

# Capítulo 2

## Introducción a los fenómenos críticos y al Grupo de Renormalización

### 2.1. Introducción. Fenómenos críticos

Como ya se ha mencionado en el capítulo 1, las transiciones de fase continuas están asociadas a la presencia de un punto crítico en el diagrama de fases (ver, por ejemplo, la Fig. 1.1). En las proximidades de dicho punto crítico los sistemas presentan un comportamiento que se suele denominar fenómeno crítico. Una de las primeras observaciones de la existencia de un fenómeno crítico se debe a Andrews que, en 1869, presentó sus resultados sobre la opalescencia crítica en dióxido de carbono. Hasta el momento en que Andrews observó tal fenómeno, se creía que la transición de líquido a gas que se observa en fluidos al disminuir la presión a temperatura ( $T$ ) constante era de primer orden para cualquier valor de  $T$ . Sin embargo, la transición pasa de ser de primer orden a ser continua en el punto  $(T_c, p_c)$  del diagrama de fases  $T$ - $p$ . Tras las observaciones de Andrews, en 1873, van der Waals propuso la ecuación de estado que lleva su nombre y, de esta manera, introdujo también una descripción teórica del comportamiento de fluidos en la región crítica. A pesar de que hoy en día se sabe que esta descripción no es cuantitativamente exacta para temperaturas cercanas a  $T_c$ , el trabajo de Van der Waals supuso un avance teórico importante en la comprensión de los fenómenos críticos. Por otro lado, P. Curie observó que un sistema ferromagnético a temperaturas moderadas pasa a ser paramagnético a partir de una cierta temperatura  $T_c$  en ausencia de campo magnético [Fig. 1.1]. Esta fue una observación pionera en

el comportamiento crítico de sistemas magnéticos. A partir de estos experimentos, en 1907, Weiss propuso una teoría para sistemas ferromagnéticos que lleva su nombre. Igual que la teoría de van der Waals para fluidos, la teoría de Weiss es correcta sólo desde un punto de vista cualitativo. Sin embargo, fue un avance importante en la comprensión de transiciones de fase en sistemas magnéticos. Actualmente, tanto la teoría de van der Waals como la de Weiss se enmarcan dentro del grupo de las llamadas teorías de campo medio, grupo al que pertenece también la teoría de Landau descrita en el capítulo anterior.

A partir de todos estos avances de finales del siglo XIX y primera mitad del XX, se llegó a la conclusión de que el comportamiento de las magnitudes observables ( $A$ ) cerca de un punto crítico viene dado por

$$A \sim u_f^{\pm\alpha'} \quad (2.1)$$

donde  $u_f$  es una variable de escala fenomenológica que se relacionará en la sección § 2.2.5 con el Grupo de Renormalización. Esta relación sirve como definición de los *exponentes críticos* (denotado en la ecuación (2.1) por  $\alpha'$ ). Éstos dependen del observable al que caracterizan y, en principio, del sistema al que se refieren. Se definen positivos y el signo que precede a cada uno depende también del observable en cuestión. En el cuadro 2.1 se resumen los exponentes relacionados con los observables característicos de un sistema ferromagnético. También se introduce la variable de escala en cada caso y el signo que acompaña al exponente en la ecuación (2.1). Para más información, ver por ejemplo la Ref. 134 donde se detalla este punto de forma clara, introduciendo también los exponentes análogos (y con igual nombre) para fluidos.

Los exponentes críticos se pueden considerar como el “ingrediente” principal en cualquier teoría de fenómenos críticos. Esto es debido, en gran medida, a que sistemas que aparentemente tienen un comportamiento macroscópico distinto, se caracterizan por el mismo conjunto de valores para los exponentes críticos. Esta es una de las manifestaciones de lo que se ha dado en llamar universalidad. Es curioso ver que, aún antes de que los exponentes críticos se definieran como tal, ya había evidencias de la existencia de una cierta universalidad. Un caso claro en que ocurre esto es la extensión del principio de estados correspondientes<sup>1</sup> a sistemas que no siguen la ecuación de van der Waals. En la Fig. 2.1 [135], se presenta un ejemplo de cómo, al representar  $T/T_c$  en función de la densidad  $\rho$  dividida por la densidad en el punto crítico  $\rho_c$ , se obtiene una

---

<sup>1</sup>Esta ley se dedujo inicialmente de la ecuación de van der Waals (ver Ref. 134) pero, posteriormente, se descubrió que también era válida para sistemas que no obedecen la ecuación de van der Waals cerca de un punto crítico [135].

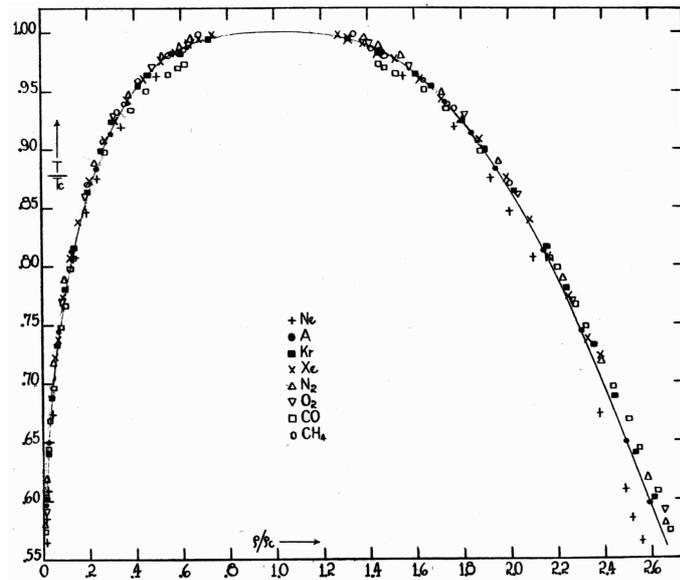
**Cuadro 2.1:** Definición de los exponentes críticos en una transición desde una fase paramagnética a una ferromagnética. En cada caso se aplica la ecuación (2.1) variando sólo la magnitud que aparece en la variable de escala y dejando el resto de variables constantes. Se indica explícitamente el signo de la variable de escala  $(T - T_c)/T_c$  que se debe utilizar dependiendo de si  $T > T_c$  o bien  $T < T_c$ . En el caso de la magnetización, la relación (2.1) es únicamente válida para  $T < T_c$  ya que, para  $T > T_c$ , la magnetización es cero.

Observable	$u_f$	$\alpha'$
Calor específico ( $C_H$ )	$\pm(T - T_c)/T_c$	$-\alpha$
Magnetización ( $M$ ), $T < T_c$	$-(T - T_c)/T_c$	$+\beta$
Susceptibilidad magnética ( $\chi$ )	$\pm(T - T_c)/T_c$	$-\gamma$
Magnetización ( $M$ )	$H$	$+1/\delta$
Longitud de correlación ( $\xi$ )	$\pm(T - T_c)/T_c$	$-\nu$
Función de correlación a pares	distancia	$-(d - 2 + \eta)$

única curva para diferentes gases. Este colapso de curvas correspondientes a sistemas con distinto comportamiento se considera en la actualidad como un caso particular de escalado para fluidos. En las secciones § 2.2.4 y § 2.2.5 se introduce una explicación general a los colapsos de este tipo. Por otro lado, en la sección § 2.2.6, se estudia la universalidad con algo más de detalle.

Como se ha dicho, para sistemas reales, la ecuación de estado de van der Waals no es válida en las proximidades del punto crítico. Este hecho provocó la búsqueda de una ecuación de estado válida cerca del punto crítico. Fue Widom en 1965 [136] quien encontró una solución al problema postulando la homogeneidad de la energía libre cerca del punto crítico. A pesar de que la hipótesis de homogeneidad no estaba totalmente fundamentada, con esta teoría fue posible encontrar algunas relaciones entre exponentes. Posteriormente, en 1966, Kadanoff [137] enfocó el problema desde una perspectiva diferente sin hacer directamente la hipótesis de homogeneidad. Con este enfoque, se logró obtener resultados similares a los de Widom y, además, fue posible encontrar algunas relaciones entre el exponente  $\eta$  asociado a la función de correlación y el resto de exponentes críticos. Esto no se había conseguido utilizando la teoría de Widom. A pesar de que la teoría de Kadanoff evita la hipótesis de homogeneidad, tampoco está exenta de hipótesis que requerían una teoría más completa. En la sección § 2.2.5 se comenta brevemente cómo se resuelve el problema principal del planteamiento de Kadanoff (en la Ref. 138 se dan más detalles sobre los problemas de la teoría de Kadanoff).

**Figura 2.1:** Representación de  $T/T_c$  en función de  $\rho/\rho_c$  para 8 gases distintos sobre la curva de coexistencia. Extraído de la Ref. 135.



Fue Wilson<sup>2</sup> quien propuso la teoría que resolvería gran parte de los problemas que presentaban las teorías anteriores. Esta teoría es la que se llamó *Grupo de Renormalización* (GR) aplicado a fenómenos críticos. Wilson introdujo la teoría en dos artículos. El primero de ellos está dedicado al GR en el espacio real [139] mientras que, en el segundo, introduce la forma de aplicar el GR en el espacio de momentos [140].

Desde que Wilson publicara sus resultados en 1971, han sido muchas las publicaciones que han aparecido tratando las ideas del GR. Ver, por ejemplo las Refs. 10, 11, 19, 20, 138, 141–148.

En lo que sigue, se presentarán algunas de las ideas fundamentales del GR aplicado a fenómenos críticos. En la sección § 2.2 se presentará un resumen del formalismo del GR en el espacio de posiciones para sistemas estáticos y de tamaño infinito. El desarrollo se hace en el espacio real puesto que es el más apropiado para sistemas de variables discretas tipo espín como el que se estudia en esta tesis [Capítulos 4 y 5]. Por otro lado, el GR se ha estudiado tradicionalmente en sistemas en que la mecánica estadística tradicional es válida (ver discusión más adelante con referencia a las Ecs. (2.4) y (2.5)). Sin embargo, esta hipótesis no es estrictamente necesaria para la aplicación del GR (consultar nota 79 en la Ref. 138) y, en el caso particular de esta tesis, es necesaria una introducción prescindiendo de dicha hipótesis para poder aplicar las ideas del GR a sistemas desordenados con dinámica metaestable.

La sección § 2.2 se divide en seis subapartados. En el primero de ellos [§ 2.2.1]

<sup>2</sup>K. G. Wilson recibió el premio Nobel en 1982 gracias a sus trabajos sobre el Grupo de Renormalización en fenómenos críticos.

se introduce, en dos pasos, la transformación del GR en el espacio real utilizando una red de espines. Seguidamente, en el subapartado § 2.2.2, se define un espacio en el que se puede describir geoméricamente el comportamiento de un sistema bajo la transformación del GR. En el subapartado § 2.2.3 se definen las magnitudes apropiadas (variables de escala) para describir la transformación del GR. A continuación, en el subapartado § 2.2.4, se introduce el formalismo de invariantes bajo la transformación del GR y, a partir de dicho formalismo, se deducen relaciones de escala<sup>3</sup> de forma general. El concepto de invariantes permitirá extender las relaciones de escala, bien conocidas en sistemas tradicionales, a sistemas desordenados (capítulo 5). Tras haber obtenido las relaciones de escala en general, se introducirán en el problema las variables de control (como por ejemplo la temperatura o el campo magnético) que son las que permiten unir las ideas del GR con las de fenómenos críticos. Finalmente, para acabar la sección 2.2, se discutirá el concepto de universalidad desde el punto de vista del GR.

En la sección § 2.3 se extienden las ideas introducidas en la sección § 2.2 a sistemas finitos y se discute la extrapolación al límite termodinámico a partir del análisis de sistemas finitos. Seguidamente, en la sección § 2.4 se introducen algunas ideas relacionadas con el GR aplicado a sistemas dinámicos.

