsilon > 0$, sea $f \in \mathcal{F}(A(\cdot),\Gamma)$ tal que $GT(f) = a$ y $\|f\|_{\mathcal{F}(A(\cdot),\Gamma)} \leq \|a\|_{A^{GT}} + \varepsilon$.

Puesto que $f \in \mathcal{F}(A(\cdot),\Gamma)$, existe $(g_n)_n$ en $\mathcal{G}(A(\cdot),\Gamma)$ tal que $f = \mathcal{F} - \lim_n g_n$ y en consecuencia, $a = \mathcal{U} - \lim_n GT(g_n)$.

Ahora bien, si $g \in \mathcal{G}(A(\cdot),\Gamma)$, g es de la forma $\sum_{j=1}^n \varphi_j a_j$ con $\varphi_j \in N^+(D)$ y $a_j \in \mathcal{A}$ para todo j. Definamos $L(Gg)(z) = L(G(z)g(z))$ para todo $z \in D$. Se cumple que, cualquiera que sea $z \in D$, $L(G(z)g(z)) = \sum_{j=1}^n G(z)\varphi_j(z)L(a_j) = \sum_{j=1}^n G(z)\varphi_j(z)b_j$ en donde, en principio, sólo sabemos que b_j está en $\cap_{\gamma\in\Gamma} B(\gamma)$. Sin embargo,

$$\int_\Gamma \log^+\ \|b_j\|_{B(\gamma)} dP_z(\gamma) =$$
$$= \int_\Gamma \log^+\ \|L(a_j)\|_{B(\gamma)} dP_z(\gamma) \leq \int_\Gamma \log^+\ (M(\gamma)\|a_j\|_{A(\gamma)}) dP_z(\gamma) \leq$$
$$\leq \int_\Gamma \log^+\ M(\gamma) dP_z(\gamma) + \int_\Gamma \log^+\ \|a_j\|_{A(\gamma)} dP_z(\gamma) < +\infty$$

y, por tanto, $b_j \in \mathcal{B}$ para todo $1 \leq j \leq n$. Por otra parte, se tiene que $G\varphi_j \in N^+(D)$ y

$$(2)\qquad \begin{aligned} &\|L(Gg)\|_{\mathcal{G}(B(\cdot),\Gamma)} = \sup\ \mathrm{es}_{\gamma\in\Gamma}\|L(G(\gamma)g(\gamma))\|_{B(\gamma)} \leq \\ &\leq \sup\ \mathrm{es}_{\gamma\in\Gamma}|G(\gamma)|M(\gamma)\|g(\gamma)\|_{A(\gamma)} = \sup\ \mathrm{es}_{\gamma\in\Gamma}\|g(\gamma)\|_{A(\gamma)} = \|g\|_{\mathcal{G}(A(\cdot),\Gamma)} < +\infty. \end{aligned}$$

Se deduce de ello que $L(Gg) \in \mathcal{G}(B(\cdot),\Gamma)$. (De aquí obtenemos fácilmente, en virtud de (2), el apartado (a)).

Dada la sucesión $(g_n)_n$ en $\mathcal{G}(A(\cdot),\Gamma)$, (2) permite asegurar que $(L(Gg_n))_n$ es de Cauchy en el espacio $\mathcal{F}(B(\cdot),\Gamma)$ y, por tanto, existe una función $h \in \mathcal{F}$ tal que $h = \mathcal{F} - \lim_n L(Gg_n)$.

En consecuencia, para cada $z \in D$, $h(z) = V - \lim_n L(G(z)g_n(z))$. Ahora bien, puesto que $G(z)f(z) = U - \lim_n G(z)g_n(z)$ y $L : U \longrightarrow V$ es continua, se cumple que

$$L(G(z)f(z)) = V - \lim_n L(G(z)g_n(z)) = h(z) \qquad \forall z \in D.$$

Se obtiene así que $L(Gf) \in \mathcal{F}(B(\cdot),\Gamma)$ y además, en virtud de (2), existe $n_0 \in \mathbf{N}$ tal que, cualquiera que sea $n \geq n_0$,

$$\|L(Gf)\|_{\mathcal{F}(B(\cdot),\Gamma)} \leq \varepsilon + \|L(Gg_n)\|_{\mathcal{F}(B(\cdot),\Gamma)} \leq \varepsilon + \|g_n\|_{\mathcal{F}(A(\cdot),\Gamma)} \leq 2\varepsilon + \|f\|_{\mathcal{F}(A(\cdot),\Gamma)}.$$

Se tiene que

$$(3)\qquad T(L(Gf)) = V - \lim_n T(L(Gg_n)).$$

Por otra parte, para cada $n \in \mathbf{N}$,

$$\begin{aligned} T(L(Gg_n)) &= T\left(L\left(\sum_j G\varphi_j^n a_j^n\right)\right) = T\left(\sum_j G\varphi_j^n L(a_j^n)\right) = \\ &= \sum_j T(G\varphi_j^n)L(a_j^n) = L\left(\sum_j T(G\varphi_j^n)a_j^n\right) = L(T(Gg_n)), \end{aligned}$$

y, puesto que $a = U - \lim_n GT(g_n) = U - \lim_n T(Gg_n)$, $L(a) = V - \lim_n L(T(Gg_n))$.

Combinando este resultado con (3), concluimos que $L(a) = T(L(Gf))$ y así $L(a) \in B^T$.

En cuanto a la relación entre las normas tenemos que

$$\|L(a)\|_{B^T} \leq \|L(Gf)\|_{\mathcal{F}(B(\cdot),\Gamma)} \leq \|f\|_{\mathcal{F}(A(\cdot),\Gamma)} \leq \varepsilon + \|a\|_{A^{GT}}$$

para todo $\varepsilon > 0$ y, así, queda demostrado el apartado (b).

(d) Sea $x \in A^{GT,T}$. Dado $\varepsilon > 0$, sea $f \in \mathcal{F}(A(\cdot),\Gamma)$ tal que $fGT = xT$ y $\|f\|_{\mathcal{F}(A(\cdot),\Gamma)} \leq \|x\|_{A^{GT,T}} + \varepsilon$.

Se tiene que, para cada $\phi \in H(D)$,

$$L(x)T(\phi) = T(L(x)\phi) = L(xT(\phi)) = L(GT(f\phi)) = L(T(Gf\phi)).$$

Por tanto, si vemos que $L(T(Gf\phi)) = T(L(Gf)\phi)$ tendremos que $L(x)T = L(Gf)T$ y, puesto que ya sabemos que $L(Gf) \in \mathcal{F}(B(\cdot),\Gamma)$, se concluirá que $L(x) \in B^{T,T}$. Además, como $\|L(Gf)\|_{\mathcal{F}(B(\cdot),\Gamma)} \leq \|f\|_{\mathcal{F}(A(\cdot),\Gamma)}$ tendremos

$$\|L(x)\|_{B^{T,T}} \leq \|L(Gf)\|_{\mathcal{F}(B(\cdot),\Gamma)} \leq \|f\|_{\mathcal{F}(A(\cdot),\Gamma)} \leq \|x\|_{A^{GT,T}} + \varepsilon$$

y, por tanto, quedará probada la proposición.

Veamos pues que, para cada $\phi \in H(D)$, $L(T(Gf\phi) = T(L(Gf)\phi)$: en virtud de la linealidad de L y de la forma de las funciones $g \in \mathcal{G}(A(\cdot),\Gamma)$, es claro que dicha igualdad se verifica en $\mathcal{G}(A(\cdot),\Gamma)$ y, así, si utilizamos la continuidad del operador $L : U \longrightarrow V$, concluimos la igualdad requerida. ∎

NOTA 1.2: En el caso particular en que $T = \delta_{z_0}$ con $z_0 \in D$, tenemos que $GT(g) = G(z_0)g(z_0)$ y así, $GT = G(z_0)\delta_{z_0}$. De esta forma, $A^{GT} \equiv A[z_0]$ y $A_{GT} \equiv A\{z_0\}$, donde la equivalencia viene determinada por

$$\|x\|_{A^{GT}} = \frac{1}{|G(z_0)|}\|x\|_{A[z_0]}.$$

Lo mismo sucede para los espacios A_{GT} y $A\{z_0\}$.

Por tanto, decir que $L : A^{GT} \longrightarrow B^T$ ($L : A_{GT} \longrightarrow B_T$) con norma menor o igual que 1, equivale a decir que $L : A[z_0] \longrightarrow B[z_0]$ (resp. $L : A\{z_0\} \longrightarrow B\{z_0\}$) con norma menor o igual que $M(z_0) = |G(z_0)|^{-1}$ como se afirma en ([C-C-R-S-W I], 4.1).

Observemos que si $T = \delta_{z_0}^{n)}$ $(n \in \mathbb{N})$,

$$GT = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} G^{n-k)}(z_0)\delta_{z_0}^{k)}$$

y, por tanto, en virtud de (1;5.7), los espacios A^{GT} y A^T son equivalentes. Más aún, es fácil ver que, para todo $x \in A^T$, se verifica que

$$\|x\|_{A^{GT}} \leq M(z_0) \ \|x\|_{A^T}$$

y por consiguiente, el apartado (c) del teorema previo afirma que $L : A^T \longrightarrow B^T$ con norma menor o igual que $M(z_0)$.

Análogamente sucede con la extensión $L : A_T \longrightarrow B_T$.

TEOREMA 1.3. *Sean D y D' dos dominios simplemente conexos tales que sus fronteras Γ y Σ sean dos curvas cerradas simples rectificables. Sea W una transformación conforme de D' en D.*

Sean $\{A(\sigma) \ , \ \sigma \in \Sigma\}$ y $\{B(\gamma) \ , \ \gamma \in \Gamma\}$ dos familias de interpolación con espacios contenedores U, V y espacios log-intersección $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ respectivamente.

Sea $L : \mathcal{A} \longrightarrow \cap_{\gamma\in\Gamma} B(\gamma)$ tal que

$$\|L(a)\|_{B(\gamma)} \leq M(\gamma)\|a\|_{A(W(\gamma))} \qquad \forall \gamma \in \Gamma,$$

con M una función medible en Γ cuyo logaritmo es integrable.

Sea $T \in H'(D)$ y sea S el funcional analítico sobre D' definido por $S(\varphi) = T((\varphi \circ W)G)$, donde G es la función definida en (1). En estas condiciones:

(a) *L admite una extensión a $L : A_S \longrightarrow B_T$ de norma menor o igual que 1.*

(b) *Si L es restricción de $L : U \longrightarrow V$ lineal, continua, entonces $L : A^S \longrightarrow B^T$ es de norma menor o igual que 1.*

(c) *L admite una extensión a $L : A_{S,T} \longrightarrow B_{T,T}$ de norma menor o igual que 1.*

(d) *En las hipótesis de* (b), *$L : A^{S,T} \longrightarrow B^{T,T}$ es de norma menor o igual que 1.*

DEMOSTRACION:

La demostración es enteramente análoga a 1.1 salvo (2), ya que en este caso la función $L(Gg)$ queda sustituida por $L(G(g \circ W))$. Ahora bien,

$$\|L(G(g \circ W))\|_{\mathcal{F}(B(\cdot),\Gamma)} = \sup \ \mathrm{es}_{\gamma\in\Gamma}\|L(G(g \circ W)(\gamma))\|_{B(\gamma)} \leq$$

$$\leq \sup \ \mathrm{es}_{\gamma\in\Gamma} M(\gamma)|G(\gamma)| \ \|g(W(\gamma))\|_{A(W(\gamma))} = \sup \ \mathrm{es}_{\sigma\in\Sigma}\|g(\sigma)\|_{A(\sigma)} = \|g\|_{\mathcal{G}(A(\cdot),\Sigma)}$$

y, por tanto, se verifica la desigualdad correspondiente a (2), como necesitábamos probar. ∎

NOTA 1.4: Sea D y D' en las hipótesis de 1.3 y sea $\{A(\sigma)\ ,\ \sigma \in \Sigma\}$ una familia de interpolación en D. Definamos $B(\gamma) = A(W(\gamma))$. Entonces, $\{B(\gamma)\ ,\ \gamma \in \Gamma\}$ es una familia de interpolación.

En este caso $U = V$ y $\mathcal{A} = \mathcal{B}$ y si tomamos $L = id$ en 1.3, se tiene que $\|L(a)\|_{B(\gamma)} = \|a\|_{B(\gamma)} = \|a\|_{A(W(\gamma))}$. Por consiguiente, deducimos, de 1.3, que B^S está contenido continuamente en A^T, donde $S(\varphi) = T(\varphi \circ W)$. Análogamente, deduciríamos la contención recíproca y, por tanto, $B^S \equiv A^T$. (Mismo resultado para B_S y A_T).

De aquí se deduce que el estudio de las familias de interpolación en un dominio simplemente conexo con frontera cerrada simple rectificable queda reducido al estudio de las mismas en el disco unidad.

Operadores multilineales.

TEOREMA 1.5. *Sean $\{A_1(\gamma)\ ,\ \gamma \in \Gamma\} \dots \{A_n(\gamma)\ ,\ \gamma \in \Gamma\}$ y $\{B(\gamma)\ ,\ \gamma \in \Gamma\}$, (n+1) familias de interpolación con espacios contenedores $U_1 \dots U_n, V$ y espacios log-intersección $\mathcal{A}_1 \dots \mathcal{A}_n$ y $\mathcal{B}$ respectivamente. Sea*

$$L : \mathcal{A}_1 \times \ldots \times \mathcal{A}_n \longrightarrow \cap_{\gamma \in \Gamma} B(\gamma)$$

un operador multilineal tal que, para cada $(a_1, \cdots, a_n) \in \mathcal{A}_1 \times \ldots \times \mathcal{A}_n$,

$$\|L(a_1, \cdots, a_n)\|_{B(\gamma)} \le M(\gamma) \|a_1\|_{A_1(\gamma)} \cdots \|a_n\|_{A_n(\gamma)} \qquad p.c.t.\ \gamma \in \Gamma,$$

con M una función medible sobre Γ cuyo logaritmo es integrable.

Sean $S_1, \ldots, S_n$ n funcionales analíticos en D tales que, para todo $1 \le j \le n-1$, S_j domina a S_{j+1} respecto de la familia $\{A_j(\cdot)\}$. Sea G la función definida en (1). En estas condiciones:

(a) *L admite una extensión multilineal continua a:*

$$L : (A_1)_{S_1, S_2} \times \ldots \times (A_{n-1})_{S_{n-1}, S_n} \times (A_n)_{GS_n} \longrightarrow B_{S_1}.$$

(b) *Si suponemos además que L es restricción de $L : U_1 \times \ldots \times U_n \longrightarrow V$ lineal, continua, entonces*

$$L : (A_1)^{S_1, S_2} \times \ldots \times (A_{n-1})^{S_{n-1}, S_n} \times A_n^{GS_n} \longrightarrow B^{S_1}$$

es continua.

DEMOSTRACION:

Veremos la demostración en el caso bilineal. El caso n-lineal será una generalización del mismo. Sean $S,\ T \in H'(D)$ tales que S domina a T respecto $\{A_1(\cdot)\}$ y sea

$$L : \mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_2 \longrightarrow \cap_{\gamma \in \Gamma} B(\gamma)$$

en las hipótesis de la proposición. La demostración de (a) será fácilmente deducible de la de (b).

(b) Sean $a_1 \in A_1^{S,T}$ y $a_2 \in A_2^{GT}$. Dado $\varepsilon > 0$, sea $f_j \in \mathcal{F}(A_j(\cdot), \Gamma)$ $(j = 1,2)$ tal que

$$S(f_1 \varphi) = a_1 T(\varphi) \qquad \forall \varphi \in H(D), \tag{4}$$

$$GT(f_2) = a_2, \tag{5}$$

y tal que

$$\|f_1\|_{\mathcal{F}(A_1(\cdot),\Gamma)} \leq \|a_1\|_{A_1^{S,T}} + \varepsilon\ , \quad \|f_2\|_{\mathcal{F}(A_2(\cdot),\Gamma)} \leq \|a_2\|_{A_2^{GT}} + \varepsilon. \tag{6}$$

Supongamos que $f_j \in \mathcal{G}(A_j(\cdot), \Gamma)$ $(j = 1,2)$. Tendremos que $f_j(z) = \sum_{k=1}^{n_j} \varphi_k^j a_k^j$ con $a_k^j \in \mathcal{A}_j$ y $\varphi_k^j \in N^+(D)$ para todo $j,\ k$. Consideremos

$$\begin{aligned} f(z) = L(f_1(z), G(z) f_2(z)) &= L(\sum_{k=1}^{n_1} \varphi_k^1(z) a_k^1, G(z) \sum_{k=1}^{n_2} \varphi_k^2(z) a_k^2) = \\ &= \sum_{i,j} \varphi_i^1(z) \varphi_j^2(z) G(z) L(a_i^1, a_j^2) = \sum_{i,j} \varphi_i^1(z) \varphi_j^2(z) G(z) b_{ij}, \end{aligned}$$

donde, en principio, $b_{ij} \in \cap_{\gamma \in \Gamma} B(\gamma)$ pero, al igual que probamos en 1.1, $b_{ij} \in \mathcal{B}$ cualesquiera que sean i, j. Puesto que $G \varphi_i^1 \varphi_j^2 \in N^+(D)$ y

$$\begin{aligned} \|f\|_{\mathcal{F}(B(\cdot),\Gamma)} &= \|L(f_1, G f_2)\|_{\mathcal{F}(B(\cdot),\Gamma)} = \sup\ \mathrm{es}_{\gamma \in \Gamma} \|L(f_1(\gamma), G(\gamma) f_2(\gamma))\|_{B(\gamma)} \leq \\ &\leq \sup\ \mathrm{es}_{\gamma \in \Gamma} M(\gamma) |G(\gamma)|\ \|f_1(\gamma)\|_{A(\gamma)} \|f_2(\gamma)\|_{B(\gamma)} \leq \|f_1\|_{\mathcal{F}(A_1(\cdot),\Gamma)} \|f_2\|_{\mathcal{F}(A_2(\cdot),\Gamma)} < +\infty, \end{aligned}$$

se deduce que $f \in \mathcal{F}(B(\cdot),\Gamma)$.

Sean ahora, $f_1 \in \mathcal{F}(A_1(\cdot),\Gamma)$ y $f_2 \in \mathcal{F}(A_2(\cdot),\Gamma)$ y sean, para $j = 1,2$, $(g_n^j)_n$ en $\mathcal{G}(A_j(\cdot),\Gamma)$ tal que $f_j = \mathcal{F} - \lim_n g_n^j$. En virtud de lo establecido anteriormente, la sucesión $(L(g_n^1, Gg_p^2))_{n,p}$ es de Cauchy en $\mathcal{F}(B(\cdot),\Gamma)$ y, por tanto, existirá $h \in \mathcal{F}(B(\cdot),\Gamma)$ tal que $h = \mathcal{F} - \lim_{n,p}(L(g_n^1, Gg_p^2))$. En consecuencia, para cada $z \in D$,

$$h(z) = V - \lim_{n,p} L(g_n^1(z), G(z)g_p^2(z)).$$

Ahora bien, puesto que $f_1(z) = U_1 - \lim_n g_n^1(z)$, $G(z)f_2(z) = U_2 - \lim_p G(z)g_p^2(z)$ y el operador $L : U_1 \times U_2 \longrightarrow V$ es continuo, tenemos que

$$L(f_1(z), G(z)f_2(z)) = V - \lim_{n,p} L(g_n^1(z), G(z)g_p^2(z)) \qquad \forall z \in D$$

y así, $h(z) = L(f_1(z), G(z)f_2(z))$.

Deducimos que $L(f_1, Gf_2) \in \mathcal{F}(B(\cdot),\Gamma)$ y además,

$$\|L(f_1, Gf_2)\|_{\mathcal{F}(B(\cdot),\Gamma)} \leq \|f_1\|_{\mathcal{F}(A_1(\cdot),\Gamma)}\|f_2\|_{\mathcal{F}(A_2(\cdot),\Gamma)}.$$

Por otra parte también tenemos que

$$(7) \qquad S(L(f_1, Gf_2)) = V - \lim_{n,p} S(L(g_n^1, Gg_p^2)).$$

Consideremos ahora p fijo y supongamos que $g_p^2 = \sum_{k=1}^{N_p^2} \varphi_{k,p}^2 a_{k,p}^2$. Supongamos también que $g_n^1 = \sum_{k=1}^{N_n^1} \varphi_{k,n}^1 a_{k,n}^1$. Se tiene entonces que

$$S(L(g_n^1, Gg_p^2)) = S\left(L\left(\sum_{k=1}^{N_n^1} \varphi_{k,n}^1 a_{k,n}^1, \sum_{k=1}^{N_p^2} G\varphi_{k,p}^2 a_{k,p}^2\right)\right) =$$
$$= \sum_{j=1}^{N_n^1}\sum_{k=1}^{N_p^2} S(\varphi_{j,n}^1\varphi_{k,p}^2 G) L(a_{j,n}^1, a_{k,p}^2).$$

Sea $E_p = \{k \in \mathbf{N} \ ; \ 1 \leq k \leq N_p^2 \text{ y } T(\varphi_{k,p}^2 G) \neq 0\}$. Se verifica que

$$S(L(g_n^1, Gg_p^2)) = \sum_{j=1}^{N_n^1} \sum_{k \in E_p} \frac{S(\varphi_{j,n}^1 \varphi_{k,p}^2 G)}{T(\varphi_{k,p}^2 G)} T(\varphi_{k,p}^2 G) L(a_{j,n}^1, a_{k,p}^2) +$$

$$+ \sum_{j=1}^{N_n^1} \sum_{k \notin E_p} S(\varphi_{j,n}^1 \varphi_{k,p}^2 G) L(a_{j,n}^1, a_{k,p}^2) =$$

$$= \sum_{k \in E_p} T(\varphi_{k,p}^2 G) \sum_{j=1}^{N_n^1} L\left(\frac{S(\varphi_{j,n}^1 \varphi_{k,p}^2 G)}{T(\varphi_{k,p}^2 G)} a_{j,n}^1, \ a_{k,p}^2 \right) + \tag{8}$$

$$+ \sum_{k \notin E_p} L\left(\sum_{j=1}^{N_n^1} S(\varphi_{j,n}^1 \varphi_{k,p}^2 G) a_{j,n}^1 \ , \ a_{k,p}^2 \right) =$$

$$= \sum_{k \in E_p} T(\varphi_{k,p}^2 G) L\left(\frac{S(g_n^1 \varphi_{k,p}^2 G)}{T(\varphi_{k,p}^2 G)} \ , \ a_{k,p}^2 \right) + \sum_{k \notin E_p} L(S(g_n^1 \varphi_{k,p}^2 G) \ , \ a_{k,p}^2).$$

Ahora bien:

(a) Si $k \in E_p$

$$a_1 = U_1 - \lim_n \frac{S(g_n^1 \varphi_{k,p}^2 G)}{T(\varphi_{k,p}^2 G)} = \frac{S(f_1 \varphi_{k,p}^2 G)}{T(\varphi_{k,p}^2 G)}.$$

(b) Si $k \notin E_p$

$$0 = U_1 - \lim_n S(g_n^1 \varphi_{k,p}^2 G) = S(f_1 \varphi_{k,p}^2 G) = a_1 T(\varphi_{k,p}^2 G).$$

Por tanto, si hacemos tender n a infinito en (8), tenemos que

$$V - \lim_n S(L(g_n^1, Gg_p^2)) = \sum_{k \in E_p} T(\varphi_{k,p}^2 G) L(a_1, a_{k,p}^2) = \sum_{k=1}^{N_p^2} T(\varphi_{k,p}^2 G) L(a_1, a_{k,p}^2) =$$
$$= L(a_1, GT(g_p^2))$$

y en consecuencia,

$$L(a_1, a_2) = L(a_1, GT(f_2)) = V - \lim_p L(a_1, GT(g_p^2)) = V - \lim_{n,p} S(L(g_n^1, Gg_p^2)).$$

En virtud de (7), obtenemos que $L(a_1, a_2) = S(L(f_1, Gf_2))$ y así, $L(a_1, a_2) \in B^S$. Finalmente,

$$\|L(a_1, a_2)\|_{B^S} \leq \|L(f_1, Gf_2)\|_{\mathcal{F}(B(\cdot),\Gamma)} \leq \|f_1\|_{\mathcal{F}(A_1(\cdot),\Gamma)} \|f_2\|_{\mathcal{F}(A_2(\cdot),\Gamma)} \leq$$
$$\leq (\|a_1\|_{A_1^{S,T}} + \varepsilon)(\|a_2\|_{A_2^{GT}} + \varepsilon)$$

y, por tanto, queda concluida la proposición. ∎

Familias analíticas de operadores lineales.

TEOREMA 1.6. *Sean $\{A(\gamma)\ ,\gamma\in\Gamma\}$ y $\{B(\gamma)\ ,\gamma\in\Gamma\}$ dos familias de interpolación con espacios log-intersección $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ respectivamente. Sea $\{L_z\ ,z\in\overline{D}\}$ una familia de operadores lineales $L_z:\mathcal{A}\longrightarrow\mathcal{B}^*$ (dual algebraico de $\mathcal{B}$) tales que:*

(a) *Para casi todo $\gamma\in\Gamma$, $L_\gamma:\mathcal{A}\longrightarrow B^+(\gamma)$ y $\|L_\gamma a\|_{B^+(\gamma)}\le M(\gamma)\|a\|_{A(\gamma)}$, con M una función medible sobre Γ cuyo logaritmo es integrable.*

(b) *Para cada $b\in\mathcal{B}$ y $a\in\mathcal{A}$, $<L_z(a),b>\in N^+(D)$ y, para casi todo $\gamma\in\Gamma$, se verifica que $\lim_{z\to\gamma(n.t)}<L_z(a),b>=<L_\gamma(a),b>$.*

Sean S,T,R tres funcionales analíticos en D tales que S domina a T respecto de $\{A(\cdot)\}$ y T domina a R respecto de $\{B(\cdot)\}$. En estas condiciones,

$$R(<L_z(\cdot),\cdot>):A_{S,T}\longrightarrow(B_{T,R})^*,$$

donde $R(<L_z(\cdot),\cdot>)(a)=R(<L_z(a),\cdot>$ para cada $a\in\mathcal{A}$. Además, la norma de este operador es menor o igual que $\|M^*S\|_\infty$ donde M^* es la función definida en (1;2.4).

DEMOSTRACION:

Sea $a\in\mathcal{A}$. Puesto que $T\subseteq S$ respecto de $\{A(\cdot)\}$, dado $\varepsilon>0$, existe $g\in\mathcal{G}(A(\cdot),\Gamma)$ tal que $gS=aT$ y $\|g\|_{\mathcal{G}}\le\|a\|_{A_{S,T}}+\varepsilon$. Análogamente, existe $f\in\mathcal{G}(B(\cdot),\Gamma)$ tal que $fT=bR$ y $\|f\|_{\mathcal{G}}\le\|b\|_{B_{T,R}}+\varepsilon$. Se cumple que

$$\begin{aligned}S(<L_z(g(z)),f(z)>)&=S(<L_z(\sum_j\varphi_j(z)a_j),\ \sum_k\Psi_k(z)b_k>)=\\&=\sum_{j,k}S(\varphi_j(z)\Psi_k(z)<L_z(a_j),b_k>).\end{aligned}$$

Ahora bien, tenemos que $\sum' S(\varphi_j\varphi)a_j=aT(\varphi)$ y así, si $a=\sum'\lambda_ja_j$, $S(\varphi_j\varphi)=\lambda_jT(\varphi)$ para todo j. En consecuencia,

$$S(<L_z(g(z)),f(z)>)=\sum_{j,k}\lambda_jT(\Psi_k<L_z(a_j),b_k>)=\sum_kT(\Psi_k<L_z(a),b_k>).$$

Análogamente, $\sum_k T(\Psi_k\varphi)b_k = bR(\varphi)$ y, si $b = \sum_k \mu_k b_k$, se tiene que $T(\Psi_k\varphi) = \mu_k R(\varphi)$ para todo k. Por consiguiente,

$$S(< L_z(g(z)), f(z) >) = \sum_k \mu_k R(< L_z(a), b_k >) = R(< L_z(a), b >).$$

Tenemos entonces que

$$\begin{aligned}|R(< L_z(a), b >)| &= |S(< L_z(g(z)), f(z) >)| = |M^*S(< L_z((M^*)^{-1}g), f >)| \leq \\ &\leq \|M^*S\|_\infty \sup\ \mathrm{es}_{\gamma\in\Gamma}| < L_\gamma(g(\gamma)), f(\gamma) > |\ |(M^*)^{-1}(\gamma)| \leq \\ &\leq \|M^*S\|_\infty \sup\ \mathrm{es}_{\gamma\in\Gamma}\|L_\gamma(g(\gamma))\|_{B^+(\gamma)}\|f(\gamma)\|_{B(\gamma)}M^{-1}(\gamma) \leq \\ &\leq \|M^*S\|_\infty \sup\ \mathrm{es}_{\gamma\in\Gamma}\|g(\gamma)\|_{A(\gamma)}\|f(\gamma)\|_{B(\gamma)} \leq \|M^*S\|_\infty\|g\|_{\mathcal{G}}\|f\|_{\mathcal{F}} \leq \\ &\leq \|M^*S\|_\infty(\|a\|_{A_{S,T}} + \varepsilon)(\|b\|_{B_{T,R}} + \varepsilon).\end{aligned}$$

Se deduce pues que, para todo $a \in \mathcal{A}$, $R(< L_z(a), \cdot >) \in (B_{T,R})^*$ y además,

$$\|R(< L_z(a), \cdot >)\|_{(B_{T,R})^*} \leq \|M^*S\|_\infty\|a\|_{A_{S,T}}.$$

En consecuencia, $\|R(< L_z(\cdot), \cdot >)\| \leq \|M^*S\|_\infty$. ∎

NOTA 1.7: Si tomamos $S = T = R = \delta_{z_0}$, se tiene que $L_{z_0} : A\{z_0\} \longrightarrow (B\{z_0\})^*$ con $\|L_{z_0}\| \leq \|M^*\delta_{z_0}\|_\infty = |M^*(z_0)|$ tal y como está probado en ([C-C-R-S-W I], 4.2).

TEOREMA 1.8. *Sean $\{A(\gamma)\ ,\gamma \in \Gamma\}$ y $\{B(\gamma)\ ,\gamma \in \Gamma\}$ dos familias de interpolación con espacios contenedores U, V y espacios log-intersección $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ respectivamente. Sea $H(z) : \mathcal{A} \longrightarrow \cap_{\gamma\in\Gamma}B(\gamma)$, con $z \in \overline{D}$, una familia de operadores lineales tales que*

(i) *Para cada $a \in \mathcal{A}$, $H(\cdot)a : D \longrightarrow \cap_{\gamma\in\Gamma}B(\gamma)$ es analítica en D (como función con valores en V) y existe, para casi todo $\gamma \in \Gamma$, $\lim_{z\to\gamma(n.t)} H(z)a$. Además, dicho límite coincide con $H(\gamma)a$.*

(ii) *Para cada $a \in \mathcal{A}$ y para casi todo $\gamma \in \Gamma$, $\|H(\gamma)a\|_{B(\gamma)} \leq M(\gamma)\|a\|_{A(\gamma)}$, con M una función medible cuyo logaritmo es integrable.*

Supongamos también que $\mathcal{F}(B(\cdot), \Gamma) = \mathcal{H}(B(\cdot), \Gamma)$ y sean S y T dos funcionales analíticos tales que $T \subseteq S$ respecto de $\{A(\cdot)\}$. Entonces:

(a) *$T(H(z)\cdot) : A_{S,T} \longrightarrow B^{M^*S}$ con norma menor o igual que 1, donde M^* es la función asociada a M en (1;2.4).*

(b) $H(z_0) : A\{z_0\} \longrightarrow B[z_0]$ *con norma menor o igual que* $|M^*(z_0)|$.

(c) *Si además, para todo* $z \in D$, $H(z) : U \longrightarrow V$ *es continua,* $H(z_0) : A[z_0] \longrightarrow B[z_0]$.

DEMOSTRACION:

(a) En primer lugar, observemos que, en virtud de (ii), $H(\gamma) : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}$, para casi todo $\gamma \in \Gamma$.

Sea $a \in \mathcal{A}$. Dado ε, existe $g \in \mathcal{G}(A(\cdot), \Gamma)$ ($g = \sum_j \varphi_j a_j$) tal que $gS = aT$ y $\|g\|_{\mathcal{G}} \leq \|a\|_{A_{S,T}} + \varepsilon$.

Sea $h(z) = (M^*)^{-1}(z)H(z)g(z) = (M^*)^{-1}(z)\sum' \varphi_j(z)H(z)a_j$. Obviamente, se verifica que $h \in \mathcal{H}(B(\cdot), \Gamma) = \mathcal{F}(B(\cdot), \Gamma)$ y además, si $a = \sum_j \lambda_j a_j$,

$$M^*S(h) = S(H(z)g(z)) = \sum_j S(\varphi_j(z)H(z)a_j) = \sum_j \lambda_j T(H(z)a_j)$$

y de esta forma $(M^*S)(h) = T(H(z)a)$. De lo cual deducimos que

$$\|T(H(z)a)\|_{B^{M^*S}} \leq \sup \text{ es}_{\gamma \in \Gamma} \|h(\gamma)\|_{B(\gamma)} = \sup \text{ es}_{\gamma \in \Gamma} M^{-1}(\gamma)\|H(\gamma)g(\gamma)\|_{B(\gamma)} \leq$$
$$\leq \sup \text{ es}_{\gamma \in \Gamma} \|g(\gamma)\|_{A(\gamma)} = \|g\|_{\mathcal{G}} \leq \|a\|_{A_{S,T}} + \varepsilon$$

y así, $\|T(H(z)\cdot)\| \leq 1$.

(b) Basta tomar $S = T = \delta_{z_0}$ en (a) y tener en cuenta que $B^{M^*\delta_{z_0}} = B^{M^*(z_0)\delta_{z_0}} \equiv B[z_0]$ con $\|x\|_{B[z_0]} = |M^*(z_0)| \; \|x\|_{B^{M^*\delta_{z_0}}}$.

(c) Sea $a \in A[z_0]$. Dado $\varepsilon > 0$, existe $f \in \mathcal{F}(A(\cdot), \Gamma)$ tal que $f(z_0) = a$ y $\|f\|_{\mathcal{F}} \leq \|a\|_{A[z_0]} + \varepsilon$.

Sea $(g_n)_n$ en $\mathcal{G}(A(\cdot), \Gamma)$ tal que $f = \lim_n g_n$. Se verifica que $(M^*)^{-1}Hg_n \in \mathcal{F}(B(\cdot), \Gamma)$ y $\|(M^*)^{-1}Hg_n\|_{\mathcal{F}(B(\cdot),\Gamma)} \leq \|g_n\|_{\mathcal{F}(A(\cdot),\Gamma)}$. De esta forma, deducimos que la sucesión $((M^*)^{-1}Hg_n)_n$ es de Cauchy en $\mathcal{F}(B(\cdot), \Gamma)$ y, por tanto, existe una función h en este espacio tal que $h = \lim_n (M^*)^{-1}Hg_n$: De modo que, cualquiera que sea $z \in D$, $h(z) = V - \lim_n (M^*)^{-1}(z)H(z)g_n(z)$.

Ahora bien, puesto que $f(z) = U - \lim_n g_n(z)$ y $H(z) : U \longrightarrow V$ es continua, se cumple que $(M^*)^{-1}(z)H(z)f(z) = \lim_n (M^*)^{-1}(z)H(z)g_n(z)$. Luego $(M^*)^{-1}Hf \in \mathcal{F}(B(\cdot), \Gamma)$ y $\|(M^*)^{-1}Hf\|_{\mathcal{F}(B(\cdot),\Gamma)} \leq \|f\|_{\mathcal{F}(A(\cdot),\Gamma)}$.

Por tanto, $(M^*)^{-1}(z_0)H(z_0)f(z_0) = (M^*)^{-1}(z_0)H(z_0)a \in B[z_0]$. Además,

$$\begin{aligned}\|H(z_0)a\|_{B[z_0]} &= |M^*(z_0)|\ \|(M^*)^{-1}(z_0)H(z_0)f(z_0)\|_{B[z_0]} \leq \\ &\leq |M^*(z_0)|\ \|(M^*)^{-1}Hf\|_{\mathcal{F}(B(\cdot),\Gamma)} \leq |M^*(z_0)|\ \|f\|_{\mathcal{F}(A(\cdot),\Gamma)} \leq \\ &\leq |M^*(z_0)|\ (\|a\|_{A[z_0]} + \varepsilon).\end{aligned}$$

como se quería demostrar. ∎

COROLARIO 1.9. *En las mismas hipótesis que en 1.8, si, para cada* $\varphi \in H(D)$ *y* $a \in \mathcal{A}$, $S(H(\cdot)a\varphi) = L(a)T(\varphi)$, *entonces* L *admite una extensión continua a*

$$L : A_T \longrightarrow B^{M^*S}.$$

Si además, para cada $z \in D$, $H(z)$ *es restricción de* $H(z) : U \longrightarrow V$ *lineal, continua, entonces* $L : A^T \longrightarrow B^{M^*S}$ *es continua.*

DEMOSTRACION:

Sea $a \in \mathcal{A}$ y sea $g \in \mathcal{G}(A(\cdot),\Gamma)$ tal que $T(g) = a$. Supongamos que $g = \sum' \varphi_j a_j$.

Basta observar la siguiente cadena de igualdades:

$$L(a) = L(\sum_j T(\varphi_j)a_j) = \sum_j T(\varphi_j)L(a_j) = \sum_j S(H(\cdot)a_j\varphi_j) = S(H(\cdot)g(\cdot))$$

y así,

$$\|L(a)\|_{B^{M^*S}} \leq \|(M^*)^{-1}Hg\|_{\mathcal{F}(B(\cdot),\Gamma)} \leq \|g\|_{\mathcal{F}(A(\cdot),\Gamma)}.$$

La demostración de la segunda parte es análoga a la de 1.8. ∎

COROLARIO 1.10. *Si la familia de espacios* $C(\gamma) = \{A(\gamma), B(\gamma)\}$ *con* $\gamma \in \Gamma$, *donde*

$$\{A(\gamma), B(\gamma)\} = \{L : A(\gamma) \longrightarrow B(\gamma) \text{ lineales continuos}\},$$

es una familia de interpolación, el teorema 1.8 afirma que:

(a) C^T *está contenido continuamente en* $\{A_{S,T}, B^S\}$.

(b) $C[z_0]$ *está contenido continuamente en* $\{A\{z_0\}, B[z_0]\}$.

(c) *Si* $\{U, V\}$ *es espacio contenedor de* $\{C(\cdot)\}$, *entonces* $C[z_0]$ *está contenido continuamente en* $\{A[z_0], B[z_0]\}$.

(d) *En particular, si $\{A(\cdot)\}$ es familia de interpolación tal que $\{A^*(\gamma)\ ,\gamma \in \Gamma\}$ también lo es, para todo funcional analítico S tal que $T \subseteq S$ respecto de $\{A(\cdot)\}$, se cumple que $[A^*(\cdot)]^T$ está contenido continuamente en $(A_{S,T})^*$.*

DEMOSTRACION:

(a) Sea $L \in C^T$. Dado $\varepsilon > 0$, existe $f \in \mathcal{F}(C(\cdot),\Gamma)$ tal que $T(f) = L$. Supongamos inicialmente, que $f \in \mathcal{G}(C(\cdot),\Gamma)$. La familia $f(z) : \mathcal{A} \longrightarrow \cap_{\gamma\in\Gamma}B(\gamma)$ $(z \in D)$ cumple las siguientes condiciones:

(i) Si $f = \sum' \varphi_j L_j$, entonces $f(\cdot)a = \sum' \varphi_j L_j(a)$ y puesto que $L_j(a) \in \mathcal{B}$, tenemos que $f(\cdot)a$ es de la forma de las funciones de $\mathcal{G}(B(\cdot),\Gamma)$.

(ii) Para casi todo $\gamma \in \Gamma$,

$$\|f(\gamma)a\|_{B(\gamma)} \leq \|f(\gamma)\|_{C(\gamma)}\|a\|_{A(\gamma)} \leq \|f\|_{\mathcal{F}(C(\cdot),\Gamma)}\|a\|_{A(\gamma)},$$

y así, en virtud de 1.8, $T(f(z)a) \in B^S$.

Ahora bien,

$$T(f(z)a) = \sum_j T(\varphi_j)L_j(a) = (\sum_j T(\varphi_j)L_j)(a) = T(f)a = L(a) \tag{9}$$

y en consecuencia, $L(a) \in B^S$ y, si $g \in \mathcal{G}$ es tal que $gS = aT$, se cumple que $\|L(a)\|_{B^S} = \|T(f(z)a)\|_{B^S} = \|S(f(\cdot)g(\cdot))\|_{B^S}$. Por tanto,

$$\|L(a)\|_{B^S} \leq \|fg\|_{\mathcal{F}(B(\cdot),\Gamma)} = \sup\ \mathrm{es}_{\gamma\in\Gamma}\|f(\gamma)g(\gamma)\|_{B(\gamma)} \leq$$
$$\leq \sup\ \mathrm{es}_{\gamma\in\Gamma}\|f(\gamma)\|_{C(\gamma)}\|g(\gamma)\|_{A(\gamma)} \leq \|f\|_{\mathcal{F}}\|g\|_{\mathcal{F}}.$$

En definitiva, $\|L(a)\|_{B^S} \leq \|L\|_{C^T}\|a\|_{A_{S,T}}$.

Supongamos ahora que $f \in \mathcal{F}(C(\cdot),\Gamma)$ y sea $(g_n)_n$ tal que $f = \lim_n g_n$. Se deduce de la condición (ii) que $\|f(\gamma)a\|_{B(\gamma)} \leq \|f\|_{\mathcal{F}}\|a\|_{A(\gamma)}$ para casi todo $\gamma \in \Gamma$ y, puesto que

$$T(f(\cdot)a) = V - \lim_n T(g_n a) = V - \lim_n T(g_n)a = (\{U,V\} - \lim_n T(g_n))a = T(f)a,$$

si razonamos como en la primera parte, obtenemos el resultado buscado.

(b) Basta tomar $T = S = \delta_{z_0}$ en (a).

(c) Trivial por 1.8.

(d) Basta tomar $B(\gamma) = \mathbf{C}$ para todo $\gamma \in \Gamma$. ∎

§2 Dualidad.

Recordemos que dado el funcional analítico T en D tenemos la representación integral

$$T(\varphi) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Sigma} \varphi(\xi) h_T(\xi) d\xi \qquad \forall \varphi \in H(D),$$

con Σ una curva cerrada simple rectificable contenida en $\Omega = U \cap D$ y que contiene a K en su interior, tal y como vimos en (1;§1).

DEFINICION 2.1. *(a) Llamaremos $\mathcal{W}^q = \mathcal{W}^q(B(\cdot), \Gamma)$ al espacio de las funciones H definidas en Ω con valores en $\mathcal{B}^*$ (dual algebraico de $\mathcal{B}$) tales que :*

(i) *Para cada $b \in \mathcal{B}$, la función $< H(\cdot), b >$ es analítica en Ω.*

(ii) *Para todo $b \in \mathcal{B}$, existe límite no tangencial de $< H(\xi), b >$ cuando ξ tiende a $e^{i\theta}$. A este límite lo denotaremos por $< H(\theta), b >$.*

(iii) *La función $\frac{<H(\cdot),b>}{\|b\|_{B(\cdot)}}$ está en $L^q(\Gamma)$ para todo $b \in \mathcal{B}$.*

(iv) $\sup_{b\in\mathcal{B}\setminus\{0\}} \|\frac{<H(\cdot),b>}{\|b\|_{B(\cdot)}}\|_q < +\infty$.

Dotaremos a este espacio de la norma

$$\|H\|_{\mathcal{W}^q} = \sup_{b\in\mathcal{B}\setminus\{0\}} \|\frac{< H(\cdot), b >}{\|b\|_{B(\cdot)}}\|_q. \tag{10}$$

(b) Definimos también el espacio $\mathcal{W}^q_*$ como el subespacio de $\mathcal{W}^q$ tal que la condición (iv) *queda sustituida por:*

(v) *Existe una función medible C sobre Γ tal que $C \in L^q(\Gamma)$ y*

$$\lim_{\xi\to\gamma(n.t)} | < H(\xi), b > | \leq C(\gamma)\|b\|_{B(\gamma)} \qquad \forall b \in \mathcal{B}, \text{ p.c.t. } \gamma \in \Gamma$$

dotado de la norma (10) o equivalentemente

$$\|H\|_{\mathcal{W}^q_*} = \inf\{\|C\|_q \; ; \; C \text{ cumple (v)}\}.$$

DEFINICION 2.2. *Llamaremos $B^+_{T,p}$ (resp. $B^+_{T,p,*}$), al espacio de los funcionales $x \in \mathcal{B}^*$ tales que existe $H \in \mathcal{W}^q$ (resp. $H \in \mathcal{W}^q_*$), con p y q exponentes conjugados, verificando que*

$$x(b)T(\varphi) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Sigma} < H(\xi), b > \varphi(\xi) d\xi \qquad \forall \varphi \in H(D), \forall b \in \mathcal{B}. \tag{11}$$

Dotamos a $B^+_{T,p}$ (resp.$B^+_{T,p,*}$) de la norma

$$\|x\|_{B^+_{T,p}} = \inf\{\|H\|_{\mathcal{W}^q}\ ;\ H \textit{ cumple } (11)\}.$$

Análogamente, $\|x\|_{B^+_{T,p,*}}$ *con* $\mathcal{W}^q_*$ *en lugar de* $\mathcal{W}^q$.

NOTA 2.3: Observemos que si $q = +\infty$, obviamente $\mathcal{W}^q = \mathcal{W}^q_*$ y así, $B^+_{T,1} = B^+_{T,1,*}$.

TEOREMA 2.4.

(a) *Si $1 \leq p < +\infty$, el espacio dual de $B_{T,p}$ está contenido continuamente en $B^+_{T,p}$ con norma menor o igual que 1.*

(b) *Si $1 \leq p \leq +\infty$, el espacio $B_{T,p,*}$ está contenido continuamente en el espacio dual de $B_{T,p}$ con norma menor o igual que 1.*

(c) *El espacio dual de $B_{T,1}$ es isométrico al espacio $B^+_{T,1}$.*

DEMOSTRACION:

(a) Sea $l \in (B_{T,p})^*$. l es una forma lineal sobre $\mathcal{B}$ y, por tanto, la podemos considerar como un funcional lineal sobre $\mathcal{G}^p$ mediante la relación $l(g) = l(T(g))$. Se cumple que

$$|l(g)| = |l(T(g))| \leq \|l\|_{(B_{T,p})^*}\|T(g)\|_{B_{T,p}} \leq \|l\|_{(B_{T,p})^*}\left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\|g(\gamma)\|^p_{B(\gamma)}d\gamma\right)^{\frac{1}{p}}$$

y así, el teorema de Hahn-Banach permite extender el funcional l al espacio de funciones $g = \sum' \varphi_j b_j$ tales, que para todo j, φ_j son medibles sobre Γ (no necesariamente definidas en D) , $b_j \in \mathcal{B}$ y $\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\|g(\gamma)\|^p_{B(\gamma)}d\gamma < +\infty$ dotado de la norma

$$\|g\| = \left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\|g(\gamma)\|^p_{B(\gamma)}d\gamma\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Consideremos, para cada $b \in \mathcal{B}$, el espacio

$$L(b) = \{\varphi : \Gamma \longrightarrow \mathbf{C} \ \text{ medible } ;\ \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|\varphi(\gamma)|^p\|b\|^p_{B(\gamma)}d\gamma < +\infty\},$$

dotado de la norma

$$\|\varphi\|_{b,p} = \left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|\varphi(\gamma)|^p\|b\|^p_{B(\gamma)}d\gamma\right)^{\frac{1}{p}},$$

esto es, $L(b) = L^p(\|b\|^p_{B(\gamma)}\frac{d\gamma}{2\pi})$.

Definamos $\lambda_b : L(b) \longrightarrow \mathbf{C}$ por $\lambda_b(\varphi) = l(b\varphi)$. Se cumple que

$$|\lambda_b(\varphi)| = |l(b\varphi)| \leq \|l\|_{(B_{T,p})^*} \|\varphi\|_{b,p} = \|l\|_{(B_{T,p})^*} \|\varphi\|_{L^p(\|b\|^p_{B(\gamma)} \frac{d\gamma}{2\pi})}.$$

En consecuencia, $\lambda_b \in \left(L^p(\|b\|^p_{B(\gamma)} \frac{d\gamma}{2\pi})\right)^*$ con norma menor o igual que $\|l\|_{(B_{T,p})^*}$ y, por tanto, existe una función escalar medible $H^*(b,\gamma)$ tal que

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |H^*(b,\gamma)|^q \|b\|^p_{B(\gamma)} d\gamma < +\infty,$$

$\|H^*(b,\cdot)\|_{L^q(\|b\|^p_{B(\gamma)} \frac{d\gamma}{2\pi})} \leq \|l\|_{(B_{T,p})^*}$ y

$$\lambda_b(\varphi) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} H^*(b,\gamma)\varphi(\gamma)\|b\|^p_{B(\gamma)} d\gamma. \tag{12}$$

Consideremos ahora la función $H(b,\gamma) = H^*(b,\gamma)\|b\|^p_{B(\gamma)}$ para casi todo $\gamma \in \Gamma$. Se verifica que

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |H(b,\gamma)|^q \|b\|^{p(1-q)}_{B(\gamma)} d\gamma < +\infty$$

y así, $\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(\frac{|H(b,\gamma)|}{\|b\|_{B(\gamma)}}\right)^q d\gamma < +\infty$.

En definitiva, existe $H(b,\cdot)$ tal que $\frac{H(b,\cdot)}{\|b\|_{B(\cdot)}} \in L^q(\Gamma)$ con $\|\frac{H(b,\cdot)}{\|b\|_{B(\cdot)}}\|_q \leq \|l\|_{(B_{T,p})^*}$ y tal que, en virtud de (12),

$$\lambda_b(\varphi) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \varphi(\gamma)H(b,\gamma)d\gamma \qquad \forall \varphi \in L(b).$$

En particular, si $\varphi \in L(b) \cap H^\infty(D)$, deducimos que

$$\lambda_b(\varphi) = l(b\varphi) = l(b)T(\varphi) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \varphi(\gamma)H(b,\gamma)d\gamma. \tag{13}$$

Puesto que, para toda $\varphi \in H^\infty(D)$, la función $\varphi\varphi_b^1$ está en $L(b) \cap H^\infty(D)$, donde recordemos que la función φ_b^1 venía dada por

$$\varphi_b^1(z) = \exp\left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} -\log(\|b\|_{B(\gamma)}K(\gamma))dH_z(\gamma)\right), \tag{14}$$

se tiene, en virtud de (13), que

$$l(b)T(\varphi\varphi_b^1) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \varphi(\gamma)\varphi_b^1(\gamma)H(b,\gamma)d\gamma. \tag{15}$$

Al llegar a esta igualdad, siguiendo el método de ([C-C-R-S-W I], 3.1), se podría intentar determinar una función $\Phi \in H^{\infty}(D)$ tal que

$$\Psi_b(z) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \varphi_b^1(\gamma)\Phi(\gamma)H(b,\gamma)dP_z(\gamma)$$

sea de $H(D)$. Para ello tendría que ocurrir que $\widehat{\Psi}_b(n) = 0$ para todo $n < 0$, esto es, para cada $n \in \mathbf{N}$,

$$\widehat{\Psi}_b(-n) =$$
$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \Psi_b(\gamma)e^{in\gamma}d\gamma = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \varphi_b^1(\gamma)\Phi(\gamma)H(b,\gamma)e^{in\gamma}d\gamma \stackrel{(13)}{=} l(b)T(\Phi\varphi_b^1 z^n) = 0.$$

Pero el corolario (1;4.10) afirma que tal Φ existe si y sólo si $Sop\ T$ es finito. En este caso podemos proseguir como en ([C-C-R-S-W I]) tal y como veremos en 2.12. En el caso general hemos de proceder de otra forma.

Volvamos a (15) y expresemos $T(\varphi\varphi_b^1)$ en su forma integral. Tenemos que

$$l(b)\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \varphi(\gamma)\varphi_b^1(\gamma)h_T(\gamma)e^{i\gamma}d\gamma = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \varphi(\gamma)H(b,\gamma)\varphi_b^1(\gamma)d\gamma$$

y en consecuencia, cualquiera que sea $\varphi \in H^{\infty}(D)$,

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \varphi(\gamma)\varphi_b^1(\gamma)\left(l(b)h_T(\gamma)e^{i\gamma} - H(b,\gamma)\right)d\gamma = 0.$$

Se deduce de ello que la función

$$F_b(z) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \varphi_b^1(\gamma)\left(l(b)h_T(\gamma)e^{i\gamma} - H(b,\gamma)\right)dP_z(\gamma)$$

es una función de $H(D)$ tal que $F_b(0) = 0$. De hecho, $F_b \in H_0^q(D)$ puesto que $|F_b(\cdot)| = |\varphi_b^1(\cdot)|\ |l(b)h_T(\cdot) - H(b,\cdot)| \in L^q(\Gamma)$ (siempre podemos suponer $K(\cdot) \geq 1$).

Sea $F_b^*(z) = F_b(z)/\varphi_b^1(z)$, entonces:

(a) $F_b^* \in N^+(D)$ como cociente de una función de $N^+(D)$ por una función exterior ([G], cap. 2, cor. 5.6).

(b) $F_b^*(0) = 0$.

(c) $F_b^*(\gamma) = \lim_{z\to\gamma(n.t)} F_b^*(z) = l(b)h_T(\gamma)e^{i\gamma} - H(b,\gamma)$ para casi todo $\gamma \in \Gamma$.

Por tanto, $H(b,\gamma) = l(b)h_T(\gamma)e^{i\gamma} - F_b^*(\gamma)$ para casi todo $\gamma \in \Gamma$.

Definimos, para cada $z \in \Omega$, la función

$$< H(z), b >= l(b)h_T(z) - \frac{F_b^*(z)}{z}.$$

Se verifica:

(i) $< H(\cdot), b >\in H(\Omega)$ para todo $b \in \mathcal{B}$.

(ii) Para casi todo $\gamma \in \Gamma$, existe límite no tangencial cuando z tiende a γ y se cumple

$$(16) \qquad \lim_{z\to\gamma(n.t)} < H(z), b >= l(b)h_T(\gamma) - \frac{F_b^*(\gamma)}{e^{i\gamma}} = \frac{H(b,\gamma)}{e^{i\gamma}} \qquad \text{p.c.t. } \gamma \in \Gamma.$$

Sea $I(\Omega) = \{r \in (0,1) \ ; \ \partial B(0,r) \subset \Omega\}$ y consideremos, para cada $r \in I(\Omega)$,

$$M_\varphi(r) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \varphi(re^{i\theta})\varphi_b^1(re^{i\theta}) < H(re^{i\theta}), b > re^{i\theta} d\theta =$$
$$= \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial B(0,r)} \varphi(\xi)\varphi_b^1(\xi) < H(\xi), b > d\xi.$$

El teorema de Cauchy asegura que, cualesquiera que sean r_0 y r_1 en $I(\Omega)$, $M_\varphi(r_0) = M_\varphi(r_1)$ y, usando adecuadamente convergencia dominada, obtenemos que

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \varphi(\gamma)\varphi_b^1(\gamma)H(b,\gamma)d\gamma = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial B(0,r)=\Gamma(r)} \varphi(\xi)\varphi_b^1(\xi) < H(\xi), b > d\xi.$$

Por tanto, en virtud de (15)

$$(17) \qquad l(b)T(\varphi\varphi_b^1) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma(r)} \varphi(\xi)\varphi_b^1(\xi) < H(\xi), b > d\xi \qquad \forall\varphi \in H^\infty(D).$$

Ahora bien, puesto que $(\varphi_b^1)^{-1} \in H(D)$ y $H^\infty(D)$ es denso en $H(D)$ tenemos que

$$l(b)T(\varphi) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma(r)} \varphi(\xi) < H(\xi), b > d\xi \qquad \forall\varphi \in H(D).$$

Veamos ahora que $H : \Omega \longrightarrow \mathcal{B}^*$, esto es, cualesquiera que sean $\xi \in \Omega$, $a, b \in \mathcal{B}$, $\alpha, \beta \in \mathbf{C}$ se verifica que

$$(18) \qquad < H(\xi), \alpha a + \beta b >= \alpha < H(\xi), a > +\beta < H(\xi), b > .$$

Veamos,[1] en primer lugar, que

$$H(\alpha a+\beta b,\gamma)=\alpha H(a,\gamma)+\beta H(b,\gamma) \qquad \text{p.c.t. } \gamma\in\Gamma. \tag{19}$$

Se cumple que las funciones medibles $\|a\|_{B(\gamma)}, \|b\|_{B(\gamma)}$ y $\|\alpha a+\beta b\|_{B(\gamma)}$ están acotadas superiormente para todo $\gamma\in\Gamma\setminus\Gamma_\varepsilon$, donde $|\Gamma_\varepsilon|\le\varepsilon$ y ε puede ser elegido arbitrariamente pequeño. Así, cualquiera que sea el subconjunto medible $E\subset\Gamma\setminus\Gamma_\varepsilon$, su función característica $\chi_E\in L(a)\cap L(b)\cap L(\alpha a+\beta b)$ y, por tanto,

$$\begin{aligned}\int_E H(\alpha a+\beta b,\gamma)d\gamma &= \int_0^{2\pi}\chi_E(\gamma)H(\alpha a+\beta b,\gamma)d\gamma = 2\pi l((\alpha a+\beta b)\chi_E)=\\ &=2\pi(\alpha l(a\chi_E)+\beta l(b\chi_E))=2\pi(\alpha\lambda_a(\chi_E)+\beta\lambda_b(\chi_E))=\\ &=\alpha\int_E H(a,\gamma)d\gamma+\beta\int_E H(b,\gamma)d\gamma=\int_E(\alpha H(a,\gamma)+\beta H(b,\gamma))d\gamma.\end{aligned}$$

En consecuencia, se deduce (19).

De ésto, y a la vista de la definición de la función F_b^*, tenemos que $F_{\alpha a+\beta b}^*$ y $\alpha F_a^*+\beta F_b^*$ son dos funciones de Nevalinna cuyos límites no tangenciales coinciden para casi todo punto y, por tanto, $F_{\alpha a+\beta b}^*=\alpha F_a^*+\beta F_b^*$ ([GO], cap. IX, §3, th. 3). Consecuentemente, es obvio que se cumple (18). Además, (18) junto con (i) e (ii) aseguran que $H\in\mathcal{W}^q$ como queríamos probar.

