

**LA INTERVENCIÓN DE
LA MEMORIA DE TRABAJO
EN EL APRENDIZAJE
DEL CÁLCULO ARITMÉTICO**

**Tesis Doctoral presentada por
Àngel Alsina i Pastells**

Dirigida por Dra. Dolores Sáiz Roca

**Universitat Autònoma de Barcelona
Bellaterra, Marzo 2001**

*A mi familia y al 12 de Julio de 1998,
por lo que han significado, por lo que
significan y por lo que significarán
siempre.*

**"La memoria se vuelve tanto más
fiel cuanto más en ella confías"**

Thomas de Quincey
(1785-1859)

AGRADECIMIENTOS

Mi pretensión en este apartado es huir de lo habitual. Por ello, voy a omitir la lista de todos los que habéis colaborado en la realización de esta tesis, aunque cada uno de vosotros tendrá siempre su nombre escrito en algún lugar de mi mente, a pesar de que no quede aquí materializado.

Los que me conocéis bien sabéis con certeza que quedarán vivas para siempre las huellas que habéis ido dejando en mi. Permitidme, en señal de agradecimiento y con la mayor humildad, que os abra la ventana de mi mente para que podáis conocer y compartir las motivaciones, los temores, ... que van surgiendo inevitablemente al afrontar e ir recorriendo el largo camino que supone la realización de una tesis doctoral:

Desde el principio partí del legado de algunos autores que a través de las ideas expresadas en sus libros han ejercido una notable influencia en mi pensamiento. Bach (1983), por ejemplo, me concedió la capacidad de esfuerzo y perseverancia en mis objetivos, al releer una y otra vez que:

“Nunca te conceden un deseo sin concederte también la facultad de convertirlo en realidad. Sin embargo, es posible que te cueste trabajo” (pp. 127)

Otros, como Alberoni (1988), me transmitieron la posibilidad de no alcanzar dichos propósitos:

“Cuanto más grande es la tarea y más largo el viaje, menos probable es la llegada. La historia, entonces, se reduce a la historia de ese viaje o de sus avatares, de las luchas sostenidas, sin que exista un muelle, un puerto feliz” (pp 99)

La lista hubiera podido ser mucho más larga, pero valgan de ejemplo los anteriores. De todas formas, aunque como indicó hace unos años Bettelheim (1991), el hallazgo de ciertos libros en determinados momentos de la vida toman la apariencia de una revelación y son capaces de influir poderosamente, estoy convencido de que sin vuestro apoyo y sin vuestro calor no hubiera sido posible llegar a este puerto.

Como es bastante habitual en mí, deseo expresar mi más sincero agradecimiento a todos los que me habéis ayudado de alguna forma, ya sea desde una dirección brillante hasta los que desde una situación más humilde pero no menos importante me habéis permitido obtener datos empíricos, con palabras mucho mejor expresadas que las que yo pudiera escribir. Alguna vez, Wilde (1888) en el relato “El amigo incondicional” de su libro “*El príncipe feliz y otros relatos*” dijo que:

“La generosidad es la esencia de la amistad” (pp. 43)

“En realidad, no conozco nada en la vida más noble o más raro que una amistad incondicional” (pp 35)

Pero puedo asegurar que existe. Gracias por ello.

ÍNDICE

Presentación	ix
APARTADO TEÓRICO	
1. El aprendizaje del cálculo desde una perspectiva psicológica	2
1.1. Aspectos preliminares.....	2
1.2. Principales teorías psicológicas del aprendizaje del cálculo	4
1.2.1. Aprendizaje por asociación	4
1.2.1.1. El enfoque de Edward L. Thorndike.....	6
1.2.1.2. El enfoque de William Brownell	8
1.2.1.3. El enfoque de Robert M. Gagné	12
1.2.2. Aprendizaje por reestructuración.....	15
1.2.2.1. El enfoque de la psicología de la Gestalt.....	16
1.2.2.2. El enfoque constructivista.....	17
1.2.2.2.1. El enfoque de la psicología genética.....	19
1.2.2.2.2. El enfoque neopiagetiano	24
1.2.2.3. El enfoque de la aritmética cognitiva y el procesamiento de la información.....	29
1.3. Síntesis del capítulo	47
2. Aproximación psicológica a las dificultades de aprendizaje del cálculo	52
2.1. Aspectos preliminares	52
2.2. Panorama de los estudios sobre dificultades de aprendizaje del cálculo	53
2.3. Los trastornos de cálculo: concepto y clasificación	63
2.4. Perspectivas de estudio de los trastornos de cálculo	69
2.4.1. La perspectiva psicológica.....	70
2.4.2. La perspectiva neurológica, neuropsicológica y/o neuropsicopedagógica	90
2.4.3. La perspectiva genética.....	94
2.5. Síntesis del capítulo.....	95
3. La intervención de la memoria de trabajo en el aprendizaje del cálculo.....	102
3.1. Aspectos preliminares	102

3.2. La memoria de trabajo.....	105
3.2.1. El modelo de memoria de trabajo de Baddeley y Hitch (1974).....	106
3.2.2. La medida de la memoria a corto plazo o memoria de trabajo	114
3.3. Análisis documental de los estudios sobre memoria de trabajo y cálculo	126
3.4. Panorama de los estudios sobre memoria a corto plazo o memoria de trabajo y cálculo	137
3.4.1. Estudios sobre la memoria de trabajo como sistema de procesamiento activo de la información y su implicación en tareas de cálculo.....	144
3.4.1.1. Estudios sobre la memoria de trabajo y los procesos implicados en el cálculo.....	146
3.4.1.2. Estudios sobre los diferentes subsistemas de la memoria de trabajo (bucle fonológico, agenda viso-espacial y ejecutivo central) y el cálculo.....	153
3.5. Síntesis del capítulo.....	169
 APARTADO EMPÍRICO	
4. Objetivos de la investigación empírica	180
 PRIMERA FASE DE LA INVESTIGACIÓN EMPÍRICA	
5. Método	184
5.1. Sujetos	184
5.2. Material.....	186
5.3. Diseño.....	198
5.3.1. Objetivos relativos a la incidencia de la memoria de trabajo en la habilidad numérica y el rendimiento en cálculo	199
5.3.2. Objetivos relativos a la incidencia de los distintos subsistemas de la memoria de trabajo (bucle fonológico, agenda viso-espacial y ejecutivo central) en la habilidad numérica y el rendimiento en cálculo.....	199
5.3.3. Control de variables.....	200
5.4. Procedimiento.....	203
5.4.1. Preselección de la muestra.....	205
5.4.2. Selección de la temporalización de la investigación	205

5.4.3. Selección de los ayudantes de la investigación	206
5.4.4. Sensibilización de la muestra.....	206
5.4.5. Distribución de los sujetos.....	207
5.4.6. Recogida de datos	208
5.4.7. Criterios de puntuación.....	210
5.4.8. Análisis estadístico	211
6. Resultados	212
6.1. Análisis de la validez	212
6.2. Resultados de la incidencia de la memoria de trabajo en la habilidad numérica y el rendimiento en cálculo	219
6.2.1. La incidencia de la memoria de trabajo en numeración más cálculo	219
6.2.2. La incidencia de la memoria de trabajo en numeración.....	222
6.2.3. La incidencia de la memoria de trabajo en cálculo.....	224
6.3. Resultados de la incidencia de los distintos subsistemas de la memoria de trabajo en la habilidad numérica y el rendimiento en cálculo.....	230
6.3.1. La incidencia de los distintos subsistemas de la memoria de trabajo en numeración más cálculo.....	231
6.3.2. La incidencia de los distintos subsistemas de la memoria de trabajo en numeración.....	242
6.3.3. La incidencia de los distintos componentes de la memoria de trabajo en cálculo.....	251

SEGUNDA FASE DE LA INVESTIGACIÓN EMPÍRICA

7. Método	262
7.1. Sujetos	262
7.2. Material	263
7.3. Diseño	270
7.3.1. Criterios de asignación de grupos	271
7.3.2. Control de variables	272
7.4. Procedimiento	274
7.4.1. Aplicación del programa de activación de la memoria de trabajo y recogida de datos	274
7.4.2. Selección de la temporalización de la investigación.....	276

7.4.3. Selección de las ayudantes de la investigación	277
7.4.4. Sensibilización de la muestra	278
7.4.5. Distribución de los sujetos	278
7.4.6. Situación experimental.....	279
7.4.7. Recogida de datos y criterios de puntuación.....	281
7.4.8. Análisis estadístico.....	282
8. Resultados	283
8.1. Análisis de la validez	284
8.2. Resultados de la incidencia del programa de activación de la memoria de trabajo en el rendimiento de la memoria de trabajo.....	288
8.2.1. Bucle fonológico	289
8.2.2. Agenda visoespacial.....	295
8.2.3. Ejecutivo central.....	301
8.3. Resultados de la incidencia del programa de activación de la memoria de trabajo en numeración más cálculo	306
8.4. Resultados de la incidencia del programa de activación de la memoria de trabajo en la habilidad numérica	309
8.5. Resultados de la incidencia del programa de activación de la memoria de trabajo en el rendimiento en cálculo	311
9. Discusión.....	316
9.1. La incidencia de la memoria de trabajo en la habilidad numérica y el rendimiento en cálculo.....	317
9.2. La incidencia de los distintos subsistemas de la memoria de trabajo en la habilidad numérica y el rendimiento en cálculo	323
9.3. La incidencia de un programa de activación de la memoria de trabajo.....	337
10. Conclusiones generales y propuestas didácticas en el marco escolar	347
REFERENCIAS	360
ANEXOS	
Anexo 1: “Bateria de Tests de Memòria de Treball”, de Pickering, Baqués y Gathercole (1999)	394
Anexo 2: Bateria de Tests de Memoria de Trabajo, de Swanson (1992, 1993, 1995, 1996)	396
Anexo 3: Prueba de numeración	398

Anexo 4: Prueba de cálculo 1.....	402
Anexo 5: Prueba de cálculo 2.....	405
Anexo 6: Recuerdo Serial de Dígitos directo.....	408
Anexo 7: Recuerdo Serial de Palabras	411
Anexo 8: Test de Repetición de Pseudopalabras	414
Anexo 9: Test de Matrices	417
Anexo 10: Test de Memoria Visual Figurativa.....	420
Anexo 11: Test Katakana de Búsqueda Visual.....	423
Anexo 12: Recuerdo Serial de Dígitos inverso	426
Anexo 13: Amplitud de Escuchar	429
Anexo 14: Amplitud de Contar	434
Anexo 15: Test de Copia y Reproducción de una Figura Compleja.....	438
Anexo 16: Test de Memoria MY	441
Anexo 17: Test de Matrices Progresivas de Raven: Escala Especial.....	449
Anexo 18: P.P.A.I. Rapidesa de Càlcul. Sumes.....	452
Anexo 19: P.P.A.I. Rapidesa de Càlcul. Restes	455
Anexo 20: Test de Normalidad de Kolmogorov-Smirkov	458
Anexo 21: P.A.M.T. Recuerdo Serial de Palabras directo.....	460
Anexo 22: P.A.M.T. Recuerdo Serial de Dígitos directo.....	464
Anexo 23: P.A.M.T. Recuerdo Serial de Dígitos. Números grandes de colores	468
Anexo 24: P.A.M.T. Regletas “Cabirol”	471
Anexo 25: P.A.M.T. Recuerdo Serial de Dígitos. Regletas “Cabirol”	474
Anexo 26: P.A.M.T. Recuerdo Serial de Dígitos. Máquina de Añadir y Quitar	477
Anexo 27: P.A.M.T. Asociación Numérica	480
Anexo 28: P.A.M.T. Recuerdo Serial de Palabras inverso	483
Anexo 29: P.A.M.T. Recuerdo Serial de Dígitos inverso.....	487
Anexo 30: P.A.M.T. Amplitud de Contar Dibujos	491
Anexo 31: P.A.M.T. Recuerdo de Cantidades	495
Anexo 32: P.A.M.T. Amplitud de Lectura de Palabras	499
Anexo 33: P.A.M.T. Memory “frutas”	503
Anexo 34: P.A.M.T. Memory “lápices y tijeras”.....	506

Anexo 35: P.A.M.T. Memory “la granja”	509
Anexo 36: P.A.M.T. Lectura y Comprensión Lectora.....	512
Anexo 37: Exclusión sujetos grupo experimental-grupo control según C.I.	516

PRESENTACIÓN

"Recuerdo que durante mi escolarización obligatoria en una escuela nacional, allá por los años setenta, deberíamos asistir unos cuarenta alumnos a la misma clase. También recuerdo con especial lucidez como había algunos alumnos que, por distintas razones, tenían importantes dificultades para comprender los contenidos que impartía la maestra y casi nunca alcanzaban el aprobado en matemáticas y en lengua, sobretodo. Algunos se quedaban en el camino y otros, curso a curso, tropezaban con los mismos problemas. Algunas veces la maestra pedía a algunos niños con mayores habilidades que ayudásemos a nuestros compañeros. Aquello despertó en mi una enorme curiosidad y siempre que tenía el permiso de la maestra, explicaba los algoritmos de las operaciones básicas - que es a lo que se daba mayor importancia en aquel momento- a mi manera, tal como los había comprendido e interiorizado. En el transcurso de los años, esta labor se transformó en mi mayor vocación".

Al acceder a la universidad a finales de la década de los ochenta cursé estudios de Magisterio, en la ya desaparecida rama de ciencias y matemáticas. Mis primeros estudios universitarios, fruto de las motivaciones mencionadas, permitieron una primera aproximación al significado de las matemáticas, su estructura, sus contenidos, sus dificultades de aprendizaje; etc. Posteriormente, los estudios de Psicología me permitieron desvelar y comprender con mayor detalle algunas de estas dificultades.

Ya en los inicios de los noventa tuve la oportunidad de dedicarme profesionalmente a aquello que siempre me había apasionado: enseñar matemáticas a niños con dificultades de aprendizaje. En esta experiencia docente, pude corroborar profesionalmente la poca habilidad de algunos niños para procesar contenidos aritméticos elementales. Por aquel entonces, las estrategias metodológicas más ampliamente utilizadas para solucionar estas dificultades consistían básicamente en explicar más lentamente los pasos para efectuar una operación; memorizar los algoritmos; o bien hacer mucha práctica de cálculos numéricos. Sin embargo, en pocos casos se producía una mejora notable.

La preocupación por mejorar el estado de estos niños me llevó a realizar exhaustivas revisiones bibliográficas con la ingenua pretensión de obtener soluciones rápidas. Sin embargo, fui constatando que una parte considerable de la bibliografía científica de las últimas décadas sobre investigación matemática realizada desde distintos cuerpos de conocimiento, especialmente el matemático, el psicológico y el pedagógico, se ha dedicado a diagnosticar los altos índices de fracaso escolar (para una revisión, consultar Arnal, 1990; Gairín, 1987; Hidalgo et al., 1.999; López Puig, 1996; entre otros), pero en pocas ocasiones estos estudios incidían en los procesos mentales que conllevan una ejecución aritmética, en lo que ocurre en realidad dentro de las mentes de los niños. A través de las distintas revisiones puse de manifiesto también la importancia que tiene la adquisición de una buena habilidad numérica en las primeras edades de escolarización, como indica Jordan (1995):

“Las habilidades numéricas básicas que se adquieren durante la primera infancia actúan como base para el aprendizaje de las matemáticas de orden superior. Las dificultades en la comprensión de los conceptos numéricos y los problemas en el cálculo en los primeros años pueden interferir en la adquisición de las habilidades matemáticas posteriores. También pueden afectar negativamente la confianza del niño y su interés por aprender matemáticas durante los años escolares. Sin la intervención adecuada, las dificultades en los primeros estadios de aprendizaje de la materia pueden alterar toda la trayectoria educativa del niño en el campo de las matemáticas” (pp. 59).

El bagaje anterior generó en mí una serie de interrogantes relativos al aprendizaje del cálculo, no necesariamente interrelacionados entre sí: ¿cómo se aprende el cálculo?; ¿cuáles son las posibles causas que generan dificultades en el aprendizaje del cálculo?; ¿qué factores deben considerarse?; ¿se conoce suficientemente la perspectiva y/o la evolución histórica de las investigaciones realizadas, o bien se pierde tiempo y esfuerzo en estudiar aspectos que ya han sido analizados en el pasado?; ¿cuál es la trayectoria de los investigadores que realizan tales estudios: su labor científica consiste únicamente en diagnosticar o bien realizan programas de intervención destinados a corregir la situación?; ¿existe una disciplina teórica específica que aglutine de forma estructurada y sistemática todos los resultados obtenidos?; ¿los resultados de las investigaciones llegan a sus destinatarios?, es decir, ¿reciben actualmente los maestros y profesores suficientes

conocimientos que les permitan subsanar, al menos en parte, los índices de fracaso escolar?; ¿consiguen los niños con poca habilidad aritmética mejorar su rendimiento en tareas de cálculo?.

Con el objeto de encontrar respuestas a estos planteamientos, en 1992 inicié la realización del Programa de Doctorado sobre “Psicología del Aprendizaje Humano” organizado por el Departamento de Psicología de la Educación de la Universidad Autónoma de Barcelona, anticipándome como otros a las consideraciones que posteriormente manifestó el profesor Santaló (1997):

“La misión de los profesores de matemática es enseñar Matemática, o mejor impartir una cultura matemática que esté al día de los avances de esta ciencia. Para ello la mejor manera es realizar una tesis como final de carrera ... Los temas de la tesis pueden ser a gusto del alumno, desde algún tema de matemática pura, hasta un tema de metodología o de psicología del aprendizaje” (pp. 199).

El paso del tiempo ha dado absolutamente la razón a Santaló, puesto que los conocimientos adquiridos en el transcurso del Programa de Doctorado han revolucionado mi concepción preliminar relativa al aprendizaje de los contenidos aritméticos elementales.

Los contactos que establecí desde el principio con el Laboratorio de Memoria del Departamento de Psicología de la Educación, dirigido por la Dra. Dolores Sáiz, me han proporcionado un modelo teórico explicativo desde el campo de la psicología de la memoria, el modelo de memoria de trabajo de Baddeley y Hitch (1974), que me ha permitido avanzar en el conocimiento y profundización de algunos de los interrogantes planteados.

Tomando como punto de arranque este modelo explicativo, pues, la investigación que presentamos en esta tesis doctoral trata de analizar la intervención de la memoria de trabajo en el rendimiento en tareas de cálculo en los primeros años de escolarización. Con ello, pretendemos ofrecer respuestas a algunas cuestiones básicas relativas a los procesos de aprendizaje del cálculo y las posibles causas o factores que inciden en la aparición de dificultades. Para responder a este objetivo genérico, la tesis consta de un apartado teórico donde hemos creído oportuno

plantear, en primer lugar, una breve revisión de las aportaciones de las principales teorías psicológicas del aprendizaje del cálculo hasta llegar a las tendencias actuales, puesto que ello va a permitirnos comprender con mayor detalle el conjunto de procesos mentales y, en general, el funcionamiento cognitivo que involucra el cálculo; en segundo lugar, se procede a una revisión general de los trabajos sobre las dificultades de aprendizaje del cálculo puesto que pueden proporcionarnos información relativa a los factores de tipo cognitivo que intervienen de una forma más o menos decisiva en la aparición de los trastornos de aprendizaje del cálculo; y, por último, un tercer capítulo aborda la problemática concreta de los estudios sobre memoria de trabajo y cálculo con el objeto de conocer investigaciones empíricas preliminares a la nuestra que han intentado determinar algunos vínculos entre ambas tareas cognitivas. Cada capítulo incluye un primer apartado de aspectos preliminares así como un último apartado con una síntesis de los contenidos más destacables desarrollados en él.

El apartado empírico presenta la investigación que hemos llevado a cabo en dos fases con el objeto de verificar los siguientes objetivos:

1. La incidencia de la memoria de trabajo en la habilidad numérica y el rendimiento en cálculo aritmético.
2. La incidencia de los distintos subsistemas de la memoria de trabajo (bucle fonológico, agenda visoespacial y ejecutivo central) en la habilidad numérica y el rendimiento en cálculo aritmético.
3. La incidencia de un programa de activación de la memoria de trabajo en la capacidad de memoria de trabajo, la habilidad numérica y el rendimiento en cálculo aritmético.

El estudio se ha realizado a partir de una muestra de niños de 7-8 años, puesto que se trata de una edad en la que todavía están aprendiendo diferentes habilidades aritméticas, pero tienen ya adquiridos el concepto de número y la

capacidad mental de operar, aspectos que se adquieren aproximadamente a los 6-7 años de edad (Bermejo, 1990; Canals, M^a.A., 1979; Piaget y Szeminska, 1941; entre otros), y además también nos ha interesado esta edad ya que se encuentran en el último nivel de un ciclo educativo (ciclo inicial de Primaria). Los niños de la muestra están escolarizados en distintos centros ubicados en la comarca de Osona (Barcelona), y se les han administrado diferentes pruebas de medida del rendimiento académico en numeración y cálculo, así como distintas pruebas de la "Bateria de Tests de Memòria de Treball" de Pickering, Baqués y Gathercole (1999). La primera fase de nuestro empírico ha consistido en administrar estas pruebas y recoger los niveles de rendimiento de los alumnos. Posteriormente, en la segunda fase hemos partido de un diseño de bloques aleatorizado a partir del cual el grupo experimental, durante 40 sesiones en el segundo y tercer trimestre del curso 1999-2000 (Febrero 2000-Junio 2000), ha recibido la aplicación de un programa de activación de la memoria de trabajo diseñado para esta tesis. Al final de esta aplicación, se han recogido nuevos datos empíricos con el objeto de contrastar los resultados respecto al grupo control, y de esta forma determinar la posible incidencia del programa.

En síntesis, con este planteamiento pretendemos ofrecer algo más que un corte transversal de la realidad del fracaso escolar en el aprendizaje del cálculo, por lo que subrayamos que esta tesis doctoral tiene sobretodo una finalidad aplicada, en la línea indicada por González y Latorre (1987):

“Una investigación educativa es una actividad sistemática y planificada que tiene por objeto proporcionar información para la toma de decisiones con vistas a mejorar o innovar aquello que denominamos educación” (pp. 9).

APARTADO TEÓRICO

1. EL APRENDIZAJE DEL CÁLCULO ARITMÉTICO DESDE UNA PERSPECTIVA PSICOLÓGICA

“El estudio de las habilidades aritméticas elementales constituye actualmente una de las áreas de investigación más atrayentes tanto para el psicólogo cognitivo, como para el psicólogo de la instrucción. Por un lado, porque constituye un ámbito bien definido y estructurado que facilita el estudio de los procesos psicológicos, y por otro, porque representa una vertiente práctica obvia de gran importancia para el diseño curricular” (pp. 105).

Bermejo y Rodríguez (1990)

1.1. ASPECTOS PRELIMINARES

Como hemos indicado en la presentación, en este primer capítulo vamos a realizar una aproximación psicológica al aprendizaje del cálculo, aunque no pretendemos efectuar un análisis en profundidad dado que nuestro objeto de interés fundamental consiste en determinar si existe alguna relación entre memoria de trabajo y cálculo. Sin embargo, hemos considerado oportuno revisar previamente las aportaciones de las principales teorías psicológicas del aprendizaje del cálculo hasta llegar a las tendencias actuales, puesto que ello va a permitirnos comprender con mayor detalle el conjunto de procesos mentales y, en general, el funcionamiento cognitivo que involucra.

Para responder a estas consideraciones, nos planteamos las mismas preguntas que se proponen los psicólogos experimentales y del desarrollo sobre el aprendizaje, el pensamiento, y la inteligencia, pero concretamos estas cuestiones generales hacia el aprendizaje específico del cálculo. Así, en lugar de plantearnos cómo aprenden los niños, pretendemos dar respuesta a cómo aprenden los niños en relación al cálculo. O bien, en lugar de plantearnos cómo se desarrollan los procesos de pensamiento de los niños, nos cuestionamos más específicamente de qué modo se desarrolla la comprensión de los contenidos aritméticos. Puesto que el cálculo es una actividad más cognitiva que física, al responder cuestiones de este matiz procuramos, tal como indican Hidalgo et al. (1999), descifrar qué es lo que hacen realmente los niños cuando desempeñan tareas de cálculo, qué procesos mentales conllevan una ejecución aritmética, qué sucede dentro de sus mentes.

Afortunadamente para los psicólogos interesados en este tipo de aprendizajes, los interrogantes anteriores se han estudiado desde hace muchos años. Kilpatrick (1992), por ejemplo, indica que desde los inicios de la psicología educativa, esta materia ha sido el vehículo popular que se ha utilizado en bastantes investigaciones sobre aprendizaje, probablemente a causa de los cinco factores siguientes: a) las consideraciones que contemplan su importante papel en el currículum escolar; b) su relativa independencia de las influencias no escolares; c) su estructura jerárquica y acumulativa como materia escolar; d) su abstracción y arbitrariedad; y e) el rango de complejidad y dificultad que pueden proporcionar en el aprendizaje de tareas. Dos años antes también Rivière (1990) defendía el uso de material matemático para realizar un análisis minucioso de los mecanismos mentales, debido a los seis factores siguientes: a) tratan con materiales formales que se prestan más que otros a poner de relieve la forma y organización de los procesos mentales; b) facilitan la prestación de problemas con soluciones definidas y generalmente exactas; c) tienen una estructura jerárquica más clara que la de otros campos de conocimiento; d) se organizan en algoritmos que acentúan la visibilidad de los “algoritmos de la mente”; e) los errores son más netos y fáciles de detectar; y f) definen una especie de “axiomática del pensamiento”, y son producto de una abstracción reflexiva realizada a partir de las propias operaciones mentales (y no de los hechos), por lo que las actividades matemáticas serían especialmente adecuadas para estudiar las estructuras de operaciones que definen la inteligencia.

En esta misma línea, Bermejo y Rodríguez (1990), como hemos destacado en la cita que encabeza este capítulo, exponen que la investigación psicológica que ha generado el cálculo constituye actualmente una de las áreas de investigación más interesantes para el psicólogo cognitivo, dado que facilita el estudio de los procesos psicológicos como por ejemplo: a) el estudio de las relaciones entre las habilidades de cálculo (conocimiento procedimental) y su comprensión (conocimiento conceptual); b) el papel de las representaciones mentales en el aprendizaje de las nociones aritméticas elementales; y c) el proceso o los procesos de construcción que siguen los niños para adquirir nuevos conocimientos.

No debe olvidarse, sin embargo, que existen distintas perspectivas en psicología, y las aproximaciones psicológicas al aprendizaje del cálculo se han realizado obviamente desde la corriente psicológica propia de cada investigador. Así, pues, al revisar las principales teorías psicológicas que inciden en el aprendizaje del cálculo hemos adoptado un criterio globalizador, puesto que los límites entre los distintos enfoques son poco fluidos y la cronología no puede ser precisa. Según Pozo (1993) la dicotomía más frecuentemente utilizada (conductual versus cognitiva) no resulta muy adecuada ya que, por un lado, el conductismo se resiste a ser definido y se mantiene tercamente en la ambigüedad y diversidad de significados. Este factor le lleva a dividirse en escuelas y facciones irreconciliables y a un importante desorden interno que comporta que los días de vida del conductismo dependan de la capacidad de la psicología cognitiva, y más específicamente del procesamiento de la información, para proponer una teoría del aprendizaje teórica y prácticamente más progresiva que el conductismo y sus continuaciones actuales. Por otro lado, y respecto a la psicología cognitiva, Pozo (1993) manifiesta también la imposibilidad de este enfoque psicológico para ofrecer una verdadera teoría del aprendizaje debido al propio núcleo conceptual del programa que, a pesar de su apariencia revolucionaria, es continuista con la tradición conductista. Como clasificación alternativa este autor, al igual que Baroody (1988), propone partir de dos enfoques o formas básicas de concebir el aprendizaje: **como un proceso de asociación o como un proceso de reestructuración**. Al ofrecer una visión amplia y globalizadora de las diferentes teorías conductistas y cognitivas, es el criterio que hemos adoptado en nuestra exposición.

1.2. PRINCIPALES TEORÍAS PSICOLÓGICAS DEL APRENDIZAJE DEL CÁLCULO

1.2.1. APRENDIZAJE POR ASOCIACIÓN

Existe un conjunto importante de teorías que comparten una misma fundamentación asociacionista del proceso de aprendizaje: desde las teorías conductuales hasta los distintos modelos computacionales, pasando por las teorías probabilísticas de la adquisición de conceptos naturales (Leahey y Harris, 1998).

No vamos a analizar en profundidad los postulados configurativos de cada teoría ya que escapa de los objetivos de este marco teórico. De modo general, los rasgos más representativos que comparten son el elementalismo, el reduccionismo, el empirismo y el realismo o correspondencia entre realidad y conocimiento. Parten de la adquisición de conceptos, entendidos como entidades reales, por abstracción o inducción; y sólo se necesitan mecanismos, consistentes básicamente en un funcionamiento que supone conexiones estímulo-respuesta, para detectar las covariaciones existentes en el medio. Todas estas teorías, según Pozo (1993), comparten también tres principios básicos en relación a la inducción y a la abstracción: a) los conceptos se forman mediante el reconocimiento de similitud entre los objetos; b) el progreso en la formación de conceptos va de la particular a lo general; y c) los conceptos concretos son primarios, ya que constituyen la base para la adquisición de conceptos más abstractos.

Resnick y Ford (1981), entre otros, se encargan de relacionar los postulados asociacionistas anteriores con el aprendizaje de contenidos aritméticos elementales. Parten de tres paradigmas:

- a. El aprendizaje se realiza racionalmente sobre la base de estímulos-respuesta sucesivos que se asocian: toda respuesta satisfactoria crea unos vínculos, unas asociaciones y unas persistencias en la memoria.
- b. Mediante la secuenciación y la fragmentación de los contenidos es posible planificar las respuestas y el aprendizaje a través de la repetición y el ejercicio, y los resultados de este proceso pueden objetivarse en cambios observables en la conducta del alumno.
- c. El uso de ejercicios y la práctica sirven sobretodo para mejorar la velocidad y la precisión, que son dos criterios ampliamente aceptados para medir la destreza de cálculo, según las autoras.

Posteriormente también Baroody (1988) realiza una aproximación en este

sentido e indica que desde la óptica asociacionista el conocimiento matemático se considera, esencialmente, un conjunto de datos y técnicas que parte de los supuestos siguientes:

- a. Aprendizaje por asociación, según el cual aprender datos y técnicas implica establecer relaciones.
- b. El aprendizaje es pasivo y receptivo, por lo que aprender comporta copiar datos y técnicas.
- c. El aprendizaje es acumulativo, puesto que el crecimiento del conocimiento consiste en edificar un almacén de datos y técnicas.
- d. El aprendizaje es eficaz y uniforme, partiendo del principio que los niños están desinformados y se les puede dar información con facilidad.
- e. Se aprende por control externo, es decir, para producir una asociación correcta o una copia verdadera el maestro debe moldear la respuesta del alumno mediante el empleo de premios y castigos.

Una vez establecido el marco general de la teoría asociacionista y sus principales aplicaciones al aprendizaje de las matemáticas, en los siguientes subapartados revisamos brevemente como se han desarrollado algunas de las aportaciones psicológicas más representativas en este campo desde su origen hasta nuestros días.

1.2.1.1. El enfoque de Edward L. Thorndike

Algunos de los primeros estudios psicológicos centrados en el cálculo aritmético se sitúan en el primer cuarto del siglo XX, y una de las primeras referencias explícitas, tal como indican Bergenson y Herscovics (1990), corresponde al libro titulado *The Psychology of Arithmetic*, de Edward L. Thorndike, psicólogo

del Teachers College de la Universidad de Columbia que colaboró al desarrollo de algunos de los principios básicos de la psicología del aprendizaje por estímulo-respuesta.

En *The Psychology of Arithmetic*, Thorndike (1922) se pregunta cómo aplicar sus experimentos con animales al aprendizaje humano y, más concretamente, intenta explicar el aprendizaje del cálculo a partir de vínculos estímulo-respuesta formulados psicológicamente. Según Skemp (1980), la solución a este planteamiento parece sencilla desde la óptica asociacionista, puesto que considera que cualquier conocimiento está formado por relaciones sencillas estímulo-respuesta. Por lo tanto, desde esta perspectiva el aprendizaje consiste en establecer y reforzar las asociaciones necesarias. Como ejemplo, en las próximas líneas se reproduce un análisis de la suma simple por columnas en términos de vínculos, extraído de *The Psychology of Arithmetic* (1922):

*“Aprender a no salirse de la columna al ir sumando.
Aprender a recordar el resultado de cada suma hasta pasar a la siguiente.
Aprender a sumar un número que se ve a otro que se recuerda.
Aprender a saltarse los espacios vacíos de la columna.
Aprender a saltarse los ceros de la columna.
Aprender a aplicar las combinaciones a las decenas superiores.
Aprender a escribir la cifra de las unidades, en lugar de toda la suma total de la columna.
Aprender a llevarse, que supone por lo menos dos procesos diferentes, se enseñe como se enseñe” (pp. 52).*

Una vez determinados los vínculos adecuados, a Thorndike se le plantea un nuevo problema: ¿cómo se pueden formar y reforzar dichos vínculos?, cuya respuesta se encuentra en la práctica, estableciendo un buen sistema de ejercicios. Desde este plano, los ejercicios deben estar meticulosamente planificados, con el objeto de que los vínculos más importantes sean los que más se practiquen. Desde esta óptica, la tarea del profesor se reduce a ofrecer cantidades adecuadas de ejercicios en un orden apropiado, empezando por los más sencillos y disponiéndolos de tal forma que el aprendizaje de los sencillos facilite el aprendizaje de los más difíciles que aparecen posteriormente. Además, insiste en que dichas tareas se deben preparar de forma que resulten interesantes y que deben asociarse a objetos concretos (Thorndike, 1922).

Como síntesis de las aportaciones realizadas por Thorndike en el campo del cálculo aritmético podemos destacar los siguientes aspectos:

- Centra la atención en el contenido del aprendizaje, y más específicamente, en el aprendizaje del cálculo aritmético.
- Reduce el aprendizaje humano al par asociado estímulo-respuesta.
- No responde a cuestiones objetivas como cuales son los vínculos más fáciles, cual es el nivel óptimo de práctica o bien de qué forma debe organizarse dicha práctica, sino que se basa en intuiciones.

A pesar del conjunto de limitaciones expuestas, de acuerdo con Kilpatrick (1990), Ruiz et al. (2000) o Skemp (1980), entre otros, no deben menospreciarse las aportaciones realizadas por Thorndike, puesto que aunque no responde a algunos interrogantes que deja en el aire, no limita sus aportaciones al diagnóstico del proceso instructivo de la aritmética, sino que elabora todo un programa de intervención que contribuye a definir una línea de investigación en psicología de la aritmética y, más genéricamente, establece las reglas del juego de la investigación psicológica hasta bien entrados los años cincuenta del siglo XX. De todas formas, como veremos más adelante, actualmente este modelo está totalmente superado.

1.2.1.2. El enfoque de William Brownell

La teoría del aprendizaje propuesta por Thorndike en los años veinte del siglo XX, y su propuesta metodológica sobre el proceso de enseñanza-aprendizaje basada en los ejercicios y la práctica son rápidamente cuestionados, incluso por otros psicólogos de su misma escuela. A pesar de que desde la posición asociacionista de Thorndike se apoya una enseñanza de la aritmética simple que debe considerar los aspectos motivacionales de los alumnos (actividades interesantes y concretas), el argumento más criticado de sus postulados es, sin duda, la reducción del aprendizaje del cálculo a la realización de ejercicios y la práctica, olvidando la enseñanza con

significado (Boyer, 1968, entre otros).

Una de las corrientes que con más fuerza se opone a la teoría fundamentada exclusivamente en los vínculos a finales de la década de los veinte es la que incluye entre otros a William Brownell. Los motivos de la oposición de Brownell (1928) son básicamente dos:

- a. La teoría de los vínculos no considera las diferencias cualitativas entre los cálculos de los niños y los de los adultos, llegando a la conclusión de que los ejercicios sirven simplemente para adquirir velocidad en los cálculos y práctica en la aplicación de estrategias descubiertas por los niños (cuestionables en ocasiones), en lugar de fomentar el recuerdo libre que utilizan los adultos.
- b. El método basado en ejercicios supone una comprensión distorsionada de los objetivos de la enseñanza, puesto que parte de la repetición mecánica y no de la comprensión.

Para Brownell, repetición no es sinónimo de comprensión, por lo que propone un aprendizaje basado en un método de significado práctico que incida en los conceptos y en las relaciones que se establecen entre estos conceptos (descomposición numérica), para conseguir tres objetivos básicos:

- a. Asegurar un pensamiento cuantitativo hábil.
- b. Facilitar el suficiente grado de abstracción y generalización a nuevas situaciones de aprendizaje.
- c. Evitar el riesgo de que los estudiantes interpreten el cálculo como un conjunto de contenidos no estructurado ni interrelacionado.

Según este autor, pues, la capacidad para pensar de forma cuantitativa es el criterio que se debe aplicar para medir la habilidad aritmética, más que ser capaz de

resolver con la máxima precisión un listado de cálculos.

A pesar de su concepción basada en el significado, el programa instruccional de Brownell contempla también el uso de la repetición y de la práctica para fomentar el automatismo y mecanización de cálculos a través de su memorización, con el objeto de aumentar la velocidad de ejecución (Kilpatrick, 1990). Sin embargo, no concreta en su programa la forma ni el contenido de dicha práctica, y sus esfuerzos se sitúan, básicamente, en poner de manifiesto la necesidad de reformar la enseñanza de la aritmética. Así, en su batalla particular, lanza la hipótesis que la habilidad de cálculo se desarrolla en tres fases relacionadas entre sí:

- a. En primer lugar, el niño aprende un procedimiento o estrategia para realizar un cálculo (contar con los dedos, resolver el problema a partir de los valores conocidos o por recuerdo directo).
- b. En segundo lugar, llega un período en el que la estrategia se aplica cada vez con mayor exactitud.
- c. En tercer lugar, aparece una época de rápido incremento de la rapidez del cálculo. Todo cambio a un nuevo procedimiento viene acompañado, según dicha concepción, de un descenso inicial de la precisión y la velocidad de ejecución, hasta que la nueva estrategia, superadas las tres fases, es integrada.

A raíz de los aspectos anteriores podemos observar, de acuerdo con Skemp (1980), que Brownell (1928) acepta el uso de la práctica para aumentar la velocidad de ejecución, pero sólo después de que haya integrado el cálculo o, dicho de otra forma, la práctica y la repetición son válidas siempre que ayuden a mejorar la comprensión.

Las aportaciones efectuadas por Brownell (1928) en el campo del aprendizaje del cálculo son corroboradas por diversas investigaciones de la época, como las realizadas por McConnell en 1934 o Swenson en 1948 (citados por Resnick y Ford,

1981). Concretamente, McConnell compara un método riguroso de ejercicios de práctica basado en la repetición pura de símbolos abstractos, con un método de enseñanza con significado práctico donde los datos numéricos se presentan asociados a dibujos o a objetos que se permiten manipular para que el alumno pueda comprobar sus respuestas. Sus resultados indican que el método de práctica de ejercicios es el más directo para conseguir respuestas automáticas e inmediatas a las preguntas de tipo numérico, confirmando la efectividad del método de Thorndike para potenciar la velocidad de cálculo; sin embargo, al medir la transferencia de los alumnos a las combinaciones numéricas no aprendidas, con el método del significado práctico se obtienen resultados significativamente mejores. Posteriormente, en 1948, Swenson compara tres métodos de aprendizaje del cálculo que concreta en la suma en niños de segundo curso: a) el método de los ejercicios de práctica basado en la teoría de los vínculos; b) el método de la generalización, que se basa en aplicar los conocimientos previos a nuevas situaciones de aprendizaje y c) el método de los ejercicios de práctica ampliados, que combina el método tradicional de Thorndike (1922) con el método de significado práctico de Brownell (1928). Las conclusiones del estudio de Swenson indican que el método de la generalización resulta ser el más efectivo tanto para potenciar el aprendizaje del material como la transmisión a material nuevo; los ejercicios de práctica ampliados resultan menos eficientes y la práctica pura basada en la repetición es el menos eficaz.

Para concluir, observamos que existen algunas diferencias esenciales entre el posicionamiento de Thorndike (1922) y el de Brownell (1928): quizá una de las más significativas estriba en su concepción sobre el aprendizaje, que basan en la práctica de ejercicios y el significado respectivamente. Además, destacan otras diferencias como el uso de material empleado: series programadas de ejercicios de cálculo aritmético frente a actividades mediante dibujos u objetos que permiten al niño la manipulación del material y su posterior verificación. Sin embargo, y a pesar de dichas disparidades, debe reconocerse que ambos autores establecen los fundamentos sobre el aprendizaje del cálculo desde una óptica psicológica.

Superado el primer cuarto del siglo XX se produce un cambio en los

planteamientos sobre el aprendizaje del cálculo aritmético, por lo que más que determinar cómo aprenden los niños o bien qué factores intervienen, los estudios de la época se centran básicamente en criterios de complejidad de los cálculos, para poder determinar así las cantidades adecuadas de práctica y su orden. Dicho de otra forma, el objetivo de dichos trabajos, realizados entre otros por Clapp en 1924; Knight-Behrens en 1928 o Wheeler en 1939 (citados por Resnick y Ford, 1981) consiste en analizar la dificultad relativa de las tareas de cálculo con la pretensión de poder dedicar a cada contenido el grado adecuado de práctica: menos práctica para los ejercicios más fáciles, más práctica para los más difíciles. A pesar de que los autores de la época no se lo cuestionan, rápidamente surgen interrogantes a tales planteamientos: ¿por qué hay cálculos que se aprenden con más facilidad que otros?; ¿son las actividades de cálculo más simples las que se asocian a procesos cognitivos más elementales?; ¿cómo el aprendizaje de las tareas más sencillas facilita el de las tareas más complejas?. A algunos de estos planteamientos se les intenta dar respuesta desde el enfoque de las Jerarquías de Aprendizaje de Gagné (1970).

1.2.1.3. El enfoque de Robert M. Gagné

La teoría asociacionista y, en realidad, todas las teorías psicológicas sobre el aprendizaje humano necesitan explicar distintos aspectos que plantean, pero no resuelven, los enfoques iniciales tanto de Thorndike (1922) como de Brownell (1928). Uno de estos interrogantes no resueltos es la transferencia del aprendizaje, es decir, porqué el aprendizaje más sencillo facilita el más complejo. Leahey y Harris (1998) exponen que el asociacionismo explica tradicionalmente la transferencia del aprendizaje argumentando que el aprendizaje correcto de una tarea hace más fácil aprender una segunda tarea en la medida en que las dos actividades tengan elementos comunes o, dicho de otra forma, los mismos conjuntos de asociaciones. Gagné (1970), entre otros, explica la transferencia a partir del cálculo aritmético. Para ello, formula su Teoría del Aprendizaje Acumulativo, que parte de la base que las tareas más sencillas funcionan como componentes de las tareas más complejas, es decir, su esfuerzo consiste en presentar las habilidades descompuestas en subhabilidades ordenadas de menor a mayor dificultad de ejecución, denominadas

jerarquías de aprendizaje. Así, el hecho de que las tareas complejas están compuestas de elementos identificables y más sencillos permite la transferencia de lo sencillo a lo complejo. En la Figura 1 se expone un ejemplo práctico en el que se pueden analizar los pasos ordenados de menor a mayor dificultad en el aprendizaje de la resta:

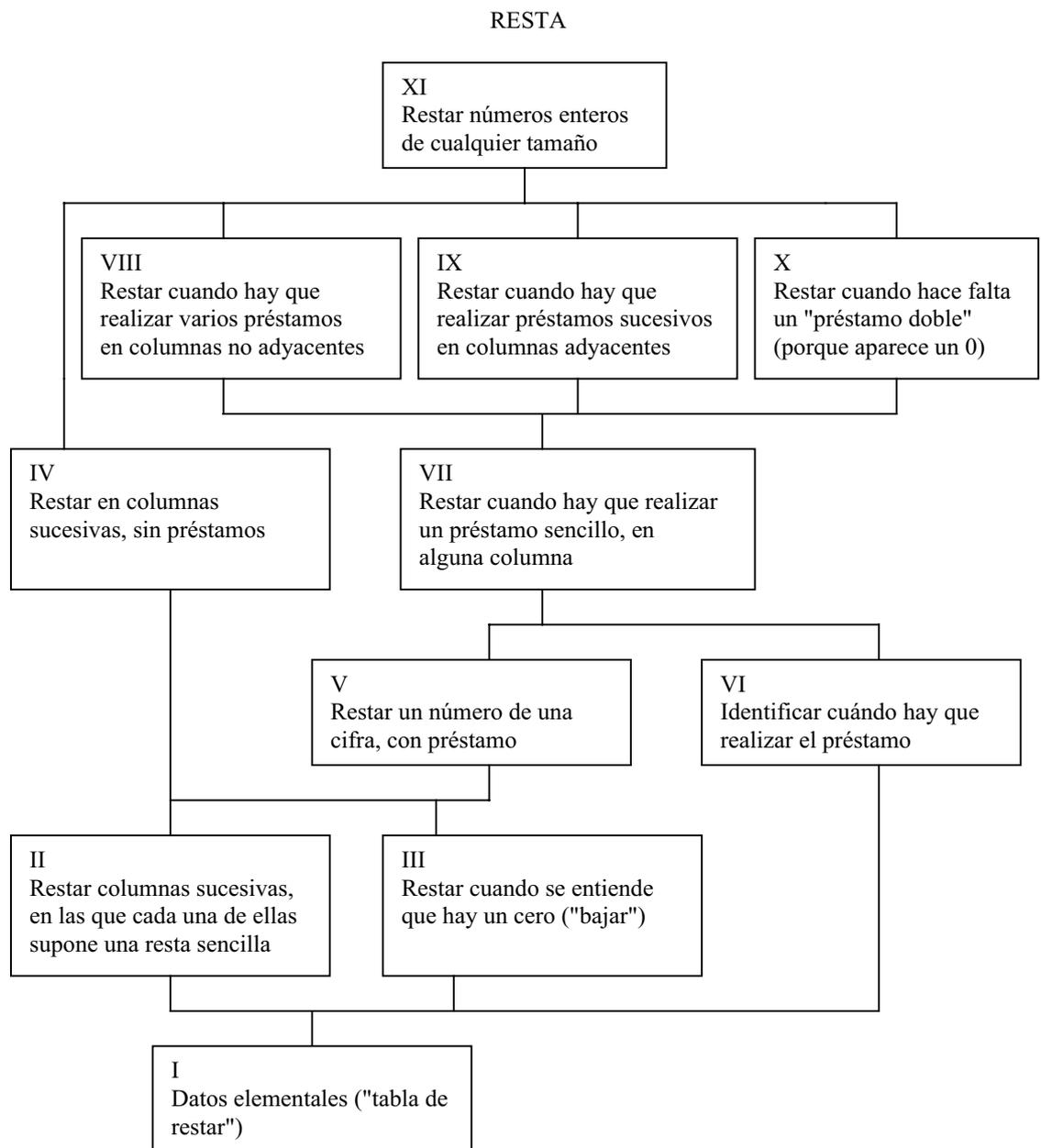


Figura 1: Una jerarquía de aprendizaje para la resta (Gagné, 1970).

De acuerdo con Gagné (1970) los análisis de jerarquía conllevan cuatro

supuestos:

- a. Cada una de las habilidades o subhabilidades que se identifican es una capacidad de realización, es decir, es algo que una persona sabe hacer, por lo que las habilidades se definen de forma conductual.
- b. La naturaleza de una jerarquía de aprendizaje es tal que las tareas subordinadas están incluidas en, o son componentes de la tarea de primer nivel.
- c. El hecho de que una tarea ocupe un lugar elevado dentro de una teoría de aprendizaje no quiere decir que sea más difícil aprenderla ni que costará más tiempo y más esfuerzo que cada una de las tareas anteriores.
- d. Por último, cada una de las subhabilidades que se identifican en una jerarquía determinada también puede desempeñar un papel en algunas otras jerarquías.

Como hemos visto, las jerarquías de transferencia y la organización de la enseñanza, a pesar de ofrecer una respuesta a cómo los aprendizajes aritméticos sencillos dan lugar a los más complejos, se mantienen en el campo de lo observable, de lo conductual, característica que se repite en todos los planteamientos científicos psicológicos asociacionistas.

Así, pues, desde una perspectiva genérica, Pozo (1993) indica que:

“los dos grandes escollos del asociacionismo son la ausencia de una organización en el sujeto psicológico, que se traduce en una imposibilidad de explicar la coherencia conceptual, y la incapacidad de explicar el origen de los significados” (pp. 159).

Con el objeto de intentar superar estas limitaciones, a partir de la segunda mitad del siglo XX van surgiendo paulatinamente nuevas corrientes psicológicas con una concepción del aprendizaje por reestructuración. Una de las características esenciales de estas nuevas perspectivas es que todas ellas consideran de forma explícita los procesos psicológicos superiores.

1.2.2. APRENDIZAJE POR REESTRUCTURACIÓN

Desde las teorías del aprendizaje por reestructuración, denominadas también organicistas, (Baroody, 1988; Serramona, 1997) se concibe el aprendizaje, según Pozo (1993), como:

“El producto de la interacción entre dos sistemas, dotado cada uno de ellos de sus formas propias de organización: el sujeto y el objeto. La reestructuración sería el proceso por el cual el sujeto, como consecuencia de sus interacciones con los objetos, encuentra nuevas formas de organizar o estructurar sus conocimientos más adaptadas a la estructura del mundo externo. Esta reestructuración va a requerir una toma de conciencia por parte del sujeto” (pp 222).

Hemos detectado algunos intentos de relacionar esta concepción del aprendizaje con la adquisición de contenidos aritméticos elementales. Desde esta perspectiva, Baroody (1988) expone que todas las aproximaciones al aprendizaje del cálculo que contemplen los cinco requisitos siguientes pueden considerarse por reestructuración:

- a. Las relaciones son las claves básicas para el aprendizaje, por lo su estructura es la esencia del conocimiento.
- b. Se produce una construcción activa del conocimiento, es decir, el aprendizaje no se limita a ser una simple absorción y memorización impuesta desde el exterior.
- c. Se dan cambios en las pautas de pensamiento.
- d. Al no absorber y/o acumular información, la capacidad de los niños para aprender tiene límites.
- e. Se produce un proceso de regulación interna.

Partiendo de las consideraciones preliminares anteriores, a continuación exponemos algunas de las principales aproximaciones al aprendizaje del cálculo formuladas desde esta óptica.

1.2.2.1. El enfoque de la psicología de la Gestalt

Esta postura teórica contrasta con la teoría asociacionista del aprendizaje y su análisis de la conducta en términos de asociaciones estímulo-respuesta. Sintéticamente, según Leahey y Harris (1998); Pastor et al. (2000) o Worchel y Shebilske (1998), entre otros, el núcleo central de la psicología de la Gestalt es que el pensamiento y la percepción están dominados por una tendencia innata a aprehender la estructura. Siendo así, la experiencia de la percepción o del pensamiento consigue una organización que es superior a la suma de los elementos o estímulos elementales identificables. La organización de la experiencia está controlada por la tendencia a buscar buenas “gestalts”, cierres o equilibrios psicológicos.

En este apartado nos referimos al pensamiento gestáltico puesto que uno de sus máximos representantes, Max Wertheimer, se preocupa entre otros aspectos del aprendizaje y de la enseñanza de contenidos aritméticos relacionados con la resolución de problemas gráficos y/o visuales, intentando demostrar las diferencias de resultados que se pueden obtener mediante el aprendizaje puramente memorístico y mediante el aprendizaje con significado. Wertheimer (1959), entre otros psicólogos gestálticos de la época como Dunker y Katoma (citados por Worchel y Shebilske, 1998), aplica algunos de sus postulados teóricos al aprendizaje del cálculo a partir de un ejemplo práctico: la suma de una progresión aritmética formulada por Gauss. En este ejemplo, a primera vista, parece que la tarea de sumar una progresión aritmética requiere un proceso de cálculo francamente largo: $1+2+3+\dots+100$ pero, como Gauss descubrió, existe una forma más sencilla y más elegante de descubrir el resultado de esta suma. Wertheimer (1959) realiza un análisis detallado del aprendizaje por discernimiento o la iluminación que cree que podía haber tenido Gauss al examinar su tarea. Básicamente, lo que pretende Wertheimer con este análisis es demostrar que la aprehensión de las estructuras subyacentes, interpretables como estructuras matemáticas, lleva al pensamiento productivo y a la resolución elegante de problemas. Esto se debe a que al conseguir un aprendizaje por discernimiento o una iluminación de las estructuras del problema,

el que lo aborda comprende la relevancia y las funciones de los componentes del problema y de los procedimientos conocidos de resolución, que le sugieren caminos hacia la solución.

A partir del ejemplo anterior puede apreciarse que la psicología de la Gestalt supone, en primer lugar, una ampliación de la definición de representación mental. Pero además, en su aplicación al aprendizaje de contenidos aritméticos, enriquece también la concepción de la estructura de un problema matemático: a) es imprescindible presentarlo de modo que se subrayen sus componentes interrelacionados para facilitar el aprendizaje por discernimiento o la iluminación de sus estructuras básicas, puesto que es a partir de este descubrimiento como el niño aprende; b) los niños pueden ser capaces de descubrir por sí mismos los principios matemáticos si se trabaja con materiales especialmente diseñados para este fin, dada su capacidad para organizar percepciones y experiencias; c) por último, sugieren que el aprendizaje por discernimiento o la iluminación es consecuencia, en parte, de comprender las estructuras matemáticas (Boyer, 1968; Worchel y Shebilske, 1998).

Sin embargo, han surgido críticas a tales planteamientos, como el hecho de que no todos los problemas matemáticos se pueden presentar de una forma gráfica y/o visual que faciliten el aprendizaje por discernimiento o la iluminación (Kilpatrick, 1990).

1.2.2.2. El enfoque constructivista

Para comprender y analizar el significado del constructivismo como teoría de aprendizaje de contenidos aritméticos es necesario, en primer lugar y de forma breve, comparar y contrastar el uso inicial del término desde la óptica de los filósofos intuicionistas hasta la visión actualizada del constructivismo matemático (Lerman, 1989).

En sus inicios, el constructivismo se desarrolla desde la filosofía de las matemáticas conectado con el intuicionismo, por lo que el primer constructivismo

matemático se denomina precisamente intuicionismo. Aunque actualmente todavía se utiliza este concepto, ha ido perdiendo vigencia frente al de constructivismo. El constructivismo matemático es iniciado por Kronecher (1823-1891) y seguido por Brouwer quien, en 1907 efectúa una tesis doctoral titulada “On the Foundations of Mathematics” donde defiende la esencia de esta posición epistemológica. Otras fuentes consultadas, como López Puig (1996), omiten a Kronecher y sitúan sus inicios hacia 1910, con Brouwer. En cualquier caso, en estos primeros momentos la concepción intuicionista se basa en el hecho de que se deben indicar qué métodos, afirmaciones, pruebas, etc., son aceptables en la construcción de las matemáticas.

Desde un punto de vista contemporáneo, el constructivismo es para muchos autores una teoría del aprendizaje de conceptos suficientemente válida y ha sido definido, según Kilpatrick (1990), a partir de dos rasgos esenciales: a) el conocimiento es construido activamente por el sujeto cognitivo, y no recibido pasivamente desde el entorno; b) la adquisición de conocimientos es un proceso adaptativo que da lugar a un conjunto de experiencias que no pueden ser descubiertas independientemente, y que preexisten fuera de la mente del sujeto. Para otros autores, como Pozo (1993), se trata de un intento más de reduccionismo.

Uno de los autores que más ha colaborado a su definición actual ha sido el psicólogo suizo Jean Piaget, quien da lugar a una visión renovada del constructivismo matemático en el marco de la epistemología genética, por lo que será tratado de modo específico en el siguiente subapartado. Después de Piaget prosigue un período que podríamos denominar de indefinición del papel del constructivismo en el contexto matemático que Kilpatrick (1990) culmina con una afirmación contundente:

“el constructivismo necesita ir hacia términos con un realismo matemático y, por otra parte, necesita dirigir sus derechos hacia un acercamiento a la filosofía de las matemáticas, que estudie la práctica de la matemática escolar en un contexto socio-histórico y que aparezca compatible con la matemática realista y constructiva” (pp. 49).

Dicha postura parece haber ido adoptándose durante los últimos años, a raíz de declaraciones como las realizadas por Coll (1991), quien define el constructivismo matemático como un método de enseñanza-aprendizaje a partir del cual el propio

alumno construye significados y atribuye sentido a lo que aprende, aunque es el maestro como mediador del aprendizaje quien facilita a los alumnos el acceso al conjunto de conocimientos que vehiculan los contenidos educativos, relacionando los procesos de construcción de los alumnos con los significados matemáticos que trata la enseñanza. Más recientemente, López Puig (1996) afirma que:

“las matemáticas constructivistas se van elaborando de tal manera que los interrogantes que se plantean deben promoverse y resolverse, sólo a partir de casos concretos que van mostrándose a medida que se construyen las matemáticas: números enteros, su adición, etc. La existencia de estas entidades siempre significa su definición calculística en un número finito de pasos a partir de los números naturales” (pp. 37).

