Appendix D

Resum

L'objectiu d'aquesta tesi ha estat presentar alguns dels darrers avenços en l'estudi de les equacions diferencials en derivades parcials estocàstiques (EDPEs). És del tot conegut que les EDPEs ens proveeixen de models força adients per una gran varietat de problemes aplicats. A tall d'exemple mencionem el creixement de poblacions, la modelització de certs fenònems climàtics o bé les aplicacions a l'oceanografia i a la matemàtica financera (vegeu, per exemple, [DS80], [Imk01], [AMR96], [Bjö01], respectivament). De totes maneres, en aquesta tesi focalitzarem més en els aspectes teòrics de la matemàtica que hi ha darrera de les EDPEs que en els aplicats.

Concretament, estudiarem principalment una EDPE de tipus hiperbòlic, l'equació d'ones estocàstica, una representació formal de la qual ve donada per

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(t,x) - \Delta_d u(t,x) = b(u(t,x)) + \sigma(u(t,x))\dot{F}(t,x), \tag{D.1}$$

on Δ_d correspon a l'operador Laplacià en $\mathbb{R}^d$, σ i b són funcions prenent valors reals i $\dot{F}(t,x)$ és una certa pertorbació aleatòria. Les variables temporal i espacial pertanyen, respectivament, a $\mathbb{R}_+$ i $\mathbb{R}^d$, $d \leq 3$, i $\{u(t,x), (t,x) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d\}$ és un procés estocàstic prenent valors reals.

Tots els resultats que presentarem en aquesta memòria es duran a terme en el marc de la teoria desenvolupada per Walsh en el curs impartit a Saint-Flour [Wal86] i per altres generalitzacions (vegeu [Dal99] i [DM03]). En aquest curs Walsh no només va donar ple sentit a l'equació d'ones estocàstica presentada a dalt sinó que també va considerar diverses EDPEs de tipus parabòlic. De fet, ell va construir la integral estocàstica de certs processos previsibles respecte a mesures martingales; en la Secció 1.2.1 de la memòria fem una ressenya d'aquesta teoria. Amb aquesta integral estocàstica Walsh defineix el que s'entèn per solució *dèbil* d'una EDPE utlitzant una formulació evolutiva de l'equació i obtenint una solució prenent valors reals.

Pel que fa al soroll aleatori, se sap que si volem considerar EDPEs amb dimensió espacial igual a u, aleshores podem prendre la pertorbació aleatòria donada pel que es coneix com el *soroll blanc espai-temps*. Ara bé, quan es consideren EDPEs amb dimensió espacial estrictament més gran que u, si hom encara desitja obtenir solucions de l'equació prenent valors reals, necessitarem dotar al soroll amb una certa correlació espacial. Recentment, en la literatura hom pot trobar diverses col·laboracions en què s'estudien EDPEs en diverses dimensions; vegeu, per exemple, [AHR96], [DF98], [Mue97], [OR98], [PZ00], [MSS99] per a l'equació d'ones en $\mathbb{R}^d$, amb $d = 1, 2$, i [AHR01], [Nob97], [RO99], [PZ97] per a l'equació de la calor en qualsevol dimensió $d \geq 1$.

El cas de l'equació d'ones estocàstica en dimensió espacial més gran o igual que tres té una dificultat afegida: la solució fonamental associada a l'operador d'ones no és una funció sinó una distrubició d'Schwartz. Per tant, la formulació definida per Walsh no es pot utilitzar, perquè la integral construïda en [Wal86] només permet considerar integrands que siguin funcions. Amb aquest problema com a motivació, Dalang [Dal99] estengué la integral estocàstica definida per Walsh per tal de poder integrar certes funcions deterministes prenent valors distribucions. Així, Dalang trobà condicions relacionant la solució fonamental i la correlació espacial del soroll per tal d'obtenir existència i unicitat de solució a valors reals de l'Equació (D.1). Propietats de les trajectòries de la solució per a aquesta equació quan $d = 3$ es poden trobar en el treball recent [DSS]; veure també [DSS04] per propietats de les trajectòries d'una classe més general d'EDPEs.

El cas en que la dimensió és estrictament més gran que tres no va poder ésser tractat per Dalang perquè la solució fonamental deixa de ser una distribució positiva, i precisament aquest era un dels requisits de l'extensió de la integral estocàstica. Ara bé, Peszat ha donat resposta positiva al problema en el treball [Pes02] utilitzant una formulació molt més abstracta basada en equacions estocàstiques en dimensió infinita ([DPZ92]); vegeu també [PZ00] i [KZ01] com a referències similars on s'utilitza el mateix context. Mencionem també el treball [DM03], on s'estudien integrals estocàstiques de processos a valors distribucions no necessàriament definides no-negatives. Remarquem finalment que l'equació d'ones estocàstica (D.1) quan $d = 1, 2$ ha estat estudiada en els articles [CN88] i [MSS99], respectivament.

El contingut de la memòria es dividiria en dos parts. En la primera estudiem principalment l'equació d'ones estocàstica amb dimensió espacial igual a tres, és a dir, l'Equació (D.1) amb $(t, x) \in [0, T] \times \mathbb{R}^3$, per un cert T positiu, i unes condicions inicials donades per

$$u(0, x) = \frac{\partial u}{\partial t}(0, x) = 0,$$

$x \in \mathbb{R}^3$. Concretament, volem trobar condicions suficients per tal d'obtenir existència i regularitat de la densitat de la llei de probabilitat de la solució en cada punt (t, x). Això ho hem dut a terme en els treballs [QSSS04a] i [QSSS04c].

En la segona part considerem l'Equació (D.1) amb $(t, x) \in [0, T] \times [0, 1]$, amb condicions a la vora de tipus Dirichlet homogènies, certes condicions inicials no nul·les i una pertorbació aleatòria donada pel soroll blanc espai-temps. Llavors estudiem la convergència de la successió d'aproximacions a la solució obtinguda discretitzant l'equació respecte espai utilitzant un mètode de diferències finites. Aquesta part de la tesi s'ha desenvolupat en la prepublicació [QSSS04b].

Pel que fa a la primera part, notem que l'Equació (D.1) és un exemple de la classe d'EDPEs més general

$$Lu(t, x) = b(u(t, x)) + \sigma(u(t, x))\dot{F}(t, x), \tag{D.2}$$

amb les mateixes condicions inicials nul·les que a dalt i on L denota un operador diferencial de segon ordre tal que la solució fonamental de $Lu = 0$ és, per a qualsevol $t \in (0, T]$, una distribució de decreixement ràpid no-negativa. Suposem que els coeficients σ i b són funcions globalment Lipschitz i $\dot{F}(t, x)$ un soroll Gaussià, blanc en temps i amb una certa correlació espacial homogènia donada per una mesura positiva Γ. Això correspon a considerar un procés Gaussià centrat $F = \{F(\varphi), \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^{d+1})\}$ prenent valors en $L^2(\Omega)$, on $\mathcal{D}(\mathbb{R}^{d+1})$ denota l'espai de les funcions infinitament diferenciables amb suport compacte, amb un funcional de covariància donat per

$$J(\varphi, \psi) := E(F(\varphi)F(\psi)) = \int_{\mathbb{R}_+} ds \int_{\mathbb{R}^d} \Gamma(dx) \left(\varphi(s, \cdot) * \tilde{\psi}(s, \cdot)\right)(x),$$

per $\varphi, \psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^{d+1})$, on $\tilde{\psi}(s, x) = \psi(s, -x)$ i Γ és una mesura temperada no-negativa i definida no-negativa. En la integral anterior, la mesura de Lebesgue ens indica que el soroll és blanc en temps i la correlació espacial ve donada, com s'ha dit, per Γ. Aplicant el Teorema XVII de [Sch66], Cap. VII, tenim que Γ és simètrica i que existeix una altra mesura temperada no-negativa μ en $\mathbb{R}^d$ tal que la seva transformada de Fourier és Γ. Per tant

$$J(\varphi, \psi) = \int_{\mathbb{R}_+} ds \int_{\mathbb{R}^d} \mu(d\xi) \mathcal{F}\varphi(s, \cdot)(\xi) \overline{\mathcal{F}\psi(s, \cdot)(\xi)},$$

per $\varphi, \psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^{d+1})$. Anomenarem a μ la *mesura espectral* de Γ.

