

**UNIVERSIDAD DE CANTABRIA**



**DEPARTAMENTO DE INGENIERÍA DE  
COMUNICACIONES**

**TESIS DOCTORAL**

**ESTIMACIÓN ÓPTIMA DE SECUENCIAS  
CAÓTICAS CON APLICACIÓN EN  
COMUNICACIONES**

**Autor : David Luengo García  
Directores : Carlos Pantaleón Prieto  
Ignacio Santamaría Caballero**

**Grupo de Tratamiento Avanzado de Señal**

**Septiembre de 2006**

# Capítulo 2

## Teoría del Caos: Revisión de Conceptos Básicos

Con objeto de centrar el ámbito de este trabajo, y de que resulte autocontenido, en este capítulo se realiza una revisión de la teoría de los sistemas no lineales y caóticos. No se trata de una revisión exhaustiva, sino que únicamente se abordan aquellos conceptos que resultan necesarios en capítulos posteriores de la Tesis. En consecuencia, tras una breve introducción general, el capítulo se centra en mapas unidimensionales.

### 2.1. Sistemas Lineales y No Lineales

En esta sección se definen los conceptos básicos de señales y sistemas, y se resaltan las diferencias entre los sistemas lineales, que han predominado en el tratamiento de señal hasta muy recientemente, y los sistemas no lineales, necesarios para la existencia de caos determinista, y en cuyo estudio se centra la Tesis. Puesto que la Tesis trata sobre la estimación de secuencias caóticas discretas, a lo largo de esta sección se presta atención de manera prácticamente exclusiva a las señales y los sistemas discretos.

#### 2.1.1. Señales y Sistemas

Se comienza proporcionando las definiciones básicas de señales y sistemas manejadas, que se corresponden con las de [Oppen1997], enfatizando la subclase dentro de la cual se enmarca este trabajo.

Una *señal* es cualquier función de una o más variables independientes que contiene información acerca del comportamiento o la naturaleza de algún fenómeno. La clasificación más común de las señales es en continuas y discretas, tanto en las variables independientes, como en las dependientes. Toda señal se puede considerar como una aplicación matemática entre el dominio de las variables independientes y el de las dependientes. En consecuencia, supongamos que se dispone de señales en un espacio  $p$ -dimensional que dependen de  $m$  variables independientes. Si se consideran señales

reales, en función de su naturaleza estas se pueden agrupar en las cuatro clases básicas que se muestran en la Tabla 2.1.

Tipo de Señal	Variables Independientes	Variables Dependientes	Notación Matemática
Señal Continua Analógica	Continuas	Continuas	$f : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^p$
Señal Continua Digital	Continuas	Discretas	$f : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{Z}^p$
Señal Discreta Analógica	Discretas	Continuas	$f : \mathbb{Z}^m \rightarrow \mathbb{R}^p$
Señal Discreta Digital	Discretas	Discretas	$f : \mathbb{Z}^m \rightarrow \mathbb{Z}^p$

Tabla 2.1: Diferentes tipos de señales en función de sus variables independientes y dependientes.

En esta Tesis se va a trabajar principalmente con señales en tiempo discreto, con una única variable independiente, y variable dependiente continua o discreta sin distinción en la notación. La señal más utilizada es la correspondiente a las muestras de la *secuencia caótica* (véase la Sección 2.3.2), que asocia a cada índice un número real dentro de un intervalo,  $x : \mathcal{N} \rightarrow I$ , siendo  $\mathcal{N} = \{0, \dots, N\}$ , y los intervalos más habituales  $I = [-1, 1]$  o bien  $I = [0, 1]$ . También se usa con frecuencia la *secuencia simbólica* (véase la Sección 2.4.2), que asocia a cada índice un número entero según la región del mapa a la que pertenezca,  $s : \mathcal{N} \rightarrow S$ , con  $S = \{1, \dots, M\}$ .

El segundo concepto que resulta necesario definir es el de sistema. Un *sistema* es todo proceso mediante el cual un conjunto de señales de entrada son transformadas en otro conjunto de señales de salida, o que reacciona frente a las señales de entrada dando como resultado otro conjunto de señales de salida. Aunque existen muchas notaciones para representar matemáticamente un sistema, se van a utilizar fundamentalmente dos. La primera es una notación tipo aplicación matemática [Oppen1997, Proak1998],  $x[n] \rightarrow y[n]$ , donde  $x[n]$  es la señal de entrada del sistema, e  $y[n]$  la señal de salida. Sin embargo, la notación más habitual es mediante una transformación [Proak1998]:

$$y[n] = T(x[n]).$$

Esta definición de sistema es lo suficientemente amplia como para englobar prácticamente cualquier sistema considerado, pero no resulta práctica. Para obtener resultados y propiedades interesantes de los sistemas resulta necesario definir clases de sistemas. En los dos siguientes apartados se muestran las distintas clases de sistemas, clasificados de acuerdo con una propiedad principal, su linealidad, y otra secundaria, su memoria.

### 2.1.2. Sistemas Lineales

Históricamente en todas las ramas de la ciencia e ingeniería ha predominado el estudio de los sistemas lineales. Intuitivamente un *sistema lineal* es aquel en el que un cierto cambio en las señales de entrada provoca un cambio proporcional en las señales de salida. Esto es, aquel en el que pequeños cambios en las entradas suponen pequeños

cambios en las salidas, mientras que grandes cambios en las entradas dan lugar a grandes cambios en las salidas. De manera formal, un sistema lineal se suele definir como aquel que cumple el *principio de superposición* [Oppen1997]: si  $x_1[n] \rightarrow y_1[n]$  y  $x_2[n] \rightarrow y_2[n]$ , entonces  $a_1x_1[n] + a_2x_2[n] \rightarrow a_1y_1[n] + a_2y_2[n]$  para cualquier  $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$ . Una segunda propiedad que se suele asumir frecuentemente en el estudio de los sistemas lineales es la *invariancia temporal* o *invariancia frente al desplazamiento* [Oppen1997]: si  $x[n] \rightarrow y[n]$ , entonces  $x[n - n_0] \rightarrow y[n - n_0]$  para cualquier  $n_0 \in \mathbb{R}$ .

En el área de procesamiento de señales es habitual trabajar con sistemas lineales e invariantes en el tiempo (sistemas LTI). La razón es que permiten modelar razonablemente bien una clase amplia de fenómenos físicos, y que se pueden analizar detalladamente mediante dos herramientas básicas: la respuesta al impulso del sistema, y la transformada de Fourier. El procesamiento digital de señales continuas, basado en el teorema de muestreo, también asume implícitamente la linealidad de los sistemas utilizados. Como consecuencia de las propiedades de los sistemas LTI y de la gran cantidad de tiempo y esfuerzo dedicado a su estudio, existe un amplio marco teórico sólido y preciso que permite analizar detalladamente cualquiera de estos sistemas, así como una extensa bibliografía acerca de la teoría de sistemas lineales [Oppen1997, Lathi1998, Haykin2002].

### 2.1.3. Sistemas No Lineales

Aunque los sistemas lineales son útiles en muchas ocasiones y resultan una aproximación de primer orden adecuada del mundo real, con frecuencia es necesario recurrir a sistemas no lineales. De hecho, la opinión científica generalizada actualmente es que los sistemas lineales son la excepción más que la regla, e incluso hay quien afirma que los sistemas lineales no existen en la naturaleza [Willi1997]. La realidad es que no existe ningún sistema físico que sea estrictamente lineal, pero en determinadas ocasiones las no linealidades resultan despreciables y los sistemas lineales proporcionan una aproximación adecuada. La radical diferencia conceptual entre los sistemas lineales y los no lineales puede verse comparando algunas de sus características básicas [Willi1997]:

1. Los sistemas lineales se parecen mucho entre sí, mientras que cada sistema no lineal es único, ya que existen grandes diferencias entre las distintas funciones no lineales, lo que dificulta el desarrollo de una teoría general de los sistemas no lineales.
2. Las señales generadas por los sistemas lineales presentan un comportamiento suave y regular a largo plazo, mientras que las generadas por los sistemas no lineales pueden presentar un comportamiento irregular y errático, continuado o intermitente.
3. En los sistemas lineales la salida varía en proporción al estímulo recibido, mientras que en los sistemas no lineales la salida puede ser mucho mayor o menor que el estímulo.

Por consiguiente, aunque los sistemas no lineales sean una generalización de los lineales, resultan necesarias herramientas sustancialmente diferentes para su estudio que dependen del tipo de sistema no lineal. La clasificación más interesante de los sistemas no lineales es, de acuerdo con su memoria, en sistemas sin memoria y sistemas con memoria. Estos últimos se pueden subdividir a su vez en sistemas con memoria finita y sistemas con memoria infinita. A continuación se describen someramente las características fundamentales de cada uno.

### 2.1.3.1. Sistemas No Lineales sin Memoria

Los sistemas no lineales más sencillos son aquellos sin memoria. La expresión de un sistema no lineal discreto sin memoria es  $y[n] = f(x[n])$ , donde  $f(\cdot)$  puede ser cualquier función no lineal. Al igual que ocurre con los sistemas lineales, ningún sistema real se pueden considerar estrictamente sin memoria, puesto que esto indicaría una respuesta infinitamente rápida (instantánea) a los cambios en la entrada (es decir, un ancho de banda infinito). Sin embargo, en muchas aplicaciones prácticas resulta razonable suponer que un sistema no tiene memoria cuando la variación temporal de la señal de entrada es muy lenta en comparación con la dependencia temporal del sistema. Ejemplos de sistemas no lineales sin memoria son algunos dispositivos de estado sólido como los diodos, numerosos sensores (termopares por ejemplo), los tubos de onda progresiva (TWTs) utilizados en comunicaciones por satélite, y muchos sistemas usados en el procesamiento de señales de voz e imagen (por ejemplo la igualación de histogramas o cualquier operación en la que se establezca un umbral para las señales).

Los sistemas no lineales sin memoria se pueden caracterizar de manera exacta mediante el desarrollo en serie de Taylor (DST) siempre que  $f$  sea una función continua [Apost1967]. En la práctica el DST habitualmente tiene longitud infinita, de modo que únicamente se usa un número finito de términos del mismo para aproximar  $f$ , obteniéndose un *modelo polinómico*. Alternativamente, existen otras muchas técnicas de aproximación funcional que se pueden utilizar para modelar  $f$  [Lorent1996, Anasta2001, Devore1993]: métodos localmente lineales o polinómicos, “splines”, “wavelets”, redes neuronales, etc. No obstante, a pesar de su mayor complejidad frente a los sistemas lineales, los sistemas no lineales sin memoria se pueden caracterizar fácilmente, y presentan un comportamiento dinámico sencillo y bien comprendido, no siendo objeto de estudio en esta Tesis.

### 2.1.3.2. Sistemas No Lineales con Memoria

En muchas ocasiones se deben considerar sistemas con memoria. Esto es, sistemas para los cuales la salida depende del valor de la entrada en instantes anteriores y/o posteriores. La expresión más general posible de un sistema no lineal (SNL) discreto causal con memoria es [Tong1990]

$$f(y[n], \dots, y[n-p], x[n], \dots, x[n-q], n) = 0, \quad (2.1)$$

siendo  $f$  una función no lineal arbitraria, y con  $p, q \in \mathbb{Z}^+$ . Sin embargo, habitualmente se suele considerar que la salida en un instante se puede separar de la salida en instantes anteriores, así como de las entradas. Suponiendo además que  $f$  no es variante con el tiempo (esto es, que no depende de  $n$ ) se puede reescribir (2.1) como

$$y[n] = f_y(y[n-1], \dots, y[n-p]) + f_x(x[n], \dots, x[n-q]). \quad (2.2)$$

Anulando la primera función a la derecha de la igualdad en (2.2) se obtiene la expresión general de un SNL discreto con memoria finita,

$$y[n] = f(x[n], x[n-1], \dots, x[n-q]),$$

denominado en ocasiones *filtro FIR no lineal*, y haciendo  $f_x(x[n], \dots, x[n-q]) = x[n]$  se obtiene la ecuación general del *modelo no lineal autorregresivo* (modelo NLAR) [Tong1990],

$$y[n] = x[n] + f(y[n-1], \dots, y[n-p]),$$

que es la expresión más general que se suele utilizar en la práctica a la hora de trabajar con SNL con memoria infinita, también conocidos como *filtros IIR no lineales* o *sistemas no lineales realimentados*.

El efecto de la memoria consiste en forzar una cierta suavidad en la función del sistema, lo que se manifiesta en una limitación en banda de las señales de salida. Ejemplos de sistemas no lineales con memoria finita son algunos componentes electrónicos como bobinas y condensadores, ciertos modelos de amplificadores no lineales, los filtros de mediana, y en general los clasificadores y estimadores óptimos. Ejemplos de sistemas no lineales con memoria infinita son los osciladores no lineales, los algoritmos de seguimiento y predicción no lineal como el filtro de Kalman y sus variantes, o los métodos de control no lineal.

Los SNL con memoria finita se pueden caracterizar de manera exacta mediante una extensión con memoria del DST: el desarrollo en serie de Volterra (DSV) [Rugh1981]. Al igual ocurría con el DST, el DSV habitualmente presenta una longitud infinita. En consecuencia, la caracterización práctica de un SNL con memoria finita se convierte de nuevo en un problema de aproximación funcional, en este caso  $(q+1)$ -dimensional. Utilizando un DSV únicamente de orden  $m$  se consigue una aproximación polinómica global con  $(q+1)^{m+1}$  parámetros, aunque una vez más existen numerosas alternativas al DSV truncado: redes neuronales, “splines”  $(m+1)$ -dimensionales, modelos lineales a tramos, aproximación por el vecino más próximo, etc. En cualquier caso, estos sistemas tampoco presentan un comportamiento dinámico complicado, y el estudio de métodos para su aproximación adecuada no es el objetivo de la Tesis.

Por último, los SNL con memoria infinita pueden dar lugar a comportamientos dinámicos enormemente más complejos que cualquiera de los sistemas anteriores, se conocen como *sistemas dinámicos*, y son los estudiados en esta Tesis. En consecuencia, esta clase de sistemas se describen con mayor detalle en las secciones 2.2 (introducción y sistemas dinámicos generales) y 2.3 (sistemas dinámicos discretos unidimensionales).

## 2.2. Sistemas Dinámicos

En este apartado se definen los sistemas dinámicos, con los que se trabaja a lo largo de toda la Tesis, así como algunos conceptos fundamentales relacionados con los mismos. También se muestra su clasificación de acuerdo con diversos criterios, y se expone la clase de sistemas dinámicos con los que se va a trabajar.

### 2.2.1. Definición y Clasificación de los Sistemas Dinámicos

El adjetivo dinámico indica movimiento, cambio, variación. Esta es la característica fundamental de estos sistemas, y de la que toman su nombre: un *sistema dinámico* se podría definir como un conjunto de reglas que describen cómo evoluciona un determinado fenómeno a partir de un cierto estado inicial a medida que cambia una variable independiente, generalmente el tiempo.

Los sistemas dinámicos han resultado fundamentales en el estudio físico del universo desde los tiempos de Newton y Leibniz, puesto que son el instrumento usado generalmente para describirlo [Apost1967, Aches1997]. Un sistema dinámico puede ser continuo o discreto. Los sistemas dinámicos continuos suelen expresarse como sistemas de ecuaciones diferenciales,

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= f_1(x_1, x_2, \dots, x_m, t), \\ \dot{x}_2 &= f_2(x_1, x_2, \dots, x_m, t), \\ &\vdots \\ \dot{x}_m &= f_m(x_1, x_2, \dots, x_m, t). \end{aligned} \tag{2.3}$$

Donde se ha omitido la dependencia explícita de cada variable con el tiempo para simplificar la notación, y  $\dot{x}_i$  denota la derivada de la variable  $i$ -ésima con respecto a la variable independiente, el tiempo. El conjunto de ecuaciones (2.3) se puede expresar vectorialmente de forma mucho más compacta como

$$\frac{d\mathbf{x}(t)}{dt} = \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t), t), \tag{2.4}$$

siendo  $\mathbf{x}(t) = [x_1(t), \dots, x_m(t)]^T$  un vector columna con todas las variables del sistema, y  $\mathbf{f} = [f_1, \dots, f_m]^T$  el conjunto de las  $m$  funciones que regulan su evolución.

Los sistemas dinámicos discretos generalmente se formulan mediante sistemas de ecuaciones en diferencias (EDs). Su forma general, utilizando la misma notación abreviada que en (2.4), viene dada por

$$\mathbf{x}[n] = \mathbf{f}(\mathbf{x}[n-1], n), \tag{2.5}$$

siendo  $\mathbf{x}[n] = [x_1[n], \dots, x_m[n]]^T$  el vector con las variables de estado del sistema. En (2.4) y (2.5) el sistema de ecuaciones formado por el conjunto de funciones  $\mathbf{f}$  es lo que se conoce como *conjunto de reglas* del sistema dinámico. En el caso de un sistema continuo  $\mathbf{f}$  también se denomina *campo vectorial*, mientras que en el caso de un sistema

discreto se suele hablar de *mapa iterado* o simplemente *mapa*. La especificación del sistema dinámico se completa con una *condición o estado inicial*,  $\mathbf{x}(0)$  o  $\mathbf{x}[0]$ , a partir del cual el sistema evoluciona de acuerdo con el conjunto de reglas.

Los sistemas dinámicos se pueden clasificar de acuerdo con numerosos criterios: discretos vs. continuos, deterministas vs. aleatorios o estocásticos, lineales vs. no lineales, conservativos vs. disipativos y expansivos, etc. Sin embargo, la única clasificación que nos interesa aquí es la que los divide en *no forzados* o *autónomos*, aquellos que no presentan ninguna excitación de entrada, y *no autónomos* o *forzados*, aquellos en los que una señal de entrada condiciona la evolución del sistema. En esta Tesis se va a trabajar con sistemas dinámicos discretos deterministas no lineales y autónomos, también conocidos como mapas iterados caóticos o simplemente mapas caóticos.

### 2.2.2. Algunas Definiciones de los Sistemas Dinámicos

En esta sección se presentan una serie de definiciones relacionadas con los sistemas dinámicos que se van a usar con frecuencia. Estas definiciones se proporcionan en general para sistemas discretos, aunque todas son fácilmente extensibles a sistemas continuos [Tufil1992, Ott1993, Alligo1996, Thomps2002]. En primer lugar, se definen dos conceptos elementales: el vector de estado y el espacio de fases o de estados.

**Definición 2.1 (Vector de Estado)** *Se conoce como vector de estado de un sistema dinámico al vector columna que contiene el valor de todas las variables dependientes del sistema dinámico en un determinado instante de tiempo o iteración.*

**Definición 2.2 (Espacio de Fases o Estados)** *Se denomina espacio de fases o espacio de estados de un sistema dinámico al conjunto de todos los posibles vectores de estado del sistema.*

Así pues, el *vector de estado*,  $\mathbf{x}[n]$ , determina la situación del sistema en cada instante de tiempo, mientras que el *espacio de fases* representa el dominio por el que puede evolucionar el sistema. La evolución del sistema en el espacio de fases a partir de un determinado estado inicial, esto es, la concatenación de vectores de estado, da lugar al concepto de *órbita* o *trayectoria*.