En otras palabras, desde una óptica constructivista la adquisición de conocimientos aritméticos se concibe como un proceso significativo efectuado en situaciones reales, concretas y cotidianas.

1.2.2.2.1. El enfoque de la psicología genética

Al hablar de la psicología genética debemos referirnos a Piaget (1896-1980), quien dedica buena parte de su cultura científica a estudiar los fundamentos de la lógica y la formación de la inteligencia a través de la observación de sus propios hijos y, después, a los niños de las escuelas primarias viéndoles jugar, haciéndoles hablar y proponiéndoles pequeños problemas prácticos. De este modo demuestra, tal como indica Vera (2000), que la adquisición o aprendizaje de conceptos se realiza según dos procesos complementarios: a) la acomodación, mediante la cual el sujeto se ajusta a las condiciones externas; y b) la asimilación, que consiste en la incorporación de los datos de la experiencia a las estructuras innatas del sujeto (Piaget e Inhelder, 1975).

Está ampliamente aceptado por distintos autores que las investigaciones piagetianas constituyen factores explicativos de primer orden para comprender y fundamentar la adquisición de los primeros conceptos aritméticos (Bermejo y Lago, 1990; Mialaret, 1962, 1967, 1968; entre otros). López Puig (1996), por ejemplo, indica que:

“El pensamiento matemático concebido dentro de la teoría de Piaget nos aporta

numerosos datos acerca del proceso constructivo que lo genera, así como la relación que existe entre el análisis genético de las operaciones lógico-matemáticas y las operaciones aritméticas. Sus resultados han sido objeto de aplicación en el campo educativo por la gran incidencia que tienen en la pedagogía de las matemáticas” (pp. 43).

Las numerosas investigaciones matemáticas llevadas a cabo por Piaget y sus colaboradores del Centro Internacional de Epistemología Genética de Ginebra, básicamente nos proporcionan información relativa a la génesis de las estructuras lógico-matemáticas y a la adquisición de las nociones de número y de cantidad. Su pensamiento en relación a estos aspectos se sintetiza básicamente en sus libros *Génesis de las Estructuras Lógicas Elementales* (Piaget e Inhelder, 1941a); *Génesis del Número en el Niño* (Piaget y Szeminska, 1941) y *El Desarrollo de las Cantidades en el Niño* (Piaget y Inhelder, 1941b), además de numerosos capítulos de libro y artículos.

Respecto a la adquisición del razonamiento lógico-matemático, instrumento indispensable para el aprendizaje posterior de habilidades numéricas, Piaget e Inhelder (1941a) o Piaget (1966) afirman que las primeras estructuras lógicas que adquiere el niño son la clasificación y la seriación. Estos autores realizan un estudio a partir de 2.159 niños de 0-3 años, a partir del cual pretenden determinar cómo se adquieren estas primeras estructuras de lógica matemática. Parten de 4 posibles hipótesis explicativas:

- a. Las estructuras lógicas aparecen conjuntamente con el lenguaje.
- b. Las estructuras lógicas elementales llegan con el proceso de maduración neurológica del niño.
- c. Las estructuras lógicas surgen a causa de factores perceptivos.
- d. Los esquemas sensorio-motrices son los que originan las estructuras fundamentales de clasificación y seriación.

A continuación se describen brevemente los postulados de cada una de las

hipótesis planteadas, así como los distintos argumentos que permiten llegar a Piaget e Inhelder (1941a) a una conclusión global:

- 1ª hipótesis: el lenguaje. Los autores creen, en un primer momento, que la aparición de las estructuras lógicas elementales surgen a medida que el niño adquiere el lenguaje (a pesar de que de entrada matizan ya que si no tiene un papel fundamental, por lo menos intervendría de una forma auxiliar). Inicialmente, exponen este argumento porque observan que el lenguaje comporta estructuras de clasificación de una forma explícita (per ejemplo las clasificaciones que se realizan por campos semánticos o de significado: cuando a un niño de dos años se le pregunta si un gato es un animal o una fruta, la mayor parte contestan ya que es un animal). Sin embargo, observan que dicha relación es menos clara en el caso de las seriaciones (puesto que no se realizan series de palabras, sílabas o letras a nivel consciente ni inconsciente). Esta objeción les lleva a desestimar la primera hipótesis e intentan posteriormente buscar el origen de la clasificación y la seriación en la propia maduración que sigue el niño.
- 2ª hipótesis: la maduración neurológica. Dado que concluyen que el lenguaje, por sí solo, no puede explicar el origen o la génesis de las estructuras lógicas elementales, entonces se atribuiría su aparición a coordinaciones nerviosas independientes del ambiente, que se irían formando a medida que el niño madura, es decir, se atribuye a la maduración del sistema nervioso a través de las conexiones sinápticas, etc. Después de investigar en esta línea, llegan a la conclusión que no existen suficientes datos neurológicos para realizar una afirmación tan contundente.
- 3ª hipótesis: los factores perceptivos. Mucho antes de aprender a clasificar y seriar objetos, los niños menores de 3 años de edad los perciben de acuerdo con ciertas relaciones de similitudes y diferencias. La hipótesis se basa, pues, en que es a partir de estas relaciones perceptivas que se originan las clasificaciones y las seriaciones. Pero finalmente, concluyen que las estructuras de clasificación y seriación están a un nivel más elevado que las perceptivas (el niño que percibe no necesariamente sabe clasificar y seriar, todavía) y, por lo tanto, tampoco en este caso se trata de un factor explicativo contundente.
- 4ª hipótesis: los esquemas sensorio-motrices, que consideran una coordinación de movimientos propios, susceptibles de ser aplicados a una serie de objetos similares. Ambos autores explican que cuando un niño es capaz de reconocer que un objeto puede ser balanceado si está suspendido en el aire (móviles, etc.); o bien aproximarlos si está colocado

encima de un soporte accesible y móvil (mantel, etc.), entonces está realizando un primer paso hacia la clasificación. De la misma forma, observan que cuando a un niño se le presenta un objeto desconocido, éste aplica esquemas conocidos: frotarlo, balancearlo, tirarlo, golpearlo, etc. Y lo hace sucesivamente, como si tratase de comprender la naturaleza del objeto desconocido, y a la vez determinando si un objeto sirve para balancear, para hacer ruido, para frotarlo, etc., realizando así distintas clasificaciones denominadas prácticas. Este conjunto de acciones el niño las realiza ya antes de la aparición del lenguaje (6-8 meses, 18-24 meses), con lo que ambos investigadores llegan a la conclusión de que las estructuras de clasificación serían independientes del lenguaje.

En relación a las seriaciones, su esbozo se encuentra en determinadas construcciones que ya puede realizar el niño de esta edad, como por ejemplo sobreponer cubos colocados primero al azar, y después según volúmenes decrecientes (como la Torre Rosa del material sensorial Montessori, por ejemplo).

A partir de los datos empíricos anteriores, Piaget e Inhelder (1941a) confirman que los esquemas sensorio-motrices son la base para la explicación y comprensión de la aparición de las primeras estructuras lógicas en los niños, a pesar de que indican que estas primeras actividades elementales están todavía lejos de las estructuras operatorias correspondientes. Como conclusión, estos autores indican que el proceso que sigue un niño para ir adquiriendo tales estructuras lógicas atraviesa cinco niveles: a) percepción primaria; b) actividades perceptivas; c) esquemas sensorio-motrices; d) representaciones pre-operatorias y e) operaciones de clasificación y seriación.

Respecto a la adquisición de los conceptos de número y de cantidad, Piaget y sus colaboradores realizan también un amplio conjunto de experimentos tanto con elementos discontinuos (contables uno a uno) como continuos que les permiten establecer las distintas fases o etapas por las que atraviesa la mente infantil para acceder a la conservación del número y de la cantidad. Los distintos niveles que definen Piaget y Szeminska (1941) son los siguientes:

- 1ª etapa: se caracteriza por una ausencia de conservación del número y de la cantidad. El niño evalúa las cantidades directamente por medio de relaciones perceptivas globales

(densidad y longitud). Considera que una agrupación aumenta o disminuye en sus elementos según la forma que adopte, ya que no cuenta los objetos uno a uno, sino que evalúa la cantidad en función de su longitud, que es lo que realmente atrae al sujeto (además, tiene ya interiorizados algunos conceptos primarios, como largo-corto). A pesar de que el niño realiza la correspondencia biunívoca y recíproca con el experimentador, ésta se anula inmediatamente puesto que se subordina a la percepción espacial de los elementos. Ello nos indica el bajo nivel de cuantificación que existe en esta etapa, por cuya razón la numeración verbal que el niño utiliza en su ambiente social y escolar sigue siendo solamente verbal y no operativa.

- 2ª etapa: se caracteriza por ser un paso intermedio entre la ausencia de la conservación y la conservación propiamente dicha, es lo que Piaget define como una etapa intermedia entre la cantidad bruta sin invarianza y la cuantificación. Aquí el niño ya es capaz de efectuar la correspondencia término a término (biyectiva), pero es todavía cualitativa. Así, al considerar la agrupación total de elementos piensa igual que en el nivel anterior, es decir, que toda variación de longitud comporta un cambio de cantidad).
- 3ª etapa: la conservación de la cantidad está ya adquirida. Una vez de dos agrupaciones se han puesto en correspondencia término a término, se conciben como equivalentes cualesquiera que sean las transformaciones espaciales que se les aplique.

Alsina (1998) o López Puig (1996), entre otros, indican que la hipótesis que pretende demostrar Piaget con estas investigaciones es que la construcción del pensamiento lógico-matemático y las construcciones numéricas son correlativas, y que al nivel prelógico le corresponde un período prenumérico. Se constata así que la construcción operacional del número presenta una relación estrecha con las estructuras lógicas elementales, que según este autor son la clasificación y la seriación.

A modo de síntesis, para Piaget y sus colaboradores de la Escuela de Epistemología Genética de Ginebra, pues, el número se construye mediante la síntesis de las estructuras lógicas de clasificación y seriación, y las operaciones lógicas y aritméticas constituyen un solo sistema, donde las segundas resultan de la generalización y la fusión de las primeras.

1.2.2.2.2. El enfoque neopiagetiano

Los fundamentos piagetianos sobre el aprendizaje humano han sufrido algunas críticas, en su mayoría debidas a psicólogos estadounidenses. Estas críticas, según indican Resnick y Ford (1981), pueden sintetizarse en tres grandes grupos:

- a. Críticas que se centran en la teoría de los estadios del desarrollo cognitivo, en las que se cuestiona si la idea de etapas discretas, basada en la aparición de ciertas estructuras lógicas, puede resistir un análisis más profundo.
- b. Críticas a la realidad psicológica de las estructuras lógicas, relativas a la relación imprecisa entre los datos y sus conclusiones sobre la competencia de los niños.
- c. Críticas que se ocupan de la pretensión de que los niños están programados biológicamente para su desarrollo óptimo en su entorno social normal, y que la enseñanza poco puede hacer para acelerar o para mejorar la calidad del funcionamiento lógico de los niños.

Por su lado, Carretero (1986) sintetiza las críticas de los neopiagetianos a la Escuela de Ginebra a partir de los dos puntos siguientes:

- a. Las tareas de resolución características de un estadio determinado no son resueltas por los mismos sujetos a la misma edad, sino que se producen desfases de distintos años, tal como sugieren también Starkey y Gelman (1982) en relación a la adquisición del concepto de número. Por ejemplo, la conservación, la seriación, la clasificación y otras tareas tendrían que resolverse según Piaget alrededor de los siete años de edad ya que todas ellas forman parte de las operaciones concretas. Al no ser así, los datos indican que el desarrollo cognitivo no se produce a saltos de un estadio a otro, sino de una manera progresiva y gradual en la que van apareciendo procedimientos y capacidades cada vez más eficaces para resolver tareas que, a pesar de que tienen aspectos estructurales en común, cada una posee características propias.

- b. Por otro lado, incluso utilizando una misma tarea en versiones distintas, por ejemplo la conservación o clasificación de la materia, se encuentran diferencias en su adquisición por los mismos sujetos, lo cual implica que el contenido o contexto de la tarea, y no sólo su estructura, influyan en su dificultad.

El conjunto de críticas anterior da lugar a que muchos autores, aunque acepten los elementos fundamentales de la teoría piagetiana del desarrollo cognitivo, elaboren distintas matizaciones desde una perspectiva que ellos mismos han denominado como “neopiagetiana”. Entre estos psicólogos destacan, por ejemplo, Case (1985) o Pascual-Leone (1970). Además, existen también algunos trabajos como los de Brissiaud (1989); Kamii (1985, 1989, 1994); o Starkey y Gelman (1982); entre otros, que ofrecen una elaborada visión neopiagetiana contextualizada en el aprendizaje del cálculo aritmético.

Desde una perspectiva general, Case (1985) considera que es válido el hecho de que el desarrollo cognitivo evolucione mediante estadios. Sin embargo, mantiene que dentro de cada uno de estos estadios se producen cuatro subestadios cualitativamente distintos que tienen similitudes en el transcurso del desarrollo. También considera válida la idea de que cada estadio y subestadio se conciba y constituya como una estructura que integra las anteriores, pero los estadios y subestadios no son conceptualizados ni analizados como estructuras lógicas, sino como una serie de estructuras de control ejecutivo formalizables con los procedimientos habituales en el procesamiento de la información. En cada una de estas estructuras ejecutivas se distinguen tres elementos: la representación del problema, el objetivo o objetivos a conseguir y la estrategia que es preciso activar. Finalmente, Case concibe los cambios de un estadio a otro como un proceso determinado sobre el que deben tenerse en cuenta las siguientes cuatro consideraciones:

- a. El mecanismo de desarrollo se explica a partir de la interacción entre los aspectos innatos y los adquiridos.

- b. Las oportunidades de aprendizaje las determina el desarrollo cognitivo y el principio piagetiano de equilibración, consistente en la tendencia a eliminar contradicciones en la asimilación de conocimientos.
- c. La transición de un estadio a otro no se produce sólo por una reorganización interna provocada por un conflicto cognitivo, sino que intervienen tres aspectos del comportamiento considerados innatos, como son la tendencia a solucionar problemas, la exploración y la observación e imitación consecuentes.
- d. Por último, se postula que la mejora en la memoria a corto plazo de los sujetos tiene una base madurativa.

Desde una perspectiva aplicada a nuestro objeto de estudio, Kamii (1985, 1989, 1994) analiza exhaustivamente la teoría piagetiana en sus libros *Reinventando la Aritmética*, *Reinventando la Aritmética I* y *Reinventando la Aritmética II*, relacionándola con la aritmética elemental. Para ello parte de los tres tipos de conocimiento de Piaget: a) conocimiento físico, que se refiere al conocimiento de los objetos de la realidad externa o, dicho de otra forma, en términos de Dienes (1965), consistiría en distinguir las cualidades de los objetos y sus atributos; b) conocimiento lógico-matemático, que se basa en las relaciones creadas por cada individuo a partir del conocimiento físico, además de las operaciones que se establecen (Canals, M^a.A., 1992); y c) conocimiento social o convencional, que son las convenciones establecidas por las personas, por lo que su naturaleza es absolutamente arbitraria.

La distinción de los tres tipos de conocimiento es esencial, según Kamii (1989), para explicar cómo el niño aprende el cálculo, cuya base se encuentra en el dominio del concepto de cantidad, que se produce aproximadamente entre los 6-7 años de edad (Bermejo y Lago, 1990; Canals, M^a.A., 1979; Case, 1982; Davydov, 1982; Piaget y Szeminska, 1941; entre otros). Antes de los 6-7 años, los niños tienen un conocimiento físico o empírico, pero todavía no tienen un conocimiento lógico-

matemático o operatorio propiamente dicho.

Los datos anteriores se han confirmado a partir de múltiples experimentos que tenían por objeto estudiar la conservación de la cantidad. Así, por ejemplo, existe el clásico experimento de Piaget e Inhelder (1941b) que consiste en disponer de dos vasos idénticos y de 30 a 50 canicas: un vaso es para el niño y otro para el experimentador. El procedimiento consiste en una correspondencia biunívoca, en la cual cada vez que el experimentador coloca una canica en su vaso el niño también la pone. En uno de los ensayos, el experimentador pide al niño que no la ponga mientras él sigue colocándola. En los ensayos sucesivos se establece de nuevo la relación y, finalmente, se pregunta al niño en qué vaso hay más canicas. La mayor parte de niños de cuatro años contestan “igual”, mientras que a los 5-6 años la mayor parte de los niños han construido ya la relación lógico-matemática de la correspondencia biunívoca y pueden deducir a partir de los hechos empíricos que el experimentador tienen una canica más. Más adelante, cuando construyen un sistema de números mayor, llegan a ser capaces de deducir, como los adultos, que siempre habrá una canica de más en el vaso del experimentador, independientemente de la cantidad de canicas que se introduzcan. A raíz de estos datos, Kamii (1989) indica que:

“Lleva muchos años construir este sistema de relaciones, y que un niño posea conceptos numéricos hasta el diez o el quince no implica necesariamente que posea conceptos de cincuenta, cien o más” (pp. 25).

Este hecho podría ser debido a que tradicionalmente se ha considerado que el cálculo debía interiorizarse a partir de los objetos (como si fuera un conocimiento físico) y de las personas (como si fuera un conocimiento social), y se ha pasado por alto la parte más importante, que es el conocimiento lógico-matemático. En esta línea, Kamii (1989) indica que:

“Nuestras ideas sobre la enseñanza de la aritmética dependerán de cómo entendemos que los niños aprenden. En la medida en que comprendamos como aprenden, podremos intentar facilitar su aprendizaje” (pp. 26).

Además, para comprender cómo los niños aprenden el cálculo es

imprescindible distinguir entre abstracción y representación, por un lado, y entre representación con símbolos personales y con signos convencionales, por otro: por un lado existen, según los postulados piagetianos adaptados por Kamii (1989), dos tipos de abstracción, denominadas empírica o simple y reflexionante o constructiva. En la abstracción empírica, todo lo que el niño hace es centrarse en cierta propiedad del objeto e ignorar las demás, es decir, cuando abstrae el color de un objeto, simplemente ignora el resto de los atributos como el tamaño o el material de que está hecho. Por el contrario, la abstracción reflexiva o constructiva implica la construcción, por parte del niño, de las relaciones entre los objetos. Así, la abstracción empírica está implicada en la adquisición del conocimiento físico por parte del niño, mientras que la abstracción constructiva ésta implicada en la adquisición del conocimiento lógico-matemático. La representación, por otro lado, es lo que hacen los niños, no lo que hace la palabra o el dibujo. Así, la palabra “siete” no representa la idea de “siete”, según Piaget. Si los niños han construido la idea de “siete” mediante la abstracción constructiva, representarán esta idea para sí mismos con la palabra siete o un dibujo de siete elementos, sino, asignarán un significado prenumérico a la palabra o dibujo. Dentro del contexto de la representación, Piaget distingue dos tipos distintos: a) representación simbólica y b) representación con signos. Los símbolos sirven para representar el conocimiento lógico-matemático y son dibujos o material inespecífico empleados como instrumentos para contar. Sus características son dos: a) que presentan un parecido figurativo con la idea que representan, y b) que cada niño puede inventarlos. Los símbolos no requieren que otras personas los expliquen para comprenderlos. Por otra parte, los signos pertenecen al conocimiento social (convencional) y requieren que otras personas los transmitan. Los signos, por tanto, surgen de fuentes diferentes y no son más avanzados que los símbolos. Los niños pueden emplear simultáneamente símbolos y signos para expresar el conocimiento matemático.

A partir de esta concepción del aprendizaje de la aritmética, Kamii (1989) argumenta su reinención a partir de tres razones, sintetizadas a su mínima expresión: a) la primera, porque debido al fundamento erróneo de la teoría en que se basan los profesores tradicionales de matemáticas acerca de cómo aprenden los

niños, la enseñanza actual del cálculo no da resultado; b) la segunda razón es que cuando los niños reinventan el cálculo llegan a ser más competentes que los que han aprendido con el método tradicional, aspecto confirmado anteriormente por Groen y Resnick (1977); y c) la tercera razón reside en que los procedimientos que los niños inventan surgen de lo más profundo de su intuición y de su manera natural de pensar. Si se favorece que ejerciten una forma genuina de pensar, en lugar de exigirles que memoricen reglas que para ellos carecen de sentido, desarrollarán una base cognitiva más sólida y una mayor seguridad. Los niños que se sienten seguros aprenden más a largo plazo que aquellos que han sido instruidos de un modo que les hace dudar de sus propios razonamientos.

Brissiaud (1989) trata también el aprendizaje del cálculo desde una perspectiva que podríamos considerar neopiagetiana. Parte de un método mixto que se basa, por un lado, en el uso de colecciones de muestra para que los niños resuelvan los cálculos con números pequeños sin necesidad de contar y, por otro, en la práctica de los recuentos para aquellas operaciones aritméticas con números más grandes. La secuencia didáctica, en su caso, se completa con el uso del simbolismo aritmético para desarrollar un cálculo mental escrito (cálculo pensado) que permita a los niños ampliar el campo de las relaciones numéricas que conocen.

1.2.2.3. El enfoque de la aritmética cognitiva y el procesamiento de la información

Bernoussi (1998); Lemaire y Bernoussi (1991) o Peterson et al. (1984); entre otros, exponen que la investigación en este campo se ha centrado sobretodo en estudiar los procesos cognitivos implicados en el aprendizaje y la ejecución de tareas de cálculo, dando lugar a la aparición de distintos modelos explicativos que intentan describir qué ocurre dentro de las mentes de los sujetos al resolver operaciones aritméticas simples.

Antes de proceder a la exposición de tales modelos, queremos precisar que desde este enfoque frecuentemente se ha tendido a explicar la adquisición de contenidos aritméticos elementales en relación con el papel que ejerce la memoria,

tanto en los algoritmos del cálculo como en la recuperación de los hechos aritméticos desde la memoria a largo plazo a la memoria de trabajo, por lo que la mayor parte de modelos han sido desarrollados desde la psicología de la memoria. Además, debemos tener en cuenta también que el estudio de la recuperación de hechos aritméticos almacenados en la memoria a largo plazo se ha vinculado a su representación en este sistema de memoria debido a la interrelación existente entre ambos aspectos, puesto que difícilmente puede comprenderse de qué forma la memoria de trabajo recupera información aritmética almacenada en la memoria a largo plazo sin tener un conocimiento previo de cómo se han representado tales conocimientos.

Desde la psicología de la memoria, la representación de contenidos aritméticos en la memoria a largo plazo y su recuperación por parte de la memoria de trabajo ha sido analizada sobretodo desde la dicotomía memoria declarativa/memoria procedimental. Los términos "declarativo" y "procedimental" aparecen por primera vez en la literatura cognitiva en la década de los setenta del siglo XX (Anderson, 1976). Ruíz-Vargas (1991) define la memoria declarativa y procedimental como:

"La memoria declarativa es aquella que está accesible al recuerdo consciente e incluye hechos, episodios, listas, relaciones e itinerarios de la vida cotidiana. Recibe este nombre porque todo el conocimiento representado en este sistema puede ser declarado; es decir, traído de la mente verbalmente, en forma de proposiciones, o no verbalmente, en forma de imágenes... la memoria procedimental es la que está contenida en las habilidades o destrezas perceptivas, motoras y cognitivas adquiridas y sólo podemos acceder a ella a través de la acción" (pp. 71).

En esta línea, Byers y Erlwanger (1985) manifiestan que:

"Es bien sabido que el conocimiento matemático formal consiste en proposiciones. Pero, ¿es así como las matemáticas se representan en la memoria?; ¿las secuencias de operaciones se recuerdan cómo proposiciones?" (pp. 270).

Uno de los primeros trabajos que intenta descifrar el interrogante anterior corresponde al modelo ACT de Anderson (1976), cuya hipótesis central es la diferenciación entre conocimiento declarativo (saber qué, representado mediante una red proposicional) y procedimental (saber cómo, expresado en términos de

producciones). La estructura general del modelo ACT parte del hecho que los procesos de codificación llevan la información desde el mundo exterior a la memoria de trabajo, los de almacenamiento permiten registrar en la memoria declarativa y procedimental los contenidos de la memoria de trabajo y el proceso de recuperación efectúa el camino inverso al anterior (Anderson, 1983):

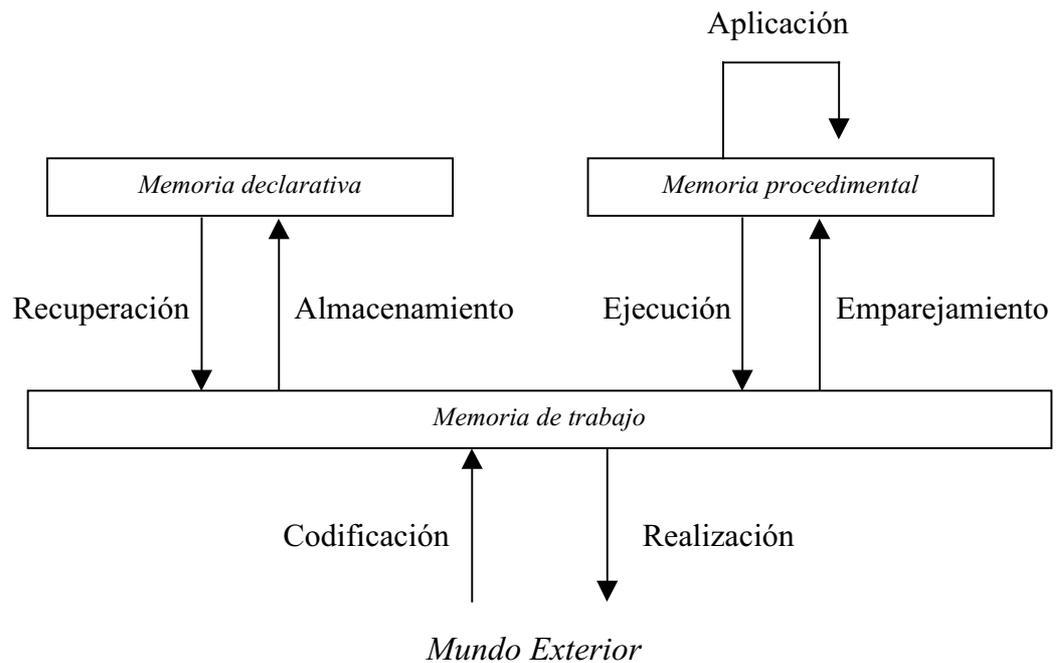


Figura 2 : Modelo ACT de Anderson (1976, 1983)

Este planteamiento ha tenido varias implicaciones en el estudio de las representaciones aritméticas: a) los modelos de simulación construidos para comprender las formas de representación aritmética se inscriben todas en el marco teórico marcado por el modelo ACT de Anderson (1976, 1983); b) su diferenciación de una memoria declarativa y otra procedimental ha sido confirmada, entre otros, por los estudios de McCloskey et al. (1991) que muestran la existencia de módulos diferenciados donde se almacenan hechos aritméticos (como las tablas de multiplicar) y procedimientos de cálculo (algoritmos) por otro; y c) sus hipótesis sobre los procesos de funcionamiento y la estructura de la memoria declarativa están en la base de la mayor parte de los estudios realizados sobre la forma de almacenamiento y recuperación de hechos aritméticos (Ashcraft y Battaglia, 1978;

Campbell y Graham, 1985; Geary y Burlingham-Dubree, 1989; Geary y Widaman, 1987, 1992; Lemaire y Bernoussi, 1991; Siegler, 1988; Siegler y Shrager, 1984; Widaman et al., 1986; y Zbrodoff y Logan, 1990; entre otros).

Como hemos indicado, a partir del modelo ACT de Anderson (1976, 1983), desde la psicología de la memoria se han elaborado diversos modelos sobre el modo en que se almacenan y recuperan las operaciones y los procedimientos aritméticos. Estos trabajos analizan sobretodo si la producción y la verificación aritméticas implican los mismos procesos de recuperación (Campbell y Tarling, 1996). En las tareas de producción se presenta un cálculo ($6+5=$) y los sujetos deben producir la respuesta correcta con el menor tiempo posible, mientras que en las tareas de verificación se presenta también un cálculo ($5+6=12$) y los sujetos deben evaluar, tan rápido como sea posible, si la operación es verdadera o falsa.

Hecha la aclaración anterior, a continuación vamos a describir brevemente aquellos modelos que a nuestro entender han contribuido de una forma más genérica a comprender como se adquieren los conocimientos de tipo aritmético; cómo se representan tales conocimientos en la memoria a largo plazo; y como se recuperan desde la memoria a largo plazo hasta la memoria de trabajo. Entre estos modelos destacan, por orden cronológico: a) el Modelo Analógico, formulado por Restle (1970); b) el Modelo Digital o de Conteo, desarrollado por Groen y Parkman (1972); c) el Modelo de Recuperación-Comparación de Ashcraft y Battaglia (1978); d) el Modelo de Distribución de Asociaciones de Siegler y Shrager (1984) y Siegler (1988); e) el Modelo de Interferencia en Red de Campbell y Graham (1985); f) el Modelo de Widaman et al (1986); g) el Modelo de Zbrodoff y Logan (1990); y h) los Modelos de Red, elaborados por Geary y Widaman (1987, 1992) y Geary y Burlingham-Dubree (1989), entre otros.

a. El Modelo Analógico (Restle, 1970)

A partir de distintos estudios sobre las comparaciones numéricas realizados por Restle (1970), dicho modelo postula que cada cifra de una operación aritmética es transformada en una representación analógica. Este modelo hipotiza que cada

término se representa por una línea interna de longitud proporcional a su valor. La unión de dos líneas da lugar a una nueva línea que representa el resultado que puede ser comparado al resultado propuesto. Según Restle (1970), esta línea numérica se divide en segmentos de distintas medidas (por ejemplo 10, 5 y 1), lo cual explicaría porque es más fácil comparar dos nombres pequeños aislados uno de otro de la línea numérica (por ejemplo, 1 y 9 son más fáciles de comparar que 17 y 19).

Ashcraft (1982) desarrolla un modelo muy similar al de Restle (1970) que reproducimos en la Figura 3:

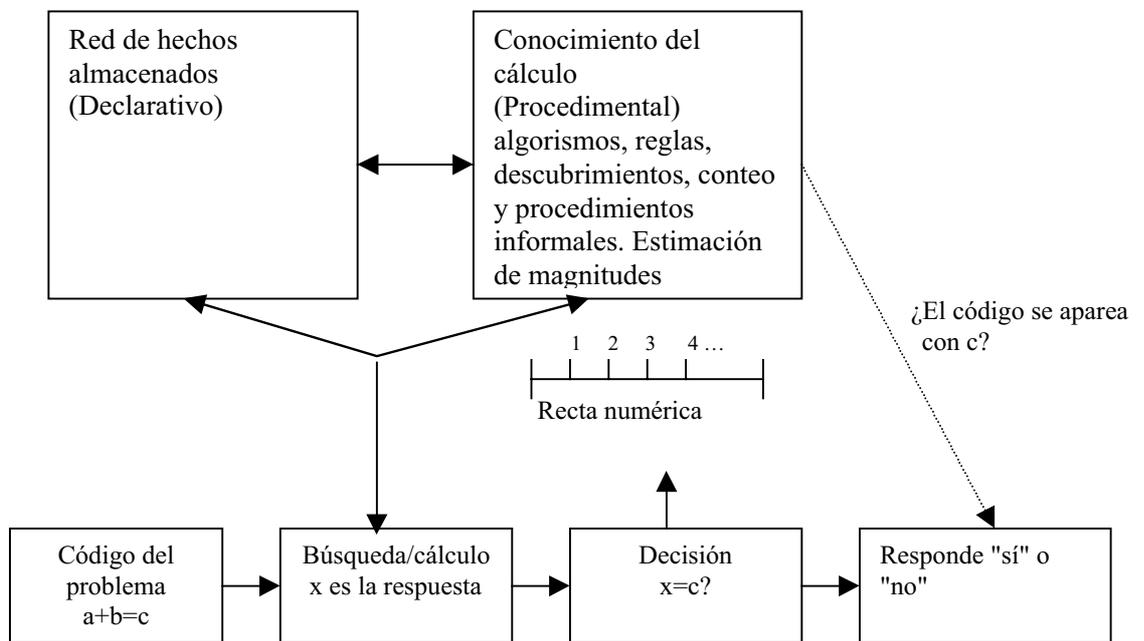


Figura 3: Modelo de procesamiento para el cálculo mental (Ashcraft, 1982).

A grandes rasgos, el modelo anterior parte de la base que el tiempo de respuesta es igual al tiempo de codificación, más el tiempo de búsqueda/cálculo, más el tiempo de decisión, más el tiempo que el sujeto tarda en responder. Desde nuestro punto de vista, nos interesa destacar que en este modelo se incluyen los componentes declarativo y procedimental de la memoria a largo plazo.

b. El Modelo Digital o de Conteo (Groen y Parkman, 1972)

Este modelo parte de la base que la resolución de una operación aritmética

simple, como es el caso de la suma o bien de la resta, se efectúa por reconstrucción del resultado a partir del uso de reglas reiterativas. Esta reconstrucción se explica a partir de la existencia de un contador mental interno que se activa siguiendo el proceso siguiente: el valor del sumando más pequeño se incrementa al sumando de más valor, según indican a principios de los setenta Groen y Parkman (1972). Sin embargo, en la misma época dos observaciones hacen que los propios autores reconsideren dicho postulado: a) el tiempo de resolución no varía en función de la dificultad y b) los adultos resuelven las adiciones veinte veces más deprisa que los niños. Esta reformulación lleva a Groen y Parkman (1972) a sugerir una nueva hipótesis basada en un modelo mixto, a partir del cual ciertos resultados (sumandos iguales) permanecen en la memoria a largo plazo y se recuperan por procesos de acceso directo con la misma eficacia tanto por parte de los niños como por parte de los adultos, mientras que otros resultados se consiguen a partir de una solución reconstructiva o de conteo (mediante el contador mental interno). Cornet et al. (1988) sintetizan los postulados de este modelo exponiendo que la ejecución de una operación aritmética simple es un fenómeno de reconstrucción en la memoria basado en la aplicación de principios aprendidos, y manifiestan también que existe una continuidad de mecanismos entre los procesos de contar externos de los niños y los procesos usados por los adultos, idea apuntada también por Lemaire y Bernoussi (1991).

c. El Modelo de Recuperación-Comparación (Ashcraft y Battaglia, 1978)

Estos autores se centran en el proceso de verificación de operaciones, e indican que incluye cuatro fases hipotéticas:

1. Codificar la operación y la respuesta presentada.
2. Calcular la respuesta de la operación.
3. Decidir si la respuesta presentada y la calculada son la misma o son diferentes.
4. Ejecutar la respuesta "verdadero" o "falso".

En este modelo se asume que el cálculo en adultos y niños mayores

normalmente implica una recuperación de respuesta y que esta recuperación es posible gracias a una activación automática de una red de operaciones y respuestas relacionadas. La recuperación de la respuesta viene determinada por la fuerza asociativa que relaciona la operación con su respuesta correcta, y esta fuerza depende de la frecuencia del cálculo y también de su medida.

Se asume además que el tiempo de reacción es superior cuando la diferencia numérica entre la respuesta presentada y la correcta es corta (p. e. $4+8=13$), y los errores son más frecuentes cuando la respuesta incorrecta está relacionada con el cálculo (p. e. $4 \times 7=11$ puede inducir a un error de verificación, dando lugar a una respuesta afirmativa, porque se parece a $4+7=11$). A raíz de estos fenómenos, este modelo concluye que la decisión de la verificación se basa en la comparación de los niveles activados en la memoria por la respuesta calculada y la presentada en la red de recuperación, sugiriendo que verificación y producción implican procesos similares. Campbell (1987), en cambio, opina que los procesos de cálculo pueden ser diferentes en las dos tareas quizá porque en la verificación se ofrece una respuesta que actuaría como estímulo.

d. El Modelo de Distribución de Asociaciones (Siegler y Shrager, 1984; Siegler, 1988)

Este modelo argumenta que la información sobre las operaciones aritméticas elementales (suma, resta, multiplicación y/o división de dos dígitos) está almacenada en la memoria a largo plazo en forma de nodos que representan tanto a los hechos aritméticos (4×5) como a las respuestas (9, 20, 25,...). Estos nodos mantienen una relación entre sí, una asociación entre los nodos de hechos y los nodos de respuestas que a veces es correcta o a veces es incorrecta, de acuerdo con autores como Geary y Widaman (1987, 1992); o Geary y Burlingham-Dubree (1989), como veremos más adelante. Así, esta relación varía por la fuerza que relaciona dos nodos y, de modo esquemático, el proceso de recuperación del resultado de un hecho multiplicativo consta de varias fases que denotan su estrecha relación con el modelo de Anderson (1976, 1983), del que no es sino una concreción en el terreno aritmético, tal como ilustramos en la Figura 4 a partir de un ejemplo tomado de Siegler (1988):

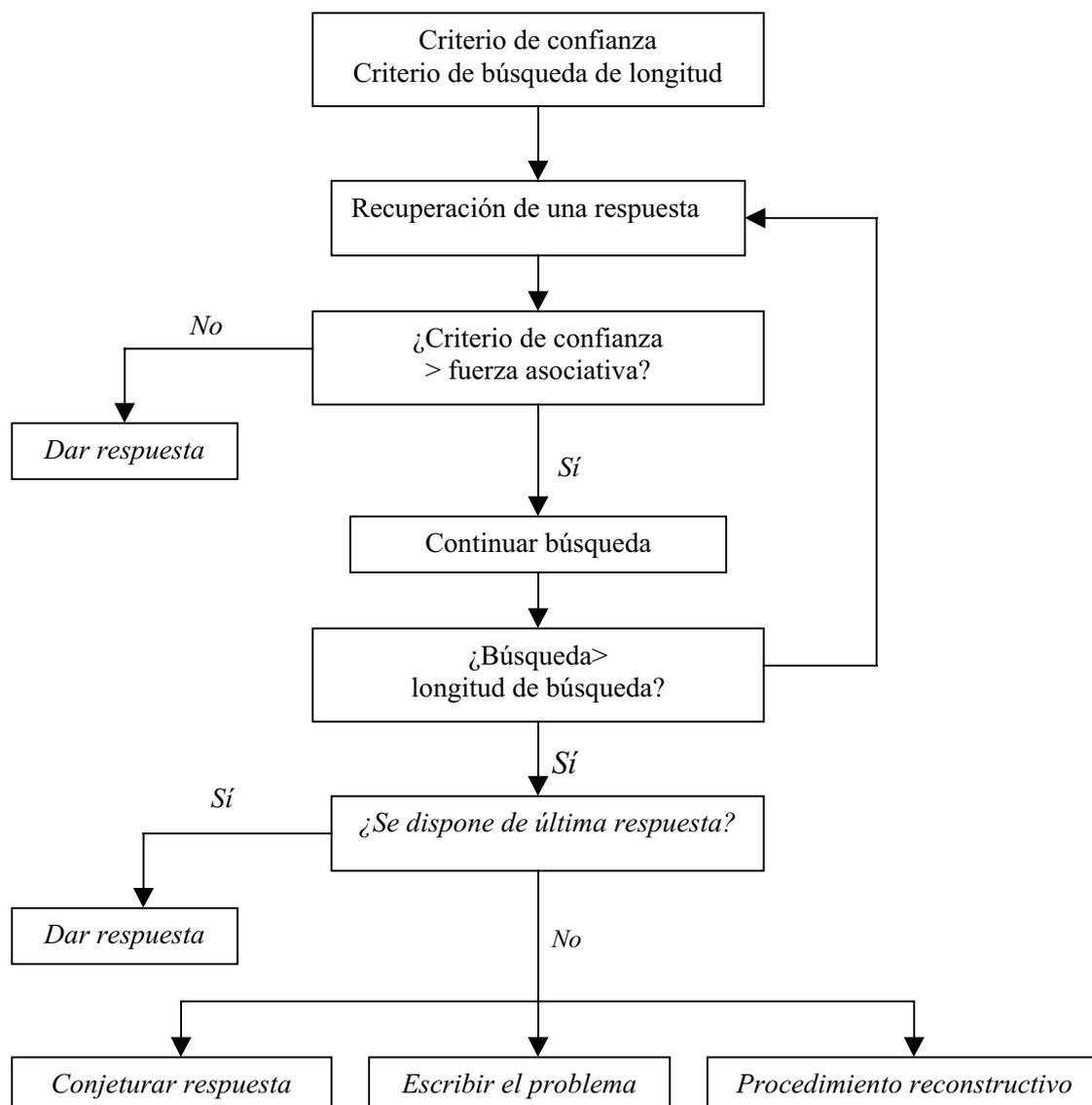


Figura 4: Proceso de recuperación del resultado de un hecho multiplicativo (Siegler, 1988)

En el comienzo del aprendizaje aritmético el niño posee, evidentemente, una escasa fuerza asociativa internodal, por lo que frecuentemente debe recurrir a asociaciones visuales, conjeturas o otras estrategias como procedimientos de reconstrucción, de acuerdo con Baroody (1988). De todas formas, en este modelo se asume que a medida que se producen respuestas acertadas, se aumenta la fuerza asociativa entre nodos de hechos aritméticos y nodos de respuestas, y se va produciendo la automatización de las operaciones aritméticas elementales, lo cual supone un importante ahorro cognitivo.

e. El Modelo de Interferencia de Red (Campbell y Graham, 1985)

Aunque este modelo es muy parecido al anterior, presenta algunos matices diferenciales. Así, Campbell y Graham (1985) postulan que los nodos-operaciones aritméticas y los nodos-respuesta presentan múltiples relaciones, de manera que a una operación le corresponden varias respuestas posibles (sólo una de ellas es la correcta), y a una respuesta, varias operaciones.

A partir de la premisa anterior, la recuperación de hechos aritméticos almacenados en la memoria a largo plazo depende de dos factores:

- a. La fuerza asociativa internodal, que varía según la frecuencia y el orden de presentación.
- b. La existencia de un proceso de selección que permite escoger el nodo-respuesta más activado.

f. El Modelo de Widaman et al. (1986)

Widaman et al. (1986) diseñan un modelo que es una reelaboración del anterior, e incluye los mismos pasos de procesamiento: codificación, buscar/calcular, decidir y responder. El primer paso supone la codificación de la operación y de los dos dígitos que se deben sumar. Una vez los dígitos están en la memoria de trabajo, se obtiene su suma a través de un proceso de cálculo o de un proceso de búsqueda en la memoria. En sumas simples de sólo dos sumandos de un dígito, la suma que se obtiene se compara con la suma presentada (en tareas de verificación) y se toma una decisión (verdadero o falso). En estudios que pretenden confirmar estos primeros resultados, Geary et al. (1986) y Geary y Widaman (1987, 1992) demuestran que se puede generalizar este funcionamiento a distintas tareas aritméticas (concretamente suma y multiplicación) y que en estos casos la red de recuperación de cálculos aritméticos almacenada en la memoria es el mejor predictor del tiempo de reacción que exige cada operación.

g. El Modelo de Zbrodoff y Logan (1990)

Este modelo alternativo postula que, en tareas de verificación aritmética, una vez se ha llevado a cabo la recuperación el tiempo de respuesta depende exclusivamente de la comparación, mientras que los factores que afectan la recuperación ya no ejercen ninguna influencia, en contraposición a Ashcraft y Bataglia (1978), quienes subrayaban la intervención conjunta de la recuperación y la comparación. Desde esta nueva perspectiva, pues, la activación en la red de la memoria aritmética implica dos tipos distintos de macroprocesos: uno que se encarga de la verificación y otro de la producción. En la producción, un macroproceso analiza la activación relativa de nodos de la memoria individual en la red y selecciona el nodo que se ha activado con más fuerza en la recuperación; en la verificación, otro macroproceso distinto analiza la activación general dentro de la red, que proporciona un índice de familiaridad de estímulos. Por lo tanto, como hemos indicado, en la verificación no se necesitaría el paso de la recuperación.

En síntesis, este modelo actúa de la forma siguiente: cuando se presenta un cálculo, los sujetos responde "verdadero" si la fuerza de la asociación se encuentra rápidamente; en cambio si la asociación no se realiza rápidamente el sujeto responde "falso". Posteriormente, Aschraft (1992) discute la posibilidad de que la recuperación de los hechos aritméticos básicos utilice recursos atencionales de la memoria de trabajo y más tarde, Campbell y Tarling (1996), verifican que la producción y la verificación implican distintos procesos de memoria y sugieren que:

"Hablar de un modelo basado en la resonancia o la familiaridad es más adecuado que hablar de un modelo basado en la recuperación" (pp. 156)

h. Modelos de red (Geary y Widaman, 1987, 1992; Geary y Burlingham-Dubree, 1989)

La mayor parte de trabajos recientes han puesto el acento en los procesos de recuperación del resultado a partir de una memoria en red. De forma general, estas concepciones postulan que las operaciones aritméticas (de suma y multiplicación) se

sitúan en la memoria a largo plazo bajo la forma de una red. La recuperación de un resultado aritmético implica el espacio de una cierta distancia en la red. Esta distancia determina el tiempo de acceso al resultado. A partir de este argumento, existen dos grandes subtipos de modelos de red realizados por Ahscraft y Battaglia (1978); Geary y Widaman (1987, 1992) y Geary y Burlingham-Dubree (1989): el modelo de búsqueda dentro de una tabla interna y los modelos en redes asociativas.

En relación al primero de los submodelos estos autores exponen, a partir de estudios efectuados con sujetos de edad adulta, que los conocimientos son representados en la memoria bajo la forma de una tabla de doble entrada de hechos aritméticos en la cual las líneas y las columnas representan las cifras y las intersecciones, la suma o el producto. Los postulados del segundo de los submodelos, el modelo en redes asociativas, surge a partir de trabajos efectuados con escolares. Los postulados de dicho modelo indican que los cálculos aritméticos son representados en la memoria por dos nudos asociados a la respuesta correcta, pero también a otras respuestas incorrectas. La recuperación del resultado exacto depende a la vez de la fuerza asociativa entre operación aritmética y respuestas y el nivel de activación predictor del resultado. Este nivel tiene que superar el que predice los resultados incorrectos, que son inhibidos. Así, los cálculos con una activación mayor al nudo correcto tienen mayor probabilidad de conducir a una ejecución correcta. Por ejemplo, si la asociación entre $4+5$ y 9 es más fuerte en la memoria que las demás (8, 10, etc.), el resultado (9) es el más activado. El niño responde entonces 9.

Como conclusión, deben señalarse dos aspectos en relación a los modelos de red:

- a. La ventaja de una estrategia de recuperación del resultado a partir de una red de memoria es sobretodo la velocidad, pero en contrapartida pueden producirse confusiones asociativas.
- b. La mayor parte de estudios efectuados en esta línea en muestras infantiles,

sobretudo si se trata de investigaciones transversales más que longitudinales, muestran que es alrededor de los 8 años cuando el niño adquiere una estrategia de recuperación directa del resultado almacenado en la memoria, a pesar de que deben considerarse las diferencias individuales (citadas en la mayor parte de estudios).

A raíz de los datos empíricos aportados por los distintos modelos relativos a la recuperación de hechos aritméticos de la memoria a largo plazo, que en algunos casos parten de postulados literalmente opuestos, subyacen las siguientes conclusiones generales relevantes para nuestra línea de investigación:

- Aunque en la formulación de los primeros modelos se subrayaba que las tareas de cálculo de producción ($3+4=?$), que son las que hemos utilizado en nuestro estudio empírico, y las de verificación ($3+4=7$) implican procesos similares (Ashcraft y Bataglia, 1978), datos posteriores han confirmado que en tareas de producción el cálculo aritmético conlleva una recuperación de respuestas almacenadas en la memoria a largo plazo más una comparación, mientras que en tareas de verificación parece que la recuperación no es necesaria (Zbrodoff y Logan, 1990).
- En tareas de producción, la recuperación depende en buena medida de la fuerza asociativa que relaciona la operación con su respuesta correcta (Campbell y Graham, 1985), y esta fuerza asociativa aumenta con la edad (Siegler y Shrager, 1984; Siegler, 1988).
- Las tareas de producción y las de verificación implican distintos procesos de memoria de trabajo, como apuntan Blankenberger y Vorberg (1997) y Wenger y Carlson (1996), entre otros.

Miller y Perlmutter (1984) ofrecen una síntesis de las aportaciones más significativas de algunos de los modelos expuestos, centrándose en los procesos cognitivos que intervienen en el aprendizaje de la suma, la comparación de números,

el producto y las relaciones que se establecen entre las distintas operaciones aritméticas de carácter básico, es decir, las consideradas en los currículums de la escuela elemental.

	MODELO ANALÓGICO	MODELO DIGITAL	MODELO DE RED
PROCESO	Transformación de los números en magnitudes análogas. Las operaciones se efectúan mediante dichas analogías.	Existe un contador interno que incrementa los cálculos, con un tiempo de reacción proporcional al número de incrementos.	El cálculo comporta una recuperación desde una representación en la memoria a largo plazo con tiempos de reacción proporcionales a la distancia entre la entrada del punto y la respuesta.
COMPARACIÓN DE NÚMEROS	Comparación de los valores de las magnitudes análogas.	Conteo desde el 0 al primer número accesible.	No se ha formulado.
SUMA	Transformación de las sumas en distancias en una línea numérica. La distancia pequeña se conecta a la grande, con tiempos de reacción proporcionales a la distancia transportada.	En el 95% de los casos, recuperación de la respuesta en la memoria. El 5% restante cuentan. El tiempo de reacción es proporcional al sumando más pequeño.	Búsqueda de las sumas en una red parecida a una tabla de sumas. El tiempo de reacción es proporcional a la media de la suma.
PRODUCTO	No se ha formulado.	No se ha formulado.	búsqueda de la respuesta en tablas parecidas a las de multiplicar. El tiempo de respuesta es proporcional a la suma y al sumando más pequeño.
RELACIÓN ENTRE OPERACIONES	Baja correlación entre el tiempo de reacción para la suma y la multiplicación. No se especifica la relación entre la suma y la comparación de números.	Baja correlación entre el tiempo de reacción de la suma y la multiplicación de dos dígitos. Alta correlación entre la suma y la comparación de números.	Alta correlación entre suma y producto. Relación entre suma y comparación de números no especificada.

Otras aproximaciones en esta línea son las realizadas por Baroody (1988); Bermejo (1990); Campbell y Graham (1985); y Serrano y Denia (1987); entre otros. Campbell y Graham (1985) parten de la base que existen relaciones directas entre ciertas variables estructurales de la realidad (suma o producto) y los tiempos de

reacción de los sujetos. Baroody (1988) postula que la aritmética mental simple combina variables estructurales de la realidad con principios o procedimientos aprendidos, combinando de esta forma los Modelos de Recuperación y de Interferencia de Red. En nuestro país, tanto Bermejo (1990) como Canals, M^a.A. (1979) y Serrano y Denia (1987), entre otros, parten básicamente de la importancia del conteo en el aprendizaje de las primeras habilidades aritméticas. Serrano y Denia (1987), por ejemplo, indican que existen dos tipos de conteo: a) conteo total, consistente en aquel que el resultado de la operación está determinado por el conteo de los elementos; y b) conteo parcial, que se trata de un proceso más eficiente y rápido en el que se precisan unos prerequisites: poder contar desde un punto arbitrario, identificar que el cardinal del primer sumando es igual al resultado del conteo de los elementos de este conjunto e identificar el primer elemento del segundo sumando no como el número 1, sino como conectado al primer sumando. A partir de un estudio empírico realizado con niños de 6 a 10 años, en el que analizan la relación entre el conteo y el cálculo aritmético, observan diferencias estadísticamente significativas en función de la edad: los más pequeños utilizan el conteo total y tienen capacidad para sumar sin reagrupar las unidades y decenas, o bien sumar y restar sin reagrupación; los niños de 7-8 años utilizan un método intermedio entre el conteo total y el parcial, y pueden sumar reagrupando y restar sin reagrupar; mientras que los mayores utilizan el conteo parcial y tienen la capacidad de sumar y restar con reagrupación.

De todas formas, recapitulando todos los datos expuestos hasta ahora respecto a las aportaciones de la aritmética cognitiva, podemos concluir que los modelos expuestos no aportan datos consistentes aceptados por todos los investigadores de este ámbito de estudio. Así, por ejemplo, Cornet et al. (1988) exponen algunos interrogantes habitualmente ignorados por la literatura específica del sector durante los años setenta y ochenta del siglo XX, como son:

- a. El uso de distintas estrategias por el mismo sujeto en función de las variables contextuales: la investigación cognitiva había determinado que los niños utilizaban distintas estrategias para efectuar tareas de cálculo, como por ejemplo

contar todos los números; contar a partir del primer sumando o contar a partir del sumando más grande (Baroody, 1984). Sin embargo, no se habían explicado los factores que determinan el uso de una determinada estrategia. Siegler (1987), a partir de un estudio efectuado con niños de 4-7 años de edad, indica que los niños utilizan las distintas estrategias mencionadas en función de la estructura o de las características de la tarea a realizar. En estos mismos años empiezan a realizarse algunas aportaciones desde el campo de la psicología de la memoria, al observar que una de las estrategias más importantes consiste en la recuperación de la información por parte de la memoria de trabajo desde la memoria a largo plazo. La investigación en esta línea, como veremos en el tercer capítulo, va a permitir obtener paulatinamente datos más consistentes.

- b. La influencia del sistema aritmético: este aspecto se refiere al sistema notacional utilizado para representar cantidades. De forma muy resumida, existen distintas modalidades escritas, como la alfabética (siete), la arábica (7), o la romana (VII); y también distintos códigos analógicos (:::). Cornet et al. (1988) critican que los modelos de la aritmética cognitiva no habían tenido en cuenta la incidencia de los distintos sistemas notacionales al efectuar sus investigaciones, a pesar de que estudios como el realizado por Gonzales y Kolars (1982) demuestran que el rendimiento de los sujetos en una tarea de cálculo varía en función de la presentación de las operaciones (números arábigos versus números romanos). En el transcurso de los años, como veremos también en el tercer capítulo, algunas de estas limitaciones pretenden ser explicadas desde la psicología de la memoria y, concretamente, desde el efecto que la agenda viso-espacial de la memoria de trabajo ejerce en tareas de cálculo.
- c. El efecto de la tarea: a finales de los años setenta e inicios de los ochenta, como hemos visto, había un frente de discusión abierto en relación al distinto efecto que producen tareas de verificación ($3+4=7$) y tareas de producción ($3+4=?$) en la recuperación de información aritmética desde la memoria a largo plazo. Así, autores como Ashcraft y Bataglia (1978) concluían que ambas tareas implican procesos similares; sin embargo, posteriormente se ha determinado que ambas

tareas conllevan distintos procesos de memoria de trabajo (Blankenberger y Vorberg, 1997; Wenger y Carlson, 1996), aspecto que analizaremos con mayor detalle también en el tercer capítulo.

Todavía dentro del enfoque de la aritmética cognitiva, otros autores elaboran nuevos modelos desde la teoría del procesamiento de la información, que de acuerdo con Morris, C.G. (1997) o Worchel y Shebilske (1998), entre otros, incluye modelos que inciden y de hecho se centran en la estructura del conocimiento dentro de la mente y en los mecanismos por los que se manipula el conocimiento, se transforma y se genera en el proceso de resolver los miles de problemas con los que se enfrentan los seres humanos.

