

UNIVERSIDAD DE CANTABRIA



**DEPARTAMENTO DE INGENIERÍA DE
COMUNICACIONES**

TESIS DOCTORAL

**ESTIMACIÓN ÓPTIMA DE SECUENCIAS
CAÓTICAS CON APLICACIÓN EN
COMUNICACIONES**

**Autor : David Luengo García
Directores : Carlos Pantaleón Prieto
Ignacio Santamaría Caballero**

Grupo de Tratamiento Avanzado de Señal

Septiembre de 2006

Capítulo 1

Introducción

En este primer capítulo se hace una breve introducción al caos determinista y al problema considerado en la Tesis: la estimación de secuencias caóticas. En primer lugar se ofrece una definición informal del término caos determinista, de la clase de señales y sistemas caóticos, y de la teoría del caos. A continuación se presenta una breve cronología de la historia de los sistemas no lineales y la teoría del caos. Después se muestra el conjunto de problemas que han motivado la realización de esta Tesis, así como sus principales líneas de investigación y objetivos. Por último, se describe su organización, y se enumeran las principales contribuciones de la Tesis.

1.1. Caos Determinista

Tradicionalmente siempre se le ha concedido mayor importancia al orden que a su antónimo, el caos. Por ejemplo, consultando el Diccionario de la Real Academia de la Lengua [RAE1992] se encuentran un total de 20 acepciones del término *orden*, además de otra serie de palabras compuestas en las que interviene. En contraposición, el término *caos* (de origen griego) únicamente presenta dos acepciones: “estado amorfo e indefinido que se supone anterior a la construcción del cosmos”, y, en sentido figurado, “confusión y desorden”. El adjetivo *caótico* por su parte designa todo aquello perteneciente o relativo al caos, es decir, desordenado o carente de orden.

La definición anterior no refleja completamente la naturaleza de lo que se conoce como *caos determinista*, o simplemente *caos*, dentro de la teoría de los sistemas dinámicos. En las cuatro últimas décadas se ha descubierto que muchos sistemas deterministas no lineales presentan un comportamiento irregular cuando se dan las condiciones apropiadas. Para describir este tipo de comportamiento, Ian Stewart propone añadir una nueva acepción (matemática) al término caos [Stewart2001]: “comportamiento estocástico que ocurre en un sistema determinista”. Este comportamiento aparentemente aleatorio de un sistema determinista es lo que se conoce como *comportamiento caótico*, y provoca que en ocasiones el caos sea descrito como ruido determinista en esencia [Silva2000b]. No obstante, a pesar del desorden superficial, en los sistemas caóticos existe una estructura detallada, compleja y precisa.

De acuerdo con lo anterior, y siguiendo las definiciones de señales y sistemas de [Oppen1997], podríamos definir de manera informal una *señal caótica* como una función de una o más variables independientes que proporciona algún tipo de información, y que presenta una forma irregular y aparentemente aleatoria, aunque haya sido generada mediante una ley determinista. Por otro lado, un *sistema caótico* se definiría como todo proceso que transforma unas señales de entrada cualesquiera (pueden incluso ser nulas) en otras de salida caóticas. Por último, la *teoría del caos* es aquella rama de los sistemas dinámicos no lineales que se encarga del estudio de las señales y sistemas caóticos.

Aunque inicialmente se pensaba que estas soluciones irregulares sólo podían aparecer en sistemas complejos, con multitud de grados de libertad, en la segunda mitad del siglo XX se descubrió que pueden manifestarse incluso en sistemas extremadamente simples, tales como sistemas dinámicos discretos con un solo grado de libertad, y que resultan inherentes a ellos. Esto es, no se generan como producto del ruido u otros factores externos, ni a causa de errores numéricos o de medida. Además, se ha descubierto que se trata de un estado estable (el sistema puede permanecer en él por tiempo indefinido), robusto (no desaparece ante pequeñas perturbaciones del mismo), y mucho más habitual de lo que se creía en un principio (muchos sistemas parecen encontrarse en un estado caótico de manera natural).

Por último, nótese que resulta ciertamente paradójico que un sistema determinista se comporte de manera caótica. El determinismo puro implica el conocimiento absoluto del sistema, y por consiguiente la posibilidad de predicción de manera completamente exacta de su estado futuro cuando se conoce el actual. Por el contrario, la aleatoriedad pura implica el desconocimiento total del sistema y la imposibilidad de predicción del estado futuro, aun cuando se conozca de manera completamente precisa el actual. Sin embargo, el caos supone la posibilidad de realizar muy buenas predicciones a corto plazo, pero la imposibilidad práctica de predicción alguna a largo plazo. En este sentido, el comportamiento caótico se sitúa como un paradigma intermedio entre el conocimiento absoluto de un sistema (*determinismo*) y su total desconocimiento (*aleatoriedad*), como un nexo de unión entre ambas concepciones científicas y filosóficas del mundo.

1.2. Breve Historia del Caos

Aunque la existencia de fenómenos no lineales y comportamiento irregular es conocida desde hace tiempo, en el ámbito científico e ingenieril estos se habían tratado generalmente de evitar y descartar como anómalos. En consecuencia, cuando se descubrían efectos no lineales o comportamiento irregular en los experimentos, en lugar de intentar descubrir su causa, se achacaban a errores de medida, fallos en el diseño y/o ejecución de los mismos, o simplemente ruido. Es decir, se desechaban como algo extraño que no se correspondía en absoluto con lo que se estaba investigando, y se intentaba buscar el fallo en el experimento en lugar de examinar la validez del modelo matemático utilizado. De hecho, hasta el siglo XIX se creía en el determinismo absoluto, y hasta mediados del siglo XX se pensaba que los fenómenos naturales se

comportaban en esencia de manera lineal. Por ejemplo, en el siglo XVIII, Pierre Simon de Laplace afirmaba que si se conocían con total exactitud las ecuaciones de un fenómeno, y su estado en un instante de tiempo, este podría predecirse sin el menor error en cualquier otro instante posterior [Stewar2001]. Así pues, la resolución exacta de las ecuaciones no lineales más complejas únicamente requería el desarrollo de las herramientas apropiadas. No se contemplaba la posibilidad de que algunos sistemas de ecuaciones no tuvieran solución, o de que la predicción a largo plazo de un sistema determinista resultara imposible.

El primero en reconocer la posibilidad de que variaciones infinitesimales en el estado inicial de un sistema (errores de medida) dieran lugar a cambios apreciables en su evolución en un tiempo finito parece haber sido James Maxwell en 1873 [Hunt1993]: había descubierto la *sensibilidad a las condiciones iniciales*, una de las características fundamentales de los sistemas caóticos. Posteriormente, el matemático Jacques Hadamard en 1898 y el físico Pierre Duhem en 1906 parecen haber realizado apreciaciones similares [Willi1997]. No obstante, en esta época aún se creía (erróneamente) que eran necesarios sistemas complejos y con muchos grados de libertad para provocar este comportamiento.

