

Conseqüències econòmètriques del grau de memòria en dades temporals

Ernest Pons Fanals

ADVERTIMENT. La consulta d'aquesta tesi queda condicionada a l'acceptació de les següents condicions d'ús: La difusió d'aquesta tesi per mitjà del servei TDX (www.tesisenxarxa.net) ha estat autoritzada pels titulars dels drets de propietat intel·lectual únicament per a usos privats emmarcats en activitats d'investigació i docència. No s'autoritza la seva reproducció amb finalitats de lucre ni la seva difusió i posada a disposició des d'un lloc aliè al servei TDX. No s'autoritza la presentació del seu contingut en una finestra o marc aliè a TDX (framing). Aquesta reserva de drets afecta tant al resum de presentació de la tesi com als seus continguts. En la utilització o cita de parts de la tesi és obligat indicar el nom de la persona autora.

ADVERTENCIA. La consulta de esta tesis queda condicionada a la aceptación de las siguientes condiciones de uso: La difusión de esta tesis por medio del servicio TDR (www.tesisenred.net) ha sido autorizada por los titulares de los derechos de propiedad intelectual únicamente para usos privados enmarcados en actividades de investigación y docencia. No se autoriza su reproducción con finalidades de lucro ni su difusión y puesta a disposición desde un sitio ajeno al servicio TDR. No se autoriza la presentación de su contenido en una ventana o marco ajeno a TDR (framing). Esta reserva de derechos afecta tanto al resumen de presentación de la tesis como a sus contenidos. En la utilización o cita de partes de la tesis es obligado indicar el nombre de la persona autora.

WARNING. On having consulted this thesis you're accepting the following use conditions: Spreading this thesis by the TDX (www.tesisenxarxa.net) service has been authorized by the titular of the intellectual property rights only for private uses placed in investigation and teaching activities. Reproduction with lucrative aims is not authorized neither its spreading and availability from a site foreign to the TDX service. Introducing its content in a window or frame foreign to the TDX service is not authorized (framing). This rights affect to the presentation summary of the thesis as well as to its contents. In the using or citation of parts of the thesis it's obliged to indicate the name of the author.

QA
280
.P65
1998

CONSEQÜÈNCIES ECONOMÈTRIQUES DEL GRAU DE MEMÒRIA EN DADES TEMPORALS

Ernest Pons Fanals

Tesi Doctoral dirigida pel Dr. Jordi Suriñach i Caralt en el marc del programa de doctorat "Economia i Territori. Mètodes Quantitatius" de la Universitat de Barcelona.

Departament d'Econometria, Estadística i Economia Espanyola.

Barcelona, Octubre de 1998.

C.B.B. de la Universitat de Barcelona
Departament d'Econometria, Estadística i
Economia Espanyola
Tel. 40111111

Capítol 5
IDENTIFICACIÓ DEL TIPUS DE MEMÒRIA

5.1. Introducció

Un cop definits al capítol 3 el concepte de memòria i al capítol 4 un conjunt de models teòrics i abans d'aplicar aquests nous conceptes a l'anàlisi i modelització de sèries econòmiques, cal disposar d'algun mètode d'identificació que permeti esbrinar, a partir d'un conjunt d'observacions, el tipus de memòria que conté una certa variable.

Atès que s'ha establert una classificació de les sèries temporals en funció de la seva memòria a partir de varis nivells¹, sembla raonable determinar el tipus de memòria a través de varies etapes:

1. En primer lloc, cal esbrinar si la sèrie conté memòria permanent o bé memòria transitòria. Aquesta és una primera distinció fonamental cara a l'anàlisi aplicada ja que sota memòria transitòria té sentit anar una mica més enllà i suposar que la variable és estacionària, mentre que sota memòria infinita l'estacionarietat de la variable és impossible i per tant, cal usar alguna transformació per convertir-la en estacionària.
2. Si s'accepta que la memòria és transitòria i es suposa que la sèrie és estacionària, és habitual utilitzar un model ARMA per la seva representació. Una conseqüència important de l'anàlisi dels capítols anteriors és que prèviament a l'especificació d'un model ARMA cal comprovar si la sèrie conté memòria curta o bé memòria llarga, és a dir, si la densitat espectral està acotada o no. En el primer cas, cal usar algun model ARMA mentre que sota memòria llarga cal usar un model ARFIMA o bé algun altre tipus de model més complicat que permeti unes autocorrelacions amb un decreixement més lent.

¹ Vegi's el quadre 4.1.

A l'apartat 5.2. s'analitza com detectar la presència de memòria permanent, mentre que es dedica l'apartat 5.3. a la tasca més complexa de discriminar entre la memòria curta i la memòria llarga.

5.2. Detecció de la memòria permanent

S'ha definit la memòria permanent com aquella en que la dependència entre observacions és tan gran que no desapareix a mesura que augmenta el nombre d'observacions. Tal com s'ha argumentat abans un sèrie amb memòria permanent no pot ser mai estacionària.

De manera tradicional, s'ha associat la idea de memòria infinita a la presència d'arrels unitàries i per tant, a una situació en que els shocks són permanents. En tot cas, no es tracta de conceptes equivalents sinó que una sèrie pot presentar memòria permanent i ser no estacionària sense que els shocks tinguin efectes permanents en el temps. Un bon exemple en són els models fraccionalment integrats amb $d \geq 1/2$.

Una de les eines més habituals per detectar la no estacionarietat d'una sèrie derivada de la presència d'una excessiva memòria és el correlograma, considerat com una estimació de la funció d'autocorrelació simple (FAS). Però la FAS sols està ben definida per sèries estacionàries. Per poder tractar el cas no estacionari cal estendre el concepte de funció d'autocorrelació per a que tingui sentit.

Per fer-ho es pot definir una funció d'autocovariàncies ampliada de la següent manera. Donat un procés estocàstic X_t (sigui o no estacionari) es defineix la funció d'autocovariàncies ampliada com una funció $\gamma_{t,k}$ que depèn de dos arguments, del retard k i de l'observació t :

Definició 5.1. Sigui un procés estocàstic X_t amb $\text{Var}(X_t) < \infty$, es defineix la funció d'autocovariàncies ampliada com:

$$\gamma_{t,k} = E[(X_t - E(X_t))(X_{t-k} - E(X_{t-k}))] \quad (5.1)$$

Noti's que el valor $\gamma_{t,0}$ corresponen a la variància de l'observació X_t . De manera similar, es pot definir una funció d'autocorrelació ampliada com el quocient de les autocovariàncies i les variàncies:

Definició 5.2. Sigui un procés estocàstic X_t amb $\text{Var}(X_t) < \infty$, es defineix la funció d'autocorrelació ampliada (FAA) com:

$$\rho_{t,k} = \frac{\gamma_{t,k}}{\sqrt{\gamma_{t,0}\gamma_{t-k,0}}} \quad (5.2)$$

A partir d'aquestes definicions que tenen una interpretació òbvia, es ben conegut que si X_t és un camí aleatori, $(1-L)X_t = \varepsilon_t$, es compleix que la variància d' X_t és $\gamma_{t,0} = (t-k)\sigma_\varepsilon^2$ i que les autocorrelacions són iguals a:

$$\rho_{t,k} = \sqrt{\frac{t-k}{k}} \quad (5.3)$$

Noti's com el correlograma ampliat presenta els primers coeficients molt propers a 1 i van decreixen de manera molt suau, és a dir, el correlograma està molt carregat. Això és un instrument usat habitualment per detectar la necessitat de diferenciar les dades per aconseguir que siguin estacionàries.

En aquest context més general que no necessita del supòsit de l'estacionarietat, el correlograma ampliat d'un camí aleatori és ben conegut. A més, en el cas de models ARMA o ARFIMA amb $d < 1/2$, coincideix amb el correlograma. Per tant, i per a poder comparar, té interès conèixer les propietats d'aquest correlograma ampliat si les dades s'han generat segons un model ARFIMA(0,d,0) amb $d \geq 1/2$, és a dir, amb memòria infinita. La següent proposició aporta un resultat molt important en aquest sentit.

Proposició 5.1. Sigui un procés estocàstic X_0, \dots, X_t que compleix $(1-L)^d X_t = \varepsilon_t$, on $d \geq 1/2$. La funció d'autocorrelació ampliada és:

$$\rho_{t,k} = \sqrt{\frac{\sum_{j=0}^{t-k-1} \frac{\Gamma(j+d)}{\Gamma(d)\Gamma(j+1)} \left[\sum_{j=0}^{t-1} \frac{\Gamma(j+d)}{\Gamma(d)\Gamma(j+1)} \right]^{-1}}{\sum_{j=0}^{t-1} \frac{\Gamma(j+d)}{\Gamma(d)\Gamma(j+1)}}} \quad (5.4)$$

Demostració. Si $(1-L)^d X_t = \varepsilon_t$, es pot representar el procés X_t en forma de mitjana mòbil infinita $X_t = X_0 + \sum_{j=0}^{t-1} \psi_j \varepsilon_{t-j}$ on els coeficients ψ_j són, per (4.26), $\psi_j = \frac{\Gamma(j+d)}{\Gamma(d)\Gamma(j+1)}$. Com ε_t és soroll blanc, l'esperança d' X_t és nul·la per qualsevol t . Aplicant la definició (5.1), la funció d'autocovariàncies ampliada del procés X_t és:

$$\begin{aligned} \gamma_{t,k} &= E\left[(X_t - E(X_t))(X_{t-k} - E(X_{t-k}))\right] = E\left[\left(\sum_{j=0}^{t-1} \psi_j \varepsilon_{t-j}\right)\left(\sum_{i=0}^{t-k-1} \psi_i \varepsilon_{t-i}\right)\right] = \\ &= \left[\sum_{j=0}^{t-k-1} \psi_j^2\right] \sigma_\varepsilon^2 \end{aligned} \quad (5.5)$$

En particular, quan $k=0$ s'obtenen les variàncies d' X_t :

$$\gamma_{t,0} = \left[\sum_{j=0}^{t-1} \psi_j^2\right] \sigma_\varepsilon^2 \quad (5.6)$$

Noti's que aquestes fórmules són una generalització de les que s'obtenen en el cas del camí aleatori ja que per $d=1$, els coeficients de l'expansió mitjana mòbil són tots igual a la unitat i per tant, $\gamma_{t,0} = (t-k)\sigma_\varepsilon^2$

Per tant, la funció d'autocorrelació ampliada d'un procés ARFIMA(0,d,0) amb $d \geq 1/2$ és:

$$\rho_{t,k} = \frac{\gamma_{t,k}}{\sqrt{\gamma_{t,0}\gamma_{t-k,0}}} = \frac{\left[\sum_{j=0}^{t-k-1} \psi_j^2\right] \sigma_\varepsilon^2}{\sqrt{\left[\sum_{j=0}^{t-1} \psi_j^2\right] \sigma_\varepsilon^2 \left[\sum_{j=0}^{t-k-1} \psi_j^2\right] \sigma_\varepsilon^2}} = \sqrt{\frac{\sum_{j=0}^{t-k-1} \psi_j^2}{\sum_{j=0}^{t-1} \psi_j^2}} \quad (5.7)$$

A partir d'aquesta expressió, si es substitueixen els coeficients ψ_j pel seu valor, s'obté l'expressió (5.4).

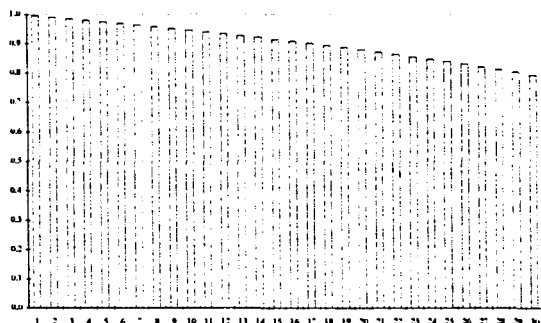
Al quadre 5.1 es recullen els primers 30 coeficients d'autocorrelació de sèries temporals de 50 observacions generades com soroll blanc fraccionalment integrat amb memòria infinita juntament amb els coeficients d'autocorrelació d'un camí aleatori també de 50 observacions. De manera sorprenent, valors inferiors del paràmetre d porten a funcions d'autocorrelació més properes a la unitat.

Els gràfics 5.1 i 5.2 mostren aquesta semblança dels correlogrames pels casos $d=0.5$ i $d=1$ quan es disposa de 50 observacions.

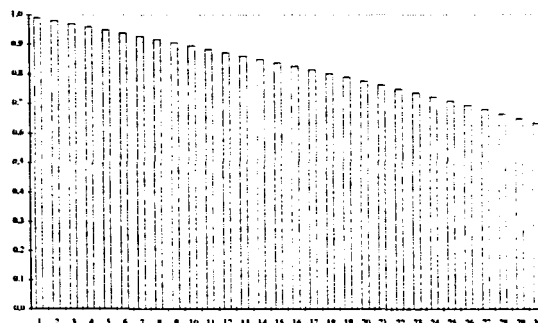
Quadre 5.1. Funció d'autocorrelació ampliada (FAA) per processos ARFIMA(0, d ,0) amb $T=50$.

k	d=0.5	0.55	0.6	0.65	0.7	0.75	0.8	0.85	0.9	0.95	1
0	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000
1	0.995	0.994	0.994	0.993	0.993	0.992	0.992	0.991	0.991	0.990	0.990
2	0.990	0.989	0.988	0.987	0.986	0.985	0.984	0.983	0.982	0.981	0.980
3	0.985	0.983	0.982	0.980	0.979	0.977	0.976	0.974	0.973	0.971	0.970
4	0.979	0.977	0.975	0.973	0.971	0.969	0.967	0.965	0.963	0.961	0.959
5	0.974	0.971	0.969	0.966	0.964	0.961	0.959	0.956	0.954	0.951	0.949
6	0.968	0.965	0.962	0.959	0.956	0.953	0.950	0.947	0.944	0.941	0.938
7	0.963	0.959	0.956	0.952	0.948	0.945	0.941	0.938	0.934	0.931	0.927
8	0.957	0.953	0.949	0.945	0.941	0.937	0.932	0.928	0.924	0.920	0.917
9	0.951	0.947	0.942	0.937	0.933	0.928	0.924	0.919	0.914	0.910	0.906
10	0.945	0.940	0.935	0.930	0.925	0.920	0.914	0.909	0.904	0.899	0.894
11	0.939	0.934	0.928	0.922	0.916	0.911	0.905	0.900	0.894	0.889	0.883
12	0.933	0.927	0.921	0.914	0.908	0.902	0.896	0.890	0.884	0.878	0.872
13	0.927	0.920	0.913	0.906	0.900	0.893	0.886	0.880	0.873	0.867	0.860
14	0.921	0.913	0.906	0.898	0.891	0.884	0.877	0.869	0.862	0.855	0.849
15	0.914	0.906	0.898	0.890	0.882	0.874	0.867	0.859	0.852	0.844	0.837
16	0.908	0.899	0.890	0.882	0.873	0.865	0.857	0.849	0.840	0.833	0.825
17	0.901	0.891	0.882	0.873	0.864	0.855	0.847	0.838	0.829	0.821	0.812
18	0.894	0.884	0.874	0.864	0.855	0.845	0.836	0.827	0.818	0.809	0.800
19	0.887	0.876	0.866	0.856	0.845	0.835	0.826	0.816	0.806	0.797	0.787
20	0.879	0.868	0.857	0.846	0.836	0.825	0.815	0.805	0.794	0.784	0.775

Gràfic 5.1. FAA de $(1-L)^d X_t = \varepsilon_t$ quan $d=0.5$ i $T=50$.



Gràfic 5.2. FAA de $(1-L)^d X_t = \varepsilon_t$ quan $d=1$ i $T=50$.



Pel que fa a la FAP, calculada a partir de la FAA, quan $1/2 \leq d < 1$, aquesta compleix que $\phi_{11} = 1$ i $\phi_{kk} = 0$ per $k > 1$.

Tot això fa que sigui impossible distingir a través del correlograma mostrat d'una sèrie temporal que tingui memòria permanent, si aquesta presenta reversió a la mitjana, és a dir, si és de memòria infinita o bé finita. En tot cas, un correlograma molt carregat ens informa de que la sèrie conté memòria permanent i per tant, de que no és estacionari de segon ordre. A més, ens suggereix prendre diferències a la sèrie per transformar aquesta en estacionària.

Per valorar la capacitat d'aquest mètode gràfic per distingir si una sèrie presenta memòria permanent o bé memòria transitòria s'han calculat les mitjanes dels correlogrames calculats a partir de 1000 sèries temporals generades segons cada un dels següents processos²:

- 1) $X_t = X_{t-1} + \varepsilon_t$,
- 2) $(1-L)^{0.65} X_t = \varepsilon_t$,
- 3) $(1-L)^{0.44} X_t = \varepsilon_t$,
- 4) $X_t = 0.8X_{t-1} + \varepsilon_t$,

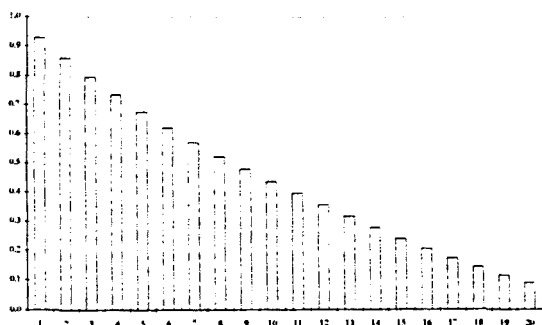
² En tots els casos s'han generat sèries amb 100 observacions i amb una pertorbació ε_t amb variància unitària.

Noti's que els processos estocàstics 1 i 2 presenten memòria permanent, tot i que la persistència dels shocks és molt superior en el camí aleatori (model 1). En canvi, els processos 3 i 4 representen dos casos ben diferents de memòria transitòria ja que el model 3 conté memòria llarga i unes autocorrelacions que decreixen molt lentament mentre que el model 4 és un model autoregressiu amb autocorrelacions que decreixen de manera exponencial.

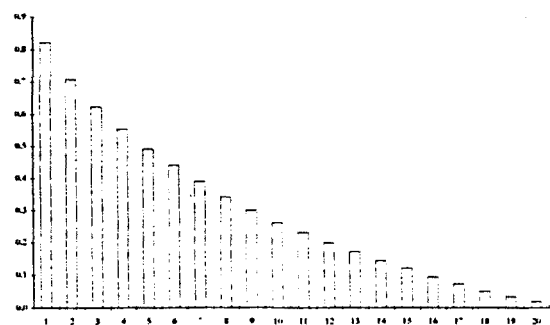
Els gràfics 5.3 a 5.6 recullen el promig dels primers 10 coeficients del correlograma obtinguts en aquesta simulació. Observi's com efectivament, els correlogrames dels models 1 i 2 presenten valors molt superiors als correlogrames dels models 3 i 4, fet que corrobora la utilitat del correlograma per detectar la memòria permanent.

Destaca també el fet que el correlograma del model 3 és clarament inferior al del model 4 tot i que teòricament en els dos models el primer coeficient d'autocorrelació és igual ($\rho_1=0.8$). Això és conseqüència de que sota integració fraccional les autocorrelacions mostrals poden presentar un biaix a la baixa molt important, aspecte que s'analitza a l'apartat següent al tractar de la discriminació entre memòria curta i memòria llarga.

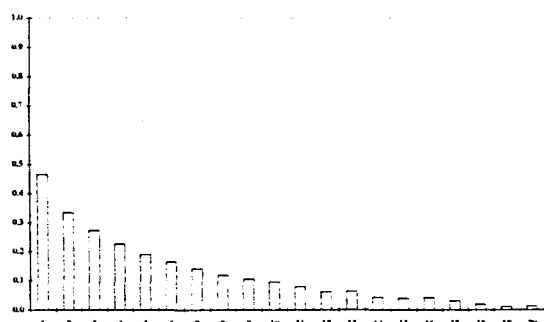
Gràfic 5.3. Correlograma model 1.



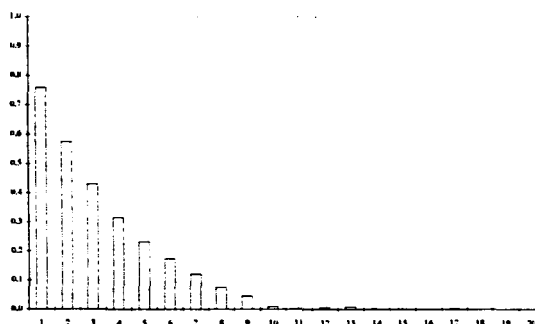
Gràfic 5.5. Correlograma model 2.



Gràfic 5.4. Correlograma model 3.



Gràfic 5.6. Correlograma model 4.



Observi's també com els primers coeficients del correlograma del model 4 són fins i tot superiors als primers coeficients del correlograma del model 2 (degut també al biaix mostral) fet que corrobora que per la detecció de la memòria permanent cal fixar-se en el correlograma en conjunt i no en els primers coeficients, ja que aquests recullen la dinàmica de la sèrie a curt termini i no a llarg termini.

En definitiva, i com a primera conclusió important d'aquest capítol, s'ha comprovat que el correlograma és un bon instrument per detectar la presència de memòria permanent i que la presència d'un correlograma molt carregat suggereix prendre diferències de les dades però que això no permet concloure que la sèrie conté una arrel unitària perquè pot ser que $d < 1$ i, per tant, que presenti reversió a la mitjana.

Un cop s'ha detectat aquesta memòria permanent cal usar algun procediment d'estimació o contrast per conèixer el valor de d . Al llarg dels capítols 6 i 7 s'analitza la problemàtica de l'estimació i realització d'inferència sobre el valor de d .

5.3. Discriminació entre memòria curta i memòria llarga

5.3.1. Detecció de la memòria llarga a partir del correlograma

En principi, a partir de la definició i característiques del que s'ha definit com memòria llarga i memòria curta sembla fàcil detectar si una variable econòmica conté en la seva evolució temporal aquest tipus de comportament. Donat que aquest tipus de comportament està relacionat amb la presència d'autocorrelacions que decreixen molt lentament, hom pot pensar que amb l'anàlisi del correlograma n'hi ha prou per captar aquest comportament. De totes maneres, la comparació dels gràfics 5.4 i 5.6 de l'apartat anterior, permet avançar les dificultats d'aquesta distinció.

Així, si es comparen els anteriors models 3 i 4:

$$3) \quad (1 - L)^{0.44} X_t = \varepsilon_t$$

$$4) \quad X_t = 0.8X_{t-1} + \varepsilon_t$$

ambdós tenen un primer coeficient d'autocorrelació igual ja que el AR(1) es compleix $\rho_1 = \phi = 0.8$, mentre que en el model ARFIMA(d) es compleix $\rho_1 = d/(1-d) = 0.8$.

Però aquesta és la única coincidència ja que a partir d'aquí el correlograma del model 4 decreix de manera molt més ràpida que en el model 3, tal i com es pot comprovar en el quadre 5.2.

Les dos estructures són tan diferents que aparentment és fàcil distingir si les dades d'interès corresponen a una o altra estructura. Els gràfics 5.7 i 5.8 remarquen aquesta diferència, però al utilitzar les estimacions del correlograma a partir d'un nombre finit d'observacions enlloc del correlograma teòric, les diferències es tornen gairebé inapreciables, com es pot veure als gràfics 5.4 i 5.6 de l'apartat anterior.

Quadre 5.2. Correlograma del models 3 i 4.

k	$\phi=0.8$	$d=0.445$
1	0.80	0.80
2	0.64	0.74
3	0.51	0.71
4	0.41	0.69
5	0.33	0.67
6	0.26	0.66
7	0.21	0.65
8	0.17	0.64
9	0.13	0.63
10	0.11	0.62

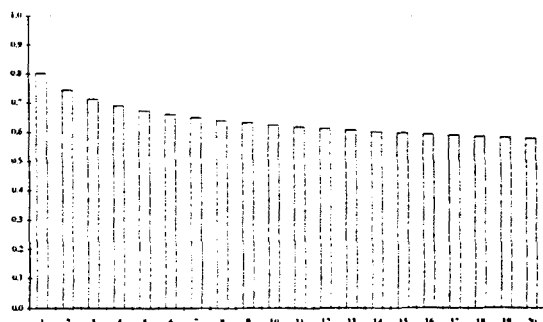
Per tant, aquest biaix es converteix en un element molt important que a continuació s'analitza amb més detall. Els estimadors més habituals de les autocovariàncies són:

$$C_k = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^{T-k} (X_t - \bar{X})(X_{t-k} - \bar{X}) \quad (5.8)$$

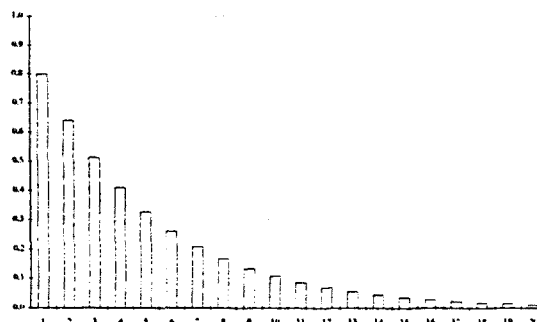
o bé, quan l'esperança de la sèrie és coneguda:

$$\tilde{C}_k = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^{T-k} (X_t - \mu)(X_{t-k} - \mu) \quad (5.9)$$

Gràfic 5.7. Correlograma teòric model 3.



Gràfic 5.8. Correlograma teòric model 4



Més endavant s'analitzarà que passa si la mitjana és coneguda però suposi's de moment que ens trobem en el cas en que no és així. L'esperança de (5.8) és:

$$\begin{aligned}
E(C_k) &= \frac{1}{T} E \left\{ \sum_{i=1}^{T-k} (X_i - \mu)(X_{i-k} - \mu) - \frac{1}{T} \sum_{i=1}^{T-k} \sum_{s=1}^T (X_i - \mu)(X_s - \mu) - \right. \\
&\quad \left. - \frac{1}{T} \sum_{i=1}^{T-k} \sum_{s=1}^T (X_{i+k} - \mu)(X_s - \mu) + \frac{T-k}{T^2} \sum_{i=1}^T \sum_{s=1}^T (X_i - \mu)(X_s - \mu) \right\} = \quad (5.10) \\
&= \frac{T-k}{T} \gamma_k - \frac{1}{T^2} \sum_{i=1}^{T-k} \sum_{s=1}^T [\gamma_{i-s} + \gamma_{i+k-s}] + \frac{T-k}{T^3} \sum_{i=1}^T \sum_{s=1}^T \gamma_{i-s}
\end{aligned}$$

Observi's a l'expressió (5.10) que el biaix és decreixent respecte de T i que serà major quan majors siguin les autocovariàncies teòriques del model. Això demostra que el biaix sempre serà major per processos integrats fraccionalment que per processos autoregressius però aquesta expressió no permet valorar la importància d'aquest biaix de manera immediata.

Per fer-ho, s'analitzen a continuació i amb cert detall els estimadors de les primeres autocovariàncies. Fent càlculs senzills però llargs s'obtenen les següents expressions per la variància:

$$E(C_0) = \gamma_0 - \frac{1}{T^2} \left[\gamma_0 + 2 \sum_{r=1}^{T-1} \left(1 - \frac{r}{T} \right) \gamma_r \right] \quad (5.11)$$

per la primera autocovariància:

$$\begin{aligned}
E(C_1) &= \gamma_1 - \frac{(T-1)}{T^2} \gamma_0 - \left[\frac{1}{T} + \frac{2(T-1)}{T^2} \left(1 - \frac{1}{T(T-1)} \right) \right] \gamma_1 \\
&\quad - 2 \sum_{r=2}^{T-2} \frac{(T-1)}{T^2} \left(1 - \frac{r+T(r-1)}{T(T-1)} \right) \gamma_r - \frac{2(T-1)}{T^3} \gamma_{T-1}
\end{aligned} \quad (5.12)$$

i per la segona:

$$\begin{aligned}
E(C_2) &= \gamma_2 - \frac{(T-2)}{T^2} \gamma_0 - \frac{2(T-2)}{T^2} \left(1 - \frac{2}{T(T-2)} \right) \gamma_1 - \\
&\quad - \left[\frac{1}{T} + \frac{2(T-2)}{T^2} \left(1 - \frac{4}{T(T-2)} \right) \right] \gamma_2 - 4 \sum_{r=T-2}^{T-1} \frac{(T-r)}{T^3} \gamma_r - \\
&\quad - 2 \sum_{r=3}^{T-3} \frac{(T-2)}{T^2} \left(1 - \frac{2r+T(r-2)}{T(T-2)} \right) \gamma_r
\end{aligned} \quad (5.13)$$

Per mostrar el problema de l'estimació d'aquestes autocovariàncies ens centrarem en dos tipus de models molt senzills, un model AR(1) i un model ARFIMA(d):

$$\text{Model 1)} \quad (1 - \phi L)X_{1t} = \varepsilon_{1t}$$

$$\text{Model 2)} \quad (1 - L)^d X_{2t} = \varepsilon_{2t}$$

per comparar el biaix d'aquests estimadors per diferents valors dels paràmetres ϕ i d i del tamany mostral T . Als quadres 5.3 i 5.4 es presenta el biaix, per $T=100$ i $T=200$ per cada un dels dos models, avaluat a partir de les expressions (5.11), (5.12) i (5.13) quan $k=0,1$ i 2 respectivament, i expressions equivalents deduïdes a partir de (5.10) quan $k>2$.

Quadre 5.3.. Biaix de l'estadístic C_k com estimador de γ_k quan $(1-\phi L)X_t=\varepsilon_t$.

T	ϕ	k=0	k=1	k=2	k=3	k=4	k=5	k=6	k=7	k=8	k=9
100	0	-0.010	-0.010	-0.010	-0.010	-0.010	-0.009	-0.009	-0.009	-0.009	-0.009
	0.1	-0.012	-0.013	-0.012	-0.012	-0.012	-0.012	-0.012	-0.011	-0.011	-0.011
	0.2	-0.016	-0.017	-0.016	-0.015	-0.015	-0.015	-0.015	-0.015	-0.014	-0.014
	0.3	-0.020	-0.024	-0.022	-0.021	-0.020	-0.020	-0.019	-0.019	-0.019	-0.019
	0.4	-0.027	-0.032	-0.031	-0.029	-0.027	-0.027	-0.027	-0.026	-0.026	-0.025
	0.5	-0.039	-0.046	-0.045	-0.044	-0.041	-0.040	-0.039	-0.037	-0.037	-0.037
	0.6	-0.062	-0.071	-0.073	-0.070	-0.067	-0.065	-0.063	-0.061	-0.059	-0.058
	0.7	-0.108	-0.122	-0.127	-0.127	-0.125	-0.122	-0.118	-0.114	-0.111	-0.108
	0.8	-0.239	-0.261	-0.273	-0.279	-0.281	-0.279	-0.275	-0.271	-0.264	-0.259
	0.9	-0.905	-0.951	-0.986	-1.013	-1.032	-1.045	-1.052	-1.054	-1.053	-1.048
200	0	-0.005	-0.005	-0.005	-0.005	-0.005	-0.005	-0.005	-0.005	-0.005	-0.005
	0.1	-0.006	-0.007	-0.006	-0.006	-0.006	-0.006	-0.006	-0.006	-0.006	-0.006
	0.2	-0.008	-0.008	-0.008	-0.007	-0.008	-0.007	-0.008	-0.008	-0.007	-0.007
	0.3	-0.010	-0.012	-0.011	-0.011	-0.010	-0.010	-0.010	-0.010	-0.010	-0.010
	0.4	-0.013	-0.016	-0.015	-0.015	-0.014	-0.014	-0.014	-0.014	-0.014	-0.013
	0.5	-0.020	-0.023	-0.023	-0.023	-0.021	-0.021	-0.020	-0.019	-0.019	-0.020
	0.6	-0.031	-0.036	-0.037	-0.035	-0.034	-0.033	-0.033	-0.032	-0.031	-0.031
	0.7	-0.055	-0.062	-0.064	-0.065	-0.064	-0.063	-0.061	-0.059	-0.058	-0.056
	0.8	-0.122	-0.133	-0.140	-0.143	-0.144	-0.143	-0.142	-0.141	-0.138	-0.136
	0.9	-0.476	-0.500	-0.518	-0.533	-0.543	-0.551	-0.556	-0.558	-0.560	-0.559

Per valorar correctament la importància d'aquest biaix, als gràfics 5.9 a 5.12 s'ha representat quin percentatge suposa aquest biaix sobre el valor teòric de γ_k per $k=0,1$ i 2 . Observi's que pel model autoregressiu el biaix no és gaire important i a mesura que augmenta el tamany mostral tendeix ràpidament cap a zero fins i tot per valors del paràmetre propers a la unitat i per $T=200$.

Quadre 5.4.. Biaix de l'estadístic C_k com estimador de γ_k quan $(1-L)^d X_t = \varepsilon_t$.

T	d	k=0	k=1	k=2	k=3	k=4	k=5	k=6	k=7	k=8	k=9
100	0.00	-0.010	-0.010	-0.010	-0.010	-0.010	-0.009	-0.009	-0.009	-0.009	-0.009
	0.05	-0.015	-0.016	-0.015	-0.016	-0.015	-0.015	-0.016	-0.015	-0.015	-0.014
	0.10	-0.023	-0.025	-0.025	-0.024	-0.025	-0.025	-0.024	-0.024	-0.024	-0.024
	0.15	-0.038	-0.040	-0.040	-0.040	-0.040	-0.040	-0.039	-0.040	-0.040	-0.039
	0.20	-0.063	-0.066	-0.066	-0.066	-0.066	-0.066	-0.066	-0.066	-0.066	-0.066
	0.25	-0.106	-0.109	-0.111	-0.111	-0.111	-0.111	-0.112	-0.112	-0.112	-0.111
	0.30	-0.188	-0.193	-0.194	-0.196	-0.196	-0.197	-0.197	-0.197	-0.197	-0.196
	0.35	-0.358	-0.364	-0.366	-0.368	-0.369	-0.370	-0.371	-0.371	-0.371	-0.371
	0.40	-0.768	-0.776	-0.780	-0.783	-0.785	-0.786	-0.787	-0.788	-0.788	-0.788
0.45	-2.207	-2.217	-2.223	-2.227	-2.230	-2.233	-2.234	-2.236	-2.236	-2.237	
200	0.00	-0.005	-0.005	-0.005	-0.005	-0.005	-0.005	-0.005	-0.005	-0.005	-0.005
	0.05	-0.008	-0.009	-0.008	-0.009	-0.008	-0.008	-0.009	-0.008	-0.008	-0.008
	0.10	-0.013	-0.014	-0.015	-0.014	-0.015	-0.015	-0.014	-0.014	-0.015	-0.014
	0.15	-0.024	-0.024	-0.025	-0.025	-0.025	-0.025	-0.024	-0.025	-0.025	-0.024
	0.20	-0.042	-0.043	-0.043	-0.043	-0.043	-0.043	-0.043	-0.044	-0.044	-0.044
	0.25	-0.075	-0.077	-0.078	-0.078	-0.078	-0.078	-0.079	-0.079	-0.079	-0.079
	0.30	-0.142	-0.145	-0.146	-0.147	-0.148	-0.148	-0.148	-0.148	-0.149	-0.149
	0.35	-0.291	-0.294	-0.295	-0.296	-0.297	-0.298	-0.300	-0.299	-0.300	-0.301
	0.40	-0.669	-0.673	-0.676	-0.678	-0.679	-0.680	-0.681	-0.683	-0.683	-0.683
0.45	-2.059	-2.065	-2.069	-2.072	-2.074	-2.076	-2.078	-2.079	-2.080	-2.082	

En canvi, sota memòria llarga com és el cas del segon model, aquest biaix és molt important i tot i disminuir a mesura que augmenta el tamany mostral ho fa molt lentament. Observi's com per valors del paràmetre d superiors a 0.35, es poden obtenir biaixos superiors al 50% o 60%.

Per entendre les causes d'aquest biaix, es pot escriure l'estadístic C_k com:

$$C_k = \tilde{C}_k - \left(1 + \frac{k}{T}\right) (\bar{X} - \mu)^2 + \frac{1}{T} (\bar{X} - \mu) \left\{ \sum_{i=1}^k (X_i - \mu) + \sum_{i=1}^k (X_{T-i+1} - \mu) \right\} \quad (5.14)$$

de manera que el biaix anterior està format per tres tipus de biaix. D'una banda, el biaix de les autocovariàncies mostrals quan l'esperança de la sèrie és coneguda.

De fet, és fàcil comprovar que³:

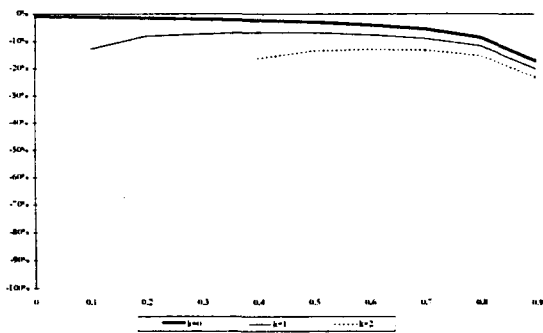
$$E(\tilde{C}_k) = \gamma_k + O(T^{-1}) \quad (5.15)$$

³ Vegi's, per exemple, Anderson (1971).

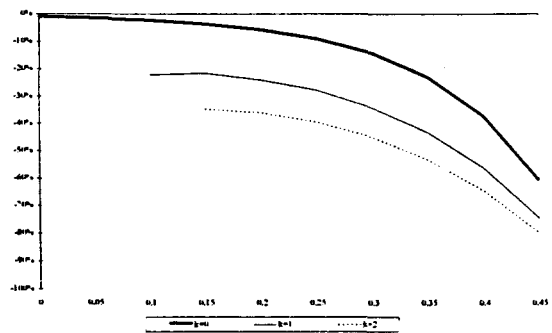
per tant el biaix quan l'esperança és coneguda decreix ràpidament en funció de T . L'últim terme de (5.14) és despreciable en relació als altres dos i per tant, la causa del biaix es troba en el segon terme que és proporcional a la variància de la mitjana mostral:

$$\text{var}(\bar{X}) = E[(\bar{X} - \mu)^2] = \frac{1}{T^2} \sum_{i=1}^T \sum_{n=1}^T \gamma_{i-n} = \frac{1}{T^2} \left\{ 2 \sum_{i=1}^T (T-i) \gamma_i + T \gamma_0 \right\} \quad (5.16)$$

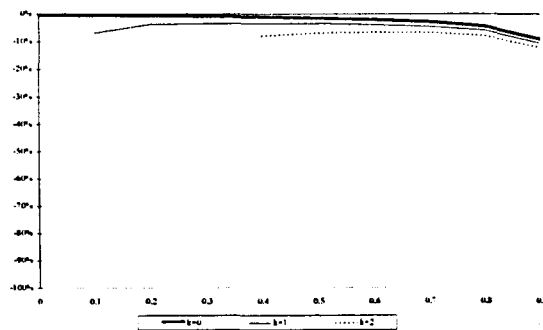
Gràfic 5.9. Biaix de C_k en percentatge.
Model 1, $T=100$.



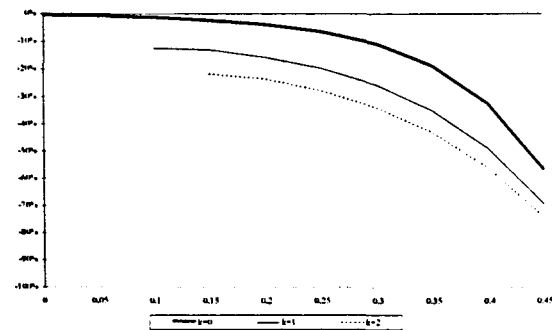
Gràfic 5.11. Biaix de C_k en percentatge.
Model 2, $T=100$.



Gràfic 5.10. Biaix de C_k en percentatge.
Model 1, $T=200$.



Gràfic 5.12. Biaix de C_k en percentatge.
Model 2, $T=200$.



De fet, una de les conseqüències de la presència de memòria llarga és precisament que la mitjana mostral és un estimador molt imprecís del valor esperat de la variable. De fet, sota el supòsit de que les autocovariàncies tenen un decreixement hiperbòlic asimptòticament:

$$\gamma_k \sim \lambda k^{-\alpha} \quad k \rightarrow \infty \quad (5.17)$$

amb $\alpha > 0$, es pot comprovar que⁴:

$$E\left[\left(1 + \frac{k}{T}\right)(\bar{X} - \mu)^2\right] = \left(1 + \frac{k}{T}\right) \frac{1}{T^2} \left\{ 2 \sum_{i=1}^T (T-i)\gamma_i + T\gamma_0 \right\} \sim \frac{-2\lambda T^{-\alpha}}{(1-\alpha)(2-\alpha)} \quad (5.18)$$

Per tant, asimptòticament, el biaix de C_k és:

$$E(C_k - \gamma_k) \xrightarrow{T \rightarrow \infty} \frac{-2\lambda T^{-\alpha}}{(1-\alpha)(2-\alpha)} \quad (5.19)$$

En particular, en el cas del model 2, es compleix la condició (5.17) amb⁵ $\lambda = \frac{\Gamma(1-2d)}{\Gamma(d)\Gamma(1-d)}$ i

$\alpha = 1-2d$. Una de les característiques més sorprenents del biaix asimptòtic (5.19) és que no depèn de l'ordre k de l'autocovariància. Per tant, és d'esperar que els estimadors habituals dels coeficients d'autocorrelació:

$$r_k = \frac{\hat{\gamma}_k}{\hat{\gamma}_0} \quad (5.20)$$

presentin un menor biaix ja que, al estar formats per quocients d'autocovariàncies, el biaix del numerador i denominador tendeixen a compensar-se. De fet, a partir de (5.19) es demostra que el biaix asimptòtic d'aquests coeficients és:

$$E(r_k - \rho_k) \xrightarrow{T \rightarrow \infty} \frac{-2(1-\rho_k)}{(1-\alpha)(2-\alpha)} \frac{\lambda}{\gamma_0} T^{-\alpha} \quad (5.21)$$

Si s'avalua l'expressió (5.21) i se la compara amb (5.19) es pot comprovar com en efecte, el biaix és molt inferior al estimar els coeficients d'autocorrelació que les autocovariàncies però aquestes expressions sols són certes asimptòticament i per tant no és vàlid treure'n conclusions aplicables a mostres finites amb 100 o 200 observacions.

⁴ Vegi's Hosking (1996).

⁵ En efecte, per (4.39) les autocorrelacions d'un soroll fraccionalment integrat es comporten asimptòticament segons $\rho_k \sim \Gamma(1-d)\Gamma(d)^{-1} k^{2d-1}$ i la variància és $\gamma_0 = \sigma_\varepsilon^2 \Gamma(1-2d)\Gamma(1-d)^{-2}$ de manera que les autocovariàncies es comporten asimptòticament segons $\gamma_k \sim \Gamma(1-2d)\Gamma(d)^{-1}\Gamma(1-d)^{-1} k^{2d-1}$.

A Newbold i Agliakolou (1994) s'usa una expansió de Taylor de l'esperança de r_k :

$$E\left(\frac{C_k}{C_0}\right) \approx \frac{E(C_k)}{E(C_0)} \left[1 - \frac{E(C_k C_0)}{E(C_k)E(C_0)} + \frac{E(C_0^2)}{E^2(C_0)} \right] \quad (5.22)$$

per calcular aproximacions al biaix d'aquests coeficients d'autocorrelació en alguns casos.

De totes maneres, aquest és un problema molt important i creiem que l'única manera de poder valorar de manera precisa la importància del biaix en l'estimació dels coeficients d'autocorrelació quan les dades contenen memòria llarga és a través d'un exercici de Monte Carlo. En aquest sentit, i per poder treure'n conclusions més clares s'ha realitzat un ampli exercici de simulació a partir de dades generades segons diferents models i amb diferents tamanys mostrals.

A l'Annex 5.3 es recullen els resultats d'estimar els 10 primers coeficients d'autocorrelació a partir de 10000 sèries de 50, 100, 200 i 400 observacions generades segons models ARFIMA(1,d,0) i ARFIMA(0,d,1). Per a cada una de les simulacions s'ha estimat l'esperança de l'estadístic r_k i la seva desviació estàndard usant els següents paràmetres:

- $\phi = -0.9, -0.5, 0.5$ i 0.9 amb $d = 0, 0.05, \dots, 0.45$.
- $\theta = -0.9, -0.5, 0.5$ i 0.9 amb $d = 0, 0.05, \dots, 0.45$.

Per valorar també la importància que té la necessitat d'estimar l'esperança de la sèrie usant la mitjana mostral, s'han realitzat les simulacions esmentades sota dos escenaris, un cas en que l'esperança és desconeguda i l'altra sota el supòsit que és coneguda⁶.

Les principals conclusions que s'extreuen dels quadres A5.4 a A5.39 són les següents:

⁶ Per aquest segon supòsit n'hi ha prou amb generar les dades amb esperança nul·la i no centrar les dades a l'hora de calcular els coeficients C_k .

- Tot i que les autocorrelacions teòriques decreixen molt lentament quan $d > 0$, les autocorrelacions mostrals presenten un biaix cap a zero molt important, fins i tot per sèries de 400 observacions.
- De fet, a mesura que augmenta el nombre d'observacions, no es redueix gairebé gens la velocitat amb que la successió d'autocorrelacions decreix cap a zero.
- Això fa molt improbable que un analista de sèries temporals sigui capaç a partir de les autocorrelacions mostrals de detectar la presència de memòria llarga.
- Tot i que en el cas de models ARMA les autocorrelacions mostrals també són esbiaixades, es pot comprovar que per $d=0$, el biaix és gairebé inapreciable, és a dir, la presència del biaix cap a zero està directament associada amb el paràmetre d'integració fraccional, sense que la presència de paràmetres autoregressius o mitjana mòbil no nuls provoquin un biaix important.
- De totes maneres, bona part d'aquest biaix és degut, exclusivament a la necessitat d'usar la mitjana mostral com estimador del valor esperat de la sèrie. De fet, quan aquesta esperança, μ és coneguda i es calculen les autocorrelacions mostrals usant μ enlloc de \bar{X} , el biaix gairebé desapareix. Malauradament, aquesta hipòtesi no es compleix amb la majoria de variables econòmiques.
- Tot i que els resultats de l'Annex 5.3 es refereixen exclusivament a sèries generades a partir de models ARFIMA, s'han realitzat exercicis de simulació similars generant sèries amb estructures d'autocovariàncies diferents⁷ a les de models ARMA o ARFIMA i s'ha comprovat com en tots els casos, quan les sèries són de memòria curta el biaix de les autocorrelacions mostrals és poc rellevant mentre que, quan les sèries són de memòria

⁷ En particular, i entre altres, s'han analitzat sèries amb estructures d'autocovariàncies com les presentades a l'apartat 3.7 de la tesi.

llarga segons la definició proposada a la tesi, apareix aquest biaix cap a zero força important. Per tant, la conclusió extreta a partir dels models ARFIMA és generalitzable a qualsevol sèrie amb memòria llarga.

Val a dir que aquesta última conclusió pot interpretar-se com una confirmació de que la definició proposada a la tesi és l'adequada ja que sembla deduir-se de les simulacions realitzades que el biaix del correlograma està directament associat amb densitats espectrals no acotades.

En definitiva, tot i que els coeficients d'autocorrelació tenen un biaix molt inferior al de les autocovariàncies mostrals, aquest és prou important com per fer difícil la detecció de la presència de memòria i la seva discriminació de la presència exclusiva de memòria curta. Dit d'una altra manera, hom no pot confiar-se del correlograma per detectar la presència de memòria llarga.

De totes maneres, aquesta evidència en relació al biaix del correlograma quan les sèries tenen memòria llarga té també una conseqüència positiva. Més concretament, d'aquests resultats es dedueix que si hom obté a partir d'una sèrie temporal un correlograma molt carregat, hi ha forta evidència de que la sèrie és no estacionària perquè, fins i tot en el cas en que la sèrie té memòria llarga, les autocorrelacions mostrals decreixen ràpidament cap a zero.

Pel que fa a la discriminació entre memòria curta i memòria llarga, aquests problemes obren la necessitat de més recerca per tal de trobar eines útils per aquesta detecció. En tot cas, tot i que aquest no és l'objectiu principal de la tesi, a continuació es presenten algunes aportacions que creiem importants.

5.3.2. La funció del quocient d'autocovariàncies (FQC)

Un cop s'han comprovat els problemes derivats del biaix de les autocorrelacions mostrals quan les dades contenen memòria llarga, cal buscar algun estadístic addicional que permeti ajudar en la detecció de la memòria llarga.

