UNIVERSITAT DE BARCELONA
FACULTAT DE CIÈNCIES ECONÒMIQUES I EMPRESARIALS
DEPARTAMENT DE MATEMÀTICA ECONÒMICA, FINANCERA I ACTUARIAL

LA TEORIA DE LA CREDIBILITAT : EXTENSIONS I APLICACIONS

Lluís Bermúdez i Morata
Barcelona, maig 1997.

LA TEORIA DE LA CREDIBILITAT : EXTENSIONS I APLICACIONS

Lluís Bermúdez i Morata
Barcelona, maig 1997.

UNIVERSITAT DE BARCELONA
FACULTAT DE CIÈNCIES ECONÒMIQUES I EMPRESARIALS
DEPARTAMENT DE MATEMÀTICA ECONÒMICA, FINANCERA I ACTUARIAL

LA TEORIA DE LA CREDIBILITAT : EXTENSIONS I APLICACIONS

Lluís Bermúdez i Morata

Tesi Doctoral per optar al Títol de Doctor en Ciències Econòmiques i Empresarials.
Programa de Doctorat: Mètodes Matemàtics en Economia Financera. Bienni 1992-1994.
Tesi dirigida per Dr. Antonio Alegre i Dra. M. Àngels Pons.

Per a la realització d'aquesta Tesi Doctoral i, en concret, per a l'estada al *Center for Risk and Insurance Research* de la localitat belga de Leuven, s'ha comptat amb l'ajut econòmic concedit per les Beques per a activitats de recerca relacionades amb estudis de 3r cicle de la convocatòria de 1995, que va ser atorgada pel Comissionat per a Universitats i Recerca de la Direcció General de Recerca del Departament de la Presidència de la Generalitat de Catalunya.

AGRAÏMENTS

Aprofito l'avinentesa que m'ofereix la presentació d'aquesta Tesi Doctoral per expressar la meva gratitud als meus directors de tesi, el Dr. Antonio Alegre i la Dra. M. Àngels Pons, perquè ells han fet possible la realització d'aquest treball.

Faig extensiu el meu agraïment a tots els companys del Departament de Matemàtica Econòmica, Financera i Actuarial i, en especial, a aquells que durant el període de gestació de la tesi també han estat capficats en llurs tesis i, tot i així, han soportat reiteradament les meves preocupacions.

Per altra banda, de la meva estada, durant el curs acadèmic 1995-1996, al *Center for Risk and Insurance Research* de la localitat flamenca de Leuven, voldria agrair molt especialment al Dr. Marc Goovaerts la possibilitat que em va oferir; també vull agrair l'ajuda i col·laboració que ell mateix, el Dr. Jan Dhaene i el Dr. Dennis Dannenburg em van prestar per a la consecució de la Tesi Doctoral que ara presento. Com a prova de la nostra amistat, escric les paraules següents en la seva llengua:

> *Deze thesis kwam mede tot stand dankzij de steun, samenwerking en vriendschap die ik kreeg van professor Marc Goovaerts, Jan Dhaene en Dennis Dannenburg. Hiervoor wil ik hen dan ook mijn oprechte dank betuigen.*

A més, vull donar les gràcies a tota la comunitat d'estudiants (ERASMUS, flamencs i altres) de Leuven que van compartir amb mi un any que ells han fet inoblidable.

Durant tots aquests anys de treball sempre he tingut al meu costat els meus germans Olga, Àngel, Núria i Sergi, i també, els meus amics que, tot i no entendre un esborrany sobre la Teoria de la Credibilitat, tenen tanta il·lusió com jo en aquest moment.

Finalment, però no per això menys important, vull fer una menció especial als meus pares que, amb el seu pertinaç esforç durant vint-i-vuit anys, han permès que jo arribés fins aquí. Moltes gràcies.

A la meva mare

Sumari

Capítol 1

Introducció

1.1 Aproximació a la Teoria de la Credibilitat

1.1.1 Què és la Teoria de la Credibilitat?

El terme Credibilitat fou incorporat a la ciència actuarial com una mida de la creença, de la importància, que l'actuari ha de donar a l'experiència particular d'un risc a l'hora de calcular la seva corresponent prima. L'actuari disposa d'una informació global del conjunt de la cartera, i també, d'una de limitada per a cada pòlissa. La Teoria de la Credibilitat utilitza ambdues classes d'experiència, la individual i la col·lectiva, per ajustar la prima de cada individu.

Definir en poques paraules què és la Teoria de la Credibilitat no és fàcil, de fet, els diferents investigadors que hi han treballat no han trobat una mateixa definició. Per posar un exemple, Norberg, R. (1979) considera que:

> *La Teoria de la Credibilitat investiga certs principis i mètodes per ajustar les primes al mateix temps que l'experiència de les reclamacions és obtinguda.*

Aquesta definició ens permet aproximar-nos al concepte de Teoria de la Credibilitat, de totes maneres, el concepte és molt més ampli. A mida que avancem en aquest capítol tindrem una idea més oberta del que significa aquesta teoria.

Inicialment, la Credibilitat fou utilitzada com a solució de l'heterogeneïtat a les carteres. Els sistemes de tarificació, en la pràctica asseguradora, consten de dos nivells. En el nivell superior, donada una certa cartera, hi ha d'haver un equilibri entre la totalitat dels pagaments i el conjunt d'ingressos per primes. En canvi, en el nivell inferior, tenim un problema a l'hora de distribuir justament els ingressos per primes entre les pòlisses individuals. És a dir, per a cada risc, fixar la prima individual que li correspon.

Si la cartera és homogènia, on els pagaments dels sinistres són designats variables aleatòries independents i amb una funció de distribució coneguda i comuna, l'actuari pot aplicar un criteri de primes comú per distribuir l'ingrés total per primes entre els diferents contractes. Veiem-ho, si considerem una cartera amb la quantia total de sinistres S, dividida entre sinistres individuals de k riscos independents X_j, $j = 1, \dots, k$. I sigui $\pi(\cdot)$ un criteri de prima, una regla que proporciona una prima per cada risc, ens preguntem com hauria de ser distribuïda entre les pòlisses la quantia total de sinistres. Amb un criteri de primes additiu, la prima per la suma de riscos independents és igual a la suma de primes individuals, per tant, $\pi(S) = \sum_j \pi(X_j)$. A més, podem aplicar el mateix criteri de primes per cada risc. Obviament, la propietat additiva és desitjable sempre i quan els riscos que hi participin siguin similars. Però, generalment les carteres són heterogènies, en el sentit que per pòlisses amb similars característiques, els valors esperats dels sinistres, és a dir, les primes pures de cada risc, difereixen. Podem dir que una pòlissa és similar a una altra a partir de l'observació d'unes característiques determinades, però inevitablement, hi han propietats o característiques que no poden ser observades o són difícilment valorades i, fins i tot, pot ser que no sigui admès per la societat de desvelar-les. Aquestes característiques aporten heterogeneïtat a la cartera, que es reflexa a través dels valors observats dels sinistres per a cada pòlissa.

Així doncs, per salvar aquest inconvenient, d'una cartera heterogènia podríem agrupar els contractes del mateix tipus en classes homogènies de riscos. Però ens trobem amb un altre problema: un mateix criteri de primes no pot ser aplicat per calcular les primes individuals. Dues raons ens porten a aquesta consideració. D'una banda, un criteri de primes com el que hem esmentat abans, assumeix que la distribució dels riscos és coneguda. Això no serà possible per la insuficient experiència que disposem de les petites subclasses homogènies, en el límit cada pòlissa és una subclasse. Per altra banda, com acabem de comentar, certes característiques fan que les pòlisses que considerem idèntiques no tinguin una idèntica distribució. Per tot això, no podem considerar subcarteres de pòlisses homogènies per aplicar un criteri de prima determinat per a cada subclasse.

Donada una certa cartera, podem comprovar si és homogènia a través de contrastos estadístics, per exemple, podem aplicar un test xi-quadrat d'homogeneïtat a cada cartera i veure si la hipòtesi nul·la d'homogeneïtat és rebutjada. Si la cartera la podem considerar homogènia, no tenim cap problema a l'hora d'aplicar la mateixa prima a totes les pòlisses. Contràriament, si és heterogènia, tenim dues possibilitats: la primera seria aplicar a totes les pòlisses la mateixa prima col·lectiva, la segona construir un sistema de primes per al qual a cada pòlissa j li fos carregada una prima individual π_j . Hi ha però, arguments en contra d'aquestes dues possibles solucions. Escollint la prima col·lectiva m per a tots els ricos, perjudica a aquells que, sent de la mateixa subclasse, tenen menys sinistres i afavoreix als que tenen un gran nombre de sinistres. És a dir, amb aquest sistema s'atrauen els riscos "dolents" i s'espanta els riscos "bons". En canvi, en l'altre extrem, si carreguem la prima pura de cada risc, anem contra la mateixa natura de les assegurances, on els diferents individus decideixen cobrir-se els riscos entre ells. Per fer-se una idea, en el límit, aquella pòlissa que no tingués cap sinistre no hauria de pagar res per cobrir-se. Arribats a aquest punt, la Teoria de la Credibilitat promou, com un compromís, carregar a cada pòlissa una mitjana ponderada entre la prima col·lectiva i la prima pura de risc.