Así, por ejemplo, Greeno (1978) elabora un modelo mental en el que se pueden apreciar las relaciones específicas entre la multiplicación y la división, tal como puede observarse en las Figuras 5 y 6:

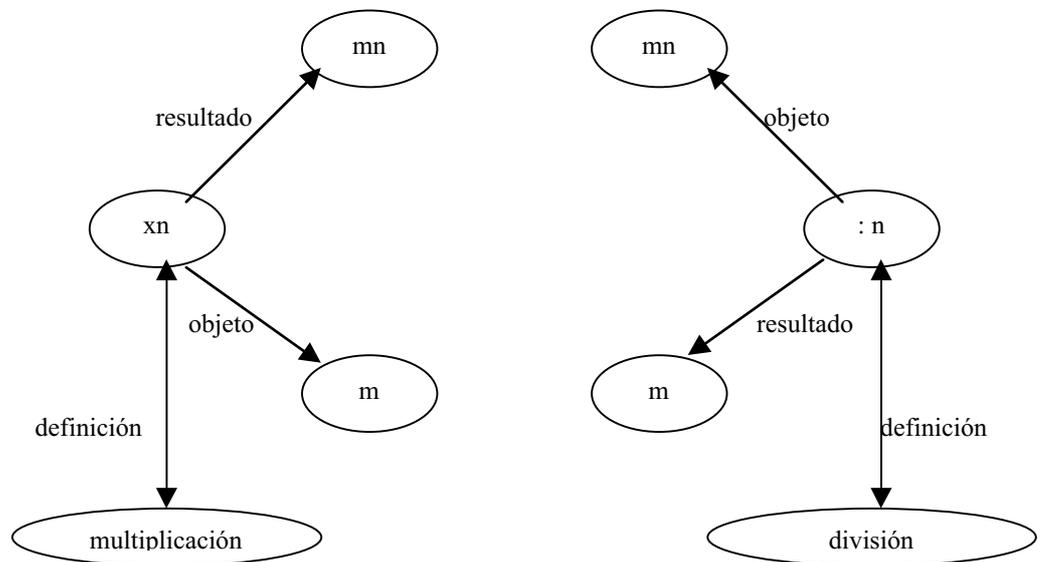


Figura 5: Posibles estructuras de conocimiento sobre la multiplicación y la división (Greeno, 1978)

La estructura anterior, además de incluir unidades y propiedades, contiene también relaciones nombradas de forma explícita. Así, las flechas entre los nódulos llevan nombres que describen la relación, y su dirección indica la dirección de la

relación. Sin embargo, la Figura anterior representa la estructura de conocimiento específico de alguien que conoce la multiplicación y la división, pero que no comprende su relación inversa, ya que ambas estructuras no están unidas. Para comprender que la multiplicación y la división son operaciones inversas la una de la otra, hay que reconocer que existe una relación especial entre las cantidades objeto y las cantidades resultado de ambas operaciones, tal como se ilustra en la Figura 6:

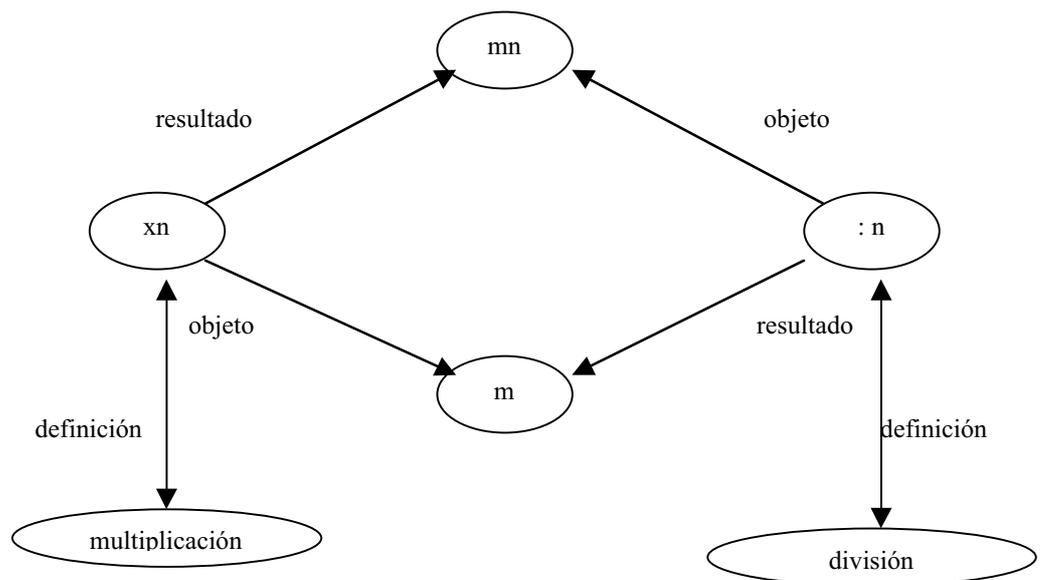


Figura 6: Relación inversa entre la multiplicación y la división. (Greeno, 1978)

En la Figura precedente se aprecia que las estructuras de conocimiento de la multiplicación y de la división están unidas, y la estructura total se simplifica con dicha unión.

Desde un punto de vista más genérico, También Resnick y Ford (1981) ofrecen ejemplos de cómo una persona que posea una estructura conceptual aritmética bien desarrollada puede comprender, desde la perspectiva del procesamiento de la información, las cuatro reglas o operaciones aritméticas básicas. La suma y la resta se definen como operaciones, cada una de las cuales tiene una cantidad objeto y una cantidad resultado. Como sucedía con la relación entre la multiplicación y la división, la relación inversa entre la suma y la resta se comprende porque las mismas cantidades (a , m y $m+a$) desempeñan el papel de

objeto y el de resultado en ambas operaciones. La Figura también muestra que los operadores de suma y de multiplicación están relacionados entre sí: concretamente, la operación “n-veces” se define como equivalente de la suma repetida (+m repetido n veces), y “+m” se presenta como componente de esta operación definitoria. También se representa una definición similar de la división, como resta repetida (-m repetido n veces). En la Figura 7 pueden observarse dichas relaciones:

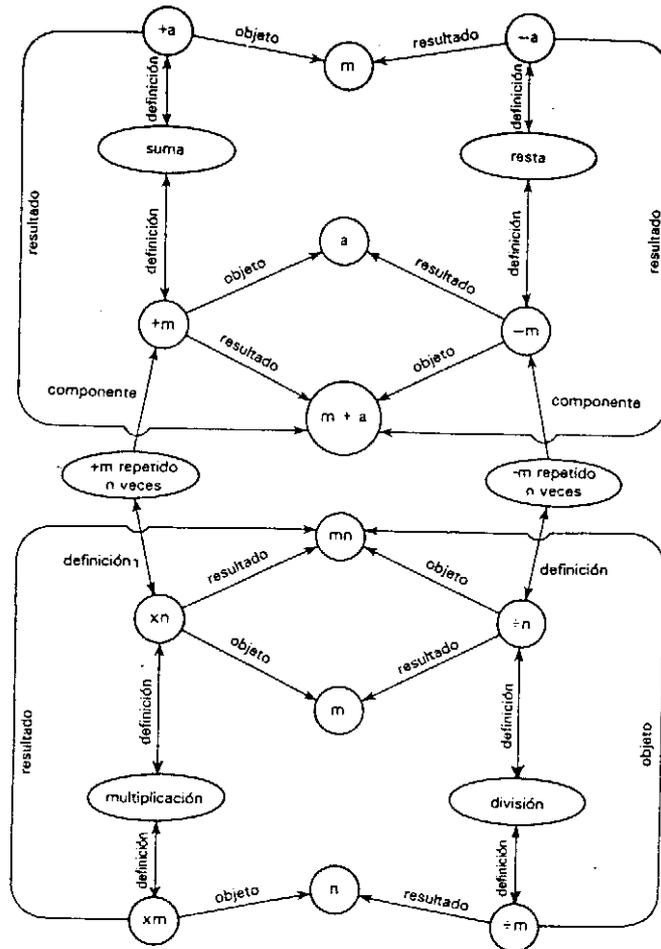


Figura 7: Una estructura de conocimiento para las cuatro operaciones aritméticas: suma, resta, multiplicación y división (Resnick y Ford, 1981).

Con los ejemplos anteriores, se deducen algunos de los principios básicos de la teoría del procesamiento de la información aplicados al aprendizaje del cálculo:

- a. Uno de los objetivos fundamentales debería ser el de ayudar a los alumnos a adquirir un conocimiento bien estructurado.

- b. Para determinar si un conocimiento es o no estructurado deben considerarse tres factores:
- la correspondencia: ajuste de la idea mental a los conceptos aritméticos correctos.
 - la integración: grado de interrelación de los conceptos.
 - la conexión: grado en que los distintos conocimientos se relacionan.
- c. Será imprescindible también determinar los objetivos cognitivos, tanto conceptuales como de procedimiento, en los que se debe centrar el aprendizaje del cálculo.

1.3. SÍNTESIS DEL CAPÍTULO

A lo largo de este primer capítulo hemos revisado las aportaciones de las principales teorías psicológicas del aprendizaje del cálculo hasta llegar a las tendencias actuales. De acuerdo con Baroody (1988) y Pozo (1993), entre otros, hemos partido de dos enfoques genéricos de concebir el aprendizaje: **el aprendizaje por asociación y el aprendizaje por reestructuración**, puesto que desde nuestro punto de vista ofrecen una visión amplia y globalizadora de las diferentes teorías conductistas y cognitivas.

Las aplicaciones concretas de ambas perspectivas al aprendizaje del cálculo reflejan una creencia distinta acerca de la naturaleza del conocimiento aritmético, cómo se adquiere éste y qué significa aprenderlo: los trabajos realizados desde una óptica asociacionista defienden que el aprendizaje del cálculo se imprime en la mente desde el exterior. Básicamente, este conocimiento se contempla como una colección de datos que se aprenden por medio de la memorización mecánica. En realidad, según Resnick y Ford (1981) el aprendizaje del cálculo desde una óptica asociacionista se fundamenta en interiorizar o copiar información. La teoría del aprendizaje por reestructuración aduce, en cambio, que el conocimiento no puede ser impuesto desde el exterior sino que debe elaborarse desde dentro (Baroody,

1988), a través de procesos comprensivos y en conexión con la experiencia previa de los niños. Pero, ¿cuál de estas dos teorías ofrece una explicación más convincente del aprendizaje del cálculo aritmético?.

La teoría asociacionista, que ha dominado el campo de la psicología por lo menos durante la primera mitad del siglo XX, sostiene que es muy importante que los niños memoricen ciertos datos y procedimientos hasta el punto que no tengan que pensarlos sino que los apliquen a los cálculos de forma rápida y casi automática, aspecto que hemos visto en algunos de sus planteamientos más representativos, formulados por Thorndike (1922) a partir de su libro *Psychology of Arithmetic*; Brownell (1928) o bien a partir de las Jerarquías de Aprendizaje de Gagné (1970). Según estos puntos de vista asociacionistas, la función de los ejercicios es desarrollar la respuesta automática, que se mide por una velocidad elevada.

Sin embargo, en los últimos decenios las teorías del aprendizaje por reestructuración han pasado a ser la fuerza dominante puesto que parece ofrecer una visión más exacta del aprendizaje de contenidos aritméticos (Baroody, 1988). Así, bastantes psicólogos y educadores sostienen en la actualidad que el aprendizaje de las habilidades aritméticas, incluso las más sencillas y elementales, debe partir de la comprensión más que limitarse a aprender de forma mecánica o de memoria los procedimientos y los datos. Argumentan que si se establece esta comprensión los niños podrán reconstruir los elementos que no recuerden, o incluso desarrollar sus propios procedimientos para llegar a la solución cuando les falle la memoria (Baroody, 1988).

Desde la perspectiva del aprendizaje por reestructuración, hemos analizado los enfoques teóricos siguientes: a) la psicología de la Gestalt; b) el Constructivismo: la psicología genética y los enfoques neopiagetianos); y c) la aritmética cognitiva y el procesamiento de la información.

Las aportaciones de la psicología de la Gestalt se basan en el planteamiento de Wertheimer (1959) al aprendizaje del cálculo, el cual reduce el aprendizaje

matemático a la elaboración de representaciones mentales de tipo gráfico y/o visual que faciliten el aprendizaje por discernimiento o la iluminación. Desde el enfoque constructivista, la psicología genética considera que el sujeto participa activamente en la adquisición de aprendizajes aritméticos, de manera que el número se construye mediante la síntesis de las estructuras lógico-matemáticas de clasificación y seriación, y las operaciones lógicas y aritméticas constituyen un solo sistema, donde las segundas resultan de la generalización y fusión de las primeras (Piaget e Inhelder, 1941a, 1941b; Piaget y Szeminska, 1941). Hemos revisado también las aportaciones de algunos autores neopiagetianos que realizan matizaciones generales en relación básicamente a los estadios de desarrollo (Case, 1985, Pascual-Leone, 1970) o bien reformulaciones aplicadas al aprendizaje del cálculo como Brissiaud (1989), o Kamii (1985, 1989, 1994), cuyos principios se basan en la abstracción y la representación.

Desde el enfoque de la aritmética cognitiva se han estudiado los procesos cognitivos implicados en el aprendizaje del cálculo, dando lugar a la aparición de distintos modelos explicativos que intentan describir qué ocurre dentro de las mentes de los niños al resolver operaciones aritméticas simples. Entre estos modelos destacan los siguientes:

- Modelo Analógico, formulado por Restle (1970).
- Modelo Digital o de conteo, desarrollado por Groen y Parkman (1972).
- Modelo de Recuperación-Comparación de Ashcraft y Battaglia (1978).
- Modelo de Distribución de Asociaciones de Siegler y Shrager (1984) y Siegler (1988).
- Modelo de Interferencia en Red de Campbell y Graham (1985).
- Modelo de Widaman et al (1986).
- Modelo de Zbrodoff y Logan (1990)
- Modelos de Red, elaborados por Geary y Widaman (1987, 1992) y Geary y Burlingham-Dubree (1989), entre otros.

Estos modelos, como hemos podido apreciar, hacen alusión a la memoria

como elemento fundamental en el procesamiento de la información, por lo que han sido formulados mayoritariamente desde el campo de la psicología de la memoria. A raíz de los datos aportados por estos modelos, que en algunos casos parten de postulados literalmente opuestos, subyacen las siguientes conclusiones generales relevantes para nuestra línea de investigación: aunque en la formulación de los primeros modelos se subrayaba que las tareas de cálculo de producción ($3+4=?$), que son las que hemos utilizado en nuestro estudio empírico, y las de verificación ($3+4=7$) implican procesos similares (Ashcraft y Bataglia, 1978), datos posteriores han confirmado que en tareas de producción el cálculo aritmético conlleva una recuperación de respuestas almacenadas en la memoria a largo plazo más una comparación, mientras que en tareas de verificación parece que la recuperación no es necesaria (Zbrodoff y Logan, 1990); en tareas de producción, la recuperación depende en buena medida de la fuerza asociativa que relaciona la operación con su respuesta correcta (Campbell y Graham, 1985), y esta fuerza asociativa aumenta con la edad (Siegler y Shrager, 1984; y Siegler, 1988); las tareas de producción y las de verificación implican distintos procesos de memoria de trabajo, como apuntan Blankenberger y Vorberg (1997) y Wenger y Carlson (1996), entre otros.

Finalmente, todavía dentro del enfoque de la aritmética cognitiva, hemos hecho alusión a las aportaciones efectuadas desde la teoría del procesamiento de la información, que a grandes rasgos parte de tres principios básicos en relación a la adquisición de destrezas de cálculo: a) la correspondencia; b) la integración y c) la conexión.

A modo de síntesis general, en este primer capítulo hemos pretendido efectuar una revisión de las principales teorías psicológicas que inciden en el aprendizaje del cálculo para intentar comprender con mayor detalle el conjunto de procesos mentales y, en general, el funcionamiento cognitivo que involucra el cálculo, aunque hemos obviado adrede todas las posibles dificultades que pueden aparecer durante su aprendizaje, puesto que va a ser el objeto de nuestro segundo capítulo.

De forma muy resumida, al abordar el aprendizaje del cálculo desde una perspectiva psicológica hemos visto el paulatino cambio de concepción de un sujeto pasivo hasta un sujeto que interviene activamente en el procesamiento de la información, donde la memoria -entendida como un proceso activo y no puramente como una copia literal- tiene un destacado papel.

2. APROXIMACIÓN PSICOLÓGICA A LAS DIFICULTADES DE APRENDIZAJE DEL CÁLCULO

“Frecuentemente los errores no son ilógicos, sino que responden a la aplicación de ciertas reglas que, aunque no sean correctas, implican en sí mismas la posesión de una determinada competencia lógico-matemática... De forma que el enfoque cognitivo nos lleva, en primer término, a formular una idea de gran importancia para el tema que nos ocupa: “¡Cuidado con los errores!. No deben provocarse pero tampoco dejarse de lado. Merecen más respeto del que parecen tener. Muchas veces son las únicas ventanas por las que podemos ver las mentes de los alumnos” (pp. 166).

Rivière (1990)

2.1. ASPECTOS PRELIMINARES

Desde una perspectiva global, el estudio de las dificultades de aprendizaje y los errores adyacentes que conllevan es objeto de interés por parte de la psicología cognitiva debido a dos razones fundamentales:

- a. El análisis de las producciones de los niños en momentos distintos de su evolución constituye una de las formas de estudiar el desarrollo humano.
- b. Puede proporcionar una ventana abierta al proceso de fabricación por parte del niño, como sugieren Álvarez et al. (1997); Baroody (1988) o Rivière (1990); entre otros.

A modo de ejemplo, reproducimos a continuación una síntesis del pensamiento de Baroody (1988) en relación a este aspecto:

“El análisis de los errores puede ser una importante fuente de información sobre las insuficiencias de los conocimientos subyacentes. El análisis de los errores sistemáticos es un medio valuosísimo para determinar qué paso de un algoritmo produce una dificultad y qué es necesario volver a enseñar específicamente” (pp. 73).

También Rico (1997), desde la propia matemática, argumenta y defiende el valor del error:

“El error es una posibilidad permanente en la adquisición y consolidación del conocimiento y puede llegar a formar parte del conocimiento científico que emplean las

personas o colectivos” (pp. 189),

Sin embargo, el estudio genérico de las dificultades de aprendizaje y los errores que conlleva abarca un gran abanico de temas que escapan de los objetivos de esta tesis, dado que nuestro interés fundamental reside en concretar si existe alguna relación entre memoria y cálculo. Tomando como punto de partida este objetivo general, en este segundo capítulo vamos a centrarnos exclusivamente en las dificultades específicas del aprendizaje del cálculo aritmético. De acuerdo con Ohlsson et al. (1992), la revisión de estos estudios puede proporcionarnos información relativa a los factores de tipo cognitivo que intervienen de una forma más o menos decisiva en la aparición de trastornos de cálculo, y en consecuencia puede aportarnos también alguna pista respecto al papel específico que juega la memoria de trabajo. De todas formas, existe a nuestro entender una limitación que debe tenerse en cuenta al emprender esta tarea: a pesar de que el estudio de los trastornos de cálculo está bastante extendido en el ámbito psicológico, tal como veremos a continuación en el análisis documental que hemos realizado, algunos autores como por ejemplo García y Jiménez (2000); Jordan (1995) o Silver et al. (1999), entre otros, indican acertadamente que el estudio de los trastornos de cálculo ha suscitado menor interés que el análisis de los trastornos de otros aprendizajes instrumentales como la lectura (para una revisión sobre el tema, consultar Baqués, 1995a).

2.2. PANORAMA DE LOS ESTUDIOS SOBRE DIFICULTADES DE APRENDIZAJE DEL CÁLCULO

De forma previa a la revisión de los principales resultados empíricos relativos a este trastorno hemos considerado oportuno realizar un breve análisis documental que permitiese obtener una panorámica general de los estudios sobre dificultades de aprendizaje del cálculo en el marco de los estudios de psicología. De forma más pormenorizada, este análisis pretende dos objetivos simultáneos:

- a. En primer lugar, identificar el peso que tienen los trabajos sobre dificultades de aprendizaje del cálculo dentro del conjunto de investigaciones sobre dificultades

de aprendizaje.

- b. En segundo lugar, conocer cuales son los temas que han despertado mayor interés dentro de los estudios sobre dificultades de aprendizaje del cálculo.

Para obtener estos datos hemos utilizado los artículos donde aparece el descriptor genérico “learning disabilities” introducidos en la base de datos Psyclit/ PsycINFO (Information Services in Psychology de la American Psychological Association) en las tres últimas décadas, al considerar que se trata de un periodo suficientemente amplio como para permitirnos obtener una visión global de los estudios en esta línea. Concretamente, el periodo estudiado va de 1970 hasta 1999 (no hemos tenido en cuenta los datos del año 2000 puesto que en el momento de efectuar el análisis los datos de este año estaban todavía incompletos).

Respecto al primero de los objetivos planteados, que consiste en concretar el peso que tienen los trabajos sobre dificultades de aprendizaje del cálculo dentro del conjunto de investigaciones sobre dificultades de aprendizaje, el análisis realizado indica que durante el periodo 1970-1999 se han publicado un total de 12151 artículos de dificultades de aprendizaje, de los cuales un 9,2% tratan sobre distintos aspectos relacionados con las matemáticas, dato que hemos obtenido cruzando el descriptor “learning disabilities” con los descriptores de matemáticas siguientes: “mathematics”, “maths”, “problem solving”, “arithmetic” o “calculus”. Dentro del conjunto de los trabajos sobre dificultades de aprendizaje de las matemáticas (1129 referencias en total), los campos que han suscitado mayor interés son, a partir de los datos cuantitativos obtenidos, el campo de la resolución de problemas (35,83%) y el de los trastornos de cálculo (29,76%), que representan respectivamente el 3,3% y el 2,74% del total de artículos sobre dificultades de aprendizaje publicados durante nuestro periodo de referencia.

A continuación hemos efectuado el mismo análisis década a década con el objeto de obtener datos más concretos:

- En la década de los setenta se publican el 14,7% de los artículos sobre dificultades de aprendizaje (1785 referencias) del periodo 1970-1999. Los artículos sobre dificultades de aprendizaje de las matemáticas representan el 7,05% del total de artículos sobre dificultades de aprendizaje; y los artículos sobre dificultades de aprendizaje del cálculo constituyen el 47,6% de los artículos sobre dificultades de aprendizaje de las matemáticas y el 3,36% del total de artículos genéricos sobre dificultades.
- En la década de los ochenta se publican el 44,6% de los artículos sobre dificultades de aprendizaje (5420 referencias). Los trabajos sobre dificultades de aprendizaje de las matemáticas aumentan en relación a la década de los setenta y constituyen el 9,11% de los artículos genéricos sobre dificultades; mientras que los estudios sobre dificultades de aprendizaje del cálculo representan el 28,14% de los artículos sobre dificultades de aprendizaje de las matemáticas y el 2,56% del total de artículos sobre dificultades de aprendizaje de la década, descendiendo levemente su peso en relación a la década de los setenta.
- En la década de los noventa se publican el 40,7% restante de los artículos sobre dificultades de aprendizaje (4946 referencias). De estos estudios, un 10,08% son estudios relativos a dificultades de aprendizaje de las matemáticas. Respecto a los trabajos sobre dificultades de aprendizaje del cálculo, en la década de los noventa representan el 26,85% del total de los artículos sobre dificultades de aprendizaje de las matemáticas y el 2,71% de las referencias sobre dificultades de aprendizaje en general.

Una vez obtenidos estos datos genéricos, y dado que nuestro interés fundamental consiste en determinar la incidencia de la memoria, hemos efectuado un análisis en el que hemos contabilizado el total de artículos sobre dificultades de aprendizaje de las matemáticas que se han centrado en aspectos relativos a la memoria. Hemos obtenido este dato cruzando el descriptor "learning disabilities" con los descriptores de matemáticas "mathematics", "maths", "problem solving", "arithmetic" o "calculus" y con el descriptor genérico de memoria "memory". Los

datos obtenidos indican que en la década de los setenta, de los 126 artículos sobre dificultades de aprendizaje de las matemáticas, 6 de ellos aluden a temas de memoria, lo cual representa un 4,76%; en los años ochenta, el porcentaje disminuye hasta el 2,02% (10 referencias de 494 artículos); y finalmente, en la década de los noventa el porcentaje aumenta de forma considerable, puesto que el 5,21% de los artículos sobre dificultades de aprendizaje de las matemáticas inciden en la memoria (26 artículos de un total de 499).

Así, pues, en el análisis década a década, destacamos a grandes rasgos los siguientes aspectos:

- La década más productiva respecto al volumen de publicaciones genéricas sobre dificultades de aprendizaje es la década de los ochenta, con un total del 44,6% del total.
- Respecto a los estudios sobre dificultades de matemáticas, se aprecia un incremento progresivo década a década (el 7,05% en los setenta; el 9,11% en los ochenta y el 10,8% en los noventa).
- Los estudios sobre dificultades de matemáticas que inciden en la memoria han aumentado en la última década (5,21%), después de haber sufrido un retroceso en la década de los ochenta (2,02%) respecto a la década de los setenta (4,76%).
- Los estudios sobre dificultades de aprendizaje del cálculo han tendido a descender dentro del conjunto de trabajos sobre dificultades matemáticas (47,6% en los setenta; 28,14% en los ochenta y 26,85% en los noventa). Sin embargo, si comparamos estos trabajos con el conjunto de publicaciones sobre dificultades de aprendizaje, entonces se produce un comportamiento distinto: a pesar de que se produce un descenso en los ochenta, se observa una recuperación en los años noventa (3,36% en los setenta; 2,56% en los ochenta y 2,71% en los noventa).

Finalmente, presentamos los datos cuantitativos correspondientes al número

de publicaciones aparecidas en Psyclit/PsycINFO cada cinco años, lo cual va a permitirnos conocer todavía con mayor detalle la evolución que han seguido los estudios sobre dificultades de aprendizaje del cálculo en los últimos treinta años tanto dentro del conjunto de los trabajos sobre dificultades como, más genéricamente, dentro del conjunto de investigaciones de psicología.

Queremos precisar que los datos cuantitativos que aparecen en la Tabla siguiente no corresponden a todo el lustro, sino únicamente al primer año de cada lustro. A modo de ejemplo, en el año 1980 se introdujeron 27986 referencias en la base de datos Psyclit/PsycINFO, de las cuales 393 correspondieron a publicaciones sobre dificultades de aprendizaje; 26 fueron trabajos sobre dificultades de aprendizaje de las matemáticas y 9 trabajos incidieron específicamente en las dificultades de aprendizaje del cálculo.

AÑO	TOTAL DE PUBLICACIONES EN PSYCLIT/ PSYCINFO	DIFICULTADES DE APRENDIZAJE	DIFICULTADES DE APRENDIZAJE DE LAS MATEMÁTICAS	DIFICULTADES DE APRENDIZAJE DEL CÁLCULO
1970	21095	3	0	0
1975	28652	213	15	10
1980	27986	393	26	9
1985	48417	689	66	19
1990	57006	579	50	16
1995	58493	488	30	14
1999	59843	396	54	19

Además de la Tabla anterior, en la Figura 8 de la página siguiente presentamos un gráfico en el que se pueden comparar visualmente los datos bibliométricos anteriores.

Como va a poder apreciarse a continuación, hemos excluido del gráfico el número de publicaciones totales introducidas en Psyclit/PsycINFO durante los años estudiados al tratarse de un valor mucho más elevado que el resto, lo cual hubiera conllevado una distorsión visual importante.

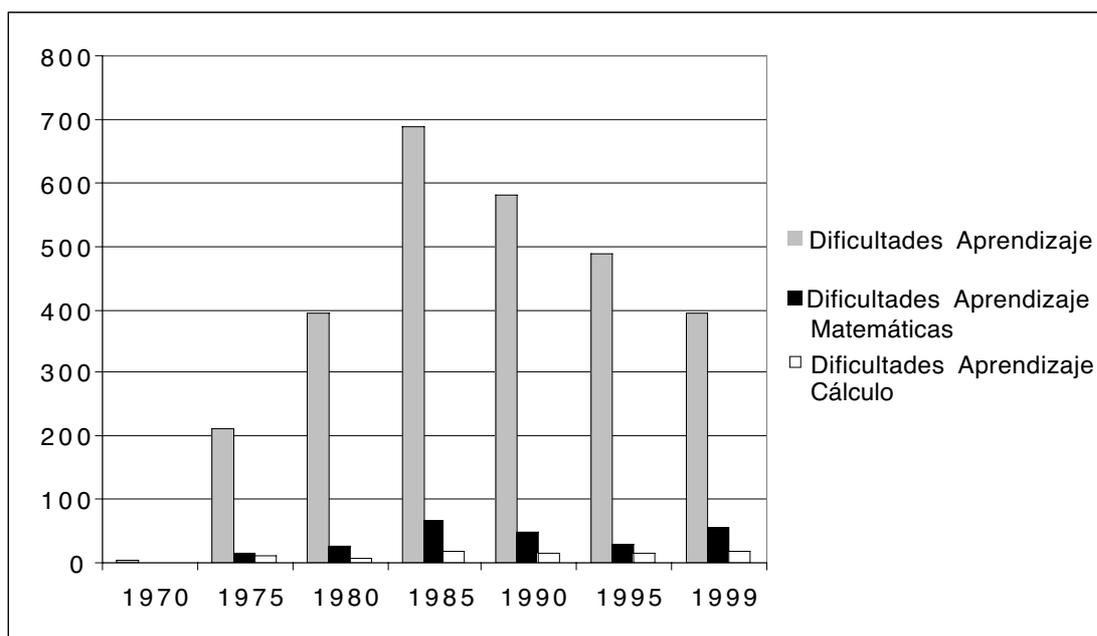


Figura 8: Comparación de publicaciones de dificultades de aprendizaje, dificultades de aprendizaje de las matemáticas y dificultades de aprendizaje del cálculo

Muy sintéticamente, a partir de los datos que figuran en la Tabla anterior y en la Figura 8, constatamos que el volumen de publicaciones sobre dificultades de aprendizaje en general va incrementándose de forma muy considerable desde 1970 hasta 1985, fecha a partir de la cual este tipo de estudios sufre un paulatino descenso hasta 1999, a pesar de que en ningún momento se retrocede hasta el escaso número de publicaciones de los años setenta del siglo XX, como se puede verificar en la Figura 8.

Respecto al número de artículos sobre dificultades de aprendizaje de las matemáticas y del cálculo respectivamente se repite una tendencia similar, aunque a diferencia del comportamiento observado en los estudios genéricos sobre dificultades de aprendizaje, en este caso se aprecia una notable recuperación en 1999, lo cual podría ser un indicador del hecho que las matemáticas en general y el cálculo en particular están adquiriendo en los últimos años un mayor interés dentro del conjunto de estudios sobre dificultades de aprendizaje. En 1985 por ejemplo, momento en el que se produce el punto de inflexión, los artículos sobre dificultades de aprendizaje de las matemáticas representaron el 9,58% del total de los artículos

de dificultades de aprendizaje publicados aquel año; y los artículos de dificultades de aprendizaje del cálculo el 28,79% de las referencias sobre dificultades de aprendizaje de las matemáticas y el 2,76% del total de las publicaciones genéricas sobre dificultades de aprendizaje; en 1999, en cambio, el porcentaje de los artículos sobre dificultades de aprendizaje que se refieren a las dificultades en la adquisición de contenidos matemáticos aumenta hasta el 13,64%, y de éstos, el 35,18% corresponden a trabajos sobre cálculo. En conjunto, en este mismo año los trabajos sobre dificultades de aprendizaje del cálculo representan el 4,79% del total de estudios sobre dificultades de aprendizaje.

Respecto al segundo de los objetivos que nos hemos planteado en este breve análisis documental, que consistía en conocer cuales son los temas que han despertado mayor interés dentro de los estudios sobre dificultades de aprendizaje del cálculo, hemos realizado un análisis cualitativo. Para efectuar este análisis, hemos seguido el procedimiento siguiente:

- a. En primer lugar, hemos procedido a la lectura de todos los “abstrats” de los trabajos sobre dificultades de aprendizaje del cálculo introducidos en Psyclit/PsycINFO desde 1970 hasta 1999, con el objeto de determinar su contenido. Hemos obtenido estos trabajos cruzando el término genérico “learning disabilities” con los descriptores “arithmetic” o “calculus”.
- b. En segundo lugar, hemos agrupado los contenidos en grandes temas y hemos contabilizado el número de referencias década a década, y hemos calculado el porcentaje que representan del global.

A continuación presentamos los datos obtenidos, siendo conscientes de la subjetividad que en algunos casos puede haber conllevado la categorización de los contenidos en grandes bloques temáticos. Como puede apreciarse en la siguiente Tabla, presentamos los datos cuantitativos distribuidos en décadas para poder observar el posible incremento década a década, y además indicamos el número total de publicaciones de cada bloque temático y el porcentaje del total que representa:

BLOQUES TEMÁTICOS	N° DE REFERENCIAS			N	%
	1970-1979	1980-1989	1990-1999		
Diagnóstico de las dificultades de aprendizaje del cálculo; uso y comparación de distintos tests psicométricos para su medida; construcción y validación de tests; conceptualización del trastorno; etc.	26	44	26	96	25,6
Programas educativos: instrucción asistida por ordenador; autoinstrucción; metodología del profesor; estrategias del alumno; metacognición; etc.	16	37	29	82	21,9
Estudios neurológicos y/o neuropsicológicos: localización de trastornos en distintas áreas cerebrales; efecto de lesiones cerebrales; etc.	6	17	15	38	10,1
Memoria: trastornos de la memoria; dificultades de recuperación desde la memoria a largo plazo; papel de la memoria de trabajo; etc.	3	11	10	24	6,4
Atención: trastornos de atención (hiperactividad).	1	8	13	22	5,9
Percepción: efecto de la percepción visual; la percepción auditiva; etc.	7	10	3	20	5,3
Lenguaje y lectura: comparación trastornos de cálculo con trastornos de lectura; etc.	4	5	10	19	5,1
Estudios con sujetos que sufren distintas patologías: síndromes (Turner, Gerstmann, Gilles de la Tourette, Klinefelter; etc.); hándicaps físicos (espina bífida, distrofia muscular de Duchene, etc.); trastornos psiquiátricos (esquizofrenia); epilepsia; leucemia; efectos de la medicación; etc.	1	2	13	16	4,3
Personalidad: autoestima; autoconcepto; autoeficacia; síntomas depresivos; problemas de conducta; etc.	2	3	9	14	3,7
Taxonomías: clasificaciones sobre los trastornos de cálculo.	0	4	8	12	3,2
Inteligencia no verbal: coordinación motora; habilidad espacial; etc.	3	3	5	11	2,9
Coefficiente de inteligencia: medida y efecto del C.I. en los trastornos de cálculo.	0	1	6	7	1,8
Estatus social y tipo de estructura familiar	2	1	2	5	1,3
Delincuencia juvenil	1	1	1	3	0,8
Nacimiento prematuro	1	0	2	3	0,8
Análisis de parámetros fisiológicos: metabolismo de las catecolaminas.	1	0	0	1	0,3
Análisis de actos reflejos	1	0	0	1	0,3
Lugar geográfico	0	1	0	1	0,3
TOTAL	75	148	152	375	100

Con el objeto de facilitar el análisis de los datos expuestos al lector, en la Figura 9 presentamos un gráfico en el que pueden apreciarse visualmente los porcentajes relativos a cada una de las categorías establecidas al efectuar el análisis cualitativo de las publicaciones de dificultades de aprendizaje del cálculo. En este gráfico, hemos considerado oportuno aglutinar los estudios cuyo porcentaje total de publicaciones durante las tres últimas décadas del siglo XX no superan el 1% del total en una única categoría, que hemos denominado "otros".

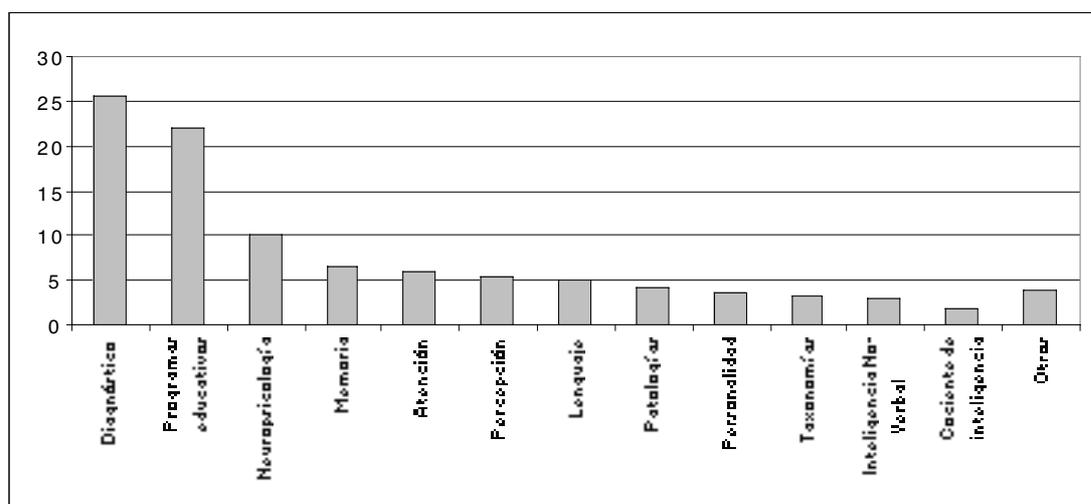


Figura 9: Porcentajes de cada uno de los bloques temáticos de las publicaciones de dificultades de aprendizaje del cálculo entre 1970 y 1999.

A partir de los datos expuestos en la Tabla anterior y en la Figura 9, podemos destacar los siguientes aspectos:

- La década de los noventa del siglo XX ha sido la más productiva en relación al volumen de artículos publicados sobre dificultades de aprendizaje del cálculo, aunque seguida muy de cerca por la década de los ochenta.
- Los temas que han despertado mayor interés en los estudios sobre trastornos de cálculo son sobretodo su diagnóstico y la intervención educativa posterior, que representan el 25,6% y el 21,9% respectivamente del total de investigaciones de las tres décadas. De todas formas, queremos destacar que el auge de este tipo de investigaciones se produce durante la década de los ochenta, mientras que en la

década de los noventa se observa un retroceso.

- La memoria, que es el tema que más nos interesa puesto que como hemos indicado nuestro objeto fundamental consiste en detectar si existe alguna relación entre memoria y cálculo, ocupa el cuarto lugar en la categorización efectuada, que consta de 18 bloques temáticos en total. El interés de este proceso psicológico en los estudios sobre trastornos de cálculo, que representa un 6,4% del total de este tipo de investigaciones, únicamente es superado por estudios genéricos sobre diagnóstico, intervención educativa y por estudios neurológicos y/o neuropsicológicos. Además, podemos apreciar que se produce un incremento de las investigaciones sobre memoria en la década de los ochenta y noventa en relación a la década de los setenta.
- Otros procesos psicológicos que se han vinculado con los trastornos de cálculo son la atención (un 5,9%); la percepción (5,3%) y el lenguaje (5,1%), aunque como podemos apreciar, durante el periodo revisado ocupan un volumen de investigaciones algo menor que los estudios sobre memoria. En el análisis década a década, podemos apreciar que los estudios que relacionan trastornos de cálculo con percepción han tendido a disminuir en la última década, mientras que los estudios sobre atención y lenguaje han aumentado considerablemente.
- Existe un grupo de temas de los cuales se han ido publicando regularmente trabajos, pero que en el total de estudios sobre trastornos de cálculo son menos significativos puesto que en todos los casos representan un porcentaje inferior al 5% del total. Estos bloques temáticos aglutinan estudios sobre: sujetos que sufren distintas patologías (4,3%); personalidad (3,7%); taxonomías (3,2%); inteligencia no verbal (2,9%); coeficiente de inteligencia (1,8%) o estatus social (1,3%). En todos los casos, el mayor volumen de publicaciones se produce en la década de los noventa.
- Finalmente, hay otros grupos de trabajos que representan menos del 1% del total de investigaciones sobre trastornos de cálculo, y que a nuestro entender se

podrían considerar estudios anecdóticos al no superar más de tres publicaciones en todo el periodo 1970-1999. Algunos de estos temas son la delincuencia juvenil o el nacimiento prematuro (0,8%), y el análisis de parámetros fisiológicos, actos reflejos o lugar geográfico (0,3%).

Una vez determinado el peso que dentro del conjunto de investigaciones sobre dificultades de aprendizaje tienen los trabajos específicos sobre dificultades de aprendizaje del cálculo, así como los temas de estos estudios que han suscitado mayor interés, a continuación procedemos a conceptualizar teóricamente los trastornos de cálculo.

2.3. LOS TRASTORNOS DE CÁLCULO: CONCEPTO Y CLASIFICACIÓN

Históricamente se han utilizado distintos términos científicos para referirse a las dificultades de aprendizaje del cálculo aritmético. Algunos de los más representativos son “acalculia”, que se refiere a una discapacidad debida a una lesión específica a nivel cerebral, o “discalculia” cuando no existe una disfunción neurológica (Geary, 1993; Giordano et al, 1976; Levin et al., 1996; McCloskey et al., 1985; Morrison y Siegel, 1991b; Temple, 1991; entre otros). Otros autores han usado términos más genéricos como “incapacidad aritmética” (Morrison y Siegel, 1991a; entre otros), aunque actualmente se ha ido substituyendo por “trastorno del cálculo” (American Psychiatric Association, 1995), que es el término que hemos adoptado.

Debemos partir de la base que no existe un acuerdo generalizado sobre el concepto de trastorno de cálculo, como indican Ohlsson et al. (1992):

“La noción de dificultad es central en el diseño de la instrucción matemática, aunque no hay una interpretación precisa de este concepto ...” (pp. 462).

A pesar de ello, nos parece suficientemente válida la definición del DSM-IV (American Psychiatric Association, 1995), que conceptualiza el trastorno de cálculo como:

“Una capacidad aritmética (medida mediante pruebas normalizadas de cálculo o razonamiento matemático administradas individualmente) que se sitúa sustancialmente por debajo de la esperada en individuos de edad cronológica, coeficiente de inteligencia y escolaridad concordes con la edad (Criterio A). El trastorno de cálculo interfiere significativamente en el rendimiento académico o las actividades de la vida cotidiana que requieren habilidades para las matemáticas (Criterio B). Si hay un déficit sensorial, las dificultades en la aptitud matemática deben exceder de las asociadas habitualmente a él (Criterio C)” (pp. 52).

Según el mismo manual de diagnóstico, la prevalencia del trastorno de cálculo se ha estimado en aproximadamente uno de cada cinco casos de trastorno del aprendizaje. Se supone que alrededor del 1% de los niños en edad escolar sufre un trastorno de cálculo. Igualmente, el trastorno de cálculo rara vez se diagnostica antes de finalizar el primer curso de Primaria (6-7 años), y con frecuencia se pone de manifiesto durante el segundo o tercer curso, aspecto que ha sido considerado en nuestro diseño experimental al realizar el estudio empírico con una muestra de niños de segundo curso de Primaria.

Respecto a los principales tipos de trastornos del cálculo, y los intentos de clasificación subyacentes, debe tenerse presente que existen diferencias lógicas y evidentes en función de la perspectiva científica de la que se parte. Como veremos posteriormente, el abordaje contemporáneo de los estudios sobre trastornos de cálculo se ha efectuado, según Geary (1993) o Morrison y Siegel (1991a), entre otros, desde tres grandes perspectivas científicas distintas: a) la perspectiva psicológica, centrada sobretudo en la corriente cognitiva; b) la perspectiva neurológica; y c) la perspectiva genética, en menor medida.

No pretendemos entrar en profundidad en el estudio de las distintas taxonomías establecidas a partir de las tres perspectivas mencionadas dado que nuestro interés fundamental reside en la perspectiva psicológica, por lo que vamos a describir algunos intentos de clasificación efectuados desde este ángulo. A partir de los análisis cuantitativo y cualitativo efectuados (ver página 60), hemos observado que en el periodo revisado (1970-1999), las investigaciones que inciden explícitamente en la clasificación de los trastornos de cálculo se publican en los años ochenta y sobretudo en los noventa del siglo XX, y se trata de capítulos de libros que ofrecen alguna taxonomía (DeLuca et al., 1991; Morris, R.D. y Walter, 1991;

entre otros) o bien trabajos empíricos que parten de muestras de sujetos adolescentes o adultos (Christopher et al., 1989; Davis, 1994; Friedman, 1990; Shafir y Siegel, 1994; entre otros), que se supone ya tienen adquiridas las nociones y habilidades aritméticas elementales, y en menor medida de muestras de niños (D'Amato et al., 1998; DeLuca, 1988; Silver et al., 1999; entre otros).

Con anterioridad a 1970, los objetivos de estos estudios eran, según una exhaustiva revisión realizada por Radatz (1980), básicamente los cinco siguientes:

- a. Listar todas las técnicas con errores potenciales.
- b. Determinar la frecuencia de errores en estas técnicas en los distintos grupos de edad.
- c. Analizar las dificultades especiales, particularmente en la división escrita y las operaciones con el número 0.
- d. Determinar la persistencia de errores individuales.
- e. Intentar clasificar los errores en grupos.

Reproducimos a continuación, por su valor histórico, los artículos revisados por Radatz (1980):

	PUBLICACIONES ALEMANAS	PUBLICACIONES ANGLO-AMERICANAS
	Ranschburg 1904, 1916 Hylla 1916	Phelps 1913 Gist 1917, Uhl 1917; Counts 1917 Thorndike 1917
1920	Weimer 1922, 1923 Kiebling 1925, Korn 1926 Weimer 1925, 1926; Rose 1928 Seemann 1929; Kiebling 1928, 1929 Weimer 1929; Fettweis 1929	Osbur 1924; Myers 1924 Buswell 1925, 1926
1930	Seemann 1931; Weimer 1931 Kiebling 1932, 1934 Weimer 1939	Brueckner 1930 Burge 1932 Brueckner 1935 Schonell 1937, Williams 1937 Grossnickel 1939
1940	Seemann 1949	Holland 1942
1950	Schaffrath 1959	Brueckner 1955 Schonell 1957

1960	Monsheimer 1960; Kiebling 1960 Rose 1961 Schaffrath 1964 Krueger 1965 Schlaak 1968	Harvey 1965 Schacht 1967 Smith 1968; Roberts 1968
------	--	---

Muy brevemente, a partir de los datos anteriores podemos apreciar que durante las primeras seis décadas del siglo XX van publicándose de forma sistemática algunos estudios que, como hemos indicado, inciden sobretudo en los errores que conllevan los trastornos de cálculo. Podemos observar también que el volumen de publicaciones es similar en todas las décadas, salvo en los años cuarenta y cincuenta, posiblemente por los efectos causados por la 2ª Guerra Mundial (1939-1945) y la larga crisis que sucedió a este evento.

Los años setenta del siglo XX parecen ser de nuevo muy poco productivos en relación a los intentos de clasificación de los trastornos de cálculo, puesto que no hemos encontrado referencias explícitas en la base de datos Psyclit/PsycINFO durante esta década. A pesar de esta escasez, otras líneas de revisión nos han permitido detectar algunas aportaciones, como por ejemplo la realizada por Giordano et al. (1976), quienes sugieren que los trastornos de cálculo pueden clasificarse a partir de los déficits manifestados en uno o más de los siguientes seis aspectos:

- a. En los números y signos: no identificación; confusión de números de formas parecidas; confusión de signos de formas semejantes; confusión de números de sonidos parecidos, inversiones, confusiones de números simétricos.
- b. En la seriación numérica: traslaciones; repetición de cifras; omisión de cifras; perseverancia; no abreviación.
- c. En las escalas: repetición de cifras; omisión; perseverancia; no abreviación; rotura.
- d. En las operaciones: colocación incorrecta de las columnas; iniciar la suma y la

resta por la izquierda; sumar o restar la unidad con la decena; sumar o restar la unidad con la centena; realizar media operación con la mano izquierda, y la otra mitad, con la derecha; multiplicación (iniciar la operación multiplicando el primer número de la izquierda del multiplicando o bien del multiplicador).

- e. En los problemas: incomprensión del enunciado; lenguaje inadecuado; incomprensión de la relación entre el enunciado y la pregunta del problema; fallas del mecanismo operacional; fallas del razonamiento.
- f. En los cálculos mentales, con dificultades en el uso de los números dígitos y multidígitos (escalas, tablas, operaciones y problemas).

Radatz (1979) elabora una nueva clasificación de los trastornos de cálculo a partir del factor que interviene en su aparición, e indica cinco grupos:

- a. Dificultades de lenguaje: aprendizaje de conceptos, símbolos o lenguaje específicos.
- b. Dificultades en la obtención de información espacial: representación icónica de situaciones matemáticas.
- c. Dominio insuficiente de prerequisites relativos a destrezas, hechos y conceptos.
- d. Asociaciones incorrectas o rigidez del pensamiento: errores de perseverancia; de asociación; de interferencia; de asimilación o errores de transferencia negativa desde tareas previas.
- e. Aplicación de estrategias irrelevantes.

Ya en la década de los ochenta, Fletcher (1985) clasifica a los sujetos en dos grupos: a) niños con problemas de lectura; y b) niños con problemas aritméticos y niveles normales de lectura. A partir de esta primera clasificación, Fletcher y sus

colaboradores elaboran otras categorizaciones en estudios efectuados durante la década de los noventa a partir de criterios más específicos, como subgrupos con dificultades de ortografía, etc. Todavía en los años ochenta, Cauzinille-Marmèche y Weil-Barais (1989) sugieren tres nuevas causas susceptibles de producir errores:

- a. Los programas de enseñanza, que tienden a no considerar las características psicológicas de los niños y se basan poco en su desarrollo cognitivo.
- b. Los conceptos y procesos, que demasiado frecuentemente se alejan de la vida real de los niños.
- c. Los simbolismos, que a menudo conllevan importantes dificultades de interpretación.

En los años noventa del siglo XX, Pinchback (1990) replica el estudio efectuado por Radatz (1979) y confirma todas las causas de errores citadas en el estudio preliminar excepto una: las dificultades para obtener información espacial, lo que vendría a indicar que el cálculo está poco relacionado con la habilidad espacial. De todas formas, paulatinamente, la tendencia general de los estudios cuyo objeto es clasificar los trastornos de cálculo es partir de las causas más inmediatas que los originan. En esta línea, Jordan (1995), por ejemplo, expone que en los últimos años el estudio de las causas de los trastornos aritméticos se basa en el análisis de tres aspectos distintos: a) el conteo; b) el cálculo; y c) el uso de estrategias. Rourke y Tsatsanis (1995), por su lado, identifican tres subtipos distintos en función de su habilidad en distintas destrezas cognitivas: a) un grupo de incapacidad general (lectura, pronunciación y aritmética); b) un grupo con incapacidad de lectura; y c) un grupo de incapacidad aritmética, en la línea ya iniciada por Fletcher (1985). Posteriormente, Silver et al. (1999), en un estudio empírico con niños de 9-13 años de edad cuyo objetivo consiste en determinar la estabilidad de los distintos tipos de trastornos aritméticos, clasifica a los sujetos en base a su nivel de rendimiento en cálculo, lectura y ortografía: a) niños que tienen un trastorno de cálculo únicamente; b) niños que tienen un trastorno de cálculo y de

lectura; c) niños que tienen un trastorno de cálculo y de ortografía; y d) niños que tienen un trastorno de cálculo, lectura y ortografía. De forma muy resumida, llegan a la conclusión que estas categorías de niños son estables (más de la mitad de los niños continúan mostrando tales déficits después de más de un año y medio, tanto si han recibido instrucción como si no), y el grupo más estable es el que presenta trastornos múltiples de cálculo, lectura y ortografía.

A modo de síntesis, podemos concluir que mientras los estudios psicológicos realizados hasta los años setenta del siglo XX pretenden identificar sobretodo los tipos de errores más frecuentes que realizan los niños en tareas de cálculo, los estudios contemporáneos tienden a comparar las producciones de los niños en función de su nivel de rendimiento en distintas habilidades cognitivas. El diseño más habitual consiste en medir estas habilidades cognitivas a través de tests psicométricos, y a partir de los datos obtenidos establecer categorías. Algunos de los instrumentos más utilizados son el Wechsler Intelligence Scale for Children-Revised (WISC-R), de Wechsler (1974); el Wide Range Achievement Test-R (WRAT), de Jastak y Wilkinson (1984); el Woodcock-Johnson Psycho-Educational Battery-Revised (WJ-R), de Woodcock y Johnson (1990); entre otros.

2.4. PERSPECTIVAS DE ESTUDIO DE LOS TRASTORNOS DE CÁLCULO

Aunque nuestro objeto de interés fundamental, como hemos indicado, consiste en identificar los factores de orden cognitivo que repercuten en los trastornos de cálculo desde una perspectiva psicológica, hemos creído necesario disponer de una visión más global de las distintas aproximaciones científicas a dichos trastornos. Esta incursión va a proporcionarnos información relativa a los distintos factores que intervienen de una forma más o menos decisiva en la aparición de trastornos de cálculo, y en consecuencia nos va a permitir distinguir con mayor detalle el papel que juega cada uno de ellos.

Morrison y Siegel (1991a) indican que históricamente la investigación sobre la incapacidad aritmética se ha realizado desde dos perspectivas científicas distintas:

a) un modelo neuropsicológico, y b) un modelo denominado de déficits educativos. Geary (1993), por su lado, expone que la incapacidad de algunos sujetos ante tareas de cálculo puede ser estudiada desde tres componentes distintos: a) cognitivo; b) neuropsicológico; y c) genético. A raíz de los intentos de clasificación de Geary (1993) y Morrison y Siegel (1991a) observamos que distintos factores de orden cognitivo, neuropsicológico y genético pueden contribuir a la aparición de déficits. Respetando a grandes rasgos el criterio anterior, partimos de las siguientes perspectivas de estudio para exponer las distintas aproximaciones científicas que se han realizado en los últimos años:

- a. La perspectiva psicológica, centrada en la corriente cognitiva (Geary, 1993; Geary y Brown, 1991; Geary et al., 1991; Morrison y Siegel, 1991a, 1991b; Siegel y Ryan, 1988, 1989; Sokol et al., 1991; entre otros).
- b. La perspectiva neurológica o neuropsicológica (Annet y Manning, 1990; Luria y Tsvetkova, 1981; entre otros) y neuropsicopedagógica (Navarra et al., 1998; entre otros).
- c. La perspectiva genética (Gillis y Defries, 1993; entre otros).

2.4.1. La perspectiva psicológica

Esta perspectiva es la que ha dado lugar a un mayor número de investigaciones relativas a los trastornos de cálculo. De forma muy resumida, el objeto de estos trabajos en los últimos treinta años (periodo 1970-1999), como puede apreciarse en los análisis cuantitativo y cualitativo que hemos realizado (ver página 60), consiste sobretudo en incidir en el diagnóstico de los trastornos de cálculo; aportar programas educativos; o bien analizar la incidencia de distintos procesos psicológicos básicos como la memoria, la atención, la percepción, el lenguaje, etc.; entre otros aspectos con un peso menor como el estudio de factores actitudinales-afectivos como la motivación, la personalidad, etc.

a. Estudios sobre el diagnóstico de los trastornos de cálculo

Estos estudios consisten sobretodo en comparar distintos grupos de sujetos en base a su nivel de habilidad en distintas destrezas cognitivas que han sido medidas previamente utilizando distintos instrumentos de medida, como por ejemplo el Wechsler Intelligence Scale for Children-Revised (WISC-R), de Wechsler (1974); el Wide Range Achievement Test-R (WRAT), de Jastak y Wilkinson (1984); el Woodcock-Johnson Psycho-Educational Battery-Revised (WJ-R), de Woodcock y Johnson (1990); entre otros, como ya hemos indicado anteriormente. Estos trabajos, realizados por Fletcher (1985), Siegel y Ryan (1988, 1989); Morrison y Siegel (1991a) o Jordan (1995); entre muchos otros, parten de la premisa que las dificultades de aprendizaje de los estudiantes en general y de los niños con problemas aritméticos en particular pueden ser medidos tomando como base su nivel intelectual y/o su rendimiento académico.

Algunas de las destrezas cognitivas que tienden a usarse de forma más habitual para diagnosticar los trastornos de cálculo de los niños son el conocimiento de la recta numérica (la habilidad para contar) y el desarrollo de estrategias.

Respecto al dominio de la recta numérica, muy sintéticamente, los trabajos revisados parten de la premisa que la habilidad para contar es la base de la aritmética (Bermejo y Lago, 1990; Geary, 1993; y Serrano y Denia, 1987; entre otros). Desde esta perspectiva, se considera que algunos trastornos aritméticos son debidos a déficits específicos en alguno de los cinco principios implicados en tal habilidad:

- a. Principio de correspondencia uno-a-uno: asociar una etiqueta o palabra a cada objeto de una serie.
- b. Principio de orden estable: las etiquetas se dan en un orden estable y repetible.
- c. Principio de cardinalidad: el número final de una enumeración representa a todos los elementos del conjunto.

- d. Principio de abstracción: se preocupa de definir aquello que es contable.
- e. Principio de irrelevancia del orden: los ítems pueden ser contados en cualquier secuencia.

Desde el ámbito de estudio del desarrollo de distintas estrategias, algunos trabajos demuestran que la falta de destreza en su utilización conlleva trastornos de cálculo. Por ejemplo, Russell y Ginsburg (1984) efectúan un estudio comparativo con tres grupos de 27 sujetos cada uno: niños con dificultades matemáticas, niños de la misma edad sin dificultades y un grupo de chicos más jóvenes normales. Llegan a la conclusión que en el cálculo escrito el grupo de niños con dificultades presentan más errores debido sobretodo al uso sistemático de estrategias que llevan a tales errores. Hope y Sherill (1987) a partir de un estudio con 286 estudiantes universitarios que son sometidos a una tarea de cálculo mental (con multiplicaciones), pretenden determinar las estrategias más frecuentemente utilizadas, y llegan a la conclusión que los sujetos con dificultades aritméticas utilizan estrategias lentas e inapropiadas. Sokol et al. (1991) diseñan un modelo explicativo que describe cómo algunas dificultades de cálculo podrían ser debidas a la lentitud en el uso de tales estrategias. En este modelo relativo al procesamiento cognitivo de los números y del cálculo, cuya representación esquemática puede apreciarse en la Figura 10, se distinguen dos sistemas o mecanismos:

- a. Sistema de procesamiento de números, que comprende los mecanismos de comprensión y producción de números.
- b. Sistema de cálculo, que contiene los mecanismos de cálculo necesarios para realizar operaciones aritméticas.

