Capítulo 1

Estructura temporal de tipos de interés. Conceptos previos

1.1. Introducción

Se define como estructura temporal de tipo de interés (ETTI) a la relación funcional que informa de los distintos tipos de interés existentes en un mercado, en función del plazo en que se aplican. Sin embargo, las metodologías utilizadas para obtener estas estructuras temporales son muy diversas.

Se podría observar directamente del mercado de deuda pública una estructura temporal continua dada, en el caso que hubiese para cada plazo un título cupón cero sin riesgo de crédito. No obstante, solo se dispone de un número finito de títulos y sus precios definen un número finito de puntos; con estos datos se podría construir una estructura temporal de tipos de interés. Sin embargo, el primer problema es que no se observan tipos al contado directamente, es decir, no se dispone de precios obtenidos de operaciones simples, de modo que hay que estimarlos. La mayoría de los títulos que cotizan en el mercado pagan cupones periódicamente. Además, los tipos observados incluyen efectos como riesgo de crédito, fiscalidad, riesgo de liquidez, entre otros.

Tanto en el ámbito académico como profesional, se realizan estimaciones a partir de los precios de títulos de deuda pública u otros con características similares. Se asume que los títulos de deuda pública de los países desarrollados no presentan riesgo de crédito y, el conjunto de plazos negociados es bastante amplio; aunque, en determinados países no existen suficientes datos para cubrir todos los plazos.

Así pues, es de aceptación general que la estructura temporal debe construirse con tipos de interés libres de riesgo de insolvencia, siendo por ello la deuda pública del estado la mejor fuente de información.

La curva o estructura de tipos de interés puede expresarse de tres formas distintas: curva de tipos de interés al contado (*spot*), curva de tipos de interés a plazo (*forward*) y función de descuento. Se trata de tres alternativas para expresar la estructura de tipos de interés. Si bien lo habitual es referirse a la ETTI mediante los tipos al contado, para algunas aplicaciones puede ser más útil utilizar los tipos *forward* o la función de descuento. Sin embargo, es relativamente sencillo pasar de una forma funcional a otra.

Para estimar una estructura temporal continua, hay que establecer una hipótesis sobre la relación funcional entre el tipo de interés y el plazo. Esta relación puede presentar diferentes formas funcionales. En general, se utilizan formas polinómicas y exponenciales en sus múltiples variantes (Anderson *et al.*, 1996). Pero, en cualquier caso siempre existe un *trade-off* entre la suavidad de la curva estimada por un lado y, la flexibilidad y adaptación a las observaciones, por otro. La descripción de los modelos más utilizados en este contexto se expone en la cuarta sección de este capítulo.

En este capítulo se definen los conceptos básicos relacionados con las curvas de tipos, su aplicación y los modelos teóricos utilizados para su ajuste. En la siguiente sección se define la aplicación de la curva de tipos de interés en el ámbito de la política monetaria, así como su utilización por parte de distintos Bancos Centrales internacionales. A continuación, se detallan los conceptos básicos asociados a estas curvas tales como tipos al contado, a plazo, función de descuento, tasa de rendimiento, etcétera. Finalmente, en la última sección se describen los modelos que pueden utilizarse para obtener la estructura temporal de tipos de interés.

1.2. Modelos aplicados en política monetaria

Las autoridades monetarias dan gran importancia a la información que proporcionan las curvas de tipos de interés. Esta información es útil para anticipar expectativas en los cambios de tipos de interés a corto plazo y para predecir la inflación y el crecimiento económico (Bernard y Gerlach, 1996; Canova y De Nicolo, 1997; Davis y Fagan, 1997; Estrella y Hardouvelis, 1991; Fama, 1990; Mishkin, 1991; Schich, 1996; Smets y Tsatsaronis, 1997).

Un informe de la OCDE, realizado en colaboración con los principales Bancos Centrales, manifiesta que la utilidad fundamental de la información contenida en las curvas de tipos de interés se basa en el análisis de las expectativas financieras de mercado, teniendo en cuenta las decisiones futuras en política monetaria a partir de la curva del tipos de interés *forward* implícito (Mylonas y Schich, 1999).

No obstante, el modelo a aplicar para obtener las curvas de interés depende, entre otros factores, de la utilización o finalidad que quiera darse a la curva estimada. La mayoría de Bancos Centrales se inclinan por los modelos que aplican formas funcionales parsimoniosas (*parsimonious functional forms*; Anderson *et al*., 1996). En concreto, el modelo de Nelson y Siegel (1987) y la versión extendida de Svensson (1994) son ampliamente usados para análisis en política monetaria (BIS, 1999 y 2005).

Ambos modelos, se caracterizan por adoptar formas suficientemente flexibles para reflejar los datos observados en el mercado. Proporcionan formas monótonas crecientes o decrecientes, en forma convexa ($\cup$), en forma cóncava ($\cap$) y curvas en forma de S. Además, generan resultados relativamente independientes de los *outliers* y son más simples de interpretar en términos de política monetaria. Asimismo, facilitan extrapolaciones plausibles para plazos superiores a los vencimientos de los datos observados. Particularmente, la forma funcional que determina el tipo de interés extrapolado a largo plazo converge asintóticamente hacia un valor, el cual puede considerarse el tipo de interés a muy largo plazo.

Alemania, España, Francia y Suecia son países europeos con larga tradición en la aplicación de los modelos de Nelson y Siegel (1987) y de Svensson (1994). Actualmente, la mayoría de los países de la Unión Monetaria Europea (UME) que estiman curvas de tipos utilizan formas funcionales parsimoniosas (Ricart y Sicsic, 1995; Núñez, 1995; Schich, 1996; Bolder y Stréliski, 1999; Geyer y Mader, 1999; Meier, 1999). Además, en países que en los últimos años su mercado de deuda pública ha incrementado la liquidez y transparencia, empiezan a preocuparse por obtener información de las expectativas de mercado sobre el tipo de interés futuro y la tasa de inflación. Países como Colombia, Hungría y Hong Kong (Arango et al., 2001; Csajbók, 1999; Yu y Fung., 2002), también aplican el modelo de Nelson y Siegel o su versión extendida para estimar sus curvas de tipos de interés.

En la tabla 1 se detalla la metodología y el criterio aplicado por la mayoría de los Bancos Centrales, así como la frecuencia con la que se estiman las curvas de tipos de interés y otras características relevantes.

Tal y como se refleja en la tabla 1, la mayoría de países aplican Nelson y Siegel (1987) o bien la versión extendida de Svensson (1994), a excepción de Japón, el Reino Unido y Estados Unidos. El Reino Unido empleó el modelo de Svensson entre Enero del 1982 y Abril de 1998. El volumen de títulos, vencimientos y una mayor liquidez permiten a estos países hacer uso de otros métodos alternativos.

Para algunos Bancos Centrales, la incorporación de los modelos parsimoniosos es relativamente reciente, como es el caso de Noruega, Canadá, Finlandia y Suiza (Kloster, 2000; Bolder y Stréliski, 1999; Meier, 1999), que empezaron a aplicar esta metodología en el año 1998. Aunque el país que presenta más experiencia en estos modelos es Alemania, que los aplica desde 1973, cabe señalar que España los incorporó ya desde principios del 1991 (Schich, 1996; Núñez, 1995).

Cuando un país opta por incorporar un modelo u otro para estimar sus curvas de tipos de interés, debe decidir también el criterio de optimización. En el caso del modelo de Nelson y Siegel (1987) o Svensson (1994) la función a minimizar puede corresponderse con el error entre los precios ajustados por los modelos y los precios reales de los títulos o, también, con el error entre tasas de rendimiento ajustadas y reales. Dada la dificultad de ajuste en el corto y medio plazo, en los trabajos más recientes se pondera el error entre precios por algún factor inversamente proporcional al plazo (Ricart y Sicsic, 1995; Bolder y Stréliski, 1999). El objetivo perseguido es introducir algún elemento que proporcione más peso al tramo a corto y medio plazo que al largo plazo, ya que la pendiente y curvatura de la estructura de tipos de interés se produce en este tramo inicial. En la mayoría de los casos, el factor que se introduce es la inversa de la duración del título, de modo que la función objetivo que se minimiza en primer lugar es el error en los precios ponderado (véase tabla 1).

