Modelització i simulació aplicades a la recerca i interpretació de camps de batalla

Xavier Rubio Campillo

Director de Tesi: Francesc Xavier Hernàndez Cardona

Programa de Doctorat en Didàctica de les Ciències Socials i del Patrimoni

Bienni 2005-2007

Universitat de Barcelona

Març 2009

Capítol 6

Decisió i teoria de jocs

En aquest capítol exposem la potencialitat de la teoria de jocs com a eina d'estudi de decisions. Definim què és un joc, així com els tipus de models de jocs que podem fer servir en el nostre model. Les següents seccions expliquen els principals conceptes necessaris per a la formulació d'un joc. Tot seguit s'exploren les peculiaritats i capacitats que l'aplicació d'aquest mètode pot tenir en la recerca històrica, i en especial en l'estudi de conflictes.

6.1 Humans i racionalitat

A mode d'introducció del capítol, cal reflexionar sobre si és possible aproximar-se, mitjançant un model matemàtic, al procés segons el qual un ésser humà pren decisions. Aquests tipus de models, englobats dins les àrees de la teoria de decisions (per a entorns amb un protagonista) i la teoria de jocs (quan es tenen en consideració més actors), pressuposen que el procés de presa de decisions humà és racional. És això cert?

Si parlem de l'*Homo sapiens* s'ha de matisar aquest concepte de racionalitat. L'ésser humà no és completament racional, ja que les seves decisions usualment tenen en compte un número de factors gairebé infinit, en un entorn a on gairebé mai coneix tota la informació.

La incertesa, doncs, fa que no coneguem totes les variables que afecten a una situació i, per tant, que ens puguem equivocar. Així, sovint les decisions es prenen tenint en compte un conjunt d'informació imperfecte o incomplet, per la qual cosa és possible que triant una decisió que sembli òptima a priori, estiguem escollint una de dolenta al final.

Fins i tot en els casos en els quals gaudim d'informació perfecta seguirem sense triar la millor opció possible. La capacitat de càlcul de l'ésser humà està limitada, per la qual cosa en la immensa majoria de situacions és impossible calcular totes les possibilitats, així com les seves conseqüències.

Així, malgrat que en una partida d'escacs tots els moviments són deterministes i, per tant, no hi ha cap mena d'incertesa ni components aleatoris de cap tipus, seguim sense conèixer quina és la partida perfecta. De fet, les possibilitats combinatòries de les posicions de les peces són tan elevades que ni amb supercomputadors es poden calcular totes les jugades a l'abast d'un jugador, com veurem més endavant. En el cas d'un ésser humà aquesta velocitat de càlcul és molt menor, doncs no és el camp en el qual el cervell humà destaqui de manera més brillant, essent àmpliament superat per qualsevol ordinador disponible actualment al mercat.

Així doncs, en la majoria de problemes un ésser humà no pot calcular totes les possibles combinatòries resultants de les seves decisions, essent especialment rellevant aquest fet si estem parlant de situacions en les quals, a més, s'hagin de tenir en compte les accions passades, presents i futures preses per altres persones.

Aquests dos factors (incertesa i càlcul) són els que fan que no tothom sigui un bon jugador d'escacs, ni coneguem totes les respostes en qualsevol examen, ja que impedeixen aconseguir el resultat òptim de manera sistemàtica.

Això no vol dir, però, que siguem irracionals. A pesar d'aquestes limitacions, el procés de decisió humà sí que és racional, en la mesura en la qual intentem obtenir el millor resultat possible tenint en compte el que sabem, i el que podem calcular. Per tant, la manera segons la qual un ésser humà intenta assolir els seus objectius és perfectament racional, i pot ésser plasmada, com veurem, en un model basat en teoria matemàtica de jocs, en el qual s'elegeixen les millors opcions mitjançant la racionalitat (Wellman 1995).

Al intentar analitzar la racionalitat de l'ésser humà haurem de fer una clara distinció entre resultat òptim real i resultat òptim esperat; mentre el primer és la conseqüència d'elegir les millors decisions d'una situació donada, el segon és el que s'obté quan es tria la millor opció al nostre abast tot tenint en compte el que hem avaluat i esperem, i no necessàriament el que ens trobarem en realitat.

Mentre el resultat real seria el que trobaria una entitat omniscient amb capacitat de càlcul infinita, el segon és el que tractarem normalment, doncs s'aproxima molt més a com elegim les nostres decisions els éssers humans.

6.2 Definició

Un cop feta aquesta introducció, podem començar a definir el que és la teoria de jocs, i quin potencial té per a analitzar decisions, amb la intenció de fer-la servir en el camp de la Didàctica.

La teoria matemàtica és una subdisciplina de l'anomenada teoria de decisions[1]. Aquesta es preocupa, al seu torn, de trobar l'acció que permeti un resultat òptim davant d'una problemàtica donada. Els jocs afegeixen un component essencial a la teoria de decisions, doncs permeten modelar conflictes, és a dir, problemes a on existeixen diversos agents amb capacitat de decisió i objectius diferents (que sovint són contraris).

Totes dues teories no intenten resoldre un conflicte en concret, sinó més aviat definir una tipologia de problemes semblants per a trobar el millor pla d'acció en aquestes situacions (Carnap, Morgenstern, i Norbert Wiener 1974, p. 186):

> En vez de preguntarse, por ejemplo, "cuál es la ruta más corta a través de esta red de caminos?" la teorìa de la decisión se plantea el problema siguiente: "cuáles son las técnicas que deben ser desarrolladas para poder encontrar la ruta más corta a través de cualquier red de caminos?". La contestación a la primera pregunta no nos ayudaría gran cosa a contestar

[1] En aquest treball no aprofundirem sobre la resta de camps de la teoria de decisions. Per a més informació, veure (White 1972).

> a la segunda, pero una respuesta a la segunda pregunta, mucho más general, nos indicaría cómo encontrar una contestación a la primera.

Per tant, la teoria de jocs és una col·lecció d'eines d'anàlisi creades per a entendre el que podem observar quan interactuen dos o més elements amb capacitat de decisió (Osborne i Rubinstein 1994, p. 1). Per a fer-ho, aquesta àrea de recerca matemàtica intenta tractar diversos tipus de situacions possibles, creant un model abstracte que, sota el nom de joc, permeti estudiar les decisions dels seus protagonistes, els jugadors.

Un joc és el model abstracte d'una situació en la qual interaccionen diversos agents amb capacitat de decisió, els jugadors. És descrit mitjançant formulació matemàtica per tal d'expressar els diferents conceptes de manera formal. En ell es defineixen quines accions poden fer els jugadors, tot tenint en compte les restriccions en quant a capacitat de decisió, així com en la qualitat de la informació que té cadascú d'ells sobre el problema. Com es pot intuir, hi ha un ampli ventall de fets que poden ésser analitzats d'aquesta forma (Binmore 1992, p. 3):

> A game is being played whenever people interact with each other. If you drive a car in a busy city street, you are playing a game with the drivers of the other cars. When you make a bid at an auction, you are playing a game with the other bidders. When a supermarket manager decides the price at which she will try to sell cans of beans, she is playing a game with her customers and with the managers of rival supermarkets. When a firm and a union negotiate next year's wage contract, they are playing a game. The prosecuting and defending attorneys are playing a game when each decides what argument to put before the jury. Napoleon and Wellington were playing a game at the Battle of Waterloo, and so were Khrushchev and Kennedy during the Cuban missile crisis.

Potser seria més correcte anomenar-la *teoria de decisió interactiva* (Aumann 1987), ja que el punt bàsic d'aquest sistema és la rellevància de les accions dels altres jugadors alhora de que cadascun d'ells escolleixi un camí a seguir, i el nom original pot enganyar una mica sobre les característiques de la disciplina.

El símil amb els jocs ve donat per la relació que l'estudi d'un problema de decisió interactiu té amb jocs com per exemple els escacs o el pòquer. És, per tant, una semblança a nivell formal, doncs la manera en la qual es formula un model de jocs d'un problema donat s'assembla a qualsevol joc al nostre abast: necessitem regles, una situació inicial, i uns objectius finals, tal i com veurem al llarg del capítol. D'altra banda, el fet que molts cops s'hagin elegit jocs relativament senzills com a base per a explorar la teoria fa que l'analogia entre les dues coses siguin prou interessant.

Així, mentre els jocs d'atzar pur van donar lloc a la teoria de probabilitat, la teoria matemàtica és capaç de tractar jocs a on el resultat sigui donat, a banda de l'atzar (o en absència d'ell), per les decisions dels jugadors; al seu torn, les accions de cadascun d'ells estan relacionades amb les opcions dels altres jugadors, i les expectatives sobre el resultat final del joc (Carnap, Morgenstern, i Norbert Wiener 1974, p. 189).