Por otra parte, en virtud de (13), se tiene que

$$\|l\|_{B^+_{T,p}}\le\|H\|_{\mathcal{W}^q}=\sup_{b\in\mathcal{B}\setminus\{0\}}\|\frac{H(b,\cdot)}{\|b\|_{B(\cdot)}}\|_q\le\|l\|_{(B_{T,p})^*}.$$

(b) Sea ahora $l\in B^+_{T,p,*}$, $(1\le p\le+\infty)$. Para cada $\varepsilon>0$, existe $H\in\mathcal{W}^q_*$ tal que, para todo $b\in\mathcal{B}$ y toda $\varphi\in H(D)$,

$$l(b)T(\varphi)=\frac{1}{2\pi i}\int_\Sigma\varphi(\xi)<H(\xi),b>d\xi \quad \text{y} \quad \|H\|_{\mathcal{W}^q}\le\|l\|_{B^+_{T,p,*}}+\varepsilon.$$

Sea $g\in\mathcal{G}^p$ tal que $T(g)=b$. Si $g=\sum'\varphi_j b_j$ tenemos la siguiente cadena de igualdades:

$$\begin{aligned}l(b)=l(T(g))&=\sum_j T(\varphi_j)l(b_j)=\frac{1}{2\pi i}\int_\Sigma\sum_j\varphi_j(\xi)<H(\xi),b_j>d\xi=\\ &=\frac{1}{2\pi i}\int_\Sigma<H(\xi),g(\xi)>d\xi.\end{aligned}$$

[1] Como en ([C-C-R-S-W I], 3.1).

Ahora bien, puesto que $H \in \mathcal{W}_*^q$, dado $\varepsilon > 0$, existe una función $C \in L^q(\Gamma)$ tal que $\lim_{\xi \to \gamma(n.t)} | < H(\xi), b > | \leq C(\gamma)\|b\|_{B(\gamma)}$ para casi todo $\gamma \in \Gamma$, y tal que $\|C\|_q \leq \|H\|_{\mathcal{W}_*^q} + \varepsilon$, y así, para cada $g \in \mathcal{G}^p$,

$$\lim_{\xi \to \gamma(n.t)} | < H(\xi), g(\xi) > | \leq C(\gamma)\|g(\gamma)\|_{B(\gamma)} \quad (\in L^1(\Gamma)) \qquad \text{p.c.t. } \gamma \in \Gamma.$$

Como $< H(\xi), g(\xi) > \in H^1(\Omega)$, deducimos que $l(b) = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma < H(e^{i\theta}), g(e^{i\theta}) > d(e^{i\theta})$ y, por tanto,

$$|l(b)| \leq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} | < H(\gamma), g(\gamma) > | d\gamma \leq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} C(\gamma)\|g(\gamma)\|_{B(\gamma)} d\gamma \leq$$
$$\leq \|C\|_q \|g\|_p \leq (\|H\|_{\mathcal{W}_*^q} + \varepsilon)\|g\|_p \leq (\|l\|_{B^+_{T,p,*}} + 2\varepsilon)\|g\|_p.$$

De esta forma, si hacemos tender ε a cero, obtenemos que $|l(b)| \leq \|l\|_{B^+_{T,p,*}} \|b\|_{B_{T,p}}$ y, por consiguiente, $l \in (B_{T,p})^*$ y $\|l\|_{(B_{T,p})^*} \leq \|l\|_{B^+_{T,p,*}}$.

(c) Trivial consecuencia de (a), (b) y 2.3. ∎

Veamos ahora que también es cierto el apartado (a) de 2.4 en el caso que $p = +\infty$.

Para ello haremos, en primer lugar, unas observaciones sobre el espacio dual de $L^\infty(\Gamma)$, para las cuales nos remitimos a ([G] cap. IV).

Es sabido que, bajo la transformada de Gelfand, $L^\infty(\Gamma)$ es isomorfo a $C(X)$, álgebra de las funciones continuas sobre un espacio compacto X, (espectro de $L^\infty(\Gamma)$), de modo que el dual de $L^\infty(\Gamma)$ puede ser identificado al dual de $C(X)$.

Así, si consideramos el funcional lineal sobre $L^\infty(\Gamma)$

$$\phi : g \in L^\infty(\Gamma) \longrightarrow \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} g(\theta)d\theta,$$

ϕ puede ser considerado como un funcional sobre $C(X)$. En consecuencia, el teorema de representación de Riesz determina una medida de probabilidad μ_0 sobre X tal que

$$\phi(g) = \phi(\hat{g}) = \int_X \hat{g}\, d\mu_0 \tag{20}$$

para toda $g \in L^\infty(\Gamma)$, con $\hat{g}$ la transformada de Gelfand de g.

Sea $E \subset \Gamma$ un conjunto medible de medida positiva. Puesto que $\chi_E \chi_E = \chi_E$, $\widehat{\chi}_E$ sólo puede tomar los valores 0 y 1 y, por tanto, existe $\tilde{E}$ en X tal que $\widehat{\chi}_E = \chi_{\tilde{E}}$. En virtud de (20), deducimos que $m(E) = \phi(\chi_E) = \phi(\chi_{\tilde{E}}) = \mu_0(\tilde{E})$.

Enunciamos a continuación dos lemas que utilizaremos en la demostración de la siguiente proposición.

LEMA I. ([G], cap. 4, Th. 4.3)

Si $0 < p \leq \infty$, *la correspondencia* $\chi_E \longrightarrow \chi_{\tilde{E}}$ *se extiende de manera única a un operador* S *lineal isométrico positivo de* $L^p(\Gamma, \frac{d\theta}{2\pi})$ *sobre* $L^p(X, \mu_0)$ *(restricción de la transformación de Gelfand).*

LEMA II. ([G], cap. 5, Th. 5.3)

Sea $L \in (H^\infty(D))^*$. *Las siguientes condiciones son equivalentes:*

(a) L *es débilmente continuo, esto es, existe* $\varphi \in L^1$ *tal que* $L(f) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \varphi f d\gamma$ *para toda* $\varphi \in H^\infty(D)$.

(b) *Si* $(h_k)_k \subset H^\infty(D)$ *y* $\sum_{k=0}^{\infty} |h_k(e^{i\theta})| \leq M$ *para casi todo* $\theta \in \Gamma$, *entonces*

$$L(\sum_{k=0}^{\infty} h_k) = \sum_{k=0}^{\infty} L(h_k).$$

TEOREMA 2.5. *El espacio dual de* B_T $(=B_{T,\infty})$ *está contenido continuamente en* B_T^+ $(=B_{T,\infty}^+)$ *con norma menor o igual que 1.*

DEMOSTRACION:

Sea $l \in (B_T)^*$. De la misma forma que hicimos en el caso $p < +\infty$ podemos extender l al espacio de las funciones medibles sobre Γ de la forma $g = \sum' \varphi_j b_j$ con $b_j \in \mathcal{B}$ para todo j tales que sup $\mathrm{es}_{\gamma \in \Gamma} \|g(\gamma)\|_{B(\gamma)} < +\infty$.

Sea φ_b^1 la función definida en (14) (por simplicidad en las fórmulas la denotaremos por φ_b). Consideremos, para cada $\varphi \in L^\infty(\Gamma)$, el operador $\lambda_b(\varphi) = l(b\varphi\varphi_b)$, se verifica que $\|\lambda_b\|_{(L^\infty(\Gamma))^*} \leq \|l\|_{(B_T)^*}$. Así, en virtud de las observaciones hechas previamente, existe μ_b, medida de probabilidad sobre X, tal que

$$\lambda_b(\varphi) = \int_X \widehat{\varphi} d\mu_b \qquad \forall \varphi \in L^\infty(\Gamma).$$

Además, es conocido que $d\mu_b = h_b d\mu_0 + d\sigma_b$ donde $h_b \in L^1(X, \mu_0)$ y σ_b es singular respecto a μ_0. En definitiva, tenemos que

$$\lambda_b(\varphi) = \int_X \widehat{\varphi}(h_b d\mu_0 + d\sigma_b) \qquad \forall \varphi \in L^\infty(\Gamma).$$

Veamos que λ_b es un funcional cuya restricción a $H^\infty(D)$ es débilmente continuo. Para ello probaremos que se cumple la condición (b) del lema II.

Sea $(h_k)_k$ en las hipótesis de (b), sea $h^N = \sum_{k=0}^{N} h_k$ y $h = \sum_{k=0}^{\infty} h_k$. El teorema de la convergencia dominada afirma que $h = H^1-\lim_N h_N$ y así, puesto que $\lambda_b(\varphi) = l(b)T(\varphi\varphi_b)$ y T es un funcional continuo sobre H^1, es claro que se cumple (b). Por consiguiente, para cada $\varphi \in H^\infty(D)$,

$$\lambda_b(\varphi) = l(b)T(\varphi\varphi_b) = \int_X \widehat{\varphi} h_b d\mu_0.$$

Ahora bien, puesto que $h_b \in L^1(X, d\mu_0)$, en virtud del lema I, existe una función $H^*(b,\cdot) \in L^1(\Gamma)$ tal que $H^*(b,\cdot)\widehat{\ } = h_b$ y en consecuencia,

$$l(b)T(\varphi\varphi_b) = \int_X \widehat{\varphi} H^*(b,\cdot)\widehat{\ } d\mu_0 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \varphi(\gamma)H^*(b,\gamma)d\gamma \qquad \forall\varphi \in H^\infty(D).$$

Si llamamos $H(b,\gamma) = H^*(b,\gamma)\varphi_b^{-1}(\gamma)$ obtenemos que

$$l(b)T(\varphi\varphi_b) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \varphi(\gamma)\varphi_b(\gamma)H(b,\gamma)d\gamma \qquad \forall\varphi \in H^\infty(D). \tag{21}$$

Además, se cumple que $\frac{H(b,\cdot)}{\|b\|_{B(\cdot)}K(\cdot)} \in L^1(\Gamma)$ y

$$\|\frac{H(b,\cdot)}{\|b\|_{B(\cdot)}K(\cdot)}\|_1 = \|H^*(b,\cdot)\|_1 = \|h_b\|_{L^1(X,\mu_0)} \leq \|\lambda_b\|_{(L^\infty(\Gamma))^*} \leq \|l\|_{(B_T)^*}. \tag{22}$$

Por tanto, es claro que obtenemos la relación (15) y, en consecuencia, si seguimos los mismos pasos que en el caso $p < +\infty$, deducimos que $l(b)T(\varphi) = \int_\Gamma \varphi(\xi) < H(\xi), b > d\xi$ para toda $\varphi \in H(D)$.

Sin embargo, el razonamiento empleado en aquel caso para probar que $H : \Omega \longrightarrow \mathcal{B}^*$ no es válido ahora y, por tanto, hemos de razonar de otra forma.

Sigue siendo cierto que para probar la linealidad de $< H(\xi), \cdot >$ respecto de $b \in \mathcal{B}$, basta ver que, para todo $b_1,\ b_2 \in \mathcal{B},\ \lambda_1,\ \lambda_2 \in \mathbf{C}$,

$$< H(\gamma), \lambda_1 b_1 + \lambda_2 b_2 >= \lambda_1 < H(\gamma), b_1 > +\lambda_2 < H(\gamma), b_2 > \qquad \text{p.c.t. } \gamma \in \Gamma. \tag{23}$$

De hecho, trataremos de probar que, cualquiera que sea $\varepsilon > 0$, existe un subconjunto medible $E_\varepsilon \subset \Gamma$ tal que $|\Gamma \setminus E_\epsilon| < \varepsilon$ y tal que, para casi todo $\gamma \in E_\varepsilon$, se cumple (23).

Sea $b \in \mathcal{B}$ y consideremos, en primer lugar, cualquier conjunto medible E de Γ sobre el cual $\|b\|_{B(\cdot)}K(\cdot)$ sea una función acotada. Entonces, $\varphi_b^{-1}\chi_E \in L^\infty(\Gamma)$ y así, en virtud de (20),

$$l(b\varphi\chi_E) = \lambda_b(\varphi\varphi_b^{-1}\chi_E) = \int_X \widehat{\varphi}(\varphi_b^{-1}\chi_E)\widehat{\ }(h_b d\mu_0 + d\sigma_b) \qquad \forall\varphi \in L^\infty(\Gamma). \tag{24}$$

Ahora bien, sabemos que $h_b = H^*(b,\cdot)\hat{}$ y, puesto que $h_b(\varphi_b^{-1}\chi_E)\hat{} \in L^1(X,\mu_0)$, existe una función $H_E^{**}(b,\cdot) \in L^1(\Gamma)$ tal que

$$H_E^{**}(b,\cdot)\hat{} = h_b(\varphi_b^{-1}\chi_E)\hat{} = (H^*(b,\cdot)\varphi_b^{-1}\chi_E)\hat{}$$

Se deduce que $H_E^{**}(b,\gamma) = H(b,\gamma) =< H(\gamma), b > e^{i\gamma}$ para casi todo $\gamma \in E$. De modo que lo que hemos de probar es la linealidad de H_E^{**} como función de b.

En virtud de (24) tenemos que, para toda $\varphi \in L^\infty(\Gamma)$,

$$l(b\varphi\chi_E) = \int_X \widehat{\varphi}(H_E^{**}(b,\cdot)\hat{}d\mu_0 + (\varphi_b^{-1}\chi_E)\hat{}d\sigma_b). \tag{25}$$

Por simplicidad, llamaremos $h_b^* = H_E^{**}(b,\cdot)\hat{}$.

Una vez hechas estas observaciones, consideremos, dados $b_1, b_2 \in \mathcal{B}$, $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbf{C}$ y $\varepsilon > 0$, un subconjunto medible $E_\varepsilon \subset \Gamma$ tal que $|\Gamma \setminus E_\varepsilon| < \varepsilon$ y sobre el cual las funciones $\|b_1\|_{B(\cdot)}K(\cdot)$, $\|b_2\|_{B(\cdot)}K(\cdot)$ y $\|\lambda_1 b_1 + \lambda_2 b_2\|_{B(\cdot)}K(\cdot)$ están acotadas. Es claro que el miembro de la izquierda de (25) es lineal respecto a los elementos de $\mathcal{B}$ y, por tanto, deducimos que

$$\int_X \widehat{\varphi}(h^*_{\lambda_1 b_1+\lambda_2 b_2} d\mu_0 + (\varphi^{-1}_{\lambda_1 b_1+\lambda_2 b_2}\chi_{E_\varepsilon})\hat{}d\sigma_{\lambda_1 b_1+\lambda_2 b_2}) =$$
$$= \lambda_1 \int_X \widehat{\varphi}(h^*_{b_1} d\mu_0 + (\varphi^{-1}_{b_1}\chi_{E_\varepsilon})\hat{}d\sigma_{b_1}) + \lambda_2 \int_X \widehat{\varphi}\left(h^*_{b_2} d\mu_0 + (\varphi^{-1}_{b_2}\chi_{E_\varepsilon})\hat{}d\sigma_{b_2}\right)$$

para toda $\varphi \in L^\infty(\Gamma)$. De lo cual, obtenemos que

$$h^*_{\lambda_1 b_1+\lambda_2 b_2} d\mu_0 + (\varphi^{-1}_{\lambda_1 b_1+\lambda_2 b_2}\chi_{E_\varepsilon})\hat{}d\sigma_{\lambda_1 b_1+\lambda_2 b_2} =$$
$$= \lambda_1\left(h^*_{b_1} d\mu_0 + (\varphi^{-1}_{b_1}\chi_{E_\varepsilon})\hat{}d\sigma_{b_1}\right) + \lambda_2\left(h^*_{b_2} d\mu_0 + (\varphi^{-1}_{b_2}\chi_{E_\varepsilon})\hat{}d\sigma_{b_2}\right).$$

En consecuencia,

$$h^*_{\lambda_1 b_1+\lambda_2 b_2} d\mu_0 - \lambda_1 h^*_{b_1} d\mu_0 - \lambda_2 h^*_{b_2} d\mu_0 =$$
$$= \lambda_1(\varphi^{-1}_{b_1}\chi_{E_\varepsilon})\hat{}d_{\sigma_{b_1}} + \lambda_2(\varphi^{-1}_{b_2}\chi_{E_\varepsilon})\hat{}d\sigma_{b_2} - (\varphi^{-1}_{\lambda_1 b_1+\lambda_2 b_2}\chi_{E_\varepsilon})\hat{}d\sigma_{\lambda_1 b_1+\lambda_2 b_2}$$

y así, puesto que la medida que queda a la derecha en la expresión anterior es singular respecto a μ_0 y, a la vez, absolutamente continua, necesariamente es nula y, por tanto,

$$h^*_{\lambda_1 b_1+\lambda_2 b_2} = \lambda_1 h^*_{b_1} + \lambda_2 h^*_{b_2} \qquad [\mu_0].$$

En definitiva, se deduce la linealidad de $< H(\gamma), \cdot >$ respecto a los elementos de $\mathcal{B}$ para $\gamma \in E_\varepsilon$. Debido a la arbitrariedad de ε, obtenemos la linealidad buscada. ∎

Antes de ver algunos casos concretos de duales de espacio $B_{T,p}$ cuando T es de soporte finito, vamos a caracterizar el espacio dual de $B^{T,1}$ y obtener los correspondientes resultados para el dual de $B^{T,p}$.

Dada $f \in \mathcal{F}^1$, sea $(g_n)_n \subset \mathcal{G}^1$ tal que $f = \mathcal{G}^1 - \lim_n g_n$. Si $H \in \mathcal{W} = \mathcal{W}^\infty$,

$$\lim_{n,m} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} | < H(\gamma), g_n(\gamma) - g_m(\gamma) > | d\gamma = 0 \qquad \text{p.c.t. } \gamma \in \Gamma$$

de modo que existe una subsucesión, que seguiremos denotando $(g_n)_n$, tal que la sucesión $(< H(\gamma), g_n(\gamma) >)_n$ es convergente. Llamemos $(H, f)(\gamma) = \lim_n < H(\gamma), g_n(\gamma) >$ para casi todo $\gamma \in \Gamma$. Se cumple, en virtud del lema de Fatou, que

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |(H,f)(\gamma)| d\gamma \leq \lim_n \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} | < H(\gamma), g_n(\gamma) > | d\gamma \leq \|H\|_{\mathcal{W}} \lim_n \|g_n\|_{\mathcal{F}^1} =$$
$$= \|H\|_{\mathcal{W}} \|f\|_{\mathcal{F}^1}.$$

Por tanto, si $\mathcal{F}^1 - \lim_n g_n = 0$ tenemos que, para casi todo $\gamma \in \Gamma$, $(H, f)(\gamma) = 0$, esto es, (H, f) es independiente de la sucesión $(g_n)_n$ elegida. Además $\|(H, f)\|_1 \leq \|H\|_{\mathcal{W}} \|f\|_{\mathcal{F}^1}$.

DEFINICION 2.6.

(a) *Llamaremos* $\mathcal{W}(T)$ *al subespacio de las funciones* $H \in \mathcal{W}$ *tales que cumplen la siguiente propiedad adicional: si* $f \in \mathcal{F}^1$ *es tal que* $T(f) = 0$ *entonces,*

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (H, f)(\gamma) \; d\gamma = 0.$$

(b) *Denotaremos por* $B_+^{T,1}$ *al subespacio de los* $x \in B_{T,1}^+$ *tales que existe* $H \in \mathcal{W}(T)$ *verificando*

$$x(b)T(\varphi) = \frac{1}{2\pi i} \int_\Sigma < H(\xi), b > \varphi(\xi) d\xi \qquad \forall b \in \mathcal{B}, \; \forall \varphi \in H(D). \tag{26}$$

Con estas notaciones, tenemos:

TEOREMA 2.7. *El espacio dual de $B^{T,1}$ es isométrico al espacio $B_+^{T,1}$.*

DEMOSTRACION:

Sea $l \in (B^{T,1})^*$, puesto que, para cada $b \in \mathcal{B}$, $\|b\|_{B^{T,1}} \leq \|b\|_{B_{T,1}}$ se tiene que $l \in (B_{T,1})^*$ y así, dado $\varepsilon > 0$, existe $H \in \mathcal{W}$ tal que se cumple (26) y $\|H\|_{\mathcal{W}} \leq \|l\|_{(B^{T,1})^*} + \varepsilon$.

Sea $f \in \mathcal{F}^1$ con $T(f) = 0$, entonces

$$0 = l(T(f)) = \lim_n l(T(g_n)) = \lim_n \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} < H(\gamma), g_n(\gamma) > e^{i\gamma} d\gamma =$$
$$= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (H, f)(\gamma) e^{i\gamma} d\gamma.$$

Con lo cual $H \in \mathcal{W}(T)$ y, a fortiori, $l \in B_+^{T,1}$. Además, $\|l\|_{B_+^{T,1}} \leq \|H\|_{\mathcal{W}} \leq \|l\|_{(B^{T,1})^*} + \varepsilon$.

Recíprocamente, si $l \in B_+^{T,1}$, dado $\varepsilon > 0$, existe $H \in \mathcal{W}(T)$ tal que l cumple (26) y $\|H\|_{\mathcal{W}(T)} \leq \|l\|_{B_+^{T,1}} + \varepsilon$. Se tiene que el funcional l definido sobre $\mathcal{B}$ lo podemos extender a $B^{T,1}$ mediante

$$l(T(f)) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (H, f)(\gamma) e^{i\gamma} d\gamma.$$

El hecho de que $H \in \mathcal{W}(T)$ garantiza que el operador está bien definido y además, $|l(T(f))| \leq \|(H, f)\|_1 \leq \|H\|_{\mathcal{W}} \|f\|_{\mathcal{F}^1}$. Por consiguiente, $l \in (B^{T,1})^*$ y $\|l\|_{(B^{T,1})^*} \leq \|l\|_{B_+^{T,1}}$. ∎

NOTA 2.8: En el caso $p \neq 1$, es claro, que si definimos los espacios análogos, $B_+^{T,p}$, obtenemos que éstos están contenidos con continuidad en el espacio dual de $B^{T,p}$. Sin embargo, si $l \in (B^{T,p})^*$, $l \in (B_{T,p})^*$ y así, existe $H \in \mathcal{W}^q$ tal que l cumple (17). Por otra parte, si $f = \mathcal{F}^p - \lim_n g_n$, la sucesión $\left(\int_\Sigma < H(\xi), g_n(\xi) > d\xi\right)_n$ es de Cauchy y, de esta forma, aunque tuviera sentido definir la función $(H, f)(\xi) = \lim_k < H(\xi), g_{n_k}(\xi) >$ para casi todo $\xi \in \Sigma$, donde $(g_{n_k})_k$ es una subsucesión de $(g_n)_n$, el hecho de que

$$\int_\Sigma < H(\xi), g_n(\xi) > d\xi$$

convergiera a cero, como ocurriría en el caso de que $T(f) = 0$, no implicaría, en principio, que $\int_\Sigma (H, f)(\xi) d\xi$ fuese cero y, por tanto, no podríamos deducir que $H \in \mathcal{W}^q(T)$.

Desigualdad fundamental.

DEFINICION 2.9. *Diremos que un funcional analítico T en D y una familia de interpolación $\{B(\gamma)\ ,\ \gamma \in \Gamma\}$ verifican la desigualdad fundamental, si existe un compacto $K \subset D$ y una constante $C_T > 0$ tal que*

$$\text{(D.F.)} \qquad \|T(g)\|_{B_T} \le C_T \sup_{z\in K} \exp\left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log \|g(\gamma)\|_{B(\gamma)} dP_z(\gamma)\right).$$

PROPOSICION 2.10. *Si T y $\{B(\gamma)\ ,\ \gamma \in \Gamma\}$ cumplen la desigualdad fundamental, los espacios $B_{T,p}$ son equivalentes para todo $1 \le p \le +\infty$. Lo mismo sucede con los espacios $B^{T,p}$.*

DEMOSTRACION:

La equivalencia de los espacios $B_{T,p}$ es consecuencia inmediata de la desigualdad de Jensen. Veamos que ocurre con los espacios $B^{T,p}$. Para probar la equivalencia de estos espacios sólo hemos de probar que si se cumple (D.F.) también es cierto que

$$\|T(f)\|_{B^T} \le C_T \sup_{z\in K} \exp\left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log \|f(\gamma)\|_{B(\gamma)} dP_z(\gamma)\right)$$

para toda $f \in \mathcal{F}$. Ahora bien si $f \in \mathcal{F}$, existe $(g_n)_n \subset \mathcal{G}$ tal que $f = \lim_n g_n$ y puesto que, para todo $b \in \mathcal{B}$, $\|b\|_{B^T} \le \|b\|_{B_T}$ tenemos que existe $n_0 \in \mathbf{N}$ tal que para todo $n \ge n_0$

$$\begin{aligned}\|T(f)\|_{B^T} &\le \varepsilon + \|T(g_n)\|_{B^T} \le \varepsilon + \|T(g_n)\|_{B_T} \le \\ &\le \varepsilon + C_T \sup_{z\in K} \exp\left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \|g_n(\gamma)\|_{B(\gamma)} dP_z(\gamma)\right) \le \\ &\le \varepsilon + C_T \sup_{z\in K} \exp\left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} (\|f(\gamma)\|_{B(\gamma)} + \varepsilon)\ dP_z(\gamma)\right)\end{aligned}$$

y, debido a la arbitrariedad de ε, queda probada la proposición. ∎

PROPOSICION 2.11. *Sea T de soporte finito, se cumple:*

(a) *Para cada $k \in H^\infty(D)$ y para cada $b \in \mathcal{B}$, existe un compacto $K \subset D$ y una constante $C_T > 0$ tal que $\|b\|_{B_T} \le C_T \sup_{z\in K} |k(z)|\ \|b\|_{B_{kT}}$.*

(b) *El espacio B^{kT} está contenido continuamente en B^T con norma menor o igual que $C_T \sup_{z\in K} |k(z)|$.*

(c) *Si T es de soporte finito, cualquiera que sea la familia $\{B(\gamma), \gamma \in \Gamma\}$, T y dicha familia cumplen la D.F.*

(d) *Si T es de soporte finito, todos los espacios $\{B_{T,p},\ 1 \leq p \leq \infty\}$ son equivalentes. (Lo mismo sucede para los espacios $\{B^{T,p},\ 1 \leq p \leq \infty\}$).*

DEMOSTRACION:

En virtud del corolario (1;5.7), no hay pérdida de generalidad si suponemos que $T = \delta_{z_0}^{n)}$ con $z_0 \in D$ y $n \in \mathbf{N}$.

(a) Dado $b \in \mathcal{B}$ y $\varepsilon > 0$, sea $g \in \mathcal{G}$ tal que $kT(g) = T(kg) = b$ y $\|g\|_{\mathcal{G}} \leq \|b\|_{B_{kT}} + \varepsilon$. Se tiene, pues, que $b = \delta_{z_0}^{n)}(kg) = \sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p} k^{n-p)}(z_0) g^{p)}(z_0)$ y, por tanto,

$$\|b\|_{B_T} \leq \sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p} |k^{n-p)}(z_0)|\ \|g^{p)}\|_{B_T}.$$

Ahora bien, la fórmula integral de Cauchy afirma que

$$k^{n-p)}(z_0) = \frac{(n-p)!}{2\pi i} \int_{\partial B(z_0,r)} \frac{k(\xi)}{(\xi - z_0)^{n-p+1}} d\xi \qquad (r\ ;\ B(z_0,r) \subset D)$$

y así, para todo $p \in \{0, ..., n\}$ se tiene

$$|k^{n-p)}(z_0)| \leq \frac{(n-p)!}{r^{n-p}} \sup_{z \in \partial B(z_0,r)} |k(z)|.$$

Por otra parte, en virtud de (1;5.10), si $p \leq n$ entonces

$$\|b\|_{B_T} \leq \frac{p!}{n!}(2 - d(z_0,\Gamma))^{n-p} \|b\|_{B_{\delta_{z_0}^{p)}}}$$

y en consecuencia,

$$\|b\|_{B_T} \leq \left(\sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p} \frac{1}{r^{n-p}} \frac{p!(n-p)!}{n!} (2 - d(z_0,\gamma))^{n-p} \right) \|g\|_{\mathcal{G}} \sup_{z \in \partial B(z_0,r)} |k(z)| =$$
$$= \left(\sum_{p=0}^{n} \left(\frac{2 - d(z_0,\Gamma)}{r} \right)^{n-p} \right) \Big(\sup_{z \in \overline{B}(z_0,r)} |k(z)| \Big) (\|b\|_{B_{kT}} + \varepsilon),$$

de modo que existe un compacto $K = \overline{B}(z_0,r)$ y una constante $C_T = C(T,K)$ tal que se verifica (a).

(b)Totalmente análogo a (a) sin más que sustituir $g \in \mathcal{G}$ por $f \in \mathcal{F}$.

(c) Dada $g \in \mathcal{G}$, si llamamos $k(z) = \exp\left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log \|g(\gamma)\|_{B(\gamma)} dH_z(\gamma)\right)$, tenemos que $\|T(g)\|_{B_T} = \|kT(k^{-1}g)\|_{B_T}$. Consecuentemente, en virtud de (a), obtenemos

$$
\begin{aligned}
\|T(g)\|_{B_T} \leq C_T \sup_{z \in K} \exp\left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log \|g(\gamma)\|_{B(\gamma)} dP_z(\gamma)\right) \|kT(\tfrac{g}{k})\|_{B_{kT}} \leq \\
\leq C_T \sup_{z \in K} \exp\left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log \|g(\gamma)\|_{B(\gamma)} dP_z(\gamma)\right).
\end{aligned}
$$

(d) Trivial consecuencia de (c) y 2.10. ∎

Casos de dualidad con T de soporte finito

Puesto que en este caso $B_{T,p} \equiv B_{T,q}$ y $B^{T,p} \equiv B^{T,q}$ para todo p, q, trabajaremos con $p = \infty$.

(1) $T = \delta_{z_0}$ con $z_0 \in D$.

El teorema 3.1 de [C-C-R-S-W I] afirma que el espacio dual de $B\{z_0\} = B_T$ es isométrico al espacio $B^+\{z_0\}^*$ definido por la clase de los $x \in \mathcal{B}^*$ tales que $x = h(z_0)$ para alguna $h \in W$, donde W es el espacio $\mathcal{W}$ (definido en 2.1) pero en el que la condición (i) queda sustituida por la siguiente:

(i') Para cada $b \in \mathcal{B}$, $< h(z), b > \in N^+(D)$.

Veamos que efectivamente $B^+\{z_0\}^*$ es equivalente a B_T^+. Sea $l \in B_T^+$. Dado $\varepsilon > 0$, existe $H \in \mathcal{W}$ tal que $\|H\|_{\mathcal{W}} \leq \|l\|_{B_T^+} + \varepsilon$ y

$$
l(b)\varphi(z_0) = \frac{1}{2\pi i}\int_\Sigma < H(\xi), b > \varphi(\xi) d\xi
$$

para toda $\varphi \in H(D)$ y todo $b \in \mathcal{B}$.

Ahora bien, la función $< H(\cdot), b >$ venía definida por

$$
< H(z), b > = l(b) h_T(z) - \frac{F_b^*(z)}{z}
$$

y, en nuestro caso, $h_T(z) = \frac{1}{z - z_0}$. Por tanto,

$$
< H(z), b > = l(b)\frac{1}{z - z_0} - \frac{F_b^*(z)}{z} = \frac{l(b) - (z - z_0)\frac{F_b^*(z)}{z}}{z - z_0}.
$$

En consecuencia, si llamamos $< h(z), b >= l(b) - (z - z_0)\frac{F_b^*(z)}{z}$, tenemos que $h \in W$, $h(z_0) = l$ y

$$\lim_{z \to \gamma(n.t)} | < h(z), b > | = \lim_{z \to \gamma(n.t)} | < H(z), b > (z - z_0)| \leq |e^{i\gamma} - z_0| \|H\|_{\mathcal{W}} \|b\|_{B(\gamma)} \leq$$
$$\leq (2 - d(z_0, \Gamma))(\|l\|_{B_T^+} + \varepsilon)\|b\|_{B(\gamma)}$$

y así, $l \in B^+\{z_0\}^*$ y $\|l\|_{B^+\{z_0\}^*} \leq (2 - d(z_0, \Gamma))\|l\|_{B_T^+}$.

Recíprocamente, si $l \in B^+\{z_0\}^*$ existe, dado $\varepsilon > 0$, una función $h \in W$ tal que $l = h(z_0)$ y $\|h\|_W \leq \|l\|_{B^+\{z_0\}^*} + \varepsilon$. Sea $< H(\xi), b >=< h(\xi), b > /\xi - z_0$. Se cumple que $H \in \mathcal{W}$ y

$$l(b)\varphi(z_0) =< h(z_0), b > \varphi(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_\Sigma \frac{< h(\xi), b > \varphi(\xi)}{\xi - z_0} d\xi =$$
$$= \frac{1}{2\pi i} \int_\Sigma < H(\xi), b > \varphi(\xi) d\xi.$$

Por tanto, se deduce que $l \in B_T^+$ y

$$\|l\|_{B_T^+} \leq \|H\|_{\mathcal{W}} \leq \frac{1}{d(z_0, \Gamma)} \|h\|_W \leq \frac{1}{d(z_0, \Gamma)} \|l\|_{B^+\{z_0\}^*} + \varepsilon.$$

(2) $T = \delta_{z_0}^{n)}$ con $n \in \mathbf{N}$ con $z_0 \in D$.

En este caso, $h_T(\xi) = T(\frac{1}{\xi - z}) = \frac{n!(-1)^n}{(\xi - z_0)^{n+1}}$ y por consiguiente,

$$< H(\xi), b >= l(b)\frac{n!(-1)^n}{(\xi - z_0)^{n+1}} - \frac{F_b^*(\xi)}{\xi} = \frac{l(b)n!(-1)^n - (\xi - z_0)^{n+1}\frac{F_b^*(\xi)}{\xi}}{(\xi - z_0)^{n+1}}$$

Si llamamos $< h(z), b >$ al numerador de la fracción anterior, tenemos que $h \in W$, $< h(z_0), b >= l(b)n!(-1)^n$ y además, para todo $0 < k \leq n$, $\frac{d^k(< h(z), b >)}{dz^k}]_{z=z_0} = 0$, lo cual, como veremos en (3;1.5), concuerda con la dualidad de los espacios $[A_0, A_1]_{\delta_{z_0}^{n)}}$ definidos en [S].

Observemos, finalmente, que la existencia de una función $h \in W$ que verifica las condiciones anteriores puede ser expresada de la forma

$$\delta_{z_0}^{n)}(< h(z), b > \varphi) = n!(-1)^n l(b)\delta_{z_0}^{n)}(\varphi) \qquad \forall \varphi \in H(D), \ \forall b \in \mathcal{B}.$$

(3) $T = \delta_{z_0} + \delta_{z_1}$ con $z_0, z_1 \in D$.

Se tiene que $h_T(z) = \frac{1}{z-z_0} + \frac{1}{z-z_1} = \frac{2z-(z_0+z_1)}{(z-z_0)(z-z_1)}$ y, por tanto,

$$< H(z), b >= l(b)\frac{2z-(z_0+z_1)}{(z-z_0)(z-z_1)} - \frac{F_b^*(z)}{z} = \frac{l(b)(2z-z_0-z_1)-(z-z_0)(z-z_1)\frac{F_b^*(z)}{z}}{(z-z_0)(z-z_1)}.$$

Si llamamos, al igual que en los casos anteriores, $< h(z), b >$ a la función numerador de la última expresión, resulta que $h \in W$, $h(z_0) = l(b)(z_0 - z_1)$ y $h(z_1) = l(b)(z_1 - z_0)$. De esta forma, si consideramos

$$< h_1(z), b >= \frac{< h(z), b >}{z_0 - z_1} \quad \text{y} \quad < h_2(z), b >= \frac{< h(z), b >}{z_1 - z_0},$$

tenemos que $h_1(z_0) = h_2(z_1) = l$ y, por tanto,

$$l \in B^+\{z_0\}^* \cap B^+\{z_1\}^* = (B\{z_0\})^* \cap (B\{z_1\})^* = (B\{z_0\} + B\{z_1\})^*,$$

como ya sabíamos que tenía que ocurrir puesto que $B_{\delta_{z_0}+\delta_{z_1}} \overset{(1;5.7)}{\equiv} B\{z_0\} + B\{z_1\}$.

(4) Caso general de T de soporte finito.

Supongamos que $T = \sum_{k=0}^{n} \sum_{l=0}^{m(k)} a_{kl}\delta_{z_k}^{l)}$. Se tiene, entonces, que

$$h_T(\xi) = T(\frac{1}{\xi - z}) = \sum_{k=0}^{n} \sum_{l=0}^{m(k)} a_{kl}\frac{(-1)^l l!}{(\xi - z_k)^{l+1}};$$

expresión que podemos expresar por $h_T(\xi) = \frac{P_T(\xi)}{Q_T(\xi)}$ siendo P_T y Q_T dos polinomios.

Consecuentemente,

$$< H(\xi), b >= l(b)\frac{P_T(\xi)}{Q_T(\xi)} - \frac{F_b^*(\xi)}{\xi} = \frac{l(b)P_T(\xi) - Q_T(\xi)\frac{F_b^*(\xi)}{\xi}}{Q_T(\xi)} \qquad \forall \xi \in \Omega.$$

De modo que si llamamos $< h(z), b >$ a la función numerador de la expresión anterior, $h \in W$. Además es claro que $Q_T^{-1}(\xi)$ determina un funcional analítico en D, al cual denotaremos por S_T, y así, tenemos que

$$\begin{aligned} l(b)T(\varphi) &= \frac{1}{2\pi i}\int_\Sigma < H(\xi), b > \varphi(\xi)d\xi = \frac{1}{2\pi i}\int_\Sigma < h(\xi), b > \varphi(\xi)\frac{1}{Q_T(\xi)}d\xi = \\ &= S_T(< h(\xi), b > \varphi(\xi)). \end{aligned}$$

En definitiva, obtenemos el siguiente resultado:

TEOREMA 2.12. *Si T es de soporte finito, existe $S_T \in H'(D)$ tal que el espacio dual de B_T es equivalente al espacio de los $x \in \mathcal{B}^*$ para los cuales existe $h \in W$ verificando:*

$$(*) \qquad x(b)T(\varphi) = S_T(< h(z), b > \varphi) \qquad \forall \varphi \in H(D),\ \forall b \in \mathcal{B}.$$

dotado de la norma $\|x\| = \inf\{\|h\|_W\ ;\ x$ cumple (*)$\}$.

Es más, S_T viene determinado por $h_{S_T} = \frac{1}{Q_T}$, donde $h_T = \frac{P_T}{Q_T}$

SEGUNDA DEMOSTRACION:

Si $h_T(z) = \frac{P_T(z)}{Q_T(z)}$, la función $Q_T(\xi) \in H^\infty(D)$ "anula" al funcional T, es decir, $Q_T T \equiv 0$ y así, en virtud de (15) con $\varphi_b = \varphi_b^1$,

$$l(b)T(\varphi\varphi_b) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \varphi(\gamma)\varphi_b(\gamma)H(b,\gamma)d\gamma \qquad \forall \varphi \in H^\infty(D).$$

Tenemos que la función $\Psi_b(z) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \varphi_b(\gamma)H(b,\gamma)Q_T(\gamma)dP_z(\gamma)$ es de $H^\infty(D)$ y se verifica que $\lim_{z\to\gamma(n.t)} \Psi_b(z) = \varphi_b(\gamma)H(b,\gamma)Q_T(\gamma)$.

En consecuencia, si $< h(z), b >= \frac{\Psi_b(z)}{\varphi_b(z)z}$, se cumplen las siguientes condiciones:

(a) $< h(\cdot), b >\in N^+(D)$ para todo $b \in \mathcal{B}$.

(b) $\lim_{z\to\gamma(n.t)} | < h(z), b > | = |Q_T(\gamma)H(b,\gamma)| \leq C_T\|b\|_{\mathcal{B}(\gamma)}$ para todo $b \in \mathcal{B}$ y para casi todo $\gamma \in \Gamma$.

Esto es, $h \in W$. Además,

$$\begin{aligned} S_T(< h(z), b > \varphi\varphi_b) &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} < h(\gamma), b > \varphi(\gamma)\varphi_b(\gamma)\frac{1}{Q_T(\gamma)}e^{i\gamma}d\gamma = \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{H(b,\gamma)Q_T(\gamma)}{e^{i\gamma}}\varphi(\gamma)\varphi_b(\gamma)\frac{1}{Q_T(\gamma)}e^{i\gamma}d\gamma = \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} H(b,\gamma)\varphi(\gamma)\varphi(\gamma)\varphi_b(\gamma)d\gamma \overset{(15)}{=} l(b)T(\varphi\varphi_b) \end{aligned}$$

para toda $\varphi \in H^\infty(D)$.

La proposición se concluye por densidad de $H^\infty(D)$ en $H(D)$. ∎

NOTA 2.13: Al tratar de calcular los espacios duales de $B_{T,p}$, nuestro objetivo inicial era "demostrar" que, dado T, existía $S_T \in H'(D)$ tal que

$$(27) \qquad S_T(< h(z), b >) = l(b)T(\varphi) \quad \forall b \in \mathcal{B},\ \forall \varphi \in H(D)$$

con $h \in W$. Esto está probado si T es de soporte finito. Pues bien:

PROPOSICION 2.14. *El dual de un espacio B_T está en las condiciones anteriores si y sólo si se cumple una de las dos condiciones siguientes:*

(i) *T es de soporte finito.*

(ii) *Existe una función K^* medible sobre Γ tal que $\log\ K(\cdot)$ es integrable y tal que, para cada $b \in \mathcal{B}$, $\|b\|_{B_T} \leq K^*(\gamma)\|b\|_{B(\gamma)}$ para casi todo $\gamma \in \Gamma$.*

La condición (ii) se cumple si los espacios $B(\gamma)$ $(\gamma \in \Gamma)$ y $\mathcal{U}$ tienen normas equivalentes, como es el caso de dimensión finita ([C-C-R-S-W II], [R-W I], [EH], ...).

Observemos que si se cumple (ii), B^T es espacio contenedor.

DEMOSTRACION:

Supongamos que B_T cumple (27). Sea $a \in \mathcal{B}$ tal que verifique $l(a) = 0$. Se cumple que $S_T(< h(z), a > \varphi) = 0$ para toda $\varphi \in H(D)$ y, por tanto, existe una función $< h(\cdot), a >$ en $H(D)$ tal que $< h(\cdot), a > S_T \equiv 0$. En virtud de (1;4.10), o bien T es de soporte finito o bien $< h(\cdot), a > \equiv 0$. Por consiguiente, si T no es de soporte finito y $l(a) = 0$ necesariamente $< h(\cdot), a > \equiv 0$. Se deduce que existe una función $C(z)$ tal que $< h(z), b > = C(z)l(b)$ para todo $z \in D$ y todo $b \in \mathcal{B}$.

En virtud de las propiedades de h, concluimos que $C \in N^+(D)$ y que

$$\lim_{z \to \gamma(n.t)} | < h(z), b > | = |C(\gamma)|\ |l(b)| \leq \|b\|_{B(\gamma)}(\|l\|_{(B_T)^*} + \varepsilon).$$

En consecuencia, $|l(b)| \leq (\|l\|_{(B_T)^*} + \varepsilon)\frac{1}{|C(\gamma)|}\|b\|_{B(\gamma)}$ y así, $l \in (B(\gamma))^*$. Además existe $K^*(\cdot) = \frac{1}{|C(\cdot)|}$, cumpliendo las condiciones requeridas, tal que $\|l\|_{(B(\gamma))^*} \leq K^*(\gamma)\|l\|_{(B_T)^*}$ para casi todo $\gamma \in \Gamma$. De lo cual se concluye la tesis.

Recíprocamente. Ya sabemos que si T es de soporte finito se cumple (27). Supongamos, pues, que se cumple (ii) y sea

$$< h(z), b > = \exp\left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log\frac{1}{K^*(\gamma)} dH_z(\gamma)\right) l(b).$$

Se cumplen:

(a) $h : D \longrightarrow \mathcal{B}^*$.

(b) $< h(\cdot), b > \in N^+(D)$ para todo $b \in \mathcal{B}$.

(c) $\lim_{z \to \gamma(n.t)} | < h(z), b > | \leq \|l\|_{(B_T)^*}\|b\|_{B_T}\frac{1}{K^*(\gamma)} \leq \|l\|_{(B_T)^*}\|b\|_{B(\gamma)}$ para casi todo $\gamma \in \Gamma$.

Así, $h \in W$ y $l(b)T(\varphi) = \exp\left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log K^*(\gamma) dH_z(\gamma)\right) T(< h(\cdot), b > \varphi)$. Por consiguiente, si

$$S_T = \exp\left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log K^*(\gamma) dH_z(\gamma)\right) T,$$

obtenemos la condición (27). ∎

COROLARIO 2.15. *Si existe una función K^* medible sobre Γ tal que* $\log$ *K^* es integrable y, para cada $b \in \mathcal{B}$, $\|b\|_{B_T} \leq K^*(\gamma)\|b\|_{B(\gamma)}$ para casi todo $\gamma \in \Gamma$ entonces, T y $\{B(\gamma)\}$ cumple (D.F.).*

DEMOSTRACION:

Por dualidad, cualquiera que sea $l \in (B_T)^*$, existe una función $h \in W$ tal que $l(b)T(\varphi) = S_T(< h(\cdot), b > \varphi(\cdot))$ para toda $\varphi \in H(D)$ y así, $l(T(g)) = S_T(< h(\cdot), g(\cdot) >)$ para cada $g \in \mathcal{G}(B(\cdot), \Gamma)$. Sea $l \in (B_T)^*$ tal que $\|T(g)\|_{B_T} = |l(T(g))|$. Entonces

$$\|T(g)\|_{B_T} = |S_T(< h(\cdot), g(\cdot) >)| \leq C_{S_T} \sup_{z \in K} | < h(z), g(z) > |,$$

donde K es un compacto de D y C_{S_T} una constante positiva.

Ahora bien, es sabido que si $h \in W$ entonces, $h(z) \in (B\{z\})^*$ y $\|h(z)\|_{(B\{z\})^*} \leq \|h\|_W$ ([C-C-R-S-W-I], 3.1). De esta forma,

$$\|T(g)\|_{B_T} \leq C_{S_T}\|h\|_W \sup_{z \in K} \|g(z)\|_{B\{z\}} \leq$$
$$\leq C_{S_T}\|h\|_W \sup_{z \in K} \exp\left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log \|g(\gamma)\|_{B(\gamma)} dP_z(\gamma)\right),$$

y, así, queda demostrado el corolario. ∎

NOTA 2.16: Observemos que, al igual que hemos hecho en 2.15, siempre que un funcional analítico T y una familia $\{B(\gamma)\ ,\ \gamma \in \Gamma\}$ cumplan (27) tendremos que se cumple (D.F.).

Sin embargo, en el caso general, esta desigualdad no es consecuencia (al menos trivial) de la dualidad, puesto que el espacio dual no viene dado por clases de funciones analíticas en D, sino en $\Omega = D \setminus K$ y, puesto que estas funciones no cumplen el principio del módulo máximo no han de verificar que $h(\sigma) \in (B\{\sigma\})^*$ para cada $\sigma \in \Omega$.

Hasta ahora hemos visto que si T es de soporte finito o B_T cumple 2.14 (ii), entonces los espacios $\{B_{T,p}\ ,\ p \geq 1\}$ son todos equivalentes. Veremos ahora, que existen funcionales analíticos y familias de interpolación, para los cuales esta equivalencia no es cierta.

TEOREMA 2.17. *Sea T un funcional analítico sobre D tal que T no es de soporte finito y B_T no cumple 2.14 (ii). Entonces, existe $C \in H(D)$ tal que B_{CT} no es equivalente a $B_{CT,1}$.*

DEMOSTRACION:

Sea $l \in (B_{T,1})^*$ no idénticamente nulo. En virtud del teorema 2.4, existe $h \in \mathcal{W}$ tal que

$$(28) \qquad l(b)T(\varphi) = \int_\Sigma < h(\xi), b > \varphi(\xi) d\xi \qquad \forall b \in \mathcal{B},\ \forall \varphi \in H(D).$$

Recordemos dos cuestiones:

(a) El operador λ_b definido en 2.4 cumple que

$$(29) \qquad \lambda_b(\varphi) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \varphi(\gamma) < h(\gamma), b > d\gamma \qquad \forall \varphi \in L(b).$$

(b) Tenemos que $< h(\gamma), b >$ es límite no tangencial de la función $z < H(z), b >= l(b)h_T(z)z - F_b^*(z)$, donde F_b^* es de la clase $N^+(D)$.

Deducimos que si $C = C(0; r_1, 1)$ es una corona contenida en Ω, la función $< H(z), b > z$ está en $N^+(C)$, en el sentido de ser cociente de dos funciones de $H^\infty(C)$. Y así, o bien $| < h(\gamma), b > | = 0$ para casi todo $\gamma \in \Gamma$ o bien dicha función no se anula en un conjunto de medida positiva de Γ.

Sea ahora $C \in H^1(D)$ tal que $C(z) \neq 0$ para todo $z \in D$ y tal que $C(z) < h(z), b >$ está en $\mathcal{W}_*^1$ pero no en $\mathcal{W}$.

De (28), deducimos que $l(b)CT(\varphi) = \int_\Sigma C(\xi) < h(\xi), b > \varphi(\xi) d\xi$ para toda $\varphi \in H(D)$ y todo $b \in \mathcal{B}$. En consecuencia, 2.4 asegura que l está en el dual de B_{CT}.

Supongamos ahora que B_{CT} es equivalente a $B_{CT,1}$. De nuevo, en virtud de 2.4, existe $H_C \in \mathcal{W}$ tal que

$$(30) \qquad l(b)CT(\varphi) = \int_\Sigma \varphi(\xi) < H_C(\xi), b > d\xi \qquad \forall \varphi \in H(D),\ \forall b \in \mathcal{B}.$$

Además, si llamamos λ_b^1 al operador "λ_b" cuando l es interpretado como un elemento de $(B_{CT,1})^*$, tenemos que

$$(31) \qquad \lambda_b^1(\varphi) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \varphi(\gamma) < H_C(\gamma), b > d\gamma \qquad \varphi \in L(b).$$

En virtud de las observaciones hechas previamente, vemos que si $< h(\cdot), b > \equiv 0$ entonces $l(b) = 0$ y así, si consideramos el conjunto

$$A = \{b \in \mathcal{B} \ ; \ l(b) = 0\},$$

tenemos que, para todo $a \in A$, la función $< h(\cdot), a >$ no puede anularse en un conjunto de medida positiva de Γ. En consecuencia, dado $\varepsilon > 0$, existe un conjunto medible $A_\varepsilon \subset \Gamma$ tal que $|A_\varepsilon| \leq \varepsilon$ y $| < h(\gamma), a > |$ está acotada inferiormente por una constante positiva para casi todo $\gamma \in \Gamma \setminus A_\varepsilon$.

Sean ahora $a_1, a_2 \in A$ linealmente independientes, y sean $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbf{C}$ tal que $\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 \in A$. Puesto que las funciones

$$< h(\cdot), a_1 >, < h(\cdot), a_2 >, < h(\cdot), \alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 >, \|a_1\|_{B(\cdot)}, \|a_2\|_{B(\cdot)} \text{ y } \|\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2\|_{B(\cdot)}$$

no pueden anularse en un conjunto de medida positiva, deducimos que, dado $\varepsilon > 0$, existe un conjunto medible $E_\varepsilon \subset \Gamma$ tal que $|E_\varepsilon| \leq \varepsilon$ y tal que dichas funciones están acotadas inferiormente en $\Gamma \setminus E_\varepsilon$. También las podemos suponer acotadas superiormente en $\Gamma \setminus E_\varepsilon$.

De esta forma, las funciones

$$\frac{< H_C(\cdot), \alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 >}{< h(\cdot), \alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 >} \chi_{\Gamma \setminus E_\varepsilon},$$

$$\frac{< H_C(\cdot), a_1 >}{< h(\cdot), a_1 >} \chi_{\Gamma \setminus E_\varepsilon} \quad \text{y} \quad \frac{< H_C(\cdot), a_1 >}{< h(\cdot), a_2 >} \chi_{\Gamma \setminus E_\varepsilon}$$

están en $L(a_1) \cap L(a_2) \cap L(\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2)$. Por tanto, se cumple que, para toda $\varphi \in L^\infty(\Gamma)$,

$$\lambda_{\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2} \left(\frac{< H_C(\cdot), \alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 >}{< h(\cdot), \alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 >} \chi_{\Gamma \setminus E_\varepsilon} \varphi \right) =$$

en virtud de (29),

$$= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \varphi(\gamma) \chi_{\Gamma \setminus E_\varepsilon} < H_C(\gamma), \alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 > d\gamma =$$

en virtud de (31),

$$= \lambda^1_{\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2}(\varphi \chi_{\Gamma \setminus E_\varepsilon}) = l((\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2) \varphi \chi_{\Gamma \setminus E_\varepsilon}) = \alpha_1 l(a_1 \varphi \chi_{\Gamma \setminus E_\varepsilon}) + \alpha_2 l(a_2 \varphi \chi_{\Gamma \setminus E_\varepsilon}) =$$
$$= \alpha_1 \lambda^1_{a_1}(\varphi \chi_{\Gamma \setminus E_\varepsilon}) + \alpha_2 \lambda^1_{a_2}(\varphi \chi_{\Gamma \setminus E_\varepsilon}) =$$
$$= \alpha_1 \lambda_{a_1} \left(\frac{< H_C(\cdot), a_1 >}{< h(\cdot), a_1 >} \varphi \chi_{\Gamma \setminus E_\varepsilon} \right) + \alpha_2 \lambda_{a_2} \left(\frac{< H_C(\cdot), a_2 >}{< h(\cdot), a_2 >} \varphi \chi_{\Gamma \setminus E_\varepsilon} \right),$$

donde la última igualdad se razona como anteriormente.

Por otra parte, el primer miembro de la cadena de igualdades anterior también coincide con

$$\alpha_1\lambda_{a_1}\left(\frac{< H_C(\cdot), \alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 >}{< h(\cdot), \alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 >}\varphi\chi_{\Gamma\setminus E_\varepsilon}\right) + \alpha_2\lambda_{a_2}\left(\frac{< H_C(\cdot), \alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 >}{< h(\cdot), \alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 >}\varphi\chi_{\Gamma\setminus E_\varepsilon}\right).$$

En consecuencia, si

$$f_j = \frac{< H_C(\cdot), a_j >}{< h(\cdot), a_j >} - \frac{< H_C(\cdot), \alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 >}{< h(\cdot), \alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 >} \qquad (j = 1, 2),$$

se cumple que

$$\alpha_1\lambda_{a_1}(f_1\varphi\chi_{\Gamma\setminus E_\varepsilon}) + \alpha_2\lambda_{a_2}(f_2\varphi\chi_{\Gamma\setminus E_\varepsilon}) = l((\alpha_1 a_1 f_1 + \alpha_2 a_2 f_2)\varphi\chi_{\Gamma\setminus E_\varepsilon}) = 0$$

para toda $\varphi \in L^\infty(\Gamma)$ y así, $(\alpha_1 a_1 f_1 + \alpha_2 a_2 f_2)\chi_{\Gamma\setminus E_\varepsilon} = 0$.

Puesto que a_1, a_2, los tomamos linealmente independientes deducimos que $f_1\chi_{\Gamma\setminus E_\varepsilon} = f_2\chi_{\Gamma\setminus E_\varepsilon} = 0$ y, por tanto, cualquiera que sea $\varepsilon > 0$, existe un conjunto $E_\varepsilon \subset \Gamma$ de medida menor o igual que ε tal que

$$\frac{< H_C(\gamma), a_1 >}{< h(\gamma), a_1 >} = \frac{< H_C(\gamma), a_2 >}{< h(\gamma), a_2 >} \qquad \text{p.c.t.} \quad \gamma \in \Gamma \setminus E_\varepsilon.$$

En definitiva, obtenemos que si $a_1, a_2 \in A$ son linealmente independientes entonces

$$\frac{< H_C(\cdot), a_1 >}{< h(\cdot), a_1 >} \equiv \frac{< H_C(\cdot), a_2 >}{< h(\cdot), a_2 >}.$$

Obviamente, la misma igualdad es cierta si a_1, a_2 son linealmente dependientes. Por consiguiente, deducimos que, para todo $a \in A$, existe una función K medible en Γ tal que $< H_C(\cdot), a >= K(\cdot) < h(\cdot), a >$.

A la vista de la observación (b), si $l(b) = 0$, la función $< H(z), b >$ está en la clase $N^+(D)$ y así,

Caso 1: si cualquiera que sea $b \in \mathcal{B}$ con $l(b) = 0$, $< h(\cdot), b >= 0$ entonces, existe una función medible S sobre Γ tal que $< h(\gamma), b >= S(\gamma)l(b)$ para casi todo $\gamma \in \Gamma$ y, por las propiedades de h, deducimos que B_T cumple 2.14 (ii). Por tanto, este caso no es posible y necesariamente:

Caso 2: existe $b^* \in \mathcal{B}$ tal que $l(b^*) = 0$ y $< h(\cdot), b^* >\neq 0$.

Sea $B(z)$ los ceros de $< h(z), b^* >$ y consideremos la función

$$C_K^{b^*} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} (C(\gamma) - K(\gamma)) < h(\gamma), b > \varphi_{b^*}(\gamma) dP_z(\gamma).$$

En virtud de (28) y (30), tenemos que $C_K^{b^*}$ es analítica en D, de hecho, está en $H^1(D)$ y se cumple que

$$B(\gamma)(C(\gamma) - K(\gamma)) = \lim_{z \to \gamma(n.t)} \frac{B(z)C_K^{b^*}(z)}{< h(z), b^* > \varphi_{b^*}(z)} \qquad \text{p.c.t.} \quad \gamma \in \Gamma.$$

De modo que, para casi todo $\gamma \in \Gamma$, $B(\gamma)K(\gamma)$ es límite no tangencial de una función analítica que llamaremos $R(z)$.

Por otra parte, para todo $a \in A$, se cumple que

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} (B(\gamma)C(\gamma) - R(\gamma)) < h(\gamma), a > \varphi_a(\gamma) dP_z(\gamma)$$

es analítica en D (de nuevo, consecuencia de (28) y (30)).