**Definición 2.3 (Órbita o Trayectoria)** *Se denomina órbita o trayectoria de un sistema dinámico discreto al conjunto de vectores de estado  $\{\mathbf{x}[0], \mathbf{x}[1], \mathbf{x}[2], \dots\}$  obtenido iterando el sistema de ecuaciones dado por  $\mathbf{x}[n] = \mathbf{f}(\mathbf{x}[n-1], n)$ , con  $\mathbf{x}[n] \in D$ , siendo  $D \subseteq \mathbb{R}^m$  el espacio de fases del sistema, a partir de un estado inicial  $\mathbf{x}[0] = \mathbf{x}_0$ .*

En algunos textos se reserva el concepto de trayectoria para sistemas dinámicos continuos, mientras que el de órbita se utiliza en el caso de sistemas discretos. En esta Tesis ambos conceptos se usan como sinónimos. En ocasiones resulta necesario el concepto de órbita o trayectoria hacia atrás y hacia delante. La *órbita/trayectoria hacia*



*delante* de una condición inicial  $x[0]$  se denota  $O_f^+(x[0])$ , y es la definida anteriormente, mientras que la *órbita/trayectoria hacia atrás* es la que resulta de iterar hacia atrás (es decir, de iterar usando el conjunto de funciones inversas), y para una condición inicial  $x[0]$  se denota  $O_f^-(x[0])$ .

El comportamiento de un sistema dinámico viene determinado por las relaciones entre las variables de estado (sistema de ecuaciones), el conjunto de parámetros que las gobiernan, y sus condiciones iniciales (valor del vector de estado en el instante cero). En general se desea estudiar el comportamiento asintótico de un sistema dinámico, que viene dado por los *atractores* del sistema (las regiones del espacio de fases hacia las que converge la órbita de un conjunto de condiciones iniciales) y sus *repulsores* (las regiones del espacio de fases hacia las que convergería la órbita de un conjunto de condiciones iniciales iterando hacia atrás). El hecho de que puedan coexistir varios atractores da lugar al concepto de la *cuenca de atracción*, que es el conjunto de condiciones iniciales que conducen a un determinado atractor. De manera equivalente, la *cuenca de repulsión* es el conjunto de condiciones iniciales que, al iterar hacia atrás, conducirían a un determinado repulsor. Estos conceptos se definen formalmente a continuación.

**Definición 2.4 (Conjunto Invariante)** *Se dice que  $U \subseteq D$ , siendo  $D \subseteq \mathbb{R}^m$  el espacio de fases del sistema, es un conjunto invariante del sistema dinámico definido por  $\mathbf{f}$ , si  $U = \mathbf{f}(U)$ . Esto es, si el resultado de la iteración de todos los puntos del conjunto  $U$  es el propio conjunto.*

**Definición 2.5 (Atractor y Cuenca de Atracción)** *Se dice que un conjunto invariante  $A \subset D$ , siendo  $D \subseteq \mathbb{R}^m$  el espacio de fases del sistema, es un atractor del sistema dinámico definido por  $\mathbf{f}$ , si existe otro conjunto  $U$ , con  $A \subset U \subseteq D$ , tal que*

$$\mathbf{f}^n(U) \subset U \quad (n > 0) \quad \text{y} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{f}^n(U) = A,$$

*donde  $\mathbf{f}^n(U)$  indica la aplicación reiterada  $n$  veces del conjunto de ecuaciones que definen el sistema dinámico sobre todos los puntos del conjunto  $U$ . El conjunto  $U$  de todos los puntos del espacio de fases para los que esto se cumple se denomina conjunto o cuenca de atracción de  $A$ .*

Los conceptos de repulsor y cuenca de repulsión se definen de manera idéntica a los de atractor y cuenca de atracción, sustituyendo simplemente  $f^n$  por  $f^{-n}$ . Un sistema dinámico discreto puede presentar cuatro clases distintas de atractores/repulsores en función de sus parámetros y/o sus condiciones iniciales [Kenne1995]:

1. **Punto Fijo o de Equilibrio:** Se caracteriza por un único valor en el dominio temporal,  $\mathbf{x}[n] = \mathbf{x}[n - 1]$  para todo  $n$ , y un sólo término en  $f = 0$  Hz (esto es, un nivel de continua) en el dominio frecuencial. En el espacio de fases el atractor es un único punto.

2. **Periódico o Ciclo Límite:** En el dominio temporal se observa una forma de onda periódica,  $\mathbf{x}[n] = \mathbf{x}[n - K]$  para todo  $n$  y con  $K \in \mathbb{Z}^+$ , que da lugar a un sumatorio de términos frecuenciales múltiplos de una frecuencia fundamental (armónicos) en el dominio de la frecuencia. En el espacio de fases el atractor es una colección finita de puntos  $\{\mathbf{x}[0], \dots, \mathbf{x}[K - 1]\}$ .
3. **Cuasiperiódico:** En el dominio temporal las señales parecen moduladas en amplitud, y en el frecuencial el espectro es una colección de picos a frecuencias inconmensurables (esto es, que no guardan una relación racional). El atractor es una colección infinita de puntos concentrados en una región simple del espacio de fases (es decir, una región con una forma geométrica sencilla como por ejemplo una circunferencia o un toroide).
4. **Caótico o Extraño:** Se caracteriza por un comportamiento aparentemente aleatorio de la señal en el dominio temporal, y un espectro continuo de banda ancha en el dominio frecuencial. En el espacio de fases el atractor suele presentar una estructura geométrica complicada con dimensión fractal [Falcon1990], motivo por el que se conoce como *atractor extraño* o *fractal*.

Nótese que la clasificación anterior se basa en el comportamiento asintótico de los sistemas dinámicos. La trayectoria de un punto concreto de un sistema dinámico puede no alcanzar nunca exactamente un atractor en un tiempo finito, aunque se sitúe arbitrariamente cercana al mismo conforme evoluciona el sistema. Se dice entonces que estos puntos son *asintóticamente* fijos, periódicos, etc. Por otra parte, puede ocurrir que el punto inicial alcance exactamente un atractor después de un número finito de iteraciones (transitorio inicial). En este caso se dice que estos puntos son *eventualmente* fijos, periódicos, etc. En la Sección 2.3 se muestran ejemplos de diferentes clases de comportamiento asintótico en el marco de los mapas iterados.

Las condiciones que debe cumplir un sistema dinámico para ser capaz de generar cada uno de los cuatro comportamientos anteriores son bien conocidas tanto para sistemas dinámicos continuos como discretos [Alligo1996]. El único atractor posible de un sistema lineal no forzado es un punto fijo, y de uno forzado un punto fijo o un ciclo límite. Para que un sistema pueda presentar atractores cuasiperiódicos y/o caóticos es necesario que el sistema dinámico sea no lineal. Esta es una condición necesaria, pero no suficiente. La existencia de caos en un sistema depende también de su naturaleza (continua o discreta), y de su orden. El *orden* de un sistema dinámico es el número de variables necesarias para describir su estado. El orden de un sistema autónomo es igual al número de ecuaciones que lo describen,  $m$ , mientras que el de un sistema no autónomo es  $m + 1$ , ya que es necesario especificar además el instante de tiempo.

En el caso continuo, el único atractor posible de un sistema de orden uno es un punto fijo [Alligo1996]. En el caso de los sistemas de orden dos, el conocido *teorema de Poincaré-Bendixson* demuestra que los únicos comportamientos asintóticos estructuralmente estables (esto es, que persisten ante pequeñas perturbaciones del sistema) son los puntos fijos y los ciclos límite [Alligo1996, Wiggin1990]. En consecuencia, un

sistema continuo no lineal debe ser al menos de orden tres para que puedan existir atractores caóticos. En el caso discreto depende de si el sistema es invertible o no. Utilizando un mapa no invertible es posible generar señales caóticas con sistemas extraordinariamente simples de orden uno como el mapa logístico [May1974, May1976]. Por el contrario, el comportamiento dinámico de un mapa invertible unidimensional es muy sencillo [Devan1989, Panta1994], siendo necesario disponer de sistemas de al menos orden dos, como el mapa de Hénon [Henon1976], para poder generar señales caóticas [Devan1989, Alligo1996].

## 2.3. Mapas Iterados

En esta sección se describen los sistemas considerados a lo largo de toda la Tesis: los mapas iterados caóticos. Se presentan algunas definiciones, las principales clases de mapas utilizados, y la manera de generar muestras usando un mapa iterado.

### 2.3.1. Introducción y Definiciones

Todos los esquemas de estimación planteados en esta Tesis se basan en sistemas dinámicos autónomos discretos en un estado caótico, esto es, en un estado tal que dan lugar a señales caóticas. Estos sistemas son conocidos como *mapas iterados caóticos* o simplemente *mapas caóticos*, y su definición se proporciona a continuación.

**Definición 2.6 (Mapa)** *Un mapa es una aplicación  $\mathbf{f} : X \rightarrow Y$  que asocia cada elemento  $\mathbf{x} \in X \subseteq \mathbb{R}^m$  con un único elemento  $\mathbf{y} \in Y \subseteq \mathbb{R}^q$ , y que se denota como  $\mathbf{y} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$ . El conjunto  $X$  se denomina conjunto de partida o dominio de  $\mathbf{f}$ , y el conjunto  $Y$  conjunto de llegada o codominio de  $\mathbf{f}$ .*

**Definición 2.7 (Mapa Iterado Caótico)** *Sea  $\mathbf{f}$  una aplicación  $\mathbf{f} : D \rightarrow D$ , con  $D \subseteq \mathbb{R}^m$ . Al sistema formado por el conjunto de  $m$  ecuaciones*

$$\mathbf{x}[n] = \mathbf{f}(\mathbf{x}[n-1]; \boldsymbol{\theta}),$$

*siendo  $\boldsymbol{\theta}$  un vector  $p \times 1$  de parámetros, se le denomina mapa iterado. Se dice que un mapa iterado es caótico, para una determinada combinación de sus parámetros y un conjunto de condiciones iniciales  $\mathbf{x}[0]$ , si las secuencias que genera son caóticas.*

En definitiva, un mapa caótico es simplemente una clase de sistema dinámico discreto autónomo. En esta Tesis se va a trabajar exclusivamente con mapas unidimensionales. Un *mapa unidimensional* es una aplicación  $f : D \rightarrow D$ , con  $D \subseteq \mathbb{R}$ , cuya ecuación es

$$x[n] = f(x[n-1]), \quad (2.6)$$

obviando la dependencia con el vector de parámetros  $\boldsymbol{\theta}$ , o bien

$$x[n] = f(x[n-1]; \boldsymbol{\theta}), \quad (2.7)$$

incluyendo explícitamente  $\theta$  en (2.6) cuando resulta deseable resaltar la dependencia de las muestras generadas con el vector de parámetros del mapa. Además, como se ha visto en la Sección 2.2.2,  $f(x)$  debe ser una función no invertible para que las secuencias generadas puedan ser caóticas.

### 2.3.2. Generación de Secuencias de Mapas Iterados

En este apartado se consideran dos métodos para la generación de secuencias de un mapa iterado unidimensional: analíticamente mediante la aplicación repetida de (2.6) o (2.7), y mediante iteración gráfica.

#### 2.3.2.1. Generación Analítica de las Secuencias

Supongamos que se dispone del valor de  $x$  para la muestra  $n$ -ésima,  $x[n]$ , y se desea calcular el valor de su muestra  $(n+k)$ -ésima,  $x[n+k]$ , siendo  $k > 0$ . La forma evidente de hacerlo es mediante la aplicación reiterada de (2.6) a partir de la muestra inicial:

$$x[n+1] = f(x[n]), \quad x[n+2] = f(x[n+1]), \quad \dots, \quad x[n+k] = f(x[n+k-1]).$$

Esta operación es equivalente a realizar  $k$  veces la composición funcional de  $f(x)$ , de modo que la muestra  $(n+k)$ -ésima de la secuencia se puede escribir como

$$x[n+k] = \underbrace{f \circ f \circ \dots \circ f}_{k \text{ veces}}(x[n]) = \underbrace{f(f(\dots f(f(x[n]))) \dots)}_{k \text{ veces}}.$$

Habitualmente esta expresión se suele denotar de forma abreviada como

$$x[n+k] = f^k(x[n]; \theta) = f^k(x[n]). \quad (2.8)$$

Puesto que a lo largo de la Tesis nunca es necesario trabajar con funciones elevadas a la  $k$ -ésima potencia, en esta ocasión no existe confusión notacional posible.

En el caso de que el mapa sea invertible, también se puede realizar la operación inversa. Supongamos nuevamente que se conoce el valor de  $x$  para la muestra  $n$ -ésima,  $x[n]$ , y que se desea calcular el valor de su muestra  $(n-k)$ -ésima,  $x[n-k]$ , siendo  $k > 0$ . Al igual que antes, se puede hallar fácilmente mediante la aplicación reiterada de  $f^{-1}(x)$  a partir de la muestra final:

$$x[n-1] = f^{-1}(x[n]), \quad x[n-2] = f^{-1}(x[n-1]), \quad \dots, \quad x[n-k] = f^{-1}(x[n-(k-1)]).$$

Del mismo modo que antes, esta operación es equivalente a la composición funcional  $k$ -ésima de  $f^{-1}(x)$ ,

$$x[n-k] = \underbrace{f^{-1} \circ f^{-1} \circ \dots \circ f^{-1}}_{k \text{ veces}}(x[n]) = \underbrace{f^{-1}(f^{-1}(\dots f^{-1}(f^{-1}(x[n]))) \dots)}_{k \text{ veces}},$$

y utilizando una notación abreviada se obtiene el equivalente de (2.8) para la iteración hacia atrás:

$$x[n - k] = f^{-k}(x[n]; \boldsymbol{\theta}) = f^{-k}(x[n]). \quad (2.9)$$

Las ecuaciones (2.8) y (2.9) se pueden agrupar en una única fórmula recursiva:

$$f^k(x) = \begin{cases} f(f^{k-1}(x)), & k > 0; \\ x, & k = 0; \\ f^{-1}(f^{k+1}(x)), & k < 0. \end{cases} \quad (2.10)$$

En el caso de que el mapa no sea inyectivo (es decir, no se cumpla que  $f(x_1) = f(x_2) \Leftrightarrow x_1 = x_2$ ), su inversa no se encuentra definida de manera única: para cada punto  $y$  del conjunto de llegada existe en general más de un valor  $x$  del conjunto de salida tal que  $y = f(x)$ . En este caso es necesario disponer de información a priori para seleccionar uno de los múltiples valores posibles de  $x$ : la región del espacio de fases a la que pertenece. Si se dispone de dicha información (o se puede estimar de alguna manera) se puede aplicar (2.10) de la misma manera que si el mapa fuera invertible.

### 2.3.2.2. Iteración Gráfica

Si se desea obtener la secuencia de muestras  $\{x[0], \dots, x[N]\}$  a partir de un  $x[0]$  conocido, se puede aplicar de manera iterativa (2.6), o se puede usar la ecuación (2.8) con  $n = 1, \dots, N$  para generar la secuencia caótica. Alternativamente, la secuencia de muestras se puede obtener mediante un procedimiento conocido como *iteración gráfica*. El proceso consiste en proyectar verticalmente la muestra inicial,  $x[0]$ , sobre la gráfica de  $f(x)$ , y luego horizontalmente sobre la gráfica de la recta  $y = x$ . Repitiendo este proceso  $N$  veces se van obteniendo los sucesivos puntos de la secuencia. Los pasos detallados de este sencillo procedimiento se enumeran en el Algoritmo 2.1, y en la Figura 2.1 se muestran, a modo de ejemplo, las gráficas generadas cuando se usa el mapa logístico [May1974, May1976],  $x[n + 1] = \lambda x[n](1 - x[n])$ , con diferentes valores de  $\lambda$ . La figura obtenida se suele llamar *dibujo de telaraña* (“cobweb plot”) [Alligo1996], y a menudo permite reconocer por inspección visual el tipo de comportamiento del sistema. En el caso de los mapas unidimensionales son posibles tres clases de comportamientos:

1. La secuencia de muestras converge hacia un único *punto fijo*. Los puntos fijos se pueden obtener analíticamente resolviendo la ecuación  $f(x) = x$ , y en el diagrama de telaraña vienen dados por los puntos de corte de la función  $f(x)$  y la recta  $y = x$ . Esta situación, que es la que se muestra en la Figura 2.1(a)–(b), no es interesante desde el punto de vista de la dinámica.
2. Después de un periodo inicial transitorio, aparece una alternancia en la secuencia de muestras entre  $K$  puntos. Esto es lo que se conoce como una *solución periódica*, o *ciclo límite* de periodo  $K$ . Los puntos de periodo  $K$  se obtienen como solución de  $f^K(x) = x$ , descartando las soluciones pertenecientes a periodos menores (esto

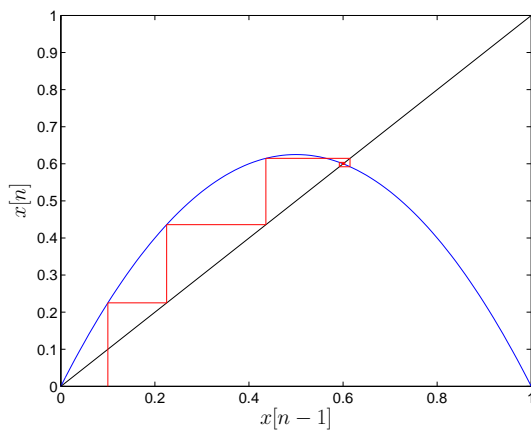
es, las soluciones de  $f^r(x) = x$ , con  $r = 1, \dots, K - 1$ ). Un ejemplo de esta situación, dinámicamente más interesante, se muestra en la Figura 2.1(c)–(d).

3. La secuencia de muestras no se estabiliza en ningún punto ni conjunto de puntos, sino que presenta un comportamiento errático, tendiendo a ocupar todo el espacio de fases. En este caso no existen puntos fijos ni ciclos límite estables, y las muestras se distribuyen a lo largo de todo el diagrama de telaraña, como se muestra en la Figura 2.1(e)–(f). En este caso se obtiene una *solución caótica*.

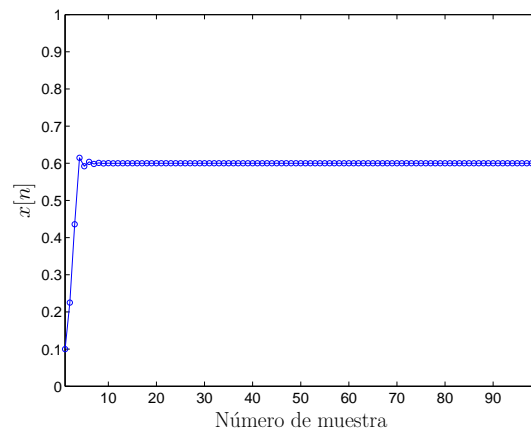
1. Se dibuja la gráfica de la función  $f(x)$  correspondiente al mapa iterado.
2. Se dibuja la gráfica de la recta  $y = x$ .
3. Se elige la muestra inicial,  $x[n]$ , y se marca en el eje  $x$ .
4. Se proyecta verticalmente  $x[n]$  hasta que corta a  $f(x)$ , obteniéndose de este modo la salida tras la primera iteración,  $f(x[n])$ , que coincide con la entrada para la siguiente iteración,  $x[n + 1]$ .
5. Se proyecta horizontalmente  $f(x[n])$  sobre la recta  $y = x$ , obteniéndose  $x[n + 1]$ .
6. Se proyecta verticalmente  $x[n + 1]$  hasta que corta a  $f(x)$ , obteniéndose de este modo la salida tras la segunda iteración,  $f(x[n + 1])$ , que coincide con  $x[n + 2]$ .
7. Se repiten los pasos 5 y 6 para obtener tantas muestras de la secuencia como sean necesarias.