En els models de credibilitat l'heterogeneïtat, o sigui, la incertesa en la distribució dels sinistres, és modelada considerant el paràmetre de risc Θ_j com una realització de la variable aleatòria Θ que descriu les característiques del risc. L'heterogeneïtat entre pòlisses es mesurada per $a = Var[E[X \,/\, \Theta]]$ (la variància "entre" pòlisses de l'anàlisi de variàncies), mentre que el valor esperat $S^2 = E[Var[X \,/\, \Theta]]$ (la variància "dins") mesura la fluctuació del risc en el temps. Els models de credibilitat ens proporcionen tècniques per determinar primes per pòlisses en carteres més o menys heterogènies quan es té una experiència limitada o irregular de cada contracte però una extensa informació del total de la cartera. Els models de credibilitat fan servir les dues classes d'experiència per ajustar millor les primes. Per un element determinat de la cartera heterogènia, es fa servir tant la informació col·lectiva com la individual. Amb totes dues es fa una mitjana ponderada per calcular la prima, la ponderació, o la importància, que donem a la informació individual ve expressada a través del denominat factor de credibilitat.

Per veure-ho amb més claredat, estudiarem un model bàsic de credibilitat que es coneix com model de Bühlmann (vegeu l'apèndix A.1). Considerem X_s com l'experiència de sinistres a l'any s , $s = 1, \dots, t$ d'una pòlissa particular dins d'una cartera. Llavors, X_s pot ser descomposada com:

$$X_s = m + \Xi + \Xi_s \tag{1.1}$$

on m és la mitjana global (o col·lectiva) de la cartera en conjunt; Ξ és la desviació aleatòria sobre aquesta mitjana m ; i per últim, Ξ_s és la desviació a l'any s sobre la mitjana particular $\bar{X}$.

La variable aleatòria Ξ descriu la qualitat del risc: si és una "bona" pòlissa el seu valor serà negatiu, si és una pòlissa "dolenta", llavors el seu valor serà positiu. La variació de Ξ és la causa de l'heterogeneïtat de la cartera, de la variabilitat "entre" pòlisses. La distribució de Ξ descriu l'estructura de la cartera. En canvi, Ξ_s

descriu la variació "dins" de cada pòlissa, la variació en el temps de la sinistralitat. Es considera que els Ξ_s són independents i idènticament distribuïts i el seu valor esperat és igual a zero.

A continuació, mostrem la solució credibilística pel model de Bühlmann, recordem que a l'apèndix A.1 d'aquesta tesi doctoral es pot trobar més informació sobre aquest model. Donada l'expressió (1.1), i definint $m = E[X_s]$, $a = Var[\Xi]$ i $S^2 = E[Var[\Xi_s / \Xi]]$, llavors la combinació lineal $g(X_1, ..., X_t) = g_0 + g_1 X_1 + \cdots + g_t X_t$ que és la millor predicció per X_{t+1} segons el mínim error quadrat esperat de $E[(X_{t+1} - g(X_1, ..., X_t))^2]$ és:

$$\hat{X}_{t+1} = (1 - z) \cdot m + z \cdot \bar{X} \tag{1.2}$$

on

$$z = \frac{at}{S^2 + at} \tag{1.3}$$

és el factor de credibilitat òptim que resulta, i

$$\bar{X} = \frac{1}{t} \sum_{s=1}^{t} X_s \tag{1.4}$$

és l'estimador individual.

La prima de credibilitat (1.2) és una mitjana ponderada (segons el factor de credibilitat z) entre el valor esperat de la quantia individual del sinistre ($\bar{X}$) i el valor esperat de la quantia del sinistre per la cartera en el seu conjunt (m). Carregant aquesta prima de credibilitat, el nivell inferior del sistema de tarificació, del qual parlàvem al començament d'aquesta introducció, no canvia la prima global recollida per a tot el col·lectiu. És a dir, la suma total d'aquestes primes de credibilitat és la mateixa que resultaria de cobrar la mateixa prima m a totes les pòlisses. Per $z = 0$, la prima de credibilitat és igual a la mitjana col·lectiva; això només s'accepta si la cartera és homogènia. Per $z = 1$, la prima calculada només es basa en la informació individual de cada pòlissa. Per regla general, la informació individual és escassa, per tant, aquest estimador no pot ser utilitzat en la pràctica. Per altra banda, el valor de a reflexa l'heterogeneïtat de la cartera, i S^2 és una mesura global de la variabilitat dins de cada subclasse homogènia.

El factor de credibilitat és un nombre comprés entre 0 i 1, ambdós inclosos. Les propietats que verifica aquest factor són les següents:

1.- Si $t \to \infty \implies z \to 1$

Quan t creix, llavors z tendeix a la unitat. Això significa que si tenim més informació sobre el risc, més gran serà la ponderació relativa donada a l'experiència individual. En el cas de tenir experiència completa, és obvi, que tindrem una total confiança en la prima de risc individual.

2.- Si $a = 0 \implies z = 0$

Com a és un indicador de la heterogeneïtat dins la cartera, si és nul, significa que no hi ha heterogeneïtat i m és, per tant, el millor estimador lineal de credibilitat.

3.- Si $a \to \infty \implies z \to 1$

Que a tendeixi a infinit ens indica que el col·lectiu és extremadament heterogeni, per tant, les diferències observades entre les reclamacions registrades d'un risc a un altre són importants. En aquest cas, $\bar{X}$ és el millor estimador lineal.

4.- Si $S^2 \to \infty \implies z \to 0$

I per últim, quan S^2 tendeix a infinit , això és, si existeix molta variància en la sinistralitat individual, el millor estimador per la prima de risc individual és la col·lectiva.

Resumint, la Teoria de la Credibilitat es pot fer servir per dissenyar l'estructura de les primes per una cartera heterogènia. També la podem fer servir per revisar una estructura de primes ja existent. Si bé en un inici va ser creada per la tarificació *a posteriori*, també pot ser aplicada per tarificar *a priori*. De la mateixa manera, des de la seva aparició, s'ha anat aplicant a diversos aspectes actuarials com veurem més endavant. Primer, vegem com ha estat l'evolució d'aquesta teoria.

1.1.2 Evolució de la Teoria de la Credibilitat

La Teoria de la Credibilitat té les seves arrels al començament del segle vint, quan els articles de Mowbray, A. (1914) i Whitney, A. (1918) van ser publicats. Mowbray va ser el primer a investigar com de gran hauria de ser l'experiència del risc, en una assegurança determinada, per obtindre una prima individual acceptable. És a dir, va intentar respondre a la pregunta de quants assegurats, coberts pel mateix contracte, són necessaris per tenir una estimació completament creïble del ràtio de la prima, basada en l'experiència individual d'un assegurat, que es pugui utilitzar com a prima per al pròxim any. Whitney va establir que, en algunes assegurances, el risc assegurat proporciona una experiència amb el pas del temps, o sigui, les contingències passen amb prou regularitat com per tenir una informació útil a l'hora de calcular-ne la prima. Per tant, intenta establir un equilibri entre l'experiència del grup i l'experiència individual. Aquests treballs van aixecar la polèmica de quina prima hauria de ser la utilitzada si l'experiència individual per una pòlissa era considerada insuficient. Una alternativa clara podria ser la prima global, aquella basada en l'experiència col·lectiva de la cartera de la qual forma part la pòlissa. Les fórmules del tipus indicades per Whitney s'han denominat fórmules credibilístiques. Darrera d'aquestes no hi havia cap model matemàtic ben fonamentat. No va ser fins el 1965 que no van aparèixer els veritables fonaments teòrics de la Teoria de la Credibilitat. Aquests van ser donats per Bühlmann, H. (1967,1969) quan va presentar la seva fórmula de credibilitat de distribució lliure, basada en el criteri de mínims quadrats. El model de Bühlmann ha estat el punt de partida de la moderna Teoria de la Credibilitat, i a partir d'ell han aparegut una sèrie de models credibilístics cada cop més perfeccionats i desenvolupats. Totes aquestes contribucions formen la denominada Teoria de la Credibilitat de la màxima precisió ("greatest accuracy credibility theory") que ha de ser distingida de la Teoria de la Credibilitat de les fluctuacions limitades ("limited fluctuation credibility theory"). Aquestes dues branques, que tenen poca cosa en comú, també són denominades Teoria de la Credibilitat europea i Teoria de la Credibilitat americana, respectivament. La diferència més gran entre aquestes dues aproximacions és la manera de tractar les carteres heterogènies. En el primer, es modela amb paràmetres de risc aleatoris, mentre que en el segon ho fa amb paràmetres fixos. Al mateix temps, es pot dividir la Teoria de la Credibilitat de màxima precisió en dues classes, la denominada Exacta i la de Distribució lliure, aquesta última fou la iniciada per Bühlmann. En aquesta tesi doctoral, la Teoria de la Credibilitat de distribució lliure ocupa un lloc central, és més, quan parlem de models de credibilitat ens referirem a models de credibilitat de màxima precisió i distribució lliure.

