

## Capítulo 5

# Estudio del 3D-GRFIM mediante técnicas de escalado de tamaño finito

En el capítulo anterior se ha presentado el comportamiento de las magnitudes que se han obtenido a partir de las simulaciones del 3D-GRFIM con dinámica atérmica-adiabática. El estudio de estas magnitudes ha permitido obtener una idea haciendo extrapolaciones no rigurosas a  $L \rightarrow \infty$  del comportamiento de las distintas avalanchas que se pueden distinguir durante las simulaciones (avalanchas no *spanning*, 1D-*spanning*, 2D-*spanning* y 3D-*spanning*). Por otro lado, a partir de los resultados directos de las simulaciones, se ha hecho la hipótesis de la existencia de dos tipos de avalanchas no *spanning* (no *spanning* críticas y no *spanning* no críticas) y también dos tipos de avalanchas 3D-*spanning* (3D-*spanning* críticas y 3D-*spanning* subcríticas). En el presente capítulo se estudia el comportamiento de los distintos tipos de avalanchas aplicando técnicas de FSS a las magnitudes presentadas en el capítulo anterior. Tales técnicas permitirán extraer la información crítica asociada a cada uno de los tipos de avalanchas y, además, haciendo una modificación a las técnicas estándar de FSS, será posible separar las dos contribuciones a las avalanchas 3D-*spanning*, por un lado, y las dos contribuciones a las avalanchas no *spanning*, por otro. El capítulo se organiza de la siguiente forma: en la sección § 5.1 se introducen las ideas sobre GR en el 3D-GRFIM que nos serán útiles en el capítulo y las variables de escala apropiadas para llevar a cabo el estudio de escalado. En la sección § 5.2 se propone un método (método de *doble escalado de tamaño finito*, que denotaremos abreviadamente

como DFSS<sup>1</sup>) que permitirá escalar las magnitudes relacionadas con las avalanchas 3D-*spanning* haciendo la hipótesis de que constan de dos contribuciones. Tras estas dos secciones introductorias, se pasa a la presentación de los resultados obtenidos al aplicar las técnicas de escalado de tamaño finito a las magnitudes integradas: número de avalanchas  $N_\alpha(\sigma, L)$  [§ 5.3], distribuciones integradas  $D_\alpha(s; \sigma, L)$  [§ 5.4] y momentos de las distribuciones integradas  $\langle s \rangle_\alpha(\sigma, L)$  [§ 5.5]. En el caso de las avalanchas 1D- y 2D-*spanning*, será posible obtener buenos escalados con las técnicas estándar de FSS. Sin embargo, como ya se ha dicho, será necesario utilizar el método DFSS para escalar las magnitudes asociadas a las avalanchas 3D-*spanning*. Como veremos, aunque la hipótesis sobre la existencia de dos tipos de avalanchas no *spanning* es viable, el método DFSS no es aplicable en este caso. En la sección siguiente [§ 5.6], se estudia el escalado del cambio de magnetización asociado a las avalanchas *spanning*  $\Delta m_s(\sigma, L)$ . De este estudio veremos que únicamente el cambio de magnetización asociado a las avalanchas 3D-*spanning* subcríticas es el que da lugar a una discontinuidad en los ciclos de histéresis para  $\sigma < \sigma_c$ . Además, tal discontinuidad se comporta como un parámetro de orden en el límite termodinámico, lo que nos permitirá hacer una estimación del exponente  $\beta$  de la transición. Los resultados presentados en el capítulo 4 en relación a los campos en que suceden las avalanchas, junto con los resultados obtenidos al escalar las magnitudes integradas, permiten proponer métodos aproximados para clasificar las avalanchas 3D-*spanning* directamente durante las simulaciones en dos grupos: avalanchas 3D-*spanning* críticas y 3D-*spanning* subcríticas. Tales métodos se describen en la sección § 5.7 donde también se comparan los escalados que se obtienen para  $N_{3c}$  y  $N_{3-}$  con los obtenidos en la sección § 5.3 utilizando el método DFSS. Tras describir los métodos de clasificación, se pasa a estudiar las propiedades críticas de las magnitudes no integradas [§ 5.9], aplicando dichos métodos para clasificar las avalanchas 3D-*spanning*. Seguidamente [§ 5.10], se obtienen estimaciones de las dimensiones fractales de las distintas avalanchas *spanning* a partir del análisis directo de propiedades geométricas de las avalanchas. Una vez presentados todos estos análisis, se pasa a la discusión [§ 5.11] de los aspectos más esenciales presentados tanto en este capítulo como en el anterior. Finalmente, acabamos el presente capítulo con un breve resumen de los resultados más relevantes y enumerando algunas de las conclusiones principales a las que nos ha permitido llegar el análisis presentado en las secciones previas.

---

<sup>1</sup>Tomamos la abreviación del nombre que hemos propuesto en inglés *Double Finite Size Scaling*.

## 5.1. Grupo de renormalización y variables de escala en el RFIM

Antes de pasar a presentar los resultados del análisis de escalado de tamaño finito de los datos presentados en el capítulo anterior, es conveniente introducir las variables de escala apropiadas para el estudio del 3D-GRFIM. En esta sección se particularizan las ideas del GR introducidas en el capítulo 2 para el 3D-GRFIM. La hipótesis básica que se utilizará para el análisis con técnicas de FSS de los datos presentados en el capítulo anterior es la existencia de un punto fijo en el espacio de parámetros del modelo. Dicho punto fijo se sitúa sobre la superficie crítica definida por todas las direcciones irrelevantes del espacio de parámetros. Las variables de control en el caso del 3D-GRFIM son la cantidad de desorden  $\sigma$  y el campo magnético  $H$ . Así pues, la superficie física en el espacio de parámetros está definida por la variación de  $\sigma$  y  $H$ . Tal y como muestran las simulaciones, la superficie física únicamente intersecta la superficie crítica en un punto que define el punto crítico. En términos de las variables de control, dicho punto ocurre para  $(\sigma, H) = (\sigma_c, H_c)$ . Es lógico suponer que, si existen dos variables de control que permiten cambiar la distancia al punto crítico, existen al menos dos variables de escala relevantes  $u(\sigma, H)$  y  $v(\sigma, H)$  que dependen de las variables de control y permiten variar la distancia a la superficie crítica. Al hacer una transformación del GR de parámetro  $b$ , dichas variables transforman como:

$$u(b) = b^{1/\nu} u, \quad (5.1)$$

$$v(b) = b^{1/\mu} v, \quad (5.2)$$

donde  $1/\nu$  y  $1/\mu$  son los autovalores del GR [§ 2.2.3] asociados a  $u$  y a  $v$ , respectivamente. Además,  $\nu$  y  $\mu$  caracterizan la divergencia de la longitud de correlación  $\xi$  al aproximarse al punto crítico a lo largo de las direcciones asociadas a  $u$  y  $v$ :

$$\xi \sim u^{-\nu}, \quad \xi \sim v^{-\mu}. \quad (5.3)$$

En la teoría de fenómenos críticos no es habitual introducir el exponente  $\mu$  sino que, en su lugar, se acostumbra a introducir la combinación  $\nu/\beta\delta$ . Sin embargo, en nuestro estudio es interesante introducirlo porque (i) juega un papel análogo a  $\nu$  y (ii), como veremos, coincide para todos los tipos de avalanchas.

Las magnitudes geométricas, como el tamaño del sistema  $L$  o el tamaño de las avalanchas  $s$ , también se ven afectadas por la transformación del GR. Concretamente,

$$L(b) = b^{-1} L, \quad (5.4)$$

$$s(b) = b^{-d_\alpha} s, \quad (5.5)$$

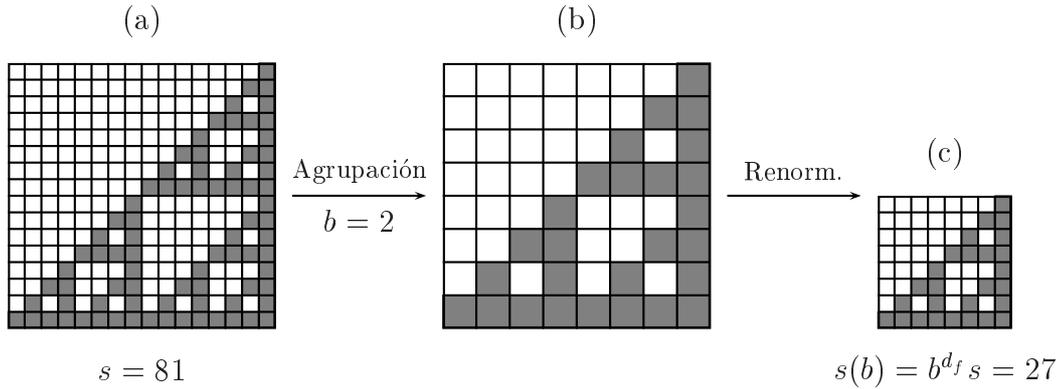
donde el exponente<sup>2</sup>  $d_\alpha$  se puede interpretar como la dimensión fractal de las avalanchas. Para convencernos de que esto es así, imaginemos que una avalancha tiene una estructura (fractal en general) de dimensión  $d_\alpha$ . Al hacer una agrupación de parámetro  $b$ , cada conjunto resultante tiene un promedio de  $b^{d_\alpha}$  espines pertenecientes a la avalancha que dan lugar a un espín renormalizado que representa a los  $b^{d_\alpha}$  espines del conjunto. De esta forma, el número total de espines de la avalancha  $s$  disminuye en un factor  $b^{d_\alpha}$  al aplicar la transformación del GR, lo que lleva a (5.5). La Fig. 5.1 muestra un ejemplo de la transformación del GR a una parte de  $s = 81$  espines de una avalancha que se extiende a todo un sistema infinito y que tiene una estructura fractal hipotética que describe un cuadrado de Sierpinski de dimensión fractal  $d_{Sierpinski} = \log 3 / \log 2 = 1.585$  [235–237]. En el paso de la Fig. 5.1(a) a la Fig. 5.1(b) se efectúa una agrupación (de parámetro  $b = 2$ ) de los espines pertenecientes a la avalancha (cuadrados grises) utilizando la regla de la mayoría [§ 2.2.1]. Una vez efectuada la agrupación, es necesario renormalizar las distancias para obtener una red tal que la distancia entre nodos sea igual que la correspondiente a la red original. Tras hacer esto, se obtiene la estructura que se presenta en la Fig. 5.1(c). Como se puede ver, la estructura obtenida es totalmente equivalente a la original, si tenemos en cuenta que la avalancha original se extiende, realmente, a todo el espacio<sup>3</sup>. Tras la aplicación de la transformación, se obtienen  $s = 27$  espines que representan a los 81 espines de la parte de la avalancha que se había considerado al principio. La ley de transformación corresponde pues a (5.5) ya que:

$$s(b) = 27 = 2^{-\log 3 / \log 2} 81 = b^{-d_{Sierpinski}} s \quad (5.6)$$

En las secciones siguientes, veremos que todos los tipos de avalanchas propuestos en el cuadro 4.1 se caracterizan por la misma dimensión fractal  $d_\alpha = d_f$ , a excepción de las avalanchas 3D-*spanning* subcríticas (para las que la dimensión fractal es  $d_{3-} \neq d_f$ ) y las avalanchas no *spanning* no críticas. En primer lugar, llegaremos a tal conclusión utilizando técnicas de tamaño finito [§ 5.5] y, posteriormente, mediremos de forma directa las dimensiones fractales asociadas a las avalanchas *spanning* [§ 5.7]. También veremos que las avalanchas tienen una estructura fractal aleatoria, de tal forma que sólo se pueden entender como fractales desde un punto de vista estadístico. De cualquier forma, la justificación de la ley de transformación (5.5) suponiendo que las avalanchas

<sup>2</sup>Por ejemplo, en las Refs. [57, 198, 222, 228] se utiliza la combinación de exponentes  $1/\nu\sigma$  en lugar de  $d_\alpha$ , de tal forma que el exponente  $\sigma$  definido por estos autores en analogía con percolación se relaciona con  $d_\alpha$  de la siguiente forma:  $\sigma = 1/\nu d_\alpha$ .

<sup>3</sup>Esto no es más que una manifestación de la autosemejanza del cuadrado de Sierpinski.



**Figura 5.1:** Aplicación de la transformación del GR a una parte de 81 espines (cuadrados grises) de una avalancha hipotética que se supone que describe un cuadrado de Sierpinski. (a) Sistema original. (b) Producto de hacer una agrupación de parámetro  $b$  y aplicar la regla de la mayoría. (c) Resultado de aplicar una renormalización de las distancias tras aplicar la agrupación.

describen una estructura fractal no aleatoria es válida también si se considera una estructura fractal aleatoria [238].

En la sección § 2.2.4 se propuso un método nuevo para encontrar las relaciones de escala en general a partir de un cierto número de invariantes bajo el GR. De las cuatro variables  $u$ ,  $v$ ,  $s$  y  $L$  se pueden formar tres invariantes independientes. Para el estudio que se presenta en este capítulo, consideraremos los tres siguientes:

$$\mathcal{I}[u, L] = uL^{1/\nu}, \quad (5.7)$$

$$\mathcal{I}[v, L] = vL^{1/\mu}, \quad (5.8)$$

$$\mathcal{I}[s, L] = sL^{-d_\alpha}. \quad (5.9)$$

### 5.1.1. Relación de las variables de escala con las variables de control.

#### Una variable de escala

En el capítulo 2 [§ 2.2.5] se puso de manifiesto desde un punto de vista general que la dependencia exacta de las variables de escala con las variables de control es desconocida pero debe ser analítica. Este hecho permite expandir las variables de escala  $u$  y  $v$  del RFIM en función de las variables de control en torno al punto crítico  $(\sigma_c, H_c)$ . Es instructivo analizar en primer lugar la dependencia con  $\sigma$  de la variable de escala  $u$  en el caso de magnitudes integradas, es decir, en el caso de magnitudes

que dependen únicamente de  $\sigma$ . A segundo orden en torno a  $\sigma_c$ :

$$u(\sigma) = u_1(\sigma) + Au_1^2(\sigma), \quad (5.10)$$

donde  $u_1(\sigma) \equiv (\sigma - \sigma_c)/\sigma_c$  es la variable de escala a primer orden que representa la forma más simple de medir la distancia a  $\sigma_c$ . Sin embargo, generalmente  $u_1(\sigma)$  no es suficiente para describir correctamente los datos. A continuación vamos a analizar si la corrección a segundo orden  $Au_1^2$  es importante en el límite termodinámico o, por el contrario, se puede despreciar. Consideremos para ello una función  $F(\sigma, L)$  tal que se puede escribir en términos de  $L$  y la variable correcta de escala  $u$  de la forma habitual en FSS:

$$F(\sigma, L) = L^a \hat{F}(uL^{1/\nu}). \quad (5.11)$$

A partir de una relación de este tipo, se puede introducir el concepto de familia de pares que definiremos como el conjunto siguiente de pares  $(\sigma, L)$ :  $\{(\sigma_i, L_i), i = 1, 2, \dots | u(\sigma_1)L_1^{1/\nu} = u(\sigma_2)L_2^{1/\nu} = \dots\}$ . Dicho de otra forma, una familia no es más que el conjunto de pares  $\{(\sigma_i, L_i)\}$  tales que  $L_i^{-a}F(\sigma_i, L_i)$  es igual para todos los pares dentro de la familia.

Para estudiar la libertad que hay al utilizar una cierta aproximación a la variable de escala, y ver así hasta qué punto son importantes los términos que despreciamos, supongamos que intentamos hacer un análisis FSS con una variable de escala incorrecta  $u'(\sigma)$ . Igual que se ha hecho con la variable  $u(\sigma)$ , desarrollamos  $u'(\sigma)$  en torno a  $\sigma_c$  hasta segundo orden en  $u_1$ :

$$u'(\sigma) = u_1(\sigma) + \mathcal{A}u_1^2(\sigma), \quad (5.12)$$

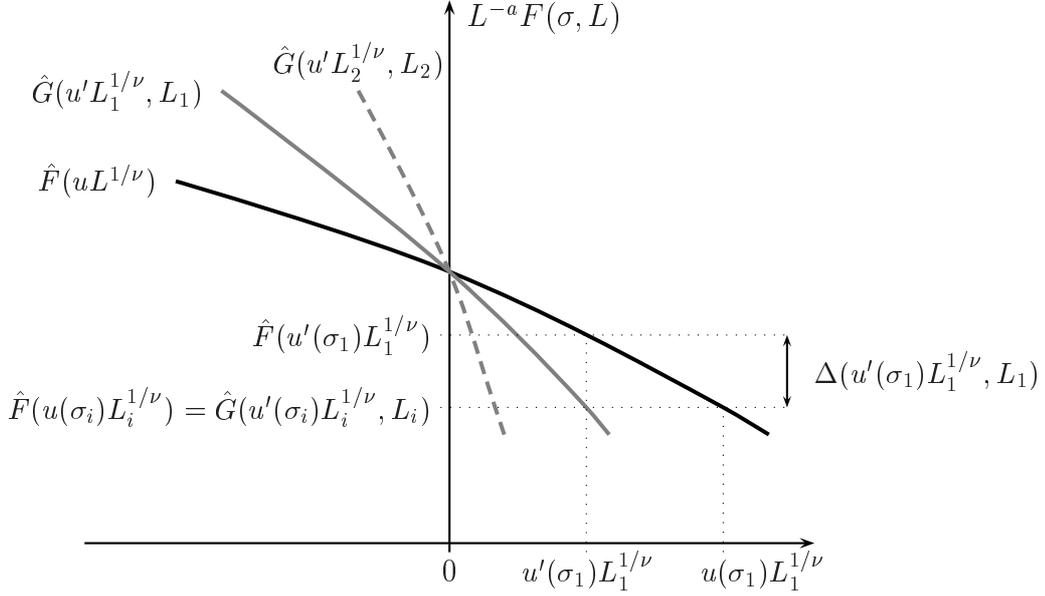
donde, en principio,  $\mathcal{A} \neq A$ . Evidentemente, en  $\sigma = \sigma_c$ , es equivalente utilizar  $u$  o  $u'$  ya que ambas son nulas. Consideremos a continuación una familia  $\{(\sigma_i, L_i)\}$ . Por definición de familia,

$$L_1^{-a}F(\sigma_1, L_1) = L_2^{-a}F(\sigma_2, L_2) = \dots \quad (5.13)$$

Sin embargo, en términos de la variable de escala incorrecta  $u'$ , el producto  $u'(\sigma)L^{1/\nu}$  es, en general, distinto para cada par de la familia  $\{(\sigma_i, L_i)\}$ . Este hecho hace que aparezca una dependencia explícita con  $L$  al representar  $L^{-a}F(\sigma, L)$  en función de  $u'(\sigma)L^{1/\nu}$ :

$$L^{-a}F(\sigma, L) = \hat{G}(u'(\sigma)L^{1/\nu}, L), \quad (5.14)$$

cosa que hace imposible el colapso de  $L^{-a}F(\sigma, L)$ . En general, la función  $\hat{G}(u'(\sigma)L^{1/\nu}, L)$  depende explícitamente de  $L$  y nos referiremos a ella como “función de no escalado”.



**Figura 5.2:** Representación esquemática de  $L^{-a}F(\sigma, L)$  en función de  $uL^{1/\nu}$  (línea gruesa, negra y continua) y de  $u'L^{1/\nu}$  para dos tamaños  $L_1$  (línea gris continua) y  $L_2$  (línea gris discontinua). Para una cierta familia de pares  $\{(\sigma_i, L_i)\}$ , se indica explícitamente la igualdad  $\hat{F}(u(\sigma_i)L_i^{1/\nu}) = \hat{G}(u'(\sigma_i)L_i^{1/\nu}, L_i)$ . También se indica la diferencia  $\Delta(u'(\sigma)L^{1/\nu}, L)$  para el caso particular del par  $(\sigma_1, L_1)$ .

La Fig. 5.2 muestra esquemáticamente la representación de  $L^{-a}F(\sigma, L)$  en función de  $uL^{1/\nu}$  y también en función de  $u'L^{1/\nu}$  para dos tamaños  $L_1$  y  $L_2$  distintos. De la definición de  $\hat{F}(u(\sigma)L^{1/\nu})$  y  $\hat{G}(u'(\sigma)L^{1/\nu}, L)$  se deduce que

$$\hat{F}(u(\sigma_i)L_i^{1/\nu}) = \hat{G}(u'(\sigma_i)L_i^{1/\nu}, L_i) \quad (5.15)$$

para cualquier par de la familia  $\{(\sigma_i, L_i)\}$ , tal y como muestra la Fig. 5.2.

Desde un punto de vista cuantitativo, analizaremos la bondad de los escalados hechos con la variable  $u'$  estudiando el comportamiento con  $L_i$  de la diferencia  $\Delta$  definida como:

$$\Delta(u'(\sigma_i)L_i^{1/\nu}, L_i) \equiv \hat{F}(u'(\sigma_i)L_i^{1/\nu}) - \hat{G}(u'(\sigma_i)L_i^{1/\nu}, L_i). \quad (5.16)$$

La Fig. 5.2 muestra esta magnitud para el par  $(\sigma_1, L_1)$ . Si  $\Delta(u'(\sigma_i)L_i^{1/\nu}, L_i)$  es independiente de  $L_i$  para  $L_i \rightarrow \infty$ , se puede concluir que la variable de escala  $u'$  es suficiente para obtener un escalado aceptable para sistemas suficientemente grandes.

Para ver en qué condiciones se cumple esta independencia con  $L_i$ , expresamos la función  $\hat{F}(u'(\sigma_i)L_i^{1/\nu})$  a primer orden en torno a  $u(\sigma_i)L_i^{1/\nu}$ :

$$\hat{F}(u'(\sigma_i)L_i^{1/\nu}) = \hat{G}(u'(\sigma_i)L_i^{1/\nu}, L_i) + L_i^{1/\nu} \hat{F}_1(u(\sigma_i)L_i^{1/\nu})(u'(\sigma_i) - u(\sigma_i)), \quad (5.17)$$

donde se ha utilizado la igualdad (5.15) y se ha definido  $\hat{F}_1(u(\sigma_i)L_i^{1/\nu})$  como la derivada primera de  $\hat{F}$  con respecto a  $u(\sigma_i)L_i^{1/\nu}$ . A continuación, utilizando los desarrollos (5.10) y (5.12) y la definición (5.16), se obtiene

$$\Delta(u'(\sigma_i)L_i^{1/\nu}, L_i) = L_i^{1/\nu}(\mathcal{A} - A)u_1^2(\sigma_i)\hat{F}_1(u(\sigma_i)L_i^{1/\nu}). \quad (5.18)$$

Es complicado estudiar el comportamiento de  $\Delta(u'(\sigma_i)L_i^{1/\nu}, L_i)$  en el límite  $L_i \rightarrow \infty$  restringiéndonos a una cierta familia ( $u'(\sigma_i)L_i^{1/\nu}$  constante) debido a que  $u_1 \rightarrow 0$  si  $L_i \rightarrow \infty$  y aparece una indeterminación  $[\infty \cdot 0]$  en (5.18). Para solventar este problema, definimos una función

$$\hat{f}(u(\sigma_i)L_i^{1/\nu}) \equiv \left[ u(\sigma_i)L_i^{1/\nu} \right]^2 \hat{F}_1(u(\sigma_i)L_i^{1/\nu}) \quad (5.19)$$

que, claramente, se mantiene constante dentro de una familia de pares. Introduciendo esta función en (5.18) se obtiene:

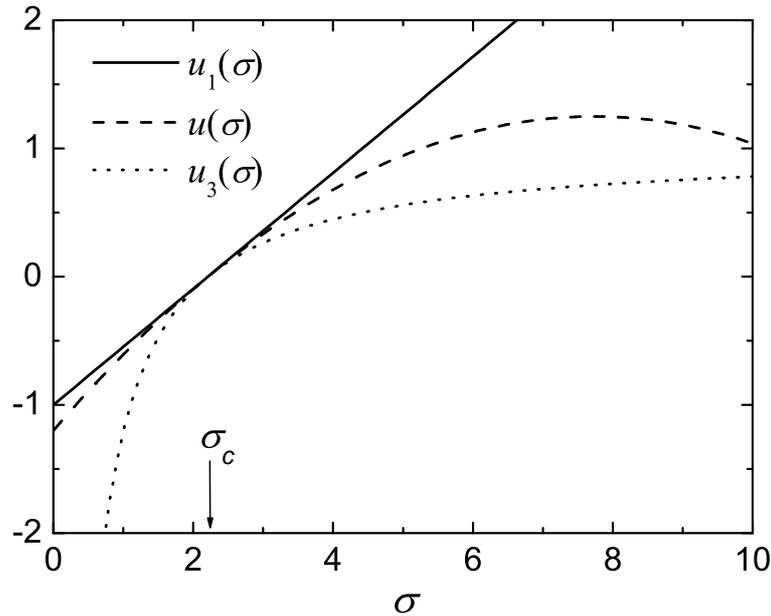
$$\Delta(u'(\sigma_i)L_i^{1/\nu}, L_i) = L_i^{-1/\nu}(\mathcal{A} - A) \left( \frac{u_1(\sigma_i)}{u(\sigma_i)} \right)^2 \hat{f}(u(\sigma_i)L_i^{1/\nu}). \quad (5.20)$$

A partir de esta expresión deducimos que  $\Delta(u'(\sigma_i)L_i^{1/\nu}, L_i) = 0$  en el límite  $L_i \rightarrow \infty$ , independientemente<sup>4</sup> del valor de  $\mathcal{A}$ . Efectivamente, la dependencia explícita con  $L_i$  en (5.20) es debida fundamentalmente al prefactor  $L_i^{-1/\nu}$  y, como veremos más adelante [§ 5.3],  $1/\nu = 0.8 > 0$ . Por otro lado, el cociente  $u_1(\sigma_i)/u(\sigma_i)$  es del orden de la unidad para  $\sigma$  cercana a  $\sigma_c$  y no juega un papel importante en el límite  $L_i \rightarrow \infty$ . La conclusión final es que no importa el valor de  $\mathcal{A}$  en el desarrollo de la función  $u'$  [Ec. (5.12)]. Esto permite tomar  $\mathcal{A} = 0$  y obtener escalados aceptables con  $u' = u_1$ . Como se verá en los resultados obtenidos al aplicar el análisis FSS a los datos numéricos [§ 5.3], es conveniente incluir el término a segundo orden en  $u_1$  para obtener mejores colapsos de los datos correspondientes a sistemas pequeños. Los mejores colapsos se obtienen para  $A = -0.2$ , de tal forma que la variable de escala que utilizaremos en el estudio de magnitudes integradas será<sup>5</sup>:

$$u(\sigma) = u_1(\sigma) - 0.2u_1^2(\sigma). \quad (5.21)$$

<sup>4</sup>Es fácil ver que los términos de orden superior a 2 en los desarrollos (5.10) y (5.11) tampoco son importantes en el límite termodinámico.

<sup>5</sup>En adelante, como hemos hecho en esta expresión, nos referiremos a la variable de escala como  $u$  aunque, realmente sólo la estimamos hasta segundo orden en  $u_1$ .



**Figura 5.3:** Comparación de las tres aproximaciones  $u_1$ ,  $u$  y  $u_3$  a la variable de escala en el problema integrado.

En estudios previos de otros autores [198, 222, 228], relacionados con magnitudes integradas, se propuso una variable de escala  $u_3(\sigma)$  diferente a la que se propone aquí, definida como:

$$u_3(\sigma) = \frac{\sigma - \sigma_c}{\sigma}. \quad (5.22)$$

La justificación de esta variable de escala es puramente fenomenológica. La expansión de Taylor de  $u_3(\sigma)$  es:

$$u_3 = u_1(\sigma) - u_1^2(\sigma) + u_1^3(\sigma) + \dots \quad (5.23)$$

Comparando hasta segundo orden este desarrollo con el de la variable  $u$  (5.10) se podría concluir que  $A = -1$ . Sin embargo, como ya hemos adelantado, los mejores escalados de nuestros datos se obtienen con  $A = -0.2$ .

La Fig. 5.3 compara el comportamiento de las tres variables de escala  $u_1(\sigma)$ ,  $u(\sigma)$  (en la aproximación (5.21) con  $A = -0.2$ ) y  $u_3(\sigma)$ . Lógicamente, las tres variables son equivalentes cerca de  $\sigma_c$ . Sin embargo, el intervalo de  $\sigma$  donde las relaciones de escala son válidas puede ser muy diferente dependiendo de la variable utilizada. Debido a que  $A < 0$ , la variable  $u$  no se puede utilizar para  $\sigma \gg \sigma_c$  ya que presenta un máximo para  $\sigma = 7.735 = 3.5\sigma_c$ . Por otro lado, la variable  $u_3$  tiende a 1 para  $\sigma \rightarrow +\infty$  y es imposible distinguir entre sí sistemas con valores grandes de  $\sigma$ .

### Dos variables de escala

Los argumentos presentados hasta este punto en relación con la dependencia de  $u$  con  $\sigma$  en el caso de magnitudes integradas se pueden extender al caso de magnitudes no integradas que dependen del campo  $H$  además de  $\sigma$ . En este caso hay dos variables de control con las cuales se puede variar la distancia al punto crítico  $(\sigma_c, H_c)$  externamente. Supondremos pues que existen al menos dos variables de escala relevantes independientes:  $u(\sigma, H)$  y  $v(\sigma, H)$ . En general, ambas variables dependen de forma analítica de  $\sigma$  y  $H$ , de manera que se pueden desarrollar en serie de potencias en torno a  $(\sigma_c, H_c)$ . A segundo orden:

$$u(\sigma, H) = u_1(\sigma) + Au_1^2(\sigma) + A'v_1(H) + A''u_1(\sigma)v_1(H) + A'''v_1^2(H) \quad (5.24)$$

$$v(\sigma, H) = v_1(H) + Bv_1^2(H) + B'u_1(\sigma) + B''u_1(\sigma)v_1(H) + B'''u_1^2(\sigma), \quad (5.25)$$

donde  $v_1(H) \equiv (H - H_c)/H_c$  es la variable a primer orden en campo e, igual que antes,  $u_1(\sigma) \equiv (\sigma - \sigma_c)/\sigma_c$ . El término  $H \sum_{i=1}^N S_i$  que aparece en el Hamiltoniano del RFIM es impar bajo el cambio  $\{S_i\} \rightarrow \{-S_i\}$ , de tal forma que la variación de  $H$  únicamente permite moverse en el subespacio impar de parámetros del modelo [§ 2.2.5]. En cambio, no existe una simetría tan clara con respecto a  $\sigma$ . Para ver que esto es así, es útil escribir el Hamiltoniano del 3D-GRFIM de forma alternativa a (4.1) como:

$$\mathcal{H} = - \sum_{\langle i,j \rangle} S_i S_j - H \sum_{i=1}^N S_i - \sigma \sum_{i=1}^N h_i^N S_i, \quad (5.26)$$

donde los campos locales  $\{h_i^N\}$  se distribuyen siguiendo una gaussiana de media nula y desviación estándar 1. Por un lado, si en este Hamiltoniano hacemos la transformación  $\{S_i\} \rightarrow \{-S_i\}$ , el término  $\sigma \sum_{i=1}^N h_i^N S_i$  queda invariante siempre y cuando también hagamos la transformación  $\sigma \rightarrow -\sigma$ , de manera que, en este sentido,  $\sigma$  sería una variable impar, igual que  $H$ . Por otro lado, teniendo en cuenta que los campos aleatorios  $\{h_i^N\}$  están distribuidos de forma simétrica en torno a 0, el término  $\sigma \sum_{i=1}^N h_i^N S_i$  es estadísticamente invariante al hacer  $\{S_i\} \rightarrow \{-S_i\}$ , aunque no cambiemos el signo de  $\sigma$ , con lo cual,  $\sigma$  sería estadísticamente par. La conclusión final es que la variable  $\sigma$  no tiene una simetría definida y este es el motivo por el que no se ha impuesto ninguna restricción por simetría a los desarrollos (5.24) y (5.25). Notar que, si la temperatura fuese finita en el modelo, debería existir una variable de escala que permitiese moverse únicamente en el subespacio par de parámetros [§ 2.2.5].

Consideremos también una función  $F(H; \sigma, L)$  que se puede escribir de la forma habitual en FSS con dos variables de escala:

$$F(H; \sigma, L) = L^a \hat{F}(uL^{1/\nu}, vL^{1/\mu}). \quad (5.27)$$

El concepto de familia introducido anteriormente se debe extender a tripletes  $(\sigma, H, L)$  cuando consideramos la dependencia con  $H$  además de con  $\sigma$ . Así, un conjunto de tripletes  $\{(\sigma_i, H_i, L_i)\}$  forman una familia si, tanto  $u(\sigma_i, H_i)L_i^{1/\nu}$  como  $v(\sigma_i, H_i)L_i^{1/\mu}$  toman valores independientes del triplete que se considere del conjunto. Escrito de forma más compacta, una familia está formada por el siguiente conjunto de tripletes:

$$\{(\sigma_i, H_i, L_i), i = 1, 2, \dots | u(\sigma_1)L_1^{1/\nu} = u(\sigma_2)L_2^{1/\nu} = \dots, v(\sigma_1)L_1^{1/\mu} = v(\sigma_2)L_2^{1/\mu} = \dots\}. \quad (5.28)$$

En el razonamiento referente a las magnitudes integradas, se ha estudiado el efecto de utilizar una variable de escala incorrecta  $u'(\sigma)$  en un análisis FSS. Por extensión, en el caso con dos variables de escala, consideraremos el efecto de dos variables de escala incorrectas  $u'(\sigma, H)$  y  $v'(\sigma, H)$  cuyas expansiones a segundo orden en  $u_1$  y  $v_1$  son:

$$u'(\sigma, L) = u_1(\sigma) + \mathcal{A}u_1^2(\sigma) + \mathcal{A}'v_1(H) + \mathcal{A}''u_1(\sigma)v_1(H) + \mathcal{A}'''v_1^2(H), \quad (5.29)$$

$$v'(\sigma, L) = v_1(H) + \mathcal{B}v_1^2(H) + \mathcal{B}'u_1(\sigma) + \mathcal{B}''u_1(\sigma)v_1(H) + \mathcal{B}'''u_1^2(\sigma). \quad (5.30)$$

De nuevo, al representar  $L^{-a}F(H; \sigma, L)$  en función de  $u'(\sigma, H)L^{1/\nu}$  y  $v'(\sigma, H)L^{1/\mu}$ , aparece una dependencia explícita con  $L$ :

$$L^{-a}F(H; \sigma, L) = \hat{G}(u'(\sigma, H)L^{1/\nu}, v'(\sigma, H)L^{1/\mu}, L). \quad (5.31)$$

Dentro de una cierta familia  $\{(\sigma_i, H_i, L_i)\}$ , la magnitud  $\Delta$  que nos permite determinar en qué condiciones es posible obtener un buen colapso con  $u'$  y  $v'$ , viene dada por una expresión totalmente análoga a (5.16):

$$\begin{aligned} \Delta(u'(\sigma_i, H_i)L_i^{1/\nu}, v'(\sigma_i, H_i)L_i^{1/\mu}, L_i) \equiv \\ \hat{F}(u'(\sigma_i, H_i)L_i^{1/\nu}, v'(\sigma_i, H_i)L_i^{1/\mu}) - \hat{G}(u'(\sigma_i, H_i)L_i^{1/\nu}, v'(\sigma_i, H_i)L_i^{1/\mu}, L_i). \end{aligned} \quad (5.32)$$

Siguiendo un procedimiento similar al utilizado para obtener  $\hat{F}(u'(\sigma_i)L_i^{1/\nu})$  en el caso de las magnitudes integradas [Ec. (5.17)],  $\Delta(u'(\sigma_i, H_i)L_i^{1/\nu}, v'(\sigma_i, H_i)L_i^{1/\mu}, L_i)$  se puede aproximar por:

$$\begin{aligned} \Delta(u'(\sigma_i, H_i)L_i^{1/\nu}, v'(\sigma_i, H_i)L_i^{1/\mu}, L_i) = \\ L_i^{1/\nu}(u'(\sigma_i, H_i) - u(\sigma_i, H_i))\hat{F}_1 + L_i^{1/\mu}(v'(\sigma_i, H_i) - v(\sigma_i, H_i))\hat{F}_2 \\ + \frac{1}{2}L_i^{2/\nu}(u'(\sigma_i, H_i) - u(\sigma_i, H_i))^2\hat{F}_{11} + \frac{1}{2}L_i^{2/\mu}(v'(\sigma_i, H_i) - v(\sigma_i, H_i))^2\hat{F}_{22} \\ + L_i^{1/\nu+1/\mu}(u'(\sigma_i, H_i) - u(\sigma_i, H_i))(v'(\sigma_i, H_i) - v(\sigma_i, H_i))\hat{F}_{12}, \end{aligned} \quad (5.33)$$

donde los subíndices 1 y 2 en las funciones de escala  $\hat{F}$  indican las derivadas parciales con respecto a  $u(\sigma_i, H_i)L_i^{1/\nu}$  y a  $v(\sigma_i, H_i)L_i^{1/\mu}$ , respectivamente. Las dependencias con

$u(\sigma_i, H_i)L_i^{1/\nu}$  y  $v(\sigma_i, H_i)L_i^{1/\mu}$  de la función  $\hat{F}$  y sus derivadas no se han escrito para simplificar la notación. Introduciendo las expresiones (5.24), (5.25), (5.29) y (5.30) en la Ec. (5.33) se obtiene:

$$\begin{aligned}
 & \Delta(u'(\sigma_i, H_i)L_i^{1/\nu}, v'(\sigma_i, H_i)L_i^{1/\mu}, L_i) = \\
 & (\mathcal{A}' - A')v_1(H_i)L_i^{1/\nu}\hat{F}_1 + (\mathcal{B}' - B')u_1(\sigma_i)L_i^{1/\mu}\hat{F}_2 \\
 & + (\mathcal{A} - A)u_1^2(\sigma_i)L_i^{1/\nu}\hat{F}_1 + (\mathcal{B} - B)v_1^2(H_i)L_i^{1/\mu}\hat{F}_2 \\
 & + (\mathcal{A}'' - A'')u_1(\sigma_i)v_1(H_i)L_i^{1/\nu}\hat{F}_1 + (\mathcal{B}'' - B'')u_1(\sigma_i)v_1(H_i)L_i^{1/\mu}\hat{F}_2 \\
 & + (\mathcal{A}''' - A''')v_1^2(H_i)L_i^{1/\nu}\hat{F}_1 + (\mathcal{B}''' - B''')u_1^2(\sigma_i)L_i^{1/\mu}\hat{F}_2 \\
 & + \frac{1}{2}(\mathcal{A}' - A')^2v_1^2(H_i)L_i^{2/\nu}\hat{F}_{11} + \frac{1}{2}(\mathcal{B}' - B')^2u_1^2(\sigma_i)L_i^{2/\mu}\hat{F}_{22} \\
 & + (\mathcal{A}' - A')(\mathcal{B}' - B')u_1(\sigma_i)v_1(H_i)L_i^{1/\nu+1/\mu}\hat{F}_{12}.
 \end{aligned} \tag{5.34}$$

Para analizar el comportamiento de  $\Delta$  en el límite  $L_i \rightarrow \infty$  manteniéndonos dentro de una cierta familia  $\{(\sigma_i, H_i, L_i)\}$ , o lo que es lo mismo, manteniendo  $u(\sigma_i, H_i)L_i^{1/\nu}$  y  $v(\sigma_i, H_i)L_i^{1/\mu}$  constantes, es conveniente definir un conjunto de once funciones  $\{\hat{f}_j\}$  (ver la definición en el cuadro 5.1) que, igual que en (5.20), permiten extraer la dependencia explícita de  $\Delta$  con  $L_i$ :

$$\begin{aligned}
 & \Delta(u'(\sigma_i, H_i)L_i^{1/\nu}, v'(\sigma_i, H_i)L_i^{1/\mu}, L_i) = \\
 & (\mathcal{A}' - A')L^{1/\nu-1/\mu}\left(\frac{v_1}{v}\right)\hat{f}_1 + (\mathcal{B}' - B')L^{1/\mu-1/\nu}\left(\frac{u_1}{u}\right)\hat{f}_2 \\
 & + (\mathcal{A} - A)L^{-1/\nu}\left(\frac{u_1}{u}\right)^2\hat{f}_3 + (\mathcal{B} - B)L^{-1/\mu}\left(\frac{v_1}{v}\right)^2\hat{f}_4 \\
 & + (\mathcal{A}'' - A'')L^{-1/\mu}\left(\frac{u_1}{u}\right)\left(\frac{v_1}{v}\right)\hat{f}_5 + (\mathcal{B}'' - B'')L^{-1/\nu}\left(\frac{u_1}{u}\right)\left(\frac{v_1}{v}\right)\hat{f}_6 \\
 & + (\mathcal{A}''' - A''')L^{1/\nu-2/\mu}\left(\frac{v_1}{v}\right)^2\hat{f}_7 + (\mathcal{B}''' - B''')L^{1/\mu-2/\nu}\left(\frac{u_1}{u}\right)^2\hat{f}_8 \\
 & + (\mathcal{A}' - A')^2L^{2/\nu-2/\mu}\left(\frac{v_1}{v}\right)^2\hat{f}_9 + (\mathcal{B}' - B')^2L^{2/\mu-2/\nu}\left(\frac{u_1}{u}\right)^2\hat{f}_{10} \\
 & + (\mathcal{A}' - A')(\mathcal{B}' - B')\left(\frac{u_1}{u}\right)\left(\frac{v_1}{v}\right)\hat{f}_{11},
 \end{aligned} \tag{5.35}$$

En el análisis con FSS de los datos que se presentan más adelante se encuentra que  $1/\mu = 1.5$  y  $1/\nu = 0.83$ . Dados estos valores, de todos los términos del segundo miembro de la igualdad (5.35), sólo aquellos en los que aparece  $\mathcal{B}' - B'$  introducen una dependencia importante con  $L$  para sistemas grandes. Deducimos así que todos los coeficientes que aparecen en las expansiones (5.29) y (5.30) se pueden tomar igual a cero a excepción de  $\mathcal{B}'$ , que debe ser igual a  $B'$ . El último término de la expresión (5.35) simplemente está asociado a una posible diferencia independiente de  $L$  entre

$j$	$\hat{f}_j(uL^{1/\nu}, vL^{1/\mu})$
1	$vL^{1/\mu}\hat{F}_1(uL^{1/\nu}, vL^{1/\mu})$
2	$uL^{1/\nu}\hat{F}_2(uL^{1/\nu}, vL^{1/\mu})$
3	$(uL^{1/\nu})^2\hat{F}_1(uL^{1/\nu}, vL^{1/\mu})$
4	$(vL^{1/\mu})^2\hat{F}_2(uL^{1/\nu}, vL^{1/\mu})$
5	$(uL^{1/\nu})(vL^{1/\mu})\hat{F}_1(uL^{1/\nu}, vL^{1/\mu})$
6	$(uL^{1/\nu})(vL^{1/\mu})\hat{F}_2(uL^{1/\nu}, vL^{1/\mu})$
7	$(vL^{1/\mu})^2\hat{F}_1(uL^{1/\nu}, vL^{1/\mu})$
8	$(uL^{1/\nu})^2\hat{F}_2(uL^{1/\nu}, vL^{1/\mu})$
9	$\frac{1}{2}(vL^{1/\mu})^2\hat{F}_{11}(uL^{1/\nu}, vL^{1/\mu})$
10	$\frac{1}{2}(uL^{1/\nu})^2\hat{F}_{22}(uL^{1/\nu}, vL^{1/\mu})$
11	$(uL^{1/\nu})(vL^{1/\mu})\hat{F}_{12}(uL^{1/\nu}, vL^{1/\mu})$

**Cuadro 5.1:** Definición de las once funciones  $\{\hat{f}_j\}$  utilizadas para llegar a la expresión (5.35).

la representación de  $L^{-a}F(H; \sigma, L)$  utilizando las variables exactas  $(u, v)$  y la representación utilizando las variables no exactas  $(u', v')$ . Esta diferencia no impediría un buen escalado pero, al hacer  $\mathcal{B}' = B'$ , la diferencia se anula automáticamente, con lo cual,  $\Delta = 0$ . Aunque el término proporcional a  $A$  no es importante en el límite termodinámico, lo mantendremos para obtener resultados consistentes entre las magnitudes que dependen de  $H$  y las magnitudes integradas. En conclusión, para el análisis de los datos referentes a las magnitudes que dependen de  $H$ , utilizaremos las siguientes aproximaciones a las variables de escala:

$$u = u_1 + Au_1^2, \quad (5.36)$$

$$v = v_1 + B'u_1. \quad (5.37)$$

La corrección (5.37) asociada a la distancia a  $H_c$  fue propuesta por primera vez por Perković *et al.* [198] basándose en un razonamiento distinto que no tenía en cuenta el tamaño finito. Estos autores llamaron “*inclinación*”<sup>6</sup> al parámetro análogo a  $B'$ . Desde un punto de vista geométrico, la variable  $v$  está rotada con respecto a  $v_1$  debido al término  $B'u_1$  (ver la sección § 5.11.7) y, como consecuencia, también se le ha llamado *rotación* a esta corrección.

<sup>6</sup>En el texto original en inglés los autores le llaman *tilting constant*.

## 5.2. Doble escalado de tamaño finito (DFSS)

Algunas de las magnitudes estudiadas en las secciones siguientes se pueden describir apropiadamente suponiendo que se pueden descomponer en suma de dos contribuciones que dependen de forma diferente de  $L$ . En estas situaciones no es posible aplicar las técnicas habituales de FSS. En esta sección se propone un método que consiste en una extensión del método FSS común. Como ya hemos adelantado, nos referiremos a este método como *doble escalado de tamaño finito* (DFSS). Por simplicidad, presentamos los detalles del método únicamente para el caso de magnitudes integradas, pero la extensión a magnitudes que involucran el campo es sencilla. Supongamos pues una magnitud integrada  $F(\sigma, L)$  que se puede expresar como suma de dos funciones  $F_a(\sigma, L)$  y  $F_b(\sigma, L)$  que, cerca del punto crítico, se comportan de la forma habitual en FSS, es decir:

$$F_a(\sigma, L) = L^a \tilde{F}_a(uL^{1/\nu}), \quad F_b(\sigma, L) = L^b \tilde{F}_b(uL^{1/\nu}), \quad (5.38)$$

donde  $a \neq b$ . De estas expresiones se deduce la hipótesis de FSS para  $F(\sigma, L)$ :

$$F(\sigma, L) = L^a \tilde{F}_a(uL^{1/\nu}) + L^b \tilde{F}_b(uL^{1/\nu}). \quad (5.39)$$

Escogiendo dos pares  $(\sigma_1, L_1)$  y  $(\sigma_2, L_2)$  de una misma familia (ver definición de familia en la sección anterior), se obtienen las dos ecuaciones siguientes:

$$F(\sigma_1, L_1) = L_1^a \tilde{F}_a(u(\sigma_1)L_1^{1/\nu}) + L_1^b \tilde{F}_b(u(\sigma_1)L_1^{1/\nu}) \quad (5.40)$$

$$F(\sigma_2, L_2) = L_2^a \tilde{F}_a(u(\sigma_2)L_2^{1/\nu}) + L_2^b \tilde{F}_b(u(\sigma_2)L_2^{1/\nu}). \quad (5.41)$$

Por otro lado,  $u(\sigma_1)L_1^{1/\nu} = u(\sigma_2)L_2^{1/\nu}$ , lo que implica

$$\tilde{F}_a(u(\sigma_1)L_1^{1/\nu}) = \tilde{F}_a(u(\sigma_2)L_2^{1/\nu}) \quad (5.42)$$

$$\tilde{F}_b(u(\sigma_1)L_1^{1/\nu}) = \tilde{F}_b(u(\sigma_2)L_2^{1/\nu}). \quad (5.43)$$

Teniendo en cuenta estas igualdades y las expresiones (5.40) y (5.41) se llega a:

$$\begin{aligned} \tilde{F}_a(u(\sigma_i)L_i^{1/\nu}) &= \frac{L_1^{-b}F(\sigma_1, L_1) - L_2^{-b}F(\sigma_2, L_2)}{L_1^{a-b} - L_2^{a-b}}, \\ \tilde{F}_b(u(\sigma_i)L_i^{1/\nu}) &= \frac{L_1^{-a}F(\sigma_1, L_1) - L_2^{-a}F(\sigma_2, L_2)}{L_1^{b-a} - L_2^{b-a}}, \end{aligned} \quad (5.44)$$

donde  $(\sigma_i, L_i)$  indica cualquiera de los pares de la familia a la que pertenecen  $(\sigma_1, L_1)$  y  $(\sigma_2, L_2)$ .