D'una banda, el fet que el biaix asimptòtic de les autocovariàncies sigui independent de l'ordre k , suggereix utilitzar com instrument de detecció de la memòria llarga alguna combinació lineal d'aquestes autocovariàncies estimades de manera que el biaix es pugui compensar. La possibilitat més senzilla és usar diferències de la forma $C_s - C_k$ però es presenta un problema de dimensió i caldria normalitzar l'estadístic per tenir una distribució estàndard. A Hosking (1996) es demostra que l'estadístic següent:

$$C(s, k) = \frac{C_0 - C_s}{C_0 - C_k} = \frac{1 - r_s}{1 - r_k} \quad (5.23)$$

és asimptòticament normal i amb consistència d'ordre $O(T^{1/2})$. Per tant, sembla interessant aprofitar les característiques de l'estadístic $C(s, k)$ per esbrinar el tipus de memòria de les dades.

De fet l'estadístic $C(s, k)$ té una interessant interpretació quan $s=1$ ja que permet mesurar la velocitat de decreixement de la funció d'autocorrelació comparant els diferents coeficients ρ_k amb el primer coeficient de correlació: $C(1, k) = (1 - r_k)^{-1}(1 - r_1)$. Com asimptòticament la successió ρ_k és decreixent, la successió $C(1, k)$ també ho és asimptòticament. A més, un decreixement més lent de la successió $C(1, k)$ està associat amb un decreixement més lent del correlograma amb l'avantatge que es tracta d'un estadístic sense gaire biaix tot i disposar de poques observacions. En efecte, s'ha comprovat a través d'una simulació que, fins i tot amb mostres de 100 observacions, el biaix següent:

$$E[C(1, k)] - \frac{1 - \rho_1}{1 - \rho_k} \quad (5.24)$$

és despreciable.

Com exemple, el quadre 5.5 recull la mitjana de $C(I,k)$ calculada a partir de 1000 sèries generades segons model $(1-L)^d X_t = \varepsilon_t$ comparant-lo amb el valor $(1 - \rho_k)^{-1} (1 - \rho_1)$.⁸

Si les dades d'una variable sols contenen memòria curta l'estadístic $C(I,k)$ presentarà un decreixement més ràpid que si les dades contenen memòria llarga i pot usar-se aquesta propietat per identificar el tipus de memòria que conté cada variable econòmica. Pot definir-se així una successió de coeficients que anomenarem *funció de quocients d'autocovariàncies* (FQC) formada per la successió de coeficients $C(I,k)$ pels diferents valors de k .

Quadre 5.5. Comportament de l'estadístic $C(I,k)$ en mostra finita en el model $(1-L)^d X_t = \varepsilon_t$.

k	Mitjana de $C(I,k)$					$(1-\rho_k)(1-\rho_1)^{-1}$				
	d=0	d=0.1	d=0.2	d=0.3	d=0.4	d=0	d=0.1	d=0.2	d=0.3	d=0.4
1	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00
2	1.00	0.95	0.90	0.85	0.80	1.01	0.96	0.91	0.94	0.81
3	1.00	0.93	0.86	0.79	0.72	1.01	0.94	0.87	0.80	0.73
4	1.00	0.92	0.84	0.76	0.68	1.01	0.92	0.85	0.77	0.69
5	1.00	0.92	0.83	0.74	0.65	1.01	0.92	0.84	0.75	0.66
6	1.00	0.91	0.82	0.72	0.63	1.01	0.91	0.83	0.73	0.64
7	1.00	0.91	0.81	0.71	0.61	1.01	0.91	0.82	0.72	0.62
8	1.00	0.91	0.81	0.70	0.60	1.01	0.91	0.81	0.71	0.61
9	1.00	0.91	0.80	0.70	0.59	1.00	0.91	0.81	0.71	0.60
10	1.00	0.90	0.80	0.69	0.58	1.01	0.90	0.81	0.70	0.59

A continuació, es presenten la FAS, la FAP i la FQC de tres models ben diferents, un model AR(1), un model MA(1) i un model ARFIMA(0,d,0), per il·lustrar com es poden combinar els tres instruments per identificar el tipus de model i memòria que presenten les dades. Així, els gràfics 5.13 a 5.21 mostren la mitjana obtinguda de cada un d'aquests estadístics a partir de 1000 sèries de 100 observacions generades segons cada un dels següents models⁹:

⁸ S'ha de destacar que s'ha calculat l'estadístic $C(I,k)$ a partir de dades generades a partir de models ARFIMA(1,d,1) amb diferents paràmetres i a partir d'altres estructures d'autocovariàncies amb memòria llarga, i les conclusions són les mateixes.

⁹ Per cada un dels models s'ha analitzat el biaix de l'estadístic suposant tant que l'esperança de la variable és coneguda com que és desconeguda.

- 1) $(1 - \phi L)X_t = \varepsilon_t$, amb $\phi=0.9$.
- 2) $X_t = (1 - \theta L)\varepsilon_t$, amb $\theta=-0.9$.
- 3) $(1 - L)^d X_t = \varepsilon_t$, amb $d=0.4$.

Els tres models presenten un primer coeficient d'autocorrelació elevat però els dos primers sols contenen memòria curta mentre que el tercer presenta també memòria llarga. Com ja s'ha comentat abans, la FAS del primer i tercer model poden arribar a confondre's a partir de les autocorrelacions mostrals, mentre que presenten FAPs ben diferents.

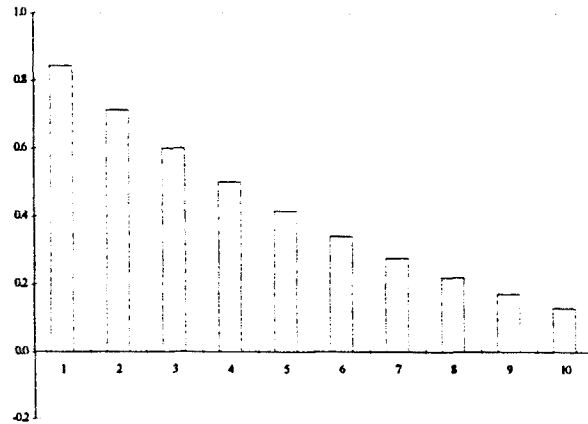
Així, mentre que un model autoregressiu presenta una FAP amb un únic coeficient no nul, la presència de memòria llarga porta a una FAP amb infinits coeficients ja que es pot interpretar com equivalent a un $AR(\infty)$.

De totes maneres, la FAP no és un instrument adequat per diferenciar entre memòria curta i memòria llarga perquè la presència de coeficients mitjana mòbil també porta a una FAP amb coeficients no nuls. En canvi la FQC presenta unes característiques més diferents entre els dos primers models amb memòria curta i el tercer amb memòria llarga ja que en aquest cas presenta una estructura amb un decreixement molt més lent. A més, a diferència de la FAS i la FAP, la FQC no presenta problemes de biaix.

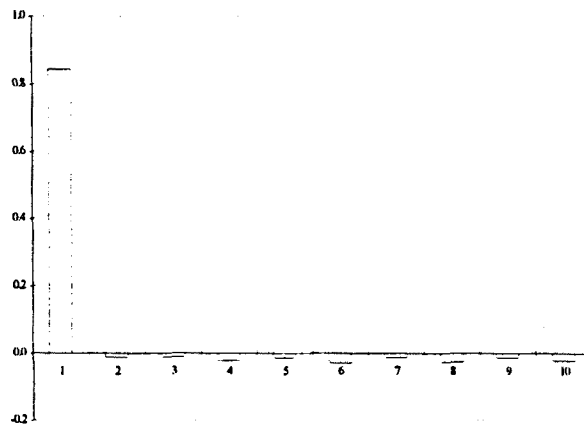
Per tant, al nostre entendre, la combinació de la FAS, FAP i FQC pot ajudar a detectar la presència de memòria llarga. Finalment, als quadres 5.6 a 5.14 es presenten els resultats de comparar la FAS, FAP i FQC pels models 1,2 i 3, per alguns paràmetres.

De totes maneres, hi ha una altra via per evitar el problema del biaix quan les dades contenen memòria llarga i l'esperança de la variable és desconeguda que no ha estat fins al moment analitzada.

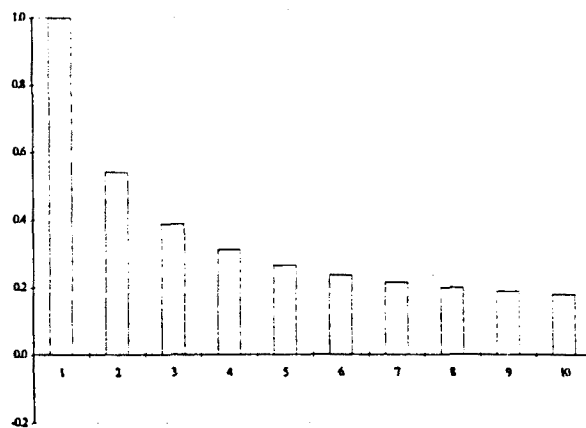
Gràfic 5.13. FAS estimada quan $(1-\phi L)X_t = \varepsilon_t$ amb $\phi=0.9$ i $T=100$.



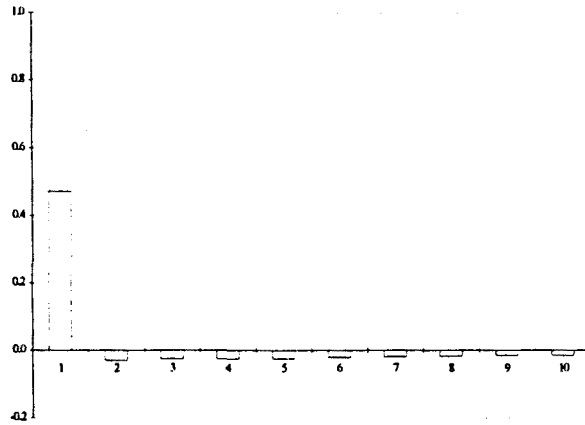
Gràfic 5.14. FAP estimada quan $(1-\phi L)X_t = \varepsilon_t$ amb $\phi=0.9$ i $T=100$.



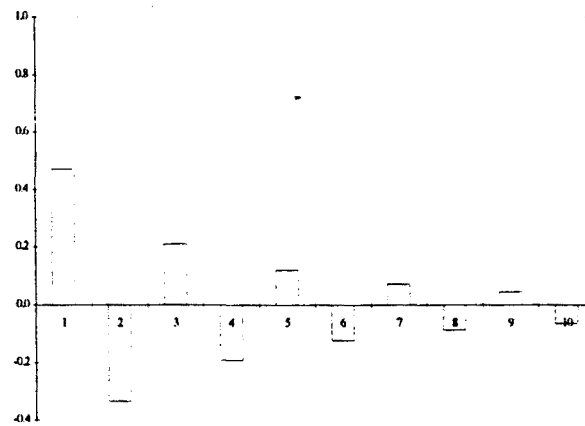
Gràfic 5.15. FQC estimada quan $(1-\phi L)X_t = \varepsilon_t$ amb $\phi=0.9$ i $T=100$.



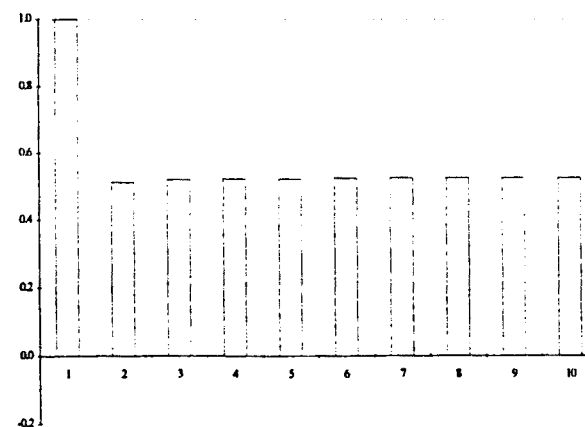
Gràfic 5.16. FAS estimada quan $X_t=(1-\theta L)\varepsilon_t$ amb $\theta=-0.9$ i $T=100$.



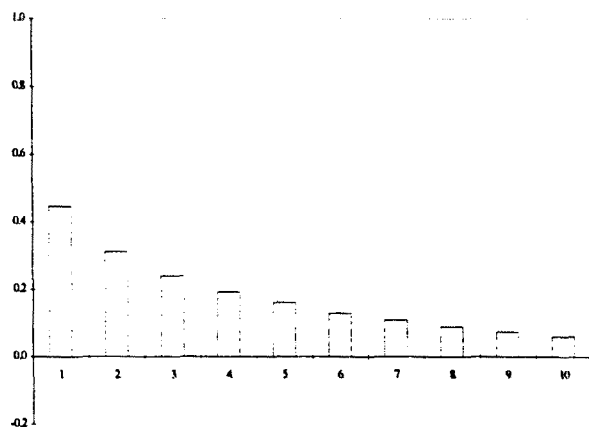
Gràfic 5.17. FAP estimada quan $X_t=(1-\theta L)\varepsilon_t$ amb $\theta=-0.9$ i $T=100$.



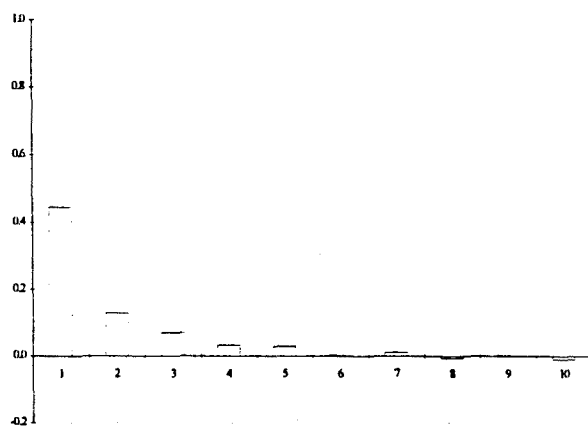
Gràfic 5.18. FQC estimada quan $X_t=(1-\theta L)\varepsilon_t$ amb $\theta=-0.9$ i $T=100$.



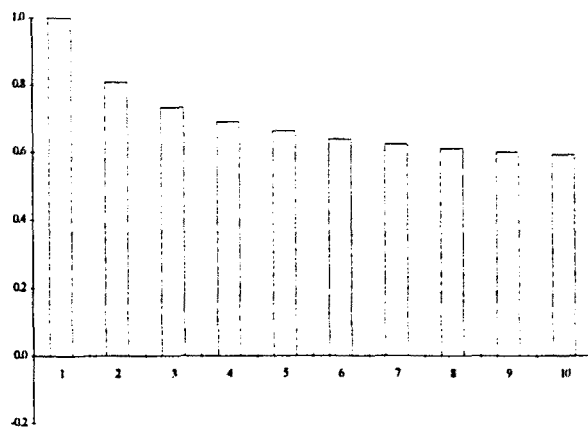
Gràfic 5.19. FAS estimada quan $(1-L)^d X_t = \varepsilon_t$ amb $d=0.4$ i $T=100$.



Gràfic 5.20. FAP estimada quan $(1-L)^d X_t = \varepsilon_t$ amb $d=0.4$ i $T=100$.



Gràfic 5.21. FQC estimada quan $(1-L)^d X_t = \varepsilon_t$ amb $d=0.4$ i $T=100$.



Quadre 5.6. Característiques FAS, FAP i FQC quan $(1-\phi)LX_t=\varepsilon_t$ amb $\phi=-0.5$ i $T=100$.

k	$E(X_t)$ coneguda						$E(X_t)$ desconeguda					
	FAS		FAP		FQC		FAS		FAP		FQC	
	Mitj.	Var.	Mitj.	Var.	Mitj.	Var.	Mitj.	Var.	Mitj.	Var.	Mitj.	Var.
1	-0.48	0.09	-0.48	0.09	1.00	0.00	-0.49	0.09	-0.49	0.09	1.00	0.00
2	0.23	0.11	-0.01	0.10	1.99	0.40	0.23	0.11	-0.02	0.10	1.99	0.40
3	-0.11	0.12	0.01	0.10	1.35	0.13	-0.11	0.12	0.00	0.10	1.35	0.13
4	0.05	0.12	-0.01	0.10	1.59	0.27	0.04	0.12	-0.02	0.10	1.59	0.27
5	-0.02	0.12	0.00	0.10	1.47	0.19	-0.03	0.12	-0.01	0.10	1.47	0.19
6	0.01	0.12	-0.01	0.09	1.53	0.23	0.01	0.12	-0.02	0.09	1.53	0.23
7	-0.01	0.12	0.00	0.10	1.49	0.20	-0.01	0.12	-0.01	0.10	1.49	0.20
8	0.00	0.12	-0.01	0.09	1.51	0.21	0.00	0.12	-0.02	0.09	1.51	0.21
9	0.00	0.11	0.00	0.09	1.50	0.20	0.00	0.11	-0.01	0.09	1.50	0.20
10	0.00	0.11	-0.01	0.09	1.50	0.19	0.00	0.11	-0.02	0.09	1.50	0.19

Quadre 5.7. Característiques FAS, FAP i FQC quan $(1-\phi)LX_t=\varepsilon_t$ amb $\phi=0.5$ i $T=100$.

k	$E(X_t)$ coneguda						$E(X_t)$ desconeguda					
	FAS		FAP		FQC		FAS		FAP		FQC	
	Mitj.	Var.	Mitj.	Var.	Mitj.	Var.	Mitj.	Var.	Mitj.	Var.	Mitj.	Var.
1	0.48	0.09	0.48	0.09	1.00	0.00	0.47	0.09	0.47	0.09	1.00	0.00
2	0.23	0.11	-0.01	0.10	0.68	0.08	0.21	0.12	-0.02	0.10	0.68	0.08
3	0.11	0.12	-0.01	0.10	0.58	0.09	0.08	0.12	-0.02	0.10	0.58	0.09
4	0.05	0.12	-0.01	0.10	0.55	0.10	0.02	0.12	-0.02	0.10	0.55	0.10
5	0.02	0.12	0.00	0.10	0.54	0.11	-0.01	0.12	-0.01	0.10	0.54	0.11
6	0.01	0.12	-0.01	0.09	0.53	0.11	-0.02	0.12	-0.02	0.09	0.53	0.11
7	0.00	0.12	0.00	0.09	0.52	0.10	-0.03	0.11	-0.01	0.09	0.53	0.10
8	0.00	0.12	-0.01	0.10	0.52	0.10	-0.03	0.12	-0.03	0.10	0.52	0.10
9	0.00	0.12	0.00	0.09	0.52	0.11	-0.03	0.11	-0.01	0.09	0.53	0.11
10	0.00	0.12	-0.01	0.09	0.52	0.11	-0.03	0.11	-0.02	0.09	0.53	0.11

Quadre 5.8. Característiques FAS, FAP i FQC quan $(1-\phi)LX_t=\varepsilon_t$ amb $\phi=0.9$ i $T=100$.

k	$E(X_t)$ coneguda						$E(X_t)$ desconeguda					
	FAS		FAP		FQC		FAS		FAP		FQC	
	Mitj.	Var.	Mitj.	Var.	Mitj.	Var.	Mitj.	Var.	Mitj.	Var.	Mitj.	Var.
1	0.87	0.05	0.87	0.05	1.00	0.00	0.84	0.06	0.84	0.06	1.00	0.00
2	0.76	0.09	0.00	0.10	0.54	0.06	0.71	0.10	-0.01	0.10	0.54	0.06
3	0.67	0.12	0.00	0.09	0.39	0.06	0.60	0.14	-0.01	0.09	0.39	0.06
4	0.59	0.14	-0.01	0.09	0.31	0.06	0.50	0.16	-0.02	0.09	0.31	0.06
5	0.51	0.16	0.00	0.09	0.26	0.06	0.42	0.18	-0.01	0.09	0.27	0.06
6	0.45	0.18	-0.02	0.09	0.23	0.06	0.34	0.19	-0.03	0.09	0.24	0.06
7	0.39	0.19	0.00	0.09	0.21	0.06	0.28	0.20	-0.01	0.09	0.21	0.06
8	0.35	0.20	-0.01	0.09	0.20	0.06	0.22	0.20	-0.03	0.09	0.20	0.06
9	0.30	0.21	0.00	0.09	0.19	0.06	0.17	0.20	-0.01	0.09	0.19	0.06
10	0.27	0.22	-0.01	0.09	0.18	0.06	0.13	0.20	-0.02	0.09	0.18	0.06

Quadre 5.9. Característiques FAS, FAP i FQC quan $X_t=(1-\theta L)\varepsilon_t$ amb $\theta=0.5$ i $T=100$.

k	$E(X_t)$ coneguda						$E(X_t)$ desconeguda					
	FAS		FAP		FQC		FAS		FAP		FQC	
	Mitj.	Var.	Mitj.	Var.	Mitj.	Var.	Mitj.	Var.	Mitj.	Var.	Mitj.	Var.
1	-0.39	0.08	-0.39	0.08	1.00	0.00	-0.39	0.08	-0.39	0.08	1.00	0.00
2	0.00	0.11	-0.18	0.09	1.42	0.23	0.00	0.11	-0.19	0.09	1.42	0.23
3	0.00	0.11	-0.08	0.10	1.40	0.16	-0.01	0.11	-0.09	0.10	1.40	0.16
4	0.00	0.11	-0.06	0.10	1.40	0.19	0.00	0.11	-0.06	0.09	1.40	0.19
5	0.00	0.10	-0.02	0.09	1.41	0.17	0.00	0.10	-0.03	0.09	1.41	0.17
6	0.00	0.11	-0.02	0.09	1.41	0.17	0.00	0.11	-0.03	0.09	1.41	0.17
7	0.00	0.11	0.00	0.10	1.41	0.18	0.00	0.11	-0.01	0.10	1.41	0.18
8	-0.01	0.11	-0.02	0.10	1.40	0.18	-0.01	0.11	-0.03	0.09	1.40	0.18
9	0.00	0.11	0.00	0.09	1.41	0.17	0.00	0.11	-0.01	0.09	1.41	0.17
10	0.00	0.11	-0.01	0.09	1.40	0.17	-0.01	0.11	-0.03	0.09	1.40	0.17

Quadre 5.10. Característiques FAS, FAP i FQC quan $X_t=(1-\theta L)\varepsilon_t$ amb $\theta=-0.5$ i $T=100$.

k	$E(X_t)$ coneguda						$E(X_t)$ desconeguda					
	FAS		FAP		FQC		FAS		FAP		FQC	
	Mitj.	Var.	Mitj.	Var.	Mitj.	Var.	Mitj.	Var.	Mitj.	Var.	Mitj.	Var.
1	0.39	0.08	0.39	0.08	1.00	0.00	0.38	0.08	0.38	0.08	1.00	0.00
2	0.00	0.11	-0.18	0.09	0.61	0.06	-0.01	0.11	-0.19	0.09	0.61	0.06
3	0.00	0.11	0.08	0.10	0.62	0.10	-0.01	0.11	0.07	0.10	0.62	0.10
4	0.00	0.11	-0.06	0.10	0.62	0.11	-0.02	0.11	-0.07	0.10	0.62	0.11
5	0.00	0.11	0.02	0.09	0.62	0.11	-0.02	0.11	0.01	0.09	0.62	0.11
6	0.00	0.11	-0.02	0.10	0.62	0.11	-0.02	0.11	-0.03	0.10	0.62	0.11
7	-0.01	0.11	0.00	0.09	0.61	0.10	-0.02	0.11	-0.01	0.09	0.62	0.10
8	0.00	0.11	-0.01	0.09	0.62	0.10	-0.02	0.10	-0.02	0.09	0.62	0.10
9	0.00	0.11	0.00	0.09	0.62	0.10	-0.02	0.11	-0.01	0.09	0.62	0.11
10	-0.01	0.10	-0.02	0.09	0.61	0.10	-0.02	0.10	-0.03	0.09	0.62	0.10

Quadre 5.11. Característiques FAS, FAP i FQC quan $X_t=(1-\theta L)\varepsilon_t$ amb $\theta=0.9$ i $T=100$.

k	$E(X_t)$ coneguda						$E(X_t)$ desconeguda					
	FAS		FAP		FQC		FAS		FAP		FQC	
	Mitj.	Var.	Mitj.	Var.	Mitj.	Var.	Mitj.	Var.	Mitj.	Var.	Mitj.	Var.
1	0.48	0.07	0.48	0.07	1.00	0.00	0.47	0.07	0.47	0.07	1.00	0.00
2	-0.01	0.12	-0.32	0.08	0.51	0.04	-0.03	0.12	-0.33	0.08	0.51	0.04
3	-0.01	0.11	0.22	0.09	0.52	0.08	-0.03	0.11	0.21	0.09	0.52	0.08
4	-0.01	0.11	-0.18	0.09	0.52	0.10	-0.03	0.11	-0.19	0.09	0.52	0.10
5	-0.01	0.11	0.13	0.09	0.52	0.09	-0.03	0.11	0.12	0.09	0.52	0.10
6	0.00	0.12	-0.11	0.09	0.52	0.09	-0.02	0.12	-0.12	0.09	0.52	0.09
7	0.00	0.12	0.08	0.10	0.53	0.10	-0.02	0.12	0.07	0.10	0.53	0.10
8	0.00	0.11	-0.07	0.09	0.53	0.09	-0.02	0.11	-0.09	0.09	0.53	0.10
9	0.00	0.11	0.06	0.09	0.53	0.09	-0.01	0.11	0.04	0.09	0.53	0.09
10	0.00	0.11	-0.05	0.09	0.53	0.09	-0.02	0.11	-0.06	0.09	0.53	0.09

Quadre 5.12. Característiques FAS, FAP i FQC quan $(1-L)^d X_t = \varepsilon_t$, amb $d=-0.2$ i $T=100$.

k	$E(X_t)$ coneguda						$E(X_t)$ desconeguda					
	FAS		FAP		FQC		FAS		FAP		FQC	
	Mitj.	Var.	Mitj.	Var.	Mitj.	Var.	Mitj.	Var.	Mitj.	Var.	Mitj.	Var.
1	-0.17	0.09	-0.17	0.09	1.00	0.00	-0.17	0.09	-0.17	0.09	1.00	0.00
2	-0.06	0.10	-0.09	0.09	1.12	0.17	-0.06	0.10	-0.10	0.09	1.12	0.17
3	-0.03	0.10	-0.05	0.10	1.14	0.15	-0.03	0.10	-0.06	0.10	1.14	0.15
4	-0.03	0.10	-0.06	0.10	1.14	0.15	-0.03	0.10	-0.06	0.10	1.14	0.15
5	-0.01	0.10	-0.04	0.09	1.16	0.15	-0.02	0.10	-0.04	0.09	1.16	0.15
6	-0.01	0.10	-0.04	0.09	1.16	0.16	-0.01	0.10	-0.04	0.09	1.16	0.16
7	-0.01	0.10	-0.03	0.09	1.16	0.15	-0.02	0.10	-0.03	0.09	1.16	0.15
8	-0.01	0.10	-0.04	0.09	1.17	0.15	-0.01	0.10	-0.04	0.09	1.17	0.15
9	-0.01	0.10	-0.02	0.10	1.17	0.15	-0.01	0.10	-0.02	0.10	1.17	0.15
10	-0.01	0.09	-0.03	0.09	1.16	0.14	-0.01	0.09	-0.04	0.09	1.17	0.14

Quadre 5.13. Característiques FAS, FAP i FQC quan $(1-L)^d X_t = \varepsilon_t$, amb $d=0.2$ i $T=100$.

k	$E(X_t)$ coneguda						$E(X_t)$ desconeguda					
	FAS		FAP		FQC		FAS		FAP		FQC	
	Mitj.	Var.	Mitj.	Var.	Mitj.	Var.	Mitj.	Var.	Mitj.	Var.	Mitj.	Var.
1	0.25	0.12	0.25	0.12	1.00	0.00	0.20	0.11	0.20	0.11	1.00	0.00
2	0.17	0.13	0.10	0.11	0.91	0.12	0.11	0.11	0.07	0.10	0.91	0.12
3	0.13	0.13	0.06	0.10	0.86	0.12	0.07	0.11	0.03	0.10	0.87	0.12
4	0.11	0.13	0.04	0.11	0.85	0.13	0.05	0.11	0.01	0.10	0.85	0.13
5	0.10	0.12	0.04	0.10	0.84	0.13	0.04	0.11	0.01	0.10	0.84	0.13
6	0.09	0.13	0.02	0.10	0.83	0.13	0.03	0.11	0.00	0.10	0.83	0.13
7	0.08	0.12	0.03	0.09	0.82	0.13	0.02	0.10	0.00	0.09	0.82	0.13
8	0.07	0.12	0.01	0.10	0.81	0.13	0.01	0.10	-0.01	0.10	0.81	0.13
9	0.07	0.12	0.02	0.09	0.81	0.13	0.01	0.10	0.00	0.09	0.81	0.13
10	0.07	0.12	0.01	0.09	0.80	0.13	0.00	0.10	-0.01	0.09	0.81	0.13

Quadre 5.14. Característiques FAS, FAP i FQC quan $(1-L)^d X_t = \varepsilon_t$, amb $d=-0.4$ i $T=100$.

k	$E(X_t)$ coneguda						$E(X_t)$ desconeguda					
	FAS		FAP		FQC		FAS		FAP		FQC	
	Mitj.	Var.	Mitj.	Var.	Mitj.	Var.	Mitj.	Var.	Mitj.	Var.	Mitj.	Var.
1	0.65	0.17	0.65	0.17	1.00	0.00	0.45	0.12	0.45	0.12	1.00	0.00
2	0.56	0.20	0.22	0.11	0.80	0.10	0.31	0.14	0.13	0.10	0.81	0.10
3	0.51	0.22	0.14	0.10	0.72	0.11	0.24	0.15	0.07	0.10	0.73	0.11
4	0.47	0.23	0.09	0.09	0.67	0.11	0.19	0.15	0.03	0.10	0.69	0.11
5	0.45	0.23	0.07	0.09	0.64	0.12	0.16	0.15	0.03	0.10	0.66	0.12
6	0.43	0.24	0.04	0.09	0.61	0.12	0.13	0.15	0.00	0.10	0.64	0.12
7	0.41	0.24	0.05	0.10	0.59	0.12	0.11	0.14	0.01	0.10	0.62	0.12
8	0.39	0.25	0.03	0.09	0.58	0.12	0.09	0.14	-0.01	0.10	0.61	0.12
9	0.38	0.25	0.03	0.09	0.56	0.12	0.07	0.14	0.00	0.09	0.60	0.12
10	0.37	0.25	0.02	0.09	0.55	0.12	0.06	0.13	-0.01	0.09	0.59	0.12

Concretament, si hom està interessat a estimar les autocovariàncies d'una variable X_t , consideri's una nova variable Y_t definida a partir dels increments de l'anterior, $Y_t = X_t - X_{t-1}$. Si X_t és estacionària, encara que la seva esperança $\mu = E(X_t)$ sigui desconeguda, és segur que la variable Y_t és centrada ja que $E(Y_t) = E(X_t) - E(X_{t-1}) = \mu - \mu = 0$. Per tant, és d'esperar que puguin estimar-se les autocovariàncies d' Y_t sense problemes encara que X_t contingui memòria llarga.

Per altra banda, les autocovariàncies d' X_t (que notarem com γ_k) i les autocovariàncies d' Y_t (que notarem com γ_k^*) estan directament relacionades. Concretament:

$$\gamma_k^* = E(Y_t Y_{t+k}) = E[(X_t - X_{t-1})(X_{t+k} - X_{t+k-1})] = 2\gamma_k - \gamma_{k-1} - \gamma_{k+1} \quad (5.25)$$

Per tant, és molt probable que si hom pot estimar sense biaix les autocovariàncies γ_k^* , puguin utilitzar-se el sistema d'equacions format per la igualtat (5.25) quan $k=1, \dots, T-1$, per obtenir estimacions sense biaix de γ_k .

Per comprovar com en aquest cas es solucionen els problemes de biaix, s'ha realitzat un nou exercici de simulació. Concretament, s'han generat 10000 sèries de 200 observacions segons un model ARFIMA(1,d,0):

$$(1 - \phi L)(1 - L)^d X_t = \varepsilon_t \quad (5.26)$$

amb $\phi=0, 0.5$ i $d=0, 0.05, 0.10 \dots 0.45$. Per cada una d'aquestes sèries X_t s'ha calculat la sèrie de diferències $Y_t = X_t - X_{t-1}$ i s'han estimat les autocovariàncies d' Y_t a partir de dos estadístics diferents, a partir de l'autocovariància mostral sense tenir en compte que $E(Y_t) = 0$, :

$$C_k^1 = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^{T-k} (Y_t - \bar{Y})(Y_{t-k} - \bar{Y}) \quad (5.27)$$

i a partir de la hipòtesi que la sèrie és centrada, és a dir:

$$C_k^2 = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^{T-k} Y_t Y_{t-k} \quad (5.28)$$

Amb cada una de les dues successions d'autocovariàncies estimades, s'han calculat estimacions dels coeficients d'autocorrelació $r_k^1 = (C_0^1)^{-1} C_k^1$ i $r_k^2 = (C_0^2)^{-1} C_k^2$ i s'han comparat amb el valor teòric de les autocorrelacions d' Y_t , $\rho_k^Y = (\gamma_0^*)^{-1} \gamma_k^*$.

Per calcular els valors ρ_k^Y per cada un dels models analitzats, s'ha aplicat el següent mètode. Com l'objectiu és calcular les autocovariàncies d' $Y_t = (1-L)X_t$ on X_t està definida a partir de (5.26), s'ha definit en primer lloc una nova sèrie, $U_t = (1-L)^d X_t$ de manera que U_t és un AR(1) i compleix $(1-\phi L)^d U_t = \varepsilon_t$. Per tant, les autocovariàncies d' U_t són:

$$\gamma_k^U = \frac{\sigma_\varepsilon^2}{1-\phi^2} \quad (5.29)$$

A continuació, es defineix un nou procés $Z_t = (1-L)U_t$ que té autocovariàncies iguals a:

$$\sigma_Z^2 = E(Z_t^2) = E[(U_t - U_{t-1})^2] = \frac{2}{1+\phi^2} \sigma_\varepsilon^2 \quad (5.30)$$

i:

$$\gamma_k^Z = E(Z_t Z_{t+k}) = E[(U_t - U_{t-1})(U_{t+k} - U_{t+k-1})] = \frac{\phi^{k-1}(2\phi - 1 - \phi^2)}{1-\phi^2} \sigma_\varepsilon^2 \quad (5.31)$$

Ara, com $Y_t = (1-L)^d Z_t$, es poden aplicar les fórmules (4.55) a (4.58) per calcular la successió γ_k^* .

A partir dels resultats recollits als quadres 5.15 i 5.16 es pot comprovar com ambdós estadístics són estimadors gairebé sense biaix de les autocorrelacions teòriques. A partir d'aquesta comprovació, sols resta veure com es pot aprofitar la propietat (5.25) per trobar estimacions sense biaix de γ_k a partir de les estimacions de γ_k^* .

En tot cas, aquesta és una via no analitzada amb detall a la tesi però obre una línia de treball molt interessant.

Quadre 5.15. Autocorrelacions mostrals d' $Y_t=(1-L)X_t$ si $(1-L)^d(1-\phi)X_t=\varepsilon_t$ amb $\phi=0$ i $T=100$.

d		k=1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0.00	ρ_k^Y	-0.500	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
	r_k^1	-0.493	-0.003	0.001	-0.002	0.003	-0.003	0.001	0.001	0.000	-0.001
	r_k^2	-0.493	-0.003	0.001	-0.002	0.003	-0.003	0.001	0.001	0.000	-0.001
0.05	ρ_k^Y	-0.487	-0.008	-0.002	-0.001	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
	r_k^1	-0.480	-0.012	-0.001	-0.004	0.001	-0.003	0.003	-0.002	0.001	-0.003
	r_k^2	-0.480	-0.012	-0.001	-0.004	0.001	-0.003	0.003	-0.002	0.001	-0.003
0.10	ρ_k^Y	-0.474	-0.016	-0.005	-0.002	-0.001	-0.001	0.000	0.000	0.000	0.000
	r_k^1	-0.468	-0.018	-0.006	0.000	-0.001	-0.006	0.005	-0.003	0.001	0.000
	r_k^2	-0.468	-0.018	-0.006	0.000	-0.001	-0.006	0.005	-0.003	0.001	0.000
0.15	ρ_k^Y	-0.459	-0.024	-0.007	-0.003	-0.002	-0.001	-0.001	0.000	0.000	0.000
	r_k^1	-0.452	-0.029	-0.003	-0.010	0.005	-0.003	-0.002	0.001	0.002	-0.002
	r_k^2	-0.452	-0.029	-0.003	-0.010	0.005	-0.003	-0.002	0.001	0.002	-0.002
0.20	ρ_k^Y	-0.444	-0.032	-0.010	-0.005	-0.003	-0.002	-0.001	-0.001	-0.001	0.000
	r_k^1	-0.437	-0.034	-0.012	-0.002	-0.006	0.000	0.000	0.000	-0.002	-0.001
	r_k^2	-0.437	-0.034	-0.012	-0.002	-0.006	0.000	0.000	0.000	-0.002	-0.001
0.25	ρ_k^Y	-0.429	-0.039	-0.013	-0.006	-0.003	-0.002	-0.001	-0.001	-0.001	-0.001
	r_k^1	-0.420	-0.042	-0.016	-0.002	-0.005	-0.001	-0.003	-0.001	0.001	-0.006
	r_k^2	-0.420	-0.042	-0.016	-0.002	-0.005	-0.001	-0.003	-0.001	0.001	-0.006
0.30	ρ_k^Y	-0.412	-0.046	-0.016	-0.008	-0.005	-0.003	-0.002	-0.001	-0.001	-0.001
	r_k^1	-0.407	-0.042	-0.020	-0.008	-0.002	-0.003	-0.003	0.000	-0.006	0.003
	r_k^2	-0.407	-0.042	-0.020	-0.008	-0.002	-0.003	-0.003	0.000	-0.006	0.003
0.35	ρ_k^Y	-0.394	-0.052	-0.019	-0.010	-0.006	-0.004	-0.003	-0.002	-0.001	-0.001
	r_k^1	-0.385	-0.055	-0.019	-0.010	-0.006	-0.002	-0.005	-0.003	0.000	-0.001
	r_k^2	-0.386	-0.055	-0.019	-0.010	-0.006	-0.002	-0.005	-0.003	0.000	-0.001
0.40	ρ_k^Y	-0.375	-0.058	-0.022	-0.012	-0.007	-0.005	-0.003	-0.003	-0.002	-0.002
	r_k^1	-0.368	-0.060	-0.021	-0.011	-0.008	-0.005	-0.005	0.001	-0.001	-0.003
	r_k^2	-0.368	-0.060	-0.021	-0.012	-0.008	-0.005	-0.005	0.001	-0.001	-0.003
0.45	ρ_k^Y	-0.355	-0.063	-0.026	-0.014	-0.009	-0.006	-0.004	-0.003	-0.002	-0.002
	r_k^1	-0.351	-0.065	-0.020	-0.016	-0.006	-0.008	-0.004	-0.004	-0.001	-0.003
	r_k^2	-0.351	-0.065	-0.020	-0.016	-0.006	-0.008	-0.004	-0.004	-0.001	-0.003

Quadre 5.16. Autocorrelacions mostrals d' $Y_t=(1-L)X_t$ si $(1-L)^d(1-\phi)X_t=\varepsilon_t$ amb $\phi=0.5$ i $T=100$.

d		k=1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0.00	ρ_k^Y	-0.250	-0.125	-0.062	-0.031	-0.016	-0.008	-0.004	-0.002	-0.001	0.000
	r_k^1	-0.245	-0.123	-0.060	-0.031	-0.014	-0.012	-0.004	-0.001	-0.001	-0.002
	r_k^2	-0.245	-0.123	-0.060	-0.031	-0.014	-0.012	-0.004	-0.001	-0.001	-0.002
0.05	ρ_k^Y	-0.226	-0.127	-0.068	-0.036	-0.019	-0.010	-0.005	-0.003	-0.002	-0.001
	r_k^1	-0.221	-0.126	-0.067	-0.038	-0.018	-0.011	-0.002	-0.003	-0.001	-0.002
	r_k^2	-0.222	-0.126	-0.067	-0.039	-0.018	-0.011	-0.002	-0.003	-0.001	-0.002
0.10	ρ_k^Y	-0.202	-0.129	-0.073	-0.040	-0.022	-0.013	-0.007	-0.004	-0.003	-0.002
	r_k^1	-0.199	-0.127	-0.073	-0.038	-0.023	-0.017	-0.003	-0.005	0.000	-0.001
	r_k^2	-0.199	-0.127	-0.073	-0.038	-0.023	-0.017	-0.003	-0.005	0.000	-0.001
0.15	ρ_k^Y	-0.176	-0.129	-0.078	-0.045	-0.026	-0.015	-0.009	-0.006	-0.004	-0.002
	r_k^1	-0.171	-0.128	-0.075	-0.050	-0.021	-0.016	-0.011	-0.004	-0.001	-0.004
	r_k^2	-0.171	-0.128	-0.075	-0.050	-0.021	-0.016	-0.011	-0.004	-0.001	-0.004
0.20	ρ_k^Y	-0.148	-0.128	-0.082	-0.050	-0.030	-0.018	-0.011	-0.007	-0.005	-0.003
	r_k^1	-0.143	-0.126	-0.084	-0.049	-0.033	-0.017	-0.009	-0.005	-0.006	-0.004
	r_k^2	-0.143	-0.126	-0.084	-0.049	-0.033	-0.017	-0.009	-0.005	-0.006	-0.004
0.25	ρ_k^Y	-0.119	-0.125	-0.086	-0.055	-0.034	-0.022	-0.014	-0.009	-0.006	-0.004
	r_k^1	-0.115	-0.125	-0.087	-0.051	-0.034	-0.021	-0.016	-0.010	-0.007	-0.010
	r_k^2	-0.115	-0.125	-0.087	-0.051	-0.034	-0.021	-0.016	-0.010	-0.007	-0.010
0.30	ρ_k^Y	-0.089	-0.120	-0.089	-0.060	-0.039	-0.025	-0.017	-0.011	-0.008	-0.006
	r_k^1	-0.087	-0.114	-0.090	-0.058	-0.035	-0.024	-0.018	-0.012	-0.013	-0.004
	r_k^2	-0.087	-0.114	-0.090	-0.058	-0.035	-0.025	-0.018	-0.012	-0.013	-0.004
0.35	ρ_k^Y	-0.057	-0.114	-0.091	-0.064	-0.043	-0.029	-0.020	-0.014	-0.010	-0.007
	r_k^1	-0.052	-0.113	-0.089	-0.063	-0.042	-0.029	-0.024	-0.016	-0.009	-0.006
	r_k^2	-0.053	-0.113	-0.089	-0.063	-0.042	-0.029	-0.024	-0.017	-0.009	-0.006
0.40	ρ_k^Y	-0.024	-0.104	-0.091	-0.067	-0.047	-0.032	-0.023	-0.016	-0.011	-0.008
	r_k^1	-0.022	-0.105	-0.090	-0.066	-0.048	-0.033	-0.023	-0.012	-0.010	-0.010
	r_k^2	-0.023	-0.105	-0.090	-0.067	-0.048	-0.033	-0.023	-0.012	-0.010	-0.010
0.45	ρ_k^Y	0.013	-0.092	-0.089	-0.068	-0.049	-0.034	-0.024	-0.017	-0.012	-0.009
	r_k^1	0.008	-0.094	-0.084	-0.069	-0.048	-0.038	-0.027	-0.020	-0.013	-0.011
	r_k^2	0.008	-0.094	-0.084	-0.069	-0.048	-0.038	-0.027	-0.021	-0.014	-0.011

Per tant, la principal conclusió que cal treure de l'anàlisi realitzada en aquest apartat és que, tot i que el correlograma sigui un molt bon instrument per detectar la presència de memòria permanent, no permet diferenciar entre la memòria curta i la memòria llarga degut al seu biaix. Per tant, si hom vol detectar el tipus de memòria en sèries estacionàries, cal completar el correlograma amb altres instruments, per exemple el que s'ha definit com funció FQC, o d'altres que puguin derivar-se a partir de la sobrediferenciació de les dades, ja que en aquest cas es soluciona el problema del biaix.

5.4. Relació del periodograma amb el tipus de memòria

Als apartats anteriors s'han destacat algunes dificultats en relació a la detecció del tipus de memòria en dades temporals usant els estadístics més habituals basats en les característiques de les dades en el domini temporal. De fet, no és d'estranyar la presència d'aquestes dificultats degut a que aquests estadístics es basen en les autocorrelacions començant per les d'ordre inferior de manera que hom s'està fixant més en l'estructura de dependència a curt termini que en la dependència que pugui haver-hi a més llarg termini.

Però recordi's que les diferències que justifiquen la classificació de les sèries temporals en diferents categories queden reflectides en el comportament de la sèrie a mig o llarg termini i no en el seu comportament a curt termini. Dit d'una altra manera, fins i tot una sèrie amb memòria curta i una sèrie amb memòria permanent infinita poden presentar unes característiques en el curt termini molt similars. Pensi's, per exemple en un model autoregressiu d'ordre u amb coeficient $\phi=0.9$ i un camí aleatori; tot i que pertanyen a categories ben diferents pel que fa al seu comportament a llarg termini en el curt termini són molt similars.

Això porta a considerar que la diferència entre un i altre tipus de memòria pot observar-se millor en el domini de les freqüències ja que aquesta anàlisi es fixa en les dades temporals conjuntament¹⁰. En aquest sentit, tot i que el perfil gràfic de l'espectre de moltes de les variables

¹⁰ De fet, ha calgut recórrer al domini de les freqüències per diferenciar la memòria curta de la memòria llarga.

econòmiques és molt similar, potser l'anàlisi numèrica és útil per detectar diferències en la memòria.

Així, atès que els instruments estadístics habituals basats en el domini temporal no són capaços de distingir de manera adequada el tipus de memòria de certs models, alguns autors han proposat usar algun instrument basat en el domini de les freqüències, concretament el periodograma.

En tot cas, un avantatge clar d'aquest enfocament es troba en que no cal fer cap supòsit sobre el tipus de model a utilitzar, ni calen resultats d'inferència estadística relacionats amb la utilització de finestres espectrals ja que es proposa usar directament el periodograma per obtenir informació sobre el tipus de memòria.

La idea en la que es basa la proposta que es presenta a continuació és la següent. La densitat espectral d'un procés estocàstic descriu com es distribueix la variació total de la sèrie temporal entre les diferents freqüències. Per tant, és d'esperar que la presència d'una major o menor memòria en una determinada freqüència es vegi reflectida en una major potència de la densitat espectral en dita freqüència.

Dit d'una altra manera, qualsevol instrument que permeti mesurar el grau de concentració de la potència de l'espectre d'una sèrie en unes poques freqüències sembla una bona mesura del grau de memòria. Suposi's que es disposa d'un conjunt de T observacions temporals X_1, \dots, X_T , d'una certa variable. El primer que cal fer per traslladar l'anàlisi de la variable del domini temporal al domini de les freqüències és calcular el periodograma de la sèrie per les diferents freqüències¹¹ $\omega_1, \dots, \omega_m$:

$$I(\omega_j) = \frac{1}{T} \left| \sum_{t=1}^T X_t e^{-\frac{2i\pi j t}{T}} \right|^2 \quad (5.32)$$

¹¹ Recordi's que el periodograma en la freqüència zero no és gaire informatiu pels objectius aquí pretesos ja que està relacionat amb la mitjana mostral de les dades.

on $m = \lceil T/2 + 1 \rceil$.

Aquest periodograma es pot interpretar com una distribució molt simple de la variabilitat de la sèrie entre les diferents freqüències¹². Per treure'n conclusions en relació al grau de concentració de la potència al voltant de determinades freqüències cal tenir en compte la major o menor variància de la sèrie. Una forma senzilla de fer-ho és estandaritzar el periodograma, és a dir, calcular el quocient del periodograma i una estimació de la variància:

$$I^*(\omega_j) = \frac{1}{\tilde{\sigma}^2} I(\omega_j) \quad (5.33)$$

on $\tilde{\sigma}^2$ pot ser, per exemple, l'estimador habitual d'aquesta variància, $\tilde{\sigma}^2 = T^{-1} \sum (X_t - \bar{X})^2$.

