

# Estudi de sistemes dinàmics mitjançant la reducció de la seva dimensió

Miquel Bosch Gual

Memòria presentada per a aspirar  
al grau de Doctor en Matemàtiques

Departament de Matemàtica Aplicada i Anàlisi  
Universitat de Barcelona

## Capítol 3

# Atractors en un model de bifurcació de Silnikov-Hopf

En aquest capítol estudiarem una família de difeomorfismes bidimensionals definits en la reunió de dues corones i que depenen, essencialment, de dos paràmetres. Cada difeomorfisme és l'aplicació de Poincaré d'un flux autònom de  $\mathbb{R}^3$  amb dues propietats bàsiques:

- 1) existeix un punt d'equilibri del tipus sella-focus que desenvolupa una bifurcació de Hopf quan un paràmetre creua el valor 0;
- 2) el camp presenta una reinjecció (no simètrica) de les dues branques d'una varietat invariant del punt d'equilibri. Aquest comportament global ve regit per un altre paràmetre essencial i permet tenir òrbites homoclíniques. En conseqüència, el sistema pot presentar el fenòmen de Silnikov.

A més, en una zona adequada dels paràmetres (corresponent a l'existència d'una dissipació forta en el sistema) els difeomorfismes bidimensionals es poden aproximar bé per aplicacions del cercle. Aquesta reducció de la dimensió permet analitzar més fàcilment els diversos atractors que poden aparèixer.

Així doncs, el model que proposem serveix d'escenari per a una *bifurcació de Silnikov-Hopf*. A part del seu interès intrínsec, també serveix per a explicar els resultats d'alguns estudis físics recents. Així, per exemple, a [47] s'estudia un dispositiu òptic que consta d'una cavitat interferomètrica del tipus Fabry-Perot,

formada per una pel·lícula semiabsorbent i un mirall dielèctric, entre els quals hi ha  $N$  capes de materials diferents, amb coeficients termo-òptics alternativament oposats. Un feix làser de potència  $P_E$  incideix sobre la pel·lícula d'entrada i (suposant que els materials són transparents a la longitud d'ona utilitzada) hi ha dos feixos de sortida: un de reflexió, de potència  $P_R$ ; i un de transmissió, de potència  $P_T$ . La diferència  $P_A = P_E - (P_R + P_T)$  és la potència absorbida, la qual es transforma en calor. D'aquest, una part és dissipada a l'exterior i una altra provoca un escalfament dels materials, els quals veuen així alterades les seves propietats òptiques. Tenim, doncs, un mecanisme de realimentació. A [47] es poden trobar tots els detalls sobre les equacions que governen el sistema i els resultats (tant experimentals com de simulació numèrica) que s'obtenen. Naturalment, l'augment del nombre de capes  $N$  incrementa la riquesa de comportaments. Quan  $N \geq 3$  s'observa l'existència d'òrbites homoclíniques que donen "caos de Silnikov", amb el punt d'equilibri transformat en una òrbita periòdica de tipus sella.

D'altra banda, mentre preparàvem aquest estudi ens ha arribat un preprint([29]) en què també s'estudia la bifurcació de Silnikov-Hopf com a model per a explicar els atractors de tipus espiral que apareixen en resultats experimentals sobre la reacció de Belousov-Zhabotinskii ([1]). De fet, en el citat preprint apareixen alguns resultats que estan completament d'acord amb els nostres.

En qualsevol dels dos casos, el treball directe sobre les equacions que regeixen aquests experiments és molt costós; per això ens interessava un model senzill que capturés els fenòmens observats.

L'estudi de la dinàmica d'un sistema en una zona pròxima a una òrbita homoclínica a un punt d'equilibri sella-focus es remonta a Silnikov ([50]). D'aquí el nom de "fenomen (o caos) de Silnikov" que sovint s'aplica al comportament complex que presenta un sistema amb una òrbita homoclínica que verifica unes condicions adequades. Posteriorment hi ha hagut moltes contribucions a diversos aspectes d'aquest fenomen; destaquem, per exemple [21], [30], [59], [19], [22], [60], [49] i, finalment, [29].

El tipus d'anàlisi que nosaltres farem per als difeomorfismes bidimensionals associats al flux usa tècniques semblants a les de [22], encara que allí només hi ha reinjecció d'una de les branques i no es considera la possibilitat d'una bifurcació

de Hopf que crei un cycle límit. A més, cap dels treballs anteriors fa la reducció posterior a aplicacions del cercle.

Una versió preliminar d'alguns resultats d'aquest capítol, feta amb la col·laboració de C. Simó, va ser presentada a: NATO Advanced Research Workshop "Homoclinic Chaos" a Brussel·les, el maig de 1991. Hem dividit el treball en els apartats següents:

- Construcció detallada de l'aplicació de Poincarés i anàlisi geomètrica.
- Existència d'òrbites homoclíniques i periòdiques.
- Recerca numèrica d'atractors de l'aplicació bidimensional; en particular, recuperació dels resultats experimentals.
- Reducció a una aplicació unidimensional sobre  $S^1$ .
- Estudi de l'aplicació del cercle: varietat d'atractors en aquest cas.

### 3.1 Una família de difeomorfismes bidimensionals

Volem construir una aplicació de Poincaré d'un camp de  $\mathbb{R}^3$  que modeli els resultats experimentals obtinguts a [47]. Les propietats essencials del camp que ens interessen són:

- 1) Existeix un punt d'equilibri,  $O$ , amb valors propis  $\lambda$  i  $\epsilon \pm i\omega$ ;  $\lambda, \epsilon, \omega \in \mathbb{R}$ ,  $\lambda \neq 0$ ,  $\omega \neq 0$ . Per a fixar idees suposarem  $\lambda > 0$ . Ens interessa que  $O$  pugui desenvolupar una bifurcació de Hopf; per això permetem que  $\epsilon$  varii en un entorn de  $\epsilon_0 = 0$ , moment en què es produeix la bifurcació: el punt  $O$  canvia l'estabilitat i es crea una òrbita periòdica,  $C$ , que existeix per a  $\epsilon > 0$ .
- 2) Les dues branques de la varietat inestable de  $O$  o  $C$  (segons el signe de  $\epsilon$ ) associada al valor propi  $\lambda > 0$ , després d'allunyar-se, es reinjecten a prop de la varietat estable corresponent. Mesurarem la proximitat a la varietat estable mitjançant un altre paràmetre  $b$ .

Construirem el difeomorfisme en dues etapes, cadascuna de les quals capturarà una de les propietats anteriors. La figura 3.1 dona una idea geomètrica d'aquestes aplicacions.

Comencem amb la part local. Suposem que el punt d'equilibri,  $O$ , està fixat a l'origen. El model més senzill de camp a  $\mathbb{R}^3$  que modela 1) és, en coordenades cilíndriques  $(r, \varphi, z)$ :

$$\begin{aligned} \dot{r} &= \epsilon r - \alpha r^3, \\ \dot{\varphi} &= \omega, \\ \dot{z} &= \lambda z, \end{aligned} \tag{3.1}$$

amb  $\lambda, \alpha > 0$ . No és restrictiu suposar  $\omega = 1$  ja que això es pot aconseguir escalant el temps. També escalem  $r$  i  $z$  per tal que el camp sigui de la forma (3.1) a l'entorn cilíndric "unitari"

$$\mathcal{E} = \{(r, \varphi, z) \mid 0 \leq r \leq 1, |z| \leq 1\}.$$

Remarquem que qualsevol camp de  $\mathbb{R}^3$  amb un punt d'equilibri que desenvolupi una bifurcació de Hopf genèrica es pot passar a una forma normal en la qual els primers termes són els de (3.1), i que el teorema de bifurcació de Hopf assegura que el comportament local del sistema (en un entorn prou petit del punt d'equilibri) no canvia si suprimim els termes d'ordre superior ([24]). Aquest caràcter universal de (3.1) fa que ja hagi estat considerat anteriorment, com, per exemple, a [19].

Si  $\epsilon < 0$ , l'origen és del tipus sella-focus amb varietats invariants locals: estable

$$W_{loc}^s(0) = \{(r, \varphi, z) \mid z = 0, r \in (0, 1)\},$$

i inestable

$$W_{loc}^u(0) = \{(r, \varphi, z) \mid r = 0, z \in (-1, 1) \setminus \{0\}\}.$$

Quan  $\epsilon$  creua el valor 0, es produeix una bifurcació de Hopf en el pla  $z = 0$ , de manera que, per a  $\epsilon > 0$ , l'origen ha passat a ser repulsor i ha nascut una òrbita periòdica

$$C_\epsilon = \{(r, \varphi, z) \mid z = 0, r = r_\epsilon \equiv \sqrt{\epsilon/\alpha}\}$$

que té multiplicadors característics  $1, \exp(-4\pi\epsilon), \exp(2\pi\lambda)$  i varietats invariants estable

$$W_{loc}^s(C_\epsilon) = \{(r, \varphi, z) \mid z = 0, r \in (0, 1)\},$$

i inestable

$$W_{loc}^u(C_\epsilon) = \{(r, \varphi, z) \mid r = r_\epsilon, z \in (-1, 1) \setminus \{0\}\}.$$

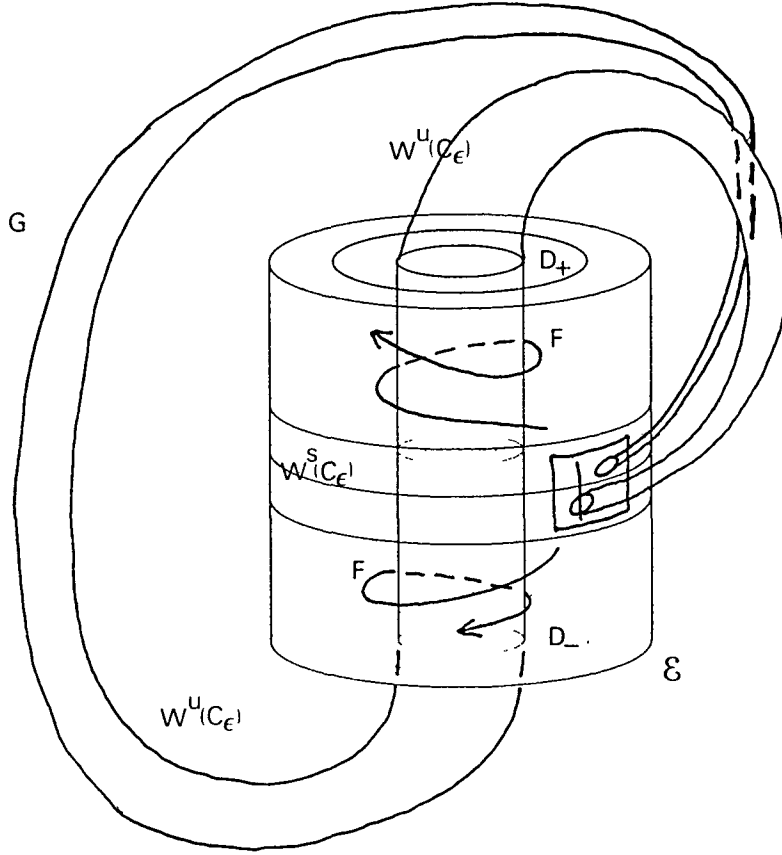


Figura 3.1: Geometria de l'aplicació  $\Psi$ . Cas  $\epsilon > 0$ .

Per a unificar notació convenim que  $r_\epsilon = 0$  i  $C_\epsilon = \{0\}$ ,  $\forall \epsilon \leq 0$ . Suposem, de moment, que  $\epsilon < \alpha$  per tal que  $C_\epsilon \subset \mathcal{E}$  si  $\epsilon > 0$ . Remarquem que  $\epsilon$  és el paràmetre essencial en aquesta etapa.

Definim també subvarietats locals bidimensionals transversals al flux definit per (3.1) en la frontera de  $\mathcal{E}$ :

$$C_+ = \{(r, \varphi, z) \mid r = 1, z \in (0, \bar{z})\},$$

$$C_- = \{(r, \varphi, z) \mid r = 1, z \in (-\bar{z}, 0)\},$$

$$D_+ = \{(r, \varphi, z) \mid z = 1, r \in (r_\epsilon, \bar{r})\}, \text{ i}$$

$$D_- = \{(r, \varphi, z) \mid z = -1, r \in (r_\epsilon, \bar{r})\},$$

on  $0 < \bar{z} < 1$  i  $0 < \bar{r} < 1$  són fixats. Els conjunts  $C_\pm$  són cilindres laterals de  $\mathcal{E}$  i  $D_\pm$  són corones en les tapes superior i inferior de  $\mathcal{E}$ .

Ens convindrà definir les aplicacions en aquests conjunts. Així, per tal que  $D_\pm$  no siguin buits suposarem que  $\epsilon < \alpha \bar{r}^2$  si  $\epsilon > 0$ .

El camp (3.1) defineix una aplicació,  $F$ , de la frontera lateral de  $\mathcal{E}$  ( $r = 1$ ) en les tapes ( $z = \pm 1$ ), la qual es pot escriure explícitament en termes de funcions elementals. Això és així perquè la solució de (3.1) pel punt inicial  $P_0 = (r_0, \varphi_0, z_0)$  és

$$\begin{aligned} r(t) &= \begin{cases} \left[ \frac{\alpha}{\epsilon} + \left( \frac{1}{r_0^2} - \frac{\alpha}{\epsilon} \right) \exp(-2\epsilon t) \right]^{-1/2}, & \text{si } \epsilon \neq 0, \\ \left[ \frac{1}{r_0^2} + 2\alpha t \right]^{-1/2}, & \text{si } \epsilon = 0, \end{cases} \\ \varphi(t) &= \varphi_0 + t, \\ z(t) &= z_0 \exp(\lambda t). \end{aligned} \quad (3.2)$$

El temps d'estada,  $T$ , de la solució per  $P_0$  dins de  $\mathcal{E}$  ve determinat per la condició  $1 = |z| \exp(\lambda T)$ , això és

$$T = -\frac{1}{\lambda} \log(|z|), \quad (3.3)$$

i, per tant, l'aplicació  $F$  està definida per a  $z_0 \neq 0$  com

$$F(r_0 = 1, \varphi_0, z_0) = (r_1, \varphi_1, z_1),$$

on

$$\begin{aligned} r_1 &= \begin{cases} \left[ \frac{\alpha}{\epsilon} + \left( 1 - \frac{\alpha}{\epsilon} \right) \exp\left(\frac{2\epsilon}{\lambda} \log(|z_0|)\right) \right]^{-1/2}, & \text{si } \epsilon \neq 0, \\ \left[ 1 - \frac{2\alpha}{\lambda} \log(|z_0|) \right]^{-1/2}, & \text{si } \epsilon = 0, \end{cases} \\ \varphi_1 &= \varphi_0 - \frac{1}{\lambda} \log(|z_0|), \\ z_1 &= \begin{cases} +1, & \text{si } z_0 > 0, \\ -1, & \text{si } z_0 < 0. \end{cases} \end{aligned} \quad (3.4)$$

Notem que si  $\epsilon \neq 0$  però  $\epsilon/\lambda$  és petit, llavors el terme de dins dels parèntesis quadrats en la definició de  $r_1$  pot aproximar-se per

$$1 - \frac{2\alpha}{\lambda} \log |z_0| + \epsilon \left( \frac{2}{\lambda} \log |z_0| - \frac{2\alpha}{\lambda^2} (\log |z_0|)^2 \right) + \dots ;$$

això demostra la continuïtat de la solució per a  $\epsilon \rightarrow 0$ .

D'altra banda, no podem estendre  $F$  als punts amb  $z_0 = 0$  ja que són de la varietat estable de  $C_\epsilon$  i, en conseqüència, la solució que determinen no tallarà mai,

en temps positiu, els plans  $z = \pm 1$ . En les fórmules anteriors això correspon a fer  $T \rightarrow +\infty$ . Més endavant comentarem el problema que això comporta en el domini de definició dels difeomorfismes.

Si prenem  $\bar{z}$  i  $\bar{r}$  adequats (depenent de  $\epsilon$ ,  $\alpha$  i  $\lambda$ ) llavors  $F$  aplicarà  $C = C_+ \cup C_-$  dins de  $D = D_+ \cup D_-$ .

**Lema 3.1.1** Si  $\bar{z} \leq \left[ \frac{\lambda}{2\epsilon} \log \left( \frac{\alpha - \epsilon/\bar{r}^2}{\alpha - \epsilon} \right) \right]$  llavors  $F(C) \subset D$ .

**Demostració.** L'expressió explícita de  $F$  mostra que  $r_1$  és funció monòtona creixent de  $|z_0|$ . A més,  $r_1$  tendeix a  $(\frac{\alpha}{\epsilon})^{-1/2}$  quan  $|z_0| \rightarrow 0$ . Per tant, la condició  $F(C) \subset D$  és equivalent al fet que el radi màxim de la imatge estigui fitat per  $\bar{r}$ :

$$\left[ \frac{\alpha}{\epsilon} + \left(1 - \frac{\alpha}{\epsilon}\right) \bar{z}^{2\epsilon/\lambda} \right]^{-1/2} \leq \bar{r},$$

i aquesta és, precisament, la condició de l'enunciat.  $\square$

**Nota.** Prop de  $z_0 = 0$ ,  $F$  és *expansiva* si  $\epsilon \in (-\lambda/2, \lambda/2)$ . Això vol dir que si  $A$  és un conjunt de mesura positiva situat a la frontera lateral de  $\mathcal{E}$  en una banda  $|z_0| < \rho$  prou estreta aleshores  $\frac{\text{mesura}(F(A))}{\text{mesura}(A)}$  és més gran que 1. A més, aquesta quantitat tendeix a  $+\infty$  quan  $\rho \rightarrow 0$ . D'altra banda, si  $|\epsilon| > \lambda/2$  llavors  $F$  és *dissipativa*. Aquestes propietats estan relacionades al fet que la *divergència* del camp (3.1) és  $2\epsilon + \lambda - 4\alpha r^2$  (és un càlcul elemental en coordenades cartesianes). Això tindrà importància a l'hora de buscar atractors.

Passem ara a definir la part global de l'aplicació de Poincaré; això és, la que correspon a la modelització d'un flux a l'exterior de  $\mathcal{E}$  i que verifiqui la propietat 2). Siguin

$$C_0 = \{(r, \varphi, z) \mid r = 1, z = 0\},$$

$$\bar{C} = C_+ \cup C_- \cup C_0,$$

$$\bar{D}_{\pm} = \{(r, \varphi, z) \mid z = \pm 1, r \in [r_{\epsilon}, \bar{r})\}, \text{ i}$$

$$\bar{D} = \bar{D}_+ \cup \bar{D}_-.$$

Per a definir  $G : \bar{D} \rightarrow \bar{C}$ , cal definir  $G_+ : \bar{D}_+ \rightarrow \bar{C}$  i  $G_- : \bar{D}_- \rightarrow \bar{C}$  separatament. Suposem que el flux és suficientment regular i que estem en una situació d'existència d'òrbita homoclínica (o bé pròxima a aquesta). Llavors el temps que



una solució començant a  $\overline{D}$  necessita per a passar a  $\overline{C}$  és finit i depèn diferenciablement del punt i dels paràmetres del flux. Podem considerar, doncs, el desenvolupament de Taylor al voltant d'un dels punts  $r = 0$ ,  $z = \pm 1$  de les aplicacions que el flux determina entre  $\overline{D}_{\pm}$  i  $\overline{C}$ ; i prenem, com a aproximacions, truncaments a primer ordre. Obtenim així aplicacions afins. Concretament, definim

$$G(r_1, \varphi_1, z_1 = \pm 1) = (r_2, \varphi_2, z_2),$$

on

$$\begin{aligned} r_2 &= 1, \quad i \\ \begin{pmatrix} \varphi_2 \\ z_2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 \\ b \end{pmatrix} + R_{\gamma} \begin{pmatrix} fr_1 \cos \varphi_1 \\ \mu fr_1 \sin \varphi_1 \end{pmatrix}, \quad \text{si } z_1 = +1, \\ \begin{pmatrix} \varphi_2 \\ z_2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 \\ b \end{pmatrix} + R_{\gamma} \begin{pmatrix} gr_1 \cos \varphi_1 - a \\ \mu gr_1 \sin \varphi_1 \end{pmatrix}, \quad \text{si } z_1 = -1. \end{aligned} \quad (3.5)$$

Hem posat  $R_{\gamma}$  per a indicar la rotació  $\begin{pmatrix} \cos \gamma & \sin \gamma \\ -\sin \gamma & \cos \gamma \end{pmatrix}$ . Expliquem el significat geomètric de les expressions anteriors. Prenem un punt a  $z = +1$  o a  $z = -1$ , el passem a coordenades cartesianes  $(r_1 \cos \varphi_1, r_1 \sin \varphi_1)$  i li apliquem una compressió de raó  $f$  o  $g$ , respectivament. Això està justificat si la component radial del camp és, en un entorn més gran que  $\mathcal{E}$ , de la forma  $\dot{r} = r(\epsilon - \alpha(r^2 + z^2))$ . A continuació comprimim verticalment per un factor  $\mu$  i separem les imatges de les dues tapes:  $a$  mesura la distància entre les imatges dels centres. Finalment girem un angle  $\gamma$  i fem una translació vertical de llargada  $b$ .

**Nota.** Una forma més general per a la transformació afí (3.5) és a [7]. S'obtenen els mateixos resultats qualitius.

Observem que  $b$  és el paràmetre essencial d'aquesta etapa, ja que control·la directament les possibilitats de tenir una òrbita homoclínica. Així, quan  $b = 0$  la varietat de  $O$  associada al valor propi  $\lambda$  és reinjectada en  $W^s(O)$  o  $W^s(C_{\epsilon})$ , segons el signe de  $\epsilon$  (donem més detalls a la secció 2). La resta de paràmetres tenen un interès secundari, i els considerarem constants. Cal destacar, però, que no és admissible qualsevol elecció de valors. D'entrada prenem  $f, g \in (0, 1)$ ,  $a > 0$  i  $\mu \in [0, 1]$  (el cas  $\mu = 0$  correspon a la situació degenerada de tenir compressió infinita en una

direcció). A més, si  $G$  ha de ser un difeomorfisme, cal  $G(D_+) \cap G(D_-) = \emptyset$ ; i si busquem atractors del camp (3.1) és natural demanar  $G(D_{\pm}) \subset C$ .

**Lema 3.1.2** a) Si  $a > (f + g)\bar{r}$  llavors  $G(D_+) \cap G(D_-) = \emptyset$ .

b) Si  $|b| + a + (f + g)\bar{r} < \bar{z}$  llavors  $G(D_{\pm}) \subset C$ .

**Demostració.** És evident; les hipòtesis s'obtenen en els casos més desfavorables i són, per tant, només suficients.  $\square$

El model final d'aplicació de Poincaré és la composició  $\Psi = F \circ G$ . Cal fer una observació sobre el domini de definició de  $\Psi$ , ja que és *singular* en el sentit següent. Si  $G(D)$  interseca  $C_0$ , aquests punts són de la varietat estable de  $C_{\epsilon}$  i, en conseqüència, no és possible aplicar posteriorment  $F$ . Per tant, el domini de definició de  $\Psi$  és  $\tilde{D} = D \setminus G^{-1}\{(r, \varphi, z) \mid r = 1, z = 0\}$ . En endavant, no distingirem especialment aquesta possibilitat.

Una vegada definida la família de difeomorfismes remarcuem una altra vegada que els únics paràmetres que considerarem en la definició de  $\Psi$  són  $\epsilon$  i  $b$ . La resta són constants que prenen valors admissibles; això és, lligats per les condicions dels lemes anteriors.

A continuació donarem algunes característiques geomètriques de  $F$  i  $G$ .

