UNIVERSITAT DE BARCELONA

Conseqüències economètriques del grau de memòria en dades temporals

Ernest Pons Fanals

CONSEQÜÈNCIES ECONOMÈTRIQUES DEL GRAU DE MEMÒRIA EN DADES TEMPORALS

Ernest Pons Fanals

Tesi Doctoral dirigida pel Dr. Jordi Suriñach i Caralt en el marc del programa de doctorat "Economia i Territori. Mètodes Quantitatius" de la Universitat de Barcelona.

Departament d'Econometria, Estadística i Economia Espanyola.

Barcelona, Octubre de 1998.

Annex 8.1. Comportament dels tests d'arrels unitàries front diferents tipus de memòria

A les pàgines següents es presenten alguns dels resultats obtinguts per avaluar mitjançant exercicis de simulació, el comportament dels tests d'arrels unitàries més habituals quan les dades contenen diferents tipus de memòria.

Concretament, s'han generat diferents models ARFIMA(1,*d*,1):

$$(1-L)^d(1-\phi L)X_t=(1-\theta L)\varepsilon_t \qquad \text{(A8.1)}$$

i per cada un d'aquests models s'han generat 1000 sèries de 100 observacions. Després, a cada una d'aquestes sèries s'hi ha aplicat els tests d'arrels unitàries DF, DFA, PP i KPSS presentats a l'apartat 8.2.1 i s'ha comptabilitzat en quants casos es rebutja la hipòtesi nul·la ($d=1$ en els contrastos DF, DFA i PP i $d=0$ en el contrast KPSS).

Al quadre A8.1 es presenta un resum dels models analitzats i els quadres on es poden trobar els resultats.

Quadre A8.1. Models analitzats en l'exercici de simulació

ϕ	θ	$0\leq d<0.45$	$0.5<d\leq 1$	$1\leq d<1.45$
0.5	0.0	Quadre A8.2	Quadre A8.3	Quadre A8.4
0.9	0.0	Quadre A8.5	Quadre A8.6	Quadre A8.7
-0.5	0.0	Quadre A8.8	Quadre A8.9	Quadre A8.10
-0.9	0.0	Quadre A8.11	Quadre A8.12	Quadre A8.13
0.0	0.5	Quadre A8.14	Quadre A8.15	Quadre A8.16
0.0	0.9	Quadre A8.17	Quadre A8.18	Quadre A8.19
0.0	-0.5	Quadre A8.20	Quadre A8.21	Quadre A8.22
0.0	-0.9	Quadre A8.23	Quadre A8.24	Quadre A8.25

A l'apartat 8.2.1 de la tesi es presenten les principals conclusions que es poden extreure d'aquest exercici de simulació.

Quadre A8.2. Proporció de rebutjos de la hipòtesi nul·la en els tests DF, ADF, PP i KPSS. Model ARFIMA(1,d,1) amb $\phi=0.5$, $\theta=0$ i $0\leq d<0.45$.

	k	d=0	0.05	0.1	0.15	0.2	0.25	0.3	0.35	0.4	0.45
DF		1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	0.99	0.93	0.77	0.54	0.29
ADF	**2**	1.00	1.00	1.00	1.00	0.99	0.97	0.90	0.74	0.55	0.33
	4	1.00	1.00	1.00	0.98	0.95	0.87	0.75	0.58	0.42	0.24
	6	1.00	0.99	0.96	0.92	0.84	0.73	0.60	0.45	0.32	0.18
	8	0.97	0.94	0.89	0.82	0.72	0.61	0.49	0.35	0.25	0.15
	10	0.92	0.87	0.79	0.71	0.61	0.50	0.40	0.29	0.21	0.13
	12	0.85	0.78	0.70	0.60	0.51	0.42	0.33	0.25	0.17	0.12
	14	0.77	0.69	0.62	0.51	0.44	0.37	0.29	0.21	0.16	0.11
	16	0.68	0.60	0.53	0.45	0.38	0.32	0.25	0.19	0.14	0.10
PP	**2**	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	0.98	0.91	0.75	0.54	0.30
	4	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	0.97	0.89	0.72	0.51	0.28
	6	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	0.97	0.89	0.71	0.49	0.26
	8	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	0.97	0.88	0.70	0.48	0.26
	10	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	0.97	0.89	0.70	0.47	0.25
	12	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	0.98	0.89	0.71	0.48	0.25
	14	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	0.98	0.90	0.71	0.48	0.25
	16	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	0.98	0.90	0.72	0.49	0.26
KPSS	**2**	0.15	0.20	0.27	0.33	0.40	0.47	0.51	0.59	0.64	0.69
	4	0.10	0.13	0.18	0.24	0.29	0.35	0.38	0.45	0.50	0.56
	6	0.08	0.10	0.14	0.18	0.22	0.28	0.31	0.37	0.42	0.47
	8	0.07	0.08	0.12	0.15	0.19	0.23	0.27	0.32	0.36	0.41
	10	0.06	0.07	0.10	0.14	0.16	0.20	0.23	0.28	0.32	0.36
	12	0.05	0.06	0.08	0.12	0.14	0.18	0.20	0.24	0.28	0.33
	14	0.04	0.06	0.07	0.10	0.12	0.15	0.17	0.21	0.24	0.29
	16	0.04	0.05	0.06	0.08	0.11	0.13	0.15	0.19	0.21	0.25

Quadre A8.3. Proporció de rebutjos de la hipòtesi nul·la en els tests DF, ADF, PP i KPSS. Model ARFIMA(1,d,1) amb $\phi=0.5$, $\theta=0$ i $0.5<d\leq 1$.

	k	d=0.55	0.6	0.65	0.7	0.75	0.8	0.85	0.9	0.95	1
DF		0.45	0.32	0.20	0.12	0.06	0.03	0.01	0.01	0.00	0.00
ADF	**2**	0.57	0.48	0.38	0.31	0.23	0.18	0.13	0.10	0.07	0.05
	4	0.45	0.38	0.32	0.25	0.20	0.16	0.12	0.09	0.07	0.06
	6	0.36	0.30	0.25	0.21	0.17	0.14	0.11	0.08	0.07	0.05
	8	0.30	0.25	0.21	0.18	0.16	0.13	0.10	0.08	0.07	0.05
	10	0.25	0.21	0.18	0.16	0.14	0.12	0.09	0.08	0.07	0.05
	12	0.22	0.19	0.17	0.15	0.14	0.11	0.09	0.08	0.07	0.06
	14	0.19	0.17	0.16	0.14	0.13	0.10	0.09	0.08	0.07	0.06
	16	0.18	0.16	0.15	0.14	0.12	0.10	0.08	0.08	0.08	0.06
PP	**2**	0.52	0.41	0.30	0.21	0.14	0.09	0.05	0.03	0.02	0.01
	4	0.50	0.40	0.30	0.22	0.15	0.10	0.07	0.04	0.03	0.02
	6	0.47	0.38	0.28	0.21	0.14	0.10	0.07	0.04	0.03	0.02
	8	0.46	0.35	0.26	0.19	0.13	0.09	0.06	0.04	0.03	0.02
	10	0.44	0.34	0.25	0.18	0.12	0.08	0.05	0.03	0.02	0.02
	12	0.44	0.33	0.23	0.16	0.11	0.07	0.05	0.03	0.02	0.01
	14	0.43	0.32	0.22	0.15	0.09	0.06	0.03	0.02	0.02	0.01
	16	0.43	0.31	0.21	0.13	0.08	0.05	0.03	0.02	0.01	0.01
KPSS	**2**	0.66	0.73	0.76	0.80	0.83	0.86	0.88	0.90	0.92	0.93
	4	0.49	0.55	0.60	0.64	0.67	0.71	0.75	0.78	0.80	0.83
	6	0.40	0.45	0.49	0.54	0.57	0.61	0.66	0.68	0.71	0.75
	8	0.33	0.38	0.42	0.46	0.48	0.54	0.59	0.61	0.65	0.70
	10	0.27	0.32	0.35	0.39	0.42	0.48	0.53	0.55	0.59	0.65
	12	0.23	0.27	0.30	0.34	0.36	0.43	0.47	0.50	0.55	0.60
	14	0.18	0.23	0.25	0.29	0.32	0.37	0.42	0.45	0.50	0.55
	16	0.15	0.18	0.21	0.25	0.27	0.32	0.38	0.40	0.45	0.51

Quadre A8.4. Proporció de rebutjos de la hipòtesi nul·la en els tests DF, ADF, PP i KPSS. Model ARFIMA(1,d,1) amb ϕ=*0.5*, θ=*0* i 1≤d<*1.45*.

	k	d=1	1.05	1.1	1.15	1.2	1.25	1.3	1.35	1.4	1.45
DF		0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
ADF	2	0.05	0.04	0.03	0.02	0.02	0.01	0.01	0.01	0.01	0.00
	4	0.06	0.04	0.03	0.02	0.02	0.01	0.01	0.01	0.01	0.00
	6	0.05	0.05	0.03	0.03	0.02	0.02	0.02	0.01	0.01	0.00
	8	0.05	0.05	0.04	0.03	0.03	0.02	0.02	0.02	0.01	0.01
	10	0.05	0.05	0.04	0.03	0.03	0.02	0.03	0.02	0.02	0.01
	12	0.06	0.05	0.04	0.03	0.03	0.03	0.03	0.02	0.02	0.01
	14	0.06	0.05	0.05	0.04	0.04	0.03	0.03	0.03	0.03	0.02
	16	0.06	0.06	0.05	0.04	0.04	0.04	0.04	0.04	0.03	0.02
PP	2	0.01	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
	4	0.02	0.01	0.01	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
	6	0.02	0.01	0.01	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
	8	0.02	0.01	0.01	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
	10	0.02	0.01	0.01	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
	12	0.01	0.01	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
	14	0.01	0.01	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
	16	0.01	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
KPSS	2	0.93	0.94	0.95	0.97	0.97	0.98	0.99	0.99	0.99	1.00
	4	0.83	0.85	0.88	0.90	0.92	0.94	0.95	0.96	0.97	0.99
	6	0.75	0.77	0.80	0.84	0.85	0.88	0.90	0.92	0.94	0.97
	8	0.70	0.72	0.75	0.80	0.81	0.84	0.86	0.90	0.92	0.95
	10	0.65	0.67	0.70	0.76	0.78	0.81	0.84	0.87	0.90	0.94
	12	0.60	0.63	0.65	0.72	0.74	0.78	0.81	0.85	0.88	0.93
	14	0.55	0.58	0.61	0.68	0.71	0.74	0.78	0.83	0.86	0.92
	16	0.51	0.54	0.57	0.64	0.67	0.71	0.75	0.81	0.84	0.90

Quadre A8.5. Proporció de rebutjos de la hipòtesi nul·la en els tests DF, ADF, PP i KPSS. Model ARFIMA(1,*d*,1) amb $\phi=0.9$, $\theta=0$ i $0\leq d<0.45$.

	k	d=0	0.05	0.1	0.15	0.2	0.25	0.3	0.35	0.4	0.45
DF		0.78	0.57	0.36	0.19	0.09	0.04	0.01	0.01	0.00	0.00
ADF	**2**	0.74	0.58	0.43	0.30	0.19	0.13	0.08	0.05	0.03	0.01
	4	0.65	0.54	0.44	0.32	0.25	0.18	0.13	0.09	0.06	0.04
	6	0.58	0.49	0.41	0.32	0.25	0.19	0.14	0.10	0.07	0.04
	8	0.53	0.44	0.37	0.29	0.24	0.19	0.15	0.10	0.08	0.05
	10	0.47	0.40	0.35	0.27	0.23	0.19	0.15	0.11	0.08	0.05
	12	0.43	0.37	0.31	0.26	0.22	0.18	0.14	0.11	0.08	0.05
	14	0.40	0.34	0.29	0.24	0.20	0.18	0.15	0.10	0.09	0.06
	16	0.36	0.31	0.27	0.23	0.19	0.17	0.14	0.11	0.09	0.06
PP	**2**	0.78	0.60	0.42	0.26	0.15	0.08	0.04	0.02	0.01	0.00
	4	0.78	0.61	0.45	0.28	0.17	0.10	0.06	0.03	0.02	0.01
	6	0.78	0.61	0.45	0.29	0.18	0.11	0.06	0.04	0.02	0.01
	8	0.79	0.62	0.45	0.28	0.18	0.11	0.06	0.04	0.02	0.01
	10	0.79	0.61	0.44	0.28	0.17	0.10	0.06	0.03	0.02	0.01
	12	0.79	0.61	0.43	0.26	0.16	0.09	0.05	0.03	0.02	0.01
	14	0.79	0.60	0.42	0.25	0.15	0.08	0.04	0.03	0.01	0.01
	16	0.79	0.59	0.40	0.24	0.13	0.07	0.03	0.02	0.01	0.00
KPSS	**2**	0.63	0.68	0.72	0.76	0.79	0.82	0.83	0.85	0.88	0.90
	4	0.43	0.47	0.52	0.56	0.61	0.64	0.66	0.69	0.73	0.76
	6	0.33	0.36	0.41	0.44	0.49	0.51	0.53	0.58	0.61	0.65
	8	0.26	0.29	0.33	0.36	0.40	0.42	0.45	0.49	0.53	0.57
	10	0.21	0.23	0.26	0.30	0.33	0.35	0.38	0.43	0.46	0.51
	12	0.16	0.18	0.21	0.25	0.27	0.30	0.33	0.37	0.40	0.45
	14	0.13	0.15	0.17	0.21	0.22	0.25	0.27	0.32	0.35	0.39
	16	0.11	0.12	0.14	0.16	0.18	0.20	0.22	0.27	0.31	0.36

Quadre A8.6. Proporció de rebutjos de la hipòtesi nul·la en els tests DF, ADF, PP i KPSS. Model ARFIMA(1,d,1) amb $\phi=0.9$, $\theta=0$ i $0.5<d\leq 1$.

	k	d=0.55	0.6	0.65	0.7	0.75	0.8	0.85	0.9	0.95	1
DF		0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
ADF	2	0.04	0.03	0.03	0.03	0.03	0.04	0.04	0.04	0.05	0.05
	4	0.09	0.08	0.08	0.07	0.07	0.07	0.06	0.06	0.06	0.05
	6	0.11	0.10	0.10	0.09	0.09	0.08	0.06	0.07	0.06	0.06
	8	0.11	0.10	0.10	0.09	0.09	0.08	0.07	0.07	0.06	0.06
	10	0.12	0.10	0.11	0.10	0.10	0.08	0.07	0.07	0.07	0.06
	12	0.12	0.11	0.11	0.11	0.10	0.08	0.07	0.07	0.07	0.07
	14	0.11	0.11	0.11	0.11	0.10	0.08	0.07	0.08	0.08	0.07
	16	0.12	0.11	0.11	0.11	0.11	0.09	0.08	0.08	0.08	0.07
PP	2	0.01	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
	4	0.01	0.01	0.01	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
	6	0.02	0.01	0.01	0.01	0.01	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
	8	0.02	0.01	0.01	0.01	0.01	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
	10	0.02	0.01	.01	0.01	0.01	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
	12	0.02	0.01	0.01	0.01	0.01	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
	14	0.01	0.01	0.01	0.01	0.01	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
	16	0.01	0.00	0.01	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
KPSS	2	0.90	0.91	0.92	0.93	0.94	0.95	0.96	0.97	0.97	0.97
	4	0.74	0.77	0.79	0.82	0.83	0.86	0.87	0.89	0.89	0.92
	6	0.61	0.65	0.67	0.70	0.72	0.75	0.77	0.78	0.80	0.83
	8	0.52	0.56	0.59	0.62	0.64	0.68	0.70	0.72	0.74	0.78
	10	0.44	0.50	0.52	0.55	0.57	0.62	0.65	0.66	0.69	0.72
	12	0.38	0.44	0.46	0.49	0.51	0.56	0.59	0.61	0.64	0.68
	14	0.32	0.38	0.40	0.43	0.45	0.50	0.54	0.56	0.59	0.63
	16	0.27	0.32	0.34	0.37	0.40	0.45	0.49	0.51	0.54	0.59

Quadre A8.7. Proporció de rebutjos de la hipòtesi nul·la en els tests DF, ADF, PP i KPSS. Model ARFIMA(1,*d*,1) amb $\phi=0.9$, $\theta=0$ i $1\leq d<1.45$.

	k	d=1	1.05	1.1	1.15	1.2	1.25	1.3	1.35	1.4	1.45
DF		0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
ADF	2	0.05	0.07	0.08	0.08	0.10	0.13	0.17	0.20	0.26	0.35
	4	0.05	0.06	0.05	0.04	0.05	0.05	0.06	0.05	0.05	0.04
	6	0.06	0.06	0.05	0.04	0.05	0.04	0.05	0.04	0.05	0.03
	8	0.06	0.06	0.06	0.04	0.05	0.05	0.05	0.05	0.05	0.04
	10	0.06	0.06	0.06	0.05	0.05	0.05	0.06	0.05	0.05	0.04
	12	0.07	0.06	0.06	0.05	0.06	0.05	0.06	0.06	0.05	0.05
	14	0.07	0.07	0.07	0.06	0.06	0.06	0.07	0.06	0.06	0.06
	16	0.07	0.07	0.07	0.07	0.07	0.07	0.08	0.07	0.07	0.06
PP	2	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
	4	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
	6	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
	8	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
	10	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
	12	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
	14	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
	16	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
KPSS	2	0.97	0.97	0.98	0.99	0.99	0.99	0.99	0.99	1.00	1.00
	4	0.92	0.92	0.94	0.95	0.95	0.97	0.97	0.98	0.99	0.99
	6	0.83	0.85	0.86	0.89	0.89	0.91	0.93	0.94	0.96	0.97
	8	0.78	0.79	0.81	0.84	0.85	0.88	0.89	0.92	0.94	0.96
	10	0.72	0.74	0.76	0.81	0.82	0.85	0.87	0.90	0.92	0.95
	12	0.68	0.70	0.72	0.78	0.79	0.82	0.84	0.88	0.90	0.94
	14	0.63	0.66	0.69	0.74	0.76	0.79	0.82	0.86	0.89	0.93
	16	0.59	0.61	0.65	0.71	0.73	0.76	0.79	0.84	0.87	0.92

Quadre A8.8. Proporció de rebutjos de la hipòtesi nul·la en els tests DF, ADF, PP i KPSS. Model ARFIMA(1,d,1) amb ϕ=-0.5, θ=0 i $0 \leq d < 0.45$.

	k	d=0	0.05	0.1	0.15	0.2	0.25	0.3	0.35	0.4	0.45
DF		1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	0.99
ADF	2	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	0.94	0.73
	4	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	0.99	0.95	0.84	0.68	0.43
	6	1.00	1.00	1.00	0.99	0.96	0.91	0.80	0.64	0.47	0.28
	8	1.00	0.99	0.97	0.94	0.87	0.77	0.64	0.48	0.34	0.21
	10	0.98	0.95	0.90	0.84	0.74	0.63	0.52	0.38	0.26	0.17
	12	0.93	0.88	0.81	0.72	0.62	0.52	0.41	0.30	0.22	0.14
	14	0.86	0.79	0.71	0.61	0.53	0.44	0.34	0.25	0.18	0.12
	16	0.77	0.69	0.62	0.53	0.45	0.38	0.29	0.22	0.16	0.11
PP	2	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	0.96
	4	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	0.96
	6	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	0.97
	8	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	0.98
	10	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	0.98
	12	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	0.98
	14	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	0.99
	16	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	0.99
KPSS	2	0.02	0.04	0.07	0.13	0.20	0.28	0.34	0.43	0.51	0.58
	4	0.02	0.05	0.08	0.13	0.18	0.24	0.30	0.37	0.43	0.50
	6	0.03	0.05	0.08	0.12	0.16	0.21	0.27	0.33	0.37	0.44
	8	0.03	0.05	0.07	0.11	0.15	0.19	0.24	0.29	0.33	0.39
	10	0.03	0.05	0.07	0.10	0.13	0.17	0.21	0.26	0.29	0.34
	12	0.03	0.04	0.07	0.09	0.12	0.15	0.19	0.23	0.26	0.31
	14	0.03	0.04	0.06	0.09	0.10	0.13	0.17	0.20	0.23	0.28
	16	0.03	0.04	0.06	0.08	0.09	0.12	0.15	0.18	0.20	0.24

Quadre A8.9. Proporció de rebutjos de la hipòtesi nul·la en els tests DF, ADF, PP i KPSS. Model ARFIMA(1,d,1) amb ϕ=*-0.5*, θ=*0* i *0.5<d≤1*.

	k	d=0.55	0.6	0.65	0.7	0.75	0.8	0.85	0.9	0.95	1
DF		1.00	1.00	1.00	0.99	0.95	0.87	0.75	0.60	0.45	0.30
ADF	**2**	0.94	0.87	0.77	0.67	0.52	0.36	0.25	0.17	0.10	0.06
	4	0.68	0.58	0.48	0.39	0.30	0.22	0.15	0.11	0.08	0.06
	6	0.50	0.42	0.34	0.28	0.21	0.17	0.13	0.10	0.07	0.06
	8	0.38	0.32	0.27	0.22	0.18	0.14	0.11	0.09	0.07	0.05
	10	0.31	0.26	0.22	0.19	0.16	0.13	0.10	0.08	0.08	0.06
	12	0.26	0.22	0.19	0.17	0.15	0.12	0.10	0.08	0.07	0.06
	14	0.22	0.19	0.18	0.16	0.14	0.11	0.09	0.08	0.07	0.06
	16	0.21	0.18	0.17	0.14	0.13	0.10	0.09	0.08	0.07	0.06
PP	**2**	1.00	0.99	0.98	0.94	0.86	0.72	0.58	0.44	0.30	0.18
	4	1.00	0.99	0.98	0.94	0.86	0.73	0.59	0.45	0.31	0.19
	6	1.00	1.00	0.98	0.95	0.88	0.75	0.61	0.47	0.33	0.21
	8	1.00	1.00	0.99	0.96	0.89	0.77	0.63	0.50	0.35	0.23
	10	1.00	1.00	0.99	0.97	0.90	0.79	0.66	0.52	0.37	0.25
	12	1.00	1.00	0.99	0.97	0.91	0.80	0.68	0.54	0.39	0.26
	14	1.00	1.00	0.99	0.98	0.92	0.82	0.69	0.55	0.40	0.28
	16	1.00	1.00	0.99	0.98	0.93	0.83	0.71	0.57	0.42	0.29
KPSS	**2**	0.55	0.62	0.68	0.74	0.78	0.82	0.85	0.88	0.90	0.92
	4	0.43	0.49	0.55	0.60	0.63	0.68	0.73	0.75	0.79	0.82
	6	0.36	0.41	0.46	0.50	0.53	0.59	0.64	0.67	0.70	0.75
	8	0.30	0.35	0.39	0.43	0.46	0.52	0.57	0.60	0.64	0.69
	10	0.25	0.30	0.33	0.37	0.40	0.47	0.51	0.54	0.59	0.64
	12	0.20	0.25	0.28	0.33	0.35	0.42	0.46	0.49	0.54	0.59
	14	0.17	0.21	0.23	0.28	0.30	0.36	0.41	0.44	0.49	0.54
	16	0.13	0.16	0.20	0.23	0.26	0.31	0.37	0.39	0.44	0.50

Quadre A8.10. Proporció de rebutjos de la hipòtesi nul·la en els tests DF, ADF, PP i KPSS. Model ARFIMA(1,d,1) amb ϕ=-0.5, θ=0 i 1≤d<1.45.

	k	d=1	1.05	1.1	1.15	1.2	1.25	1.3	1.35	1.4	1.45
DF		0.30	0.19	0.12	0.06	0.03	0.01	0.01	0.00	0.00	0.00
ADF	2	0.06	0.03	0.02	0.01	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
	4	0.06	0.04	0.02	0.01	0.01	0.01	0.01	0.00	0.00	0.00
	6	0.06	0.04	0.03	0.02	0.02	0.01	0.01	0.01	0.01	0.00
	8	0.05	0.05	0.03	0.02	0.02	0.02	0.02	0.01	0.01	0.00
	10	0.06	0.05	0.04	0.03	0.02	0.02	0.02	0.02	0.01	0.01
	12	0.06	0.05	0.04	0.03	0.03	0.02	0.03	0.02	0.02	0.01
	14	0.06	0.05	0.04	0.03	0.03	0.02	0.03	0.02	0.02	0.01
	16	0.06	0.05	0.05	0.04	0.04	0.03	0.03	0.03	0.03	0.02
PP	2	0.18	0.11	0.07	0.03	0.02	0.01	0.00	0.00	0.00	0.00
	4	0.19	0.12	0.07	0.03	0.02	0.01	0.00	0.00	0.00	0.00
	6	0.21	0.13	0.08	0.04	0.02	0.01	0.00	0.00	0.00	0.00
	8	0.23	0.14	0.09	0.05	0.03	0.01	0.01	0.00	0.00	0.00
	10	0.25	0.16	0.10	0.05	0.03	0.01	0.01	0.00	0.00	0.00
	12	0.26	0.17	0.10	0.05	0.03	0.01	0.01	0.00	0.00	0.00
	14	0.28	0.17	0.11	0.06	0.03	0.02	0.01	0.00	0.00	0.00
	16	0.29	0.18	0.11	0.06	0.03	0.02	0.01	0.00	0.00	0.00
KPSS	2	0.92	0.93	0.95	0.96	0.97	0.98	0.99	0.99	0.99	1.00
	4	0.82	0.84	0.87	0.90	0.91	0.93	0.95	0.96	0.97	0.99
	6	0.75	0.77	0.80	0.84	0.85	0.87	0.90	0.92	0.94	0.97
	8	0.69	0.71	0.75	0.79	0.81	0.84	0.86	0.89	0.92	0.95
	10	0.64	0.66	0.70	0.75	0.78	0.81	0.83	0.87	0.90	0.94
	12	0.59	0.62	0.65	0.72	0.74	0.77	0.80	0.85	0.88	0.93
	14	0.54	0.58	0.61	0.68	0.71	0.74	0.78	0.83	0.86	0.92
	16	0.50	0.53	0.57	0.64	0.67	0.70	0.75	0.81	0.84	0.90

Quadre A8.11. Proporció de rebutjos de la hipòtesi nul·la en els tests DF, ADF, PP i KPSS. Model ARFIMA(1,d,1) amb ϕ=-0.9, θ=0 i $0\leq d<0.45$.

	k	d=0	0.05	0.1	0.15	0.2	0.25	0.3	0.35	0.4	0.45
DF		1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00
ADF	2	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	0.97	0.79
	4	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	0.99	0.96	0.88	0.70	0.45
	6	1.00	1.00	1.00	0.99	0.97	0.92	0.82	0.66	0.49	0.29
	8	1.00	0.99	0.98	0.95	0.88	0.79	0.66	0.50	0.35	0.22
	10	0.98	0.96	0.91	0.85	0.76	0.65	0.53	0.38	0.27	0.17
	12	0.94	0.89	0.82	0.73	0.63	0.53	0.42	0.31	0.22	0.14
	14	0.87	0.80	0.72	0.63	0.54	0.45	0.35	0.26	0.18	0.12
	16	0.79	0.70	0.63	0.54	0.45	0.38	0.29	0.22	0.16	0.11
PP	2	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00
	4	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00
	6	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00
	8	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00
	10	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00
	12	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00
	14	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00
	16	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00
KPSS	2	0.00	0.00	0.00	0.01	0.03	0.07	0.12	0.19	0.28	0.38
	4	0.00	0.00	0.01	0.02	0.05	0.10	0.15	0.23	0.30	0.38
	6	0.00	0.01	0.01	0.03	0.07	0.11	0.16	0.23	0.29	0.36
	8	0.00	0.01	0.02	0.04	0.07	0.11	0.16	0.22	0.27	0.34
	10	0.00	0.01	0.02	0.04	0.07	0.11	0.15	0.21	0.25	0.31
	12	0.01	0.01	0.02	0.05	0.07	0.11	0.14	0.19	0.22	0.28
	14	0.01	0.01	0.03	0.05	0.07	0.10	0.13	0.17	0.20	0.26
	16	0.01	0.01	0.03	0.04	0.06	0.09	0.12	0.16	0.18	0.23

Quadre A8.12. Proporció de rebutjos de la hipòtesi nul·la en els tests DF, ADF, PP i KPSS. Model ARFIMA(1,*d*,1) amb ϕ=-0.9, θ=0 i $0.5<d\leq 1$.

	k	d=0.55	0.6	0.65	0.7	0.75	0.8	0.85	0.9	0.95	1
DF		1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	0.97	0.92	0.82
ADF	2	0.97	0.91	0.83	0.72	0.58	0.41	0.28	0.19	0.10	0.06
	4	0.72	0.61	0.51	0.41	0.31	0.23	0.16	0.12	0.08	0.06
	6	0.52	0.43	0.36	0.29	0.22	0.17	0.13	0.10	0.07	0.06
	8	0.39	0.33	0.28	0.23	0.19	0.14	0.11	0.09	0.07	0.06
	10	0.32	0.27	0.22	0.19	0.16	0.13	0.10	0.08	0.08	0.06
	12	0.27	0.22	0.19	0.17	0.15	0.12	0.10	0.08	0.07	0.06
	14	0.22	0.19	0.18	0.15	0.14	0.11	0.09	0.08	0.07	0.06
	16	0.21	0.18	0.16	0.14	0.13	0.10	0.09	0.08	0.07	0.06
PP	2	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	0.99	0.97	0.91	0.82	0.68
	4	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	0.99	0.97	0.92	0.82	0.69
	6	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	0.98	0.93	0.84	0.71
	8	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	0.98	0.94	0.86	0.73
	10	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	0.98	0.95	0.87	0.75
	12	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	0.99	0.95	0.88	0.76
	14	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	0.99	0.96	0.89	0.78
	16	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	0.99	0.96	0.90	0.79
KPSS	2	0.37	0.47	0.55	0.63	0.69	0.76	0.81	0.85	0.87	0.90
	4	0.35	0.42	0.48	0.55	0.60	0.65	0.71	0.74	0.78	0.82
	6	0.30	0.37	0.42	0.48	0.51	0.58	0.63	0.66	0.69	0.74
	8	0.26	0.32	0.36	0.41	0.45	0.51	0.56	0.59	0.63	0.69
	10	0.22	0.27	0.31	0.36	0.39	0.46	0.51	0.54	0.59	0.64
	12	0.18	0.23	0.26	0.32	0.34	0.41	0.45	0.49	0.54	0.59
	14	0.15	0.19	0.22	0.27	0.30	0.36	0.41	0.44	0.49	0.54
	16	0.12	0.15	0.19	0.22	0.25	0.30	0.36	0.39	0.44	0.50

Quadre A8.13. Proporció de rebutjos de la hipòtesi nul·la en els tests DF, ADF, PP i KPSS. Model ARFIMA(1,d,1) amb ϕ=-0.9, θ=0 i 1≤d<1.45.

	k	d=1	1.05	1.1	1.15	1.2	1.25	1.3	1.35	1.4	1.45
DF		0.82	0.68	0.54	0.38	0.26	0.16	0.10	0.05	0.03	0.01
ADF	**2**	0.06	0.03	0.01	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
	4	0.06	0.04	0.02	0.01	0.01	0.01	0.01	0.00	0.00	0.00
	6	0.06	0.04	0.03	0.02	0.02	0.01	0.01	0.01	0.01	0.00
	8	0.06	0.04	0.03	0.03	0.02	0.02	0.02	0.01	0.01	0.00
	10	0.06	0.05	0.04	0.03	0.02	0.02	0.02	0.02	0.01	0.01
	12	0.06	0.05	0.04	0.03	0.03	0.02	0.02	0.02	0.02	0.01
	14	0.06	0.05	0.04	0.03	0.03	0.02	0.03	0.02	0.02	0.01
	16	0.06	0.05	0.05	0.03	0.04	0.03	0.03	0.03	0.03	0.02
PP	**2**	0.68	0.54	0.40	0.26	0.16	0.10	0.06	0.03	0.01	0.00
	4	0.69	0.55	0.41	0.26	0.17	0.10	0.06	0.03	0.01	0.01
	6	0.71	0.57	0.43	0.28	0.18	0.11	0.07	0.04	0.01	0.01
	8	0.73	0.59	0.45	0.30	0.20	0.12	0.08	0.04	0.02	0.01
	10	0.75	0.61	0.47	0.31	0.21	0.13	0.08	0.04	0.02	0.01
	12	0.76	0.63	0.48	0.33	0.22	0.14	0.09	0.05	0.02	0.01
	14	0.78	0.64	0.50	0.34	0.23	0.14	0.09	0.05	0.02	0.01
	16	0.79	0.65	0.51	0.36	0.24	0.15	0.10	0.05	0.02	0.01
KPSS	**2**	0.90	0.92	0.94	0.96	0.97	0.98	0.99	0.99	0.99	1.00
	4	0.82	0.84	0.86	0.90	0.91	0.93	0.95	0.96	0.97	0.99
	6	0.74	0.76	0.80	0.84	0.85	0.87	0.90	0.92	0.93	0.97
	8	0.69	0.71	0.75	0.79	0.81	0.84	0.86	0.89	0.92	0.95
	10	0.64	0.66	0.70	0.75	0.77	0.81	0.83	0.87	0.90	0.94
	12	0.59	0.62	0.65	0.71	0.74	0.77	0.80	0.85	0.88	0.93
	14	0.54	0.58	0.61	0.67	0.70	0.74	0.78	0.83	0.86	0.92
	16	0.50	0.53	0.57	0.64	0.67	0.70	0.75	0.80	0.84	0.90

Quadre A8.14. Proporció de rebutjos de la hipòtesi nul·la en els tests DF, ADF, PP i KPSS. Model ARFIMA(1,d,1) amb $\phi=0$, $\theta=0.5$ i $0\leq d<0.45$.

	k	d=0	0.05	0.1	0.15	0.2	0.25	0.3	0.35	0.4	0.45
DF		1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	0.99	0.95	0.80	0.52
ADF	2	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	0.99	0.95	0.83	0.57
	4	1.00	1.00	1.00	1.00	0.99	0.95	0.88	0.73	0.55	0.34
	6	1.00	1.00	0.99	0.96	0.91	0.83	0.71	0.53	0.39	0.23
	8	0.99	0.97	0.94	0.89	0.79	0.69	0.56	0.42	0.30	0.18
	10	0.95	0.92	0.85	0.77	0.67	0.56	0.45	0.33	0.24	0.15
	12	0.89	0.83	0.76	0.65	0.57	0.47	0.37	0.28	0.19	0.13
	14	0.81	0.74	0.66	0.56	0.48	0.40	0.31	0.23	0.17	0.12
	16	0.72	0.64	0.58	0.48	0.41	0.35	0.27	0.21	0.15	0.10
PP	2	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	0.99	0.92	0.77	0.50
	4	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	0.98	0.89	0.72	0.45
	6	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	0.98	0.89	0.70	0.44
	8	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	0.98	0.89	0.70	0.43
	10	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	0.98	0.89	0.71	0.44
	12	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	0.98	0.90	0.72	0.44
	14	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	0.98	0.91	0.73	0.45
	16	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	0.99	0.92	0.74	0.46
KPSS	2	0.07	0.12	0.18	0.24	0.31	0.39	0.44	0.52	0.58	0.64
	4	0.06	0.09	0.14	0.19	0.24	0.30	0.35	0.41	0.47	0.52
	6	0.06	0.08	0.11	0.16	0.20	0.25	0.29	0.35	0.40	0.45
	8	0.05	0.07	0.10	0.14	0.17	0.21	0.25	0.31	0.35	0.40
	10	0.04	0.06	0.09	0.12	0.15	0.19	0.22	0.27	0.30	0.35
	12	0.04	0.05	0.08	0.10	0.13	0.17	0.20	0.23	0.27	0.32
	14	0.04	0.05	0.07	0.09	0.11	0.14	0.17	0.20	0.23	0.28
	16	0.03	0.04	0.06	0.08	0.10	0.12	0.15	0.18	0.20	0.25

Quadre A8.15. Proporció de rebutjos de la hipòtesi nul·la en els tests DF, ADF, PP i KPSS.
Model ARFIMA(1,*d*,1) amb $\phi=0$, $\theta=0.5$ i $0.5<d\leq 1$.

	k	d=0.55	0.6	0.65	0.7	0.75	0.8	0.85	0.9	0.95	1
DF		0.77	0.64	0.50	0.36	0.23	0.14	0.08	0.04	0.02	0.01
ADF	**2**	0.84	0.75	0.65	0.56	0.45	0.34	0.25	0.20	0.14	0.10
	4	0.57	0.49	0.41	0.34	0.26	0.21	0.15	0.11	0.09	0.07
	6	0.43	0.36	0.30	0.25	0.20	0.16	0.12	0.10	0.08	0.06
	8	0.34	0.28	0.24	0.20	0.17	0.13	0.11	0.08	0.07	0.05
	10	0.28	0.24	0.20	0.18	0.15	0.12	0.09	0.08	0.07	0.05
	12	0.24	0.20	0.18	0.15	0.14	0.11	0.09	0.08	0.07	0.06
	14	0.20	0.18	0.17	0.15	0.13	0.11	0.09	0.08	0.07	0.06
	16	0.19	0.17	0.15	0.14	0.13	0.10	0.09	0.08	0.08	0.06
PP	**2**	0.77	0.66	0.54	0.43	0.31	0.21	0.14	0.09	0.05	0.03
	4	0.72	0.60	0.49	0.39	0.28	0.20	0.13	0.09	0.06	0.04
	6	0.69	0.58	0.47	0.37	0.26	0.18	0.12	0.08	0.05	0.03
	8	0.69	0.58	0.45	0.35	0.25	0.17	0.11	0.08	0.05	0.03
	10	0.69	0.57	0.45	0.34	0.24	0.17	0.11	0.07	0.04	0.03
	12	0.69	0.57	0.45	0.34	0.24	0.16	0.10	0.06	0.04	0.02
	14	0.70	0.58	0.45	0.34	0.24	0.15	0.10	0.06	0.03	0.02
	16	0.71	0.59	0.46	0.34	0.23	0.15	0.09	0.05	0.03	0.02
KPSS	**2**	0.61	0.68	0.72	0.77	0.80	0.84	0.86	0.89	0.90	0.92
	4	0.46	0.52	0.57	0.62	0.65	0.69	0.74	0.77	0.79	0.83
	6	0.38	0.43	0.47	0.52	0.55	0.60	0.65	0.67	0.70	0.75
	8	0.31	0.36	0.40	0.44	0.47	0.53	0.58	0.60	0.64	0.69
	10	0.26	0.30	0.34	0.38	0.41	0.47	0.52	0.55	0.59	0.64
	12	0.21	0.26	0.29	0.33	0.35	0.42	0.46	0.50	0.54	0.59
	14	0.17	0.21	0.24	0.28	0.31	0.37	0.42	0.44	0.50	0.54
	16	0.14	0.17	0.20	0.24	0.26	0.31	0.37	0.39	0.44	0.50

Quadre A8.16. Proporció de rebutjos de la hipòtesi nul·la en els tests DF, ADF, PP i KPSS. Model ARFIMA(1,*d*,1) amb $\phi=0$, $\theta=0.5$ i $1\leq d<1.45$.

	k	d=1	1.05	1.1	1.15	1.2	1.25	1.3	1.35	1.4	1.45
DF		0.01	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
ADF	2	0.10	0.07	0.05	0.03	0.02	0.02	0.01	0.01	0.00	0.00
	4	0.07	0.05	0.03	0.02	0.02	0.01	0.01	0.01	0.01	0.00
	6	0.06	0.05	0.03	0.02	0.02	0.02	0.01	0.01	0.01	0.00
	8	0.05	0.05	0.04	0.03	0.02	0.02	0.02	0.02	0.01	0.01
	10	0.05	0.05	0.04	0.03	0.03	0.02	0.02	0.02	0.02	0.01
	12	0.06	0.05	0.04	0.03	0.03	0.02	0.03	0.02	0.02	0.01
	14	0.06	0.05	0.05	0.03	0.04	0.02	0.03	0.02	0.03	0.02
	16	0.06	0.06	0.05	0.04	0.04	0.03	0.04	0.03	0.03	0.02
PP	2	0.03	0.02	0.01	0.01	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
	4	0.04	0.02	0.01	0.01	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
	6	0.03	0.02	0.01	0.01	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
	8	0.03	0.02	0.01	0.01	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
	10	0.03	0.02	0.01	0.01	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
	12	0.02	0.02	0.01	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
	14	0.02	0.01	0.01	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
	16	0.02	0.01	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
KPSS	2	0.92	0.93	0.95	0.96	0.97	0.98	0.99	0.99	0.99	1.00
	4	0.83	0.84	0.87	0.90	0.91	0.93	0.95	0.96	0.97	0.99
	6	0.75	0.77	0.80	0.84	0.85	0.88	0.90	0.92	0.94	0.97
	8	0.69	0.71	0.75	0.79	0.81	0.84	0.86	0.89	0.92	0.95
	10	0.64	0.66	0.70	0.75	0.77	0.81	0.83	0.87	0.90	0.94
	12	0.59	0.62	0.65	0.72	0.74	0.77	0.80	0.85	0.88	0.93
	14	0.54	0.58	0.61	0.68	0.71	0.74	0.77	0.83	0.86	0.92
	16	0.50	0.53	0.57	0.64	0.67	0.71	0.75	0.81	0.84	0.90

Quadre A8.17. Proporció de rebutjos de la hipòtesi nul·la en els tests DF, ADF, PP i KPSS. Model ARFIMA(1,d,1) amb $\phi=0$, $\theta=0.9$ i $0\leq d<0.45$.

	k	d=0	0.05	0.1	0.15	0.2	0.25	0.3	0.35	0.4	0.45
DF		1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	0.98	0.90	0.72	0.44
ADF	2	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	0.99	0.96	0.85	0.61
	4	1.00	1.00	1.00	1.00	0.99	0.97	0.90	0.77	0.60	0.38
	6	1.00	1.00	0.99	0.97	0.93	0.85	0.74	0.58	0.43	0.26
	8	0.99	0.98	0.95	0.90	0.82	0.72	0.59	0.44	0.32	0.20
	10	0.96	0.93	0.87	0.79	0.69	0.59	0.47	0.35	0.26	0.16
	12	0.90	0.84	0.77	0.67	0.59	0.49	0.38	0.29	0.21	0.14
	14	0.82	0.75	0.67	0.58	0.50	0.41	0.32	0.24	0.18	0.12
	16	0.73	0.65	0.58	0.49	0.42	0.36	0.27	0.21	0.16	0.11
PP	2	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	0.98	0.90	0.72	0.45
	4	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	0.99	0.96	0.85	0.65	0.40
	6	1.00	1.00	1.00	1.00	-1.00	0.99	0.95	0.83	0.63	0.37
	8	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	0.99	0.95	0.83	0.62	0.37
	10	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	0.99	0.96	0.83	0.62	0.37
	12	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	0.99	0.96	0.84	0.63	0.37
	14	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	0.99	0.96	0.84	0.63	0.38
	16	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	0.97	0.85	0.64	0.38
KPSS	2	0.08	0.12	0.18	0.25	0.32	0.39	0.45	0.53	0.59	0.65
	4	0.06	0.09	0.14	0.19	0.24	0.30	0.35	0.41	0.47	0.52
	6	0.06	0.08	0.12	0.16	0.20	0.25	0.29	0.35	0.40	0.45
	8	0.05	0.07	0.10	0.14	0.17	0.21	0.25	0.31	0.35	0.40
	10	0.04	0.06	0.09	0.12	0.15	0.19	0.22	0.27	0.30	0.35
	12	0.04	0.05	0.07	0.10	0.13	0.17	0.19	0.23	0.27	0.32
	14	0.03	0.05	0.07	0.09	0.11	0.14	0.17	0.20	0.23	0.28
	16	0.03	0.04	0.06	0.08	0.10	0.12	0.15	0.18	0.20	0.25

Quadre A8.18. Proporció de rebutjos de la hipòtesi nul·la en els tests DF, ADF, PP i KPSS. Model ARFIMA(1,d,1) amb $\phi=0$, $\theta=0.9$ i $0.5<d\leq 1$.

	k	d=0.55	0.6	0.65	0.7	0.75	0.8	0.85	0.9	0.95	1
DF		0.68	0.54	0.40	0.28	0.17	0.10	0.05	0.03	0.01	0.01
ADF	2	0.87	0.79	0.70	0.62	0.51	0.39	0.31	0.24	0.17	0.13
	4	0.63	0.55	0.47	0.40	0.32	0.25	0.19	0.15	0.12	0.09
	6	0.47	0.41	0.35	0.29	0.24	0.19	0.15	0.12	0.10	0.08
	8	0.37	0.31	0.26	0.23	0.19	0.16	0.13	0.10	0.09	0.07
	10	0.30	0.26	0.22	0.20	0.17	0.14	0.11	0.09	0.09	0.06
	12	0.26	0.22	0.20	0.17	0.16	0.13	0.10	0.09	0.08	0.07
	14	0.22	0.19	0.18	0.16	0.14	0.12	0.09	0.09	0.08	0.07
	16	0.20	0.17	0.16	0.15	0.13	0.11	0.09	0.09	0.08	0.07
PP	2	0.73	0.62	0.50	0.39	0.28	0.19	0.13	0.08	0.05	0.03
	4	0.66	0.56	0.44	0.35	0.25	0.17	0.12	0.08	0.05	0.03
	6	0.63	0.53	0.41	0.32	0.23	0.16	0.11	0.07	0.05	0.03
	8	0.61	0.51	0.39	0.30	0.21	0.15	0.10	0.07	0.04	0.03
	10	0.61	0.50	0.38	0.29	0.20	0.14	0.09	0.06	0.04	0.02
	12	0.61	0.49	0.37	0.28	0.19	0.13	0.08	0.05	0.03	0.02
	14	0.62	0.49	0.37	0.27	0.18	0.12	0.07	0.05	0.03	0.02
	16	0.62	0.49	0.37	0.27	0.17	0.11	0.06	0.04	0.02	0.01
KPSS	2	0.61	0.68	0.73	0.77	0.81	0.84	0.86	0.89	0.91	0.92
	4	0.46	0.52	0.57	0.62	0.65	0.69	0.74	0.77	0.79	0.83
	6	0.38	0.43	0.47	0.52	0.55	0.60	0.65	0.67	0.70	0.75
	8	0.31	0.36	0.40	0.44	0.47	0.53	0.58	0.60	0.64	0.69
	10	0.26	0.31	0.34	0.38	0.41	0.47	0.52	0.54	0.59	0.64
	12	0.21	0.26	0.28	0.33	0.35	0.42	0.46	0.50	0.54	0.59
	14	0.17	0.21	0.24	0.28	0.31	0.37	0.42	0.44	0.50	0.54
	16	0.14	0.17	0.20	0.24	0.26	0.31	0.37	0.39	0.44	0.50

