

Capítulo 4

Resultados numéricos en el 3D-GRFIM con dinámica atérmica-adiabática

En este capítulo se presentan los resultados de las simulaciones numéricas llevadas a cabo para estudiar las propiedades críticas del RFIM definido en una red cúbica simple con campos aleatorios distribuidos de forma gaussiana con media cero y desviación estándar σ (3D-GRFIM), utilizando la dinámica metaestable *atérmica-adiabática*. Sin embargo, antes de presentar los resultados propiamente dichos, se introducen algunos aspectos que serán esenciales para situar nuestro estudio. En la sección § 4.1, se introduce detalladamente la dinámica metaestable atérmica-adiabática, se resumen las características de la evolución del RFIM siguiendo esta dinámica (evolución mediante avalanchas e histéresis) [§ 4.1.1], se introducen los resultados fundamentales de la aproximación de campo medio al modelo [§ 4.1.2] y, por último, se resumen los resultados conocidos sobre el modelo a partir de estudios basados en simulaciones numéricas y en el GR [§ 4.1.3]. Este resumen de los resultados conocidos hasta el momento nos permite enumerar en la sección § 4.2 los puntos fundamentales que motivan nuestro estudio. En la sección § 4.3 se introducen los detalles relacionados con los algoritmos utilizados para llevar a cabo las simulaciones numéricas. A continuación [§ 4.4], se definen las magnitudes que se miden durante las simulaciones y las que será necesario introducir más adelante al analizar los resultados. En las secciones restantes del capítulo se muestran los principales resultados obtenidos directamente de las simulaciones. Estos resultados permitirán hacer un estudio extenso mediante técnicas de escalado de tamaño finito que se presenta en el capítulo siguiente.

4.1. Modelo. Dinámica metaestable atérmica-adiabática

Como vimos en la sección § 1.4.1, el RFIM se define sobre una red de N nodos (en el caso de nuestras simulaciones, la red es cúbica simple y tiene L nodos por lado, de tal forma que $N = L^3$). En cada nodo de la red se sitúa una variable de espín S_i que toma dos valores (± 1). El Hamiltoniano correspondiente es [Cuadro 1.1]:

$$\mathcal{H} = - \sum_{\langle i,j \rangle} S_i S_j - H \sum_{i=1}^N S_i - \sum_{i=1}^N h_i S_i, \quad (4.1)$$

donde $\langle i, j \rangle$ en el primer sumatorio indica de forma abreviada que la suma se extiende únicamente a vecinos próximos. H es el campo externo aplicado y h_i son campos locales aleatorios que introducen un desorden congelado [§ 1.4] en el sistema. Se supone que los campos aleatorios son independientes y están distribuidos siguiendo una densidad de probabilidad gaussiana de media $\langle h_i \rangle = 0$ y desviación estándar $\sqrt{\langle h_i^2 \rangle} = \sigma$ tal que:

$$dP(h_i) = \rho(h_i) dh_i \equiv \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-h_i^2/2\sigma^2} dh_i. \quad (4.2)$$

El Hamiltoniano (4.1) junto con la densidad (4.2) define el *Modelo de Ising con Campos Aleatorios Gaussianos* (GRFIM). En este modelo, el grado de desorden en el sistema está controlado por la desviación estándar σ .

Al variar el campo externo H , el sistema evoluciona siguiendo la dinámica metaestable *atérmica-adiabática*, introducida por Sethna *et al.*¹ en 1993 [57]. En esta dinámica se supone que las fluctuaciones térmicas no juegan un papel relevante, de tal manera que, a efectos prácticos, se considera $T = 0$ (este es el motivo por el que nos referimos a esta dinámica como “atérmica”). En esta dinámica, un espín gira si con ello provoca un descenso de la energía. El hecho de que la relajación sea local hace que esta dinámica sea metaestable². A partir del Hamiltoniano (4.1), el cambio de energía asociado al giro de un espín genérico S_p viene dado por:

$$\Delta\mathcal{H}(S_p \rightarrow -S_p) = \mathcal{H}(S_1, S_2, \dots, S_p, \dots, S_N) - \mathcal{H}(S_1, S_2, \dots, -S_p, \dots, S_N) = 2S_p H_p^{loc}, \quad (4.3)$$

¹De hecho, un año antes de que Sethna *et al.* propusieran esta dinámica para el RFIM, Ji y Robbins [196] habían propuesto una dinámica atérmica muy similar pero que únicamente permite que giren los espines que se encuentran en una interfase. Esta dinámica es apropiada para estudiar la transición de *depinning* que ocurre, por ejemplo, en la invasión de fluidos. Ver también referencias más recientes [197].

²En la sección § 5.11.3 se analiza este punto con más detalle.

donde el campo local H_p^{loc} se ha definido como:

$$H_p^{loc} \equiv z - 2n_-(S_p) + H + h_p. \quad (4.4)$$

En esta expresión, z es el número de coordinación de la red ($z = 6$ en una red cúbica simple) y $n_-(S_p)$ es el número de primeros vecinos de S_p que tienen el valor -1 . Con respecto a esta dinámica, una configuración $\mathbf{S} \equiv \{S_1, S_2, \dots, S_N\}$ es estable si $\Delta\mathcal{H}(S_p \rightarrow -S_p)$ es mayor que cero para todos los espines de \mathbf{S} . A partir de (4.3),

$$\text{Una configuración } \mathbf{S} \text{ es estable si y sólo si } \{S_p H_p^{loc} > 0; \forall S_p \in \mathbf{S}\}. \quad (4.5)$$

La dinámica es “adiabática” en el sentido de que, si el sistema se encuentra en una configuración inestable, el campo H se mantiene constante mientras el sistema evoluciona hasta una configuración estable. Desde un punto de vista temporal, en nuestras simulaciones supondremos que todos los espines inestables en una determinada configuración giran simultáneamente (*dinámica síncrona* [198], ver también la sección § 4.3.3). Es preciso mencionar que esta condición no fue indicada explícitamente por Sethna *et al.* en los trabajos pioneros sino que estos autores proponían [199] elegir espines al azar y girarlos si no cumplen la condición (4.5). Con este criterio no es tan directo asegurar que se cumplan propiedades importantes como la memoria del punto de retorno que tratamos a continuación en la sección § 4.1.1. Según Dhar *et al.* [199], la dinámica propuesta es *abeliana* [199, 200] como consecuencia de la adiabaticidad y de la definición de los estados estables. Esta propiedad implica que la configuración final estable a la que llega el sistema a un determinado campo es independiente del orden en que giran los espines inestables y, por tanto, las propiedades del sistema no dependen del orden de giro de los espines en una avalancha.

En nuestras simulaciones partimos de una situación con $H = \infty$ en que la configuración estable es aquella con $\{S_i = +1; \forall i\}$. En esta situación la magnetización es máxima: $m = \sum_{i=1}^N S_i / N = 1$. Al disminuir H , el primer espín que girará es aquel S_* para el que primero se anula su cambio de energía asociado $\Delta\mathcal{H}(S_* = +1 \rightarrow S_* = -1)$. El campo H_* al que gira este espín se deduce de hacer $\Delta\mathcal{H}(S_* = +1 \rightarrow S_* = -1) = 0$ y, a partir de (4.3) es:

$$H_* = H_*^{int}, \quad (4.6)$$

donde el campo H_*^{int} es el campo interno asociado al espín S_* . En general, el campo interno de un espín S_i lo definimos como:

$$H_i^{int} = 2n_-(S_p) - z - h_p. \quad (4.7)$$

Por definición, S_* es el espín, de entre los que aún no han girado, que tiene un campo interno asociado mayor:

$$H_*^{int} = \max_{\{i|S_i=+1\}} \{H_i^{int}\}. \quad (4.8)$$

Una vez el campo H llega a $H = H_*$, el campo local de S_* es negativo y el sistema se encuentra en una configuración inestable. En esta situación, H se mantiene constante (propiedad adiabática) hasta que no se llega a una configuración estable. El giro de S_* cambia el campo local de sus primeros vecinos y esto puede provocar que el campo local de alguno de estos vecinos se haga negativo con lo que el sistema pasaría una nueva configuración inestable tras el giro de S_* . En este caso, los espines inestables giran simultáneamente (dinámica síncrona) y, a su vez, su giro puede inestabilizar algunos de sus vecinos. Este proceso se repite a campo constante ($H = H_*$) hasta que el sistema llega a una situación estable. Todos los espines que giran a H constante tras el giro de S_* definen una *avalancha* y nos referiremos como espín de inicio de avalancha al espín S_* . La restricción de que H sea constante durante toda la evolución implica que la evolución de las avalanchas es mucho más rápida que el tiempo característico de variación de H . Los efectos de relajar este comportamiento adiabático se estudiarán en el capítulo 9. El número de espines que giran en una avalancha define su *tamaño* s . Por analogía con la terminología utilizada en la teoría de fractales y de percolación, en ocasiones, también llamaremos *masa* al tamaño s de las avalanchas.

4.1.1. Histéresis. Memoria del punto de retorno

Bajo la dinámica propuesta, el RFIM presenta *memoria del punto de retorno*. Sethna *et al.* propusieron una primera demostración de que esto es así en el artículo [57] en que proponen esta dinámica. Esta propiedad se ilustra en la Fig. 4.1. Cuando el campo H aumenta de H_a a H_b , el sistema vuelve exactamente a la misma magnetización que tenía en H_a si el campo vuelve a dicho campo tras haber pasado por H_b , sea cual sea el valor de H_b . En otras palabras, el sistema “recuerda” su magnetización inicial. Este comportamiento se ha observado experimentalmente, por ejemplo, en la absorción de gases [201], en algunos sistemas ferromagnéticos [202], en ondas de densidad de carga [203] y en la transformación martensítica inducida aplicando esfuerzo en un monocristal de Cu-Zn-Al [204].

La memoria que presenta el RFIM va más allá de recordar el valor de la magnetización en H_a ; recuerda exactamente el estado completo que tenía en H_a antes de invertir el sentido de variación de H . La demostración propuesta por Sethna *et al.* se

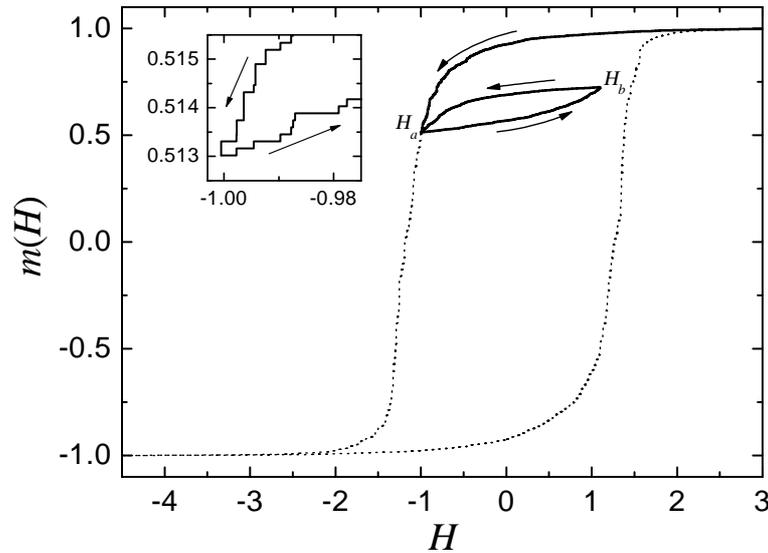


Figura 4.1: Demostración numérica de la memoria de punto de retorno en el 3D-GRFIM. La línea continua corresponde a la magnetización en función del campo cuando éste disminuye desde un valor muy grande (en que $m = 1$) hasta H_a . Una vez en esta situación, H aumenta hasta un valor $H_b > H_a$ y, a partir de este valor, vuelve a disminuir hasta H_a . El gráfico interno muestra con detalle la zona cercana a H_a . Este gráfico es útil para ver claramente la memoria de punto de retorno y, a su vez, demuestra que la evolución de la magnetización es discontinua (cambia mediante avalanchas). Las flechas indican en todos los casos el sentido de variación del campo. La línea discontinua en el gráfico principal corresponde a un ciclo de histéresis completo en que el campo disminuye monótonamente desde $H = +\infty$ hasta $H = -\infty$ y vuelve de nuevo hasta $H = +\infty$.

basa en el teorema de “no paso” que se había aplicado anteriormente para explicar la memoria del punto de retorno en las ondas de densidad de carga [205, 206].

Un sistema que evolucione siguiendo la dinámica metaestable atérmica-adiabática, presenta memoria del punto de retorno si cumple las tres condiciones siguientes:

- i)* La evolución no depende del ritmo al que varíe H .
- ii)* Existe una relación de orden (parcial) entre los estados del sistema. Un estado $\mathbf{S} = \{S_i\} \geq \mathbf{S}' = \{S'_i\}$ si $S_i \geq S'_i, \forall i$.
- iii)* El orden se conserva durante la evolución del sistema bajo la acción de campos ordenados. Dicho de otra forma, si en un instante $t = 0$ tenemos $\mathbf{S}(0) \geq \mathbf{S}'(0)$ y, para $t > 0$, $\mathbf{S}(0)$ evoluciona con un campo $H(t)$ y $\mathbf{S}'(0)$ evoluciona con un campo $H'(t) \leq H(t)$, entonces se mantiene el orden inicial para cualquier t : $\mathbf{S}(t) \geq \mathbf{S}'(t)$.

Este es el *teorema de no paso* de Middleton [205, 206].

En el RFIM, la primera de las condiciones está asegurada gracias a la propiedad adiabática. La segunda condición no se cumple para todos los estados imaginables pero sí existen estados para los que se cumple. Con respecto a la tercera, también se cumple, pero es más complicado demostrarlo. En primer lugar, hay que recordar que, al disminuir H , un espín S_i gira hacia abajo en el instante t , o ya está girado si $H_i^{loc} \leq 0$. Por otro lado, si $\mathbf{S}(0) \geq \mathbf{S}'(0)$, entonces se cumple la desigualdad $n_-(S_i(0)) \leq n_-(S'_i(0))$ para cualquier $S_i(0) \in \mathbf{S}(0)$ y cualquier $S'_i(0) \in \mathbf{S}'(0)$. De esta desigualdad y de la definición de H^{loc} [Ec. (4.4)], se deduce la desigualdad $H_i^{loc}(0) \geq (H_i^{loc})'(0)$ para cualquier i , aunque el campo $H(0)$ aplicado a los dos sistemas sea el mismo. Si a partir de esta situación se aplica un campo $H(t)$ a la configuración $\mathbf{S}(0)$ y un campo $H'(t) \leq H(t)$ a la configuración $\mathbf{S}'(0)$, se cumple la desigualdad $H_i^{loc}(t) \geq (H_i^{loc})'(t)$ para cualquier i y t y, por tanto, el número $n_-(S_i(t))$ de primeros vecinos girados hacia abajo de cualquier espín $S_i \in \mathbf{S}(t)$ es siempre (dinámica síncrona) menor que $n_-(S'_i(t))$, de lo que se deduce que $\mathbf{S}(t) \geq \mathbf{S}'(t)$ para cualquier t . Esto finaliza la demostración de que la condición *iii*) se cumple en el RFIM. En el caso en que la dinámica no sea síncrona, no está tan claro que al aplicar un campo $H(t)$ a la configuración $\mathbf{S}(0)$ y un campo $H'(t) \leq H(t)$ a la configuración $\mathbf{S}'(0)$ se cumpla la desigualdad $H_i^{loc}(t) \geq (H_i^{loc})'(t)$ para cualquier i y t y, como consecuencia, no es tan sencillo demostrar que se cumple la condición *iii*).

La condición *iii*) no se cumple en modelos como el RBIM [21] o el RAIM [60] (descritos brevemente en la sección § 1.4.1) y, en general, en todos aquellos modelos que involucran, de una forma u otra, interacciones antiferromagnéticas. En consecuencia, todos estos modelos no presentan memoria de punto de retorno cuando evolucionan con la dinámica atérmica-adiabática propuesta por Sethna *et al.* La regla de no paso de Middleton también se ha utilizado para justificar la memoria de punto de retorno en modelos de Preisach [33, 207, 208], en autómatas celulares [209], y en la formulación general de la histéresis propuesta hace algunos años [210].

Recientemente, Deutsch *et al.* [211] han demostrado que un modelo de Ising aleatorio antiferromagnético unidimensional presenta memoria de punto de retorno exacta cuando el campo aplicado disminuye desde valores muy altos (magnetización de saturación). Sin embargo, no presenta memoria de punto de retorno cuando el campo disminuye desde valores más pequeños en que la magnetización no está saturada. Como ya se ha mencionado, en un sistema antiferromagnético no se cumple la condición *iii*) y, por tanto, un antiferromagneto que siga la dinámica atérmica-adiabática no pre-

senta, en principio, memoria de punto de retorno. Sin embargo, tal y como remarcan los autores de este trabajo, no sólo el Hamiltoniano determina si un sistema presenta o no memoria de punto de retorno, sino que la dinámica es también determinante. Así pues, sólo se puede afirmar que un sistema presenta memoria de punto de retorno o no con respecto a la dinámica que sigue. Además, los autores introducen una variable de giro para la que se cumple la condición de no paso de Middleton en un sistema antiferromagnético, aunque no se cumpla para los estados del sistema. En base a esta observación, los autores proponen que la variable de giro que definen juega un papel más fundamental en la memoria del punto de retorno que los estados en sí mismos que, de hecho, no son más que proyecciones de la variable de giro.

Continuando con el 3D-GRFIM con dinámica atérmica-adiabática, la Fig. 4.2 muestra el comportamiento de la magnetización al variar cíclicamente entre $H = +\infty$ y $H = -\infty$ para dos desórdenes distintos σ . Como se puede ver, la magnetización describe un ciclo de histéresis que, para desórdenes pequeños [Fig. 4.2(a)], presenta una discontinuidad $\Delta m > 0$ mientras que los ciclos son suaves ($\Delta m = 0$) para desórdenes mayores que un cierto σ_c [Fig. 4.2(b)]. Tal cambio en el comportamiento se ha interpretado asumiendo (ver por ejemplo [57, 212, 213]) la existencia de un punto crítico (σ_c, H_c) en el diagrama de fases metaestable a $T = 0$. Por un lado, las propiedades del modelo (histéresis, tamaño y duración de las avalanchas, etc...) cerca de este punto crítico se han estudiado con la aproximación de campo medio, con simulaciones numéricas y mediante técnicas del GR en los casos en que no ha sido posible encontrar una solución exacta al problema. Por otro lado, en el caso de redes de topologías especiales (sistemas unidimensionales y redes de Bethe), ha sido posible hallar soluciones analíticas [199, 200, 214–216] que han permitido demostrar, por ejemplo, que en una red unidimensional no existe ningún punto crítico mientras que en la red de Bethe sí existe para números de coordinación $z \geq 4$ [200, 215]. A continuación se resumen los resultados fundamentales correspondientes a la aproximación de campo medio, a las simulaciones numéricas y a los estudios con técnicas del GR.

4.1.2. Aproximación de campo medio en el 3D-GRFIM

La aproximación de campo medio es una técnica habitual para obtener una primera idea del comportamiento cualitativo de algunos sistemas complicados. La teoría de campo medio al RFIM con campos aleatorios gaussianos fue estudiada por primera vez en el trabajo en el que Sethna *et al.* propusieron el modelo [57]³. En esta sección se

³En las Refs. [198, 217] se tratan de forma más extensa algunos de los puntos presentados en [57].

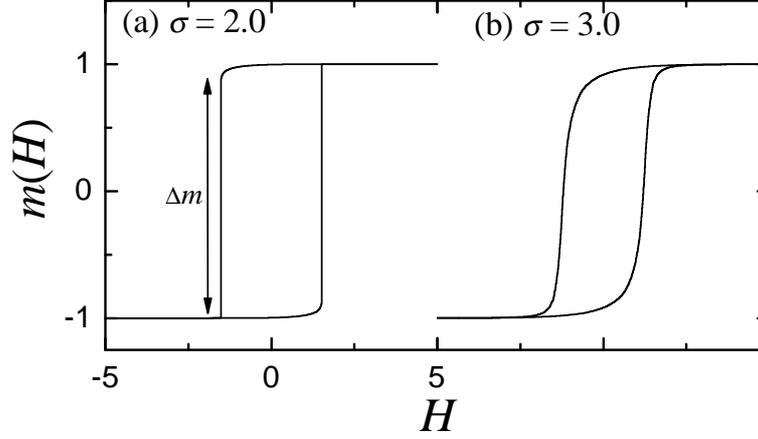


Figura 4.2: Ciclos de histéresis para (a) $\sigma = 2.0$ y (b) $\sigma = 3.0$ correspondientes a simulaciones numéricas en una red cúbica con $L = 48$ ($N = 48^3$). En (a) se indica explícitamente la discontinuidad en la magnetización Δm .

introduce la aproximación de campo medio⁴ al 3D-GRFIM que consiste en aproximar el producto $S_i S_j$ del primer término del Hamiltoniano (4.1) como:

$$S_i S_j = [m + (S_i - m)][m + (S_j - m)] \simeq -m^2 + m(S_i + S_j), \quad (4.9)$$

donde m es la magnetización. En la aproximación se desprecia el término $(S_i - m)(S_j - m)$ que corresponde a desviaciones de orden superior del valor individual de cada espín con respecto a la magnetización m . Introduciendo esta aproximación en el Hamiltoniano (4.1) y, teniendo en cuenta que $\sum_{\langle i,j \rangle} 1 = \frac{1}{2}Nz$, obtenemos el siguiente Hamiltoniano en la aproximación de campo medio:

$$\mathcal{H} = -\frac{1}{2}m^2 Nz - NHm - \sum_i h_i S_i. \quad (4.10)$$

A partir de esta ecuación, el campo local H_i^{loc} definido en la Ec. (4.4) se expresa como:

$$H_i^{loc} = zm + H + h_i \quad (4.11)$$

y, de la condición (4.5), los espines inestables (o que ya han girado) a un determinado campo H (al disminuir H desde $+\infty$) son aquéllos que tienen $H_i^{loc} \leq 0$ o, dicho de otra forma, aquéllos con

$$h_i \leq -zm - H. \quad (4.12)$$

⁴Esta aproximación es equivalente a la teoría de campo medio propuesta por Sethna *et al.* identificando z (número de coordinación en nuestro caso) con J que mide la interacción de cada espín con todos los demás en la teoría de campo medio.