Sin embargo, el verdadero precursor de la teoría del caos fue el matemático francés Henri Poincaré. En su estudio del problema especial de los tres cuerpos en mecánica celeste Poincaré se dio cuenta de que el comportamiento complejo (sensibilidad a las condiciones iniciales e infinito número de órbitas periódicas) podía aparecer en sistemas con un número de grados de libertad muy reducido. En concreto, el conocido teorema de Poincaré-Bendixson (véanse por ejemplo [Wiggin1990] o [Alligo1996]) demuestra que, para un sistema dinámico continuo, el comportamiento caótico no resulta posible en una y dos dimensiones. No obstante, en sistemas con tan sólo tres dimensiones (es decir, con sólo tres grados de libertad) sí es posible la aparición del caos, como muestran numerosos sistemas como por ejemplo los de Lorenz [Lorenz1963a, Lorenz1963b], Rössler [Rossle1976, Rossle1979], Ueda [Ueda1980a, Ueda1980b] o Chua [Matsum1984, Matsum1985]. Poincaré también reconoció la imposibilidad de predicción cuando existe sensibilidad a las condiciones iniciales en 1908 en su ensayo “Ciencia y Método” [Poin2001]. Además, fue el primero en proporcionar una serie de herramientas para el estudio sistemático del caos: topología, teoría cualitativa (geométrica) y cuantitativa (analítica) de las ecuaciones diferenciales, etc.

Desafortunadamente, salvo por unos pocos matemáticos, como George Birkhoff, Aleksandr Andronov o Stephen Smale, que desarrollaron las ideas de Poincaré, el estudio de los sistemas no lineales continuó siendo ignorado durante la primera mitad del siglo XX [Milnor2001, Stewar2001]. El primer descubrimiento clave para el nacimiento y la amplia difusión de la *teoría del caos* se produjo en la década de los sesenta. En 1961 Edward Lorenz, un meteorólogo del MIT, trabajando con un modelo climático muy simplificado de tres ecuaciones diferenciales obtenidas a partir de las ecuaciones de Navier-Stokes, “descubrió” por casualidad que un sistema determinista continuo con solo tres grados de libertad podía generar señales aperiódicas y que presentaban una sensibilidad extrema respecto a las condiciones iniciales [Gleick1988]. Posterior-

mente, Robert May, un biólogo, mostró que un sistema discreto extraordinariamente simple, con un único grado de libertad, podía dar lugar al mismo tipo de comportamiento irregular e impredecible [May1974, May1976]. Un tercer descubrimiento clave, hecho por el físico Mitchell Feigenbaum [Feigen1980], demostró que sistemas diferentes podían presentar el mismo comportamiento no sólo de manera cualitativa, sino también cuantitativa, dando lugar al concepto de *universalidad*.

El descubrimiento del caos en sistemas deterministas modificó radicalmente la visión científica del mundo que se tenía desde el siglo XVIII, como se muestra en la Figura 1.1. Ahora ya no se puede dividir el mundo en sistemas puramente deterministas y puramente aleatorios, sino que aparece una clase de sistemas intermedia: sistemas cuyo estado preciso no puede predecirse a largo plazo aun siendo deterministas. La clasificación de los sistemas conocidos entre sistemas deterministas y aleatorios ya no se puede realizar de manera sencilla en función de su predecibilidad, especialmente en presencia de ruido. Incluso la mera necesidad de los sistemas aleatorios para explicar los fenómenos naturales resulta discutible, puesto que las señales aparentemente aleatorias observadas podrían ser el producto de sistemas deterministas caóticos desconocidos más o menos complejos [Ruelle1993, Stewar2001].

Inicialmente muy pocos científicos aceptaron la idea del caos, y muchos menos todavía reconocieron su posible aplicación práctica: el sistema de Lorenz resulta una simplificación excesiva como para representar un fenómeno físico real, y los mapas unidimensionales de May y Feigenbaum son construcciones matemáticas artificiales. Para que la comunidad científica aceptara la existencia y utilidad del caos resultaba necesario hallar indicios de comportamiento caótico en fenómenos reales y/o experimentos de laboratorio. Los primeros en detectar evidencias fiables de comportamiento caótico en fenómenos físicos fueron Gollub y Swinney estudiando el problema de la turbulencia en dinámica de fluidos [Gollub1975]. Posteriormente Libchaber et al. hallaron caos en el fenómeno de convección, otro mecanismo propio de la dinámica de fluidos, y proporcionaron una confirmación experimental de las constantes de Feigenbaum [Libcha1982a, Libcha1982b]. Desde entonces, numerosos experimentos han hallado síntomas de comportamiento caótico en una gran cantidad de sistemas en áreas muy diversas. En la Tabla 1.1 se muestran una serie de ejemplos (con referencias) de áreas de conocimiento y aplicaciones en las que aparecen síntomas de comportamiento caótico, muchas de las cuales se pueden consultar también en [Cvitan1989] y [Stewar2001].

En este punto resulta necesario incluir una nota de precaución. Existen diversos indicadores consistentes de que un sistema se está comportando de manera caótica. Sin embargo, para obtener resultados concluyentes a partir de un conjunto de medidas reales generalmente es necesario que se cumplan dos requisitos: disponer de una gran cantidad de datos, y que las medidas sean de gran precisión y poco ruidosas. En muchas ocasiones estas dos condiciones no se cumplen, de modo que habitualmente únicamente se puede concluir que existen indicios de comportamiento caótico, resultando extremadamente difícil probar de manera categórica e irrefutable que un sistema real es caótico. Esta dificultad práctica es sin duda el motivo principal de que el caos haya pasado desapercibido durante tanto tiempo para la comunidad científica.

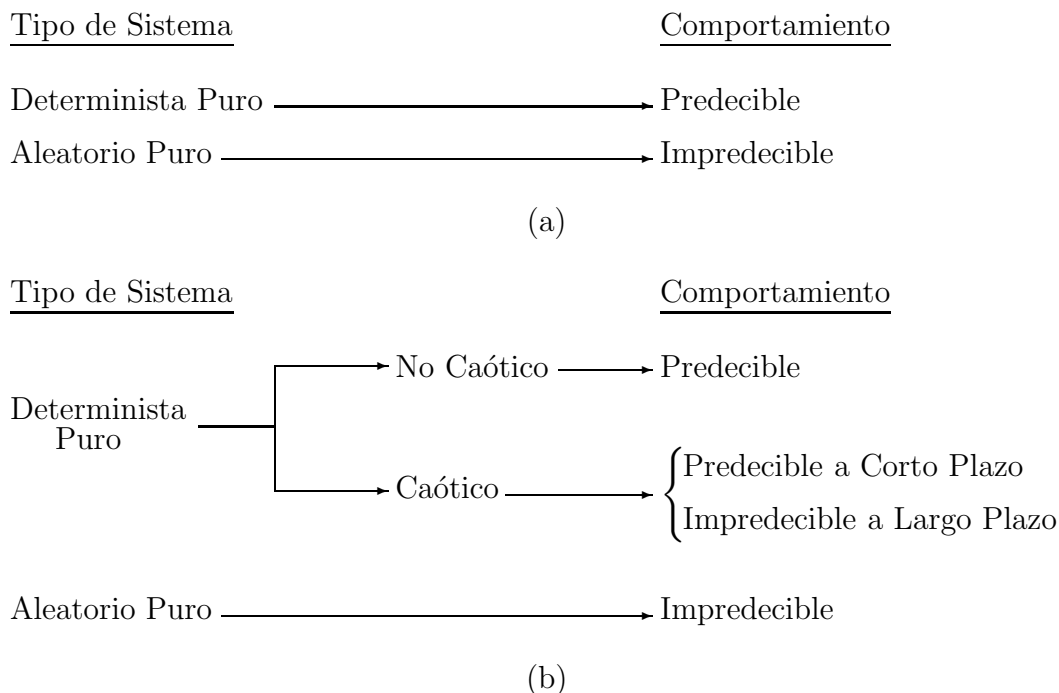


Figura 1.1: Comparación entre la visión científica del mundo antes y después del descubrimiento del caos determinista. (a) Tipos de sistemas y comportamiento asociado antes del caos. (b) Tipos de sistemas y comportamientos posibles después del caos.