**Algoritmo 2.1:** Iteración gráfica de una condición inicial para generar el resto de la secuencia caótica.

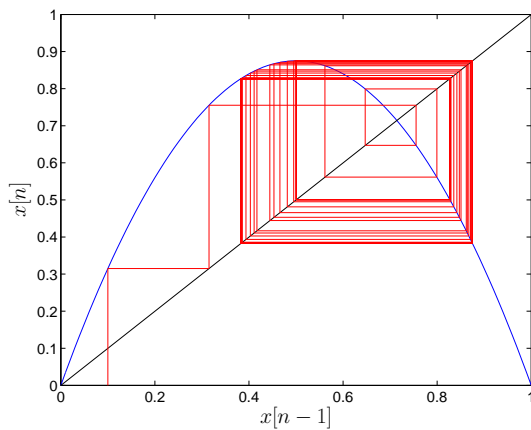
En cualquier caso, aunque el diagrama de telaraña puede resultar una herramienta útil y reveladora de un determinado comportamiento, no es un indicador fiable de la existencia de caos, puesto que en ocasiones se puede llegar a confundir un ciclo límite de periodo elevado con un comportamiento caótico. Este mismo procedimiento gráfico se puede utilizar para obtener la trayectoria de la secuencia a partir de una condición final. Simplemente se cambia la gráfica de  $f(x)$  por la de  $f^{-1}(x)$ , y si la función tiene más de una preimagen (es decir, si no es invertible) se selecciona una de ellas para continuar el proceso. Esta selección se puede realizar en base a alguna información a priori o aleatoriamente. Ahora supóngase que se obtiene el valor de la muestra  $N$ -ésima,  $x[N]$ , iterando hacia delante a partir de  $x[0]$ , y que se itera hacia atrás a partir de  $x[N]$  seleccionando la preimagen anterior aleatoriamente. Nótese que de este modo la muestra inicial obtenida,  $\tilde{x}[0]$ , va a diferir en general en gran medida de la muestra inicial utilizada para la iteración hacia delante,  $x[0]$ , como se muestra en la Figura 2.2. Así pues, queda patente la necesidad de seleccionar cuidadosamente la inversa elegida a la hora de iterar hacia atrás si se pretende alcanzar una determinada condición inicial.



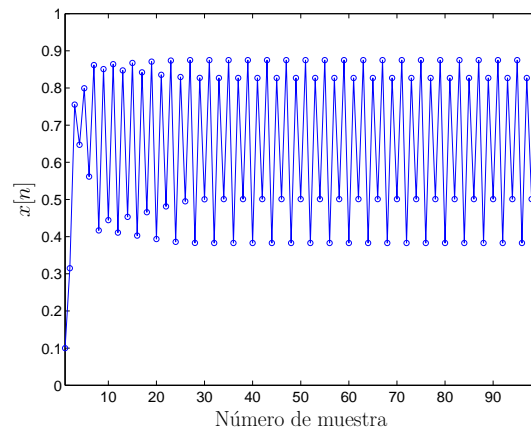
(a)



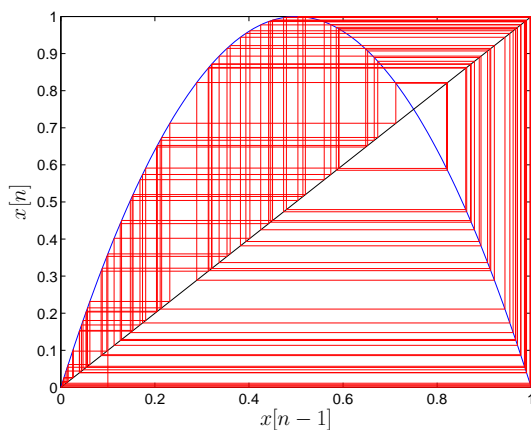
(b)



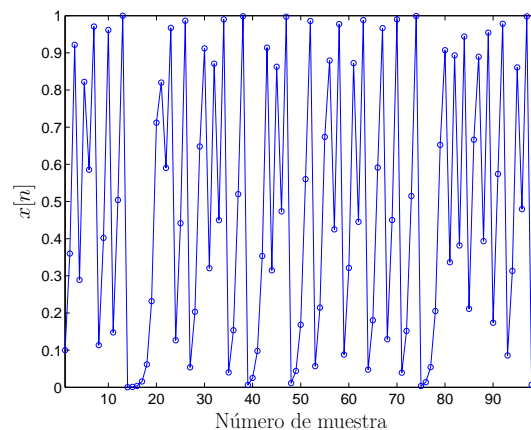
(c)



(d)



(e)



(f)

Figura 2.1: Ejemplo de iteración gráfica para el mapa logístico,  $f(x) = \lambda x(1 - x)$ , con distintos valores de  $\lambda$ . (a) y (b) Trayectoria en el espacio de fases y señal temporal con  $\lambda = 2,5$ . La solución en este caso es un punto fijo en  $x = 0,6$ . (c) y (d) Trayectoria en el espacio de fases y señal temporal con  $\lambda = 3,5$ . La solución en este caso es un ciclo límite de periodo 4. (e) y (f) Trayectoria en el espacio de fases y señal temporal con  $\lambda = 4$ . La solución en este caso es caótica: tiende a ocupar todo el espacio de fases.

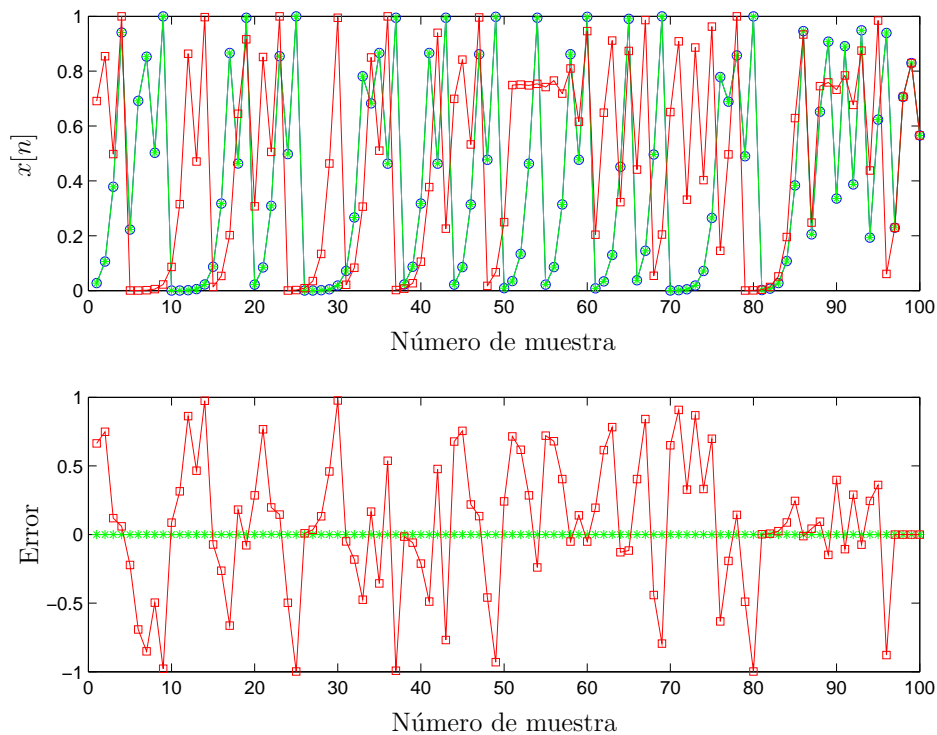


Figura 2.2: Diferencias en la iteración hacia atrás con distintas secuencias simbólicas: secuencia original,  $x_1[n]$ , en azul; secuencia obtenida iterando hacia atrás a partir de  $x_1[N]$  con su mismo itinerario,  $x_2[n]$ , en verde; secuencia obtenida iterando hacia atrás a partir de  $x_1[N]$  con un itinerario aleatorio,  $x_3[n]$ , en rojo.

### 2.3.3. Mapas Expansores, Lineales a Tramos y de Markov

En este apartado y el posterior se describen las principales clases de mapas caóticos utilizados a lo largo de la Tesis. Dentro de la amplia clase de mapas caóticos unidimensionales, dos subconjuntos importantes de mapas que resultan tratables y con los que se trabaja habitualmente son los mapas expansores y los mapas lineales a tramos. Los *mapas expansores* (“eventually expanding maps”) se caracterizan por tres propiedades fundamentales: son suaves a tramos, mapean un intervalo sobre sí mismo, y presentan al menos un tramo en el que la pendiente tiene un módulo mayor que la unidad [Isabel1995, Isabel1998]. Su definición formal se proporciona a continuación.

**Definición 2.8 (Mapa Expansor)** *Sea una aplicación  $f : I \rightarrow I$ . Se dice que  $f(x)$  es un mapa unidimensional eventualmente expansor, o simplemente expansor, si*

1. *Existe un número finito de puntos  $e_0 < e_1 < \dots < e_M$ , que definen una partición con  $M$  intervalos,  $E_i = [e_{i-1}, e_i]$  con  $i = 1, \dots, M - 1$  y  $E_M = [e_{M-1}, e_M]$ , de tal modo que  $I = \cup_{i=1}^M E_i$  y en cada uno de los intervalos el mapa es monótono, continuo y diferenciable.*



2. La función  $1/|f'(x)|$  es de variación acotada. Esta condición, que es una restricción de suavidad sobre la función derivada del mapa, puede proporcionarse también como una restricción sobre la pendiente de la derivada. Esto es, existe una constante  $B > 0$  tal que, para cualquier valor de  $x$ , excepto posiblemente  $x \in \{e_0, e_1, \dots, e_M\}$ ,  $|f'(x)| < B$ .
3. Existen una constante real  $K > 1$ , y un número entero  $m$  tales que, en todo punto en que existe la derivada, se cumple que

$$\left| \frac{d}{dx} f^m(x) \right| \geq K. \quad (2.11)$$

Esta última condición, dada por (2.11), es la que le da al mapa su carácter expansor, y garantiza que las secuencias generadas por el mismo sean caóticas. En algunos casos se dice que el mapa es *hiperbólico* cuando la condición se cumple para algún  $m \geq 1$  y únicamente se dice que es expansor si se cumple para  $m = 1$ . En cualquier caso, todo mapa expansor admite una formulación compacta utilizando una *función característica* o *indicadora*, que se define a continuación.

**Definición 2.9 (Función Característica)** *Sea una aplicación  $\chi_R : D \rightarrow \{0, 1\}$  con  $D \subseteq \mathbb{R}$ . Se dice que  $\chi_R(x)$  es la función característica o indicadora de la región  $R$  si tiene la forma siguiente:*

$$\chi_R(x) = \begin{cases} 1, & x \in R; \\ 0, & x \notin R. \end{cases} \quad (2.12)$$

La función característica de una región aplicada a una secuencia de muestras da como resultado simplemente otra secuencia que indica qué muestras pertenecen a la región y cuales no. De modo que todo mapa expansor se puede expresar, utilizando la función característica, como un sumatorio a lo largo de los  $M$  intervalos en los que se divide el espacio de entrada:

$$f(x) = \sum_{i=1}^M f_i(x) \chi_{E_i}(x). \quad (2.13)$$

Donde  $f_i(x)$  es la función (monótona, continua, derivable e invertible) que caracteriza al mapa expansor en el intervalo  $i$ -ésimo.

La segunda familia de mapas interesante, y la más importante de las utilizadas en la Tesis, son los *mapas lineales a tramos* (PWL). En realidad, se trabaja con mapas afines a tramos (PWA), aunque se mantiene el nombre PWL por haberse generalizado en la literatura. Su definición formal se proporciona a continuación.

**Definición 2.10 (Mapa PWL)** Sea una aplicación  $f : I \rightarrow I$ . Se dice que  $f(x)$  es un mapa lineal a tramos (PWL) unidimensional si existe un número finito de puntos  $e_0 < e_1 < \dots < e_M$ , de tal modo que el intervalo  $I = [e_0, e_M]$  se puede subdividir en  $M$  intervalos,  $E_i = [e_{i-1}, e_i)$  con  $i = 1, \dots, M - 1$  y  $E_M = [e_{M-1}, e_M]$ , dentro de los cuales  $f(x)$  es afín. Matemáticamente, un mapa PWL se puede expresar mediante la función característica de cada una de estas regiones:

$$f(x) = \sum_{i=1}^M (a_i x + b_i) \chi_{E_i}(x), \quad (2.14)$$

Un mapa expansor puede ser lineal a tramos o no serlo, e igualmente un mapa PWL puede ser expansor o no. En la Figura 2.3 se muestra un caso particular de mapa PWL: el mapa de desplazamiento de Bernouilli (“Bernouilli shift map”).

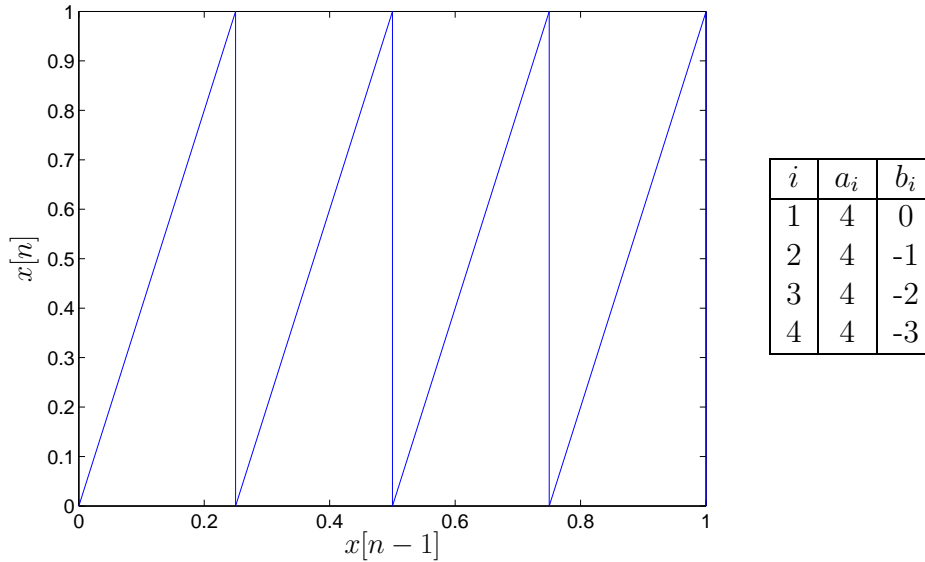


Figura 2.3: Ejemplo de mapa PWL: mapa de desplazamiento de Bernouilli con cuatro intervalos iguales, esto es,  $M = 4$ ,  $e_0 = 0$ ,  $e_1 = 1/4$ ,  $e_2 = 1/2$ ,  $e_3 = 3/4$  y  $e_4 = 1$ . Forma del mapa y tabla con el valor de sus parámetros en cada intervalo.

Esta es una clase de mapa PWL que transforma cada intervalo  $E_i$  del espacio de fases en el espacio de fases completo mediante una recta con pendiente positiva. Esta familia de mapas presenta la propiedad de estar completamente definidos mediante la partición del espacio de fases. La expresión del mapa en cada intervalo viene dada por

$$f_i(x) = e_0 + \frac{e_M - e_0}{e_i - e_{i-1}}(x - e_{i-1}) = e_M - \frac{e_M - e_0}{e_i - e_{i-1}}(e_i - x), \quad (2.15)$$

siendo la pendiente del mapa en cada región

$$a_i = \frac{e_M - e_0}{e_i - e_{i-1}},$$

y el término de “offset”

$$b_i = \frac{e_0 e_i - e_M e_{i-1}}{e_i - e_{i-1}}.$$

En el caso en que la partición del espacio de fases es uniforme (esto es, que  $e_i = (e_M - e_0)i/M + e_0$  con  $i = 0, \dots, M$ ), (2.15) resulta

$$f_i(x) = M(x - e_0) - e_M(i - 1) + e_0 i,$$

pudiendo identificarse de nuevo fácilmente los parámetros del mapa PWL en cada intervalo:  $a_i = M$  y  $b_i = -e_0(M - i) - e_M(i - 1)$ , con  $i = 1, \dots, M$ .

Habitualmente se considera que el espacio de fases del mapa de Bernouilli es  $[0,1]$  (es decir,  $e_0 = 0$  y  $e_M = 1$ ). En este caso, (2.15) se reduce a

$$f_i(x) = 1 - \frac{e_i - x}{e_i - e_{i-1}} = \frac{x - e_{i-1}}{e_i - e_{i-1}},$$

siendo ahora  $a_i = 1/(e_i - e_{i-1})$  y  $b_i = -e_{i-1}/(e_i - e_{i-1})$ . Por último, si además la partición del espacio de fases es uniforme, entonces  $f_i(x) = Mx - (i - 1)$ , y se tiene  $a_i = M$  y  $b_i = -(i - 1)$ . Este es el caso que se muestra en la Figura 2.3 con  $M = 4$ .

Un caso particular de mapa de desplazamiento de Bernouilli se da cuando  $M = 2$ ,  $e_0 = 0$ ,  $e_1 = 1/2$  y  $e_2 = 1$ . De hecho, este mapa es el único al que algunos autores denominan de desplazamiento de Bernouilli, aunque se conoce más habitualmente como *mapa de desplazamiento binario* o “binary shift map” (BSM), porque su efecto sobre la señal de entrada  $x$  consiste en eliminar el bit más significativo de la representación binaria de  $x$  en cada iteración y desplazar el resto un bit hacia la izquierda, y también como *mapa de diente de sierra* (“sawtooth map”) por su forma. Este mapa se va a usar con frecuencia, y sus parámetros son  $a_1 = a_2 = 2$ ,  $b_1 = 0$  y  $b_2 = -1$ . De manera alternativa, su ecuación se puede escribir como [Beck1993]:

$$f(x) = \begin{cases} 2x, & 0 \leq x < 0,5; \\ 2x - 1, & 0,5 \leq x \leq 1. \end{cases} \quad (2.16)$$

Resulta evidente que el BSM se puede expresar como

$$f(x) = (2x \bmod 1) = 2x - [2x],$$

donde  $(x \bmod y)$  se utiliza para representar la función módulo (esto es, el número real,  $z$ , mayor o igual que cero y menor que  $y$ , tal que  $x = ky + z$  con  $k \in \mathbb{Z}$ ), y  $[\cdot]$  denota la parte entera de un número real aproximada por abajo (es decir, el mayor entero que es menor o igual que dicho número real).

La última clase genérica de mapas unidimensionales interesantes, los *mapas lineales a tramos expansores de Markov* o simplemente *mapas de Markov*, se obtiene juntando las propiedades de los mapas expansores y de los mapas PWL, y requiriendo una propiedad adicional: la propiedad de Markov.

**Definición 2.11 (Mapa de Markov)** *Sea una aplicación  $f : I \rightarrow I$ . Se dice que  $f(x)$  es un mapa lineal a tramos expansor de Markov, mapa PWL expansor de Markov o simplemente mapa de Markov, si*

1.  $f(x)$  es un mapa expansor.
2.  $f(x)$  es un mapa lineal a tramos (PWL).
3. El mapa presenta la propiedad de Markov, que implica que puntos de la partición se mapean en otros puntos de la partición. Esto es, para todo  $e_i$  ( $i = 0, \dots, M$ ) se tiene que  $f(e_i) = e_j$  para algún  $j = 0, \dots, M$ .

Los mapas de Markov son tratables analíticamente y resultan de amplia aplicación en procesado de señal debido a dos propiedades importantes [Isabel1997, Isabel1998]:

1. Si se cuantifican de manera adecuada, por ejemplo usando el itinerario obtenido con su partición natural (véase la Sección 2.4), las señales generadas por un mapa de Markov resultan indistinguibles de señales generadas por cadenas de Markov.
2. Permiten aproximar señales generadas por mapas expansores más generales.