A partir de esta condición, es sencillo obtener una expresión implícita para la magnetización en función del campo:

$$m(H) = 1 - 2 \int_{-\infty}^{-zm(H)-H} \rho(h) dh = \Phi_{err} \left(\frac{zm(H) + H}{\sigma\sqrt{2}} \right). \quad (4.13)$$

donde ρ es la densidad de probabilidad de los campos aleatorios [Ec. (4.2)] y Φ_{err} es la función error que se define como

$$\Phi_{err}(t) \equiv \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^t e^{-x^2} dx, \quad (4.14)$$

de tal forma que $\Phi_{err}(\pm\infty) = \pm 1$ y $\Phi_{err}(-t) = -\Phi_{err}(t)$.

La Fig. 4.3 muestra gráficamente el comportamiento de la parte derecha de la Ec. (4.13) en función de la variable $t \equiv (zm(H) + H)/(\sigma\sqrt{2})$. Las soluciones de la Ec. (4.13) se encuentran buscando los puntos de intersección de la función $\Phi_{err}(t)$ con la recta

$$m(t) = \frac{\sigma\sqrt{2}}{z}t - \frac{H}{z} \quad (4.15)$$

que se deduce de la propia definición de t . Por un lado, a $H = 0$, la recta $m(t)$ siempre interseca a $\Phi_{err}(t)$ en $t = 0$, lo que implica que $t = 0$ es siempre una solución de la Ec. (4.13) a $H = 0$. Por otro lado, en el caso en que la pendiente de $\Phi_{err}(t)$ en $t = 0$ sea mayor que la pendiente de $m(t)$ en este mismo punto, dependiendo del valor de H , pueden existir tres soluciones de la Ec. (4.13). Matemáticamente, la condición para que exista más de una solución de la Ec. (4.13) para algún valor de H es:

$$\left. \frac{dm(t)}{dt} \right|_{t=0} < \left. \frac{d\Phi_{err}(t)}{dt} \right|_{t=0}. \quad (4.16)$$

Calculando estas derivadas, encontramos que sólo para $\sigma < \sigma_c$, donde $\sigma_c \equiv z\sqrt{2/\pi}$, existen tres soluciones de la magnetización. En cambio, si $\sigma \geq \sigma_c$, existe únicamente una solución a la ecuación.

Dependencia con σ de la evolución al variar H

Examinemos con más detalle el comportamiento del sistema dependiendo de si σ es mayor o menor que σ_c :

- $\sigma \geq \sigma_c$: tal y como muestra la Fig. 4.3(a) para un caso con $\sigma > \sigma_c$, al disminuir H desde valores muy grandes (la línea $m(t)$ se desplaza hacia la izquierda), la altura del punto de intersección de $m(t)$ con $\Phi_{err}(t)$, que corresponde a $m(H)$,

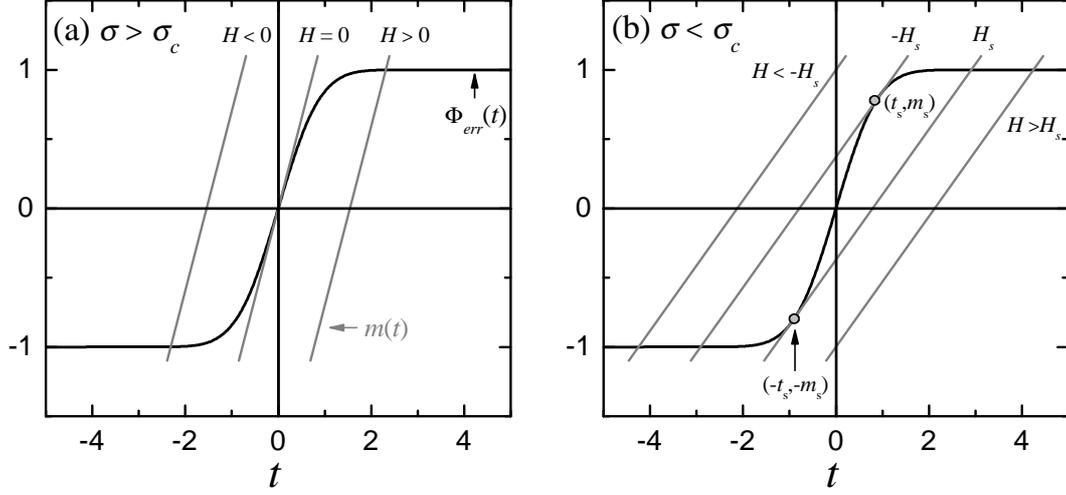


Figura 4.3: Funciones $\Phi_{err}(t)$ [Ec. (4.14)] (línea negra) y $m(t)$ [Ec. (4.15)] (líneas grises) para varios valores del campo H . El gráfico (a) corresponde a un caso con $\sigma > \sigma_c$ mientras que, en (b), se muestra un caso con $\sigma < \sigma_c$. La solución de la Ec. (4.13) para un determinado campo H corresponde a la ordenada del punto de intersección de la función $\Phi_{err}(t)$ con la recta $m(t)$ correspondiente al campo H . La disminución/aumento de H se representa en estos gráficos con un desplazamiento hacia la izquierda/derecha de la recta $m(t)$.

disminuye monótonamente y de forma continua. En particular, la magnetización sin campo aplicado es nula: $m(H = 0) = 0$. Si, por el contrario, H aumenta desde valores muy negativos (la línea $m(t)$ se desplaza hacia la derecha), $m(H)$ aumenta monótonamente siguiendo el mismo camino que al disminuir el campo, lo que demuestra que el sistema no presenta histéresis para $\sigma \geq \sigma_c$. La susceptibilidad $\chi (= (\partial m / \partial H)_\sigma)$ en el punto de inversión de la magnetización ($H = 0$) viene dada por:

$$\chi(\sigma \geq \sigma_c) = \frac{\sigma_c / \sigma}{z(1 - \sigma_c / \sigma)}. \quad (4.17)$$

De esta expresión vemos que $\chi(\sigma \geq \sigma_c)$ es finita para cualquier $\sigma > \sigma_c$ y diverge en $\sigma = \sigma_c$, lo que indica que la aproximación de campo medio presenta un punto crítico para $(\sigma, H) = (\sigma_c, 0)$.

- $\sigma < \sigma_c$: tal y como muestra la Fig. 4.3(b), al disminuir H desde valores muy grandes (corresponde a desplazar la recta $m(t)$ hacia la izquierda), únicamente hay un punto de intersección entre $m(t)$ y $\Phi_{err}(t)$, que corresponde a una magnetización positiva ($m(H) \equiv m_+(H) > 0$). Para un cierto valor del campo $H = H_s(\sigma)$, la recta $m(t)$ interseca a $\Phi_{err}(t)$ en dos puntos, de manera que pasamos de tener

sólo una solución con $m(H) > 0$ a tener dos: una con $m(H) = m_+(H) > 0$ y otra con $m(H) < 0$. Supondremos que la nueva intersección tiene lugar en las coordenadas $(-t_s(\sigma), -m_s(\sigma))$. La determinación de $t_s(\sigma)$ es sencilla teniendo en cuenta que $d\Phi_{err}(t)/dt = dm(t)/dt$ para $t = -t_s(\sigma)$. Haciendo las derivadas pertinentes a partir de las Ecs. (4.14) y (4.15) se encuentra:

$$-t_s(\sigma) = -\sqrt{\ln \frac{\sigma_c}{\sigma}}. \quad (4.18)$$

Una vez obtenido $-t_s(\sigma)$, es fácil obtener la magnetización $-m_s(\sigma)$ a partir de la Ec. (4.14):

$$-m_s(\sigma) = -\Phi_{err} \left(\sqrt{\ln \frac{\sigma_c}{\sigma}} \right). \quad (4.19)$$

De esta relación y la Ec. (4.15), llegamos a la siguiente expresión para $H_s(\sigma)$:

$$H_s(\sigma) = z\Phi_{err} \left(\sqrt{\ln \frac{\sigma_c}{\sigma}} \right) - \sigma \sqrt{2 \ln \frac{\sigma_c}{\sigma}}. \quad (4.20)$$

En la sección § 5.11.3 se discuten algunos aspectos relacionados con la solución de campo medio y, en particular, el campo $H_s(\sigma)$ se representa, en función de σ , en la Fig. 5.27.

Al disminuir H desde H_s a $-H_s$, la Ec. (4.13) presenta tres soluciones. En este intervalo de campos la solución $m_+(H)$ es metaestable pero, debido a la ausencia de fluctuaciones térmicas, ésta es la solución de $m(H)$ hasta que el sistema llega al límite de metaestabilidad, que tiene lugar para $H = -H_s(\sigma)$. La expresión general de la susceptibilidad a un campo H es:

$$\chi(H) = \frac{z \frac{d\Phi_{err}}{dt}}{\frac{\sigma\sqrt{2}}{z} - \frac{d\Phi_{err}}{dt}}. \quad (4.21)$$

A lo largo de la línea $H = -H_s(\sigma)$, es $t = t_s$ y

$$\left. \frac{d\Phi_{err}}{dt} \right|_{t=t_s} = \frac{\sigma\sqrt{2}}{z}. \quad (4.22)$$

Introduciendo este resultado en la Ec. 4.21, se comprueba que la susceptibilidad diverge a lo largo de la línea $H = -H_s(\sigma)$, lo que corresponde a una transición espinodal como vimos en la sección § 1.3.1. Este es un resultado general de las teorías de campo medio cerca del límite de metaestabilidad.

Evidentemente, teniendo en cuenta que el Hamiltoniano (4.10) es antisimétrico bajo el cambio $H \rightarrow -H$, a lo largo de la línea $H_s(\sigma)$ también tiene lugar una transición espinodal si H aumenta desde valores muy negativos (lo que correspondería a desplazar la recta $m(t)$ hacia la derecha en la Fig. 4.3(b)).

Exponentes críticos

Suponiendo que la variable de escala asociada a σ es $\sim (\sigma_c - \sigma)$, los exponentes críticos β , δ y γ cerca de σ_c se definen como:

$$m \sim (\sigma_c - \sigma)^\beta \quad (4.23)$$

$$H \sim (\sigma_c - \sigma)^{\beta\delta} \quad (4.24)$$

$$\chi \sim (\sigma_c - \sigma)^{-\gamma}. \quad (4.25)$$

De estas definiciones y de las ecuaciones (4.13), (4.20) y (4.17) es fácil demostrar que⁵ $\beta = 1/2$, $\beta\delta = 3/2$ y $\gamma = 1$. También es posible demostrar que el exponente ν asociado a la divergencia de la longitud de correlación ($\xi \sim (\sigma_c - \sigma)^\nu$) es $\nu = 1/2$ [57, 217]. En la sección § 5.11.3 se vuelve a hacer cierto hincapié en la aproximación de campo medio que, como veremos, se caracteriza por el mismo conjunto de exponentes críticos que la solución de campo medio del RFIM en equilibrio. Por otro lado, el conjunto de exponentes críticos también coincide con el correspondiente a las teorías generales de Landau de campo medio [6].

4.1.3. Simulaciones numéricas previas. Grupo de Renormalización

En el artículo [57] en que Sethna *et al.* aplican por primera vez al RFIM la dinámica metaestable atérmica-adiabática descrita, presentan algunos resultados numéricos para una red cúbica. De este estudio preliminar se obtienen, entre otros, los siguientes resultados:

- El punto crítico tiene lugar para $(\sigma_c, H_c) = (2.23 \pm 0.05, 1.39 \pm 0.02)$. Este resultado demuestra que, a diferencia de la aproximación de campo medio, hay una cierta histéresis en el punto crítico.
- Para $\sigma = \sigma_c$, la distribución de tamaños de avalanchas $D(s)$ se comporta como una ley de potencias con un exponente $\tau = 2.05 \pm 0.35$.
- Estimaciones de algunos exponentes: $\beta = 0.17 \pm 0.07$, $\beta\delta = 2.02 \pm 0.3$ y $\nu = 1 \pm 0.1$. Como es de esperar, difieren de los correspondientes a la solución de campo medio.

⁵Dado que χ se define como la derivada de m con respecto de H , lógicamente se cumple la relación entre exponentes $\gamma = \beta\delta - \beta$.

En el mismo año de publicación de estos resultados, Dahmen y Sethna [212] presentan un estudio mediante técnicas del GR de no equilibrio basado en el formalismo de Martin, Siggia y Rose [218], siguiendo el esquema propuesto anteriormente por otros autores [219, 220] para analizar el comportamiento crítico de las ondas de densidad de carga. Este análisis permite hacer una expansión a primer orden en $\epsilon = 6 - d$ de los exponentes críticos correspondientes a la aproximación de campo medio. Tomando $\epsilon = 3$ en los desarrollos, se obtiene cierto acuerdo con algunos de los exponentes obtenidos numéricamente en $d = 3$. Sin embargo, por ejemplo, se obtiene $\beta = 0$, lo que indicaría que la transición de fase que ocurre al cruzar σ_c variando σ no estaría asociada a la existencia de un punto crítico. Esto es debido a que la expansión a primer orden en ϵ no es suficiente para obtener una aproximación razonable para β . Por otro lado, este estudio no se basa exactamente en el Hamiltoniano (4.1) sino que los autores añaden un potencial que introduce una barrera en el modelo con la finalidad de que la aproximación de campo medio del modelo presente histéresis en el punto crítico. Con esto los autores pretenden imitar el comportamiento del sistema en $d = 3$. Sin embargo, hasta incluso en los modelos de Landau tradicionales, no hay histéresis en el punto crítico así que, en principio, no tendría que ser necesario introducir artificialmente histéresis en el punto crítico que se obtiene en la aproximación de campo medio. De cualquier forma, los autores argumentan que los resultados que se obtienen son independientes de estos detalles.

Más adelante, en 1995, Perković *et al.* logran mejores estimaciones numéricas de los exponentes críticos relacionados con la distribución de los tamaños de las avalanchas que ocurren para $\sigma > \sigma_c$. Estas estimaciones se obtienen escalando las distribuciones de tamaños de las avalanchas utilizando una hipótesis de escala que no tiene en cuenta el tamaño finito de los sistemas que simulan. Según argumentan los autores, las correcciones de tamaño finito no son importantes en sus simulaciones porque logran simular sistemas muy grandes (hasta $N = 1000^3$ espines en una red cúbica). A parte de esto, parte del éxito de los escalados es debido a que utilizan la variable de escala $(\sigma_c - \sigma)/\sigma$ (asociada a σ) que es distinta a la variable de escala $(\sigma_c - \sigma)/\sigma_c$ tradicionalmente utilizada en fenómenos críticos [§ 2.2.5]. En este trabajo, los autores presentan estimaciones de los exponentes críticos en sistemas hipercúbicos en $d = 2, 3, 4, 5$ cuyos valores comparan con éxito con los obtenidos a partir de la expansión en torno a los exponentes de campo medio [212]. Además, presentan una estimación del desorden crítico $\sigma_c = 2.16 \pm 0.03$ más precisa que la del trabajo pionero [57].

En 1996, Dahmen y Sethna [217] publicaron un estudio extenso basado en el GR, que supone una continuación (y ampliación) de los resultados presentados por los mismos autores en 1993 [212]. En este trabajo se aproximan los exponentes críticos hasta $\mathcal{O}(\epsilon^5)$ comparando con las expansiones propuestas previamente [221] para el modelo de Ising puro.

En 1999, Perković *et al.* [222] presentan resultados numéricos⁶ que son una ampliación importante de los presentados en 1995. En los trabajos que se habían presentado hasta este momento, se había estudiado la distribución de tamaños de avalanchas sin tener en cuenta a qué campo sucede cada avalancha. Sin embargo, uno de los puntos importantes que tratan los autores de este trabajo es el análisis de la dependencia de la distribución conjunta de tamaños de avalanchas y el campo H al que tienen lugar. Tal y como afirman los mismos autores, la obtención de $D(s, H)$ requiere más estadística que la determinación de $D(s)$, lo que revierte en la necesidad de un esfuerzo computacional mayor. De cualquier forma, los autores demuestran que $D(s, H)$ se comporta como una ley de potencias únicamente en el punto crítico (σ_c, H_c) . Por otro lado, también presentan algunos escalados de magnitudes que dependen de H , como la magnetización $m(H)$ o su derivada con respecto a H . Pese a que los escalados no son de buena calidad, los autores determinan el exponente $\beta\delta$ y el campo crítico $H_c = 1.435 \pm 0.004$ para sistemas en $d = 3, 4$ y 5 .

Recientemente, se ha demostrado que, al menos en un determinado intervalo de tamaños y duraciones de avalanchas, las propiedades críticas del sistema se extienden [223, 224] también al perfil promedio de las avalanchas en función del tiempo $\mathcal{S}(t)$. Esto ha provocado una búsqueda de escalados de este tipo en ferromagnetos (señales Barkhausen) [30, 224, 225] y también en modelos más simples que el RFIM [226, 227].

Buena parte de estos resultados se encuentran resumidos en dos artículos de revisión recientes de Sethna *et al.* [52] y [213].

4.2. Motivos para profundizar en el estudio del RFIM con dinámica atérmica-adiabática

Tras haber resumido algunos puntos importantes del estado actual de la comprensión del RFIM con dinámica metaestable atérmica-adiabática en las secciones anteriores, estamos en condiciones de enumerar algunos de los motivos que nos han llevado

⁶Todos estos resultados numéricos y algunos más referentes al RFIM en $d = 2$, se encuentran también en la Ref. 198.

a continuar estudiando este modelo durante la realización de esta tesis. Los puntos fundamentales que motivan el estudio del 3D-GRFIM que se presenta en este capítulo y el siguiente son:

1. Uno de los problemas fundamentales en este modelo es la definición del parámetro de orden de la transición que se observa en (σ_c, H_c) . Desde un punto de vista termodinámico, la discontinuidad del ciclo de histéresis Δm sería un buen candidato si $\Delta m > 0$ para $\sigma < \sigma_c$ y $\Delta m = 0$ para $\sigma \geq \sigma_c$. Sin embargo, en las simulaciones numéricas a $T = 0$, debido al tamaño finito del sistema, todos los cambios de magnetización son discontinuos en una determinada realización de desorden. Esto no ocurre así en las simulaciones estándar de sistemas a temperatura finita en las que, debido a los promedios térmicos, la magnetización es continua para tamaños finitos. En el caso de las simulaciones a temperatura cero en que no hay promedios térmicos, se deben hacer promedios a sistemas con distintas realizaciones de desorden. Por otro lado, únicamente con un análisis de tamaño finito apropiado será posible determinar cuáles son las avalanchas de mayor tamaño y cuál es el tamaño de éstas en el límite termodinámico. En este sentido, será de suma importancia estudiar el número $N_s(\sigma)$ de avalanchas *spanning*⁷ por ciclo y su distribución de tamaños $D(s; \sigma)$.
2. Una segunda cuestión que parece no estar resuelta en la literatura consultada y que, en cierto modo, está relacionada con la anterior es la estructura espacial de las avalanchas. Se ha sugerido que las avalanchas no son compactas [198, 228] y, a partir de la distribución de los tamaños de las avalanchas que ocurren para $\sigma > \sigma_c$, se ha estimado de forma indirecta que se caracterizan por una dimensión fractal $d_f = 1/0.34 < 3$. Es interesante pues medir de forma más directa la dimensión fractal de las avalanchas y entender cómo es posible que un comportamiento fractal pueda dar lugar a una discontinuidad en la magnetización en el límite termodinámico.
3. La definición de las variables de escala que permiten caracterizar adecuadamente las propiedades críticas cerca del punto crítico (σ_c, H_c) también es un problema importante a estudiar. El escalado de las magnitudes que no tienen en cuenta a qué campo suceden las avalanchas (por ejemplo, la distribución de tamaños $D(s; \sigma)$) involucra una única variable de escala $u(\sigma)$ relacionada con la distancia

⁷Avalanchas que se extienden de un extremo a otro del sistema. Ver definición más precisa en las secciones § 4.3.4 y 4.4.

a σ_c . Aunque en los artículos pioneros [57, 212] se utilizó la aproximación más común $u_1 = (\sigma - \sigma_c)/\sigma_c$ a la variable de escala para escalar la distribución de tamaños de avalanchas $D(s, \sigma)$, en los trabajos siguientes [217, 222, 228], fue necesario cambiar la definición de la variable a $u_3 = (\sigma - \sigma_c)/\sigma$ para obtener escalados de mejor calidad. Aparentemente, ambas definiciones son equivalentes en las proximidades del punto crítico, pero se puede comprobar que el escalado “fenomenológico” de las distribuciones $D(s; \sigma)$ utilizando u_3 (con $u_3 > 0.04$) que se muestra en la Fig. 1 de la Ref. 228 no es posible utilizando u_1 . Es pues interesante estudiar la dependencia de $u(\sigma)$ con σ , y el motivo por el que la variable u_1 no es apropiada.