Otra característica muy discutida y que la mayoría de modelos no resuelven es el efecto impositivo (Deacon y Derry, 1994). Dada la dificultad que representa eliminar este factor, la mayoría de países no realizan ningún tipo de ajuste impositivo a los datos observados ni al modelo, excepto Canadá que excluye un tipo de bonos antes de realizar la estimación (Bolder y Stréliski, 1999).

Tabla 1. Metodologías aplicadas por los Bancos Centrales.

Banco Central	**Metodo-logía**[1]	**Estimación disponible desde**	**Frecuencia**	**Minimiza-ción de error**	**Ajustes o distorsiones impositivas**	**Amplitud relevante de vencimientos**
Bélgica	SV NS	1 Septiembre1997	diariamente	Precio ponderado	No	De 2 días a 16 años
Canadá[2]	SV	23 Junio 1998	diariamente	Precio ponderado	Sí, excluyendo bonos	De 1 a 30 años
Finlandia	NS	3 Noviembre 1998	semanalmente; diariamente desde 4 Enero 1999	Precio ponderado	No	De 1 a 12 años
Francia	SV NS	3 Enero 1992	Semanalmente	Precio ponderado	No	Hasta 10 años
Alemania	SV	7 Agosto 1997 Enero 1973	diariamente mensualmente	Rendimiento	No	De 1 a 10 años
Italia	NS	1 Enero 1996	diariamente	Precio ponderado	No	Hasta 30 años Hasta 10 años (antes de Febrero de 2002)
Japón	SS	29 Julio 1998 hasta 19 Abril 2000[3]	Semanalmente	Precio	Ajustando los precios para los bonos	De 1 a 10 años
Noruega	SV	21 Enero 1998	± mensualmente	Rendimiento	No	Hasta 10 años
España	SV NS	Enero 1995 Enero 1991	diariamente mensualmente	Precio ponderado	No	Hasta 10 años Hasta 10 años
Suecia	SV	9 Diciembre 1992	Como mínimo una vez por semana	Rendimiento	No	Hasta 10 años
Suiza	SV SV	4 Enero 1998 Enero 1998	diariamente mensualmente	Rendimiento	No	De 1 a 30 años
Reino Unido[4]	SV SV	15 Enero 1985 hasta 30 Abril 1998	Diariamente mensualmente	Precio ponderado	No	De 1 semana a 30 años
	VRP VRP	4 Enero 1982 15 Enero 1985	diariamente diariamente	Bonos: Precio ponderado	No	Hasta 1 año
Estados Unidos	SS	14 Junio 1961	diariamente	Bonos: Precios	No	De 1 año a 10 años

Fuente: BIS Data Bank

[1] NS = Nelson-Siegel, SV = Svensson, SS = splines suavizados, VRP = variable de penalización por rugosidad.
[2] Canadá está en proceso de revisión de su actual metodología de estimación.
[3] La curva de tipos de interés no se estima actualmente.
[4] Reino Unido usó el modelo de Svensson entre Enero del 1982 y Abril del 1998

Hay algunos trabajos como el de McCulloch (1975) y el de Schaefer (1981) que analizan y estiman el factor impositivo, sin embargo McCulloch (1975) determina un único tipo impositivo para toda la curva cuando en realidad, los tipos impositivos son distintos para cada inversor y en algunos casos para cada título. Schaefer (1981) argumenta que no hay una única estructura temporal de tipos de interés sino una serie de estructuras temporales específicas, cada una de la cuales debería estimarse utilizando sólo aquellos bonos que sean eficientes para cada inversor.

En esta tesis doctoral se utiliza el modelo de Nelson y Siegel (1987) para la estimar las curvas de tipos de interés de Alemania, Francia, España, Italia, el Reino Unido y Estados Unidos. La elección del modelo responde básicamente a su amplia aplicación y relevancia a nivel internacional dentro del contexto de política monetaria. No se consideran los efectos impositivos debido a la dificultad que representa la inclusión de esta variable. La descripción detallada de este modelo, junto con el de Svensson (1994), se desarrolla en el capítulo 2.

1.3. Conceptos y nomenclatura

Tal y como se ha expuesto anteriormente, la mayoría de modelos utilizan títulos de deuda pública para obtener curvas de tipos de interés. Estos títulos se caracterizan, entre otros aspectos, por no presentar apenas riesgo de insolvencia.

A continuación, se detallan los principios aplicados en la valoración de los títulos de deuda pública con un tipo de interés libre de riesgo. Previamente, se especifican algunos conceptos relacionados con la curva de tipos de interés. En particular se define el tipo de interés al contado (*spot*), el tipo de interés a plazo (*forward*), el factor de descuento, el cupón corrido y la tasa interna de rendimiento (TIR). Para simplificar las definiciones y conceptos se considera frecuencia de pago anual. Esto representa una notación más simple que facilita la exposición. No se trata de una simplificación alejada de la realidad. Dentro de los mercados financieros, en particular en países como España, Alemania o Francia, la frecuencia en el pago de cupones es anual para todas las emisiones del estado.

Hay que señalar también que, aunque para el corto plazo se utilicen tipos de interés simples y para el largo plazo se utilicen tipos de interés compuestos con capitalización anual, en los desarrollos teóricos se utiliza con frecuencia el factor financiero teórico en tiempo continuo, ya que simplifica el álgebra.

En este trabajo se ha considerado conveniente mantener la notación propuesta en Nelson y Siegel (1987), ya que es el modelo básico aplicado. De modo que la nomenclatura utilizada es distinta a la habitualmente empleada.

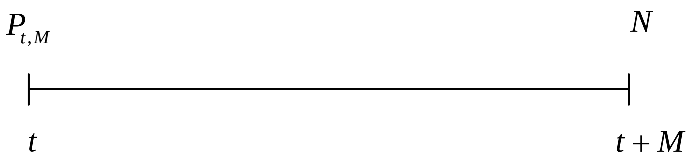
1.3.1. Tipos de interés al contado o *spot*

El tipo de interés al contado o *spot* se define como el tipo de interés vigente en el mercado en un momento determinado t y para un plazo M establecido.

El precio teórico $P_{t,M}$ de un título es igual al valor actual del pago del nominal del título N descontado al tipo de interés al contado vigente en t para un plazo M (años), expresado como tipo efectivo anual $R_{t,M}$ utilizando un régimen financiero de interés compuesto con periodicidad anual y tiempo discreto:

$$P_{t,M} = N \cdot \left(1 + R_{t,M}\right)^{-M} . \tag{1}$$

Gráficamente, esto se representa como:



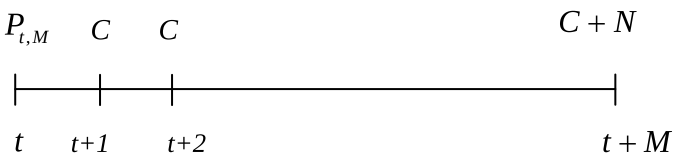
El cálculo equivalente en tiempo continuo se corresponde a:

$$P_{t,M} = N \cdot \exp\left(-z_{t,M} \cdot M\right). \tag{2}$$

Siendo $z_{t,M}$ el tipo de interés nominal estricto, con capitalización continua, vigente en t para el plazo M .

Un título con estas características se denomina título cupón cero, ya que garantiza un único pago en el vencimiento y no hay pagos intermedios.