MECANISMOS DE CÁLCULO

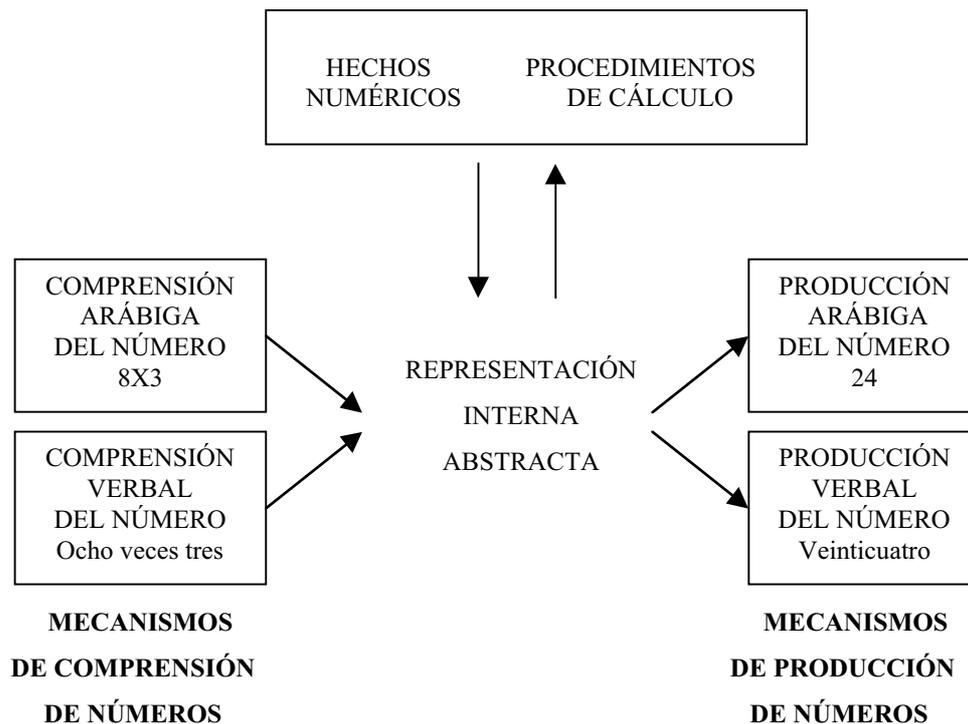


Figura 10: Un modelo general del procesamiento cognitivo de números y los mecanismos de cálculo (Sokol et al., 1991).

El sistema de procesamiento de números, como hemos indicado, comprende dos subsistemas distintos (comprensión y producción de números) que distinguen los números según se ejecuten a nivel verbal (comprensión y producción verbal) o bien utilizando simbología matemática (comprensión y producción arábica). Los mecanismos de comprensión (verbal y arábico) convierten los inputs numéricos en representaciones internas abstractas que son usadas en el procesamiento numérico y en la ejecución de cálculos. Los mecanismos de producción traducen las representaciones internas en outputs numéricos arábigos o verbales.

El sistema de cálculo requiere, además de los mecanismos de comprensión y producción de números, procesos específicos de cálculo: a) la comprensión de signos (+, -, etc.) o palabras (más); b) la recuperación de resultados de operaciones aritméticas; c) y la ejecución de algoritmos de cálculo. A raíz de una investigación realizada con dos pacientes con lesión cerebral, Sokol et al. (1991), en vistas a que algunas operaciones aritméticas son almacenadas en forma de representaciones

simples ($8 \times 9 = 72$) mientras que otras se almacenan utilizando criterios más genéricos ($0 \times N = 0$), argumentan que la recuperación de resultados de operaciones aritméticas es mediada por representaciones internas de tipo numérico que son independientes de la forma en que son presentadas las tareas de cálculo.

En síntesis, desde esta perspectiva, los déficits de los niños con discapacidad aritmética son debidos a un uso lento en la activación de tales mecanismos. Geary (1993) añade que los trastornos pueden ser debidos a la activación lenta de cinco componentes: a) procedimental; b) recuperación de la memoria; c) conceptual; d) memoria de trabajo y e) velocidad de procesamiento (especialmente velocidad en la habilidad de contar). Geary (1993) expone que los dos primeros componentes son destrezas funcionales, es decir, destrezas que se manifiestan explícitamente durante el proceso de resolución aritmética y, por lo tanto, intervienen de forma directa en la ejecución de tests aritméticos de lápiz y papel, mientras que los tres componentes restantes sirven de base a los dos primeros componentes. Las relaciones que se establecen entre estos componentes se pueden observar en la Figura 11:

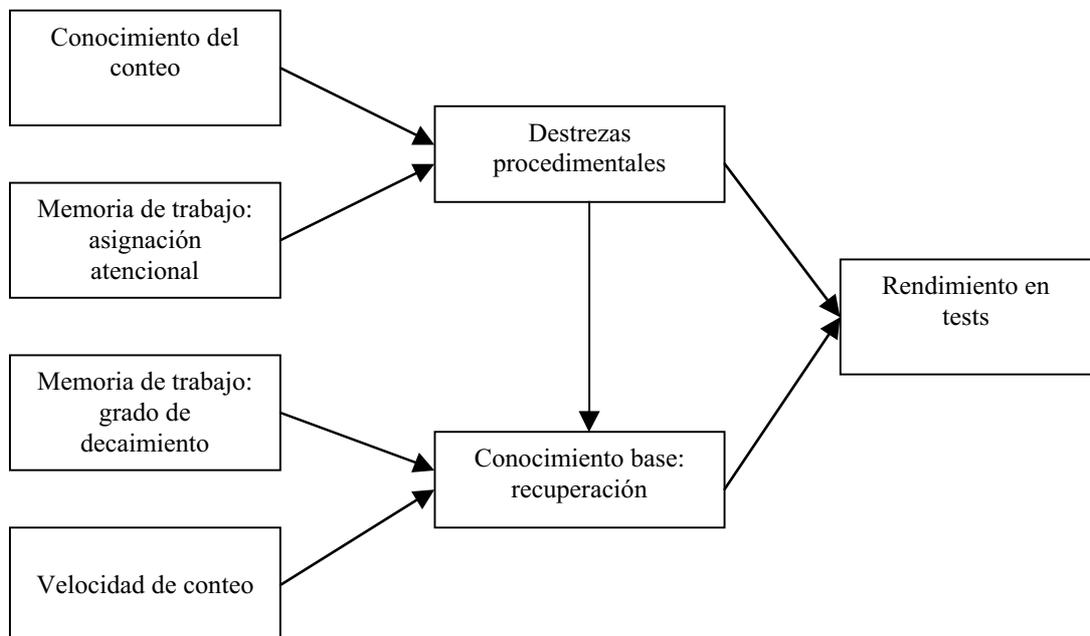


Figura 11: Representación esquemática de las relaciones entre rendimiento en tests de destrezas cognitivas y los componentes cognitivos (Geary, 1993).

Como vemos, podemos concluir que desde la perspectiva psicológica de los trastornos de cálculo se hace especial hincapié a la intervención de la memoria (y más concretamente la memoria de trabajo) en el uso inapropiado o lento de estrategias de cálculo. De hecho, las relaciones que parecen establecerse entre los trastornos de cálculo y la memoria de trabajo es uno de los factores que nos ha inducido a plantear nuestro estudio empírico, por lo que estas relaciones serán objeto de una revisión mucho más exhaustiva en el tercer capítulo de este marco teórico.

b. Estudios sobre la incidencia de distintos procesos psicológicos básicos en los trastornos de cálculo

Desde un punto de vista genérico, estos estudios parten del concepto de proceso entendido como las fases sucesivas de un fenómeno, por lo que coinciden en que desde el momento que se emite un estímulo, que éste es procesado en nuestro cerebro y que se ofrece una respuesta, son distintos los procesos cognitivos que intervienen, como puede apreciarse en la Figura 12:

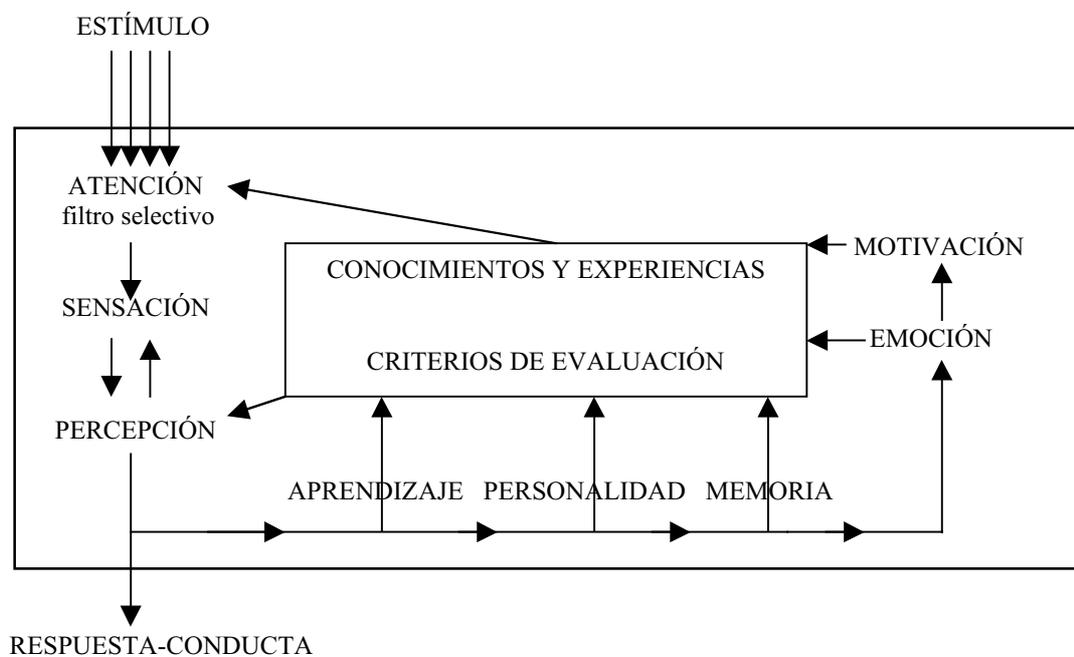


Figura 12: Posible esquema explicativo de las fases que intervienen en la producción de una conducta (Sáiz, 1990).

Desde un punto de vista más concreto, los trabajos sobre trastornos de aprendizaje del cálculo que inciden en el papel de distintos procesos psicológicos básicos parten de la base que la alteración de dichos procesos es la causa principal de la aparición de dificultades. Apoyando este argumento, en el DSM-IV (American Psychiatric Association, 1995) se indica que:

“Pueden existir anormalidades subyacentes del procesamiento cognoscitivo (p. ej., déficit de percepción visual, procesos lingüísticos, atención o memoria, o una combinación de estos procesos) que suelen preceder o asociarse a trastornos del aprendizaje” (pp. 49).

El análisis documental de los últimos treinta años (periodo 1970-1999) que hemos realizado constata tal afirmación, puesto que un porcentaje considerable de los estudios sobre dificultades de aprendizaje del cálculo han centrado su interés en analizar los déficits de los sujetos que padecen alteraciones de la memoria (6,4%), la atención (5,9%), la percepción (5,3%) o el lenguaje (5,1%), entre otros aspectos que han tenido un peso menor. En este subapartado, sin embargo, omitimos los estudios sobre trastornos de cálculo que han incidido en la memoria puesto que, como hemos indicado, vamos a dedicar el tercer capítulo a analizar la intervención de la memoria en el cálculo, por lo que a continuación exponemos los datos de los estudios que han vinculado la atención, la percepción y el lenguaje con los trastornos de cálculo.

Respecto a la implicación de *la atención* en la posible aparición de trastornos de cálculo, en nuestro análisis documental hemos constatado que después de la memoria es uno de los procesos psicológicos más ampliamente estudiado, a raíz de los numerosos trabajos –algunos de ellos muy recientes– que relacionan ambos aspectos, entre los que destacamos los efectuados por Benedetto y Tannock (1999); Fischer y Pluinage (1988); Giordano et al. (1976); Lindsay et al. (1999); Marshall et al. (1999); Rivière (1990); Sokol et al. (1991); Van-de-Rijt y Van-Luit (1999); y Walker et al. (2000); entre otros. La mayor parte de estos trabajos parten de la premisa que los desórdenes atencionales con hiperactividad o sin ella causan, en la mayor parte de sujetos que los padecen, trastornos de cálculo.

Giordano et al. (1976), por ejemplo, relacionan la atención con la aparición de dificultades de cálculo en el sentido que los trastornos de atención conllevan una

disminución de la capacidad de comprensión de los niños y, por consiguiente, se produce ausencia de conocimiento y falla del aprendizaje aritmético. Según estos autores, en el ámbito específico del aprendizaje del cálculo, para que la atención vaya acompañada del proceso de comprensión de los contenidos aritméticos deben cumplirse los tres requisitos siguientes:

- a. El contenido aritmético que se imparte en clase debe adecuarse estrictamente a las posibilidades evolutivas del niño.
- b. El niño que atiende debe estar libre de trastornos orgánicos o deficiencias físicas, psíquicas o efectivas que directa o indirectamente actúen desfavorablemente sobre su salud.
- c. Además, debe sentir que lo que se le enseña es continuación de cosas ya conocidas por él.

Fischer y Pluinage (1988), en un estudio realizado con 210 niños de 11 años, concluyen gracias a la técnica de medición de los tiempos de respuesta de operaciones aritméticas elementales que cuando existe un trastorno de atención las operaciones aritméticas elementales no se manejan de manera uniforme debido a la alteración de dos aspectos: a) la complejidad de comprensión; b) la complejidad de ejecución. Sokol et al. (1991) en un estudio realizado con dos pacientes con lesión cerebral con los mecanismos de atención alterados a los que les administran multiplicaciones llegan a la conclusión, como ya hemos visto anteriormente, que el cálculo de operaciones aritméticas simples depende de los mecanismos de comprensión y producción de números, es decir, ambos aspectos se ven alterados por las dificultades de atención. En una línea similar, posteriormente Benedetto y Tannock (1999) comparan 15 niños de 7-11 años con hiperactividad con 15 niños normales. Los resultados de su estudio, en el que administran distintas tareas académicas entre las que se encuentra una de cálculo, indican que los niños con hiperactividad tienen niveles más bajos de eficiencia académica, usan estrategias de cálculo más inmaduras y efectúan más errores debido a los altos niveles de

inatención y conductas disruptivas, de acuerdo con Lindsay et al (1999). Marshall et al. (1999) comparan el rendimiento en una tareas de cálculo de 20 niños entre 8-12 años con hiperactividad con otros 20 niños con trastorno de atención sin hiperactividad. Aunque no encuentran diferencias significativas, un análisis más individualizado les lleva a concluir que la hiperactividad puede tener importantes efectos en la adquisición de destrezas de cálculo, por lo que sus resultados tienen importantes repercusiones en el diagnóstico y tratamiento de los sujetos con hiperactividad conceptualizados en el DSM-IV, al sugerir el alto riesgo que este trastorno puede comportar en las habilidades aritméticas. Walker et al. (2000) llevan a cabo un estudio con sujetos adultos entre 17-50 años a los que administran distintas tareas cognitivas, entre las que se encuentra una de cálculo aritmético. Los resultados indican de nuevo que los sujetos con hiperactividad son los que obtienen peores rendimientos en dicha tarea.

A modo de síntesis vemos, pues, que la mayor parte de estudios que relacionan de alguna forma los trastornos de atención con las dificultades de aprendizaje del cálculo aritmético parten de la siguiente premisa, establecida por Rivière (1990):

“Los niños que presentan problemas de atención suelen encontrar dificultades para organizar estructuras jerárquicas de actividades o procesos mentales, lo cual tiene consecuencias especialmente negativas en matemáticas” (pp. 170)

El importante papel que ejercen los desórdenes de atención en la posible aparición de trastornos de cálculo ha llevado también a algunos autores a desarrollar programas específicos que permitan potenciar la capacidad atencional de los sujetos. Algunos trabajos recientes en esta línea corresponden a Van-de-Rijt y Van-Luit (1998), entre otros, aunque no vamos a incidir aquí en el desarrollo de estos programas.

Una vez expuesta una visión general de los vínculos que se establecen entre los trastornos atencionales y los trastornos de cálculo, a continuación vamos a proceder a efectuar la revisión de los principales trabajos que han relacionado los trastornos de cálculo con alteraciones de *la percepción*. Al revisar estos trabajos

hemos tenido en cuenta dos aspectos preliminares:

- a. Presentamos conjuntamente los trabajos sobre sensación y percepción porque ambos procesos están interrelacionados entre sí, por lo que su estudio por separado podría resultar incluso artificioso (Matlin y Foley, 1996; Worchel y Shebilske, 1998).
- b. En la revisión de los trabajos que han relacionado la percepción con dificultades de cálculo hemos omitido, de acuerdo con el criterio diagnóstico C del trastorno de cálculo del DSM-IV (American Psychiatric Association, 1995), las dificultades asociadas a los signos y síntomas habituales de los hándicaps sensoriales, y nos centramos en aquellos déficits perceptivos que, sin ser debidos a un hándicap sensorial específico, conllevan dificultades.

Aunque parece que en los últimos tiempos los estudios sobre la incidencia de la percepción en los trastornos de cálculo han tendido a disminuir (ver análisis documental página 60), este tipo de trabajos constituye un cuerpo consolidado. Algunas investigaciones de los años setenta, como las realizadas por Black (1974); Logue (1977); McLeod y Crump (1978); Rourke y Finlayson (1978); Sander (1974) o Slater (1973); entre otros, parten de distintas muestras de sujetos con déficits de percepción visual o auditiva. En su mayoría, estos estudios miden el rendimiento de los sujetos en tareas de cálculo y comparan sus ejecuciones con las de otros sujetos sin alteraciones o con alteraciones más leves, y en todos los casos se constata que a mayor déficit visual o auditivo, menor es el rendimiento en cálculo. Otros estudios en la misma línea efectuados durante los años ochenta y noventa, como los realizados por Bernardo y Okagaki (1994); Dehaene et al. (1998); Dehaene et al. (1999); Epstein et al (1994); Fletcher (1985); Meyer et al. (1998); Ohlsson et al (1992) o Silver et al. (1999); entre otros, llegan a conclusiones similares. Fletcher (1985), por ejemplo, expone que algunos niños con problemas aritméticos específicos presentan déficits específicos en medidas de percepción visual y en habilidades de visión espacial, como señalan también Ohlsson et al. (1992). En una línea similar, Epstein et al. (1994) en un estudio donde analizan entre otros aspectos

la capacidad de verificación de cálculos, concluyen que los malos resultados que presentan algunos de los niños pueden ser debidas a dificultades de procesamiento de los números o a déficits perceptivos, puesto que implican un lenguaje de símbolos específicos, de acuerdo también con Bernardo y Okagaki (1994), quienes a partir de 4 experimentos con 81, 128, 144 y 87 estudiantes universitarios respectivamente a los que les administran tareas de cálculo complejo, explican que la aparición de algunas dificultades de cálculo podrían ser debidas a la dificultad de comprensión de símbolos matemáticos. A través de distintos experimentos demuestran la importancia del conocimiento simbólico (que implica entre otros aspectos una percepción correcta de símbolos), al encontrar que los estudiantes que mejor ejecutan tareas de cálculo de problemas aritméticos son aquellos que utilizan correctamente este tipo de conocimiento. Martini (1998) insiste también en la importancia del reconocimiento simbólico de los números como prerequisite indispensable en las primeras fases de adquisición de contenidos aritméticos. Dehaene et al. (1999) efectúan un estudio comparativo relativo a las destrezas cognitivas implicadas en el cálculo aritmético exacto y aproximado. En su estudio, destacan el papel del procesamiento viso-espacial (percepción visual y percepción espacial) en tal habilidad. También Silver et al (1999), en un estudio realizado con 14 niños de 10-12 años con dificultades aritméticas comparados con 13 niños normales de la misma edad revelan que los primeros presentan una disfunción viso-espacial.

Algunos estudios recientes han intentado localizar el área del cerebro implicada en la aparición de trastornos de cálculo a causa de alteraciones perceptivas. Dehaene et al. (1998), por ejemplo, sitúan la lesión que conlleva trastornos de cálculo debidos a déficits perceptivos en la parte prefrontal del cerebro, mientras que Meyer et al (1998) apuntan que tanto las tareas aritméticas como las perceptivas implican las mismas áreas cerebrales (temporal, central y parietal). A pesar de no llegar a un acuerdo unánime, estos estudios permiten demostrar la interrelación que se produce entre ambos aspectos a nivel neurológico.

Otro grupo de estudios sobre los procesos psicológicos básicos implicados en

los trastornos de cálculo han incidido en el papel del *lenguaje*. Desde un punto de vista global, en las tres últimas décadas (periodo 1970-1999) este tipo de trabajos ha tendido a aumentar, por lo que si bien durante la década de los setenta su peso era poco significativo y se publicaron un número de trabajos reducido, en los años noventa ha aumentado el número de publicaciones introducidas en la base de datos Psyclit/PsycINFO, superando el volumen de otros grupos de trabajos como los relativos a la percepción.

Algunos de los trabajos que se publican en los años setenta corresponden a autores como Bybee (1973); Larsen et al. (1978) y Penner (1973), entre otros. Estos trabajos tienden a utilizar como material de investigación distintas baterías de problemas verbales de resolución aritmética, y su pretensión consiste en relacionar las habilidades psicolingüísticas con el rendimiento aritmético. Así, por ejemplo, Bybee (1973) encuentra que los sujetos con menores habilidades psicolingüísticas son los que obtienen peores rendimientos en cálculo y también en lectura. Larsen et al. (1978) administra tres pruebas aritméticas que contienen problemas verbales de distinta dificultad sintáctica, y encuentran que la complejidad afecta la habilidad para resolver tareas aritméticas, aspecto previamente confirmado por Penner (1973) a partir de una muestra de sujetos con retraso mental.

Algunos estudios sobre trastornos de cálculo de los años ochenta que focalizan su interés en los efectos del lenguaje relacionan estos trastornos con la habilidad fonológica. Por ejemplo, Share et al. (1988), en un exhaustivo estudio longitudinal con una muestra de 900 niños evaluados desde los 3 hasta los 23 años, concluyen que los trastornos de cálculo pueden ser causados por dos tipos de factores: a) verbales, cuando dichos trastornos se dan conjuntamente con un trastorno de lectura; b) no verbales, cuando se dan de forma aislada. Otros estudios de esta misma época analizan el efecto del idioma, como por ejemplo el realizado por Palmer et al. (1989), que compara el rendimiento de 236 alumnos hispanos, afroamericanos o ingleses de 2º a 4º grado. Después de medir el rendimiento de estos niños en distintas habilidades mediante el WISC-R, de Wechsler (1977) y el K-ABC, de Kaufman, S.A. y Kaufman, N.L. (1983), sus resultados indican que se

producen diferencias de rendimiento a causa del dominio del idioma. También algunos trabajos de revisión, como el Informe Cockcroft (1982) y el realizado por Hughes (1987) subrayan la intervención del lenguaje en la posible aparición de dificultades de cálculo, junto con otras causas como la abstracción, etc.

La intervención del lenguaje ha sido corroborada también por algunos trabajos empíricos de los años noventa del siglo XX: por ejemplo, Rose et al. (1992) comparan el rendimiento de 21 niños con un desorden del desarrollo del lenguaje, 30 niños con dificultades de aprendizaje y 12 niños control a los que les administran el WISC-R (Wechsler, 1977). A partir de sus resultados constatan que los niños con un desorden del desarrollo del lenguaje son los que obtienen peores rendimientos en las distintas pruebas verbales del test (entre ellas la aritmética). Otros estudios de esta década, como por ejemplo los de Ackerman y Dykman (1995) y Raesaenen y Ahonen (1995) contrastan el rendimiento de niños con trastornos de cálculo con niños que junto con el trastorno de cálculo padecen también un trastorno de lectura. En ambos estudios se concluye que los dos grupos de niños presentan unos déficits muy similares: velocidad de procesamiento y errores de recuperación, lo que a nuestro entender constituye un indicador del hecho que la base cognitiva de ambos trastornos podría ser la misma. Fazzio (1996) estudia también las habilidades matemáticas de los niños con dificultades específicas de lenguaje (DEL). Esta autora parte de una muestra formada por tres grupos de sujetos: 14 niños de 6-7 años con diagnóstico de DEL y que han recibido tratamiento específico en preescolar; 15 niños de 5-7 años con un desarrollo normal; y 16 niños de 4-6 años, también con un desarrollo normal, para comparar las habilidades de lenguaje y matemáticas respecto al grupo con DEL. Todos los grupos realizan tareas de conteo, lectura y escritura de números y cálculo (mental y con material manipulativo). La autora concluye que las dificultades matemáticas observadas en el grupo con DEL respecto a los dos grupos restantes de la muestra son debidas a un procesamiento pobre del lenguaje, y más específicamente a habilidades asociadas con el aspecto fonológico (por ejemplo, el conteo requiere la memoria fonológica). Alternativamente, podrían tener también dificultades en el conocimiento simbólico, ya que el conocimiento de los números conlleva este tipo de destreza; dificultades en el conocimiento conceptual, en la

correspondencia que debe realizar el sujeto al contar y tocar objetos a la vez; y dificultades en el conocimiento procedimental. Además, Fazzio (1996) asocia la baja habilidad aritmética de los sujetos con DEL a problemas específicos de la memoria fonológica de la memoria de trabajo, relación que se produce en otros trabajos (Hitch et al., 1989; Hoosain y Salili, 1988; Jensen y Whang, 1994; Logie y Baddeley, 1987; Lau y Hoosain, 1999; Logie et al, 1994; entre otros).

A modo de conclusión, queremos destacar que algunos estudios sobre trastornos de cálculo que inciden en el lenguaje, sobretodo los más recientes, tienden a asociar paulatinamente los déficits aritméticos con alteraciones de la memoria fonológica, en el sentido que un procesamiento fonológico lento podría tener un importante papel en las dificultades de aprendizaje del cálculo. Este aspecto es uno de los factores que nos han hecho plantear nuestro estudio empírico, y será objeto de una revisión mucho más detallada en el tercer capítulo, en el que vamos a incidir en el panorama de los estudios específicos que han relacionado la memoria de trabajo con el cálculo.

c. Estudios sobre la incidencia de aspectos actitudinales y afectivos

Otro grupo de estudios que han abordado los trastornos de cálculo desde una perspectiva psicológica durante el periodo estudiado son los que han vinculado tales trastornos con aspectos actitudinales-afectivos, aunque globalmente el peso de estos trabajos tiene menor resonancia. A partir de la revisión de los trabajos sobre trastornos de cálculo de las tres últimas décadas (1970-1999), hemos observado que algunos de los factores que se han analizado son, entre otros, la motivación, la personalidad, la autoestima, el autoconcepto, la autoeficacia, los síntomas depresivos o los problemas de conducta.

Desde un punto de vista global, Gairín (1987) expone que el estudio de las actitudes asociadas a las matemáticas constituye un campo con muchas lagunas, aspecto ya mencionado en el Informe Cockcroft (1985). Para Gairín (1987), al considerar los parámetros actitudinales deberían tenerse en cuenta los cuatro factores

siguientes:

- a. Las actitudes hacia las matemáticas forman parte de complejos actitudinales más amplios a los que aportan y de los que toman influencias.
- b. Las matemáticas constituyen un saber relacionado con otros saberes y conforman con ellos la realidad científica. Por ello, las actitudes hacia las matemáticas se encuadran dentro de un contexto más amplio como son las actitudes hacia la ciencia o el saber.
- c. Una buena caracterización de las actitudes hacia las matemáticas tendría que diferenciar entre las distintas ramas que las componen (aritmética, geometría, álgebra, etc.).
- d. Es posible también que podamos hablar de diferentes respuestas afectivas a las matemáticas en función de las percepciones que de ellas tengan los alumnos y sus profesores, o de los contextos en los que se encuentran.

A pesar de que no siempre se han tenido en cuenta las consideraciones precedentes, a continuación exponemos las conclusiones de algunos trabajos que han analizado la incidencia de distintos parámetros actitudinales-afectivos como la motivación o la personalidad en la aparición de trastornos de aprendizaje del cálculo.

Al estudiar la intervención de *la motivación* en la posible aparición de dificultades de aprendizaje del cálculo partimos de Font (1994), quien señala que cualquier análisis de las dificultades de aprendizaje de las matemáticas debe considerar la motivación:

“En función de si el alumno tiene un patrón motivacional positivo o negativo, su actitud hacia las matemáticas será diferente. Si el patrón es positivo, el alumno, frente a una dificultad reaccionará analizándola, buscará una nueva estrategia, preguntará al profesor, etc.; ... Si el alumno presenta un patrón motivacional negativo, frente a una dificultad, aumentará su ansiedad y hasta se angustiará pensando que la causa de la dificultad es su incapacidad y, por tanto, adoptará una actitud defensiva, como por ejemplo: no hacer nada, no preguntar porque solamente preguntan los tontos, intentará copiar la respuesta,

etc.” (pp. 14).

Tradicionalmente la psicología ha analizado la motivación de los niños hacia el aprendizaje de las matemáticas. Skemp (1980), por ejemplo, en un sentido general, se refiere a las motivaciones extrínsecas e intrínsecas. Para este autor, las motivaciones extrínsecas son aquellas que consiguen “motivar” a los alumnos a través de premios y castigos; mientras que por intrínsecas entiende aquellas que surgen de dentro del sujeto, y que hacen que las matemáticas sean una actividad que recompensa en sí misma. A raíz de ello, se deduce que las motivaciones extrínsecas pueden ser el origen de algunas dificultades de aprendizaje. Baroody (1988) pretende determinar algunos factores que llevan a un patrón motivacional extrínseco o negativo ante tareas aritméticas:

“Exagerar la importancia de memorizar datos y procedimientos de una manera preestablecida y rígida cultiva creencias debilitadoras. Cuando la instrucción asigna una importancia fundamental a la memorización de datos y técnicas, es muy probable que los niños obtengan una impresión equivocada de las matemáticas” (pp. 77).

De ello se desprende que la elaboración de un patrón motivacional negativo ante tareas aritméticas es debida a las propias creencias de los niños, que resume en las siguientes:

- a. La incapacidad para aprender datos o procedimientos con rapidez es señal de inferioridad en cuanto a inteligencia y carácter.
- b. La incapacidad para responder con rapidez o emplear un procedimiento con eficacia indica “lentitud”.
- c. Una incapacidad total para responder es señal de una estupidez absoluta.
- d. Las respuestas inexactas, por ejemplo las estimaciones, son inadecuadas.

Otro grupo de estudios que durante el periodo estudiado intentan explicar los trastornos de cálculo a partir de parámetros de tipo actitudinal-afectivo son los que relacionan *la autoestima, el autoconcepto, la autoeficacia, el efecto de síntomas*

depresivos o los problemas de conducta, entre otros aspectos como *el estilo cognitivo dependencia de campo-independencia de campo*, con tales trastornos.

Algunos trabajos que relacionan las dificultades de aprendizaje del cálculo con el autoconcepto que tienen los niños de sí mismos o la autoeficacia corresponden a Chapman y Boernsma (1979); Janes (1995); Norwich (1985) y Valas (1999); entre otros. Chapman y Boernsma (1979), a partir de un estudio con 81 niños de 3° a 6° grado con dificultades de aprendizaje, encuentran que tienen una autopercepción negativa de la habilidad aritmética, y también de la habilidad para la lectura y la ortografía. Norwich (1985), en un estudio con sujetos de 14 años con dificultades de aprendizaje en ortografía y cálculo, encuentran que el concepto de autoeficacia que estos niños tienen de sí mismos repercute en el rendimiento en tareas de resta. Ya en los noventa, Janes (1995), examina las relaciones entre el estilo atribucional y el rendimiento académico en niños con dificultades. En su estudio, realizado con 60 niños de 6° grado, concluye que el rendimiento académico en tareas de cálculo y lectura correlaciona con el estilo atribucional y los síntomas depresivos. También Valas (1999) estudian el efecto que produce en los niños el llevar una etiqueta de "niño con dificultades". En su estudio, realizado con una muestra de 1434 niños de 4°, 7° y 9° grado clasificados como niños con dificultades de aprendizaje y niños con bajo rendimiento respectivamente, muestran a partir de su rendimiento en cálculo, lectura y escritura, que esta etiqueta repercute negativamente en la aceptación de sí mismos y conlleva sentimientos de soledad, sobretodo en la escuela primaria.

Otras investigaciones inciden en la repercusión de los trastornos de conducta en la habilidad aritmética, como por ejemplo el realizado por Richmond y Blagg (1985), en el que comparan el rendimiento académico de 30 niños con retraso mental, 30 niños con dificultades de aprendizaje, 30 niños con desórdenes conductuales y 30 niños normales de 7-9 años. Sus resultados indican que se producen diferencias importantes entre estos grupos, en el sentido que los niños normales presentan rendimientos superiores que los otros subgrupos. También Richards et al. (1995) llegan a resultados similares a partir de una muestra de 43

adolescentes entre 11-17 años. En sus resultados encuentran de nuevo que los sujetos con mayores trastornos conductuales son los que presentan más dificultades aritméticas.

Algunos trabajos han analizado directamente la incidencia del tipo de personalidad en el rendimiento aritmético. Fuerst y Rourke (1993), por ejemplo, comparan el rendimiento de 500 niños entre 6-12 años con dificultades de aprendizaje en función de su patrón de personalidad (normal, somático, ansioso, psicopatológico interno, psicopatológico externo o desorden conductual). Los niños con un patrón psicopatológico interno son los que muestran mayores discrepancias entre el rendimiento en cálculo y lectura y ortografía y cálculo. De todas formas, en el contexto de este grupo de trabajos, el más productivo ha sido probablemente el que ha relacionado los trastornos de cálculo con la dimensión de personalidad introversión-extroversión. De forma muy general, los estudios revisados tienden a apuntar mayoritariamente correlaciones positivas entre la extroversión y la ejecución matemática (Roberge y Flexer, 1981; Southworth, 1989; entre otros).

Otros estudios analizan cómo interviene el estilo cognitivo en la aparición de trastornos de cálculo: una de las dimensiones más desarrolladas en esta línea ha sido la independencia y la dependencia de campo, que se refieren respectivamente a la forma analítica o global de procesar la información (Witkin et al., 1978). Los distintos trabajos en este sentido llegan a la conclusión de que los sujetos independientes de campo obtienen mejores puntuaciones en tareas de cálculo (Amador y Forns, 1994; Damusis y Desjarlais, 1977; Huteau, 1975, 1984; Witkin et al., 1978; entre otros). A raíz de estos datos, Jordan (1995) indica que:

“Los resultados de estos distintos estudios sugieren que niños con patrones distintos de funcionamiento cognitivo podrían tener necesidades educativas muy diferentes en los primeros años de aprendizaje de las matemáticas” (pp. 62).

A modo de síntesis, el papel de los parámetros actitudinales-afectivos en el rendimiento aritmético está en la actualidad suficientemente claro, a nuestro entender. En este sentido, Chamoso et al. (1997), concluyen a partir de un estudio

empírico con una muestra de 1388 alumnos desde 3º de Primaria a 4º de E.S.O., que se produce una tendencia decreciente en relación a la actitud favorable hacia las matemáticas a lo largo de la Educación Primaria y Secundaria Obligatoria, y se apunta este factor como posible causante de algunas dificultades de aprendizaje.

d. Estudios sobre la incidencia de factores externos en los trastornos de cálculo

Finalmente, hemos detectado un último sector de estudios con un peso menos representativo en el conjunto de investigaciones sobre los trastornos de cálculo que, desde enfoques más psicopedagógicos, analizan sobretodo el efecto de distintos factores externos. No vamos a entrar en profundidad en este tipo de estudios, puesto que nuestro interés fundamental consiste en detectar qué ocurre dentro de las mentes de los niños cuando realizan tareas de cálculo.

De todas formas hemos considerado oportuno efectuar una breve revisión de estos trabajos para tener una visión más global del conjunto de parámetros susceptibles de influir en la aparición de dificultades de aprendizaje del cálculo.

Muy sintéticamente, algunas de las investigaciones revisadas destacan los siguientes factores:

- *Centro escolar:* algunas de las investigaciones desarrolladas en este campo analizan el tipo de centro (estatal, religioso, laico); la existencia o no de coeducación; el número de clases del centro; el entorno en el que está ubicado el centro; etc. La mayor parte de estudios no llegan a encontrar diferencias significativas, aunque sí que apuntan que la tendencia habitual consiste en encontrar menos trastornos en centros religiosos, de niñas, bilingües y/o unitarias (Etxeberría et al., 1993; Nortes y Martínez, 1989).
- *Profesor:* los trabajos revisados en esta línea destacan como causas más comunes de las posibles dificultades de los alumnos las siguientes: los errores que cometen los profesores (Contreras, 1989); su nivel de experiencia o la

metodología usada (Nortes y Martínez, 1989); entre otros aspectos.

- *Nivel socio-económico:* los estudios en esta línea apuntan una correlación positiva entre este parámetro y el desarrollo cognitivo de los niños (García, 1989; Etxeberría et al., 1993; Saura y García, 1990). En una línea similar, aunque concretado en el aprendizaje del cálculo, Jordan y sus colaboradores analizan la incidencia de la clase social en la habilidad para resolver problemas de cálculo, llegando a la conclusión que la habilidad para resolver problemas verbales varía según la clase social, pero no la habilidad para resolver problemas no verbales (Jordan, 1995).
- *Situación socio-ambiental:* desde esta perspectiva se estudia la ubicación geográfica en un determinado barrio (García, 1989); el ruido (Baker et al, 1984; Barbenza y Urhlandt, 1981; entre otros); etc. En uno de estos trabajos aplicados, Barbenza y Uhrlandt (1981) estudian en el laboratorio los efectos del ruido intenso, intermitente e imprevisto (de 80, 90 y 100 db) sobre la ejecución de una tarea aritmética simple y registran los cambios en el nivel de activación. Entre los resultados más significativos cabe destacar que el ruido es un factor de estrés que afecta el control emocional de las personas sometidas a él en un ambiente de trabajo, especialmente si realizan tareas que requieren esfuerzo intelectual y concentración.
- *Distribución del tiempo familiar:* algunos estudios han apuntado de modo genérico que una distribución correcta del tiempo incide positivamente en los niños (Ghata, 1983). Dichos estudios analizan, entre otros aspectos, el horario de trabajo de los padres, el efecto que ejerce la televisión en el rendimiento de los niños, etc.

Una vez analizados algunos de los trabajos más representativos efectuados desde una perspectiva psicológica y/o psicopedagógica, a continuación vamos a ocuparnos de los estudios neuropsicológicos.

2.4.2. La perspectiva neurológica, neuropsicológica y/o neuropsicopedagógica

La aproximación neurológica, neuropsicológica o neuropsicopedagógica al estudio de los trastornos de cálculo constituye, exceptuando las aportaciones de Luria y sus colaboradores durante los años sesenta, un campo de estudio relativamente reciente pero con un futuro brillante, sobretodo si se tienen en cuenta las posibilidades que ofrecen los avances tecnológicos de los últimos años, como por ejemplo las tomografías por emisión de positrones (P.E.T.), entre otras técnicas específicas. Dichas técnicas permiten determinar con exactitud, entre otros muchos datos, qué zona del cerebro es la responsable de una determinada tarea cognitiva como puede ser el cálculo aritmético.

La revisión de los trabajos sobre trastornos de cálculo de las tres últimas décadas (1970-1999) constata que efectivamente se trata de un campo de estudio en auge, ya que en las décadas de los ochenta y de los noventa se ha triplicado y duplicado respectivamente el número de publicaciones en relación a los años setenta. Además, globalmente este tipo de estudios ocupan el tercer lugar en la categorización temática que hemos efectuado de los trabajos sobre trastornos de cálculo (ver pág. 60) y representan un 10,1% del total de estos estudios.

Según Morrison y Siegel (1991a), este tipo de trabajos surge en el momento que una serie de investigadores encuentran algunas evidencias empíricas que demuestran que los niños con dificultades aritméticas específicas podrían tener algunos déficits neuropsicológicos que los diferencia de los demás. La mayor parte de estos datos empíricos se obtienen, pues, a partir del estudio de sujetos con lesiones cerebrales.

Ya en 1966 Luria, según Morrison y Siegel (1991a), había descubierto que las lesiones en el sistema posterior (occipitoparietal) se asocian con el déficit de la idea de número y las operaciones aritméticas, y destaca también la evidencia de la pérdida de habilidad matemática en pacientes con lesiones del sistema frontal. En los años setenta y ochenta del siglo XX surgen algunos trabajos cuyo objeto es

confirmar los datos de Luria. Edwards et al. (1971), por ejemplo, en un estudio con 312 niños (156 con una disfunción cerebral mínima y 156 normales) encuentran diferencias estadísticamente significativas en el rendimiento en distintas tareas cognitivas, entre ellas el cálculo, entre ambos grupos de niños, aspecto corroborado en estudios posteriores como los de Bryant et al. (1984) y McCue et al. (1984); entre otros. De todas formas, paulatinamente los estudios tienden a ser cada vez más específicos, y uno de los objetivos consiste en determinar el efecto de la dominancia cerebral. Desde este foco de interés, Luria y Tsvetkova (1981), proponen una teoría neuropsicológica en la exponen las principales dificultades que conllevan las lesiones cerebrales en el campo de la resolución de problemas aritméticos. Estos autores destacan por lo menos dos grandes regiones en el hemisferio izquierdo que dan lugar a una sintomatología distinta:

- a. En las regiones posteriores (témpero-parieto-occipitales) las dificultades más significativas se dan en la imposibilidad de no poder repetir bien los datos y la imposibilidad de poder operar con los números, puesto que se produce una pérdida de su valor, una mala representación espacial. En cambio, estos niños o adultos mantienen bien la atención y son plenamente conscientes de sus dificultades.
- b. En las regiones anteriores (lóbulos frontales) las principales dificultades se dan en no poder mantener un control de la actividad intelectual, que controle las respuestas precipitadas, o bien no poder verificar los resultados ni justificar las operaciones.

En la misma época, Reynolds et al. (1981) encuentra en un estudio con 96 niños con una media de edad de 12,1 años a los que se les ha medido previamente su dominancia cerebral, que no se producen diferencias estadísticamente significativas en cálculo (tampoco en ortografía y lectura), en contraposición a Rourke (1982), que enfatiza las diferencias entre los hemisferios derecho e izquierdo. Posteriormente, Annet y Manning (1990), destacan el papel del hemisferio izquierdo al indicar que hay una mayor proporción de niños con dominancia cerebral izquierda con mejores

resultados en las pruebas de aritmética. Otros autores, como Keshner y Stringer (1992) examinan la lateralización de distintas habilidades cognitivas (descodificación de pseudopalabras, reconocimiento de palabras, comprensión lectora, ortografía y cálculo), llegando a la conclusión que los aspectos más verbales dependen sobretodo de la capacidad de procesamiento del hemisferio derecho.

Ante los distintos datos empíricos que van apareciendo en la década de los noventa en relación a la intervención de ambos hemisferios en los trastornos de cálculo, en un trabajo de revisión, Geary (1993) expone que los modelos neuropsicológicos han centrado su interés en el estudio de dos tipos de déficits matemáticos generales asociados a lesiones cerebrales: acalculia espacial y anaritmetría. Según este autor, la acalculia espacial se da cuando existe una lesión cerebral en el hemisferio derecho y provoca dificultades en la representación espacial de información numérica y algunos problemas conceptuales. La anaritmetría consiste en la dificultad de recuperar operaciones aritméticas de la memoria a largo plazo, y algunos de estos sujetos muestran también dificultades en los procedimientos aritméticos (Ashcraft, 1992). La doble disociación encontrada entre recuperación de operaciones y destrezas procedimentales (Sokol et al., 1991) sugiere que desde una perspectiva neuropsicológica estos dos fenómenos son relativamente independientes, aunque los dos déficits parezcan estar asociados con lesiones del hemisferio izquierdo (Ashcraft, 1992). También Rourke y Tsatsanis (1995) intentan aclarar la intervención de ambos hemisferios en los trastornos de cálculo y concluyen que los niños con problemas aritméticos asociados a problemas de aprendizaje no verbal tienen problemas de procesamiento en el hemisferio derecho; en cambio, los niños con dificultades de lectura y de aritmética que tienen problemas de aprendizaje lingüístico tendrían dificultades de procesamiento de la información en el hemisferio izquierdo. Posteriormente, Levin et al. (1996), en un estudio de caso único de un sujeto con fractura parietal derecha ocasionada por un accidente de automóvil, encuentran un bajo rendimiento en cálculo y lectura, de acuerdo con Rourke y Conway (1997), que aunque matizan que no existe una explicación suficientemente satisfactoria de las relaciones que se establecen entre las destrezas aritméticas y las funciones cerebrales, a raíz de las investigaciones en esta

línea apuntan también una predominancia del hemisferio cerebral derecho, aunque sugieren que podría variar según el tipo de dificultad de aprendizaje. Navarra et al. (1998), desde una aproximación neuropsicopedagógica, concluyen en relación a la resolución de problemas aritméticos, que en esta tarea cognitiva intervienen las regiones posteriores, sobretodo del hemisferio izquierdo, que realizan una mayor aportación a los procesos más cognitivos y mecánicos, mientras que las regiones anteriores la realizan en la planificación y el control del razonamiento y la actividad. Martins et al (1999) encuentra también un bajo rendimiento en tareas de cálculo en un estudio de caso único de un niño de 11 años con una lesión parietal izquierda.

Independientemente de los estudios que han intentado analizar el efecto de la dominancia cerebral, hemos localizado otro pequeño grupo de estudios neuropsicológicos cuyo objeto consiste en elaborar pruebas neuropsicológicas específicas para diagnosticar las dificultades de aprendizaje en general y los trastornos de cálculo en particular. En esta línea, Monedero y Agueero (1986), por ejemplo, desarrollan una batería neuropsicológica que contiene tests de inteligencia, lenguaje, reconocimiento táctil, coordinación motora, dominancia lateral y rendimiento académico para detectar las dificultades de aprendizaje en cálculo, lectura y escritura. También Batchelor et al. (1990a, 1991b) elaboran una batería neuropsicológica, y estudian su efectividad en una muestra de 989 niños entre 9-14 años con dificultades de aprendizaje.

A modo de síntesis, aunque los estudios neuropsicológicos han recibido algunas críticas debido a que ofrecen una visión de los procesos mentales que son innatos, estáticos e inefectivos para el entorno (McEntire, 1981-1982), desde nuestro punto de vista permiten llegar a las siguientes conclusiones:

- Existe una relación entre los trastornos de cálculo y los déficits en distintas áreas cerebrales (Annet y Manning, 1990; Geary, 1993; Martins et al., 1999; Navarra et al., 1998; Rourke y Conway, 1997; Rourke y Tsatsanis, 1995; entre otros).
- Parece ser que el hemisferio derecho interviene sobretodo en aspectos visuales y

el izquierdo en aspectos verbales relacionados con el cálculo (Geary, 1993; Rourke y Tsatsanis, 1995; entre otros), aunque esta afirmación debe ser corroborada por nuevos estudios.

- La investigación neuropsicológica constata que algunas de las causas de los trastornos de cálculo son la baja capacidad en la recuperación de operaciones; un déficit procedimental y dificultades en la representación espacial (Geary, 1993).

2.4.3. La perspectiva genética

Desde esta perspectiva, con un volumen de publicaciones muy inferior al de las anteriores, se considera el potencial hereditario de las destrezas matemáticas. En resumen, se parte de la base que las diferencias individuales de un determinado rasgo fenotípico son debidas a diferencias genéticas, por lo se sugiere que ciertas discapacidades aritméticas podrían ser heredadas.

Sin embargo, según Geary (1993), no existen estudios que hayan analizado de forma precisa la herencia de la discapacidad aritmética, aunque sí que este mismo autor cita algunas investigaciones sobre diferencias individuales de destrezas matemáticas heredadas, realizadas entre los años cincuenta y setenta en su mayoría. Así, en un estudio realizado por Husen en 1959 con escolares gemelos monocigóticos y dicigóticos que cursaban estudios de primaria, compararon los rendimientos en tareas aritméticas, escritura, lectura e historia, y encontraron que las diferencias eran menores en monocigóticos que en dicigóticos. En otro estudio citado por Geary (1993), Loehlin y Nichols estudiaron en 1976 el rendimiento de 850 pares de gemelos monocigóticos o dicigóticos en tareas de inglés, matemáticas, ciencias sociales, naturales y vocabulario. Tal como había encontrado Husen en 1959, las correlaciones eran más consistentes en los gemelos monocigóticos que en los dicigóticos.

En estudios más recientes, como el realizado por Gillis y Defries (1991) se llega también a conclusiones similares, lo cual permitiría afirmar que algunas diferencias individuales en la habilidad numérica, el cálculo, o destrezas

matemáticas más complejas, podrían ser parcialmente heredadas, pero según estos autores no está claro si tales trastornos son específicamente debidos a la genética o bien influyen aspectos como la habilidad lectora, etc. De ello, se desprende que futuros estudios genéticos necesitan determinar si las distintas formas de discapacidad aritmética (recuperación de operaciones, déficit viso-espacial, etc.) son o no heredables.

2.5. SÍNTESIS DEL CAPÍTULO

En este segundo capítulo hemos realizado una aproximación a los trastornos de cálculo con el propósito de obtener información relativa a los factores sobretodo de tipo cognitivo que intervienen de una forma más o menos decisiva en su aparición, y en consecuencia poder determinar también el papel específico que juega la memoria de trabajo, que es nuestro objeto de interés fundamental.

En primer lugar hemos efectuado un breve análisis documental a partir de los artículos donde aparece el descriptor genérico “learning disabilities” introducidos en la base de datos Psyclit/PsycINFO (Information Services in Psychology de la American Psychological Association) en las tres últimas décadas (periodo 1970-1999), que suman 12151 referencias en total. Este análisis nos ha permitido llegar a las siguientes conclusiones tanto respecto al peso de los estudios sobre trastornos de cálculo en el conjunto de publicaciones sobre dificultades de aprendizaje, como a los contenidos específicos que tratan tales estudios:

- Los estudios sobre dificultades de aprendizaje del cálculo han tendido a descender dentro del conjunto específico de trabajos sobre dificultades matemáticas (47,6% en los setenta; 28,14% en los ochenta y 26,85% en los noventa del siglo XX). En relación a su volumen dentro del conjunto de todos los trabajos sobre dificultades de aprendizaje, aunque disminuyeron su peso en la década de los ochenta, se han recuperado en la década de los noventa (3,36% en los años setenta; 2,56% en los años ochenta y 2,71% en los años noventa).

- Los temas que han suscitado mayor interés en los estudios sobre trastornos de cálculo son sobretodo su diagnóstico y la intervención educativa posterior, que representan el 25,6% y el 21,9% respectivamente del total de investigaciones de las tres décadas (el auge de este tipo de investigaciones se produce durante la década de los ochenta, mientras que en la década de los noventa se observa un leve retroceso).
- La memoria ocupa el cuarto lugar en la categorización efectuada, que consta de 18 bloques temáticos en total. El interés de este proceso psicológico en los estudios sobre trastornos de cálculo, que representa un 6,4% del total de este tipo de investigaciones, únicamente es superado por estudios genéricos sobre diagnóstico, intervención educativa y por estudios neurológicos y/o neuropsicológicos. Además, se produce un incremento de las investigaciones sobre memoria en la década de los ochenta y noventa en relación a la década de los setenta.
- Otros procesos psicológicos que se han vinculado con los trastornos de cálculo son la atención (5,9%); la percepción (5,3%) y el lenguaje (5,1%), aunque ocupan un volumen de investigaciones algo menor que los estudios sobre memoria. En el análisis década a década, hemos visto que los estudios que relacionan trastornos de cálculo con percepción han tendido a disminuir en la última década, mientras que los estudios sobre atención y lenguaje han aumentado considerablemente.
- Existe un grupo de estudios que no han suscitado tanto interés como los anteriores, pero de los cuales se han ido publicando regularmente trabajos: sujetos que sufren distintas patologías (4,3%); personalidad (3,7%); taxonomías (3,2%); inteligencia no verbal (2,9%); coeficiente de inteligencia (1,8%); el estatus social (1,3%); la delincuencia juvenil o el nacimiento prematuro (0,8%); y el análisis de parámetros fisiológicos, actos reflejos o lugar geográfico (0,3%).

En segundo lugar, una vez establecido el peso y el contenido de los trabajos

sobre trastornos de cálculo, hemos procedido a la conceptualización teórica de este fenómeno. A partir de la revisión efectuada, hemos visto que el trastorno de cálculo ha sido denominado también “acalculia”, que se refiere a una discapacidad debida a una lesión específica a nivel cerebral, o “discalculia” cuando no existe una disfunción neurológica (Geary, 1993; Giordano et al., 1976; Levin et al., 1996; McCloskey et al., 1985; Morrison y Siegel, 1991b; Temple, 1991; entre otros). Otros autores han usado términos más genéricos como “incapacidad aritmética” (Morrison y Siegel, 1991a; entre otros), aunque actualmente se ha ido substituyendo por “trastorno del cálculo” (American Psychiatric Association, 1995), que es el término que hemos adoptado. Así, pues, según el DSM-IV (American Psychiatric Association, 1995), el trastorno de cálculo se considera:

“Una capacidad aritmética (medida mediante pruebas normalizadas de cálculo o razonamiento matemático administradas individualmente) que se sitúa sustancialmente por debajo de la esperada en individuos de edad cronológica, coeficiente de inteligencia y escolaridad concordantes con la edad (Criterio A). El trastorno de cálculo interfiere significativamente en el rendimiento académico o las actividades de la vida cotidiana que requieren habilidades para las matemáticas (Criterio B). Si hay un déficit sensorial, las dificultades en la aptitud matemática deben exceder de las asociadas habitualmente a él (Criterio C)” (pp. 52).

De acuerdo con la definición anterior, el trastorno de cálculo no se considera una dificultad de aprendizaje debida a retraso mental, a una escolarización inadecuada, ni a déficits visuales o auditivos, por lo que en nuestra revisión bibliográfica hemos omitido todas aquellas referencias que analizaban estos aspectos.

Una vez conceptualizado el trastorno de cálculo, hemos revisado aquellos trabajos que han incidido en la clasificación de tales trastornos. De forma muy resumida, los estudios psicológicos realizados hasta los años setenta del siglo XX pretenden identificar sobretodo los tipos de errores más frecuentes que realizan los niños en tareas de cálculo (Giordano et al., 1976; Radatz, 1979; entre otros), mientras que los estudios contemporáneos tienden a clasificar a los niños en función de su nivel de rendimiento en distintos tests psicométricos (Fletcher, 1985; Jordan, 1995; Rourke y Tsatsanis, 1995; entre otros).

En tercer lugar hemos revisado el panorama de los estudios sobre trastornos de cálculo a partir de tres perspectivas, de acuerdo con Geary (1993) y Morrison y Siegel (1991a), entre otros: a) perspectiva psicológica; b) perspectiva neurológica; y c) perspectiva genética.

Los principales datos obtenidos a partir de la revisión de los estudios más representativos sobre trastornos de cálculo desde una perspectiva psicológica son los siguientes:

- Las dificultades de aprendizaje del cálculo aritmético pueden ser medidas tomando como base el nivel intelectual o el rendimiento académico, según Fletcher (1985); Jordan (1995); Morrison y Siegel (1991a); o Siegel y Ryan (1988, 1989); entre muchos otros. Por ello, tradicionalmente se han utilizado distintos instrumentos de medida como el Wechsler Intelligence Scale for Children-Revised (WISC-R), de Wechsler (1974); el Wide Range Achievement Test-R (WRAT), de Jastak y Wilkinson (1984) o el Woodcock-Johnson Psycho-Educational Battery-Revised (WJ-R), de Woodcock y Johnson (1990); entre otros.
- El análisis psicológico de los parámetros que intervienen en la aparición de dificultades en el aprendizaje del cálculo aritmético es multidimensional, puesto que son muchos los factores tanto internos como externos que intervienen (Arnal, 1990); y a la vez reduccionista, puesto que como afirman Fernández y Goñi (1995):

“La realidad es multifactorial, lo cual no es otra cosa que decir que todo influye en mayor o menor medida y que, como consecuencia, los análisis simples casi nunca dan cuenta de ella” (pp. 9).

- Algunos de los factores internos más estudiados desde la perspectiva psicológica durante el periodo estudiado (1970-1999) han sido:
 - Por un lado, distintos procesos psicológicos básicos como la memoria, la atención, la percepción o el lenguaje. Los estudios sobre memoria no han

sido objeto de revisión en este capítulo puesto que van a ser analizados exhaustivamente en el tercer capítulo; los estudios sobre atención, entre los que destacan los de Benedetto y Tannock (1999); Lindsay et al. (1999); Marshall et al. (1999) y Walter et al. (2000), entre otros, concluyen en su mayoría que los niños que presentan problemas de atención suelen encontrar dificultades para organizar estructuras jerárquicas de actividades o procesos mentales, lo cual tiene consecuencias especialmente negativas en matemáticas, de acuerdo con Rivière (1990); los estudios sobre percepción indican que los déficits perceptivos auditivos y visuales conllevan trastornos en la identificación de números y signos (Bernardo y Okagaki, 1994; Silver et al., 1999; entre otros); finalmente, los estudios sobre lenguaje relacionan las habilidades psicolingüísticas con los trastornos de cálculo, y en los últimos tiempos se destaca sobretodo la habilidad fonológica (Ackerman y Dykman, 1995; Fazzio, 1996; Raesaenen y Ahanen, 1995; Rose, 1992; entre otros).