4. Como se ha mencionado en la sección § 4.1.3, no existe un estudio detallado y concluyente que tenga en cuenta el campo H al que ocurren las avalanchas. En la Ref. 222 se hizo un primer intento pero no se obtuvieron unos escalados aceptables, cosa que motiva estudiar a fondo la dependencia con el campo de distintas magnitudes relacionadas con las avalanchas.
5. En las Refs. [198, 222] aparece un análisis con técnicas de tamaño finito para el número de avalanchas *spanning* $N_s(\sigma; L)$. Sin embargo, en estos mismos trabajos, no se ha tenido en cuenta el efecto de tamaño finito ni en las distribuciones de tamaños de avalanchas ni en el número de avalanchas no *spanning* $N_{ns}(\sigma; L)$. Esto lleva inevitablemente a la obtención de exponentes efectivos que dependen de los parámetros del problema. Existen algunas excepciones (en sistemas bidimensionales) [59, 229] en que sí se ha tenido en cuenta el tamaño finito en las distribuciones de tamaños. Sin embargo, en estos trabajos no se ha tenido en cuenta la dependencia de las distribuciones con la distancia al punto crítico y también se han obtenido exponentes efectivos que dependen de los parámetros del problema. Como veremos, el hecho de considerar apropiadamente el tamaño finito nos lleva a la obtención de exponentes críticos independientes de los parámetros del modelo, lo que concuerda mejor con la definición de exponente crítico [§ 2.2.5].
6. En los trabajos previos, únicamente se han estudiado las distribuciones de las avalanchas que tienen lugar para $\sigma > \sigma_c$, con el fin de evitar el efecto de las avalanchas *spanning* en la distribución. Sin embargo, no existe un análisis detallado de las distribuciones de las avalanchas *spanning* aunque, como veremos, juegan un papel importante en relación con la discontinuidad de la magnetización para

$$\sigma < \sigma_c.$$

7. En los trabajos previos se ha logrado simular sistemas de hasta $N = 1000^3$ espines. Simular sistemas tan grandes es ventajoso para el estudio de las magnitudes autopromediadas⁸. Sin embargo, las propiedades de las avalanchas *spanning* no son autopromediadas debido a que, como veremos más adelante, el número de avalanchas *spanning* por ciclo no aumenta con el tamaño del sistema como L^3 (en $d = 3$) sino que lo hace como $L^{0.1}$. Llegamos pues a la conclusión de que, para obtener un error estadístico menor en nuestros análisis, es más importante hacer promedios a muchas realizaciones distintas de desorden (indicaremos estos promedios como $\langle \cdot \rangle$) que simular sistemas con tamaños muy grandes.

4.3. Algoritmos empleados en las simulaciones

En esta sección se describen algunos de los detalles de los algoritmos utilizados en la tesis para simular el 3D-GRFIM con la dinámica metaestable atérmica-adiabática descrita en la sección anterior. En primer lugar [§ 4.3.1] se describe el algoritmo desde un punto de vista general introduciendo los elementos mínimos necesarios para obtener una rama del ciclo de histéresis (disminuyendo H desde $+\infty$ a $-\infty$) y realizar promedios a distintas realizaciones de desorden. Seguidamente [§ 4.3.2], se describen dos algoritmos para propagar las avalanchas. En la sección § 4.3.3 se introduce el procedimiento de medida de la duración de las avalanchas para cada uno de los algoritmos de propagación introducidos en la sección anterior [§ 4.3.2]. De hecho, la medida de la duración de las avalanchas se utiliza como hilo conductor para introducir los algoritmos que permiten medir cualquier magnitud que involucre el tiempo.

4.3.1. Esquema general del algoritmo

La Fig. 4.4 muestra el diagrama de flujo del algoritmo general seguido para implementar la dinámica metaestable atérmica-adiabática. Desde un punto de vista general, el algoritmo se puede dividir en cuatro niveles fundamentales:

- **Nivel 0:** A este nivel se fija el número N de espines del sistema que se pretende simular. En nuestras simulaciones los espines se sitúan en una red cúbica simple de L espines por lado ($N = L \times L \times L$) con parámetro de red $a = 1$ y vectores

⁸Traducción del inglés de *self-averaging*. Ver definición de magnitud autopromediada en la Ref. 9, por ejemplo

primitivos \hat{a}_1 , \hat{a}_2 y \hat{a}_3 . Además, también es necesario fijar el número N_{prom} de realizaciones distintas de desorden sobre las que se desean promediar las magnitudes que se van a medir durante la simulación. Las condiciones de contorno también se deben introducir a este nivel. En particular, en las simulaciones llevadas a cabo en la presente tesis, siempre se han utilizado condiciones periódicas de contorno (cpc). Dichas condiciones de contorno implican $S(\vec{R} \pm L\hat{a}_i) = S(\vec{R})$ en cualquiera de las tres direcciones de la red, donde $\vec{R} = \sum_{i=1}^3 R_i \hat{a}_i$ indica la posición del espín⁹. Estas condiciones se implementan definiendo un vector *cpc* de dimensión $L + 2$ tal que

$$\begin{aligned} cpc(0) &= L, \\ cpc(i) &= i, \quad i = 1, 2, \dots, L, \\ cpc(L + 1) &= 1. \end{aligned} \tag{4.26}$$

De esta forma, los 6 vecinos próximos del espín en $\vec{R} = (R_1, R_2, R_3)$ son:

$$\begin{aligned} V_1(\vec{R}) &= S(cpc(R_1 + 1), R_2, R_3), & V_2(\vec{R}) &= S(cpc(R_1 - 1), R_2, R_3), \\ V_3(\vec{R}) &= S(R_1, cpc(R_2 + 1), R_3), & V_4(\vec{R}) &= S(R_1, cpc(R_2 - 1), R_3), \\ V_5(\vec{R}) &= S(R_1, R_2, cpc(R_3 + 1)), & V_6(\vec{R}) &= S(R_1, R_2, cpc(R_3 - 1)), \end{aligned} \tag{4.27}$$

donde se ha introducido la notación $V_n(\vec{R})$, $n = 1, 2, \dots, z$ ($z = 6$ en una red cúbica), para denotar cada uno de los z vecinos próximos de $S(\vec{R})$. Esta notación nos será útil más adelante [§ 4.3.2].

Finalmente, antes de acabar este punto inicial, se inicia a cero un índice i_{prom} que sirve para contar el número de realizaciones de desorden.

- Nivel 1:** Siempre que $i_{prom} < N_{prom}$, se inician a 1 todos los espines y se asigna un campo aleatorio $h(\vec{R})$ a cada sitio de la red. Como ya se ha mencionado, en nuestras simulaciones se considera que los campos aleatorios están distribuidos según una distribución de probabilidad gaussiana de media 0 y desviación estándar σ [Ec. (4.2)]. Para generar números aleatorios distribuidos según una distribución gaussiana se ha utilizado el método *Box-Muller* [193, 230]. Con el fin de detectar cuando han girado todos los espines hacia abajo es interesante definir en este nivel la magnitud s_T que corresponde al número total de espines que van girando en cada realización de espines de tal forma que, cuando $s_T = N$, ya han girado todos los espines del sistema. s_T se inicia a 0 en este nivel.

⁹En esta sección, se etiquetará cada espín por su posición en la red \vec{R} ya que computacionalmente son necesarios tres números (R_1 , R_2 y R_3) para indicar la posición de los espines.

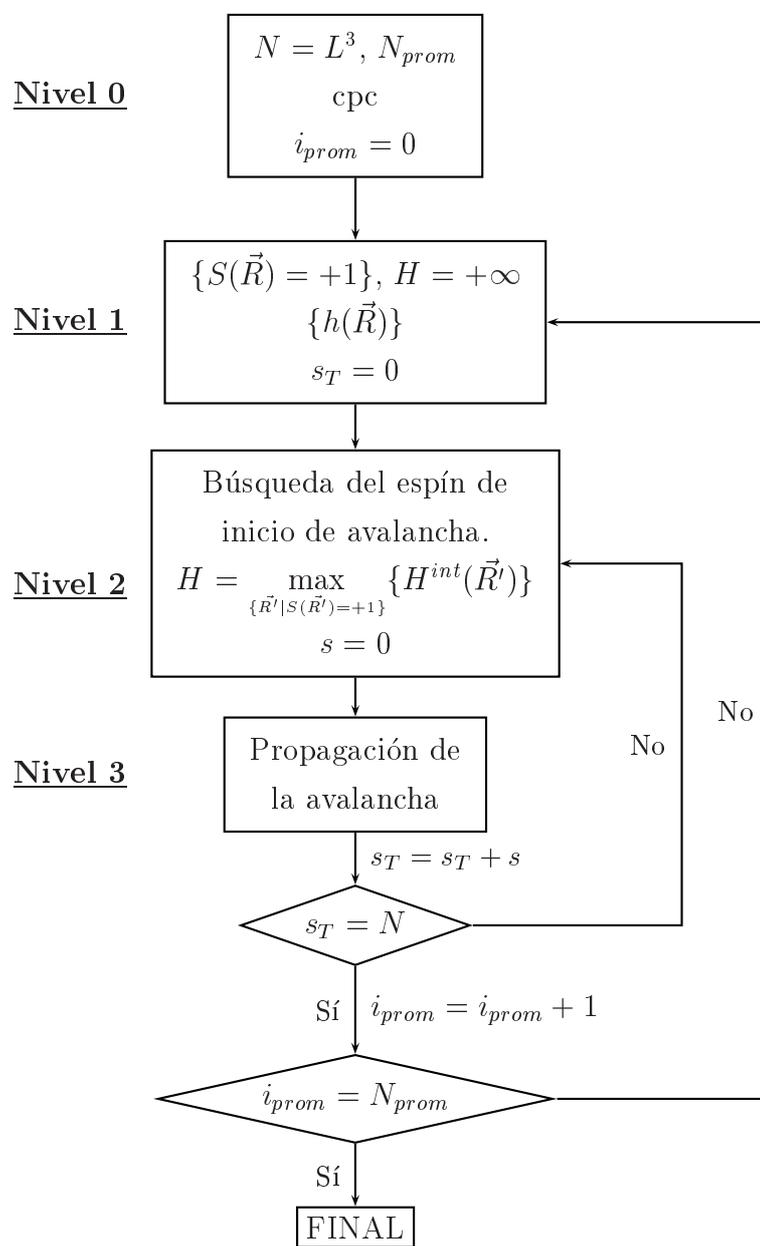


Figura 4.4: Diagrama de flujo del esquema general del algoritmo para simular el RFIM a $T = 0$ con dinámica metaestable.

- **Nivel 2:** Búsqueda del primer espín de entre todos los que aún no han girado que gira al disminuir H . Por definición de la dinámica, este espín, que llamaremos $S(\vec{R}_*)$, es aquél de entre todos los que aún no han girado que tiene el mayor campo interno asociado:

$$H^{int}(\vec{R}_*) = \max_{\{\vec{R}|S(\vec{R})=+1\}} \{H^{int}(\vec{R})\}. \quad (4.28)$$

donde $H^{int}(\vec{R})$ se ha definido en la Ec. (4.7).

Para encontrar $S(\vec{R}_*)$ se pueden utilizar dos métodos: el *método de “fuerza bruta”* y el *método de lista ordenada*. El primero de ellos es el método más sencillo pero menos efectivo si se pretende simular sistemas muy grandes. En cambio, el segundo, propuesto en la Ref. 231, es más complicado pero resulta más eficiente para simular sistemas grandes. Parte de las simulaciones se han hecho utilizando el primer método y también se ha utilizado el segundo en buena parte de las simulaciones. La implementación del segundo método se ha llevado a cabo dentro de nuestro grupo en colaboración con X. Illa. Este método no se describirá con detalle en esta tesis. En cualquier caso, uno de los ingredientes fundamentales del método, que es útil mencionar, consiste en ordenar los campos aleatorios de los espines de menor a mayor¹⁰. Esta ordenación nos define una ordenación para los espines, de tal manera que es posible renombrar las posiciones en la red $\{\vec{R}\}$ y los espines $S(\vec{R})$ con un índice correspondiente al lugar que ocupa en la lista el campo aleatorio asociado a cada espín:

$$\begin{aligned} \{\vec{R}\} &\rightarrow \{i = 1, 2, \dots, N\} \\ \{S(\vec{R})\} &\rightarrow \{S_i\} \\ \{h(\vec{R})\} &\rightarrow \{h_i | h_1 \leq h_2 \leq \dots \leq h_N\}, \end{aligned} \quad (4.29)$$

Una vez localizado $S(\vec{R}_*)$ se iguala H a $H^{int}(\vec{R}_*)$ y se inicia a cero el tamaño s de la siguiente avalancha.

- **Nivel 3:** Propagación de la avalancha que se produce al girar el espín $S(\vec{R}_*)$. Durante el proceso de propagación se mantiene el campo constante ($H = H^{int}(\vec{R}_*)$) y giran todos aquellos espines cuyo campo local H^{loc} [Ec. (4.4)] es menor o igual que cero.

De nuevo, se pueden utilizar dos métodos para propagar las avalanchas: el método de “fuerza bruta” y el *método de cola* [231] que es el que se ha utilizado en

¹⁰Para hacer esta ordenación se ha utilizado el algoritmo *Heapsort* [193].

las simulaciones que se presentan en esta tesis. En la sección § 4.3.2 se describen ambos métodos haciendo más énfasis en el método de cola. Al final de la propagación de la avalancha, se obtiene el tamaño s de dicha avalancha que se suma al contador s_T . De esta forma, si $s_T < N$, aún no han girado todos los espines y es necesario volver al nivel 2 para seguir girando espines. Si por el contrario $s_T = N$, ya han girado todos los espines y se puede iniciar otra realización de desorden siempre y cuando $i_{prom} < N_{prom}$. Si este es el caso, hay que volver al nivel 1 y crear otro conjunto de campos aleatorios. En el caso en que $i_{prom} = N_{prom}$, ya se han llevado a cabo todas las realizaciones distintas de desorden que se pretendían y finaliza la simulación.

En el algoritmo descrito, la memoria se utiliza fundamentalmente en almacenar la configuración $\{S(\vec{R})\}$ de los espines y la configuración $\{h(\vec{R})\}$ de los campos aleatorios. Kuntz *et al.* [231] propusieron un algoritmo alternativo (*algoritmo de bits*)¹¹, basado en ideas de la percolación de invasión [232] y del RFIM aplicado al estudio de la evolución de interfases en medios desordenados [196], según el cual únicamente es necesario almacenar $\{S(\vec{R})\}$. Estos autores argumentan que no es necesario almacenar los campos aleatorios porque la probabilidad de que gire un espín no girado está determinada únicamente por el campo externo H y la configuración de los vecinos próximos de dicho spin. Además, en el algoritmo se asume que la distribución de los campos aleatorios asociados a los espines no girados es invariante (gaussiana de media 0 y desviación σ) durante toda la rama del ciclo de histéresis. Sin embargo, en un trabajo reciente [233], X. Illa y E. Vives presentan resultados que parecen indicar que, tras haber sucedido una avalancha utilizando el algoritmo sencillo (algoritmo de la Fig. 4.4), la distribución de los campos aleatorios de los espines no girados ya no es gaussiana. Así pues, aún no está totalmente claro que los dos algoritmos sean equivalentes. De hecho, si no lo son, el algoritmo de bits no correspondería a una simulación de un sistema con desorden congelado gaussiano.

4.3.2. Algoritmos de propagación de avalanchas

El método más natural de propagar una avalancha es el de “fuerza bruta” pero es poco eficiente en el caso del RFIM a $T = 0$ con interacción a primeros vecinos. Básicamente consiste en comprobar el campo interno de todos y cada uno de los espines no girados y girar los que son inestables ($H^{loc} \leq 0$). Este proceso se repite hasta que

¹¹Los autores le llaman algoritmo de bits (*Bits algorithm* en inglés) porque únicamente requiere almacenar un bit por espín.

ninguno de los espines no girados es inestable, en cuyo caso finaliza una avalancha. Sin embargo, dado que los espines interactúan con sus vecinos más próximos, tras el giro de un espín en el sistema, los únicos espines que pueden girar como consecuencia del giro de dicho espín son sus primeros vecinos. El método de “fuerza bruta” no aprovecha esta propiedad y por ello es poco eficiente. El *método de cola* [231, 234] solventa esta deficiencia rastreando únicamente los primeros vecinos de aquellos espines que van girando durante la avalancha. Para ello se define una lista (*cola*¹²) de longitud máxima zN donde se introducen los espines a girar en la avalancha. En caso de que los espines del sistema no estén ordenados en una lista, es necesario trabajar con las coordenadas (R_1, R_2, R_3) de cada espín y, en consecuencia, *cola* debe ser una matriz $3 \times zN$. Si, por el contrario los espines están ordenados en una lista, como sucede cuando se utiliza el método de lista ordenada para la búsqueda del espín de inicio de las avalanchas, *cola* es un vector de zN elementos como máximo, de tal forma que la memoria utilizada en la programación es menor en este caso. Supondremos en lo que sigue que los espines de inicio de avalancha se buscan con el método de lista ordenada, de manera que los espines $\{S_i\}$ se etiquetan por la posición i que ocupan en la lista ordenada. A parte de la lista *cola*, también se definen dos índices: *ProxG* y *ProxE*. El primero de ellos indica el lugar de *cola* en que se encuentra el próximo espín a girar (nos referiremos a este espín como S_G). En cambio, *ProxE* indica el primer lugar vacío de la lista. En este lugar de *cola* se introduce el próximo espín que se encuentre con $H^{loc} \leq 0$.

Con estos elementos se procede de la siguiente forma (ver diagrama de flujo en la Fig. 4.5 y el ejemplo en la Fig. 4.7):

1. Una vez se ha seleccionado el espín de inicio de avalancha S_{i_*} , se introduce en el primer lugar de *cola* el índice correspondiente a dicho espín: $cola(1) = i_*$. Seguidamente se hace $ProxE = 2$ y $ProxG = 1$. En esta situación inicial $S_G = S_{i_*}$.
2. Si $S_G = +1$, se gira y se mueve el índice *ProxG* un lugar en *cola*: $ProxG = ProxG + 1$. Si S_G ya ha girado ($S_G = -1$), se hace $ProxG = ProxG + 1$ y se vuelve a repetir este punto hasta encontrar un espín S_G no girado. Es importante tener en cuenta el caso en que S_G ya haya girado puesto que es posible que un espín pueda aparecer más de una vez en la lista [Fig. 4.7].
3. Se calcula el campo local $H_{V_n(S_G)}^{loc}$ de los vecinos $V_n(S_G)$ ($n = 1, 2, \dots, z$) no girados de S_G . Siempre que uno de estos vecinos tenga $H^{loc} \leq 0$, se introduce en

¹²En inglés se utiliza el término *queue* para nombrar esta lista ordenada.