6.2.1 Aplicacions

Els principals camps d'aplicació de la teoria de jocs en l'actualitat són l'economia, les ciències polítiques, els problemes militars (tant a nivell tàctic com estratègic) i la biologia evolutiva. També s'està desenvolupant ràpidament el seu ús dins l'enginyeria informàtica. Podem veure que el seus camps d'aplicació són molt amplis i diversos, fet que reforça la versatilitat del model creat i el seu ús potencial en altres camps, com podria ser la Història i la Didàctica de les Ciències Socials.

Aquesta capacitat de la teoria de jocs per a ser emprada en multitud de problemes és molt interessant, ja que (Aumann 1987):

> Game theory is a sort of umbrella or "unified field" theory for the rational side of social science, where "social" is interpreted broadly, to include human as well as non-human players (computers, animals, plants).

Aquest comentari, fet per un dels investigadors referents actuals en el camp de la teoria de jocs, és prou revolucionari. El símil és prou potent, doncs les teories de camp unificat són els intents de la Física per a intentar integrar en un mateix sistema totes les forces descobertes fins ara (gravetat, forces nuclears, electromagnetisme, etc.), que pugui explicar tant les reaccions que descobrim a nivell atòmic i subatòmic com les interaccions a nivell planetari i galàctic.

Segons Robert Aumann, doncs, la teoria de jocs acompleix aquest mateix paper pel que a les Ciències Socials es refereix. Per tant, podem intentar modelitzar amb ella qualsevol tipus de problema que tingui a veure amb éssers humans, estigui aquest relacionat amb l'economia, l'educació, la sociologia o les altres disciplines científiques.

6.2.2 Teoria de jocs i Didàctica

Així doncs, la pregunta que ens hem de fer és si dins d'aquest paraigües esmentat per Aumann és possible incloure la Didàctica de la Història, i com es pot realitzar aquest procés.

Primer de tot, cal veure els avantatges que pot aportar l'ús de la teoria de jocs en quant a Didàctica. Si estem d'acord en que el procés de decisió és un tema que no s'estudia normalment en la investigació històrica, podrem començar a apreciar quina utilitat real pot tenir l'aplicació de la teoria de jocs. Si intentéssim explicar els fets històrics a partir de les decisions preses per la societat i els seus individus estaríem afegint un component molt potent al coneixement actual de la Història, ja que en bona part són aquestes accions les que han fet variar el nostre passat, tot influint en el present.

Si no ho fem d'aquesta manera estarem oblidant una part important del fet social històric, ja que la conseqüència de no plantejar-se per què es prenen decisions és pensar que aquestes són donades per alguna cosa semblant al destí i que, per tant, l'evolució dels esdeveniments està marcada des de bon inici en una mena de situació determinista que, com bé sabem actualment, està molt allunyada de la realitat que ens envolta.

Per tant, podem concloure que una eina que ens permeti explorar el procés de decisions pot ser important per a la investigació de la Història. D'altra banda, si volem transmetre a la resta de la societat aquest coneixement també haurem de fer servir la teoria de jocs. No serveix de res trencar la barrera determinista esmentada si, al final, es dóna una sola visió dels fets històrics. Per a combatre aquest punt de vista, haurem de mostrar aquest procés de decisió durant la transferència dels coneixement relacionat.

Més enllà d'aquest punt, la teoria de jocs també ens pot ser útil en la pròpia metodologia d'assoliment de continguts. El joc és la via d'aprenentatge principal de l'ésser humà, tal i com Johan Huizinga pretenia il·lustrar sota el concepte de l'*homo ludens* (Huizinga 1972).

Per tant, l'ús de jocs és una excel·lent forma per a explicar determinats conceptes de forma interactiva, ja que és un procés que indueix a la reflexió i al pensament racional. Així doncs, el joc és un concepte profundament arrelat en la nostra societat (Carnap, Morgenstern, i Norbert Wiener 1974, p. 189):

> La analogía entre los juegos de estrategia y el comportamiento social y económico es tan evidente que encuentra amplia expresión en el pensamiento e incluso en el lenguaje de los negocios y de la política. Frases como "una jugada política" o el "juego de la Bolsa" constituyen un reflejo familiar de lo anterior.

Aquesta analogia no s'acaba aquí, doncs bona part de les formes de comportament social són, a la llum de la modelització matemàtica moderna, estrictament iguals a jocs d'estratègia. Per aquest motiu, doncs, l'estudi de la teoria de jocs pot aportar nova llum precisament a la comprensió del comportament social.

Centrant-nos en la didàctica, qualsevol element que faci servir un joc per a conduir a la reflexió pot ser altament interessant, tot permetent a la persona que estigui realitzant-lo una millor comprensió dels fets històrics. Aquestes activitats no s'haurien de limitar, com acostuma a passar, al públic infantil i escolar; determinats jocs són més aptes per al públic adult, especialment si s'ha de comptar amb una bona capacitat de reflexió per a entendre el problema i extreure'n conclusions. Per tant, la teoria de jocs pot contribuir a que millori tant la comprensió de la Història com el procés de reflexió, tot partint de la base que cap esdeveniment històric estava marcat per un destí invisible i que, per tant, s'han d'entendre els motius pels quals aquests van succeir.

Si reconeixem el potencial de la teoria de jocs en quant a Didàctica es refereix, caldria analitzar si és possible aplicar-la realment. Per les referències d'altres camps a on la teoria de jocs té un ús més madur les respostes són prou positives. Actualment s'està començant a aplicar teoria de jocs en estudis d'Història Econòmica (Greif 2003) així que, a priori, sembla que és una aproximació prou interessant per a ser emprada en altres camps de la didàctica i la recerca històrica. El seu paper no és, però, eliminar les tradicionals vies d'anàlisi i coneixement de les diverses disciplines científiques. La teoria de jocs ofereix, tant de manera autònoma com en combinació amb altres elements, una nova visió amb un gran potencial per a crear hipòtesis de treball no suggerides per altres tècniques; el gran avantatge que ens proporciona és que pot tenir en compte el coneixement aportat per altres fonts, tot integrant-lo dins el model matemàtic.

6.3 Breu història de la teoria de jocs

Per tal de saber quines són les motivacions que van impulsar la creació d'aquesta eina, així com esbrinar el seu futur més immediat, és necessari fer un breu repàs a la història de la teoria[2].

Durant els segles XVIII i XIX matemàtics com Pierre de Fermat (1607-1665) i Blaise Pascal (1623-1662) van aportar les primeres eines necessàries per al desenvolupament d'una teoria matemàtica com la que ens ocupa, gràcies a la creació del càlcul amb probabilitats, fonamental en l'ús del concepte anomenat estratègia mixta, com veurem més endavant (Hyksova 2004). James Waldergrave, amb la seva solució del joc conegut com a Le Her va aportar les primeres estratègies racionals conegudes d'un problema, a través de l'extensió del càlcul de probabilitats.

[2]La majoria de conceptes destacats en aquest apartat estan definits formalment al llarg del capítol.

Tot i aquests avenços no fou fins el segle XX que es començà a parlar de teoria de jocs, tot definint-se al primer terç d'aquest segle els conceptes i regles bàsiques d'un model de teoria de jocs. Aquesta etapa va estar dedicada fonamentalment als jocs de suma zero, també anomenats *jocs estrictament competitius*. Aquest tipus de jocs serveix per a modelar una situació amb dos jugadors enfrontats, entre els quals s'estableix un joc a on tot el benefici d'un dels jugadors és perjudici per l'altre. Era un pas lògic, si tenim en compte que en aquesta etapa els problemes que posteriorment s'englobarien sota el terme de la teoria de jocs estaven relacionats amb jocs de taula com els escacs.

D'aquesta forma, doncs, es van dissenyar les dues definicions formals d'un joc (extensiva i estratègica), introduint també el component aleatori als jocs a través del concepte d'estratègies mixtes. Aquests tres elements van proporcionar la base a partir de la qual es permetia dissenyar jocs més complexos que no pas els anteriors, iniciant-se l'aplicació del model en problemes reals de caire més avançat.

Un altre pilar del desenvolupament de la teoria en aquells anys va ser l'anomenat algoritme de Zermelo [3]. Aquest algoritme mostrava com es pot resoldre un joc de suma zero en forma extensiva amb informació completa, independentment del número d'estratègies que es puguin escollir. Això implica que, per exemple als escacs, hi ha una combinació de jugades perfecta que permetrà sempre treure el màxim benefici per part d'un jugador. Tot i això, l'extrema complexitat del joc fa que a la pràctica no s'hagi trobat aquesta estratègia correcta, malgrat haver-se demostrat teòricament que existeix.

Altres avenços importants van ser l'ús de subjocs i de l'algoritme minimax, amb la intenció de donar solucions a jocs plantejats.