En la sección § 2.5 se presenta un resumen de las ideas principales sobre la aplicación del GR a las transiciones de fase de primer orden. Este es un tema que no se trata habitualmente en los textos dedicados al GR. Sin embargo, es un punto interesante que, de hecho, se utiliza más adelante en la tesis [§ 5.11.3] dentro del contexto del RFIM.

## 2.2. Grupo de Renormalización

### 2.2.1. Transformación del Grupo de Renormalización

Supongamos una red genérica<sup>4</sup> de  $N$  espines  $\{s_i, i = 1, 2 \dots N\}$  con Hamiltoniano

$$\mathcal{H}(\{\mu_p\}, \{s_i\}) = \sum_p \mu_p \left( \prod_{i \in p} s_i \right), \quad (2.2)$$

donde  $p$  denota un conjunto de lugares en la red y  $\{\mu_p\}$  es un conjunto de constantes de acoplamiento. Separando las interacciones por clases, según el número de espines

<sup>3</sup>No confundir el término “relaciones de escala” con las relaciones entre exponentes críticos.

<sup>4</sup>A este nivel de exposición de las ideas, no es importante la geometría concreta de la red. Sin embargo, la elección más habitual a lo largo de la tesis será una red hipercúbica en  $d$  dimensiones y, en particular, se considerará  $d = 3$  en las simulaciones numéricas basadas en una red de espines.

que interactúan en cada una de ellas, podemos escribir el Hamiltoniano como

$$\mathcal{H}(\{\mu_p\}, \{s_i\}) = \sum_i^N \mu_i s_i + \sum_i^N \sum_{j>i}^N \mu_{ij} s_i s_j + \dots \quad (2.3)$$

Despreciando términos de orden superior, obtenemos el Hamiltoniano (1.16) introducido en la sección § 1.4.1 y, como vimos en dicha sección, el primer sumatorio corresponde a un campo local que actúa sobre cada espín. El segundo corresponde a la interacción a pares de espines (en general, cualquier par), y así sucesivamente. Es fácil relacionar esta terminología con la de la ecuación (2.2). En el primer sumatorio de (2.3) aparecen  $N$  de las constantes de acoplamiento de (2.2) y, en el segundo, aparecen  $N(N-1)/2$ .

Es oportuno remarcar en este punto que, aunque en la introducción sería tal vez más sencillo haber utilizado desde el principio el Hamiltoniano (1.16), es apropiado introducir un Hamiltoniano general (2.2) en que aparecen todas las constantes de acoplamiento posibles para no restar generalidad a las ideas del GR. Como veremos más adelante, en general es necesario considerar infinitas constantes de acoplamiento en el Hamiltoniano.

Para describir el comportamiento de un cierto sistema, se necesita por un lado el Hamiltoniano (2.2) y, por otro, la distribución de probabilidad para las configuraciones de espines  $\{s_i\}$ , definida a partir del Hamiltoniano:

$$P(\{\mu_p\}, \{s_i\}) = P[\mathcal{H}(\{\mu_p\}, \{s_i\})]. \quad (2.4)$$

En particular, como ya se ha adelantado en la sección § 2.1, es habitual utilizar la distribución de la colectividad canónica definida como<sup>5</sup>

$$P(\{\mu_p\}, \{s_i\}) = \frac{e^{-\mathcal{H}(\{\mu_p\}, \{s_i\})}}{Z}, \quad (2.5)$$

donde  $Z$  es la función de partición. Sin embargo, las ideas fundamentales del GR no precisan de esta hipótesis sobre  $P(\{\mu_p\}, \{s_i\})$  y, de hecho, en sistemas desordenados puede ser diferente a ésta.

Llegado el punto de introducir el GR hay que decir que no existe una definición precisa de lo que se entiende por GR. De cualquier manera, la idea en la que se fundamenta es la observación de que los sistemas que están cerca de una transición de fase de segundo orden son invariantes bajo transformaciones de escala<sup>6</sup>. Utilizando esta idea, en el espacio real se suele introducir la transformación del GR mediante dos pasos:

---

<sup>5</sup>Consideraremos que las constantes de acoplamiento introducidas en (2.2) ya contienen el prefactor habitual  $1/k_B T$ .

<sup>6</sup>En la sección § 2.2.2 se precisa más este punto.

**i) Agrupación<sup>7</sup>(o transformación de Kadanoff):** Este paso es básicamente el procedimiento que propuso Kadanoff en 1966 [149] como alternativa a la hipótesis de homogeneidad de las magnitudes cerca de un punto crítico.

La agrupación consiste en dividir los nodos de la red en conjuntos o bloques disjuntos. Seguidamente, tras agrupar los espines  $\{s_i\}_I$  pertenecientes a un cierto conjunto  $I$ , se asigna un valor de espín  $s_I$  que representa a todo el conjunto y se sitúa en alguna posición dentro del área cubierta por el bloque. La transformación se considera correcta siempre y cuando la red transformada sea exactamente como la original pero con un parámetro de red mayor y, en algunos casos, rotada respecto a la original. Esto es posible siempre que la red original tenga simetría discreta de escalado<sup>8</sup> [146].

No existe una norma que se pueda utilizar con “receta” para la asignación del valor de los espines transformados, aunque la elección debe cumplir ciertas propiedades. Por ejemplo, si consideramos una red de espines en que cada uno puede tomar sólo dos valores  $\pm 1$ , también el espín representante de un cierto conjunto debe tomar sólo estos dos valores. Un ejemplo de este tipo de transformaciones es la regla de la mayoría que consiste en asignar a  $s_I$  el signo mayoritario de entre los espines  $\{s_i\}_I$  del conjunto  $I$ -ésimo. Para fijar ideas, y como ejemplo, supongamos una red cuadrada infinita de parámetro  $a$  [Fig. 2.2(a)] en que hacemos una agrupación con cuadrados de  $b$  espines por lado ( $b = 3$  en este caso). Al pasar a los espines transformados por la regla de la mayoría [Fig. 2.3(b)], se obtiene una red de parámetro  $ba$ . Así pues, al hacer la agrupación, en general el parámetro de red cambia como:

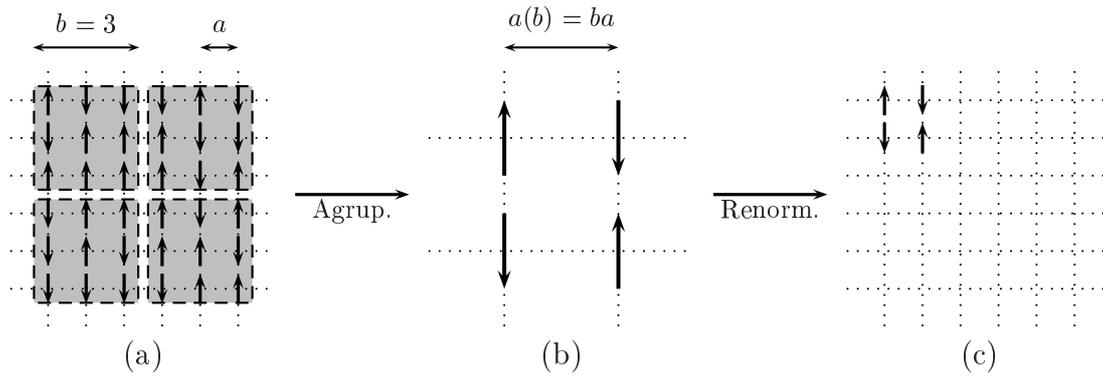
$$a \rightarrow a(b) = ba. \quad (2.6)$$

En este ejemplo concreto se ha utilizado  $b = 3$  pero, en adelante, consideraremos que una agrupación genérica viene parametrizada por un cierto parámetro  $b$  que, en general, puede ser cualquier real positivo.

**ii) Renormalización:** Si, tras hacer la transformación anterior, se reescalan las distancias en la red de tal manera que en las nuevas unidades los espines transformados estén separados por la distancia original  $a$ , se consigue que el sistema transformado sea isomorfo al original [Fig. 2.2(c)], aunque la configuración de los espines será localmente diferente y, como se verá más adelante, sólo en

<sup>7</sup>Utilizo el término agrupación para designar la operación que en inglés se denomina como *blocking*.

<sup>8</sup>Traducción de *discrete scaling symmetry*.



**Figura 2.2:** (a) Agrupación con parámetro  $b = 3$  en una red cuadrada de parámetro  $a$ . (b) Resultado de hacer la agrupación. (c) Red renormalizada.

ciertas condiciones puede considerarse estadísticamente igual a la red original. Este procedimiento consiste simplemente en renormalizar las distancias al nuevo parámetro de red. Por esto tiene sentido referirse a esta operación con el término “Renormalización”. Wilson, trabajando en el espacio de momentos [140], justifica este nombre por la transformación de los espines al aplicar la transformación del GR. Aunque aparentemente es un motivo distinto, los dos son válidos puesto que, con la finalidad de que el sistema transformado sea lo más parecido posible al original, se renormalizan tanto las distancias como el valor de los espines.

Resumiendo, en esta operación, si  $R$  es una cierta distancia en el espacio real, la distancia reducida  $r \equiv R/a$  transforma como:

$$r \rightarrow r(b) = \frac{R}{a(b)} = b^{-1}r, \quad (2.7)$$

donde se ha utilizado (2.6).

Por otro lado, con la finalidad de que el sistema transformado sea formalmente igual al original, sería deseable que la distribución  $P(\{\mu_p(b)\}, \{s_i(b)\}; b)$  en el sistema transformado fuese formalmente igual que la no transformada  $P(\{\mu_p\}, \{s_i\})$ . En general, esto es imposible si inicialmente el número de constantes de acoplamiento es finito. Esto es así porque, al hacer la agrupación, aparecen infinitas constantes de acoplamiento entre los espines transformados<sup>9</sup>.

<sup>9</sup>Es fácil convencerse de esto a partir de un ejemplo. En la Ref. 150 se aplican las ideas del GR en redes de espines tipo Ising y, concretamente, la resolución del problema mediante el desarrollo en cumulantes describe este problema de manera clara. El mismo problema se encuentra resumido en [11]. A parte, en uno de los artículos de revisión [138] de M.E. Fisher, también se trata de forma excelente este problema sin aplicarlo a ningún ejemplo concreto.

Para solventar este problema, es suficiente con pedir que quede invariante la distribución con respecto a las constantes que son distintas de cero originalmente. De esta manera, las nuevas constantes de acoplamiento  $\{\mu_p(b)\}$  se pueden acabar expresando en función de las constantes originales mediante una aplicación del tipo

$$\mu_p(b) = \mathcal{R}_p[\vec{\mu}(1); b], \quad (2.8)$$

donde, para abreviar, se ha definido  $\vec{\mu}(1)$  que equivale a  $\{\mu_p\}$ . En adelante, se utilizará  $\vec{\mu}$  en vez de  $\vec{\mu}(1)$  pero, en este caso, se ha indicado explícitamente la dependencia con  $b$  para remarcar que el sistema original corresponde a  $b = 1$ . La expresión (2.8) se puede escribir con una notación alternativa como:

$$\vec{\mu}(b) = \vec{\mathcal{R}}[\vec{\mu}(1); b]. \quad (2.9)$$

A partir de este punto, utilizaremos esta expresión (o equivalentemente (2.8)) como definición de la transformación combinada de la agrupación y posterior renormalización y, tal como se ha ido haciendo hasta este punto, se denominará transformación del GR.

### 2.2.2. Puntos fijos y superficie crítica

Desde un punto de vista geométrico, podemos suponer que las constantes de acoplamiento forman un espacio, que llamaremos espacio de las constantes<sup>10</sup>. En general, tendrá infinitas dimensiones debido a que, como se ha dicho antes, al aplicar la transformación del GR aparecen infinitas constantes de acoplamiento aunque inicialmente se parta de un número finito. Geométricamente, la aplicación repetida de la transformación del GR describe una trayectoria discreta (parametrizada por  $b$ ) en el espacio de constantes de acoplamiento.