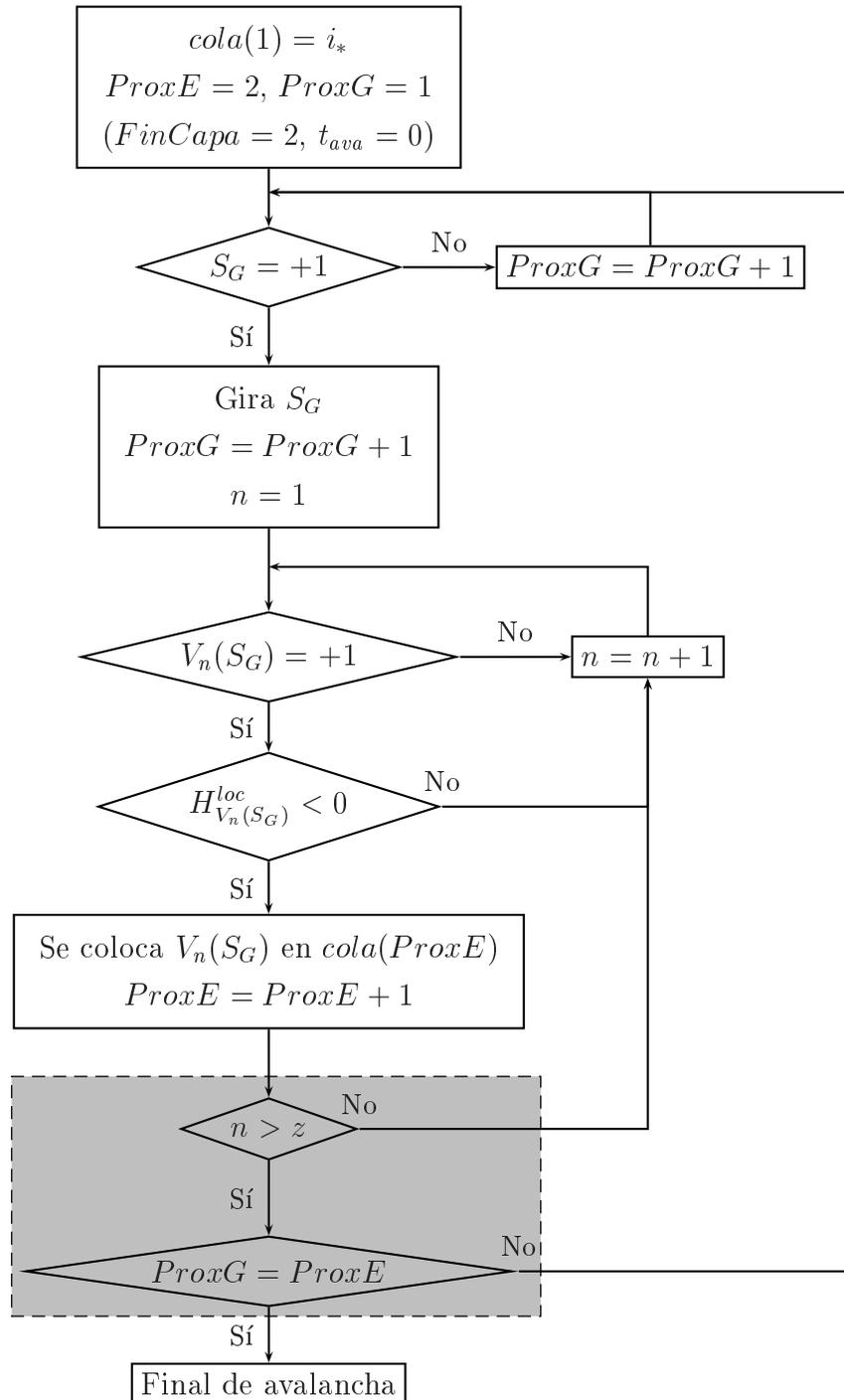


Figura 4.5: Diagrama de flujo del algoritmo de propagación de las avalanchas utilizando una cola. Los índices $FinCapa$ y t_{ava} únicamente son necesarios si se pretende medir la duración de las avalanchas [§ 4.3.3], en cuyo caso, la zona sombreada se debe sustituir por el diagrama de la Fig. 4.6.

cola en la posición $ProxE$ y se hace $ProxE = ProxE + 1$.

4. Si quedan espines sin girar en *cola*, lo que equivale a $ProxG < ProxE$, se vuelve al paso 2. Si $ProxG = ProxE$, ya han girado todos los espines en *cola* y finaliza la avalancha.

En el paso 2 se ha hecho hincapié en el hecho de que pueda aparecer un espín repetidas veces en la lista. De cualquier forma, una cota superior al número de espines que se introducen en *cola* durante una avalancha es zN , tal y como se ha adelantado al principio de esta sección. Efectivamente, en una avalancha pueden girar como máximo N espines y cada uno de estos espines sólo puede provocar el giro de sus z vecinos, con lo cual, por el giro de cada spin, pueden entrar a la lista z espines como máximo.

El orden en que giran los espines utilizando una *cola* para propagar las avalanchas es diferente en general del que siguen utilizando el método de “fuerza bruta”. Sin embargo, gracias a la *propiedad abeliana* del modelo [§ 4.1], la configuración final a un cierto campo es independiente del orden en que giren los espines y, como consecuencia, el método de cola es equivalente al método de “fuerza bruta”.

4.3.3. Medida de la duración de las avalanchas

Utilizando el *método de “fuerza bruta”* para propagar las avalanchas, es sencillo obtener la *duración* (t_{ava}) de las avalanchas. En primer lugar, es preciso definir una unidad de tiempo. Una elección lógica es el tiempo t_G que emplea un espín en girar una vez está en un estado metaestable. En las simulaciones de esta tesis supondremos que t_G es común a todos los espines. En segundo lugar, es necesario definir qué sucesos son simultáneos en la simulación¹³. En el método de “fuerza bruta” suponemos que giran simultáneamente todos aquellos espines que, durante un rastreo a todos los espines no girados, tienen $H^{loc} \leq 0$ (la *dinámica es síncrona*, § 4.1). El proceso de giro del conjunto de espines inestables dura un tiempo t_G . De esta forma, si durante una avalancha se hacen un total de T_{ava} rastreos a espines no girados, la duración de la avalancha es $t_{ava} = T_{ava}t_G$ y, por definición, T_{ava} es la duración de la avalancha en unidades de t_G . De cualquier manera, para no complicar la notación en exceso y porque las temperaturas las denotamos como T , en el resto de la tesis utilizaremos la notación t_{ava} para referirnos a la duración de las avalanchas asociadas con el RFIM en unidades de t_G .

¹³La simulación es secuencial y no existen eventos simultáneos como tales.

La implementación de la dinámica síncrona utilizando el método de cola para la propagación de la avalancha es un poco más compleja desde un punto de vista computacional. Cuando gira un cierto espín, se considera que todos sus vecinos próximos inestables giran simultáneamente al cabo de un tiempo t_G . De esta forma, si un cierto conjunto de espines (una capa de espines) giran simultáneamente, todos sus vecinos próximos inestables (capa de espines adyacente) girarán simultáneamente tras un tiempo t_G . El algoritmo a seguir para medir t_{ava} es el que se obtiene sustituyendo la parte sombreada del diagrama de la Fig. 4.5 por el diagrama de la Fig. 4.6. Básicamente se puede resumir en dos pasos (ver ejemplo en Fig. 4.7):

1. En el primer paso del algoritmo de cola se inicia la duración de la avalancha t_{ava} a 0 y un índice $FinCapa = 2$. $FinCapa$ indica el final de una cierta capa de espines que giran simultáneamente.
2. Cuando todos los espines de una cierta capa han girado ($ProxG = FinCapa$), t_{ava} se incrementa en una unidad y se actualiza $FinCapa$: $FinCapa = ProxE$. $FinCapa$ se debe actualizar de esta forma porque, cuando se inicia el giro de los espines de una capa, los próximos espines en entrar en *cola* pertenecen a la capa siguiente.

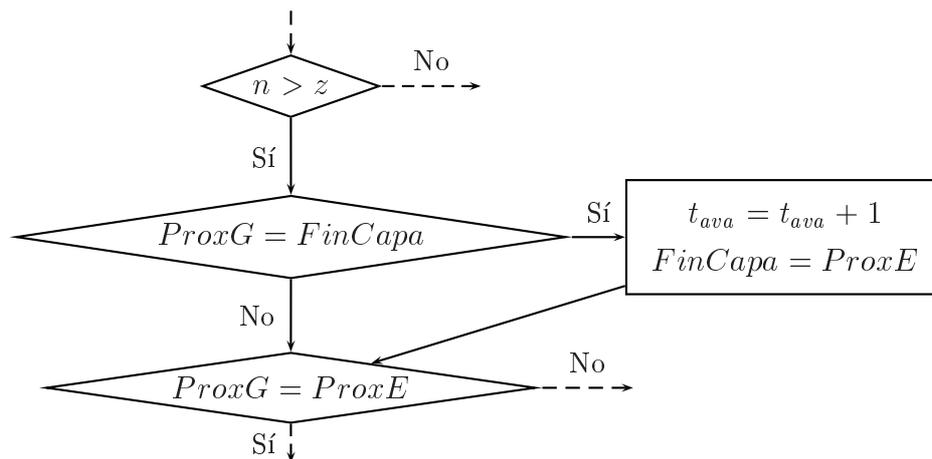


Figura 4.6: Diagrama de flujo que sustituye a la zona sombreada en Fig. 4.5 para medir la duración de las avalanchas.

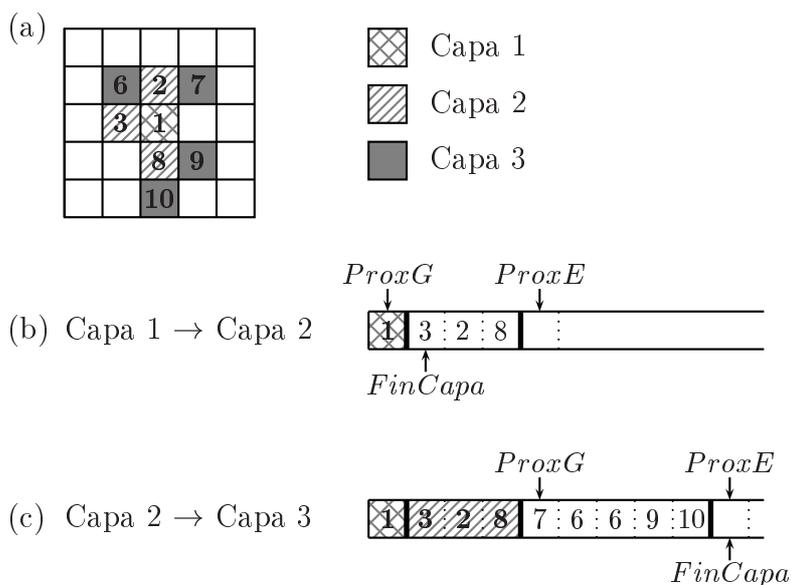


Figura 4.7: (a) Ejemplo de las primeras tres capas de una avalancha en un sistema bidimensional. Los distintos colores indican la capa en la que giran los espines. Los espines no girados no se enumeran (por comodidad). (b) Posición en *cola* de los índices $ProxG$, $ProxE$ y $FinCapa$ tras girar el espín 1. El giro del espín 1 (capa 1) hace que entren en *cola* tres de sus vecinos (3,2,8). Al actualizar $ProxG$ ($ProxG = ProxG + 1$), se obtiene $ProxG = FinCapa$, lo que indica el final de la primera capa y el principio de la siguiente. Seguidamente, actualizamos $FinCapa$ igualándolo a $ProxE$ e introducimos en *cola* los vecinos inestables de los espines en la capa 2. Así se forma la capa 3 compuesta por los espines (7,6,9,10) y los índices $ProxG$, $ProxE$ y $FinCapa$ quedan como se indica en (c). Como se puede ver, el espín 6 aparece dos veces en la lista porque es inestable debido al giro del espín 3 y también lo es debido al giro del espín 2 pero, como se explica en el texto, únicamente gira la primera vez que aparece en la lista.

4.3.4. Detección de las avalanchas *spanning*

Buena parte de nuestras simulaciones se basa en propiedades de las avalanchas *spanning*. En la sección § 4.4 se detalla más la definición de este tipo de avalanchas pero, de forma sencilla, una avalancha se dice que es *spanning* en una cierta dimensión si conecta dos extremos opuestos del sistema. En general, en un sistema tridimensional, una avalancha puede ser *spanning* en una, dos o tres dimensiones. En la presente tesis se ha utilizado el *método de sombra* para la detección de las avalanchas *spanning* así como para la determinación del número de dimensiones en que cruzan el sistema. En este método se definen tres vectores Sox , Soy y Soz (*vectores de sombra*) de dimensión L cuyas componentes se inician a 0 al principio de cada avalancha. Cada vez que gira un espín, supongamos $S(R_1, R_2, R_3)$, hacemos $Sox(R_1) = 1$, $Soy(R_2) = 1$ y $Soz(R_3) = 1$. Si una vez finalizada una avalancha, todas las componentes de Sox son 1, dicha avalancha es *spanning* en la dimensión x , como mínimo. Para comprobar si esto es así, es suficiente con calcular el producto $\prod_{i=1,L} Sox(i)$, de tal forma que, si el resultado es 1, la avalancha es *spanning* al menos en la dimensión x . Calculando el producto análogo para Soy y Soz , se deduce si la avalancha es *spanning* en el resto de dimensiones. El proceso descrito se aplica sólo a las avalanchas con un tamaño $s \geq L$ porque sólo éstas pueden ser *spanning*.

El método de sombra requiere $\mathcal{O}(L)$ operaciones para cada avalancha con $s \geq L$ y, aunque su programación es sencilla, no es muy eficiente ya que hay muchas avalanchas con $s \gtrsim L$ a las que se aplica el proceso anterior y no son *spanning*. Existe un método más eficiente [231] que consiste en “seguir” el camino de las $2 \times d$ fronteras de la avalancha (6 fronteras en $d = 3$) cuando crece. Si se encuentran dos fronteras, la avalancha en cuestión es *spanning*.

4.4. Definición de las magnitudes estudiadas. Notación

Para una cierta realización de los campos aleatorios, correspondiente a un cierto valor de σ , se ha almacenado la secuencia de avalanchas en una rama del ciclo de histéresis, variando el campo H de $+\infty$ a $-\infty$. En particular, se ha almacenado el campo H al que sucede cada avalancha, su tamaño s y su duración t_{ava} . Tal y como se ha mencionado al principio de este capítulo, las magnitudes fundamentales que se han medido promediando a varias realizaciones de desorden son el número total de

avalanchas por ciclo $N(\sigma, L)$, la distribución normalizada de tamaños de avalanchas $D(s; \sigma, L)$, la densidad de avalanchas $n(H; \sigma, L)$ que ocurren en un intervalo de campo $(H, H + dH)$ y la distribución bivariada $\mathcal{D}(s, H; \sigma, L)$. La distribución de tamaños está normalizada, de tal forma que cumple:

$$\sum_{s=1}^{L^3} D(s; \sigma, L) = 1. \quad (4.30)$$

Es importante notar que, dada esta condición de normalización y el hecho de que s es un número natural, es inmediato ver que $D(s; \sigma, L) \leq 1$, para cualquier valor de s , σ y L . La densidad de avalanchas $n(H; \sigma, L)$ está relacionada con $N(\sigma, L)$ de la siguiente forma:

$$\int_{-\infty}^{\infty} dH n(H; \sigma, L) = N(\sigma, L). \quad (4.31)$$

La condición de normalización de $\mathcal{D}(s, H; \sigma, L)$ se escribe como:

$$\sum_{s=1}^{L^3} \int_{-\infty}^{\infty} dH \mathcal{D}(s, H; \sigma, L) = 1, \quad (4.32)$$

ya que el campo es una variable continua y el tamaño de las avalanchas es una variable discreta. Por otro lado, la distribución $D(s; \sigma, L)$ se obtiene proyectando $\mathcal{D}(s, H; \sigma, L)$ sobre la variable s :

$$\int_{-\infty}^{\infty} dH \mathcal{D}(s, H; \sigma, L) = D(s; \sigma, L), \quad (4.33)$$

y la densidad de probabilidad de que suceda una avalancha en el intervalo de campos $(H, H + dH)$ es¹⁴:

$$\sum_{s=1}^{L^3} \mathcal{D}(s, H; \sigma, L) = \frac{n(H; \sigma, L)}{N(\sigma, L)}. \quad (4.34)$$

En virtud de (4.31), esta distribución también está normalizada.

Dado que, integrando a H , se obtiene $N(\sigma, L)$ a partir de $n(H; \sigma, L)$ y $D(s; \sigma, L)$ a partir de $\mathcal{D}(s, H; \sigma, L)$, en adelante nos referiremos a $N(\sigma, L)$ y $D(s; \sigma, L)$ como *magnitudes integradas*. Las secciones § 4.5–4.7 están dedicadas a presentar los resultados relacionados con las magnitudes integradas y los resultados relativos a las magnitudes que dependen del campo se presentan en las secciones § 4.8–4.10.

Para la búsqueda del espín de inicio de una avalancha se han utilizado los dos algoritmos mencionados en la sección § 4.3.1 (método de “fuerza bruta” y método de lista

¹⁴Se ha obviado introducir otro nombre para esta distribución con el fin de no complicar la notación innecesariamente, ya que se puede expresar como el cociente de dos magnitudes ya definidas.

ordenada). Por un lado, los resultados correspondientes a las magnitudes integradas ($N(\sigma, L)$ y $D(s; \sigma, L)$) se han obtenido utilizando el método de “fuerza bruta”. En cambio, para el estudio de las magnitudes no integradas ($n(H; \sigma, L)$ y $\mathcal{D}(s, H; \sigma, L)$), se ha utilizado el método de lista ordenada. Por lo que concierne a la propagación de las avalanchas, se ha utilizado el método de cola en todas las simulaciones. Se han simulado sistemas con tamaños comprendidos entre $L = 5$ ($L^3 = 125$) y $L = 180$ ($L^3 = 5832000$). Las magnitudes medidas se han promediado siempre a un gran número de configuraciones de los campos aleatorios (típicamente más de 10^4 para $L \leq 80$ y hasta 300 para $L = 180$).

Se han utilizado condiciones periódicas de contorno, de tal forma que, de hecho, las simulaciones corresponden a un sistema periódico infinito. Así pues, estrictamente hablando, todas las avalanchas son infinitas. De cualquier manera, no todas las avalanchas son importantes en el límite termodinámico ($L \rightarrow \infty$) sino que sólo juegan un papel importante aquellas que, al menos en una de las tres direcciones (x , y , o z) del sistema, se extienden una longitud L . Éstas son precisamente las avalanchas *spanning*. Para detectar si una avalancha es *spanning* y, en caso de serlo, en qué direcciones lo es, se ha utilizado el *método de sombra* descrito en la sección § 4.3.4. Con este método, una vez finaliza una avalancha, ésta se puede clasificar en cuatro tipos:

- Avalancha no *spanning*: se extiende una longitud menor que L en las tres direcciones x , y y z .
- Avalancha 1D-*spanning*: se extiende una distancia L en una y sólo una de las direcciones.
- Avalancha 2D-*spanning*: se extiende una distancia L en dos y sólo en dos de las direcciones.
- Avalancha 3D-*spanning*: se extiende una distancia L en las tres dimensiones del sistema.

La Fig. 4.8 presenta un ejemplo de cada uno de estos tipos de avalancha para un sistema de tamaño $L = 32$ y $\sigma = 2.21$. Como se puede ver, la presencia de desorden hace que el crecimiento de las avalanchas no sea isotrópico. De hecho, como veremos más adelante, desde un punto de vista geométrico, las avalanchas son fractales aleatorios. Las simulaciones nos permiten estudiar por separado cada uno de los tipos de avalancha de la clasificación anterior. En particular, para cada tipo, se ha estudiado el número de avalanchas en una rama del ciclo, la densidad correspondiente, la distribución de

tamaños y la distribución bivariada de tamaños y campos. El cuadro 4.1 presenta las definiciones de las distintas magnitudes que se estudiarán a lo largo del capítulo. Por otro lado, el cuadro 4.2 resume las relaciones matemáticas entre las diferentes magnitudes introducidas en el cuadro 4.1. De aquí en adelante, se utilizará el subíndice α para indicar el tipo de avalancha al que hace referencia cualquiera de las magnitudes introducidas en el cuadro 4.1.

Cuadro 4.1: Notación de las distintas magnitudes estudiadas en este capítulo. Todas las magnitudes hacen referencia al análisis de una rama del ciclo de histéresis y se obtienen promediando a muchas realizaciones de desorden.