La segona meitat del segle XX va tenir com a referent la publicació de l'obra de referència *The Theory of Games and Economic Behaviour* (Neumann i Morgenstern 1944). Va ser la primera aplicació pràctica de la teoria de jocs, a través de la col·laboració de John von Neumann amb l'economista Oskar Morgenstern. A més, va iniciar l'estudi dels jocs anomenats cooperatius, a on diversos jugadors po-

[3] Per a la demostració veure (Binmore 1992, pp. 32-34)

den ajudar-se per tal d'aconseguir un benefici major que no pas actuant de manera individual (Leonard 1995). Aquesta obra és considerada actualment com un dels elements fundacionals de la teoria de jocs com a disciplina científica, i una de les obres de referència en Ciències Socials pel que fa al segle XX (Israel i Millán Gasca 2001, p. 126):

> La influencia de este libro sobre la economía y en general sobre las ciencias sociales ha sido enorme. Su enfoque, de forma especial en lo que se refiere a la metodología matemática, inspiró un filón de investigaciones que llevó a axiomatizar completamente la teoría del equilibrio económico general, y con ello a la obtención de los resultados más significativos en relación no sólo con el problema de la existencia del equilibrio económico, sino también con los de la unicidad y la estabilidad global.

En aquest moment l'ús de la teoria de jocs en la recerca va augmentar exponencialment, en especial en treballs relacionats amb política (Shapley i Shubik 1954). La Guerra Freda, amb les seves tensions polítiques i militars, va passar a ser un camp d'aplicació idoni per a les tesis de la teoria de jocs, especialment a partir de la instal·lació, al 1957, de la corporació RAND a Santa Monica, especialitzada en l'aplicació de la mateixa.

Així, a mitjans del segle XX es considerava que la teoria de jocs revolucionaria el món de les Ciències Socials, dotant-lo finalment de les capacitats necessàries per a modelitzar matemàticament qualsevol tipus d'interacció social. Malgrat tot, com sempre passa en la recerca científica, tal explosió no es va donar, però sí que es va iniciar un llarg procés cap a un assoliment superior del coneixement a partir d'una eina tan poderosa com aquesta.

De totes maneres, l'economia va seguir essent considerat el camp propici per a l'aplicació de la teoria amb avenços tan importants com la noció d'equilibri en jocs cooperatius (per la qual John F. Nash va aconseguir el 1994 el premi Nobel) i el model del dilema del presoner

En aquests anys la teoria també va irrompre al món de la biologia a través de l'obra de John Maynard Smith. Fins i tot em un camp tan llunyà com aquest va tenir èxit la metodologia doncs, si bé òbviament, animals i plantes no són racionals, sembla ser que la manera en la qual evolucionen els organismes sí que segueix una lògica analitzable (Smith 1982).

A partir d'aquí els diversos treballs publicats han anat conformant un conjunt d'eines que, arrelades en la definició formal de problemes de decisió interactiva, han estat aplicades amb èxit en diversos camps del coneixement científic, especialment a partir de l'aprofundiment en els jocs cooperatius.

Actualment l'economia segueix essent el principal camp d'aplicació de la teoria, però el seu ús també és molt intens en la sociologia i les ciències polítiques.

Bona prova de la importància de la teoria de jocs és el fet que el premi Nobel d'Economia de l'any 2005 va ser atorgat a dos referents de la teoria de jocs, Robert Aumann i Thomas Schelling, per:

> ...have contributed to enhancing our understanding of conflict and co-operation. They have achieved this by extending and applying game theory – a method used to analyze strategic interaction among different agents. Their work has transformed the social sciences far beyond the boundaries of economics. Aumann's and Schelling's research continues to shape the debate on the formation of social institutions.

.

Tenint en compte la demostrada versatilitat de la teoria de jocs com a eina de modelització, doncs, sembla coherent pensar que aquesta disciplina podria tenir aplicacions en la didàctica i recerca al voltant de la història. Per començar a tractar aquest tema, però, abans hem de definir les bases de partida del model, tot definint conceptes, tipus de jocs i els mètodes pels quals aquests es poden resoldre.

6.4 Conceptes

La teoria de jocs fa servir el llenguatge matemàtic per tal d'expressar les seves idees de manera formal. Tot i això, les idees subjacents a cada model no són directament matemàtiques, ja que tenen a veure amb les possibilitats de decisió de cada jugador, i els mecanismes a través dels quals pren aquestes decisions.

La formulació matemàtica, però, facilita la definició i discussió d'aquests conceptes, així com la seva consistència i resultats.

Així doncs, l'ús que es farà de la teoria de jocs en aquesta recerca inclourà tant la definició formal matemàtica dels jocs com la necessària interpretació de les motivacions i resultats del model, ja que és precisament aquest l'interès de la recerca en tant que emmarcada en el camp de la Didàctica de les Ciències Socials.

Què necessitem, doncs, per tal d'estudiar una situació concreta mitjançant teoria de jocs? Abans d'endinsar-nos en la matèria és necessari definir els conceptes que farem servir, tot creant les claus necessàries per tal d'entendre i concretar l'objecte d'estudi.

De manera introductòria, podem dir que per a que un model de teoria de jocs funcioni correctament ha d'acomplir dues premises bàsiques:

- Els protagonistes persegueixen aconseguir una sèrie d'objectius ben delimitats i mesurables.

- A l'hora de prendre decisions cada protagonista fa servir el seu coneixement sobre el comportament i els objectius dels altres personatges implicats en el conflicte.

Aquestes condicions tan simples permeten que la teoria de jocs sigui aplicable en una àmplia gama de problemes incloent, tot i que sigui contradictori a primera vista, problemes amb actors no racionals. El cas més important és el de la biologia evolutiva; malgrat que els animals no siguin éssers racionals la manera en la qual funciona la teoria de la selecció natural permet abstraure els seus mecanismes en jocs segons els quals l'espècie vencedora és aquella que se sap adaptar millor al medi i sobreviu. Altres tipus d'aplicacions en aquest camp estan enfocats a l'anàlisi de les relacions simbiòtiques entre espècies biològiques diverses.

De manera formal, necessitem definir els pilars fonamentals del model matemàtic:

- El **joc** és la descripció de la interacció estratègica que hi pot haver entre els protagonistes d'un esdeveniment acotat. Especifica les maneres d'interactuar que ells tenen, així com les limitacions imposades a les seves accions, però no assenyala les decisions que ells prenen.

- El **jugador**, doncs, és l'actor protagonista de l'acció, capaç de prendre decisions tot tenint en compte les seves alternatives i les dels altres jugadors.

- Cada jugador és **racional**, és a dir, és conscient de les seves alternatives, les conseqüències de les seves accions, i té un procés d'optimització que li permet triar la millor decisió tenint en compte les seves expectatives.

- Una **solució** és la descripció sistemàtica dels possibles resultats que poden sorgir d'un tipus de joc. La solució hauria d'indicar, per cada jugador, el comportament que ha de seguir en totes les circumstàncies possibles dins el joc, tenint en compte totes les accions dels altres jugadors.

Trobar la solució d'un joc equival a resoldre'l i, per tant, a trobar les estratègiques que haurien de seguir tots els jugadors. És aquest el punt bàsic de la teoria de jocs, doncs cada model es resol de manera diferent, tot tenint en compte l'ús de la probabilitat i la lògica. Malgrat tot, és un procés enormement complex per les dificultats matemàtiques, ja que (Carnap, Morgenstern, i Norbert Wiener 1974, p. 192):

> ...parece que será necesario hacer importantes descubrimientos matemáticos antes de lograr abrir brecha en el campo de los fenómenos sociales.

6.4.1 Cooperació

Una divisió importants entre dues classes de jocs diferents té a veure amb l'actitud de cada jugador vers els altres. Els jocs no cooperatius són aquells en els quals les accions dels jugadors són individuals, i no són possibles les col·laboracions entre diferents jugadors. Van ser plantejats en l'obra de referència de von Neumann i Morgenstern (Neumann i Morgenstern 1944), i al ser els models de joc que més temps s'han estudiat també són els que han arribat a un estat de desenvolupament més important.

Dins els jocs no cooperatius tenen especial importància els anomenats jocs de suma zero o estrictament competitius. Aquesta tipologia és una variació del model en la qual es planteja un joc amb dos jugadors amb expectatives completament oposades. Això vol dir que els guanys d'un jugador són inversament proporcionals als de l'altre. Exemples bàsics d'aquest tipus de jocs són els escacs o les dames, per exemple.

Els models no cooperatius assumeixen que els jugadors no tenen cap mecanisme de col·laboració i, per tant, l'estudi d'aquests problemes es basa en analitzar quin és el resultat del joc en cas que tots els agents es comportin de manera estratègica.