Desde un punto de vista práctico, el método se aplica a conjuntos de datos correspondientes a pares de sistemas con distinto tamaño  $L_1$  y  $L_2$ . Para cada uno de estos tamaños se conoce la función  $F(\sigma, L)$  en un conjunto discreto de desórdenes. Supongamos, por ejemplo, que hemos realizado una simulación a desorden  $\sigma_1$  en el sistema de tamaño  $L_1$ , es decir, conocemos  $F(\sigma_1, L_1)$ . Para aplicar directamente el método DFSS a partir de este dato y los datos de las simulaciones del sistema de tamaño  $L_2$  sería necesario tener una simulación en este sistema a un desorden  $\sigma_2$  tal que  $u(\sigma_2)L_2^{1/\nu} = u(\sigma_1)L_1^{1/\nu}$ . Sin embargo, las simulaciones no se hacen siempre de forma que esto se cumpla para los distintos desórdenes simulados para cada tamaño<sup>7</sup>. Para solventar este problema, se ha interpolado la función  $F(\sigma, L_2)$  asociada al sistema de tamaño  $L_2$  a aquel valor de  $\sigma$  que cumple  $u(\sigma) = u(\sigma_1)(L_1/L_2)^{1/\nu}$ .

Es interesante estudiar la propagación de los errores  $\delta F_a(\sigma, L)$  y  $\delta F_b(\sigma, L)$  de las funciones  $F_a(\sigma, L)$  y  $F_b(\sigma, L)$  a las funciones de escala  $\tilde{F}_a$  y  $\tilde{F}_b$ . Aplicando el procedimiento habitual de propagación de errores<sup>8</sup>, encontramos

$$\delta \tilde{F}_a = \frac{L_2^{-a}}{|(L_1/L_2)^{a-b} - 1|} \left[ \left( \frac{L_1}{L_2} \right)^{-b} \delta F(\sigma_1, L_1) + \delta F(\sigma_2, L_2) \right], \quad (5.46)$$

$$\delta \tilde{F}_b = \frac{L_2^{-b}}{|(L_1/L_2)^{b-a} - 1|} \left[ \left( \frac{L_1}{L_2} \right)^{-a} \delta F(\sigma_1, L_1) + \delta F(\sigma_2, L_2) \right]. \quad (5.47)$$

De estas ecuaciones podemos extraer dos conclusiones importantes. En primer lugar, el denominador que aparece en ambas expresiones se aproxima a cero cuando aplicamos el método a dos sistemas con tamaños similares. Esto hace que los errores sean mayores en estos casos y que, por tanto, sea mejor utilizar sistemas con tamaños bastante distintos. Por otro lado, si  $a > 0$ , el error  $\delta \tilde{F}_a$  es menor cuanto mayor es  $L_2$  y lo mismo sucede para  $\delta \tilde{F}_b$  si  $b > 0$ . En los casos en que apliquemos el método DFSS más adelante, siempre  $a \geq 0$  y  $b \geq 0$ , lo que implica que los errores se minimizan si se utilizan sistemas de tamaño grande pero bastante diferentes entre sí, es decir, tanto la situación  $1 \ll L_1 \ll L_2$  como  $1 \ll L_2 \ll L_1$  son ideales para minimizar los errores.

Es interesante analizar cual de los dos errores  $\delta \tilde{F}_a$  o  $\delta \tilde{F}_b$  es mayor, dependiendo de la relación entre los exponentes  $a$  y  $b$ . Es fácil estudiar la relación entre los errores en

<sup>7</sup>De hecho, no se pueden hacer las simulaciones de tal forma que  $u(\sigma_2)L_2^{1/\nu} = u(\sigma_1)L_1^{1/\nu}$  porque, a priori, el valor de  $\nu$  es desconocido.

<sup>8</sup>Por ejemplo,  $\delta \tilde{F}_a$  se obtiene a partir de:

$$\delta \tilde{F}_a = \left| \frac{\partial \tilde{F}_a}{\partial F(\sigma_1, L_1)} \right| \delta F(\sigma_1, L_1) + \left| \frac{\partial \tilde{F}_a}{\partial F(\sigma_2, L_2)} \right| \delta F(\sigma_2, L_2). \quad (5.45)$$

la situación ideal  $1 \ll L_1 \ll L_2$  analizando el cociente entre dichos errores que, como se puede ver a partir de las Ecs. (5.46) y (5.47), no es más que

$$\frac{\delta \tilde{F}_a}{\delta \tilde{F}_b} = L_2^{b-a} \frac{|(L_1/L_2)^{b-a} - 1|}{|(L_1/L_2)^{a-b} - 1|} \cdot \frac{(\frac{L_1}{L_2})^{-b} \delta F(\sigma_1, L_1) + \delta F(\sigma_2, L_2)}{(\frac{L_1}{L_2})^{-a} \delta F(\sigma_1, L_1) + \delta F(\sigma_2, L_2)}. \quad (5.48)$$

En el límite  $L_1 \ll L_2$ , el cociente (5.48) nos permite distinguir dos casos dependiendo de la relación entre  $a$  y  $b$ :

- Si  $a < b \implies \delta \tilde{F}_a > \delta \tilde{F}_b$ .
- Si  $a > b \implies \delta \tilde{F}_a < \delta \tilde{F}_b$ .

Resumiendo, el error es mayor en la función de escala correspondiente a la contribución con el exponente menor.

### 5.3. Números de avalanchas $N_\alpha(\sigma, L)$

Las magnitudes integradas dependen sólo de  $\sigma$ , de tal manera que el único invariante que se debe considerar para construir la hipótesis de escala es  $\mathcal{I}[u, L] = uL^{1/\nu}$  [Ec. (5.7)].

Suponiendo que, al aplicar una vez la transformación del GR, el número de avalanchas  $N_\alpha(\sigma, L)$  transforma con un exponente  $\theta_\alpha$  como

$$N_\alpha(\sigma(b), L(b); b) = b^{\theta_\alpha} N_\alpha(\sigma, L), \quad (5.49)$$

se puede formar el siguiente invariante entre  $N_\alpha(\sigma, L)$  y  $L$ :

$$\mathcal{I}[N_\alpha, L] = N_\alpha L^{-\theta_\alpha}, \quad (5.50)$$

donde se ha utilizado (5.4).

Por otro lado, el hecho de que  $N_\alpha(\sigma, L)$  dependa únicamente de  $u$  y  $L$  implica que el invariante  $\mathcal{I}[N_\alpha, L]$  sólo puede ser función del invariante  $\mathcal{I}[u, L] = uL^{1/\nu}$  [Ec. (5.7)]. Esto nos lleva a proponer la siguiente hipótesis de escalado de tamaño finito para  $N_\alpha(\sigma, L)$  :

$$N_\alpha(\sigma, L) = L^{\theta_\alpha} \tilde{N}_\alpha(uL^{1/\nu}). \quad (5.51)$$

A partir de esta expresión queda claro que el exponente  $\theta_\alpha$  caracteriza la divergencia del número de avalanchas en el punto crítico cuando  $L \rightarrow \infty$ . En este punto se debe remarcar que la definición de  $\theta_\alpha$  a partir de (5.51) no sigue el criterio habitual

utilizado en las hipótesis de escalado de tamaño finito en que las magnitudes varían con exponentes divididos por  $\nu$  [§ 2.3]. Sin embargo, hemos decidido utilizar la notación introducida previamente por otros autores para el comportamiento crítico del número de avalanchas en el RFIM [217, 222] y el número de *clusters* en percolación [Apéndice B].

Como veremos, el comportamiento del número de avalanchas 1D-*spanning*, 2D-*spanning* y 3D-*spanning* críticas se puede describir con el mismo valor de  $\theta_1 = \theta_2 = \theta_{3c} = \theta$ :

$$N_1(\sigma, L) = L^\theta \tilde{N}_1(uL^{1/\nu}), \quad (5.52)$$

$$N_2(\sigma, L) = L^\theta \tilde{N}_2(uL^{1/\nu}), \quad (5.53)$$

$$N_{3c}(\sigma, L) = L^\theta \tilde{N}_{3c}(uL^{1/\nu}). \quad (5.54)$$

Se han hecho intentos de escalar el número de avalanchas no *spanning* críticas con el mismo exponente  $\theta$  pero no se ha conseguido un escalado aceptable. En consecuencia, es necesario definir un exponente  $\theta_{nsc}$  tal que:

$$N_{nsc}(\sigma, L) = L^{\theta_{nsc}} \tilde{N}_{nsc}(uL^{1/\nu}). \quad (5.55)$$

Con respecto al número de avalanchas 3D-*spanning* subcríticas  $N_{3-}$  proponemos una hipótesis de escala consistente con el comportamiento de una función escalón en el límite termodinámico. Por consistencia con este comportamiento, se asume que  $\theta_{3-} = 0$  con lo cual, de (5.51) obtenemos

$$N_{3-}(\sigma, L) = \tilde{N}_{3-}(uL^{1/\nu}). \quad (5.56)$$

Efectivamente, debe ser  $\theta_{3-} = 0$  para recuperar el comportamiento de  $N_{3-}$  en el límite de desorden bajo en que se espera que el ciclo de histéresis esté formado por una única avalancha de tamaño  $L^3$  y, por tanto, el número de avalanchas debe ser  $N_{3-} = 1$ , independientemente del valor de  $L$ .

En relación con las avalanchas no *spanning* no críticas, en la sección § 4.6 se ha argumentado que existen para cualquier valor de  $\sigma$  en el límite termodinámico, es decir,  $N_{ns0}(\sigma) > 0$ , para cualquier  $\sigma > 0$ . Además, probablemente estas avalanchas no estén relacionadas con ningún fenómeno crítico cerca de  $\sigma_c$ . Por esta razón proponemos la siguiente dependencia no crítica:

$$N_{ns0}(\sigma, L) = L^3 \tilde{N}_{ns0}(\sigma). \quad (5.57)$$

En particular, como ya se ha comentado, para desórdenes grandes ( $\sigma \rightarrow +\infty$ ) estas avalanchas son de tamaño  $s = 1$  y su número es  $N_{ns0}(\infty, L) = L^3$ .

A partir de la ecuación de transformación de  $N_\alpha$  [Ec. (5.49)] y de la correspondiente para  $u$  [Ec. (5.1)], se puede formar otro invariante:

$$\mathcal{I}[N_\alpha, u] = N_\alpha |u|^{-\nu\theta_\alpha}, \quad (5.58)$$

que permite proponer una hipótesis de escala para  $N_\alpha$  diferente a (5.51):

$$N_\alpha(\sigma, L) = |u|^{-\nu\theta_\alpha} \tilde{N}_\alpha(uL^{1/\nu}). \quad (5.59)$$

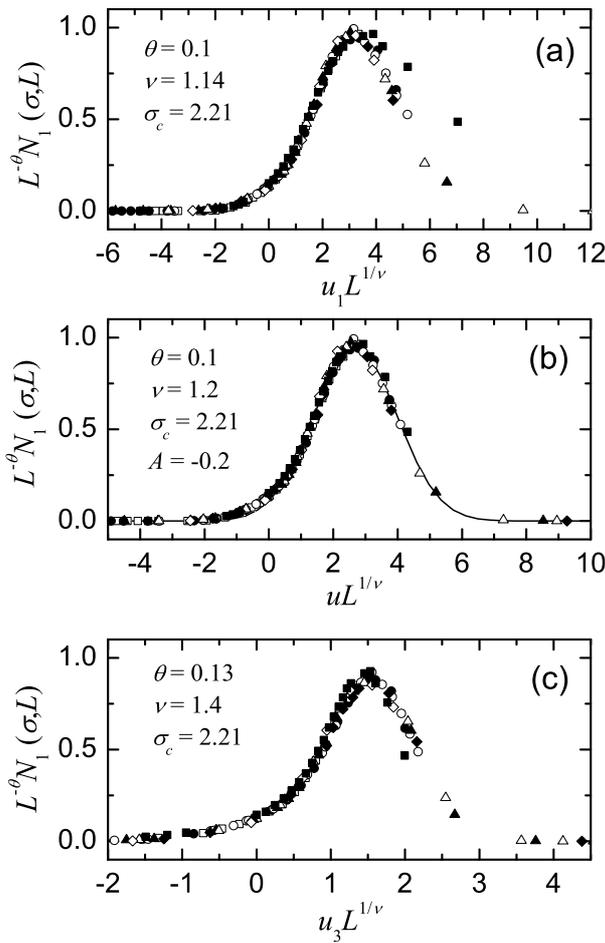
La función de escala  $\tilde{N}_\alpha$  se relaciona con  $\tilde{N}_\alpha$  como  $\tilde{N}_\alpha(uL^{1/\nu}) \equiv (|u|L^{1/\nu})^{\theta_\alpha\nu} \tilde{N}_\alpha$ .

Las expresiones del tipo (5.59) en que el prefactor involucra la variable de escala no son apropiadas para hacer escalados cerca de  $\sigma_c$  dado que presentan un error estadístico grande debido a que  $u \rightarrow 0$  cuando  $\sigma \rightarrow \sigma_c$ .

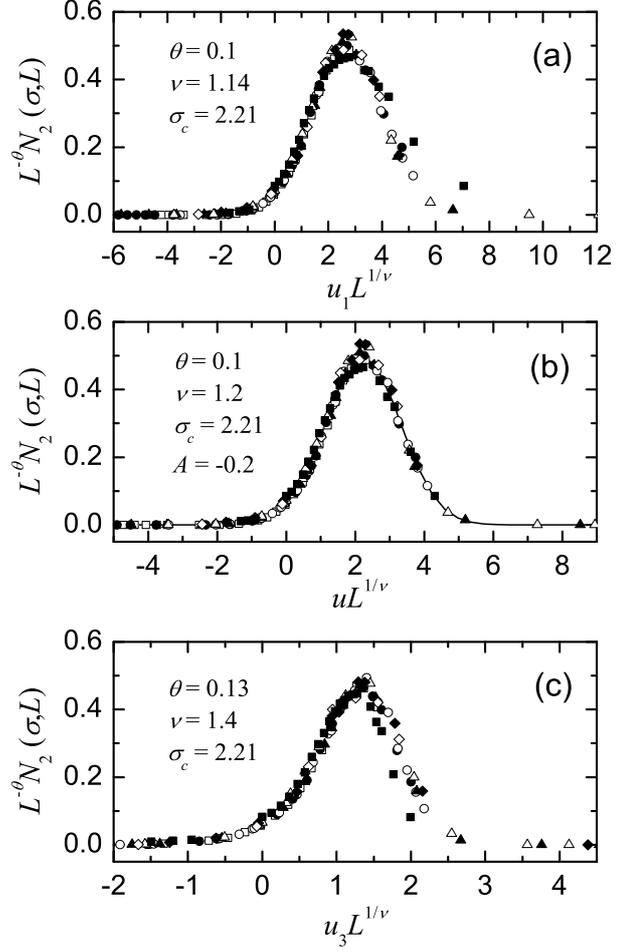
### **Avalanchas 1D- y 2D-spanning**

Las Figs. 5.4 y 5.5 muestran los mejores escalados de  $N_1$  y  $N_2$ , respectivamente, obtenidos a partir de las hipótesis de escala (5.52) y (5.53) con las tres propuestas para la variable de escala en el problema integrado [§ 5.1]. Se han utilizado datos correspondientes a  $L = 5, 8, 10, 12, 16, 24, 32$  y  $48$ . La calidad de los escalados cerca de  $\sigma_c$  es muy buena para las tres aproximaciones a la variable de escala. Los valores de los parámetros que optimizan cada uno de los escalados se indican en cada uno de los gráficos. Por simple inspección visual, se concluye que  $u = u_1 + Au_1^2$  es la mejor elección ya que permite obtener un buen escalado también para los sistemas más pequeños estudiados. Sin embargo, no hay que olvidar que los escalados en este caso involucran un parámetro libre extra  $A$ , lo que da más libertad en el ajuste. Con respecto a la calidad de los escalados, no se observan diferencias notables entre los correspondientes a  $u_1$  y los obtenidos utilizando  $u_3$ . En los escalados que se presenten de ahora en adelante se utilizará siempre la variable  $u$  con  $A = -0.2$ . Tomaremos pues como mejores estimaciones de los parámetros del escalado aquellas que se obtienen utilizando esta variable de escala. Éstos son:  $\sigma_c = 2.21 \pm 0.02$ ,  $\nu = 1.2 \pm 0.1$  y  $\theta = 0.10 \pm 0.02$ .

En todos los escalados que se presentan en la tesis llamamos parámetros óptimos al conjunto de parámetros para el que se obtiene el mejor escalado. Las barras de error que se asignan a cada parámetro representan el intervalo de valores para el que los escalados son satisfactorios. Existe un método numérico [239] que, en principio, permite eliminar la posible subjetividad de los escalados minimizando numéricamente la distancia entre las curvas (por ejemplo curvas de  $L^{-\theta}N_1$ ) correspondientes a distintos tamaños. Además de la minimización numérica, es necesario interpolar en las



**Figura 5.4:** (a) Escalado del número de avalanchas 1D-*spanning* de acuerdo con la hipótesis (5.52) utilizando la variable de escala  $u_1$ . El valor de los parámetros libres que dan los mejores escalados se indican en el interior. Los símbolos correspondientes a los distintos tamaños de sistema están indicados en la leyenda de la Fig. 4.12. (b) La misma representación que en (a) pero utilizando la variable  $u$ . En este caso aparece el parámetro extra  $A$ . (c) Misma representación utilizando  $u_3$ . La línea continua en (b) muestra un ajuste de los datos a una función gaussiana.



**Figura 5.5:** (a) Escalado del número de avalanchas 2D-*spanning* de acuerdo con la hipótesis (5.53) utilizando la variable de escala  $u_1$ . El valor de los parámetros libres que dan los mejores escalados se indican en el interior. Los símbolos correspondientes a los distintos tamaños de sistema están indicados en la leyenda de la Fig. 4.12. (b) La misma representación que en (a) pero utilizando la variable  $u$ . En este caso aparece el parámetro extra  $A$ . (c) Misma representación utilizando  $u_3$ . La línea continua en (b) muestra un ajuste de los datos a una función gaussiana.

funciones a escalar puesto que éstas se conocen sólo discretamente. La unión de los dos procedimientos numéricos hace que, dependiendo de la discretización de las funciones a escalar, no se consigan escalados mejores que los que se consiguen de forma más subjetiva. Además, en nuestro caso, al utilizar el método DFSS que también involucra una interpolación, se unen tres procedimientos numéricos que hacen casi inaplicable el método propuesto en [239].

Las líneas continuas trazadas en las Figs. 5.4(b) y 5.5(b) corresponden a ajustes de una función gaussiana del tipo:

$$f(uL^{1/\nu}) = a \exp \left[ -\frac{(uL^{1/\nu} - x)^2}{2w^2} \right], \quad (5.60)$$

que involucra tres parámetros libres: la amplitud  $a$ , la posición del pico  $x$  y la anchura  $w$ . Los parámetros obtenidos son  $a_1 = 0.946 \pm 0.004$ ,  $x_1 = 2.691 \pm 0.008$  y  $w_1 = 1.293 \pm 0.008$  para el ajuste de  $\tilde{N}_1$  y, para el ajuste de  $\tilde{N}_2$  se obtiene  $a_2 = 0.497 \pm 0.002$ ,  $x_2 = 2.227 \pm 0.007$  y  $w_2 = 1.086 \pm 0.007$ .

El comportamiento de  $N_1$  y  $N_2$  en el límite termodinámico viene dictado por el comportamiento de las funciones  $\tilde{N}_1$  y  $\tilde{N}_2$  en los límites  $uL^{1/\nu} \rightarrow \pm\infty$  [§ 2.3.1]. Para estudiar directamente este comportamiento es conveniente representar  $\tilde{N}_1$  y  $\tilde{N}_2$  en escala lineal-logarítmica [Figs. 5.6(a) y (b)]. Los parámetros del ajuste gaussiano no describen muy bien el comportamiento de las funciones de escala en los límites  $uL^{1/\nu} \rightarrow \pm\infty$ . Ajustes parabólicos a  $\ln \tilde{N}_1$  y  $\ln \tilde{N}_2$  (líneas discontinuas en Figs. 5.6(a) y (b)) aproximan mejor el comportamiento de los datos en los límites  $uL^{1/\nu} \rightarrow \pm\infty$ , si bien, tales ajustes no son tan buenos cerca del máximo de las funciones de escala como los que se obtienen con los ajustes gaussianos. Los parámetros obtenidos a partir de los ajustes parabólicos son:  $a_1 = 0.844 \pm 0.09$ ,  $x_1 = 2.821 \pm 0.06$ ,  $w_1 = 1.532 \pm 0.009$ ,  $a_2 = 0.436 \pm 0.08$ ,  $x_2 = 2.305 \pm 0.08$  y  $w_2 = 1.244 \pm 0.012$ . Como se puede ver, no son muy diferentes a los parámetros correspondientes a los ajustes gaussianos. En cualquier caso, sea cual sea el método de ajuste, tanto  $\tilde{N}_1$  como  $\tilde{N}_2$  decaen exponencialmente en los límites  $uL^{1/\nu} \rightarrow \pm\infty$ , lo que indica que, en el límite termodinámico, las avalanchas 1D- y 2D-*spanning* sólo existen en  $\sigma = \sigma_c$ . Concretamente, para  $\sigma = \sigma_c$ ,  $N_1$  y  $N_2$  crecen con  $L$  como  $L^{0.10}$  y con amplitudes  $\tilde{N}_1(0) = 0.12 \pm 0.01$  y  $\tilde{N}_2(0) = 0.07 \pm 0.01$ . Por otro lado, el hecho de que los picos de las funciones  $\tilde{N}_1$  y  $\tilde{N}_2$  estén desplazados respecto a  $u = 0$  indica que el número máximo de avalanchas 1D- y 2D-*spanning* ocurre para un cierto  $\sigma_c(L)$  que se desplaza hacia  $\sigma_c^+$  al aumentar  $L$ .

### Avalanchas 3D-*spanning*

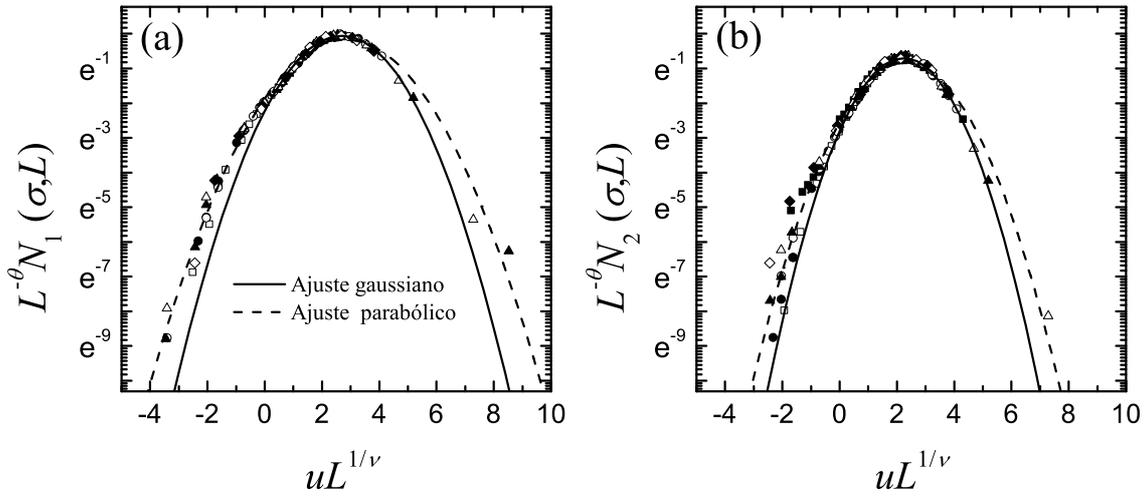
Teniendo en cuenta la discusión de la sección § 4.6 sobre el número de avalanchas 3D-*spanning*, debemos considerar dos contribuciones a  $N_3$ : el número de avalanchas 3D-*spanning* críticas  $N_{3c}$  y el número de avalanchas 3D-*spanning* subcríticas  $N_{3-}$ . A partir de las hipótesis de escala (5.54) y (5.56) y la última relación de cierre de las magnitudes integradas en el cuadro 4.2 se llega a

$$N_3(\sigma, L) = L^\theta \tilde{N}_{3c}(uL^{1/\nu}) + \tilde{N}_{3-}(uL^{1/\nu}). \quad (5.61)$$

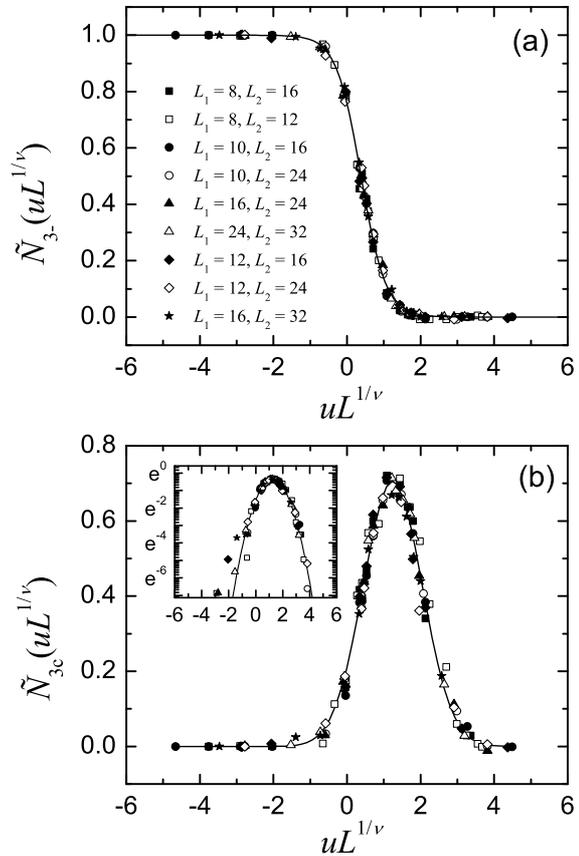
Esta ecuación es un caso particular de la ecuación (5.39) y, por tanto, se puede aplicar el análisis DFSS [§ 5.2]. En este caso particular, para dos sistemas con tamaños  $L_1$  y  $L_2$  y desórdenes  $\sigma_1$  y  $\sigma_2$  tales que  $u(\sigma_1)L_1^{1/\nu} = u(\sigma_2)L_2^{1/\nu}$  (los pares  $(\sigma_1, L_1)$  y  $(\sigma_2, L_2)$  pertenecen a la misma familia), las ecuaciones (5.44) se escriben como:

$$\tilde{N}_{3-}(u(\sigma_1)L_1^{1/\nu}) = \tilde{N}_{3-}(u(\sigma_2)L_2^{1/\nu}) = \frac{L_1^{-\theta} N_3(\sigma_1, L_1) - L_2^{-\theta} N_3(\sigma_2, L_2)}{L_1^{-\theta} - L_2^{-\theta}}, \quad (5.62)$$

$$\tilde{N}_{3c}(u(\sigma_1)L_1^{1/\nu}) = \tilde{N}_{3c}(u(\sigma_2)L_2^{1/\nu}) = \frac{N_3(\sigma_1, L_1) - N_3(\sigma_2, L_2)}{L_1^\theta - L_2^\theta}. \quad (5.63)$$



**Figura 5.6:** Escalado del número de avalanchas 1D-spanning (a) y 2D-spanning (b) en escala lineal-logarítmica (neperiana). Los símbolos corresponden a los tamaños indicados en la leyenda de la Fig. 4.12. Los ajustes gaussianos (también representados en las Figs. 5.4(b) y 5.5(b)) se representan con líneas continuas. También se muestran ajustes parabólicos a  $\ln \tilde{N}_1$  y  $\ln \tilde{N}_2$  con líneas discontinuas. Lejos del pico de las funciones, los ajustes parabólicos son mejores que los gaussianos para ambos números.



**Figura 5.7:** (a) Estimación numérica de  $\tilde{N}_{3-}(uL^{1/\nu})$  y (b) de  $\tilde{N}_{3c}(uL^{1/\nu})$  a partir de las ecuaciones (5.62) y (5.63). Los distintos símbolos corresponden a los pares de tamaños  $(L_1, L_2)$  indicados en la leyenda. La línea continua en (a) corresponde al ajuste de una función sigmoideal [Ec. 5.64] y la línea continua en (b) se ha obtenido a partir del ajuste de una función gaussiana. El gráfico interno en (b) muestra los datos de (b) en escala lineal-logarítmica (neperiana).

Las Figs. 5.7(a) y 5.7(b) muestran los escalados correspondientes a  $\tilde{N}_{3-}(uL^{1/\nu})$  y  $\tilde{N}_{3c}(uL^{1/\nu})$ , respectivamente, obtenidos a partir de las ecuaciones (5.62) y (5.63). Los distintos símbolos en este caso corresponden a los diferentes pares  $(L_1, L_2)$  utilizados en cada conjunto de datos para aplicar el método DFSS. Es interesante remarcar que los colapsos se han conseguido sin introducir ningún parámetro libre sino que se han utilizado los valores de  $\theta$ ,  $\nu$ ,  $\sigma_c$  y  $A$  obtenidos a partir de los escalados de  $N_1$  y  $N_2$  [Figs. 5.4(b) y 5.5(b)].

De nuevo, el análisis de las funciones de escala nos permite deducir el comportamiento de  $N_{3c}$  y  $N_{3-}$  en el límite termodinámico. A partir de los puntos de cruce de las funciones de escala con el eje  $u = 0$ , obtenemos que  $N_{3-}(\sigma_c, L) = (0.16 \pm 0.02)L^{0.10}$  y  $N_{3c}(\sigma_c, L) = 0.79 \pm 0.02$ . Tal y como se hizo anteriormente con el número de avalanchas 1D- y 2D-*spanning*,  $\tilde{N}_{3c}$  también se puede aproximar bien con una función gaussiana de amplitud  $a_{3c} = 0.706 \pm 0.005$ , posición del pico  $x_{3c} = 1.244 \pm 0.007$  y anchura  $w_{3c} = 0.802 \pm 0.009$ . El comportamiento gaussiano implica un decrecimiento exponencial de  $\tilde{N}_{3c}(uL^{1/\nu})$  en los límites  $uL^{1/\nu} \rightarrow \pm\infty$ , como se ve directamente al representar los datos en escala lineal-logarítmica [gráfico interno en Fig. 5.7(b)]. Concluimos así que, en el límite termodinámico, las avalanchas 3D-*spanning* críticas sólo existen para  $\sigma = \sigma_c$ .

Por otro lado, el comportamiento de  $\tilde{N}_{3-}(uL^{1/\nu})$  se puede ajustar bien con una función sigmoideal que involucra dos parámetros  $k$  y  $x_c$ :

$$\tilde{N}_{3-}(uL^{1/\nu}) \simeq \frac{1}{1 + e^{-k(uL^{1/\nu} - x_c)}}. \quad (5.64)$$

Con un ajuste por mínimos cuadrados a todos los datos de  $\tilde{N}_{3-}(uL^{1/\nu})$  representados en la Fig. 5.7(a) se obtiene  $k = -2.99 \pm 0.04$  y  $x_c = 0.382 \pm 0.004$ . La línea continua corresponde a la función (5.64) con los parámetros obtenidos a partir del ajuste por mínimos cuadrados. A partir de (5.64) se deduce que, en el límite  $uL^{1/\nu} \rightarrow -\infty$ ,

$$\lim_{uL^{1/\nu} \rightarrow -\infty} 1 - \tilde{N}_{3-}(uL^{1/\nu}) = \lim_{uL^{1/\nu} \rightarrow -\infty} e^{-k(uL^{1/\nu} - x_c)}, \quad (5.65)$$

con lo cual,  $\tilde{N}_{3-}(uL^{1/\nu})$  tiende a 1 exponencialmente, lo que implica que, en el límite termodinámico,  $N_{3-}(\sigma) = 1$  para  $\sigma < \sigma_c$ . Por otro lado, en el límite  $uL^{1/\nu} \rightarrow \infty$ ,

$$\lim_{uL^{1/\nu} \rightarrow \infty} \tilde{N}_{3-}(uL^{1/\nu}) = \lim_{uL^{1/\nu} \rightarrow \infty} e^{k(uL^{1/\nu} - x_c)}. \quad (5.66)$$

lo que demuestra que  $\tilde{N}_{3-}(uL^{1/\nu})$  tiende a 0 exponencialmente en este límite y, entonces,  $N_{3-}(\sigma) = 0$  para  $\sigma > \sigma_c$ . Resumiendo, los resultados indican que, en promedio, en una determinada realización de desorden, existe una y sólo una avalancha 3D-*spanning* subcrítica para desórdenes menores que  $\sigma_c$  y no existe ninguna por encima de  $\sigma_c$ .

### Avalanchas no *spanning*

Para finalizar el análisis del número de avalanchas de distintos tipos, estudiaremos la separación de las dos contribuciones al número de avalanchas no *spanning*  $N_{ns}$  propuestas en § 4.6. A partir de las hipótesis de escala (5.55) y (5.57) introducidas al principio de esta sección y la relación de cierre correspondiente a  $N_{ns}$  en el cuadro 4.2, es posible escribir  $N_{ns}$  como

$$N_{ns}(\sigma, L) = L^{\theta_{ns}} \tilde{N}_{nsc}(uL^{1/\nu}) + L^3 \tilde{N}_{ns0}(\sigma). \quad (5.67)$$

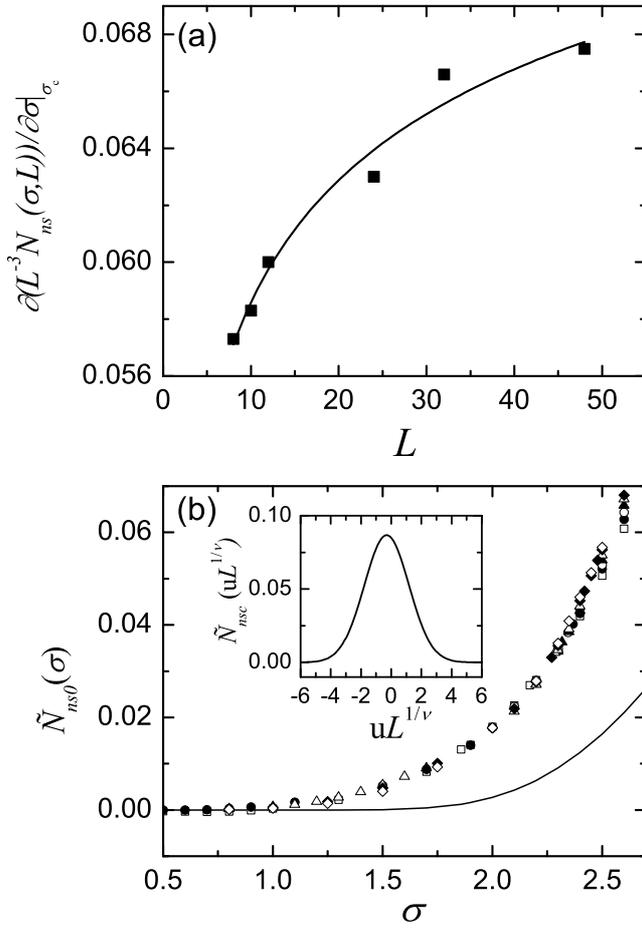
En este caso, el método DFSS no se puede aplicar ya que  $\tilde{N}_{nsc}$  y  $\tilde{N}_{ns0}$  dependen de variables diferentes. En la sección § 4.6 se presentó una primera prueba de la validez de esta hipótesis de escala (ver Fig. 4.15). En particular, en el ajuste representado con una línea continua en Fig. 4.15 se demostró que, al menos para  $\sigma = \sigma_c$ , es apropiada la hipótesis (5.67). Dicho ajuste permite estimar  $\theta_{ns} \simeq 2.02$ ,  $\tilde{N}_{ns0}(0) = 0.028$  y  $\tilde{N}_{nsc}(0) = 0.085$ . Como primera comprobación de que, efectivamente,  $\tilde{N}_{ns0}$  depende únicamente de  $\sigma$ , es interesante estudiar la derivada de  $N_{ns}$  con respecto a  $\sigma$ :

$$\frac{1}{L^3} \left. \frac{\partial N_{ns}(\sigma, L)}{\partial \sigma} \right|_{\sigma_c} = L^{\theta_{nsc} + \frac{1}{\nu} - 3} \left( \frac{\tilde{N}'_{nsc}(0)}{\sigma_c} \right) + \tilde{N}'_{ns0}(\sigma_c). \quad (5.68)$$

La Fig. 5.8(a) demuestra que los datos, correspondientes a la derivada estimada utilizando una fórmula de derivación a dos puntos, son compatibles con el comportamiento (5.68). La línea continua en la figura corresponde a un ajuste de la ley (5.68) fijando  $\theta_{nsc} + 1/\nu - 3 = -0.15$  y dejando dos parámetros libres  $\tilde{N}'_{nsc}(0)$  y  $\tilde{N}'_{ns0}(\sigma_c)$ . Del ajuste se obtiene  $\tilde{N}'_{nsc}(0) = -0.136 \pm 0.011$  y  $\tilde{N}'_{ns0}(\sigma_c) = 0.102 \pm 0.003$ . El aceptable grado de ajuste obtenido es una indicación de la dependencia con las variables  $uL^{1/\nu}$  y  $\sigma$  de las funciones  $\tilde{N}_{nsc}$  y  $\tilde{N}_{ns0}$ , respectivamente.

Con el fin de profundizar más en la naturaleza del número de avalanchas no *spanning*, es necesario introducir alguna hipótesis extra sobre la forma de las funciones de escala. Dado que en el estudio de las avalanchas *spanning* se ha encontrado una dependencia gaussiana casi perfecta de las funciones  $\tilde{N}_1$ ,  $\tilde{N}_2$  y  $\tilde{N}_{3c}$ , resulta lógico proponer una dependencia gaussiana para  $\tilde{N}_{nsc}$  también. Suponiendo una dependencia gaussiana en la que, por consistencia con las estimaciones previas, forzamos  $\tilde{N}_{nsc}(0) = 0.085$  y  $\tilde{N}'_{nsc}(0) = -0.136$ , llegamos a una función de ajuste con un único parámetro libre que debería ser suficiente para escalar los datos de la Fig. 4.14.

El mejor escalado se muestra en la Fig. 5.8(b). Dicho escalado corresponde a  $\tilde{N}_{ns0}(\sigma)$ . La función  $\tilde{N}_{nsc}$  utilizada para obtener el escalado se muestra en el gráfico



**Figura 5.8:** (a) Análisis de la consistencia de la Ec. (5.68). Los puntos corresponden a los datos numéricos y la línea continua es un ajuste por mínimos cuadrados con dos parámetros libres ( $\tilde{N}'_{nsc}(0)$  y  $\tilde{N}'_{ns0}(\sigma_c)$ ), manteniendo  $\theta_{nsc} + 1/\nu = 2.85$  fijado al valor obtenido anteriormente. (b) Colapso que hace emerger el comportamiento de  $\tilde{N}_{ns0}(\sigma)$ . Los distintos símbolos corresponden a los indicados en la leyenda de la Fig. 4.12. La línea continua muestra la cota inferior (4.38) estimada a partir del número de espines que giran independientemente de sus vecinos próximos. El gráfico interno presenta la función gaussiana con la que se ha aproximado  $\tilde{N}_{nsc}(uL^{1/\nu})$  y que ha permitido separar las dos contribuciones a  $N_{ns}$ .

interno de la figura y corresponde a una función gaussiana con amplitud  $a_{nsc} = 0.085$ , posición del pico  $x_{nsc} = -0.6$  y anchura  $w_{nsc} = 1.485$ . Es interesante notar que la posición del pico de esta función de escala tiene lugar para un valor de  $uL^{1/\nu} = x_{nsc} < 0$ . Vemos así que las propiedades de las avalanchas 1D-, 2D- y 3D-*spanning* críticas presentan desplazamientos con  $L$  opuestos a los de las avalanchas no *spanning* críticas.

Para finalizar con el análisis del número de las avalanchas no *spanning*, es instructivo comparar la función  $\tilde{N}_{ns0}(\sigma)$  con la cota inferior que se discutió en § 4.6 [Ec. (4.38)]. Esta cota se ha representado con una línea continua en la Fig. 5.8(b). La diferencia entre las dos curvas, que se hace más notable cuando crece  $\sigma$ , es debida a la existencia de grupos de varios espines (no considerados en el razonamiento excesivamente simplista que lleva a la cota (4.38)) que giran independientemente de sus vecinos, contribuyendo a aumentar el número de avalanchas no *spanning* no críticas.

### 5.4. Distribuciones integradas $D_\alpha(s; \sigma, L)$

Supongamos que las distribuciones de tamaños  $D_\alpha(s; \sigma, L)$  transforman como:

$$D_\alpha(s(b); \sigma(b), L(b); b) = b^{\tau_\alpha d_\alpha} D_\alpha(s; \sigma, L), \tag{5.69}$$

al aplicar la transformación del GR, donde  $\tau_\alpha$  es un exponente que, en principio, depende del tipo de avalancha. La transformación (5.69) es válida únicamente para las distribuciones de avalanchas a las que no contribuye más de un tipo de avalancha, es decir, es aplicable a  $D_1, D_2, D_{3c}, D_{3-}$  y  $D_{nsc}$  pero no lo es a  $D_3, D_{ns}, D_s$  o  $D$ . En principio, el exponente  $\tau_\alpha$  depende del tipo de avalancha pero veremos más adelante que  $\tau_\alpha = 1$  para todos los tipos de avalanchas a los que es aplicable la transformación (5.69), excepto para las avalanchas no *spanning* críticas, en que  $\tau_{nsc} > 1$ .

Utilizando las transformaciones bajo el GR de  $u, L, s$  y  $D_\alpha$ , dadas por las Ecs. (5.1), (5.4), (5.5) y (5.69), respectivamente, se pueden formar los invariantes que se resumen en el cuadro 5.2. En particular, los invariantes  $\mathcal{I}[u, L]$  y  $\mathcal{I}[s, L]$  se introdujeron como invariantes independientes en la sección § 5.1. Sin embargo, a partir de estos dos invariantes se puede formar otro invariante  $\mathcal{I}[u, s]$  que, pese a no ser independiente de los anteriores, es otra posible dependencia a tener en cuenta en las relaciones de escala que se proponen seguidamente.

**Cuadro 5.2:** Resumen de los invariantes formados por todos los posibles pares de magnitudes  $(m_1, m_2)$  entre  $u, s, L$  y  $D_\alpha$ . La combinación apropiada de estos invariantes da lugar a las relaciones de escala involucradas en el comportamiento crítico de  $D_\alpha$  [Ecs. (5.70)–(5.78)].

$m_1$	$m_2$	$\mathcal{I}[m_1, m_2]$	Relaciones
$u$	$L$	$uL^{1/\nu}$	
$s$	$L$	$sL^{-d_\alpha}$	
$u$	$s$	$s^{1/\nu d_\alpha} u$	$(\mathcal{I}[s, L])^{1/\nu d_\alpha} \mathcal{I}[u, L]$
$D_\alpha(s; \sigma, L)$	$L$	$D_\alpha L^{\tau_\alpha d_\alpha}$	
$D_\alpha(s; \sigma, L)$	$s$	$D_\alpha s^{\tau_\alpha}$	$\mathcal{I}[D_\alpha, L] (\mathcal{I}[s, L])^{\tau_\alpha}$
$D_\alpha(s; \sigma, L)$	$u$	$D_\alpha u^{-\tau_\alpha \nu d_\alpha}$	$\mathcal{I}[D_\alpha, L]  \mathcal{I}[u, L] ^{-\tau_\alpha \nu d_\alpha}$

La distribución  $D_\alpha(s; \sigma, L)$  depende de  $s, \sigma$  y  $L$  y, en consecuencia, cada uno de los tres invariantes  $\{\mathcal{I}[D_\alpha, m], m = L, s, u\}$  se puede expresar en función de dos invariantes escogidos entre  $\mathcal{I}[u, L], \mathcal{I}[s, L]$  y  $\mathcal{I}[u, s]$ . Haciendo todas las combinaciones posibles, se pueden escribir las siguientes nueve expresiones generales para  $D_\alpha(s; \sigma, L)$  cerca del

punto crítico:

$$D_\alpha(s; \sigma, L) = L^{-\tau_\alpha d_\alpha} \tilde{D}_\alpha(sL^{-d_\alpha}, uL^{1/\nu}), \quad (5.70)$$

$$D_\alpha(s; \sigma, L) = L^{-\tau_\alpha d_\alpha} \bar{D}_\alpha(s^{1/\nu d_\alpha} u, uL^{1/\nu}), \quad (5.71)$$

$$D_\alpha(s; \sigma, L) = L^{-\tau_\alpha d_\alpha} \hat{D}_\alpha(s^{1/\nu d_\alpha} u, sL^{-d_\alpha}), \quad (5.72)$$

$$D_\alpha(s; \sigma, L) = s^{-\tau_\alpha} \tilde{\tilde{D}}_\alpha(sL^{-d_\alpha}, uL^{1/\nu}), \quad (5.73)$$

$$D_\alpha(s; \sigma, L) = s^{-\tau_\alpha} \bar{\bar{D}}_\alpha(s^{1/\nu d_\alpha} u, uL^{1/\nu}), \quad (5.74)$$

$$D_\alpha(s; \sigma, L) = s^{-\tau_\alpha} \hat{\hat{D}}_\alpha(s^{1/\nu d_\alpha} u, sL^{-d_\alpha}), \quad (5.75)$$

$$D_\alpha(s; \sigma, L) = |u|^{\tau_\alpha \nu d_\alpha} \tilde{\tilde{\tilde{D}}}_\alpha(sL^{-d_\alpha}, uL^{1/\nu}), \quad (5.76)$$

$$D_\alpha(s; \sigma, L) = |u|^{\tau_\alpha \nu d_\alpha} \bar{\bar{\bar{D}}}_\alpha(s^{1/\nu d_\alpha} u, uL^{1/\nu}), \quad (5.77)$$

$$D_\alpha(s; \sigma, L) = |u|^{\tau_\alpha \nu d_\alpha} \hat{\hat{\hat{D}}}_\alpha(s^{1/\nu d_\alpha} u, sL^{-d_\alpha}). \quad (5.78)$$

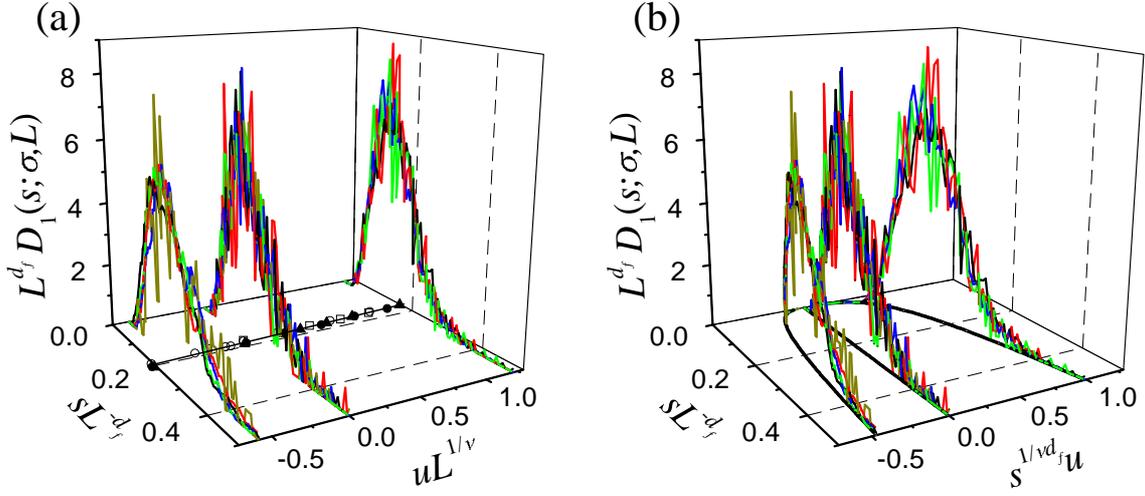
A propósito de la relación de escala (5.59) para  $N_\alpha$  se argumentó que las relaciones de escala en que el prefactor involucra la variable  $u$  no son apropiadas cerca de  $u = 0$  porque aparecen errores estadísticos importantes. Este mismo argumento nos lleva, en el caso de las distribuciones de tamaños, a descartar de nuestro análisis las tres últimas expresiones (5.76)–(5.78). Por otro lado, al intentar probar la validez de las relaciones (5.71) y (5.74), las dos variables independientes de las funciones de escala tienden a cero en las proximidades de  $\sigma_c$ . Como consecuencia, tal colapso no se puede probar para  $u = 0$ . Resumiendo, las expresiones de escalado que nos interesan son las (5.70), (5.72), (5.73) y (5.75).