Para el caso de un título que paga cupones a lo largo de todo su vencimiento, es decir, que realiza una serie de pagos de cuantía C en los momentos $m = 1, 2, ..., M$ y el pago del nominal N en el vencimiento M, el precio teórico del título es igual a la suma del valor actual de cada uno de los pagos. Gráficamente, esto se representan como:



Asumiendo que los tipos de interés al contado $z_{t,m}$ en el momento t con vencimientos m ($m = 1,2,...,M$ años) son conocidos, el precio teórico del título en tiempo discreto se puede escribir como:

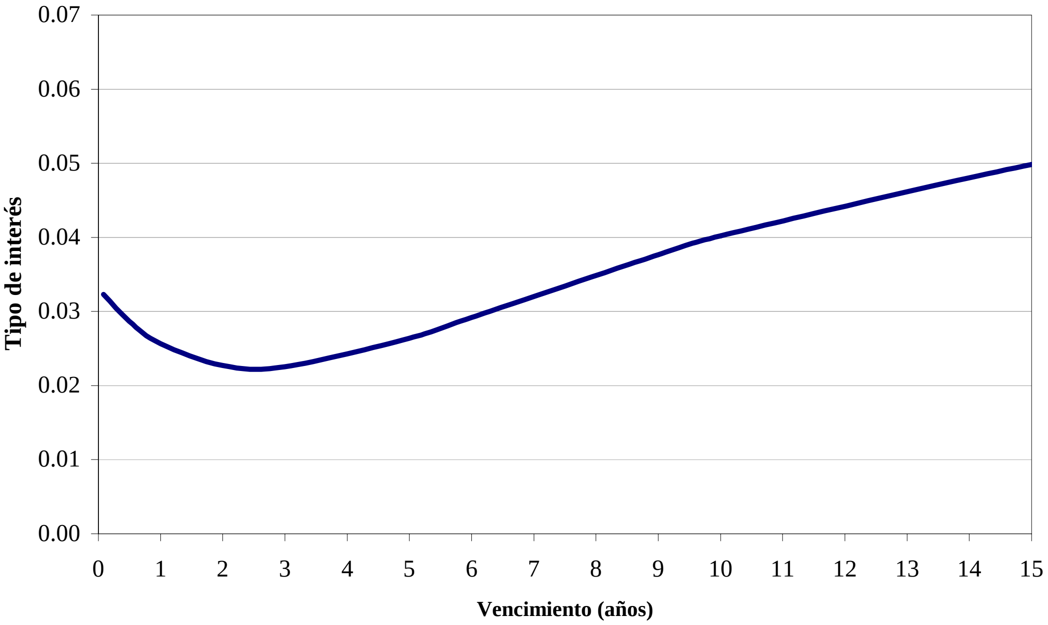
$$
\begin{aligned}
P_{t,M} &= C\cdot\left(1+R_{t,1}\right)^{-1} + C\cdot\left(1+R_{t.2}\right)^{-2} + ... + C\cdot\left(1+R_{t.M}\right)^{-M} + N\cdot\left(1+R_{t.M}\right)^{-M} \\
&= \sum_{m=1}^{M} C\cdot\left(1+R_{t.m}\right)^{-m} + N\cdot\left(1+R_{t.M}\right)^{-M} \quad .
\end{aligned}
\tag{3}
$$

Y su equivalente en tiempo continuo puede expresarse como:

$$
P_{t,M} = \sum_{m=1}^{M} C\cdot\exp\left(-z_{t,m}\cdot m\right) + N\cdot\exp\left(-z_{t,M}\cdot M\right). \tag{4}
$$

Los distintos tipos de interés $R_{t,m}$ -en tiempo discreto- o $z_{t,m}$ -en tiempo continuo- asociados a cada plazo m son los denominados tipos al contado, y con éstos se puede representar la estructura temporal de tipos al contado, tal y como refleja el gráfico 1. En este gráfico se observa la estructura temporal de tipos de interés en su expresión en tipos al contado para la última semana del año 2004 en España.

Gráfico 1. Curva de tipos de interés al contado de la última semana de 2004 en España.



1.3.2. Tipos de interés a plazo o *forward*

La estructura temporal definida por los tipos de interés al contado contiene los tipos implícitos o *forward*, que son tipos de interés definidos para plazos futuros.

Los tipos al contado expresan un tipo de interés a lo largo de distintos períodos, pero siempre desde un momento de tiempo t determinado. Los tipos *forward* representan el tipo de interés en un momento futuro en el tiempo y para un cierto plazo. La siguiente expresión refleja la relación entre los tipos *forward* y los tipos *spot* en tiempo discreto:

$$\left(1+R_{t,m}\right)^m = \prod_{\tau=1}^{m}\left(1+f_{t,\tau}\right), \tag{5}$$

donde $f_{t,\tau}$ denota el tipo *forward* para el plazo futuro de $\left(t+\tau-1, t+\tau\right)$ y en un momento t, con $\tau = 1,\dots,m$. Para $\tau = 1$, el tipo *spot* y el tipo *forward* coinciden.

En tiempo discreto y para un plazo τ , la relación entre tipo al contado y el tipo a plazo es:

$$\left(1+R_{t,\tau}\right)^{\tau}=\left(1+R_{t,\tau-1}\right)^{\tau-1}\cdot\left(1+f_{t,\tau}\right), \tag{6}$$

$$f_{t,\tau}=\frac{\left(1-R_{t,\tau}\right)^{\tau}}{\left(1-R_{t,\tau-1}\right)^{\tau-1}}-1. \tag{7}$$

En el campo continuo, el tipo de interés a plazo instantáneo, $f\left(t,\tau\right)$, equivale al límite de la expresión anterior cuando el plazo que cubre el tipo de interés tiende a cero:

$$f\left(t,\tau\right)=\lim_{\Delta\tau\to 0} f_{t,\tau}\,. \tag{8}$$

La relación entre el tipo de interés al contado y el tipo de interés a plazo instantáneo es la siguiente:

$$z_{t,m}\cdot m=\int_{t}^{m+t} f\left(t,\tau\right)d\tau\,, \tag{9}$$

$$z_{t,m}=\frac{\int_{t}^{m+t} f\left(t,\tau\right)d\tau}{m}. \tag{10}$$

El tipo *forward* instantáneo puede considerarse como un tipo marginal para un período de tiempo infinitesimal. El tipo de interés al contado en un momento t y con vencimiento $t+m$, $z_{t,m}$, equivale a la media geométrica de los factores financieros con los tipos *forward* instantáneos entre t y $t+m$. Es decir, derivando la ecuación (9) se halla que el tipo de interés *forward* instantáneo:

$$f\left(t,m\right)=z_{t,m}+\tau\cdot\frac{\partial z_{t,m}}{\partial\tau}. \tag{11}$$

Asimismo, a partir de las relaciones descritas, el precio de un título puede representarse mediante el tipo de interés a plazo tanto en tiempo discreto como continuo:

$$P_{t,M}=\sum_{m=1}^{M} C\cdot\prod_{t=0}^{m-1}\left(1+f_{t,t+1}\right)+N\cdot\prod_{t=0}^{M-1}\left(1+f_{t,t+1}\right), \tag{12}$$

$$P_{t,M} = \sum_{m=1}^{M} C \cdot \exp\left(-\int_{\tau}^{m} f\left(t,\tau\right) d\tau\right) + N \cdot \exp\left(-\int_{\tau}^{M} f\left(t,\tau\right) d\tau\right). \quad (13)$$

1.3.3. Factor de descuento

La función de descuento equivale al valor presente de una unidad monetaria que se pagará en algún momento futuro. El factor de descuento en t para un plazo m y calculado a partir del tipo de interés al contado, se define, en tiempo discreto y continuo, como:

$$d_{t,m} = \left(1 + R_{t,m}\right)^{-m} \quad (14)$$

y

$$\delta_{t,m} = \exp(-z_{t,m}.m). \quad (15)$$

Con esta notación, simultáneamente a la ecuación (1) que valora el precio de un título con un único pago, puede escribirse el precio en función del factor de descuento, tanto en tiempo discreto como continuo:

$$P_t = N \cdot \left(1 + R_{t,M}\right)^{-M} = N \cdot d_{t,M} \quad (16)$$

y

$$P_t = N \cdot \exp(-z_{t,M} \cdot M) = N \cdot \delta_{t,M}. \quad (17)$$

El precio de un título con cupones puede expresarse como la suma de los pagos individuales actualizados por sus correspondientes factores de descuento. Análogamente a las ecuaciones (3) y (4) se obtiene las expresiones equivalentes en tiempo discreto y continuo:

$$P_{t,M} = C \cdot d_{t,1} + C \cdot d_{t,2} + \ldots + C \cdot d_{t,M} + N \cdot d_{t,M} = C \cdot \sum_{m=1}^{M} d_{t,m} + N \cdot d_{t,M}. \quad (18)$$

y

$$P_{t,M} = C \cdot \delta_{t,1} + C \cdot \delta_{t,2} + ... + C \cdot \delta_{t,M} + N \cdot \delta_{t,M} = C \cdot \sum_{m=1}^{M} \delta_{t,m} + N \cdot \delta_{t,M} \,. \tag{19}$$

La relación algebraica entre las tres medidas del tipo de interés planteadas (tipos al contado, a plazo o función de descuento) está claramente definida a través de las ecuaciones (5) y (14), en tiempo discreto y en tiempo continuo, se concreta mediante las expresiones (10) y (15). De modo que, dado un factor de descuento se puede calcular, con simples transformaciones, el tipo al contado equivalente y el tipo *forward*, o viceversa.