Els jocs cooperatius, d'altra banda, tracten problemes en els quals són possibles accions que impliquin la col·laboració entre diversos jugadors. Aquests models assumeixen que els jugadors tenen determinats mecanismes dissenyats per a la cooperació, entesa com a acords vinculants entre ells. Els mecanismes, però, resten fora de les regles especificades pel joc, doncs el model creat es centra normalment en analitzar com es poden maximitzar els beneficis de la cooperació, i no pas en la cooperació pròpiament dita.

Cal destacar que actualment la majoria de jocs resolubles són no cooperatius, doncs com es va demostrar a partir del teorema minimax i el posterior equilibri Nash, sempre tenen solució. En aquests casos, els resultats es donen en forma d'una matriu de pagaments, que tipifica per cada combinació d'accions dels jugadors, el resultat per a cadascun d'ells[4].

6.4.2 Model matemàtic

Podem definir els elements que defineixen el model d'un joc amb informació perfecta no cooperatiu de la següent manera:

- El conjunt A d'**accions**, d'entre les quals el jugador triarà.

[4] Així, si tenim 2 jugadors, cadascun dels quals pot elegir una d'entre tres accions possibles, la matriu de pagament tindria $3^2 = 9$ resultats diferents, donada la combinatòria d'aquest cas.

- El conjunt C de **conseqüències** d'aquestes accions.
- Una **funció de conseqüència** $g : A \rightarrow C$, associant una conseqüència a cada acció.
- Una **relació de preferència** al conjunt C, expressada com a $\succsim$.

Pel que fa a l'últim punt d'aquesta definició, la relació de preferència C ha de ser completa, transitiva, reflexiva i binària, segons la teoria matemàtica de conjunts:

- Una relació R és completa si es compleix que, donat un conjunt X determinat, $aRb \vee bRa$ per $\forall a, b$.
- Una relació R és transitiva en un conjunt X si, $\forall a, b, c \in X$, es compleix que $aRb \wedge bRc \Rightarrow aRc$.
- Una relació R és reflexiva en un conjunt X si $\forall a \in X$ es compleix que aRa.
- Una relació R és binària si, donat un conjunt X, es compleix que $R \subseteq X \times X$, essent $X \times X$ el producte cartesià.

Definint aquests elements, doncs, es planteja de manera formal el problema que intentem analitzar. A continuació és possible cercar una solució, tenint en compte que cadascun dels jugadors voldrà obtenir el màxim benefici de la situació fent servir el subconjunt B d'accions al seu abast, tenint en compte que en tot cas $B \in A$. D'aquestes possibles accions B el jugador racional en triarà una que sigui òptima per als seus interessos.

6.4.3 El concepte d'utilitat

L'element clau en la presa de decisions és la manera segons la qual se sap que una decisió és millor que una altra, donada una casuística particular del model definit. És a dir, si tenim un sistema amb una sèrie d'estats i regles derivades de la realitat en la que es basa el model, com decidim quin dels estats és el més positiu per a les nostres expectatives?

La part més complexa d'aquest model és, però, l'assignació de preferències a les accions disponibles del jugador. És a dir, donat aquest conjunt A d'accions i les seves conseqüències C, com establirà les preferències entre A cada jugador?

La resposta no és gens fàcil, ja que la quantitat de variables en joc pot arribar a ser d'una magnitud tal que, dins de la terminologia pròpia de la resolució de problemes matemàtics, no sigui computable. En teoria de jocs s'anomena *utilitat* al mecanisme segons el qual donem valor mesurable als diversos estats finals, amb la intenció de triar d'entre ells els que siguin més positius per al jugador protagonista de l'acció.

Es defineix com a **funció d'utilitat** $U : C \rightarrow \mathbb{R}$ aquella que estableix una relació de preferència $\succsim$ per la condició $x \succsim y$ si i només si $U(x) \geq U(y)$.

Donat qualsevol conjunt $B \subseteq A$ d'accions a l'abast del jugador en un cas particular, un jugador racional triarà una acció $a^* \in B$ òptima, és a dir, que $g(a^*) \succsim g(a)$ per tot $a \in B$ [5].

Així doncs, la funció d'utilitat permet al jugador triar la millor acció per a ell tenint en compte la seva situació actual, les accions disponibles, i la funció de conseqüències definida, tot fent servir relacions de preferències.

Aquesta funció d'utilitat, però, és un concepte molt variable, en tant que element artificial introduït dins un model del món real. En el primer camp d'aplicació de la teoria de jocs, l'economia, es justifica la utilitat de les accions dels jugadors en funció del profit econòmic que en puguin treure[6], però hi ha molts altres paràmetres igualment vàlids, tot depenent del problema a estudiar, com per exemple les quotes de poder dels diversos partits, fetes servir en ciències polítiques.

Un cas especialment important és el de la biologia evolutiva, ja que aquest concepte artificial d'utilitat s'ha vist substituït per un altre de molt més verificable i òptim: la supervivència de l'espècie. Així doncs, curiosament en un entorn sense éssers humans és a on trobem sistemes amb un grau de consistència més important

[5] segons (Osborne i Rubinstein 1994) també pot definir-se com la solució al problema $\max_{a \in B} U(g(a))$.

[6] De fet, en models més complexos es fa servir com a utilitat la satisfacció que el jugador treu d'aquest valor econòmic.

dins un model teòric de jocs (Smith 1982).

6.4.3.1 Utilitat i Història

Dins aquest panorama, doncs, quina funció d'utilitat és vàlida en la investigació històrica? El resultat és tan divers com ho és la Història mateixa. Cada període i societat determinarà la utilitat de les accions desenvolupades pels humans que hi són compresos i, per tant, és fa necessari un estudi profund d'aquest entorn per tal de fer servir paràmetres acurats; els resultats de l'anàlisi, doncs, seran tant acurats com ho sigui aquesta utilitat.

D'altra banda, l'aplicació de la teoria de jocs a la Història té un avantatge important en la recerca d'aquestes utilitats. Sabem el context en els quals les decisions van ser preses, així com el seu resultat. Aquest és un cas sovint atípic dins les altres disciplines, ja que en el cas que ens ocupa la intenció de modelitzar un problema amb teoria de jocs no és tant esbrinar l'efecte de les decisions del jugador en un futur com determinar les pròpies decisions, tot destriant les estratègies seguides de totes les possibles a l'abast dels protagonistes.

Si ho relacionem amb la didàctica de la Història, explicar la funció d'utilitat és equivalent a mostrar les motivacions que cadascun dels protagonista d'un problema tenien, així que pot ser prou interessant reflectir la cerca d'aquesta funció en tant que exploració del procés de presa de decisions.

6.5 Jocs de suma zero amb informació perfecta

Ens centrarem a partir d'ara en l'estudi d'un tipus de jocs no cooperatiu, en els quals tenim sols dos jugadors, donat que són els que farem servir al llarg d'aquest treball. Si el guany d'un d'aquests jugadors es fa a costa del de l'altre estarem parlant del que s'anomena un joc de suma zero; a nivell matemàtic podem especificar que un joc bidimensional de suma zero és aquell en el qual si u_1 és la matriu de pagaments del jugador **1**, i u_2 és la matriu de pagaments del jugador **2**, aleshores $u_1 + u_2 = 0$. Per tant, els guanys del segon jugador es podran especificar com a un valor negatiu pel que fa al primer.

6.5.1 Formes de jocs

Per a modelitzar un joc com aquest es fan servir usualment dos tipus diferents de formes, conegudes com a jocs estratègics i jocs extensius. En el primer cas es tracten situacions en les quals els dos jugadors han de triar la seva estratègia de manera simultània a l'inici del joc. Com veurem, s'il·lustra la tria a través d'una taula, a on es mostren totes les possibles combinacions entre les opcions dels dos jugadors.

La forma extensiva, d'altra banda, es basa en l'elecció alternativa d'accions per part dels dos jugadors. S'esquematitza en forma d'arbre, i és útil per a situacions que es puguin modelitzar mitjançant passos de temps discrets, a on ambdós jugadors han d'anar interactuant.

6.5.1.1 Joc estratègic

Un joc estratègic és un model segons el qual cadascun dels jugadors tria un pla d'acció, i el conjunts d'accions dels jugadors és executada simultàniament. El model conté un conjunt finit N[7] de jugadors i, per cada jugador i, un conjunt A_i d'accions i una relació de preferència associada $\times_{j \in N} A_j$ de resultats de A[8].