Experimentalmente se encuentra que los sistemas que están cerca de una transición de fase de segundo orden son estadísticamente invariantes bajo transformaciones de escala [151]. Esto se pone de manifiesto dentro del marco del GR mediante el concepto de punto fijo de la transformación del GR. Este punto se define como aquél que es invariante bajo la transformación del GR. Matemáticamente, a partir de la ecuación (2.9) se define como aquel punto  $\vec{\mu}_*$  tal que

$$\vec{\mathcal{R}}[\vec{\mu}_*; b] = \vec{\mu}_*. \quad (2.10)$$

---

<sup>10</sup>Este espacio también se suele llamar espacio de parámetros, de Hamiltonianos y, hasta incluso, espacio de teorías, aunque esta última forma de nombrarlo tal vez no sea muy apropiada

Teniendo en cuenta que al efectuar una transformación del GR las distancias cambian según (2.7), en un punto fijo, la longitud de correlación  $\xi(\vec{\mu}_*)$  cumple que

$$\xi(\vec{\mu}_*) = \xi(\vec{\mu}_*)/b, \quad (2.11)$$

de tal manera que  $\xi(\vec{\mu}_*)$  sólo puede ser 0 o  $\infty$ . Siguiendo este resultado, a un punto fijo en el que  $\xi(\vec{\mu}_*) = 0$  se le llama punto fijo “trivial”, mientras que uno en el que  $\xi(\vec{\mu}_*) = \infty$  se denomina punto fijo crítico. Un punto fijo crítico describe una transición de fase continua mientras que un punto fijo trivial puede describir transiciones de fase de primer orden [§ 2.5] en que  $\xi$  es finita o, simplemente, describe una fase.

En particular, los puntos  $\vec{\mu}_* = 0$  y  $\vec{\mu}_* = \infty$  son claramente puntos fijos triviales en cualquier sistema.

El primero de ellos corresponde a un sistema en que, de forma efectiva, no hay acoplamiento entre los espines ni están acoplados con ningún campo externo. Por ejemplo, esto se observa en sistemas que están a temperatura muy alta y por eso se acostumbra a llamar *punto fijo de alta temperatura* [146, 147]. Por ejemplo, en un sistema de espines con interacciones ferromagnéticas, éste es el punto fijo que describe la fase en que los espines se orientan aleatoriamente independientemente del resto. No obstante, éste no es el único caso en que se observa una gran independencia del comportamiento de los espines, sino que, en un sistema con desorden (no térmico) muy alto, también se observa una gran independencia entre los espines y por tanto es como si, de forma efectiva, no interaccionasen. Tomando esto en consideración, tal vez sería más apropiado llamar a este punto fijo como *punto fijo de baja interacción*.

Por el contrario, el punto fijo  $\vec{\mu}_* = \infty$ , corresponde al caso en que tanto la temperatura como el desorden en el sistema tienden a 0, o bien, la interacción entre los espines es muy fuerte. En cualquiera de estos casos existe un orden perfecto en el sistema. Habitualmente, a este punto se le ha llamado *punto fijo de baja temperatura* pero, por la misma razón que antes, se le podría llamar *punto fijo de alta interacción*. En un sistema de espines con interacciones ferromagnéticas, este punto fijo describe la fase en que todos los espines son paralelos o, como veremos en la sección § 2.5, bajo ciertas condiciones puede describir una transición de fase de primer orden.

En referencia a los puntos fijos críticos, es importante decir que, en general, una transformación del GR puede tener varios de ellos. Para cada uno, se define como *superficie crítica*<sup>11</sup> el lugar geométrico formado por todos los puntos del espacio de

---

<sup>11</sup>También llamada *variedad crítica* ya que, en general, la superficie crítica no es una superficie sino una hipersuperficie.

constantes que, bajo la repetición de la transformación del GR, fluyen hacia el punto fijo.

### 2.2.3. Comportamiento cerca de un punto fijo. Variables de escala

Cerca de un punto fijo  $\vec{\mu}_*$ , la Ec. 2.8 se puede desarrollar como:

$$\mu_q(b) = \mathcal{R}_q[\vec{\mu}_*] + \sum_p \mathcal{L}_{qp}[\vec{\mu}_*; b](\mu_p - \mu_{*p}) + \mathcal{O}(2), \quad (2.12)$$

donde se ha definido un tensor de transformación lineal como

$$\mathcal{L}_{qp}[\vec{\mu}_*; b] \equiv \left( \frac{\partial \mathcal{R}_q(\vec{\mu}; b)}{\partial \mu_p} \right)_{\vec{\mu}_*}. \quad (2.13)$$

De manera más compacta, denotaremos este tensor como  $\overset{\leftrightarrow}{\mathcal{L}}_b$ , de tal forma que, a primer orden, es posible escribir la relación (2.12) como

$$\vec{\mu}(b) - \vec{\mu}_* = \overset{\leftrightarrow}{\mathcal{L}}_b \cdot (\vec{\mu} - \vec{\mu}_*). \quad (2.14)$$

Supongamos ahora que  $\{\lambda_i(b)\}$  son los autovalores de  $\overset{\leftrightarrow}{\mathcal{L}}_b$  correspondientes al conjunto de autovectores  $\{\hat{e}_i\}$ . Entonces, por definición

$$\overset{\leftrightarrow}{\mathcal{L}}_b \cdot \hat{e}_i = \lambda_i(b) \hat{e}_i, \quad (2.15)$$

y dado que dos transformaciones sucesivas parametrizadas por  $b_1$  y  $b_2$ , respectivamente, son equivalentes a una única transformación con parámetro  $b_1 b_2$ , se cumple que

$$\overset{\leftrightarrow}{\mathcal{L}}_{b_1} \cdot \left( \overset{\leftrightarrow}{\mathcal{L}}_{b_2} \cdot \hat{e}_i \right) = \overset{\leftrightarrow}{\mathcal{L}}_{b_1 b_2} \cdot \hat{e}_i, \quad (2.16)$$

Utilizando ahora la relación (2.15), se llega a la conclusión de que

$$\lambda_i(b_1) \lambda_i(b_2) = \lambda_i(b_1 b_2), \quad (2.17)$$

cuya solución es

$$\lambda_i(b) = b^{y_i}, \quad (2.18)$$

donde  $\{y_i\}$  es un conjunto de constantes que se acostumbran a llamar *autovalores del Grupo de Renormalización* y, como veremos, están relacionados con los exponentes críticos.

El conjunto de vectores  $\{\hat{e}_i\}$  forma una base ortonormal. En consecuencia, se pueden expresar los vectores del espacio de constantes en dicha base

$$\vec{\mu} - \vec{\mu}_* = \sum_i u_i \hat{e}_i. \quad (2.19)$$

En esta relación se han introducido el conjunto de variables de escala  $\{u_i\}$ . Geométricamente tienen un sentido claro: la  $i$ -ésima variable de escala es la proyección del vector  $\vec{\mu} - \vec{\mu}_*$  sobre la dirección del autovector  $\hat{e}_i$ .

En cualquier caso, además de esta propiedad geométrica, la propiedad más importante de las variables de escala es que transforman de forma extremadamente sencilla al aplicar la transformación del GR:

$$u_i(b) = b^{y_i} u_i. \quad (2.20)$$

Para llegar a esta relación hay que utilizar la ecuación (2.19) y una análoga para las variables transformadas. A partir de tales relaciones, y utilizando (2.14), se obtiene

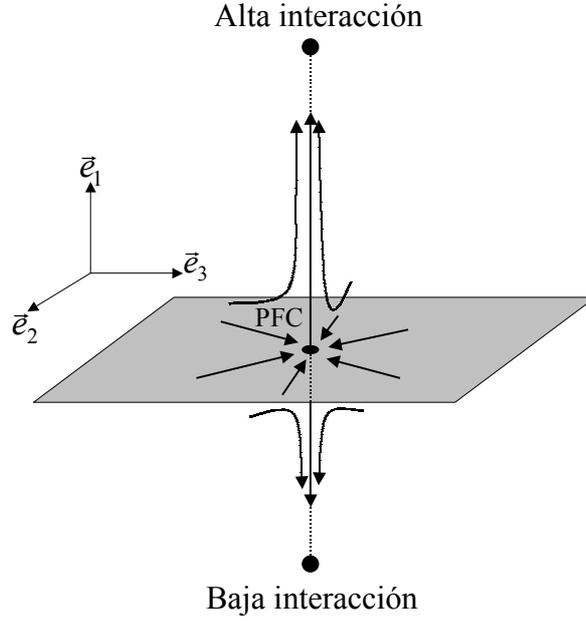
$$\overset{\leftrightarrow}{\mathcal{L}}_b \cdot \left( \sum_i u_i \hat{e}_i \right) = \sum_i u_i(b) \hat{e}_i \quad (2.21)$$

$$= \sum_i u_i \lambda_i(b) \hat{e}_i. \quad (2.22)$$

Finalmente, igualando los dos miembros derechos de estas igualdades y utilizando la relación (2.18), se llega fácilmente a la ecuación (2.20).

El flujo del GR en la dirección de  $\hat{e}_i$  está relacionado con el signo de  $y_i$ . Según sea este signo, se pueden distinguir tres casos:

- i)*  $y_i > 0$  ( $\lambda_i(b) > 1$ ): según (2.20),  $u_i(b)$  crece al aumentar  $b$ , de manera que, en el espacio de constantes, el sistema se aleja del punto fijo. Se dice en este caso que  $u_i$  es *relevante*. Por extensión se dice que la dirección de  $\hat{e}_i$  es relevante.
- ii)*  $y_i < 0$  ( $\lambda_i(b) < 1$ ): en este caso  $u_i(b)$  decrece al aumentar  $b$  y, por tanto, el sistema se mueve hacia el punto fijo. En esta situación  $u_i$  es *irrelevante*. En este caso la dirección de  $\hat{e}_i$  es irrelevante.
- iii)*  $y_i = 0$  ( $\lambda_i(b) = 1$ ):  $u_i(b)$  no cambia al variar  $b$ , pero realmente, en este caso no se puede deducir con seguridad el comportamiento del flujo del GR en la aproximación lineal y es necesaria una aproximación mejor. En esta situación, se dice que  $u_i$  es *marginal* y la dirección de  $\hat{e}_i$  también es marginal.



**Figura 2.3:** Flujo esquemático del GR en la aproximación lineal visto desde el sistema de referencia de los vectores  $\{\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3\}$  propios de  $\mathcal{L}_b$ . En este caso la superficie crítica es bidimensional y, en la aproximación lineal, es un plano generado por las direcciones  $\hat{e}_2$  y  $\hat{e}_3$ , que suponemos irrelevantes. Todos los puntos con  $u_1 = 0$  pertenecen a la superficie crítica y tienden hacia el punto fijo crítico (PFC). En cambio, los puntos que no pertenecen a la superficie crítica se alejan del punto fijo crítico tendiendo al punto fijo de alta interacción o de baja interacción según si inicialmente  $u_1 > 0$  o  $u_1 < 0$ , respectivamente.

En la Fig. 2.3 se representa esquemáticamente el flujo del GR para un espacio de constantes tridimensional en que hay una dirección relevante ( $\hat{e}_1$ ) y dos irrelevantes ( $\hat{e}_2$  y  $\hat{e}_3$ ). En estas condiciones, todos los puntos en que  $u_1 = 0$ , sólo tienen componentes irrelevantes y están sobre la superficie crítica puesto que al aplicar repetidamente la transformación del GR tienden al punto fijo. A partir de esto, se deduce que un sistema que yace sobre la superficie crítica, tiene las mismas características a grandes distancias que uno que se encuentre inicialmente en el punto fijo crítico y, como consecuencia, toda la superficie crítica tiene longitud de correlación infinita.