En definitiva, existe una función $\phi \in H(D)$ tal que

$$\Psi_a(z) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \phi(\gamma) < h(\gamma), a > \varphi_a(\gamma) dP_z(\gamma)$$

está en $H(D)$ y, por tanto,

$$\widehat{\Psi}_a(-n) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \phi(\gamma) < h(\gamma), a > \varphi_a(\gamma) e^{in\gamma} d\gamma = 0 \qquad \forall n \in \mathbf{N}$$

En virtud de (28), deducimos que $l(a)T(\phi\varphi_a\varphi) = 0$ para toda $\varphi \in H(D)$. En consecuencia, puesto que ϕ no es idénticamente nula por la elección de C, se tiene, en virtud de (1;4.10), que T es de soporte finito; lo cual está en contradicción con la hipótesis inicial.

Esta contradicción viene de suponer que el espacio B_{CT} es equivalente a $B_{CT,1}$. ∎

§3 Reiteración.

Dados un par compatible de espacios de Banach y $0 < s, \theta_0, \theta_1 < 1$ se demuestra en ([C], 12.3) la equivalencia:

$$[A_0, A_1]_{(1-s)\theta_0+s\theta_1} \equiv [\ [A_0, A_1]_{\theta_0}, [A_0, A_1]_{\theta_1}\ ]_s,$$

bajo la suposición de densidad de $A_0 \cap A_1$ en $A_{\theta_0} \cap A_{\theta_1}$. Posteriormente en [CW] se prueba que la condición de densidad es innecesaria. La fórmula anterior es conocida como "teorema de reiteración".

Generalizando este concepto se demuestra en ([C-C-S-R-W I], 5.2) que dada la familia $\{A(\gamma)\ ,\ \gamma \in \Gamma\}$ y la familia $\{B(\sigma) = A\{\sigma\}\ ,\ \sigma \in \Sigma\}$, donde Σ es una curva cerrada que cumple determinadas propiedades, los espacios $A\{z_0\}$ y $B\{z_0\}$ son equivalentes para todo $z_0 \in int(\Sigma)$, siempre y cuando se cumpla una cierta propiedad de "densidad".

Nuestra aportación a la reiteración queda expuesta en el siguiente resultado:

TEOREMA 3.1. *Sea $\{A(\gamma)\ ,\ \gamma \in \Gamma\}$, una familia de interpolación con espacio log-interseción $\mathcal{A}$. Sea Ω un dominio simplemente conexo cuya clausura está contenida en D, y sea Σ, frontera de Ω, una curva cerrada simple rectificable.*

Para cada $\sigma \in \Sigma$, definimos $B(\sigma) = A\{\sigma\} = A_{\delta_\sigma}$. Supongamos que $\mathcal{A}$ es denso en $\cap_{\sigma\in\Sigma} B(\sigma)$ en el sentido siguiente: para todo $b \in \cap_{\sigma\in\Sigma} B(\sigma)$ existe una sucesión $(a_n)_n$ en $\mathcal{A}$ tal que

$$\lim_n \int_\Sigma \|a_n - b\|_{B(\sigma)} d\mu_z(\sigma) = 0 \qquad \forall z \in \Omega, \tag{32}$$

donde $d\mu_z(\sigma)$ es la medida harmónica sobre Σ en $z \in \Omega$.

Supongamos que existe un espacio de Banach V que contiene a $B(\sigma)$ para todo $\sigma \in \Sigma$ y una función $K(\cdot)$ medible sobre Σ cuyo logaritmo es integrable y tal que, para cada $b \in \cap_{\sigma\in\Sigma} B(\sigma)$, $\|b\|_V \leq K(\sigma)\|b\|_{B(\sigma)}$. Con estas hipótesis se cumple:

(a) *$\{B(\sigma)\ ,\ \sigma \in \Sigma\}$ es familia de interpolación sobre Σ.*

(b) *Para todo funcional analítico T sobre Ω tal que T es de soporte finito o tal que "A_T cumple 2.14 (ii)", se verifica que A_T y B_T son espacios equivalentes.*

DEMOSTRACION:

(a) Demostrado en ([C-C-R-S-W I], 5.2).

(b) Puesto que $\mathcal{A} \subset \mathcal{B}$ es claro que, cualquiera que sea $f \in \mathcal{G}(A(\cdot), \Gamma)$, la función f restringida a $\Omega \cup \Sigma$ es una función de $\mathcal{G}(B(\cdot), \Sigma)$ y además, $\|f\|_{\mathcal{G}(B(\cdot),\Sigma)} \leq \|f\|_{\mathcal{G}(A(\cdot),\Gamma)}$. Consecuentemente, para cada $a \in \mathcal{A}$, $\|a\|_{B_T} \leq \|a\|_{A_T}$.

Para demostrar la desigualdad contraria veamos, en primer lugar, que, cualquiera que sea la función $g = \sum_{j=0}^{m} \varphi_j a_j$, donde $a_j \in \mathcal{A}$ y $\varphi_j \in N^+(\Omega)$ $(0 \leq j \leq m)$ (g no necesariamente en $\mathcal{G}(B(\cdot), \Sigma)$) y, para cada $T \in H'(\Omega)$, existe una constante C_T tal que

$$\|T(g)\|_{A_T} \leq C_T \sup_{z \in K} \exp\left(\int_{\Sigma} \log \|g(\sigma)\|_{B(\sigma)} d\mu_z(\sigma)\right), \tag{33}$$

con K un compacto contenido en Ω.

Sea $l \in (A_T)^*$ tal que $|l(T(g))| = \|T(g)\|_{A_T}$. Sabemos que, en las hipótesis del teorema, dado $\varepsilon > 0$, existe $h \in W$ y un funcional analítico S_T tal que, para toda $\varphi \in H(D)$ y, a fortiori, para toda $\varphi \in H(\Omega)$,

$$S_T(< h(z), \cdot > \varphi(z)) = l(\cdot)T(\varphi) \qquad \text{y} \qquad \|h\|_W \leq \|l\|_{(A_T)^*} + \varepsilon = 1 + \varepsilon$$

La función escalar $< h(\xi), g(\xi) >= \sum_{j=0}^{m} \varphi_j(\xi) < h(\xi), a_j >$ está en $N^+(\Omega)$ puesto que $< h(\xi), a_j >\in N^+(D) \subset H^\infty(\Omega)$ para todo $0 \leq j \leq m$.

Además, si $h \in W$, $h(\sigma) \in (B(\sigma))^*$ con norma menor o igual que $\|l\|_{(A_T)^*} + \varepsilon$ y así, existe $K_{S_T} > 0$ tal que

$$\begin{aligned}
\|T(g)\|_{A_T} &= |S_T(< h(z), g(z) >)| \leq K_{S_T} \sup_{z \in K} \exp\left(\int_{\Sigma} \log | < H(\sigma), g(\sigma) > | d\mu_z(\sigma)\right) \leq \\
&\leq K_{S_T} \sup_{z \in K} \exp\left(\int_{\Sigma} \log \left((\|l\|_{(A_T)^*} + \varepsilon)\|g(\sigma)\|_{B(\sigma)}\right) d\mu_z(\sigma)\right) = \\
&= K_{S_T}(\|l\|_{(A_T)^*} + \varepsilon) \sup_{z \in K} \exp\left(\int_{\Sigma} \log \|g(\sigma)\|_{B(\sigma)} d\mu_z(\sigma)\right)
\end{aligned}$$

tal y como queríamos probar.

Prosigamos con la demostración del teorema. Para cada $a \in \mathcal{A}$ y para cada $\epsilon > 0$, sea $g = \sum_{j=1}^{N} \varphi_j b_j \in \mathcal{G}(B(\cdot), \Sigma)$ tal que $\varphi_j \in H^\infty(\Omega)$, $T(g) = a$ y $\|g\|_{G(B(\cdot),\Sigma)} \leq \|a\|_{B_T} + \varepsilon$. Observemos que g puede ser elegida de esta forma en virtud de la proposición (1;3.11).

En virtud de (32), podemos elegir $a_j \in \mathcal{A}$ tales que

$$\int_{\Sigma} \|b_j - a_j\|_{B(\sigma)} d\sigma \leq \frac{\varepsilon}{N\|\varphi_j\|_\infty} \qquad (0 \leq j \leq N).$$

Consideremos $G(\xi) = \sum_{j=1}^{N} (\varphi_j(\xi) - \phi(\xi)T(\varphi_j))a_j + \phi(\xi)a$ tal que $T(\phi) = 1$. Puesto que todos los coeficientes a_j y a de $G(\xi)$ están en $\mathcal{A}$, si combinamos (33) con la desigualdad de Jensen, obtenemos que

$$\|T(g)\|_{A_T} = \|a\|_{A_T} = \|T(G)\|_{A_T} \leq C_T \sup_{z \in K} \int_{\Sigma} \|G(\sigma)\|_{B(\sigma)} d\mu_z(\sigma).$$

Puesto que $G(\sigma) = g(\sigma) - \sum_{j=1}^{N} (\varphi_j(\sigma) - \phi(\sigma)T(\varphi_j))(b_j - a_j)$ la integral anterior, está dominada por $\|g\|_{\mathcal{G}} + \sum_{j=1}^{N} (\|\varphi_j\|_\infty + \|\phi\|_\infty \|T\|_\infty \|\varphi_j\|_\infty) \int_\Sigma \|b_j - a_j\|_{B(\sigma)} d\mu_z(\sigma)$ y en consecuencia, existe una constante C_T^* tal que $\|a\|_{A_T} \leq C_T^*(\|a\|_{B_T} + \varepsilon + (1 + \|\phi\|_\infty \|T\|_\infty)\varepsilon)$ para todo $\varepsilon > 0$. Si hacemos tender ε a cero obtenemos que, para todo $a \in \mathcal{A}$,

$$\|a\|_{A_T} \leq C_T^* \|a\|_{B_T}.$$

Finalmente, si vemos que $\mathcal{A}$ es denso en $\mathcal{B}$ con la norma $\|\cdot\|_{B_T}$ tendremos que $\overline{\mathcal{A}}^{B_T} = \overline{\mathcal{B}}^{B_T} = B_T$. Pero puesto que anteriormente hemos probado que $\overline{\mathcal{A}}^{B_T} \equiv \overline{\mathcal{A}}^{A_T} = A_T$ tendremos que $A_T \equiv B_T$ como queremos demostrar.

Sea, pues, $b \in \mathcal{B}$ y sea $f = \sum_{j=1}^{N} \varphi_j b_j$ en $G(B(\cdot), \Sigma)$ tal que $T(f) = b$. Tomemos $\{a_j \in \mathcal{A}\ ,\ 0 \leq j \leq N\}$ tales que

$$\int_{\Sigma} \|b_j - a_j\|_{B(\sigma)} d\sigma \leq \frac{\varepsilon}{N} \|\varphi_j\|_\infty.$$

Si llamamos $g = \sum_{j=1}^{N} \varphi_j a_j$, tenemos que existe $C_T^{**} > 0$ tal que

$$\|T(f) - T(g)\|_{B_T} = \|b - T(g)\|_{B_T} \overset{D.F.}{\leq} C_T \sup_{z \in K} \exp\left(\int_{\Sigma} \log \|f(\sigma) - g(\sigma)\|_{B(\sigma)} d\mu_z(\sigma)\right)$$
$$\leq C_T^{**} \int_{\Sigma} \sum_{j=1}^{N} \|\varphi_j\|_\infty \|b_j - a_j\|_{B(\sigma)} d\sigma \leq C_T^{**} \varepsilon$$

y puesto que $T(g) \in \mathcal{A}$, queda probada la densidad buscada. ∎

Capítulo III

Interpolación para un par compatible de espacios de Banach.

Dados un par de interpolación (A_0, A_1), los espacios $\mathcal{F}(A_0, A_1)$ y $\mathcal{F}'(A_0, A_1)$ de funciones analíticas con valores en $A_0 + A_1$, definidos en la introducción, y un funcional analítico T en la banda Ω, se introducen en [S] (véase también [L I]) los siguientes espacios:

(a) $[A_0, A_1]_T = \{x \in A_0 + A_1 \ ; \ \exists f \in \mathcal{F}(A_0, A_1) \text{ tal que } T(f) \overset{(a)}{=} x\}$.

(b) $[A_0, A_1]^T = \{x \in A_0 + A_1 \ ; \ \exists f \in \mathcal{F}(A_0, A_1) \text{ tal que } fT \overset{(b)}{=} xT\}$.

(c) $[A_0, A_1]'_T = \{x \in A_0 + A_1 \ ; \ \exists f \in \mathcal{F}'(A_0, A_1) \text{ tal que } T(f') \overset{(c)}{=} x\}$.

(d) $[A_0, A_1]'^{,T} = \{x \in A_0 + A_1 \ ; \ \exists f \in \mathcal{F}'(A_0, A_1) \text{ tal que } f'T \overset{(d)}{=} xT\}$.

Dotados de la norma

$$\|x\|_{(j)} = \inf\{\|f\|_{\mathcal{F}_j} \ ; \ f \text{ cumple } (j)\},$$

siendo $\mathcal{F}_j$ el espacio $\mathcal{F}$, $\mathcal{F}'$ correspondiente en cada caso y $j = a, b, c, d$.

Supondremos siempre que $A_0 \cap A_1$ es denso tanto en A_0 como en A_1.

En [S] la condición

$$\lim_{t \to \pm\infty} f(j + it) = 0 \qquad j = 0, 1$$

de la definición del espacio $\mathcal{F}(A_0, A_1)$ está sustituida por la condición más débil de continuidad sobre los conjuntos acotados de $\overline{\Omega}$ y acotación. Denotaremos a este espacio por $\mathcal{F}_b(A_0, A_1)$.

Sin embargo, los correspondientes espacios intermedios (a) y (b), cuando T es de soporte finito, son equivalentes ([S], 2.17).

Nosotros trabajaremos con el espacio $\mathcal{F}(A_0, A_1)$ salvo cuando el funcional analítico sea de soporte finito. En este caso emplearemos ambos espacios indistintamente.

La primera de las dos secciones de que consta este capítulo hace referencia al espacio dual de $[A_0, A_1]_T$.

A fin de poder utilizar los resultados de la dualidad del capítulo anterior, definiremos, vía transformación conforme, un nuevo espacio $\mathcal{F}(A_0, A_1; D)$ de funciones analíticas en D con valores en $A_0 + A_1$, isométrico al espacio $\mathcal{F}(A_0, A_1)$.

Denotaremos por $\mu_0(\xi, t)$ y $\mu_1(\xi, t)$ el núcleo de Poison en la banda Ω. Es obtenido del núcleo de Poison en D por transformación conforme. Explícitamente, sobre los bordes $Re(\xi) = 0$ y $Re(\xi) = 1$ son respectivamente:

$$\mu_0(\xi,t) = \frac{e^{-\pi(t-y)} sen\ \pi x}{sen^2\ \pi x + (cos\ \pi x - e^{-\pi(t-y)})^2}, \qquad \xi = x + iy \quad \text{y}$$
$$\mu_1(\xi,t) = \frac{e^{-\pi(t-y)} sen\ \pi x}{sen^2\ \pi x + (cos\ \pi x + e^{-\pi(t-y)})^2}, \qquad \xi = x + iy.$$

En la segunda sección obtendremos resultados que relacionan la interpolación de un par compatible de espacios de Banach con la interpolación de familias. Hace referencia al siguiente resultado:

TEOREMA ([C-C-R-S-W I], 5.1).

Sea $\alpha(\cdot)$ una función medible sobre Γ con $0 \leq \alpha(\gamma) \leq 1$ para todo $\gamma \in \Gamma$. Sean (A_0, A_1) un par de interpolación y sea $A(\gamma) = [A_0, A_1]_{\alpha(\gamma)}$ para todo $\gamma \in \Gamma$.

Se cumple que $\{A(\gamma)\ ,\ \gamma \in \Gamma\}$ es una familia de interpolación y, para cada $z \in D$, $A[z] = [A_0, A_1]_{\alpha(z)}$ con igualdad de normas, donde $\alpha(z) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \alpha(\gamma) dP_z(\gamma)$. Más aún, si $\alpha(\cdot)$ alcanza los valores $\sup_{\gamma\in\Gamma} \alpha(\gamma)$ e $\inf_{\gamma\in\Gamma} \alpha(\gamma)$ entonces $A\{z\} = A[z]$.

Los resultados obtenidos en esta sección serán de gran utilidad, en los próximos capítulos, para la identificación de espacios concretos de interpolación.

§1 Espacio dual de $[\mathbf{A}_0, \mathbf{A}_1]_{\mathbf{T}}$.

Sea $\Gamma^+ = \{z \in \Gamma\ ;\ \text{img}(z) > 0\}$ y $\Gamma^- = \Gamma \setminus \Gamma^+$. Llamaremos $C : D \longrightarrow \Omega$ a la transformación conforme que lleva Γ^+ a la recta $x = 0$ y tal que $C(1) = +\infty$.

Consideremos el operador L definido en $\mathcal{F}(A_0, A_1)$ por $L(f) = f \circ C$ y denotemos por $\mathcal{F}(A_0, A_1; D)$ al espacio $L(\mathcal{F}(A_0, A_1))$ dotado de la norma

$$\|h\|_{\mathcal{F}(A_0,A_1;D)} = \|h \circ C^{-1}\|_{\mathcal{F}(A_0,A_1)}.$$

Es claro que este espacio está formado por las funciones f analíticas en D con valores en $A_0 + A_1$ tales que :

(i) $f \in C(\overline{D}; A_0 + A_1)$.

(ii) $f(1) = f(-1) = 0$.

(iii) $f_{/\Gamma^+} : \Gamma^+ \longrightarrow A_0$ y $f_{/\Gamma^-} : \Gamma^- \longrightarrow A_1$ son continuas,

dotado de la norma $\|f\|_{\mathcal{F}(A_0,A_1;D)} = \max(\sup_{\theta\in\Gamma^+} \|f(\theta)\|_{A_0} \ , \ \sup_{\theta\in\Gamma^-} \|f(\theta)\|_{A_1})$.

Puesto que el espacio

$$\mathcal{G}(A_0, A_1) = \{g = \sum_j \varphi_j a_j \ ; \ a_j \in A_0 \cap A_1 \ , \ \varphi_j \in H(\Omega) \cap C(\overline{\Omega}) \ , \ \varphi_j(\pm\infty) = 0\}$$

es denso en $\mathcal{F}(A_0, A_1)$ ([C], 9.2),

$$\begin{aligned} L^{-1}(\mathcal{G}(A_0, A_1)) &= \mathcal{G}(A_0, A_1; D) = \\ &= \{g = \sum_j \varphi_j a_j \ ; \ a_j \in A_0 \cap A_1 \ , \ \varphi_j \in A(D) \ , \ \varphi_j(1) = \varphi_j(-1) = 0\} \end{aligned}$$

es denso en $\mathcal{F}(A_0, A_1; D)$.

Mientras no se indique lo contrario T será un funcional analítico en Ω y S, definido por $S(\varphi) = T(\varphi \circ C^{-1})$, obviamente un funcional analítico en D.

Definimos el espacio

$$[A_0, A_1]_{S,D} = \{x \in A_0 + A_1 \ ; \ \exists f \in \mathcal{F}(A_0, A_1; D) \text{ con } S(f) = x\}.$$

Es trivial ver que este espacio coincide con $[A_0, A_1]_T$.

Análogamente, podemos definir nuevos espacios estrechamente relacionados con nuestros espacios A_T y $A_{T,T}$ de la siguiente manera: puesto que si $a \in A_0 \cap A_1$, existen g, $h \in \mathcal{G}(A_0, A_1; D)$ tales que $S(g) = a$ y $hS = aS$, tiene sentido considerar los espacios $\{A_0, A_1\}_{S,D}$ y $\{A_0, A_1\}^{S,D}$ completados de $A_0 \cap A_1$ respecto de las normas

$$\begin{aligned} \|a\|_{\{A_0,A_1\}_{S,D}} &= \inf\{\|g\|_{\mathcal{G}} \ ; \ S(g) = a \ , \ g \in \mathcal{G}(A_0, A_1; D)\} \quad \text{y} \\ \|a\|_{\{A_0,A_1\}^{S,D}} &= \inf\{\|g\|_{\mathcal{G}} \ ; \ gS = aS \ , \ g \in \mathcal{G}(A_0, A_1; D)\} \end{aligned}$$

respectivamente.

Si $S = \delta_{z_0}$, los espacios $[A_0, A_1]_{z_0}$ y $\{A_0, A_1\}_{z_0}$ coinciden en virtud del siguiente lema:

LEMA ([ST], 2.5).

Cualesquiera que sean $a \in A_0 \cap A_1$ y $z_0 \in D$, se cumple que

$$\|a\|_{[A_0,A_1]_{z_0}} = \inf\{\|g\|_{\mathcal{G}} \ ; \ g \in \mathcal{G}(A_0, A_1) \ , \ g(z_0) = a\}.$$

Sin embargo, vamos a probar, usando dualidad, que en general estos espacios no son equivalentes para $S \in H'(\Omega)$ arbitrario (véase 1.3).

En primer lugar observemos que si $\{A(\gamma) \ , \ \gamma \in \Gamma\}$ es la familia de interpolación con espacio contenedor $A_0 + A_1$ y espacio log-intersección $A_0 \cap A_1$ definida por

$$A(\gamma) = A_0 \qquad \text{si } \gamma \in \Gamma^+,$$

$$A(\gamma) = A_1 \qquad \text{si } \gamma \in \Gamma^-,$$

y $A^+_{S,*}$ y A^+_S son los espacios definidos en (2;2.2) ($p = +\infty$), se verifica el siguiente resultado.

PROPOSICION 1.1.

(a) *El espacio $A^+_{S,*}$ está contenido continuamente en el espacio dual de $\{A_0, A_1\}_T$.*

(b) *El espacio dual de $\{A_0, A_1\}_T$ está contenido continuamente en el espacio A^+_S.*

DEMOSTRACION:

Enteramente análoga a la realizada al calcular el dual de B_T (2;2.4,2.5). Sin embargo, el hecho de que en este caso las funciones φ_j, tales que $\sum' \varphi_j b_j \in \mathcal{G}(A_0, A_1; D)$, sean continuas en Γ simplifica la demostración pues, en estas condiciones, el espacio $L(b)$, allí definido, coincide con

$$L(b) = \{\varphi : \Gamma \longrightarrow \mathbf{C} \ \text{ continua} \ ; \ \sup \text{ es}_{\gamma\in\Gamma} |\varphi(\gamma)| \ \|b\|_{A(\gamma)} < +\infty\} =$$

$$= \{\varphi : \Gamma \longrightarrow \mathbf{C} \ ; \ \varphi \text{ es continua}\}$$

y así, para cada $l \in (\{A_0, A_1\}_T)^* = (\{A_0, A_1\}_{S,D})^*$, existe una medida μ_b sobre Γ tal que $\lambda_b(\varphi) = l(b\varphi\varphi_b) = \int_\Gamma \varphi(\gamma) d\mu_b(\gamma)$, para toda φ continua en Γ.

Se cumple que existe una función $h_b \in L^1(\Gamma)$ y una medida ν_b singular respecto de $d\gamma$ tal que $d\mu_b = h_b \frac{d\gamma}{2\pi} + d\nu_b$.

Puesto que

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} l(b)\varphi_b(\gamma) h_S(\gamma) e^{i\gamma} dP_z(\gamma) - \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} P_z(\gamma) d\mu_b(\gamma)$$

es una función analítica, si definimos

$$\mu_b^*(E) = \int_E l(b)\varphi_b(\gamma)h_S(\gamma)e^{i\gamma}d\gamma \qquad E \subset \Gamma \text{ medible},$$

tenemos que $(\mu_b^* - \mu_b)^\frown(-n) = 0$, para todo $n \in \mathbf{N} \cup \{0\}$.

El teorema F. M. Riesz ([DO], Th. 6.14) asegura entonces que $\mu_b^* - \mu_b$ es absolutamente continua y, por tanto, $\nu_b = 0$

En definitiva,

$$l(b\varphi\varphi_b) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \varphi(\gamma)h_b(\gamma)d\gamma.$$

Con un razonamiento análogo al empleado en (2;2.4) obtenemos el resultado deseado. ∎

En virtud del resultado anterior, es fácilmente deducible que si T es de soporte finito, $\{A_0, A_1\}_T = \{A_0, A_1\}_{S,D} \equiv A_S$.

Para estudiar la dualidad en ([S], 2.13), si $l \in [A_0, A_1]_T^*$ con T de soporte finito, se hace uso de la igualdad:

$$(1) \qquad l(T(f)) = -i\sum_{j=0}^{1}\int_{-\infty}^{+\infty} T(\mu_j(\cdot,t)) < f(j+it), dg(j+it) >= T(< g'(\xi), f(\xi) >).$$

para una cierta $g \in \mathcal{F}'(A_0^*, A_1^*)$.

Puesto que $g(\xi) \in A_0^* + A_1^* = (A_0 \cap A_1)^*$, actúa sobre los elementos de $A_0 \cap A_1$ y, por consiguiente, dicha igualdad es válida para toda $f \in \mathcal{G}(A_0, A_1)$. Se deduce que toda función $g \in \mathcal{F}'(A_0^*, A_1^*)$ origina un funcional sobre $\{A_0, A_1\}_T$ y recíprocamente, todo funcional sobre este espacio viene determinado por una función del tipo mencionado.

Sin embargo, $f(\xi) \in A_0 + A_1$ si $f \in \mathcal{F}(A_0, A_1)$ y, en principio, no tiene sentido hablar de la función $< g'(\xi), f(\xi) >$.

Ahora bien, si $f \in \mathcal{F}(A_0, A_1)$, existe $(g_n)_n \subset \mathcal{G}(A_0, A_1)$ tal que $f = \mathcal{F} - \lim_n g_n$ y, para toda $h \in \mathcal{F}'(A_0^*, A_1^*)$, se tiene

$$| < h'(\xi), g_n(\xi) > | \leq \|h\|_{\mathcal{F}'}\|g_n\|_{\mathcal{F}} \qquad \forall \xi \in \Omega.$$

De esta forma, tiene sentido considerar la función (h', f) definida por

$$(h', f)(\xi) = \lim_n < h'(\xi), g_n(\xi) > \qquad \forall \xi \in \Omega.$$

Diremos que $h \in \mathcal{F}'(A_0, A_1; T)$ si $h \in \mathcal{F}'(A_0, A_1)$ y $T((h', f)) = 0$ cualquiera que sea $f \in \mathcal{F}(A_0, A_1)$ tal que $T(f) = 0$.

PROPOSICION 1.2. *Sea T de soporte finito.*

(a) *El espacio dual de $\{A_0, A_1\}_T$ es equivalente al espacio $[A_0^*, A_1^*]^{\prime,T}$.*

(b) *El espacio dual de $[A_0, A_1]_T$ es equivalente al espacio*

$$[A_0, A_1]_*^{\prime,T} = \{x \in A_0^* + A_1^* \ ; \ \exists h \in \mathcal{F}'(A_0^*, A_1^*, T) \text{ con } h'T = xT\}$$

dotado de la norma $\|x\|_*^{\prime T} = \inf\{\|h\|_{\mathcal{F}'} \ ; \ h \in \mathcal{F}' \text{ y } h'T = xT\}$.

DEMOSTRACION:

(a) Si T es de soporte finito, también lo es el de S y así, en virtud de (2;2.11) y la equivalencia $\{A_0, A_1\}_T \equiv A_S$, mencionada anteriormente, si $l \in (\{A_0, A_1\}_T)^*$, existe $h \in W(A(\cdot), \Gamma)$ tal que

$$l(b)S(\varphi) = S^*(< h(z), b > \varphi) \qquad \forall b \in A_0 \cap A_1, \ \forall \varphi \in H(D),$$

donde $h_{S^*} = 1/Q_S$ si $h_S = P_S/Q_S$.

Sea $H = h \circ C$, se cumplen:

(i) $H \in H^\infty(\Omega; A_0 + A_1)$.

(ii) $H : \Omega \longrightarrow (A_0 \cap A_1)^*$.

(iii) $\lim_{\xi \to j+it(n.t)} | < H(\xi), b > | \leq \|h\|_W \|b\|_{A_j} \qquad \forall b \in A_0 \cap A_1, \ j = 0, 1.$

Por tanto, H no pertenece a $\mathcal{F}_b(A_0^*, A_1^*)$ a falta de la continuidad sobre conjuntos acotados de $\overline{\Omega}$.

Sin embargo, si definimos

$$\text{(2)} \qquad \begin{aligned} H^*(\xi) &= \int_\alpha^\xi H(\lambda) d\lambda \qquad \forall \xi \in \Omega \ , \ 0 < \alpha < 1, \\ H^*(j + it) &= \lim_{\xi \to j+it(\xi \in \Omega)} H^*(\xi), \end{aligned}$$

se cumplen las siguientes condiciones:

(a) H está bien definida: si $\xi \in \Omega$, la integral es independiente del camino que une α con ξ en virtud de la analiticidad de H en Ω.

Si $(\xi_n)_n$ es convergente a $j + it$ se tiene que, para todo $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbf{N}$ tal que si $n, m \geq n_0$

$$\|H^*(\xi_n) - H^*(\xi_m)\|_{A_0^* + A_1^*} = \| \int_{\xi_n}^{\xi_m} H(\lambda) d\lambda \|_{A_0^* + A_1^*} \leq \|H\|_\infty |\xi_n - \xi_m| \leq \varepsilon,$$

de modo que no sólo existe el límite (2), si no que además es independiente de la sucesión $(\xi_n)_n$ elegida.

(b) $H^* \in H(\Omega; A_0^* + A_1^*)$.

(c) H^* es continua sobre conjuntos acotados de $\overline{\Omega}$: sean t_1, t_2, tales que $|t_1 - t_2| < \delta = \varepsilon/\|H\|_\infty$. Sean $(\xi_n^1)_n$ y $(\xi_n^2)_n$, dos sucesiones en Ω, tales que $\lim_n \xi_n^j = it_j$ con $j = 1, 2$.

Se tiene que

$$\|H^*(it_1) - H^*(it_2)\|_{A_0^*+A_1^*} = \lim_n \|H^*(\xi_n^1) - H^*(\xi_n^2)\|_{A_0^*+A_1^*} =$$
$$= \lim_n \| \int_{\xi_n^1}^{\xi_n^2} H(\lambda) d\lambda \|_{A_0^*+A_1^*} \leq$$
$$\leq \|H\|_\infty \lim_n |\xi_n^1 - \xi_n^2| = \|H\|_\infty |t_1 - t_2| \leq \|H\|_\infty \delta = \varepsilon.$$

Análogamente en la recta $x = 1$.

(d) $H^*(j + it_1) - H^*(j + it_2) \in A_j^*$ para $j = 0, 1$ y $t_1, t_2 \in \mathbf{R}$: supongamos $j = 0$. Sabemos que $\lim_{z \to \gamma(n.t)\gamma \in \Gamma^+} | < h(z), b > | \leq \|h\|_W \|b\|_{A_0}$ para casi todo $\gamma \in \Gamma$ y, por tanto, si $A \subset D$ es un sector con vértice en $e^{i\gamma}$ tenemos que, dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que si $|z - e^{i\gamma}| < \delta$, $(z \in A)$, $| < h(z), b > | \leq \|h\|_W \|b\|_{A_0} + \varepsilon$.

En consecuencia, si tomamos $\xi_n^1 = \beta_n^1 + it_1$ y $\xi_n^2 = \beta_n^2 + it_2$ con $\lim_n \beta_n^j = 0$ $(j = 1,\ 2)$, se tiene que para cada $b \in\ A_0 \cap A_1$,

$$| < H^*(it_1) - H^*(it_2), b > | = \lim_n | \int_{\xi_n^1}^{\xi_n^2} < H(\lambda), b > d\lambda | \leq$$
$$\leq \lim_n \int_{\xi_n^1}^{\xi_n^2} | < H(\lambda), b > | \, d|\lambda| \leq \|h\|_W \|b\|_{A_0} |t_1 - t_2|.$$

y así, $H^*(it_1) - H^*(it_2) \in A_0^*$. Análogamente $H^*(1 + it_1) - H^*(1 + it_2) \in A_1^*$ y además,

$$\frac{\|H^*(j + it_1) - H^*(j + it_2)\|_{A_j^*}}{|t_1 - t_2|} \leq \|h\|_W \qquad j = 0, 1$$

En definitiva, $H^* \in \mathcal{F}'(A_0^*, A_1^*)$. Puesto que $(H^*)'(\xi) = H(\xi) = (h \circ C)(\xi)$ y $l(b)S(\varphi) = S^*(< h(z), b > \varphi)$ tenemos que, para cada $\varphi \in H(D)$,

$$l(b)T(\varphi \circ C) = T^*(< h \circ C, b > \varphi \circ C) \qquad \forall b \in A_0 \cap A_1,$$

con T^* el funcional analítico sobre Ω definido por $T^*(\varphi) = S^*(\varphi \circ C^{-1})$. Deducimos, pues, que

$$l(b)T(\varphi) = T^*(< H, b > \varphi) = T^*(< (H^*)', b > \varphi) \qquad \forall \varphi \in H(\Omega).$$

Observemos finalmente que si $T = \delta_\theta^{n)}$, $T = T^*$ y, por consiguiente, la condición anterior se traduce en $x \in [A_0^*, A_1^*]^{\prime,T}$. En virtud de (1;5.7), obtenemos el mismo resultado para T de soporte finito.

(b) Sea $l \in ([A_0, A_1]_T)^*$. Es claro que $l \in (\{A_0, A_1\}_T)^*$ con $\|l\|_{(\{A_0,A_1\}_T)^*} \leq \|l\|_{([A_0,A_1]_T)^*}$ y, por tanto, existe $h \in \mathcal{F}'(A_0^*, A_1^*)$ tal que $< h', x > T = l(x)T$ para todo $x \in A_0 \cap A_1$. Es más, en virtud de (1), tenemos que si $x \in A_0 \cap A_1$,

$$\begin{aligned} l(x) &= -i \sum_{j=0}^{1} \int_{-\infty}^{+\infty} T(\mu_j(\cdot, t)) < f(j+it), dh(j+it) >= \\ &= -i \lim_n \sum_{j=0}^{1} \int_{-\infty}^{+\infty} T(\mu_j(\cdot, t)) < g_n(j+it), dh(j+it) >= \\ &= \lim_n T(< g_n(\cdot), h'(\cdot) >) = T((h', f)(\cdot)) \end{aligned}$$

para toda f tal que $T(f) = x$.

Resulta de la igualdad anterior que si $0 = x = T(f)$, $T((h', f)) = 0$ y, por tanto, $h \in \mathcal{F}'(A_0^*, A_1^*; T)$.

El recíproco es totalmente análogo al de la proposición (2;2.7) extendiendo l a $[A_0, A_1]_T$ mediante $l(T(f)) = T((h', f))$. ∎

Se deduce de la proposición anterior, aplicada al caso $T = \delta'_{z_0}$, que si $\{A_0, A_1\}_{\delta'_{z_0}}$ y $[A_0, A_1]_{\delta'_{z_0}}$ fuesen equivalentes también lo serían su duales, de modo que la condición adicional impuesta a las funciones $h \in \mathcal{F}'(A_0^*, A_1^*)$ sería superflua.

En consecuencia, tendríamos que para toda $h \in \mathcal{F}'(A_0^*, A_1^*)$ tal que $< h', x > \delta'_{z_0} = l(x)\delta'_{z_0}$ para todo $x \in A_0 \cap A_1$, se cumpliría $(h', f)'(z_0) = 0$ siempre que $f'(z_0) = 0$.

Veamos que ésto no ocurre.

EJEMPLO 1.3: Sea $A_0 = (l^2 \, ; \, \frac{1}{n^2}) = \{(x_n)_n \, ; \, \sum_n \frac{|x_n|^2}{n^2} < +\infty\}$ y $A_1 = (l^2 \, ; \, \frac{1}{2^n})$. A_0 y A_1 son espacios de Hilbert y así $A_j^* \equiv A_j$ $(j = 0, 1)$. Llamemos

$$f(z) = (x_n(z))_n = \left(n^{4(z-\frac{1}{2})^3 + 6(z-\frac{1}{2})^2 - 1}\right)_n.$$

Se cumplen:

(1) $f \in H(\Omega; A_0 + A_1))$ y es continua sobre los conjuntos acotados de $\overline{\Omega}$.

(2) $f(it) = (n^{4(it-\frac{1}{2})^3+6(it-\frac{1}{2})^2-1})_n$. Un sencillo cálculo prueba que la parte real del exponente es cero, de modo que

$$\|f(it)\|_{A_0} = \left(\sum_n \frac{|x_n(it)|^2}{n^2}\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\sum_n \frac{1}{n^2}\right)^{\frac{1}{2}} < +\infty.$$

Esto es, $f(it) \in A_0$ y, para todo $t \in \mathbf{R}$, existe k tal que $\|f(it)\|_{A_0} \leq k$.

(1) $|x_n(1+it)| = n^{Re(4(\frac{1}{2}+it)^3+6(\frac{1}{2}+it)^2-1)} = n^{1-\frac{15}{2}t^2}$ y así, $|x_n(1+it)| \leq n$. Luego

$$\|f(1+it)\|_{A_1} = \left(\sum_n \frac{|x_n(1+it)|^2}{2^n}\right)^{\frac{1}{2}} \leq \left(\sum_n \frac{n^2}{2^n}\right)^{\frac{1}{2}} < +\infty$$

y, por tanto, $f(1+it) \in A_1$ y $\sup_t \|f(1+it)\|_{A_1} < +\infty$.

De las condiciones previas deducimos que $f \in \mathcal{F}_b(A_0, A_1) \equiv \mathcal{F}_b(A_0^*, A_1^*)$.

(4) Un cálculo trivial prueba que $x_n'(\frac{1}{2}) = 0$, de modo que $f'(\frac{1}{2}) = 0$.

Por otra parte, para toda $h \in \mathcal{F}_b(A_0, A_1)$, se cumple que $H_h(\xi) = \int_0^\xi h(z)dz$ (integral a lo largo de un camino que une 0 con ξ) está en $\mathcal{F}'(A_0, A_1)$ y además, $H_h'(\xi) = h(\xi)$. En consecuencia, si $h \in \mathcal{F}_b(A_0^*, A_1^*)$ y $h'(z_0) = 0$, $H_h''(z_0) = 0$ y, por tanto, cualesquiera que sean $x \in A_0 \cap A_1$ y $\varphi \in H(D)$,

$$(< H_h', x > \delta_{z_0}')(\varphi) =< H_h'(z_0), x > \varphi'(z_0) + \frac{d(< H_h', x >)}{dz}\Big|_{z_0}\varphi(z_0) =$$
$$=< H_h'(z_0), x > \delta_{z_0}'(\varphi).$$

Obtenemos, de esta forma, que si $h \in \mathcal{F}(A_0^*, A_1^*)$ y $h'(z_0) = 0$, entonces $h(z_0)$ está en $[A_0^*, A_1^*]^{\prime,\delta_{z_0}'}$.

Si consideramos en nuestro ejemplo $h = H_f \in \mathcal{F}'(A_0^*, A_1^*)$, tenemos que

$$(h', f)'(\frac{1}{2}) = (f, f)'(\frac{1}{2}) =$$
$$= \int_{-\infty}^{+\infty} < f(it), f(it) > (\mu_0(\cdot, t))_{\frac{1}{2}}' dt + \int_{-\infty}^{+\infty} < f(1+it), f(1+it) > (\mu_1(\cdot, t))_{\frac{1}{2}}' dt$$
$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \sum_n \frac{1}{n^2}(\mu_0(\cdot, t))_{\frac{1}{2}}' dt + \int_{-\infty}^{+\infty} \sum_n \frac{n^{2-15t^2}}{2^n}(\mu_1(\cdot, t))_{\frac{1}{2}}' dt = -\frac{\pi^2}{6} + B.$$

Si $B - \frac{\pi^2}{6} \neq 0$, habremos acabado, pues $(f, f)'(\frac{1}{2}) \neq 0$ mientras que $f'(\frac{1}{2}) = 0$. Y así, $f(\frac{1}{2}) \in [A_0^*, A_0^*]^{\prime,\delta_{z_0}'}$ y sin embargo, no es del dual de $[A_0, A_1]_{\delta_{z_0}'}$.

Si por el contrario $B - \frac{\pi^2}{6} = 0$, tomamos la misma función f pero con $A_1 = (l^2, \frac{1}{2^{n+1}})$ y de este modo, $(f, f)'(\frac{1}{2}) = \frac{B}{2} - \frac{\pi^2}{6} \neq 0$.

COROLARIO 1.4. *En general, el espacio $A_0 \cap A_1$ no es denso en $[A_0, A_1]^{\delta'_{z_0}}$.*

DEMOSTRACION:

Vamos a probar que si $A_0 \cap A_1$ fuese denso en $[A_0, A_1]^{\delta'_{z_0}}$ los espacios $[A_0, A_1]_{\delta'_{z_0}}$ y $\{A_0, A_1\}_{\delta'_{z_0}}$ serían equivalentes, en contra de lo probado en el ejemplo anterior.

Sea $a \in A_0 \cap A_1$ y sea $f \in \mathcal{F}(A_0, A_1)$ tal que $f'(z_0) = a$. Supongamos inicialmente que $a = 0$. Entonces, puesto que

$$f\delta'_{z_0}(\varphi) = \delta'_{z_0}(f\varphi) = f(z_0)\varphi'(z_0) + f'(z_0)\varphi(z_0) = f(z_0)\varphi'(z_0),$$

se cumple que $f\delta'_{z_0} = f(z_0)\delta'_{z_0}$ y consecuentemente, $f(z_0) \in [A_0, A_1]^{\delta'_{z_0}}$.

Si $A_0 \cap A_1$ fuese denso en este espacio, tendríamos que, para cada $\varepsilon > 0$, existiría $b \in A_0 \cap A_1$ tal que $\|b - f(z_0)\|_{[A_0,A_1]^{\delta'_{z_0}}} \leq \varepsilon$ y, a la vista de la definición de este espacio, existiría $h \in \mathcal{F}(A_0, A_1)$ tal que $\|h\|_{\mathcal{F}} \leq 2\varepsilon$ y $h\delta'_{z_0} = (b - f(z_0))\delta'_{z_0}$, esto es, $h(z_0) = b - f(z_0)$ y $h'(z_0) = 0$.

Sea $G = h + f$. Se cumple que $G \in \mathcal{F}(A_0, A_1)$, $G(z_0) = b$, $G'(z_0) = 0$ y $\|G - f\|_{\mathcal{F}} = \|h\|_{\mathcal{F}} \leq 2\varepsilon$.

Sea $W : \Omega \longrightarrow D$, la transformación conforme tal que $W(z_0) = 0$. Se verifica que

$$H(z) = \frac{G(z) - G(z_0)e^{(z-z_0)^2}}{W^2(z)}$$

está en $\mathcal{F}(A_0, A_1)$ y, por tanto, existe $g \in \mathcal{G}(A_0, A_1)$ tal que $\|g - H\|_{\mathcal{F}} \leq \varepsilon$. En virtud de que $|W(j + it)| = 1$ para todo $t \in \mathbf{R}$ $(j = 0, 1)$, tenemos que

$$\|W^2(z)g(z) + G(z_0)e^{(z-z_0)^2} - G(z)\|_{\mathcal{F}} \leq \varepsilon$$

y la función $g^*(z) = W^2(z)g(z) + G(z_0)e^{(z-z_0)^2}$, obviamente en $\mathcal{G}(A_0, A_1)$, verifica que $g^{*'}(z_0) = 0$ y $\|g^* - f\|_{\mathcal{F}} \leq \|g^* - G\|_{\mathcal{F}} + \|G - f\|_{\mathcal{F}} \leq 3\varepsilon$.

Por consiguiente, si $f'(z_0) = a \in A_0 \cap A_1$, la función $f^*(z) = f(z) - a(z - z_0)e^{(z-z_0)^2}$ cumple que $f^* \in \mathcal{F}$ y $(f^*)'(z_0) = 0$ y en consecuencia, en virtud de lo probado anteriormente, existe una función $g \in \mathcal{G}(A_0, A_1)$ tal que $g'(z_0) = 0$ y

$$\|g - f^*\|_{\mathcal{F}} = \|g + a(z - z_0)e^{(z-z_0)^2} - f\|_{\mathcal{F}} \leq \varepsilon.$$

Si llamamos $g^{**}(z) = g(z) + a(z - z_0)e^{(z-z_0)^2}$, se tiene que $g^{**} \in \mathcal{G}$, $(g^{**})'(z_0) = a$ y $\|g^{**} - f\|_{\mathcal{F}} \leq \varepsilon$. Consecuentemente,

$$\|a\|_{\{A_0,A_1\}_{\delta'_{z_0}}} \leq \|g^{**}\|_{\mathcal{F}} \leq \|f\|_{\mathcal{F}} + \varepsilon \qquad \text{siempre que } f'(z_0) = a.$$

Esto es, si $a \in A_0 \cap A_1$, $\|a\|_{\{A_0,A_1\}_{\delta'_{z_0}}} \leq \|a\|_{[A_0,A_1]_{\delta'_{z_0}}}$ y, a fortiori, tendríamos la igualdad.

Por densidad, ambos espacios serían equivalentes. ∎

NOTA 1.5: Cuando en ([S], 7.2) se prueba que $A_0 \cap A_1$ es denso en $[A_0, A_1]^T$, se utiliza el hecho de que el espacio dual de $[A_0, A_1]^T$ es $[A_0^*, A_1^*]'_T$. Sin embargo este espacio es, de hecho, el dual de $\{A_0, A_1\}^T$ y, al igual que hicimos en (1.2), para que una función $h \in \mathcal{F}'(A_0^*, A_1^*)$ nos defina un funcional lineal continuo en $[A_0, A_1]^T$, hemos de imponerle la condición adiccional siguiente: "si $fT = 0$, entonces $T((h', f)) = 0$".

§2 Familias $\{\mathbf{A}(\cdot) = [\mathbf{A}_0, \mathbf{A}_1]_{\alpha(\cdot)}\}$.

Sea α una función medible sobre Γ tal que $0 \leq \alpha(\gamma) \leq 1$ para todo $\gamma \in \Gamma$. Sea (A_0, A_1) un par compatible de espacios de Banach.

Dada la familia de interpolación $\{A(\gamma) = [A_0, A_1]_{\alpha(\gamma)}\ ,\ \gamma \in \Gamma\}$, nos planteamos si, dado $T \in H'(D)$, existe $S \in H'(\Omega)$ tal que $A^T \equiv [A_0, A_1]_S$.

Si consideramos $w(z) = \alpha(z) + i\tilde{\alpha}(z)$, donde

$$\alpha(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \alpha(\gamma) dP_z(\gamma),$$

tenemos que $w : D \longrightarrow \Omega$ es analítica y, por tanto, si $\varphi \in H(\Omega)$, $\varphi \circ w \in H(D)$. En consecuencia, parece lógico suponer que de existir tal funcional S, ha de ser el definido por $S(\varphi) = T(\varphi \circ w)$. Y así, si procedemos como en ([C-C-R-S-W I], 5.1), obtenemos el siguiente resultado:

PROPOSICION 2.1. *Cualquiera que sea $T \in H'(D)$, se cumple*

(a) *Para cada $a \in A_0 \cap A_1$, $\|a\|_{A_T} \leq \|a\|_{\{A_0,A_1\}_S}$.*

(b) *$[A_0, A_1]_S$ está contenido continuamente en A^T con norma menor o igual que 1.*

DEMOSTRACION:

(a) Sea $a \in A_0 \cap A_1$. Dado $\varepsilon > 0$, existe $g \in \mathcal{G}(A_0, A_1)$ tal que $S(g) = a$ y $\|g\|_{\mathcal{G}} \leq \|a\|_{\{A_0,A_1\}_S} + \varepsilon$.

Sabemos que $g = \sum' \varphi_m a_m$ con $a_m \in A_0 \cap A_1$ y $\varphi_m \in H^\infty(\Omega)$ para todo m. Por tanto, $(g \circ w)(z) = \sum'(\varphi_m \circ w)(z) a_m$ verifica:

(i) Para todo m, $\varphi_m \circ w \in H^\infty(D)$.

(ii) $a_m \in A_0 \cap A_1 \subset \cap_{\gamma \in \Gamma} A(\gamma)$ y además,

$$\int_\Gamma \log^+ \|a_m\|_{A(\gamma)} dP_z(\gamma) = \int_\Gamma \log^+ \|a_m\|_{[A_0,A_1]_{\alpha(\gamma)}} dP_z(\gamma) \leq \log^+ \|a_m\|_{A_0 \cap A_1} < +\infty.$$

Esto es, $a_m \in \mathcal{A}$ para todo m.

(iii) $\|g \circ w\|_{\mathcal{G}(A(\cdot),\Gamma)} = \sup \text{es}_{\gamma \in \Gamma} \|g(w(\gamma))\|_{[A_0,A_1]_{\alpha(\gamma)}} \leq \|g\|_{\mathcal{G}(A_0,A_1)} < +\infty$, de modo que $g \circ w \in \mathcal{G}(A(\cdot), \Gamma)$.

Puesto que $a = S(g) = T(g \circ w)$ se cumple que

$$\|a\|_{A_T} \leq \|g \circ w\|_{\mathcal{G}(A(\cdot),\Gamma)} \leq \|g\|_{\mathcal{G}(A_0,A_1)} \leq \|a\|_{\{A_0,A_1\}_S} + \varepsilon$$

(b) Sea ahora $x \in [A_0, A_1]_S$. Dado $\varepsilon > 0$, existe $f \in \mathcal{F}(A_0, A_1)$ tal que $S(f) = x$ y $\|f\|_{\mathcal{F}(A_0,A_1)} \leq \|x\|_{[A_0,A_1]_S} + \varepsilon$.

Ahora bien, si $(g_n)_n \subset \mathcal{G}(A_0, A_1)$ es tal que $f = \lim_n g_n$, se tiene, en virtud de la condición (iii) del apartado anterior, que la sucesión $(g_n \circ w)_n$ es de Cauchy en $\mathcal{F}(A(\cdot), \Gamma)$ y, por tanto, convergente hacia una función $h \in \mathcal{F}(A(\cdot), \Gamma)$.

Ahora bien, si $f = \mathcal{F} - \lim_n g_n$, para todo $z \in D$, $f(w(z)) = A_0 + A_1 - \lim_n (g_n \circ w)(z) = h(z)$ y, por tanto, $h = f \circ w$.

Concluimos que $f \circ w \in \mathcal{F}(A(\cdot), \Gamma)$. Finalmente, puesto que $x = S(f) = T(f \circ w)$, tenemos que $x \in A^T$ y además, es claro que

$$\|x\|_{A^T} \leq \|f \circ w\|_{\mathcal{F}(A(\cdot),\Gamma)} \leq \|f\|_{\mathcal{F}(A_0,A_1)} \leq \|x\|_{[A_0,A_1]_S} + \varepsilon,$$

de lo cual se concluye la proposición. ▮

NOTA 2.2: Observemos que el recíproco de la proposición anterior no es cierto en general, pues puede ocurrir que $S = 0$. Bastaría tomar $T = \delta'_{z_0}$ y α una función medible tal que $w'(z_0) = 0$. Entonces $S(\varphi) = (\varphi \circ w)'(z_0) = 0$. Sin embargo:

PROPOSICION 2.3. *Sea $T = \delta_{z_0}^{n)}$ y supongamos que $w'(z_0) \neq 0$. Entonces:*

(a) *Si $\alpha(\cdot)$ alcanza los valores 0 y 1, los espacios A_T y $\{A_0, A_1\}_S$ son equivalentes.*

(b) *Si $\mathcal{A}$ está contenido en $[A_0, A_1]^{\delta_{w(z_0)}^{n)}}$ entonces A^T y $[A_0, A_1]^S$ son equivalentes.*

DEMOSTRACION:

(a) Si $\alpha(\cdot)$ alcanza los valores 0 y 1, se tiene $\mathcal{A} = A_0 \cap A_1$. Consecuentemente, en virtud de 2.1, sólo falta ver que para cada $a \in A_0 \cap A_1$, existe $C > 0$ tal que $\|a\|_{\{A_0, A_1\}_S} \leq C\|a\|_{A_T}$.

Para ver dicha desigualdad procederemos por dualidad. Sea $l \in (\{A_0, A_1\}_S)^*$. Dado $\varepsilon > 0$, existe $h \in \mathcal{F}'(A_0^*, A_1^*)$ tal que

$$(3) \qquad h'S = lS \qquad \text{y} \qquad \|h\|_{\mathcal{F}'} \leq 1 + \varepsilon$$

donde, en nuestro caso,

$$S(f) = (f \circ w)^{n)}(z_0) = (f'(w(z))w'(z))_{/z_0}^{n-1)} = \sum_{p=0}^{n-1} \alpha_p f^{p+1)}(w(z_0)),$$

donde $\alpha_p = \alpha_p(w'(z_0), ..., w^{n-p)}(z_0))$ y $\alpha_{n-1} = w'(z_0) \neq 0$.

A la vista de la forma de S, $S = \sum_{p=0}^{n-1} \alpha_p \delta_{w(z_0)}^{p+1)}$, se cumple, en virtud de (3), que para cada $a \in A_0 \cap A_1$ y $\varphi \in H(\Omega)$,

$$\begin{aligned} S(< h', x > \varphi) &= \sum_{p=0}^{n-1} \alpha_p \delta_{w(z_0)}^{p+1}(< h', x > \varphi) = \\ &= \sum_{p=0}^{n-1} \alpha_p \sum_{k=0}^{p+1} \binom{p+1}{k} \frac{d^k(< h', x >)}{dz^k}]_{w(z_0)} \varphi^{p+1-k)}(w(z_0)) = \\ &= l(x)S(\varphi) = l(x) \sum_{p=0}^{n-1} \alpha_p \varphi^{p+1)}(w(z_0)). \end{aligned}$$

Si igualamos los coeficientes de $\varphi^{i)}(w(z_0))$ del tercer y último miembro y resolvemos el sistema resultante obtenemos que, para todo $x \in A_0 \cap A_1$,

$$< h'(w(z_0)), x >= l(x) \qquad \text{y} \qquad \frac{d^k(< h', x >)}{dz^k}]_{w(z_0)} = 0 \qquad \forall k = 1, .., n.$$

Llamemos $H(z) = (h' \circ w)(z)$. Se cumple:

(a) H, definida en D, toma valores $(A_0 \cap A_1)^*$.

(b) Para cada $a \in A_0 \cap A_1$,

$$| < H(z), x > | = | < h'(w(z)), x > | \leq$$
$$\leq \|h'(w(z))\|_{(A_0 \cap A_1)^*} \|x\|_{A_0 \cap A_1} \leq \|h\|_{\mathcal{F}'} \|x\|_{A_0 \cap A_1} < +\infty.$$

Esto es, $< H(\cdot), x > \in H^\infty(D)$.

(c) $\lim_{z \to \gamma(n.t)} | < H(z), x > | = | < h'(w(\gamma)), x > |$. Ahora bien, si $h \in \mathcal{F}'(A_0^*, A_1^*)$, se tiene que $h'(\xi) \in [A_0^*, A_1^*]^{\prime, \delta_\xi} = (\{A_0, A_1\}_\xi)^*$ y, por tanto,

$$| < h'(w(\gamma)), x > | \leq \|h\|_{\mathcal{F}'} \|x\|_{\{A_0, A_1\}_{\delta_{w(\gamma)}}} = \|h\|_{\mathcal{F}'} \|x\|_{[A_0, A_1]_{\alpha(\gamma)}}.$$

Se deduce que $H \in W(A(\cdot), \Gamma)$ y $\|H\|_W \leq \|h\|_{\mathcal{F}'} \leq 1 + \varepsilon$. Además:

(i) $H(z_0) = h'(w(z_0)) = l$.

(ii) Para cada $x \in A_0 \cap A_1$,

$$\frac{d^k(< H(z), x >)}{dz^k}]_{z_0} = \frac{d^k(< h'(w(z)), x >)}{dz^k}]_{z_0} = \frac{d^{k-1}}{dz^{k-1}} \Big(< h''(w(z)), x > w'(z)\Big)]_{z_0} =$$
$$= \sum_{p=0}^{k-1} \binom{k-1}{p} \frac{d^p(< h''(w(z)), x >)}{dz^p}]_{z_0} w^{k-p)}(z_0) = 0.$$

En consecuencia, para cada $x \in A_0 \cap A_1$, se cumple que $< H(z), x > \delta_{z_0}^{n)} = l(x)\delta_{z_0}^{n)}$ y así $l \in (A_T)^*$. Además, $\|l\|_{(A_T)^*} \leq \|H\|_W \leq 1 + \varepsilon$ para todo ε.

Sean ahora $a \in A_0 \cap A_1$ y $l \in (\{A_0, A_1\}_S)^*$ tales que $|l(a)| = \|a\|_{\{A_0, A_1\}_S}$. Entonces

$$\|a\|_{\{A_0, A_1\}_S} = |l(a)| \leq \|l\|_{(A_T)^*} \|a\|_{A_T} \leq (1 + \varepsilon)\|a\|_{A_T},$$

como se quería probar.

(b) Sabemos que $\mathcal{A} \subset [A_0, A_1]_{\alpha(z)}$ y, por tanto, en virtud de (1;5.9), $\mathcal{A} \subset [A_0, A_1]_S$.

Puesto que $\mathcal{A}$ es denso tanto en A^T como en $[A_0, A_1]_S$, sólo hemos de ver, en virtud de 2.1, que, para cada $a \in \mathcal{A}$, $\|a\|_{[A_0, A_1]_S} \leq C\|a\|_{A^T}$.

Para ello vamos a probar, usando dualidad, que existe $C > 0$ tal que, cualquiera que sea $g \in \mathcal{G}(A(\cdot), \Gamma)$,

(4) $$\|g^{n)}(z_0)\|_{[A_0, A_1]_S} \leq C\|g\|_{\mathcal{G}}.$$

Sea $a \in A^T$. Dado $\varepsilon > 0$, existe $f \in \mathcal{F}$ tal que $T(f) = f^{n)}(z_0) = a$ y $\|f\|_{\mathcal{F}} \leq \|a\|_{A^T} + \varepsilon$.

Si $(g_n)_n \subset \mathcal{G}$ es tal que $f = \lim_n g_n$, (4) nos afirma que la sucesión $(g_m^{n)}(z_0))_m$ es de Cauchy en $[A_0, A_1]_S$ y, a fortiori, convergente. Ahora bien, dicha sucesión converge en A^T y, por tanto, en $\mathcal{U} = A_0 + A_1$ hacia $f^{n)}(z_0) = a$ y, en consecuencia, se deduce que $a = [A_0, A_1]_S - \lim_m g_m^{n)}(z_0)$. En definitiva, $a \in [A_0, A_1]_S$ y se verifica que existe $m \in \mathbb{N}$ tal que

$$\|a\|_{[A_0,A_1]_S} \leq \varepsilon + \|g_m\|_{\mathcal{G}} \leq 2\varepsilon + \|f\|_{\mathcal{F}} \leq 3\varepsilon + \|a\|_{A^T}.$$

De esta forma, si vemos (4), habremos demostrado la proposición.