El model inicial de Bühlmann va ser millorat per Bühlmann i Straub (1970) al reconèixer que, sovint, les pòlisses en una cartera tenen diferents exposicions al risc. Per exemple, en una cartera de pòlisses d'assegurances per automòbil, el nombre de cotxes assegurats és diferent per a cada pòlissa i també varia al llarg del temps. Això fa que sigui inconcebible que totes les variàncies dels riscos de la cartera siguin totes iguals com s'assumeix al model de Bühlmann. Per manejar aquestes diferències en les exposicions dels riscos, Bühlmann i Straub extenen el model inicial deixant que les variàncies dels riscos depenguin de certs pesos o ponderacions. Hi ha dues extensions més que són d'una gran importància en l'evolució de la Teoria de la Credibilitat, aquestes van ser donades per Jewell, W. (1975c) i Hachemeister, C. (1975).

El model jeràrquic de dos nivells de Jewell agrupa les pòlisses d'una cartera d'acord amb dos factors niats entre sí. Aquest model pot ser visualitzat com un àrbre del qual les principals branques representen les categories del primer factor de risc en el primer nivell del model. Les categories del segon factor de risc queden representades per les branquetes dins de cada branca principal. Amb només dos factors, el model era massa restringit, per aquesta raó, Taylor, G. (1979) va extendre el model jeràrquic de Jewell a un amb múltiples nivells. Per altra banda, Hachemeister presenta el seu model de regressió, que és una generalització del model de Bühlmann-Straub, però en ell, s'abandona la hipòtesi d'homogeneïtat en el temps i s'assumeix una altra de tipus polinòmica per a les observacions esperades, d'aquesta manera es poden tenir en compte els efectes de la inflació. Aquest, és un model molt general, en el sentit de que la majoria de models de credibilitat poden ser escrits en la seva forma.

A part dels models esmentats, volem mencionar especialment el model de De Vylder, F. (1982), aquest és un dels primers models de credibilitat que ha estat desenvolupat per al càlcul de reserves IBNR. Com en el model de Hachemeister, els valors esperats dels riscos poden variar en el temps. En la tercera part d'aquesta tesi doctoral es tractarà com s'ha orientat el problema del càlcul de reserves a través de la Teoria de la Credibilitat.

1.1.3 Camps de recerca

A partir de la publicació del model original de Bühlmann, ha aparegut una llarga llista de literatura credibilística. De Pril, D'Hooge i Goovaerts (1976), Norberg, R. (1979) i De Wit, G. et al. (1986) són tres estudis dedicats a resumir la literatura d'aquesta teoria. Al mateix temps, en el marc de la Teoria de la Credibilitat, s'han anat obrint i desenvolupant uns camps de recerca que a continuació resumim.

Credibilitat geomètrica

A De Vylder, F.(1976a) es presenten els fonaments d'un marc geomètric general per als models de credibilitat. En aquesta aproximació, la prima de credibilitat és tractada com una projecció del risc que ha de ser predit en l'espai d'Hilbert d'entre totes les funcions lineals de variàncies finites dels riscos observats. Per tant, les propietats dels espais geomètrics poden servir per derivar estimadors de credibilitat. Els primers a parlar d'aquesta possibilitat són Gerber i Jones (1975). Els fonaments de De Vylder també formen part del model de credibilitat abstracte de Taylor, G. (1977) on molts models de credibilitat queden consolidats.

Estadística bayesiana
La idea de la Teoria de Credibilitat de màxima precisió prové, de fet, de l'estadística bayesiana. Els estimadors de credibilitat poden ser considerats com les millors aproximacions lineals dels estimadors de Bayes, basats en la funció de pèrdua quadràtica. Per tant, hi ha hagut moltes conexions entre les literatures bayesianes i credibilístiques. Per exemple, Bühlmann, H. (1976), Zehnwirth, B. (1977), Norberg, R. (1980) i Neuhaus, W. (1988). A Jewell, W. (1974, 1975b) es demostra que els estimadors de credibilitat coincideixen amb els estimadors de Bayes per a certes famílies de distribucions exponencials. Un texte bàsic de les aplicacions bayesianes a la ciència actuarial és Klugman, S. (1992).

Fòrmules d'actualització
Al final de cada període, l'actuari disposa de més informació i, per tant, ha de modificar les primes de credibilitat d'acord amb la nova informació. En alguns models de credibilitat és possible actualitzar les primes combinant la nova informació amb l'última prima de credibilitat calculada. Això és possible gràcies a les fórmules recursives d'actualització. Aquestes han estat estudiades per Gerber i Jones (1975), Jewell, W. (1976) i Sundt, B. (1981,1992). També les conexions amb el filtre de Kalmer són de tipus actualitzador com podem veure a Mehra, R. (1975), De Jong i Zehnwirth (1983) i Sundt, B. (1983).

Credibilitat robusta
L'ocurrència d'anormals sinistres grans poden tenir efectes distorsionadors en el

desenvolupament d'aquestes primes de credibilitat a través del temps. Els grans sinistres en els models de credibilitat són tractats a Gisler, A. (1980), Gisler i Jewell (1982), Künsch, H. (1992) i Kremer, E. (1994). Tots els mètodes proposats transformen els riscs observats, en canvi, Sundt, B. (1992) proposa deixar intactes les dades i ajustar el criteri de minimització.

Reserves IBNR

La primera aplicació de credibilitat al càlcul de reserves IBNR ve donada per De Vylder, F. (1982). Un model general d'IBNR, i casos especials, són presentats per Norberg, R. (1986b). Altres articles són Mack, T. (1990) i Hadidi, N. (1985).

Altres contribucions

Altres aplicacions i extensions dels models de credibilitat són: credibilitat multidimensional a Jewell, W. (1973); Sundt, B. (1980) i Norberg, R. (1986a) extenen els models jeràrquics de credibilitat a models de regressió jeràrquics; en assegurances de vida han aplicat models de credibilitat Letsch i Zoppi (1981), Norberg, R. (1987, 1989) i Kling, B. (1993).

1.2 Plantejaments i objectius

En la línia endagada per Pons, M.A. (1992), on fa un recull de tots els models de credibilitat apareguts fins el moment, vàrem creure necessari continuar-la amb una altra tesi doctoral que tractés la Teoria de la Credibilitat i, més concretament, les extensions i aplicacions d'aquesta en l'àmbit actuarial. Aquest podria ser l'objectiu inicial que ens va moure a la realització de la present. Però, un cop començat l'estudi amb profunditat dels temes credibilístics, vam observar alguns problemes o mancances en les aplicacions d'aquests models que van originar uns nous motius per seguir analitzant la Teoria de la Credibilitat.

Encara que els fonaments teòrics que han estat aportats en les últimes dècades són molt ferms, els models de credibilitat no són freqüentment utilitzats en la pràctica actuarial. En aquest contexte, pot ser mencionat el conegut sistema de tarificació per automòbils Bonus-Malus, però poca cosa més. Per tant, resta molta recerca per fer millorar l'aplicabilitat dels models de credibilitat. Tot i això, és una llàstima que el nombre de publicacions sobre aquest tema hagi minvat en els últims anys.

Una de les raons de l'ús limitat a la pràctica actuarial, és que les primes són difícilment interpretables en molts models de credibilitat. Per exemple, en el model de regressió de Hachemeister pot ocórrer que la prima de credibilitat no estigui entre les primes basades en l'experiència individual i en la col·lectiva. La interpretació d'un model i de les seves respectives primes són, a més, un important criteri perquè un actuari decideixi quin model ha de fer servir. Els actuaris es troben amb la difícil tasca d'explicar o defensar el criteri utilitzat. Per altra banda, la majoria de models de credibilitat només es preocupen de donar una mitjana ponderada de la prima pura de risc, quan es ben sabut que les primes del mercat requereixen un recàrrec de seguretat. Un altre problema amb que es troben els actuaris a l'hora d'aplicar models de credibilitat, és que els models disponibles no són apropiats per a les dades empíriques de que disposen. Per exemple, en els models jeràrquics, que tanta volada han tingut dins de la Teoria de la Credibilitat, els factors de risc que serveixen per dividir els riscos en grups homogenis estan niats. En canvi, en la pràctica asseguradora, molt sovint, els factors de risc no estan ordenats jeràrquicament (niats). Per tant, en aquests casos, els models jeràrquics no són apropiats i altres models, com els de regressió de Hachemeister, són massa generals per captar els específics trets d'aquestes dades.