Enlazando con la sección § 2.2.2, desde el punto de vista del flujo del GR, un punto fijo crítico se caracteriza por tener al menos una dirección relevante. En cambio, todas las direcciones asociadas a un punto fijo trivial son irrelevantes.

Para finalizar esta sección, es interesante puntualizar que, a partir de la ecuación (2.19) se ve claramente que el flujo en el sistema de referencia de las constantes de acoplamiento  $\{\mu_p\}$  se obtiene a partir del flujo en el sistema definido por los autovectores

$\{\hat{e}_i\}$  haciendo una traslación y una rotación.

#### 2.2.4. Relaciones de escala. Invariantes bajo la transformación del GR

Al hacer una transformación del GR cerca de un punto crítico, hay numerosos observables que transforman como [147]:

$$A(\vec{\mu}(b); b) = b^a A(\vec{\mu}), \quad (2.23)$$

donde se supone que la magnitud  $A$  depende de  $n_a$  constantes de acoplamiento ( $\dim(\vec{\mu}) = n_a$ ). Es importante remarcar que, en algunos casos, sólo alguna de las contribuciones a un cierto observable se comporta de la forma (2.23). En esta tesis (Capítulo 5) se presentan varios ejemplos en que un cierto observable se puede expresar como la suma de dos contribuciones que se comportan de manera diferente al aplicar la transformación del GR. Un ejemplo tradicional de comportamiento de este tipo es el cambio de la energía libre bajo la transformación del GR [147].

En adelante, consideraremos la dependencia de la función genérica  $A$  con las variables de escala  $\vec{u} \equiv \{u_i\}$  en vez de con las constantes de acoplamiento  $\vec{\mu}$  puesto que, como ya se ha visto, las variables de escala transforman de forma más sencilla que las constantes de acoplamiento. En cualquier caso, el paso de unas variables a otras es directo utilizando la relación (2.19)<sup>12</sup>.

Ahora, utilizando la transformación de  $A$  dada por (2.23) y la de una cualquiera de las variables de escala (por ejemplo  $u_j$ ), dada por la ecuación (2.20), vemos que el producto  $A(\vec{u})u_j^{-a/y_j}$  es invariante bajo la transformación del GR:

$$A(\vec{u}(b); b)(u_j(b))^{-a/y_j} = b^a A(\vec{u}) (b^{y_j} u_j)^{-a/y_j} = A(\vec{u})u_j^{-a/y_j}. \quad (2.24)$$

A nivel de notación, definiremos un operador de invariancia  $\mathcal{I}$  que da como resultado el producto invariante de las magnitudes sobre las que actúa. En el caso particular de las magnitudes  $A$  y  $u$  es

$$\mathcal{I}[A(\vec{u}), u_j] = A(\vec{u})u_j^{-a/y_j}. \quad (2.25)$$

El invariante  $\mathcal{I}[A(\vec{u}), u_j]$  depende sólo de las variables de escala  $\{u_i\}$  pero, según (2.20), fuera del punto fijo, éstas no permanecen invariantes al aplicar la transformación del GR, de manera que  $\mathcal{I}[A(\vec{u}), u_j]$  no puede depender de cada una de ellas individualmente, sino que debe depender de invariantes construidos a partir de ellas.

<sup>12</sup>Siempre que la linealización (2.19) del GR sea aplicable, claro está.

Es necesario pues buscar los invariantes que se pueden obtener a partir de las variables de escala. Dada una pareja de variables de escala  $(u_i, u_j)$ , un posible invariante es

$$\mathcal{I}[u_i, u_j] = u_i u_j^{-y_i/y_j}. \quad (2.26)$$

Siguiendo esta línea, se podrían ir formando invariantes que impliquen tres variables de escala o más pero esto no es necesario puesto que “cualquier invariante formado con  $n$  variables de escala se puede expresar como producto de  $n - 1$  potencias de invariantes de pares”.

Para demostrar que esta afirmación es correcta, consideremos el siguiente invariante de  $n$  variables de escala

$$\mathcal{I}[u_1, u_2, \dots, u_n] = \prod_{i=1}^n u_i^{q_i}, \quad (2.27)$$

donde los coeficientes  $\{q_i\}$  deben cumplir que  $\sum_{i=1}^n y_i q_i = 0$  para que haya invariancia.

Si ahora redefinimos los coeficientes  $\{q_i\}$  en función de un nuevo conjunto de coeficientes  $\{p_i\}$  como

$$q_i = \begin{cases} p_1, & i = 1 \\ p_i - p_{i-1} \frac{y_{i-1}}{y_i}, & i = 2, 3, \dots, n-1 \\ -p_{n-1} \frac{y_{n-1}}{y_n}, & i = n \end{cases} \quad (2.28)$$

se obtiene la expresión que buscamos en que se expresa el invariante  $\mathcal{I}[u_1, u_2, \dots, u_n]$  como producto de potencias de  $n - 1$  invariantes de pares

$$\mathcal{I}[u_1, u_2, \dots, u_n] = \prod_{i=1}^{n-1} (\mathcal{I}[u_i, u_{i+1}])^{p_i}. \quad (2.29)$$

Tras todas estas consideraciones, podemos expresar el invariante  $\mathcal{I}[A(\vec{u}), u_j]$  como función de  $n_a - 1$  invariantes de pares:

$$\mathcal{I}[A(\vec{u}), u_j] = \tilde{A}(\mathcal{I}[u_1, u_2], \mathcal{I}[u_2, u_3], \dots, \mathcal{I}[u_{n_a-1}, u_{n_a}]), \quad (2.30)$$

donde  $\tilde{A}$  es una función de escala. En general se llama función de escala a la función que da la dependencia de un determinado invariante con los invariantes formados con las variables de escala del problema. Por propia definición, una función de escala es invariante bajo la transformación del GR.

Finalmente, utilizando (2.25) y (2.26), se obtiene la dependencia de la función  $A$ :

$$A(\vec{u}) = u_j^{a/y_j} \tilde{A} \left( u_1 u_2^{-y_1/y_2}, u_2 u_3^{-y_2/y_3}, \dots, u_{n_a-1} u_{n_a}^{-y_{n_a-1}/y_{n_a}} \right). \quad (2.31)$$

Una propiedad de los invariantes que ya se ha utilizado de manera implícita es que, si  $\mathcal{I}[u_i, u_j]$  es invariante, lógicamente también lo es  $(\mathcal{I}[u_i, u_j])^p$ , donde  $p$  es un real cualquiera. Esta propiedad hace que la forma en que se han presentado los invariantes no sea única. Por ejemplo, elevando el invariante expresado en (2.26) a  $y_j$  obtenemos el invariante  $u_i^{y_j} u_j^{y_i}$  que es totalmente equivalente al primero. De esta manera, se pueden expresar las ecuaciones de infinitas formas distintas pero equivalentes entre sí.

Basándose en razonamientos similares, la dependencia del observable  $A$  se puede expresar de infinitas formas diferentes pero equivalentes, siempre y cuando los invariantes de pares que se introduzcan como dependencia con las variables de escala sean independientes entre sí<sup>13</sup>. Por ejemplo, una forma equivalente a (2.31) podría ser:

$$A(\vec{u}) = u_k^{a/y_k} \bar{A}(u_1^{y_i} u_i^{y_1}, u_2^{y_4} u_4^{y_2}, \dots). \quad (2.32)$$

Normalmente se supone que, en las relaciones de escala, sólo intervienen las variables relevantes puesto que las irrelevantes no juegan un papel importante a largas distancias. De todas formas, en algunos casos las variables irrelevantes llamadas “peligrosas” juegan un papel importante y pueden dar lugar a correcciones al escalado [20, 147].

En toda esta discusión y en las que siguen, si no se dice lo contrario, se considera que  $\{u_i > 0\}$  para que al elevar a potencias no enteras resulte un número real. Esto se ha considerado así para hacer la introducción más clara, pero la extensión al caso en que algunas variables son negativas es sencilla. En la práctica, se suele resolver utilizando siempre el módulo de las variables de escala y definiendo una función de escala  $\tilde{A}_{\pm}$  cuyo subíndice en forma de vector  $\vec{\pm}$  tiene en cuenta el signo de cada variable (a cada combinación distinta de signos de las variables de escala le corresponde una función de escala diferente). Así pues, la Ec. (2.31) se puede escribir como

$$A(\vec{u}) = |u_j|^{a/y_j} \tilde{A}_{\vec{\pm}}(|u_1||u_2|^{-y_1/y_2}, |u_2||u_3|^{-y_2/y_3}, \dots, |u_{n_a-1}||u_{n_a}|^{-y_{n_a-1}/y_{n_a}}). \quad (2.33)$$

En el caso particular en que sólo se consideren dos variables de escala  $u_1$  y  $u_2$ , con  $u_2 > 0$ , la relación de escala (2.33) se escribe como:

$$A(\vec{u}) = |u_1|^{a/y_1} \tilde{A}_{\pm}(|u_1||u_2|^{-y_1/y_2}) = \begin{cases} |u_1|^{a/y_1} \tilde{A}_+ (|u_1||u_2|^{-y_1/y_2}), & u_1 > 0 \\ |u_1|^{a/y_1} \tilde{A}_- (|u_1||u_2|^{-y_1/y_2}), & u_1 < 0. \end{cases} \quad (2.34)$$

---

<sup>13</sup>Se consideran invariantes independientes aquellos que no se pueden obtener como producto de otros invariantes elevados a cualquier potencia.

### 2.2.5. Relación del GR con los fenómenos críticos

Hasta este punto, todo lo expuesto con referencia al GR ha estado relacionado básicamente con el comportamiento de sistemas de espines gobernados por la distribución (2.4) al hacer un cambio de escala. Todo se ha llevado a cabo estudiando el flujo del GR en el espacio de constantes de acoplamiento. Aunque desde un punto de vista teórico las variables de escala son útiles, típicamente no son las magnitudes de control que se pueden variar externamente en un sistema en que tenga lugar una transición de fase. Como vimos en el capítulo 1, las magnitudes de control que se suelen variar son, por ejemplo, la temperatura, la presión, el campo magnético o el desorden.

Es necesario pues relacionar el formalismo del GR con las variables de control para poder aplicar las ideas del GR a fenómenos críticos. La idea principal que lleva a esta unión es suponer que a cada conjunto de valores de las variables de control le corresponde un punto en el espacio de constantes. Como ya se ha dicho, el número de constantes de acoplamiento (y por tanto de variables de escala) es infinito y, en cambio, el número de variables de control es finito. De esto se desprende que, generalmente, el conjunto accesible de valores de las variables de control no permite recorrer todo el espacio de constantes sino que la exploración se ve restringida sólo a una zona. El hecho importante es que, aunque no se pueda recorrer todo el espacio de constantes, si para algún determinado valor de las variables de control, el sistema se sitúa sobre la superficie crítica en un determinado punto llamado *punto crítico*<sup>14</sup>, su comportamiento vendrá dictado por el punto fijo crítico que genera la superficie crítica en cuestión.

Matemáticamente podemos poner estas ideas de manifiesto suponiendo que tenemos un conjunto de  $n_f$  variables de control<sup>15</sup>  $\{\Psi_i, i = 1, 2, \dots, n_f\}$  cuya variación genera un camino en el espacio de constantes que, de forma paramétrica, representaremos por  $\vec{\mu}(\vec{\Psi})$ . De nuevo, es mejor hacer el estudio en términos de las variables de escala, porque es para éstas para las que se han propuesto las relaciones de escala en la sección § 2.2.4 y, finalmente, son éstas las relaciones que se utilizan en la práctica. En términos de las variables de escala, el camino lo denotaremos como  $\vec{u}(\vec{\Psi})$ . Por extensión del término “superficie crítica”, llamaremos superficie física a la región definida por  $\vec{u}(\vec{\Psi})$ .