Un cop es disposa del periodograma estandaritzat cal usar alguna mesura de concentració de la variància entre freqüències. Hi ha una possibilitat que sembla molt interessant per la seva simplicitat. Es tracta concretament de calcular la mediana d'aquest periodograma estandaritzat, estadístic que anomenarem $Me_X = \text{Mediana}\{I^*(\omega_j)\}$.¹³

Per conèixer el comportament d'aquest estadístic cal una anàlisi addicional. Per fer-ho, sigui $z_j = I^*(\omega_j)$. Si un procés estocàstic X_t és soroll blanc, $X_t = \varepsilon_t$, totes les observacions del periodograma z_1, \dots, z_m són independents i igualment distribuïdes segons una exponencial amb esperança i variància unitària¹⁴:

$$z_j \sim f(z) = e^{-z} \quad (5.34)$$

Gràcies a que són independents, és fàcil trobar-ne la mediana ja que, per la definició de mediana d'una distribució, Me_X compleix que:

¹² Tot i ser un estimador sense biaix de la densitat espectral, n'és un estimador inconsistent degut a la seva gran volatilitat.

¹³ A Parzen (1983) es proposa mesurar la memòria de la sèrie, a més de la mediana, la variància o la diferència entre el valor màxim i el valor mínim.

¹⁴ Per una demostració, vegi's Brocwell i Davis (1992, pàg. 342-343).

$$F(Me_\varepsilon) = 1 - e^{-Me_\varepsilon} = \frac{1}{2} \quad (5.35)$$

de manera que $e^{-Me_\varepsilon} = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$ i, per tant, $Me_\varepsilon = \ln(2) \cong 0.69$.

De fet, aquest és el valor màxim que pot prendre aquest estadístic ja que correspon al cas en que les ordenades del periodograma es distribueixen al voltant d'una línia constant i en la mesura en que hi hagi una distribució més desigual de la variabilitat, és a dir, hi hagi ordenades del periodograma significativament més grans que les altres, aquest estadístic prendrà un valor inferior. En tot cas, és clar que el zero és una cota inferior d' Me_X .

L'avantatge d'aquest estadístic és que pot usar-se en qualsevol tipus de dades, sense necessitat de suposar cap tipus de model. Com a exemple d'aquesta utilitat, s'ha estimat el valor esperat de l'estadístic Me_X a partir de dades amb comportaments molt diversos fins i tot amb la presència d'una tendència lineal. Així, al quadre 5.17 es recull el valor promig calculat ha partir del resultat de simular 1000 sèries amb $T=100$ a partir de cada un dels models esmentats.

Quadre 5.17. Característiques periodograma d'alguns models

	Me_X
Soroll blanc	0.69
FI(d) amb $d=0.45$	0.54
AR(1) amb $\phi=0.9$	0.08
Camí aleatori	0.04
Tendència lineal més soroll	0.02

Observi's com el camí aleatori i la tendència lineal més soroll¹⁵ presenten valors esperats de la mediana del periodograma estandaritzat molt propers al zero. L'aspecte més sorprenent dels resultats del quadre 5.17 és la comprovació de que la presència de coeficients autoregressius, situació classificada com de memòria curta, porta a valors d'aquesta mediana molt petits en relació als que s'obtenen amb memòria llarga.

¹⁵ En aquest cas s'ha generat X_t com $X_t = t + \varepsilon_t$, on ε_t és soroll blanc.

Per tant, la mesura proposada no és plenament satisfactòria i caldria usar alguna mesura de la concentració de la densitat espectral més refinada que la mediana, problema sobre el que creiem interessant obrir línies futures de recerca. De totes maneres, aquesta diferència tan gran entre el comportament d' Me_X introduït pels paràmetres autoregressius i pel paràmetre d pot servir en alguns casos per detectar errors en l'especificació de models¹⁶.

Quadre 5.18. Característiques empíriques de l'estadístic Me_X quan $(1-L)^d(1-\phi L)X_t = \varepsilon_t$.

d	$\phi=0$		$\phi=0.3$		$\phi=0.6$		$\phi=0.9$	
	Promig	Desv. est.	Promig	Desv. est.	Promig	Desv. est.	Promig	Desv. est.
0	0.69	0.099	0.63	0.104	0.41	0.098	0.14	0.061
0.05	0.70	0.100	0.60	0.101	0.37	0.095	0.12	0.053
0.10	0.69	0.099	0.57	0.105	0.33	0.091	0.09	0.047
0.15	0.67	0.098	0.53	0.103	0.29	0.085	0.08	0.038
0.20	0.65	0.105	0.48	0.102	0.26	0.078	0.06	0.036
0.25	0.62	0.104	0.44	0.108	0.22	0.074	0.05	0.031
0.30	0.58	0.112	0.39	0.106	0.19	0.069	0.04	0.028
0.35	0.54	0.111	0.35	0.099	0.16	0.061	0.03	0.021
0.40	0.52	0.108	0.32	0.092	0.13	0.055	0.03	0.019
0.45	0.54	0.127	0.33	0.100	0.14	0.054	0.02	0.015
0.55	0.34	0.112	0.19	0.078	0.08	0.044	0.03	0.027
0.60	0.30	0.102	0.16	0.071	0.07	0.036	0.03	0.027
0.65	0.25	0.101	0.14	0.062	0.06	0.033	0.03	0.026
0.70	0.21	0.096	0.12	0.061	0.05	0.033	0.03	0.024
0.75	0.18	0.082	0.10	0.051	0.05	0.029	0.03	0.025
0.80	0.15	0.074	0.08	0.043	0.04	0.027	0.03	0.025
0.85	0.12	0.066	0.07	0.037	0.04	0.026	0.03	0.025
0.90	0.10	0.059	0.06	0.036	0.03	0.025	0.03	0.025
0.95	0.08	0.051	0.05	0.031	0.03	0.023	0.03	0.025
1.00	0.04	0.045	0.04	0.030	0.03	0.023	0.03	0.024
1.05	0.04	0.045	0.04	0.026	0.03	0.023	0.03	0.023
1.10	0.04	0.039	0.04	0.026	0.03	0.022	0.03	0.022
1.15	0.04	0.035	0.04	0.024	0.03	0.022	0.03	0.022
1.20	0.04	0.032	0.04	0.024	0.03	0.022	0.03	0.022
1.25	0.03	0.030	0.03	0.024	0.03	0.022	0.02	0.022
1.30	0.03	0.028	0.03	0.024	0.03	0.022	0.02	0.022
1.35	0.03	0.027	0.03	0.024	0.03	0.022	0.02	0.022
1.40	0.03	0.026	0.03	0.024	0.03	0.022	0.02	0.022
1.45	0.03	0.026	0.03	0.030	0.03	0.022	0.02	0.022

¹⁶ A l'apartat 8.2.2 de la tesi es presenta una aplicació d'aquest estadístic per a la detecció d'errors d'especificació en models de línies aèries.

Al quadre 5.18 es recullen les característiques empíriques d'aquest estadístic per models ARFIMA(1, d ,0) amb diferents valors dels paràmetres ϕ i d , calculades a partir d'una simulació. D'aquests resultats es dedueix que si cal escollir entre una representació AR(1) o una representació ARFIMA(0, d ,0), el càlcul d'aquest estadístic combinat amb els primers coeficients d'autocorrelació pot ajudar en aquesta decisió. Malauradament, no permet distingir cap d'aquests models del model ARFIMA(1, d ,0).

En definitiva, tot i haver definit els conceptes de memòria curta i memòria llarga a partir de la densitat espectral, la identificació del tipus de memòria és força difícil a partir del periodograma.

5.5. Consideracions finals

La principal conclusió del capítol és la gran dificultat que té la identificació, en sèries estacionàries del tipus de memòria de les dades, és a dir, si les dades presenten memòria curta o memòria llarga. En aquest sentit, creiem important l'aportació en relació a la utilització dels coeficients $C(l,k)$ com a complement de la FAS i la FAP, però tot i així, la selecció entre un model ARMA o un model ARFIMA com a més adequat és un problema pendent d'una solució satisfactòria.

De totes maneres, creiem que no té gaire sentit plantejar la decisió d'especificar a priori un model ARMA o ARFIMA a diferència, per exemple, de la decisió de diferenciar o no les dades segons si aquestes són o no estacionàries. Dit d'una altra manera, a l'apartat 4.9 s'ha mostrat que hi ha infinitat de combinacions de paràmetres autoregressius i/o mitjana mòbil amb l'operador diferenciació fraccional que són equivalents en el domini temporal a models ARMA molt senzills.

Per tant, la decisió entre especificar un model ARMA o ARFIMA hauria de basar-se en una valoració dels avantatges i inconvenients que té la utilització d'un ARFIMA enlloc dels més

habituals ARMA. Així, com a principals costos i beneficis d'usar un o altra model cal tenir en compte els següents.

- En primer lloc, un model ARFIMA és més flexible i ampli i per tant, permet un millor ajust a l'evolució de les dades.
- En segon lloc, també cal tenir en compte en quina mesura l'estimació i realització d'inferència es complica en el cas dels models ARFIMA en relació als models ARMA. A més també cal valorar els problemes que planteja la utilització a la pràctica d'un model lineal infinit enlloc d'un model finit per exemple, a l'hora de calcular prediccions.
- Per últim, l'aspecte a valorar que considerem més important són les possibles conseqüències que pot tenir la no consideració de la possibilitat que les dades continguin memòria llarga en el problema concret que s'estigui analitzant.

Per tant, per a cada aplicació concreta a que estigui destinada l'anàlisi d'una sèrie temporal econòmica caldrà valorar els tres aspectes i decidir si és millor usar un model ARMA o ARFIMA.

Aquest enfocament porta a una conseqüència important, ja insinuada a la introducció de la tesi. Concretament, no té sentit referir-se al "millor" model per a una certa variable sinó que sols té sentit referir-se al model més adequat per una determinada aplicació.

Aquestes consideracions determinen la línia natural que ha de seguir la tesi. Així, es dediquen els dos propers capítols, el 6 i el 7 a l'anàlisi del problema de l'estimació i realització d'inferència en models de memòria llarga, mentre que els capítols 8 i 9 es centren en la valoració de les conseqüències econòmiques de no tenir en compte la possibilitat que les dades continguin memòria llarga i restringir-se a la utilització de models ARMA.

Annex 5.1. Generació de sèries temporals a partir d'un model ARFIMA

La generació mitjançant eines informàtiques de sèries amb diferents tipus de memòria és un problema no estadístic però té una importància fonamental per a la realització d'experiments de Monte Carlo amb l'objectiu de comparar certes característiques de cada tipus de memòria.

Al llarg de la tesi i com a via de simplificació, s'ha optat per restringir les anàlisis a partir de simulacions al cas en que les dades es poden representar mitjançant un model ARFIMA. Això no suposa una restricció massa important ja que segons quin sigui el valor del paràmetre d , es poden obtenir sèries amb tots els tipus de memòria.

Per tant, l'objectiu d'aquest annex és explicar com obtenir, a partir d'un model ARFIMA(p,d,q) amb uns paràmetres concrets, dades X_1, \dots, X_T que compleixin l'equació següent:

$$(1 - L)^d \phi(L)X_t = \theta(L)\varepsilon_t, \quad (\text{A5.1})$$

on $\phi(L) = 1 - \phi_1 L - \dots - \phi_p L^p$ i $\theta(L) = 1 - \theta_1 L - \dots - \theta_q L^q$. Quan $d=0$, el problema queda reduït a generar dades segons un model ARMA. En aquest cas n'hi ha prou amb generar una successió de valors independents i idènticament distribuïts¹⁷, $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_T$ i calcular els valors d' X_t de manera recursiva com:

$$X_t = \phi_1 X_{t-1} + \dots + \phi_p X_{t-p} + \varepsilon_t - \theta_1 \varepsilon_{t-1} - \dots - \theta_q \varepsilon_{t-q} \quad (\text{A5.2})$$

El problema dels valors inicials es pot solucionar fàcilment generant més dades de les que són necessàries.

Quan $d=1$, n'hi ha prou amb generar una sèrie Y_t segons el model ARMA i calcular els valors d' X_t de manera recursiva com $X_t = Y_t + X_{t-1}$. Però quan $0 < d < 1$, la generació de les dades no és tan

¹⁷ Totes les simulacions al llarg de la tesi s'han realitzat amb dades amb llei normal.

senzilla perquè l'operador $(1-L)^d$ no es pot representar com una combinació lineal finita de potències de L .

Hom podria suggerir com a primera aproximació la d'aproximar aquest operador com una combinació lineal finita de potències en L . Per exemple, si es vol generar una sèrie temporal a partir del model $(1-L)^d X_t = \varepsilon_t$, una possibilitat molt senzilla és la d'aprofitar la representació autoregressiva¹⁸ d'aquest model¹⁹:

$$X_t = \varepsilon_t + \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k X_{t-k} \quad (\text{A5.3})$$

on $\xi_k = \frac{\Gamma(k-d)}{\Gamma(k+1)\Gamma(-d)}$ i truncar la representació (A5.3) i calcular-ne una aproximació a partir de m termes:

$$X_t = \varepsilon_t + \sum_{k=1}^m \xi_k X_{t-k} \quad (\text{A5.4})$$

Però, tant la representació autoregressiva com mitjana mòbil d' $(1-L)^d$ tenen uns coeficients que decreixen molt lentament i això dificulta molt aquesta generació. Per aquest motiu, quan s'utilitzen aquestes representacions truncades es comet un error molt gran.

Com exemple d'aquests problemes, al quadre A5.1 es presenta el promig de les autocorrelacions estimades (r_k) a partir d'una simulació en que s'han generat 1000 sèries temporals de $T=100$ observacions del model $(1-L)^d X_t = \varepsilon_t$ usant l'equació (A5.4) amb $m=100$. En el mateix quadre es compara aquesta funció d'autocorrelació amb el seu valor teòric sota el supòsit de que $(1-L)^d X_t = \varepsilon_t$ i amb el seu valor esperat, és a dir $E(r_k)$.

¹⁸ Vegi's l'apartat 4.3 de la tesi.

¹⁹ Aquest és el procediment usat per Mandelbrot (1971) i per Cheng i Robinson (1991).

Quadre A5.1. Comparació dels coeficients r_k obtinguts amb dades simulades a partir de (A5.4) amb el correlograma teòric i l'esperança²⁰ dels coeficients r_k si $(1-L)^d X_t = \varepsilon_t$.

d	k	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0,10	ρ_k	0.111	0.064	0.047	0.037	0.031	0.027	0.024	0.021	0.019	0.018
	$E(r_k)$	0.110	0.064	0.046	0.037	0.035	0.028	0.030	0.024	0.014	0.018
	r_k	0.108	0.052	0.027	0.018	0.007	-0.005	0.002	-0.002	0.001	0.001
0,20	ρ_k	0.250	0.167	0.131	0.110	0.096	0.087	0.079	0.073	0.068	0.064
	$E(r_k)$	0.250	0.171	0.137	0.116	0.109	0.090	0.087	0.078	0.073	0.070
	r_k	0.217	0.125	0.085	0.057	0.024	0.015	0.008	0.006	0.002	-0.005
0,30	ρ_k	0.429	0.328	0.279	0.249	0.228	0.212	0.199	0.189	0.180	0.173
	$E(r_k)$	0.428	0.329	0.276	0.245	0.222	0.204	0.192	0.181	0.172	0.164
	r_k	0.345	0.235	0.158	0.118	0.095	0.062	0.034	0.018	0.011	0.008
0,40	ρ_k	0.667	0.583	0.538	0.509	0.486	0.469	0.455	0.443	0.433	0.424
	$E(r_k)$	0.642	0.551	0.501	0.463	0.438	0.415	0.400	0.389	0.375	0.364
	r_k	0.489	0.345	0.268	0.201	0.155	0.098	0.065	0.043	0.034	0.024

En aquest quadre es pot comprovar com, tot i que l'estadístic r_k és un estimador esbiaixat de ρ_k , les dades que es generen a través de la representació autoregressiva truncada presenten unes autocorrelacions molt inferiors.

Una primera possibilitat per solucionar aquests problemes es basa en aprofitar les propietats de la descomposició de Txoleski de matrius definides positives. Aquesta és la via usada, entre d'altres per Geweke i Porter-Hudak (1983).

Concretament, si ε és un vector format per T observacions independents, $\varepsilon = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_T)'$, es compleix que $E[\varepsilon\varepsilon'] = I$. Si es defineix ara un nou vector $X = (X_1, \dots, X_T)'$ com $X = A\varepsilon$, la matriu de variàncies i covariàncies d' X és $cov(X) = E[XX'] = AE[\varepsilon\varepsilon']A' = AIA' = AA'$. Aquesta propietat, combinada amb la descomposició de Txoleski que permet descomposar tota matriu Γ definida positiva com $\Gamma = VV'$, permet solucionar el problema.

Concretament, suposi's que l'objectiu és obtenir una sèrie de T observacions que compleixin l'equació estocàstica $(1-L)^d X_t = \varepsilon_t$ amb $-0.5 < d < 0.5$. En aquest cas, n'hi ha prou a calcular les autocovariàncies teòriques d' X_t :²¹

²⁰ Pel que fa al càlcul de valor esperat $E(r_k)$, vegi's l'Annex 5.2.

$$\gamma_k = (-1)^k \frac{\Gamma(1-2d)}{\Gamma(1-k-d)\Gamma(k+1-d)} \quad (\text{A5.5})$$

i construir una matriu Γ de dimensió $(T \times T)$ formada per aquestes autocovariàncies:

$$\Gamma = \begin{bmatrix} \gamma_0 & \gamma_1 & \gamma_2 & \cdots & \gamma_{T-1} \\ \gamma_1 & \gamma_0 & \gamma_1 & \cdots & \gamma_{T-2} \\ \gamma_2 & \gamma_1 & \gamma_0 & \cdots & \gamma_{T-3} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \gamma_{T-1} & \gamma_{T-2} & \gamma_{T-3} & \cdots & \gamma_0 \end{bmatrix} \quad (\text{A5.6})$$

La matriu Γ és definida positiva, per tant, existeix una matriu V que compleix $\Gamma = VV'$. Si s'aplica aquesta matriu V per transformar un vector d'observacions soroll blanc ε s'obté el vector $X = V\varepsilon$. Aquest vector té per matriu de variàncies i covariàncies:

$$\text{cov}(X) = E[XX'] = E[V\varepsilon\varepsilon'V'] = VE[\varepsilon\varepsilon']V' = VIV' = \Gamma \quad (\text{A5.7})$$

Per tant, es poden interpretar els elements del vector X com a T observacions generades a partir del model $(I-L)^d X_t = \varepsilon_t$.

De totes maneres, el problema d'aquesta aproximació és la gran quantitat de càlculs que són necessaris per obtenir la descomposició de Txoleski de la matriu Γ a mesura que T es fa gran.

Com a alternativa, Davies i Hart (1987) proposen una via molt interessant basada en la utilització dos cops de la transformada ràpida de Fourier. El mètode es basa en construir una successió a partir de les autocovariàncies calculades a partir de (A5.5) de la manera següent:

$$\{\gamma_0, \gamma_1, \dots, \gamma_{T-2}, \gamma_{T-1}, \gamma_{T-2}, \dots, \gamma_1\} \quad (\text{A5.8})$$

i calcular-ne la transformada finita de Fourier, és a dir:

$$\alpha_k = \sum_{j=0}^{T-1} \gamma_j e^{\frac{2\pi k j}{2T}} + \sum_{j=T}^{2T-1} \gamma_{2T-j-2} e^{\frac{2\pi k j}{2T}} \quad (\text{A5.9})$$

²¹ A partir dels resultats de l'apartat 4.4 i suposant que la variància del soroll blanc és unitària.

per $k=1, \dots, 2T-3$.

Sigui ara Y_1, \dots, Y_T una sèrie temporal de variables aleatòries complexes, independents amb part real i imaginària normals complint les següents condicions:

- 1) Quan $t=2, \dots, T-1$ la part real i la part imaginària d' Y_t tenen variància unitària.
- 2) Quan $t=1$ o $t=T$, la part real té variància igual a 2 i la part imaginària és nul·la.

Si ara s'estén la successió Y_1, \dots, Y_T amb valors Y_{T+1}, \dots, Y_{2T+2} , definits com²² $Y_k = Y_{2T-2-k}^*$, Davies i Harte (1987) demostren que la sèrie X_t calculada com:

$$X_t = \frac{1}{2T^{1/2}} \sum_{k=1}^{2T} (\alpha_k)^{1/2} Y_k e^{\frac{2\pi j k t}{2T}} \quad (\text{A5.10})$$

per $t=1, \dots, T$ té per autocovariàncies $\gamma_0, \dots, \gamma_{T-1}$ i per tant, és solució de l'equació $(1-L)^d X_t = \varepsilon_t$.

En els diferents exercicis de simulació realitzats al llarg de la tesi, s'han generat sèries usant els dos mètodes, el mètode basat en la descomposició de Txoleski i el mètode basat en la transformada de Fourier per garantir que el mètode usat no tingui incidència en els resultats obtinguts. Pel que fa al càlcul de la funció gamma per obtenir les autocovariàncies a partir de (A5.5), a l'Annex 5.2 es presenta l'algorisme utilitzat.

A més, no és necessari calcular totes les autocovariàncies usant la fórmula (A5.5), sinó que un cop calculada la variància, de (4.34) i (4.40) es dedueix que, per $k > 0$:

$$\gamma_k = \gamma_{k-1} \frac{(d+j-1)}{(j-d)} \quad (\text{A5.11})$$

²² On el símbol * significa el conjugat.

ja que d'aquesta manera, es minimitzen els errors derivats de l'arrodoniment en l'algorisme pel càlcul de la funció gamma.

Quan cal simular una sèrie segons el model $(1-L)^d X_t = \varepsilon_t$ amb $d \geq 0.5$, és suficient generar una sèrie Z_t segons el model $(1-L)^{d-1} X_t = \varepsilon_t$ i calcular després X_t de manera recursiva com $X_t = Z_t + X_{t-1}$.

Quan ha calgut generar observacions d'un model ARFIMA(p, d, q):

$$(1-L)^d \phi(L) X_t = \theta(L) \varepsilon_t \quad (\text{A5.12})$$

s'han generat primer observacions del model $(1-L)^{d-1} W_t = \varepsilon_t$ i a continuació s'han calculat els valors d' X_t de manera recursiva com:

$$X_t = \phi_1 X_{t-1} + \dots + \phi_p X_{t-p} + W_t - \theta_1 W_{t-1} - \dots - \theta_q W_{t-q} \quad (\text{A5.13})$$

Pel que fa a la realització de les simulacions, les més intensives en càlcul s'han dut a terme amb el paquet estadístic SAS emprant el llenguatge matricial IML i les menys intensives en càlcul s'han dut a terme amb el paquet estadístic²³ GAUSS. En el primer cas, els programes en SAS han corregut sobre un ordinador SUN SPARC Station-4 i els programes en GAUSS han corregut sobre un PC amb processador Pentium-100.

²³ En aquest cas no ha calgut aplicar l'algorisme de l'Annex 5.2 pel càlcul de la funció gamma ja que el propi llenguatge conté una rutina pel càlcul de la funció gamma.

Annex 5.2. Algorisme per a l'avaluació de la funció gamma

El càlcul de la funció gamma es pot fer a través del següent algorisme que permet una molt bona aproximació quan $x > 0$:

$$\Gamma(x) = (x + 0.5) \log(x + 5.5) - x - 5.5 + \log\left(\frac{\beta\delta}{x}\right) \quad (\text{A5.14})$$

on:

$$\delta = \alpha + \sum_{j=1}^6 \frac{\zeta_j}{x + j} \quad (\text{A5.15})$$

i els coeficients a usar apareixen al quadre A5.2

Quadre A5.2. Coeficients per avaluar la funció gamma

$\zeta_1 =$	76.18009172947146
$\zeta_2 =$	-86.50532032941677
$\zeta_3 =$	24.01409824083091
$\zeta_4 =$	-1.231739572450155
$\zeta_5 =$	0.001208650973866179
$\zeta_6 =$	-0.000005395239384953
$\alpha =$	1.000000000190015
$\beta =$	2.5066282746310005

Quan $x < 0$, cal tenir en compte l'extensió de la funció, segons la següent fórmula recursiva:

$$\Gamma(x) = \frac{\Gamma(x + 1)}{x} \quad (\text{A5.16})$$

La millor manera d'aplicar aquesta fórmula és la següent. Si $x < 0$, existeix un únic valor m natural i un valor $y \in (0, 1)$ de manera que $x = y - m$. En aquest cas, és immediat comprovar que la funció gamma es pot calcular com:

$$\Gamma(x) = \frac{\Gamma(y)}{x(x + 1) \dots (x + m - 1)} \quad (\text{A5.17})$$

ANNEX 5.3. Comportament en mostra finita de les autocorrelacions mostrals

A les pàgines següents es presenten alguns dels resultats obtinguts per avaluar mitjançant exercicis de simulació, el comportament en mostra finita de les autocorrelacions mostrals:

$$r_k = \frac{\sum_{i=1}^{T-k} (X_i - \bar{X})(X_{i-k} - \bar{X})}{\sum_{i=1}^T (X_i - \bar{X})^2} \quad (\text{A5.18})$$

com estimadors de la funció d'autocorrelació ρ_k . Per comprovar les conseqüències de la presència de memòria llarga en les característiques d'aquest estadístic, s'han generat diferents models ARFIMA(1,d,1):

$$(1-L)^d(1-\phi L)X_t = (1-\theta L)\varepsilon_t \quad (\text{A5.19})$$

i per cada un d'aquests models s'han generat 10000 sèries de 50, 100, 200 i 400 observacions. Per a cada una d'aquestes situacions s'ha estimat l'esperança de l'estadístic r_k i la seva desviació estàndard. Pel que fa als paràmetres usats, per cada combinació de valors dels paràmetres ϕ i θ , s'han generat sèries amb $d=0, 0.05, 0.10, \dots, 0.45$.

Atès que una part important del biaix en l'estadístic r_k pot ser deguda al desconeixement de l'esperança d' X_t i a la utilització de la mitjana aritmètica, s'ha estimat la funció d'autocorrelació a través del següent estadístic com alternativa a r_k :

$$r_k^* = \frac{\sum_{i=1}^{T-k} X_i X_{i-k}}{\sum_{i=1}^T X_i^2} \quad (\text{A5.20})$$

Com l'esperança d' X_t a (A5.19) és zero, la utilització de l'estadístic (A5.20) és equivalent al supòsit d'estimar la funció d'autocorrelació amb l'esperança d' X_t coneguda. Al quadre A5.3 es presenta un resum dels models analitzats i els quadres on es poden trobar els resultats.

Quadre A5.3. Valors analitzats en l'exercici de simulació

ϕ	θ	r_k^*	r_k
0.0	0.0	A5.4 i A5.5	A5.22 i A5.23
0.5	0.0	A5.6 i A5.7	A5.24 i A5.25
0.0	0.5	A5.8 i A5.9	A5.26 i A5.27
0.9	0.0	A5.10 i A5.11	A5.28 i A5.29
0.0	0.9	A5.12 i A5.13	A5.30 i A5.31
-0.5	0.0	A5.14 i A5.15	A5.32 i A5.33
0.0	-0.5	A5.16 i A5.17	A5.34 i A5.35
-0.9	0.0	A5.18 i A5.19	A5.36 i A5.37
0.0	-0.9	A5.20 i A5.21	A5.38 i A5.39

A l'apartat 5.3.1 de la tesi es presenten les principals conclusions que es poden extreure d'aquest exercici de simulació.

Quadre A5.4. Esperança i desviació estàndard de les autocorrelacions estimades.

Mitjana coneguda. PGD: $(1-L)^d X_t = \varepsilon_t$

d	T	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0.00		0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
	50	0.004	0.003	-0.002	-0.006	-0.004	0.001	0.000	0.004	-0.001	-0.008
		0.140	0.129	0.130	0.135	0.129	0.133	0.130	0.127	0.127	0.123
	100	0.003	-0.009	0.000	-0.004	-0.004	-0.001	0.000	-0.001	0.003	0.001
		0.096	0.100	0.096	0.096	0.093	0.100	0.098	0.094	0.093	0.093
	200	0.002	0.001	0.001	-0.001	0.000	-0.005	-0.002	-0.001	-0.002	-0.002
		0.071	0.071	0.070	0.069	0.069	0.068	0.069	0.069	0.072	0.069
	400	-0.001	-0.002	0.000	-0.002	-0.001	0.000	-0.002	-0.003	-0.002	-0.003
		0.050	0.051	0.050	0.050	0.050	0.049	0.052	0.050	0.051	0.050
	0.05		0.053	0.028	0.020	0.015	0.012	0.011	0.009	0.008	0.007
50		0.047	0.026	0.022	0.014	0.006	0.010	0.011	0.007	0.000	0.004
		0.141	0.138	0.137	0.137	0.132	0.131	0.126	0.127	0.128	0.128
100		0.052	0.033	0.024	0.010	0.013	0.010	0.004	0.006	0.007	0.003
		0.102	0.099	0.100	0.103	0.098	0.099	0.096	0.095	0.097	0.091
200		0.054	0.028	0.019	0.012	0.012	0.010	0.012	0.009	0.008	0.006
		0.074	0.074	0.070	0.071	0.071	0.074	0.069	0.067	0.068	0.069
400		0.056	0.031	0.021	0.015	0.012	0.010	0.007	0.006	0.005	0.005
		0.050	0.051	0.050	0.050	0.051	0.051	0.051	0.049	0.050	0.051
0.10			0.111	0.064	0.047	0.037	0.031	0.027	0.024	0.021	0.019
	50	0.117	0.064	0.054	0.030	0.027	0.025	0.020	0.014	0.017	0.018
		0.150	0.144	0.139	0.141	0.136	0.135	0.129	0.131	0.131	0.127
	100	0.115	0.064	0.046	0.037	0.035	0.028	0.030	0.024	0.014	0.018
		0.106	0.105	0.105	0.103	0.098	0.102	0.101	0.097	0.099	0.099
	200	0.107	0.060	0.043	0.035	0.028	0.021	0.026	0.022	0.022	0.020
		0.075	0.073	0.075	0.076	0.073	0.076	0.074	0.075	0.072	0.072
	400	0.112	0.064	0.049	0.039	0.032	0.029	0.024	0.021	0.019	0.017
		0.051	0.053	0.051	0.053	0.054	0.050	0.050	0.050	0.053	0.053
	0.15		0.176	0.110	0.083	0.068	0.058	0.051	0.046	0.042	0.038
50		0.173	0.104	0.082	0.067	0.065	0.047	0.042	0.042	0.030	0.028
		0.152	0.149	0.155	0.148	0.139	0.144	0.140	0.139	0.138	0.137
100		0.179	0.115	0.081	0.066	0.059	0.052	0.046	0.039	0.042	0.037
		0.111	0.114	0.111	0.115	0.108	0.111	0.107	0.108	0.104	0.105
200		0.180	0.111	0.086	0.067	0.064	0.053	0.047	0.046	0.043	0.036
		0.079	0.079	0.081	0.077	0.077	0.079	0.077	0.079	0.080	0.076
400		0.176	0.110	0.084	0.068	0.056	0.050	0.049	0.042	0.040	0.037
		0.059	0.058	0.058	0.059	0.059	0.057	0.057	0.057	0.057	0.057
0.20			0.250	0.167	0.131	0.110	0.096	0.087	0.079	0.073	0.068
	50	0.240	0.171	0.134	0.114	0.097	0.081	0.080	0.069	0.067	0.068
		0.163	0.162	0.165	0.163	0.161	0.166	0.162	0.157	0.148	0.149
	100	0.250	0.171	0.137	0.116	0.107	0.090	0.087	0.078	0.073	0.070
		0.120	0.125	0.127	0.127	0.126	0.126	0.124	0.124	0.121	0.121
	200	0.254	0.168	0.131	0.113	0.097	0.090	0.084	0.078	0.071	0.066
		0.086	0.091	0.092	0.088	0.092	0.092	0.092	0.096	0.092	0.093
	400	0.254	0.172	0.135	0.115	0.099	0.091	0.086	0.078	0.074	0.068
		0.062	0.065	0.065	0.066	0.067	0.067	0.067	0.066	0.066	0.068

Quadre A5.5. Esperança i desviació estàndard de les autocorrelacions estimades.

Mitjana coneguda. PGD: $(1-L)^d X_t = \varepsilon_t$

d	T	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0.25		0.333	0.238	0.195	0.169	0.151	0.138	0.128	0.119	0.113	0.107
	50	0.324	0.223	0.186	0.158	0.143	0.128	0.111	0.108	0.097	0.087
		0.171	0.181	0.182	0.181	0.179	0.181	0.179	0.169	0.166	0.168
	100	0.333	0.238	0.199	0.165	0.147	0.136	0.124	0.118	0.114	0.107
		0.128	0.140	0.137	0.143	0.145	0.142	0.142	0.138	0.141	0.142
	200	0.342	0.245	0.202	0.179	0.160	0.146	0.134	0.127	0.120	0.113
		0.098	0.108	0.110	0.110	0.110	0.111	0.115	0.113	0.111	0.114
	400	0.339	0.242	0.199	0.172	0.156	0.142	0.133	0.124	0.120	0.113
		0.076	0.084	0.085	0.087	0.089	0.089	0.088	0.089	0.090	0.089
0.30		0.429	0.328	0.279	0.249	0.228	0.212	0.199	0.189	0.180	0.173
	50	0.429	0.323	0.276	0.245	0.227	0.205	0.190	0.179	0.164	0.155
		0.179	0.204	0.210	0.207	0.207	0.210	0.206	0.206	0.205	0.200
	100	0.428	0.329	0.276	0.245	0.222	0.204	0.192	0.181	0.172	0.164
		0.145	0.165	0.171	0.178	0.180	0.179	0.178	0.179	0.179	0.178
	200	0.437	0.338	0.286	0.256	0.236	0.217	0.203	0.191	0.180	0.175
		0.114	0.129	0.138	0.143	0.144	0.145	0.146	0.147	0.146	0.146
	400	0.438	0.338	0.290	0.262	0.243	0.226	0.211	0.201	0.194	0.184
		0.093	0.108	0.113	0.116	0.119	0.121	0.122	0.123	0.123	0.125
0.35		0.538	0.441	0.391	0.359	0.335	0.318	0.303	0.291	0.281	0.273
	50	0.514	0.412	0.356	0.319	0.290	0.269	0.261	0.240	0.224	0.212
		0.191	0.215	0.226	0.231	0.239	0.239	0.233	0.231	0.234	0.235
	100	0.541	0.443	0.390	0.356	0.335	0.316	0.299	0.286	0.273	0.262
		0.159	0.187	0.203	0.209	0.210	0.214	0.216	0.216	0.216	0.218
	200	0.548	0.448	0.397	0.365	0.340	0.321	0.304	0.292	0.284	0.276
		0.128	0.154	0.168	0.175	0.178	0.182	0.184	0.187	0.185	0.184
	400	0.551	0.458	0.408	0.377	0.353	0.335	0.320	0.309	0.299	0.291
		0.113	0.135	0.146	0.154	0.158	0.161	0.164	0.165	0.165	0.166
0.40		0.667	0.583	0.538	0.509	0.486	0.469	0.455	0.443	0.433	0.424
	50	0.613	0.514	0.455	0.420	0.390	0.369	0.345	0.326	0.309	0.294
		0.193	0.228	0.248	0.256	0.254	0.254	0.256	0.256	0.254	0.252
	100	0.642	0.551	0.501	0.463	0.438	0.415	0.400	0.389	0.375	0.364
		0.165	0.204	0.219	0.235	0.241	0.246	0.246	0.247	0.248	0.249
	200	0.657	0.568	0.521	0.489	0.464	0.445	0.429	0.417	0.404	0.392
		0.140	0.174	0.190	0.200	0.207	0.213	0.217	0.221	0.222	0.225
	400	0.665	0.581	0.535	0.504	0.481	0.463	0.447	0.435	0.424	0.414
		0.119	0.147	0.161	0.171	0.178	0.183	0.188	0.192	0.194	0.197
0.45		0.818	0.765	0.735	0.715	0.699	0.686	0.676	0.667	0.659	0.652
	50	0.737	0.652	0.602	0.564	0.532	0.508	0.485	0.461	0.443	0.422
		0.183	0.227	0.246	0.256	0.265	0.267	0.270	0.274	0.269	0.270
	100	0.756	0.680	0.633	0.599	0.572	0.551	0.534	0.518	0.505	0.490
		0.155	0.196	0.218	0.235	0.246	0.251	0.255	0.260	0.261	0.266
	200	0.775	0.709	0.671	0.643	0.621	0.602	0.587	0.573	0.562	0.552
		0.143	0.182	0.202	0.215	0.225	0.233	0.239	0.245	0.248	0.250
	400	0.792	0.730	0.695	0.669	0.650	0.635	0.621	0.610	0.599	0.589
		0.116	0.150	0.168	0.181	0.190	0.196	0.202	0.208	0.212	0.217

Quadre A5.6. Esperança i desviació estàndard de les autocorrelacions estimades.

Mitjana coneguda. PGD: $(1-0.5L)(1-L)^d X_t = \varepsilon_t$

d=	T	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0.00		0.500	0.250	0.125	0.063	0.031	0.016	0.008	0.004	0.002	0.001
	50	0.468	0.222	0.101	0.042	0.018	0.009	0.005	0.004	-0.001	-0.006
		0.122	0.145	0.156	0.162	0.161	0.165	0.165	0.162	0.158	0.153
	100	0.481	0.226	0.107	0.047	0.020	0.009	0.005	0.003	0.004	0.003
		0.083	0.107	0.111	0.115	0.117	0.121	0.122	0.119	0.117	0.116
	200	0.493	0.244	0.120	0.057	0.025	0.007	0.001	-0.002	-0.004	-0.005
		0.062	0.081	0.086	0.087	0.087	0.087	0.088	0.087	0.087	0.086
	400	0.493	0.242	0.119	0.057	0.027	0.012	0.002	-0.002	-0.004	-0.006
		0.044	0.059	0.062	0.062	0.063	0.063	0.065	0.065	0.065	0.065
0.05		0.552	0.307	0.177	0.107	0.069	0.047	0.035	0.028	0.023	0.020
	50	0.512	0.269	0.148	0.083	0.049	0.035	0.026	0.017	0.009	0.008
		0.122	0.156	0.172	0.177	0.175	0.173	0.167	0.166	0.166	0.162
	100	0.535	0.293	0.164	0.092	0.058	0.038	0.025	0.019	0.016	0.013
		0.086	0.117	0.129	0.135	0.134	0.134	0.131	0.128	0.128	0.125
	200	0.543	0.297	0.167	0.098	0.064	0.045	0.036	0.028	0.023	0.020
		0.061	0.084	0.092	0.095	0.095	0.098	0.096	0.093	0.092	0.091
	400	0.551	0.306	0.175	0.104	0.065	0.044	0.031	0.023	0.019	0.018
		0.041	0.058	0.065	0.067	0.070	0.071	0.070	0.068	0.068	0.068
0.10		0.605	0.369	0.236	0.159	0.115	0.089	0.072	0.061	0.054	0.048
	50	0.572	0.333	0.206	0.128	0.089	0.067	0.053	0.043	0.041	0.037
		0.120	0.159	0.176	0.184	0.184	0.183	0.180	0.181	0.179	0.177
	100	0.589	0.351	0.219	0.148	0.110	0.086	0.073	0.060	0.048	0.045
		0.084	0.120	0.138	0.143	0.143	0.144	0.142	0.140	0.141	0.139
	200	0.591	0.353	0.220	0.146	0.103	0.078	0.068	0.060	0.055	0.050
		0.060	0.087	0.100	0.106	0.108	0.111	0.111	0.111	0.108	0.107
	400	0.601	0.366	0.234	0.159	0.115	0.089	0.072	0.060	0.052	0.046
		0.041	0.060	0.069	0.075	0.078	0.076	0.075	0.077	0.079	0.078
0.15		0.658	0.436	0.302	0.222	0.173	0.142	0.121	0.106	0.096	0.088
	50	0.621	0.392	0.263	0.191	0.149	0.116	0.097	0.085	0.071	0.063
		0.114	0.165	0.191	0.196	0.197	0.200	0.197	0.195	0.194	0.193
	100	0.641	0.416	0.281	0.203	0.158	0.128	0.109	0.096	0.090	0.083
		0.085	0.128	0.147	0.159	0.161	0.163	0.159	0.158	0.156	0.157
	200	0.651	0.428	0.296	0.216	0.171	0.140	0.120	0.107	0.097	0.087
		0.058	0.089	0.106	0.112	0.115	0.119	0.120	0.121	0.122	0.121
	400	0.653	0.430	0.297	0.217	0.167	0.137	0.119	0.104	0.095	0.087
		0.044	0.067	0.079	0.086	0.090	0.090	0.090	0.091	0.091	0.090
0.20		0.711	0.507	0.378	0.296	0.243	0.208	0.183	0.166	0.152	0.141
	50	0.672	0.466	0.338	0.260	0.208	0.173	0.153	0.137	0.129	0.123
		0.113	0.170	0.202	0.218	0.224	0.229	0.230	0.225	0.215	0.209
	100	0.693	0.488	0.361	0.283	0.234	0.199	0.176	0.158	0.145	0.134
		0.082	0.129	0.156	0.170	0.177	0.182	0.183	0.184	0.184	0.186
	200	0.703	0.496	0.366	0.286	0.234	0.202	0.180	0.162	0.148	0.138
		0.058	0.094	0.115	0.126	0.135	0.140	0.143	0.146	0.146	0.147
	400	0.709	0.506	0.377	0.296	0.244	0.211	0.188	0.170	0.157	0.144
		0.042	0.068	0.083	0.092	0.099	0.103	0.105	0.106	0.108	0.110

Quadre A5.7. Esperança i desviació estàndard de les autocorrelacions estimades.

Mitjana coneguda. PGD: $(1-0.5L)(1-L)^d X_t = \varepsilon_t$

d=	T	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0.25		0.763	0.582	0.461	0.381	0.327	0.289	0.262	0.242	0.226	0.212
	50	0.720	0.522	0.398	0.319	0.267	0.231	0.202	0.183	0.166	0.151
		0.110	0.175	0.209	0.227	0.235	0.240	0.240	0.235	0.233	0.236
	100	0.744	0.556	0.433	0.349	0.295	0.258	0.232	0.215	0.201	0.188
		0.078	0.130	0.160	0.180	0.192	0.196	0.199	0.200	0.202	0.203
	200	0.757	0.574	0.454	0.376	0.323	0.285	0.257	0.238	0.223	0.211
		0.059	0.101	0.126	0.141	0.150	0.156	0.161	0.163	0.164	0.166
	400	0.760	0.577	0.456	0.376	0.323	0.286	0.259	0.240	0.226	0.213
		0.046	0.079	0.099	0.113	0.121	0.126	0.128	0.131	0.133	0.134
0.30		0.814	0.661	0.553	0.479	0.426	0.388	0.360	0.338	0.320	0.305
	50	0.780	0.609	0.495	0.419	0.367	0.327	0.297	0.272	0.251	0.233
		0.103	0.174	0.214	0.235	0.248	0.258	0.262	0.264	0.265	0.260
	100	0.792	0.628	0.513	0.435	0.380	0.340	0.312	0.289	0.271	0.255
		0.079	0.138	0.175	0.201	0.217	0.225	0.229	0.232	0.233	0.234
	200	0.807	0.650	0.539	0.463	0.409	0.370	0.339	0.316	0.297	0.282
		0.059	0.104	0.136	0.157	0.170	0.179	0.185	0.189	0.192	0.193
	400	0.812	0.659	0.552	0.479	0.428	0.390	0.361	0.339	0.321	0.306
		0.048	0.086	0.111	0.128	0.139	0.148	0.154	0.158	0.161	0.164
0.35		0.863	0.743	0.654	0.589	0.542	0.507	0.480	0.460	0.440	0.425
	50	0.818	0.669	0.562	0.486	0.431	0.391	0.363	0.335	0.312	0.293
		0.098	0.169	0.215	0.243	0.263	0.273	0.275	0.278	0.282	0.283
	100	0.844	0.710	0.612	0.543	0.495	0.458	0.428	0.404	0.383	0.365
		0.074	0.135	0.179	0.206	0.223	0.235	0.243	0.248	0.252	0.256
	200	0.855	0.727	0.633	0.565	0.516	0.478	0.449	0.427	0.410	0.396
		0.058	0.108	0.145	0.170	0.187	0.199	0.207	0.212	0.215	0.216
	400	0.862	0.741	0.651	0.586	0.539	0.503	0.476	0.454	0.437	0.423
		0.048	0.090	0.121	0.143	0.158	0.169	0.176	0.182	0.185	0.189
0.40		0.911	0.827	0.762	0.713	0.675	0.647	0.624	0.606	0.590	0.577
	50	0.858	0.734	0.639	0.571	0.520	0.481	0.447	0.419	0.394	0.372
		0.089	0.159	0.209	0.239	0.255	0.264	0.272	0.277	0.279	0.279
	100	0.883	0.776	0.693	0.630	0.583	0.547	0.520	0.499	0.479	0.461
		0.069	0.131	0.176	0.210	0.232	0.247	0.256	0.262	0.268	0.272
	200	0.896	0.798	0.723	0.666	0.623	0.590	0.564	0.542	0.523	0.506
		0.054	0.103	0.140	0.166	0.186	0.200	0.211	0.220	0.227	0.232
	400	0.904	0.813	0.742	0.689	0.649	0.618	0.593	0.572	0.555	0.540
		0.043	0.083	0.114	0.137	0.154	0.166	0.177	0.185	0.192	0.198
0.45		0.957	0.913	0.877	0.850	0.828	0.811	0.797	0.785	0.775	0.766
	50	0.904	0.813	0.740	0.683	0.637	0.599	0.567	0.538	0.512	0.489
		0.076	0.141	0.187	0.219	0.242	0.257	0.266	0.273	0.275	0.277
	100	0.922	0.845	0.781	0.730	0.690	0.658	0.632	0.610	0.590	0.572
		0.056	0.110	0.153	0.186	0.209	0.226	0.238	0.249	0.256	0.263
	200	0.934	0.868	0.816	0.774	0.741	0.713	0.691	0.672	0.656	0.642
		0.049	0.096	0.133	0.160	0.181	0.198	0.211	0.221	0.229	0.234
	400	0.943	0.886	0.839	0.803	0.774	0.751	0.732	0.715	0.701	0.688
		0.037	0.074	0.104	0.127	0.144	0.157	0.169	0.178	0.186	0.193

Quadre A5.8. Esperança i desviació estàndard de les autocorrelacions estimades.