El comportamiento de las funciones de escala está limitado por las condiciones de normalización de las distribuciones. Siempre que el escalado sea válido en todo el rango de  $s = 1, 2, \dots, L^3$ , de la Ec. (5.70), se deduce:

$$\sum_{s=1}^{L^3} L^{-\tau_\alpha d_\alpha} \tilde{D}_\alpha(sL^{-d_\alpha}, uL^{1/\nu}) = 1. \quad (5.79)$$

Definamos una nueva variable  $x \equiv sL^{-d_\alpha}$  cuyo incremento al variar  $s$  en una unidad es  $\Delta x = L^{-d_\alpha}$ . En términos de la variable  $x$ , la Ec. (5.79) se puede expresar como:

$$L^{-(\tau_\alpha - 1)d_\alpha} \sum_{x=L^{-d_\alpha}}^{L^{3-d_\alpha}} \Delta x \tilde{D}_\alpha(sL^{-d_\alpha}, uL^{1/\nu}) = 1. \quad (5.80)$$



**Figura 5.9:** (a) Escalados correspondientes a  $\tilde{D}_1(sL^{-d_f}, uL^{1/\nu})$ . Los tres cortes de la superficie de escalado corresponden a  $uL^{1/\nu} = 1.22$ ,  $uL^{1/\nu} = 0$  y  $uL^{1/\nu} = -0.58$ . Cada corte contiene 5 líneas (con distintos colores) correspondientes a  $L = 8, 10, 12, 16$  y  $24$ . (b) Representación equivalente de  $\hat{D}_1(s^{1/\nu d_f} u, sL^{-d_f})$ . Las líneas en el plano horizontal indican la proyección de cada uno de los cortes en el plano  $sL^{-d_f} - s^{1/\nu d_f} u$ . Los símbolos en el plano horizontal de (a) muestran el comportamiento del primer momento de la distribución (obtenido en la sección § 5.5) para distintos tamaños que corresponden a los indicados en la leyenda de la Fig. 4.12. La línea continua es una guía visual. Notar que, siguiendo el argumento que se presenta en el texto, se ha asumido  $\tau_1 = 1$ .

Suponiendo que  $L$  es grande y que<sup>9</sup>  $0 < d_\alpha < 3$ ,

$$\Delta x \rightarrow dx, \quad (5.81)$$

$$L^{-d_\alpha} \rightarrow 0, \quad (5.82)$$

$$L^{3-d_\alpha} \rightarrow \infty, \quad (5.83)$$

lo que nos permite aproximar la suma en (5.80) como una integral:

$$L^{-(\tau_\alpha - 1)d_\alpha} \int_0^\infty dx \tilde{D}_\alpha(x, uL^{1/\nu}) = 1. \quad (5.84)$$

Para aquellas distribuciones para las que la integral es finita, es necesario que  $\tau_\alpha = 1$ . Es de esperar que esta condición se pueda aplicar a  $D_1$ ,  $D_2$ ,  $D_{3c}$  y  $D_{3-}$ . Como se puede ver en la Fig. 4.10(c), las distribuciones en estos casos muestran un decaimiento muy marcado tanto en el límite  $s \rightarrow 0$  como en  $s \rightarrow L^3$ . (Notar que

<sup>9</sup>En nuestro caso se cumple esta desigualdad para todos los tipos de avalanchas.

los datos se representan en escalas log-log y que  $D_{3c}$  y  $D_{3-}$  corresponden a los picos izquierdo y derecho de  $D_3$ , respectivamente). En cambio, el exponente  $\tau_{nsc}$  asociado a  $D_{nsc}$  puede ser mayor que 1 ya que esta distribución se puede extender a la región de  $s$  pequeño y no se puede asegurar la convergencia de la integral que aparece en (5.84).

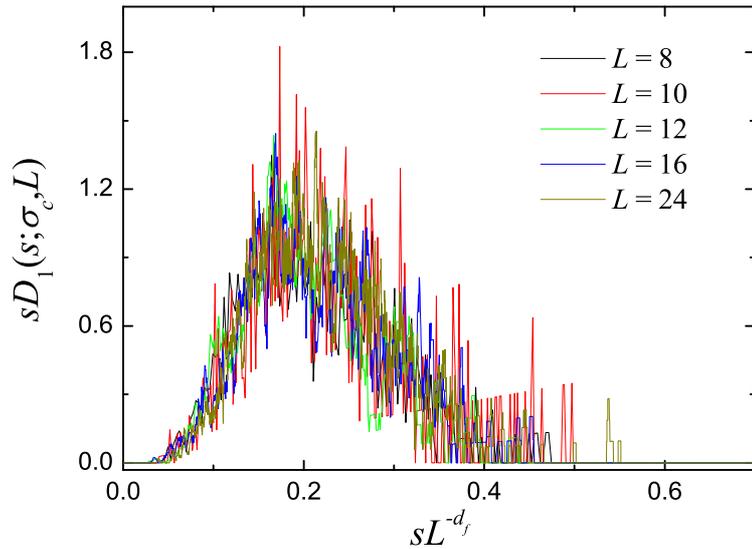
La Fig. 5.9(a) muestra una visión tridimensional de la superficie de escalado correspondiente a  $\tilde{D}_1(sL^{-d_f}, uL^{1/\nu})$  para tres cortes a la variable  $uL^{1/\nu}$  constante tomados en  $uL^{1/\nu} = 1.22$ ,  $uL^{1/\nu} = 0$  y  $uL^{1/\nu} = -0.58$ . Los colapsos de las curvas correspondientes a los distintos tamaños son satisfactorios dentro del error estadístico. El único parámetro libre en estos ajustes es la dimensión fractal  $d_f$ . La mejor estimación para las avalanchas 1D-*spanning*, obtenida del colapso simultáneo de los tres cortes, es  $d_f = 2.78 \pm 0.05$ . El comportamiento presentado para  $\tilde{D}_1$  en la Fig. 5.9(a) es similar al de la función de escala  $\tilde{D}_2$  correspondiente a las avalanchas 2D-*spanning*. En el escalado de  $\tilde{D}_2$ , también se ha considerado  $d_f$  como parámetro libre y los mejores escalados se obtienen para el mismo valor  $d_f = 2.78$  que el obtenido con las avalanchas 1D-*spanning*. Por otro lado, la Fig. 5.9(b) muestra el escalado correspondiente a  $\hat{D}_1(s^{1/\nu d_f} u, sL^{-d_f})$  para los mismos datos que en Fig. 5.9(a) y con  $d_f = 2.78$ . Los colapsos son muy buenos también en esta representación. Para cada corte a  $uL^{1/\nu}$  constante (ver cuadro 5.2)

$$s^{1/\nu d_\alpha} u = \mathcal{I}[u, s] \propto (\mathcal{I}[s, L])^{1/\nu d_\alpha} = (sL^{-d_\alpha})^{1/\nu d_\alpha}, \quad (5.85)$$

y la proyección de los colapsos en el plano  $sL^{-d_f} - s^{1/\nu d_f} u$  es una hipérbola que depende del valor de  $uL^{1/\nu}$ , tal y como se indica en la Fig 5.9(b) con líneas continuas en el plano horizontal.

Hasta este punto se ha comprobado la validez de las hipótesis de escala (5.70) y (5.72), lo que nos ha permitido comprobar la equivalencia entre expresiones de escalado que dependen de invariantes distintos. En ambas hipótesis aparece  $L$  en el prefactor. Sin embargo, no hemos probado aún la validez de las hipótesis (5.73) y (5.75) en que aparece  $s$  en el prefactor. Estas dos expresiones coinciden para  $u = 0$  ( $\sigma = \sigma_c$ ). La Fig. 5.10 muestra el escalado de  $sD_1(s; \sigma, L)$  para  $\sigma = \sigma_c$  utilizando las hipótesis (5.73) y (5.75), es decir, representando  $sD_1(s; \sigma, L)$  en función de  $sL^{d_f}$ . Dentro del error estadístico, el escalado es aceptable en esta representación y se obtiene el mismo valor  $d_f = 2.78$  que en los escalados de la Fig. 5.9. Con respecto a las avalanchas 2D-*spanning*, se obtiene algo similar. En la figura se presenta sólo el escalado que se obtiene para  $u = 0$  porque la intención principal de dicha figura es demostrar que se obtiene un escalado aceptable al utilizar las expresiones de escala con el prefactor  $s^{-\tau_\alpha}$ . Sin embargo, también se obtienen buenos escalados para distintos cortes a  $uL^{1/\nu} \neq 0$

**Figura 5.10:** Escalados correspondientes a  $sD_1(s; \sigma, L)$  en  $\sigma = \sigma_c$  utilizando las hipótesis de escala (5.73) y (5.75). Los distintos colores de las líneas corresponden a los tamaños indicados en la leyenda.



y se podría tener una figura para  $\tilde{D}_\alpha(sL^{-d_\alpha}, uL^{1/\nu})$  y  $\hat{D}_\alpha(s^{1/\nu d_\alpha} u, sL^{-d_\alpha})$  equivalente a la Fig. 5.9.

El análisis de  $D_{3c}$  y  $D_{3-}$  es más complicado. De acuerdo con la relación entre las distribuciones correspondientes (ver cuadro 4.2) y utilizando las hipótesis de escala (5.54), (5.56) y (5.70), obtenemos

$$N_3 D_3(s; \sigma, L) = L^{\theta-d_f} \tilde{N}_{3c}(uL^{1/\nu}) \tilde{D}_{3c}(sL^{-d_f}, uL^{1/\nu}) + L^{-d_{3-}} \tilde{N}_{3-}(uL^{1/\nu}) \tilde{D}_{3-}(sL^{-d_{3-}}, uL^{1/\nu}), \quad (5.86)$$

donde se ha tenido en cuenta que las avalanchas 3D-*spanning* subcríticas tienen una dimensión fractal  $d_{3-}$  y  $\tau_{3-} = 1$ . Desde un punto de vista conceptual, es posible extender el tratamiento DFSS para separar las dos contribuciones que intervienen en la Ec. (5.86). Sin embargo, este tratamiento requiere un gran esfuerzo numérico, cosa que, unida a los errores estadísticos asociados al método, hacen el estudio muy complicado. En la sección siguiente demostraremos que es suficiente con analizar el comportamiento de los momentos de orden  $k$ -ésimo de las distribuciones para obtener los exponentes críticos.

## 5.5. Momentos de las distribuciones integradas $D_\alpha$

A parte de los escalados de las distribuciones  $D_\alpha(s; \sigma, L)$  que, como se puede apreciar en las Figs. 5.9 y 5.10, presentan errores estadísticos importantes, es útil analizar el comportamiento de los momentos  $k$ -ésimos. Utilizando un argumento similar al que

lleva a la Ec. (5.84), se obtiene la siguiente expresión:

$$\langle s^k \rangle_\alpha(\sigma, L) = \sum_{s=1}^{L^3} s^k D_\alpha(s; \sigma, L) = L^{kd_\alpha} \Psi_\alpha^k(uL^{1/\nu}), \quad (5.87)$$

para el  $k$ -ésimo momento de las distribuciones correspondientes a las avalanchas a las que únicamente contribuye un tipo, donde  $\Psi_\alpha^k$  es una función de escala. Como ejemplo de esta ley de escala, en el plano horizontal de la Fig. 5.9(a) se representa el escalado correspondiente al primer momento de  $D_1(s; \sigma, L)$ . En este caso, el escalado se ha obtenido sin ningún parámetro libre.

En la sección § 4.7 se argumentó que la discontinuidad en la magnetización está relacionada [Ec. (4.40)] con la masa total media  $N_\alpha \langle s \rangle_\alpha$  de las avalanchas, de manera que es más conveniente analizar el comportamiento de los productos  $N_\alpha \langle s^k \rangle_\alpha$ . Utilizando las Ecs. (5.49) y (5.87), la hipótesis de escala para este producto es:

$$N_\alpha(\sigma, L) \langle s^k \rangle_\alpha(\sigma, L) = L^{\theta+kd_\alpha} \tilde{N}_\alpha(uL^{1/\nu}) \Psi_\alpha^k(uL^{1/\nu}). \quad (5.88)$$

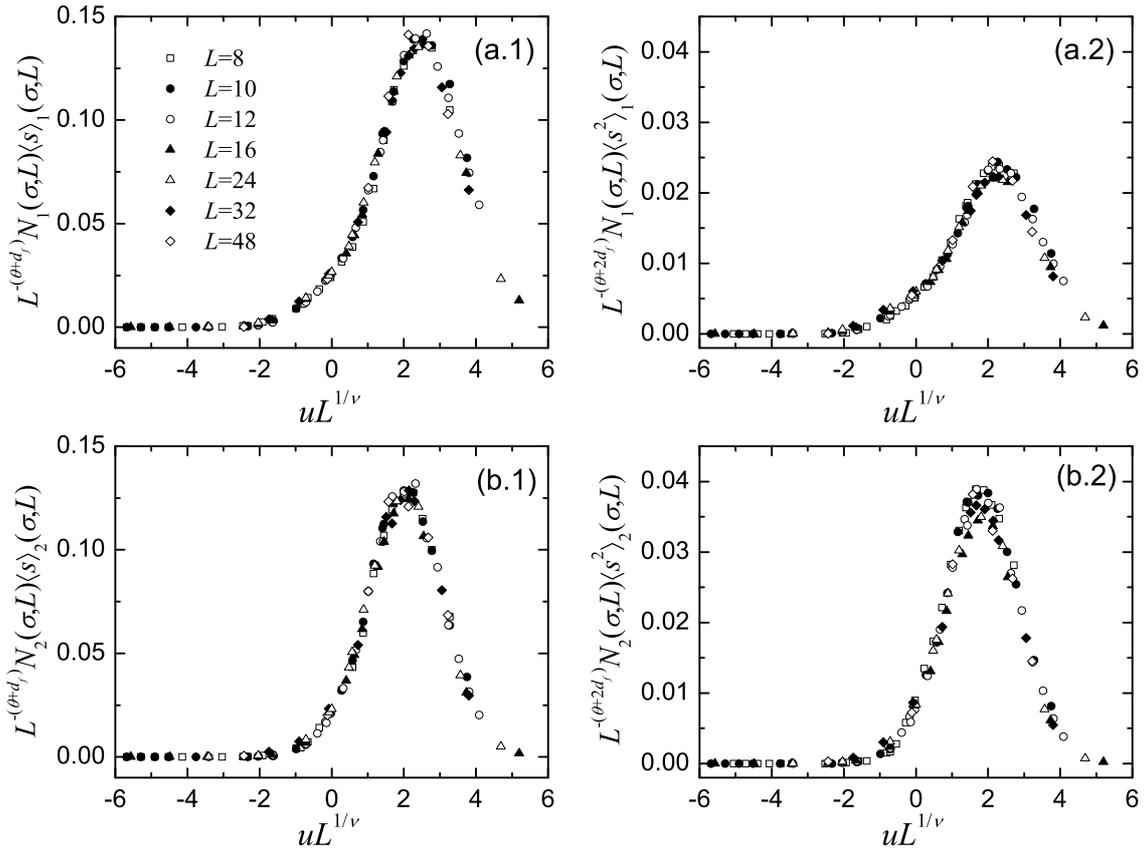
### Avalanchas 1D- y 2D-spanning

En la Fig. 5.11 se muestran los escalados correspondientes al primer y segundo momento de  $D_1$  y  $D_2$ . Es remarcable el hecho de que no se han utilizado parámetros libres para obtener estos escalados, cosa que nos sirve para confirmar la validez de los parámetros obtenidos hasta este punto y, además, demostrar la validez de la hipótesis 5.88. En todos los casos se obtiene una función que presenta un pico para un valor positivo de  $uL^{1/\nu}$ , igual que ocurre con las funciones de escalado  $\tilde{N}_1$  y  $\tilde{N}_2$  [Fig. 5.4 y 5.5]. El valor de la función de escala en el pico es mayor para las avalanchas 2D-spanning que para las 1D-spanning, tanto para  $k = 1$  como para  $k = 2$ . Esto indica que, en promedio, el tamaño de las avalanchas 2D-spanning es mayor que el de las 1D-spanning, cosa que es totalmente lógica.

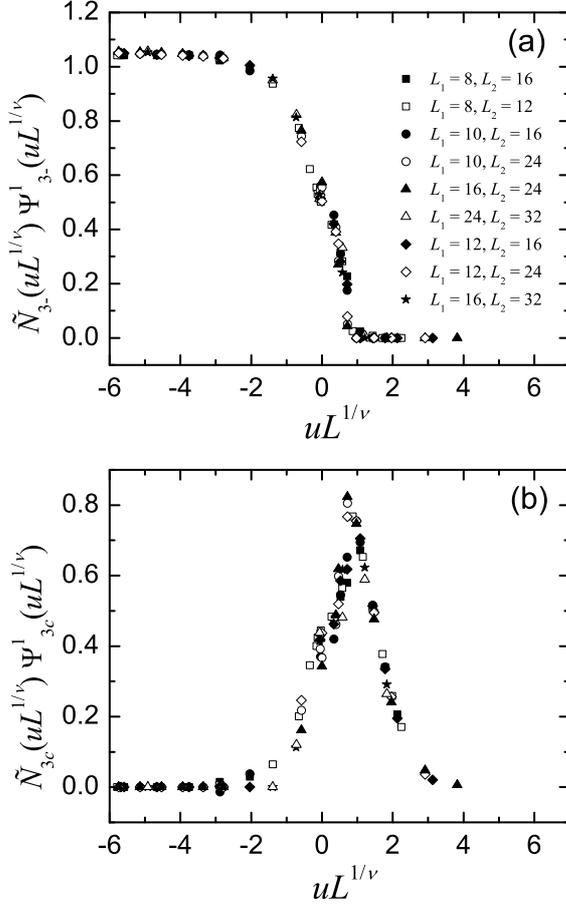
### Avalanchas 3D-spanning. Hiperescala

Por lo que concierne a la hipótesis de escalado de  $N_3 \langle s \rangle_3$ , multiplicando (5.86) por  $s$ , sumando a todo el rango de  $s$  e imponiendo la condición (5.79) que implica  $\tau_{3-} = \tau_{3c} = 1$ , se obtiene

$$\begin{aligned} N_3(\sigma, L) \langle s \rangle_3(\sigma, L) = & L^{\theta+d_f} \tilde{N}_{3c}(uL^{1/\nu}) \Psi_{3c}^1(uL^{1/\nu}) \\ & + L^{d_{3-}} \tilde{N}_{3-}(uL^{1/\nu}) \Psi_{3-}^1(uL^{1/\nu}). \end{aligned} \quad (5.89)$$



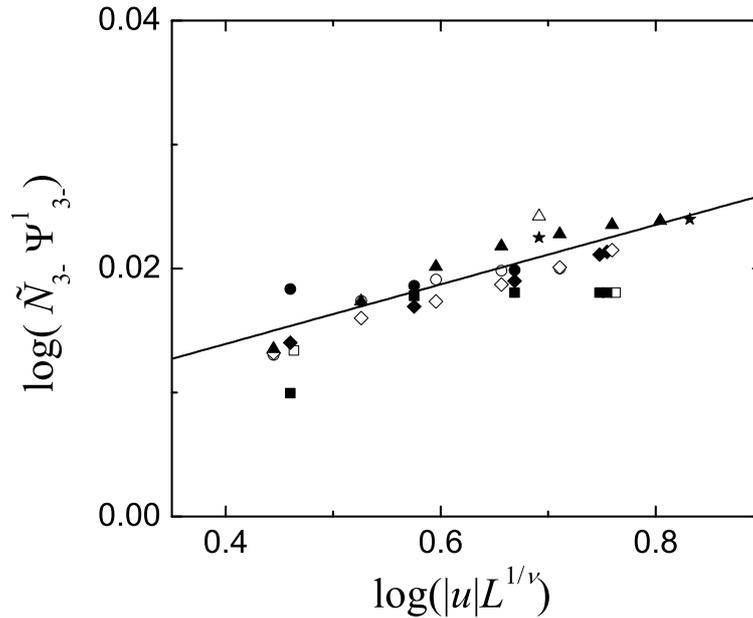
**Figura 5.11:** (a.1) y (a.2) muestran los escalados correspondientes a  $N_1(\sigma, L)\langle s^k \rangle_1(\sigma, L)$  para  $k = 1$  y  $k = 2$ , respectivamente. (b.1) y (b.2) muestran los escalados análogos para las avalanchas 2D-spanning. Los distintos símbolos corresponden a los tamaños indicados en la leyenda situada en (a.1).



**Figura 5.12:** Escalados correspondientes a (a)  $\tilde{N}_{3-}(uL^{1/\nu})\Psi_{3-}^1(uL^{1/\nu})$  y (b)  $\tilde{N}_{3c}(uL^{1/\nu})\Psi_{3c}^1(uL^{1/\nu})$ . La leyenda en (a) indica la correspondencia entre los símbolos y los pares  $(L_1, L_2)$  utilizados para el análisis mediante el método DFSS.

Las dos contribuciones que aparecen en el miembro derecho de esta ecuación se pueden separar utilizando el método DFSS. Las Figs. 5.12(a) y 5.12(b) muestran los escalados correspondientes a  $\tilde{N}_{3c}\Psi_{3c}^1$  y  $\tilde{N}_{3-}\Psi_{3-}^1$ , respectivamente. El único parámetro libre en este escalado es la dimensión fractal de las avalanchas 3D-*spanning* subcríticas  $d_{3-}$ . El valor que lleva a un escalado óptimo es  $d_{3-} = 2.98 \pm 0.02$ . De este valor deducimos que  $d_{3-} > \theta + d_f$ , lo que implica que, según el razonamiento sobre la propagación de errores en el método DFSS [§ 5.2], el escalado de  $\tilde{N}_{3c}\Psi_{3c}^1$  debe presentar un error mayor que el de  $\tilde{N}_{3-}\Psi_{3-}^1$ . En las Figs. 5.12(a) y 5.12(b) vemos que, efectivamente, la predicción del análisis de errores se cumple en este caso. Aunque el error estadístico en la función de escala de la Fig. 5.12(b) es notable, de la forma de dicha función es posible afirmar que, en el límite termodinámico, las avalanchas 3D-*spanning* críticas únicamente contribuyen al primer momento de  $D_3$  en  $\sigma = \sigma_c$ .

Por otro lado, el comportamiento de la función de escala  $\tilde{N}_{3-}\Psi_{3-}^1$  indica que, en el límite termodinámico, las avalanchas 3D-*spanning* subcríticas pueden contribuir al primer momento de  $D_3$  en todo el intervalo  $u < 0$ . Este comportamiento queda claro



**Figura 5.13:** Representación de  $\log(\tilde{N}_{3-}(uL^{1/\nu})\Psi_{3-}^1(uL^{1/\nu}))$  en función de  $\log(|u|L^{1/\nu})$  para los datos correspondientes a  $u < 0$  representados en Fig. 5.12(a). La línea continua corresponde a un ajuste a los datos y demuestra que  $\tilde{N}_{3-}\Psi_{3-}^1 \sim (|u|L^{1/\nu})^{\beta_{3-}}$ , donde  $\beta_{3-} = 0.024$ .

en la Fig. 5.13 ya que, en la región de valores negativos de  $uL^{1/\nu}$ , la función de escala se comporta como

$$\tilde{N}_{3-}(uL^{1/\nu})\Psi_{3-}^1(uL^{1/\nu}) \sim (|u|L^{1/\nu})^{\beta_{3-}} \quad (5.90)$$

con  $\beta_{3-} = 0.024 \pm 0.012$ . Este resultado numérico es compatible con la igualdad

$$\beta_{3-} = \nu(3 - d_{3-}). \quad (5.91)$$

Tal relación entre exponentes es idéntica a la *relación de hiperescala* propuesta en percolación (ver el apéndice B) y, en adelante, nos referiremos a ella con este nombre. El hecho importante es que, al introducir el comportamiento (5.90) en (5.89) y, utilizando la relación de hiperescala, se obtiene

$$N_3\langle s \rangle_3 = |u|^{\beta_{3-}} L^3, \quad (5.92)$$

para  $u < 0$ . Para llegar a esta relación, se ha tenido en cuenta que las avalanchas 3D-*spanning* críticas no contribuyen al momento para  $u \neq 0$ . En la sección siguiente [§ 5.6], veremos que el comportamiento de  $N_3\langle s \rangle_3$  proporcional a  $L^3$  es el responsable de la discontinuidad que presenta el ciclo de histéresis para desórdenes menores que  $\sigma_c$  en el límite termodinámico.

### Avalanchas no *spanning*

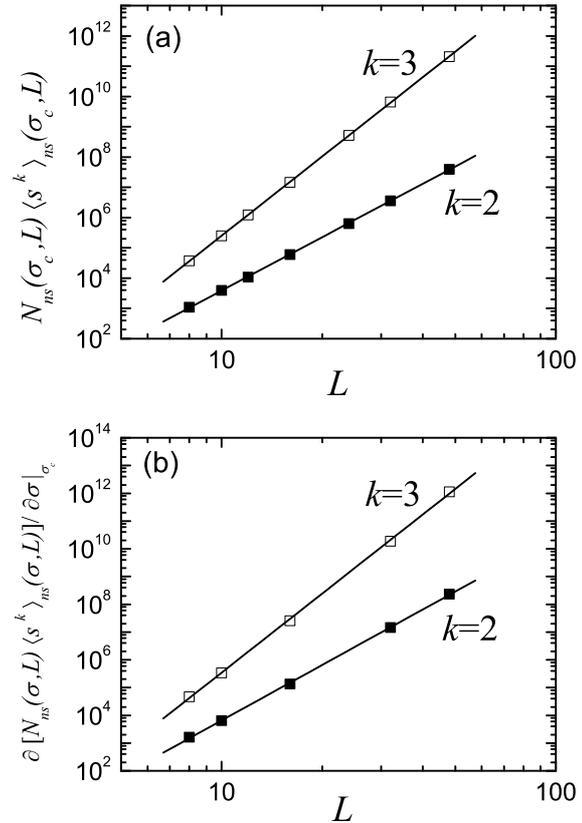
Igual que ocurre en el estudio del número de avalanchas no *spanning* [§ 5.3], el análisis de los momentos asociados a la distribución de tales avalanchas presenta una dificultad mayor. El comportamiento esperado del  $k$ -ésimo momento es:

$$N_{ns}(\sigma, L)\langle s^k \rangle_{ns}(\sigma, L) = L^{\theta_{nsc} + (1+k-\tau_{nsc})d_{nsc}} \tilde{N}_{nsc}(uL^{1/\nu}) \Psi_{nsc}^k(uL^{1/\nu}) + L^3 \tilde{N}_{ns0}(\sigma) \Psi_{ns0}^k(\sigma). \quad (5.93)$$

Como se ha argumentado previamente en referencia al escalado de  $N_{ns}$ , no se puede aplicar el método DFSS para separar las dos contribuciones que aparecen en (5.93) debido a que un término depende de  $uL^{1/\nu}$  y el otro de  $\sigma$ . Además, la posibilidad de utilizar una función de prueba como se ha hecho para  $N_{nsc}$  no es fácil en este caso porque no podemos hacer una hipótesis clara sobre la forma de  $\Psi_{nsc}^k$ . Para solventar en cierta medida estas limitaciones y poder obtener los exponentes  $\tau_{nsc}$  y  $d_{nsc}$  analizaremos la dependencia de los momentos  $k$ -ésimos y sus derivadas con respecto a  $\sigma$  en  $\sigma = \sigma_c$  ( $u = 0$ ). A partir de (5.93), encontramos que la derivada con respecto a  $\sigma$  evaluada en  $\sigma_c$  es:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \sigma} [N_{ns}(\sigma, L)\langle s^k \rangle_{ns}(\sigma, L)] \Big|_{\sigma_c} = & L^{\theta_{nsc} + (1-k-\tau_{nsc})d_{nsc} + 1/\nu} \frac{1}{\sigma_c} \frac{\partial}{\partial (uL^{1/\nu})} \left[ \tilde{N}_{nsc}(uL^{1/\nu}) \langle s^k \rangle_{nsc}(uL^{1/\nu}) \right] \Big|_{u=0} \\ & + L^3 \frac{\partial}{\partial \sigma} [N_{ns0}(\sigma)\langle s^k \rangle_{ns0}(\sigma)] \Big|_{\sigma_c} \end{aligned} \quad (5.94)$$

Los datos para  $k = 2$  y  $k = 3$  se muestran en las Figs. 5.14(a) y 5.14(b) en escalas log-log. Las derivadas se han calculado numéricamente utilizando una fórmula de derivación a dos puntos. Tanto los momentos como sus derivadas presentan un comportamiento que se aproxima muy bien por una ley de potencias, lo que indica que el segundo término del miembro de la derecha de (5.93) no juega un papel importante en  $\sigma_c$ . Esto es debido a que el exponente del primer término es mayor que 3. De hecho, los mejores ajustes (líneas continuas en Fig. 5.14) se obtienen para  $d_{nsc} = d_f = 2.78 \pm 0.05$  y  $\tau_{nsc} = 1.65 \pm 0.02$  con lo cual, el exponente del primer término es 5.8 para  $k = 2$  y 8.5 para  $k = 3$ . En cuanto al exponente del primer término de la derivada, es 6.6 para  $k = 2$  y 9.4 para  $k = 3$ . En consecuencia, como ya habíamos adelantado, el primer término siempre crece con una potencia mayor que 3. Los valores obtenidos de  $d_{nsc}$  y  $\tau_{nsc}$  implican que el exponente del primer término de la derecha en (5.93) vale 2.993, que es muy cercano a 3 y por eso no se han presentado los resultados para



**Figura 5.14:** (a) Comportamiento de  $N_{ns}(\sigma_c, L) \langle s^k \rangle_{ns}(\sigma_c, L)$  en función de  $L$  para  $k = 1$  y  $k = 2$  en escalas log-log. (b) Dependencia con  $L$  de la derivada con respecto a  $\sigma$  en  $\sigma_c$  de las dos magnitudes representadas en (a). Las derivadas se obtienen numéricamente con una fórmula de derivación a dos puntos. Las líneas continuas en (a) corresponden al ajuste de la Ec. (5.93) y, en (b), al ajuste de la Ec. (5.94).

el primer momento, no nos hubiese permitido distinguir entre la contribución de las avalanchas no *spanning* no críticas y la de las avalanchas no *spanning* críticas. Por otro lado, es interesante remarcar en este punto que, para los momentos con  $k > 3$ , se obtienen los mismos exponentes  $d_{nsc}$  y  $\tau_{nsc}$  que los obtenidos estudiando los momentos con  $k = 2$  y  $k = 3$ .

## 5.6. Discontinuidad en la magnetización. Parámetro de orden

En esta sección presentamos el comportamiento de la discontinuidad  $\Delta m$  en la magnetización en los ciclos de histéresis a partir del estudio de las magnitudes integradas. La motivación principal es comprobar si  $\Delta m$  se comporta como un parámetro de orden correcto para la transición que se observa al cruzar  $\sigma_c$  cuando varía el desorden  $\sigma$ . Tal y como se argumentó en la sección § 4.7, solamente las avalanchas *spanning* pueden producir una discontinuidad en la magnetización, de tal manera que nos centraremos en el análisis de  $\Delta m_s(\sigma, L)$  [Ec. (4.41)].

La Fig. 5.15(a) muestra el comportamiento de  $\Delta m_s$  en función  $\sigma$  para varios ta-

maños de sistema. De acuerdo con el análisis de escalado presentado en la sección anterior,  $\Delta m_s$  se comporta como

$$\begin{aligned} \Delta m_s(\sigma, L) &= \Delta m_1(\sigma, L) + \Delta m_2(\sigma, L) + \Delta m_{3c}(\sigma, L) + \Delta m_{3-}(\sigma, L) = \\ &= 2 \left\{ L^{\theta+d_f-3} \left[ \tilde{N}_1(uL^{1/\nu}) \Psi_1(uL^{1/\nu}) + \tilde{N}_2(uL^{1/\nu}) \Psi_2(uL^{1/\nu}) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \tilde{N}_{3c}(uL^{1/\nu}) \Psi_{3c}(uL^{1/\nu}) \right] + L^{d_3-3} \tilde{N}_{3-}(uL^{1/\nu}) \Psi_{3-}(uL^{1/\nu}) \right\}. \end{aligned} \quad (5.95)$$

Esta ecuación refleja el hecho de que, desde el punto de vista de escalado, el comportamiento de  $\Delta m_s$  es mezcla de dos contribuciones que escalan con exponentes diferentes. Por un lado, el término proporcional a  $L^{d_3-3}$  (de (5.91),  $L^{d_3-3} = L^{-\beta_{3-}/\nu}$ ) está ligado a las avalanchas 3D-*spanning* subcríticas y, utilizando (5.91), se puede escribir como  $L^{-\beta_{3-}/\nu} \tilde{N}_{3-} \Psi_{3-}^1$ . Por otro lado, el término proporcional a  $L^{\theta+d_f-3}$  está asociado a la existencia de las avalanchas 1D-, 2D- y 3D-*spanning* críticas. Es posible definir un exponente  $\beta_c$  tal que

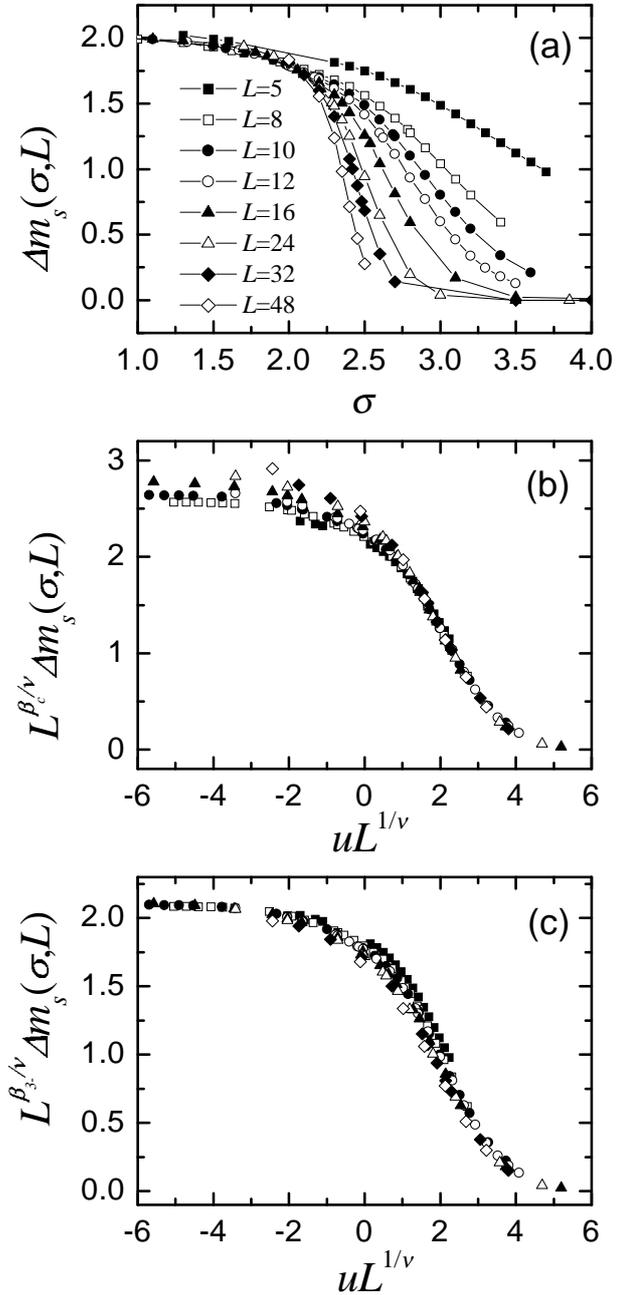
$$\frac{\beta_c}{\nu} \equiv -(\theta + d_f - 3). \quad (5.96)$$

Esta definición nos permite escribir el prefactor  $L^{\theta+d_f-3}$  como  $L^{-\beta_c/\nu}$ , con lo cual deducimos que  $\beta_c$  juega un papel similar en relación a las avalanchas 1D-, 2D- y 3D-*spanning* críticas al que juega  $\beta_{3-}$  para las avalanchas 3D-*spanning* críticas. La definición (5.96) coincide con la relación a la que otros autores se han referido como “*violación de hiperescala*” [217, 222, 240]. De nuestras mejores estimaciones anteriores  $\theta = 0.10 \pm 0.02$ ,  $\nu = 1.2 \pm 0.1$  y  $d_f = 2.78 \pm 0.05$ , obtenemos  $\beta_c = 0.15 \pm 0.08$ .

A parte de que  $d_f \neq d_{3-}$ , la principal diferencia entre la definición de  $\beta_{3-}$  y  $\beta_c$  es que, en  $\beta_c$  interviene el exponente  $\theta$  mientras que no aparece un exponente análogo en  $\beta_{3-}$ . De hecho, se podría haber introducido desde el principio de todo el estudio un exponente  $\theta' \neq 0$  para las avalanchas 3D-*spanning* subcríticas. Sin embargo, la calidad de los escalados correspondientes a los números de avalanchas 3D-*spanning* [Fig. 5.7] indica que un exponente tal que  $\theta'$  es cero o muy pequeño. Además, el análisis de  $\tilde{N}_{3-}$  en el límite  $uL^{1/\nu} \rightarrow -\infty$  muestra que  $\tilde{N}_{3-}$  tiende exponencialmente a 1, lo que da más fuerza a la idea de que no hay necesidad de introducir un exponente  $\theta'$ . Asumir que  $\theta' = 0$  lleva a un comportamiento de  $\tilde{N}_{3-}$  tipo escalón y a la existencia de sólo una avalancha 3D-*spanning* subcrítica.

Introduciendo las ecuaciones (5.91) y (5.96) en (5.95) podemos escribir de forma más clara la ecuación de escalado de  $\Delta m_s$ :

$$\Delta m_s(\sigma, L) = L^{-\beta_c/\nu} \Phi_c(uL^{1/\nu}) + L^{-\beta_{3-}/\nu} \Phi_{3-}(uL^{1/\nu}), \quad (5.97)$$



**Figura 5.15:** (a) Cambio de magnetización  $\Delta m_s$  debido a las avalanchas *spanning* en función de  $\sigma$ . (b) Escalado de  $\Delta m_s$  utilizando el exponente  $\beta_c/\nu$  asociado a la contribución a  $\Delta m_s$  de las avalanchas 1D, 2D- y 3D-*spanning*. Notar la falta de escalado para  $uL^{1/\nu} \leq 0$ . (c) Escalado de  $\Delta m_s$  utilizando el exponente  $\beta_3/\nu$  asociado a la contribución de las avalanchas 3D-*spanning* subcríticas. Notar que, en este caso, no se obtiene un buen escalado en la región  $uL^{1/\nu} \sim 0$ . Los símbolos indican los tamaños de sistema indicados en la leyenda.

donde  $\beta_c/\nu = 0.12$  y  $\beta_{3-}/\nu = 0.02$ .  $\Phi_c$  es una función de escala con forma de pico que viene dada por el doble de la suma de las funciones de escala presentadas en las Figs. 5.11(a.1), 5.11(b.1) y 5.12(b).  $\Phi_{3-}$  corresponde al doble de la función de escala que se presenta en la Fig. 5.12(a). La función de escala  $\Phi_c$  tiende a cero exponencialmente en los límites  $uL^{1/\nu} \rightarrow \pm\infty$ . Por tanto, para cualquier valor de  $\sigma$ , el término  $L^{-\beta_c/\nu}\Phi(uL^{1/\nu})$  tiende a cero en el límite termodinámico y las avalanchas 1D-, 2D- y 3D-*spanning* críticas no contribuyen a  $\Delta m_s$ . En cambio, la función  $\Phi_{3-}$  decae a cero exponencialmente en el límite  $uL^{1/\nu} \rightarrow +\infty$  pero es proporcional a  $(|u|L^{1/\nu})^{\beta_{3-}}$  en el límite  $uL^{1/\nu} \rightarrow -\infty$ , de tal forma que, para  $u < 0$ , las avalanchas 3D-*spanning* subcríticas contribuyen a un cambio de magnetización finito en el límite termodinámico. Finalmente, en el límite termodinámico,

$$\Delta m_s(\sigma) = \begin{cases} |u|^{\beta_{3-}}, & \sigma < \sigma_c, \\ 0, & \sigma \geq \sigma_c, \end{cases} \quad (5.98)$$

de lo se deduce que  $\Delta m_s$  se comporta como un parámetro de orden en una transición de fase continua. Es importante notar que, aunque  $N_{3-}$  también es nulo para  $\sigma > \sigma_c$  y finito para  $\sigma < \sigma_c$ , no se comporta como un parámetro de orden en una transición continua porque no es continuo en  $\sigma_c$ . Por otro lado, desde un punto de vista geométrico, la Ec. 5.98 demuestra que las avalanchas 3D-*spanning* subcríticas, a diferencia del resto de avalanchas *spanning*, ocupan una fracción finita del sistema en el límite termodinámico, cosa que tiene implicaciones importantes que se discutirán en la sección § 5.11.4.

### Efectos de tamaño finito en $\Delta m_s$

Como se ha visto, el primer término del segundo miembro de la igualdad (5.97) no contribuye a  $\Delta m_s$  en el límite termodinámico. Sin embargo, para sistemas finitos, dicho término puede afectar al escalado de los datos cerca de  $\sigma_c$  y hacer imposible la obtención de un buen escalado intentando escalar  $\Delta m_s$  ignorando que tiene dos contribuciones con distintas propiedades. Es decir, no se obtiene un buen escalado al representar  $L^{\beta/\nu}\Delta m_s$ , sea cual sea el valor de  $\beta$ . Las Figs. 5.15(b) y 5.15(c) muestran los intentos de escalado que se obtienen con  $\beta = \beta_c$  y  $\beta = \beta_{3-}$ , respectivamente. En el primer caso ( $\beta = \beta_c$ ), de (5.97) obtenemos

$$L^{\beta_c/\nu}\Delta m_s(\sigma, L) = \Phi_c(uL^{1/\nu}) + L^{(\beta_c - \beta_{3-})/\nu}\Phi_{3-}(uL^{1/\nu}). \quad (5.99)$$

De esta expresión vemos que, para valores grandes de  $L$ , al ser  $\beta_c > \beta_{3-}$ , el segundo término hace que se rompa el escalado en la zona en que  $\Phi_{3-}$  es finita, es decir, el

escalado se rompe para  $uL^{1/\nu} < 0$ . Esto es justo lo que se observa en la Fig. 5.15(b). Además, el escalado se rompe tanto más cuanto mayor es  $L$ . En cambio, en el segundo caso ( $\beta = \beta_{3-}$ ),

$$L^{\beta_{3-}/\nu} \Delta m_s(\sigma, L) = L^{(\beta_{3-} - \beta_c)/\nu} \Phi_c(uL^{1/\nu}) + \Phi_{3-}(uL^{1/\nu}), \quad (5.100)$$

de tal forma que, para valores pequeños de  $L$ , el término  $L^{(\beta_{3-} - \beta_c)/\nu} \Phi_c$  rompe el escalado en la zona en la que  $\Phi_c$  presenta el pico, con lo cual, tal y como se observa en Fig. 5.15(c), para  $uL^{1/\nu} \sim 0$  no se consigue un buen escalado. Sin embargo, para valores suficientemente grandes de  $L$ , el primer término en (5.100) tiende a cero y se consigue un buen escalado. La conclusión fundamental es que, aunque no se separen las distintas contribuciones a  $\Delta m_s$ , se puede conseguir un buen escalado siempre y cuando se intente que los datos escalen para  $u < 0$ . En este caso, obtendremos  $\beta = \beta_{3-}$ , que es la magnitud asociada realmente al parámetro de orden.

## 5.7. Clasificación “directa” de los dos tipos de avalanchas 3D-*spanning*

Utilizando el método DFSS se ha demostrado que la hipótesis de existencia de dos tipos de avalanchas 3D-*spanning* es factible. De cualquier manera, sería deseable encontrar alguna característica física que permitiera distinguir las avalanchas 3D-*spanning* críticas de las 3D-*spanning* subcríticas. Los escalados de las masas totales medias  $N_{3-}\langle s \rangle_{3-}$  y  $N_{3c}\langle s \rangle_{3c}$  de las avalanchas 3D-*spanning* subcríticas y 3D-*spanning* críticas, respectivamente, indican que estos dos tipos de avalanchas se distinguen geoméricamente por su dimensión fractal. Sería lógico pues intentar clasificar cada avalancha 3D-*spanning* por su dimensión fractal. Sin embargo, dado que las avalanchas son objetos fractales aleatorios, sólo se puede calcular su dimensión fractal desde un punto de vista estadístico [235, 236, 238], es decir, estudiando muchas avalanchas del mismo tipo. Este hecho, por sí solo, es suficiente para que sea imposible clasificar individualmente cada una de las avalanchas 3D-*spanning* intentando medir su dimensión fractal pero, además, el tamaño finito de las avalanchas también afecta notablemente a una posible estimación que se pretenda hacer de la dimensión fractal de cada avalancha.

Es necesario entonces buscar otras características, a parte de la dimensión fractal, que distingan las avalanchas 3D-*spanning* críticas de las 3D-*spanning* subcríticas. Los escalados con el método DFSS presentados hasta este punto nos permiten enumerar las siguientes diferencias entre las avalanchas 3D-*spanning* subcríticas y las 3D-*spanning*

críticas:

1. La dimensión fractal de las avalanchas 3D-*spanning* subcríticas ( $d_{3-}$ ) es mayor que la correspondiente a las avalanchas 3D-*spanning* críticas ( $d_f$ ).
2. En el límite termodinámico las avalanchas 3D-*spanning* subcríticas existen para cualquier  $\sigma \leq \sigma_c$  (ver sección § 5.3). Hay infinitas para  $\sigma = \sigma_c$  y sólo una para  $\sigma < \sigma_c$ .

En cambio, las avalanchas 3D-*spanning* críticas existen únicamente para  $\sigma = \sigma_c$  (en el límite termodinámico), desorden para el que hay un número infinito de ellas.