- Por otro lado, otros trabajos han incidido en el papel de aspectos actitudinales-afectivos como la motivación (Baroody, 1988; Skemp, 1980; entre otros) y la personalidad, el autoconcepto, la autoestima, etc. (Janes, 1995; Valar, 1999; entre otros). Estos estudios correlacionan patrones motivacionales extrínsecos o bien la baja autoestima y un autoconcepto negativo con los trastornos de cálculo. En síntesis, llegan a la conclusión que a medida que avanza el nivel de escolarización tiende a producirse un descenso en la actitud favorable hacia las matemáticas, y se apunta este factor como posible causante de algunas dificultades de aprendizaje.
- Todavía desde la perspectiva psicológica, algunos estudios han incidido también en factores de orden externo como la situación socio-ambiental del centro escolar o el tipo de centro (Barbenza y Urhlandt, 1981; Baker et al., 1984; Etxeberría et al., 1993; Nortes y Martínez, 1989; entre otros); el efecto del profesor (Contreras, 1989; Etxeberría et al., 1993; Nortes y Martínez, 1989; entre otros); el estatus socio-económico (Etxeberría et al., 1993; Saura y García, 1990; entre

otros); o la distribución del tiempo familiar (Ghata, 1983; entre otros).

La perspectiva neuropsicológica nos ha permitido llegar a las siguientes conclusiones:

- Existe una relación entre los trastornos de cálculo y los déficits en distintas áreas cerebrales (Annet y Manning, 1990; Geary, 1993; Martins et al., 1999; Navarra et al., 1998; Rourke y Conway, 1997; Rourke y Tsatsanis, 1995; entre otros).
- Parece ser que el hemisferio derecho interviene sobretodo en aspectos visuales y el izquierdo en aspectos verbales relacionados con el cálculo (Geary, 1993; Rourke y Tsatsanis, 1995; entre otros), aunque esta afirmación debe ser corroborada por nuevos estudios.
- La investigación neuropsicológica constata que algunas de las causas de los trastornos de cálculo son la baja capacidad en la recuperación de operaciones; un déficit procedimental y dificultades en la representación espacial (Geary, 1993). De forma más concreta, este autor destaca los siguientes tipos de errores:
 - Errores producidos por un déficit en la memoria semántica: rasgos cognitivos y de ejecución (baja frecuencia de recuperación de operaciones aritméticas, cuando son recuperadas se producen muchos errores, o bien el tiempo de solución no es sistemático); rasgos neuropsicológicos (disfunciones en el hemisferio izquierdo, sobretodo la zona posterior, y posible intervención subcortical a nivel del tálamo); rasgos genéticos (herencia de la discapacidad aritmética).
 - Errores procedimentales: rasgos cognitivos y de ejecución (uso frecuente de procedimientos inmaduros, errores frecuentes en el uso de procedimientos el desarrollo potencial está por debajo de la comprensión de conceptos que intervienen en el uso de procedimientos); rasgos neuropsicológicos (aunque no está claro, algunos datos sugieren una asociación con una disfunción del

hemisferio izquierdo); rasgos genéticos (no se han descrito).

- Errores producidos por un déficit viso-espacial: rasgos cognitivos y de ejecución (dificultades en la representación espacial de información numérica, como por ejemplo la alineación de números para realizar una operación vertical de suma o resta, etc.; dificultades en el valor posicional de los números); rasgos neuropsicológicos (asociados con una disfunción del hemisferio derecho, en particular, en las zonas posteriores); rasgos genéticos (no parece asociarse con la discapacidad aritmética).

Finalmente, la perspectiva genética es la que ha aportado menos datos hasta el momento en relación a los trastornos de cálculo. Desde esta perspectiva, que considera el potencial hereditario de las destrezas matemáticas, se parte de la base que las diferencias individuales de un determinado rasgo fenotípico son debidas a diferencias genéticas, por lo se sugiere que ciertas discapacidades aritméticas podrían ser heredadas (Geary, 1993; Gillis y Defries, 1991; entre otros).

A modo de conclusión general, a partir de la revisión de los trabajos más representativos sobre trastornos de cálculo de las tres últimas décadas del siglo XX, hemos visto que hay un sector de estudios que han empezado a explicar el posible origen de estos trastornos a partir de la intervención de la memoria (más concretamente, la memoria de trabajo). Estos estudios inciden en distintos aspectos como el uso de estrategias lentas e ineficaces, déficits en el procesamiento fonológico del material numérico, dificultades en la recuperación de información almacenada en la memoria a largo plazo, etc. De todas formas, consideramos que se trata de un campo poco explotado y quedan todavía muchos aspectos por determinar, factor que ha sido decisivo al plantear nuestra investigación.

A continuación, en el tercer y último capítulo de nuestro marco teórico de referencia, procedemos a la revisión de los escasos trabajos que han vinculado la memoria de trabajo con el cálculo aritmético hasta el momento.

3. LA INTERVENCIÓN DE LA MEMORIA DE TRABAJO EN EL APRENDIZAJE DEL CÁLCULO

“La importancia de la memoria para hacer matemáticas, desde los cálculos más sencillos a las tareas más sofisticadas, es evidente. La cuestión crucial no es si la memoria juega un papel en la comprensión de las matemáticas sino qué es lo que es recordado y cómo es recordado tanto por los que comprenden como por los que no” (pp. 261).

Byers y Erlwanger (1985)

3.1. ASPECTOS PRELIMINARES

En el transcurso de más de un siglo desde los inicios del estudio experimental de la memoria (Ebbinghaus, 1885), además de los trabajos sobre bases conceptuales y metodológicas; los de estructuras y procesos; y los relativos a la representación del conocimiento; paralelamente han ido surgiendo múltiples líneas de investigación aplicada, sobretodo a partir de los años setenta del siglo XX. En el contexto de estos desarrollos aplicados, un sector de autores se ha centrado en relacionar la memoria con el aprendizaje y la ejecución de tareas matemáticas.

De hecho, tal como hemos señalado en nuestro primer capítulo, las matemáticas han sido desde siempre un vehículo popular que se ha utilizado en las investigaciones sobre aprendizaje (Kilpatrick, 1992) o, más específicamente, para realizar un análisis minucioso de los mecanismos mentales que intervienen en él (Rivière, 1990), debido a que facilitan el estudio de los procesos psicológicos a la vez que representan una vertiente práctica obvia (Bermejo y Rodríguez, 1990). Estos argumentos justifican que desde el contexto de la psicología de la memoria, las matemáticas hayan sido también un instrumento utilizado en algunos estudios empíricos. Hemos encontrado trabajos que han relacionado la memoria con:

- La resolución de problemas (Alvarado y Rudy, 1995; Bernardo y Okagaki, 1994; Carlson et al., 1990; Castejón y Pascual, 1988; Cooney y Swanson, 1990; Cross y Markus, 1994; Fayol et al., 1987; Hegarty et al, 1995; Judd y Bilsky, 1989; Kail y Hall, 1999; Mayer y Wittrock, 1996; Metcalfe, 1986; Mitsuda, 1993; Passolunghi et al, 1999; Robins, 1997; Silver, 1981; Swanson et al., 1993;

Zentall, 1990; entre otros).

- La geometría (Bahrick y Hall, 1991; Hannafin y Scott, 1998; Lovett y Anderson, 1994; Mendelsohn, 1986; Mousabi et al., 1995; Mousavi, 1996; NewCombe y Huttenlocher, 1992; Runcie et al, 1991; entre otros).
- El álgebra (Mayer, 1982; Mayer, 1992; Mayer y Moreno, 1998; Mayer y Sims, 1994; entre otros).
- Y sobretodo con contenidos matemáticos de tipo aritmético (cálculo), que son los que constituyen nuestro objeto de estudio y, por lo tanto, los que vamos a revisar en este capítulo.

Pero, ¿por qué la memoria?. Vamos a intentar responder a esta pregunta con las palabras de Ruíz-Vargas (1991), quien en su libro *Psicología de la Memoria* indica textualmente:

“Resulta sorprendente lo poco que pensamos en la memoria o, más exactamente, lo poco que relacionamos la memoria con nuestras actividades habituales... Pero, ¿nos hemos parado a pensar alguna vez qué es la memoria?; ¿hemos reflexionado sobre la importancia de la memoria para todo lo que hacemos?; ¿somos capaces de imaginar lo que ocurriría si perdiésemos la memoria?” (pp. 27).

Pensamos, de acuerdo con la reflexión anterior, que la memoria es uno de los procesos psicológicos básicos que interviene de forma importante en el aprendizaje del cálculo aritmético elemental, por lo que el estudio de su intervención en dicho aprendizaje puede ofrecer algunos datos relevantes que permitan mejorar la comprensión actual de este aspecto, así como subsanar algunos problemas o dificultades en el proceso de adquisición de este aprendizaje instrumental.

Un número considerable de trabajos de psicología de la memoria que han utilizado el cálculo como material de investigación, contribuyendo a la comprensión de las relaciones que se establecen entre ambas tareas cognitivas, se han efectuado desde el sistema de memoria a corto plazo o memoria de trabajo, y en menor medida a partir del sistema de memoria a largo plazo en relación a la recuperación de

contenidos aritméticos a la memoria de trabajo. En cambio, no existe un cuerpo de investigaciones específicas centrado en las implicaciones de la memoria sensorial en el aprendizaje y/o realización de tareas aritméticas. En su ausencia, como hemos visto en el segundo capítulo, hemos detectado exclusivamente algunos trabajos que aportan datos relativos a las dificultades de aprendizaje del cálculo que conlleva un funcionamiento anómalo del registro sensorial visual y/o el auditivo, aunque a nuestro entender tales datos se refieren a déficits de tipo perceptivo más que puramente memorístico, por lo que omitimos su estudio.

Paralelamente, desde planteamientos centrados en la educación y el aprendizaje de la matemática dentro del marco de la psicología cognitiva, algunos autores (Balacheff, 1990; Greer, 1981; Nesher, 1986; Vergnaud, 1990; entre otros) se han planteado también la posible implicación de la memoria.

Nuestra labor en este tercer capítulo va a consistir precisamente, como hemos indicado anteriormente, en analizar los trabajos de memoria de trabajo aplicados al cálculo aritmético. Al emprender esta tarea partimos de la base que el cálculo aritmético simple es una actividad habitual que realizamos las personas, y por lo tanto, insistimos en el hecho que la memoria de trabajo interviene también de una forma importante en la realización y en la habilidad de esta tarea cognitiva, argumento que de hecho constituye el núcleo de nuestra tesis.

Queremos precisar que en este capítulo no vamos a realizar un análisis y/o revisión bibliográfica exhaustiva de la memoria de forma aislada (conceptualización, modelos de memoria, etc.), puesto que escapa de nuestros objetivos. Además, en este sentido se han realizado ya importantes aportaciones (para una buena revisión, pueden consultarse por ejemplo Baddeley, 1976, 1982, 1998, 2000; Mayor y de Vega, 1992; Ruíz-Vargas, 1991; Sáiz, 1988; Sáiz y Sáiz, 1989; Sebastián, 1983; entre otros). Sin embargo, puesto que nuestra tesis se centra en el papel de la memoria de trabajo, sí que hemos creído oportuno realizar una breve síntesis sobre este sistema (conceptualización y tipos de medida), que presentamos en el siguiente apartado. Una vez descrito el modelo a nivel conceptual, vamos a presentar un

estudio bibliométrico exhaustivo sobre la evolución de la publicación tanto de los estudios de memoria de trabajo en general como de los estudios de memoria de trabajo y matemáticas y los de memoria de trabajo y cálculo en particular, con el objeto de determinar el peso de este tipo de estudios dentro de la psicología de la memoria. Para efectuar este análisis documental, hemos usado como referencia los artículos introducidos en la base de datos Psyclit/PsycINFO (Information Services in Psychology de la American Psychological Association) desde 1887 hasta 1999. Vamos a finalizar el capítulo con un apartado donde se describe el panorama de los estudios sobre memoria de trabajo y cálculo.

3.2. LA MEMORIA DE TRABAJO

Según Baddeley (1998), el estudio de la memoria a corto plazo nace con el objeto de dar respuesta a distintas cuestiones prácticas, como el intento de Jacobs a finales del siglo XIX para medir la capacidad mental de sus alumnos; el interés de Broadbent durante los años cincuenta del siglo XX en la atención dividida y sus implicaciones para trabajos como el de controlador de tráfico aéreo; o bien el interés de Conrad en los sesenta por la memorización de números de teléfono y códigos postales. Sin embargo, paulatinamente el estudio de la memoria a corto plazo se vincula al laboratorio, por lo que a finales de la década de los sesenta se generan un abanico considerable de técnicas de laboratorio y modelos y teorías detallados. Desde esta perspectiva, uno de los modelos multialmacén generados en los años sesenta del siglo XX que ha tenido mayor resonancia en el campo de la psicología de la memoria es el de Atkinson y Shiffrin (1968), quienes reivindicaron la importancia general del almacén a corto plazo, dando por sentado que dicho almacén funcionaba como una memoria de trabajo. Aunque en trabajos posteriores Atkinson y Shiffrin (1971a, 1971b) apuntan datos complementarios en la línea de plantear la memoria a corto plazo como una memoria de trabajo, los modelos estructurales enfatizan el carácter temporal y unitario de este sistema de memoria, y no desarrollan en cambio los aspectos más funcionales y procesuales.

Con el paso del tiempo, el concepto de un almacén a corto plazo unitario es

cuestionado y reemplazado por el de un modelo de memoria de trabajo de múltiples subsistemas. El mérito del cambio de concepción desde una visión puramente estructural y temporal de la memoria a corto plazo hacia una visión funcional corresponde al trabajo de Baddeley y Hitch (1974), que constituye el primer estudio en el que se desarrolla ya claramente el concepto de memoria de trabajo. Como veremos a continuación, los resultados de esta primera investigación les lleva a proponer a la memoria a corto plazo como un sistema operativo que mantiene o almacena temporalmente la información necesaria para ejecutar tareas cognitivas como la comprensión, el razonamiento y el aprendizaje, que denominan “working memory”, y que ha sido traducido al castellano de distintas formas: memoria operativa (por ejemplo: Ruíz-Vargas, 1991, entre otros); memoria en funcionamiento (por ejemplo: Sebastián, 1983; entre otros) o memoria de trabajo (por ejemplo: Navalón et al., 1989; entre otros), que es la forma que venimos utilizando en el Laboratorio de Memoria de la U.A.B. y, por lo tanto, el término que hemos adoptado en esta tesis doctoral.

3.2.1. El modelo de memoria de trabajo de Baddeley y Hitch (1974)

En la primera formulación del modelo de memoria de trabajo Baddeley y Hitch (1974) propusieron un modelo en el que un sistema de atención controlador supervisa y coordina varios sistemas subordinados subsidiarios. Denominaron al controlador atencional ejecutivo central y escogieron estudiar dos sistemas subordinados con mayor detalle: el bucle articulatorio o fonológico, que se suponía era el responsable de la manipulación de información basada en el lenguaje, y la agenda viso-espacial, que se suponía se encargaba de la creación y manipulación de imágenes visuales. Existe alguna investigación neurológica, como por ejemplo la realizada por Smith y Jonides (1997), que ha apoyado esta fragmentación al encontrar mediante estudios con tomografías por emisión de positrones (P.E.T.) que el área del cerebro que se activa cuando se pone en marcha el almacén y el proceso de control fonológico es exclusivamente el hemisferio izquierdo, mientras que los sistemas viso-espaciales se localizan en el hemisferio derecho. En contraste, los procesos de control ejecutivo se han asociado con incrementos de actividad en el

córtex prefrontal dorsolateral, lo cual demostraría la independencia funcional de los subsistemas de la memoria de trabajo propuestos por Baddeley y Hitch (1974). De todas formas, estos datos neurológicos todavía no están suficientemente demostrados. En la Figura 13 se muestra una representación simple del modelo:

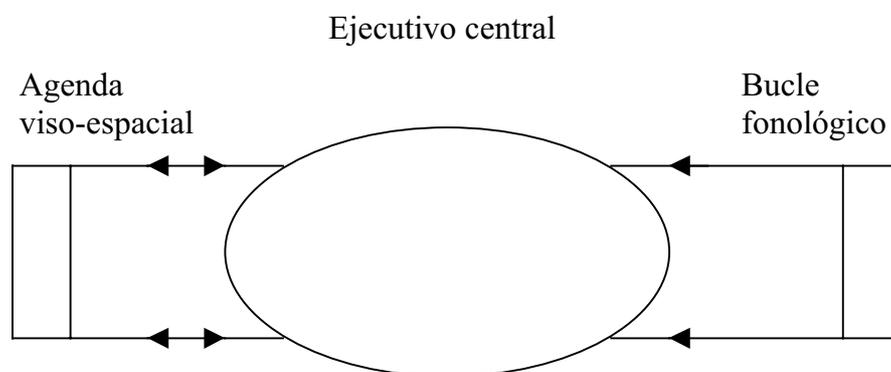


Figura 13: Modelo de memoria de trabajo de Baddeley y Hitch (1974)

En la propuesta inicial del modelo se puede observar ya que plantea aspectos diferenciales con respecto a la memoria a corto plazo: a) se rompe con la idea de un sistema unitario para convertirse en un sistema tripartito; y b) se pasa de un término estructural a un término más funcional, tal como expone Baqués (1996):

"La memoria de trabajo es un término funcional que se refiere a lo que hace la memoria más que dónde (en qué estructura) está la memoria" (pp. 147).

Posteriormente han ido realizándose nuevas aportaciones al modelo original (Baddeley, 1981, 1986, 1992a, 1992b; Baddeley et al., 1984; entre otros). Así, el bucle fonológico se ha dividido en dos subsistemas: un almacén fonológico con capacidad para retener información basada en el lenguaje, y un proceso de control articulatorio basado en el habla interna; y la agenda viso-espacial también: un subsistema encargado del procesamiento de patrones y de detectar el qué, y otro relativo a la localización en el espacio que transmite información sobre el dónde.

A continuación describimos las características más relevantes de cada uno de los subsistemas de la memoria de trabajo:

a. El bucle fonológico

Baddeley (1998) sugiere que:

"Éste es el componente más ampliamente desarrollado del modelo, en parte, porque sospecho que es uno de los componentes más simples, y en parte, porque concierne a un área en la que existía una cantidad de datos considerable... Se supone que el bucle fonológico consta de dos componentes, un almacén fonológico con capacidad para retener información basada en el lenguaje, y un proceso de control articulatorio basado en el habla interna. Se da por sentado que las huellas de memoria en el almacén fonológico se desvanecen y resultan irrecuperables después de un segundo y medio o dos, aproximadamente. Sin embargo, la huella de memoria puede reactivarse por un proceso de lectura de la huella dentro del proceso de control articulatorio, el cual vuelve a alimentar entonces el almacén, el proceso que subyace tras el repaso subvocal" (p. 60-61).

Desde un punto de vista evolutivo, según Gathercole y Adams (1993) y Gathercole y Pickering (2000a), el almacén fonológico aparece aproximadamente a los tres años de edad, pero el proceso de control articulatorio no emerge típicamente hasta los siete años de edad. Desde una perspectiva genérica, este componente de la memoria de trabajo, de acuerdo con Baddeley (1998); Baddeley et al. (1998); Baqués (1998); Gathercole (1995b) o Gathercole y Adams (1993), entre otros, permite ofrecer una explicación coherente de los siguientes fenómenos empíricos:

- El efecto de similitud fonológica o acústica: el recuerdo serial inmediato resulta afectado cuando los ítems son similares en sonido o en características articulatorias (Conrad, 1972; entre otros).
- El efecto del habla irrelevante o no atendida: se produce un descenso en la ejecución de tareas de recuerdo inmediato cuando se acompaña la presentación visual de los ítems con la presentación de material verbal auditivo, aunque semánticamente no tenga relevancia o no se entienda (Salamé y Baddeley, 1982; entre otros).
- El efecto de la longitud de las palabras: la amplitud de memoria depende de la duración hablada o número de sílabas de las palabras presentadas (Baddeley et al., 1975; entre otros).

- La supresión articulatoria: el funcionamiento del bucle fonológico se ve alterado si se requiere la articulación manifiesta o encubierta de un ítem irrelevante. Por tanto, si a un sujeto en una tarea estándar de amplitud se le pide que pronuncie una secuencia de sonidos irrelevantes, tal como decir repetidas veces la palabra "el", es probable que la amplitud sea sustancialmente inferior, ya sea la presentación auditiva o visual (Baddeley et al., 1984; entre otros).

Además de explicar de forma adecuada los aspectos generales anteriores, la medida experimental del bucle fonológico ha puesto de manifiesto su papel en distintos aspectos relacionados con el aprendizaje del lenguaje:

- El aprendizaje de la lectura (Ato y Navalón, 1983; Baddeley, 1979; Baqués, 1995a; Baqués y Sáiz, 1996, 1999; Cantor et al., 1991; Defior, 1994; Gathercole y Baddeley, 1993; Navalón et al., 1989; Swanson, 2000; entre otros).
- La comprensión de la lengua (Alonso y Mateos, 1985; García Madruga, 1985; Just y Carpenter, 1992; Masson y Miller, G.A., 1983; entre otros).
- La producción del habla (Adams y Gathercole, 1995, 1996; entre otros).
- La adquisición de nuevo vocabulario (Baddeley et al., 1998; Gathercole y Baddeley, 1989; Gathercole et al., 1999; entre otros).
- El aprendizaje de idiomas (Baddeley, 1993; Lehto, 1995; Service, 1992; entre otros).

b. La agenda viso-espacial

En el modelo inicial de Baddeley y Hitch (1974), el componente viso-espacial se consideraba un sistema similar al bucle fonológico pero dedicado a la información de carácter visual, aunque en aquel momento todavía no había

suficiente evidencia empírica (Baqués, 1998). Actualmente, se da por sentado que se trata de un sistema que se encarga de crear y manipular imágenes viso-espaciales y que se emplea en la creación y utilización de mnemotécnicas de imágenes visuales, y a la vez parece que el sistema espacial es importante para la orientación geográfica y para la planificación de tareas espaciales, aunque no parece encargarse del efecto de la imaginabilidad en la memoria verbal a largo plazo (Baddeley, 1998). Este subsistema es independiente del bucle fonológico, pero comparte algunas funciones con él (Pickering et al, 1998).

Si hasta hace relativamente poco tiempo no se discutía la estructura de la agenda viso-espacial, en los últimos años existen evidencias procedentes de investigaciones con animales y neuropsicológicas de que el sistema visual puede tener dos subsistemas independientes, uno encargado del procesamiento de patrones y de detectar el qué, mientras que el otro concierne a la localización en el espacio, y transmite información sobre el dónde (Baddeley, 1998; Della Sala et al., 1999; Farah et al., 1988; Gathercole y Pickering, 2000b; Logie, 1995; Logie y Pearson, 1997; entre otros).

Logie (1995), por ejemplo, propone dividir la agenda viso-espacial en dos componentes, como puede apreciarse en la Figura 14 que presentamos en la siguiente página:

- a. Un almacén temporal visual, que está sujeto a decaimiento y a interferencia debido a la entrada de nueva información.
- b. Un almacén temporal espacial, que está contemplado como un sistema que puede ser usado para planificar movimientos pero también puede usarse para repasar los contenidos del almacén visual.

El esquema presentado por Logie (1995) es el siguiente:

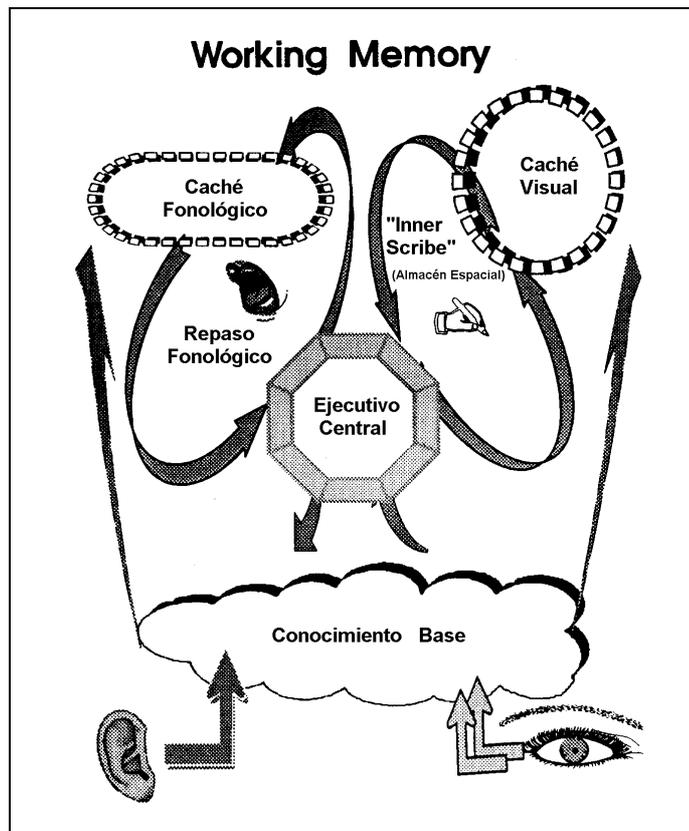


Figura 14: Modelo modificado de memoria de trabajo de Logie, 1995.

El funcionamiento de la agenda viso-espacial, con sus dos componentes, según Logie (1995) sería el siguiente:

"La ruta desde el input visual hasta los dos almacenes es a través de las representaciones de la memoria a largo plazo de las formas visuales de los objetos o de la información espacial sobre una escena dinámica. Cuando estas representaciones son activadas, la información llega a la parte visual o espacial del sistema. La entrada a un componente u otro viene determinada por la naturaleza de la información activada" (pp. 126).

Algunos autores, como por ejemplo Wang (1999), intentan concretar los mecanismos neuronales que intervienen en la memoria viso-espacial, y sitúan su área de intervención básicamente en el córtex prefrontal, aunque este es un aspecto que no está todavía suficientemente concretado en la actualidad.

c. *El ejecutivo central*

A nivel conceptual, Baddeley (1998) expone que:

"Al tratar de la estructura de la memoria de trabajo, se sugirió que podía desglosarse provechosamente en al menos tres componentes, que incluyen dos sistemas subordinados, el bucle fonológico y la agenda viso-espacial, controlados por un tercer componente, el ejecutivo central. ¿Qué sabemos sobre este tercer componente de suma importancia? Por desgracia, la respuesta es que conocemos considerablemente menos de lo que sabemos de los dos sistemas subordinados. La mayor parte de la investigación en la tradición de la memoria de trabajo ha mostrado la tendencia a concentrarse en los sistemas subsidiarios, principalmente porque parece que ofrecen problemas más solubles que el ejecutivo central. Éste tiende a convertirse de vez en cuando en una especie de cajón de sastre para consignar problemas importantes pero difíciles, como de qué modo se combina la información de varios sistemas subordinados, y cómo se seleccionan y operan las estrategias" (pp. 101).

Este mismo autor, dos años antes había presentado ya un trabajo en el que deja entrever que, efectivamente, el conocimiento de las funciones del ejecutivo central es escaso todavía (Baddeley, 1996), aunque sí que parece claro que se trata de un único subsistema que controla a dos subsistemas esclavos: el bucle fonológico y la agenda viso-espacial, y que ejerce un rol esencial en la realización de actividades cognitivas complejas (Engle et al., 1999). Gathercole y Pickering (2000a) sugieren otras funciones adscritas al ejecutivo central, como por ejemplo el desarrollo de estrategias flexibles para el almacenaje y la recuperación de la información; el control del flujo de información a través de la memoria de trabajo; la recuperación del conocimiento desde la memoria a largo plazo; o el control de la acción, la planificación, y la programación de múltiples actividades concurrentes.

Algunos autores como por ejemplo Towse (1998), han propuesto fragmentar el ejecutivo central en distintos subcomponentes puesto que interpreta este componente de la memoria de trabajo como una constelación de funciones parcialmente independientes.

De modo genérico, el modelo inicialmente propuesto por Baddeley y Hitch (1974), y sus reformulaciones posteriores (Baddeley, 1986; Baddeley y Hitch, 1994), ha generado y sigue generando distintos trabajos que demuestran que a nivel conceptual todavía no puede ser considerado un modelo cerrado (Baqués, 1998;

Jurden, 1995; Vaquero et al., 1996; entre otros). Este argumento se apoya, además, en el hecho que en el transcurso de más de un cuarto de siglo de existencia del modelo de Baddeley y Hitch (1974), han surgido algunas propuestas alternativas. Así, por ejemplo, Reisberg et al. (1984) sugieren que los sistemas esclavos (bucle fonológico y agenda viso-espacial) en realidad no pueden considerarse memorias en un sentido estricto, sino procesos de control estratégicos de la actividad cognitiva. Case (1987), por su lado, no apoya la idea de que la memoria de trabajo está compuesta por tres subsistemas, y en su lugar argumenta que se trata de una herramienta unitaria que media la actuación en una serie de tareas verbales y no verbales. Engle et al. (1992) y Salthouse (1996a, 1996b), en la misma línea, exponen también que la memoria de trabajo es una herramienta general que actúa de mediadora entre el nivel de cognición bajo y el nivel de cognición alto, sin tener en cuenta la tarea que se realiza. En un trabajo muy reciente, Oberauer et al. (2000) proponen un intento de sistematización muy elaborado que consiste en diferenciar la capacidad de la memoria de trabajo en dos dimensiones, que se refieren a las funciones de los recursos de la memoria de trabajo por un lado y los contenidos involucrados en las tareas por otro. Denominan a estas dos dimensiones **funciones y contenidos** respectivamente, y cada una de ellas tiene a la vez tres categorías. Respecto a las funciones, los autores distinguen las tres categorías siguientes:

- a. El procesamiento y almacenamiento simultáneos, que habitualmente se han utilizado para distinguir una memoria de trabajo más activa frente a un almacén pasivo de la memoria a corto plazo. En su caso, destacan el procesamiento como función de la memoria de trabajo que permite explicar la habilidad lectora y otras destrezas cognitivas complejas.
- b. La supervisión, que se refiere a la función ejecutiva (ejecutivo central) de la memoria de trabajo (Baddeley, 1986, 1996), y según la revisión efectuada por Oberauer et al. (2000) contribuye, entre otros aspectos, a explicar los fenómenos siguientes: la flexibilidad conductual; la planificación y la finalidad de las conductas; la codificación temporal de los contenidos de la memoria de trabajo; y la conciencia autoconsciente que, según Tulving (1985, 1989) es la que acompaña

el recuerdo de eventos personales y autobiográficos (se tiene conciencia que aquel recuerdo es algo real de su existencia pasada).

- c. La coordinación, que responde a la función de coordinar información dentro de estructuras. Esta función, según Oberauer et al. (2000), conlleva el acceso simultáneo a distintos tipos de información con el objeto de asociarlos a sus respectivos roles (verbal, visual).

En relación a los contenidos, proponen distinguir también tres categorías: memoria de trabajo verbal, numérica y espacial. Según Oberauer et al. (2000), la literatura ha sugerido tradicionalmente distinguir entre memoria de trabajo con material verbal y con material espacial, a partir de distintos estudios psicométricos. A pesar de que en algunos trabajos precedentes como el de Swanson (1996) no encuentran evidencia empírica para separar factores verbales y espaciales, en su estudio constatan que la memoria de trabajo espacial es claramente distinta de las otras dos categorías mencionadas (verbal y numérica). Sin embargo, a raíz del estudio realizado no pueden garantizar por el momento la distinción entre memoria de trabajo verbal y numérica, por lo que son precisos nuevos estudios que tengan en cuenta este aspecto.

Una vez expuestas las principales aportaciones teóricas relativas a la conceptualización del modelo de memoria de trabajo, a continuación vamos a incidir en la medida de este sistema de memoria, puesto que ello puede ofrecer una visión general de la forma de obtener resultados empíricos a la vez que puede servir de orientación para la concreción del tipo de medidas más óptimas a usar en una investigación.

3.2.2. La medida de la memoria a corto plazo o memoria de trabajo

Desde un punto de vista teórico, debemos tener presente en primer lugar que la medida de la memoria depende en buena parte de la conceptualización que se tenga de ella. Por ello, tradicionalmente, antes de que se considerase la memoria de

trabajo como un sistema responsable de manipular y temporalmente almacenar información relativa a actividades cognitivas (Baddeley, 1986), las tareas utilizadas para evaluar la memoria a corto plazo no contemplaban este doble aspecto, sino que únicamente medían el almacenamiento (Towse y Hitch, 1995).

A raíz de la conceptualización propuesta por Baddeley y Hitch (1974), el abordaje de la medida de la memoria de trabajo se ha realizado utilizando, además de las tareas simples, las tareas duales, por lo que este parámetro determina un nivel inicial de clasificación. El segundo nivel considera el tipo de habilidad mnemónica requerida para realizar la prueba, lo cual nos lleva a considerar distintas tareas en base al componente de la memoria de trabajo implicado: bucle fonológico, agenda viso-espacial o ejecutivo central. Hasta el momento, hemos detectado dos baterías de tests de memoria de trabajo que, a grandes rasgos, siguen el criterio anterior. Concretamente, se trata de la batería de Pickering y Gathercole (1997), de la que existe una versión ampliada y traducida al español de Pickering, Baqués y Gathercole (1999); y la batería de Swanson (1992, 1993, 1995, 1996), cuya composición puede consultarse en los Anexos 1 y 2 respectivamente.

Seguidamente vamos a describir de forma breve en qué consisten las tareas simples y las tareas compuestas.

a. Tareas simples

Las tareas simples, algunas de las cuales ya se habían utilizado antes de la aparición del modelo de Baddeley y Hitch (1974) para investigar la memoria a corto plazo, son pruebas que sirven para medir la capacidad del bucle fonológico para mantener la información verbal o acústica durante uno o dos segundos, y la capacidad del procesador de control articulatorio, parecido al habla interior. Estas pruebas se utilizan también para medir la habilidad de la agenda viso-espacial para mantener imágenes espaciales durante un cierto periodo de tiempo, que acostumbra a ser muy breve (Baqués, 1996).

A continuación describimos algunas de las tareas simples más utilizadas, que mayoritariamente se incluyen en la batería de Pickering, Baqués y Gathercole (1999) y/o en la de Swanson (1992, 1993, 1995, 1996), como se ha podido apreciar en los Anexos 1 y 2 respectivamente.

- *Recuerdo Serial de Palabras con rima (Swanson, 1992, 1993, 1995, 1996)*: presentación de secuencias de palabras que riman entre ellas y que deben ser recordadas inmediatamente, en el mismo orden en que han sido presentadas.
- *Recuerdo Serial de Pseudopalabras (Pickering, Baqués y Gathercole, 1999)*: presentación de secuencias de pseudopalabras que deben ser recordadas inmediatamente, en el mismo orden en que han sido presentadas.
- *Reconocimiento de Series de Palabras (Pickering, Baqués y Gathercole, 1999)*: presentación de una secuencia de palabras y a continuación presentación de otra serie de la misma amplitud, con las mismas palabras o alguna variación. El sujeto debe manifestar si la segunda serie es igual o diferente a la primera.
- *Reconocimiento de Series de Pseudopalabras (Pickering, Baqués y Gathercole, 1999)*: presentación de una serie de pseudopalabras y a continuación presentación de otra serie de la misma amplitud, con las mismas pseudopalabras o alguna variación. El sujeto debe manifestar si la segunda serie es igual o diferente a la primera.
- *Repetición de Pseudopalabras (Pickering, Baqués y Gathercole, 1999)*: Escuchar primero y repetir después, una por una, distintas pseudopalabras que se van presentando a los sujetos.
- *Categorización Semántica (Swanson, 1992, 1993, 1995, 1996)*: presentación de una lista de palabras que forman parte de una o más categorías semánticas, y a continuación se formula una pregunta en la que el sujeto debe reconocer alguna de las palabras previamente presentadas.
- *Recuerdo de Historias (Swanson, 1992, 1993, 1995, 1996)*: recordar en el mismo orden en que han sido aprendidos unas series de episodios presentados en un mismo párrafo.
- *Secuencia de Frases o "Sentence Span" (Swanson, 1992, 1993, 1995, 1996)*:

recordar frases sueltas, no necesariamente en el mismo orden que han sido aprendidas.

Además de las anteriores, han sido ampliamente utilizadas también las pruebas de *Recuerdo Serial de Dígitos* o “*Digit Span*”, *Recuerdo Serial de Palabras* o “*Word Span*” y *Repetición de Pseudopalabras* o “*Nonword Repetition*” de la “Bateria de Tests de Memòria de Treball” de Pickering, Baqués y Gathercole (1999), que no describimos puesto que se trata de pruebas que hemos utilizado en nuestra investigación empírica, por lo que se encuentran explicadas en el apartado de Método (ver página 186).

Para medir la capacidad de la agenda viso-espacial se han venido utilizando las siguientes pruebas simples:

- *Matrices Visuales* (Swanson, 1992, 1993, 1995, 1996): recordar secuencias visuales de puntos dentro de una matriz.
- *Test de “laberintos”* (Pickering, Baqués y Gathercole, 1999): presentar un recorrido en un laberinto y, después de un breve espacio de tiempo, el sujeto debe reproducir este mismo recorrido en un laberinto en blanco.
- *Test de “Mapas y Direcciones”* (Swanson, 1992, 1993, 1995, 1996): recordar una secuencia de direcciones en un mapa sin señales.
- *Secuencia de dibujos* (Swanson, 1992, 1993, 1995, 1996): recordar una secuencia de dibujos o figuras en el mismo orden en que han sido aprendidos.
- *Organización espacial* (Swanson, 1992, 1993, 1995, 1996): presentar series de distintas cartas (hasta 8 distintas) que deben ser reproducidas en el mismo orden en que han sido presentadas.
- *Secuencia no verbal* (Swanson, 1992, 1993, 1995, 1996): secuenciar una serie de cartas con figuras sin sentido y reconocer dicha secuencia en otra en la que se incluyen algunas cartas distractoras.
- *Memoria a corto plazo espacial* (Oberauer, 1993): aparecen puntos en una matriz de 10x10 y los sujetos deben recordar la posición de los puntos.
- *Coordinación espacial* (Oberauer, 1993): se trata de una prueba muy

parecida a la anterior, pero con una variación que consiste en que una vez aparecidos los puntos simultáneamente los sujetos deben decidir si son simétricos respecto a un eje o no.

- *Integración espacial (Salthouse y Mitchell, 1989)*: se presentan una serie de líneas parciales dibujadas en una pantalla de ordenador. En la presentación siguiente aparece un dibujo completo y los sujetos deben identificar en qué parte del dibujo se encuentra la presentación inicial.

Junto con las anteriores, existen otras pruebas que miden la habilidad de la agenda viso-espacial como el *Test de Matrices*, el *Test de Memoria Visual Figurativa* y el *Test Katakana de Búsqueda Visual*, de la "Bateria de Tests de Memòria de Treball" de Pickering, Baqués y Gathercole (1999), que no describimos puesto que de nuevo se trata de pruebas que hemos utilizado en nuestro estudio, por lo que se encuentran descritas en el apartado de Método (ver página 186).

b. Tareas duales

Este tipo de pruebas se utiliza para medir las distintas funciones del ejecutivo central de la memoria de trabajo siguiendo el planteamiento de situaciones duales del modelo de Baddeley y Hitch (1974). Se trata de pruebas compuestas que recogen a la vez almacenamiento y procesamiento, y en general implican mayor complejidad cognitiva que las tareas simples.

Según Baddeley (1998), en su mayoría se basan en la ejecución de dobles tareas en las que se parte de una situación de interferencia mutua que puede ser debida a distintos aspectos:

- a. Una incapacidad física de emitir de forma simultánea las respuestas apropiadas (por ejemplo, silbar y cantar)
- b. Una incapacidad de mayor o menor magnitud según el material simultáneo a procesar: auditiva-verbal/visual-gráfica, auditiva-verbal/visual-verbal, etc.

Algunas de las pruebas usadas son las siguientes:

- *Frases auditivas de dígitos (Swanson, 1992, 1993, 1995, 1996)*: recordar información numérica incluida en una frase corta, o completar frases con contenido numérico.
- *Amplitud operativa de dígitos (Swanson, 1992, 1993, 1995, 1996)*: administrar series de números, y los sujetos deben recordar el último número de cada serie.
- *Asociación semántica (Swanson, 1992, 1993, 1995, 1996)*: presentación de series de palabras que el sujeto debe clasificar por categorías semánticas y repetirlas en el mismo orden en que han sido aprendidas. En segundo lugar, se somete al sujeto a una tarea de reconocimiento.
- *Prueba de interferencia auditiva-verbal/visual-gráfica (Baqués, 1995b)*: tarea dual en la que una prueba de recuerdo serial de dígitos interfiere con una prueba de gráficos.
- *Prueba de interferencia auditiva-verbal/visual-verbal (Baqués, 1995b)*: tarea dual que utiliza el recuerdo serial de dígitos como prueba concurrente al reconocimiento de pseudopalabras.
- *Generación al azar (Baddeley, 1986)*: consiste en producir una secuencia al azar utilizando el teclado numérico del ordenador. A cada número se le asocia un símbolo, y al generar una nueva secuencia al azar los sujetos deben recordar también los elementos que han producido más recientemente.
- *Generación de categorías (Baddeley, 1986)*: se presentan en la pantalla del ordenador dos categorías semánticas (1 y 2) con cinco palabras cada una que deben ser memorizadas. Los sujetos son incitados a generar más palabras de las categorías. Después de cada respuesta, aparece en la pantalla el número de la siguiente categoría. Este número va variando, por lo que deben elegir entre las dos categorías frecuentemente.
- *Test de conteo de estrellas (Das-Smaal et al., 1993)*: se presentan dos líneas de estrellas en la pantalla, intercaladas con signos aritméticos (+ y -). Los sujetos deben contar las estrellas desde la izquierda hasta la derecha. Cuando encuentran el signo + deben contar hacia delante, y cuando encuentran el signo - deben contar hacia atrás.

- *Cambio atencional*: se usan tres versiones distintas denominadas numérica (Allport et al., 1994), espacial y verbal (Zimmermann y Fimm, 1993). En la versión numérica, se presentan números que deben ser leídos o operados alternativamente, y en ambos casos los sujetos deben introducir su respuesta con el teclado numérico del ordenador; en la versión espacial aparecen dos figuras (una con ángulos y la otra sin), y los sujetos deben responder “derecha” o “izquierda” indicando, alternativamente, en qué lado aparece la figura con o sin ángulos; en la versión verbal, aparecen dos palabras y los sujetos deben indicar a qué categoría presentada previamente pertenecen.
- *Amplitud verbal/matemática (Oberauer et al., 2000)*: consiste en presentar simultáneamente en la pantalla una lista de palabras y otra de números que deben ser recordadas. A continuación, se presentan cinco palabras (una en cada esquina y una en el centro) y los sujetos deben asociar una de las palabras de la esquina con la del centro; después se presenta una tarea numérica que consiste en presentar tres números (uno en cada lado y otro en el centro de la pantalla), y los sujetos deben encontrar qué número de los lados pueden sumarse con el del centro para que el resultado sea divisible por cinco. Después de dar las respuestas (verbal y numérica) deben recordar las listas iniciales en el mismo orden que han sido aprendidas.
- *Transformación de patrones (Mayr y Kliegl, 1993)*: se presentan de cuatro a ocho objetos con distintas cualidades (forma, medida, color interior y color exterior) en la pantalla del ordenador. Los objetos están separados en dos grupos, con el mismo número de objetos en cada grupo, y los sujetos deben compararlos: en primer lugar, tienen que identificar la cualidad distinta de las demás en los dos grupos, y en segundo lugar, deben identificar dos objetos (uno de cada parte) que difieran en una cualidad.
- *Actualización de la memoria (Oberauer et al., 2000)*: se trata de una prueba diseñada a partir de la adaptación de la prueba de Salthouse et al. (1991). Existen dos versiones de esta prueba: numérica y espacial. En la versión numérica, aparece en la pantalla del ordenador una matriz de 3x3 con algunas casillas activas en las que aparecen números. A continuación aparecen operaciones. Los sujetos deben recordar la posición de los números y calcular

el resultado de las operaciones. En la versión espacial, en la primera presentación aparecen puntos y en la siguiente aparece una matriz sin puntos y los sujetos deben recordar donde estaban.

- *Amplitud alfa (Craik, 1986)*: se presenta una serie de palabras a una velocidad de una palabra por segundo. Cuando la secuencia ha terminado, los sujetos deben recordar la inicial de cada palabra por orden alfabético.
- *Coordinación verbal (Oberauer, 1993)*: aparecen celdas en la pantalla del ordenador, con letras al azar. Los sujetos deben recordar las letras que aparecen en cada celda y decidir si la fila completa constituye una palabra (en sentido directo o inverso) o no.
- *Marcado (Pylyshyn y Storm, 1988)*: se presentan diez círculos pequeños idénticos (de 1 cm. de diámetro). Entre dos y cinco círculos se iluminan diez veces, y son declarados los círculos objetivo. A continuación los diez círculos (tanto los objetivo como el resto, que son los distractores) empiezan a moverse al azar en la pantalla a una velocidad de 70mm/s. Los sujetos deben seguir los puntos objetivo durante ocho segundos. A continuación, se paran todos los círculos y se asigna un número a cada uno entre 1-10, y deben indicar el número de los puntos objetivo.

Además de las anteriores, otras pruebas utilizadas para medir la capacidad del ejecutivo central son las que hemos utilizado en nuestra investigación empírica, cuya descripción puede encontrarse en el apartado de Método (ver página 186): *Recuerdo Serial de Dígitos (inverso)*, *Amplitud de Escuchar o "Listening Span"* y *Amplitud de Contar o "Counting Span"*. Estas pruebas, como podemos apreciar en el Anexo 1, forman parte de la "Batería de Tests de Memòria de Treball" de Pickering, Baqués y Gathercole (1999).

Además del criterio de clasificación anterior, que agrupa las tareas según sean simples o duales, existen aún otras formas de categorizar los tests que miden la habilidad de memoria de trabajo, como por ejemplo el adoptado por Carlson et al. (1990), quienes distinguen tres tipos de tareas en función del tipo de demanda requerida, siguiendo las directrices planteadas por Baddeley (1986): a) "memory

preload" o precarga de memoria, en las que el sujeto recibe algún material verbal o espacial que debe ser retenido mientras ejecuta una tarea inconexa, b) procesamiento concurrente, que requiere respuestas repetidas hasta que la tarea incrustada no se ha completado; y c) tareas de integración, que requieren a los sujetos integrar información de la memoria de trabajo con información expuesta. Recientemente, Oberauer et al. (2000) han aportado otra clasificación alternativa a partir de las categorías funcionales que contemplan en su propuesta de sistematización del modelo de memoria de trabajo: a) tareas de memoria de trabajo que requieren principalmente supervisión; b) tareas de memoria de trabajo que requieren principalmente almacenamiento y procesamiento; y c) tareas de memoria de trabajo que requieren principalmente coordinación.

Una vez descritos los principales aspectos teóricos relativos a la medida de la memoria de trabajo, en segundo lugar efectuamos una revisión de las medidas utilizadas en los trabajos empíricos de memoria y cálculo. Aunque disponemos de un número de referencias mucho mayor, vamos a exponer únicamente las pruebas utilizadas en los trabajos que a nuestro entender son más representativos por ser de los más citados o bien por ser de los que más se ajustan a nuestra línea de investigación.

<i>Autor/es</i>	<i>Edad Muestra</i>	<i>Pruebas</i>
Adams y Hitch (1997)	8-11 años	Amplitud de sumas (addition span): presentación oral y presentación visual.
Brainerd y Reyna (1988)	4-5 años	Problemas aritméticos y pruebas de memoria a corto plazo para las condiciones de suma y resta.
Bull y Johnston (1997)	7-8 años	Amplitud de memoria: amplitud de dígitos y de palabras (WISC-R); e índice de velocidad de pronunciación de palabras y de conteo. Velocidad de procesamiento: números visuales (basado en el Test de Woodcock-Johnson de Habilidad Cognitiva) y velocidad de percepción motora. Memoria a largo plazo: Velocidad de identificación de números, letras y sumas de un dígito.
Butterworth et al. (1996)	52 años	Pruebas de memoria a corto plazo: Amplitud de dígitos, amplitud de palabras y búsqueda a corto plazo. Pruebas de cálculo oral: Test de dificultad aritmética graduada, Tarea Auditiva de Suma Serial (PASAT). Pruebas de cálculo escrito: Batería de Cálculo.
Chincotta et al. (1999)	Universitarios	Amplitud de dígitos.

Ehrenstein et al. (1997)	Universitarios	Tarea de búsqueda de memoria (memory-search task). Tarea de cálculo.
Fazio (1999)	9-10 años	Subtests de recuerdo de números y cálculos del K-ABC.
Fischer, (1996)	10-12 años	Recuerdo de datos numéricos en historias. Tarea de cálculo.
Fürst y Hitch (2000)	Universitarios	Tarea de cálculo.
Gathercole y Adams (1994)	4-5 años	Tests de memoria fonológica: amplitud de dígitos (auditivo), amplitud de palabras y repetición de pseudopalabras. Tests de vocabulario: vocabulario receptivo y vocabulario oral. Tests numéricos: identificación de números, secuencia de conteo y conteo de dibujos. Índice de articulación. Resolución de un puzle viso-espacial.
Gathercole y Pickering (2000 a)	7,4 años	Bucle fonológico: Recuerdo de dígitos, Test de repetición de pseudopalabras, Recuerdo serial de palabras y pseudopalabras y Reconocimiento serial de palabras y pseudopalabras. Agenda viso-espacial: Test de matrices estáticas y dinámicas, Test de laberintos estáticos y dinámicos. Ejecutivo central: Amplitud de escuchar, Amplitud de contar, Recuerdo Serial de dígitos inverso. Vocabulario: British Picture Vocabulary Scale Aritmética: Group Mathematics Test y Differential Ability Scales (subtest de estrategias numéricas básicas). Literatura: British Ability Scales, Test of Word Reading, Neale Analysis of Reading Ability-R, BAS Spelling Scale)
Gathercole y Pickering (2000b)	6-8 años	Bucle fonológico: Recuerdo de dígitos, Test de repetición de pseudopalabras, Recuerdo serial de palabras, Recuerdo serial de pseudopalabras, Reconocimiento serial de palabras y Reconocimiento serial de pseudopalabras. Agenda viso-espacial: Test de matrices estáticas y dinámicas, Test de laberintos estáticos y dinámicos. Ejecutivo central: Amplitud de escuchar, Amplitud de contar, Recuerdo Serial de dígitos inverso. Estándares curriculares británicos: School Curriculum and Assessment Authority (SCAA) y Qualifications and Curriculum Authority (QCA).
Geary y Widaman (1987)	Universitarios	Tarea de cálculo.
Geary et al (1999)	6-7 años	Producción y comprensión de números (adaptación de la Batería de Discalculia de Johns Hopkins). Tarea de cálculo. Amplitud de dígitos (WISC-III). Velocidad de articulación.
Hitch (1978)	Adultos	Tarea de cálculo.
Hitch et al. (1989)	8 años 11 años	Amplitud de memoria: amplitud de palabras. Amplitud de memoria con supresión: índice de articulación, índice de lectura oral, tiempo de identificación visual y tiempo de identificación auditiva.
Hitch y McAuley (1991)	8-9 años	Amplitud de contar visual. Amplitud de contar oral.

Hutton et al (1997)	7,5 años 11,5 años	Amplitud de memoria: amplitud de operaciones.
Jurden (1995)	18-38 años	Amplitud de escuchar. Tarea no verbal de memoria de trabajo: prueba de cálculo. Rendimiento académico: American College Testing Program (ACT).
Lemaire et al. (1996)	Universitarios	Tarea de cálculo (sumas y multiplicaciones).
Logie y Baddeley (1987)	Adultos	Tarea dual (adaptación de la prueba de amplitud de contar).
Logie et al (1994)	18-65 años	Tarea de cálculo. Supresión articulatoria en una tarea de cálculo mental. Generación al azar de letras del alfabeto. Dibujos irrelevantes. Movimiento de manos.
McGilly y Siegler (1989)	5-6 años 6-7 años 8-9 años	Amplitud de dígitos.
McLean y Hitch (1999)	6-7 años	Bucle fonológico: Amplitud de dígitos (oral) y Repetición de pseudopalabras. Agenda viso-espacial: Amplitud de matrices visuales y Amplitud de bloques. Ejecutivo central: “Making Trails task”, “Crossing out task” y Tarea de ítems desaparecidos (2+3=4+?=?).
Passolunghi et al. (1999)	9-10 años	Amplitud de escuchar.
Siegel y Linder (1984)	7-13 años	Tareas de memoria a corto plazo: visuales-escritas y visuales-orales (presentación visual de letras y recuerdo posterior), y auditivas-escritas (presentación auditiva de letras y recuerdo posterior).
Siegel y Ryan (1989)	7-13 años	WISC-R (Diseño de bloques y subtests de vocabulario) WRAT: Wide Range Achievement Test (subtests de aritmética). Amplitud de escuchar. Amplitud de contar .
Swanson, H.L. (1996)	10-11 años	Medidas de aptitud, rendimiento y memoria a corto plazo: Peabody Individual Achievement Test, K-ABC, Detroit Tests of Learning Aptitude y Peabody Picture Vocabulary Test. Batería de memoria de trabajo: Procesamiento verbal: ritmo, secuencia auditiva de dígitos, recuerdo de historias, secuencia de frases, asociación semántica y categorización semántica. Procesamiento viso-espacial: matrices visuales, mapas y direcciones, secuencia de dibujos, organización espacial, secuencia no verbal.
Threlfall et al (1995)	6-11 años	Tarea de cálculo.
Towse y Hitch (1995)	Universitarios	Amplitud de contar.
Towse y Hitch (1997)	7-9 años	Amplitud de contar.
Zbrodoff, N.J. (1995)	Universitarios	Tarea de cálculo (algebraica, con números y letras).

A raíz de las pruebas utilizadas en los estudios de memoria de trabajo y cálculo más representativos, podemos extraer las conclusiones siguientes:

- Existe una gran heterogeneidad en el tipo de pruebas utilizadas para medir la habilidad de la memoria de trabajo y el rendimiento en cálculo.
- En algunos casos, los autores diseñan pruebas de medida específicas para sus experimentos que no han sido utilizadas previamente en otras investigaciones, y en las que no se ha controlado suficientemente si las pruebas miden lo que en realidad desean medir, es decir, no se ha tenido en cuenta el grado de validez y fiabilidad.
- En algunos estudios no se utilizan o no queda claro el tipo de medida de memoria de trabajo utilizada. Únicamente se describen pruebas de cálculo, que habitualmente consisten en baterías de operaciones (sobretudo de suma, resta y producto) con distinto grado de dificultad.
- Las pruebas simples de memoria de trabajo más utilizadas son el Recuerdo serial de dígitos o “Digit Span” y el Recuerdo serial de palabras o “Word Span”.
- Las pruebas duales de memoria de trabajo más utilizadas son Amplitud de escuchar o “Listening Span”, de Daneman y Carpenter (1980), y Amplitud de contar o “Counting Span”, de Case et al (1982).
- Existe gran diversidad de planteamientos experimentales: uso exclusivo de pruebas de cálculo; uso de pruebas de un único componente de la memoria de trabajo; uso de medidas de aptitud, rendimiento y memoria a corto plazo o memoria de trabajo. En los estudios más recientes, realizados por Gathercole y Pickering (2000a, 2000b) o McLean y Hitch (1999) se usan diseños en los que se toman medidas de los tres subsistemas de la memoria de trabajo simultáneamente, aunque al iniciar nuestra investigación no existía ningún trabajo en esta línea.

3.3. ANÁLISIS DOCUMENTAL DE LOS ESTUDIOS SOBRE MEMORIA DE TRABAJO Y CÁLCULO

De forma preliminar a la exposición de los principales resultados de los trabajos que han estudiado las implicaciones de la memoria de trabajo en el aprendizaje del cálculo, hemos considerado oportuno efectuar un estudio relativo al estado actual de la investigación en esta línea con el objeto de determinar su relevancia dentro del campo de la psicología de la memoria.

Como podremos apreciar en las correspondientes fichas técnicas de cada uno de nuestros análisis, para efectuar este estudio documental hemos utilizado la base de datos Psyclit/PsycINFO: Information Services in Psychology de la American Psychological Association, y hemos considerado todas las referencias introducidas en dicha base, excluyendo únicamente las relativas al año 2000, puesto que en el momento de efectuar este análisis, aunque ya había datos introducidos hasta Octubre de 2000, por estar incompletos se ha considerado oportuno no tenerlos en cuenta por ser poco representativos. Nuestro análisis documental se divide en tres subapartados: a) publicaciones de memoria de trabajo; b) publicaciones de memoria de trabajo y matemáticas; y c) publicaciones de memoria de trabajo y cálculo aritmético.

a. Publicaciones de memoria de trabajo

En este primer subapartado pretendemos tres aspectos simultáneamente: a) en primer lugar, analizar el volumen de investigaciones del campo de la psicología de la memoria que corresponde a trabajos en el área de la memoria de trabajo; b) en segundo lugar, dado que el término “memoria de trabajo” ha ido substituyendo paulatinamente al descriptor “memoria a corto plazo” (short term memory), queremos comparar la evolución de ambos; y c) en tercer lugar, pretendemos analizar el posible incremento que se ha producido en la investigación relativa a este sistema de memoria, sobretodo desde la formulación del modelo de memoria de trabajo de Baddeley y Hitch (1974).