Considerem la següent hipòtesi entrelligant la solució fonamental Λ i l'operador diferencial L:

Hipòtesi D La solució fonamental Λ associada a $Lu = 0$ és una funció determinista en t que pren valors en l'espai de distribucions de decreixement ràpid positives tal que

$$\int_0^T dt \int_{\mathbb{R}^d} \mu(d\xi) |\mathcal{F}\Lambda(t)(\xi)|^2 < \infty.$$

A més a més, Λ és una mesura no-negativa en $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d$ de la forma $\Lambda(t, dy)dt$ tal que $\sup_{0\leq t\leq T} \Lambda(t, \mathbb{R}^d) < +\infty$.

Definim què és una solució de l'Equació (D.2) en el marc de l'extensió de la teoria de Walsh desenvolupada per Dalang en [Dal99] i utilitzant, per tant, la formulació *dèbil*. Per això, denotem Λ la solució fonamental de $Lu = 0$. Fixem un espai de probabilitat $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, i notem per $M = \{M_t(A), t \in [0, T], A \in \mathcal{B}_b(\mathbb{R}^d)\}$ la mesura martingala que s'obtè d'estendre el procés F (veure Secció 1.2.1 de la memòria) i per $\mathcal{F}_t$ la σ-àlgebra generada per les variables aleatòries $M_s(A)$, $s \in [0, t]$, $A \in \mathcal{B}_b(\mathbb{R}^d)$, per a tot $t \in [0, T]$. Aleshores, una solució d'(D.2) és un procés estocàstic $u = \{u(t, x), (t, x) \in [0, T] \times \mathbb{R}^d\}$ a valors reals, definit en l'espai de probabilitat filtrat $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\in[0,T]}, P)$, progressivament mesurable i tal que satisfà

$$\begin{aligned} u(t, x) = &\int_0^t \int_{\mathbb{R}^d} \Lambda(t - s, x - y)\sigma(u(s, y))M(ds, dy) \\ &+ \int_0^t ds \int_{\mathbb{R}^d} \Lambda(s, dy)b(u(t - s, x - y)). \end{aligned} \tag{D.3}$$

Tot i que Dalang [Dal99] provà l'existència d'una única solució de l'Equació (D.3) en el cas en que la mesura Γ és absolutament contínua respecte la mesura de Lebesgue, la prova pel cas general es pot dur a terme utilitzant arguments similars (vegeu el Teorema 13 en [Dal99]). Notem que tant en el cas de l'equació d'ones en dimensió $d = 1, 2, 3$ com en el cas de l'equació de la calor en qualsevol dimensió $d \geq 1$, una condició suficient per tal d'obtenir existència i unicitat de solució de l'equació corresponent és

$$\int_{\mathbb{R}^d} \frac{\mu(d\xi)}{1 + |\xi|^2} < +\infty$$

(veure l'Observació 14 en [Dal99]). En el curs [SSar] l'autora prova una resultat d'existència i unicitat de solució en un context més general d'espais de Hilbert (veure Teorema 1.2.12 de la memòria). Aquest context es necessitarà per tal de considerar les equacions evolutives estocàstiques satisfetes per les derivades de Malliavin de la solució de l'Equació (D.3). En aquest sentit, el primer que ha fet falta ha estat estendre la integral estocàstica del Dalang a un context on permeti integrar processos a valors en un cert espai de Hilbert; de fet, en la Secció 2 de [QSSS04a], hem construït una integral estocàstica on l'integrador ve definit per la integral d'un procés a valors en un espai de Hilbert respecte una mesura martingala. Anem a explicar breument aquesta construcció.

Sigui $\mathcal{A}$ un espai de Hilbert separable. Considerem un procés estocàstic $K = \{K(s, z), (s, z) \in [0, T] \times \mathbb{R}^d\}$ que prengui valors en $\mathcal{A}$, previsible i que satisfaci

$$\sup_{(s,z)\in[0,T]\times\mathbb{R}^d} E\left(||K(s, z)||^2_{\mathcal{A}}\right) < \infty.$$

Definim una mesura martingala a valors en $\mathcal{A}$ obtinguda integrant K respecte la mesura martingala –prenent valors reals– donada per M. Per això considerem $(e_j, j \geq 0)$ un sistema ortonormal complet d'$\mathcal{A}$ i definim $K^j(s,z) = \langle K(s,z), e_j \rangle_{\mathcal{A}}$, $(s,z) \in [0,T] \times \mathbb{R}^d$. Aleshores, per la teoria del Walsh (veure, per exemple, Teorema 1.2.3 de la memòria), per a tot $j \geq 0$ el procés

$$M_t^{K^j}(A) = \int_0^t \int_A K^j(s,z) M(ds,dz),\ t \in [0,T], A \in \mathcal{B}_b(\mathbb{R}^d),$$

defineix una mesura martingala. A més, es pot veure que

$$M_t^K(A) = \sum_{j \geq 0} M_t^{K^j}(A) e_j,$$

$t \in [0,T], A \in \mathcal{B}_b(\mathbb{R}^d)$, defineix una mesura martingala a valors en l'espai de Hilbert $\mathcal{A}$ (vegeu [QSSS04a], pàg. 5).

Aleshores l'objectiu és construir integrals estocàstiques repecte aquesta mesura martingala M^K i permetre integrar funcions que prenguin valors en un cert espai de distribucions. Per això hem refet la construcció que va fer Walsh en [Wal86] i l'extensió de Dalang en [Dal99] però en aquest context hilbersià; finalment hem obtingut que podem definir la integral estocàstica

$$(g \cdot M^K)_t = \int_0^t \int_{\mathbb{R}^d} g(s,z) M^K(ds,dz) = \int_0^t \int_{\mathbb{R}^d} g(s,z) K(s,z) M(ds,dz)$$

per processos pertanyent a $\mathcal{P}_{0,K}$, que és la compleció de l'espai de combinacions lineals de processos simples respecte la norma definida per

$$\|g\|_{0,K}^2 = \sum_{j \geq 0} E\left(\int_0^T ds \int_{\mathbb{R}^d} \Gamma(dx) \int_{\mathbb{R}^d} dy g(s,y) K^j(s,y) g(s,y-x) K^j(y-x) \right);$$

si el lector està interessat en els detalls d'aquesta part, l'adrecem a la Secció 2 de [QSSS04a]. Per tal de caracteritzar quins processos a valors distribucions pertanyen a $\mathcal{P}_{0,K}$ i, per tant, poden ésser integrats respecte M^K, donem les definicions següents.

Primer suposem que el procés K satisfà que

$$E(K^j(s,x) K^j(s,y)) = E(K^j(s,0) K^j(s,y-x)),$$

per a tot $j \geq 0,\ s \in [0,T],\ x,y \in \mathbb{R}^d$. Considerem la funció definida no-negativa $G_j^K(s,z) = E\left(K^j(s,0) K^j(s,z)\right)$. Pel Teorema XIX en [Sch66], Cap. VII, la mesura $\Gamma_{j,s}^K(dz) = G_j^K(s,z) \times \Gamma(dz)$ defineix una distribució no negativa. Definim

$$\Gamma_s^K(dz) = \sum_{j \geq 0} \Gamma_{j,s}^K(dz).$$

Es pot veure que aquesta mesura està ben definida i és no-negativa. Per tant, existeix una mesura no-negativa i temperada μ_s^K tal que $\Gamma_s^K(dz) = \mathcal{F}\mu_s^K$.

El teorema següent seria la versió hilbersiana dels Teoremes 2 i 5 de [Dal99] i correspon al Teorema 1 de [QSSS04a] (vegeu també Teorema 1.2.5de la memòria).

Teorema 1. *Sigui $t \mapsto S(t)$ una funció determinista prenent valors en l'espai de distribucions de decreixement ràpid no-negatives tal que*

$$\int_0^T dt \int_{\mathbb{R}^d} \mu(d\xi)|\mathcal{F}S(t)(\xi)|^2 < \infty.$$

Aleshores S pertany a $\mathcal{P}_{0,K}$ i

$$E\big(||(S \cdot M^K)_t||_{\mathcal{A}}^2\big) = \int_0^t ds \int_{\mathbb{R}^d} \mu_s^K(d\xi)|\mathcal{F}S(s)(\xi)|^2.$$

A més a més, per a qualsevol $p \in [2, \infty)$,

$$E\big(||(S \cdot M^K)_t||_{\mathcal{A}}^p\big) \leq C_t \int_0^t ds \sup_{x\in\mathbb{R}^d} E(||K(s,x)||_{\mathcal{A}}^p) \int_{\mathbb{R}^d} \mu(d\xi)|\mathcal{F}S(s)(\xi)|^2,$$

amb $C_t = (\int_0^t ds \int_{\mathbb{R}^d} \mu(d\xi)|\mathcal{F}S(s)(\xi)|^2)^{\frac{p}{2}-1}$, $t \in [0,T]$.