Tipo de avalancha	Número en una rama	Distribución de s	Densidad	Distribución bivariada
Todos	$N(\sigma, L)$	$D(s; \sigma, L)$	$n(H; \sigma, L)$	$\mathcal{D}(s, H; \sigma, L)$
<i>spanning</i>	$N_s(\sigma, L)$	$D_s(s; \sigma, L)$	$n_s(H; \sigma, L)$	$\mathcal{D}_s(s, H; \sigma, L)$
No <i>spanning</i>	$N_{ns}(\sigma, L)$	$D_{ns}(s; \sigma, L)$	$n_{ns}(H; \sigma, L)$	$\mathcal{D}_{ns}(s, H; \sigma, L)$
No <i>spanning</i> críticas	$N_{nsc}(\sigma, L)$	$D_{nsc}(s; \sigma, L)$	$n_{nsc}(H; \sigma, L)$	$\mathcal{D}_{nsc}(s, H; \sigma, L)$
No <i>spanning</i> no críticas	$N_{ns0}(\sigma, L)$	$D_{ns0}(s; \sigma, L)$	$n_{ns0}(H; \sigma, L)$	$\mathcal{D}_{ns0}(s, H; \sigma, L)$
1D- <i>spanning</i>	$N_1(\sigma, L)$	$D_1(s; \sigma, L)$	$n_1(H; \sigma, L)$	$\mathcal{D}_1(s, H; \sigma, L)$
2D- <i>spanning</i>	$N_2(\sigma, L)$	$D_2(s; \sigma, L)$	$n_2(H; \sigma, L)$	$\mathcal{D}_2(s, H; \sigma, L)$
3D- <i>spanning</i>	$N_3(\sigma, L)$	$D_3(s; \sigma, L)$	$n_3(H; \sigma, L)$	$\mathcal{D}_3(s, H; \sigma, L)$
3D- <i>spanning</i> críticas	$N_{3c}(\sigma, L)$	$D_{3c}(s; \sigma, L)$	$n_{3c}(H; \sigma, L)$	$\mathcal{D}_{3c}(s, H; \sigma, L)$
3D- <i>spanning</i> subcríticas	$N_{3-}(\sigma, L)$	$D_{3-}(s; \sigma, L)$	$n_{3-}(H; \sigma, L)$	$\mathcal{D}_{3-}(s, H; \sigma, L)$

La definición de avalancha *spanning* utilizada en este trabajo es equivalente a la de trabajos anteriores llevados a cabo por otros autores [198, 222, 231]. Sin embargo, el número promedio de avalanchas *spanning* N_s obtenido en estos trabajos previos no coincide con el que se presenta en esta tesis. Nosotros proponemos que tal discrepancia es debida a que el método utilizado en los trabajos anteriores para contar el número de avalanchas *spanning* consiste en promediar dos veces las avalanchas 2D-*spanning* y promediar tres veces las avalanchas 3D-*spanning*. Haciendo esto, los autores no obtienen el número N_s obtenido en nuestro trabajo sino que obtienen un número que, en función de los números obtenidos en esta tesis (ver cuadro 4.1), se expresa como $(N_1 + 2N_2 + 3N_3)/3$. En cambio, el número de avalanchas *spanning* en nuestro caso es $N_s = N_1 + N_2 + N_3$.

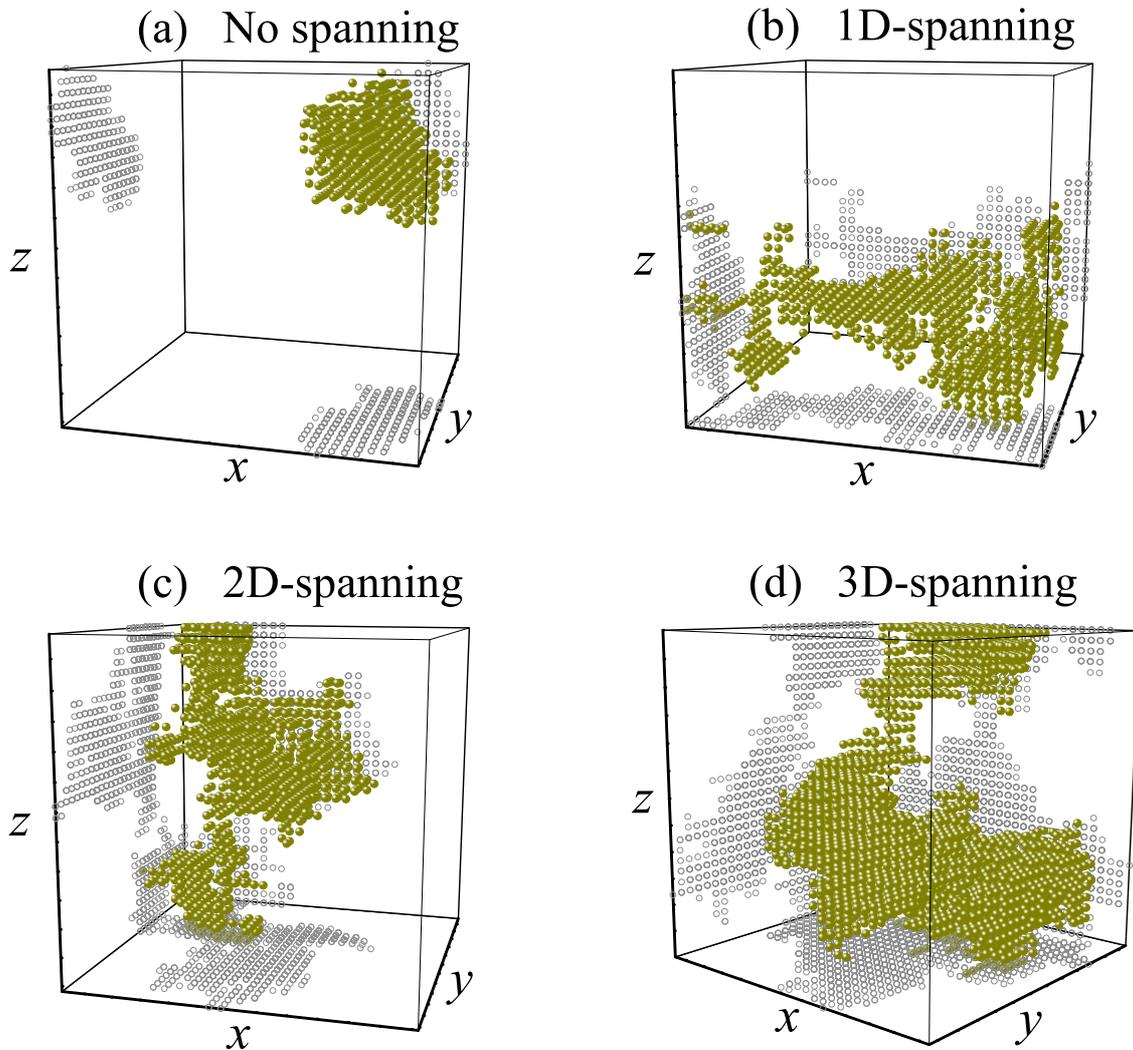


Figura 4.8: Ejemplos de cada uno de los tipos de avalanchas siguiendo la clasificación que se propone en el texto. (a) Avalancha no *spanning*. (b) Avalancha 1D-*spanning* en la dirección x . (c) Avalancha 2D-*spanning* en las direcciones y y z . (d) Avalancha 3D-*spanning*. Todos los ejemplos corresponden a un sistema de tamaño $L = 32$ y $\sigma = 2.21$.

Cuadro 4.2: Relaciones matemáticas que cumplen las magnitudes definidas en el cuadro 4.1. En ocasiones, no se ha indicado la dependencia con σ , L , s y H para hacer el cuadro más claro. El subíndice α indica todos los posibles subíndices del cuadro 4.1.

	Magnitudes integradas	Magnitudes no integradas
Relaciones de cierre	$N = N_s + N_{ns}$ $N_{ns} = N_{nsc} + N_{ns0}$ $N_s = N_1 + N_2 + N_3$ $N_3 = N_{3c} + N_{3-}$	$n = n_s + n_{ns}$ $n_{ns} = n_{nsc} + n_{ns0}$ $n_s = n_1 + n_2 + n_3$ $n_3 = n_{3c} + n_{3-}$
Normalización	$\sum_{s=1}^{L^3} D_\alpha = 1$	$\sum_{s=1}^{L^3} \int_{-\infty}^{\infty} dH \mathcal{D}_\alpha = 1$
Relaciones entre las distribuciones	$ND = N_s D_s + N_{ns} D_{ns}$ $N_{ns} D_{ns} = N_{nsc} D_{nsc} + N_{ns0} D_{ns0}$ $N_s D_s = N_1 D_1 + N_2 D_2 + N_3 D_3$ $N_3 D_3 = N_{3c} D_{3c} + N_{3-} D_{3-}$	$N\mathcal{D} = N_s \mathcal{D}_s + N_{ns} \mathcal{D}_{ns}$ $N_{ns} \mathcal{D}_{ns} = N_{nsc} \mathcal{D}_{nsc} + N_{ns0} \mathcal{D}_{ns0}$ $N_s \mathcal{D}_s = N_1 \mathcal{D}_1 + N_2 \mathcal{D}_2 + N_3 \mathcal{D}_3$ $N_3 \mathcal{D}_3 = N_{3c} \mathcal{D}_{3c} + N_{3-} \mathcal{D}_{3-}$
$n_\alpha(H; \sigma, L) \leftrightarrow N_\alpha(\sigma, L)$	$\int_{-\infty}^{\infty} dH n_\alpha(H; \sigma, L) = N_\alpha(\sigma, L)$	
$\mathcal{D}_\alpha(s, H; \sigma, L) \leftrightarrow D_\alpha(s; \sigma, L)$	$\int_{-\infty}^{\infty} dH \mathcal{D}_\alpha(s, H; \sigma, L) = D_\alpha(s; \sigma, L)$	

4.5. Distribuciones integradas $D_\alpha(s; \sigma, L)$

La Fig. 4.9 muestra un ejemplo de la distribución de tamaños de avalanchas $D(s; \sigma, L)$ en escala log-log para tres valores de σ correspondiente a un sistema de tamaño $L = 24$. Desde un punto de vista cualitativo, cuando σ decrece desde desórdenes $\sigma > \sigma_c$, la distribución pasa de ser una ley de potencias con un corte exponencial ($\sigma > \sigma_c$) a una distribución que presenta un pico para valores grandes de s ($\sigma < \sigma_c$). Dado este comportamiento, tal y como se comenta en la sección § 4.1.3, se podría proponer que, para el valor crítico σ_c , la distribución es una ley de potencias (como veremos con detalle en el capítulo 5, nuestra estimación para el desorden crítico es $\sigma_c \simeq 2.21$). Sin embargo, la Fig. 4.9 pone claramente de manifiesto que tal esquema es demasiado simplista para sistemas con tamaño finito. El pico que se observa para

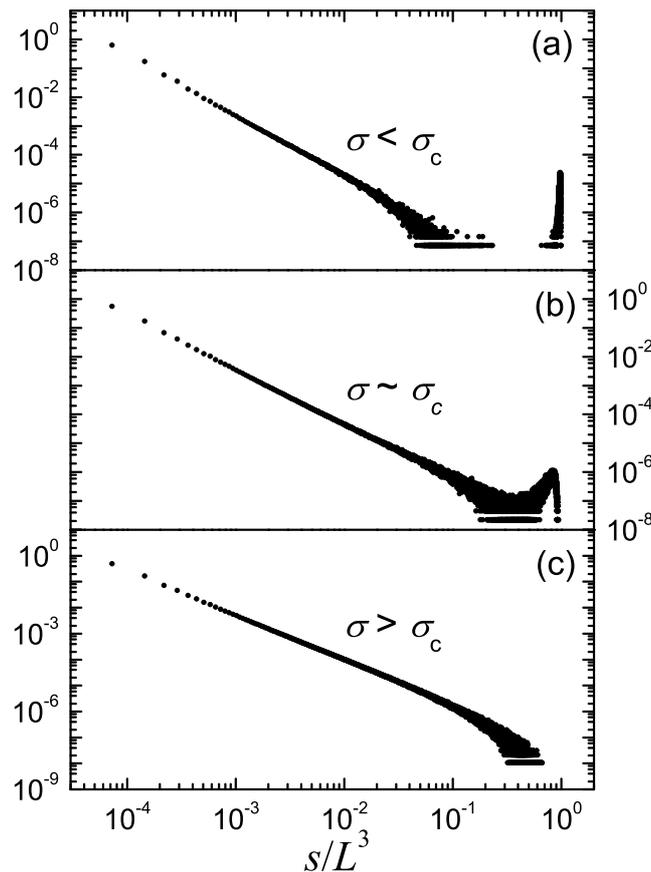


Figura 4.9: Distribución de tamaños de avalanchas correspondientes a (a) $\sigma = 1.7$, (b) $\sigma = 2.21$ y (c) $\sigma = 2.6$. Los datos se han obtenido promediando sobre 10^5 realizaciones de desorden en un sistema de tamaño $L = 24$.

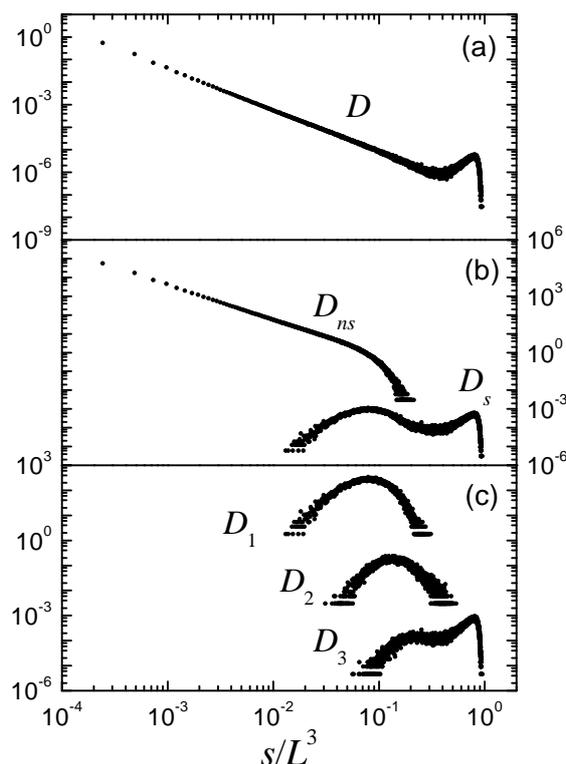


Figura 4.10: Análisis de las distintas contribuciones a $D(s; \sigma, L)$ para $\sigma = 2.317$ en un sistema de tamaño $L = 16$. Los datos corresponden a un promedio sobre 2×10^5 realizaciones de desorden. (a) Distribución de todas las avalanchas. (b) Separación de las distribuciones de avalanchas *spanning* $D_s(s; \sigma, L)$ y de avalanchas no *spanning* $D_{ns}(s; \sigma, L)$. La distribución D_{ns} se ha desplazado 5 décadas hacia arriba por claridad. (c) Distribuciones $D_1(s; \sigma, L)$, $D_2(s; \sigma, L)$ y $D_3(s; \sigma, L)$. D_1 y D_2 se han desplazado hacia arriba 4 y 2 décadas, respectivamente.

$\sigma < \sigma_c$ está asociado a las avalanchas *spanning*. Esto se muestra en la Fig. 4.10, donde el pico de $D(s; \sigma, L)$ [Fig. 4.10(a)] se compara con las dos distribuciones $D_{ns}(s; \sigma, L)$ y $D_s(s; \sigma, L)$ [Fig. 4.10(b)] correspondientes al tamaño de las avalanchas no *spanning* y al de las avalanchas *spanning*, respectivamente.

Como se puede apreciar, la distribución de tamaños de las avalanchas *spanning* $D_s(s; \sigma, L)$ no se puede describir satisfactoriamente con una función simple como por ejemplo una ley de potencias con un decaimiento exponencial. Presenta una estructura de varios picos que se puede expresar como la suma de las tres contribuciones asociadas a las avalanchas 1D-, 2D- y 3D-*spanning*. Tal separación se muestra en la Fig. 4.10(c) donde se representan las distribuciones de tamaños de estas avalanchas: $D_1(s; \sigma, L)$, $D_2(s; \sigma, L)$ y $D_3(s; \sigma, L)$. Tras hacer esta separación se observa que $D_3(s; \sigma, L)$, en

sí misma, también presenta dos picos claros, lo que sugiere la existencia de dos tipos de avalanchas 3D-*spanning*. Llamaremos avalanchas 3D-*spanning* críticas (se denotan con el subíndice 3c) a aquellas que dan lugar al pico de la izquierda de $D_3(s; \sigma, L)$ y avalanchas 3D-*spanning* subcríticas (se denotan con el subíndice 3-) a las que dan lugar al pico de la derecha. En las secciones § 4.6 y § 5.3 veremos que, en el límite termodinámico, las avalanchas 1D-*spanning*, las 2D-*spanning* y las 3D-*spanning* críticas sólo existen para $\sigma = \sigma_c$. Este es el motivo por el que se ha decidido llamar “críticas” a este tipo de avalanchas 3D-*spanning*. Por otro lado, también veremos que, en el límite termodinámico, las avalanchas 3D-*spanning* críticas existen únicamente para $\sigma \leq \sigma_c$. Por lo que concierne a las avalanchas no *spanning*, al final de esta sección también se propone la separación en dos tipos aunque, en este caso, tal separación no se deduce fácilmente a partir de la distribución $D_{ns}(s; \sigma, L)$ presentada en la Fig. 4.10(b).

La Fig. 4.11 muestra la variación de $D_1(s; \sigma, L)$, $D_2(s; \sigma, L)$ y $D_3(s; \sigma, L)$ al aumentar σ . Se puede apreciar en dicha figura cómo el pico de la derecha de $D_3(s; \sigma, L)$ se desplaza hacia valores menores de s , lo que indica que el tamaño medio de las avalanchas 3D-*spanning* subcríticas disminuye. Además, para σ suficientemente grande, el pico de la derecha desaparece y aparece otro en el lado izquierdo.

4.6. Números de avalanchas $N_\alpha(\sigma, L)$

Además de las distribuciones integradas, es interesante analizar los números promedio de las avalanchas *spanning* $N_1(\sigma, L)$, $N_2(\sigma, L)$ y $N_3(\sigma, L)$ puesto que, como muestra la Fig. 4.12, también presentan un comportamiento singular en torno a σ_c . Concretamente, presentan un pico que crece y se desplaza hacia σ_c al aumentar L . Centrémonos por el momento en las avalanchas 1D-*spanning*. En la Fig. 4.12(a) vemos que, para cualquier par de tamaños, siempre existe un cierto intervalo de σ (en torno a σ_c) para el que, en promedio, se detectan más avalanchas 1D-*spanning* en el sistema de mayor tamaño. Desde un punto de vista intuitivo, no parece lógico que aumente el número de avalanchas 1D-*spanning* al aumentar el tamaño a no ser que algunas avalanchas que son 2D- o 3D-*spanning* en sistemas pequeños “pasen” a ser 1D-*spanning* cuando aumentamos el tamaño. Por otro lado, el mismo comportamiento se observa en el número de avalanchas 2D- y 3D-*spanning*. En el caso de las avalanchas 2D-*spanning* también podríamos entender tal comportamiento suponiendo que es debido a aquellas avalanchas 3D-*spanning* que “pasan” a ser 2D-*spanning* al aumentar el tamaño del sistema. Sin embargo, este argumento no es válido para explicar el comportamiento de

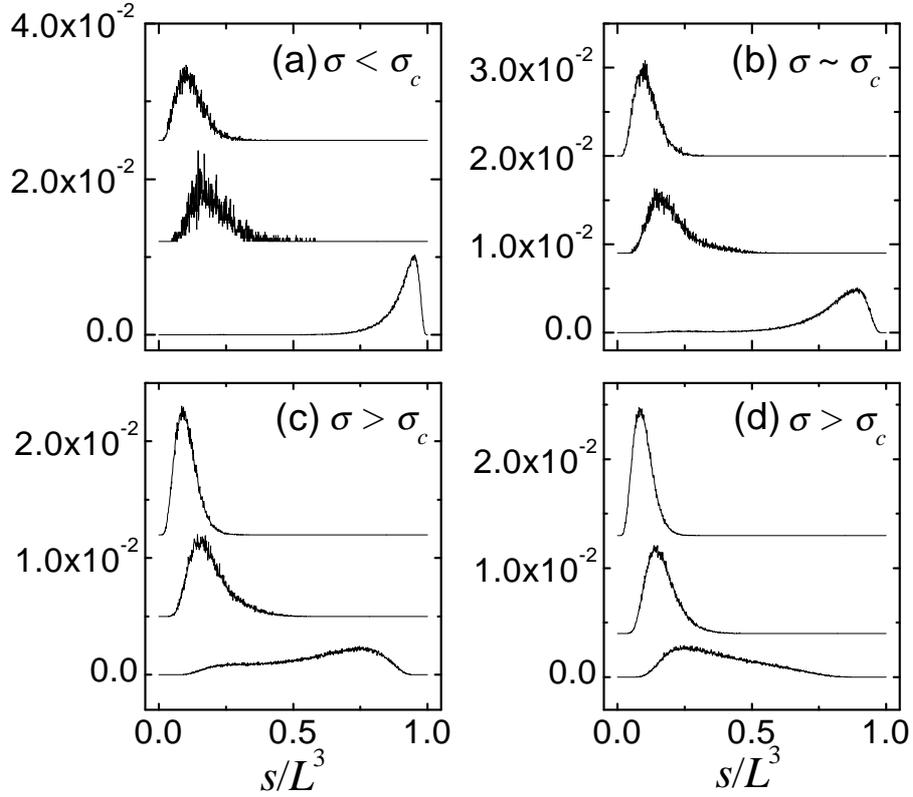


Figura 4.11: Análisis de la dependencia de $D_1(s; \sigma, L)$ (curva superior), $D_2(s; \sigma, L)$ (curva central) y $D_3(s; \sigma, L)$ (curva inferior) con σ . Los datos se han obtenido promediando a 2×10^5 en un sistema de $L = 10$ con (a) $\sigma = 1.9$, (b) $\sigma = 2.2$, (c) $\sigma = 2.5$ y (d) $\sigma = 2.8$. Las curvas correspondientes a D_1 y D_2 se han desplazado hacia arriba para mayor claridad.