En la ficha técnica siguiente pueden consultarse los datos relativos a estos análisis. Queremos precisar que dado que los descriptores de memoria y memoria a corto plazo aparecen a partir de 1966, hemos subdivido los datos obtenidos en dos periodos para que el análisis sea más limpio: a) 1887-1966 (sin descriptores); b) 1967-1999 (con descriptores).

PERIODO ESTUDIADO	1887-1999
BASE DE BATOS	Psyclit/PsycINFO
DESCRIPTORES UTILIZADOS PARA MEMORIA	"Memory"
DESCRIPTORES UTILIZADOS PARA MEMORIA DE TRABAJO	No se han utilizado descriptores y se ha analizado su descripción en todo el texto, dado que no consta como descriptor.
DESCRITORES UTILIZADOS PARA MEMORIA A CORTO PLAZO	"Short-term-memory"
Número de referencias de memoria	Periodo 1887-1966: 11952 Periodo 1967-1999: 29880
Número de referencias de memoria de trabajo	Periodo 1887-1966: 0 Periodo 1967-1999: 3023
Número de referencias de memoria a corto plazo	Periodo 1887-1966: 362 Periodo 1967-1999: 4987

Como vemos en la ficha técnica anterior, hemos partido del número de artículos donde aparece el descriptor genérico de memoria (memory) comparado con el número de artículos donde aparece el término “memoria de trabajo” (working memory) en artículos de revistas de psicología entre los años 1887-1999. Hemos obviado otros descriptores de memoria como pueden ser “recall” o “recognition” dado que pretendíamos efectuar un análisis genérico.

A partir de los datos obtenidos en nuestro análisis, podemos concluir que en el transcurso de más de un siglo (periodo 1887-1999) los artículos que inciden en la memoria de trabajo representan un total del 7,22% de las investigaciones de memoria. Sin embargo, este dato no es demasiado representativo si tenemos en cuenta que los primeros artículos que usan el término “memoria de trabajo” se publican a finales de los sesenta e inicios de los setenta del siglo XX. Así, pues, si consideramos este mismo aspecto a partir de la aparición del modelo de memoria de trabajo de Baddeley y Hitch (1974), durante este periodo (1974-1999) el porcentaje de los estudios de memoria de trabajo aumenta hasta el 11,17%. Pero si concretamos

todavía más este análisis, podemos apreciar que en 1974, que es el primer año después de la aparición del artículo de Baddeley y Hitch (1974), sólo 3 publicaciones de las 497 de memoria contenían el término memoria de trabajo, lo cual representa un 0,6% del total de publicaciones de aquel año. En cambio, en 1999, que es el año en el que hemos cerrado nuestro análisis documental, un total de 409 artículos de los 1799 de memoria contienen el término memoria de trabajo, es decir, un 22,73% de los artículos de memoria hacen alguna alusión a la memoria de trabajo, lo cual representa un notable incremento.

En la Figura 15 podemos comparar la evolución que ha seguido la publicación de estudios que contienen el término “memoria de trabajo” en relación a los estudios sobre memoria.

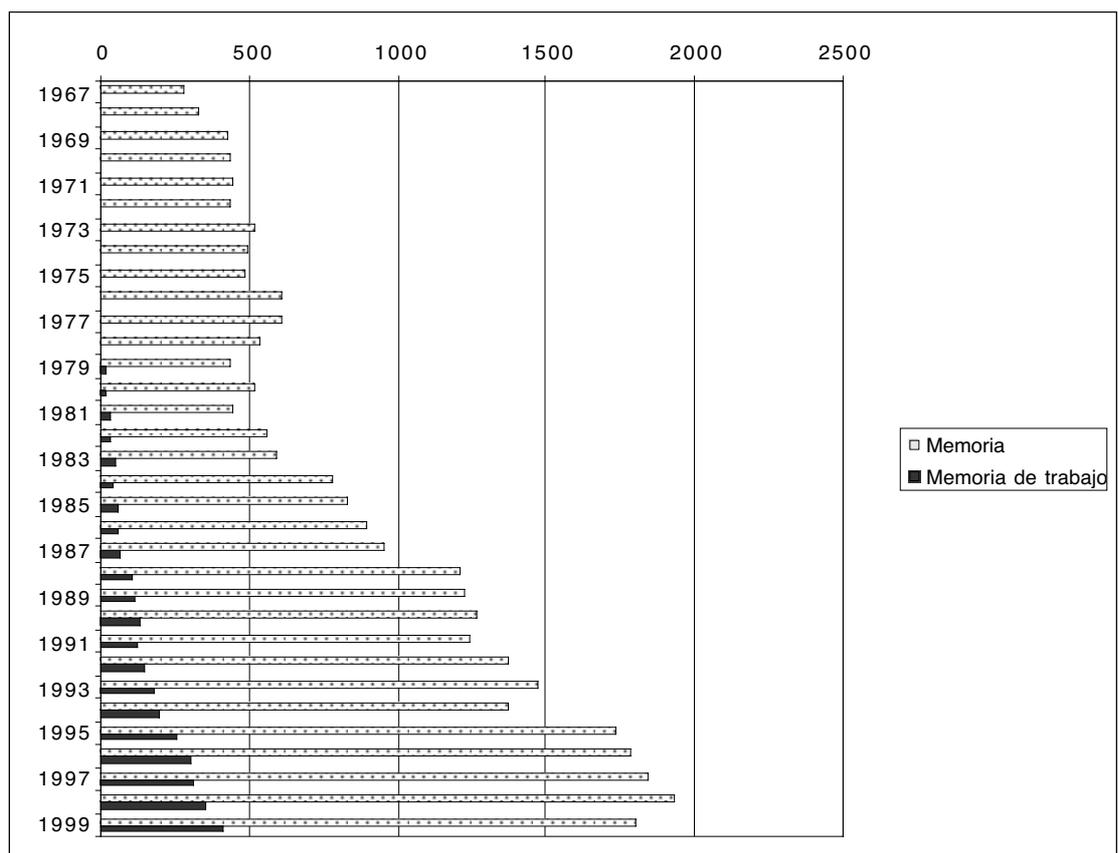


Figura 15: Comparación de las publicaciones de memoria de trabajo en relación a las publicaciones de memoria.

En primer lugar, queremos precisar que en dicha Figura, al igual que en el resto de Figuras que vamos a presentar en este análisis documental, se incluye la

evolución de los estudios desde 1967 hasta 1999, pero no están reflejados los artículos publicados entre 1887-1966 en la base de datos Psyclit/PsycINFO. Esto es debido a que tanto el exceso de ítems en el eje de coordenadas del gráfico como la elevada cantidad de artículos del periodo 1887-1966 al tratarse de un sumatorio no hubiese permitido una buena presentación visual, por lo que hemos preferido aglutinar el número de referencias aparecidas durante este periodo de tiempo en un único dato numérico que puede apreciarse en la ficha técnica de la página 127. Una vez hecha la aclaración anterior, la primera constatación que se observa en la Figura 15 es el evidente incremento de los trabajos en el campo de la memoria, lo cual avala la importancia del estudio de este proceso dentro de las investigaciones psicológicas. En la Tabla siguiente comparamos el número total de publicaciones introducidas en Psyclit/PsycINFO respecto a las publicaciones de memoria década a década, excepto en los últimos treinta años, que efectuamos el mismo análisis lustro a lustro dado que el término “memory” aparece ya como descriptor:

AÑO	Nº TOTAL DE PUBLICACIONES	Nº DE PUBLICACIONES DE MEMORIA	%
1887	4	0	0
1890	12	0	0
1900	25	3	12
1910	162	18	11,1
1920	319	41	12,85
1930	5386	233	4,3
1940	5557	93	1,67
1950	7984	367	4,59
1960	7858	464	5,9
1970	21097	433*	2,05
1975	28652	486*	1,69
1980	27986	520*	1,86
1985	48417	830*	1,71
1990	57006	1266*	2,22
1995	58493	1734*	2,96
1999	59843	1799*	3,01

* “memory” como descriptor

Al analizar los datos anteriores debemos tener presente, en primer lugar, que el término “memory” no aparece como descriptor hasta 1966, por lo que los porcentajes anteriores a esta fecha no son muy representativos. Desde 1970 hasta 1985 parece producirse una tendencia a la baja en el porcentaje de publicaciones de memoria. Sin embargo, podemos apreciar que a partir de esta fecha y hasta 1999 se ha ido produciendo un incremento del porcentaje de publicaciones de memoria dentro del conjunto de publicaciones de psicología.

Independientemente del aspecto anterior, en la Figura 15 podemos observar también el paulatino incremento de las publicaciones de memoria de trabajo. Sin embargo, antes de proceder a efectuar un comentario de este incremento, hemos creído necesario efectuar un segundo análisis en el que comparamos las publicaciones que contienen el descriptor “memoria a corto plazo” con las que contienen el término “memoria de trabajo”.

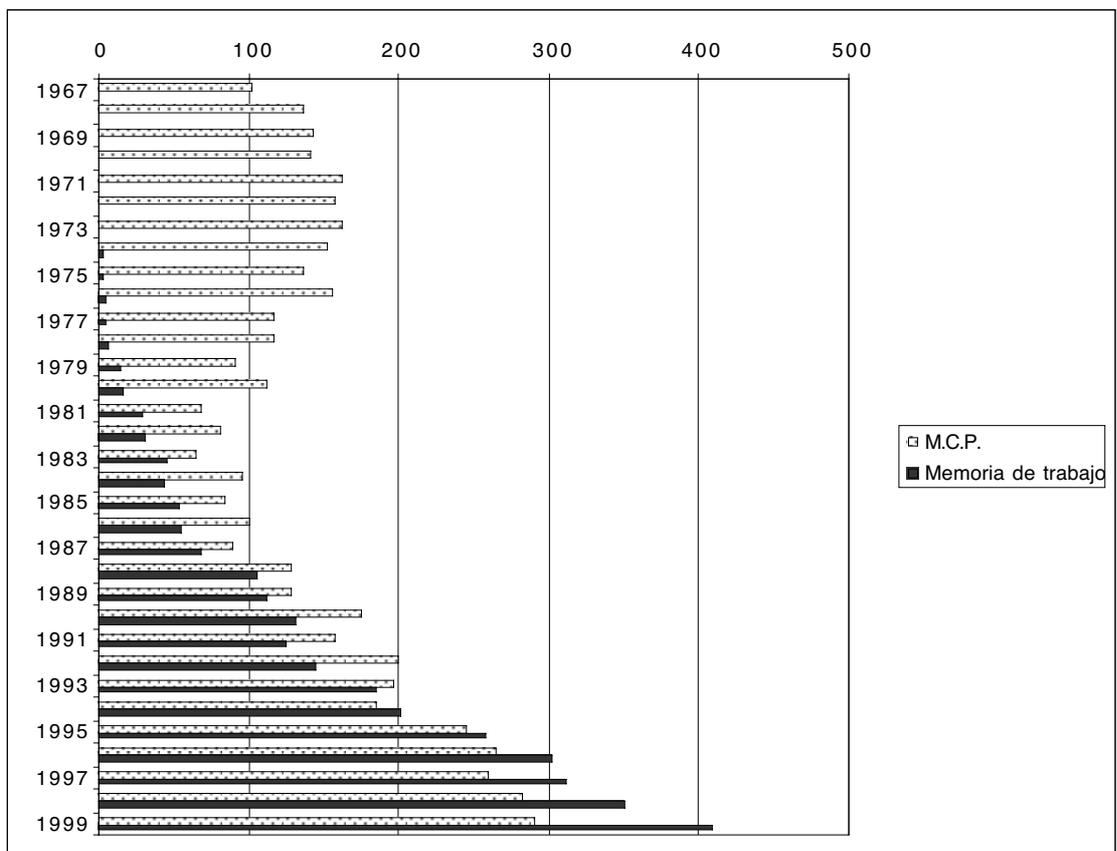


Figura 16: Comparación de las publicaciones de memoria de trabajo en relación a las publicaciones de memoria a corto plazo.

Al comparar el descriptor “memoria a corto plazo” con el término “memoria de trabajo”, en la ficha técnica vemos que durante el periodo 1887-1966 no aparecen publicaciones con el término “memoria de trabajo”, mientras que hay un total de 362 artículos con el término “memoria a corto plazo”. A partir de esta fecha, que es cuando empiezan a publicarse los primeros trabajos que contienen el término “memoria de trabajo”, vemos que el volumen de publicaciones que contienen dicho término ha seguido una importante progresión; en cambio, el descriptor “memoria a corto plazo” sufre un claro retroceso hasta el año 1983. A partir de este año, empieza una recuperación que sigue hasta nuestros días. De todas formas, nos parece especialmente significativo que desde 1994 el número de artículos de memoria de trabajo supera el volumen de publicaciones de memoria a corto plazo, lo cual nos reafirma que el término “memoria de trabajo” tiene actualmente mayor aceptación que el de “memoria a corto plazo”.

Respecto a la evolución específica de las publicaciones de memoria de trabajo, en los dos gráficos anteriores podemos apreciar que, tal como hemos indicado, los primeros trabajos que contienen dicho término aparecen a finales de la década de los sesenta del siglo XX. Concretamente, los primeros estudios localizados en la base de datos Psyclit/PsycINFO aparecen en el año 1967 y corresponden respectivamente a Dalezman (1967), cuya investigación es publicada en la revista *Journal of Experimental Psychology: Human, Learning and Memory*; y a Douglas (1967), que publica su estudio en *Psychological Bulletin*. En el primer caso, la investigación llevada a cabo pretende determinar la función de la posición serial en el recuerdo a corto y largo plazo en 400 estudiantes no graduados, mientras que el segundo de los estudios mencionados el autor analiza el efecto comportamental de una lesión cerebral en el hipocampo y las repercusiones que tal lesión puede comportar en la memoria de trabajo.

Después de la aparición de estos estudios pioneros respecto al uso del término “memoria de trabajo”, la publicación de investigaciones que contienen dicho término es intermitente en los años posteriores. No será hasta la publicación

del trabajo de Baddeley y Hitch (1974) en el que formulan el modelo de memoria de trabajo descrito en el apartado anterior cuando empiezan a aparecer de una forma sistemática estudios sobre la memoria de trabajo. Así, desde la aparición de dicho modelo hasta hoy se ha producido una curva ascendente continua de publicaciones que va de menos de 10 trabajos por año publicados en los setenta hasta superar los más de 400 estudios anuales en el último año revisado (1999). Este notable incremento de estudios demuestra, a nuestro entender, que la memoria de trabajo es un prolífico campo de estudio dentro del campo de la psicología de la memoria.

b. Publicaciones de memoria de trabajo y matemáticas

Una vez analizado el volumen de publicaciones de memoria de trabajo dentro del campo de estudio de la memoria, así como la evolución del número de publicaciones anuales, en este segundo subapartado pretendemos determinar el peso de las publicaciones que desde el campo de la psicología de la memoria se han ocupado de aspectos de contenido matemático. Así, pues, en primer lugar hemos obtenido el número de publicaciones de memoria y matemáticas, y en segundo lugar, y con el objeto de concretar más nuestro análisis, el número de publicaciones específicas de memoria de trabajo que se han centrado en contenidos matemáticos.

En la ficha técnica siguiente podemos consultar los datos obtenidos para este análisis:

PERIODO ESTUDIADO	1887-2000
BASE DE DATOS	Psyclit/PsycINFO
DSESCRIPTORES UTILIZADOS PARA MEMORIA	"Memory"
DESCRIPTORES UTILIZADOS PARA MEMORIA DE TRABAJO	No se han utilizado descriptores y se ha analizado su descripción en todo el texto, puesto que no se utiliza como descriptor.
DESCRIPTORES UTILIZADOS PARA MATEMÁTICAS	"Arithmetic", "mathematics", "maths", "arithmetic", "calculus" y "problem solving".
Número de referencias de memoria y matemáticas	Periodo 1887-1966: 323 Periodo 1967-1999: 818
Número de referencias de memoria de trabajo y matemáticas	Periodo 1887-1966: 0 Periodo 1967-1999: 230

A partir de los datos obtenidos en este segundo análisis, en primer lugar

podemos destacar que en el periodo de 1887 a 1999, de los 41832 artículos de memoria publicados en la base de datos Psyclit/PsycINFO, un total de 1141 referencias son estudios de memoria que se han ocupado de aspectos matemáticos, lo que representa un 2,73% del total de los estudios de memoria. En la Figura 17 podemos comparar gráficamente el volumen de publicaciones de memoria y matemáticas respecto a las publicaciones de memoria:

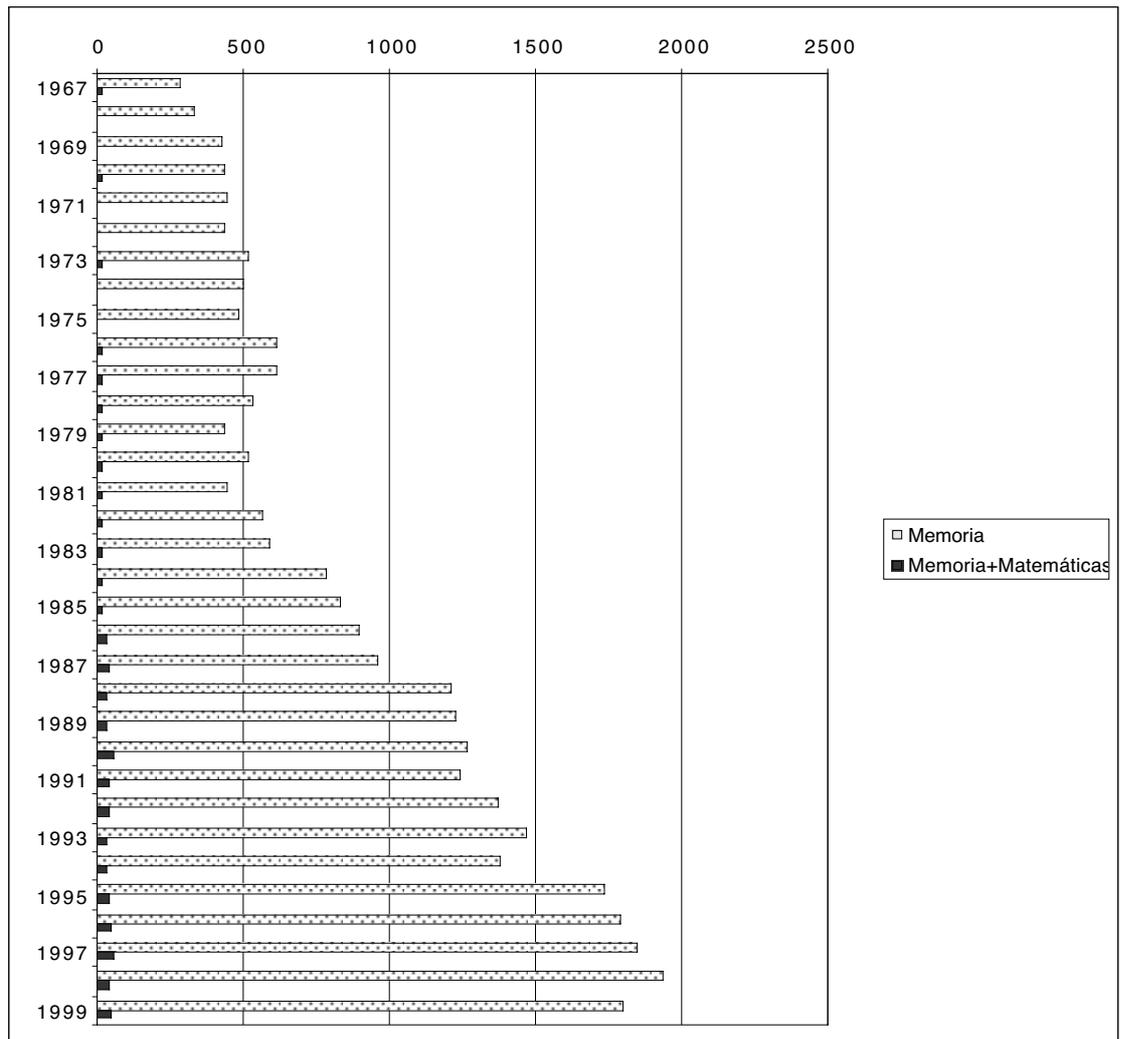


Figura 17: Comparación de las publicaciones de memoria y matemáticas en relación a las publicaciones de memoria

En la Figura 17 podemos apreciar que, aunque globalmente el volumen de estudios sobre memoria y matemáticas es poco representativo en el conjunto de las publicaciones sobre memoria, se trata de un campo de investigación que se mantiene

en el tiempo. De todas formas, una vez obtenido el peso de las publicaciones genéricas de memoria que se han ocupado de aspectos matemáticos, el dato que más nos interesa subrayar es el porcentaje de publicaciones de memoria y matemáticas que han utilizado el término “memoria de trabajo”. A partir de los datos bibliométricos obtenidos, constatamos que en el periodo 1887-1999 un 20,16% de los estudios sobre memoria y matemáticas son trabajos específicos de memoria de trabajo, dato que nos permite afirmar que en el contexto de los estudios de memoria y matemáticas la memoria de trabajo tiene su incidencia, máximo cuando estos trabajos no aparecen hasta 1974. Pero además, si consideramos exclusivamente el periodo 1974-1999, entonces el porcentaje aumenta hasta el 21,62% de los artículos (del 0% en 1974 hasta el 80% en 1999). En la Figura 18 ilustramos la importante progresión de las publicaciones de memoria de trabajo y matemáticas en relación a las publicaciones de memoria y matemáticas.

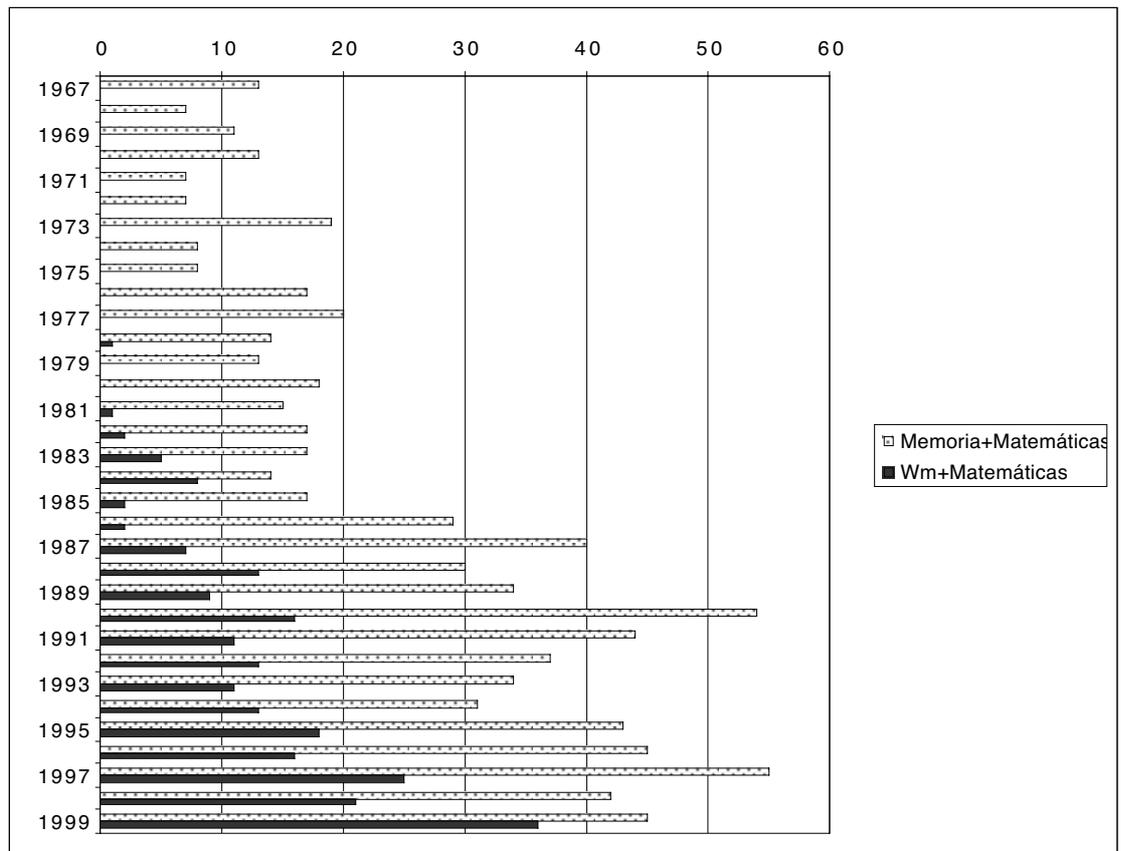


Figura 18: Comparación de las publicaciones de memoria de trabajo y matemáticas en relación a las publicaciones de memoria y matemáticas

En el gráfico precedente observamos como a partir de la aparición del término "memoria de trabajo" la incidencia de los estudios desde esta óptica va incrementándose de forma considerable, sobretodo en los últimos años analizados.

c. Publicaciones de memoria de trabajo y cálculo

Para finalizar nuestro análisis documental hemos estudiado el peso de las publicaciones de memoria de trabajo y cálculo tanto dentro del contexto global de la memoria de trabajo como dentro de los estudios de matemáticas y memoria de trabajo. La ficha técnica de la que hemos partido es la siguiente:

PERIODO ESTUDIADO	1887-2000
BASE DE BATOS	Psyclit/PsycINFO
DESCRIPTORES UTILIZADOS PARA MEMORIA DE TRABAJO	No se han utilizado descriptores y se ha analizado su descripción en todo el texto, puesto que no se utiliza como descriptor.
DESCRIPTORES UTILIZADOS PARA CÁLCULO	"Arithmetic" y "calculus"
Número de referencias de memoria de trabajo y cálculo	Periodo 1887-1966: 0 Periodo 1967-1999: 76

En primer lugar, al considerar las publicaciones de memoria y matemáticas (1064 referencias, dato que hemos obtenido en el análisis precedente), los artículos de memoria de trabajo y cálculo representan el 6,66% del total. Si consideramos exclusivamente el periodo 1974-1999, el porcentaje aumenta hasta el 7,14% (del 0% en 1974 hasta el 28,88% en 1999).

En segundo lugar, si consideramos las publicaciones de memoria de trabajo y matemáticas (230 referencias, dato obtenido también en el análisis precedente), las publicaciones de memoria de trabajo y cálculo representan el 33,04% del total. El porcentaje de trabajos de memoria de trabajo y cálculo en relación a los de memoria de trabajo y matemáticas es del 0% hasta 1974. A partir de este año, el incremento va del 0% hasta el 36,11% en 1999, lo cual indica que en el último año revisado una tercera parte de los artículos de memoria de trabajo y matemáticas analizan aspectos relativos al cálculo. En la Figura 19 podemos comparar el volumen de publicaciones anuales de memoria de trabajo y cálculo en relación al total de investigaciones de

memoria de trabajo y matemáticas.

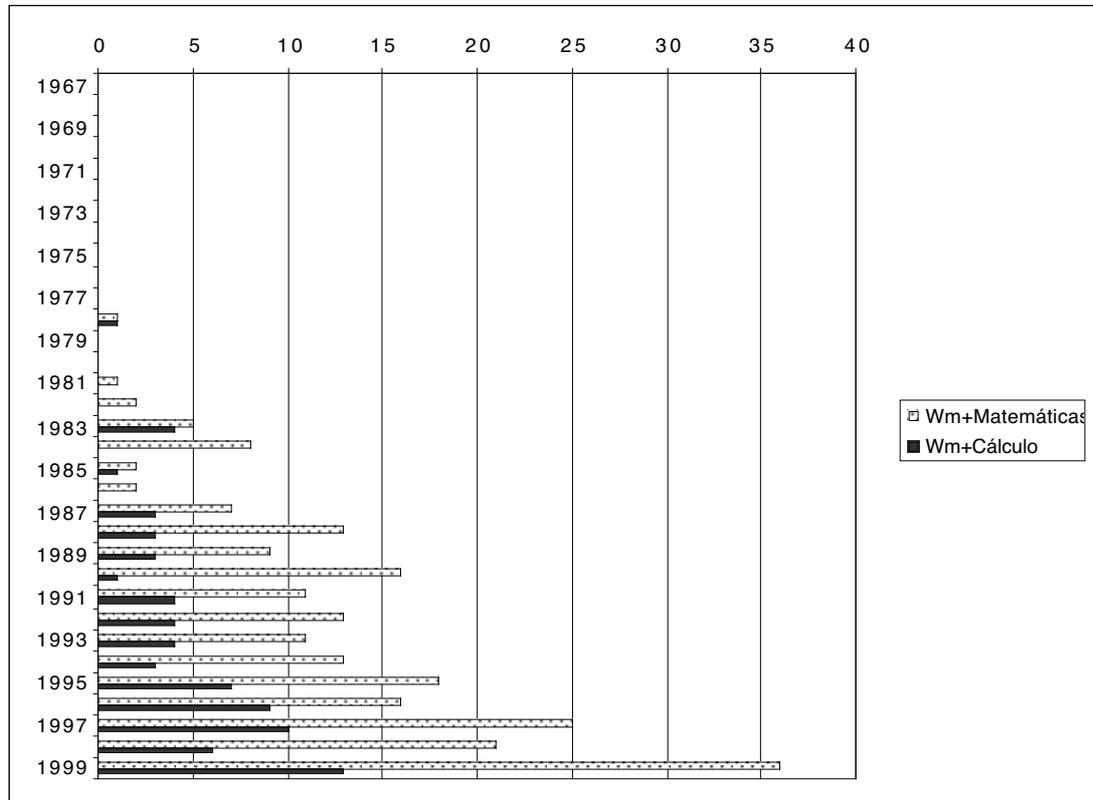


Figura 19: Comparación de las publicaciones de memoria de trabajo y cálculo en relación a los estudios de memoria de trabajo y matemáticas.

Finalmente, dado que el punto de arranque de nuestra investigación son los artículos de memoria de trabajo y cálculo, en la Figura 20 presentamos un gráfico simple en el que se puede observar la evolución de este tipo de estudios.

Como va a poder apreciarse en el gráfico de la página siguiente, la publicación de artículos de memoria de trabajo y cálculo es prácticamente inexistente en los primeros años de la aparición del modelo de Baddeley y Hitch (1974). Existe, por ejemplo, una única referencia en 1978 que es la que corresponde al trabajo pionero de Hitch (1978), *The role of short-term working memory in mental arithmetic*. Hasta mediados de los años ochenta del siglo XX la publicación de este tipo de trabajos es intermitente, pero a partir de esta fecha cada año van apareciendo sistemáticamente un determinado número de trabajos que tiende a ir incrementándose.

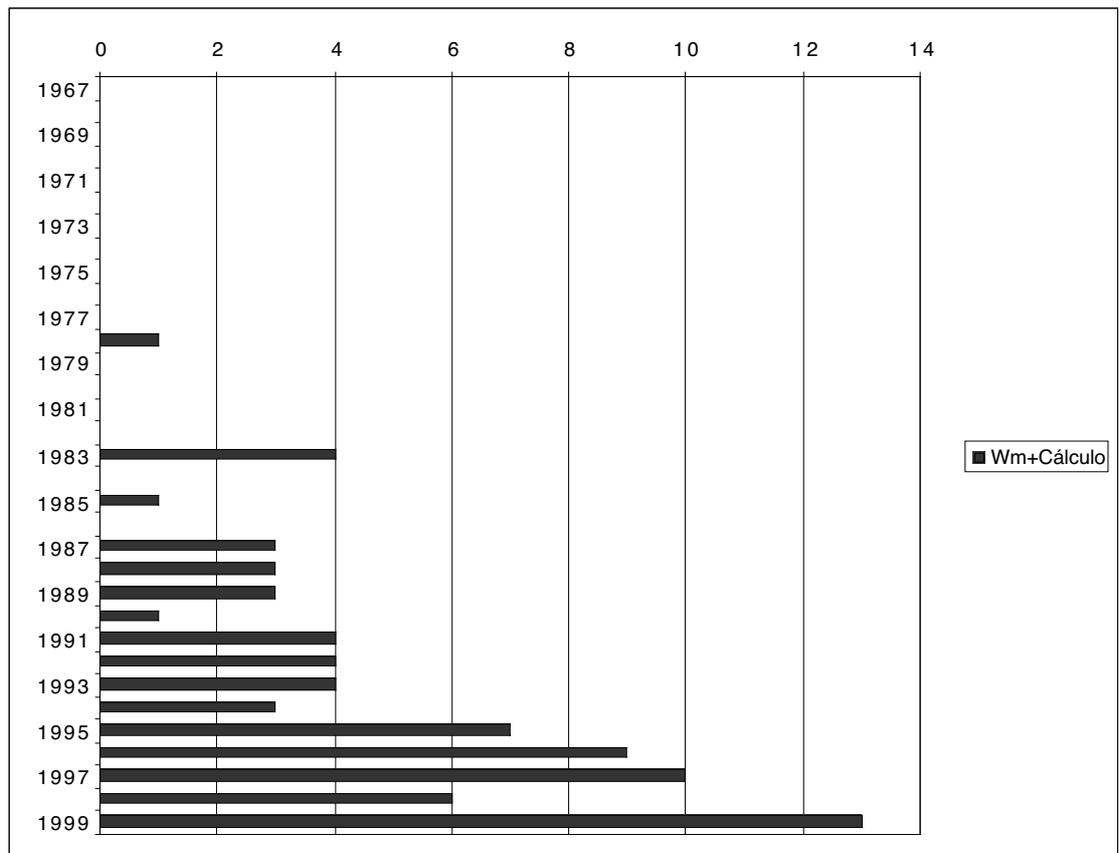


Figura 20: Evolución de las publicaciones de memoria de trabajo y cálculo

Una vez determinado el peso de los estudios sobre memoria de trabajo, memoria de trabajo y matemáticas y memoria de trabajo y cálculo en el conjunto de las publicaciones de psicología de la memoria, en el siguiente apartado efectuamos una revisión de los estudios sobre memoria de trabajo y cálculo.

3.4. PANORAMA DE LOS ESTUDIOS SOBRE MEMORIA A CORTO PLAZO O MEMORIA DE TRABAJO Y CÁLCULO

En el apartado anterior hemos visto que el estudio de las relaciones entre memoria y cálculo constituye un campo de investigación aplicado relativamente reciente dentro de la psicología de la memoria. Aunque este tipo de trabajos aparece de forma progresiva sobretodo desde que el estudio de la memoria adquiere un enfoque más funcional-procesual, desde perspectivas teóricas anteriores habían

surgido ya algunas investigaciones que de forma implícita apuntaban hacia nuestro objeto de interés.

Así, por ejemplo, en el primer capítulo hemos visto que a inicios del siglo XX aparecen ya algunos trabajos que desde una concepción asociacionista del aprendizaje humano analizan el papel de la práctica en la mejora de la velocidad y la precisión en el cálculo. Algunas de las aportaciones más representativas de esta época corresponden a Thorndike (1922) y a Brownell (1928), que defienden que es muy importante que los niños memoricen ciertos datos y procedimientos hasta el punto que no tengan que pensarlos sino que los apliquen a los cálculos de forma rápida y casi automática.

Estos autores sostienen que la respuesta automática se obtiene a partir de los ejercicios, y distinguen dos tipos de tareas aritméticas en las que se suelen presentar los ejercicios: las tablas, que pueden ser de suma, resta, multiplicación o división (por ejemplo $3+4=7$; $6:2=3$) y los algoritmos, que son procedimientos de cálculo. Su planteamiento se basa en argumentar que ambos tipos de habilidades de cálculo se deben desarrollar hasta llegar al automatismo, para que no ocupen en la memoria el espacio requerido por los procesamientos de mayor nivel, es decir, la capacidad de responder de forma automática a ciertos elementos de los cálculos complejos puede reducir la carga del sistema de la memoria humana, y contribuir así a un funcionamiento más eficaz.

Más adelante, la hipótesis que la memoria permite la automatización de ciertos cálculos es retomada por otros autores como Cooney y Swanson (1990); Doshier y Russo (1976); Epstein et al. (1994); Fischer (1987, 1996); Gray y Mulhern (1995); Klapp et al. (1991); Logan y Klapp (1991) o Zbrodoff y Logan (1986), entre otros. Estos trabajos van a permitir llegar a una teoría general del automatismo que se basa en el hecho de que la recuperación es más rápida que el procesamiento algorítmico, e indican también que la habilidad de recuperar operaciones almacenadas en la memoria a largo plazo correlaciona con la habilidad matemática general (Gray y Mulhern, 1995).

Después de los trabajos de enfoque asociacionista de Thorndike (1922) y Brownell (1928) se produce una práctica desaparición de esta tipología de estudios. No será hasta los inicios del estudio de la memoria humana a partir de un enfoque cognitivo, que se sitúa cronológicamente en la década de los cincuenta del siglo XX, cuando va a producirse una progresiva recuperación de los estudios de la memoria y, en especial, la aparición de bastantes investigaciones cuyo objeto es conceptualizar e identificar las características de la memoria a corto plazo.

Desde postulados cognitivistas la memoria a corto plazo se considera inicialmente una estructura o sistema para retener información (Broadbent, 1954, 1958; Brown, 1958; Peterson y Peterson, 1959). En los años sesenta del siglo XX se formulan propuestas que la integran dentro de modelos estructurales de la memoria. El modelo de Atkinson y Shiffrin (1968), que ha sido uno de los modelos estructurales más difundidos, parte de la idea que la memoria está formada por tres estructuras diferenciadas: un registro sensorial, que recoge entre otras las características observadas en los experimentos de Sperling (1960, 1963, 1967); un almacén a corto plazo que mantendría la información hasta unos 15 ó 30 segundos; y un almacén a largo plazo con capacidad prácticamente ilimitada y donde la información podría permanecer de forma permanente. En el almacén a corto plazo se supone que la información desaparece rápidamente, a no ser que se mantenga gracias al “buffer de repaso” mediante continua repetición. En función del número de repeticiones y el tiempo que permanezca la información en este “buffer” se considera que tendrá más o menos posibilidades de ser transferida al almacén a largo plazo.

Algunos estudios de esta época, aunque no inciden explícitamente en la relación entre memoria a corto plazo y cálculo aritmético, utilizan contenidos aritméticos como material de investigación. Por ejemplo, Miller, G.A. (1956), en su estudio sobre la amplitud de la memoria a corto plazo y los procesos de codificación y recodificación, indica que la memoria a corto plazo tiene un número finito de elementos que el sujeto puede recordar, y este número oscila entre 7 ± 2 . Inicialmente

podría deducirse, pues, que la capacidad de retención de la memoria a corto plazo es muy limitada, ya sea de unidades numéricas o de otro tipo de material verbal, puesto que este autor concluye que el número de elementos es siempre el mismo, aunque la cantidad de información retenida dependa del tipo de codificación. Pero para este autor la capacidad de la memoria a corto plazo no está en la cantidad de información, sino más bien en el número de elementos (Sebastián, 1983). Por ello, introduce también el término “chunk”, que consiste en una unidad de significado de acuerdo con alguna regla o patrón familiar que permite agrupar unidades pequeñas en unidades mayores (Sáiz, 1996). Así, por ejemplo, los números 19671974 constituyen inicialmente 8 elementos numéricos a codificar y a recordar, pero pueden ser recodificados mediante 4 chunks (19-67-19-74) o 2 chunks (1967-1974), permitiendo así salvar los límites de amplitud de la memoria a corto plazo.

Según nuestra opinión, los datos aportados por Miller, G.A. (1956) pueden aplicarse al aprendizaje y a la realización de cálculos, puesto que a pesar del proceso de recodificación que puede llevar a cabo un niño, parece evidente que la capacidad para realizar cálculos aritméticos simples, sobretodo de tipo mental, puede verse limitada por la cantidad de cifras o cantidades (chunks) que se pueden retener. Así, por ejemplo, un niño que no resuelve mentalmente de forma correcta la operación $6+0+4+2+1+5+3+3+1+5$, que aparentemente es muy sencilla, ¿sugiere que posee poca capacidad de cálculo?, como hipotizaría más de un maestro movido por su propia intuición; ¿o bien es debido a la capacidad limitada de retención en la memoria a corto plazo?, como quizás argumentaría Miller si ahora estuviese entre nosotros. En este caso concreto, ambos llevarían parte de razón, puesto que por una parte la operación está compuesta de diez elementos, con lo que se superaría la amplitud normal de la memoria a corto plazo; pero por otra parte, el niño hábil en cálculo podría rápidamente reorganizar o recodificar la información mediante “chunks” (por ejemplo, $6+0/4+2/1+5/3+3/1+5$) y dar rápidamente una respuesta; de acuerdo con muchos autores que han incidido genéricamente en los vínculos entre las estrategias de cálculo y la memoria (Ashcraft, 1978, 1990; Baroody, 1984, 1987; Hogan y Catherine, 1999; Jordan, 1995; Manalo, 1991; Schliemann, 1990; Threlfall et al., 1995; Zbrodoff y Logan, 1990, entre otros), y que trataremos con mayor

detalle en un subapartado posterior. En síntesis, gracias a las aportaciones de Miller, G.A. (1956) podemos argumentar psicológicamente porqué actualmente los currículums de matemáticas dan una gran importancia a procedimientos de cálculo mental como la aproximación y el tanteo y a la búsqueda de estrategias (Generalitat de Catalunya. Departament d'Ensenyament, 1992).

Otros trabajos sobre la memoria a corto plazo de la década de los cincuenta que utilizan aspectos numéricos como material de investigación pertenecen a Brown (1958) y Peterson y Peterson (1959), cuyo objeto consiste en analizar la duración de la memoria a corto plazo. A partir de estos estudios clásicos, se concluye como bien señala Baddeley (1976) que:

“Existe una huella de memoria a corto plazo que se desvanece con el tiempo a menos que se la mantenga durante repaso activo” (pp. 154),

Brown (1958) y Peterson y Peterson (1959) utilizan el cálculo aritmético como tarea distractora para determinar el tiempo de retención de la memoria a corto plazo. Sus investigaciones consisten, brevemente, en presentar tres consonantes o trigramas a los sujetos, seguidas por un número de tres dígitos a partir del cual el sujeto debe contar hacia atrás de tres en tres en la primera mitad de los ensayos y de cuatro en cuatro en el resto (interferencia heterogénea). Cada sujeto es testado ocho veces con distintos intervalos de tiempo (3, 6, 9, 12, 15 y 18 segundos), y los resultados obtenidos demuestran que si se impide la repetición el olvido aumenta a medida que el intervalo de retención es mayor, produciéndose un desvanecimiento prácticamente total a los 18 segundos.

Como podemos apreciar, aunque ellos no se lo plantearon, parten de una situación de tarea dual que, desde nuestro punto de vista, permite extrapolar algunos datos: aunque en el diseño original el cálculo sea la tarea distractora del experimento, en el momento de realizarlo los trigramas son los que realizan una función de interferencia para el procesamiento correcto de dichos cálculos, hecho que explicaría porque algunos sujetos presentan dificultades en la realización de la tarea de cálculo, aspecto que hemos apreciado en réplicas posteriores realizadas con

estudiantes universitarios en las prácticas de la asignatura de Psicología de la Memoria de la Universidad Autónoma de Barcelona. Esta dificultad de los sujetos para procesar material numérico y retener letras a la vez, podría haber constituido también una primera intuición para determinar una limitación del bucle fonológico de la memoria de trabajo, como veremos más adelante.

Hacia los años setenta del siglo XX aparecen algunos estudios que pretenden analizar la forma de codificar la información en la memoria a corto plazo (para una revisión exhaustiva puede consultarse Sebastián, 1983; entre otros). De acuerdo con Sebastián (1983):

“Todas las investigaciones de este tipo de memoria dentro de los modelos estructurales convergen al afirmar que la codificación en este almacén es auditivo-verbal-lingüística y visual, aunque posteriormente se han obtenido datos que apoyan otras fuentes de codificación” (pp. 129).

Para concretar la relación que se establece entre la codificación y el procesamiento de material aritmético, autores como por ejemplo Siegel y Linder (1984) llevan a cabo estudios específicos con niños con dificultades de aprendizaje, partiendo de la premisa que:

“Si la memoria a corto plazo juega un papel en el funcionamiento cognitivo, entonces es razonable que los niños con problemas de aprendizaje podrían experimentar dificultades con la memoria a corto plazo” (pp. 200).

Siegel y Linder (1984), a partir de una investigación efectuada con 172 niños de 7-13 años (45 con discapacidad de lectura; 38 con dificultad aritmética y 89 niños con un rendimiento normal), concluyen que la causa de la baja capacidad aritmética de algunos niños podría ser debida a problemas internos de codificación fonética en la memoria a corto plazo, sobretudo si los ítems a recordar tienen un alto grado de similitud fonética ya que son más difíciles de evocar, de acuerdo con los resultados obtenidos por Conrad (1972), que indica que los ítems con un alto grado de similitud fonética son más difíciles de recordar, aspecto que posteriormente será recogido y explicado a través de la memoria de trabajo, según Baqués (1996).

De todo ello se desprende que los números o cantidades de fonética similar

comportarían algunas dificultades de cálculo asociadas, lo que nos permitiría explicar psicológicamente algunas dificultades de cálculo específicas, aspecto que ha sido apuntado ya de forma implícita en algunos trabajos como por ejemplo los realizados por Bernardo y Okagaki (1994) y Epstein et al. (1994). Este efecto de similitud acústica puede ser explicado actualmente a través de la función desempeñada por el bucle fonológico de la memoria de trabajo (Logie y Baddeley, 1987; entre otros), por lo que vamos a retomarlo también más adelante.

A partir del conjunto de datos expuestos hasta el momento podemos destacar los aspectos siguientes:

- Desde postulados cognitivos aparecen algunos trabajos clásicos que, aunque no inciden de forma directa en la relación entre memoria y cálculo, utilizan material matemático como material de investigación (Brown, 1958; Miller, G.A., 1956; Peterson y Peterson, 1959; entre otros).
- De dichos trabajos subyacen algunas relaciones entre memoria y cálculo, como por ejemplo:
 - La capacidad de retención de dígitos en la realización de cálculos (Miller, G.A., 1956).
 - La dificultad de los sujetos para calcular y retener letras a la vez (Peterson y Peterson, 1959), que podría haber constituido una primera intuición para determinar una limitación del bucle fonológico de la memoria de trabajo, como veremos en el siguiente apartado.
 - La baja capacidad aritmética de algunos niños podría ser debida a problemas internos de codificación fonética en la memoria a corto plazo, sobretudo si los elementos que deben ser recordados son muy parecidos fonéticamente (Siegel y Linder, 1984).

Sin embargo, los estudios que van a abordar ya de una forma más clara las relaciones entre memoria a corto plazo y cálculo los vamos a encontrar desde planteamientos situados en el marco teórico de la memoria de trabajo, que presentamos de forma detallada en el próximo subapartado.

3.4.1. Estudios sobre la memoria de trabajo como sistema de procesamiento activo de la información y su implicación en tareas de cálculo

De forma previa debemos indicar que todos los estudios que incluimos en este grupo de trabajos provienen, evidentemente, de la óptica cognitiva. Como hemos podido apreciar en el análisis documental realizado (ver página 125), poco después de la publicación del estudio de Baddeley y Hitch (1974) se genera una prolífica investigación con el objeto tanto de conceptualizar de forma precisa la memoria de trabajo como para localizar sus subsistemas, los procesos que se llevan a cabo en ellos, o bien sus aplicaciones en el procesamiento de la información de una amplia variedad de tareas cognitivas, como por ejemplo el papel de la memoria de trabajo en el aprendizaje de la lectura (Baqués, 1995a; Baqués y Sáiz, 1996, 1999; Cantor et al., 1991; Gathercole y Baddeley, 1993; Navalon et al., 1989; entre otros); en la comprensión de la lengua (Ato y Navalón, 1983; Elosúa et al., 1997; García Madruga, 1985; Just y Carpenter, 1992; Masson y Miller, J.A., 1983; entre otros); en la producción del habla (Adams y Gathercole, 1995, 1996; entre otros); en la adquisición de nuevo vocabulario (Baddeley et al., 1998; Gathercole et al., 1999; entre otros); o en el aprendizaje de idiomas (Baddeley, 1993; Lehto, 1995; Service, 1995; entre otros). Aunque en menor medida, se publican también algunos trabajos que *analizan explícitamente cómo interviene este sistema de memoria en el aprendizaje del cálculo* (Adams y Hitch, 1997; Bull y Johnston, 1997; Fürst y Hitch, 2000; Hitch, 1978; Hitch y McAuley, 1991; Lemaire et al., 1996; Logie y Baddeley, 1987; McLean, 1999; McLean y Hitch, 1999; Siegel y Ryan, 1989; Towse y Hitch, 1995, 1997; entre otros), en la línea ya anunciada por Byers y Erlwanger (1985): lo que interesa realmente en relación al binomio matemáticas-memoria es determinar qué y cómo se memoriza el contenido matemático. Algunas de estas investigaciones parten de la idea apuntada por Ruíz-Vargas (1991) en su libro *Psicología de la Memoria*:

“La memoria a corto plazo juega un papel fundamental en la ejecución de tareas cognitivas y complejas y ecológicamente relevantes como la comprensión verbal y el razonamiento matemático” (pp. 140),

A nuestro entender, para comprender el quid de estos estudios debemos retroceder más de 40 años, cuando los trabajos ya mencionados de Brown (1958) y Peterson y Peterson (1959) demostraron que la actuación de la memoria a corto plazo en una tarea se ve perturbada, durante unos segundos, por la aritmética mental intercalada entre la presentación y la memoria de los elementos. Esta memoria empeora a medida que aumenta el grado de complejidad de las operaciones aritméticas, lo cual indica que estas dos tareas, calcular y recordar, compiten por unos mismos recursos, que tienen una capacidad limitada. Sin embargo en estos estudios, como hemos visto, lo que interesa es determinar la duración de la memoria a corto plazo y no sus implicaciones en el cálculo aritmético.

No será hasta finales de los años setenta cuando una vez formulado el modelo de memoria de trabajo clásico de Baddeley y Hitch (1974), aparece el que puede considerarse el primer trabajo que alude de forma explícita al papel de la memoria de trabajo en el cálculo aritmético. El artículo de Hitch (1978), publicado en la revista *Cognitive Psychology*, n^o 10, marca un antes y un después en esta línea de trabajo puesto que por primera vez, tal como indica Ashcraft (1995), se utiliza el término "memoria de trabajo", o "memoria de trabajo a corto plazo", como él la denomina entonces, como sistema de memoria que juega un papel importante en la aritmética mental.

En este trabajo pionero de Hitch (1978), que parte de una muestra de 30 sujetos adultos, se observa todavía cierta preocupación por determinar el papel del almacenaje de información en la memoria de trabajo cuando se realiza aritmética mental. Pero además, cree que el cálculo aritmético está formado por una serie de pasos que se pueden analizar haciendo referencia al procesamiento y almacenamiento de la información en un sistema de memoria a corto plazo y a la movilización del conocimiento almacenado en la memoria a largo plazo. Su planteamiento parte de la idea siguiente:

"La aritmética mental está limitada por la necesidad de guardar la información en una memoria de trabajo transitoria. En el cálculo escrito, la página sirve como una memoria de trabajo permanente que proporciona un sustituto a la memoria humana. A pesar de ello, hay pocas evidencias empíricas sobre la forma en que las limitaciones de la memoria de trabajo contribuyen al error en el cálculo" (p. 303).

A diferencia de trabajos anteriores que, desde el campo de la matemática, analizan los procesos cognitivos implicados en la aritmética de números dígitos (Groen y Parkman, 1972; Parkman, 1972 y Woods et al., 1975; entre otros), Hitch parte de una serie de experimentos con operaciones multidígitos (p. e. $325+45$), que le permiten formular tres aspectos relativos al proceso de decaimiento: a) la información temporal se olvida si no se utiliza inmediatamente; b) este olvido de la información inicial es una fuente de errores; y c) el olvido se ve incrementado por el número de pasos entre la presentación de la información y su uso.

A partir de las bases empíricas sobre la relación entre memoria de trabajo y cálculo establecidas por Hitch (1978) van publicándose de forma paulatina distintos estudios sobre las relaciones entre memoria de trabajo y cálculo. A partir de la revisión realizada, hemos observado que los trabajos inmediatamente posteriores al de Hitch inciden sobretodo en distintos procesos como por ejemplo el uso de estrategias de memoria que facilitan la adquisición del cálculo, o el estudio del tiempo de reacción o de respuesta en tareas de cálculo, entre otros aspectos. A partir de finales de los ochenta y durante la década de los años noventa, estos estudios tienden a declinar y son substituidos progresivamente por investigaciones que tratan de analizar el papel de los distintos subsistemas de la memoria de trabajo (bucle fonológico, agenda viso-espacial y ejecutivo central) en el cálculo.

3.4.1.1. Estudios sobre la memoria de trabajo y los procesos implicados en el cálculo

Como hemos indicado, desde esta perspectiva de estudio que se desarrolla sobretodo durante la década de los ochenta e inicios de los noventa del siglo XX destacan dos focos de interés: por un lado, los estudios que inciden en el uso de estrategias de memoria que facilitan la realización de tareas de cálculo (Casallana, 1985a, 1985b; Kaye et al., 1986; McGilly y Siegler, 1989; Siegler, 1987; Siegler y

Robinson, 1982; Svenson, 1985; Svenson y Sjoeborg, 1982, 1983; entre otros) y por otro, los trabajos que analizan los tiempos de reacción (Fischer y Pluvinage, 1988; Klapp et al., 1991; Logan y Klapp, 1991; Miller, K. et al., 1984; Zbrodoff y Logan, 1990; entre otros).

En relación al primer grupo de trabajos, desde nuestro punto de vista pueden identificarse tres tipologías de estudios principales a partir de la revisión bibliográfica efectuada. Un primer grupo de investigadores, entre los que se encuentran Baroody (1984) y Ginsburg (1982a, 1982b), entre los más conocidos, intentan explicar la habilidad para realizar cálculos aritméticos simples a partir del uso exclusivo de *estrategias de cálculo* que los niños utilizan para ahorrar recursos de la memoria de trabajo. En un segundo grupo están los que abogan por la existencia de *estrategias mixtas*, es decir, estrategias de cálculo y de memoria. Entre éstos se encuentran Ashcraft (1992); Baroody (1985); Kaye et al. (1986); Koshmider y Ashcraft (1991); McGilly y Siegler (1989) o Siegler y Robinson (1982); entre otros. Finalmente, todavía existe un tercer grupo de autores que defienden el uso de *estrategias de memoria* para facilitar la ejecución de tareas de cálculo, como por ejemplo Algarabel y Dasi (1996); Entekin (1992); McNamara y Healy (1995) y Svenson y Sjoeborg (1982, 1983); entre otros. Este tercer grupo de investigaciones es, sin duda, el más interesante para nuestra línea de investigación puesto que, de acuerdo con Threlfall et al. (1995), subraya la habilidad de los niños para llegar a realizar cálculos simples a través de la memoria, y no a través del cálculo, por lo que los niños deberían desarrollar con el tiempo una memoria inmediata de los hechos numéricos, que de acuerdo con Barrouillet y Fayol (1998) o Jordan (1995), entre otros, es la forma más rápida y eficiente de dar una respuesta. Aunque los tres grupos de investigaciones parten de posturas distintas, existen algunos puntos de coincidencia importantes si consideramos que el hecho de usar estrategias de memoria para resolver cálculos aritméticos conlleva un proceso que pasa, en primer lugar, por utilizar estrategias de cálculo y, en segundo lugar, estrategias mixtas. Por esta razón, antes de describir los resultados de los estudios que han incidido en las estrategias de memoria como facilitadoras del cálculo, y sin ánimo de ser demasiado exhaustivos, creemos necesario conocer en primer lugar y de forma resumida el

proceso evolutivo realizado por los niños.

En primer lugar, en relación a las *estrategias de cálculo*, Baroody (1984) analiza el uso de distintas estrategias de cálculo, algunas de las cuales permiten reducir los recursos de la memoria de trabajo durante el cálculo mental. A partir de una investigación de caso único, Baroody (1984) describe la que él denomina estrategia "counting-all": a partir de un cálculo simple, como por ejemplo $2+4$, el sujeto puede ejecutar tres tipos de estrategias distintos, almacenando previamente los dos sumandos en la memoria de trabajo:

- a) contar todos los números a partir del 1 (1, 2, 3, 4, 5, 6). Son, pues, seis pasos.
- b) contar a partir del primer sumando (3, 4, 5, 6). Son cuatro pasos.
- c) contar a partir del sumando más grande (5, 6). Son dos pasos y, por lo tanto, la estrategia que conlleva más economía cognitiva.

Ginsburg (1982b) había encontrado anteriormente que la mayor parte de niños utilizan espontáneamente la tercera estrategia, denominada "estrategia del min". Siegler y Robinson (1982) argumentan que esta estrategia la utilizan muchos niños a los 5-6 años, aunque no se explique en la escuela.