Ara estem interessats, primerament, en estudiar l'existència de densitat de la llei de probabilitat de la variable aleatòria $u(t,x)$, solució de l'Equació (D.3), per a qualsevol $(t,x) \in [0,T] \times \mathbb{R}^d$ fixat (aquesta part s'ha desenvolupat en l'article [QSSS04a]). Per això utilitzarem les tècniques del càlcul de Malliavin. Aquesta teoria, desenvolupada inicialment per Malliavin en [Mal78], permet estudiar les lleis de probabilitat de certs funcionals de variables aleatòrties gaussianes (el la Secció 1.3 de la memòria hem donat els preliminars sobre el càlcul de Malliavin que han estat precisos). L'entorn en el qual aplicarem les tècniques del càlcul de Malliavin ve descrit de la manera següent. Sigui $\mathcal{E}$ l'espai que consisteix en funcions $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ amb el producte intern $\langle \varphi, \psi \rangle_{\mathcal{E}} := \int_{\mathbb{R}^d} \Gamma(dx)(\varphi * \tilde{\psi})(x)$, on $\tilde{\psi}(x) = \psi(-x)$. Observem que

$$\langle \varphi, \psi \rangle_{\mathcal{E}} = \int_{\mathbb{R}^d} \mu(d\xi)\mathcal{F}\varphi(\xi)\overline{\mathcal{F}\psi(\xi)},$$

on recordem que μ és la mesura espectral associada a Γ. Sigui $\mathcal{H}$ la compleció de $(\mathcal{E}, \langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathcal{E}})$. Denotem $\mathcal{H}_T = L^2([0,T]; \mathcal{H})$. Obsevem que tan $\mathcal{H}$ com $\mathcal{H}_T$ poden contenir no només funcions sinó també distribucions. L'espai $\mathcal{H}_T$ és un espai de Hilbert real separable. La família gaussiana ve donada per

$$W(h) = \int_0^T \int_{\mathbb{R}^d} h(s,x)M(ds,dx),$$

per $h \in \mathcal{H}_T$, on la integral estocàstica pot ésser interpretada com del tipus Dalang. Aleshores, $(W(h), h \in \mathcal{H}_T)$ és un procés gaussià centrat tal que $E(W(h_1)W(h_2)) = \langle h_1, h_2 \rangle_{\mathcal{H}_T}$, $h_1, h_2 \in \mathcal{H}_T$, i, per tant, podem utilitzar el càlcul de Malliavin basat en ell. En cas que el lector estigui interessat en manuscrits generals sobre càlcul de Malliavin, l'adrecem a [Str83], [Nua95], [Mal97] o bé [Nua98]. Al llarg de la memòria s'han utilitzat les notacions referents al càlcul de Malliavin de les dues primeres referències citades.

Tornant a l'existència de densitat, mencionem que resultats en aquesta direcció per a l'equació d'ones estocàstica en dimensions $d = 1, 2$ es poden trobar en les referències [CN88] i [MSS99], respectivament; vegeu també [MCMS01] per resultats que extenen els treballs anteriors i cobrint també el cas de l'equació de la calor estocàstica en qualsevol dimensió $d \geq 1$. De fet, tal i com especificarem més endavant, en tots els articles que acabem d'anomenar també s'estudien propietats de regularitat de la densitat. Finalment, mencionem que en els treballs [ZN99], [LNP00] i [CW01] es poden trobar resultats d'existència de densitat per altre tipus d'EDPEs.

Per tal de demostrar l'existència –i de fet també per a la regularitat– de densitat de la variable $u(t,x)$, solució de l'Equació (D.2), necessitarem suposar que la Hipòtesi D es verifica. Notem que, tal i com aquesta hipòtesi va ésser enunciada en [QSSS04a], s'incloïa també la condició següent:

$$\lim_{h \downarrow 0} \int_0^T dt \int_{\mathbb{R}^d} \mu(d\xi) \sup_{t<r<t+h} |\mathcal{F}(\Lambda(r) - \Lambda(t))(\xi)|^2 = 0.$$

Aquesta condició, de fet, no és necessària per demostrar els resultats de [QSSS04a] ni els de [QSSS04c]; fou utilitzada per Dalang ([Dal99], Theorem 13) per tal de veure que la solució de l'Equació (D.2) és L^2-contínua (vegeu Lema 19 en [Dal99] i [Dal01]).

En la Secció 3 de [QSSS04a] estudiem la diferenciabilitat en el sentit de Malliavin de la variable aleatòria $u(t,x)$, per a qualsevol $(t,x) \in [0,T] \times \mathbb{R}^d$ fixats. Concretament, provem que $u(t,x)$ petany a l'espai $\mathbb{D}^{1,p}$, per a tot $p \in [1,\infty)$. El resultat principal en aquest sentit és el següent:

Teorema 2 ([QSSS04a], Teorema 2). *Suposem que Λ satisfà la Hipòtesi D i que els coeficients σ i b són funcions de classe $\mathcal{C}^1$ amb derivades Lipschitz i afitades. Aleshores, per a tot $(t,x) \in [0,T] \times \mathbb{R}^d$, $u(t,x)$ pertany a $\mathbb{D}^{1,p}$, per a qualsevol $p \in [1,\infty)$, i existeix un procés estocàstic $\{Z(t,x), (t,x) \in [0,T] \times \mathbb{R}^d\}$ prenent valors en $\mathcal{H}_T$ tal que*

$$\sup_{(t,x) \in [0,T] \times \mathbb{R}^d} E(\|Z(t,x)\|^p_{\mathcal{H}_T}) < +\infty,$$

i es verifica

$$\begin{aligned} Du(t,x) = Z(t,x) &+ \int_0^t \int_{\mathbb{R}^d} \Lambda(t-s,x-z)\sigma'(u(s,z))Du(s,z)M(ds,dz) \\ &+ \int_0^t ds \int_{\mathbb{R}^d} \Lambda(s,dz)b'(u(t-s,x-z))Du(t-s,x-z). \end{aligned} \tag{D.4}$$

A més a més, per a tot $(t,x) \in [0,T] \times \mathbb{R}^d$,

$$\begin{aligned} E\big(\|Z(t,x)\|^2_{\mathcal{H}_T}\big) &= \|\Lambda(t-\cdot,x-*)\|^2_{0,\sigma(u)} \\ &= E\Big(\int_0^t \int_{\mathbb{R}^d} \Lambda(t-s,x-z)\sigma(u(s,z))M(ds,dz)\Big)^2. \end{aligned}$$

Si la solució fonamental $\Lambda(t)$ fos una funció real, com per exemple per a l'equació de la calor en qualsevol dimensió $d \geq 1$ o bé per a l'equació d'ones en dimensió $d = 1,2$, se sap que la solució de l'Equació (D.3) fixada en qualsevol punt (t,x) pertany a l'espai $\mathbb{D}^{N,p}$, per a qualsevol $N \in \mathbb{N}$ i $p \in [1,\infty)$ (vegeu, per exemple, [BP98], [CN88], [MCMS01], [MSS99]); l'equació satisfeta per la derivada d'ordre N s'obtè de forma recursiva utilitzant les regles del càlcul de Malliavin, derivant cada un dels termes de l'equació satisfeta per la derivada d'ordre $N-1$. A tall d'exemple, la derivada formal de l'Equació (D.3) donaria lloc a la següent equació evolutiva estocàstica a valors en l'espai de Hilbert $\mathcal{H}_T$:

$$\begin{aligned} Du(t,x) =& \Lambda(t-\cdot,x-*)\sigma(u(\cdot,*)) \\ &+ \int_0^t \int_{\mathbb{R}^3} \Lambda(t-s,x-z)\sigma'(u(s,z))Du(s,z)M(ds,dz) \\ &+ \int_0^t ds \int_{\mathbb{R}^3} \Lambda(s,dz)b'(u(t-s,x-z))Du(t-s,x-z), \end{aligned}$$

on $(\cdot,*)$ denoten les variables de l'espai de Hilbert $\mathcal{H}_T$. La integral estocàstica vindria definida segons el Teorema 1 prenent $\mathcal{A} = \mathcal{H}_T$ i $K(s,z) = \sigma'(u(s,z))Du(s,z)$. Els dos primers termes de la part de la dreta de la igualtat anterior provenen de derivar la integral estocàstica en (D.3). Si $\Lambda(t)$ és una distribució, com, per exemple, en l'equació d'ones en dimensió tres, aquest mètode no es pot aplicar, atès que el producte de $\Lambda(t-\cdot)$ amb la funció σ no està sempre definit.