Por otro lado, aunque resulta relativamente sencillo demostrar la naturaleza caótica de muchos sistemas discretos unidimensionales (véanse por ejemplo [Devan1989, Martin1998] y el Apéndice C), resulta igualmente mucho más difícil demostrar matemáticamente la existencia del caos en sistemas discretos de mayor dimensión y en sistemas continuos más realistas. Parece ser que el primero en realizar de forma rigurosa una demostración de este tipo fue Ya. G. Sinai, quien demostró que un sistema de partículas elásticas, emulando las moléculas de un gas, se comporta caóticamente [Stewart2001]. Posteriormente se ha podido demostrar la “caoticidad” de otros sistemas, como el mapa de Hénon [Benedi1991], pero estos siguen siendo la excepción antes que la regla. Como prueba de la dificultad del problema, en el conocido, sencillo e idealizado sistema de Lorenz no se ha podido demostrar de manera inequívoca su conducta caótica para un amplio conjunto de parámetros hasta fechas recientes [Hassar1994, Mischa1995, Mischa1998].

De manera paralela a la búsqueda de vestigios de comportamiento caótico en sistemas reales, durante esta época también se desarrollaron una gran parte de las principales herramientas teóricas necesarias para el estudio de los sistemas caóticos: Stephen Smale descubrió que el mecanismo fundamental para la aparición del caos es el estiramiento y doblamiento de regiones del espacio de estados, y propuso su sistema de herradura como paradigma del caos [Smale1967]; Metropolis y Stein fueron los primeros

Área	Sistema
Astronomía	<p>Problema de los tres cuerpos [Poin1957].</p> <p>Trayectoria de los meteoritos [Wisdom1985].</p> <p>Formación y mantenimiento de la gran mancha roja de Júpiter [Marcus1985].</p> <p>Rotación irregular de Hiperión (un satélite de Saturno) alrededor de su eje [Wisdom1984] y de otros satélites [Wisdom1987a].</p> <p>Órbitas de los planetas del sistema solar, en especial la de Plutón [Apple1986, Wisdom1987b, Wisdom1988].</p>
Biología	<p>Modelos de poblaciones estacionales (insectos [May1974], salmones [Fris2000a], etc.).</p> <p>Variación de la dinámica de las poblaciones debido a la caza/pesca [Fris2000b].</p> <p>Sistemas neuronales [Matsum1987, Skarda1987, Rabino1998].</p> <p>Tracto vocal y el mecanismo de generación de la voz en general [Teager1990, Banbro1994].</p>
Economía	<p>Índices del mercado de valores [Peters1996].</p>
Electrónica	<p>Osciladores no lineales forzados [Linsay1981, Testa1982, Kenne1986] y no forzados [Matsum1984, Zhong1985, Chua1986].</p> <p>Lazos de fase sincronizados (PLLs) [Endo1988].</p> <p>Filtros digitales [Chua1988b].</p> <p>Circuitos de sincronización [Tang1983].</p> <p>Convertidores DC-DC [Wood1989, Deane1990, Tse1994].</p> <p>Redes neuronales artificiales [Aihara1990, Zou1993, Potapo2000].</p> <p>Dispositivos de estado sólido [Iansi1985, Roukes1990].</p>
Hidrodinámica	<p>Evolución de la atmósfera (clima) [Lorenz1963a, Lorenz1963b].</p> <p>Convección térmica [Libcha1982a, Libcha1982b].</p> <p>El fenómeno de la turbulencia en general [Ruelle1971, Takens1981].</p> <p>Interacción entre plasmas y campos magnéticos [Sagdee1990].</p>
Medicina	<p>Ondas cerebrales (EEG) [Bablo1986a, Bablo1986b, Galka2000].</p> <p>Regímenes cardíacos patológicos [Akay2001].</p> <p>“Enfermedades dinámicas” [Mackey1977, Belair1995, Kaplan1995].</p>
Óptica	<p>Dinámica de los diodos láser en algunos regímenes de funcionamiento [Haken1975, Arecc1982, Flepp1991].</p>
Química	<p>Reacción de Belousov-Zhabotinsky [Roux1980, Hudson1981].</p>

Tabla 1.1: Ejemplos de áreas de conocimiento y sistemas en los que se han encontrado indicios de comportamiento caótico.

en utilizar la dinámica simbólica para caracterizar el comportamiento de mapas unidimensionales [Metro1973]; Li y Yorke acuñaron la palabra caos para designar el nuevo comportamiento irregular descubierto en numerosos sistemas deterministas [Li1975]; Grossmann y Thomae establecieron la conexión entre los sistemas deterministas y su caracterización estadística [Gross1977]; Floris Takens enunció el conocido teorema de “embedding” que permite encontrar un atractor caótico equivalente al que ha generado una determinada serie temporal caótica [Takens1981]; y Benoît Mandelbrot estudió las formas geométricas irregulares que aparecen en la naturaleza así como en otras disciplinas, e ideó el término fractal para designar las formas autosemejantes en diferentes escalas [Mandel1996, Mandel2003].

Por último, la aplicación del caos en el ámbito de la ingeniería eléctrica y electrónica, y en particular en el área de las comunicaciones, es bastante reciente, y viene propiciada por cuatro descubrimientos fundamentales [Kenne2000]:

1. La implementación y caracterización de diversos circuitos electrónicos caóticos en la década de los 80 [Kenne1986, Chua1992].
2. El descubrimiento de la sincronización caótica por Pecora y Carroll en 1990 [Pecora1990], que proporcionó un mecanismo para su aplicación directa en comunicaciones.
3. El descubrimiento y desarrollo de diversas técnicas de control y anticontrol del caos, entre ellos el método OGY (Ott, Grebogi y Yorke) [Ott1990], que permiten obtener trayectorias caóticas o periódicas de un sistema caótico según se desee.
4. La concienciación por parte de la comunidad ingenieril a lo largo de las décadas de los 80 y 90 de la naturaleza mixta determinista/aleatoria de los sistemas caóticos, así como de su utilidad potencial.

Como prueba del creciente interés por el caos en el ámbito de la ingeniería eléctrica y electrónica, en la Figura 1.2 se muestra una evolución del número de artículos de la base de datos del IEEE que contienen las palabras “chaos” o “chaotic” en el resumen (“abstract”) entre 1988 y 2005 (en azul) junto con la recta de regresión obtenida a partir de los datos (en rojo), que parece confirmar el crecimiento lineal del número de publicaciones.