Un ejemplo de un mapa de Markov con 4 intervalos se muestra en la Figura 2.4, junto con los límites de los intervalos y los valores de los parámetros (pendiente y “offset”) dentro de cada uno. En la Figura 2.5(a) se muestra otro ejemplo de un mapa de Markov más sencillo, con tan sólo 2 intervalos [Panta2003], que se utiliza con frecuencia para presentar resultados en los capítulos 3–5. Junto con el mismo, en la Figura 2.5(b) se muestra un ejemplo de un mapa PWL con tres intervalos no markoviano, esto es, que no cumple la propiedad de Markov.

### 2.3.4. Mapas Unimodales

Una clase amplia de mapas utilizada en la literatura, y con la que se trabaja con frecuencia en esta Tesis, son los mapas unimodales: funciones con una única moda (máximo). Su definición formal se proporciona a continuación.

**Definición 2.12 (Mapa Unimodal)** *Sea una aplicación  $f : I \rightarrow I$  con  $I = [e_0, e_2]$ . Se dice que el mapa  $f(x)$  es unimodal si existe un punto  $e_1$ , con  $e_0 < e_1 < e_2$ , tal que  $f(x)$  es monótona estrictamente creciente en el intervalo  $[e_0, e_1)$ , y monótona estrictamente decreciente en el intervalo  $[e_1, e_2]$ .*

Los mapas unimodales son los mapas caóticos más simples y extendidos, y se usan frecuentemente a lo largo de la Tesis. Las dos clases de mapas caóticos unimodales más importantes utilizadas son la familia de mapas de tienda de campaña (“tent-maps”), y los mapas polinómicos, dentro de los cuales el más conocido es el mapa logístico.

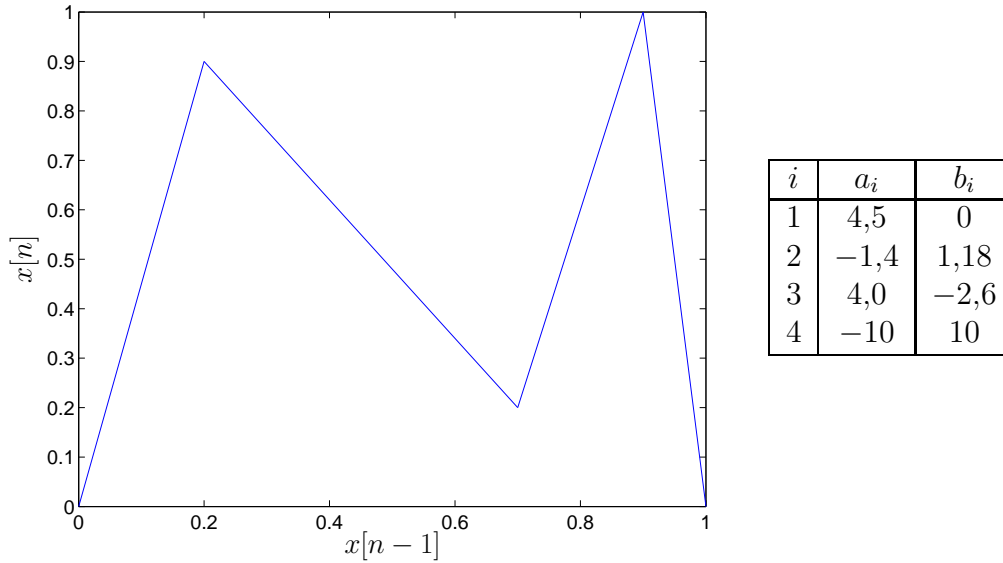


Figura 2.4: Ejemplo de mapa de Markov con cuatro intervalos:  $e_0 = 0$ ,  $e_1 = 0,2$ ,  $e_2 = 0,7$ ,  $e_3 = 0,9$  y  $e_4 = 1$ . Forma del mapa y tabla con el valor de sus parámetros en cada intervalo.

### 2.3.4.1. Mapas de Tienda de Campaña

La familia de mapas de tienda de campaña es una subclase de mapas PWL que constan únicamente de dos intervalos. Dentro de esta familia a su vez se pueden distinguir cuatro subfamilias: el *mapa de tienda de campaña* o “tent-map” (TM), el *mapa de tienda de campaña sesgado* o “skew tent-map” (SK-TM), el *mapa de tienda de campaña simétrico* o “symmetric tent-map” (S-TM), y el *mapa de tienda de campaña sesgado bipolar* o “bipolar skew tent-map” (BSK-TM).

El “tent-map” es el que da nombre a la familia, y el más utilizado en la literatura. Se trata de una aplicación  $f : [0, 1] \rightarrow [0, \beta/2]$ , con  $0 < \beta \leq 2$  en general, de la forma

$$f(x) = \begin{cases} \beta x, & 0 \leq x < 0,5; \\ \beta(1 - x), & 0,5 \leq x \leq 1. \end{cases} \quad (2.17)$$

La forma del TM para  $\beta = 2$  se muestra en la Figura 2.8(a), que aparece al final de esta sección. Como se puede apreciar, el “tent-map” tiene un único máximo en  $x = 0,5$ . Obviamente se trata de un mapa PWL con dos intervalos,  $E_1 = [0, 0,5]$  y  $E_2 = [0,5, 1]$ , de modo que (2.17) se puede escribir como

$$f(x) = \beta x \chi_{E_1}(x) + \beta(1 - x) \chi_{E_2}(x).$$

Además, para  $\beta = 2$  y  $\beta = 1$  se trata de un mapa de Markov, lo que no es cierto para ningún otro valor del parámetro. La ecuación anterior también se puede expresar de forma compacta utilizando la función signo:

$$f(x) = \beta x \frac{1 - \text{sign}(x - 0,5)}{2} + \beta(1 - x) \frac{1 + \text{sign}(x - 0,5)}{2},$$

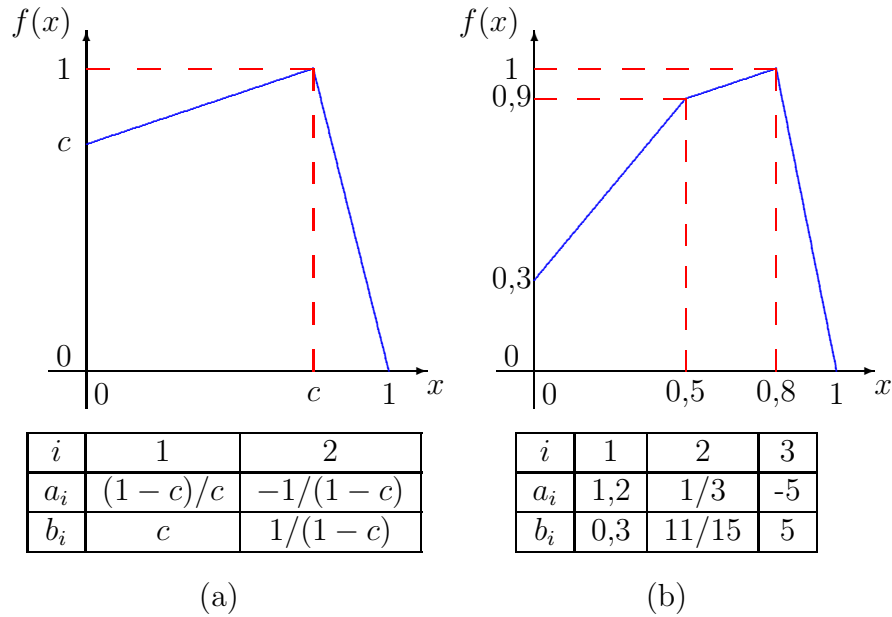


Figura 2.5: Ejemplo de un mapa de Markov y un mapa no markoviano. (a) Mapa de Markov con dos intervalos ( $e_0 = 0$ ,  $e_1 = c$ , y  $e_2 = 1$ ) y tabla con sus parámetros en cada intervalo. (b) Mapa no markoviano con tres intervalos ( $e_0 = 0$ ,  $e_1 = 0,5$ ,  $e_2 = 0,8$ , y  $e_3 = 1$ ) y tabla con sus parámetros en cada intervalo.

estando la función signo definida como

$$\text{sign}(x) = \begin{cases} 1, & x \geq 0; \\ -1, & x < 0. \end{cases}$$

Denotando  $s(x) = \text{sign}(x)$ , la expresión del TM resulta finalmente

$$f(x) = \frac{\beta}{2}(1 - 2x s(x - 0,5)) + s(x - 0,5).$$

Alternativamente, utilizando la función módulo y recordando que  $|x - 0,5| = (x - 0,5)s(x - 0,5)$ , la expresión habitualmente usada para el TM resulta

$$f(x) = \frac{\beta}{2}(1 - 2|x - 0,5|). \quad (2.18)$$

El comportamiento del TM viene definido por el parámetro  $\beta$ . Este parámetro de control se suele denominar *parámetro de bifurcación* en el caso de mapas unidimensionales, ya que determina su comportamiento asintótico. En función de  $\beta$  se pueden distinguir seis tipos de comportamientos asintóticos del TM [Glendi1994]:

1.  $0 < \beta < 1$ : El atractor está compuesto por un único punto fijo atractivo en el origen ( $x = 0$ ), de modo que cualquier condición inicial al cabo de unas pocas iteraciones converge hacia él, como se muestra en la Figura 2.6(a).

2.  $\beta = 1$ : Todos los puntos de la región  $[0, 0,5]$  son puntos fijos, mientras que los de la región  $(0,5, 1]$  se mapean en la región  $[0, 0,5]$  tras una única iteración, siendo por lo tanto puntos eventualmente fijos.
3.  $1 < \beta < \sqrt{2}$ : Órbitas cuasiperiódicas. Aunque el espacio de fases es  $[0, \beta/2]$ , el atractor no ocupa el espacio completo, permaneciendo confinado en dos estrechas bandas dentro de la región  $[\beta(2 - \beta)/2, \beta/2]$  entre las que van saltando alternativamente las muestras de las señales generadas. En la Figura 2.6(b) se presenta un ejemplo de este tipo de comportamiento para  $\beta = 5/4$ .
4.  $\sqrt{2} < \beta < 2$ : Región caótica. De nuevo el comportamiento asintótico de las secuencias generadas se limita a la región  $[\beta(2 - \beta)/2, \beta/2]$ , aunque en este caso la cubre por completo y el comportamiento de la señal dentro de la misma es caótico. Este tipo de comportamiento se muestra en la Figura 2.6(c) para  $\beta = 3/2$ .
5.  $\beta = 2$ : Caos completamente desarrollado. La secuencia caótica generada cubre el espacio de fases completo  $[0, 1]$ , como se aprecia en la Figura 2.6(d).
6.  $\beta > 2$ : Casi todas las trayectorias divergen. El conjunto de condiciones iniciales que no divergen es un conjunto fractal conocido como conjunto de Cantor [Falcon1990].

En la Figura 2.7 se muestra el comportamiento asintótico del TM en función del parámetro  $\beta$ . Esta gráfica, que se ha realizado tomando una condición inicial aleatoria, descartando las primeras 1000 iteraciones y dibujando las 1000 siguientes para cada valor de  $\beta$ , se conoce como *diagrama de bifurcación*, y muestra cómo varía el comportamiento cuantitativo y cualitativo del TM al modificarse su parámetro de bifurcación. Las líneas rojas marcan los límites inferior y superior del atractor, confirmando la simulación los valores teóricos esperados.

Nótese que el TM sólo proporciona soluciones verdaderamente caóticas para  $\beta > \sqrt{2}$ , y que únicamente ocupa la totalidad del espacio de fases para  $\beta = 2$ . La segunda clase de mapas de tienda de campaña considerada, el “skew tent-map” (SK-TM), soluciona estos dos problemas. El SK-TM es una aplicación  $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$  con

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{c}, & 0 \leq x < c; \\ \frac{1-x}{1-c}, & c \leq x \leq 1; \end{cases} \quad (2.19)$$

siendo  $0 < c < 1$ . Igual que en el caso del TM, utilizando las funciones signo y módulo se puede expresar (2.19) de una forma más compacta como [Panta2000d]

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{c + (1 - 2c)x - (x - c)s(x - c)}{2c(1 - c)} \\ &= \frac{c + (1 - 2c)x - |x - c|}{2c(1 - c)}. \end{aligned} \quad (2.20)$$

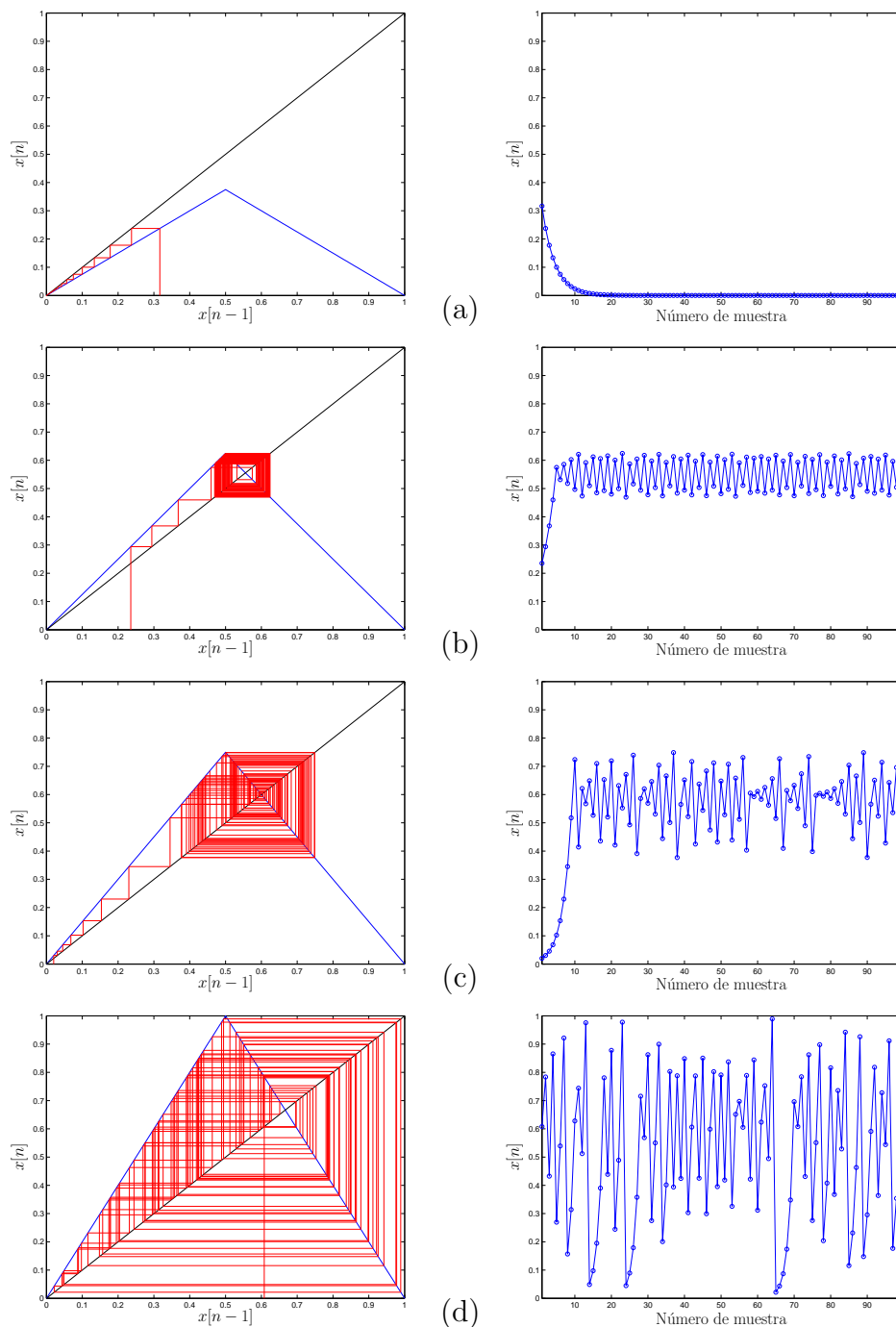


Figura 2.6: Comportamiento dinámico del “tent-map”,  $f(x) = \beta(1 - 2|x - 0,5|)/2$ , para distintos valores de  $\beta$ . (a)  $\beta = 3/4$  y  $x[0] = 0,3166$ : convergencia hacia el punto fijo en el origen. (b)  $\beta = 5/4$  y  $x[0] = 0,2354$ : órbita cuasiperiódica. (c)  $\beta = 3/2$  y  $x[0] = 0,0202$ : comportamiento caótico dentro de la región  $[3/4, 3/2]$ . (d)  $\beta = 2$  y  $x[0] = 0,6081$ : comportamiento caótico completamente desarrollado, la señal caótica ocupa el espacio de fases completo,  $I = [0, 1]$ .



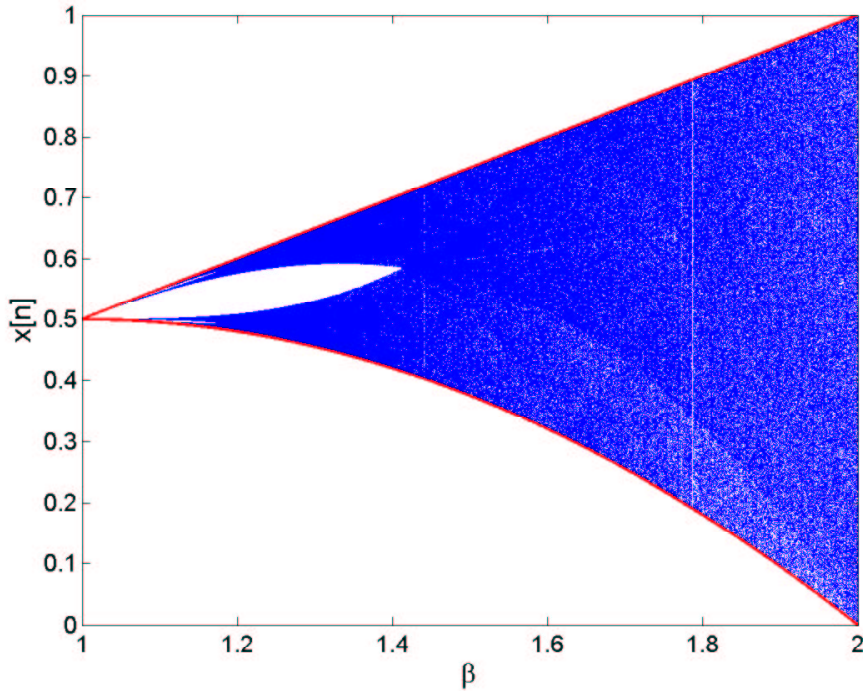


Figura 2.7: Diagrama de bifurcación para el mapa de tienda de campaña (TM).

En el caso concreto en que  $c = 0,5$  se obtiene como expresión particular del SK-TM el TM con  $\beta = 2$ , coincidencia que no ocurre para cualquier otro valor de los parámetros. Esto es debido a que el efecto de  $\beta$  en el TM consiste en desplazar verticalmente el máximo (esto es, modificar su valor), mientras que el efecto de  $c$  en el SK-TM consiste en desplazarlo horizontalmente (es decir, modificar su posición). El SK-TM presenta la particularidad de proporcionar soluciones caóticas para cualquier valor de  $c \in (0, 1)$  y para casi cualquier condición inicial. Además, las secuencias obtenidas siempre ocupan la totalidad del espacio de fases. Debido a estas dos características, en general se va a trabajar con la familia del SK-TM en lugar de con la del TM. Un ejemplo del SK-TM para  $c = 0,9$  se muestra en la Figura 2.8(b).