N_3 puesto que, evidentemente, en nuestro sistema tridimensional, no existen avalanchas *spanning* en 4 dimensiones. Llegamos así a la conclusión de que, cerca de σ_c , se observa un comportamiento difícil de explicar intuitivamente, lo que induce a pensar que tal comportamiento está relacionado con el fenómeno crítico que tiene lugar en $\sigma = \sigma_c$.

De cualquier forma, independientemente de la comprensión intuitiva, haciendo una extrapolación directa de los datos para diferentes tamaños a $L \rightarrow \infty$, es posible concluir lo siguiente: en el límite termodinámico, $N_1(\sigma)$ y $N_2(\sigma)$ presentan una discontinuidad tipo δ en σ_c . $N_3(\sigma)$ presenta un comportamiento tipo escalón, de tal forma que, para $\sigma < \sigma_c$, ocurre únicamente una avalancha 3D-*spanning* y, para $\sigma > \sigma_c$, no ocurre ninguna avalancha de este tipo. A parte del comportamiento tipo escalón, los datos parecen indicar que, en el límite termodinámico, N_3 también presentará una divergencia en $\sigma = \sigma_c$. Esta observación da más fuerza a la hipótesis sobre la existencia de

dos tipos de avalanchas 3D-*spanning*. En las secciones § 4.6 y § 5.3 veremos que, en el límite termodinámico, el número de avalanchas 3D-*spanning* subcríticas N_{3-} se comporta como una función escalón, mientras que, el número de avalanchas 3D-*spanning* críticas N_{3c} presenta una divergencia en σ_c y es nulo para cualquier otro desorden.

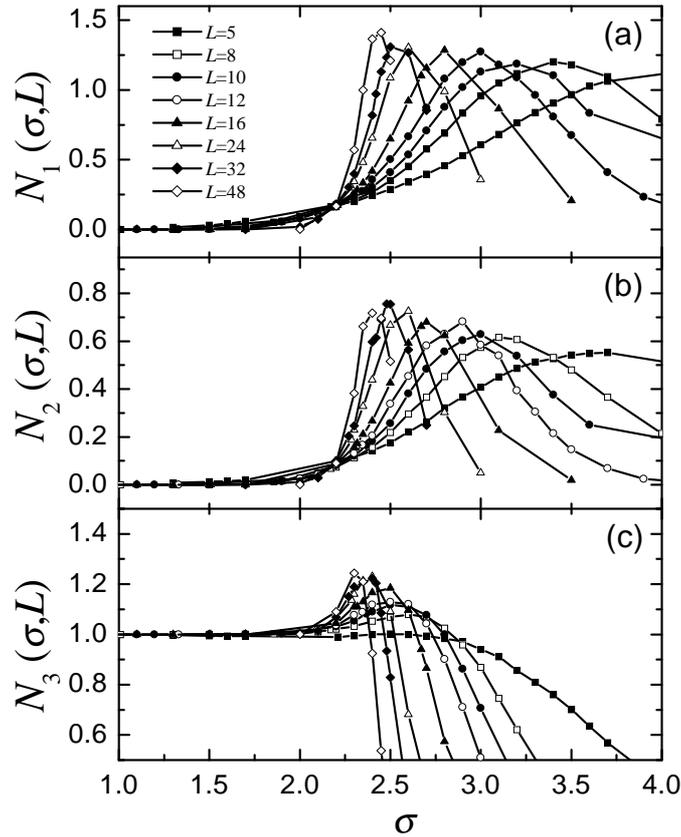


Figura 4.12: Número de avalanchas *spanning* en (a) una dimensión, (b) dos dimensiones y (c) tres dimensiones en función de σ . Las distintas curvas corresponden a $L = 5, 8, 10, 12, 16, 24, 32$ y 48 , tal y como indica la leyenda.

El número total de avalanchas *spanning* $N_s(\sigma, L)$ y el de avalanchas no *spanning* $N_{ns}(\sigma, L)$ se presentan en las Figs. 4.13(a) y 4.13(b), respectivamente. Como consecuencia de la divergencia de N_{3c} , N_1 y N_2 para $L \rightarrow \infty$, $N_s(\sigma, L)$ también presenta una divergencia en σ_c en el límite termodinámico. Estos resultados sugieren que el punto crítico se caracteriza por la existencia de infinitas avalanchas *spanning*. Es importante mencionar aquí que esta afirmación no era clara en otros trabajos previos [198, 222], debido a la forma inapropiada de definir el número de avalanchas *spanning*.

El análisis de N_{ns} es más complicado. En la Fig. 4.13 se observa que $N_{ns}(\sigma, L)$ es monótona creciente con σ y con L . Para desórdenes elevados ($\sigma \rightarrow \infty$), se espera que

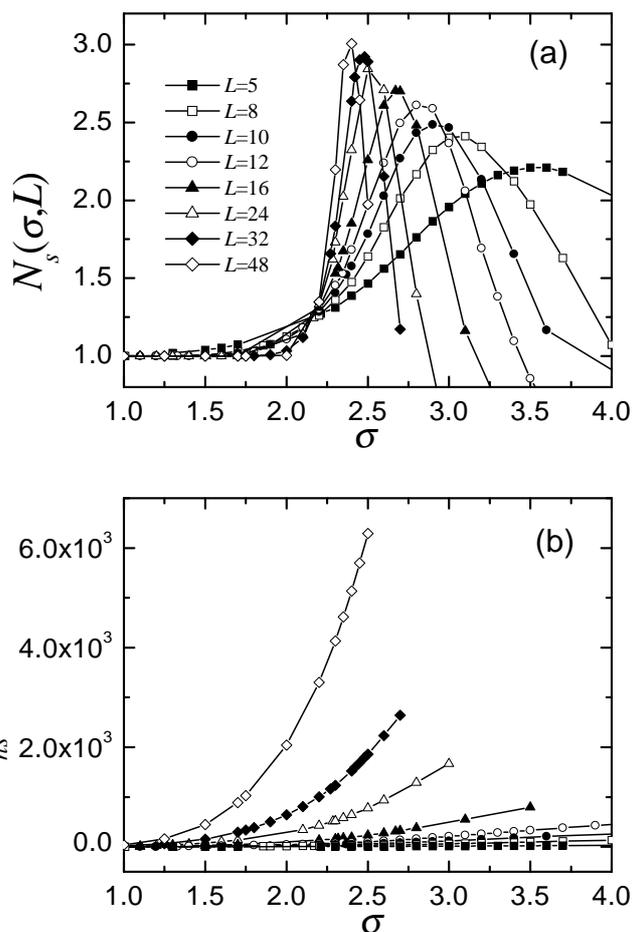


Figura 4.13: (a) Número total de avalanchas *spanning* $N_s(\sigma, L)$ y (b) número de avalanchas no *spanning* $N_{ns}(\sigma, L)$ en función de σ para sistemas con diferentes tamaños L (indicados en la leyenda).

el ciclo de histéresis consista en una secuencia de avalanchas no *spanning* de tamaño 1. Por tanto, tendrán lugar L^3 avalanchas en una rama del ciclo. Para comprobar que efectivamente N_{ns} tiende a este comportamiento, se representa $N_{ns}(\sigma, L)/L^3$ en función de σ en la Fig. 4.14. De la tendencia de $N_{ns}(\sigma, L)/L^3$ se puede prever que, efectivamente, tenderá a 1 ($N_{ns} \rightarrow L^3$) en el límite $\sigma \rightarrow \infty$, independientemente de L . Además, si se analiza con detalle la zona cercana a $\sigma_c \simeq 2.21$ (figura interna en Fig. 4.14), se observa una contribución a $N_{ns}(\sigma, L)/L^3$ que decrece con el tamaño del sistema. Por otro lado, para valores pequeños de σ , igual que sucede para desórdenes muy grandes, $N_{ns}(\sigma, L)/L^3$ no depende de L . Esto indica que, para desórdenes pequeños, siempre existen avalanchas no *spanning*, excepto para $\sigma = 0$, en cuyo caso todos los espines giran en una única avalancha que, lógicamente, es 3D-*spanning*. De hecho, es posible buscar una cota inferior a $N_{ns}(\sigma, L)$ teniendo en cuenta que, como mínimo, aquellos espines que giran independientemente del estado de sus vecinos próximos dan lugar a avalanchas no *spanning* (de tamaño $s = 1$). Un determinado espín S_i gira independientemente de sus vecinos próximos siempre que su campo aleatorio asociado sea

$h_i < -6$ o bien $h_i > 6$. En el primero de los casos S_i gira a un campo H mayor o igual que el campo al que giran sus vecinos mientras que, en el segundo caso, S_i gira a un valor de H menor que el campo al que giran sus vecinos. En consecuencia, en ambos casos el espín gira individualmente. En un sistema de tamaño L , el número medio de

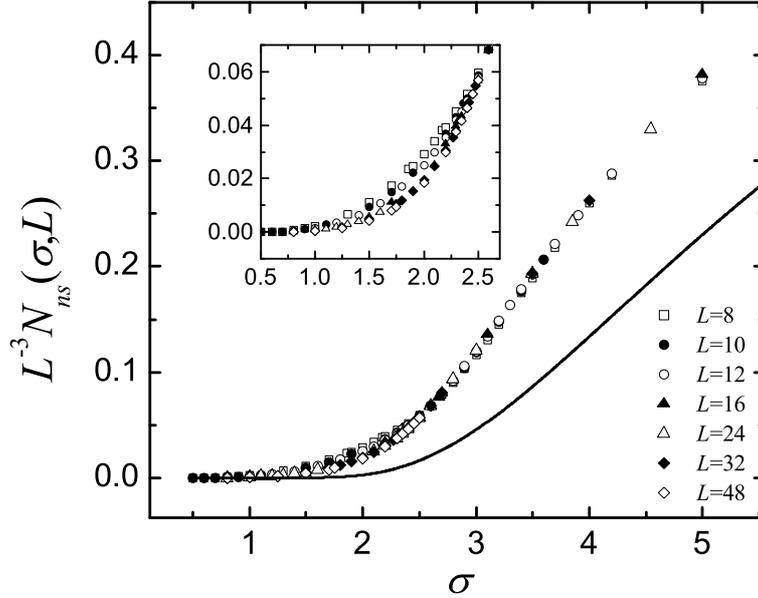


Figura 4.14: Número de avalanchas no *spanning* $N_{ns}(\sigma, L)$ dividido por L^3 en función de σ para varios tamaños de sistema, indicados en la leyenda. La línea continua corresponde a la cota inferior dada por la Ec. 4.38. La figura interna corresponde a una ampliación de la zona en el entorno de σ_c .

espines con $h_i < -6$ viene dado por:

$$N(h < -6) = L^3 \int_{-\infty}^{-6} \rho(h) dh = \frac{L^3}{2} \left[1 - \Phi_{err} \left(\frac{6}{\sigma\sqrt{2}} \right) \right], \quad (4.35)$$

donde Φ_{err} es la función error que se introdujo en la Ec. (4.14)¹⁵.

Teniendo en cuenta que $\rho(h)$ es simétrica [Ec. (4.2)], se cumple que $N(h < -6) = N(h > 6)$, de tal forma que giran un total de $2N(h < -6)$ espines individualmente.

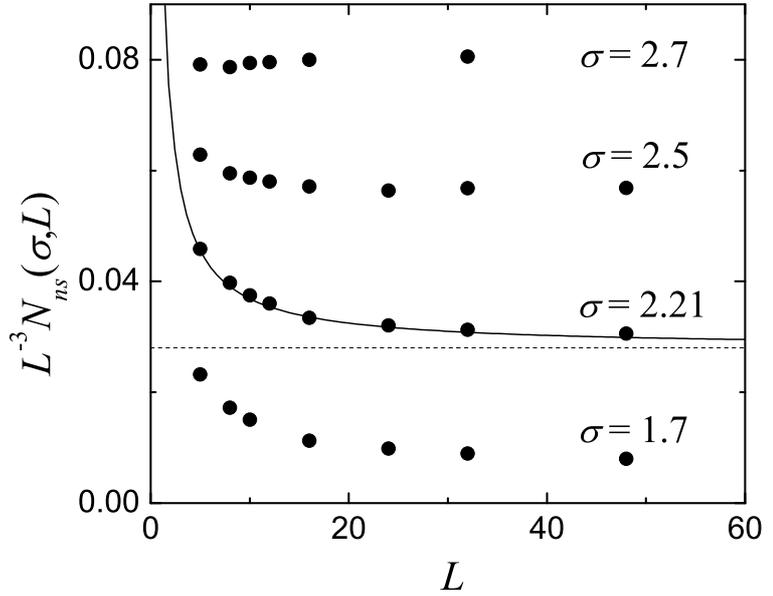
¹⁵En ocasiones, la función error se introduce de forma alternativa como:

$$\Phi_{err}(t) \equiv \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^t e^{-x^2/2} dx, \quad (4.36)$$

en cuyo caso,

$$N(h < -6) = L^3 \Phi_{err}(6/\sigma). \quad (4.37)$$

Figura 4.15: Número de avalanchas no *spanning* dividido por L^3 en función de L para diferentes valores de σ . La línea discontinua indica el valor $N_{ns}/L^3 = 0.028$ y la línea continua es un ajuste del comportamiento propuesto en la Ec. (5.67).



Así pues,

$$N_{ns}(\sigma, L) \geq L^3 \left[1 - \Phi_{err} \left(\frac{6}{\sigma\sqrt{2}} \right) \right] \quad (4.38)$$

es la cota inferior que buscábamos. Se ha representado en la Fig. 4.14. Sería posible mejorar la cota N_{ns} considerando los conjuntos de más de un espín que giran independientemente de sus vecinos próximos. Sin embargo, la cota inferior (4.38) es suficiente para demostrar que existe un cierto número de avalanchas no *spanning* para cualquier $\sigma > 0$.

Para estudiar con detalle lo que ocurre en torno a σ_c y cual es la causa de que $N_{ns}(\sigma, L)/L^3$ dependa explícitamente de L en esta zona, es interesante representar $N_{ns}(\sigma, L)/L^3$ en función de L . La Fig. 4.15 muestra tal representación para cuatro valores del desorden: $\sigma = 1.7$, $\sigma = 2.21 \simeq \sigma_c$, $\sigma = 2.5$ y $\sigma = 2.7$. Los cuatro conjuntos de puntos tienen la tendencia a extrapolar a un valor constante en el límite $L \rightarrow \infty$. Esto indica que, para tamaños grandes, la contribución a N_{ns} dominante es proporcional a L^3 y además, no depende de $uL^{1/\nu}$ sino únicamente de σ . Para el caso en que $\sigma \simeq \sigma_c$, estimamos que $N_{ns}(\sigma_c, L)/L^3 \rightarrow 0.028$ en el límite $L \rightarrow \infty$. Para tamaños pequeños debe existir una contribución proporcional a $L^{\theta_{ns}}$ con $\theta_{ns} < 3$, de tal forma que, al representar dicha contribución dividida por L^3 , se obtenga un comportamiento decreciente como el que se observa en la Fig. 4.15 para valores pequeños de L .

En consecuencia, es necesario considerar la existencia de al menos dos tipos de avalanchas no *spanning*. Llamaremos avalanchas no *spanning* no críticas (indicadas por el subíndice $ns0$) a aquellas cuyo número N_{ns0} es proporcional a L^3 y avalanchas no *spanning* críticas (indicadas por el subíndice ns_c) a aquellas cuyo número N_{ns_c} es

proporcional a $L^{\theta_{nsc}}$. Concretamente, representando $N_{ns}(\sigma_c, L^3) - 0.028$ en función de L en doble escala logarítmica se encuentra $N_{nsc}(\sigma_c, L) \sim 0.085L^{2.02 \pm 0.04}$, lo que nos da una primera estimación para el exponente θ_{nsc} .

En el capítulo 5 se confirman todas las hipótesis que se han presentado concernientes al comportamiento del número de avalanchas de cada tipo N_α en el límite termodinámico.

4.7. Momentos de las distribuciones integradas. Cambio en la magnetización

Un estudio completo de la dependencia de las distribuciones de avalanchas con σ y L es complicado desde un punto de vista cuantitativo. Para poder extraer resultados cuantitativos, es interesante estudiar el comportamiento de los momentos de las distribuciones que vienen dados por:

$$\langle s^k \rangle_\alpha(\sigma, L) = \sum_{s=1}^{L^3} s^k D_\alpha(s; \sigma, L). \quad (4.39)$$

El primer momento $\langle s \rangle_\alpha$ es el tamaño medio o masa media de las avalanchas de tipo α . Teniendo en cuenta que ocurren, en promedio, N_α avalanchas de tipo α en un semiciclo, la masa total media de este tipo de avalanchas en un semiciclo es $N_\alpha(\sigma, L)\langle s \rangle_\alpha(\sigma, L)$. Estudiar esta magnitud tiene la ventaja de que, como veremos, es proporcional al parámetro de orden.

La Fig. 4.16 muestra el comportamiento de la masa total media de las avalanchas 1D-, 2D- y 3D-*spanning* en función de σ para sistemas de varios tamaños.

Los datos correspondientes a la masa total de las avalanchas 1D- y 2D-*spanning* en la figura parecen indicar que, en el límite $L \rightarrow \infty$, tales avalanchas únicamente ocupan un cierto volumen para $\sigma = \sigma_c$, cosa que concuerda con la deducción cualitativa de que estos tipos de avalancha sólo existen para $\sigma = \sigma_c$ [§ 4.6]. Por otro lado, la masa total de las avalanchas 3D-*spanning* tiende a L^3 para valores pequeños del desorden, lo que indica que, cuando hay poco desorden en el sistema, la mayor parte de los espines giran en avalanchas 3D-*spanning*. A diferencia del comportamiento anómalo que presenta N_3 cerca de σ_c [Fig. 4.12], la masa total media $N_3(\sigma, L)\langle s \rangle_3(\sigma, L)$ no presenta ningún comportamiento apreciablemente anómalo en la Fig. 4.16(c). En la sección § 4.6 se argumentó que el comportamiento anómalo podía estar asociado a las avalanchas 3D-*spanning* que llamamos críticas. Como veremos al analizar $N_3(\sigma, L)\langle s \rangle_3(\sigma, L)$ con

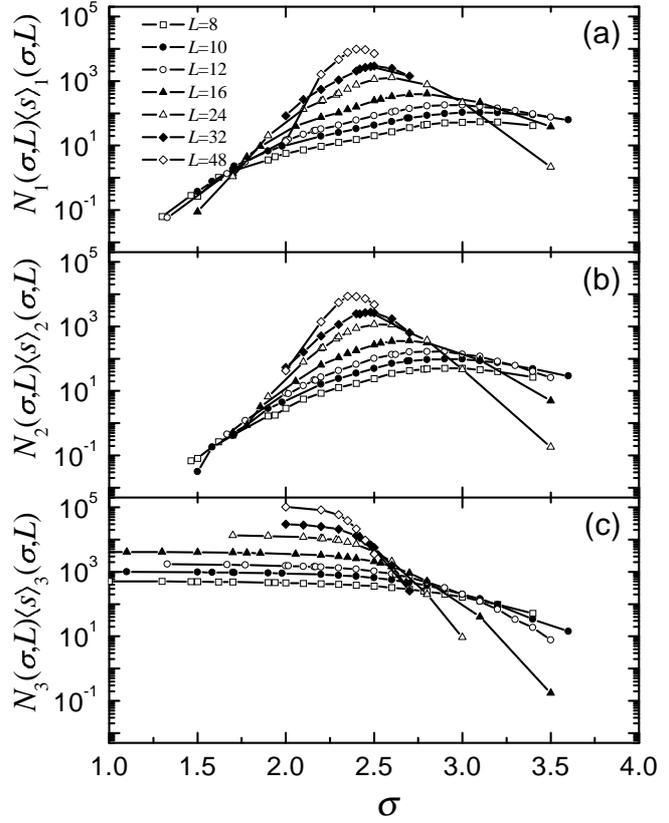


Figura 4.16: Representación en escalas lineal-log de la masa total media $N_\alpha(\sigma, L)\langle s \rangle_\alpha(\sigma, L)$ de las avalanchas (a) 1D-, (b) 2D- y (c) 3D-*spanning* en función de la cantidad de desorden σ para distintos valores de L . Notar que se ha utilizado la misma escala en los tres gráficos.

técnicas de FSS [§ 5.5], aunque en la Fig. 4.16(c) no se aprecia con claridad ninguna contribución anómala a $N_3(\sigma, L)\langle s \rangle_3(\sigma, L)$ en torno a σ_c , sí existe tal contribución debida a las avalanchas 3D-*spanning* críticas, si bien, el comportamiento observado en los datos de la Fig. 4.16(c) es debido principalmente a las avalanchas 3D-*spanning* subcríticas. En lo relacionado con las avalanchas 1D- y 2D-*spanning*, el análisis con técnicas de FSS en la sección § 5.5 confirmará el hecho de que estos tipos de avalanchas sólo tienen masa no nula para $\sigma = \sigma_c$ porque, de hecho, sólo existen para este desorden.