Procedamos a probar (4). Sea $l \in ([A_0, A_1]_S)^*$ tal que $l(g^{n)}(z_0)) = \|g^{n)}(z_0)\|_{[A_0,A_1]_S}$.

En virtud de 1.1 existe $h \in \mathcal{F}'(A_0^*, A_1^*; S)$ tal que

$$< h', x > S = l(x)S \qquad \forall x \in A_0 \cap A_1.$$

Puesto que $g^{n)}(z_0)$ no está, en principio, en $A_0 \cap A_1$, la forma de actuar de h' sobre este elemento es por paso a un límite. Sin embargo nos va a interesar, en esta ocasión, aproximar la función h por funciones de $\mathcal{G}(A_0^*, A_1^*)$, en lugar de aproximar $g^{n)}(z_0)$ por elementos de $A_0 \cap A_1$. Veremos pues, en primer lugar, que existe $(g_{mk})_{m,k}$ en $\mathcal{G}(A_0^*, A_1^*)$ tal que

(5) $$< h'(z), x >= \lim_{m,k} < g_{mk}(z), x > \qquad \forall x \in A_0 \cap A_1, \forall z \in \Omega.$$

Posteriormente veremos, con la ayuda de la igualdad anterior, que

(6) $$l(a) = \lim_{m,k} < g_{mk}(w(z_0)), a > \qquad \forall a \in \mathcal{A}.$$

Finalmente, la hipótesis dada nos permitirá afirmar que

(7) $$\lim_{m,k} < g_{mk}(w(z_0)), g^{n)}(z_0) >= \lim_{m,k} (< g_{mk}(w(z)), g(z) >)^{n)}_{/z_0}.$$

De esta forma, tendremos la siguiente cadena de desigualdades:

$$\|g^{n)}(z_0)\|_{[A_0,A_1]_S} \overset{(6)}{=} \lim_{m,k} | < g_{mk}(z_0), g^{n)}(z_0) > | \overset{(7)}{=} \lim_{m,k} |(< g_{mk}(w(z)), g(z) >)^{n)}_{z_0}|$$
$$\ll \lim_{m,k} \| < g_{mk} \circ w, g > \|_\infty = \lim_{m,k} \sup \ \mathrm{es}_{\gamma \in \Gamma} | < g_{mk}(w(\gamma)), g(\gamma) > | \ll$$
$$\ll \lim_{m,k} \sup \ \mathrm{es}_{\gamma \in \Gamma} \|g_{mk}(w(\gamma))\|_{([A_0,A_1]_{w(\gamma)})^*} \|g(\gamma)\|_{[A_0,A_1]_{w(\gamma)}} \leq$$
$$\leq \lim_{m,k} \|g_{mk}\|_{\mathcal{F}(A_0^*,A_1^*)} \|g\|_{\mathcal{G}(A(\cdot),\Gamma)} \overset{(5)}{\ll} \|h\|_{\mathcal{F}'} \|g\|_{\mathcal{G}} \leq (1+\varepsilon)\|g\|_{\mathcal{G}}$$

para todo $\varepsilon > 0$. Habremos así probado (4) y con ello la proposición.

Procedamos pues a probar (5): dada $h \in \mathcal{F}'(A_0^*, A_1^*)$, consideremos la sucesión de funciones

$$h_m(z) = \frac{h(z+\frac{i}{m}) - h(z)}{\frac{i}{m}} \qquad m \in \mathbf{N}.$$

Se cumple que $h_m \in \mathcal{F}(A_0^*, A_1^*)$ y $\|h_m\|_{\mathcal{F}} \leq \|h\|_{\mathcal{F}'}$ para todo $m \in \mathbf{N}$. Más aún, h_m converge a h' uniformemente sobre todo compacto de Ω.

Sea ahora $(g_{mk})_k$ en $\mathcal{G}(A_0^*, A_1^*)$ tal que $h_m = \mathcal{F}-\lim_k g_{mk}$. Se verifica que $h_m(z)$ converge en $A_0^*+A_1^*$ a $h_m(z)$ uniformemente sobre todo compacto de Ω y, consecuentemente, tenemos probado (5).

Se trata ahora de probar (6). Puesto que $h'(w(z_0)) = l$, hemos de ver que (5) puede ser extendido a $\mathcal{A}$ para $z = w(z_0)$. Para ello, veamos, en primer lugar, que

(8) $$\lim_{m,k} < g_{mk}(z), f(z) >= (h', f)(z) \qquad \forall f \in \mathcal{F}(A_0, A_1)$$

uniformemente sobre compactos de Ω: por definición de (h', f), para cada $\varepsilon > 0$, existen $(g_n)_n$ en $\mathcal{G}(A_0, A_1)$ y $n_0 \in \mathbf{N}$ tal que si $n \geq n_0$

(9) $$| < h'(z), g_n(z) > -(h', f)(z)| \leq \varepsilon$$

uniformemente sobre cada compacto K de Ω. Puesto que $g_{n_0}(z) \in A_0 \cap A_1$ para todo $z \in \Omega$, dado ε, existen $m_0, k_0 \in \mathbf{N}$ tales que

(10) $$| < h'(z), g_{n_0}(z) > - < g_{m_0,k_0}(z), g_{n_0}(z) > | \leq \varepsilon \qquad \forall z \in K.$$

Por último, fijados m_0 y k_0, tenemos que $g_{m_0k_0}(z) \in [A_0^*, A_1^*]_z$ y así, está en $([A_0, A_1]_z)^*$ y se verifica que

$$\|g_{m_0k_0}(z)\|_{([A_0,A_1]_z)^*} \leq \|g_{m_0k_0}\|_{\mathcal{G}} \leq \varepsilon + \|h_{m_0}\|_{\mathcal{F}} \leq \varepsilon + \|h\|_{\mathcal{F}'}.$$

Consecuentemente,

$$| < g_{m_0k_0}(z), g_{n_0}(z) > - < g_{m_0k_0}(z), f(z) > | \leq (\varepsilon + \|h\|_{\mathcal{F}'})\|g_n(z) - f(z)\|_{[A_0,A_1]_z} \leq$$
$$\leq (\varepsilon + \|h\|_{\mathcal{F}'})\|g_n - f\|_{\mathcal{F}} \qquad \forall z \in \Omega.$$

De la combinación de esta desigualdad con (9) y (10) obtenemos (8).

Sea ahora $a \in \mathcal{A}$, se verifica, en virtud de los resultados anteriores y la forma del funcional S, que

$$l(a) = S((h', f)) \stackrel{(8)}{=} S(\lim_{m,k} < g_{mk}(\cdot), f(\cdot) >) = \lim_{m,k} S(< g_{mk}(\cdot), f(\cdot) >) = \tag{11}$$

$$= \lim_{m,k} \sum_{p=0}^{n-1} \alpha_p \delta_{w(z_0)}^{p+1)}(< g_{mk}(\cdot), f(\cdot) >) =$$

$$= \lim_{m,k} \sum_{p=0}^{n-1} \alpha_p \left(\sum_{q=0}^{p+1} \binom{p+1}{q} < g_{mk}^{q)}(w(z_0)), f^{p+1-q)}(w(z_0)) > \right) =$$

$$= \lim_{m,k} \sum_{q=0}^{n} \sum_{p \geq q-1}^{n-1} \alpha_p \binom{p+1}{q} < g_{mk}^{q)}(w(z_0)), f^{p+1-q)}(w(z_0)) >$$

Si aplicamos ahora la hipótesis dada, tenemos, puesto que $a \in [A_0, A_1]^{\delta_{w(z_0)}^{n)}}$, que existe $f \in \mathcal{F}(A_0, A_1)$ tal que $f(w(z_0)) = a$ y $f^{j)}(w(z_0)) = 0$ para todo $1 \leq j \leq n$. Dada esta función f se verifica que, cualquiera que sea $\varphi \in H^\infty(\Omega)$, $(f\varphi)^{j)}(w(z_0)) = a\varphi^{j)}(w(z_0))$ para todo $1 \leq j \leq n$ y, por tanto, $S(f\varphi) \in \mathcal{A}$. Por consiguiente, en virtud de (11),

$$l(S(f\varphi)) = l(a) \left(\sum_{p=0}^{n-1} \alpha_p \varphi^{p+1)}(w(z_0)) \right) =$$

$$= \lim_{m,k} \left(< g_{mk}(w(z_0)), a > \sum_{p=0}^{n-1} \alpha_p \varphi^{p+1)}(w(z_0)) \right) + \tag{12}$$

$$+ \lim_{m,k} \left(\sum_{q=1}^{n} \sum_{p \geq q-1}^{n-1} \alpha_p \binom{p+1}{q} < g_{mk}^{q)}(w(z_0)), a > \varphi^{p+1-q)}(w(z_0)) > \right).$$

Si tomamos, en particular, $\varphi(z) = \frac{(z-w(z_0))^n}{n!} \exp((z - w(z_0))^2)$ y tenemos en cuenta que $\alpha_{n-1} \neq 0$, es fácil ver que que se cumple (6).

Finalmente, de la combinación de (6) y (12), obtenemos que

$$\lim_{m,k} \sum_{q=1}^{n} \sum_{p \geq q-1}^{n-1} \alpha_p \binom{p+1}{q} < g_{mk}^{q)}(w(z_0)), a > \varphi^{p+1-q)}(w(z_0)) = 0 \qquad \forall \varphi \in H^\infty(\Omega)$$

y por consiguiente, los coeficientes de $\varphi^{r)}(w(z_0))$ han de converger a cero cualquiera que ses $r \in \{0, \cdots, (n-1)\}$. De esta condición se obtiene que

$$\lim_{m,k} < g_{mk}^{p)}(w(z_0)), a >= 0 \qquad \forall a \in \mathcal{A},\ 1 \leq p \leq n. \tag{13}$$

Sea, finalmente, $g \in \mathcal{G}(A(\cdot),\Gamma)$ con $g = \sum' \varphi_j a_j$, se verifica que

$$(< g_{mk}(w(z)), g(z) >)^{n)}_{/z_0} = \sum_j (\varphi_j(z) < g_{mk}(w(z)), a_j >)^{n)}_{/z_0} =$$

$$= \sum_j \sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p} \varphi_j^{n-p)}(z_0) \frac{d^p(< g_{mk}(w(z)), a_j >)}{dz^p}|_{z_0} =$$

$$=< g_{mk}(w(z_0)), g^{n)}(z_0) > + \sum_{p=1}^{n} \binom{n}{p} \frac{d^p(< g_{mk}(w(z)), g^{n-p)}(z_0) >}{dz^p}|_{z_0}$$

Puesto que $g^{q)}(z_0) \in \mathcal{A}$ para todo q se deduce, de (13), que el segundo término tiende a cero cuando m, k tienden a infinito y, por tanto, se obtiene (7). Queda de esta forma concluida la proposición. ∎

COROLARIO 2.4.

(a) *Si* $\alpha(\cdot)$ *alcanza los valores* 0 *y* 1, $A^T \equiv [A_0, A_1]_S$.

(b) *Si* $T = \delta_{z_0}$, $A^T \equiv [A_0, A_1]_S$.

(c) *En la proposición anterior, el apartado* (a) *se sigue verificando si* $\alpha(\cdot)$ *alcanza los valores* $\sup_{\gamma \in \Gamma} \alpha(\gamma) = \alpha_0$ *e* $\inf_{\gamma \in \Gamma} \alpha(\gamma) = \alpha_1$ *y* $A_0 \cap A_1$ *es denso en* $A_{\alpha_1} \cap A_{\alpha_0}$.

DEMOSTRACION:

(a) En este caso, $\mathcal{A} = A_0 \cap A_1 \subset [A_0, A_1]^{\delta^{n)}_{w(z_0)}}$.

(b) Si $T = \delta_{z_0}$, $[A_0, A_1]^{\delta_{w(z_0)}} = [A_0, A_1]_{\alpha(z_0)}$ y, por tanto, $\mathcal{A} \subset [A_0, A_1]_{\alpha(z_0)}$.

(c) Es conocido (véase [C], 12.3) que si $s(\cdot)$ es tal que $\alpha(\cdot) = (1 - s(\cdot))\alpha_1 + s(\cdot)\alpha_0$ entonces,

$$[A_0, A_1]_{\alpha(\gamma)} \equiv [A_{\alpha_1}, A_{\alpha_0}]_{s(\gamma)} \qquad \forall \gamma \in \Gamma$$

y así, $A_T = [\ [A_0, A_1]_{\alpha(\cdot)}\ ]_T = [\ [A_{\alpha_1}, A_{\alpha_0}]_{s(\cdot)}\ ]_T$. Puesto que $s(\cdot)$ alcanza los valores 0 y 1, tenemos que $A_T = \{A_{\alpha_1}, A_{\alpha_0}\}_{S^*}$ donde $S^*(\varphi) = T(\varphi \circ s)$ y $s(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} s(\gamma) dH_z(\gamma)$.

En consecuencia, S^* es de la forma $\sum_{p=0}^{n-1} \beta_p \delta^{p+1}_{s(z_0)}$ y, por tanto,

$$A_T \equiv \sum_{p=0}^{n-1} \{A_{\alpha_1}, A_{\alpha_0}\}_{\delta^{p+1)}_{s(z_0)}}.$$

Si vemos que para todo $k \in \mathrm{N}$, $\{A_0, A_1\}_{\delta^{k)}_{\theta}} \equiv \{A_{\alpha_1}, A_{\alpha_0}\}_{\delta^{k)}_{s}}$, donde $\theta = (1-s)\alpha_1 + s\alpha_0$, tendremos que $\{A_{\alpha_1}, A_{\alpha_0}\}_{\delta^{p+1)}_{s(z_0)}} \equiv \{A_0, A_1\}_{\delta^{p+1)}_{w(z_0)}}$ y de esta forma obtendremos la tesis.

Veamos pues que $\{A_0, A_1\}_{\delta_\theta^{k)}} \equiv \{A_{\alpha_1}, A_{\alpha_0}\}_{\delta_s^{k)}}$: sea $a \in A_0 \cap A_1$. Dado $\varepsilon > 0$, existe $g \in \mathcal{G}(A_0, A_1)$ tal que

$$g^{k)}(\theta) = a \quad \text{y} \quad \|a\|_{\{A_0,A_1\}_{\delta_\theta^{k)}}} + \varepsilon.$$

Sea $h(z) = g(\alpha_1 + z(\alpha_0 - \alpha_1))$. Se cumple que $h \in \mathcal{G}(A_{\alpha_1}, A_{\alpha_0})$ y $\|h\|_{\mathcal{G}} \leq \|g\|_{\mathcal{G}}$. Además, para todo $k \in \mathrm{N}$, $h^{k)}(s) = (\alpha_0 - \alpha_1)^k g^{k)}(\theta)$ y, por tanto, $a \in \{A_{\alpha_1}, A_{\alpha_0}\}_{\delta_s^{k)}}$ y

$$\|a\|_{\{A_{\alpha_1},A_{\alpha_0}\}_{\delta_s^{k)}}} \leq \frac{1}{(\alpha_0 - \alpha_1)^k} \|a\|_{\{A_0,A_1\}_{\delta_\theta^{k)}}} \qquad \forall a \in A_0 \cap A_1.$$

Sea ahora $l \in (\{A_0, A_1\}_{\delta_\theta^{k)}})^*$. Sabemos que, dado $\varepsilon > 0$, existe $h \in \mathcal{F}'(A_0^*, A_1^*)$ tal que $h'\delta_\theta^{k)} = l\delta_\theta^{k)}$. Esto es, si $a \in A_0 \cap A_1$, $< h', a > \delta_\theta^{k)}(\varphi) = l(a)\delta_\theta^{k)}(\varphi)$ para toda $\varphi \in H(D)$, y así,

$$< h'(\theta), a >= l(a) \qquad \text{y} \qquad \frac{d^p(< h'(z), a >)}{dz^p}]_\theta = 0 \qquad 1 \leq p \leq k.$$

Si $h \in \mathcal{F}'(A_0^*, A_1^*)$, la función

$$\overline{h}(z) = \frac{1}{\alpha_1 - \alpha_0} h(\alpha_1 + z(\alpha_0 - \alpha_1))$$

está en $\mathcal{F}'(A_{\alpha_1}^*, A_{\alpha_0}^*)$ (véase [C], 32.3) y se tiene que, para todo $a \in A_0 \cap A_1$,

$$< \overline{h}(s), a > =< h'(\theta), a >= l(a),$$
$$\frac{d^p(< \overline{h}(z), a >)}{dz^p}]_s = (\alpha_1 - \alpha_0)^{p-1} \frac{d^p(< h', a >)}{dz^p}]_\theta = 0 \quad \forall 1 \leq p \leq k.$$

Luego $< \overline{h}', a > \delta_s^{k)} = l(a)\delta_s^{k)}$ para todo $a \in A_0 \cap A_1$.

Puesto que estamos suponiendo que $A_0 \cap A_1$ es denso en $A_{\alpha_1} \cap A_{\alpha_0}$ tenemos que l está en $(\{A_{\alpha_1}, A_{\alpha_0}\}_{\delta_s^{k)}})^*$ y

$$\|l\|_{(\{A_{\alpha_1},A_{\alpha_0}\}_{\delta_s^{k)}})^*} \leq \|\overline{h}\|_{\mathcal{F}'(A_{\alpha_1}^*,A_{\alpha_0}^*)} \leq \|h\|_{\mathcal{F}'} \leq \|l\|_{(\{A_0,A_1\}_{\delta_\theta^{k)}})^*},$$

y, así, obtenemos el resultado buscado. ∎

COROLARIO 2.5. Sea $T = \sum_{j=1}^n \sum_{k=0}^{m(j)} a_{jk}\delta_{z_j}^{k)}$

(a) *Si $\alpha(\cdot)$ alcanza los valores 0 y 1 (alternativamente, alcanza los valores α_0 , α_1 y $A_0 \cap A_1$ es denso en $A_{\alpha_0} \cap A_{\alpha_1}$), los espacios A_T y $\{A_0, A_1\}_S$ son equivalentes.*

(b) *Si $\mathcal{A} \subset \cap_{j=1}^n [A_0, A_1]^{\delta_{w(z_j)}^{m(j)}}$, los espacios A^T y $[A_0, A_1]_S$ son equivalentes.*

DEMOSTRACION:

Sabemos, en virtud de (1;5.7), que $A^T \equiv \sum_{j,k} A^{\delta_{z_j}^{k)}}$ y $A_T \equiv \sum_{j,k} A_{\delta_{z_j}^{k)}}$. Puesto que

$$S(\varphi) = T(\varphi \circ w) = \sum_{j,k} a_{jk}\delta_{z_j}^{k)}(\varphi \circ w) = \sum_{j,k} a_{jk} \sum_{l=0}^{k-1} \beta_l^{jk} \delta_{w(z_j)}^{l+1)}(\varphi) = \sum_{j,k} a_{jk} S_{jk},$$

donde $S_{jk} = \sum_{l=0}^{k-1} \beta_l^{jk} \delta_{w(z_j)}^{l+1)}$, tenemos que $[A_0, A_1]_S \equiv \sum_{j,k} [A_0, A_1]_{S_{jk}}$. (Análogamente el espacio $\{A_0, A_1\}_S$).

Por otra parte, para cada j, k, $(k \leq m(j))$,

$$\mathcal{A} \subset \cap_{j=1}^{n} [A_0, A_1]^{\delta_{z_j}^{m(j)}} \subset [A_0, A_1]^{\delta_{w(z_j)}^{m(j)}} \subset [A_0, A_1]^{\delta_{w(z_j)}^{k)}}$$

y así, en virtud de 2.3 y 2.4, queda concluida la demostración. ∎

NOTA 2.6: Tratamos ahora de suprimir las hipótesis sobre la función α hechas en las proposiciones anteriores. En ([C-C-R-S-W I], rem. 5.2) se conjetura que la condición sobre α de (2.3, (a)) no es necesaria.

Sea Ω un abierto contenido en D tal que $Sop\ T \subset \Omega$ y tal que $\Sigma = \partial\Omega$ sea una curva cerrada simple rectificable. Sea $\alpha(\sigma) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \alpha(\gamma)\ dP_\sigma(\gamma)$ y construyamos la familia de interpolación $\{[A_0, A_1]_{\alpha(\sigma)}\ ,\ \sigma \in \Sigma\}$. Puesto que $\alpha_{|\Sigma}$ es continua, alcanza los valores supremo e ínfimo y, por tanto, en virtud de la proposición anterior, tenemos que $[\ [A_0, A_1]_{\alpha(\sigma)}\ ]_T \equiv \{A_0, A_1\}_S$.

Consecuentemente, si $\{A_0, A_1\}_S$ fuese equivalente a $[\ [A_0, A_1]_{\alpha(\gamma)}\ ]_T$ tendríamos

$$[\ [A_0, A_1]_{\alpha(\sigma)}\ ]_T \equiv [\ [A_0, A_1]_{\alpha(\gamma)}\ ]_T.$$

De esta forma, se cumpliría "reiteración". Esto nos lleva a pensar que la equivalencia buscada será cierta si se cumple una condición de densidad del tipo (2;(32)). Esta condición será la siguiente: para cada $b \in \cap_{\sigma \in \Sigma} [A_0, A_1]_{\alpha(\sigma)}$, existe $(a_n)_n$ en $\mathcal{A}$ tal que

$$(14) \qquad \lim_n \int_\Sigma \|a_n - b\|_{[A_0,A_1]_{\alpha(\sigma)}} d\mu_z(\sigma) = 0 \qquad \forall z \in \Omega,$$

donde μ_z es la medida harmónica sobre Σ.

En los ejemplos que veremos en los próximos capítulos estaremos en la hipótesis (14).

PROPOSICION 2.7. *Sea T un funcional analítico en D de soporte finito. Si existe Ω en las condiciones anteriores tal que se cumple (14) y $A_0 \cap A_1$ es denso en $A_{\alpha_0^*} \cap A_{\alpha_1^*}$ donde $\alpha_0^* = \sup_{\sigma\in\Sigma} \alpha(\sigma)$ y $\alpha_1^* = \inf_{\sigma\in\Sigma} \alpha(\sigma)$, entonces los espacios A_T y $\{A_0, A_1\}_S$ son equivalentes.*

DEMOSTRACION:

Sabemos que $\{[A_0, A_1]_{\alpha(\sigma)}\ ,\ \sigma \in \Sigma\}$ es una familia de interpolación y, en las hipótesis de la proposición, el espacio log-intersección es $\cap_{\sigma\in\Sigma}[A_0, A_1]_{\alpha(\sigma)}$.

Además, puesto que $\alpha(\sigma)$ es continua sobre Σ, alcanza los valores supremo e ínfimo, y puesto que $A_0 \cap A_1$ es denso en $A_{\alpha_0^*} \cap A_{\alpha_1^*}$, $[\ [A_0, A_1]_{\alpha(\sigma)}\ ]_T$ es equivalente al espacio $[A_0, A_1]_S$, en virtud de 2.4.

En consecuencia, si vemos que $[\ [A_0, A_1]_{\alpha(\gamma)}\ ]_T \equiv [\ [A_0, A_1]_{\alpha(\sigma)}\ ]_T$, habremos acabado la demostración.

Para demostrar la equivalencia anterior basta seguir los mismos pasos que en el teorema de reiteración (2;3.1) con los siguientes cambios:

(i) Si $f \in \mathcal{G}(A(\cdot), \Gamma)$, entonces $f = \sum' \varphi_j a_j$ con $a_j \in \mathcal{A}$ para todo j. Puesto que $\mathcal{A}$ está contenido en $\cap_{\sigma\in\Sigma}[A_0, A_1]_{\alpha(\sigma)}$, sup $\text{es}_{\sigma\in\Sigma}\|f(\sigma)\|_{[A_0,A_1]_{\alpha(\sigma)}} \leq \|f\|_{\mathcal{F}}$, $f \in \mathcal{G}(B(\cdot), \Sigma)$ y $\|f\|_{\mathcal{G}(B(\cdot),\Sigma)} \leq \|f\|_{\mathcal{G}(A(\cdot),\Gamma)}$ (véase [C-C-R-S-W I], 5.2), se cumple que $\|a\|_{B_T} \leq \|a\|_{A_T}$ para cada $a \in \mathcal{A}$.

(ii) Si $h \in W$ entonces, si $a \in \mathcal{A}$ y $f \in \mathcal{F}(A_0, A_1)$ es tal que $f(\alpha(\sigma)) = a$, se tiene

$$|<h(\sigma), a>| = |<h(\sigma), f(\alpha(\sigma))>| \leq \sup\ \text{es}_{\gamma\in\Gamma}|<h(\gamma), f(\alpha(\gamma))>| \leq$$
$$\leq \|h\|_W \sup\ \text{es}_{\gamma\in\Gamma}\|f(\alpha(\gamma))\|_{[A_0,A_1]_{\alpha(\gamma)}} \leq \|h\|_W \|f\|_{\mathcal{F}}.$$

Esto es, $h(\sigma) \in ([A_0, A_1]_{\alpha(\sigma)})^*$ y, por tanto, obtenemos (2;(33)) de la misma forma que allí se hizo. El resto de la demostración es una repetición de dicho teorema. ∎

PROPOSICION 2.8. *En las hipótesis de 2.7, los espacios A^T y $[A_0, A_1]_S$ son equivalentes.*

DEMOSTRACION:

De la misma manera que razonamos en 2.7, sólo queda probar que

$$A^T = [\ [A_0, A_1]_{\alpha(\gamma)}\ ]^T \equiv [\ [A_0, A_1]_{\alpha(\sigma)}\ ]^T = B^T.$$

Sea $x \in A^T$. Dado $\varepsilon > 0$, existe $f \in \mathcal{F}(A(\cdot),\Gamma)$ tal que $T(f) = x$ y $\|f\|_{\mathcal{F}(A(\cdot),\Gamma)} \leq \|x\|_{A^T} + \varepsilon$.

Dada f, existe $(g_n)_n$ en $\mathcal{G}(A(\cdot),\Gamma)$ tal que $f = \lim_n g_n$. Sabemos que $g_{n|\Omega\cup\Sigma}$ está en $\mathcal{G}(B(\cdot),\Sigma)$ con $\|g_n\|_{\mathcal{G}(B(\cdot),\Sigma)} \leq \|g_n\|_{\mathcal{G}(A(\cdot),\Gamma)}$. En consecuencia, $(g_{n|\Omega\cup\Sigma})_n$ es una sucesión de Cauchy en $\mathcal{F}(B(\cdot),\Sigma)$ y, por tanto, convergente hacia una función $h \in \mathcal{F}(B(\cdot),\Sigma)$.

Ahora bien, puesto que $\mathcal{U} = A_0 + A_1$ es espacio contenedor de ambas familias y $f(z) = \mathcal{U} - \lim_n g_n(z)$, se deduce que, para todo $z \in \Omega$, $h(z) = f(z)$. Por consiguiente, $x \in B^T$ y

$$\|x\|_{B^T} \leq \|f\|_{\mathcal{F}(B(\cdot),\Sigma)} \leq \|f\|_{\mathcal{F}(A(\cdot),\Gamma)} \leq \|x\|_{A^T} + \varepsilon$$

En definitiva, $\|x\|_{B^T} \leq \|x\|_{A^T}$.

Recíprocamente, sabemos por (2;(33)) que si $g = \sum' \varphi_j a_j$ con $a_j \in \mathcal{A}$ y $\varphi_j \in N^+(\Omega)$ para todo j, entonces existe $C > 0$ tal que

$$\|T(g)\|_{A_T} \leq C \int_\Sigma \|g(\sigma)\|_{B(\sigma)} d\sigma \tag{15}$$

y, a fortiori, $\|T(g)\|_{A^T}$ cumple la misma desigualdad.

Sea ahora $f \in \mathcal{F}(B(\cdot),\Sigma)$ tal que $T(f) = x$ y $\|f\|_{\mathcal{F}(B(\cdot),\Sigma)} \leq \|x\|_{B^T} + \varepsilon$. Como siempre, tomemos $(g_n)_n$ en $\mathcal{G}(B(\cdot),\Sigma)$ tal que $f = \lim_n g_n$. Si $g_n = \sum_{j=1}^{N(n)} \varphi_j^n b_j^n$ con $b_j \in \mathcal{B}$ y $\varphi_j \in H^\infty(\Omega)$ para todo j, dado $\varepsilon > 0$, existe, para cada j, n, un elemento $a_j^n \in \mathcal{A}$ tal que

$$\int_\Sigma \|a_j^n - b_j^n\|_{B(\sigma)} d\sigma \leq \frac{\varepsilon}{\|\varphi_j^n\|_\infty N(n)}$$

y así, si $G_n^\varepsilon = \sum_{j=1}^{N(n)} \varphi_j^n a_j^n$, se tiene que $\int_\Sigma \|G_n^\varepsilon(\sigma) - g_n(\sigma)\|_{B(\sigma)} d\sigma \leq \varepsilon$. Denotemos por G_n^k a la función $G_n^{\frac{1}{k}}$. En virtud de (15), tenemos que

$$\begin{aligned}\|T(G_n^k) - T(G_m^{k'})\|_{A^T} &\leq C \int_\Sigma \|G_n^k(\sigma) - G_m^{k'}(\sigma)\|_{B(\sigma)} d\sigma \ll \\ &\ll \int_\Sigma \|G_n^k(\sigma) - g_n(\sigma)\|_{B(\sigma)} d\sigma + \int_\Sigma \|g_n(\sigma) - g_m(\sigma)\|_{B(\sigma)} d\sigma + \\ &+ \int_\Sigma \|g_m(\sigma) - G_m^{k'}(\sigma)\|_{B(\sigma)} d\sigma \ll \frac{1}{k} + \|g_n - g_m\|_{\mathcal{F}(B(\cdot),\Sigma)} + \frac{1}{k'}.\end{aligned}$$

Se deduce, de ello, que $(T(G_n^k))_{n,k}$ es de Cauchy en A^T y, por tanto, convergente hacia un elemento $a \in A^T$. Ahora bien,

$$\|T(G_n^k) - T(g_n)\|_{B^T} \ll \int_\Sigma \|G_n^k(\sigma) - g_n(\sigma)\|_{B(\sigma)} d\sigma \leq \frac{1}{k}$$

y así, dado $\varepsilon > 0$, existe $k(n)$ tal que $\|T(G_n^{k(n)}) - T(g_n)\|_{B^T} \leq \varepsilon$. Por tanto, es claro que $x = B^T - \lim_n T(G_n^{k(n)})$ y en consecuencia $x = \mathcal{U} - \lim_n T(G_n^{k(n)})$. De lo cual deducimos que necesariamente $a = x$ y, por consiguiente, $x \in A^T$. Además, existe $n \in \mathbf{N}$ tal que

$$\begin{aligned}\|x\|_{A^T} &\leq \|T(G_n^{k(n)})\|_{A^T} + \varepsilon \ll \varepsilon + \int_\Sigma \|G_n^{k(n)}(\sigma)\|_{B(\sigma)} d\sigma \ll \\ &\ll \varepsilon + \left(\varepsilon + \int_\Sigma \|g_n(\sigma)\|_{B(\sigma)} d\sigma\right) \ll \varepsilon + (2\varepsilon + \|f\|_{\mathcal{F}(B(\cdot),\Sigma)}) \ll \\ &\ll \varepsilon + (3\varepsilon + \|x\|_{B^T}).\end{aligned}$$

En definitiva, se cumple que $\|x\|_{A^T} \ll \|x\|_{B^T}$ como queríamos probar. ∎

Capítulo IV

Interpolación de familias de espacios L^p.

El presente capítulo consta de seis secciones. Las cinco primeras tratan de identificar espacios interpolados de familias de espacios $L^{p(\cdot)}_{B(\cdot)}(\mu(\cdot,\cdot))$ siendo $p(\cdot)$ una función medible sobre Γ, $\mu(\cdot,\cdot)$ medible sobre $\Gamma \times X$, (X un espacio medible), y $B(\cdot)$ una familia de interpolación.

La última sección será una combinación de algunos de los resultados obtenidos en las primeras secciones y la interpolación de operadores estudiada en el capítulo II.

§1 Familia de espacios $\{L^{p(\gamma)}(\mu) \ , \ \gamma \in \Gamma\}$.

Sea $p(\cdot)$ una función medible sobre Γ tal que $1 \leq p(\gamma) \leq \infty$ para todo $\gamma \in \Gamma$. Sea μ una medida σ-finita.

Es conocido que la familia $\{L^{p(\gamma)}(\mu) \ , \ \gamma \in \Gamma\}$ es de interpolación con espacio contenedor $L^1(\mu) + L^\infty(\mu)$ (por ejemplo).

Sea T un funcional analítico de soporte finito. Si $T = \delta_{z_0}$ son conocidos los siguientes resultados:

TEOREMA 1.1. ([TRI], 1.18.6, Th. 2).

Sean $1 \leq p_0, p_1 \leq \infty$, $\Omega = \{z \in \mathbf{C} \ ; \ 0 < Re(z) < 1\}$ *y* $0 < \theta < 1$. *Se verifica que* $[L^{p_0}(\mu), L^{p_1}(\mu)]_\theta = L^p(\mu)$, *siendo* $p = \frac{1-\theta}{p_0} + \frac{\theta}{p_1}$.

TEOREMA 1.2. ([C-C-R-S-W I], Cor. 5.2).

Se cumple que

$$[L^{p(\cdot)}(\mu)]_{z_0} = [L^\infty(\mu), L^1(\mu)]_{\alpha(z_0)} = L^{p(z)},$$

donde $\alpha(z) = \frac{1}{p(z)} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{1}{p(\gamma)} dP_z(\gamma)$.

Se trata, en esta sección, de identificar el espacio $[L^{p(\cdot)}(\mu)]^T$ cuando T es de soporte finito y, para ello, en virtud de las proposiciones (1;5.7) y (3;2.8), basta identificar el espacio $[L^{p_0}(\mu), L^{p_1}(\mu)]_{\delta_\theta^{n)}}$ con $n \in \mathbf{N}$. Procederemos por inducción en $n \in \mathbf{N}$.

PROPOSICION 1.3. *Sean* $(X, \mathcal{M}, \mu)$ *un espacio de medida,* $1 \leq p_0, p_1 \leq \infty$ *y* $T = \delta'_\theta$ *con* $0 < \theta < 1$. *Se cumple que* $f \in [L^{p_0}(\mu), L^{p_1}(\mu)]_T$ *si y sólo si existen* f_0, f_1 *en* $L^p(\mu)$, *con* $\frac{1}{p} = \frac{1-\theta}{p_0} + \frac{\theta}{p_1}$, *tal que* $f = f_0 + f_1 \log |f_1|$ *(si* $f_1(x) = 0$, *entonces* $f_1(x) \log |f_1(x)| = 0$*).*

Además,

$$\|f\|_{\delta'_\theta} \equiv \inf\{\|f_0 + f_1 \log \|f_1\|_p\|_p + \frac{p_0 p_1}{p}|p_0 - p_1|^{-1} \|f_1\|_p \ ; \ f = f_0 + f_1 \log |f_1|\}.$$

DEMOSTRACION:

Sea $f = f_0 + f_1 \log |f_1|$. Consideremos la función

$$F(\xi) = \|f_1\|_p \frac{f_1}{|f_1|} \left(\frac{|f_1|}{\|f_1\|_p}\right)^{((1-\xi)p_1 + \xi p_0)\frac{p}{p_0 p_1}}. \tag{1}$$

Se verifica que $|F(it)| = \|f_1\|_p(|f_1|/\|f_1\|_p)^{\frac{p}{p_0}} \in L^{p_0}(\mu)$ para todo $t \in \mathbf{R}$, y además, $\sup_{t\in\mathbf{R}} \|F(it)\|_{L^{p_0}(\mu)} = \|f_1\|_p$. Análogamente, para todo $t \in \mathbf{R}$, $|F(1 + it)| \in L^{p_1}(\mu)$ y $\sup_{t\in\mathbf{R}} \|F(1 + it)\|_{L^{p_1}(\mu)} = \|f_1\|_p$. En consecuencia, es claro que $F \in \mathcal{F}(L^{p_0}(\mu), L^{p_1}(\mu))$ y $\|F\|_{\mathcal{F}} = \|f_1\|_p$.

Por otra parte,

$$F'(\theta) = \frac{p}{p_0 p_1}(p_0 - p_1) f_1(\log |f_1| - \log \|f_1\|_p)$$

y así, si llamamos $M = \frac{p}{p_0 p_1}(p_0 - p_1)$, despejamos $f_1 \log |f_1|$ de la expresión anterior y sustituimos en f, obtenemos que

$$f = f_0 + f_1 \log \|f_1\|_p + M^{-1} F'(\theta).$$

Puesto que f_0 y f_1 están en $L^p(\mu)$,

$$f_0 + f_1 \log \|f_1\|_p \in L^p(\mu) = [L^{p_0}(\mu), L^{p_1}(\mu)]_\theta \subset [L^{p_0}(\mu), L^{p_1}(\mu)]_{\delta'_\theta}$$

y, en virtud de que $F'(\theta) \in [L^{p_0}(\mu), L^{p_1}(\mu)]_{\delta'_\theta}$, se tiene que $f \in [L^{p_0}(\mu), L^{p_1}(\mu)]_{\delta'_\theta}$ y

$$\|f\|_{\delta'_\theta} \leq \|f_0 + f_1 \log \|f_1\|_p\|_{\delta'_\theta} + |M^{-1}| \ \|F'(\theta)\|_{\delta'_\theta} \ll$$
$$\ll \|f_0 + f_1 \log \|f_1\|_p\|_{L^p(\mu)} + |M^{-1}| \ \|f_1\|_{L^p(\mu)}.$$

En consecuencia, deducimos que

$$\|f\|_{\delta'_\theta} \ll \inf\{\|f_0 + f_1 \log\ \|f_1\|_p\|_p + |M^{-1}|\ \|f_1\|_p\ ;\ f = f_0 + f_1 \log\ |f_1|\}.$$

Recíprocamente, sea $f \in [L^{p_0}(\mu), L^{p_1}(\mu)]_{\delta'_\theta}$ y sea $F \in \mathcal{F}(L^{p_0}(\mu), L^{p_1}(\mu))$ tal que $F'(\theta) = f$. Consideremos el conjunto $A = \{x \in X\ ;\ F(\theta, x) = 0\}$. La función F admite una descomposición del tipo

$$F(\xi, x) = G(\xi, x)(\xi - \theta)\chi_A(x) + F(\xi, x)\chi_{A^c}(x) \qquad \text{p.c.t. } x \in X$$

y así, $f(x) = F'(\theta, x) = G(\theta, x)\chi_A(x) + f(x)\chi_{A^c}(x)$ para casi todo $x \in X$.

Obviamente, $G(\xi, x) = \frac{F(\xi,x)}{\xi - x}\chi_A(x)$ está en $\mathcal{F}(L^{p_0}(\mu), L^{p_1}(\mu))$, de modo que $G(\theta, \cdot)\chi_A$ está en $L^p(\mu)$.

Si $x \in A^c$, $F(\theta, x) \neq 0$ y, por tanto, tiene sentido considerar la función

$$H(\xi, x) = \|F(\theta, \cdot)\|_p \frac{F(\theta, x)}{|F(\theta, x)|} \left(\frac{|F(\theta, x)|}{\|F(\theta, \cdot)\|_p}\right)^{[(1-\xi)p_1 + \xi p_0]\frac{p}{p_0 p_1}} \chi_{A^c}(x).$$

Se cumple que $H \in \mathcal{F}(L^{p_0}(\mu), L^{p_1}(\mu))$, y además, $\|H\|_{\mathcal{F}} = \|F(\theta)\|_p = \|F(\theta)\|_{\delta_\theta} \leq \|F\|_{\mathcal{F}}$.

Puesto que

$$H'(\theta, x) = M\ F(\theta, x)\,(\log\ |F(\theta, x)| - \log\ \|F(\theta)\|_p)\,\chi_{A^c}(x),$$

se tiene que si $f_0^* = (F(\xi, \cdot)\chi_{A^c} - H(\xi, \cdot))'_{\xi=\theta}$,

$$f_0^*(x) = f(x)\chi_{A^c}(x) - M\ F(\theta, x)\,(\log\ |F(\theta, x)| - \log\ \|F(\theta)\|_p)\,\chi_{A^c}(x).$$

Ahora bien, $F(\theta, x)\chi_{A^c}(x) - H(\theta, x) = 0$ y así, sabemos que f_0^* está en $L^p(\mu)$. Además,

$$\|f_0^*\|_p \leq \max\left(\frac{1}{1-\theta}, \frac{1}{\theta}\right) \|F\chi_{A^c} - H\|_{\mathcal{F}} \leq \max\left(\frac{1}{1-\theta}, \frac{1}{\theta}\right) 2\|F\|_{\mathcal{F}}.$$

Tenemos pues que

$$f(x) = G(\theta, x)\chi_A(x) + f_0^*(x) - M\ F(\theta, x)\chi_{A^c}(x) \log\ \|F(\theta)\|_p + M\ F(\theta, x) \log\ |F(\theta, x)|$$

y de esta forma, si llamamos

$$f_0^{**}(x) = G(\theta, x)\chi_A(x) + f_0^*(x) - M\ F(\theta, x)\chi_{A^c}(x) \log\ \|F(\theta)\|_p \quad \text{y}$$
$$f_1^{**}(x) = F(\theta, x)\chi_{A^c}(x),$$

tenemos que $f_0^{**}, f_1^{**} \in L^p(\mu)$ y

$$f(x) = f_0^{**}(x) + M\ f_1^{**} \log\ |f_1(x)| = f_0^{**}(x) + M\ f_1^{**}(x) \log\ |M| +$$
$$+ (M\ f_1^{**}(x)) \log\ |f_1^{**}(x) M| = f_0(x) + f_1(x) \log\ |f_1(x)|,$$

donde

$$f_0 = G(\theta, \cdot)\chi_A + f_0^* - M\ f_1^{**} \log\ \|f_1^{**}\|_p - M\ f_1^{**} \log\ |M| \quad \text{y}$$
$$f_1 = M\ f_1^{**}$$

están en $L^p(\mu)$. Además, de la combinación de los resultados obtenidos, resulta que

$$f_0 = G(\theta, \cdot)\chi_A + f_0^* - f_1 (\log\ \|f_1\|_p - \log\ |M|) - f_1 \log\ |M| =$$
$$= G(\theta, \cdot)\chi_A + f_0^* - f_1 \log\ \|f_1\|_p.$$

En consecuencia,

$$\|f_0 + f_1 \log\ \|f_1\|_p\|_p + |M^{-1}|\ \|f_1\|_p = \|G(\theta, \cdot)\chi_A + f_0^*\|_p + \|f_1^{**}\|_p \leq$$
$$\leq (\|G(\theta, \cdot)\chi_A\|_p + \|f_0^*\|_p) + \|f_1^{**}\|_p \leq \max\left(\frac{1}{1-\theta}, \frac{1}{\theta}\right) \|F\|_{\mathcal{F}} +$$
$$+ \max\left(\frac{1}{1-\theta}, \frac{1}{\theta}\right) 2\|F\|_{\mathcal{F}} + \|F\|_{\mathcal{F}} = \left(3 \max(\frac{1}{1-\theta}, \frac{1}{\theta}) + 1\right) \|F\|_{\mathcal{F}}$$

para toda F tal que $F'(\theta) = f = f_0 + f_1 \log\ |f_1|$. De aquí, es fácilmente deducible la equivalencia del enunciado.

NOTA 1.4: En el caso en que p_0 ó p_1 sea infinito el razonamiento es totalmente análogo, sin más que considerar

$$F(\xi) = \|f_1\|_p \frac{f_1}{|f_1|} \left(\frac{|f_1|}{\|f_1\|_p}\right)^{\xi \frac{p}{p_1}}$$

donde $\frac{1}{p} = \frac{\theta}{p_1}$. (Análogamente, la función $H(\xi, \cdot)$). En este caso, $|M^{-1}|$ queda sustituido por $\frac{p_1}{p} = \theta$.

PROPOSICION 1.5. *En las hipótesis de 1.3 con* $T = \delta_\theta^{n)}$, *se cumple que* f *está en* $[L^{p_0}(\mu), L^{p_1}(\mu)]_T$ *si y sólo si existen* $f_0, ..., f_n$, *en* $L^p(\mu)$ *tal que*

$$f = \sum_{j=0}^{n} f_j (\log\ |f_j|)^j.$$

DEMOSTRACION:

Sabemos que el resultado es cierto para $n = 0,1$. Supongamoslo para $n-1$ y veámoslo para n.

Sea $f \in [L^{p_0}(\mu), L^{p_1}(\mu)]_T$ y sea $F \in \mathcal{F}(L^{p_0}(\mu), L^{p_1}(\mu))$ tal que $F^{n)}(\theta) = f$.

Sea $A = \{x \in X \; ; \; F(\theta, x) = 0\}$. Al igual que hicimos en 1.3, la función F admite una descomposición de la forma $F(\xi, x) = G(\xi, x)(\xi - \theta)\chi_A(x) + F(\xi, x)\chi_{A^c}(x)$ y se verifica

$$f = F^{n)}(\theta, \cdot) = nG^{n-1)}(\theta, \cdot)\chi_A(\cdot) + f\chi_{A^c}(\cdot)$$

Puesto que $G \in \mathcal{F}(L^{p_0}(\mu), L^{p_1}(\mu))$, $G^{n-1)}(\theta, \cdot)\chi_A(\cdot) \in [L^{p_0}(\mu), L^{p_1}(\mu)]_{\delta_\theta^{n-1)}}$ y así, por hipótesis de inducción, tenemos que $nG^{n-1)}(\theta, \cdot)\chi_A(\cdot) = \sum_{j=0}^{n-1} f_j^*(\log \; |f_j^*|)^j$ con f_j^* en $L^p(\mu)$ para todo $j = 0, ..., (n-1)$.

Consideremos, de nuevo, la función

$$H(\xi, \cdot) = \|F(\theta)\|_p \frac{F(\xi, x)}{|F(\xi, x)|} \left(\frac{|F(\xi, x)|}{\|F(\theta)\|_p} \right)^{((1-\xi)p_1 + \xi p_0)\frac{p}{p_0 p_1}} \chi_{A^c}(\cdot).$$

Se cumple que

$$\begin{aligned}
&T(H(\xi, x)) = H^{n)}(\theta, x) = \\
&= F(\theta, x)\chi_{A^c(x)} M^n (\log \; |F(\theta, x)| - \log \; \|F(\theta)\|_p)^n = \\
&= F(\theta, x)\chi_{A^c(x)} M^n \sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p} (\log \; |F(\theta, x)|)^p (-1)^{n-p} (\log \|F(\theta)\|_p)^{n-p} = \\
&= M^n \chi_{A^c(x)} F(\theta, x)(\log \; |F(\theta, x)|)^n + \\
&+ M^n \chi_{A^c(x)} \sum_{p=0}^{n-1} \binom{n}{p} F(\theta, x)(\log \; |F(\theta, x)|)^p (-\log \; \|F(\theta)\|_p)^{n-p}.
\end{aligned}$$

Así, si llamamos $f^* = \sum_{p=0}^{n-1} \binom{n}{p} F(\theta, x)(\log \; |F(\theta, x)|)^p (-\log \; \|F(\theta)\|_p)^{n-p}$, obtenemos, por hipótesis de inducción, que $f^* \in [L^{p_0}(\mu), L^{p_1}(\mu)]_{\delta_\theta^{n-1)}}$ y además

$$H^{n)}(\theta) = M^n \chi_{A^c} \left(F(\theta, \cdot)(\log \; |F(\theta, \cdot)|)^n + f^* \right).$$

Puesto que $F(\theta, \cdot)\chi_{A^c} - H(\theta, \cdot) = 0$ se tiene que

$$[F(\xi, \cdot)\chi_{A^c} - H(\xi, \cdot)]_{|\theta}^{n)} \in [L^{p_0}(\mu), L^{p_1}(\mu)]_{\delta_\theta^{n-1)}}$$

y, por tanto, si expresamos $f\chi_{A^c} = F^{n)}(\theta,\cdot)\chi_{A^c} = [F(\xi,x)\chi_{A^c} - H(\xi,\cdot)]_{|\theta}^{n)} + H^{n)}(\theta,\cdot)$ y combinamos con la forma de $H^{n)}(\theta,\cdot)$ obtenemos que existe una función f^{**} en este espacio tal que

$$f\chi_{A^c} = M^n\chi_{A^c}F(\theta,\cdot)(\log\,|F(\theta,\cdot)|)^n + f^{**}.$$

Deducimos que existe $f^{***} \in [L^{p_0}(\mu), L^{p_1}(\mu)]_{\delta_\theta^{n-1)}}$ tal que

$$f = f^{***} + F(\theta,x)(\log\,|F(\theta,x)|)^n,$$

y, en virtud de la hipótesis de inducción, obtenemos el resultado requerido.

NOTA 1.6: Si hacemos los cálculos análogos a los de 1.3 y aplicamos la hipótesis de inducción, se puede demostrar una equivalencia similar a la de la citada proposición. Aunque no explicitamos la fórmula correspondiente, observemos que la equivalencia 1.3 nos da la siguiente información:

La sucesión $(f_m)_m \subset [L^{p_0}(\mu), L^{p_1}(\mu)]_{\delta'_\theta}$ es convergente a cero si sólo si existen dos sucesiones $(f_m^1)_m$, $(f_m^2)_m$ en $L^p(\mu)$ convergentes a cero tales que, para cada $m \in \mathbb{N}$, $f_m = f_m^1 + f_m^2\,\log\,|f_m^2|$. Pues bien, es fácil ver, aplicando la hipótesis de inducción, que dicha condición se verifica cualquiera que sea $n \in \mathbb{N}$, esto es, $(f_m)_m \subset [L^{p_0}(\mu), L^{p_1}(\mu)]_{\delta_\theta^{n)}}$ es convergente a cero si y sólo si existen $(n+1)$ sucesiones en $L^p(\mu)$, $(f_m^0)_m, \dots, (f_m^n)_m$, convergentes a cero tales que, para cada $m \in \mathbb{N}$, $f_m = \sum_{j=0}^n f_m^j\,(\log\,|f_m^j|)^j$.

De la combinación de los resultados 1.5 y (1;5.7) obtenemos:

COROLARIO 1.7. *Si*

$$T = \sum_{j=0}^{n}\sum_{l=0}^{m(j)} a_{jl}\delta_{\theta_j}^{l)}, \tag{2}$$

$f \in [L^{p_0}(\mu), L^{p_1}(\mu)]_T$ si y sólo si existen $\{f_{l,j} \in L^{p_j}(\mu),\ j = 0,..,n,\ l = 0,..,m(j)\}$, tales que

$$f = \sum_{j=0}^{n}\sum_{l=0}^{m(j)} f_{l,j}(\log\,|f_{l,j}|)^l,$$

donde $\frac{1}{p_j} = \frac{1-\theta_j}{p_0} + \frac{\theta_j}{p_1}$.

Sea p una función medible sobre Γ tal que $1 \le p(\gamma) \le \infty$ para todo $\gamma \in \Gamma$. Sea $w(z) = \alpha(z) + i\tilde{\alpha}(z)$, donde $\alpha(z) = \frac{1}{p(z)} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{1}{p(\gamma)}dP_z(\gamma)$ y $\tilde{\alpha}(z_0) = 0$.

PROPOSICION 1.8. *Si $w'(z_0) \neq 0$, se cumple que $[L^{p(\cdot)}(\mu)]^T = [L^1(\mu), L^\infty(\mu)]_S$, donde $S(\varphi) = T(\varphi \circ w)$. Por tanto, si $T = \delta_{z_0}^{n)}$, $f \in [L^{p(\cdot)}(\mu)]^T$ si y sólo si existen $f_0, ..., f_n$ en $L^{p(z_0)}(\mu)$ tales que*

$$f = \sum_{j=0}^{n} f_j (\log |f_j|)^j.$$

(b) Si T es de la forma (2) y $w'(z_j) \neq 0$ para todo $j = 0, .., n$ entonces, $f \in [L^{p(\cdot)}(\mu)]^T$ si y sólo si existen $\{f_{p,j} \in L^{p(z_j)}(\mu),\ \ p = 0, .., m(j),\ \ j = 0, .., n\}$ tales que

$$f = \sum_{j=0}^{n} \sum_{p=0}^{m(j)} f_{p,j} (\log |f_{p,j}|)^p.$$

DEMOSTRACION:

Si vemos que $[L^{p(\cdot)}(\mu)]^T = [L^1(\mu), L^\infty(\mu)]_S$ obtendremos el resultado requerido sin más que usar 1.4 y 1.7.

Para ello, en virtud de (3;2.7), sólo hemos de ver que se cumple la condición (3;(14)).

Ahora bien, cualquiera que sea Σ cumpliendo las condiciones requeridas, si llamamos $p_0^* = \inf_{\sigma \in \Sigma} p(\sigma)$ y $p_1^* = \sup_{\sigma \in \Sigma} p(\sigma)$, tenemos (3;(14)) en virtud de la densidad de las funciones simples en $L^{p_0^*}(\mu) \cap L^{p_1^*}(\mu) = \cap_{\sigma \in \Sigma} L^{p(\sigma)}(\mu) = \cap_{\sigma \in \Sigma} [L^1(\mu), L^\infty(\mu)]_{\alpha(\sigma)}$. ∎

PROPOSICION 1.9. *En las hipótesis de 1.8, si $w'(z_0) = 0$, se tiene que $L^{p(z_0)}(\mu)$ es isométrico al espacio $[L^{p(\cdot)}(\mu)]^{\delta'_{z_0}, \delta'_{z_0}}$.*

DEMOSTRACION:

Es sabido que

$$\begin{aligned}[L^{p(\cdot)}(\mu)]^{\delta'_{z_0}, \delta'_{z_0}} &= \{x \in \mathcal{U}\ ;\ \exists f \in \mathcal{F}(L^{p(\cdot)}(\mu), \Gamma) \text{ con } f\delta'_{z_0} = x\delta'_{z_0}\} = \\ &= \{x \in \mathcal{U}\ ;\ \exists f \in \mathcal{F} \text{ con } f(z_0) = x, f'(z_0) = 0\}.\end{aligned}$$

Obviamente, se tiene que $[L^{p(\cdot)}(\mu)]^{\delta'_{z_0}, \delta'_{z_0}}$ está contenido continuamente en $L^{p(z_0)}(\mu)$.

Sea ahora $f \in L^{p(z_0)}(\mu)$ y consideremos la función

$$\tilde{F}(z) = \|f\|_{p(z_0)} \frac{f}{|f|} \left(\frac{|f|}{\|f\|_{p(z_0)}} \right)^{p(z_0) w(z)}.$$

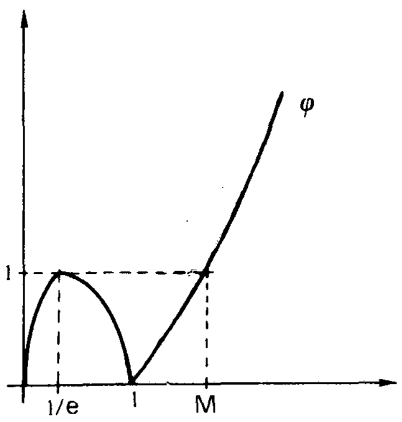
Sabemos que $\tilde{F} \in \mathcal{F}(L^{p(\cdot)}(\mu), \Gamma)$ puesto que $\tilde{F} = F \circ w$, donde F es la función definida en (1) y además, $\|\tilde{F}\|_{\mathcal{F}} \leq \|F\|_{\mathcal{F}} = \|f\|_{p(z_0)}$ (visto en (3;2.1)).

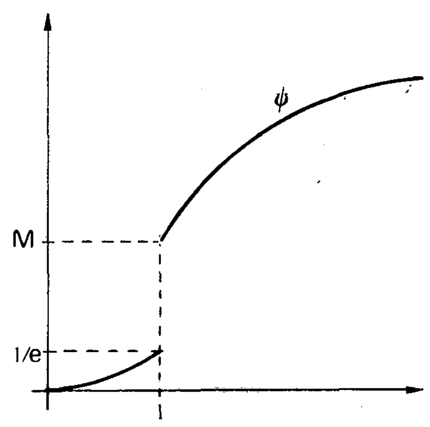
Como $\tilde{F}(z_0) = f$ y $\tilde{F}'(z_0) = 0$, tenemos que $f \in [L^{p(\cdot)}(\mu)]^{\delta'_{z_0},\delta'_{z_0}}$ y $\|f\|_{[L^{p(\cdot)}(\mu)]^{\delta'_{z_0},\delta'_{z_0}}} \le \|f\|_{p(z_0)}$. ∎

NOTA 1.10: Una vez vista la forma de una función de $[L^{p(\cdot)}(\mu)]^T$, tratamos de ver si estas funciones están en algun espacio "conocido". Este espacio será, como veremos, un espacio de Orliz.

Consideremos $T = \delta'_{z_0}$ y sea $f \in [L^{p(\cdot)}(\mu)]^T$. En virtud de 1.3, existen g y b en $L^{p(z_0)}(\mu)$ tales que $f = g + b \log |b|$.

Llamemos $\varphi(x) = x|\log x|$ para $x \in \mathbf{R}^+$. La inversa de φ no es una función pero si lo es la función Ψ definida por $\Psi(x) = \min\{(\varphi)^{-1}(x)\}$.





A la función Ψ la llamaremos pseudo-inversa de φ. Obviamente,

$$\Psi(x|\log x|) = x \qquad \text{si } x \in [0, \frac{1}{e}) \cup [M, \infty) \qquad \text{y}$$
$$\Psi(x|\log x|) \le x \qquad \text{si } x \in [\frac{1}{e}, M),$$

donde $M \neq \frac{1}{e}$ es tal que $\varphi(M) = \varphi(\frac{1}{e})$.

Sea $p = p(z_0)$ y consideremos $\phi = \Psi^p$. Entonces,

$$\phi(x|\log x|) = x^p \qquad \text{si } x \in [0, \frac{1}{e}) \cup [M, \infty) \qquad \text{y}$$
$$\phi(x|\log x|) \le x^p \qquad \text{si } x \in [\frac{1}{e}, M).$$

Esta función es de Orliz (véase [TU], 0.2, 0.3), y así, podemos considerar el espacio de Orliz (metrizable y completo)

$$L_\phi(\mu) = \{f \text{ medible } ; \exists \varepsilon > 0 \text{ y } \int_X \phi(\varepsilon|f(x)|)d\mu < \infty\}$$

dotado de la F-norma $\|f\|_\phi = \inf\{\varepsilon > 0 \ ; \ \int_X \phi(\frac{|f(x)|}{\varepsilon})d\mu < \varepsilon\}$.