Los dos mapas anteriores proporcionan señales estrictamente positivas. En algunas aplicaciones, como por ejemplo el modelado de series temporales o las comunicaciones, pueden resultar más convenientes mapas capaces de generar salidas tanto positivas como negativas (esto es, señales bipolares). Por este motivo se consideran también el “symmetric tent-map” (S-TM) y el “bipolar skew tent-map” (BSK-TM). El S-TM es la versión simétrica del TM. Se trata de una aplicación  $f : [-1, 1] \rightarrow [-1, \beta - 1]$ , con

$$f(x) = \begin{cases} \beta(1+x) - 1, & -1 \leq x < 0; \\ \beta(1-x) - 1, & 0 \leq x \leq 1. \end{cases} \quad (2.21)$$

Donde el parámetro de control  $\beta$  toma valores comprendidos entre 1 y 2 generalmente.

Usando la función módulo resulta trivial reescribir (2.21) como [Panta2000a]

$$f(x) = \beta(1 - |x|) - 1, \quad (2.22)$$

para  $1 < \beta \leq 2$ . En este caso el espacio de fases viene dado por el intervalo  $[-1, \beta - 1]$  y el atractor es el intervalo  $[-(\beta - 1)^2, \beta - 1]$ . Un ejemplo del S-TM para  $\beta = 1,5$  se muestra en la Figura 2.8(c).

Por último, el BSK-TM, que es la versión bipolar del SK-TM, es una aplicación  $f : [-1, 1] \rightarrow [-1, 1]$  con

$$f(x) = \begin{cases} 2\frac{1+x}{1+c} - 1, & -1 \leq x < c; \\ 2\frac{1-x}{1-c} - 1, & c \leq x \leq 1. \end{cases} \quad (2.23)$$

En este caso el rango de valores del parámetro de bifurcación es  $-1 < c < 1$ . Nótese que para  $c = 0$ , y  $\beta = 2$ , el BSK-TM y el S-TM coinciden. Esto no ocurre para ningún otro valor de los parámetros, puesto que nuevamente la variación de  $\beta$  en el S-TM produce desplazamientos verticales, mientras que la variación de  $c$  en el BSK-TM produce desplazamientos horizontales. Para finalizar, al igual que en el caso de los tres mapas anteriores, es posible reescribir (2.23) utilizando las funciones signo y módulo [Panta2001a]:

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1 - 2cx + c^2 - 2s(x - c)(x - c)}{1 - c^2} \\ &= \frac{1 - 2cx + c^2 - 2|x - c|}{1 - c^2}. \end{aligned} \quad (2.24)$$

En la Figura 2.8(d) se muestra un ejemplo del BSK-TM para  $c = -0,5$ . Al igual que el SK-TM, este mapa genera secuencias caóticas que ocupan todo el espacio de fases y con la misma energía para cualquier valor de  $c$ , por lo que en algunas ocasiones puede resultar preferible al S-TM, como se verá en el Capítulo 7.

### 2.3.4.2. Mapas Cuadráticos: El Mapa Logístico

Después de los mapas PWL, los mapas no lineales más simples son probablemente los polinómicos. Un mapa polinómico de orden  $m$  presenta la forma general

$$f(x) = \sum_{k=0}^m c_k x^k = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \dots + c_m x^m.$$

En general, una función de este tipo puede poseer hasta  $m - 1$  puntos extremos (máximos y mínimos), siendo por lo tanto multimodal. Sin embargo, eligiendo cuidadosamente la forma del mapa, con frecuencia se puede seleccionar un intervalo de su espacio de fases,  $I$ , tal que  $f : I \rightarrow I$  y dentro del cual  $f(x)$  presenta un único máximo, siendo por lo tanto un mapa unimodal. Dentro de la familia de los mapas polinómicos, los mapas no lineales más sencillos son los cuadráticos:

$$f(x) = c_0 + c_1 x + c_2 x^2. \quad (2.25)$$

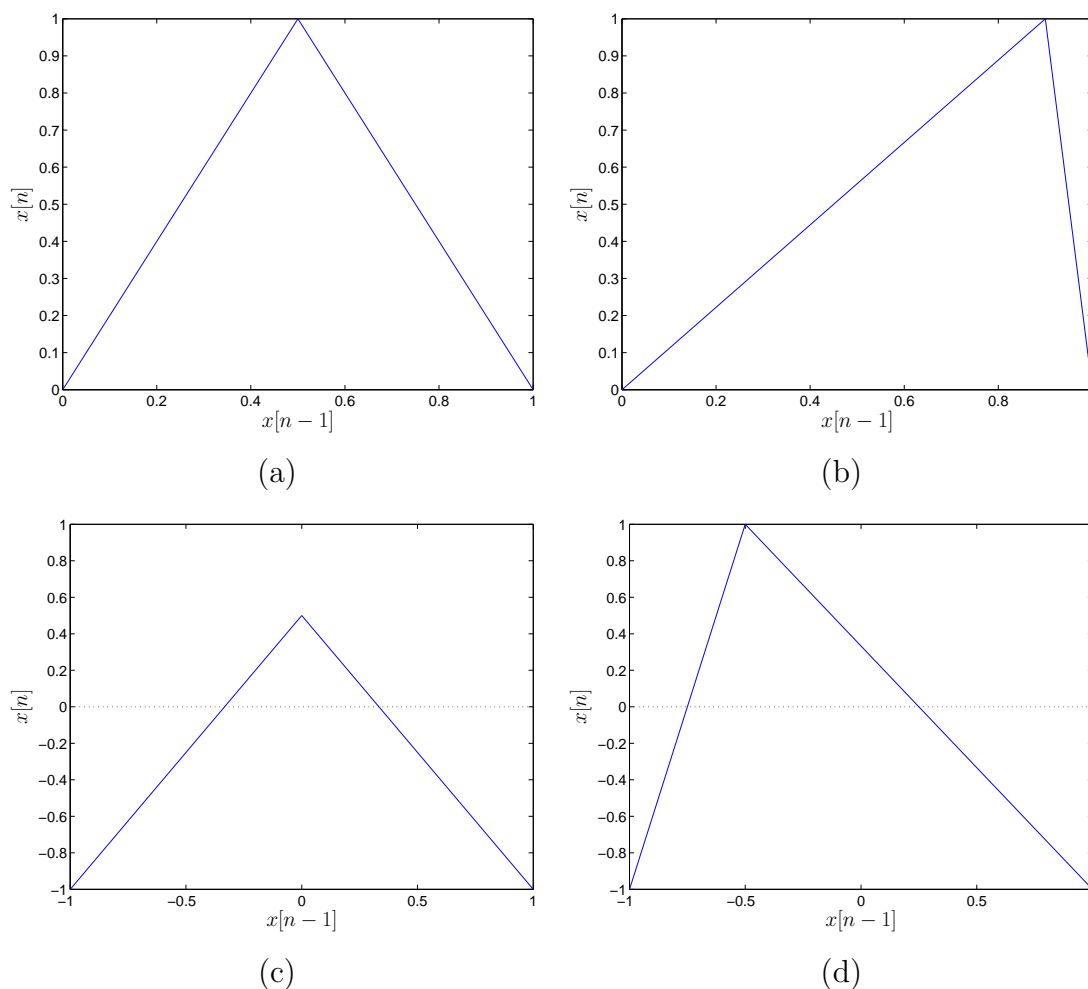


Figura 2.8: Ejemplos de mapas de las cuatro familias de mapas de tienda de campaña. (a) “Tent-map” (TM) con  $\beta = 2$ . (b) “Skew tent-map” (SK-TM) con  $c = 0,9$ . (c) “Tent-map” simétrico (S-TM) con  $\beta = 1,5$ . (d) “Skew tent-map” bipolar (BSK-TM) con  $c = -0,5$ .

El mapa cuadrático más conocido y utilizado es probablemente el *mapa logístico*. El mapa logístico proviene de la discretización de la ecuación logística, propuesta por un biólogo belga, Verhulst, como una extensión del modelo Malthusiano de crecimiento de una población. El esquema Malthusiano del crecimiento demográfico,

$$x[n + 1] = rx[n],$$

fue propuesto por el economista y pensador Thomas Robert Malthus en 1798 como modelo del crecimiento humano, y establece un ritmo de crecimiento/decrecimiento exponencial de la población [Malthu1990]. Este modelo asume una población con recursos ilimitados y sin ningún tipo de injerencia externa. Un modelo más razonable para una población estacional con recursos limitados es el mapa logístico, propuesto

originalmente por Robert May [May1974, May1976]. El mapa logístico es una aplicación  $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$  con

$$f(x) = \lambda x(1 - x), \quad (2.26)$$

siendo  $\lambda$  un parámetro que varía entre 0 y 4 ( $c_2 = -\lambda$ ,  $c_1 = \lambda$  y  $c_0 = 0$  en (2.25)). En biología este mapa proporciona un valor normalizado de la población comprendido entre 0 (extinción) y 1 (máxima población posible). Este mapa tan simple puede presentar un comportamiento dinámico muy complejo que incluye puntos fijos, ciclos límite de todos los periodos, y caos, dependiendo únicamente del valor del parámetro  $\lambda$  [May1976]:

- $0 \leq \lambda < 1$ : El atractor es un punto fijo en el origen.
- $1 \leq \lambda < 3$ : El atractor es un punto fijo en  $x = 1 - 1/\lambda$ .
- $3 \leq \lambda \leq 3,57$ : Aparecen atractores periódicos de periodos  $2^n$  ( $n = 1, 2, 3, \dots$ ) crecientes a medida que aumenta  $\lambda$ , y cada vez con menor separación entre ellos (es decir, la distancia entre el valor de  $\lambda$  correspondiente al periodo  $2^n$  y al periodo  $2^{n+1}$  es cada vez menor).
- $3,57 < \lambda \leq 4$ : Región caótica, con ventanas intercaladas de regularidad (ciclos límite de periodos no potencia de 2). Por ejemplo, en  $\lambda = 3,6786 \dots$  aparece el primer ciclo límite de periodo impar, y en  $\lambda = 3,8284 \dots$  aparece el ciclo límite de periodo 3, que por el teorema de Sarkovskii [Sarkov1964, Devan1989] implica la existencia de ciclos límite de todos los periodos para algún parámetro del mapa, y que garantiza que el mapa es capaz de generar secuencias caóticas para un cierto rango de su parámetro [Li1975].
- $\lambda = 4$ : Caos completamente desarrollado [Tufil1992]. La secuencia caótica generada cubre el espacio de fases completo  $[0, 1]$ .
- $\lambda > 4$ : Casi todas las trayectorias divergen. El conjunto de condiciones iniciales que no divergen forma nuevamente un conjunto de Cantor [Tufil1992].

En la Figura 2.1 se muestra la forma del mapa logístico para diferentes valores del parámetro  $\lambda$ , así como las secuencias generadas iterando a partir de una condición inicial  $x[0]$  aleatoria, y los distintos comportamientos posibles del sistema. Esta variedad de comportamientos se puede observar también en el diagrama de bifurcación del mapa logístico, mostrado en la Figura 2.9, donde se aprecia la cascada de duplicación de periodo inicial, las ventanas de periodos 3, 5, 7,  $\dots$  y la región caótica. De nuevo, aunque el espacio de fases viene dado por el intervalo  $[0, \lambda/4]$ , el atractor ocupa la región  $[\lambda^2(4 - \lambda)/16, \lambda/4]$ . En esta Tesis se estudian las secuencias caóticas, por lo que se usa el mapa logístico con  $3,57 < \lambda \leq 4$ , en especial con  $\lambda = 4$ .

Para finalizar, aunque no es uno de los objetivos de esta Tesis el realizar una revisión exhaustiva de los numerosos mapas caóticos unidimensionales propuestos en la literatura, en la Tabla 2.2 se muestra un resumen de diversos mapas unidimensionales, unimodales o no. Muchos otros mapas unidimensionales y de mayor dimensión se pueden encontrar en [Kocak1986, Holden1986, Rodri1987, Willi1997].

Mapa	$f(x)$	Parámetros
“Tent-Map” (TM) [Lorenz1963a, Glendi1994]	$\beta/2 \cdot (1 - 2 x - 0,5 )$	$\beta \in (0, 2]$ $x \in [0, \beta/2]$
“Skew” TM (SK-TM) [Panta2000d]	$\frac{c+(1-2c)x- x-c }{2c(1-c)}$	$c \in (0, 1)$ $x \in [0, 1]$
“Symmetric” TM (S-TM) [Panta2000a]	$\beta(1 -  x ) - 1$	$\beta \in [1, 2]$ $x \in [-1, \beta - 1]$
“Bipolar Skew” TM (BSK-TM) [Panta2001a]	$\frac{1+c^2-2cx-2 x-c }{1-c^2}$	$c \in (-1, 1)$ $x \in [-1, 1]$
“Binary Shift Map” (BSM) [Beck1993]	$2x - \lfloor 2x \rfloor$	$x \in [0, 1]$
Logístico [May1976, Feigen1980]	$\lambda x(1 - x)$	$\lambda \in (0, 4]$ $x \in [0, \lambda/4]$
Logístico Modificado [Heida1992a]	$\lambda x(1 - kx)$	$\lambda \in (0, 4], k > 1$ $x \in [0, \lambda/4k]$
Logístico Bipolar [Beck1993]	$1 - \mu x^2$	$\mu \in (0, 2]$ $x \in [1 - \mu, 1]$
Cuadrático 1 [Grebo1983]	$-x^2 + c$	$c \in (-1/4, -\infty)$ $x \in [-\frac{1+\sqrt{1+4c}}{2}, \frac{-1+\sqrt{1+4c}}{2}]$
Cuadrático 2 [Lorenz1987]	$(x - 2)^2$	$x \in [0, 4]$
Cuadrático 3 [Devan1989]	$x^2 + c$	$c \in (-\infty, 1/4)$ $x \in [\frac{1-\sqrt{1-4c}}{2}, \frac{1+\sqrt{1-4c}}{2}]$
Cúbico 1 [Lorenz1976]	$c(3x - 4x^3)$	$c \in (0, \infty)$ $x \in [-c, c]$
Cúbico 2 [Kocak1986]	$(1 - c)x + cx^3$	$c \in (-\infty, 3/2)$ $x \in [-\frac{3-2c}{3\sqrt{3}}, \frac{3-2c}{3\sqrt{3}}]$
Cúbico 3 [Devan1989]	$c(x - x^3) = cx(1 - x^2)$	$c \in [0, 2, 6]$ $x \in [-2c/\sqrt{3}, 0]$
Singer [Singer1978, Gucken1983]	$c(7,86x - 23,31x^2 + 28,75x^3 - 13,3x^4)$	$c \in (0, 1/0,9309)$ $x \in [0, 0,9309c]$
Exponencial [May1976]	$x \exp(c(1 - x))$	$c \in [0, \infty)$ $x \in [0, 1/c \cdot \exp(c - 1)]$
Sinusoidal 1 [Feigen1980]	$c \sin(\pi x)$	$c \in (0, 1]$ $x \in [0, c]$
Sinusoidal 2 [Thomps2002]	$c_0 + x + c_1/2\pi \cdot \sin(2\pi x)$	$c_1 \in (0, 2\pi]$

Tabla 2.2: Recopilación de diversos mapas caóticos unidimensionales.

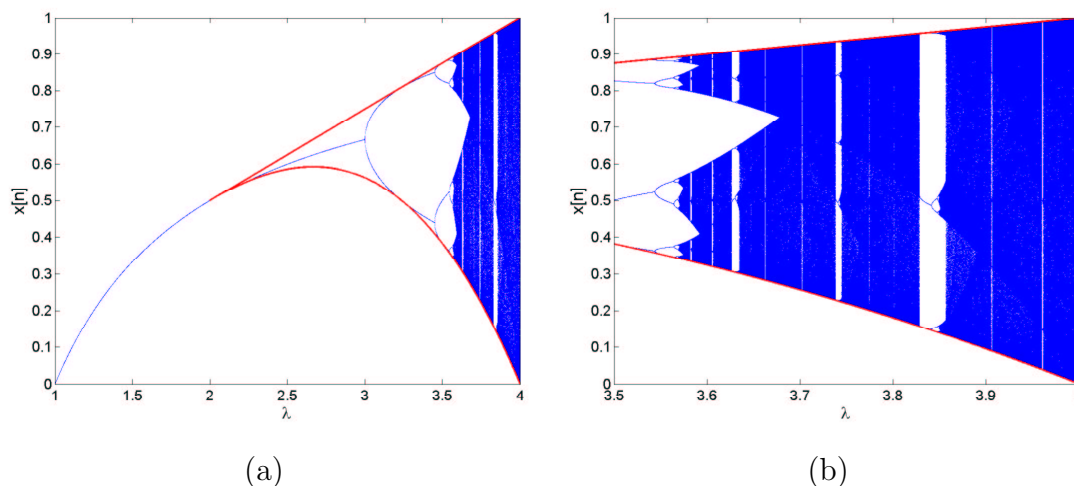


Figura 2.9: Diagrama de bifurcación del mapa logístico. (a) Diagrama de bifurcación para el rango de parámetros completo. (b) Detalle de la región  $3,5 \leq \lambda \leq 4$ .

## 2.4. Caracterización Determinista de Señales y Mapas Caóticos: Dinámica Simbólica

A la hora de plantear los estimadores de los siguientes capítulos se va a explotar la dualidad inherente a las señales caóticas: naturaleza determinista, pero características propias de señales aleatorias. En consecuencia, para su estudio resulta necesario disponer tanto de herramientas propias de sistemas deterministas, como de métodos utilizados para caracterizar procesos estocásticos. En este apartado se presenta brevemente la principal herramienta determinista utilizada: la dinámica simbólica.

La *dinámica simbólica* es la disciplina que estudia el comportamiento de las señales caóticas segmentando el espacio de fases y analizando la región a la que pertenecen las sucesivas iteraciones del mapa. Aunque esta forma de analizar las secuencias pueda parecer simplista, permite capturar la esencia del comportamiento caótico si se realiza de manera adecuada. En esta sección se muestra lo que se entiende por una partición del espacio de fases de un mapa caótico y por su partición natural, qué es una dinámica simbólica de un mapa caótico y una secuencia simbólica de una condición inicial, así como el concepto de partición generadora.

### 2.4.1. Partición del Espacio de Fases de un Mapa Caótico

Para estudiar el comportamiento de los mapas caóticos al ser iterados resulta útil realizar una segmentación de su espacio de fases. Para entender la utilidad de esta división del espacio de fases, considérese un mapa PWL cualquiera o uno de los mapas unidimensionales propuestos en la Sección 2.3.4. En estas secciones se ha mostrado cómo las ecuaciones de muchos de estos mapas unidimensionales se pueden escribir

de manera mucho más sencilla utilizando la función característica, la función módulo, o la función signo. En el fondo, lo que se está haciendo en realidad mediante estas operaciones es una segmentación del espacio de fases del mapa. Esta partición también va a resultar fundamental posteriormente a la hora de proporcionar una descripción estadística de los mapas caóticos, y a la hora de plantear estimadores óptimos. En primer lugar, se va a definir formalmente qué se entiende por una partición del espacio de fases.

**Definición 2.13 (Partición)** *Sea un mapa caótico unidimensional  $f : D \rightarrow D$ . Se define una partición de su espacio de fases como un conjunto de regiones  $E_i \subseteq D$  (con  $i = 1, \dots, P$ ) tal que:*

1.  $E_i \cap E_j = \emptyset$  para todo  $i \neq j$  con  $i, j = 1, \dots, P$ .

2.  $\bigcup_{i=1}^P E_i = D$ .

Y se denota como  $\mathcal{P} = \{E_1, \dots, E_P\}$ .

Es decir, una partición del espacio de fases de un mapa caótico es cualquier división del mismo en regiones disjuntas que lo cubren por completo. Obviamente, para cualquier mapa caótico existen infinitas particiones de su espacio de fases, aunque de entre las infinitas particiones posibles algunas resultan más ventajosas y útiles que otras.