**Proposició 3.1.3** a)  $F$  aplica qualsevol segment horitzontal

$$H_{z_0} = \{(r, \varphi, z) \mid r = 1, \varphi \in (\varphi_0, \varphi_0 + \beta), z = z_0\}$$

en un arc de circumferència situat a  $D_+$  (si  $z_0 > 0$ ) o a  $D_-$  (si  $z_0 < 0$ ), de radi  $r_1 = \left[ \alpha/\epsilon + (1 - \alpha/\epsilon)|z_0|^{2\epsilon/\lambda} \right]^{-1/2}$  i de la mateixa longitud angular  $\beta$ .

b)  $F$  aplica qualsevol segment vertical sencer de  $C_+$ :

$$V_{\varphi_0} = \{(r, \varphi, z) \mid r = 1, \varphi = \varphi_0, z \in (0, \bar{z})\}$$

(respectivament  $C_-$  amb  $z \in (-\bar{z}, 0)$ ) en una espiral continguda a  $D_+$  (respectivament  $D_-$ ) que talla transversalment i infinites vegades qualsevol radi de  $D_+$ :

$$R_{\varphi_1} = \{(r, \varphi, z) \mid r \in (r_{\epsilon}, \bar{r}), \varphi = \varphi_1, z = +1\}$$

(respectivament  $D_-$  amb  $z = -1$ ); i els valors corresponents a talls successius s'acumulen monòtonament a  $r_{\epsilon}$ .

c)  $F$  aplica qualsevol segment vertical parcial de  $C_+$ :

$$V_{\varphi_0} = \{(r, \varphi, z) \mid r = 1, \varphi = \varphi_0, z \in (z_0, z'_0)\}$$

amb  $0 < z_0 < z'_0$  (respectivament  $C_-$  amb  $0 > z'_0 > z_0$ ) i  $\frac{z'_0}{z_0} = \exp(2\pi\lambda)$  en exactament una volta d'espiral continguda a  $D_+$  (respectivament  $D_-$ ).

**Demostració.** L'apartat a) es dedueix trivialment de (3.4), observant:

1) el radi imatge  $r_1$  no depèn de  $\varphi_0$ ; i

2) per a un valor constant de  $z_0$ , l'angle inicial i l'angle imatge varien la mateixa quantitat:  $\varphi_1 = \varphi_0 + \text{ctant}$ .

Passem a b). Quan  $z$  varia des de  $\bar{z}$  fins a 0, el temps d'estada  $T$  dins de  $\mathcal{E}$  varia monòtonament a  $(-\log(\bar{z})/\lambda, +\infty)$  i, en conseqüència, l'angle imatge  $\varphi_1 = \varphi_0 + T$  dóna infinites voltes; per tant talla qualsevol radi de  $D_+$  infinites vegades. També el radi imatge  $r_1$  és funció monòtona de  $z_0$  i tendeix a  $(\alpha/\epsilon)^{-1/2} = r_\epsilon$  quan  $z_0 \rightarrow 0$ .

Finalment, siguin  $(r(h), \varphi(h), +1) = F(1, \varphi_0, z+h)$ ,  $\forall h \in (-z, z)$ ,  $z \in (0, \bar{z})$ .

Per a veure que la intersecció és transversal és suficient comprovar que

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\varphi(h) - \varphi(0)}{r(h) - r(0)} \neq 0$$

Efectivament, usant l'expressió (3.4) obtenim

$$\begin{aligned} & \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\varphi(h) - \varphi(0)}{r(h) - r(0)} = \\ & = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{[\varphi_0 - \log(z+h)/\lambda] - [\varphi_0 - \log(z)/\lambda]}{[\alpha/\epsilon + (1 - \alpha/\epsilon)(z+h)^{2\epsilon/\lambda}]^{-1/2} - [\alpha/\epsilon + (1 - \alpha/\epsilon)(z)^{2\epsilon/\lambda}]^{-1/2}} = \\ & = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-1/\lambda(z+h)}{(-1/2) [\alpha/\epsilon + (1 - \alpha/\epsilon)(z+h)^{2\epsilon/\lambda}]^{-3/2} (1 - \alpha/\epsilon)(2\epsilon/\lambda)(z+h)^{2\epsilon/\lambda-1}} = \\ & = (\epsilon - \alpha) \left[ (\epsilon/\alpha)z^{-4\epsilon/3\lambda} + (1 - \alpha/\epsilon)z^{2\epsilon/3\lambda} \right]^{3/2} \neq 0, \forall z \in (0, \bar{z}) . \end{aligned}$$

A la segona igualtat hem aplicat la regla de l'Hôpital. El cas de  $C_-$  és totalment anàleg.

La part c) és immediata a partir de l'expressió de l'angle imatge com a funció de  $z_0$ ; a  $C_+$  és  $\varphi_1 = \varphi_0 - \log(z_0) \equiv f(z_0)$ . Per tant,

$$f(z_0) = f(z'_0) + 2\pi \Leftrightarrow -\log(z_0)/\lambda = -\log(z'_0)/\lambda + 2\pi \Leftrightarrow z_0/z'_0 = \exp(2\pi\lambda) . \square$$

**Proposició 3.1.4** *La imatge per  $G$  de la circumferència de  $\overline{D}_+$  de radi  $r \in (0, \bar{r})$  és una el·lipse amb component vertical  $z$  compresa entre els valors*

$$b \pm fr\sqrt{\sin^2 \gamma + \mu^2 \cos^2 \gamma} .$$

*Anàlogament per a  $\overline{D}_-$  amb els valors*

$$b - a \sin \gamma \pm gr\sqrt{\sin^2 \gamma + \mu^2 \cos^2 \gamma} .$$

**Demostració.** Parametritzem el cercle  $S_r = \{(r, \varphi, +1) \mid \varphi \in [0, 2\pi]\}$  mitjançant l'angle  $\varphi$ ; la component vertical de la imatge és

$$z = f(\varphi) \equiv b + fr(\sin \gamma \cos \varphi + \mu \cos \gamma \sin \varphi) ,$$

i els valors extrems de  $z$  s'assoleixen per a valors de  $\varphi$  que verifiquin

$$0 = f'(z) = fr(-\sin \gamma \sin \varphi + \mu \cos \gamma \cos \varphi) ,$$

o sigui,  $\tan \varphi = \mu \cot \gamma$ . Per tant existeixen dos extrems,  $\varphi_1$  i  $\varphi_2$ , separats per una distància  $\pi$ . Un és un màxim i l'altre, un mínim; i verifiquen

$$\sin \varphi_{1,2} = \pm s/\sqrt{1+s^2}, \quad \cos \varphi_{1,2} = \pm 1/\sqrt{1+s^2},$$

on  $s = \mu \cot \gamma$ .

Els valors corresponents de  $z$  són, efectivament, els de l'enunciat:

$$\begin{aligned} z_{1,2} &= f(\varphi_{1,2}) = b + fr(\sin \gamma \cos \varphi_{1,2} + \mu \cos \gamma \sin \varphi_{1,2}) = \\ &= b \pm fr \left( \frac{\sin \gamma}{\sqrt{1+s^2}} + \mu \cos \gamma \frac{s}{\sqrt{1+s^2}} \right) = b \pm fr\sqrt{\sin^2 \gamma + \mu^2 \cos^2 \gamma} . \quad \square \end{aligned}$$

Els resultats anteriors ens permeten donar una descripció de l'aplicació de Poincaré  $\Psi$ .

**Teorema 3.1.5** *Sigui  $S_r = \{(r, \varphi, +1) \mid \varphi \in [0, 2\pi]\}$ ,  $r \in (0, \bar{r})$  una circumferència de  $\overline{D}_+$  i definim  $k_r = fr\sqrt{\sin^2 \gamma + \mu \cos^2 \gamma} > 0$ . Aleshores es verifica:*

a) *Si  $b > k_r$  llavors  $\Psi(S_r)$  està contingut a  $D_+$  i és un cercle topològic, estirat i cargolat en forma espiral de manera que dona  $\frac{1}{2\pi\lambda} \log \left( \frac{b+k_r}{b-k_r} \right)$  voltes.*

b) Si  $b \in (-k_r, +k_r)$  llavors  $\Psi(S_r)$  té una part continguda a  $D_+$  i una altra a  $D_-$ . Cadacuna de les dues espirala infinitament, convergint cap als cercles de radi  $r_\epsilon = \sqrt{\epsilon/\alpha}$ .

c) Si  $b < -k_r$  llavors  $\Psi(S_r)$  està contingut a  $D_-$  i és un cercle topològic, estirat i cargolat en forma espiral de manera que dóna  $\frac{1}{2\pi\lambda} \log\left(\frac{b-k_r}{b+k_r}\right)$  voltes.

d) Si  $b = k_r$  o  $b = -k_r$  llavors  $\Psi(S_r)$  està contingut totalment a  $D_+$  o  $D_-$ , respectivament, i espirala infinitament.

En els casos b) i d) existeixen 2 i 1 punts, respectivament, de  $S_r$  en què  $\Psi$  no està definida, ja que s'apliquen per  $G$  en la varietat estable de  $C_\epsilon$ .

Un resultat totalment anàleg és cert quan el cercle està situat a  $\overline{D_-}$ , canviant  $f$  per  $g$  i  $b$  per  $b - a \sin \gamma$ .

**Demostració** És una aplicació immediata de les proposicions anteriors. En el cas a) la quantitat de voltes completes és el valor  $n \geq 0$  determinat per la condició

$$\frac{b + k_r}{b - k_r} = [\exp(2\pi\lambda)]^n .$$

Això dóna el resultat de l'enunciat. La resta de casos es tracten anàlogament.  $\square$

**Nota.** Acabem l'apartat remarcant que, encara que l'aplicació de Poincaré  $\Psi$  sigui un model, és també una bona aproximació de qualsevol camp que verifiqui les propietats 1) i 2). Ja hem fet alguns comentaris sobre la genericitat de  $F$  i de  $G$ ; per a una relació més precisa respecte a la semblança entre  $\Psi$  i l'aplicació de Poincaré d'un camp real qualsevol, es poden usar les tècniques exposades a [62, pàg. 191-198].

## 3.2 Òrbites homoclíniques i periòdiques

En aquesta secció usarem les propietats de  $\Psi$  per a localitzar les òrbites homoclíniques del sistema en el pla de paràmetres  $(\epsilon, b)$  i veurem com es creen i destrueixen. La importància d'aquestes òrbites és que sovint van lligades a l'existència de caos. Concretament, recordem el següent resultat de Silnikov per a un flux tridimensional ([50], [24], [62]): si existeix un punt d'equilibri del tipus sella-focus amb una òrbita homoclínica associada i si el valor propi real té magnitud més gran que la part real dels valors propis complexos, llavors l'aplicació de retorn bidimensional definida

en la proximitat de l'òrbita homoclínica presenta una infinitat de horseshoes. En particular, coexisteixen infinites òrbites periòdiques de tots els períodes.

A més, sota pertorbacions de classe  $C^2$  prou petites es conserva una quantitat finita dels horseshoes ([60], vegeu també [48]). Com a primer pas per a entendre com es creen aquests horseshoes, localitzarem també algunes òrbites periòdiques pròximes a òrbites homoclíniques.

El nostre model és més general que un sistema del tipus de Silnikov, ja que:

1) Ens interessa també el rang de paràmetres en què no es verifica la hipòtesi sobre els valors propis.

2) Admetem també la possibilitat que l'òrbita sigui homoclínica respecte un cicle límit.

Distinguem doncs, d'entrada, dues possibilitats, segons el signe de  $\epsilon$ . Quan  $\epsilon > 0$ , considerarem òrbites homoclíniques associades al punt d'equilibri hiperbòlic  $O$ . En canvi, si  $\epsilon < 0$  llavors les òrbites homoclíniques ho seran respecte  $C_\epsilon$  (notem que  $O$  ha passat a ser repulsor i no pot tenir òrbites homoclíniques). Els dos casos són essencialment diferents, la causa és que  $\dim W^u(O) = 1, \forall \epsilon < 0$ , mentre que  $\dim W^u(C_\epsilon) = 2, \forall \epsilon > 0$ ; això fa que en el primer cas existeixin òrbites homoclíniques per a valors discrets del paràmetre  $b$  (fixat el valor de  $\epsilon$ ), mentre que en el segon una òrbita homoclínica existeix per a un interval no trivial de valors de  $b$ . En aquest últim cas és convenient detectar el moment en què neixen o moren les òrbites.

Finalment, cal dir que també cal considerar una possibilitat diferent per a cada branca de  $W^u$  (superior,  $W^u_+$ , o inferior,  $W^u_-$ , segons el signe de la variable  $z$ ). La nostra anàlisi serà semblant a la de [19], encara que allí només hi ha reinjecció d'una de les branques. Un estudi semblant és [22], però en aquest cas no consideren la possibilitat del cicle límit i, per tant, és suficient considerar un model local lineal; això simplifica els càlculs.

#### Cas $\epsilon < 0$

Considerem el cas més senzill en què una de les branques de  $W^u(O)$ , després de sortir de  $\mathcal{E}$  verticalment, es reinjecta novament a  $\mathcal{E}$  en un punt de  $W^s_{loc}(O)$  a la primera tornada; les anomenarem *òrbites homoclíniques a la primera* o  $OH - 1$ .

**Lema 3.2.1** *Quan  $\epsilon < 0$ , es verifica:*

a) *Existeix alguna  $OH - 1$  de  $W^u_+$   $\Leftrightarrow b = 0$ .*

b) *Existeix alguna OH - 1 de  $W_-^u$  ⇔  $b = a \sin \gamma$ .*

**Demostració.** Usem la definició (3.5) de  $G$  per a la branca inferior. Cal que la imatge del punt amb  $r = 0$  tingui component  $z$  nul·la; o sigui

$$0 = \text{pr}_z \circ G_-(0, 0, -1) = b + \sin \gamma(-a) .$$

Això dona b); per a l'apartat a) cal canviar  $g$  per  $f$  (això no influeix) i fer  $a = 0$ . □

Suposem ara que a la primera reinjecció no obtenim exactament una òrbita homoclínica; en aquest cas la branca considerada de  $W^u$  tornarà a creuar  $\mathcal{E}$  i sortirà novament per alguna de les tapes. Hi ha la possibilitat que obtinguem l'òrbita homoclínica en una reinjecció posterior. Considerem, per exemple, *òrbites homoclíniques secundàries (OH-2)*; veurem que n'hi pot existir per a una infinitat de valors de  $b$  (els quals s'acumulen a l'*OH-1*). Una referència clàssica per a aquest fenomen és [21].

El mecanisme és explicat seguidament. Siguin  $P_0 = (0, 0, \pm 1)$  i  $P_1 = G(P_0)$ ; suposem que  $P_1 \notin C_0$  (això vol dir que no existeix una *OH-1*) i definim  $P_2 = F(P_1)$  i  $P_3 = G(P_2)$ . La condició per a tenir *OH-2* és que  $P_3 \in C_0$ . La figura 3.2 mostra les dues possibilitats que hi ha segons  $P_1 \in C_+$  o  $P_1 \in C_-$ .

Explicitem això, en el cas de la branca inferior, usant les definicions de  $F$  i  $G$ . Usem la notació  $P_i = (r_i, \varphi_i, z_i), \forall i = 0 \div 3$ . En aquest cas,  $P_0 = (0, 0, -1)$  i  $P_1 = (1, -a \cos \gamma, b - a \sin \gamma)$ . Aleshores,

1) si  $P_1 \in C_+$  (o sigui,  $b > a \sin \gamma$ ) llavors s'ha de verificar

$$0 = z_3 = b + fr_2(\sin \gamma \cos \varphi_2 + \mu \cos \gamma \sin \varphi_2) , \quad (3.6)$$

on

$$r_2 = \left[ \alpha/\epsilon + (1 - \alpha/\epsilon)(b - a \sin \gamma)^{2\epsilon/\lambda} \right]^{-1/2} , \text{ i}$$

$$\varphi_2 = -a \cos \gamma - \log(b - a \sin \gamma)/\lambda ;$$

2) si  $P_1 \in C_-$  (o sigui,  $b < a \sin \gamma$ ) llavors la condició és

$$0 = z_3 = b - a \sin \gamma + gr_2(\sin \gamma \cos \varphi_2 + \mu \cos \gamma \sin \varphi_2) , \quad (3.7)$$

on

$$r_2 = \left[ \alpha/\epsilon + (1 - \alpha/\epsilon)(|b - a \sin \gamma|)^{2\epsilon/\lambda} \right]^{-1/2} , \text{ i}$$

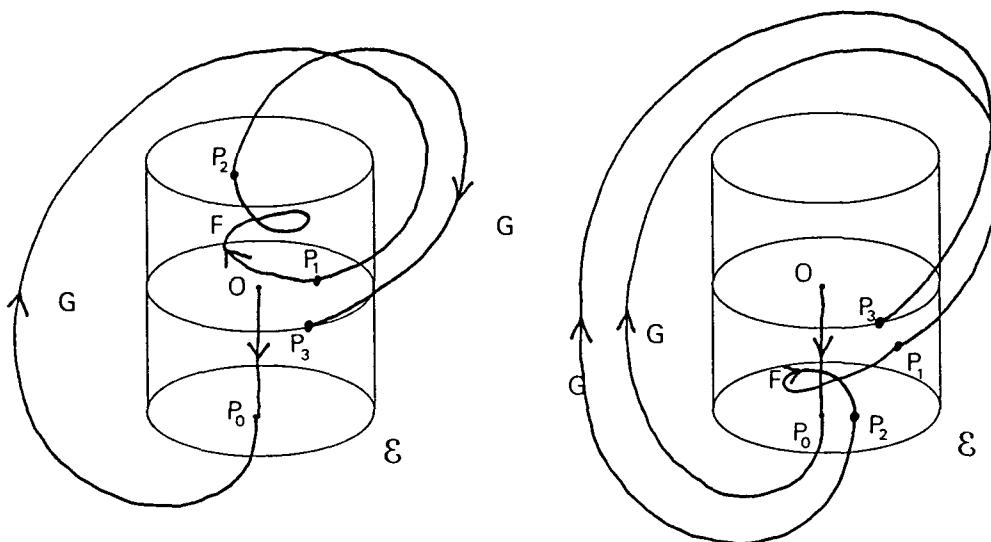


Figura 3.2: Òrbites homoclíniques a la segona. Cas  $\epsilon < 0$ . Les dues possibilitats per a la branca inferior.

$$\varphi_2 = -a \cos \gamma - \log(|b - a \sin \gamma|)/\lambda .$$

Volem resoldre (3.6) i (3.7) per a valors de  $b$  pròxims a  $a \sin \gamma$ . Fem, però, unes consideracions prèvies. Sigui  $t(x) = r(x)s(x)$ ,  $x > 0$ , on

$$r(x) = \left[ \alpha/\epsilon + (1 - \alpha/\epsilon)x^{2\epsilon/\lambda} \right]^{-1/2} ,$$

$$s(x) = \sin \gamma \cos \varphi(x) + \mu \cos \gamma \sin \varphi(x) ,$$

$$\varphi(x) = -a \cos \gamma - \log(x)/\lambda .$$

Suposem que  $x$  varia en un interval  $(0, \delta)$ , amb  $\delta > 0$  petit. D'una banda, la funció angular  $\varphi(x)$  recorre un interval infinit, des de  $+\infty$  fins a  $-a \cos \gamma - \log \delta/\lambda$ . Per tant la funció trigonomètrica  $s(x)$  realitza una infinitat d'oscil·lacions d'amplitud  $2\sqrt{\sin^2 \gamma + \mu^2 \cos^2 \gamma}$  que s'acumulen a  $x = 0$ .

De l'altra, la funció  $r(x)$  té comportaments diferents depenent de la magnitud de  $\epsilon/\lambda$ . Efectivament, es verifica

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} r(x) = 0 , \text{ i}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} r'(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } \epsilon/\lambda < -1 , \\ (1 - \alpha/\epsilon)^{-1/2} & \text{si } \epsilon/\lambda = -1 . \\ +\infty & \text{si } \epsilon/\lambda > -1 . \end{cases}$$



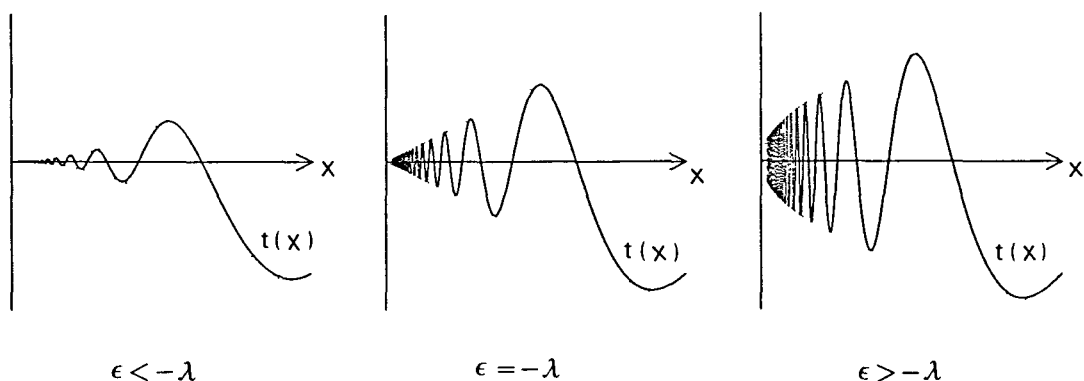


Figura 3.3: Els diversos casos de la funció  $t(x)$ .

Ajuntant la informació de  $r(x)$  i  $s(x)$  obtenim que l'aspecte qualitatiu de les gràfiques de les funcions  $t(x)$ , per a  $x > 0$  petit és el de la figura 3.3.

Passem ja a resoldre (3.6).

**Proposició 3.2.2** *Sigui  $\delta > 0$ . La resolució de (3.6) a l'interval  $(a \sin \gamma, a \sin \gamma + \delta)$  és:*

1) *Si  $\epsilon < -\lambda$  i si  $\sin \gamma \geq 0$  llavors no existeix cap solució per a  $\delta$  prou petit.*

2) *Si  $\epsilon < -\lambda$  i si  $\sin \gamma < 0$  llavors existeix una única solució per a  $\delta$  prou petit.*

*Aquesta solució tendeix cap al valor  $b = a \sin \gamma$  (la qual representa l'OH-1) quan  $\sin \gamma \rightarrow 0^-$ .*

3) *Si  $\epsilon > -\lambda$  i si  $\sin \gamma = 0$  llavors existeix una quantitat numerable de solucions per a qualsevol  $\delta$  tan petit com vulguem. Aquestes solucions s'acumulen al valor  $b = a \sin \gamma$  (que correspon a l'OH-1).*

4) *Si  $\epsilon > -\lambda$  i si  $\sin \gamma \neq 0$  llavors existeix una quantitat finita de solucions per a qualsevol  $\delta$  tan petit com vulguem. Aquesta quantitat pot ser eventualment 0 si  $|\sin \gamma|$  és prou gran (dependent de  $\epsilon$ ) i augmenta quan  $|\sin \gamma|$  s'acosta a 0.*

**Demostració.** Escrivim (3.6) com

$$-b = fr_2(\sin \gamma \cos \varphi_2 + \mu \cos \gamma \sin \varphi_2) \equiv h(b),$$

amb  $r_2 = r_2(b)$  i  $\varphi_2 = \varphi_2(b)$  adequats. Les solucions corresponen a valors d'intersecció entre la gràfica de  $h(b)$  i la de la recta  $y(b) = -b$ .

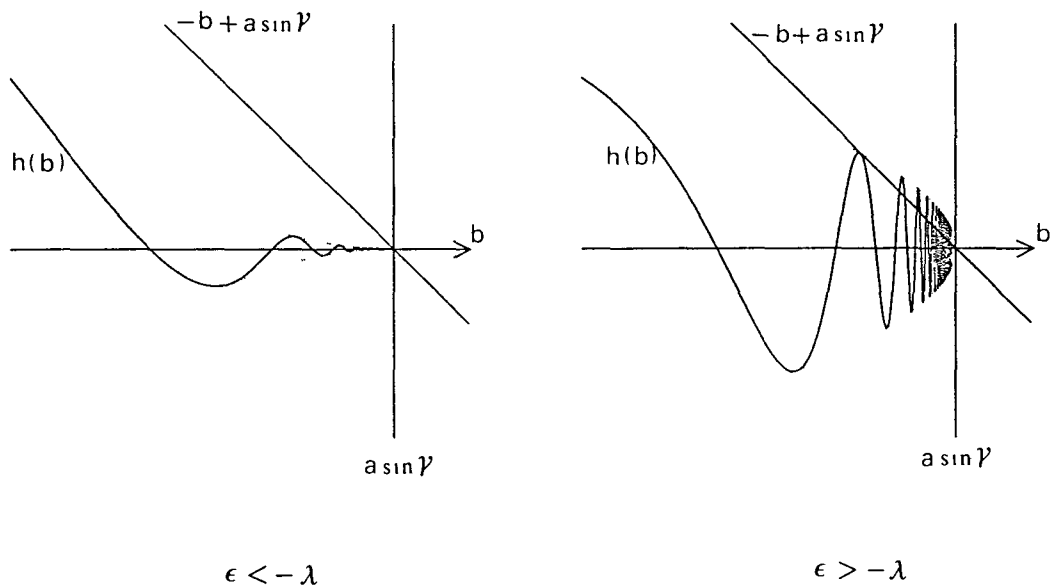


Figura 3.4: Resolució de l'equació (3.7).