Para sistemas finitos no sólo se observan avalanchas 3D-*spanning* críticas para  $\sigma = \sigma_c$ , sino que este tipo de avalanchas se pueden observar en un cierto intervalo en torno a  $\sigma_c$  cuya longitud decrece con  $L$ . Ahora bien, se observa un número finito de ellas para  $L$  finito. En el intervalo en torno a  $\sigma_c$  en que es posible observar avalanchas 3D-*spanning* críticas no siempre ocurre una avalancha 3D-*spanning* subcrítica sino que, en promedio, se observa menos de una por semiciclo. Esto es debido a que, aunque sea  $\sigma < \sigma_c$ , hay realizaciones de desorden para las no sucede ninguna avalancha 3D-*spanning* subcrítica.

3. La avalancha 3D-*spanning* subcrítica que tiene lugar para  $\sigma < \sigma_c$  ocupa una fracción finita del sistema [Ec. (5.98)] en el límite termodinámico, es decir, tiene densidad finita. En cambio, en  $\sigma = \sigma_c$ , no ocupa una fracción finita.

Las avalanchas 3D-*spanning* críticas (para  $\sigma = \sigma_c$ ) tampoco ocupan una fracción finita en el límite termodinámico.

4. Para sistemas finitos, el tamaño medio de las avalanchas 3D-*spanning* subcríticas es mayor que el correspondiente a las avalanchas 3D-*spanning* críticas, tal y como se puede apreciar en las dos nubes correspondientes a las avalanchas 3D-*spanning* en la Fig. 4.19 o en  $\mathcal{D}_3$  en la Fig. 4.17(c), por ejemplo. Por tanto, la fracción de sistema ocupada por las avalanchas 3D-*spanning* subcríticas es mayor que la ocupada por las avalanchas 3D-*spanning* críticas.

### 5.7.1. Definición de los métodos de clasificación

Basándonos en estas observaciones, se proponen los siguientes métodos fenomenológicos para clasificar cada avalancha 3D-*spanning* individualmente:

Método 1 (M1): La avalancha 3D-*spanning* de mayor tamaño que sucede en un semiciclo se clasifica como subcrítica (observación 4). El resto de avalanchas 3D-*spanning*, si es que suceden, se clasifican como avalanchas 3D-*spanning* críticas. Un dato adicional es el hecho de que, en la mayoría de los casos, la avalancha 3D-*spanning* de mayor tamaño es la última avalancha 3D-*spanning* que se encuentra cuando el campo disminuye desde  $H = +\infty$  hasta  $H = -\infty$ .

Con este método se clasifican  $N_{3c}^{M1}(\sigma, L)$  avalanchas como 3D-*spanning* críticas y  $N_{3-}^{M1}(\sigma, L)$  avalanchas como 3D-*spanning* subcríticas. Lógicamente, se cumple la siguiente relación de cierre:

$$N_3(\sigma, L) = N_{3c}^{M1}(\sigma, L) + N_{3-}^{M1}(\sigma, L). \quad (5.101)$$

Este método clasifica una cierta avalancha 3D-*spanning* como subcrítica siempre que ésta sea la única avalancha 3D-*spanning* que tenga lugar en un semiciclo. Sin embargo, dado que para  $\sigma < \sigma_c$  no siempre ocurre una avalancha 3D-*spanning* subcrítica (observación 2), es razonable pensar que, en algunas realizaciones de desorden con  $\sigma$  cercana a  $\sigma_c$ , pueda suceder sólo una avalancha 3D-*spanning* y ésta sea crítica. En tal caso, el método clasificaría incorrectamente dicha avalancha. Es de esperar pues que el método descrito no clasifique algunas avalanchas correctamente en el intervalo de desórdenes en que coexisten las avalanchas 3D-*spanning* subcríticas y las avalanchas 3D-*spanning* críticas. A partir de este razonamiento, es de esperar que se cumpla la siguiente desigualdad:

$$N_{3-}^{M1}(\sigma, L) \geq N_{3-}(\sigma, L), \quad (5.102)$$

y, en virtud de esta desigualdad y de las relaciones de cierre (5.101) y  $N_3 = N_{3c} + N_{3-}$  [Cuadro 4.2], es de esperar que:

$$N_{3c}^{M1}(\sigma, L) \leq N_{3c}(\sigma, L). \quad (5.103)$$

Método 2 (M2): una avalancha 3D-*spanning* se clasifica como subcrítica únicamente cuando no ocurre otra avalancha *spanning* (de cualquier tipo) en el semiciclo. Si ocurren otras avalanchas *spanning*, la avalancha 3D-*spanning* a clasificar, se clasifica como crítica. Este método se basa en la hipótesis de que las avalanchas 3D-*spanning* subcríticas, cerca, pero por debajo de  $\sigma_c$ , ocupan una fracción importante del sistema y esto dificulta, en cierto modo, la existencia de otras avalanchas *spanning*. Dicho de forma complementaria, si para una cierta realización

de desorden sucede alguna avalancha 1D-*spanning* o 2D-*spanning* o 3D-*spanning* crítica, es difícil que suceda también una avalancha 3D-*spanning* subcrítica. Este comportamiento está de acuerdo con el hecho remarcado para sistemas finitos en la observación 2 (en el intervalo de desórdenes (con  $\sigma < \sigma_c$ ) en que se observan avalanchas 3D-*spanning* críticas, no se observa una avalancha 3D-*spanning* subcrítica para todas y cada una de las realizaciones de desorden).

Con este método se clasifican un total de  $N_{3c}^{M2}(\sigma, L)$  avalanchas como 3D-*spanning* críticas y  $N_{3-}^{M2}(\sigma, L)$  avalanchas como 3D-*spanning* subcríticas. También en este caso se cumple una relación de cierre análoga a (5.101):

$$N_3(\sigma, L) = N_{3c}^{M2}(\sigma, L) + N_{3-}^{M2}(\sigma, L). \quad (5.104)$$

El cuadro 5.3 muestra cómo se clasifica una cierta avalancha 3D-*spanning* de acuerdo con cada uno de los métodos introducidos, dependiendo de si las otras posibles avalanchas *spanning* que suceden en un semiciclo son 1D-, 2D- o 3D-*spanning*. En este último caso se debe tener en cuenta el hecho de que las otras avalanchas 3D-*spanning* que sucedan sean de mayor o menor tamaño que la que se pretende clasificar. El único caso en que difiere la clasificación de los dos métodos es aquel en que la avalancha 3D-*spanning* a clasificar es la de mayor tamaño pero existen otras avalanchas *spanning* (ya sea 1D, 2D o 3D de menor tamaño) en el mismo semiciclo. Este caso de conflicto hace que, en general,  $N_{3c}^{M1} \neq N_{3c}^{M2}$  y  $N_{3-}^{M1} \neq N_{3-}^{M2}$ . De hecho, es fácil convencerse de que  $N_{3c}^{M1} \leq N_{3c}^{M2}$  (se clasifican más avalanchas como 3D-*spanning* críticas con el método 2 que con el método 1) y  $N_{3-}^{M1} \geq N_{3-}^{M2}$  (se clasifican más avalanchas como 3D-*spanning* subcríticas con el método 1 que con el método 2). Para el estudio de algunas magnitudes en que el número de avalanchas de cada tipo no es determinante, es útil introducir un nuevo método de clasificación que llamaremos método intersección (MI) y que consiste en clasificar únicamente aquellas avalanchas que se clasifican igual con los dos métodos propuestos anteriormente (método 1 y método 2). Dado un desorden  $\sigma$  y un tamaño  $L$ , supondremos que este método clasifica un total de  $N_{3c}^{MI}(\sigma, L)$  avalanchas como 3D-*spanning* críticas,  $N_{3-}^{MI}(\sigma, L)$  avalanchas como 3D-*spanning* subcríticas y deja sin clasificar  $N_{NC}^{MI}(\sigma, L)$  avalanchas 3D-*spanning*. La relación de cierre entre estos números de avalanchas y el número total de avalanchas 3D-*spanning*  $N_3$  es:

$$N_3(\sigma, L) = N_{3c}^{MI}(\sigma, L) + N_{3-}^{MI}(\sigma, L) + N_{NC}^{MI}(\sigma, L). \quad (5.105)$$

Por otro lado, de la propia definición del método intersección, es fácil ver que los números de avalanchas 3D-*spanning* de cada tipo que se clasifican con el método 1 se

relacionan con los correspondientes al método intersección como:

$$N_{3c}^{M1}(\sigma, L) = N_{3c}^{MI}(\sigma, L), \tag{5.106}$$

$$N_{3-}^{M1}(\sigma, L) = N_{3-}^{MI}(\sigma, L) + N_{NC}^{MI}(\sigma, L), \tag{5.107}$$

mientras que los números de avalanchas correspondientes a la clasificación con el método 2 y los correspondientes al método intersección, se relacionan entre sí de la siguiente forma:

$$N_{3c}^{M2}(\sigma, L) = N_{3c}^{MI}(\sigma, L) + N_{NC}^{MI}(\sigma, L), \tag{5.108}$$

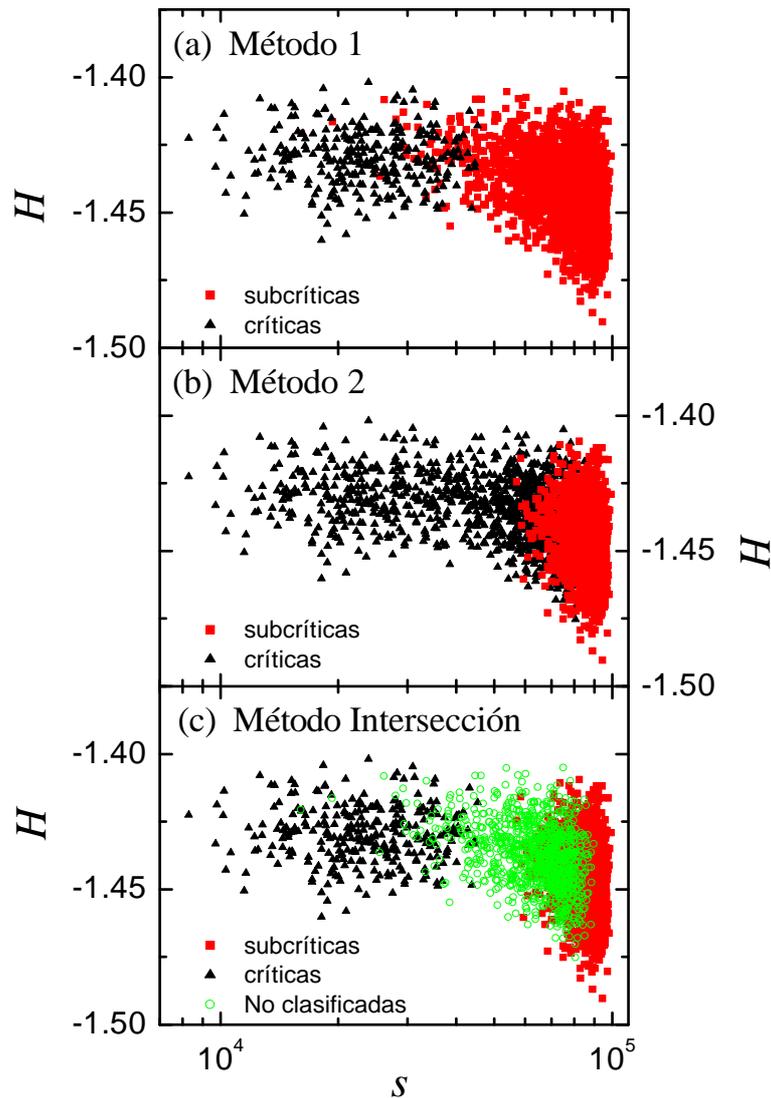
$$N_{3-}^{M2}(\sigma, L) = N_{3-}^{MI}(\sigma, L). \tag{5.109}$$

**Cuadro 5.3:** Resumen de la clasificación de una cierta avalancha 3D-*spanning* de acuerdo con cada uno de los dos métodos propuestos en el texto.

Existen avalanchas 1D-, 2D- o 3D- <i>spanning</i> de menor tamaño	Existe al menos una avalancha 3D- <i>spanning</i> de mayor tamaño	Método 1	Método 2
no	no	3-	3-
sí	no	3-	3c
no	sí	3c	3c
sí	sí	3c	3c

### Ejemplo de clasificación

La Fig. 5.16 muestra un ejemplo de clasificación de las avalanchas 3D-*spanning* utilizando los tres métodos propuestos. Los datos corresponden a un sistema de tamaño  $L = 48$  y con desorden  $\sigma = \sigma_c = 2.21$ . Se puede apreciar que la distribución original  $\mathcal{D}_3$  se separa en dos nubes con los métodos 1 y 2. La nube correspondiente a las avalanchas 3D-*spanning* críticas tiene un aspecto similar a las nubes correspondientes a las distribuciones bivariadas de las avalanchas 1D- y 2D-*spanning* [Figs. 4.19 y 4.20]. El método 2 clasifica como avalanchas 3D-*spanning* críticas un cierto número de avalanchas de gran tamaño, que suceden a campos muy negativos, que el método 1 clasifica como subcríticas. Precisamente, éstas forman parte del conjunto de avalanchas que el método intersección no clasifica en ninguno de los dos tipos.



**Figura 5.16:** Ejemplo de clasificación de la distribución bivariada de las avalanchas 3D-*spanning* en dos nubes, correspondientes a las avalanchas subcríticas y críticas utilizando (a) el método 1, (b) el método 2 y (c) el método intersección, descritos en el texto. Comparando la clasificación del método 1 con la del método intersección, se puede apreciar que, efectivamente, el método 1 clasifica como avalanchas 3D-*spanning* subcríticas aquellas que el método intersección clasifica como subcríticas más las que no se clasifican, de acuerdo con la relación (5.107). Por otro lado, comparando la clasificación obtenida con el método 2 y el método intersección, vemos que se cumple la relación (5.108) ya que el método 2 clasifica como avalanchas 3D-*spanning* críticas aquellas que el método intersección clasifica como críticas más las que no clasifica. Claramente, el número de avalanchas que el método 1 clasifica como subcríticas es mayor que el correspondiente al método 2 ( $N_{3-}^{M1} > N_{3-}^{M2}$ ) y pasa lo contrario con el número de avalanchas críticas ( $N_{3c}^{M1} < N_{3c}^{M2}$ ).

### 5.7.2. Escalado de $N_{3c}$ y $N_{3-}$

Todos los métodos de clasificación presentados son aproximados en el sentido de que existe un cierto número de avalanchas clasificadas incorrectamente en todos ellos. En el método 1, consideraremos que, dado un desorden  $\sigma$  y un tamaño  $L$ , hay un cierto número de avalanchas  $\delta N^{M1}(\sigma, L)$  clasificadas de forma incorrecta, de tal forma que, los números de avalanchas  $N_{3c}^{M1}$  y  $N_{3-}^{M1}$  producto de la clasificación con dicho método se relacionan con los números correctos  $N_{3c}$  y  $N_{3-}$  de la siguiente forma:

$$N_{3c}(\sigma, L) = N_{3c}^{M1}(\sigma, L) + \delta N^{M1}(\sigma, L) \quad (5.110)$$

$$N_{3-}(\sigma, L) = N_{3-}^{M1}(\sigma, L) - \delta N^{M1}(\sigma, L). \quad (5.111)$$

Es evidente que la relación de cierre (5.101) se cumple trivialmente. Definiendo  $\delta N^{M2}$  como el número de avalanchas clasificadas de forma incorrecta por el método 2, se proponen las siguientes relaciones:

$$N_{3c}(\sigma, L) = N_{3c}^{M2}(\sigma, L) + \delta N^{M2}(\sigma, L) \quad (5.112)$$

$$N_{3-}(\sigma, L) = N_{3-}^{M2}(\sigma, L) - \delta N^{M2}(\sigma, L). \quad (5.113)$$

En principio, las funciones  $\delta N^{M1}$  y  $\delta N^{M2}$  son específicas del método de clasificación en cuestión y, en general, no es de esperar que se comporten de la forma habitual en FSS. Dicho de otra forma, no es de esperar que se puedan expresar como el producto de  $L$  elevado a un cierto exponente por una función de  $uL^{1/\nu}$  únicamente. En consecuencia, hacemos la hipótesis de que, al representar  $\delta N^{M1}$  y  $\delta N^{M2}$  en función de  $uL^{1/\nu}$ , se comportan de la siguiente manera:

$$\delta N^{M1}(\sigma, L) = L^{\theta_{M1}} \delta \tilde{N}^{M1}(uL^{1/\nu}, L), \quad (5.114)$$

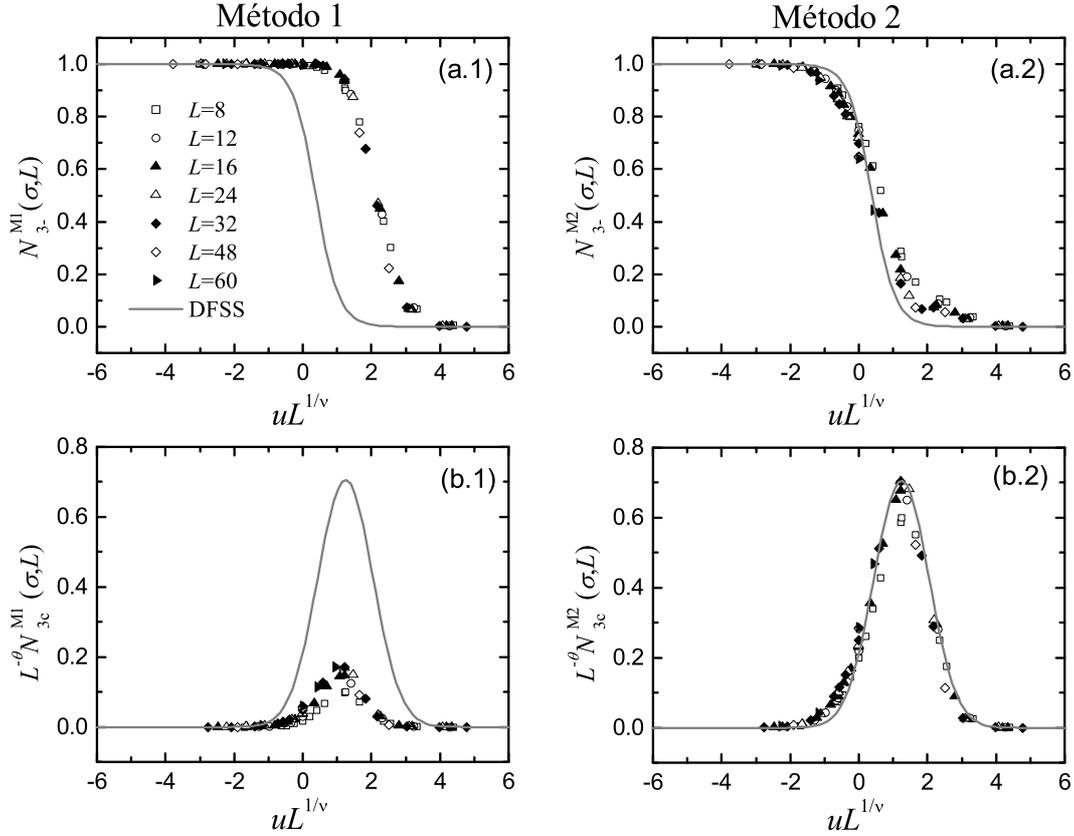
$$\delta N^{M2}(\sigma, L) = L^{\theta_{M2}} \delta \tilde{N}^{M2}(uL^{1/\nu}, L). \quad (5.115)$$

De forma similar a lo que se hizo en la sección § 5.1, se han introducido funciones de “no escalado” que dependen explícitamente de  $L$  y tienen en cuenta la posibilidad de que no se puedan expresar  $\delta N^{M1}$  y  $\delta N^{M2}$  de la forma habitual en FSS.

#### Método 1

La Fig. 5.17 muestra los intentos de escalado para los números obtenidos a partir de los dos métodos. En la Fig. 5.17(a.1) vemos que el número  $N_{3-}^{M1}$  escala razonablemente bien, de lo que deducimos que

$$N_{3-}^{M1}(\sigma, L) \simeq \tilde{N}_{3-}^{M1}(uL^{1/\nu}). \quad (5.116)$$



**Figura 5.17:** Intento de escalado de (a.1)  $N_{3-}^{M1}$ , (b.1)  $N_{3c}^{M1}$ , (a.2)  $N_{3-}^{M2}$  y (b.2)  $N_{3c}^{M2}$  con los exponentes extraídos en las secciones anteriores ( $\theta = 0.1$  y  $\nu = 1.2$ ) y  $\sigma_c = 2.21$ . Las líneas continuas grises en (a.1) y (a.2) corresponden a los ajustes de las funciones de escalado  $\tilde{N}_{3-}(uL^{1/\nu})$  obtenidas utilizando el método DFSS [§ 5.3]. En cambio, las líneas continuas grises en (b.1) y (b.2) corresponden al ajuste de la función de escalado  $\tilde{N}_{3c}(uL^{1/\nu})$  obtenida también utilizando el método DFSS.

Introduciendo esta expresión y la hipótesis de escala para  $N_{3-}$  [Ec. (5.56)] en la ecuación (5.110) vemos que el número de avalanchas clasificadas incorrectamente por el método 1 se puede expresar como:

$$\delta N^{M1}(\sigma, L) \simeq \delta \tilde{N}^{M1}(uL^{1/\nu}) \equiv \tilde{N}_{3-}^{M1}(uL^{1/\nu}) - \tilde{N}_{3-}(uL^{1/\nu}). \quad (5.117)$$

Comparando esta expresión con la hipótesis (5.114) vemos fácilmente que  $\theta_{M1} \simeq 0$  y, además la función de “no escalado”  $\delta \tilde{N}^{M1}$  depende únicamente del invariante  $uL^{1/\nu}$ . Por otro lado, tomando como función de escala correcta  $\tilde{N}_{3-}$  la que se obtuvo utilizando el método DFSS en la sección § 5.3 [línea gris en la Fig. 5.17(a.1)] vemos que, de acuerdo con nuestra predicción [Ec. (5.102)],  $N_{3-}^{M1} > N_{3-}$ , o lo que es lo mismo,  $\delta N^{M1} \geq 0$  para cualquier desorden. Este comportamiento confirma la idea intuitiva de que hay un

cierto número de avalanchas 3D-*spanning* que el método 1 clasifica como subcríticas siendo, en realidad, críticas.

La Fig. 5.17(b.1) muestra el intento de escalado del número de avalanchas 3D-*spanning* que se clasifican como críticas con el método 1. Como se puede apreciar, el escalado no es muy bueno, pero esto es de esperar dado el comportamiento de  $\delta N^{M1}$  analizado en el párrafo anterior. Efectivamente, de las ecuaciones (5.54), (5.117) y (5.111), se encuentra:

$$L^{-\theta} N_{3c}^{M1}(\sigma, L) = \tilde{N}_{3c}(uL^{1/\nu}) - L^{-\theta} \delta \tilde{N}^{M1}(uL^{1/\nu}), \quad (5.118)$$

expresión que demuestra que la contribución negativa  $L^{-\theta} \delta \tilde{N}^{M1}(uL^{1/\nu})$  impide un buen escalado para tamaños no muy grandes. Sin embargo, es previsible que el escalado mejore al considerar valores de  $L$  muy grandes tales que hagan despreciable la contribución  $L^{-\theta} \delta \tilde{N}^{M1}(uL^{1/\nu})$  frente a  $\tilde{N}_{3c}(uL^{1/\nu})$ . En la figura se puede apreciar cómo  $L^{-\theta} N_{3c}^{M1}(\sigma, L)$  crece con  $L$  si mantenemos  $\sigma$  fijada, cosa que concuerda con el hecho de que el escalado será mejor para tamaños de sistema grandes y, además, en este límite se obtendrá la función de escala correcta:  $L^{-\theta} N_{3c}^{M1}(\sigma, L) = \tilde{N}_{3c}(uL^{1/\nu})$ .

## Método 2

Los intentos de escalado correspondientes a los números  $N_{3-}^{M2}$  y  $N_{3c}^{M2}$  obtenidos al clasificar las avalanchas 3D-*spanning* con el método 2 se presentan en las Figs. 5.17(a.2) y 5.17(b.2), respectivamente. Se puede apreciar que, a diferencia de lo obtenido con el método 1, los escalados son similares a los obtenidos con el método DFSS si bien no coinciden perfectamente. Del comportamiento observado, se puede deducir que  $\delta N^{M2}$  es pequeño para todos los tamaños  $L$  simulados pero no es nulo ya que (i) se obtienen desviaciones sistemáticas con respecto a las funciones de escala obtenidas con el método DFSS y (ii) se observa una cierta dependencia con  $L$  en los intentos de escalado. A partir de (5.113) y (5.56) se obtiene:

$$\delta N^{M2}(\sigma, L) = N_{3-}^{M2}(\sigma, L) - \tilde{N}_{3-}(uL^{1/\nu}). \quad (5.119)$$

Calculando  $\delta N^{M2}$  de esta expresión y los datos que se presentan en la Fig. 5.17(a.2), dentro del error estadístico, se obtiene básicamente el siguiente comportamiento dependiendo del signo de  $uL^{1/\nu}$ :

- $uL^{1/\nu} < 0 \Rightarrow \delta N^{M2} < 0$ ;  $\forall L$ : en la región con  $\sigma < \sigma_c$ , el método 2 clasifica como avalanchas 3D-*spanning* críticas algunas que son subcríticas.

- $uL^{1/\nu} > 0 \Rightarrow \delta N^{M2} > 0$ ;  $\forall L$ : al contrario del caso anterior, para  $\sigma > \sigma_c$ , hay un cierto número de avalanchas 3D-*spanning* subcríticas que el método 2 clasifica erróneamente como críticas.

Para  $uL^{1/\nu} = 0$  ( $\sigma = \sigma_c$ ), hay una dispersión importante en torno a  $\delta N^{M2} = 0$ . Sin embargo, parece ser que la tendencia más clara es a clasificar erróneamente algunas avalanchas subcríticas como críticas.

Aunque ninguno de los métodos de clasificación propuestos es exacto, a partir de los resultados presentados en las Figs. 5.7 (método DFSS) y 5.17 (métodos 1 y 2) queda claro que las avalanchas se clasifican bien para  $uL^{1/\nu} \lesssim -2$  y  $uL^{1/\nu} \gtrsim 4$ . Concluimos pues que las propiedades relacionadas con las avalanchas 3D-*spanning* subcríticas deducidas a partir del comportamiento asintótico para  $uL^{1/\nu} \rightarrow -\infty$  (ver, por ejemplo, la Fig. 5.13 y la Fig. 5.19 en la sección § 5.8) no están afectadas por el método de clasificación que se utilice puesto que se obtienen del comportamiento en una región en que, claramente,  $uL^{1/\nu} < -2$ .

### Método intersección

Hasta este punto, se ha discutido la validez de los métodos 1 y 2 pero, a parte de estos dos métodos, también se ha introducido el método intersección que no clasifica las avalanchas en las que la clasificación con los métodos 1 y 2 no coincide. Este método asegura que las avalanchas que sí se clasifican son realmente del tipo del que se han clasificado, al menos con respecto a los criterios de los métodos 1 y 2. Sin embargo, debido precisamente a que el método no clasifica un cierto número de avalanchas ( $N_{NC}^{MI}$  avalanchas por ciclo), no es apropiado para el estudio de los números de avalanchas 3D-*spanning* de cada tipo y las magnitudes que, de una forma u otra, involucran dichos números. A partir de las igualdades (5.106) y (5.109) resulta claro que el intento de escalado correspondiente a  $N_{3c}^{MI}$  es exactamente el mismo que el de  $N_{3c}^{M1}$  [Fig. 5.17(b.1)] y el asociado a  $N_{3-}^{MI}$  coincide con el obtenido para  $N_{3-}^{M2}$  [Fig. 5.17(a.2)]. Dado que  $N_{3-}^{MI} = N_{3-}^{M2}$  coincide razonablemente bien con  $N_{3-}$  (obtenido con el método DFSS) y que  $N_{3c}^{MI} = N_{3c}^{M1}$  difiere bastante de  $N_{3c}$ , de la relación de cierre (5.105) es fácil convencerse de que la mayor parte de las avalanchas no clasificadas por el método intersección son, realmente, avalanchas 3D-*spanning* críticas.

### Condiciones de aplicabilidad del método intersección

El método intersección es apropiado para el estudio de magnitudes que cumplan las dos condiciones siguientes:

1. Las magnitudes deben estar relacionadas con propiedades de las avalanchas individualmente y no deben depender del número de avalanchas de cada tipo que se producen por ciclo. Esta condición es necesaria porque el método intersección desprecia un cierto número de avalanchas por ciclo  $N_{NC}^{MI}$ .
2. El hecho de no incluir  $N_{NC}^{MI}$  avalanchas por ciclo en la estadística no debe afectar notablemente a la estadística de la magnitud que se pretende estudiar.

La primera condición excluye los números de avalanchas que suceden por ciclo  $N_\alpha(\sigma, L)$  así como las densidades de avalanchas  $n_\alpha(H; \sigma, L)$ . Para los números  $N_{3-}$  y  $N_{3c}$ , hemos visto que el mejor método de clasificación es el método 2 y, como consecuencia, será también éste el que se utilice para escalar las densidades de avalanchas  $n_{3-}$  y  $n_{3c}$  en la sección § 5.9. En cambio, los campos medios  $\langle H \rangle_{3-}$  y  $\langle H \rangle_{3c}$  a los que se concentran los dos tipos de avalanchas 3D-*spanning* [§ 5.8], así como la masa de las avalanchas utilizada para la obtención directa de la dimensión fractal asociada a cada uno de los tipos de avalanchas 3D-*spanning* [§ 5.10], no dependen del número de avalanchas por ciclo  $N_\alpha(\sigma, L)$  y, como consecuencia, cumplen la primera de las condiciones. Como veremos en las secciones correspondientes, es de esperar que estas magnitudes también cumplan la segunda de las condiciones, de tal forma que se utilizará el método intersección para el estudio de los campos  $\langle H \rangle_{3-}$  y  $\langle H \rangle_{3c}$  y para la obtención de la dimensión fractal de las avalanchas.

## 5.8. Campo medio al que suceden las avalanchas y desviación estándar

### 5.8.1. Relaciones de escala de $\langle H \rangle_\alpha$

La hipótesis general de escala de las distribuciones bivariadas  $\mathcal{D}_\alpha(s, H; \sigma, L)$  involucra los tres invariantes definidos en las Ecs. (5.7)–(5.9). Una posible forma de escribir esta hipótesis de escala es:

$$\mathcal{D}_\alpha(s, H; \sigma, L) = L^{-\tau_\alpha d_\alpha + 1/\mu} \hat{\mathcal{D}}_\alpha(sL^{-d_\alpha}, uL^{1/\nu}, vL^{1/\mu}), \quad (5.120)$$

donde las variables  $u$  y  $v$  vienen dadas por las Ecs. (5.36) y (5.37), respectivamente. La función de escala  $\hat{\mathcal{D}}_\alpha$  cumple

$$H_c \int_{-\infty}^{\infty} d(vL^{1/\mu}) \hat{\mathcal{D}}_\alpha(sL^{-d_\alpha}, uL^{1/\nu}, vL^{1/\mu}) = \tilde{D}_\alpha(sL^{-d_\alpha}, uL^{1/\nu}), \quad (5.121)$$

puesto que la integral a  $H$  de las distribuciones bivariadas  $\mathcal{D}_\alpha$  debe ser  $D_\alpha$  [Cuadro 4.2] (se ha utilizado el hecho de que  $D_\alpha$  escala de acuerdo con la hipótesis (5.70)).

Un análisis detallado de escala basado en la hipótesis (5.120) implica necesariamente trabajar con representaciones tridimensionales de las distribuciones bivariadas, cosa que no es fácilmente viable. Una posibilidad para comprobar, en parte, la validez de esta hipótesis sería escalar las proyecciones (nubes de puntos presentadas en la sección § 4.8) en los planos  $sL^{-d_\alpha}-vL^{1/\mu}$  para conjuntos de datos a  $uL^{1/\mu}$  fijado. Otra posibilidad consiste en analizar algunas magnitudes relacionadas con  $\mathcal{D}_\alpha$  pero más sencillas que la distribución bivariada. En particular, en esta sección nos centraremos en el análisis de los campos medios  $\langle H \rangle_\alpha(\sigma, L)$  asociados a las avalanchas 1D-, 2D- y 3D-*spanning* y, en la sección siguiente, analizaremos las distribuciones marginales  $n_\alpha(H; \sigma, L)/N_\alpha(\sigma, L)$  asociadas a estas mismas avalanchas.

En la sección § 4.9 se presentó la dependencia con  $\sigma$  y  $L$  del campo al que, en promedio, sucede cada uno de los tipos de avalanchas *spanning* que se pueden distinguir directamente de las simulaciones. Es decir, se presentaron los campos  $\langle H \rangle_1(\sigma, L)$ ,  $\langle H \rangle_2(\sigma, L)$  y  $\langle H \rangle_3(\sigma, L)$ . En particular, se estudió con más detalle el comportamiento de dichos campos en función de  $L$  para  $\sigma = \sigma_c$  [Fig. 4.21]. A partir de estos datos se propuso de forma fenomenológica el comportamiento tipo ley de potencias dado por la Ec. (4.44) que involucra el campo crítico  $H_c$  y el exponente crítico  $\mu$ . En el presente capítulo deduciremos el comportamiento dado por la Ec. (4.44) como un caso particular del comportamiento de  $\langle H \rangle_\alpha(\sigma, L)$  dentro del esquema del FSS. Para obtener la hipótesis de escala de  $\langle H \rangle_\alpha(\sigma, L)$  es necesario partir de la propia definición de los campos medios dada por la Ec. (4.42). Sin embargo, puesto que las densidades  $n_\alpha(H; \sigma, L)$  aparecen en la Ec. (4.42), es necesario proponer una hipótesis de escala para dichas densidades antes de poder obtener la hipótesis de escala de  $\langle H \rangle_\alpha$ . A partir de la definición de  $n_\alpha$  [Ec. (4.34)], de la hipótesis de escala para  $\mathcal{D}_\alpha$  [Ec. (5.120)] y de la hipótesis de escala de  $N_\alpha$  [Ec. (5.51)] es fácil demostrar que

$$n_\alpha(H; \sigma, L) = L^{(1-\tau_\alpha)d_\alpha + \theta_\alpha + 1/\mu} \hat{n}_\alpha(uL^{1/\nu}, vL^{1/\mu}). \quad (5.122)$$

En este caso, necesariamente se debe cumplir la siguiente relación entre  $\hat{n}_\alpha(uL^{1/\nu}, vL^{1/\mu})$  y  $\tilde{N}_\alpha(uL^{1/\nu})$ :

$$H_c \int_{-\infty}^{\infty} d(vL^{1/\mu}) \hat{n}_\alpha(uL^{1/\nu}, vL^{1/\mu}) = \tilde{N}_\alpha(uL^{1/\nu}), \quad (5.123)$$

para que la integral de  $n_\alpha$  a  $H$  sea igual a  $N_\alpha$  [cuadro 4.2], suponiendo la hipótesis de escala (5.51) para  $N_\alpha$ . En la sección § 5.9 se comprobará la validez de la hipótesis de escala (5.122).

Introduciendo ahora la hipótesis de escala (5.122) para  $n_\alpha$  y la correspondiente a  $N_\alpha$  [Ec. (5.51)] en la Ec. (4.42) y utilizando la relación (5.37), obtenemos

$$H_c(1 - B'u_1) - \langle H \rangle_\alpha(\sigma, L) = L^{-1/\mu} \hat{h}_\alpha(uL^{1/\nu}), \quad (5.124)$$

para las avalanchas *spanning* ( $\tau_\alpha = 1$ ), que es en las que nos vamos a centrar. La función de escala  $\hat{h}_\alpha$  se define como

$$\hat{h}_\alpha(uL^{1/\nu}) \equiv H_c^2 \int_{-\infty}^{\infty} dy y \frac{\hat{n}_\alpha(uL^{1/\nu}, y)}{\tilde{N}_\alpha(uL^{1/\nu})}. \quad (5.125)$$

Es útil definir un “campo crítico efectivo”  $H_c^*(\sigma)$  que depende del desorden como:

$$H_c^*(\sigma) \equiv H_c(1 - B'u_1). \quad (5.126)$$

Evidentemente,  $H_c^*(\sigma)$  coincide con  $H_c$  para  $\sigma = \sigma_c$ .

El comportamiento tipo ley de potencias que se asumió en la Ec. (4.44) para  $\sigma = \sigma_c$  se recupera directamente para las avalanchas 1D- y 2D-*spanning* haciendo  $C_\alpha = \hat{h}_\alpha(0)$  en (5.126). Una vez más, el caso de las avalanchas 3D-*spanning* es más complicado ya que en el promedio  $\langle H \rangle_3$  intervienen tanto las avalanchas 3D-*spanning* críticas como las 3D-*spanning* subcríticas. En general,

$$\langle H \rangle_3(\sigma, L) = \frac{N_{3c}(\sigma, L) \langle H \rangle_{3c}(\sigma, L) + N_{3-}(\sigma, L) \langle H \rangle_{3-}(\sigma, L)}{N_{3c}(\sigma, L) + N_{3-}(\sigma, L)}. \quad (5.127)$$

Introduciendo en esta expresión las hipótesis de escala para los números  $N_{3c}$ ,  $N_{3-}$  [Ecs. (5.54) y (5.56), respectivamente] así como las correspondientes a los campos medios dadas por la Ec. (5.124), se encuentra

$$H_c - \langle H \rangle_3(\sigma_c, L) = L^{-1/\mu} \left[ \frac{\tilde{N}_{3c}(0) \hat{h}_{3c}(0) + L^{-\theta} \tilde{N}_{3-}(0) \hat{h}_{3-}(0)}{\tilde{N}_{3c}(0) + L^{-\theta} \tilde{N}_{3-}(0)} \right] \quad (5.128)$$

para  $\sigma = \sigma_c$ . Como se puede ver, para valores finitos de  $L$ , no se recupera una expresión totalmente idéntica a la dada por la Ec. (4.44) ya que el factor que multiplica a  $L^{-1/\mu}$  en el miembro derecho de la Ec. (5.128) depende de  $L$ . Haciendo un desarrollo de Taylor de dicho factor en torno a  $L^{-\theta} = 0$  se obtienen correcciones a la ley fenomenológica propuesta en la sección § 4.9:

$$H_c - \langle H \rangle_3(\sigma_c, L) = L^{-1/\mu} \hat{h}_{3c}(0) \left[ 1 + \frac{\tilde{N}_{3-}(0)}{\tilde{N}_{3c}(0)} \left( \frac{\hat{h}_{3-}(0)}{\hat{h}_{3c}(0)} - 1 \right) L^{-\theta} + \mathcal{O}(L^{-2\theta}) \right] \quad (5.129)$$

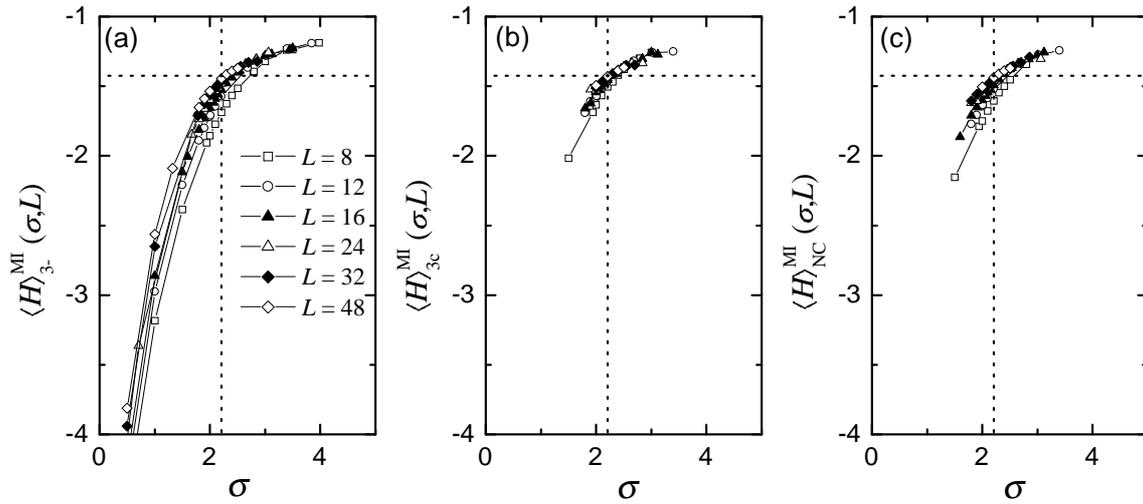
Las correcciones a la ley (4.44) tienden a cero cuando  $L \rightarrow \infty$  y, dentro de los errores estadísticos, se pueden despreciar en la práctica para los tamaños de sistema que se

han simulado. Finalmente, llegamos a la conclusión de que la ley (4.44) es válida a primer orden haciendo la identificación  $C_3 = \hat{h}_{3c}(0)$ , lo que implica que la contribución predominante a  $\langle H \rangle_3(\sigma_c, L)$  es debida a las avalanchas 3D-*spanning* críticas. Si esto es así, ¿es lícito, a partir de los ajustes presentados en la Fig. 4.21, afirmar que el exponente  $\mu$  asociado a las avalanchas 3D-*spanning* críticas es igual al exponente análogo asociado a las avalanchas 3D-*spanning* subcríticas?. Ciertamente, no está totalmente justificada tal afirmación pero, como veremos en los escalados que se presentan en esta sección y en la siguiente, tanto las avalanchas 3D-*spanning* críticas como las subcríticas, se pueden describir con el mismo exponente  $\mu$ , dentro del error estadístico. De hecho, esta es la razón por la que, desde el principio de este capítulo, se ha supuesto que el exponente  $\mu$  es independiente del tipo de avalanchas, igual que sucede con el exponente  $\nu$ . Además, hay motivos geométricos importantes por los que estos dos exponentes deben ser independientes del tipo de avalancha (este punto se discute en la sección § 5.11.5).

### 5.8.2. Escalado de $\langle H \rangle_\alpha$ , $\alpha = 1, 2, 3c, 3-$

Para la obtención de los campos  $\langle H \rangle_{3c}(\sigma, L)$  y  $\langle H \rangle_{3-}(\sigma, L)$  se ha utilizado el *método intersección* ya que, como se ha argumentado en la sección § 5.7, estos promedios cumplen trivialmente la primera de las condiciones para que el método intersección sea aplicable y, en vistas de los datos representados en la Fig. 5.18, parece razonable esperar que se cumpla la segunda de las condiciones de forma satisfactoria. En la Fig. 5.18 se muestran, para distintos tamaños, los campos medios  $\langle H \rangle_{3c}(\sigma, L)$  y  $\langle H \rangle_{3-}(\sigma, L)$  obtenidos con el método intersección, así como el campo medio  $\langle H \rangle_{NC}^{MI}(\sigma, L)$ , asociado a las avalanchas que el método intersección no clasifica. En esta figura se aprecia que el campo  $\langle H \rangle_{NC}^{MI}$  tiene unos valores similares a los de los campos  $\langle H \rangle_{3c}(\sigma, L)$  y  $\langle H \rangle_{3-}(\sigma, L)$  y, por tanto, es de esperar que el hecho de no utilizar en la estadística las avalanchas no clasificadas no afectará notablemente a los promedios  $\langle H \rangle_{3c}(\sigma, L)$  y  $\langle H \rangle_{3-}(\sigma, L)$ . Esto confirma, en cierto modo, que la segunda de las condiciones de aplicabilidad del método intersección se cumpla satisfactoriamente ya que las avalanchas no consideradas en la estadística se comportan de forma similar a las que sí se consideran y, por tanto, el efecto de no considerarlas no puede ser muy notable.

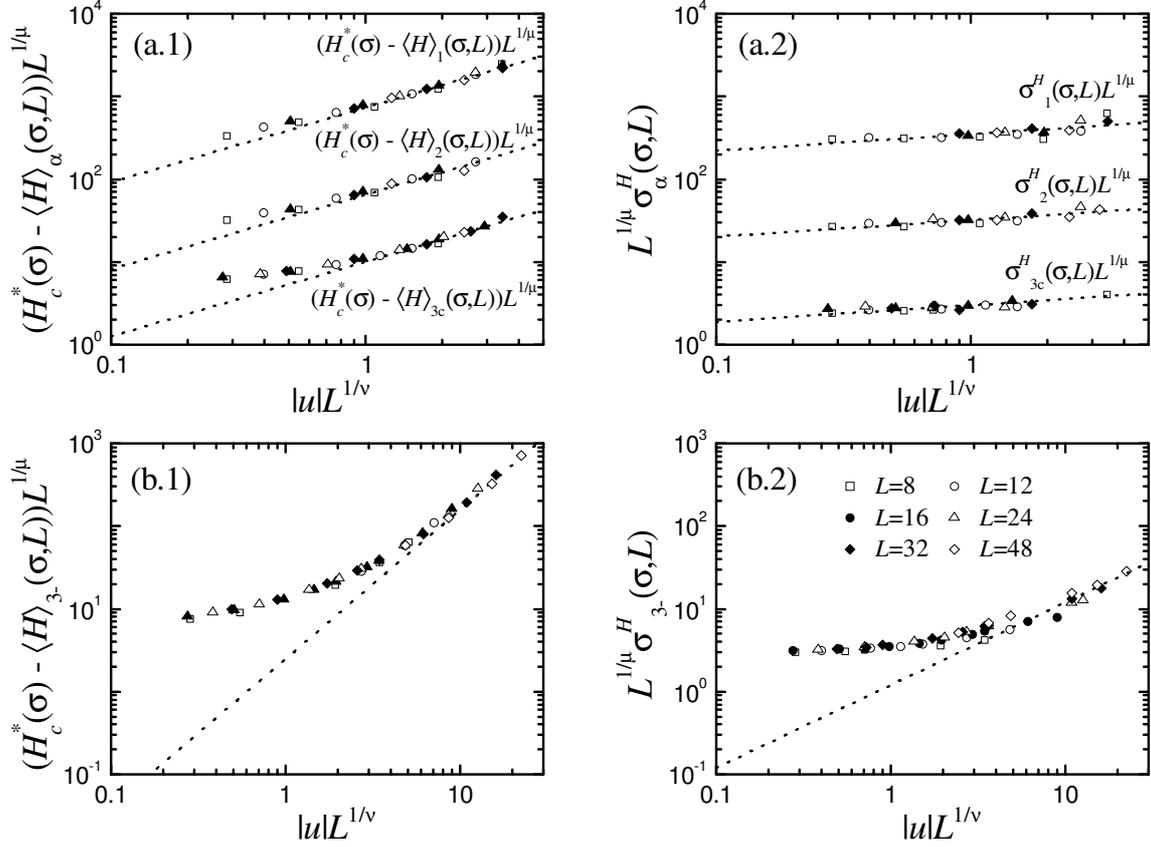
La Fig. 5.19 [gráficos (a.1) y (b.1)] muestra los escalados correspondientes a los campos medios a los que suceden los distintos tipos de avalanchas *spanning* para  $\sigma \leq \sigma_c$ , según la hipótesis de escala (5.124). Tal y como se ha visto en secciones anteriores [§ 5.3 y § 5.7], en el límite termodinámico no ocurren avalanchas *spanning*



**Figura 5.18:** Campos (a)  $\langle H \rangle_{3-}^{MI}(\sigma, L)$ , (b)  $\langle H \rangle_{3c}^{MI}(\sigma, L)$  y (c)  $\langle H \rangle_{NC}^{MI}(\sigma, L)$  obtenidos al clasificar las avalanchas 3D-*spanning* con el método intersección. Los símbolos corresponden a los valores de  $L$  indicados en la leyenda. La línea punteada horizontal corresponde a  $H_c = -1.425$  y la vertical a  $\sigma_c = 2.21$ .

de ningún tipo para  $\sigma > \sigma_c$  y, de acuerdo con este hecho, tiene sentido ceñirse a la zona con  $\sigma \leq \sigma_c$ . Hay que notar, sin embargo, que en sistemas finitos suceden avalanchas *spanning* para desórdenes mayores que  $\sigma_c$  y, de hecho, los escalados que se presentan aquí para  $\sigma \leq \sigma_c$  también se pueden extender a la zona con  $\sigma > \sigma_c$  utilizando el mismo conjunto de parámetros si bien, tales escalados no dan mucha información. Por otro lado, las avalanchas 1D-, 2D- y 3D-*spanning* críticas existen sólo para  $\sigma = \sigma_c$  y, en consecuencia, estudiar el escalado de sus campos medios para  $\sigma \neq \sigma_c$  es útil, básicamente, para confirmar que el valor de los exponentes encontrados en secciones anteriores para estas avalanchas son válidos. Recordemos que la única estimación que se tiene hasta este punto del exponente  $\mu$  proviene de los ajustes representados en la Fig. 4.21.