Quadre A8.19. Proporció de rebutjos de la hipòtesi nul·la en els tests DF, ADF, PP i KPSS. Model ARFIMA(1,d,1) amb ϕ=0, θ=0.9 i 1≤d<1.45.

	k	d=1	1.05	1.1	1.15	1.2	1.25	1.3	1.35	1.4	1.45
DF		0.01	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
ADF	2	0.13	0.09	0.06	0.04	0.03	0.02	0.02	0.01	0.01	0.00
	4	0.09	0.07	0.05	0.04	0.03	0.02	0.02	0.01	0.01	0.00
	6	0.08	0.06	0.04	0.03	0.03	0.03	0.02	0.02	0.01	0.00
	8	0.07	0.06	0.05	0.04	0.03	0.03	0.02	0.02	0.01	0.01
	10	0.06	0.06	0.05	0.03	0.03	0.03	0.03	0.02	0.02	0.01
	12	0.07	0.06	0.05	0.04	0.03	0.03	0.03	0.02	0.02	0.01
	14	0.07	0.06	0.05	0.04	0.04	0.03	0.04	0.03	0.03	0.02
	16	0.07	0.06	0.05	0.04	0.04	0.03	0.04	0.03	0.04	0.02
PP	2	0.03	0.01	0.01	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
	4	0.03	0.02	0.01	0.01	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
	6	0.03	0.02	0.01	0.01	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
	8	0.03	0.02	0.01	0.01	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
	10	0.02	0.02	0.01	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
	12	0.02	0.01	0.01	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
	14	0.02	0.01	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
	16	0.01	0.01	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
KPSS	2	0.92	0.93	0.95	0.97	0.97	0.98	0.99	0.99	0.99	1.00
	4	0.83	0.85	0.87	0.90	0.91	0.93	0.95	0.96	0.97	0.99
	6	0.75	0.77	0.80	0.84	0.85	0.87	0.90	0.92	0.94	0.97
	8	0.69	0.71	0.75	0.79	0.81	0.84	0.86	0.89	0.92	0.95
	10	0.64	0.66	0.70	0.75	0.77	0.81	0.84	0.87	0.90	0.94
	12	0.59	0.62	0.65	0.72	0.74	0.77	0.80	0.85	0.88	0.93
	14	0.54	0.58	0.61	0.68	0.71	0.74	0.77	0.83	0.86	0.92
	16	0.50	0.53	0.57	0.64	0.67	0.70	0.75	0.81	0.84	0.90

Quadre A8.20. Proporció de rebutjos de la hipòtesi nul·la en els tests DF, ADF, PP i KPSS. Model ARFIMA(1,d,1) amb $\phi=0$, $\theta=-0.5$ i $0\leq d<0.45$.

	k	d=0	0.05	0.1	0.15	0.2	0.25	0.3	0.35	0.4	0.45
DF		1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00
ADF	2	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	0.93
	4	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	0.99	0.95	0.84	0.59
	6	1.00	1.00	1.00	1.00	0.99	0.96	0.90	0.76	0.59	0.37
	8	1.00	1.00	0.99	0.97	0.93	0.86	0.74	0.57	0.42	0.25
	10	0.99	0.98	0.95	0.90	0.82	0.71	0.59	0.43	0.31	0.19
	12	0.96	0.92	0.87	0.78	0.69	0.58	0.47	0.34	0.25	0.16
	14	0.90	0.85	0.77	0.67	0.58	0.49	0.38	0.28	0.20	0.13
	16	0.82	0.74	0.66	0.58	0.49	0.41	0.32	0.24	0.17	0.12
PP	2	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00
	4	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00
	6	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00
	8	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00
	10	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00
	12	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00
	14	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00
	16	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00
KPSS	2	0.00	0.01	0.03	0.06	0.11	0.17	0.25	0.33	0.41	0.49
	4	0.01	0.02	0.04	0.07	0.13	0.18	0.24	0.32	0.37	0.44
	6	0.01	0.02	0.05	0.08	0.12	0.17	0.22	0.29	0.34	0.40
	8	0.02	0.03	0.05	0.08	0.12	0.16	0.21	0.26	0.31	0.36
	10	0.02	0.03	0.05	0.08	0.11	0.14	0.19	0.24	0.27	0.32
	12	0.02	0.03	0.05	0.07	0.10	0.13	0.17	0.21	0.24	0.30
	14	0.02	0.03	0.05	0.07	0.09	0.12	0.15	0.19	0.22	0.26
	16	0.02	0.03	0.04	0.06	0.08	0.11	0.13	0.17	0.19	0.24

Quadre A8.21. Proporció de rebutjos de la hipòtesi nul·la en els tests DF, ADF, PP i KPSS. Model ARFIMA(1,d,1) amb $\phi=0$, $\theta=-0.5$ i $0.5<d\leq 1$.

	k	d=0.55	0.6	0.65	0.7	0.75	0.8	0.85	0.9	0.95	1
DF		1.00	1.00	1.00	1.00	0.99	0.96	0.88	0.76	0.61	0.46
ADF	**2**	1.00	0.99	0.96	0.92	0.83	0.70	0.56	0.43	0.29	0.20
	4	0.85	0.76	0.65	0.57	0.45	0.33	0.24	0.18	0.12	0.08
	6	0.62	0.53	0.43	0.36	0.27	0.21	0.16	0.12	0.08	0.06
	8	0.46	0.39	0.32	0.27	0.21	0.16	0.12	0.10	0.08	0.06
	10	0.35	0.30	0.25	0.21	0.17	0.14	0.11	0.08	0.08	0.06
	12	0.29	0.24	0.20	0.18	0.16	0.13	0.10	0.08	0.07	0.06
	14	0.24	0.21	0.18	0.16	0.15	0.12	0.09	0.08	0.07	0.06
	16	0.22	0.18	0.17	0.15	0.14	0.11	0.09	0.08	0.08	0.06
PP	**2**	1.00	1.00	1.00	0.99	0.94	0.86	0.74	0.61	0.46	0.32
	4	1.00	1.00	1.00	0.99	0.95	0.87	0.75	0.61	0.46	0.33
	6	1.00	1.00	1.00	0.99	0.95	0.88	0.77	0.63	0.48	0.34
	8	1.00	1.00	1.00	0.99	0.96	0.90	0.79	0.65	0.51	0.36
	10	1.00	1.00	1.00	0.99	0.97	0.91	0.80	0.67	0.53	0.38
	12	1.00	1.00	1.00	1.00	0.98	0.93	0.82	0.69	0.55	0.39
	14	1.00	1.00	1.00	1.00	0.98	0.93	0.83	0.71	0.56	0.41
	16	1.00	1.00	1.00	1.00	0.98	0.94	0.84	0.73	0.58	0.43
KPSS	**2**	0.46	0.54	0.61	0.67	0.72	0.77	0.82	0.85	0.88	0.90
	4	0.38	0.45	0.50	0.56	0.60	0.65	0.71	0.74	0.77	0.81
	6	0.32	0.38	0.43	0.48	0.51	0.58	0.62	0.65	0.69	0.74
	8	0.27	0.33	0.36	0.41	0.45	0.51	0.56	0.59	0.63	0.68
	10	0.22	0.28	0.31	0.36	0.39	0.45	0.50	0.53	0.58	0.63
	12	0.19	0.23	0.27	0.31	0.34	0.40	0.45	0.49	0.53	0.58
	14	0.15	0.19	0.22	0.26	0.29	0.35	0.41	0.43	0.49	0.53
	16	0.12	0.15	0.19	0.22	0.25	0.30	0.36	0.39	0.44	0.49

Quadre A8.22. Proporció de rebutjos de la hipòtesi nul·la en els tests DF, ADF, PP i KPSS. Model ARFIMA(1,d,1) amb $\phi=0$, $\theta=-0.5$ i $1\leq d<1.45$.

	k	d=1	1.05	1.1	1.15	1.2	1.25	1.3	1.35	1.4	1.45
DF		0.46	0.32	0.22	0.11	0.07	0.04	0.02	0.01	0.00	0.00
ADF	2	0.20	0.13	0.07	0.04	0.02	0.01	0.00	0.00	0.00	0.00
	4	0.08	0.05	0.03	0.02	0.01	0.01	0.00	0.00	0.00	0.00
	6	0.06	0.04	0.03	0.02	0.01	0.01	0.01	0.01	0.00	0.00
	8	0.06	0.04	0.03	0.02	0.02	0.01	0.01	0.01	0.01	0.00
	10	0.06	0.05	0.03	0.02	0.02	0.02	0.02	0.01	0.01	0.01
	12	0.06	0.05	0.04	0.03	0.03	0.02	0.02	0.02	0.01	0.01
	14	0.06	0.05	0.05	0.03	0.03	0.02	0.03	0.02	0.02	0.01
	16	0.06	0.06	0.04	0.03	0.04	0.03	0.03	0.03	0.02	0.02
PP	2	0.32	0.21	0.14	0.07	0.04	0.02	0.01	0.01	0.00	0.00
	4	0.33	0.22	0.15	0.07	0.04	0.02	0.01	0.01	0.00	0.00
	6	0.34	0.23	0.15	0.08	0.05	0.03	0.01	0.01	0.00	0.00
	8	0.36	0.25	0.16	0.09	0.05	0.03	0.01	0.01	0.00	0.00
	10	0.38	0.26	0.18	0.09	0.06	0.03	0.02	0.01	0.00	0.00
	12	0.39	0.27	0.19	0.10	0.06	0.03	0.02	0.01	0.00	0.00
	14	0.41	0.28	0.20	0.10	0.06	0.03	0.02	0.01	0.00	0.00
	16	0.43	0.30	0.20	0.11	0.07	0.04	0.02	0.01	0.00	0.00
KPSS	2	0.90	0.92	0.94	0.96	0.97	0.98	0.99	0.99	0.99	1.00
	4	0.81	0.83	0.86	0.90	0.91	0.93	0.95	0.96	0.97	0.99
	6	0.74	0.76	0.79	0.83	0.85	0.87	0.90	0.92	0.94	0.97
	8	0.68	0.70	0.74	0.79	0.81	0.84	0.86	0.89	0.92	0.95
	10	0.63	0.66	0.69	0.75	0.77	0.80	0.83	0.87	0.90	0.94
	12	0.58	0.62	0.65	0.71	0.73	0.77	0.80	0.85	0.88	0.93
	14	0.53	0.57	0.61	0.67	0.70	0.74	0.78	0.83	0.86	0.92
	16	0.49	0.53	0.56	0.64	0.67	0.70	0.75	0.80	0.84	0.90

Quadre A8.23. Proporció de rebutjos de la hipòtesi nul·la en els tests DF, ADF, PP i KPSS. Model ARFIMA(1,d,1) amb $\phi=0$, $\theta=-0.9$ i $0\leq d<0.45$.

	k	d=0	0.05	0.1	0.15	0.2	0.25	0.3	0.35	0.4	0.45
DF		1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00
ADF	2	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00
	4	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00
	6	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	0.99
	8	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	0.99	0.89
	10	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	0.98	0.92	0.74
	12	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	0.99	0.97	0.91	0.80	0.59
	14	1.00	1.00	1.00	0.99	0.98	0.96	0.90	0.81	0.68	0.46
	16	0.99	0.99	0.98	0.97	0.94	0.89	0.82	0.69	0.55	0.36
PP	2	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00
	4	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00
	6	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00
	8	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00
	10	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00
	12	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00
	14	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00
	16	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00
KPSS	2	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.01
	4	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.01	0.03
	6	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.01	0.02	0.04
	8	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.01	0.03	0.05
	10	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.01	0.02	0.03	0.06
	12	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.01	0.01	0.02	0.04	0.06
	14	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.01	0.01	0.03	0.05	0.07
	16	0.00	0.00	0.00	0.00	0.01	0.01	0.02	0.03	0.05	0.07

Quadre A8.24. Proporció de rebutjos de la hipòtesi nul·la en els tests DF, ADF, PP i KPSS. Model ARFIMA(1,*d*,1) amb $\phi=0$, $\theta=-0.9$ i $0.5<d\leq 1$.

	k	d=0.55	0.6	0.65	0.7	0.75	0.8	0.85	0.9	0.95	1
DF		1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00
ADF	2	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	0.98
	4	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	0.98	0.94	0.87	0.76
	6	1.00	1.00	1.00	0.99	0.97	0.93	0.86	0.77	0.65	0.53
	8	0.99	0.98	0.97	0.92	0.87	0.78	0.68	0.58	0.46	0.37
	10	0.94	0.91	0.86	0.81	0.73	0.61	0.51	0.43	0.32	0.25
	12	0.85	0.79	0.72	0.66	0.58	0.47	0.39	0.32	0.24	0.19
	14	0.73	0.67	0.59	0.53	0.46	0.37	0.30	0.25	0.20	0.15
	16	0.62	0.55	0.48	0.42	0.36	0.29	0.24	0.20	0.16	0.13
PP	2	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00
	4	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00
	6	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00
	8	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00
	10	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00
	12	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00
	14	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00
	16	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00
KPSS	2	0.00	0.01	0.03	0.06	0.12	0.19	0.29	0.37	0.48	0.55
	4	0.01	0.02	0.04	0.08	0.13	0.20	0.29	0.35	0.45	0.52
	6	0.01	0.02	0.05	0.09	0.13	0.20	0.28	0.33	0.43	0.49
	8	0.01	0.03	0.05	0.09	0.13	0.18	0.26	0.31	0.40	0.46
	10	0.01	0.03	0.05	0.08	0.11	0.17	0.24	0.29	0.37	0.43
	12	0.01	0.03	0.04	0.07	0.10	0.15	0.21	0.26	0.34	0.40
	14	0.01	0.03	0.04	0.07	0.09	0.14	0.19	0.24	0.30	0.37
	16	0.01	0.02	0.03	0.06	0.08	0.12	0.17	0.21	0.26	0.33

Quadre A8.25. Proporció de rebutjos de la hipòtesi nul·la en els tests DF, ADF, PP i KPSS. Model ARFIMA(1,*d*,1) amb $\phi=0$, $\theta=-0.9$ i $1\leq d<1.45$.

	k	d=1	1.05	1.1	1.15	1.2	1.25	1.3	1.35	1.4	1.45
DF		1.00	1.00	0.98	0.92	0.80	0.65	0.48	0.33	0.20	0.10
ADF	2	0.98	0.93	0.83	0.69	0.53	0.41	0.27	0.17	0.11	0.05
	4	0.76	0.63	0.52	0.37	0.27	0.19	0.13	0.07	0.04	0.02
	6	0.53	0.40	0.33	0.22	0.16	0.10	0.08	0.04	0.03	0.01
	8	0.37	0.27	0.21	0.13	0.10	0.07	0.05	0.03	0.02	0.01
	10	0.25	0.19	0.15	0.10	0.07	0.05	0.04	0.02	0.02	0.01
	12	0.19	0.14	0.11	0.07	0.06	0.04	0.03	0.02	0.01	0.01
	14	0.15	0.12	0.09	0.06	0.05	0.03	0.03	0.02	0.01	0.01
	16	0.13	0.10	0.08	0.05	0.04	0.03	0.03	0.02	0.01	0.01
PP	2	1.00	0.98	0.93	0.82	0.67	0.53	0.38	0.24	0.15	0.07
	4	1.00	0.98	0.93	0.82	0.67	0.52	0.37	0.24	0.15	0.07
	6	1.00	0.99	0.94	0.83	0.68	0.54	0.39	0.25	0.15	0.07
	8	1.00	0.99	0.95	0.84	0.71	0.56	0.40	0.26	0.16	0.08
	10	1.00	0.99	0.96	0.86	0.72	0.57	0.42	0.27	0.17	0.08
	12	1.00	0.99	0.96	0.87	0.74	0.59	0.43	0.28	0.17	0.09
	14	1.00	1.00	0.97	0.89	0.76	0.61	0.44	0.29	0.18	0.09
	16	1.00	1.00	0.97	0.89	0.77	0.62	0.46	0.30	0.19	0.09
KPSS	2	0.55	0.65	0.71	0.78	0.83	0.87	0.91	0.94	0.96	0.98
	4	0.52	0.60	0.65	0.72	0.77	0.82	0.86	0.90	0.93	0.96
	6	0.49	0.57	0.61	0.68	0.73	0.77	0.82	0.86	0.90	0.94
	8	0.46	0.53	0.58	0.64	0.69	0.74	0.79	0.84	0.88	0.93
	10	0.43	0.50	0.55	0.61	0.66	0.71	0.76	0.82	0.86	0.92
	12	0.40	0.47	0.51	0.58	0.63	0.68	0.73	0.79	0.84	0.91
	14	0.37	0.43	0.48	0.55	0.60	0.64	0.70	0.77	0.82	0.89
	16	0.33	0.39	0.44	0.52	0.56	0.61	0.68	0.74	0.80	0.88

Annex 8.2. Alguns resultats tècnics

A8.2.1. Demostració del Teorema 8.2

A l'apartat 8.2.2 s'han general sèries a partir del model $(1-L)^{d1}(1-L^s)^{d2}X_t=\theta(L)\varepsilon_t$ aplicant la descomposició de Txoleski a les autocovariàncies del model. Com no es disposa, fins al moment, de cap fórmula explícita pel càlcul d'aquestes autocovariàncies, s'ha aplicat el següent teorema que permet calcular-ne una aproximació molt acurada.

Teorema 8.2. Sigui X_t un model $SARFIMA(0,d_1,0)(0,d_2,0)_s$, és a dir:

$$(1-L)^{d1}(1-L^s)^{d2}X_t=\theta(L)\varepsilon_t \tag{A.2}$$

les autocovariàncies $\gamma_X(k)=E\big[(X_t-E(X))(X_{t-k}-E(X))\big]$ compleixen la següent propietat:

$$\gamma_X(k)=\sum_{h=-\infty}^{\infty}\gamma_V(h)\gamma_U(k+h) \tag{A.3}$$

on $\gamma_U(k)$ y $\gamma_V(k)$ són les funcions d'autocovariàncies de $(1-L)^{d1}U_t=\varepsilon_t$ i $(1-L^s)^{d2}V_t=\varepsilon_t$.

Demostració:

A partir de la definició dels processos $U_t=(1-L)^{-d1}\varepsilon_t$ i $V_t=(1-L^s)^{-d2}\varepsilon_t$ pot representar-se el procés X_t com:

$$X_t=(1-L)^{-d1}(1-L^s)^{-d2}\varepsilon_t=(1-L^s)^{-d2}U_t=\sum_{j=0}^{\infty}\psi_jU_{t-j} \tag{A.4}$$

on els coeficients ψ_j són diferents de zero sols quan j és múltiple[48] de s:

$$\psi_{sk}=\frac{\Gamma(sk-d)}{\Gamma(sk+1)\Gamma(-d)}$$

[48] Vegi's l'apartat 8.2.2.

A partir de l'equació (A.4), es poden calcular les autocovariàncies del procés X_t:

$$\gamma_X(k) = E[X_t X_{t+k}] = E\left[\left(\sum_{j=0}^{\infty}\psi_j U_{t-j}\right)\left(\sum_{i=0}^{\infty}\psi_i U_{t+k-i}\right)\right] = \sum_{j=0}^{\infty}\sum_{i=0}^{\infty}\psi_j\psi_i E\left[U_{t-j}U_{t+k-i}\right] =$$

$$\underset{h=j-i}{=} \sum_{h=-\infty}^{\infty}\left(\sum_{i=-\infty}^{\infty}\psi_i\psi_{i+|h|}\right)\gamma_U(k+h) = \sum_{h=-\infty}^{\infty}\gamma_V(h)\gamma_U(k+h)$$

□

Aquesta propietat permet usar la següent aproximació pel càlcul de les autocovariàncies d'un procés *SARFIMA*$(0,d_1,0)(0,d_2,0)$[49]:

$$\gamma_Y(k) \cong \sum_{h=-m}^{m}\gamma_V(h)\gamma_U(k+h)$$

on:

$$\gamma_U(k) = \frac{(-1)^k\Gamma(1-2d1)}{\Gamma(1-d1+k)\Gamma(1-d1-k)}\sigma_\varepsilon^2$$

i[50]:

$$\gamma_V(k) = \int_0^{\pi}\cos(k\omega)f(\omega)d\omega = \frac{\sigma^2}{\pi}\int_0^{\pi}\cos(k\omega)\{2\,\mathrm{sen}(s\omega/2)\}^{-2d2}d\omega =$$

$$= \cos(k\pi/s)\frac{\Gamma(1-2d2)}{\Gamma(1-d2+k\ s)\Gamma(1-d2-k\ s)}\sigma_\varepsilon^2$$

[49] Aquest mètode d'aproximació es pot generalitzar fàcilment a processos *SARFIMA*$(p,d_1,q)(P,d_2,Q)$.

[50] A partir de $\int_0^{\pi}\cos(\alpha x)sin^{\beta-1}(x)dx = \dfrac{\pi\cos(\alpha\pi/2)\Gamma(\beta+1)2^{1-\beta}}{\beta\Gamma((\alpha+\beta+1)/2)\Gamma((-\alpha+\beta+1)/2)}$

A8.2.2. Demostració del Teorema 8.3

A l'apartat 8.4 s'ha demostrat que la suma de dos models ARFIMA també és un model ARFIMA, però en aquesta demostració s'ha utilitzat que $\int_{-\pi}^{\pi} \log g(\omega) d\omega < \infty$ on $g(\omega) = [2\sin(\omega/2)]^{2d}$. El següent teorema demostra aquesta propietat.

Teorema 8.3. Sigui $g(\omega) = [2\sin(\omega/2)]^{2d}$ on -1/2<d<1/2, es compleix $\int_{-\pi}^{\pi} \log g(\omega) d\omega < \infty$.

Demostració:

Com la funció *sin(x)* és simètrica en *[-π,0]* i *[0,π]* i *sin(x)≥0* quan $x \in [0, \pi/2]$, s'obté:

$$\int_{-\pi}^{\pi} \log[2sin(\omega/2)]^{2d} d\omega = 2d \int_{-\pi}^{\pi} \log|2sin(\omega/2)| d\omega = 4d \int_{0}^{\pi} \log|2sin(\omega/2)| d\omega = 4d \int_{0}^{\pi} \log(2sin(\omega/2)) d\omega$$

Per altra banda, el terme *4d* no influeix en la convergència de la integral que, a més, es pot descomposar com:

$$\int_{0}^{\pi} \log(2sin(\omega/2)) d\omega = \int_{0}^{\pi/3} \log(2sin(\omega/2)) d\omega + \int_{\pi/3}^{\pi} \log(2sin(\omega/2)) d\omega = A + B$$

La integral B es pot acotar fàcilment ja que la funció $f(x) = \log[2\sin(x/2)]$ compleix $f(\pi/3)=0$, $f(\pi)=\log(2)$ i $f'(x) \geq 0$ quan $x \in [\pi/3, \pi]$ de manera que en el domini d'integració de B es compleix que $f(x) \leq f(\pi) = \log(2)$. Per tant:

$$|B| = \left| \int_{\pi/3}^{\pi} \log(2sin(\omega/2)) d\omega \right| \leq \int_{\pi/3}^{\pi} \left| \log(2sin(\omega/2)) \right| d\omega \leq \int_{\pi/3}^{\pi} \log 2 d\omega = \frac{2\pi}{3} \log 2$$

Pel que fa a la integral A, aplicant el canvi de variable *t=sin(ω/2)* s'obté:

$$|A| = \left|\int_0^{\pi/3} \log(2sin(\omega/2))d\omega\right| = \left|\int_0^{1/2} \frac{2\log(2t)}{\sqrt{1.-t^2}}dt\right| = (*)$$

i aplicant que per *0≤t≤1/2* es pot compovar que $1 \le \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} \le \frac{2}{\sqrt{3}}$ s'arriba a:

$$(*) \le \frac{4}{\sqrt{3}}\left|\int_0^{1/2} \log(2t)dt\right| = \frac{4}{\sqrt{3}}\left|[t\log(2t)-t]_0^{1/2}\right| = \frac{4}{\sqrt{3}}\left|\frac{1}{2} + \lim_{t\to\infty} t\log(2t)\right|$$

i aplicant el Lema de l'Hopital s'obté: $\lim_{t\to\infty} t\log(2t) = \lim_{t\to\infty}\frac{\log(2t)}{1/t} = \lim_{t\to\infty}\frac{1/t}{-1/t^2} = 0$.

Finalment, a partir d'aquests resultats s'obté una cota superior per la integral:

$$\left|\int_{-\pi}^{\pi} \log[2sin(\omega/2)]^{2d} d\omega\right| \le \left|4d\int_0^{\pi/3} \log(2sin(\omega/2))d\omega\right| + \left|4d\int_{\pi/3}^{\pi} \log(2sin(\omega/2))d\omega\right| \le$$

$$\le 4d\left[\frac{2}{\sqrt{3}} + \frac{2\pi}{3}\log 2\right] < \infty$$

□

Capítol 9

CONSEQÜÈNCIES DEL GRAU DE MEMÒRIA PER L'ESTIMACIÓ DE MODELS DE REGRESSIÓ

9.1. Introducció

Al capítol anterior s'han presentat un seguit de resultats que demostren la importància de tenir ben present el concepte de memòria a l'hora de realitzar certs tipus d'anàlisi univariant de variables econòmiques. Observi's, però, que tant en aquell capítol com en els anteriors s'ha seguit un enfocament estadístic, no economètric en el sentit que en cap moment s'ha plantejat l'estimació de relacions economètriques entre varies variables.

De totes maneres, recordi's que a la introducció de la tesi s'ha esmentat que la motivació principal d'aquesta recerca es troba en el temor a les conseqüències que pugui tenir no considerar el concepte de memòria en l'anàlisi economètrica. Així, es dediquen les properes pàgines, sota un enfocament més economètric, a demostrar que a l'hora d'estimar un model de regressió ja sigui més simple o més complexe, cal parar atenció al tipus de memòria que presenten les variables implicades i usar eines estadístiques i economètriques diferents segons quina sigui aquesta memòria.

En aquest sentit, es poden interpretar els resultats i tècniques presentats en capítols anteriors com resultats previs a l'estimació de relacions economètriques. Així, per exemple, els models ARFIMA són una eina especialment interessant, com ha quedat demostrat, per analitzar les relacions entre memòria i inferència economètrica i tant les tècniques esmentades per l'estimació d'aquests models com les eines presentades per la identificació del tipus de memòria són bàsiques per conèixer les característiques de les variables objecte d'anàlisi i per tant, per saber com abordar la realització d'inferència economètrica.

Un bon exemple de la importància de tenir en compte la memòria el trobem en la teoria de la cointegració. Sota la perspectiva plantejada en aquesta tesi, l'estimació de relacions economètriques entre variables que són I(1) no és més que un cas molt particular de les moltes situacions que es poden presentar pel que fa a la memòria de les variables implicades. En aquest sentit, tot i que sovint s'interpreta el perill d'obtenir relacions estadístiques espúries entre variables I(1) com a un bon exemple dels perills que comporta tractar amb sèries no estacionàries, creiem més idoni, a efectes d'aquesta tesi, considerar aquestes relacions espúries com un exemple dels perill que comporta tractar amb sèries amb un cert tipus de memòria. De fet, una de les conclusions a la que s'arriba al llarg d'aquest capítol és que el perill de regressions espúries no és exclusiu de variables I(1), ni tant sols de variables no estacionàries, sinó que fins i tot amb variables estacionàries cal tenir present aquesta possibilitat.

Òbviament, l'anàlisi acurada de les implicacions del concepte de memòria a l'anàlisi economètrica supera àmpliament les possibilitats d'una tesi doctoral i l'objectiu d'aquest capítol no és aportar conclusions definitives i tancar el tema, sinó que es pretén aportar elements que creiem importants per obrir un línia de recerca futura. No obstant, s'aporten resultats concrets que tenen importants implicacions en l'anàlisi economètrica aplicada.

Per fer-ho, l'anàlisi es centra en un model de regressió lineal, preferentment simple:

$$Y_t = \alpha + \beta X_t + \varepsilon_t \tag{9.1}$$

Atès que pels casos en que les variables Y_t i X_t presenten memòria curta o bé quan són I(1) ja es disposa de bastants resultats, es posa especial èmfasi en l'anàlisi de com afecta el fet que alguna de les variables presenti memòria llarga o memòria permanent finita a la realització d'inferència a partir dels paràmetres estimats del model (9.1).

Per fer possible aquesta anàlisi sense una complexitat excessiva, serà habitual a les pàgines següents suposar que tant la variable endògena com la variable exògena es poden representar mitjançant models ARFIMA. Així, l'anàlisi de les propietats dels estimadors i estadístics habitual per diferents ordres d'integració (fraccional) permet una primera aproximació a la relació entre memòria i inferència economètrica. En aquest sentit, l'anàlisi es centra principalment en dos aspectes que considerem especialment rellevants:

1. D'una banda, són importants les conseqüències que pot tenir que el terme de pertorbació del model contingui memòria llarga ja que molta de la teoria economètrica existent es basa

en el supòsit que el terme de pertorbació és estacionari i amb densitat espectral acotada i per tant, segons la definició 4.4, estacionari amb memòria curta.

2. D'altra banda, quan es consideren regressors estocàstics, és ben conegut que els estimadors usats habitualment tenen propietats diferents si les dades són I(0) o bé són I(1), dit d'una altra manera, si les dades presenten memòria curta o bé memòria permanent. Com s'ha constatat que aquesta és una dicotomia exagerada i que no hi ha raons per pensar que les dades hagin de ser I(d) amb d enter, té molt interès conèixer quines són les propietats d'aquests estimadors quan les dades contenen memòria llarga o bé memòria transitòria no estacionària. En aquest sentit, un aspecte especialment preocupant és conèixer si la possibilitat d'obtenir relacions espúries és exclusiva de variables I(d) amb d enter i major a 0 o bé si també es presenta aquest problema quan $0<d<1$.

En particular, es presenten alguns resultats importants en relació a la possibilitat que en processos integrats fraccionalment amb $d<1$, fins i tot amb $d<1/2$, puguin obtenir-se regressions espúries de manera similar al que passa amb processos I(1).

A l'apartat 9.2 i 9.3 s'analitzen les propietats dels estimadors en models de regressió quan els regressors són no estocàstics i estocàstics respectivament. A continuació es dedica l'apartat 9.4 a analitzar el problema de les regressions espúries i, per acabar, a l'apartat 9.5 es presenta una tècnica d'estimació molt simple especialment interessant quan s'està treballant amb variables que contenen una memòria superior a la memòria curta.

9.2. Models de regressió amb regressors no estocàstics

Suposi's que es pretenen estimar els paràmetres d'un model de regressió:

$$Y_t = \beta' X_t + \varepsilon_t \tag{9.2}$$

on β és un vector de paràmetres $\beta=(\beta_1 .. \beta_k)'$ i els vectors inclosos a la matriu X són no estocàstics. El problema de la memòria llarga sols es pot presentar en aquest cas a través de la variable endògena Y_t. En aquest cas, observi's que ε_t també ha de presentar memòria llarga i, en particular, es tracta d'un terme de pertorbació amb autocorrelació. De fet, a l'anàlisi economètrica de sèries temporals és habitual suposar que el terme de pertorbació pot presentar algun grau d'autocorrelació sense que això suposi massa problemes.

En el context de regressors no estocàstics es disposa de varis teoremes que garanteixen la consistència dels estimadors MQO en diferents situacions: *a)* en el cas d'independència del terme de pertorbació; *b)* quan el terme de pertorbació és una martingala; i *c)* quan el terme de pertorbació és un procés estacionari amb densitat espectral acotada (Anderson i Taylor, 1976 i 1979, Lai i Robbins, 1977, Lai Robbins i Wei, 1978 i 1979 i Solo, 1981).

Però si s'admet la possibilitat que el terme de pertorbació presenti memòria llarga cap d'aquests resultats és aplicable. Per tant, tots els arguments presentats prèviament sobre la possibilitat que aquest tipus d'autocorrelació sigui habitual en variables econòmiques, fa que sigui força important conèixer les propietats de les tècniques habituals d'estimació en aquest nou context.

El primer a interessar-se en aquest tema és Taqqu (1975) que n'estudia un cas particular. Concretament, l'estimació per MQO de la mitjana de la sèrie temporal sota la presència de memòria llarga. Observi's que l'estimació de la mitjana es pot interpretar com l'estimació d'un model:

$$X_t = \alpha + \varepsilon_t \tag{9.3}$$

on α és la mitjana $\mu=E(X)$.

Per analitzar la influència de la memòria en l'estimació de la mitjana d'una sèrie estacionària és interessant analitzar aquest problema d'estimació sota el supòsit que el terme de pertorbació ε_t té autocovariàncies que asimptòticament es comporten segons la següent expressió:

$$\gamma_k \underset{T\to\infty}{\sim} Ck^{2\delta-1} \tag{9.4}$$

on C és una constant[1]. Si s'usa com estimador d'α la mitjana mostral, la seva variància es pot expressar com funció de les autocovariàncies γ_k:

$$Var(\bar{X}_T) = Var\left\{T^{-1}\sum_{t=1}^{T} X_t\right\} = T^{-2}\left\{2\sum_{k=1}^{T}(T-k)\gamma_k + T\gamma_0\right\} \tag{9.5}$$

de manera que, sota el supòsit (9.4), es pot comprovar que a mesura que T tendeix cap a infinit es compleix la següent propietat:

$$T^{1-2\delta} Var(\bar{X}_T) \to \frac{C}{\delta(2\delta-1)} \tag{9.6}$$

Per tant, de (9.6) es dedueix que la mitjana mostral convergeix cap a la mitjana poblacional segons un ordre de convergència $O(T^{1/2-\delta})$. Recordi's que quan el terme de pertorbació presenta memòria curta l'ordre de convergència és $O(T^{1/2})$. D'aquest resultat se'n treu una conclusió important ja que com major sigui la memòria d'una sèrie, més lenta és la convergència de la mitjana mostral cap a la mitjana poblacional.

Sota el supòsit addicional de normalitat de les dades, la mitjana mostral es distribueix segons una χ^2 i per tant, a partir de (9.6), es comprova que la variància asimptòtica de la mitjana mostral compleix

$$CT^{1-2\delta}\left\{\bar{X}_T - E(\bar{X}_T)\right\}^2 \Rightarrow \left[\delta(2\delta-1)\right]^{-1}\chi_1^2 \tag{9.7}$$

A l'anàlisi economètrica de sèries temporals és habitual contrastar la significació de la mitjana α en el model (9.3) a partir del t-estadístic usant l'estimador de la desviació estandar:

$$\tilde{\sigma}_T = \left\{T^{-1}\sum_{t=1}^{T}\left(X_t - \bar{X}_T\right)^2\right\}^{1/2} \tag{9.8}$$

[1] Segons les definicions del capítol 3, això implica per $\delta>0$ que X_t presenta memòria llarga. A més, el paràmetre δ és una mesura del grau de memòria.

i comparant el quocient $\overline{X}_T/\widetilde{\sigma}_T$ amb els valors tabulats de la distribució t-Student. La justificació d'aquest contrast es troba en que la mitjana i la desviació estandar mostrals són independents. En relació amb això, Taqqu (1975) demostra que l'estimador (9.8) convergeix a una distribució que no és normal, concretament a una distribució R coneguda amb el nom de distribució de Rosenblatt:

$$CT^{-2\delta}\left\{\widetilde{\sigma}_T - E\left(\widetilde{\sigma}_T\right)\right\} \Rightarrow R \tag{9.9}$$

i que la mitjana mostral i l'estimador de la desviació estandar no són independents.

Pels resultats del capítol 4, si X_t segueix un procés ARFIMA(0,d,0), llavors es compleix la condició (9.4) amb $\delta=d$ i $C=\pi^{-1}\Gamma(1-2d)(\sin\pi d)$. Per tant, totes les conclusions anteriors són en particular aplicables a models ARFIMA(0,d,0) i models ARFIMA(p,d,q)[2].

Un cop són conegudes les propietats de la mitjana mostral, cal preguntar-se si en aquest context és ELIO o en cas contrari, quina és la seva eficiència relativa. En aquest sentit, Adenstead (1974) demostra que l'estimador ELIO d'α a partir de $X_1,\ldots,X_T$ quan $\gamma_k \sim Ck^{2\delta-1}$ és una mitjana ponderada:

$$\widetilde{\alpha}^* = \sum_{t=1}^{T}\binom{T-1}{t-1}\frac{B(t-\delta,T-t-\delta+1)}{B(1-\delta,1-\delta)}X_t \tag{9.10}$$

on $B(\cdot,\cdot)$ és la funció Beta. A més, la variància de l'estimador (9.10) és:

$$\operatorname{var}(\widetilde{\alpha}^*) = \frac{B(T,1-2\delta)}{B(1-\delta,1-\delta)} \tag{9.11}$$

A partir d'aquests resultats, a Samarov i Taqqu (1988) s'analitza l'eficiència de la mitjana mostral i es demostra que:

[2] Si X_t~ARFIMA(p,d,q) també es compleix (9.4) amb $\delta=d$ però ara C és funció de d i dels paràmetres autoregressius i mitjana mòbil.

$$\frac{Var(\tilde{\alpha}^*)}{Var(\bar{X})} = \left\{1 + 2\delta\frac{1-1\,T}{1-\delta} + \sum_{k=2}^{T-1}\left(1-\frac{k}{T}\right)\frac{(k-1+\delta)...(1+\delta)}{(k-\delta)..(.1-\delta)}\right\}^{-1} \times \\ \times\left\{\left(1-\frac{2\delta}{d}\right)...\left(1-\frac{2\delta}{T}\right)\right\}^{-1} \qquad (9.12)$$

Al quadre 9.1 es presenta aquesta eficiència relativa per diferents valors de δ i diferents tamanys mostrals. Les conclusions més importants a les que s'arriba, algunes de curioses, són les següents:

- L'eficiència de la mitjana mostral disminueix a mesura que augmenta el nombre d'observacions
- Quan $\delta=0$, per exemple per models ARMA, la mitjana mostral és eficient.
- Per $\delta>0$, per exemple per models ARFIMA(p,d,q) amb $d>0$, la pèrdua d'eficiència pel fet d'usar la mitjana aritmètica és irrellevant per qualsevol tamany mostral.
- Els problemes d'eficiència són molt més importants quan $\delta<0$, sobretot quan s'apropa cap al valor $\delta=-0.5$. De fet, per $\delta<-0.5$, l'eficiència relativa asimptòtica és nul·la i al voltant del 60% per tamanys mostrals de 50,100 o 200 observacions.

Quadre 9.1 Eficiència de l'estimador MQO d'α quan $\gamma_k \underset{T\to\infty}{\sim} Ck^{2\delta-1}$

δ	*T=50*	*T=100*	*T=200*	∞
-1.00	0.113	0.058	0.030	0.000
-0.50	0.667	0.603	0.548	0.000
-0.49	0.681	0.620	0.567	0.077
-0.40	0.806	0.763	0.731	0.563
-0.30	0.901	0.884	0.871	0.827
-0.20	0.963	0.958	0.954	0.945
-0.10	0.993	0.992	0.991	0.990
0.00	1.000	1.000	1.000	1.000
0.10	0.996	0.996	0.995	0.995
0.20	0.988	0.988	0.987	0.987
0.30	0.984	0.983	0.982	0.982
0.40	0.986	0.986	0.985	0.985
0.49	0.998	0.998	0.998	0.998

Font: Samarov i Taqqu (1988)

Una conseqüència immediata de l'última propietat és que si les dades estan sobrediferenciades, al usar la mitjana aritmètica és possible obtenir estimacions de la mitjana poblacional amb errors molt grans. Un exemple molt senzill i força conegut d'aquests problemes d'ineficiència de la mitjana mostral sota sobrediferenciació és el següent. Suposi's que $X_t=\alpha t+\varepsilon_t$ amb ε_t estacionari. En aquest cas, al diferenciar les dades s'obté un procés $Y_t=(1-L)Y_t=\alpha+(1-L)\varepsilon_t$ i tot i que l'esperança d'Y_t és α, l'estimador d'α a partir de la mitjana aritmètica de les dades diferenciades (Y_t) és $(X_T-X_1)/(T-1)$, que tot i ser un estimador sense biaix, és molt ineficient ja que sols utilitza dos observacions de X_t.

Doncs bé, si X_t segueix un model ARFIMA(p,d,q) amb $0<d<1$ i hom es decideix a diferenciar les dades, la mitjana mostral és un estimador molt ineficient de la mitjana poblacional. Així, alguns dels resultats del capítol 5 prenen especial rellevància ja que l'acceptació de la presència d'una arrel unitària i la diferenciació de variables integrades fraccionalment amb $d<1$, pot portar a estimacions de la mitjana poblacional del procés molt imprecises.

A més dels problemes d'imprecisió en l'estimació puntual, aquests resultats també afecten al contrast d'hipòtesi. Donat que la velocitat de convergència de la variància de la mitjana és $O(T^{2d-1})$ enlloc de $O(T^1)$, si $0<d<1/2$ les tècniques habituals porten a intervals de confiança massa petits mentre que per $d<0$, s'obtenen intervals de confiança massa grans.

Atès que aquest problema es presenta en el cas del model de regressió més senzill possible que sols conté un terme constant, és d'esperar que el mateix pugui produir-se en el cas en que s'inclouen a més altres regressors deterministes. Aquest aspecte és important sobretot perquè afecta a la distribució dels t-estadístics de contrast de la significació dels paràmetres.

Ja s'ha comentat abans que sota memòria llarga no es compleixen cap de les condicions que s'imposen habitualment per garantir la consistència dels estimadors MQO. Yajima (1988) dóna condicions suficients per a aquesta propietat quan els regressors són funcions polinòmiques del temps i, per tant, deterministes. Suposi's que es pretén estimar els paràmetres del següent model de regressió:

$$Y_t = \beta' X_t + \varepsilon_t \tag{9.13}$$

on ε_t és ARFIMA(0,d,0)[3] i X_t és un vector columna que conté sols regressors no estocàstics. En aquesta situació, si es compleixen les següents propietats:

1) $\mu_T T^{-2\delta} \underset{T\to\infty}{\rightarrow} \infty$

2) $\sum_{T=k+2}^{\infty} \frac{\ln^2(T)T^{2\delta-1}}{\mu_{T-1}} < \infty$

on μ_T és el menor valor propi de la matriu $V_T = \sum_{t=1}^{T} X_t X_t'$, l'estimador MQO del vector de paràmetres β és consistent.

Pel que fa a l'eficiència, a Yajima (1988) es demostra també que, asimptòticament, la variància de l'estimador ELIO (que no coincideix amb l'estimador MQO) compleix:

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} D_T E(\tilde{\beta}^* - \beta)(\tilde{\beta}^* - \beta)' D_T = 2\pi f^*(0) W^{-1}(d) \tag{9.14}$$

on la matriu D_T és una matriu diagonal on l'element de la fila j-èssima i columna j-èssima és la suma de quadrats de la variable j-èssima, és a dir $\sum_{t=1}^{T} X_{jt}^2$, i els elements de la matriu W són:

$$w_{ij}(d) = \frac{\left[\Gamma(i-d)\Gamma(j-d)\{(2i-1)(2j-1)\}^{1/2}\right]}{\{\Gamma(i-2d)\Gamma(j-2d)(i+j-1-2d)\}} \tag{9.15}$$

mentre que el comportament asimptòtic de l'estimador MQO ve donat per:

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} D_T E(\tilde{\beta} - \beta)(\tilde{\beta} - \beta)' D_T = 2\pi f^*(0) M^{-1} H(d) M^{-1} \tag{9.16}$$

on els elements de les matrius M i H són:

[3] I per tant, Y_t també és FI(d).

$$m_{ij} = \frac{\{(2i-1)(2j-1)\}^{1/2}}{(i+j-1)} \tag{9.17}$$

i:

$$h_{ij} = \frac{\{(2i-1)(2j-1)\}^{1/2}\Gamma(1-2d)}{\Gamma(d)\Gamma(1-d)} \int_0^1 \int_0^1 x^{i-1} y^{j-1} |x-y|^{2d-1} dxdy \tag{9.18}$$

A partir d'aquests resultats és relativament senzill calcular l'eficiència relativa de l'estimador MQO com:

$$e(d) = \lim_{T\to\infty} \det\left[E(\tilde{\beta}^* - \beta)(\tilde{\beta}^* - \beta)'\right] \det\left[E(\tilde{\beta} - \beta)(\tilde{\beta} - \beta)'\right]^{-1} \tag{9.19}$$

Així, i com exemple, per un i dos regressors l'eficiència relativa és:

$$e(d) = \frac{(1+2d)\Gamma(1+d)\Gamma(2-2d)}{\Gamma(1-d)} \quad \text{per} \quad k=1 \tag{9.20}$$

i:

$$e(d) = \frac{36\Gamma^2(2-d)}{(1+2d)^2(3+2d)(3-2d)\Gamma^2(1+d)\Gamma^2(3-2d)} \quad \text{per} \quad k=2 \tag{9.21}$$

En general, a Yajima (1988) es mostra a partir de (9.19) que les conclusions anteriors referides a l'estimació de la mitjana són generalitzables a l'estimació dels paràmetres en models de regressió més generals amb regressors deterministes.

Concretament, la pèrdua d'eficiència que es produeix pel fet d'estimar el model per MQO no és gaire important quan $d>0$. En canvi, quan $d<0$, els estimadors MQO poden ser molt imprecisos i els contrastos d'hipòtesi presenten greus distorsions. Atès que no és habitual trobar variables econòmiques que siguin FI(d) amb $d<0$, aquest és un problema essencialment relacionat amb el problema de la sobrediferenciació. De fet, aquesta conclusió és força important en relació amb el perill analitzat al capítol 8 de sobrediferenciació quan s'usen certes tècniques habituals.

9.3. Models de regressió amb regressors estocàstics

Naturalment, pel que fa als objectius de la tesi té molt més interès el cas en que els regressors són estocàstics ja que aquest és el cas habitual en l'anàlisi de dades econòmiques temporals. De totes maneres, aquest és un context de molt més difícil tractament i per tant, els resultats de l'apartat anterior poden servir com a primera aproximació a la problemàtica de l'estimació economètrica sota memòria llarga, entenent que és raonable que alguns dels problemes esmentats quan els regressors són no estocàstics puguin també presentar-se amb regressors estocàstics.

Pel que fa a la presència de regressors estocàstics, l'aspecte que té més interès en aquest cas és l'efecte que pot tenir que algun dels regressors contingui memòria llarga o memòria permanent. De totes maneres, la dificultat d'aquesta anàlisi és molt amplia ja que cal considerar moltes possibilitats en funció de si el terme de pertorbació conté també memòria llarga o no.

A continuació, es presenten alguns resultats diferenciant aquelles situacions en que els regressos tenen memòria transitòria (i per tant, són estacionaris) d'aquelles situacions en que aquests regressors tenen memòria permanent.