Fem ús de la funció anterior  $t(x)$  amb  $x = b - a \sin \gamma$ . Cal intersecar  $t(x)$  amb  $\bar{y}(x) = -x - a \sin \gamma$ . El resultat és evident a partir de la comparació entre la gràfica de la funció  $t(x)$  de la figura 3.3 i la posició de la recta  $\bar{y}(x)$  per als diversos signes de  $\sin \gamma$ .  $\square$

Resolem (3.7) de manera equivalent.

**Proposició 3.2.3** *Sigui  $\delta > 0$ . La resolució de (3.7) a l'interval  $(a \sin \gamma - \delta, a \sin \gamma)$  és:*

- 1) *Si  $\epsilon < -\lambda$  llavors no existeix cap solució per a  $\delta$  prou petit.*
- 2) *Si  $\epsilon > -\lambda$  llavors existeix una quantitat numerable de solucions per a qualsevol  $\delta$  tan petit com vulguem. Aquestes solucions s'acumulen al valor  $b = a \sin \gamma$ .*

**Demostració.** Escrivim (3.7) com

$$-b + a \sin \gamma = gr_2(\sin \gamma \cos \varphi_2 + \mu \cos \gamma \sin \varphi_2) \equiv h(b),$$

amb  $r_2$  i  $\varphi_2$  funcions adequades de  $b$ . Fent el canvi  $x = -b + a \sin \gamma$  les solucions corresponen ara a interseccions entre la gràfica d'una funció com  $t(x)$  introduïda anteriorment, i de la recta fixa  $y(x) = -x$ . Per això hi ha menys possibilitats, les quals són representades a la figura 3.4.  $\square$

Fins aquí hem tractat les diverses possibilitats de tenir alguna  $OH - 2$  deguda a la branca inferior de  $W^u$ . El cas de la branca superior és totalment anàleg; per això ens limitem a donar les condicions explícites i els resultats.

Ara,  $P_0 = (0, 0, +1)$  i  $P_1 = (1, 0, b)$ . Aleshores,

1) si  $P_1 \in C_+$  ( $b > 0$ ) cal

$$0 = z_3 = b + fr_2(\sin \gamma \cos \varphi_2 + \mu \cos \gamma \sin \varphi_2), \quad (3.8)$$

on

$$r_2 = \left[ \alpha/\epsilon + (1 - \alpha/\epsilon)(b)^{2\epsilon/\lambda} \right]^{-1/2}, \text{ i}$$

$$\varphi_2 = -\log(b)/\lambda;$$

2) si  $P_1 \in C_-$  ( $b < 0$ ) cal

$$0 = z_3 = b - a \sin \gamma + gr_2(\sin \gamma \cos \varphi_2 + \mu \cos \gamma \sin \varphi_2), \quad (3.9)$$

on

$$r_2 = \left[ \alpha/\epsilon + (1 - \alpha/\epsilon)(|b|)^{2\epsilon/\lambda} \right]^{-1/2}, \text{ i}$$

$$\varphi_2 = -\log(|b|)/\lambda.$$

**Proposició 3.2.4**  *sigui  $\delta > 0$ . La resolució de (3.8) a l'interval  $(0, \delta)$  és:*

1)  *Si  $\epsilon < -\lambda$  llavors no existeix cap solució per a  $\delta$  prou petit.*

2)  *Si  $\epsilon > -\lambda$  llavors existeix una quantitat numerable de solucions per a qualsevol  $\delta$  tan petit com vulguem. Aquestes solucions s'acumulen al valor  $b = 0$ . □*

**Demostració.** Anàloga a la de la proposició 3.2.3. □

**Proposició 3.2.5**  *sigui  $\delta > 0$ . La resolució de (3.9) a l'interval  $(-\delta, 0)$  és:*

1)  *Si  $\epsilon < -\lambda$  i si  $\sin \gamma \geq 0$  llavors no existeix cap solució per a  $\delta$  prou petit.*

2)  *Si  $\epsilon < -\lambda$  i si  $\sin \gamma < 0$  llavors existeix una única solució per a  $\delta$  prou petit. Aquesta solució tendeix cap al valor  $b = 0$  (que representa l'OH - 1) quan  $\sin \gamma \rightarrow 0^-$ .*

3)  *Si  $\epsilon > -\lambda$  i si  $\sin \gamma = 0$  llavors existeix una quantitat numerable de solucions per a qualsevol  $\delta$  tan petit com vulguem. Aquestes solucions s'acumulen al valor  $b = 0$  (que correspon a l'OH - 1).*

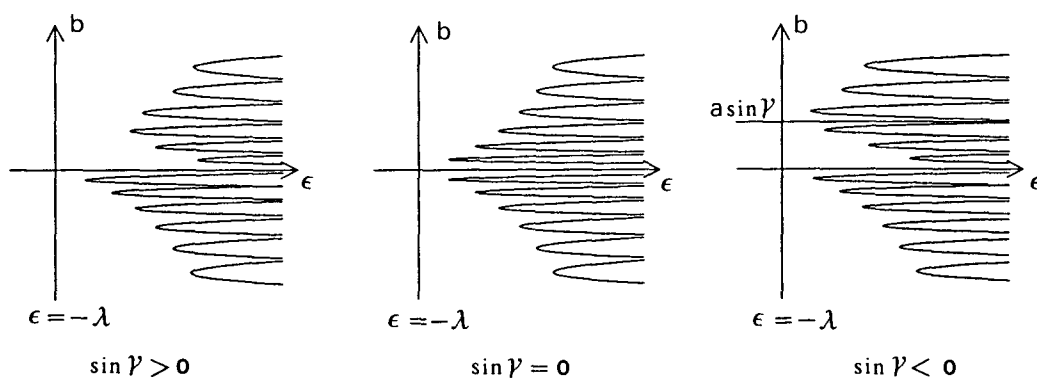


Figura 3.5: Aspecte global de les bifurcacions homoclíniques a la segona degudes a la branca inferior de  $W^u$ .

4) Si  $\epsilon > -\lambda$  i si  $\sin \gamma \neq 0$  llavors existeix una quantitat finita de solucions per a qualsevol  $\delta$  tan petit com vulguem. Aquesta quantitat pot ser eventualment 0 si  $|\sin \gamma|$  és prou gran (dependent de  $\epsilon$ ) i augmenta quan  $|\sin \gamma|$  s'acosta a 0.  $\square$

**Demostració.** Anàloga a la de la proposició 3.2.2.  $\square$

**Nota.** Per a cadascuna de les branques, hem considerat diverses possibilitats separades pel cas crític  $\epsilon = -\lambda$  i pel signe de  $\sin \gamma$ . No hi ha cap problema a lligar entre sí els diversos casos encara que semblin qualitativament molt diferents. La figura 3.5 (que s'ha obtingut numèricament) mostra com es produeix la transició. Hem dibuixat el lloc geomètric dels valors de  $\epsilon$  i de  $b$  per als quals existeixen  $OH-1$  o  $OH-2$  en el cas de la branca inferior de  $W^u$  (equacions (3.6) i (3.7)).

Cal dir que són només esquemes qualitatius, ja que les figures numèricament correctes (per a valors representatius dels paràmetres) presentarien unes acumulacions geomètriques que no deixarien veure res. Per exemple, considerem l'equació (3.7) per a  $\epsilon > -\lambda$  i siguin

$$\dots < b_k < b_{k+1} < b_{k+2} < \dots (\longrightarrow a \sin \gamma)$$

les solucions. A causa que  $h(b)$  fa una oscil·lació cada vegada que l'angle  $\varphi_2(b)$  varia  $2\pi$  radians, resulta de la resolució geomètrica de l'equació que  $b_k$  i  $b_{k+2}$  estan lligats, asimptòticament, per la relació

$$\varphi_2(b_k) + 2\pi \simeq \varphi_2(b_{k+2}) .$$

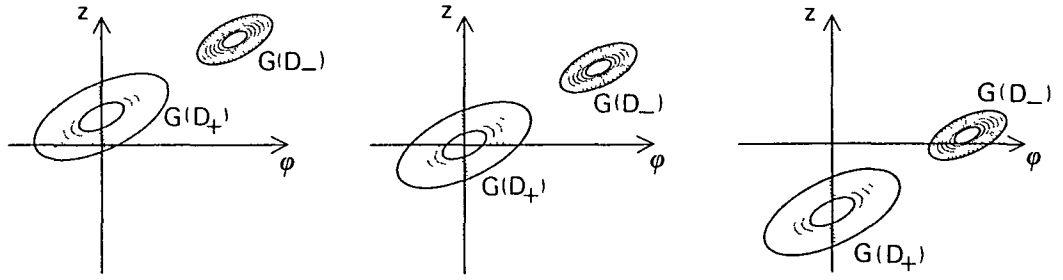


Figura 3.6: Condicions d'existència d' $OH - 1$  en el cas  $\epsilon > 0$ .

Usant l'expressió de  $\varphi_2$  que segueix a (3.7) això és equivalent a

$$-\log(|b_k - a \sin \gamma|)/\lambda + 2\pi \simeq -\log(|b_{k+2} - a \sin \gamma|)/\lambda;$$

o sigui,

$$\left| \frac{b_{k+2} - a \sin \gamma}{b_k - a \sin \gamma} \right| \simeq \exp(-2\pi\lambda).$$

Cas  $\epsilon > 0$

Ara, tant  $W^s(C_\epsilon)$  com  $W^u(C_\epsilon)$  són de dimensió 2 i, en conseqüència, la condició d'intersecció a  $\mathbb{R}^3$  és persistent.

Busquem, en primer lloc, *òrbites periòdiques a  $C_\epsilon$  a la primera ( $OH - 1$ )*. Cal que les el·lipses definides com la intersecció primera de  $W^u(C_\epsilon)$  amb la frontera lateral de  $\mathcal{E}$  tinguin punts amb component  $z$  nul·la. La figura 3.6 mostra diverses possibilitats qualitatives. Hem dibuixat  $G(D_+ \cup D_-)$  al cilindre  $(\varphi, z)$ . En el primer cas no existeix cap  $OH - 1$ ; en el segon n'existeix dos, corresponents a la branca superior  $W_+^u(C_\epsilon)$  i representades pels punts  $Q_1$  i  $Q_2$ ; i l'últim cas correspon al moment de "creació" o *tangència* d'una  $OH - 1$  corresponent a  $W_-^u(C_\epsilon)$ .

**Lema 3.2.6** *Sigui  $M = \sin^2 \gamma + \mu^2 \cos^2 \gamma$ . Quan  $\epsilon > 0$ , es verifica:*

- a) *Existeix una  $OH - 1$  tangencial de  $C_\epsilon$  corresponent a  $W_+^u$   $\Leftrightarrow b^2 = \frac{\epsilon}{\alpha} f^2 M$ .*
- b) *Existeix una  $OH - 1$  tangencial de  $C_\epsilon$  corresponent a  $W_-^u$   $\Leftrightarrow$*

$$\Leftrightarrow (b - a \sin \gamma)^2 = \frac{\epsilon}{\alpha} g^2 M$$

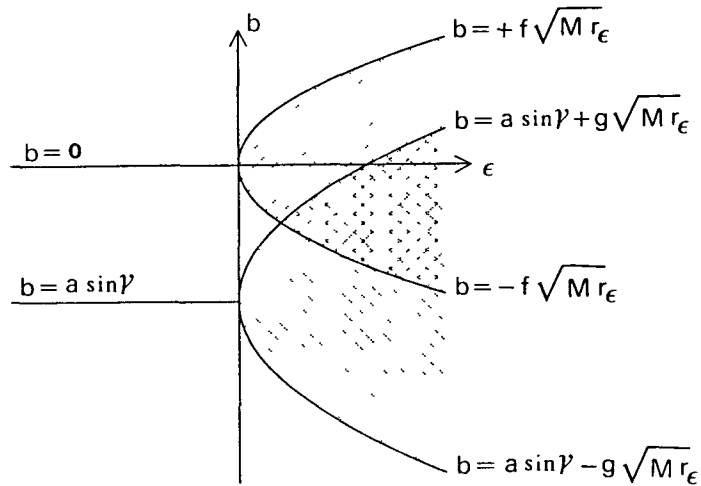


Figura 3.7: Paràmetres per als quals existeixen  $OH - 1$ .

**Demostració.** La condició de tangència de  $OH - 1$  és que la imatge per  $G$  d'alguna de les circumferències de radi  $r_\epsilon$  situades a  $D_+$  o  $D_-$  sigui tangent a l'eix  $z = 0$ . El resultat es dedueix doncs de la proposició 3.1.4; on tenim expressats els valors extrems de les imatges de les circumferències de radi  $r$ . Només cal fer  $r = r_\epsilon = \sqrt{\epsilon/\alpha}$  i igualar a 0.  $\square$

Les expressions de la proposició anterior representen, al pla  $(\epsilon, b)$ , dues paràboles amb l'eix paral·lel a  $b = 0$  i tangents a l'eix  $\epsilon = 0$ . L'interior de les paràboles correspon a l'existència de dos  $OH - 1$ . Ajuntant la informació del cas  $\epsilon < 0$  obtenim la figura 3.7. Notem que les branques superior i inferior de  $W^u(C_\epsilon)$  donen òrbites homoclíniques totalment independents; així, si  $\sin \gamma = 0$  i  $f = g$  hi ha superposició total, però la quantitat d'òrbites homoclíniques no disminueix.

Passem a l'estudi de *òrbites homoclíniques secundàries* ( $OH - 2$ ) associades a  $C_\epsilon$ . Concretament, busquem les tangències a la segona reinjecció corresponents a la branca superior de  $W^u(C_\epsilon)$  (la inferior es fa anàlogament).

La condició d'existència d' $OH - 2$  és

$$G \circ F \circ G(S_{r_\epsilon}) \cap \{z = 0\} \neq \emptyset.$$

La figura 3.8 mostra les imatges consecutives de  $S_{r_\epsilon}$  per  $G$ ,  $F$  i  $G$  (les notarem  $S_1$ ,  $S_2$  i  $S_3$ , respectivament), en el cas que  $b$  sigui prou gran per tal que no existeixi cap  $OH - 1$ .

Si  $b$  és suficientment gran llavors  $S_3$  no talla  $z = 0$  i, per tant, tampoc no existeix

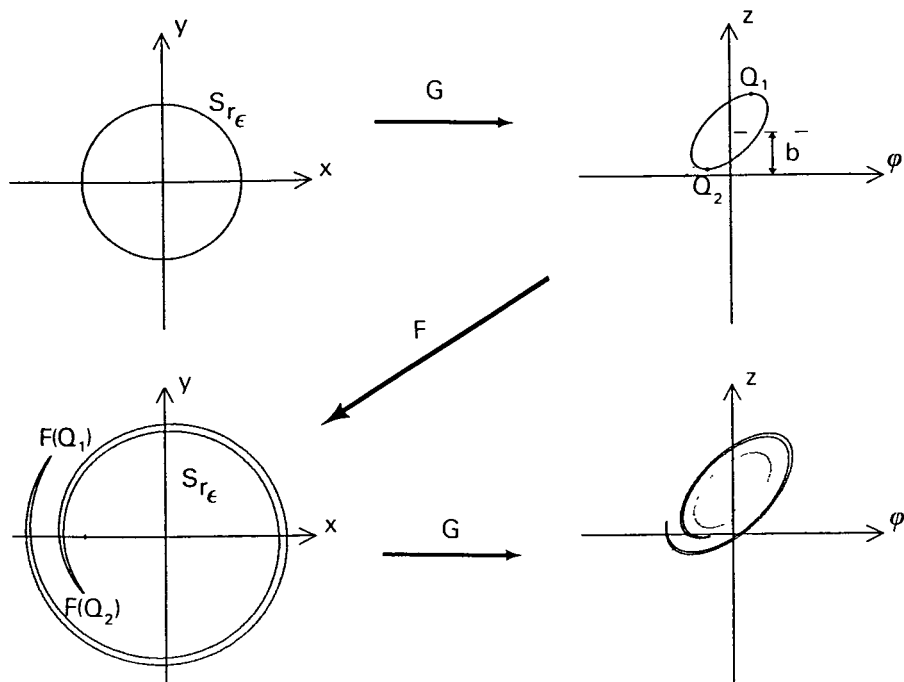


Figura 3.8: Procés de creació de  $OH - 2$  quan  $\epsilon > 0$ .

cap  $OH - 2$ . Quan  $b$  disminueix es produeixen els següents efectes:

1)  $S_1$  baixa globalment la mateixa quantitat que  $b$ .

2)  $S_2$  es va cargolant per la part interior ( $F(Q_1)$ ) i descargolant per l'exterior ( $F(Q_2)$ ), però la part interior avança més de pressa que l'exterior. Això és així a causa de la propietat c) de la proposició 3.1.3. Encara més: la velocitat de cargolament tendeix a infinit quan  $Q_2$  s'acosta a l'eix  $z$ .

3) La imatge posterior per  $G$  ja no deforma gaire  $S_2$ . Remarquem només que si posem  $S_1$  i  $S_3$  a la mateixa figura, llavors  $S_3$  és totalment exterior a  $S_1$ .

Tot això fa que, així com  $b$  s'acosta al valor  $b_+ \equiv f\sqrt{Mr_\epsilon}$  corresponent a tangència homoclínica primària, es van produint una infinitat de tangències homoclíniques secundàries que creen parelles de  $OH - 2$ . Notem que, al mateix temps, el descargolament de la part exterior pot fer desaparèixer algunes  $OH - 2$  ja creades anteriorment, però a una velocitat més lenta.

Quan  $b$  passa sota  $b_+$ , però es manté per sobre del valor  $b_- \equiv -f\sqrt{Mr_\epsilon}$  coexisteixen una infinitat d' $OH - 2$ , però així com ens acostem a  $b_-$  es va accelerant el

procés de desaparició ( $Q_2$  és més lluny de l'eix  $z$  que no pas  $Q_1$ ), de manera que per sota d'aquest valor ja només en queda una quantitat finita que va disminuint molt de pressa.

### Òrbites periòdiques

Completem aquesta secció amb alguns comentaris sobre la creació d'òrbites periòdiques en regions dels paràmetres en un entorn dels d'existència d'òrbites homoclíniques.

Aquestes òrbites periòdiques del flux tridimensional es corresponen amb punts periòdics de l'aplicació de Poincaré associada. Com a primera aproximació a la complexa estructura que pot tenir la dinàmica, només considerarem principalment punts fixos; això és, òrbites periòdiques que *tanquen a la primera tornada* (només creuen una vegada el domini  $\mathcal{E}$ ). De fet, en experiments de laboratori d'un sistema real, o bé en simulacions numèriques, també és difícil anar més enllà.

Comencem recordant el treball de Glendinning i Sparrow ([22]) en un cas més senzill que el nostre; concretament, allí es fan les hipòtesis següents:

- La part local és lineal ( $\iff \alpha = 0$ ); en particular, no pot existir el cicle límit  $C_\epsilon$ . Això correspon a considerar només el nostre cas  $\epsilon < 0$ .
- Només es reinjecta la branca superior de  $W^u(O)$ ; per tant, l'aplicació exterior  $G$  només està definida a  $D_+$ , i els punts de  $D_-$  no tornen al domini  $\mathcal{E}$ .

En el treball esmentat es considera una secció diferent ( però equivalent a la nostra frontera lateral de  $\mathcal{E}$ ), i l'expressió de  $G$  també és diferent; això, però, no és essencial.

Els resultats que s'obtenen sobre la quantitat de punts fixos en una zona  $z > 0$  pròxima al cas homoclínic  $z = 0$ , així com el seu caràcter respecte estabilitat són:

- 1) En el cas  $-\lambda < \epsilon < 0$  es verifica
  - a) si  $b = 0$  llavors existeix una quantitat numerable de punts fixos;
  - b) si  $b \neq 0$  llavors existeix una quantitat finita de punts fixos.

La creació d'aquests punts fixos es fa mitjançant bifurcacions sella-node en valors  $\{b_i\}_{i \geq 0}$  que convergeixen cap al valor de bifurcació homoclínica  $b = 0$



amb raó asimptòtica  $b_{i+1}/b_i \rightarrow -\exp(-\epsilon\pi)$ . A més, cal distingir les possibilitats:

- si  $-\lambda/2 < \epsilon < 0$  llavors es crea una sella i un node inestable;
- si  $-\lambda < \epsilon < -\lambda/2$  llavors es crea una sella i un node estable.

2) En el cas  $\epsilon < -\lambda < 0$  es verifica

- a) si  $b \leq 0$  llavors no existeix cap punt fix (excepte el corresponent a l'òrbita homoclínica del cas  $b = 0$ , el qual pot considerar-se com un punt fix amb  $z = 0$ );
- b) si  $b > 0$  llavors existeix un únic punt fix i l'òrbita periòdica que representa aquest punt fix tendeix a ser l'homoclínica quan  $b \rightarrow 0^+$ .

A més, el punt fix del cas  $b > 0$  (així com l'òrbita homoclínica del cas  $b = 0$ ) són estables o atractors.

Notem que la separació entre el caràcter atractor o no, es dona per a  $\epsilon = -\lambda/2$ ; això està en relació directa amb el caràcter expansiu o dissipatiu de la part local.

D'altra banda, el cas en què hi ha el cicle límit  $C_\epsilon$ , quan  $\epsilon > 0$  petit, ha estat estudiat per Gaspard ([20]), i s'obtenen resultats totalment anàlegs al cas 1) anterior: existeixen una quantitat numerable de bifurcacions sella-node,  $\{b_k^+\}$  i  $\{b_k^-\}$ , que s'acumulen als valors de tangència homoclínica ( en la nostra notació:  $b_\pm = \pm fM\sqrt{\epsilon/\alpha}$ ); la raó de convergència és ara  $b_k^\pm \simeq b_\pm \pm C \exp(-4\epsilon\pi)$ .

En el nostre model hi ha reinjecció de les dues branques de  $W^u$ . De cara a buscar punts fixos de l'aplicació de Poincaré, això no representa cap diferència respecte al cas anterior, ja que s'ha de verificar alguna de les condicions següents:

- 1)  $P \in D_+ \xrightarrow{G} G(P) \in C_+ \xrightarrow{F} \Psi(P) = P$ , o
- 2)  $P \in D_- \xrightarrow{G} G(P) \in C_- \xrightarrow{F} \Psi(P) = P$ ;

i cadascuna d'aquestes correspon, de fet, a reinjecció d'una de les branques, sense tenir en compte l'altra. Les diferències apareixen per a punts de període més gran que 1. Considerem, per exemple, punts 2-periòdics. D'una banda, tenim les possibilitats

$$1) P \in D_+ \xrightarrow{\Psi} G(P) \in D_+ \xrightarrow{\Psi} \Psi^2(P) = P, i$$

$$2) P \in D_- \xrightarrow{\Psi} G(P) \in D_- \xrightarrow{\Psi} \Psi^2(P) = P;$$

les quals depenen només de la reinjecció d'una de les branques; però, a més, hi ha la tercera possibilitat

$$P \in D_+ \xrightarrow{\Psi} G(P) \in D_- \xrightarrow{\Psi} \Psi^2(P) = P .$$

Això correspon al fet que el punt 2-periòdic està associat a una òrbita periòdica del flux amb "forma de 8".

Quan augmentem el període, la diversitat és encara més gran. Tenim resultats numèrics que confirmen aquesta tercera opció. A tall d'exemple, mostrem un cas corresponent a la zona  $\epsilon < -\lambda < 0$ ; això és, no existeix el cicle límit  $C_\epsilon$  i hi ha forta dissipació ( a la pròxima secció donarem més resultats numèrics per a una diversitat de casos).