La clau del joc estratègic és que, com s'especifica en la relació de preferència, la decisió de cada jugador no està supeditada tan sols a les seves expectatives, sinó també a les accions dels altres jugadors, A_{-i}[9]. En un joc de suma zero, a on el benefici d'un jugador és exactament invers al de l'altre, es pot mostrar l'estructura d'un model estratègic com la taula mostrada a 6.1, essent $A1, A2$ les accions disponibles per al jugador A, $B1, B2$ les opcions de l'altre jugador B, i a, b, c, d els possibles resultats (a si el jugador A tria $A1$ i B tria $B1$, b si el jugador A tria $A1$ i el seu rivel B eligeix $B2$, etc.).

[7] En el cas que ens ocupa $N = 2$.

[8] És a dir, per cada acció del jugador i hi haurà un resultat en relació a cada possible acció dels altres jugadors.

[9] A_{-i} és el conjunt d'accions de tots els jugadors del joc menys el jugador i.

	$B1$	$B2$
$A1$	a	b
$A2$	c	d

Taula 6.1: Estructura de model estratègic

Un cop plantejat el problema, així com les opcions de cadascun dels jugador, el pas final és la solució del model. El mètode més emprat en teoria de jocs és la detecció dels punts de sella o, més generalment, els equilibris Nash (Osborne i Rubinstein 1994, p. 14). Aquest concepte intenta destriar quin hauria de ser l'estat més estable dins del model estratègic d'un joc, a partir de la premissa que cadascun dels jugadors sap quines són les expectatives dels altres jugadors, tot responent de manera racional a les accions dels rivals (Binmore 1992, p. 47).

6.5.1.2 Joc extensiu

Un joc en forma extensiva té en compte la variable temporal, així com els processos de causa-conseqüència. Així, per cada acció d'un dels jugadors el joc ha de mostrar quines respostes té l'altre jugador; per cadascuna d'aquestes, les opcions del primer, i així successivament.

Per a mostrar aquestes relacions es fa servir un tipus de graf especial anomenat arbre. Els arbres són grafs dirigits a on tots els nodes estan connectats, i no existeixen cicles. Així, cada aresta té una direcció definida. D'altra banda, els cicles són segments d'un graf que poden tancar-se. És a dir, si tenim tres nodes connectats entre ells, podrem anar passant d'un a l'altre en un cicle sense final.

Un arbre no permet aquest tipus d'estructures; si unim el fet que les arestes són dirigides amb que no hi poden haver cicles, obtenim un graf en el qual cada decisió sobre quina aresta elegim fa que deixem enrere totes les altres possibilitats, doncs sols podrem accedir a nodes als quals estiguem connectats a partir d'una aresta amb la direcció adequada.

Veure, per exemple, la figura 6.1. En ella, podem observar un graf que compleix totes les condicions per a ser considerat un arbre. L'estructura generada té, com a conseqüència de les regles establertes, una arrel (en aquest cas el node A), un conjunt de nodes intermedis a on és possible decidir la ruta (els nodes B, E i H), i finalment un conjunt de nodes a on s'acaba el recorregut per no haver-hi més opcions disponibles. Aquests nodes són l'estat final a on s'arriba tot recorrent l'arbre, i com a tals són coneguts com a fulles (a l'exemple, els nodes C, D, F, G, I i J).

Si traslladem aquest concepte d'arbre a un joc amb les característiques esmentades anteriorment, obtenim una figura com la que podem observar a 6.2. Partim d'una situació inicial, donada pel node arrel O. A partir d'ell, el jugador A té tres opcions disponibles. $A1$, $A2$ i $A3$. Depenent de quina opció triï A, el jugador B en tindrà de diverses disponibles. Davant d'$A1$ pot elegir entre $B1$ i $B2$; si $A2$ les accions de B poden ser $B3$ i $B4$. Finalment, si $A3$ pot triar entre $B5$ i $B6$. Cal destacar que $B1$, $B3$, $B5$ i $B6$ són fulles, i que per tant en cas de ser elegides el joc es donaria per acabat, essent el resultat final l'expressat sota aquestes fulles. En el cas de les opcions $B2$ i $B4$, el jugador A podrà escollir entre $A4$ i $A5$ davant la primera opció, i $A6$ i $A7$ en el segon. En tot cas, el joc està acabat, i el resultat final serà l'obtingut al final del recorregut pels diversos nodes, establerts a partir de les decisions dels dos jugadors.

Així, si per exemple el jugador A triés $A2$, el B respongués amb $B4$ i l'A elegís per acabar $A7$ el valor final del joc seria de -4.

6.5.1.3 Equivalència de models

Aquestes dues formes diferents són eines útils per als investigadors, però en essència són idèntiques i equivalents. Fem servir un sistema o l'altre depenent del que considerem més fàcil de fer servir en un cas concret, però en qualsevol moment podem passar de forma estratègica a extensiva (o al revés) si ens ha de ser útil.

Per exemple, imaginem un joc a on tinguem dos jugadors, cadascun dels quals té a la mà dues monedes amagades. Al mateix moment tots dos han de mostrar les monedes, havent decidit amb anterioritat si ensenyen cara o creu per a cadascuna d'elles. Si el número de cares és parell, guanya el jugador A; si és senar, guanya el