9.3.1. Regressors amb memòria transitòria

En primer lloc, té interés saber si el fet que els regressors d'un model de regressió tinguin memòria llarga pot afectar a la consistència dels estimadors MQO quan es pot acceptar que la pertorbació sols conté memòria curta.

En aquest sentit, els processos integrats fraccionalment no compleixen la condició de mixtura forta[4] i per tant la teoria asimptòtica popularitzada recentment basada en el concepte de

[4] Vegi's Helson i Sarason (1967) i Viano *et al.* (1995).

mixtura forta[5] no és aplicable. Però sota condicions addicionals de regularitat no gaire restrictives[6], si $-1/2<d<1/2$, es pot comprovar que es compleixen les condicions d'ergodicitat i mixtura dèbil i per tant es pot garantir la consistència (dèbil).

Per tant, quan s'accepta la hipòtesi que el terme de pertorbació sols conté memòria curta, si els regressors són tots estacionaris, és possible garantir la consistència dels estimadors MQO tot i que alguns d'aquests regressors presentin memòria llarga. Aquest important resultat és vàlid, en particular, quan X_t és integrat fraccionalment amb $-1/2<d<1/2$.

En canvi, quan es permet als regressors i al terme de pertorbació contenir memòria llarga de manera simultània, no es disposa de resultats teòrics sobre les propietats dels estimadors habituals dels paràmetres del model. Hi ha, en tot cas, evidència que es poden donar propietats diferents del cas de dependència dèbil, no sols pel que fa als ordres de convergència, sinó fins i tot a les distribucions límit. Robinson (1994) en posa un exemple senzill que permet il·lustrar força bé aquesta problemàtica. Consideri's com exemple el model següent:

$$Y_t = \alpha + \beta X_t + u_t \tag{9.22}$$

on X_t és estocàstic i independent de u_t. Suposi's que tant X_t com u_t són estacionaris de segon ordre amb funcions d'autocovariàncies $\gamma_u = C_1 k^{-a}$ i $\gamma_x = C_2 k^{-b}$ amb $0<a<1$ i $0<b<1$.

La teoria de l'estimació MQO del paràmetre β depèn de la variància de l'estadístic:

$$S = \sum_{t=1}^{T} (X_t - \bar{X}) u_t \tag{9.23}$$

ja que l'estimador MQO del paràmetre β és:

[5] El concepte de mixtura forta permet demostrar lleis de grans nombres sense necessitat de suposar que les observacions estan identicament distribuides. De fet, la condició de mixtura forta sota el supòsit d'estacionarietat implica ergodicitat. Per una revisió dels principals resultats a partir de la hipòtesi de mixtura forta vegi's White (1984).

[6] Vegi's Gourieroux *et al.* (1989).

$$\tilde{\beta}=\frac{\sum_{t=1}^{T}(X_t-\bar{X})(Y_t-\bar{Y})}{\sum_{t=1}^{T}(X_t-\bar{X})^2}=\beta+\frac{\sum_{t=1}^{T}(X_t-\bar{X})u_t}{\sum_{t=1}^{T}(X_t-\bar{X})^2} \tag{9.24}$$

Aquest estadístic té variància:

$$\begin{aligned}Var(S)=&\sum_{s,t=1}^{T}Cov(X_s,X_t)Cov(u_s,u_t)-\frac{2}{T}\sum_{s=1}^{T}\sum_{t=1}^{T}Cov(X_s,X_t)\sum_{r=1}^{T}Cov(u_s,u_r)+\\&+\frac{1}{T^2}\left\{\sum_{s,t=1}^{T}Cov(X_s,X_t)\right\}\left\{\sum_{s,t=1}^{T}Cov(u_s,u_t)\right\}\end{aligned} \tag{9.25}$$

Quan $0<a+b<1$, és a dir, X_t i u_t tenen conjuntament memòria llarga, la variància de S es pot avaluar a partir de l'expressió següent:

$$\begin{aligned}\mathrm{var}(S)\sim C_1C_2T^{2-\alpha-\beta}\Big\{&\int_0^1\int_0^1|u-v|^{-\alpha-\beta}dudv-2\int_0^1\int_0^1|u-v|^{-\alpha}\int_0^1|u-w|^{\chi\alpha}dwdu+\\&+\Big(\int_0^1\int_0^1|u-v|^{-\alpha}dudv\Big)\Big(\int_0^1\int_0^1|u-v|^{-\beta}dudv\Big)\Big\}\end{aligned} \tag{9.26}$$

expressió on es pot comprovar com, depenent dels valors dels ordres d'integració a i b, es poden donar moltes possibilitats diferents.

Per tant, atès que és difícil la detecció del tipus de memòria, com s'ha demostrat al llarg de la tesi, cal tenir ben present el perill que suposa aplicar resultats estàndard d'inferència economètrica segons el tipus de memòria de les dades.

9.3.2. Regressors amb memòria permanent

En canvi, quan els regressors són no estacionaris els resultats teòrics habituals no són aplicables. A Gourieroux et *al.* (1989) s'aporten resultats sobre la consistència de l'estimació MQO quan els regressors són integrats fraccionalment amb $d\geq 1/2$. En el mateix treball es mostra que quan els regressors són no estacionaris (incloent fraccionals) pot passar que els estimadors MQO no siguin asimptòticament normals i de fet, de vegades els t-estadístics convergeixen a una distribució χ^2. En definitiva, sota memòria permanent, encara que $d<1$ i tot i que els estimadors siguin consistents, no és correcte aplicar els resultats clàssics d'inferència sobre els paràmetres estimats.

Quan les variables són no estacionàries, sorgeix de manera natural un nou concepte, el concepte de cointegració fraccional que permet obtenir resultats en aquest context. La idea que hi ha darrera del concepte de cointegració és que tot i que les variables observades puguin ser no estacionàries, si el terme de pertorbació *és menys no estacionari* que les variables, hi ha una relació d'equilibri a llarg termini, i a més, l'estimació és consistent (de fet *superconsistent*).

Així, si es planteja l'estimació del model $Y_t = \beta X_t + \varepsilon_t$ on les variables X_t i Y_t són I(1), l'estimador MQO del paràmetre β sols és consistent si el terme de pertorbació ε_t és I(0). Així, quan existeix una combinació lineal de Y_t i de X_t estacionària, és a dir, Y_t-βX_t~I(0) es diu que les variables estan cointegrades. Amb més generalitat, es pot definir el concepte de cointegració com:

Definició 9.1. Es diu que dos sèries X_t i Y_t són cointegrades d'ordre d, b, representat com $(X_t, Y_t) \sim CI(d,b)$ si es compleixen dues condicions:

1) X_t i Y_t són del mateix ordre d'integrabilitat, d.
2) Existeix una combinació lineal de les dues amb ordre d'integració d-b.

De fet, quan els processos Y_t i X_t són I(1), els estimadors MQO són super-consistents, però en mostra finita poden ser esbiaixats i no normals de manera que això afecta a la realització d'inferència. La correcció no paramètrica de Phillips i Hansen (1990) permet eliminar aquests problemes en mostra finita, mentre que asimptòticament són equivalents als estimadors màxim versemblants.

Per altra banda, és ben conegut que si dues sèries temporals X_t e Y_t són ambdues camins aleatoris (i per tant, I(1)), el comportament del t-estadístic associat a un model de regressió lineal simple $Y_t = \alpha + \beta X_t + u_t$ no convergeix, sinó que divergeix (Phillips, 1986) de manera que es pot tendir a rebutjar de manera errònia la seva no significació. Aquesta possibilitat es coneix sota el nom de regressió espúria.

Però no està clar, en el contexte de sèries FI(d), en quins casos l'estimador MQO és consistent o no, i en quins casos poden obtenir-se regressions espúries. Per analitzar aquest tema, es pot generalitzar el concepte de cointegració al cas de processos integrats fraccionalment a través del que es coneix com cointegració fraccional[7]:

Definició 9.2 Es diu que dues sèries X_t i Y_t estan fraccionalment cointegrades d'ordre d, b, on $d>1/2$ i $b>0$, representat com $(X_t, Y_t) \sim FCI(d,b)$ si es compleixen dues condicions:

1) X_t i Y_t són del mateix ordre d'integrabilitat fraccional, d.
2) Existeix una combinació lineal de les dues amb ordre d'integració fraccional d-b.

Quan es pretén l'estimació d'una relació economètrica on hi ha implicades k variables, es pot generalitzar la definició anterior:

Definició 9.3 Les components del vector Y_t $(kx1)$ estan fraccionalment cointegrades d'ordre d, b, on $d>1/2$ i $b>0$, representat com $Y_t \sim FCI(d,b)$ si es compleixen dos condicions:

1) Totes les components del vector Y_t són del mateix ordre d'integrabilitat fraccional, d.
2) Existeix un vector β no nul tal que $Z_t=\beta' Y_t$ té ordre d'integració fraccional d-b.

[7] Vegi's Granger (1981).

De manera similar al cas en que un conjunt de variables estan cointegrades, en el cas de la cointegració fraccional també es disposa d'una representació en termes de mecanisme de correcció de l'error. Concretament, si $Y_t \sim FCI(d,b)$ existeix la següent representació:

$$H(L)(1-L)^d Y_t = -\gamma\left[1-(1-L)^b\right](1-L)^{d-b} Z_t + C(L)\varepsilon_t \qquad (9.27)$$

on $H(0)=1$ i $C(1)<\infty$.

Segons Cheung i Lai (1993), l'estimador MQO de la relació de cointegració fraccional és consistent amb ordre de convergència $O(T^b)$, però ho justifiquen de manera intuïtiva, sense demostrar-ho rigorosament. Un tractament més formal es pot trobar a Dolado i Marmol (1996).

Per simplificar, suposi's que:

$$Y_t = \beta X_t + Z_t \qquad (9.28)$$

on:

$$\phi(L)(1-L)^d X_t = \theta(L)\varepsilon_t \qquad (9.29)$$

$$\vartheta(L)(1-L)^{d-b} Z_t = \zeta(L)u_t \qquad (9.30)$$

amb $d>1/2$ i $d \geq b>0$, de manera que les variables X_t i Y_t estan fraccionalment cointegrades d'ordre (d,b). Sigui $\delta=d-b$, llavors:

- Si $1/2<\delta$, és a dir, el terme de pertorbació presenta memòria permanent, l'estimador MQO convergeix segons $\tilde{\beta} \sim O(T^{-b})$ però el t-estadístic divergeix segons $t_\beta \sim O(T^{1/2})$ independentment de que hi hagi o no cointegració. Per tant, en aquest cas, tot i la convergència de l'estimador MQO és d'esperar que es produeixi a la pràctica una excessiva proporció de rebutjos de la hipòtesi nul·la $\beta=0$.

- Si $0<\delta<1/2$, és a dir, el terme de pertorbació presenta memòria transitòria però llarga, l'estimador MQO convergeix novament segons $\tilde{\beta} \sim O(T^{-b})$, però el t-estadístic també divergeix, ara segons $O(T)$. Novament, és d'esperar que es produeixi un excessiva proporció de rebutjos de la hipòtesi nul·la a partir del t-estadístic, tot i que el terme de pertorbació és estacionari.

- Sols en el cas en que $\delta=0$ i, per tant, el terme de pertorbació segueix un model ARMA, el t-estadístic convergeix. De totes maneres, quan $0<\delta<1/2$, Dolado i Marmol (1997) demostren que és possible definir una correcció semi-paramètrica com la de Phillips i Hansen (1990) de manera que el t-estadístic convergeixi i no hi hagi biaix en mostra finita.

És clar que si les variables són I(0) el t-estadístic convergeix i per tant, no hi ha el perill de trobar-se amb regressions espúries (com a molt, es produeixen amb mostra finita problemes en el tamany del contrast) però pels comentaris fets més amunt queda el dubte de la importància que pot tenir el fenomen de la regressió espúria quan les variables són I(d) amb $d<1$.

Per aquest motiu es dedica l'apartat 9.4 a analitzar el problema de les regressions espúries en el context de dades amb memòria llarga i memòria permanent finita, i es desenvolupen alguns instruments que permeten detectar bona part d'aquestes situacions.

9.4. Evidència de regressions espúries

Un dels efectes més importants de la presència de tendències estocàstiques per a les propietats i distribucions dels estimadors i estadístics de contrast dels models de regressió és el perill d'obtenir relacions estadísticament significatives que són espúries.

Aquest problema ja fou esmentat per Granger i Newbold (1974) que mostren a través d'un senzill exercici de simulació que quan s'estima un model de regressió entre dos camins aleatoris independents, és molt probable rebutjar la hipòtesi nul·la d'independència si es compara el t-estadístic habitual amb els valors tabulats de la distribució t-Student. Per mostrar-ho, generen 100 parells de sèries temporals independents segons el següent procés:

$$X_t = X_{t-1} + \varepsilon_t \tag{9.31}$$

$$Y_t = Y_{t-1} + \eta_t \tag{9.32}$$

formades per 50 observacions i calculen l'estimador MQO del paràmetre β en el model $Y_t = \beta_0 + \beta_1 X_t + \varepsilon_t$ i comproven que en 77 casos el t-estadístic de contrast calculat com:

$$t^* = \frac{\tilde{\beta}_1}{e.\tilde{s}.(\tilde{\beta}_1)} \tag{9.33}$$

és superior a 2, de manera que amb la metodologia habitual la conclusió fora rebutjar que $\beta_1=0$ i per tant concloure que hi ha algun tipus de relació entre les dues variables.

De fet, Phillips (1986) demostra formalment que en aquestes condicions els estimadors MQO dels paràmetres del model (9.28) són inconsistents, l'R^2 convergeix a una variable aleatòria enlloc de fer-ho al seu valor poblacional 0, els t-estadístics divergeixen i, per tant, no es poden emprar les taules amb els valors crítics estàndard. A més, l'estadístic DW tendeix cap a 0, característica que és un bon instrument per detectar la presència de relacions espúries.

Per tant, les conclusions pràctiques que s'extraurien d'una relació com l'anterior podrien ser errònies i es podria acceptar com a tal una relació que no ho és. Així, cara al treball empíric és fonamental determinar l'ordre d'integrabilitat de les variables.

Atès que les relacions espúries analitzades per Granger i Newbold (1974) i Phillips (1986) es produeixen amb variables que tenen memòria permanent queda el dubte de si és un fenomen associat la no estacionarietat, al grau de memòria o exclusivament a l'existència de memòria permanent. En aquest context, cal preguntar-se amb quin tipus de memòria dels definits al capítol 3 es poden obtenir aquestes relacions espúries.

D'una banda, sembla clar que en el cas de memòria curta tot i haver-hi autocorrelació en el terme de pertorbació els estimadors són consistents i, per tant, tot i que els valors crítics sols són correctes en absència d'autocorrelació, quan aquesta és poc important i a mesura que el nombre d'observacions augmenta, les distorsions de la mida del contrast no poden ser gaire importants.

Per comprovar-ho, s'ha realitzat una ampliació de l'exercici de Granger i Newbold (1974) a partir de sèries generades segons:

$$X_t = \phi X_{t-1} + \varepsilon_t \tag{9.34}$$

$$Y_t = \phi^* Y_{t-1} + \eta_t \tag{9.35}$$

Així, s'han generat 1000 parells de sèries de diferents tamanys mostrals segons els models (9.34) i (9.35) i s'han estimat per MQO els paràmetres del model $Y_t = \beta_0 + \beta_1 X_t + \varepsilon_t$ i s'ha contrastat la hipòtesi nul·la $\beta_1=0$ a partir del *t*-estadístic habitual amb un nivell de significació del 5%. Els resultats de l'última columna del quadre 9.2 permeten comprovar com, efectivament, quan es treballa amb camins aleatoris, és molt probable obtenir paràmetres significatius tot i que les variables siguin independents.

Però els resultats d'aquest quadre mostren alguna cosa més d'especial rellevància pels objectius d'aquesta tesi. Noti's que sols quan un dels dos paràmetres autoregressius ϕ o ϕ^* és nul el tamany del contrast s'aproxima al tamany nominal del contrast ($\alpha=0.05$). A partir d'aquests resultats en destaquem les següents conclusions:

- Sempre que $\phi<1$ i $\phi^*<1$ aquestes distorsions del tamany disminueixen a mesura que augmenta el nombre d'observacions. De fet, en aquest cas, el *t*-estadístic es distribueix asimptòticament segons una distribució t-Student estàndard. De totes maneres, fins i tot amb sèries de 200 observacions les distorsions són significatives.

- Les distorsions del tamany del contrast augmenten a mesura que augmenten els paràmetres autoregressius, és a dir, a mesura que augmenta la memòria de les variables. Noti's com valors autoregressius iguals a 0.9 pels dos models porten a rebutjar la hipòtesi nul·la en més d'un 30% dels casos, fins i tot per 200 dades.

Quadre 9.2. Proporció de rebutjos de la hipòtesi nul·la $\beta_I=0$ en el model $Y_t = \beta_0 + \beta_1 X_t + \varepsilon_t$.. Estimació per MQO. Models (9.34) i (9.35).

T	ϕ	ϕ*=0.0	ϕ*=0.5	ϕ*=0.9	ϕ*=1.0
50	**0.0**	0.06	0.06	0.07	0.06
	0.5	0.06	0.14	0.22	0.25
	0.9	0.07	0.24	0.35	0.45
	1.0	0.06	0.26	0.42	0.80
100	**0.0**	0.05	0.06	0.06	0.07
	0.5	0.05	0.14	0.22	0.26
	0.9	0.05	0.21	0.33	0.43
	1.0	0.05	0.28	0.43	0.84
150	**0.0**	0.06	0.05	0.04	0.07
	0.5	0.04	0.12	0.23	0.26
	0.9	0.06	0.23	0.33	0.45
	1.0	0.05	0.28	0.45	0.88
200	**0.0**	0.05	0.05	0.06	0.06
	0.5	0.05	0.13	0.21	0.26
	0.9	0.05	0.23	0.33	0.44
	1.0	0.05	0.25	0.44	0.90

Per tant, fins i tot sota memòria curta el problema de les regressions espúries, tot i no arribar als extrems que s'arriben quan són camins aleatoris pot ser important. Això fa pensar que aquest problema pot ser encara més important sota memòria llarga.

Per comprovar-ho, s'ha realitzat un exercici de simulació similar però usant sèries generades segons un model ARFIMA(0,*d*,0) amb diferents valors del paràmetre *d*. Així, s'han generat dues sèries temporals independents amb els següents models:

$$(1-L)^{d_Y} Y_t = \varepsilon_t \tag{9.36}$$

$$(1-L)^{d_X} X_t = v_t \tag{9.37}$$

i s'ha calculat el percentatge de cops que es rebutja la hipòtesi nul·la que $\beta_I=0$ en el model $Y_t = \beta_0 + \beta_1 X_t + \varepsilon_t$. A partir dels resultats dels quadre 9.3 a 9.6 es poden treure les següents conclusions:

Quadre 9.3. Proporció de rebutjos de la hipòtesi nul·la $\beta_l=0$ en el model $Y_t = \beta_0 + \beta_1 X_t + \varepsilon_t$.. Estimació per MQO. Models (9.36) i (9.37). $T=50$.

d_X	d_Y=0.0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0
0.0	0.06	0.05	0.05	0.06	0.05	0.05	0.06	0.05	0.06	0.06
0.1	0.05	0.06	0.08	0.09	0.08	0.14	0.12	0.13	0.13	0.14
0.2	0.05	0.07	0.09	0.12	0.16	0.25	0.25	0.25	0.26	0.28
0.3	0.06	0.08	0.14	0.22	0.30	0.35	0.32	0.36	0.38	0.42
0.4	0.05	0.11	0.16	0.31	0.47	0.45	0.45	0.45	0.45	0.48
0.6	0.05	0.13	0.24	0.35	0.44	0.67	0.67	0.71	0.73	0.71
0.7	0.06	0.13	0.25	0.35	0.44	0.70	0.70	0.72	0.73	0.75
0.8	0.06	0.13	0.27	0.35	0.46	0.70	0.71	0.70	0.75	0.75
0.9	0.06	0.16	0.27	0.36	0.46	0.73	0.72	0.74	0.78	0.76
1.0	0.05	0.16	0.27	0.38	0.50	0.75	0.75	0.76	0.77	0.80

Quadre 9.4. Proporció de rebutjos de la hipòtesi nul·la $\beta_l=0$ en el model $Y_t = \beta_0 + \beta_1 X_t + \varepsilon_t$.. Estimació per MQO. Models (9.36) i (9.37). $T=100$.

d_X	d_Y=0.0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0
0.0	0.05	0.05	0.05	0.04	0.06	0.05	0.05	0.05	0.06	0.04
0.1	0.05	0.06	0.08	0.08	0.10	0.16	0.13	0.15	0.16	0.16
0.2	0.05	0.07	0.11	0.14	0.22	0.31	0.29	0.31	0.29	0.32
0.3	0.05	0.09	0.15	0.22	0.34	0.44	0.46	0.44	0.46	0.48
0.4	0.05	0.12	0.20	0.34	0.54	0.54	0.54	0.55	0.55	0.54
0.6	0.05	0.14	0.28	0.44	0.55	0.76	0.78	0.78	0.77	0.81
0.7	0.05	0.15	0.29	0.44	0.56	0.78	0.78	0.79	0.80	0.82
0.8	0.06	0.16	0.31	0.45	0.55	0.77	0.80	0.81	0.79	0.83
0.9	0.06	0.16	0.31	0.47	0.59	0.81	0.78	0.81	0.84	0.84
1.0	0.05	0.17	0.32	0.47	0.58	0.80	0.80	0.84	0.84	0.84

Quadre 9.5. Proporció de rebutjos de la hipòtesi nul·la $\beta_1=0$ en el model $Y_t = \beta_0 + \beta_1 X_t + \varepsilon_t$.. Estimació per MQO. Models (9.36) i (9.37). $T=150$.

d_X	d_Y=0.0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0
0.0	0.05	0.05	0.05	0.05	0.06	0.05	0.06	0.05	0.05	0.04
0.1	0.05	0.06	0.07	0.09	0.12	0.16	0.18	0.18	0.17	0.18
0.2	0.05	0.07	0.10	0.15	0.25	0.34	0.32	0.35	0.35	0.36
0.3	0.05	0.09	0.14	0.26	0.39	0.49	0.49	0.51	0.50	0.50
0.4	0.06	0.10	0.23	0.36	0.54	0.60	0.61	0.62	0.60	0.61
0.6	0.05	0.14	0.33	0.47	0.58	0.81	0.81	0.81	0.83	0.84
0.7	0.06	0.18	0.34	0.50	0.62	0.82	0.82	0.84	0.84	0.87
0.8	0.05	0.18	0.34	0.50	0.62	0.82	0.84	0.85	0.87	0.87
0.9	0.06	0.18	0.34	0.51	0.62	0.81	0.82	0.86	0.86	0.88
1.0	0.05	0.19	0.35	0.52	0.63	0.84	0.85	0.85	0.87	0.88

Quadre 9.6. Proporció de rebutjos de la hipòtesi nul·la $\beta_1=0$ en el model $Y_t = \beta_0 + \beta_1 X_t + \varepsilon_t$.. Estimació per MQO. Models (9.36) i (9.37). $T=200$.

d_X	d_Y=0.0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0
0.0	0.05	0.06	0.05	0.05	0.05	0.05	0.05	0.05	0.05	0.04
0.1	0.07	0.07	0.06	0.09	0.10	0.16	0.17	0.21	0.18	0.18
0.2	0.06	0.06	0.10	0.17	0.25	0.33	0.35	0.36	0.39	0.39
0.3	0.05	0.09	0.19	0.26	0.41	0.52	0.52	0.54	0.53	0.55
0.4	0.06	0.11	0.23	0.39	0.60	0.63	0.61	0.64	0.66	0.66
0.6	0.06	0.19	0.35	0.48	0.63	0.85	0.86	0.87	0.88	0.89
0.7	0.06	0.18	0.35	0.53	0.63	0.86	0.87	0.88	0.88	0.89
0.8	0.04	0.16	0.37	0.54	0.63	0.86	0.88	0.88	0.89	0.90
0.9	0.06	0.18	0.38	0.54	0.64	0.87	0.88	0.89	0.89	0.90
1.0	0.05	0.17	0.40	0.54	0.65	0.88	0.88	0.89	0.90	0.90

- A mesura que augmenta la memòria de les sèries implicades, augmenta la probabilitat d'obtenir regressions espúries.

- No sembla que es produeix una diferència qualitativa entre els casos en que les variables tenen memòria permanent o memòria transitòria sinó que es produeix un augment gradual de la probabilitat d'obtenir regressions espúries a mesura que augmenta l'ordre d'integració fraccional. Això confirma que el perill de regressions espúries està associat amb la memòria i no amb el fet de que les variables siguin o no estacionàries.

  De fet, aquesta és una conclusió de caràcter més general ja que també és aplicable a sèries amb memòria llarga no generades necessariament a partir d'un model ARFIMA. Com a prova d'això, s'han generat parells de sèries amb altres correlogrames no hiperbòlics i s'han trobat resultats similars.

- En tot cas, els percentatges de rebuig de la hipòtesi nul·la són especialment grans en el cas de models integrats fraccionalment amb $d \geq 1/2$. A més, quan ambdues sèries presenten memòria permanent, aquest percentatge és gairebé constant per diferents valors del paràmetre d.

- Sorprenentment, tampoc sembla haver-hi una diferència qualitativa massa important en el cas estacionari entre la memòria curta i la memòria llarga sinó que la probabilitat de regressions espúries sembla estar bàsicament relacionada amb el primer coeficient d'autocorrelació. En aquest sentit, a partir dels resultats anteriors pot quedar la sensació que no hi ha una diferència important entre la memòria curta i la memòria llarga pel que fa al perill de regressions espúries. Dit d'una altra forma, hom podria pensar que la probabilitat d'obtenir com estadísticament significatives relacions que no ho són, és la mateixa amb dades que segueixen, per exemple, un model AR(p) que amb dades que segueixen un model ARFIMA(0,d,0).

Per mostrar que això no és així, s'han comparat dos models, un en que ambdues sèries s'han generat a partir d'un model AR(1) i un en que ambdues sèries s'han generat a partir d'un model ARFIMA(0,*d*,0):

A) $(1-\phi L)X_t = \varepsilon_t$ i $(1-\phi L)Y_t = u_t$

B) $(1-L)^d X_t = \varepsilon_t$ i $(1-L)^d Y_t = u_t$

imposant que ambdós models tinguin un primer coeficient d'autocorrelació igual. Per fer-ho, recordi's que el primer coeficient d'autocorrelació en el model A és $\rho = \phi$ mentre que en el model B aquest coeficient és $\rho = d/(1-d)$. Així, s'han generat 1000 sèries segons els models A i B amb $\phi=\rho$ i $d=\rho/(1+\rho)$, respectivament i al quadre 9.7 es recullen els percentatges de rebuig de la hipòtesi nul·la $\beta=0$.

Quadre 9.7. Proporció de rebutjos de la hipòtesi nul·la $\beta_1=0$ en el model $Y_t = \beta_0 + \beta_1 X_t + \varepsilon_t$. Estimació per MQO. $T=200$. Model A amb $\phi=\rho$ i model B amb $d=\rho/(1+\rho)$.

ρ	Model	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9
0.5	A	0.13	0.14	0.19	0.21	0.23
	B	0.35	0.41	0.47	0.54	0.56
0.6	A	0.14	0.18	0.21	0.23	0.30
	B	0.43	0.48	0.55	0.62	0.64
0.7	A	0.18	0.21	0.26	0.30	0.32
	B	0.50	0.55	0.61	0.66	0.70
0.8	A	0.20	0.25	0.31	0.32	0.33
	B	0.52	0.61	0.69	0.76	0.78
0.9	A	0.23	0.28	0.32	0.33	0.35
	B	0.55	0.65	0.73	0.78	0.84

A partir d'aquests resultats es comprova com el percentatge de rebutjos per un mateix coeficient d'autocorrelació és molt inferior en el cas de memòria curta (model A) que en el cas de memòria llarga (model B).

Una manera habitual de detectar possibles regressions espúries en el model $Y_t = \beta' X_t + \varepsilon_t$ és usant l'estadístic Durbin-Watson, que es pot calcular a través de la següent expressió:

$$DW = \frac{\sum_{t=2}^{T}(\tilde{\varepsilon}_t - \tilde{\varepsilon}_{t-1})^2}{\sum_{t=1}^{T}\tilde{\varepsilon}_t^2} \tag{9.38}$$

Observi's que aquest estadístic es pot aproximar per $DW \approx 2(1-\tilde{\rho}_1)$, de manera que si el problema de la regressió espúria està efectivament associat a la memòria, a mesura que aquest primer coeficient d'autocorrelació tendeixi cap a la unitat, l'estadístic DW tendirà cap a zero.

Es tracta d'un estadístic que es troba acotat inferior i superiorment ja que $0 \leq DW \leq 4$ i és habitual usar-lo per contrastar la hipòtesi $\rho_\varepsilon=0$ comparant el valor de l'estadístic DW amb valors crítics que es troben tabulats[8]. A partir d'aquests valors crítics es poden delimitar 5 regions diferenciades que es recullen al quadre 9.8.

Quadre 9.8. Les 5 regions delimitades pel valor de l'estadístic Durbin-Watson (DW).

Regió 1	Regió 2	Regió 3	Regió 4	Regió 5
$0<DW<d_l^*$	$d_l^*<DW<d_u^*$	$d_u^*<DW<4-d_u^*$	$4-d_u^*<DW<4-d_l^*$	$4-d_l^*<DW<4$

Així, si DW es troba a la Regió 1, la hipòtesi nul·la d'absència d'autocorrelació es rebutja contra l'alternativa d'autocorrelació positiva o contra l'alternativa d'autocorrelació negativa si es troba a la Regió 5 mentre que si es troba a la Regió 3 no es pot rebutjar la hipòtesi nul·la. En canvi, les Regions 2 i 3 no són concloents.

A Marmol i Reboredo (1997b) es demostra que a l'estimar el model $Y_t = \alpha + \beta X_t + \varepsilon_t$ quan els processos X_t i Y_t són independents però integrats fraccionalment amb $d_y \geq 1/2$ i $d_x \geq 1/2$, l'estadístic DW convergeix cap a una distribució degenerada i concentrada en el zero, com en el cas de camins aleatoris de manera que, almenys teoricament, aquest sembla un bon instrument per detectar regressions espúries. Però en el mateix treball s'aporta evidència

[8] Vegi's Savin i White (1977).

empírica que mostra que aquest estadístic és un bon instrument per detectar aquestes regressions espúries unicament quan $d_y \geq 1$.

De totes maneres i atès que s'ha comprovat que també sota memòria llarga hi ha una alta probabilitat d'obtenir aquestes regressions espúries creiem que té especial interès saber quin és el comportament d'aquest estadístic en aquest cas ja que sota el supòsit d'estacionarietat de les dades no és habitual parar gaire atenció al comportament de l'estadístic DW.

Així, als quadres 9.9 a 9.12 es recullen el percentatge de casos en que s'han obtingut valors de l'estadístic DW en cada un de les regions al generar 1000 parells de sèries X_t i Y_t a partir de models ARFIMA(0,d_x,0) i ARFIMA(0,d_y,0) amb diferents valors de d_x i d_y.

De fet, l'estadístic DW sols depen dels residus de la regressió estimada, de manera que si les variables són independents és d'esperar que el seu comportament depengui bàsicament de l'ordre d'integració fraccional de la variable endògena. Els resultats presentats als quadres 9.9 a 9.12 confirmen que l'estadístic DW depèn sols del grau de memòria de la variable endògena, de manera que per valors $d_Y > 0.2$, independentment de d_X, l'autocorrelació de la variable endògena es tradueix en valors de DW propers al zero.

En aquest sentit, es pot comprovar també de forma empírica que si $Y_t = \beta X_t + u_t$ de manera que $(1-L)^{dx} X_t = \varepsilon_t$ i $(1-L)^{du} u_t = \upsilon_t$, llavors el comportament de l'estadístic DW està directament determinat pel valor de d_u de manera que si $d_u \geq 0.2$ també convergeix cap a zero.

Dit d'una altra manera, mentre que en un contexte on les variables sols poden ser I(0) o bé I(1) l'estadístic DW pot ser una eina interessant per la detecció de regressions espúries, en un contexte on les variables poden ser FI(d), la seva utilitat desapareix, almenys per $0<d<1$. Pensi's que si $Y_t = \beta X_t + u_t$ amb $(1-L)^{dx} X_t = \varepsilon_t$ i $(1-L)^{du} u_t = \upsilon_t$, és suficient que $d_u \geq 0.2$, independentment del valor de d_x i de que $\beta \neq 0$ per a que l'estadístic DW convergeixi cap a zero i caigui amb molta probabilitat a la Regió 1.

Quadre 9.9. Proporció de casos en que l'estadístic DW cau a cada regió.

$T=50$. Models $(1-L)^{dx}X_t=\varepsilon_t$ i $(1-L)^{dy}Y_t=u_t$

	d_x	$d_y=0$	$d_y=0.1$	$d_y=0.2$	$d_y=0.3$	$d_y=0.4$
Regió 1	**0**	0.05	0.21	0.52	0.78	0.95
	0.1	0.05	0.19	0.51	0.79	0.95
	0.2	0.05	0.20	0.48	0.79	0.94
	0.3	0.06	0.19	0.46	0.76	0.94
	0.4	0.04	0.15	0.45	0.73	0.92
Regió 2	**0**	0.04	0.07	0.09	0.06	0.02
	0.1	0.03	0.10	0.10	0.06	0.02
	0.2	0.04	0.10	0.12	0.07	0.03
	0.3	0.03	0.08	0.12	0.07	0.02
	0.4	0.03	0.08	0.11	0.07	0.03
Regió 3	**0**	0.87	0.71	0.39	0.16	0.03
	0.1	0.86	0.71	0.39	0.14	0.03
	0.2	0.85	0.69	0.40	0.15	0.03
	0.3	0.87	0.71	0.41	0.18	0.04
	0.4	0.88	0.75	0.44	0.20	0.05
Regió 4	**0**	0.02	0.01	0.00	0.00	0.00
	0.1	0.03	0.00	0.00	0.00	0.00
	0.2	0.02	0.01	0.00	0.00	0.00
	0.3	0.02	0.01	0.00	0.00	0.00
	0.4	0.03	0.01	0.01	0.00	0.00
Regió 5	**0**	0.02	0.00	0.00	0.00	0.00
	0.1	0.04	0.01	0.00	0.00	0.00
	0.2	0.03	0.01	0.00	0.00	0.00
	0.3	0.03	0.01	0.00	0.00	0.00
	0.4	0.04	0.01	0.00	0.00	0.00

Quadre 9.10 Proporció de casos en que l'estadístic DW cau a cada regió.
$T=100$. Models $(1\text{-}L)^{dx}X_t=\varepsilon_t$ i $(1\text{-}L)^{dy}Y_t=u_t$

	d_x	$d_y=0$	$d_y=0.1$	$d_y=0.2$	$d_y=0.3$	$d_y=0.4$
Regió 1	**0**	0.06	0.31	0.77	0.97	1.00
	0.1	0.04	0.29	0.74	0.97	1.00
	0.2	0.04	0.30	0.72	0.96	1.00
	0.3	0.05	0.27	0.73	0.96	1.00
	0.4	0.06	0.25	0.69	0.95	1.00
Regió 2	**0**	0.02	0.06	0.05	0.01	0.00
	0.1	0.03	0.07	0.05	0.01	0.00
	0.2	0.03	0.07	0.06	0.01	0.00
	0.3	0.02	0.07	0.05	0.02	0.00
	0.4	0.02	0.06	0.06	0.01	0.00
Regió 3	**0**	0.87	0.63	0.18	0.02	0.01
	0.1	0.88	0.63	0.21	0.02	0.00
	0.2	0.87	0.63	0.22	0.03	0.00
	0.3	0.86	0.66	0.22	0.03	0.00
	0.4	0.88	0.68	0.25	0.04	0.00
Regió 4	**0**	0.02	0.00	0.00	0.00	0.00
	0.1	0.01	0.01	0.00	0.00	0.00
	0.2	0.03	0.00	0.00	0.00	0.00
	0.3	0.03	0.00	0.00	0.00	0.00
	0.4	0.01	0.00	0.00	0.00	0.00
Regió 5	**0**	0.03	0.00	0.00	0.00	0.00
	0.1	0.04	0.00	0.00	0.00	0.00
	0.2	0.03	0.01	0.00	0.00	0.00
	0.3	0.04	0.00	0.00	0.00	0.00
	0.4	0.04	0.01	0.00	0.00	0.00

Quadre 9.11. Proporció de casos en que l'estadístic DW cau a cada regió.
$T=150$. Models $(1\text{-}L)^{dx}X_t=\varepsilon_t$ i $(1\text{-}L)^{dy}Y_t=u_t$

	d_x	d_y =0	d_y =0.1	d_y =0.2	d_y =0.3	d_y =0.4
Regió 1	**0**	0.07	0.36	0.86	0.99	1.00
	0.1	0.05	0.38	0.87	1.00	1.00
	0.2	0.04	0.38	0.86	0.99	1.00
	0.3	0.06	0.38	0.84	0.99	1.00
	0.4	0.04	0.36	0.84	0.99	1.00
Regió 2	**0**	0.02	0.06	0.03	0.00	0.00
	0.1	0.01	0.06	0.02	0.00	0.00
	0.2	0.02	0.07	0.03	0.00	0.00
	0.3	0.02	0.05	0.03	0.00	0.00
	0.4	0.03	0.06	0.02	0.00	0.00
Regió 3	**0**	0.87	0.58	0.11	0.01	0.00
	0.1	0.89	0.56	0.10	0.00	0.00
	0.2	0.89	0.55	0.11	0.01	0.00
	0.3	0.88	0.57	0.13	0.01	0.00
	0.4	0.89	0.57	0.13	0.01	0.00
Regió 4	**0**	0.02	0.00	0.00	0.00	0.00
	0.1	0.01	0.00	0.00	0.00	0.00
	0.2	0.02	0.00	0.00	0.00	0.00
	0.3	0.01	0.00	0.00	0.00	0.00
	0.4	0.02	0.00	0.00	0.00	0.00
Regió 5	**0**	0.03	0.00	0.00	0.00	0.00
	0.1	0.04	0.00	0.00	0.00	0.00
	0.2	0.04	0.01	0.00	0.00	0.00
	0.3	0.03	0.00	0.00	0.00	0.00
	0.4	0.03	0.00	0.00	0.00	0.00

Quadre 9.12. Proporció de casos en que l'estadístic DW cau a cada regió.
T=200. Models $(1-L)^{dx}X_t=\varepsilon_t$ i $(1-L)^{dy}Y_t=u_t$

	d_x	d_y =0	d_y =0.1	d_y =0.2	d_y =0.3	d_y =0.4
Regió 1	**0**	0.04	0.46	0.95	1.00	1.00
	0.1	0.05	0.46	0.94	1.00	1.00
	0.2	0.05	0.46	0.94	0.99	1.00
	0.3	0.04	0.45	0.93	1.00	1.00
	0.4	0.05	0.44	0.93	1.00	1.00
Regió 2	**0**	0.02	0.04	0.01	0.00	0.00
	0.1	0.02	0.05	0.01	0.00	0.00
	0.2	0.02	0.05	0.02	0.00	0.00
	0.3	0.02	0.05	0.01	0.00	0.00
	0.4	0.01	0.05	0.01	0.00	0.00
Regió 3	**0**	0.89	0.49	0.04	0.00	0.00
	0.1	0.88	0.49	0.05	0.00	0.00
	0.2	0.87	0.48	0.05	0.01	0.00
	0.3	0.88	0.50	0.06	0.00	0.00
	0.4	0.89	0.51	0.06	0.00	0.00
Regió 4	**0**	0.01	0.00	0.00	0.00	0.00
	0.1	0.02	0.00	0.00	0.00	0.00
	0.2	0.02	0.00	0.00	0.00	0.00
	0.3	0.02	0.00	0.00	0.00	0.00
	0.4	0.01	0.00	0.00	0.00	0.00
Regió 5	**0**	0.04	0.00	0.00	0.00	0.00
	0.1	0.03	0.00	0.00	0.00	0.00
	0.2	0.04	0.00	0.00	0.00	0.00
	0.3	0.05	0.00	0.00	0.00	0.00
	0.4	0.04	0.00	0.00	0.00	0.00

En tot cas, i com a conclusió més important d'aquest apartat, tornar a destacar la importància de la memòria en l'aparició de regressions espúries, fins i tot amb memòria llarga. A l'apartat següent es presenta un enfocament, en certa manera novedós, pel tractament d'aquest perill de regressions espúries a partir del concepte de regressió espectral.

9.5. La regressió espectral com a solució al perill de regressions espúries

Tal com s'ha comprovat a l'apartat anterior, sota presència de memòria llarga o de memòria permanent, es torna important el perill de regressions espúries. Però la noció de memòria s'ha definit al capítol 3 i analitzat en el domini de les freqüències i, per tant, sembla difícil relacionar-la amb models de regressió formulats en el domini del temps.

En tot cas, tots els problemes plantejats en l'estimació de models de regressió quan hi estan implicades variables que contenen bastant memòria estan causades per l'acumulació de potència en les baixes freqüències. Per mostrar amb claredat perquè aquesta concentració de potència origina aquests problemes d'estimació, és interessant traslladar el problema de la regressió lineal del domini temporal al domini de les freqüències.

De fet, aquesta és una perspectiva poc habitual en Econometria tot i que és possible realitzar l'estimació dels paràmetres en el domini de les freqüències, mètode que fins i tot presenta alguns avantatges sobre els mètodes més habituals d'estimació. De fet, es tracta d'un enfocament plantejat per Engle (1974) que no s'ha usat gaire a la literatura economètrica.

9.5.1. La regressió espectral

Per introduir aquest plantejament, recordi's que el periodograma d'una sèrie X_t de la que es disposa de T observacions es defineix com la següent successió de valors per cada una de les freqüències fonamentals $\omega_k=2\pi k/T$:

$$I(\omega_k) = \frac{1}{2\pi T}\left|\sum_{t=1}^{T} X_t e^{it\omega_k}\right|^2 \tag{9.39}$$

A efecte de l'exposició següent cal introduir una definició.

Definició 9.4. Donada una successió de valors $X_1,...X_T$ es defineix la seva Transformada Discreta de Fourier (TDF) com la següent successió $\widetilde{X}_1,... \widetilde{X}_T$ on cada un dels elements es defineix com[10]:

$$\widetilde{X}_k = \sum_{j=0}^{T-1} X_t e^{ij\omega_k} \tag{9.40}$$

A efectes de notació és habitual definir uns vectors w_k per $k=0,..,T-1$ com:

$$w_k = \begin{pmatrix} 1 & e^{i\omega_k} & \dots & e^{i(T-1)\omega_k} \end{pmatrix} \tag{9.41}$$

i una matriu W formada per aquests vectors, és a dir, $W=(w_0 \dots w_{T-1})'$ de manera que es pot expressar la Transformada Discreta de Fourier de X com $\widetilde{X} = WX$.

Arribats a aquest punt són especialment interessants algunes observacions:

1) W és una matriu de valors complexes. De fet, per la identitat de De-Moivre:

$$e^{i\lambda} = \cos\lambda + i\sin\lambda \tag{9.42}$$

cada vector compleix $w_k=c_k+is_k$ on:

$$c_k = \begin{pmatrix} 1 & \cos\omega_k & \dots & \cos(T-1)\omega_k \end{pmatrix} \tag{9.43}$$

i:

$$s_k = \begin{pmatrix} 0 & \sin\omega_k & \dots & \sin(T-1)\omega_k \end{pmatrix} \tag{9.44}$$

[10] De vegades s'usen com a coeficient de normalització de la Transformada Discreta de Fourier els factors 1/T o $1/\sqrt{2\pi T}$.

de manera que també a nivell de matrius es compleix $W=C+iS$.

2) W és una matriu idempotent ja que $W^*W=WW^*=I$ on el símbol "*" denota la trasposta de la conjugada complexa[11]. Això és degut a que els vectors w_k formen una base ortogonal.

3) El periodograma es pot calcular a partir de la TDF de les dades inicials. De fet el periodograma es pot expressar com:

$$I(\omega_k) = \frac{1}{2\pi T}\left|w_k X\right|^2 \tag{9.45}$$

De fet, a més d'haver-hi una equivalència entre l'anàlisi de dades temporals en el domini temporal i en el domini freqüencial a nivell univariant, també es disposa d'una certa equivalència pel que fa a l'estimació models de regressió entre aquests dos dominis. Observi's que les autocovariàncies són formes quadràtiques del vector d'observacions mentre que el periodograma està format per formes quadràtiques de la TDF de manera que les dades inicials i la seva transformada són dos cares del mateix, una en cada domini, temporal o de les freqüències.

A més, com W és idempotent, $W^{1}=W^*$ de manera que la transformació conjugada aplicada a la TDF permet recuperar el vector de dades originals. Noti's que la conjugada és la matriu formada per elements del tipus $e^{-ij\omega_k}$.

4) En un entorn multivariant, el periodograma creuat també es pot calcular (de manera similar a les covariàncies) com un producte creuat de les TDF de cada una de les sèries implicades. Així, el periodograma creuat entre dos sèries X_t i Y_t és:

$$I_{XY}(\omega_k) = \frac{1}{2\pi T}(w_k X)^*(w_k Y) \tag{9.46}$$

Suposi's que s'està interessat a estimar el següent model:

[11] En tot cas, com es tracta d'una matriu simètrica no cal transposarla.

$$Y = X\beta + U \tag{9.47}$$

La regressió espectral consisteix en estimar el model a partir dels vectors $\widetilde{X}$ i $\widetilde{Y}$ enlloc de X i Y. Si X és una matriu formada per vàries columnes associades a diferents variables, no hi ha cap problema ja que $\widetilde{X}$ és llavors una matriu on cada columna és la TDF de les variables del model.

Doncs bé, si s'aplica a ambdós termes del model la transformació W, s'obté un model equivalent en el domini de les freqüències:

$$WY = WX\beta + WU = \widetilde{X}\beta + \widetilde{U} \tag{9.48}$$

L'estimador MQO d'aquest model és[12] $\widetilde{\beta} = (\widetilde{X} * \widetilde{X})^{-1} \widetilde{X} * \widetilde{Y}$ i per la idempotència de la matriu W es comprova que aquest estimador és equivalent al que s'obté en el domini temporal a partir de les dades inicials:

$$\widetilde{\beta} = (\widetilde{X} * \widetilde{X})^{-1} \widetilde{X} * \widetilde{Y} = (X * W * WX)^{-1} X * W * WY = (X'X)^{-1} X'Y \tag{9.49}$$

Algunes característiques interessants d'aquest procediment són les següents:

1) Tot i que en principi aquest mètode presenta la dificultat que cal usar vectors i matrius formades per valors complexes mentre que els paquets estadístics més habituals no permeten aquest tipus d'anàlisi, és immediata la comprovació que:

$$\widetilde{\beta} = (\widetilde{X} * \widetilde{X})^{-1} \widetilde{X} * \widetilde{Y} = \left[\sum_{k=0}^{T-1} I_X(\omega_k)\right]^{-1} \sum_{k=0}^{T-1} I_{XY}(\omega_k) \tag{9.50}$$

de manera que per trobar els estimadors MQO del model inicial n'hi ha prou amb disposar dels espectres i espectres creuats de les variables.