Los escalados representados en la Fig. 5.19 se han obtenido fijando  $\nu$ ,  $\mu$ ,  $\sigma_c$ ,  $H_c$  y  $A$  a los valores obtenidos en secciones anteriores ( $1/\nu = 1.2$ ,  $1/\mu = 1.5$ ,  $\sigma_c = 2.21$ ,  $H_c = -1.425$  y  $A = -0.2$ ) y considerando  $B'$  como único parámetro libre. Los mejores escalados se obtienen para  $B' = 0.25 \pm 0.10$ . Es remarcable el hecho de que se obtienen escalados excelentes en todos los casos con los mismos valores de  $\nu$ ,  $\mu$ ,  $\sigma_c$ ,  $A$  y  $B'$ . Esto confirma que, dentro de los errores estadísticos, los exponentes  $\nu$  y  $\mu$  asociados a las avalanchas 3D-*spanning* subcríticas son iguales a los asociados a las avalanchas 3D-*spanning* críticas.



**Figura 5.19:** Escalados correspondientes a la diferencia entre  $\langle H \rangle_\alpha$  y el campo crítico efectivo  $H_c^*(\sigma)$  (funciones de escala  $\hat{h}_\alpha(uL^{1/\nu})$ ) para (a.1) las avalanchas 1D-, 2D- y 3D-*spanning* críticas y (b.1) las avalanchas 3D-*spanning* subcríticas. Los escalados correspondientes a la desviación estándar  $\sigma_\alpha^H(\sigma, L)$  asociada a las avalanchas 1D-, 2D- y 3D-*spanning* críticas se muestran en (a.2) y, los correspondientes a las avalanchas 3D-*spanning* subcríticas se muestran en (b.2). Los distintos símbolos corresponden a los diferentes tamaños indicados en la leyenda situada en (b.2). Las avalanchas 3D-*spanning* se han clasificado siguiendo el método intersección. En todos los casos se presentan únicamente datos para  $\sigma < \sigma_c$ . Los ocho escalados se obtienen dejando libre únicamente el parámetro  $B'$ . Las líneas punteadas corresponden en cada caso al comportamiento asintótico de  $\hat{h}_\alpha$  o  $\hat{\sigma}_\alpha^H$  en el límite  $|u|L^{1/\nu} \rightarrow \infty$ . Los escalados correspondientes a las avalanchas 1D- y 2D-*spanning* se han desplazado una y dos décadas hacia arriba, respectivamente, para mayor claridad.

### Límite termodinámico

El comportamiento de los campos  $\langle H \rangle_\alpha$  en el límite termodinámico viene dictado por el comportamiento asintótico de las funciones de escala  $\hat{h}_\alpha(uL^{1/\nu})$  cuando  $|u|L^{1/\nu} \rightarrow \infty$ . Las líneas punteadas de las Figs. 5.19(a.1) y 5.19(b.1) indican dicho comportamiento. Como se puede apreciar, las funciones de escala  $\hat{h}_\alpha(uL^{1/\nu})$  se pueden aproximar por leyes de potencias para valores grandes de  $|u|L^{1/\nu}$ :

$$\lim_{|u|L^{1/\nu} \rightarrow \infty} \hat{h}_\alpha(uL^{1/\nu}) = A_h(|u|L^{1/\nu})^{a_h}, \quad (5.130)$$

donde, en general, tanto el prefactor  $A_h$  como el exponente  $a_h$  dependen del tipo de avalancha  $\alpha$  y del signo de  $u$ . (Recordar que los datos representados en la Fig. 5.19 corresponden a valores negativos de  $u$  ( $\sigma < \sigma_c$ )). Introduciendo el comportamiento dado por la Ec. (5.130) en la Ec. (5.124) y utilizando la definición de  $H^*(\sigma)$  [Ec. (5.126)], se obtiene:

$$H_c^*(\sigma) - \langle H \rangle_\alpha(\sigma, L) = A_h |u|^{a_h} L^{-1/\mu + a_h/\nu}. \quad (5.131)$$

Igual que se explicó en general en la sección § 2.3.1, existen tres casos posibles dependiendo del valor de  $a_h$ :

1.  $a_h > \nu/\mu$ : en este caso el miembro derecho de la ecuación (5.131) diverge en el límite termodinámico y, teniendo en cuenta que  $H_c^*$  es finito para  $\sigma$  finita, se obtendría

$$\langle H \rangle_\alpha(\sigma) = -\infty \cdot \text{signo}(A_h) \quad (5.132)$$

en el límite termodinámico. El tipo de avalanchas hipotético que se comportase de esta forma se concentraría en torno a un campo  $|\langle H \rangle_\alpha(\sigma)| = \infty$ , cosa que, como veremos a continuación, no sucede para ninguno de los tipos de avalanchas *spanning* estudiados.

2.  $a_h = \nu/\mu$ : este es posiblemente el caso más interesante ya que se obtiene un comportamiento no trivial de  $\langle H \rangle_\alpha$  en el límite termodinámico tal que:

$$\langle H \rangle_\alpha(\sigma) = H_c^*(\sigma) - A_h |u|^{\nu/\mu}. \quad (5.133)$$

3.  $a_h < \nu/\mu$ : en este caso, el campo  $\langle H \rangle_\alpha(\sigma)$  coincide con el campo efectivo  $H_c^*(\sigma)$  en el límite termodinámico:

$$\langle H \rangle_\alpha(\sigma) = H_c^*(\sigma). \quad (5.134)$$

En el cuadro 5.4 se resumen los parámetros que ajustan mejor el comportamiento asintótico para cada uno de los tipos de avalanchas. Dentro del error estadístico,  $\hat{h}_1$ ,  $\hat{h}_2$  y  $\hat{h}_{3c}$  se caracterizan por el mismo exponente  $a_h = 0.9$ . Este tipo de avalanchas coinciden claramente con el tercero de los comportamientos enumerados en los párrafos anteriores, es decir, para dichas avalanchas  $\langle H \rangle_\alpha(\sigma) = H_c^*(\sigma)$ . De cualquier forma, teniendo en cuenta que estas avalanchas sólo existen en el punto crítico, sólo tiene sentido aplicar este comportamiento cuando  $\sigma = \sigma_c$ , en cuyo caso,  $H_c^*(\sigma_c) = H_c$  por definición [Ec. (5.126)].

**Cuadro 5.4:** Parámetros que caracterizan el comportamiento asintótico de  $\hat{h}_\alpha(uL^{1/\nu})$  y  $\sigma_\alpha^H(uL^{1/\nu})$  en el límite  $uL^{1/\nu} \rightarrow -\infty$  para los distintos tipos de avalanchas *spanning*, de acuerdo con la notación introducida en las ecuaciones (5.130) y (5.141). También se han incluido los parámetros asociados a las avalanchas 3D-*spanning* no clasificadas (NC) por el método intersección.

Tipo de avalancha	$A_h$	$a_h$	$A_\sigma$	$a_\sigma$
1D- <i>spanning</i>	7.3	0.9	3.5	0.2
2D- <i>spanning</i>	6.5	0.9	3.2	0.2
3D- <i>spanning</i> críticas	10	0.9	3.0	0.2
3D- <i>spanning</i> subcríticas	2.4	1.8	1.2	1.0
NC	8.5	0.8	3.0	0.25

El exponente  $a_h$  correspondiente a las avalanchas 3D-*spanning* subcríticas es<sup>10</sup>  $a_h = 1.8$  que, dentro de los errores estadísticos, coincide con  $\nu/\mu$ . En consecuencia, el campo  $\langle H \rangle_{3-}$  se comporta como

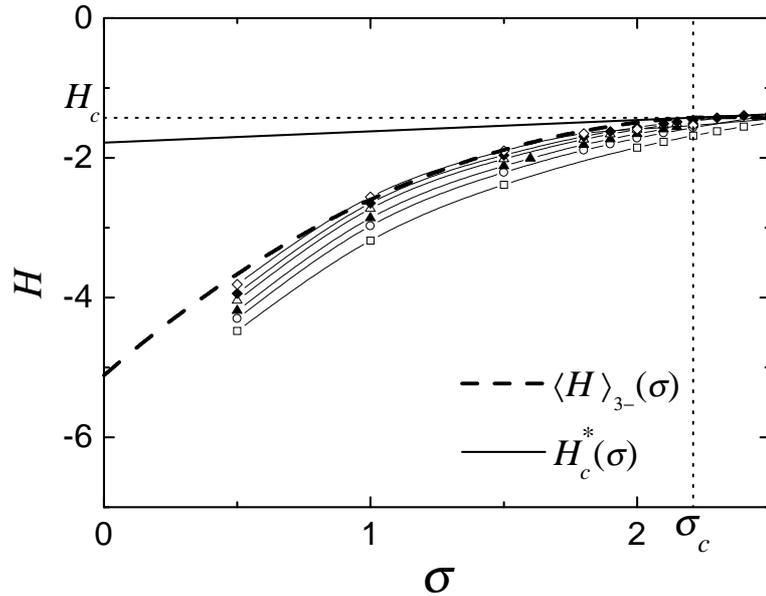
$$\langle H \rangle_{3-}(\sigma) = H_c^*(\sigma) - 2.4|u|^{\nu/\mu} \quad (5.135)$$

en el límite termodinámico, de acuerdo con lo argumentado más arriba.

De este resultado concluimos que el comportamiento del campo medio correspondiente a las avalanchas 3D-*spanning*  $\langle H \rangle_3(\sigma)$  para  $\sigma < \sigma_c$ , está asociado únicamente a las avalanchas 3D-*spanning* subcríticas y tiene una curvatura no nula en el límite termodinámico. Esto resuelve una de las cuestiones planteadas en la sección § 4.9 sobre el comportamiento del campo  $\langle H \rangle_3(\sigma)$  para  $\sigma < \sigma_c$ . Es necesario puntualizar que el

<sup>10</sup>De acuerdo con lo argumentado en la sección § 5.7, el comportamiento asintótico de  $\hat{h}_{3-}$  no está afectado por el método particular utilizado para la clasificación de las avalanchas 3D-*spanning* porque tal comportamiento corresponde a valores de  $uL^{1/\nu} \lesssim -7$ .

**Figura 5.20:** Representación de  $\langle H \rangle_{3-}(\sigma)$  [Ec. (5.135)],  $H_c^*(\sigma)$  [Ec. (5.126)] y  $H_c$ . Los símbolos corresponden a la estimación numérica de  $\langle H \rangle_{3-}$  a partir de simulaciones en sistemas con distintas  $L$ . Los distintos tipos de símbolo corresponden a la leyenda de la figura anterior.



comportamiento dado por la expresión (5.135) es de esperar que sólo sea válido para valores de  $\sigma$  suficientemente cercanos a  $\sigma_c$  ya que tal expresión se ha deducido a partir de hipótesis de escala de tamaño finito y éstas se suponen válidas sólo cerca del punto crítico [§ 2.3].

La Fig. 5.20 muestra el comportamiento (línea continua) de  $\langle H \rangle_{3-}(\sigma)$  dado por la Ec. (5.135). Esta línea finaliza en el punto crítico  $(\sigma_c, H_c)$  porque no existen avalanchas 3D-*spanning* subcríticas para  $\sigma > \sigma_c$ . El campo crítico efectivo  $H_c^*(\sigma)$ , así como el campo crítico  $H_c$ , se representan con línea a rayas y línea punteada, respectivamente. También se representan las estimaciones numéricas de  $\langle H \rangle_{3-}$  para varios valores de  $L$  con el fin de mostrar que, efectivamente, la Ec. (5.135) es el comportamiento límite cuando  $L \rightarrow \infty$ .

### 5.8.3. Desviaciones estándar $\sigma_\alpha^H$

Otra pregunta en relación con el comportamiento de las avalanchas 3D-*spanning* es si éstas suceden únicamente sobre la línea  $\langle H \rangle_{3-}(\sigma)$  o bien presentan una cierta distribución en torno a dicha línea. Tal y como se indicó en la sección § 4.9, el estudio de la desviación estándar  $\sigma_{3-}^H$  es útil para responder a esta cuestión. Para obtener la hipótesis de escala correspondiente a  $\sigma_\alpha^H(\sigma, L)$  es necesario calcular  $\langle H \rangle_\alpha^2$  por un lado y  $\langle H^2 \rangle_\alpha$  por otro. De la Ec. (5.124) se deduce que:

$$\langle H \rangle_\alpha^2(\sigma, L) = [H_c^*(\sigma)]^2 - 2H_c^*(\sigma)\hat{h}_\alpha(uL^{1/\nu})L^{-1/\mu} + [\hat{h}_\alpha(uL^{1/\nu})]^2 L^{-2/\mu}. \quad (5.136)$$

Por otro lado, utilizando procedimientos similares a los que se utilizaron para obtener la Ec. (5.124), es fácil ver que

$$\begin{aligned}\langle H^2 \rangle_\alpha(\sigma, L) &= \int_{-\infty}^{\infty} dH H^2 \frac{n_\alpha(H; \sigma, L)}{N_\alpha(\sigma, L)} \\ &= [H_c^*(\sigma)]^2 - 2H_c^*(\sigma) \hat{h}_\alpha(uL^{1/\nu})L^{-1/\mu} + \hat{h}_{\alpha,2}(uL^{1/\nu})L^{-2/\mu},\end{aligned}\quad (5.137)$$

donde la función de escala  $\hat{h}_{\alpha,2}(uL^{1/\nu})$  corresponde al caso  $k = 2$  de la sucesión de funciones  $\{\hat{h}_{\alpha,k}\}$  definidas como:

$$\hat{h}_{\alpha,k}(uL^{1/\nu}) \equiv (-1)^{k+1} H_c^{k+1} \int_{-\infty}^{\infty} dy y^k \frac{\hat{n}_\alpha(uL^{1/\nu}, y)}{\tilde{N}(uL^{1/\nu})}.\quad (5.138)$$

En particular,  $\hat{h}_\alpha$  corresponde al primer término  $\hat{h}_{\alpha,1}$  de la sucesión  $\{\hat{h}_{\alpha,k}\}$ .

Introduciendo ahora las Ecs. (5.136) y (5.137) en la definición (4.43) se encuentra la hipótesis de escala que se pretendía:

$$\sigma_\alpha^H(\sigma, L) = L^{-1/\mu} \hat{\sigma}_\alpha^H(uL^{1/\nu}),\quad (5.139)$$

donde se ha definido la función de escala  $\hat{\sigma}_\alpha^H$  como:

$$\hat{\sigma}_\alpha^H(uL^{1/\nu}) \equiv \left[ \hat{h}_{\alpha,2}(uL^{1/\nu}) - (\hat{h}_\alpha(uL^{1/\nu}))^2 \right]^{1/2}.\quad (5.140)$$

Para  $\sigma = \sigma_c$ , se encuentra el comportamiento dado por la Ec. (4.45) a partir de (5.140).

Las Figs. 5.19(a.2) y 5.19(b.2) muestran los escalados que se han obtenido sin considerar ningún parámetro libre (se ha utilizado el parámetro  $B'$  obtenido en los escalados de  $\langle H \rangle_\alpha$ ). La buena calidad de los escalados sirve para confirmar la hipótesis de escala (5.140) así como la robustez de los distintos parámetros implicados que se han obtenido en los escalados anteriores. Como es habitual, el comportamiento de  $\sigma_\sigma^H$  en el límite termodinámico viene dado por el comportamiento asintótico para  $|u|L^{1/\nu} \rightarrow \infty$  de la función de escala asociada, que en este caso es  $\hat{\sigma}_\sigma^H$ . En la figura se aprecia que el comportamiento asintótico  $\hat{\sigma}_\sigma^H$  se puede aproximar bien por una ley de potencias:

$$\lim_{|u|L^{1/\nu} \rightarrow \infty} \hat{\sigma}_\alpha^H(uL^{1/\nu}) = A_\sigma (|u|L^{1/\nu})^{a_\sigma},\quad (5.141)$$

donde se ha utilizado una notación análoga a la introducida en la Ec. (5.130). Los mejores ajustes se muestran con líneas punteadas en las Figs. 5.19(a.2) y 5.19(b.2) y los parámetros  $A_\sigma$  y  $a_\sigma$  asociados se presentan en el cuadro 5.4.

De nuevo, se obtiene que el exponente  $a_\sigma$  es el mismo, dentro del error estadístico, para las avalanchas 1D-, 2D- y 3D-*spanning* críticas. Para estas avalanchas  $a_h = 0.2 <$

$\nu/\mu$  y, como consecuencia, al introducir (5.141) en la Ec. (5.139) se obtiene  $\sigma_\alpha^H(\sigma) = 0$  para estos tipos de avalanchas en el límite  $L \rightarrow \infty$ . De hecho, este resultado tiene únicamente interés para  $\sigma = \sigma_c$  porque no existen avalanchas de estos tipos para  $\sigma \neq \sigma_c$ .

El resultado más interesante lo encontramos para las avalanchas 3D-*spanning* subcríticas que sí existen para  $\sigma \leq \sigma_c$ . Para estas avalanchas también se encuentra un exponente  $a_h < \nu/\mu$  y, por tanto, la desviación  $\sigma_{3-}^H(\sigma)$  también es nula para cualquier valor de  $\sigma$  en el límite termodinámico:

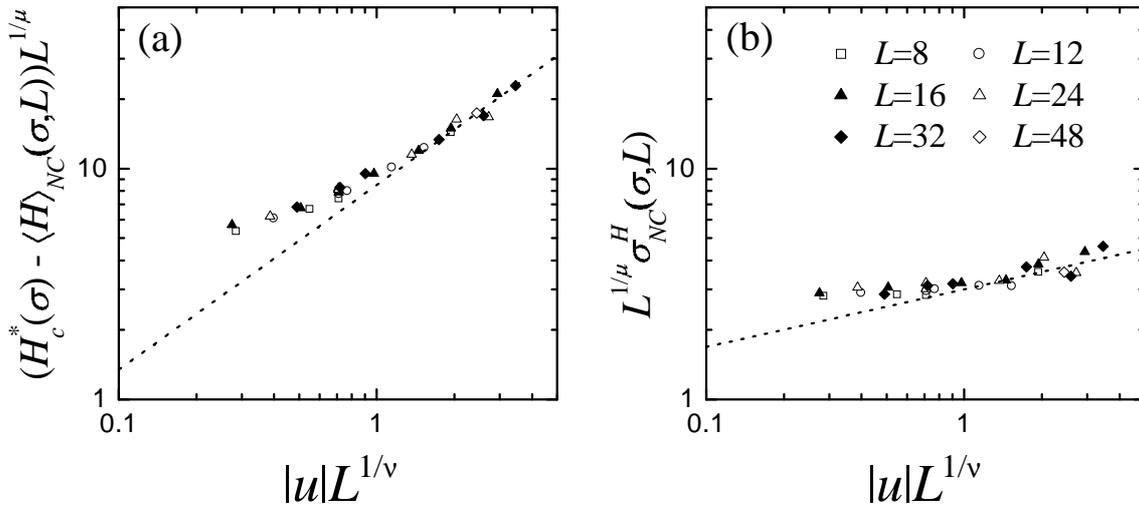
$$\sigma_{3-}^H(\sigma) = 0. \quad (5.142)$$

El hecho de que la desviación estándar  $\sigma_\alpha^H(\sigma)$  sea nula para cualquier tipo de avalancha *spanning*, indica que la distribución marginal  $n_\alpha/N_\alpha$  presenta una desviación estándar nula en torno a su valor medio asociado  $\langle H \rangle_\alpha(\sigma)$  y, como consecuencia, si para un cierto valor de  $\sigma$  suceden avalanchas *spanning* de un cierto tipo  $\alpha$ , suceden en el campo  $\langle H \rangle_\alpha(\sigma)$  con probabilidad 1.

El comportamiento de  $N_{3-}$  [§ 4.6, § 5.3 y § 5.7] conjuntamente con el comportamiento de  $\langle H \rangle_{3-}(\sigma)$  y  $\sigma_{3-}^H(\sigma)$  nos da una visión global sobre el comportamiento de las avalanchas 3D-*spanning* subcríticas en el límite termodinámico que se puede resumir de la siguiente forma: “para  $\sigma < \sigma_c$ , ocurre una avalancha 3D-*spanning* subcrítica para un valor de  $\sigma$  dado, esta avalancha sucede en el campo  $\langle H \rangle_{3-}(\sigma)$  cuyo comportamiento para  $\sigma$  próxima a  $\sigma_c$  viene dado por la expresión (5.135). Para  $\sigma = \sigma_c$ , suceden en promedio  $\sim 0.8$  avalanchas por ciclo en el campo  $H_c$ . Finalmente, para  $\sigma > \sigma_c$ , no ocurre ninguna avalancha 3D-*spanning* subcrítica.”

#### 5.8.4. Avalanchas no clasificadas con el método intersección

Antes de finalizar el análisis del campo al que suceden los distintos tipos de avalanchas *spanning*, resulta interesante analizar el campo  $\langle H \rangle_{NC}(\sigma, L)$  y la desviación  $\sigma_{NC}^H(\sigma, L)$  asociados a las avalanchas no clasificadas por el método intersección. La Fig. 5.21 muestra los escalados correspondientes a (a)  $\langle H \rangle_{NC}(\sigma, L)$  y (b)  $\sigma_{NC}^H(\sigma, L)$ . Tales escalados se han obtenido fijando todos los parámetros involucrados en el escalado a los valores encontrados anteriormente. La buena calidad de los escalados confirma que las hipótesis de escalado (5.124) y (5.139) son válidas también para las avalanchas no clasificadas, cosa que no sorprende demasiado teniendo en cuenta que  $\langle H \rangle_{NC}^{MI}(\sigma, L)$  no presenta un comportamiento muy distinto al de  $\langle H \rangle_{3c}^{MI}(\sigma, L)$ , tal y como muestra la Fig. 5.18. Además, tal y como refleja el cuadro 5.4, el comportamiento asintótico de



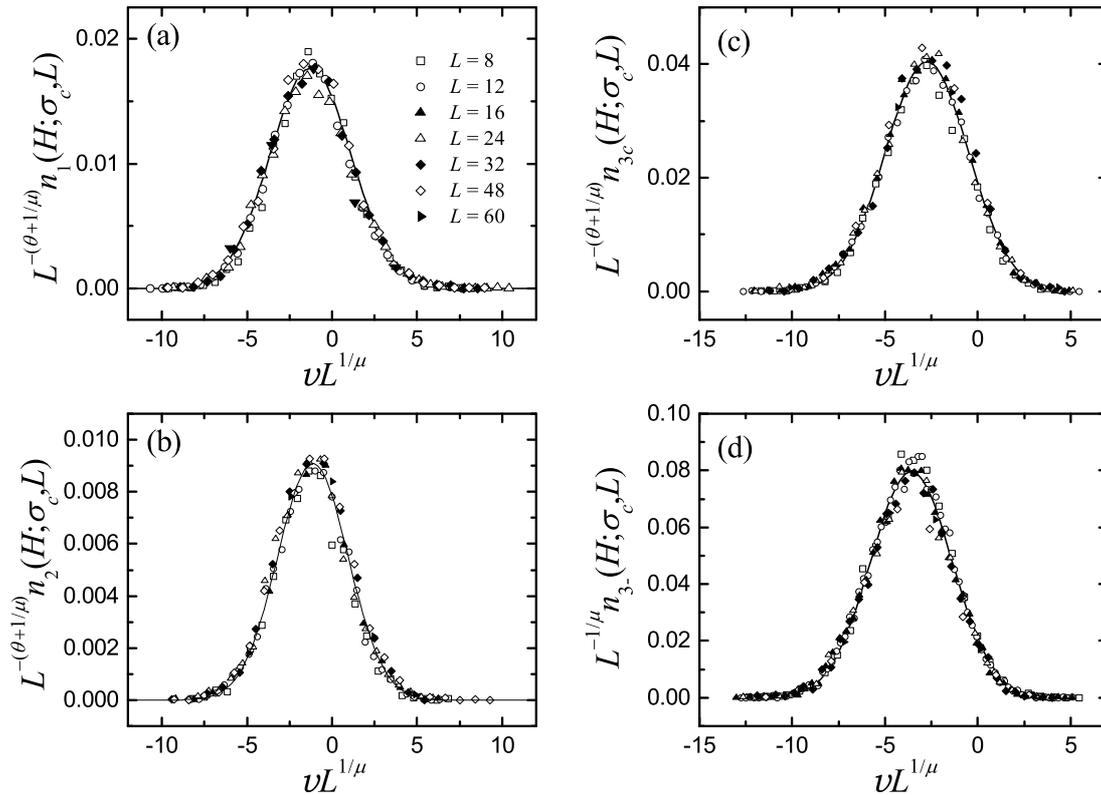
**Figura 5.21:** Escalados correspondientes a (a) la diferencia  $H_c^*(\sigma) - \langle H \rangle_{NC}(\sigma, L)$  y (b) la desviación estándar  $\sigma_{NC}^H(\sigma, L)$  para  $\sigma < \sigma_c$ . Las líneas punteadas indican el comportamiento asintótico de cada uno de los escalados en la región de  $|u|L^{1/\nu}$  grande. Los distintos símbolos corresponden a los tamaños indicados en la leyenda situada en (b).

las funciones de escala asociadas al campo  $\langle H \rangle_{NC}^{MI}$  y a la desviación  $\sigma_{NC}^H$  es muy similar al de las magnitudes equivalentes asociadas a las avalanchas 1D-, 2D- y 3D-*spanning* críticas. Esto indica que las avalanchas no clasificadas por el método intersección son, en su mayoría, avalanchas 3D-*spanning* críticas, tal y como ya se había señalado en la sección § 5.7.

## 5.9. Densidades de avalanchas $n_\alpha(H; \sigma, L)$

En esta sección se presenta el estudio con técnicas FSS de las densidades de avalanchas  $n_\alpha(H; \sigma, L)$ , cuyos resultados crudos se presentaron en la sección § 4.10. Siguiendo la misma línea argumental que en § 4.10, se presentan los resultados para  $\sigma = \sigma_c$  en primer lugar y, seguidamente, se presentan resultados que incluyen desórdenes  $\sigma \neq \sigma_c$ . Las densidades de avalanchas  $n_\alpha(H; \sigma, L)$  son las magnitudes donde reside toda la dependencia con  $H$  de las distribuciones marginales  $n_\alpha/N_\alpha$  y, en consecuencia, los resultados presentados en esta sección serán útiles para complementar los resultados presentados en la sección anterior ya que  $\langle H \rangle_\alpha$  no es más que el primer momento de la distribución marginal  $n_\alpha/N_\alpha$  [Ec. (4.42)] y  $\sigma_\alpha^H$  es su desviación estándar [Ec. (4.43)].

La hipótesis de escala correspondiente a  $n_\alpha$  se ha propuesto para cualquier tipo de avalancha al principio de la sección § 5.8. La hipótesis de escala de la densidad



**Figura 5.22:** Escalado correspondiente a la densidad de avalanchas (a) 1D-*spanning*, (b) 2D-*spanning*, (c) 3D-*spanning* críticas y (d) 3D-*spanning* subcríticas para  $\sigma = \sigma_c$ . La clasificación de las avalanchas 3D-*spanning* se ha efectuado con el método 2 [§ 5.7]. Los escalados se han obtenido sin ningún parámetro libre: se ha fijado  $1/\mu = 1.5$  en todos los casos y, en el caso particular de las avalanchas 1D-, 2D- y 3D-*spanning* críticas se ha fijado  $\theta = 0.1$ . Las líneas continuas corresponden a ajustes con una función gaussiana [Ec. 5.60]. Los distintos símbolos corresponden a los tamaños indicados en la leyenda.

de avalanchas *spanning* se obtiene a partir de la expresión general (5.122) haciendo, simplemente  $\tau_\alpha = 1$ . Esta hipótesis se ve confirmada en los escalados que se presentan en la Fig. 5.22. Para la clasificación de las avalanchas 3D-*spanning*, se ha utilizado el método 2 ya que, tal y como se discutió en la sección § 5.7, éste es el más apropiado para estudiar magnitudes relacionadas con el número de avalanchas por ciclo.

Por un lado, en el caso de las avalanchas 1D-, 2D- y 3D-*spanning* críticas [gráficos (a), (b) y (c) de la Fig. 5.22], los parámetros involucrados en el escalado son los exponentes  $\theta$  y  $\mu$ . Con el fin de comprobar una vez más la robustez de estos exponentes, se han fijado a los valores obtenidos en escalados anteriores ( $\theta = 0.1$  y  $1/\mu = 1.5$ ), de tal forma que no hay ningún parámetro libre en estos escalados. Por otro lado, dado

que el exponente  $\theta_{3-} = 0$  para las avalanchas 3D-*spanning* subcríticas, en el escalado de  $n_{3-}(H; \sigma_c, L)$  interviene solamente el exponente  $\mu$ . De nuevo, este exponente se ha fijado a 1.5, de tal manera que tampoco hay ningún parámetro libre en este escalado.

Todas las funciones de escala presentadas en la Fig. 5.22 se ajustan bien a una función gaussiana<sup>11</sup>, tal y como se muestra en la figura con líneas continuas. La amplitud  $a$ , la posición del pico  $x$  y la anchura  $w$  de la gaussiana (ver Ec. 5.60) para cada tipo de avalancha se resumen en el cuadro 5.5.

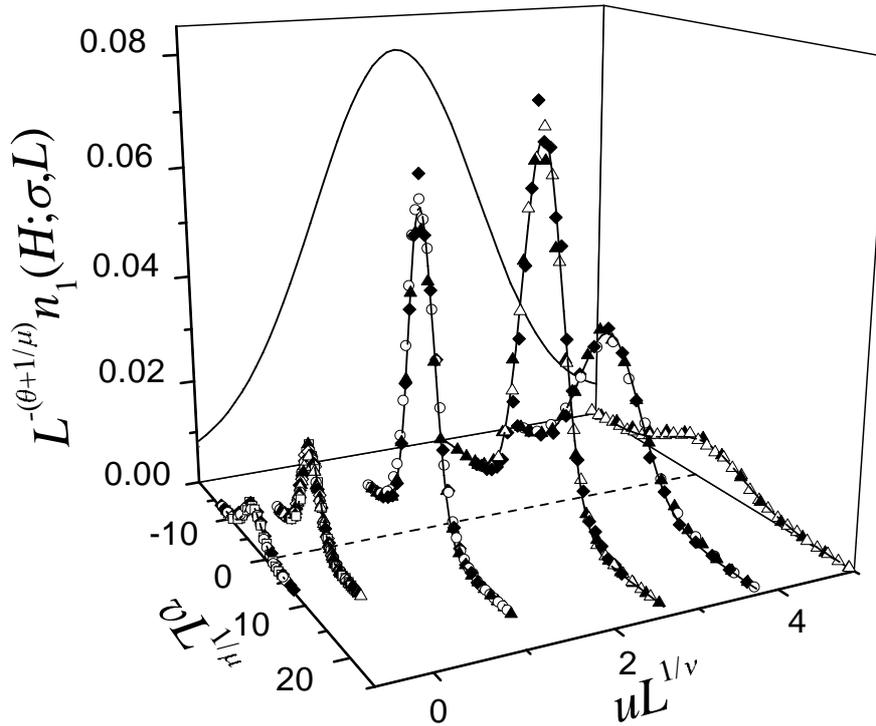
Los escalados presentados en la Fig. 5.22 tienden a cero exponencialmente en los límites  $uL^{1/\nu} \rightarrow \pm\infty$ . Como ya se ha visto en secciones anteriores (ver por ejemplo § 4.6), este comportamiento indica que, en el límite termodinámico, la densidad de avalanchas *spanning* de cualquier tipo para  $\sigma = \sigma_c$  es cero para cualquier  $H \neq H_c$ . Este resultado está en total acuerdo con los resultados presentados en la sección § 5.8 ( $\langle H \rangle_\alpha(\sigma_c) = H_c$  y  $\sigma_\alpha^H(\sigma_c) = 0$  para todas las avalanchas *spanning*). Para  $\sigma = \sigma_c$  y  $H = H_c$ , en cambio, hay una densidad infinita de avalanchas *spanning*.

**Cuadro 5.5:** Resumen de los parámetros asociados a los ajustes gaussianos (ver definición en Ec. (5.60)) representados con líneas continuas en los escalados de la Fig. 5.22.

Tipo de avalancha	$a$	$x$	$w$
1D- <i>spanning</i>	$0.01764 \pm 0.00013$	$-1.298 \pm 0.019$	$2.302 \pm 0.0189$
2D- <i>spanning</i>	$0.00909 \pm 0.00015$	$-1.13 \pm 0.04$	$2.07 \pm 0.04$
3D- <i>spanning</i> críticas	$0.040 \pm 0.003$	$-2.74 \pm 0.19$	$2.25 \pm 0.02$
3D- <i>spanning</i> subcríticas	$0.0797 \pm 0.0005$	$-3.577 \pm 0.014$	$2.187 \pm 0.014$

La Fig. 5.23 muestra varios cortes a  $uL^{1/\nu}$  constante de la superficie de escalado  $\hat{n}_1(uL^{1/\nu}, vL^{1/\mu})$ . Los escalados correspondientes a  $v \neq 0$  involucran el parámetro de rotación  $B'$  y, de acuerdo con los resultados anteriores, los mejores escalados se obtienen para  $B' = 0.25$ . Es preciso notar que los escalados presentados en la Fig. 5.23 son más sensibles a cualquier error en los parámetros involucrados que los presentados en la Fig. 5.19 ya que, para un valor fijado de  $uL^{1/\nu}$ , en la Fig. 5.23 se escalan una serie de funciones de  $H$  y no tan sólo una serie de puntos, como en la Fig. 5.19. Desde un punto de vista cualitativo, la superficie de escala presenta una cresta cuya amplitud depende de  $uL^{1/\nu}$ . Haciendo un análisis más cuantitativo, los escalados para cada uno

<sup>11</sup>En este caso se puede hacer un ajuste parabólico a los datos representados en escalas lineal-log igual que se hizo en la sección § 5.3 al escalar  $N_\alpha$ . Igual que en aquel caso, los resultados de este análisis son compatibles con los ajustes gaussianos dentro del error estadístico.



**Figura 5.23:** Escalados correspondientes a  $\hat{n}_1(uL^{1/\nu}, vL^{1/\mu})$ . Los cortes de la superficie de escalado se han tomado a  $uL^{1/\nu} = -0.58, 0, 1.22, 2.7, 3.8$  y  $5.0$ . Los distintos símbolos corresponden a los tamaños indicados en la leyenda de la figura previa. La línea continua en el plano horizontal indica la tendencia de la cresta de la superficie de escalado. La proyección de la cresta (ajuste gaussiano) se ha representado con una línea continua en el plano  $uL^{1/\nu} - \hat{n}_1$ . Las líneas continuas representadas en cada uno de los cortes se han obtenido haciendo ajustes gaussianos a los escalados.

de los cortes se pueden aproximar por funciones gaussianas cuya amplitud  $a$ , posición del máximo  $x$  y anchura  $w$  dependen de  $uL^{1/\nu}$ . Tales ajustes se representan en la Fig. 5.23 con líneas continuas y los parámetros correspondientes se han resumido en el cuadro 5.6. Además, la dependencia con  $uL^{1/\nu}$  de las amplitudes ajustadas se puede aproximar, a su vez, muy bien con una función gaussiana (línea continua en el plano  $uL^{1/\nu} - \hat{n}_1$  de la Fig. 5.23) con amplitud  $0.21 \pm 0.02$ , posición del máximo  $2.09 \pm 0.04$  y anchura  $2.2 \pm 0.2$ . Por otro lado, la dependencia de la cresta con  $uL^{1/\nu}$  viene dada por las posiciones  $x$  de los picos que se presentan en el cuadro 5.6. Tal dependencia coincide, dentro de los errores estadísticos, con el promedio <sup>12</sup>  $\langle vL^{1/\mu} \rangle_1(uL^{1/\nu}) = \hat{h}_1(uL^{1/\nu})/H_c$  que, salvo un factor  $H_c$ , se ha presentado en la Fig. 5.19. Esta coincidencia se pue-

<sup>12</sup>A partir de la hipótesis de escalado (5.124) y de la relación de la variable de escala  $v$  con  $H$  y  $\sigma$

de entender fácilmente a partir de la definición de  $\hat{h}_1(uL^{1/\nu})$  [Ec. (5.125)] y teniendo en cuenta que, para un valor de  $uL^{1/\nu}$  dado, la función de escalado  $\hat{n}_1(uL^{1/\nu}, vL^{1/\mu})$  presenta un grado de simetría muy alto en torno a su máximo, cosa que se ha demostrado por la calidad de los ajustes gaussianos a los distintos cortes presentados en la Fig. 5.23. En la sección § 5.8, se argumentó que no era necesario considerar valores de  $\langle H \rangle_\alpha$  y  $\sigma_\alpha^H$  correspondientes a  $\sigma > \sigma_c$  en los escalados. Sin embargo, se afirmó que los escalados de tamaño finito debían ser válidos también en esta región y que, además, se caracterizan por el mismo conjunto de parámetros. Esta afirmación se ve confirmada en los escalados presentados en la Fig. 5.23 que sí incluyen datos correspondientes a  $\sigma > \sigma_c$ . Evidentemente, si escala  $\hat{n}_1$  por un lado y  $N_1$  por otro, también debe escalar la distribución marginal  $n_1/N_1$  y, en consecuencia, también escalarán  $\langle H \rangle_1$  y  $\sigma_1^H$  en la región con  $\sigma > \sigma_c$ .

**Cuadro 5.6:** Resumen de los parámetros (ver definición en Ec. (5.60)) obtenidos a partir de ajustar funciones gaussianas a cada uno de los escalados correspondientes a distintos cortes a  $uL^{1/\nu}$  constante. Las funciones gaussianas asociadas a estos parámetros se han representado en la Fig. 5.23 con líneas continuas en cada corte.

$uL^{1/\nu}$	$a$	$x$	$w$
-0.58	$0.007 \pm 0.001$	$-3.63 \pm 0.04$	$2.42 \pm 0.04$
0	$0.01764 \pm 0.00013$	$-1.298 \pm 0.019$	$2.302 \pm 0.0189$
1.22	$0.0588 \pm 0.0004$	$1.19 \pm 0.03$	$2.70 \pm 0.03$
2.7	$0.068 \pm 0.001$	$1.63 \pm 0.08$	$3.88 \pm 0.08$
3.8	$0.027 \pm 0.001$	$1.64 \pm 0.1$	$5.14 \pm 0.1$
5	$0.007 \pm 0.001$	$1.64 \pm 0.14$	$6.5 \pm 0.12$

Todas estas consideraciones nos llevan a concluir que, para cualquier valor de  $H$ , la función de escala  $\hat{n}_1$  decae exponencialmente en los límites  $uL^{1/\nu} \rightarrow \pm\infty$ . Esto indica que, en el límite termodinámico,  $n_1$  es cero para  $\sigma \neq \sigma_c$ , independientemente del valor de  $H$ . En cambio, para  $\sigma = \sigma_c$ ,  $n_1$  diverge en  $H = H_c$  y es cero para cualquier otro valor del campo. Este cuadro de comportamiento de  $n_1$  es también aplicable a  $n_2$ . Sin embargo, el estudio detallado de los escalados bidimensionales correspondientes [Ec. (5.37)] es fácil demostrar que

$$\langle vL^{1/\mu} \rangle_\alpha(uL^{1/\nu}) = \frac{\hat{h}_\alpha(uL^{1/\nu})}{H_c}. \quad (5.143)$$

a  $n_{3c}(H; \sigma, L)$  y  $n_{3-}(H; \sigma, L)$  similares al presentado para  $n_1(H; \sigma, L)$  son demasiado laboriosos. Hay dos razones fundamentales por las que tal estudio es complicado, la primera de ellas es que no tenemos un método de clasificación de las avalanchas 3D-*spanning* exacto y, la segunda es que semejante análisis requeriría una gran estadística. En cualquier caso, teniendo en cuenta que  $\langle H \rangle_\alpha$  es el primer momento de la distribución marginal  $n_\alpha/N_\alpha$  y  $\sigma_\alpha^H$  es su desviación estándar, podemos hacer una hipótesis sobre el comportamiento en el límite termodinámico de  $n_{3-}$  y  $n_{3c}$  a partir de los resultados presentados en la sección anterior. Como hemos visto, las avalanchas 3D-*spanning* críticas sólo existen para  $\sigma = \sigma_c$  y, a este desorden, ocurren sólo si  $H = H_c$ . Se puede prever pues que el comportamiento de  $n_{3c}(H; \sigma, L)$  en el límite termodinámico sea cualitativamente similar al de  $n_1(H; \sigma, L)$ , descrito en el párrafo anterior. Con respecto a la densidad de avalanchas 3D-*spanning* subcríticas, el comportamiento debe ser el siguiente: Para  $\sigma > \sigma_c$ , debe ser  $n_{3-}(H; \sigma) = 0$  para cualquier valor de  $H$  porque no existen avalanchas de este tipo para estos desórdenes. En cambio, para  $\sigma \leq \sigma_c$ ,  $n_{3-}(H; \sigma, L)$  debe tener un comportamiento tipo  $\delta$  que se extienda a lo largo de la línea  $\langle H \rangle_{3-}(\sigma)$ , campo al que sucede con probabilidad 1 la avalancha 3D-*spanning* subcrítica. Resumiendo, en el límite termodinámico, la densidad  $n_{3-}$  se comporta como:

$$n_{3-}(H; \sigma) = N_{3-}(\sigma)\delta(H - \langle H \rangle_{3-}(\sigma)), \quad (5.144)$$

donde el prefactor  $N_{3-}(\sigma)$  es necesario para que se cumpla la relación entre  $n_{3-}$  y  $N_{3-}$  [Cuadro 4.2]. El comportamiento (5.144) es válido para cualquier valor de  $\sigma$  porque, para  $\sigma > \sigma_c$ ,  $N_{3-} = 0$  y se obtiene trivialmente  $n_{3-} = 0$ . Otra prueba de consistencia de la Ec. (5.144) es el hecho de que, introduciendo este comportamiento para  $n_{3-}(H; \sigma)$  en la definición de  $\langle H \rangle_{3-}$  [Ec. (4.42)], se obtiene la identidad  $\langle H \rangle_{3-} = \langle H \rangle_{3-}$ . Por otro lado, se obtiene  $\sigma_{3-}^H(\sigma) = 0$  al introducir la Ec. (5.144) en (4.43).

## 5.10. Determinación directa de las dimensiones fractales

### 5.10.1. Consideraciones generales sobre fractales

El término *fractal* fue propuesto por Mandelbrot [235] para designar a un tipo de objetos geométricos que el propio Mandelbrot definió como un conjunto de puntos que se caracterizan por una *dimensión de Hausdorff* estrictamente mayor que su

dimensión topológica<sup>13</sup>. Posteriormente, se ha argumentado que esta definición no es completa [242], sino que es mejor definir estos objetos geométricos por aquellas características que presentan habitualmente. Según Falconer [242], éstas se pueden resumir básicamente en los cuatro puntos siguientes:

- Los fractales tienen una estructura no trivial a cualquier escala.
- Son demasiado complicados geoméricamente para describirlos, tanto local como globalmente, utilizando los conceptos de geometría tradicional.
- Es habitual que presenten ciertas características autosemejantes que pueden ser tanto geométricas como estadísticas.
- Habitualmente, la *dimensión fractal* de estos objetos es mayor que la dimensión topológica. Existen varias definiciones para la dimensión fractal. El procedimiento más común es identificar dicha dimensión con la dimensión de Hausdorff [238, 242]. Otra posibilidad [236], consiste en definir la dimensión fractal a partir del autovalor más alto de una determinada matriz que caracteriza al fractal (matriz de transferencia). Sin embargo, desde un punto de vista práctico, existen otros métodos para obtener una determinada dimensión que caracteriza a los fractales. De entre estos métodos, posiblemente el que goza de mayor popularidad es el *método de recuento por cajas*<sup>14</sup> [238, 242]. La idea central de este método es idear un proceso de medida a una cierta escala  $\delta$ , que ignora las irregularidades de tamaño menor y estudiar cómo varía dicha medida cuando  $\delta$  tiende a cero. De hecho, esta es una idea similar al concepto de medida de Hausdorff. Otros métodos comunes para medir la dimensión fractal son el *método de la caja deslizante* [244] y el *método de la caja de arena*<sup>15</sup> [244, 245]. En particular, se ha utilizado el método de la caja de arena para obtener la dimensión fractal de las avalanchas *spanning*. Los detalles de este método se dan más adelante.

Desde un punto de vista puramente matemático, un objeto fractal se supone que se comporta como tal a todas las escalas. Sin embargo, en la naturaleza no existen tales objetos sino que siempre existen unos límites de aplicabilidad que vienen dados por las escalas involucradas, de tal manera que los *fractales “naturales”* son [243] objetos

<sup>13</sup>La definición precisa de dimensión de Hausdorff y de dimensión topológica se encuentra, por ejemplo, en las Refs. [238, 241–243]

<sup>14</sup>*Box-counting method* en inglés

<sup>15</sup>En inglés, el método de la caja deslizante se denomina *gliding-box method* y el método de la caja de arena como *sandbox method*.

que se comportan de forma autosemejante en un intervalo de longitudes  $[\ell_{min}, \ell_{max}]$  finito<sup>16</sup>. En particular, en los modelos reticulares como el que nos ocupa, una cota inferior trivial para  $\ell_{min}$  es el parámetro de red  $a$ . Por otro lado, es conocido que algunos sistemas en los que tienen lugar transiciones continuas, son *estadísticamente autosemejantes*<sup>17</sup> [236, 250, 251] a escalas menores que la longitud de correlación  $\xi$ . En estos problemas  $\ell_{max} = \xi$ . Es importante remarcar que la autosemejanza en sistemas físicos tiene lugar únicamente desde un punto de vista estadístico, es decir, los fractales que se encuentran son típicamente *fractales aleatorios*.

En el problema que nos ocupa, asumiremos que las avalanchas tienen un comportamiento fractal estándar en el límite termodinámico. De acuerdo con esta hipótesis, la *masa media* (número medio de espines) perteneciente a un cierto tipo de avalancha  $\alpha$  dentro de una región cúbica cualquiera de tamaño lineal  $\ell$  viene dada por:

$$M_\alpha(\ell; \sigma) = M_\alpha^*(\sigma)\ell^{d_\alpha}, \quad (5.145)$$

para  $a \ll \ell \ll \ell_{max}(\sigma)$ , donde, como veremos a continuación,  $\ell_{max}(\sigma) = \xi$ . El prefactor  $M_\alpha^*(\sigma)$  está relacionado con la *lacunaridad*<sup>18</sup> [235, 244] de cada uno de los tipos de avalanchas. En general, la lacunaridad es un concepto complicado de definir. Sin embargo, en el caso que nos ocupa, una forma sencilla de entender el significado de  $M_\alpha^*(\sigma)$  es imaginar que las avalanchas de tipo  $\alpha$  ocurren sobre una estructura fractal (aleatoria en general) de dimensión  $d_\alpha$  pero de tal forma que sólo ocupan una fracción  $M_\alpha^*$  de dicho fractal (en principio,  $M_\alpha^*$  depende de la cantidad  $\sigma$  de desorden presente en el sistema). Según esta interpretación, el prefactor  $M_\alpha^*(\sigma)$  se puede definir como la probabilidad<sup>19</sup> de que un nodo perteneciente a la estructura fractal de dimensión  $d_\alpha$  esté ocupado por avalanchas de tipo  $\alpha$ . A partir de esta definición, es fácil ver que la lacunaridad de las avalanchas es mayor cuanto menor es  $M_\alpha^*(\sigma)$ . Esta interpretación recuerda, en cierto modo, al modelo de percolación fractal aleatoria propuesto por Mandelbrot [235, 238, 242].