Transformando la ecuación (14), se obtiene la siguiente expresión para el tipo de interés al contado como función del factor de descuento en tiempo discreto:

$$R_{t,m} = \left(d_{t,m}\right)^{-1/m} - 1\,. \tag{20}$$

En tiempo continuo, la equivalencia es la siguiente:

$$z_{t,m} = \frac{-\ln\left(\delta_{t,m}\right)}{m}\,. \tag{21}$$

Asimismo, el tipo *forward* puede expresarse en función del factor de descuento en tiempo discreto y continuo como (Fontanals y Ruiz, 2001):

$$f_{t,m} = \frac{d_{t,m-1} - d_{t,m}}{d_{t,m}}\,, \tag{22}$$

$$f\left(t,m\right) = \frac{-\partial \ln\left(\delta_{t,m}\right)}{\partial m}\,. \tag{23}$$

Si $d_{t,m}$ o $\delta_{t,m}$ denotan el factor de descuento para un pago único después de exactamente m años, $R_{t,m}$ o $z_{t,m}$ representan el interés al contado hasta el final del año m, y $f\left(t,m\right)$ o $f_{t,m}$ el interés a plazo de cada uno de los años $m = 1,2,...,M$, partiendo de las ecuaciones (20) y (22) pueden formularse las relaciones entre estas tres medidas. En tiempo discreto dichas relaciones son:

$$
\begin{aligned}
d_{t,1}^{-1} &= \left(1+R_{t,1}\right) = \left(1+f_{t,1}\right), \\
&\dots \\
d_{t,m}^{-1} &= \left(1+R_{t,m}\right)^{m} = \left(1+f_{t,1}\right)\dots\left(1+f_{t,m}\right), \\
&\dots \\
d_{t,M}^{-1} &= \left(1+R_{t,M}\right)^{M} = \left(1+f_{t,1}\right)\dots\left(1+f_{t,M}\right)
\end{aligned}
\tag{24}
$$

y en tiempo continuo equivalen a:

$$
\begin{aligned}
\delta_{t,1}^{-1} &= \exp\left(z_{t,1}\right) = \exp\left(\int_{t}^{t+1} f\left(t,\tau\right)\, d\tau\right), \\
&\dots \\
\delta_{t,m}^{-1} &= \exp\left(z_{t,m}\cdot m\right) = \exp\left(\int_{t}^{t+m} f\left(t,\tau\right)\, d\tau\right), \\
&\dots \\
\delta_{t,M}^{-1} &= \exp\left(z_{t,M}\cdot M\right) = \exp\left(\int_{t}^{t+M} f\left(t,\tau\right)\, d\tau\right).
\end{aligned}
\tag{25}
$$

Estas expresiones muestran que el nivel del tipo de interés para cada plazo puede calcularse a partir de simples transformaciones de los factores de descuento, de modo que es sencillo pasar de una medida a otra.

1.3.4. Cupón corrido

Con el fin de simplificar la expresión, hasta este punto se ha supuesto que el pago de los cupones tiene lugar en períodos enteros. Sin embargo, la situación más habitual es que las transacciones no se realicen en el momento de pago del cupón de un título, por lo que la valoración del título deberá reflejar el tiempo que falta hasta la fecha de pago del próximo cupón. Esto implica que el vendedor del título tiene el derecho a recibir el valor del cupón corrido.

El cupón corrido se calcula dividiendo el número de días transcurridos desde el pago del último cupón entre el total de días de un año y multiplicando el resultado por el cupón.[5]

[5] Cabe señalar que cada país tiene un convenio para el cálculo de días de un año. Por ejemplo, en España se consideran los años de 365 días y en Alemania de 360 días hasta el 1999. Sin embargo, los países

La valoración del precio de un título expresada en la ecuación (3) debe modificarse de tal modo que:

$$P_t + S_t = C\left(1+z_{t,1-s_t}\right)^{-(1-s_t)} + C\left(1+z_{t,2-s_t}\right)^{-(2-s_t)} + \cdots + C\left(1+z_{t,M-s_t}\right)^{-(M-s_t)} + \\ + N\left(1+z_{t,M-s_t}\right)^{-(M-s_t)} = \sum_{m=1}^{M} C\left(1+z_{t,m-s_t}\right)^{-(m-s_t)} + N\left(1+z_{t,M-s_t}\right)^{-(M-s_t)}, \qquad (26)$$

donde $S_t = s_t \cdot C$ representa el cupón corrido en el momento t. La variable s_t es la fracción de año transcurrida desde la fecha del último pago de cupón y el momento t de cotización. $s_t = D_t / 365$, donde D_t es el número de días transcurridos desde el último pago del cupón.

1.3.5. Tasa interna de rendimiento (TIR)

El precio de un título convencional es igual a la suma del valor presente de cada cupón o pago. En la práctica, cada título tiene asociado una tasa de rendimiento. El precio de un título con una estructura de pago como la de la ecuación (3), puede expresarse en función de la tasa de rendimiento como sigue:

$$P_{t,m} = \sum_{m=1}^{M} C \cdot \left(1+r_{t,M}\right)^{-m} + N \cdot \left(1+r_{t,M}\right)^{-M} = C \cdot a_{\overline{m|}\, r_{t,M}} + N \cdot \left(1+r_{t,M}\right)^{-M}. \qquad (27)$$

El rendimiento $r_{t,M}$ con vencimiento M representa la media del rendimiento de un título durante M años, asumiendo que todos los cupones se reinvierten durante la vida del título ($m = 1,2,...,M$) exactamente al mismo tipo de interés $r_{t,M}$.

La relación entre el tipo de interés y la tasa de rendimiento surge de igualar la ecuación (3) y (27):

pertenecientes a la Unión Europea, unifican sus criterios a partir del 1999 y consideran cada año los días exactos que este tiene. Véase capítulo 3, tabla 7.

$$P_{t,m} = \sum_{m=1}^{M} C \cdot \left(1 + R_{t,m}\right)^{-m} + N \cdot \left(1 + R_{t,M}\right)^{-M} = \sum_{m=1}^{M} C \cdot \left(1 + r_{t,M}\right)^{-m} + N \cdot \left(1 + r_{t,M}\right)^{-M} . \qquad (28)$$

Esta ecuación expresa la relación no lineal entre el tipo *spot* y el rendimiento. La diferencia entre ambos lados de la igualdad está en los factores de actualización donde aparece, por un lado, el tipo de interés al contado, que es distinto para cada plazo, y por otro, la tasa de rendimiento, que es única.

1.4. Modelos para el ajuste de la curva de tipos de interés

A pesar de la extensa literatura dedicada a este tema, no existe consenso a nivel académico ni profesional, sobre cuál es el modelo válido para establecer la curva de tipos de interés, si bien algunos modelos tienen más aceptación que otros. En el trabajo de Langetieg y Smoot (1989) se contrastan 22 formas funcionales aptas para definir la estructura de tipos.

La elección de un modelo u otro, a menudo se define por el ámbito de aplicación. Los operadores se inclinan por los modelos que ajustan mejor las particularidades de los tipos de cada plazo, mientras que en el contexto de política monetaria se aplican modelos que recogen mejor la tendencia y los aspectos puntuales pasan a ser secundarios.

Hay restricciones de tipo técnico para decidir la validez de un modelo. La curva de tipos al contado, la curva de tipos implícitos y la función de descuento son tres manifestaciones de la misma realidad y, tal como se ha visto, están relacionadas mediante formas funcionales. Es preciso tener en cuenta que la curva de tipos implícitos se obtiene de la primera derivada de la curva de tipos al contado, por lo tanto, hay que asegurar que la función resultante sea suficientemente suave para reflejar los tipos *forward*. Además el modelo escogido debe permitir que la función de descuento sea positiva, monótona no creciente e igual a la unidad en el origen.