Surge un problema importante en este punto, y es que, tanto la dependencia en  $\vec{\Psi}$

---

<sup>14</sup>Es importante notar que, aunque este nombre es similar a “punto fijo crítico”, el concepto es diferente. El punto crítico es un punto situado en la superficie crítica pero no tiene porqué ser el punto fijo que la genera, y de hecho, en general no lo es.

<sup>15</sup>A diferencia de la notación introducida en la sección § 1.1, alguno de los  $\Psi_i$  puede ser la temperatura.

de  $\vec{\mu}(\vec{\Psi})$  como la de  $\vec{u}(\vec{\Psi})$ , es desconocida [19, 147]. Sin embargo, se supone que es una dependencia analítica, lo que permite desarrollar en serie cada una de las variables de escala en torno al punto crítico  $\vec{\Psi}_c$ :

$$\begin{aligned} \vec{u}(\vec{\Psi}) = & \vec{u}(\vec{\Psi}_c) + \sum_i \left[ \frac{\partial \vec{u}(\vec{\Psi})}{\partial \Psi_i} \right]_{\vec{\Psi}_c} (\Psi_i - \Psi_{ci}) \\ & + \sum_{i,j} \left[ \frac{\partial^2 \vec{u}(\vec{\Psi})}{\partial \Psi_i \partial \Psi_j} \right]_{\vec{\Psi}_c} (\Psi_i - \Psi_{ci}) (\Psi_j - \Psi_{cj}) + \mathcal{O}(3). \end{aligned} \quad (2.35)$$

Generalmente se asume que si hay  $n_f$  variables de control que permiten aproximarse o alejarse del punto crítico de forma independiente, deben existir  $n_f$  direcciones relevantes en el espacio de las constantes de acoplamiento para dar cuenta de las distintas formas independientes de variar la distancia a la superficie crítica.

A partir de la relación (2.35) entre las variables de control y las variables de escala, se pueden expresar las relaciones de escala del tipo (2.31) en función de las variables de control, y esto es lo que interesa en la mayoría de casos reales.

Para concretar, supongamos el modelo de Ising ferromagnético. En este caso hay dos variables de control: la temperatura  $T$  y el campo magnético  $H$ . A estas variables de control se les asocian dos direcciones relevantes en el espacio de parámetros con variables de escala  $u_T$  y  $u_H$ . La notación utilizada está justificada por el hecho de que el punto crítico en equilibrio tiene lugar para  $H = H_c = 0$ , de manera que el operador  $\overset{\leftrightarrow}{\mathcal{L}}$  debe ser diagonal por bloques de tal forma que el subespacio par (invariante bajo el cambio  $\{s_i\} \rightarrow \{-s_i\}$ ) no esté conectado con el subespacio impar (impar bajo el cambio  $\{s_i\} \rightarrow \{-s_i\}$ ). Así pues, se considera que la variable  $u_T$  pertenece al subespacio par mientras que  $u_H$  pertenece al subespacio impar.

Teniendo en cuenta las condiciones de simetría, el caso particular de la Ec. (2.35) para  $u_T$  y  $u_H$  es:

$$u_T(T, H) \sim (T - T_c)/T_c + \mathcal{O}((T - T_c)^2, H^2) \quad (2.36)$$

$$u_H(T, H) \sim H + \mathcal{O}((T - T_c)H), \quad (2.37)$$

donde  $T_c$  es la temperatura en el punto crítico.

Se obtienen de esta manera dos de las variables de escala fenomenológicas introducidas en el cuadro 2.1.

En la Fig. 2.4 se representa de forma esquemática el espacio de las constantes para este modelo y el flujo del GR. Supongamos que variamos la temperatura a campo  $H_c = 0$ . En estas condiciones, es bien sabido que para la temperatura  $T_c$  el sistema

presenta una transición de fase de segundo orden, de manera que el camino  $\vec{u}(T, H_c)$  seguido por el sistema en el espacio de las constantes cruza la superficie crítica en un punto  $\vec{u}(T_c, H_c)$ . Cuando el sistema se encuentra en este punto, a grandes escalas, tiene las mismas características que el punto fijo crítico (PFC en la Fig. 2.4) puesto que, bajo la transformación del GR, tiende hacia dicho punto fijo. En cambio, el flujo del GR en los puntos  $\vec{u}(T > T_c, H_c)$  tiende hacia el punto de alta interacción, mientras que, a partir de cualquier punto  $\vec{u}(T < T_c, H_c)$ , tiende al punto de baja interacción.

Si el punto crítico está suficientemente cercano al punto fijo, será válida la aproximación lineal del GR y las relaciones de escala [Ec. 2.31] se podrán expresar en términos de las variables de control del problema utilizando las relaciones (2.36) y (2.37). Considerando como únicas variables de escala  $u_T$  y  $u_H$ , y dejando a un lado las variables irrelevantes, se obtiene

$$A(T, H) = u_T^{a/y_T} \tilde{A}(u_H u_T^{-y_H/y_T}) \sim \left(\frac{T - T_c}{T_c}\right)^{a\nu} \tilde{A}\left(H [(T - T_c)/T_c]^{-\beta\delta}\right), \quad (2.38)$$

a primer orden. Los exponentes críticos  $\nu$ ,  $\beta$  y  $\delta$  están definidos en el cuadro 2.1 y, según la ecuación (2.1), cumplen las relaciones siguientes:

$$\xi \sim \left(\frac{T_c - T}{T_c}\right)^{-\nu}, \quad (2.39)$$

$$M \sim \left(\frac{T_c - T}{T_c}\right)^{\beta}, \quad (2.40)$$

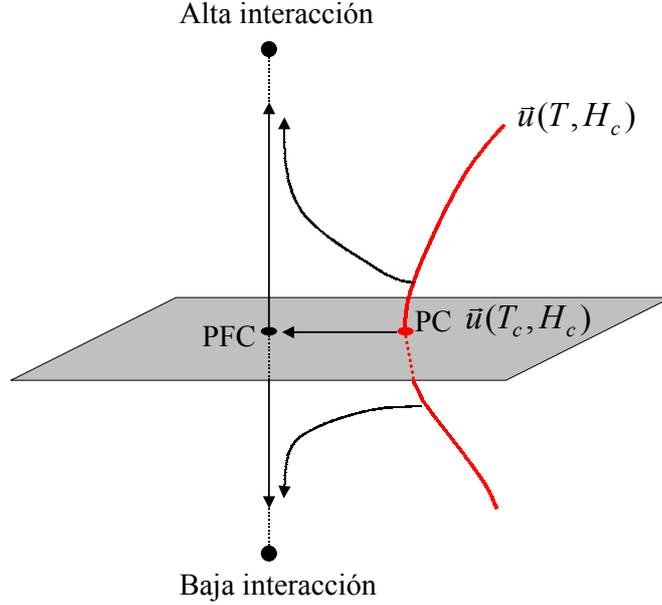
$$H \sim |M|^{\delta} \text{signo}(M), \quad (2.41)$$

donde, de acuerdo con el cuadro 2.1,  $M$  es la magnetización y  $\xi$  es la longitud de correlación. Para obtener el último miembro de la Ec. (2.38) es necesario relacionar los autovalores del Grupo de Renormalización con los exponentes críticos como:

$$y_T \equiv 1/\nu; \quad y_H \equiv \frac{\beta\delta}{\nu}. \quad (2.42)$$

Al relacionar las ideas del GR con los fenómenos críticos, siempre aparece la relación necesaria entre los exponentes críticos (definidos antes de que Wilson propusiera el GR) y los autovalores del GR. Esto resuelve el principal problema de la formulación de Kadanoff [149] que necesitaba introducir la hipótesis de que las variables de escala fenomenológicas varían de forma potencial al hacer una transformación de escala. En cambio, al linealizar el GR, esta condición aparece de forma natural a partir de (2.20) y (2.35).

Todos los exponentes críticos introducidos en el cuadro 2.1 se pueden expresar en función de sólo dos autovalores del GR, lo que implica que no pueden ser todos



**Figura 2.4:** Espacio de las constantes en que se representa el camino  $\vec{u}(T, H_c)$  que sigue el sistema al variar la temperatura a campo  $H = H_c$  ( $H_c = 0$  en el modelo de Ising ferromagnético en equilibrio). El camino cruza la superficie crítica en el punto crítico (PC) y, tal y como se indica con una flecha, en esta situación el sistema evoluciona hacia el punto fijo bajo la transformación del GR. También se indica con flechas el flujo del GR para  $T > T_c$  y  $T < T_c$ .

independientes entre sí y deben que cumplir ciertas relaciones entre ellos. Como ya se dijo en la introducción, estas relaciones se habían encontrado previamente con la teoría de Widom y Kadanoff. No se darán aquí explícitamente estas relaciones pero no es difícil obtenerlas. Este punto está bien tratado en la Ref. 134, por ejemplo.

Como ejemplo, particularizando la Ec. (2.38) a la longitud de correlación y a la magnetización cerca del punto crítico, se llega a las expresiones siguientes:

$$\xi(T, H) = |(T - T_c)/T_c|^{-\nu} \tilde{\xi}_{\pm} (H|(T - T_c)/T_c|^{-\beta\delta}) \quad (2.43)$$

$$M(T, H) = |(T - T_c)/T_c|^{\beta} \tilde{M}_{\pm} (H|(T - T_c)/T_c|^{-\beta\delta}). \quad (2.44)$$

Lógicamente, estas relaciones de escala coinciden con las propuestas utilizando procedimientos tradicionales [134] distintos al formalismo de invariantes introducido aquí.

Por otro lado, en un fluido en que la densidad en estado líquido es  $\rho_L$  y en estado gas es  $\rho_g$ , la diferencia  $\rho_L - \rho_g$  juega un papel similar al de la discontinuidad de la magnetización en sistemas magnéticos. Por tanto, a  $p = p_c$  [134],

$$\rho_L - \rho_g \sim \left( \frac{T_c - T}{T_c} \right)^{\beta}. \quad (2.45)$$

Este comportamiento explica directamente el escalado propuesto por Guggenheim en 1945 [135] con  $\beta = 1/3$ . Guggenheim interpretó el escalado como una extensión del principio de estados correspondientes y, en cambio, en términos de la teoría moderna se deduce directamente que el comportamiento es de la forma (2.45).

Visto esto, de forma resumida, se puede decir que las relaciones de escala en función de las variables de control son válidas siempre que se den dos condiciones:

- El punto crítico debe estar suficientemente cerca del punto fijo crítico como para que la linealización (2.12) sea válida y, por tanto, sea correcto considerar que las relaciones de escala dependen sólo de las variables de escala [Ec. 2.31].
- Las variables de control no deben estar muy lejos del punto crítico para que sea aceptable considerar el desarrollo (2.35) hasta un orden finito.

Estas dos condiciones son independientes entre sí puesto que la primera está relacionada con el GR en sí mismo y la segunda con la introducción de las variables de control en el problema.