[12] No hi ha cap problema per aplicar la teoria MQO a dades complexes ja que les seves propietats són fàcilment generalitzables a aquesta situació. En tot cas, cal substituir a la fórmula habitual d'aquest estimador la trasposta per la trasposta de la conjugada.

2) Tot i que la utilització del periodograma presenta habitualment problemes a l'hora de realitzar inferència ja que cal aplicar-hi alguna finestra espectral per obtenir un estimador consistent de la densitat espectral, aquest problema no es presenta al estimar models de regressió ja que, tot i que els periodogrames i periodograma creuat siguin inconsistents, s'obté un estimador dels paràmetres del model consistent.

3) Si enlloc de suposar que les pertorbacions són esfèriques i usar MQO es rebutja aquesta hipòtesi també es pot aplicar una estimació generalitzada en el domini de les freqüències. Sota el supòsit de que $Var(U)=\sigma^2\Omega$, es compleix que $Var(\widetilde{U})=\sigma^2 W\Omega W^*$.

Si fem la hipòtesi que la mostra és prou gran o bé els efectes derivats dels valors inicials de les pertorbacions no són importants, llavors[13] $W\Omega W=\mathrm{diag} f_U(\omega)$ on els elements diagonals són els valors de la densitat espectral del terme de pertorbació U en les T freqüències harmòniques. Per tant, per calcular l'estimació generalitzada n'hi ha prou amb construir una matriu A amb elements diagonals iguals a $\sigma\, f_U^{-1/2}(\omega)$, de manera que l'estimador generalitzat és:

$$\widetilde{\beta}=(\widetilde{X}^*A^*A\widetilde{X})^{-1}\widetilde{X}^*A^*A\widetilde{Y}=(X'\Omega^{-1}X)^{-1}X'\Omega^{-1}Y \qquad (9.51)$$

Un avantatge d'aquest plantejament sobre l'habitual en el domini temporal és que la presència de no esfericitat en el domini temporal es tradueix sempre en pertorbacions heteroscedàstiques en el domini de les freqüències de manera que és més fàcil un tractament general.

Observi's que l'anterior estimador generalitzat també es pot calcular a partir únicament dels periodogrames i periodogrames creuats de les dades inicials:

$$\begin{aligned}\widetilde{\beta}&=(\widetilde{X}^*A^*A\widetilde{X})^{-1}\widetilde{X}^*A^*A\widetilde{Y}=\\&=\left[\sum_{k=0}^{T-1}I_X(\omega_k)\widetilde{f}_U^{-1}(\omega_k)\right]^{-1}\sum_{k=0}^{T-1}I_{XY}(\omega_k)\widetilde{f}_U^{-1}(\omega_k)\end{aligned} \qquad (9.52)$$

[13] Wabah (1968) i Grenander i Szego (1968).

De totes maneres, el problema és que es necessita un estimador consistent de la densitat espectral de les pertorbacions de manera que en principi caldria usar alguna finestra espectral. De totes maneres, no disposem d'informació sobre si s'ha realitzat alguna anàlisi sobre aquest tema.

Una de les motivacions més importants per a la utilització de la regressió espectral enlloc de l'estimació en el domini temporal és que permet discriminar entre diferents freqüències. Així com l'estimació en el domini temporal permet seleccionar el període temporal a usar i permet analitzar la presència d'observacions atípiques, observacions influents o canvis estructurals, la regressió espectral permet seleccionar les freqüències o bandes de freqüències sobre les que s'estima el model. Aquesta característica és la que motiva la seva presentació en aquesta tesi ja que, com després s'analitza, permet detectar la presència de regressions espúries.

Suposi's que hi ha motius que fan pensar que la relació entre les variables implicades en el model és diferent a curt termini que a llarg termini. Això suggereix dividir la banda de freqüències $[0,\pi]$ en dos intervals, $I_1=[0,\omega_0)$ i $I_2=[\omega_0,\pi]$, el primer associat al comportament a llarg termini i el segon associat al comportament a curt termini. La regressió espectral permet obtenir estimadors diferents per a cada una d'aquestes relacions[14]:

$$\tilde{\beta}_{LT}=\left[\sum_{\omega_k\in[0,\omega_0)} I_X(\omega_k)\right]^{-1}\sum_{\omega_k\in[0,\omega_0)} I_{XY}(\omega_k) \tag{9.53}$$

i:

$$\tilde{\beta}_{CT}=\left[\sum_{\omega_k\in[\omega_0,\pi]} I_X(\omega_k)\right]^{-1}\sum_{\omega_k\in[\omega_0,\pi]} I_{XY}(\omega_k) \tag{9.54}$$

En general, però, a l'àmbit de l'anàlisi de variables econòmiques no és habitual suposar directament que la relació entre aquestes variables és diferent per diferents freqüències. De totes maneres, la idea que hi ha darrera d'aquest tipus de regressió en certes bandes de freqüències és

[14] Vegi's Engle (1974) i Engle i Gardner (1976).

la mateixa que es troba darrera de la teoria de la cointegració. En tot cas, s'ha desenvolupat més l'enfocament en el domini temporal ja que té una interpretació econòmica molt més simple, però a efectes d'interpretar el fenomen de les regressions espúries és més útil el domini freqüencial.

9.5.2. La regressió espectral restringida com a solució a les regressions espúries

La conclusió que cal treure del desenvolupament anterior és la completa equivalència entre plantejar un model de regressió entre dos variables en el domini temporal a partir de les dades observades que plantejar-lo en el domini de les freqüències a partir de les transformades de Fourier d'aquestes observacions. Però mentre que en el domini temporal es fa difícil veure perquè al usar dades amb bona part de la freqüència concentrada en algunes freqüències és probable obtenir regressions espúries, en el domini de les freqüències s'observa aquest fenomen ja que els periodogrames de les dos variables presenten un perfil molt similar i per tant és raonable pensar que la regressió pugi ser significativa sense que hi hagi relació entre les variables, sols pel fet d'aquesta similitud en la distribució de la potència.

Òbviament, en el cas de dades estacionàries, a mesura que augmenta el nombre d'observacions, aquesta major informació permet eliminar progressivament aquest efecte, ja que el periodograma és capaç de reproduir millor les característiques de cada variable. Però en el cas no estacionari, el predomini de les baixes freqüències, és a dir, el comportament tendencial es manté per molt que augmenti el tamany mostral ja que en el pseudo-espectre hi ha una singularitat prou important per a que aquest no sigui integrable (la variància del procés tendeix cap a infinit).

Un avantatge addicional d'aquesta interpretació de les regressions espúries és que permet trobar-ne solucions. Atès que el problema es troba sols en les baixes freqüències, la solució està en no tenir en compte aquestes freqüències a l'hora d'estimar els paràmetres del model de regressió[15]. Òbviament, aquest plantejament és vàlid sols en el cas en que es suposa que la relació entre les variables és la mateixa en el curt que en el llarg termini. Si aquest plantejament no sembla raonable, cal recórrer als conceptes de cointegració o de cointegració fraccional.

De totes maneres, la utilització de la Transformada Finita de Fourier presenta alguns inconvenients, sobretot si es pretén usar-la com a punt de partida per millorar l'estimació de models de regressió sota memòria llarga o memòria permanent. Noti's però que amb el plantejament anterior, s'està usant informació que d'alguna manera està duplicada ja que hi ha simetria en els intervals $I_1=[0,\pi]$ i $I_2=[\pi,2\pi]$.

Un mètode alternatiu proposat per Harvey (1978) permet solucionar aquests problemes. La idea és usar directament els vectors c_k i s_k enlloc de w_k. Una forma senzilla de fer-ho consisteix a definir una matriu H formada a partir de:

$$\begin{cases} h_{ts} = T^{-1/2} & t=1 \\ h_{ts} = \left(\dfrac{2}{T}\right)^{1/2} \cos\left[\dfrac{\pi t(s-1)}{T}\right] & t=2,4,6\ldots,T-2 \quad \text{o} \quad T-1 \\ h_{ts} = \left(\dfrac{2}{T}\right)^{1/2} \sin\left[\dfrac{\pi(t-1)(s-1)}{T}\right] & t=2,4,6\ldots,T-1 \quad o \quad T \\ h_{ts} = T^{-1/2}(-1)^{s+1} & t=T \quad \text{si} \quad T \text{ es parell} \end{cases}$$

per $s=1,\ldots,T$.

A partir d'aquesta matriu, es pot definir el que es coneix habitualment com la Transformada Real de Fourier:

Definició 9.5 Anomenarem a la transformació d'una variable X a través d'H, és a dir, $X_f=HX$ com la Transformada Real de Fourier (TRF) d'X.

[15] Si la sèrie conté memòria llarga a les freqüències estacionals enlloc de la freqüència zero, caldria estimar el model de regressió sense tenir en compte aquestes freqüències.

La matriu H també és idempotent, simètrica, però a diferència de la matriu W és real, de manera que el seu tractament és molt més senzill. Concretament, per a l'estimació d'un model de regressió com l'anterior, és equivalent a les expressions anteriors la següent:

$$\widetilde{\beta}_f = (X_f' X_f)^{-1} X_f' Y_f \tag{9.55}$$

estimador que anomenarem de Mínims Quadrats Ordinaris en el domini de les Freqüències (MQOF).

Tal com ja s'ha comentat, per obtenir una estimació que sigui robusta front al perill d'obtenir regressions espúries, n'hi ha prou amb aplicar l'estimador MQOF sense usar les freqüències més baixes, és a dir, les freqüències associades a un comportament tendencial i per tant a una major memòria. Suposi's que es pretén estimar un model amb k variables exògenes, $X_1,..,X_k$ a partir de T observacions de manera que la matriu X és una matriu (Txk). Com la matriu H és una matriu (TxT) la matriu X_f també és (Txk):

$$X_f = \begin{bmatrix} X_{f11} & \dots & X_{fk1} \\ \dots & \dots & \dots \\ X_{f1T} & \dots & X_{fkT} \end{bmatrix} \tag{9.56}$$

Cada fila de la matriu X_f que notarem per X_{fs} ($s=1,..,k$)[16] conté els valors de les k variables[17] corresponents a la freqüència $\pi(s-1)/T$ de manera que per estimar el model $Y_t = \beta_0 + \beta_1 X_{1t} + ... + \beta_k X_{kt} + \varepsilon_t$ de manera robusta front a les regressions espúries es poden eliminar les m menors freqüències on $0<m<T$, és a dir, eliminar les m files d'X_{fs}. És natural que el nombre de freqüències eliminades m sigui funció del nombre total d'observacions i la forma més senzilla és que m sigui un percentatge fixat (que notarem δ, on $0<\delta<1$) del nombre d'observacions, és a dir $m = \delta T$. Així, es pot calcular un nou estimador del vector de

---

[16] És millor usar el subíndex s enlloc de t per destacar que es tracta de les diferents observacions en el domini de les freqüències enlloc del domini temporal.

[17] És a dir, $X_{fs}=(X_{f1s},...,X_{fks})$ per cada $s=1,...,T$.

paràmetres β que anomenarem estimador per mínims quadrats ordinaris en el domini de les freqüències restringit (MQOFR) a partir de:

$$\widetilde{\beta}_f(\delta) = (X_f^{\delta}{}' X_f^{\delta})^{-1} X_f^{\delta}{}' Y_f^{\delta} \tag{9.57}$$

on la nova matriu X és:

$$X_f^{\delta} = \begin{bmatrix} X_{f1m} & \dots & X_{fkm} \\ \dots & \dots & \dots \\ X_{f1T} & \dots & X_{fkT} \end{bmatrix} \tag{9.58}$$

9.5.3. Validació empírica del mètode proposat

Com a validació de que l'estimació de models de regressió eliminant algunes freqüències permet disminuir la probabilitat d'obtenir regressions espúries, s'ha repetit l'exercici de simulació basat en sèries X_t i Y_t independents generades segons els models:

$$X_t = \phi X_{t-1} + \varepsilon_t \tag{9.59}$$

$$Y_t = \phi^* Y_{t-1} + \eta_t \tag{9.60}$$

estimant per cada parell de sèries el model $Y_t = \beta_0 + \beta_1 X_t + \varepsilon_t$ usant l'estimador (9.57).

Els resultats dels quadres 9.13 i 9.14 es poden comparar amb el quadre 9.1 i es comprova com, en efecte, el percentatge de rebutjos de la hipòtesi nul·la $\beta=0$ s'ha reduït molt excepte quan les variables són camins aleatoris.

Així, per exemple, quan els dos paràmetres autoregressius són iguals a 0.9, el percentatge de rebutjos erronis passa del 55% al estimar per MQO al 18% al estimar per MQOFR amb $\delta=0.2$ *(amb* $T=50$*).*

Quadre 9.13. Proporció de rebutjos de la hipòtesi nul·la $\beta_I=0$ en el model $Y_t = \beta_0 + \beta_1 X_t + \varepsilon_t$. Estimació per MQOFR amb $\delta=0.1$

T	φ	φ*=0.0	φ*=0.5	φ*=0.9	φ*=1.0
50	0.0	0.06	0.06	0.06	0.06
	0.5	0.05	0.10	0.16	0.20
	0.9	0.05	0.17	0.25	0.35
	1.0	0.05	0.19	0.37	0.53
100	0.0	0.05	0.06	0.05	0.06
	0.5	0.06	0.12	0.16	0.19
	0.9	0.05	0.16	0.29	0.40
	1.0	0.06	0.19	0.37	0.65
150	0.0	0.06	0.05	0.05	0.05
	0.5	0.06	0.11	0.19	0.17
	0.9	0.05	0.15	0.25	0.39
	1.0	0.05	0.17	0.37	0.66
200	0.0	0.05	0.06	0.05	0.05
	0.5	0.05	0.14	0.14	0.18
	0.9	0.05	0.17	0.28	0.40
	1.0	0.05	0.17	0.35	0.71

Quadre 9.14. Proporció de rebutjos de la hipòtesi nul·la $\beta_1=0$ en el model $Y_t = \beta_0 + \beta_1 X_t + \varepsilon_t$. Estimació per MQOFR amb $\delta=0.2$

T	ϕ	ϕ*=0.0	ϕ*=0.5	ϕ*=0.9	ϕ*=1.0
50	0.0	0.05	0.06	0.05	0.04
	0.5	0.05	0.10	0.11	0.14
	0.9	0.05	0.11	0.18	0.28
	1.0	0.06	0.15	0.26	0.51
100	0.0	0.06	0.06	0.06	0.04
	0.5	0.05	0.09	0.12	0.11
	0.9	0.05	0.10	0.14	0.26
	1.0	0.05	0.13	0.27	0.59
150	0.0	0.05	0.05	0.06	0.05
	0.5	0.06	0.09	0.09	0.15
	0.9	0.06	0.11	0.16	0.27
	1.0	0.05	0.13	0.24	0.64
200	0.0	0.04	0.07	0.05	0.06
	0.5	0.05	0.08	0.10	0.14
	0.9	0.05	0.11	0.14	0.26
	1.0	0.05	0.13	0.26	0.66

La mateixa comparació es pot realitzar pel que fa a la presència de memòria llarga. Així, al simular sèries segons models ARFIMA(0,*d*,0):

$$(1-L)^{dy} Y_t = \varepsilon_t \tag{9.61}$$

$$(1-L)^{dx} X_t = \nu_t \tag{9.62}$$

s'obtenen percentatges de rebuig de la hipòtesi nul·la a partir de l'estimador MQOFR com els dels quadres 9.15 a 9.22. Si es comparen aquests resultats amb els dels quadres 9.3 a 9.6 es comprova com la reducció d'aquest percentatge d'errors és encara més espectacular que en el cas anterior.

De totes maneres, per a que la utilització de l'estimador MQOFR sigui una proposta interessant, cal que a més de ser robust front al problema de les regressions espúries, tingui propietats estadístiques pel que fa a biaix i error quadràtic mitjà en mostra finita que siguin comparables a les de l'estimador MQO.

D'una banda és obvi que l'estimador MQOF té les mateixes propietats que l'estimador MQO. Però l'estimador MQOFR no és més que l'estimador MQOF usant T-m observacions enlloc de les T observacions disponibles. Per tant, en aquelles situacions en que l'estimador MQO sigui sense biaix, també ho serà l'estimador MQOFR. L'única diferència que pot presentar-se entre els dos estimadors està relacionada amb la seva variància ja que en nombre d'observacions que s'usa en cada cas és diferent i la variància d'aquestes observacions també és diferent.

En tot cas, com a validació s'ha realitzat a continuació una anàlisi comparativa a partir de diferents situacions. Per aquesta anàlisi, s'han generat una variable exògena X_t segons el model:

$$(1-\phi L)(1-L)^{d_x} X_t = \varepsilon_t \tag{9.63}$$

i un terme de pertorbació u_t segons el model:

$$(1-\phi^* L)(1-L)^{d_u} u_t = \eta_t \tag{9.64}$$

Quadre 9.15. Percentatge de rebutjos de la hipòtesi nul·la $\beta=0$. Estimació per MQOFR. Models (9.61) i (9.62). $T=50$; $\delta=0.1$.

d_X	d_Y=0.0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0
0.0	0.05	0.06	0.06	0.05	0.06	0.06	0.07	0.08	0.08	0.08
0.1	0.06	0.06	0.05	0.08	0.09	0.08	0.08	0.08	0.08	0.09
0.2	0.06	0.09	0.08	0.09	0.09	0.10	0.12	0.11	0.13	0.13
0.3	0.06	0.10	0.09	0.11	0.13	0.13	0.14	0.17	0.17	0.19
0.4	0.05	0.09	0.10	0.12	0.16	0.17	0.20	0.21	0.30	0.30
0.6	0.07	0.08	0.09	0.12	0.16	0.17	0.20	0.23	0.34	0.32
0.7	0.07	0.08	0.10	0.13	0.19	0.20	0.27	0.30	0.33	0.38
0.8	0.06	0.09	0.12	0.13	0.24	0.25	0.30	0.34	0.39	0.43
0.9	0.06	0.10	0.12	0.18	0.27	0.27	0.36	0.36	0.43	0.50
1.0	0.07	0.09	0.13	0.19	0.34	0.36	0.41	0.44	0.48	0.55

Quadre 9.16. Percentatge de rebutjos de la hipòtesi nul·la $\beta=0$. Estimació per MQOFR. Models (9.61) i (9.62). $T=50$; $\delta=0.2$.

d_X	d_Y=0.0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0
0.0	0.06	0.05	0.06	0.06	0.07	0.07	0.06	0.08	0.09	0.09
0.1	0.06	0.09	0.08	0.11	0.09	0.11	0.09	0.09	0.09	0.10
0.2	0.07	0.09	0.09	0.11	0.10	0.09	0.12	0.13	0.12	0.13
0.3	0.07	0.08	0.09	0.09	0.11	0.12	0.12	0.12	0.15	0.16
0.4	0.08	0.09	0.10	0.11	0.12	0.12	0.19	0.20	0.21	0.26
0.6	0.07	0.09	0.10	0.13	0.14	0.13	0.19	0.19	0.22	0.27
0.7	0.06	0.10	0.10	0.13	0.15	0.17	0.20	0.25	0.28	0.31
0.8	0.07	0.09	0.11	0.14	0.18	0.20	0.25	0.29	0.35	0.42
0.9	0.07	0.09	0.11	0.15	0.20	0.21	0.30	0.36	0.42	0.48
1.0	0.08	0.09	0.12	0.16	0.24	0.25	0.31	0.40	0.48	0.53

Quadre 9.17. Percentatge de rebutjos de la hipòtesi nul·la $\beta=0$. Estimació per MQOFR. Models (9.61) i (9.62). $T=100$; $\delta=0.1$.

d_X	d_Y=0.0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0
0.0	0.05	0.05	0.06	0.06	0.05	0.07	0.06	0.07	0.07	0.07
0.1	0.06	0.06	0.05	0.07	0.09	0.08	0.08	0.09	0.09	0.08
0.2	0.07	0.06	0.07	0.07	0.08	0.11	0.11	0.11	0.10	0.11
0.3	0.04	0.07	0.08	0.11	0.15	0.13	0.14	0.16	0.17	0.18
0.4	0.05	0.07	0.10	0.11	0.17	0.17	0.16	0.20	0.27	0.31
0.6	0.05	0.07	0.10	0.11	0.17	0.18	0.17	0.23	0.28	0.33
0.7	0.07	0.09	0.09	0.13	0.20	0.20	0.23	0.26	0.36	0.39
0.8	0.07	0.10	0.10	0.14	0.24	0.24	0.27	0.31	0.43	0.43
0.9	0.06	0.09	0.11	0.16	0.26	0.26	0.35	0.35	0.47	0.49
1.0	0.07	0.10	0.12	0.19	0.31	0.32	0.39	0.42	0.49	0.54

Quadre 9.18. Percentatge de rebutjos de la hipòtesi nul·la $\beta=0$. Estimació per MQOFR. Models (9.61) i (9.62). $T=100$; $\delta=0.2$.

d_X	d_Y=0.0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0
0.0	0.06	0.05	0.06	0.06	0.07	0.06	0.07	0.08	0.09	0.08
0.1	0.06	0.09	0.08	0.10	0.09	0.08	0.09	0.08	0.09	0.10
0.2	0.07	0.09	0.10	0.09	0.11	0.12	0.11	0.10	0.10	0.12
0.3	0.07	0.08	0.09	0.10	0.12	0.12	0.12	0.13	0.15	0.18
0.4	0.08	0.08	0.11	0.13	0.13	0.13	0.14	0.16	0.20	0.30
0.6	0.07	0.08	0.11	0.14	0.13	0.14	0.16	0.18	0.21	0.32
0.7	0.08	0.08	0.11	0.13	0.15	0.16	0.21	0.22	0.31	0.38
0.8	0.07	0.08	0.10	0.14	0.17	0.20	0.24	0.34	0.36	0.46
0.9	0.08	0.08	0.11	0.15	0.19	0.27	0.29	0.37	0.46	0.51
1.0	0.08	0.09	0.11	0.17	0.26	0.27	0.36	0.44	0.54	0.56

Quadre 9.19. Percentatge de rebutjos de la hipòtesi nul·la $\beta=0$. Estimació per MQOFR. Models (9.61) i (9.62). $T=150;\ \delta=0.1$.

d_X	d_Y=0.0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0
0.0	0.04	0.06	0.05	0.05	0.05	0.06	0.06	0.07	0.06	0.07
0.1	0.05	0.06	0.06	0.07	0.07	0.08	0.08	0.07	0.07	0.08
0.2	0.06	0.07	0.08	0.08	0.09	0.09	0.10	0.10	0.10	0.11
0.3	0.05	0.07	0.08	0.09	0.13	0.11	0.13	0.16	0.17	0.19
0.4	0.06	0.06	0.08	0.10	0.15	0.17	0.18	0.23	0.26	0.30
0.6	0.06	0.07	0.08	0.10	0.17	0.17	0.19	0.24	0.26	0.33
0.7	0.07	0.07	0.08	0.13	0.20	0.20	0.23	0.26	0.35	0.38
0.8	0.07	0.10	0.10	0.14	0.22	0.24	0.27	0.30	0.40	0.43
0.9	0.06	0.09	0.10	0.17	0.24	0.26	0.35	0.35	0.46	0.48
1.0	0.06	0.10	0.12	0.18	0.30	0.33	0.40	0.44	0.51	0.55

Quadre 9.20. Percentatge de rebutjos de la hipòtesi nul·la $\beta=0$. Estimació per MQOFR. Models (9.61) i (9.62). $T=150;\ \delta=0.2$.

d_X	d_Y=0.0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0
0.0	0.05	0.05	0.06	0.06	0.07	0.06	0.07	0.07	0.08	0.09
0.1	0.07	0.10	0.07	0.09	0.08	0.09	0.07	0.09	0.11	0.11
0.2	0.05	0.07	0.08	0.09	0.10	0.10	0.10	0.10	0.11	0.13
0.3	0.06	0.07	0.09	0.10	0.12	0.11	0.12	0.13	0.16	0.19
0.4	0.06	0.10	0.10	0.12	0.13	0.13	0.17	0.20	0.20	0.24
0.6	0.06	0.08	0.10	0.12	0.13	0.14	0.18	0.21	0.24	0.28
0.7	0.07	0.08	0.11	0.12	0.15	0.16	0.21	0.23	0.29	0.39
0.8	0.06	0.09	0.10	0.13	0.20	0.21	0.24	0.33	0.42	0.46
0.9	0.07	0.09	0.10	0.14	0.21	0.24	0.31	0.44	0.50	0.58
1.0	0.08	0.10	0.12	0.17	0.23	0.29	0.41	0.50	0.60	0.68

Quadre 9.21. Percentatge de rebutjos de la hipòtesi nul·la $\beta=0$. Estimació per MQOFR. Models (9.61) i (9.62). $T=200$; $\delta=0.1$.

d_X	$d_Y=0.0$	0.1	0.2	0.3	0.4	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0
0.0	0.05	0.05	0.05	0.06	0.05	0.06	0.07	0.05	0.06	0.07
0.1	0.05	0.06	0.07	0.07	0.07	0.07	0.08	0.09	0.08	0.09
0.2	0.05	0.06	0.08	0.07	0.08	0.09	0.09	0.11	0.13	0.14
0.3	0.05	0.06	0.08	0.08	0.12	0.12	0.11	0.16	0.18	0.21
0.4	0.05	0.07	0.09	0.10	0.13	0.16	0.18	0.24	0.26	0.30
0.6	0.06	0.07	0.07	0.10	0.16	0.17	0.19	0.25	0.26	0.33
0.7	0.05	0.08	0.07	0.13	0.18	0.19	0.27	0.32	0.34	0.41
0.8	0.06	0.08	0.10	0.14	0.24	0.24	0.31	0.34	0.39	0.48
0.9	0.06	0.08	0.10	0.16	0.27	0.28	0.33	0.38	0.46	0.51
1.0	0.06	0.08	0.11	0.19	0.35	0.38	0.44	0.47	0.55	0.59

Quadre 9.22. Percentatge de rebutjos de la hipòtesi nul·la $\beta=0$. Estimació per MQOFR. Models (9.61) i (9.62). $T=200$; $\delta=0.2$.

d_X	$d_Y=0.0$	0.1	0.2	0.3	0.4	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0
0.0	0.06	0.06	0.05	0.05	0.06	0.06	0.05	0.07	0.07	0.08
0.1	0.06	0.08	0.08	0.08	0.09	0.10	0.09	0.09	0.09	0.10
0.2	0.05	0.08	0.08	0.09	0.10	0.10	0.10	0.10	0.10	0.11
0.3	0.05	0.09	0.09	0.09	0.11	0.11	0.10	0.12	0.16	0.18
0.4	0.06	0.08	0.08	0.10	0.11	0.12	0.12	0.15	0.24	0.30
0.6	0.05	0.09	0.09	0.10	0.12	0.12	0.15	0.17	0.26	0.31
0.7	0.06	0.09	0.10	0.11	0.12	0.16	0.19	0.26	0.35	0.40
0.8	0.06	0.09	0.09	0.12	0.13	0.19	0.24	0.32	0.41	0.49
0.9	0.06	0.09	0.10	0.14	0.18	0.26	0.30	0.42	0.48	0.60
1.0	0.07	0.09	0.10	0.16	0.24	0.28	0.36	0.51	0.59	0.71

Finalment, s'obté la variable endògena com combinació lineal dels dos anteriors.

$$Y_t = \beta X_t + u_t \tag{9.65}$$

D'aquesta manera es poden generar parells de variables estacionàries, variables que estan cointegrades en sentit clàssic, variables que estan cointegrades fraccionalment i situacions més complexes en que una variable conté memòria permanent i l'altra conté memòria llarga.

En algunes d'aquestes situacions hi són aplicables alguns dels resultats esmentats als apartats anteriors mentre que per altres situacions no es disposa de resultats teòrics. En tot cas l'evidència empírica que s'obté pel que fa a la comparació de l'estimador MQO i l'estimador MQOFR permet obrir una línia de recerca important en relació a l'estimació economètrica a partir del domini de les freqüències.

A l'Annex 9.1 es presenten els resultats d'aquest exercici de simulació, a partir dels que es pot arribar a les següents conclusions:

Pel que fa al biaix dels estimadors, no s'han obtingut ni valors d'aquest biaix importants, ni diferències clares entre un o altre mètode d'estimació[18]:

- En general, l'estimador MQOFR presenta una reducció molt important de la seva variància en relació a l'estimador MQO, sobretot quan les dues variables tenen memòria permanent.

- Quan les variables són de memòria transitòria, les diferències no són tan grans, però són també, en general, a favor de l'estimador MQOFR.

- Únicament quan una de les dues variables és de memòria curta (*d=0*), l'estimador MQOFR té una variància lleugerament superior a la variància de l'estimador MQO. De totes maneres, aquest és un cost mínim comparat amb els beneficis que té, tant pel menor

[18] També s'han generat altres models a més dels que apareixen a l'Annex 9.1, amb altres valors pels paràmetres β, ϕ i ϕ^*, però els resultats no n'alteren les principals conclusions.

perill d'obtenir regressions espúries com per la menor variància de l'estimador MQOFR quan les dades contenen memòria llarga o permanent.

9.6. Conclusions

Al llarg del capítol s'han presentat quines són les principals conseqüències que té el tipus de memòria de les dades temporals en l'estimació de models de regressió. Com els casos en que les variables utilitzades són de memòria curta o bé memòria permanent infinita han estat extensament estudiats a la literatura, s'ha centrat l'anàlisi a veure quines són les conseqüències de que les dades tenguin memòria llarga o memòria permanent finita per la realització d'inferència a partir dels paràmetres estimats en models de regressió.

La conclusió principal n'és que, tot i que els estimadors MQO siguin consistents, a mesura que augmenta la memòria augmenta també la probabilitat d'obtenir regressions espúries al utilitzar el t-estadístic habitual, és a dir, augment la probabilitat d'acceptar l'existència de relacions entre variables que són independents. En particular, aquesta probabilitat és força gran per processos integrats fraccionalment amb $d<1$, i fins i tot quan $d<1/2$.

S'ha mostrat que aquesta major probabilitat d'obtenir regression espúries està associada al predomini de les baixes freqüències en les densitats espectrals de les variables i s'ha presentat, com a solució a aquests problemes, un estimador molt simple en el domini de les freqüències que permet evitar, en bona part, aquestes conclusions errònies.

Al nostre entendre, aquesta proposta obre una via de recerca molt interessant ja que creiem que el domini de les freqüències ofereix alguns avantatges importants per l'anàlisi de les relacions entre variables temporals.

Annex 9.1. Comparació dels estimadors MQO i MQOFR.

A les pàgines següents es presenten alguns dels resultats obtinguts per tal de valorar el funcionament de l'estimador MQOFR proposat per tal de minimitzar el risc d'obtenir regressions espúries degut a la presència de variables amb memòria llarga o permanent.

Per aquesta anàlisi, s'han generat parells de sèries, una variable exògena X_t generada a partir del model:

$$(1-\phi L)(1-L)^{d_x} X_t = \varepsilon_t \qquad \text{(A9.1)}$$

i un terme de pertorbació u_t segons el model:

$$(1-\phi^* L)(1-L)^{d_u} u_t = \eta_t \qquad \text{(A9.2)}$$

Després s'ha generat la variable Y_t com:

$$Y_t = \beta X_t + u_t \qquad \text{(A9.3)}$$

amb $\beta=1$.

Per cada una de les simulacions, s'han calculat estimacions del biaix i de la variància dels estimadors del paràmetre β per MQO, per MQOFR amb $\delta=0.1$ i per MQOFR amb $\delta=0.2$. El quadre A9.1 recull els models pels que es presenta a continuació les estimacions de la variància[1] obtingudes de cada un d'aquests estimadors.

Quadre A9.1. Models analitzats en l'exercici de simulació

T	ϕ^*	*MQO*	*MQOFR* (δ=0.1)	*MQOFR* (δ=0.2)
50	0.0	A9.2	A9.3	A9.4
100	0.0	A9.5	A9.6	A9.7
150	0.0	A9.8	A9.9	A9.10
200	0.0	A9.11	A9.12	A9.13
50	0.5	A9.14	A9.15	A9.16
100	0.5	A9.17	A9.18	A9.19
150	0.5	A9.20	A9.21	A9.22
200	0.5	A9.23	A9.24	A9.25

[1] En cap cas, i per cap dels estimadors s'han obtingut valors del biaix significativament diferents de zero.

Pel que fa al biaix dels estimadors, no s'han obtingut ni valors d'aquest biaix importants, ni diferències clares entre un o altre mètode d'estimació. Per tant, no s'han inclòs les taules amb aquests resultats. Per altra banda, també s'han generat altres models amb altres valors pels paràmetres β, ϕ i ϕ^*, però els resultats no n'alteren les principals conclusions.

A l'apartat 9.5.3 de la tesi es presenten les principals conclusions que es poden extreure d'aquest exercici de simulació.

Quadre A9.2. Variància de l'estimador de β per MQO en el model $Y_t = \alpha + \beta X_t + u_t$.

Models (A9.1), (A9.2) i (A9.3) amb $\beta=1$, $\phi=0$ i $\phi^*=0$. $T=50$.

d_X	d_U=0	0.05	0.10	0.15	0.20	0.25	0.30	0.35	0.40	0.45	0.55	0.60	0.65	0.70	0.75	0.80	0.85	0.90	0.95	1.00
0.00	0.021	0.021	0.020	0.021	0.022	0.020	0.021	0.020	0.020	0.021	0.070	0.090	0.106	0.112	0.139	0.175	0.231	0.260	0.366	0.476
0.05	0.022	0.022	0.020	0.022	0.021	0.024	0.023	0.023	0.024	0.026	0.087	0.122	0.125	0.152	0.193	0.235	0.308	0.370	0.517	0.689
0.10	0.019	0.021	0.024	0.020	0.024	0.026	0.026	0.027	0.028	0.030	0.140	0.141	0.174	0.196	0.245	0.340	0.374	0.460	0.619	0.975
0.15	0.020	0.021	0.023	0.024	0.024	0.027	0.029	0.033	0.036	0.041	0.171	0.203	0.236	0.284	0.354	0.425	0.524	0.634	0.902	1.219
0.20	0.021	0.021	0.023	0.024	0.028	0.029	0.032	0.040	0.046	0.044	0.225	0.245	0.316	0.377	0.441	0.489	0.662	0.789	1.203	1.588
0.25	0.022	0.022	0.025	0.029	0.027	0.036	0.039	0.043	0.051	0.056	0.285	0.318	0.366	0.471	0.578	0.699	0.938	1.246	1.283	1.814
0.30	0.021	0.024	0.027	0.029	0.031	0.036	0.051	0.061	0.071	0.086	0.399	0.353	0.415	0.641	0.583	0.813	0.978	1.236	1.660	2.333
0.35	0.022	0.023	0.026	0.033	0.037	0.045	0.060	0.076	0.097	0.115	0.403	0.487	0.533	0.679	0.812	0.928	1.264	1.574	1.908	2.999
0.40	0.023	0.027	0.035	0.036	0.044	0.062	0.081	0.104	0.148	0.195	0.515	0.626	0.694	0.762	0.975	1.226	1.672	1.798	2.768	3.081
0.45	0.030	0.038	0.046	0.054	0.062	0.085	0.113	0.149	0.231	0.334	0.618	0.605	0.962	0.970	1.065	1.547	2.000	2.594	3.024	4.386
0.55	0.009	0.011	0.013	0.017	0.019	0.028	0.033	0.037	0.047	0.041	0.425	0.496	0.585	0.735	0.814	0.947	1.260	1.702	2.338	3.355
0.60	0.008	0.010	0.010	0.015	0.019	0.023	0.027	0.034	0.042	0.034	0.374	0.395	0.441	0.608	0.791	1.012	1.191	1.408	2.268	2.769
0.65	0.008	0.008	0.010	0.012	0.018	0.019	0.028	0.030	0.034	0.032	0.322	0.373	0.435	0.542	0.660	0.810	1.067	1.377	1.871	2.637
0.70	0.006	0.008	0.009	0.011	0.014	0.017	0.022	0.028	0.032	0.026	0.274	0.368	0.398	0.441	0.571	0.698	0.877	1.296	1.672	2.302
0.75	0.005	0.007	0.008	0.010	0.012	0.015	0.020	0.021	0.026	0.025	0.266	0.326	0.345	0.442	0.527	0.601	0.784	1.178	1.308	1.916
0.80	0.005	0.006	0.006	0.008	0.011	0.013	0.016	0.021	0.023	0.020	0.212	0.244	0.293	0.368	0.422	0.529	0.696	0.941	1.370	1.607
0.85	0.004	0.005	0.006	0.007	0.008	0.012	0.014	0.017	0.021	0.017	0.184	0.209	0.235	0.287	0.407	0.394	0.591	0.796	1.066	1.579
0.90	0.003	0.004	0.005	0.006	0.008	0.010	0.012	0.015	0.016	0.014	0.172	0.162	0.216	0.275	0.329	0.364	0.576	0.700	0.929	1.188
0.95	0.003	0.003	0.004	0.005	0.007	0.008	0.010	0.011	0.013	0.010	0.134	0.144	0.185	0.228	0.237	0.336	0.524	0.566	0.822	1.107
1.00	0.002	0.003	0.004	0.004	0.006	0.007	0.008	0.010	0.011	0.010	0.108	0.123	0.172	0.182	0.214	0.278	0.362	0.482	0.598	0.970

Quadre A9.3. Variància de l'estimador de β per MQOFR en el model $Y_t = \alpha + \beta X_t + u_t$.

Models (A9.1), (A9.2) i (A9.3) amb β=*1*, ϕ=*0* i ϕ^*=*0*. *T*=*50*; δ=*0.1*.

d_X	d_U=0	0.05	0.10	0.15	0.20	0.25	0.30	0.35	0.40	0.45	0.55	0.60	0.65	0.70	0.75	0.80	0.85	0.90	0.95	1.00
0.00	0.023	0.022	0.023	0.021	0.020	0.019	0.016	0.015	0.013	0.014	0.019	0.019	0.021	0.024	0.024	0.029	0.034	0.033	0.041	0.056
0.05	0.024	0.024	0.022	0.023	0.019	0.019	0.017	0.015	0.014	0.013	0.019	0.020	0.022	0.026	0.027	0.032	0.035	0.038	0.045	0.050
0.10	0.023	0.023	0.023	0.022	0.022	0.021	0.018	0.015	0.016	0.014	0.020	0.023	0.026	0.028	0.029	0.034	0.040	0.041	0.048	0.061
0.15	0.026	0.026	0.025	0.023	0.022	0.020	0.020	0.017	0.015	0.018	0.022	0.023	0.027	0.029	0.034	0.035	0.041	0.051	0.066	0.073
0.20	0.027	0.027	0.027	0.024	0.026	0.023	0.021	0.019	0.019	0.020	0.026	0.027	0.028	0.033	0.037	0.044	0.050	0.054	0.071	0.093
0.25	0.027	0.031	0.028	0.029	0.027	0.025	0.023	0.021	0.021	0.025	0.029	0.030	0.037	0.037	0.047	0.047	0.057	0.068	0.076	0.089
0.30	0.034	0.034	0.031	0.032	0.030	0.028	0.027	0.024	0.028	0.032	0.034	0.036	0.044	0.049	0.052	0.064	0.070	0.093	0.115	0.135
0.35	0.036	0.037	0.037	0.034	0.035	0.034	0.032	0.033	0.039	0.056	0.038	0.046	0.054	0.060	0.072	0.093	0.116	0.131	0.154	0.214
0.40	0.044	0.048	0.041	0.047	0.043	0.044	0.045	0.046	0.063	0.108	0.055	0.069	0.071	0.100	0.097	0.130	0.145	0.208	0.266	0.333
0.45	0.061	0.058	0.060	0.066	0.057	0.056	0.069	0.073	0.127	0.247	0.084	0.092	0.108	0.136	0.159	0.175	0.257	0.283	0.408	0.539
0.55	0.027	0.030	0.032	0.029	0.029	0.028	0.028	0.025	0.031	0.037	0.037	0.040	0.038	0.040	0.041	0.036	0.031	0.033	0.031	0.030
0.60	0.029	0.030	0.029	0.030	0.027	0.026	0.028	0.027	0.029	0.037	0.044	0.043	0.040	0.044	0.043	0.044	0.041	0.039	0.036	0.034
0.65	0.028	0.030	0.028	0.026	0.028	0.026	0.028	0.025	0.030	0.035	0.050	0.052	0.049	0.048	0.049	0.049	0.044	0.047	0.048	0.046
0.70	0.024	0.026	0.027	0.024	0.026	0.026	0.025	0.026	0.030	0.035	0.058	0.059	0.063	0.055	0.060	0.057	0.058	0.057	0.054	0.053
0.75	0.023	0.025	0.024	0.026	0.026	0.023	0.024	0.025	0.027	0.038	0.068	0.067	0.065	0.072	0.067	0.076	0.068	0.062	0.062	0.063
0.80	0.020	0.022	0.021	0.023	0.023	0.022	0.022	0.024	0.030	0.038	0.085	0.086	0.090	0.078	0.088	0.085	0.080	0.083	0.085	0.083
0.85	0.021	0.020	0.021	0.021	0.021	0.022	0.022	0.024	0.028	0.041	0.100	0.105	0.105	0.099	0.101	0.121	0.108	0.102	0.106	0.106
0.90	0.018	0.018	0.019	0.020	0.019	0.021	0.022	0.023	0.028	0.040	0.127	0.122	0.138	0.135	0.139	0.147	0.137	0.134	0.136	0.135
0.95	0.017	0.018	0.018	0.018	0.019	0.021	0.019	0.021	0.024	0.039	0.150	0.164	0.154	0.187	0.168	0.169	0.193	0.168	0.177	0.184
1.00	0.013	0.016	0.015	0.018	0.019	0.016	0.018	0.020	0.027	0.036	0.183	0.229	0.217	0.223	0.200	0.236	0.223	0.245	0.234	0.237

Quadre A9.4. Variància de l'estimador de β per MQOFR en el model $Y_t = \alpha + \beta X_t + u_t$.

Models (A9.1), (A9.2) i (A9.3) amb $\beta=1$, $\phi=0$ i $\phi^*=0$. $T=50$; $\delta=0.2$.

d_X	$d_U=0$	0.05	0.10	0.15	0.20	0.25	0.30	0.35	0.40	0.45	0.55	0.60	0.65	0.70	0.75	0.80	0.85	0.90	0.95	1.00
0.00	0.026	0.025	0.024	0.024	0.020	0.020	0.016	0.014	0.012	0.013	0.017	0.017	0.018	0.018	0.019	0.020	0.021	0.025	0.032	0.034
0.05	0.028	0.028	0.027	0.024	0.021	0.021	0.018	0.015	0.012	0.015	0.016	0.018	0.018	0.020	0.021	0.024	0.026	0.026	0.029	0.037
0.10	0.028	0.029	0.027	0.024	0.021	0.022	0.018	0.017	0.015	0.014	0.018	0.018	0.022	0.021	0.024	0.023	0.025	0.030	0.034	0.040
0.15	0.029	0.031	0.029	0.027	0.025	0.022	0.021	0.018	0.015	0.016	0.020	0.020	0.021	0.022	0.022	0.024	0.029	0.035	0.038	0.047
0.20	0.034	0.032	0.031	0.029	0.028	0.025	0.024	0.020	0.017	0.017	0.021	0.022	0.024	0.027	0.026	0.030	0.032	0.035	0.043	0.053
0.25	0.036	0.035	0.033	0.034	0.029	0.025	0.024	0.020	0.020	0.022	0.024	0.026	0.028	0.027	0.031	0.034	0.039	0.047	0.054	0.074
0.30	0.042	0.040	0.040	0.033	0.034	0.032	0.028	0.027	0.026	0.032	0.030	0.028	0.032	0.031	0.036	0.042	0.054	0.059	0.067	0.093
0.35	0.046	0.049	0.047	0.046	0.041	0.038	0.035	0.034	0.040	0.058	0.035	0.044	0.043	0.049	0.052	0.062	0.072	0.080	0.109	0.132
0.40	0.054	0.060	0.055	0.054	0.052	0.046	0.047	0.046	0.059	0.121	0.048	0.054	0.059	0.068	0.081	0.090	0.110	0.140	0.186	0.253
0.45	0.076	0.079	0.072	0.071	0.073	0.066	0.069	0.086	0.121	0.269	0.074	0.080	0.097	0.101	0.137	0.143	0.199	0.231	0.318	0.387
0.55	0.042	0.042	0.040	0.038	0.038	0.035	0.031	0.032	0.030	0.038	0.036	0.036	0.039	0.042	0.053	0.056	0.062	0.076	0.093	0.127
0.60	0.042	0.049	0.041	0.040	0.035	0.037	0.032	0.028	0.028	0.039	0.036	0.038	0.042	0.046	0.050	0.058	0.073	0.088	0.099	0.145
0.65	0.045	0.041	0.038	0.039	0.037	0.032	0.031	0.033	0.031	0.044	0.034	0.038	0.040	0.046	0.048	0.066	0.075	0.091	0.111	0.141
0.70	0.039	0.040	0.037	0.032	0.034	0.034	0.031	0.030	0.032	0.044	0.034	0.038	0.040	0.046	0.055	0.071	0.075	0.096	0.121	0.159
0.75	0.038	0.037	0.038	0.036	0.035	0.032	0.029	0.033	0.034	0.047	0.034	0.037	0.042	0.047	0.055	0.071	0.085	0.103	0.148	0.171
0.80	0.036	0.034	0.033	0.031	0.032	0.031	0.029	0.028	0.033	0.050	0.036	0.037	0.048	0.053	0.055	0.065	0.092	0.107	0.143	0.185
0.85	0.033	0.034	0.034	0.029	0.032	0.032	0.030	0.033	0.034	0.055	0.034	0.038	0.047	0.052	0.061	0.074	0.092	0.114	0.144	0.208
0.90	0.035	0.032	0.032	0.030	0.028	0.028	0.029	0.030	0.038	0.062	0.032	0.039	0.041	0.055	0.064	0.078	0.091	0.124	0.144	0.206
0.95	0.030	0.027	0.031	0.031	0.027	0.028	0.031	0.031	0.038	0.062	0.037	0.041	0.046	0.054	0.053	0.075	0.104	0.139	0.167	0.205
1.00	0.025	0.030	0.027	0.026	0.023	0.025	0.025	0.028	0.036	0.056	0.033	0.037	0.046	0.052	0.062	0.069	0.090	0.116	0.157	0.227

Quadre A9.5. Variància de l'estimador de β per MQO en el model $Y_t = \alpha + \beta X_t + u_t$.