Així doncs, l'objectiu final d'aquesta tesi doctoral és analitzar i posar remei als inconvenients que hem mencionat de manera que els models de credibilitat puguin ser més aplicats a la pràctica actuarial. Per exemple, farem una incursió als models que tracten amb primes amb recàrrec de seguretat. Tanmateix, mostrarem que els models de credibilitat poden fer-se més flexibles i oberts, veurem com aquesta flexibilitat s'aconsegueix mitjançant estimadors dels paràmetres més complexos. Finalment, donarem a conéixer aplicacions que poden ser portades a terme a la pràctica, per exemple, els models de credibilitat per calcular les reserves IBNR.

1.3 Perfil de la tesi

En el capítol 2, ens ocuparem d'analitzar tres models diferents de càlcul de primes de credibilitat amb recàrrec, primes que continguin una fracció de la variància del risc com a recàrrec sobre la prima neta o pura. Seguint la filosofia de la Teoria de la Credibilitat, ens plantejem aplicar la variància col·lectiva per a tots els riscos o bé la variància individual, o com ens proposa la credibilitat una mitjana ponderada entre totes dues variàncies. Analitzarem els mètodes de Bühlmann, H. (1970) i Centeno, L. (1989), i un cop detectats el seus inconvenients, el nou model de primes de credibilitat amb recàrrec proposat per Bauwelinckx et al. (1991). Al mateix temps, mitjançant un parell d'exemples numèrics, compararem els resultats per a cada model i arribant a unes conclusions molt interessants.

En el capítol 3 es descriu una de les extensions més útils per l'aplicabilitat dels models de credibilitat, com es demostra en el capítol 4. El model de classificació creuada és una extensió dels models coneguts de Bühlmann-Straub i Jewell. En el model de Jewell, els factors de risc, que permeten dividir la cartera heterogènia en subcarteres homogènies, estan agrupats de manera jeràrquica. Molt sovint això no s'addiu amb la realitat. Considerem, per exemple, una cartera on les pòlisses poden ser categoritzades d'acord amb el sexe de l'assegurat i amb els diferents grups d'edat que hem traçat. Obviament, aquests dos factors no poden ser niats (agrupats de forma jeràrquica), sinó que tots dos tenen la mateixa importància. En canvi, com es pot veure a Dannenburg, D. (1995b) aquest problema té solució, a través del model de credibilitat de classificació creuada, on els dos factors de risc poden ser modelats al mateix nivell, sense restriccions jeràrquiques. Concretament s'analitzen dos models, el model "two way" i el model additiu. També s'estudia la consecució dels models de Bühlmann-Straub i de Jewell a partir dels nous models. Finalment s'apliquen tots els models possibles a dades reals d'una assegurança de prèstecs privats.

De la mateixa manera, i de forma més detallada, hem demostrat l'aplicabilitat d'aquest model de classificació creuada a través d'un exemple en el ram de robatori de comerços espanyol. A partir de dos factors, capital assegurat i tipus de comerç, es calculen els resultats per a tots els models possibles i es comparen els resultats obtinguts.

En el capítol 5 es fa una introducció al càlcul de reserves IBNR. A continuació, en els capítols 6 i 7, tractem els models de De Vylder i de De Vylder-Mack respectivament. En ells, els pagaments per reserves són considerats estocàsticament independents, la qual cosa no s'addiu amb la realitat en moltes ocasions. Factors estacionals aleatoris, tals com la inflació, causen augments en els pagaments d'un determinat període que estarà correlacionat. Aquestes correlacions són tingudes amb compte en el model IBNR "two way" del capítol 8. Aquest model, basat en el model de classificació creuada del mateix nom, proporciona una possibilitat més acurada al càlcul de reserves IBNR. En el capítol 9, a través d'unes dades reals d'alguns estats europeus, es comprova com els mètodes de credibilitat pel càlcul de reserves milloren les estimacions dels antics models en la majoria d'ocasions. Els principals resultats i conclusions de la tesi doctoral són resumits en el capítol 10.

PART I:

EXTENSIONS DE LA TEORIA DE LA CREDIBILITAT

Capítol 2

Primes de credibilitat amb recàrrec

2.1 Introducció

En aquest capítol, s'analitzen mètodes de càlcul de primes que continguin una fracció de la variància del risc com a recàrrec sobre la prima neta. Ja són prou coneguts els sistemes de càlcul de primes netes que utilitzen la Teoria de la Credibilitat, amb els seus diversos models; tots ells, insistim, sobre la prima pura (vegeu apèndix A).

En aquests models, es busca una prima de credibilitat que és una combinació lineal entre l'experiència individual (prima individual) i la col·lectiva (prima col·lectiva). L'objectiu, és trobar la prima més apropiada per a cada risc: una prima que no discrimini a favor dels riscos amb més sinistralitat, que es veuen beneficiats si els apliquem la prima col·lectiva, i que no perjudiqui els riscos més favorables, que pagarien més del que els pertoca. Com adverteix la Teoria del risc, no podem treballar només amb les primes pures, ja que la probabilitat de ruïna d'una prima que no excedeixi la prima pura és 1. Per tant, s'ha d'aplicar un recàrrec que ens doni un interval de confiança més alt. Des de sempre s'ha utilitzat el criteri de la variància, que consisteix en un recàrrec sobre la prima pura que és un percentatge sobre la variància del risc. Aquí podem plantejar-nos un altre cop, si apliquem la variància col·lectiva per a tots els riscos, independentment de la variabilitat de cada risc o, pel contrari, mirem d'aplicar la Teoria de la Credibilitat, no només sobre la prima pura, sinó a més també sobre la variància. És a dir, carregant les primes pures amb un percentatge de la ponderació entre la variància col·lectiva i la individual de cada risc. Per tant, es planteja el problema de trobar les expressions per unes primes de credibilitat amb recàrrec. La primera aproximació va ser realitzada per Bühlmann, H. (1970). Més tard, hi ha una aproximació per part de Centeno, L. (1989). Aquests models seran analitzats en les dues pròximes seccions (2.2 i 2.3), com veurem, les hipòtesis són molt restrictives, i a més els procediments per arribar a les fórmules de credibilitat són llargs i fins i tot molt complicats analíticament. Per superar aquestes restriccions i dificultats veurem, amb més profunditat, a 2.4 una nova aproximació per a les primes amb recàrrec, és el treball de Bauwelinckx, T. et al. (1991).

2.2 Prima de credibilitat amb recàrrec segons Bühlmann

Partint del criteri de la variància,

$$E[\mu(\Theta) / \vec{X}_j] + \alpha \left(E[\sigma^2(\Theta) / \vec{X}_j] + Var[\mu(\Theta) / \vec{X}_j]\right) \tag{2.1}$$

Bühlmann (1970) proposa una fórmula de credibilitat amb tres components:

$$P_{t+1}\left(\vec{X}_j\right) = \underbrace{E\left[\mu(\Theta_j) / \vec{X}_j\right]}_{(a)} + \underbrace{\alpha \cdot E\left[\sigma^2(\Theta_j) / \vec{X}_j\right]}_{(b)} + \underbrace{\alpha \cdot Var\left[\mu(\Theta_j) / \vec{X}_j\right]}_{(c)} \tag{2.2}$$

on (a) és la part del valor esperat, (b) la part de variància i (c) la part de fluctuació. Les dues primeres parts formen la part d'aproximació ((a)+(b)). Per a les aplicacions pràctiques, on normalment no es té un coneixement exacte de les distribucions paramètriques per les distribucions acumulades dels sinistres, ens cal obtenir unes fórmules manejables per a cada una de les tres components. Aquestes expressions són denominades, en el treball de Bühlmann, fórmules de credibilitat i substitueixen la forma exacta de les primes de credibilitat dels models de credibilitat clàssics. Aquestes fórmules de credibilitat prenen el lloc a les primes teòricament correctes de credibilitat. Pel que fa a la part d'aproximació, Bühlmann les construeix a partir de linealitzacions de les quantitats correctes, procurant que la desviació quadràtica esperada romangui com més petita possible. És a dir, de la mateixa manera que en els models clàssics de Teoria de la Credibilitat (vegeu apèndix A).