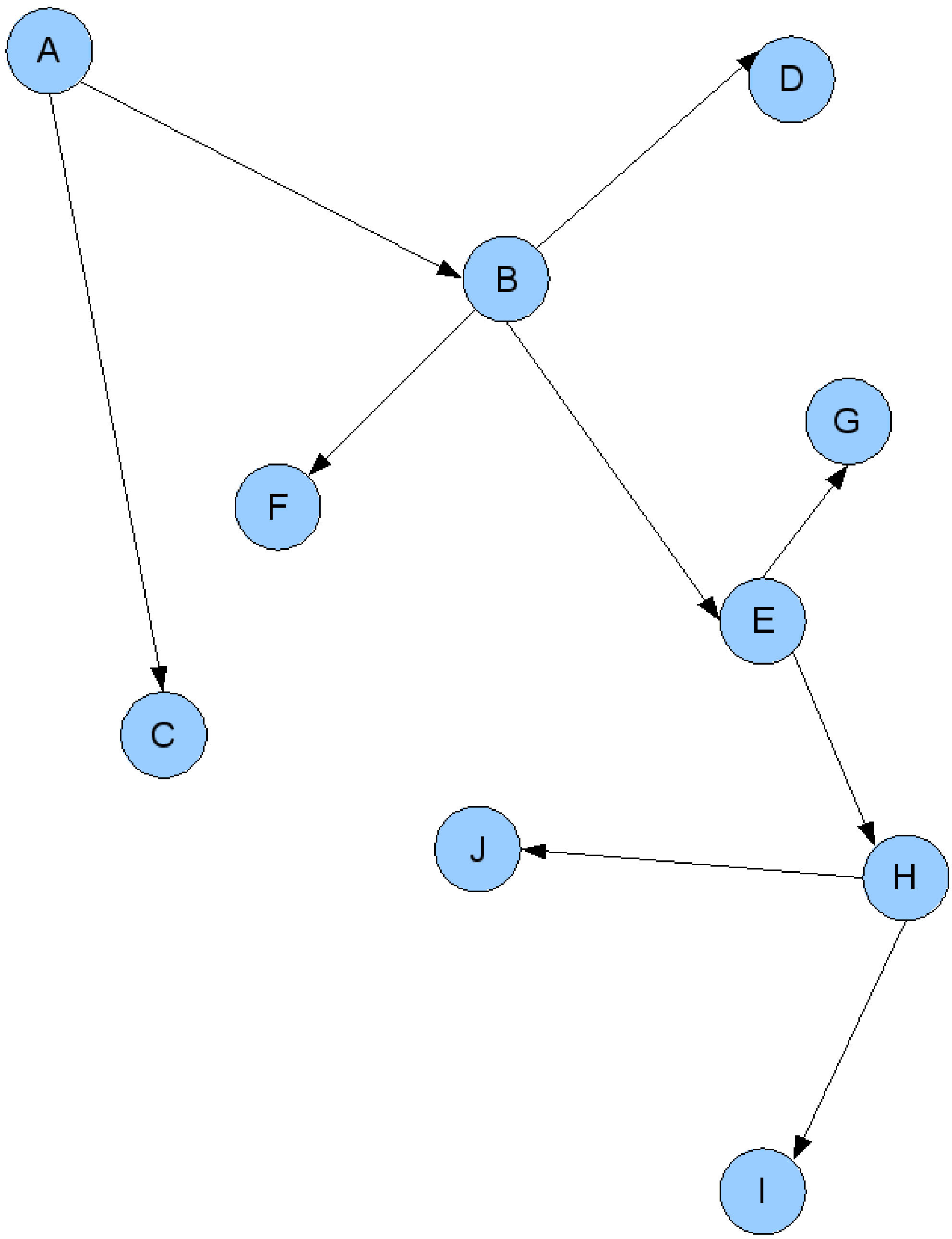

Figura 6.1: Estructura d'un arbre

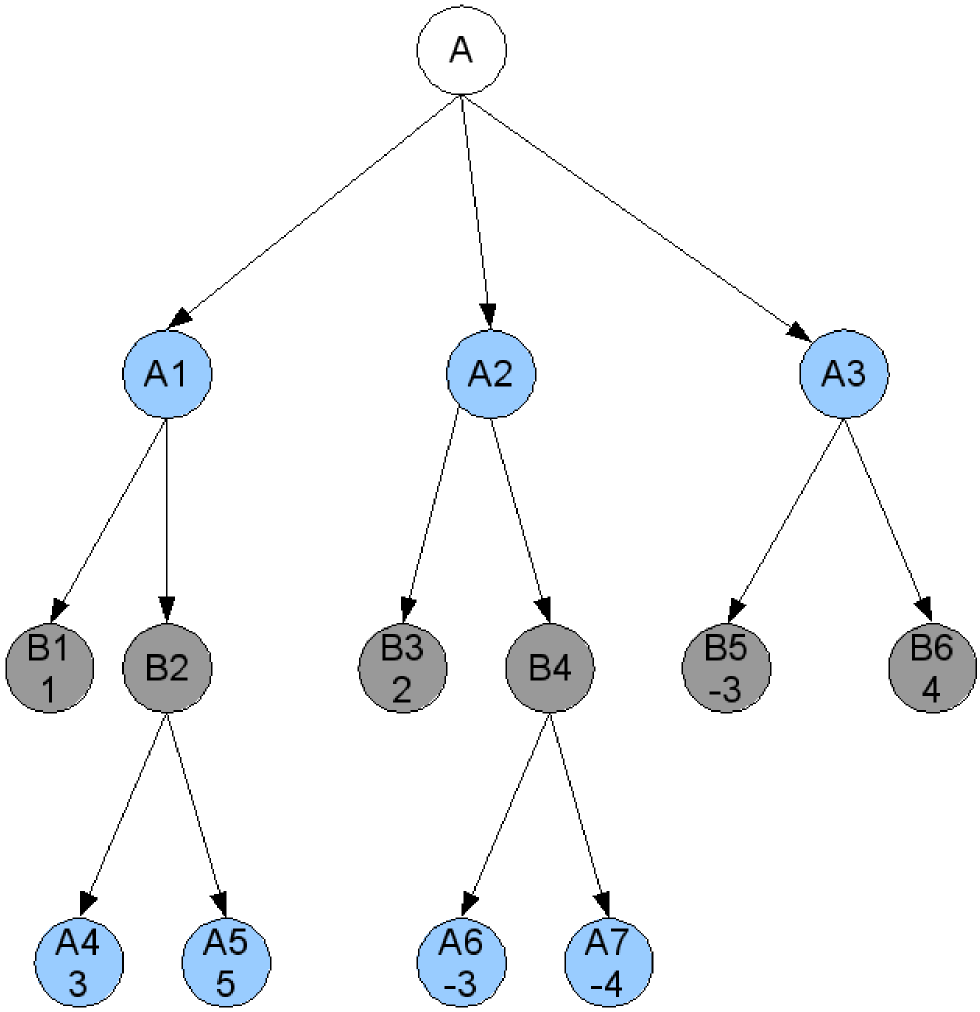

Figura 6.2: Estructura de model extensiu

	$B-CC$	$B-CX$	$B-XC$	$B-XX$
$A-CC$	1	-1	-1	1
$A-CX$	-1	1	1	-1
$A-XC$	-1	1	1	-1
$A-XX$	1	-1	-1	1

Taula 6.2: Model estratègic del joc de la moneda

jugador B.

Si construïm un joc en forma estratègica que mostri aquesta situació, i expressem la matriu de pagaments en funció del que guanya A, obtenim la taula 6.2, en cas que guanyar el joc valgui 1 i perdre equivalgui a -1.

Les estratègies, d'altra banda, estan expressades a partir de cada jugador (A o B) seguit de la combinació de cares (C) i creus (X).

Amb la mateixa nomenclatura, l'equivalència en forma extensiva d'aquest joc es mostra a la figura 6.3, si tenim en compte que tots dos jugadors trien al mateix instant l'estratègia a seguir d'entre les quatre possibles (CC, CX, XC i XX)[10]. En aquest cas podríem deduir que la forma estratègica és més útil, doncs sintetitza de manera més eficient un joc en el qual la variable temporal no és rellevant.

6.5.2 Estratègies òptimes pures

Si ens centrem en el coneixement del que disposen els dos jugadors, existeix una tipologia de jocs coneguda com a casos d'informació perfecta. En ells cada jugador té un coneixement absolut de les condicions en les quals pren les seves decisions. Per tant, en cada punt del joc els diversos jugadors coneixen quines accions s'han produït en quant a les decisions dels altres jugadors[11].

En aquests casos el joc és estrictament determinista, doncs per cada jugada se sap quines opcions posteriors existeixen, així com les possibles respostes del rival.

[10]Evidentment les estratègies CX i XC són idèntiques, però cal diferenciar-les si volem deixar el joc en la forma més senzilla possible.

[11]Els jocs amb informació imperfecta, per contra, introdueixen incertesa en aquests punts.

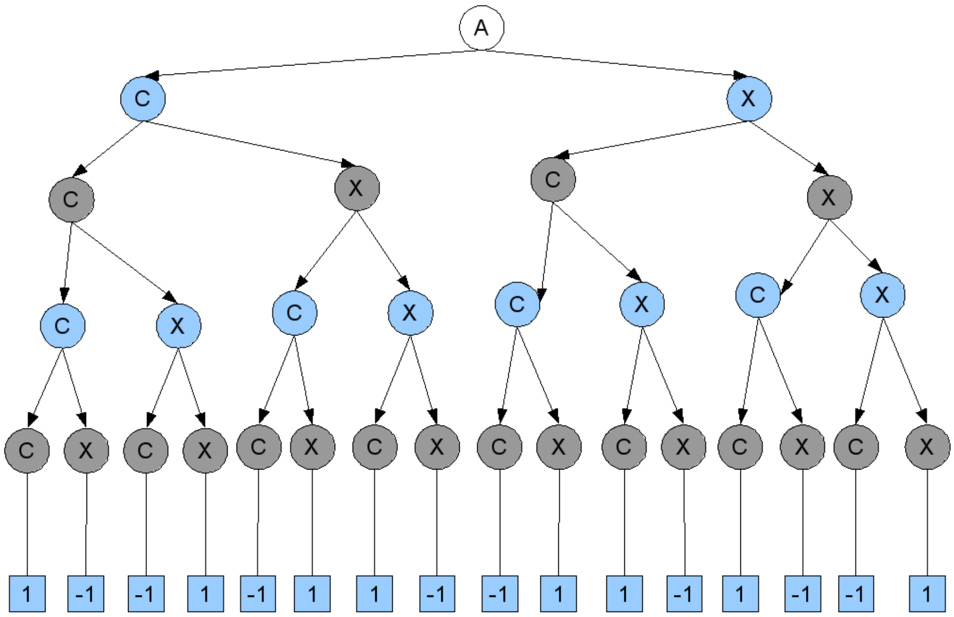

Figura 6.3: Model extensiu del joc de la moneda

En alguns d'aquests jocs hi ha una estratègia òptima pura; si el jugador que la té com a opció disponible la segueix fil per randa aconseguirà obtenir el resultat més segur possible; fins i tot si el rival coneix que l'estratègia en qüestió és òptima per al primer jugador, aquesta no perdrà el seu valor (Carnap, Morgenstern, i Norbert Wiener 1974, p. 192).

A efectes de nomenclatura en aquests casos es diu que el joc té un *punt de sella*. Es fa servir aquest terme per analogia a una sella de muntar, ja que és el punt en el qual existeix una intersecció entre dues línies diferents; en el cas de la sella de muntar el llom del cavall i les cames del genet, i en el cas del joc les estratègies de cada jugador, tot tenint en compte que una comporta el màxim valor per a ell, i l'altra el mínim (i, per tant, màxim per l'altre).

Dit d'una altra forma, si elegim el valor més baix de l'estratègia que busca el màxim (el mínim del màxim), i el valor més alt de la que busca el mínim (el màxim del mínim), i tots dos valors són idèntics, estarem en un punt de sella.

Mirem, per exemple, la taula 6.3, que representa un model de joc estratègic o,

	$B1$	$B2$	$B3$
$A1$	3	5	2
$A2$	7	-1	0
$A3$	-1	2	1

Taula 6.3: Exemple de punt de sella

segons von Neumann, un joc en forma normal (Osborne i Rubinstein 1994, p. 9). Aquesta taula en concret representa un joc bidimensional de suma zero i informació perfecta, a on cada jugador té 3 estratègies diferents. Hi ha, per tant, 9 resultats potencials, que donen un valor a cada combinació d'estratègies, donat que cadascun dels jugadors triarà una opció en concret. Aquests resultats, d'altra banda, estan formalitzats com a valors que guanya A i, per tant, que perd B, donat que estem davant un joc de suma zero.