PROPOSICION 1.11. *Los espacios* $[L^{p(\cdot)}(\mu)]_{\delta'_{z_0}}$ *y* $L_\phi(\mu)$ *son algebraica y topológicamente equivalentes.*

DEMOSTRACION:

Veamos, en primer lugar, que $L^p(\mu)$ está contenido continuamente en $L_\phi(\mu)$. Si $\varphi(x) = x^p$, entonces $L_\varphi(\mu) = L^p(\mu)$ y

$$\lim_{u\to\infty} \frac{\varphi(u)}{\phi(u)} = \lim_{v\to\infty} \frac{\varphi(v|\log\ v|)}{\phi(v|\log\ v|)} = \lim_{v\to\infty} \frac{v^p(|\log\ v|)^p}{v^p} = +\infty.$$

Lo mismo se obtiene si u tiende a cero. Por consiguiente, tanto en un entorno de cero como en un entorno de infinito $\varphi(\cdot) \geq \phi(\cdot)$, esto es, usando la notación de [TU], $\varphi \underset{0}{\overset{\infty}{\succ}} \phi$, y así, $L^p(\mu)$ está contenido continuamente en $L_\phi(\mu)$. Se deduce, por el teorema de la aplicación abierta, que el espacio suma $L^p(\mu) + L_\phi(\mu)$ es equivalente a $L_\phi(\mu)$.

Veamos la igualdad algebraica de los espacios en cuestión. Sea $f \in L_\phi(\mu)$ (siempre podemos suponer $f \geq 0$) y sea $k > 0$ tal que $\int_X \phi(kf(x))d\mu < +\infty$. Consideremos

$$kf(x) = kf(x)\chi_{\{x\ ;\ kf(x)\leq\frac{1}{e}\}} + kf(x)\chi_{\{x\ ;\ kf(x)>\frac{1}{e}\}} = f_1 + f_2.$$

Se cumple que existen dos funciones g_1 y g_2 tales que $g_1(x) \leq \frac{1}{e}$, $g_2(x) > M$ y para $j = 1,2$ $f_j = g_j|\log\ g_j|$. Puesto que $\phi(f_j) \leq \phi(kf)$ por ser ϕ creciente, tenemos que $\phi(f_j) \in L^1(\mu)$ para $j = 1,2$. En consecuencia, $g_j = \phi^{\frac{1}{p}}(f_j)$ es medible y está en $L^p(\mu)$.

De esta forma, $kf = f_1 + f_2 = g_1|\log\ g_1| + g_2|\log\ g_2|$ está en $[L^{p(\cdot)}(\mu)]^{\delta'_{z_0}}$.

Recíprocamente, si $f = g + b\log\ |b|$, tenemos que $g \in L_\phi(\mu)$ y puesto que

$$\int_X \phi(|b(x)|\ |\log\ |b(x)|\ |)d\mu \leq \int_X |b(x)|^p d\mu < +\infty,$$

se deduce que $b\log\ |b| \in L_\phi(\mu)$ y, a fortiori, f está en este espacio.

Equivalencia topológica : puesto que el espacio $[L^{p(\cdot)}(\mu)]^{\delta'_{z_0}}$ es de Banach y $L_\phi(\mu)$ de Frechet, sólo hemos de ver que la aplicación identidad $id : [L^{p(\cdot)}(\mu)]^{\delta'_{z_0}} \longrightarrow L_\phi(\mu)$ es continua. Ahora bien, si $(f_n)_n$ converge a cero en $[L^{p(\cdot)}(\mu)]^{\delta'_{z_0}}$, existen, en virtud de 1.3, dos sucesiones $(g_n)_n, (b_n)_n$ en $L^p(\mu)$ tales que $f_n = g_n + b_n\log\ |b_n|$ para cada $n \in \mathrm{N}$ y

$$\lim_n \|b_n\|_p + \|g_n - b_n\log\ \|b_n\|_p\|_p = 0.$$

En consecuencia, g_n y b_n convergen a cero en $L^p(\mu)$ y, a fortiori, en $L_\phi(\mu)$. Además, dado $\varepsilon = \frac{1}{m}$, existe $n(m) \in \mathbf{N}$ tal que $\|b_n\|_p \leq \frac{1}{m^2}$ para $n \geq n(m)$, y así,

$$\int_X \phi(mb_n|\log\ |b_n|\ |)d\mu \leq \int_X \phi(mb_n|\log\ (|b_n|\ m)|)d\mu \leq \|mb_n\|_p^p \leq m^p(\frac{1}{m^2})^p \leq \frac{1}{m}.$$

Concluimos que $\|b_n \log\ |b_n|\ \|_\phi$ converge a cero y, por tanto, f_n converge a cero en la métrica de $L_\phi(\mu)$. ∎

NOTA 1.12: Si trabajamos de forma análoga con las funciones $\varphi_n(x) = x|\log\ x|^n$ y $\phi_n = \Psi_n^p$, siendo Ψ_n la función pseudo-inversa de φ_n, obtenemos que $[L^{p(\cdot)}(\mu)]^{\delta_{z_0}^{n)}}$ es equivalente al espacio $L_{\phi_n}(\mu)$.

Para ello, sólo hemos de precisar el hecho de que $L_{\phi_{n-1}}(\mu)$ está contenido continuamente en $L_{\phi_n}(\mu)$. Ahora bien,

$$\lim_{u\to\infty} \frac{\phi_n(u)}{\phi_{n-1}(u)} = \lim_{v\to\infty} \frac{\phi_n(v|\log\ v|^{n-1})}{\phi_{n-1}(v|\log\ v|^{n-1})} \leq \lim_{v\to\infty} \frac{\phi_n(v|\log\ v|^n)}{v^p} = 1.$$

Lo mismo sucede si u tiende a cero. En consecuencia, $\phi_{n-1} \underset{\infty}{\overset{0}{\succ}} \phi_n$ y, por tanto, $L_{\phi_{n-1}}(\mu)$ está contenido continuamente en $L_{\phi_n}(\mu)$.

PROPOSICION 1.13. *Si* $T = \sum_{j=0}^n \sum_{l=0}^{m(j)} a_{jl}\delta_{z_j}^{l)}$, *el espacio interpolado* $[L^{p(\cdot)}(\mu)]^T$ *es equivalente al espacio* $\sum_j L_{\phi_j}(\mu)$, *donde* ϕ_j *es la potencia* $p(z_j)$ *de la función pseudo-inversa de* $\varphi_j(x) = x|\log\ x|^{m(j)}$.

Supongamos ahora que μ es una medida finita. Vamos a ver que $[L^{p(\cdot)}(\mu)]^T$ con $Sop\ T$ finito es un espacio de Orliz L_ϕ, donde ϕ será una N-función ([KR]) y, por tanto, L_ϕ será un espacio de Banach.

Para ello, recogemos algunas definiciones y resultados contenidos en [KR] y ([K-J-F], cap. III).

DEFINICION 1.14. *Una N-función es una función del tipo* $M(u) = \int_0^{|u|} p(t)\ dt$, *donde* $p(t)$ *es continua por la derecha para* $t \geq 0$, *creciente y tal que* $p(0) = 0$, $\lim_{t\to\infty} p(t) = \infty$.

Equivalentemente, una función continua M *es una N-función si es par y se verifica que*

$$\lim_{u\to 0}(M(u)/u) = 0 \qquad y \qquad \lim_{u\to\infty}(M(u)/u) = \infty$$

DEFINICION 1.15. *Se dice que la N-función M satisface la condición Δ_2 para valores grandes de u, si existe $k > 0$ y $u_0 \geq 0$ tales que $M(2u) \leq kM(u)$ para todo $u \geq u_0$.*

TEOREMA 1.16. *La clase de Orliz*

$$L_M = \{f \text{ medibles } ; \rho(u,m) = \int_X M(|u(x)|)\, dx < +\infty\}$$

es un conjunto lineal si y sólo si M satiface la condición Δ_2. En estas condiciones, el espacio L_M, dotado de la norma

$$\|u\|_{(M)} = \inf\{k > 0 \; ; \int_X M(\frac{|u(x)|}{k})\, dx \leq 1\},$$

es un espacio de Banach.

DEFINICION 1.17. *Una función convexa Q se llama parte principal de la N-función M si existe u_0 tal que $Q(u) = M(u)$ para todo $u \geq u_0$.*

Si la función convexa Q satisface $\lim_{u\to\infty}(Q(u)/u) = \infty$, entonces Q es la parte principal de alguna N-función.

TEOREMA 1.18. *Si $\|u\|_{(M)} \leq 1$ entonces $\rho(u, M) \leq \|u\|_{(M)}$ y si $\|u\|_{(M)} > 1$ entonces $\rho(u, M) \geq \|u\|_{(M)}$.*

Con estas nociones, comenzaremos por identificar el espacio $[L^{p(\cdot)}(\mu)]^{\delta_{z_0}^{n)}}$. Sea $\varphi_n(x) = x|\log\ x|^n$. Se verifica que φ es inyectiva en $[1, \infty)$ y, puesto que $\lim_{x\to\infty}\varphi(x) = +\infty$, deducimos que para todo $y \in \mathbf{R}^+$, existe un único $x \geq 1$ tal que $y = x(\log\ x)^n$. Sea ϕ tal que $\phi(x(\log\ x)^n) = x^p$, con $p = p(z_0)$. Es fácil ver que existe $x_0 \in \mathbf{R}^+$ tal que $\phi''(x(\log\ x)^n)$ es positivo para $x \geq x_0$. Por tanto, si $y_0 = x_0(\log\ x_0)^n$, tenemos que ϕ es convexa en el intervalo $[y_0, \infty)$.

Por otra parte $\phi(y) \geq 0$ y

$$\lim_{y\to\infty}\frac{\phi(y)}{y} = \lim_{x\to\infty}\frac{\phi(x(\log\ x)^n)}{x(\log\ x)^n} = \lim_{x\to\infty}\frac{x^p}{x(\log\ x)^n} = +\infty,$$

de modo que existe una N-función Φ_n con parte principal ϕ.

Se trata ahora de construir Φ_n. Dado $\varepsilon > 0$, llamemos $\xi_\varepsilon(x) = kx^{p-\varepsilon}$, donde k es tal que $\xi_\varepsilon(y_0) = \phi(y_0)$, esto es, $k = x_0^\varepsilon(\log\ x_0)^{n(\varepsilon-p)}$.

Un sencillo cálculo permite probar que $\xi'_\varepsilon(y_0) \leq \Phi'(y_0)$ si y sólo si

$$\frac{p-\varepsilon}{p} \leq \frac{(\log\ x_0)^n}{n(\log\ x_0)^{n-1} + (\log\ x_0)^n} = \frac{\log\ x_0}{n + \log\ x_0}$$

y así, para x_0 suficientemente grande, tenemos que $\xi'_\varepsilon(y_0) \leq \phi'(y_0)$. En consecuencia, la función

$$\Phi_n(u) = \begin{cases} ku^{p-\varepsilon} & \text{si } u \leq y_0 \\ \phi(u) & \text{si } u > y_0 \end{cases}$$

es una N-función con parte principal ϕ.

Consideremos el espacio L_{Φ_n}. Es fácil ver que Φ_n cumple la condición Δ_2 para todo $u \geq 0$ y, por tanto, L_{Φ_n} es un espacio de Banach-Orliz.

LEMA 1.19. *Para cada $n \in \mathbb{N}$, L_{Φ_n} está contenido con continuidad en $L_{\Phi_{n+1}}$.*

DEMOSTRACION:

Tenemos que para x suficientemente grande ($x \geq x_0$),

$$\Phi_n(x(\log\ x)^n) = x^p = \Phi_{n+1}(x(\log\ x)^{n+1})$$

y, puesto que Φ_{n+1} es creciente, es claro que $\Phi_{n+1}(y) \leq \Phi_n(y)$ para $y \geq y_0$. Por otra parte

$$\Phi_{n+1}(y) = x_0^\varepsilon(\log\ x_0)^{(n+1)(\varepsilon-p)}y^{p-\varepsilon} \leq x_0^\varepsilon(\log\ x_0)^{n(p-\varepsilon)}y^{p-\varepsilon} = \Phi_n(y)$$

para todo $y \leq y_0$. En consecuencia, $\Phi_{n+1} \leq \Phi_n$ y así, si $f \in L_{\Phi_n}$ y $\|f\|_{\Phi_n} \leq 1$ se cumple, en virtud de 1.18, que $\rho(f, \Phi_n) \leq \|f\|_{\Phi_n}$. Por consiguiente,

$$\rho(f, \Phi_{n+1}) = \int_X \Phi_{n+1}(f)d\mu \leq \int_X \Phi_n(f)d\mu = \rho(f, \Phi_n) \leq \|f\|_{\Phi_n} \leq 1$$

y, de nuevo en virtud de (1.18), obtenemos que $\|f\|_{\Phi_{n+1}} \leq 1$. Esto es, para toda $f \in L_{\Phi_n}$, se cumple que $\|f\|_{\Phi_{n+1}} \leq \|f\|_{\Phi_n}$. ∎

PROPOSICION 1.20. *Si μ es una medida finita sobre el espacio X, $[L^{p(\cdot)}(\mu)]^{\delta_{x_0}^{n)}}$ es equivalente al espacio de Orliz L_{Φ_n}.*

DEMOSTRACION:

Sea $f \in L_{\Phi_n}$. Se tiene que $\Phi_n(|f|) \in L^1(\mu)$ y así, $\Phi_n^{\frac{1}{p}}(|f|) \in L^p(\mu)$. Ahora bien,

(1) Si $|f(x)| \leq y_0$, $\Phi_n(|f(x)|) = k|f(x)|^{p-\varepsilon}$.

(2) Si $|f(x)| > y_0$, existe un único $g(x) > x_0$ tal que $g(x)|\log\ g(x)|^n = |f(x)|$. Se verifica que $\Phi_n(|f(x)|) = |g(x)|^p$ y, por tanto, g es medible y está en $L^p(\mu)$.

En consecuencia, si llamamos $A = \{x \in X\ ;\ |f(x)| \leq y_0\}$, tenemos que

$$\begin{aligned}|f(x)| &= |f(x)|\chi_A(x) + |f(x)|\chi_{A^c}(x) = \\ &= k^{\frac{-1}{p-\varepsilon}} \Phi_n^{\frac{1}{p-\varepsilon}}(|f(x)|\chi_A(x)) + \Phi_n^{\frac{1}{p}}(|f(x)|\chi_{A^c}(x))(\log\ \Phi_n^{\frac{1}{p}}(|f(x)|\chi_{A^c}(x)))^n.\end{aligned}$$

Puesto que $\Phi_n^{\frac{1}{p-\varepsilon}}(|f(x)|\chi_A(x))$ y $\Phi_n^{\frac{1}{p}}(|f(x)|\chi_{A^c}(x))$ están en $L^p(\mu)$, se deduce que $f(x)$ está en $[L^{p(\cdot)}(\mu)]^{\delta_{x_0}^{n)}}$.

Recíprocamente, si $f \in [L^{p(\cdot)}(\mu)]^{\delta_{x_0}^{n)}}$, existen $f_0, ..., f_n$ en $L^p(\mu)$ tal que

$$f = \sum_{j=0}^{n} f_j(\log\ |f_j|)^j.$$

Puesto que estamos en un espacio de medida finita, sólo interesan los valores "grandes" de las funciones f_j, esto es, $\{x \in X\ ;\ f_j(x) \geq x_0\}$. Ahora bien,

(i) Si $f_0(x) \geq x_0$, existe $g_0(x) \leq f_0(x)$ tal que $g_0(x) \log\ |g_0(x)| = f_0(x)$ y así, $\Phi_1(f_0(x)) = g_0(x) \in L^1(\mu)$. Por tanto, $f_0 \in L_{\Phi_1}(\mu)$ y, a fortiori, en virtud de 1.12, $f_0 \in L_{\Phi_n}$.

(ii) Para $1 \leq j \leq n$, si $f_j(x) \geq x_0$, $\Phi_j(f_j(x)(\log\ |f_j(x)|)^j) = |f_j(x)|^p \in L^1(\mu)$ y, por tanto, es claro que $f_j(\log\ |f_j|)^j \in L_{\Phi_n}$.

En consecuencia, $f \in L_{\Phi_n}$ y, así, concluimos que los espacios L_{Φ_n} y $[L^{p(\cdot)}(\mu)]^{\delta_{x_0}^{n)}}$ coinciden algebraicamente.

Veamos la equivalencia topológica: si $(f_n)_n$ es una sucesión en $[L^{p(\cdot)}(\mu)]^{\delta_{x_0}^{n)}}$ tal que $[L^{p(\cdot)}(\mu)]^{\delta_{x_0}^{n)}} - \lim_n f_n = 0$, existen, en virtud de 1.6, $n+1$ sucesiones $(f_j^m)_m$ $(0 \leq j \leq n)$ en $L^p(\mu)$ tales que, para cada $m \in \mathbf{N}$, $f_m = \sum_j f_j^m(\log\ |f_j^m|)^j$ y, cualquiera que sea j, $L^p(\mu) - \lim_m f_j^m = 0$. Ahora bien, sea $\delta > 0$. Se verifica que

$$\begin{aligned}&\int_X \Phi_n(|f_j^m(x)|\ |\log\ |f_j^m(x)|\ |^j)d\mu \leq \int_X \Phi_j(|f_j^m(x)|\ |\log\ |f_j^m(x)|\ |^j)d\mu = \\ &= \int_{\{x\ ;\ |f_j^m(x)| \leq x_0\}} k|f_j^m(x)|^{p-\varepsilon}|\log\ |f_j^m(x)|\ |^{j(p-\varepsilon)}d\mu + \int_{\{x\ ;\ |f_j^m(x)| > x_0\}} |f_j^m(x)|^p d\mu \ll \\ &\ll \int_{\{x\ ;\ |f_j^m(x)| \leq \delta\}} k|f_j^m(x)|^p(|f_j^m(x)|^{-\varepsilon}\ |\log\ |f_j^m(x)|\ |^{j(p-\varepsilon)})d\mu + \\ &+ \int_{\{x\ ;\ \delta < |f_j^m(x)| \leq x_0\}} |f_j^m(x)|^{p-\varepsilon}d\mu + \|f_j^m(\cdot)\|_p \ll \|f_j^m(\cdot)\|_p\end{aligned}$$

y así, existe $m_0 \in \mathbb{N}$ tal que si $m \geq m_0$, $\int_X \Phi_n(|f_m(x)|)d\mu \leq \varepsilon$. Consecuentemente, $L_{\Phi_n} - \lim_m f_m = 0$.

Puesto que ambos espacios son de Banach, el teorema de la aplicación abierta asegura la equivalencia topológica de los mismos. ∎

Si denotamos a Φ_n por $\Phi_n^{p(z_0)}$, se tiene:

COROLARIO 1.21. *Si* $T = \sum_{j=0}^{n} \sum_{l=0}^{m(j)} a_{jl} \delta_{z_j}^{l)}$ *y* μ *es una medida finita sobre* X, *el espacio* $[L^{p(\cdot)}(\mu)]^T$ *es equivalente al espacio* $\sum_{j=0}^{n} L_{\Phi_{m(j)}^{p(z_j)}}(\mu)$.

NOTA 1.22: Se sigue de la demostración de 1.13 que si μ es una medida no finita, entonces

(i) $L_{\Phi_n^{p(z_0)}}(\mu)$ está contenido con continuidad en $[L^{p(\cdot)}(\mu)]^{\delta_{z_0}^{n)}}$.

(ii) $[L^{p(\cdot)}(\mu)]^{\delta_{z_0}^{n)}}$ está contenido en $L^{p+\delta}(\mu) + L_{\Phi_n^{p(z_0)}}(\mu)$, para todo $\delta > 0$.

Si $f = \sum' f_j(\log\ |f_j|)^j$, está visto que los valores "grandes" de f_j están en $L_{\Phi_n^{p(z_0)}}(\mu)$. Por tanto, sólo quedan los valores "pequeños".

Ahora bien, sea $\varepsilon > 0$ y $A_j = \{x \in X\ ;\ |f_j(x)| < \varepsilon\}$, entonces

$$\int_{A_j} |f_j(x)(\log\ |f_j(x)|)|^{p+\delta)} d\mu \leq M_j \|f_j\|_p^p < +\infty,$$

y en consecuencia, queda demostrada la condición (ii).

NOTA 1.23: Puesto que $(X, \mathcal{M}, \mu)$ era un espacio de medida arbitrario, tenemos identificados los espacios interpolados de familias del tipo:

(i) $\{l^{p(\gamma)}(w)\ ,\ \gamma \in \Gamma\}$.

(ii) $\{l_\sigma^{p(\gamma)}\ ,\ \gamma \in \Gamma\}$, donde

$$l_\sigma^{p(\gamma)} = \{(x_n)_n\ ;\ \left(\sum_{n=0}^{\infty} (2^{n\sigma} x_n)^{p(\gamma)}\right)^{\frac{1}{p(\gamma)}} < +\infty\}$$

NOTA 1.24: *Comportamiento asintótico de* L_{Φ_n}.

Se tiene que $\Phi_n(x|\log\ x|^n) = x^p$, si $x \geq x_0$. En consecuencia, es fácil ver que

$$\lim_{y \to \infty} \frac{\Phi_n(y)(\log\ y)^{np}}{y^p} = 1 \tag{3}$$

Por tanto, Φ_n se comporta para valores grandes del argumento como $y^p(\log\ y)^{-np}$, y así, si $f \in L(\log\ L)^{-np}$, se cumple que $f^p(x)\chi_{\{x\ ;\ |f(x)|>k\}}(x)$ está en $L_{\Phi_n} = [L^{p(\cdot)}(\mu)]^{\delta_{z_0}^{n)}}$ para algun k.

Observemos además, que el límite (3) también es 1 si x tiende a cero y, por tanto, existe λ suficientemente pequeño tal que $f^p(x)\chi_{\{x\ ;\ |f(x)|<\lambda\}} \in L(\log\ L)^{-np}$. Deducimos que $f \in [L^{p(\cdot)}(\mu)]^{\delta_{z_0}^{n)}}$ si $f \in L(\log\ L)^{-np}$.

§2 Familias de espacios $\mathbf{L}^p$ con valores vectoriales.

Sea $\{B(\gamma)\ ,\ \gamma \in \Gamma\}$ una familia de interpolación con espacio contenedor $\mathcal{U}$ y espacio log-intersección $\mathcal{B}$.

Antes de comenzar la interpolación de familias de espacios L^p con valores vectoriales, incluimos algunas definiciones sobre medidas vectoriales ([D-U], cap. II).

DEFINICION 2.1. *Sea A un espacio normado y $(X, \mathcal{M}, \mu)$ un espacio de medida. Una función $f : X \longrightarrow A$ se llama simple si existen $a_1, .., a_n \in A$ y $E_1, .., E_n \subset \mathcal{M}$ tales que $f = \sum_{i=1}^n a_i \chi_{E_i}$.*

De una función $f : X \longrightarrow A$ se dice que es μ-medible si existe una sucesión $(s_n)_n$ de funciones simples tal que $\lim_n \|s_n(x) - f(x)\|_A = 0$ para casi todo $x \in X$ $[\mu]$. Y es débilmente μ-medible si, para cada $l \in A^*$, $l(f) : X \longrightarrow \mathbf{C}$ es μ-medible.

DEFINICION 2.2. *Una función vectorial μ-medible $f : X \longrightarrow A$ es integrable (en el sentido de Bochner) si existe $(s_n)_n$, sucesión de funciones simples tal que $\lim_n \int_X \|s_n - f\|_A d\mu = 0$ y, en este caso, se define*

$$\int_X f d\mu = \lim_n \int_X s_n d\mu.$$

DEFINICION 2.3. *Se define L_A^p como el espacio de las funciones μ-medibles $f : X \longrightarrow A$ tales que*

$$\int_X \|f\|_A^p d\mu < +\infty.$$

Este espacio, dotado de la norma $\|f\|_{L_A^p} = \|\ \|f\|_A\|_{L^p}$, es un espacio de Banach.

Si $p \geq 1$, la familia $\{L_{B(\gamma)}^p\ ;\ \gamma \in \Gamma\}$ es de interpolación con espacio contenedor $L_{\mathcal{U}}^p$ y espacio log-intersección

$$\mathcal{B}_{L^p} = \{f \in \cap_{\gamma\in\Gamma} L_{B(\gamma)}^p\ ;\ \int_\Gamma \log^+\left(\int_X \|f(x)\|_{B(\gamma)}^p d\mu\right) d\gamma < +\infty\}.$$

(Véase [H], cap. II, §3).

Se trata de ver, a continuación, que relación existen entre los distintos espacios interpolados. El siguiente lema está implícito en ([H], cap. 2, Th. 3.1).

LEMA 2.4. *Sea $(X, \mathcal{M}, \mu)$ un espacio de medida σ-finito. Si $f \in \mathcal{B}_{L^p(\mu)}$ entonces, para casi todo $x \in X$, $f(x) \in \mathcal{B}$.*

DEMOSTRACION:

Si $\mu(X) = 1$, la fórmula de Jensen asegura que

$$\int_\Gamma \int_X \log^+ \|f(x)\|^p_{B(\gamma)} d\mu d\gamma \leq \int_\Gamma \log^+ \int_X \|f(x)\|^p_{B(\gamma)} d\mu d\gamma < +\infty.$$

En virtud del teorema de Fubbini, se deduce que $\int_X \int_\Gamma \log^+ \|f(x)\|^p_{B(\gamma)} d\gamma d\mu < +\infty$ y así, para casi todo $x \in X$, $\int_\Gamma \log^+ \|f(x)\|_{B(\gamma)} d\gamma < +\infty$. En consecuencia, $f(x) \in \mathcal{B}$ para casi todo $x \in X$.

Si $\mu(X) < +\infty$, el razonamiento es totalmente análogo. Por último, si μ es σ-finita, existen $(A_n)_n$ en $\mathcal{M}$ tal que $\mu(A_n) < +\infty$ y $X = \cup_n A_n$. Así, puesto que, para cada $n \in \mathbf{N}$, $\int_{A_n} \int_\Gamma \log^+ \|f(x)\|_{B(\gamma)} d\gamma d\mu < +\infty$. deducimos que, para casi todo $x \in A_n$ y para todo $n \in \mathbf{N}$, $\int_\Gamma \log^+ \|f(x)\|_{B(\gamma)} d\gamma < +\infty$. De lo cual se concluye la tesis.

LEMA 2.5. *Sea $(X, \mathcal{M}, \mu)$ un espacio de medida σ-finito y sea $q \leq p$. Si*

$$G(\cdot,\cdot) : D \times X \longrightarrow \mathbf{C}$$

está en $\mathcal{G}^q(L^p_{B(\cdot)}, \Gamma)$, entonces, para casi todo $x \in X$, $G(\cdot, x)$ está en $\mathcal{G}^q(B(\cdot), \Gamma)$.

DEMOSTRACION:

Sea $G \in \mathcal{G}^q(L^p_{B(\cdot)}, \Gamma)$. Se tiene que $G(z,x) = \sum' \varphi_j(z) f_j(x)$, donde $f_j \in \mathcal{B}_{L^p(\mu)}$. Por el lema 2.4, $f_j(x) \in \mathcal{B}$ para casi todo $x \in X$ y así, $G(\cdot, x)$ es de la forma de una función de $\mathcal{G}^q(B(\cdot), \Gamma)$.

Es sabido, por la desigualdad integral de Minkowski, que si μ es σ-finita , $1 \leq r < +\infty$ y $F(\gamma, x)$ es una función $d\gamma \times d\mu$-medible, entonces

$$\| \int_\Gamma F(\gamma, \cdot) d\gamma \|_{L^r(\mu)} \leq \int_\Gamma \|F(\gamma, \cdot)\|_{L^r(\mu)} d\gamma.$$

Sea $r = p/q \geq 1$, se cumple que

$$\|G\|_{\mathcal{F}^q(L^p_{B(\cdot)},\Gamma)} = \left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \|G(\gamma)\|^q_{L^p_{B(\gamma)}} d\gamma\right)^{\frac{1}{q}} =$$

$$= \left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \left(\int_X \|G(\gamma,x)\|^p_{B(\gamma)} d\mu\right)^{\frac{q}{p}} d\gamma\right)^{\frac{1}{q}} =$$

$$= \left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \| \, \|G(\gamma,x)\|^q_{B(\gamma)}\|_{L^r(\mu)} d\gamma\right)^{\frac{1}{q}} \geq \|\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \|G(\gamma,x)\|^q_{B(\gamma)} d\gamma\|^{\frac{1}{q}}_{L^r(\mu)} =$$

$$= \left(\int_X \left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \|G(\gamma,x)\|^q_{B(\gamma)} d\gamma\right)^{\frac{p}{q}} d\mu\right)^{\frac{1}{p}}.$$

En consecuencia, si $G \in \mathcal{G}^q(L^p_{B(\cdot)},\Gamma)$, $\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \|G(\gamma,x)\|^q_{B(\gamma)} d\gamma < +\infty$ para casi todo $x \in X$ y así, $G(\cdot,x) \in \mathcal{G}^q(B(\cdot),\Gamma)$. Además,

$$\| \, \|G(\cdot,\cdot)\|_{\mathcal{G}^q(B(\cdot),\Gamma)}\|_{L^p(\mu)} \leq \|G\|_{\mathcal{G}^q(L^p_{B(\cdot)},\Gamma)}. \tag{4}$$

LEMA 2.6. *Sea $q \leq p$. Si $F \in \mathcal{F}^q(L^p_{B(\cdot)},\Gamma)$, entonces $F(\cdot,x) \in \mathcal{F}^q(B(\cdot),\Gamma)$ para casi todo $x \in X$.*

DEMOSTRACION:

Si $F \in \mathcal{F}^q(L^p_{B(\cdot)},\Gamma)$, existe $(G_n)_n$ en $\mathcal{G}^q(L^p_{B(\cdot)},\Gamma)$ tal que $F = \lim_n G_n$. En consecuencia, en virtud el lema anterior, para casi todo $x \in X$, $G_n(\cdot,x) \in \mathcal{G}^q(B(\cdot),\Gamma)$. Sea para cada $n \in \mathbf{N}$, el conjunto A_n de medida nula tal que $G(\cdot,x) \in \mathcal{G}^q(B(\cdot),\Gamma)$ para todo $x \in X \setminus A_n$.

Sea $A = \cup_n A_n$. Se tiene que A es de medida nula y, para todo $x \in X \setminus A$ y todo $n \in \mathbf{N}$, $G_n(\cdot,x) \in \mathcal{G}^q(B(\cdot),\Gamma)$. Además, en virtud de (4), tenemos

$$\left(\int_X \|G_n(\cdot,x) - G_m(\cdot,x)\|^p_{\mathcal{G}^q(B(\cdot),\Gamma)} d\mu\right)^{\frac{1}{p}} \leq \|G_n - G_m\|_{\mathcal{G}^q(L^p_{B(\cdot)},\Gamma)}$$

y así, existe una parcial $(G_{n_k})_k$ que seguiremos denotando $(G_n)_n$ tal que, para casi todo $x \in X$, G_{n_k} es convergente hacia una función $H(\cdot,x) \in \mathcal{F}^q(B(\cdot),\Gamma)$.

Ahora bien, si $F = \lim_n G_n$ entonces, para casi todo $\gamma \in \Gamma$, $F(\gamma) = L^p_{\mathcal{U}} - \lim_n G_n(\gamma)$ y, por tanto, $G_n(\gamma,x)$ converge a $F(\gamma,x)$ en $\mathcal{U}$. En consecuencia, $H(\cdot,x) = F(\cdot,x)$ para casi todo $x \in X$. Concluimos que $F(\cdot,x) \in \mathcal{F}^q(B(\cdot),\Gamma)$ y que

$$\| \, \|F(\cdot,\cdot)\|_{\mathcal{F}^q(B(\cdot),\Gamma)}\|_{L^p(\mu)} \leq \|F\|_{\mathcal{F}^q(L^p_{B(\cdot)},\Gamma)}.$$

PROPOSICION 2.7. Sea $1 \le p < +\infty$.

(a) *El espacio* $L^p_{B^{T,q}}$ *está contenido con continuidad en* $[L^p_{B(\cdot)}(\mu)]^{T,q}$ *con norma menor o igual que* 1.

(b) *Existe* $L : L^p_{B_{T,q}} \longrightarrow [L^p_{B(\cdot)}(\mu)]_{T,q}$ *lineal continuo con norma menor o igual que* 1.

DEMOSTRACION:

(a) Sea $f \in L^p_{B^{T,q}}$ y supongamos que f es característica, esto es, existe un conjunto medible $A \subset X$ tal que $f = u\chi_A$ con $u \in B^{T,q}$.

Dado $\varepsilon > 0$, existe $F \in \mathcal{F}^q(B(\cdot),\Gamma)$ tal que $T(F) = u$ y $\|F\|_{\mathcal{F}^q(B(\cdot),\Gamma)} \le \|u\|_{B^{T,q}} + \varepsilon$.

Consideremos $F^*(z,x) = F(z)\chi_A(x)$. Entonces, puesto que $F \in \mathcal{F}^q(B(\cdot),\Gamma)$, existe $(G_n)_n$ en $\mathcal{G}^q(B(\cdot),\Gamma)$ tal que $\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \|F(\gamma) - G_n(\gamma)\|^q_{B(\gamma)} d\gamma$ converge a cero, y así, si llamamos $G^*_n(z,x) = G_n(z)\chi_A(x)$ tenemos que, para cada $n \in \mathbb{N}$,

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left(\int_X \|F^*(\gamma,x) - G^*_n(\gamma,x)\|^p_{B(\gamma)} d\mu\right)^{\frac{q}{p}} d\gamma =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left(\int_A \|F(\gamma) - G_n(\gamma)\|^p_{B(\gamma)} d\mu\right)^{\frac{q}{p}} d\gamma = \mu(A)^{\frac{q}{p}}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \|G_n(\gamma) - F(\gamma)\|^q_{B(\gamma)} d\gamma$$

también converge a cero. En consecuencia, si vemos que dada $G \in \mathcal{G}^q(B(\cdot),\Gamma)$, la función $G^*(z,x) = G(z)\chi_A(x) \in \mathcal{G}^q(L^p_{B(\cdot)},\Gamma)$, tendremos que $F^* \in \mathcal{F}^q(L^p_{B(\cdot)},\Gamma)$ y, a fortiori, $f = u\chi_A = T(F)\chi_A = T(F^*(z,\cdot)) \in [L^p_{B(\cdot)}(\mu)]^{T,q}$. Más aún, se cumplirá que

$$\|f\|_{[L^p_{B(\cdot)}(\mu)]^{T,q}} \le \|F^*\|_{\mathcal{F}^q(L^p_{B(\cdot)},\Gamma)} = \|F\|_{\mathcal{F}^q(B(\cdot),\Gamma)}\mu(A)^{\frac{1}{p}} \le$$

$$\le (\|u\|_{B^{T,q}} + \varepsilon)\mu(A)^{\frac{1}{p}} = \left(\int_X (\|u\|_{B^{T,q}} + \varepsilon)^p \chi_A(x) d\mu\right)^{\frac{1}{p}}$$

para todo $\varepsilon > 0$. En definitiva, tendremos que

$$\|f\|_{[L^p_{B(\cdot)}(\mu)]^{T,q}} \le \|f\|_{L^p_{B^{T,q}}}. \tag{5}$$

Veamos, pues, que si $G \in \mathcal{G}^q(B(\cdot),\Gamma)$ la función $G^* \in \mathcal{G}^q(L^p_{B(\cdot)},\Gamma)$: si $G = \sum_{j=0}^n \varphi_j b_j$ con $b_j \in \mathcal{B}$ para todo $0 \le j \le n$, se tiene que $b_j\chi_A \in \mathcal{B}_{L^p(\mu)}$ y, por tanto, G^* es de la forma de $\mathcal{G}^q(L^p_{B(\cdot)},\Gamma)$. Además,

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \|G^*(\gamma,\cdot)\|^q_{L^p_{B(\gamma)}} d\gamma = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left(\int_X \|G^*(\gamma,x)\|^p_{B(\gamma)} d\mu\right)^{\frac{q}{p}} d\gamma =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \|G(\gamma)\|^q_{B(\gamma)}\mu(A)^{\frac{q}{p}} d\gamma = \mu(A)^{\frac{q}{p}}\|G\|^q_{\mathcal{G}^q(B(\cdot),\Gamma)} < +\infty$$

y, por tanto, obtenemos el resultado buscado.

Haciendo un razonamiento totalmente análogo obtenemos la misma desigualdad (5) para funciones simples con valores en $B^{T,q}$ y, puesto que éstas son densas en $L^p_{B^{T,q}}$, obtenemos el apartado (a).

(b) Del apartado (a) podemos deducir fácilmente que si s es simple con valores en $\mathcal{B}$, entonces $\|s\|_{[L^p_{B(\cdot)}(\mu)]_{T,q}} \leq \|s\|_{L^p_{B_{T,q}}}$ y así,

$$id : E = \{s \text{ simples con valores en } \mathcal{B},\ \|\cdot\|_{L^p_{B_{T,q}}}\} \longrightarrow [L^p_{B(\cdot)}(\mu)]_{T,q}.$$

es lineal continuo y, por tanto, (b) será consecuencia de la densidad de E en $L^p_{B_{T,q}}$.

Sea $f \in L^p_{B_{T,q}}$. Es sabido que existe $(f_n)_n$ simples con valores en $B_{T,q}$ tal que

$$f = L^p_{B_{T,q}} - \lim_n f_n. \tag{6}$$

Supongamos que $f_n = \sum_{i=1}^{k(n)} u_i \chi_{A_i}$ con $u_i \in B_{T,q}$ $(1 \leq i \leq k(n))$. Para cada i, existe $(u^i_m)_m$ en $\mathcal{B}$ tal que $u^i = B_{T,q} - \lim_m u^i_m$. Llamemos $f^m_n = \sum_{i=1}^{k(n)} u^i_m \chi_{A_i} \in E$. Se verifica que

$$\|f^m_n - f_n\|^p_{L^p_{B_{T,q}}} = \int_X \|f^m_n(x) - f_n\|^p_{B_{T,q}} d\mu = \sum_{i=1}^{k(n)} \|u^i_m - u^i\|^p_{B_{T,q}} \mu(A_i)$$

y, por tanto, obtenemos que $f_n = L^p_{B_{T,q}} - \lim_m f^m_n$. De la combinación de este resultado con (6) obtenemos la densidad buscada.

Aunque el razonamiento se ha hecho para $q < +\infty$, con los cambios obvios de integrales por supremos, obtenemos el mismo resultado para $q = +\infty$. ∎

NOTA 2.8: Se trataría ahora de ver si $[L^p_{B(\cdot)}(\mu)]^{T,q}$ está contenido continuamente en $L^p_{B^{T,q}}$. Sin embargo, para que esto ocurra, es necesario que toda función $f \in \mathcal{B}_{L^p(\mu)}$ sea μ-medible en $B^{T,q}$ y aunque esto no parece trivial en el caso general, se cumplirá en los ejemplos que consideraremos.

Esto sucede, por ejemplo, en los siguientes casos particulares:

(a) Si la familia en cuestión es del tipo $\{l^p_{B(\gamma)}\ ,\ \gamma \in \Gamma\}$, no es necesario imponer tal condición puesto que en estos espacios la medibilidad es trivial.

(b) Si la familia $\{B(\gamma)\ ,\ \gamma \in \Gamma\}$ está formada por un número finito de espacios, $B_1, \ldots, B_n$, no es difícil adaptar el argumento realizado en ([C], 33.6) para el caso $n = 2$ y probar que si una función f es B_j medible para todo $1 \leq j \leq n$ y toma valores en la intersección $\cap_{j=1}^n B_j$, entonces f es $\cap_{j=1}^n B_j$- medible y, a fortiori, medible en los espacios interpolados.

Esto nos hace pensar en la posibilidad de que la citada condición se cumpla si la familia es del tipo $\{[A_0, A_1]_{\alpha(\gamma)}\ ,\ \gamma \in \Gamma\}$. Veremos esta cuestión en la proposición 2.12.

PROPOSICION 2.9. *Sea $q \leq p$. Bajo la hipótesis de medibilidad de 2.8, se satisfacen las siguientes condiciones:*

(a) *Para cada $f \in \mathcal{B}_{L^p(\mu)}$, $\|f\|_{L^p_{B_{T,q}}} \leq \|f\|_{[L^p_{B(\cdot)}(\mu)]_{T,q}}$.*

(b) *$[L^p_{B(\cdot)}(\mu)]^{T,q}$ está contenido continuamente en $L^p_{B^{T,q}}$.*

(c) *$L^p_{B_{T,q}} \equiv [L^p_{B(\cdot)}(\mu)]_{T,q}$ y $L^p_{B^{T,q}} \equiv [L^p_{B(\cdot)}(\mu)]^{T,q}$.*

DEMOSTRACION:

(a) Sea $f \in \mathcal{B}_{L^p(\mu)}$. Dado $\varepsilon > 0$, existe una función G en $\mathcal{G}^q(L^p_{B(\cdot)}, \Gamma)$ tal que $T(G) = f$ y $\|G\|_{\mathcal{G}^q(L^p_{B(\cdot)},\Gamma)} \leq \|f\|_{[L^p_{B(\cdot)}(\mu)]_{T,q}} + \varepsilon$. Entonces, para casi todo $x \in X$, $f(x) = T(G(\cdot, x))$ y, por tanto,

$$\|f\|_{L^p_{B_{T,q}}} = \left(\int_X \|f(x)\|^p_{B_{T,q}} d\mu\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\int_X \|G(\cdot, x)\|^p_{\mathcal{F}^q(B(\cdot),\Gamma)} d\mu\right)^{\frac{1}{p}} \overset{(4)}{\leq}$$
$$\leq \|G\|_{\mathcal{G}^q(L^p_{B(\cdot)},\Gamma)} \leq \|f\|_{[L^p_{B(\cdot)}(\mu)]_{T,q}} + \varepsilon$$

para todo $\varepsilon > 0$.

(b) Totalmente análogo en virtud de 2.6.

(c) Trivial consecuencia de (a), (b) y 2.7. ∎

NOTA 2.10: Si T es de soporte finito ó la familia $\{B(\cdot)\ ,\ \gamma \in \Gamma\}$ cumple la condición de "normas equivalentes", sabemos que los espacios B_T y $B_{T,p}$ son equivalentes para todo $1 \leq p \leq \infty$. Análogamente $[L^p_{B(\cdot)}(\mu)]_{T,p}$ y $[L^p_{B(\cdot)}(\mu)]_T$. Por tanto, bajo la suposición hecha en 2.8, tenemos que $L^p_{B_T}(\mu) \equiv [L^p_{B(\cdot)}(\mu)]_T$. De la misma forma, $L^p_{B^T}(\mu) \equiv [L^p_{B(\cdot)}(\mu)]^T$.

Tratamos ahora de ver algún caso particular en el que se cumpla la suposición hecha en 2.8. Para ello veamos, en primer lugar, la siguiente proposición:

PROPOSICION 2.11. *Sea (A_0, A_1) un par de interpolación y sea S un funcional analítico en $\Omega = \{z \in \mathbf{C}\ ;\ 0 < Re(z) < 1\}$ de soporte finito. Entonces, $[L^p_{A_0}(\mu), L^p_{A_1}(\mu)]_S$ es equivalente al espacio $L^p_{[A_0,A_1]_S}(\mu)$.*

DEMOSTRACION:

Observemos, en primer lugar, que las funciones simples con valores en $A_0 \cap A_1$, son densas en ambos espacios y, por tanto, basta probar que para estas funciones se cumple la equivalencia de las normas.

Sea $s = \sum_{i=1}^{n} a_i \chi_{E_i}(x)$, donde $a_i \in A_0 \cap A_1$ para todo i. Sea $F \in \mathcal{F}(L^p_{A_0}(\mu), L^p_{A_1}(\mu))$ tal que $S(F) = s$. Puesto que S es de soporte finito, podemos suponer, como consecuencia de ([S], 6.3), que $F \in \mathcal{F}^1(L^p_{A_0}(\mu), L^p_{A_1}(\mu))$, esto es, $F \in \mathcal{F}_b(L^p_{A_0}, L^p_{A_1})$ y

$$\max\left(\int_{-\infty}^{\infty} \|F(it)\|_{L^p_{A_0}}\, dt,\ \int_{-\infty}^{\infty} \|F(1+it)\|_{L^p_{A_1}}\, dt\right) < +\infty,$$

dotado de la norma dada por la expresión anterior.

Por consiguiente, con un razonamiento totalmente análogo al empleado en 2.6, es fácil ver que $F(\cdot, x) \in \mathcal{F}^1(A_0, A_1)$, y así, $s(x) = S(F(, x)) \in [A_0, A_1]_S$. Además, en virtud de la desigualdad integral de Minkowski enunciada anteriormente,

$$\|s\|_{L^p_{[A_0,A_1]_S}(\mu)} = \left(\int_X \|s(x)\|^p_{[A_0,A_1]_S} d\mu\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\int_X \|F(\cdot, x)\|^p_{\mathcal{F}^1(A_0,A_1)} d\mu\right)^{\frac{1}{p}} \leq$$
$$\leq \|F\|_{\mathcal{F}^1(L^p_{A_0}(\mu), L^p_{A_1}(\mu))}$$

y en consecuencia, $\|s\|_{L^p_{[A_0,A_1]_S}(\mu)} \leq \|s\|_{[L^p_{A_0}(\mu), L^p_{A_1}(\mu)]_S}$.

Recíprocamente, puesto que $a_i \in A_0 \cap A_1 \subset [A_0, A_1]_S$ para todo i, dado $\varepsilon > 0$, existe $F_i \in \mathcal{F}(A_0, A_1)$ tal que $S(F_i) = a_i$ y $\|F_i\|_{\mathcal{F}} \leq \|a_i\|_{[A_0,A_1]_S} + \varepsilon$.

Sea $F = \sum_{i=1}^{n} F_i \chi_{E_i}(x)$, se cumple que $S(F) = s$ y además,

$$\|F\|_{\mathcal{F}(L^p_{A_0}(\mu), L^p_{A_1}(\mu))} = \max(\sup_t \|F(it)\|_{L^p_{A_0}(\mu)}\ ,\ \sup_t \|F(1+it)\|_{L^p_{A_1}(\mu)}) =$$
$$= \max\left(\sup_t \left(\int_X \|F(it, x)\|^p_{A_0} d\mu\right)^{\frac{1}{p}}\ ,\ \sup_t \left(\int_X \|F(1+it, x)\|^p_{A_1} d\mu\right)^{\frac{1}{p}}\right) =$$
$$= \max_{j=0,1}\left(\sup_t \left(\int_X \left(\sum_k \|F_k(j+it)\|^p_{A_j} \chi_{E_k}(x)\right) d\mu\right)^{\frac{1}{p}}\right) \leq$$
$$\leq \max_{j=0,1}\left(\sup_t \left(\sum_k \|F_k(j+it)\|^p_{A_j} \mu(E_k)\right)^{\frac{1}{p}}\right) \leq$$
$$\leq \left(\sum_k (\varepsilon + \|a_k\|_{[A_0,A_1]_S})^p \mu(E_k)\right)^{\frac{1}{p}}.$$

y, debido a la arbitrariedad de ε, obtenemos

$$\|s\|_{[L^p_{A_0}(\mu),L^p_{A_1}(\mu)]_S} \leq \|s\|_{L^p_{[A_0,A_1]_S}}. \quad \blacksquare$$

Sea $\alpha(\cdot)$ medible sobre Γ tal que alcanza los valores 0 y 1 y sea $w(z) = \alpha(z) + i\tilde{\alpha}(z)$. Entonces:

PROPOSICION 2.12. *Sea $T \in H'(D)$ tal que $Sop\, T$ es finito. Supongamos que la familia $\{B(\gamma)\ ,\ \gamma \in \Gamma\}$ es del tipo $\{[A_0, A_1]_{\alpha(\gamma)}\ ,\ \gamma \in \Gamma\}$ y que w' no se anula en ningun punto del soporte de T. Entonces, los espacios $[L^p_{B(\cdot)}(\mu)]^T$ y $L^p_{B^T}(\mu)$ son equivalentes.*

DEMOSTRACION:

Sea S el funcional analítico en Ω definido por $S(\varphi) = T(\varphi \circ w)$.

Se satisface la siguiente cadena de equivalencias:

$$\begin{aligned}[L^p_{B(\cdot)}(\mu)]^T &= [L^p_{[A_0,A_1]_{\alpha(\cdot)}}(\mu)]^T \overset{[TRI]}{\equiv} [\ [L^p_{A_0}(\mu), L^p_{A_1}(\mu)]_{\alpha(\cdot)}\ ]^T \overset{(3;2.4)}{\equiv} \\ &\equiv [L^p_{A_0}(\mu), L^p_{A_1}(\mu)]_S \overset{2.11}{\equiv} L^p_{[A_0,A_1]_S}(\mu) \equiv L^p_{B^T}.\end{aligned}$$

COROLARIO 2.13. *Sea $T = \sum_{j=0}^{n} \sum_{l=0}^{m(j)} a_{jl}\delta^{l)}_{z_j}$. Sean $(X^*, \mathcal{M}^*, \mu^*)$ y $(X, \mathcal{M}, \mu)$ dos espacios de medida σ-finitos y supongamos que $p(\cdot)$ alcanza los valores 0 e infinito. Entonces,*

$$[L^p_{L^{p(\cdot)}(\mu^*)}(\mu)]^T \equiv L^p_{[L^{p(\cdot)}(\mu^*)]^T}(\mu) \overset{1.13}{\equiv} L^p_{\sum_{j=0}^{n} L_{\Phi_j}(\mu^*)}(\mu),$$

donde Φ_j es la potencia $p(z_j)$ de la función pseudo-inversa de $\varphi_j(x) = x|\log\ x|^{m(j)}$.

NOTA 2.14: Si $Ord\ T = 0$, no son necesarias, en los dos últimos resultados las hipótesis de que $\alpha(\cdot)$ y $p(\cdot)$ alcanzen los valores extremos.

§3 Familia de espacios $\{\mathbf{L}^{p(\cdot)}_{\mathbf{B}}\ ,\ \gamma \in \Gamma\}$.

Sea p una función medible sobre Γ tal que $1 \leq p(\cdot) \leq \infty$. Sea B un espacio de Banach.

Es conocido que la familia $\{L^{p(\cdot)}_B\ ,\ \gamma \in \Gamma\}$ es de interpolación. En este apartado, tratamos de identificar los espacios $[L^{p(\cdot)}_B]^T$, cuando T es de soporte finito.

Sea $\mathcal{B}_{L^{p(\cdot)}}$ el espacio log-intersección de la familia $\{L^{p(\cdot)}\ ,\ \gamma \in \Gamma\}$, y $\mathcal{B}_{L^{p(\cdot)}_B}$ el de la familia $\{L^{p(\cdot)}_B\ ,\ \gamma \in \Gamma\}$. Observemos que si $f \in \mathcal{B}_{L^{p(\cdot)}_B}$, f es B-medible y $\|f(\cdot)\|_B \in \cap_{\gamma\in\Gamma} L^{p(\gamma)}$.

Además,
$$\int_\Gamma \log^+ \|f\|_{L_B^{p(\cdot)}} d\gamma = \int_\Gamma \log^+ \| \, \|f(\cdot)\|_B \|_{L^{p(\gamma)}} d\gamma < +\infty$$
y así, $\|f(\cdot)\|_B \in \mathcal{B}_{L^{p(\cdot)}}$.

PROPOSCIÓN 3.1. *Para cada $q \in [1,\infty]$ y para todo $T \in H'(D)$, se cumplen:*

(a) *Para cada $f \in \mathcal{B}_{L_B^{p(\cdot)}}$, $\|f\|_{[L_B^{p(\cdot)}]_{T,q}} \le \|f\|_{[L^{p(\cdot)}]_{T,q}(B)}$.*

(b) *$[L^{p(\cdot)}]^{T,q}(B)$ está contenido con continuidad en $[L_B^{p(\cdot)}]^{T,q}$.*

DEMOSTRACION:

(a) Dada $f \in \mathcal{B}_{L_B^{p(\cdot)}}$, $\|f(\cdot)\|_B \in \mathcal{B}_{L^{p(\cdot)}}$ y, por tanto, dado $\varepsilon > 0$, existe $G \in \mathcal{G}^q(L^{p(\cdot)},\Gamma)$ tal que $T(G) = \|f(\cdot)\|_B$ y
$$\|G\|_{\mathcal{G}^q(L^{p(\cdot)},\Gamma)} \le \| \, \|f(\cdot)\|_B \|_{[L^{p(\cdot)}]_{T,q}} + \varepsilon = \|f\|_{[L^{p(\cdot)}]_{T,q}(B)} + \varepsilon.$$

Sea $G^*(z,x) = \frac{f(x)}{\|f(x)\|_B} G(z,x)$, donde la fracción anterior es 1 si $f(x) = 0$. Se cumple que $G^* \in \mathcal{G}^q(L_B^{p(\cdot)},\Gamma)$ y además,

(7)
$$\|G^*\|_{\mathcal{G}^q(L_B^{p(\cdot)},\Gamma)} = \left(\int_\Gamma \|G^*(\gamma,\cdot)\|^q_{L_B^{p(\cdot)}} d\gamma\right)^{\frac{1}{q}} = \left(\int_\Gamma \left(\int_X \|G^*(\gamma,x)\|_B^{p(\gamma)} d\mu\right)^{\frac{q}{p(\gamma)}} d\gamma\right)^{\frac{1}{q}}$$
$$= \left(\int_\Gamma \left(\int_X |G(\gamma,x)|^{p(\gamma)} d\mu\right)^{\frac{q}{p(\gamma)}} d\gamma\right)^{\frac{1}{q}} = \|G\|_{\mathcal{G}^q(L^{p(\cdot)},\Gamma)}$$

y así, puesto que $T(G^*) = f$, tenemos que
$$\|f\|_{[L_B^{p(\cdot)}]_{T,q}} \le \|G^*\|_{\mathcal{G}^q(L_B^{p(\cdot)},\Gamma)} = \|G\|_{\mathcal{G}^q(L^{p(\cdot)},\Gamma)} \le \|f\|_{[L^{p(\cdot)}]_{T,q}(B)} + \varepsilon$$

de lo cual se deduce (a). Mismo razonamiento si $q = \infty$.

(b) Si en lugar de tomar $G \in \mathcal{G}^q(L^{p(\cdot)},\Gamma)$, tomamos $F \in \mathcal{F}^q(L^{p(\cdot)},\Gamma)$, en virtud de la densidad de $\mathcal{G}^q(L^{p(\cdot)},\Gamma)$ en $\mathcal{F}^q(L^{p(\cdot)},\Gamma)$ y (7), es claro que $F^* \in \mathcal{F}^q(L_B^{p(\cdot)},\Gamma)$ y se cumple (7) con F en lugar de G. De esta forma obtenemos (b). ∎

NOTA 3.2: La desigualdad inversa a (a) y la contención recíproca en (b) no son evidentes.

De hecho, la demostración en el caso $T = \delta_{z_0}$ se basa en la desigualdad fundamental (2;2.9).

Por esta razón, es lógico pensar que si T es de soporte finito, sí que será cierto el recíproco de la proposición anterior.

Ahora bien, puesto que $L_B^{p(\cdot)} = [L_B^\infty, L_B^1]_{\alpha(\cdot)}$, con $\alpha(\cdot) = \frac{1}{p(\cdot)}$, tenemos, en virtud de (3;2.8), que

$$[L_B^{p(\cdot)}]^T = [\ [L_B^\infty, L_B^1]_{\alpha(\cdot)}\ ]^T = [L_B^\infty, L_B^1]_S,$$

donde $S(\varphi) = T(\varphi \circ w)$.

Así, para identificar $[L_B^{p(\cdot)}]^T$, basta identificar $[L_B^\infty, L_B^1]_S$. De hecho, los métodos ya considerados permite identificar $[L_B^{p_0}, L_B^{p_1}]_S$ con $S = \delta_\theta^{n)}$ para $0 < \theta < 1$:

PROPOSICION 3.3. *$f \in [L_B^{p_0}, L_B^{p_1}]_{\delta_\theta^{n)}}$ si y sólo si existen $f_0, .., f_n$ en L_B^p, con $\frac{1}{p} = \frac{1-\theta}{p_0} + \frac{\theta}{p_1}$ tal que $f = \sum_{j=0}^n f_j(\log\ \|f_j\|_B)^j$.*

DEMOSTRACION:

La demostración es enteramente análoga a (1.5) sin más que sustituir $|\cdot|$ por $\|\cdot\|_B$ donde proceda. ∎

NOTA 3.4: Si $f(x) = \sum_{j=0}^n f_j(x)(\log\ \|f_j(x)\|_B)^j$, tenemos que

$$\|f(x)\|_B \le \sum_j \|f_j(x)\|_B |\log\ \|f_j(x)\|_B|^j$$

y, por tanto, si llamamos $g(x)$ a la suma anterior, se tiene que $g \in [L^\infty, L^1]_{\delta_\theta^{n)}}$ y, a fortiori, $\|f(\cdot)\|_B \in [L^\infty, L^1]_{\delta_\theta^{n)}}$. Puesto que f es B-medible, deducimos que $f \in [L^\infty, L^1]_{\delta_\theta^{n)}}(B)$.

En consecuencia:

PROPOSICION 3.5. *Si $T = \sum_{j=0}^n \sum_{l=0}^{m(j)} a_{jl}\delta_{z_j}^{l)}$ y w' no se anula en ningun punto del soporte de T, se cumple:*

(a) *$[L_B^{p(\cdot)}]^T$, es equivalente al espacio $[L^{p(\cdot)}]^T(B)$.*

(b) *$[L_B^{p(\cdot)}]^T$ es equivalente al espacio $\sum_j L_{\Phi_j}(B)$, donde Φ_j es la potencia $p(z_j)$ de la función pseudo-inversa de $\varphi_j(x) = x|\log\ x|^{m(j)}$ y*

$$L_\Phi(B) = \{f : X \longrightarrow B,\ medibles\ ;\ \|f(\cdot)\|_B \in L_\Phi\}$$

dotado de la norma $\|f\|_{L_\Phi(B)} = \|\ \|f(\cdot)\|_B\|_{L_\Phi}$.

§4 Familia de espacios $\{\mathbf{L}^{\mathbf{p}(\cdot)}_{\mathbf{B}(\cdot)}\ ,\ \gamma \in \Gamma\}$.

Sea $p(\cdot)$ en las hipótesis del apartado anterior y $\{B(\gamma)\ ,\ \gamma \in \Gamma\}$ una familia de interpolación. Es conocido que $\{L^{p(\cdot)}_{B(\cdot)}\ ,\ \gamma \in \Gamma\}$ también es familia de interpolación (véase [H], cap. 2).