2.2.1 Estimadors de credibilitat per a les tres components de la prima amb recàrrec

En primer lloc, Bühlmann fa la linearització de la part del valor esperat. Aproximem $E\left[\mu(\Theta_j)\,/\,\vec{X}_j\right]$ per $a + b_j \cdot \bar{X}_j$ per tal de que

$$E\left[\left(E\left[\mu(\Theta_j)\,/\,\vec{X}_j\right] - \left(a + b \cdot \bar{X}_j\right)\right)^2\right] \tag{2.3}$$

esdevingui mínim, on

$$\bar{X}_j = \frac{1}{t} \cdot \sum_{s=1}^{t} X_{js} \tag{2.4}$$

Per tant, podriem determinar les constants a i b, com en el model de Bühlmann, tal i com es pot veure a Pons, M. (1991)(pp.60-67) i més resumidament a l'apèndix A.1. A la vegada, es pot veure que la funció $a + b \cdot \bar{X}_j$ trobada, també minimitza

$$\begin{aligned} E\left[\left(\mu(\Theta_j) - \left(a + b \cdot \bar{X}_j\right)\right)^2\right] &= E\left[\left(\mu(\Theta_j) - E\left[\mu(\Theta_j)\,/\,\vec{X}_j\right]\right)^2\right] \\ &+ E\left[\left(E\left[\mu(\Theta_j)\,/\,\vec{X}_j\right] - \left(a + b \cdot \bar{X}_j\right)\right)^2\right] \end{aligned} \tag{2.5}$$

i com podem veure a Bühlmann, H. (1967)(p 206),

$$E\left[\left(\mu(\Theta_j) - \left(a + b \cdot \bar{X}_j\right)\right)^2\right] =$$

$$E\left[\left(b\cdot\left(\mu(\Theta_j)-\bar{X}_j\right)\right)^2\right] + E\left[((1-b)\cdot\mu(\Theta_j)-a)^2\right] =$$
$$= b^2\cdot E\left[\left(\bar{X}_j-\mu(\Theta_j)\right)^2\right] + (1-b)^2\cdot Var[\mu(\Theta_j)] \tag{2.6}$$

A l'esmentat article podem comprovar que l'expressió (2.3) es minimitza si

$$b = \frac{Var[\mu(\Theta_j)]}{\frac{1}{t}\cdot E\left[\left(\bar{X}_j-\mu(\Theta_j)\right)^2\right] + Var[\mu(\Theta_j)]} = \frac{Var[\mu(\Theta_j)]}{Var[\bar{X}_j]} \tag{2.7}$$

Per tant, s'obté la linearització o fórmula de credibilitat següent

$$E\left[\mu(\Theta_j)\,/\,\vec{X}_j\right] \sim b\cdot\bar{X}_j + (1-b)\cdot E\left[\mu(\Theta_j)\right] \tag{2.8}$$

on b és denominat coeficient de credibilitat i el calculem com

$$b = \frac{Var[\mu(\Theta_j)]}{Var\left[\bar{X}_j\right]} = \frac{Var[\mu(\Theta_j)]}{\frac{1}{t}\cdot E\left[\sigma^2(\Theta_j)\right] + Var\left[\mu(\Theta_j)\right]} = \frac{t}{t+l} \tag{2.9}$$

amb

$$l = \frac{E\left[\sigma^2(\Theta_j)\right]}{Var\left[\mu(\Theta_j)\right]}$$

i sent els estimadors per $E[\sigma^2(\Theta_j)]$ i $Var[\mu(\Theta_j)]$ respectivament,

$$\hat{S}^2 = \frac{1}{k}\cdot\sum_{j=1}^{k}\frac{1}{t-1}\cdot\sum_{s=1}^{t}(X_{js}-\bar{X}_j)^2 \tag{2.10}$$

$$\hat{a} = \frac{1}{k-1}\cdot\sum_{j=1}^{k}(\bar{X}_j-\hat{m})^2 - \frac{1}{t}\cdot\hat{S}^2 \tag{2.11}$$

on $\hat{m}$ és l'estimador per a l'esperança col·lectiva $E[\mu(\Theta_j)]$:

$$\hat{m} = \frac{1}{k}\cdot\sum_{j=1}^{k}\bar{X}_j \tag{2.12}$$

De vegades, el coeficient de credibilitat, també es troba expressat com

$$b = \frac{a\cdot t}{S^2 + a\cdot t}$$

Pot ser convenient, comparar aquests resultats amb els obtinguts pels models clàssics com es pot veure a l'apèndix A.1. On la única diferència és el canvi de lletra pel coeficient de credibilitat $b = z$.

En segon lloc, hem de fer la linearització de la part de variància. De forma similar a l'anterior, aproximem $E\left[\sigma^2(\Theta_j)\,/\,\vec{X}_j\right]$ per $d + c \cdot \Sigma_j^2$, on

$$\Sigma_j^2 \;=\; \frac{\sum\limits_{s=1}^{t}\left(X_{js} - \bar{X}_j\right)^2}{t - 1} \tag{2.13}$$

Repetint el procediment anterior, trobem que l'aproximació per la part de la variància és:

$$E\left[\sigma^2(\Theta_j)\,/\,\vec{X}_j\right] \;\sim\; c\cdot\Sigma_j^2 \,+\, (1-c)\cdot E\left[\sigma^2(\Theta_j)\right] \tag{2.14}$$

on l'estimador per $E\left[\sigma^2(\Theta_j)\right]$ ve donat per

$$\hat{S}^2 \;=\; \frac{1}{k}\cdot\sum_{j=1}^{k}\frac{1}{t-1}\cdot\sum_{s=1}^{t}(X_{js} - \bar{X}_j)^2 \;=\; \frac{1}{k}\cdot\sum_{j=1}^{k}\Sigma_j^2 \tag{2.15}$$

i

$$c \;=\; \frac{Var[\sigma^2(\Theta_j)]}{Var\left[\Sigma_j^2\right]} \;=\; \frac{Var[\sigma^2(\Theta_j)]}{E\left[Var\left[\Sigma_j^2\,/\,\Theta_j\right]\right] \,+\, Var\left[\sigma^2(\Theta_j)\right]} \tag{2.16}$$

que és el corresponent coeficient de credibilitat per la part de la variància.

Per últim, i d'acord amb el nostre principi de càlcul de prima, per la part de fluctuació tenim que

$$Var\left[\mu(\Theta_j)\,/\,\vec{X}_j\right] \;=\; E\left[\left(\mu(\Theta_j) \,-\, E\left[\mu(\Theta_j)\,/\,\vec{X}_j\right]\right)^2\,/\,\vec{X}_j\right] \tag{2.17}$$

si substituïm $E\left[\mu(\Theta_j)\,/\,\vec{X}_j\right]$ pel seu estimador de credibilitat (2.8), tenim

$$E\left[\left(\mu(\Theta_j) \,-\, b\cdot\bar{X}_j \,-\, (1-b)\cdot E\left[\mu(\Theta_j)\right]\right)^2\,/\,\vec{X}_j\right] \tag{2.18}$$

Aquesta última fórmula no ens porta gaire lluny a menys que prenguem el valor esperat de l'expressió. Portant a terme això,

$$\begin{aligned}
Var\left[\mu(\Theta_j)\,/\,\vec{X}_j\right] \;&=\; E\left[\left(\mu(\Theta_j) \,-\, b\cdot\bar{X}_j \,-\, (1-b)\cdot E\left[\mu(\Theta_j)\right]\right)^2\right] \;= \\
&=\; E\left[\left(\left(\mu(\Theta_j) \,-\, E[\mu(\Theta_j)]\right) \,-\, b\left(\bar{X}_j \,-\, E[\mu(\Theta_j)]\right)\right)^2\right] \;= \\
&=\; Var[\mu(\Theta_j)] \,-\, 2b\cdot Var[\mu(\Theta)] \,+\, b^2 Var[\bar{X}_j] \;=
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= Var[\mu(\Theta_j)] - 2b \cdot Var[\mu(\Theta_j)] + \\ &\quad + b^2 \cdot \left(Var[\mu(\Theta_j)] + \frac{1}{t} E[\sigma(\Theta_j)] \right) = \\ &= (1-b)^2 \cdot Var[\mu(\Theta_j)] + \frac{b^2}{t} \cdot E\left[\sigma^2(\Theta_j)\right] \end{aligned} \tag{2.19}$$

D'acord amb la primera linealització, tenim que

$$b = \frac{Var[\mu(\Theta_j)]}{\frac{1}{t} \cdot E\left[\sigma^2(\Theta_j)\right] + Var\left[\mu(\Theta_j)\right]} \tag{2.20}$$

substituint aquest valor a (2.19) i simplificant s'obté que

$$Var\left[\mu(\Theta_j) \,/\, \vec{X}_j\right] \sim (1-b) \cdot Var[\mu(\Theta_j)] \tag{2.21}$$

En resum, segons l'article de Bühlmann, tenim la següent aproximació a la prima de credibilitat:

$$\begin{aligned} P_{t+1}\left(\vec{X}_j\right) &\sim b \cdot \bar{X}_j + (1-b) \cdot E\left[\mu(\Theta_j)\right] \\ &+ \alpha\left(c \cdot \Sigma_j^2 + (1-c) \cdot E\left[\sigma^2(\Theta_j)\right]\right) \\ &+ \alpha\left((1-b) \cdot Var[\mu(\Theta_j)]\right) \end{aligned} \tag{2.22}$$

2.2.2 Estimadors per als coeficients de credibilitat b i c

Per linearització de les components de la prima de credibilitat hem obtingut unes mitges ponderades amb els pesos b i c. Ara ens cal interpretar aquests pesos de manera que puguin ser determinats a partir d'estadístics del col·lectiu. Per exemple, en la part del valor esperat, $E[\mu(\Theta_j)]$ representa el cost mitjà de sinistralitat del risc del col·lectiu; però resten per ser interpretats en termes de quantitats estimables a partir del col·lectiu $E\left[\sigma^2(\Theta_j)\right]$ i $Var[\mu(\Theta_j)]$.