1.3. El Problema de la Detección y Estimación de Señales Caóticas

La utilización práctica de señales y sistemas caóticos en ingeniería y otras áreas de la ciencia se encuentra condicionada por el desarrollo de algoritmos de extracción de la información relevante en presencia de algún tipo de contaminación. En algunas aplicaciones, como “watermarking” o comunicaciones, se pretende detectar la presencia de la señal caótica (*problema de detección*) o decidir entre un conjunto finito de posibles

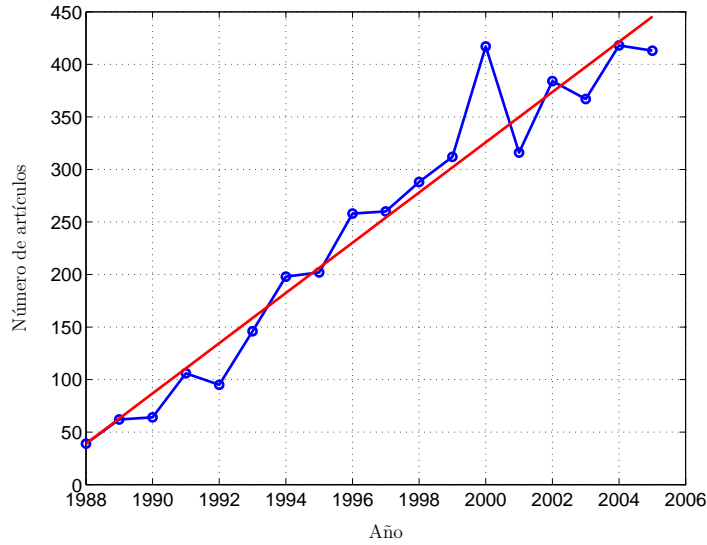


Figura 1.2: Número de artículos de la base de datos del IEEE que contienen la palabra “chaos” o “chaotic” en el “abstract” entre 1988 y 2005.

hipótesis (*problema de clasificación*). En otras aplicaciones, como el modelado de series temporales, se trata de obtener los parámetros de un determinado modelo caótico de tal manera que exista un buen ajuste con las observaciones (*problema de estimación*). A continuación se consideran estos tres problemas con mayor detalle. Se presenta primero el caso general, y posteriormente se restringe la clase de mapas considerados y se muestran los problemas específicos tratados.

1.3.1. El Problema General de la Detección y Estimación de Señales Caóticas

El problema general de la detección/estimación de señales caóticas sujetas a algún tipo de distorsión se suele formular en el *espacio de estados*. Se dispone de un sistema caótico caracterizado por una cierta función no lineal, $\mathbf{f} : D \rightarrow D$, con $D \subseteq \mathbb{R}^m$. El sistema evoluciona de acuerdo con la *ecuación del proceso*, definida por \mathbf{f} , que para un sistema continuo se suele escribir como

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t); \boldsymbol{\theta}) + \mathbf{v}(t), \quad (1.1)$$

mientras que la expresión usual para un sistema discreto es

$$\mathbf{x}[k] = \mathbf{f}(\mathbf{x}[k-1], \mathbf{u}[k-1]; \boldsymbol{\theta}) + \mathbf{v}[k]. \quad (1.2)$$

Donde, $\mathbf{x}(t)$ o $\mathbf{x}[k]$ es el vector de estado del sistema, $\mathbf{u}(t)$ o $\mathbf{u}[k]$ es la excitación de entrada, $\mathbf{v}(t)$ o $\mathbf{v}[k]$ es el vector de ruido del proceso (blanco, Gaussiano, e independiente de \mathbf{x} y \mathbf{u} habitualmente), y $\boldsymbol{\theta}$ es el vector de parámetros del sistema.

En general el estado del sistema no se puede observar directamente, sino que se obtienen muestras del mismo mediante un cierto proceso de medida, que en esta Tesis supondremos siempre discreto, y que viene descrito por la *ecuación de medida*:

$$\mathbf{y}[k] = \mathbf{g}(\mathbf{x}[k]) + \mathbf{w}[k], \quad \text{con } n = 0, \dots, N. \quad (1.3)$$

Siendo \mathbf{g} la función de medida (que puede ser conocida o no), $\mathbf{y}[k]$ el vector de medidas u observaciones, y $\mathbf{w}[k]$ el vector con el ruido de medida, que nuevamente suele ser blanco, Gaussiano, e independiente de $\mathbf{x}[k]$.

De acuerdo con el modelo definido por (1.1)–(1.3) se pueden plantear tres clases de problemas de inferencia estadística:

1. La estimación del estado del sistema ($\mathbf{x}[n]$ o $\mathbf{x}(t)$).
2. La estimación del conjunto de parámetros del proceso ($\boldsymbol{\theta}$).
3. La detección/clasificación de la función que ha generado las observaciones.

En los dos primeros casos (problemas de *estimación*) el objetivo general es obtener, a partir de un conjunto de medidas, la información necesaria (el estado o los parámetros) de un sistema caótico subyacente que proporcione el mejor ajuste a los datos disponibles. En ambos casos este sistema puede ser el que ha generado la señal o puede tratarse de otro distinto, ya que el original puede ser incluso desconocido, mediante el cual se intenta modelar la señal analizada. Por el contrario, el objetivo de la *detección/clasificación* es determinar, a partir de un conjunto de observaciones, qué sistema (caótico o no) dentro del conjunto de M posibles (hipótesis) ha generado la señal original. En el caso más simple (detección) se pretende determinar únicamente si una cierta señal caótica se halla presente en las observaciones (hipótesis \mathcal{H}_1) o si se ha recibido exclusivamente ruido (hipótesis \mathcal{H}_0) [Haykin1995].

Además, cuando el problema considerado consiste en la estimación del estado del sistema (o en general de cualquier otra información variante con el tiempo), se puede realizar una segunda clasificación en relación con la información disponible y el instante de inferencia. En esta ocasión se habla de problemas de filtrado, de suavizado y de predicción [Singer1994]. En el primer caso (*filtrado*) se tratan de inferir los parámetros a partir de la información disponible hasta un cierto instante. Es decir, para detectar/estimar los parámetros en el instante k -ésimo únicamente se utiliza el conjunto de medidas disponibles hasta ese momento ($y[0], \dots, y[k]$). Por el contrario, en un problema de *suavizado* se asume conocido el conjunto completo de observaciones de la señal ($y[0], \dots, y[N]$) a la hora de inferir los parámetros deseados. Por último, en un problema de *predicción* se pretenden extrapolar los parámetros inferidos hasta un cierto punto con el fin de intentar adivinar su valor para muestras posteriores.

En cualquier caso, siempre es necesario extraer la máxima información posible respecto al sistema original que genera la señal a partir de las medidas realizadas. Dado que toda la información concerniente al proceso se halla contenida dentro del vector de estado, este problema genérico se conoce como *reconstrucción del espacio de estados*,

y consiste en recomponer todos los posibles estados del sistema dinámico a partir de las observaciones disponibles [Casda1991, Abarba1998, Kantz2003]. Este problema se puede formular formalmente de la siguiente manera. Se dispone de lo que se conoce como una *serie temporal*: un conjunto de observaciones relacionadas con las variables de estado del sistema original. Generalmente la dimensión de la serie temporal es mucho menor que la del proceso que originó las observaciones, siendo a menudo unidimensional. El objetivo es construir un espacio de estados o de fases que sea equivalente al del sistema original (desconocido), en el sentido de que se pueda pasar de uno a otro mediante una transformación suave. Una vez construido este espacio, se dispone de toda la información necesaria para resolver cualquier problema de clasificación, detección, estimación, predicción, etc.