Considerem fixats els valors  $\alpha = 1$ ,  $\lambda = 0.02$ ,  $\epsilon = -0.03$ ,  $f = g = a = 0.1$ ,  $\mu = 1$  i  $\gamma = 5\pi/4$ . Busquem les possibles òrbites periòdiques atractores que hi ha per a  $b$  pròxims al de bifurcació homoclínica ( $b = 0$ ). Per a  $p$  i  $q$  naturals, anomenarem òrbita de període  $p+q$  a una òrbita periòdica de període  $p + q$  amb  $p$  punts a  $D_-$  i  $q$  punts a  $D_+$ . S'obté el resultat de la taula 3.1.

Rang de $b$	Òrbites atractores
$b > 0.00029589 \dots$	0 + 1
$0.00029589 \dots > b > 0$	0 + 1 i 1 + 1
$0 > b > -0.0703922 \dots$	1 + 1
$-0.0703922 \dots > b > -0.0707106 \dots$	2 + 1
$-0.0707106 \dots > b$	1 + 0

Taula 3.1: Òrbites periòdiques atractores per a diversos valors de  $b$

Notem que aquests resultats depenen dels valors de  $a$  i de  $\gamma$ ; concretament, del valor  $a \sin \gamma$ , o posició relativa entre les imatges per  $G$  dels punts  $Q_\pm$  definits per  $r = 0$ ,  $z = \pm 1$ . Les òrbites periòdiques atractores representades a la taula són

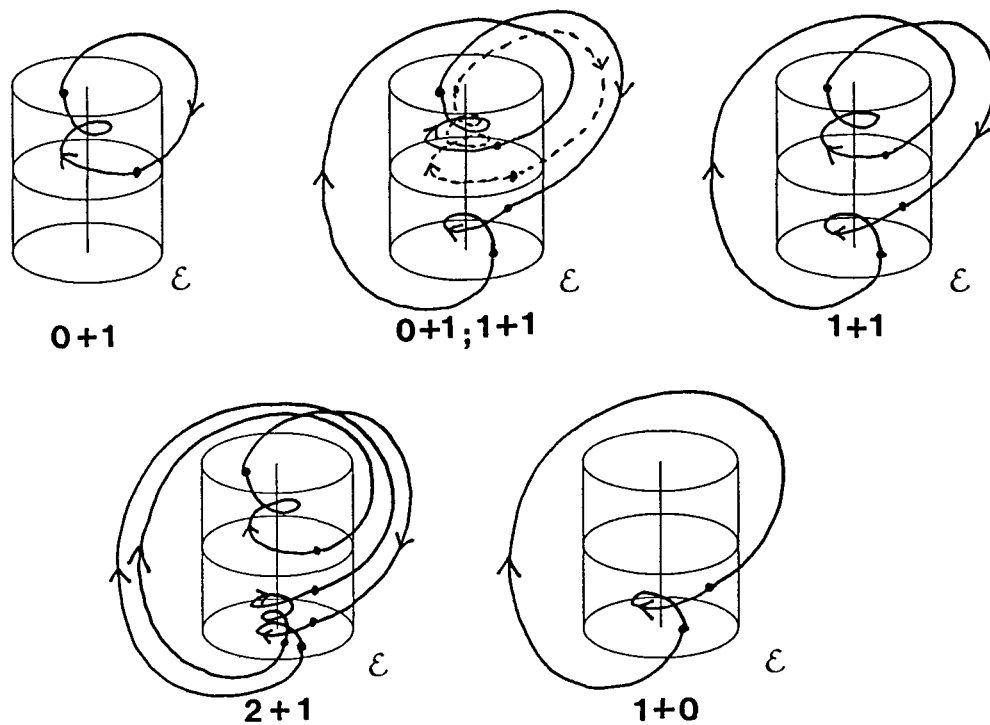


Figura 3.9: Diverses òrbites periòdiques atractores.

precisament els conjunts  $w$ -límit d'aquests punts. La figura 3.9 mostra les diverses possibilitats qualitativament:

- 1)  $G(Q_+)$  i  $G(Q_-)$  tenen components  $z$  prou positives.
- 2)  $G(Q_+)$  i  $G(Q_-)$  tenen components  $z$  positives, però  $G(Q_+)$  la té molt pròxima a zero.
- 3)  $G(Q_+)$  té component  $z$  negativa i  $G(Q_-)$  té component  $z$  positiva.
- 4)  $G(Q_+)$  i  $G(Q_-)$  tenen components  $z$  negatives, però  $G(Q_-)$  la té molt pròxima a zero.
- 5)  $G(Q_+)$  i  $G(Q_-)$  tenen components  $z$  prou negatives.

Notem, particularment, la possibilitat de coexistència de dos òrbites atractores.

### 3.3 Simulacions numèriques

A la secció 1, després de definir el flux local, hem notat que si  $|\epsilon| > \lambda/2$  llavors el punt d'equilibri  $O$  o el cicle límit  $C_\epsilon$  (depenent del signe de  $\epsilon$ ) eren dissipatius. Per a la desigualtat contrària, l'aplicació local  $F$  és expansiva per a punts de la frontera lateral de  $\mathcal{E}$  suficientment pròxims a  $z = 0$ . Per tant, no podem esperar de trobar atractors de  $\Psi$  molt pròxims a l'eventual òrbita homoclínica en aquest segon cas. Ara bé, des d'un punt de vista global, aquesta expansió és pot compensar amb la dissipació causada per  $G$ . Això es pot aconseguir prenent els factors  $f$  i  $g$  prou petits.

Podem conjecturar les possibilitat següents respecte als possibles atractors de  $\Psi$  per a situacions pròximes a les d'existència d'òrbites homoclíniques:

1) Si  $\epsilon$  és prou negatiu (falla la hipòtesi de Silnikov sobre els valors propis) llavors l'eventual òrbita homoclínica, que podem associar a algun dels punts  $r = 0$ ,  $z = \pm 1$ , situat a  $D_\pm$ , és atractora i, per a situacions pròximes, serà substituïda per una òrbita periòdica atractora de  $\Psi$ , segurament de període baix.

2) Si  $\epsilon$  és prou positiu llavors estem en una situació anàloga però amb els punts canviats per cercles de radi  $\sqrt{\epsilon/\alpha}$ .

3) Per a valors intermitjos de  $\epsilon$  (i, per tant, més pròxims a la bifurcació de Hopf) l'eventual òrbita homoclínica és repulsora i no podem esperar de trobar atractors completament continguts en zones pròximes a  $r = 0$  (en el cas que  $\epsilon < 0$ ) o a  $r = r_\epsilon$  (si  $\epsilon > 0$ ). Això no obstant, encara pot existir algun atractor ( si considerem valors adequats dels paràmetres per tal que  $\Psi(\overline{D}) \subset \overline{D}$ ) situat a distància finita d'aquells valors de  $r$ .

El cas que té més interès per a nosaltres és quan  $\epsilon > 0$ , perquè és el menys estudiat i el que correspon a la situació física que volem modelar. Donem uns quants resultats numèrics en aquest cas.

Comencem reproduint la situació trobada a [47]. Allí, usant valors característics dels paràmetres i prenent una secció de Poincaré de l'atractor del flux, s'obté que les interseccions successives semblen estar situades sobre un segment. Si prenem una coordenada sobre aquesta línia i considerem l'aplicació de primer retorn, s'obté una aplicació unidimensional amb les característiques següents:

- Presenta oscil·lacions d'amplitud gairebé constant, la qual coincideix amb

l'amplada del cicle límit.

- Quan els paràmetres s'acosten a la situació d'homoclínic, augmenta la freqüència de les oscil·lacions.
- Quan existeixen òrbites homoclíniques, hi ha una infinitat d'oscil·lacions i la gràfica de l'aplicació te diverses components connexes situades a diferents alçades.

Els detalls precisos es poden consultar a [47]; però destaquem que els resultats són qualitativament idèntics als que passem a explicar tot seguit, com era el nostre propòsit.

Considerem el cas límit  $\mu = 0$ . Les imatges de  $D_{\pm}$  sota  $G$  degeneren en dos segments. Parametritzem aquests segments usant la coordenada  $\varphi$  i estudiem l'aplicació de retorn  $\Phi = G \circ F$  sobre la frontera lateral de  $\mathcal{E}$ : per a qualsevol valor  $\varphi_0$  pròxim a zero, siguin  $z_0 = b + \varphi_0 \tan \gamma$  i  $r_0 = 1$ ; i calculem  $\varphi_1 = \text{pr}_{\varphi} \circ G \circ F(1, \varphi_0, z_0)$ . Començant a un valor arbitrari de  $\varphi_0$ , dibuixem  $\varphi_1$  front a  $\varphi_0$  per a successius iterats, després de deixar passar un cert règim transitori. D'aquesta manera obtenim el graf d'una aplicació unidimensional, la qual representa la dinàmica sobre l'atractor. Aquest es pot pensar com la projecció del graf sobre qualsevol dels dos eixos (això dóna la coordenada  $\varphi$ , la  $z$  es pot obtenir de la fórmula anterior).

La figura 3.10 mostra els resultats obtinguts. Hem fixat valors  $\alpha = 0.4$ ,  $\lambda = 0.02$ ,  $f = 0.1\sqrt{2}$ ,  $g = 0.08\sqrt{2}$ ,  $a = 0.03\sqrt{2}$ ,  $\gamma = 5\pi/4$  i  $\epsilon = 0.001$ . Els valors de  $b$  són 0.05, 0.01, 0.005, 0, -0.005, -0.01, -0.015, -0.025, -0.03, -0.035, -0.04 i -0.06, i la finestra en la coordenada  $\varphi$  és  $(-0.02, 0.06)$ .

Sembla que l'atractor està format per un o dos segments; la distinció entre les dues possibilitats és conseqüència del valor de  $b$ . Per als dos primers valors de  $b$ ,  $\Phi(D_{\pm}) \subset D_+$ , i això fa que l'atractor sigui un únic segment confinat a la zona  $z > 0$ . Per als tres següents,  $\Phi(D_+) \subset D_-$  i  $D_-$  encara és enviat a  $D_+$ ; per al sisè i setè valors de  $b$ ,  $D_+$  és enviat a  $D_-$ , i  $D_-$  a  $D_+$ ; per als pròxims tres casos,  $\Phi(D_+) \subset D_-$  però  $D_-$  té una part de la seva imatge a  $D_+$  i una altra a  $D_-$ . En tots aquests casos, l'atractor consta de dos segments; observem que les gràfiques presenten una infinitat d'oscil·lacions només en els casos d'existència d'òrbites homoclíniques. Finalment, per als últims dos valors, tant  $D_+$  com  $D_-$  són enviats a  $D_-$ , i, per tant, l'atractor

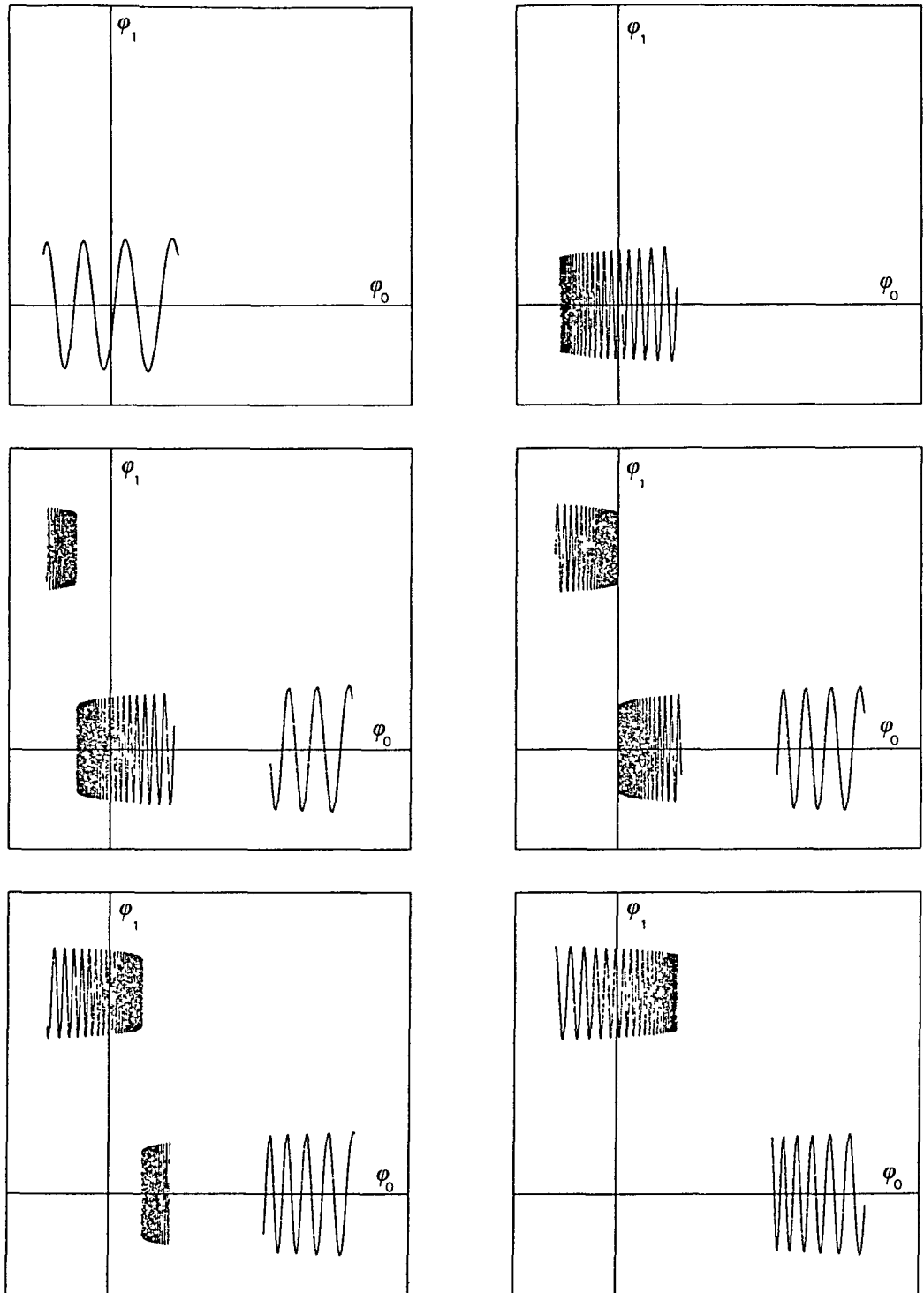


Figura 3.10: Aplicació de retorn sobre l'atractor en el cas límit  $\mu = 0$ .

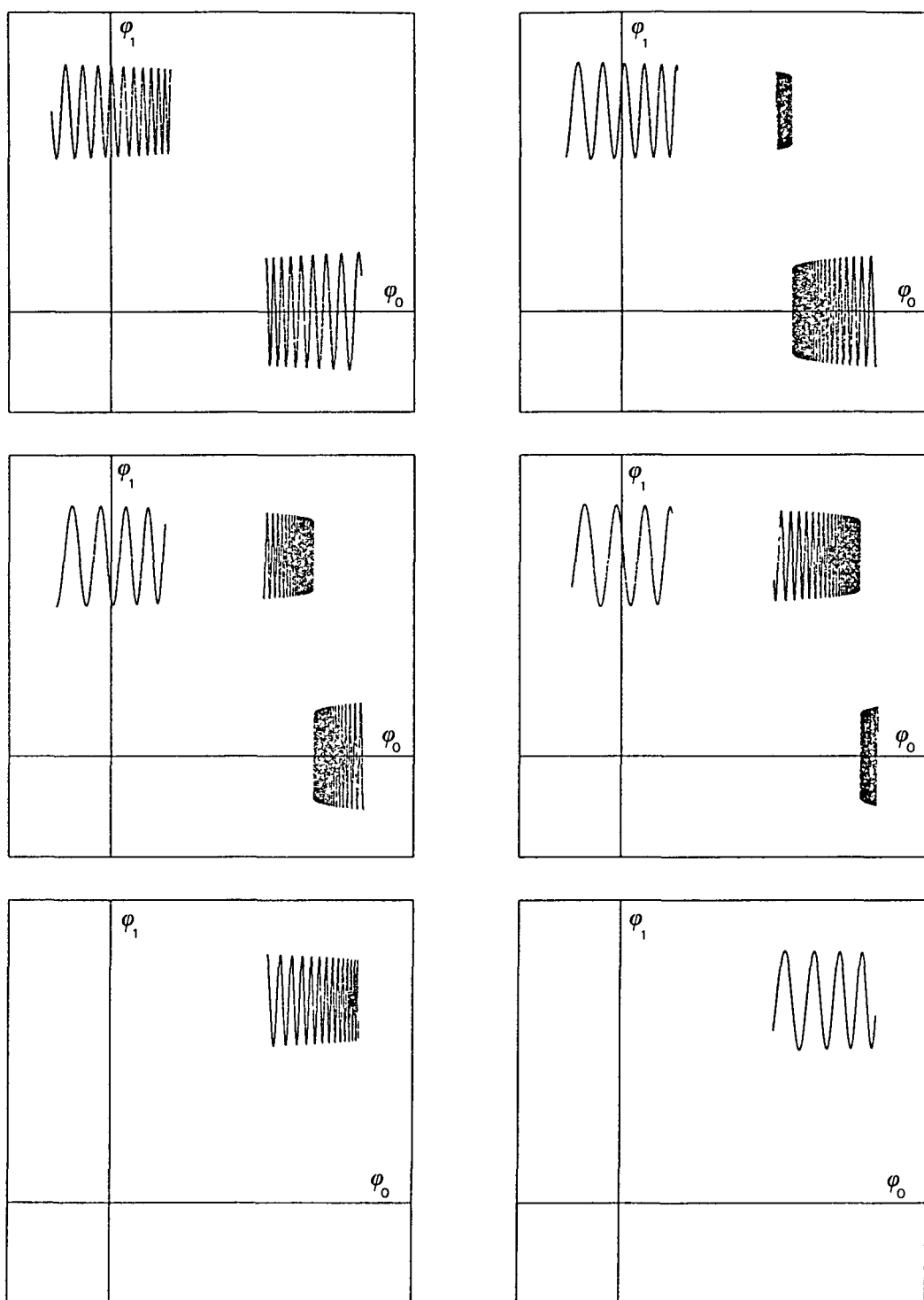


Figura 3.10: Continuació.

consta d'un únic segment, contingut a  $z < 0$ . Aquestes figures són qualitativament coincidents amb les que hi ha a [47].

L'aplicació retorn ( $\varphi_0 \rightarrow \varphi_1$ ) és una aplicació unidimensional definida en la reunió de dos intervals. El cas  $\mu = 0$  és, però, degenerat; i per això és millor considerar que aquests dos intervals són casos límit de el·lipses quan  $\mu \rightarrow 0$ . Com que una el·lipse és topològicament equivalent a  $S^1$ , un model millor (quan la dissipació en un entorn de l'atractor és prou gran) és considerar una aplicació definida a  $S^1 \cup S^1$ . Això ho farem a les pròximes seccions.

De l'última figura es podria pensar que l'atractor en aquesta versió unidimensional és sempre *estraný* (no és una òrbita periòdica), i contingut en un o dos intervals. Això no és pas així, sinó que també existeixen *finestres* de valors dels paràmetres per als quals l'atractor és una òrbita periòdica (encara que aquests casos són més difícils de localitzar, especialment en situacions pròximes a l'existència d'òrbita homoclínica). Així, si fixem tots els paràmetres amb els mateixos valors que abans i variem  $b$  en un rang més petit, obtenim que quan  $b = -0.06552649$ , l'únic atractor és un punt fix estable; aquest atractor persisteix fins a  $-0.065704\dots$ ; aleshores comença una cascada de bifurcacions de doblament de període, la qual crea, successivament, òrbites periòdiques de períodes 2, 4, 8,  $\dots$ ; aquesta cascada s'acumula a  $-0.065833\dots$ . A continuació, es poden trobar altres finestres d'atractors periòdics; per exemple, per  $10^6(b + 0.065)$  igual a  $-849$ ,  $-879$ ,  $-891$  i  $-943$ , existeix una òrbita periòdica estable de període 6, 5, 3 i 4, respectivament. Per a  $b = -0.065955$  torna a aparèixer un atractor estrany *gros*, en el sentit que el seu suport sembla ser tota la imatge d'una corona per  $G$  (o les dues). Per a valors intermitjos, a més de les finestres periòdiques, hi ha també una gran abundància de moviment aperiòdic, però els atractors estranys que apareixen són *petits*, ja que només omplen una part petita dels anteriors atractors estranys. Tot sembla indicar que al rang de valor de  $b$  entre  $-0.065526\dots$  i  $-0.065954\dots$  l'aplicació de retorn es comporta de manera similar a l'aplicació logística. Refermarem aquesta opinió a l'última secció, on treballarem amb un model simplificat unidimensional.

Fins aquí hem considerat el cas de compressió infinita en una direcció. Passem ara a "engreixar" els atractors anteriors. A la figura 3.11 hem dibuixat, a la frontera lateral de  $\mathcal{E}$ , les successives interseccions d'una òrbita qualsevol després d'un



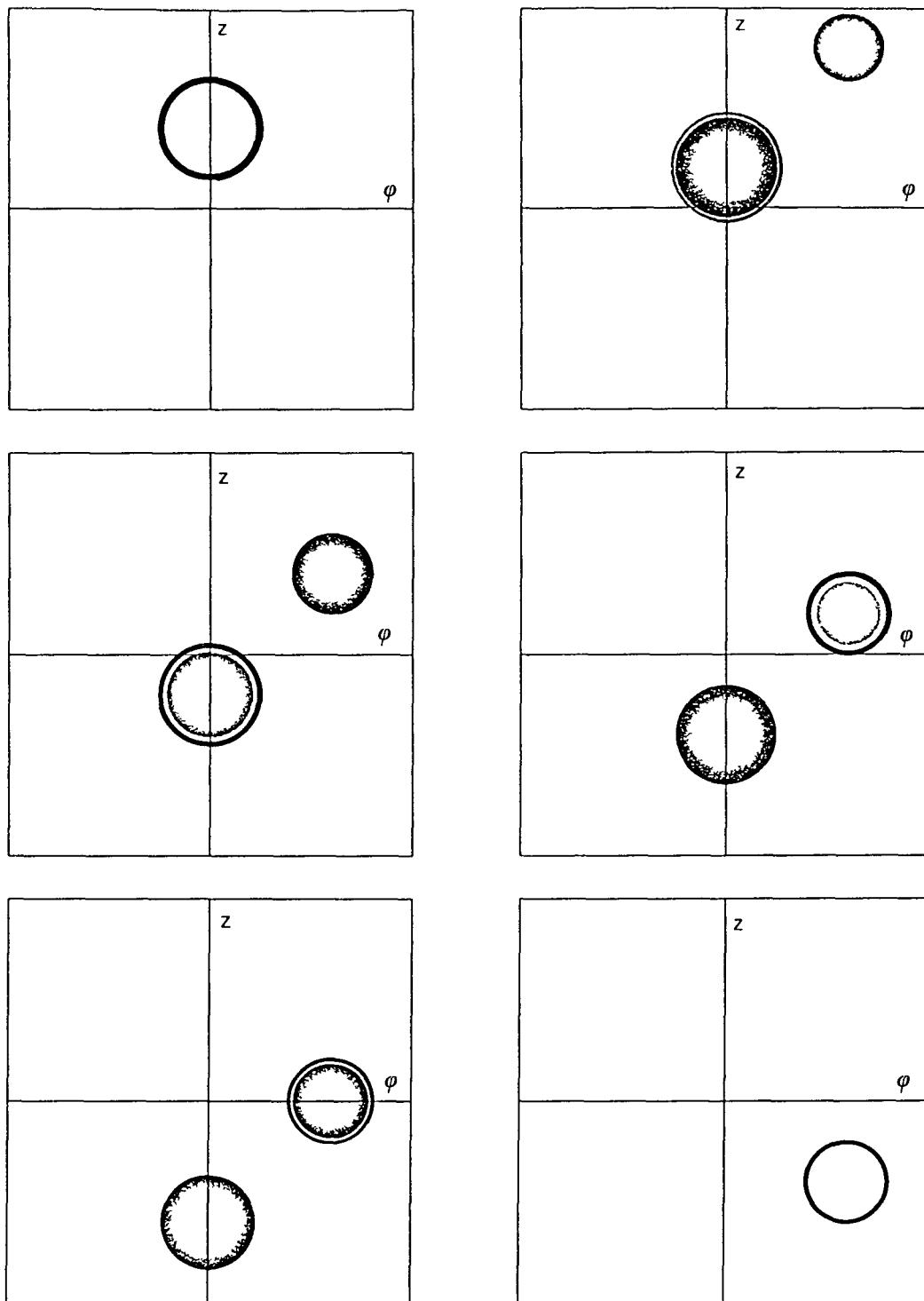


Figura 3.11: Atractors en el cas  $\mu = 1$ .

cert règim transitori; o sigui, una secció de l'atractor del sistema. Hem usat els mateixos paràmetres que a la figura 3.10, excepte que hem posat  $\mu = 1$ . Els valors successius de  $b$  són 0.02, 0.01,  $-0.01$ ,  $-0.02$ ,  $-0.03$  i  $-0.05$ . Es veu l'aspecte global de l'atractor; en els casos extrems, aquest sembla omplir un anell o corona; per als casos intermitjos, l'atractor està situat dins de dos anells. La raó d'haver-n'hi un o dos és anàloga al cas degenerat  $\mu = 0$ . Mirem amb més detall l'estructura de l'atractor quan es veuen dues corones. Considerem, per exemple,  $b = -0.01$ . La component superior de l'atractor (AS) no talla  $z = 0$  i, per tant, és enviada per  $\Phi$  a la component inferior (AI). Aquesta, en canvi, interseca  $z = 0$  i té una petita part a  $z > 0$ . La imatge d'aquesta part dona lloc a la component interior que s'observa en AI, mentre que la part amb  $z < 0$  és enviada a la component superior de l'atractor (AS). Això fa que AS tingui també una component interior. Així doncs, una de les corones és, de fet, una "corona doble". Això passa sempre que hi hagi intersecció amb l'eix  $z = 0$ . Però la complicació no acaba aquí; sinó que considerant imatges successives d'aquestes components interiors es pot veure que l'estructura més detallada de AS i AI és de tipus cantorià.