Per tal de demostrar el Teorema 2, apliquem un resultat de [LNS89] (vegeu Lema 1.3.1 en la Secció 1.3 de la memòria). Per això, regularitzem la distribució $\Lambda(t)$ utilitzant una aproximació de la identitat. Així, obtenim una successió de processos

$\{u_n(t,x),(t,x)\in[0,T]\times\mathbb{R}^d\}$ a valors reals que són solució de l'equació

$$u_n(t,x)=\int_0^t\int_{\mathbb{R}^d}\Lambda_n(t-s,x-z)\sigma(u_n(s,z))M(ds,dz)$$
$$+\int_0^t ds\int_{\mathbb{R}^d}\Lambda(s,dz)b(u_n(t-s,x-z)). \qquad \text{(D.5)}$$

Aleshores la variable aleatòria $u_n(t,x)$ pertany a $\mathbb{D}^{1,p}$, per a tot $p\geq 1$, i convergeix a $u(t,x)$, quan n tendeix a infinit, en $L^p(\Omega)$ (vegeu Proposició 1 en [QSSS04a]). Per veure aquesta convergència, primer veiem que la successió està uniformement afitada en $L^p(\Omega)$, per a tot $p\in[1,\infty)$. Això implica que la successió $(|u_n(t,x)|^p)_{n\geq 1}$ és uniformement integrable. Finalment, demostrem la convergència d'ordre $p=2$.

Utilitzant aquest mètode ens estalviem haver de tractar amb afitacions en $L^p(\Omega)$ d'integrals estocàstiques de processos que prenen valors en un espai de distribucions no necessàriament no-negatives. Pel Teorema 1 en [QSSS04a] (Teorema 1 d'aquest resum), aquest tipus d'afitacions només les disposem quan els integrands són distribucions definides no-negatives. Ara bé, la diferència de dues distribucions positives, tot i que no té perquè ser no-negativa, encara pertany a l'espai on la integral estocàstica està definida. Això implica que podem aplicar la propietat d'isometria de la integral estocàstica i aleshores podem provar la convergència en $L^2(\Omega)$.

D'altra banda, per tal de veure que la successió $(Du_n(t,x))_{n\geq 1}$ convergeix en $L^p(\Omega;\mathcal{H}_T)$ i que la derivada de Malliavin $Du(t,x)$ satisfà l'Equació (D.4), veiem que $Du_n(t,x)$ convergeix cap al procés $U(t,x)$, on $\{U(t,x),(t,x)\in[0,T]\times\mathbb{R}^d\}$ pren valors en $\mathcal{H}_T$ i és la única solució de l'equació

$$U(t,x)=Z(t,x)+\int_0^t\int_{\mathbb{R}^d}\Lambda(t-s,x-z)\sigma'(u(s,z))U(s,z)M(ds,dz)$$
$$+\int_0^t ds\int_{\mathbb{R}^d}\Lambda(s,dz)b'(u(t-s,x-z))U(t-s,x-z).$$

L'element $Z(t,x)$ ve donat per

$$Z(t,x)=\lim_{n\to\infty}\Lambda_n(t-\cdot,x-*)\sigma(u_n(\cdot,*)),$$

on el límit es pren en $L^p(\Omega;\mathcal{H}_T)$ (veure Proposició 3 en [QSSS04a]). Per tal de demostrar les convergències esmentades, es veu que la successió $(Du_n(t,x))_{n\geq 1}$ està uniformement afitada en $L^p(\Omega;\mathcal{H}_T)$, per a tot $p\in[1,\infty)$ i després is verifica la convergència d'ordre $p=2$ (vegeu la prova del Teorema 2 en [QSSS04a]).

Notem que el vector aleatori a valors en $\mathcal{H}_T$

$$Z(t,x)+\int_0^t\int_{\mathbb{R}^d}\Lambda(t-s,x-z)\sigma'(u(s,z))Du(s,z)M(ds,dz)$$

en l'Equació (D.4) és la derivada de Malliavin de la integral estocàstica

$$\int_0^t \int_{\mathbb{R}^d} \Lambda(t-s, x-z)\sigma(u(s,z))M(ds,dz)$$

(vegeu l'Observació 3 en [QSSS04a]).

Ara fixem la nostra atenció en l'Equació (D.1) i considerem la seva solució $u(t,x)$ en un punt $(t,x) \in (0,T] \times \mathbb{R}^3$ fixat. Per tal de demostrar que la llei de probabilitat de la variable aleatòria $u(t,x)$ té densitat, apliquem un criteri de Bouleau i Hirsch (vegeu el Teorema 1.3.7 de la memòria). Per tant, tenint en compte el Teorema 2, n'hi ha prou en provar el resultat següent:

Teorema 3 ([QSSS04a], Teorema 3). *Suposem que es compleixen les condicions següents:*

(1) els coeficients σ i b són de classe $\mathcal{C}^1$ i les seves derivades són afitades,

(2) existeix $\sigma_0 > 0$ tal que $\inf\{|\sigma(z)|, z \in \mathbb{R}\} \geq \sigma_0$,

(3) existeix $\eta \in (0, \frac{1}{2})$ tal que

$$\sup_{y \in \mathbb{R}^3} \int_{\mathbb{R}^3} \Gamma(dx)\mathcal{F}^{-1}\left(\frac{1}{(1+|\xi|^2)^\eta}\right)(x-y) < \infty.$$

Aleshores, $\|Du(t,x)\|_{\mathcal{H}_T} > 0$, quasi segurament.

Llavors, el teorema principal de l'article [QSSS04a] diria el següent:

Teorema 4 ([QSSS04a], Teorema 4). *Suposem que es compleixen les condicions (1), (2) i (3) del teorema anteiror. A més, suposem que els coeficients σ i b tenen derivades Lipschitz. Aleshores, Then, la llei de probabilitat de la variable aleatòria $u(t,x)$, $(t,x) \in (0,T] \times \mathbb{R}^3$, és absolutament contínua respecte la mesura de Lebesgue en $\mathbb{R}$.*

Denotem per S_3 la solució fonamental associada a l'equació d'ones en $\mathbb{R}^3$. La fórmula explícita per S_3 és la següent:

$$\Lambda(t) = \frac{1}{4\pi t}\sigma_t,$$

on σ_t denota la mesura uniforme sobre l'esfera $3-$dimensional de radi t.

Definim

$$G_{d,\eta}(x) = \mathcal{F}^{-1}\left(\frac{1}{(1+|\xi|^2)^\eta}\right)(x),$$

per $d \geq 1$, $\eta \in (0,1)$, i

$$F_{d,\eta}(y) = \int_{\mathbb{R}^d} \Gamma(dx) G_{d,\eta}(x-y),$$

per $y \in \mathbb{R}^d$. Considerem les hipòtesis següents:

$(\bar{H}_\eta)$ $\sup_{y \in \mathbb{R}^d} F_{d,\eta}(y) < \infty$,

(H_η) es compleix

$$\int_{\mathbb{R}^d} \frac{\mu(d\xi)}{(1+|\xi|^2)^\eta} < \infty.$$

La condició $(\bar{H}_\eta)$ implica l'(H_η) (vegeu Proposició 4.4.1 en [Lév01]). D'altra banda, també com a conseqüència d'aquesta proposició es té que

$$F_{d,\eta}(0) = \int_{\mathbb{R}^d} \Gamma(dx) G_{d,\eta}(x) \leq \int_{\mathbb{R}^d} \frac{\mu(d\xi)}{(1+|\xi|^2)^\eta} < \infty.$$

Observem que la condició (3) del Teorema 3 és equivalent a $(\bar{H}_\eta)$ per algun $\eta \in (0, \frac{1}{2})$.

Per tal de demostrar el Teorema 3, provem que $E(\|Du(t,x)\|_{\mathcal{H}_T}^{-p})$ és finit, per un cert $p > 0$. Els principals ingredients són els següents.

Seguim la mateixa idea que en la demostració del Teorema 3.1 en [MSS99], però amb algunes modificacions degudes al fet que la solució fonamental de l'equació d'ones en dimensió espacial igual a tres és una distribució. Per això, per tal d'estudiar la contribució del terme $Z(t,x)$ en l'estudi de la inversa de la matriu de Malliavin, introduïm una regularització de la distribució $S_3(t)$ que ve donada per

$$\Lambda_{\epsilon^{-1}} = \psi_{\epsilon^{-1}} * S_3,$$

on $(\psi_\nu, \nu \in \mathbb{R}_+)$ és una aproximació de la identitat (vegeu també la prova del Teorema 1 en [QSSS04a]).