El jugador A (que pot triar entre $A1$, $A2$ i $A3$) ha d'escollir l'estratègia que maximitzi els mínims. En $A1$ el mínim és 2, en $A2$ és -1 i finalment en $A3$ és -1. Per a triar l'estratègia maximin hem d'agafar el màxim d'aquests tres valors mínims i, per tant, el jugador A ha d'escollir l'estratègia $A1$, que com a mínim li garenteix un benefici de 2 (i, en el cas que el jugador B s'equivoqui, un benefici encara més gran).

Pel que fa al jugador B, ha d'escollir l'estratègia minimax, és a dir, el mínim dels màxims. Si tria $B1$ el màxim és 7, amb $B2$ és 5 i a $B3$ és 2. Si triem el mínim d'aquests màxims, l'estratègia minimax és $B3$.

Per tant, en aquest exemple donat existeix un punt de sella a la intersecció entre $A1$ i $B3$, i té un valor de 2.

Si el jugador B conegués amb antelació que el seu rival jugarà $A1$, igualment no canviaria d'opinió, i seguiria amb la seva estratègia $B3$, que és la que li dóna més benefici en el cas d'$A1$. Recíprocament, si A sap que el seu contrincant ha elegit $B3$ tampoc canviarà d'opinió, doncs el valor de 2 és el màxim que podrà obtenir. Per tant, acabem de demostrar que aquest joc té un punt de sella.

6.6 El teorema Minimax

Hem vist com els jocs de suma zero i informació perfecta es poden resoldre. Malgrat tot, aquesta regla es compleix en tots els jocs d'aquest tipus? És a dir, són resolubles aquests jocs?

En el cas que existeixi un punt de sella, i per tant un resultat calculable directament com acabem de veure, és evident que aquests jocs tenen certament solució.

En el cas que no es detecti un punt de sella directament, cal determinar-lo a partir de l'ús de probabilitats, fent servir el que s'anomenen *estratègies mixtes*. Si reflexionem al voltant del concepte de punt de sella, podem deduir que si no existeixen punts de sella a priori ens seria de molta utilitat saber l'estratègia del rival, doncs en aquest cas podríem canviar la nostra per a maximitzar el benefici. És el cas de jocs amb atzar, que no són deterministes i en els quals és fonamental amagar l'estratègia que es farà servir del coneixement del rival.

Així doncs, existeix alguna estratègia segura en aquest tipus de jocs que, malgrat ésser coneguda pel rival, farà que no pugui aprofitar-ho per a maximitzar el seu benefici tot canviant d'estratègia?

Si traslladem aquesta qüestió a l'àmbit purament matemàtic, la pregunta es transforma en la següent: existeix sempre un punt de sella? La resposta és afirmativa, tal i com va demostrar John von Neumann amb el teorema minimax. Per a fer servir aquest sistema, el jugador ha de triar amb una probabilitat determinada cadascuna de les possibles estratègies pures, enteses com a opcions originals del jugador (Carnap, Morgenstern, i Norbert Wiener 1974, pp. 186-187).

Per exemple, imaginem un joc extremadament senzill en el qual tenim dos jugadors, cadascun amb una moneda. Elegeixen mostrar cara o creu, cosa que fan al mateix instant; si surten figures repetides, guanya el jugador A; si surten diferents, guanya B. Els valors estaran definits pel guany del jugador A, essent els de B estrictament inversos.

Aquest joc s'expressa amb la forma estratègica mostrada a la taula 6.4. Podem veure que cada jugador pot triar dues estratègies, però que cap d'elles li garanteix

	$B - cara$	$B - creu$
$A - cara$	1	-1
$A - creu$	-1	1

Taula 6.4: Joc amb estratègies mixtes

un resultat millor que l'altre si tenim en compte la possible decisió del rival. És a dir, si tenim a la nostra disposició les estratègies $A - cara$ i $A - creu$, depenent del que faci al rival podem tenir en ambdues un resultat de 1 o bé de -1. No podem saber el que farà l'altre jugador, ja que ell està en el mateix cas que nosaltres, eligeixi $B - cara$ o ara bé $B - creu$.

Per tant, l'estratègia correcta per a tots dos és que elegeixin cada estratègia amb una probabilitat de $P = \frac{1}{2}$. És a dir, el jugador A la meitat dels cops ha de triar cara i la meitat creu, a fi i efecte de diversificar la nostra tirada. Per la seva banda, el jugador rival B també ha de triar amb possibilitat 0.5 cadascunes de les dues estratègies (cara o creu). Aquesta eś la solució del joc, i per extensió és possible fer servir la mateixa tècnica amb la resta de jocs que no tinguin punts de sella evidents, però compleixin les definicions donades anteriorment. L'únic que es necessita és calcular la probabilitat amb què hem d'elegir cada estratègia.

John von Neumann va demostrar al 1928 la certesa d'aquesta hipòtesi, que està recollida com diem en l'anomenat teorema minimax:

> Donat qualsevol joc de suma zero existeix un valor v que té associades dues estratègies; una, l'estratègia mixta maximin, garanteix al primer jugador que rebrà com a mínim el valor v; l'altra, l'estratègia mixta minimax, assegura al segon jugador com a màxim el valor v.

En termes matemàtics, si la matriu de pagaments és M, el teorema minimax s'expressa de la següent manera (Dresher 1981, pp. 21-22):

$$max_A min_B AMB = min_B max_A AMB = v$$

Així, tots els jocs de suma zero, amb dos jugadors, finits i amb informació perfecta estan estrictament determinats, i tenen una solució que és possible calcular; una altra cosa és que això sigui computable amb un ordinador, donat que sovint el número d'opcions és tan elevat que és impossible contemplar totes les branques de l'arbre de decisions. Aquest és el cas, per exemple, dels escacs: sabem que hi ha una solució que assegura al jugador blanc com a mínim les taules, però desconeixem quina és la sèrie de jugades que garantitzen això a causa del l'ingent volum d'estratègies a l'abast del jugador.

D'altra banda, podem reconèixer el sentit comú de fer servir l'atzar per a obtenir els millors resultats en casos trivials, com per exemple el de la moneda esmentat anteriorment. Malgrat tot, pels éssers humans no és tan fàcil pensar que aquesta mateixa opció pugui ser la millor en situacions importants. Així, von Neumann i Nash van demostrar que sovint, en les decisions més rellevants, deixar que l'atzar triï la opció és curiosament l'acció més racional de totes.

6.6.1 Equilibri Nash

El teorema minimax va ser un dels pilars revolucionaris de la teoria de jocs com a model matemàtic de conflictes socials. John Forbes Nash va demostrar, 30 anys després, que el teorema també era vàlid per a n-jugadors, descobrint el teorema que actualment s'anomena *equilibri Nash.*

Segons la definició de Nash, l'equilibri d'un joc estratègic definit per N jugadors, A_i accions disponibles per jugador, i amb una relació de preferència donada per $\succsim_i$, és un perfil $a^* \in A$ d'accions amb la propietat que, per cada jugador $i \in N$ tenim:

$$(a^*_{-i}, a^*_i) \succsim_i (a^*_{-i}, a_i) \forall a_i \in A_i$$

I que, per tant, cada jugador $i \in N$ pot triar una estratègia a^*_i preferida a totes les altres, donat que els altres jugadors també eligeixin les seves pròpies accions preferides, essent el resultat l'equilibri Nash.

6.7 Mètodes de resolució: l'algorisme minimax

La resolució de models matemàtics de teoria de jocs és un assumpte complicat, que depèn especialment del número de jugadors i del fet que el joc sigui de suma zero. En aquest context, la Intel·ligència Artificial ens brinda algunes eines per a aconseguir obtenir solucions dels models dissenyats.

Com a model matemàtic, la teoria matemàtica de jocs és un sistema discret i finit, que es pot resoldre, com veurem, a partir de les tècniques emprades en teoria de grafs.

D'altra banda, tenint en compte que la Intel·ligència Artificial té un pes important dins la simulació dels processos de decisió humans, podem veure la teoria de jocs (en concret els jocs de suma zero) com a un entorn determinista, totalment observable, a on trobem dos agents les accions dels quals s'han d'alternar, i amb valors d'utilitat sempre iguals i oposats al final del joc (Russell i Norvig 2004, p. 181).