Los tipos de interés se obtienen, básicamente, de dos fuentes: operaciones de deuda pública y contratos *swap*. La estimación a partir de los tipos de interés fijos de las operaciones *swap* es mucho más simple técnicamente, ya que las observaciones se presentan a intervalos regulares. La deuda pública incorpora más vencimientos en el pago de cupones y su distribución en el tiempo no es tan regular, sin embargo, cubre plazos más amplios. En bastantes países se encuentran títulos con plazo de 25 a 30 años. Las operaciones *swap* tienen un vencimiento medio alrededor de 10 años, por lo que cubren un plazo mucho más reducido. Otro aspecto de gran importancia es la diferencia respecto al riesgo de crédito. Los *swap* son operaciones que se instrumentan en mercados OTC (*over the counter*), por lo tanto sometidas a prima de riesgo. Esta prima queda incorporada en el tipo de interés produciendo una distorsión al alza (Novales y Abad, 2002). Este problema no existe en los títulos de deuda pública. Estos títulos pueden incorporar una prima relacionada con el riesgo de país, pero este aspecto no es relevante en los países que se analizan en este trabajo.

Una vez elegida la fuente de datos a utilizar, el problema consiste en definir la función sobre la que ajustar los datos. La finalidad es conseguir una curva continua que proporcione un tipo de interés para cada plazo. La elección de la función es crucial ya que implica un *trade off* entre alisamiento o suavidad y flexibilidad.

Desde el punto de vista histórico, el primer intento empírico de obtener curvas de tipos de interés lo llevó a cabo H. Guthmann en 1929. Sin embargo, el trabajo posterior de Durand (1942) es más conocido por su extensión. Recoge tipos de interés para un período de 40 años y utiliza métodos gráficos para obtener curvas de títulos de empresa. En estos trabajos previos no se incorporan los cupones, sólo se tienen en cuenta los vencimientos. No es hasta la década de los 60 que se encuentran trabajos relevantes relacionados con el tema. Cohen, Kramer y Waugh (1966) y Fisher (1966) son los primeros en utilizar mínimos cuadrados ordinarios para ajustar tipos de interés. En estos trabajos se ajusta la curva mediante una regresión entre los rendimientos de los bonos y sus vencimientos. Cohen, Kramer y Waugh (1996) especifican el tipo de interés al contado como una función del tiempo y el cuadrado del logaritmo del mismo, $z_m(t) = a + b\,t + c(log\,t)^2$. Meiselman (1962) y Nelson (1972) utilizan tipos de interés implícitos, sin embargo no tienen en cuenta los cupones. Hay que esperar hasta Fisher y Weil (1971) para incorporar la temporalidad de los cupones en los tipos *forward.* El trabajo de McCulloch (1971) inició una nueva etapa y se considera el trabajo básico dentro de este campo. A partir de él y siguiendo una metodología parecida se han desarrollado bastantes modelos. Los más utilizados se describen a continuación.

1.4.1. Clasificación

Para la definición del modelo de ajuste de tipos de interés es preciso tener en cuenta cada uno de los siguientes aspectos y definir cada opción:

- Operaciones utilizadas para deducir los tipos de interés (generalmente deuda pública o *swaps*).
- Ajuste de la curva de tipos al contado, tipos implícitos o función de descuento.
- Función base a ajustar.
- Minimización de error en precio o en tasas de rendimiento.
- Modelo de ajuste.

Respecto al primer punto, las fuentes más habituales de donde se obtiene información para calcular las curvas de tipos de interés son la deuda pública y los tipos de interés de la rama fija de los *swap*, conocidos como IRS (*interest return swap*). Técnicamente los *swap* tienen la ventaja de presentar una distribución de cuantías regular en el tiempo, por lo que es posible utilizar métodos de ajuste más simples, siempre que se disponga de suficientes datos. La técnica de *bootstraping* es muy utilizada por los profesionales. Se trata de un método recursivo que no precisa de técnicas de ajuste. Su mecánica se describe en la sección 1.4.2. Este método también puede aplicarse en deuda pública, realizando las oportunas correcciones y siempre que exista un volumen suficiente de información. Mercados de deuda pública con un gran volumen de cotización como el americano permiten aplicar *bootstraping* y obtener curvas realistas. En general, y como se ha apuntado anteriormente, la mayoría de Bancos Centrales obtienen las curvas de tipos de interés a partir de operaciones de deuda pública.

A continuación, se describen algunos de los modelos basados en cada una de las tres posibles formas de presentar los tipos de interés, función al contado, a plazo o descuento. En cada modelo se especifica el tipo de función a ajustar. Cada uno de estos modelos se describe posteriormente en la sección 1.4.3.

En la tabla 2 se indica, para cada una de las tres formas de presentar los tipos de interés, los modelos más significativos y su autor.

Tabla 2. Funciones de ajuste y modelos más significativos.

Función de descuento

McCulloch (1971, 1975)	*Splines* polinomicos
Schaefer (1981)	Polinomios de Bernstein
Vasicek y Fong (1982)	*Splines* exponenciales
Steeley (1991)	B-*Splines*

Tipos de interés implícitos

Coleman, Fisher y Ibbotson (1992)	*Splines*
Nelson y Siegel (1987)	Función parsimoniosa
Svenson (1994)	Función parsimoniosa
Wiseman (1994)	Modelo exponencial

Tipos de interés al contado

Langetief y Smoot (1989)	*Splines* cúbicos
Mastronicola (1991)	*Splines* cúbicos
Fisher, Nychka y Zervos (1995)	*Smoothing splines*
Gourieroux y Scalliet (1994)	*Smoothing splines*

De la información anterior se deduce la existencia de múltiples modelos. Tal como se puede constatar, en este ámbito es preciso utilizar funciones que permitan recoger las características de la estructura. Funciones simples, como las polinómicas, no son adecuadas para este tipo de ajuste. Para lograr un nivel de ajuste satisfactorio debería elevarse el grado del polinomio, provocando una pérdida de información relacionada con la tendencia de la curva.

McCulloch (1971, 1975), en su trabajo considerado como el punto de referencia en este ámbito, utiliza *splines* polinómicos de segundo grado y tercer grado, respectivamente. Los *splines* son técnicas de interpolación que permiten un buen ajuste y suficiente flexibilidad. La continuidad de la función resultante está garantizada porque se empalman las diferentes funciones en cada uno de los vértices de referencia. Por tratarse de un trabajo pionero y punto de partida para todos los demás, este modelo se detalla en la sección 1.4.3.

Los *splines* exponenciales son una variante de los *splines.* Sus precursores defienden que el uso de la función exponencial, básica en matemática financiera, permite obtener una función de descuento acorde con su propia estructura y por lo tanto los tipos *forward* resultantes no presentan la dispersión que se obtiene en el modelo de McCulloch (1971, 1975).

Nelson y Siegel (1987) y Svenson (1994) presentan un enfoque conceptualmente diferente. Parten de la definición de una propiedad financiera de los tipos de interés, tanto al contado como implícitos. Los tipos de interés tienen que ser asintóticos ya que los agentes del mercado no pueden distinguir diferencias de tipos de interés para plazos muy lejanos. En base a esta propiedad, definen una función que presenta asíntota horizontal para plazos elevados. La importancia de estos modelos se manifiesta en su utilización por la mayoría de Bancos Centrales. Su estudio detallado se expone en el capítulo 2.

Los dos últimos puntos considerados en la relación inicial de definición del modelo, minimización del error en precio o en TIR y modelo de ajuste, se detallan en el capítulo 5 para el caso particular del modelo de Nelson y Siegel.

Para describir las distintas formas de ajustar, se separa la metodología conocida como *bootstraping*, que consiste en un método recursivo muy simple, aplicable sólo en mercados con mucha información, de los métodos que utilizan técnicas de ajuste por minimización de errores.

1.4.2. Método recursivo

Tal como se ha indicado anteriormente, este método recursivo conocido como *bootstraping* sólo es aplicable cuando existe suficiente información para poder montar toda la curva vencimiento a vencimiento (Bierwag, 1991). En la práctica, se aplica en los mercados en que existen muchas referencias cotizando (Geyer y Mader, 1999). En el caso del mercado español no se dispone de suficientes referencias para poder aplicar una técnica tan sencilla. En el trabajo de tesis doctoral de Sandra Morini (1998) se encuentran datos de la media de títulos cotizados en el mercado de deuda pública español y, en ningún caso, superan las 30 referencias diarias. La tabla 10 del capítulo tercero detalla el número de datos semanales en cada país analizado para el período de estudio de este trabajo.