La masa total media de las avalanchas de un cierto tipo α está directamente relacionada con el cambio de magnetización asociado a las avalanchas de tipo α en un semiciclo. Efectivamente, el giro de un espín produce un cambio $2/L^3$ en la magnetización y, como consecuencia, si en un semiciclo tienen lugar una media de N_α avalanchas de tipo α y su tamaño medio es $\langle s \rangle_\alpha$, el cambio en la magnetización Δm_α debido a este tipo de avalanchas es:

$$\Delta m_\alpha(\sigma, L) = \frac{2}{L^3} N_\alpha(\sigma, L) \langle s \rangle_\alpha(\sigma, L). \quad (4.40)$$

Resulta lógico pensar que las avalanchas que más pueden contribuir al cambio en magnetización y que, en última instancia pueden ser responsables de una discontinui-

dad en el ciclo de histéresis, son las avalanchas *spanning*. Basándose en esta idea, en la referencias [198, 222] se propone que el parámetro de orden de la transición continua que se observa al variar σ viene dado por el cambio de magnetización asociado a las avalanchas *spanning*:

$$\Delta m_s(\sigma, L) = \frac{2}{L^3} N_s(\sigma, L) \langle s \rangle_s(\sigma, L). \quad (4.41)$$

Al analizar los datos correspondientes a Δm_s con técnicas de FSS en el capítulo 5 veremos que, estrictamente, sólo el cambio de la magnetización debido a las avalanchas 3D-*spanning* subcríticas se comporta como un parámetro de orden. Además veremos que, suponer que Δm_s se comporta como un verdadero parámetro de orden, puede llevar a estimaciones erróneas del exponente crítico β asociado a la transición.

4.8. Distribuciones bivariadas $\mathcal{D}_\alpha(s, H; \sigma, L)$

Hasta este punto se han presentado resultados relacionados solamente con magnitudes obtenidas integrando el campo. Este estudio únicamente permite analizar cómo es el comportamiento del modelo en función del desorden σ sin la necesidad de preocuparnos a qué campo sucede cada avalancha. En esta sección se presentan resultados correspondientes a las distribuciones bivariadas $\mathcal{D}_\alpha(s, H; \sigma, L)$ que, como se argumentó en la sección § 4.4, no son más que las densidades correspondientes a las distribuciones integradas $D_\alpha(s; \sigma, L)$ con respecto al campo. En particular, nos centraremos en el análisis de las distribuciones bivariadas de las avalanchas *spanning* por dos motivos: (i) estas avalanchas contienen mucha de la información relacionada con el fenómeno crítico que presenta el modelo y, (ii) el número de avalanchas *spanning* por ciclo es mucho menor que el número de avalanchas no *spanning* (sobre todo avalanchas *spanning* de tamaños pequeños), lo que hace que el estudio de las avalanchas *spanning* sea computacionalmente más viable en cuanto a memoria se refiere.

Representar las distribuciones bivariadas en función de H y s a partir de un conjunto de datos en que tenemos el tamaño s y el campo H al que suceden una serie de avalanchas, requiere el cálculo de histogramas de dos variables, cuya representación se debe hacer en gráficos tridimensionales. La Fig. 4.17 muestra un ejemplo de $\mathcal{D}_1(s, H; \sigma, L)$, $\mathcal{D}_2(s, H; \sigma, L)$ y $\mathcal{D}_3(s, H; \sigma, L)$ para un sistema de tamaño $L = 48$ y desorden $\sigma = \sigma_c = 2.21$. Como era de esperar a partir de los resultados obtenidos sobre la distribución integrada $D(s; \sigma, L)$, tanto \mathcal{D}_1 como \mathcal{D}_2 presentan un único pico. Por otro lado, ambas son simétricas con respecto a un cierto valor de campo, dentro

de la incerteza estadística. En cambio, \mathcal{D}_3 presenta una estructura de dos picos cuya localización no coincide ni en tamaño ni en campo. La localización distinta en tamaño de los dos picos se había intuido ya en la sección § 4.5 al estudiar $D_3(s; \sigma, L)$ pero, evidentemente, con el estudio integrado no se puede determinar cómo se distribuyen las avalanchas en campo. Como veremos en el capítulo 5, el pico que tiene lugar a un tamaño menor está asociado a las avalanchas 3D-*spanning* críticas y el que ocurre a tamaños mayores (y campos más bajos) corresponde a las avalanchas 3D-*spanning* subcríticas.

Pese a que las representaciones tridimensionales de la Fig. 4.17 son la forma más completa de representar distribuciones de dos variables, con el fin de estudiar la dependencia de dichas distribuciones con σ y L , nos será más útil representar la proyección en el plano s - H . De hecho, representaremos la proyección por una nube de puntos correspondientes a las coordenadas (s, H) en el plano s - H de cada una de las avalanchas registradas en una serie de realizaciones distintas de desorden. La Fig. 4.18 muestra la nube de puntos asociada a $\mathcal{D}_3(s, H; \sigma, L)$ para $L = 48$ y diferentes valores de σ . Como se puede ver, para $\sigma < \sigma_c$, las avalanchas 3D-*spanning* son grandes (s cercano a L^3) y tienen una cierta dispersión en torno a un valor de H que aumenta cuando nos acercamos a σ_c por debajo. Para $\sigma = \sigma_c$, las avalanchas se concentran alrededor de un valor del campo $H_c \simeq -1.42$ que identificaremos como el *campo crítico* y se extiende casi a todo el intervalo posible de tamaños. Por encima de σ_c , las pocas avalanchas 3D-*spanning* que se observan son pequeñas. De hecho, su tamaño es menor que el tamaño medio $0.311L^3$ de un *cluster* percolante en una red tridimensional cúbica simple de L nodos por lado.

En la Fig. 4.19 se representan las proyecciones de las distribuciones bivariadas que se han presentado en la Fig. 4.17 (notar que, en la Fig. 4.19, se representa el eje s en escala logarítmica mientras que en la Fig. 4.17 la escala es lineal). La gráfica interna en la Fig. 4.19 muestra, por completitud, la nube de puntos de la proyección de la distribución bivariada de las avalanchas no *spanning*. De hecho, no se ha mostrado la representación tridimensional de \mathcal{D}_{ns} porque no añade demasiado al resto de la exposición. Tal y como se podía esperar, todas las avalanchas *spanning* tienden a concentrarse en torno a H_c y, parte de las avalanchas no *spanning*, también. Presumiblemente, éstas son las avalanchas no *spanning* críticas. Por otro lado, como es de esperar, las avalanchas 3D-*spanning* son, en promedio, más grandes que las 2D-*spanning* y éstas últimas son más grandes que las 1D-*spanning*. Esta es una característica que también se puede deducir de la Fig. 4.17 pero queda más clara a partir de las proyecciones.

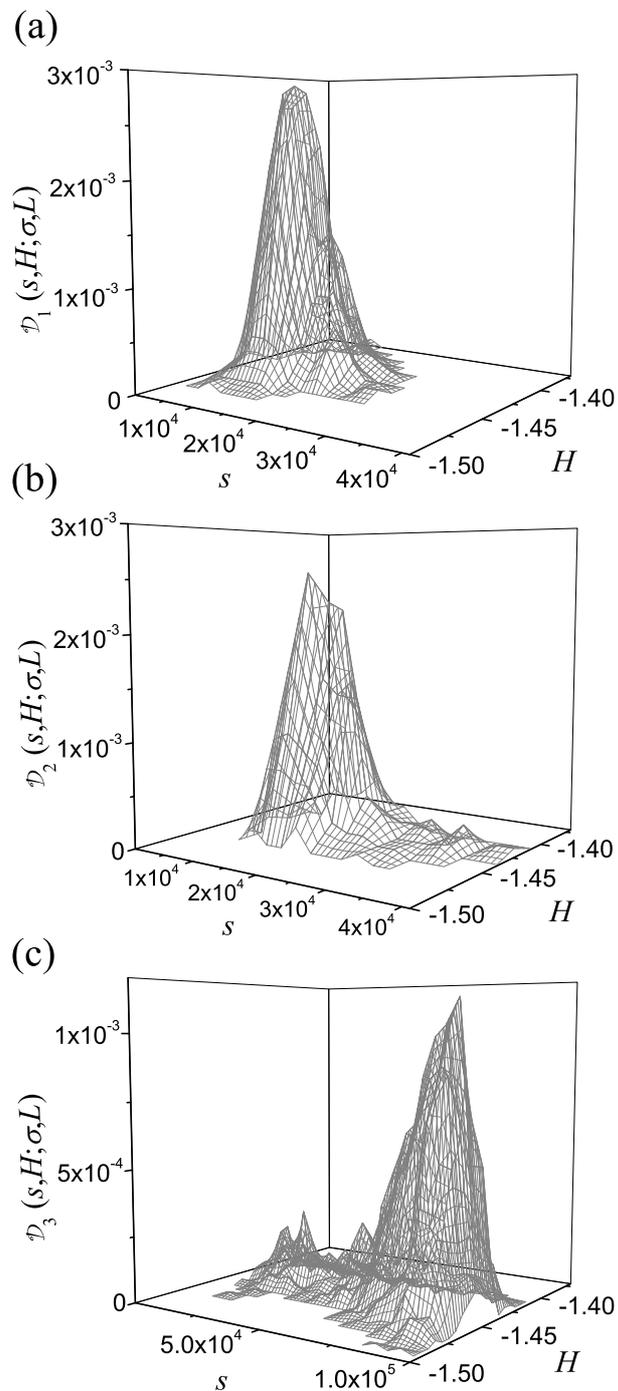


Figura 4.17: Distribuciones bivariadas asociadas a las avalanchas (a) 1D-*spanning*, (b) 2D-*spanning* y (c) 3D-*spanning*, obtenidas a partir de simulaciones en un sistema de tamaño $L = 48$ y con desorden $\sigma = \sigma_c$. Con el fin de ver la distribución de forma óptima, en (a) y (b) se ha utilizado la misma escala en todos los ejes mientras que, en (c), se han elegido otras escalas en el eje vertical y en el eje s .

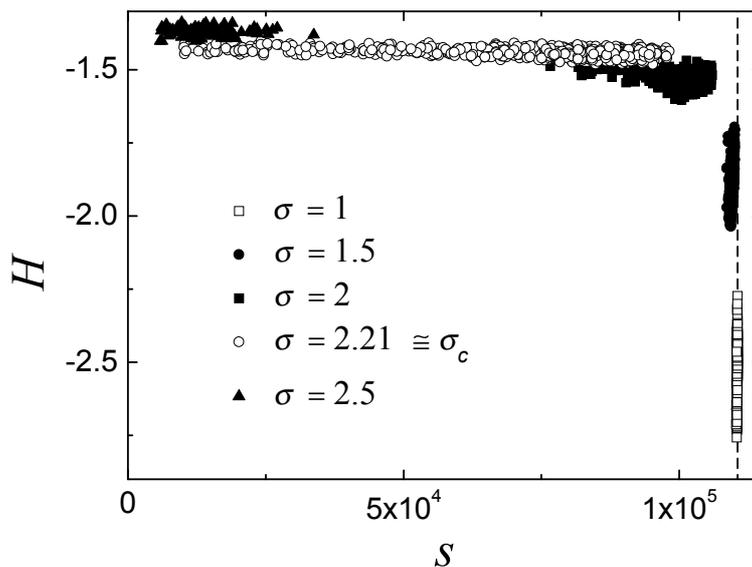


Figura 4.18: Nubes de puntos correspondientes a la distribución bivariada de las avalanchas 3D-*spanning* para un sistema de tamaño $L = 48$. Cada punto indica las coordenadas (s, H) en el plano s - H de cada avalancha. Los símbolos indican los distintos valores de σ de acuerdo con la leyenda. La línea discontinua indica la cota superior de tamaños $s = L^3$.

Los dos picos que se observan en \mathcal{D}_3 [Fig. 4.17(c)] se ponen de manifiesto aquí por el hecho de que la nube asociada a las avalanchas 3D-*spanning* se distribuye en una doble nube. Más adelante veremos que estas nubes corresponden a los dos tipos de avalanchas 3D-*spanning*.

La dependencia con el tamaño L de las distribuciones bivariadas de las avalanchas *spanning* se ilustra en la Fig. 4.20. Se representa sólo la dependencia de las proyecciones al aumentar L y manteniendo $\sigma = \sigma_c$. La línea continua indica el valor del campo crítico ($H_c = -1.425$) que se estimará en la sección § 4.9. Todos los tipos de avalanchas *spanning* tienden a concentrarse en torno a este valor al aumentar el tamaño del sistema y, a su vez, la dispersión se hace más pequeña. Por otro lado, la forma asimétrica de las nubes correspondientes a las avalanchas 3D-*spanning* se mantiene al aumentar L . Este hecho nos lleva a suponer que los dos tipos de avalanchas 3D-*spanning* se mantienen al aumentar el tamaño. En el capítulo 5 veremos que esto es completamente cierto únicamente para $\sigma = \sigma_c$.

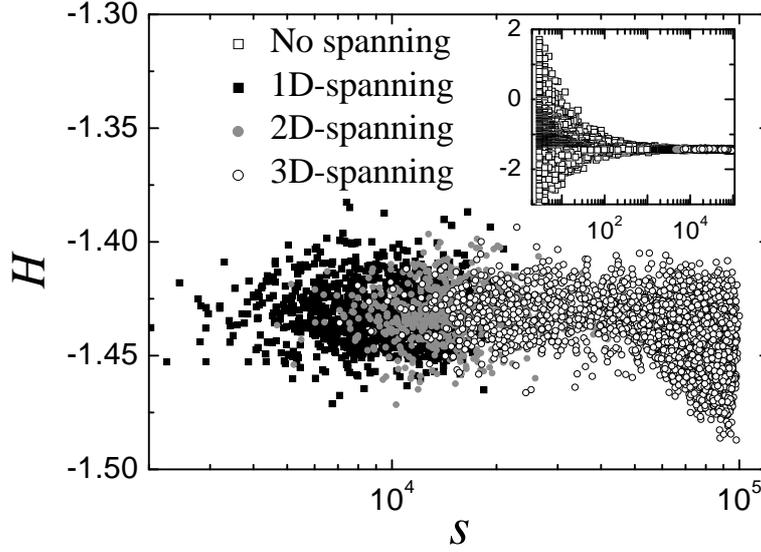


Figura 4.19: Nubes de puntos correspondientes a la proyección en el plano s - H de las distribuciones \mathcal{D}_1 , \mathcal{D}_2 y \mathcal{D}_3 representadas en la Fig. 4.17. Los datos se han obtenido en un sistema de tamaño $L = 48$ y $\sigma = \sigma_c$. El gráfico interno muestra en escala log-lineal los mismos datos que el gráfico principal junto con la nube asociada a las avalanchas no *spanning*.

4.9. Campo medio al que suceden las avalanchas

La representación de las distribuciones bivariadas es útil desde un punto de vista cualitativo pero, como ocurriera en la sección § 4.5, el estudio directo de las distribuciones no es muy útil para obtener resultados cuantitativos y es más interesante estudiar las distribuciones marginales y los momentos. En particular, nos centraremos en esta sección en el campo medio al que suceden las avalanchas

$$\langle H \rangle_\alpha(\sigma, L) = \int_{-\infty}^{\infty} dH H \frac{n_\alpha(H; \sigma, L)}{N_\alpha(\sigma, L)}, \quad (4.42)$$

y en la desviación estándar asociada a dicho campo

$$\sigma_\alpha^H(\sigma, L) = (\langle H^2 \rangle_\alpha - \langle H \rangle_\alpha^2)^{1/2}. \quad (4.43)$$

La dependencia con L de los campos $\langle H \rangle_1$, $\langle H \rangle_2$ y $\langle H \rangle_3$ se presenta en la Fig. 4.21(a.1) para $\sigma = \sigma_c$. En el capítulo 5 se presenta un estudio más completo con técnicas de FSS. Sin embargo, del comportamiento observado en las Figs. 4.21 (a.1) y (a.2), ya se puede hacer la siguiente hipótesis de escala:

$$H_c - \langle H \rangle_\alpha(\sigma_c, L) = C_\alpha^H L^{-1/\mu}, \quad (4.44)$$

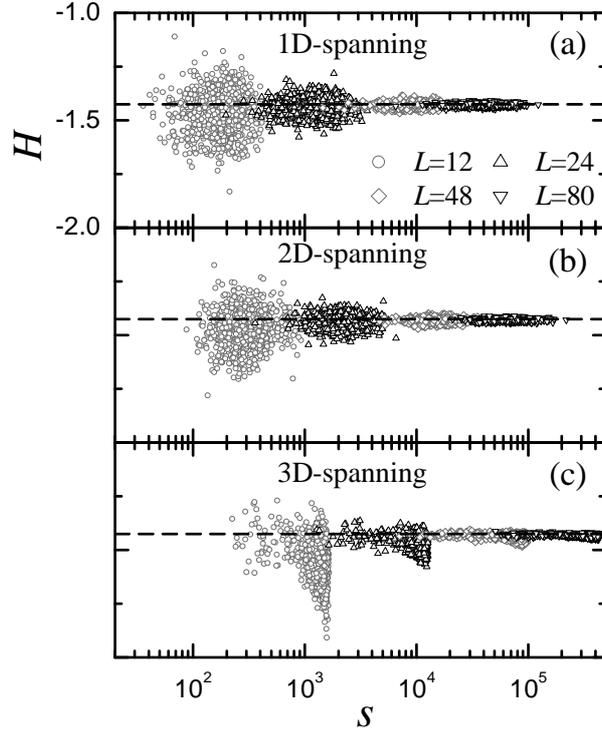


Figura 4.20: Nubes de puntos correspondientes a (a) \mathcal{D}_1 , (b) \mathcal{D}_2 y (c) \mathcal{D}_3 en $\sigma = \sigma_c$ para varios tamaños de sistema L , indicados con distintos símbolos de acuerdo con la leyenda. Se ha utilizado la misma escala en los tres gráficos.

donde el exponente μ controla la divergencia de la longitud de correlación cuando H se aproxima a H_c en $\sigma = \sigma_c$ (el desarrollo completo de esta hipótesis de escala se presenta en la sección § 5.1). En la Fig. 4.21(a.1) se presenta una primera prueba de la validez de esta hipótesis haciendo un ajuste por mínimos cuadrados a los tres conjuntos de datos. Los ajustes se han hecho dejando tres parámetros libres (H_c , μ y C_α^H). Las funciones ajustadas se indican con líneas punteadas tanto en la Fig. 4.21(a.1) como en la Fig. 4.21(a.2). Lo más interesante es que se obtienen los mismos valores de $1/\mu = 1.5 \pm 0.1$ y $H_c = -1.425 \pm 0.010$ para $\langle H \rangle_1$, $\langle H \rangle_2$ y $\langle H \rangle_3$. Por otro lado, las constantes C_α^H obtenidas son: $C_1^H = 2.1 \pm 0.2$, $C_2^H = 2.2 \pm 0.2$ y $C_3^H = 5.7 \pm 0.1$. Vemos pues que la única diferencia entre los campos promedios de cada tipo de avalancha *spanning* es el valor de la constante C_α^H .