Models (A9.1), (A9.2) i (A9.3) amb β=*1*, ϕ=*0* i ϕ^*=*0*. *T*=*100*.

d_X	d_U=0	0.05	0.10	0.15	0.20	0.25	0.30	0.35	0.40	0.45	0.55	0.60	0.65	0.70	0.75	0.80	0.85	0.90	0.95	1.00
0.00	0.011	0.010	0.010	0.010	0.010	0.011	0.010	0.009	0.009	0.011	0.043	0.056	0.062	0.077	0.121	0.146	0.197	0.256	0.336	0.536
0.05	0.011	0.010	0.011	0.010	0.011	0.011	0.011	0.012	0.012	0.013	0.062	0.074	0.093	0.121	0.151	0.198	0.272	0.394	0.501	0.690
0.10	0.010	0.010	0.011	0.011	0.012	0.013	0.012	0.015	0.014	0.016	0.093	0.110	0.126	0.158	0.219	0.307	0.400	0.499	0.743	1.037
0.15	0.011	0.011	0.011	0.011	0.012	0.014	0.016	0.019	0.020	0.018	0.122	0.149	0.196	0.224	0.315	0.351	0.526	0.627	0.929	1.346
0.20	0.010	0.012	0.011	0.012	0.014	0.015	0.017	0.022	0.029	0.030	0.179	0.202	0.259	0.300	0.399	0.508	0.779	0.974	1.426	1.919
0.25	0.011	0.011	0.012	0.013	0.016	0.018	0.022	0.028	0.036	0.042	0.211	0.283	0.365	0.423	0.531	0.751	0.969	1.231	1.897	2.785
0.30	0.011	0.011	0.013	0.014	0.017	0.021	0.025	0.037	0.045	0.057	0.329	0.370	0.434	0.494	0.666	0.854	1.420	1.647	2.480	3.450
0.35	0.011	0.014	0.014	0.016	0.021	0.028	0.034	0.050	0.069	0.098	0.412	0.495	0.609	0.689	0.915	1.231	1.660	1.973	2.822	4.445
0.40	0.012	0.014	0.017	0.021	0.024	0.033	0.051	0.072	0.102	0.156	0.541	0.555	0.735	0.929	1.171	1.503	2.007	2.827	3.525	5.453
0.45	0.016	0.018	0.021	0.027	0.034	0.046	0.074	0.104	0.171	0.271	0:574	0.869	0.883	1.113	1.561	2.024	2.482	3.350	4.757	7.674
0.55	0.004	0.005	0.007	0.008	0.011	0.014	0.018	0.025	0.030	0.028	0.407	0.473	0.578	0.768	0.905	1.351	1.782	2.379	3.424	5.176
0.60	0.004	0.004	0.005	0.007	0.010	0.012	0.017	0.021	0.028	0.027	0.323	0.388	0.525	0.632	0.820	1.071	1.444	1.844	2.831	4.190
0.65	0.003	0.003	0.005	0.006	0.008	0.010	0.015	0.018	0.021	0.021	0.320	0.338	0.449	0.507	0.761	0.896	1.264	1.743	2.434	3.728
0.70	0.002	0.003	0.004	0.005	0.007	0.009	0.011	0.017	0.019	0.017	0.248	0.307	0.341	0.469	0.582	0.807	1.165	1.386	2.292	3.280
0.75	0.002	0.003	0.003	0.004	0.006	0.007	0.010	0.012	0.015	0.015	0.195	0.262	0.301	0.370	0.482	0.669	0.981	1.224	1.817	2.725
0.80	0.002	0.002	0.002	0.003	0.005	0.006	0.008	0.010	0.013	0.012	0.161	0.204	0.277	0.324	0.409	0.533	0.644	1.059	1.432	2.071
0.85	0.001	0.002	0.002	0.002	0.004	0.005	0.007	0.008	0.009	0.009	0.140	0.154	0.199	0.268	0.317	0.414	0.587	0.818	1.259	1.840
0.90	0.001	0.001	0.002	0.002	0.003	0.004	0.005	0.006	0.008	0.007	0.107	0.125	0.154	0.221	0.252	0.371	0.489	0.723	0.883	1.489
0.95	0.001	0.001	0.001	0.002	0.002	0.003	0.004	0.005	0.006	0.006	0.081	0.101	0.140	0.159	0.205	0.303	0.389	0.585	0.765	1.221
1.00	0.001	0.001	0.001	0.001	0.002	0.002	0.003	0.004	0.005	0.004	0.066	0.078	0.091	0.121	0.169	0.222	0.316	0.404	0.628	0.746

Quadre A9.6. Variància de l'estimador de β per MQOFR en el model $Y_t = \alpha + \beta X_t + u_t$.

Models (A9.1), (A9.2) i (A9.3) amb $\beta=1$, $\phi=0$ i $\phi^*=0$. $T=100$; $\delta=0.1$.

d_X	d_U=0	0.05	0.10	0.15	0.20	0.25	0.30	0.35	0.40	0.45	0.55	0.60	0.65	0.70	0.75	0.80	0.85	0.90	0.95	1.00
0.00	0.011	0.012	0.010	0.010	0.009	0.009	0.008	0.007	0.006	0.006	0.009	0.009	0.010	0.011	0.012	0.013	0.016	0.018	0.019	0.026
0.05	0.012	0.011	0.010	0.010	0.011	0.009	0.008	0.008	0.006	0.007	0.009	0.010	0.011	0.012	0.012	0.015	0.016	0.019	0.024	0.033
0.10	0.012	0.011	0.012	0.011	0.011	0.009	0.009	0.008	0.007	0.007	0.010	0.010	0.011	0.013	0.014	0.016	0.018	0.021	0.028	0.036
0.15	0.012	0.012	0.013	0.012	0.010	0.010	0.009	0.008	0.008	0.008	0.011	0.012	0.014	0.015	0.016	0.019	0.021	0.027	0.032	0.042
0.20	0.014	0.013	0.013	0.012	0.011	0.011	0.011	0.009	0.009	0.009	0.012	0.013	0.016	0.016	0.018	0.022	0.025	0.030	0.037	0.048
0.25	0.014	0.014	0.014	0.014	0.012	0.012	0.012	0.010	0.009	0.012	0.014	0.013	0.017	0.021	0.023	0.024	0.029	0.038	0.048	0.069
0.30	0.017	0.015	0.015	0.015	0.015	0.014	0.013	0.012	0.014	0.018	0.017	0.019	0.022	0.023	0.028	0.030	0.039	0.049	0.065	0.082
0.35	0.020	0.018	0.017	0.018	0.018	0.016	0.016	0.018	0.020	0.035	0.024	0.025	0.027	0.030	0.040	0.047	0.063	0.086	0.095	0.158
0.40	0.022	0.022	0.022	0.023	0.022	0.023	0.021	0.025	0.036	0.073	0.031	0.036	0.042	0.050	0.057	0.085	0.098	0.134	0.185	0.254
0.45	0.029	0.032	0.029	0.031	0.031	0.032	0.033	0.046	0.085	0.198	0.046	0.053	0.061	0.081	0.094	0.137	0.163	0.253	0.350	0.486
0.55	0.015	0.015	0.015	0.015	0.014	0.015	0.013	0.013	0.016	0.020	0.021	0.019	0.020	0.019	0.020	0.019	0.019	0.018	0.018	0.016
0.60	0.014	0.014	0.015	0.014	0.015	0.014	0.013	0.013	0.014	0.021	0.022	0.022	0.024	0.023	0.024	0.023	0.024	0.022	0.020	0.020
0.65	0.014	0.013	0.014	0.013	0.013	0.013	0.013	0.013	0.015	0.021	0.027	0.030	0.027	0.027	0.027	0.028	0.027	0.028	0.028	0.026
0.70	0.011	0.013	0.014	0.014	0.012	0.013	0.013	0.014	0.018	0.023	0.032	0.032	0.035	0.034	0.033	0.034	0.037	0.036	0.034	0.033
0.75	0.011	0.011	0.012	0.013	0.012	0.012	0.012	0.014	0.015	0.019	0.038	0.038	0.040	0.040	0.044	0.042	0.046	0.040	0.040	0.042
0.80	0.011	0.010	0.011	0.012	0.012	0.012	0.012	0.013	0.014	0.024	0.043	0.048	0.051	0.052	0.053	0.055	0.055	0.057	0.057	0.053
0.85	0.009	0.010	0.010	0.010	0.010	0.011	0.011	0.013	0.017	0.024	0.056	0.060	0.064	0.067	0.070	0.073	0.078	0.072	0.077	0.069
0.90	0.009	0.009	0.008	0.010	0.010	0.010	0.011	0.013	0.016	0.025	0.078	0.078	0.088	0.089	0.093	0.096	0.103	0.104	0.115	0.097
0.95	0.008	0.008	0.008	0.009	0.010	0.008	0.009	0.012	0.016	0.025	0.095	0.112	0.117	0.120	0.126	0.150	0.141	0.138	0.174	0.145
1.00	0.007	0.007	0.008	0.007	0.008	0.008	0.009	0.010	0.015	0.027	0.128	0.144	0.157	0.160	0.183	0.186	0.213	0.191	0.224	0.224

Quadre A9.7. Variància de l'estimador de β per MQOFR en el model $Y_t = \alpha + \beta X_t + u_t$.

Models (A9.1), (A9.2) i (A9.3) amb $\beta=1$, $\phi=0$ i $\phi^*=0$. $T=100$; $\delta=0.2$.

d_X	d_U=0	0.05	0.10	0.15	0.20	0.25	0.30	0.35	0.40	0.45	0.55	0.60	0.65	0.70	0.75	0.80	0.85	0.90	0.95	1.00
0.00	0.013	0.012	0.012	0.011	0.011	0.010	0.009	0.006	0.006	0.006	0.008	0.007	0.008	0.008	0.009	0.010	0.011	0.011	0.014	0.016
0.05	0.012	0.013	0.012	0.011	0.010	0.010	0.009	0.007	0.006	0.006	0.008	0.007	0.009	0.009	0.010	0.009	0.012	0.013	0.015	0.017
0.10	0.015	0.014	0.014	0.012	0.011	0.010	0.010	0.008	0.007	0.008	0.009	0.010	0.010	0.009	0.010	0.010	0.012	0.014	0.017	0.021
0.15	0.015	0.015	0.013	0.012	0.012	0.010	0.010	0.008	0.007	0.008	0.009	0.009	0.011	0.011	0.012	0.012	0.013	0.016	0.018	0.020
0.20	0.017	0.013	0.014	0.014	0.013	0.012	0.010	0.009	0.008	0.009	0.011	0.010	0.011	0.012	0.012	0.014	0.016	0.019	0.022	0.027
0.25	0.017	0.018	0.015	0.016	0.016	0.012	0.013	0.011	0.010	0.013	0.011	0.013	0.013	0.013	0.015	0.017	0.017	0.021	0.026	0.032
0.30	0.020	0.022	0.019	0.017	0.018	0.015	0.013	0.012	0.012	0.018	0.015	0.015	0.016	0.016	0.018	0.022	0.024	0.029	0.035	0.050
0.35	0.023	0.024	0.021	0.022	0.020	0.017	0.017	0.017	0.018	0.033	0.017	0.020	0.023	0.023	0.027	0.029	0.035	0.042	0.063	0.083
0.40	0.029	0.029	0.028	0.027	0.025	0.023	0.025	0.024	0.042	0.078	0.023	0.029	0.029	0.038	0.043	0.054	0.069	0.094	0.126	0.173
0.45	0.037	0.038	0.036	0.036	0.033	0.032	0.039	0.046	0.080	0.216	0.040	0.045	0.055	0.059	0.075	0.093	0.128	0.182	0.262	0.361
0.55	0.022	0.021	0.021	0.020	0.018	0.016	0.016	0.015	0.014	0.018	0.018	0.017	0.019	0.021	0.023	0.029	0.032	0.041	0.050	0.071
0.60	0.020	0.021	0.018	0.018	0.018	0.015	0.014	0.015	0.016	0.022	0.017	0.017	0.021	0.022	0.024	0.033	0.031	0.044	0.056	0.077
0.65	0.020	0.020	0.020	0.018	0.019	0.016	0.014	0.015	0.017	0.025	0.016	0.017	0.019	0.022	0.024	0.033	0.037	0.051	0.065	0.081
0.70	0.021	0.019	0.020	0.020	0.017	0.015	0.015	0.014	0.017	0.028	0.017	0.019	0.021	0.022	0.027	0.032	0.043	0.054	0.073	0.107
0.75	0.019	0.020	0.021	0.020	0.016	0.015	0.014	0.015	0.018	0.033	0.018	0.019	0.020	0.024	0.029	0.034	0.048	0.066	0.080	0.110
0.80	0.017	0.018	0.019	0.017	0.016	0.015	0.015	0.015	0.020	0.036	0.017	0.018	0.022	0.027	0.029	0.042	0.046	0.066	0.094	0.124
0.85	0.018	0.017	0.016	0.016	0.015	0.016	0.015	0.016	0.022	0.038	0.016	0.019	0.023	0.029	0.033	0.042	0.053	0.073	0.099	0.152
0.90	0.018	0.016	0.017	0.015	0.017	0.015	0.014	0.016	0.023	0.043	0.016	0.021	0.024	0.028	0.034	0.039	0.062	0.078	0.112	0.167
0.95	0.015	0.015	0.015	0.014	0.013	0.014	0.013	0.016	0.023	0.045	0.017	0.019	0.024	0.029	0.036	0.045	0.061	0.089	0.116	0.170
1.00	0.014	0.014	0.013	0.015	0.013	0.013	0.014	0.016	0.025	0.049	0.016	0.020	0.022	0.028	0.039	0.048	0.065	0.094	0.132	0.179

Quadre A9.8. Variància de l'estimador de β per MQO en el model $Y_t = \alpha + \beta X_t + u_t$.

Models (A9.1), (A9.2) i (A9.3) amb $\beta=1$, $\phi=0$ i $\phi^*=0$. $T=150$.

d_X	d_U=0	0.05	0.10	0.15	0.20	0.25	0.30	0.35	0.40	0.45	0.55	0.60	0.65	0.70	0.75	0.80	0.85	0.90	0.95	1.00
0.00	0.007	0.006	0.007	0.007	0.007	0.007	0.007	0.006	0.007	0.007	0.035	0.043	0.053	0.072	0.080	0.113	0.178	0.234	0.296	0.486
0.05	0.007	0.006	0.007	0.007	0.007	0.007	0.008	0.008	0.008	0.009	0.051	0.060	0.093	0.110	0.129	0.164	0.264	0.339	0.512	0.909
0.10	0.006	0.007	0.007	0.007	0.008	0.009	0.009	0.010	0.010	0.011	0.076	0.095	0.119	0.154	0.179	0.295	0.385	0.561	0.645	1.246
0.15	0.007	0.007	0.007	0.007	0.008	0.009	0.011	0.013	0.013	0.016	0.097	0.119	0.181	0.209	0.294	0.350	0.513	0.665	1.131	1.578
0.20	0.006	0.007	0.008	0.009	0.008	0.011	0.013	0.015	0.019	0.021	0.143	0.205	0.235	0.276	0.419	0.542	0.776	0.964	1.496	2.093
0.25	0.007	0.007	0.009	0.009	0.011	0.013	0.015	0.022	0.026	0.029	0.230	0.275	0.302	0.417	0.536	0.756	1.049	1.282	2.266	3.085
0.30	0.007	0.007	0.008	0.010	0.013	0.017	0.020	0.029	0.038	0.047	0.304	0.309	0.416	0.589	0.729	1.028	1.392	1.979	3.110	4.160
0.35	0.007	0.008	0.009	0.012	0.014	0.020	0.028	0.038	0.057	0.074	0.415	0.470	0.653	0.815	0.947	1.404	1.963	2.781	3.805	5.965
0.40	0.008	0.009	0.012	0.014	0.018	0.023	0.038	0.056	0.088	0.128	0.503	0.588	0.743	1.048	1.232	1.793	2.694	3.027	4.250	7.565
0.45	0.010	0.012	0.015	0.018	0.023	0.031	0.052	0.091	0.142	0.256	0.621	0.780	1.006	1.178	1.566	1.761	2.857	4.908	6.615	9.077
0.55	0.002	0.003	0.004	0.006	0.008	0.010	0.014	0.022	0.028	0.024	0.368	0.486	0.626	0.783	0.937	1.488	1.928	2.922	4.219	6.443
0.60	0.002	0.002	0.004	0.005	0.006	0.009	0.012	0.017	0.023	0.020	0.299	0.400	0.522	0.608	0.884	1.178	1.503	2.401	3.863	5.730
0.65	0.001	0.002	0.003	0.004	0.006	0.008	0.010	0.012	0.015	0.018	0.272	0.357	0.455	0.556	0.757	0.986	1.519	1.861	3.039	4.681
0.70	0.001	0.002	0.002	0.003	0.004	0.006	0.009	0.011	0.014	0.014	0.222	0.282	0.330	0.475	0.598	0.870	1.269	1.620	2.383	3.926
0.75	0.001	0.001	0.002	0.002	0.004	0.005	0.006	0.009	0.011	0.012	0.158	0.191	0.263	0.359	0.519	0.738	0.888	1.420	1.882	3.589
0.80	0.001	0.001	0.001	0.002	0.003	0.004	0.006	0.007	0.009	0.008	0.140	0.194	0.214	0.295	0.427	0.479	0.809	1.197	1.538	2.438
0.85	0.001	0.001	0.001	0.002	0.002	0.003	0.004	0.005	0.008	0.007	0.115	0.150	0.177	0.243	0.314	0.431	0.644	0.932	1.331	2.060
0.90	0.000	0.001	0.001	0.001	0.002	0.002	0.003	0.005	0.005	0.005	0.087	0.111	0.141	0.184	0.256	0.345	0.479	0.638	1.141	1.421
0.95	0.000	0.000	0.001	0.001	0.001	0.002	0.002	0.003	0.004	0.003	0.066	0.080	0.109	0.135	0.177	0.258	0.363	0.531	0.799	1.209
1.00	0.000	0.000	0.000	0.001	0.001	0.001	0.002	0.002	0.003	0.003	0.048	0.066	0.081	0.092	0.140	0.174	0.261	0.354	0.586	0.965

Quadre A9.9. Variància de l'estimador de β per MQOFR en el model $Y_t = \alpha + \beta X_t + u_t$.

Models (A9.1), (A9.2) i (A9.3) amb β=*1*, ϕ=*0* i ϕ^*=*0*. *T=150*; δ=*0.1*.

d_X	d_U=0	0.05	0.10	0.15	0.20	0.25	0.30	0.35	0.40	0.45	0.55	0.60	0.65	0.70	0.75	0.80	0.85	0.90	0.95	1.00
0.00	0.008	0.008	0.007	0.007	0.006	0.006	0.005	0.004	0.004	0.004	0.006	0.006	0.006	0.007	0.007	0.009	0.010	0.011	0.012	0.019
0.05	0.008	0.007	0.007	0.007	0.006	0.006	0.005	0.005	0.004	0.004	0.006	0.007	0.007	0.008	0.008	0.009	0.011	0.013	0.015	0.021
0.10	0.007	0.008	0.008	0.007	0.007	0.006	0.006	0.005	0.005	0.005	0.007	0.008	0.008	0.009	0.010	0.010	0.012	0.013	0.016	0.021
0.15	0.008	0.008	0.008	0.008	0.007	0.007	0.006	0.005	0.004	0.005	0.007	0.008	0.009	0.009	0.010	0.012	0.014	0.016	0.018	0.025
0.20	0.009	0.009	0.008	0.008	0.008	0.007	0.006	0.006	0.005	0.006	0.008	0.008	0.009	0.011	0.011	0.014	0.015	0.018	0.022	0.030
0.25	0.010	0.010	0.010	0.009	0.009	0.008	0.007	0.007	0.006	0.008	0.009	0.010	0.011	0.012	0.013	0.015	0.019	0.022	0.029	0.042
0.30	0.011	0.010	0.011	0.010	0.010	0.010	0.009	0.008	0.008	0.012	0.011	0.012	0.013	0.015	0.017	0.020	0.025	0.030	0.042	0.057
0.35	0.013	0.011	0.013	0.012	0.011	0.012	0.010	0.011	0.013	0.026	0.014	0.016	0.017	0.021	0.024	0.031	0.041	0.055	0.069	0.108
0.40	0.016	0.016	0.015	0.014	0.015	0.015	0.014	0.017	0.028	0.066	0.021	0.024	0.028	0.031	0.039	0.052	0.080	0.102	0.139	0.221
0.45	0.020	0.019	0.020	0.019	0.020	0.019	0.024	0.031	0.062	0.187	0.030	0.036	0.045	0.056	0.074	0.094	0.136	0.206	0.289	0.448
0.55	0.010	0.010	0.010	0.009	0.010	0.010	0.009	0.009	0.009	0.014	0.012	0.013	0.017	0.019	0.025	0.028	0.033	0.043	0.060	0.085
0.60	0.010	0.009	0.010	0.010	0.010	0.009	0.009	0.009	0.010	0.015	0.012	0.015	0.016	0.020	0.024	0.028	0.038	0.057	0.073	0.097
0.65	0.009	0.009	0.009	0.009	0.009	0.009	0.009	0.009	0.009	0.016	0.011	0.014	0.016	0.019	0.026	0.028	0.039	0.053	0.082	0.111
0.70	0.009	0.008	0.008	0.008	0.009	0.008	0.008	0.009	0.012	0.016	0.012	0.015	0.019	0.020	0.025	0.033	0.041	0.061	0.086	0.119
0.75	0.008	0.008	0.009	0.008	0.008	0.008	0.008	0.009	0.011	0.018	0.013	0.015	0.017	0.020	0.029	0.032	0.049	0.064	0.088	0.128
0.80	0.007	0.007	0.008	0.008	0.008	0.008	0.008	0.009	0.011	0.021	0.013	0.013	0.020	0.022	0.029	0.038	0.049	0.069	0.100	0.151
0.85	0.007	0.006	0.007	0.007	0.007	0.007	0.007	0.009	0.012	0.020	0.013	0.014	0.019	0.023	0.028	0.039	0.054	0.076	0.112	0.159
0.90	0.006	0.006	0.006	0.006	0.006	0.006	0.007	0.008	0.013	0.021	0.012	0.015	0.018	0.023	0.031	0.042	0.055	0.080	0.105	0.161
0.95	0.005	0.006	0.006	0.005	0.006	0.006	0.007	0.008	0.012	0.023	0.011	0.015	0.018	0.022	0.028	0.039	0.053	0.086	0.113	0.178
1.00	0.005	0.005	0.006	0.006	0.006	0.006	0.006	0.008	0.012	0.024	0.011	0.013	0.017	0.021	0.029	0.040	0.055	0.082	0.114	0.185

Quadre A9.10. Variància de l'estimador de β per MQOFR en el model $Y_t = \alpha + \beta X_t + u_t$.

Models (A9.1), (A9.2) i (A9.3) amb β=*1*, ϕ=*0* i ϕ*=*0*. *T*=*150*; δ=*0.2*.

d_X	d_U=0	0.05	0.10	0.15	0.20	0.25	0.30	0.35	0.40	0.45	0.55	0.60	0.65	0.70	0.75	0.80	0.85	0.90	0.95	1.00
0.00	0.009	0.008	0.007	0.007	0.007	0.006	0.005	0.005	0.004	0.004	0.005	0.005	0.005	0.005	0.006	0.006	0.006	0.007	0.009	0.011
0.05	0.009	0.008	0.008	0.007	0.007	0.006	0.006	0.005	0.004	0.004	0.006	0.006	0.005	0.006	0.007	0.006	0.008	0.008	0.009	0.012
0.10	0.009	0.009	0.009	0.008	0.007	0.007	0.006	0.005	0.005	0.004	0.006	0.006	0.006	0.006	0.007	0.007	0.008	0.009	0.010	0.013
0.15	0.010	0.008	0.009	0.008	0.008	0.007	0.006	0.005	0.004	0.005	0.006	0.006	0.007	0.007	0.007	0.008	0.008	0.011	0.011	0.014
0.20	0.011	0.010	0.010	0.009	0.009	0.007	0.007	0.006	0.005	0.005	0.007	0.007	0.007	0.008	0.008	0.009	0.009	0.011	0.012	0.016
0.25	0.012	0.012	0.011	0.011	0.011	0.008	0.008	0.007	0.006	0.008	0.007	0.008	0.009	0.008	0.011	0.010	0.012	0.014	0.016	0.022
0.30	0.013	0.013	0.013	0.010	0.010	0.010	0.009	0.008	0.008	0.012	0.009	0.009	0.010	0.010	0.012	0.014	0.015	0.018	0.024	0.033
0.35	0.016	0.015	0.016	0.015	0.013	0.011	0.011	0.010	0.013	0.021	0.011	0.013	0.013	0.015	0.018	0.020	0.024	0.035	0.046	0.065
0.40	0.019	0.018	0.018	0.019	0.017	0.016	0.016	0.017	0.028	0.064	0.017	0.019	0.020	0.027	0.028	0.035	0.047	0.063	0.098	0.155
0.45	0.026	0.024	0.027	0.023	0.021	0.020	0.027	0.031	0.070	0.184	0.025	0.028	0.036	0.045	0.058	0.082	0.101	0.150	0.205	0.341
0.55	0.014	0.012	0.014	0.013	0.011	0.011	0.010	0.008	0.009	0.013	0.010	0.012	0.012	0.013	0.015	0.017	0.022	0.027	0.037	0.043
0.60	0.014	0.013	0.013	0.012	0.012	0.010	0.010	0.010	0.010	0.017	0.011	0.011	0.012	0.014	0.017	0.018	0.020	0.029	0.043	0.060
0.65	0.013	0.013	0.013	0.013	0.012	0.010	0.010	0.009	0.011	0.017	0.011	0.012	0.013	0.014	0.015	0.019	0.026	0.035	0.048	0.062
0.70	0.013	0.013	0.012	0.012	0.012	0.010	0.010	0.010	0.011	0.020	0.011	0.012	0.013	0.015	0.019	0.022	0.027	0.041	0.051	0.084
0.75	0.012	0.012	0.012	0.011	0.011	0.010	0.010	0.011	0.014	0.027	0.011	0.013	0.015	0.017	0.019	0.024	0.033	0.045	0.063	0.096
0.80	0.012	0.012	0.011	0.011	0.011	0.010	0.010	0.011	0.016	0.026	0.011	0.013	0.014	0.020	0.021	0.027	0.036	0.048	0.076	0.115
0.85	0.012	0.011	0.010	0.010	0.011	0.010	0.010	0.010	0.017	0.032	0.012	0.012	0.015	0.017	0.023	0.032	0.044	0.064	0.089	0.115
0.90	0.011	0.010	0.011	0.010	0.010	0.010	0.010	0.012	0.018	0.038	0.012	0.014	0.016	0.020	0.024	0.034	0.047	0.068	0.097	0.141
0.95	0.009	0.010	0.010	0.010	0.010	0.009	0.009	0.010	0.018	0.043	0.011	0.013	0.017	0.021	0.030	0.036	0.051	0.069	0.115	0.162
1.00	0.009	0.009	0.008	0.008	0.009	0.008	0.009	0.012	0.019	0.044	0.011	0.013	0.017	0.021	0.030	0.038	0.053	0.078	0.116	0.190

Quadre A9.11. Variància de l'estimador de β per MQO en el model $Y_t = \alpha + \beta X_t + u_t$.

Models (A9.1), (A9.2) i (A9.3) amb β=*1*, ϕ=*0* i ϕ*=*0*. *T*=*200*.

d_X	d_U=0	0.05	0.10	0.15	0.20	0.25	0.30	0.35	0.40	0.45	0.55	0.60	0.65	0.70	0.75	0.80	0.85	0.90	0.95	1.00
0.00	0.005	0.005	0.006	0.005	0.005	0.005	0.005	0.005	0.005	0.006	0.026	0.038	0.042	0.055	0.078	0.112	0.153	0.226	0.328	0.526
0.05	0.005	0.005	0.005	0.005	0.005	0.006	0.006	0.006	0.007	0.006	0.041	0.054	0.061	0.096	0.103	0.183	0.216	0.392	0.495	0.722
0.10	0.005	0.005	0.005	0.005	0.006	0.006	0.007	0.007	0.007	0.008	0.062	0.070	0.112	0.132	0.145	0.249	0.325	0.526	0.719	1.149
0.15	0.005	0.005	0.006	0.006	0.006	0.007	0.007	0.010	0.011	0.013	0.097	0.115	0.151	0.190	0.263	0.343	0.526	0.732	1.176	1.853
0.20	0.005	0.005	0.006	0.006	0.007	0.008	0.009	0.011	0.014	0.017	0.127	0.164	0.212	0.308	0.443	0.536	0.885	1.258	1.664	2.987
0.25	0.005	0.006	0.007	0.007	0.008	0.009	0.012	0.017	0.023	0.028	0.196	0.258	0.335	0.399	0.606	0.659	1.080	1.543	2.420	3.646
0.30	0.005	0.006	0.007	0.008	0.011	0.013	0.016	0.023	0.032	0.047	0.300	0.343	0.482	0.611	0.871	1.165	1.556	2.286	3.178	5.582
0.35	0.006	0.006	0.006	0.009	0.011	0.016	0.021	0.034	0.051	0.069	0.405	0.496	0.585	0.777	0.968	1.427	1.924	2.997	4.925	6.528
0.40	0.006	0.007	0.009	0.011	0.014	0.021	0.030	0.046	0.069	0.111	0.534	0.622	0.818	1.100	1.356	1.824	2.683	3.655	5.901	8.131
0.45	0.007	0.009	0.012	0.013	0.019	0.030	0.044	0.075	0.132	0.203	0.642	0.777	1.060	1.295	1.677	2.395	3.560	4.914	6.945	11.665
0.55	0.002	0.002	0.003	0.004	0.006	0.009	0.012	0.017	0.021	0.021	0.386	0.524	0.622	0.829	1.114	1.662	2.441	3.203	4.737	8.050
0.60	0.001	0.002	0.002	0.003	0.005	0.007	0.010	0.014	0.018	0.017	0.341	0.440	0.515	0.662	0.880	1.296	1.853	2.889	4.199	6.801
0.65	0.001	0.002	0.002	0.003	0.004	0.006	0.008	0.010	0.015	0.015	0.275	0.315	0.431	0.540	0.837	1.026	1.492	2.057	3.448	5.739
0.70	0.001	0.001	0.002	0.002	0.003	0.005	0.007	0.009	0.011	0.012	0.200	0.254	0.351	0.490	0.603	0.859	1.270	1.853	2.728	4.366
0.75	0.001	0.001	0.001	0.002	0.003	0.004	0.005	0.007	0.008	0.009	0.160	0.198	0.277	0.351	0.461	0.700	0.944	1.596	2.539	3.678
0.80	0.001	0.001	0.001	0.001	0.002	0.003	0.004	0.006	0.006	0.007	0.129	0.156	0.192	0.256	0.372	0.561	0.797	1.168	1.911	3.004
0.85	0.000	0.000	0.001	0.001	0.001	0.002	0.003	0.004	0.005	0.004	0.099	0.121	0.156	0.227	0.325	0.380	0.551	0.894	1.382	2.192
0.90	0.000	0.000	0.001	0.001	0.001	0.002	0.002	0.003	0.003	0.004	0.071	0.086	0.116	0.159	0.225	0.324	0.414	0.635	1.094	1.789
0.95	0.000	0.000	0.000	0.001	0.001	0.001	0.001	0.002	0.003	0.003	0.053	0.071	0.089	0.124	0.172	0.248	0.339	0.474	0.780	1.237
1.00	0.000	0.000	0.000	0.000	0.001	0.001	0.001	0.002	0.002	0.002	0.036	0.048	0.066	0.093	0.115	0.174	0.240	0.364	0.514	0.942

Quadre A9.12. Variància de l'estimador de β per MQOFR en el model $Y_t = \alpha + \beta X_t + u_t$.

Models (A9.1), (A9.2) i (A9.3) amb β=*1*, ϕ=*0* i ϕ*=*0*. *T=200;* δ=*0.1*.

d_X	d_U=0	0.05	0.10	0.15	0.20	0.25	0.30	0.35	0.40	0.45	0.55	0.60	0.65	0.70	0.75	0.80	0.85	0.90	0.95	1.00
0.00	0.005	0.006	0.006	0.004	0.005	0.004	0.004	0.003	0.003	0.003	0.004	0.004	0.005	0.005	0.006	0.006	0.008	0.007	0.011	0.013
0.05	0.006	0.006	0.006	0.006	0.005	0.004	0.004	0.004	0.003	0.003	0.005	0.005	0.005	0.006	0.006	0.007	0.007	0.009	0.013	0.014
0.10	0.006	0.006	0.006	0.006	0.005	0.005	0.004	0.004	0.003	0.003	0.005	0.006	0.006	0.005	0.007	0.008	0.009	0.010	0.012	0.019
0.15	0.006	0.006	0.006	0.006	0.005	0.005	0.005	0.004	0.004	0.004	0.005	0.006	0.006	0.007	0.007	0.009	0.010	0.012	0.014	0.022
0.20	0.007	0.007	0.006	0.006	0.006	0.006	0.005	0.005	0.004	0.004	0.006	0.007	0.007	0.008	0.008	0.009	0.011	0.013	0.017	0.027
0.25	0.007	0.008	0.007	0.007	0.006	0.005	0.006	0.005	0.005	0.006	0.007	0.008	0.008	0.009	0.010	0.013	0.016	0.018	0.021	0.029
0.30	0.007	0.008	0.008	0.008	0.007	0.007	0.006	0.006	0.006	0.009	0.009	0.008	0.009	0.011	0.012	0.015	0.019	0.025	0.030	0.043
0.35	0.009	0.009	0.009	0.009	0.009	0.009	0.008	0.008	0.011	0.020	0.010	0.011	0.013	0.015	0.019	0.025	0.032	0.041	0.059	0.089
0.40	0.012	0.011	0.012	0.011	0.011	0.011	0.011	0.014	0.022	0.056	0.015	0.017	0.021	0.026	0.032	0.048	0.059	0.087	0.117	0.179
0.45	0.015	0.015	0.016	0.015	0.017	0.016	0.017	0.024	0.058	0.172	0.024	0.031	0.036	0.045	0.059	0.078	0.124	0.190	0.264	0.430
0.55	0.007	0.007	0.008	0.008	0.006	0.007	0.007	0.006	0.007	0.010	0.010	0.011	0.012	0.013	0.018	0.023	0.027	0.041	0.051	0.075
0.60	0.006	0.006	0.007	0.008	0.007	0.006	0.007	0.007	0.007	0.012	0.010	0.010	0.014	0.014	0.018	0.023	0.029	0.039	0.060	0.081
0.65	0.007	0.006	0.007	0.007	0.007	0.006	0.007	0.006	0.008	0.011	0.010	0.011	0.013	0.015	0.020	0.024	0.032	0.049	0.063	0.099
0.70	0.007	0.007	0.006	0.006	0.006	0.007	0.006	0.006	0.008	0.014	0.010	0.011	0.013	0.016	0.020	0.024	0.033	0.058	0.075	0.105
0.75	0.006	0.006	0.006	0.006	0.006	0.006	0.006	0.007	0.009	0.014	0.011	0.012	0.014	0.017	0.022	0.030	0.037	0.063	0.076	0.117
0.80	0.005	0.005	0.006	0.005	0.006	0.006	0.006	0.007	0.010	0.017	0.010	0.012	0.014	0.018	0.023	0.034	0.044	0.067	0.090	0.155
0.85	0.005	0.005	0.005	0.005	0.005	0.006	0.006	0.007	0.009	0.020	0.009	0.012	0.014	0.019	0.023	0.035	0.047	0.072	0.103	0.154
0.90	0.004	0.004	0.005	0.005	0.005	0.005	0.005	0.006	0.010	0.021	0.009	0.012	0.015	0.018	0.021	0.034	0.049	0.072	0.120	0.191
0.95	0.004	0.004	0.004	0.005	0.004	0.005	0.005	0.006	0.010	0.020	0.009	0.011	0.014	0.019	0.026	0.034	0.048	0.071	0.116	0.186
1.00	0.003	0.003	0.004	0.004	0.004	0.004	0.005	0.005	0.010	0.021	0.008	0.010	0.014	0.016	0.025	0.034	0.054	0.074	0.122	0.202

Quadre A9.13. Variància de l'estimador de β per MQOFR en el model $Y_t = \alpha + \beta X_t + u_t$.

Models (A9.1), (A9.2) i (A9.3) amb $\beta=1$, $\phi=0$ i $\phi^*=0$. $T=200$; $\delta=0.2$.

d_X	d_U=0	0.05	0.10	0.15	0.20	0.25	0.30	0.35	0.40	0.45	0.55	0.60	0.65	0.70	0.75	0.80	0.85	0.90	0.95	1.00
0.00	0.006	0.006	0.006	0.005	0.005	0.004	0.004	0.003	0.003	0.003	0.004	0.004	0.004	0.004	0.004	0.005	0.005	0.006	0.007	0.008
0.05	0.006	0.006	0.006	0.006	0.006	0.005	0.004	0.004	0.003	0.003	0.004	0.004	0.004	0.004	0.005	0.005	0.005	0.006	0.007	0.009
0.10	0.007	0.007	0.006	0.006	0.006	0.005	0.004	0.004	0.003	0.003	0.004	0.004	0.005	0.005	0.005	0.005	0.005	0.007	0.008	0.009
0.15	0.007	0.007	0.007	0.006	0.006	0.005	0.005	0.004	0.003	0.003	0.004	0.004	0.005	0.005	0.006	0.005	0.007	0.007	0.008	0.010
0.20	0.008	0.008	0.007	0.007	0.007	0.006	0.005	0.004	0.004	0.004	0.005	0.005	0.005	0.006	0.006	0.006	0.007	0.008	0.010	0.014
0.25	0.009	0.009	0.008	0.008	0.007	0.007	0.006	0.005	0.005	0.005	0.006	0.006	0.006	0.006	0.007	0.007	0.008	0.010	0.012	0.016
0.30	0.010	0.010	0.009	0.009	0.008	0.007	0.007	0.006	0.006	0.008	0.007	0.007	0.007	0.008	0.008	0.010	0.012	0.014	0.017	0.026
0.35	0.012	0.011	0.011	0.010	0.011	0.010	0.009	0.009	0.011	0.021	0.009	0.009	0.010	0.011	0.013	0.016	0.019	0.026	0.033	0.054
0.40	0.015	0.014	0.014	0.014	0.013	0.012	0.011	0.013	0.021	0.059	0.011	0.013	0.015	0.018	0.024	0.030	0.037	0.063	0.089	0.141
0.45	0.020	0.021	0.018	0.020	0.019	0.017	0.020	0.025	0.059	0.179	0:020	0.024	0.029	0.036	0.048	0.061	0.092	0.141	0.215	0.340
0.55	0.011	0.010	0.009	0.011	0.009	0.008	0.008	0.007	0.007	0.011	0.008	0.009	0.009	0.010	0.010	0.013	0.014	0.021	0.029	0.039
0.60	0.010	0.010	0.010	0.010	0.009	0.009	0.008	0.007	0.007	0.012	0.008	0.008	0.010	0.010	0.012	0.013	0.016	0.021	0.031	0.049
0.65	0.011	0.009	0.010	0.010	0.009	0.007	0.008	0.007	0.008	0.014	0.008	0.009	0.010	0.011	0.013	0.016	0.019	0.029	0.028	0.054
0.70	0.010	0.010	0.010	0.009	0.008	0.008	0.008	0.008	0.009	0.017	0.009	0.009	0.010	0.012	0.015	0.017	0.023	0.031	0.040	0.059
0.75	0.009	0.010	0.010	0.009	0.009	0.007	0.007	0.008	0.010	0.020	0.008	0.010	0.010	0.013	0.015	0.022	0.027	0.039	0.058	0.085
0.80	0.009	0.010	0.009	0.009	0.008	0.008	0.007	0.008	0.012	0.025	0.009	0.009	0.012	0.014	0.019	0.022	0.030	0.048	0.070	0.112
0.85	0.008	0.009	0.008	0.008	0.008	0.007	0.007	0.008	0.013	0.028	0.008	0.010	0.011	0.015	0.019	0.026	0.034	0.050	0.075	0.121
0.90	0.008	0.007	0.008	0.008	0.008	0.007	0.007	0.009	0.014	0.035	0.009	0.010	0.012	0.015	0.019	0.027	0.043	0.062	0.096	0.151
0.95	0.008	0.007	0.008	0.007	0.007	0.007	0.007	0.009	0.016	0.041	0.010	0.010	0.013	0.017	0.023	0.033	0.044	0.063	0.097	0.149
1.00	0.007	0.006	0.006	0.007	0.006	0.006	0.007	0.009	0.016	0.041	0.009	0.011	0.013	0.017	0.023	0.035	0.044	0.064	0.104	0.176

Quadre A9.14. Variància de l'estimador de β per MQO en el model $Y_t = \alpha + \beta X_t + u_t$.

Models (A9.1), (A9.2) i (A9.3) amb $\beta = 1$, $\phi = 0.5$ i $\phi^* = 0$. $T = 50$.

d_X	d_U=0	0.05	0.10	0.15	0.20	0.25	0.30	0.35	0.40	0.45	0.55	0.60	0.65	0.70	0.75	0.80	0.85	0.90	0.95	1.00
0.00	0.016	0.019	0.017	0.019	0.020	0.023	0.026	0.029	0.027	0.028	0.160	0.162	0.206	0.251	0.277	0.405	0.425	0.638	0.702	1.089
0.05	0.015	0.016	0.018	0.019	0.022	0.024	0.027	0.028	0.030	0.029	0.170	0.199	0.236	0.268	0.367	0.441	0.571	0.787	0.930	1.339
0.10	0.015	0.016	0.017	0.019	0.023	0.023	0.028	0.030	0.033	0.031	0.190	0.216	0.254	0.315	0.345	0.487	0.520	0.800	1.051	1.274
0.15	0.014	0.015	0.016	0.019	0.020	0.025	0.026	0.031	0.036	0.035	0.188	0.238	0.296	0.324	0.441	0.544	0.651	0.845	1.091	1.501
0.20	0.012	0.014	0.015	0.018	0.021	0.025	0.029	0.033	0.040	0.040	0.244	0.260	0.321	0.365	0.448	0.575	0.743	1.035	1.217	1.612
0.25	0.012	0.013	0.016	0.018	0.021	0.026	0.034	0.035	0.041	0.042	0.253	0.326	0.344	0.419	0.492	0.616	0.768	1.013	1.140	1.751
0.30	0.012	0.013	0.015	0.018	0.024	0.028	0.032	0.039	0.049	0.049	0.266	0.316	0.371	0.442	0.554	0.690	0.814	1.020	1.267	1.862
0.35	0.011	0.014	0.014	0.018	0.023	0.029	0.035	0.046	0.057	0.057	0.314	0.379	0.387	0.463	0.569	0.721	1.027	1.205	1.714	2.097
0.40	0.012	0.012	0.016	0.022	0.027	0.034	0.044	0.055	0.063	0.083	0.323	0.399	0.471	0.472	0.634	0.795	0.983	1.349	1.544	2.208
0.45	0.014	0.018	0.020	0.024	0.035	0.044	0.058	0.083	0.119	0.135	0.411	0.527	0.605	0.701	0.837	1.046	1.257	1.580	1.854	2.747
0.55	0.003	0.004	0.006	0.008	0.008	0.011	0.013	0.016	0.018	0.015	0.174	0.194	0.249	0.277	0.361	0.412	0.584	0.767	0.899	1.375
0.60	0.003	0.004	0.005	0.006	0.007	0.009	0.010	0.016	0.016	0.013	0.142	0.175	0.211	0.230	0.301	0.371	0.451	0.630	0.815	1.058
0.65	0.003	0.003	0.004	0.005	0.006	0.009	0.010	0.012	0.012	0.012	0.124	0.153	0.188	0.205	0.268	0.324	0.388	0.528	0.700	0.952
0.70	0.002	0.003	0.003	0.005	0.005	0.007	0.009	0.010	0.010	0.009	0.116	0.133	0.160	0.157	0.202	0.280	0.332	0.480	0.646	0.830
0.75	0.002	0.002	0.003	0.004	0.004	0.006	0.007	0.009	0.009	0.008	0.088	0.096	0.134	0.146	0.190	0.214	0.307	0.377	0.509	0.690
0.80	0.001	0.002	0.003	0.003	0.004	0.004	0.006	0.007	0.008	0.007	0.077	0.086	0.107	0.113	0.156	0.177	0.253	0.351	0.426	0.623
0.85	0.001	0.002	0.002	0.003	0.003	0.004	0.005	0.006	0.006	0.006	0.062	0.067	0.076	0.112	0.126	0.170	0.193	0.282	0.358	0.491
0.90	0.001	0.001	0.002	0.002	0.003	0.003	0.004	0.005	0.005	0.004	0.056	0.060	0.066	0.076	0.107	0.130	0.160	0.253	0.276	0.391
0.95	0.001	0.001	0.001	0.002	0.002	0.003	0.003	0.004	0.004	0.003	0.037	0.052	0.057	0.077	0.086	0.105	0.156	0.189	0.247	0.349
1.00	0.001	0.001	0.001	0.002	0.002	0.002	0.003	0.003	0.003	0.003	0.035	0.042	0.049	0.063	0.069	0.091	0.126	0.156	0.190	0.298

Quadre A9.15. Variància de l'estimador de β per MQOFR en el model $Y_t = \alpha + \beta X_t + u_t$.