La curva cupón cero tiene que recoger los tipos de interés que cotizan en cada momento y, por tanto, implica que los cupones se invierten al tipo vigente. Con los datos que facilita el mercado, los precios de cotización, lo único que se puede calcular de forma cierta es la rentabilidad asociada a cada título. La tasa interna de rentabilidad o TIR mide la rentabilidad de la operación bajo la hipótesis de reinversión de los cupones a su propio tipo. La diferencia que hay entre los tipos de interés de la curva cupón cero y la curva TIR se denomina sesgo del cupón. Dada la curva de rentabilidades de los títulos que hay en el mercado puede obtenerse la estructura temporal de tipos de interés.

El *bootstraping* es una metodología muy sencilla y, precisamente por su simplicidad, los resultados que se obtienen utilizándola no son muy buenos en mercados como el español, donde el número de títulos que cotizan no es elevado. Pero en su concepción se refleja claramente la diferencia entre los tipos de interés de la curva cupón cero y las rentabilidades que proporciona el mercado.

Como se ha mencionado anteriormente, en el siguiente desarrollo se consideran periodos anuales para conseguir una mayor simplicidad de las expresiones, sin que ello represente ninguna pérdida de rigor formal, ya que mercados como el español, alemán o francés emiten títulos de deuda pública con pago de cupón anual. Los tipos de interés están expresados como efectivos anuales, aunque no se especifica en la notación para no sobrecargar las expresiones. Las fórmulas que se obtienen pueden aplicarse, sin ninguna dificultad, en mercados donde el pago de cupones presenta periodicidad diferente de la anual.

Para desarrollar esta metodología, se parte del tipo al contado a un año para operaciones elementales existente en el mercado, $z_{t,1}$, y se asume la siguiente hipótesis: en el mercado existe un título con vencimiento 2 años, emitido a la par y amortizable por su nominal, por lo que su TIR coincide con el tipo de interés de la emisión.

Con la información que proporciona un título con las características descritas se plantea la siguiente ecuación:

$$N = C\cdot(1+z_{t,1})^{-1} + (C+N)(1+z_{t,2})^{-2},$$

y se obtiene el tipo de interés al contado para el plazo de dos años, $z_{t,2}$.

Al tratarse de un método recursivo, implica que para la obtención del tipo de interés al contado correspondiente a un determinado plazo, es necesario disponer de información de todos los plazos anteriores. Conocido el tipo de interés al contado para el plazo $(r-1)$, $z_{t,r-1}$, se puede conseguir el tipo de interés para el período r, a partir de la ecuación:

$$N = C\cdot\prod_{s=1}^{r-1}(1+z_{t,s})^{-s} + (C+N)(1+z_{t,r})^{-r}.$$

La expresión del tipo de interés al contado para un plazo r, obtenida de la ecuación anterior es:

$$z_{t,r}=\left[\frac{1-r_r\cdot\sum_{s=1}^{r-1}(1+z_{t,s})^{-s}}{1+r_r}\right]^{-\frac{1}{r}}-1.$$

Este método se aplica, principalmente, cuando la fuente de información para construir la curva de tipos es el *IRS* (*interest return swap*). Estas operaciones presentan menor dispersión en sus plazos y la aplicación del método es más sencilla. Cuando la información se obtiene de las operaciones del mercado de deuda pública, la gran dispersión en los plazos, vencimiento y pago de cupones hace que el método requiera una elaboración previa de los datos para su aplicación. Existen diversas técnicas para centrar la información en vencimientos periódicos. La más habitual es la creación de títulos virtuales con vencimiento a un año, dos años, etcétera, que agrupan información de varios títulos reales con vencimientos próximos. Estos títulos virtuales se construyen haciendo coincidir la TIR con el tipo de interés de emisión, tal como se establece por hipótesis en el método. Una buena descripción de estas técnicas se puede encontrar en Lamothe *et al*. (1995).

Con esta metodología se consigue convertir la curva de rendimientos, TIR, en curva de tipos cupón cero. La diferencia entre ambos tipos corresponde al sesgo del cupón, $(z_{t,s}-r_s)$. Cuando la curva de tipos es creciente, el sesgo del cupón es positivo. Es decir, la curva de tipos de interés presenta un nivel superior a la curva de la TIR. Sin embargo, esta relación se invierte si la curva presenta decrecimiento respecto al plazo. La demostración matemática de esta relación se puede encontrar en Fontanals y Galisteo (1997).

1.4.3. Modelos matemáticos

En esta sección se exponen las líneas básicas de los modelos más significativos utilizados para la determinación de la curva de tipos de interés.

Se inicia con la descripción del modelo de McCulloch (1971). Es el primero que se planteó en términos de ajuste econométrico y el que ha marcado la pauta a seguir en trabajos posteriores. Aunque se trata de un modelo conocido, se ha considerado interesante describirlo brevemente.

Modelo de McCulloch (1971 y 1975)

McCulloch (1971) modeliza la función de descuento. En sus artículos plantea un modelo continuo que conlleva un pago de cupones considerado como una corriente continua, durante toda la vida pendiente del título. Esta hipótesis permite obviar la problemática del cupón corrido. En esta descripción se realiza un planteamiento discreto, con pago de cupones periódico, en función de la fecha de pago de cupones de cada título y considerando el cupón corrido. Este enfoque refleja la realidad del mercado.

McCulloch (1971) define la función de descuento como una combinación lineal de funciones:

$$\delta_t(m) = 1 + \sum_{h=1}^{k} a_h \cdot g_h(m),$$

que cumple la condición básica de la función de descuento, $\delta_t(0) = 1$, con $g_h(0) = 0$.

Las funciones $g_h(m)$ se definen matemáticamente, sin incorporar ninguna hipótesis financiera en su elección. Este es un aspecto diferenciador respecto al modelo de Nelson y Siegel, utilizado en este trabajo. En Nelson y Siegel (1987) se incorpora una condición financiera, la asintoticidad de los tipos de interés para plazos largos, como hipótesis de partida para plantear la función matemática que define el ajuste. Este planteamiento de tipo financiero proporciona un modelo más ajustado y acorde con el comportamiento de los tipos de interés.

McCulloch (1971, 1975) utiliza *splines* cuadráticos, en su primer trabajo, y *splines* cúbicos en el segundo. Los *splines* cúbicos permiten definir los tipos *forward* con una cierta suavidad a partir de la curva de tipos al contado. Esto se deriva de la relación entre tipos *forward* y los tipos al contado. Los tipos implícitos se obtienen de la primera derivada de la curva de tipos al contado. Los *splines* cuadráticos presentan una derivada lineal que difícilmente puede ser utilizada como curva *forward*.

El número de funciones a incorporar, *k*, se define arbitrariamente, aunque se obtiene un mejor ajuste si el número de funciones definidas es elevado. Sin embargo, este número ha de tener relación con el número de títulos disponibles en el mercado. Cuando el número de referencias que cotizan es reducido, un número elevado de funciones no proporcionaría un ajuste significativo. McCulloch propone utilizar:

$$k = E\left[\sqrt{n}\right],$$

siendo *E* la parte entera más próxima al resultado y *n* el número de título utilizados en el ajuste.

La finalidad de la definición de *k* es establecer la división del plazo en periodos diferentes pero que agrupen el mismo número de títulos en cada tramo. Las funciones $g_h(\cdot)$ se definen para cada uno de los tramos y enlazan, de forma continua, en los vértices de unión. La definición de los vértices ha generado un gran volumen de literatura. De hecho, la modificación de los vértices genera cambios sustanciales en la definición de la curva (Anderson *et al.*, 1996).

La definición de las funciones $g_h(\cdot)$ mediante *splines* cúbicos, en tiempo discreto, se puede encontrar en Fontanals y Ruiz (2001).