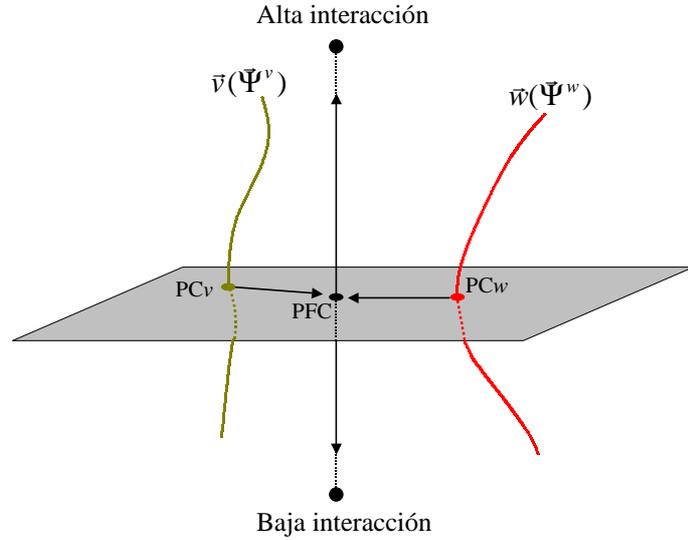
Además de las condiciones enumeradas, en determinados casos, como en el ejemplo del modelo de Ising ferromagnético, para llegar a una relación de escala del tipo (2.42), se han aprovechado las simetrías del problema, lo que permite que, a primer orden, las variables  $u_T$  y  $u_H$  queden desacopladas (la primera depende sólo de la temperatura y la segunda sólo del campo). En general, como se ha visto, aún a primer orden, no tiene porqué existir tal desacoplo. Evidentemente, suponer que hay desacoplo cuando no lo hay, e intentar extender la validez de las relaciones de escala a valores de las variables de control en que el acoplamiento sea notable, puede afectar al valor de los exponentes críticos obtenidos en la práctica.

### 2.2.6. Universalidad

Tal y como se introdujo en la sección § 2.1, se llama universalidad al hecho de que sistemas distintos tengan en común el valor de los exponentes críticos que caracterizan su comportamiento cerca del punto crítico [138, 144, 148]. Según esto, se dice que dos sistemas pertenecen a la misma clase de universalidad si se caracterizan por el mismo conjunto de exponentes.

Por ejemplo, se ha demostrado experimentalmente que la transición líquido–vapor en algunos fluidos pertenece a la misma clase de universalidad que el modelo de Ising tridimensional. También pertenecen a esta clase algunos materiales magnéticos uniaxiales que, al fin y al cabo, inspiraron el modelo de Ising. Para una revisión reciente

**Figura 2.5:** Representación esquemática de dos sistemas  $v$  y  $w$  con superficies de control  $\vec{v}(\Psi^v)$  y  $\vec{w}(\Psi^w)$ , respectivamente. Los puntos críticos de ambos sistemas están sobre la superficie crítica y se indican con  $PCv$  y  $PCw$  para el sistema  $v$  y el  $w$ , respectivamente. El flujo del GR, como en figuras anteriores, se indica con flechas.



de otros sistemas que pertenecen a esta clase de universalidad y a otras, consultar la Ref. 148.

El GR permitió entender la universalidad desde un punto de vista teórico. Conceptualmente, éste es uno de los logros más importantes del GR. Por esta razón, en esta sección se introduce brevemente la explicación de la universalidad utilizando las ideas expuestas sobre el GR.

Para concretar, supongamos una situación como la representada en la Fig. 2.5. Se representan dos sistemas diferentes  $v$  y  $w$  tales que sus superficies físicas  $\vec{v}(\vec{\Psi}^v)$  y  $\vec{w}(\vec{\Psi}^w)$ , respectivamente, cruzan la misma superficie crítica. En principio, las variables de control del sistema  $v$  no tienen porqué ser las mismas que las del sistema  $w$ . Por ejemplo, en un sistema pueden ser la temperatura y el campo magnético y, en el otro, pueden ser la temperatura y la presión hidrostática. El punto crítico del sistema  $v$  ( $PCv$ ) tiene lugar para  $\vec{\Psi}^v = \vec{\Psi}_c^v$  y, el del sistema  $w$  ( $PCw$ ), ocurre para  $\vec{\Psi}^w = \vec{\Psi}_c^w$ . En general, aunque las variables de control de ambos sistemas sean las mismas, habitualmente  $\vec{\Psi}_c^v \neq \vec{\Psi}_c^w$ .

Consideremos ahora la energía libre por espín de cada uno de los sistemas. Llamaremos  $f_v$  a la energía libre del sistema  $v$  y  $f_w$  a la del sistema  $w$ . Es interesante utilizar esta magnitud como punto de partida porque, demostrando la universalidad en ella, queda demostrada directamente en el resto de observables que se derivan a partir de

ella. Bajo la transformación del GR, esta magnitud transforma como<sup>16</sup>

$$f_v(\vec{v}(b); b) = b^d f_v(\vec{v}), \quad (2.46)$$

$$f_w(\vec{w}(b); b) = b^d f_w(\vec{w}), \quad (2.47)$$

para cada uno de los sistemas, donde  $d$  es la dimensión del sistema.

Como se vio en la sección § 2.2.4, si un observable transforma como lo hace la energía libre en (2.46) (o en (2.47)), entonces (ver Ec. (2.31)) se puede escribir como:

$$f_v(\vec{v}) = v_1^{d/y_1} \tilde{f}_v \left( v_1 v_2^{-y_1/y_2} \right) \quad (2.48)$$

$$f_w(\vec{w}) = w_1^{d/y_1} \tilde{f}_w \left( w_1 w_2^{-y_1/y_2} \right), \quad (2.49)$$

donde, para simplificar, y sin pérdida de generalidad, se ha hecho la hipótesis de que el espacio de constantes tiene sólo dos variables de escala, de las que, al menos una, es relevante. Como se puede ver, en ambas ecuaciones aparecen los mismos autovalores del GR porque, como se demostró en la sección § 2.2.3, éstos sólo dependen de la transformación del grupo de renormalización ( $\mathcal{L}_b$ ) en torno al punto fijo crítico y no dependen del sistema en cuestión. Esto es así siempre y cuando la aproximación lineal del GR sea válida.

Por otro lado, en la sección § 2.2.5 se demostró que los exponentes críticos están determinados únicamente por los autovalores del GR. De este hecho se deduce directamente que si los autovalores del GR son independientes del sistema, también lo son los exponentes críticos. En la Fig. 2.5 se muestra lo que sucede en el espacio de constantes. Cuando los dos sistemas, que en principio tienen características diferentes, están en sus respectivos puntos críticos, tienden al mismo punto fijo crítico al aplicar reiteradamente la transformación del GR. Como consecuencia, su comportamiento a largas distancias es igual y está caracterizado únicamente por el punto fijo crítico al que tienden. Visto esto, se concluye que los sistemas que pertenecen a la misma clase de universalidad sólo difieren entre sí en sus variables de escala irrelevantes.

En todo este razonamiento, no se ha dicho nada de la posible universalidad de las funciones de escala  $\tilde{f}_v$  y  $\tilde{f}_w$ . En principio, éstas son funciones no universales ya que deben dar cuenta de factores como las simetrías de cada sistema. Así, si por ejemplo el sistema  $v$  es un ferromagneto y el  $w$  es un fluido, el primero tiene unas simetrías [§ 2.2.5] que el segundo no tiene y, aunque su comportamiento crítico esté descrito por los mismos exponentes, no tienen porqué estar descritos por las mismas funciones de

<sup>16</sup>Se puede demostrar que la transformación de la energía libre bajo la transformación del GR involucra también términos analíticos que no influyen de forma determinante en los escalados [19,147].

escala. Por ejemplo, la representación análoga para un sistema ferromagnético a la que se presenta para fluidos en la Fig. 2.1 es  $T/T_c$  en función de  $M/M_{max}$ . En el caso de fluidos se observa una asimetría clara con respecto al eje  $\rho/\rho_c = 0.5$ , mientras que en el caso de la curva de un sistema magnético con un eje de fácil imanación, la curva correspondiente es perfectamente simétrica con respecto al eje  $M = 0$  (ver figura 1 de la Ref. 138). Sin embargo, las funciones de escala sí se pueden considerar universales entre sistemas que, aún siendo distintos, tienen ciertas características en común. Esto define un concepto de universalidad en sentido más fuerte [138]. En principio, este concepto no está tan relacionado con el GR como la universalidad aplicada únicamente a los exponentes críticos.

Un ejemplo de esta universalidad es el escalado de la Fig. 2.1 en que los distintos fluidos, además de tener los mismos exponentes críticos, tienen las mismas funciones de escala.

### 2.3. Tamaño finito

Estrictamente hablando, en cálculos de mecánica estadística las transiciones de fase tienen lugar sólo en el *límite termodinámico* en el que el volumen ( $V$ ) del sistema y el número ( $N$ ) de grados de libertad<sup>17</sup> tienden a infinito manteniendo la densidad  $\rho = N/V$  fijada. Esto es importante en esta tesis en que se presentan resultados de simulaciones numéricas que, lógicamente, corresponden a sistemas de tamaño finito.

Por otro lado, la mayoría de sistemas experimentales reales se caracterizan por tener un número de partículas muy grande y un volumen mucho mayor que el de las partículas individuales. Esto hace que, aunque estrictamente, tanto  $N$  como  $V$  sean finitos, los sistemas experimentales presenten transiciones de fase en que las magnitudes termodinámicas tienen un carácter singular limitado únicamente por la resolución de los aparatos de medida.

En un punto crítico  $\vec{\Psi}_c$ , por ejemplo, el calor específico o la susceptibilidad magnética presentan una divergencia teórica si el sistema en cuestión es infinito. En cambio, si el sistema es finito, en lugar de una divergencia en  $\vec{\Psi}_c$ , presentan un pico en un cierto punto  $\vec{\Psi}_c(L)$  diferente al punto crítico [152–154]. Estas características supusieron el punto de partida [155, 156] de la teoría de escalado de tamaño finito (a menudo a lo largo de la tesis utilizaremos el acrónimo FSS derivado del inglés *Finite-Size Scaling*). Básicamente, esta teoría permite extraer la información crítica partiendo de un siste-

---

<sup>17</sup>En el caso de una red de espines,  $N$  es el número total de espines en la red

ma finito aunque, desde un punto de vista estricto, sus características no se puedan considerar como críticas. Posteriormente, la teoría de escalado de tamaño finito se ha introducido desde el punto de vista del GR, tanto en el espacio de momentos [157] como en el espacio real [156]. Todos estos trabajos parten del cambio de la energía libre de un sistema bajo la transformación del GR, utilizando una distribución de configuraciones de espines como la dada en la Ec. (2.5). Para evitar esta hipótesis, utilizaremos el formalismo de invariantes introducido en la sección § 2.2.4.

Consideremos un sistema hipercúbico  $d$ -dimensional con una longitud  $L$  por lado. Si se considera  $L$  dado en unidades del parámetro de red, el sistema tiene  $L$  espines por lado<sup>18</sup>. Teniendo en cuenta el cambio de las longitudes bajo la transformación del grupo de renormalización dado por (2.7),  $L$  transforma como:

$$L \rightarrow L(b) = b^{-1}L. \quad (2.50)$$

A partir de esta ecuación, queda claro que la longitud del sistema permanece invariante sólo en dos casos. Uno de ellos es para  $L = 0$  y no tiene sentido físico porque, estrictamente, significa que no hay ningún espín. El otro caso es  $L \rightarrow \infty$ , que no es más que el límite termodinámico del sistema. Esto concuerda con el hecho de que sólo en el límite termodinámico pueda existir un fenómeno crítico estricto puesto que es la situación en que el tamaño del sistema permanece invariante bajo la transformación del GR.