Existen diversos teoremas que proporcionan las condiciones necesarias para garantizar esta equivalencia (véase por ejemplo [Kantz2003]), entre los que el más conocido es el *teorema de Takens* o de “*embedding*” [Takens1981]. El teorema de Takens garantiza que, construyendo el vector de estado a partir de la muestra actual y las anteriores de modo que tenga al menos dimensión $2d + 1$, siendo d la dimensión fractal de la serie temporal, se puede obtener una reconstrucción equivalente del espacio de estados del sistema original. Esta equivalencia implica que se preservan los parámetros característicos del sistema (dimensión del atractor, exponentes de Lyapunov, entropía, etc.), y que por tanto resulta totalmente irrelevante trabajar con el sistema original o con el reconstruido.

Sin embargo, este teorema considera un conjunto infinito de muestras obtenidas con infinita precisión. En un caso práctico aparecen dificultades derivadas del ruido existente en las observaciones y el conjunto limitado de muestras disponibles. Esto hace que surja el área conocida como *modelado caótico*, que ha sido ampliamente estudiada, y que consta fundamentalmente de tres pasos [Casda1991]:

1. Determinar el periodo de muestreo óptimo para reconstruir el sistema. Un periodo de muestreo demasiado alto implicará una gran correlación entre muestras y la necesidad de modelos de mayor orden. Un periodo de muestreo demasiado bajo implicará perder parte de la información relativa a la dinámica del sistema debido al efecto del ruido. Aunque no existe ningún método riguroso para estimar este periodo de muestreo, normalmente se elige como el retardo para el que aparece el primer cero de la función de autocorrelación de la serie temporal [Abarba1998, Kantz2003]. Un método mejor, aunque más complicado, propuesto inicialmente por Fraser, consiste en utilizar el retardo proporcionado por el primer mínimo de la información mutua [Fraser1989b].
2. Especificar la dimensión del modelo a partir de la dimensión fractal estimada de las observaciones (serie temporal). A pesar de que en teoría la dimensión fractal, d , proporciona exactamente la dimensión necesaria, $2d + 1$, en la práctica los métodos existentes suelen sobreestimar la dimensión fractal cuando se dispone de series temporales ruidosas. En consecuencia, muchos autores consideran modelos de orden $d + 1$ hasta $2d + 1$, seleccionando finalmente el modelo de menor orden

que proporciona resultados satisfactorios [Kantz2003]. Otra alternativa es utilizar la dimensión en la que desaparecen los *falsos vecinos*, esto es, los puntos que tras la reconstrucción del atractor se encuentran cerca del resto debido a su proyección en un espacio de dimensión insuficiente, y no a la propia dinámica del sistema [Kennel1992, Abarba1993b].

3. Elegir una función o modelo para aproximar los datos. En este punto el problema se convierte en un problema clásico de aproximación funcional [Panta1994], habiéndose propuesto, entre otras, técnicas basadas en modelos autorregresivos no lineales (NLAR) [Tong1990, Fraser1992, Singer1994], métodos geométricos [Mees1992], algoritmos de regresión polinómica local [Tong1983, Farmer1987], redes neuronales (NNs) [Lapede1987, Weigen1990, Princi1992, Tronci2003], funciones de base radial (RBFs) [Casda1989, Moody1989, Xie2004], etc.

1.3.2. Sistemas Considerados: Mapas Caóticos Unidimensionales

Considerando un problema teórico tan general es difícil obtener soluciones óptimas (y ni tan siquiera adecuadas), de modo que vamos a ser menos ambiciosos y plantear un problema más reducido, aunque significativo. En esta Tesis se aborda la estimación óptima de secuencias caóticas generadas mediante la iteración de mapas unidimensionales, contaminadas por ruido aditivo blanco Gaussiano (AWGN). Además, el tipo de problemas que se abordan son esencialmente de suavizado, aunque las técnicas de estimación propuestas son fácilmente extensibles a problemas de filtrado y predicción.

En este caso, la ecuación del proceso utilizada para generar la señal caótica se puede escribir como

$$x[k] = f(x[k-1]; \boldsymbol{\theta}), \quad (1.4)$$

con $k = 0, \dots, N$. En (1.4) $\boldsymbol{\theta}$ es el vector de parámetros del mapa caótico, y $f(\cdot)$ es una función unidimensional no lineal y no invertible genérica. A su vez, el modelo para las observaciones se reduce a

$$y[k] = g(x[k]) + w[k] = x[k] + w[k], \quad (1.5)$$

donde $w[n]$ es AWGN, esto es, $w[k] \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2)$. Evidentemente, (1.4) y (1.5) son casos particulares de (1.2) y (1.3) respectivamente, considerando sistemas de dimensión uno, excitación de entrada inexistente y un proceso de medida en el que se observa directamente el estado del sistema contaminado por AWGN.

Los motivos de la elección de este modelo se discuten a continuación. Por una parte, se considera AWGN como distorsión por su importancia práctica, así como por su tratabilidad analítica. Por otra parte, en cuanto al uso de mapas caóticos unidimensionales, a pesar de que se trate de los sistemas caóticos más sencillos, existen numerosas razones para su estudio:

1. **Razones históricas:** Los mapas iterados unidimensionales presentan una larga historia que se remonta a las antiguas culturas babilónica y griega [DeMelo1993]. No obstante, su análisis sistemático no ha sido emprendido hasta principios del siglo XX, comenzando a considerarse problemas de iteración de sistemas no lineales generales únicamente durante su segunda mitad.
2. **Interés matemático:** Este tipo de mapas tan sencillos presentan una rica e interesante estructura matemática [Collet1980, DeMelo1993] que merece la pena ser estudiada por el simple placer de avanzar en su comprensión. Además, aunque su estudio ha tomado elementos de diferentes ramas de las matemáticas, también ha aportado numerosas técnicas de aplicabilidad fuera de su ámbito [DeMelo1993].
3. **Presentan características de sistemas de mayor orden:** Existen numerosas evidencias de que los mismos fenómenos y problemas que aparecen en las ecuaciones diferenciales ordinarias (EDOs) se encuentran presentes en los sistemas discretos unidimensionales y bidimensionales [Smale1967, DeMelo1993]. Esto es debido a la “pérdida de dimensión” provocada por la fricción existente en cualquier sistema real, que causa que las órbitas correspondientes a sistemas de alto orden se concentren en espacios de fases de mucho menor orden, y que los fenómenos observados resulten esencialmente los mismos que en sistemas dinámicos unidimensionales. Obviamente, es mucho más fácil estudiar un mapa unidimensional que un sistema de EDOs no lineal multidimensional, y, citando a Smale, “habiendo encontrado teoremas en este caso, es generalmente una tarea secundaria traducir los resultados al marco de las ecuaciones diferenciales” [Smale1967]. Por ejemplo, un mapa discreto de segundo orden como el mapa de Hénon [Henon1976]

$$\begin{aligned}x[k] &= 1 - ax[k - 1]^2 + y[k - 1], \\y[k] &= bx[k - 1],\end{aligned}$$

es un modelo natural para un flujo continuo tridimensional [DeMelo1993]. Si el flujo es disipativo, el mapa es contractor, lo que implica que su dinámica se encuentra confinada esencialmente en un subespacio unidimensional. Por consiguiente, es de esperar que el flujo tridimensional presente características observadas en mapas unidimensionales. Un segundo ejemplo es el sistema de Lorenz, tridimensional, pero de cuya dinámica caótica es responsable fundamentalmente un mapa caótico unidimensional, como es bien sabido [Lorenz1963a].