Supóngase que se dispone de un mapa caótico unidimensional cuyo espacio de fases es un intervalo:  $D = I = [c, d]$ . La forma más sencilla de dividir este intervalo en  $M$  segmentos es realizar una *partición uniforme* del mismo:  $E_i = [e_{i-1}, e_i]$  ( $i = 1, \dots, M-1$ ) y  $E_M = [e_{M-1}, e_M]$ , con  $e_i = c + (d-c)i/M$ . Por ejemplo, el espacio de fases del TM con  $\beta = 2$  es  $[0, 1]$ , y tres posibles particiones uniformes de su espacio de fases son:  $\mathcal{P}_1 = \{[0, 1]\}$ ,  $\mathcal{P}_2 = \{[0, 1/2), [1/2, 1]\}$  y  $\mathcal{P}_3 = \{[0, 1/4), [1/4, 1/2), [1/2, 3/4), [3/4, 1]\}$ .

La rejilla uniforme puede resultar conveniente cuando no se dispone de ninguna información acerca del mapa caótico o cuando ni siquiera se conoce el mapa generador de una secuencia. No obstante, habitualmente resulta más interesante realizar una partición en regiones de distintos tamaños. En general, va a interesar dividir el espacio de fases del mapa en regiones en las que sea continuo y monótono, porque entonces se puede garantizar que, dado  $y \in D$ , sólo va a existir como mucho un  $x = f^{-1}(y) \in E_i$ . A este tipo de partición se le suele denominar *partición natural* del espacio de fases, y se define formalmente a continuación.

**Definición 2.14 (Partición Natural)** *Sea un mapa caótico unidimensional  $f : D \rightarrow D$  sobre cuyo espacio de fases se define una partición  $\mathcal{P} = \{E_1, \dots, E_P\}$ . Se dice que la partición  $\mathcal{P}$  es la partición natural del mapa  $f$  si divide su espacio de fases en regiones dentro de las cuales  $f(x)$  es monótona y continua, y además está compuesta por el menor número de elementos posible.*

Nótese que la partición natural de un mapa caótico es única y resulta muy sencilla de obtener cuando la forma del mismo es conocida. En el caso de mapas de Markov o mapas PWL la partición natural va a contener siempre  $M$  elementos que coinciden con los  $M$  intervalos en los que se divide el espacio de entrada del mapa. Para algunos mapas (por ejemplo el TM o el S-TM con  $\beta = 2$ , el BSM, o el mapa logístico) se trata de una partición uniforme, pero en general para la mayoría de los mapas caóticos (como el SK-TM, el BSK-TM, el TM y el S-TM para  $\beta \neq 2$ , o los mapas de Markov de la Figura 2.4 y de la Figura 2.5(a)) no lo es.

### 2.4.2. Secuencias Simbólicas

Los conceptos de dinámica y secuencia simbólica son básicos para la comprensión del comportamiento de las señales caóticas, puesto que la esencia del caos se halla contenida en las secuencias simbólicas, y como se muestra en los capítulos 3 y 4, para estimar correctamente una señal caótica es fundamental obtener una buena estima de su secuencia simbólica. Se va a proceder a definir primeramente lo que es una secuencia simbólica y una dinámica simbólica.

**Definición 2.15 (Secuencia y Dinámica Simbólica)** *Sea un mapa caótico unidimensional,  $f : D \rightarrow D$ , para el que se ha definido una partición del espacio de fases en  $P$  regiones,  $E_i$  ( $i = 1, \dots, P$ ). Considérese una condición inicial  $x[0]$  y su órbita hacia delante,  $O_f^+(x[0]) = \{x[0], x[1], x[2], \dots\}$ . Se define la secuencia simbólica asociada al mapa  $f$  y la condición inicial  $x[0]$  como*

$$S_f^+(x[0]) = \{s[0], s[1], s[2], \dots\},$$

siendo  $s[n]$  la región a la que pertenece la muestra  $n$ -ésima de la iteración del mapa. Es decir,

$$s[n] = i \Leftrightarrow x[n] \in E_i,$$

puediéndose escribir también para un mapa definido de acuerdo con (2.13) como

$$s[n] = \sum_{i=1}^M i \cdot \chi_{E_i}(x[n]).$$

La función que relaciona el espacio de fases de un mapa con su espacio de símbolos, esto es, la función  $\sigma : D \rightarrow \Sigma$  que transforma cada muestra del espacio de fases del mapa,  $D$ , en una muestra del espacio simbólico,  $\Sigma = \{1, \dots, P\}$ , se conoce como la *dinámica simbólica asociada a la función  $f$  y la partición  $\mathcal{P}$* .

Así pues, la secuencia simbólica (también conocida habitualmente como *itinerario*) proporciona información acerca de las sucesivas regiones del espacio de fases que visita la trayectoria de una condición inicial, y la dinámica simbólica indica cómo construir la secuencia simbólica a partir de la secuencia caótica. La Definición 2.15 asume órbitas



de longitud infinita. Sin embargo, en un caso práctico sólo se dispone de  $N + 1$  muestras de la trayectoria, y por lo tanto únicamente se cuenta con una órbita de longitud  $N + 1$ ,

$$\begin{aligned} O_{f,N}^+(x[0]) &= \{x[0], x[1], \dots, x[N]\} \\ &= \{x[0], f(x[0]), \dots, f^N(x[0])\}, \end{aligned}$$

a partir de la cual se puede definir una secuencia simbólica de longitud finita:

$$\begin{aligned} S_{f,N}^+(x[0]) &= \{s[0], s[1], \dots, s[N]\} \\ &= \{\sigma(x[0]), \sigma(x[1]), \dots, \sigma(x[N])\}. \end{aligned}$$

De igual modo, se puede definir una órbita o trayectoria hacia atrás de longitud finita,

$$\begin{aligned} O_{f,N}^-(x[N]) &= \{x[N], x[N-1], \dots, x[0]\} \\ &= \{x[N], f_{s[N-1]}^{-1}(x[N]), \dots, f_{s[0], \dots, s[N-1]}^{-N}(x[N])\}, \end{aligned}$$

y una secuencia simbólica hacia atrás de longitud finita,  $S_{f,N}^-(x[N])$ , que es simplemente la inversa de  $S_{f,N}^+(x[0])$ :

$$\begin{aligned} S_{f,N}^-(x[N]) &= \{s[N], s[N-1], \dots, s[0]\} \\ &= \{\sigma(x[N]), \sigma(x[N-1]), \dots, \sigma(x[0])\}. \end{aligned}$$

Nótese que, puesto que los mapas con los que se trabaja en general son no invertibles, es necesario conocer a priori la secuencia simbólica para poder realizar la iteración hacia atrás. Es decir, en cada iteración hacia atrás es necesario saber cual de las  $M$  preimágenes se debe seleccionar, para lo que se necesita una información adicional: la región a la que pertenece la muestra anterior.

Por último, se debe resaltar que en general no todas las secuencias simbólicas están permitidas en todos los mapas caóticos y para todas las condiciones iniciales. Es decir, para un mapa dado pueden existir secuencias simbólicas inválidas, secuencias que nunca se van a llegar a producir. Suponga que se utiliza la partición natural. Entonces, para el SK-TM o el BSK-TM todas las secuencias simbólicas son válidas. Sin embargo, considérese el mapa de Markov con 4 intervalos de la Figura 2.4. Resulta evidente que desde la región 1 nunca se puede alcanzar la región 4, al igual que desde la región 2 no se pueden alcanzar las regiones 1 y 4, y desde la 3 no se puede alcanzar la región 1 (desde la región 4 se pueden alcanzar todas las regiones). Por lo tanto, las secuencias simbólicas que contengan cualquiera de los siguientes pares de símbolos consecutivos no son válidas para este mapa:  $\{1,4\}$ ,  $\{2,1\}$ ,  $\{2,4\}$ ,  $\{3,1\}$ . Estas relaciones se pueden mostrar explícitamente construyendo un árbol con todas las posibles transiciones entre secuencias, o mediante un diagrama de transición de estados como los utilizados habitualmente para caracterizar cadenas de Markov. Ambas representaciones se muestran en la Figura 2.10.

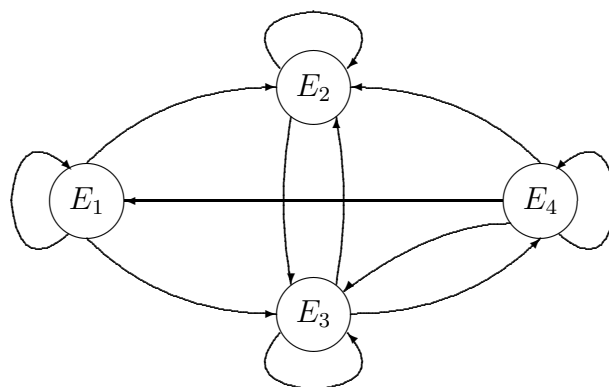
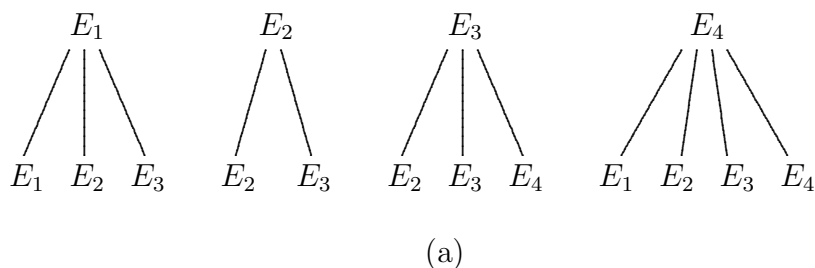


Figura 2.10: Representación esquemática de todos los pares de secuencias posibles para el mapa de Markov de la Figura 2.4. (a) Árbol con todas las transiciones posibles a partir de una región inicial. (b) Diagrama de transición de estados.

### 2.4.3. Partición Generadora

Como ya se ha mencionado en la Sección 2.4.1, siempre existen infinitas particiones posibles del espacio de fases. Por consiguiente, se debe buscar una partición que proporcione alguna ventaja respecto al resto: sencillez (partición uniforme), inversa única dentro de cada región (partición natural), etc. La partición más conveniente es la llamada partición generadora, cuya definición se proporciona a continuación, y que permite, cuando existe y se puede hallar, relacionar de manera unívoca una condición inicial con una secuencia simbólica y viceversa [Devan1989, Beck1993].

**Definición 2.16 (Partición Generadora)** *Sea un mapa caótico unidimensional  $f : D \rightarrow D$  sobre cuyo espacio de fases se define una partición  $\mathcal{P} = \{E_1, \dots, E_P\}$ . Se dice que la partición  $\mathcal{P}$  es una partición generadora del mapa  $f$  si la secuencia simbólica de longitud infinita correspondiente a cada posible condición inicial del mapa determina de manera única el valor de  $x[0]$ .*

El concepto de partición generadora resulta muy interesante, puesto que implica que no sólo existe una correspondencia única entre una condición inicial y su secuencia

simbólica (algo que se cumple para cualquier partición), sino que el inverso también es cierto: una secuencia simbólica de longitud infinita identifica perfectamente una condición inicial del mapa de manera exclusiva.

Este hecho, que puede resultar sorprendente dado que una partición divide el espacio de fases en conjuntos de puntos, se comprende fácilmente si se consideran secuencias simbólicas de longitud finita. En la Figura 2.11 se muestra la partición generadora para el TM con  $\beta = 2$ , junto con las regiones de puntos que comparten una misma secuencia simbólica (mostrada en la parte superior de cada región) para 1, 2, 3 y 4 iteraciones del mapa. Como se puede apreciar, la anchura de dichas regiones disminuye a medida que aumenta la longitud del itinerario, y para algunos mapas se puede demostrar que en el límite cuando  $N$  tiende a infinito dicha región contiene un único punto.

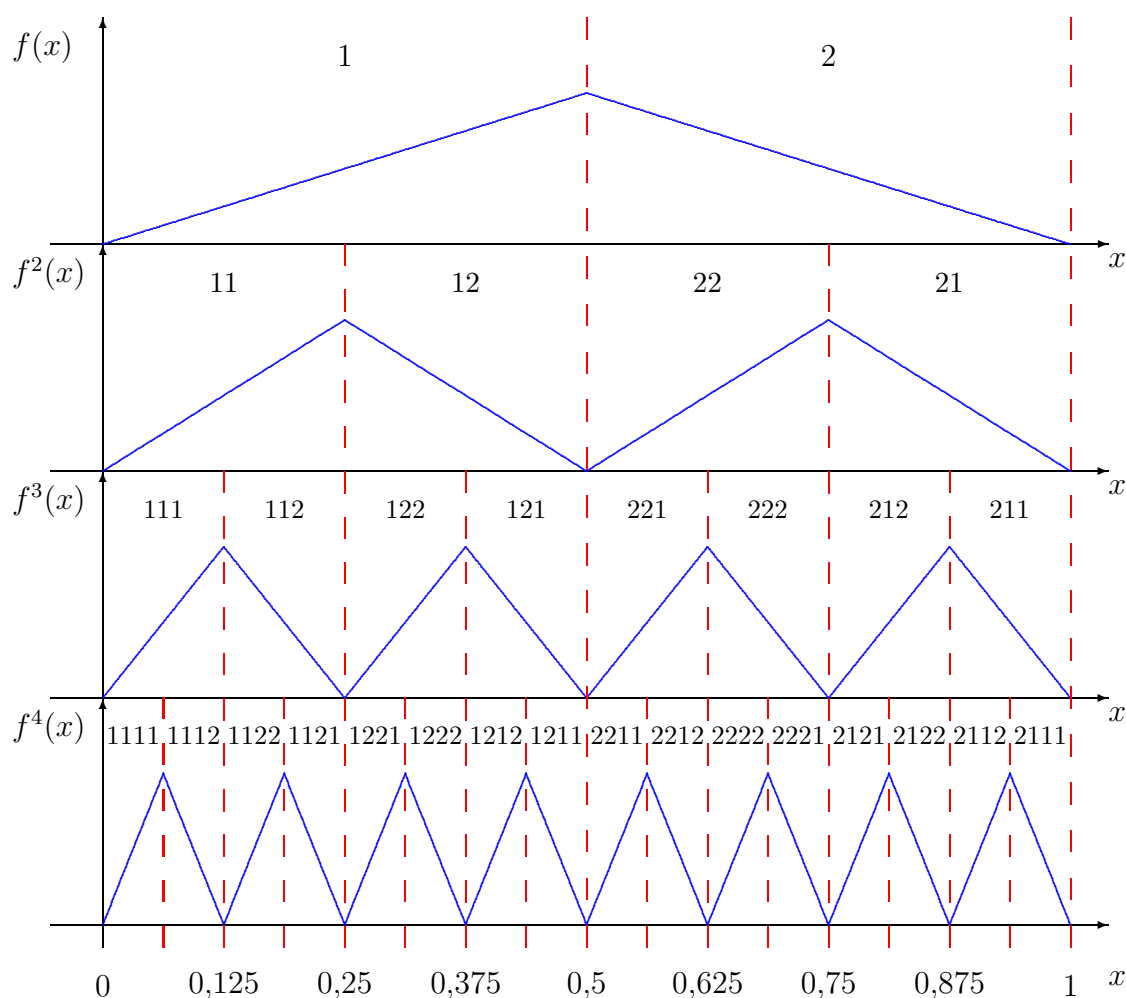


Figura 2.11: Partición generadora para el TM con  $\beta = 2$ , y estrechamiento de la región a la que puede pertenecer una condición inicial con una cierta secuencia simbólica para  $N = 1, 2, 3, 4$ .

En general hay muy pocos mapas para los que se conozca una partición generadora [Cornfe1982, Beck1993], pero afortunadamente, para los mapas PWL de Markov la partición dada por sus  $M$  intervalos es una partición generadora. Además, en ocasiones puede existir una partición que englobe varias características deseables, resultando entonces la partición más sensata. Por ejemplo, para cualquier mapa de Markov la partición natural es siempre una partición generadora, y para el mapa logístico con  $\lambda = 4$  y el TM con  $\beta = 2$  la partición  $\mathcal{P} = \{[0,0.5), [0.5,1]\}$  es a la vez la partición uniforme no trivial más sencilla, la partición natural, y una partición generadora.

## 2.5. Caracterización Estadística de Mapas y Señales Caóticos

Los mapas caóticos con los que se va a trabajar en esta Tesis son puramente deterministas. Esto significa que, dado un valor de  $x[0]$ , se puede conocer en teoría la secuencia caótica completa generada, y por lo tanto no existe ninguna aleatoriedad en ella. Sin embargo, la sensibilidad a las condiciones iniciales provoca que el comportamiento a largo plazo de una secuencia caótica sea esencialmente impredecible, puesto que en un caso práctico nunca se pueden conocer las condiciones iniciales con absoluta precisión. En consecuencia, estas señales presentan características propias de señales aleatorias, y el comportamiento a largo plazo de un sistema caótico debe caracterizarse de manera estadística utilizando herramientas propias de la teoría de la probabilidad y de la teoría ergódica. En esta sección se describen someramente diversos conceptos relacionados con la teoría ergódica (FDP invariante y operador de Frobenius-Perron fundamentalmente), así como el principal descriptor estadístico usado para determinar si una secuencia es caótica: los exponentes de Lyapunov.

### 2.5.1. Teoría Ergódica

De acuerdo con [Sinai1977, Walter1982], la teoría ergódica consiste en “el estudio de las propiedades estadísticas de acciones de grupos en espacios de medida”. Es decir, la teoría ergódica se encarga de estudiar cómo varían las propiedades estadísticas de un conjunto de condiciones iniciales dentro del espacio de fases cuando se someten a algún tipo de transformación continua o discreta. La teoría ergódica nace con la *hipótesis ergódica* de Boltzmann, y se basa en los *teoremas ergódicos* de Birkhoff y Von Neumann formulados en los años 30. En esta sección no se pretende realizar una revisión de la teoría ergódica, sino únicamente presentar una serie de resultados básicos que van a ser necesarios a lo largo de la Tesis.

#### 2.5.1.1. FDP Invariante y FDP Invariante Natural

Considérese un mapa  $f(x)$  genérico. Resulta evidente que la trayectoria de una secuencia caótica generada por el mismo no tiene por qué visitar las distintas regiones

del espacio de fases con igual frecuencia. Un ejemplo muy sencillo es el de las secuencias cuyo intervalo de atracción es menor que el espacio de fases, como el TM para  $\beta < 2$  o el mapa logístico para  $\lambda < 4$  (véase la Sección 2.3.4). En ambos casos existen zonas del espacio de fases, las que se encuentran fuera del atractor, que se van a visitar con probabilidad cero si se considera el comportamiento asintótico de la secuencia. Dentro del propio atractor tampoco existe ninguna razón para considerar una distribución uniforme de las secuencias generadas, y en general esta no es la FDP seguida.

La pregunta que surge es, ¿cómo encontrar la FDP de una secuencia caótica generada por el mapa caótico  $f(x)$  a partir de una condición inicial  $x[0]$  cualquiera? De manera práctica esto se puede hacer dividiendo el espacio de fases en  $P$  regiones disjuntas que lo cubran por completo (esto es, que formen una partición, tal y como se ha definido en la Sección 2.4.1) y obteniendo la *FDP empírica*. Existen tres consideraciones que se deben tener en cuenta a la hora de construir la FDP empírica:

1. La construcción de la partición del espacio de fases. En el caso de mapas unidimensionales la partición más sencilla consiste en segmentos de igual longitud del espacio de fases. Sin embargo, si se conoce una partición generadora del mapa va a resultar ventajoso utilizarla, como ya se ha mencionado en la Sección 2.4.1.
2. La elección de la condición inicial. En general la FDP de la secuencia podría depender del valor de  $x[0]$  utilizado, de modo que para obtener una FDP genérica que caracterice al mapa habría que seleccionar un conjunto de condiciones iniciales y promediar. Afortunadamente casi cualquier valor de  $x[0]$  da lugar a la misma FDP a largo plazo, y la ergodicidad garantiza que el promediado temporal para obtener la FDP proporciona el mismo valor que el promediado a lo largo de varias realizaciones.
3. La construcción de la FDP. Si el número de eventos posibles es discreto (por ejemplo, si se desea caracterizar la probabilidad de las diferentes secuencias simbólicas) la FDP se suele aproximar por un *tren de impulsos*, mientras que si es continuo resulta preferible un *histograma*.