En primer lloc, pel que fa a la part del valor esperat, la següent expressió ja ha estat definida pel coeficient de credibilitat b :

$$b = \frac{Var[\mu(\Theta_j)]}{Var\left[\bar{X}_j\right]} \tag{2.23}$$

El denominador d'aquesta expressió ja és una quantitat estimable a partir del col·lectiu, per tant, falta transformar el numerador. Nosaltres ja coneixem que

$$Var\left[\bar{X}_j\right] = \frac{1}{t} \cdot E\left[\sigma^2(\Theta_j)\right] + Var\left[\mu(\Theta_j)\right] \tag{2.24}$$

i

$$Var\left[X\right] = E\left[\sigma^2(\Theta_j)\right] + Var\left[\mu(\Theta_j)\right] \tag{2.25}$$

d'on es dedueix que

$$t \cdot Var\left[\bar{X}_j\right] - Var\left[X\right] = (t-1) \cdot Var\left[\mu(\Theta_j)\right] \tag{2.26}$$

Finalment,

$$b = \frac{t \cdot Var\left[\bar{X}_j\right] - Var[X]}{(t-1) \cdot Var\left[\bar{X}_j\right]} \tag{2.27}$$

on $X = X_1, \quad t \geq 2$.

En segon lloc, per la part de la variància, hem d'interpretar el valor del coeficient de credibilitat c :

$$c = \frac{Var[\sigma^2(\Theta_j)]}{Var\left[\Sigma_j^2\right]} \tag{2.28}$$

De moment, comencem interpretant la quantia $E[\sigma^2(\Theta_j)]$. Com en el cas anterior, a partir del sistema d'equacions (2.24) i (2.25) derivem

$$Var[X] - Var\left[\bar{X}_j\right] = \left(1 - \frac{1}{t}\right) \cdot E\left[\sigma^2(\Theta_j)\right] \tag{2.29}$$

i d'aquí

$$E\left[\sigma^2(\Theta_j)\right] = \frac{t}{t-1} \cdot \left(Var[X] - Var\left[\bar{X}_j\right]\right) \tag{2.30}$$

Per determinar c , sota la hipòtesi de que la distribució és normal i, per tant, amb excés igual a zero, com es demostra a Bühlmann (1970)(p 104), fem servir la següent expressió:

$$Var\left[\Sigma_j^2 \,/\, \Theta_j\right] = \frac{2\sigma^4(\Theta_j)}{t-1} \tag{2.31}$$

De la descomposició

$$Var\left[\Sigma_j^2\right] = Var\left[\sigma^2(\Theta_j)\right] + \frac{2}{t-1} \cdot E\left[\sigma^4(\Theta_j)\right] \tag{2.32}$$

aplicant l'anterior expressió per $t = 2$,

$$Var\left[\Sigma_2^2\right] = Var\left[\sigma^2(\Theta_j)\right] + 2 \cdot E\left[\sigma^4(\Theta_j)\right] \tag{2.33}$$

i per $t = 2$ aplicant la definició de Σ_j^2 tenim,

$$\Sigma_2^2 = \left(X_1 - \frac{X_1 + X_2}{2}\right)^2 + \left(X_2 - \frac{X_1 + X_2}{2}\right)^2 \tag{2.34}$$

Finalment, del sistema d'equacions entre (2.32) i (2.33) obtenim el següent resultat:

$$Var\left[\sigma^2(\Theta_j)\right] = \frac{(t-1) \cdot Var[\Sigma_j^2] - Var[\Sigma_2^2]}{t-2} \tag{2.35}$$

Substituint (2.35) a (2.28) trobem el valor de c :

$$c = \frac{(t-1) \cdot Var[\Sigma_j^2] - Var[\Sigma_2^2]}{(t-2) \cdot Var[\Sigma_j^2]} \qquad t \geq 3 \tag{2.36}$$

Per últim, i pel que fa referència a la part de fluctuació, obtenim els següents resultats a partir del valor b (2.27) trobat anteriorment:

$$1 - b = \frac{Var[X] - Var\left[\bar{X}_j\right]}{(t-1) \cdot Var\left[\bar{X}_j\right]} \tag{2.37}$$

i

$$Var[\mu(\Theta_j)] = \frac{t \cdot Var\left[\bar{X}_j\right] - Var[X]}{t-1} \tag{2.38}$$

2.2.3 Exemple numèric

Un cop analitzada la teoria del model de Bühlmann per la prima de credibilitat amb recàrrec, creiem convenient proposar un exemple pràctic. Per això, hem escollit l'exemple que apareix a l'article de Centeno, L. (1989), per d'aquesta manera poder comparar amb els resultats obtinguts dels diferents models que a partir d'ara analitzarem.

Les dades d'aquest exemple es resumeixen en les següents taules:

Taula 2.1 *Observacions de la variable* X_{js}

	$j=1$	$j=2$	$j=3$	$j=4$	$j=5$	$j=6$	$j=7$
$s=1$	0	11.3	8.0	5.4	9.7	9.7	9.0
$s=2$	0	25.0	1.9	5.9	8.9	14.5	9.6
$s=3$	4.2	18.5	7.0	7.1	6.7	10.8	8.7
$s=4$	0	14.3	3.1	7.2	10.3	12.0	11.7
$s=5$	7.7	30.0	5.2	8.3	11.1	13.1	7.0

Taula 2.2 *Observacions de la variable* w_{js}

	$j=1$	$j=2$	$j=3$	$j=4$	$j=5$	$j=6$	$j=7$
$s=1$	5	14	18	20	21	43	70
$s=2$	6	14	20	22	24	47	77
$s=3$	8	13	23	25	28	53	85
$s=4$	10	11	25	29	34	61	92
$s=5$	12	10	27	35	42	70	100

La primera representa els ràtios de pèrdua i la segona el volum de primes de set contractes durant cinc anys. Es suposa un recàrrec de $\alpha = 0.25$. Com és obvi, la segona taula no serà utilitzada amb aquest primer model, ja que Bühlmann prescindeix dels pesos o ponderacions. De totes maneres l'avancem per als posteriors models. Per altra banda, cal observar que per $j=1$ només tenim dues observacions diferents de zero, això farà que els resultats per $j = 1$ no siguin tan fiables com veurem més endavant.

Els resultats d'aquest primer model són els que exposarem a continuació. En primer lloc, les estimacions dels paràmetres estructurals:

$$\begin{aligned} \hat{m} &= 9.226 \\ \hat{S}^2 &= 12.587 \\ \hat{a} &= 29.22 \end{aligned} \tag{2.39}$$

que són necessaris per calcular la resta del problema, i que han estat trobats fent servir les expressions (2.10-2.12) de la secció 2.2.1. En la següent taula exposem els resultats que hem aconseguit a partir de les dades de la taula 2.1:

Taula 2.3 *Dades empíriques*

	$j=1$	$j=2$	$j=3$	$j=4$	$j=5$	$j=6$	$j=7$
$\bar{X}_j$	2.38	19.82	5.04	6.78	9.34	12.02	9.20
Σ_j^2	12.15	58.82	6.56	1.32	2.83	3.55	2.88
Σ_2^2	0	93.84	18.61	0.12	0.32	11.52	0.18

La primera fila ens indica la mitjana dels ràtios de pèrdua de cada pòlissa j en els cinc anys observats. Com hem dit anteriorment, hem de tenir en compte que els resultats per $j = 1$ estan molt condicionats per tenir tres de les observacions igual a zero. En canvi, pel que fa a la segona fila, ens informa de la variabilitat en cada pòlissa durant aquest període, és a dir, és la variància de cada pòlissa. Aquí és on podem veure quina de les pòlisses té més variabilitat i per tant, caldrà afegir-li un recàrrec més gran que les altres. Per exemple, $j = 2$ té una gran variabilitat. Per últim, la tercera fila són els valors de la definició de Σ_j^2 quan $t = 2$ que utilitzarem per calcular el coeficient c .

Els coeficients de credibilitat per la part del valor esperat i la part de la variància són respectivament:

$$b = 0.9207 \tag{2.40}$$

$$c = 0.4172 \tag{2.41}$$

i han estat calculats segons les expressions (2.9) i (2.16) de la secció 2.2.1. Com podem veure, en la part del valor esperat, podem donar més confiança a l'experiència individual que a la col·lectiva, és a dir, a la combinació lineal (2.8), les primes de credibilitat donaran més importància a les primes individuals que a la col·lectiva. En canvi, no passa el mateix a la part de la variància, on, per molt poc, la variància col·lectiva (S^2) serà més important que les individuals (Σ_j^2).