4. **Aplicación práctica:** Los mapas unidimensionales resultan de utilidad práctica en numerosas aplicaciones relacionadas con el ámbito científico e ingenieril: generación de secuencias pseudoaleatorias (PN), criptografía, sistemas de comunicaciones digitales seguras y de espectro ensanchado, “watermarking”, modelado de series temporales, etc.

Así pues, en resumen, los dos motivos principales para el estudio de los mapas unidimensionales son debido a la creencia de que pueden ayudar a comprender el caso multidimensional, mucho más complicado de analizar, y por su aplicación práctica directa en diversas áreas de la ciencia y la ingeniería.

Por último, aunque muchas de las técnicas estudiadas a lo largo de la Tesis resultan válidas para cualquier mapa unidimensional, nos vamos a concentrar en el estudio de mapas lineales a tramos (mapas PWL) por los siguientes motivos:

1. Los mapas PWL unidimensionales presentan una variedad de comportamiento dinámico tan grande como la de cualquier otro mapa unidimensional no lineal [Isabel1997]. Es decir, no existe ningún tipo de comportamiento dinámico presente en los mapas unidimensionales no PWL que no pueda ser replicado por un mapa PWL apropiado.
2. Dentro de los mapas PWL, la clase de mapas PWL de Markov permite aproximar una clase muy amplia de mapas no PWL con una precisión arbitraria [Isabel1997].
3. Los mapas PWL son tratables analíticamente, de modo que se pueden obtener ecuaciones cerradas para sus estimadores óptimos (tanto ML como Bayesianos).

1.3.3. El Problema de la Estimación de Señales y Mapas Caóticos Unidimensionales

En el problema de la estimación se deben distinguir dos casos fundamentales: mapa caótico conocido y función generadora desconocida. En esta Tesis se estudia exclusivamente el primero de los dos problemas, pudiendo plantearse tres problemas de estimación diferentes:

1. Estimar el estado inicial del sistema caótico (problema de estimación de la secuencia caótica). Este es el problema básico considerado en la Tesis, y se discute en los capítulos 3–5.
2. Estimar los parámetros de la función generadora (problema de estimación del mapa caótico). Este problema se estudia en el Capítulo 6.
3. Estimar de manera conjunta el estado inicial del sistema y los parámetros del mapa generador de la secuencia caótica. Considerado igualmente en el Capítulo 6, aunque de un modo conciso.

A continuación se revisa brevemente el estado del arte en el ámbito de los dos problemas estudiados: estimación de la secuencia caótica, y estimación del mapa caótico.

1.3.3.1. Estimación de la Secuencia Caótica

La *separación de señales caóticas* consiste en desligar dos o más señales, de las cuales al menos una, no necesariamente la de interés, es caótica. El problema de la estimación de una secuencia caótica contaminada por ruido blanco Gaussiano (AWGN) puede verse como un caso particular del mismo en el que sólo existen dos señales: la secuencia de interés, la caótica, y la perturbadora, el ruido. Esta cuestión viene recibiendo una importante atención por parte de la literatura científica desde hace aproximadamente dos décadas, agrupándose con frecuencia los métodos desarrollados para su resolución bajo la denominación de *técnicas de reducción del ruido*.

Una de las primeras técnicas propuestas consiste en aproximar la dinámica del sistema caótico mediante funciones núcleo (“kernels”) Gaussianas, y realizar un promediado temporal para reducir el ruido [Pikov1986]. A continuación, en [Farmer1988] se plantea un esquema de reducción del ruido basado en una aproximación localmente lineal de la dinámica y el principio de máxima verosimilitud (ML). De manera independiente, Hammel desarrolló un algoritmo que se basa en el método de descomposición del “manifold” [Hammel1989], y que proporciona resultados similares con un menor coste computacional. Los modelos localmente lineales han sido utilizados en numerosas ocasiones desde entonces, refinándose los métodos usados para su estimación y consiguiéndose un mejor ajuste a la dinámica del sistema estudiado. Por ejemplo, en [Kostel1990] se estiman los modelos lineales locales a partir de los K vecinos más próximos, encontrándose la nueva trayectoria minimizando una función de coste heurística. Por otro lado, en [Farmer1991] se trata de resolver el problema realizando un ajuste por mínimos cuadrados del modelo con las observaciones, descomponiendo la trayectoria en dos partes: una estable que se corrige iterando hacia delante, y otra inestable que se corrige iterando hacia atrás. Una revisión y comparación de estos primeros métodos puede verse [Kostel1993].

El problema de los métodos anteriores es que están desarrollados para sistemas d -dimensionales, por lo que resultan en general subóptimos para los mapas unidimensionales de interés, e incluso pueden no ser aplicables a los mismos, por ejemplo por utilizar características propias de aquellos que no aparecen en estos, o por considerar únicamente sistemas invertibles, que no son interesantes en el caso unidimensional. Los primeros en estudiar específicamente el problema de la estimación de señales generadas iterando mapas unidimensionales fueron Myers, Richard et al. [Myers1992a, Myers1992b, Richar1993]. Por una parte, en [Myers1992b] se muestra por primera vez la función de log-verosimilitud genérica para el problema de la estimación de la condición inicial, y se desarrollan dos algoritmos para la obtención del estimador ML de manera aproximada basados en programación dinámica y el filtro de Kalman. Por otra parte, en [Myers1992a, Richar1993] se propone un método basado en modelos ocultos de Markov (HMMs), válido tanto para sistemas unidimensionales como d -dimensionales, que permite implementar de un modo aproximado estimadores de máxima verosimilitud y Bayesianos.

No obstante, los primeros en plantear y resolver el problema de la estimación ML de manera exacta y eficiente para un caso concreto fueron Papadopoulos y Wornell [Papado1993, Papado1995]. Desafortunadamente, aunque el algoritmo de Papadopoulos y Wornell es fácilmente extensible a cualquier mapa PWL, se trata únicamente de un estimador aproximado para la mayoría de los mapas caóticos. En estos casos, debido a la complejidad y el elevado coste computacional de los estimadores óptimos, resulta habitual recurrir a estimadores subóptimos. Por ejemplo, en [Kay1995b] se proponen dos métodos aproximados: el primero basado en la conjugación topológica (“halving method”) y válido para aquellos mapas que son conjugados con el BSM, y el segundo basado en técnicas de programación dinámica. Otros muchos autores simplemente explotan la conexión existente entre una señal caótica y su secuencia simbólica para plantear estimadores subóptimos muy sencillos que proporcionan buenas prestaciones para valores de relación señal a ruido elevados [Cong1999, Wang1999].