Models (A9.1), (A9.2) i (A9.3) amb β=*1*, ϕ=*0.5* i ϕ*=*0. T=50; δ=0.1.*

d_X	d_U=0	0.05	0.10	0.15	0.20	0.25	0.30	0.35	0.40	0.45	0.55	0.60	0.65	0.70	0.75	0.80	0.85	0.90	0.95	1.00
0.00	0.021	0.023	0.025	0.024	0.021	0.020	0.020	0.019	0.017	0.015	0.026	0.026	0.028	0.035	0.040	0.044	0.054	0.060	0.072	0.096
0.05	0.023	0.024	0.023	0.022	0.023	0.021	0.020	0.018	0.016	0.017	0.026	0.029	0.032	0.037	0.041	0.047	0.060	0.067	0.078	0.108
0.10	0.021	0.023	0.023	0.021	0.022	0.021	0.021	0.017	0.017	0.019	0.025	0.034	0.036	0.038	0.047	0.052	0.061	0.073	0.085	0.128
0.15	0.021	0.023	0.023	0.021	0.023	0.020	0.020	0.019	0.018	0.019	0.029	0.032	0.035	0.042	0.046	0.060	0.065	0.080	0.091	0.111
0.20	0.024	0.024	0.023	0.024	0.025	0.023	0.022	0.021	0.021	0.019	0.029	0.032	0.035	0.047	0.054	0.058	0.077	0.085	0.110	0.144
0.25	0.024	0.025	0.025	0.027	0.028	0.024	0.022	0.021	0.020	0.022	0.037	0.037	0.046	0.051	0.056	0.067	0.074	0.108	0.126	0.147
0.30	0.028	0.027	0.029	0.029	0.026	0.027	0.026	0.026	0.024	0.024	0.038	0.045	0.053	0.056	0.068	0.068	0.093	0.107	0.166	0.192
0.35	0.032	0.028	0.031	0.030	0.031	0.029	0.030	0.027	0.034	0.040	0.042	0.049	0.059	0.069	0.081	0.099	0.115	0.160	0.206	0.233
0.40	0.034	0.033	0.036	0.038	0.039	0.040	0.041	0.037	0.045	0.067	0.057	0.070	0.079	0.100	0.122	0.131	0.192	0.212	0.269	0.402
0.45	0.044	0.047	0.046	0.049	0.043	0.054	0.052	0.064	0.093	0.142	0.086	0.115	0.121	0.146	0.190	0.214	0.300	0.331	0.496	0.699
0.55	0.019	0.021	0.018	0.018	0.020	0.019	0.022	0.022	0.025	0.035	0.033	0.041	0.046	0.052	0.065	0.083	0.099	0.124	0.159	0.196
0.60	0.017	0.018	0.018	0.018	0.018	0.021	0.021	0.019	0.024	0.033	0.032	0.035	0.042	0.053	0.059	0.080	0.086	0.128	0.171	0.202
0.65	0.015	0.015	0.016	0.018	0.017	0.017	0.018	0.021	0.023	0.034	0.029	0.035	0.042	0.050	0.056	0.074	0.088	0.114	0.141	0.212
0.70	0.013	0.014	0.015	0.015	0.015	0.017	0.015	0.019	0.024	0.030	0.030	0.031	0.036	0.040	0.055	0.070	0.090	0.102	0.141	0.173
0.75	0.012	0.013	0.014	0.015	0.015	0.014	0.015	0.016	0.021	0.027	0.025	0.028	0.036	0.044	0.050	0.065	0.083	0.101	0.128	0.165
0.80	0.011	0.012	0.011	0.013	0.014	0.013	0.013	0.016	0.020	0.025	0.024	0.028	0.032	0.037	0.049	0.055	0.075	0.112	0.133	0.170
0.85	0.010	0.010	0.011	0.011	0.011	0.012	0.013	0.015	0.017	0.028	0.021	0.023	0.032	0.036	0.042	0.057	0.068	0.095	0.108	0.138
0.90	0.009	0.009	0.010	0.010	0.010	0.010	0.011	0.013	0.016	0.022	0.017	0.022	0.030	0.033	0.040	0.051	0.064	0.083	0.113	0.152
0.95	0.007	0.009	0.009	0.009	0.009	0.009	0.009	0.011	0.014	0.022	0.018	0.020	0.025	0.027	0.038	0.046	0.061	0.074	0.100	0.120
1.00	0.007	0.007	0.008	0.008	0.009	0.009	0.008	0.010	0.013	0.019	0.016	0.018	0.022	0.027	0.031	0.040	0.050	0.073	0.094	0.137

Quadre A9.16. Variància de l'estimador de β per MQOFR en el model $Y_t = \alpha + \beta X_t + u_t$.

Models (A9.1), (A9.2) i (A9.3) amb β=*1*, ϕ=*0.5* i ϕ^*=*0*. *T=50*; δ=*0.2*.

d_X	d_U=0	0.05	0.10	0.15	0.20	0.25	0.30	0.35	0.40	0.45	0.55	0.60	0.65	0.70	0.75	0.80	0.85	0.90	0.95	1.00
0.00	0.032	0.030	0.029	0.027	0.028	0.025	0.023	0.022	0.019	0.019	0.023	0.025	0.027	0.030	0.034	0.035	0.040	0.051	0.057	0.062
0.05	0.034	0.033	0.031	0.029	0.028	0.027	0.022	0.021	0.020	0.022	0.026	0.028	0.028	0.030	0.033	0.040	0.042	0.046	0.060	0.074
0.10	0.033	0.031	0.033	0.031	0.029	0.026	0.027	0.021	0.020	0.021	0.028	0.031	0.030	0.033	0.038	0.039	0.045	0.050	0.060	0.081
0.15	0.032	0.039	0.033	0.032	0.036	0.028	0.025	0.022	0.022	0.022	0.026	0.029	0.031	0.033	0.040	0.044	0.053	0.058	0.064	0.088
0.20	0.034	0.035	0.035	0.033	0.032	0.030	0.025	0.023	0.025	0.029	0.030	0.036	0.034	0.040	0.044	0.048	0.057	0.068	0.073	0.095
0.25	0.043	0.038	0.036	0.035	0.037	0.032	0.029	0.027	0.026	0.029	0.036	0.039	0.040	0.044	0.048	0.049	0.063	0.079	0.091	0.104
0.30	0.040	0.042	0.041	0.039	0.039	0.036	0.033	0.032	0.030	0.040	0.038	0.044	0.044	0.053	0.061	0.062	0.080	0.099	0.106	0.132
0.35	0.048	0.050	0.045	0.046	0.044	0.041	0.038	0.038	0.039	0.047	0.045	0.054	0.060	0.062	0.071	0.084	0.106	0.135	0.148	0.205
0.40	0.057	0.066	0.060	0.058	0.055	0.056	0.054	0.056	0.064	0.097	0.061	0.066	0.086	0.089	0.105	0.122	0.134	0.207	0.265	0.375
0.45	0.071	0.078	0.078	0.078	0.075	0.068	0.074	0.079	0.121	0.217	0.106	0.111	0.122	0.148	0.184	0.240	0.271	0.364	0.505	0.646
0.55	0.036	0.038	0.035	0.034	0.038	0.031	0.032	0.034	0.042	0.060	0.038	0.045	0.047	0.057	0.066	0.080	0.089	0.125	0.179	0.193
0.60	0.036	0.033	0.036	0.033	0.034	0.030	0.032	0.030	0.040	0.059	0.037	0.042	0.048	0.057	0.061	0.078	0.093	0.125	0.165	0.230
0.65	0.032	0.030	0.035	0.034	0.029	0.031	0.030	0.033	0.035	0.062	0.035	0.041	0.041	0.057	0.059	0.085	0.094	0.120	0.153	0.227
0.70	0.031	0.031	0.027	0.031	0.028	0.028	0.028	0.031	0.045	0.059	0.032	0.039	0.046	0.054	0.062	0.080	0.089	0.117	0.169	0.219
0.75	0.028	0.029	0.030	0.025	0.029	0.027	0.024	0.028	0.035	0.059	0.034	0.039	0.047	0.051	0.059	0.070	0.093	0.119	0.158	0.221
0.80	0.026	0.028	0.026	0.026	0.025	0.024	0.026	0.028	0.035	0.058	0.034	0.036	0.040	0.049	0.058	0.073	0.084	0.127	0.148	0.218
0.85	0.024	0.022	0.023	0.024	0.021	0.022	0.023	0.027	0.033	0.050	0.031	0.035	0.039	0.050	0.053	0.072	0.086	0.118	0.146	0.202
0.90	0.019	0.020	0.019	0.021	0.020	0.019	0.020	0.023	0.030	0.052	0.027	0.033	0.039	0.047	0.056	0.072	0.082	0.101	0.136	0.191
0.95	0.018	0.019	0.017	0.019	0.020	0.017	0.020	0.023	0.032	0.058	0.025	0.028	0.035	0.041	0.048	0.059	0.078	0.099	0.156	0.202
1.00	0.019	0.018	0.017	0.017	0.018	0.017	0.018	0.021	0.030	0.044	0.023	0.028	0.031	0.038	0.045	0.065	0.073	0.092	0.124	0.176

Quadre A9.17. Variància de l'estimador de β per MQO en el model $Y_t = \alpha + \beta X_t + u_t$.

Models (A9.1), (A9.2) i (A9.3) amb β=*1*, ϕ=*0.5* i ϕ^*=*0. T=100.*

d_X	d_U=0	0.05	0.10	0.15	0.20	0.25	0.30	0.35	0.40	0.45	0.55	0.60	0.65	0.70	0.75	0.80	0.85	0.90	0.95	1.00
0.00	0.008	0.009	0.009	0.009	0.011	0.011	0.012	0.014	0.015	0.016	0.089	0.100	0.141	0.176	0.241	0.263	0.417	0.493	0.765	1.108
0.05	0.008	0.008	0.009	0.009	0.011	0.011	0.014	0.014	0.015	0.016	0.113	0.143	0.172	0.220	0.272	0.377	0.468	0.632	0.923	1.448
0.10	0.007	0.007	0.009	0.009	0.011	0.012	0.016	0.015	0.019	0.016	0.120	0.175	0.201	0.252	0.337	0.424	0.607	0.765	1.153	1.815
0.15	0.006	0.007	0.008	0.009	0.011	0.013	0.016	0.020	0.022	0.019	0.157	0.206	0.261	0.285	0.400	0.506	0.807	0.977	1.347	1.886
0.20	0.006	0.006	0.007	0.010	0.011	0.014	0.016	0.020	0.022	0.023	0.191	0.221	0.242	0.325	0.435	0.613	0.792	0.995	1.634	2.188
0.25	0.005	0.007	0.008	0.009	0.011	0.014	0.016	0.021	0.026	0.031	0.228	0.254	0.310	0.383	0.495	0.673	0.915	1.115	1.824	2.397
0.30	0.004	0.006	0.007	0.009	0.011	0.014	0.020	0.025	0.033	0.031	0.251	0.310	0.325	0.451	0.561	0.713	0.953	1.425	1.982	2.726
0.35	0.005	0.006	0.008	0.009	0.013	0.017	0.022	0.029	0.039	0.045	0.284	0.317	0.393	0.436	0.572	0.812	0.999	1.585	2.113	3.133
0.40	0.005	0.006	0.008	0.010	0.013	0.019	0.027	0.033	0.051	0.054	0.292	0.356	0.424	0.525	0.664	0.918	1.210	1.662	2.175	3.172
0.45	0.006	0.008	0.010	0.012	0.018	0.025	0.033	0.050	0.080	0.115	0.379	0.448	0.561	0.708	0.884	1.181	1.524	1.890	2.466	4.283
0.55	0.001	0.002	0.002	0.003	0.004	0.005	0.008	0.009	0.011	0.010	0.141	0.190	0.221	0.270	0.358	0.451	0.613	0.855	1.256	1.875
0.60	0.001	0.001	0.002	0.002	0.003	0.004	0.006	0.008	0.010	0.010	0.118	0.144	0.176	0.215	0.281	0.417	0.507	0.706	1.031	1.481
0.65	0.001	0.001	0.001	0.002	0.003	0.004	0.005	0.006	0.008	0.006	0.102	0.116	0.149	0.192	0.229	0.309	0.428	0.638	0.882	1.336
0.70	0.001	0.001	0.001	0.002	0.002	0.003	0.004	0.005	0.006	0.005	0.089	0.093	0.118	0.147	0.196	0.239	0.356	0.538	0.701	1.019
0.75	0.001	0.001	0.001	0.001	0.002	0.002	0.004	0.004	0.005	0.004	0.065	0.074	0.091	0.123	0.156	0.202	0.270	0.402	0.613	0.864
0.80	0.000	0.001	0.001	0.001	0.001	0.002	0.002	0.003	0.004	0.003	0.052	0.067	0.071	0.097	0.116	0.163	0.232	0.318	0.432	0.664
0.85	0.000	0.000	0.001	0.001	0.001	0.001	0.002	0.003	0.003	0.003	0.039	0.049	0.058	0.078	0.094	0.138	0.175	0.242	0.360	0.591
0.90	0.000	0.000	0.000	0.001	0.001	0.001	0.002	0.002	0.002	0.002	0.033	0.038	0.042	0.055	0.069	0.099	0.135	0.174	0.265	0.387
0.95	0.000	0.000	0.000	0.000	0.001	0.001	0.001	0.001	0.002	0.002	0.023	0.029	0.041	0.049	0.060	0.086	0.114	0.158	0.233	0.309
1.00	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.001	0.001	0.001	0.001	0.001	0.019	0.024	0.028	0.035	0.049	0.060	0.089	0.115	0.170	0.235

Quadre A9.18. Variància de l'estimador de β per MQOFR en el model $Y_t = \alpha + \beta X_t + u_t$.

Models (A9.1), (A9.2) i (A9.3) amb β=*1*, ϕ=*0.5* i ϕ^*=*0*. *T=100*; δ=*0.1*.

d_X	d_U=0	0.05	0.10	0.15	0.20	0.25	0.30	0.35	0.40	0.45	0.55	0.60	0.65	0.70	0.75	0.80	0.85	0.90	0.95	1.00
0.00	0.011	0.011	0.011	0.011	0.011	0.009	0.009	0.009	0.008	0.007	0.012	0.014	0.015	0.016	0.022	0.023	0.028	0.034	0.038	0.061
0.05	0.011	0.011	0.010	0.011	0.011	0.010	0.009	0.009	0.008	0.007	0.013	0.015	0.017	0.018	0.021	0.025	0.027	0.038	0.039	0.058
0.10	0.011	0.010	0.011	0.011	0.010	0.010	0.010	0.009	0.008	0.009	0.013	0.015	0.017	0.021	0.024	0.028	0.032	0.036	0.050	0.065
0.15	0.011	0.011	0.011	0.011	0.013	0.011	0.011	0.009	0.008	0.009	0.015	0.015	0.017	0.021	0.024	0.029	0.035	0.040	0.055	0.066
0.20	0.011	0.010	0.011	0.011	0.010	0.012	0.010	0.010	0.010	0.009	0.015	0.016	0.020	0.021	0.024	0.029	0.038	0.043	0.059	0.075
0.25	0.010	0.012	0.012	0.013	0.012	0.012	0.011	0.011	0.011	0.011	0.016	0.019	0.022	0.024	0.029	0.036	0.043	0.053	0.070	0.088
0.30	0.012	0.013	0.013	0.013	0.013	0.013	0.013	0.012	0.012	0.014	0.020	0.022	0.025	0.030	0.033	0.042	0.053	0.067	0.089	0.129
0.35	0.014	0.014	0.015	0.015	0.015	0.015	0.014	0.015	0.015	0.021	0.022	0.027	0.029	0.036	0.046	0.060	0.070	0.093	0.138	0.168
0.40	0.016	0.017	0.018	0.018	0.020	0.018	0.018	0.021	0.024	0.046	0.032	0.037	0.048	0.054	0.066	0.093	0.124	0.160	0.216	0.313
0.45	0.021	0.022	0.023	0.022	0.026	0.027	0.026	0.035	0.060	0.107	0.046	0.054	0.071	0.089	0.117	0.159	0.193	0.286	0.404	0.590
0.55	0.009	0.009	0.010	0.010	0.010	0.010	0.010	0.012	0.014	0.020	0.017	0.022	0.025	0.028	0.036	0.044	0.058	0.083	0.122	0.146
0.60	0.009	0.009	0.009	0.010	0.010	0.010	0.010	0.011	0.013	0.019	0.015	0.018	0.023	0.029	0.036	0.049	0.066	0.070	0.110	0.156
0.65	0.007	0.008	0.008	0.008	0.008	0.009	0.009	0.010	0.012	0.019	0.015	0.018	0.022	0.025	0.031	0.043	0.059	0.075	0.103	0.151
0.70	0.006	0.007	0.008	0.008	0.007	0.008	0.008	0.010	0.011	0.019	0.015	0.019	0.021	0.025	0.034	0.042	0.052	0.080	0.111	0.156
0.75	0.006	0.006	0.005	0.007	0.007	0.007	0.008	0.008	0.011	0.020	0.014	0.016	0.020	0.022	0.035	0.043	0.052	0.074	0.099	0.133
0.80	0.005	0.005	0.006	0.006	0.007	0.006	0.007	0.008	0.010	0.018	0.012	0.015	0.017	0.020	0.029	0.037	0.048	0.060	0.097	0.147
0.85	0.004	0.004	0.005	0.005	0.006	0.006	0.006	0.008	0.010	0.015	0.012	0.013	0.018	0.021	0.025	0.037	0.047	0.070	0.097	0.137
0.90	0.004	0.004	0.004	0.004	0.005	0.005	0.005	0.006	0.010	0.016	0.010	0.012	0.015	0.020	0.030	0.033	0.046	0.065	0.089	0.127
0.95	0.003	0.004	0.004	0.004	0.004	0.004	0.004	0.006	0.008	0.014	0.009	0.010	0.015	0.018	0.022	0.030	0.045	0.061	0.082	0.118
1.00	0.003	0.003	0.003	0.004	0.004	0.004	0.004	0.005	0.008	0.013	0.008	0.009	0.012	0.016	0.020	0.026	0.036	0.055	0.071	0.108

Quadre A9.19. Variància de l'estimador de β per MQOFR en el model $Y_t = \alpha + \beta X_t + u_t$.

Models (A9.1), (A9.2) i (A9.3) amb β=*1*, ϕ=*0.5* i ϕ^*=*0*. *T=100;* δ=*0.2.*

d_X	d_U=0	0.05	0.10	0.15	0.20	0.25	0.30	0.35	0.40	0.45	0.55	0.60	0.65	0.70	0.75	0.80	0.85	0.90	0.95	1.00
0.00	0.015	0.015	0.012	0.015	0.014	0.013	0.011	0.010	0.008	0.008	0.010	0.011	0.013	0.013	0.017	0.016	0.019	0.019	0.025	0.036
0.05	0.017	0.015	0.015	0.014	0.014	0.012	0.012	0.010	0.009	0.010	0.012	0.013	0.013	0.014	0.015	0.016	0.018	0.021	0.027	0.035
0.10	0.017	0.015	0.016	0.015	0.014	0.012	0.012	0.011	0.010	0.010	0.014	0.013	0.015	0.016	0.017	0.019	0.021	0.024	0.031	0.035
0.15	0.018	0.016	0.016	0.017	0.014	0.014	0.014	0.010	0.010	0.013	0.014	0.014	0.014	0.015	0.018	0.021	0.022	0.027	0.032	0.049
0.20	0.017	0.017	0.016	0.017	0.015	0.014	0.014	0.012	0.010	0.012	0.015	0.016	0.016	0.017	0.020	0.019	0.027	0.030	0.038	0.051
0.25	0.019	0.021	0.018	0.018	0.017	0.015	0.014	0.012	0.011	0.015	0.016	0.016	0.018	0.021	0.021	0.027	0.032	0.034	0.044	0.059
0.30	0.023	0.021	0.021	0.021	0.019	0.018	0.016	0.014	0.012	0.017	0.018	0.022	0.020	0.024	0.025	0.030	0.035	0.049	0.057	0.070
0.35	0.023	0.024	0.023	0.025	0.021	0.023	0.021	0.018	0.021	0.030	0.020	0.024	0.028	0.030	0.033	0.044	0.053	0.065	0.098	0.113
0.40	0.029	0.030	0.031	0.028	0.028	0.028	0.027	0.028	0.033	0.063	0.029	0.035	0.038	0.044	0.057	0.073	0.091	0.128	0.180	0.239
0.45	0.039	0.037	0.042	0.040	0.040	0.039	0.037	0.050	0.071	0.166	0.049	0.061	0.071	0.082	0.101	0.139	0.183	0.277	0.370	0.530
0.55	0.019	0.019	0.018	0.018	0.019	0.017	0.017	0.018	0.021	0.038	0.020	0.021	0.024	0.031	0.035	0.038	0.051	0.065	0.104	0.141
0.60	0.018	0.018	0.018	0.019	0.016	0.017	0.016	0.017	0.021	0.044	0.020	0.021	0.023	0.029	0.031	0.038	0.055	0.074	0.100	0.150
0.65	0.016	0.017	0.016	0.017	0.015	0.016	0.016	0.015	0.022	0.040	0.018	0.021	0.024	0.029	0.035	0.040	0.061	0.079	0.111	0.134
0.70	0.015	0.016	0.017	0.015	0.015	0.016	0.015	0.016	0.022	0.037	0.018	0.020	0.025	0.031	0.036	0.041	0.059	0.072	0.108	0.160
0.75	0.016	0.014	0.014	0.015	0.013	0.014	0.014	0.016	0.023	0.040	0.018	0.019	0.021	0.029	0.034	0.047	0.054	0.083	0.110	0.172
0.80	0.012	0.013	0.013	0.014	0.013	0.013	0.012	0.013	0.023	0.045	0.017	0.021	0.023	0.027	0.034	0.042	0.058	0.086	0.118	0.157
0.85	0.012	0.013	0.012	0.012	0.011	0.011	0.012	0.014	0.022	0.043	0.016	0.019	0.021	0.025	0.037	0.043	0.060	0.078	0.118	0.158
0.90	0.011	0.010	0.010	0.011	0.010	0.010	0.011	0.014	0.021	0.043	0.016	0.015	0.020	0.026	0.032	0.041	0.052	0.079	0.109	0.163
0.95	0.009	0.009	0.009	0.009	0.010	0.009	0.011	0.013	0.019	0.041	0.013	0.016	0.018	0.024	0.028	0.041	0.056	0.073	0.115	0.158
1.00	0.009	0.008	0.008	0.009	0.008	0.009	0.008	0.011	0.016	0.037	0.011	0.015	0.018	0.023	0.026	0.034	0.048	0.071	0.093	0.163

Quadre A9.20. Variància de l'estimador de β per MQO en el model $Y_t = \alpha + \beta X_t + u_t$.

Models (A9.1), (A9.2) i (A9.3) amb β=*1*, ϕ=*0.5* i ϕ^*=*0*. *T*=*150*.

d_X	d_U=0	0.05	0.10	0.15	0.20	0.25	0.30	0.35	0.40	0.45	0.55	0.60	0.65	0.70	0.75	0.80	0.85	0.90	0.95	1.00
0.00	0.005	0.005	0.006	0.006	0.007	0.008	0.008	0.010	0.011	0.009	0.062	0.082	0.119	0.146	0.207	0.267	0.347	0.531	0.796	1.226
0.05	0.005	0.005	0.006	0.006	0.007	0.008	0.009	0.010	0.011	0.012	0.096	0.111	0.139	0.178	0.224	0.347	0.452	0.520	0.878	1.360
0.10	0.004	0.005	0.006	0.006	0.007	0.008	0.010	0.012	0.014	0.012	0.117	0.142	0.166	0.233	0.322	0.409	0.657	0.810	1.036	1.727
0.15	0.004	0.005	0.005	0.006	0.008	0.009	0.010	0.013	0.015	0.015	0.137	0.155	0.207	0.270	0.322	0.512	0.706	1.001	1.523	2.239
0.20	0.004	0.004	0.005	0.006	0.007	0.009	0.011	0.016	0.019	0.018	0.149	0.205	0.256	0.310	0.486	0.557	0.823	1.185	1.677	2.439
0.25	0.004	0.004	0.005	0.006	0.007	0.009	0.012	0.016	0.023	0.024	0.199	0.210	0.345	0.350	0.566	0.669	0.953	1.606	2.006	2.999
0.30	0.004	0.004	0.005	0.006	0.008	0.010	0.014	0.019	0.025	0.029	0.224	0.272	0.346	0.454	0.594	0.776	1.057	1.566	2.027	3.293
0.35	0.003	0.004	0.005	0.006	0.009	0.011	0.015	0.023	0.031	0.037	0.251	0.318	0.366	0.493	0.558	0.864	1.187	1.754	2.407	3.980
0.40	0.003	0.004	0.005	0.007	0.010	0.013	0.019	0.027	0.042	0.051	0.269	0.328	0.386	0.520	0.747	0.994	1.397	2.141	2.961	4.299
0.45	0.004	0.005	0.007	0.009	0.012	0.017	0.024	0.039	0.066	0.091	0.377	0.452	0.511	0.623	0.845	1.249	1.340	2.485	3.720	5.005
0.55	0.001	0.001	0.001	0.002	0.003	0.003	0.005	0.008	0.008	0.009	0.129	0.145	0.217	0.287	0.381	0.490	0.651	1.029	1.553	2.581
0.60	0.001	0.001	0.001	0.002	0.002	0.003	0.004	0.006	0.007	0.007	0.111	0.144	0.169	0.215	0.297	0.417	0.592	0.836	1.246	1.919
0.65	0.000	0.001	0.001	0.001	0.002	0.002	0.003	0.005	0.005	0.005	0.088	0.100	0.142	0.173	0.245	0.299	0.447	0.615	0.958	1.525
0.70	0.000	0.001	0.001	0.001	0.001	0.002	0.002	0.004	0.004	0.004	0.070	0.085	0.112	0.127	0.207	0.245	0.372	0.559	0.760	1.147
0.75	0.000	0.000	0.001	0.001	0.001	0.001	0.002	0.003	0.003	0.003	0.049	0.067	0.072	0.117	0.160	0.212	0.279	0.464	0.672	0.886
0.80	0.000	0.000	0.000	0.001	0.001	0.001	0.002	0.002	0.003	0.003	0.042	0.049	0.059	0.082	0.112	0.163	0.254	0.350	0.453	0.735
0.85	0.000	0.000	0.000	0.000	0.001	0.001	0.001	0.002	0.002	0.002	0.031	0.044	0.053	0.063	0.090	0.143	0.168	0.227	0.383	0.573
0.90	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.001	0.001	0.001	0.001	0.001	0.024	0.029	0.032	0.050	0.068	0.097	0.119	0.192	0.262	0.418
0.95	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.001	0.001	0.001	0.001	0.017	0.021	0.032	0.037	0.047	0.068	0.095	0.150	0.218	0.322
1.00	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.001	0.001	0.001	0.014	0.015	0.021	0.024	0.037	0.054	0.068	0.099	0.164	0.255

Quadre A9.21. Variància de l'estimador de β per MQOFR en el model $Y_t = \alpha + \beta X_t + u_t$.

Models (A9.1), (A9.2) i (A9.3) amb $\beta=1$, $\phi=0.5$ i $\phi^*=0$. $T=150$; $\delta=0.1$.

d_X	d_U=0	0.05	0.10	0.15	0.20	0.25	0.30	0.35	0.40	0.45	0.55	0.60	0.65	0.70	0.75	0.80	0.85	0.90	0.95	1.00
0.00	0.007	0.006	0.007	0.007	0.007	0.007	0.006	0.006	0.005	0.005	0.008	0.009	0.010	0.011	0.011	0.014	0.017	0.020	0.029	0.036
0.05	0.008	0.008	0.007	0.007	0.007	0.006	0.006	0.006	0.005	0.005	0.009	0.010	0.010	0.011	0.013	0.016	0.019	0.023	0.026	0.039
0.10	0.007	0.008	0.007	0.007	0.007	0.007	0.006	0.006	0.005	0.005	0.009	0.009	0.011	0.012	0.015	0.016	0.019	0.023	0.029	0.042
0.15	0.007	0.008	0.007	0.007	0.007	0.007	0.006	0.006	0.006	0.005	0.010	0.010	0.011	0.013	0.015	0.017	0.020	0.024	0.033	0.045
0.20	0.007	0.008	0.008	0.008	0.008	0.007	0.007	0.006	0.006	0.006	0.010	0.011	0.012	0.013	0.015	0.018	0.024	0.029	0.036	0.055
0.25	0.008	0.009	0.008	0.008	0.008	0.008	0.007	0.007	0.007	0.007	0.010	0.012	0.013	0.015	0.019	0.021	0.025	0.034	0.043	0.058
0.30	0.009	0.009	0.008	0.008	0.008	0.009	0.008	0.008	0.008	0.009	0.013	0.014	0.015	0.017	0.021	0.026	0.030	0.040	0.052	0.079
0.35	0.009	0.010	0.010	0.011	0.010	0.009	0.010	0.009	0.010	0.017	0.014	0.018	0.020	0.023	0.029	0.036	0.046	0.064	0.079	0.121
0.40	0.011	0.011	0.012	0.012	0.013	0.012	0.013	0.014	0.020	0.037	0.021	0.025	0.028	0.035	0.041	0.054	0.068	0.121	0.139	0.233
0.45	0.015	0.015	0.015	0.016	0.017	0.018	0.020	0.027	0.043	0.101	0.031	0.035	0.048	0.060	0.082	0.111	0.156	0.212	0.333	0.498
0.55	0.006	0.006	0.007	0.007	0.007	0.007	0.007	0.007	0.009	0.015	0.011	0.013	0.017	0.020	0.023	0.030	0.039	0.048	0.076	0.120
0.60	0.006	0.005	0.006	0.006	0.007	0.006	0.007	0.007	0.009	0.014	0.010	0.013	0.014	0.017	0.022	0.030	0.036	0.054	0.071	0.108
0.65	0.005	0.005	0.006	0.006	0.006	0.006	0.006	0.006	0.009	0.015	0.010	0.012	0.014	0.017	0.024	0.030	0.037	0.052	0.072	0.117
0.70	0.004	0.005	0.005	0.005	0.005	0.005	0.005	0.006	0.008	0.015	0.010	0.012	0.013	0.018	0.021	0.029	0.040	0.053	0.079	0.109
0.75	0.004	0.004	0.004	0.005	0.005	0.005	0.006	0.006	0.008	0.015	0.009	0.010	0.013	0.017	0.018	0.028	0.040	0.053	0.074	0.110
0.80	0.004	0.004	0.004	0.004	0.004	0.004	0.004	0.006	0.007	0.013	0.009	0.010	0.012	0.015	0.018	0.027	0.035	0.053	0.074	0.110
0.85	0.003	0.003	0.003	0.004	0.004	0.004	0.004	0.005	0.008	0.014	0.007	0.009	0.012	0.015	0.019	0.027	0.035	0.053	0.076	0.115
0.90	0.003	0.003	0.003	0.003	0.003	0.003	0.004	0.004	0.007	0.014	0.007	0.008	0.010	0.014	0.017	0.024	0.036	0.050	0.068	0.101
0.95	0.002	0.002	0.002	0.003	0.003	0.003	0.003	0.004	0.006	0.012	0.006	0.007	0.009	0.011	0.017	0.020	0.032	0.045	0.070	0.103
1.00	0.002	0.002	0.002	0.002	0.002	0.003	0.003	0.004	0.006	0.012	0.006	0.006	0.009	0.012	0.014	0.019	0.031	0.044	0.061	0.089

Quadre A9.22. Variància de l'estimador de β per MQOFR en el model $Y_t = \alpha + \beta X_t + u_t$.

Models (A9.1), (A9.2) i (A9.3) amb β=*1*, ϕ=*0.5* i ϕ*=*0. T=150;* δ=*0.2.*

d_X	d_U=0	0.05	0.10	0.15	0.20	0.25	0.30	0.35	0.40	0.45	0.55	0.60	0.65	0.70	0.75	0.80	0.85	0.90	0.95	1.00
0.00	0.010	0.009	0.009	0.009	0.008	0.008	0.007	0.006	0.005	0.005	0.007	0.008	0.008	0.009	0.010	0.011	0.011	0.013	0.016	0.022
0.05	0.009	0.010	0.010	0.009	0.009	0.008	0.007	0.006	0.006	0.005	0.008	0.008	0.009	0.009	0.010	0.011	0.013	0.014	0.019	0.021
0.10	0.011	0.010	0.010	0.010	0.009	0.008	0.007	0.007	0.006	0.007	0.008	0.008	0.010	0.009	0.011	0.012	0.013	0.016	0.021	0.023
0.15	0.011	0.010	0.011	0.010	0.010	0.009	0.008	0.007	0.006	0.007	0.009	0.009	0.009	0.011	0.011	0.012	0.016	0.018	0.023	0.026
0.20	0.011	0.011	0.011	0.011	0.010	0.009	0.008	0.007	0.007	0.007	0.009	0.011	0.010	0.011	0.011	0.015	0.016	0.018	0.025	0.033
0.25	0.013	0.013	0.012	0.011	0.012	0.010	0.010	0.009	0.008	0.010	0.011	0.011	0.012	0.012	0.013	0.015	0.020	0.023	0.026	0.038
0.30	0.013	0.014	0.013	0.014	0.013	0.011	0.011	0.009	0.009	0.013	0.012	0.013	0.014	0.014	0.018	0.020	0.025	0.029	0.040	0.055
0.35	0.016	0.017	0.015	0.017	0.016	0.013	0.013	0.013	0.015	0.023	0.015	0.017	0.019	0.018	0.024	0.025	0.036	0.044	0.061	0.092
0.40	0.022	0.019	0.020	0.018	0.019	0.017	0.017	0.019	0.025	0.050	0.022	0.025	0.029	0.032	0.041	0.057	0.077	0.096	0.135	0.205
0.45	0.026	0.026	0.026	0.027	0.025	0.027	0.027	0.035	0.060	0.149	0.034	0.041	0.044	0.065	0.076	0.114	0.155	0.259	0.311	0.553
0.55	0.013	0.014	0.012	0.013	0.012	0.012	0.010	0.011	0.014	0.023	0.012	0.014	0.016	0.019	0.022	0.029	0.039	0.056	0.078	0.098
0.60	0.012	0.012	0.012	0.011	0.011	0.010	0.011	0.012	0.015	0.029	0.012	0.015	0.016	0.019	0.024	0.030	0.036	0.050	0.073	0.123
0.65	0.011	0.011	0.011	0.011	0.011	0.010	0.010	0.012	0.016	0.032	0.013	0.013	0.018	0.019	0.024	0.029	0.042	0.061	0.087	0.130
0.70	0.010	0.010	0.010	0.010	0.010	0.010	0.010	0.011	0.017	0.037	0.013	0.013	0.017	0.022	0.025	0.035	0.045	0.065	0.090	0.128
0.75	0.010	0.010	0.010	0.009	0.010	0.009	0.010	0.010	0.018	0.037	0.011	0.014	0.018	0.020	0.025	0.033	0.043	0.064	0.093	0.149
0.80	0.010	0.009	0.009	0.009	0.009	0.008	0.008	0.011	0.015	0.034	0.011	0.013	0.016	0.021	0.025	0.033	0.051	0.075	0.101	0.154
0.85	0.008	0.008	0.008	0.008	0.008	0.008	0.009	0.010	0.017	0.039	0.010	0.013	0.014	0.021	0.025	0.034	0.051	0.071	0.094	0.156
0.90	0.007	0.007	0.007	0.007	0.007	0.007	0.007	0.010	0.017	0.040	0.009	0.011	0.014	0.018	0.024	0.033	0.042	0.067	0.093	0.151
0.95	0.006	0.006	0.006	0.006	0.007	0.006	0.007	0.009	0.015	0.038	0.009	0.011	0.014	0.018	0.023	0.031	0.043	0.070	0.089	0.154
1.00	0.005	0.006	0.005	0.005	0.005	0.006	0.006	0.008	0.014	0.034	0.008	0.009	0.013	0.016	0.019	0.027	0.040	0.059	0.095	0.143

Quadre A9.23. Variància de l'estimador de β per MQO en el model $Y_t = \alpha + \beta X_t + u_t$.

Models (A9.1), (A9.2) i (A9.3) amb $\beta=1$, $\phi=0.5$ i $\phi^*=0$. $T=200$.

d_X	$d_U=0$	0.05	0.10	0.15	0.20	0.25	0.30	0.35	0.40	0.45	0.55	0.60	0.65	0.70	0.75	0.80	0.85	0.90	0.95	1.00
0.00	0.004	0.004	0.004	0.005	0.005	0.006	0.007	0.008	0.007	0.007	0.056	0.068	0.094	0.116	0.167	0.235	0.374	0.481	0.687	0.981
0.05	0.003	0.004	0.004	0.005	0.005	0.006	0.007	0.008	0.008	0.008	0.074	0.094	0.107	0.156	0.222	0.312	0.432	0.618	0.986	1.486
0.10	0.003	0.004	0.005	0.005	0.005	0.007	0.007	0.010	0.010	0.010	0.087	0.108	0.162	0.209	0.275	0.314	0.581	0.873	1.081	1.886
0.15	0.003	0.003	0.004	0.005	0.006	0.007	0.009	0.011	0.011	0.012	0.120	0.165	0.203	0.271	0.366	0.482	0.656	1.101	1.598	2.555
0.20	0.003	0.003	0.004	0.005	0.005	0.007	0.009	0.011	0.014	0.016	0.164	0.195	0.248	0.327	0.421	0.592	0.803	1.237	1.941	2.619
0.25	0.002	0.003	0.004	0.005	0.006	0.008	0.010	0.014	0.019	0.020	0.205	0.234	0.281	0.333	0.494	0.745	1.062	1.541	2.618	3.314
0.30	0.002	0.003	0.003	0.005	0.006	0.008	0.011	0.015	0.020	0.027	0.205	0.279	0.299	0.448	0.575	0.824	1.198	1.695	2.275	3.668
0.35	0.002	0.003	0.003	0.005	0.007	0.009	0.012	0.019	0.028	0.034	0.238	0.255	0.371	0.497	0.682	0.887	1.302	2.175	2.881	4.199
0.40	0.002	0.003	0.004	0.005	0.007	0.009	0.017	0.024	0.035	0.046	0.249	0.322	0.399	0.619	0.699	1.135	1.490	2.163	3.203	4.464
0.45	0.003	0.004	0.005	0.007	0.009	0.014	0.021	0.034	0.049	0.074	0.313	0.373	0.492	0.678	0.901	1.375	1.712	2.695	4.232	5.832
0.55	0.000	0.001	0.001	0.001	0.002	0.003	0.004	0.005	0.008	0.007	0.124	0.163	0.206	0.249	0.372	0.481	0.779	1.142	1.750	2.730
0.60	0.000	0.001	0.001	0.001	0.002	0.002	0.003	0.004	0.006	0.006	0.102	0.121	0.163	0.227	0.280	0.373	0.716	0.978	1.433	2.110
0.65	0.000	0.000	0.001	0.001	0.001	0.002	0.003	0.004	0.004	0.004	0.075	0.105	0.134	0.180	0.230	0.330	0.532	0.754	1.015	1.787
0.70	0.000	0.000	0.000	0.001	0.001	0.001	0.002	0.003	0.003	0.003	0.064	0.087	0.101	0.135	0.197	0.282	0.336	0.626	0.853	1.375
0.75	0.000	0.000	0.000	0.001	0.001	0.001	0.001	0.002	0.002	0.002	0.050	0.056	0.073	0.119	0.144	0.187	0.277	0.400	0.667	1.017
0.80	0.000	0.000	0.000	0.000	0.001	0.001	0.001	0.002	0.002	0.002	0.039	0.042	0.055	0.077	0.106	0.141	0.217	0.361	0.540	0.805
0.85	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.001	0.001	0.001	0.001	0.001	0.030	0.032	0.041	0.059	0.078	0.116	0.145	0.237	0.368	0.578
0.90	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.001	0.001	0.001	0.001	0.018	0.025	0.035	0.044	0.056	0.084	0.140	0.177	0.259	0.433
0.95	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.001	0.001	0.001	0.015	0.016	0.024	0.033	0.048	0.060	0.086	0.136	0.214	0.329
1.00	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.001	0.001	0.010	0.012	0.018	0.026	0.033	0.049	0.062	0.099	0.153	0.246

Quadre A9.24. Variància de l'estimador de β per MQOFR en el model $Y_t = \alpha + \beta X_t + u_t$.

Models (A9.1), (A9.2) i (A9.3) amb β=*1*, ϕ=*0.5* i ϕ*=*0*. *T=200*; δ=*0.1*.

d_X	d_U=0	0.05	0.10	0.15	0.20	0.25	0.30	0.35	0.40	0.45	0.55	0.60	0.65	0.70	0.75	0.80	0.85	0.90	0.95	1.00
0.00	0.005	0.005	0.005	0.005	0.005	0.005	0.004	0.004	0.004	0.004	0.006	0.007	0.008	0.009	0.009	0.012	0.012	0.015	0.020	0.026
0.05	0.005	0.006	0.005	0.005	0.005	0.005	0.005	0.004	0.003	0.004	0.006	0.007	0.008	0.009	0.010	0.012	0.013	0.019	0.025	0.026
0.10	0.005	0.005	0.006	0.006	0.005	0.005	0.004	0.004	0.004	0.004	0.007	0.007	0.008	0.009	0.011	0.011	0.017	0.019	0.022	0.035
0.15	0.005	0.005	0.006	0.005	0.006	0.005	0.005	0.005	0.004	0.004	0.007	0.007	0.009	0.010	0.011	0.014	0.015	0.020	0.025	0.031
0.20	0.006	0.006	0.006	0.005	0.006	0.005	0.005	0.005	0.004	0.005	0.008	0.008	0.009	0.011	0.012	0.013	0.017	0.023	0.027	0.033
0.25	0.006	0.006	0.006	0.006	0.006	0.006	0.005	0.005	0.004	0.005	0.007	0.009	0.010	0.012	0.013	0.016	0.020	0.023	0.035	0.047
0.30	0.006	0.006	0.007	0.007	0.006	0.006	0.006	0.006	0.006	0.006	0.009	0.010	0.011	0.013	0.018	0.021	0.026	0.034	0.045	0.060
0.35	0.007	0.007	0.008	0.007	0.007	0.008	0.007	0.007	0.008	0.012	0.011	0.014	0.015	0.017	0.022	0.028	0.034	0.050	0.074	0.100
0.40	0.008	0.008	0.009	0.009	0.009	0.009	0.009	0.011	0.016	0.029	0.015	0.018	0.023	0.027	0.036	0.047	0.065	0.088	0.145	0.219
0.45	0.011	0.011	0.013	0.012	0.013	0.013	0.016	0.019	0.034	0.096	0.026	0.031	0.037	0.049	0.066	0.098	0.134	0.227	0.304	0.519
0.55	0.004	0.004	0.005	0.005	0.005	0.005	0.005	0.005	0.008	0.011	0.008	0.011	0.012	0.015	0.018	0.021	0.030	0.043	0.072	0.089
0.60	0.004	0.004	0.004	0.005	0.005	0.005	0.005	0.005	0.006	0.012	0.008	0.009	0.011	0.014	0.018	0.021	0.033	0.046	0.067	0.095
0.65	0.004	0.004	0.004	0.004	0.004	0.004	0.004	0.005	0.007	0.012	0.008	0.009	0.011	0.014	0.017	0.022	0.032	0.048	0.065	0.097
0.70	0.003	0.004	0.003	0.004	0.004	0.004	0.004	0.005	0.006	0.011	0.007	0.009	0.011	0.014	0.017	0.022	0.032	0.041	0.063	0.115
0.75	0.003	0.003	0.003	0.003	0.004	0.004	0.004	0.004	0.007	0.013	0.006	0.008	0.011	0.013	0.017	0.022	0.032	0.046	0.071	0.103
0.80	0.003	0.003	0.003	0.003	0.003	0.003	0.003	0.004	0.006	0.013	0.006	0.007	0.010	0.013	0.017	0.021	0.032	0.044	0.071	0.111
0.85	0.002	0.002	0.002	0.003	0.003	0.003	0.003	0.004	0.006	0.012	0.006	0.007	0.009	0.011	0.016	0.024	0.029	0.040	0.072	0.107
0.90	0.002	0.002	0.002	0.002	0.002	0.003	0.003	0.004	0.006	0.011	0.005	0.007	0.008	0.011	0.014	0.021	0.032	0.044	0.069	0.111
0.95	0.002	0.002	0.002	0.002	0.002	0.002	0.003	0.003	0.005	0.011	0.005	0.006	0.007	0.009	0.013	0.020	0.030	0.046	0.065	0.095
1.00	0.001	0.001	0.002	0.002	0.002	0.002	0.002	0.003	0.005	0.011	0.004	0.005	0.007	0.009	0.013	0.018	0.026	0.036	0.058	0.091

Quadre A9.25. Variància de l'estimador de β per MQOFR en el model $Y_t = \alpha + \beta X_t + u_t$.

Models (A9.1), (A9.2) i (A9.3) amb β=*1*, ϕ=*0.5* i ϕ*=*0*. *T=200;* δ=*0.2.*

d_X	d_U=0	0.05	0.10	0.15	0.20	0.25	0.30	0.35	0.40	0.45	0.55	0.60	0.65	0.70	0.75	0.80	0.85	0.90	0.95	1.00
0.00	0.007	0.007	0.008	0.007	0.007	0.006	0.005	0.005	0.004	0.005	0.005	0.006	0.006	0.006	0.007	0.008	0.008	0.011	0.012	0.019
0.05	0.008	0.008	0.007	0.007	0.007	0.006	0.005	0.005	0.004	0.004	0.006	0.006	0.007	0.006	0.007	0.008	0.008	0.011	0.013	0.017
0.10	0.008	0.008	0.008	0.007	0.007	0.007	0.006	0.005	0.005	0.005	0.006	0.006	0.007	0.007	0.008	0.009	0.010	0.012	0.017	0.017
0.15	0.008	0.008	0.007	0.008	0.007	0.007	0.006	0.005	0.005	0.005	0.006	0.006	0.007	0.007	0.008	0.009	0.012	0.013	0.016	0.022
0.20	0.009	0.008	0.009	0.008	0.008	0.007	0.007	0.006	0.005	0.006	0.007	0.007	0.008	0.009	0.009	0.010	0.011	0.014	0.019	0.023
0.25	0.009	0.009	0.009	0.009	0.009	0.008	0.006	0.006	0.006	0.007	0.008	0.009	0.009	0.009	0.011	0.011	0.013	0.018	0.020	0.031
0.30	0.011	0.010	0.010	0.009	0.009	0.009	0.008	0.007	0.007	0.009	0.010	0.010	0.010	0.011	0.013	0.015	0.017	0.022	0.030	0.045
0.35	0.013	0.012	0.012	0.012	0.011	0.011	0.010	0.009	0.011	0.016	0.010	0.012	0.013	0.016	0.018	0.022	0.025	0.034	0.053	0.078
0.40	0.015	0.016	0.014	0.014	0.014	0.014	0.014	0.014	0.020	0.044	0.016	0.018	0.022	0.025	0.032	0.040	0.056	0.082	0.125	0.199
0.45	0.021	0.020	0.020	0.020	0.021	0.020	0.021	0.028	0.053	0.145	0.025	0.032	0.038	0.049	0.066	0.088	0.128	0.194	0.277	0.487
0.55	0.009	0.009	0.009	0.010	0.009	0.009	0.008	0.008	0.012	0.025	0.010	0.010	0.012	0.015	0.017	0.022	0.029	0.039	0.066	0.083
0.60	0.010	0.009	0.010	0.009	0.008	0.008	0.008	0.008	0.013	0.023	0.010	0.010	0.013	0.014	0.017	0.023	0.028	0.044	0.072	0.096
0.65	0.010	0.008	0.009	0.009	0.008	0.008	0.008	0.008	0.012	0.026	0.011	0.011	0.012	0.016	0.019	0.025	0.029	0.043	0.076	0.109
0.70	0.008	0.009	0.008	0.008	0.008	0.007	0.008	0.009	0.011	0.029	0.009	0.011	0.012	0.016	0.020	0.026	0.038	0.056	0.072	0.118
0.75	0.007	0.008	0.007	0.007	0.007	0.007	0.007	0.008	0.014	0.031	0.009	0.010	0.012	0.015	0.021	0.027	0.036	0.059	0.083	0.134
0.80	0.006	0.007	0.007	0.006	0.007	0.006	0.007	0.008	0.014	0.034	0.008	0.009	0.012	0.016	0.022	0.028	0.039	0.057	0.080	0.141
0.85	0.006	0.006	0.006	0.006	0.006	0.006	0.006	0.008	0.014	0.034	0.008	0.010	0.011	0.016	0.019	0.030	0.041	0.057	0.108	0.150
0.90	0.006	0.005	0.005	0.006	0.005	0.006	0.006	0.007	0.013	0.036	0.008	0.010	0.011	0.015	0.020	0.025	0.039	0.061	0.105	0.148
0.95	0.004	0.004	0.005	0.005	0.005	0.005	0.005	0.007	0.012	0.035	0.006	0.008	0.010	0.013	0.018	0.027	0.040	0.060	0.085	0.150
1.00	0.004	0.004	0.004	0.004	0.004	0.004	0.004	0.006	0.013	0.030	0.006	0.008	0.010	0.012	0.017	0.026	0.035	0.055	0.087	0.130

Capítol 10

CONSIDERACIONS FINALS I CONCLUSIONS

És probable que un dels majors problemes amb el que s'han trobat els econòmetres a l'hora d'utilitzar dades temporals per contrastar certes teories de caire econòmic és la dificultat per acceptar la hipòtesi d'estacionarietat en la majoria de variables macroeconòmiques. Molt relacionat amb aquest problema, es popularitza al món economètric, arrel del treball de Box i Jenkins (1970), la utilització de l'operador diferenciació. De fet, la mateixa teoria econòmica estableix que determinades variables han de ser integrables.