A parte de esto, tal y como muestra la Fig.4.21(b.1), la desviación estándar $\sigma_\alpha^H(\sigma, L)$ [Ec. (4.43)] asociada a la distribución marginal $n_\alpha(H; \sigma, L)/N_\alpha(\sigma, L)$ de las avalanchas 1D-, 2D- y 3D-*spanning*, tiende a 0 en el límite $L \rightarrow \infty$ para $\sigma = \sigma_c$. A diferencia de lo que ocurre con los campos medios $\langle H \rangle_\alpha(\sigma_c, L)$, la desviación estándar es muy

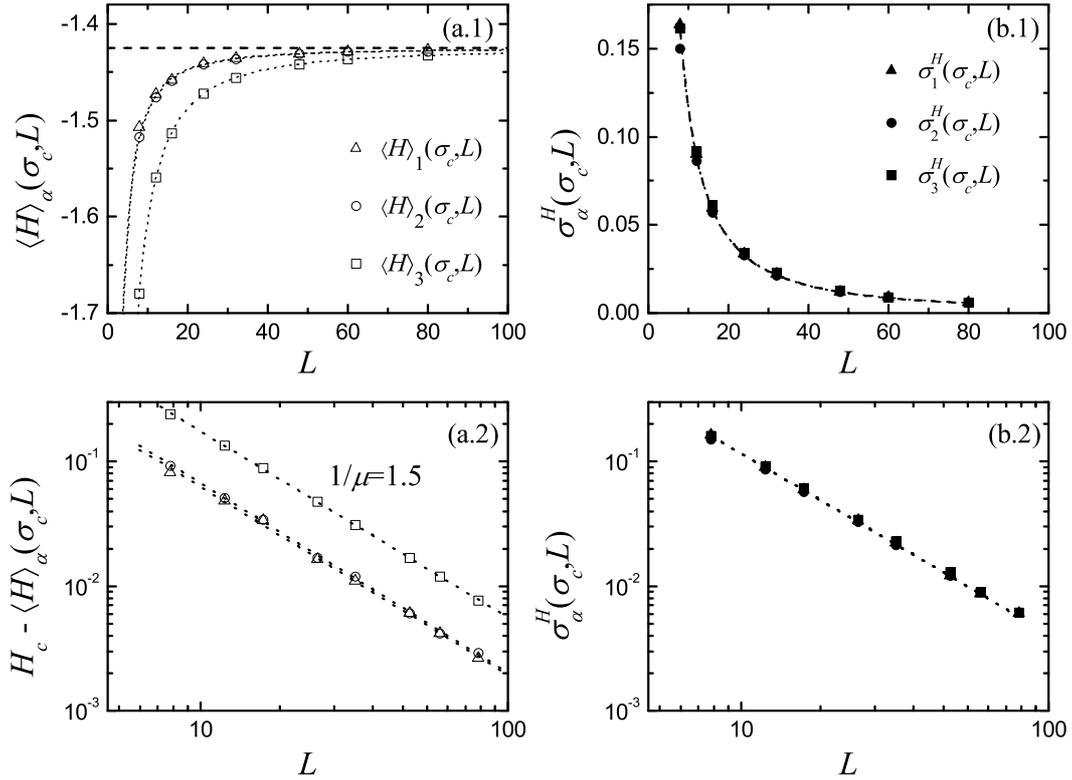


Figura 4.21: (a.1) Campos medios $\langle H \rangle_\alpha(\sigma_c, L)$ a los que tienen lugar las avalanchas 1D-, 2D- y 3D-*spanning*. La línea discontinua gruesa indica $H_c = -1.425$ y las líneas punteadas corresponden al ajuste por mínimos cuadrados de la Ec. (4.44) a los datos. (a.2) Los mismos datos representados en escala log-log. Las desviaciones estándar σ_α^H de las avalanchas 1D-, 2D- y 3D-*spanning* para $\sigma = \sigma_c$ se presentan, por un lado, en (b.1) en escala lineal y, por otro, en (b.2) en escala log-log. Los datos correspondientes a los distintos tipos de avalanchas *spanning* son indistinguibles dentro del error estadístico típico.

similar para los tres tipos de avalanchas *spanning*, tanto en la dependencia con L como en su valor numérico. Representando los datos en escala log-log, se encuentra una alineación excelente de los puntos, con una pendiente ~ 1.45 , que coincide dentro de los errores estadísticos con el valor de $1/\mu$ encontrado a partir de los ajustes hechos a $\langle H \rangle_\alpha(\sigma_c, L)$ [Figs. 4.21(a.1) y 4.21(a.2)]. Concluimos pues que el comportamiento de σ_α^H para $\sigma = \sigma_c$ en función de L es:

$$\sigma_\alpha^H(\sigma_c, L) \sim L^{-1/\mu}. \quad (4.45)$$

En el capítulo siguiente confirmaremos que, efectivamente, el exponente que relaciona $\sigma_\alpha^H(\sigma_c, L)$ con L es $1/\mu$.

Desde un punto de vista físico, el hecho de que $\sigma_\alpha^H(\sigma_c) = 0$ en el límite termodinámico para todas las avalanchas *spanning* indica que tales avalanchas sólo ocurren en el campo crítico H_c . Además, los datos presentados en la sección § 4.6 parecen indicar que las avalanchas 1D- y 2D-*spanning* únicamente suceden para $\sigma = \sigma_c$ en el límite termodinámico. Teniendo en cuenta pues este comportamiento al variar σ y H , es de esperar que las avalanchas 1D- y 2D-*spanning* existan solamente en el punto crítico $(H, \sigma) = (H_c, \sigma_c)$. En cuanto a las avalanchas 3D-*spanning*, los resultados que se han presentado de $N_3(\sigma, L)$ [Fig. 4.12(c)] indican que, en promedio, existen para $\sigma \leq \sigma_c$ y no existen para $\sigma > \sigma_c$. Además, como acabamos de demostrar, $\sigma_3^H(\sigma_c) = 0$ en el límite termodinámico, con lo cual, para $\sigma = \sigma_c$, independientemente de la hipótesis de existencia de dos tipos de avalanchas 3D-*spanning*, tales avalanchas se concentran en el campo crítico H_c . El análisis del comportamiento de este tipo de avalanchas en el límite termodinámico para $\sigma < \sigma_c$ requiere un estudio más a fondo que se presenta en el capítulo siguiente donde se estudian, mediante técnicas de FSS, el campo medio $\langle H \rangle_3(\sigma, L)$ al que tienen lugar las avalanchas 3D-*spanning* en función de σ para distintos tamaños L . La Fig. 4.22(a) muestra $\langle H \rangle_3$ en función de σ para varios tamaños L . Para un tamaño dado, el campo $\langle H \rangle_3(\sigma, L)$ decrece al disminuir el desorden. Esto concuerda con el hecho de que el grado de metaestabilidad aumenta al disminuir el desorden. Es decir, los ciclos de histéresis son más anchos cuanto menor es el desorden presente en el sistema. Para un cierto valor de $\sigma \lesssim \sigma_c$, el campo medio al que tienen lugar las avalanchas 3D-*spanning* crece con L . A priori, es difícil hacer una hipótesis objetiva sobre el comportamiento de $\langle H \rangle_3(\sigma, L)$ en el límite termodinámico. ¿Realmente se mantiene una cierta curvatura de la función $\langle H \rangle_3(\sigma, L)$ en $L \rightarrow \infty$? o, por el contrario, ¿todas las avalanchas 3D-*spanning* suceden en H_c en el límite termodinámico, tal y como ocurre para $\sigma = \sigma_c$?. Esta última posibilidad no parece muy apropiada puesto que, al menos cuando $\sigma = 0$, todos los espines giran a $H = -6$ en

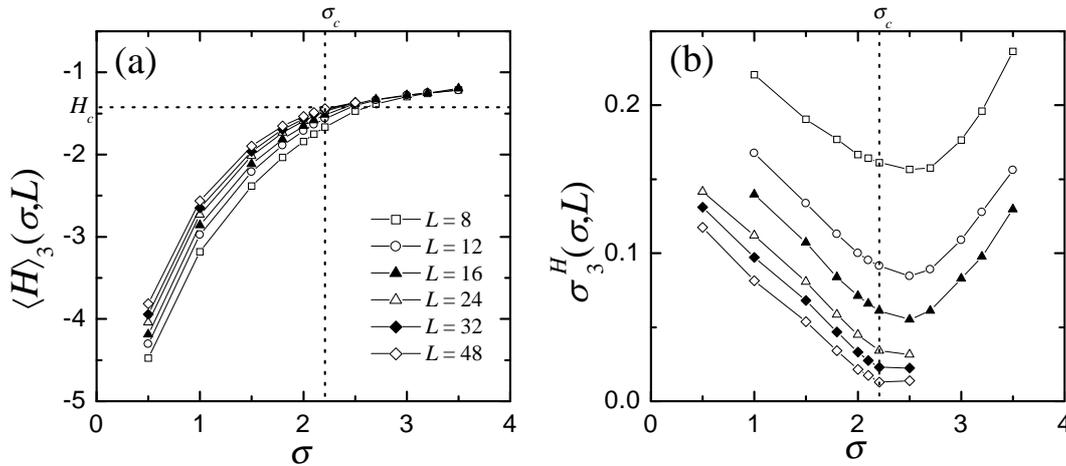


Figura 4.22: (a) Campo medio al que ocurren las avalanchas 3D-*spanning* en función de σ para distintos tamaños de sistema, indicados en la leyenda. La línea horizontal punteada señala el campo crítico $H_c = -1.425$. (b) Desviación estándar $\sigma_3^H(\sigma, L)$ asociada a las avalanchas 3D-*spanning* en función de σ para varios tamaños L indicados en la leyenda de (a). Tanto en (a) como en (b), la línea vertical punteada señala el desorden crítico σ_c . Por completitud, se presentan datos para $\sigma > \sigma_c$ aunque esta región no es muy interesante para estudiar las avalanchas 3D-*spanning* ya que esperamos que, en el límite termodinámico, sólo existan para $\sigma \leq \sigma_c$.

una única avalancha que, trivialmente, es 3D-*spanning*. Parece pues más lógico pensar que la función $\langle H \rangle_3(\sigma)$, correspondiente al límite de $\langle H \rangle_3(\sigma, L)$ cuando $L \rightarrow \infty$, presentará una cierta dependencia con σ .

Por otro lado, tiene sentido preguntarse también si las avalanchas 3D-*spanning* suceden únicamente sobre la línea $\langle H \rangle_3(\sigma)$ o bien ocurren con una cierta distribución en torno a este campo. Para $\sigma = \sigma_c$ ya hemos visto que tales avalanchas tienen una probabilidad nula de ocurrir para $H \neq H_c$. Para tener una idea del comportamiento para $\sigma \neq \sigma_c$, se ha calculado $\sigma_3^H(\sigma, L)$. La Fig. 4.22(b) muestra el resultado en función de σ para varios tamaños. Para L fijado, se encuentran dos regímenes distintos al variar σ . Tales comportamientos distintos están separados por un valor de σ para el que $\sigma_3^H(\sigma, L)$ presenta un mínimo. Tal y como muestra la figura, dicho valor del desorden decrece al aumentar L y, presumiblemente, en el límite termodinámico tiende a σ_c . La zona de interés, en cuanto a las avalanchas 3D-*spanning* se refiere, corresponde a $\sigma \leq \sigma_c$. En cualquier caso, independientemente del valor de σ al que nos centremos, $\sigma_3^H(\sigma, L)$ decrece con L , de manera que, para cualquier grado de desorden, las avalanchas se centran más en torno a $\langle H \rangle_3(\sigma, L)$ cuanto mayor es el tamaño del sistema. En vista

de esto, es de esperar que, en el límite termodinámico, las avalanchas 3D-*spanning* ocurran únicamente sobre la línea $\langle H \rangle_3(\sigma)$.

4.10. Densidades de avalanchas $n_\alpha(H; \sigma, L)$

Las distribuciones marginales de las distribuciones bivariadas con respecto al campo vienen dadas por $n_\alpha(H; \sigma, L)/N_\alpha(\sigma, L)$, tal y como se introdujo en la sección § 4.4 [Ec. (4.34)]. En la presente sección se presentan las densidades $n_\alpha(H; \sigma, H)$ que, al fin y al cabo, son las magnitudes en las que está toda la dependencia con H de las distribuciones marginales $n_\alpha(H; \sigma, L)/N_\alpha(\sigma, L)$.

La Fig. 4.23 muestra las densidades de avalanchas 1D-, 2D- y 3D-*spanning* en $\sigma = \sigma_c$ para¹⁶ $L = 8, 12, 16, 24, 32, 48$ y 60 . Tal y como era de esperar a partir de la dependencia con H de las distribuciones bivariadas \mathcal{D}_1 y \mathcal{D}_2 [Figs. 4.20(a) y (b)], las densidades n_1 y n_2 presentan un máximo a un campo que aumenta al aumentar L , aproximándose a H_c . Además, n_1 y n_2 son simétricas respecto a este campo. Debido a esto, la posición del máximo coincide, dentro del error estadístico, con el campo medio al que sucede cada tipo de avalancha. En consecuencia, la dependencia de la posición de los picos con L viene dada por la dependencia de $\langle H \rangle_1$ y $\langle H \rangle_2$ estudiada en la sección § 4.9 [Fig. 4.21]. Así pues, al menos la posición del pico obedece una cierta ley de escala. De hecho, en la sección § 5.9 veremos que, tanto n_1 como n_2 obedecen una relación de escala más general, de la que se deriva el comportamiento de escala del pico. Con respecto a n_3 , no se aprecia con claridad la asimetría que sería de esperar debida a los dos contribuciones que se observan en \mathcal{D}_3 [Fig. 4.17(c)]. Esto puede ser debido fundamentalmente a dos motivos: (i) Para $\sigma = \sigma_c$ y los tamaños estudiados, la contribución en número de las avalanchas 3D-*spanning* críticas es pequeña en comparación con la contribución de las avalanchas 3D-*spanning* subcríticas. (ii) Las contribuciones no están claramente separadas en campo, lo que impide distinguir dos picos en n_3 . Veremos en el capítulo siguiente, utilizando técnicas de FSS, que ambas conjeturas son ciertas para los tamaños que hemos estudiado, si bien, este mismo estudio nos llevará a ver que, en el límite termodinámico, contribuyen más las avalanchas 3D-*spanning* críticas que las subcríticas y la primera conjetura no sería cierta para sistemas muy grandes. Por el contrario, la segunda conjetura se hace más cierta cuanto mayor es L .

¹⁶La anchura ΔH de los bins en los histogramas correspondientes a n_α típicamente tiene valores comprendidos entre $\Delta H = 0.05$ para $L = 8$ y $\Delta H = 0.005$ para $L = 48$ o $L = 60$.

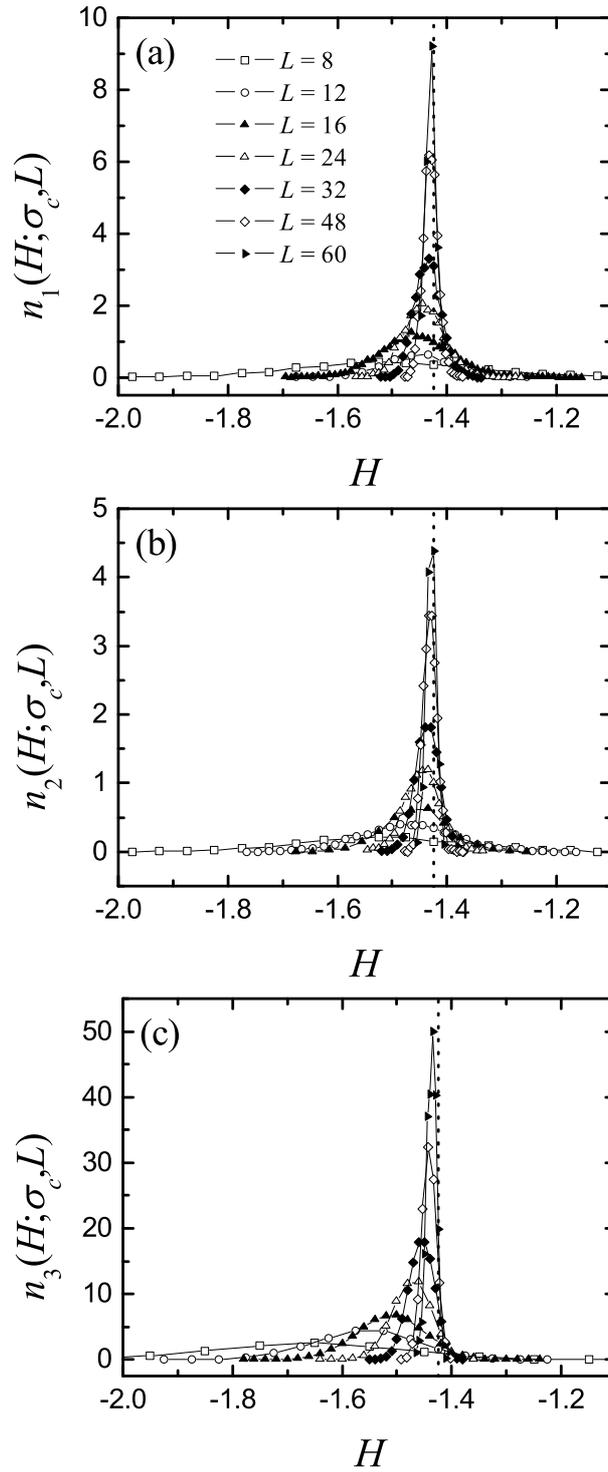


Figura 4.23: Densidades de avalanchas n_α correspondientes a las avalanchas (a) 1D-, (b) 2D- y (c) 3D-*spanning* en función de H para $\sigma = \sigma_c$ y varios tamaños L indicados en la leyenda. La línea punteada vertical señala la estimación de $H_c = -1.425$ hecha a partir de los datos representados en la Fig. 4.21.

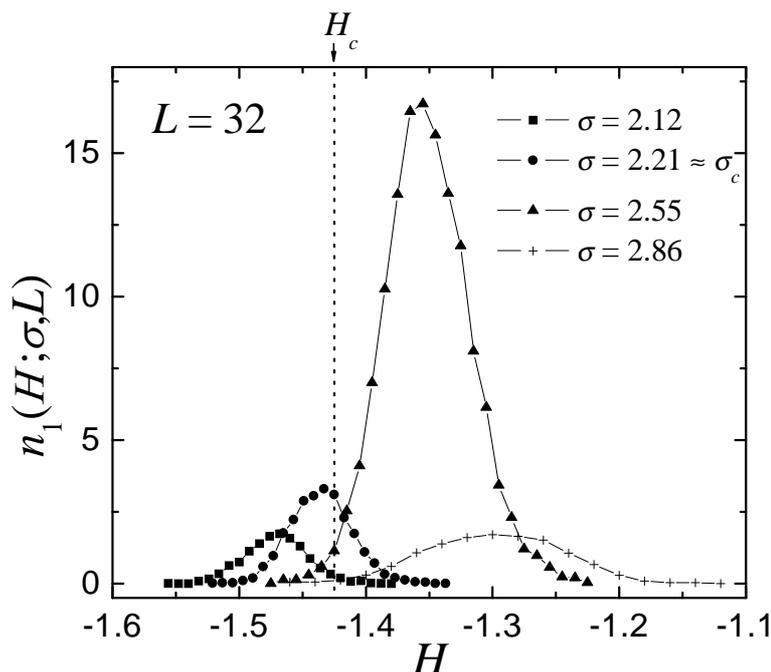


Figura 4.24: n_1 en función de H para $\sigma = 2.12, 2.21, 2.55, 2.86$ en un sistema de tamaño $L = 32$. La línea punteada vertical señala $H_c = -1.425$.

En cualquier caso, la extrapolación de los datos al límite $L \rightarrow \infty$ permite prever que, al menos para $\sigma = \sigma_c$, la densidad asociada a todas las avalanchas *spanning* es cero para cualquier $H \neq H_c$ y diverge para $H = H_c$.

La Fig. 4.24 muestra cómo depende $n_1(H; \sigma, L)$ de H en un sistema de tamaño $L = 32$ con distintos desórdenes. Cualitativamente se observa que la densidad de avalanchas 1D-*spanning* presenta un pico para todos los valores de σ pero el pico se sitúa a un campo que aumenta al aumentar σ , es decir, al disminuir el campo H desde ∞ , la mayor densidad de avalanchas 1D-*spanning* se encuentra a un campo que es tanto menor cuanto menor es la cantidad de desorden presente en el sistema. Para $\sigma = \sigma_c = 2.21$, el pico de n_1 sucede a un campo muy cercano a H_c (línea punteada en la figura) si bien, debido a los efectos de tamaño finito, no se sitúa justo en H_c . Por otro lado, la altura de los picos también depende de σ , de tal manera que, si representásemos dicha altura en función de σ , se obtendría un máximo para un valor de $\sigma > \sigma_c$. Dada la relación entre n_1 y N_1 [Ec. (4.31)], este comportamiento está en total acuerdo con el hecho de que $N_1(\sigma, L)$ [Fig. 4.12(a)] presenta un pico situado en $\sigma > \sigma_c$ para sistemas finitos. Como hemos visto, la posición del pico en N_1 tiende a σ_c en el límite termodinámico, lo que induce a hacer la hipótesis de que el valor del desorden para el que la densidad de avalanchas n_1 es máxima también tenderá a σ_c . Además, la extrapolación de N_1 a $L \rightarrow \infty$ parece indicar que, en el límite termodinámico, las avalanchas 1D-*spanning* únicamente existen para $\sigma = \sigma_c$. En términos de la densidad n_1 , tal extrapolación indicaría que las avalanchas 1D-*spanning* existen únicamente para

el desorden crítico σ_c . Por otro lado, todo el esquema descrito para las avalanchas 1D-*spanning* también es aplicable a las avalanchas 2D-*spanning*. Por el contrario, el estudio de la dependencia de n_3 con σ no es tan directo como el correspondiente a n_1 y n_2 . En el siguiente capítulo se profundizará más en el comportamiento de n_3 . Sin embargo, se puede prever el comportamiento que tendrá a partir de observar el comportamiento de N_3 . Por un lado, habrá una contribución n_{3c} asociada a las avalanchas 3D-*spanning* críticas que se comportará de forma similar a n_1 y n_2 y, por otro lado, habrá una contribución n_{3-} cuya integral debe tender a 1 para $\sigma < \sigma_c$ ya que esperamos que N_{3-} tienda a 1 en esta región de desórdenes.