Para finalizar, los estimadores de señales generadas por mapas unidimensionales propuestos recientemente suelen hallarse relacionados con una aplicación concreta: el planteamiento de detectores eficientes para sistemas de comunicaciones caóticas. En primer lugar, Dedieu y Ogorzalek comparan el rendimiento de varias técnicas de reducción del ruido con el objetivo de mejorar las prestaciones de los sistemas de conmutación caótica [Dedieu1998]. Desde entonces, se han propuesto numerosas técnicas de reducción del ruido y se han realizado diversos estudios de las mismas [Kisel1999, Hasler1999, Jako2000, Schwei2001a, Schwei2001b]. En segundo lugar, de manera paralela al trabajo realizado en esta Tesis, Schimming, Schweizer y Hasler han analizado la implementación exacta del estimador ML, aunque únicamente consideran como ejemplo un mapa PWL concreto [Schim1999, Schim2000]. Por último, también existen precedentes del uso de uno de los algoritmos subóptimos estudiados en la Tesis, el algoritmo de Viterbi, para la estimación de señales caóticas en el ámbito de las comunicaciones por parte de diversos autores: Kisel, Dedieu y Schimming [Kisel1999, Kisel2001]; Ciftci y Williams [Ciftci2001a, Ciftci2001b]; y Maggio et al. [Maggio2001a, Maggio2001b].

1.3.3.2. Estimación de un Mapa Generador Caótico

El *modelado caótico* consiste en tratar de ajustar un sistema no lineal caótico a las observaciones ruidosas, tal y como se ha discutido anteriormente. El segundo problema abordado en esta Tesis es un caso particular del mismo en el que se supone que se conoce el sistema utilizado para generar la señal caótica, un mapa caótico unidimensional, y se desea simplemente estimar sus parámetros. Desafortunadamente, aunque existen numerosas alternativas de modelado caótico, para el problema concreto de la inferencia de los parámetros de un mapa unidimensional únicamente se han propuesto unos pocos estimadores subóptimos, que se revisan brevemente a continuación.

Nótese que en principio se trata simplemente de un problema de *regresión no lineal*, de modo que aparentemente se podría utilizar cualquier técnica propia de este área. Sin embargo, la extrema sensibilidad característica de las señales caóticas convierte la

estimación en una tarea delicada, provocando que no se obtengan buenos resultados mediante la mayoría de los procedimientos convencionales.

Por ejemplo, la relación entre la función de autocorrelación y el parámetro de bifurcación es conocida para algunos mapas caóticos [Sakai1980], lo que se podría utilizar para plantear un estimador de los mismos. No obstante, la no linealidad de los sistemas caóticos introduce una fuerte correlación entre la señal deseada y el ruido, causando un mal funcionamiento de los estimadores basados en dicha función de autocorrelación. Otro método sencillo consiste en aprovechar la relación conocida entre dos muestras consecutivas del mapa [Heida1992a, Elmir1994a], promediando la estima obtenida para todos los pares de observaciones disponibles de tal modo que se reduzca el ruido. Por desgracia, esta alternativa requiere generalmente una división, lo que da lugar a una gran sensibilidad frente al ruido y un mal funcionamiento de los estimadores.

Los algoritmos iterativos convencionales tampoco proporcionan un buen rendimiento en esta clase de problemas, debiendo modificarse para su aplicación. En [Drake1992] se muestra como una aproximación basada en la minimización del error cuadrático mediante un algoritmo de descenso de gradiente estándar proporciona muy malos resultados debido a la rugosidad de la función de coste, y se propone una modificación para suavizar la misma que mejora los resultados obtenidos. En [Schwei1996] se propone otro procedimiento iterativo, basado en tratar de minimizar la función de coste dada por el error cuadrático total (TLS), que alterna entre una etapa de prefiltrado de las observaciones para reducir el ruido y una etapa de estimación de los parámetros. Por último, en [Leung1997] se ha propuesto un estimador basado en el filtro de Kalman.

1.4. Objetivos de la Tesis y Líneas de Investigación

El objetivo principal de esta Tesis es el planteamiento de estimadores óptimos, en los sentidos de máxima verosimilitud y Bayesiano, de señales caóticas generadas mediante la iteración de mapas unidimensionales y observadas en ruido aditivo blanco Gaussiano. No obstante, una vez constatado el elevado coste computacional de los mismos, se ha trabajado igualmente en el desarrollo de algoritmos de estimación subóptimos, aunque eficientes desde el punto de vista computacional. En cualquier caso, todos los algoritmos heurísticos planteados alcanzan el rendimiento de los óptimos asintóticamente conforme aumenta la relación señal a ruido, de modo que se pueden considerar asintóticamente óptimos. Por último, un tercer objetivo de la Tesis es mostrar la manera de emplear dichos estimadores en problemas reales, fundamentalmente en el área de las comunicaciones digitales, evaluando el interés y la aplicabilidad de las señales caóticas en dicha área. A continuación se presentan de manera más detallada las principales líneas de investigación.

1. Obtención de los estimadores de máxima verosimilitud y Bayesianos de secuencias caóticas conocido el mapa generador. Dentro de esta línea se ha conseguido resolver el problema por completo para mapas generadores lineales a tramos (PWL). La solución desarrollada, que consiste en estimar una muestra de referencia de

la secuencia y las regiones a las que pertenecen el resto de puntos de la señal, se muestra en el Capítulo 3 para el estimador de máxima verosimilitud, y en el Capítulo 4 para los estimadores Bayesianos. Para otro tipo de mapas caóticos no resulta posible en general obtener una solución cerrada del problema. En estos casos se estudian las principales dificultades para la aplicación exacta de los estimadores óptimos, y se muestran algunas ideas para su obtención de manera aproximada: técnicas de rejilla, algoritmos iterativos locales, y métodos MCMC.

2. Debido al elevado coste computacional de los estimadores óptimos, cuyo crecimiento es exponencial con la longitud de la secuencia a estimar, se han considerado diversos estimadores subóptimos. Todos ellos son asintóticamente óptimos en el sentido de que convergen al rendimiento de los óptimos cuando la relación señal a ruido tiende a infinito. Dentro de esta línea de investigación se han considerado diversas clases de técnicas, que se muestran en el Capítulo 5: estimación directamente a partir de la secuencia simbólica ruidosa (algoritmos HC-ML y HC-MAP), método iterativo de estimación similar a los predictores hacia atrás y hacia delante (algoritmo FB-ML), aplicación de los algoritmos E-M y SAGE, y uso del conocido algoritmo de Viterbi.
3. Planteamiento del estimador de máxima verosimilitud de los parámetros del mapa generador conocida la forma del mismo. En este caso no existe una FDP a priori natural, por lo que no se consideran estimadores Bayesianos. Este es un problema más complejo que el anterior, existiendo escasas soluciones conocidas previamente. No obstante, se ha conseguido desarrollar un algoritmo que permite obtener el estimador ML para mapas unimodales con un único parámetro. Para otra clase de mapas el algoritmo puede ser válido en algunos casos, pero su complejidad aumenta notablemente, aconsejando el uso de métodos subóptimos.
4. Desarrollo de métodos subóptimos para la estimación de los parámetros de mapas caóticos, debido nuevamente al elevado coste computacional del algoritmo óptimo ya mencionado. En particular se han considerado dos clases de técnicas: métodos bloque sencillos (estimadores LS, TLS y el método de los momentos, MBE), y técnicas iterativas locales (descenso de gradiente, método de Newton-Raphson, y un algoritmo competitivo basado en el LMS, CLMS). Este algoritmo competitivo resulta de especial interés, ya que se trata de una técnica novedosa que también resulta aplicable en otros problemas de deconvolución, igualación y separación ciega de señales, así como en aplicaciones que requieran realizar una agrupación (“clustering”) de los datos.
5. Aplicación de los estimadores desarrollados a problemas reales en el ámbito de las comunicaciones digitales. La motivación es doble: por un lado evaluar la posibilidad de la aplicación del caos en dichos problemas, y por el otro intentar mejorar las técnicas utilizadas habitualmente, en general subóptimas. En concreto, esta Tesis se concentra en el diseño de sistemas de comunicaciones digitales de espectro ensanchado seguros usando señales caóticas. En este sentido, se analiza un

esquema de conmutación caótica bien conocido haciendo uso de los estimadores óptimos y subóptimos desarrollados, y se propone un esquema de codificación caótica novedoso que se puede combinar fácilmente con un sistema de modulación convencional (OFDM) para proporcionar simultáneamente protección frente a la interceptación e inmunidad frente a los efectos del canal.