Mitjana coneguda. PGD: $(1-L)^d X_t = (1-0.5L)\varepsilon_t$

d	T	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0.00		-0.400	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
	50	-0.374	-0.004	0.000	-0.004	-0.002	0.003	-0.003	0.005	0.001	-0.006
		0.114	0.149	0.146	0.149	0.146	0.150	0.145	0.141	0.143	0.138
	100	-0.382	-0.014	0.005	-0.002	-0.002	0.001	0.000	-0.002	0.003	0.000
		0.080	0.117	0.113	0.110	0.108	0.114	0.111	0.109	0.105	0.102
0.05	200	-0.392	-0.002	0.001	-0.001	0.002	-0.004	0.000	0.000	0.000	-0.001
		0.057	0.082	0.080	0.079	0.078	0.078	0.077	0.078	0.082	0.079
	400	-0.397	-0.003	0.002	-0.002	0.000	0.001	-0.001	-0.001	0.000	-0.001
		0.039	0.056	0.055	0.057	0.057	0.056	0.061	0.058	0.058	0.056
		-0.374	-0.001	0.002	0.002	0.002	0.002	0.002	0.002	0.001	0.001
0.10	50	-0.352	-0.006	0.008	0.002	-0.004	0.005	0.004	0.004	-0.006	0.004
		0.114	0.153	0.150	0.147	0.143	0.142	0.142	0.141	0.139	0.139
	100	-0.363	0.000	0.008	-0.005	0.006	0.003	-0.002	0.001	0.004	-0.001
		0.081	0.108	0.110	0.111	0.109	0.109	0.106	0.105	0.105	0.100
	200	-0.367	-0.003	0.004	-0.001	0.004	0.000	0.005	0.001	0.003	-0.001
0.15		0.060	0.081	0.078	0.080	0.080	0.080	0.075	0.075	0.079	0.079
	400	-0.370	-0.001	0.003	0.002	0.002	0.002	0.001	0.002	0.000	0.000
		0.040	0.056	0.055	0.056	0.058	0.056	0.055	0.055	0.057	0.057
		-0.345	0.001	0.007	0.007	0.006	0.005	0.005	0.004	0.004	0.004
	50	-0.313	-0.007	0.019	0.000	0.006	0.009	0.006	0.000	0.004	0.005
0.20		0.120	0.151	0.145	0.146	0.147	0.141	0.134	0.135	0.137	0.132
	100	-0.329	-0.001	0.007	0.006	0.010	0.004	0.010	0.008	-0.003	0.006
		0.085	0.109	0.107	0.106	0.102	0.105	0.106	0.102	0.102	0.105
	200	-0.340	0.000	0.005	0.008	0.006	0.000	0.010	0.003	0.006	0.004
		0.059	0.076	0.079	0.081	0.076	0.078	0.077	0.078	0.076	0.076
0.25	400	-0.341	-0.002	0.009	0.008	0.006	0.007	0.004	0.005	0.005	0.003
		0.042	0.057	0.055	0.056	0.056	0.053	0.054	0.054	0.055	0.057
		-0.311	0.007	0.014	0.013	0.012	0.011	0.010	0.009	0.009	0.008
	50	-0.283	0.002	0.019	0.012	0.025	0.007	0.010	0.015	0.004	0.004
		0.125	0.148	0.149	0.144	0.136	0.137	0.137	0.139	0.136	0.131
0.30	100	-0.297	0.014	0.012	0.013	0.014	0.014	0.012	0.005	0.014	0.006
		0.085	0.107	0.106	0.110	0.100	0.104	0.102	0.104	0.102	0.101
	200	-0.302	0.006	0.018	0.008	0.019	0.010	0.010	0.012	0.012	0.008
		0.063	0.075	0.076	0.073	0.076	0.076	0.077	0.078	0.076	0.072
	400	-0.308	0.007	0.016	0.014	0.011	0.010	0.014	0.008	0.010	0.008
0.35		0.045	0.054	0.054	0.054	0.054	0.054	0.052	0.053	0.053	0.054
		-0.271	0.018	0.025	0.024	0.022	0.020	0.019	0.018	0.017	0.016
	50	-0.249	0.029	0.032	0.032	0.026	0.020	0.027	0.017	0.018	0.023
		0.135	0.146	0.148	0.143	0.140	0.146	0.138	0.135	0.129	0.134
	100	-0.257	0.024	0.031	0.027	0.033	0.019	0.026	0.021	0.020	0.023
0.40		0.092	0.106	0.107	0.107	0.104	0.107	0.104	0.102	0.101	0.102
	200	-0.259	0.019	0.025	0.028	0.021	0.024	0.023	0.021	0.018	0.017
		0.068	0.080	0.079	0.073	0.075	0.075	0.072	0.077	0.073	0.074
	400	-0.266	0.022	0.026	0.027	0.022	0.022	0.024	0.018	0.021	0.016
		0.047	0.054	0.053	0.053	0.055	0.055	0.053	0.053	0.053	0.055

Quadre A5.9. Esperança i desviació estàndard de les autocorrelacions estimades.

Mitjana coneguda. PGD: $(1-L)^d X_t = (1-0.5L)\varepsilon_t$

d	T	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	
0.25		-0.221	0.037	0.044	0.042	0.039	0.036	0.034	0.032	0.030	0.029	
	50	-0.186	0.036	0.056	0.046	0.048	0.042	0.031	0.040	0.032	0.027	
		0.144	0.149	0.151	0.148	0.141	0.145	0.142	0.134	0.134	0.137	
	100	-0.202	0.042	0.057	0.042	0.042	0.042	0.036	0.034	0.037	0.034	
		0.105	0.112	0.103	0.107	0.107	0.043	0.107	0.101	0.105	0.106	
	200	-0.204	0.041	0.048	0.051	0.044	0.043	0.038	0.037	0.036	0.030	
		0.077	0.081	0.077	0.075	0.075	0.077	0.081	0.079	0.074	0.077	
	400	-0.211	0.039	0.048	0.043	0.044	0.039	0.038	0.033	0.037	0.031	
		0.056	0.058	0.057	0.056	0.057	0.058	0.056	0.056	0.057	0.056	
	0.30		-0.156	0.068	0.074	0.070	0.066	0.062	0.059	0.056	0.054	0.052
		50	-0.108	0.084	0.094	0.085	0.089	0.075	0.071	0.073	0.061	0.063
			0.166	0.162	0.160	0.153	0.150	0.153	0.145	0.147	0.145	0.144
100		-0.130	0.086	0.084	0.083	0.076	0.071	0.068	0.066	0.063	0.061	
		0.127	0.123	0.117	0.123	0.119	0.117	0.114	0.117	0.118	0.116	
200		-0.135	0.084	0.083	0.082	0.080	0.072	0.068	0.067	0.059	0.063	
		0.098	0.091	0.091	0.092	0.088	0.089	0.087	0.090	0.087	0.089	
400		-0.140	0.079	0.082	0.082	0.078	0.074	0.067	0.066	0.066	0.059	
		0.077	0.071	0.070	0.069	0.069	0.069	0.069	0.068	0.068	0.068	
0.35			-0.066	0.121	0.125	0.120	0.114	0.109	0.105	0.101	0.098	0.095
		50	-0.021	0.145	0.145	0.136	0.125	0.114	0.127	0.107	0.100	0.098
			0.206	0.175	0.176	0.173	0.178	0.174	0.166	0.164	0.165	0.168
	100	-0.021	0.154	0.149	0.145	0.142	0.137	0.128	0.126	0.120	0.115	
		0.173	0.148	0.153	0.149	0.144	0.147	0.147	0.145	0.143	0.146	
	200	-0.029	0.144	0.147	0.142	0.135	0.131	0.122	0.119	0.118	0.115	
		0.134	0.116	0.121	0.117	0.117	0.116	0.115	0.118	0.114	0.114	
	400	-0.036	0.148	0.147	0.145	0.136	0.133	0.126	0.124	0.120	0.118	
		0.121	0.101	0.100	0.103	0.100	0.103	0.102	0.104	0.099	0.101	
	0.40		0.071	0.217	0.217	0.211	0.204	0.198	0.193	0.188	0.184	0.181
		50	0.102	0.232	0.221	0.218	0.201	0.197	0.184	0.177	0.166	0.163
			0.251	0.216	0.215	0.214	0.205	0.203	0.202	0.201	0.195	0.192
100		0.111	0.244	0.244	0.230	0.226	0.212	0.207	0.208	0.198	0.196	
		0.224	0.196	0.186	0.196	0.192	0.191	0.188	0.186	0.188	0.185	
200		0.113	0.244	0.246	0.237	0.229	0.222	0.216	0.213	0.207	0.200	
		0.196	0.171	0.167	0.169	0.168	0.170	0.168	0.171	0.167	0.171	
400		0.106	0.245	0.245	0.236	0.230	0.224	0.217	0.213	0.208	0.205	
		0.172	0.146	0.144	0.146	0.145	0.146	0.149	0.148	0.147	0.148	
0.45			0.324	0.417	0.415	0.408	0.401	0.395	0.390	0.384	0.381	0.377
		50	0.310	0.385	0.376	0.360	0.344	0.333	0.322	0.304	0.301	0.281
			0.304	0.266	0.259	0.255	0.256	0.251	0.247	0.251	0.238	0.242
	100	0.306	0.394	0.385	0.372	0.361	0.350	0.343	0.333	0.331	0.318	
		0.282	0.244	0.244	0.244	0.246	0.245	0.243	0.244	0.239	0.242	
	200	0.328	0.416	0.415	0.403	0.395	0.385	0.379	0.371	0.366	0.360	
		0.274	0.235	0.234	0.236	0.237	0.239	0.239	0.240	0.240	0.239	
	400	0.334	0.424	0.421	0.411	0.404	0.399	0.389	0.386	0.380	0.374	
		0.240	0.209	0.207	0.210	0.211	0.211	0.214	0.214	0.215	0.218	

Quadre A5.10. Esperança i desviació estàndard de les autocorrelacions estimades.

Mitjana coneguda. PGD: $(1-0.9L)(1-L)^d X_t = \varepsilon_t$

d	T	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0.00		0.900	0.810	0.729	0.656	0.590	0.531	0.478	0.430	0.387	0.349
	50	0.846	0.718	0.609	0.515	0.438	0.373	0.318	0.272	0.232	0.199
		0.082	0.134	0.174	0.205	0.225	0.241	0.252	0.259	0.261	0.261
	100	0.871	0.759	0.663	0.579	0.506	0.443	0.389	0.342	0.301	0.265
		0.050	0.088	0.119	0.145	0.165	0.182	0.194	0.202	0.207	0.211
	200	0.884	0.782	0.692	0.611	0.539	0.475	0.419	0.370	0.327	0.288
		0.035	0.064	0.086	0.106	0.122	0.135	0.145	0.154	0.160	0.166
	400	0.891	0.793	0.707	0.629	0.560	0.498	0.443	0.393	0.350	0.311
		0.024	0.043	0.060	0.074	0.086	0.097	0.106	0.113	0.119	0.124
0.05		0.921	0.842	0.769	0.701	0.638	0.579	0.525	0.475	0.427	0.377
	50	0.867	0.750	0.647	0.557	0.480	0.415	0.359	0.310	0.268	0.233
		0.076	0.132	0.176	0.208	0.232	0.247	0.256	0.262	0.265	0.265
	100	0.894	0.796	0.706	0.625	0.554	0.490	0.434	0.385	0.342	0.304
		0.047	0.086	0.119	0.145	0.166	0.183	0.197	0.207	0.216	0.223
	200	0.908	0.820	0.739	0.666	0.599	0.540	0.486	0.438	0.394	0.355
		0.030	0.056	0.079	0.099	0.115	0.129	0.141	0.150	0.158	0.164
	400	0.916	0.835	0.758	0.688	0.624	0.566	0.513	0.465	0.423	0.385
		0.019	0.037	0.053	0.067	0.080	0.090	0.100	0.108	0.114	0.120
0.10		0.938	0.871	0.805	0.743	0.683	0.627	0.574	0.522	0.471	0.416
	50	0.892	0.788	0.694	0.608	0.533	0.467	0.410	0.359	0.316	0.278
		0.064	0.116	0.157	0.191	0.216	0.237	0.251	0.261	0.269	0.274
	100	0.917	0.833	0.754	0.682	0.616	0.557	0.503	0.454	0.409	0.370
		0.038	0.073	0.105	0.131	0.152	0.170	0.185	0.198	0.209	0.217
	200	0.926	0.851	0.779	0.712	0.651	0.596	0.546	0.500	0.459	0.422
		0.027	0.053	0.077	0.098	0.116	0.132	0.145	0.157	0.166	0.175
	400	0.935	0.866	0.800	0.737	0.679	0.624	0.574	0.528	0.486	0.448
		0.017	0.034	0.050	0.065	0.079	0.091	0.102	0.112	0.121	0.128
0.15		0.952	0.896	0.839	0.782	0.727	0.674	0.622	0.572	0.521	0.463
	50	0.909	0.817	0.730	0.651	0.579	0.513	0.455	0.403	0.357	0.316
		0.056	0.105	0.146	0.181	0.210	0.233	0.251	0.265	0.275	0.282
	100	0.932	0.860	0.789	0.723	0.663	0.607	0.556	0.510	0.469	0.431
		0.036	0.070	0.101	0.128	0.150	0.170	0.185	0.199	0.211	0.223
	200	0.945	0.883	0.822	0.763	0.708	0.655	0.607	0.563	0.522	0.485
		0.022	0.045	0.068	0.088	0.106	0.123	0.138	0.151	0.163	0.173
	400	0.949	0.892	0.834	0.778	0.725	0.676	0.630	0.587	0.547	0.510
		0.015	0.032	0.048	0.064	0.078	0.091	0.102	0.113	0.122	0.130
0.20		0.964	0.918	0.869	0.819	0.770	0.720	0.672	0.625	0.575	0.519
	50	0.926	0.849	0.775	0.705	0.640	0.582	0.530	0.483	0.441	0.404
		0.048	0.093	0.132	0.165	0.193	0.215	0.233	0.246	0.256	0.264
	100	0.947	0.886	0.825	0.767	0.711	0.659	0.610	0.565	0.524	0.486
		0.030	0.062	0.093	0.121	0.148	0.172	0.194	0.212	0.228	0.241
	200	0.957	0.905	0.851	0.799	0.749	0.702	0.657	0.615	0.576	0.540
		0.019	0.040	0.061	0.083	0.103	0.121	0.138	0.153	0.166	0.177
	400	0.963	0.917	0.869	0.822	0.776	0.732	0.691	0.652	0.615	0.580
		0.012	0.027	0.042	0.057	0.072	0.085	0.098	0.110	0.121	0.131

Quadre A5.11. Esperança i desviació estàndard de les autocorrelacions estimades.

Mitjana coneguda. PGD: $(1-0.9L)(1-L)^d X_t = \varepsilon_t$

d	T	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	
0.25		0.973	0.936	0.896	0.853	0.810	0.767	0.724	0.680	0.634	0.582	
	50	0.936	0.865	0.795	0.729	0.667	0.610	0.557	0.510	0.467	0.428	
		0.046	0.091	0.131	0.165	0.195	0.220	0.241	0.259	0.273	0.285	
	100	0.956	0.905	0.851	0.797	0.746	0.698	0.652	0.610	0.571	0.534	
		0.026	0.055	0.084	0.112	0.138	0.160	0.181	0.199	0.215	0.229	
	200	0.967	0.926	0.883	0.839	0.797	0.755	0.716	0.679	0.645	0.613	
		0.016	0.036	0.056	0.075	0.094	0.111	0.128	0.142	0.155	0.168	
	400	0.972	0.935	0.896	0.856	0.816	0.778	0.742	0.707	0.675	0.644	
		0.011	0.025	0.040	0.055	0.069	0.082	0.095	0.107	0.118	0.128	
	0.30		0.981	0.953	0.920	0.886	0.850	0.813	0.776	0.738	0.698	0.654
		50	0.950	0.893	0.835	0.778	0.724	0.672	0.624	0.579	0.538	0.500
			0.037	0.074	0.110	0.143	0.172	0.199	0.222	0.240	0.254	0.265
100		0.964	0.919	0.872	0.825	0.779	0.735	0.693	0.654	0.618	0.584	
		0.023	0.050	0.078	0.105	0.130	0.153	0.174	0.193	0.209	0.224	
200		0.975	0.941	0.904	0.866	0.829	0.792	0.756	0.722	0.689	0.658	
		0.013	0.031	0.049	0.069	0.087	0.105	0.122	0.138	0.153	0.167	
400		0.980	0.952	0.922	0.890	0.858	0.826	0.795	0.766	0.737	0.710	
		0.009	0.021	0.034	0.048	0.062	0.075	0.088	0.101	0.112	0.123	
0.35			0.983	0.967	0.943	0.916	0.888	0.859	0.830	0.799	0.767	0.730
		50	0.955	0.902	0.849	0.796	0.745	0.696	0.651	0.609	0.569	0.532
			0.035	0.072	0.107	0.140	0.169	0.194	0.215	0.233	0.248	0.261
	100	0.972	0.937	0.899	0.861	0.823	0.786	0.750	0.716	0.683	0.652	
		0.019	0.042	0.066	0.090	0.113	0.135	0.155	0.174	0.192	0.208	
	200	0.981	0.955	0.926	0.896	0.866	0.836	0.807	0.779	0.753	0.727	
		0.012	0.028	0.046	0.063	0.081	0.098	0.114	0.129	0.143	0.156	
	400	0.986	0.965	0.942	0.917	0.891	0.866	0.841	0.817	0.794	0.772	
		0.008	0.019	0.031	0.044	0.058	0.071	0.083	0.095	0.107	0.118	
	0.40		0.952	0.979	0.963	0.945	0.926	0.906	0.885	0.863	0.840	0.814
		50	0.961	0.917	0.871	0.824	0.780	0.736	0.695	0.656	0.619	0.585
			0.028	0.059	0.091	0.120	0.146	0.170	0.191	0.209	0.225	0.238
100		0.948	0.917	0.884	0.852	0.820	0.789	0.760	0.732	0.705	0.679	
		0.040	0.064	0.089	0.112	0.134	0.155	0.173	0.190	0.206	0.235	
200		0.985	0.966	0.943	0.920	0.896	0.871	0.848	0.824	0.801	0.780	
		0.010	0.022	0.037	0.053	0.069	0.085	0.100	0.115	0.129	0.143	
400		0.990	0.975	0.958	0.939	0.920	0.900	0.881	0.862	0.843	0.825	
		0.006	0.015	0.025	0.036	0.048	0.059	0.071	0.082	0.093	0.104	
0.45			0.996	0.990	0.982	0.973	0.963	0.953	0.942	0.930	0.918	0.964
		50	0.968	0.931	0.893	0.855	0.817	0.780	0.745	0.711	0.679	0.648
			0.023	0.050	0.078	0.104	0.130	0.152	0.171	0.188	0.202	0.214
	100	0.960	0.935	0.910	0.884	0.859	0.834	0.809	0.785	0.763	0.746	
		0.029	0.048	0.068	0.088	0.107	0.126	0.143	0.159	0.174	0.179	
	200	0.989	0.975	0.959	0.941	0.924	0.906	0.888	0.871	0.853	0.837	
		0.008	0.019	0.031	0.045	0.058	0.072	0.086	0.099	0.112	0.124	
	400	0.993	0.983	0.972	0.960	0.947	0.934	0.920	0.907	0.894	0.881	
		0.005	0.012	0.020	0.029	0.039	0.049	0.059	0.069	0.078	0.087	

Quadre A5.12. Esperança i desviació estàndard de les autocorrelacions estimades.

Mitjana coneguda. PGD: $(1-L)^d X_t = (1-0.9L)\varepsilon_t$

d	T	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0.00		-0.497	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
	50	-0.471	-0.008	0.000	-0.003	-0.002	0.004	-0.003	0.005	0.001	-0.005
		0.103	0.160	0.156	0.158	0.155	0.160	0.154	0.149	0.152	0.146
	100	-0.479	-0.016	0.007	-0.002	-0.002	0.002	0.000	-0.002	0.003	0.000
		0.073	0.124	0.120	0.116	0.115	0.120	0.118	0.116	0.112	0.108
0.05	200	-0.490	-0.003	0.001	-0.002	0.003	-0.003	0.001	0.001	0.000	-0.001
		0.051	0.087	0.086	0.084	0.083	0.083	0.082	0.083	0.087	0.084
	400	-0.493	-0.003	0.002	-0.002	0.000	0.001	-0.001	0.000	0.001	-0.001
		0.035	0.060	0.059	0.060	0.060	0.060	0.064	0.062	0.061	0.059
		-0.484	-0.008	-0.002	-0.001	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
0.10	50	-0.460	-0.017	0.003	-0.001	-0.007	0.003	0.002	0.003	-0.007	0.004
		0.101	0.165	0.161	0.157	0.152	0.152	0.153	0.152	0.147	0.147
	100	-0.474	-0.010	0.003	-0.009	0.003	0.001	-0.003	0.000	0.003	-0.002
		0.072	0.116	0.118	0.118	0.117	0.117	0.113	0.112	0.111	0.108
	200	-0.477	-0.012	0.000	-0.004	0.001	-0.003	0.003	-0.001	0.001	-0.003
0.15		0.053	0.087	0.083	0.086	0.086	0.085	0.081	0.081	0.085	0.085
	400	-0.480	-0.009	-0.002	-0.001	0.000	0.000	-0.001	0.001	-0.001	-0.002
		0.036	0.060	0.059	0.060	0.062	0.060	0.059	0.059	0.061	0.061
		-0.470	-0.016	-0.004	-0.002	-0.001	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
	50	-0.441	-0.031	0.007	-0.010	-0.001	0.003	0.001	-0.005	0.000	0.002
0.20		0.103	0.163	0.157	0.157	0.159	0.151	0.144	0.145	0.147	0.143
	100	-0.455	-0.021	-0.005	-0.004	0.002	-0.003	0.004	0.003	-0.009	0.002
		0.075	0.117	0.115	0.113	0.110	0.112	0.114	0.110	0.110	0.113
	200	-0.464	-0.018	-0.006	0.000	0.000	-0.006	0.005	-0.003	0.002	0.000
		0.051	0.082	0.085	0.087	0.083	0.084	0.083	0.084	0.082	0.081
0.25	400	-0.466	-0.020	-0.002	-0.001	-0.002	0.001	-0.001	0.000	0.001	-0.001
		0.037	0.062	0.059	0.060	0.060	0.058	0.059	0.059	0.060	0.061
		-0.455	-0.023	-0.006	-0.003	-0.001	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
	50	-0.429	-0.035	-0.003	-0.007	0.010	-0.006	-0.002	0.005	-0.005	-0.004
		0.107	0.164	0.159	0.154	0.148	0.146	0.147	0.152	0.146	0.140
0.30	100	-0.444	-0.020	-0.011	-0.005	0.000	0.001	0.001	-0.006	0.004	-0.004
		0.072	0.116	0.116	0.117	0.108	0.112	0.110	0.111	0.111	0.109
	200	-0.448	-0.027	-0.003	-0.010	0.006	-0.003	-0.002	0.001	0.002	-0.001
		0.053	0.082	0.082	0.080	0.082	0.081	0.084	0.085	0.082	0.079
	400	-0.452	-0.025	-0.005	-0.003	-0.003	-0.002	0.004	-0.003	0.001	-0.001
0.35		0.037	0.059	0.058	0.058	0.058	0.058	0.057	0.057	0.057	0.058
		-0.439	-0.030	-0.008	-0.004	-0.002	-0.001	0.000	0.000	0.000	0.000
	50	-0.423	-0.027	-0.008	-0.001	-0.003	-0.004	0.005	-0.003	-0.003	0.005
		0.109	0.161	0.158	0.153	0.153	0.155	0.148	0.144	0.140	0.144
	100	-0.430	-0.030	-0.008	-0.006	0.005	-0.007	0.003	0.000	0.000	0.005
0.40		0.073	0.113	0.115	0.115	0.110	0.115	0.112	0.108	0.108	0.110
	200	-0.431	-0.032	-0.011	-0.001	-0.005	0.000	0.001	0.001	-0.001	0.000
		0.055	0.088	0.085	0.080	0.080	0.080	0.077	0.081	0.078	0.079
	400	-0.437	-0.028	-0.010	-0.002	-0.004	-0.001	0.003	-0.002	0.003	-0.001
		0.037	0.059	0.057	0.057	0.059	0.059	0.057	0.057	0.057	0.059

Quadre A5.13. Esperança i desviació estàndard de les autocorrelacions estimades.

Mitjana coneguda. PGD: $(1-L)^d X_t = (1-0.9L)\varepsilon_t$

d	T	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0.25		-0.422	-0.037	-0.011	-0.005	-0.002	-0.001	0.000	0.000	0.000	0.000
	50	-0.395	-0.049	-0.004	-0.006	0.002	0.000	-0.007	0.006	0.001	-0.003
		0.105	0.156	0.156	0.154	0.149	0.151	0.145	0.144	0.140	0.146
	100	-0.411	-0.039	-0.004	-0.010	-0.003	0.002	-0.002	-0.002	0.004	0.001
		0.077	0.115	0.109	0.110	0.110	0.107	0.110	0.108	0.109	0.109
	200	-0.413	-0.040	-0.013	0.000	-0.004	0.000	-0.001	0.000	0.002	-0.004
		0.055	0.084	0.079	0.075	0.078	0.080	0.083	0.082	0.077	0.077
	400	-0.417	-0.039	-0.010	-0.007	0.000	-0.002	0.001	-0.003	0.005	-0.001
		0.038	0.058	0.058	0.056	0.057	0.058	0.057	0.057	0.057	0.057
0.30		-0.404	-0.042	-0.013	-0.005	-0.002	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
	50	-0.378	-0.048	-0.010	-0.008	0.008	-0.002	-0.001	0.007	-0.003	0.005
		0.109	0.154	0.156	0.151	0.145	0.148	0.142	0.142	0.142	0.142
	100	-0.394	-0.036	-0.015	-0.003	-0.003	-0.001	0.000	0.002	0.002	0.003
		0.077	0.113	0.108	0.113	0.111	0.107	0.106	0.108	0.110	0.109
	200	-0.398	-0.038	-0.017	-0.005	0.001	-0.001	0.000	0.003	-0.003	0.005
		0.055	0.082	0.081	0.082	0.078	0.078	0.077	0.080	0.077	0.079
	400	-0.400	-0.041	-0.016	-0.004	0.000	0.001	-0.003	0.000	0.004	-0.002
		0.040	0.060	0.060	0.057	0.056	0.057	0.057	0.056	0.056	0.056
0.35		-0.383	-0.046	-0.014	-0.005	-0.002	0.000	0.001	0.002	0.002	0.002
	50	-0.358	-0.045	-0.010	-0.002	-0.001	-0.007	0.019	-0.001	-0.001	0.003
		0.110	0.147	0.148	0.147	0.148	0.145	0.144	0.140	0.142	0.142
	100	-0.371	-0.041	-0.012	-0.006	0.002	0.005	0.001	0.006	0.004	0.003
		0.080	0.108	0.107	0.108	0.108	0.107	0.105	0.105	0.106	0.106
	200	-0.372	-0.047	-0.012	-0.004	0.000	0.003	0.000	0.002	0.005	0.004
		0.055	0.080	0.081	0.080	0.079	0.078	0.076	0.077	0.075	0.080
	400	-0.380	-0.042	-0.015	-0.002	-0.002	0.003	0.001	0.003	0.003	0.003
		0.041	0.057	0.057	0.057	0.055	0.057	0.058	0.057	0.056	0.054
0.40		-0.358	-0.047	-0.013	-0.003	0.000	0.003	0.004	0.005	0.005	0.005
	50	-0.333	-0.039	-0.013	0.012	0.002	0.010	0.008	0.010	0.005	0.011
		0.115	0.153	0.143	0.146	0.146	0.147	0.141	0.144	0.138	0.140
	100	-0.342	-0.039	-0.007	-0.001	0.010	0.002	0.006	0.014	0.009	0.014
		0.081	0.108	0.108	0.111	0.111	0.108	0.106	0.103	0.106	0.106
	200	-0.345	-0.045	-0.008	0.001	0.004	0.007	0.007	0.012	0.010	0.008
		0.055	0.080	0.078	0.081	0.079	0.078	0.075	0.075	0.078	0.080
	400	-0.351	-0.043	-0.010	-0.001	0.004	0.007	0.007	0.009	0.008	0.010
		0.046	0.059	0.057	0.057	0.054	0.055	0.057	0.056	0.056	0.054
0.45		-0.320	-0.038	-0.003	0.008	0.012	0.015	0.016	0.017	0.017	0.017
	50	-0.276	-0.024	0.013	0.019	0.025	0.027	0.030	0.022	0.035	0.023
		0.130	0.152	0.147	0.148	0.148	0.148	0.144	0.142	0.137	0.135
	100	-0.293	-0.024	0.011	0.017	0.022	0.024	0.028	0.023	0.035	0.025
		0.098	0.114	0.116	0.108	0.107	0.111	0.110	0.107	0.109	0.110
	200	-0.298	-0.026	0.016	0.019	0.028	0.026	0.029	0.028	0.031	0.029
		0.079	0.085	0.087	0.083	0.084	0.084	0.084	0.083	0.083	0.083
	400	-0.303	-0.025	0.009	0.017	0.024	0.028	0.024	0.029	0.028	0.028
		0.063	0.069	0.066	0.065	0.064	0.062	0.063	0.061	0.061	0.066

Quadre A5.14. Esperança i desviació estàndard de les autocorrelacions estimades.

Mitjana coneguda. PGD: $(1+0.5L)(1-L)^d X_t = \varepsilon_t$

d	T	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0.00		-0.500	0.250	-0.125	0.063	-0.031	0.016	-0.008	0.004	-0.002	0.001
	50	-0.463	0.220	-0.104	0.046	-0.026	0.015	-0.009	0.007	-0.002	-0.004
		0.127	0.151	0.156	0.160	0.158	0.162	0.160	0.156	0.157	0.153
	100	-0.476	0.223	-0.108	0.051	-0.028	0.013	-0.006	0.001	0.001	0.001
		0.089	0.117	0.121	0.120	0.119	0.124	0.123	0.120	0.117	0.115
0.05	200	-0.489	0.241	-0.117	0.056	-0.026	0.010	-0.007	0.002	-0.002	-0.001
		0.063	0.082	0.087	0.086	0.086	0.084	0.084	0.086	0.089	0.087
	400	-0.495	0.244	-0.121	0.059	-0.030	0.015	-0.009	0.003	-0.002	0.000
		0.042	0.056	0.060	0.062	0.063	0.064	0.067	0.065	0.065	0.062
		-0.467	0.250	0.114	0.065	-0.026	0.019	-0.004	0.006	0.001	0.003
0.10	50	-0.432	0.219	-0.089	0.052	-0.024	0.018	-0.002	0.008	-0.005	0.005
		0.131	0.152	0.162	0.159	0.157	0.155	0.155	0.153	0.151	0.150
	100	-0.448	0.236	-0.097	0.052	-0.018	0.016	-0.006	0.005	0.002	0.001
		0.093	0.107	0.119	0.122	0.120	0.120	0.117	0.115	0.113	0.108
	200	-0.456	0.240	-0.106	0.058	-0.021	0.014	0.001	0.004	0.003	0.001
0.15		0.067	0.080	0.084	0.088	0.088	0.088	0.084	0.084	0.087	0.087
	400	-0.460	0.247	-0.110	0.063	-0.025	0.018	-0.005	0.006	0.000	0.001
		0.045	0.055	0.059	0.062	0.063	0.063	0.062	0.062	0.064	0.063
		-0.428	0.253	-0.100	0.071	-0.018	0.024	0.001	0.011	0.005	0.007
	50	-0.380	0.219	-0.065	0.051	-0.008	0.020	0.005	0.006	0.007	0.008
0.20		0.140	0.151	0.155	0.157	0.156	0.153	0.145	0.146	0.145	0.142
	100	-0.405	0.238	-0.087	0.063	-0.009	0.021	0.007	0.014	0.000	0.010
		0.098	0.108	0.114	0.114	0.110	0.114	0.115	0.112	0.113	0.113
	200	-0.420	0.245	-0.095	0.067	-0.015	0.017	0.008	0.008	0.009	0.008
		0.069	0.077	0.086	0.089	0.086	0.086	0.085	0.087	0.084	0.086
0.20	400	-0.422	0.247	-0.094	0.070	-0.016	0.025	0.001	0.011	0.006	0.007
		0.049	0.056	0.061	0.061	0.062	0.060	0.061	0.061	0.062	0.063
		-0.382	0.260	-0.079	0.081	-0.005	0.033	0.011	0.019	0.013	0.015
	50	-0.339	0.231	-0.051	0.066	0.015	0.025	0.015	0.021	0.011	0.011
		0.153	0.146	0.162	0.151	0.146	0.147	0.147	0.146	0.144	0.139
0.20	100	-0.360	0.254	-0.070	0.076	0.000	0.033	0.016	0.015	0.021	0.012
		0.105	0.105	0.117	0.117	0.111	0.112	0.112	0.113	0.111	0.111
	200	-0.367	0.252	-0.067	0.072	0.005	0.031	0.014	0.021	0.017	0.014
		0.077	0.074	0.084	0.081	0.082	0.083	0.084	0.085	0.083	0.079
	400	-0.376	0.257	-0.074	0.079	-0.004	0.031	0.016	0.017	0.016	0.014
0.20		0.055	0.054	0.059	0.058	0.059	0.058	0.058	0.058	0.059	0.059
		-0.324	0.274	-0.051	0.097	0.013	0.048	0.026	0.033	0.026	0.027
	50	-0.289	0.261	-0.028	0.095	0.025	0.046	0.036	0.034	0.029	0.035
		0.170	0.142	0.165	0.153	0.153	0.158	0.148	0.146	0.138	0.142
	100	-0.302	0.267	-0.034	0.094	0.029	0.047	0.036	0.037	0.030	0.036
0.20		0.118	0.103	0.121	0.114	0.118	0.116	0.116	0.113	0.111	0.113
	200	-0.309	0.270	-0.045	0.099	0.015	0.052	0.030	0.037	0.029	0.030
		0.088	0.078	0.091	0.080	0.086	0.082	0.081	0.084	0.082	0.082
	400	-0.317	0.275	-0.047	0.099	0.016	0.050	0.032	0.034	0.032	0.028
		0.061	0.052	0.061	0.058	0.062	0.061	0.060	0.059	0.060	0.062

Quadre A5.15. Esperança i desviació estàndard de les autocorrelacions estimades.

Mitjana coneguda. PGD: $(1+0.5L)(1-L)^d X_t = \varepsilon_t$

d	T	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0.25		-0.252	0.296	-0.012	0.123	0.042	0.073	0.050	0.056	0.048	0.048
	50	-0.206	0.272	0.017	0.116	0.056	0.075	0.050	0.061	0.048	0.047
		0.188	0.147	0.174	0.159	0.161	0.157	0.158	0.147	0.150	0.148
	100	-0.224	0.288	0.010	0.118	0.051	0.077	0.055	0.059	0.056	0.052
		0.138	0.109	0.123	0.117	0.122	0.114	0.120	0.115	0.119	0.120
	200	-0.229	0.296	0.001	0.131	0.051	0.081	0.057	0.062	0.057	0.052
		0.104	0.079	0.094	0.085	0.088	0.089	0.093	0.091	0.087	0.089
	400	-0.238	0.295	-0.002	0.123	0.050	0.075	0.058	0.057	0.058	0.051
		0.078	0.057	0.070	0.064	0.068	0.067	0.066	0.066	0.067	0.067
	0.30		-0.158	0.331	0.046	0.164	0.088	0.113	0.091	0.094	0.086
50		-0.097	0.324	0.083	0.169	0.116	0.123	0.105	0.107	0.091	0.093
		0.218	0.157	0.191	0.170	0.176	0.173	0.169	0.170	0.167	0.165
100		-0.126	0.336	0.064	0.172	0.099	0.121	0.100	0.102	0.094	0.092
		0.172	0.120	0.149	0.140	0.143	0.139	0.137	0.139	0.139	0.137
200		-0.131	0.341	0.062	0.175	0.104	0.124	0.101	0.106	0.092	0.096
		0.136	0.089	0.117	0.107	0.110	0.108	0.108	0.108	0.107	0.109
400		-0.137	0.339	0.060	0.177	0.103	0.127	0.103	0.106	0.101	0.094
		0.109	0.070	0.094	0.082	0.089	0.086	0.088	0.086	0.087	0.087
0.35			-0.030	0.389	0.133	0.232	0.162	0.181	0.159	0.160	0.151
	50	0.015	0.383	0.156	0.229	0.170	0.173	0.170	0.151	0.146	0.135
		0.264	0.165	0.219	0.193	0.208	0.200	0.194	0.193	0.191	0.197
	100	0.020	0.404	0.167	0.250	0.190	0.204	0.181	0.181	0.170	0.164
		0.224	0.140	0.190	0.169	0.177	0.174	0.176	0.175	0.172	0.176
	200	0.013	0.402	0.162	0.251	0.185	0.201	0.178	0.178	0.171	0.168
		0.179	0.111	0.156	0.136	0.147	0.143	0.144	0.145	0.143	0.142
	400	0.006	0.409	0.161	0.257	0.187	0.207	0.184	0.185	0.177	0.173
		0.160	0.097	0.134	0.121	0.128	0.127	0.128	0.130	0.125	0.129
	0.40		0.156	0.485	0.273	0.348	0.288	0.300	0.280	0.278	0.269
50		0.163	0.461	0.256	0.321	0.258	0.268	0.240	0.236	0.219	0.212
		0.303	0.191	0.256	0.228	0.236	0.229	0.230	0.226	0.224	0.220
100		0.181	0.483	0.286	0.345	0.292	0.295	0.276	0.276	0.262	0.259
		0.267	0.172	0.225	0.211	0.219	0.216	0.216	0.215	0.216	0.214
200		0.188	0.492	0.294	0.359	0.303	0.311	0.292	0.289	0.280	0.271
		0.235	0.148	0.202	0.183	0.195	0.193	0.194	0.198	0.194	0.199
400		0.185	0.498	0.295	0.364	0.307	0.318	0.297	0.296	0.286	0.282
		0.206	0.126	0.175	0.158	0.170	0.167	0.172	0.171	0.172	0.173
0.45			0.452	0.655	0.515	0.560	0.518	0.524	0.509	0.509	0.498
	50	0.392	0.585	0.436	0.465	0.416	0.411	0.390	0.370	0.363	0.340
		0.331	0.215	0.282	0.252	0.271	0.261	0.261	0.266	0.253	0.259
	100	0.394	0.604	0.449	0.487	0.440	0.438	0.421	0.410	0.403	0.389
		0.303	0.191	0.264	0.239	0.259	0.253	0.256	0.258	0.253	0.258
	200	0.421	0.628	0.484	0.523	0.481	0.480	0.464	0.457	0.448	0.441
		0.290	0.182	0.252	0.228	0.246	0.244	0.249	0.250	0.252	0.250
	400	0.435	0.641	0.498	0.540	0.497	0.503	0.483	0.481	0.470	0.465
		0.249	0.158	0.219	0.199	0.217	0.212	0.220	0.220	0.223	0.225

Quadre A5.16. Esperança i desviació estàndard de les autocorrelacions estimades.

Mitjana coneguda. PGD: $(1-L)^d X_t = (1+0.5L)\varepsilon_t$

d	T	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0.00		0.400	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
	50	0.380	-0.002	-0.003	-0.008	-0.006	-0.001	0.003	0.004	-0.002	-0.009
		0.110	0.145	0.147	0.151	0.146	0.151	0.149	0.146	0.143	0.139
100		0.386	-0.011	-0.005	-0.006	-0.006	-0.002	0.000	0.000	0.003	0.002
		0.077	0.109	0.105	0.108	0.106	0.111	0.110	0.107	0.107	0.105
200		0.396	0.001	0.002	0.000	-0.003	-0.006	-0.005	-0.003	-0.003	-0.004
		0.056	0.080	0.080	0.079	0.078	0.078	0.080	0.079	0.080	0.078
400		0.395	-0.004	-0.002	-0.002	-0.002	-0.001	-0.003	-0.004	-0.004	-0.004
		0.041	0.059	0.058	0.057	0.057	0.057	0.058	0.058	0.059	0.058
0.05		0.445	0.055	0.036	0.027	0.022	0.018	0.016	0.014	0.013	0.012
50		0.417	0.043	0.033	0.022	0.014	0.015	0.016	0.010	0.003	0.004
		0.112	0.158	0.159	0.161	0.154	0.154	0.146	0.147	0.148	0.146
100		0.434	0.057	0.037	0.022	0.020	0.015	0.009	0.009	0.009	0.006
		0.080	0.118	0.119	0.120	0.117	0.116	0.113	0.112	0.113	0.109
200		0.440	0.052	0.033	0.023	0.020	0.019	0.018	0.016	0.013	0.012
		0.057	0.085	0.085	0.084	0.084	0.087	0.083	0.080	0.079	0.079
400		0.445	0.058	0.037	0.026	0.021	0.017	0.013	0.011	0.009	0.009
		0.039	0.059	0.060	0.059	0.061	0.062	0.061	0.058	0.058	0.059
0.10		0.493	0.117	0.080	0.062	0.052	0.045	0.039	0.035	0.032	0.030
50		0.472	0.110	0.079	0.052	0.041	0.038	0.031	0.026	0.027	0.027
		0.116	0.167	0.165	0.166	0.162	0.160	0.157	0.155	0.155	0.152
100		0.483	0.112	0.077	0.062	0.055	0.048	0.046	0.037	0.027	0.028
		0.081	0.126	0.130	0.127	0.123	0.124	0.123	0.119	0.120	0.120
200		0.483	0.108	0.073	0.058	0.045	0.038	0.039	0.037	0.035	0.032
		0.057	0.089	0.092	0.092	0.091	0.093	0.092	0.092	0.089	0.087
400		0.490	0.116	0.082	0.065	0.054	0.047	0.040	0.035	0.031	0.028
		0.038	0.062	0.063	0.066	0.067	0.062	0.061	0.063	0.065	0.064
0.15		0.543	0.187	0.135	0.109	0.092	0.081	0.073	0.066	0.061	0.056
50		0.517	0.168	0.123	0.103	0.091	0.074	0.064	0.059	0.047	0.044
		0.112	0.177	0.183	0.178	0.173	0.175	0.171	0.168	0.167	0.166
100		0.535	0.184	0.129	0.103	0.090	0.079	0.068	0.062	0.060	0.058
		0.084	0.137	0.137	0.141	0.139	0.138	0.134	0.133	0.130	0.131
200		0.540	0.187	0.135	0.108	0.096	0.083	0.074	0.070	0.065	0.057
		0.057	0.096	0.100	0.097	0.098	0.099	0.098	0.099	0.100	0.098
400		0.540	0.185	0.134	0.107	0.090	0.080	0.074	0.067	0.061	0.058
		0.043	0.071	0.074	0.075	0.075	0.074	0.073	0.073	0.073	0.072
0.20		0.597	0.266	0.201	0.168	0.146	0.131	0.119	0.110	0.102	0.096
50		0.570	0.253	0.196	0.162	0.137	0.118	0.109	0.099	0.095	0.093
		0.116	0.187	0.197	0.198	0.198	0.201	0.200	0.193	0.184	0.180
100		0.586	0.261	0.202	0.171	0.152	0.134	0.123	0.113	0.105	0.097
		0.086	0.146	0.154	0.156	0.156	0.157	0.155	0.154	0.153	0.153
200		0.593	0.263	0.198	0.166	0.144	0.132	0.123	0.113	0.103	0.097
		0.061	0.106	0.112	0.113	0.116	0.117	0.119	0.121	0.119	0.119
400		0.597	0.270	0.205	0.171	0.149	0.136	0.126	0.116	0.108	0.100
		0.044	0.077	0.081	0.083	0.085	0.086	0.086	0.085	0.086	0.088

Quadre A5.17. Esperança i desviació estàndard de les autocorrelacions estimades.

Mitjana coneguda. PGD: $(1-L)^d X_t = (1+0.5L)\varepsilon_t$

d	T	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0.25		0.654	0.355	0.282	0.243	0.216	0.197	0.182	0.170	0.160	0.152
	50	0.622	0.319	0.252	0.215	0.191	0.169	0.151	0.140	0.128	0.116
		0.118	0.200	0.211	0.213	0.213	0.216	0.212	0.205	0.199	0.203
	100	0.641	0.344	0.275	0.230	0.202	0.184	0.169	0.160	0.153	0.144
		0.087	0.153	0.163	0.170	0.174	0.173	0.172	0.171	0.173	0.173
	200	0.653	0.356	0.285	0.248	0.222	0.202	0.185	0.174	0.165	0.157
		0.066	0.120	0.130	0.133	0.135	0.137	0.140	0.140	0.139	0.141
	400	0.653	0.355	0.283	0.243	0.218	0.199	0.184	0.173	0.165	0.157
		0.052	0.094	0.102	0.106	0.109	0.111	0.110	0.111	0.113	0.112
0.30		0.715	0.455	0.380	0.336	0.307	0.285	0.268	0.254	0.242	0.232
	50	0.691	0.428	0.354	0.312	0.284	0.258	0.239	0.222	0.205	0.191
		0.119	0.213	0.231	0.233	0.235	0.240	0.238	0.239	0.239	0.233
	100	0.701	0.439	0.362	0.317	0.285	0.262	0.244	0.230	0.218	0.206
		0.094	0.171	0.190	0.201	0.207	0.208	0.208	0.208	0.209	0.209
	200	0.713	0.456	0.379	0.335	0.305	0.281	0.262	0.246	0.233	0.223
		0.071	0.133	0.151	0.161	0.165	0.168	0.170	0.172	0.171	0.172
	400	0.716	0.460	0.386	0.346	0.318	0.295	0.276	0.262	0.251	0.240
		0.059	0.111	0.124	0.131	0.135	0.139	0.142	0.144	0.145	0.147
0.35		0.779	0.568	0.496	0.454	0.423	0.401	0.382	0.367	0.354	0.343
	50	0.741	0.513	0.435	0.385	0.348	0.323	0.307	0.285	0.265	0.251
		0.118	0.214	0.237	0.249	0.260	0.263	0.258	0.258	0.262	0.261
	100	0.766	0.551	0.476	0.432	0.403	0.379	0.358	0.341	0.325	0.312
		0.095	0.181	0.208	0.220	0.226	0.231	0.235	0.236	0.238	0.240
	200	0.775	0.563	0.490	0.446	0.415	0.390	0.369	0.354	0.343	0.332
		0.076	0.147	0.172	0.184	0.191	0.197	0.201	0.204	0.204	0.203
	400	0.782	0.576	0.505	0.463	0.432	0.409	0.390	0.376	0.364	0.354
		0.065	0.126	0.146	0.159	0.166	0.171	0.175	0.178	0.179	0.180
0.40		0.848	0.695	0.636	0.599	0.572	0.551	0.535	0.520	0.508	0.497
	50	0.795	0.605	0.529	0.481	0.447	0.419	0.393	0.370	0.350	0.332
		0.114	0.213	0.246	0.261	0.263	0.265	0.268	0.271	0.270	0.269
	100	0.821	0.648	0.579	0.533	0.500	0.474	0.456	0.441	0.426	0.411
		0.094	0.183	0.214	0.234	0.246	0.253	0.256	0.258	0.261	0.263
	200	0.833	0.669	0.605	0.564	0.534	0.510	0.491	0.475	0.461	0.447
		0.077	0.151	0.178	0.194	0.204	0.213	0.220	0.225	0.228	0.232
	400	0.842	0.684	0.623	0.583	0.555	0.533	0.515	0.500	0.486	0.475
		0.063	0.126	0.149	0.163	0.173	0.181	0.188	0.193	0.197	0.201
0.45		0.921	0.838	0.802	0.779	0.761	0.747	0.736	0.726	0.717	0.710
	50	0.860	0.723	0.659	0.614	0.578	0.549	0.523	0.497	0.475	0.454
		0.103	0.198	0.231	0.248	0.261	0.267	0.273	0.277	0.275	0.275
	100	0.879	0.755	0.696	0.655	0.624	0.600	0.579	0.561	0.545	0.529
		0.082	0.164	0.198	0.221	0.236	0.245	0.251	0.257	0.262	0.267
	200	0.892	0.782	0.734	0.701	0.675	0.653	0.636	0.620	0.607	0.596
		0.074	0.149	0.178	0.197	0.210	0.221	0.230	0.237	0.242	0.245
	400	0.904	0.803	0.759	0.729	0.707	0.689	0.674	0.660	0.648	0.637
		0.058	0.119	0.145	0.161	0.173	0.182	0.189	0.196	0.202	0.208

Quadre A5.18. Esperança i desviació estàndard de les autocorrelacions estimades.