Nos preguntamos si $[L^{p(\cdot)}_{B(\cdot)}]^T$ es equivalente al espacio $[L^{p(\cdot)}]^T(B^T)$.

Sabemos que existen casos en que la respuesta es afirmativa, tales como:

(1) $B(\gamma) = B$ para todo $\gamma \in \Gamma$.

(2) $p(\cdot) = p$ y $\{B(\cdot)\}$ en las hipótesis de 2.12.

Sin embargo, es claro que la respuesta es negativa en general. Pues si $[L^{p(\cdot)}_{B(\cdot)}]^T$ fuese equivalente a $[L^{p(\cdot)}]^T(B^T)$, tomando $T = \delta_{z_0} + \delta_{z_1}$, tendríamos que

$$[L^{p(\cdot)}]^{\delta_{z_0}+\delta_{z_1}}(B[z_0] + B[z_1]) \equiv L^{p(z_0)}(B[z_0]) + L^{p(z_1)}(B[z_1])$$

y, por otra parte,

$$\begin{aligned}[L^{p(\cdot)}]^{\delta_{z_0}+\delta_{z_1}}(B[z_0] + B[z_1]) &\equiv L^{p(z_0)}(B[z_0] + B[z_1]) + L^{p(z_1)}(B[z_0] + B[z_1]) \equiv \\ &\equiv L^{p(z_0)}(B[z_0]) + L^{p(z_0)}(B[z_1]) + L^{p(z_1)}(B[z_0]) + L^{p(z_1)}(B[z_1]).\end{aligned}$$

Dado $T \in H'(D)$, recordemos que

$$B^{T,T,q} = \{x \in \mathcal{U}\ ;\ \exists f \in \mathcal{F}^q(B(\cdot),\Gamma) \text{ con } fT = xT\}$$

Ahora bien, si $l \in \mathcal{U}^*$ y $f \in \mathcal{F}^q(B(\cdot),\Gamma)$, existe una sucesión $(g_n)_n$ en $\mathcal{G}^q(B(\cdot),\Gamma)$ tal que $f(z) = \mathcal{U} - \lim_n g_n(z)$ en convergencia uniforme sobre compactos y en consecuencia,

$$l(x)T(\varphi) = \lim_n l(T(g_n\varphi)) = \lim_n T(l(g_n)\varphi) = T(l(f)\varphi) = l(f)T(\varphi) \qquad \forall \varphi \in H(D),$$

esto es, tenemos que $(l(f) - l(x))T \equiv 0$. Deducimos, en virtud de (1;4.10), que para que $B^{T,T} \neq \{0\}$ es necesario que T sea de soporte finito, o bien, que la familia en cuestión cumpla la condición de "normas equivalentes". Como ocurre en el caso de familias de espacios de dimensión finita ([C-C-R-S-W II], [R-W I], [H],...).

Supondremos, en este apartado, que estamos en estas condiciones y así, no será necesario trabajar con $B^{T,p}$ pues éstos son equivalentes cualquiera que sea p.

PROPOSICION 4.1.

(a) *El espacio* $[L^{p(\cdot)}]^T(B^{T,T})$ *está contenido en* $[L^{p(\cdot)}_{B(\cdot)}]^T$ *con continuidad.*

(b) *Si* T *es de soporte finito,* $[L^{p(\cdot)}]^{T,T}(B^T)$ *está contenido continuamente en* $[L^{p(\cdot)}_{B(\cdot)}]^T$.

DEMOSTRACION:

(a) Es sabido que las funciones simples con valores en $B^{T,T}$ son densas en $[L^{p(\cdot)}]^T(B^{T,T})$, (véase [C], 33.6) y así, para ver este apartado, basta ver que si $f(x) = \sum_{n=1}^N a_n \chi_{E_n}(x)$, con $a_n \in B^{T,T}$, entonces $f \in [L^{p(\cdot)}_{B(\cdot)}]^T$ y $\|f\|_{[L^{p(\cdot)}_{B(\cdot)}]^T} \ll \|f\|_{[L^{p(\cdot)}]^T(B^{T,T})}$.

Puesto que $a_n \in B^{T,T}$, dado $\varepsilon > 0$, existe $F^n \in \mathcal{F}(B(\cdot), \Gamma)$ tal que $F^n T = a_n T$ y

$$(8) \qquad \|F^n\|_{\mathcal{F}(B(\cdot),\Gamma)} \leq \|a_n\|_{B^{T,T}} + \varepsilon.$$

Por otra parte, $\|f(\cdot)\|_{B^{T,T}} = \sum_n \|a_n\|_{B^{T,T}} \chi_{E_n} \in [L^{p(\cdot)}]^T$ y, por tanto, dado ε', existe, para cada $n \in \{1, .., N\}$, $F_n \in \mathcal{F}(L^{p(\cdot)}, \Gamma)$ tal que $T(F_n) = \|a_n\|_{B^{T,T}} \chi_{E_n}$ y $\|F_n\|_{\mathcal{F}(L^{p(\cdot)},\Gamma)} \leq \|a_n\|_{B^{T,T}} \|\chi_{E_n}\|_{[L^{p(\cdot)}]^T} + \varepsilon'$.

Consideremos la función

$$F^* = \sum_{n=1}^N \frac{F_n F^n}{\|a_n\|_{B^{T,T}}}.$$

Veamos, en primer lugar, que $F^* \in \mathcal{F}(L^{p(\cdot)}_{B(\cdot)}, \Gamma)$: supongamos, inicialmente, que F_n y F^n están en el espacio $\mathcal{G}$ correspondiente. Esto es, si $\mathcal{L}$ es el espacio log-intersección de la familia $\{L^{p(\gamma)}\ ,\ \gamma \in \Gamma\}$,

$$F_n = \sum_{j=1}^{M_n} \varphi_j^n f_j^n \qquad f_j^n \in \mathcal{L} \subset \cap_{\gamma \in \Gamma} L^{p(\gamma)} \quad \forall 1 \leq j \leq M_n \quad \text{y}$$

$$F^n = \sum_{k=1}^{p_n} \phi_k^n b_k^n \qquad b_k^n \in \mathcal{B} \subset \cap_{\gamma \in \Gamma} B(\gamma) \quad \forall 1 \leq k \leq p_n.$$

Se tiene entonces que

$$F^* = \sum_{n,j,k} \frac{1}{\|a_n\|_{B^{T,T}}} \varphi_j^n f_j^n \phi_k^n b_k^n.$$

Puesto que

$$\int_\Gamma \log^+ \left(\|b_k^n\|_{B(\gamma)} \|f_j^n\|_{L^{p(\gamma)}}\right) d\gamma < +\infty \qquad \forall j,\ k,\ n,$$

se verifica que F^* es del tipo de las funciones de $\mathcal{G}(L^{p(\cdot)}_{B(\cdot)},\Gamma)$. Además,

$$\|F^*\|_{\mathcal{F}(L^{p(\cdot)}_{B(\cdot)},\Gamma)} = \sup\ \mathrm{es}_{\gamma\in\Gamma}\|F^*(\gamma)\|_{L^{p(\gamma)}_{B(\gamma)}} = \sup\ \mathrm{es}_{\gamma\in\Gamma}\left(\int_X \|F^*(\gamma,x)\|^{p(\gamma)}_{B(\gamma)}d\mu\right)^{\frac{1}{p(\gamma)}} =$$

$$= \sup\ \mathrm{es}_{\gamma\in\Gamma}\left(\int_X \|\sum_n \frac{F_nF^n}{\|a_n\|_{B^{T,T}}}\|^{p(\gamma)}_{B(\gamma)}d\mu)\right)^{\frac{1}{p(\gamma)}} \leq$$

$$\leq \sup\ \mathrm{es}_{\gamma\in\Gamma}\sum_n \frac{1}{\|a_n\|_{B^{T,T}}}\left(\int_X \|F^n(\gamma)\|^{p(\gamma)}_{B(\gamma)}|F_n(\gamma,x)|^{p(\gamma)}d\mu\right)^{\frac{1}{p(\gamma)}} \leq$$

$$\leq \sup\ \mathrm{es}_{\gamma\in\Gamma}\sum_n \frac{1}{\|a_n\|_{B^{T,T}}}\|F^n(\gamma)\|_{B(\gamma)}\|F_n(\gamma,\cdot)\|_{L^{p(\cdot)}} \leq$$

$$\leq \sum_n \frac{\|F^n\|_{\mathcal{F}(B(\cdot),\Gamma)}\|F_n\|_{\mathcal{F}(L^{p(\cdot)},\Gamma)}}{\|a_n\|_{B^{T,T}}}$$

y así, $F^* \in \mathcal{G}(L^{p(\cdot)}_{B(\cdot)},\Gamma)$.

Si $F^n \in \mathcal{F}(B(\cdot),\Gamma)$ y $F_n \in \mathcal{F}(L^{p(\cdot)},\Gamma)$, existen $(G^n_m)_m$ en $\mathcal{G}(B(\cdot),\Gamma)$ y $(G^m_n)_m$ en $\mathcal{G}(L^{p(\cdot)},\Gamma)$ tales que $F^n = \lim_m G^n_m$ y $F_n = \lim_m G^m_n$. Puesto que, para cada $m \in \mathrm{N}$,

$$G^*_m = \sum_{n=1}^{N} \frac{G^n_m G^m_n}{\|a_n\|_{B^{T,T}}} \in \mathcal{G}(L^{p(\cdot)}_{B(\cdot)},\Gamma)$$

cumple que

$$\|G^*_m - G^*_p\|_{\mathcal{F}(L^{p(\cdot)}_{B(\cdot)},\Gamma)} = \|\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{\|a_n\|_{B^{T,T}}}(G^n_mG^m_n - G^n_pG^p_n)\|_{\mathcal{F}(L^{p(\cdot)}_{B(\cdot)},\Gamma)} \leq$$

$$\leq \|\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{\|a_n\|_{B^{T,T}}}G^n_m(G^m_n - G^p_n)\|_{\mathcal{F}(L^{p(\cdot)}_{B(\cdot)},\Gamma)} +$$

$$+ \|\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{\|a_n\|_{B^{T,T}}}G^p_n(G^n_m - G^n_p)\|_{\mathcal{F}(L^{p(\cdot)}_{B(\cdot)},\Gamma)} \leq$$

$$\leq \sum_{n=1}^{N}\frac{1}{\|a_n\|_{B^{T,T}}}\|G^n_m\|_{\mathcal{F}(B(\cdot),\Gamma)}\|G^m_n - G^p_n\|_{\mathcal{F}(L^{p(\cdot)},\Gamma)} +$$

$$+ \sum_{n=1}^{N}\frac{1}{\|a_n\|_{B^{T,T}}}\|G^p_n\|_{\mathcal{F}(L^{p(\cdot)},\Gamma)}\|G^n_m - G^n_p\|_{\mathcal{F}(B(\cdot),\Gamma)},$$

y el último miembro tiende a cero cuando m y p tienden a infinito, $(G^*_m)_m$ es una sucesión de Cauchy y, por tanto, convergente hacia una función $H \in \mathcal{F}(L^{p(\cdot)}_{B(\cdot)},\Gamma)$.

En virtud de que $G_m^*(z)$ converge a $F^*(z)$ en el espacio contenedor, se deduce que $H = F^*$. De ello, concluimos que $F^* \in \mathcal{F}(L_{B(\cdot)}^{p(\cdot)}, \Gamma)$ y se cumple que

$$(9) \qquad \|F^*\|_{\mathcal{F}(L_{B(\cdot)}^{p(\cdot)},\Gamma)} \leq \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{\|a_n\|_{B^{T,T}}} \|F^n\|_{\mathcal{F}(B(\cdot),\Gamma)} \|F_n\|_{\mathcal{F}(L^{p(\cdot)},\Gamma)}.$$

Por otra parte, puesto que para cada $1 \leq n \leq N$, $F^n T = a_n T$, se tiene que si g está en $\mathcal{G}(L^{p(\cdot)}, \Gamma)$ con $g = \sum' \varphi_j f_j$,

$$F^n T(g) = \sum_j (F^n T)(\varphi_j) f_j = \sum_j a_n T(\varphi_j) f_j = a_n T(g),$$

es fácilmente deducible que, para toda $f \in \mathcal{F}(L^{p(\cdot)}, \Gamma)$, se cumple $a_n T(f) = F^n T(f)$. En consecuencia,

$$\begin{aligned} T(F^*) &= \sum_n \frac{1}{\|a_n\|_{B^{T,T}}} T(F^n F_n) = \sum_n \frac{1}{\|a_n\|_{B^{T,T}}} (F^n T)(F_n) = \\ &= \sum_n \frac{a_n}{\|a_n\|_{B^{T,T}}} T(F_n) = \sum_n \frac{a_n}{\|a_n\|_{B^{T,T}}} \|a_n\|_{B^{T,T}} \chi_{E_n} = f. \end{aligned}$$

De esta forma, $f \in [L_{B(\cdot)}^{p(\cdot)}]^T$ y además, en virtud de (9),

$$\begin{aligned} \|f\|_{[L_{B(\cdot)}^{p(\cdot)}]^T} \leq \|F^*\|_{\mathcal{F}(L_{B(\cdot)}^{p(\cdot)},\Gamma)} &\leq \sum_n \frac{1}{\|a_n\|_{B^{T,T}}} \|F^n\|_{\mathcal{F}(B(\cdot),\Gamma)} \|F_n\|_{\mathcal{F}(L^{p(\cdot)},\Gamma)} \leq \\ &\leq \sum_n \frac{1}{\|a_n\|_{B^{T,T}}} (\|a_n\|_{B^{T,T}} + \varepsilon)(\|a_n\|_{B^{T,T}} \|\chi_{E_n}\|_{[L^{p(\cdot)}]^T} + \varepsilon'). \end{aligned}$$

De modo que

$$\|f\|_{[L_{B(\cdot)}^{p(\cdot)}]^T} \leq \sum_n \|a_n\|_{B^{T,T}} \|\chi_{E_n}\|_{[L^{p(\cdot)}]^T} = \|f(\cdot)\|_{[L^{p(\cdot)}]^T(B^{T,T})}.$$

(b) Totalmente análogo. ∎

COROLARIO 4.2. *Si T es de soporte finito,*

$$[L^{p(\cdot)}]^T(B^{T,T}) + [L^{p(\cdot)}]^{T,T}(B^T) \subset [L_{B(\cdot)}^{p(\cdot)}]^T$$

con norma menor o igual que 1.

§5 **Familia de espacios** $\{\mathbf{L}^{p(\gamma)}_{\mu(\gamma)}\ ,\ \gamma \in \Gamma\}$.

Sea $\mu(\gamma, x) \geq 0$ una función medible en $\Gamma \times X$ tal que, para casi todo $x \in X$,

$$\int_\Gamma \frac{1}{p(\gamma)} \log\ \mu(\gamma, x) dP_z(\gamma) < +\infty.$$

Supongamos que la familia $\{L^{p(\gamma)}_{\mu(\gamma)}\ ,\ \gamma \in \Gamma\}$ es de interpolación con espacio contenedor $\mathcal{U}$. Consideremos la función

$$\mu(z, x) = \exp\left(p(z)\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{1}{p(\gamma)} \log\ \mu(\gamma, x) dH_z(\gamma)\right).$$

Se cumple que si $T = \delta_{z_0}$, $[L^{p(\cdot)}_{\mu(\cdot)}]^T \equiv L^{p(z_0)}_{\mu(z_0)}$, donde $\frac{1}{p(z)} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{1}{p(\gamma)} dP_z(\gamma)$. (Véase [H], cap. 2, §4).

Tratamos en esta sección de identificar los espacios $[L^{p(\cdot)}_{\mu(\cdot)}]^T$ cuando T es de soporte finito. Para ello bastará identificar un espacio $[L^{p(\cdot)}_{\mu(\cdot)}]^{\delta^{n)}_{z_0}}$. Lo haremos por inducción respecto de $n \in \mathbf{N}$ con la ayuda del siguiente resultado:

LEMA 5.1. *Sea $F : D \longrightarrow \mathcal{U}$ tal que para casi todo $x \in X$, $F(z, x) \in N^+(D)$ y la función* $\log\ |F(\gamma, x)|$ *es integrable en* Γ. *Supongamos además que, para casi todo $\gamma \in \Gamma$, $F(\gamma, \cdot) \in L^{p(\gamma)}_{\mu(\gamma)}$ y* $\sup\ \mathrm{es}_{\gamma\in\Gamma}\|F(\gamma, \cdot)\|_{L^{p(\gamma)}_{\mu(\gamma)}} = M < +\infty$. *Entonces, si $F(z_0, \cdot) = 0$, $F'(z_0, \cdot)$ está en $[L^{p(\cdot)}_{\mu(\cdot)}]^{\delta_{z_0}} = L^{p(z_0)}_{\mu(z_0)}$.*

DEMOSTRACION:

Lo probaremos con la ayuda de la Desigualdad Fundamental de ([H], cap. II, §1) que enunciamos a continuación: sea $(\mathcal{M}, dx)$ un espacio de medida, $F(\theta, x)$ medible en $\Gamma \times \mathcal{M}$ tal que $\log\ |F(\theta, x)|$ es integrable en Γ para casi todo $x \in \mathcal{M}$ y sea $0 \leq \frac{1}{p(z)} \leq 1$ una función harmónica en D. Entonces, para cada $z \in D$,

$$\int_{\mathcal{M}} \exp\left(p(z)\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log\ |F(\theta, x)| dP_z(\theta)\right) dx \leq$$
$$\exp\left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{p(z)}{p(\theta)} \log\left(\int_{\mathcal{M}} |F(\theta, x)|^{p(\theta)} dx\right) dP_z(\theta)\right).$$

En nuestras hipótesis, tiene sentido considerar la función

$$G(z, x) = \begin{cases} F(z, x)/z - z_0 & z \neq z_0 \\ F'(z_0, x) & z = z_0. \end{cases}$$

Si llamamos $\alpha(z) = \frac{1}{p(z)}$ se cumple que $\mu(z,x)^{\alpha(z)}$ es analítica en D y, a fortiori, también lo es $\mu(z,x)^{\alpha(z)}G(z,x)$. De hecho, está en $N^{+}(D)$.

Por consiguiente, la función log $|G(z,x)\mu(z,x)^{\alpha(z)}|$ es subharmónica en D. De modo que

$$\log\ |G(z,x)\mu(z,x)^{\alpha(z)}| \leq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log\ |G(\gamma,x)\mu(\gamma,x)^{\alpha(\gamma)}|dP_z(\gamma).$$

En consecuencia, tenemos la siguiente cadena de desigualdades:

$$\begin{aligned}
&\int_X |G(z,x)|^{p(z)}|\mu(z,x)|d\mu = \int_X |G(z,x)\mu(z,x)^{\alpha(z)}|^{p(z)}d\mu \leq \\
&\leq \int_X \exp\left(p(z)\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log|G(\gamma,x)\mu(\gamma,x)^{\frac{1}{p(\gamma)}}|dP_z(\gamma)\right)d\mu \overset{D.F.}{\leq} \\
&\leq \exp\left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{p(z)}{p(\gamma)}\log\left(\int_X |G(\gamma,x)\mu(\gamma,x)^{\frac{1}{p(\gamma)}}|^{p(\gamma)}d\mu\right)dP_z(\gamma)\right) = \\
&= \exp\left(p(z)\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{1}{p(\gamma)}\log\left(\int_X\left(\frac{|F(\gamma,x)|}{|e^{i\gamma}-z_0|}\right)^{p(\gamma)}\mu(\gamma,x)d\mu\right)dP_z(\gamma)\right) \leq \\
&\leq \exp\left(p(z)\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log\ \|\frac{F(\gamma,\cdot)}{e^{i\gamma}-z_0}\|_{L^{p(\gamma)}_{\mu(\gamma)}}dP_z(\gamma)\right) = \\
&= \exp\left(p(z)\log\frac{M}{d(z_0,\Gamma)}\right) = \left(\frac{M}{d(z_0,\Gamma)}\right)^{p(z)}.
\end{aligned}$$

Se deduce que si $z \neq z_0$, $G(z,\cdot) \in L^{p(z)}_{\mu(z)}$ y $\|G(z,\cdot)\|_{L^{p(z)}_{\mu(z)}} \leq \frac{M}{d(z_0,\Gamma)}$. En virtud del lema de Fatou queda concluido el lema. Más aún, se cumple que $\|F'(z_0,\cdot)\|_{L^{p(z_0)}_{\mu(z_0)}} \leq \frac{M}{d(z_0,\Gamma)}$. ∎

PROPOSICION 5.2. *Se verifica que* $f \in [L^{p(\cdot)}_{\mu(\cdot)}]^{\delta'_{z_0}}$ *si y sólo si existen* $f_0, f_1 \in L^{p(z_0)}_{\mu(z_0)}$ *tales que*

$$(*)\qquad f(x) = f_0(x) + f_1(x)(\log\ |f_1(x)| + H_\mu(z_0,x)),$$

siendo

$$H_\mu(z_0,x) = (w'(z_0)-\alpha'(z_0))\log\ \mu(z_0,x) - \alpha(z_0)\frac{\mu'(z_0,x)}{\mu(z_0,x)} = \left(\mu(z,x)^{-\alpha(z)}\mu(z_0,x)^{w(z)}\right)'_{|z_0}.$$

Y además,

(10)

$$\|f\|_{[L^{p(\cdot)}_{\mu(\cdot)}]^{\delta'_{z_0}}} \equiv \inf\{\|f_0 + f_1 p(z_0)w'(z_0)\log\ \|f_1\|_{L^{p(z_0)}_{\mu(z_0)}}\|_{L^{p(z_0)}_{\mu(z_0)}} + \|f_1\|_{L^{p(z_0)}_{\mu(z_0)}}\ ;\ f \textit{ cumple } (*)\ \}.$$

DEMOSTRACION:

Sea $f \in [L^{p(\cdot)}_{\mu(\cdot)}]^{\delta'_{z_0}}$ y sea $F \in \mathcal{F}(L^{p(\cdot)}_{\mu(\cdot)}, \Gamma)$ tal que $F'(z_0, \cdot) = f$.

Consideremos $A = \{x \in X \,;\, F(z_0, x) = 0\}$. Se verifica que F admite una descomposición de la forma $F(z,x) = G(z,x)(z-z_0)\chi_A(x) + F(z,x)\chi_{A^c}(x)$ y por consiguiente, para casi todo $x \in X$, $f(x) = F'(z_0,x) = G(z_0,x)\chi_A(x) + f(x)\chi_{A^c}(x)$. En virtud del lema anterior, la función $f_0^*(x) = f(x)\chi_A(x) = G(z_0,x)\chi_A(x) \in L^{p(z_0)}_{\mu(z_0)}$ y

$$\|f_0^*\|_{L^{p(z_0)}_{\mu(z_0)}} \leq \frac{\|F\|_{\mathcal{F}}}{d(z_0,\Gamma)}. \tag{11}$$

Puesto que si $x \in A^c$, $F(z_0,x) \neq 0$, tiene sentido considerar la función

$$H(z,x) =$$

$$= \mu(z,x)^{-\alpha(z)} \mu(z_0,x)^{w(z)} \|F(z_0,\cdot)\|_{L^{p(z_0)}_{\mu(z_0)}} \frac{F(z_0,x)}{|F(z_0,x)|} \chi_{A^c}(x) \left(\frac{|F(z_0,x)|}{\|F(z_0,\cdot)\|_{L^{p(z_0)}_{\mu(z_0)}}} \right)^{w(z)p(z_0)}.$$

Se cumple que H verifica las hipótesis del lema previo salvo $H(z_0,\cdot) = 0$:

(1) $\mu(z,x)^{-\alpha(z)} = \exp\left(-\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{1}{p(\gamma)} \log\, \mu(\gamma,x) dH_z(\gamma)\right) \in N^+(D)$ para todo $x \in X$.

(2) Si $F^*(z,x) = H(z,x)\mu(z,x)^{\alpha(z)}$, se verifica que $F^* = F^+ \circ w$ donde,

$$F^+(\xi,x) = \|F(z_0,\cdot)\|_{L^{p(z_0)}_{\mu(z_0)}} \frac{F(z_0,x)}{|F(z_0,x)|} \chi_{A^c}(x) \left(\frac{|F(z_0,x)|}{\|F(z_0,\cdot)\|_{L^{p(z_0)}_{\mu(z_0)}}} \right)^{\xi p(z_0)} \mu(z_0,x)^{\xi},$$

definida en $\Omega = \{\xi \,;\, 0 < \xi < 1\}$, cumple trivialmente que $F^+ \in \mathcal{F}(L^\infty, L^1)$. De modo que, en virtud de (3;2.1), $F^* \in \mathcal{F}(L^{p(\cdot)},\Gamma)$ y $\|F^*\|_{\mathcal{F}(L^{p(\cdot)},\Gamma)} \leq \|F^+\|_{\mathcal{F}(L^\infty,L^1)}$. A fortiori, F^* cumple las hipótesis del lema previo salvo $F^*(z_0,\cdot) = 0$. Finalmente, puesto que

$$\sup\ \mathrm{es}_{\gamma\in\Gamma} \|H(\gamma,\cdot)\|_{L^{p(\gamma)}_{\mu(\gamma)}} = \sup\ \mathrm{es}_{\gamma\in\Gamma} \left(\int_X |\mu(\gamma,x)^{\frac{-1}{p(\gamma)}} F^*(\gamma,x)|^{p(\gamma)} \mu(\gamma,x) d\mu \right)^{\frac{1}{p(\gamma)}} =$$

$$= \sup\ \mathrm{es}_{\gamma\in\Gamma} \left(\int_X |F^*(\gamma,x)|^{p(\gamma)} d\mu \right)^{\frac{1}{p(\gamma)}} =$$

$$= \|F^*\|_{\mathcal{F}(L^{p(\cdot)},\Gamma)} \leq \|F^+\|_{\mathcal{F}(L^\infty,L^1)} \leq \|F(z_0,\cdot)\|_{L^{p(z_0)}_{\mu(z_0)}} < +\infty,$$

deducimos que H cumple las hipótesis anunciadas.

Por tanto, puesto que $H(z_0,x) = F(z_0,x)\chi_{A^c}(x)$, la función definida por $G(z,x) = F(z,x)\chi_{A^c}(x) - H(z,x)$ cumple todas las hipótesis del lema previo, y así, $G'(z_0,x) \in L^{p(z_0)}_{\mu(z_0)}$.

Un cálculo trivial prueba que si $f_1 = F(z_0, x)\chi_{A^c}(x)$,

$$G'(z_0, x) = f(x)\chi_{A^c}(x) - f_1(x)(p(z_0)w'(z_0)\log\,|f_1(x)|)+$$
$$+\,p(z_0)w'(z_0)f_1(x)\log\,\|f_1\|_{L^{p(z_0)}_{\mu(z_0)}} + H_\mu(z_0, x)f_1(x)$$

y además,

$$\|G'(z_0, \cdot)\|_{L^{p(z_0)}_{\mu(z_0)}} \le \frac{1}{d(z_0, \Gamma)}\|F\|_{\mathcal{F}(L^{p(\cdot)}_{\mu(\cdot)},\Gamma)} + \|f_1\|_{L^{p(z_0)}_{\mu(z_0)}} \le \frac{2\|F\|_{\mathcal{F}}}{d(z_0, \Gamma)}.$$

Si combinamos los resultados anteriores, obtenemos que

$$f = f_0^* + G'(z_0, \cdot) - f_1\left(p(z_0)w'(z_0)\log\,\|f_1\|_{L^{p(z_0)}_{\mu(z_0)}} + H_\mu(z_0)\right) + p(z_0)w'(z_0)f_1\log\,|f_1|$$

y así, si $f_0 = f_0^* + G'(z_0, \cdot) - (p(z_0)w'(z_0)f_1\log\,\|f_1\|_{L^{p(z_0)}_{\mu(z_0)}} \in L^{p(z_0)}_{\mu(z_0)}$, se tiene que

$$f = f_0 + f_1\left(p(z_0)w'(z_0)\log\,|f_1| + H_\mu(z_0)\right).$$

Más aún,

$$\|f_0 + f_1 p(z_0)w'(z_0)\log\,\|f_1\|_{L^{p(z_0)}_{\mu(z_0)}}\|_{L^{p(z_0)}_{\mu(z_0)}} + \|f_1\|_{L^{p(z_0)}_{\mu(z_0)}} =$$
$$= \|f_0^* + G'(z_0, \cdot)\|_{L^{p(z_0)}_{\mu(z_0)}} + \|f_1\|_{L^{p(z_0)}_{\mu(z_0)}} \le \frac{3\|F\|_{\mathcal{F}}}{d(z_0, \Gamma)} + \|F\|_{\mathcal{F}}.$$

De lo cual deducimos una de las desigualdades de la equivalencia anunciada.

Recíprocamente, sea $f = f_0 + f_1\,(H_\mu(z_0) + w'(z_0)p(z_0)\log\,|f_1|)$. Llamemos g al segundo término y consideremos la función

$$H_{f_1}(z, x) = \mu(z, x)^{-\alpha(z)}\mu(z_0, x)^{w(z)}\|f_1\|_{L^{p(z_0)}_{\mu(z_0)}}\frac{f_1}{|f_1|}\left(\frac{|f_1|}{\|f_1\|_{L^{p(z_0)}_{\mu(z_0)}}}\right)^{w(z)p(z_0)}.$$

Observemos que H_{f_1} es igual que la función H, anteriormente definida, sin más que cambiar $|F(z_0, x)\chi_{A^c}|$ por f_1. De modo que, razonando como anteriormente, obtenemos que si $F \in \mathcal{F}(L^{p(\cdot)}_{\mu(\cdot)}, \Gamma)$ es tal que $F(z_0, x) = f_1$. Entonces, en virtud del lema previo,

$$f_1^*(x) = F'(z_0, x) - H'_{f_1}(z_0, x) =$$
$$= F'(z_0, x) - f_1(x)\left(p(z_0)w'(z_0)\log\,|f_1(x)| - p(z_0)w'(z_0)\log\,\|f_1\|_{L^{p(z_0)}_{\mu(z_0)}} + H_\mu(z_0, x)\right) =$$
$$= F'(z_0, x) + f_1(x)p(z_0)w'(z_0)\log\,\|f_1\|_{L^{p(z_0)}_{\mu(z_0)}} - g(x)$$

está en $L^{p(z_0)}_{\mu(z_0)}$ y

$$\|f_1^*\|_{L^{p(z_0)}_{\mu(z_0)}} \leq \frac{1}{d(z_0,\Gamma)}(\|F\|_{\mathcal{F}(L^{p(\cdot)}_{\mu(\cdot)},\Gamma)} + \|f_1\|_{L^{p(z_0)}_{\mu(z_0)}}).$$

Deducimos que $g \in [L^{p(\cdot)}_{\mu(\cdot)}]^{\delta'_{z_0}}$ y, puesto que, en virtud de (1;5.10), $L^{p(z_0)}_{\mu(z_0)}$ está contenido en $[L^{p(\cdot)}_{\mu(\cdot)}]^{\delta'_{z_0}}$ con norma menor o igual que $C = 1-|z_0|^2$, tenemos probada la primera parte de la proposición. Más aún, se cumple que

$$\begin{aligned}
&\|f\|_{[L^{p(\cdot)}_{\mu(\cdot)}]^{\delta'_{z_0}}} = \|f_0+g\|_{[L^{p(\cdot)}_{\mu(\cdot)}]^{\delta'_{z_0}}} = \\
&= \|f_0 - f_1^* + F'(z_0,x) + f_1 p(z_0) w'(z_0) \log \ \|f_1\|_{L^{p(z_0)}_{\mu(z_0)}}\|_{[L^{p(\cdot)}_{\mu(\cdot)}]^{\delta'_{z_0}}} \leq \\
&\leq \|f_0 + f_1 p(z_0) w'(z_0) \log \ \|f_1\|_{L^{p(z_0)}_{\mu(z_0)}}\|_{[L^{p(\cdot)}_{\mu(\cdot)}]^{\delta'_{z_0}}} + \|f_1^* - F'(z_0,\cdot)\|_{[L^{p(\cdot)}_{\mu(\cdot)}]^{\delta'_{z_0}}} \leq \\
&\leq C\|f_0 + f_1 p(z_0) w'(z_0) \log \ \|f_1\|_{L^{p(z_0)}_{\mu(z_0)}}\|_{L^{p(z_0)}_{\mu(z_0)}} + \\
&+ \frac{1}{d(z_0,\Gamma)}(\|F\|_{\mathcal{F}} + \|f_1\|_{L^{p(z_0)}_{\mu(z_0)}}) + \|F\|_{\mathcal{F}}.
\end{aligned}$$

De esta desigualdad es fácilmente deducible la equivalencia buscada. ∎

NOTA 5.3: Observemos que si $\mu(\gamma,x) = \mu(x)$ entonces $H_\mu(z_0,\cdot) = 0$ y así, la proposición 1.5 para el caso $n=1$ resulta como corolario de la anterior.

PROPOSICION 5.4. *$f \in [L^{p(\cdot)}_{\mu(\cdot)}]^{\delta^{n)}_{z_0}}$ si y sólo si existen $f_0,\dots,f_n$ en $L^{p(z_0)}_{\mu(z_0)}$ tales que $f(x) = f_0(x) + H_1'(z_0,x) + \cdots + H_n^{n)}(z_0,x)$, donde*

$$H_j(z,x) = \mu(z,x)^{-\alpha(z)}\mu(z_0,x)^{w(z)}\frac{f_j(x)}{|f_j(x)|}\|f_j\|_{L^{p(z_0)}_{\mu(z_0)}}\left(\frac{|f_j(x)|}{\|f_j\|_{L^{p(z_0)}_{\mu(z_0)}}}\right)^{w(z)p(z_0)}$$

para $0 \leq j \leq n$.

Se cumple que

$$H_j^{k)}(z_0,x) = \left(\sum_{q=0}^{k}\left(\sum_{s=0}^{k-q}\beta_\mu^{q,s,k}(z_0,x)(\log\ \|f_j\|_{L^{p(z_0)}_{\mu(z_0)}})^s\right)(\log\ |f_j(x)|)^q\right) f_j(x),$$

donde

$$\beta_\mu^{qsk}(x) = \sum_{p=s-q}^{k}\binom{k}{p}(\mu(z,x)^{-\alpha(z)}\mu(z_0,x)^{w(z)})^{k-p)}_{/z_0}\alpha_{s+q-1}\binom{s+q}{q}(-1)^s,$$

siendo α_j unos coeficientes que sólo dependen de la función w.

DEMOSTRACION:

Sabemos que el resultado es cierto para $n = 1$. Supongámoslo para $n-1$ y veámoslo para n.

Sea $f \in [L^{p(\cdot)}_{\mu(\cdot)}]^{\delta^{n)}_{z_0}}$ y sea $F \in \mathcal{F}(L^{p(\cdot)}_{\mu(\cdot)}, \Gamma)$ tal que $F^{n)}(z_0, \cdot) = f$. Consideremos el conjunto $A = \{x \in X \ ; \ F(z_0, x) = 0\}$. Entonces $F(z,x) = (z - z_0)G(z,x)\chi_A(x) + F(z,x)\chi_{A^c}(x)$.

LEMA. *Si F cumple las hipótesis del lema 5.1, $F^{n)}(z_0, \cdot) \in [L^{p(\cdot)}_{\mu(\cdot)}]^{\delta^{n-1)}_{z_0}}$.*

DEMOSTRACION: De nuevo, sabemos que el resultado es cierto para $n = 1$. Consideremos el conjunto $B = \{x \in X \ ; \ F'(z_0, x) = 0\}$. Se verifica que $F(z,x)\chi_B(x) = (z - z_0)^2 G^*(z,x)$ y así,

$$(F(z,x)\chi_B(x))^{n)}_{|z_0} = n((z - z_0)G^*(z,x))^{n-1)}_{|z_0}$$

Pero puesto que $G^*(z,x)(z - z_0)$ está en la hipótesis de inducción, $(F(z,\cdot)\chi_B(\cdot))^{n)}_{|z_0}$ está en $[L^{p(\cdot)}_{\mu(\cdot)}]^{\delta^{n-2)}_{z_0}}$.

Sea ahora $x \notin B$. Tiene sentido considerar la función

$$G_F(z,x) = \frac{F(z,x)}{z - z_0}\chi_{B^c}(x) - H_F(z,x)$$

donde

$$H_F(z,x) =$$

$$\mu(z,x)^{-\alpha(z)}\mu(z_0,x)^{w(z)}\|F'(z_0,\cdot)\|_{L^{p(z_0)}_{\mu(z_0)}} \frac{F'(z_0,x)\chi_B(x)}{|F'(z_0,x)|}\left(\frac{|F'(z_0,x)|}{\|F'(z_0,\cdot)\|_{L^{p(z_0)}_{\mu(z_0)}}}\right)^{w(z)p(z_0)}.$$

Puesto que G_F cumple las hipótesis del lema 5.1, aplicando la hipótesis de inducción, tenemos que $G^{n-1)}_F(z_0, \cdot)$ está en $[L^{p(\cdot)}_{\mu(\cdot)}]^{\delta^{n-2)}_{z_0}}$. Ahora bien, es claro que $(F(z,\cdot)\chi_{B^c})^{n)}_{|z_0} = n\left(\frac{F(z,\cdot)}{z-z_0}\chi_{B^c}\right)^{n-1)}_{|z_0}$ y por consiguiente,

$$(F(z,x)\chi_{B^c})^{n)}_{|z_0} = n\left(G^{n-1)}_F(z_0,x) + H^{n-1)}_F(z_0,x)\right).$$

La primera hipótesis de inducción realizada asegura que $H^{n-1)}_F(z_0, \cdot) \in [L^{p(\cdot)}_{\mu(\cdot)}]^{\delta^{n-1)}_{z_0}}$, de modo que si combinamos todos los resultados establecidos, obtenemos que $F^{n)}(z_0, \cdot)$ está en $[L^{p(\cdot)}_{\mu(\cdot)}]^{\delta^{n-1)}_{z_0}}$ como queríamos probar. ∎

Continuemos con la demostración de la proposición. En virtud del lema previo tenemos garantizado que $(F(z,\cdot)\chi_A(\cdot))^{n)}_{|z_0}$ está en $[L^{p(\cdot)}_{\mu(\cdot)}]^{\delta^{n-1)}_{z_0}}$ y si $f_n(x) = F(z_0,x)\chi_{A^c}(x)$ y $H_n = H_{f_n}$, se cumple que $G_n(z,x) = F(z,x)\chi_{A^c}(x) - H_n(z,x)$ está en la hipótesis del lema anterior y, por tanto, $G^{n)}_n(z_0,\cdot) \in [L^{p(\cdot)}_{\mu(\cdot)}]^{\delta^{n-1)}_{z_0}}$.

En consecuencia, $g(\cdot) = (F(z,\cdot)\chi_A(\cdot))^{n)}_{|z_0} + G^{n)}_n(z_0,\cdot)$ está en $[L^{p(\cdot)}_{\mu(\cdot)}]^{\delta^{n-1)}_{z_0}}$ y, por hipótesis de inducción, existen $f_0,\cdots,f_1$ en $L^{p(z_0)}_{\mu(z_0)}$ tales que $g(x) = f_0(x) + \sum_{j=1}^{n-1} H^{j)}_j(z_0,x)$.

Puesto que $f(x) = g(x) + H^{n)}_n(z_0,x)$, obtenemos el resultado buscado. El recíproco es totalmente análogo.

La segunda parte de la proposición es un sencillo, aunque tedioso, cálculo.

COROLARIO 5.5. *Sea* $J^{z_0}_\mu(z,x) = \left(\frac{\mu(z_0,x)}{\mu(z,x)}\right)^{\frac{1}{p}}$ *con* $p = p(z_0)$. *Se cumple que el espacio* $[L^p_{\mu(\cdot)}]^{\delta^{n)}_{z_0}}$ *es equivalente al espacio suma*

$$L^p_{\mu(z_0)} + L^p_{\mu(z_0)((J^{z_0}_\mu)'(z_0,x))^{-p}} + \cdots + L^p_{\mu(z_0)((J^{z_0}_\mu)^{n)}(z_0,x))^{-p}} \equiv L^p_{\mu(z_0)(1+(J^{z_0}_\mu)^{n)}(z_0,x))^{-p}}.$$

DEMOSTRACION:

Si $p(\gamma) = p$ se tiene que $H_f(z,x) = J^{z_0}_\mu(z,x)f(x)$ y, por tanto, puesto que $f \in L^p_{\mu(z_0)}$,

$$H^{k)}_f(z_0,x) = f(x)(J^{z_0}_\mu)^{k)}(z_0,x) \in L^p_{\mu(z_0)((J^{z_0}_\mu)^{k)}(z_0,x))^{-p}}$$

Veamos ahora la equivalencia de las normas. Supongamos inicialmente que $n = 1$ y sea $f \in [L^p_{\mu(\cdot)}]^{\delta'_{z_0}}$. Sea $F \in \mathcal{F}(L^p_{\mu(\cdot)},\Gamma)$ tal que $F'(z_0,x) = f(x)$. Llamemos $G(z,x) = F(z,x) - J^{z_0}_\mu(z,x)F(z_0,x)$. Se cumple que $G(z_0,\cdot) = 0$ y así, $G'(z_0,\cdot) \in L^p_{\mu(z_0)}$. Además,

$$\|G'(z_0,\cdot)\|_{L^p_{\mu(z_0)}} \leq \frac{1}{d(z_0,\Gamma)}(\|F\|_{\mathcal{F}} + \|F(z_0,x)\|_{L^p_{\mu(z_0)}}) \leq \frac{2\|F\|_{\mathcal{F}}}{d(z_0,\Gamma)}.$$

En consecuencia, $F'(z_0,x) = G'(z_0,x) + (J^{z_0}_\mu)'(z_0,x)F(z_0,x) = f_0(x) + f_1(x)$ con f_0 en $L^p_{\mu(z_0)}$ y f_1 en $L^p_{\mu(z_0)((J^{z_0}_\mu)'(z_0,x))^{-p}}$. Además

$$\|f_0\|_{L^p_{\mu(z_0)}} + \|f_1\|_{L^p_{\mu(z_0)((J^{z_0}_\mu)'(z_0,x))^{-p}}} \leq$$

$$\leq \frac{2\|F\|_{\mathcal{F}}}{d(z_0,\Gamma)} + \|F\|_{\mathcal{F}} = \left(1 + \frac{2}{d(z_0,\Gamma)}\right)\|F\|_{\mathcal{F}}.$$

Se deduce de ello que

$$\|f\|_+ \leq \left(1 + \frac{2}{d(z_0,\Gamma)}\right)\|f\|_{[L^p_{\mu(\cdot)}]^{\delta'_{z_0}}},$$

donde $\| \ \|_+$ es la norma en el espacio suma.

Puesto que ambos espacios son de Banach y coinciden algebraicamente se deduce la equivalencia topológica.

Supongamos que el resultado es cierto para $n-1$. Sea ahora $f \in [L^p_{\mu(\cdot)}]^{\delta^{n)}_{z_0}}$ y sea F en $\mathcal{F}(L^p_{\mu(\cdot)}, \Gamma)$ tal que $F^{n)}(z_0, x) = f(x)$. La función $G^{n)}(z_0, x) = f(x) - (J^{z_0}_\mu)^{n)}(z_0, x)F(z_0, x)$ está en $[L^p_{\mu(\cdot)}]^{\delta^{n-1}_{z_0}}$ y por tanto, en virtud de la hipótesis de inducción, existen $f_j \in L^p_{\mu(z_0)}$ $(0 \leq j \leq n-1)$ tales que

$$f(x) = f_0(x) + f_1(x)(J^{z_0}_\mu)'(z_0, x) + \cdots + f_{n-1}(x)(J^{z_0}_\mu)^{n-1)}(z_0, x) + (J^{z_0}_\mu)^{n)}(z_0, x)F(z_0, x).$$

Más aún, existen unas constantes k y c tales que

$$\|f_0\|_{L^p_{\mu(z_0)}} + \cdots + \|f_{n-1}\|_{L^p_{\mu(z_0)((J^{z_0}_\mu)^{n-1)}(z_0,x))^{-p}}} \leq k\|G^{n)}(z_0, x)\|_{[L^p_{\mu(\cdot)}]^{\delta^{n-1)}_{z_0}}} \leq c\|F\|_{\mathcal{F}}$$

Por consiguiente, deducimos que

$$\begin{aligned} \|f\|_+ &\leq c\|F\|_{\mathcal{F}} + \|(J^{z_0}_\mu)^{n)}(z_0, x)F(z_0, x)\|_{L^p_{\mu(z_0)((J^{z_0}_\mu)^{n)}(z_0,x))^{-p}}} \leq \\ &\leq c\|F\|_{\mathcal{F}} + \|F(z_0, x)\|_{L^p_{\mu(z_0)}} \leq (c+1)\|F\|_{\mathcal{F}}, \end{aligned}$$

y, así, queda concluido el corolario. ▮

COROLARIO 5.6. *Si* $T = \sum_{j=0}^n \sum_{l=0}^{m(j)} a_{jl}\delta^{l)}_{z_j}$ *entonces* $[L^p_{\mu(\cdot)}]^T$ *es equivalente al espacio suma* $\sum_{j=0}^n L^p_{\mu(z_j)((1+J^{z_j}_\mu)^{m(j)}(z_j))^{-p}}$.

COROLARIO 5.7. *Sean* w_0, w_1 *dos funciones positivas medibles sobre* X. $f \in [L^{p_0}_{w_0}, L^{p_1}_{w_1}]_{\delta'_\theta}$ *si y sólo si existen* f_0, f_1 *en* L^p_w, *siendo* $\frac{1}{p} = \frac{1-\theta}{p_0} + \frac{\theta}{p_1}$ *y* $w = w_0^{\frac{1-\theta}{p_0}p} w_1^{\frac{\theta}{p_1}p}$, *tales que*

$$f(x) = f_0(x) + f_1(x)(\frac{1}{p_0}\log\ w_0(x) - \frac{1}{p_1}\log\ w_1(x)) + f_1(x)\log\ |f_1(x)|$$

DEMOSTRACION:

Dado $0 < \theta < 1$, existe $\Gamma_1 \subset \Gamma$ medible tal que $\int_{\Gamma_1} dP_{z_0}(\gamma) = \theta$. De modo que si consideramos $A(\gamma) = L^{p_0}_{w_0}$ para todo $\gamma \in \Gamma \setminus \Gamma_1$ y $A(\gamma) = L^{p_1}_{w_1}$ para todo $\gamma \in \Gamma_1$, se cumple que $A(\gamma) = [L^{p_0}_{w_0}, L^{p_1}_{w_1}]_{\alpha(\gamma)}$ con $\alpha(\cdot) = \chi_{\Gamma_1}(\cdot)$.

Es conocido que $A(\gamma) = L^{p(\gamma)}_{\mu(\gamma,x)}$, donde, para todo $\gamma \in \Gamma$,

$$\frac{1}{p(\gamma)} = \frac{1-\alpha(\gamma)}{p_0} + \frac{\alpha(\gamma)}{p_1} \quad \text{y}$$
$$\mu(\gamma, x) = w_0^{\frac{1-\alpha(\gamma)}{p_0}p(\gamma)} w_1^{\frac{\alpha(\gamma)}{p_1}p(\gamma)}.$$

(Véase [TRI], 1.18.5).

Por otra parte, si $T = \delta^{n)}_{z_0}$, se tiene que $[A(\cdot)]^T \equiv [L^{p_0}_{w_0}, L^{p_1}_{w_1}]_S$ donde recordamos que $S(\varphi) = T(\varphi \circ w)$. Por consiguiente,

$$[L^{p_0}_{w_0}, L^{p_1}_{w_1}]_S \equiv [L^{p_0}_{w_0}, L^{p_1}_{w_1}]_{\delta^{n)}_{\alpha(z_0)}} = [L^{p_0}_{w_0}, L^{p_1}_{w_1}]_{\delta^{n)}_\theta}.$$

En definitiva, el espacio que queremos identificar es un caso particular de (5.4). En este caso,

$$\begin{aligned}
\mu(z,x) &= \exp\left(p(z)\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{1}{p(\gamma)}\log\ \mu(\gamma,x)dH_z(\gamma)\right) = \\
&= \exp\left(p(z)\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left(\frac{1-\alpha(\gamma)}{p_0}\log\ w_0 + \frac{\alpha(\gamma)}{p_1}\log\ w_1\right)dH_z(\gamma)\right) = \\
&= \exp\left(p(z)\frac{1-w(z)}{p_0}\log\ w_0 + p(z)\frac{w(z)}{p_1}\log\ w_1\right) = \\
&= w_0^{\frac{1-w(z)}{p_0}p(z)} w_1^{\frac{w(z)}{p_1}p(z)}.
\end{aligned}$$

Así, si llamamos $B(z) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{1}{p(\gamma)}dP_z(\gamma)$ y $\mathcal{B}(z) = B(z) + i\tilde{B}(z)$ tal que $\tilde{B}(z_0) = 0$ tenemos

$$\begin{aligned}
\mu(z_0,x)^{\mathcal{B}(z)}\mu(z,x)^{-B(z)} &= w_0^{\frac{1-\theta}{p_0}p\mathcal{B}(z)} w_1^{\frac{\theta}{p_1}p\mathcal{B}(z)} w_0^{-\frac{1-w(z)}{p_0}} w_1^{-\frac{w(z)}{p_1}} = \\
&= w_0^{\frac{1}{p_0}((w(z)-1)+(1-\theta)p\mathcal{B}(z))} w_1^{\frac{1}{p_1}(p\mathcal{B}(z)\theta - w(z))}.
\end{aligned}$$

Aplicando 5.2 se obtiene el resultado buscado. ∎

NOTA 5.8: Mediante la combinación de 5.5 y los cálculos realizados en 5.7, es fácil ver que

$$[L^p_{w_0}, L^p_{w_1}]_{\delta^{n)}_\theta} \equiv L^p_{w_0^{1-\theta}w_1^\theta\left(1+|\log\ \frac{w_0}{w_1}|^n\right)^{-p}}$$

como se afirma en ([L II], 5.2).

§6 Algunos ejemplos de interpolación

Se trata, en esta sección, de ver brevemente cómo se pueden aplicar los resultados anteriores a la interpolación de operadores.

Si $b \in BMO$ ([G], cap. VI) tiene norma suficientemente pequeña s entonces $W = e^b$ y W^{-1} son pesos de la clase A_p ([M-P], cap. XI, 12.1). Se cumple también que si L es un operador integral de Calderón-Zygmund,

$$L : L^p(W) \longrightarrow L^p(W) \quad \text{y} \quad L : L^p(W^{-1}) \longrightarrow L^p(W^{-1})$$

([M-P], cap. XI, 12.3).

PROPOSICION 6.1. *Sea L un operador integral singular de Calderón-Zygmund y sea $b \in BMO$, se cumple que*

$$\int_X |L(g(x)|b(x)|)|^p \frac{1}{(\|b\|_* + s|b(x)|)^p} d\mu \ll \frac{1}{s^p} \|g\|_p^p \qquad \forall g \in L^P.$$

DEMOSTRACION:

Por las observaciones hechas previamente tenemos, en virtud de (2;1.1), que

$$L : [L^p(W), L^p(W^{-1})]_{\delta'_\theta} \longrightarrow [L^p(W), L^p(W^{-1})]_{\delta'_\theta}.$$

Ahora bien, si usamos 5.8 para $\theta = 1/2$, tenemos que

$$[L^p(W), L^p(W^{-1})]_{\delta'_{\frac{1}{2}}} \equiv L^p((1 + |b|)^{-p})$$

y de esta forma $\|L(f)\|_{L^p((1+|b|)^{-p})} \leq c\|f\|_{L^p((1+|b|)^{-p})}$.

Sea ahora $g \in L^p$, se cumple que $g(1 + |b|) \in L^p(1 + |b|)^{-p}$ y en consecuencia,

$$\|L(g(1 + |b|))\|_{L^p((1+|b|)^{-p})} \leq c\|g(1 + |b|)\|_{L^p((1+|b|)^{-p})} \leq c\|g\|_p.$$

Por otra parte si $g \in L^p$, $L(g) \in L^p$ y, por tanto, $L(g) \in L^p((1 + |b|)^{-p})$ y

$$\|L(g)\|_{L^p((1+|b|)^{-p})} \leq \|L(g)\|_p \leq c\|g\|_p$$

Si combinamos estos dos resultados, obtenemos que $\|L(g|b|)\|_{L^p((1+|b|)^{-p})} \leq c\|g\|_p$, es decir,

$$\int_X |L(g(x)|b(x)|)|^p \frac{1}{(1 + |b(x)|)^p} d\mu \leq c\|g\|_p^p$$

y en consecuencia, cualquiera que sea $b \in BMO$, aplicando la fórmula anterior a $\frac{b}{\|b\|_*}s$ obtenemos el resultado buscado. ∎

COROLARIO 6.2. *Si $(X, \mathcal{M}, \mu)$ es un espacio de medida finita, se cumple que si L es un operador integral singular de Calderón-Zygmund*

$$\sup_{b\in BMO}\left(\int_X |L(|b(x)|)|^p \frac{1}{(\|b\|_* + s|b(x)|)^p} d\mu\right)\frac{1}{p} \ll \frac{1}{s}\mu(X).$$

Consideremos ahora $0 < \gamma < n$, $1 < p_1 < (n/\gamma)$ y $\frac{1}{p_2} = \frac{1}{p_1} - \frac{\gamma}{n}$. Si $b \in BMO$ Muckenhoup y Wheeden [M-W] probaron que si $L_\gamma = *|x|^{\gamma-n}$ (Potenciales de Riesz) entonces

$$L_\gamma : L^{p_1}(e^b) \longrightarrow L^{p_2}(e^b) \quad \text{y}$$

$$L_\gamma : L^{p_1}(e^{-b}) \longrightarrow L^{p_2}(e^{-b}).$$

Por tanto, se cumple:

PROPOSICION 6.3. *En las condiciones anteriores,*

$$\sup_{b\in BMO}\left(\int_X |L_\gamma|b(x)|\,|^{p_2} \frac{1}{(\|b\|_* + s|b(x)|)^{p_2}} d\mu\right)^{\frac{1}{p_2}} \ll \frac{1}{s}\mu(X)^{\frac{1}{p_1}}.$$

DEMOSTRACION:

Si razonamos como en 6.1, obtenemos que

$$L_\gamma : L^{p_1}((1+|b|)^{-p_1}) \longrightarrow L^{p_2}((1+|b|)^{-p_2})$$

y así, para cada $g \in L^{p_1}$ y cada $b \in BMO$ con norma pequeña s

$$\left(\int_X |L_\gamma(g(x)|b(x)|)|^{p_2} \frac{1}{(1+|b(x)|)^{p_2}} d\mu\right)^{\frac{1}{p_1}} \ll \|g\|_{p_1}$$

y, por tanto, para toda $b \in BMO$,

$$\left(\int_X |L_\gamma(g(x)|b(x)|)|^{p_2} \frac{1}{(\|b\|_* + s|b(x)|)^{p_2}} d\mu\right)^{\frac{1}{p_2}} \ll \frac{1}{s}\|g\|_{p_1}.$$

De lo cual se deduce la proposición para $g = 1$. ∎

NOTA 6.4: Sea $1 < p_1 < p_2 < \infty$ y sea $p = 2(p_1^{-1} + p_2^{-1})^{-1}$. Si $g \in L^p(\mathbf{R}^n)$ y g^* es la función maximal de Hardy-Littlewood, existe α tal que $(g^*)^{\pm\alpha}$ son pesos de las clases A_{p_1} y A_{p_2} ([C-R], prop. 2). En consecuencia, si L es un operador integral singular de C-Z,

$$L : L^{p_1}((g^*)^{\pm\alpha}) \longrightarrow L^{p_1}((g^*)^{\pm\alpha}) \quad \text{y}$$

$$L : L^{p_2}((g^*)^{\pm\alpha}) \longrightarrow L^{p_2}((g^*)^{\pm\alpha}).$$

De este hecho podemos deducir los siguientes resultados entre otros:

PROPOSICION 6.5. *En las condiciones anteriores, para cada* $f \in L^p(\mathbf{R}^n)$ $(p_1 \leq p \leq p_2)$,

$$\left(\int_X |L(f|\log\ g^*|)|^p \frac{1}{(1+\alpha|\log\ g^*|)^p} d\mu\right)^{\frac{1}{p}} \ll \frac{1}{\alpha}\|f\|_p$$

DEMOSTRACION:

En virtud de 6.1 y 1.2, tenemos que

$$L : L^p\left(\frac{1}{(1+\alpha|\log\ g^*|)^p}\right) \longrightarrow L^p\left(\frac{1}{(1+\alpha|\log\ g^*|)^p}\right),$$

de lo cual es fácilmente deducible la proposición. ∎

COROLARIO 6.6. *En las condiciones anteriores,*

$$\sup_{g\in L^p(\mathbf{R}^n)} \left(\int_X |L(\log\ g^*)|^p \frac{1}{(1+\alpha|\log\ g^*|)^p} d\mu\right) \frac{1}{p} \ll \frac{\mu(X)^{\frac{1}{p}}}{\alpha}.$$

Capítulo V

Potencias complejas de operadores lineales. Identificación de espacios interpolados.

En este capítulo estudiaremos las familias de espacios $\{D(L^{\alpha(\gamma)}) \ , \ \gamma \in \Gamma\}$, esto es, dominios de potencias complejas de un operador lineal L, no necesariamente acotado, definido en un espacio de Banach A.

Si A es de Hilbert, las técnicas de la teoría sobre estos espacios simplifican las demostraciones del caso general. Además, el espacio interpolado $[D(L^{\alpha(\cdot)})]^T$ con $Sop\ T$ finito surge de manera natural y, de esta forma, nos orienta sobre cual es este espacio si A es simplemente Banach.

Por tanto, en la primera sección supondremos que A es de Hilbert y posteriormente, en la segunda, generalizaremos los resultados obtenidos. La tercera sección estará relacionada con la interpolación de familia de espacios de Sobolev. Los resultados obtenidos en esta sección estarán en concordancia con los obtenidos por Schechter en ([S], §4). Finalmente, dedicamos la cuarta sección a una aplicación al caso de familias de espacios L^p con pesos.

Comenzaremos enunciando algunos resultados de la teoría general de operadores sobre un espacio de Hilbert. ([RU], cap. 13), ([D-S], cap. XII).

§1. Potencias de operadores positivos sobre un espacio de Hilbert.

DEFINICION 1.1. *Sea $\mathcal{M}$ una σ-álgebra en un conjunto Ω y sea H un espacio de Hilbert. Una resolución de la identidad es una aplicación $E : \mathcal{M} \longrightarrow B(H)$ tal que:*

(a) $E(\emptyset) = 0$, $E(\Omega) = I$.