Això, de fet, ja es veu encara que hi hagi una única corona. Així, per exemple, la figura 3.12 correspon a una situació totalment anàloga a la primera de la figura 3.11; hem canviat els paràmetres per tal de poder observar més detalls. Hem usat  $\alpha = 0.4$ ,  $\lambda = 0.02$ ,  $f = 0.2\sqrt{2}$ ,  $g = 0.08\sqrt{2}$ ,  $a = 0.05\sqrt{2}$ ,  $\gamma = 5\pi/4$ ,  $\epsilon = 0.001$ ,  $\mu = 1$  i  $b = 0.075$ . A la primera figura, la zona de les variables és  $\varphi \in (-0.04, 0.04)$ ,  $z \in (0.035, 0.115)$ . Allò que semblava una corona en les figures de 3.11, és, en aquest exemple més clar, una corba de tipus espiral, la qual s'emboïca entorn d'un cercle imaginari. La quantitat de voltes que s'observen té una explicació molt natural: la imatge per  $\Phi$  de l'atractor és ell mateix, i la deformació que provoca  $\Phi$  és deguda, fonamentalment, a l'efecte de  $F$ ; en conseqüència, el nombre de voltes es pot calcular de manera semblant a l'apartat a) del teorema 3.1.5: el valor màxim en la variable  $z$  és, aproximadament, 0.1064, i el mínim 0.0436; per tant, obtenim

$$\text{núm. voltes} \simeq \frac{1}{2\pi\lambda} \log \left( \frac{0.1064}{0.0436} \right) \simeq 7.1 .$$

Això es correspon molt aproximadament amb la primera figura de 3.12. Finalment, la segona figura és una ampliació de l'anterior en la proximitat de l'extrem exterior de l'espiral; observem que, amb aquesta resolució, l'estructura és molt més

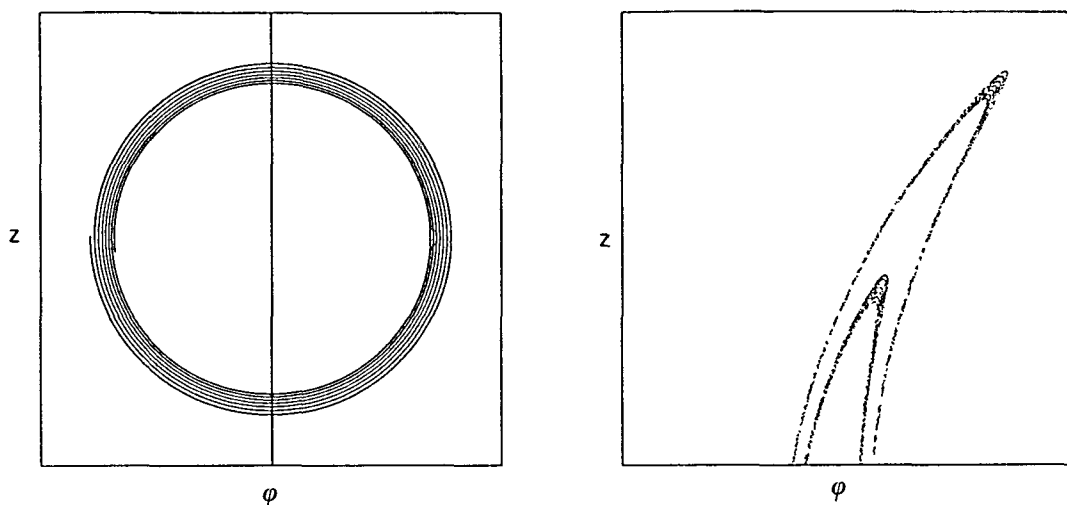


Figura 3.12: Detalls d'un atractors estrany gros en el cas  $\mu = 1$ .

complexa. Això és natural, com correspon d'aplicar el mateix raonament de deformació a imatges successives de  $\Phi$ ; es pot distingir clarament que l'espiral és "gruixuda" i es veuen espirals subsidiàries. La finestra és, en aquest cas,  $\varphi \in (-0.031375, -0.031374)$  i  $z \in (0.07515, 0.07530)$ , mentre que la quantitat de punts calculats és  $2 \times 10^6$ ; és difícil, doncs, fer una nova ampliació, però ja s'intueix que l'atractor té una estructura cantoriana. D'altra banda, això està relacionat amb el fet que l'atractor ha d'estar contingut en la clausura de  $W_{C_\epsilon}^u$ .

Naturalment, i encara que no n'hem dibuixat cap cas, també existeixen finestres de valors dels paràmetres en què l'atractor és, o bé una òrbita periòdica, o bé un atractor estrany petit.

Notem, finalment, que no obtindríem cap diferència essencial si uséssim  $\mu \in (0, 1)$  en lloc de  $\mu = 1$ : només cal substituir l'aspecte circular per el·líptic.

### 3.4 Reducció a una aplicació unidimensional

En els apartats anteriors hem intuït que una reducció a dimensió 1 podria servir per a estudiar característiques de  $\Psi$ ; ara ho farem efectivament. La idea que usem és la mateixa que usa Levi ([35]) per a fer una anàlisi qualitativa d'un sistema del tipus de Van del Pol.

Sigui  $S = S_+^1 \cup S_-^1$  la reunió de dues circumferències, on els signes  $\pm$  serveixen

per a diferenciar-les. Escrivem els punts de  $S$  com  $(\varphi, z)$ , amb  $z = +1$  o  $-1$  segons pertanyi a  $S_+^1$  o  $S_-^1$ , respectivament.

De manera natural, podem associar a cada aplicació  $\Psi : D \rightarrow D$  una família d'aplicacions unidimensionals  $\Psi_r : S \rightarrow S$  que depenen d'un paràmetre  $r$ ; concretament, per a qualsevol  $r \in (r_\epsilon, \bar{r})$ , sigui

$$\Psi_r(\varphi, z) = \text{pr}_{(\varphi, z)} \circ \Psi(r, \varphi, z) = \text{pr}_{(\varphi, z)} \circ F \circ G(r, \varphi, z),$$

on  $\text{pr}_{(\varphi, z)} : (r, \varphi, z) \rightarrow (\varphi, z)$  és la projecció que suprimeix la component  $r$ .

O sigui, cada  $\Psi_r$  és l'aplicació de Poincaré  $\Psi$  restringida a les circumferències  $S_{r, \pm} = \{(r', \varphi, z) \mid r' = r, \varphi \in [0, 2\pi), z = \pm 1\}$ , seguida de la projecció natural.

L'expressió explícita de  $\Psi_r$  té diverses possibilitats, amb analogia a les de  $\Psi$ . Notem  $(\bar{\varphi}, \bar{z}) = \Psi(\varphi, z)$ ; si  $z = +1$  llavors

$$\bar{\varphi} = f r (\cos \gamma \cos \varphi - \mu \sin \gamma \sin \varphi) - \frac{1}{\lambda} \log\{|b + f r (\sin \gamma \cos \varphi + \mu \cos \gamma \sin \varphi)|\},$$

i  $\bar{z} = +1$  o  $-1$  depenent de si l'expressió de dins del valor absolut és  $> 0$  o  $< 0$ , respectivament. En canvi, si  $z = -1$  llavors

$$\begin{aligned} \bar{\varphi} &= -a \cos \gamma + g r (\cos \gamma \cos \varphi - \mu \sin \gamma \sin \varphi) \\ &\quad - \frac{1}{\lambda} \log\{|b - a \sin \gamma + g r (\sin \gamma \cos \varphi + \mu \cos \gamma \sin \varphi)|\}, \end{aligned}$$

amb el mateix conveni per a  $\bar{z}$ .

La figura 3.13 mostra alguns exemples d'aplicacions  $\Psi_r$ . Hem usat  $\alpha = 0.4$ ,  $\lambda = 0.02$ ,  $f = 0.1$ ,  $g = 0.08$ ,  $a = 0.1$ ,  $\gamma = 5\pi/4$ ,  $\mu = 1$ ,  $\epsilon = 0.04$  i  $r = 0.35$ . Hem posat junts  $S_+^1$  i  $S_-^1$ . Observem que és possible que  $\Psi_r$  no estigui definida per a 1, 2, 3 o 4 punts. Això correspon al fet que  $G(S_\pm^1)$  talla  $z = 0$ , i en aquests punts no està definida l'aplicació posterior  $F$ .

A les figures, aquesta possibilitat es manifesta amb l'existència de discontinuïtats dins d'alguna de les dos circumferències (casos b) i d)). En aquest cas, el comportament de  $\Psi_r$  és extremadament complicat. En endavant, ens restringirem al cas, més simple, en què això no es produeix; això és, suposarem que el sistema no té òrbites homoclíniques a la primera, encara que ens interessin especialment les situacions pròximes. Segons com es transformin entre sí les dues circumferències, tenim quatre possibilitats:

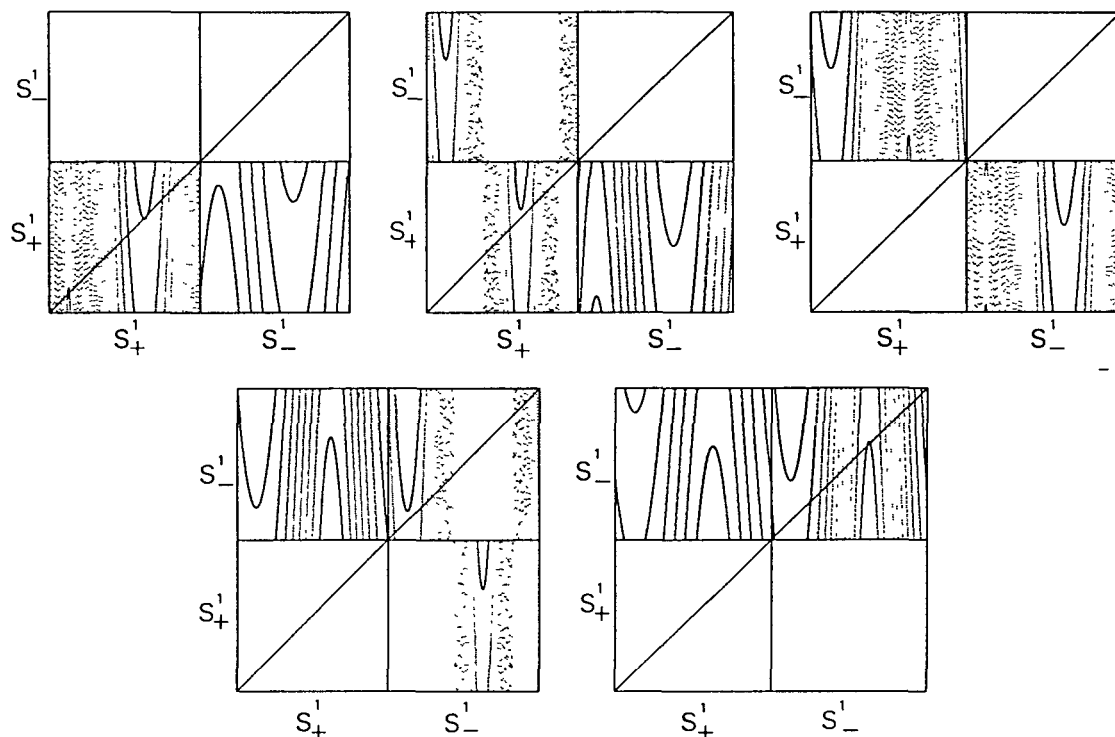


Figura 3.13: Exemples d'aplicacions unidimensionals  $\Psi_r$ .

- 1)  $S_+^1 \rightarrow S_+^1$  i  $S_-^1 \rightarrow S_-^1$ .
- 2)  $S_+^1 \rightarrow S_+^1$  i  $S_-^1 \rightarrow S_+^1$ .
- 3)  $S_+^1 \rightarrow S_-^1$  i  $S_-^1 \rightarrow S_-^1$ .
- 4)  $S_+^1 \rightarrow S_-^1$  i  $S_-^1 \rightarrow S_+^1$ .

En el primer cas,  $\Psi_r$  es pot estudiar mirant separadament dues aplicacions de  $S^1$ . Els casos 2) i 3) també es poden reduir a una aplicació del cercle després d'una iteració. L'últim cas, en canvi, correspon a la composició alternada de dos aplicacions diferents de  $S^1$ . Nosaltres, ens concentrarem en els primers tres casos, i per això serà suficient estudiar aplicacions de  $S^1$  en  $S^1$  definides per les expressions  $\varphi \rightarrow \bar{\varphi}$  anteriors. Notem que la impossibilitat d'òrbita homoclínica fa que l'expressió del valor absolut no es pugui anul·lar.

Mirem de buscar un model més simplificat d'aplicació unidimensional. Les dues expressions de  $\bar{\varphi}$  es poden tractar de la mateixa manera; per tant, considerarem

només el cas  $z = +1$  ( per a l'altre només cal canviar  $f$  per  $g$ , i  $b$  per  $b - a \sin \gamma$ ). La idea de la simplificació és la següent.

Notem

$$\bar{\varphi} = h_1(\varphi) - \frac{1}{\lambda} \log(h_2(\varphi))$$

i suposem que  $h_1, h_2$  prenen valors petits i que  $h_2$  no canvia de signe. Això correspon a suposar que les constants  $r, f, g, a$  i el parametre  $b$  són petits (però sense donar homoclínics). Aleshores la contribució de  $h_2(\varphi)$  a la variació de  $\bar{\varphi}$  és més gran que no pas la contribució de  $h_1(\varphi)$ , perquè apareix com a argument d'una funció logarítmica (per això podem aproximar  $h_1(\varphi)$  per una constant). A més a més, podem transformar la part trigonomètrica de  $h_2(\varphi)$  en  $M \cos(\varphi + \beta)$  i eliminar la fase  $\beta$  canviant l'origen d'angles. Finalment fem un escalat per a aconseguir una aplicació  $h : S^1 \rightarrow S^1$  de la forma

$$h(\varphi) = c - e \log(1 + d \cos \varphi), \quad (3.10)$$

on  $e > 0$  i  $d$  és el nou paràmetre essencial, el qual pot variar a  $(0, 1)$ . El cas límit  $d \rightarrow 1$  correspon a l'existència d'una òrbita homoclínica. Entendre la dinàmica de (3.10) és un primer pas per a poder descriure les característiques de l'aplicació de retorn  $\Psi$  i, en conseqüència, per a conèixer els atractors que poden existir en un entorn de la bifurcació de Silnikov-Hopf.

Donem uns quants detalls més de la reducció anterior; podem escriure

$$\begin{aligned} \bar{\varphi} &= N \cos(\varphi + \rho) - \frac{1}{\lambda} \log(b + M \cos(\varphi + \beta)) = \\ &= N \cos(\varphi + \rho) - \frac{\log b}{\lambda} - \frac{1}{\lambda} \log \left( 1 + \frac{M}{b} \cos(\varphi + \beta) \right), \end{aligned}$$

on  $N > 0, M > 0, \rho$  i  $\beta$  han de verificar les relacions

$$N \cos \rho = fr \cos \gamma,$$

$$N \sin \rho = fr \mu \sin \gamma,$$

$$M \cos \beta = fr \sin \gamma, \text{ i}$$

$$M \sin \beta = -fr \mu \cos \gamma.$$

En particular,  $N$  i  $M$  prenen valors petits (si  $f$  i  $r$  ho són). A més, cal  $0 < M < b$  si no volem homoclínic. Fem  $\varphi^* = \varphi + \beta$ ; llavors

$$\bar{\varphi}^* = N \cos(\varphi^* - \beta + \rho) + \beta - \frac{\log b}{\lambda} - \frac{1}{\lambda} \log \left( 1 + \frac{M}{b} \cos(\varphi^*) \right).$$

A continuació, tornem a dir  $\varphi$  a  $\varphi^*$ , i introduïm nous paràmetres  $d = M/b$ ,  $c = N \cos(\varphi - \beta + \rho) + \beta - (\log b)/\lambda$  i  $e = 1/\lambda$ . Notem que  $d$  i  $e$  depenen només dels paràmetres anteriors, mentre que  $c$  depèn també de la variable  $\varphi$ . Ara bé, com que ens interessen principalment els casos en què  $M$  és pròxim a  $b$ , la variació relativa de  $c$  serà molt més petita que la provocada pel logaritme; això fa que puguem considerar també  $c$  com a paràmetre (correspon a fer  $N = 0$ ). D'aquesta manera obtenim l'aplicació  $h$ .

Remarquem que  $h$  és de grau 0. Una aplicació molt similar, però de la forma  $\varphi \rightarrow \varphi + h(\varphi)$  (i, per tant, de grau 1) apareix com un cas límit en l'estudi de l'aplicació retorn a un domini fonamental per a difeomorfismes del pla pròxims a tangència homoclínica, i ha estat estudiat a [8].

L'estudi de  $h$ , tant analític com numèric, és més simple que el de  $\Psi$ , a causa de la reducció de la dimensió. Això, ho farem a la propera secció; abans, però, provem de justificar quan es correcta la simplificació de  $\Psi$  a  $h$ .

Observem, en primer lloc, que  $\Psi_r$  depèn de  $r$ . En el cas que existeixi un anell  $A$ , molt estret (suposem que el radi varia a  $[r_0, r_0 + \delta)$ , amb  $\delta$  molt petit), contingut a  $D_+$  i tal que  $\Psi_r(A) \subset A$ , aleshores sembla natural eliminar la dependència respecte la variable  $r$  i suposar que pren un valor constant i igual a qualsevol dels radis de  $A$ . Per tant, convé que  $\Psi$  sigui fortament dissipativa. En el cas que  $0 < \epsilon < \lambda/2$ , la part local  $F$  és expansiva per a components  $z$  pròximes a 0; això vol dir que  $A$  no pot tenir radis pròxims a  $r_\epsilon$  i que  $G$  ha de ser fortament dissipativa. Això es pot aconseguir prenent  $f$  i  $g$  suficientment petits. En la notació anterior, el raonament precedent justifica que  $h$  és una bona aproximació de  $\Psi$  quan  $N/d$  és petit.

### 3.5 Atractors de l'aplicació del cercle

En aquest apartat estudiarem quins són els atractors que pot tenir l'aplicació  $h : S^1 \rightarrow S^1$  deduïda a la secció anterior. En lloc de considerar el paràmetre original

$b$ , és més còmode usar el nou paràmetre  $d$ , el qual depèn inversament de  $b$ . D'altra banda, recordem que  $e$  és una constant (no depèn de  $b$ ) i que la variació de  $c$  respecte  $b$  (fonamentalment  $-\log b$ ) no és gaire important en la regió que ens interessa ( $d$  pròxim a 1) en relació a la que provoca el logaritme. Per tant, podem considerar també constant el valor de  $c$ .

Així doncs, considerarem una família d'aplicacions de  $S^1 \equiv \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z} \equiv [0, 2\pi)$  definida per

$$h(\varphi) = c - e \log(1 + d \cos \varphi) \quad (\text{mòd } 2\pi), \quad \forall \varphi \in S^1. \quad (3.11)$$

La funció  $h$  depèn del paràmetre  $d \in (0, 1)$ , i  $e > 0$  i  $c \in \mathbb{R}$  són constants. Si convé refermar la dependència paramètrica, escriurem  $h_d(\cdot)$  o  $h(d, \cdot)$ .

Associem a cada  $h_d : S^1 \rightarrow S^1$  l'aplicació  $H_d : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  definida mitjançant

$$H_d(\varphi) = H(d, \varphi) = h_d(\varphi) = c - e \log(1 + d \cos \varphi), \quad \forall \varphi \in \mathbb{R}.$$

Cada  $H_d$  és una funció  $2\pi$ -periòdica i, per tant, només cal estudiar-la a  $[0, 2\pi)$ . Un dels avantatges de  $H$  respecte  $h$  és que podem usar l'ordenació natural de  $\mathbb{R}$  per a definir intervals de monotonia.

Els resultats que vénen a continuació precisen com és la variació de  $H$  respecte la variable  $\varphi$  i respecte el paràmetre  $d$ . Són evidents i només indiquem les demostracions.

**Lema 3.5.1** *Per a qualsevol  $d \in (0, 1)$  es verifica*

a) *la gràfica de  $H_d$  és simètrica respecte la recta  $\varphi = \pi$  :*

$$H_d(\pi + \varphi) = H_d(\pi - \varphi) \quad \forall \varphi \in \mathbb{R};$$

b)  *$\varphi = 0$  és un mínim (relatiu i absolut) de  $H_d$  ;*

c)  *$\varphi = \pi$  és un màxim (relatiu i absolut) de  $H_d$  ;*

d)  *$H_d$  és estrictament monòtona creixent (respect. decreixent) a  $(0, \pi)$  (respect.  $(\pi, 2\pi)$ ).*

**Demostració.** L'apartat a) es dedueix del fet que  $\cos(\pi + \varphi) = \cos(\pi - \varphi)$ . A partir de les expressions  $H'_d(\varphi) = \frac{ed \sin \varphi}{1 + d \cos \varphi}$  i  $H''_d(\varphi) = \frac{ed(\cos \varphi + d)}{(1 + d \cos \varphi)^2}$  s'obtenen la resta d'apartats.  $\square$



**Lema 3.5.2** a)  $\forall \varphi \in [0, \pi/2) \cup (3\pi/2, 2\pi)$  fixat,  $H_d(\varphi)$  és funció estrictament monòtona decreixent dels paràmetre  $d$  i varia una quantitat finita i fitada uniformement respecte  $\varphi$  quan  $d$  recorre  $(0, 1)$ .

b)  $\forall \varphi \in (\pi/2, 3\pi/2)$  fixat,  $H_d(\varphi)$  és funció estrictament monòtona creixent dels paràmetre  $d$ . A més, si  $\varphi \neq \pi$  llavors la variació total de  $H_d(\varphi)$  quan  $d$  recorre  $(0, 1)$  és finita, però tendeix a  $\infty$  quan  $\varphi$  tendeix a  $\pi$ .