Aquesta tècnica es complementa amb fitacions per sobre i per sota d'integrals involucrant la transformada de Fourier de la solució fonamental de l'equació d'ones S_3. Aquestes afitacions es troben en l'Apèndix de [QSSS04a] i, de fet, són vàlides per a la solució fonamental de l'equació d'ones S_d en qualsevol dimensió $d \geq 1$. Això és degut al fet que, tot i que S_d esdevé més irregular a mesura que augmentem la dimensió, la seva transformadda de Fourier té una expressió unificada per a tot $d \geq 1$:

$$\mathcal{F} S_d(t)(\xi) = \frac{\sin(2\pi t|\xi|)}{2\pi|\xi|}, \quad \xi \in \mathbb{R}^d.$$

Tots els resultats demostrats en l'apèndix anteriorment citat fan ús de les condicions (H_η) o bé $(\bar{H}_\eta)$, que és més forta.

Val la pena mencionar que en la referència força recent [SSar] l'autora de fet demostra que les condicions $(\bar{H}_\eta)$ i (H_η) són equivalents (vegeu Lema 9.8 en [SSar]). En la memòria enunciem i demostrem aquest resultat en el Lema 2.1.4 de la Secció 2.1.

Ara estem interessats en estudiar no només l'existència sinó també la regularitat de la densitat de la solució de l'equació d'ones estocàstica en dimensió tres (D.1). Això s'ha dut a terme en l'article [QSSS04c] i per tant completem els resultats obtinguts en [QSSS04a].

Per tal de demostrar l'existència i regularitat de la densitat de la llei de la solució de l'Equació (D.1), utlitzarem un dels criteris que ens proveeix el càlcul de Malliavin (vegeu la Proposició 1.3.8 en la Secció 1.3 de la memòria).

Com en el cas de l'existència, considerem primer l'EDPE més general donada per l'Equació (D.2) i denotem per $\{u(t,x),(t,x) \in [0,T]\times\mathbb{R}^d\}$ la única solució prenent valors reals d'aquesta equació. Primer provem que la variable aleatòria $u(t,x)$ té derivades de Malliavin de qualsevol ordre. És a dir, $u(t,x)$ pertany a l'espai $\mathbb{D}^\infty$.

El resultat més important en aquest sentit és el següent (vegeu el Teorema 1 en [QSSS04c])

Teorema 5. *Suposem que la Hipòtesi D és certa i que els coeficients σ i b són funcions $\mathcal{C}^\infty$ amb derivades de qualsevol order més gran o igual que u fitades. Aleshores, per a qualsevol $(t,x)\in[0,T]\times\mathbb{R}^d$, la variable aleatòria $u(t,x)$ pertany a l'espai $\mathbb{D}^\infty$. A més a més, per qualsevol $p\in[1,\infty)$ i $N\geq 1$, existeix un procés $\{Z^N(t,x),(t,x)\in[0,T]\times\mathbb{R}^d\}$ prenent valors en $L^p(\Omega;\mathcal{H}_T^{\otimes N})$ tal que la derivada de Malliavin $D^N u(t,x)$ satisfà*

$$\begin{aligned}
&D^N u(t,x) = Z^N(t,x)\\
&+\int_0^t\int_{\mathbb{R}^d}\Lambda(t-s,x-z)[\Delta^N(\sigma,u(s,z))+D^N u(s,z)\sigma'(u(s,z))]M(ds,dz)\\
&+\int_0^t ds\int_{\mathbb{R}^d}\Lambda(s,dz)[\Delta^N(b,u(t-s,x-z))+D^N u(t-s,x-z)b'(u(t-s,x-z))],
\end{aligned}\tag{D.6}$$

i

$$\sup_{(s,y)\in[0,T]\times\mathbb{R}^d} E(\|D^N u(s,y)\|^p_{\mathcal{H}_T^{\otimes N}}) < +\infty.$$

En l'enunciat del teorema anterior hem utilitzat la notació

$$\Delta^N(g,X) := D^N g(X) - g'(X)D^N X,$$

on X és una variable aleatòria pertanyent a $\mathbb{D}^{N,2}$ i g és una funció de classe $\mathcal{C}^N$ amb derivades fitades (vegeu la Secció 1.3 de la memòria).

Per tal de provar el Teorema 5, apliquem el Lemma 1.3.2 de la Secció 1.3, que és una conseqüència del fet que la derivada de Malliavin iterada D^N, com a operador de $L^p(\Omega)$ a $L^p(\Omega;\mathcal{H}_T^{\otimes N})$, és tancat.

Com en la demostració del Teorema 2, considerem la successió de processos estocàstics $\{u_n(t,x),(t,x)\in[0,T]\times\mathbb{R}^d\}$, que són solució de l'Equació (D.5).

Utilitzant les mateixes tècniques que en [MSS99] o bé [MCMS01], veiem que la variable aleatòria $u_n(t,x)$ pertany a $\mathbb{D}^\infty$, per a tot $(t,x)\in[0,T]\times\mathbb{R}^d$ i $n\geq 1$. A més a més, la derivada de Malliavin $D^N u_n(t,x)$ satisfà l'equació

$$\begin{aligned}
D_\alpha^N u_n(t,x) &= \sum_{i=1}^N \langle \Lambda_n(t-r_i,x-*)D_{\hat{\alpha}_i}^{N-1}\sigma(u_n(r_i,*)),\varphi_i\rangle_{\mathcal{H}}\\
&+\int_{\bigvee_i r_i}^t\int_{\mathbb{R}^d}\Lambda_n(t-s,x-z)[\Delta_\alpha^N(\sigma,u_n(s,z))+D_\alpha^N u_n(s,z)\sigma'(u_n(s,z))]M(ds,dz)\\
&+\int_{\bigvee_i r_i}^t ds\int_{\mathbb{R}^d}\Lambda(s,dz)[\Delta_\alpha^N(b,u_n(t-s,x-z))\\
&\quad+D_\alpha^N u_n(t-s,x-z)b'(u_n(t-s,x-z))],
\end{aligned}\tag{D.7}$$

on $\alpha=((r_1,\varphi_1),\ldots,(r_N,\varphi_N))$, amb $r_1,\ldots,r_N\geq 0$ i $\varphi_1,\ldots,\varphi_N\in\mathcal{H}$; hem utilitzat les notacions defines en la Secció 1.3.

Per tal d'identificar el vector aleatori $Z^N(t,x)$ en l'Equació (D.6), que pren valors en $\mathcal{H}_T^{\otimes N}$, fem les següents definicions.

Per a tot $N\geq 1$, $n\geq 1$, $r=(r_1,\ldots,r_N)$, $\alpha=((r_1,e_{j_1}),\cdots,(r_N,e_{j_N}))$ i $(t,x)\in[0,T]\times\mathbb{R}^d$ definim la variable aleatòria $Z_r^{N,n}(t,x)$ prenent valors en $\mathcal{H}^{\otimes N}$ de la manera següent:

$$\langle Z_r^{N,n}(t,x),e_{j_1}\otimes\cdots\otimes e_{j_N}\rangle_{\mathcal{H}^{\otimes N}}=\sum_{i=1}^N\langle\Lambda_n(t-r_i,x-*)D_{\hat{\alpha}_i}^{N-1}\sigma(u_n(r_i,*)),e_{j_i}\rangle_{\mathcal{H}}.$$

Hem denotat per $(e_j)_{j\geq 1}$ un sistema ortonormal complet de $\mathcal{H}$.

Es veu que $Z^{N,n}(t,x)$ definex un element de $L^p(\Omega;\mathcal{H}_T^{\otimes N})$ i, a més a més, obtenim que

$$\sup_{n\geq 1}\sup_{(t,x)\in[0,T]\times\mathbb{R}^d}E(\|Z^{N,n}(t,x)\|_{\mathcal{H}_T^{\otimes N}}^p)<+\infty,$$

per a tot $p\in[1,\infty)$. Observem també que $Z^{N,n}(t,x)$ coincideix amb el primer terme de la part de la dreta de l'Equació (D.7) amb $\alpha=((r_1,e_{j_1}),\cdots,(r_N,e_{j_N}))$.