Mitjana coneguda. PGD: $(1+0.9L)(1-L)^d X_t = \varepsilon_t$

d	T	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0.00		-0.900	0.810	-0.729	0.650	-0.590	0.531	-0.478	0.430	-0.387	0.349
	50	-0.844	0.718	-0.612	0.521	-0.445	0.379	-0.323	0.275	-0.233	0.196
		0.082	0.133	0.170	0.199	0.218	0.234	0.246	0.251	0.256	0.258
	100	-0.868	0.756	-0.660	0.577	-0.505	0.441	-0.386	0.337	-0.295	0.258
		0.054	0.096	0.125	0.149	0.168	0.184	0.196	0.204	0.209	0.211
	200	-0.884	0.783	-0.694	0.614	-0.545	0.482	-0.428	0.380	-0.336	0.298
0.034		0.061	0.083	0.100	0.115	0.126	0.135	0.144	0.151	0.157	
400	-0.893	0.798	-0.713	0.637	-0.569	0.509	-0.455	0.406	-0.364	0.325	
	0.022	0.040	0.056	0.070	0.082	0.093	0.102	0.109	0.115	0.119	
0.05		-0.888	0.807	-0.720	0.654	-0.582	0.531	-0.470	0.432	-0.377	0.359
	50	-0.834	0.714	-0.603	0.517	-0.441	0.378	-0.320	0.275	-0.234	0.201
		0.086	0.136	0.178	0.204	0.223	0.236	0.246	0.251	0.253	0.255
	100	-0.862	0.757	-0.657	0.575	-0.502	0.441	-0.384	0.336	-0.293	0.257
		0.055	0.092	0.125	0.149	0.167	0.180	0.189	0.196	0.200	0.202
	200	-0.876	0.779	-0.687	0.610	-0.538	0.478	-0.422	0.375	-0.332	0.295
0.036		0.062	0.086	0.104	0.118	0.130	0.139	0.146	0.153	0.158	
400	-0.884	0.794	-0.706	0.632	-0.563	0.504	-0.449	0.401	-0.357	0.318	
	0.024	0.042	0.059	0.072	0.084	0.093	0.101	0.107	0.113	0.117	
0.10		0.871	0.805	-0.706	0.653	-0.570	0.532	-0.458	0.436	-0.363	0.372
	50	-0.818	0.705	-0.589	0.509	-0.430	0.372	-0.314	0.270	-0.229	0.199
		0.093	0.138	0.178	0.199	0.218	0.229	0.236	0.241	0.242	0.242
	100	-0.852	0.755	-0.653	0.576	-0.499	0.441	-0.383	0.340	-0.297	0.263
		0.059	0.093	0.125	0.146	0.164	0.178	0.190	0.196	0.204	0.207
	200	-0.867	0.778	-0.683	0.609	-0.536	0.478	-0.420	0.376	-0.331	0.297
0.040		0.064	0.088	0.106	0.121	0.133	0.144	0.153	0.159	0.164	
400	-0.875	0.790	-0.700	0.631	-0.560	0.504	-0.447	0.403	-0.357	0.322	
	0.028	0.044	0.062	0.073	0.085	0.093	0.102	0.108	0.114	0.119	
0.15		-0.845	0.804	-0.684	0.654	-0.550	0.535	-0.439	0.442	-0.341	0.389
	50	-0.801	0.702	-0.578	0.505	-0.417	0.366	-0.306	0.271	-0.226	0.200
		0.106	0.140	0.186	0.200	0.223	0.231	0.241	0.243	0.247	0.246
	100	-0.839	0.755	-0.646	0.576	-0.494	0.441	-0.377	0.336	-0.287	0.258
		0.062	0.087	0.121	0.140	0.160	0.170	0.183	0.189	0.196	0.199
	200	-0.852	0.773	-0.671	0.604	-0.526	0.475	-0.415	0.374	-0.325	0.295
0.044		0.063	0.088	0.103	0.119	0.129	0.139	0.146	0.153	0.157	
400	-0.862	0.786	-0.689	0.625	-0.549	0.496	-0.435	0.394	-0.346	0.314	
	0.029	0.042	0.059	0.070	0.081	0.089	0.098	0.103	0.110	0.114	
0.20		-0.805	0.804	-0.650	0.657	-0.519	0.541	-0.409	0.453	-0.308	0.412
	50	-0.790	0.712	-0.577	0.519	-0.422	0.380	-0.308	0.282	-0.229	0.212
		0.113	0.134	0.187	0.198	0.224	0.229	0.240	0.237	0.241	0.239
	100	-0.821	0.752	-0.631	0.573	-0.482	0.440	-0.370	0.341	-0.287	0.267
		0.071	0.090	0.129	0.141	0.165	0.172	0.188	0.190	0.200	0.203
	200	-0.837	0.774	-0.664	0.609	-0.524	0.480	-0.412	0.379	-0.324	0.298
0.050		0.064	0.091	0.100	0.119	0.125	0.138	0.142	0.152	0.153	
400	-0.847	0.786	-0.679	0.625	-0.541	0.497	-0.429	0.395	-0.340	0.314	
	0.033	0.042	0.062	0.071	0.085	0.091	0.101	0.105	0.113	0.116	

Quadre A5.19. Esperança i desviació estàndard de les autocorrelacions estimades.

Mitjana coneguda. PGD: $(1+0.9L)(1-L)^d X_t = \varepsilon_t$

d	T	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0.25		-0.741	0.807	-0.593	0.664	-0.467	0.554	-0.359	0.472	-0.258	0.443
	50	-0.758	0.707	-0.556	0.519	-0.408	0.385	-0.302	0.289	-0.222	0.217
		0.128	0.131	0.189	0.188	0.224	0.221	0.240	0.232	0.246	0.240
	100	-0.793	0.747	-0.608	0.569	-0.465	0.437	-0.355	0.336	-0.268	0.258
		0.087	0.091	0.136	0.140	0.170	0.170	0.192	0.191	0.206	0.205
	200	-0.812	0.771	-0.644	0.607	-0.506	0.478	-0.396	0.375	-0.308	0.295
		0.057	0.060	0.093	0.097	0.120	0.124	0.141	0.143	0.153	0.153
	400	-0.822	0.781	-0.660	0.621	-0.525	0.495	-0.417	0.395	-0.331	0.317
		0.040	0.042	0.066	0.069	0.085	0.088	0.098	0.100	0.109	0.110
	0.30		-0.635	0.814	-0.498	0.680	-0.380	0.577	-0.277	0.504	-0.177
50		-0.704	0.704	-0.509	0.513	-0.362	0.379	-0.260	0.283	-0.187	0.214
		0.167	0.135	0.220	0.194	0.249	0.224	0.259	0.239	0.259	0.241
100		-0.759	0.753	-0.587	0.580	-0.449	0.449	-0.342	0.350	-0.260	0.274
		0.107	0.089	0.147	0.138	0.178	0.168	0.193	0.183	0.201	0.190
200		-0.777	0.773	-0.617	0.608	-0.483	0.481	-0.378	0.381	-0.294	0.303
		0.075	0.060	0.103	0.096	0.125	0.120	0.142	0.138	0.153	0.150
400		-0.788	0.782	-0.633	0.624	-0.503	0.500	-0.398	0.400	-0.312	0.320
		0.057	0.044	0.078	0.070	0.094	0.088	0.106	0.100	0.114	0.109
0.35			-0.460	0.830	-0.340	0.710	-0.235	0.619	-0.141	0.558	-0.045
	50	-0.639	0.712	-0.458	0.522	-0.321	0.385	-0.217	0.290	-0.150	0.221
		0.216	0.123	0.244	0.186	0.260	0.216	0.263	0.226	0.258	0.232
	100	-0.683	0.754	-0.522	0.585	-0.392	0.459	-0.294	0.364	-0.217	0.288
		0.160	0.087	0.182	0.133	0.197	0.162	0.206	0.180	0.211	0.191
	200	-0.712	0.773	-0.561	0.613	-0.437	0.491	-0.338	0.395	-0.259	0.320
		0.114	0.060	0.133	0.098	0.148	0.122	0.159	0.137	0.165	0.147
	400	-0.730	0.787	-0.586	0.634	-0.464	0.513	-0.364	0.417	-0.284	0.341
		0.088	0.041	0.097	0.068	0.107	0.089	0.115	0.102	0.120	0.110
	0.40		-0.168	0.861	-0.074	0.764	0.010	0.693	0.087	0.647	0.169
50		-0.545	0.731	-0.390	0.556	-0.269	0.428	-0.179	0.333	-0.114	0.262
		0.277	0.118	0.281	0.176	0.282	0.208	0.280	0.224	0.275	0.232
100		-0.575	0.764	-0.430	0.602	-0.313	0.481	-0.224	0.391	-0.154	0.318
		0.235	0.083	0.237	0.129	0.241	0.156	0.242	0.174	0.240	0.185
200		-0.601	0.782	-0.465	0.630	-0.352	0.513	-0.261	0.422	-0.189	0.349
		0.190	0.060	0.190	0.096	0.192	0.121	0.193	0.139	0.195	0.153
400		-0.622	0.792	-0.489	0.645	-0.377	0.530	-0.287	0.439	-0.213	0.366
		0.162	0.041	0.158	0.067	0.156	0.086	0.155	0.100	0.153	0.110
0.45			0.305	0.915	0.359	0.857	0.409	0.815	0.456	0.790	0.508
	50	-0.307	0.757	-0.182	0.596	-0.088	0.480	-0.018	0.390	0.031	0.323
		0.404	0.110	0.376	0.165	0.352	0.196	0.329	0.215	0.308	0.226
	100	-0.360	0.790	-0.244	0.645	-0.150	0.535	-0.075	0.450	-0.018	0.386
		0.373	0.081	0.351	0.129	0.331	0.163	0.315	0.185	0.300	0.198
	200	-0.360	0.810	-0.250	0.677	-0.158	0.575	-0.086	0.497	-0.030	0.434
		0.351	0.062	0.329	0.099	0.310	0.128	0.295	0.148	0.283	0.163
	400	-0.385	0.818	-0.278	0.689	-0.186	0.590	-0.113	0.511	-0.052	0.446
		0.305	0.051	0.286	0.083	0.270	0.107	0.256	0.126	0.245	0.142

Quadre A5.20. Esperança i desviació estàndard de les autocorrelacions estimades.

Mitjana coneguda. PGD: $(1-L)^d X_t = (1+0.9L)\varepsilon_t$

d	T	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0.00		0.497	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
	50	0.476	-0.005	-0.003	-0.008	-0.006	-0.002	0.003	0.004	-0.002	-0.009
		0.097	0.155	0.156	0.160	0.156	0.160	0.158	0.154	0.151	0.147
	100	0.482	-0.012	-0.007	-0.007	-0.007	-0.002	-0.001	0.000	0.003	0.002
		0.070	0.116	0.111	0.114	0.113	0.118	0.117	0.114	0.113	0.112
	200	0.493	0.001	0.002	0.000	-0.003	-0.006	-0.005	-0.003	-0.004	-0.004
		0.050	0.085	0.085	0.084	0.082	0.083	0.085	0.084	0.084	0.082
	400	0.492	-0.004	-0.002	-0.002	-0.002	-0.001	-0.003	-0.005	-0.005	-0.005
		0.037	0.063	0.062	0.060	0.060	0.061	0.062	0.062	0.062	0.062
	0.05		0.536	0.061	0.039	0.030	0.024	0.020	0.018	0.016	0.014
50		0.508	0.046	0.036	0.024	0.016	0.016	0.017	0.010	0.004	0.004
		0.100	0.167	0.169	0.170	0.164	0.164	0.155	0.156	0.157	0.154
100		0.525	0.061	0.040	0.025	0.021	0.016	0.011	0.010	0.010	0.007
		0.072	0.126	0.126	0.127	0.125	0.123	0.120	0.120	0.120	0.116
200		0.530	0.058	0.036	0.026	0.022	0.021	0.020	0.017	0.014	0.013
		0.051	0.090	0.091	0.089	0.089	0.092	0.089	0.086	0.084	0.084
400		0.535	0.064	0.041	0.029	0.023	0.018	0.014	0.012	0.010	0.010
		0.035	0.063	0.064	0.062	0.064	0.065	0.065	0.062	0.062	0.063
0.10			0.577	0.129	0.087	0.068	0.056	0.049	0.043	0.038	0.035
	50	0.553	0.119	0.084	0.057	0.044	0.040	0.033	0.029	0.029	0.029
		0.103	0.175	0.174	0.175	0.172	0.168	0.166	0.164	0.163	0.161
	100	0.566	0.122	0.084	0.067	0.059	0.053	0.049	0.040	0.030	0.030
		0.072	0.132	0.137	0.134	0.131	0.131	0.130	0.127	0.126	0.127
	200	0.567	0.118	0.080	0.063	0.049	0.042	0.042	0.040	0.038	0.035
		0.051	0.094	0.098	0.097	0.096	0.099	0.098	0.097	0.095	0.092
	400	0.573	0.127	0.089	0.071	0.059	0.050	0.043	0.038	0.034	0.031
		0.035	0.065	0.067	0.070	0.071	0.066	0.064	0.067	0.069	0.068
	0.15		0.619	0.203	0.145	0.117	0.100	0.087	0.078	0.071	0.065
50		0.593	0.180	0.132	0.111	0.097	0.079	0.069	0.063	0.051	0.048
		0.099	0.186	0.192	0.186	0.182	0.184	0.180	0.177	0.176	0.174
100		0.610	0.198	0.139	0.110	0.096	0.084	0.073	0.066	0.064	0.062
		0.075	0.143	0.144	0.148	0.147	0.145	0.142	0.140	0.138	0.137
200		0.615	0.202	0.145	0.117	0.102	0.089	0.080	0.075	0.070	0.062
		0.051	0.101	0.105	0.102	0.103	0.104	0.104	0.104	0.105	0.104
400		0.616	0.201	0.145	0.116	0.096	0.086	0.079	0.072	0.066	0.062
		0.038	0.074	0.078	0.079	0.079	0.078	0.077	0.077	0.077	0.077
0.20			0.665	0.285	0.215	0.179	0.156	0.139	0.127	0.117	0.109
	50	0.639	0.269	0.209	0.172	0.145	0.125	0.114	0.105	0.100	0.098
		0.102	0.193	0.205	0.207	0.208	0.210	0.210	0.202	0.192	0.188
	100	0.653	0.279	0.215	0.182	0.160	0.142	0.130	0.120	0.111	0.102
		0.076	0.150	0.160	0.163	0.163	0.164	0.162	0.161	0.160	0.161
	200	0.660	0.281	0.211	0.176	0.153	0.140	0.130	0.119	0.110	0.102
		0.054	0.108	0.116	0.118	0.121	0.123	0.124	0.127	0.125	0.125
	400	0.665	0.289	0.219	0.182	0.159	0.144	0.133	0.124	0.115	0.107
		0.039	0.079	0.084	0.086	0.089	0.090	0.090	0.090	0.091	0.092

Quadre A5.21. Esperança i desviació estàndard de les autocorrelacions estimades.

Mitjana coneguda. PGD: $(1-L)^d X_t = (1+0.9L)\varepsilon_t$

d	T	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	
0.25		0.713	0.376	0.298	0.256	0.228	0.208	0.192	0.179	0.169	0.160	
	50	0.680	0.336	0.265	0.226	0.199	0.177	0.158	0.146	0.134	0.121	
		0.104	0.204	0.217	0.220	0.220	0.223	0.219	0.212	0.206	0.210	
	100	0.700	0.364	0.288	0.242	0.212	0.192	0.177	0.167	0.160	0.151	
		0.076	0.155	0.168	0.176	0.180	0.179	0.178	0.178	0.179	0.179	
	200	0.710	0.376	0.300	0.261	0.233	0.211	0.195	0.183	0.173	0.165	
		0.058	0.122	0.134	0.138	0.139	0.142	0.145	0.145	0.145	0.146	
	400	0.711	0.376	0.298	0.256	0.229	0.209	0.194	0.182	0.174	0.165	
		0.046	0.095	0.104	0.110	0.113	0.114	0.114	0.115	0.117	0.116	
	0.30		0.763	0.477	0.397	0.351	0.320	0.297	0.279	0.265	0.252	0.242
		50	0.739	0.446	0.367	0.324	0.293	0.267	0.247	0.229	0.212	0.197
			0.105	0.214	0.235	0.238	0.241	0.245	0.245	0.246	0.245	0.239
100		0.749	0.459	0.377	0.329	0.296	0.272	0.253	0.238	0.225	0.213	
		0.082	0.171	0.193	0.205	0.211	0.213	0.213	0.214	0.214	0.214	
200		0.761	0.476	0.394	0.348	0.317	0.292	0.272	0.255	0.242	0.231	
		0.061	0.133	0.153	0.163	0.169	0.171	0.174	0.176	0.176	0.176	
400		0.764	0.480	0.402	0.360	0.330	0.306	0.287	0.272	0.260	0.249	
		0.051	0.111	0.125	0.133	0.138	0.142	0.145	0.147	0.148	0.150	
0.35			0.817	0.588	0.513	0.469	0.437	0.414	0.395	0.379	0.366	0.354
		50	0.780	0.529	0.448	0.396	0.358	0.332	0.314	0.293	0.272	0.257
			0.102	0.213	0.239	0.252	0.264	0.267	0.263	0.263	0.267	0.265
	100	0.804	0.569	0.490	0.444	0.414	0.389	0.367	0.350	0.334	0.320	
		0.081	0.178	0.209	0.222	0.228	0.234	0.238	0.239	0.241	0.243	
	200	0.812	0.581	0.504	0.459	0.426	0.401	0.379	0.363	0.352	0.341	
		0.065	0.145	0.171	0.185	0.193	0.199	0.204	0.206	0.206	0.206	
	400	0.819	0.594	0.521	0.476	0.445	0.421	0.401	0.386	0.374	0.363	
		0.055	0.123	0.146	0.159	0.167	0.172	0.177	0.179	0.181	0.182	
	0.40		0.874	0.711	0.650	0.612	0.585	0.564	0.546	0.532	0.519	0.508
		50	0.825	0.620	0.541	0.491	0.456	0.427	0.401	0.377	0.356	0.337
			0.098	0.209	0.246	0.261	0.265	0.266	0.270	0.273	0.273	0.272
100		0.849	0.663	0.591	0.544	0.510	0.483	0.464	0.449	0.433	0.418	
		0.080	0.178	0.213	0.234	0.247	0.254	0.258	0.260	0.263	0.265	
200		0.860	0.684	0.618	0.575	0.544	0.520	0.501	0.484	0.469	0.455	
		0.065	0.147	0.176	0.192	0.204	0.213	0.220	0.225	0.229	0.232	
400		0.868	0.700	0.636	0.595	0.566	0.544	0.525	0.509	0.496	0.484	
		0.054	0.122	0.146	0.161	0.172	0.180	0.187	0.192	0.197	0.201	
0.45			0.935	0.848	0.811	0.787	0.769	0.755	0.744	0.734	0.725	0.717
		50	0.879	0.733	0.668	0.622	0.585	0.556	0.529	0.503	0.480	0.459
			0.089	0.193	0.228	0.247	0.260	0.268	0.273	0.277	0.276	0.276
	100	0.897	0.766	0.705	0.663	0.631	0.607	0.586	0.568	0.551	0.535	
		0.070	0.159	0.195	0.219	0.234	0.243	0.251	0.257	0.262	0.267	
	200	0.909	0.793	0.743	0.709	0.683	0.661	0.642	0.627	0.614	0.602	
		0.063	0.143	0.174	0.194	0.208	0.219	0.228	0.236	0.241	0.244	
	400	0.920	0.814	0.768	0.738	0.715	0.697	0.681	0.667	0.655	0.644	
		0.049	0.114	0.141	0.158	0.170	0.179	0.187	0.194	0.201	0.206	

Quadre A5.22. Esperança i desviació estàndard de les autocorrelacions estimades.

Mitjana desconeguda. PGD: $(1-L)^d X_t = \varepsilon_t$

d	T	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0.00		0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
	50	-0.016	-0.017	-0.021	-0.025	-0.022	-0.017	-0.017	-0.013	-0.017	-0.024
		0.140	0.129	0.130	0.136	0.129	0.134	0.128	0.127	0.127	0.123
	100	-0.007	-0.019	-0.010	-0.014	-0.013	-0.010	-0.009	-0.010	-0.006	-0.008
		0.095	0.100	0.097	0.096	0.094	0.100	0.098	0.094	0.093	0.092
0.05	200	-0.003	-0.004	-0.003	-0.006	-0.005	-0.010	-0.007	-0.006	-0.007	-0.007
		0.071	0.071	0.070	0.069	0.069	0.068	0.069	0.069	0.072	0.068
	400	-0.003	-0.005	-0.003	-0.004	-0.003	-0.002	-0.005	-0.005	-0.004	-0.005
		0.050	0.051	0.050	0.050	0.050	0.049	0.052	0.050	0.051	0.050
		0.053	0.028	0.020	0.015	0.012	0.011	0.009	0.008	0.007	0.007
0.10	50	0.020	-0.001	-0.004	-0.012	-0.020	-0.015	-0.013	-0.017	-0.024	-0.019
		0.140	0.137	0.134	0.134	0.129	0.129	0.123	0.125	0.126	0.128
	100	0.036	0.017	0.008	-0.006	-0.002	-0.005	-0.011	-0.009	-0.008	-0.012
		0.101	0.098	0.100	0.102	0.097	0.097	0.095	0.092	0.095	0.090
	200	0.046	0.020	0.011	0.004	0.005	0.002	0.005	0.001	0.001	-0.002
0.15		0.073	0.073	0.069	0.072	0.070	0.074	0.068	0.067	0.069	0.070
	400	0.051	0.026	0.016	0.010	0.007	0.005	0.003	0.002	0.000	0.000
		0.050	0.050	0.050	0.050	0.051	0.051	0.050	0.048	0.050	0.051
		0.111	0.064	0.047	0.037	0.031	0.027	0.024	0.021	0.019	0.018
	50	0.079	0.024	0.015	-0.010	-0.012	-0.013	-0.017	-0.023	-0.018	-0.017
0.20		0.147	0.141	0.133	0.136	0.132	0.128	0.125	0.126	0.125	0.121
	100	0.092	0.040	0.022	0.013	0.011	0.004	0.006	0.000	-0.010	-0.005
		0.104	0.102	0.103	0.100	0.097	0.097	0.099	0.093	0.095	0.094
	200	0.092	0.045	0.027	0.019	0.012	0.005	0.011	0.006	0.006	0.004
		0.073	0.071	0.073	0.074	0.070	0.073	0.071	0.072	0.069	0.069
0.25	400	0.104	0.055	0.041	0.031	0.024	0.021	0.015	0.013	0.011	0.009
		0.051	0.052	0.051	0.053	0.053	0.049	0.049	0.050	0.052	0.052
		0.176	0.110	0.083	0.068	0.058	0.051	0.046	0.042	0.038	0.036
	50	0.120	0.047	0.025	0.010	0.008	-0.009	-0.012	-0.012	-0.023	-0.024
		0.144	0.140	0.145	0.139	0.132	0.132	0.130	0.131	0.128	0.127
0.30	100	0.143	0.076	0.041	0.026	0.019	0.012	0.006	-0.001	0.002	-0.002
		0.105	0.108	0.104	0.106	0.101	0.104	0.098	0.100	0.097	0.095
	200	0.158	0.088	0.062	0.043	0.040	0.028	0.023	0.022	0.019	0.012
		0.078	0.076	0.077	0.072	0.073	0.074	0.074	0.075	0.076	0.071
	400	0.163	0.095	0.069	0.052	0.041	0.035	0.033	0.026	0.024	0.021
0.35		0.058	0.056	0.056	0.056	0.055	0.054	0.053	0.054	0.053	0.054
		0.250	0.167	0.131	0.110	0.096	0.087	0.079	0.073	0.068	0.064
	50	0.157	0.082	0.044	0.024	0.006	-0.008	-0.007	-0.017	-0.018	-0.015
		0.150	0.144	0.145	0.141	0.137	0.139	0.135	0.128	0.123	0.127
	100	0.193	0.109	0.073	0.051	0.042	0.024	0.021	0.013	0.009	0.005
0.40		0.110	0.110	0.109	0.108	0.105	0.109	0.103	0.103	0.100	0.099
	200	0.219	0.130	0.091	0.071	0.055	0.049	0.043	0.036	0.029	0.025
		0.078	0.080	0.080	0.077	0.078	0.078	0.078	0.081	0.075	0.077
	400	0.230	0.147	0.108	0.087	0.072	0.063	0.058	0.050	0.046	0.039
		0.056	0.058	0.058	0.057	0.058	0.060	0.057	0.057	0.057	0.058

Quadre A5.23. Esperança i desviació estàndard de les autocorrelacions estimades.

Mitjana desconeguda. PGD: $(1-L)^d X_t = \varepsilon_t$

d	T	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0.25		0.333	0.238	0.195	0.169	0.151	0.138	0.128	0.119	0.113	0.107
	50	0.218	0.102	0.064	0.034	0.019	0.005	-0.010	-0.012	-0.020	-0.028
		0.145	0.152	0.147	0.146	0.139	0.142	0.133	0.130	0.124	0.127
	100	0.258	0.154	0.110	0.074	0.055	0.043	0.031	0.025	0.022	0.016
		0.114	0.119	0.115	0.117	0.117	0.111	0.107	0.104	0.109	0.105
200	0.286	0.181	0.135	0.111	0.090	0.076	0.064	0.056	0.049	0.041	
	0.083	0.088	0.088	0.087	0.086	0.085	0.087	0.086	0.085	0.085	
400	0.302	0.199	0.154	0.125	0.109	0.095	0.085	0.075	0.072	0.064	
	0.062	0.066	0.067	0.068	0.068	0.068	0.066	0.067	0.067	0.066	
0.30		0.429	0.328	0.279	0.249	0.228	0.212	0.199	0.189	0.180	0.173
	50	0.277	0.150	0.095	0.061	0.042	0.020	0.006	-0.002	-0.014	-0.021
		0.150	0.156	0.156	0.151	0.143	0.146	0.138	0.138	0.133	0.128
	100	0.322	0.206	0.145	0.111	0.084	0.065	0.052	0.042	0.033	0.024
		0.110	0.122	0.122	0.125	0.124	0.121	0.118	0.116	0.116	0.113
200	0.356	0.245	0.186	0.152	0.130	0.110	0.093	0.081	0.069	0.064	
	0.087	0.093	0.097	0.099	0.097	0.094	0.094	0.097	0.092	0.093	
400	0.375	0.265	0.212	0.181	0.160	0.141	0.125	0.115	0.107	0.096	
	0.066	0.076	0.077	0.079	0.076	0.078	0.078	0.079	0.078	0.080	
0.35		0.538	0.441	0.391	0.359	0.335	0.318	0.303	0.291	0.281	0.273
	50	0.327	0.192	0.123	0.079	0.047	0.027	0.024	0.004	-0.011	-0.017
		0.158	0.163	0.167	0.165	0.159	0.151	0.145	0.138	0.140	0.133
	100	0.389	0.262	0.195	0.154	0.127	0.108	0.088	0.074	0.059	0.047
		0.117	0.129	0.133	0.134	0.132	0.131	0.129	0.125	0.125	0.127
200	0.430	0.305	0.243	0.202	0.173	0.150	0.130	0.117	0.107	0.098	
	0.088	0.102	0.108	0.114	0.112	0.113	0.111	0.111	0.109	0.106	
400	0.454	0.340	0.280	0.243	0.214	0.193	0.175	0.161	0.150	0.140	
	0.071	0.082	0.087	0.091	0.092	0.093	0.094	0.094	0.092	0.092	
0.40		0.667	0.583	0.538	0.509	0.486	0.469	0.455	0.443	0.433	0.424
	50	0.385	0.238	0.159	0.116	0.078	0.056	0.032	0.014	-0.003	-0.013
		0.157	0.174	0.175	0.174	0.161	0.157	0.150	0.151	0.143	0.140
	100	0.446	0.311	0.237	0.187	0.153	0.122	0.103	0.091	0.075	0.064
		0.117	0.135	0.144	0.146	0.147	0.147	0.146	0.141	0.139	0.138
200	0.502	0.375	0.308	0.263	0.230	0.205	0.185	0.169	0.153	0.138	
	0.090	0.111	0.118	0.123	0.124	0.124	0.125	0.126	0.125	0.127	
400	0.532	0.416	0.352	0.309	0.278	0.254	0.233	0.217	0.202	0.190	
	0.073	0.089	0.095	0.099	0.102	0.104	0.106	0.106	0.107	0.108	
0.45		0.818	0.765	0.735	0.715	0.699	0.686	0.676	0.667	0.659	0.652
	50	0.446	0.287	0.200	0.140	0.099	0.068	0.043	0.019	0.005	-0.014
		0.156	0.177	0.181	0.180	0.177	0.168	0.163	0.161	0.150	0.147
	100	0.514	0.373	0.292	0.234	0.191	0.160	0.134	0.113	0.098	0.079
		0.120	0.140	0.147	0.149	0.151	0.150	0.150	0.152	0.147	0.146
200	0.572	0.448	0.380	0.330	0.293	0.261	0.236	0.215	0.198	0.181	
	0.093	0.113	0.123	0.128	0.131	0.135	0.137	0.138	0.137	0.137	
400	0.614	0.502	0.438	0.393	0.360	0.334	0.310	0.292	0.274	0.258	
	0.074	0.092	0.102	0.109	0.113	0.115	0.118	0.120	0.121	0.124	

Quadre A5.24. Esperança i desviació estàndard de les autocorrelacions estimades.

Mitjana desconeguda. PGD: $(1-0.5L)(1-L)^d X_t = \varepsilon_t$

d	T	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0.00		0.500	0.250	0.125	0.063	0.031	0.016	0.008	0.004	0.002	0.001
	50	0.437	0.177	0.050	-0.011	-0.035	-0.044	-0.045	-0.045	-0.049	-0.053
		0.127	0.147	0.154	0.159	0.154	0.156	0.154	0.152	0.148	0.144
	100	0.466	0.203	0.082	0.020	-0.007	-0.018	-0.022	-0.024	-0.023	-0.024
		0.084	0.108	0.111	0.114	0.116	0.120	0.121	0.117	0.115	0.113
	200	0.485	0.233	0.107	0.043	0.011	-0.007	-0.014	-0.016	-0.018	-0.019
		0.062	0.081	0.086	0.087	0.086	0.086	0.087	0.087	0.086	0.085
	400	0.490	0.237	0.113	0.050	0.020	0.005	-0.005	-0.010	-0.012	-0.013
		0.045	0.059	0.062	0.062	0.062	0.063	0.065	0.065	0.065	0.065
0.05		0.552	0.307	0.177	0.107	0.069	0.047	0.035	0.028	0.023	0.020
	50	0.473	0.214	0.085	0.018	-0.018	-0.032	-0.039	-0.047	-0.055	-0.055
		0.125	0.154	0.164	0.166	0.161	0.157	0.149	0.150	0.153	0.152
	100	0.514	0.261	0.127	0.053	0.018	-0.003	-0.016	-0.021	-0.024	-0.027
		0.088	0.117	0.127	0.131	0.127	0.125	0.123	0.119	0.120	0.118
	200	0.533	0.282	0.149	0.079	0.044	0.025	0.015	0.008	0.003	-0.001
		0.061	0.084	0.091	0.094	0.094	0.097	0.094	0.092	0.091	0.090
	400	0.545	0.297	0.164	0.092	0.053	0.031	0.019	0.011	0.007	0.005
		0.041	0.058	0.064	0.067	0.069	0.070	0.069	0.067	0.067	0.067
0.10		0.605	0.369	0.236	0.159	0.115	0.089	0.072	0.061	0.054	0.048
	50	0.524	0.261	0.123	0.039	-0.003	-0.024	-0.037	-0.045	-0.046	-0.047
		0.127	0.158	0.166	0.171	0.167	0.161	0.158	0.158	0.155	0.152
	100	0.562	0.308	0.169	0.094	0.053	0.029	0.016	0.002	-0.009	-0.012
		0.084	0.119	0.133	0.135	0.133	0.131	0.129	0.126	0.126	0.124
	200	0.574	0.325	0.187	0.111	0.066	0.040	0.030	0.021	0.016	0.011
		0.059	0.084	0.096	0.100	0.101	0.103	0.103	0.102	0.099	0.098
	400	0.593	0.352	0.218	0.141	0.096	0.070	0.052	0.040	0.032	0.026
		0.040	0.059	0.068	0.073	0.075	0.073	0.072	0.074	0.076	0.075
0.15		0.658	0.436	0.302	0.222	0.173	0.142	0.121	0.106	0.096	0.088
	50	0.563	0.302	0.156	0.076	0.031	-0.002	-0.021	-0.032	-0.044	-0.050
		0.119	0.163	0.182	0.182	0.177	0.173	0.168	0.164	0.161	0.160
	100	0.604	0.356	0.207	0.123	0.074	0.043	0.022	0.009	0.003	-0.003
		0.084	0.123	0.137	0.144	0.146	0.145	0.139	0.136	0.133	0.132
	200	0.630	0.393	0.253	0.169	0.121	0.088	0.067	0.054	0.044	0.033
		0.058	0.087	0.100	0.104	0.107	0.110	0.110	0.111	0.112	0.109
	400	0.639	0.408	0.269	0.186	0.135	0.104	0.085	0.070	0.060	0.052
		0.043	0.064	0.075	0.080	0.082	0.082	0.083	0.083	0.082	0.082
0.20		0.711	0.507	0.378	0.296	0.243	0.208	0.183	0.166	0.152	0.141
	50	0.594	0.343	0.190	0.099	0.041	0.004	-0.016	-0.031	-0.038	-0.041
		0.117	0.163	0.184	0.189	0.186	0.184	0.180	0.171	0.163	0.159
	100	0.643	0.406	0.260	0.171	0.116	0.076	0.052	0.033	0.019	0.007
		0.081	0.122	0.142	0.150	0.154	0.155	0.152	0.148	0.145	0.143
	200	0.673	0.446	0.304	0.216	0.160	0.126	0.102	0.084	0.069	0.058
		0.054	0.085	0.102	0.110	0.115	0.118	0.119	0.120	0.117	0.117
	400	0.690	0.474	0.336	0.250	0.195	0.159	0.135	0.116	0.102	0.090
		0.038	0.061	0.073	0.080	0.085	0.089	0.090	0.090	0.091	0.093

Quadre A5.25. Esperança i desviació estàndard de les autocorrelacions estimades.

Mitjana desconeguda. PGD: $(1-0.5L)(1-L)^d X_t = \varepsilon_t$

d	T	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0.25		0.763	0.582	0.461	0.381	0.327	0.289	0.262	0.242	0.226	0.212
	50	0.634	0.377	0.222	0.124	0.063	0.022	-0.008	-0.027	-0.042	-0.055
		0.108	0.164	0.185	0.191	0.188	0.187	0.180	0.172	0.166	0.168
	100	0.687	0.459	0.310	0.210	0.146	0.105	0.076	0.056	0.042	0.029
		0.076	0.122	0.146	0.160	0.165	0.162	0.158	0.155	0.156	0.153
	200	0.718	0.506	0.367	0.277	0.215	0.173	0.142	0.120	0.104	0.091
		0.054	0.089	0.109	0.120	0.125	0.127	0.129	0.130	0.130	0.130
	400	0.734	0.532	0.398	0.310	0.251	0.211	0.182	0.161	0.145	0.131
		0.039	0.066	0.082	0.092	0.097	0.100	0.100	0.102	0.103	0.103
0.30		0.814	0.661	0.553	0.479	0.426	0.388	0.360	0.338	0.320	0.305
	50	0.676	0.430	0.270	0.166	0.099	0.050	0.017	-0.008	-0.029	-0.045
		0.107	0.166	0.193	0.202	0.199	0.199	0.193	0.188	0.180	0.171
	100	0.727	0.512	0.362	0.262	0.192	0.143	0.109	0.083	0.061	0.044
		0.070	0.119	0.148	0.164	0.172	0.172	0.169	0.166	0.164	0.163
	200	0.759	0.566	0.429	0.335	0.270	0.222	0.186	0.157	0.135	0.118
		0.050	0.086	0.110	0.125	0.132	0.135	0.138	0.141	0.140	0.139
	400	0.777	0.595	0.468	0.382	0.322	0.278	0.244	0.218	0.198	0.180
		0.038	0.068	0.086	0.098	0.104	0.109	0.113	0.115	0.117	0.118
0.35		0.863	0.743	0.654	0.589	0.542	0.507	0.480	0.460	0.440	0.425
	50	0.703	0.466	0.300	0.188	0.113	0.065	0.034	0.004	-0.018	-0.033
		0.104	0.165	0.200	0.214	0.214	0.206	0.197	0.189	0.184	0.176
	100	0.764	0.564	0.420	0.320	0.251	0.202	0.162	0.131	0.104	0.082
		0.068	0.118	0.151	0.170	0.178	0.181	0.181	0.180	0.179	0.178
	200	0.796	0.618	0.487	0.393	0.325	0.275	0.236	0.207	0.185	0.167
		0.048	0.087	0.115	0.135	0.145	0.152	0.154	0.154	0.153	0.150
	400	0.816	0.656	0.536	0.451	0.389	0.342	0.306	0.278	0.255	0.236
		0.036	0.067	0.088	0.104	0.114	0.121	0.125	0.128	0.129	0.129
0.40		0.911	0.827	0.762	0.713	0.675	0.647	0.624	0.606	0.590	0.577
	50	0.736	0.511	0.349	0.237	0.157	0.102	0.058	0.023	-0.004	-0.026
		0.097	0.163	0.201	0.217	0.215	0.210	0.204	0.200	0.192	0.185
	100	0.792	0.604	0.461	0.356	0.279	0.222	0.180	0.149	0.123	0.100
		0.064	0.116	0.152	0.174	0.187	0.194	0.196	0.196	0.195	0.195
	200	0.830	0.671	0.550	0.460	0.392	0.342	0.302	0.270	0.243	0.218
		0.045	0.085	0.114	0.134	0.146	0.154	0.160	0.164	0.166	0.168
	400	0.850	0.709	0.600	0.518	0.456	0.409	0.372	0.342	0.316	0.295
		0.033	0.064	0.086	0.102	0.114	0.122	0.128	0.133	0.136	0.139
0.45		0.957	0.913	0.877	0.850	0.828	0.811	0.797	0.785	0.775	0.766
	50	0.767	0.551	0.387	0.268	0.182	0.119	0.070	0.030	0.000	-0.026
		0.090	0.157	0.196	0.216	0.221	0.217	0.213	0.209	0.200	0.194
	100	0.822	0.649	0.511	0.405	0.325	0.264	0.216	0.178	0.147	0.119
		0.060	0.109	0.143	0.165	0.179	0.187	0.192	0.196	0.195	0.195
	200	0.860	0.721	0.610	0.523	0.456	0.402	0.358	0.323	0.293	0.267
		0.041	0.080	0.108	0.129	0.144	0.155	0.163	0.169	0.172	0.174
	400	0.882	0.764	0.668	0.593	0.535	0.489	0.452	0.420	0.393	0.369
		0.031	0.060	0.084	0.101	0.114	0.124	0.132	0.138	0.143	0.147

Quadre A5.26. Esperança i desviació estàndard de les autocorrelacions estimades.

Mitjana desconeguda. PGD: $(1-L)^d X_t = (1-0.5L)\varepsilon_t$

d	T	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	
0.00		-0.400	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	
	50	-0.380	-0.008	-0.004	-0.008	-0.006	-0.001	-0.006	0.001	-0.003	-0.010	
		0.114	0.150	0.147	0.150	0.146	0.151	0.145	0.141	0.144	0.138	
	100	-0.385	-0.016	0.003	-0.004	-0.004	-0.001	-0.002	-0.004	0.001	-0.001	
		0.079	0.117	0.113	0.110	0.108	0.114	0.111	0.109	0.105	0.102	
	200	-0.394	-0.003	0.000	-0.002	0.001	-0.005	-0.001	-0.001	-0.001	-0.002	
		0.057	0.082	0.080	0.079	0.078	0.078	0.077	0.078	0.082	0.079	
	400	-0.397	-0.003	0.001	-0.002	0.000	0.001	-0.002	-0.001	0.000	-0.002	
		0.039	0.056	0.055	0.057	0.057	0.056	0.061	0.058	0.058	0.056	
	0.05		-0.374	-0.001	0.002	0.002	0.002	0.002	0.002	0.002	0.001	0.001
		50	-0.360	-0.012	0.002	-0.004	-0.010	-0.001	-0.001	-0.001	-0.011	-0.001
			0.114	0.154	0.150	0.148	0.143	0.143	0.142	0.142	0.139	0.140
100		-0.368	-0.003	0.004	-0.008	0.002	0.000	-0.005	-0.002	0.000	-0.004	
		0.080	0.108	0.111	0.111	0.109	0.109	0.106	0.105	0.105	0.101	
200		-0.369	-0.005	0.002	-0.002	0.002	-0.002	0.004	-0.001	0.001	-0.002	
		0.059	0.081	0.078	0.080	0.080	0.080	0.075	0.075	0.079	0.079	
400		-0.371	-0.002	0.002	0.001	0.001	0.001	0.000	0.001	-0.001	-0.001	
		0.040	0.056	0.055	0.056	0.058	0.056	0.055	0.055	0.057	0.057	
0.10			-0.345	0.001	0.007	0.007	0.006	0.005	0.005	0.004	0.004	0.004
		50	-0.326	-0.017	0.009	-0.010	-0.004	0.000	-0.003	-0.009	-0.004	-0.003
			0.118	0.152	0.146	0.147	0.148	0.141	0.135	0.136	0.137	0.133
	100	-0.337	-0.007	0.001	0.000	0.004	-0.002	0.004	0.002	-0.009	0.001	
		0.084	0.109	0.108	0.106	0.103	0.104	0.107	0.102	0.103	0.105	
	200	-0.345	-0.004	0.001	0.004	0.002	-0.004	0.007	-0.001	0.003	0.001	
		0.058	0.076	0.079	0.081	0.076	0.078	0.077	0.078	0.076	0.075	
	400	-0.343	-0.003	0.007	0.006	0.004	0.005	0.002	0.003	0.003	0.001	
		0.042	0.057	0.055	0.056	0.056	0.053	0.054	0.054	0.055	0.057	
	0.15		-0.311	0.007	0.014	0.013	0.012	0.011	0.010	0.009	0.009	0.008
		50	-0.304	-0.014	0.004	-0.003	0.010	-0.007	-0.005	0.001	-0.010	-0.009
			0.121	0.150	0.149	0.144	0.137	0.137	0.138	0.141	0.137	0.132
100		-0.311	0.003	0.001	0.003	0.004	0.003	0.002	-0.005	0.004	-0.004	
		0.083	0.107	0.107	0.109	0.101	0.104	0.102	0.104	0.103	0.101	
200		-0.310	0.000	0.012	0.002	0.013	0.004	0.004	0.006	0.006	0.002	
		0.063	0.075	0.076	0.073	0.076	0.075	0.077	0.078	0.076	0.072	
400		-0.313	0.003	0.012	0.010	0.007	0.006	0.010	0.004	0.006	0.004	
		0.044	0.054	0.054	0.054	0.054	0.054	0.052	0.053	0.053	0.054	
0.20			-0.271	0.018	0.025	0.024	0.022	0.020	0.019	0.018	0.017	0.016
		50	-0.286	0.001	0.004	0.005	-0.001	-0.006	0.002	-0.008	-0.007	0.000
			0.126	0.147	0.147	0.142	0.142	0.144	0.138	0.133	0.130	0.134
	100	-0.282	0.004	0.011	0.008	0.014	0.000	0.007	0.003	0.002	0.005	
		0.087	0.104	0.106	0.106	0.101	0.107	0.103	0.101	0.100	0.101	
	200	-0.275	0.007	0.014	0.016	0.010	0.012	0.011	0.010	0.006	0.006	
		0.065	0.080	0.078	0.073	0.074	0.074	0.071	0.076	0.071	0.073	
	400	-0.276	0.014	0.019	0.019	0.014	0.014	0.016	0.010	0.013	0.009	
		0.044	0.054	0.053	0.053	0.054	0.055	0.052	0.052	0.052	0.054	

Quadre A5.27. Esperança i desviació estàndard de les autocorrelacions estimades.

Mitjana desconeguda. PGD: $(1-L)^d X_t = (1-0.5L)\varepsilon_t$

d	T	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	
0.25		-0.221	0.037	0.044	0.042	0.039	0.036	0.034	0.032	0.030	0.029	
	50	-0.242	-0.009	0.013	0.004	0.006	0.001	-0.008	0.001	-0.006	-0.010	
		0.123	0.144	0.145	0.143	0.137	0.141	0.134	0.133	0.129	0.133	
	100	-0.241	0.011	0.026	0.012	0.012	0.102	0.006	0.005	0.008	0.005	
		0.094	0.106	0.101	0.102	0.103	0.013	0.100	0.098	0.101	0.099	
	200	-0.233	0.018	0.025	0.029	0.021	0.020	0.015	0.015	0.014	0.007	
		0.068	0.077	0.073	0.070	0.072	0.073	0.076	0.075	0.071	0.072	
	400	-0.230	0.024	0.033	0.028	0.028	0.024	0.023	0.017	0.022	0.016	
		0.049	0.054	0.054	0.052	0.054	0.054	0.053	0.053	0.053	0.053	
	0.30		-0.156	0.068	0.074	0.070	0.066	0.062	0.059	0.056	0.054	0.052
		50	-0.205	0.007	0.018	0.010	0.017	0.003	0.000	0.004	-0.007	-0.004
			0.130	0.142	0.144	0.138	0.133	0.136	0.129	0.131	0.129	0.130
100		-0.200	0.031	0.029	0.029	0.021	0.017	0.014	0.012	0.010	0.008	
		0.095	0.105	0.100	0.106	0.103	0.099	0.098	0.099	0.101	0.100	
200		-0.188	0.042	0.040	0.040	0.038	0.030	0.026	0.025	0.017	0.021	
		0.074	0.076	0.076	0.077	0.074	0.072	0.071	0.076	0.070	0.074	
400		-0.182	0.046	0.049	0.049	0.045	0.041	0.034	0.033	0.033	0.026	
		0.053	0.058	0.057	0.056	0.052	0.055	0.054	0.054	0.053	0.054	
0.35			-0.066	0.121	0.125	0.120	0.114	0.109	0.105	0.101	0.098	0.095
		50	-0.166	0.025	0.029	0.021	0.012	0.002	0.019	-0.001	-0.006	-0.005
			0.141	0.137	0.140	0.138	0.136	0.133	0.133	0.127	0.131	0.129
	100	-0.149	0.049	0.150	0.041	0.038	0.035	0.026	0.025	0.019	0.014	
		0.104	0.104	0.049	0.102	0.101	0.100	0.099	0.097	0.098	0.100	
	200	-0.129	0.060	0.065	0.059	0.053	0.048	0.039	0.036	0.036	0.032	
		0.077	0.079	0.079	0.080	0.077	0.076	0.074	0.075	0.074	0.075	
	400	-0.122	0.077	0.076	0.074	0.065	0.062	0.055	0.052	0.048	0.046	
		0.062	0.060	0.058	0.059	0.057	0.058	0.059	0.058	0.056	0.056	
	0.40		0.071	0.217	0.217	0.211	0.204	0.198	0.193	0.188	0.184	0.181
		50	-0.122	0.044	0.036	0.041	0.021	0.020	0.010	0.006	-0.003	-0.002
			0.146	0.148	0.138	0.141	0.135	0.136	0.130	0.132	0.126	0.128
100		-0.100	0.069	0.067	0.056	0.052	0.037	0.033	0.036	0.026	0.025	
		0.112	0.106	0.109	0.107	0.108	0.104	0.105	0.099	0.101	0.100	
200		-0.067	0.093	0.096	0.087	0.078	0.071	0.064	0.063	0.056	0.049	
		0.085	0.085	0.082	0.086	0.082	0.080	0.078	0.081	0.078	0.084	
400		-0.050	0.114	0.114	0.104	0.097	0.090	0.083	0.079	0.073	0.070	
		0.074	0.068	0.065	0.065	0.063	0.064	0.065	0.064	0.064	0.064	
0.45			0.324	0.417	0.415	0.408	0.401	0.395	0.390	0.384	0.381	0.377
		50	-0.063	0.064	0.060	0.044	0.035	0.025	0.019	0.005	0.009	-0.006
			0.159	0.147	0.143	0.141	0.141	0.137	0.132	0.133	0.122	0.123
	100	-0.034	0.101	0.096	0.080	0.067	0.059	0.052	0.041	0.044	0.031	
		0.125	0.115	0.112	0.106	0.107	0.105	0.106	0.106	0.102	0.103	
	200	0.003	0.136	0.138	0.121	0.114	0.100	0.093	0.084	0.080	0.073	
		0.104	0.090	0.092	0.089	0.087	0.089	0.090	0.087	0.086	0.085	
	400	0.038	0.169	0.165	0.153	0.144	0.137	0.125	0.121	0.113	0.107	
		0.087	0.077	0.076	0.076	0.076	0.074	0.074	0.074	0.073	0.077	

Quadre A5.28. Esperança i desviació estàndard de les autocorrelacions estimades.