**Demostració.** La derivada de la funció respecte el paràmetre és

$$\frac{\partial H}{\partial d}(d, \varphi) = \frac{-e \cos \varphi}{1 + d \cos \varphi}.$$

El denominador és positiu, i el canvi de signe del numerador en  $\pi/2$  i en  $3\pi/2$  determinen els intervals de monotonia. Quant a la variació de  $H_d(\varphi) = c - e \log(1 + d \cos \varphi)$  quan  $d$  varia a  $(0, 1)$ , només pot ser infinita si  $1 + d \cos \varphi$  s'acosta arbitràriament a 0; això només és possible si  $\cos \varphi = -1$ .  $\square$

Notem que, quan  $d$  recorre  $(0, 1)$ , la variació de  $H(\varphi = 0)$  és a  $(c - e \log 2, c)$ , mentre que la de  $H(\varphi = \pi)$  és a  $(c, +\infty)$ .

Els resultats anteriors permeten intuir com és la creació de punts fixos de  $h_d$  quan  $d$  varia. La raó és que es verifica

$$\varphi \in [0, 2\pi) \equiv S^1 \text{ és un punt fix de } h_d \iff \exists k \in \mathbb{Z} \mid H_d(\varphi) = \varphi + 2k\pi.$$

Per això, quan  $d$  augmenta, la variació descrita a l'últim lema fa que pugui ser certa l'expressió de la dreta per a valors de  $\varphi$  pròxims a  $\pi$  o a 0. La figura 3.14 mostra un exemple d'aplicació  $H_d|_{[0, 2\pi)}$  i els punts fixos de la  $h_d$  associada. Com que estem interessats, especialment, en la zona  $d \simeq 1$ , ens centrarem en la proximitat de  $\varphi = \pi$ . Veurem que existeix una quantitat numerable de bifurcacions sella-node que creen punts fixos en el sentit creixent de  $d$ . A més, aquests punts fixos i els seus valors propis associats varien monòtonament respecte  $d$ . Les bifurcacions associades al mínim  $\varphi = 0$  es tractarien anàlogament, però només n'hi ha una quantitat finita i, per tant, no n'hi ha cap en un entorn prou petit de  $d = 1$ .

**Proposició 3.5.3**  $\forall k \in \mathbb{Z}$  i  $\forall \lambda \in \mathbb{R}$  considerem el sistema

$$\begin{cases} H_d(\varphi) = \varphi + 2k\pi \\ H'_d(\varphi) = \lambda \end{cases} \quad (3.12)$$

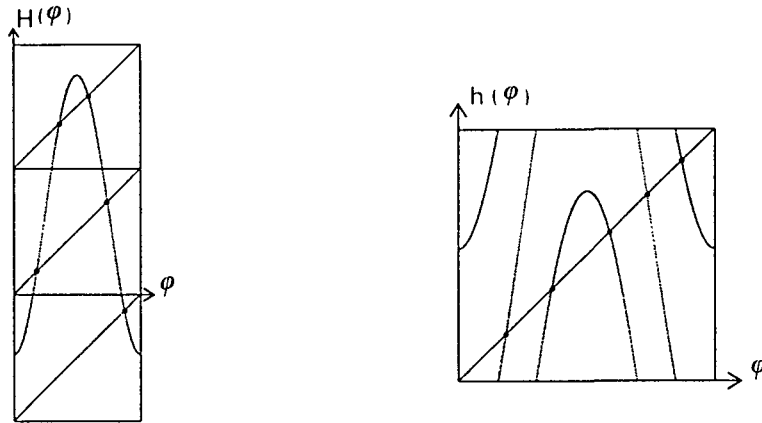


Figura 3.14: Aplicacions  $H_d$  i  $h_d$ , amb els punts fixos senyalats.

a la regió  $(d, \varphi) \in (0, 1) \times [0, 2\pi)$ . Aleshores es verifica:

$\forall k$  prou gran, existeixen  $\lambda_k^- < -1$  i  $\lambda_k^+ > +1$  tals que, si definim  $I_k = (\lambda_k^-, \lambda_k^+)$  llavors

- $\lambda \in I_k \implies$  existeix una única solució  $(d_k, \varphi_k)$  del sistema (3.12), i  $\varphi_k \in (\pi/2, 3\pi/2)$ ,
- $\lambda \notin I_k \implies$  el sistema (3.12) no té solució.

**Demostració.** Fixem d'entrada el valor de  $k \geq 0$ ; per comoditat, no escriurem el subíndex  $k$  enlloc. El sistema (3.12) és equivalent a

$$\begin{cases} 1 + d \cos \varphi = \exp\left(-\frac{\varphi + 2k\pi - c}{e}\right) \\ ed \sin \varphi = \lambda(1 + d \cos \varphi) \end{cases}$$

Notarem  $E(\varphi) = \exp\left(-\frac{\varphi + 2k\pi - c}{e}\right)$ . Fixat el valor de  $c$ , com que  $e > 0$  i volem  $\varphi \in [0, 2\pi)$  i  $d > 0$ , si prenem  $k \geq 0$  prou gran, deduïm de la primera equació que cal  $\cos \varphi < 0$ ; o sigui, ha de ser  $\varphi \in (\pi/2, 3\pi/2)$ .

Reescrivim el sistema com

$$\begin{cases} d = \frac{E(\varphi) - 1}{\cos \varphi} \\ \lambda = \frac{ed \sin \varphi}{1 + d \cos \varphi} \end{cases},$$

i considerem  $\varphi \in (\pi/2, 3\pi/2)$  com a paràmetre. Per a cada valor de  $\varphi$ , les equacions anteriors determinen unívocament  $d = d(\varphi)$  i  $\lambda = \lambda(\varphi)$ . El comportament de  $d(\varphi)$  és el següent:

- $\lim_{\varphi \rightarrow \pi/2^+} d(\varphi) = \lim_{\varphi \rightarrow 3\pi/2^-} d(\varphi) = +\infty$ .
- $d'(\varphi) = \frac{(E(\varphi)-1)\sin\varphi - E(\varphi)\cos\varphi/e}{\cos^2\varphi}$ , i, per tant,  $d(\varphi)$  és estrictament monòtona decreixent a  $(\pi/2, \varphi_0)$  i creixent a  $(\varphi_0, 3\pi/2)$ , on  $\varphi_0$  està determinat per la condició  $d'(\varphi_0) = 0$ , o sigui,  $\tan\varphi_0 = \frac{E(\varphi_0)}{e(E(\varphi_0)-1)}$ . Notem que  $\tan\varphi_0 < 0$  i, per tant,  $\varphi_0 \in (\pi/2, \pi)$ . A més, aquest valor  $\varphi = \varphi_0$  dona  $\lambda(\varphi) = +1$  a la segona equació; aquesta és la bifurcació sella-node de la pròxima proposició.

La figura 3.15 pot ajudar a seguir l'argument que farem ara. Si volem que  $d(\varphi) \in (0, 1)$ , cal imposar algunes limitacions a la variació permesa de  $\varphi$ . Concretament, la resolució de la primera equació en el cas extrem,  $d = 1$ , dona dos valors,  $\varphi^+ \in (\pi/2, \pi)$  i  $\varphi^- \in (\pi, 3\pi/2)$ , que limiten el rang de validesa de  $\varphi$ . Quan  $k$  augmenta, els valors  $\varphi^\pm$  s'acosten molt ràpidament a  $\pi$ .

D'altra banda, observem que  $\cos\varphi_0 = \frac{-1}{(1+\tan^2\varphi_0)^{1/2}} = \frac{e(E(\varphi_0)-1)}{(e^2(E(\varphi_0)-1)^2 + E(\varphi_0)^2)^{1/2}}$  i  $d(\varphi_0) = (e^2(E(\varphi_0)-1)^2 + E(\varphi_0)^2)^{1/2} > 0$ . Per tant,  $d(\varphi) \in (0, 1)$  si i només si  $\varphi \in (\varphi^+, \varphi^-)$ . Substituïm ara els valors  $\varphi = \varphi^+$  i  $d = d(\varphi^+)$  (respect.  $\varphi = \varphi^-$  i  $d = d(\varphi^-)$ ) a la segona equació obtenim  $\lambda^+$  (respect.  $\lambda^-$ ). La proposició quedarà demostrada si veiem que  $\lambda = \lambda(\varphi)$  és una funció estrictament monòtona decreixent a la zona  $(\varphi^+, \varphi^-)$  i que els valors extrems verifiquen  $\lambda^+ > +1$  i  $\lambda^- < -1$ . Fem-ho:

- Si  $\varphi = \varphi^-$  llavors  $d = 1$ ,  $\cos\varphi = E(\varphi) - 1$ ,  $\sin\varphi = -(2E(\varphi) - E(\varphi)^2)^{1/2}$ , i, en conseqüència,  $\lambda^- = \frac{e\sin\varphi}{1+\cos\varphi} = -e\left(\frac{2}{E(\varphi)} - 1\right)^{1/2}$ . Així doncs, la condició  $\lambda^- < -1$  és equivalent a

$$\exp\left(-\frac{\varphi + 2k\pi - c}{e}\right) \left(1 + \frac{1}{e^2}\right) < 2,$$

i això és cert  $\forall\varphi \geq \pi/2$ ,  $\forall k \geq 0$  prou gran i  $\forall e > 0$  (és fàcilment comprovable que la part de l'esquerra de la desigualtat és monòtona creixent respecte  $e$  si  $\varphi + 2k\pi - c > 1$ , i té valors extrems 0 i 1).

- Anàlogament, si  $\varphi = \varphi^+$  llavors obtenim consecutivament  $d = 1$ ,  $\cos\varphi = E(\varphi) - 1$ ,  $\sin\varphi = (2E(\varphi) - E(\varphi)^2)^{1/2}$  i  $\lambda^+ = e\left(\frac{2}{E(\varphi^+)} - 1\right)^{1/2}$ . La condició  $\lambda^+ > +1$  es dedueix, doncs, com al punt anterior.
- Finalment, un càlcul directe a partir de les expressions de  $d(\varphi)$  i de  $\lambda(\varphi)$  dona

$$\lambda'(\varphi) = \frac{E(\varphi)}{(1 + d\cos\varphi)^2 \cos^2\varphi} [-\sin\varphi\cos\varphi + e(E(\varphi) - 1)].$$

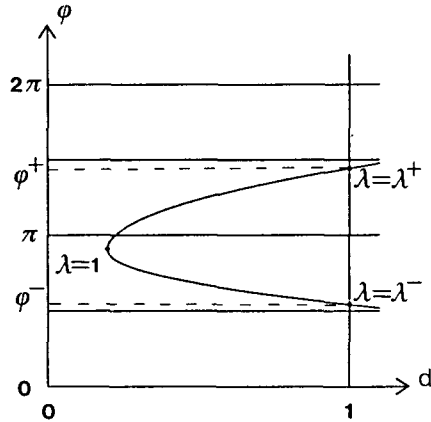


Figura 3.15: Una corba de punts fixos de  $h$ , amb indicacions del valor propi associat.

Si  $\varphi \in [\pi, \varphi^-)$  llavors  $\sin \varphi \leq 0$  i és immediat que  $\lambda'(\varphi) < 0$ . Suposem, doncs, que  $\varphi \in (\varphi^+, \pi)$  i vegem  $(-\sin \varphi \cos \varphi)^2 < e^2[1 - E(\varphi)]^2$ .

La condició  $\varphi > \varphi^+$  implica  $d < 1$  i, per tant,  $[1 - E(\varphi)]^2 < \cos^2 \varphi$ ; com que es verifica  $-\sin \varphi \cos \varphi = -\frac{1}{2} \sin 2\varphi = \frac{1}{2} (1 - [2 \cos^2 \varphi - 1]^2)^{1/2}$ , l'última desigualtat és equivalent a  $(-\sin \varphi \cos \varphi)^2 < \frac{1}{4} [1 - (2[1 - E(\varphi)]^2 - 1)^2]$ . Per consegüent, cal veure  $1 - (2[1 - E(\varphi)]^2 - 1)^2 \leq 4e^2[1 - E(\varphi)]^2$ , o, equivalentment,  $2E(\varphi) - E(\varphi)^2 \leq e^2$ ; i això és cert si  $k$  és prou gran.  $\square$

El cas particular  $\lambda = 1$  de la proposició anterior dona les bifurcacions sella-node.

**Corol.lari 3.5.4** *Existeix una successió,  $(d_k)_{k \geq 0} \subset (0, 1)$ , de valors del paràmetre, verificant  $\lim_{k \rightarrow \infty} d_k = 1$ , tal que  $\forall k \geq 0$ ,  $h_d$  té una bifurcació sella-node de període 1 en un punt  $\varphi_k \in (\pi/2, \pi)$ , la qual fa néixer dos punts fixos que existeixen  $\forall d \in (d_k, 1)$  i el seu valor propi varia monòtonament respecte  $d$ ; encara més, el punt fix que neix atractiu té una bifurcació flip per a un valor posterior  $d \in (d_k, 1)$ .*

La figura 3.16 mostra (qualitativament) la posició relativa dels punts fixos als quals fan referència els resultats anteriors. Són tots situats a  $(\pi/2, 3\pi/2)$  i, per aquest motiu, diem que estan associats al màxim ( $\varphi = \pi$ ) de la funció  $h$ . Notem que també hi pot haver naixements de punts fixos associats al mínim ( $\varphi = 0$ ), però, en aquest cas, només és possible una quantitat finita de bifurcacions; encara més, si  $e > 0$  és prou petit, no n'hi ha cap.

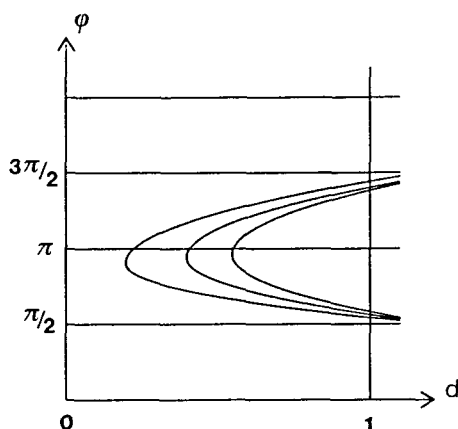


Figura 3.16: Corbes de punts fixos associats al màxim.

Hem vist, doncs, que coexisteixen molts punts fixos. Vegem, però, que en un rang considerable del paràmetre, no en pot coexistir més de dos que siguin atractors. Recordem que una eina útil per a fitar la quantitat d'òrbites periòdiques atractores que pot tenir una aplicació unidimensional és la *derivada schwarziana*, definida mitjançant

$$S(h)(\varphi) = \frac{h'''(\varphi)}{h'(\varphi)} - \frac{3}{2} \left( \frac{h''(\varphi)}{h'(\varphi)} \right)^2.$$

Se sap que si  $S(h) < 0$  llavors la quantitat d'òrbites periòdiques atractores de  $h$  està fitat per la quantitat d'extrems relatius ([14] o [9]).

**Lema 3.5.5**  $S(h_d) < 0 \iff d \in (0, d^*)$ , on  $d^* \simeq 0.9770419$ .

**Demostració.** El sumand  $c$  i el factor  $-e$  de l'expressió de  $h$  no afecten el càlcul de  $S(h)$ ; suposem, doncs, que  $c = 0$  i  $e = -1$ , de manera que  $h(\varphi) = \log(1 + d \cos \varphi)$ . Un càlcul directe dóna

$$S(h)(\varphi) = \frac{2 \sin^2(\varphi)(2d^2 + d \cos \varphi - 1) - 3(d^2 + 2d \cos \varphi + \cos^2 \varphi)}{2 \sin^2 \varphi (1 + d \cos \varphi)^2}.$$

El signe de  $S(h)(\varphi)$  depèn només del numerador. Fent el canvi  $\cos \varphi = y$ , aquest s'expressa

$$N(y) = -2dy^3 - (1 + 4d^2)y^2 - 4dy + (d^2 - 2).$$

Volem trobar els valors de  $d \in (0, 1)$  per als quals  $N(y) < 0 \forall y \in [-1, +1]$ . És immediat calcular  $N(-1) = -3(d-1)^2 < 0$  i  $N(+1) = -3(d+1)^2 < 0$ ; i imposant la condició que el màxim relatiu de  $N(y)$  a  $(-1, +1)$  prengui un valor negatiu s'obté  $d < d^*$ .  $\square$

Per tant, si  $d \in (0, d^*)$  llavors  $h_d$  només pot tenir dues òrbites periòdiques atractores (una associada a cada extrem), mentre que no podem assegurar res per a  $d \in [d^*, 1)$ . Ara bé, en les diferents simulacions numèriques efectuades, no hem trobat mai més de dos òrbites periòdiques atractores. D'altra banda, és evident que en poden coexistir dos. Per exemple, si volem que hi hagi dos punts fixos *superestables* (això és, que tinguin valor propi associat 0), el lema 3.5.1 ens diu que aquests punts han de ser 0 i  $\pi$ . Per tant, s'ha de verificar

$$\begin{cases} c - e \log(1 + d) = 2k\pi \\ c - e \log(1 - d) = \pi + 2l\pi \end{cases} .$$

Per a cada  $k, l \in \mathbb{Z}$  fixats, resollem les equacions anteriors. Genèricament, fixats  $c$  i  $e$ , no existeix cap solució comú  $d$ ; ara bé, és fàcil trobar valors particulats de  $c$  i  $e$  per als quals existeixi solució. De fet, com que tenim dos equacions i tres variables, sembla natural trobar-ne una família uniparamètrica. Efectivament, eliminant  $d$  entre les dues equacions s'obté

$$2 = \exp\left(-\frac{2k\pi - c}{e}\right) + \exp\left(-\frac{(2l+1)\pi - c}{e}\right) .$$

D'aquí es pot aïllar  $c$ :

$$c = e \log \left[ \frac{2}{\exp\left(-\frac{2k\pi}{e}\right) + \exp\left(-\frac{(2l+1)\pi}{e}\right)} \right] ,$$

i, tot seguit, expressar també  $d$  en funció del paràmetre  $e$ :

$$d = \frac{\exp\left(-\frac{2k\pi}{e}\right) - \exp\left(-\frac{(2l+1)\pi}{e}\right)}{\exp\left(-\frac{2k\pi}{e}\right) + \exp\left(-\frac{(2l+1)\pi}{e}\right)} .$$

Per exemple, si  $k = 0$  i  $l = 1$ , podem prendre  $e > 0$  qualsevol,  $c = e \log \frac{2}{1 + \exp(-3\pi/e)}$  i  $d = \frac{1 - \exp(-3\pi/e)}{1 + \exp(-3\pi/e)}$ . Si  $e = 10$  llavors  $c \simeq 3.640872$  dona la coexistència de dos punts fixos superestables per a  $d \simeq 0.4392$ .

El nostre pròxim propòsit és entendre més coses sobre la diversitat d'atractors que poden aparèixer en l'aplicació (3.11) per a  $d \simeq 1$ . La variació de la seva gràfica respecte  $d$  fa pensar que, després de cada bifurcació sella-node, existeix un interval de valors de  $d$  en el qual  $\{h_d\}_d$ , restringida a un interval adequat  $[\pi - \delta, \pi + \delta]$ , és comporta com l'aplicació logística  $f_a(x) = a - x^2$ . Per a estimar aquests intervals de semblança de  $h_d$  amb  $f_a$ , també ens serviran els punts fixos superestables.

**Lema 3.5.6** a) 0 és un punt fix (superestable) de  $h_d \iff$

$$\iff d = d_k = -1 + \exp\left(-\frac{2k\pi - c}{e}\right),$$

on  $k \in \mathbb{Z}$  ha de verificar  $\frac{c - e \log(2)}{2\pi} > k > \frac{c}{2\pi}$ .

b)  $\pi$  és un punt fix (superestable) de  $h_d \iff$

$$\iff d = d_k^0 \equiv 1 - \exp\left(-\frac{(2k+1)\pi - c}{e}\right),$$

amb  $k > \frac{c}{2\pi} - \frac{1}{2}$ .

**Demostració.**  $\varphi = 0$  és fix per  $h$  si i només si es verifica  $c - e \log(1 + d) = 2k\pi$  per a algun valor  $k \in \mathbb{Z}$ . Quan  $d$  recorre  $(0, 1)$ , l'expressió de l'esquerra varia a l'interval finit  $(c - e \log 2, c)$ . Per tant, només una quantitat finita de valors de  $k$  donen alguna solució, i aquestes són precisament les de l'enunciat.

El cas de  $\pi$  es tracta anàlogament. Cal  $c - e \log(1 - d) = \pi + 2k\pi$ , per a algun valor  $k \in \mathbb{Z}$ . La part de l'esquerra varia a  $(c, +\infty)$  i, per tant, existeix una solució (única) només en el cas que  $(2k + 1)\pi > c$ , i és la de l'enunciat.  $\square$

**Nota.** Si  $e > 0$  és prou petit (concretament, si  $e \log(2)/(2\pi) < 1$ , o sigui,  $e < 2\pi/\log(2) \simeq 9.0647$ ) llavors el conjunt de valors de l'apartat a) és buit. En qualsevol cas, fixats  $c$  i  $e$ , no existeix cap valor  $d = d_k$  de l'apartat a) en un rang de valors de  $d$  de la forma  $(1 - \delta, 1)$ , amb  $\delta > 0$  suficientment petit; és per això que, en endavant, no considerarem aquest cas. D'altra banda, els  $\{d_k^0\}_{k \geq k_0}$  de l'apartat b) convergeixen al valor 1 geomètricament:

$$\frac{1 - d_k^0}{1 - d_{k+1}^0} = \exp(2\pi/e).$$

Per semblança amb l'aplicació logística, en un entorn de cada  $d_k^0$  podem buscar dos valors,  $d_k^{sn}$  i  $d_k^h$  tals que

- per a  $d = d_k^{sn}$ , l'aplicació presenta una bifurcació sella-node de període 1 en un punt  $\varphi_k^{sn}$  pròxim a  $\pi$  (són els valors  $d_k$  i  $\varphi_k$  de la proposició 3.5.4); i
- per a  $d = d_k^h$ , la segona imatge de  $\pi$  és el punt fix inestable creat en la bifurcació sella-node (vegeu la figura 3.17); o sigui, aquest punt té una òrbita homoclínica degenerada o tangencial (això correspon al valor  $a = 2$  en l'aplicació

logística  $f_a(x) = a - x^2$ ,  $x \in [-2, 2]$ ). Notem que l'interval  $[h^2(\pi), h(\pi)]$ , que escriurem  $[\pi - \Delta_k, \pi + \Delta_k]$ , es transforma en ell mateix.

Notarem l'interval o *finestra* limitat per aquests valors com  $I_k \equiv [d_k^{s^n}, d_k^h]$ .

Substituint  $h$  per una aproximació polinomial de segon grau, es poden estimar els dos valors anteriors a partir del valor  $d_k^0$ . Com que aquest mètode el tornarem a usar més endavant (per a període més gran que 1), en lloc de fer-ho per al nostre cas particular, ho expliquem en un context més general.

*Estimació de les finestres de semblança amb l'aplicació logística*

Sigui  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  una funció de les variables  $(b, z)$ . Suposem que volem resoldre les equacions que determinen genèricament una bifurcació sella-node:

$$\begin{cases} f(b, z) = z \\ D_2 f(b, z) = 1 \end{cases},$$

i que coneixem valors  $b^*$  i  $z^*$  corresponents a punt fix superestable:

$$\begin{cases} f(b^*, z^*) = z^* \\ D_2 f(b^*, z^*) = 0 \end{cases}.$$

Aquestes condicions fan que els primers termes del desenvolupament de Taylor de  $f$  en un entorn de  $(b^*, z^*)$  siguin

$$f(b, z) \simeq \tilde{f}(b, z) = z^* + D_1 f(b^*, z^*)(b - b^*) + \frac{1}{2} D_{22} f(b^*, z^*)(z - z^*)^2.$$

Aquests termes són els dominants localment; per tant, podem aproximar el sistema original per

$$\begin{cases} D_1 f(b^*, z^*)(b - b^*) + \frac{1}{2} D_{22} f(b^*, z^*)(z - z^*)^2 = z - z^* \\ D_{22} f(b^*, z^*)(z - z^*) = 1 \end{cases};$$

i la solució  $(b^{s^n}, z^{s^n})$  d'aquest sistema és

$$z^{s^n} - z^* = 1/D_{22} f(b^*, z^*), \text{ i}$$

$$b^{s^n} - b^* = 1/(2D_1 f(b^*, z^*)D_{22} f(b^*, z^*)).$$



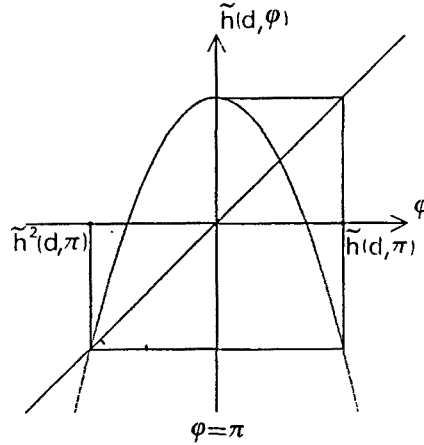


Figura 3.17: Òrbita homoclínica tangencial de l'aplicació unidimensional.