(b) $E(\omega)$ *es una proyección autoadjunta.*

(c) $E(\omega' \cap \omega'') = E(\omega')E(\omega'')$.

(d) *Si* $\omega' \cap \omega'' = \emptyset$, $E(\omega' \cup \omega'') = E(\omega') + E(\omega'')$.

(e) *Para cada $x, y \in H$, la función E_{xy}, definida por $E_{xy}(\omega) = (E(\omega)x, y)$, es una medida compleja sobre $\mathcal{M}$.*

TEOREMA 1.2. (Teorema espectral). *Para cada operador L autoadjunto en H existe una única resolución de la identidad E sobre los conjuntos de Borel de $\mathbf{R}$ tal que*

$$(Lx, y) = \int_{-\infty}^{\infty} t\, dE_{xy}(t) \qquad \forall x \in D(L),\ y \in H.$$

Además, E está concentrada en el espectro de L, $\sigma(L)$, en el sentido de que $E(\sigma(L)) = I$. E se llama descomposición espectral de L.

PROPOSICION 1.3. *Sea E la descomposición espectral de L.*

(a) *Dada una función $f : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{C}$ medible, existe un operador, $\Psi(f)$, cerrado densamente definido en H con dominio*

$$D(\Psi(f)) = D_f = \{x \in H\ ;\ \int_{\mathbf{R}} |f|^2 dE_{xx} < +\infty\},$$

el cual está caracterizado por $(\Psi(f)x, y) = \int_{\mathbf{R}} f dE_{xy}$ para todo $x \in D_f$ y satiface que $\|\Psi(f)x\|^2 = \int_{\mathbf{R}} |f|^2 dE_{xx}$.

(b) *Si f y g son medibles $\Psi(f)\Psi(g) \subset \Psi(fg)$ y $D(\Psi(f)\Psi(g)) = D_g \cap D_{fg}$. Se cumple que $\Psi(f)\Psi(g) = \Psi(fg)$ si y sólo si $D_{fg} \subset D_g$. En particular se da la igualdad si g es acotada.*

(c) *$\Psi(f)^* = \Psi(\overline{f})$ y $\Psi(f)\Psi(f)^* = \Psi(|f|^2) = \Psi(f)^*\Psi(f)$.*

(d) *$D_f = H$ si y sólo si $f \in L^\infty(E)$. Además, $\|\Psi(f)\|_{B(H)} = \|f\|_\infty$.*

Sea $L : D(L) \longrightarrow H$ un operador autoadjunto, definido positivo tal que $0 \notin \sigma(L)$. Puesto que $\sigma(L)$ es cerrado, existe $d \in \mathbf{R}^+$ tal que $\sigma(L) \subset [d, \infty)$.

Sea E la descomposición espectral de L.

LEMA 1.4. *Sean $f, g : (0,\infty) \longrightarrow \mathbf{C}$ medibles tales que f es acotada en todo intervalo $(0, M)$ y $\lim_{t\to\infty} f(t)/g(t) = 0$. Entonces $D_f \subset D_g$.*

LEMA 1.5. *Si denotamos por L^α el operador $\Psi(f)$ con $f(t) = t^\alpha$, se cumple:*

(a) *$D(L^\alpha) = H$ para $\alpha \leq 0$.*

(b) *Para todo $a \in \mathbf{R}$, $L^{ia} \in B(H)$ y $\|L^{ia}\| = 1$.*

(c) *Si $z = \alpha + i\beta$, $D(L^z) = D(L^\alpha)$.*

A lo largo de esta sección, α será una función medible sobre Γ tal que $0 \leq \alpha(\gamma) \leq 1$ para todo $\gamma \in \Gamma$. Los espacios que sean dominio de algún operador R estarán dotados de la norma usual

$$\|x\|_{D(R)} = (\|x\|_H^2 + \|Rx\|_H^2)^{\frac{1}{2}} \qquad \forall x \in D(R).$$

Se cumple que $D(L^{\alpha(\gamma)}) \equiv [H, D(L)]_{\alpha(\gamma)}$ (véase [TRIE], 1.15.3) y en consecuencia, la familia $\{D(L^{\alpha(\gamma)})\ ,\ \gamma \in \Gamma\}$ es de interpolación ([C-C-R-S-W I], 5.1).

LEMA 1.6. *La familia $\{D(L^{\alpha(\gamma)})\ ,\ \gamma \in \Gamma\}$ cumple las hipótesis de (3;2.7).*

DEMOSTRACION:

Sea Σ en las hipótesis de (3;2.5). Se tiene que $\cap_{\sigma\in\Sigma}[H, D(L)]_{\alpha(\sigma)} = D(L^{\sigma_0})$ siendo $\sigma_0 = \max_{\sigma\in\Sigma} \alpha(\sigma) < 1$.

Puesto que $D(L)$ es denso en $D(L^{\sigma_0})$, dado $a \in D(L^{\sigma_0})$, existe una sucesión $(a_n)_n$ en $D(L) \subset \cap_{\gamma\in\Gamma} D(L^{\alpha(\gamma)})$ tal que $\|a_n - a\|_{D(L^{\sigma_0})}$ converge a cero y así, puesto que, para cada $\sigma \in \Sigma$,

$$L^{\alpha(\sigma)}(a_n - a) = L^{\alpha(\sigma)-\sigma_0} L^{\sigma_0}(a_n - a),$$

se cumple que

$$\|L^{\alpha(\sigma)}(a_n - a)\|_H \leq \|L^{\alpha(\sigma)-\sigma_0}\|_{B(H)} \|L^{\sigma_0}(a_n - a)\|_H \leq \|t^{\alpha(\sigma)-\sigma_0}\|_{L^\infty(E)} \|a_n - a\|_{D(L^{\sigma_0})}$$
$$\leq d^{\alpha(\sigma)-\sigma_0} \|a_n - a\|_{D(L^{\sigma_0})} \leq k \|a_n - a\|_{D(L^{\sigma_0})},$$

donde k sólo depende de d y σ_0. En consecuencia, es claro que se cumple (3; (14)). ∎

En virtud del lema anterior, tenemos que si T es de soporte finito entonces $[D(L^{\alpha(\cdot)})]^T$ es equivalente a $[H, D(L)]_S$ donde $S(\varphi) = T(\varphi \circ w)$ (véase (3;2)). Al igual que hicimos en el capítulo anterior, la identificación de un espacio $[D(L^{\alpha(\cdot)})]^T$ queda determinada por la de $[H, D(L)]_{\delta_\theta^{n)}}$ con $0 < \theta < 1$, $n \in \mathbf{N}$.

PROPOSICION 1.7.

(a) *Si denotamos por* $\log\ L = \Psi(\log\ t)$ *se cumple que, para todo* $0 < \theta < 1$, $D(L^\theta)$ *está contenido continuamente en* $D(\log\ L)$.

(b) *En las condiciones previas el operador* $\log\ L$ *es inyectivo.*

(c) *El espacio* $R[\log\ L_{|D(L^\theta)}] = \{b \in H\ ;\ \exists b_1 \in D(L^\theta),$ *con* $\log\ L\ b_1 = b\}$, *dotado de la norma* $\|b\|_R = \|b_1\|_{D(L^\theta)}$ *tal que* $\log\ L\ b_1 = b$, *es un espacio de Banach contenido continuamente en* H.

DEMOSTRACION:

(a) Consecuencia immediata de 1.4.

(b) Sea $f(t) = 1/\log\ t$. Puesto que $0 \notin \sigma(L)$ se tiene que $f \in L^{\infty}(E)$ y así, $D_f = H$ y $\Psi(f) \in B(H)$. Además, si $g(t) = \log\ t$, $\Psi(\log\ t \frac{1}{\log\ t}) = (\log\ L)\Psi(f) = I$. Esto es, $\Psi(f)$ es la inversa por la derecha de $\log\ L$, y se cumple que $\Psi(f) \log\ L \subset (\log\ L)\Psi(f) = I$. De lo cual se deduce la inyectividad buscada.

(c) Obviamente es un espacio de Banach puesto que $\log\ L : D(L^{\theta}) \longrightarrow R[\log\ L_{|D(L^{\theta})}]$ es una isometría. Además,

$$\begin{aligned}\|b\|_H = \|\log\ L\ b_1\|_H = \|\log\ L\ L^{-\theta}L^{\theta}b_1\|_H \leq \\ \leq \|\log\ L\ L^{-\theta}\|_{B(H)}\|L^{\theta}\ b_1\|_H \leq \|\frac{\log\ t}{t^{\theta}}\|_{\infty}\|b_1\|_{D(L^{\theta})}\end{aligned}$$

con $b_1 \in D(L^{\theta})$ tal que $b = \log\ L\ b_1$. De esta forma se tiene que existe una constante $C = C(\theta)$ tal que $\|b\|_H \leq C(\theta)\|b\|_R$. ∎

PROPOSICION 1.8.

El espacio $[H, D(L)]_{\delta'_\theta}$ *es equivalente al espacio suma* $D(L^{\theta}) + R[\log\ L_{|D(L^{\theta})}]$.

DEMOSTRACION:

Es sabido que $D(L^{\theta})$ está contenido con continuidad en $[H, D(L)]_{\delta'_\theta}$. Sea, pues, b en $R[\log\ L_{|D(L^{\theta})}]$ y sea b_1 en $D(L^{\theta})$ tal que $b = \log\ L\ b_1$. Consideremos la función $F : \overline{\Omega} \longrightarrow H$ definida por $F(\xi) = L^{-\xi}L^{\theta}b_1$. Se cumple:

(i) F está bien definida pues $b_1 \in D(L^{\theta})$ y $D(L^{-\xi}) = H$.

(ii) F es analítica en Ω: en virtud de 1.3, tenemos que

$$F(\xi) = \int_a^{\infty} t^{-\xi} dE_{L^{\theta}b_1}(t) \qquad \forall 0 \leq Re(\xi) \leq 1.$$

Es fácil ver que estamos en las hipótesis del teorema de derivación bajo el signo integral y, por tanto, no sólo es clara la analiticidad de F sino que además se verifica que

$$F'(\xi_0) = \int_a^{\infty} (-\log\ t) t^{-\xi_0} dE_{L^{\theta}\ b_1}(t).$$

Se deduce pues que

$$\begin{aligned}(1) \qquad F'(\theta) = \Psi((-\log\ t)t^{-\theta})L^{\theta}\ b_1 = \Psi(-\log\ t)\Psi(t^{-\theta})L^{\theta}\ b_1 = \\ = (-\log\ L)L^{-\theta}L^{\theta}\ b_1 = -\log\ L\ b_1 = -b.\end{aligned}$$

(iii) $\|F(i\lambda)\|_H = \|L^{-i\lambda}L^\theta\ b_1\|_H \le \|L^\theta\ b_1\|_H \le \|b_1\|_{D(L^\theta)}$ para todo $\lambda \in \mathbf{R}$. Y así, $\sup_{\lambda\in\mathbf{R}} \|F(i\lambda)\|_H \le \|b_1\|_{D(L^\theta)}$

(iv) Para todo $\lambda \in \mathbf{R}$, se cumplen

$$\|F(1+i\lambda)\|_H = \|L^{-1-i\lambda}L^\theta\ b_1\|_H \le \|L^{-1}\|_{B(H)}\|b_1\|_{D(L^\theta)} \quad \text{y}$$
$$\|LF(1+i\lambda)\|_H = \|L^{-i\lambda}L^\theta\ b_1\|_H \le \|b_1\|_{D(L^\theta)}.$$

Por tanto, $F \in \mathcal{F}(H, D(L))$ y además,

$$\begin{aligned}(2)\qquad \|F\|_{\mathcal{F}(H,D(L))} &= \max(\sup_\lambda \|F(i\lambda)\|_H, \sup_\lambda \|F(1+i\lambda)\|_{D(L)}) \le \\ &\le \max(\|b_1\|_{D(L^\theta)},\ (\|L^{-1}\|^2_{B(H)}+1)^{\frac{1}{2}}\|b_1\|_{D(L^\theta)}) = \\ &= (1+\|L^{-1}\|^2_{B(H)})^{\frac{1}{2}}\|b_1\|_{D(L^\theta)}.\end{aligned}$$

Combinando la relación anterior con (1), se deduce que $b \in [H, D(L)]_{\delta'_\theta}$ y además, existe una constante k tal que $\|b\|_{[H,D(L)]_{\delta'_\theta}} \le k\|b_1\|_{D(L^\theta)} = k\|b\|_R$. En definitiva, hemos probado que $D(L^\theta) + R[\log\ L_{|D(L^\theta)}]$ está contenido continuamente en $[H, D(L)]_{\delta'_\theta}$.

Recíprocamente, sea $b \in [H, D(L)]_{\delta'_\theta}$ y sea $f \in \mathcal{F}(H, D(L))$ tal que $f'(\theta) = b$. Supongamos inicialmente que $f \in \mathcal{G}(H, D(L))$, esto es, $f = \sum_{j=1}^n \varphi_j b_j$ con $b_j \in D(L)$ y $\varphi_j \in H^\infty(\overline{\Omega})$ para todo j.

Sea $G(z) = L^z\ b_0$ con $b_0 \in D(L)$. Tenemos que $G(z) = \int_d^\infty t^z dE_{b_0}(t)$. Se cumple que la función $h(t,z) = t^z$ verifica las hipótesis del teorema de derivación bajo el signo integral y por consiguiente, G es H-analítica y

$$G'(\theta) = \int_d^\infty t^\theta \log\ t\ dE_{b_0}(t) = \Psi((\log\ t)t^\theta)b_0.$$

En consecuencia, la función $L^z f(z) = \sum' \varphi_j(z)L^z\ b_j$ es analítica y

$$\begin{aligned}(L^z f(z))'_{|\theta} &= \sum_j (\varphi_j(z)L^z\ b_j)'_{|\theta} = \sum_j (\varphi_j(\theta)\Psi(t^\theta \log\ t)\ b_j + \varphi'_j(\theta)L^\theta\ b_j) = \\ &= \Psi(t^\theta \log\ t)\ f(\theta) + L^\theta\ f'(\theta).\end{aligned}$$

Pero puesto que $f(\theta) \in D(L) \subset D(\log\ L) \cap D(\Psi(\log\ t\ t^\theta)) = D(L^\theta \log\ L)$, se deduce que

$$(L^z f(z))'_{|\theta} = L^\theta f'(\theta) + L^\theta \log\ L\ f(\theta) = L^\theta(f'(\theta) + \log\ L\ f(\theta))$$

y en definitiva, obtenemos que $f'(\theta) + \log\ L\ f(\theta) = L^{-\theta}(L^z\ f(z))'_{|\theta} \in D(L^\theta)$. De modo que existen $b_1 \in D(L^\theta)$ y $b_2 = -f(\theta) \in D(L^\theta)$ tal que $b = b_1 + \log\ L\ b_2$.

Además, en cuanto a la relación de las normas se tiene que

$$\|b_1\|_{D(L^\theta)} = \|L^{-\theta}(L^z f(z))'_{|\theta}\|_{D(L^\theta)} = \left(\|L^{-\theta}(L^z f(z))'_{|\theta}\|_H^2 + \|(L^z f(z))'_{|\theta}\|_H^2\right)^{\frac{1}{2}} \leq$$
$$\leq \|(L^z f(z))'_{|\theta}\|_H (1 + \|L^{-\theta}\|_{B(H)}^2)^{\frac{1}{2}} \leq k(1 + \|L^{-\theta}\|_{B(H)}^2)^{\frac{1}{2}} \|f\|_{\mathcal{F}}$$

y $\|b_2\|_{D(L^\theta)} = \|f(\theta)\|_{D(L^\theta)} \leq \|f\|_{\mathcal{F}}$. De este modo,

$$\|f'(\theta)\|_+ \leq (1 + k(1 + \|L^{-\theta}\|_{B(H)}^2)^{\frac{1}{2}})\|f\|_{\mathcal{F}}. \tag{3}$$

Sea ahora $f \in \mathcal{F}(H, D(L))$ y sea $(g_n)_n$ en $\mathcal{G}(H, D(L))$ tal que $f = \lim_n g_n$. En virtud de (3), la sucesión $(g_n'(\theta))_n$ es de Cauchy en el espacio suma y, por tanto, existe a en $D(L^\theta) + R[\log\ L_{|D(L^\theta)}]$ tal que $a = \lim_n g_n'(\theta)$. Puesto que este espacio está contenido continuamente en H, concluimos que necesariamente $a = f'(\theta) = b$, y se cumple que

$$\|f'(\theta)\|_+ \leq (1 + k(1 + \|L^{-\theta}\|_{B(H)}^2)^{\frac{1}{2}})\|f\|_{\mathcal{F}} \qquad \forall f \in \mathcal{F}\ ;\ f'(\theta) = b.$$

De esta forma queda demostrada la proposición. ∎

COROLARIO 1.9. *El espacio* $[H, D(L)]_{\delta_\theta'}$ *es equivalente al espacio* $R[\log\ L_{|D(L^\theta)}]$.

DEMOSTRACION:

En virtud de la proposición anterior, sólo falta ver que el espacio $D(L^\theta)$ está contenido con continuidad en $R[\log\ L_{|D(L^\theta)}]$. Ahora bien, si $b \in D(L^\theta)$ y denotamos por $(\log\ L)^{-1}$ al operador acotado $\Psi(1/\log\ t)$ tenemos que

$$(\log\ L)^{-1} b = (\log\ L)^{-1} L^{-\theta} L^\theta\ b = L^{-\theta}(\log\ L)^{-1} L^\theta\ b \in D(L^\theta)$$

y por tanto, $b = (\log\ L)(\log\ L)^{-1}\ b \in R[\log\ L_{|D(L^\theta)}]$. Más aún,

$$\|b\|_R \leq \|(\log\ L)^{-1}\ b\|_{D(L^\theta)} = \left(\|(\log\ L)^{-1}\ b\|_H^2 + \|L^\theta(\log\ L)^{-1}\ b\|_H^2\right)^{\frac{1}{2}} =$$
$$= \left(\|(\log\ L)^{-1}\ b\|_H^2 + \|(\log\ L)^{-1} L^\theta\ b\|_H^2\right)^{\frac{1}{2}} \leq \|(\log\ L)^{-1}\|_{B(H)} \|b\|_{D(L^\theta)},$$

y, así, se finaliza la proposición. ∎

PROPOSICION 1.10. $[H, D(L)]_{\delta_\theta^{n)}}$ *es equivalente à* $R[(\log\ L)^n_{|D(L^\theta)}]$ *dotado de la norma* $\|b\|_{R_n} = \|b_1\|_{D(L^\theta)}$, *donde* $(\log\ L)^n\ b_1 = b$. *Denotaremos a este espacio por* R_n.

DEMOSTRACION:

Observemos, en primer lugar, que

(1) $D(L^\theta) \subset D((\log\ L)^n) = \Psi(f_n)$, siendo $f_n(t) = (\log\ t)^n$.

(2) Si llamamos $g_n = 1/f_n$ se tiene que $g_n \in L^\infty(E)$ y, por tanto, $\Psi(g_n) \in B(H)$ y $\Psi(g_n)\Psi(f_n) \subset \Psi(g_n f_n) = I = (\log\ L)^n \Psi(g_n)$. Se deduce de ello que el operador $(\log\ L)^n$ es inyectivo.

Para la demostración de la proposición procederemos por inducción respecto de $n \in \mathbf{N}$.

Sabemos que el resultado es cierto para $n = 0, 1$, supongámoslo para $n - 1$ y veámoslo para n.

Sea $b \in R_n$ y sea $b_1 \in D(L^\theta)$ tal que $(\log\ L)^n\ b_1 = b$. Consideremos la función $F(\xi) = L^{-\xi} L^\theta\ b_1$. Ya hemos visto que $F \in \mathcal{F}(H, D(L))$ y que existe $k > 0$ tal que $\|F\|_{\mathcal{F}(H,D(L))} \leq k\|b_1\|_{D(L^\theta)}$. Es fácil ver que $F^{n)}(\theta) = (-1)^n(\log\ L)^n\ b_1$ y en consecuencia, $b \in [H, D(L)]_{\delta_\theta^{n)}}$ y

$$\|b\|_{[H,D(L)]_{\delta_\theta^{n)}}} \leq \|F\|_{\mathcal{F}} \leq k\|b_1\|_{D(L^\theta)} = k\|b\|_{R_n}.$$

Recíprocamente, sea $b \in [H, D(L)]_{\delta_\theta^{n)}}$ y $f \in \mathcal{F}(H, D(L))$ tal que $f^{n)}(\theta) = b$. Supongamos que $f = \sum' \varphi_j b_j$ $(b_j \in D(L))$ y consideremos la función $L^z f(z)$. Un simple cálculo de derivación nos demuestra que si $a = (L^z f(z))^n_{|\theta}$ entonces

$$a = L^\theta \left(\sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p} (\log\ L)^p f^{n-p)}(\theta) \right)$$

y, por tanto,

$$\sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p} (\log\ L)^p f^{n-p)}(\theta) = L^{-\theta}\ a \in D(L^\theta).$$

De este modo, tenemos que existe $b_0 \in D(L^\theta)$ tal que

$$b = f^{n)}(\theta) = b_0 - \sum_{p=1}^{n-1} \binom{n}{p} (\log\ L)^p f^{n-p)}(\theta) - (\log\ L)^n f(\theta)$$

Puesto que $f^{n-p)}(\theta) \in [H, D(L)]_{\delta_\theta^{n-p)}}$, podemos aplicar la hipótesis de inducción y tenemos que, para cada $1 \leq p \leq n-1$, existe $b_p \in D(L^\theta)$ tal que $(\log\ L)^{n-p}\ b_{n-p} = f^{n-p)}(\theta)$ y así,

$$b = b_0 - \sum_{p=1}^{n-1} \binom{n}{p} (\log\ L)^p (\log\ L)^{n-p}\ b_{n-p} - (\log\ L)^n\ f(\theta) =$$

$$= b_0 + (\log\ L)^n \left(- \sum_{p=1}^{n-1} \binom{n}{p} b_{n-p} - f(\theta) \right).$$

Por otra parte, $b_0 = L^{-\theta}(L^z f(z))^{n)}_{z=\theta} \in D(L^\theta)$ y, por tanto,

$$\Psi(f_n^{-1}) b_0 = \Psi(f_n^{-1}) L^{-\theta} L^\theta\ b_0 = L^{-\theta} \Psi(f_n^{-1}) L^\theta\ b_0 \in D(L^\theta)$$

y puesto que $b_0 = (\log\ L)^n \Psi(f_n^{-1}) b_0$ se cumple que $b_0 \in R_n$. Más aún, existen unas constante $\{k_j\ ,\ 1 \leq j \leq n\}$ tales que:

(1) $\|b_0\|_{R_n} = \|\Psi(f_n^{-1}) b_0\|_{D(L^\theta)} \leq \|\Psi(f_n^{-1})\|_{B(H)} \|L^{-\theta}(L^z f(z))^{n)}_{|\theta}\|_{D(L^\theta)} \leq k_n \|f\|_{\mathcal{F}(H,D(L))}$

(2) $\|b_{n-p}\|_{D(L^\theta)} \leq k_{n-p} \|f\|_{\mathcal{F}(H,D(L))}$

(3) $\|f(\theta)\|_{D(L^\theta)} \leq \|f\|_{\mathcal{F}(H,D(L))}$

De todo ello se deduce que $b \in R_n$ y que existe $k > 0$ tal que $\|b\|_{R_n} \leq k\|f\|_{\mathcal{F}(H,D(L))}$

Si tomamos finalmente $f \in \mathcal{F}(H, D(L))$, y hacemos el mismo razonamiento que para $n = 1$, obtenemos el resultado buscado. ∎

§2 Operadores positivos sobre un espacio de Banach.

Enunciaremos, en primer lugar, algunos resultados sobre potencias complejas de operadores positivos sobre un espacio de Banach A.

DEFINICION 2.1. ([TRIE] 1.14.1).

Sea A un espacio de Banach y L un operador lineal cerrado con dominio, $D(L)$, denso en A. El operador L se dice positivo si $(-\infty, 0]$ pertenece al resolvente de L y existe $C \geq 0$ tal que $\|(L + tI)^{-1}\| \leq C(1+t)^{-1}$ para todo $t \in [0, \infty)$.

LEMA 2.2. ([TRIE] 1.15.1).

Sea L un operador positivo en un espacio de Banach A. Sean $\sigma \in \mathbf{R}^+$, $n, m \in \mathbf{N} \cup \{0\}$ con $0 < \sigma < m$. Para cada número complejo α con $-n < Re(\alpha) \leq \sigma - n$ y para cada

$a \in (A, D(L^m))_{\frac{\alpha}{m},1}$ (espacio interpolado real)

$$(4) \qquad L_\sigma^\alpha\, a = \frac{\Gamma(m)}{\Gamma(\alpha+n)\Gamma(m-n-\alpha)} \int_0^\infty t^{\alpha+n-1} L^{m-n}(L+tI)^{-m}\, a\, dt$$

es una integral A-convergente, independiente de la elección de n y m. L_σ^α es un operador clausurable y, para cada α, la clausura, L^α, es independiente de σ.

NOTA 2.3: Del lema previo se deducen los siguientes resultados:

(1) $L^0 = I$.

(2) Si $Re(\alpha) < 0$, L^α es continuo y $L^{-\alpha}L^\alpha = I$.

(3) $L^{\alpha+\beta} = L^\alpha L^\beta$ allí donde ambas expresiones tengan sentido.

(4) $D(L^m)$ es denso en $D(L^\alpha)$ si $m > Re(\alpha)$.

(5) En general, al contrario de lo que ocurría en el caso de espacio de Hilbert, $L^{i\lambda}$ ($\lambda \in \mathbf{R}$) no es acotado. Sin embargo:

LEMA 2.4. ([TRIE], 1.15.3).

Sea L un operador positivo. Si existen dos números ε y C tales que L^{it} es un operador acotado para $-\varepsilon \leq t \leq \varepsilon$ y $\|L^{it}\|_{B(A)} \leq C$ entonces, para cada $t \in \mathbf{R}$, L^{it} es un operador acotado y existen C^* y $\gamma \geq 0$ tales que $\|L^{it}\|_{B(A)} \leq C^* e^{\gamma|t|}$.

Mientras no se diga lo contrario, supondremos siempre que L cumple la hipótesis del lema anterior.

TEOREMA 2.5. ([TRIE] 1.15.3).

En las hipótesis anteriores, si $\alpha, \beta \in \mathbf{C}$ son tales que $0 \leq Re(\alpha) < Re(\beta) < \infty$ y $0 < \theta < 1$, entonces $[D(L^\alpha), D(L^\beta)]_\theta = D(L^{(1-\theta)\alpha+\theta\beta})$.

En virtud de este resultado y la proposición 5.1 de [C-C-R-S-W- I], si α es una función medible sobre Γ tal que $0 \leq \alpha(\gamma) \leq 1$ para todo $\gamma \in \Gamma$, la familia $\{D(L^{\alpha(\gamma)})\ ,\ \gamma \in \Gamma\}$ es de interpolación.

LEMA 2.6. *La familia $\{D(L^{\alpha(\gamma)})\ ,\ \gamma \in \Gamma\}$ cumple las hipótesis de (3;2.7).*

DEMOSTRACION:

Sea Σ en las hipótesis de (3;2.5). Se tiene que $\cap_{\sigma\in\Sigma}[A, D(L)]_{\alpha(\sigma)} = \cap_{\sigma\in\Sigma} D(L^{\alpha(\sigma)}) = D(L^{\sigma_0})$ con $\sigma_0 = \max_{\sigma\in\Sigma} \alpha(\sigma) < 1$.

Puesto que $D(L)$ es denso en $D(L^{\sigma_0})$, dado $a \in D(L^{\sigma_0})$, existe $(a_n)_n$ en $D(L)$ tal que $a = D(L^{\sigma_0}) - \lim_n a_n$. Se tiene entonces que

$$L^{\alpha(\sigma)}(a_n - a) = L^{\alpha(\sigma)-\sigma_0} L^{\sigma_0}(a_n - a)$$

y, por tanto, puesto que $\alpha(\sigma) - \sigma_0 < 0$ se cumple

$$\|L^{\alpha(\sigma)}(a_n - a)\|_A \leq \|L^{\alpha(\sigma)-\sigma_0}\|_{B(A)} \|L^{\sigma_0}(a_n - a)\|_A$$

Veamos que $\|L^{\alpha(\sigma)-\sigma_0}\|_{B(A)}$ está acotada uniformemente en Σ: sea $-1 < \beta \leq 0$, en virtud de (4), tenemos que

$$\|L^\beta\ a\|_A \leq \frac{\Gamma(m)}{\Gamma(\beta+n)\Gamma(m-n-\beta)} \int_0^\infty t^{\beta+n-1} \frac{C}{(1+t)^m}\, dt\ \|L^{m-n}\ a\|_A$$

Tomando $m = n$ y $\beta = \alpha(\sigma) - \sigma_0$, un sencillo cálculo integral prueba que

$$\|L^\beta\ a\|_A \leq C\|a\|_A \frac{\Gamma(m+1)}{\Gamma(\alpha(\sigma) - \sigma_0 + m + 1)\Gamma(1 - \alpha(\sigma) + \sigma_0)}$$

de modo que si consideramos $m = 1$, tenemos en cuenta que

$$\sup_{\sigma\in\Sigma} 1/(\Gamma(2 + \alpha(\sigma) - \sigma_0)\Gamma(1 - \alpha(\sigma) + \sigma_0)) = k < \infty$$

y la densidad de $D(L)$ en A, deducimos la acotación uniforme buscada. En consecuencia,

$$\int_\Sigma \|a_n - a\|_{D(L^{\alpha(\sigma)})}\, d\mu_z(\sigma) \leq k\|a_n - a\|_{D(L^{\sigma_0})},$$

expresión que converge a cero cuando n tiende a infinito. ∎

Por consiguiente, para identificar $[D(L^{\alpha(\cdot)})]_T$ con T de soporte finito basta identificar $[A, D(L)]_{\delta_\theta^{n)}}$ con $0 < \theta < 1$. Hagamos, en primer lugar, dos observaciones:

(i) Puesto que $D(L^m)$ es denso en $D(L)$ para todo $m \geq 1$, toda función $f \in \mathcal{F}(A, D(L))$ puede ser aproximada por funciones del tipo $g = \sum' e^{\delta_j z^2 + \lambda_j z} b_j$ con $b_j \in D(L^m)$ para todo j.

(ii) Puesto que nuestras funciones f están definidas en la banda $0 \leq Re(z) \leq 1$, en virtud del lema 2.2, podemos tomar $n = 1$ y $m = 3$. A fin de no tener que utilizar técnicas de interpolación real, trabajaremos con el subespacio $D(L^3)$ denso en $(A, D(L^3))_{\frac{\sigma}{3},1}$. De modo que si $\sigma = 2.5$ podemos afirmar que, para todo $\alpha \in \overline{\Omega}$ y para cada $a \in D(L^3)$,

$$(5) \qquad L^\alpha\ a = \frac{2}{\Gamma(1+\alpha)\Gamma(2-\alpha)} \int_0^\infty t^\alpha L^2(L+tI)^{-3}\ dt.$$

Por simplicidad, llamaremos $C(\alpha)$ a la función analítica $2/(\Gamma(\alpha+1)\Gamma(2-\alpha))$.

Sea $a \in D(L^3)$ y consideremos $F(\xi) = L^\xi\ a : \overline{\Omega} \longrightarrow A$, A-analítica en $\overline{\Omega}$.

Si aplicamos el teorema de derivación bajo el signo integral a la función $L^\alpha L^2(L+tI)^{-3}\ a$, es fácil ver que

$$F'(0) = C(0) \int_0^\infty (\log\ t)\ L^2(L+tI)^{-3}\ a\ dt + C'(0) \int_0^\infty L^2(L+tI)^{-3}\ a\ dt.$$

Ahora bien, $C(0)\int_0^\infty L^2(L+tI)^{-3}\ a\ dt = L^0\ a = a$ y, por tanto, puesto que $C(0) = 2$ podemos expresar

$$F'(0) = 2\int_0^\infty \left(\log\ t + \frac{C'(0)}{2}\right) L^2(L+tI)^{-3}\ a\ dt.$$

Por analogía con la teoría en espacios de Hilbert, definiremos el operador

$$(6) \qquad \log\ L\ a = 2\int_0^\infty \left(\log\ t + \frac{C'(0)}{2}\right) L^2(L+tI)^{-3}\ a\ dt \qquad \forall a \in D(L^3).$$

LEMA 2.7. *El operador* $\log\ L$*, anteriormente definido, es clausurable.*

DEMOSTRACION:

Puesto que el operador L^{-2} es continuo tenemos que

$$L^{-2}\log\ L\ a = L^{-2}(L^\alpha a)'_{|0} = L^{-2}\left(A - \lim_{\alpha\to 0} \frac{L^\alpha\ a - a}{\alpha}\right) =$$

$$= \lim_{\alpha\to 0} \frac{L^{-2}L^\alpha\ a - L^{-2}\ a}{\alpha} = (L^{-2+\alpha}a)'_{|0}.$$

Pero, por la definición de L^α, es claro que, para todo $\alpha \in \overline{\Omega}$, $\|L^{-2}L^\alpha\ a\|_A \leq C\|a\|_A$ y, por tanto, existe k tal que $\|L^{-2}\log\ L\ a\|_A \leq k\|a\|_A$. De esta forma probamos que el operador $L^{-2}\log\ L$ es acotado. En consecuencia, si $0 = A-\lim_n a_n$ y $a = A-\lim_n \log\ L\ a_n$ se verifica que $(L^{-2}\log\ L\ a_n)_n$ converge a $L^{-2}a$ y a cero. Luego $L^{-2}a = 0$ y, a fortiori, $a = 0$. ∎

Puesto que $D(L^3) \subset D(\log\ L)$, se tiene que $\log\ L$ es densamente definido.

Con un razonamiento totalmente análogo al empleado anteriormente definimos $(\log\ L)^n$ como la clausura del operador $F^{n)}(0)$, siendo "$F(\xi) = L^\xi$". Con estas observaciones llegamos al siguiente resultado:

PROPOSICION 2.8. *El espacio* $[A, D(L)]_{\delta_\theta^{n)}}$ *es equivalente al espacio suma*

$$D(L^\theta) + R[\log\ L_{|D(L^\theta)}] + \cdots + R[(\log\ L)^n_{|D(L^\theta)}]$$

dotado de la norma $\|x\|_{R_j} = \inf\{\|x_1\|_{D(L^\theta)}\ ;\ (\log\ L)^j x_j = x\}$, *donde por simplicidad denotamos por* R_j *al espacio* $R[(\log\ L)^j_{|D(L^\theta)}]$.

DEMOSTRACION:

Procederemos por inducción respecto de $n \in \mathbf{N}$. Sea $n = 1$ y $a \in D(L^3)$. Consideremos la función $F(\xi) = e^{(\xi-\theta)^2} L^{-\xi} L^\theta\ a$. Se cumple que $F \in \mathcal{F}(A, D(L))$:

(1) F es obviamente A-analítica en Ω y continua en $\overline{\Omega}$.

(2) $\|F(it)\|_A = \|e^{-t^2+\theta^2} L^{it} L^\theta\ a\|_A \leq Ce^{-t^2+\gamma|t|} \|L^\theta\ a\|_A$ en virtud de 2.4. De esta forma, existe k tal que $\sup_{t\in\mathbf{R}} \|F(it)\|_A \leq k\|a\|_{D(L^\theta)}$.

(3) De nuevo en virtud de 2.4, existen k^* y k^{**} tales que

$$\|F(1+it)\|_A \leq k^* \|a\|_{D(L^\theta)} \qquad \text{y} \qquad \|L(F(1+it))\|_A \leq k^{**} \|a\|_{D(L^\theta)}$$

Por consiguiente, existe K tal que $F \in \mathcal{F}(A, D(L))$ y $\|F\|_\mathcal{F} \leq K\|a\|_{D(L^\theta)}$

Veamos que $D(L^\theta) \subset D(\log\ L)$: sea $F(\xi) = e^{(\xi-\theta)^2} L^{-\xi} L^\theta\ a$ con $a \in D(L^3)$. Se cumple que $F(\xi) = e^{(\xi-\theta)^2} L^{\theta-\xi}\ a$ y así, si hacemos el cambio de variable $u = \xi - \theta$, aplicamos la regla de la cadena y tenemos en cuenta la definición del operador log L, es claro que $F'(\theta) = -\log\ L\ a$. En consecuencia, existe una constante c_θ tal que

$$\|\log\ L\ a\|_A = \|F'(\theta)\|_A \leq c_\theta \|F\|_\mathcal{F} \leq c_\theta \|a\|_{D(L^\theta)}. \tag{7}$$

Sea ahora $a \in D(L^\theta)$ y sea $(a_n)_n$ en $D(L^3)$ tal que $a = D(L^\theta) - \lim_n a_n$. De (7), se deduce que $(\log\ L\ a_n)_n$ es de Cauchy en A y, por tanto, convergente en este espacio a un elemento b. Pero puesto que $a = A - \lim_n a_n$ y log L es un operador cerrado, $b = \log\ L\ a$ y, por tanto, $a \in D(\log\ L)$ como queríamos ver. Además, $\|\log\ L\ a\|_A \leq c_\theta \|a\|_{D(L^\theta)}$.

Más aún, si llamamos $F_n(\xi) = e^{(\xi-\theta)^2} L^{-\xi} L^\theta\ a_n$ tenemos que F_n converge a F uniformemente sobre cada compacto de Ω y por consiguiente, puesto que $F'(\theta) = \lim_n F_n'(\theta)$, $F_n'(\theta) = -\log\ L\ a_n$ y $\log\ L\ a = \lim_n \log\ L\ a_n$, obtenemos que $F'(\theta) = -\log\ L\ a$.

Luego, si $a \in D(L^\theta)$, $\log\ L\ a \in [A, D(L)]_{\delta'_\theta}$ y en consecuencia, R_1 está contenido en $[A, D(L)]_{\delta'_\theta}$ y $\|\log\ L\ a\|_{[A,D(L)]_{\delta'_\theta}} \leq \|F\|_\mathcal{F} \leq c_\theta \|a\|_{D(L^\theta)}$. En definitiva, se cumple que

$b = \log\ L\ a \in [A, D(L)]_{\delta'_\theta}$ y $\|b\|_{[A,D(L)]_{\delta'_\theta}} \leq c_\theta \|b\|_{R_1}$. Queda pues probado que $D(L^\theta) + R_1$ está contenido continuamente en $[A, D(L)]_{\delta'_\theta}$.

Recíprocamente, sean $a \in [A, D(L)]_{\delta'_\theta}$ y $f \in \mathcal{F}(A, D(L))$ tales que $f'(\theta) = a$. Supongamos inicialmente que $f = \sum' e^{\delta_j z^2 + \lambda_j z} b_j$, donde ya sabemos que b_j puede ser tomado en $D(L^3)$ para todo j. Sea $F(z) = e^{(z-\theta)^2} L^z f(z)$. Se cumple que

$$F'(\theta) = L^\theta f'(\theta) + \sum_j e^{(\delta_j \theta^2 + \lambda_j \theta)} (L^z\ b_j)'_{|\theta}.$$

Ahora bien, por ser $L^{-\theta}$ un operador continuo tenemos

$$L^{-\theta}(L^z\ b_j)'_{|\theta} = (L^{z-\theta}\ b_j)'_{|\theta} = (L^u\ b_j)'_{|0} = \log\ L\ b_j.$$

De este modo, $\log\ L\ b_j \in D(L^\theta)$ y $L^\theta \log\ L\ b_j = (L^z\ b_j)'_{|\theta}$. En definitiva, $F'(\theta) = L^\theta(f'(\theta) + \log\ L\ f(\theta))$. La demostración para el caso $n = 1$ se concluye de manera totalmente análoga a 1.8.

Supongamos que el resultado es cierto para $n-1$ y veámoslo para n. Sea $b \in [A, D(L)]_{\delta_\theta^{n)}}$ y sea $f \in \mathcal{F}(A, D(L))$ tal que $f^{n)}(\theta) = b$. Consideremos la función $F(\xi) = e^{(\xi-\theta)^2} L^\xi\ f(\xi)$.

Como siempre, suponemos inicialmente que $f = \sum' \varphi_j b_j \in \mathcal{G}$ con $b_j \in D(L^3)$ para todo j. Entonces $F^{n)}(\theta) = \sum_{p=0}^n \binom{n}{p} (e^{(\xi-\theta)^2})_{|\theta}^{n-p)} (L^\xi\ f(\xi))_{|\theta}^{p)}$. Por otra parte,

$$(8) \qquad (L^\xi\ f(\xi))_{|\theta}^{p)} = (\sum_j \varphi_j(\xi) L^\xi\ b_j)_{|\theta}^{p)} = \sum_j \sum_{k=0}^p \binom{p}{k} \varphi_j^{p-k)} (L^\xi\ b_j)_{|\theta}^{k)} \qquad \forall 0 \leq p \leq n.$$

De nuevo, por ser $L^{-\theta}$ un operador continuo, se tiene que $L^{-\theta}(L^\xi\ b_j)_{|\theta}^{k)} = (L^{\xi-\theta}\ b_j)_{|\theta}^{k)} = (\log\ L)^k\ b_j$ y así, $(\log\ L)^k\ b_j \in D(L^\theta)$ y $L^\theta(\log\ L)^k\ b_j = (L^\xi\ b_j)_{|\theta}^{k)}$ para todo j. Por consiguiente, en virtud de (8),

$$(L^\xi\ f(\xi))_{|\theta}^{p)} = L^\theta \sum_{k=0}^p \binom{p}{k} (\log\ L)^k\ f^{p-k)}(\theta) \qquad \forall 0 \leq p \leq n.$$

Deducimos que existen unas constantes c_j $(0 \leq j \leq n)$ con $c_n = 1$ tales que

$$F^{n)}(\theta) = \sum_{p=0}^n c_p L^\theta \left(\sum_{k=0}^p \binom{p}{k} (\log\ L)^k\ f^{p-k)}(\theta) \right) = \sum_{k=0}^n \left(\sum_{p \geq k}^n c_p L^\theta (\log\ L)^k\ f^{p-k)}(\theta) \right) =$$

$$= \sum_{k=0}^n (\log\ L)^k \left(\sum_{q=0}^{n-k} c_{q+k} L^\theta\ f^{q)}(\theta) \right).$$

De la cadena de igualdades anterior se obtiene que

$$f^{n)}(\theta) = L^{-\theta}\ F^{n)}(\theta) - \sum_{k=1}^{n}(\log\ L)^k \left(\sum_{q=0}^{n-k} c_{q+k} f^{q)}(\theta)\right).$$

Por consiguiente, aplicando la hipótesis de inducción, es claro que $b \in D(L^\theta) + \sum_{k=1}^{n} R_k$ y se verifica que existe $K > 0$ tal que

$$\|b\|_+ \leq \|L^{-\theta}\ F^{n)}(\theta)\|_{D(L^\theta)} + \sum_{k=1}^{n} \| \sum_{q=0}^{n-k} c_{q+n} f^{q)}(\theta)\|_{D(L^\theta)} \leq K\|f\|_{\mathcal{F}}$$

Se deduce, así, que $\|f^{n)}(\theta)\|_+ \leq K\|f\|_{\mathcal{F}}$.

Si combinamos esta última desigualdad con la densidad de $\mathcal{G}(A, D(L))$ en $\mathcal{F}(A, D(L))$, obtenemos la contención continua de $[A, D(L)]_{\delta_\theta^{n)}}$ en $D(L^\theta) + \sum_{k+1}^{n} R_k$.

Para ver el recíproco sólo falta ver que R_n está contenido en $[A, D(L)]_{\delta_\theta^{n)}}$. Sea $b \in R_n$ y sea $b_1 \in D(L^\theta)$ tal que $b = (\log\ L)^n\ b_1$. Puesto que $b_1 \in D(L^\theta)$, tiene sentido la función $F(\xi) = e^{(\xi-\theta)^2} L^{-\theta} L^\theta\ b_1$. Sea $(b_n)_n$ en $D(L^3)$ tal que $b_1 = D(L^\theta) - \lim_n b_n$ y llamemos $F_m(\xi) = e^{(\xi-\theta)^2} L^{-\theta} L^\theta\ b_m$. Se cumple que existen $\{c_k\ ,\ 0 \leq k \leq n-1\}$ tales que

$$\begin{aligned} F_m^{n)}(\theta) &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (e^{(\xi-\theta)^2})_{|\theta}^{n-k)} (-1)^k (\log\ L)^k\ b_m = \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} c_k (\log\ L)^k\ b_m + (-1)^n b_m. \end{aligned}$$

En consecuencia, $b_m = (-1)^n F_m^{n)}(\theta) - (-1)^n \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} c_k (\log\ L)^k\ b_m$ y, por tanto, para todo $m \in \mathbf{N}$, existen k y k^* tales que

$$\|b_m\|_{[A,D(L)]_{\delta_\theta^{n)}}} \leq \|F_m\|_{\mathcal{F}(A,D(L))} + k\|b_m\|_{D(L^\theta)} \leq k^*\|b_m\|_{D(L^\theta)}$$

Concluimos que $(b_m)_m$ es de Cauchy en $[A, D(L)]_{\delta_\theta^{n)}}$ y, por tanto, convergente. Puesto que $b_1 = A - \lim_m b_m$, es claro que $b_1 = [A, D(L)]_{\delta_\theta^{n)}} - \lim_m b_m$ y así, $b_1 \in [A, D(L)]_{\delta_\theta^{n)}}$ como queríamos probar. ∎

NOTA 2.9: En ([S], 5.6, 5.7) se obtienen los siguientes resultados:

(1) Si $0 < \theta < 1$ el operador[1]

$$L^{-\theta} = \frac{sen \pi \theta}{\pi} \int_0^\infty \lambda^{-\theta} (\lambda + LI)^{-1}\ d\lambda$$

[1]Resultados sobre este operador pueden ser vistos en [K].

cumple que $D(L^\theta)$ está contenido continuamente en $[A, D(L)]_{\delta_\theta^{2)}}$.
(2) $L^{-\theta}$ aplica acotadamente $[A, D(L)]_{\theta_0}$ en $[A, D(L)]_{\theta+\theta_0-\varepsilon}$ para todo $\varepsilon > 0$ y L^θ aplica $[A, D(L)]_{\theta_0}$ acotadamente en $[A, D(L)]_{\theta_0-\theta-\varepsilon}$ para todo ε. En particular, $D(L^\theta)$ está contenido con continuidad en $[A, D(L)]_{\theta-\varepsilon}$.

Pues bien, es sabido que el operador L^θ es la potencia θ de L y, por consiguiente, $D(L^\theta) = [A, D(L)]_\theta$ que evidentemente está contenido en $[A, D(L)]_{\delta_\theta^{2)}}$. Además, puesto que si $x \in [A, D(L)]_{\theta_0} = D(L^{\theta_0})$, $L^{-\theta}L^{-\theta_0}L^{\theta_0}x = L^{-(\theta+\theta_0)}L^{\theta_0}x$ se tiene que $L^{-\theta}x \in R[L^{-(\theta+\theta_0)}] = D(L^{\theta+\theta_0}) = [A, D(L)]_{\theta+\theta_0}$. Esto es, $L^{-\theta}$ aplica $[A, D(L)]_{\theta_0}$ en $[A, D(L)]_{\theta+\theta_0}$ con continuidad.

Análogamente L^θ aplica $[A, D(L)]_{\theta_0}$ en $[A, D(L)]_{\theta_0-\theta}$ con continuidad.

§3 Interpolación de familias de espacios de Sobolev.

LEMA 3.1. ([TRIE] 2.5.3). *Sea $1 < p < \infty$ y $c_n \in \mathbf{R}$ tal que $c_n \|(1+|x|^2)^{-\frac{n+1}{2}}\|_1 = 1$. Sea*

$$[P(t)f](x) = c_n \int_{\mathbf{R}^n} \frac{t}{(|x-y|^2+t^2)^{\frac{n+1}{2}}} f(y)\, dy \qquad 0 < t < \infty,\ f \in L^p(\mathbf{R}^n)$$

Sea $P(0) = I$. Entonces $\{P(t)\}_{0 \le t \le \infty}$ es un semigrupo analítico en el espacio $L^p(\mathbf{R}^n)$ y si Λ es el operador infinitesimal asociado entonces, para cada $m \in \mathbf{N}$, $\Lambda^{2m} f = (\Delta^m f)(-1)^m$ y $D(\Lambda^{2m}) = W_p^{2m}(\mathbf{R}^n)$.

El espacio $W_p^s(\mathbf{R}^n)$ está definido como $H_p^s(\mathbf{R}^n)$ si $s \in \mathbf{N}$ y, para todo $s \in \mathbf{R}$, se cumple que

$$H_p^s(\mathbf{R}^n) = \{f \in L^p(\mathbf{R}^n)\ ;\ \mathcal{F}^{-1}(1+|x|^2)^{\frac{s}{2}}\mathcal{F}f \in L^p(\mathbf{R}^n)\}$$

dotado de la norma $\|f\|_{H_p^s(\mathbf{R}^n)} = \|\mathcal{F}^{-1}(1+|x|^2)^{\frac{s}{2}}\mathcal{F}f\|_p$. Es más, se verifican las siguientes propiedades:

(a) $-\Lambda + I$ es un operador positivo.

(b) Para todo $\alpha \in \mathbf{R}$ y para toda $f \in S(\mathbf{R}^n)$, $(-\Lambda+I)^\alpha f = \mathcal{F}^{-1}(1+|x|)^\alpha \mathcal{F} f$.

(c) $D(\Lambda^\alpha) = D((-\Lambda+I)^\alpha) = H_p^\alpha(\mathbf{R}^n)$.

En consecuencia, si α es una función medible sobre Γ tal que $0 \le \alpha(\gamma) \le 1$ para todo $\gamma \in \Gamma$, la familia $\{H_p^{\alpha(\gamma)}(\mathbf{R}^n)\ ,\ \gamma \in \Gamma\}$ es de interpolación y, si aplicamos los resultados de la sección anterior, tenemos identificado el espacio interpolado $[H_p^{\alpha(\cdot)}(\mathbf{R}^n)]^T$ cuando T es de soporte finito.

Si $T = \delta'_{z_0}$ con $z_0 \in D$ y $w'(z_0) \neq 0$, se satisface la siguiente cadena de equivalencias

$$(9) \quad \begin{aligned} [H_p^{\alpha(\cdot)}(\mathbf{R}^n)]^{\delta'_{z_0}} &= [D((-\Lambda + I)^{\alpha(\cdot)})]_{\delta'_{z_0}} \equiv [L^p(\mathbf{R}^n), D(\Lambda)]_{\delta'_{z_0}} \equiv \\ &\equiv H_p^{\alpha(z_0)}(\mathbf{R}^n) + R[\log\,(\Lambda + I)_{|H_p^{\alpha(z_0)}(\mathbf{R}^n)}]. \end{aligned}$$

Se trata pues, en primer lugar, de encontrar una expresión del operador $\log\,(\Lambda + I)$. Para ello veamos el siguiente lema:

LEMA 3.2. *Para cada $f \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^n)$, $\log\,(\Lambda + I)\ f = \mathcal{F}^{-1}\log(1 + |x|)\mathcal{F}\ f$.*

DEMOSTRACION:

Para cada $\alpha \in \mathbf{R}$ y para cada $f \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^n)$ es conocido que $(-\Lambda+I)^{\alpha}\ f = \mathcal{F}^{-1}(1+|x|)^{\alpha}\mathcal{F}\ f$ ([TRIE], 2.5.3. Rem. 2). Además, el operador $\log\,(\Lambda+I)$ está definido "formalmente" como $\frac{d}{d\alpha}((-\Lambda + I)^{\alpha})_{|0}$.

Sea $f \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^n)$. Se cumple que, para todo $\alpha \in \mathbf{C}$, $(1 + |x|)^{\alpha}\mathcal{F}\ f \in \mathcal{S}'(\mathbf{R}^n)$ y

$$\frac{d}{d\alpha}\left((1 + |x|)^{\alpha}\mathcal{F}\ f\right)_{|\alpha} = (1 + |x|)^{\alpha}\log(1 + |x|)\mathcal{F}\ f \in \mathcal{S}'(\mathbf{R}^n).$$

En consecuencia, el teorema de derivación bajo el signo integral nos asegura que

$$\frac{d}{d\alpha}\left((-\Lambda + I)^{\alpha}\ f\right)_{|0} = \frac{d}{d\alpha}\left(\mathcal{F}^{-1}(1 + |x|)^{\alpha}\mathcal{F}\ f\right)_{|0} = \mathcal{F}^{-1}\log\,(1 + |x|)\mathcal{F}\ f$$

y así, concluimos el lema. ∎

NOTA 3.3: En virtud de 2.8, tenemos que $f \in [H_p^{\alpha(\cdot)}(\mathbf{R}^n)]^{\delta'_{z_0}}$ si sólo si existen f_1 y f_2 en $H_p^{\alpha(z_0)}(\mathbf{R}^n)$ tales que $f = f_1 + \log\,(\Lambda + I)\ f_2$ y

$$\|f\|_{[H_p^{\alpha(\cdot)}(\mathbf{R}^n)]^{\delta'_{z_0}}} \equiv \inf\{\|f_1\|_{H_p^{\alpha(z_0)}(\mathbf{R}^n)} + \|f_2\|_{H_p^{\alpha(z_0)}(\mathbf{R}^n)}\ ;\ f = f_1 + \log\,(\Lambda + I)\ f_2\}$$

Puesto que $\mathcal{S}(\mathbf{R}^n)$ es denso en $H_p^{\alpha(z_0)}(\mathbf{R}^n)$ existen $(f_1^n)_n$, $(f_2^n)_n$ en $\mathcal{S}(\mathbf{R}^n)$ tal que $f_j = H_p^{\alpha(z_0)}(\mathbf{R}^n) - \lim_n f_j^n$ $(j = 1, 2)$ y de este modo, llamando $f^n = f_1^n + \log\,(\Lambda + I)\ f_2^n$ tenemos, en virtud del lema previo, que $f^n = f_1^n + \mathcal{F}^{-1}\log(1 + |x|)\mathcal{F}\ f_2^n$. Como

$$\|f^n\|_{[H_p^{\alpha(\cdot)}(\mathbf{R}^n)]^{\delta'_{z_0}}} \ll \|f_1^n\|_{H_p^{\alpha(z_0)}(\mathbf{R}^n)} + \|f_2^n\|_{H_p^{\alpha(z_0)}(\mathbf{R}^n)},$$

se verifica que $(f^n)_n$ es de Cauchy en $[H_p^{\alpha(\cdot)}(\mathbf{R}^n)]^{\delta'_{z_0}}$ y así, puesto que $f = L^p(\mathbf{R}^n) - \lim_n f^n$, se cumple que $f \in [H_p^{\alpha(\cdot)}(\mathbf{R}^n)]^{\delta'_{z_0}}$.

Para llegar a una identificación más concreta del espacio $[H_p^{\alpha(\cdot)}(\mathbf{R}^n)]^{\delta'_{z_0}}$ necesitamos el siguiente resultado, el cual es consecuencia del teorema de Michlin ([TRI], 2.2.4, Rem. 4).

LEMA 3.4. *Para cada* $m \in \mathbf{N}$, $\lambda \in \mathbf{R}^-$, *la distribución*

$$\beta(x) = \frac{(1+|x|)^\lambda}{(1+\log(1+|x|))^m}$$

es un multiplicador de tipo (p,p).

PROPOSICIÒN 3.5. *Si llamamos* $\lambda_{z_0}(x) = (1+|x|)^{\alpha(z_0)}/(1+\log(1+|x|))$ *se cumple que los espacios* $[H_p^{\alpha(\cdot)}(\mathbf{R}^n)]^{\delta'_{z_0}}$ *y* $H_p^{\lambda_{z_0}}$ *son equivalentes, donde*

$$H_p^{\lambda_{z_0}} = \{f \in L^p(\mathbf{R}^n) \ ; \ \mathcal{F}^{-1}\lambda_{z_0}\mathcal{F}\ f \in L^p(\mathbf{R}^n)\}$$

dotado de la norma $\|f\|_{H_p^{\lambda_{z_0}}(\mathbf{R}^n)} = \|\mathcal{F}^{-1}\lambda_{z_0}\mathcal{F}\ f\|_p$.

DEMOSTRACION:

Sea $f = f^1 + \log\ (\Lambda + I)\ f^2 \in [H_p^{\alpha(\cdot)}(\mathbf{R}^n)]^{\delta'_{z_0}}$. Las observaciones hechas previamente afirman que existe una sucesión $(f_n)_n$ en $S'(\mathbf{R}^n)$ tal que $f = [H_p^{\alpha(\cdot)}(\mathbf{R}^n)]^{\delta'_{z_0}} - \lim_n f_n$ y $f_n = f_1^n + \mathcal{F}^{-1}\log(1+|x|)\mathcal{F}\ f_2^n$ donde $\{f_j^n\ ,\ j=1,2,\ \ n \in \mathbf{N}\} \subset S(\mathbf{R}^n)$ y para cada $j = 1,2$ $f^j = H_p^{\alpha(z_0)}(\mathbf{R}^n) - \lim_n f_j^n$.

Puesto que $f_2^n \in S(\mathbf{R}^n)$ para todo $n \in \mathbf{N}$, el teorema de la inversión ([HO], cap. 1) permite expresar f_n por

$$f_n = (f_1^n - f_2^n) + \mathcal{F}^{-1}(1+\log(1+|x|))\mathcal{F}\ f_2^n \qquad \forall n \in \mathbf{N},$$

de modo que

$$\mathcal{F}^{-1}\ \lambda_{z_0}(x)\mathcal{F}\ f_n = \mathcal{F}^{-1}\ \frac{(1+|x|)^{\alpha(z_0)}}{1+\log(1+|x|)}\mathcal{F}\ (f_1^n - f_2^n) + \mathcal{F}^{-1}\ (1+|x|)^{\alpha(z_0)}\mathcal{F}\ f_2^n$$

Aplicando el lema previo para $\lambda = 0$, $t = 0$, $m = 1$ obtenemos

$$\begin{aligned}
&\|\mathcal{F}^{-1}\ \lambda_{z_0}(x)\mathcal{F}\ f_n\|_p \ll \\
&\ll \|\mathcal{F}^{-1}\ (1+|x|)^{\alpha(z_0)}\mathcal{F}\ (f_1^n - f_2^n)\|_p + \|\mathcal{F}^{-1}\ (1+|x|)^{\alpha(z_0)}\mathcal{F}\ f_2^n\|_p \ll \\
&\ll \|f_1^n - f_2^n\|_{H_p^{\alpha(z_0)}(\mathbf{R}^n)} + \|f_2^n\|_{H_p^{\alpha(z_0)}(\mathbf{R}^n)} \ll \|f_1^n\|_{H_p^{\alpha(z_0)}(\mathbf{R}^n)} + \|f_2^n\|_{H_p^{\alpha(z_0)}(\mathbf{R}^n)}
\end{aligned}$$

Consecuentemente, la sucesión $(f_n)_n$ es de Cauchy en $H_p^{\lambda_{z_0}}(\mathbf{R}^n)$ y, a fortiori, convergente.