De acuerdo con este comportamiento,  $L^{-1}$  se considera habitualmente [20, 147, 156] como una variable de escala relevante que sólo se anula en el límite termodinámico y por tanto, igual que el resto de variables de escala, es cero en un punto fijo crítico. De cualquier manera,  $L^{-1}$  es una variable de escala peculiar ya que, independientemente de la proximidad al punto fijo crítico, su transformación viene dada por la ecuación (2.50), mientras que las variables de escala  $\{u_i\}$  sólo cambian de forma potencial (Ec. 2.20) cuando la aproximación lineal del GR es válida. Considerando pues  $L^{-1}$  como una variable relevante, el espacio de constantes se debe ampliar. En la Fig. 2.6 se muestra esquemáticamente esta situación en un espacio en que se indica la superficie crítica con una línea y existen dos direcciones relevantes. Una de ellas asociada a la variable  $u_1$  (que consideramos positiva por simplicidad) y la otra asociada a  $L^{-1}$ . La *superficie física* en que experimentalmente nos podemos mover variando las variables

---

<sup>18</sup>Se ha supuesto un sistema hipercúbico, pero el razonamiento que se va a llevar a cabo es independiente de la forma concreta del sistema. En general, se puede considerar que  $L$  es simplemente un tamaño característico como puede serlo, por ejemplo, la longitud media de todas las dimensiones finitas de un sistema.

de control  $\vec{\Psi}$  y  $L$  viene dada por  $\vec{u}(\vec{\Psi}; L)$ . Tal y como se ha indicado (flecha 0), sólo en el caso en que el sistema se encuentre exactamente en el punto crítico (PC) el flujo del GR tiende hacia el punto fijo crítico (PFC). En cambio, en el caso en que estamos en el límite termodinámico ( $L^{-1} = 0$ , pero  $u_1 \neq 0$  (flecha 1)) el flujo del GR tiende al punto fijo de alta interacción. Por tanto, se recupera el comportamiento del límite termodinámico representado en la Fig. 2.4. Por otro lado, cualquier punto en que  $u_1 = 0$  y  $L^{-1} > 0$  (flecha 2) se caracteriza por un flujo que tiende al punto en que  $L = 0$ . Esto tiene sentido en sistemas finitos puesto que, al aplicar repetidamente la transformación del GR, el tamaño del sistema disminuye. Por tanto, al hacer un cierto número de iteraciones el sistema llegará a desaparecer. Por último, partiendo de puntos como el indicado con la flecha 3 ( $u_1 \neq 0$  y  $L^{-1} \neq 0$ ), se observa un comportamiento mezcla entre los dos casos anteriores.

A partir de la relación (2.50) se deduce que, para una cierta variable de escala  $u_i$ ,

$$\mathcal{I}[u_i, L] = u_i L^{y_i}, \quad (2.51)$$

es invariante bajo la transformación del GR.

Consideremos ahora, igual que en la sección § 2.2.4, un observable  $A$  que depende de  $n_a$  variables de escala y además de  $L$ . Si en las proximidades de un punto fijo crítico esta función transforma como

$$A(\vec{u}(b); L(b); b) = b^a A(\vec{u}; L), \quad (2.52)$$

su dependencia se podrá escribir como en (2.31) pero añadiendo también la dependencia con  $L$  mediante el invariante (2.51):

$$A(\vec{u}; L) = u_j^{a/y_j} \tilde{A} \left( u_1 u_2^{-y_1/y_2}, u_2 u_3^{-y_2/y_3}, \dots, u_{n_a-1} u_{n_a}^{-y_{n_a-1}/y_{n_a}}, u_i L^{y_i} \right). \quad (2.53)$$

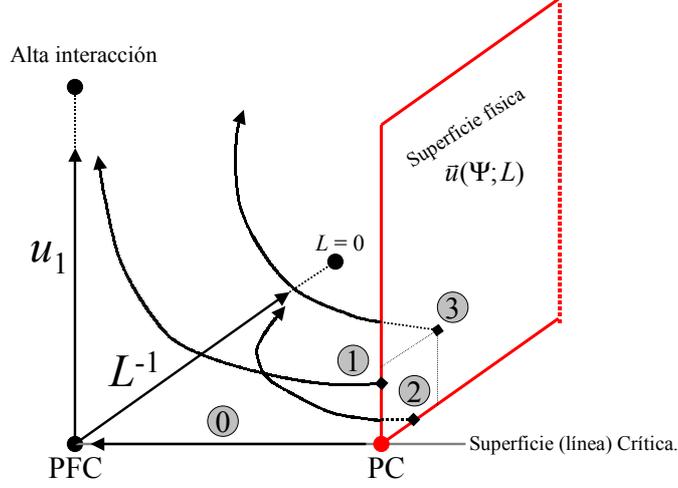
Particularizando para el caso en que  $i = j$  y definiendo una nueva función de escala  $\bar{A}$  como

$$\bar{A} \equiv (u_j L^{y_j})^{a/y_j} \tilde{A}, \quad (2.54)$$

se puede escribir (2.53) de forma alternativa como

$$A(\vec{u}; L) = L^{-a} \bar{A} \left( u_1 u_2^{-y_1/y_2}, u_2 u_3^{-y_2/y_3}, \dots, u_{n_a-1} u_{n_a}^{-y_{n_a-1}/y_{n_a}}, u_j L^{y_j} \right). \quad (2.55)$$

El paso a la descripción en función de las variables de control  $\vec{\Psi}$  es directo introduciendo  $\vec{u}(\vec{\Psi})$  en las funciones de escala. En las proximidades del punto crítico se puede utilizar la ecuación (2.35) tal y como se propuso en la sección § 2.2.5.



**Figura 2.6:** Espacio de constantes esquemático con dos variables de escala relevantes  $u_1$  y  $L^{-1}$ . Se ha considerado sólo la región en que  $u_1 > 0$  para simplificar. La superficie crítica está definida por  $u_1 = L^{-1} = 0$  y, en este caso, se esquematiza con una línea. Con flechas se indica el flujo del GR según la posición inicial en la superficie física  $\bar{u}(\vec{\Psi}; L)$ . Con la flecha 0 se indica el flujo de un sistema que se encuentra en el punto crítico (PC). La flecha 1 corresponde a un sistema infinito con  $u_1 \neq 0$ . La flecha 2 corresponde a un sistema finito con  $u_1 = 0$ . Y finalmente, con la flecha 3 se representa el comportamiento de un sistema finito con  $u_1 \neq 0$ .

Supongamos, para simplificar, que variamos sólo una variable de control  $\Psi$  y que  $A$  depende sólo de una variable de escala relevante  $u$  y del tamaño. En estas condiciones la Ec. (2.55) se escribe de manera sencilla:

$$A(u(\Psi); L) = L^{-a} \bar{A}(u(\Psi)L^y). \quad (2.56)$$

donde  $y$  es el autovalor del GR asociado a la variable  $u$ .

De la condición  $u(\Psi_c) = 0$  se deduce que, para conocer  $u(\Psi)$ , es necesario<sup>19</sup> conocer  $\Psi_c$ . Este parámetro, así como los exponentes  $y$  y  $a$ , se pueden encontrar utilizando la ecuación (2.56) y la función  $A(u(\Psi); L)$  para varios tamaños. Para hacer esto es suficiente con representar la curva  $L^a A(u(\Psi); L)$  para cada tamaño frente a  $u(\Psi)L^y$  y buscar los valores de  $\Psi_c$ ,  $y$  y  $a$  para los que todas las curvas correspondientes a distintos tamaños colapsan en una sola. La curva que se consigue de esta manera no es más que la función de escala  $\bar{A}$ .

Así pues, la técnica de escalado de tamaño finito permite extraer características del

<sup>19</sup>Conocer  $\Psi_c$  es condición necesaria para determinar  $u(\Psi)$  y únicamente es suficiente si se considera sólo la aproximación lineal en el desarrollo (2.35).

sistema infinito a partir de los resultados correspondientes a un sistema finito. Esto hace que esta técnica se haya utilizado en innumerables trabajos de simulación desde que se propuso. En particular, existen tres trabajos publicados por D. P. Landau que, por su cercanía en el tiempo a la propuesta teórica de Fisher en 1972, merecen ser mencionados porque fueron una de las primeras pruebas de la validez de la teoría. El primero de estos trabajos trata el modelo de Ising en una red cuadrada [158]. En el año de publicación de este trabajo ya se conocía desde hacía años la solución exacta de Onsager<sup>20</sup> [161], lo que permitió comparar los resultados de la simulación con los exactos. Tras este artículo, D. P. Landau publicó estudios similares en el modelo de Ising ferromagnético en una red cúbica [162] y en el modelo de Ising antiferromagnético también en una red cúbica [163].

Por otro lado, gracias al desarrollo en la preparación de capas finas, también a nivel experimental se ha podido estudiar el escalado de tamaño finito. Ver por ejemplo [164–166].

Enlazando con el ejemplo del modelo de Ising ferromagnético tratado en la sección § 2.2.5, si consideramos una red finita, cerca del punto crítico la longitud de correlación y la magnetización se pueden escribir como

$$\xi(T, H; L) = L\bar{\xi} \left( H [(T - T_c)/T_c]^{-\beta\delta}, [(T - T_c)/T_c] L^{1/\nu} \right), \quad (2.57)$$

$$M(T, H; L) = L^{-\beta/\nu} \bar{M} \left( H [(T - T_c)/T_c]^{-\beta\delta}, [(T - T_c)/T_c] L^{1/\nu} \right). \quad (2.58)$$

Justo en el punto crítico, la longitud de correlación es infinita en el límite termodinámico. En cambio, si el sistema es finito, no se hace infinita ya que  $\xi \leq L$ . De esto se deduce que  $\bar{\xi}(0, 0)$  es finita y que la longitud de correlación en el punto crítico es simplemente proporcional a  $L$ , de manera que la divergencia de  $\xi$  en el punto crítico no viene dada por  $\xi(0, 0)$  sino por el prefactor  $L$ .

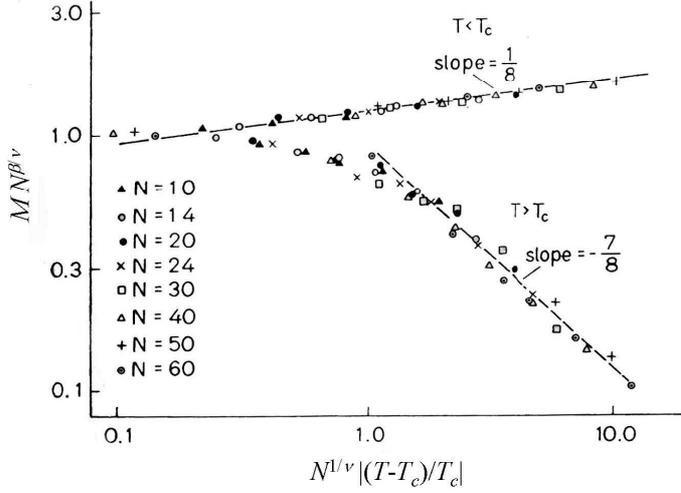
La magnetización para  $H = 0$  se comporta como:

$$M(T; L) = L^{-\beta/\nu} \bar{M} \left( [(T - T_c)/T_c] L^{1/\nu} \right). \quad (2.59)$$

En la Fig. 2.7(a) se representa el escalado correspondiente a la Ec. (2.59) como ejemplo. Los datos corresponden a la magnetización del modelo de Ising ferromagnético en una red cuadrada con condiciones periódicas de contorno (extraída de la Ref. 158). En esta figura,  $N$  equivale a  $L$  en nuestra notación. Como se puede ver, el comportamiento de la función de escala depende de si la temperatura es inferior o superior al  $T_c$ .

---

<sup>20</sup>Posteriormente a la solución de Onsager, se han propuesto otras formas alternativas [159, 160] para llegar a la misma solución.



**Figura 2.7:** Escalado de tamaño finito correspondiente a la magnetización. Extraído de la Ref. 158.  $N$  equivale a  $L$  en nuestra notación.

### 2.3.1. Límite termodinámico

A partir de una relación de escala como la (2.56) se pueden extraer ciertas conclusiones sobre el comportamiento del observable  $A$  en el límite termodinámico. Este comportamiento depende básicamente<sup>21</sup> del signo de  $a$  y del comportamiento de la función de escala  $\bar{A}(u(\Psi)L^y)$  en el límite  $L \rightarrow \infty$  manteniendo  $\Psi$  (y por tanto  $u(\Psi)$ ) constante. En el límite termodinámico se denotará el observable  $A$  como  $A(u(\Psi))$ .