Així, a partir del concepte d'integrabilitat, es genera a l'anàlisi econòmica de dades temporals una dicotomia en que es distingeixen dues possibilitats. En el primer cas, quan s'accepta que les dades són estacionàries, és habitual la utilització de models ARMA directament. En canvi, quan s'arriba a la conclusió de que les dades no tenen un comportament estacionari és habitual recórrer a la diferenciació per transformar-les en estacionàries i utilitzar un model ARMA per la seva modelització.

Molt relacionat amb això, un dels trets característics de moltes de les variables econòmiques és la presència d'una forta associació entre observacions poc properes en el temps, característica que ja Granger (1966) destaca usant tècniques d'anàlisi espectral. De fet, aquesta forta associació és coherent amb la presència d'una arrel unitària i, per tant, és habitual interpretar l'observació d'una estructura de correlacions que decreix molt lentament com la necessitat de diferenciar les dades per a que siguin estacionàries.

Però aquesta divisió oblida vàries situacions intermèdies ja que, pel que fa a certes propietats, els models ARMA i ARIMA corresponen a dues situacions extremes. A més, com les tècniques estadístiques i economètriques que cal utilitzar en el tractament de dades I(0) o dades I(1) són molt diferents, el fet de no considerar aquestes situacions intermèdies pot tenir conseqüències economètriques molt importants.

I és en l'estudi d'aquestes situacions intermèdies on cal situar la tesi que aquí s'ha presentat. Concretament, la tesi s'ha centrat a presentar un conjunt de definicions i instruments que permeten valorar aquestes conseqüències i aportar solucions a alguns dels problemes que aquestes situacions intermèdies presenten.

Atès que les diferències entre els models ARMA, els models ARIMA i aquestes situacions intermèdies estan molt relacionades amb les nocions de memòria i persistència d'una variable econòmica, s'ha posat especial interès en elaborar una classificació de les sèries temporals segons la seva memòria. De fet, tot i que la literatura economètrica ha fet servir, sovint, la noció de memòria en el tractament de variables econòmiques, aquesta utilització no s'ha basat, al nostre entendre, en una classificació general dels diferents tipus de memòria sinó que s'hi poden trobar a la literatura economètrica definicions ben diferents segons els objectius plantejats.

En aquest sentit, la tesi s'ha orientat cap a l'objectiu final de valorar la rellevància del concepte de memòria de cara a l'anàlisi economètrica de dades temporals. Aquest objectiu inclou dos aspectes igualment importants, d'una banda és necessari detectar quines poden ser les conseqüències negatives que pot tenir la utilització de les eines economètriques més habituals sense tenir en compte el tipus de memòria de les dades. I d'altra banda, un cop detectades aquestes conseqüències, cal avançar en la recerca d'instruments adequats per evitar aquests problemes.

De totes maneres, és important ressaltar que, tot i que el contingut de la tesi apunta en tot moment cap a l'anàlisi de les conseqüències economètriques dels diferents tipus de memòria, també hi és present un cert esperit de generalitat amb la intenció de donar una definició dels diferents tipus de memòria que sigui el màxim de general possible i el màxim d'útil tant per l'anàlisi economètrica com per altres àmbits científics.

A mode de resum, creiem que la principal conclusió de la tesi és la de que cal considerar el tipus de memòria que contenen les dades temporals com una característica essencial a tenir en compte abans d'iniciar qualsevol anàlisi amb aquest tipus de dades, de la mateixa manera que es consideren com a característiques rellevants l'estacionarietat, la presència d'estacionalitat, o la necessitat d'eliminar possibles components deterministes com efectes calendari o dades atípiques.

Així, i de manera similar a aquests altres conceptes, s'ha mostrat que les dificultats en la detecció del tipus de memòria fan que aquesta sigui una característica a analitzar prèviament, sovint a partir de criteris econòmics més que estadístics. Així, la impossibilitat de decidir a partir de criteris estadístics si els shocks d'una variable tenen efectes permanents en el temps n'és un molt bon exemple de que certs problemes són inabordables des d'un punt de vista estrictament estadístic, de manera similar al fet que el supòsit d'estacionarietat no és contrastable sinó que sols és possible de vegades rebutjar-lo, però en cap cas acceptar-lo amb certa seguretat.

Al llarg de la tesi s'ha fet un esforç per raonar l'interès economètric del concepte de memòria i també s'ha posat especial interès en donar una definició de memòria de tipus no paramètric, és a dir, prou general com per a que no depengui de l'elecció dels models o tècniques seleccionats. Així, s'ha intentat també relacionar aquesta definició amb altres definicions que darrerament s'han usat en diferents àmbits de recerca o aplicacions econòmiques per tractar aspectes relacionats amb la presència de memòria llarga.

A més, s'ha intentat justificar la importància d'aquest tipus de caracterització en dues direccions. D'una banda, mostrant que a partir les característiques de les variables econòmiques mesurades a través del temps, hi ha prou motius per considerar que, sovint, la memòria d'aquest tipus de dades no es correspon amb la memòria dels models usats habitualment en el tractament d'aquest tipus de dades.

D'altra banda, mostrant també que aquest error d'especificació pot tenir conseqüències greus en la inferència que es pugui realitzar a partir d'aquest tipus de dades. Això justifica la proposta de considerar el grau de memòria en dades temporals una característica prou rellevant com per a la utilització tant d'eines estadístiques específiques per la detecció dels diferents tipus de memòria com de mètodes d'inferència que siguin, en la mesura del possible, robustos front a variacions en el grau de memòria.

Creiem que dels resultats presentats a la tesi se'n pot treure una segona conclusió de tipus genèric. Concretament, la necessitat de parar més atenció en el futur al domini de les freqüències en el tractament, anàlisi i modelització de les sèries temporals econòmiques. De fet, durant la dècada dels anys seixanta aquesta perspectiva és objecte de molta atenció però el predomini de les baixes freqüències de manera sistemàtica en la majoria de variables econòmiques va provocar que disminuís l'interès per aquesta anàlisi, ja que no permet distingir-ne unes de les altres.

A la pràctica, la solució a aquest *"problema"* ha estat la d'usar eines en el domini temporal que no reflecteixen aquesta característica. Però, tal i com es mostra al llarg de la tesi, i lluny de ser una solució, el fet d'obviar aquest predomini de les baixes freqüències pot generar importants errors d'especificació. Creiem que l'exemple més clar, tot i que potser no el de conseqüències més greus, n'és l'alta probabilitat de sobrediferenciar les sèries econòmiques i obtenir models línies aèries com a bones aproximacions quan aquest model no reflexa correctament les característiques de la variable.

En el fons, l'origen de la tesi es troba en l'interès per explicitar d'alguna manera aquestes característiques en les baixes freqüències, característica que hem anomenat memòria ja que en la mesura en que dominen les freqüències més baixes, això reflexa una major dependència de les observacions futures respecte les observacions passades.

De fet, tot i que no s'ha posat èmfasi en aquest aspecte al llarg de la tesi, la presència d'una major o menor memòria afecta al plantejament en sí del tipus d'anàlisi que pot fer-se d'aquestes dades. Dit d'una altra manera, si és millor una anàlisi de tipus univariant o bé multivariant per fer-ne prediccions.

En aquest sentit, creiem que hi ha un aspecte que és important destacar en relació al concepte de memòria que, tot i que no ha aparegut al llarg de la tesi de manera formal, permet situar aquest concepte en el context general de l'anàlisi de dades temporals. Concretament, és habitual a l'hora de justificar l'interès per l'anàlisi estadística de les dades econòmiques temporals destacar que aquestes contenen elements deterministes i elements estocàstics. De fet, el concepte de memòria està molt relacionat amb aquesta distinció. Òbviament, com major sigui, en una variable, la proporció d'informació de tipus determinista, més fàcil és obtenir bones prediccions, és a dir, menys variància tindran aquestes prediccions en relació a la variància que presenta la sèrie.

Tal com ja s'ha comentat, aquesta idea es troba a la base del que s'ha anomenat com *predicció màxima* i s'ha usat com a mesura de memòria. En aquest sentit, si una sèrie presenta més memòria es pot interpretar això en el sentit que una major proporció de la seva variabilitat està associada amb elements que tenen a veure amb les observacions passades de la variable. Dit d'una altra forma, a major memòria, major justificació per l'aplicació de tècniques de predicció univariant.

En canvi, també s'ha mostrat a la tesi que la presència d'una major memòria facilita l'obtenció de relacions espúries entre variables. Un cas extrem d'aquesta situació que pot ser útil com exemple per entendre això és el cas d'una tendència totalment determinista. En aquest cas, la millor tècnica per obtenir prediccions és, clarament, la tècnica univariant mentre que no té cap sentit usar tècniques multivariants. En canvi, en el en que les dades siguin soroll blanc el que no té cap sentit és usar tècniques univariants perquè la sèrie no conté informació, és a dir, no té gens de memòria.

En relació amb aquestes dues situacions extremes, tant els processos integrats amb memòria permanents (i per tant, té sentit usar aquesta característica per obtenir prediccions a llarg termini) com les sèries amb memòria llarga (on té sentit obtenir prediccions a mig termini) o les sèries que sols contenen memòria curta (prediccions a curt termini) suposen situacions intermèdies, molt més habituals a la pràctica.

Al marge d'aquest enfocament més general, s'han desenvolupat a la tesi tot un seguit d'aspectes més concrets en relació a les conseqüències que té per l'anàlisi economètrica el grau de memòria de les dades temporals.

Així, pel que fa a aquestes aportacions més concretes que s'hi poden trobar a la tesi, cal destacar-ne les següents:

1. En primer lloc, s'ha proposat una classificació de les sèries temporals atenent a la seva memòria, més concretament, s'ha proposat una classificació en forma d'arbre format per diferents nivells. En primer lloc i en el nivell superior, es poden dividir les sèries temporals entre sèries amb memòria permanent i sèries amb memòria transitòria. En segon lloc, les dades amb memòria permanent es divideixen entre sèries amb memòria permanent infinita o sèries amb memòria permanent finita. Pel que fa a les sèries amb memòria transitòria es poden dividir entre sèries sense memòria, sèries amb memòria curta i sèries amb memòria llarga.

   La divisió entre memòria permanent i memòria transitòria està relacionada, a grans trets i sense ser-ne equivalent, amb la divisió entre estacionarietat i no estacionarietat mentre que la divisió entre memòria infinita i memòria finita està associada al concepte de reversió cap a la mitjana. Pel que fa a la distinció entre memòria curta i memòria llarga, és pràctic interpretar la primera com aquella que presenten els modes ARMA mentre que la segona correspon a una situació estacionària amb una major memòria. Com a conseqüència d'aquesta classificació, s'observa que les tècniques economètriques habituals estan basades en el supòsit que les dades són de memòria permanent infinita, de memòria curta o sense memòria sense considerar les altres dues possibilitats.

   De fet, molta de la recerca que conté la tesi es basa en la utilització dels models ARFIMA perquè aquests són una eina molt còmode pel tractament de sèries amb diferent memòria ja que, segons quin sigui el valor del paràmetre *d*, la sèrie que s'obté presenta un o altre tipus de memòria.

De totes maneres, a l'hora de treure conclusions generals cal destacar que no s'ha d'interpretar el tipus de memòria com un característica particular dels processos ARFIMA ja que aquests models no són més que un exemple relativament senzill de processos amb diferents graus de memòria. En aquest sentit, creiem que les conclusions que s'han tret sobre les conseqüències economètriques dels errors d'especificació pel que fa a la memòria, són aplicables a altres sèries temporals amb el mateix tipus de memòria, tot i que no s'hagin generat amb un model ARFIMA.

Així, per exemple, el perill de regressions espúries entre variables amb memòria permanent finita cal interpretar-lo com un perill no sols de variables que siguin ARFIMA(p,d,q) amb $d \geq 1/2$ (i en menor mesura, quan $0<d<1/2$), sinó d'un perill associat a les variables amb memòria permanent (i en menor mesura, a variables amb memòria llarga), independentment de si presenta o no reversió a la mitjana. És a dir, cal associar el perill de les regressions espúries a la no estacionarietat però en cap cas a la presència d'una arrel unitària.

Al nostre entendre, és important aquesta clarificació en la mesura en que suposa construir un context on englobar les diferents tècniques estadístiques de l'anàlisi de sèries temporals i la seva aplicabilitat. Així mateix, també es relaciona aquesta classificació amb altres definicions proposades a la literatura sobre el concepte de memòria.

Els resultats obtinguts demostren que la definició de memòria proposada n'és l'adequada perquè es comprova al llarg de la tesi que, tant pel que fa al biaix en els estimadors dels coeficients d'autocorrelació a nivell univariant, com pel que fa a la probabilitat d'obtenir regressions espúries, el factor principal que provoca aquests problemes és precisament la presència de memòria llarga, tal com s'ha presentat a la tesi.

2. A més, es proposa una estratègia per a la detecció del grau de memòria en dades temporals. En aquest sentit, primer cal classificar la memòria com permanent o transitòria i per això pot ser suficient la utilització del correlograma i els tests d'arrels unitàries. En tot cas, creiem més correcte interpretar el resultat d'aquests tests en termes de l'estacionarietat o no de la variable, però no en termes de reversió o no cap a la mitjana.

   Dit d'una altra manera, si s'accepta la hipòtesi de no estacionarietat deguda a la presència de memòria permanent, això suggereix la utilització de l'operador diferenciació per transformar les dades en estacionàries, però això no significa que els shocks que afecten a les variables analitzades hagin de tenir un efecte futur permanent. De fet, si hom desitja contrastar el valor $d=1$ contra $d<1$ és millor utilitzar tests dissenyats amb aquest objectiu a l'entorn dels models ARFIMA(p,d,q) enlloc de contrastar $\phi=1$ contra $\phi<1$ a partir de la representació autoregressiva. De totes maneres, cal tenir clar que aquesta decisió sobre la persistència dels shocks és una decisió poc potent en termes estadístics de manera que sembla raonable basar-se més en aspectes econòmics.

3. Pel que fa a les dades amb memòria transitòria, s'ha destacat al capítol 5 de la tesi que no hi ha cap motiu que permeti garantir l'existència d'una representació ARMA adequada com a aproximació a les seves característiques ja que aquests models sols permeten caracteritzar variables amb memòria curta. A més, i pel que fa a la discriminació entre memòria curta i memòria llarga, s'han mostrat també els enormes problemes que presenten la FAS i la FAP degut al biaix d'aquests estadístics sota memòria llarga.

   En relació amb aquest problema, cal destacar també que s'ha proposat la utilització d'un nou estadístic com complement de la FAS i la FAP per identificar el tipus de memòria que presenten les dades. Aquest estadístic, que s'ha anomenat com funció de quocient d'autocovariàncies (FQC), té l'avantatge en relació a la FAS i la FAP que, tot i que les dades tinguin memòria llarga, no presenta biaix i és asimptòticament normal. Al nostre entendre, es tracta d'un estadístic sobre el que cal continuar treballant ja que poden derivar-se eines estadístiques interessants.

També s'ha comprovat com bona part dels problemes del biaix en la FAS i la FAP són deguts a la necessitat d'estimar el valor esperat de la variable. Això suggereix que, en certes ocasions, i per determinats objectius pot ser interessant la sobrediferenciació de la variable prèvia a l'estimació de les autocovariàncies ja que si la variable és estacionària en mitjana, un cop diferenciada tindrà esperança nul·la.

En particular, creiem que fora possible per aquesta via obtenir estimadors dels coeficients d'autocorrelació de sèries amb memòria llarga amb un menor biaix que els estimadors usats habitualment.

4. De totes maneres, i en relació al punt anterior, la decisió sobre si una variable conté o no memòria llarga és molt difícil a partir d'un nombre d'observacions reduït. Per tant, s'ha posat especial èmfasi en analitzar les conseqüències que té cometre aquest error d'especificació en diferents aplicacions economètriques. Al marge de les conclusions concretes que s'expliciten a continuació, la necessitat d'interpretar l'acceptació de la hipòtesi d'estacionarietat de les dades com no equivalent a l'existència d'un model ARMA és també una conclusió important.

5. Més concretament, s'ha demostrat que si l'objectiu és el càlcul de prediccions a curt termini, és molt probable que el benefici de tenir en compte la memòria llarga no compensi el cost derivat dels problemes en l'estimació dels models com els models ARFIMA que permeten reproduir aquesta característica. Així, i de manera molt general, per l'estimació del valor de la variable a curt termini, s'obtenen tant bons resultats en termes d'EQM amb un model ARMA com amb un model ARFIMA.

   En canvi, si l'objectiu és el càlcul de prediccions a més llarg termini, la utilització d'un model ARMA pot portar a estimacions molt imprecises i, davant del dubte entre optar per un model de memòria llarga o bé un model de memòria curta, és millor optar pel model més general. De totes maneres, amb els mètodes d'estimació de models ARFIMA de que es disposa actualment, pel càlcul de prediccions fins a un màxim de 10 o 15 períodes s'obtenen millors resultats, sempre que la memòria llarga no sigui molt intensa, utilitzant un model autoregressiu d'ordre elevat. Per tant, en aquest cas caldria estimar un model AR d'ordre gran (10 o 20 coeficients) encara que s'obtinguin coeficients no significatius.

6. També s'ha comprovat, en relació al càlcul de prediccions, que a l'hora de calcular prediccions per un model ARFIMA, el millor mètode és, com era d'esperar, el proposat a Peiris i Perea (1988). De totes maneres, pel càlcul de prediccions a llarg termini, es proposa a la tesi un mètode més senzill que proporciona estimacions tant precises com l'anterior. Si l'objectiu final és el càlcul de gran número de prediccions, llavors és molt millor usar un model ARFIMA enlloc d'un model AR o un model ARMA.

7. Una altra de les aplicacions economètriques importants dels models ARMA i ARIMA és la seva utilització per l'estimació de components no observables. Així, hom es troba, de vegades, que hi ha variables econòmiques que presenten excessives oscil·lacions que fan difícil la seva anàlisi i cal utilitzar estimacions de la sèrie desestacionalitzada o bé estimacions d'un senyal cicle-tendència. En altres situacions, en canvi, és millor utilitzar el comportament de certes variables econòmiques lliures de comportaments tendencials o de llarg termini.

   Però al mage del problema concret tractat, totes aquestes aplicacions es basen en la utilització de filtres per l'extracció de senyals. En aquest sentit, durant els darrers anys s'ha avançat molt en l'estimació d'aquestes components no observables sota el supòsit que la variable d'interès pot representar-se a partir d'un model ARIMA. Però, fins al moment, no s'ha considerat la possibilitat de que la variable d'interès no pugui ser aproximada per un model ARIMA. Per tant, és força rellevant saber quines conseqüències pot tenir el fet d'especificar, de manera incorrecta, un model ARIMA quan les dades contenen memòria llarga o bé memòria permanent finita.

En relació amb aquesta pregunta, s'ha demostrat a la tesi que els errors d'especificació del model derivats d'errors en la determinació del grau de memòria provoquen greus distorsions en les estimacions de senyals no observables al utilitzar el filtre de Wiener-Kolmogorov associat a un model especificat incorrectament.

Per arribar a aquest conclusió s'ha demostrat, en primer lloc, que amb l'agregació de dues variables que siguin fraccionalment integrades d'ordres d_1 i d_2 s'obté una nova variable fraccionalment integrada d'ordre $d=m\grave{a}xim\{d_1,d_2\}$, resultat que generalitza el ja conegut amb variables I(d) on d és un número natural. A continuació, s'ha mostrat com el resultat que permet trobar el filtre òptim per l'estimació de senyals no observables quan les dades segueixen models ARIMA pot estendre's sense problema al cas en que les dades segueixen models ARFIMA. Finalment, i utilitzant els resultats anteriors, s'ha mostrat també com els errors d'especificació derivats d'estimar un model ARIMA enlloc d'un model ARFIMA provoquen errors importants en l'estimació de senyals no observables.

Per tant, a diferència del que passa si hom vol calcular prediccions a curt termini, si l'objectiu és l'estimació de senyals no observables, la decisió d'usar un model ARIMA o ARFIMA és especialment delicada ja que els errors d'especificació tenen greus conseqüències.

8. Sols amb la conclusió anterior ja n'hi ha prou per justificar la importància d'avançar en la recerca de mètodes d'estimació del models ARFIMA que presentin bones propietats. En aquest sentit, s'ha presentat a la tesi una revisió dels diferents mètodes proposats a la literatura per l'estimació, tant paramètrica com semiparamètrica de models per variables amb memòria llarga posant especial interès a destacar els avantatges e inconvenients de cada un d'aquests mètodes. D'aquesta revisió s'extreu, com a conclusió general i més important, que es tracta d'un problema encara no resolt de manera satisfactòria perquè tots els mètodes presentats presenten problemes importants.

9. En relació a l'estimació paramètrica de models ARFIMA, un dels problemes de l'aplicació del principi de la màxima versemblança és la dificultat pràctica que suposa la necessitat de calcular de les autocovariàncies d'aquest tipus de models. En aquest sentit, s'ha proposat a la tesi un mètode que permet calcular, de manera aproximada però molt precisa, les autocovariàncies teòriques d'aquests models de manera molt senzilla. Això permet simplificar-ne molt l'estimació per màxima versemblança

10. Pel que fa a l'estimació semiparamètrica de l'índex de memòria δ, s'han proposat a la tesi un parell de modificacions paramètriques de l'estimador proposat per Geweke i Porter-Hudak (1983) (GPH) que permeten millorar de manera substancial les propietats d'aquest estimador. Més concretament, un dels estimadors proposats permet reduir el biaix de l'estimador GPH quan el procés generador de dades conté un paràmetre autoregressiu o mitjana mòbil positiu gran.

    Pel que fa al segon estimador proposat, tot i que no ha estat analitzat amb detall, es tracta d'una proposta que obre una nova línia d'investigació molt interessant en relació a l'estimació de manera semiparamètrica en sèries amb memòria llarga, basant-se en el model de Bloomfield.

11. S'ha comparat també la utilització d'aquestes extensions de l'estimador GPH per realitzar inferència sobre el paràmetre d en models ARFIMA amb altres contrastos *clàssics* d'integració fraccional i s'ha comprovat com aquest nou mètode presenta propietats molt interessants en termes comparatius.

12. De totes maneres, tot i la seva utilitat per establir una classificació de les sèries temporals en vàries categories i la seva importància pel que fa a les conseqüències que tenen a l'hora de realitzar inferència de tipus economètrica, ni l'índex del grau de memòria δ ni el paràmetre d'integració fraccional d permeten una interpretació clara del grau de persistència que presenten els shocks d'una sèrie temporal. En aquest sentit, s'ha proposat usar com mesura del grau de persistència o memòria, el que s'ha anomenat com *predicció*

màxima que mesura el nombre màxim d'observacions futures sobre les que té sentit calcular prediccions a partir de la informació que proporcionen les dades disponibles de la variable.

La utilització d'aquesta mesura ha permès comprovar com, tot i que el paràmetre d és el que determina, en models ARFIMA, el tipus de memòria de les dades, la resta de paràmetres hi tenen molt a dir. Així, es poden trobar diferents models ARFIMA que, tot i pertànyer a la mateixa categoria pel que fa al tipus de memòria, presentin graus de persistència molt diferents degut a la presència de paràmetres autoregressius i mitjana mòbil.

13. S'ha relacionat el problema de la sobrediferenciació que es produeix quan s'especifica de manera errònia un model ARIMA quan caldria un model ARFIMA amb $d<1$ amb el model ARIMA conegut com model de les línies aèries. Així, tot i que bona part de la tesi no considera la presència d'estacionalitat, s'ha mostrat l'alta probabilitat de que la presència de memòria llarga o memòria permanent finita tant a la freqüència zero com a les freqüències estacionals, porti a utilitzar un model línies aèries.

    Per tant, això permet interpretar el fet que gran nombre de variables econòmiques de periodicitat inferior a l'anual per a les que s'acaba seleccionant com model ARIMA un model línies aèries, com una evidència a favor de que hi ha moltes dades econòmiques que són de memòria llarga o, sobretot, de memòria permanent finita.

14. Per altra banda, cal destacar que s'ha comprovat com el perill d'obtenir regressions estadísticament significatives a partir de sèries temporals independents, és a dir, el que es coneix habitualment com regressions espúries, està associat directament amb el grau de memòria de les variables usades. Així, aquest no és un perill associat únicament a la presència de l'operador $(1-L)$ en la representació autoregressiva de la variable sinó que variables amb memòria permanent finita també presenten aquest perill. De fet, hi ha molt

poca diferència pel que fa a la probabilitat d'obtenir regressions espúries entre sèries amb memòria permanent finita i infinita.

Fins i tot, s'ha comprovat com també en variables estacionàries amb memòria llarga és molt alta la probabilitat d'acceptar com estadísticament significativa una relació entre variables que és espúria, tot i que clarament inferior a la que es dóna amb memòria permanent.

15. Com a solució a aquest problema es proposa la utilització d'un estimador per mínims quadrats ordinaris en el domini de les freqüències que permet obtenir millors estimacions quan les dades contenen memòria llarga. S'ha comprovat a partir d'un ampli exercici de simulació com, efectivament, s'obtenen així estimacions en les que desapareix en bona part el perill d'obtenir com significatius paràmetres que no ho són. A més, s'ha comprovat com aquestes estimacions tenen una variància menor que l'estimador MQO habitual de manera que també presenten un menor error quadràtic mitjà.

16. Finalment, i de tots els resultats anteriors se'n deriva una proposta d'estratègia pràctica per a l'anàlisi de variables econòmiques que aparentment contenen o bé memòria llarga o bé memòria permanent i que, per tant, no són aplicables directament les tècniques disponibles per models ARMA. Concretament, si hom detecta el que habitualment es coneix com un correlograma amb un decreixement molt lent, això indica la necessitat de diferenciar les dades per a que siguin estacionàries. De fet, també els tests d'arrels unitàries dissenyats a partir d'un model autoregressiu serveixen per decidir sobre l'estacionarietat o no estacionarietat de les dades. En tot cas, si s'està interessant en estimar un model de regressió amb les dades sense diferenciar, és recomanable algun mètode d'estimació en el domini de les freqüències com el proposat a la tesi.

    A més, cal considerar la possibilitat que les dades diferenciades tinguin memòria llarga. De totes maneres, si l'objectiu és el càlcul de prediccions a curt termini és suficient l'aproximació del procés generador de les dades amb un model ARMA per les dades diferenciades, o bé si calen prediccions a mig termini, és suficient l'aproximació amb un model autoregressiu d'ordre elevat. En canvi, si el que es pretén és l'estimació d'algun senyal a partir de les dades observades, és molt millor la utilització d'un model ARFIMA per especificar més correctament les característiques de les dades.

Naturalment, tot i que a la tesi no s'inclou cap aplicació pràctica de les propostes presentades, això es deu a que des del primer moment s'ha plantejat la tesi de manera teòrica. Per tant, a partir de la constatació de que les dades temporals poden presentar característiques molt diferents pel que fa a la seva memòria, s'ha plantejat com objectiu de la tesi respondre a una pregunta de tipus teòric, concretament si pot tenir conseqüències per als economètres que treballen amb dades temporals aquesta varietat de situacions, i s'ha demostrat que sí. De totes maneres, els resultats i aportacions que inclou la tesi permetran, en el futur, el desenvolupament de gran número d'aplicacions a l'anàlisi economètrica.

A més, aquesta tesi doctoral ha servit per suggerir possibles línies d'investigació futures que, a la vegada, poden servir per millorar molts aspectes de la mateixa. Així, a partir de la classificació proposada, s'obre un ventall infinit d'aspectes que fora important analitzar. Lluny d'intentar tractar-los tots, que fora impossible, s'ha intentat donar una visió bastant general amb aportacions molt concretes que permeten il·lustrar per on creiem que cal continuar la recerca:

- Per evitar els problemes de biaix en l'estimació de la FAS i de la FAP quan les dades tenen memòria llarga, cal analitzar la possibilitat d'estimar aquestes magnituds a partir de les dades diferenciades (sobrediferenciades ja que al tenir memòria llarga són estacionàries) enlloc de les dades originals.

- El model de Bloomfield o model exponencial (EXP) no ha estat gaire popular per a l'anàlisi economètrica, però s'ha demostrat a la tesi que es pot justificar l'aproximació de qualsevol procés estocàstic a través d'un d'aquests models. Aquest fet obra la possibilitat d'usar un model EXP per l'extensió del mètode d'estimació GPH per obtenir un mètode

REFERÈNCIES BIBLIOGRÀFIQUES

Abesysinghe, T. (1994): "Deterministic seasonal models and spurious regressions", *Journal of Econometrics* **61**, 259-272.

Abraham, M. i A. Dempster (1979): *Research on Seasonal Analysis, progres report on the ASA/Census Project on Seasonal Adjustment*. Technical report, Department of Statistics, Harvard University, Cambridge.

Adelman, I. (1956): "Long cycles: fact or artefact ?", *American Economic Review* **55**, 444-463.

Adenstedt, R.K.(1974): "On large-sample estimation for the mean of a stationary random sequence", *The Annals of Statistics* **2**, 1095-1117.

Agiakloglou, C. i P. Newbold (1994): "Lagrange multiplier tests for fractional difference", *Journal of Time Series Analysis* **15**, 253-262.

Agiakloglou, C.; P. Newbold i M. Wohar (1992): "Bias in an estimator of the fractional difference paramater", *Journal of Time Series Analysis* **14**, 235-246.

Akaike, H. (1973): "Information theory and an extension of the maximum likelihood principle", a Petrou, B.N. i Csaki, F. (eds.): *2nd International Symposium on Information Theory*. Akademiai Kiado, Budapest, 276-281.

An, H.; Z.G. Chen i E.J. Hannan (1983): "The maximum of the periodogram", *Journal of Multivariate Analysis* **15**, 383-400.

Anderson, T.W. (1959): "On the asymptotic distribution of estimates of the parameters of stochastic difference equations", *Annals of Mathematical Statisticss* **30**, 676-687.

Anderson, T.W. (1971): *The Statistical Analysis of Time Series*. John Wiley and Sons, New York.

Anderson, T.W. i J.B. Taylor (1976): "Strong consistency of least squares estimates in normal linear regression", *The Annals of Statistics* **4**, 788-790.

Anderson, T.W. i J.B. Taylor (1979): "Strong consistency of least squares estimates in dynamic models", *The Annals of Statistics* **7**, 484-489.

Andersson, M.K. i M. Gredenhoff (1997): "Bootstrap testing for fractional integration". *Working Paper Series in Economics and Finance nº 188.* Department of Economic Statistics, Stockholm School of Economics.

Andersson, M.K. i M. Gredenhoff (1998): "Robust testing for fractional integration using the Bootstrap". *Working Paper Series in Economics and Finance nº 218.* Department of Economic Statistics, Stockholm School of Economics.

Andrews, D.W.K. (1991): "Heteroscedasticity and autocorrelation consistent covariance estimation", *Econometrica* **59**, 817-858.

Andrews, D.W.K. (1993): "Exactly median-unbiased estimation of first orden autoregressive unit root models", *Econometrica* **61**, 139-165.

Anis, A. A. i E. P. Lloyd (1976): "The expected value of the adjusted rescaled Hurst range of independent normal summands ", *Biometrika* **63**, 111-116.

Ardogan, K. i G.G Booth (1988): "Are there long cycles in common stock returns", *Southern Economic Journal* **55**, 141-149.

Backus, D. K. i S. E. Zin (1993): "Long-memory inflation uncertainty: evidence from the term structure of interest rates ", *Journal of Money, Credit and Banking* **15**, 681-700.

Baillie, R.T. (1989): "Tests of rational expectations and market efficiency ", *Econometric Review* **8**, 151-186.

Baillie, R.T. (1996): "Long memory processes and fractional integration in econometrics", *Journal of Econometrics* **73**, 5-59.

Baillie, R. T. i T. Bollerslev (1989): "Common stochastic trends in a system of exchange rates", *Journal of Finance* **44**, 167-181.

Baillie, R. T. i T. Bollerslev (1994a): "Cointegration, fractional cointegration and exchange rate dynamics ", *Journal of Finance* **49**, 737-745.

Baillie, R. T. i T. Bollerslev (1994b): "Long memory in the forward premium ", *Journal of International Money and Finance* **10**, 582-593.

Baillie, R. T.; T. Bollerslev i H.O. Mikkelson (1996): "Fractionally integrated generalized autoregressive condicional heteroskedasticity ", *Journal of Econometrics* **73**, 167-181.

Baillie, R. T.; C.-F. Chung i M. A. Tieslau (1995): "Analyzing inflation by the fractionally integrated ARFIMA-GARCH model", *Journal of Applied Econometrics* **11**, 23-40.

Bartlett, M.S. (1950): "Periodogram analysis and continuous spectra", *Biometrika* **37**, 1-16.

Bell, W.R. (1984): "Signal extraction for nonstarionary time series", *The Annals of Statistics* **12**, 646-664.

Ben-David, D. i D.H. Papell (1994): *The great wars, the great crash and the unit root hypothesis: some new evidence about an old stylized fact.* National Bureau of Economic Research, Inc., Working Paper 4752.

Beltrao, K.I. i P. Bloomfield (1987): "Determining the bandwidth of a kernel spectrum estimate", *Journal of Time Series Analysis* **8**, 21-38.

Beran, J. (1989): "A test of location for data with slowly decaying serial correlations", *Biometrika* **76**, 261-269.

Beran, J. (1992a): "A goodness of fit test for time series with long-range dependence", *Journal of the Royal Statistical Society B* **54**, 749-760.

Beran, J. (1992b): "Statistical Methods for data with long-range dependence", *Statistical Science* **7**, 404-416.

Beran, J. (1993): "Fitting long-memory models by generalized linear regression", *Biometrika* **80**, 817-822.

Beran, J. (1994): "On a class of M-estimators for Gaussian long-memory models", *Biometrika* **81**, 755-766.

Beran, J. (1994): *Statistics for long-memory processes*. Chapman & Hall, New York.

Beran, J. i N. Terrin (1994): "Estimation of the long-memory parameter, based on a multivariate central limit theorem", *Journal of Time Series Analysis* **15**, 269-278.

Beveridge, S. i C.E. Nelson (1981): "A new approach to decomposition of economic time series into permanent and transitory components with particular attention to measurement of the business cycle", *Journal of Monetary Economics* **7**, 151-174.

Bhansali, R.J. (1973): "A Monte-carlo comparison of the regression method and the spectral methods of prediction", *Journal of the American Statistical Association* **68**, 621-625.

Billingsley, P. (1968): *Convergence of probability measures*. John Wiley, New York.

Billingsley, P. (1979): *Probability and measure*. John Wiley, New York.

Bloomfield, P. (1972): "On the error of prediction of a time series", *Biometrika* **59**, 501-507.

Bloomfield, P. (1973): "An Exponential model for the spectrum of a scalar linear time series", *Biometrika* **60**, 217-226.

Blough, S.R. (1992): "The relationship between power and level for generic unit root tests in finite samples", *Journal of Applied Econometrics* 7, 295-308.

Boes, D.C.; R.A. Davis i S.N. Gupta (1989): "Parameter estimation in low order fractionally differenced ARMA processes", *Stochastic Hydrology and Hydraulics* **3**, 97-110.

Bollerslev, T. i H.O. Mikkelsen (1996): "Modeling and pricing long memory in stock mamrket volatility", *Journal of Econometrics* **73**, 151-184.

Booth, G.; F. Kaen i P. Koveos (1982): "R/S analysis of foreign exchange rates under two international monetary regimes", *Journal of Monetary Economics* **10**, 407-415.

Box, G.E.P. i G.M. Jenkins (1970): *Time series analysis: forecasting and control.* Holden Day, San Francisco.

Box, G.E.P. y D.A. Pierce (1970): "Distribution of residual autocorrelations in autoregressive-integrated moving average time series models", *Journal of the American Statistical Association* **65**, 1509-1526.

Brillinger, D.R. (1975): *Time series data, data analysis and theory.* Holden Day, San Francisco.

Brockwell, P.J. i R. Davis (1991): *Time series: theory and methods.* Segona edició. Springer-Verlag, New York.

Campbell, J. i N.G. Mankiw (1987): "Are output fluctuations transitory ?", *Quarterly Journal of Economics* **102**, 867-880.

Campbell, J. i N.G. Mankiw (1988): "International evidence on persistence of economic fluctuations", NBER Working Paper 2498.

Campbell, J. i R. Schiller (1987): "Cointegration and test of present value models", *Journal of Political Economy* **95**, 1062-1088.

Cappuccio, N. i D. Lubian (1997): "Spurious regressions between I(1) processes with long memory errors", *Journal of Time Series Analysis* **18**, 341-354.

Carlin, J.B. i A.P. Dempster (1989): "Sensitivity analysis of seasonal adjustments: empirical case studies", *Journal of the American Statistical Association* **84**, 6-20.

Carlin, J.B.; A.P. Dempster i A.B. Jonas (1985): "On methods and models for Bayesian time series analysis", *Journal of Econometrics* **30**, 67-90.

Chambers, M.J. (1996): "Fractional integration, trend stationarity and difference stationarity. Evidence from some U.K. macroeconomic time series", *Empirical Economics* **50**, 19-24.

Chan, K.H.C.; J.C Hayya, i J.K. Ord (1977): "A note on trend removal methods: the case of polynomial regression versus variate differencing", *Econometrica* **45**, 737-743.

Chan, N.H. i C.Z. Wei (1988): "Limiting distributions of least squares estimates of unstable autoregressive processes", *Annals of Statistics* **16**, 367-401.

Chatfield, C. (1975): *The Analysis of Time Series: Theory and Practice*. Chapman and Hall, London.

Chen, G.; B. Abraham i S. Peiris (1994): "Lag window estimation of the degree of differencing in fractionally integrated time series models", *Journal of Time Series Analysis* **15**, 473-487.

Cheng, B. i P.M. Robinson (1991): "Density estimation in strongly dependent non-linear time series", *Statistica Sinica* **1**, 335-359.

Cheung, Y.W. (1993a): "Long memory in foreign-exchange rates", *Journal of Business and Economic Statistics* **11**, 93-101.

Cheung, Y.W. (1993b): "Tests for fractional integration: a Monte Carlo investigation", *Journal of Time Series Analysis* **14**, 331-345.

Cheung, Y.W. i F.X. Diebold (1993): "On maximum likelihood estimation of the differencing parameter of fractionally integrated noise with unknown mean", *Journal Econometrics* **62**, 301-316.

Cheung, Y.W. i K.S. Lai (1992): "International evidence on output persistence from postwar data", *Economics Letters* **38**, 435-441.

Cheung, Y.W. i K.S. Lai (1993): "A fractional cointegration analysis of purchasing power parity", *Journal of Business and Economic Statistics* **11**, 103-112.

Choi, I. (1994): "Spurious regressions and residual-based tests for cointegration when regressors are cointegrated", *Journal of Econometrics* **60**, 313-320.

Choi, S. i M.E. Wohar (1992): "The performance of the GPH estimator of the fractional difference parameter", *Review of Quantitative Finance and Accounting* **2**, 409-417.

Chung, C.F. (1994a): "A note on calculation the autocovariances of fractionally integrated ARMA models", *Economics Letters* **45**, 293-297.

Chung, C.F. (1994b): "A generalized fractionally integrated autorregressive moving-average process", *Journal of Time Series Analysis* **17**, 111-140.

Chung, C.F. (1996): "On estimating a generalized long memory model", *Journal of Econometrics* **73**, 293-297.

Chung, C.F. i R.T. Baillie (1993): "Small sample bias in conditional sums of squares estimators of fractionally integrated ARMA models", *Empirical Economics* **18**, 791-806.

Clark, P.K. (1987): "The cyclical component of U.S. economic activity", *Quarterly Journal of Economics* **102**, 797-814.

Cleveland, W.S. (1971). "Fitting time series models for prediction", *Technometrics* **13**, 713-723.

Cleveland, W.P. i G.C. Tiao (1976). "Descomposition of seasonal time series: A model for the X-11 program", *Journal of the American Statistical Association* **71**, 581-587.

Cochrane, D. i G.H. Orcutt (1949): "Application of least squares regression to relationships containing autocorrelated error terms", *Journal of the American Statistical Association* **44**, 32-61.

Cochrane, J.H. (1987): "Spectral density estimates of unit roots". Document de treball no publicat. Department of Economics, University of Chicago.

Cochrane, J.H. (1988): "How big is the random walk in GNP?", *Journal of Political Economy* **96**, 893-290.

Cochrane, J.H. (1991): "A critique of the application of unit root tests", *Journal of Economic Dynamics and Control* **15**, 275-284.

Cochrane, J.H. i A.M. Osborne (1988): "Multivariate estimates of the permanent components of GDP and stock prices", *Journal of Economic Dynamics and Control* **12**, 255-296.

Cogburn, I. i H.T. Davis (1982): "Periodic splines and spectral estimation", *The Annals of Statistics* **2**, 1108-1126.

Cogley, T. (1990): "Interntional evidence on the size of the random walk in output", *Journal of Political Economy* **98**, 501-518.

Comte, F. i E. Renault (1996): "Long memory continuous time models", *Journal of Econometrics* **73**, 101-149.

Cox, D.R. (1977): "Contribution to discussion of paper by A.J. Lawrence i N.J. Kottegoda", *Journal of Royal Statistical Society A* **140**, 34.

Crato, N. i B.K. Ray (1995): "Model selection and forecasting for long-range dependent processes". Document de treball no publicat.

Crato, N. i P. de Lima (1994): "Long-range dependence in the conditional variance of stock returns", *Economics Letters* **45**, 281-285.

Crato, N. i P. Rothman (1994a): "Fractional integration analysis of long-run behavior for US macroeconomic time series", *Economics Letters* **45**, 287-291.

Crato, N. i P. Rothman (1994b): "A reppraisal of parity reversion for UK real exchange rates", *Applied Economics Letters* **1**, 139-141.

Cressie, N. (1988): "A graphical procedure for determining non-stationarity in time series", *Journal of American Statistical Association* **83**, 1108-1116.

Dalhaus, R. (1988): "Small sample effects in time series analysis: a new assimptotic theory and a new estimator", *The Annals of Statistics* **16**, 808-841.

Dahlhaus, R. (1989): "Efficient parameter estimation for self-similar processes", *The Annals of Statistics* **17**, 1749-1766.

Davies, N. i P. Newbold (1980): "Forecasting with misspecified models", *Applied Statistics* **29**, 87-92.

Davies, R.B. i D.S. Harte (1987): "Tests for Hurst effect", *Biometrika* **74**, 95-101.

Dehling, H. i M.S. Taqqu (1987): "The empirical process of some long-range dependent sequences with an application to U-statistics", *Annals of Statistics* **17**, 1767-1783.

DeJong, D.N.; J.C. Nankervis; N.E. Savin i C.H. Whiteman (1992): "Integration versus trend stationary in time series", *Econometrica* **60**, 423-433

Delgado, M. (1996): "Testing serial independence using the sample distribution function", *Journal of Time Series Analysis* **17**, 271-285.

Delgado, M. i P.M. Robinson (1993): "Optimal spectral bandwidh for long memory time series". Document de treball no publicat.

Delgado, M. i P.M. Robinson (1994): "New methods for the analysis of long memory time series: Application to Spanish inflation", *Journal of Forecasting* **13**, 97-107.

Demery, D. i N.W. Duck (1992): "Are economic fluctuations really persistent?. A reinterpretation of some international evidence", *The Economic Journal* **102**, 1094-1111.

Dent, W. i A.S. Min (1978): "A Monte Carlo study of autorregressive integrated moving average processes", *Journal of Econometrics* **7**, 23-55.

Dickey, D.A.; W.R. Bell i R.B. Miller (1986): "Unit roots in economic time series: a selective survey", a Fomby, T.B. i G.F Rhodes (eds.), *Advances in Econometrics: Cointegration, Spurious Regressions, and Unit Roots*. JAI Press, Greenwich.

Dickey, D.A. i W.A. Fuller (1979): "Distribution of the estimators for autoregressive time series with a unit root", *Journal of the American Statistical Association* **74**, 427-431.

Diebold, F.X. (1988): "Testing for bubbles, reflecting barriers and other anomalies", *Journal of Economic Dynamics and Control* **12**, 63-70.

Diebold, F.X. (1989): "Random walk versus fractional integration: power comparisons of scalar and joint tests of the variance-time function", a Raj. B: *Advances in Econometrics and Modelling*, 29-45.

Diebold, F.X.; S.H. Husted; i M. Rusch (1991): "Real exchange rates under the gold standard", *Journal of Political Economy* **99**, 1253-1271.