D'altra banda, per $N\geq 1$ introduïm la hipòtesi següent:

(H_{N-1}) La successió $(D^j u_n(t,x),n\geq 1)$ convergeix en $L^p(\Omega;\mathcal{H}_T^{\otimes j})$, per a tot $j=0,\cdots,N-1$, Notem $L^p(\Omega;\mathcal{H}_T^{\otimes 0}) = L^p(\Omega)$. La Proposició 1 en [QSSS04a], tal i com s'ha dit abans, ens garanteix la validesa d'(H_0). A més a més, per $N > 1$, (H_{N-1}) implica que $u(t,x) \in \mathbb{D}^{j,p}$ i que la successió $(D^j u_n(t,x), n \geq 1)$ convergeix en $L^p(\Omega;\mathcal{H}_T^{\otimes j})$ cap a $D^j u(t,x)$, per $j = 1,\cdots,N-1$. A més a més, es verifica que

$$\sup_{(s,y)\in[0,T]\times\mathbb{R}^d} E(||D^j u(s,y)||^p_{\mathcal{H}_T^{\otimes j}}) < \infty,$$

per $j = 1,\cdots,N-1$ (vegeu el Lema 2 en [QSSS04c]).

Aleshores, sota aquesta hipòtesi (H_{N-1}), per $N \geq 1$, a més de les assumides en l'enunciat del Teorema 5, veiem que la successió $(Z^{N,n}(t,x))_{n\geq 1}$ convergeix en $L^p(\Omega;\mathcal{H}_T^{\otimes N})$ (vegeu el Lema 3 en [QSSS04c]). Al límit l'anomenem $Z^N(t,x)$.

Per tal de concloure la prova del Teorema 5, s'ha de verificar que la successió de derivades de Malliavin $(D^N u_n(t,x))_{n\geq 1}$ convergeix en $L^p(\Omega;\mathcal{H}_T^{\otimes N})$ i que la derivada de Malliavin $D^N u(t,x)$ satifà l'Equació (D.6). Això es fa de manera inductiva utilitzant la hipòtesi (H_{N-1}) i el fet que per veure convergències en $L^p(\Omega;\mathcal{H}_T^{\otimes N})$ n'hi ha prou en tenir una afitació uniforme de la solució en aquest espai i comprovar la convergència d'ordre $p = 2$ (vegeu la prova del Teorema 1 en [QSSS04c] i la Secció 2.2 d'aquesta memòria).

El pas següent ha estat considerar l'equació d'ones estocàstica (D.1) amb $d = 3$ i provar que, per a tot $(t,x) \in [0,T] \times \mathbb{R}^3$, la llei de probabilitat de la variable aleatòria $u(t,x)$ té una densitat que és una funció de classe $\mathcal{C}^\infty$.

Pel Teorema 5, n'hi ha prou en demostrar l'existència dels moments de qualsevol ordre de la inversa de la matriu de Malliavin:

Teorema 6 ([QSSS04c], Teorema 2). *Suposem que els coeficients σ i b són de classe $\mathcal{C}^1$ amb derivades afitades i Lipschitz contínues i, a més,*

(1) existeix $\sigma_0 > 0$ tal que $\inf\{|\sigma(z)|, z \in \mathbb{R}\} \geq \sigma_0$,

(2) existeix $\eta \in (0,\frac{1}{2})$ tal que

$$\sup_{y\in\mathbb{R}^3} \int_{\mathbb{R}^3} \Gamma(dx)\mathcal{F}^{-1}\left(\frac{1}{(1+|\xi|^2)^\eta}\right)(x-y) < \infty.$$

Aleshores per a tot $p > 0$,

$$E(\|Du(t,x)\|^{-p}_{\mathcal{H}_T}) < \infty.$$

Així, el teorema principal d'aquesta part diria el següent:

Teorema 7 ([QSSS04c], Teorema 3). *Suposem que els coeficients σ i b són de classe $\mathcal{C}^\infty$, tenen totes les derivades d'ordre més gran o igual a u fitades, i que es satisfan les hipòtesis (1) i (2) del Teorema 6. Aleshores, la llei de la variable aleatòria $u(t,x)$, $(t,x) \in (0,T] \times \mathbb{R}^3$, té una densitat $\mathcal{C}^\infty$ respecte la mesura de Lebesgue.*

Pel que fa a la prova del Teorema 6, notem que per tal de demostrar l'existència de densitat (Theorem 5) n'hi havia prou en veure que el moment d'ordre p de la inversa de la matriu de Malliavin era finit, per algun $p > 0$, mentre que per provar existència i regularitat de la densitat necessitem veure l'existència dels moments de qualsevol ordre $p > 0$.

En aquest cas, la regularització que fem de la solució fonamental $S_3(t)$ és més sofisticada: considerem $S_{\epsilon^{-\nu}} = \psi_{\epsilon^{-\nu}} * S_3$, on $\psi_{\epsilon^{-\nu}}(x) = \epsilon^{-3\nu}\psi(\epsilon^{-\nu}x)$, $\nu > 0$ i ψ és una funció no-negativa en $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^3)$, amb suport compacte inclòs dins la bola unitat de $\mathbb{R}^3$ i tal que $\int_{\mathbb{R}^3} \psi(x)dx = 1$.

Això ens permet estudiar la integrabilitat en un entorn de zero de la funció

$$\varepsilon \longrightarrow \varepsilon^{-(1+p)} P\{||Du(t,x)||^2_{\mathcal{H}_T} < \varepsilon\},$$

per a qualsevol $p \in [0,\infty)$, que ens dóna l'existència de tots els moments de la inversa de la matriu de Malliavin; vegeu la demostració del Teorema 2 en [QSSS04c].

Anàlogament a l'estudi de l'existència de densitat, aquestes tècniques es complementen amb fitacions per sobre i per sota d'integrals involucrant la transformada de Fourier de la solució fonamental de l'equació d'ones (vegeu els apèndixos de la part final dels treballs [QSSS04c]i [QSSS04a]).

Finalment, per acabar amb la primera part de la memòria, hem estudiat diverses EDPEs de tipus parabòlic. Concretament, primer considerem l'Equació (D.2) en l'espai $[0,T] \times [0,1]$, amb condicions a la vora de tipus Dirichlet i L un operador parabòlic general. Assumint que els coeficients σ i b verifiquen certes hipòtesis de lipschitzianitat no global, donem condicions suficients per tal que la llei de probabilitat de la solució en cada punt tingui densitat. Aquests resultats estenen el treball de Pardoux i Zhang [PZ93]; ells consideren el problema parabòlic clàssic corresponent a l'equació de la calor. En segon lloc, es considera l'Equació (D.2) en $\mathbb{R}^d$, $d \geq 1$ també amb un operador parabòlic general. Aquí estenem els resultats de Márquez-Carreras *et al.* [MCMS01] concernint l'existència i la regularitat de la densitat del procés solució sota condicions de lipschitzianitat global en σ i b.

La motivació en considerar aquests problemes prové de diverses converses amb Peter Imkeller en el transcurs d'una estada realitzada per l'autor en la Humboldt Universität-Berlin. L'objectiu d'aquestes converses era demostrar, assumint que la deriva b és localment Lipschitz i satisfà una certa condició de dissipativitat, que existeix una densitat de classe $\mathcal{C}^\infty$ per a la solució d'una EDPE de tipus parabòlic. Pel que es coneix fins al moment, no hi ha una resposta positiva al problema. De totes maneres, s'ha cregut interessant completar els resultats coneguts sobre existència i unicitat de densitat per l'equació de la calor estocàstica a una EDPE parabòlica més general.

Les demostracions dels resultats principals d'aquesta última part no requereixen noves tècniques. Per això, només presentem les idees principals i comentem els punts més importants. Concretament, per a l'extensió dels resultats en [PZ93], s'utilitzen un resultat d'existència i unicitat de solució i un teorema de comparació de solucions (veure Teoremes 2.3.2 i 2.3.1, respectivament, de la memòria). Val la pena remarcar que els teoremes de comparació són una eina molt important a l'hora de mostrar existència i unicitat de solució d'EDPEs amb coeficients que no siguin globalment Lipschitz; vegeu, per exemple, [BGP94], [GP93a], [GP93b], [MZ99], [DMP93]. D'altra banda, per estendre els resultats provats en [MCMS01] n'hi ha prou en utilitzar la propietat d'isometria de la integral estocàstica i les fites superior i inferior per a la solució fonamental associada al problema determinístic (veure Teorema 2.3.4 en la memòria); resultats similars per altre tipus d'EDPEs parabòliques es poden trobar a [CWM04].