En el punto crítico  $u(\Psi_c) = 0$  y, como consecuencia, si  $\bar{A}(0)$  es finita y no nula,

$$A(0) = \bar{A}(0) \lim_{L \rightarrow \infty} L^{-a} = \begin{cases} 0 & , a > 0 \\ \bar{A}(0) & , a = 0 \\ \infty & , a < 0 \end{cases} \quad (2.60)$$

y si  $\bar{A}(0) = 0$  o bien  $\bar{A}(0) = \infty$ , se debe hacer el límite teniendo en cuenta el comportamiento de  $\bar{A}(0)$ . De cualquier manera, habitualmente las posibles divergencias vienen dadas por el prefactor  $L^{-a/y}$  y no por  $\bar{A}(0)$ .

Si el sistema no se encuentra exactamente en el punto crítico pero suficientemente cerca, habitualmente se supone que, en el límite termodinámico,

$$A(u(\Psi)) \sim (u(\Psi))^{a/y}, \quad (2.61)$$

donde, como se ha venido haciendo en secciones anteriores, se supone  $u(\Psi) > 0$ .

Para que (2.56) sea consistente con (2.61) en el límite termodinámico,  $\bar{A}$  debe tener un comportamiento tal que

$$\bar{A}(u(\Psi)L^y) \sim (u(\Psi)L^y)^{a/y}. \quad (2.62)$$

<sup>21</sup>Recordar que, en la Ec. (2.56), se considera que  $u$  es relevante y, por tanto,  $y > 0$ .

para  $L$  grande.

Si esto es cierto, al representar  $\log[L^a A(u(\Psi)L^y)]$  en función de  $\log[u(\Psi)L^y]$ , el comportamiento asintótico debe ser una recta de pendiente  $a/y$ . Esto es justo lo que se observa en la Fig. 2.7 para  $T < T_c$ . En este caso, el escalado se consigue para  $\beta = 1/8$  y la pendiente del comportamiento asintótico coincide con este valor. Entonces, en el límite termodinámico, para  $T$  ligeramente inferior a  $T_c$ , la magnetización se comporta como

$$M(T < T_c) \sim |(T - T_c)/T_c|^{-1/8}. \quad (2.63)$$

Sin embargo, en determinados casos, no es éste el comportamiento observado, sino que se pueden dar comportamientos del tipo  $\bar{A}(u(\Psi)L^y) \sim (u(\Psi)L^y)^c$ , donde  $c$  es una constante. En este caso

$$A(u(\Psi)) = \begin{cases} 0 & , \quad c < a/y \\ (u(\Psi))^{a/y} & , \quad c = a/y \\ \infty & , \quad c > a/y \end{cases} \quad (2.64)$$

Evidentemente cuando  $c = a/y$ , se recupera el comportamiento (2.61). En cambio, si  $c < a/y$ ,  $A(u(\Psi))$  es cero para cualquier  $u(\Psi) > 0$  y sólo en el punto crítico puede no anularse según sea el signo de  $a$  y el valor de  $\bar{A}(0)$  [Ec. (2.60)]. Si por el contrario  $c > a/y$ , entonces  $A(u(\Psi))$  es infinita para cualquier  $u(\Psi) > 0$ .

En la práctica, un comportamiento de este tipo se pone de manifiesto al representar  $L^a A(u(\Psi)L^y)$  en función de  $u(\Psi)L^y$  en un gráfico log-log. El comportamiento asintótico debe ser una recta con pendiente  $c$ .

Volviendo a la Fig. 2.7, para  $T < T_c$ , el comportamiento asintótico tiene una pendiente igual a  $-7/8$  de tal manera que, según la Ec. (2.59) con  $\beta = 1/8$ , se obtiene

$$M(T > T_c; L \rightarrow \infty) \sim \lim_{L \rightarrow \infty} L^{-1/\nu} = 0. \quad (2.65)$$

Uniando este resultado con el comportamiento para  $T < T_c$  [Ec. 2.63] se recupera el comportamiento conocido sobre la magnetización en el límite termodinámico. Es decir, la magnetización es nula por encima el punto crítico, y diferente de cero por debajo.

Otra posibilidad es un comportamiento exponencial del tipo

$$\bar{A}(u(\Psi)L^y) \sim \exp[c_1(u(\Psi)L^y)^{c_2}], \quad (2.66)$$

donde  $c_1$  y  $c_2$  son constantes. Este comportamiento se detecta representando el logaritmo de  $L^a A(u(\Psi); L)$  frente a  $u(\Psi)L^y$ , lo que asintóticamente se debe comportar como

$$\ln[L^a A(u(\Psi); L)] = \ln[\bar{A}(u(\Psi)L^y)] = c_1(u(\Psi)L^y)^{c_2} + cte. \quad (2.67)$$

En esta situación, considerando  $c_2 > 0$ , y descartando el caso trivial con  $c_1 = 0$ , existen dos posibilidades para  $A(u(\Psi))$ :

$$A(u(\Psi)) = \begin{cases} 0 & , \quad c_1 < 0 \\ +\infty & , \quad c_1 > 0 \end{cases} \quad (2.68)$$

Son dos posibilidades que, en definitiva, llevan a un comportamiento en el límite termodinámico equivalente al caso en que  $\bar{A}(u(\Psi)L^y) \sim (u(\Psi)L^y)^c$  (comparar con Ec. (2.64)).

## 2.4. Sistemas dinámicos

Hasta este punto sólo se han tratado las ideas del GR aplicadas a sistemas en estados estáticos. La aplicación de las ideas del GR a sistemas dinámicos se trata de forma extensa en las Refs. 19 y 167, por ejemplo.

En esta sección nos limitaremos a dar algunas indicaciones de cómo se aplicaría el formalismo de invariantes introducido en la sección § 2.2.4 a sistemas que involucran dependencias temporales.

Veamos en primer lugar, en un caso sencillo, cómo se debe cambiar la escala de tiempo al hacer una transformación del GR. Supongamos una red como la de la Fig. 2.2(a) en la que está cambiando la magnetización. De forma simple, se puede decir que en este estado las paredes de un cierto dominio magnético se mueven una distancia  $R$  en un tiempo  $t_R$ , empleando para esto un tiempo  $\tau_a$  en propagarse de un espín a su vecino próximo. Al hacer la agrupación (paso de 2.2(a) a 2.2(b) en la Fig. 2.2) resultaría natural hacer la hipótesis de que  $\tau_a$  transforma como

$$\tau_a \rightarrow \tau_a(b) = b\tau_a. \quad (2.69)$$

Esta transformación lleva a que, análogamente a lo que ocurre con  $r$  en la ecuación (2.7), bajo la transformación del GR, el tiempo reducido  $\tau_r \equiv t_R/\tau_a$  transforma como

$$\tau_r \rightarrow \tau_r(b) = b^{-1}\tau_r. \quad (2.70)$$

Para llegar a este resultado se ha hecho la hipótesis de que existe una simetría total entre el espacio y el tiempo, cosa que implica el cumplimiento exacto de (2.69). Esto es cierto, por ejemplo, en electrodinámica en ausencia de materia [168]. Lamentablemente, para un medio material cerca de un punto crítico, en general la hipótesis de simetría entre espacio y tiempo no es cierta. Para dar cuenta de esta asimetría, se

debe introducir en (2.69) un exponente de asimetría  $z$ , llamado *exponente dinámico*. De esta manera, la Ec. (2.69) pasa a ser

$$\tau_a \rightarrow \tau_a(b) = b^z \tau_a. \quad (2.71)$$

y por tanto,  $\tau_r$  transforma como

$$\tau_r \rightarrow \tau_r(b) = b^{-z} \tau_r. \quad (2.72)$$

Como es bien sabido, los tiempos de relajación en un sistema dinámico en las proximidades de un punto crítico son extremadamente grandes y, teóricamente, justo en el punto crítico divergen. Este hecho se refleja en la Ec. (2.72) puesto que, si  $z > 0$ , como suele suceder, los puntos fijos de la transformación son dos: uno de ellos es el caso en que  $\tau_r = \infty$  y el otro es el caso  $\tau_r = 0$ . El primero de los casos corresponde al punto fijo crítico, mientras que el segundo corresponde a un proceso instantáneo que viola causalidad.

Utilizando ahora la transformación (2.72), un posible invariante formado por  $\tau_r$  y una cierta variable de escala  $u_i$  es:

$$\mathcal{I}(u_i, \tau_r) = u_i \tau_r^{y_i/z}. \quad (2.73)$$

Así pues, un observable dinámico  $A(\vec{u}; \tau_r)$  que transforme como

$$A(\vec{u}(b); \tau_r(b); b) = b^a A(\vec{u}; \tau), \quad (2.74)$$

se puede escribir de forma análoga a (2.31) pero añadiendo el invariante  $u_i \tau_r^{y_i/z}$ :

$$A(\vec{u}; \tau_r) = u_j^{a/y_j} \tilde{A} \left( u_1 u_2^{-y_1/y_2}, u_2 u_3^{-y_2/y_3}, \dots, u_{n_a-1} u_{n_a}^{-y_{n_a-1}/y_{n_a}}, u_i \tau_r^{y_i/z} \right), \quad (2.75)$$

o, de forma alternativa,

$$A(\vec{u}; \tau_r) = \tau_r^{-a/z} \bar{A} \left( u_1 u_2^{-y_1/y_2}, u_2 u_3^{-y_2/y_3}, \dots, u_{n_a-1} u_{n_a}^{-y_{n_a-1}/y_{n_a}}, u_i \tau_r^{y_i/z} \right). \quad (2.76)$$

## 2.5. Grupo de Renormalización en transiciones de primer orden

Habitualmente, las ideas del GR se aplican a las transiciones continuas. Sin embargo, también se pueden aplicar a las transiciones de primer orden en que la longitud de correlación es finita y el parámetro de orden, que llamaremos  $m$ , presenta una discontinuidad. Las condiciones bajo las que  $m$  presenta una discontinuidad dentro del

marco del GR fueron propuestas por Nienhuis y Nauenberg en 1975 [169] para sistemas termodinámicos ( $T > 0$ ). Suponiendo la existencia de un punto fijo crítico en  $\vec{\mu} = \vec{\mu}^*$  que define una superficie crítica  $\Gamma^*$ , los autores argumentan que las condiciones para que exista una discontinuidad  $\Delta m$  en el parámetro de orden son las siguientes (supondremos que las variables de control son la temperatura  $T$  y un campo  $H$  conjugado de  $m$ ):

1. Además del punto fijo  $\vec{\mu}^*$  que define la superficie crítica  $\Gamma^*$ , existe otro punto fijo en  $\vec{\mu} = \vec{\mu}^{**}$ . Este punto, al que los autores se refieren como *punto fijo de discontinuidad*, define una superficie de discontinuidad  $\Gamma^{**}$  limitada por un extremo por la superficie crítica y formada por todos aquellos puntos del espacio de parámetros que tienden hacia  $\vec{\mu}^{**}$  al aplicar la transformación del GR.
2. En  $\vec{\mu}^{**}$ , el autovalor  $\lambda_H^{**} = \partial H(\vec{\mu}^{**}; b) / \partial H$  asociado al campo  $H$  viene dado por<sup>22</sup>  $\lambda_H^{**} = b$ , donde  $b$  es el parámetro de agrupación de la transformación del GR.
3. El límite  $\Delta m^{**}$  de la discontinuidad  $\Delta m(\vec{\mu})$  del parámetro de orden no se anula cuando  $\vec{\mu}$  se aproxima a  $\vec{\mu}^{**}$ .

Por ejemplo, el punto fijo a  $T = 0$  y  $H = 0$  en un ferromagneto cumple estas tres condiciones.

---

<sup>22</sup>Nienhuis y Neuenberg demostraron numéricamente [170] que esta condición se cumple en el modelo de Ising ferromagnético para  $T < T_c$ .