---

<sup>16</sup>En la Ref. 246 se presenta una revisión de los intervalos  $[\ell_{min}, \ell_{max}]$  correspondientes a numerosos experimentos. Según estos autores, este intervalo no acostumbra a exceder las 2 décadas en los experimentos. En base a esto, cuestionan el carácter fractal de la naturaleza [247], cosa que ha suscitado una discusión importante posteriormente [248, 249].

<sup>17</sup>Un objeto autosemejante estadísticamente se define [238] como un objeto para el que sus magnitudes estadísticas asociadas son invariantes bajo cambios de escala. En general, un objeto de este tipo no tiene porqué ser autosemejante desde un punto de vista geométrico.

<sup>18</sup>La lacunaridad está relacionada con el tamaño de los agujeros de los fractales.

<sup>19</sup>Se cumple  $0 \leq M_\alpha^*(\sigma) \leq 1$ .

### Comportamiento de $\ell_{max}$ en el 3D-GRFIM

En la sección § 5.6 se argumentó que, para  $\sigma < \sigma_c$ , las avalanchas 3D-*spanning* subcríticas ocupan una fracción finita del sistema (proporcional a  $|u|^{\beta_{3-}}$ ) que es responsable de la discontinuidad en la magnetización. Así pues, este tipo de avalanchas son homogéneas para estos valores de  $\sigma$  y su masa media contenida dentro de una región cúbica de tamaño  $\ell$  es

$$M_{3-}(\ell; \sigma) \sim |u|^{\beta_{3-}} \ell^3. \quad (5.146)$$

Esta relación es de esperar que sea válida para escalas de longitud  $\ell > \ell_{max}(\sigma)$  ya que, por definición de  $\ell_{max}(\sigma)$ , el comportamiento es fractal (no homogéneo) para escalas menores. Al aumentar  $\ell$ , se produce un cambio de comportamiento geométrico desde una estructura fractal ( $\ell < \ell_{max}(\sigma)$ ) a una estructura homogénea ( $\ell > \ell_{max}(\sigma)$ ). Deducimos así que, para  $\ell = \ell_{max}(\sigma)$ , la masa dada por la Ec. (5.146) es igual a la dada por (5.145):

$$|u|^{\beta_{3-}} \ell_{max}^3(\sigma) \sim M_{3-}^*(\sigma) \ell_{max}^{d_{3-}}(\sigma). \quad (5.147)$$

Esta ecuación permite encontrar el valor de  $\ell_{max}$  para el que se produce el cambio de comportamiento geométrico. Por un lado, la ecuación se satisface independientemente de  $\sigma$  si  $\ell_{max} = 0$  o  $\ell_{max} = \infty$  que corresponden al caso en que la avalancha 3D-*spanning* es homogénea a todas las escalas o es fractal a todas las escalas (mayores que  $a$ ), respectivamente. En cambio, si  $\ell_{max}$  es finito, la Ec. (5.147) se satisface si

$$\ell_{max}(\sigma) \sim |u|^{-\nu}, \quad (5.148)$$

donde se ha utilizado la relación de hiperescala (5.91). La conclusión a la que nos permite llegar la relación (5.148) es que  $\ell_{max}$  depende de  $\sigma$  como la longitud de correlación  $\xi$  y, por tanto, igual que en otros modelos (percolación, por ejemplo),  $\ell_{max} \sim \xi$  en el modelo que nos ocupa. El caso en que  $\ell_{max} = \infty$  para cualquier valor de  $\sigma \leq \sigma_c$  correspondería a una transición espinodal [§ 1.3.1] a lo largo de la línea  $\langle H \rangle_{3-}(\sigma)$ . En tal situación, las avalanchas 3D-*spanning* que se producen a  $H = \langle H \rangle_{3-}(\sigma)$  serían fractales a todas las escalas. En cambio, el caso en que se cumple la Ec. (5.148) estaría asociado a una transición de primer orden común ( $\xi$  finita) a lo largo de la línea  $\langle H \rangle_{3-}(\sigma)$ . Los resultados que se presentan más adelante en esta misma sección revelan que se produce una transición de primer orden común.

### 5.10.2. Tamaño finito

En todos los razonamientos y definiciones hechos en referencia a las propiedades fractales hasta este punto no se ha hecho mención alguna al tamaño finito inherente a las simulaciones. Sin ir más lejos, debido al tamaño finito, la longitud de correlación es siempre  $\xi \leq L$ , con lo cual sólo en el límite termodinámico es posible observar una divergencia real de  $\xi$ . Como consecuencia, el tamaño finito dificulta, por ejemplo, decidir si se produce una transición espinodal a lo largo de la línea  $\langle H \rangle_{3-}$  o, en cambio, se produce una transición de primer orden común.

El tamaño finito se debe tener en cuenta en la masa  $M_\alpha$  y, para ello, será necesario proponer una ley de escala de tamaño finito que sea consistente con el comportamiento fractal (5.145) en el límite termodinámico y, además, para las avalanchas 3D-*spanning* subcríticas también debe ser consistente con el comportamiento homogéneo (5.146) si  $\xi$  es finita. Al hacer una transformación del GR de parámetro  $b$ , la masa  $M_\alpha(\ell; \sigma, L)$  transforma como<sup>20</sup>:

$$M_\alpha(\ell(b); \sigma(b), L(b)) = b^{-d_\alpha} M_\alpha(\ell; \sigma, L). \quad (5.149)$$

A partir de esta ley de transformación y de la transformación de  $L$  [Ec. (5.4)], se puede formar el siguiente invariante entre  $M_\alpha$  y  $L$ :

$$\mathcal{I}[M_\alpha, L] = M_\alpha L^{-d_\alpha}. \quad (5.150)$$

Por otro lado, el tamaño lineal  $\ell$  transforma como una longitud:

$$\ell(b) = b^{-1} \ell. \quad (5.151)$$

Uniéndolo esta ley de transformación con la correspondiente a  $L$  [Ec. (5.4)], se puede definir el invariante

$$\mathcal{I}[\ell, L] = \ell/L. \quad (5.152)$$

Por último, el invariante  $\mathcal{I}[M_\alpha, L]$  sólo puede depender de dos invariantes formados entre las variables  $\ell$ ,  $\sigma$  y  $L$ . En particular, escogeremos  $\mathcal{I}[\ell, L] = \ell/L$  y  $\mathcal{I}[u, L] = uL^{1/\nu}$ . Así pues, la hipótesis de escala para  $M_\alpha(\ell; \sigma, L)$  a la que llegamos es:

$$M_\alpha(\ell; \sigma, L) = L^{d_\alpha} \hat{M}_\alpha(uL^{1/\nu}, \ell/L); \quad \xi \lesssim L, \quad (5.153)$$

donde la condición  $\xi \lesssim L$  indica que el escalado sólo es válido en la zona crítica, es decir, sólo cuando  $\xi$  es suficientemente grande (siendo como máximo del orden de

---

<sup>20</sup> $M_\alpha$  no es más que un número medio de espines de tal forma que, al aplicar el GR, transforma como el tamaño de las avalanchas  $s$  [Ec. (5.5)].

$L$ , lógicamente). La hipótesis (5.153) permite escalar los datos correspondientes a las masas  $M_\alpha$  y, de esta forma, obtener las dimensiones fractales  $d_\alpha$ .

El comportamiento de la función de escala  $\hat{M}_\alpha$  se puede predecir en dos casos límite. Por un lado,  $\hat{M}_\alpha$  se debe comportar como:

$$\hat{M}_\alpha(uL^{1/\nu}, \ell/L) = M_\alpha^*(uL^{1/\nu}) \left(\frac{\ell}{L}\right)^{d_\alpha}, \quad (5.154)$$

en el límite  $\ell/L \ll \xi/L \lesssim 1$  para recuperar la expresión (5.145) a partir de la hipótesis de escala (5.153). Por otro lado, si  $\xi$  es finita, el comportamiento de  $\hat{M}_{3-}$  debe ser tal que:

$$\hat{M}_{3-}(uL^{1/\nu}, \ell/L) \sim (|u|L^{1/\nu})^{\beta_{3-}} (\ell/L)^3 \quad (5.155)$$

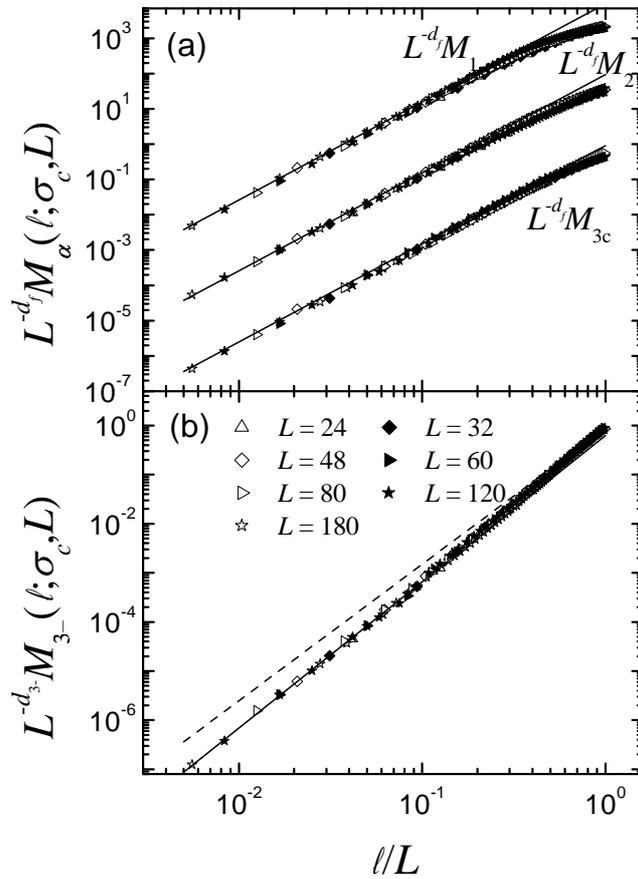
en el límite  $\ell/L \gg \xi/L$  para recuperar el comportamiento (5.146) a partir de (5.153), utilizando la relación de hiperescala (5.91).

### 5.10.3. Resultados numéricos

Tal y como se ha adelantado al inicio de esta sección, hemos utilizado el método de la caja de arena [244, 245]. Este método permite hacer una caracterización estadística de la distribución espacial de la masa de las avalanchas. Consiste en considerar regiones cúbicas (cajas) de lado  $\ell$  (con tamaños que van desde  $1 \times 1 \times 1$ ,  $3 \times 3 \times 3$ ,  $5 \times 5 \times 5$ , ... hasta  $(L-1) \times (L-1) \times (L-1)$ ) centradas cerca del espín que ha dado lugar a la avalancha. Para cada avalancha de un determinado tipo, se mide la masa en función de  $\ell$ . Seguidamente, promediando la masa asociada a todas las avalanchas del mismo tipo (que ocurren en un semiciclo) y sobre muchas realizaciones de desorden, se obtiene la masa media  $M_\alpha(\ell; \sigma, L)$  como función de  $\ell$  para diferentes valores de  $\sigma$  y  $L$ . En su formulación general, el método de la caja de arena supone que se utilizan diferentes centros dentro del fractal cuya dimensión fractal se pretende determinar (avalanchas en nuestro caso). En nuestro caso se ha comprobado que no es necesario hacer esto para cada avalancha porque promediamos a muchas avalanchas y, de alguna forma, esto es estadísticamente equivalente a centrar una caja en distintos lugares de una misma avalancha.

Tanto la masa media correspondiente a las avalanchas 3D-*spanning* críticas como la correspondiente a las avalanchas 3D-*spanning* subcríticas se han obtenido clasificando las avalanchas 3D-*spanning* con el método intersección porque la masa media de las avalanchas no depende del número de avalanchas por ciclo. Además, se supone que la dimensión fractal es una cualidad intrínseca de cada avalancha, de forma que el hecho

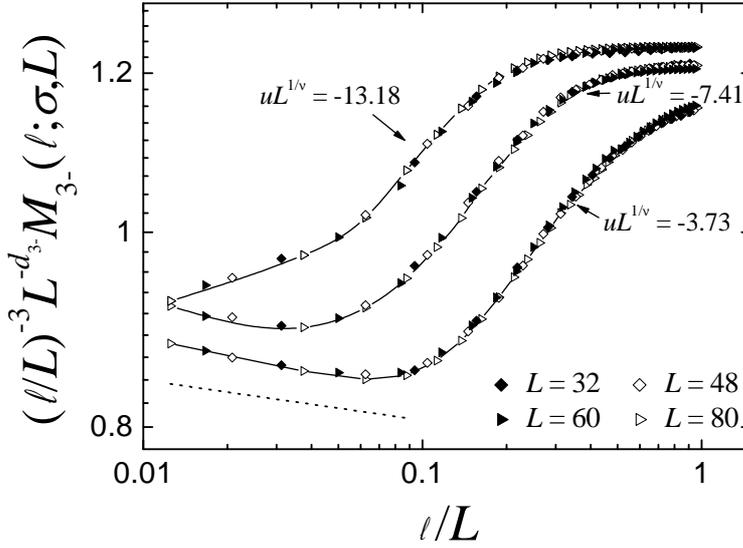
**Figura 5.24:** (a) Escalados correspondientes a la masa media de las avalanchas 1D-, 2D- y 3D-*spanning* críticas para  $\sigma = \sigma_c$ . Los escalados correspondientes a  $M_1$  y  $M_2$  se han desplazado 2 y 4 décadas hacia arriba para mayor claridad. (b) Escalado de  $M_3$  también para  $\sigma = \sigma_c$ . El comportamiento asintótico para valores pequeños de  $\ell/L$  se ha indicado en todos los casos con líneas continuas. Las pendientes de tales líneas son comprobaciones autoconsistentes del comportamiento propuesto sobre las funciones de escalado  $\hat{M}_\alpha$  [Ec. (5.154)]. La línea discontinua en (b) corresponde al comportamiento asintótico de  $\hat{M}_{3c}$  que se compara con el de  $\hat{M}_{3-}$ . Los tamaños utilizados en estos escalados van desde  $L = 24$  hasta  $L = 180$ , tal y como indica la leyenda situada en (b).



de no utilizar en la estadística las avalanchas no clasificadas por el método no tiene un efecto notable sobre las masas  $M_{3c}$  y  $M_{3-}$ .

### Análisis para $\sigma = \sigma_c$

La Fig. 5.24 muestra la masa media escalada para todos los tipos de avalanchas *spanning* obtenida a partir de simulaciones hechas a  $\sigma = \sigma_c$ . Cada escalado se ha obtenido individualmente utilizando la dimensión fractal como único parámetro libre. Los mejores escalados tienen lugar con  $d_f = 2.78 \pm 0.05$  para las avalanchas 1D-, 2D- y 3D-*spanning* críticas y  $d_{3-} = 2.98 \pm 0.02$  para las avalanchas 3D-*spanning* subcríticas. Ambos valores están en total acuerdo con los resultados obtenidos de forma independiente en la sección § 5.5. A parte de esto, la pendiente de cada escalado en el límite  $\ell \ll L$  (extremo izquierdo de los escalados) coincide con la dimensión fractal utilizada para obtener los escalados. Por tanto, el comportamiento (5.154) se ve confirmado. Los prefactores son  $M_1^*(\sigma_c) = 0.95 \pm 0.07$ ,  $M_2^*(\sigma_c) = 0.93 \pm 0.07$ ,



**Figura 5.25:** Escalados correspondientes a  $(\ell/L)^{-3} \hat{M}_{3-}(uL^{1/\nu}, \ell/L)$  para  $uL^{1/\nu} = -3.73, -7.41$  y  $-13.18$  en escalas log-log. La línea punteada indica la pendiente  $d_{3-} - 3 = 0.02$  para comparar con el comportamiento del escalado para valores pequeños de  $\ell/L$ . Las líneas continuas son guías visuales. No se ha utilizado ningún parámetro libre.

$M_{3c}^*(\sigma_c) = 0.90 \pm 0.07$  y  $M_{3-}^*(\sigma_c) = 0.65 \pm 0.07$ . El bajo valor del prefactor  $M_{3-}^*(\sigma_c)$  en comparación con el resto, nos muestra que, en relativo, los “agujeros que dejan” las avalanchas 3D-*spanning* son grandes. Como consecuencia, el espacio local que llenan estas avalanchas no es tanto como se podría esperar a priori a juzgar por la proximidad de  $d_f$  a 3.

**Análisis para  $\sigma < \sigma_c$**

Para estudiar el comportamiento de  $M_{3-}$  en la región con  $\sigma < \sigma_c$ , es conveniente multiplicar la función de escala  $\hat{M}_{3-}$  por el factor  $(\ell/L)^{-3}$  para distinguir mejor un posible comportamiento homogéneo del comportamiento fractal. De las ecuaciones (5.154) y (5.155), deducimos que este producto se debería comportar como

$$\left(\frac{\ell}{L}\right)^{-3} \hat{M}_{3-} = \begin{cases} M_{3-}^*(uL^{1/\nu}) \left(\frac{\ell}{L}\right)^{d_{3-}-3} & , \frac{\ell}{L} \ll \frac{\xi}{L} \\ \sim (|u|L^{1/\nu})^{\beta_{3-}} & , \frac{\ell}{L} \gg \frac{\xi}{L} \end{cases} \quad (5.156)$$

de tal forma que, para un valor dado de  $uL^{1/\nu} < 0$ , la función  $(\ell/L)^{-3} \hat{M}_{3-}$  debería tender a un valor constante para valores grandes de  $\ell/L$  si la longitud de correlación es finita. La Fig. 5.25 muestra los escalados de  $(\ell/L)^{-3} \hat{M}_{3-}$  para tres cortes de la superficie de escalado en  $uL^{1/\nu} = -3.73, -7.41$  y  $-13.18$ . Estos valores tan negativos de  $uL^{1/\nu}$  aseguran que los resultados son independientes del método utilizado para clasificar las avalanchas 3D-*spanning*. Por otro lado, debido a que el tamaño máximo utilizado en los escalados es  $L = 80$ , sólo se obtienen las funciones de escala para  $\ell/L \geq 1/80$ . A pesar de esta limitación, los resultados indican claramente que (i)

para valores pequeños de  $\ell/L$ , el comportamiento es tipo ley de potencias con un exponente cercano a  $d_{3-} - 3 \simeq 0.02$  (indicado con la línea punteada) y (ii) para valores grandes de  $\ell/L$ , la función  $(\ell/L)^{-3} \hat{M}_{3-}$  tiende a un valor constante (más notable cuanto más negativo es  $uL^{1/\nu}$ ). De este comportamiento se concluye que  $\xi/L < 1$  para  $\sigma < \sigma_c$  y, además,  $\xi/L$  decrece cuando  $uL^{1/\nu}$  se hace más negativo. A parte, la tendencia a un valor constante para valores de  $\ell/L$  suficientemente grandes, confirma el carácter compacto de las avalanchas 3D-*spanning* subcríticas que se había deducido en la sección § 5.6 con procedimientos indirectos.

## 5.11. Discusión

### 5.11.1. Exponentes críticos y exponentes efectivos

Los exponentes críticos obtenidos a partir de nuestras simulaciones numéricas se resumen en el cuadro 5.7. Es interesante remarcar que estos exponentes son independientes de  $\sigma$ ,  $H$  y  $L$  en una región grande en torno a  $\sigma_c$  y  $H_c$ . Además, dichos exponentes son iguales tanto para  $\sigma > \sigma_c$  como para  $\sigma < \sigma_c$ . Los *exponentes críticos* son, por definición, independientes de los parámetros físicos involucrados en el problema [§ 2.2.5]. Sin embargo, existen trabajos de otros autores relacionados con el GRFIM con dinámica metaestable atérmica-adiabática [198, 222] en que se han obtenido exponentes críticos que muestran una dependencia clara con los parámetros físicos, a pesar de que en estos trabajos se presentan simulaciones correspondientes a sistemas muy grandes. Nos referiremos a los exponentes que dependen de los parámetros del problema como *exponentes efectivos*. Principalmente, existen dos razones por las que en estos trabajos se obtienen exponentes efectivos. La primera de ellas es que algunas de las contribuciones que se han identificado en las secciones anteriores de esta tesis (avalanchas 3D-*spanning* subcríticas y no *spanning* no críticas), que claramente reducen los efectos de tamaño finito, no se tienen en cuenta en los trabajos previos. Para ver cual es el efecto de no tener en cuenta estas contribuciones, supongamos una función  $F(\sigma, L)$  compuesta de dos contribuciones que escalan de forma diferente:

$$F(\sigma, L) = L^a \tilde{F}_a(uL^{1/\nu}) + L^b \tilde{F}_b(uL^{1/\nu}). \quad (5.157)$$

Si forzamos un escalado con una única contribución que escale con un exponente efectivo  $a_{ef}$  como

$$F(\sigma, L) \simeq L^{a_{ef}} \tilde{F}_{ef}(uL^{1/\nu}), \quad (5.158)$$

el exponente  $a_{ef}$  viene dado por:

$$a_{ef}(uL^{1/\nu}, L) = -\frac{uL^{1/\nu}}{\nu} \frac{d \ln \tilde{F}_{ef}(uL^{1/\nu})}{d(uL^{1/\nu})} + \frac{L^{a-b} \left[ a\tilde{F}'_a(uL^{1/\nu}) + \frac{uL^{1/\nu}}{\nu} \tilde{F}'_a(uL^{1/\nu}) \right] + b\tilde{F}'_b(uL^{1/\nu}) + \frac{uL^{1/\nu}}{\nu} \tilde{F}'_b(uL^{1/\nu})}{L^{a-b}\tilde{F}'_a(uL^{1/\nu}) + \tilde{F}'_b(uL^{1/\nu})}. \quad (5.159)$$

Para llegar a esta expresión, se ha utilizado la identidad

$$a_{ef}(uL^{1/\nu}, L) = \frac{\partial \ln(L^{a_{ef}} \tilde{F}_{ef}(uL^{1/\nu}))}{\partial \ln L} - \frac{uL^{1/\nu}}{\nu} \frac{d \ln \tilde{F}_{ef}(uL^{1/\nu})}{d(uL^{1/\nu})} \quad (5.160)$$

que se obtiene a partir de (5.158) y, en esta expresión, se ha sustituido la derivada parcial  $\partial \ln(L^{a_{ef}} \tilde{F}_{ef}) / \partial \ln L$  por la derivada  $\partial \ln F / \partial \ln L$  que se obtiene a partir de la expresión de escala correcta (5.157). En general, el exponente efectivo depende de  $uL^{1/\nu}$  y de  $L$ . Sin embargo, en el caso particular en que  $u = 0$ ,  $a_{ef}$  depende solamente<sup>21</sup> de  $L$ :

$$a_{ef}(0, L) = \frac{aL^{a-b}\tilde{F}'_a(0) + b\tilde{F}'_b(0)}{L^{a-b}\tilde{F}'_a(0) + \tilde{F}'_b(0)}. \quad (5.161)$$

A partir de esta expresión para  $a_{ef}(0, L)$  vemos que, en el límite termodinámico,  $a_{ef}$  puede tener dos valores dependiendo de la diferencia entre los exponentes  $a$  y  $b$ :

- $a_{ef} = a$  si  $a > b$
- $a_{ef} = b$  si  $a < b$ .

En definitiva, en el límite termodinámico, el exponente efectivo que se obtiene al no tener en cuenta dos posibles contribuciones que escalan diferente toma el valor del exponente crítico mayor de entre los dos involucrados en la hipótesis de escala correcta:  $\lim_{L \rightarrow \infty} a_{ef} = \max\{a, b\}$ .

La segunda de las razones por la que se encuentran exponentes efectivos en los trabajos previos es que, en varios de los escalados que se presentan, no se tienen en cuenta los efectos de tamaño finito. En esta misma sección analizaremos con más detalle el efecto de no tener en cuenta  $L$  en el caso particular de la distribución integrada de tamaños.

A pesar de que los métodos utilizados para obtener los exponentes obtenidos en el presente trabajo y los obtenidos en las Refs. [198,222] son distintos, tal y como muestra

---

<sup>21</sup>Las derivadas de las funciones de escala involucradas no presentan ninguna divergencia para ningún valor de  $uL^{1/\nu}$  ya que las funciones de escala son analíticas.

**Cuadro 5.7:** Resumen de los valores de los exponentes obtenidos en las secciones anteriores. También se resumen, por comparación, los valores obtenidos en las Refs. [198, 222]. En los casos en que la definición de los exponentes en [198, 222] no coincide exactamente con la definición dada en la presente tesis, se han indicado los nombres correspondientes entre paréntesis.

Exponente	Este trabajo	Refs. [198, 222]
$\nu$	$1.2 \pm 0.1$	$1.41 \pm 0.17$
$\theta$	$0.10 \pm 0.02$	$0.15 \pm 0.15$
$\theta_{nsc}$	$2.02 \pm 0.04$	
$d_f$	$2.78 \pm 0.05$	$2.98 \pm 0.43 (= 1/\sigma\nu)$
$d_{3-}$	$2.98 \pm 0.02$	
$\tau_{nsc}$	$1.65 \pm 0.02$	
$\beta_c$	$0.15 \pm 0.08$	
$\beta_{3-}$	$0.024 \pm 0.012$	$0.035 \pm 0.032 (= \beta)$
$1/\mu$	$1.5 \pm 0.1$	$1.3 \pm 0.4 (= \beta\delta/\nu)$

el cuadro 5.7, la comparación de los resultados es altamente satisfactoria. Analicemos los exponentes uno por uno:

1. Aunque el valor de  $\nu$  obtenido en nuestro trabajo no coincide, dentro de las barras de error, con el presentado en [198, 222], ya se ha argumentado en secciones previas que la dependencia concreta de la variable  $u$  con  $\sigma$  que se considere para llevar a cabo los escalados puede introducir ciertas desviaciones al valor de  $\nu$ . De hecho, utilizando  $u_1 = (\sigma - \sigma_c)/\sigma_c$  obtenemos  $\nu = 1.14$  y, en cambio, utilizando  $u_3$  [Ec. (5.22)] obtenemos  $\nu = 1.4$  que sí coincide con el valor presentado en [198, 222]. Esto es normal ya que en las Refs. [198, 222] se utiliza la variable de escala  $u_3$ .
2. Con respecto al exponente  $\theta$ , nuestro resultado está de acuerdo con el de las Refs.<sup>22</sup> [198, 222], si bien, la gran barra de error de  $\theta$  en estos trabajos no permitió decidir si realmente  $\theta$  era cero o no. Discernir entre las dos opciones tiene implicaciones físicas importantes, ya que, si  $\theta \neq 0$ , existen infinitas avalanchas *spanning* en el punto crítico en el límite termodinámico. Nuestros resultados, muestran con mayor claridad que, efectivamente, existen infinitas avalanchas

<sup>22</sup>Queremos hacer notar que, en la Ref. 222, los autores también presentan un valor  $\theta = 0.015 \pm 0.015$  que suponemos es debido a un error tipográfico.

*spanning* en el punto crítico. En las referencias [198, 222] se obtiene  $\theta$  a partir del escalado de  $N_s(\sigma, L)$  según la hipótesis de escala

$$N_s(\sigma, L) = L^{\theta_{ef}} \mathcal{N}_s(uL^{1/\nu}). \quad (5.162)$$

Respecto a esta hipótesis de escala es interesante remarcar tres puntos: (i) Los autores incluyen el tamaño finito del sistema. Presumiblemente, esto está motivado por el hecho de que las avalanchas *spanning*, por definición, se extienden una distancia  $L$  al menos en alguna de las direcciones y es natural pensar que las magnitudes relacionadas con dichas avalanchas están afectadas por el tamaño finito del sistema. Posiblemente por esta misma razón, también consideran el tamaño finito en la discontinuidad del parámetro de orden. En cambio, no consideran las correcciones de tamaño finito en las magnitudes relacionadas con las avalanchas no *spanning*. (ii) Tal y como se comentó al final de la sección § 4.4, los autores miden el número de avalanchas *spanning* promediando 2 veces las avalanchas 2D-*spanning* y promediando 3 veces las avalanchas 3D-*spanning*, con lo que obtienen  $N'_s = (N_1 + 2N_2 + 3N_3)/3$ , en términos de los números definidos en nuestro trabajo. (iii) Como hemos visto en nuestro trabajo,  $N_3$  involucra dos contribuciones: la asociada a las avalanchas 3D-*spanning* críticas escala con el mismo valor de  $\theta$  que  $N_1$  y  $N_2$  pero la asociada a las avalanchas 3D-*spanning* subcríticas escala con  $\theta_{3-} = 0$ . Teniendo todo esto en cuenta, y utilizando las hipótesis de escala para  $N_1$ ,  $N_2$ ,  $N_{3c}$  y  $N_{3-}$  propuestas en la sección § 5.3, el número  $N'_s = (N_1 + 2N_2 + 3N_3)/3$  se comporta como:

$$N'_s(\sigma, L) = \frac{L^\theta \left[ \tilde{N}_1(uL^{1/\nu}) + 2\tilde{N}_2(uL^{1/\nu}) + 3\tilde{N}_{3c}(uL^{1/\nu}) \right] + 3\tilde{N}_{3-}(uL^{1/\nu})}{3}. \quad (5.163)$$

Esta función es de la misma forma que (5.157) y, al intentar escalarla con la hipótesis (5.162) se obtiene  $\theta_{ef} = \max\{0, \theta\} = \theta$  para valores de  $L$  suficientemente grandes, según los argumentos presentados antes. Esto explica que, aunque en las Refs. [198, 222] no se mida correctamente  $N_s$  y la hipótesis de escala (5.162) no sea estrictamente correcta, los autores obtengan un valor de  $\theta$  similar al que se ha obtenido en el presente trabajo, si bien, con una barra de error considerablemente más grande.

3. Dentro de la literatura consultada, no se han encontrado análisis de tamaño finito del número de avalanchas no *spanning* previos al que se presenta en esta tesis. Como consecuencia, no conocemos ninguna estimación previa del exponente  $\theta_{nsc}$

con la que comparar. En cualquier caso, los resultados que se han obtenido indican que hay infinitas avalanchas de este tipo en el punto crítico.

4. En relación a las dimensiones fractales  $d_f$  (asociada a las avalanchas no *spanning*, 1D-, 2D- y 3D-*spanning* críticas) y  $d_{3-}$ , las estimaciones numéricas son consistentes con el valor  $d_{fractal} = 2.98 \pm 0.43$  obtenido previamente por otros autores [198, 222]. Este valor fue obtenido a partir del análisis de las distribuciones de tamaños asociadas a las avalanchas no *spanning*, con lo cual, la dimensión fractal estimada en estos trabajos se corresponde con nuestra  $d_f$ . Los autores de estos trabajos previos utilizan una notación para los exponentes más similar a la que se utiliza en percolación, definiendo un exponente<sup>23</sup>  $\sigma$  que relaciona el tamaño  $s_{max}$  de las avalanchas más grandes (no *spanning*) con la longitud de correlación como  $s_{max} \sim \xi^{1/(\sigma\nu)}$ , de tal forma que la dimensión fractal en su caso viene dada por la combinación [52, 213, 217, 240]  $d_{fractal} = 1/(\sigma\nu)$ . Los autores estiman el exponente  $\sigma$  escalando la distribución integrada  $D$  sin tener en cuenta los efectos de tamaño finito y, además, utilizan la variable de escala  $u_3$ . Estas diferencias con respecto a los métodos utilizados en esta tesis pueden ser las causantes de la diferencia entre la dimensión  $d_{fractal}$  obtenida previamente y el valor de  $d_f$  obtenido aquí. No obstante, los resultados coinciden, dentro de los errores estadísticos. Por otro lado, en estos estudios previos no se distinguieron avalanchas con distinta dimensión fractal, cosa que tiene implicaciones, por ejemplo, en el cumplimiento de la relación de hiperescala [Ec. (5.91)], como veremos en la sección § 5.11.4. Con respecto a la medida directa de las dimensiones fractales tal y como se presenta en la sección § 5.10, no se ha encontrado un estudio similar en la literatura consultada en relación con este modelo.
5. De acuerdo con nuestra definición, el exponente  $\tau_{nsc}$  está relacionado con el comportamiento de las distribuciones de las avalanchas no *spanning* críticas al aplicar la transformación del GR (ver Ec. (5.69) con  $\alpha = nsc$ ). En las medidas previas de un exponente similar a este se han analizado las avalanchas no *spanning* pero sin distinguir entre avalanchas no *spanning* críticas ( $nsc$ ) y no críticas ( $ns0$ ) y, a parte de esto, no se han considerado efectos de tamaño finito. Veamos en primer lugar cual es la consecuencia de no tener en cuenta las dos contribuciones a las avalanchas no *spanning* en sistemas grandes con  $\sigma$  cercana a  $\sigma_c$ . Consideremos para ello la distribución integrada  $D(s; \sigma, L)$  de todas las avalanchas. De

---

<sup>23</sup>No confundir en este punto el exponente  $\sigma$  definido en las referencias [52, 57, 198, 213, 217, 222, 228, 240, 252] con la notación utilizada en esta tesis para la cantidad de desorden.

las relaciones resumidas en el cuadro 4.2 entre las distribuciones asociadas a los distintos tipos de avalanchas, vemos que es posible escribir  $D(s; \sigma, L)$  como:

$$D(s; \sigma, L) = \frac{\sum_{\alpha} N_{\alpha}(\sigma, L) D_{\alpha}(s; \sigma, L)}{\sum_{\alpha} N_{\alpha}(\sigma, L)}, \quad (5.164)$$

donde  $\alpha = ns0, nsc, 1, 2, 3c, 3-$ . Utilizando ahora las hipótesis de escala para  $\{D_{\alpha}, \alpha = ns0, nsc, 1, 2, 3c, 3-\}$  [§ 5.4] y para  $\{N_{\alpha}, \alpha = ns0, nsc, 1, 2, 3c, 3-\}$  [§ 5.3], la suma del numerador del segundo miembro de la derecha de la Ec. (5.164) se puede escribir como:

$$\begin{aligned} \sum_{\alpha} N_{\alpha}(\sigma, L) D_{\alpha}(s; \sigma, L) = & L^3 \tilde{N}_{ns0}(\sigma) D_{ns0}(s, \sigma) \\ & + L^{\theta_{nsc} - \tau_{nsc} d_f} \tilde{N}_{nsc}(uL^{1/\nu}) \tilde{D}_{nsc}(sL^{-d_f}, uL^{1/\nu}) \\ & + L^{\theta - d_f} \sum_{\alpha=1,2,3c} \tilde{N}_{\alpha}(uL^{1/\nu}) \tilde{D}_{\alpha}(sL^{-d_f}, uL^{1/\nu}) \\ & + L^{-d_{3-}} \tilde{N}_{3-}(uL^{1/\nu}) \tilde{D}_{3-}(sL^{-d_{3-}}, uL^{1/\nu}) \end{aligned} \quad (5.165)$$

y el denominador:

$$\begin{aligned} \sum_{\alpha} N_{\alpha}(\sigma, L) = & L^3 \tilde{N}_{ns0}(\sigma) + L^{\theta_{nsc}} \tilde{N}_{nsc}(uL^{1/\nu}) \\ & + L^{\theta} \sum_{\alpha=1,2,3c} \tilde{N}_{\alpha}(uL^{1/\nu}) + \tilde{N}_{3-}(uL^{1/\nu}). \end{aligned} \quad (5.166)$$

Las avalanchas  $ns0$  se supone que son avalanchas de tamaño pequeño y, aunque son las que predominan en número ( $N_{ns0} \sim L^3$ ) para  $L$  grande, hay que considerar el resto de avalanchas que son importantes en tamaño. A partir del cuadro 5.7 vemos que, de entre todos los términos (a parte del asociado a las avalanchas  $ns0$ ) que contribuyen a la suma (5.165), el dominante es el correspondiente a las avalanchas no *spanning* críticas<sup>24</sup>. Evidentemente, esto es así siempre y cuando  $N_{nsc}$  sea no nulo en las condiciones (valor de  $\sigma$  y de  $L$ ) que se estén considerando. Como hemos visto en la sección § 5.3, en el límite termodinámico estricto,  $N_{nsc}$  es no nulo únicamente para  $\sigma = \sigma_c$ . Sin embargo, en las simulaciones  $L$  es siempre finito, de tal forma que suceden avalanchas no *spanning* críticas en un cierto entorno de  $\sigma$ , cuya longitud decrece con  $L$ . En realidad, el hecho de que  $\tilde{N}_{nsc}(uL^{1/\nu})$  se pueda describir con un comportamiento gaussiano (ver Fig. 5.8) implica que, para  $L$  finito, hay una probabilidad no nula de que suceda una avalancha no *spanning* crítica para cualquier valor de  $\sigma$  ( $> 0$ , naturalmente).

<sup>24</sup> $\theta_{nsc} - \tau_{nsc} = -2.567$ ,  $\theta - d_f = -2.68$  y  $-d_{3-} = -2.98$ , de manera que  $\theta_{nsc} - \tau_{nsc} > \theta - d_f > -d_{3-}$ .

Por otro lado, como ya se ha dicho, las avalanchas no *spanning* no críticas son las más importantes en número para  $L$  grande. En consecuencia, en la suma (5.166) consideraremos sólo la contribución de las avalanchas no *spanning* no críticas.

Es decir, para  $L$  grande, la distribución  $D(s; \sigma, L)$  se puede aproximar como:

$$D(s; \sigma, L) \simeq D_{ns0}(s; \sigma) + L^{\theta_{nsc} - \tau_{nsc}d_f - 3} \frac{\tilde{N}_{nsc}(uL^{1/\nu})}{\tilde{N}_{ns0}(\sigma)} \tilde{D}_{nsc}(sL^{-d_f}, uL^{1/\nu}). \quad (5.167)$$

De hecho, esta expresión coincide con el comportamiento aproximado de  $D_{nsc}$  en el caso de sistemas grandes. Por tanto, para  $L$  grande, las únicas avalanchas importantes a nivel de distribución de tamaños son las no *spanning*<sup>25</sup>.

Teniendo en cuenta que  $\theta_{nsc} - \tau_{nsc} = -2.567 < 0$ , de la Ec. (5.167) vemos que la contribución a  $D$  asociada a las avalanchas no *spanning* críticas sería esencialmente nula para sistemas con  $L$  grande a menos que la función de escala  $\tilde{D}_{nsc}$  se comporte como

$$\tilde{D}_{nsc}(sL^{-d_f}, uL^{1/\nu}) = (sL^{-d_f})^{(\theta_{nsc} - \tau_{nsc}d_f - 3)/d_f} \check{D}_{nsc}(sL^{-d_f}, uL^{1/\nu}), \quad (5.168)$$

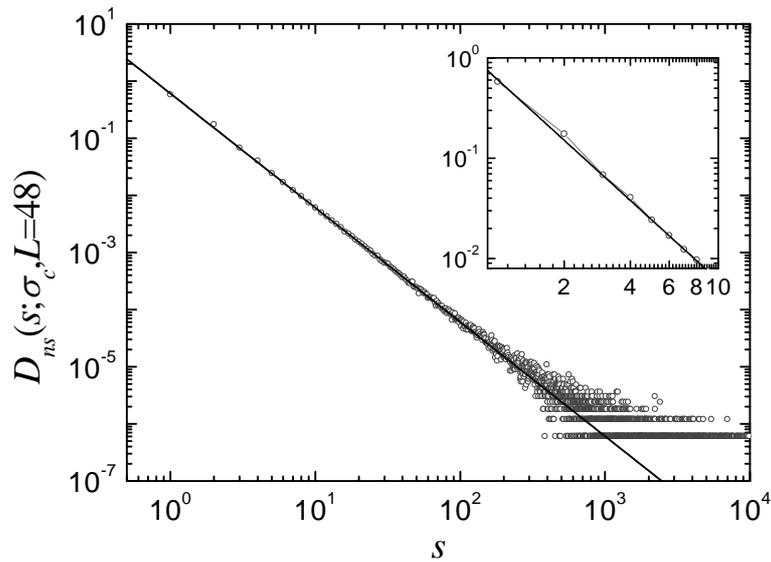
para  $L$  grande, donde se supone que la mayor dependencia con  $s$  se encuentra en el prefactor y la función de escala  $\check{D}_{nsc}$  presenta sólo una dependencia débil con el invariante  $sL^{-d_f}$ . Si éste es el comportamiento de  $\tilde{D}_{nsc}$ , se obtiene

$$D(s; \sigma, L) \simeq D_{ns0}(s; \sigma) + s^{-\tau_{nsc} + \left(\frac{3 - \theta_{nsc}}{d_f}\right)} \frac{\tilde{N}_{nsc}(uL^{1/\nu})}{\tilde{N}_{ns0}(\sigma)} \check{D}_{nsc}(sL^{-d_f}, uL^{1/\nu}), \quad (5.169)$$

que, independientemente del valor de  $L$ , incluye una contribución no despreciable asociada a las avalanchas no *spanning* críticas. Esta expresión indica que, salvo la contribución  $D_{ns0}(s; \sigma)$ , la distribución  $D(s; \sigma, L)$  disminuye al aumentar  $s$  con un exponente efectivo  $\tau_{ef} = \tau_{nsc} - (3 - \theta_{nsc})/d_f$ . De las estimaciones [Cuadro 5.7] para los distintos exponentes involucrados en esta expresión, se encuentra  $\tau_{ef} = 2.00 \pm 0.06$ . La Fig. 5.26 muestra la distribución de avalanchas no *spanning* correspondiente a un sistema con  $L = 48$  y  $\sigma = \sigma_c$ . Tal y como indica la línea continua, la distribución se caracteriza por un exponente compatible con  $-2$ , que coincide con el exponente  $\tau_{ef} = \tau_{nsc} - (3 - \theta_{nsc})/d_f$ . Además, el buen ajuste obtenido confirma que la dependencia con  $sL^{-d_f}$  de la función de escala  $\tilde{D}_{nsc}$  es

---

<sup>25</sup>Sin embargo, esto no implica que las avalanchas *spanning* no sean importantes en otros aspectos. Por ejemplo, las avalanchas 3D-*spanning* subcríticas son importantes para la discontinuidad de la magnetización en la zona de desórdenes menores que  $\sigma_c$ .



**Figura 5.26:** Distribución de tamaños correspondiente a las avalanchas no *spanning* para  $\sigma = \sigma_c$  y  $L = 48$ . La línea continua indica una ley de potencias con exponente  $\tau_{ef} = -2$ . En el gráfico interno se muestra una ampliación del gráfico principal en la zona de tamaños pequeños.

débil para  $u = 0$ , tal y como se había supuesto. Si la distribución  $D \simeq D_{ns}$  se ajusta tan bien a una ley de potencias, cuyo origen parece estar asociado a las avalanchas no *spanning* críticas, ¿qué papel juega  $D_{ns0}(s; \sigma_c)$ ? En la ampliación de  $D_{ns}$  en la zona de avalanchas pequeñas que se presenta en el gráfico interno de la Fig. 5.26 se observan desviaciones respecto a la ley de potencias (indicado con una línea continua). Estas desviaciones son sistemáticas (suceden para cualquier  $L$  y  $\sigma$  para las que existan avalanchas no *spanning*) y, probablemente, tienen su origen en efectos geométricos relacionados con los *animales de red*<sup>26</sup>. Debido a estos efectos, la distribución de tamaños de las avalanchas no *spanning*  $D_{ns}$  no se puede expresar únicamente como una ley de potencias (asociada a las avalanchas no *spanning* críticas), sino que son necesarias correcciones a este comportamiento (presumiblemente, éstas son correcciones asociadas a las avalanchas no *spanning* no críticas). En la sección § 5.11.6 se profundiza un poco más en este punto, comparándolo con el efecto análogo que se observa en percolación.

Para ver el efecto de despreciar el tamaño finito en  $D(s; \sigma, L)$ , escribamos la

<sup>26</sup>Traducción de *lattice animals*, terminología utilizada en el campo de la percolación [253, 254]. Ver la sección § B.4 en el apéndice B

hipótesis de escala concreta propuesta por los autores de la Ref. 228 (adaptada a una notación más similar a la nuestra)<sup>27</sup>:

$$D(s; \sigma) = s^{-\tau'} \check{D}(s^{1/\nu d_f} u_3), \quad (5.170)$$

donde se ha indicado explícitamente que los autores utilizan la variable de escala  $u_3$  definida en la Ec. (5.22). Los autores analizan la ley de escala (5.170) únicamente para desórdenes suficientemente grandes como para que no ocurra ninguna avalancha *spanning*. Evidentemente, el mínimo desorden  $\sigma_{min}$  a partir del que no se observa ninguna avalancha *spanning* depende de  $L$  (de tal forma que  $u(\sigma_{min}(L)) \sim L^{-1/\nu}$ ), pero los autores no tienen en cuenta esta dependencia. El método con el que los autores comprueban la validez de la hipótesis (5.170) se presenta con detalle en la Ref. 198. Resumidamente, consiste en obtener los exponentes  $\tau'$  y  $1/\nu d_f$  para varios conjuntos de desórdenes (siempre  $\sigma > \sigma_c$ ) tales que los desórdenes dentro de un cierto conjunto difieren poco entre sí (por ejemplo, el escalado cuyo desorden medio es más cercano a  $\sigma_c$  se hace con valores de  $\sigma$  comprendidos entre 2.26 y 2.36). Esta restricción a desórdenes cercanos entre sí minimiza los efectos de tamaño finito pero no los evita por completo. Con este procedimiento, los autores obtienen una serie de exponentes  $\tau'$  y  $1/\nu d_f$  que representan en función de la variable de escala media  $u_{avg}$  de cada uno de los conjuntos de datos y, extrapolando a  $u_{avg} = 0$ , obtienen los valores de los exponentes críticos. Hay que remarcar que, utilizando la hipótesis de escala (5.170), es imposible obtener directamente los exponentes críticos para  $\sigma = \sigma_c$  ya que el invariante  $s^{1/\nu d_f} u_3$  se anula en este caso y no es posible representar  $s^{\tau'} D(s, \sigma)$  en función de  $s^{1/\nu d_f} u_3$ , como se hace habitualmente. Además, el hecho de no tener en cuenta el tamaño finito en la hipótesis de escala (5.170) hace que los exponentes dependan de los parámetros del problema. Sin embargo, los autores toman como valor de los exponentes críticos el correspondiente a  $u = 0$  en cuyo caso, se puede demostrar que  $\tau' = \tau_{ef}$ . Para demostrar que esto es así, igualamos en primer lugar la expresión (5.169) a la (5.170), lo que nos permite expresar  $\tau'$  como:

$$\tau' = \tau_{ef} + \frac{\log \left[ \frac{\check{D}(s^{1/\nu d_f} u_3)}{\check{D}_{nsc}(sL^{-d_f}, uL^{1/\nu})} \cdot \frac{\check{N}_{nsc}(\sigma)}{\check{N}_{nsc}(uL^{1/\nu})} \right]}{\log s}, \quad (5.171)$$

donde se ha tenido en cuenta que el efecto de  $D_{nsc}$  no es importante para avalanchas de un tamaño suficientemente grande. Ahora hay que tener en cuenta las

---

<sup>27</sup>El exponente  $\tau'$  equivale al exponente  $\tau + \sigma\beta\delta$  en la notación utilizada en la Ref [228], donde  $\tau$  equivale a  $\tau_{nsc} - 1/\mu d_f$  en nuestra notación y  $\sigma\beta\delta$  equivale a  $1/\mu d_f$ .

cuatro observaciones siguientes: (i) los tamaños máximos típicos  $s_{max}$  en los que se observa un escalado razonable (comportamiento tipo ley de potencias) dependen de la proximidad a  $\sigma_c$  como:  $s_{max} \sim u^{-\nu d_f}$ , de tal manera que podemos suponer que  $s \sim u^{-\nu d_f}$  en la Ec. (5.171). (ii) El desorden mínimo para el que no aparecen avalanchas *spanning* se comporta de tal manera que  $u(\sigma_{min}(L)) \sim L^{-1/\nu}$ , con lo cual, restringiéndose a desórdenes cercanos a  $\sigma_{min}(L)$  para cada  $L$ , se puede considerar que  $uL^{1/\nu}$  se mantiene constante. (iii) Tal y como hemos visto, cerca de  $\sigma_c$ , la función de escala  $\check{D}_{nsc}$  no presenta dependencias apreciables con  $sL^{-d_f}$ . (iv) De la definición de  $u$  [Ec. (5.36)] y de  $u_3$  [Ec. (5.22)], se deduce que  $\lim_{\sigma \rightarrow \sigma_c} u_3/u = 1$ . Teniendo en cuenta todas estas observaciones en (5.171), es posible expresar  $\tau'$  de forma aproximada como:

$$\tau' = \tau_{ef} - \frac{\text{constante}}{\log u}, \quad (5.172)$$

para  $\sigma$  cercana a  $\sigma_c$ . Vemos pues que, efectivamente, se obtiene:

$$\lim_{\sigma \rightarrow \sigma_c} \tau' = \tau_{ef}. \quad (5.173)$$

De hecho, los autores de las Refs. [198, 222, 228] obtienen  $\tau' = 2.03 \pm 0.03$  de la extrapolación a  $\sigma = \sigma_c$ , valor que está en total acuerdo con  $\tau_{ef} = 2.00 \pm 0.06$  obtenido a partir de los exponentes definidos en nuestro trabajo.