Mitjana desconeguda. PGD: $(1-0.9L)(1-L)^d X_t = \varepsilon_t$

d	T	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0.00		0.900	0.810	0.729	0.656	0.590	0.531	0.478	0.430	0.387	0.349
	50	0.788	0.617	0.472	0.352	0.256	0.176	0.111	0.057	0.011	-0.025
		0.098	0.154	0.193	0.215	0.225	0.229	0.227	0.221	0.213	0.204
	100	0.846	0.713	0.599	0.500	0.414	0.341	0.278	0.224	0.178	0.138
		0.056	0.098	0.131	0.157	0.177	0.192	0.201	0.205	0.205	0.204
	200	0.873	0.761	0.662	0.574	0.495	0.426	0.365	0.312	0.265	0.224
0.037		0.068	0.092	0.112	0.127	0.140	0.150	0.157	0.163	0.167	
400	0.885	0.784	0.693	0.612	0.540	0.475	0.417	0.365	0.320	0.279	
	0.024	0.044	0.061	0.075	0.088	0.098	0.107	0.114	0.119	0.124	
0.05		0.921	0.842	0.769	0.701	0.638	0.579	0.525	0.475	0.427	0.377
	50	0.811	0.648	0.508	0.389	0.287	0.204	0.134	0.073	0.023	-0.017
		0.091	0.148	0.188	0.212	0.223	0.225	0.222	0.218	0.212	0.202
	100	0.868	0.747	0.637	0.537	0.451	0.375	0.308	0.250	0.199	0.154
		0.053	0.095	0.128	0.155	0.172	0.186	0.194	0.200	0.205	0.207
	200	0.897	0.799	0.709	0.627	0.553	0.487	0.427	0.374	0.325	0.282
0.032		0.060	0.084	0.104	0.121	0.135	0.146	0.154	0.161	0.167	
400	0.910	0.823	0.741	0.666	0.597	0.535	0.479	0.428	0.383	0.342	
	0.020	0.039	0.056	0.070	0.083	0.094	0.104	0.111	0.118	0.123	
0.10		0.938	0.871	0.805	0.743	0.683	0.627	0.574	0.522	0.471	0.416
	50	0.836	0.683	0.547	0.425	0.322	0.234	0.160	0.098	0.046	0.002
		0.085	0.141	0.180	0.208	0.224	0.231	0.232	0.228	0.223	0.215
	100	0.892	0.783	0.682	0.591	0.509	0.435	0.369	0.309	0.254	0.207
		0.044	0.084	0.117	0.142	0.160	0.174	0.184	0.193	0.199	0.202
	200	0.912	0.821	0.736	0.656	0.583	0.517	0.458	0.405	0.356	0.313
0.031		0.059	0.084	0.107	0.125	0.141	0.153	0.163	0.170	0.176	
400	0.928	0.853	0.780	0.712	0.647	0.588	0.533	0.482	0.436	0.394	
	0.018	0.035	0.052	0.067	0.080	0.092	0.103	0.113	0.121	0.128	
0.15		0.952	0.896	0.839	0.782	0.727	0.674	0.622	0.572	0.521	0.463
	50	0.855	0.710	0.578	0.461	0.357	0.265	0.186	0.118	0.060	0.010
		0.074	0.130	0.171	0.198	0.215	0.225	0.227	0.225	0.221	0.215
	100	0.904	0.803	0.704	0.613	0.530	0.454	0.386	0.326	0.272	0.224
		0.043	0.083	0.116	0.144	0.166	0.182	0.194	0.202	0.208	0.212
	200	0.931	0.855	0.780	0.707	0.640	0.576	0.518	0.464	0.415	0.370
0.025		0.051	0.074	0.095	0.114	0.130	0.144	0.156	0.165	0.173	
400	0.941	0.875	0.809	0.745	0.684	0.627	0.575	0.526	0.481	0.439	
	0.017	0.034	0.051	0.066	0.080	0.093	0.104	0.114	0.122	0.129	
0.20		0.964	0.918	0.869	0.819	0.770	0.720	0.672	0.625	0.575	0.519
	50	0.868	0.733	0.604	0.486	0.382	0.290	0.212	0.144	0.086	0.037
		0.068	0.121	0.166	0.198	0.218	0.230	0.233	0.231	0.224	0.213
	100	0.918	0.825	0.734	0.646	0.564	0.488	0.418	0.355	0.298	0.247
		0.039	0.078	0.112	0.141	0.165	0.185	0.199	0.210	0.217	0.223
	200	0.943	0.876	0.807	0.739	0.675	0.614	0.557	0.504	0.454	0.408
0.021		0.044	0.066	0.087	0.106	0.122	0.137	0.150	0.160	0.170	
400	0.955	0.900	0.843	0.786	0.731	0.679	0.629	0.582	0.538	0.497	
	0.012	0.027	0.042	0.057	0.071	0.084	0.096	0.107	0.117	0.126	

Quadre A5.29. Esperança i desviació estàndard de les autocorrelacions estimades.

Mitjana desconeguda. PGD: $(1-0.9L)(1-L)^d X_t = \varepsilon_t$

d	T	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0.25		0.973	0.936	0.896	0.853	0.810	0.767	0.724	0.680	0.634	0.582
	50	0.881	0.749	0.622	0.505	0.398	0.303	0.219	0.146	0.084	0.031
		0.062	0.117	0.160	0.192	0.214	0.228	0.235	0.237	0.234	0.229
	100	0.930	0.847	0.761	0.677	0.597	0.523	0.455	0.393	0.335	0.282
		0.032	0.067	0.100	0.130	0.155	0.173	0.188	0.200	0.209	0.216
	200	0.954	0.895	0.833	0.771	0.711	0.653	0.598	0.547	0.499	0.454
		0.019	0.041	0.063	0.084	0.103	0.120	0.136	0.149	0.161	0.171
	400	0.964	0.918	0.867	0.817	0.767	0.719	0.673	0.629	0.587	0.548
		0.011	0.025	0.040	0.054	0.068	0.080	0.092	0.103	0.113	0.123
	0.30		0.981	0.953	0.920	0.886	0.850	0.813	0.776	0.738	0.698
50		0.894	0.771	0.650	0.535	0.431	0.336	0.251	0.176	0.110	0.051
		0.059	0.113	0.159	0.192	0.213	0.226	0.231	0.232	0.228	0.223
100		0.939	0.862	0.781	0.701	0.623	0.550	0.481	0.417	0.358	0.304
		0.029	0.061	0.093	0.121	0.146	0.165	0.182	0.196	0.208	0.218
200		0.961	0.910	0.853	0.795	0.738	0.681	0.627	0.575	0.526	0.480
		0.015	0.034	0.055	0.075	0.094	0.112	0.129	0.144	0.157	0.169
400		0.972	0.933	0.890	0.845	0.800	0.756	0.713	0.671	0.632	0.594
		0.010	0.022	0.036	0.051	0.064	0.078	0.090	0.102	0.113	0.123
0.35			0.983	0.967	0.943	0.916	0.888	0.859	0.830	0.799	0.767
	50	0.900	0.783	0.664	0.551	0.447	0.353	0.269	0.194	0.127	0.070
		0.053	0.106	0.153	0.187	0.211	0.227	0.234	0.236	0.234	0.228
	100	0.947	0.879	0.806	0.733	0.661	0.591	0.525	0.462	0.403	0.349
		0.027	0.059	0.090	0.119	0.144	0.165	0.183	0.198	0.210	0.219
	200	0.967	0.922	0.871	0.819	0.766	0.714	0.663	0.616	0.570	0.527
		0.014	0.032	0.052	0.071	0.089	0.106	0.122	0.135	0.148	0.159
	400	0.977	0.945	0.907	0.867	0.826	0.786	0.746	0.708	0.670	0.634
		0.008	0.020	0.033	0.047	0.060	0.074	0.086	0.098	0.109	0.119
	0.40		0.952	0.979	0.963	0.945	0.926	0.906	0.885	0.863	0.840
50		0.911	0.803	0.691	0.581	0.477	0.382	0.295	0.216	0.146	0.083
		0.046	0.095	0.141	0.176	0.201	0.217	0.227	0.232	0.232	0.230
100		0.889	0.819	0.746	0.674	0.605	0.538	0.476	0.418	0.363	0.406
		0.054	0.086	0.116	0.144	0.168	0.188	0.205	0.218	0.228	0.230
200		0.973	0.934	0.889	0.842	0.794	0.746	0.699	0.654	0.609	0.567
		0.012	0.029	0.047	0.066	0.085	0.102	0.119	0.135	0.149	0.162
400		0.982	0.954	0.921	0.886	0.850	0.813	0.776	0.740	0.706	0.672
		0.007	0.017	0.029	0.041	0.054	0.067	0.079	0.091	0.102	0.113
0.45			0.996	0.990	0.982	0.973	0.963	0.953	0.942	0.930	0.918
	50	0.916	0.811	0.700	0.590	0.486	0.389	0.301	0.220	0.149	0.085
		0.045	0.092	0.136	0.173	0.200	0.219	0.230	0.236	0.237	0.234
	100	0.899	0.834	0.765	0.696	0.628	0.563	0.501	0.442	0.387	0.365
		0.049	0.078	0.106	0.132	0.156	0.177	0.196	0.210	0.223	0.223
	200	0.977	0.943	0.904	0.861	0.817	0.772	0.728	0.685	0.643	0.603
		0.011	0.026	0.043	0.060	0.078	0.096	0.112	0.128	0.143	0.156
	400	0.985	0.963	0.935	0.905	0.874	0.842	0.810	0.778	0.746	0.716
		0.007	0.016	0.027	0.038	0.050	0.062	0.074	0.085	0.096	0.106

Quadre A5.30. Esperança i desviació estàndard de les autocorrelacions estimades.

Mitjana desconeguda. PGD: $(1-L)^d X_t = (1-0.9L)\varepsilon_t$

d	T	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	
0.00		-0.497	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	
	50	-0.472	-0.008	0.000	-0.003	-0.002	0.004	-0.004	0.005	0.001	-0.005	
		0.103	0.160	0.156	0.158	0.155	0.160	0.154	0.149	0.152	0.146	
	100	-0.479	-0.016	0.006	-0.002	-0.002	0.002	0.000	-0.002	0.003	0.000	
		0.073	0.124	0.120	0.117	0.116	0.120	0.118	0.116	0.112	0.108	
0.05	200	-0.490	-0.003	0.001	-0.002	0.003	-0.003	0.001	0.001	0.000	-0.001	
		0.051	0.087	0.086	0.084	0.083	0.083	0.082	0.083	0.087	0.084	
	400	-0.493	-0.003	0.002	-0.002	0.000	0.001	-0.001	0.000	0.001	-0.001	
		0.035	0.060	0.059	0.060	0.060	0.060	0.064	0.062	0.061	0.059	
	0.05		-0.484	-0.008	-0.002	-0.001	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
0.10	50	-0.461	-0.018	0.003	-0.002	-0.007	0.003	0.002	0.003	-0.008	0.004	
		0.101	0.165	0.161	0.157	0.152	0.152	0.153	0.152	0.147	0.147	
	100	-0.474	-0.010	0.003	-0.009	0.003	0.001	-0.004	0.000	0.003	-0.002	
		0.071	0.116	0.118	0.118	0.117	0.117	0.113	0.112	0.111	0.108	
	200	-0.477	-0.012	-0.001	-0.004	0.001	-0.003	0.003	-0.001	0.001	-0.003	
0.15		0.053	0.087	0.083	0.086	0.086	0.085	0.081	0.081	0.085	0.085	
	400	-0.480	-0.009	-0.002	-0.001	0.000	0.000	-0.001	0.001	-0.001	-0.002	
		0.036	0.060	0.059	0.060	0.062	0.060	0.059	0.059	0.061	0.061	
	0.10		-0.470	-0.016	-0.004	-0.002	-0.001	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
	50	-0.442	-0.031	0.007	-0.011	-0.002	0.003	0.001	-0.005	0.000	0.001	
0.20		0.103	0.164	0.157	0.157	0.160	0.151	0.144	0.145	0.147	0.143	
	100	-0.456	-0.021	-0.005	-0.004	0.002	-0.003	0.004	0.003	-0.009	0.002	
		0.075	0.117	0.115	0.113	0.110	0.112	0.114	0.110	0.110	0.113	
	200	-0.464	-0.018	-0.006	0.000	0.000	-0.006	0.005	-0.003	0.001	0.000	
		0.051	0.082	0.085	0.087	0.083	0.084	0.083	0.084	0.083	0.081	
0.25	400	-0.466	-0.020	-0.002	-0.001	-0.002	0.001	-0.001	0.000	0.000	-0.001	
		0.037	0.062	0.059	0.060	0.060	0.058	0.059	0.059	0.060	0.061	
	0.15		-0.455	-0.023	-0.006	-0.003	-0.001	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
	50	-0.430	-0.036	-0.004	-0.008	0.010	-0.007	-0.003	0.004	-0.006	-0.005	
		0.106	0.164	0.159	0.154	0.148	0.146	0.147	0.152	0.146	0.140	
0.30	100	-0.445	-0.021	-0.011	-0.005	-0.001	0.001	0.001	-0.006	0.004	-0.004	
		0.072	0.116	0.116	0.117	0.108	0.112	0.110	0.111	0.111	0.109	
	200	-0.448	-0.028	-0.003	-0.010	0.005	-0.003	-0.002	0.001	0.002	-0.002	
		0.053	0.082	0.082	0.080	0.082	0.081	0.084	0.085	0.082	0.079	
	400	-0.452	-0.025	-0.005	-0.003	-0.003	-0.003	0.004	-0.003	0.001	-0.001	
0.35		0.037	0.059	0.058	0.058	0.058	0.058	0.057	0.057	0.057	0.058	
	0.20		-0.439	-0.030	-0.008	-0.004	-0.002	-0.001	0.000	0.000	0.000	0.000
	50	-0.425	-0.029	-0.009	-0.002	-0.004	-0.005	0.004	-0.004	-0.004	0.004	
		0.108	0.161	0.158	0.153	0.153	0.155	0.148	0.144	0.140	0.144	
	100	-0.431	-0.031	-0.009	-0.007	0.005	-0.008	0.002	-0.001	-0.001	0.005	
0.40		0.073	0.113	0.115	0.115	0.110	0.115	0.112	0.109	0.108	0.110	
	200	-0.432	-0.033	-0.012	-0.002	-0.005	0.000	0.000	0.001	-0.001	0.000	
		0.055	0.088	0.085	0.080	0.080	0.080	0.077	0.081	0.078	0.079	
	400	-0.438	-0.029	-0.010	-0.003	-0.004	-0.002	0.002	-0.003	0.002	-0.001	
		0.037	0.059	0.057	0.057	0.059	0.059	0.057	0.057	0.057	0.059	

Quadre A5.31. Esperança i desviació estàndard de les autocorrelacions estimades.

Mitjana desconeguda. PGD: $(1-L)^d X_t = (1-0.9L) \varepsilon_t$

d	T	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	
0.25		-0.422	-0.037	-0.011	-0.005	-0.002	-0.001	0.000	0.000	0.000	0.000	
	50	-0.398	-0.051	-0.006	-0.008	0.001	-0.001	-0.009	0.005	-0.001	-0.005	
		0.105	0.156	0.157	0.154	0.149	0.151	0.145	0.144	0.141	0.146	
	100	-0.413	-0.041	-0.005	-0.011	-0.004	0.001	-0.003	-0.003	0.003	0.000	
		0.077	0.115	0.109	0.110	0.110	0.107	0.110	0.109	0.109	0.109	
	200	-0.414	-0.040	-0.014	-0.001	-0.004	-0.001	-0.002	0.000	0.001	-0.005	
		0.055	0.084	0.079	0.075	0.078	0.080	0.083	0.082	0.077	0.077	
	400	-0.418	-0.039	-0.011	-0.008	-0.001	-0.002	0.000	-0.004	0.004	-0.002	
		0.038	0.058	0.058	0.056	0.057	0.058	0.057	0.057	0.057	0.057	
	0.30		-0.404	-0.042	-0.013	-0.005	-0.002	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
		50	-0.383	-0.052	-0.014	-0.012	0.005	-0.005	-0.004	0.004	-0.006	0.002
			0.109	0.154	0.156	0.152	0.145	0.148	0.142	0.142	0.142	0.143
100		-0.397	-0.039	-0.018	-0.005	-0.005	-0.003	-0.002	0.000	0.000	0.001	
		0.076	0.113	0.109	0.114	0.112	0.107	0.107	0.108	0.110	0.110	
200		-0.400	-0.039	-0.018	-0.006	0.000	-0.002	-0.002	0.001	-0.005	0.003	
		0.055	0.083	0.081	0.082	0.078	0.078	0.077	0.080	0.077	0.079	
400		-0.402	-0.042	-0.017	-0.005	-0.001	0.000	-0.004	-0.001	0.003	-0.003	
		0.040	0.060	0.060	0.057	0.056	0.057	0.057	0.056	0.056	0.056	
0.35			-0.383	-0.046	-0.014	-0.005	-0.002	0.000	0.001	0.002	0.002	0.002
		50	-0.366	-0.051	-0.016	-0.008	-0.007	-0.013	0.014	-0.006	-0.006	-0.002
			0.110	0.148	0.149	0.148	0.148	0.146	0.145	0.141	0.143	0.143
	100	-0.378	-0.047	-0.017	-0.011	-0.003	0.000	-0.003	0.002	-0.001	-0.002	
		0.079	0.109	0.107	0.108	0.109	0.107	0.105	0.105	0.106	0.107	
	200	-0.377	-0.051	-0.016	-0.008	-0.004	-0.001	-0.004	-0.002	0.001	0.001	
		0.054	0.080	0.081	0.081	0.079	0.078	0.076	0.077	0.075	0.080	
	400	-0.384	-0.045	-0.018	-0.005	-0.005	0.000	-0.003	0.000	0.000	0.000	
		0.040	0.057	0.057	0.057	0.055	0.057	0.058	0.056	0.057	0.054	
	0.40		-0.358	-0.047	-0.013	-0.003	0.000	0.003	0.004	0.005	0.005	0.005
		50	-0.350	-0.052	-0.026	0.000	-0.009	-0.001	-0.003	-0.001	-0.006	0.001
			0.112	0.155	0.144	0.146	0.148	0.148	0.142	0.145	0.139	0.141
100		-0.358	-0.051	-0.019	-0.012	0.000	-0.009	-0.005	0.004	-0.001	0.004	
		0.079	0.107	0.109	0.111	0.110	0.108	0.106	0.104	0.106	0.106	
200		-0.358	-0.055	-0.017	-0.008	-0.005	-0.002	-0.002	0.003	0.001	-0.001	
		0.053	0.079	0.078	0.080	0.079	0.077	0.074	0.075	0.078	0.080	
400		-0.361	-0.051	-0.017	-0.008	-0.003	-0.001	-0.001	0.001	0.000	0.002	
		0.043	0.058	0.057	0.056	0.054	0.055	0.056	0.055	0.055	0.054	
0.45			-0.320	-0.038	-0.003	0.008	0.012	0.015	0.016	0.017	0.017	0.017
		50	-0.322	-0.059	-0.021	-0.015	-0.007	-0.004	-0.001	-0.008	0.006	-0.005
			0.117	0.147	0.146	0.147	0.147	0.147	0.144	0.141	0.135	0.132
	100	-0.334	-0.056	-0.018	-0.012	-0.008	-0.004	-0.001	-0.006	0.007	-0.002	
		0.082	0.111	0.110	0.103	0.103	0.106	0.105	0.105	0.104	0.105	
	200	-0.338	-0.057	-0.014	-0.011	-0.001	-0.004	0.000	-0.001	0.002	0.000	
		0.059	0.076	0.079	0.077	0.075	0.077	0.078	0.075	0.076	0.076	
	400	-0.339	-0.053	-0.018	-0.009	-0.002	0.002	-0.002	0.004	0.002	0.002	
		0.044	0.059	0.057	0.056	0.055	0.055	0.052	0.052	0.053	0.057	

Quadre A5.32. Esperança i desviació estàndard de les autocorrelacions estimades.

Mitjana desconeguda. PGD: $(1+0.5L)(1-L)^d X_t = \varepsilon_t$

d	T	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0.00		-0.500	0.250	-0.125	0.063	-0.031	0.016	-0.008	0.004	-0.002	0.001
	50	-0.473	0.215	-0.111	0.040	-0.033	0.009	-0.015	0.001	-0.008	-0.010
		0.126	0.152	0.156	0.162	0.158	0.163	0.160	0.157	0.158	0.154
	100	-0.481	0.220	-0.111	0.048	-0.031	0.010	-0.009	-0.002	-0.002	-0.003
		0.088	0.118	0.121	0.120	0.119	0.124	0.124	0.121	0.117	0.115
0.05	200	-0.491	0.239	-0.119	0.055	-0.028	0.009	-0.008	0.001	-0.003	-0.003
		0.063	0.082	0.086	0.086	0.086	0.085	0.084	0.086	0.089	0.087
	400	-0.496	0.243	-0.122	0.058	-0.031	0.014	-0.009	0.002	-0.003	-0.001
		0.042	0.056	0.060	0.062	0.063	0.064	0.067	0.066	0.065	0.062
		-0.467	0.250	0.114	0.065	-0.026	0.019	-0.004	0.006	0.001	0.003
0.10	50	-0.447	0.211	-0.099	0.043	-0.033	0.009	-0.011	-0.001	-0.014	-0.004
		0.128	0.155	0.162	0.160	0.157	0.156	0.156	0.154	0.152	0.151
	100	-0.457	0.232	-0.104	0.046	-0.024	0.011	-0.011	0.000	-0.003	-0.004
		0.091	0.108	0.119	0.122	0.120	0.120	0.117	0.115	0.113	0.108
	200	-0.460	0.238	-0.109	0.055	-0.023	0.012	-0.002	0.002	0.001	-0.002
0.15		0.066	0.081	0.084	0.088	0.088	0.088	0.084	0.084	0.087	0.087
	400	-0.463	0.245	-0.112	0.062	-0.027	0.017	-0.007	0.004	-0.001	-0.001
		0.045	0.055	0.059	0.062	0.063	0.063	0.062	0.062	0.064	0.063
		-0.428	0.253	-0.100	0.071	-0.018	0.024	0.001	0.011	0.005	0.007
	50	-0.404	0.206	-0.082	0.036	-0.024	0.006	-0.010	-0.009	-0.008	-0.006
0.20		0.135	0.154	0.155	0.158	0.157	0.153	0.146	0.147	0.145	0.142
	100	-0.419	0.231	-0.097	0.054	-0.019	0.012	-0.002	0.005	-0.009	0.002
		0.096	0.109	0.115	0.114	0.112	0.113	0.116	0.111	0.114	0.113
	200	-0.429	0.241	-0.102	0.061	-0.021	0.011	0.002	0.002	0.003	0.002
		0.067	0.078	0.086	0.089	0.086	0.086	0.086	0.087	0.085	0.085
0.25	400	-0.426	0.245	-0.097	0.067	-0.019	0.022	-0.002	0.008	0.003	0.003
		0.049	0.056	0.061	0.061	0.062	0.060	0.061	0.061	0.062	0.063
		-0.382	0.260	-0.079	0.081	-0.005	0.033	0.011	0.019	0.013	0.015
	50	-0.375	0.211	-0.078	0.042	-0.010	0.002	-0.009	-0.002	-0.011	-0.011
		0.143	0.149	0.159	0.151	0.147	0.146	0.147	0.148	0.143	0.140
0.30	100	-0.384	0.240	-0.088	0.060	-0.017	0.016	-0.001	-0.002	0.004	-0.005
		0.100	0.106	0.116	0.116	0.111	0.112	0.111	0.112	0.112	0.110
	200	-0.381	0.244	-0.078	0.063	-0.005	0.021	0.004	0.011	0.007	0.005
		0.076	0.074	0.083	0.080	0.082	0.083	0.084	0.084	0.083	0.079
	400	-0.385	0.252	-0.081	0.073	-0.010	0.025	0.009	0.011	0.010	0.007
0.35		0.054	0.053	0.059	0.058	0.059	0.058	0.058	0.058	0.058	0.060
		-0.324	0.274	-0.051	0.097	0.013	0.048	0.026	0.033	0.026	0.027
	50	-0.350	0.226	-0.075	0.055	-0.018	0.006	-0.005	-0.006	-0.010	-0.003
		0.150	0.146	0.157	0.152	0.151	0.153	0.145	0.140	0.137	0.138
	100	-0.344	0.244	-0.067	0.065	-0.001	0.017	0.006	0.008	0.001	0.007
0.40		0.106	0.102	0.115	0.112	0.112	0.115	0.112	0.109	0.108	0.110
	200	-0.334	0.255	-0.066	0.081	-0.004	0.033	0.011	0.019	0.010	0.011
		0.081	0.078	0.087	0.079	0.082	0.080	0.079	0.082	0.078	0.079
	400	-0.334	0.265	-0.061	0.088	0.003	0.038	0.019	0.021	0.020	0.015
		0.056	0.052	0.059	0.057	0.060	0.060	0.058	0.058	0.058	0.060

Quadre A5.33. Esperança i desviació estàndard de les autocorrelacions estimades.

Mitjana desconeguda. PGD: $(1+0.5L)(1-L)^d X_t = \varepsilon_t$

d	T	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	
0.25		-0.252	0.296	-0.012	0.123	0.042	0.073	0.050	0.056	0.048	0.048	
	50	-0.295	0.219	-0.054	0.053	-0.010	0.012	-0.012	0.001	-0.011	-0.011	
		0.151	0.144	0.155	0.151	0.147	0.149	0.142	0.139	0.138	0.139	
	100	-0.288	0.252	-0.040	0.074	0.004	0.031	0.009	0.013	0.011	0.007	
		0.119	0.104	0.114	0.109	0.111	0.105	0.109	0.106	0.111	0.108	
	200	-0.276	0.268	-0.038	0.098	0.014	0.046	0.022	0.027	0.022	0.017	
		0.087	0.075	0.084	0.077	0.080	0.080	0.084	0.083	0.079	0.079	
	400	-0.270	0.277	-0.028	0.101	0.026	0.052	0.033	0.033	0.034	0.027	
		0.064	0.053	0.062	0.058	0.060	0.059	0.058	0.059	0.058	0.059	
	0.30		-0.158	0.331	0.046	0.164	0.088	0.113	0.091	0.094	0.086	0.084
		50	-0.245	0.236	-0.034	0.063	0.008	0.017	-0.001	0.005	-0.010	-0.005
			0.163	0.141	0.156	0.147	0.144	0.146	0.139	0.142	0.138	0.138
100		-0.233	0.273	-0.024	0.096	0.017	0.041	0.019	0.023	0.015	0.013	
		0.122	0.103	0.115	0.114	0.114	0.109	0.108	0.108	0.109	0.108	
200		-0.213	0.293	-0.005	0.116	0.040	0.063	0.038	0.043	0.029	0.033	
		0.098	0.073	0.090	0.083	0.084	0.080	0.081	0.083	0.079	0.083	
400		-0.201	0.302	0.008	0.131	0.053	0.079	0.053	0.057	0.051	0.044	
		0.072	0.057	0.067	0.063	0.061	0.063	0.062	0.062	0.061	0.063	
0.35			-0.030	0.389	0.133	0.232	0.162	0.181	0.159	0.160	0.151	0.148
		50	-0.193	0.254	-0.014	0.076	0.010	0.017	0.019	0.001	-0.003	-0.010
			0.181	0.135	0.159	0.149	0.148	0.144	0.141	0.135	0.141	0.137
	100	-0.163	0.293	0.016	0.116	0.045	0.065	0.039	0.042	0.029	0.024	
		0.137	0.101	0.121	0.111	0.114	0.109	0.109	0.106	0.107	0.109	
	200	-0.132	0.314	0.041	0.142	0.068	0.087	0.061	0.063	0.054	0.052	
		0.105	0.076	0.095	0.089	0.089	0.089	0.086	0.086	0.085	0.084	
	400	-0.117	0.336	0.057	0.166	0.087	0.111	0.084	0.086	0.076	0.073	
		0.085	0.058	0.073	0.068	0.070	0.070	0.070	0.070	0.067	0.068	
	0.40		0.156	0.485	0.273	0.348	0.288	0.300	0.280	0.278	0.269	0.265
		50	-0.135	0.276	0.006	0.102	0.021	0.042	0.013	0.013	-0.003	-0.005
			0.189	0.144	0.159	0.153	0.148	0.147	0.140	0.141	0.135	0.136
100		-0.096	0.315	0.051	0.135	0.067	0.074	0.052	0.055	0.040	0.038	
		0.148	0.102	0.130	0.117	0.124	0.117	0.121	0.113	0.115	0.113	
200		-0.045	0.349	0.094	0.180	0.109	0.122	0.098	0.097	0.085	0.077	
		0.116	0.082	0.103	0.097	0.097	0.096	0.093	0.097	0.092	0.100	
400		-0.018	0.374	0.121	0.208	0.137	0.151	0.126	0.125	0.112	0.108	
		0.100	0.065	0.084	0.076	0.080	0.078	0.080	0.079	0.078	0.079	
0.45			0.452	0.655	0.515	0.560	0.518	0.524	0.509	0.506	0.498	0.494
		50	-0.058	0.295	0.048	0.110	0.045	0.047	0.027	0.011	0.010	-0.008
			0.204	0.142	0.166	0.152	0.155	0.148	0.142	0.143	0.131	0.133
	100	-0.009	0.347	0.099	0.167	0.095	0.101	0.078	0.066	0.062	0.047	
		0.165	0.109	0.137	0.118	0.126	0.119	0.122	0.121	0.116	0.119	
	200	0.050	0.392	0.160	0.225	0.161	0.163	0.139	0.131	0.120	0.110	
		0.137	0.085	0.117	0.101	0.108	0.106	0.108	0.105	0.105	0.103	
	400	0.099	0.430	0.201	0.271	0.204	0.213	0.185	0.183	0.167	0.160	
		0.115	0.072	0.099	0.088	0.094	0.091	0.092	0.093	0.092	0.096	

Quadre A5.34. Esperança i desviació estàndard de les autocorrelacions estimades.

Mitjana desconeguda. PGD: $(1-L)^d X_t = (1+0.5L)\varepsilon_t$

d	T	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0.00		0.400	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
	50	0.358	-0.037	-0.037	-0.042	-0.039	-0.033	-0.028	-0.026	-0.031	-0.038
		0.112	0.144	0.145	0.150	0.144	0.148	0.144	0.142	0.140	0.136
	100	0.376	-0.028	-0.022	-0.023	-0.023	-0.019	-0.017	-0.016	-0.013	-0.014
		0.077	0.110	0.105	0.107	0.107	0.111	0.110	0.107	0.106	0.104
0.05	200	0.390	-0.008	-0.007	-0.009	-0.011	-0.015	-0.013	-0.011	-0.012	-0.012
		0.056	0.080	0.079	0.079	0.077	0.078	0.080	0.079	0.080	0.077
	400	0.393	-0.008	-0.006	-0.007	-0.006	-0.005	-0.008	-0.009	-0.008	-0.009
		0.041	0.059	0.058	0.057	0.056	0.057	0.059	0.058	0.058	0.059
	0.05	0.445	0.055	0.036	0.027	0.022	0.018	0.016	0.014	0.013	0.012
0.10	50	0.388	-0.003	-0.012	-0.022	-0.030	-0.028	-0.025	-0.031	-0.037	-0.035
		0.113	0.154	0.152	0.153	0.147	0.147	0.137	0.141	0.144	0.144
	100	0.418	0.030	0.011	-0.004	-0.007	-0.011	-0.017	-0.016	-0.016	-0.019
		0.080	0.117	0.117	0.117	0.113	0.111	0.110	0.107	0.109	0.106
	200	0.432	0.039	0.020	0.010	0.007	0.006	0.006	0.003	0.000	-0.001
0.15		0.056	0.084	0.084	0.083	0.083	0.087	0.082	0.080	0.079	0.080
	400	0.441	0.050	0.030	0.019	0.013	0.009	0.005	0.003	0.001	0.001
		0.039	0.059	0.060	0.058	0.060	0.061	0.060	0.058	0.058	0.059
	0.10	0.493	0.117	0.080	0.062	0.052	0.045	0.039	0.035	0.032	0.030
	50	0.434	0.048	0.016	-0.011	-0.021	-0.023	-0.029	-0.033	-0.030	-0.029
0.20		0.119	0.162	0.156	0.157	0.152	0.147	0.145	0.144	0.143	0.140
	100	0.461	0.074	0.038	0.023	0.016	0.010	0.008	-0.001	-0.011	-0.010
		0.080	0.121	0.124	0.121	0.117	0.116	0.115	0.112	0.111	0.111
	200	0.469	0.083	0.048	0.032	0.020	0.013	0.013	0.011	0.009	0.007
		0.056	0.086	0.088	0.088	0.086	0.088	0.087	0.087	0.084	0.082
0.25	400	0.483	0.104	0.069	0.052	0.041	0.033	0.026	0.021	0.018	0.015
		0.038	0.061	0.062	0.064	0.065	0.060	0.059	0.061	0.063	0.063
	0.15	0.543	0.187	0.135	0.109	0.092	0.081	0.073	0.066	0.061	0.056
	50	0.468	0.085	0.038	0.018	0.006	-0.010	-0.019	-0.023	-0.033	-0.034
		0.111	0.167	0.170	0.165	0.159	0.157	0.152	0.151	0.148	0.148
0.30	100	0.502	0.127	0.069	0.042	0.029	0.018	0.008	0.001	0.000	-0.002
		0.081	0.130	0.127	0.128	0.127	0.126	0.119	0.119	0.116	0.115
	200	0.521	0.153	0.100	0.073	0.059	0.046	0.037	0.033	0.028	0.020
		0.057	0.093	0.094	0.090	0.091	0.092	0.092	0.092	0.093	0.090
	400	0.528	0.164	0.112	0.084	0.066	0.056	0.050	0.042	0.037	0.034
0.35		0.042	0.068	0.070	0.070	0.069	0.068	0.067	0.068	0.067	0.067
	0.20	0.597	0.266	0.201	0.168	0.146	0.131	0.119	0.110	0.102	0.096
	50	0.500	0.132	0.070	0.035	0.009	-0.009	-0.017	-0.025	-0.027	-0.027
		0.113	0.170	0.172	0.170	0.164	0.164	0.161	0.153	0.146	0.147
	100	0.539	0.178	0.114	0.081	0.060	0.040	0.029	0.020	0.012	0.004
0.40		0.081	0.131	0.133	0.134	0.132	0.133	0.128	0.125	0.123	0.121
	200	0.565	0.212	0.143	0.109	0.086	0.073	0.064	0.054	0.044	0.037
		0.055	0.093	0.098	0.097	0.098	0.099	0.099	0.101	0.096	0.097
	400	0.579	0.236	0.169	0.133	0.110	0.096	0.086	0.076	0.068	0.060
		0.040	0.068	0.071	0.071	0.073	0.075	0.074	0.073	0.074	0.074

Quadre A5.35. Esperança i desviació estàndard de les autocorrelacions estimades.

Mitjana desconeguda. PGD: $(1-L)^d X_t = (1+0.5L)\varepsilon_t$

d	T	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0.25		0.654	0.355	0.282	0.243	0.216	0.197	0.182	0.170	0.160	0.152
	50	0.538	0.169	0.093	0.052	0.026	0.005	-0.012	-0.021	-0.032	-0.041
		0.108	0.175	0.176	0.173	0.167	0.168	0.159	0.152	0.145	0.149
	100	0.584	0.241	0.160	0.111	0.080	0.061	0.046	0.036	0.029	0.021
		0.080	0.136	0.142	0.145	0.144	0.139	0.131	0.130	0.133	0.131
	200	0.611	0.280	0.201	0.160	0.131	0.110	0.093	0.080	0.070	0.062
		0.058	0.101	0.108	0.109	0.108	0.107	0.108	0.108	0.108	0.108
	400	0.626	0.305	0.227	0.184	0.157	0.137	0.121	0.110	0.101	0.092
		0.043	0.076	0.082	0.084	0.085	0.085	0.084	0.084	0.085	0.084
0.30		0.715	0.455	0.380	0.336	0.307	0.285	0.268	0.254	0.242	0.232
	50	0.582	0.230	0.137	0.087	0.054	0.027	0.007	-0.007	-0.021	-0.033
		0.109	0.179	0.187	0.182	0.175	0.175	0.169	0.166	0.160	0.151
	100	0.628	0.303	0.210	0.156	0.119	0.091	0.072	0.057	0.044	0.032
		0.076	0.136	0.147	0.152	0.152	0.150	0.145	0.143	0.141	0.138
	200	0.659	0.353	0.263	0.212	0.178	0.151	0.129	0.110	0.096	0.085
		0.057	0.102	0.113	0.119	0.119	0.117	0.117	0.120	0.117	0.115
	400	0.675	0.381	0.297	0.251	0.220	0.194	0.172	0.157	0.144	0.132
		0.044	0.082	0.091	0.094	0.094	0.095	0.097	0.098	0.098	0.099
0.35		0.779	0.568	0.496	0.454	0.423	0.401	0.382	0.367	0.354	0.343
	50	0.614	0.276	0.168	0.105	0.062	0.037	0.024	0.003	-0.016	-0.025
		0.109	0.183	0.197	0.198	0.192	0.182	0.173	0.166	0.164	0.157
	100	0.670	0.367	0.267	0.208	0.170	0.142	0.117	0.096	0.077	0.062
		0.077	0.139	0.155	0.161	0.160	0.159	0.157	0.154	0.153	0.153
	200	0.702	0.421	0.326	0.269	0.228	0.197	0.172	0.153	0.139	0.127
		0.056	0.107	0.123	0.132	0.134	0.136	0.135	0.134	0.132	0.129
	400	0.723	0.461	0.372	0.319	0.281	0.252	0.229	0.210	0.195	0.183
		0.044	0.085	0.097	0.104	0.108	0.110	0.112	0.112	0.112	0.111
0.40		0.848	0.695	0.636	0.599	0.572	0.551	0.535	0.520	0.508	0.497
	50	0.650	0.330	0.215	0.150	0.103	0.069	0.040	0.016	-0.004	-0.020
		0.106	0.188	0.205	0.204	0.193	0.185	0.179	0.178	0.170	0.164
	100	0.704	0.420	0.312	0.243	0.195	0.157	0.132	0.114	0.096	0.079
		0.075	0.141	0.161	0.169	0.173	0.174	0.174	0.170	0.168	0.167
	200	0.744	0.492	0.395	0.335	0.291	0.259	0.233	0.211	0.191	0.173
		0.056	0.110	0.128	0.137	0.141	0.143	0.145	0.147	0.148	0.149
	400	0.767	0.535	0.446	0.389	0.349	0.317	0.292	0.270	0.252	0.236
		0.043	0.085	0.100	0.108	0.113	0.117	0.120	0.122	0.124	0.125
0.45		0.921	0.838	0.802	0.779	0.761	0.747	0.736	0.726	0.717	0.710
	50	0.686	0.382	0.257	0.177	0.123	0.083	0.050	0.022	0.000	-0.020
		0.102	0.185	0.204	0.208	0.204	0.195	0.191	0.187	0.178	0.172
	100	0.742	0.482	0.368	0.293	0.238	0.197	0.164	0.138	0.117	0.096
		0.073	0.139	0.158	0.166	0.171	0.172	0.174	0.175	0.172	0.170
	200	0.784	0.562	0.468	0.404	0.357	0.318	0.286	0.260	0.238	0.218
		0.054	0.107	0.126	0.137	0.144	0.149	0.153	0.156	0.157	0.157
	400	0.811	0.615	0.530	0.473	0.432	0.399	0.371	0.348	0.327	0.307
		0.042	0.084	0.102	0.112	0.119	0.123	0.128	0.132	0.134	0.138

Quadre A5.36. Esperança i desviació estàndard de les autocorrelacions estimades.

Mitjana desconeguda. PGD: $(1+0.9L)(1-L)^d X_t = \varepsilon_t$

d	T	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0.00		-0.900	0.810	-0.729	0.656	-0.590	0.531	-0.478	0.430	-0.387	0.349
	50	-0.847	0.718	-0.614	0.520	-0.447	0.378	-0.325	0.274	-0.234	0.195
		0.081	0.134	0.169	0.200	0.217	0.235	0.245	0.252	0.256	0.258
	100	-0.870	0.756	-0.661	0.577	-0.506	0.441	-0.386	0.337	-0.295	0.258
		0.054	0.096	0.125	0.149	0.168	0.184	0.196	0.204	0.209	0.212
	200	-0.885	0.783	-0.694	0.614	-0.545	0.482	-0.429	0.379	-0.337	0.298
	0.034	0.061	0.083	0.100	0.115	0.126	0.135	0.144	0.151	0.157	
0.05	400	-0.893	0.798	-0.713	0.637	-0.569	0.509	-0.455	0.406	-0.364	0.325
		0.022	0.040	0.056	0.070	0.082	0.093	0.102	0.109	0.115	0.119
		-0.888	0.807	-0.720	0.654	-0.582	0.531	-0.470	0.432	-0.377	0.359
	50	-0.839	0.713	-0.607	0.516	-0.444	0.376	-0.322	0.273	-0.237	0.199
		0.084	0.137	0.176	0.205	0.223	0.237	0.246	0.252	0.253	0.255
	100	-0.864	0.757	-0.659	0.575	-0.503	0.440	-0.386	0.335	-0.294	0.256
	0.055	0.092	0.124	0.149	0.167	0.180	0.189	0.196	0.200	0.202	
0.10	200	-0.877	0.779	-0.688	0.609	-0.539	0.478	-0.423	0.375	-0.332	0.295
		0.036	0.062	0.085	0.104	0.118	0.130	0.139	0.146	0.153	0.158
	400	-0.885	0.794	-0.707	0.632	-0.564	0.504	-0.449	0.401	-0.357	0.318
		0.024	0.042	0.059	0.073	0.084	0.093	0.101	0.107	0.113	0.117
		-0.871	0.805	-0.706	0.653	-0.570	0.532	-0.458	0.436	-0.363	0.372
	50	-0.825	0.704	-0.594	0.507	-0.435	0.370	-0.318	0.267	-0.233	0.197
	0.089	0.139	0.176	0.201	0.218	0.231	0.236	0.242	0.242	0.243	
0.15	100	-0.855	0.754	-0.656	0.576	-0.502	0.440	-0.385	0.339	-0.299	0.261
		0.058	0.093	0.124	0.146	0.164	0.179	0.190	0.197	0.204	0.207
	200	-0.870	0.778	-0.685	0.609	-0.538	0.477	-0.422	0.375	-0.333	0.297
		0.039	0.064	0.088	0.106	0.121	0.133	0.144	0.153	0.159	0.164
	400	-0.876	0.790	-0.701	0.630	-0.560	0.504	-0.448	0.402	-0.358	0.322
		0.027	0.044	0.061	0.074	0.085	0.093	0.102	0.109	0.114	0.119
0.20		-0.845	0.804	-0.684	0.654	-0.550	0.535	-0.439	0.442	-0.341	0.389
	50	-0.813	0.700	-0.587	0.502	-0.425	0.363	-0.313	0.267	-0.232	0.196
		0.100	0.142	0.182	0.202	0.222	0.234	0.240	0.245	0.247	0.248
	100	-0.846	0.754	-0.652	0.574	-0.499	0.439	-0.381	0.333	-0.291	0.256
		0.060	0.087	0.120	0.141	0.159	0.171	0.183	0.191	0.196	0.200
	200	-0.856	0.772	-0.674	0.603	-0.529	0.474	-0.417	0.373	-0.328	0.293
	0.043	0.063	0.088	0.103	0.119	0.129	0.139	0.147	0.153	0.157	
0.20	400	-0.864	0.786	-0.691	0.624	-0.551	0.496	-0.437	0.394	-0.348	0.313
		0.029	0.043	0.059	0.070	0.081	0.090	0.098	0.104	0.110	0.115
		-0.805	0.804	-0.650	0.657	-0.519	0.541	-0.409	0.453	-0.308	0.412
	50	-0.810	0.708	-0.593	0.513	-0.436	0.373	-0.321	0.275	-0.241	0.205
		0.101	0.138	0.180	0.202	0.221	0.234	0.238	0.241	0.240	0.243
	100	-0.834	0.750	-0.642	0.570	-0.491	0.436	-0.379	0.337	-0.295	0.262
	0.065	0.091	0.125	0.143	0.162	0.175	0.186	0.193	0.199	0.205	
0.20	200	-0.845	0.773	-0.671	0.608	-0.530	0.478	-0.417	0.376	-0.329	0.295
		0.047	0.064	0.089	0.101	0.117	0.126	0.137	0.143	0.151	0.154
	400	-0.852	0.785	-0.683	0.624	-0.545	0.495	-0.433	0.393	-0.343	0.312
		0.031	0.043	0.061	0.071	0.084	0.092	0.101	0.106	0.112	0.116

Quadre A5.37. Esperança i desviació estàndard de les autocorrelacions estimades.

Mitjana desconeguda. PGD: $(1+0.9L)(1-L)^d X_t = \varepsilon_t$

d	T	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0.25		-0.741	0.807	-0.593	0.664	-0.467	0.554	-0.359	0.472	-0.258	0.443
	50	-0.791	0.701	-0.584	0.510	-0.432	0.373	-0.323	0.277	-0.241	0.204
		0.106	0.136	0.177	0.195	0.216	0.229	0.235	0.239	0.243	0.247
	100	-0.814	0.744	-0.626	0.564	-0.481	0.431	-0.369	0.328	-0.281	0.250
		0.077	0.092	0.130	0.142	0.166	0.173	0.189	0.195	0.205	0.209
	200	-0.827	0.769	-0.657	0.604	-0.519	0.473	-0.407	0.370	-0.318	0.289
		0.050	0.061	0.089	0.098	0.117	0.126	0.139	0.145	0.152	0.156
	400	-0.832	0.780	-0.668	0.619	-0.533	0.492	-0.425	0.392	-0.338	0.313
		0.036	0.043	0.063	0.070	0.083	0.088	0.097	0.101	0.108	0.110
0.30		-0.635	0.814	-0.499	0.680	-0.380	0.577	-0.277	0.504	-0.177	0.487
	50	-0.767	0.692	-0.561	0.493	-0.407	0.356	-0.300	0.258	-0.223	0.188
		0.125	0.145	0.193	0.209	0.232	0.238	0.247	0.251	0.252	0.253
	100	-0.799	0.748	-0.623	0.570	-0.481	0.436	-0.371	0.335	-0.286	0.258
		0.081	0.092	0.132	0.144	0.167	0.174	0.186	0.191	0.196	0.197
	200	-0.807	0.769	-0.643	0.602	-0.507	0.473	-0.400	0.371	-0.315	0.291
		0.058	0.061	0.092	0.099	0.118	0.123	0.137	0.141	0.150	0.153
	400	-0.811	0.779	-0.653	0.619	-0.521	0.493	-0.415	0.392	-0.328	0.311
		0.042	0.045	0.068	0.072	0.087	0.090	0.100	0.102	0.110	0.111
0.35		-0.460	0.830	-0.340	0.710	-0.235	0.619	-0.141	0.558	-0.045	0.553
	50	-0.745	0.691	-0.547	0.489	-0.398	0.346	-0.286	0.248	-0.212	0.178
		0.137	0.137	0.194	0.204	0.227	0.233	0.241	0.241	0.244	0.244
	100	-0.770	0.741	-0.599	0.563	-0.462	0.432	-0.357	0.332	-0.276	0.254
		0.094	0.094	0.140	0.142	0.168	0.170	0.185	0.187	0.196	0.198
	200	-0.777	0.764	-0.620	0.598	-0.490	0.471	-0.388	0.372	-0.306	0.295
		0.069	0.064	0.101	0.102	0.126	0.127	0.142	0.142	0.153	0.151
	400	-0.784	0.781	-0.635	0.623	-0.509	0.498	-0.406	0.399	-0.324	0.321
		0.048	0.042	0.070	0.069	0.089	0.090	0.102	0.103	0.110	0.111
0.40		-0.168	0.861	-0.074	0.764	0.010	0.693	0.087	0.647	0.169	0.651
	50	-0.727	0.698	-0.547	0.505	-0.406	0.366	-0.301	0.265	-0.224	0.190
		0.146	0.136	0.191	0.197	0.221	0.228	0.238	0.242	0.245	0.248
	100	-0.741	0.739	-0.578	0.561	-0.445	0.428	-0.344	0.329	-0.264	0.251
		0.109	0.090	0.148	0.138	0.175	0.167	0.191	0.185	0.200	0.196
	200	-0.741	0.762	-0.592	0.598	-0.467	0.471	-0.368	0.373	-0.289	0.294
		0.078	0.063	0.106	0.100	0.128	0.124	0.143	0.141	0.155	0.155
	400	-0.741	0.777	-0.598	0.619	-0.478	0.496	-0.380	0.398	-0.301	0.320
		0.062	0.042	0.078	0.066	0.093	0.085	0.103	0.097	0.111	0.105
0.45		0.305	0.915	0.359	0.857	0.409	0.815	0.456	0.790	0.508	0.798
	50	-0.684	0.686	-0.507	0.484	-0.372	0.344	-0.271	0.242	-0.199	0.170
		0.161	0.133	0.201	0.193	0.222	0.220	0.230	0.229	0.230	0.233
	100	-0.699	0.736	-0.547	0.557	-0.423	0.424	-0.324	0.322	-0.248	0.247
		0.125	0.091	0.156	0.136	0.175	0.166	0.191	0.185	0.197	0.193
	200	-0.694	0.763	-0.552	0.598	-0.435	0.473	-0.342	0.376	-0.269	0.301
		0.100	0.059	0.119	0.092	0.133	0.115	0.144	0.129	0.151	0.139
	400	-0.685	0.779	-0.552	0.623	-0.440	0.503	-0.349	0.407	-0.274	0.330
		0.081	0.043	0.094	0.068	0.104	0.085	0.112	0.098	0.118	0.109

Quadre A5.38. Esperança i desviació estàndard de les autocorrelacions estimades.