1.5. Organización y Contribuciones de la Tesis

La Tesis se encuentra dividida en un total de ocho capítulos incluido el presente capítulo introductorio. La organización de los siete capítulos restantes es la siguiente.

En el **Capítulo 2** se realiza una revisión de los conceptos necesarios para la Tesis en el ámbito de los sistemas dinámicos y la teoría del caos. La Tesis se centra en los mapas iterados unidimensionales, prestando especial atención a la clase principal de sistemas utilizados: los mapas lineales a tramos (mapas PWL). Se presentan los principales mapas utilizados, así como las herramientas básicas necesarias para caracterizar las señales caóticas agrupadas en dos ramas: determinista o topológica, y aleatoria o estadística. Dentro de la parte topológica se presentan los conceptos de partición natural, dinámica simbólica, y secuencias simbólicas. Dentro de la parte estadística se definen conceptos como el operador de Frobenius-Perron, la FDP invariante del mapa o los exponentes de Lyapunov. Por último, se revisan brevemente otras dos nociones útiles relacionadas con la teoría del caos: los errores numéricos y el teorema del “shadowing”, y los conceptos de fractal y dimensión fractal.

En el **Capítulo 3** se aborda el problema de la obtención del estimador de máxima verosimilitud (ML) de secuencias caóticas conocido el mapa generador y sus parámetros. Se comienza planteando el problema genérico y particularizándolo para mapas PWL. A la vista del estimador genérico resulta evidente que es necesaria una expresión cerrada para la iteración k -ésima del mapa, tanto hacia delante como hacia atrás. Estas expresiones se pueden obtener por inducción para los mapas PWL en función del itinerario de la señal, de modo que el resto del capítulo se centra en general en esta clase de mapas. Gracias a dichas expresiones, a continuación se obtienen el estimador ML cuando la secuencia simbólica es conocida y cuando es desconocida. Por último, se discute brevemente la estimación ML de secuencias generadas por mapas no PWL, para los que no es posible conseguir una fórmula cerrada de la iteración k -ésima en general.

A continuación, en el **Capítulo 4**, se aborda el problema de la obtención de estimadores Bayesianos de secuencias caóticas para el mismo caso que el capítulo anterior: mapa generador perfectamente conocido. Al igual que antes, se comienza planteando el problema genérico, que viene caracterizado por las diferentes funciones de densidad de probabilidad (FDPs) que intervienen en el mismo: la FDP condicional de las observaciones, la FDP a priori de la secuencia caótica, y la FDP de las observaciones. En el caso de los mapas PWL se obtienen nuevamente expresiones cerradas para los dos principales estimadores Bayesianos (MAP y MMSE o MS) gracias a las fórmulas para

la iteración k -ésima del mapa, obtenidas en el capítulo anterior, y a la FDP invariante asociada a cualquier mapa caótico, de la que se realiza una aproximación constante a tramos (PWC) cuando esta es desconocida, como ocurre en la mayor parte de las ocasiones. En el caso de los mapas no PWL se propone una técnica basada en los métodos MCMC (en concreto en el algoritmo de Metropolis-Hastings) que permite plantear tanto estimadores Bayesianos como de máxima verosimilitud para cualquier clase de mapas.

El principal objetivo de los capítulos 3 y 4 era desarrollar estimadores óptimos, sin importar su complejidad. En el **Capítulo 5** se analiza el coste computacional de los estimadores de máxima verosimilitud y Bayesianos, constatándose su crecimiento exponencial con la longitud de la secuencia. Este elevado coste computacional provoca que los estimadores óptimos resulten inaplicables para secuencias de longitud media/alta, siendo necesario desarrollar estimadores computacionalmente eficientes. En concreto, en este capítulo se proponen cuatro estimadores subóptimos: dos muy simples aunque de rendimiento limitado (el FB-ML y el HC-ML/MAP), y dos más sofisticados y con un mejor rendimiento (basados en los conocidos algoritmos SAGE y de Viterbi respectivamente). Aunque todos los algoritmos propuestos alcanzan el límite de Cramer-Rao asintóticamente cuando la varianza del ruido tiende a cero, los dos últimos métodos permiten obtener un rendimiento similar al de los estimadores óptimos con tan sólo una fracción de su coste computacional.

En el **Capítulo 6** se considera el problema complementario al de los capítulos anteriores: la estimación del mapa generador de la secuencia. El capítulo se concentra en la estimación de los parámetros del mapa conocida su forma. Para resolver este problema se plantea en primer lugar un algoritmo que permite obtener el estimador ML de forma aproximada para mapas unimodales con un único parámetro. Sin embargo, dada la mayor complejidad de este problema, a continuación se recurre a algoritmos subóptimos para su resolución: métodos bloque basados en la relación entre muestras consecutivas de la secuencia y estimadores sencillos (LS, TLS y método de los momentos, MBE), y algoritmos iterativos locales (descenso de gradiente, Newton-Raphson y un método competitivo basado en el LMS, CLMS). Nótese además que en este caso no existe una FDP a priori natural de los parámetros, de modo que no tiene sentido considerar estimadores Bayesianos. Por último, también se aborda la estimación conjunta de los parámetros del mapa y la secuencia caótica mediante un algoritmo iterativo consistente en obtener una estima inicial de los parámetros a partir de la señal ruidosa, usar estos parámetros para estimar la secuencia caótica, reestimar los parámetros con la nueva señal obtenida, y así sucesivamente.

En el **Capítulo 7** se considera la aplicación de los estimadores planteados en el resto de la Tesis a problemas reales en el ámbito de las comunicaciones digitales, revisándose en primer lugar las principales alternativas de comunicaciones caóticas propuestas. Seguidamente se utilizan los estimadores óptimos y subóptimos desarrollados a lo largo de toda la Tesis para plantear diversos detectores para un esquema de comunicaciones basado en la conmutación entre dos sistemas caóticos (conmutación caótica), y se propone un esquema novedoso de codificación caótica basado en la iteración hacia

atrás usando el itinerario de la señal caótica. Por último, se considera la combinación del esquema de codificación caótica con una modulación convencional (OFDM) para conseguir simultáneamente una baja probabilidad de interceptación e inmunidad frente a la distorsión multicamino del canal.

Para finalizar, en el **Capítulo 8** se presentan las conclusiones de la Tesis, así como diversas líneas futuras de investigación que se pueden plantear a la vista de los resultados obtenidos. En los apéndices se muestra una lista de las publicaciones derivadas de la realización de la Tesis, un resumen de la notación y abreviaturas de la misma, y diversas demostraciones matemáticas. Las listas de figuras y tablas, una extensa bibliografía y el índice cierran la Tesis.