Respecto al proceso de ajuste, se trata de definir un sistema de ecuaciones donde cada ecuación recoge la información de un título, con sus características peculiares. La ecuación de equilibrio de cada título se corresponde con:

$$P_t + S_t = C\cdot\left(1+z_{t,1\text{-}s_t}\right)^{-(1-s_t)} + C\cdot\left(1+z_{t,2\text{-}s_t}\right)^{-(2-s_t)} + \ldots + C\cdot\left(1+z_{t,M\text{-}s_t}\right)^{-(M-s_t)} +$$
$$+ N\cdot\left(1+z_{t,M\text{-}s_t}\right)^{-(M-s_t)} = \sum_{m=1}^{M} C\cdot\left(1+z_{t,m\text{-}s_t}\right)^{-(m-s_t)} + N\cdot\left(1+z_{t,M\text{-}s_t}\right)^{-(M-s_t)},$$

donde $S_t = s_t \cdot C$ representa el cupón corrido en el momento *t*, de acuerdo con la definición de la sección 1.3.4.

Considerando el número total de títulos *n* que cotizan en el mercado en un momento determinado, o bien durante una sesión, un título determinado *j*, con $j = 1,\ldots n$, presenta la siguiente ecuación expresada mediante la función de descuento:

$$P_{t,j} + S_{t,j} = C_j \cdot \sum_{s=1}^{M_j} \delta_t(m_{s,j}) + N_j \cdot \delta_t(M_j)\,.$$

La función de descuento genérica, $\delta(\cdot)$, se sustituye por la función propuesta en el modelo de McCulloch,

$$P_{t,j} + S_{t,j} = C_j \cdot \sum_{s=1}^{M_j} \left(1 + \sum_{h=1}^{k} a_h \cdot g_h(m_{s,j})\right) + N_j \cdot \left[1 + \sum_{h=1}^{k} a_h \cdot g_h(M_j)\right],$$

con $j = 1, \ldots n$ títulos disponibles.

Este conjunto de *n* ecuaciones permite estimar los coeficientes a_h que configuran la curva de tipos definitiva, ya que los demás parámetros son conocidos. Una aplicación práctica detallada se puede encontrar en Fontanals y Ruiz (2001).

Este método es bastante utilizado entre los operadores del mercado. Presenta algunas ventajas operativas entre las que cabe destacar el hecho de que las ecuaciones resultantes sean lineales, lo que permite la utilización de mínimos cuadrados ordinarios (MCO) menos complejos y con mayor facilidad de aplicación que los métodos de estimación no lineal. Proporciona una curva continua y derivable para todo el plazo y suficientemente flexible para captar las distintas formas que suele presentar la función de descuento, incluidas concavidades y convexidades puntuales.

Los detractores del método se centran en la descripción de los tipos *forward*, principalmente para plazos alejados del origen (para el mercado español véase AIAF, 2000 y Núñez, 1995). Con este método de ajuste suelen aparecer formas poco suaves, no asintóticas, tal como seria razonable esperar para los tipos implícitos a largo plazo. Las denominadas *formas explosivas* en la cola de la curva, que proporciona el modelo, no reflejan la realidad de los tipos de interés.

Se han propuesto numerosas alternativas al planteamiento de McCulloch (1971, 1975). Algunos de estos trabajos se citan a continuación.

Modelo de Schaefer (1981)

Este modelo utiliza polinomios de Bernstein para definir la función de descuento, sin embargo, sigue la misma metodología que la propuesta por McCulloch (1971, 1975).

Schaefer define la función de descuento como:

$$\delta_m = 1 + \sum_{j=1}^{k} a_j \theta_j(m),$$

con $\theta_j(m)$ dada por:

$$\theta_j(m) = \sum_{r=0}^{k-j} (-1)^{r+1} \binom{k-j}{r} \cdot \frac{m^{j+r}}{j+r}$$

$$j = 1,...k$$

y sin pérdida de generalidad $m \in [0,1]$, $a_j \geq 0$. Para asegurar la no negatividad de la función de descuento, se impone la restricción de $\delta(1) \geq 0$ por lo que $\sum_{j=1}^{k} a_j \theta_j(1) \geq -1$.

Estas funciones empalman en los vértices, al igual que los *splines* de McCulloch (1971, 1975), de modo que el ajuste es una función continua y derivable. A título de ejemplo, para $k = 5$, las funciones resultantes son:

$$\theta_1(m) = -m + 2m^2 - 2m^3 + m^4 - \frac{1}{5}m^5$$

$$\theta_2(m) = -\frac{1}{2}m^2 + m^3 - \frac{3}{4}m^4 + \frac{1}{5}m^5$$

$$\theta_3(m) = -\frac{1}{3}m^3 + \frac{1}{2}m^4 - \frac{1}{5}m^5$$

$$\theta_4(m) = -\frac{1}{4}m^4 + \frac{1}{5}m^5$$

$$\theta_5(m) = -\frac{1}{5}m^5.$$

La ventaja de estas funciones sobre las polinómicas convencionales es que proporcionan mejores aproximaciones en las derivadas, por lo que conlleva una mejora en la curva de tipos implícitos.

Modelo de Vasicek y Fong (1982)

Siguiendo con la misma problemática, y con la intención de conseguir curvas de tipos implícitos suficientemente asintóticos para plazos largos, estos autores proponen la utilización de *splines* exponenciales. Su enfoque se basa en introducir en el modelo el hecho que la función de descuento es exponencial, por definición, por lo que este aspecto tiene debe reflejarse en el modelo.

Estos autores realizan una transformación del argumento plazo, *m*, para la función de descuento δ_m. Esta transformación es del tipo,

$$m = -\left(\frac{1}{\alpha}\right)\ln\left(1 - x\right),$$

con $0 \leq x < 1$. El valor de α corresponde al tipo *forward* para un plazo muy largo, que se obtiene a partir de los datos en el proceso de estimación.

Con esta transformación, la variable x tiene una naturaleza de tipo de descuento efectivo $D(m)$, para todo el plazo considerado, definido en campo continuo y expresado como tipo al contado, ya que:

$$\begin{aligned} -m \cdot \alpha &= \ln(1 - x) \\ \exp\left(-m \cdot \alpha\right) &= 1 - x \\ 1 - \exp\left(-m \cdot \alpha\right) &= x. \end{aligned}$$

A partir de la definición de tipo de descuento efectivo $D(m)$, también se obtiene el mismo resultado. Efectivamente, partiendo de la relación entre dos capitales financieros y utilizando un factor financiero continuo y estacionario,

$$C = C' \cdot \exp\left(-\alpha m\right),$$

$$D(m) = \frac{C' - C}{C'} = \frac{C' \cdot (1 - \exp\left(-\alpha \cdot m\right))}{C'} = 1 - \exp\left(-\alpha \cdot m\right) = x.$$

Vasicek y Fong (1982) utilizan un *spline* cúbico para estimar la transformada de la función de descuento.

La función de descuento, que se establece para cada uno de los intervalos en que se ha dividido el horizonte temporal, presenta la forma genérica:

$$\delta_m = b_0 + b_1 \exp\left(-\alpha m\right) + b_2 \exp\left(-2\alpha m\right) + b_3 \exp\left(-3\alpha m\right).$$

Al sustituir la expresión de *m* en cada término, se obtiene una función de descuento lineal respecto a la variable *x*,

$$\delta_m = b_0 + b_1(1-x) + b_2(1-x)^2 + b_3(1-x)^3 ,$$

con las ventajas que conlleva respecto a los métodos que se pueden utilizar en su estimación.

En general, la expresión de la función de descuento es:

$$\delta_m = \sum_{r=0}^{h} b_r (1-x)^r .$$

Este método, según sus autores, proporciona buenos resultados en los tipos implícitos, aunque no facilitan datos que los corroboren. Shea (1985) proporciona resultados empíricos que llevan a afirmar que no hay evidencia de la mejora de este modelo respecto a los *splines* polinómicos.

Este método ha sido aplicado y contrastado por Contreras *et al*. (1993, 1994) con datos del mercado español. Estos autores contrastan empíricamente las propiedades asintóticas de los tipos *forward* a largo plazo, asegurando que los resultados obtenidos en el ajuste de curvas de tipos son mejores con este modelo que las curvas obtenidas utilizando el método de McCulloch (1971, 1975).

Langetieg y Smoot (1989) proponen un modelo en la misma línea del trabajo de Vasicek y Fong (1982). En base a una función de descuento exponencial utilizan *splines* cúbicos para el ajuste. La función de descuento adquiere la forma:

$$\delta_m = \exp\left[-m\sum_{j=1}^{h} a_j f_j(m)\right].$$

Los autores creen que su enfoque proporciona mejores resultados que el modelo de Vasicek y Fong (1982), ya que éste es un caso particular del propuesto por Lagentieg y Smoot (1989).