La FDP asintótica obtenida de esta manera se denomina *FDP invariante* del mapa caótico  $f(x)$ , porque es válida para cualquier muestra de cualquier secuencia típica generada por el mapa (esto es, la FDP no varía con la iteración). Su definición formal se muestra a continuación.

**Definición 2.17 (Medida y FDP Invariante)** *Sea un mapa caótico unidimensional  $f : D \rightarrow D$ . Se dice que  $\mu(A)$  es una medida de probabilidad invariante o simplemente medida invariante del mapa  $f$  si, para cualquier  $A \subseteq D$ , se cumple que*

$$\mu(A) = \mu(f^{-1}(A)), \quad (2.27)$$

donde  $f^{-1}(A)$  denota las preimágenes de todos los puntos del conjunto  $A$ . Igualmente, se dice que  $p(x)$  es una FDP invariante de  $f(x)$  si, para todo  $A \subseteq D$ , se cumple que

$$\int_A p(x)dx = \int_{f^{-1}(A)} p(x)dx. \quad (2.28)$$

La FDP invariante es la función estadística fundamental que permite caracterizar un mapa caótico. Considérese un conjunto de condiciones iniciales confinadas en una región,  $A$ , del espacio de fases,  $D$ . La probabilidad de tener una condición inicial,  $x[0]$ , perteneciente a  $A$  viene dada por

$$\Pr(x[0] \in A) = \mu_0(A) = \int_A p_0(x) dx.$$

Se desea caracterizar estadísticamente la evolución temporal del conjunto de trayectorias definidas por los puntos de  $A$ . Es decir, se pretende hallar la probabilidad de que  $x[n]$  pertenezca a una región  $B$  cualquiera:

$$\Pr(x[n] \in B) = \mu_n(B) = \int_B p_n(x) dx.$$

En general esta probabilidad depende de  $p_0(x)$  y del número de iteraciones. La pregunta es, ¿existe alguna FDP de las condiciones iniciales que se mantenga inalterada a lo largo de sucesivas iteraciones? En el caso afirmativo se dispone de una FDP que permite caracterizar completamente el comportamiento estadístico del mapa, ya que no varía al aplicar reiteradamente el mismo. Por el teorema de conservación de la probabilidad frente a transformaciones [Papou1991, Stark2002], para que exista esta FDP debe cumplirse que

$$\mu_{n+1}(A) = \mu_n(f^{-1}(A)) \quad \Rightarrow \quad \int_A p_{n+1}(x) dx = \int_{f^{-1}(A)} p_n(x) dx, \quad (2.29)$$

para cualquier  $A \subseteq D$ . Y puesto que las funciones buscadas,  $\mu(A)$  y  $p(x)$ , no varían con la iteración (esto es,  $\mu_{n+1}(A) = \mu_n(A) = \mu(A)$  y en consecuencia  $p_{n+1}(x) = p_n(x) = p(x)$ ), la ecuación (2.29) se convierte en (2.27) y (2.28).

En este punto se debe resaltar que la FDP invariante de un mapa caótico en general no es única, sino que existen infinitas FDPs invariantes. Por ejemplo, para el mapa logístico con un cierto valor de  $\lambda$  sus puntos fijos se encuentran situados en  $x = 0$  y  $x = (\lambda - 1)/\lambda$ , de modo que dos posibles FDPs invariantes del mapa son:  $p(x) = \delta(x)$  y  $p(x) = \delta(x - (\lambda - 1)/\lambda)$ . Siguiendo el mismo procedimiento se pueden obtener FDPs invariantes a partir de los ciclos límite de periodo 2, 3, 4, etc. Por consiguiente disponer de una FDP invariante no es suficiente para caracterizar por completo el mapa, es necesaria una función aún más restrictiva: la *FDP invariante natural*.

**Definición 2.18 (Medida y FDP Invariante Natural)** *Sea un mapa caótico unidimensional,  $f : D \rightarrow D$ . Se dice que  $\mu(A)$  es una medida invariante natural del mapa si, para cualquier  $A \subseteq D$ , se cumple que*

1.  $\mu(A)$  es una medida invariante del mapa.
2. Las secuencias generadas por casi cualquier punto  $x[0]$  (esto es, por todas las condiciones iniciales excepto posiblemente un conjunto de medida nula) se distribuyen de acuerdo con  $\mu(A)$ .

Igualmente, se dice que  $p(x)$  es una FDP invariante natural de  $f$  si, para cualquier  $A \subseteq D$ ,  $p(x)$  es una FDP invariante del mapa y las muestras generadas por casi cualquier condición inicial se distribuyen de acuerdo con  $p(x)$ .

La FDP invariante natural sí que es única para un mapa caótico, y en consecuencia permite caracterizarlo estadísticamente por completo. En la Sección 2.5.1.3 se presenta una herramienta teórica utilizada para hallar las FDPs invariantes de algunos mapas caóticos unidimensionales, y en el Apéndice C se muestran las FDPs invariantes naturales conocidas para los principales mapas usados en esta Tesis. Sin embargo, en general no es posible hallar la FDP invariante natural de la mayoría de los mapas caóticos de forma cerrada y se debe recurrir a su estimación empírica, como se muestra en la Sección 4.3.1.1.

### 2.5.1.2. Propiedad de Ergodicidad

La *ergodicidad* indica básicamente que la esperanza matemática a lo largo de diversas realizaciones de un mapa caótico y el promedio temporal se pueden intercambiar. Su definición formal se proporciona a continuación [Beck1993].

**Proposición 2.1 (Ergodicidad)** *Sea un mapa caótico unidimensional  $f : D \rightarrow D$ , cuya FDP invariante natural es  $p(x)$ . Se dice que  $f(x)$  es ergódico si, para cualquier función integrable,  $g(x)$ , la media temporal de  $g(x)$  es igual a su esperanza matemática, excepto posiblemente para un conjunto de condiciones iniciales,  $x[0]$ , de medida cero. Esto es, se debe cumplir la siguiente igualdad:*

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N+1} \sum_{n=0}^N g(x[n]) = \int_D g(x)p(x)dx. \quad (2.30)$$

La ergodicidad es una herramienta muy útil y poderosa, pero en general resulta muy difícil probarla teóricamente. Hasta la fecha únicamente existen unos pocos ejemplos de mapas caóticos para los que se ha demostrado matemáticamente su ergodicidad. Entre estos, el único que nos interesa es el mapa cuadrático dado por  $f(x) = 1 - 2x^2$ , conocido como *mapa de Ulam*, cuya ergodicidad fue probada por Ulam y Von Neumann [Ulam1947]. Además, la ergodicidad de este mapa automáticamente implica la de todos los mapas topológicamente conjugados con él (esto es, que se pueden obtener mediante una transformación continua e invertible [Devan1989]), tales como el TM para  $\beta = 2$  y el mapa logístico para  $\lambda = 4$ . Respecto al resto de mapas utilizados, aunque no se haya podido demostrar aún matemáticamente su ergodicidad, esta se suele asumir inicialmente, comprobándose experimentalmente a posteriori.

Una consecuencia fundamental de la ergodicidad es que la media y la varianza de las secuencias generadas al iterar un cierto mapa caótico se pueden calcular a partir de una única secuencia (en teoría de longitud infinita, en la práctica suficientemente larga), y que no dependen de la condición inicial,  $x[0]$ . Esta misma conclusión es aplicable a

la autocorrelación, así como a los estadísticos de orden superior. Por lo tanto, para estudiar cualquier estadístico de un mapa caótico basta con seleccionar una condición inicial aleatoria, idealmente de acuerdo con su FDP invariante natural, generar un número suficientemente grande de muestras, y calcular el promedio temporal apropiado. Esta propiedad también resulta muy útil a la hora de encontrar la FDP invariante: se puede hallar a partir del histograma de la secuencia obtenida iterando una única condición inicial seleccionada aleatoriamente (véase la Sección 4.3.1.1).

Por último, y a modo de ejemplo, en la Figura 2.12 se muestra el histograma obtenido iterando una única condición inicial para el S-TM con  $\beta = 1,5$  y el obtenido promediando la muestra final resultante de iterar 10.000 condiciones iniciales elegidas aleatoriamente. Como se puede apreciar, las diferencias son mínimas, al igual que ocurre con las medias (0,1649 para el promedio temporal y 0,1613 para el promedio en realizaciones) y las varianzas (0,0408 para el primero frente 0,0419 para el segundo). Nótese que en este caso no existe ninguna expresión teórica conocida para la FDP invariante, ni por lo tanto para ninguno de los estadísticos del mapa, de modo que esta aproximación empírica es la única posible.

### 2.5.1.3. Operador de Frobenius-Perron

La evolución temporal de la FDP en el espacio de fases se puede describir mediante el llamado operador de Frobenius-Perron (operador FP), que permite hallar las FDPs invariantes de un mapa caótico, ya que son los puntos fijos del mismo. Suponga que se dispone de un conjunto de condiciones iniciales de un mapa caótico unidimensional,  $f(x)$ , distribuidas de acuerdo con una FDP cualquiera,  $p_0(x)$ . Se desea encontrar un operador que relacione la FDP de iteraciones sucesivas del mapa. Es decir, se pretende hallar un operador tal que

$$p_{n+1}(x) = \mathcal{FP}\{p_n(x)\},$$

siendo  $\mathcal{FP}\{\cdot\}$  el operador FP. Como ya se ha visto, al transformar una región del espacio de estados en otra mediante la iteración se debe conservar su probabilidad, de modo que

$$\int_A p_{n+1}(x)dx = \int_{f^{-1}(A)} p_n(x)dx. \quad (2.31)$$

Asuma ahora que  $A$  es un intervalo de la forma  $[u, v]$ . Puesto que los mapas con los que se trabaja son no invertibles en general, existen varios intervalos previos que se transforman en  $A$  bajo la iteración, y (2.31) se puede reescribir como

$$\int_u^v p_{n+1}(x)dx = \sum_{i=1}^M \left| \int_{f_{s_i}^{-1}(u)}^{f_{s_i}^{-1}(v)} p_n(x)dx \right|, \quad (2.32)$$

donde  $f_{s_i}^{-1}(x)$  denota la preimagen  $i$ -ésima de  $x$ , y el valor absoluto es necesario para evitar problemas de signo debidos a que  $f^{-1}(u)$  sea menor que  $f^{-1}(v)$  para alguna región. Haciendo el cambio de variable  $y = f(x)$  en la integral de la derecha, la ecuación



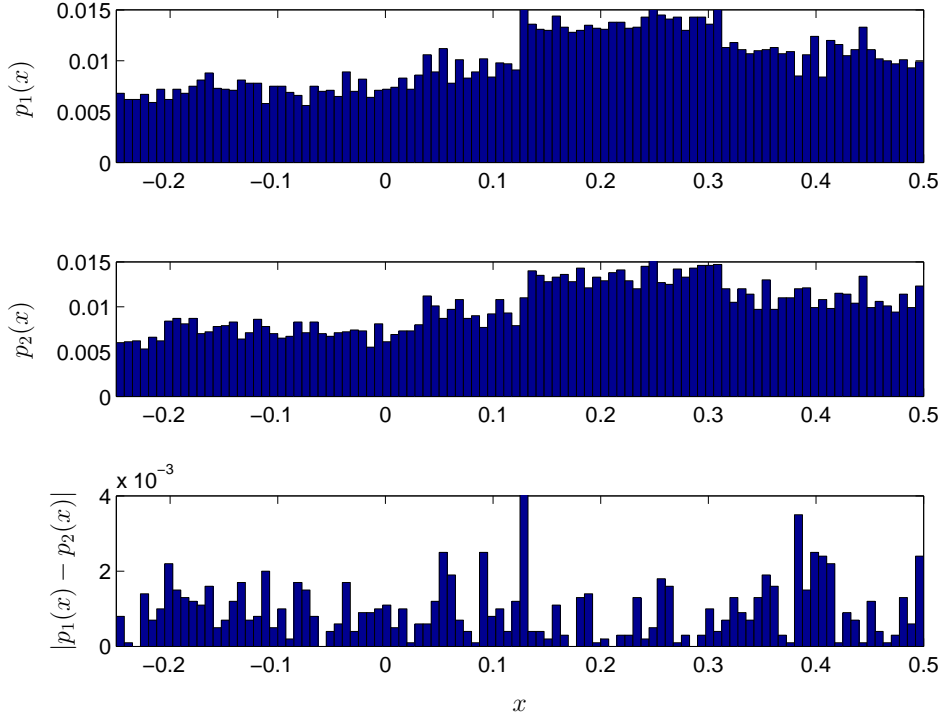


Figura 2.12: Ejemplo de ergodicidad para el S-TM con  $\beta = 1,5$ : FDP invariante obtenida promediando en el tiempo vs. FDP obtenida promediando sobre distintas secuencias. (a) FDP invariante obtenida tomando 10.000 iteraciones de una condición inicial  $x[0]$  aleatoria. (b) FDP invariante obtenida eligiendo 10.000 condiciones iniciales aleatorias y tomando el valor de  $x[100]$ . (c) Diferencia (en valor absoluto) entre las dos FDPs.

(2.32) resulta

$$\int_u^v p_{n+1}(x)dx = \sum_{i=1}^M \int_u^v \frac{p_n(f_{s_i}^{-1}(y))}{|f'(f_{s_i}^{-1}(y))|} dy. \quad (2.33)$$

Dado que (2.33) se tiene que cumplir para cualquier intervalo, los términos dentro de ambas integrales deben ser idénticos. Igualándolos se obtiene la expresión para el *operador de Frobenius-Perron*, que se suele escribir como

$$\mathcal{FP}\{p(y)\} = \sum_{x \in f^{-1}(y)} \frac{p(x)}{|f'(x)|}, \quad (2.34)$$

para una FDP cualquiera,  $p(x)$ , y donde el sumatorio es a lo largo de todas las posibles preimágenes de  $y$ .

En resumen, el operador FP indica cómo se transforma una FDP cualquiera al iterarse el mapa caótico. Puesto que una FDP invariante del mapa  $f(x)$  no debe transformarse por efecto de la iteración, las FDPs invariantes han de ser puntos fijos del

operador:

$$\mathcal{FP}\{p(x)\} = p(x).$$

Desafortunadamente, aunque el operador FP proporciona una manera sistemática para hallar las FDPs invariantes, y como tal es una herramienta teórica muy poderosa para mapas unidimensionales, no existe ningún método sencillo y general para encontrar sus puntos fijos. En consecuencia, únicamente se conocen unas pocas FDPs invariantes de mapas caóticos de manera analítica. En el Apéndice C se muestra el operador FP para los principales mapas caóticos utilizados, así como la expresión analítica de su FDP invariante cuando se conoce. El operador FP se puede extender a mapas  $m$ -dimensionales utilizando el Jacobiano, pero en este caso resulta extremadamente difícil encontrar sus puntos fijos, y su utilidad es mucho más limitada aún [Beck1993].

### 2.5.2. Caracterización Estadística del Caos: Exponentes de Lyapunov

A pesar de su innegable utilidad, la FDP invariante natural de un mapa unidimensional no proporciona ninguna indicación acerca de su naturaleza caótica o no, ni sobre su grado de “caoticidad”. En esta sección se presenta la medida estadística más comúnmente utilizada para caracterizar el caos: los exponentes de Lyapunov.

Los exponentes de Lyapunov permiten cuantificar la sensibilidad de un mapa iterado frente a errores de medida. Sin embargo, antes de proporcionar su definición formal considérese un ejemplo de un mapa no caótico. Sea un mapa lineal unidimensional con una condición inicial  $x[0]$ . El valor de la muestra  $n$ -ésima es (D.4):

$$x[n] = a^n x[0] + b \frac{1 - a^n}{1 - a}.$$

Pero, si la condición inicial para el mismo mapa lineal es  $\tilde{x}[0] = x[0] + \epsilon$  (con  $\epsilon > 0$ ) en lugar de  $x[0]$  debido a un error de medida, entonces al cabo de  $n$  iteraciones se tiene

$$x[n] = a^n \tilde{x}[0] + b \frac{1 - a^n}{1 - a} = a^n (x[0] + \epsilon) + b \frac{1 - a^n}{1 - a},$$

y el error en valor absoluto es

$$|e[n]| = |\tilde{x}[n] - x[n]| = |a|^n \epsilon.$$

Esto es, la relación entre el error en la iteración  $n$ -ésima y el error inicial sigue una ley exponencial:  $|e[n]/e[0]| = |a|^n$ . Para poder llevar a cabo comparaciones entre diferentes mapas del crecimiento/decrecimiento del error de manera más cómoda, se suele tomar el número  $e$  como base, de modo que

$$|e[n]| = \exp(ln)|e[0]|.$$

En el caso del mapa lineal resulta evidente que  $l = \ln |a|$ , y en función del valor de  $a$  se pueden distinguir tres casos:

1.  $|a| < 1$ : En este caso  $l < 0$ , y existe un decrecimiento exponencial del error de medida inicial. Es decir, la incertidumbre inicial tiende a desaparecer, de modo que  $\lim_{n \rightarrow \infty} \tilde{x}[n] = \lim_{n \rightarrow \infty} x[n]$ .
2.  $|a| = 1$ : Ahora  $l = 0$ , y el error de medida inicial se mantiene constante. Es decir,  $\frac{e[n]}{e[0]} = e[0] = \epsilon$ .
3.  $|a| > 1$ : En este caso  $l > 0$ , y aparece un crecimiento exponencial del error de medida inicial. Esto es, la incertidumbre inicial no sólo no desaparece, sino que se incrementa cada vez más.

Para un mapa unidimensional este único exponente,  $l$ , es el que se conoce como *exponente de Lyapunov*, y permite cuantificar el crecimiento/decrecimiento de la incertidumbre en la condición inicial de la secuencia. En general un mapa  $m$ -dimensional posee un total de  $m$  exponentes de Lyapunov (*espectro de Lyapunov*), que cuantifican su comportamiento en cada una de las dimensiones de su espacio de fases. Puesto que esta Tesis se centra en el estudio de mapas unidimensionales, a continuación se proporciona la definición formal para estos, pudiéndose extender fácilmente a mapas de mayor dimensión [Beck1993, Alligo1996].