Puesto que $f = L^p(\mathbf{R}^n) - \lim_n f_n$, deducimos que $f = H_p^{\lambda_{z_0}}(\mathbf{R}^n) - \lim_n f_n$. Así, f está en $H_p^{\lambda_{z_0}}(\mathbf{R}^n)$ y, de la desigualdad de anterior, es claro que

$$\|f\|_{H_p^{\lambda_{z_0}}(\mathbf{R}^n)} \ll \|f\|_{[H_p^{\alpha(\cdot)}(\mathbf{R}^n)]^{\delta'_{z_0}}}.$$

Recíprocamente, sea $f \in H_p^{\lambda_{z_0}}(\mathbf{R}^n)$, esto es, $f \in L^p(\mathbf{R}^n)$ y

$$\mathcal{F}^{-1}\ (1+|x|)^{\alpha(z_0)}/(1+\log(1+|x|))\ \mathcal{F}\ f \in L^p(\mathbf{R}^n)$$

El teorema de la inversión permite afirmar

$$f = \mathcal{F}^{-1}\ \frac{1}{1+\log(1+|x|)}\mathcal{F}\ f + \mathcal{F}^{-1}\ \frac{\log(1+|x|)}{1+\log(1+|x|)}\mathcal{F}\ f.$$

Sea $g = \mathcal{F}^{-1}\ (1+\log(1+|x|))^{-1}\mathcal{F}\ f$, entonces

$$\mathcal{F}^{-1}\ (1+|x|)^{\alpha(z_0)}\mathcal{F}\ g = \mathcal{F}^{-1}\ (1+|x|)^{\alpha(z_0)}/(1+\log(1+|x|))\ \mathcal{F}\ f \in L^p(\mathbf{R}^n)$$

y, por tanto, $g \in H_p^{\alpha(z_0)}(\mathbf{R}^n)$ y $\|g\|_{H_p^{\alpha(z_0)}(\mathbf{R}^n)} = \|f\|_{H_p^{\lambda_{z_0}}(\mathbf{R}^n)}$.

Sea $h = \mathcal{F}^{-1}\ \log(1+|x|)/(1+\log(1+|x|))\ \mathcal{F}\ f$. Se cumple que $h = \mathcal{F}^{-1}\ \log(1+|x|)\mathcal{F}\ g$.

Consideremos ahora una sucesión $(g_n)_n$ en $\mathcal{S}(\mathbf{R}^n)$ tal que $g = H_p^{\alpha(z_0)}(\mathbf{R}^n) - \lim_n g_n$ y llamemos $h_n = \mathcal{F}^{-1}\ \log(1+|x|)\mathcal{F}\ g_n$. En virtud de 3.2, $h_n = \log\ (\Lambda + I)\ g_n$ y así, $h_n \in R[\log\ (\Lambda+I)_{|H_p^{\alpha(z_0)}(\mathbf{R}^n)}]$ y $\|h_n - h_m\|_R \leq \|g_n - g_m\|_{H_p^{\alpha(z_0)}(\mathbf{R}^n)}$.

Deducimos, de ello, que $(h_n)_n$ es una sucesión de Cauchy en R y, por tanto, convergente hacia una función $h^* \in R$. Ahora bien, puesto que $h = \mathcal{S}'(\mathbf{R}^n) - \lim_n h_n$, es claro que $h^* = h$. De modo que $h \in R$ y $\|h\|_R \leq \|g\|_{H_p^{\alpha(z_0)}(\mathbf{R}^n)} = \|f\|_{H_p^{\lambda_{z_0}}(\mathbf{R}^n)}$.

Concluimos que $f \in [H_p^{\alpha(\cdot)}(\mathbf{R}^n)]^{\delta'_{z_0}}$ y $\|f\|_{[H_p^{\alpha(\cdot)}(\mathbf{R}^n)]^{\delta'_{z_0}}} \leq 2\|f\|_{H_p^{\lambda_{z_0}}(\mathbf{R}^n)}$. ∎

LEMA 3.6. *Para cada $f \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^n)$ y cada $j \in \mathbf{N}$,*

$$(\log\ (\Lambda+I))^j\ f = \mathcal{F}^{-1}\ (\log(1+|x|))^j\mathcal{F}\ f.$$

DEMOSTRACION:

Enteramente análoga a 3.2. ∎

PROPOSICION 3.7. *El espacio $[H_p^{\alpha(\cdot)}(\mathbf{R}^n)]^{\delta^{(n)}_{z_0}}$ es equivalente al espacio $H_p^{\lambda^n_{z_0}}(\mathbf{R}^n)$, donde $\lambda^n_{z_0} = (1+|x|)^{\alpha(z_0)}(1+\log(1+|x|))^{-n}$.*

DEMOSTRACION:

Si denotamos $R_j = (\log\ (\Lambda + I))^j_{|H_p^{\alpha(z_0)}(\mathbf{R}^n)}$ tenemos que

$$[H_p^{\alpha(\cdot)}(\mathbf{R}^n)]^{\delta_{z_0}^{n)}} \equiv [L^p(\mathbf{R}^n), H_p^1(\mathbf{R}^n)]_{\delta_{z_0}^{n)}} \equiv H_p^{\alpha(z_0)}(\mathbf{R}^n) + \sum_{k=1}^{n} R_k.$$

Dada $f = \sum_{j=0}^{n}(\log\ (\Lambda + I))^j\ f_j \in [H_p^{\alpha(\cdot)}(\mathbf{R}^n)]^{\delta_{z_0}^{n)}}$ deducimos, con un razonamiento enteramente análogo al empleado en 3.3, que existen $(f_j^{*k})_k$ $(0 \le j \le n)$ $n+1$ sucesiones en $\mathcal{S}(\mathbf{R}^n)$ tales que, para cada j, $f_j = H_p^{\alpha(z_0)}(\mathbf{R}^n) - \lim_k f_j^{*k}$ y tal que, si llamamos $f^k = \sum_{j=0}^{n}(\log\ (\Lambda + I))^j\ f_j^{*k}$, se cumple que $f = [H_p^{\alpha(\cdot)}(\mathbf{R}^n)]^{\delta_{z_0}^{n)}} - \lim_k f^k$.

Consecuentemente, en virtud del lema previo, obtenemos la existencia de $n+1$ sucesiones $(f_j^k)_k$ en $\mathcal{S}(\mathbf{R}^n)$ tales que

$$f^k = \sum_{j=0}^{n} \mathcal{F}^{-1}\ (\log(1+|x|))^j \mathcal{F}\ f_j^{*k} = \sum_{j=0}^{n} \mathcal{F}^{-1}\ (1+\log(1+|x|))^j \mathcal{F}\ f_j^k.$$

De este modo, obtenemos que, para todo $k \in \mathbf{N}$,

$$\|\mathcal{F}^{-1}\ \lambda_{z_0}^n(x) \mathcal{F}\ f^k\|_p = \|\mathcal{F}^{-1}\ \frac{(1+|x|)^{\alpha(z_0)}}{(1+\log(1+|x|))^n} \mathcal{F}\ f^k\|_p \le$$

$$\le \sum_{j=0}^{n} \|\mathcal{F}^{-1}\ (1+|x|)^{\alpha(z_0)}(1+\log(1+|x|))^{j-n} \mathcal{F}\ f_j^k\|_p.$$

Puesto que $j-n \le 0$, $(1+\log(1+|x|))^{j-n}$ es un multiplicador de tipo (p,p) y, por tanto,

$$\|\mathcal{F}^{-1}\ \lambda_{z_0}^n(x) \mathcal{F}\ f^k\|_p \ll \sum_{j=0}^{n} \|\mathcal{F}^{-1}\ (1+|x|)^{\alpha(z_0)} \mathcal{F}\ f_j^k\|_p = \sum_{j=0}^{n} \|f_j^k\|_{H_p^{\alpha(z_0)}(\mathbf{R}^n)}.$$

Consecuentemente,

$$\|f^k\|_{H_p^{\lambda_{z_0}^n}(\mathbf{R}^n)} \ll \sum_{j=0}^{n} \|f_j^k\|_{H_p^{\alpha(z_0)}(\mathbf{R}^n)} \ll \sum_{j=0}^{n} \|f_j^{*k}\|_{H_p^{\alpha(z_0)}(\mathbf{R}^n)}$$

y así, la sucesión $(f^k)_k$ es de Cauchy en $H_p^{\lambda_{z_0}^n}(\mathbf{R}^n)$ y, por tanto, convergente. Puesto que $f = L^p - \lim_n f^k$, deducimos que $f \in H_p^{\lambda_{z_0}^n}(\mathbf{R}^n)$ y que

$$\|f\|_{H_p^{\lambda_{z_0}^n}(\mathbf{R}^n)} = \|\mathcal{F}^{-1}\ \lambda_{z_0}^n \mathcal{F}\ f\|_p \ll \|f\|_{[H_p^{\alpha(\cdot)}(\mathbf{R}^n)]^{\delta_{z_0}^{n)}}}$$

Recíprocamente, sea $f \in H_p^{\lambda_{z_0}^n}(\mathbf{R}^n)$, esto es, $f \in L^p(\mathbf{R}^n)$ y $\mathcal{F}^{-1}\ \lambda_{z_0}^n \mathcal{F}\ f \in L^p(\mathbf{R}^n)$. Es claro, que la condición anterior es equivalente a decir que

$$\mathcal{F}^{-1}\ (1+|x|)^{\alpha(z_0)}(1+(\log(1+|x|))^n)^{-1}\mathcal{F}\ f \in L^p(\mathbf{R}^n)$$

y que si llamamos $\mu_{z_0}^n = (1+|x|)^{\alpha(z_0)}(1+(\log(1+|x|))^n)^{-1}$ entonces $H_p^{\lambda_{z_0}^n}(\mathbf{R}^n) \equiv H_p^{\mu_{z_0}^n}(\mathbf{R}^n)$.

Si expresamos f por

$$f = \mathcal{F}^{-1}\ \frac{1}{1+(\log(1+|x|))^n}\mathcal{F}\ f + \mathcal{F}^{-1}\ \frac{(\log(1+|x|))^n}{1+(\log(1+|x|))^n}\mathcal{F}\ f$$

y llamamos g y h al primer y segundo sumando respectivamente, obtenemos el resultado buscado con un razonamiento enteramente análogo al empleado en el caso $n=1$. ∎

PROPOSICION 3.8. *Si $T = \sum_{k=1}^{m}\sum_{j=0}^{m(k)} a_{kj}\delta_{z_k}^{j)}$, el espacio $[H_p^{\alpha(\cdot)}(\mathbf{R}^n)]^T$ es equivalente al espacio $H_p^{\lambda_T}$ donde*

$$\lambda_T(x) = \left(\sum_{k=1}^{m}(1+\log(1+|x|))^{m(k)}(1+|x|)^{\alpha(z_k)}\right)^{-1}.$$

DEMOSTRACION:

Se cumple que

$$[H_p^{\alpha(\cdot)}(\mathbf{R}^n)]^T \equiv \sum_{k=1}^{m}[H_p^{\alpha(\cdot)}(\mathbf{R}^n)]^{\delta_{z_k}^{m(k))}} \equiv \sum_{k=1}^{m} H_p^{\lambda_{z_k}^{m(k)}}.$$

Esto es, $f \in [H_p^{\alpha(\cdot)}(\mathbf{R}^n)]^T$ si y sólo si $f = \sum_k f_k$ con $f_k \in L^p$ tal que

$$\mathcal{F}^{-1}\ (1+|x|)^{\alpha(z_k)}/(1+\log(1+|x|))^{m(k)}\ \mathcal{F}\ f_k \in L^p$$

Consecuentemente, si β_k es el multiplicador de tipo (p,p)

$$\beta_k(x) = \frac{(1+\log(1+|x|))^{m(k)}}{\left(\sum_{p=1}^{m}(1+\log(1+|x|))^{m(p)}(1+|x|)^{-\alpha(z_p)}\right)(1+|x|)^{\alpha(z_k)}},$$

obtenemos que

$$\mathcal{F}^{-1}\ \lambda_T\mathcal{F}\ f = \sum_{k=1}^{m}\mathcal{F}^{-1}\ \beta_k\lambda_{z_k}^{m(k)}\mathcal{F}\ f_k$$

y, por tanto,

$$\|\mathcal{F}^{-1}\ \lambda_T \mathcal{F}\ f\|_p \ll \sum_{k=1}^{m} \|\mathcal{F}^{-1}\ \lambda_{z_k}^{m(k)} \mathcal{F}\ f_k\|_p = \sum_{k=1}^{m} \|f_k\|_{H_p^{\lambda_{z_k}^{m(k)}}}.$$

El recíproco es totalmente análogo. ∎

Los resultados anteriores concuerdan, para el caso de un par compatible, con los obtenidos en ([L II], 5.3) y en ([S], §4).

NOTA 3.9: Sea $\mu \in \mathcal{S}'(\mathbf{R}^n)$ una función positiva tal que $1/\mu$ sea un multiplicador de tipo (p,p). Entonces el espacio $H_p^\mu = \{f \in L^p(\mathbf{R}^n)\ ;\ \mathcal{F}^{-1}\ \mu(x)\mathcal{F}\ f \in L^p(\mathbf{R}^n)\}$ dotado de la norma $\|f\|_{H_p^\mu} = \|\mathcal{F}^{-1}\ \mu\mathcal{F}\ f\|_p$ es de Banach y está contenido continuamente en $L^p(\mathbf{R}^n)$.

Bajo determinadas condiciones tales como:

(1) $\mathcal{F}^{-1}\ (1+\mu)\mathcal{F}$ es un operador positivo.

(2) $(1+\mu)^\beta/(1+\log\ (1+\mu))^m$ es un multiplicador de tipo (p,p) para $\beta \in \mathbf{R}^-$ y $m \in \mathbf{N}$.

podemos, obviamente, generalizar los resultados anteriores a la interpolación de familias $\{H_p^{\mu\alpha(\cdot)}\ ,\ \gamma \in \Gamma\}$, sin más que sustituir $|x|$ por $\mu(x)$.

NOTA 3.10: La condición $\alpha(\cdot) \leq 1$ es innecesaria. De hecho, si α es una función medible positiva tal que $\alpha \in L^\infty(\Gamma)$, existe $m \in \mathbf{N}$ tal que si $\beta(\gamma) = \frac{\alpha(\gamma)}{m}$ para todo $\gamma \in \Gamma$, la función β está en las condiciones anteriores y se cumple

$$D(L^{\alpha(\gamma)}) = D(L^{m\beta(\gamma)}) \equiv [A, D(L^m)]_{\beta(\gamma)} \qquad \forall \gamma \in \Gamma.$$

De modo que, si hacemos los cambios necesarios, podemos generalizar los resultados anteriores a este caso.

§4 Espacios $\mathbf{L}^\mathbf{p}$ con pesos

Sea w una función medible positiva y sea $1 \leq p < +\infty$. Consideremos el operador $L : D(L) \longrightarrow L^p$ definido por $L(f) = wf$. Se cumplen:

(1) $D(L) = \{f \in L^p\ ;\ fw \in L^p\} = L^p(1+w^p)$.

(2) $L^\alpha\ f = w^\alpha f$ y así, $D(L^\alpha) = L^p(1+w^{\alpha p})$.

(3) $\log\ L(f) = (\log\ w)f$.

PROPOSICION 4.1. *Sea* $T = \sum_{j=0}^{n} \sum_{l=0}^{m(j)} a_{jl} \delta_{z_j}^{(l)}$, *entonces*

$$[L^p(1 + w^{p\alpha(\cdot)})]^T \equiv \sum_{j=0}^{n} L^p\left(\left(\frac{1 + w^{\alpha(z_j)}}{(1 + \log\ w)^{m(j)}}\right)^p\right).$$

DEMOSTRACION:

Se cumple que

$$[L^p(1 + w^{\alpha(\cdot)p})]^T = [D(L^{\alpha(\cdot)})]^T \equiv \sum_{j=0}^{n} R[(\log\ L)^{m(j)}_{|D(L^{\alpha(z_j)})}].$$

Pero $D(L^{\alpha(z_j)}) = L^p(1 + w^{\alpha(z_j)p})$ y si $f = (\log\ L)^{m(j)} g = (\log\ w)^{m(j)} g$ con g en $L^p(1 + w^{\alpha(z_j)})$, es claro que $f \in L^p\left(\left(\frac{1+w^{\alpha(z_j)}}{(1+\log\ w)^{m(j)}}\right)^p\right)$.

Apéndice I

Identificación de espacios interpolados para un funcional analítico que no es de soporte finito.

Sea $L : D(L) \longrightarrow A$ un operador positivo en un espacio de Banach A tal que, para todo $t \in \mathbf{R}$, L^{it} es un operador acotado y existe M tal que $\|L^{it}\|_{B(A)} \leq M$.

Sea S un funcional analítico en $\Omega = \{\xi \in \mathbf{C}\ ;\ 0 < Re(\xi) < 1\}$ y $\xi_0 \in \Omega$. Consideremos C la transformación conforme de D en Ω tal que $C(0) = \xi_0$. Sea, finalmente, T el funcional analítico en D definido por $T(\varphi) = S(\varphi \circ C^{-1})$ para toda $\varphi \in H(D)$.

Se cumple que si $F \in H(\Omega)$,

$$S(F) = T(F \circ C) = T\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(F \circ C)^{n)}(0)}{n!} z^n\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(F \circ C)^{n)}(0)}{n!} T(z^n).$$

De modo que si llamamos α_j^n al coeficiente de $F^{j)}(\xi_0)$ en el desarrollo de $(F \circ C)^{n)}(0)$ (coeficiente que sólo depende de C), se cumple que

$$S(F) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{T(z^n)}{n!} \sum_{j=0}^{n} \alpha_j^n F^{j)}(\xi_0)$$

en convergencia absoluta. Consecuentemente,

$$S(F) = \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{n \geq j}^{\infty} \frac{T(z^n)}{n!} \alpha_j^n F^{j)}(\xi_0) = \sum_{j=0}^{\infty} \left(\sum_{m=0}^{\infty} \frac{T(z^{m+j})}{(m+j)!} \alpha_j^{m+j}\right) F^{j)}(\xi_0) =$$
$$= \sum_{j=0}^{\infty} \left(\sum_{m=0}^{\infty} S\left((C^{-1}(\xi))^{m+j}\right) \frac{\alpha_j^{m+j}}{(m+j)!}\right) F^{j)}(\xi_0)$$

y si llamamos

$$A(S, C; j) = \sum_{m=0}^{\infty} S\left((C^{-1}(\xi))^{m+j}\right) \frac{\alpha_j^{m+j}}{(m+j)!},$$

tenemos que $S(F) = \sum_{j=0}^{\infty} A(S, C; j) F^{j)}(\xi_0)$.

LEMA 1.1. *Si $\phi_m(\xi) = (\xi - \xi_0)^m/m!$, se cumple que*

$$S(L^{-\xi+\xi_0}\ \phi_m) = \sum_{p=0}^{\infty} A(S, C; m+p)(-\log\ L)^p \binom{m+p}{p}.$$

DEMOSTRACION:

Por las observaciones iniciales, tenemos que

$$\begin{aligned} S(L^{-\xi+\xi_0}\ \phi_m) &= \sum_{j=0}^{\infty} A(S, C; j)(L^{-\xi+\xi_0}\ \phi_m)^{j)}(\xi_0) = \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} A(S, C; j) \left(\sum_{p=0}^{j} \binom{j}{p} (L^{-\xi+\xi_0})^{p)}_{|\xi_0} \phi_m^{j-p)}(\xi_0) \right) = \\ &= \sum_{j=m}^{\infty} A(S, C; j) \binom{j}{j-m} (-\log\ L)^{j-m} = \\ &= \sum_{p=0}^{\infty} A(S, C; m+p) \binom{m+p}{p} (-\log\ L)^p, \end{aligned}$$

tal y como se quería probar. ∎

Sea

$$E = \{(A_m)_m \subset D(L^{\xi_0})\ ;\ \exists \varphi \in A(\Omega; D(L^{\xi_0}))\ ,\ \varphi^{m)}(\xi_0) = A_m\ ,\ \forall m \in \mathbf{N}\}$$

dotado de la norma $\|(A_m)_m\|_E = \|\varphi\|_\infty$.

Consideremos el operador $\varphi_L^S : E \longrightarrow A$ definido por

$$\varphi_L^S((A_m)_m) = \sum_{m=0}^{\infty} S(L^{-\xi+\xi_0}\ \varphi_m) A_m.$$

PROPOSICION 1.2. *Si dotamos al espacio $R[\varphi_L^S]$ de la norma*

$$\|\varphi_L^S((A_m)_m)\|_R = \|x\|_R = \inf\{\|(A_m)_m\|_E\ ;\ \varphi_L^S((A_m)_m) = x\},$$

se cumple que $R[\varphi_L^S]$ es equivalente a $[A, D(L)]_S$.

DEMOSTRACION:

Sean $(A_m)_m \in E$ y $\varphi \in A(\Omega; D(L^{\xi_0}))$ tales que $\varphi^{m)}(\xi_0) = A_m$ para todo $m \in \mathbf{N}$. Se cumple, en virtud de las observaciones iniciales y la definición del operador log L, que

$$
\begin{aligned}
S(L^{-\xi+\xi_0}\varphi(\xi)) &= \sum_{j=0}^{\infty} A(S,C;j)(L^{-\xi+\xi_0}\varphi(\xi))^{j)}_{|\xi_0} = \\
&= \sum_{j=0}^{\infty} A(S,C;j) \sum_{p=0}^{j} \binom{j}{p} (-\log\ L)^p \varphi^{j-p)}(\xi_0) = \\
&= \sum_{p=0}^{\infty}\sum_{q=0}^{\infty} A(S,C;p+q)\binom{p+q}{p}(-\log\ L)^p\varphi^{q)}(\xi_0) = \\
&= \sum_{q=0}^{\infty}\left(\sum_{p=0}^{\infty} A(S,C;p+q)\binom{p+q}{p}(-\log\ L)^p\right)\varphi^{q)}(\xi_0)
\end{aligned}
$$

y, en virtud del lema anterior, dicha expresión coincide con

$$\sum_{q=0}^{\infty} S(L^{-\xi+\xi_0}\ \phi_q)A_q = \varphi_L^S((A_q)_q).$$

Puesto que $L^{-\xi+\xi_0}\varphi(\xi) \in \mathcal{F}(A, D(L))$ y

$$
\begin{aligned}
\|L^{-\xi+\xi_0}\varphi(\xi)\|_{\mathcal{F}} &= \max\left(\sup_{t\in\mathbf{R}} \|L^{-it+\xi_0}\varphi(it)\|_A, \sup_{t\in\mathbf{R}} \|L^{-1-it+\xi_0}\varphi(1+it)\|_{D(L)}\right) \ll \\
&\ll \max\left(\sup_{t} \|L^{\xi_0}\varphi(it)\|_A, \sup_{t} \|L^{\xi_0}\varphi(1+it)\|_A\right) \leq \|\varphi\|_\infty,
\end{aligned}
$$

se cumple que $\varphi_L^S((A_q)_q) \in [A, D(L)]_S$ y $\|\varphi_L^S(A_q)_q\|_S \ll \|\varphi\|_\infty = \|(A_q)_q\|_E$. Por tanto, hemos probado que $R[\varphi_L^S]$ está contenido continuamente en $[A, D(L)]_S$.

Recíprocamente, sea $x \in [A, D(L)]_S$ y sea $F \in \mathcal{F}(A, D(L))$ tal que $S(F) = x$. Sabemos que $S(F) = \sum_{j=0}^{\infty} A(S,C;j)F^{j)}(\xi_0)$ y puesto que $F(\xi) = L^{-\xi+\xi_0}L^{-\xi_0}L^{\xi}F(\xi)$, se verifica que

$$
\begin{aligned}
x = S(F) &= \sum_{j=0}^{\infty} A(S,C;j)\ \left(L^{-\xi+\xi_0}L^{-\xi_0}(L^{\xi}F(\xi))\right)^{j)}_{|\xi_0} = \\
&= \sum_{j=0}^{\infty} A(S,C;j)\sum_{p=0}^{j}\binom{j}{p}(-\log\ L)^p\left(L^{-\xi_0}(L^{\xi}F(\xi))\right)^{j-p)}_{|\xi_0} = \\
&= \sum_{m=0}^{\infty}\left(\sum_{p=0}^{\infty} A(S,C;p+m)\binom{p+m}{p}(-\log\ L)^p\right)\left(L^{-\xi_0}L^{\xi}F(\xi)\right)^{m)}_{|\xi_0}.
\end{aligned}
$$

Puesto que $L^{-\xi_0}L^{\xi}F(\xi) \in A(\Omega; D(L^{\xi_0}))$, $(A_m)_m = \left((L^{-\xi_0}L^{\xi}F(\xi))^{m)}_{|\xi_0}\right)_m$ está en E y, en virtud del lema previo y las igualdades anteriores, es claro que $x \in R[\varphi_L^S]$. Además,

$$\|x\|_R \leq \|(A_m)_m\|_E = \|L^{-\xi_0}L^{\xi}F(\xi)\|_\infty = \sup_{\xi \in \Omega} \|L^{-\xi_0}L^{\xi}F(\xi)\|_{D(L^{\xi_0})}$$

En virtud del teorema de las tres rectas, es fácil ver que $\|x\|_R \ll \|F\|_{\mathcal{F}(A,D(L))}$ y, a fortiori, $\|x\|_R \ll \|x\|_{[A,D(L)]_S}$. ∎

EJEMPLO 1: Sean $p = 2$ y $L : D(L) \longrightarrow L^2(\mathbf{R}^n)$ un operador cerrado definido por $L(f) = \mathcal{F}^{-1}\, (1+|x|^2)\mathcal{F}\, f$ para toda $f \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^n)$.

Se cumple que $D(L) = H_2^2(\mathbf{R}^n)$ ([TRIE], 2.5.3) y puesto que $\|L^{it}\|_{B(L^2)} \leq 1$ para todo $t \in \mathbf{R}$, se cumple, usando 1.2, que

$$[L^2(\mathbf{R}^n), H_2^2(\mathbf{R}^n)]_S \equiv R[\varphi_L^S].$$

Sea $P \in A(\Omega)$ y consideremos $\mu_s^p(x) = S(P(1+|x|^2)^{-\xi})$.

LEMA 1.3. *Si $|\mu_s^p(x)|^{-1} \in \mathcal{S}'(\mathbf{R}^n)$, se cumple que $H_2^{(\mu_s^p(x))^{-1}}$ es un espacio de Banach contenido continuamente en $L^2(\mathbf{R}^n)$, y tal que $\mathcal{S}(\mathbf{R}^n)$ es denso en él.*

DEMOSTRACION:

A la vista de la forma de μ_s^p, es claro que $|\mu_s^p(x)| \ll \|P\|_\infty$ para todo $x \in \mathbf{R}^n$ y, por tanto, $\mu_s^p \in L^\infty(\mathbf{R}^n)$. Consecuentemente, $H_2^{\mu_s^p(x)^{-1}}$ está contenido en $L^2(\mathbf{R}^n)$ con continuidad.

Completitud: sea $(f_n)_n$ una sucesión de Cauchy en $H_2^{\mu_s^p(x)^{-1}}$. Por definición de la norma en este espacio tenemos que $(\mathcal{F}^{-1}\, \mu_s^p(x)^{-1}\mathcal{F}\, f_n)_n$ es de Cauchy en L^2 y, por tanto, convergente en L^2 hacia una función Φ.

Puesto que $\mu_s^p(x) \in L^\infty$ y $\mathcal{F}$ es una isometría en L^2 con inversa $\mathcal{F}^{-1}$ se cumple que $H = \mathcal{F}^{-1}\, \mu_s^p(x)\mathcal{F}\, \Phi \in H_2^{\mu_s^p(x)^{-1}}$ y además $H = H_2^{\mu_s^p(x)^{-1}} - \lim_n f_n$

Densidad de $\mathcal{S}(\mathbf{R}^n)$: Sea $f \in H_2^{\mu_s^p(x)^{-1}}$. Se verifica que $\mathcal{F}^{-1}\, \mu_s^p(x)\mathcal{F}\, f \in L^2$ y, en consecuencia, existe $(\varphi_n)_n \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^n)$ tal que φ_n converge a $\mathcal{F}^{-1}\, \mu_s^p(x)^{-1}\mathcal{F}\, f$ en L^2, de modo que $\Phi_n = \mathcal{F}^{-1}\, \mu_s^p(x)\mathcal{F}\, \varphi_n$ converge a f en $H_2^{\mu_s^p(x)^{-1}}$.

Si vemos que Φ_n está en $\mathcal{S}(\mathbf{R}^n)$ para todo $n \in \mathbf{N}$, habremos acabado la demostración.

Ahora bien,

$$\mu_s^p(x) = S(P(1+|x|^2)^{-\xi}) = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma h_S(\xi)P(\xi)(1+|x|^2)^{-\xi}\, d\xi,$$

de forma que el teorema de diferenciación bajo el signo integral asegura que $\mu_s^p \in \mathcal{C}^\infty$ y que $D^\alpha(\mu_s^p(x))$ tiene una expresión de la forma

$$\frac{2^{|\alpha|}}{2\pi i}\int_\Gamma h_S(\xi)P(\xi)(-\xi)(-\xi-1)\cdots(-\xi+1-|\alpha|)(1+|x|^2)^{-\xi-|\alpha|}\,d\xi\; x_1^{\alpha_1}\cdots\varphi_n^{\alpha_n}.$$

Puesto que $\mathcal{F}\varphi_n \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^n)$, concluimos que $\mu_s^p(x)\mathcal{F}\,\varphi_n \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^n)$ y, a fortiori, Φ_n está en $\mathcal{S}(\mathbf{R}^n)$. ∎

PROPOSICION 1.4. *En las hipótesis del lema 1.3* $H_2^{\mu_s^p(x)^{-1}}$ *está contenido continuamente en* $[L^2(\mathbf{R}^n), H_2^2(\mathbf{R}^n)]_S$ *cualquiera que sea* $P \in A(\Omega)$.

DEMOSTRACION:

Sea $f \in H_2^{\mu_s^p(x)^{-1}}$ y sea $(\varphi_n)_n \subset \mathcal{S}(\mathbf{R}^n)$ tal que $f = H_2^{\mu_s^p(x)^{-1}} - \lim_n \varphi_n$.

Consideremos $\Psi_n = P(\xi)\mathcal{F}^{-1}\,\mu_s^p(x)^{-1}\frac{1}{(1+|x|^2)^{\xi_0}}\mathcal{F}\,\varphi_n$. Se cumple que

$$\begin{aligned} S(L^{-\xi+\xi_0}\,\Psi_n) &= S\left(\mathcal{F}^{-1}(1+|x|^2)^{-\xi+\xi_0}\mathcal{F}\;P(\xi)\mathcal{F}^{-1}\,\mu_s^p(x)^{-1}\frac{1}{(1+|x|^2)^{\xi_0}}\mathcal{F}\,\varphi_n\right) = \\ &= S\left(\mathcal{F}^{-1}\,(1+|x|^2)^{-\xi}P(\xi)\mu_s^p(x)^{-1}\mathcal{F}\,\varphi_n\right) = \\ &= \mathcal{F}^{-1}S\left((1+|x|^2)^{-\xi}P(\xi)\right)\mu_s^p(x)^{-1}\mathcal{F}\,\varphi_n = \varphi_n. \end{aligned}$$

En consecuencia, puesto que $L^{-\xi+\xi_0}\Psi_n \in \mathcal{F}(L^2, H_2^2)$ y

$$\|L^{-\xi+\xi_0}\Psi_n\|_{\mathcal{F}(L^2,H_2^2)} \ll \|\varphi_n\|_{H_2^{\mu_s^p(x)^{-1}}},$$

se verifica que $\|\varphi_n\|_{[L^2(\mathbf{R}^n),H_2^2(\mathbf{R}^n)]_S} \ll \|\varphi_n\|_{H_2^{\mu_s^p(x)^{-1}}}$. De modo que $(\varphi_n)_n$ es de Cauchy en $[L^2(\mathbf{R}^n), H_2^2(\mathbf{R}^n)]_S$ y, por tanto, convergente en este espacio. Pero, en virtud de que ambos espacios están contenido en L^2, se deduce que $f = [L^2(\mathbf{R}^n), H_2^2(\mathbf{R}^n)]_S - \lim_n \varphi_n$ y así, no sólo tenemos que $f \in [L^2(\mathbf{R}^n), H_2^2(\mathbf{R}^n)]_S$ sino que además se cumple que

$$\|f\|_{[L^2(\mathbf{R}^n),H_2^2(\mathbf{R}^n)]_S} \ll \|f\|_{H_2^{\mu_s^p(x)^{-1}}},$$

como queríamos demostrar. ∎

PROPOSICION 1.5. *Si existe* $P \in A(\Omega)$ *y* $(a_q)_q \subset \mathbf{R}^+$ *tal que*

(a) $|S((\xi-\frac{1}{2})^q(1+|x|^2)^{-\xi})| \ll a_q|S(P(1+|x|^2)^{-\xi})|$ *para todo* $q \in \mathbf{N}$ *y*

(b) $k = \sum_{q=0}^{\infty} a_q 2^q < +\infty$, *entonces* $[L^2(\mathbf{R}^n), H_2^2(\mathbf{R}^n)]_S \equiv H_2^{\mu_s^p(x)^{-1}}$.

DEMOSTRACION:

Sean $\xi_0 = \frac{1}{2}$ y $f \in [L^2(\mathbf{R}^n), H_2^2(\mathbf{R}^n)]_S$. Se verifica que $f \in R[\varphi_L^S]$ y, por tanto, existe $\varphi \in A(\Omega; H_2^{2\xi_0}) = A(\Omega; H_2^1)$ tal que

$$f = \sum_{q=0}^{\infty} S\left(L^{-\xi+\xi_0}(\xi-\xi_0)^q\right) \frac{\varphi^{q)}(\xi_0)}{q!}.$$

Ahora bien, sabemos que φ puede ser tomada de la forma $L^{-\xi_0}L^{\xi}F(\xi)$, con F en $\mathcal{F}(L^2, H_2^2)$, tal que $S(F) = f$. Por otra parte, dada $F \in \mathcal{F}(L^2, H_2^2)$, existe $(G_n)_n$ en $\mathcal{G}(L^2, H_2^2)$ tal que $F = \mathcal{F} - \lim_n G_n$ y, para cada $n \in \mathbf{N}$, la función G_n toma valores en $H_2^2(\mathbf{R}^n)$. Es más, $G_n = \sum_{j=1}^{N_n} \varphi_j^n b_j^n$ con $\varphi_j^n \in A(\Omega)$ y $b_j^n \in H_2^2$.

En virtud de la densidad de $\mathcal{S}$ en H_2^2, dado $\varepsilon > 0$, existe, para cada $n \in \mathbf{N}$ y $1 \le j \le N_n$, $a_j^n \in \mathcal{S}$ tal que $\|a_j^n - b_j^n\|_{H_2^2} \le \varepsilon / N \|\varphi_j^n\|_\infty$. Si llamamos $G_n^* = \sum' \varphi_j^n a_j^n$ se cumple que $\|G_n^* - G_n\|_{\mathcal{F}} \le \varepsilon$. En definitiva hemos probado que F se puede aproximar en $\mathcal{F}(L^2, H_2^2)$ por una sucesión de funciones con valores en $\mathcal{S}$.

Supongamos pues que G_n toma valores en $\mathcal{S}$. A fortiori $\varphi_n(\xi) = L^{-\xi_0}L^{\xi}G_n(\xi) = \mathcal{F}^{-1}\,(1+|x|^2)^{-\xi+\xi_0}G_n(\xi)$ toma valores en $\mathcal{S}$.

Sea, para cada $n \in \mathbf{N}$,

$$\begin{aligned} f_n &= \sum_{q=0}^{\infty} S(L^{-\xi+\xi_0}(\xi-\xi_0)^q) \frac{\varphi_n^{q)}(\xi_0)}{q!} = \\ &= \sum_{q=0}^{\infty} S\left(\mathcal{F}^{-1}\,(1+|x|^2)^{-\xi+\xi_0}\mathcal{F}\,(\xi-\xi_0)^q\right) \frac{\varphi_n^{q)}(\xi_0)}{q!} = \\ &= \sum_{q=0}^{\infty} \mathcal{F}^{-1}\left(S\left((1+|x|^2)^{-\xi+\xi_0}(\xi-\xi_0)^q\right)\right) \mathcal{F}\,\frac{\varphi_n^{q)}(\xi_0)}{q!}. \end{aligned}$$

Consecuentemente,

$$\mathcal{F}^{-1}\,\mu_s^p(x)^{-1}\mathcal{F}\,f_n = \sum_{q=0}^{\infty} \mathcal{F}^{-1}\mu_s^p(x)^{-1}S\left((1+|x|^2)^{-\xi+\xi_0}(\xi-\xi_0)^q\right) \mathcal{F}\,\frac{\varphi_n^{q)}(\xi_0)}{q!}.$$

En virtud de la hipótesis (a), se cumple que

$$\begin{aligned} &\|\mathcal{F}^{-1}\,\mu_s^p(x)^{-1}S\left((1+|x|^2)^{-\xi}(\xi-\xi_0)^q\right)(1+|x|^2)^{\xi_0}\mathcal{F}\,\frac{\varphi_n^{q)}(\xi_0)}{q!}\|_2 \ll \\ &\ll a_q\|\mathcal{F}^{-1}\,(1+|x|^2)^{\xi_0}\mathcal{F}\,\frac{\varphi_n^{q)}(\xi_0)}{q!}\|_2 = a_q\|\frac{\varphi_n^{q)}(\xi_0)}{q!}\|_{H_2^2} \ll \\ &\ll a_q 2^q \|\varphi_n\|_\infty, \end{aligned}$$

donde la última mayoración es debida a la fórmula integral de Cauchy.

Si aplicamos la hipótesis (b), obtenemos que $\|\mathcal{F}^{-1}\ \mu_s^p(x)^{-1}\mathcal{F} f_n\|_2 \ll k\|\varphi_n\|_\infty$ y así, $\|f_n\|_{H_2^{\mu_s^p(x)^{-1}}} \ll \|G_n\|_{\mathcal{F}}$. Deducimos que $(f_n)_n$ es de Cauchy en $H_2^{\mu_s^p(x)^{-1}}$ y, por tanto, convergente en este espacio. Además, es claro que la función límite es f y, por tanto, obtenemos que $f \in H_2^{\mu_s^p(x)^{-1}}$ y $\|f\|_{H_2^{\mu_s^p(x)^{-1}}} \ll \|F\|_{\mathcal{F}}$ y, así, queda concluida la demostración. ∎

NOTA 1.6:

(1) Si $S = \delta_\theta$ con $0 < \theta < 1$, entonces existe $C < \frac{1}{2}$ tal que

$$|S\left((\xi - \frac{1}{2})^q(1+|x|^2)^{-\xi}\right)| = |(\theta - \frac{1}{2})^q(1+|x|^2)^{-\theta}| \leq C^q(1+|x|^2)^{-\theta}$$

y así, puesto que estamos en las hipótesis de 1.5 para $P = 1$, se verifica que

$$[L^2(\mathbf{R}^n), H_2^2(\mathbf{R}^n)]_S \equiv H_2^{\mu_s^p(x)^{-1}},$$

donde, en este caso, $\mu_s^p(x)^{-1} = (1+|x|^2)^\theta$. En definitiva, obtenemos que

$$[L^2(\mathbf{R}^n), H_2^2(\mathbf{R}^n)]_S \equiv H_2^{\mu_s^p(x)^{-1}} = H_2^{2\theta}(\mathbf{R}^n),$$

como ya sabíamos que tenía que ocurrir. ([TRI], 2.4.2., Rem. 2).

(2) Análogamente, es fácil ver que si $S = \delta'_\theta$ estamos en las hipótesis de la proposición anterior para $P = e^{\xi-\xi_0}$ y $a_q = qC^{q-1}$ con C una constante menor que $\frac{1}{2}$. Además, puesto que

$$\mu_s^p(x)^{-1} = e^{\frac{1}{2}-\theta}\frac{(1+|x|^2)^\theta}{1+\log(1+|x|^2)},$$

obtenemos el mismo resultado que en (5;3.4).

PROPOSICION 1.7. *Existe $S \in H'(\Omega)$ de soporte no finito cumpliendo las hipótesis de la proposición 1.5.*

DEMOSTRACION:

Sea S el funcional analítico en Ω determinado por la función

$$h_s(\xi) = (\xi - \frac{1}{2})^{-1}\exp(-(\xi - \frac{1}{2})^{-1})$$

Sea $\xi_0 = \frac{1}{2}$. Se cumple que, cualquiera que sea $q \in \mathbf{N}$,

$$S\left((\xi-\xi_0)^q(1+|x|^2)^{-\xi}\right) = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma (\xi-\xi_0)^{q-1}(1+|x|^2)^{-\xi}e^{-\frac{1}{\xi-\xi_0}}\, d\xi$$

y, en virtud del teorema de los residuos, es fácil ver que dicha expresión coincide con

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} (\log\, (1+|x|^2))^n (1+|x|^2)^{-\xi_0} \frac{(-1)^{q+n}}{(q+n)!}.$$

Tomando $P = 1$, un cálculo sencillo de comparación de series demuestra la existencia de una constante $C < \frac{1}{2}$ tal que

$$|S\left((\xi - \frac{1}{2})^q (1+|x|^2)^{-\xi}\right)| \ll C^q |S((1+|x|^2)^{-\xi})| \qquad \forall q \in \mathbf{N},$$

y, de esta forma, queda concluida trivialmente la proposición. ∎

COROLARIO 1.8. *Si S es el funcional analítico de 1.7, $[L^2(\mathbf{R}^n), H_2^2(\mathbf{R}^n)]_S$ es equivalente al espacio H_2^μ donde*

$$\mu(x) = \left(S((1+|x|^2)^{-\xi})\right)^{-1}.$$

EJEMPLO 2:

PROPOSICION 1.9. *En la hipótesis de 1.5, si w es una función medible positiva y acotada inferiormente por una constante $m > 0$ y $P \in A(\Omega)$ es tal que $S(Pw^{-\xi}) \neq 0$, entonces*

$$[L^p, L^p(1+w^p)]_S \equiv L^p(|S(Pw^{-\xi})|^{-p}).$$

DEMOSTRACION:

Sea $L : D(L) \longrightarrow L^p$ definido por $L(f) = wf$. Es claro que $D(L) = L^p(1+w^p)$ y así, en virtud de 1.2, $[L^p, L^p(1+w^p)]_S \equiv R[\varphi_L^S]$.

Sea $f \in L^p(|S(PW^{-\xi})|^{-p})$. Se cumple que $f\left(S(Pw^{-\xi})\right)^{-1} w^{-\xi_0} \in L^p(w^{\xi_0 p})$ y, en consecuencia, $(A_m)_m = \left(P^{m)}(\xi_0) f(S(Pw^{-\xi+\xi_0}))^{-1}\right)_m \in E$ y

$$\varphi_L^S((A_m)_m) = \sum_{m=0}^{\infty} S\left(w^{-\xi+\xi_0}(\xi-\xi_0)^m\right) \frac{P^{m)}(\xi_0)}{m!} f\left(S(Pw^{-\xi+\xi_0})\right)^{-1} =$$
$$= S(w^{-\xi+\xi_0}P) f\left(S(Pw^{-\xi+\xi_0})\right)^{-1} = f.$$

Por consiguiente, $f \in [L^p, L^p(1+w^p)]_S$ y

$$\|f\|_{[L^p, L^p(1+w^p)]_S} \ll \|(A_m)_m\|_E = \|Pf(S(Pw^{-\xi+\xi_0}))^{-1}\|_\infty \leq \|P\|_\infty \|f\|_{L^p(|S(Pw^{-\xi})|^{-p})}.$$

Recíprocamente, sea $f \in R[\varphi_L^S]$ y sea $\varphi \in A(\Omega; L^p(w^{\xi_0 p}))$ tal que

$$f = \sum_{q=0}^{\infty} S\left(L^{-\xi+\xi_0}(\xi - \xi_0)^q\right) \frac{\varphi^{q)}(\xi_0)}{q!} = \sum_{q=0}^{\infty} S\left(w^{-\xi+\xi_0}(\xi - \xi_0)^q\right) \frac{\varphi^{q)}(\xi_0)}{q!}.$$

Se cumple que

$$\left(\int_{\mathbf{R}^n} |f(x)|^p \frac{1}{|S(Pw^{-\xi})|^p}\, dx\right)^{\frac{1}{p}} \leq$$

$$\leq \sum_{q=0}^{\infty} \left(\int_{\mathbf{R}^n} \frac{|S(w^{-\xi}(\xi - \xi_0)^q|^p}{|S(Pw^{-\xi})|^p} w^{p\xi_0} \left|\frac{\varphi^{q)}(\xi_0)}{q!}\right|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}$$

y, en virtud de la hipótesis dada, obtenemos que el último miembro está mayorado por

$$\sum_{q=0}^{\infty} a_q \left(\left|\frac{\varphi^{q)}(\xi_0)(x)}{q!}\right|^p w^{p\xi_0}(x)\, dx\right)^{\frac{1}{p}} = \sum_{q=0}^{\infty} a_q \left\|\frac{\varphi^{q)}(\xi_0)}{q!}\right\|_{L^p(w^{p\xi_0})}.$$

Si tomamos $\xi_0 = \frac{1}{2}$ obtenemos $\|f\|_{L^p(|S(Pw^{-\xi})|^{-p})} \ll \|\varphi\|_\infty$ y, por tanto,

$$\|f\|_{L^p(|S(Pw^{-\xi})|^{-p})} \ll \|f\|_{[L^p, L^p(1+w^p)]_S},$$

como queríamos demostrar. ∎

Apéndice II

Una aplicación al caso de familias de espacios de interpolación de dimensión finita.

En [RG] se estudia la familia de interpolación $\{B(\theta) = \mathbf{C}^n \ , \theta \in \Gamma\}$ donde $B(\theta)$ está dotado de la norma $|\cdot|_\theta$. Se impone, como es habitual, la condición de que existan dos funciones k_1, k_2 medibles sobre Γ cuyos logaritmos sean integrables y tales que

$$k_1(\theta)\|v\| \leq |v|_\theta \leq k_2(\theta)\|v\| \qquad \text{p.c.t. } \theta \in \Gamma,$$

donde $\|\cdot\|$ es la norma Euclidea.

Dada la función

$$W_1(z) = \exp\left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log\ k_1(\theta)\ dH_z(\theta)\right),$$

se define el espacio H_+^∞ de las funciones de $H_1^\infty = \{H \in H(D) \ ; \ W_1 F \in H^\infty(D)\}$ tales que $|||F|||_\infty = \sup\ \mathrm{es}_{\theta\in\Gamma}|F(\theta)|_\theta < +\infty$ y se introduce el espacio

$$(1) \qquad B_{z_0}^{(2)} = \{(u,v) \in \mathbf{C}^n \times \mathbf{C}^n \ ; \ \exists F \in H_+^\infty \ , \ F(z_0) = u \ , \ (1-|z_0|^2)F'(z_0) = v\},$$

dotado de la norma $|(u,v)|_{z_0}^{(2)} = \inf\{|||F|||_\infty \ ; \ F \text{ cumple } (1)\ \}$.

Si aplicamos las definiciones de las respectivas normas, obtenemos:

PROPOSICIÓN 1.1. *Para todo* $v \in \mathbf{C}^n$, $\|v\|_{B^{\delta'_{z_0}}} = \inf\{|(u,v)|_{z_0}^{(2)} \ , \ u \in \mathbf{C}^n\}(1-|z_0|^2)$.

En el citado artículo se prueba el siguiente resultado:

LEMA 1.2. *Si para todo* $\theta \in \Gamma$, $B(\theta) = \mathbf{C}$ *con la norma Euclidea, entonces* $|(u,v)|_{z_0}^{(2)} = \frac{1}{2}(|v| + \sqrt{|v|^2 + 4|u|^2})$.

COROLARIO 1.3. *Si* $(B(\theta), |\cdot|_\theta) = (\mathbf{C}^n, \|\cdot\|)$ *para todo* $\theta \in \Gamma$, $\|v\|_{B^{\delta'_{z_0}}} = \|v\|(1-|z_0|^2)$.

COROLARIO 1.4. *Se cumple que* $\inf\{\|f\|_\infty \ , \ f \in H^\infty(D) \ , \ f'(z_0) = 1\} = 1 - |z_0|^2$.

PROPOSICIÓN 1.5. *Sea* $B(\theta) = \mathbf{C}$ *dotado de la norma* $|1|_\theta = W(\theta)$, *siendo* W *una función medible sobre* Γ *cuyo logaritmo es integrable. Sea*

$$W(z) = \exp\left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log\ W(\theta)\ dH_z(\theta)\right).$$

Entonces,

$$|(u,v)|_{z_0}^{(2)} = \frac{|W(z_0)|}{2}\left(|\lambda u + v| + \sqrt{|\lambda u + v|^2 + 4|u|^2}\right),$$

donde $\lambda = (1-|z_0|^2)W'(z_0)/W(z_0)$.

COROLARIO 1.6. *En las condiciones de la proposición anterior se cumple*

$$\|v\|_{B^{\delta'_{z_0}}} = |v|\frac{|W(z_0)|}{2}(1-|z_0|^2)\begin{cases} \frac{2}{|\lambda|} & |\lambda| \geq 2 \\ \frac{8}{4+|\lambda|^2} & |\lambda| < 2. \end{cases} \tag{2}$$

DEMOSTRACIÓN:

En virtud de la homogeneidad de la norma, basta probar (2) para $v = (1,0)$. En virtud de la proposición anterior y 1.1, se ha de probar que

$$\inf_{u\in\mathbf{C}}\{|\lambda u + v| + \sqrt{|\lambda u + v|^2 + 4|u|^2}\} = \begin{cases} \frac{2}{|\lambda|} & |\lambda| \geq 2 \\ \frac{8}{4+|\lambda|^2} & |\lambda| < 2 \end{cases}$$

y, por tanto, la demostración queda reducida a un simple problema de extremos. ∎

COROLARIO 1.7. *Sea* $z_0 \in D$. *Se cumple que*

$$\inf_{f\in H^\infty(D)}\{\sup \mathrm{es}_{\theta\in\Gamma}|f(\theta)|W(\theta)\ ;\ f'(z_0)=1\} =$$

$$= \exp\left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log\ W(\theta)\ dP_{z_0}(\theta)\right)(1-|z_0|^2)\begin{cases} \frac{1}{|\lambda|} & |\lambda| \geq 2 \\ \frac{4}{4+|\lambda|^2} & |\lambda| < 2. \end{cases}$$

donde $\lambda = 2(1-|z_0|^2)\left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log\ W(\theta)\frac{e^{i\theta}}{(e^{i\theta}-z_0)^2}\ d\theta\right)$.

COROLARIO 1.8. *Para todo* $p \geq 1$, *se cumple que*

$$\inf\left\{\left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|f(\theta)|^p\ W^p(\theta)\ d\theta\right)^{\frac{1}{p}}\ :\ f'(z_0)=1\right\} \leq$$

$$\leq \exp\left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log\ W(\theta)\ dP_{z_0}(\theta)\right)(1-|z_0|^2)\begin{cases} \frac{1}{|\lambda|} & |\lambda| \geq 2 \\ \frac{4}{4+|\lambda|^2} & |\lambda| < 2 \end{cases}$$

Tratamos, ahora, de encontrar una acotación inferior al miembro de la izquierda de la desigualdad anterior. Si W es la función anteriormente definida, se cumple la siguiente cadena de igualdades:

$$\inf\{\|FW\|_p\ ;\ F'(0)=1\} = \inf_{u\in\mathbf{C}}\inf\{\|FW\|_p\ ;\ F'(0)=1\ ,\ F(0)=u\} =$$

$$= \inf_{u\in\mathbf{C}}\inf\{\|H\|_p\ ;\ H(0)=uW(0)\ ,\ H'(0)=W(0)+uW'(0)\} =$$

$$= |W(0)|\inf_{u\in\mathbf{C}}\inf\{\|K\|_p\ ;\ K(0)=u\ ,\ K'(0)=1+u\frac{W'(0)}{W(0)}\} =$$

$$= |W(0)|\inf_{u\in\mathbf{C}}\inf\{\|K\|_p\ ;\ K(0)=1+u\lambda\}.$$

Si $p = 1$, es sabido que $\|K\|_1 \geq |K(0)| = |u|$ y $\|K\|_1 \geq |K'(0)| = |1 + u\lambda|$. De esta forma,

$$\inf\{\|FW\|_1 \ ; \ F'(0) = 1\} \geq W(0) \inf_{u \in \mathbf{C}} \max\{|u| \ , \ |1 + u\lambda|\}.$$

Si resolvemos el problema de extremos obtenido, llegamos al siguiente resultado:

COROLARIO 1.9. *Para todo $p \geq 1$,*

$$|W(0)| \min\left(\frac{1}{2|\lambda|}, 1\right) \leq \inf\left\{ \left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(\theta)|^p \, W^p(\theta) \, d\theta\right)^{\frac{1}{p}} \ f'(0)\right\}.$$

NOTA 1.10: Finalmente, observemos que si $\lambda = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \log \, w(\theta) \, e^{-i\theta} \, d\theta = 0$, de la combinación de 1.8 y 1.9, obtenemos que

$$\inf\left\{ \left((\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(\theta)|^p \, W^p(\theta) \, d\theta\right)^{\frac{1}{p}} \ ; \ f'(0) = 1\right\} = |W(0)|.$$

Bibliografía

[B] Blasco, O., *Espacios de Hardy de funciones con valores vectoriales*, Tesis. Universidad de Zaragoza (1985).

[C] Calderón, A.P., *Intermediate spaces and interpolation, the complex method*, Studia Math. **24** (1964), 113-190.

[C-C-R-S-R-W I] Coifman, R., Cwikel, M., Rochberg, R., Sagher, S. and Weiss, G., *A theory of complex interpolation for families of Banach spaces*, Advances in Math. **43** (1982), 203-229.

[C-C-R-S-R-W II] Coifman, R., Cwikel, M., Rochberg, R., Sagher, S. and Weiss, G., *The complex method for interpolation of operator action on families of Banach spaces*, Lecture notes in Math. Springer, Berlin-Heidelberg- New York **779** (1980), 123-153.

[C-R] Coifman, R., Rochberg, R., *Another characterization of BMO*, Proc. Amer. Math. Soc. **79** (1980), 249-254.

[CW] Cwikel, M., *Complex interpolation spaces, a discrete definition and reiteration*, Indiana University Math. Journal **27** (1978), 1005-1009.

[DO] Douglas, R.G., "Banach Algebra Techniques in Operator Theory," Academic Press, New york-San Francisco-London, 1972.

[D-S] Dunford, N. and Schwartz, J., "Linear Operators II," Interscience Publishers, Inc., New-York, 1967.

[D-U] Diestel, J. and Uhl, J.J., "Vector Measures," Amer. Math. Soc. Providence, Rhode Island, 1977.

[DU] Duren, P.L., "Theory of H^p spaces," Academic Press, New York-London, 1970.

[G] Garnett, G.M., "Bounded Analytic Functions," Academic Press, New York-London-Toronto-Sydney-San Francisco, 1981.

[GO] Goluzin, G.M., "Geometry Theory of Functions of a Complex Variable," Amer. Math. Soc., Providence-Rhode Island, 1969.

[GR] Grothendieck, A., *Produits Tensoriels Topologiques et Espaces Nucléaires*, Memoirs of the Amer. Math. Soc. **16** (1966).

[**H**] Hernandez, E., *Topics in Complex Interpolation*, Tesis. Washington University. Sant Louis (1981).

[**KA**] Kato, T., *Fractional powers of dissipatives operators*, J. Math. Soc. **13, No. 3** (1961), 246-274, Japan.

[**K-J-F**] Kufner, A., Oldřich, J. and Fučik, S., "Function Spaces," Noordhoff International Publishing, Leyden, 1977.

[**KO I**] Köthe, G., "Topological Vector Spaces I," Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg New York, 1969.

[**KO II**] Köthe, G., "Topological Vector Spaces II," Springer-Verlag, New York-Heidelberg-Berlin, 1979.

[**KR**] Krasnosel′ skii, M.A. and Rutickii, Ya. B., "Convex functions and Orliz spaces," P.Noordhoff LTD., Groningen-The Netherlands, 1961.

[**L I**] Lions, J.L., *Une construction d'espaces d'interpolation*, C.R. Acad. Sci. Paris 250 (1960), 1853-1855.

[**L II**] Lions, J.L., *Quelques procédés d'interpolation d'operateurs linéaires et quelques applications*, Séminaire Schwartz **II** (1960/61), 2-3.

[**M-P**] Mikhlin, S. and Prössdorf, S., "Singular integral operators," Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York-Tokyo, 1986.

[**M-W**] Muckenhoupt, B. and Wheeden, R., *Weighted norm inequalities for fractional integrals*, Trans. Amer. Math. Soc. **192** (1972), 261-274.

[**RU**] Rudin, W., "Functional Analysis," McGraw-Hill, New-Delhi, 1977.

[**R-W-I**] Rochberg, R. and Weiss, G., *Analytic Families of Banach Spaces and Some of Their Uses*, Recent progress in Fourier Analysis. North-Holland, 174-201.

[**R-W-II**] Rochberg, R. and Weiss, G., *Derivatives of Analytic Families of Banach Spaces*, Annals of Math. **118** (1983), 315-347.

[**S**] Schechter, M., *Complex Interpolation*, Comp. Math. **18** (1967), 117-147.

[**ST**] Stafney, J., *The Spectrum of an Operator on an Interpolation Space*, Amer. Math. Soc. **144** (1969), 333-349.

[**T**] Treves, F., "Topological Vector Spaces, Distributions and Kernels," Academic Press, New York-London, 1967.

[**TRI**] Triebel, H., "Interpolation Theory, Function Spaces, Differential Operators," North-Holland, Amsterdam-New York-Oxford, 1978.

[**TU**] Turpin, P., *Convexités dans les espaces vectoriels topologiques généraux*, Dissertationes Mathematicae **131** (1976), 3-224.