Otra variante, dentro del mismo planteamiento, lo proponen Coleman, Fisher y Ibbotson (1992). Aquí la variable es el tipo de interés implícito. Definen la curva de *forward* como una función constante a tramos,

$$f(m) = f_j,$$

con $m_{j-1} < m \leq m_j$. Los periodos (m_{j-1}, m_j) se eligen arbitrariamente.

Este modelo es equivalente a utilizar *splines* exponenciales para estimar la función de descuento,

$$\delta_m = \exp\left\{-\left[f_1 m_1 + f_2(m_2 - m_1) + f_3(m - m_2)\right]\right\}.$$

Las autores defienden que los tramos de tipos implícitos constantes son capaces de proporcionar un ajuste mejor que el que proporcionan *splines* cúbicos o cuadráticos.

Algunos autores ponen de manifiesto la problemática de la multicolinealidad existente cuando se aplican *splines* como los utilizados por McCulloch (1971, 1975). Estos modelos presentan con frecuencia una matriz de variables explicativas relacionadas linealmente entre ellas. Como resultado, la aplicación de MCO para la estimación de los parámetros no es muy fiable. En esta línea, Steely (1991) propone utilizar como función un *B-spline* de orden k del tipo:

$$B_p^k(m) = \sum_{l=p}^{p+k+1}\left[\prod_{h=p,h\neq 1}^{p+k+1}\frac{1}{(m_h - m_l)}\right]\cdot(m - m_l)_+^k,$$

con $-\infty < m < \infty$, $(m - m_l)_+ = \max\left[0, (m - m_l)\right]$ y el subíndice p sólo es no negativo para $m \in \left[m_p, m_{p+k+1}\right]$.

Por ejemplo, una función *B-spline* lineal con $k = 1$ vendría dada por:

$$B_p^k(m) = \sum_{l=p}^{p+k+1} \left[\prod_{h=p,h\neq 1}^{p+k+1} \frac{1}{(m_h - m_l)} \right] \cdot (m - m_l)_+^k \qquad -\infty < m < \infty .$$

Esta función es no nula fuera del intervalo $\left[m_p, m_{p+2} \right]$ y toma los valores:

$$B_p^k(m) = \begin{cases} 0 & m \leq m_p \\ (m - m_p)/(m_{p+1} - m_p)(m_{p+2} - m_p) & m_p < m \leq m_{p+1} \\ (m_{p+2} - m)/(m_{p+2} - m_p)(m_{p+2} - m_{p+1}) & m_{p+1} < m \leq m_{p+2} \\ 0 & m_{p+2} < m. \end{cases}$$

Para obtener una curva de tipos implícitos suficientemente suave es necesario utilizar un *spline* de grado 3, como mínimo.

Se han identificado algunos problemas que se presentan al utilizar *splines* cuando se ajusta la curva de tipos de interés. Shea (1984) demuestra que las restricciones implícitas en la utilización de *splines* cúbicos de McCulloch (1971, 1975), no aseguran el decrecimiento de la función de descuento en todo el tramo, apareciendo pendientes positivas en la curva para plazos muy elevados. Estos resultados se traducen en *forwards* negativos para algunos tramos. Los polinomios de Berstein presentan el mismo problema si no se imponen restricciones para evitarlo.

Otro aspecto muy importante a tener en cuenta es el número y localización de los extremos de cada uno de los intervalos en los que se divide el horizonte temporal. McCulloch (1971, 1975) propuso calcular el número de intervalos mediante la raíz cuadrada del número de observaciones. Algunos modelos posteriores siguen la misma norma. Una particularidad del método de McCulloch (1971, 1975) es que permite que los vértices varíen día a día. Algunos autores sostienen que estos movimientos de los vértices pueden crear desplazamientos no realistas de la curva de tipos. Alternativamente, Litzenberger y Rolfo (1984) localizan los vértices en 1, 5 y 10 años, de forma fija. Un plazo a considerar es el de 6 meses, si existen suficientes letras del Tesoro que justifiquen su inclusión. El test de Langetieg y Smoot (1989) contrasta la eficiencia de ambos métodos: vértices fijos y variables y concluye que los vértices fijos proporcionan mejores resultados. Steeley (1991) y Fisher, Nychka y Zervos (1995) aplican técnicas bastante sofisticadas para determinar el número óptimo de vértices y su localización.

Una línea de investigación que ha generados algunos trabajos en la década de los 50, son los modelos basados en *splines* suavizados. Se trata de penalizar un exceso de desviaciones (*roughness*) y mediante un parámetro se controla el tamaño de la penalización. Un aumento en la penalización reduce el número de parámetros del modelo. Mientras que en la estimación de *splines* mediante regresión, el número de parámetros a estimar es fijo y se define exógenamente, en los *splines* suavizados se utiliza la técnica de validación cruzada generalizada que proporciona el número de parámetros a estimar, de forma endógena. Fisher, Nychka y Zervos (1995) y Diament (1993) son modelos representativos de esta línea. Para el mercado español, Morini (1998) y Giner y Morini (2001) contrastan distintos modelos para ajustar la curva de tipos de interés.

Eurostat, la *Statistical Office of European Communities*, construye curvas cupón cero desde el año 2000 (véase la dirección *web* http://*epp.eurostat.cec.eu.int/cache/ITY_PUBLIC/EYC/EN*). El modelo utilizado se basa en *splines* suavizados, en base a polinomios de tercer grado. El tipo de interés al contado se define como:

$$z_{t,M} = b_0 + b_1 \log M + b_2 (\log M)^2 + b_3 (\log M)^3 + b_4 \left[\log\left(\max(1, M/5)\right)\right]^3 + b_5 \left[\log\left(\max(1, M/10)\right)\right]^3,$$

siendo *M*, el vencimiento y el vector *b* los parámetros a estimar.

Esta entidad ha elegido esta modalidad de s*plines* por su flexibilidad para reflejar los movimientos de tipos de interés. El plazo se ha dividido en tres intervalos con vértices en 5 y 10 años, vértices fijos. La continuidad de la función y de su primera y segunda derivada en los vértices, aseguran la flexibilidad de la curva.

Modelo de Nelson y Siegel (1987) y modelo de Svensson (1994)

Los modelos expuestos hasta el momento utilizan una función matemática arbitraria como base para el ajuste de la curva de tipos de interés. Nelson y Siegel (1987) son los primeros en proponer un modelo basado en una propiedad financiera. Estos autores destacan que la curva de tipos *forward* debe ser asintótica para plazos muy largos. Cuando el plazo es suficientemente grande los inversores no diferencian el tipo de interés *forward* de un año y el del siguiente, por lo que la función de ajuste debe incorporar esta propiedad.

A partir de la función que describe el tipo *forward* en función del plazo *m*, Nelson y Siegel (1987) definen:

$$f_m(\beta) = \beta_0 + \beta_1 \exp\left(\frac{-m}{\tau_1}\right) + \beta_2 \frac{m}{\tau_1} \exp\left(\frac{-m}{\tau_1}\right),$$

donde $\beta = (\beta_0, \beta_1, \beta_2, \tau_1)$ denota el vector de parámetros a determinar.

Svensson (1994) aumenta la flexibilidad del modelo introduciendo dos nuevos parámetros, de forma que el tipo implícito se ajusta mediante la función:

$$f_m(\beta) = \beta_0 + \beta_1 \exp\left(\frac{m}{\tau_1}\right) + \beta_2 \frac{m}{\tau_1} \exp\left(\frac{m}{\tau_1}\right) + \beta_3 \frac{m}{\tau_2} \exp\left(\frac{m}{\tau_2}\right)$$

con $\beta = (\beta_0, \beta_1, \beta_2, \beta_3, \tau_1, \tau_2)$.

Estos modelos han tenido gran aplicación, principalmente, en el ámbito de la política monetaria. Como refleja la tabla 1 de este capítulo, los Bancos Centrales de muchos países han incorporado estos modelos en la construcción de sus curvas de tipos de interés.

Para el desarrollo de este trabajo se ha utilizado el modelo de Nelson y Siegel (1987). Dada la relevancia de estos modelos parsimoniosos en política monetaria, el capítulo 2 se destina al estudio detallado del modelo de Nelson y Siegel (1987) y su versión extendida de Svensson (1994).