**Definición 2.19 (Exponente de Lyapunov)** Sea  $f : D \rightarrow D$  un mapa unidimensional ergódico y con una FDP invariante  $p(x)$ . Se define su exponente de Lyapunov como

$$l = \int_D \ln |f'(x)| p(x) dx = E(\ln |f'(x)|). \quad (2.35)$$

Aunque esta definición puede parecer sorprendente a la vista del ejemplo anterior, se puede demostrar fácilmente que mantiene el espíritu del ejemplo y su interpretación es en esencia la misma. Para un mapa cualquiera, la relación  $|e[n]/e[0]|$  se puede descomponer como [Peit1992]

$$\begin{aligned} \left| \frac{e[n]}{e[0]} \right| &= \left| \frac{e[n]}{e[n-1]} \right| \left| \frac{e[n-1]}{e[n-2]} \right| \cdots \left| \frac{e[2]}{e[1]} \right| \left| \frac{e[1]}{e[0]} \right| \\ &= \prod_{k=1}^n \left| \frac{e[k]}{e[k-1]} \right|. \end{aligned}$$

Y se busca el exponente que cuantifique la relación  $|e[n]/e[0]|$  en promedio, que se obtiene haciendo

$$\left| \frac{e[n]}{e[0]} \right| = \prod_{k=1}^n \left| \frac{e[k]}{e[k-1]} \right| = \exp(ln).$$

Aplicando el logaritmo y tomando el límite cuando  $n \rightarrow \infty$ , puesto que se desea conocer el comportamiento asintótico del mapa, se obtiene que

$$l = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln \left( \prod_{k=1}^n \left| \frac{e[k]}{e[k-1]} \right| \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \ln \left( \left| \frac{e[k]}{e[k-1]} \right| \right).$$

El problema de esta definición es que el exponente depende en general del error de medida inicial. En consecuencia, para hallar la expresión definitiva de  $l$  simplemente es necesario hacer tender el error en cada iteración a cero. Nótese que el error en la iteración  $k$ -ésima en función de  $e[k-1]$  es

$$e[k] = |f(x[k-1] + e[k-1]) - f(x[k-1])|.$$

Por lo tanto, llamando  $\epsilon$  a  $e[k-1]$  y tomando el límite cuando  $\epsilon$  tiende a cero, los términos que aparecen en el sumatorio se convierten en la derivada en cada uno de los puntos que recorre la secuencia caótica a partir de una cierta condición inicial:

$$l = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \ln |f'(x[k-1])|. \quad (2.36)$$

Aunque esta cantidad también podría depender en principio de  $x[0]$ , y por lo tanto se debería realizar un promediado en el espacio de fases para eliminar dicha dependencia, cuando el mapa es ergódico esto no es necesario, ya que (2.36) proporciona un resultado idéntico a (2.35) gracias a la propiedad de ergodicidad.

En resumen, el exponente de Lyapunov (mostrado en el Apéndice C para los principales mapas caóticos usados en la Tesis) mide el grado de acercamiento o alejamiento en promedio durante las primeras iteraciones de dos condiciones iniciales cercanas, esto es, la sensibilidad del mapa a sus condiciones iniciales. En consecuencia, dado que este es uno de los principales rasgos distintivos del caos, el exponente de Lyapunov es una de las principales medidas utilizadas para determinar si un sistema o una señal son caóticos. Para finalizar esta sección, a continuación se muestran definiciones más formales de una señal (órbita/trayectoria) caótica y de un sistema (mapa) caótico que las proporcionadas en la Sección 1.1 [Alligo1996]:

**Definición 2.20 (Mapa Caótico [Alligo1996])** *Sea una aplicación  $f : D \rightarrow D$ , con  $D \subseteq \mathbb{R}$ , y sea  $O_f^+(x[0])$  una órbita acotada de  $f(x)$ , se dice que esta órbita es caótica si cumple dos condiciones:*

1.  $O_f^+(x[0])$  no es asintóticamente periódica. Esto es,  $O_f^+(x[0])$  no converge a una órbita del tipo  $\{y[0], \dots, y[K-1], y[0], \dots\}$  a medida que  $n \rightarrow \infty$ .
2. El exponente de Lyapunov asociado a la condición inicial,  $l(x[0])$ , es mayor que cero. Es decir, la órbita presenta una tendencia a incrementar exponencialmente cualquier error de medida inicial.

*Se dice entonces que el mapa  $f(x)$  es caótico si casi cualquier condición inicial (esto es, todas las condiciones iniciales excepto posiblemente un conjunto de medida cero) da lugar a una órbita caótica.*

## 2.6. Errores Numéricos y “Shadowing”

Por último, para cerrar el capítulo, en esta sección se analiza el efecto de los errores numéricos (inevitables cuando se llevan a cabo simulaciones por ordenador) sobre las señales caóticas. Como ya se ha dicho, la sensibilidad extrema a las condiciones iniciales es una característica inherente a toda señal caótica. En los sistemas caóticos cualquier error crece de manera exponencial, viéndose amplificado en sucesivas iteraciones y dando lugar a una órbita completamente distinta de la original carente de errores. Cuando se simula un sistema caótico en un ordenador se está trabajando con una precisión finita, de modo que se cometen inevitablemente errores. La resolución limitada del programa de simulación se manifiesta de tres maneras:

1. Dada una condición inicial arbitraria, esta únicamente se puede representar con un cierto número finito de dígitos decimales. Por ejemplo, si se dispone de un sistema capaz de representar de manera exacta únicamente 8 posiciones decimales, la condición inicial  $x[0] = \pi/4$  se representará como  $\tilde{x}[0] = 0,78539816$ . En estas ocasiones, aparece un *error de aproximación inicial* debido al redondeo.
2. Debido a la no linealidad de las operaciones involucradas en la generación de las señales caóticas, en general se van a generar nuevos dígitos decimales en cada iteración del mapa caótico que no se pueden representar con la precisión disponible. En consecuencia, va a existir un error de truncamiento o redondeo en cada iteración, denominado *error de iteración*. Por ejemplo, si la condición inicial anterior corresponde al mapa logístico con  $\lambda = 4$ , la solución exacta para la primera iteración de  $\tilde{x}[0]$  tiene 16 decimales:  $x[1] = 0,6741915610744576$ . Sin embargo, si el computador no es capaz de representar más que ocho posiciones decimales, se va a quedar con  $\tilde{x}[1] = 0,67419156$ , generando un nuevo error que va a afectar al resultado de las siguientes iteraciones.
3. El conjunto de números que se pueden representar es limitado. Por ejemplo, con los 64 bits que utiliza el programa Matlab (versión 7.0) para representar los números reales en punto flotante, se pueden reproducir aproximadamente  $1,84 \cdot 10^{19}$  números diferentes. Aunque pueda parecer un número muy elevado, dentro del espacio de fases del mapa considerado este número es mucho menor, y en cualquier caso se trata de un número finito. Por lo tanto, ninguna señal generada va a ser realmente caótica, sino *pseudocaótica*. Esto es, aunque las secuencias generadas puedan tener un periodo muy largo, eventualmente todas ellas tienen que acabar repitiéndose.

Por consiguiente, incluso aunque no existiera ningún error de aproximación en la condición inicial, resulta inevitable que al iterar aparezca un error entre la órbita real y la simulada. En la Figura 2.13 se muestra la trayectoria “real” generada usando datos de doble precisión en Matlab (64 bits, 53 para la mantisa y 11 para el exponente) a partir de una condición inicial aleatoria, y la trayectoria “aproximada” generada usando datos de precisión simple (32 bits, 24 para la mantisa y 8 para el exponente). El

resultado ilustra perfectamente la sensibilidad a las condiciones iniciales característica de un mapa caótico: después de un cierto número de iteraciones (aproximadamente 26 en este caso) el error crece hasta ser del mismo orden de magnitud que la señal de las dos trayectorias, y estas resultan completamente diferentes (esto es, se vuelven esencialmente independientes).

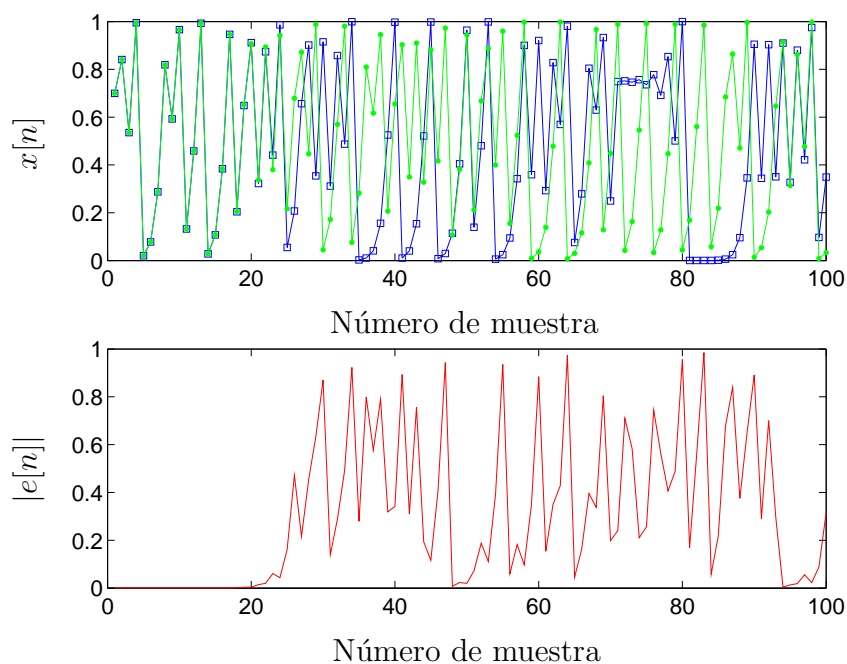


Figura 2.13: Ejemplo de la divergencia entre dos órbitas debido a la resolución limitada de la simulación por ordenador. (a) Trayectoria simulada en Matlab para el mapa logístico con  $\lambda = 4$  usando doble precisión (64 bits) y simple precisión (32 bits), para una condición inicial aleatoria igual en ambos casos. (b) Valor absoluto del error entre ambas señales.

En consecuencia, debido a los errores propios de toda simulación, pueden aparecer dudas respecto a la validez de las simulaciones a la hora de estudiar las propiedades de los sistemas caóticos. Concretamente, se pueden plantear las siguientes preguntas:

1. ¿Es posible que una señal generada a partir de una cierta condición inicial cambie su comportamiento asintótico (por ejemplo, que pase de ser caótica a periódica o viceversa) debido a los errores numéricos inevitables en toda simulación?
2. ¿Es relevante el conjunto de condiciones iniciales que se pueden simular? Es decir, ¿suponen una muestra representativa de las condiciones iniciales características del sistema y dan lugar a un conjunto de órbitas típicas del mismo?
3. ¿Se corresponden las propiedades estadísticas de las señales generadas con las de las secuencias reales del sistema?

En definitiva, estas tres preguntas pueden resumirse en una: ¿se encuentran las órbitas generadas artificialmente mediante simulación cercanas a órbitas reales típicas del sistema? En este sentido, aunque el ruido y los errores alteran radical e inevitablemente la trayectoria de cada punto individual cuando el sistema es caótico, para niveles de ruido moderados es de esperar que la respuesta sea afirmativa. Si esto es así, puesto que las trayectorias generadas mediante simulación se corresponden aproximadamente con órbitas típicas del sistema, resulta lícito recurrir a las simulaciones para estimar la FDP invariante de un mapa caótico dado, calcular sus momentos, autocorrelación y densidad espectral de potencia, o evaluar el rendimiento de los distintos estimadores de la señal y los parámetros propuestos a lo largo de la Tesis.

Anosov y Bowen resolvieron este problema para el caso especial de *sistemas hiperbólicos* en todos sus puntos (esto es, sistemas cuya dinámica se puede factorizar en cualquier punto en direcciones estables e inestables [Farmer1991]), enunciando el conocido teorema del “shadowing” (ensombrecimiento o enmascaramiento) [Anosov1967, Bowen1975]. Sin embargo, antes de enunciar de manera rigurosa el teorema del “shadowing” se deben definir los conceptos de pseudoórbita y ensombrecimiento (“shadowing”) para mapas unidimensionales.

**Definición 2.21 (Pseudoórbita)** *Sea un mapa caótico,  $f : D \rightarrow D$ , con  $D \subseteq \mathbb{R}$ , se dice que una secuencia de puntos  $\{\tilde{x}[n]\}_{n=n_1}^{n_2}$  es una  $\epsilon$ -pseudoórbita de  $f$  para  $n_1 \leq n \leq n_2$  si se cumple que  $|f(\tilde{x}[n-1]) - \tilde{x}[n]| < \epsilon$  para  $n = n_1 + 1, \dots, n_2$ .*

Es decir, una  $\epsilon$ -pseudoórbita (o simplemente pseudoórbita) es una secuencia de puntos que, sin ser obligatoriamente una trayectoria válida del mapa caótico, permanece arbitrariamente cercana a alguna trayectoria válida (no necesariamente la misma) a lo largo de toda su evolución. Estas trayectorias válidas, cercanas a una cierta pseudoórbita pero no observables directamente, se dice que se encuentran ensombrecidas por la pseudoórbita y viceversa.

**Definición 2.22 (Ensombrecimiento (“Shadowing”))** *Sea un mapa caótico,  $f : D \rightarrow D$ , con  $D \subseteq \mathbb{R}$ , se dice que una órbita real del mapa,  $\{x[n]\}_{n=n_1}^{n_2}$  con  $x[n] = f(x[n-1])$  para  $n_1 + 1 \leq n \leq n_2$ ,  $\delta$ -ensombrece a una  $\epsilon$ -pseudoórbita,  $\{\tilde{x}[n]\}_{n=n_1}^{n_2}$ , si  $|x[n] - \tilde{x}[n]| < \delta$  para un cierto  $\delta > 0$  y  $n = n_1, \dots, n_2$ . Esta órbita real se conoce como órbita de ensombrecimiento o enmascaramiento (“shadowing”).*

Así pues, una órbita de ensombrecimiento es aquella órbita real que se encuentra arbitrariamente cercana a una órbita ruidosa, enmascarándola y compartiendo por lo tanto sus propiedades estadísticas (al menos de manera aproximada). Si además esta órbita es típica, entonces los estadísticos de la señal estimados a partir de la órbita ruidosa coincidirán con los esperados para el mapa en cuestión. El teorema del “shadowing”, cuya formulación rigurosa se muestra a continuación, demuestra que, para una determinada clase de sistemas caóticos, existe una órbita de ensombrecimiento para cualquier secuencia ruidosa suficientemente cercana a una secuencia real.

**Teorema 2.1 (“Shadowing”)** Sea  $f : D \rightarrow D$ , con  $D \subseteq \mathbb{R}$ , una función continua e invertible, con  $f^{-1}(x)$  también continua y  $f(x_1) = f(x_2) \Leftrightarrow x_1 = x_2$ , para la cual las derivadas de  $f(x)$  y  $f^{-1}(x)$  existen y son continuas, y sea  $U \subset D$  un conjunto invariante compacto e hiperbólico de  $f$ . Existe una vecindad,  $N$ , de  $U$  tal que, para todo  $\delta > 0$  existe un  $\epsilon > 0$  para el que cada  $\epsilon$ -pseudoórbita perteneciente a  $U$  se encuentra  $\delta$ -ensombrecida por una órbita real de  $f$ . Además, existe un  $\delta_0 > 0$  tal que, si  $\delta < \delta_0$  y la pseudoórbita es bi-infinita (es decir,  $n_1 = -\infty$  y  $n_2 = \infty$ ), entonces la órbita de “shadowing” es única.

**Demostración 2.1** Véanse [Anosov1967] o [Bowen1975].  $\square$

La interpretación del teorema del “shadowing” en el contexto de la simulación de sistemas caóticos es la siguiente: cualquier trayectoria generada de manera sintética por medio de un ordenador con una condición inicial  $\tilde{x}[0]$  es representativa de una órbita real del sistema con otra condición inicial ligeramente distinta,  $x[0]$ , arbitrariamente cercana en todos sus puntos y que la ensombrece. En la Figura 2.14 se muestra la interpretación gráfica del lema: aunque la trayectoria ruidosa diverge rápidamente de la real, puede existir otra trayectoria real de una condición inicial diferente que permanezca muy cercana a la órbita ruidosa.

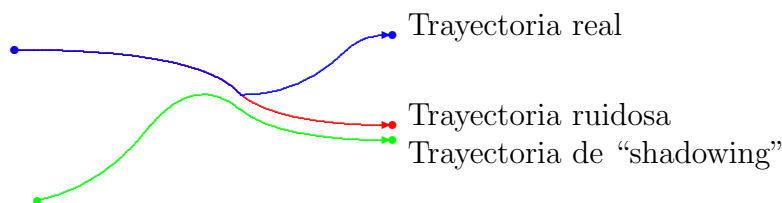


Figura 2.14: Interpretación gráfica del teorema del “shadowing”: trayectoria real del sistema dinámico en el espacio de fases, trayectoria ruidosa que diverge rápidamente de la real, y trayectoria de “shadowing” del sistema real que permanece arbitrariamente cercana a la ruidosa.

El teorema del “shadowing” requiere que el mapa caótico sea invertible y diferenciable, y que el atractor del que se van a generar las secuencias sea hiperbólico. Desafortunadamente, la mayor parte de los sistemas dinámicos interesantes no son hiperbólicos en todos sus puntos, de modo que el teorema del “shadowing” no es aplicable a los mismos. Además, ninguno de los mapas unidimensionales considerados a lo largo de la Tesis es invertible, ya que los mapas unidimensionales invertibles no son capaces de generar señales caóticas [Devan1989, Panta1994]. Por último, el teorema del “shadowing” no garantiza que las órbitas de ensombrecimiento sean típicas, de modo que las características estadísticas del sistema podrían no corresponderse con las de las simulaciones.

No obstante, aunque el teorema del “shadowing” no sea aplicable en muchas ocasiones, diversos autores han demostrado que se pueden encontrar muy buenas órbitas de



“shadowing” para secuencias largas, tanto de mapas unidimensionales como bidimensionales. Por ejemplo, en [Coven1988] se demuestra que casi cualquier pseudoórbita de  $f(x) = \beta(1 - |1 - x|)$ , con  $x \in [0, 2]$  y casi cualquier valor de  $\beta \in [1, 2]$ , se encuentra ensombrecida por otra órbita del mismo mapa con  $\tilde{\beta} = \beta + \Delta\beta$  y  $\Delta\beta \geq 0$ . Resultados similares se muestran en [Nusse1988] para el TM y el mapa logístico, y la relación entre el valor de  $\epsilon$ ,  $\delta$  y la longitud de la pseudoórbita,  $N = n_2 - n_1 + 1$ , se estudia en [Hammel1988] para los mapas de Hénon e Ikeda. Además, gracias a la propiedad de conjugación topológica [Devan1989] es de esperar que estos resultados sean fácilmente extensibles a la familia de mapas de tienda de campaña, así como a otros mapas cuadráticos. En relación con la cuestión de si las órbitas de “shadowing” son o no típicas, no existe ningún resultado conocido por el autor de la presente Tesis al respecto, pudiendo comprobarse la misma de manera empírica, y únicamente en aquellos casos en que la FDP invariante del mapa tiene una forma conocida.

Sin embargo, a pesar del teorema del “shadowing” y de estos otros trabajos, hay que ser cuidadoso a la hora de realizar simulaciones con señales caóticas. Por ejemplo, en [Adler2001] se muestra cómo el mapa logístico puede presentar un comportamiento anómalo dependiente de la precisión utilizada, pudiendo disminuir la exactitud de los resultados obtenidos al aumentar la precisión. Un segundo ejemplo se da al iterar hacia delante el TM con  $\beta = 2$  o el BSM. En ambos casos, en cada iteración se pierde un bit de resolución, de modo que, debido a la resolución finita, al cabo de un pequeño número de iteraciones la órbita converge hacia cero, que es un punto fijo de ambos mapas. Aunque esta es una trayectoria ciertamente válida del sistema, no se trata obviamente de una órbita típica, y generando de este modo las señales se llegará a resultados erróneos. La solución en este caso consiste en generar las secuencias iterando el mapa hacia atrás.

En consecuencia, y a modo de resumen, garantizar que las órbitas obtenidas mediante simulación se corresponden con trayectorias típicas reales es aún un problema abierto, existiendo indicios que parecen confirmar dicha correspondencia, pero también ejemplos que aconsejan precaución a la hora de realizar las simulaciones y prudencia a la hora de interpretar los resultados obtenidos.