Anem a comentar ara la segona part de la memòria. Recordem que considerem l'Equació (D.1) en l'espai producte $[0,T]\times[0,1]$, amb unes certes condicions inicials i condicions a la vora de tipus Dirichlet. De fet, considerem una equació amb uns coeficients lleugerament més generals:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(t,x)-\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t,x)=f(t,x,u(t,x))+\sigma(t,x,u(t,x))\dot{F}(t,x), \tag{D.8}$$

on la pertorbació aleatòria ve donada pel soroll blanc espai-temps i les condicions inicials pertanyen a certs subespais dels coneguts espais de Sobolev fraccionaris. El nostre objectiu primer és discretitzar l'Equació (D.8) respecte espai utilitzant un mètode de diferències finites i definir una successió de processos $(u^n(t,x))_{n\geq 1}$ que aproximi la solució $u(t,x)$. Després estudiem la convergència d'aquesta successió en $L^p(\Omega)$ i quasi segura i obtenim fites de la velocitat de convergència.

Dins la recerca en càlcul estocàstic, la construcció d'esquemes de discretització per EDPEs s'ha convertit recentment en un dels camps més fructífers. Es poden considerar diferents mètodes, molts d'ells inspirats pel context determinista. Mencionem, per exemple, diferències finites ([GN97], [GN95], [Gyö98b], [Gyö99], [Yoo00]), elements finits ([GP88], [Walar]), mètodes de separació ([BGR92], [BGR90], [IR00], [GK03]), aproximacions de Garlekin ([GK96]) i discretitzacions en temps ([Hau03], [Pri01]). Altres mètodes són més propis del càlcul estocàstic, basats en la descomposició en caos de Wiener ([LMR97], [Lot96]) o en truncacions de l'expansió en sèrie de Fourier del soroll ([Sha03], [Sha99]). Si el lector està interessat en un resum d'alguns d'aquests mètodes juntament amb una llista més extensa de refències, l'adrecem a [Gyö02].

A nivell general, els mètodes de discretització es poden dividir en dues grans famílies: els mètodes explícits i els implícits –tot i que hi ha barreges dels dos. Per als primers, el valor de la solució discretitzada en un cret punt espacial o temporal es calcula directament a partir dels valors coneguts fins al moment. D'altra banda, quan utilitzem un mètode implícit, la solució discretitzada en un cert punt espacial o temporal depèn, de forma no-algebraica, de la pròpia solució en instants que encara no han estat calculats. Per tant s'ha de resoldre un equació implícita. Ara bé, és ben sabut que aquests mètodes, entre d'altres avantatges, permeten obtenir millors velocitats de convergència que els mètodes explícits, mentre que aquests impliquen un temps de còmput inferior. Per una referència completa sobre mètodes numèrics per equacions estocàstiques, adrecem al lector a [KP92]. En el nostre cas, com veurem, la discretització espacial que utlitzarem donarà lloc a una equació implícita.

Els esquemes de discretització en una xarxa per a EDPEs en dimensió u, desenvolupats en [Gyö98b], [Gyö99], han esdevingut el punt de partida d'una línia d'invesitgació. En [MM03] es consideren esquemes de discretització per a EDPEs parabòliques en qualsevol dimensió i s'estudia la influència de la covariància del soroll donada per un nucli de Riesz en la velocitat de convergència. En l'article [GM04] s'estudien una classe d'equacions evolutives de tipus parabòlic en espais de Banach amb operadors monòtons. En [GM] s'estudien discretitzacions utilitzant diferències fintites per a EDPEs de tipus el·líptic en dimensió $d = 1, 2, 3$. Aquests resultats ens mostren com el comportament d'aquestes aproximacions depèn fortament de l'operador diferencial que regeix l'EDPE i són un dels pocs intents d'anar més enllà del cas parabòlic. Referent a aproximacions per a EDPEs de tipus el·líptic mencionem també el treball [DZ02].

Pel que nosaltres sabem, els resultats que presentem en aquesta part de la tesi corresponen al primer pas en direcció a considerar esquemes d'aproximació en una xarxa per a EDPEs de tipus hiperbòlic. De fet, només ens podem referir a l'article [MPW03] per trobar alguns resultats sobre aproximacions numèriques de l'equació d'ones estocàstica. En aquest treball els autors consideren que els coeficients σ i b no són aleatoris –per tant la solució és un procés gaussià– i construeixen algoritmes per tal de simular numèricament la solució en un cert reixat.

Per tal d'enunciar els resultats principals d'aquesta part, que es poden trobar en forma de prepublicació en [QSSS04b], donem uns breus preliminars.

Les condicions inicials per la l'Equació (D.8) venen donades per

$$u(0,x) = u_0,\ \frac{\partial u}{\partial t}(0,x) = v_0,\ x \in (0,1),$$

i les condicions a la vora, com hem dit, són del tipus Dirichlet:

$$u(t,0) = u(t,1) = 0,\ t > 0.$$

Suposem que u_0 i v_0 pertanyen a $L^2([0,1])$ i u_0 s'anul·la en $x = 0$ i $x = 1$. Donem sentit a l'equació formal donada per (D.8) utilitzant la formulació *dèbil*: un procés estocàstic $\{u(t,x),(t,x) \in [0,T] \times [0,1]\}$, adaptat respecte la filtració generada pel drap brownià, és solució de l'Equació (D.8) si es compleix

$$\begin{aligned}u(t,x) &= \int_0^1 G(t,x,y)v_0(y)dy + \frac{\partial}{\partial t}\left(\int_0^1 G(t,x,y)u_0(y)dy\right) \\ &+ \int_0^t \int_0^1 G(t-s,x,y)\sigma(s,y,u(s,y))W(ds,dy) \\ &+ \int_0^t \int_0^1 G(t-s,x,y)f(s,y,u(s,y))dsdy, \qquad \text{(D.9)}\end{aligned}$$

$t \geq 0$, $x \in (0,1)$, on G és la funció de Green associada a l'equació d'ones en $(0,1)$ amb condicions homogènies a la vora de tipus Dirichlet. La integral estocàstica en l'equació anterior es considera del tipus Walsh.

Suposem que els coeficients f, σ són funcions reals definides en $[0,T] \times [0,1] \times \mathbb{R}$ i que satisfan les condicions següents:

(L)

$$\sup_{t\in[0,T]} \big(|f(t,x,z) - f(t,y,v)| + |\sigma(t,x,z) - \sigma(t,y,v)|\big) \leq C(|x-y| + |z-v|),$$

(LG)

$$\sup_{(t,x)\in[0,T]\times[0,1]} \big(|f(t,x,z)| + |\sigma(t,x,z)|\big) \leq C(1+|z|),$$

per a tot $x, y \in [0,1]$ i $z, v \in \mathbb{R}$.

Utilitzant tècniques estàndard basades en aproximacions de Picard, es pot demostrar l'existència i unicitat d'una solució de l'Equació (D.9) tal que

$$\sup_{(t,x)\in[0,T]\times\mathbb{R}} E\big(|u(t,x)|^2\big) < +\infty.$$

Adrecem al lector al treball [CN88] (veure també [MSS99]) per resultats similars que poden ésser fàcilment adaptats a l'Equació (D.9).

Utilitzem l'expansió següent de la funció de Green:

$$G(t,x,y) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\sin(j\pi t)}{j\pi} \varphi_j(x)\varphi_j(y),$$

on $\varphi_j(x) = \sqrt{2}\sin(j\pi x)$, $j \geq 1$, és un sistema ortonormal complet de $L^2([0,1])$ (vegeu per exemple [Duf03], pàg. 94). Fent ús dels resultats clàssics de construcció de solucions de l'equació d'ones determinista en $[0,1]$ amb condicions Dirichlet a la vora a partir d'expansions en funcions pròpies, tenim que la contribució de la condició inicial u_0 en l'Equació (D.9) ve donada per

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\int_0^1 G(t,x,y)u_0(y)dy\right) = \sum_{j=1}^{\infty}\langle u_0, \varphi_j\rangle \cos(j\pi t)\varphi_j(x),$$

on $\langle \cdot, \cdot \rangle$ denota el producte escalar usual en $L^2([0,1])$ (veure [Joh82], pàg. 44).

Per una funció $g : [0,1] \to \mathbb{R}$ i $\alpha \in \mathbb{R}$, definim

$$\|g\|_{\alpha,2} := \left(\sum_{j=1}^{\infty}(1+j^2)^{\alpha}|\langle g, \varphi_j\rangle|^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

i denotem per $H^{\alpha,2}([0,1])$ el conjunt de funcions $g : [0,1] \to \mathbb{R}$ tal que $\|g\|_{\alpha,2} < \infty$.