A la darrera taula, exposem els resultats finals del problema:

Taula 2.4 *Primes de credibilitat*

	$j=1$	$j=2$	$j=3$	$j=4$	$j=5$	$j=6$	$j=7$
$P1$	2.92	18.98	5.37	6.97	9.33	11.80	9.20
$P2$	12.41	31.87	10.07	7.88	8.52	8.81	8.54
$P3$	2.32	2.32	2.32	2.32	2.32	2.32	2.32
P	6.60	27.53	8.47	9.52	12.04	14.58	11.92
R	3.68	8.55	3.09	2.55	2.71	2.78	2.71
%	125.93	45.04	57.67	36.57	29.02	23.59	29.49

$P1$ és la prima de credibilitat de la part del valor esperat, o sigui, la prima per aplicar si utilitzéssim el model de Bühlmann sense cap recàrrec de seguretat: la prima pura de credibilitat. $P2$ és la prima de credibilitat de la part de la variància que juntament amb la de la part de fluctuació ($P3$) seran la base sobre la qual es carrega la prima pura ($\alpha = 0.25$) segons (2.1). La prima de credibilitat amb recàrrec és la quarta fila (P). Per últim, la cinquena i la sisena files són, respectivament, la diferència $R = P - P1$ i el tant per cent en què ha augmentat la prima a causa del recàrrec.

D'aquesta taula podem observar que $j = 2$ té un recàrrec i un percentatge molt elevats, tal i com podiem esperar pel seu valor de la segona fila de la taula 2.3. Pel contrari, la pòlissa $j = 3$ tot i tenir una variància menor a la taula 2.3 i a no tenir un gran recàrrec absolut, té un percentatge molt alt degut al petit valor de prima pura que té. Per últim, tornem a insistir en la pòlissa $j = 1$ i la seva poca credibilitat.

2.3 Prima de credibilitat amb recàrrec segons Centeno

En aquest model, Centeno L. utilitza el model de Bühlmann-Straub per calcular una prima de credibilitat amb recàrrec. Suposa un avenç respecte del model anterior perquè s'inclouen a l'anàlisi els pesos o ponderacions ja que el model anterior suposa que els pesos són unitaris per a totes les observacions. Aquest model està basat en el treball de Bühlmann i Straub (1970), encara que ells es van limitar a l'estimació de la prima de credibilitat pura; en canvi, Centeno, L. (1989) desenvolupa el model en el cas de recàrrec sobre la prima pura a partir d'un percentatge de la variància del risc, és a dir, la prima de credibilitat amb recàrrec basat en el criteri de la variància. A continuació exposem el model tal i com ho fa Centeno, L. en el seu article (1989)(pp.3-10).

2.3.1 Hipòtesis

Centeno considera k pòlisses o contractes, i suposa que cada risc j ha estat amb observació durant t_j períodes. Anomena S_{js} a la variable aleatòria que denota la quantia total de sinistres del risc j produïts al període s. A més, considera els pesos o ponderacions w_{js} com una mesura del volum de risc de cada contracte j al període s. Per tant, la variable aleatòria $X_{js} = S_{js} / w_{js}$ és el ràtio de pèrdua del risc j al període s. En el model anterior teniem les mateixes variables considerant tots els w_{js} iguals a la unitat.

Per altra banda, Centeno fa les següents hipòtesis sobre la variable X_{js} :

I Les pòlisses $j = 1, 2, ..., k$, és a dir, els parells $(\Theta_1, \vec{X}_1)$, $(\Theta_2, \vec{X}_2), ...,$ $(\Theta_k, \vec{X}_k)$ són independents i estan idènticament distribuïts.

II Per a cada contracte $j = 1, 2, ..., k$, i per un Θ_j donat, les variables condicionades: $X_{j1} / \Theta_j, X_{j2} / \Theta_j, ..., X_{jt_j} / \Theta_j$ són independents i estan idènticament distribuïdes. Que es tradueix en:

(a) $E[X_{js} / \Theta_j] = \mu(\Theta_j) \qquad s \in (1, 2, ..., t_j)$

(b) $Var[X_{js} / \Theta_j] = \dfrac{\sigma^2(\Theta_j)}{w_{js}} \qquad s \in (1, 2, ..., t_j)$

(c) $\mu_4[X_{js} / \Theta_j] = \dfrac{3}{w_{js}} \cdot \sigma^4(\Theta_j)$

Aquestes hipòtesis ja han estat considerades en el model clàssic de Bühlmann-Straub, excepte II-c, que prové de l'addicional assumpció que l'estructura de distribució té excés normal. Si no assumim un excés normal l'hauríem de substituir per

$$\mu_4[X_{js} / \Theta_j] = \frac{\mu_4(\Theta_j)}{w_{js}^3} + 3 \cdot \frac{w_{js} - 1}{w_{js}^3} \cdot \sigma^4(\Theta_j) \tag{2.42}$$

i, en tal cas, els càlculs poden arribar a ser molt complicats.

La prima de risc per X_{js} pel període $t_j + 1$ d'acord amb el criteri de la variància és, segons aquestes hipòtesis,

$$\mu(\Theta_j) + \alpha \cdot \frac{\sigma^2(\Theta_j)}{w_{j,t_j+1}}$$

on α és una constant possitiva que indica el coeficient de recàrrec. Finalment, i d'acord amb la nomenclatura feta servir per Bühlmann(1970), la prima de credibilitat amb recàrrec és

$$P_{t_j+1}\left(\vec{X}_j\right) = \underbrace{E\left[\mu(\Theta_j)\,/\,\vec{X}_j\right]}_{(a)} + \underbrace{\frac{\alpha}{w_{j,t_j+1}} \cdot E\left[\sigma^2(\Theta_j)\,/\,\vec{X}_j\right]}_{(b)} + \underbrace{\alpha \cdot Var\left[\mu(\Theta_j)\,/\,\vec{X}_j\right]}_{(c)} \tag{2.43}$$

on (a), (b) i (c) són, com a la secció anterior, denominats part del valor esperat, part de la variància i part de la fluctuació respectivament.

2.3.2 Estimadors de credibilitat per a les tres components de la prima amb recàrrec

En general, no tenim coneixement o, almenys, no tenim coneixement exacte de les distribucions paramètriques per a la quantia de sinistres o de la seva funció de distribució. Per tant, es necessiten estimadors per $E\left[\mu(\Theta_j)\,/\,\vec{X}_j\right]$, $E\left[\sigma^2(\Theta_j)\,/\,\vec{X}_j\right]$ i $Var\left[\mu(\Theta_j)\,/\,\vec{X}_j\right]$.

En primer lloc, la part del valor esperat, coincideix amb el valor esperat de la prima pura del model Bühlmann-Straub. De manera que, el millor estimador de credibilitat per $E\left[\mu(\Theta_j)\,/\,\vec{X}_j\right]$ és, com ja sabem, l'estimador de la forma $a_{j0} + \sum_{s=1}^{t} a_{js}X_{js}$:

$$\hat{\mu}_j = z_j \cdot \bar{X}_j + (1 - z_j) \cdot E[\mu(\Theta_j)] \tag{2.44}$$

amb

$$\bar{X}_j = X_{jw} = \frac{1}{w_{j\Sigma}} \sum_{s=1}^{t_j} w_{js} \cdot X_{js} \quad ; \qquad w_{j\Sigma} = \sum_{s=1}^{t_j} w_{js} \tag{2.45}$$

i

$$z_j = \frac{w_{j\Sigma}}{\dfrac{E[\sigma^2(\Theta_j)]}{Var[\mu(\Theta_j)]} + w_{j\Sigma}} \tag{2.46}$$

Sent els estimadors per $E[\mu(\Theta_j)]$, $E[\sigma^2(\Theta_j)]$ i $Var[\mu(\Theta_j)]$ respectivament:

$$\hat{m} = \frac{1}{z_\Sigma} \cdot \sum_{j=1}^{k} z_j \cdot \bar{X}_j \quad ; \quad z_\Sigma = \sum_{j=1}^{k} z_j \tag{2.47}$$

$$\hat{S}^2 = \frac{1}{k} \cdot \sum_{j=1}^{k} \frac{1}{(t_j - 1)} \cdot \sum_{s=1}^{t_j} w_{js} \cdot (X_{js} - \bar{X}_j)^2 \tag{2.48}$$

$$\hat{a} = \frac{w_{\Sigma\Sigma}}{w_{\Sigma\Sigma}^2 - \sum_{j=1}^{k} w_{j\Sigma}^2} \cdot \left(\sum_{j=1}^{k} w_{j\Sigma} \cdot (\bar{X}_j - \hat{m})^2 - (k-1) \cdot \hat{S}^2 \right) \tag{2.49}$$