Mitjana desconeguda. PGD: $(1-L)^d X_t = (1+0.9L)\varepsilon_t$

d	T	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0.00		0.497	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
	50	0.456	-0.045	-0.042	-0.046	-0.043	-0.037	-0.031	-0.030	-0.035	-0.041
		0.099	0.155	0.154	0.158	0.153	0.157	0.153	0.151	0.148	0.145
	100	0.472	-0.031	-0.026	-0.026	-0.025	-0.021	-0.019	-0.017	-0.015	-0.015
		0.070	0.116	0.110	0.113	0.113	0.118	0.117	0.114	0.112	0.111
0.05	200	0.488	-0.009	-0.008	-0.010	-0.013	-0.016	-0.015	-0.012	-0.013	-0.014
		0.050	0.085	0.084	0.084	0.082	0.083	0.085	0.084	0.084	0.082
	400	0.490	-0.009	-0.007	-0.007	-0.007	-0.006	-0.008	-0.010	-0.010	-0.010
		0.037	0.063	0.062	0.060	0.060	0.061	0.062	0.062	0.062	0.062
		0.536	0.061	0.039	0.030	0.024	0.020	0.018	0.016	0.014	0.013
0.10	50	0.481	-0.005	-0.013	-0.024	-0.033	-0.031	-0.028	-0.035	-0.041	-0.040
		0.101	0.164	0.162	0.162	0.156	0.156	0.146	0.150	0.152	0.151
	100	0.510	0.032	0.011	-0.004	-0.008	-0.012	-0.018	-0.018	-0.018	-0.021
		0.072	0.124	0.124	0.124	0.120	0.118	0.116	0.115	0.115	0.113
	200	0.523	0.044	0.022	0.012	0.008	0.006	0.006	0.003	0.000	-0.001
0.15		0.051	0.089	0.089	0.088	0.088	0.092	0.088	0.085	0.085	0.084
	400	0.531	0.056	0.033	0.021	0.014	0.010	0.006	0.003	0.001	0.002
		0.035	0.062	0.064	0.062	0.064	0.065	0.064	0.061	0.062	0.062
		0.577	0.129	0.087	0.068	0.056	0.049	0.043	0.038	0.035	0.032
	50	0.518	0.051	0.016	-0.011	-0.024	-0.026	-0.032	-0.035	-0.033	-0.031
0.20		0.106	0.172	0.164	0.166	0.161	0.155	0.154	0.151	0.150	0.148
	100	0.545	0.081	0.042	0.025	0.016	0.011	0.008	-0.001	-0.012	-0.011
		0.071	0.128	0.131	0.129	0.125	0.123	0.121	0.119	0.117	0.118
	200	0.554	0.092	0.053	0.035	0.022	0.014	0.014	0.013	0.010	0.008
		0.050	0.090	0.094	0.093	0.091	0.094	0.093	0.092	0.090	0.087
0.25	400	0.567	0.114	0.075	0.057	0.044	0.036	0.029	0.023	0.019	0.016
		0.034	0.064	0.066	0.068	0.068	0.064	0.063	0.065	0.067	0.066
		0.619	0.203	0.145	0.117	0.100	0.087	0.078	0.071	0.065	0.061
	50	0.548	0.092	0.041	0.019	0.006	-0.011	-0.020	-0.025	-0.036	-0.036
		0.099	0.177	0.179	0.174	0.167	0.165	0.160	0.159	0.155	0.155
0.30	100	0.581	0.138	0.075	0.046	0.031	0.019	0.008	0.001	-0.001	-0.001
		0.073	0.136	0.133	0.134	0.134	0.132	0.126	0.125	0.123	0.121
	200	0.598	0.167	0.108	0.079	0.063	0.050	0.040	0.036	0.030	0.022
		0.050	0.097	0.098	0.095	0.096	0.097	0.097	0.097	0.098	0.095
	400	0.605	0.178	0.121	0.091	0.071	0.060	0.053	0.046	0.040	0.036
0.35		0.037	0.071	0.074	0.074	0.073	0.072	0.071	0.071	0.071	0.071
		0.665	0.285	0.215	0.179	0.156	0.139	0.127	0.117	0.109	0.102
	50	0.576	0.142	0.075	0.037	0.009	-0.010	-0.019	-0.027	-0.030	-0.030
		0.100	0.177	0.181	0.178	0.173	0.172	0.169	0.161	0.154	0.153
	100	0.611	0.192	0.122	0.087	0.063	0.044	0.031	0.021	0.013	0.003
0.40		0.072	0.135	0.140	0.140	0.139	0.139	0.135	0.131	0.130	0.127
	200	0.635	0.228	0.154	0.116	0.092	0.078	0.068	0.057	0.047	0.040
		0.049	0.096	0.102	0.102	0.103	0.104	0.105	0.105	0.101	0.102
	400	0.648	0.254	0.181	0.142	0.118	0.103	0.091	0.081	0.072	0.064
		0.035	0.070	0.074	0.075	0.077	0.079	0.078	0.077	0.078	0.078

Quadre A5.39. Esperança i desviació estàndard de les autocorrelacions estimades.

Mitjana desconeguda. PGD: $(1-L)^d X_t = (1+0.9L)\varepsilon_t$

d	T	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0.25		0.713	0.376	0.298	0.256	0.228	0.208	0.192	0.179	0.169	0.160
	50	0.605	0.182	0.099	0.056	0.027	0.005	-0.013	-0.023	-0.034	-0.044
		0.098	0.181	0.185	0.181	0.175	0.175	0.167	0.159	0.152	0.156
	100	0.649	0.257	0.170	0.118	0.085	0.064	0.048	0.038	0.031	0.022
		0.071	0.140	0.148	0.152	0.151	0.145	0.138	0.136	0.138	0.137
	200	0.674	0.299	0.214	0.170	0.139	0.116	0.098	0.085	0.074	0.066
		0.051	0.103	0.112	0.114	0.113	0.112	0.113	0.113	0.113	0.113
	400	0.687	0.324	0.240	0.195	0.166	0.145	0.128	0.116	0.107	0.098
		0.038	0.077	0.085	0.088	0.089	0.088	0.087	0.088	0.089	0.088
0.30		0.763	0.477	0.397	0.351	0.320	0.297	0.279	0.265	0.252	0.242
	50	0.643	0.244	0.144	0.091	0.056	0.028	0.007	-0.009	-0.023	-0.035
		0.097	0.185	0.194	0.190	0.183	0.182	0.177	0.173	0.167	0.158
	100	0.686	0.321	0.221	0.164	0.125	0.096	0.075	0.060	0.046	0.033
		0.068	0.138	0.152	0.158	0.159	0.156	0.151	0.148	0.146	0.144
	200	0.714	0.373	0.277	0.223	0.187	0.159	0.135	0.115	0.100	0.089
		0.050	0.103	0.116	0.123	0.123	0.121	0.122	0.124	0.122	0.120
	400	0.728	0.402	0.312	0.263	0.230	0.203	0.181	0.164	0.151	0.139
		0.039	0.083	0.093	0.096	0.097	0.098	0.100	0.101	0.102	0.103
0.35		0.817	0.588	0.513	0.469	0.437	0.414	0.395	0.379	0.366	0.354
	50	0.669	0.291	0.176	0.109	0.064	0.039	0.023	0.002	-0.017	-0.027
		0.096	0.188	0.203	0.205	0.199	0.189	0.180	0.173	0.170	0.163
	100	0.720	0.386	0.279	0.217	0.177	0.148	0.122	0.100	0.080	0.064
		0.067	0.140	0.159	0.166	0.166	0.164	0.163	0.160	0.159	0.158
	200	0.749	0.441	0.340	0.280	0.238	0.205	0.179	0.159	0.145	0.132
		0.049	0.107	0.125	0.135	0.138	0.140	0.140	0.138	0.136	0.133
	400	0.768	0.481	0.388	0.332	0.292	0.262	0.238	0.218	0.203	0.190
		0.039	0.084	0.098	0.106	0.111	0.113	0.115	0.115	0.115	0.114
0.40		0.874	0.711	0.650	0.612	0.585	0.564	0.546	0.532	0.519	0.508
	50	0.699	0.346	0.225	0.156	0.107	0.071	0.041	0.015	-0.004	-0.021
		0.094	0.190	0.211	0.210	0.200	0.191	0.185	0.184	0.176	0.170
	100	0.749	0.438	0.324	0.253	0.202	0.163	0.136	0.117	0.099	0.081
		0.066	0.141	0.164	0.174	0.177	0.179	0.179	0.175	0.173	0.172
	200	0.784	0.511	0.410	0.347	0.302	0.268	0.241	0.218	0.197	0.178
		0.049	0.109	0.129	0.139	0.144	0.146	0.149	0.150	0.151	0.152
	400	0.805	0.555	0.461	0.402	0.360	0.327	0.301	0.279	0.260	0.243
		0.038	0.084	0.100	0.109	0.115	0.119	0.122	0.124	0.126	0.127
0.45		0.935	0.848	0.811	0.787	0.769	0.755	0.744	0.734	0.725	0.717
	50	0.729	0.398	0.266	0.183	0.127	0.085	0.051	0.022	-0.001	-0.022
		0.091	0.187	0.209	0.214	0.209	0.201	0.196	0.192	0.184	0.177
	100	0.780	0.499	0.381	0.302	0.245	0.203	0.169	0.143	0.120	0.099
		0.064	0.138	0.160	0.169	0.174	0.176	0.178	0.179	0.177	0.174
	200	0.817	0.580	0.481	0.416	0.366	0.326	0.294	0.267	0.244	0.224
		0.047	0.106	0.126	0.138	0.145	0.151	0.156	0.159	0.160	0.160
	400	0.842	0.632	0.544	0.485	0.443	0.409	0.380	0.356	0.335	0.315
		0.036	0.083	0.101	0.113	0.120	0.125	0.129	0.133	0.136	0.139

Capítol 6

ESTIMACIÓ PARAMÈTRICA EN SÈRIES AMB MEMÒRIA LLARGA

6.1. Introducció

A continuació, tant aquest capítol com el següent estan dedicats a l'estimació de models per sèries que tenen memòria llarga. Tot i que s'ha definit el concepte de memòria llarga en un entorn més general, és innegable que es tracta d'un concepte molt associat al models paramètrics presentats al llarg del capítol 4 que permeten reproduir aquesta característica.

En aquest sentit, és possible concebre dos tipus d'estimadors per les sèries de memòria llarga. D'una banda, estimadors associats amb una modelització completa i específica de les autocovariàncies de la sèrie, que notarem sota el nom d'estimadors paramètrics, i d'altra banda, estimadors que es basen sols en algun supòsit sobre el comportament d'aquestes autocovariàncies en el llarg termini, estimadors que notarem sota el nom d'estimadors no paramètrics.

De totes maneres, aquesta distinció es torna complicada quan es constata que per a l'estimació dels models del capítol 4, s'han proposat tant estimadors paramètrics com de no paramètrics. Atès que es poden establir diferents classificacions dels estimadors per sèries amb memòria llarga, que a més, no sempre porten a agrupacions equivalents, cal decantar-se per un cert tipus de classificació.

Donat que l'objectiu de la tesi es centra en el concepte de memòria, s'ha prioritzat una distinció basada en el tipus d'estimació, és a dir, entre estimació paramètrica o no paramètrica enlloc d'una distinció que prioritzi el tipus de model usat. En tot cas, cal destacar que a la literatura economètrica és més habitual trobar-se amb aquest segon tipus de classificacions ja que és habitual optar des d'un començament per un o altre tipus de model.

Òbviament cada un dels models presentats anteriorment, contenen un paràmetre que està associat amb el grau de memòria, de manera que si es disposa d'una estimació del model, s'obté

una estimació d'aquesta memòria. En tot cas, s'ha de destacar també que aquests mètodes són majoritàriament vàlids sota la hipòtesi d'estacionarietat. Per tant, serveixen per distingir si una determinada sèrie pertany a la categoria de memòria curta o bé de memòria llarga, però no permet distingir la memòria permanent de la memòria transitòria.

En tot cas, per aquesta discriminació es disposa d'altres instruments com els presentat al capítol 5. La identificació i estimació de models de memòria llarga com els models ARFIMA o GARMA presenten dificultats importants. Pel que fa a la identificació preliminar del tipus de model, l'anàlisi de les funcions d'autocorrelació simple i parcial no és gaire útil ja que no hi ha la possibilitat de suposar que l'ordre d'integració és enter. En aquest sentit cal dir que aquest capítol es centra exclusivament en l'estimació.

A diferència de l'aproximació anterior, en l'aproximació semiparamètrica o no paramètrica, l'interès radica exclusivament en l'estimació d'algun paràmetre directament relacionat amb el tipus de memòria de la sèrie, per exemple l'índex del grau de memòria δ definit al capítol 3 de la tesi. Recordi's que aquest índex del grau de memòria permet mesurar la memòria sota condicions molt generals i sense necessitat de gaires hipòtesis. Més concretament, si $\delta=0$ la sèrie és de memòria curta mentre que si $0 < \delta < 1/2$ la sèrie és de memòria llarga.

Al llarg d'aquest capítol es desenvolupa l'estimació paramètrica d'alguns dels models presentats prèviament. La via més natural per a l'estimació d'aquests models és el principi de la màxima versemblança. A l'apartat següent es desenvolupa aquest principi en un context més general de sèries temporals i, posteriorment, es presenten alguns resultats importants per aquesta estimació en el cas de models de memòria llarga com els models ARFIMA, GARMA o EXPFI.

En tot cas, cal també citar com a proposta, en certa manera al marge de les basades en el principi de la màxima versemblança, la de Granger i Joyeaux (1980) en que es proposa aproximar el model per un model autoregressiu d'ordre elevat i estimar el paràmetre de diferenciació fraccional comparant les variàncies dels residus per diferents valors del paràmetre.

Cal també fer esment, abans de presentar els diferents mètodes d'estimació que, pel que fa a l'estimació de models ARFIMA, sovint es fa la distinció entre mètodes d'estimació en una etapa i mètodes d'estimació en dos etapes. Aquesta distinció està molt lligada amb la classificació usada a la Tesi ja que, mentre que els mètodes d'estimació en dos etapes es basen en la màxima versemblança, els mètodes d'estimació en una etapa corresponen, bàsicament, a estimacions semiparamètriques.

6.2. L'estimació màxim versemblant en sèries temporals

Suposi's que el procés X_t és estacionari, normal, amb esperança μ , autocovariàncies γ_k , i amb densitat espectral:

$$f(\omega) = \frac{1}{2\pi} \gamma_0 + \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \gamma_k \cos(k\omega) \quad (6.1)$$

Si es disposa de T observacions del procés, X_1, \dots, X_T , la seva versemblança és¹:

$$L(X_1, \dots, X_T) = (2\pi)^{-T/2} \Gamma^{-1/2} \exp\left\{-\frac{1}{2} (X - \mu)' \Gamma^{-1} (X - \mu)\right\} \quad (6.2)$$

on Γ és la matriu de variàncies i covariàncies de les observacions $\Gamma_{jk} = \gamma_{(j-k)}$. Per a l'anàlisi següent, no és restrictiu suposar que l'esperança és $\mu=0$. En tot cas, si l'esperança és desconeguda, n'hi ha prou amb substituir per la mitjana mostral²:

$$L(X_1, \dots, X_T) = (2\pi)^{-T/2} |\Gamma|^{-1/2} \exp\left\{-\frac{1}{2} X' \Gamma^{-1} X\right\} \quad (6.3)$$

¹ D'entre les moltes maneres que hi ha de representar la versemblança de les dades, s'utilitza al llarg del capítol la que permet un tractament més senzill dels models presentats previament.

² Posteriorment, cal tornar sobre aquest aspecte, perquè les propietats de l'estimador màxim versemblant poden veure's afectades per la utilització de la mitjana mostral, sobretot en el cas de dades amb memòria llarga. De totes maneres, a efectes d'exposició és millor suposar de moment que les dades observades pertanyen a una sèrie temporal amb esperança nul·la.

Suposi's que es proposa un cert model paramètric que permet calcular les autocovariàncies a partir d'un vector de paràmetres θ i es desitja estimar aquests paràmetres. En aquest cas, la densitat espectral es pot representar com $f(\omega, \theta)$ i la matriu de variàncies i covariàncies de les observacions $\Gamma(\theta)$. Exemples poden ser un model ARMA(p, q) en que:

$$f(\omega; \phi_1, \dots, \phi_p, \theta_1, \dots, \theta_q) = \frac{\sigma^2}{2\pi} \left| \frac{1 - \sum_{k=1}^q \theta_k e^{ik\omega}}{1 - \sum_{k=1}^p \phi_k e^{ik\omega}} \right|^2 \quad (6.4)$$

un model ARFIMA(p, q, d):

$$f(\omega; \phi_1, \dots, \phi_p, \theta_1, \dots, \theta_q, d) = \frac{\sigma^2}{2\pi |1 - e^{i\omega}|^{2d}} \left| \frac{1 - \sum_{k=1}^q \theta_k e^{ik\omega}}{1 - \sum_{k=1}^p \phi_k e^{ik\omega}} \right|^2 \quad (6.5)$$

o un model exponencial:

$$f(\omega; \beta_1, \dots, \beta_p) = \frac{\sigma^2}{2\pi} \exp \left\{ 2 \sum_{k=1}^p \beta_k \cos(k\omega) \right\} \quad (6.6)$$

L'estimador màxim versemblant (MV) dels paràmetres del model es defineix com aquell que maximitza la versemblança (6.3).

Un resultat estandar i força conegut de l'anàlisi estadística de sèries temporals consisteix en la propietat que, sota la hipòtesi de normalitat de les dades, i sense necessitar de fer supòsits addicionals sobre la densitat espectral, l'estimador que maximitza (6.3) és asimptòticament eficient i compleix:

$$T^{1/2}(\tilde{\theta} - \theta) \Rightarrow N(0, W^{-1}(\theta)) \quad (6.7)$$

on els elements de la matriu $W(\theta)$ són³:

$$W_{jk} = \frac{1}{4\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\partial \ln f(\omega, \theta)}{\partial \theta_j} \frac{\partial \ln f(\omega, \theta)}{\partial \theta_k} d\omega \quad (6.8)$$

³ Veure, per exemple, Brockwell i Davis (1992).

Recordi's que la matriu $W(\theta)$ coincideix amb $\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} I(\theta)$ on $I(\theta)$ és la matriu d'informació de Fisher del model.

Per trobar el màxim de la versemblança (6.3) és interessant aplicar la transformació logarítmica de manera que:

$$\log L(X_1, \dots, X_T; \theta) = -\frac{T}{2} \log(2\pi) - \frac{1}{2} \log|\Gamma(\theta)| - \frac{1}{2} X' \Gamma(\theta)^{-1} X \quad (6.9)$$

tot i que, per simplicitat, s'acostuma a minimitzar una funció $l(\theta)$ definida com:

$$l(\theta) = -\frac{2}{T} \log L(X_1, \dots, X_T; \theta) - \frac{T}{2} \log(2\pi) = \frac{1}{T} \log|\Gamma(\theta)| + \frac{1}{T} X' \Gamma(\theta)^{-1} X \quad (6.10)$$

Noti's que per avaluar la funció $l(\theta)$ coneguda com funció de versemblança reduïda, sols cal calcular les autocovariàncies del model per diferents valors dels paràmetres. De totes maneres, el càlcul d'aquestes autocovariàncies i de la inversa de la matriu $\Gamma(\theta)$ sovint no és gens trivial.

L'expressió (6.10) admet una interpretació força interessant a partir del concepte de predictor òptim d'una sèrie estacionària. Suposi's que es desitja predir el valor X_{t+1} a partir de la informació que aporten les observacions X_1, \dots, X_t . Es defineix el predictor òptim \tilde{X}_{t+1} com aquell que minimitza l'error quadràtic mitjà de la predicció i es defineix aquest error quadràtic mitjà mínim com v_t :

$$v_t = EQM(\tilde{X}_{t+1}) = E\left[\left(X_{t+1} - \tilde{X}_{t+1}\right)^2\right] \quad (6.11)$$

A l'Annex 6.1 es mostra com la versemblança (6.3) es pot calcular a partir d'aquest predictor òptim com:

$$L(X_1, \dots, X_T; \theta) = (2\pi)^{-T/2} (v_0 \dots v_{T-1})^{-1/2} \exp\left\{-\frac{1}{2} \sum_{i=1}^T \frac{(X_i - \tilde{X}_i)^2}{v_{i-1}}\right\} \quad (6.12)$$

En tot cas, noti's que per cada combinació de paràmetres, es poden calcular els valors v_j a partir de les característiques concretes del model.

Simplificant l'expressió (6.10) es pot comprovar com la funció $l(\theta)$ és funció de la suma ponderada dels errors de predicció:

$$S(\theta) = \sum_{t=1}^T \frac{(X_t - \tilde{X}_t)^2}{v_{t-1}} \quad (6.13)$$

Concretament es compleix que:

$$l(\theta) = \log\left(\frac{S(\theta)}{T}\right) + \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T \log v_{t-1} \quad (6.14)$$

Habitualment, en l'estimació de models ARMA(p,q) s'utilitza com a funció a minimitzar $l(\theta)$, tot i que de vegades és més senzill obtenir estimacions sota el principi de mínims quadrats, en que es minimitza $S(\theta)$.

En el cas de models ARMA(p,q) aquestes funcions són relativament fàcils d'avaluar, i en combinació amb algun algorisme d'optimització no lineal es poden trobar fàcilment els estimador màxim versemblants. De fet, és habitual l'estimació de models ARMA(p,q) per aquesta via i a l'Annex 6.1 es presenten algunes característiques de la seva aplicació.

En canvi, l'aplicació d'aquest criteri per models ARFIMA(p,d,q) presenta problemes ja que el càlcul de les autocovariàncies a partir dels paràmetres del model té un cost en termes de càlcul molt important.

Una propietat important a considerar és que qualsevol estimador diferent dels anteriors però que la diferència sigui d'ordre $O(T^{1/2})$ també serà eficient asimptòticament. Aquesta propietat ha portat a diferents autors a proposar l'estimació a partir de la minimització de funcions diferents de les anteriors però de manera que asimptòticament produeixin estimadors amb les mateixes propietats.

Molts d'aquests autors han proposat aproximacions a la funció de versemblança en el domini de les freqüències. Whittle (1951) proposa una aproximació a la suma de quadrats $S(\theta)$ en el domini de les freqüències que simplifica molt els càlculs. Concretament, si a l'expressió (6.10) es diagonalitza la matriu $\Gamma(\theta)$, s'obté, després d'alguns càlculs, la següent aproximació:

$$S(\theta) \sim \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{I(\omega)}{g(\omega; \theta)} d\omega \quad (6.15)$$

on la funció $g(\omega, \theta)$ és la densitat espectral normalitzada de manera que la densitat espectral és $f(\omega, \theta) = \sigma_\varepsilon^2 g(\omega, \theta) / 2\pi$ i $I(\omega)$ és el periodograma calculat a partir de les dades observades:

$$I(\omega) = \frac{1}{2\pi T} \left| \sum_{t=1}^T X_t e^{i\omega t} \right|^2 \quad (6.16)$$

L'expressió (6.15) permet comprovar com $S(\theta)$ és un estimador de la variància de les innovacions de la sèrie. El resultat de Whittle (1951) és interessant en aquest context perquè suggereix, de manera natural, una aproximació a la funció $l(\theta)$ definida per la següent expressió:

$$l_a(\theta) = \log \frac{1}{2\pi T} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{I(\omega)}{g(\omega; \theta)} d\omega \quad (6.17)$$

En tot cas, la recerca sobre les propietats d'aquests estimadors sota la presència de memòria llarga ha estat objecte d'àmplia recerca durant els darrers quinze anys. A continuació es presenten alguns resultats sobre aquests estimadors.

Pel que fa a la utilització de la mitjana mostral quan l'esperança no és coneguda, val la pena destacar que, com es demostra a Taqqu (1975) que la mitjana mostral tendeix a l'esperança sota memòria llarga més lentament que els estimadors màxim versemblants dels paràmetres. Concretament, es compleix que $T^{1/2-\alpha/2}(\bar{X} - \mu)$ convergeix en distribució a una normal.

6.3. El mètode proposat per Fox i Taqqu (1986)

La proposta d'aquests autors consisteix a aplicar una aproximació en el domini de les freqüències de l'estimador màxim versemblant anterior. El punt de partida és el supòsit de que la densitat espectral de les dades es pot aproximar per:

$$f(\omega; \theta) \underset{\omega \rightarrow 0}{\sim} |\omega|^{-\alpha(\theta)} L_{\theta}(\omega) \quad (6.18)$$

on $L_{\theta}(\omega)$ és una funció de variació suau a la freqüència zero i $0 < \alpha(\theta) < 1$.

Recordi's que aquesta aproximació està relacionada amb algunes de les definicions de memòria llarga discutides al capítol 3 de la tesi. De fet, si un procés compleix la condició (6.18) té un índex del grau de memòria igual a $\delta = \alpha/2$, per tant si $0 < \alpha < 1$ es tracta d'un procés estacionari amb memòria llarga.

De fet, tal i com ja s'ha comentat al capítol 4, tant el soroll gaussià fraccional com els models ARFIMA en són casos particulars i compleixen aquesta condició. En el cas dels models ARFIMA, el vector de paràmetres a estimar és $\theta = (d, \phi_1, \dots, \phi_p, \theta_1, \dots, \theta_q)$. Però abans de comentar breument la proposta concreta d'aquests autors per l'estimació dels paràmetre θ en el model (6.18), cal destacar que, tot i que és aplicable també als models ARFIMA, es tracta d'una proposta molt general que, al no tenir en compte tota la informació disponible sobre les característiques del model, és d'esperar que sigui menys eficient que altres mètodes d'estimació presentats després. De totes maneres, té interès ja que permetria estendre fàcilment molts dels resultats presentats a la tesi a situacions més generals que aquelles en que suposem que les dades s'ha generat a través d'un model ARFIMA.

Concretament, Fox i Taqqu (1986) proposen estimar els paràmetres θ del model (6.18) a través del principi de la màxima versemblança. Pel que fa a la maximització de la funció de versemblança segueixen la proposta genèrica de Whittle (1951) i es proposa la minimització de $l_a(\theta)$.

De fet, en el treball de Fox i Taquq no s'usa aquesta expressió, sinó una d'alternativa en el domini temporal. Concretament:

$$S_a(\theta) = \frac{Z' A_T(\theta) Z}{T} \quad (6.19)$$

on $Z = (X_1 - \bar{X}, \dots, X_T - \bar{X})'$ i la matriu $A_T(\theta)$ està formada per elements a la fila j -èsima i columna k -èsima $a_{j-k}(\theta)$:

$$a_j(\theta) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\pi}^{\pi} e^{ij\omega} [f(\omega, \theta)]^{-1} d\omega \quad (6.20)$$

De fet, en el treball de Walker (1964) es demostra que aquest estimador és consistent i asimptòticament normal sota moltes situacions de memòria curta, sense necessitat de suposar normalitat.

En el treball de Fox i Taquq (1986) es demostra que sota memòria llarga aquest estimador també és consistent i asimptòticament normal⁴. A més, Hannan (1973) demostra que asimptòticament és equivalent la minimització de:

$$l_b(\theta) = \log \frac{1}{T} \sum_{j=1}^T \frac{I(\omega_j)}{g(\omega_j; \theta)} \quad (6.21)$$

En tot cas, s'ha de destacar que aquest resultat és vàlid tant pel soroll gaussià fraccional com pels models ARFIMA. Per això, recordi's que ambdós tipus de models admeten una representació del tipus (6.18).

Concretament, al capítol 4 de la tesi s'ha vist que la densitat d'un soroll gaussià fraccional al voltant de la freqüència zero és:

$$f(\omega; H) \underset{\omega \rightarrow 0}{\sim} \frac{CF(H)}{2} |\omega|^{1-2H} \quad (6.22)$$

⁴ A l'Annex 6.2. es recullen les condicions necessàries per garantir la consistència d'aquest estimador.

Per a que compleixi les condicions anteriors, tal com es demostra a Fox i Taqu (1986) n'hi ha prou a fixar $1/2 < H < 1$ i per a que sigui certa la condició de normalització fixar C de manera que:

$$CF(H) = \exp \left[-\frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \log \left\{ (1 - \cos \omega) \sum_{k=-\infty}^{\infty} |\omega + 2k\pi|^{-1-2H} \right\} d\omega \right] \quad (6.23)$$

Pel que fa als models ARFIMA(p, d, q), es pot expressar la densitat espectral com:

$$f(\omega; \phi_0, \phi_1, \dots, \phi_p, \theta_0, \theta_1, \dots, \theta_q, d) = \frac{C}{|1 - e^{i\omega}|^{2d}} \left| \frac{\theta_0 - \sum_{k=1}^q \theta_k e^{ik\omega}}{\phi_0 - \sum_{k=1}^p \phi_k e^{ik\omega}} \right|^2 \quad (6.24)$$

amb $C > 0$. En aquest cas, es compleixen les condicions anteriors sempre que $0 < d < 1$ i per a la condició de normalització sempre és possible fixar C de manera que es compleixi la condició (6.24).

De totes maneres, Dahlhaus (1988) ha mostrat com el comportament d'aquest estimador en mostra finita és molt pobre pel que fa a biaix i error quadràtic mitjà quan el paràmetre de diferenciació fraccional és positiu. En tot cas, Dahlhaus (1988) conclou que és millor un mètode de màxima versemblança exacte que no l'aproximació usada per Fox i Taqu (1986).

De totes maneres presenta l'avantatge de ser invariant front a canvis en l'esperança de la sèrie. Per tant, el fet de que aquesta esperança sigui coneguda o desconeguda no afecta a les propietats de l'estimador, a diferència d'altres mètodes que sí en depenen.

Cal assenyalar també que al basar-se en estimacions en el domini de les freqüències, es veu afectat negativament pels problemes d'aquestes estimacions amb mostres petites. En aquest sentit, la tècnica del *tapering* pot ser interessant per millorar aquest estimador quan es disposa de poques dades⁵.

⁵ De fet, a Cheung i Diebold (1993) es presenta certa evidència del comportament d'aquest estadístic a partir de simulacions, usant diverses formes de *tapering*.

6.4. El mètode proposat per Li i McLeod (1986)

Li i McLeod (1986) centren la seva anàlisi a l'estimació màxim versemblant de models ARFIMA(p,d,q) estacionaris sota el supòsit de normalitat i aporten resultats específics en aquest cas. Concretament, segueixen el suggeriment de Granger i Joyeaux (1980) en el sentit d'aproximar els models ARFIMA(p,d,q) estacionaris amb models ARMA(p,q).

Sota el supòsit que l'esperança de la sèrie és coneguda, no és restrictiu suposar que $\mu=0$ de manera que X_t és solució de l'equació estocàstica següent:

$$\phi(L)(1-L)^d X_t = \theta(L)\varepsilon_t \quad (6.25)$$

on ε_t és un soroll blanc gaussià i $-1/2 < d < 1/2$.

L'aplicació pràctica de l'estimació màxim versemblant proposada es basa en el mètode usat al capítol 7 de Box i Jenkins (1976) per a l'estimació de models ARMA(p,q) adaptat usant l'algorisme de McLeod i Sales (1983). L'aplicació d'aquest mètode es basa en truncar l'operador $\Delta^d(L) = (1-L)^d$ usant aproximacions del tipus:

$$\Delta_r^d(L) = \sum_{j=0}^r \binom{d}{j} (-1)^j L^j \quad (6.26)$$

Noti's que quan r tendeix cap a infinit, $\Delta_r^d(L)$ tendeix cap a $\Delta^d(L)$. Així, Li i McLeod (1986) proposen usar les equacions recursives següents:

$$\Delta_r^d(L)X_t = b_t \quad \text{i} \quad \Delta_r^d(F)X_t = c_t \quad (6.27)$$

de manera que els processos b_t i c_t són solucions de:

$$\phi(L)b_t = \theta(L)a_t \quad \text{i} \quad \phi(F)c_t = \theta(F)e_t \quad (6.28)$$

on a_t i e_t són soroll blanc.

Sota el supòsit d'esperança coneguda, el vector de paràmetres a estimar és el vector de dimensió $p+q+1$, $\theta=(\phi_1, \dots, \phi_p, \theta_1, \dots, \theta_q, d)$. La principal aportació del treball de Li i McLeod (1986) és el càlcul de la matriu d'informació de Fisher del model aplicant el mètode usat a Box i Jenkins (1976). Concretament, s'obté que dita matriu és:

$$I(\theta) = \begin{bmatrix} I_{p,q}(\theta) & J \\ J' & \frac{\pi^2}{6} \end{bmatrix} \quad (6.29)$$

on $I_{p,q}(\theta)$ és la matriu d'informació habitual dels paràmetres ARMA i els elements del vector J :

$$J' = [\gamma_0^{ud}, \gamma_1^{ud}, \dots, \gamma_{p-1}^{ud}, \gamma_0^{vd}, \gamma_1^{vd}, \dots, \gamma_{q-1}^{vd}] \quad (6.30)$$

s'obtenen a partir de processos autoregressius auxiliars definits a partir de $u_{t-j} = \frac{\partial \alpha_t}{\partial \phi_j}$ i

$v_{t-j} = \frac{\partial \alpha_t}{\partial \theta_j}$. Concretament, aquests elements es poden calcular com:

$$\gamma_j^{ud} = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\phi_i'}{j+i+1} \quad \text{i} \quad \gamma_j^{vd} = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\theta_i'}{j+i+1} \quad (6.31)$$

on:

$$\phi(L)^{-1} = \sum_{j=0}^{\infty} \phi_j' L^j \quad \text{i} \quad \theta(L)^{-1} = \sum_{j=0}^{\infty} \theta_j' L^j \quad (6.32)$$

S'ha de destacar també, que si l'esperança és desconeguda, l'ordre de l'aproximació no és d'ordre $O(T^{-1/2})$ sinó d'ordre $O(T^{d-1/2})$. Per tant, a mesura que el grau de memòria sigui major, més lentament convergeixen els estimadors cap a l'esperança del procés.

Una característica força sorprenent de l'estimació màxim versemblant de models ARFIMA és que la variància asimptòtica de l'estimador de d és independent del seu valor, característica que no es compleix amb l'estimació de la resta de paràmetres tant en models ARFIMA com en models ARMA.

Mentre que Galbraith i Galbraith (1974) i Newbold (1974) proporcionen resultats paramètrics pel càlcul de la matriu inversa de la matriu d'informació $I(\theta)$ pel cas de models ARMA estacionaris i invertibles, pel moment no es disposa de resultats equivalents per models ARFIMA.

6.5. El mètode proposat per Kashyap i Eom (1988)

Aquests autors proposen un enfocament basat en els mínims quadrats en l'estimació de l'índex de variació regular com alternativa a la màxima versemblança. Per fer-ho exploten el fet que el logaritme de la densitat espectral del model ARFIMA(0,1,0) és una funció particularment senzilla. Com $(1-L)^d X_t = \varepsilon_t$, amb ε_t soroll blanc, es pot escriure el logaritme de la densitat espectral com:

$$\log f(\omega; d) = \log f_\varepsilon(\omega) |1 - e^{i\omega}|^{-2d} = \log f_\varepsilon(\omega) - d \log \{4 \sin^2(\omega/2)\} \quad (6.33)$$

El mètode d'estimació proposat es basa en utilitzar el logaritme del periodograma com a estimació del logaritme de la densitat espectral en les freqüències fonamentals $\omega_j = 2\pi j / T$:

$$\log I(\omega_j) \sim \log I_\varepsilon(\omega_j) - d \log \{4 \sin^2(\omega_j/2)\} \quad (6.34)$$

Sota la hipòtesi de normalitat, pel Teorema 4.4.1 de Brillinger (1981), el periodograma d'un procés soroll blanc normalitzat, $I_\varepsilon(\omega_j)/f_\varepsilon(\omega_j)$ forma una successió de variables aleatòries independents distribuïdes segons una exponencial amb esperança unitària. Per tant, a través d'un canvi de variables, s'obté que $v_j = \log \{I_\varepsilon(\omega_j)/f_\varepsilon(\omega_j)\}$ és una successió de variables aleatòries independents amb esperança zero $-\gamma$ i variància $\pi^2/6$, on γ és la constant d'Euler ($=0.5772157\dots$).

Reordenant l'expressió (6.34) per a que aparegui explícitament el terme v_j , s'obté:

$$\log I(\omega_j) \sim \log f_\varepsilon(\omega_j) - d \log \{4 \sin^2(\omega_j/2)\} + v_j \quad (6.35)$$

A partir d'aquesta igualtat i sabent que v_j és soroll blanc, sembla natural estimar el paràmetre d a través d'una regressió:

$$\log I(\omega_j) = \alpha + \beta \log\{4\sin^2(\omega_j/2)\} + v_j \quad (6.36)$$

Així, es pot obtenir un estimador per mínims quadrats ordinaris a través de $\tilde{d}_{MQO} = -\tilde{\beta}_{MQO}$. Del treball de Kashap i Eom (1988) cal destacar que mostren de manera intuïtiva que, sota normalitat, aquest estimador es distribueix asimptòticament com una normal sense biaix:

$$T^{1/2}(\tilde{d}_{MQO} - d) \Rightarrow N(0,1) \quad (6.37)$$

És també interessant el fet que en el context de models ARFIMA(0,d,0) estacionaris, aquests autors calculen la cota de Cramer-Rao per estimadors sense biaix del paràmetre d i obtenen un valor de $6/\pi^2$. Això és coherent amb el fet que la variància asimptòtica dels estimadors eficients que s'obté a partir de (6.37) és $6/\pi^2$.

De fet, la proposta de Kashyap i Eom (1988) és molt similar als estimadors suggerits per Mohr (1981) i Graf (1983) per a l'estimació d'un soroll gaussià fraccional. De fet, en aquest model el logaritme de l'espectre és aproximadament lineal en $H=d+1/2$. Graf (1983) també suggereix modificacions robustes d'aquest estimador.

Els resultats anteriors són per a un model ARFIMA(0,d,0) i té interès, per raons obvies, la seva extensió a models més generals. Malauradament, el logaritme de la densitat espectral d'un model ARFIMA(p,d,q) no és lineal en els coeficients del model. En tot cas, al capítol 7 es presenten algunes propostes semiparamètriques per a l'extensió d'aquest estimador a models més generals.

6.6. El mètode proposat per Haslett i Raftery (1989)

Aquests autors desenvolupen una extensió multivariant del model ARFIMA(p,d,q) per analitzar el comportament de la força del vent en diferents observatoris del Regne Unit. Donat que disposen d'un gran nombre d'observacions de cada observatori, té especial interès el desenvolupament d'algun mètode d'estimació que no necessiti de gran nombre de càlculs. Per aquesta estimació, proposen una aproximació a la funció de versemblança basada en els coeficients de la funció d'autocorrelació parcial del model ARFIMA($0,d,0$), que són relativament senzills ja que es disposa d'una fórmula compacta pel seu càlcul.

Com l'objectiu d'aquest capítol és l'anàlisi dels mètodes d'estimació i no la possibilitat d'estendre els models de memòria llarga a un entorn multivariant, a continuació l'exposició es basa en el supòsit d'una sola sèrie temporal. Concretament, el punt de partida dels autors d'aquest treball és suposar que la sèrie observada es pot representar com un model ARFIMA(p,d,q) amb mitjana desconeguda⁶:

$$\phi(L)(1-L)^d(X_t - \mu) = \theta(L)\varepsilon_t \quad (6.38)$$

La novetat del mètode proposat es basa en que el predictor òptim o esperança condicionada $\tilde{X}_t = E[X_t | I_{t-1}]$, es pot aproximar per la següent expressió⁷:

$$\tilde{X}_t = E[X_t | I_{t-1}] = \frac{\phi(L)}{\theta(L)} \sum_{j=1}^{t-1} \phi_{tj} X_{t-j} + \mu \left[1 - \frac{\phi(1)}{\theta(1)} \sum_{j=1}^{t-1} \phi_{tj} \right] \quad (6.39)$$

⁶ Un dels aspectes més interessants d'aquesta aproximació radica en el fet que és un dels primers treballs en que es planteja de manera explícita l'estimació de la mitjana, sense recórrer al recurs habitual de suposar que és coneguda o, en tot cas, usar la mitjana aritmètica per centrar les dades.

⁷ La notació usada en aquest apartat es basa en les definicions de l'Annex 6.1.

on els coeficients ϕ_{kj} són els coeficients de regressió parcial, definits a l'Annex 6.3, d'un model ARFIMA(0,d,0). De fet, a Hosking (1981) es presenta una fórmula explícita per aquests coeficients:

$$\phi_{kj} = -\binom{k}{j} \frac{(j-d-1)!(k-d-j)!}{(-d-1)!(k-d)!} \quad (6.40)$$

Noti's que el problema de l'estimació màxim versemblant dels paràmetres del model ARFIMA(p,d,q) quedaria resolt si es disposés d'una expressió senzilla pels coeficients de regressió parcial d'aquest model. Malauradament, el càlcul d'aquests coeficients és molt laboriós, i per això, Haslett i Raftery (1989) proposen una aproximació aprofitant aquests coeficients en el cas en que $p=q=0$.

Per simplificar, es defineixen dos sèries u_t i w_t , com:

$$u_t = \frac{\phi(L)}{\theta(L)} \sum_{j=1}^{t-1} \phi_{tj} X_{t-j} \quad (6.41)$$

i:

$$w_t = 1 - \frac{\phi(1)}{\theta(1)} \sum_{j=1}^{t-1} \phi_{tj} \quad (6.42)$$

de manera que $\tilde{X}_t = E[X_t | I_{t-1}] = u_t + \mu w_t$.

Per cada combinació lineal de coeficients $(\phi_1, \dots, \phi_p, \theta_1, \dots, \theta_q, d)$, els estimadors màxim versemblants de μ i σ_ε^2 són:

$$\tilde{\mu} = \frac{\sum_{t=1}^T w_t (X_t - u_t)}{\sqrt{v_t} \sum_{t=1}^T w_t^2} \quad (6.43)$$

i:

$$\tilde{\sigma}_\varepsilon^2 = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T \frac{(X_t - u_t - \tilde{\mu} w_t)^2}{v_t} \quad (6.44)$$

on v_t és la variància condicionada del predictor òptim desenvolupada a l'Annex 6.1, és a dir $v_t = \text{var}[X_t | I_{t-1}]$. En el cas concret del model ARFIMA(p, d, q), Haslett i Raftery (1989) proposen aproximar-la per:

$$v_t = \sigma_\varepsilon^2 \kappa \prod_{j=1}^{t-1} (1 - \phi_{jj}^2) \quad (6.45)$$

on κ és quocient entre la variància de les innovacions i la variància del procés per un model ARMA(p, q) amb coeficients $\phi(L)$ i $\theta(L)$.

Com el logaritme de la versemblança és de la forma $\log L(d, \phi(L), \theta(L)) = C - \frac{T}{2} \log \tilde{\sigma}_\varepsilon^2$, els autors proposen maximitzar la versemblança respecte als paràmetres $(\phi_1, \dots, \phi_p, \theta_1, \dots, \theta_q)$ condicionada a un conjunt de diferents valors del paràmetre d'integració fraccional.

6.7. L'estimació màxim versemblant de models ARFIMA

Fins al moment s'han analitzat propostes d'estimació que es basen en la maximització d'aproximacions a la funció de versemblança, que en tot cas, tot i les propietats asimptòtiques, presenten bastants problemes per mostres finites.

És important destacar que en la majoria d'aplicacions dels models ARFIMA a sèries econòmiques s'han usat els mètodes d'estimació explicats fins ara, sobretot els més senzills, mentre que, en principi, fora millor usar un mètode de maximització de la versemblança exacte.

En aquest sentit, Sowell (1992) desenvolupa un procediment per a la maximització de la funció de versemblança exacte sota el supòsit que les observacions de la variable X_t pertanyen a un model ARFIMA i, per tant, són solució de la següent equació estocàstica:

$$\phi(L)(1-L)^d X_t = \theta(L)\varepsilon_t \quad (6.46)$$

Tal com s'ha comentat al començament del capítol, sota la hipòtesi de normalitat, la versemblança de les observacions X_1, \dots, X_T és:

$$L(X_1, \dots, X_T) = (2\pi)^{-T \cdot 2} |\Gamma|^{-1/2} \exp\left\{-\frac{1}{2} X' \Gamma^{-1} X\right\} \quad (6.47)$$

on Γ és la matriu formada per les autocovariàncies de les observacions. Per trobar els estimadors que maximitzen aquesta funció, cal avaluar aquestes autocovariàncies per cada combinació de valors dels paràmetres. De fet, és la dificultat d'aquest càlcul el que ha originat la utilització d'aproximacions a la versemblança enlloc d'usar la versemblança exacte.

Sowell (1992) aporta un mètode pel càlcul d'aquestes autocovariàncies. Per fer-ho proposa una parametrització de la matriu de covariàncies a partir d'escriure la densitat espectral de X_t en funció dels paràmetres i després calcular les covariàncies com les següents integrals:

$$\gamma_s = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\omega) \cos(\omega s) d\omega \quad (6.48)$$

El mètode proposat es basa en tres hipòtesis:

- 1) $d < 1/2$
- 2) Les arrels del polinomi autoregressiu són totes diferents
- 3) Totes les arrels dels polinomis autoregressiu i mitjana mòbil estan fora del cercle unitat

La densitat espectral de X_t es pot calcular en dues etapes. En primer lloc, calcular la densitat de $Z_t = (1-L)^d X_t$.

Per les hipòtesis anteriors, Z_t segueix un model ARMA(p, q) amb representació de Wold:

$$Z_t = \frac{\theta(L)}{\phi(L)} \varepsilon_t \quad (6.49)$$

Com es suposa que les arrels són totes de mòdul superior a la unitat es pot escriure:

$$\phi(L) = \prod_{j=1}^p (1 - \rho_j L) \quad (6.50)$$

amb $|\rho_j| < 1$. Així, es pot escriure la densitat de Z_t com:

$$f_Z(\omega) = |\theta(\omega)|^2 \sigma^2 \prod_{j=1}^p (1 - \rho_j \omega)^{-1} (1 - \rho_j \omega^{-1})^{-1} \quad (6.51)$$

Si es suposa que no hi ha arrels repetides a partir d'una descomposició en fraccions parcials s'obté:

$$f_Z(\omega) = |\theta(\omega)|^2 \sigma^2 \sum_{j=1}^p \omega^p \zeta_j \left[\frac{\rho_j^{2p}}{(1 - \rho_j \omega)} - \frac{1}{(1 - \rho_j^{-1} \omega)} \right] \quad (6.52)$$

on:

$$\zeta_j = \left[\rho_j \prod_{k=1}^p (1 - \rho_j \rho_k) \prod_{l \neq j}^p (\rho_j - \rho_l) \right]^{-1} \quad (6.53)$$

Si es defineix:

$$\psi(j) = \sum_{k=\max\{0, j\}}^{\min\{q, q-j\}} \theta_j \theta_{k-j} \quad (6.54)$$

s'obté:

$$f_Z(\omega) = \sigma^2 \sum_{k=-q}^q \psi(k) \omega^k \sum_{j=1}^p \omega^p \zeta_j \left[\frac{\rho_j^{2p}}{(1 - \rho_j \omega)} - \frac{1}{(1 - \rho_j^{-1} \omega)} \right] \quad (6.55)$$

Com $f_X(\omega) = (1 - \omega)^{-d} (1 - \omega^{-1})^{-d} f_Z(\omega)$ llavors:

$$f_Z(\omega) = \sigma^2 \sum_{k=-q}^q \sum_{j=1}^p \psi(k) \zeta_j \left[\frac{\rho_j^{2p}}{(1 - \rho_j \omega)} - \frac{1}{(1 - \rho_j^{-1} \omega)} \right] (1 - \omega)^{-d} (1 - \omega^{-1})^{-d} \omega^{p+k} \quad (6.56)$$

Per tant, el càlcul de les covariàncies es redueix a obtenir les següents integrals:

$$I(d, h, \rho) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left[\frac{\rho_j^{2p}}{(1 - \rho_j e^{-i\omega})} - \frac{1}{(1 - \rho_j^{-1} e^{-i\omega})} \right] (1 - e^{-i\omega})^{-d} (1 - e^{i\omega})^{-d} e^{-i\omega h} \quad (6.57)$$

i llavors podem obtenir les covariàncies com:

$$\gamma_s = \sigma^2 \sum_{k=-q}^q \sum_{j=1}^p \psi(k) \zeta_j I(d, p+k-j, \rho_j) \quad (6.58)$$

A Sowell (1992) es demostra que:

$$I(d, h, \rho) = \frac{\Gamma(1-2d)\Gamma(d+h)}{\Gamma(1-d+h)\Gamma(1-d)\Gamma(d)} \left[\rho^{2p} F(d+h, 1; 1-d+h, \rho) F(d-h, 1; 1-d-h, \rho) - 1 \right] \quad (6.59)$$

on $F(a, b; c; x)$ és la funció hipergeomètrica definida a l'apartat 4.4.