Passem a la condició d'existència d'un punt homoclínic tangencial; com que  $\tilde{f}$  és parell respecte  $z^*$  s'ha de verificar (mireu la figura 3.17)  $\tilde{f}(b, z^*) - z^* = z^* - \tilde{f}^2(b, z^*)$ , o sigui,

$$D_1 f(b^*, z^*)(b - b^*) = z^* - \left( z^* + D_1 f(b^*, z^*)(b - b^*) + \frac{1}{2} D_{22} f(b^*, z^*)(b - b^*)^2 \right).$$

La solució  $b - b^* = 0$  correspon a l'òrbita periòdica superestable i no ens interessa; volem l'altra, que és

$$b^h - b^* = -4 / (D_1 f(b^*, z^*) D_{22} f(b^*, z^*)).$$

Així doncs, una estimació de l'amplada de la finestra  $(b^{*n}, b^h)$  és

$$\frac{9}{2D_1 f(b^*, z^*) D_{22} f(b^*, z^*)}.$$

Observem, finalment, que per a aquest rang de  $b$ , l'òrbita del punt  $z = z^*$  no surt de l'interval  $[\tilde{f}^2(b, z^*), \tilde{f}(b, z^*)]$ . L'amplada d'aquest interval és

$$2[\tilde{f}(b^h, z^*) - z^*] = 2D_1 f(b^*, z^*)(b^h - b^*) = \frac{-8}{D_{22} f(b^*, z^*)}.$$

Apliquem això al nostre cas. Substituïm  $f, b^*$  i  $z^*$  per  $h, d_k^0$  i  $\pi$ , respectivament. Les derivades que ens fan falta són

- $D_1 h(d_k^0, \pi) = \frac{-e \cos \varphi}{1 + d \cos \varphi} \Big|_{(d_k^0, \pi)} = \frac{e}{1 - d_k^0},$

- $D_{22}h(d_k^0, \pi) = \frac{ed(\cos \varphi + d)}{(1+d \cos \varphi)^2} \Big|_{(d_k^0, \pi)} = \frac{-ed_k^0}{1-d_k^0}$ .

Substituint aquestes expressions en el resultats anteriors obtenim valors aproximats

- $d_k^{sn} - d_k^0 \equiv -\frac{1}{2} \frac{(1-d_k^0)^2}{e^2 d_k^0}$ ,
- $d_k^h - d_k^0 \equiv \frac{4(1-d_k^0)^2}{e^2 d_k^0}$ ;

i una estimació de l'amplada de la finestra  $I_k$  és

$$\frac{9}{2} \frac{(1-d_k^0)^2}{e^2 d_k^0},$$

mentre que l'amplada de l'interval en la variable  $\varphi$  és

$$2\Delta_k \simeq \frac{8(1-d_k^0)}{ed_k^0}.$$

Si introduïm la notació  $E_k = \exp\left(-\frac{(2k+1)\pi-c}{e}\right)$ ,  $\forall k > \frac{c}{2\pi} - \frac{1}{2}$ , aleshores es verifica  $1-d_k^0 = E_k$ , mentre que la finestra  $I_k$  associada a aquest valor té amplada  $d_k^h - d_k^{sn} \simeq \frac{9}{2e^2} \frac{E_k^2}{1-E_k} = O(E_k^2)$ . Això és, l'amplada de cada finestra on  $h$  es comporta com l'aplicació logística es un ordre de magnitud més gran que la distància al valor límit (homoclínic)  $d = 1$ . Amb uns quants càlculs més, es poden obtenir expressions més acurades dels valors anteriors.

**Proposició 3.5.7** *Els valors  $d_k^{sn}$ ,  $\varphi_k^{sn}$ ,  $d_k^h$  i  $\Delta_k$  definits anteriorment depenen de manera analítica de  $E_k$  (si  $k$  és suficientment gran), i tenen expressions*

- $d_k^{sn} = 1 - E_k - \frac{1}{2e^2} E_k^2 - \frac{1+e^2}{2e^4} E_k^3 - \frac{16+31e^2+12e^4}{24e^6} E_k^4 + O(E_k^5)$ ,
- $\varphi_k^{sn} = \pi - \frac{1}{e} E_k - \frac{1+e^2}{e^3} E_k^2 - \frac{9+16e^2+6e^4}{6e^5} E_k^3 - \frac{8+20e^2+15e^4+3e^6}{3e^7} E_k^4 + O(E_k^5)$ ,
- $d_k^h = 1 - E_k + \frac{4}{e^2} E_k^2 + \frac{4(-2+e^2)}{e^4} E_k^3 + \frac{4(16-20e^2+3e^4)}{3e^6} E_k^4 + O(E_k^5)$ ,
- $\Delta_k = \frac{4}{e} E_k + \frac{4}{e} E_k^2 + \frac{32-32e^2+12e^4}{3e^5} E_k^3 + \frac{64-32e^2+4e^4}{e^5} E_k^4 + O(E_k^5)$ .

**Demostració.** Com a la proposició 3.5.3, les equacions que caracteritzen l'existència d'un punt fix sella-node associat a l'índex  $k$  es poden escriure

$$\begin{cases} 1 + d \cos \varphi &= E_k \exp\left(-\frac{\varphi-c}{e}\right) \\ 1 + d \cos \varphi &= ed \sin \varphi \end{cases},$$

i busquem solucions  $(\varphi, d)$  de la forma

$$\varphi = \pi + a_1 E_k + a_2 E_k^2 + a_3 E_k^3 + a_4 E_k^4 + \dots,$$

$$d = 1 - E_k + b_2 E_k^2 + b_3 E_k^3 + b_4 E_k^4 + \dots$$

És immediat aïllar  $d$ :

$$d = \frac{E_k \exp(-(\varphi - \pi)/e)}{e \sin \varphi},$$

i, tot seguit, trobar l'equació que ha de verificar  $\varphi$ :

$$e \sin \varphi + E_k \exp\left(-\frac{\varphi - \pi}{e}\right) (\cos \varphi - \sin \varphi) = 0;$$

o bé, posant  $z = \varphi - \pi$ ,

$$F(E_k, z) \equiv e \sin z + E_k \exp\left(-\frac{z}{e}\right) (\cos z - \sin z) = 0.$$

$F$  és una funció analítica que verifica:

- Si  $E_k = 0$  llavors  $z = 0$  és solució de  $F = 0$ , i
- $\frac{\partial F}{\partial z}|_{(E_k=0, z=0)} = e > 0$ .

Pel teorema de la funció implícita, existeix solució analítica de l'equació anterior en la forma  $z = z(E_k)$ , si  $E_k$  és suficientment petit; i això és equivalent a dir que  $k$  sigui prou gran.

Desenvolupant en potències de  $E_k$ , en un entorn de 0, les funcions  $\sin(z)$ ,  $\cos(z)$  i  $\exp(-z/e)$ , i agrupant els termes del mateix grau, s'obtenen, recurrentment, els coeficients de l'enunciat per a  $\varphi_k^{2n}$ . Usant, seguidament, l'expressió de  $d$  s'obté  $d_k^{2n}$ .

Un raonament anàleg demostra la part referent a  $d_k^k$  i  $\Delta_k$ . Caldrà, però, eliminar una solució no desitjada. Com que la funció  $h$  és simètrica respecte  $\varphi = \pi$ , les condicions que determinen l'òrbita homoclínica associada a l'índex  $k$  són

$$\begin{cases} h_d(\pi) = \pi + 2k\pi + \varphi \\ h_d^2(\pi) = \pi + 2k\pi - \varphi \end{cases}.$$

Notem que les equacions anteriors es verifiquen també per a  $\varphi = 0$  i  $d = d_k^0$  (valor d'existència d'un punt fix superestable). Aquesta solució no ens interessa; volem  $\varphi > 0$  (i prenent un valor petit).

Substituïm l'expressió de  $h$  i obtenim

$$\begin{cases} 1 - d = E_k \exp(-\varphi/e) \\ 1 - d \cos \varphi = E_k \exp(\varphi/e) \end{cases} .$$

De la primera equació aïllem  $d = 1 - E_k \exp(-\varphi/e)$ , i de la segona obtenim l'equació que ha de verificar  $\varphi$ :

$$1 - [1 - \exp(-\varphi/e)E_k] \cos \varphi - \exp(\varphi/e)E_k = 0 .$$

Per a evitar la solució que no ens interessa ( $\varphi = 0$ ), considerem l'equació

$$G(E_k, \varphi) \equiv \frac{1 - [1 - \exp(-\varphi/e)E_k] \cos \varphi - \exp(\varphi/e)E_k}{\varphi} = 0 .$$

Es comprova immediatament que  $G(0, 0) = 0$  i  $\frac{\partial G}{\partial \varphi}|_{(E_k=0, \varphi=0)} = 1/2$ , i la demostració s'acaba de manera totalment anàloga al cas de l'òrbita sella-node.  $\square$  .

En el rang de paràmetres  $d \in I_k = [d_k^{sn}, d_k^h]$ , i per a la variable  $\varphi$  a l'interval  $[\pi - \Delta_k, \pi + \Delta_k]$ , l'aplicació  $h(d, \varphi)$  presenta tot el ric comportament característic de l'aplicació logística  $f(a, x) = a - x^2$ ,  $x \in [-2, 2]$ ,  $a \in [-1/4, 2]$ . La figura (3.18) -que es pot comparar amb la que hi ha a [14]- mostra una d'aquestes finestres de semblança.

Per a cada valor de  $d$  hem dibuixat l'atractor del punt  $\varphi = \pi$  sota l'aplicació (3.11). Hem usat  $c = 0$ ,  $e = 20$  i  $k = 10$ , de manera que  $E_k \simeq 0.0369321$ ,  $d_k^{sn} \simeq 0.963066$  i  $d_k^h \simeq 0.963082$ . Així, l'amplada de la finestra en el paràmetre  $d$  és, aproximadament,  $1.6 \cdot 10^{-5}$ ; i l'interval en la variable  $\varphi$  on queda confinat l'atractor té amplada 0.015. A la figura, hem considerat uns rangs lleugerament més grans, tant en  $d$  com en  $\varphi$ . La disminució aparent de la densitat de punts fora del rang estricte del paràmetre  $d$  és a causa que aquests s'han de repartir en un interval (en  $\varphi$ ) molt més gran.

Constatem l'existència dels fenòmens següents:

- Cascades de bifurcacions de tipus flip després de cada bifurcació sella-node, amb acumulació asimptòticament geomètrica ([18]). La corresponent a període 1 ocupa una part important del rang del paràmetre. S'en veu també d'altres.

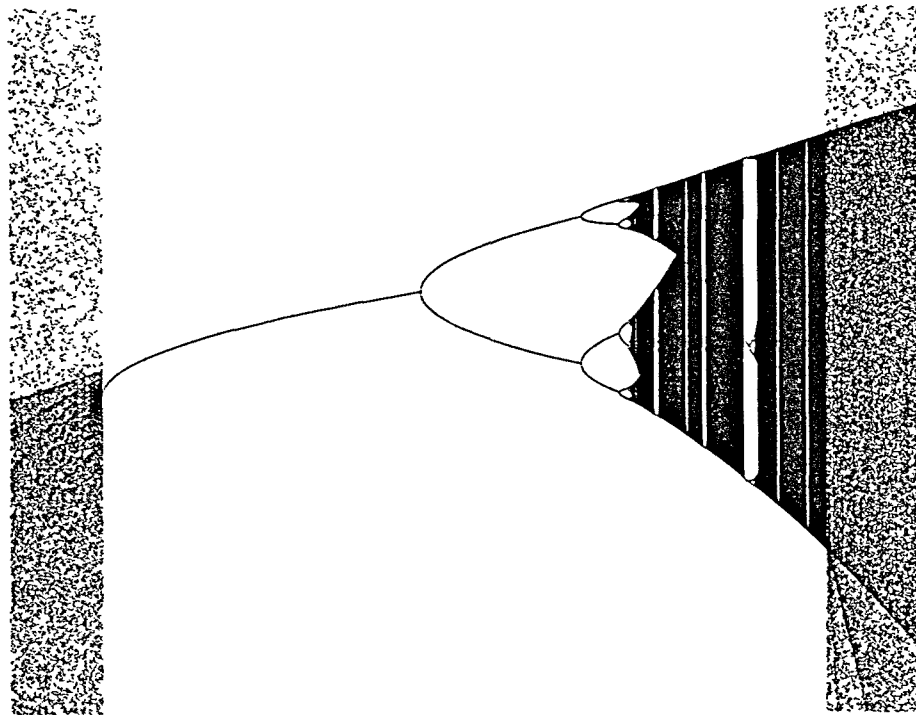


Figura 3.18: Finestra de semblança amb l'aplicació logística. Atractor del màxim en funció del paràmetre.

- Finestres corresponents a existència d'òrbites periòdiques atractores; la seva reunió forma un conjunt dens. Aquestes, a més, apareixen en l'ordre determinat per la *kneading theory* o *dinàmica simbòlica* ([14]), i la primera de cada període segueix l'*ordre de Sarkovskii* ([23]). A la figura es veuen clarament les de període més baix.
- Abundància (conjunt de mesura positiva) de comportament aperiòdic ([34], [2]). En particular, hi ha valors de  $d$  per als quals  $h$  té, a prop de  $\varphi = \pi$ , un *atractor estrany*, el qual suporta una *mesura invariant absolutament continua*.

A [57] es poden trobar estimacions analítiques i numèriques (per a l'aplicació quadràtica) de les finestres de paràmetres en les quals s'observen els fenòmens anteriors. Aquesta complexitat de comportament està d'acord amb els resultats numèrics de la secció 3. Notem, particularment, el cas de moviment aperiòdic; el fet que l'atractor estrany estigui confinat a un petit entorn de  $\pi$  ( $[\pi - \Delta_k, \pi + \Delta_k]$ ) justifica l'adjectiu "petit" que li aplicàvem.

Les diferències amb l'aplicació logística comencen immediatament després de cada valor homoclínic  $d = d_k$ ; mentre que per a  $f_a$ , amb  $a > 2$ , l'òrbita del màxim escapa (i, per tant, no dona cap atractor), en el nostre cas l'òrbita de  $\varphi = \pi$  va viatjant per  $S^1$ . El que s'observa numèricament és que, sovint, aquesta òrbita omple tot  $S^1$ , i això justifica el nom *atractor estrany gros*. Remarquem, però, que aquesta no és l'única possibilitat. Més endavant veurem quan aquesta òrbita pot ser atreta per un punt fix pròxim al mínim. Tornant a les finestres de semblança amb l'aplicació logística, vegem que aquest tipus de comportament és rar (des d'el punt de vista de mesura de Lebesgue) quan  $d$  s'acosta a 1.

**Proposició 3.5.8** *Sigui  $J_d = \bigcup I_i$ , on la reunió s'estèn a tots els índexs  $i \in \mathbb{Z}$  tals que  $I_i \subset [d, 1)$ ; aleshores*

- $\lim_{d \rightarrow 1} \frac{\text{mes}(J_d)}{1-d} = 0$ ,
- $\lim_{d \rightarrow 1} \frac{\text{mes}(J_d)}{(1-d)^2} = \frac{9}{2e^2[1-\exp(-4\pi/e)]}$ .

**Demostració.** La mesura de la finestra associada a l'índex  $i$  és  $\sum_{j \geq 2} a_j E_i^j$ , on els coeficients  $a_j$  depenen del valor de la constant  $e$  (alguns són donats a la proposició 3.5.7). Sigui  $k$  el primer índex tal que la finestra  $I_k$  està continguda a  $[d, 1)$ , de manera que  $E_k \leq 1 - d$ ; i sigui  $M = \exp(-2\pi/e)$  la constant que compleix  $E_{i+1} = M E_i, \forall i$ . Aleshores es verifica

$$\text{mes } J_d = \sum_{i \geq k} \sum_{j \geq 2} a_j E_i^j = \sum_{j \geq 2} a_j \sum_{i \geq k} (M^{i-k} E_k)^j = \sum_{j \geq 2} a_j \frac{E_k^j}{1 - M^j}.$$

Per tant,

$$\frac{\text{mes}(J_d)}{1-d} \leq \frac{\text{mes}(J_d)}{E_k} = \sum_{j \geq 2} a_j \frac{E_k^{j-1}}{1 - M^j} \xrightarrow{d \rightarrow 1} 0,$$

ja que l'índex  $k$  tendeix cap a  $+\infty$  quan  $d \rightarrow 1$  i, per tant,  $E_k \rightarrow 0$ .

De la mateixa manera,

$$\frac{\text{mes}(J_d)}{(1-d)^2} \xrightarrow{d \rightarrow 1} \frac{a_2}{1 - M^2},$$

i usant l'expressió de  $a_2$  obtenim el que volem.  $\square$

En particular, el conjunt de valors del paràmetre  $d$  per als quals existeix un atractor estrany petit té mesura petita. Cal precisar, però, que a més de les finestres

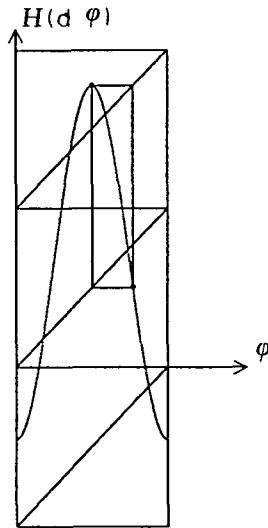


Figura 3.19: Òrbita superestable de període dos, amb  $k_1 = 1$  i  $k_0 = 0$ .

$I_k$  associades a període 1, també hi ha finestres de semblança amb l'aplicació logística associades a qualsevol període, encara que de mesura més petita. Per a aquestes, el comportament límit de  $\varphi = \pi$  (tant si és una òrbita periòdica atractora com un atractor estrany) està també confinat a una petita zona en la variable  $\varphi$ , amb la diferència que aquesta consta de diversos intervals que s'apliquen uns en els altres.

Considerem, per exemple, les finestres associades a període dos; comencem buscant òrbites superestables. Com abans, només considerarem l'extrem  $\varphi = \pi$ . S'ha de verificar (vegeu la figura 3.19)

$$\begin{cases} H(d, \pi) = \pi + 2k_1\pi + \delta \\ H(d, \pi + \delta) = \pi + 2k_2\pi \end{cases},$$

amb  $k_1, k_2 \in \mathbb{Z}$ ,  $\delta \in (-\pi, \pi)$  i  $k_2 < k_1$ . Les solucions  $(d, \delta)$  més pròximes a  $d = 1$  corresponen a valors grans de  $k_1$  (i, per a cada  $k_1$  fixat, a valors petits de  $k_2$ ).

El sistema anterior també s'expressa

$$\begin{cases} c - e \log(1 - d) = (2k_1 + 1)\pi + \delta \\ c - e \log(1 - d \cos \delta) = (2k_2 + 1)\pi \end{cases};$$

o bé, equivalentment,

$$\begin{cases} 1 - d = E_{k_1} \exp(-\delta/e) \\ 1 - d \cos \delta = E_{k_2} \end{cases} .$$

De la primera equació aïllem  $d = 1 - E_{k_1} \exp(-\delta/e)$ ; l'altra es transforma en

$$1 - E_{k_2} = [1 - E_{k_1} \exp(-\delta/e)] \cos \delta .$$

Recordem que ens interessen valors grans de  $k_1$ , i també  $k_2 < k_1$ . Això implica  $E_{k_2} > E_{k_1} > 0$ , amb  $E_{k_1}$  molt petit. En un entorn de  $\delta = 0$ , la part de la dreta de l'última equació té un comportament oscil·latori respecte  $\delta$ , amb un màxim molt pròxim a 0 (on val  $1 - E_{k_1}$ ), mentre que la part de l'esquerra és constant, i es verifica  $1 - E_{k_2} < 1 - E_{k_1}$ . Això fa que l'equació tingui dues solucions pròximes a  $\delta = 0$ , una a cada banda. En podem obtenir aproximacions resolent

$$1 - E_{k_2} \simeq (1 - E_{k_1})(1 - \delta^2/2) .$$

Això dóna  $\delta \simeq \pm \sqrt{2(E_{k_2} - E_{k_1})}$ . Substituint a l'expressió de  $d$  obtenim els dos valors

$$d_{k_1, k_2}^0 \simeq 1 - E_{k_1} \pm \frac{\sqrt{2}}{e} \left( \frac{E_{k_2}}{E_{k_1}} - 1 \right)^{1/2} E_{k_1}^{3/2} = d_{k_1}^0 \pm \frac{\sqrt{2}}{e} \left( \frac{E_{k_2}}{E_{k_1}} - 1 \right)^{1/2} E_{k_1}^{3/2} .$$

Una vegada conegut un valor  $d_{k_1, k_2}^0$ , podem usar el mateix mètode del cas dels punts fixos per a estimar l'amplada de la finestra limitada pels valors de bifurcació sella-node,  $d_{k_1, k_2}^{sn}$ , i de tangència homoclínica,  $d_{k_1, k_2}^h$ . Ara, la funció  $f$  ha de ser  $h^2$ .

Notem  $\varphi_1 = h(d, \varphi)$ ; llavors

- $D_1 h^2(d, \varphi) = D_1 h(d, \varphi_1) + D_2 h(d, \varphi_1) D_1 h(d, \varphi) ,$
- $D_2 h^2(d, \varphi) = D_2 h(d, \varphi_1) D_2 h(d, \varphi) ,$  i
- $D_{22} h^2(d, \varphi) = D_{22} h(d, \varphi_1) (D_2 h(d, \varphi))^2 + D_2 h(d, \varphi_1) D_{22} h(d, \varphi) .$

Si substituïm les expressions de les derivades  $D_1 h(d, \varphi) = \frac{-e \cos \varphi}{1+d \cos \varphi}$ ,  $D_2 h(d, \varphi) = \frac{ed \sin \varphi}{1+d \cos \varphi}$  i  $D_{22} h(d, \varphi) = \frac{ed(\cos \varphi + d)}{(1+d \cos \varphi)^2}$ , i els valors  $d = d_{k_1, k_2}^0$ ,  $\varphi = \pi$  i  $\varphi_1 = (2k_1 + 1)\pi + \delta$  obtenim

$$\bullet D_1 h^2(d_{k_1, k_2}^0, \pi) = \frac{e \cos \delta}{1 - d_{k_1, k_2}^0 \cos \delta} - \frac{e^2 d_{k_1, k_2}^0 \sin \delta}{(1 - d_{k_1, k_2}^0 \cos \delta)(1 - d_{k_1, k_2}^0)} , \text{ i}$$



$$\bullet D_{22}h^2(d_{k_1,k_2}^0, \pi) = -\frac{e^2(d_{k_1,k_2}^0)^2 \sin \delta(-\cos \delta + d_{k_1,k_2}^0)}{(1-d_{k_1,k_2}^0) \cos \delta (1-d_{k_1,k_2}^0)^2}.$$

Usem ara les aproximacions anteriors per a obtenir expressions amb els termes dominants:

$$\bullet D_1h^2(d_{k_1,k_2}^0, \pi) \simeq \frac{e}{1-d_{k_1,k_2}^0} - \frac{e^2 d_{k_1,k_2}^0 \delta}{(1-d_{k_1,k_2}^0)^2} \simeq \frac{e}{E_{k_1}} - \frac{e^2(1-E_{k_1})\delta}{E_{k_1}^2} \simeq -\frac{e^2\delta}{E_{k_1}^2},$$

$$\bullet D_{22}h^2(d_{k_1,k_2}^0, \pi) \simeq \frac{e^2(d_{k_1,k_2}^0)^2 \delta (1-d_{k_1,k_2}^0)}{(1-d_{k_1,k_2}^0)^3} \simeq \frac{e^2(1-E_{k_1})\delta}{E_{k_1}^2} \simeq \frac{e^2\delta}{E_{k_1}^2}.$$

En conseqüència, obtenim

$$\bullet d_{k_1,k_2}^{sn} - d_{k_1,k_2}^0 \simeq \frac{1}{2D_1h^2(d_{k_1,k_2}^0, \pi)D_{22}h^2(d_{k_1,k_2}^0, \pi)} \simeq \frac{E_{k_1}^4}{2e^4\delta^2} \simeq \frac{1}{4e^4\left(\frac{E_{k_2}}{E_{k_1}}-1\right)} E_{k_1}^3,$$

$$\bullet d_{k_1,k_2}^h - d_{k_1,k_2}^0 \simeq \frac{-9}{2D_1h^2(d_{k_1,k_2}^0, \pi)D_{22}h^2(d_{k_1,k_2}^0, \pi)} \simeq \frac{-9}{4e^4\left(\frac{E_{k_2}}{E_{k_1}}-1\right)} E_{k_1}^3.$$

Remarquem que l'amplada de cada finestra  $(d_{k_1,k_2}^{sn}, d_{k_1,k_2}^h)$  on  $h^2$  es comporta com l'aplicació logística és de l'ordre de  $O(E_{k_1}^3)$ . Aquest fet es podria usar per a veure (de manera anàloga al que hem fet per a període 1) que la mesura relativa de les finestres associades a les òrbites periòdiques superestables de període 2 tendeix a 0 quan ens acostem a 1.