Abans de construir les aproximacions $u^n(t,x)$ hem demostrat el següent resultat, que ens dóna més informació de la solució de l'Equació (D.9) (vegeu Proposicions C.2.1 i C.2.2 en l'Apèndix C:

Proposició 1. *Suposem que* $v_0 \in H^{\beta,2}([0,1])$*, per un cert* $\beta > -\frac{1}{2}$, $u_0 \in H^{\alpha,2}([0,1])$*, per un cert* $\alpha > \frac{1}{2}$*, i que els coeficients* σ *i* f *satisfan les condicions (LG) i (L). Aleshores, per a tot* $p \geq 1$ *existeix una constant positiva* C *depenent d'*α *i* β *tal que*

$$\sup_{(t,x)\in[0,T]\times[0,1]} E(|u(t,x)|^p) < +\infty$$

i

$$\begin{aligned} E(|u(s,x)-u(t,y)|^{2p}) \leq C(&|t-s|^{p(1+2\beta)} + |x-y|^{p(1+2\beta)} \\ &+ |t-s|^{p(2\alpha-1)} + |x-y|^{p(2\alpha-1)} \\ &+ |t-s|^p + |x-y|^p), \end{aligned}$$

per a qualsevol $s,t \in [0,T]$ *i* $x,y \in [0,1]$*. Per tant, el procés* u *té quasi segurament trajectòries Hölder-contínues d'order* δ*, per a tot* $\delta \in (0,\delta_0)$*, on* $\delta_0 = (\frac{1}{2}+\beta) \wedge (\alpha - \frac{1}{2}) \wedge \frac{1}{2}$.

Donem ara les idees principals per a la construcció de la successió aproximadora $u^n(t,x)$. Notem que l'Equació (D.8) és equivalent a

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t}(t,x) = v(t,x) \\ \frac{\partial v}{\partial t}(t,x) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t,x) + f(t,x,u(t,x)) + \sigma(t,x,u(t,x))\frac{\partial^2 W}{\partial t \partial x}(t,x), \end{cases}$$

$t > 0$, $x \in (0,1)$, amb condicions inicials

$$u(0,x) = u_0(x), \quad v(0,x) = v_0(x), \ x \in (0,1),$$

on $\{W(t,x),(t,x) \in [0,T] \times [0,1]\}$ denota el drap brownià. Per tal de discretitzar formalment l'equació anterior, fixem $n \geq 1$ i definim $x_k = \frac{k}{n}$, $k = 1, \ldots, n-1$. Aleshores considerem el sistema d'equacions diferencials estocàstiques

$$\begin{cases} du^n(t,x_k) & = & v^n(t,x_k)dt \\ dv^n(t,x_k) & = & n^2(u^n(t,x_{k+1}) - 2u^n(t,x_k) + u^n(t,x_{k-1}))dt \\ & & +f(t,x_k,u^n(t,x_k))dt \\ & & +n\sigma(t,x_k,u^n(t,x_k))d\left(W(t,x_{k+1}) - W(t,x_k)\right), \end{cases}$$

amb condicions inicials

$$u^n(0,x_k) = u_0(x_k),\ v^n(0,x_k) = v_0(x_k),$$

on

$$u_0(x_k) = \sum_{j=1}^{\infty} \langle u_0, \varphi_j \rangle \varphi_j(x_k), \quad v_0(x_k) = \sum_{j=1}^{\infty} \langle v_0, \varphi_j \rangle \varphi_j(x_k),$$

$k = 1, \ldots, n-1$.

Aleshores la idea ha estat agrupar aquest sistema d'equacions diferencials estocàstiques de forma adient, aplicar la fórmula d'Itô, estendre la definició d'$u^n(t,x_k)$ a tot $[0,1]$ utilitzant interpolació lineal i finalment veure que el procés aproximador $\{u^n(t,x),(t,x) \in [0,T] \times [0,1]\}$ satisfà l'equació evolutiva estocàstica següent:

$$\begin{aligned} u^n(t,x) = & \int_0^1 G^n(t,x,y) v_0(\kappa_n(y)) dy \\ & + \frac{\partial}{\partial t} \left(\int_0^1 G^n(t,x,y) u_0(\kappa_n(y)) dy \right) \\ & + \int_0^t \int_0^1 G^n(t-s,x,y) f(s,\kappa_n(y),u^n(s,\kappa_n(y))) ds dy \\ & + \int_0^t \int_0^1 G^n(t-s,x,y) \sigma(s,\kappa_n(y),u^n(s,\kappa_n(y))) W(ds,dy), \end{aligned}$$

$t \in (0,T]$ i $x \in (0,1)$, on

$$G^n(t,x,y) = \sum_{j=1}^{n-1} \frac{\sin\left(j\pi t\sqrt{c_j^n}\right)}{j\pi\sqrt{c_j^n}} \varphi_j^n(x) \varphi_j(\kappa_n(y)),$$

amb $\kappa_n(y) = [ny]/n$, $\varphi_j^n(x) = \varphi_j(x_l)$ per $x = x_l$ i

$$\varphi_j^n(x) = \varphi_j(x_l) + (nx - l)\left(\varphi_j(x_{l+1}) - \varphi_j(x_l)\right)$$

si $x \in (x_l, x_{l+1})$. La constant c_j^n ve donada per

$$c_j^n = \frac{\sin^2\left(\frac{j\pi}{2n}\right)}{\left(\frac{j\pi}{2n}\right)^2},$$

per $j = 1, \ldots, n-1$ i $n \geq 1$.

El teorema principal d'aquesta part diu el següent (vegeu Teorema C.3.1 en l'Apèndix C).

Teorema 8. *Suposem que $u_0 \in H^{\alpha,2}([0,1])$, amb $\alpha > \frac{3}{2}$, $v_0 \in H^{\beta,2}([0,1])$, amb $\beta > \frac{1}{2}$. Fixem $p \geq 1$ i suposem que els coeficients σ i f satisfan les condicions (LG) i (L). Aleshores existeix una constant positiva C que depèn d'α i β tal que, per a tot $n \geq 1$,*

$$\sup_{(t,x)\in[0,T]\times[0,1]} E(|u^n(t,x) - u(t,x)|^{2p}) \leq \frac{C}{n^{2p\rho}},$$

per a qualsevol $\rho \in (0, \rho_0)$, amb $\rho_0 = \frac{1}{3} \wedge (\alpha - \frac{3}{2}) \wedge (\beta - \frac{1}{2})$. A més a més, $u^n(t,x)$ convergeix cap a $u(t,x)$ quasi segurament, quan n tendeix a infinit, uniformement respecte $(t,x) \in [0,T] \times [0,1]$.

En comparació amb equacions de tipus parabòlic, la velocitat de convergència difereix substancialment de l'ordre de hölderianitat de les trajectòries de la solució. De fet, prenent per simplificar condicions inicials nul·les, per la Proposició 1, les trajectòries de la solució són Hölder contínues conjuntament respecte (t,x) d'ordre $\alpha < \frac{1}{2}$, mentre que la velocitat de convergència és de l'ordre $\rho < \frac{1}{3}$. De fet, l'interval de variació de ρ en el Teorema 8 ve determinat per la següent afitació uniforme (vegeu Lema C.3.3 en l'Apèndix C):

Lema 1. *Per a tot $\delta \in (0, \frac{2}{3})$, existeix una constant positiva C tal que*

$$\sup_{(t,x)\in[0,T]\times[0,1]} \int_0^1 |G(t,x,y) - G^n(t,x,y)|^2 dy \leq \frac{C}{n^\delta},$$

per a tot $n \geq 1$.

En la part final d'aquesta part hem analitzat aquesta fita uniforme numèricament i hem obtingut que utilitzant aquest mètode no podem esperar millors resultats (vegeu Secció C.4 de l'Apèndix C).

Si el lector està interessat en els detalls de la prova del Teorema 8, l'adrecem a la Secció C.3.2 de l'Apèndix C.

El pas natural que ara s'hauria de seguir seria plantejar discretitzacions de la mateixa equació però respecte espai i temps a la vegada. Creiem que, per la pròpia naturalesa de les equacions hiperbòliques, per fer-ho no seria convenient adaptar el mètode utilitzat en [Gyö99] per l'equació de la calor sinò prendre un mètode purament determinista i intentar adaptar-lo al cas estocàstic.