En segundo lugar, en relación a las *estrategias mixtas*, Baroody (1985) sugiere que las estrategias de cálculo que utilizan los niños se sustituyen gradualmente por otras formas mixtas de cálculo y memoria que los hacen responder más rápidamente. En esta línea, Siegler y Robinson (1982) argumentan que la selección de la estrategia a usar depende de las características de cada caso. Por ejemplo, los niños pueden utilizar la memoria cuando se exige velocidad, y pueden usar una estrategia lenta cuando se exige precisión. Sin embargo, Siegler (1987) subraya que sólo una estrategia mixta puede aspirar a la máxima rapidez y precisión. Kaye et al. (1986) realizan un estudio evolutivo con 52 sujetos distribuidos en cuatro grupos de edad: 12 de segundo grado (8 años 2 meses); 12 de tercer grado (9 años 2 meses); 12 de cuarto grado (10 años) y 16 estudiantes de bachillerato. A estos grupos de sujetos se les administran tareas de cálculo simple y se mide el tiempo de

reacción, y se observa que mientras los más pequeños tienden a utilizar estrategias de conteo, los adultos utilizan sobretodo la recuperación de la memoria para resolver las operaciones con más velocidad, aspecto confirmado posteriormente por Koshmider y Ashcraft (1991) en un nuevo estudio evolutivo realizado con una muestra de 90 sujetos distribuida en 5 grupos de 18 sujetos de primer, quinto, séptimo y noveno grado, además de un grupo de estudiantes universitarios de primer curso de psicología a los que se les miden los tiempo de reacción en una tarea de multiplicaciones simples. McGilly y Siegler (1989) y Ashcraft (1992), entre otros, sugieren que el paso de las estrategias de cálculo a las de recuperación de la memoria se produce aproximadamente en el tercer curso (8-9 años), aunque esta mezcla continua hasta la edad adulta, cuando ya pueden usarse indistintamente cualesquiera de las estrategias.

En tercer lugar, en relación a las *estrategias de memoria*, en la literatura específica hemos encontrado algunos trabajos que exponen el uso de distintas estrategias de memoria para realizar cálculos, además de mnemotécnicas más generales como el repaso o la organización (para una revisión, puede consultarse Flavell et al., 1970; Garrido, 1996 o Marchesi, 1983; entre otros).

Entre estos estudios que aportan datos relativos a algunas estrategias específicas de memoria para resolver cálculos destacamos los siguientes: Svenson y Sjoeborg (1982, 1983) estudian por ejemplo la evolución de las estrategias de memoria usadas por 12 niños entre 6 años 9 meses y 7 años 8 meses para efectuar sumas y restas. En sus trabajos, concluyen que a medida que avanza la edad de los sujetos tienden a utilizar la recuperación desde la memoria a largo plazo o bien procesos reconstructivos de memoria, más que ayudas externas de memoria. A partir de estos resultados, subyace la idea que las respuestas relativas a los cálculos aritméticos se reconstruyen en la memoria de trabajo, de acuerdo con Campbell y Charness (1990). Por otro lado, Entekin (1992), en un trabajo aplicado en el que pretende sugerir como mejorar el cálculo en estudiantes universitarios a partir del uso de estrategias de memoria, subraya la implantación de mapas conceptuales en la memoria para realizar cálculos complejos, aunque a nuestro entender en su trabajo

no queda suficientemente clara la forma de mejorar la habilidad aritmética a través de estos mapas. McNamara y Healy (1995) destacan el "efecto de generación" como estrategia de memoria para operaciones de suma y multiplicación. Este efecto se basa, a grandes rasgos, en el hecho que la información elaborada o generada por uno mismo es mejor recordada que la simplemente leída, es decir, que la información procesada más profundamente es también mejor recordada y mejor recuperada. Mason et al. (1996) sugieren una nueva estrategia para reducir el "consumo" de recursos de la memoria de trabajo: la estimación. A partir de un estudio con estudiantes universitarios, concluyen que el recuerdo y el reconocimiento son superiores con números redondeados frente a números exactos, y ello es debido a que requieren menor dificultad de procesamiento.

A modo de síntesis, y de acuerdo con Cascallana (1985a, 1985b), el uso de estrategias de memoria para realizar cálculos debería utilizarse después de haber comprendido qué significa una operación, cómo puede obtenerse su resultado y haber llegado a sentir la necesidad de la memorización para operar rápidamente. De esta forma, servirían para que el niño que aprende vaya desarrollando progresivamente su metamemoria, es decir, para que vaya tomando conciencia de él mismo como memorizador.

Una vez descritos los tres grupos de trabajos en los que se incide en el uso de estrategias de cálculo, estrategias mixtas de cálculo y memoria y estrategias de memoria respectivamente, a continuación describimos los resultados de algunas investigaciones que han realizado estudios comparativos en relación al uso de estos distintos tipos de estrategias para ejecutar cálculos.

A finales de los ochenta e inicios de los años noventa, Geary y Burlingham-Dubree (1989); Geary (1990); Geary et al. (1991); Geary y Brown (1991) y Putnam et al. (1990), entre otros, llevan a cabo una serie de experimentos donde comparan el uso de estrategias de cálculo y de recuperación de la memoria en niños con dificultades aritméticas respecto a un grupo control. En todos estos trabajos, los resultados indican que en ambos grupos suelen utilizarse los mismos tipos de

estrategias (por ejemplo, calcular utilizando los dedos); sin embargo, en el grupo de los sujetos con dificultades aritméticas estas estrategias se aplican con más lentitud e imprecisión. Además, los datos empíricos encontrados permiten sugerir que el uso correcto de los recursos de la memoria de trabajo conlleva mejores rendimientos en la realización de las tareas aritméticas. En esta línea, Hitch et al (1987) y Wenger y Carlson (1996), entre otros, analizan los efectos del uso de la memoria de trabajo en tareas aritméticas, y concluyen que su uso y, más concretamente, el incremento de su eficiencia, produce beneficios en la ejecución de dichas tareas. Estos datos permiten argumentar a Wenger y Carlson (1996) que:

"Durante una tarea de cálculo mental, los sujetos usan la memoria de trabajo para mantener objetivos y subobjetivos apropiados, almacenar temporalmente y acceder a varios valores de entrada, ejecutar cálculos necesarios o transformaciones, y elaborar resultados seguros que son almacenados para su uso futuro en la recuperación de las respuestas" (pp. 600).

También Hulme y Mackenzie (1997) exponen que, si partimos de la base que la memoria de trabajo es un término usado para referirse a los sistemas responsables de mantener temporalmente la información durante la ejecución de tareas cognitivas, la falta de eficiencia de las estrategias de memoria de trabajo usadas por los niños pueden comportar limitaciones en el aprendizaje y en la ejecución de destrezas educativamente muy importantes en relación a la lectura, la comprensión del lenguaje y la aritmética. Más adelante Geary et al (1999) examinan los déficits de una muestra de niños de 6,83 años de media con riesgo a presentar dificultades aritméticas, y concluyen de nuevo que esta tipología de niños presentan escasos recursos de memoria de trabajo, cometen muchos más errores y el tiempo de reacción es superior que en los niños normales, como habían apuntado antes, entre otros, Thomas (1996) con una muestra de 66 estudiantes de tercer grado (40 con rendimiento normal y 26 con dificultades matemáticas específicas) o Chen y Gong (1998), a partir de una muestra de estudiantes chinos de tercer a sexto grado (97 sujetos con dificultades y 63 sujetos normales que actúan como grupo control).

Independientemente de los trabajos anteriores, hemos visto que existe un segundo grupo de investigaciones que se ocupan básicamente de analizar los tiempos de reacción o de respuesta de los sujetos en tareas de cálculo según su

habilidad de memoria de trabajo. Desde esta perspectiva, destacan los trabajos de autores como Fischer y Pluinage (1988); Klapp et al. (1991); Logan y Klapp (1991); Miller, K. et al. (1984) y Zbrodoff y Logan (1990); entre otros, que se ha ocupado sobretodo de analizar el efecto del tipo de operación y la magnitud de los dígitos en el tiempo de reacción o respuesta.

A mediados de los ochenta Miller, K. et al. (1984) efectúan un estudio con 6 estudiantes universitarios a los que les administran distintas operaciones (suma, multiplicación y comparación numérica), concluyendo que los tiempos de reacción son muy similares en el caso de la suma y la multiplicación, y añaden que se incrementan lentamente a medida que aumenta el valor cardinal de los dígitos. Fischer y Pluinage (1988), en un experimento en el que usaron una tarea de verificación, concluyeron también que el tiempo de reacción varía en función de la dificultad de la operación. Sin embargo, el planteamiento experimental típico de este primer grupo de trabajos consiste en comparar el efecto que producen en el tiempo de reacción dos tipos sustancialmente distintos de operaciones: por un lado, las tareas de producción, como por ejemplo $3+4=?$, y por otro lado, las tareas de verificación, como por ejemplo $3+4=7$ (Ashcraft et al., 1984). En esta línea de investigación, por ejemplo, Zbrodoff y Logan (1990) argumentan que en ambas tareas el tiempo de reacción varía en función de la magnitud de cada dígito, puesto que conlleva mayor dificultad de recuperación, dato confirmado posteriormente por Bernoussi (1998); Geary (1996); Lemaire et al. (1996); Klein y Bisanz (2000) o Zbrodoff (1995); entre otros, quienes llevan a cabo diversos experimentos con sujetos de edad escolar y encuentran que la eficacia en la resolución de operaciones aritméticas simples está fuertemente relacionada con la magnitud que son capaces de representar, que depende en buena medida de la capacidad de memoria de trabajo. Klapp et al. (1991) y Logan y Klapp (1991) analizan el tiempo de reacción en una tarea de verificación alfanumérica en función del nivel de entrenamiento de los sujetos: inicial, automatizado o excesivamente entrenado, y llegan a la conclusión que el tiempo de reacción depende del nivel de práctica: en los sujetos del nivel inicial el tiempo de reacción es superior y varía en función de la magnitud de los dígitos, en el nivel automatizado la magnitud de los dígitos no interfiere y en el

sobrentrenado es cuando disminuye más el tiempo de reacción. Zbrodoff (1995) sugiere que este efecto es debido a la fuerza de la asociación y también al nivel de interferencia (por ejemplo: $3 \times 5 = 8$ puede ser un error más común que $3 \times 5 = 20$, puesto que hay una interferencia con la operación $3 + 5 = 8$). Threlfall et al. (1995) sugieren de nuevo que, en general, el tiempo que se tarda en responder aumenta cuando los números también aumentan, excepto cuando los dos sumandos son el mismo número (en el caso concreto de la suma). A partir de estos datos, Threlfall y su equipo concluyen que en niños las estrategias de cálculo son más utilizadas que las de memoria, excepto cuando los números son iguales.

En síntesis, algunas de las aportaciones más interesantes de este tipo de estudios a nuestra línea de investigación se basa en el hecho de que la capacidad de memoria de trabajo determina en buena medida la habilidad para resolver operaciones aritméticas simples, puesto que dicha capacidad está fuertemente relacionada con la magnitud que son capaces de representar.

3.4.1.2. Estudios sobre los diferentes subsistemas de la memoria de trabajo (bucle fonológico, agenda viso-espacial y ejecutivo central) y el cálculo

Los trabajos que vamos a exponer a continuación han tratado de concretar el papel específico de la memoria de trabajo como la encargada de distribuir los recursos cognitivos en la realización de diferentes tareas aritméticas, partiendo de la base que una escasa disponibilidad de recursos de la memoria de trabajo conlleva un peor rendimiento en la tarea. Situados en esta línea, estos estudios tratan de determinar qué subsistema o subsistemas de la memoria de trabajo son los que repercuten más directamente en la ejecución del cálculo.

Desde una perspectiva genérica, dentro del campo de estudio de la memoria de trabajo el estudio de estas relaciones ha dado lugar a un número reducido de publicaciones, como hemos podido apreciar en nuestro análisis documental (ver página 135). En nuestra opinión, sin embargo, se trata de un tema con repercusiones importantes puesto que podría explicar el aprendizaje del cálculo desde la psicología de la memoria, entre otros aspectos relacionados, tal como ha ocurrido con el

aprendizaje de la lectura (Baqués, 1995a; Baqués y Sáiz, 1996, 1999; Cantor et al., 1991; Gathercole y Baddeley, 1993; Navalón et al., 1989; entre otros). Apoyando este argumento, Wenger y Carlson (1996), entre otros, sugieren que:

"Cada componente de la memoria de trabajo es necesario para agrupar procedimientos para realizar un cálculo y coordinar estos procedimientos con otra información relevante" (pp. 600).

Antes de proceder a la exposición de los principales resultados, recordamos que hemos efectuado una revisión preliminar de los estudios de memoria de trabajo y cálculo con el objeto de concretar el tipo de pruebas utilizadas (ver página 122). Dicha revisión nos ha aportado una serie de datos representativos que merece la pena subrayar, que presentados de forma sintética pueden concretarse en los siguientes: a) existe una gran heterogeneidad en el tipo de pruebas de memoria de trabajo utilizadas, y en algunos casos hay un escaso control de la validez y fiabilidad de dichas pruebas; b) existe gran diversidad de planteamientos experimentales: uso exclusivo de pruebas de cálculo; uso de pruebas de un único componente de la memoria de trabajo; uso de medidas de aptitud, rendimiento y memoria de trabajo; etc.

Estas limitaciones conllevan algunas dificultades al intentar obtener conclusiones representativas que permitan ofrecer un marco teórico de referencia idóneo con el que comparar los resultados de nuestro estudio empírico. Aún siendo conscientes de este obstáculo, exponemos a continuación los principales resultados de los trabajos revisados aglutinados en función del componente de trabajo en el que han incidido.

*** *Bucle fonológico***

Como hemos indicado, el bucle fonológico consta de dos componentes: un almacén fonológico con capacidad para retener información basada en el lenguaje y un proceso de control articulatorio basado en el habla interna (Baddeley, 1998). Desde un punto de vista genérico, se ha demostrado empíricamente que la capacidad de este subsistema puede verse alterada por algunos fenómenos como el efecto de

similitud acústica, el habla irrelevante, la longitud de las palabras o bien la supresión articulatoria (ver página 108), tal como indican, entre otros, Hitch et al. (1989), quienes con un grupo de 18 niños de 8 años y 6 meses y otro de 11 años y 1 mes, en los que evalúan la amplitud de memoria concluyen que:

"El bucle fonológico es el componente de la memoria de trabajo que juega un papel más importante en el recuerdo inmediato de materiales verbales y parece ser el responsable de fenómenos como el efecto de la longitud de las palabras y la supresión articulatoria" (pág. 322).

A partir de las premisas anteriores, en el transcurso de los últimos años han aparecido algunos estudios que han investigado el papel desempeñado por el bucle fonológico en la ejecución de tareas de cálculo. En un intento de estructurar el panorama de los estudios que intentan relacionar el aprendizaje del cálculo con la capacidad de procesamiento de material verbal, hemos detectado dos grandes grupos de trabajos interrelacionados entre sí: por un lado, un grupo de estudios que parten de muestras de sujetos normales, cuyos autores más representativos son Fürst y Hitch (2000); Logie y Baddeley (1987) y Logie et al. (1994), entre otros. Por otro lado, otro grupo de investigaciones que parten del estudio de sujetos con dificultades de aprendizaje, entre los que cabe destacar a Fazzio (1999); Gathercole y Pickering (2000a, 2000b) o McLean y Hitch (1999), entre otros.

Respecto al primer grupo de estudios, las primeras investigaciones aparecen ya en la década de los ochenta del siglo XX. Por ejemplo, Logie y Baddeley (1987) parten de una situación empírica de tarea dual en la que 24 sujetos adultos (13 mujeres y 11 hombres con una media de edad de 42 años) cuentan los puntos que aparecen en series aleatorias o las veces que un cuadrado aparece a intervalos irregulares en una pantalla de ordenador, y responden usando el teclado numérico. Los resultados obtenidos muestran que la supresión articulatoria durante el conteo produce una alteración sustancial del rendimiento (en el número de errores más que en la magnitud de éstos), dato confirmado posteriormente por Fürst y Hitch (2000), quienes a partir de una muestra de 20 estudiantes universitarios que ejecutan una tarea de cálculo llegan a conclusiones idénticas. Logie y Baddeley (1987) también analizan el efecto del habla irrelevante y comprueban que la alteración es mayor

cuánto más similar fonológicamente es el discurso en relación a los números contados ("udo", "tos", "pes", "suato", "pinto", "meix", ...). Aunque encuentran diferencias estadísticamente significativas, la variación es pequeña respecto a la alteración producida por la supresión articulatoria. Los autores intentan interpretar los resultados anteriores en función de dos componentes separados de la tarea de conteo: la subvocalización de la suma dinámica y la supresión articulatoria.

En una línea de estudio similar, Ellis (1992) sugiere que el rendimiento aritmético y la mediana de la memoria verbal de niños que hablan galés es inferior que cuando realizan las mismas tareas en inglés. Logie et al. (1994) exponen que este fenómeno no se produce a causa de la distinta familiaridad de los niños con las lenguas respectivas, sino al hecho que la tarea se contabiliza según el tiempo que tardan en pronunciar las palabras en cada lengua, lo que mantendría una estrecha relación con el efecto de longitud de las palabras (Baddeley et al., 1975): las palabras que tardan más en ser pronunciadas también tardan más en ser subvocalizadas y, por lo tanto, imponen más carga al mecanismo de repetición subvocal. Estos mismos efectos se habían encontrado ya en otros estudios comparativos en los que se realizan conteos y/o tareas de cálculo en diferentes lenguas, como por ejemplo el chino y el inglés (Hoosain y Salili, 1988; Jensen y Whang, 1994); el árabe, el hebreo, el español y el inglés (Naveh-Benjamin y Ayres, 1986); el hebreo y el inglés (Abu-Rabia, 1997); o el chino, el japonés y el inglés (Lau y Hoosain, 1999); entre otros, aunque no debemos olvidar que en el estudio de Logie y Baddeley (1987) se apunta ya que la subvocalización tiene un papel más central en el conteo que la fonología de las palabras usadas por el sistema numérico.

Otra línea de estudios interrelacionada con la anterior desde la que se viene analizando el papel del bucle fonológico en el aprendizaje y ejecución del cálculo aritmético proviene, como hemos indicado, del campo de las dificultades de aprendizaje (Barrouillet et al., 1997; Benedetto y Tannock, 1999; Fazzio, 1994, 1996, 1998, 1999; Geary et al, 1999; Gros-Tsur et al., 1996 o Ostad, 1997; entre otros). Desde esta perspectiva, muy bien sintetizada por Rivière (1990), se parte de la base que:

"Es perfectamente posible que algunas personas sin problemas para conservar en su memoria materiales verbales, visuales, etc., si los tengan para mantener materiales numéricos. ¿No podrían explicarse así las dificultades matemáticas de algunos niños sin otros problemas?. Es atractiva la hipótesis de que estos niños podrían tener especiales dificultades para conservar información numérica en su memoria de trabajo" (pp. 169-170).

La intuición de que ciertas dificultades para el aprendizaje del cálculo podrían estar condicionadas por factores de memoria o más concretamente por aspectos verbales de la memoria de trabajo, tal como sugieren Brainerd (1987) o Rivière (1990), entre otros, se había empezado a confirmar en investigaciones realizadas por Siegel y Feldman (1983) y Siegel y Ryan (1989). En el último de estos trabajos, Siegel y Ryan (1989) comparan a 74 niños (de edades comprendidas entre los 7-13 años) sin dificultades con tres grupos de niños con problemas de aprendizaje: 48 niños con problemas de lectura; 15 niños con un trastorno general de la atención; y 36 niños con dificultades de aprendizaje de las matemáticas específicas. A todos ellos se les plantean dos tareas de memoria, una de carácter verbal que consiste en completar frases y luego recordar en el mismo orden las palabras dadas previamente para completar dichas frases, y otra de carácter numérico que consiste en contar puntos amarillos distribuidos al azar en unas tarjetas que contenían puntos amarillos y azules, recordando después ordenadamente el número de puntos amarillos de cada tarjeta (se trata de una tarea de Amplitud de Contar similar a la propuesta por Case et al., 1982, utilizada también en nuestro estudio empírico). Los resultados apuntan que mientras que los niños con alteraciones de lectura obtienen puntuaciones bajas en las dos tareas, los niños con dificultades específicas para las matemáticas obtienen puntuaciones normales en la tarea de recuerdo verbal y bajas en la de recuerdo numérico. Estos datos permiten concluir a Siegel y Ryan (1989) que las dificultades de aprendizaje en la lectura y en la aritmética van asociadas a una capacidad baja en una memoria de trabajo general, mientras que una dificultad específica de aprendizaje aritmético estaría asociada a una capacidad baja en un tipo de memoria especializada para operaciones aritméticas.

Dos años después, Hitch y McAuley (1991) realizan otro experimento en dos fases (primera fase: 110 niños entre 8-9 años clasificados según su nivel en el Test

de Matrices Progresivas de Raven, un test de lectura y otro de matemáticas; segunda fase: 30 niños entre 8-9 años, 15 con dificultades específicas de aprendizaje aritmético y 15 que no). A partir de este nuevo estudio empírico, pretenden solucionar algunas cuestiones no resueltas en el estudio de Siegel y Ryan (1989), como por ejemplo el hecho de que no pudieron comparar directamente los resultados de la prueba de carácter verbal con la de carácter numérico por tratarse de tareas distintas, independientemente de las operaciones mentales requeridas. En particular, las tareas de tipo numérico y verbal implicaban distintas modalidades de estimulación (visual-auditiva) y distintas categorías de respuesta (dígitos-palabras). Para solucionar el problema, incluyen en su experimento una tarea de amplitud de contar oral, que consiste en contar frases presentadas de forma auditiva. Y la tarea verbal es sustituida por una de amplitud de contar visual en la que los niños deben encontrar el elemento que sobra en un grupo de tres estímulos, a la vez que deben recordar los contenidos impartidos en una clase anterior al experimento. Estas tareas permiten saber si los déficits son causados por las operaciones aritméticas o por tareas con un componente viso-espacial, o por una combinación de las dos. Los datos encontrados confirman que los niños con dificultades aritméticas específicas se ven perjudicados en operaciones simultáneas sólo cuando las operaciones requieren un cálculo y, a la vez, este hecho determina que el cálculo es independiente de las características viso-espaciales o audio-verbales de la tarea. A partir de estos datos, los autores sugieren que los sujetos con lentitud de conteo y alto nivel de errores aritméticos podrían tener un acceso más lento a la representación de los números en la memoria a largo plazo; o bien que podrían tener dificultades en aprender secuencias de números, afectando a la fluidez de los cálculos aritméticos.

Geary (1993), en un trabajo de revisión en el que interrelaciona los estudios que analizan los efectos del lenguaje con los que analizan los efectos de las dificultades de aprendizaje del cálculo, expone las causas que conllevan el uso de procedimientos de contar lentos en sujetos con dificultades aritméticas, e indica que podría ser debido tanto a representaciones fonológicas débiles como a la pérdida de la información antes de que el cálculo haya finalizado, reduciendo así la

probabilidad que la cantidad añadida y la respuesta puedan asociarse en la memoria a largo plazo. Ello explicaría, por ejemplo, el mejor funcionamiento aritmético de los niños chinos que los americanos (Jensen y Whang, 1994), dado que como hemos visto los dígitos chinos son más cortos y pueden ser contados más rápidamente, aunque ya hemos analizado la réplica a tales suposiciones (Logie et al., 1994), en la que coinciden también Bull y Johnston (1997) por considerarlas demasiado simplistas. Sin embargo, lo que sí sugiere Geary (1993) es que la habilidad para utilizar los recursos de la memoria de trabajo, o más específicamente del bucle fonológico, con el objeto de asimilar los números es de gran importancia en los primeros niveles de la enseñanza de la aritmética. Gathercole y Adams (1994) en un estudio con 70 niños de 4 y 5 años a los que les administran una prueba de Recuerdo serial de dígitos (además de otra de repetición de pseudopalabras), no encuentran una relación directa entre las destrezas numéricas de los niños y su amplitud de dígitos. Aunque reconocen que se trata de un dato inconsistente, sus resultados les llevan a sugerir que se produce una contribución común del bucle fonológico y del conocimiento lexical de base fonológica en los tests que miden la capacidad del bucle fonológico. Swanson et al. (1990) y Swanson (1994), a partir de trabajos empíricos con muestras de sujetos de 4º a 6º grado (que subdivide según su capacidad de memoria) afirma de nuevo que la memoria a corto plazo y la memoria de trabajo (este autor diferencia ambos sistemas) son importantes en la comprensión de la lectura y la ejecución aritmética de sujetos con dificultades de aprendizaje.

A partir de los resultados obtenidos en los estudios anteriores, podemos observar que la mayor parte de autores sugieren que la capacidad del bucle fonológico de la memoria de trabajo depende de la cantidad de información que puede ser repetida subvocalmente, o bien de la velocidad de procesamiento, concluyendo que cuánto mayor es la velocidad mayor es la duración de la información en la memoria de trabajo (Lemaire et al., 1996). La principal suposición de Lemaire et al. (1996), que efectúan dos experimentos distintos con 20 estudiantes de Psicología cuya media de edad es 21,2 años y 40 estudiantes de Psicología con una media de 26,4 años a los que les administran 126 operaciones de cálculo simple (suma y producto), es que si los elementos son articulados más rápidamente,

entonces éstos pueden ser refrescados en la memoria antes de que decaigan más allá de un punto crítico donde no habría posibilidad de recordar o recuperar. De todas formas, en relación al papel que el bucle fonológico ejerce en el cálculo, Lemaire et al (1996) indican que:

"... Es posible que los recursos fonológicos de la memoria de trabajo sean requeridos sólo para verificar cálculos de respuesta verdadera y no falsa. Ésta es, en principio, una posibilidad dado que los hechos aritméticos básicos (p. e. cálculos correctos) son aprendidos, en primer lugar, a través de la repetición oral. Aunque también es posible que nuestra manipulación experimental no haya sido la suficientemente fuerte para detectar un posible efecto ..." (pp. 95).

De-Rammelaere et al. (1999) replican el experimento de Lemaire et al. (1996). Parten de una muestra de 40 sujetos de primer curso a los que aplican una tarea de producción o generación ($3+4=?$), y llegan a la conclusión de que el ejecutivo central juega un papel importante para resolver sumas tanto verdaderas como falsas, mientras que el bucle fonológico interviene sobretudo en la resolución de sumas falsas. Unos años antes, también Butterworth et al. (1996) habían efectuado una réplica del estudio de Lemaire et al. (1996): en este trabajo, analizan el rendimiento de un sujeto adulto con déficits importantes de memoria de dígitos (amplitud de tres dígitos), y encuentran que el sujeto en cuestión no tiene problemas para resolver tareas de cálculo del tipo $173+68$, que se presentan de forma tanto visual como auditiva, por lo que sugieren una revisión de las funciones de la memoria de trabajo según el modelo de Baddeley y Hitch (1974).

Sin embargo, paulatinamente van apareciendo algunos trabajos empíricos a finales de la década de los noventa que no sustentan la declaración de Butterworth et al. (1996) o de De-Rammelaere et al. (1999). Así, por ejemplo, Fazzio (1994, 1996, 1998, 1999), quien ha trabajado básicamente con niños con dificultades de lenguaje, ha ido confirmando en sus estudios que las dificultades para solucionar cálculos escritos son debidos a una relación compleja entre el conocimiento conceptual, procedimental y declarativo (recuperación de la memoria), y la causa principal de los déficits en estos tipos de conocimientos es, según esta autora, el funcionamiento anómalo del bucle fonológico (ya que estos sujetos acostumbran a presentar dificultades para recordar exactamente números, a la vez que palabras y frases). Los

trabajos de Barrouillet et al., 1997; Benedetto y Tannock, 1999; Gros-Tsur et al., 1996 o Ostad, 1997 confirman, de modo general que, efectivamente, existen diferencias consistentes entre los niños normales y los que presentan dificultades de aprendizaje en relación a los recursos de memoria de trabajo utilizados para resolver operaciones aritméticas simples.

A pesar de que al iniciar nuestro trabajo no existían trabajos que analizaran conjuntamente la posible incidencia de los tres subsistemas de la memoria de trabajo en el cálculo, muy recientemente han aparecido algunas investigaciones que parten de diseños experimentales muy parecidos al nuestro, que aportan nuevos datos al respecto. Por ejemplo, McLean y Hitch (1999) investigan los déficits de memoria de trabajo en 122 niños de 9 años con dificultades aritméticas en relación a un grupo control. Sus resultados, en contraposición a los de Fazzio (1994, 1996, 1998, 1999), indican que los sujetos con baja habilidad aritmética tienen un nivel normal del bucle fonológico. En un trabajo de validez de pruebas de Gathercole y Pickering (2000a), encuentran un alto grado de validez de las tareas del bucle fonológico, aunque el rendimiento en este subsistema parece estar relacionado exclusivamente con el conocimiento de vocabulario, y no con el cálculo. Sin embargo, Bull et al (1999); De Jong y Van der Leij (1999) o Geary et al. (1999), entre otros, exponen que el bucle fonológico, junto con el ejecutivo central, son los subsistemas de la memoria de trabajo que parecer jugar un rol más importante en tareas aritméticas (tanto si implican habilidad numérica como destreza para realizar cálculos). Como podemos apreciar, existe un cierto grado de discrepancia, aspecto atribuible tanto al uso de diferentes formas de medir la memoria de trabajo como al uso de diferentes tareas de cálculo.

A modo de síntesis, a partir de los datos encontrados hasta el momento podemos extraer las siguientes conclusiones respecto al papel desempeñado por el bucle fonológico en tareas de cálculo:

- Es el componente de la memoria de trabajo que por el momento ha generado más estudios en relación a nuestra línea de estudio.

- La mayoría de autores están de acuerdo en el hecho de que el bucle fonológico interviene en el cálculo, aunque existen algunos resultados contradictorios debidos sobretudo a planteamientos experimentales diversos. A continuación reproducimos –en el mismo orden cronológico que han ido publicándose- los resultados que a nuestro entender son más representativos:
 - La supresión articulatoria durante el conteo produce una alteración sustancial del rendimiento (Logie y Baddeley, 1987).
 - El habla irrelevante o similitud fonológica de los dígitos incide también en el rendimiento, en el sentido que a mayor similitud se produce mayor alteración (Logie y Baddeley, 1987).
 - Una dificultad específica de aprendizaje aritmético estaría asociada a una capacidad baja en un tipo de memoria especializada para operaciones aritméticas (Siegel y Ryan, 1989).
 - Los sujetos con lentitud de conteo y alto nivel de errores aritméticos podrían tener un acceso más lento a la representación de los números en la memoria a largo plazo (Hitch y McAuley, 1991).
 - El conteo lento y los errores aritméticos podrían ser debidos a representaciones fonológicas débiles (Geary, 1993) o a la pérdida o decaimiento de información antes de que el cálculo haya finalizado (Geary, 1993; Lemaire et al, 1996).
 - El rendimiento depende del efecto de longitud de las palabras: las palabras que tardan más en ser pronunciadas también tardan más en ser subvocalizadas y, por lo tanto, imponen más carga al mecanismo de repetición subvocal (Logie et al., 1994).

- Las principales dificultades de cálculo se explican por una relación compleja entre el conocimiento conceptual, procedimental y declarativo debido a un funcionamiento anómalo del bucle fonológico (Fazzio, 1994, 1996, 1998, 1999).

*** *Agenda viso-espacial***

Desde un punto de vista genérico, según Baddeley (1998) se da por sentado que la agenda viso-espacial se encarga de crear y manipular imágenes viso-espaciales y que se emplea en la creación y utilización de mnemotécnicas de imágenes visuales, y a la vez parece que el sistema espacial es importante para la orientación geográfica y para la planificación de tareas espaciales, aunque no parece encargarse del efecto de la imaginabilidad en la memoria verbal a largo plazo, tal como hemos indicado anteriormente.

Desde un punto de vista aplicado, tradicionalmente muchos autores han apuntado que las imágenes visuales pueden facilitar el aprendizaje de material verbal (Fraisse, 1970; Gelzheiser, 1984; Paivio, 1971; Paivio y Csapo, 1973; entre otros), pero hasta hace poco tiempo un número escaso de trabajos habían analizado de forma explícita su intervención en el rendimiento aritmético. Por ejemplo, Hayes (1973) demuestra como los sujetos podían utilizar imágenes visuales como ayuda para encontrar la solución de cálculos simples, pero los sujetos eran incentivados a usar tal estrategia, por lo que no queda claro hasta qué punto dichos sujetos la usaban espontáneamente. También algunos autores como Restle (1970) postulan que, en el caso de la suma mental, los sujetos transforman cada cifra en una representación analógica o visual, es decir, cada sumando se representa por una línea interna proporcional a su valor. La unión de las dos líneas da lugar a una nueva línea que representa el resultado que puede ser comparado al propuesto, como hemos visto en el primer capítulo (ver página 32). Por su lado, Gonzales y Kolers (1982), a partir de un estudio con 10 sujetos universitarios a los que presentan 45 sumas en distintos formatos (arábigo, romano y combinado), argumentan que las características externas de los sistemas numéricos usados pueden tener

repercusiones significativas en el cálculo mental (en su caso, entre el sistema numérico árabigo y el romano). Y más adelante, también Heathcote (1994) sugiere que el componente viso-espacial podría estar relacionado con las operaciones que requieren una posición de los números en columnas. Un año después, Kulak (1995) defiende que existen razones para creer que las destrezas viso-espaciales son importantes para el cálculo aritmético. A pesar de estas distintas aproximaciones al papel que ejerce la agenda viso-espacial en tareas de cálculo, a mediados de los noventa parecía complicado confirmar tales relaciones, ya que a partir de un estudio con 26 sujetos adultos (13 mujeres y 11 hombres que cuentan puntos) Logie et al. (1994) afirmaban que:

“Todavía se está discutiendo sobre hasta qué extremo la gente utiliza el almacenamiento viso-espacial temporal o las imágenes visuales espontáneamente” (pp. 398).

De hecho, y de acuerdo con Siegler (1987), puede ser que las imágenes ofrezcan una de las diversas estrategias disponibles y que sólo algunos individuos escojan utilizarlas.

En un intento de Logie (1995) para delimitar las funciones de la agenda viso-espacial, expone que si bien parece evidente que la memoria de trabajo interviene en el área de las funciones fonológicas y articulatorias a través de actividades diarias como contar, hacer cálculo aritmético, adquirir vocabulario, y en algunos aspectos de la comprensión de la lectura y del lenguaje, las reivindicaciones en relación a las funciones visuales y espaciales de la memoria de trabajo son menos convincentes. Lo que sí que está claro es que la memoria de trabajo visual y espacial está íntimamente relacionada con la generación, retención y manipulación de imágenes visuales, como sugieren también Brandimonte et al. (1992) o Smyth y Scholey (1996), entre otros. A raíz de estos datos parece ser que la agenda viso-espacial ejercería una escasa influencia en el cálculo aritmético.

Sin embargo los últimos estudios en esta línea, como los de Gathercole y Pickering (2000a, 2000b); McLean y Hitch (1999) o Robinson et al. (1996), llegan a conclusiones distintas a las anunciadas por Logie (1994, 1995). Así, por ejemplo,

Robinson et al. (1996) en un amplio estudio con una muestra de 778 niños de educación infantil a los que administran 2 pruebas de aritmética y otras 15 medidas, ponen en evidencia una fuerte relación entre factores espaciales y cuantitativos. McLean y Hitch (1999) encuentran que los sujetos con baja habilidad aritmética presentan déficits en el componente espacial de la memoria de trabajo. También Gathercole y Pickering (2000b), en un estudio realizado con 83 niños ingleses de 6-7 años que presentan un nivel bajo en tests de las áreas de inglés y matemáticas, obtienen puntuaciones débiles en medidas del ejecutivo central y de la agenda visoespacial.

A raíz de las conclusiones de los estudios descritos anteriormente, observamos que se llega a resultados contradictorios. Por un lado, estudios como el de Logie et al. (1994) confirman que si bien parece evidente que la memoria de trabajo interviene en el área de las funciones fonológicas y articulatorias a través de actividades diarias como contar, hacer cálculo aritmético, adquirir vocabulario, y en algunos aspectos de la comprensión de la lectura y del lenguaje, las reivindicaciones en relación a las funciones visuales y espaciales de la memoria de trabajo son menos evidentes. Por otro lado, estudios más recientes como el de Gathercole y Pickering (2000b) encuentran una relación importante entre los niños con un nivel bajo en tests de matemáticas y puntuaciones débiles en las medidas de la agenda visoespacial, aunque estas mismas autoras indican que:

“La conexión entre el rendimiento pobre en el currículum y las puntuaciones en las medidas visoespaciales es inesperado, puesto que existe escasa evidencia en la literatura del hecho que el componente visoespacial juegue un papel clave en tales aprendizajes” (pp. 189).

A nuestro entender, esta discrepancia en los resultados se debe sobretodo a dos factores simultáneos: por un lado, las edades de las muestras son distintas, puesto que mientras Logie et al (1994) utilizan una muestra de sujetos adultos (18-65 años), Gathercole y Pickering (2000b) utilizan una muestra de niños de 6-8 años, que son también las edades de referencia de nuestro estudio empírico. Aunque para nosotros, el factor más determinante está en el tipo de medida matemática utilizada: por un lado, Logie et al (1994) utilizan una tarea exclusiva de cálculo que consiste

en series de sumas de dos dígitos (p. e. 13+18), que es la que más se aproxima a la utilizada en nuestro diseño, mientras que Gathercole y Pickering (2000b) parten de la evaluación del currículum nacional de matemáticas, que lógicamente incluye un abanico de tareas matemáticas mucho mayor (numeración, cálculo, geometría, medida, estadística y probabilidad, etc.). Además, no podemos olvidar que en su estudio de validez de pruebas, Gathercole y Pickering (2000a) encuentran unos índices débiles para los tests de la agenda viso-espacial.

A modo de síntesis, a partir de los datos encontrados hasta el momento podemos extraer las siguientes conclusiones respecto al papel desempeñado por la agenda viso-espacial en tareas de cálculo:

- Ha dado lugar a un escaso número de trabajos, aunque en los últimos años parece estar invirtiéndose esta tendencia.
- Existe cierto desacuerdo en los estudios realizados hasta el momento, debido básicamente a factores como el tipo de muestra o el tipo de pruebas utilizadas (sobre todo respecto a las pruebas matemáticas), por lo que es preciso que en los próximos años se establezcan pautas empíricas concretas que permitan subsanar la situación actual y llegar así a datos más concluyentes en relación al papel desempeñado por este componente de la memoria de trabajo.

** Ejecutivo central*

Como hemos indicado anteriormente, según Baddeley (1996) el conocimiento completo de las funciones del ejecutivo central es escaso todavía. De todas formas, sí que parece claro que se trata de un único subsistema que controla a dos subsistemas esclavos: el bucle fonológico y la agenda viso-espacial, y que ejerce un rol esencial en la realización de actividades cognitivas complejas (Engle et al., 1999). Gathercole y Pickering (2000a) especifican algunas funciones adscritas al ejecutivo central, como por ejemplo el desarrollo de estrategias flexibles para el almacenaje y la recuperación de la información; el control del flujo de información a

través de la memoria de trabajo; la recuperación del conocimiento desde la memoria a largo plazo; o el control de la acción, la planificación y la programación de múltiples actividades concurrentes.

Desde la perspectiva de estudio que nos ocupa, Logie et al. (1994) indican que a pesar de que todavía hay pocas pruebas, las características del ejecutivo central sugieren que debería tener un papel de primer orden en la cognición numérica, especialmente en el caso de los problemas aritméticos más complejos. En su estudio encuentran que la actuación en el cálculo se interrumpe cuando el ejecutivo central se sobrecarga y, por extensión, cuando el sistema subyacente fonológico es también sobrecargado, lo cual hace suponer que el papel del ejecutivo central es valorar los totales correctos y seleccionar implícitamente las estrategias apropiadas cuando la solución de un cálculo no está disponible directamente mediante la recuperación, mientras que la función del bucle fonológico sería fundamentalmente el de mantener los resultados totales y mantener también la coherencia en el cálculo. Lemaire et al. (1996) argumentan que una posible repercusión de estos datos en relación al papel de cada componente de la memoria de trabajo en el cálculo hace referencia a la posible distinta implicación de los recursos de memoria de trabajo en la verificación de cálculos de respuesta falsa con un resultado próximo al verdadero ($8+4=13$) comparado con la verificación de cálculos de respuesta falsa con un resultado alejado al verdadero ($8+4=17$), ya que se ha comprobado que los sujetos tardan más en verificar cálculos de respuesta falsa con un resultado próximo al verdadero que los que tienen un resultado alejado, un efecto que se ha denominado el efecto división (Ashcraft y Battaglia, 1978; Dehaene y Cohen, 1991; Zbrodoff y Logan, 1990; entre otros). Este aspecto es interesante porque hace pensar que los sujetos utilizan dos tipos de estrategias: una estrategia de recuperación que se utiliza para verificar los cálculos de resultados próximos y una estrategia de probabilidad que se utiliza para verificar cálculos alejados. A partir de aquí, Lemaire et al. (1996) indican que:

"Cuando se utiliza la estrategia de recuperación, los sujetos primero recuperan la solución correcta, comparan esta respuesta y emiten su respuesta. Usando la estrategia de probabilidad, el proceso de verificación no es tan rápido de completar, pero se toma una rápida decisión que consiste en determinar que la respuesta propuesta está demasiado alejada para que sea probable" (pp. 97).

Estos mismos autores argumentan que cuando los sujetos verifican los cálculos aritméticos de respuesta verdadera, el efecto "dificultad del cálculo" se incrementa si se encuentra en la curva fonológica o en el sistema ejecutivo central. Esto hace pensar que para verificar cálculos de respuesta verdadera, los recursos atencionales tanto del ejecutivo central como también del bucle fonológico están implicados.

Hitch y Towse (1995) implican también al ejecutivo central en la destreza para realizar cálculos aritméticos, ya que en un trabajo de revisión indican que tal habilidad depende de los recursos para hacer operaciones mentales y de la información almacenada en un espacio de trabajo central. Más adelante, Towse y Hitch (1997), en un estudio efectuado con 46 alumnos con una media de edad de 7 años y 5 meses, sugieren que el ejecutivo central está también implicado en tareas específicamente numéricas, al encontrar que la capacidad de contar objetos depende de un sistema central de capacidad limitada, además del procesamiento visual y verbal.

Los resultados precedentes estarían parcialmente de acuerdo con los últimos trabajos publicados, como el de McLean y Hitch (1999), en el que encuentran que los sujetos con baja habilidad aritmética presentan déficits en el componente espacial de la memoria de trabajo y en algunos aspectos del ejecutivo central; por otro lado, las correlaciones de los tres subsistemas de la memoria de trabajo obtenidas por Gathercole y Pickering (2000a), indican una validez alta para el ejecutivo central y el bucle fonológico, pero no para la agenda viso-espacial. En este mismo estudio de validez, el ejecutivo central se asocia con ejecuciones en tareas de vocabulario, literatura y cálculo aritmético. Recordamos que también Gathercole y Pickering (2000b) encuentran que 83 niños ingleses de 6-7 años con un nivel bajo en tests de las áreas de inglés y matemáticas presentan puntuaciones débiles en medidas del ejecutivo central y en particular de la agenda viso-espacial. Por su lado, Fürst y Hitch (2000), a partir de una muestra de 24 estudiantes universitarios, concluyen también que la interrupción que los procesos dependientes del ejecutivo central en

una tarea aritmética conlleva el descenso del rendimiento.

A modo de síntesis, a partir de la literatura aparecida hasta el momento podemos extraer las siguientes conclusiones respecto al papel desempeñado por el ejecutivo central en tareas de cálculo:

- En general, existe un número de trabajos muy reducido que se hayan ocupado de este componente de la memoria de trabajo, y en su mayoría lo han hecho conjuntamente con el bucle fonológico.
- Todos los trabajos que han vinculado el ejecutivo central con el cálculo coinciden en el importante papel que ejerce este componente. Así, en el mismo orden cronológico que han ido apareciendo, Logie et al. (1994) demuestran que la actuación en el cálculo se interrumpe cuando el ejecutivo central se sobrecarga; Hitch y Towse (1995) y Towse y Hitch (1997) demuestran que el ejecutivo central está implicado en tareas numéricas y de cálculo mental, puesto que tales habilidades dependen de un sistema central de capacidad limitada. Ya más recientemente, Fürst y Hitch (2000); Gathercole y Pickering (2000a, 2000b); y McLean y Hitch (1999), entre otros, afirman también el importante papel desempeñado por este componente.

3.5. SÍNTESIS DEL CAPÍTULO

En este tercer capítulo hemos efectuado una revisión bibliográfica de los estudios que han incidido en las implicaciones de la memoria de trabajo en el cálculo. Dado que hemos partido del modelo de memoria de trabajo de Baddeley y Hitch (1974), en primer lugar hemos considerado oportuno enmarcar teóricamente este modelo, que en su formulación inicial se consideró un sistema de atención controlador que supervisaba y coordinaba varios sistemas subordinados subsidiarios. Baddeley y Hitch (1974) denominaron al controlador atencional ejecutivo central y escogieron estudiar dos subsistemas subordinados con mayor detalle: el bucle articulatorio o fonológico, que se suponía era el responsable de la manipulación de

información basada en el lenguaje, y la agenda viso-espacial, que se suponía se encargaba de la creación y manipulación de imágenes visuales.

Una vez expuesto el modelo, hemos revisado las principales medidas utilizadas para obtener datos relativos a la memoria de trabajo. Desde un punto de vista genérico, la forma más usual de obtener tales medidas es a partir de tareas simples (para el bucle fonológico y la agenda viso-espacial) y tareas duales (para el ejecutivo central). Desde un punto de vista más aplicado, la revisión del tipo de medidas usadas en los trabajos de memoria de trabajo y cálculo nos ha permitido llegar a algunas conclusiones bastante representativas del estado de estas investigaciones:

- Existe una gran heterogeneidad en el tipo de pruebas utilizadas.
- En algunos casos, hay poco control del grado de validez y fiabilidad de las pruebas diseñadas.
- En algunos estudios no se utilizan o no queda claro el tipo de medida de memoria de trabajo utilizadas (únicamente se describen pruebas de cálculo).
- Las pruebas simples de memoria de trabajo más utilizadas son el Recuerdo serial de dígitos o “Digit Span” y el Recuerdo serial de palabras o “Word Span”.
- Las pruebas duales de memoria de trabajo más utilizadas son Amplitud de escuchar o “Listening Span”, de Daneman y Carpenter (1980), y Amplitud de contar o “Counting Span”, de Case et al (1982).
- Finalmente, hemos observado que existe gran diversidad de planteamientos experimentales: uso exclusivo de pruebas de cálculo; uso de pruebas de un único componente de la memoria de trabajo; uso de medidas de aptitud, rendimiento y memoria a corto plazo o memoria de trabajo; entre otros. En el momento de iniciar nuestra tesis, por ejemplo, no existía ningún trabajo que analizara los tres

subsistemas de la memoria de trabajo simultáneamente, aunque recientemente han aparecido tres estudios (Gathercole y Pickering, 2000a, 2000b; McLean y Hitch, 1999).

En tercer lugar, hemos efectuado un análisis documental a partir de la base de datos Psyclit/PsycINFO de los estudios de memoria de trabajo en general y los estudios de memoria de trabajo y matemáticas y memoria de trabajo y cálculo en particular. Este análisis, en el que hemos contabilizado todos los artículos introducidos en dicha base durante más de un siglo (desde 1887 hasta 1999) nos ha permitido llegar a las siguientes conclusiones: a) los artículos que utilizan el término “memoria de trabajo” representan un 7,22 % del total de artículos donde aparece el descriptor genérico de memoria “memory”; y si consideramos este mismo aspecto a partir de la aparición del modelo de memoria de trabajo de Baddeley y Hitch (1974), en este periodo (1974-1999) el porcentaje de los estudios de memoria de trabajo aumenta hasta el 11,17% (del 0,6% en 1974 hasta el 22,73% en 1999). Hemos comparado también el número de referencias que utilizan el descriptor “memoria a corto plazo” en relación a las que usan “memoria de trabajo”, observando que en los últimos años este último término es el más utilizado; b) respecto a las publicaciones de memoria de trabajo y matemáticas, éstas representan un 2,73% del total de los estudios de los estudios de memoria, y de este conjunto de artículos, un 20,16% son publicaciones que utilizan el término “memoria de trabajo”, mientras que en el periodo 1974-1999 el porcentaje aumenta hasta el 21,62% (del 0% en 1974 hasta el 80% en 1999); c) respecto a los trabajos de memoria de trabajo y cálculo, éstos constituyen el 6,66% del total de los trabajos de memoria y matemáticas, y en el periodo de 1974-1999 el porcentaje aumenta hasta el 7,14% (del 0% en 1974 hasta el 28,88% en 1999); d) por último, si partimos del total de publicaciones de memoria de trabajo y matemáticas, entonces las publicaciones de memoria de trabajo y cálculo representan el 33,04% del total (del 0% entre 1887-1974 hasta el 36,11% en 1999).

En cuarto lugar hemos revisado el panorama de los principales estudios sobre memoria de trabajo y cálculo. Hemos visto que algunas de las primeras

investigaciones que establecen vínculos entre la memoria y el cálculo datan de inicios del siglo XX y se ocupan básicamente de estudiar una de las formas más importantes de memorización de contenidos aritméticos: *la automatización*. De forma muy resumida, estos trabajos de línea asociacionista (Thorndike, 1922; Brownell, 1928) sostienen que es muy importante que los niños memoricen ciertos datos y procedimientos hasta el punto que no tengan que pensarlos sino que los apliquen a los cálculos de forma rápida y casi automática. Así, la función de los ejercicios es desarrollar la respuesta automática, que se mide por una velocidad elevada.

Después de estos trabajos de enfoque asociacionista se produce una práctica desaparición de esta tipología de estudios, y no será hasta los inicios del estudio de la memoria humana a partir de un enfoque cognitivo, que se sitúa cronológicamente en la década de los cincuenta del siglo XX, cuando va a producirse una progresiva recuperación de los estudios de la memoria y, en especial, la aparición de bastantes investigaciones cuyo objeto de estudio es conceptualizar e identificar las características de la memoria a corto plazo. Algunos de los estudios de esta época, aunque no inciden explícitamente en la relación entre memoria a corto plazo y cálculo aritmético, utilizan contenidos aritméticos como material de investigación (Brown, 1958; Miller, G.A., 1956; Peterson y Peterson, 1959; Siegel y Linder, 1984). De dichos trabajos subyacen algunas relaciones entre memoria y cálculo, como por ejemplo:

- La capacidad de retención y recodificación de dígitos en la realización de cálculos (Miller, G.A., 1956).
- La dificultad de los sujetos para calcular y retener letras a la vez (Peterson y Peterson, 1959), que podría haber constituido una primera intuición para determinar una limitación del bucle fonológico de la memoria de trabajo, como veremos en el siguiente apartado.
- La baja capacidad aritmética de algunos niños podría ser debida a problemas

internos de codificación fonética en la memoria a corto plazo, sobretodo si los elementos que deben ser recordados son muy parecidos fonéticamente (Siegel y Linder, 1984).

De todas formas, los estudios que abordan de forma clara las relaciones entre memoria a corto plazo y cálculo se realizan desde el marco teórico de la memoria de trabajo como sistema de procesamiento activo de la información y su implicación en tareas aritméticas. Uno de los trabajos pioneros corresponde a Hitch (1978), cuyas conclusiones más significativas son que la información temporal se olvida si no se usa inmediatamente, este olvido es una fuente de errores y el olvido se ve incrementado por el número de pasos entre la presentación de la información y su uso. A partir de las bases empíricas establecidas por Hitch (1978), hemos agrupado los estudios que parten del modelo de memoria de trabajo de Baddeley y Hitch (1974) en dos grandes categorías, en función de las relaciones que establecen con el cálculo: a) estudios sobre la memoria de trabajo y los procesos implicados en el cálculo (estrategias que facilitan la adquisición del cálculo y tiempo de reacción o respuesta en tareas aritméticas); y b) estudios sobre los subsistemas de la memoria de trabajo (bucle fonológico, agenda viso-espacial y ejecutivo central) y el cálculo.

El primer grupo de trabajos, relativo a los procesos implicados en el cálculo, constituye a nuestro entender un cuerpo poco cohesionado, y respecto a ellos podemos concretar los aspectos siguientes:

- a. En relación a las estrategias que facilitan la adquisición del cálculo, en nuestra opinión pueden identificarse tres tipologías de estudios principales: un primer grupo de investigadores, entre los que se encuentran Baroody (1984) y Ginsburg (1982), entre los más conocidos, intentan explicar la habilidad para realizar cálculos aritméticos simples a partir del uso exclusivo de estrategias de cálculo que los niños utilizan para ahorrar recursos de la memoria de trabajo. En un segundo grupo están los que abogan por la existencia de estrategias mixtas, es decir, estrategias de cálculo y de memoria. Entre éstos se encuentran Ashcraft (1992); Baroody (1985); Kaye et al. (1986); Koshmider y Ashcraft (1991);

McGilly y Siegler (1989) o Siegler y Robinson (1982); entre otros. Finalmente, todavía existe un tercer grupo de autores que defienden el uso de estrategias de memoria para facilitar la ejecución de tareas de cálculo, como por ejemplo Algarabel y Dasi (1996); Entekin (1992); McNamara y Healy (1995) y Svenson y Sjöberg (1982, 1983); entre otros. Este tercer grupo de investigaciones es, sin duda, el más interesante para nuestra línea de investigación puesto que, de acuerdo con Threlfall et al. (1995), subraya la habilidad de los niños para llegar a realizar cálculos simples a través de la memoria, y no a través del cálculo, por lo que los niños deberían desarrollar con el tiempo una memoria inmediata de los hechos numéricos, que de acuerdo con Barrouillet y Fayol (1998) o Jordan (1995), entre otros, es la forma más rápida y eficiente de dar una respuesta.

- b. En relación al tiempo de reacción o de respuesta en tareas de cálculo, destacan los trabajos de autores como Fischer y Pluinage (1988); Klapp et al. (1991); Logan y Klapp (1991); Miller, K. et al. (1984); Threlfall et al. (1995) y Zbrodoff y Logan (1990); entre otros, que se han ocupado sobretodo de analizar el efecto del tipo de operación en el tiempo de reacción o respuesta, aunque han incidido también en la magnitud de los dígitos (a mayor amplitud, mayor dificultad), llegando a la conclusión que la capacidad de la memoria de trabajo determina en buena medida la habilidad para resolver operaciones aritméticas simples, puesto que dicha capacidad está fuertemente relacionada con la magnitud que son capaces de representar.

En el segundo grupo de trabajos sobre la memoria de trabajo como sistema de procesamiento activo de la información y su implicación en el cálculo hemos incluido aquellos estudios que analizan el papel de los distintos subsistemas de la memoria de trabajo (bucle fonológico, agenda viso-espacial y ejecutivo central) en el cálculo. Estos trabajos han tratado de concretar el papel específico de la memoria de trabajo como la encargada de distribuir los recursos cognitivos en la realización de diferentes tareas aritméticas, partiendo de la base que una escasa disponibilidad de recursos de la memoria de trabajo conlleva un peor rendimiento en la tarea. Algunos de los datos más representativos de la revisión bibliográfica efectuada son los siguientes:

En relación al bucle fonológico, se trata del componente de la memoria de trabajo que por el momento ha generado más estudios en relación al análisis del cálculo, y la mayoría de autores están de acuerdo en el hecho que el bucle fonológico interviene en esta tarea. A continuación reproducimos de nuevo –en el mismo orden cronológico que han sido publicados- los resultados que a nuestro entender son más representativos:

- La supresión articulatoria durante el conteo produce una alteración sustancial del rendimiento (Logie y Baddeley, 1987).
- El habla irrelevante o similitud fonológica de los dígitos incide también en el rendimiento, en el sentido que a mayor similitud mayor alteración (Logie y Baddeley, 1987).
- Una dificultad específica de aprendizaje aritmético estaría asociada a una capacidad baja en un tipo de memoria especializada para operaciones aritméticas (Siegel y Ryan, 1989).
- Los sujetos con lentitud de conteo y alto nivel de errores aritméticos podrían tener un acceso más lento a la representación de los números en la memoria a largo plazo (Hitch y McAuley, 1991).
- El conteo lento y los errores aritméticos podrían ser debidos a representaciones fonológicas débiles (Geary, 1993) o a la pérdida o decaimiento de información antes de que el cálculo haya finalizado (Geary, 1993, Lemaire et al, 1996).
- El rendimiento depende del efecto de longitud de las palabras: las palabras que tardan más en ser pronunciadas también tardan más en ser subvocalizadas y, por lo tanto, imponen más carga al mecanismo de repetición subvocal (Logie et al., 1994).

- Las principales dificultades de cálculo se explican por una relación compleja entre el conocimiento conceptual, procedimental y declarativo debido a un funcionamiento anómalo del bucle fonológico (Fazzio, 1994, 1996, 1998, 1999).

Aunque la mayor parte de estudios revisados coinciden en el papel que ejerce el bucle fonológico en el cálculo, existen algunos datos contradictorios como por ejemplo los aportados por Gathercole y Adams (1994), al concluir que no encuentran una relación entre las destrezas numéricas de los niños y su amplitud de dígitos. A nuestro entender, estas discrepancias se deben sobretodo a planteamientos experimentales diferentes en los que se utilizan pruebas distintas, edades también distintas, etc. que hacen difícil poder comparar los resultados de distintos estudios.