Aquesta anàlisi es pot continuar per a períodes més alts, però els càlculs són cada vegada més pesats. En qualsevol cas, els resultats que hem obtingut ja ens permeten veure que l'atractor del punt  $\varphi = \pi$  té una variació molt complexa respecte  $d$ . La figura 3.20 mostra aquest atractor en tot el rang  $d \in (0, 1)$ . Es poden veure unes quantes finestres de semblança amb l'aplicació logística. Observem que a la zona externa a aquestes finestres, no sempre existeix un atractor gros (en el sentit que el seu suport sembla ser tota la circumferència) associat al punt  $\varphi = \pi$ . El cas més clar és quan existeix un punt fix atractor associada al mínim  $\varphi = 0$  i el punt  $\varphi = \pi$  és de la seva varietat estable. Això es pot veure fàcilment en la proximitat de  $d = 0$ , però pot ser també cert arbitràriament a prop de  $d = 1$  per a un conjunt de mesura relativa positiva.

**Proposició 3.5.9** *Existeix un conjunt obert de valors  $(c, e) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$  tal que, si definim*

$$J_{d_0} = \{d \in [d_0, 1] \mid \text{el conjunt límit de } \varphi = \pi \text{ no és un atractor estrany gros} \},$$

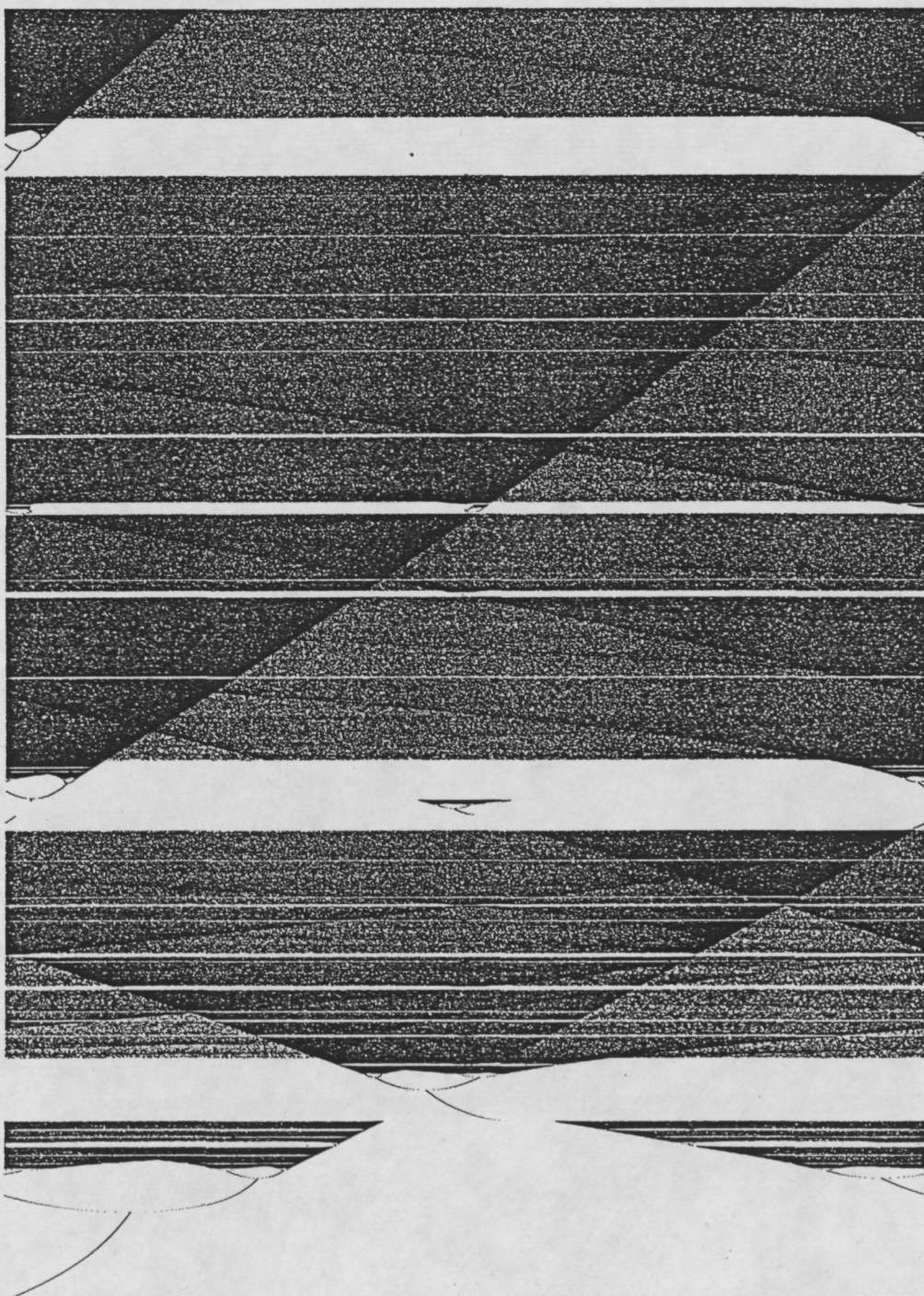


Figura 3.20: Atractor del punt  $\varphi = \pi$  en funció de  $d$  a tot el rang  $(0, 1)$ . Hem usat  $c = 0$  i  $e = 20$ . La variable horitzontal és  $\varphi \in (0, 2\pi)$ ; creix cap a l'esquerra. La variable vertical és el paràmetre  $d \in (0, 1)$ ; creix cap a dalt.

*llavors és verifica*

$$\lim_{d_0 \rightarrow 1} \frac{\text{mes}(J_{d_0})}{1 - d_0} \neq 0.$$

**Demostració.** Aquí, ens interessa més considerar  $S^1$  com  $(-\pi, \pi]$  (en lloc de  $[0, 2\pi)$ ). Fixem  $e > 0$  i suposem que  $d < 1$  pren un valor suficientment gran (més endavant donarem les condicions precises). El valor  $c = c_0(d) \equiv e \log(1 + d)$  verifica que  $\varphi = 0$  és un punt fix superestable de  $h_d$ . Siguin  $c_+(d)$  i  $c_-(d)$  els valors de  $c$  pròxims a  $c_0(d)$  corresponents, respectivament, a les bifurcacions sella-node i flip; i siguin  $\varphi_+(d) > 0$  i  $\varphi_-(d) < 0$  els punts fixos quan es produeix la bifurcació respectiva.

Com que la variació de la gràfica de  $H_d$  respecte  $c$  és, simplement, una translació vertical, és evident que  $\forall c \in (c_-(d), c_+(d))$ , la conca d'atracció del punt fix pròxim a  $\varphi = 0$  conté l'interval  $I(d) \equiv (-\varphi_+(d), \varphi_+(d))$ . Calculem explícitament aquest interval. La condició de derivada igual a 1 s'expressa  $1 + d \cos(\varphi) = ed \sin(\varphi)$ . Elevant al quadrat i fent el canvi  $y = \cos(\varphi)$  obtenim l'equació

$$d^2(1 + e^2)y^2 + 2dy + (1 + e^2d^2) = 0,$$

que té dues solucions reals

$$y_{\pm}(d) = \frac{-1 \pm e\sqrt{(1 + e^2d^2) - 1}}{d(1 + e^2)},$$

sempre i quan el discriminant sigui positiu. Suposarem que  $d > \bar{d} \equiv \frac{1}{\sqrt{1 + e^2}}$ , de manera que això passa. Obtenim, doncs,

$$\varphi_+(d) = \arccos(y_+(d)) = \arccos \left[ \frac{-1 + e\sqrt{(1 + e^2d^2) - 1}}{d(1 + e^2)} \right].$$

Estudiem ara com varia l'interval  $I(d)$  respecte  $d$ . Un càlcul elemental dóna

$$\frac{\partial y_+(d)}{\partial d} = \frac{1}{d^2(1 + e^2)} \left( 1 + \frac{e}{\sqrt{(1 + e^2)d^2 - 1}} \right) > 0.$$

Per tant,  $y_+(d) = \cos(\varphi_+(d))$  augmenta quan  $d$  augmenta; o sigui,  $\varphi_+(d)$  disminueix quan  $d$  augmenta. Podem calcular el seu valor mínim fent  $d = 1$ ; en aquest cas tenim

$$y = \frac{-1 + e\sqrt{(1 + e^2) - 1}}{1 + e^2} = \frac{e^2 - 1}{e^2 + 1} \quad \text{i} \quad \varphi_+ = \arccos \left( \frac{e^2 - 1}{e^2 + 1} \right).$$

Això dóna l'interval mínim  $I \equiv I(d) = (-\varphi_+(1), \varphi_+(1))$ , que notarem  $(-\epsilon, \epsilon)$ .

Resumint, per a cada  $e > 0$  fixat, considerem  $\bar{d} = \frac{1}{\sqrt{1+e^2}}$ , i siguin  $c_{-1} = c_{-1}(e) = \max_{d \in [\bar{d}, 1]} \{c_-(d)\}$  i  $c_{+1} = c_{+1}(e) = \min_{d \in [\bar{d}, 1]} \{c_+(d)\}$ . Notem que per a cada valor fixat de  $d$  es verifica  $c_-(d) < c_0(d) < c_+(d)$ , però podria passar que  $c_{-1} \geq c_{+1}$ . Això s'evita considerant un interval  $[\bar{d}, 1]$  suficientment petit. Considerem, doncs,  $d$  prou gran, de manera que  $c_{-1} < c_{+1}$ .

Prenem  $\{(c, e) | e > 0, c_{-1}(e) < c < c_{+1}(e)\}$  com el conjunt de valors  $(c, e)$  de l'enunciat. Hem vist que, donat  $(c, e)$  d'aquest conjunt, llavors  $\forall d \in [\bar{d}, 1]$  l'aplicació  $h_d$  té un punt fix atractor pròxim a  $\varphi = 0$ , la conca d'atracció del qual conté un interval  $(-\epsilon, \epsilon)$  (independent de  $d$ ).

Sigui ara  $d_0 \in [\bar{d}, 1)$ ; el conjunt  $J_{d_0}$  de l'enunciat conté els valors de  $d \in [d_0, 1)$  per als quals la imatge del punt  $\varphi = \pi$  sigui a  $(-\epsilon, \epsilon)$ . Imposem aquesta condició; cal

$$-\epsilon + 2k\pi < c - e \log(1 - d) < \epsilon + 2k\pi$$

per a algun  $k \in \mathbb{Z}$ ; això equival a

$$1 - \exp\left(-\frac{-\epsilon + 2k\pi - c}{e}\right) < d < 1 - \exp\left(-\frac{\epsilon + 2k\pi - c}{e}\right).$$

O sigui, associat a l'índex  $k$ , existeix un interval en la variable  $d$  d'amplada

$$\exp\left(-\frac{2k\pi - c}{e}\right) \left[ \exp\left(\frac{\epsilon}{e}\right) - \exp\left(-\frac{\epsilon}{e}\right) \right]$$

contingut a  $J_{d_0}$ , si  $k$  és suficientment gran.

El mínim valor de  $k$ , que notarem  $k_0$ , el trobem imposant  $c - e \log(1 - d_0) = 2k_0\pi$ ; això dóna la següent equivalència entre  $k_0$  i  $d_0$ :  $1 - d_0 = \exp\left(-\frac{2k_0\pi - c}{e}\right)$ . En conseqüència, es verifica

$$\begin{aligned} \text{mes } J_{d_0} &\geq \sum_{k \geq k_0} \exp\left(-\frac{2k\pi - c}{e}\right) \left[ \exp\left(\frac{\epsilon}{e}\right) - \exp\left(-\frac{\epsilon}{e}\right) \right] = \\ &= \exp\left(\frac{c}{e}\right) \left[ \exp\left(\frac{\epsilon}{e}\right) - \exp\left(-\frac{\epsilon}{e}\right) \right] \sum_{k \geq k_0} \exp\left(-\frac{2k\pi}{e}\right) = \\ &= \frac{\exp(-(2k_0\pi - c)/e) [\exp(\epsilon/e) - \exp(-\epsilon/e)]}{1 - \exp(-2\pi/e)}; \end{aligned}$$

i, per tant

$$\lim_{d_0 \rightarrow 1} \frac{\text{mes } J_{d_0}}{1 - d_0} \geq \frac{[\exp(\epsilon/e) - \exp(-\epsilon/e)]}{1 - \exp(-2\pi/e)}. \quad \square$$

Els resultats que hem vist en aquesta secció confirmen la varietat i la natura dels atractors que existeixen, en la proximitat de la creació d'òrbites homoclíniques, per al model que hem definit al començament del capítol. En particular, hem obtingut una explicació raonable dels resultats que es coneixen per al sistema físic original ([47]). A més, poden servir per a justificar *a posteriori* que l'aplicació del cercle és una bona eina per a descriure l'aplicació de Poincaré del flux. D'altra banda, però, encara hi ha una gran feina a fer per a entendre completament aquest model unidimensional, el qual pot tenir interès per ell mateix, independentment del fet que sigui una simplificació d'un sistema real.

# Bibliografia

- [1] F. Argoul, A. Arneodo, P. Richetti: Experimental evidence for homoclinic chaos in the Belousov-Zhabotinskii reaction. *Phys. Lett. A* 120, 269-275 (1987).
- [2] M. Benedicks, L. Carleson: On iterations of  $1 - ax^2$  on  $(-1, 1)$ , *Ann. of Math.* (2) 122, 1-25 (1985).
- [3] L. Carleson, M. Benedicks: The dynamics of the Hénon map. *Ann. of Math.* 133, 73-169 (1991).
- [4] C. Bonet: Pertorbació singular d'òrbites periòdiques de relaxació. Tesi de Doctorat per la Universitat Autònoma de Barcelona. Bellaterra (1984).
- [5] M. Bosch: Cusp bifurcations in the dissipative Hénon map. *Proc. ECIT 87* (Caldes de Malavella), ed. C. Alsina et al., 133-138. World Scientific (1989).
- [6] M. Bosch, J. C. Tatjer: On the codimension two bifurcations in families of one- and two-dimensional maps. *Proc. ECIT 89* (Batschuns), ed. C. Mira et al., 9-14. World Scientific (1991).
- [7] M. Bosch, C. Simó: Attractors for a Silnikov-Hopf scenario and a related one-dimensional map. *Proceedings of the NATO A. R. Workshop "Homoclinic Chaos"* (Maig de 1991, Brussel·les). Apareixerà pròximament a *Physica D*.
- [8] H. Broer, P. Roussarie, C. Simó: A numerical survey on the Takens-Bogdanov bifurcation for diffeomorphisms. *Proc. ECIT 89* (Batschuns), ed. C. Mira et al., 320-334. World Scientific (1991).
- [9] H. Broer, F. Dumortier, S. J. van Strien, F. Takens: *Structures in Dynamics. Finite Dimensional Deterministic Studies*. North-Holland (1991).

- [10] J. P. Carcasses, C. Mira: An autonomous ordinary differential equation generating alternating isoordinal cascades of cusps in a bifurcation plane. Proc. ECIT-89 (Batschuns), ed. C. Mira et al., 29-41. World Scientific (1991).
- [11] J. P. Carcasses: Sur quelques structures complexes de bifurcations de systèmes dynamiques. Thèse de Doctorat de l'Université Paul Sabatier. Toulouse (1990).
- [12] J. P. Carcasses, C. Mira, M. Bosch, J. C. Tatjer, C. Simó: "Crossroad Area - Spring Area" Transition: (I) Parameter Plane Representation, i (II) Foliated Parametric Representation. Intern. Journal of Bifurc. and Chaos, Vol. 1, núm 1 i 2, 183-196 i 339-348 resp. (1991).
- [13] J. Carr: Applications of Center Manifold Theory. Springer-Verlag (1981).
- [14] P. Collet, J. P. Eckmann: Iterated maps on the interval as dynamical systems. Birkhauser (1980).
- [15] J. H. Curry: A generalized Lorenz system. Comm. Math. Phys. 60 (1978).
- [16] R. Devaney: An Introduction to Chaotic Dynamical Systems. Benjamin/Cummings (1986).
- [17] A. Douady, J. H. Hubbard: Etude dynamique des polynomes complexes, I i II, Publ. Math. d'Orsay (1985).
- [18] M. Feigenbaum: Quantitative universality for a class of nonlinear transformations. J. Stat. Phys. 19, 25-52 (1978).
- [19] P. Gaspard: Generation of a Countable Set of Homoclinic Flows Through Bifurcation, Phys. Lett. 97A, 1 (1983).
- [20] P. Gaspard: Tangences homoclines dans les systèmes dynamiques dissipatifs. Tesi de Doctorat de la Universitat de Brussel·les (1987).
- [21] N. K. Gavrilov, L. P. Silnikov: On three- dimensional dynamical systems close to a system with a structurally unstable homoclinic curve. (I) Math. USSR Sbornik 17, 467-485 (1972). (II) Math. USSR Sbornik 19, 138-156 (1973).

- [22] P. Glendinning, C. Sparrow: Local and Global Behavior near Homoclinic Orbits. *Journal of Stat. Physics* 35 , Nos. 5/6, 645-696 (1984).
- [23] J. Guckenheimer: On the bifurcation of maps of the interval. *Invent. Math.* 39, 165-178 (1977).
- [24] J. Guckenheimer, P. Holmes: *Nonlinear oscillations, Dynamical systems and Bifurcations of Vectors fields.* Springer-Verlag (1983).
- [25] P. Hartman: *Ordinary differential equations.* Willey (1964).
- [26] M. Hénon: A two-dimensional mapping with a strange attractor. *Comm. Math. Phys.* 50, 69-78 (1976).
- [27] M. W. Hirsch, C. C. Pugh: Stable manifolds and hyperbolic sets. *Proc. Symp. Pure Math.* 14, 133-163 (1970).
- [28] M. R. Hirsch, C. C. Pugh, M. Shub: *Invariant Manifolds.* Lect. Notes in Math. 583. Springer-Verlag (1977).
- [29] P. Hirschberg, E. Knobloch: Silnikov-Hopf Bifurcation. Proceedings of the NATO A. R. Workshop "Homoclinic Chaos", Maig 1991, Brussel-les. Apareixerà pròximament a *Physica D*.
- [30] P. J. Holmes: A Strange Family of Three-Dimensional Vector Fields Near a Degenerate Singularity. *Journal of Differential Equations* 37,382-403 (1980).
- [31] P. Holmes, D. Whitley: Bifurcations of one- and two-dimensional maps. *Phil. Trans. R. Soc. Lond. A* 311, 43-102 (1984).
- [32] M. C. Irwin: On the stable manifold theorem. *Bull. London Math. Soc.* 2, 196-198 (1970).
- [33] M. C. Irwin: On the smoothness of the composition map. *Quart. J. Math. Oxford* (2) 23, 113-133 (1972).
- [34] M. V. Jakobson: Absolutely continuous invariant measures for one-parameter families of one-dimensional maps. *Comm. in Math. Phys.* 81, 39-88 (1981).



- [35] M. Levi: Qualitative analysis of the periodically forced relaxation oscillations. *Memoirs of the AMS*, 244 (1981).
- [36] E. N. Lorenz: Deterministic nonperiodic flow. *J. Atmos*
- [37] F. R. Marotto: Snap-Back Repellers Imply Chaos in  $\mathbb{R}^n$ . *J. Math. Anal. Appl.* 63, 199-223 (1978).
- [38] F. R. Marotto: Perturbations of Stable and Chaotic Difference Equations. *J. Math. Anal. Appl.* 72, 716-729 (1979).
- [39] J. E. Marsden, M. McCracken: *The Hopf Bifurcation and its applications.* Springer-Verlag (1976).
- [40] C. Mira: *Chaotic Dynamics.* World Scientific Press (1987).
- [41] E. F. Mishchenko, N. Kh. Rozov: *Differential Equations with Small Parameters and Relaxation Oscillations.* Plenum Press (1980).
- [42] J. Moser: *Stable and Random Motions in Dynamical Systems.* Princeton University Press (1973).
- [43] S. Newhouse: The abundance of wild hyperbolic sets and non-smooth stable sets for diffeomorphisms. *Publ. Math. IHES* 50, 101-151 (1979).
- [44] S. Newhouse: *Lectures on dynamical systems,* in *Dynamical Systems.* CIME Lectures, Bressanone (Italy). Birkhauser (1980).
- [45] J. Palis, W. de Melo: *Geometric theory of dynamical systems. An introduction.* Springer-Verlag (1982).
- [46] M. I. Ravinovich: *Stochastic Oscillations and Turbulence.* *Uspeki Fis. Nauk* 125,1 (1978).
- [47] J. I. Rosell: *Dinàmica de dispositius opto-tèrmics amb absorció localitzada.* Tesi de Doctorat per la Universitat Autònoma de Barcelona. Bellaterra (1991).
- [48] T. M. Seara: *Contribucions al problema de Silnikov.* Tesi de Llicenciatura. U. de Barcelona (1986).

- [49] T. M. Seara: Estudi de fenòmens homoclínic en sistemes propers a integrables. Tesi de Doctorat. U. de Barcelona (1991).
- [50] L. P. Silnikov: A case of the existence of a denumerable set of periodic motions. Soviet Math. Dokl. 6, 163-166 (1965).
- [51] C. Simó: On the Hénon-Pomeau attractor. J. of Stat. Phys. 21, 465-494 (1979).
- [52] S. Smale: Differentiable Dynamical Systems. Bull. Amer. Math. Soc. 73, 747-817 (1967).
- [53] J. Sotomayor: Lições sobre Equações diferenciais ordinárias. Projeto Euclides. IMPA (1979).
- [54] S. Sternberg: Local contractions and a theorem of Poincaré. Amer. J. Math. 79, 809-824 (1957).
- [55] S. van Strien: On the bifurcations creating horseshoes. Lecture Notes in Maths. 898, 316-351. Springer (1982).
- [56] J. C. Tatjer: On the strongly dissipative Hénon map. Proc. ECIT 87 (Caldes de Malavella), ed. C. Alsina et al., 331-337, World Scientific (1989).
- [57] J. C. Tatjer: Invariant manifolds and bifurcations for one-dimensional and two-dimensional dissipative maps. Tesi doctoral. Universitat de Barcelona (1990).
- [58] A. N. Tikhonov, A. B. Vasileva, A. G. Sveshnikov: Differential Equations. Springer-Verlag (1985).
- [59] C. Tresser: Tesi. Universitat de Niça (1981).
- [60] C. Tresser: About some theorems by L. Silnikov. Ann. Inst. Henri Poincaré 40 (1984).
- [61] D. Whitley: Discrete Dynamical Systems in Dimensions one and two. Bull. London Math. Soc. 15, 177-217 (1983).
- [62] S. Wiggins: Global Bifurcations and Chaos. Applied Mathematical Sciences 73. Springer-Verlag (1988).