En conclusión, el resultado importante de toda esta discusión es que el exponente asociado a la distribución de avalanchas no *spanning* es efectivo. En la literatura existen innumerables casos [§ 1.4], tanto asociados a experimentos como a modelos, en los que se analizan magnitudes que se distribuyen siguiendo una ley de potencias. La tendencia habitual es a obtener, de una forma u otra, el exponente que caracteriza a dichas leyes de potencias y, tras comparar los exponentes de distintos sistemas, decidir si tales sistemas pertenecen a la misma clase de *universalidad* (si los exponentes son iguales) o no (si los exponentes son distintos). En base a nuestros resultados, en general, éste no sería un buen procedimiento para determinar si dos sistemas pertenecen a la misma clase de universalidad o no porque, habitualmente, los exponentes que se obtienen son efectivos y sólo tiene sentido hablar de universalidad en términos de verdaderos exponentes críticos. Sin embargo, es preciso remarcar que esto no significa que todos los estudios que se hayan hecho en torno a las clases de universalidad sean incorrectos. Por ejemplo, si bien en el estudio de ciertos modelos se obtienen exponentes de leyes de potencias que dependen de los parámetros del modelo,

siempre se define como exponente crítico el valor que toma el exponente efectivo en cuestión en el punto crítico. Esto hace que, aunque el exponente obtenido no es crítico en el sentido estricto, sí se puede expresar como combinación de exponentes críticos, como hemos visto. Por tanto, si dos modelos pertenecen a la misma clase de universalidad, en el punto crítico se caracterizarán por los mismos exponentes efectivos en el límite termodinámico [70]. De cualquier manera, experimentalmente es difícil obtener el valor de los exponentes efectivos en el punto crítico y, en este sentido, es difícil obtener exponentes fáciles de comparar entre sí.

6. Con respecto a los valores de  $\beta_c$  y  $\beta_{3-}$ , es preciso notar que no se han identificado las dos contribuciones a  $\Delta m_s$  en ningún trabajo previo. No es pues extraño que se hayan publicado distintos valores en los pasados años:  $0.17 \pm 0.07$  [57],  $0.0 \pm 0.43$  [217] y  $0.035 \pm 0.028$  [222]. Cuanto más grandes son los sistemas simulados, más pequeño el valor obtenido y, por tanto, más cercano el valor a  $\beta_{3-}$ , en total acuerdo con los argumentos presentados en la sección § 5.6. Estos valores de  $\beta$  se obtienen intentando escalar  $\Delta m_s$  con la hipótesis de escala

$$\Delta m_s(\sigma, L) = L^{-\beta/\nu} \Delta \tilde{m}(uL^{1/\nu}), \quad (5.174)$$

sin tener en cuenta las contribuciones que escalan diferente. Se comprueba pues, comparando (5.174) con (5.97) y utilizando la Ec. (5.161), que el valor de  $\beta$  es menor cuanto mayor es  $L$ . Para  $L \rightarrow \infty$  se debería obtener  $\beta = \beta_{3-}$ .

7. La definición del exponente  $\mu$  corresponde a la combinación de exponentes  $\nu/\beta\delta$  en muchos de los trabajos previos. Los exponentes  $\beta$  y  $\delta$  son, en cierto sentido, secundarios y tienen, en nuestro caso, valores diferentes para los distintos tipos de avalanchas. Sin embargo, tal y como refleja el cuadro 5.7, el valor de la combinación  $\beta\delta/\nu$  publicado previamente [198, 222] es consistente con  $1/\mu$ , dentro de los errores estadísticos. En estos trabajos previos se obtiene el exponente  $\beta\delta$  a partir de escalados de los ciclos de histéresis, suponiendo la hipótesis de escala

$$m(H; \sigma) - m_c = |u|^\beta \tilde{m}(vu^{-\beta\delta}), \quad (5.175)$$

para la magnetización. De nuevo, los autores de estos trabajos no tienen en cuenta el tamaño finito del sistema porque se restringen a desórdenes  $\sigma > \sigma_c$  en que no observan avalanchas *spanning* y, según sus argumentos, los efectos de tamaño finito están ligados únicamente a las avalanchas *spanning*. Tal y como

los mismos autores reconocen más tarde [213], los escalados que se obtienen no son muy buenos y esto se podría resolver añadiendo correcciones analíticas a la hipótesis de escala (5.175). Es posible que, en definitiva, los autores se refieran a las correcciones asociadas a las avalanchas no *spanning* no críticas que no se tuvieron en cuenta previamente y siempre son importantes en número, como mínimo. En estos trabajos previos también se estudia la derivada de  $m(H; \sigma)$ . Estos escalados son de una calidad comparable a los de  $m(H; \sigma)$  y los exponentes que se extraen son similares.

### 5.11.2. Otros modelos y experimentos reales

#### Modelos

En el cuadro 5.8 se comparan los exponentes obtenidos en las secciones anteriores para el 3D-GRFIM con los correspondientes al RBIM [70], al SDIM [255] y al RAIM [60] simulados con la dinámica metaestable atérmica-adiabática en  $d = 3$ . Estos modelos presentan una transición inducida por desorden similar a la que se observa en el RFIM al variar  $\sigma$ . La variable que cuantifica el grado de desorden es diferente en cada caso tal y como introdujimos en la sección § 1.4.1. En esta sección nos referiremos a esta variable de control como  $\Psi$  en general. En el RBIM, esta variable corresponde a la desviación estándar de la distribución de interacciones aleatorias  $\{K_{ij}\}$ . El SDIM al que nos referimos en el cuadro se propuso para simular el comportamiento de los ciclos de histéresis de aleaciones de la familia  $\text{Cu}_{3-x}\text{AlMn}_x$  [58]. En este tipo de materiales el desorden tiene principalmente dos orígenes: la falta de estequiometría ( $x < 1$ ) y un ordenamiento configuracional incompleto<sup>28</sup>. Con el fin de simular estas fuentes de desorden, en el SDIM se introducen dos variables:  $x$  y  $p$ . La primera es la concentración de Mn (mayor ordenación cuanto mayor es  $x$ ) y la segunda es la probabilidad de que los átomos de Mn se coloquen en la subred “incorrecta” (*IV*). En el RAIM el desorden es debido a la orientación anisotrópica de los espines. Se han propuesto dos distribuciones distintas (modelo A y modelo B) para el ángulo  $\theta_{\text{RAIM}}$  que forman los espines con el eje de aplicación del campo magnético (el eje  $z$ ). En todos estos estudios, el exponente  $\tau_{ef}$  se obtiene [257] ajustando una ley de potencias con una corrección

<sup>28</sup>Debido al tratamiento térmico realizado, estas aleaciones tienen una estructura bcc metaestable con ordenación  $L2_1$  (ver Fig. 1.13). En esta estructura, los átomos de Cu se colocan principalmente en las subredes *I* y *II*, los átomos de Al se colocan en la subred *IV* y los átomos de Mn en la subred *III*. Sin embargo, por razones cinéticas, una fracción  $p$  de los átomos de Mn se sitúan en la subred *IV*. En cambio, la probabilidad de que dichos átomos se sitúen en las subredes *I* y *III* es muy pequeña [256].

exponencial ( $D(s) \sim s^{-\tau_{ef}} \exp(-\lambda s)$ ). Para un tamaño de sistema dado,  $\tau_{ef}$  decrece con el desorden y parece presentar solamente una débil dependencia con  $L$ . En cambio, el factor  $\lambda$  de la corrección exponencial parece depender más de  $L$ . El valor de  $\tau_{ef}$  que se toma como exponente crítico es aquel que se obtiene para el desorden crítico<sup>29</sup>. Tal y como se desprende del razonamiento que ha permitido llegar a la expresión (5.169), el método utilizado en estos trabajos es aceptable para obtener un exponente efectivo que, para el desorden crítico, se puede expresar en términos de exponentes críticos.

**Cuadro 5.8:** Comparación de los exponentes asociados al RFIM (esta tesis) con los correspondientes al RBIM [70], al SDIM [255] y al RAIM [60]. También se muestran los exponentes obtenidos experimentalmente a partir de los ciclos de histéresis observados en bicapas de Co/CoO [258] y en aleaciones de Cu-Al-Mn [259].

Modelo/Experimento	$\nu$	$\beta$	$\tau_{ef}$	$\beta\delta$
RFIM	$1.2 \pm 0.1$	$0.024 \pm 0.012$	$2.00 \pm 0.06$	$1.8 \pm 0.3$
RBIM	$1.06 \pm 0.1$	$0.0 \pm 0.1$	$2.0 \pm 0.2$	
SDIM			$1.9 \pm 0.2$	
RAIM (Modelo A)	$1.0 \pm 0.1$	$0.1 \pm 0.1$	$2.06 \pm 0.05$	
RAIM (Modelo B)	"	"	$2.10 \pm 0.05$	
Histéresis en Co/CoO		$0.022 \pm 0.006$		$0.30 \pm 0.03$
Histéresis en Cu-Al-Mn		$0.03 \pm 0.01$		$0.4 \pm 0.1$

El método utilizado en [70, 255] para la obtención de los exponentes  $\beta$  y  $\nu$  en el RBIM y el RAIM se basa en el estudio del cambio de magnetización asociado a la avalancha de mayor tamaño  $\Delta m_{max}$ . Los autores asumen que esta magnitud se comporta de forma similar a un parámetro de orden. Igual que el RFIM, tanto el RBIM como en el RAIM presentan una discontinuidad en el ciclo de histéresis para desórdenes pequeños. Es de suponer pues que, aunque no se ha identificado hasta ahora, tanto en el RBIM como el RAIM debe existir también una avalancha 3D-*spanning* (análoga a la avalancha 3D-*spanning* subcrítica) responsable de la discontinuidad y cuyo cambio de magnetización asociado se comporta como un parámetro de orden. Como hemos visto en relación con el RFIM, esta avalancha es la mayor de todas las que tienen lugar en un semiciclo de histéresis y parece lógico pensar que esto también es así en el RBIM y en el

<sup>29</sup>El desorden crítico se determina como aquel valor del desorden para el que la distribución de tamaños de avalanchas es más próxima a una ley de potencias exacta. Es decir, el desorden para el que la corrección exponencial es menos importante ( $\lambda \sim 0$ ).

RAIM. Teniendo esto en cuenta, concluimos que, efectivamente,  $\Delta m_{max}$  se comporta como un parámetro de orden en el límite termodinámico para los desórdenes en que ocurre la discontinuidad. En la región supercrítica (desorden grande) es de esperar que únicamente ocurran avalanchas no *spanning* no críticas y sólo estas pueden contribuir a  $\Delta m_{max}$ . De este tipo de avalanchas existe una fracción finita para cualquier desorden distinto de cero, de tal forma que  $\Delta m_{max} \neq 0$  en esta región. En este sentido,  $\Delta m_{max}$  no se comporta exactamente como un parámetro de orden. Sin embargo, el hecho de que  $\Delta m_{max} = \Delta m_{3-}$  en la región subcrítica es suficiente para obtener el exponente  $\beta_{3-}$  asociado a  $\Delta m_{3-}$  a partir de  $\Delta m_{max}$ . En sistemas finitos, cerca del punto crítico ocurren avalanchas 1D-, 2D- y 3D-*spanning* críticas y, en algunas realizaciones de desorden, éstas serán las que contribuyan a  $\Delta m_{max}$  si no ocurre una avalancha 3D-*spanning* subcrítica. Esto hace que  $\Delta m_{max}$  no coincida exactamente con  $\Delta m_{3-}$  cerca del punto crítico para sistemas finitos. De todas formas, lógicamente el efecto de las avalanchas 1D-, 2D- y 3D-*spanning* críticas en  $\Delta m_{max}$  será menor que en el cambio de magnetización asociado a todas las avalanchas *spanning* ( $\Delta m_s$ ). En consecuencia, el hecho de no distinguir las distintas contribuciones a  $\Delta m_{max}$  será menos importante que si no se tienen en cuenta al utilizar  $\Delta m_s$  como posible parámetro de orden. En este sentido, es mejor utilizar  $\Delta m_{max}$  que  $\Delta m_s$  para obtener el exponente  $\beta_{3-}$ . Desde un punto de vista cuantitativo, en las Refs. [70, 255] se analiza  $\Delta m_{max}$  haciendo un estudio con técnicas estándar de tamaño finito, suponiendo la siguiente hipótesis de escala:

$$\Delta m_{max} = L^{3-\beta/\nu} \tilde{S}_{max}(u(\Psi, L)L^{1/\nu}), \quad (5.176)$$

donde la variable de escala  $u(\Psi, L)$  se define como:

$$u(\Psi, L) = \frac{\Psi - \Psi_c(L)}{\Psi_c(L)}. \quad (5.177)$$

El desorden crítico efectivo  $\Psi_c(L)$  se define, a partir de  $\Delta m_{max}$ , como el desorden para el que  $\Delta m_{max}$  presenta un punto de inflexión.  $\Psi_c(L)$  depende de  $L$  como:

$$\Psi_c(L) = \Psi_c + CL^{-1/\nu}. \quad (5.178)$$

Haciendo un desarrollo para  $L$  grande,  $u(\Psi, L)$  se puede escribir de la siguiente forma:

$$u(\Psi, L) = u_1(\Psi) - L^{-1/\nu} \frac{C}{\Psi_c} [1 + u_1(\Psi)] + \mathcal{O}(L^{-2/\nu}). \quad (5.179)$$

Así pues, la variable de escala  $u(\Psi, L)$  sólo se diferencia en unas correcciones de tamaño finito de la aproximación más sencilla  $u_1(\Psi) = (\Psi - \Psi_c)/\Psi_c$  a la variable de escala

$u$ . En estos trabajos no se contempló la posibilidad de añadir correcciones en  $u_1^2$  a las leyes de escala pero, como se ha demostrado en la sección § 5.1, tal corrección no es crucial si  $L$  es suficientemente grande y  $1/\nu > 0$ .

La conclusión final es que, para sistemas suficientemente grandes, la ley de escala (5.176) es básicamente equivalente a la correspondiente a  $\Delta m_{3-}$  [=  $L^{-\beta_{3c}} \Phi_{3-}(uL^{1/\nu})$ ] en la zona subcrítica y, pese a que no se identifica exactamente la avalancha 3D-*spanning* subcrítica, los exponentes que se extraen utilizando (5.176) son comparables a los que se obtendrían en los mismos modelos identificando los distintos tipos de avalanchas.

Dentro de las referencias consultadas, no se ha encontrado un estudio extenso de las magnitudes no integradas de los modelos que estamos comparando con el RFIM. Por ello no es posible comparar el exponente  $1/\mu$  (o  $\beta\delta/\nu$ ) obtenido para el RFIM con el correspondientes a estos modelos. Por otro lado, en el caso del SDIM al que nos referimos en el cuadro 5.8 solamente se ha estimado el exponente asociado a la distribución de tamaños de las avalanchas. Sin embargo, comparando los exponentes que se conocen para cada uno de los modelos, se puede comprobar que, dentro de los errores estadísticos, todos los modelos se caracterizan por el mismo conjunto de exponentes. Se puede deducir a partir de esta coincidencia que todos los modelos pertenecen a la misma clase de universalidad [70, 257]. Esta comparación podría no ser totalmente concluyente, básicamente por dos motivos: (i) el conjunto de exponentes conocidos para comparar es reducido<sup>30</sup> y (ii) debido quizás a que las simulaciones hechas del RBIM, el SDIM y el RAIM corresponden a sistemas con  $L = 40$  como máximo, los exponentes obtenidos tienen una barra de error considerable (sobre todo en el caso del exponente  $\beta$ ). Sin embargo, a parte de los resultados numéricos, existen argumentos de simetría [213, 217] según los cuales cualquier modelo con enlaces aleatorios no correlacionados y campos aleatorios debe pertenecer a la misma clase de universalidad que el RFIM ya que no tiene ninguna simetría nueva en comparación con el RFIM. Por otro lado, a partir de cálculos basados en el GR, en la Ref. 260 se demuestra que un modelo vectorial de espines  $\mathcal{O}(n)$  con campos aleatorios puede pertenecer a la misma clase de universalidad que el RFIM, aunque los autores encuentran también una nueva clase de universalidad en este modelo. Con respecto al RAIM, también se han propuesto [213, 217] argumentos de simetría según los cuales pertenece a la misma clase de universalidad que el RFIM, cosa que también se ha visto confirmada más

---

<sup>30</sup>Es preciso mencionar aquí que, a parte de los exponentes que se resumen en el cuadro 5.8, dentro del error estadístico también coincide el exponente dinámico  $z$  para todos estos modelos.

tarde [261] con un análisis basado en el GR.

## Experimentos

A diferencia del esfuerzo teórico dedicado a entender las transiciones en los ciclos de histéresis inducidas por desorden, sólo existen algunos trabajos experimentales dedicados al mismo fin. Obradó *et al.* [58] mostraron que, a temperaturas bajas ( $T \lesssim 5$  K), los ciclos de histéresis en la fase de vidrio de espín del Cu-Al-Mn<sup>31</sup> cambian desde una apariencia suave hasta una situación en que presentan una discontinuidad al disminuir el grado de desorden (relacionado con la composición de la aleación, como se ha explicado más arriba). Sin embargo, no se hizo ninguna estimación en este trabajo de los posibles exponentes críticos involucrados. Lo que sí se hizo fue comparar los resultados experimentales con los del SDIM. De esta comparación se concluyó que la fenomenología observada en el Cu-Al-Mn podría estar ligada a una transición inducida por desorden similar a la que se observa en los sistemas de espines con desorden congelado cuando evolucionan con la dinámica metaestable atérmica-adiabática.

Posteriormente, Berger *et al.* [258, 262, 263] presentan los resultados de analizar el efecto del desorden magnético en bicapas de Co/CoO. Para temperaturas por debajo de 291 K (temperatura de Néel del CoO) la capa de CoO presenta un orden antiferromagnético mientras que la de Co es ferromagnética. En este caso, la capa antiferromagnética de CoO permite variar el desorden magnético variando la temperatura. Para temperaturas mayores que una cierta temperatura  $T_c$ , se observan ciclos de histéresis discontinuos. En cambio, para temperaturas menores que  $T_c$ , los ciclos de histéresis son suaves. Los autores atribuyen este comportamiento a la existencia de un punto crítico en el diagrama de fase de no equilibrio de este sistema. Además, cerca del punto crítico, los autores escalan los ciclos de histéresis para distintos desórdenes (sólo para temperaturas  $T < T_c$ ) utilizando la ley de escala siguiente:

$$m(H; T) = t^\beta \tilde{m} \left( \frac{h}{t^{\beta\delta}} \right), \quad (5.180)$$

donde  $t \equiv (T_c - T)/T$  y  $h = (H - H_c)/H_c$ . De este escalado, obtienen los exponentes críticos  $\beta = 0.022 \pm 0.006$  y  $\beta\delta = 0.30 \pm 0.03$ . Como se puede apreciar en el cuadro 5.8, el exponente  $\beta$  obtenido es igual al del 3D-GRFIM mientras que el exponente  $\beta\delta$  es claramente menor que el asociado al 3D-GRFIM. Los autores atribuyen tal diferencia al hecho de que el sistema Co/CoO se comporta como un sistema magnético bidimensional. Con respecto a esta afirmación, es preciso mencionar que, a pesar de que se

<sup>31</sup>Las aleaciones de Cu-Al-Mn utilizadas en este trabajo son policristalinas.

han hecho simulaciones en el 2D-GRFIM con sistemas muy grandes (hasta  $7000^2$  espines) [198, 228], no ha sido posible obtener una estimación fiable del desorden  $\sigma_c$  para el que sucede la transición inducida por desorden. Tales simulaciones son consistentes con  $\sigma_c = 0$  o bien con un exponente  $\nu$  asociado a la longitud de correlación muy grande ( $\nu = 8 \pm 8$ ), lo que dificultaría la localización de  $\sigma_c$ . En este último caso sería  $\sigma_c \simeq 0.54$ . En la Ref. 70 también se presentan estimaciones de los exponentes asociados al RFIM en  $d = 2$ , sin embargo, los tamaños de sistema utilizados son más pequeños que en los estudios mencionados antes. La tendencia típica en este tipo de análisis es a asumir que existe una transición inducida por desorden y, a partir de esta hipótesis, obtener los exponentes [229, 264, 265]. El mismo tipo de problemas podrían existir en otros modelos analizados en  $d = 2$ , como el RBIM [21, 70], el modelo de Blume-Emery-Griffiths con campos aleatorios [70], el RFIM con vacantes [59] o el RFIM con interacciones dipolares [266, 267]. En definitiva, el comportamiento a grandes escalas de los modelos de espines con desorden en  $d = 2$  es muy controvertido y parece ser que no existen resultados definitivos. Posiblemente, esto es debido a que la dimensión crítica menor podría ser  $d = 2$ , tal y como sucede en el RFIM en equilibrio [63], cosa que implicaría la inexistencia de transición inducida por desorden en sistemas bidimensionales. Es, por tanto, difícil comparar los exponentes obtenidos experimentalmente en las bicapas de Co/CoO con los modelos. Por otro lado, Berger *et al.* dejan abierta la posibilidad de que el sistema que ellos estudian esté dentro de la clase de universalidad del modelo de Ising térmico en  $d = 2$ . Su sospecha se basa en el hecho de que sus experimentos están hechos a  $T > 0$  y, además, obtienen  $\delta = 13.6 \pm 5.6$  mientras que  $\delta = 15$  en el 2D-IM (ver por ejemplo la Ref. [148]). Sin embargo, esta posibilidad no parece muy plausible dado que  $\beta = 1/8 = 0.125$  en el 2D-IM y este valor es considerablemente superior al encontrado por estos autores.

Más recientemente, siguiendo la línea iniciada en la Ref. 58, Marcos *et al.* [259, 268] han obtenido la dependencia con la temperatura de los ciclos de histéresis en cuatro aleaciones<sup>32</sup> de Cu-Al-Mn con distintas concentraciones  $x$  de Mn. Tales ciclos son continuos por encima de una cierta temperatura  $T_c(x)$  (depende de la composición) y, en cambio, presentan una discontinuidad para temperaturas menores que  $T_c(x)$ . Los autores hacen un análisis de escalado de las curvas de magnetización para los ciclos de histéresis correspondientes, para cada composición, a temperaturas cercanas a  $T_c(x)$ . Las curvas de magnetización dependen del campo  $H$ , la temperatura  $T$  y el momento magnético  $\mu(x)$  que depende de la composición  $x$ . Teniendo en cuenta estas

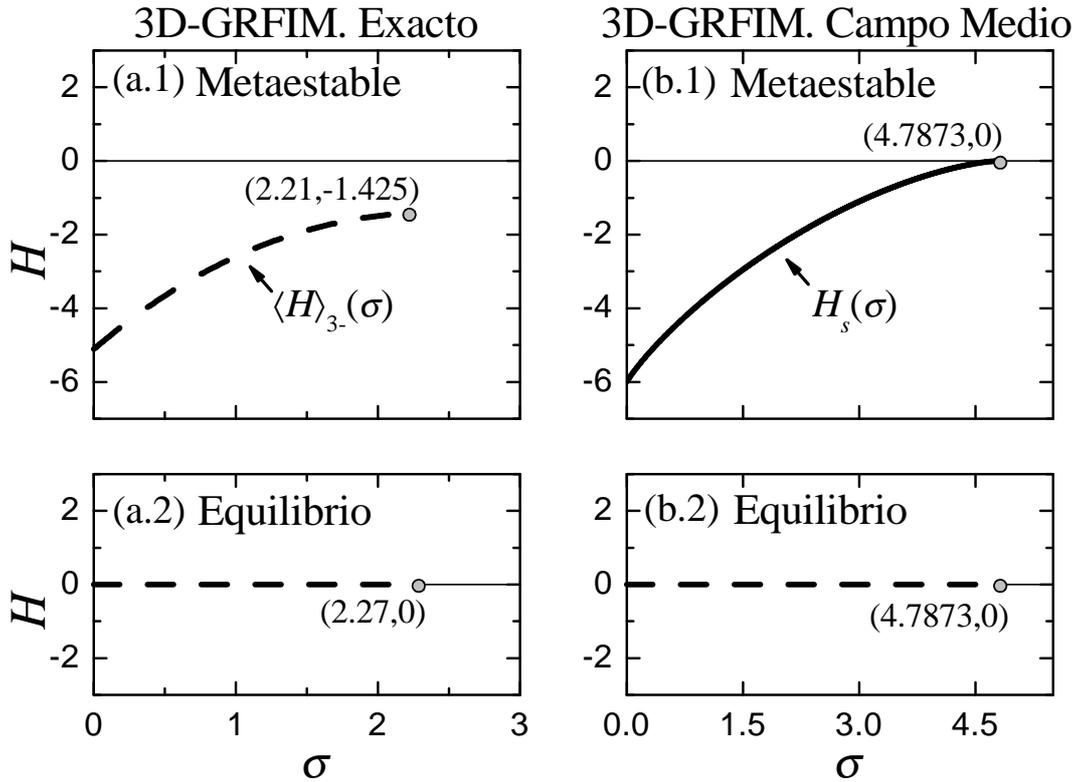
---

<sup>32</sup>Tres de ellas son policristalinas y, la restante, es un monocristal.

dependencias, los autores proponen la hipótesis de escala

$$m_{\pm}(H; T, \mu(x)) = \mu(x)|t|^{\beta} \tilde{m}_{\pm} \left( \frac{h}{\mu^{\delta}(x)|t|^{\beta\delta}} \right) \quad (5.181)$$

para la magnetización, donde, en este caso,  $t \equiv [T - T_c(x)]/T_c(x)$  es la variable de escala asociada al desorden y  $h \equiv [H - H_{coe}(x, T)]/H_{coe}(x, T)$ . El resultado curioso de estos escalados es que se obtiene  $\beta = 0.03 \pm 0.01$  y  $\beta\delta = 0.4 \pm 0.1$ , valores que coinciden con los obtenidos por Berger *et al.*, dentro de los errores estadísticos. Marcos *et al.* atribuyen tal coincidencia al hecho de que en las aleaciones Heusler no estequiométricas [269, 270] hay interacciones antiferromagnéticas que coexisten con las ferromagnéticas. En este sentido, el antiferromagnetismo sería el elemento común entre los experimentos de Berger *et al.* y los de Marcos *et al.* Por otro lado, a diferencia de los resultados de Berger *et al.*, las aleaciones de Cu-Al-Mn son un sistema claramente tridimensional, lo que hace realmente sorprendente la coincidencia de exponentes. De cualquier forma, comparando estos resultados con los modelos que predicen transiciones inducidas por desorden, parece que estos últimos no incluyen algún ingrediente esencial que sí poseen los sistemas experimentales, lo que provocaría que los modelos no pertenezcan a la misma clase de universalidad que los experimentos llevados a cabo hasta ahora. Una diferencia clara, y que ya ha sido notada con anterioridad [258, 262], es que los experimentos se hacen a temperatura finita y, en cambio, en los modelos se asume que el efecto de las fluctuaciones térmicas es despreciable. En el RFIM en equilibrio, la temperatura es irrelevante y, por tanto, se observan los exponentes asociados al punto crítico en  $\sigma_c$  a  $T = 0$  si la temperatura es suficientemente baja. Sin embargo, si las fluctuaciones térmicas son importantes en las temperaturas de trabajo, los exponentes observados podrían provenir de un *crossover* entre los exponentes del RFIM a  $T = 0$  y los del modelo de Ising térmico. En este sentido, sería interesante hacer experimentos (con procedimientos similares a los que se muestran en el capítulo 7) en los sistemas estudiados por Berger y Marcos para determinar si las fluctuaciones térmicas juegan un papel importante en sus condiciones experimentales. A parte de esto, en las hipótesis de escala (5.180) y (5.181) se ha considerado que la variable de escala es  $v = h$  y no se ha tenido en cuenta una corrección lineal (rotación) con el desorden (temperatura en estos experimentos). Esta corrección es necesaria para obtener buenos escalados en los modelos y, como discutimos con mayor profundidad en la sección § 5.11.7, es una corrección necesaria en general siempre que no exista un motivo de simetría por el que se anule. Concluimos pues que la forma en la que se han analizado los datos experimentales puede inducir desviaciones importantes de los exponentes.



**Figura 5.27:** Diagrama de fases asociado al 3D-GRFIM exacto con dinámica metaestable (a.1) y en equilibrio (a.2). También se muestra el diagrama de fases correspondiente a la aproximación de campo medio del 3D-GRFIM con dinámica metaestable (b.1) y en equilibrio (b.2). La línea continua gruesa en (b.1) indica la transición espínodal en la solución metaestable de campo medio y las líneas discontinuas en (a.1), (a.2) y (b.2) indican transiciones de fase de primer orden comunes. Se han indicado las coordenadas del punto crítico (puntos grises) en todos los casos.

### 5.11.3. Dinámica metaestable y equilibrio

Los resultados presentados en este capítulo permiten proponer un esquema para el diagrama de fases del 3D-GRFIM con dinámica metaestable atérmica-adiabática en el límite termodinámico.

En la sección § 5.10 se ha demostrado numéricamente que la avalancha 3D-*spanning* que ocurre a lo largo de la línea dada por la Ec. (5.135) es compacta y, por consiguiente, es la responsable de la discontinuidad macroscópica de la magnetización observada para  $\sigma < \sigma_c$ .

La Fig. 5.27(a.1) muestra el diagrama de fases obtenido. La línea discontinua representa la línea de transición de primer orden dada por la Ec. (5.135). El punto gris

indica el punto crítico. Tal y como se remarcó en la sección § 5.8, la línea de transición es sólo aproximada ya que se ha deducido a partir de argumentos de escala cuya validez se supone que está restringida a las proximidades del punto crítico. De todas formas, es remarcable el hecho de que, para  $\sigma = 0$ , se obtiene  $\langle H \rangle_{3-}(0) = -5.113$  a partir de (5.135). Este valor es cercano a  $H = -4$  que corresponde al campo coercitivo de los ciclos de histéresis del 3D-GRFIM con dinámica metaestable en el límite  $\sigma \rightarrow 0^+$ . Un análisis trivial para  $\sigma = 0$  estrictamente, demuestra que todos los espines giran en una avalancha 3D-*spanning* para  $H = \langle H \rangle_{3-}(0) = -6$ . En cambio, cuando  $\sigma \rightarrow 0^+$ , teóricamente existen espines girados para cualquier  $H < \infty$ . Supongamos un caso extremo (y poco probable) en que a  $H > 6$  hay un espín  $S_i$  que tiene  $n_-(S_i) = 6$  vecinos próximos girados. Este espín gira a un campo  $H = 6 - h_i$  que, en promedio es  $H = 6$ . Al girar este espín a  $H = 6$ , es muy probable que ninguno de los vecinos de los espines girados tenga 6 vecinos girados, de tal manera que, con toda probabilidad, la avalancha no se propagará hasta llegar a ser 3D-*spanning* si se mantiene  $H = 6$ . Con argumentos similares, es fácil ver que es prácticamente imposible que un espín que tenga  $n_- = 5, 4, 3$  o 2 vecinos próximos girados, genere una avalancha 3D-*spanning* a campo  $H = (2n_- - 6) = 4, 2, 0$  o  $-2$ , respectivamente. En cambio, si un espín tiene  $n_- = 1$ , éste girará en promedio a  $H = -4$  y su giro hará que parte de sus vecinos próximos no girados giren a este campo. De esta forma, la avalancha se va propagando hasta ser 3D-*spanning* porque, la misma propagación hace que haya espines que tengan uno o más vecinos próximos girados, los cuales pueden girar a este campo. Esto demuestra que el campo promedio de giro de los espines es  $\langle H \rangle_{3-} = -4$  en el límite  $\sigma \rightarrow 0^+$ .

En la Fig. 5.27(a.2) se muestra, por comparación, el diagrama de fases del 3D-GRFIM en equilibrio a  $T = 0$  (mínima energía) [65]. Además, en las Figs. 5.27(b.1) y 5.27(b.2), se muestran las soluciones de la aproximación de campo medio para el caso metaestable [57] y el de equilibrio [271, 272].

En la aproximación de campo medio,  $\sigma_c = z\sqrt{2/\pi}$  [§ 4.1.2 y Cuadro 5.9] tanto en equilibrio como con dinámica metaestable, donde  $z$  es el número de coordinación. En particular,  $\sigma_c = 4.7873$  para el 3D-GRFIM en que  $z = 6$ . Aunque  $\sigma_c$  es igual en el caso metaestable y en equilibrio, el carácter de la transición para  $\sigma < \sigma_c$  es diferente en cada caso: en equilibrio, tiene lugar una transición de primer orden estándar mientras que, en el caso metaestable, la línea donde sucede la discontinuidad es una línea espínodal  $H_s(\sigma)$ , dada por la Ec. (4.20). La línea continua en la Fig. 5.27(b.1) corresponde a  $-H_s(\sigma)$  para  $z = 6$ . Como ya se ha comentado anteriormente, la transición espínodal

**Cuadro 5.9:** Coordenadas del punto crítico en el plano  $\sigma$ - $H$  y exponentes críticos del 3D-GRFIM en equilibrio y con dinámica metaestable atérmica-adiabática correspondientes a la aproximación de campo medio y a las soluciones exactas del modelo.

Magnitud	3D-GRFIM. Campo medio		3D-GRFIM	
	Equilibrio (Refs. [271, 272])	Metaestable (Ref. [198])	Equilibrio (Ref. [65])	Metaestable (Este trabajo)
$\sigma_c$	$z\sqrt{2/\pi}$	$z\sqrt{2/\pi}$	$2.270 \pm 0.004$	$2.21 \pm 0.02$
$ H_c $	0	0	0	$1.425 \pm 0.010$
$\nu$	1/2	1/2	$1.37 \pm 0.09$	$1.2 \pm 0.1$
$1/\mu (= \beta\delta/\nu)$	3	3	$1.498 \pm 0.034$	$1.5 \pm 0.1$
$\beta$	1/2	1/2	$0.017 \pm 0.005$	$\beta_{3-} = 0.024 \pm 0.012$

se caracteriza por una divergencia de las fluctuaciones y de la longitud de correlación a lo largo de la línea  $-H_s(\sigma)$  donde se produce la discontinuidad  $\Delta m$  del parámetro de orden.

A diferencia de los resultados en las soluciones de campo medio, en las soluciones exactas, el carácter de la línea de transición en el equilibrio no es distinto al que se observa con dinámica metaestable. En ambos casos tiene lugar una transición de primer orden estándar con discontinuidad en el parámetro de orden y longitud de correlación finita. Este resultado está de acuerdo con la predicción [217] hecha a partir de un desarrollo para  $d = 8 - \epsilon$  que afirma que la transición tiene un carácter de primer orden estándar para  $d < 8$ .

Tal y como se indica en la Fig. 5.27 y el cuadro 5.9,  $\sigma_c^{eq} = 2.270 \pm 0.004$  en equilibrio y  $\sigma_c^{met} = 2.21 \pm 0.02$  en el caso metaestable. En relación al valor del campo crítico, es  $|H_c| = 1.425$  en el caso metaestable y cero en equilibrio. Vemos pues que, a diferencia de las soluciones de campo medio, el punto crítico metaestable no coincide con el de equilibrio en las soluciones exactas. Sin embargo, los exponentes críticos, cuyos valores se resumen en el cuadro 5.9<sup>33</sup>, sí son iguales dentro de los errores estadísticos. De hecho, en 1994, Maritan *et al.* [240] ya pusieron de manifiesto esta similitud entre los exponentes críticos de los dos modelos, proponiendo entonces que ambos modelos

<sup>33</sup>Tanto en las soluciones de campo medio como en la de equilibrio exacta, se ha obtenido el exponente  $\mu$  identificándolo con  $\nu/\beta\delta$ . Además, para obtener  $\beta\delta$  en el caso de equilibrio exacto, se ha utilizado la relación entre exponentes  $\beta + \beta\delta = (d - \tilde{\theta})\nu$  que es válida en equilibrio. El exponente  $\tilde{\theta} = 1.49 \pm 0.03$  [65] está asociado con la energía libre.

podrían pertenecer a la misma clase de universalidad. Sus argumentos se basaban en las mejores estimaciones de los exponentes críticos en equilibrio [62, 273] que se conocían en aquel momento y en la única estimación numérica que se conocía de los exponentes en el caso metaestable [57]. Sethna *et al.* [217, 252] refutaron la propuesta de Maritan *et al.* basándose en la naturaleza tan diferente de los modelos ya que, en el equilibrio, el sistema se encuentra siempre en el estado de mínima energía mientras que, en el caso metaestable, el estado del sistema depende de la historia de variación del campo. Esto hace que el punto crítico suceda a un campo crítico nulo en equilibrio y, en cambio, suceda a un campo crítico distinto de cero en el caso metaestable. Más recientemente, se ha discutido la universalidad de los exponentes para distintas distribuciones de desorden en campo medio [274] y en redes de Bethe [275].

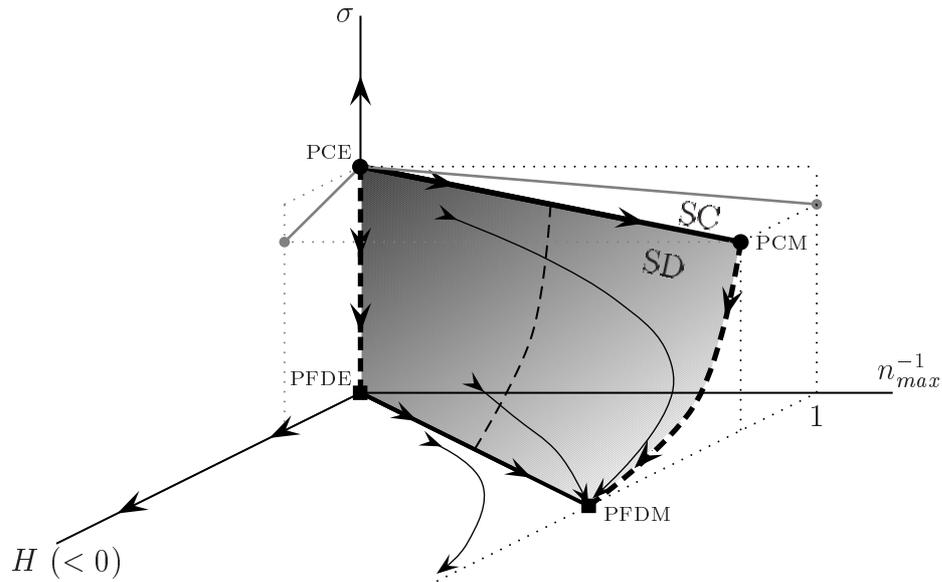
Actualmente existen estimaciones numéricas de los exponentes críticos más precisas que en el momento en que Maritan *et al.* propusieran la similitud entre los conjuntos de exponentes obtenidos en equilibrio y los obtenidos con dinámica metaestable. La comparación actual de los exponentes en equilibrio y en el caso metaestable [Cuadro 5.9] nos lleva a reafirmarnos en la idea inicial de Maritan *et al.*, a pesar de la indiscutible diferencia entre ambos modelos. A continuación se propone un argumento basado en la teoría del GR que sugiere que los puntos críticos en cada uno de los modelos (3D-GRFIM en equilibrio y 3D-GRFIM con dinámica metaestable) corresponden al mismo punto fijo en el espacio general de constantes de acoplamiento (espacio de parámetros). Tal y como se definió en el capítulo 2, dentro del marco de la teoría del GR, la superficie crítica se define como el conjunto de todos los puntos en el espacio de parámetros que fluyen hacia un cierto punto fijo crítico al aplicar la transformación del GR. Por otro lado, la variación de los parámetros físicos ( $\sigma$  y  $H$  en el RFIM) genera la superficie física en el espacio de parámetros. De acuerdo con estas definiciones, el punto crítico de un cierto modelo corresponde al punto en que la superficie física de dicho modelo intersecta a la superficie crítica. Los dos modelos que estamos discutiendo se pueden considerar como casos particulares de un modelo más general con el mismo Hamiltoniano que el 3D-GRFIM y con la siguiente dinámica atérmica-adiabática: cuando varía el campo  $H$ , giran conjuntos de  $n \leq n_{max}$  espines vecinos si tal giro representa una disminución de la energía. La dinámica metaestable [§ 4.1] utilizada en este trabajo corresponde a  $n_{max} = 1$  (un espín gira si, con su giro, disminuye la energía). Esta dinámica es la “mínima” que se puede proponer (en el caso  $n_{max} = 0$  no giraría ningún espín y, por tanto, no habría transición). En cambio, el modelo en equilibrio a  $T = 0$  (estado de mínima energía exacto) corresponde a  $n_{max} = \infty$ , es decir, gira aquel

conjunto de espines (sea del tamaño que sea) cuyo giro conlleva el máximo descenso en la energía. El parámetro  $n_{max}$  distingue los modelos desde un punto de vista dinámico y hay que tenerlo en cuenta en las ecuaciones del GR. A partir del hecho de que se encuentra un punto crítico tanto para  $n_{max} = 1$  como para  $n_{max} = \infty$  y ambos puntos se caracterizan por el mismo conjunto de exponentes críticos, tiene sentido considerar que la variable  $n_{max}$  es irrelevante [§ 2.2.3]. Con esto en mente, proponemos<sup>34</sup> el esquema del flujo del GR que se presenta en la Fig. 5.28 en el espacio de parámetros físicos  $(H, n_{max}^{-1}, \sigma)$ . Puesto que  $n_{max}$  es irrelevante, su variación cambia la posición del punto crítico pero no cambia los exponentes críticos que corresponden al mismo punto fijo crítico. Durante la realización de esta tesis, Vives *et al.* [276] han llevado a cabo simulaciones numéricas con  $n_{max} = 2$  y los resultados concuerdan con esta afirmación. Actualmente suponemos que el flujo del GR corresponde al que se indica esquemáticamente con flechas en la Fig. 5.28. Tanto el punto crítico de equilibrio (PCE) como el punto crítico metaestable (PCM) pertenecen a la superficie crítica (SC). Un análisis cualitativo parece indicar que el flujo del GR va hacia el PCM, es decir,  $n_{max}^{-1}$  aumenta al aplicar la transformación del GR. En la sección § 2.5 se explicó que, en general, las transiciones de fase de primer orden tienen lugar en los puntos del espacio de constantes de acoplamiento que fluyen hacia un punto fijo de discontinuidad al aplicar la transformación del GR [169]. En el modelo propuesto, asumimos la existencia de dos puntos fijos de discontinuidad: el punto fijo de discontinuidad de equilibrio (PFDE) y el punto fijo de discontinuidad metaestable (PFDM). Ambos corresponden a  $\sigma = 0$ . El PFDE controla la transición de fase que tiene lugar en equilibrio ( $n_{max}^{-1} = 0$ ) para  $\sigma < \sigma_c^{eq}$ . En cambio, el PFDM controla la transición de fase de primer orden para los casos en que  $n_{max}^{-1} > 0$ . La superficie de discontinuidad (SD), donde ocurre la transición de primer orden, la forman todos aquellos puntos que fluyen hacia cualquiera de los puntos fijos de discontinuidad.

La teoría de Landau aplicada a las transiciones de fase de primer orden supone la existencia de barreras energéticas, lo que permite entender la presencia de histéresis en términos de competición de tiempos [§ 1.3.1 y capítulo 3]. En cambio, en la dinámica metaestable mínima ( $n_{max}^{-1} = 1$ ) propuesta por Sethna *et al.*, no se introduce de forma explícita ninguna barrera: un espín gira si con ello minimiza la energía y no existe ninguna barrera para tal giro. Sin embargo, a pesar de no suponer explícitamente la presencia de barreras, el modelo presenta histéresis. ¿Es posible entender esta histéresis

---

<sup>34</sup>Este esquema corresponde al caso en que  $H$  decrece desde  $+\infty$ . En el caso en que  $H$  aumente desde  $-\infty$ , el esquema resultante es la imagen especular en el plano  $n_{max}^{-1} - \sigma$  (corresponde al cambio  $H \rightarrow -H$ ).



**Figura 5.28:** Diagrama de fases esquemático del modelo propuesto en el espacio  $(H, n_{max}^{-1}, \sigma)$  en el límite atérmico-adiabático. Las flechas indican el flujo del GR. Se han utilizado acrónimos para el Punto Crítico de Equilibrio (PCE), el Punto Crítico Metaestable (PCM), el Punto Fijo de Discontinuidad en Equilibrio (PFDE), el Punto Fijo de Discontinuidad Metaestable (PFDM), la Superficie Crítica (CS) y la Superficie de Discontinuidad (SD). Las líneas grises indican las proyecciones de la superficie crítica en los planos verticales.

en términos de barreras de energía?. Sí es posible en términos de la dinámica general que hemos propuesto. Supongamos que un sistema de espines se encuentra en un estado de energía  $E$ . Con la dinámica mínima, un espín gira si esto supone ir a un estado de energía  $E'_1 < E$ . Por otro lado, es posible que el giro simultáneo de  $n$  espines lleve a un estado de energía  $E'_n$  menor que  $E'_1$ . Sin embargo, la dinámica mínima prohíbe el giro de más de un espín, lo que se puede interpretar como la imposición de barreras energéticas infinitas a todos los estados a los que se pueda acceder girando más de un espín. En general, una dinámica que permite el giro de  $n \leq n_{max}$  espines, supone barreras de energía infinitas a todos los estados accesibles girando grupos de  $n > n_{max}$  espines.