Diebold, F.X. i M. Nerlove (1990): "Unit roots in economic time series: A selective survey", a *Advances in Econometrics* Vol. **8**, 3-69.

Diebold, F.X. i G.D. Rudebusch (1989): "Long memory and persistence in aggregate output", *Journal of Monetary Economics* **24**, 189-209.

Diebold, F.X. i G.D. Rudebusch (1991a): "Is consumption too smooth? long-memory and the deaton paradox", *Review of Economics and Statistics* **74**, 1-9.

Diebold, F.X. i G.D. Rudebusch (1991b): "On the power of Dickey-Fuller tests against fractional alternatives", *Economics Letters* **35**, 155-160.

Ding, Z. i C.W.J. Granger (1996): "Modeling volatility persistence of speculative returns: A new approach", *Journal of Econometrics* **73**, 185-215.

Ding, Z.; C.W.J. Granger; i R.F. Engle (1993): "A long memory property of stock returns and a new model ", *Journal of Empirical Finance* **1**, 83-106.

Dolado, J.J. i F. Marmol (1997): "On the properties of the Dickey-Pantula test against fractional alternatives", Working Paper 97-11. Universidad Carlos III de Madrid.

Dolado, J.J. i F. Marmol (1996): "Efficient estimation of cointegrating relationships among higher order and fractionally integrated processes ", Documento de Trabajo nº 9617. Servicio de Estudios del Banco de España. Madrid.

Doob, J.L. (1953): *Stochastic Processes*. Wiley, New York.

Dubrovin, V.T. i D.A. Moskvin (1979): "The central limit theorem for sums of functions of mixing sequences", *Theory of Probability and its Applications* **24**, 560-570.

Durbin, J. (1969): "Tests for serial correlation in regression analysis based on the periodogram of least squares residuals", *Biometrika* **56**, 1-15.

Durlauf, S. i P.C.B. Phillips (1988): "Trend versus random walks in time series analysis", *Econometrica* **56**, 1333-1354.

Dzhaparidze, K. (1986): *Parameter estimation and hypothesis testing in spectral analysis of stationary time series*. Springer, New York.

Elliot, G.; J.H. Stock i T. Rothenberg (1994): "Efficient test of an autoregressive unit root". Document de treball no publicat.

Engle, R.F. (1974): "Band spectrum regression", *International Economic Review* **15**, 1-11.

Engle, R.F. (1976): "Band spectrum regression methods with lagged dependent variables and stationary errors. An iterated instrumental variables approach". Presentat al *Symposium on Current Directions in Applied Time Series*. Tulsa, Oklahoma.

Engle, R.F. i R. Gardner (1976): "Some finite sample properties of spectral estimators of a linear regression", *Econometrica* **44**, 149-166.

Engle, R.F. i C.W.J. Granger (1987): "Cointegration and error correction: representation, estimation and testing", *Econometrica* **55**, 251-276.

Fama, E.F. i K.R. French (1988): "Permanent and temporary components of stock prices", *Journal of Political Economy* **96**, 246-273.

Faust, J. (1992): "When are variance ratio tests for serial dependence optimal ?", *Econometrica* **60**, 1215-1226.

Fox, R. i M.S. Taqqu (1985): "Noncentral limit theorems for quadratic forms in random variables having long-range dependence", *Annals of Probability* **13**, 428-446.

Fox, R. i M.S. Taqqu (1986): "Large sample properties of parameter estimates for strongly dependent stationary Gaussian time series", *The Annals of Statistics* **14**, 517-532.

Fox, R. i M.S. Taqqu (1987): "Central limit theorems for quadratic forms in random variables having long-range dependence", *Probability Theory and Related Fields* **74**, 213-240.

Franses, P.H. i M. Ooms (1995): "A periodic long-memory ARFIMA(0,D(s),0) Model for Quarterly UK Inflation". Econometric Institute Report, Erasmus University Rotterdam, The Netherlands.

Freedman, L i D. Lane (1981): "The empirical distribution of the Fourier coefficients of a sequence of independent, identically distributed long-tailed random variables", *Z. Wahrscheinlichkeits theorie verw. Gebiete* **55**, 21.37.

Fuller, W.A. (1996): *Introduction to statistical time series*. John Wiley, New York.

Gagnon, J.E. (1988): "Short-run models and long-run forecasts: a note on the permanence of output fluctuations", *Quarterly Journal of Economics* **103**, 415-424.

Galbraith, J.W. i V. Zinde-Walsh (1997): "Time-domain methods for the estimations of fractionally integrated time series models". Document de treball no publicat. Department of Economics, McGill University.

Gallant, R. i G. Tauchen (1996): "Which moments to match ?", *Econometric Theory* **12**, 657-681.

Gallant, A.R. i H. White (1987): *A unified theory of estimation and inference for nonlinear dynamic models*. Basil Blackwell, Oxford.

Geweke, J. (1982): "Measurement for linear dependence and feedback between multiple time series", *Journal of the American Statistical Association* **77**, 303-323.

Geweke, J. (1986): "The superneutrality of money in USA. An interpretation of its evidence", *Econometrica* **54**, 1-21.

Geweke, J. i S. Porter-Hudak (1983): "The estimation and application of long memory time series models", *Journal of Time Series Analysis* **4**, 221-238.

Geweke, J. i R. Meese (1981): "Estimating regression models of finite but unknown order", *International Economic Review* **22**, 55-70.

Giraitis, L. i D. Surgailis (1990): "A central limit theorem for quadratic form in strongly dependent linear variables and its applications to Whittle's estimate", *Probability Theory and Related Fields* **86**, 87-104.

Gil-Alaña, L.A. i P.M. Robinson (1997): "Testing of unit root and other nonstationary hypotheses in macroeconomic time series ", *Journal of Econometrics* **80**, 241-268.

Ghysels, D., H.S. Lee i J. Noh (1994): "Testing for unit roots in seasonal time series", *Journal of Econometrics* **62**, 415-442.

Godfrey, L.G. (1979): "Testing the adequacy of a time series model", *Biometrika* **66**, 62-72.

Gourieroux, C.A.; A. Maurel i A. Monfort (1987): "Regression and non stationarity", INSEE, Working Paper 8708.

Gourieroux, C.A.; A. Maurel i A. Monfort (1989): "Least Squares and fractionally integrated regressors". Document de treball no publicat.

Gourieroux, C.A.; A. Monfort i E. Renault (1993): "Indirect inference ", *Journal of Applied Econometrics* **8**, 85-118.

Gradhsteyn, I.S. i I.W. Ryzhik (1965): *Table of Integrals, Series and Products*. Academic Press, New York.

Graf, H.P. (1983): "Long-range correlations and estimation of the self-similarity parameter". Tesi doctoral. ETH Zurich.

Graf, H.P., F.R. Hampel i J.D. Tacier (1984): "The problem of unsuspected series correlations" a J. Franke, W. Hardle i D. Martin (eds), *Robust and Nonlinear Time Series Analysis* (Lecture Notes in Statistics, 26). Springer-Verlag, New York.

Granger, C.W.J. (1966): "The typical spectral shape of an economic variable", *Econometrica* **34**, 150-161.

Granger, C.W.J. (1980): "Long memory relationships and the aggregation of dynamics models", *Journal of Econometrics* **14**, 227-238.

Granger, C.W.J. (1981): "Some properties of time series data and their use in econometric model specification ", *Journal of Econometrics* **16**, 121-130.

Granger, C.W.J. i Z. Ding (1996): "Varieties of long memory models", *Journal of Econometrics* **73**, 61-77.

Granger, C.W.J. i R. Joyeaux (1980): "An introduction to long-memory yime series models and fractional differencing", *Journal of Time Series Analysis* **1**, 15-29.

Granger, C.W.J. i P. Newbold (1974): "Spurious regressions in Econometrics", *Journal of Econometrics* **2**, 111-120.

Granger, C.W.J. i P. Newbold (1974): *Forecasting Economic Time Series*. Academic Press, New York.

Gray, H.L.; N.F. Zhang i W.A. Woodward (1989): "On generalized fractional processes", *Journal of Time Series Analysis* **10**, 233-257.

Gray, H.L.; N.F. Zhang i W.A. Woodward (1994): "On generalized fractional processes - A correction", *Journal of Time Series Analysis* **15**, 561-562.

Greene, M.T. i B.D. Fielitz (1977): "Long-term dependence in common stock returns", *Journal of Financial Economics* **4**, 339-349.

Greene, M.T. i B.D. Fielitz (1979): "The effect of long-term on risk return models of common stocks", *Operations Reseach* **27**, 944-951.

Grenander, U. i A. Szego (1968): *Toeplitz forms and their applications*. University of California Press, Berkeley.

Hakkio, C.S. i M. Rush (1991): "Cointegration: how short is the long run ?", *Journal of International Money and Finance* **10**, 571-581.

Haldrup, N. (1994): "The assymptotics of single-equation cointegration regressions with I(1) and I(2) variables", *Journal of Econometrics* **63**, 153-181.

Hamilton, J.D. (1994): *Time series analysis*. Princeton University Press, New Jersey.

Hampel, F. (1987): "Data analysis and self-similar processes". Invited Paper, ISI, Tokyo.

Hannan, E.J. (1960): *Time Series Analysis*. Methuen, London.

Hannan, E.J. (1963): "Regression for time series with errors of measurement", *Biometrika* **50**, 293-302.

Hannan, E.J. (1970): *Multiple Time Series*. Wiley, New York.

Hannan, E.J. i M. Kanter (1977): "Autoregressive processes with infinite variance", *Journal of Applied Probability* **14**, 411-415.

Harvey, A.C. (1978): "Linear regression in the frequency domain", *International Economic Review* **19**, 507-512.

Harvey, A.C. (1989): *Forecasting, structural time series models and the Kalman filter*. Cambridge University Press, Cambridge.

Haslet, J. i A.E. Raferty (1989): "Space time modelling with long-memory dependence: Assessing Ireland's wind power resource" *Journal of the Royal Statistical Society C* **38**, 1-50.

Hassler, U. (1993a): *Fraktional integrierte prozesse in der ökonometrie*. Haag & Herchen, Frankfurt.

Hassler, U. (1993b): "Regression of spectral estimators with fractionally integrated time series", *Journal of Time Series Analysis* **14**, 369-380.

Hassler, U. (1993c): "Unit root tests: the autoregressive approach in comparison with the periodogram regression", *Statistical Papers* **67**, 67-82.

Hassler, U. (1994): "(Mis)specification of long-memory in seasonal time series", *Journal of Time Series Analysis* **15**, 19-30.

Hassler, U. (1996): "Spurious regressions when stationary regressors are included", *Economics Letters* **50**, 25-31.

Hassler, U. (1997): "Sample autocorrelations of nonstationary fractionally integrated processes", *Statistical Papers* **38**, 43-62.

Hassler, U. i J. Wolters (1994): "On the power of unit roots against fractionally integrated alternatives", *Economics Letters* **45**, 1-5.

Hassler, U. i J. Wolters (1995): "Long-memory and inflation rates: international evidence", *Journal of Business and Economic Statistics* **13**, 37-56.

Haubrich, J.G. (1992): "Consumption and fractional differencing: old and new anomalies". Document de treball no publicat.

Haubrich, J. i A. Lo (1993): *The sources and nature of long-tern dependence in the business cycle*. NBER Working Paper 2951.

Hauser, M.A. (1993): "On the selection of moving average and fractionally integrated models", presentat a IFAC Workshop on Economic Time Series Analysis and System Identification. Viena, 1-3 de Juliol de 1993.

Hauser, M.A.(1997): "Semiparametric and nonparametric testing for long memory: A Monte Carlo study", *Empirical Economics* **22**, 247-271.

Hauser, M.A.; B.M. Pötscher i E. Reschenhofer (1992): "Measuring persistence in aggregate output: ARMA models, fractionally integrated ARMA models and nonparametric procedures". Preprint, Institut für Statistik und Informatik, Universität Wien, Austria.

Helms, B., F. Kaen i R. Rosenman (1984): "Memory in commodity futures contracts", *Journal of Futures Markets* **4**, 559-567.

Hidalgo, J. i P.M. Robinson (1996): "Testing for structural change in a long-memory environment", *Journal of Econometrics* **70**, 159-174.

Hillmer, S.C. i G.C. Tiao (1982): "An arima-model based approach to seasonal adjustment", *Journal of the American Statistical Association* **77**, 63-70.

Hipel, K.W. i A.I. McLeod (1978a): "Preservation of the rescaled adjusted range: simulation studies using Box-Jenkins models", *Water Resources Research* **14**, 509-516.

Hipel, K.W. i A.I. McLeod (1978b): "Preservation of the rescaled adjusted range: fractional gaussian noise algorithms", *Water Resources Research* **14**, 517-518.

Ho, H. (1996): "On central and non-central limit theorems in density estimation for sequences of long-range dependence", *Stochastic Processes and their Applications* **63**, 153-174.

Ho, H. i Hsing, T. (1996): "On the asymptotic expansion of the empirical process of long-memory moving averages", *The Annals of Statistics* **24**, 992-1024.

Hosking, J.R.M. (1981): "Fractional differencing", *Biometrika* **68**, 165-176.

Hosking, J.R.M. (1984): "Modeling persistence in hydrological time series using fractional differencing", *Water Resources Research* **20**, 1898-1908.

Hosking, J.R.M. (1996): "Asymptotic distribution of the sample mean, autocovariances, and autocorrelations of long-memory time series", *Journal of Econometrics* **73**, 261-284.

Hosoya, Y. (1996): "The quasi-likelihood approach to statistical inference on multiple time-series with long-range dependence", *Journal of Econometrics* **73**, 217-236.

Huizinga, J.H. (1987): "An empirical investigation of the long run behavior of real exchange rates", *Carnegie-Rochester Conference at Services of Public Policy* **27**, 149-214.

Hurst, H.E. (1951): "Long-term storage capacity of reservoirs", *Transactions of the American Society of Civil Engineers* **116**, 770-808.

Hurst, H.E. (1956): "Methods of using long term storage in reservoirs", *Proceedings of the Institute of Civil Engineers* **1**, 519-543.

Hurst, H.E. (1957): "A suggested statistical model of some time series that occur in nature", *Nature* **180**, 494.

Hurvich, C.M. (1985): "Data driven choice of a spectrum estimate: extending the applicability of cross-validation methods", *Journal of American Statistical Association* **80**, 933-940.

Hurvich, C.M. i K.I. Beltrao (1993): "Asymptotics for the low-frequency ordinates of the periodogram of a long-memory time series", *Journal of Time Series Analysis* **14**, 455-472.

Hurvich, C.M. i K.I. Beltrao (1994): "Automatic semiparametric estimation of the long memory parameter of a long memory time series", *Journal of Time Series Analysis* **15**, 285-332.

Hurvich, C.M. i B.K. Ray (1995): "Estimation of the long memory parameter for non-stationary of non-invertible fractionally integrated processes", *Journal of Time Series Analysis* **16**, 17-41.

Hurvich, C.M. i C.L. Tsai (1989): "Regression and time series model selection in small samples", *Biometrika* **76**, 297-307.

Ibragimov, I.A. (1959): "Some limit theorems for stochastic processes stationary in the strict sense", *Doklady Akademia Nauk, USSR* **125**, 711-714.

Ibragimov, I.A. (1963): "On estimation of the spectral function of a stationary Gaussian proces", *Theory of Probability and its Applications* **8**, 366-401.

Ibragimov, I.A. (1965): "On the spectrum of stationary gaussian sequences satisfying the strong mixing condition. I. Necessari conditions", *Theory of Probability and its Applications* **10**, 85-106.

Ibragimov, I.A. (1970): "On the spectrum of stationary gaussian sequences satisfying the strong mixing condition. II. Sufficient conditions", *Theory of Probability and its Applications* **15**, 23-36.

Ibragimov, I.A. i Y.V. Linnik (1971): *Independent and stationary sequences of random variables*. Wolters-Noordhoff, Groningen.

Inclán, C. i G.C. Tiao (1994): "Use of cumulative sums of squares for retrospective detection of changes of variance", *Journal of American Statistical Association* **89**, 913-923.

Iosifescu, M. i R. Theodorescu (1969): *Random processes and learning*. Springer-Velarg, New York.

Janacek, G.J. (1982): "Determining the degree of differencing for time series via the log spectrum", *Journal of Time Series Analysis* **3**, 177-183.

Jeffreys, H. (1939): *Theory of Probability*. Clarendon Press, Oxford.

Jenkins, G. M. i Watts, D.G. (1968): *Spectral Analysis and its Applications*. Holden-Day, San Francisco.

Jensen, M.J. (1994): "Wawelet analysis of fractionally integrated processes". Document de treball no publicat. Department of Economics, Washington University.

Jensen, M.J. (1995): "Ordinary least squares estimate of the fractional differencing paramenter using wawelets as derived from smoothing kernels". Document de treball no publicat. Department of Economics, Washington University.

Jensen, M.J. (1995): "Analysis and estimation of fractionally integrated processes with compactly supported wawelets". Document de treball no publicat. Department of Economics, Washington University.

Johansen, S. (1988): "Statistical analysis of cointegration vectors", *Journal of Economic Dynamics and Control* **12**, 231-254.

Johansen, S. (1991): "Estimation and hypothesis testing of cointegration vectors in Gaussian vector autoregressive models", *Econometrica* **59**, 1551-1580.

Jonas, A.J. (1983): Persistent Memory Random Processes. Tesi doctoral. Department of Statistics, Harvard University, Cambridge.

Jones, R.H. (1964): "Spectral analysis and linear prediction of meteorological time series", *Journal of Applied Meteorology* **3**, 45-52.

Juselius, K. (1994): "On the duality between long-run relations and common trends in the I(1) versus I(2) model: an application to aggregate money holdins", *Econometric Reviews* **13**, 151-178.

Kaen, F.R. i R.E. Rosenman (1986): "Predictable behaviour in financial markets: some evidence in support of Heiner's hyphotesis", *American Economic Review* **76**, 212-220.

Kashyap, R.L. i K.G. Eom (1988): "Estimation in long-memory time series model", *Journal of Time Series Analysis* **9**, 35-41.

Kashyap, R.L. i Lapsa, P.M. (1984): "Synthesis and estimation of random fields using long correlation models", *IEEE Trans. Pattern Anal. Machine Intell.* **6**, 800-809.

Kennedy, D. (1976): "The distribution of the maximum Brownian excursion", *Journal of Applied Probability* **13**, 371-376.

Kim, Y. (1990): "Purchaising power parity in the long run: A cointegration approach", *Journal of Money, Credit and Banking* **22**, 491-503.

King, M.L. i G. Hillier (1985): "Locally best invariant tests of the error covariance matrix of the linear regression model", *Journal of the Royal Statistical Society B* **47**, 98-102.

Klüppelberg, C. i T. Mikosch (1993): "Spectral estimates and stable processes", *Stochastic Processes and their Applications* **47**, 323-344.

Kokoszka, P.S. i M.S. Taqqu (1995): "Fractional ARIMA with stable innovations", *Stochastic Processes and their Applications* **60**, 19-47.

Kokoszka, P.S. i M.S. Taqqu (1996a): "Infinite variance stable moving averages with long memory", *Journal of Econometrics* **73**, 79-99.

Kokoszka, P.S. i M.S. Taqqu (1996b): "Parameter estimation for infinite variance fractional ARIMA", *The Annals of Statistics* **24**, 1880-1913.

Koop, G. (1991): "International properties of real output: Bayesian analysis of long memory and persistence using ARFIMA models", *Journal of Busines and Economic Statistics* **9**, 253-266.

Koop, G.; E. Ley; J. Osiewalski i M.F.J. Steel (1997): "Bayesian analysis of long memory and persistance using ARFIMA models", *Journal of Econometrics* **76**, 149-169.

Kolmogorov, A.N. (1940): "Wienersche spiralem und einige andere interessante kurven in hilbertschen raum", *Comptes Rendues URSS* **26**, 115-118.

Kolmogorov, A.N. (1941a): "Local structure of turbulence in an incompressible liquid for very large reynodls numbers", *Comptes Rendues URSS* **30**, 299-303.

Kolmogorov, A.N. (1941b): "Interpolation und extrapolation von stationärem zufalligen folgen", *Boletín de la Academia de Ciencias,* URSS, Series Mat. **5**, 3-14.

Koustas, Z. i W. Veloce (1996): "Unemployment hysteresis in Canada: an approach based on long-memory time series models", *Applied Economics* **28**, 823-831.

Künsch, H. (1986): "Discrimination between monotonic trends and long-range dependence", *Journal of Applied Probability* **23**, 1025-1030.

Künsch, H. (1987): "Statistical aspects of self-similar processes", a Prohorov, A. i V.V. Sazanov: *Proceedings of the First World Congress of the Bernouilli Society* **1**, 67-74. VNU Science Press, Utrecht.

Kwiatowski, D.; P.C.B. Phillips; P. Schmidt i Y. Shin (1992): "Testing the null hypothesis of stationarity against the alternative of unit root: how sure are we that economic time series have a unit root?", *Journal of Econometrics* **54**, 159-178.

Lai, T.L. i H. Robins (1977): "Strong consistency of least squares estimates in regression models", *Proceedings at National Academy Science of USA* **74**, 2667-2669.

Lai, T.L.; H. Robins i C.Z. Wei (1978): "Strong consistency of least squares estimates in multiple regression", *Proceedings at National Academy Science of USA* **75**, 3034-3036.

Lai, T.L.; H. Robins i C.Z. Wei (1979): "Strong consistency of least squares estimates in multiple regression. II", *Journal of Multivariate Analysis* **9**, 343-361.

Lawrence, A.J. i N.T. Kottegoda (1977): "Stochastic modelling of riverflow time series", *Journal of Royal Statistical Society A* **140**, 1-47.

Lee, D. i P.M. Robinson (1996): "On the power of the KPSS test of stationarity against fractionally-integrated alternatives", *Journal of Econometrics* **73**, 285-302.

Lee, D. i P. Schmidt (1996): "On the power of the KPSS test of stationary against fractionally integrated alternatives", *Journal of Econometrics* **73**, 285-302.

Lee, H.S. i C. Amsler (1997): "Consistency of the KPSS unit root test against fractionally integrated alternatives", *Economics Letters* **55**, 151-160.

Leeux, J. (1994): "The covariance matrix of ARMA errors in closed form", *Journal of Econometrics* **63**, 397-405.

Lehmann, E.L. (1959): *Testing Statistical Hypotheses*. Wiley, New York.

Li, W.K. i A.I. McLeod (1986): "Fractional time series modeling", *Biometrika* **73**, 217-221.

Lin, J.Y. (1991): "Generalized integrated process and the aggregation of dynamic time series", *Academia Economic Papers* **19**, 207-226.

Linden, M. (1995): "Finish GNP- Series 1954/1-1990/IV: Small shock persistence or trend stationarity ?. Some evidence with variance ratio estimates", *Empirical Economics* **20**, 333-349.

Ljung, G.M. y Box, G.E.P. (1978): "On the measure of lack of fit in time series models", *Biometrika* **65**, 297-303.

Lo, A.W. (1991): "Long term memory in stock market prices", *Econometrica* **59**, 1279-1313.

Lo, A.W. i A.C. MacKinlay (1988): "Stock market prices do not follow a random walk: evidence from a new specification test", *Review of Financial Studies* **25**, 164-176.

Lo, A.W. i A.C. MacKinlay (1989): "The size and power of the variance ratio test in finite samples", *Journal of Econometrics* **40**, 203-238.

Lobato, I. (1997): "Semiparametric estimation of seasonal long memory models: theory and application to the modelling of exchange rates", *Investigaciones Económicas* **21**, 273-295 .

Lobato, I. i P.M. Robinson (1996): "Averaged periodogram estimation of long memory", *Journal of Econometrics* **73**, 303-324.

Lobato, I. i P.M. Robinson (1996): "A nonparametric test for I(0)". Document de treball no publicat

Lobato, I. i N.E. Savin (1997): "Real and spurios long memory properties of stock market data". Document de treball no publicat

Luceño, A. (1993): "A fast algorithm for the repeated evaluation of the likelihood of a general linear process for long series", *Journal of the American Statistical Association* **88**, 229-236.

Mandelbrot, B.B. (1969): "Long-run Linearity, Locally Gaussian Processes, H-Spectra and Infinite Variances", *International Economic Review* **10**, 82-111.

Mandelbrot, B.B. (1971): "When can price be arbitraged efficiently? A limit to the validity of the random walk and martingale models", *Review of Economic and Statistics* **53**, 225-236.

Mandelbrot, B.B. (1972): "Statistical Methodology for Nonperiodic Cycles: From the Covariance to R/S Analysis", *Annals of Economic and Social Measurement* **1/3**, 259-290.

Mandelbrot, B.B (1973): "Le problème de la réalité des cycles lents et le 'syndrome de Joseph'", *Economique Applicée* **26**, 349-365.

Mandelbrot, B.B. (1975a): "Limit theorems on the self-normalized range for weakly and strongly dependent processes", *Zeitschrift für Wahrscheinlichkeitstheorie und verwandte Gebiete* **31**, 271-285.

Mandelbrot, B.B. (1975b): "A fast fractional gaussian noise generator", *Water Resources Research* **7**, 543-553.

Mandelbrot, B.B. i M. Taqqu (1979): "Robust R/S analysis of long run serial correlation", *Bulletin of International Statistical Institute* **48**, 59-104.

Mandelbrot, B.B i J.W. Van Ness (1968): "Fractional brownian motions, fractional noises and applications" *SIAM Review* **10**, 422-437.

Mandelbrot, B.B i J.R. Wallis (1968): "Noah, Joseph i operational hydrology", *Water Resources Research* **4**, 909-918.

Mandelbrot, B.B i J.R. Wallis (1969a): "Computer experiments with fractional gaussian noises", *Water Resources Research* **5**, 228-267.

Mandelbrot, B.B i J.R. Wallis (1969b): "Robustness of the rescaled range R/S in the measurement of noncyclic long-run statistical dependence", *Water Resources Research* **5**, 967-988.

Mankiw, N.G. i M.D. Shapiro (1985): "Trends, random walks and tests of the permanent income hypothesis", *Journal of Monetary Economics* **16**, 165-174.

Mankiw, N.G. i M.D. Shapiro (1986): "Do we reject too often? small sample properties of tests of rational expectations models", *Economics Letters* **20**, 139-145.

Maravall, A. (1985): "On structural time series models and the characterization of components", *Journal of Business and Economic Statistics* **3**, 350-355.

Maravall, A. (1987): "Descomposición de series temporales: especificación, estimación e inferencia", *Estadística Española* **114**, 11-106.

Maravall, A. (1996): "Unobserved components in economic time series", Documento de Trabajo nº 9609. Servicio de Estudios del Banco de España.

Marmol, F. (1995): "Spurios regressions between I(d) processes ", *Journal of Time Series Analysis* **16**, 313-321

Marmol, F. (1996a): "Correlation theory of spuriously related higher order integrated processes", *Economics Letters* **50**, 163-173.

Marmol, F. (1996b): "Nosense regressions between integrated processes of different orders", *Oxford Bulletin of Economics and Statistics* **58**, 524-536

Marmol, F. (1997): "Fractional integration versus-trend stationary in time series analysis". Working Paper 97-02. Universidad Carlos III de Madrid.

Marmol, F. (1997): "Fractional integration versus trend stationary in time series analysis". XXII Simposio de Análisis Económico. Barcelona, 10-12 de Decembre.

Marmol, F. (1997): "Spurious regression theory with nonstationary fractionally integrated processes". Working Paper 97-03. Universidad Carlos III de Madrid.

Marmol, F. i J.C. Reboredo (1997a): "On the finite sample behaviour of the Durbin-Watson test in the presence of nonsense regressions", Document de Treball nº 379-97, IAE-UAB.

Marmol, F. i J.C. Reboredo (1997b): "Detecting unbalanced regressions using the Durbin-Watson test", Document de Treball nº 380-97, IAE-UAB.

Martin, G. (1995): "Fractional cointegration: A bayesian approach". Monash University Working Paper 17/95.

Martin, V.L. i N.P. Wilkins (1997): "Indirect estimation of ARFIMA and VARFIMA models", Research Paper number 547. The University of Melbourne.

McLeod, I. (1975): "Derivation of the theoretical autocovariance function of autorregressive moving average time series", *Applied Statistics* **24**, 225-226.

McLeod, A.I. i K.W. Hipel (1978): "Preservation of the rescaled adjusted range: a reassessment of the Hurst phenomenon", *Water Resources Research* **14**, 491-508.

McLeod, A.I., Sales, i P.R. Holand (1983): "An algorithm for approximate likelihood calculations of ARMA and seasonal ARMA models", *Applied Statistics* **32**, 211-223.

McLeish, D.L. (1975): "Invariance principles for dependent varaibles", *Zeitschrift für Wahrscheinlichkeitstheorie und werwandte Gebbiete* **32**, 165-178.

Meese, R.A. i K.L. Singleton (1981): "On unit roots and the empirical modeling of exchange rates", *Journal of Finance* **37**, 1029-1035.

Mohr, D. (1981): *Modelling data as a fractional gaussian noise*. Tesi Doctoral. Princeton University.

Moran, P.A.P. (1943): "Some theorems on time series. I", *Biometrika* **34**, 281-291.

Nelson, F.C. (1972): "The prediction performance of the F.R.B.-M.I.T.T.-P.E.N.N. model of the US Economy", *American Economic Review* **62**, 909-917.

Nelson, C.R. (1988): "Spurious trend and cycle in the state space decomposition of a time series with a unit root", *Journal of Economic Dynamics and Control* **12**, 475-488.

Nelson, C.R. i H. Kang (1981): "The spurious periodicity in inappropiately detrended time series", *Econometrica* **49**, 741-753.

Nelson, C.R. i P. Plosser (1982): "Trends and random walks in macroeconomic time series: some evidence and implications", *Journal of Monetary Economics* **10**, 139-162.

Newbold, P. i C. Agiakloglou (1993): "Bias in the sample autocorrelations of fractional noise", *Biometrika* **80**, 698-702.

Newcomb, S. (1886): "A generalized theory of the combination of observations so as to obtain the best result", *American Journal of Mathematics* **8**, 343-363.

Noakes, D.J.; K.W. Hipel; A.I. McLeod; C. Jimenez i S. Yakowitz (1988): "Forecastin annual geophysical time series", *International Journal of Forecasting* **4**, 103-114.

Nyblom, J. (1989): "Testing for the Constancy of Parameters over Time", *Journal of the American Statistical Association* **84**, 223-230.

Odaki, M. (1993): "On the invertibility of fractionally differenced ARIMA processes", *Biometrika* **80**, 703-709.

Öller, C.E. (1985): "How far changes in general business activity be forecasted", *International Journal of Forecasting* **1**, 135-141.

Oodaira, H. i K. Yoshihara (1972): "Functional central limit theorems for strictly stationary processes satisfying the strong mixing condition", *Kodai Mathematical Seminar Reports* **24**, 259-269.

Ooms, M. (1994): *Empirical Vector Autoregressive Modeling*, volume 407 of Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems. Springer-Verlag, Berlin.

Osborne, M.F. (1959): "Brownian motion in the stock market", *Operations Research* **7**, 145-173.

Pai, J.S. i N. Ravishanker (1997): "Exact likelihood function forms for an ARFIMA proces". Document de treball no publicat.

Park, J.Y. i P.C.B Phillips (1989): "Statistical inference in regression with integrated processes", *Econometric Theory* **5**, 95-131.

Parzen, E. (1980): "Time series modeling, spectral analysis, and forecasting ", a Brillinger, D.R. i G.C. Tiao, *Time Series Analysis*, 80-111. Academic Press, New York.

Parzen, E. (1981): "Time series model identification and prediction variance horizon", a *Proceedings of Second Tulsa Symposium on Applied Time Series Analysis*, 415-447. Academic Press, New York.

Parzen, E. (1982): "ARARMA models for time series analysis and forecasting", *Journal of Forecasting* **1**, 67-82.

Parzen, E. (1983): "Time series model identification by estimating information, memory and quantiles", *Qüestiió* **7**, 531-562.

Parzen, E. (1983): "Time series model identification by estimating information", a Karlin, S *et al.*: *Studies in econometrics time series and multivariate statistics*. Academic Press, New York.

Patterson, K. D. i F. Sowell (1996): "Consumption: innovation persistence and the excess smoothness debate", *Applied Economics* **28**, 1245-1255.

Peiris, M.S. (1987): "A note on the predictors of differenced sequences", *Australian Journal of Statistics* **29**, 42-48.

Peiris, M.S. i B.J.C. Perera (1988): "On prediction with fractionally differenced ARIMA models", *Journal of Time Series Analysis* **9**, 215-220.

Perron, P. (1988): "Trends and random walks in macroeconomic time series", *Journal of Economic Dynamics and Control* **12**, 297-332.

Pham, T.D. i L.T. Tran (1985): "Some mixing properties of time series models", *Stochastic Processes and their Applications* **19**, 297-303.

Phillips, P.C.B. (1986): "Understanding spurious regressions in Econometrics", *Journal of Econometrics* **11**, 311-330.

Phillips, P.C.B. (1987): "Time series regression with a unit root", *Econometrica* **55**, 277-301.

Phillips, P.C.B. (1991): "Spectral regression for cointegrated time series", a W. Barnett, J. Powell i G. Tauchen, *Nonparametric and Semiparametric Methods in Econometrics and Statistics*.

Phillips, P.C.B. i S. Ouliaris (1988): "Testing for cointegration using principal components methods", *Journal of Economic Dynamics and Control* **12**, 205-230.

Phillips, P.C.B. i P. Perror (1988): "Testing for a unit root in time series regression", *Biometrika* **12**, 335-346.

Plosser, C.I. i G.W. Schwert (1978): "Money, income, and sunspots: measuring economic relationaships and the effects of differencing", *Journal of Monetary Economics* **4**, 637-660.

Politis, D.M. i J.P. Romano (1995): "Bias-corrected nonparametric spectral estimation", *Journal of Time Series Analysis* **16**, 67-103.

Poole, W. (1967): "Speculative prices as random walks: an analysis of ten time series of flexible exchange rates", *Southern Economic Journal* **33**, 468-478.

Porter-Hudak, S. (1990): "An application of the seasonal fractionally differenced model to the monetary aggregates", *Journal of the American Statistical Association* **85**, 338-344.

Poskitt, D.S. i A.R. Tremayne (1980): "Testing the specification of a fitted ARMA model", *Biometrika* **67**, 359-363.

Poterba, J.M i L.H. Summers (1987): "Mean reversion in stock prices: evidence and implications", Document de Treball nº 2343, NBER. Cambridge Mass.

Priestley, M.B. (1981): *Spectral analysis and time series*. Academic Press, New York.

Quah, D. (1992): "The relative importance of permanent and transitory components: identification and some theoretical bound", *Econometrica* **60**, 107-118.

Rao, M.M. (1978): "Asymptotic distribution of the estimate of the boundary parameter of an unstable process", *Annals of Statisticss* **6**, 185-190.

Ray, B.K. (1993a): "Modeling long-memory processes for optimal long-range prediction", *Journal of Time Series Analysis* **14**, 511-525.

Ray, B.K. (1993b): "Long-range forecasting of IBM product revenues using a seasonal fractionally differenced ARMA model", *International Journal of Forecasting* **9**, 255-269.

Reisen, V.A. (1994): "Estimation of the fractional difference parameter in the ARFIMA(p,d,q) model using the smoothed periodogram", *Journal of Time Series Analysis* **15**, 335-351.

Robinson, P.M. (1972): *The estimation of continuous time systems using discrete data*. Tesi doctoral. Australian National University.

Robinson, P.M. (1978a): "Statistical Inference for a random coefficient autoregressive model", *Scandinavian Journal of Statistics* **5**, 163-168.

Robinson, P.M. (1978b): "On consistency in time series analysis", *The Annals of Statistics* **6**, 215-223.

Robinson, P.M. (1978c): "Alternative models for stationary stochastic processes", *Stochastic Processes and their Applications* **8**, 141-152.

Robinson, P.M. (1983): "Nonparametric estimators for time series", *Journal of Time Series Analysis* **4**, 185-207.

Robinson, P.M. (1987): "Nonparametric function estimates for long memory time series", a Barnett *et al.* (ed.) *Nonparametric and Semiparametric Methods in Econometrics and Statistics*. Cambridge University Press, New York.

Robinson, P.M. (1989): "Hypothesis testing in semiparametric and nonparametric models for economic time series", *Review of Economic Studies* **56**, 511-534.

Robinson, P.M. (1991a): "Testing for strong serial correlation and dynamic conditional heteroskedasticity in multiple regression", *Journal of Econometrics* **47**, 67-84.

Robinson, P.M. (1991b): "Automatic Frequency-domain inference on semiparametric and nonparametric models", *Econometrica* **59**, 1329-1364.

Robinson, P.M. (1993): "Highly insignificant F-ratios", *Econometrica* **61**, 687-696.

Robinson, P.M. (1994a): "Semiparametric analysis of long memory time series", *The Annals of Statistics* **22**, 515-539.

Robinson, P.M. (1994b): "Rates of convergence and optimal bandwidth for long range dependence", *Probability Theory and Related Fields* **99**, 443-473.

Robinson, P.M. (1994c): "Time series with strong dependence" a C.A. Sims, (ed.) *Advances in econometrics: Sixth World congress*, Vol. 1. Cambridge University Press, Cambridge.

Robinson, P.M. (1994d): "Efficient test of nonstationary hypotheses", *Journal of American Statistical Association* **89**, 1420-1437.

Robinson, P.M. (1995a): "Log-periodogram regression of time series with long range dependence", *The Annals of Statistics* **23**, 1048-1072.

Robinson, P.M. (1995b): "Gaussian semiparametric estimation of long range dependence", *The Annals of Statistics* **23**, 1630-1661.

Robinson, P.M. i J. Hidalgo (1997): "Time series regression with long range dependence", *The Annals of Statistics* **25**, 77-104.

Rosenblatt, M. (1956): "A central limit theorem an a strong mixim condition", *Proceedings of the National Academy of Sciences USA* **42**, 43-47.

Rosenblatt, M. (1978): "Dependence and asymptotic indepedence for random processes", a Rosenblatt, M. (ed.): *Studies in Probability Theory*, Mathematical Association of America, Washington D.C.

Rossenblatt, M. (1981): "Limit theorems for Fourier transforms of functionals of Gaussian sequences", *Z. Wahrscheinlichkeits theorie verw. Gebiete* **55**, 123-132.

Saikkonen, P. i R. Luukkonen (1993): "Testing for a moving average unit root in autoregressive integrated moving average models", *Journal of the American Statistical Association* **88**, 596-601.

Samarov, A.i M.S. Taqqu (1988): "On the efficiency of the sample mean in long memory noise", *Journal of Time Series Analysis* **9**, 191-200.

Sansó, A.; E. Pons; M. Artís i J. Suriñach (1997): "Análisis del sesgo producido en los contrastes univariantes de Phillips-Ouliaris-Joyeaux por la utilización de ventanas espectrales", Document de Treball nº E97/16. Divisió de Ciències Jurídiques, Econòmiques i Socials. Universitat de Barcelona.

Schmidt, P. i P.C.B. Phillips (1992): "LM tests for a unit root in the presence of deterministic trends", *Oxford Bulletin of Economics and Statistics* **54**, 257-287.

Schmidt, C.M. i R. Tschernig (1993): "Identification of fractional ARIMA models in the presence of long memory", presentat a IFAC Workshop on Economic Time Series Analysis and System Identification. Viena, 1-3 de Juliol de 1993.

Schuster, A. (1898): "On the investigation of hidden periodicities with application to the supossed 26-day period of meteorological phenomena", *Terrestrial Magnetism and Atmospheric Electricity* **3**.

Schwarz, G. (1978): "Estimating the dimension of a model", *Annals of Statistics* **6**, 461-464.

Schwert, G.W. (1989): "Test for a unit roots: a Monte Carlo investigation.", *Ajournal of Business and Economic Statistics* **7**, 147-159.

Seater, J.J. (1993): "World temperature-trend uncertainties and their implications for economic policy", *Journal of Business and Economic Statistics* **11**, 265-277.

Shea, G.S. (1989): "Regression estimation and bootstrap inference on the order of fractional integration in multivariate time series models". Document de treball no publicat.

Shea, G.S. (1991): "Uncertainty and Implied Variance Bounds in Long-Memory Models on the Interest Rate Terms Structure", *Empirical Economics* **16**, 287-312.

Shiller, R.J. i P. Perron (1985): "Testing the random walk hypothesis: power versus frequency of observations", *Economics Letters* **18**, 381-386.

Shin, Y. i P. Schmidt (1992): "The KPSS stationary test as a unit root test", *Economics Letters* **38**, 387-392.

Silvapulle, P. (1995): "A score test for seasonal fractional integration and cointegration". Document de treball no publicat. Department of Economics, University of Iowa.

Sinai, Ya. G. (1976): "Self-similar probability distributions", *Theory of Probability and its Applications* **21**, 64-80.

Sims, C.A. (1988): "Bayesian skepticism of unit root econometrics", *Journal of Economic Dynamics and Control* **12**, 463-474.

Sims, C.A. i H. Uhlig (1991): "Understanding unit rooters: a helicopter tour", *Econometrica* **59**, 1591-1599.

Smith, H.F. (1938): "An empirical law describing heterogeneity in the yields of agricultural crops", *Journal of Agricultural Science* **28**, 1-23.

Smith, F.B.; F.B. Sowell i S.E. Zin (1993): "Fractional integration with drift: estimation in small samples", *Empirical Economics* **22**, 103-116.

Smith, J.; N. Taylor i S.Yadav (1997): "Comparing the bias and misspecification in ARFIMA models", *Journal of Time Series Analysis* **18**, 502-527.

Smith, J. i S. Yadav (1994): "Forecasting costs incurred from unit differencing fractional integrated processes", *International Journal of Forecasting* **10**, 507-514.

Stock, J.H. (1994): "Deciding between I(1) and I(0)", *Journal of Econometrics* **63**, 105-131.

Stock, J.H. (1987): "Asymptotic properties of least squares estimates of cointegration vectors", *Econometrica* **55**, 1035-1056.

Stock, J.H. i M. Watson (1993): "A simple MLE for higher order integrated systems", *Econometrica* **61**, 783-820.

Stout, W.F. (1974): *Almost sure convergence*. Academic Press, New York.

Solo, V. (1981): "Strong consistency of least squares estimators in regression with correlated disturbances", *The Annals of Statistics* **9**, 689-693.

Sowell, F. (1990): "The fractional root distribution", *Econometrica* **58**, 495-505.

Sowell, F. (1992a): "Maximum likelihood estimation of stationary univariate fractionally integrated time series models", *Journal of Econometrics* **53**, 165-188.

Sowell, F. (1992b): "Modelling long-run behavior with the fractional ARIMA model", *Journal of Monetary Economics* **29**, 277-302.

Spanos, A. (1986): *Statistical foundations of econometric modelling.* Cambridge University Press, Cambridge.

Sprenkle, C.M. (1961): "Warrant prices as indicators of expectations and prices", *Yale Economic Essays* **1**, 178-231.

Student (1927): "Errors on routine analysis", *Biometrika* **19**, 151-164.

Suriñach, J.; M. Artís; E. López i A. Sansó. (1995): *Análisis económico regional. Nociones básicas de la teoría de la Cointegración.* Antoni Bosch Editor, Barcelona.

Sutcliffe, A. (1994): "Time series forecasting using fractional differencing", *Journal of Forecasting* **13**, 383-393.

Tanaka, K. (1990): "Testing for a moving average root ", *Econometric Theory* **6**, 433-444.

Taqqu, M.S. (1975): "Weak convergence to fractional Brownian motion and to the Rosenblat process", *Zeitschrift für Wahrscheinlichkeitstheorie und Verwandte Gebiete* **31**, 287-302.

Taqqu, M.S. (1977): "Law of the iterated logarithms for sums of non-linear functions of Gaussian of variables that exhibit a long range dependence", *Zeitschrift für Wahrscheinlichkeitstheorie und Verwandte Gebiete* **40**, 203-238.

Tieslau, M.A.; P. Schmidt i R.T. Baillie (1996): "A minimum distance estimator for long-memory proceses", *Journal of Econometrics* **71**, 249-264.

Thomson, P.H. (1986): "Band-limited spectral estimation of autorregressive moving-average processes", *Journal of Applied Probability* **23**, 143-158.

Wahba, G. (1968): "On the distribution of some statistics useful in the analysis of jointly stationari time series", *The Annals of Mathematical Statistics* **39**, 1849-1962.

Walker, A.M. (1964): "Assymptotic properties of least squares estimates of parameters of the spectrum of a stationary non-deterministic time series", *Journal of Australian Mathematical Society* **4**, 363-384.

White, H. (1984): *Assymptotic theory for econometricians*. Academic Press, New York.

White, H. i I. Domowitz (1984): "Nonlinear regression with dependent observations", *Econometrica* **52**, 143-162.

White, J.S. (1958): "The limiting distribution of the serial correlation coefficient in the explosive case", *Annals of Mathematical Statisticss* **29**, 1188-1197.

Whittle, D. (1963): *Prediction and Regulation by Linear Least-Squares Methods*. The English University Press, London.

Whittle, P. (1951): *Hypothesis testing in time series analysis*. Almquist and Wiksells, Uppsala.

Whittle, P. (1956): "Variation of yield variance with plot size", *Biometrika* **43**, 337-343.

Wichern, D.W. (1973): "The Beaviour of the Sample Autocorrelation Funtion for an Integrated Moving Average Process", *Biometrika* **60**, 235-246.

Wiener, N. (1949): *Extrapolation, interpolation and smoothing of stationay time series*. John Wiley, New York.

Working, H. (1949): "The investigation of economic expectations", *American Economic Review* **39**, 165-175.

Yajima, Y. (1985): "On estimation of a long memory time series models", *Australian Journal of Statistics* **27**, 303-320.

Yajima, Y. (1988): "On estimation of a regression model with long-memory stationary errors", *The Annals of Statistics* **16**, 791-807.

Yajima, Y. (1989): "A Central limit theorem of fourier transforms of strongly dependent stationary processes", *Journal of Time Series Analysis* **10**, 375-383.

Yajima, Y. (1991): "Asymptotic properties of the LSE in a regression model with long memory stationary errors", *The Annals of Statistics* **19**, 158-177.

Yong, C.H. (1974): *Asymptotic behaviour of trigonometric series.* Chinese University of Hong Kong, Hong Kong.

Young, W.E. (1971): "The random walk of stock prices: a test of the variance-time function", *Econometrica* **39**, 797-811.

Yule, G.U. (1927): "On a method of investigating periodicities in disturbed series with special reference to Wölfer's sunspot numbers", *Phil. Trans.* **A226**, 267.

Zygmund, E. (1959): *Trigonometric series 1.* Cambridge University Press, Cambridge.