Des del punt de vista de la Intel·ligència Artificial, són entorns multiagents a on els agents definits són aquells actors protagonistes de la situació a modelar les accions dels quals afecten a la resta. A més, les especificacions fetes anteriorment es tradueixen, en termes de IA, com a entorns deterministes totalment observables, en els quals els dos agents han d'alternar decisions i a on els valors d'utilitat són, al final del joc, iguals i contraris[12].

Per a solucionar aquest tipus de jocs, la Intel·ligència Artificial fa servir un algorisme de cerca informada anomenat algorisme minimax. Aquest calcula l'estratègia òptima donat que estiguem en un node concret de l'arbre de decisions. Bàsicament funciona a partir de triar, per cada punt de decisió, la millor opció per a un jugador, seguida per la pitjor opció per al mateix (que, per tant, és la millor per l'altre).

[12] És a dir, que si un té un valor -2 l'altre ha de tenir, forçosament, un valor de 2.

L'algoritme, que s'expressa com a pseudocodi, es pot especificar de la següent manera[13]:

```
funció MiniMax(estat):
   // la funció rep com a variable l'estat inicial pel qual hem de
   // calcular l'estratègia òptima

   // cridem a una funció que calculi el valor màxim disponible
   v := valor_màxim(estat)
   tornar la llista successors d'estat amb valor v.


funció valor_màxim(estat)
   // si hem arribat al final de l'arbre tornem el valor
   si FINAL retornem el valor de la fulla

   // en cas contrari iniciem el càlcul
   // inicialitzem a infinit
   v := infinit

   // busquem el valor més gran, que retornarem
   per cada s dins successors d'estat:
      // elegim el valor major entre l'actual i el mínim de les
      // estratègies possibles
      v := valor màxim entre (v, valor_mínim(s))
      tornar v

funció valor_mínim(estat)
   // si hem arribat al final de l'arbre tornem el valor
```

[13] Un pseudocodi és una forma genèrica d'expressar un algoritme, seguint les convencions d'un llenguatge de programació informàtic, però sense haver de fer servir específicament un d'ells.

```
si FINAL retornem el valor de la fulla

// en cas contrari iniciem el càlcul
// inicialitzem a infinit
v := infinit

// busquem el valor més petit, que retornarem
per cada s dins successors d'estat:
   // elegim el valor menor entre l'actual i el màxim de les
   // estratègies possibles
   v := valor mínim entre (v, valor_màxim(s))
   tornar v
```

Com podem veure, es va alternant la cerca del valor màxim i mínim, que es van executant de forma recursiva. Un cop arribats a un final de l'arbre (el que s'anomena una fulla), tornem enrere i provem un altre camí; si aquest dóna un resultat millor, l'elegim, i si no, mantenim l'altre.

D'aquesta manera, anem provant cadascuna de les estratègies possibles, tot trobant el resultat òptim de manera irrefutable.

Com hem dit anteriorment és un algorisme que sempre retorna un resultat correcte, però que és molt costós en temps de càlcul, ja que ha d'anar provant cadascuna de les possible estratègies i, al seu torn, les respostes de l'altre jugador. Per tant, a excepció de jocs relativament simples no és un càlcul computable, i s'han de buscar altres algorismes que, prenent com a base el minimax, siguin més eficients (amb la repercussió que no seran tan precisos)[14].

[14]Per a veure possibles alternatives, com per exemple l'anomenat algorisme de poda alfa-beta, consultar (Russell i Norvig 2004, pp. 188-215).

6.8 Decisions en un camps de batalla

Un cop definida la teoria de jocs, cal definir el marc pràctic en el qual la volem aplicar en quant a la interpretació de camps de batalla de l'edat moderna es refereix.

En primer lloc, gestionar un exèrcit exigeix la màxima racionalitat. Per la seva naturalesa violenta i impredictible la guerra té bona part d'irracionalitat, però abastir i moure una força de diversos milers de soldats amb la intenció de derrotar un enemic de força equivalent és una tasca necessàriament reflexiva. Ningú farà moure un exèrcit sota les seves ordres per dalt d'una muntanya si és possible fer servir una carretera, o deixarà que les seves tropes morin de fam o set per falta de previsió; en tot cas, però, existeixen nombrosos actes de negligència que normalment acaben en la victòria de l'enemic. En termes de teoria de jocs diríem que, en el cas que un jugador no triï l'acció a^* òptima, el seu contrincant seguirà intentant maximitzar els beneficis i, per tant, guanyarà el joc.

En segon lloc, la magnitud dels exèrcits en època moderna, així com la naturalesa de la guerra, permet definir el conjunt de variables important de manera relativament simple, en clara contraposició a la complexitat que pugui assolir la seva aplicació en conflictes posteriors a la industrialització, en els quals la dificultat d'estudiar factors logístics és molt superior.

Així, podríem definir a priori la potència d'un exèrcit a nivell operacional i estratègic a partir de dues variables principals: el número d'homes i la seva eficàcia en combat. Aquests dos factors ja eren copsats al segle XIX com els més importants en el desenllaç d'un enfrontament bèl·lic, tal i com destaca Tolstoy a *Guerra i Pau* (Tolstoy 2009)[15].

En el cas de fer servir teoria de jocs per a modelar enfrontaments, però, també cal tenir en compte les limitacions del sistema. Tant els jocs estratègics com els extensius no es poden fer servir per a calcular les solucions d'un sistema amb milers de jugadors. Per tant, no és possible interpretar una batalla sencera amb aquesta tècnica, ja que necessàriament hauríem de fer massa simplificacions. L'alternativa

[15]El novel·lista rus no parlava sense fonament, ja que havia passat uns anys de la seva vida com a voluntari dins l'exèrcit tsarista a finals del segle XIX.

seria l'ús de la teoria de jocs per a analitzar les ordres dels comandants, però en un entorn tan caòtic, a on hi ha multitud d'esdeveniments simultanis, i en el qual milers de combatents influeixen en el resultat final a més de les ordres, aquesta aproximació seria errònia.

Per contra, la teoria de jocs és excel·lent per a entendre els problemes a nivell operacional i estratègic. La simplificació que tracta a un exèrcit com a un bloc compacte que decideix de manera comuna les accions sí que pot fer-se servir per a trobar línies de comunicació, rutes d'avenç, elecció de zones campamentals, i especialment la casuística que va portar a una batalla. És a dir, malgrat que difícilment podrem modelar la pròpia batalla, sí que podrem entendre per què aquesta es va produir, doncs en aquest cas sí que la decisió d'entrar en batalla va ser feta de manera unilateral per la comandància de cada exèrcit, sense consultar als seus soldats[16].

Així doncs, en quant a interpretació i didàctica de camps de batalla es refereix, la teoria de jocs és la eina millor posicionada per a poder analitzar el que va passar abans i després d'un combat, així com els motius pels quals aquest va tenir lloc, i explicar les causes per les quals el resultat va ser el donat. És relativament fàcil fer servir, dins d'un joc estratègic o extensiu, dades extretes de les fonts textuals, tot integrant-les en la reconstrucció del procés de presa de decisions donat.

6.8.1 Model de joc

Quin tipus de jocs es pot modelar, doncs? L'elecció de la història de la guerra com a subjecte d'aquest treball ens dóna un avantatge evident en la modelització amb teoria de jocs, doncs podem fer servir els models més ben compresos de tots: els jocs de suma zero.

Com a primera premissa, normalment un combat o una campanya del segle XVIII consta de dos bàndols ben diferenciats, cadascun composat d'un exèrcit amb un sistema d'oficialitat jeràrquic encapçalat per un comandant en cap. D'altra banda, la suma zero és una simplificació assumible, ja que podem generalitzar els

[16]Tot i que, com és lògic, l'estat i la moral d'aquests van influir en la decisió dels oficials de combatre o no fer-ho.

casos concrets tot dient que el que un bàndol guanyi ho perdrà l'altre. En alguns casos no és gens clar que això sigui cert, doncs el que pot significar una victòria tàctica es pot transformar en una derrota estratègica si no s'assoleixen els objectius. Per tant, podrien definir-se jocs que no fossin de suma zero, donat que sovint els objectius de cada bàndol són diferents, i no completament contraposats.

Malgrat tot, com hem dit és una simplificació assumible, donat l'increment en la facilitat de comprensió i de resolució dels jocs de suma zero.

Finalment, el punt més discutible és la informació perfecta a l'abast dels dos jugadors. La intel·ligència militar és un dels factors claus en la resolució de conflictes armats, i el segle XVIII no eś diferent que la resta d'èpoques en aquest aspecte. Així, cal distorsionar aquesta informació perfecta dels dos bàndols, tot fent servir les dades provinents de les fonts textuals per a conèixer fins a quin punt la informació de cada bàndol era correcta.

Un cop definida la forma amb la qual podem analitzar decisions per a interpretar millor una batalla donada, podem ja exemplificar tot el procés a partir de dos casos d'estudi diferents, com veurem a continuació.