De la propia definición del modelo, se deduce cualitativamente que, si una cierta configuración relaja,  $\Delta E$  es mayor cuanto menor es  $n_{max}^{-1}$ , y lo mismo ocurre con  $\Delta m$ . Por otro lado,  $\sigma_c(n_{max}^{-1})$  corresponde al desorden por debajo del cual se produce una discontinuidad macroscópica en la magnetización en un sistema con dinámica  $n_{max}^{-1}$ . Como hemos dicho, los cambios de magnetización para  $\sigma$  y  $H$  dados son mayores

cuanto menor es  $n_{max}^{-1}$ , lo que implicaría que la discontinuidad en la magnetización se pueda observar para un desorden mayor cuanto menor sea  $n_{max}^{-1}$ . Esto explicaría el resultado numérico  $\sigma_c^{eq} > \sigma_c^{met}$  y por ello la superficie crítica se ha representado decreciente con  $n_{max}^{-1}$  en la Fig. 5.28 (ver proyección en el plano  $n_{max}^{-1}-\sigma$ ). A parte de esto, es fácil convencerse de que el grado de metaestabilidad aumenta con  $n_{max}^{-1}$  y, por consiguiente, el valor absoluto del campo crítico  $|H_c(n_{max}^{-1})|$  aumenta con  $n_{max}^{-1}$ . Todas estas conclusiones cualitativas se pueden resumir en las condiciones siguientes:

$$\frac{d\Delta E(H; \sigma, n_{max}^{-1})}{d(n_{max}^{-1})} \geq 0 \quad (5.182)$$

$$\frac{d\Delta m(H; \sigma, n_{max}^{-1})}{d(n_{max}^{-1})} \geq 0 \quad (5.183)$$

$$\frac{d\sigma_c(n_{max}^{-1})}{d(n_{max}^{-1})} \leq 0 \quad (5.184)$$

$$\frac{d|H_c(n_{max}^{-1})|}{d(n_{max}^{-1})} \geq 0. \quad (5.185)$$

Los resultados de las simulaciones llevadas a cabo recientemente por Vives *et al.* [276] para  $n_{max} = 2$  están en total acuerdo con el comportamiento propuesto.

Recientemente se ha demostrado numéricamente [277, 278] que la curva de desmagnetización [33] correspondiente al 3D-GRFIM contiene mucha de la información crítica de la transición inducida por desorden y, de hecho, los exponentes asociados a dicha curva son los mismos que se extraen cuando se consideran los ciclos de histéresis completos. Según estos resultados, tiene sentido estudiar la posible universalidad existente entre el 3D-GRFIM en equilibrio y con dinámica metaestable comparando los exponentes asociados a la curva de desmagnetización con la curva de equilibrio. Trabajando en este sentido, Colaiori *et al.* [279, 280] han comparado el valor absoluto de la magnetización en equilibrio (simulaciones hechas a  $H = 0$ ) con el valor absoluto de la magnetización asociada al estado desmagnetizado<sup>35</sup> [33] (curva de desmagnetización en  $H = 0$ ) en el 3D-GRFIM y en una red de Bethe con número de coordinación  $z = 4$ . En el caso del 3D-GRFIM, los autores son capaces de escalar los datos de la magnetización en equilibrio y los correspondientes al estado desmagnetizado en una única curva (con dos valores de  $\sigma_c$  diferentes:  $\sigma_c^{eq} = 2.28$  y  $\sigma_c^{demag} = 2.16$ ) utilizando una hipótesis de escala simple:

$$m = AL^{\beta/\nu} f(BL^{1/\nu}(\sigma - \sigma_c)/\sigma_c) \quad (5.186)$$

<sup>35</sup>El estado desmagnetizado se obtiene con un algoritmo de desmagnetización aproximado [281] que permite obtener la magnetización aproximada del estado desmagnetizado. Según los autores, las diferencias entre el estado desmagnetizado exacto y el aproximado son muy pequeñas.

donde  $A$  y  $B$  son constantes no universales que los autores introducen para poder escalar en una única curva los datos correspondientes a los estados de equilibrio y a los estados desmagnetizados. Por el contrario, no consiguen un resultado similar con la solución exacta de la red de Bethe. La coincidencia del comportamiento de las funciones de escala en el caso del 3D-GRFIM confirma que la universalidad existente entre el equilibrio y la dinámica metaestable va más allá de la coincidencia de los exponentes críticos. Es interesante notar que los autores han conseguido escalar la magnetización con una hipótesis de escala que se compone de una única contribución. En cambio, en el caso en que se considerasen ciclos completos, se esperarían dos contribuciones: una debida a la avalancha 3D-*spanning* subcrítica y otra debida a las avalanchas 1D-, 2D- y 3D-*spanning* críticas. ¿Se puede concluir a partir del resultado de estos autores que en el estado desmagnetizado la única contribución a la magnetización viene dada por la avalancha 3D-*spanning* subcrítica?. Esta es una posibilidad abierta al estudio. Otra posibilidad sería que, dados los tamaños que consideran los autores, las contribuciones asociadas a las avalanchas 1D-, 2D- y 3D-*spanning* subcríticas no sean importantes (cosa que ocurre con el cambio de magnetización debido a las avalanchas *spanning* en los ciclos completos [§ 5.6]).

#### 5.11.4. Hiperescala y unicidad

En la Ref. 240, Maritan *et. al* propusieron que se debía cumplir la relación de hiperescala

$$\beta = \nu(d - d_f), \quad (5.187)$$

en el RFIM con dinámica metaestable atérmica-adiabática. Los autores no distinguieron varios tipos de avalanchas y, en consecuencia, no especificaron a qué tipo de avalanchas se referían los exponentes  $\beta$  y  $d_f$ . Sethna *et al.* [252] argumentaron que no se cumplía en general tal relación de hiperescala debido a la posible existencia de infinitas avalanchas *spanning*. Según estos autores, la relación de escala válida (llamada rotura de hiperescala) es la siguiente [217]:

$$\beta = \nu(d - d_f - \theta), \quad (5.188)$$

donde  $\beta$  está asociada a la discontinuidad en la magnetización (asociada a las avalanchas *spanning*),  $d_f$  es la dimensión fractal asociada a las avalanchas no *spanning* y  $\theta$  está relacionada con el número de avalanchas *spanning* [Ec. (5.162)], sin distinguir distintos tipos de avalanchas *spanning*. Según estos autores [217, 222],  $\theta$  es, por razones puramente geométricas, nulo para  $d < 3$ . En cambio para  $d > 3$  es claramente

distinto de cero y, probablemente, también lo sea para  $d = 3$ . Nuestro análisis muestra claramente que  $\theta > 0$  [§ 5.3] para las avalanchas 1D-, 2D- y 3D-*spanning* críticas. Sin embargo, a pesar de que  $\theta > 0$ , los resultados de la sección § 5.5 indican que sí se cumple la relación de hiperescala [Ec. (5.91)] si tenemos en cuenta únicamente las avalanchas 3D-*spanning* subcríticas que son, al fin y al cabo, las responsables de la discontinuidad en la magnetización (parámetro de orden) para  $\sigma < \sigma_c$ . En cambio, se puede definir un exponente  $\beta_c$  asociado a las avalanchas *spanning* que existen sólo en el punto crítico (en el límite termodinámico) y, según vimos [Ec. (5.96)], sí se encuentra una expresión similar a la rotura de hiperescala (5.188). Sin embargo, el exponente  $\beta_c$  no tiene relación alguna con la discontinuidad del parámetro de orden para  $\sigma < \sigma_c$  puesto que está relacionado con avalanchas que sólo ocurren en el punto crítico.

### Comparación del 3D-GRFIM con la percolación

La fenomenología observada en el 3D-GRFIM es muy similar a la que se observa en percolación. Tal y como se argumenta en la sección § B.3 del apéndice B, sería posible llegar a la conclusión errónea de que no se cumple una relación del tipo (5.91) en percolación si se asocia la discontinuidad en el parámetro de orden con los *clusters spanning*. Sin embargo, sí se cumple si se tiene en cuenta únicamente el *cluster* infinito que ocurre para  $p > p_c$ , donde  $p$  es el grado de desorden del sistema y  $p_c$  es el umbral de percolación. Resumidamente (ver sección § B.3 del apéndice B), en función de  $p$ , el esquema es el siguiente: para  $p < p_c$  existen únicamente *clusters* finitos pequeños. Para  $p = p_c$ , puede ocurrir más de un *cluster spanning* pero éstos no ocupan una fracción finita del sistema. Finalmente, para  $p > p_c$ , tiene lugar un único *cluster* infinito que ocupa una fracción finita  $P_\infty(p)$  del sistema. Este esquema es muy similar al propuesto en el 3D-GRFIM si se asocia la avalancha 3D-*spanning* subcrítica con el *cluster* infinito y las avalanchas 1D-, 2D- y 3D-*spanning* críticas con los *clusters spanning*. Según nuestros resultados, en el 3D-GRFIM, únicamente sucede una avalancha 3D-*spanning* subcrítica que ocupa una fracción finita  $\Delta m_{3-}(\sigma)/2$  para  $\sigma < \sigma_c$ , igual que ocurre en percolación con el *cluster* infinito para  $p > p_c$ . En este sentido,  $\Delta m_{3-}(\sigma)/2$  es análogo a  $P_\infty$ . Por otro lado, hay un número infinito de avalanchas 1D-, 2D- y 3D-*spanning* críticas que ocupan una fracción nula del sistema y lo mismo sucede con los *clusters spanning* en percolación. Basándose en este hecho, Herrmann y Stanley [282] se refirieron a los *clusters spanning* como *fractales volátiles*. De la misma forma, las avalanchas 1D-, 2D- y 3D-*spanning* críticas se pueden considerar como fractales volátiles.

En percolación no se identifican distintos tipos de *clusters* spanning. En cambio, nosotros hemos identificado las avalanchas 1D-, 2D- y 3D-*spanning* críticas que, excepto en el número de dimensiones en que cruzan el sistema, no se distinguen en nada más. Nuestra clasificación está totalmente ligada a la geometría cúbica, pero imaginemos, por ejemplo, que nuestras simulaciones se hicieran en un sistema tridimensional esférico o piramidal, ¿cómo distinguir en este caso una avalancha 1D-*spanning* de una 2D- o 3D-*spanning*?. En estas geometrías no se podrían clasificar igual las avalanchas pero, en principio, el comportamiento del sistema en el límite termodinámico debería ser el mismo. La conclusión que se puede extraer de esto es que, en general, hay dos tipos de avalanchas que atraviesan el sistema:

- Avalanchas *spanning* críticas: son las avalanchas que se han clasificado como 1D-*spanning*, 2D-*spanning* y 3D-*spanning* críticas. La característica fundamental de estas avalanchas es que ocurren solamente en el punto crítico  $(\sigma_c, H_c)$ , donde suceden un número infinito de ellas. Además, son fractales a todas las escalas ( $\xi = \infty$ ), cosa que hace que ocupen una fracción nula del sistema.
- Avalancha *infinita*: corresponde a la avalancha 3D-*spanning* subcrítica que se observa para  $\sigma \leq \sigma_c$  en el campo  $\langle H \rangle_{3-}(\sigma)$  [Ec. (5.135)]. Para  $\sigma = \sigma_c$ , esta avalancha es fractal a todas las escalas y ocupa una fracción nula del sistema. En cambio, para  $\sigma < \sigma_c$ , tiene una estructura local fractal pero, a distancias mayores que  $\xi$ , es compacta, de tal forma que ocupa una fracción finita del sistema y es responsable de la discontinuidad en la magnetización.

En percolación existen unos teoremas que afirman que el *cluster* infinito es único por encima del umbral de percolación [§ B.3 del apéndice B]. De forma resumida, estos teoremas se basan en demostrar que si existe un *cluster* infinito para una concentración  $p_1 < p$ , al ocupar más nodos para llegar a la concentración  $p$ , la probabilidad de que se forme otro *cluster* infinito no unido con el ya existente es nula. Según nuestros resultados en el 3D-GRFIM, parece que la probabilidad de que ocurra más de una avalancha infinita para una cierta realización de desorden es cero. Sin embargo, ¿Son realmente aplicables los teoremas de unicidad del *cluster* infinito en percolación al caso de la avalancha infinita en el 3D-GRFIM?. En el 3D-GRFIM, el campo  $H$  al que ocurren las avalanchas nos permite distinguir avalanchas que ocurren en una cierta realización de desorden. Hipotéticamente, al disminuir  $H$ , podría ocurrir una avalancha infinita a un campo  $H_1$  y otra a un campo  $H_2 < H_1$  que, aunque sea vecina de la primera, se puede distinguir de ella por el campo al que sucede. De acuerdo con este

razonamiento, un teorema de unicidad para el RFIM debería incluir el hecho de que las avalanchas infinitas sólo puedan ocurrir a un determinado campo  $\langle H \rangle_3(\sigma)$  que viene dado por (5.135) en el 3D-GRFIM.

### 5.11.5. Longitud de correlación y geometría

La caracterización geométrica de las fluctuaciones cerca de un punto crítico es un problema que se viene estudiando desde hace años. En particular, se ha estudiado el origen físico de la divergencia de la longitud de correlación en un punto crítico. En relación con las transiciones de fase a temperatura finita en sistemas magnéticos, existe un esquema [283] basado en el hecho de que, cerca de un punto crítico, la energía necesaria para que se forme un dominio grande es muy pequeña y, por tanto, es posible que se formen dominios grandes, cuya dimensión máxima es la longitud de correlación  $\xi$ . Realmente, debido a que cada región en sí misma es un subsistema aproximadamente crítico, aparecen fluctuaciones dentro de cada dominio, de tal forma que el estado crítico se caracteriza por dominios con un tamaño lineal mínimo dado por la distancia entre partículas y un tamaño lineal máximo dado por  $\xi$ . Este esquema encaja bien con las observaciones experimentales [151] de las fluctuaciones en fluidos binarios cerca de un punto crítico. En los modelos reticulares, los dominios se definen como *clusters* formados uniendo todos los espines vecinos que se encuentran en el mismo estado. Sin embargo, es bien sabido [284] que, en dichos modelos, la longitud de correlación no está asociada con el tamaño lineal del *cluster* que se puede formar uniendo todos los espines vecinos que se encuentren en el mismo estado. Esto es debido a que los *clusters* que se obtienen de esta forma trivial son demasiado grandes puesto que incluyen, además de los efectos debidos a la correlación, efectos geométricos. Por ejemplo, para  $T = 0$ , la correlación entre los espines es nula pero, en cambio, la gran mayoría de los espines están alineados formando un *cluster* de vecinos próximos que se extiende a buena parte del sistema. Coniglio y Klein [285] demostraron que los *clusters* que están relacionados con la longitud de correlación (*clusters* críticos) en el modelo de Ising son aquellos que se forman enlazando espines vecinos en el mismo estado con una probabilidad  $p_B = 1 - e^{-K}$ , donde  $K$  es la constante de acoplamiento a primeros vecinos dividida por  $k_B T$ . Posteriormente, este resultado se generalizó al modelo de Potts [286] y se estudiaron [287] las propiedades geométricas de los *clusters* críticos que se observan. El caso trivial de unir todos los vecinos próximos en el mismo estado corresponde a  $p_B = 1$ .

En nuestro caso (3D-GRFIM), las avalanchas se pueden interpretar como las fluc-

tuaciones a temperatura cero inducidas por la variación de  $H$ . Sin embargo, ¿está su tamaño lineal relacionado con  $\xi$ ? Los resultados presentados en las secciones anteriores demuestran dos puntos importantes:

- i)* Existen avalanchas *spanning* que se caracterizan con dos dimensiones fractales diferentes. En cambio, dentro de los errores estadísticos, los exponentes  $\nu$  y  $\mu$  son los mismos para todos los colapsos (ver los escalados que se presentan en las Figs. 5.4, 5.5, 5.7 y 5.19). De esto deducimos que el comportamiento de la longitud de correlación es independiente del tipo de avalancha y, cerca del punto crítico, viene dado por:

$$\xi = u^{-\nu} \hat{\Xi}(u^\nu v^{-\mu}), \quad (5.189)$$

donde  $\hat{\Xi}(x) \sim x + \mathcal{O}(x^2)$  para  $x \rightarrow 0$ . Este comportamiento asegura que  $\xi \sim v^{-\mu}$  cuando  $u$  tiende a cero. Entonces, para  $\sigma = \sigma_c$ , en que existen todos los tipos de avalanchas *spanning*, las fluctuaciones pueden “escoger” entre dos mecanismos distintos para propagarse: con dimensión fractal  $d_f = 2.78$  o bien con dimensión fractal  $d_{3-} = 2.98$ .

- ii)*  $\xi$  no puede estar relacionada con el tamaño lineal de la avalancha 3D-*spanning* subcrítica ya que esta avalancha se extiende a todo el sistema (tamaño lineal infinito en el límite termodinámico) mientras que, tal y como hemos visto, la longitud de correlación es finita para  $\sigma < \sigma_c$ . Esto es análogo a lo que ocurre en el modelo de Ising térmico.

Teniendo en cuenta estas dos observaciones, tiene sentido proponer que la longitud de correlación en el 3D-GRFIM está relacionada con el tamaño lineal medio de la avalancha más grande distinta de la avalancha 3D-*spanning* subcrítica (avalancha infinita). Por debajo de  $\sigma = \sigma_c$ , la existencia de una avalancha infinita (que ocupa una fracción finita del sistema) no permite a otras avalanchas sobrepasar una cierta longitud finita y, por tanto,  $\xi$  es finita. En cambio, en el punto crítico, la avalancha 3D-*spanning* subcrítica es fractal a todas las escalas, lo que permite la existencia de avalanchas *spanning* críticas (fractales a todas las escalas) con un tamaño lineal infinito, cosa que explica que  $\xi$  sea infinita. Dentro de este esquema, la longitud de correlación está asociada al tamaño máximo de los huecos de la avalancha infinita y, por tanto, también está asociada a la avalancha infinita, cosa que implica que los exponentes  $\nu$  y  $\mu$  no son característicos de un cierto tipo de avalanchas sino que están relacionados con todos los tipos.

Este esquema que hemos propuesto en el 3D-GRFIM es, de nuevo, similar al propuesto en percolación [253, 254, 288]. Para  $p > p_c$ , la longitud de correlación está asociada a los agujeros más grandes del *cluster* infinito que, como se ha argumentado antes, es análogo a la avalancha infinita en el 3D-GRFIM. Dentro de los agujeros del *cluster* infinito pueden existir *clusters* finitos y, en consecuencia, la longitud de correlación también se puede asociar con el tamaño lineal típico de los *clusters* más grandes distintos al infinito. Igual que la avalancha 3D-*spanning* subcrítica, el *cluster* infinito es fractal [237] a escalas menores que  $\xi$  y, en cambio, es homogéneo (ocupa una fracción finita) a escalas mayores.

Una cuestión interesante a discutir a nivel especulativo es qué ocurre geoméricamente en los casos en que la solución de campo medio sea válida. En este caso, la línea  $H_s(\sigma)$  [Fig. 5.27(b.1)] donde tiene lugar la discontinuidad en la magnetización es una línea espinodal a lo largo de la que  $\xi$  diverge. Si  $\xi$  diverge, en virtud de lo que se ha argumentado antes, no podría existir una avalancha que fuese homogénea para escalas finitas (tendrían que ser escalas mayores que  $\xi$ ). Sin embargo, si esto es así, no existe ninguna avalancha que ocupe una fracción finita del sistema en el límite termodinámico, de tal manera que ¿cómo puede tener lugar una discontinuidad en la magnetización?. Por otro lado, el hecho de que la longitud de correlación sea infinita podría implicar la existencia de más de una avalancha *spanning* fractal a todas las escalas (en el punto crítico son volátiles [§ 5.11.4]) a lo largo de la línea espinodal, cosa que concuerda con las teorías de nucleación cerca del límite de metaestabilidad [17, 18]. Monette y Klein [289] propusieron un mecanismo para la nucleación cerca de la línea espinodal que consiste en la unión de varios *clusters* fractales con tamaños lineales del orden de  $\xi$  (o sea, unión de *clusters* muy grandes). Trasladando este mecanismo a nuestro caso, la discontinuidad vendría dada por la unión de varias avalanchas *spanning* que, individualmente, no ocupan una fracción finita del sistema pero que, en conjunto, sí podrían ocuparla. Si este esquema fuese correcto, entonces la relación de hiperescala del tipo (5.91) podría no ser válida para estos sistemas aún deduciéndola a partir del comportamiento del sistema para  $\sigma < \sigma_c$ .

### 5.11.6. Animales de red. Correcciones al escalado

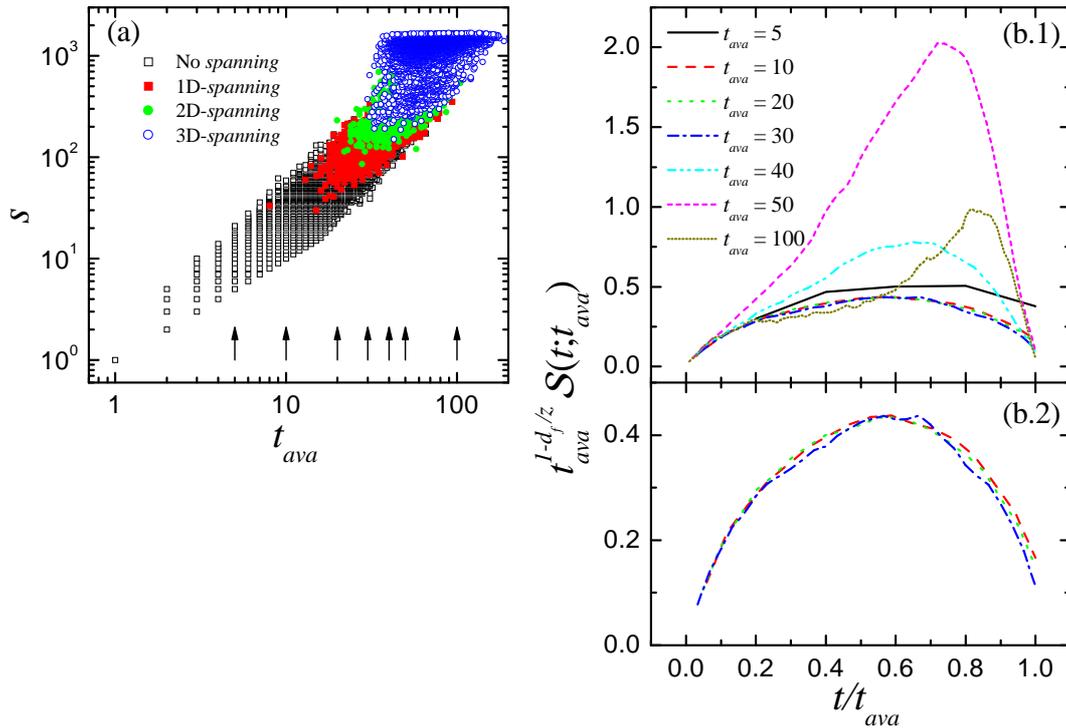
En la sección § 5.11.1 se mencionó que la desviación de la distribución  $D_{n_s}$  respecto a una ley de potencias exacta podría estar ligada a efectos geométricos asociados a las avalanchas de tamaños pequeños. En el apéndice B, dedicado a la percolación, se resumen los resultados que demuestran que la densidad de *clusters* finitos de un cierto

tamaño  $n(s; p)$  también tiene una cierta desviación respecto del comportamiento ley de potencias perfecto, cosa que se interpreta como una corrección al escalado [290]. Tales desviaciones se pueden estudiar de forma exacta gracias a la expansión en series (B.30). De forma análoga a la expansión (B.30) que se propone en percolación, en el caso del RFIM se podría proponer una expansión del tipo

$$D_{ns}(s; \sigma) = \frac{L^3}{N_{ns}(\sigma)} \sum_t g_{st} f_{st}(\sigma) \quad (5.190)$$

para la distribución de tamaños de avalanchas no *spanning*. En esta expresión,  $g_{st}$  es el número de animales de red de tamaño  $s$  y perímetro  $t$  que se define en percolación [§ B.4]. La función  $f_{st}(\sigma)$  se define como la probabilidad de que exista un animal de tamaño  $s$  y perímetro  $t$ . En percolación, el factor  $f_{st}$  es, sencillamente,  $p^s(1-p)^t$  ya que no hay correlación alguna entre los nodos vecinos. En cambio, en el RFIM sí existe correlación entre los espines (debido a la interacción) y la dependencia de  $f_{st}(\sigma)$  con  $\sigma$  no es tan sencilla como en percolación. En cualquier caso, la expansión (5.190) nos sirve para convencernos de que en la distribución  $D_{ns}(s; \sigma)$  intervienen factores geométricos que, igual que sucede en percolación, pueden ser los responsables de las desviaciones de  $D_{ns}(s; \sigma_c)$  con respecto al comportamiento exacto de una ley de potencias. El prefactor  $L^3/N_{ns}(\sigma)$  se ha introducido para hacer mejor la analogía con percolación, ya que la expansión (B.30) se propone para  $n(s; p)$  y, tal y como demuestran las Ecs. (B.3) y (B.1),  $D(s; p) = n(s; p)L^d/N(p)$ . De la Ec. (5.67), deducimos que, para sistemas grandes,  $L^3/N_{ns}(\sigma, L) \simeq 1/\tilde{N}_{ns0}(\sigma)$ , de tal manera que las dependencias con  $L$  desaparecen. En este sentido, el número  $\tilde{N}_{ns0}(\sigma)$  en el RFIM sería análogo a  $n(p)$  en percolación.

En nuestro análisis de las avalanchas no *spanning*, se han distinguido dos tipos de avalanchas: las avalanchas no *spanning* críticas, a las que se ha asociado el comportamiento tipo ley de potencias de  $D_{ns}$  [Ec. (5.169)], y las avalanchas no *spanning* no críticas a las que podrían estar asociadas las desviaciones respecto a la ley de potencias que se observan para valores pequeños de  $s$ . Análogamente a la propuesta de Hoshen *et al.* [290] en percolación, la distribución  $D_{ns0}(\sigma)$  se podría interpretar meramente como una corrección al escalado. Sin embargo, al analizar el número de avalanchas no *spanning* que ocurren por ciclo ( $N_{ns}$ ) en las secciones § 4.6 y § 5.3, hemos visto que los resultados se pueden describir bien suponiendo que  $N_{ns0}(\sigma) > 0$ , de manera que tiene sentido suponer que la corrección  $D_{ns0}$  al escalado no es sólo eso sino que está asociada a un cierto tipo de avalanchas. De todas formas, sería necesario estudiar las propiedades de estas avalanchas más a fondo para decidir si realmente son un tipo



**Figura 5.29:** (a) Nubes de puntos correspondientes a los tamaños de las avalanchas no *spanning*, 1D-, 2D- y 3D-*spanning* en función de las duraciones. (b.1) Intento de escalado del perfil promedio de las avalanchas  $\mathcal{S}(t; t_{ava})$  según la ley de escala 5.191 para las señales cuya duración se indica con flechas en el gráfico (a). Cada duración se ha indicado con un color según la leyenda. (b.2) Escalado de las señales correspondientes a  $t_{ava} = 10, 20$  y  $30$ . Los colores son los indicados en las leyenda en (b.1).

de avalanchas distintas a las avalanchas no *spanning* no críticas o, en cambio, no se pueden distinguir de estas últimas. Una magnitud que podría ser útil para estudiar estos aspectos es la duración de las avalanchas  $t_{ava}$ . La Fig. 5.29(a) muestra las nubes de puntos correspondientes a las duraciones de distintos tipos de avalanchas en función del tamaño. La nube correspondiente a las avalanchas no *spanning* presenta un cambio de pendiente situado en torno a  $t_{ava} = 15$ . La duración de las avalanchas es aproximadamente proporcional al tamaño en la región con  $t_{ava} \lesssim 15$  (estas serían las avalanchas no *spanning* no críticas). En cambio, la pendiente aumenta para duraciones mayores y se observa un comportamiento tal que  $s \sim t_{ava}^{1.75}$  (avalanchas no *spanning* críticas). Teniendo en cuenta que el invariante correspondiente a  $s$  y  $t_{ava}$  es  $\mathcal{I}[s, t_{ava}] = s t_{ava}^{-d_\alpha/z}$  (de acuerdo con las Ecs. (2.72) y (5.5)), deducimos que  $d_f/z = 1.75$ , resultado que está de acuerdo con los resultados previos de otros autores [222]. Otro punto interesan-

te relacionado con las duraciones de las avalanchas es el escalado del perfil<sup>36</sup> promedio en función del tiempo  $\mathcal{S}(t; t_{ava})$  propuesto en las Refs. [30, 224, 225] que, en nuestra notación se escribiría como:

$$\mathcal{S}(t; t_{ava}) = t_{ava}^{d_f/z-1} \tilde{\mathcal{S}}(t/t_{ava}). \quad (5.191)$$

La Fig. 5.29(b.1) muestra un intento de escalado de acuerdo con esta ley de escala con  $d_f/z = 1.75$ . Como se puede apreciar, únicamente las avalanchas con duraciones entre  $\sim 10$  y  $\sim 30$  (este límite depende del tamaño del sistema) presentan un buen escalado (esto se aprecia mejor en la Fig. 5.29(b.2)). En particular, las señales con duraciones pequeñas ( $t_{ava} = 5$  en la Fig. 5.29(b.1)) no escalan. Esta afirmación es independiente del tamaño del sistema. Tales resultados parecen indicar que las avalanchas pequeñas (no *spanning* no críticas) tienen unas propiedades físicas claramente distintas de las avalanchas no *spanning* críticas. A su vez, el mapa  $t_{ava}$ - $s$  muestra, una vez más, que las avalanchas 1D- y 2D-*spanning* tienen un comportamiento similar a las no *spanning* críticas. Además, las señales en que contribuyen las avalanchas 1D- y 2D-*spanning* escalan bien de acuerdo con la hipótesis de escala 5.191.

La existencia de dos tipos distintos de avalanchas 3D-*spanning* es más clara puesto que, como hemos visto, son físicamente distintas: tienen dimensiones fractales distintas y, además, la avalancha 3D-*spanning* subcrítica ocupa una fracción finita del sistema para  $\sigma < \sigma_c$  en el límite termodinámico, mientras que las avalanchas 3D-*spanning* críticas no ocupan una fracción finita del sistema y sólo existen en el punto crítico. Sin embargo, estudiando únicamente  $N_3(\sigma)$ , se podría llegar a la conclusión de que la hipótesis de escala es  $N_3 = \tilde{N}_{3-}(uL^{1/\nu})$  y existe una corrección al escalado  $L^\theta \tilde{N}_{3c}(uL^{1/\nu})$  necesaria para obtener una descripción correcta de  $N_3(\sigma)$  [Ec. (5.61)]. Con respecto al perfil  $\mathcal{S}(t; t_{ava})$  de las avalanchas en que hay contribución de las avalanchas 3D-*spanning* (avalanchas con  $t_{ava} = 50$  y  $100$  en la Fig. 5.29) no se observa un buen escalado. Este es un punto interesante sobre la dinámica de estas avalanchas que se debería estudiar con más profundidad.

### 5.11.7. Variables de escala y variables de control

Los escalados llevados a cabo se han obtenido de forma óptima aproximando las variables de escala ( $u, v$ ) en función de las variables de control ( $\sigma, H$ ) por las expresiones

---

<sup>36</sup>Definimos el perfil de una avalancha como la curva que se obtiene al representar el número de espines que giran en cada capa de una avalancha en función del tiempo (en cada capa el tiempo se incrementa en una unidad [§ 4.3.3]).

(5.36) y (5.37) con  $A = -0.2$  y  $B' = 0.25$ . Estas expresiones nos permiten tener una idea de cómo se proyecta el espacio de constantes de acoplamiento (relevantes)  $u - v$  en el espacio de las variables de control  $\sigma - H$ . Las variables de escala  $u_1$  y  $v_1$  se definen normalizadas a  $\sigma_c$  y  $H_c$  [§ 5.1] y, tal normalización se traslada a las variables de escala  $u$  y  $v$ . Debido a esto, en esta sección nos será más conveniente utilizar coordenadas normalizadas ( $\sigma/\sigma_c, H/H_c$ ) en el espacio físico.

La distancia al punto crítico (PC)  $(u_c, v_c) = (0, 0)$  de un punto  $(u, v)$  en el espacio de parámetros se define como<sup>37</sup>:

$$r(u, v) = \sqrt{u^2 + v^2}. \quad (5.192)$$

Sin embargo, en el espacio físico, la distancia euclídea del punto  $(\sigma/\sigma_c, H/H_c)$  (correspondiente a  $(u, v)$  en el espacio de parámetros) al punto crítico  $(\sigma_c/\sigma_c, H_c/H_c) = (1, 1)$  es:

$$r'(\sigma, H) = \sqrt{\left(\frac{\sigma - \sigma_c}{\sigma_c}\right)^2 + \left(\frac{H - H_c}{H_c}\right)^2}. \quad (5.193)$$

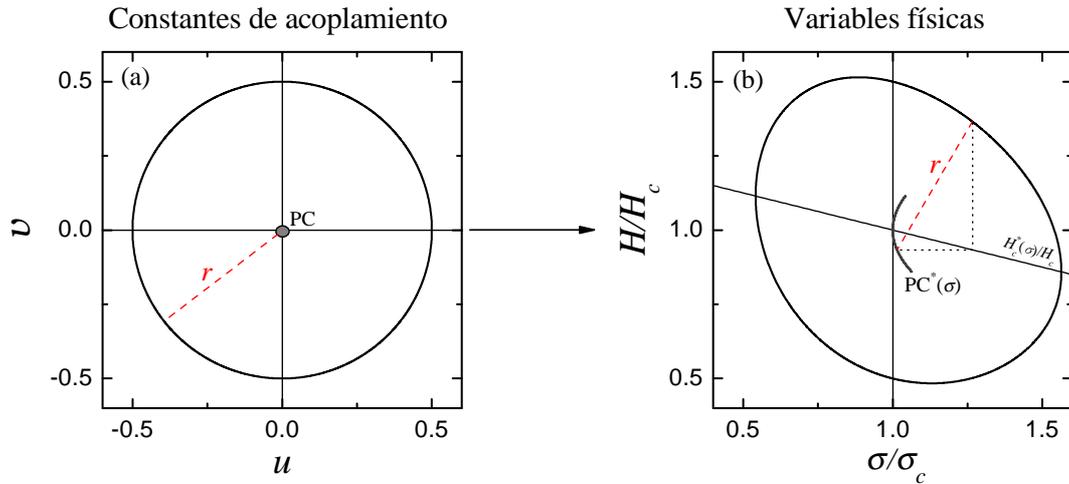
Evidentemente, excepto para el caso particular  $u_1 = 0$ , la distancia  $r'(\sigma, H)$  no es igual a la distancia al punto crítico  $r(u, v)$ , de tal manera que la forma de medir la distancia al punto crítico en el espacio físico no corresponde a la forma sencilla que define  $r(u, v)$ . A partir de la definición de  $r(u, v)$  [Ec. 5.192] y de las expresiones (5.36) y (5.37) es fácil ver que la distancia  $r(u, v)$  se puede expresar como

$$r(u, v) = \sqrt{\left(\frac{\sigma - \sigma_c^*(\sigma)}{\sigma_c}\right)^2 + \left(\frac{H - H_c^*(\sigma)}{H_c}\right)^2}, \quad (5.194)$$

en términos de las variables de control, donde  $\sigma_c^*(\sigma) \equiv \sigma_c(1 - Au_1^2)$  es un desorden crítico efectivo y  $H_c^*(\sigma) \equiv H_c(1 - B'u_1)$  es el campo crítico efectivo que ya se introdujo en la sección § 5.8 [Ec. (5.126)]. La expresión (5.194) indica que la distancia real al punto crítico de un punto cualquiera  $(\sigma/\sigma_c, H/H_c)$  en el espacio físico se obtiene midiéndola hasta un punto crítico efectivo (PC\*( $\sigma$ )) de coordenadas  $(\sigma_c^*(\sigma)/\sigma_c, H_c^*(\sigma)/H_c)$  que dependen de  $\sigma$ . De hecho, PC\*( $\sigma$ ) no es un punto en el espacio físico sino que depende de  $\sigma$ , de tal manera que la transformación del punto crítico PC define un conjunto de puntos PC\*( $\sigma$ ) en el espacio físico parametrizados por  $\sigma$ .

Por ejemplo, los puntos equidistantes al punto crítico se encuentran sobre una circunferencia en el espacio de parámetros [Fig. 5.30(a)]. En cambio, en el espacio

<sup>37</sup>Las variables de escala son las coordenadas asociadas a las direcciones relevantes en una base ortonormal  $\{\hat{e}_u, \hat{e}_v\}$ , de manera que la distancia se define simplemente como en un espacio euclídeo estándar.



**Figura 5.30:** La línea continua indica el lugar geométrico correspondiente a los puntos equidistantes al punto crítico (PC) en (a) el espacio de constantes de acoplamiento y (b) en el espacio físico. La curva gris en (b) corresponde a los puntos críticos efectivos (PC\*) con coordenadas  $\left(\frac{\sigma_c^*(\sigma)}{\sigma_c}, \frac{H_c^*(\sigma)}{H_c}\right)$  en el espacio físico. Se ha representado la recta  $H_c^*(\sigma)/H_c$  que se interpreta como el eje de abscisas en el espacio resultante de proyectar el espacio de parámetros en el espacio físico. Como ejemplo, se ha indicado uno de los radios  $r$  y sus proyecciones sobre el eje de abscisas rotado.

físico, dichos puntos se encuentran sobre una curva circular que viene dada por la Ec. (5.194) con  $r$  constante [Fig. 5.30(b)]. Los puntos de esta curva son equidistantes a la curva  $PC^*(\sigma)$  [línea gris en la Fig. 5.30(b)]. En la Fig. 5.30(b) se ha indicado esquemáticamente que la recta  $H_c^*(\sigma)/H_c$  se puede interpretar como el eje de abscisas respecto al que se mide la distancia  $r$  al punto crítico. Esta recta está rotada respecto al eje  $H = 0$  y es por esto que a la corrección proporcional a  $B'$  en el desarrollo de  $v$  [Ec. (5.25)] se le llama rotación.

La curvatura de  $PC^*(\sigma)$  es debida únicamente al término proporcional a  $A$  que aparece en  $\sigma_c^*(\sigma)$ . De cualquier forma, la corrección  $Au_1^2$  en la variable  $u$  no es esencialmente necesaria si se hacen escalados con sistemas de tamaño suficientemente grande [§ 5.1]. Sin embargo, el término  $B'u_1$  (término de inclinación) que aparece en el desarrollo de  $v$  sí juega un papel esencial en el límite termodinámico debido a que (i) no existe ninguna razón basada en las simetrías del problema por la que  $B'$  debiera ser 0 y (ii)  $1/\mu > 1/\nu$ . En cambio, si fuese  $1/\mu < 1/\nu$ , el término  $B'u_1$  en el desarrollo de  $v$  no sería importante y, en cambio, sí lo sería el término  $A'v_1$  en el desarrollo de  $u$  [Ec. (5.24)], lo que se podría interpretar como una rotación del eje  $\sigma = 0$ .

La conclusión que se puede extraer de todo esto es que, siempre que  $1/\mu \neq 1/\nu$  existe una rotación al proyectar el espacio de parámetros sobre el espacio físico (siempre que no esté prohibida por simetría<sup>38</sup>). El hecho de que  $1/\mu \neq 1/\nu$  esté ligado a una asimetría de la longitud de correlación con respecto a las variables  $u$  y  $v$  [Ec. (5.189)], nos lleva a concluir que las rotaciones de la proyección del espacio de parámetros sobre el espacio físico están muy relacionadas con el comportamiento de la longitud de correlación en un determinado problema.

A parte de esto, en la sección § 5.11.3 se ha discutido que es factible que tanto el 3D-GRFIM a  $T = 0$  en equilibrio como toda una serie de modelos con dinámica metaestable atérmica-adiabática con giros de  $n < n_{max}$  espines se encuentren sobre la misma superficie crítica (tienen el mismo conjunto de exponentes críticos). Si esto es así, es de esperar que la rotación juegue un papel relevante en todos estos modelos (siempre que<sup>39</sup>  $B'(n_{max}^{-1})$  no sea nulo<sup>40</sup>).

## 5.12. Resumen y conclusiones

En el presente capítulo y en el anterior se han presentado resultados relacionados con el 3D-GRFIM con dinámica metaestable atérmica-adiabática. Todos estos resultados intentan aportar algo a los puntos que motivan el estudio que hemos llevado a cabo (enumerados en la sección § 4.2). El punto central en todo el estudio ha sido el análisis de los efectos de tamaño finito con hipótesis de escala que se han visto confirmadas obteniendo buenos escalados de los datos correspondientes a sistemas con tamaños comprendidos entre  $L = 5$  y  $L = 180$ . Tener en cuenta los efectos de tamaño finito es importante porque las avalanchas se hacen muy grandes cerca de  $\sigma_c$  de tal manera que no es posible aproximarse a  $\sigma_c$  sin que aparezcan estos efectos que no se deben obviar si se pretende hacer un análisis correcto del modelo (obviar dichos efectos conlleva la obtención de exponentes que dependen de los parámetros del problema y, debido a esto, no se pueden considerar como exponentes críticos rigurosos). Esta

<sup>38</sup>En la sección § 2.2.5 [Ecs. (2.36) y (2.37)] se argumentó que en el modelo de Ising térmico los términos que dan lugar a rotaciones son nulos por simetría en las variables de escala  $u_T$  y  $u_H$  relacionadas con la temperatura y el campo.

<sup>39</sup>En principio  $B'$  depende de  $n_{max}^{-1}$  ya que

$$B'(n_{max}) = \left. \frac{\partial v(\sigma, H)}{\partial \sigma} \right|_{\sigma_c(n_{max}^{-1}), H_c(n_{max}^{-1})}, \quad (5.195)$$

por definición a partir del desarrollo (5.25).

<sup>40</sup>Por razones de simetría no tiene porqué ser  $B'(n_{max}^{-1}) = 0$  para ningún valor de  $n_{max}^{-1}$ .

misma observación se puede aplicar también a otros modelos similares al 3D-GRFIM, como el RBIM, el SDIM o el RAIM.

El primer resultado importante que se ha obtenido es que, con el fin de conseguir una buena descripción de los datos numéricos, ha sido necesario distinguir entre distintos tipos de avalanchas que se comportan de forma diferente al variar el tamaño del sistema. Durante las simulaciones, las avalanchas se han clasificado en cuatro tipos: no *spanning*, 1D-, 2D- y 3D-*spanning*. Además, las avalanchas 3D-*spanning* se han clasificado en dos tipos: avalanchas 3D-*spanning* subcríticas con dimensión fractal  $d_{3-} = 2.98$  y avalanchas 3D-*spanning* críticas con dimensión fractal  $d_f = 2.78$ . Esta dimensión fractal última corresponde también a las avalanchas 1D- y 2D-*spanning*. En principio, la clasificación de las avalanchas 3D-*spanning* en dos tipos se ha llevado a cabo de manera indirecta para obtener unos buenos escalados de tamaño finito. Sin embargo, posteriormente se han propuesto métodos aproximados que permiten clasificar las avalanchas 3D-*spanning* durante las simulaciones. Con el fin de obtener escalados de tamaño finito aceptables, también hemos propuesto la existencia de dos tipos de avalanchas no *spanning*: avalanchas no *spanning* críticas y avalanchas no *spanning* no críticas. Las avalanchas no *spanning* no críticas son aquellas cuyo tamaño es independiente del tamaño del sistema y cuyo número es proporcional a  $L^3$ . Las avalanchas no *spanning* críticas tienen la misma dimensión fractal  $d_f = 2.78$  que las avalanchas 1D-, 2D- y 3D-*spanning* críticas.

Los resultados presentados permiten también proponer un esquema del comportamiento del modelo en el límite termodinámico en función de  $\sigma$  y  $H$ : las avalanchas no *spanning* no críticas existen para cualquier valor de  $\sigma > 0$  y de  $H$ . Para  $\sigma < \sigma_c$ , las avalanchas no *spanning* no críticas coexisten con la avalancha infinita (3D-*spanning* subcrítica) que ocupa una fracción finita del sistema, ocurre a un campo  $H = \langle H \rangle_{3-}(\sigma)$  y es la responsable de la discontinuidad de la magnetización. Para  $\sigma = \sigma_c$ , además de las avalanchas no *spanning* no críticas, existen un número infinito de avalanchas no *spanning* críticas que ocurren para  $H = H_c$  y también un número infinito de avalanchas 1D-, 2D- y 3D-*spanning* críticas que también ocurren a  $H = H_c$  y tienen una estructura fractal a todas las escalas. Por último, para  $\sigma > \sigma_c$ , únicamente existen avalanchas no *spanning* no críticas que se extienden a todos los campos.

El análisis que se ha presentado ha permitido llegar a la conclusión de que el cambio de magnetización asociado a las avalanchas 3D-*spanning* subcríticas en el límite termodinámico  $\Delta m_{3-}(\sigma)$  se comporta como un parámetro de orden: por un lado,  $\Delta m_{3-} = 0$  para cualquier  $\sigma \geq 0$  y, por otro,  $\Delta m_{3-} \sim |u|^{\beta_{3-}}$ , tal y como se deduce de

forma autoconsistente.

Del estudio de la masa media  $M_\alpha(\ell; \sigma)$  en función de la escala  $\ell$  se han obtenido las dimensiones fractales correspondientes a cada uno de los tipos de avalanchas *spanning*. En primer lugar, de esta forma se han confirmado, por un procedimiento independiente, los resultados obtenidos a partir de los escalados de tamaño finito de los momentos  $k$ -ésimos de las distribuciones integradas. En segundo lugar, el comportamiento para  $\sigma < \sigma_c$  de la masa promedio correspondiente a la avalancha 3D-*spanning* subcrítica indica que la longitud de correlación  $\xi$  es finita por debajo de  $\sigma_c$ . Como consecuencia, concluimos que la línea  $\langle H \rangle_{3-}(\sigma)$ , donde ocurre la discontinuidad del parámetro de orden, corresponde a una transición de primer orden estándar y  $\xi$  diverge únicamente en el punto crítico. En tercer lugar, el bajo valor del prefactor  $M_{3-}^*(\sigma_c) = 0.65$  indica que la avalancha 3D-*spanning* subcrítica sólo ocupa (aleatoriamente) una fracción 0.65 de un fractal de dimensión  $d_{3-} = 2.98$ .

Los escalados de tamaño finito llevados a cabo han permitido obtener aproximaciones a las variables de escala  $u$  y  $v$  que van más allá de las variables de escala habituales a primer orden  $u_1 = (\sigma - \sigma_c)/\sigma_c$  y  $v_1 = (H - H_c)/H_c$ . Por un lado, de los escalados de tamaño finito correspondientes a magnitudes integradas, se ha llegado a la conclusión de que la aproximación a  $u$  que permite obtener unos escalados óptimos es  $u_2 = u_1 + Au_1^2$  con  $A = -0.2$ , que contrasta con la variable  $u_3 = (\sigma - \sigma_c)/\sigma$  utilizada en trabajos previos según la cual sería  $A = -1$ . Se ha demostrado que la corrección  $A$  no es esencial para obtener buenos escalados si se utilizan datos correspondientes a sistemas suficientemente grandes, pero sí es útil para obtener escalados de buena calidad en el caso en que intentemos escalar un conjunto de datos correspondientes a sistemas pequeños. Por otro lado, se ha demostrado que, tal y como ya habían notado otros autores [198, 222] (sin tener en cuenta el tamaño finito), la variable  $v$  involucra una corrección que depende del desorden y que resulta esencial para obtener buenos escalados, aún en el límite termodinámico. Finalmente, de los escalados correspondientes a las magnitudes no integradas, se ha obtenido  $v = v_1 + B'u_1^2$  con  $B' = 0.25 \pm 0.10$ .

Como conclusión final, señalar que los resultados mostrados indican que no es necesario simular sistemas muy grandes para estimar los exponentes críticos para este modelo sino que es ventajoso utilizar sistemas no tan grandes para obtener mejor estadística y poder identificar los distintos tipos de avalanchas y, eliminar así las dependencias de los exponentes críticos con los parámetros del modelo.