Respecto a la agenda viso-espacial, ha dado lugar a un escaso número de trabajos (aunque en los últimos años parece estar invirtiéndose esta tendencia), con resultados contradictorios respecto a su implicación en el cálculo (Gonzales y Kolers, 1982; Heathcote, 1994; Kulak, 1995; Logie, 1995; Gathercole y Pickwering, 2000a, 2000b; McLean y Hitch, 1999 o Robinson et al, 1996; entre otros). A nuestro entender, esta disparidad de resultados nuevamente se debe sobretodo a dos aspectos: el tipo de muestra y el tipo de material utilizado, por lo que es preciso que en los próximos años se establezcan pautas empíricas concretas que permitan subsanar la situación actual y llegar así a datos más concluyentes en relación al papel desempeñado por este componente de la memoria de trabajo.

Respecto al ejecutivo central, en general existe un número de trabajos también muy reducido que se hayan ocupado de este componente de la memoria de trabajo de forma aislada, y en su mayoría lo han hecho conjuntamente con el bucle fonológico. Sin embargo, todos los trabajos que han vinculado el ejecutivo central con el cálculo coinciden en el importante papel que ejerce este componente (Fürst y Hitch; 2000; Gathercole y Pickering, 2000a; Gathercole y Pickering, 2000b; Hitch y Towse, 1995; Logie et al., 1994; McLean y Hitch, 1999; Towse y Hitch, 1995, 1997; entre otros).

A modo de síntesis final, a lo largo de este capítulo hemos podido apreciar que a partir de la aparición del modelo de Baddeley y Hitch (1974) han ido apareciendo algunos trabajos cuyo objeto ha consistido en determinar las relaciones entre la memoria de trabajo y el cálculo desde una perspectiva funcional-procesual. A pesar de que estos estudios han aportado algunos datos al respecto, según nuestra opinión existen todavía algunas limitaciones importantes en esta línea de investigación, que exponemos a continuación:

- En primer lugar, existe un desequilibrio considerable en los estudios de la memoria de trabajo aplicados a los aprendizajes instrumentales. Según Jordan (1995) o Silver et al. (1999), entre otros, el estudio de las implicaciones de la memoria de trabajo en el cálculo ha suscitado hasta el momento menor interés que la incidencia de este sistema de memoria en la lectura, de lo que se desprende el consiguiente vacío de investigaciones sobre memoria de trabajo y cálculo.
- En segundo lugar, a pesar de que desde el trabajo pionero de Hitch (1978) se ha incrementado considerablemente el volumen de publicaciones en esta línea (Adams y Hitch, 1997; Brainerd y Gordon, 1994; Brainerd y Reyna, 1988; Bull y Johnston, 1997; Fürst y Hitch, 2000; Gathercole y Pickering, 2000a, 2000b; Geary y Widaman, 1987; Geary et al., 1999; Hitch et al., 1989; Hitch y McAuley, 1991; Hutton et al., 1997; Jurden, 1995; Lemaire et al., 1996; Logie y Baddeley, 1987; Logie et al., 1994; McLean y Hitch, 1999; Towse y Hitch, 1995, 1997; entre otros), aportando distintos datos al respecto, a partir de la revisión bibliográfica realizada hemos podido apreciar que existe una gran heterogeneidad en distintos aspectos empíricos entre los que destacan el tipo de pruebas utilizadas; el control del grado de fiabilidad y validez de estas pruebas; el tipo de diseño utilizado (uso exclusivo de pruebas de cálculo; uso de pruebas de un único componente de la memoria de trabajo; uso de pruebas de cálculo y de memoria de trabajo, etc.). Esta disparidad de planteamientos empíricos conlleva que en algunos trabajos se llegue a resultados contradictorios.

- En tercer lugar, otro factor que nos ha llevado a plantear nuestra investigación es la inexistencia, al iniciar esta tesis, de trabajos que trataran de verificar en los mismos sujetos la intervención de los tres subsistemas de la memoria de trabajo simultáneamente (bucle fonológico, agenda viso-espacial y ejecutivo central) en tareas de cálculo.
- En cuarto lugar, hemos visto que por el momento hay un vacío de estudios que desde la psicología de la memoria traten de analizar la incidencia de la memoria de trabajo en el cálculo a partir de un diseño mixto, que contemple cronológicamente una primera fase de recogida de datos y una segunda fase que tenga por objeto la activación de la memoria de trabajo mediante un programa de activación, y la posterior recogida de datos para analizar la incidencia de esta intervención.

Los argumentos anteriores son los que nos han llevado a plantear la investigación empírica que presentamos en la segunda parte de nuestro trabajo, en la que intentamos sufragar por un lado el vacío de estudios sobre memoria de trabajo y cálculo, y por otro, superar las limitaciones indicadas. Ello nos ha llevado a diseñar un estudio que contemple un abanico suficientemente amplio de pruebas de los tres subsistemas de memoria de trabajo (bucle fonológico, agenda viso-espacial y ejecutivo central), junto con distintas pruebas matemáticas de numeración y cálculo de las que se ha controlado previamente su validez tanto interna como externa. Además, también se ha pretendido determinar empíricamente la posible incidencia de un programa de intervención cuyo objeto sea mejorar tanto la habilidad de la memoria de trabajo como la ejecución de tareas de cálculo.

APARTADO EMPÍRICO

4. OBJETIVOS DE LA INVESTIGACIÓN EMPÍRICA

El objetivo general de esta tesis doctoral consiste en analizar la intervención de la memoria de trabajo en el rendimiento en tareas de cálculo. Esta participación, de acuerdo con las premisas especificadas en el marco teórico, se medirá en base a los resultados obtenidos en distintas pruebas de numeración, cálculo y memoria de trabajo. El uso de pruebas tanto de numeración como de cálculo en nuestra investigación empírica responde al hecho de que, sin ir más lejos, distintos autores de nuestro país como Bermejo (1990); Canals, M^a.A. (1979) y Serrano y Denia (1987); entre otros, apuntan la incidencia de la habilidad numérica en el nivel de rendimiento en cálculo. Esta estrecha interrelación conlleva que el estudio aislado del cálculo pudiera resultar un tanto artificioso, por lo que hemos creído necesario considerar ambos aspectos de la aritmética.

De nuestro objetivo general se desprenden diversos objetivos específicos que se concretan en tres categorías, en función de la finalidad de estudio.

1. Objetivos relativos a la incidencia de la memoria de trabajo en la habilidad numérica y el rendimiento en cálculo aritmético, es decir:
 - a. Verificar si la ejecución en las tareas aritméticas de numeración y cálculo, valoradas conjuntamente, varía en función de la capacidad de memoria de trabajo.
 - b. Verificar si la habilidad numérica, valorada individualmente, varía en función de la capacidad de memoria de trabajo.
 - c. Verificar si el rendimiento en cálculo aritmético, valorado individualmente, varía en función de la capacidad de memoria de trabajo.

2. Objetivos relativos a la incidencia de los distintos subsistemas de la memoria de trabajo (bucle fonológico, agenda viso-espacial y ejecutivo central) en la habilidad numérica y el rendimiento en cálculo aritmético, es decir:

- a. Verificar si existe un subsistema o subsistemas de la memoria de trabajo que inciden de una manera más significativa en el rendimiento global de numeración y cálculo.
 - b. Verificar si existe un subsistema o subsistemas de la memoria de trabajo que inciden de una manera más significativa en la habilidad numérica.
 - c. Verificar si existe un subsistema o subsistemas de la memoria de trabajo que inciden de una manera más significativa en el cálculo aritmético.
3. En caso de existir un subsistema o subsistemas de la memoria de trabajo que incidan de una manera más significativa en la habilidad numérica y el rendimiento en cálculo aritmético, verificar si un programa de activación administrado durante un periodo de tiempo permite mejorar la capacidad de memoria de trabajo. En caso de producirse mejora de la capacidad de memoria de trabajo, verificar si se mejora, también, la habilidad numérica y el rendimiento en cálculo aritmético.

Para conseguir los objetivos propuestos el estudio empírico parte, como veremos con mayor detalle, de un diseño mixto que consta de dos fases desarrolladas durante el año académico 1999-2000: una primera fase de recogida de datos y una segunda fase que tiene por objeto la activación de la memoria de trabajo mediante un programa de activación, y una posterior recogida de datos para analizar la incidencia de esta intervención.

Antes de iniciar la exposición de resultados, queremos precisar que la investigación ha sido diseñada a partir de dos estudios piloto preliminares realizados por el experimentador en un centro escolar público distinto a los que se han utilizado para llevar a cabo el estudio empírico de esta tesis doctoral. Estos estudios piloto fueron realizados en el C.E.I.P. "Riudellots de la Selva" (ubicado en la comarca de La Selva, en la provincia de Girona) durante los cursos académicos 1997-1998 con una muestra de 24 niños de 6-8 años de edad (11 niños de 6-7 años y 13 niños de 7-8 años), y 1998-1999 con una muestra de 8 niños de 7-8 años de edad. Estos dos

estudios piloto previos han servido para concretar y perfilar los objetivos que debían ser analizados empíricamente, las pruebas experimentales más efectivas para recoger datos, la muestra más representativa posible a partir de criterios como el grupo de edad, la ubicación geográfica, la metodología de enseñanza-aprendizaje usada, etc.

A continuación presentamos los datos de nuestra investigación empírica relativos a ambas fases. Para ofrecer una mayor claridad en la exposición, en primer lugar vamos a exponer el método y los resultados de la primera fase y seguidamente el método y los resultados relativos a la segunda fase. Finalizaremos el apartado empírico con la discusión conjunta de ambas fases.

**PRIMERA FASE
DE LA INVESTIGACIÓN EMPÍRICA**

5. MÉTODO

5.1. SUJETOS

La muestra utilizada en la primera fase del estudio se ha formado a partir de los grupos clase de 2º de Primaria de las 5 escuelas siguientes: C.E.I.P. "Joan Maragall" de Ripoll (25 alumnos); C.E.I.P. "Casals-Gràcia" de Manlleu (24 alumnos); C.E.I.P. "La Monjoia" de Sant Bartomeu del Grau (14 alumnos); Escola "Vedruna" de Vic (22 alumnos) y C.E.I.P. "Guillem Mont-Rodon", también de Vic (18 alumnos), dando lugar a una muestra inicial de 103 alumnos.

De acuerdo con los datos obtenidos tanto en estudios preliminares al nuestro como en los estudios piloto que hemos realizado, para la verificación de nuestros objetivos hemos considerado conveniente escoger niños de 7-8 años (alumnos de 2º de Primaria) en base a los siguientes criterios:

- En el momento de iniciar el estudio experimental y usando términos piagetianos tienen adquirido ya el concepto de número, que se adquiere aproximadamente a los 6-7 años de edad (Bermejo, 1990; Canals, M^a.A., 1979; Piaget y Szeminska, 1941; entre otros). Tener adquirido el concepto de número implica, según estos autores, haber interiorizado procedimientos elementales como la manipulación, la observación, la comparación, la clasificación, la ordenación, la imaginación o la estimación de cantidades.
- Por otro lado, son sujetos que poseen ya la capacidad mental de operatividad, al haber superado el periodo pre-operacional y encontrarse en el periodo operacional concreto (Piaget e Inhelder, 1975).
- El concepto de número y la capacidad mental de operatividad permiten que los niños de 7-8 años puedan haber interiorizado ya aspectos elementales de las operaciones de suma y resta a tres niveles: comprensivo, técnico y funcional, sin

olvidar que están todavía en una fase de aprendizaje de nuevos contenidos tanto numéricos como de cálculo.

- Cursan el último nivel del ciclo inicial de la Etapa de Enseñanza Primaria (Generalitat de Catalunya, Departament d'Ensenyament, 1992) lo cual nos va a permitir determinar su rendimiento al final de este ciclo.

En relación a la elección de los centros escolares, éstos han sido seleccionados en base a su ubicación geográfica, el nivel socio-económico-cultural de las familias y la metodología de enseñanza-aprendizaje del cálculo. Así, todos ellos se encuentran ubicados en poblaciones semi-urbanas del entorno geográfico de la Cataluña Central y las familias son de origen socio-económico-cultural medio.

Respecto a la metodología de enseñanza-aprendizaje del cálculo, se ha verificado que los cinco centros escolares parten de un Proyecto Curricular de Centro en el área de matemáticas muy similar, por lo que todos los alumnos finalizan 1º de Primaria con un nivel muy parecido, que a grandes rasgos incluye: dominio de la serie numérica hasta el 99 y dominio de los algoritmos de suma y resta (sin llevar). Al iniciar la primera fase de nuestro estudio experimental, se constata que todos los alumnos de nuestra muestra dominan el conteo, y que en todos los centros se trabajan los mismos contenidos del currículum de matemáticas: introducción de las centenas y de la suma llevando, a nivel tanto comprensivo, técnico como aplicado. Además, debemos precisar también que las maestras de estos cinco grupos clase comparten una metodología activa de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas.

Debe señalarse que de la muestra inicial, constituida como hemos dicho por 103 alumnos de 2º de Primaria, se descartan 9 alumnos por no reunir las condiciones exigidas para realizar la investigación (alumnos repetidores de curso, alumnos con dictamen de E.A.P. y alumnos que no han realizado las pruebas experimentales), por lo que la muestra final del estudio queda formada por 94 alumnos con una media de

edad de 7,5 años. En relación al centro escolar, los alumnos se distribuyen, finalmente, de la siguiente forma: C.E.I.P. "Joan Maragall" de Ripoll (24 alumnos); C.E.I.P. "Casals-Gràcia" de Manlleu (23 alumnos); C.E.I.P. "La Monjoia" de Sant Bartomeu del Grau (11 alumnos); Escola "Vedruna" de Vic (20 alumnos) y C.E.I.P. "Guillem Mont-Rodon", también de Vic (16 alumnos). Respecto al sexo, la muestra final está formada por 53 niños y 41 niñas.

Las familias, que como hemos indicado son de origen socio-económico-cultural medio, trabajan mayoritariamente en el sector primario a causa de la importante oferta de trabajo que ofrecen los polígonos industriales de estas poblaciones. La lengua materna que predomina en los niños es la catalana en un alto porcentaje, y en menor medida la lengua castellana y la marroquí, aunque todos ellos realizan la escolaridad en catalán y pueden expresarse correctamente en esta lengua.

5.2. MATERIAL

Para la recogida de datos, hemos utilizado los siguientes materiales e instrumentos:

- Cronómetro Sportmate 1/100.
- Radiocassette Sony, modelo WM-FX12.
- Grabadora Sanyo, modelo M 1018 A.
- Auriculares Sony, modelo MDR-006.
- Pruebas experimentales, que describimos a continuación.

Se utilizan diferentes pruebas de medida para evaluar el rendimiento académico de los sujetos en numeración y cálculo, así como también diversas pruebas de memoria para determinar los rasgos mnemónicos diferenciales de los sujetos que pueden influir en la variable dependiente. De cada una de las pruebas utilizadas presentamos en el Anexo correspondiente un ejemplar en blanco a modo de ejemplo, además de las instrucciones de administración.

Concretamente, los instrumentos de medida utilizados son los siguientes:

- a. Pruebas para la medida de la habilidad numérica de los sujetos: numeración.
- b. Pruebas para la medida del rendimiento aritmético de los sujetos: cálculo.
- c. Tests para la medida de la capacidad de memoria de trabajo de los sujetos: distintas pruebas de la “Bateria de Test de Memòria de Treball” de Pickering, Baqués y Gathercole (1999). Además, hemos utilizado dos tests complementarios de memoria visual: el Test de Copia y Reproducción de una Figura Compleja, de Rey (1959) y el Test de Memoria MY, Nivel Elemental, de Yuste (1985).
- d. Pruebas para la medida de las variables control: el Test de Matrices Progresivas (Escala Especial), de Raven (1956), para la medida del cociente de inteligencia individual, con el objeto de tener una muestra de sujetos de inteligencia normal; y las "Proves Psicopedagògiques d'Aprenentatges Instrumentals", de Canals, R. (1988), para medir la velocidad en sumas y velocidad en restas y disponer así de un parámetro objetivo para poder verificar la validez externa de nuestras pruebas de rendimiento aritmético.

A continuación se describen las pruebas anteriores menos conocidas por el hecho de tratarse de pruebas no comercializadas:

a. Pruebas para la medida de la habilidad numérica de los sujetos: numeración

El dato que se pretende obtener con la prueba de numeración es la habilidad numérica, de acuerdo con las prescripciones del actual Currículum de Primaria de la Generalitat de Catalunya, Departament d'Ensenyament (1992) para niños y niñas de 7-8 años de edad. Las tareas de la prueba de numeración pretenden medir

básicamente dos aspectos: a) la adquisición del concepto de número, y b) el conocimiento de la serie numérica de los números naturales.

De acuerdo con Shriner y Salvia (1988), la dificultad por localizar pruebas estandarizadas que contemplasen los aspectos del currículum mencionados y, además, con un nivel de dificultad equivalente que permitiesen medir el rendimiento de los niños, conlleva que finalmente se haya optado por utilizar pruebas de administración colectiva diseñadas por el propio experimentador, asesorado por la matemática y pedagoga M^a Antonia Canals, profesora de Didáctica de las Matemáticas de la Universitat de Girona y de la Universitat de Vic (Barcelona). La prueba de numeración diseñada correlaciona de forma significativa con las pruebas estandarizadas de Canals, R. (1988), tal como se detalla en el subapartado de análisis de la validez de los resultados de esta primera fase (ver página 213, Tabla 2) .

La prueba de numeración (Anexo 3) está formada por dos partes. La primera parte contiene 3 tipos de tareas distintas: a) una prueba oral de dictado de 10 números, con la que se pretende determinar si el niño asocia correctamente el nombre de un número con el grafismo o símbolo abstracto matemático correspondiente; b) una prueba escrita que consiste en relacionar mediante flechas el nombre de 12 números con su correspondiente simbolismo matemático; y c) una prueba escrita que consiste en comparar 20 pares de cantidades a partir de los símbolos $>$, $<$ o $=$. Tiene un tiempo de administración de 3 minutos y la puntuación oscila entre -42 y 42 puntos (1 punto por cada acierto, y -1 punto por cada error).

La segunda parte está formada por 2 tipos de ejercicios distintos: a) una prueba con 30 números de una a tres cifras que consiste en escribir el número natural anterior y posterior al dado; y b) una prueba con 4 series numéricas (tres en sentido ascendente y una en sentido descendente) en el que pueden escribir 8 números correctos en cada una de ellas. Tiene un tiempo de administración también de 3 minutos y un rango de puntuación que oscila entre -62 y 62 puntos (1 punto por cada acierto, y -1 punto por cada error).

b. Pruebas para la medida del rendimiento aritmético de los sujetos: cálculo

En primer lugar, debemos indicar que hemos realizado dos pruebas distintas que hemos denominado respectivamente cálculo 1 y cálculo 2, con el objeto de diferenciar el cálculo simple del cálculo complejo. A través de ambas pruebas se pretende obtener el rendimiento en cálculo aritmético, de acuerdo de nuevo con las prescripciones del actual Currículum de Primaria de la Generalitat de Catalunya, Departament d'Ensenyament (1992) para niños y niñas de 7-8 años de edad. Estas actividades están relacionadas con las operaciones de sumar y restar.

Como en el caso de las pruebas de numeración, se ha optado por utilizar pruebas de administración colectiva diseñadas por el propio experimentador después de haber analizado su validez externa. Las pruebas creadas correlacionan significativamente también con las pruebas estandarizadas de Canals, R. (1988), como podemos apreciar en el subapartado de análisis de la validez de los resultados de esta primera fase (ver página 213, Tabla 2).

La prueba de cálculo 1 (Anexo 4) está formada por 40 operaciones aritméticas de cálculo directo simple, de las cuales 20 son de suma y 20 de resta. De cada tipo de operación, se presentan 10 operaciones en disposición vertical y 10 en disposición horizontal (5 de dos cifras y 5 de tres cifras). Tiene un tiempo de administración de 4 minutos y la puntuación oscila entre -40 y 40 puntos (1 punto por cada acierto, y -1 punto por cada error).

La prueba de cálculo 2 (Anexo 5) está formada por 40 operaciones aritméticas complejas presentadas en disposición horizontal, de las cuales 15 son de suma, 15 de resta y 10 combinadas (suma y resta). De cada tipo de operación, se presentan 10 en forma inversa y 5 en forma directa. Respecto a las combinadas, todas ellas son de 3 cifras aunque aumenta progresivamente el grado de dificultad. Tiene un tiempo de administración de 4 minutos y la puntuación oscila entre -40 y

40 puntos (1 punto por cada acierto, y -1 punto por cada error).

c. Pruebas para la medida del rendimiento de la memoria de trabajo de los sujetos

Para llevar a cabo las medidas se usan distintas pruebas. Únicamente vamos a desarrollar de forma más detallada las características de los instrumentos utilizados que, por su novedad, implican un grado de conocimiento menor.

c.1. “Bateria de Tests de Memòria de Treball”, de Pickering, Baqués y Gathercole (1999)

Se trata de una adaptación y ampliación de "The Working Memory Battery", de Pickering y Gathercole (1997) que se ha utilizado en estudios muy recientes (Baqués y Gathercole, revisión). La batería incluye trece pruebas que han sido diseñadas para poder medir cada uno de los tres subsistemas de la memoria de trabajo tal como han sido designados en el modelo de memoria de trabajo propuesto originalmente por Baddeley y Hitch (1974): bucle fonológico, agenda viso-espacial y ejecutivo central (Anexo 1). Del total de tests hemos descartado cuatro pruebas, de las cuales tres son tests del bucle fonológico: Recuerdo serial de pseudopalabras; Reconocimiento de series de palabras y Reconocimiento de series de pseudopalabras; y una es de la agenda viso-espacial: Test de Laberintos. Hemos descartado estos tests por ser poco utilizados en los estudios de referencia (ver página 122) y también para no sobrecargar de pruebas a los sujetos de nuestra muestra. Una vez descartados estos tests, hemos utilizado las nueve tareas siguientes:

*** Tareas del bucle fonológico**

Los tests que siguen a continuación miden, según Pickering, Baqués y Gathercole (1999) la capacidad de funcionamiento del bucle fonológico. Todos ellos son pruebas de medida directa de la memoria, y utilizan como procedimiento el recuerdo serial. Su administración es individual.

- **Recuerdo Serial de Dígitos (directo)**

Se trata de una prueba de amplitud de dígitos ("digit span") similar a la que aparece en las Escalas de Inteligencia de Wechsler (1974) que se basa en la presentación de secuencias orales de dígitos que deben ser recordados inmediatamente, en el mismo orden en que han sido presentados (Anexo 6). Esta prueba dispone de cuatro secuencias de dígitos en cada amplitud en lugar de las dos que se presentan en las escalas de Wechsler.

Se inicia la tarea presentando a los sujetos una secuencia de dos dígitos, y a continuación se presentan una a una las tres siguientes series de la misma amplitud. Si el sujeto repite correctamente cada una de las series, se sigue el mismo procedimiento con las series de tres dígitos. Y así sucesivamente hasta que el sujeto falla en dos series consecutivas de una misma amplitud.

Se registran dos tipos de puntuación: el número de series correctamente repetidas, que oscila entre 0 y 32; y la amplitud del sujeto evaluado, entre 2 y 9.

- **Recuerdo Serial de Palabras**

Se trata de una prueba de amplitud de palabras ("word span") basada en la presentación de secuencias orales de palabras monosílabas que deben ser recordadas inmediatamente, en el mismo orden en que han sido presentadas. El test dispone de cuatro secuencias de cada amplitud o mismo número de palabras (Anexo 7).

Se inicia la tarea presentando a los sujetos una secuencia de tres palabras, y a continuación se presentan una a una las tres siguientes series de la misma amplitud. Si el sujeto repite correctamente cada una de las series, se sigue el mismo procedimiento con las series de cuatro palabras. Y así sucesivamente

hasta que el sujeto falla en dos series consecutivas de una misma amplitud.

Se registran dos tipos de puntuación: el número de series correctamente repetidas, que puede variar entre 0 y 20, y la amplitud del sujeto evaluado, de 3 a 7.

- **Test de Repetición de Pseudopalabras**

Este test, diseñado inicialmente por Baqués (1995c), está inspirado en el Children's Test of Nonword Repetition (Gathercole, 1995a; Gathercole et. al., 1992, 1994). El test es de administración individual y consiste en escuchar primero y repetir después, una por una, 32 pseudopalabras de 2 a 5 sílabas (Anexo 8). Estas pseudopalabras se presentan a través de un radiocassette con auriculares. Los sujetos, una vez han escuchado cada palabra, deben reproducirla exactamente igual y se registra su producción a través de una grabadora para la posterior corrección. La puntuación directa se obtiene a partir del número de aciertos (1 punto por cada uno).

- *** Tareas de la agenda viso-espacial**

Los tests que exponemos a continuación miden, según Pickering, Baqués y Gathercole (1999), la capacidad de memoria de trabajo de la agenda viso-espacial. Todos ellos se basan en la medida directa de la memoria y utilizan como procedimiento el reconocimiento, excepto el Test de Katakana, que es un test de medida indirecta. Son de administración colectiva.

- **Test de Matrices**

Mide dos componentes distintos: a) la habilidad para recordar patrones bidimensionales que se presentan en un formato estático; y b) la habilidad para recordar patrones visuales que se presentan en un formato dinámico.

Se basa en la presentación por orden de dificultad creciente de series de matrices formadas por cuadrados negros (elementos diana) y cuadrados blancos (Anexo 9). La primera serie está formada por matrices de 2x2, y en cada una de ellas los sujetos deben reconocer los elementos diana, y reproducirlos al cabo de dos segundos de exposición en una matriz en blanco. Posteriormente, se sigue el mismo procedimiento con las series de matrices de 2x3, y así sucesivamente con las series de 3x3, 3x4 y 4x4.

La puntuación directa se obtiene contando el número de ensayos correctamente realizados, y puede variar entre 0 y 16.

- Test de Memoria Visual Figurativa

Mide la habilidad para mantener información visual sobre imágenes de estilo figurativo. La tarea consiste en observar unas imágenes (hoja A) y reconocer mediante un tachado en una segunda hoja (hoja B) cuales han cambiado de forma (Anexo 10). Se obtienen tres tipos distintos de puntuación:

- Puntuación general, que es la utilizada en nuestro estudio: se obtiene restando los aciertos menos los errores, y puede oscilar entre -12 y 12.
- Puntuación visual más semántica: 1 punto por cada respuesta acertada de los elementos "jarra", "limón", "cazón", "vaca", "cangrejo" y "gato".
- Puntuación visual menos semántica: 1 punto por cada respuesta acertada de los elementos "pez", "hoja", "perro", "reloj", "manzana" y "sol".

- Test Katakana de Búsqueda Visual

Mide la capacidad para mantener información visual de diferentes símbolos durante breves espacios de tiempo, por lo que mantiene cierto parecido de fondo con los tests diseñados por Toulouse-Pieron. La tarea consiste en marcar con una

línea durante un minuto todos los símbolos que son iguales que el modelo que se presenta en el inicio de la línea (Anexo 11).

La puntuación directa se obtiene contabilizando el número de ensayos correctos menos los erróneos, que incluyen tanto errores de tachado como omisiones.

*** Tareas del ejecutivo central**

Según Pickering, Baqués y Gathercole (1999), las pruebas que siguen a continuación miden la habilidad del ejecutivo central de la memoria de trabajo. Se trata de nuevo de medidas directas de la memoria que utilizan como procedimiento el recuerdo serial, y siguen el planteamiento del modelo de Baddeley y Hitch (1974) de situaciones de tareas duales. Todos los tests utilizados son de administración individual.

- **Recuerdo Serial de Dígitos (inverso)**

Este test es muy parecido a la prueba de recuerdo serial de dígitos en orden directo del bucle fonológico y se corresponde también con la prueba de dígitos inversos de las Escalas de Inteligencia de Wechsler (1974). Está considerado como un test de medida de la habilidad del ejecutivo central debido a los requerimientos que tiene de mantenimiento de una lista de dígitos mediante recuerdo serial, y de darle la vuelta mentalmente (Anexo 12). Ello indica que se realiza a la vez almacenamiento y procesamiento, según Pickering, Baqués y Gathercole (1999).

Al igual que la prueba directa también dispone de 4 secuencias de dígitos para cada nivel, y se suspende la administración cuando el sujeto falla en dos series consecutivas de una misma amplitud.

La puntuación directa oscila entre 0 y 36 puntos, y la amplitud entre 2 y 9 respectivamente.

- Amplitud de Escuchar

Este test es una versión adaptada del "Reading Span Task" de Daneman y Carpenter (1980, 1983), en su modalidad de escuchar (Listening Span Task).

La tarea involucra de forma simultánea mantenimiento y procesamiento de la información, puesto que se basa en la lectura de unas series de frases por parte del experimentador que el niño debe decir si son verdaderas o falsas (Anexo 13). Una vez se le han presentado las series se le pide que repita la última palabra de cada frase, mediante recuerdo serial.

Se inicia la tarea con series de dos frases, lo que indica que una vez finalizada la serie el sujeto debe recordar dos palabras (la final de cada frase). Se prosigue con una serie de tres frases, y así sucesivamente hasta que el sujeto es incapaz de recordar correctamente y en el mismo orden las últimas palabras de dos series.

Se obtienen dos tipos de puntuaciones distintas: número de series recordadas, que puede variar entre 0 y 20 y amplitud, de 2 a 6.

- Amplitud de Contar

Es una prueba diseñada originalmente por Case et al. (1982) de base similar a la anterior, aunque en lugar de frases se utilizan tarjetas con puntos negros que deben ser contados y retener los resultados del recuento (Anexo 14).

Se utiliza un cuadernillo de estímulos, donde se presentan por orden de dificultad creciente tarjetas con puntos negros. En total hay cuatro series de

tarjetas de cada amplitud (de 2 hasta 6).

La prueba se inicia presentando una serie de dos tarjetas: el sujeto cuenta los puntos de cada tarjeta y a continuación debe repetir mediante recuerdo serial la cantidad de puntos de cada tarjeta contada. Si realiza correctamente la serie, se pasa a la siguiente serie también de dos tarjetas hasta agotar las cuatro series de la misma amplitud. A continuación se usa el mismo procedimiento con las series de tres tarjetas (el sujeto debe recordar cada vez tres números), y así sucesivamente hasta que el sujeto es incapaz de recordar en orden serial los números de una misma amplitud.

Se obtienen dos tipos de puntuación: series realizadas correctamente, que puede oscilar entre 0 y 20 y amplitud, entre 2 y 6.

c.2. Pruebas visuales complementarias

Paralelamente a las pruebas visuales contenidas en la “Bateria de Tests de Memòria de Treball” de Pickering, Baqués y Gathercole (1999), hemos usado dos pruebas estandarizadas más como tests complementarios de las medidas visuales:

- “Test de Copia y Reproducción de una Figura Compleja” de Rey (1959)

Esta prueba (Anexo 15) consta de dos partes diferenciadas de administración colectiva: una primera parte de copia de una figura compleja (A ó B), en la que se pretenden detectar básicamente déficits de organización espacial (orientación y estructuración), que escapa de los objetivos de estudio de esta tesis. La segunda parte consiste en la reproducción de memoria de la figura compleja previamente copiada, la figura B, puesto que es la que más se adapta a las características de los niños y niñas de nuestra muestra. Dicha tarea permite evaluar la memoria viso-espacial a corto plazo mediante un procedimiento de recuerdo libre.

Tiene un tiempo de administración variable y un rango de puntuación que oscila entre 0 y 31 puntos, de acuerdo con las instrucciones de puntuación que se detallan en el manual del test.

- Test de Memoria (E.G.B. y B.U.P.) MY: Nivel Elemental, de Yuste (1985)

Este nivel del test (Anexo 16) se aplica colectivamente a niños de 1º y 2º de Primaria (6-8 años), y es una prueba que evalúa la memoria visual-gráfica a corto plazo, mediante un procedimiento de reconocimiento.

Tiene un tiempo de administración de 3 minutos para cada una de las dos pruebas administradas (granja y playa) y un rango de puntuación que oscila entre 0 y 44, de acuerdo con las instrucciones de puntuación que se detallan en el manual del test.

d. Pruebas de medida de las variables de control

- Test de Matrices Progresivas de Raven: Escala Especial (1956)

Hemos usado la Escala Especial de este test para medir la capacidad intelectual de los sujetos. La Escala Especial sirve para medir las funciones perceptivas y racionales de niveles de madurez inferiores a 12 años, además de débiles mentales y sujetos con serias dificultades de lenguaje y de audición. En su "Forma de Cuadernillo", está constituida por 36 problemas que hemos presentado individualmente en 36 láminas de dibujos coloreados incompletos (Anexo 17). Al pie de cada lámina se hallan 6 dibujos pequeños, de los cuales sólo uno sirve para terminar correctamente el dibujo incompleto. Las 36 láminas, que presentan un orden de dificultad creciente, están distribuidas en tres series de 12 dibujos cada una, designadas series A, Ab y B respectivamente. Las puntuaciones pueden oscilar entre 0 y 36 puntos.

- "Proves Psicopedagògiques d'Aprenentatges Instrumentals" (P.P.A.I.), de Canals, R. (1988)

Estas pruebas estandarizadas sirven para obtener datos fiables del proceso de adquisición de los aprendizajes instrumentales por parte de cada alumno (Canals, R., 1988).

Del conjunto de pruebas, hemos administrado únicamente las tareas de cálculo adecuadas a las edades de nuestra muestra, denominadas "Rapidesa de càlcul. Sumes" (Anexo 18) y "Rapidesa de Càlcul. Restes" (Anexo 19). Estas pruebas permiten analizar el grado de avance en el mecanismo de las operaciones, la perfección mecánica, la rapidez en el cálculo, la aptitud en el cálculo mental y la aptitud en la solución de problemas, y en nuestra investigación empírica las hemos utilizado tanto para validar las pruebas específicas de numeración y cálculo diseñadas como para tener un criterio objetivo del rendimiento aritmético de los niños y niñas.

Su administración es colectiva y se mide la tarea durante un minuto. Las puntuaciones oscilan entre 0 y 64 puntos.

5.3. DISEÑO

En la primera fase de nuestra investigación empírica hemos utilizado un diseño ex post facto en relación al objetivo general de nuestro estudio, que se refiere al análisis de la incidencia de la memoria de trabajo en el rendimiento de tareas de cálculo en la fase inicial del aprendizaje.

A continuación detallamos de forma más concreta el diseño utilizado para obtener datos relativos a cada uno de los objetivos específicos planteados en esta primera fase (objetivos 1 y 2).

5.3.1. Objetivos relativos a la incidencia de la memoria de trabajo en la habilidad numérica y el rendimiento en cálculo

Para verificar el primer objetivo específico formulado (ver página 180) hemos utilizado un diseño intragrupo ex post facto, dado que no se han manipulado directamente las variables dependientes, sino que se han generado a partir de las características de los sujetos en base a los tres factores siguientes:

- a. Nivel de habilidad numérica: para determinar si el conocimiento de los números incide en la capacidad de los distintos subsistemas de la memoria de trabajo, hemos categorizado a los sujetos en tres niveles en base a sus puntuaciones en las pruebas de numeración: a) bajo; b) medio y c) alto.
- b. Nivel del rendimiento en cálculo aritmético: como en el caso anterior, para determinar si el rendimiento en cálculo aritmético incide en la capacidad de los distintos subsistemas de la memoria de trabajo, hemos categorizado a los sujetos en tres niveles en base a sus puntuaciones en las pruebas de cálculo: a) bajo; b) medio y c) alto.
- c. Nivel del rendimiento en memoria de trabajo: para constatar si es el nivel de numeración y cálculo el que incide en la memoria de trabajo, o viceversa, hemos categorizado a los sujetos en tres niveles en base a sus puntuaciones en las pruebas de memoria de trabajo: a) bajo; b) medio y c) alto.

5.3.2. Objetivos relativos a la incidencia de los distintos subsistemas de la memoria de trabajo (bucle fonológico, agenda viso-espacial y ejecutivo central) en la habilidad numérica y el rendimiento en cálculo

Para verificar el objetivo específico número 2 (ver página 180) hemos utilizado también un diseño intragrupo ex post facto con el factor siguiente:

- a. Nivel de incidencia de la memoria de trabajo: para determinar si la memoria de trabajo juega algún papel en las tareas de contenido numérico y de cálculo, se ha

utilizado la variable nivel de incidencia con tres categorías, que corresponden a los tres subsistemas de la memoria de trabajo según el modelo de Baddeley y Hitch (1974): a) bucle fonológico, b) agenda viso-espacial y c) ejecutivo central.

5.3.3. Control de variables

Hemos tenido en cuenta también diversos parámetros que pueden incidir y/o distorsionar los resultados tanto en las pruebas que miden la habilidad numérica y el rendimiento en cálculo como en las que miden la capacidad de memoria de trabajo de los niños y niñas. Centrándonos en las variables más típicas y significativas hemos considerado:

a. Sexo

Desde esta perspectiva nos interesa controlar si los niños y las niñas tienen rendimientos distintos en las tareas de numeración y cálculo diseñadas, así como en las pruebas de memoria de trabajo administradas. En las páginas 215-216 del apartado de resultados de la primera fase de nuestro estudio puede consultarse el análisis de la incidencia de la variable sexo, cuyos resultados indican que no se producen diferencias estadísticamente significativas en ninguna de las tareas de numeración, cálculo y memoria de trabajo administradas en función del sexo.

b. Edad

Otro parámetro que podría incidir en los resultados es la edad, por lo que hemos seleccionado sujetos nacidos el mismo año (1992). Sin embargo, para acotar más la muestra de la segunda fase de nuestro estudio si es preciso, en la primera fase queremos verificar si el hecho de haber nacido a inicios, mediados o finales de año ejerce alguna influencia en el rendimiento en las tareas administradas. En las páginas 217-218 del apartado de resultados de la primera fase de nuestro estudio puede consultarse el análisis de la incidencia de la variable edad, cuyos resultados indican

de nuevo que no se producen diferencias estadísticamente significativas en ninguna de las tareas de numeración, cálculo y memoria de trabajo administradas en función de haber nacido a inicios, mediados o finales de año.

c. Otras variables de sujeto

Tal y como hemos indicado en el subapartado 5.1 relativo a la descripción de los sujetos de la investigación (ver página 184), se han excluido todos los alumnos que podían alterar los resultados. Así, no se han tenido en cuenta:

- Los alumnos con necesidades educativas especiales y retrasos graves de aprendizaje con dictamen de E.A.P.
- Los alumnos repetidores.
- Los alumnos que no han realizado alguna de las pruebas experimentales por encontrarse indispuestos.

d. Investigador y ayudantes del investigador

Tanto el investigador como las ayudantes del investigador (maestras de 2º de Primaria de cada centro escolar) han sido siempre las mismas personas. El investigador ha administrado las pruebas individuales y las ayudantes del investigador las pruebas colectivas.

Con el objeto de que las condiciones de administración de las pruebas colectivas fuesen idénticas, independientemente del centro escolar, durante los días anteriores al inicio del estudio el investigador mantuvo diversas reuniones con las ayudantes para unificar al máximo los criterios de administración y comprender la rigurosidad del estudio. Los aspectos tratados son, entre otros: los objetivos del estudio; la tarea a realizar; las condiciones de administración; el calendario de administración, etc. A cada ayudante se le hizo entrega de un dossier con las normas generales de aplicación, además de un modelo de cada prueba con las instrucciones

específicas de administración.

e. Condiciones ambientales

Se ha utilizado siempre el mismo espacio para los mismos alumnos, hecho que ha permitido que aspectos como la temperatura ambiental y el ruido se hayan podido mantener más o menos constantes durante el estudio para cada grupo escolar.

f. Tiempo de administración de las pruebas

Para las pruebas estandarizadas se ha utilizado el tiempo indicado en los respectivos manuales. Para las pruebas específicas de numeración y cálculo diseñadas para nuestra investigación empírica, hemos controlado previamente a través de los estudios piloto el tiempo necesario para realizar las pruebas diseñadas. A raíz de estos datos preliminares, hemos reducido el tiempo de administración de tal forma que ningún sujeto pudiera terminar la prueba específica antes del tiempo establecido, puesto que nos interesaba medir el rendimiento global de cada sujeto. Finalmente, para las pruebas de la "Bateria de Tests de Memòria de Treball", de Pickering, Baqués y Gathercole (1999) el tiempo de administración es variable.

g. Hora del día

Dada la posibilidad de que, como se señala en diversos trabajos de cronopsicología (para una revisión consultar Alsina, 1996; Estaún, 1993; Sáiz, 1988; Sáiz et al., 1993; entre otros), la hora del día sea un parámetro que pueda afectar a la realización de la mayor parte de tareas propuestas, se ha tenido en cuenta esta variable de manera que las pruebas se han realizado en últimas horas de mañana, donde se sitúa la acrofase en la mayor parte de estudios preliminares.

La combinación final de todas las variables del diseño ha dado lugar a un total de 17 pruebas distintas que han tenido que realizar todos los sujetos

seleccionados:

PRUEBAS COLECTIVAS	PRUEBAS INDIVIDUALES
P.P.A.I.: Rapidesa de Càlcul. Sumes	Test de Matrices Progresivas. Escala Especial
P.P.A.I.: Rapidesa de Càlcul. Restes	Recuerdo Serial de Dígitos (directo)
Prueba de numeración	Recuerdo Serial de Palabras
Prueba de cálculo 1	Repetición de Pseudopalabras
Prueba de cálculo 2	Recuerdo Serial de Dígitos (inverso)
Test de Matrices	Amplitud de Escuchar
Test de Memoria Visual Figurativa	Amplitud de Contar
Test Katakana de Búsqueda Visual	
Test de Copia y Reproducción de una Figura Compleja	
Test de Memoria MY. Nivel Elemental	

5.4. PROCEDIMIENTO

La primera fase de nuestra investigación empírica se ha efectuado en los respectivos centros escolares en base a los datos obtenidos en los estudios piloto preliminares. Los sujetos han realizado las diversas pruebas individualmente o colectivamente, contando con la única presencia del investigador o de la respectiva maestra, que actuaba como ayudante del investigador. Durante la administración de las distintas pruebas se han controlado las variables mencionadas en el apartado 5.3.3. del Diseño (ver página 200).

La primera fase se ha desarrollado durante el periodo comprendido entre finales del mes de Octubre hasta inicios de Diciembre de 1999. En el diagrama de flujo siguiente queda resumido el procedimiento general utilizado en la primera fase de nuestra investigación empírica:

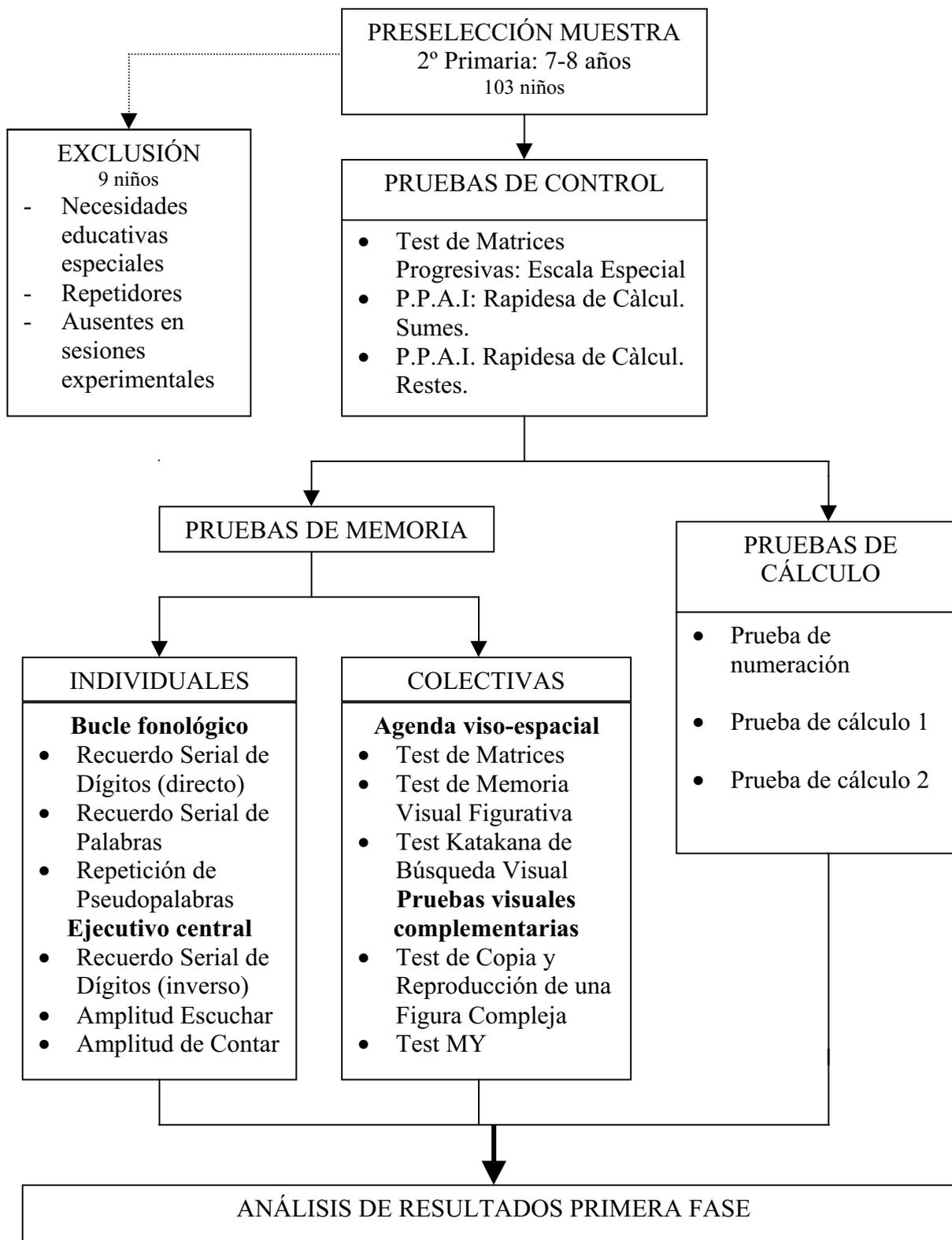


Figura 21: Diagrama de flujo relativo al procedimiento de la primera fase

5.4.1. Preselección de la muestra

Como ya hemos indicado en el apartado metodológico relativo a la descripción de los sujetos de nuestra muestra, los niños y niñas que participan en el estudio son alumnos de 2º de Primaria (7-8 años) de cinco centros escolares distintos que comparten características similares en relación a la ubicación geográfica, el nivel socio-económico-cultural de las familias y la metodología de enseñanza-aprendizaje del cálculo.

Estos sujetos han sido seleccionados a partir de las conclusiones de nuestros dos estudios piloto previos por lo que las razones de su selección, ya mencionadas exhaustivamente en el subapartado 5.1 (ver página 184), deben conectarse a los objetivos específicos de esta investigación y responden sobretudo al propósito de analizar el rendimiento de tareas de cálculo desde una perspectiva psicológica. Además, al seleccionar la muestra se ha valorado también que tanto el experimentador como sus ayudantes tengan un fácil acceso a los grupos-clase donde se realiza el estudio, ya que lógicamente comporta una distorsión en la planificación y/o programación de actividades de los cinco grupos-clase.

A pesar de excluir algunos de los niños y niñas de la muestra inicial por no reunir las condiciones exigidas, estos sujetos realizan igualmente las pruebas cuando están presentes en clase, con el objeto de no marcar diferencias entre ellos.

5.4.2. Selección de la temporalización de la investigación

En la elección del periodo óptimo para realizar la primera fase de nuestro estudio intervienen diversos factores que condicionan de alguna manera la temporalización:

- a. Se considera que el periodo comprendido entre finales de Octubre-inicios de Diciembre es un momento óptimo ya que los niños y niñas están ya adaptados a

la escuela después de las vacaciones de verano. Además, están en un momento del proceso de enseñanza-aprendizaje del cálculo adecuado para analizar los objetivos que pretendemos.

- b. Se selecciona un periodo de tiempo escolar en el que no haya interrupciones de la actividad escolar en la clase ocasionadas por fiestas tradicionales, excursiones, etc.
- c. Se pretende que sea el mismo investigador quien controle y/o administre las pruebas individuales que debe realizar cada sujeto, lo que comporta que se administren en espacios de tiempo diferentes. En relación a las pruebas colectivas, se realiza un calendario para que todas las ayudantes administren las mismas pruebas los mismos días y a la misma hora.

5.4.3. Selección de los ayudantes de la investigación

Los ayudantes, que como hemos indicado son las propias maestras-tutoras de los distintos grupos donde se realiza el estudio, son seleccionados como tal por su propia condición. Como hemos indicado en el subapartado 5.3. relativo al Diseño (ver página 198), durante los días previos al inicio del estudio el investigador mantuvo diversas reuniones con las ayudantes para unificar al máximo los criterios de administración y comprender la rigurosidad del estudio.

5.4.4. Sensibilización de la muestra

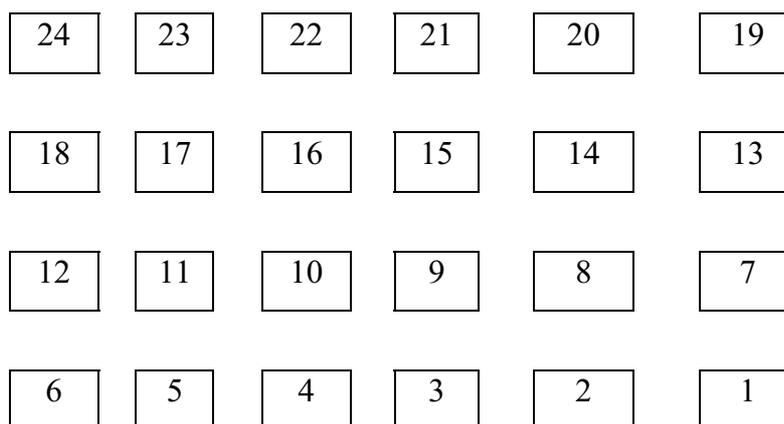
De manera previa a la realización del estudio, hemos considerado necesario sensibilizar a los sujetos de la muestra respecto a la importancia del estudio para evitar posibles interferencias posteriores que pudiesen influir negativamente en la investigación, como por ejemplo problemas de conducta, ausencias que reduzcan de una manera significativa la muestra experimental, etc. Con esta finalidad, durante los días anteriores al estudio se informa a los alumnos de 2º de Primaria de los

distintos centros escolares de la investigación que se llevará a cabo próximamente en su escuela, y por la que se hace imprescindible su máxima colaboración. En ningún momento se facilita a los sujetos de la muestra una información detallada de los objetivos de la investigación, el contenido de las pruebas, etc., ya que la mayoría de autores coinciden en afirmar que podría influir en las respuestas de los sujetos.

5.4.5. Distribución de los sujetos

La distribución de los niños y niñas de cada grupo-clase durante la investigación está sujeta a la arquitectura propia de cada centro escolar. Sin embargo, el criterio general consiste en colocarlos en filas paralelas, con una breve separación entre mesa y mesa, y ordenarlos por orden de lista, dándoles un número identificativo a cada uno en sentido ascendente desde el primero hasta el último de la lista. Este número, aparte de mantener constante la ubicación en la clase de cada sujeto durante el estudio, tiene otras finalidades, como mantener el anonimato en la corrección de pruebas, etc.

La distribución característica en las pruebas de administración colectiva, pues, es la siguiente:



A la vez, la distribución anterior evita la copia y facilita que una vez finalizada cada prueba colectiva sea retornada a la maestra tutora siguiendo un orden preestablecido: los sujetos van pasando las pruebas de detrás hacia adelante y la

maestra las recoge, ordenadas, a los alumnos de la primera fila.

Respecto a la distribución en las pruebas de administración individual, que son realizadas por el propio experimentador, la ubicación depende de cada centro escolar, aunque acostumbra a ser un pequeño despacho con una mesa donde experimentador y alumno se colocan frente a frente.

5.4.6. Recogida de datos

Como hemos indicado, antes de iniciar la primera fase empírica del estudio se realiza un contacto experimentador-alumnos con el objeto de que sean conscientes de la actividad a desarrollar.

También con anterioridad al inicio del estudio, el investigador prepara las diferentes pruebas que se administran, siguiendo el orden de administración que se detalla en las dos tablas siguientes, que corresponden a las pruebas colectivas e individuales respectivamente. Este orden de administración, así como el tiempo de duración de cada prueba, se cumple de manera rigurosa:

PRUEBAS COLECTIVAS	TIEMPO
P.P.A.I.: Rapidesa de Càlcul. Sumes	1 minuto
P.P.A.I.: Rapidesa de Càlcul. Restes	1 minuto
Test de Matrices	Variable
Test de Memoria Visual Figurativa	Variable
Test Katakana de Búsqueda Visual	1 minuto
Test de Memoria MY. Nivel Elemental	2 pruebas de 3 minutos
Test de Copia y Reproducción de una Figura Compleja	Variable
Prueba de numeración	2 pruebas de 3 minutos
Prueba de cálculo 1	4 minutos
Prueba de cálculo 2	4 minutos

PRUEBAS INDIVIDUALES	TIEMPO
Test de Matrices Progresivas: Escala Especial	Variable
Recuerdo Serial de Dígitos (directo)	Variable
Recuerdo Serial de Dígitos (inverso)	Variable
Recuerdo Serial de Palabras	Variable
Repetición de Pseudopalabras	Variable
Amplitud de Escuchar	Variable
Amplitud de Contar	Variable

Como hemos indicado, las pruebas experimentales se administran siempre en sesiones de mañana, evitando la primera hora, ya que en estudios cronopsicológicos centrados en el análisis del rendimiento académico se ha verificado que es el periodo de la jornada en la que el grado de ejecución de los alumnos es inferior (Alsina, 1996; Estaún, 1993; Sáiz, 1988; Sáiz et al., 1993; entre otros).

En todas las pruebas la lengua usada es el catalán ya que es la lengua vehicular de aprendizaje de los distintos centros escolares. Las instrucciones específicas de las pruebas experimentales pueden consultarse en los Anexos específicos de cada prueba.

En la totalidad de pruebas colectivas escritas, ya sean de creación propia o no, la secuencia de procedimientos usados se desarrolla a partir de los pasos siguientes:

- Reparto del ejemplar escrito de cada prueba, girado al revés.
- Cada alumno escribe su número de identificación detrás.
- Una vez comprobado que todo los alumnos han escrito el número que les identifica, se procede a la lectura en voz alta de las instrucciones por parte de la tutora. Cada prueba tiene, como se ha indicado, sus correspondientes

instrucciones y no se empieza ninguna prueba hasta que los alumnos manifiestan haberlas comprendido. Se realizan ejemplos concretos en la pizarra, con aclaraciones y respuesta a las dudas planteadas.

- Realización escrita de la fase de entrenamiento de la prueba, cuando se da el caso, por parte de todos los sujetos al mismo tiempo.
- Realización de la prueba en sí, todos al mismo tiempo.
- Fin de la prueba en el momento que se indica.
- Los niños de cada columna pasan, como hemos indicado, la prueba de detrás hacia adelante, y la tutora recoge las pruebas de todo el grupo a los alumnos sentados en la primera fila.

Durante la realización de las pruebas se recogen los datos relevantes de la administración de la prueba en un diario, por lo que las ayudantes han recibido previamente instrucciones específicas. El objetivo es recoger cualquier tipo de aspecto que pueda interferir en los resultados de una determinada prueba realizada por los niños (ausencias, ruidos externos inesperados, interrupciones ocasionadas por la presencia esporádica de alguien en la clase, etc).

5.4.7. Criterios de puntuación

Los criterios usados para la puntuación de las pruebas son los que detallamos a continuación:

- a. En las pruebas de numeración y de cálculo, como hemos indicado anteriormente, se obtienen puntuaciones a partir del número de aciertos menos el número de errores.

- b. En las pruebas de memoria de trabajo se utilizan las normas de corrección propuestas para cada prueba, y en la pruebas visuales complementarias, que son pruebas estandarizadas, se usan los varemos propuestos en los respectivos Manuales, tal como hemos indicado en el subapartado de Material (ver página 186).

5.4.8. Análisis estadístico

El análisis estadístico se realiza a través del paquete de software estadístico SPSS/PC versión 9.1 para Windows, aplicando diversas técnicas y procedimientos en función de los datos que se pretenden explotar de cada uno de los objetivos propuestos. Estas técnicas y procedimientos han sido aplicados en base a las aportaciones de distintos autores entre los que destacan Botella et al., 1994; Farré y Ruiz, 1999; Hopkins et al., 1997; Pardo et al., 1994 y Zaiats et al, 1998; entre otros, y genéricamente avanzamos que se han usado sobretodo las siguientes:

- Coeficiente de correlación lineal de Pearson, para determinar correlaciones entre variables.
- Prueba *t* de Student-Fisher, para realizar comparaciones de medias cuando la variable estaba formada por dos grupos apareados.
- Análisis de varianza (ANOVA de un factor) y pruebas de contraste (Post-Hoc) de Scheffé, para realizar comparaciones de medias cuando la variable estaba formada por más de dos grupos.

Con el listado de pruebas estadísticas damos por acabado el capítulo referente a la metodología de la primera fase de nuestro estudio y nos disponemos, a continuación, a la exposición de los diferentes resultados obtenidos en esta fase, de acuerdo con los objetivos específicos 1 y 2 que hemos formulado.