En definitiva, el procediment de càlcul que permet trobar els estimadors màxim versemblants es basa en les següents etapes:

- 1) Factoritzar el polinomi autoregressiu.
- 2) Calcular els coeficients ζ_j .
- 3) Calcular els diferents valors $I(d, h, \rho)$.
- 4) Avaluar les autocovariàncies.
- 5) Calcular la descomposició de Txoleski i el determinant de la matriu d'autocovariàncies. Per això, es pot usar, per exemple, l'algorisme de Durbin-Levinson presentat a l'Annex 6.1.
- 6) Calcular la versemblança.

De totes maneres, aquest càlcul pot ser complicat i bastant llarg. Chung (1994) avança en el desenvolupament d'aquestes autocovariàncies i en buscar mètodes senzills de càlcul. Si es defineix la funció d'autocovariàncies d'un model FI(d) com:

$$\gamma^*(s) = \frac{\Gamma(1-2d)\Gamma(d-s)}{\Gamma(d)\Gamma(1-d)\Gamma(1-d-s)} \quad (6.60)$$

el resultat de Sowell es pot escriure de manera alternativa com:

$$\gamma(s) = \gamma^*(s) \sum_{j=1}^p \zeta_j A(s, \rho_j) \tag{6.61}$$

on es poden calcular els coeficients A a partir de:

$$A(s, \rho_j) = \sum_{i=-q}^q \psi_i B(s, p+i) [\rho_j^{2p} C(p+i-s, \rho_j) + C(s-p-i, \rho_j) - 1] \tag{6.62}$$

$$B(s, h) = \frac{\Gamma(1-d-s)\Gamma(d-s+h)}{\Gamma(d-s)\Gamma(1-d-s+h)} = \begin{cases} \prod_{k=1}^h \frac{s+(1-d)-k}{s+d-k} & h > 0 \\ 1 & h = 0 \\ \prod_{k=1}^h \frac{s-(1-d)+k}{s-d+k} & h < 0 \end{cases} \tag{6.63}$$

i:

$$C(h, \rho_j) = F(d+h, 1; 1-d+h; \rho_j) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma(1-d+h)\Gamma(d+h+k)}{\Gamma(d+h)\Gamma(1-d+h+k)} \rho_j^k \tag{6.64}$$

Com alternativa, Chung (1994) proposa escriure $A(\cdot)$ com:

$$A(s, \rho_j) = \rho_j^p \sum_{i=0}^q \psi_i \alpha_i(s, \rho_j) \tag{6.65}$$

de manera que:

$$\alpha_i(s, \rho_j) = (\rho_j^i + \rho_j^{-i})D(s, \rho_j) + \sum_{k=1}^{p-1+i} (\rho_j^i - \rho_j^{-i})B(s, k) + \delta_i(s, \rho_j) \tag{6.66}$$

$$\delta_i(s, \rho_j) = \begin{cases} -D(s, \rho_j) & i = 0 \\ \sum_{k=1}^{p-1-i} (\rho_j^{-k-i} - \rho_j^{k+i})B(s, k) & 0 < i < p-1 \\ 0 & i = p-1 \\ \rho_j^{pi} - \rho_j^{-p} & i = p \\ \rho_j^{pi} - \rho_j^{-p} + \sum_{k=1}^{i-p} (\rho_j^{i-k} - \rho_j^{k-i})B(-s, k) & i > p \end{cases} \tag{6.67}$$

i:

$$D(s, \rho_j) = C(s, \rho_j) + C(-s, \rho_j) - 1 \quad (6.68)$$

Alguns casos particulars interessants i que s'han utilitzat per obtenir els resultats presentats en els capítols 8 i 9 de la tesi són els següents:

ARFIMA($p, d, 0$):

$$\gamma(s) = \gamma^*(s) \sum_{j=1}^p \zeta_j \rho_j^p \left[D(s, \rho_j) + \sum_{k=1}^{p-1} (\rho_j^{-k} - \rho_j^k) B(s, k) \right] \quad (6.69)$$

ARFIMA($0, d, q$):

$$\gamma(s) = \gamma^*(s) \sum_{i=-q}^q \psi_i B(s, i) \quad (6.70)$$

Per exemple, en el cas d'un ARFIMA($1, d, 0$) en que $(1-\phi L)(1-L)^d X_t = \varepsilon_t$, $\rho = \phi$ i $\zeta = \phi^{-1}(1-\phi^2)^{-1}$. Si es suposa que $(1-\phi L)X_t$ té variància σ^2 , llavors:

$$\gamma^*(s) = \frac{\Gamma(1-2d)\Gamma(d-s)}{\Gamma(d)\Gamma(1-d)\Gamma(1-d-s)} = \sigma^2 \prod_{k=1}^s \frac{k-1+d}{k-d} \quad (6.71)$$

Finalment:

$$\gamma(s) = \gamma^*(s) \frac{1}{1-\phi^2} [C(s, \phi) + C(-s, \phi) - 1] \quad (6.72)$$

Un altre aspecte important de l'estimació màxim versemblant és la selecció de valors inicials per a l'aplicació d'algun mètode recursiu d'optimització no lineal. Algunes possibilitats són les següents:

- Aplicar algun altre mètode d'estimació paramètrica dels ja presentats, o fins i tot algun dels mètodes d'estimació semiparamètrica presentats al capítol 7.

- Calcular la versemblança associada a un conjunt de combinacions de paràmetres i escollir-ne aquella combinació de paràmetres per la que s'ha obtingut una versemblança major.

De totes maneres, tot i les millores anteriors en el càlcul de les autocovariàncies, el volum de càlculs segueix sent molt important. Aquesta és la causa que continuï a l'actualitat la recerca de mètodes d'estimació d'aplicació més simple i que presentin millors propietats en mostres finites.

En relació al volum de càlculs necessaris per obtenir les autocovariàncies associades a cada combinació de paràmetres, a l'apartat 6.11 es presenta una proposta basada en una aproximació d'aquestes autocovariàncies que, tot i tractar-se d'una aproximació permet obtenir resultats molt acurats i amb molts menys càlculs.

Pel que fa al comportament en mostra finita de l'estimador màxim versemblant, a Cheung i Diebold (1993) es presenten els resultats d'un exercici de simulació on es comprova que quan l'esperança de la sèrie és coneguda, es tracta d'un estimador que funciona relativament bé.

En canvi, quan l'esperança és desconeguda i cal prèviament centrar les dades, les propietats de l'estimador empitjoren substancialment. Això és degut a que la mitjana mostral presenta unes propietats molt pobres com estimador de l'esperança quan la sèrie presenta memòria llarga⁸.

De fet, a Cheung i Diebold (1993) es compara l'estimador MV amb l'estimador proposat per Fox i Taqu (1986) i s'obté com a conclusió més interessant que quan l'esperança és desconeguda, el mètode de Fox i Taqu és millor.

⁸ En relació a les propietats de la mitjana mostral quan les dades contenen memòria llarga, vegi's l'apartat 9.2 de la tesi.

De totes maneres, al marge del problema de l'estimació del valor esperat de la variable, a Cheung i Diebold (1993) sols es considera el cas en que X_t segueix un model ARFIMA(0, d ,0). A Sowell (1992) també es presenten alguns resultats basats en una simulació, però en aquests resultats es suposa que el model estimat coincideix amb el model a partir del qual s'han generat les dades.

Més recentment, a Smith *et al.* (1997) es demostra amb un exercici de simulació més ampli, a partir de models ARFIMA(1, d ,1), que l'estimador MV presenta un biaix molt petit en termes relatius si el model especificat és el correcte. També es demostra que la necessitat d'estimar el valor esperat de la variable també fa que augmenti el biaix.

En aquest sentit hi ha un aspecte important sobre el que no es disposa de gaire evidència empírica. Es tracta de les propietats que presenta l'estimador màxim versemblant quan s'especifica i estima un model ARFIMA incorrecte.

Per valorar de manera senzilla aquest aspecte, s'ha realitzat un exercici de simulació en que s'ha estimat un model ARFIMA(0, d ,0) per 100 observacions generades a partir d'un model més general, un model ARFIMA(1, d ,1). Això permet valorar, segons el valor dels paràmetres autoregressiu i mitjana mòbil del procés generador de les dades, les conseqüències dels errors d'especificació.

Els resultats del quadre 6.1 permeten comprovar com aquests errors d'especificació del model fan que els estimadors màxim versemblants presentin un biaix molt important. Per tant, el factor fonamental que determina la qualitat de les estimacions per MV es troba en l'especificació correcta o incorrecta del model a estimar.

Pel que fa a la utilització de mètodes gràfics per la identificació del tipus de memòria, ja s'ha comprovat al capítol 5 les dificultats que hom es troba a l'hora d'identificar el tipus de model ARFIMA adequat quan les dades presenten memòria llarga. Una altra possibilitat consisteix a estimar diferents models ARFIMA per a les dades i seleccionar-ne el millor a partir d'algun

criteri de selecció de models com poden ser el criteri d'Akaike o el criteri de Schwarz. De fet, a Smith *et al.* (1997) es demostra a través d'una simulació que usant aquestes mètodes de selecció de models, també és molt probable que el model seleccionat no sigui el correcte

Quadre 6.1. Esperança de l'estimador MV front errors d'especificació

PGD: $(1-L)^d(1-\phi L)X_t=(1-\theta L)\varepsilon_t$. Model estimat: $(1-L)^dX_t=\varepsilon_t$

ϕ	θ	$d=0$	$d=0.1$	$d=0.2$	$d=0.3$
0.0	0.0	-0.010	0.076	0.178	0.282
0.5	0.0	0.367	0.418	0.457	0.478
0.9	0.0	0.488	0.489	0.489	0.492
-0.5	0.0	-0.198	-0.160	-0.077	0.020
-0.9	0.0	-0.210	-0.202	-0.197	-0.174
0.0	0.5	-0.068	-0.047	-0.025	-0.011
0.0	0.9	-0.079	-0.065	-0.042	-0.024
0.0	-0.5	0.262	0.340	0.406	0.454
0.0	-0.9	0.353	0.400	0.445	0.472

Això era d'esperar ja que, en general, una de les característiques habituals de l'estimació paramètrica és la seva sensibilitat front a errors en l'elecció del model. Per evitar aquests problemes, és millor, en principi, usar una aproximació semiparamètrica.

De totes maneres, per poder afirmar amb seguretat si és millor usar una aproximació paramètrica o bé semiparamètrica a l'estimació del paràmetre d , cal conèixer previament les propietats dels estimadors semiparamètrics, aspecte que s'analitza al capítol següent.

En tot cas, també és important no oblidar que un problema afegit de l'estimació màxim versemblant és la necessitat d'un enorme volum de càlculs. Per això, abans d'entrar a l'anàlisi de mètodes semiparamètrics d'estimació, es presenten a continuació, i de manera molt breu, un parell d'aproximacions a l'estimació màxim versemblant basades en aproximacions a la versemblança enlloc d'usar la versemblança de manera exacta.

6.8. Altres aproximacions a la versemblança en el domini de les freqüències.

Per simplificar el càlcul de l'estimador màxim versemblant, hi ha l'opció d'usar altres aproximacions millors a la versemblança normal que les presentades als apartats anteriors. Recordi's que el logaritme d'aquesta versemblança és:

$$\log L(\theta) = -\frac{T}{2} \log(2\pi) - \frac{1}{2} |\Gamma| - \frac{1}{2} X' \Gamma^{-1} X \quad (6.77)$$

i que, tant aquest logaritme com la versemblança reduïda, $l(\theta)$ es pot calcular com funció de la suma de quadrats $S(\theta)$:

$$l(\theta) = \log\left(\frac{S(\theta)}{T}\right) + \frac{1}{T} \sum_{i=1}^T \log v_{i-1} \quad (6.78)$$

Les aproximacions $l_a(\theta)$ i $l_b(\theta)$ usades per diferents autors no tenen en compte el segon terme de l'expressió (6.78). Un argument per a obviar aquest terme és que per tamany mostrals grans es pot considerar que no és important ja que:

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \sum_{i=1}^T \log v_{i-1} = 0 \quad (6.79)$$

De totes maneres, quan el nombre d'observacions no és gaire gran, el màxim de les funcions $l(\theta)$ i les aproximacions $l_a(\theta)$ o $l_b(\theta)$ pot ser diferent degut a la presència d'aquest terme.

Una solució a aquest problema quan es disposa de poques dades pot ser la d'usar alguna aproximació a aquest segon terme. Concretament, és senzill comprovar que:

$$\frac{1}{T} \sum_{i=1}^T \log v_{i-1} \sim \frac{1}{T} \sum_{j=1}^T \log g(\omega_j, \theta) \quad (6.80)$$

Aquesta propietat suggereix substituir l'aproximació $l_a(\theta)$ per:

$$l_c(\theta) = \log \frac{1}{2\pi T} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{I(\omega)}{g(\omega; \theta)} d\omega + \frac{1}{T} \sum_{j=1}^T \log g(\omega_j; \theta) \quad (6.81)$$

o bé, substituir l'aproximació $l_b(\theta)$ per:

$$l_d(\theta) = \log \frac{1}{2\pi T} \sum_{j=1}^T \frac{I(\omega_j)}{g(\omega_j; \theta)} + \frac{1}{T} \sum_{j=1}^T \log g(\omega_j; \theta) \quad (6.82)$$

La minimització d'aquesta funció ha estat estudiada per Rice (1979). Per models estacionaris i invertibles, l'anàlisi empírica ha demostrat que aquesta segona aproximació té un biaix menor que la primera.

Si es té en compte a més, que:

$$\frac{1}{T} \sum_{j=1}^T \log g(\omega_j, \theta) \sim \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \log g(\omega, \theta) \quad (6.83)$$

també té sentit usar les següents aproximacions:

$$l_e(\theta) = \log \frac{1}{2\pi T} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{I(\omega)}{g(\omega; \theta)} d\omega + \frac{1}{T} \int_{-\pi}^{\pi} \log g(\omega; \theta) d\omega \quad (6.84)$$

$$l_f(\theta) = \log \frac{1}{2\pi T} \sum_{j=1}^T \frac{I(\omega_j)}{g(\omega_j; \theta)} + \frac{1}{T} \int_{-\pi}^{\pi} \log g(\omega; \theta) d\omega \quad (6.85)$$

Aquestes aproximacions no han estat gaire analitzades fins al moment però caldria tenir-les en compte cara a futures investigacions.

6.9. El mètode proposat per Chung i Baillie (1993)

Chung i Baillie (1993) proposen un estimador en el domini temporal basat en la minimització de la suma de quadrats condicional (SQC) com alternativa a la maximització de la versemblança. Recordi's que Box i Jenkins (1976) proposen usar aquest enfocament per simplificar l'estimació de models ARMA.

Quan es suposa que les observacions inicials X_0, X_1 , són fixes, Pierce (1971) demostra que l'estimador SQC és asimptòticament equivalent a l'estimador MV per models ARMA ja que l'efecte de les observacions inicials desapareix asimptòticament.

La suma de quadrats condicional de la sèrie X_t en relació al model ARFIMA(p, d, q) $\phi(L)(1-L)^d(X_t - \mu) = \theta(L)\varepsilon_t$, és:

$$\begin{aligned} S(\theta) &= \frac{1}{2} \log(\sigma^2) + \frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^T \varepsilon_i^2 \\ &= \frac{1}{2} \log(\sigma^2) + \frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^T \left\{ \phi(L)\theta(L)^{-1}(1-L)^d(X_t - \mu) \right\}^2 \end{aligned} \quad (6.86)$$

Entre els avantatges d'aquest estimador, cal senyalar els següents:

- Que és fàcil estendre'l a situacions en que hi hagi heteroscedasticitat
- El nombre de càlculs és molt inferior al requerit per l'estimació màxim versemblant.
- Que pot tenir interès quan no hi ha normalitat
- S'evita el problema de l'estimació de la mitjana quan aquesta no és coneguda. Ja s'ha comentat que en aquest cas, l'estimador MV empitjora bastant mentre que l'estimador CQS permet estimar l'esperança de la sèrie de manera simultània a la resta de paràmetres.

En el treball de Chung i Baillie (1993) es demostra que per un nombre infinit d'observacions, aquest mètode és equivalent a MV també per a models ARFIMA(p, d, q) estacionaris i invertibles.

De totes maneres, és d'esperar que els problemes de biaix que presenta l'estimador MV quan no s'especifica correctament el model ARFIMA a estimar també siguin presents si s'utilitza l'estimador SQC.

6.10. El mètode proposat per Tieslau et al. (1996)

Una alternativa a l'estimació basada en el principi de la màxim versemblança (MV) i usat en diferents i variats àmbits de l'estadística és l'estimació basada en el principi de la mínima distància (MD). Aquesta aproximació és atractiva per a l'estimació paramètrica de sèries amb memòria llarga per dos motius:

1. No cal fer cap supòsit sobre la funció de distribució de les dades.
2. És molt menys intensiva en càlculs que per l'estimació màxim versemblant.

Suposi's en primer lloc que el comportament de les dades observades es pot aproximar amb un model ARFIMA(0,d,0). Les autocorrelacions teòriques del procés són, tal com s'ha comentat a l'apartat 4.4:

$$\rho_j = \prod_{i=1}^j \frac{(d+i-1)}{(i-d)} \quad (6.87)$$

Per altra banda, les autocorrelacions es poden estimar, usant el procediment habitual com:

$$\tilde{\rho}_j = \frac{\sum_{t=1}^{T-j} (X_t - \bar{X})(X_{t+j} - \bar{X})}{\sum_{t=1}^T (X_t - \bar{X})^2} \quad (6.88)$$

L'estimador de mínima distància consisteix a trobar el valor de d que minimitza la següent funció:

$$D(d) = [\tilde{\rho} - \rho]' W [\tilde{\rho} - \rho] \quad (6.89)$$

on W és una matriu de pesos que ha de ser simètrica i definida positiva. La matriu òptima asimptòticament és la inversa de la matriu de variància i covariàncies asimptòtiques dels estimadors $\tilde{\rho}_j$, per $j=1, \dots, k$.

El problema d'aquest estimador és que sols es distribueix asimptòticament com una normal per certs valors del paràmetre d . Concretament⁹, Hosking (1984) demostra que si $d \in (-1/2, 1/4]$ es compleix:

$$\sqrt{T}[\tilde{\rho} - \rho] \Rightarrow N(0, C) \quad (6.90)$$

on la matriu de variàncies i covariàncies asimptòtiques de les autocorrelacions estimades són les estandar en l'anàlisi de sèries temporals¹⁰:

$$c_{ij} = \sum_{s=1}^{\infty} (\rho_{s+i} + \rho_{s-i} - 2\rho_i\rho_s)(\rho_{s+j} + \rho_{s-j} - 2\rho_j\rho_s) \quad (6.91)$$

Tieslau et al. (1996) demostren que si $d \in (-1/2, 1/4]$, aquest estimador és asimptòticament normal:

$$\sqrt{T}[\tilde{d} - d] \Rightarrow N(0, (H'WH)^{-1} H'WCWH(H'WH)^{-1}) \quad (6.92)$$

on H és el vector de derivades parcials $H = \partial\rho/\partial d$. El cas en que l'estimador és més eficient correspon al cas en que $W=C^{-1}$.

Si el model a estimar és un ARFIMA(p,d,q) sols augmenta el nombre de paràmetres a estimar i el nombre de càlculs, ja que conceptualment, l'estimador és equivalent a l'anterior, i també és asimptòticament normal si $d \in (-1/2, 1/4]$. El problema per l'aplicació d'aquest estimador en el cas de models ARFIMA(p,d,q) és que necessita del mateix volum de càlculs que l'estimació MV. Per tant, en una especificació que conté tant memòria llarga com memòria curta, sembla millor l'aproximació MV.

⁹ Pel que fa a les propietats dels estimadors habituals de les autocovariàncies i de les autocorrelacions, vegi's es resultats de l'apartat 5.3.1 de la tesi.

¹⁰ Vegi's, per exemple, el Capítol 7 de Brockwell i Davis (1991).

Una ampliació interessant consisteix a usar el principi MD de manera semiparamètrica, és a dir, sense especificar completament l'hipotètic procés generador de les dades. Aquesta ampliació s'analitza al capítol següent, juntament amb la resta d'aproximacions semiparamètriques.

6.11. Una aproximació novedosa a l'estimació MV de models ARFIMA

Tal com s'ha senyalat a l'apartat 6.7, l'estimació màxim versemblant de models ARFIMA topa amb un problema important ja que requereix del càlcul intensiu d'autocovariàncies per avaluar la funció de versemblança de les dades associada a un conjunt de $p+q+1$ paràmetres. Les aportacions de Sowell (1992) i Chung (1994) han permès avançar molt en aquest sentit ja que permeten aquest càlcul. De totes maneres, a partir dels resultats de l'apartat 6.7 es comprova que tot i aquestes aportacions l'avaluació d'aquesta versemblança suposa encara un volum de càlculs massa elevat.

Aquest aspecte dels models ARFIMA dificulta, al nostre entendre, una major difusió i utilització empírica d'aquests models que és, en el fons, la única via que permetrà, en el futur, valorar els avantatges que pot tenir l'ampliació de la metodologia Box-Jenkins i la consideració d'aquests models.

A continuació, es presenta una aportació novedosa que permet el càlcul, de manera sorprenentment senzilla de les autocovariàncies de models ARFIMA. La idea en que es basa aquest mètode de càlcul és la mateixa que hi ha a darrera de les aportacions citades abans, però la novetat es troba, inicialment, en el supòsit que el model no conté paràmetres autoregressius, tot i que després es relaxa aquesta hipòtesi.

De fet, en el cas de models ARFIMA(0,d,q) els càlculs necessaris per obtenir les autocovariàncies queden molt simplificats. A continuació, en una segona fase s'amplia la metodologia per calcular una molt bona aproximació a les autocovariàncies de models ARFIMA(p,d,q).

Suposi's el següent model ARFIMA(p,d,q)¹¹ estacionari (i per tant, amb $d < 1/2$):

$$(1-L)^d \phi(L)X_t = \theta(L)\varepsilon_t \quad (6.93)$$

L'objectiu plantejat és el càlcul de les autocovariàncies $\gamma_X(k)$ a partir dels paràmetres del model. Suposi's en primer lloc que el polinomi autorregressiu és trivial, $\phi(L)=1$. Per a calcular en aquest cas les autocovariàncies, n'hi ha prou a considerar dos processos Y_t i Z_t , formats respectivament per les parts MA(q) i FI(d) respectivament del model inicial, és a dir:

$$(1-L)^d Y_t = \varepsilon_t \quad (6.94)$$

$$Z_t = \theta(L)\varepsilon_t \quad (6.95)$$

En aquestes condicions, n'hi ha prou amb aplicar el següent Teorema:

Teorema 6.1. Sigui X_t un procés estocàstic estacionari tal que $(1-L)^d X_t = \theta(L)\varepsilon_t$, amb paràmetres mitjana mòbil $\theta_1, \dots, \theta_q$. Les autocovariàncies de X_t compleixen:

$$\gamma_X(k) = \sum_{h=-q}^q \gamma_Z(h) \gamma_Y(h+k) \quad (6.96)$$

on $\gamma_Y(k)$ són les autocovariàncies de $Y_t = \theta(L)X_t$, i $\gamma_Z(k)$ són les autocovariàncies normalitzades del procés $Z_t = (1-L)^d X_t$, és a dir:

$$\gamma_Z(k) = \sum_{i=0}^{q-k} \theta_i \theta_{i+k} \quad (6.97)$$

Demostració:

¹¹ En el que suposem, com és habitual, i sense pèrdua de generalitat que $E(X_t)=0$.

El procés X_t es pot escriure com:

$$X_t = \sum_{j=0}^q \theta_j Y_{t-j} \tag{6.98}$$

Y_t és un ARFIMA(0,d,0) ja que $(1-L)^d Y_t = \varepsilon_t$, per $k \geq 0$:

$$\begin{aligned} \gamma_X(k) &= E[X_t X_{t+k}] = E\left[\left(\sum_{j=0}^q \theta_j X_{t-j}\right)\left(\sum_{i=0}^q \theta_i X_{t+k-i}\right)\right] = \sum_{j=0}^q \sum_{i=0}^q \theta_j \theta_i E[Y_{t-j} Y_{t+k-i}] = \\ &= \sum_{h=j-i}^q \left(\sum_{i=0}^{q-h} \theta_i \theta_{i+h}\right) \gamma_Y(k+h) = \sum_{h=-q}^q \gamma_Z(h) \gamma_Y(k+h) \end{aligned} \tag{6.99}$$

Les autocovariàncies d'un procés FI(d) com és Y_t són fàcils de calcular ja que, per (4.35) es compleix que¹²:

$$\gamma_Y(k) = \frac{(-1)^k \Gamma(1-2d)}{\Gamma(1-d+k)\Gamma(1-d-k)} \sigma_\varepsilon^2 \tag{6.100}$$

i, per tant, el càlcul de les autocovariàncies d'un procés ARFIMA(0,d,q) a través de l'expressió (6.96) és ben senzill. De totes maneres, aquest mètode no és aplicable directament en el cas de models ARFIMA(p,d,q).

Però si X_t conté paràmetres autoregressius, és a dir $X_t \sim \text{ARFIMA}(p,d,q)$ pot usar-se el següent mètode per calcular-ne una aproximació de les seves autocovariàncies. Concretament, sols cal definir un nou procés Y_t a partir de:

$$Y_t = \frac{\theta(L)}{\phi(L)} X_t, \tag{6.101}$$

i definir novament Z_t com $Z_t = (1-L)^d X_t$. D'aquesta manera, Y_t segueix un model ARFIMA(0,d,0) i Z_t és un model ARMA(p,q). Per poder aplicar el Teorema 6.1, n'hi ha prou

¹² Vegi's l'Annex 5.2 de la tesi pel que fa a l'avaluació de funcions gamma.

amb aproximar aquest model ARMA(p,q) per un model MA(m). Per fer-ho, cal aproximar el polinomi infinit següent:

$$\psi(L) = \frac{\theta(L)}{\phi(L)} = \psi_0 + \psi_1 L + \psi_2 L^2 + \dots \quad (6.102)$$

per un polinomi finit d'ordre m :

$$\psi^*(L) = \psi_0 + \psi_1 L + \psi_2 L^2 + \dots + \psi_m L^m \quad (6.103)$$

Per a que l'aproximació sigui precisa n'hi ha prou amb escollir m prou gran per a que $\psi_j \approx 0$ quan $j > m$.

Tot i que d'aquesta manera, al substituir els coeficients de l'aproximació (6.103) en el lloc dels coeficients θ_j de l'expressió (6.97) s'obté una aproximació a les autocovariàncies d' X_t , s'ha comprovat com per models ARFIMA(p,d,q) amb $p \leq 3$ i $q \leq 3$, usant $m=10$ s'obtenen diferències inferiors a 10^{-4} amb els resultats d'aplicar el mètode proposat a Sowell (1992), amb l'avantatge que cal un nombre molt inferior de càlculs.

En definitiva, el mètode proposat per calcular l'estimador de màxim versemblança de les dades X_1, \dots, X_T es basa en les següents etapes:

1. Per una certa combinació de paràmetres (θ, ϕ, d), calcular la successió d'autocovariàncies teòriques $\gamma(k)$ associades als paràmetres fixats.
2. Construir la matriu V de Toeplitz formada per les autocovariàncies calculades a l'etapa anterior.

3. Avaluar la funció $g(\theta, \phi, d) = -\frac{T}{2} \log\left(\frac{X'V^{-1}X}{T}\right) - \frac{1}{2} \log|V|$. Per fer-ho, és adequat usar la descomposició de Txoleski de la matriu V de manera que $V = L'L$. Com la matriu L és

triangular inferior, és molt fàcil calcular la seva inversa, $W=L^{-1}$ i llavors es compleix que $X'V^{-1}X = X'W'WX$, propietat que facilita el càlcul de la funció $g(\cdot)$.

4. L'aplicació de les etapes anteriors en combinació amb algun algorisme d'optimització permet trobar la combinació de paràmetres que fa màxima la funció $g(\cdot)$ i per tant, fa màxima la versemblança.

6.12. L'estimació de models GARMA

Tots els mètodes d'estimació presentats fins al moment, estan centrats en l'estimació paramètrica de models per sèries amb memòria llarga a la freqüència zero, sobretot models ARFIMA. En un context més general, quan hi ha evidència de forta persistència associada a alguna freqüència diferent de la freqüència zero, cal recórrer a l'estimació d'un model GARMA. Així, tot i que s'ha centrat la tesi en l'anàlisi de les conseqüències econòmiques de la memòria llarga en la freqüència zero, es presenta de manera molt breu la única proposta de que es disposa per a l'estimació de models GARMA.

Concretament, a Gray, et al. (1989) es proposa usar l'estimació màxim versemblant. Suposi's que es disposa de T observacions d'un procés $X_T \sim \text{GARMA}(p, \lambda, \xi, q)$ és a dir, que X_t és solució de la següent equació:

$$\phi(L)(1 - 2\xi L + L^2)^d (X_t - \mu) = \theta(L)\varepsilon_t, \quad (6.104)$$

El procediment suggerit per aquests autors per estimar els paràmetres del model és el següent:

1. Usar la mitjana aritmètica com estimador de l'esperança i centrar les dades.
2. Crear una graella de valors pels paràmetres (λ, ξ) .

3. Per cada combinació d'aquesta graella de valors, maximitzar la funció de versemblança respecte els $p+q$ paràmetres autorregressius i mitjana mòbil. Per fer-ho, cal transformar les dades X_1, \dots, X_T de la següent manera:

$$Y_t = (1 - 2\xi L + L^2)^\lambda (X_t - \bar{X}) = \sum_{j=0}^{t-1} \psi_j (X_{t-j} - \bar{X}) \quad (6.105)$$

4. Si X_t es pot representar com un model GARMA(p, λ, ξ, q), llavors Y_t és un model ARMA(p, q):

$$\phi(L)Y_t = \theta(L)\varepsilon_t \quad (6.106)$$

5. Aplicant l'estimador habitual de models ARMA per màxima versemblança es poden trobar estimacions dels paràmetres autorregressius i mitjana mòbil.
6. Finalment, entre totes les combinacions de la graella de valors (λ, ξ) , s'escull aquella combinació per la que el model ARMA estimat té una versemblança màxima.

Observi's com en aquest cas, es tracta d'un mètode poc elaborat i sobre el que no es disposa, fins al moment de cap estudi sobre les seves propietats.

6.13. L'estimació de models EXPFI.

Tal com s'ha comentat prèviament, tot i que l'ajust de models paramètrics a les sèries temporals ha generat molta discussió acadèmica sobre els diferents tipus de models, pel que fa a la utilització d'aquests models paramètrics per caracteritzar el comportament de diferents variables econòmiques, gairebé sempre s'han usat models ARMA per la modelització de la memòria curta i models ARFIMA per la memòria llarga.

Però, tot i que al llarg de la tesi s'han usat, bàsicament models ARFIMA, una de les conclusions a la que s'arriba més endavant, és que l'estimació de models ARFIMA presenta dificultats per discriminar entre la component de memòria curta i la component de memòria llarga d'una sèrie temporal.

En aquest context, una alternativa molt interessant a l'hora d'estimar un model paramètric que permeti caracteritzar tant les components de memòria curta com les components de memòria llarga, consisteix a usar un model EXP enlloc d'un model ARMA per la component de memòria curta, tal com s'ha proposat a l'apartat 4.8 de la tesi.

De totes maneres, tal i com ja s'ha comentat en aquell apartat, els corol·laris 3.1 i 3.2 garantitzen que sempre es pot trobar un model ARMA que permeti aproximar prou bé el comportament de qualsevol sèrie de memòria curta.

Per tant, caldria disposar també, en el cas dels models EXP, d'algun resultat que demostrï que aquest tipus de models permeten representar la major part de processos estacionaris de memòria curta, de manera similar als teoremes de representativitat de que es disposa pels models ARMA. A continuació, es presenta un resultat d'aquest tipus:

Teorema 6.2. Sigui X_t un procés estocàstic estacionari amb densitat espectral $f(\omega)$. Per qualsevol $\varepsilon > 0$, existeix un model exponencial definit per la successió de coeficients β_1, \dots, β_p amb densitat espectral $f_p(\omega)$ de manera que $|f(\omega) - f_p(\omega)| < \varepsilon$.

Demostració: Un model exponencial definit per la successió de coeficients β_1, \dots, β_p té densitat espectral igual a:

$$f_p(\omega) = \frac{\sigma^2}{2\pi} \exp\left\{2 \sum_{k=1}^p \beta_k \cos(k\omega)\right\} \quad (6.107)$$

per tant, fixat un $\varepsilon > 0$ cal demostrar que existeixen els coeficients adequats per a que:

$$\left| f(\omega) - \frac{\sigma^2}{2\pi} \exp \left\{ 2 \sum_{k=1}^p \beta_k \cos(k\omega) \right\} \right| < \varepsilon \quad (6.108)$$

Pel fet de ser densitat espectral, es compleix que a l'interval $[-\pi, \pi]$, $f(\omega)$ és simètrica, no negativa i integrable. Suposi's que a més és estrictament positiva, llavors la funció $f^*(\omega) = \log f(\omega)$ també és simètrica, no negativa i integrable en aquest interval.

Per tant, existeix un cert procés estocàstic estacionari X_t^* , tal que té per densitat espectral $f^*(\omega) = \log f(\omega)$. Aquesta densitat espectral compleix:

$$f^*(\omega) = \frac{\gamma_0^*}{2\pi} + \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \gamma_k^* \cos(k\omega) \quad (6.109)$$

on γ_k^* són les autocovariàncies de X_t^* . Noti's que aquestes covariàncies tendeixen cap a zero de manera que fixat $\varepsilon^* = \exp(\varepsilon) > 0$, existeix p de manera que:

$$\left| f^*(\omega) - \frac{\gamma_0^*}{2\pi} + \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^p \gamma_k^* \cos(k\omega) \right| < \varepsilon^* \quad (6.110)$$

per tant, si es defineixen els coeficients $\beta_j = 2\pi\gamma_j^*$ es compleix:

$$|f(\omega) - f_p(\omega)| = \left| \exp[f^*(\omega)] - \exp \left[\frac{\gamma_0^*}{2\pi} + \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^p \gamma_k^* \cos(k\omega) \right] \right| < \varepsilon \quad (6.111)$$

que és el que es volia demostrar.

□

Suposi's que la sèrie X_t és integrable d'ordre d . Llavors, segons la definició 4.6, $Y_t = (1-L)^d X_t$ té densitat espectral $f_Y(\omega)$ continua, acotada i no negativa. Fins al moment, la metodologia usada al llarg de la tesi s'ha basat en usar un model ARMA(p, q) per aproximar aquesta densitat $f_Y(\omega)$ de manera que X_t segueix un model ARFIMA(p, d, q).

Però el Teorema 6.2 suggereix que també és raonable, com alternativa, suposar que el procés Y_t es pot aproximar per un model exponencial, de manera que:

$$f_Y(\omega) = \frac{\sigma^2}{2\pi} \exp\left\{2 \sum_{k=1}^p \beta_k \cos(k\omega)\right\} = f_Z(\omega) \exp\left\{2 \sum_{k=1}^p \beta_k \cos(k\omega)\right\} \quad (6.112)$$

on es suposa que Z_t és soroll blanc. En aquest cas, per tant, X_t segueix un model EXPFI(p, d).

Per a l'estimació d'aquest model que conté tant paràmetres associats amb la memòria curta com amb la memòria llarga, hi ha diverses possibilitats. A continuació, es presenta una aproximació paramètrica a l'estimació d'aquest model, mentre que en el capítol següent s'utilitza aquest tipus de model per a estimar de manera semiparamètrica la memòria de les sèries temporals.

La densitat espectral d'un model EXPFI(p, d) és:

$$f(\omega) = \exp\left\{\sum_{k=1}^p \beta_k \cos(k\omega)\right\} |1 - e^{i\omega}|^{-2d} \quad (6.113)$$

Com:

$$\log|1 - e^{i\omega}| = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \cos(k\omega) \quad (6.114)$$

es pot escriure aquesta densitat espectral com:

$$f(\omega) = \exp\left\{\sum_{k=1}^p \theta_k \cos(k\omega) - 2d \sum_{k=p}^{\infty} \frac{1}{k} \cos(k\omega)\right\} \quad (6.115)$$

Recordi's que la versemblança reduïda d'una sèrie temporal és:

$$l(\theta) = -\frac{2}{T} \log L(X_1, \dots, X_T; \theta) - \frac{T}{2} \log(2\pi) = \frac{1}{T} \log|\Gamma(\theta)| + \frac{1}{T} X^T \Gamma(\theta)^{-1} X \quad (6.116)$$

Tot i que en general, el càlcul de les autocovariàncies és molt laboriós i el càlcul de la inversa de la matriu $\Gamma(\theta)$ pot ser complexa, aquest cas és especialment interessant per a l'estimació màxim versemblant perquè la matriu $\Gamma(\theta)$ és diagonal, degut a l'ortogonalitat dels diferents termes en cosinus. Això facilita molt l'estimació màxim versemblant dels paràmetres del model EXPFI(p, d).

En definitiva, en aquest apartat s'ha volgut destacar que els modes EXPFI(p, d) conformen una alternativa molt interessant als models ARFIMA tot i que és una alternativa que ha estat poc estudiada fins al moment. En tot cas, al marge de que d'aquesta proposta se'n poden treure altres aplicacions força interessants, en el cas concret de la tesi s'ha aprofitat el Teorema 6.2 per desenvolupar, a l'apartat 7.5 un mètode semiparamètric d'estimació del paràmetre d'integració fraccional d .

6.14. Consideracions finals

Al llarg del capítol s'ha presentat una visió general de l'estat de la qüestió actual pel que fa a l'estimació paramètrica de models que contenen memòria llarga, sobretot models ARFIMA. La conclusió més important que cal treure'n d'aquest resum és l'enorme dificultat que presenta l'estimació d'aquests models.

D'una banda, degut a l'enorme quantitat de càlculs que requereix l'estimació per màxima versemblança. Per altra banda, tot i que aquest és un problema sobre el que s'estan desenvolupant millores importants, quan es disposa d'un nombre no gaire gran de dades ni l'estimador màxim versemblant ni les modificacions proposades presenten propietats gaire bones.

Així, i molt relacionat amb les dificultats per discriminar entre memòria curta i memòria llarga, es produeixen interferències en l'estimació de paràmetres autoregressius i del paràmetre d .

Aquests problemes de biaix són especialment importants quan els ordres dels polinomis autoregressiu i mitjana mòbil especificats no són correctes.

Com a solució a aquest problema, hi ha dos possibilitats:

- Per una banda, desenvolupar mètodes que permetin identificar el tipus de model ARFIMA més adequat per a cada sèrie temporal. Aquest és un problema complex per la dificultat que té discriminar entre la presència d'un factor autoregressiu o una diferència fraccional.
- Per altra, usar mètodes d'estimació del paràmetre que no es vegin afectats per la presència de coeficients autoregressius o mitjana mòbil en la representació temporal de la variable.

Per aquest motiu, ha rebut força interès a la literatura la possibilitat d'estimar de manera no paramètrica el paràmetre d sense necessitat d'especificar completament un model ARFIMA, mètodes als que es dedica el capítol següent.

En tot cas, també és important destacar que a l'actualitat s'està produint una àmplia recerca al voltant de l'estimació paramètrica de models ARFIMA. Exemples d'aquesta recerca en són els documents de treball de Jensen (1995), Galbraith i Zinde-Walsh (1997) i Vance i Martin (1997) no publicats de moment.

Annex 6.1. Relació entre la versemblança d'una sèrie temporal i el predictor òptim

Suposi's que interessa calcular la versemblança d'una sèrie temporal, X_1, \dots, X_T com funció de les prediccions de cada valor X_t a partir de les observacions X_1, \dots, X_{t-1} . Sota el supòsit de que $E(X_t) = 0$ la versemblança és:

$$L(X_1, \dots, X_T) = (2\pi)^{-T/2} |\Gamma|^{-1/2} \exp\left\{-\frac{1}{2} X^T \Gamma^{-1} X\right\} \quad (\text{A6.1})$$

on Γ és la matriu d'autocovariàncies. En aquest cas, té interès considerar el següent lema¹³.

Lema 6.1. Sigui X_t un procés estocàstic amb esperança zero on la $\Gamma = [\gamma(i,j)]_{i,j=1}^T$ no és singular amb¹⁴ $\gamma(i,j) = E(X_i X_j)$. Aleshores el predictor òptim d' X_t en funció dels valors anteriors de la variable, X_1, \dots, X_{t-1} i l'error quadràtic mig $v_t = EQM(\tilde{X}_{t+1}) = E\left[(X_{t+1} - \tilde{X}_{t+1})^2\right]$ compleixen:

$$\tilde{X}_{t+1} = \begin{cases} 0 & t = 0 \\ \sum_{j=1}^t \theta_{tj} (X_{t+1-j} - \tilde{X}_{t+1-j}) & t \geq 1 \end{cases} \quad (\text{A6.2})$$

on:

$$\begin{cases} v_0 = \gamma(1,1) \\ \theta_{t,t-k} = v_k^{-1} \left[\gamma(t+1, t+1) - \sum_{j=0}^{k-1} v_j \theta_{k,k-j} \theta_{t,t-j} \right] & k = 1, \dots, t-1 \\ v_t = \gamma(t+1, t+1) - \sum_{j=0}^{t-1} v_j \theta_{t,t-j}^2 \end{cases}$$

Observi's com a efectes de càlcul, les relacions anteriors es poden resoldre recursivament en el següent ordre: $v_0, \theta_{11}, \theta_1, \theta_{22}, \theta_{21}, v_2$ etc..

¹³ Per una demostració vegi's la Proposició 5.2.2 de Brockwell i Davis (1992).

¹⁴ Noti's que per a que aquest Lema sigui cert no cal suposar que X_t és estacionari.

Si es defineix una matriu $C = [(\theta_{i,j})_{i,j=0}^{T-1}]$, les equacions (A6.2) es poden escriure en forma matricial com:

$$\tilde{X} = (C - I)(X - \tilde{X}) \quad (\text{A6.3})$$

on $\tilde{X} = (\tilde{X}_1 \dots \tilde{X}_T)'$ és un vector columna format pels predictors òptims a partir de les dades anteriors. Per definició d'error quadràtic mitjà, la matriu de variàncies i covariàncies de $X - \tilde{X}$ és:

$$D = E[(X - \tilde{X})(X - \tilde{X})'] = \begin{bmatrix} v_0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & v_1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & v_{T-1} \end{bmatrix} \quad (\text{A6.4})$$

Per tant es compleix $\Gamma = CDC'$, de manera que:

$$X' T X (X - \tilde{X})' D^{-1} (X - \tilde{X}) = \sum_{t=1}^T \frac{(X_t - \tilde{X}_t)^2}{v_{t-1}} \quad (\text{A6.5})$$

i el determinant de la matriu Γ és $\det(\Gamma) = \det(C)^2 \det(D) = v_0 \dots v_{T-1}$. En definitiva, la versemblança (A6.1) es pot escriure com:

$$L(X_1, \dots, X_T; \theta) = (2\pi)^{-T/2} (v_0 \dots v_{T-1})^{-1/2} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \sum_{t=1}^T \frac{(X_t - \tilde{X}_t)^2}{v_{t-1}} \right\} \quad (\text{A6.6})$$

El Lema 6.1 és interessant perquè permet demostrar la igualtat (A6.6) però a efectes pràctics, si hom desitja calcular prediccions del valor d' X_t , a partir de les observacions anteriors en el cas de sèries estacionàries és més pràctic usar el lema següent¹⁵ conegut més popularment com *algorisme Durbin-Levinson*.

Lema 6.2 (Algorisme Durbin-Levinson). Sigui X_t un procés estocàstic estacionari amb esperança zero i funció d'autocovariàncies $\gamma(\cdot)$, sempre que les autocovariàncies tendeixin a zero el

¹⁵ Per una demostració vegi's la Proposició 5.2.1 de Brockwell i Davis (1992).

predictor òptim d' X_T en funció dels valors anteriors de la variable, X_1, \dots, X_{T-1} i l'error quadràtic mig v_T es poden calcular com:

$$\tilde{X}_{t+1} = \phi_{t,1}X_t + \dots + \phi_{t,t}X_1 \quad (\text{A6.7})$$

on:

$$\begin{cases} v_0 = \gamma(0) \\ \phi_{11} = \gamma(1)/\gamma(0) \\ \phi_{t,j} = \left[\gamma(t) - \sum_{j=1}^{t-1} \gamma(t-j)\phi_{t-1,j} \right] v_{t-1}^{-1} \\ \phi_{t,j} = \phi_{t-1,j} - \phi_{t,t}\phi_{t-1,t-j} & j = 1, \dots, t-1 \\ v_t = v_{t-1} [1 - \phi_{tt}] \end{cases}$$

En tot cas, és important remarcar que els coeficients $\phi_{j,j}$ formen el que habitualment es coneix com funció d'autocorrelació parcial (FAP) de manera que l'*algorisme Durbin-Levinson* no és més que una fórmula recursiva per calcular els coeficients d'autocorrelació parcial.

Annex 6.2. Hipòtesis del mètode proposat per Fox i Taqqu (1986)

A l'apartat 6.3 s'ha presentat breument el mètode d'estimació proposat per Fox i Taqqu (1986) per sèries amb memòria llarga. A continuació s'expliciten les hipòtesis necessàries per garantir que el mètode proposat dona lloc a un estimador consistent. Concretament, aquestes condicions són:

- 1) $f(\omega; \theta) \underset{\omega \rightarrow 0}{\sim} |\omega|^{-\alpha(\theta)} L_\theta(\omega)$ on $L_\theta(\omega)$ és una funció de variació suau
- 2) $f(\omega; \theta)$ continua per tots $\omega \neq 0$ i θ , $f^{-1}(\omega; \theta)$ continua per tots (ω, θ) i $f(\omega; \theta) = O|\omega|^{-\alpha(\theta)-\delta}$ quan $\omega \rightarrow 0$
- 3) $\frac{\partial}{\partial \theta_j} f^{-1}(\omega; \theta)$ i $\frac{\partial^2}{\partial \theta_j \partial \theta_k} f^{-1}(\omega; \theta)$ contínues per tots (ω, θ) , $\frac{\partial}{\partial \theta_j} f^{-1}(\omega; \theta) = O|\omega|^{-\alpha(\theta)-\delta}$ quan $\omega \rightarrow 0$ i $\frac{\partial^2}{\partial \theta_j \partial \theta_k} f^{-1}(\omega; \theta) = O|\omega|^{-\alpha(\theta)-\delta}$ quan $\omega \rightarrow 0$
- 4) $\frac{\partial}{\partial \omega} f(\omega; \theta)$ continua si $\omega \neq 0$ i $\frac{\partial}{\partial \omega} f(\omega; \theta) = O|\omega|^{-\alpha(\theta)-1-\delta}$ quan $\omega \rightarrow 0$
- 5) $\frac{\partial^2}{\partial \omega \partial \theta_j} f^{-1}(\omega; \theta)$ continua si $\omega \neq 0$ i $\frac{\partial^2}{\partial \omega \partial \theta_j} f^{-1}(\omega; \theta) = O|\omega|^{-\alpha(\theta)-1-\delta}$ quan $\omega \rightarrow 0$
- 6) $\frac{\partial^3}{\partial^2 \omega \partial \theta_j} f^{-1}(\omega; \theta)$ continua si $\omega \neq 0$ i $\frac{\partial^3}{\partial^2 \omega \partial \theta_j} f^{-1}(\omega; \theta) = O|\omega|^{-\alpha(\theta)-2-\delta}$ quan $\omega \rightarrow 0$
- 7) La funció $f(\omega, \theta)$ està normalitzada de manera que $\int_{-\pi}^{\pi} \log f(\omega; \theta) d\omega = 0$