En segon lloc, per estimar la part de variància $E\left[\sigma^2(\Theta_j) \,/\, \vec{X}_j\right]$ Centeno, L. (1989), considera estimadors de la forma

$$a_{j0} + \sum_{s=1}^{t_j} a_{js} \left(X_{js} - \bar{X}_j\right)^2 \tag{2.50}$$

i l'escull de tal manera que

$$E\left[\left(E\left[\sigma^2(\Theta_j) \,/\, \vec{X}_j\right] - a_{j0} - \sum_{s=1}^{t_j} a_{js} \left(X_{js} - \bar{X}_j\right)^2\right)^2\right] \tag{2.51}$$

sigui mínim, és a dir, escull el millor estimador de la forma (2.50) d'acord amb el criteri de la pèrdua quadràtica. Seguint una llarga i complicada demostració (vegeu Centeno, L. (1989)) s'arriba al següent estimador de credibilitat per la part de la variància:

$$\hat{\sigma}_j^2 = c_j \cdot \Sigma_j^2 + (1 - c_j) \cdot E[\sigma^2(\Theta_j)] \tag{2.52}$$

amb els estimadors de Σ_j^2 i $E\left[\sigma^2(\Theta_j)\right]$ respectivament,

$$\Sigma_j^2 = \frac{1}{t_j - 1} \cdot \sum_{s=1}^{t_j} w_{js} \cdot \left(X_{js} - \bar{X}_j\right)^2 \tag{2.53}$$

$$S^2 = \frac{1}{k} \cdot \sum_{j=1}^{k} \Sigma_j^2 \tag{2.54}$$

i

$$c_j = \frac{Var[\sigma^2(\Theta_j)]}{Var[\sigma^2(\Theta_j)] + \frac{2}{t_j - 1} \cdot E[\sigma^4(\Theta_j)]} \tag{2.55}$$

Sota aquestes hipòtesis, es demostra a Centeno, L.(1989) que

$$Var[\Sigma_j^2] \;=\; Var[\sigma^2(\Theta_j)] + \frac{2}{t_j - 1} \cdot E[\sigma^4(\Theta_j)] \tag{2.56}$$

i per tant, el factor de credibilitat es pot expressar com:

$$c_j \;=\; \frac{Var[\sigma^2(\Theta_j)]}{Var[\Sigma_j^2]} \tag{2.57}$$

Finalment, per la part de la fluctuació, Centeno, L. arriba a la mateixa expressió que Bühlmann (1970). L'estimador de credibilitat per $Var\left[\mu(\Theta_j)\,/\,\vec{X}_j\right]$ és:

$$(1 \,-\, z_j) \cdot Var[\mu(\Theta_j)] \tag{2.58}$$

Aquest estimador s'obté a partir de

$$Var\left[\mu(\Theta_j)\,/\,\vec{X}_j\right] \;=\; E\left[\left(\mu(\Theta_j) \,-\, E\left[\mu(\Theta_j)\,/\,\vec{X}_j\right]\right)^2 /\,\vec{X}_j\right] \tag{2.59}$$

si substituïm $E\left[\mu(\Theta_j)\,/\,\vec{X}_j\right]$ pel seu estimador de credibilitat (2.44), tenim

$$E\left[\left(\mu(\Theta_j) \,-\, z_j \cdot \bar{X}_j \,-\, (1 - z_j) \cdot E\left[\mu(\Theta_j)\right]\right)^2 /\,\vec{X}_j\right] \tag{2.60}$$

Aquesta última fórmula no ens porta gaire lluny a menys que prenguem el valor esperat de l'expressió. Portant a terme això,

$$\begin{aligned}
Var\left[\mu(\Theta_j)\,/\,\vec{X}_j\right] \;&=\; E\left[\left(\mu(\Theta_j) \,-\, z_j \cdot \bar{X}_j \,-\, (1 - z_j) \cdot E\left[\mu(\Theta_j)\right]\right)^2\right] \;=\\
&=\; E\left[\left((\mu(\Theta_j) \,-\, E[\mu(\Theta_j)]) \,-\, z_j \cdot \left(\bar{X}_j \,-\, E[\mu(\Theta_j)]\right)\right)^2\right] \;=\\
&=\; Var[\mu(\Theta_j)] \,-\, 2z_j \cdot Var[\mu(\Theta_j)] \,+\, z_j^2 Var[\bar{X}_j] \;=\\
&=\; Var[\mu(\Theta_j)] \,-\, 2z_j \cdot Var[\mu(\Theta_j)] \,+\\
&\quad + z_j^2 \cdot \left(Var[\mu(\Theta_j)] \,+\, \frac{1}{w_{j\Sigma}} E[\sigma(\Theta_j)]\right) \;=\\
&=\; (1 - z_j)^2 \cdot Var[\mu(\Theta_j)] \,+\, \frac{z_j^2}{w_{j\Sigma}} \cdot E\left[\sigma^2(\Theta_j)\right]
\end{aligned} \tag{2.61}$$

D'acord amb la primera linealització, tenim que

$$z_j \;=\; \frac{Var[\mu(\Theta_j)]}{\frac{1}{w_{j\Sigma}} \cdot E\left[\sigma^2(\Theta_j)\right] \,+\, Var\left[\mu(\Theta_j)\right]} \tag{2.62}$$

substituint aquest valor a (2.61) i simplificant s'obté que

$$Var\left[\mu(\Theta_j)\,/\,\vec{X}_j\right] \sim (1-z_j)\cdot Var[\mu(\Theta_j)] \tag{2.63}$$

2.3.3 Estimadors per als coeficients de credibilitat z_j i c

Ja s'ha vist quins estimadors es fan servir per calcular el coeficient de credibilitat de la part del valor esperat z_j (2.47) i (2.49). En canvi, ens calen estimadors per calcular el coeficient de la part de la variància c_j ,

$$c_j = \frac{Var[\sigma^2(\Theta_j)]}{Var[\Sigma_j^2]} \tag{2.64}$$

Per $Var[\sigma^2(\Theta_j)]$ Centeno L. proposa el següent estimador,

$$\hat{Var}[\sigma^2(\Theta_j)] = \frac{1}{k-1}\cdot\sum_{j=1}^{k}\left(\Sigma_j^2 - E[\sigma^2(\Theta_j)]\right)^2 \tag{2.65}$$

i per $Var[\Sigma_j^2]$:

$$\hat{Var}[\Sigma_j^2] = Var[\sigma^2(\Theta_j)] - \frac{2}{t+1}\cdot L \tag{2.66}$$

amb

$$L = \frac{1}{k}\cdot\sum_{j=1}^{k}\left(\Sigma_j^2\right)^2$$

2.3.4 Prima de credibilitat

Després de determinar les tres components de la prima de credibilitat amb recàrrec, es pot concloure que la prima de credibilitat de ràtio de pèrdua del risc j al període t_j+1 és:

$$\begin{aligned} P_{t_j+1}\left(\vec{X}_j\right) &= z_j\cdot\bar{X}_j + (1-z_j)\cdot E[\mu(\Theta_j)] + \\ &+ \frac{\alpha}{w_{j,t_j+1}}c_j\cdot\Sigma_1^2 + (1-c_j)\cdot E[\sigma^2(\Theta_j)] + \\ &+ \alpha\cdot(1-z_j)\cdot Var\left[\mu(\Theta_j)\right] \end{aligned} \tag{2.67}$$

On w_{j,t_j+1} són els pesos o ponderacions pel període $t_j + 1$. A la pràctica, normalment, no es coneixen dades per a aquests pesos. En els exemples posteriors, utilitzarem la següent estimació per w_{j,t_j+1} :

$$\hat{w}_{j,t_j+1} = \frac{1}{t_j} \cdot \sum_{j=1}^{t_j} w_{js} \tag{2.68}$$

que no es res més que la mitjana de les ponderacions dels períodes precedents.

I com $S_{j,t_j+1} = w_{j,t_j+1} X_{j,t_j+1}$ la prima total del risc j l'període $t_j + 1$ és

$$w_{j,t_j+1} \cdot \mu(\Theta_j) + \alpha \cdot w^2_{j,t_j+1} \cdot \frac{\sigma^2(\Theta_j)}{w_{j,t_j+1}} = w_{j,t_j+1} \cdot \left(\mu(\Theta_j) + \alpha \cdot \sigma^2(\Theta_j)\right)$$

i la respectiva prima de credibilitat és:

$$\begin{aligned} P_{t_j+1}\left(\vec{X}_j\right) &= w_{j,t_j+1}\left(z_j \cdot \bar{X}_j + (1 - z_j) \cdot E[\mu(\Theta_j)]\right) + \\ &+ \frac{\alpha}{w_{j,t+1}}\left(c_j \cdot \Sigma_1^2 + (1 - c_j) \cdot E[\sigma^2(\Theta_j)]\right) + \\ &+ \alpha \cdot w^2_{j,t_j+1}\left((1 - z_j) \cdot Var\left[\mu(\Theta_j)\right]\right) \end{aligned} \tag{2.69}$$

2.3.5 Exemple numèric

Seguint amb l'exemple utilitzat en l'anterior model (secció 2.2.3) i d'acord amb les taules 2.1 i 2.2 de dades méa amunt detallades farem de nou tots els càlculs per obtenir els resultats per a aquest model. En primer lloc, calculem les estimacions dels paràmetres estructurals:

$$\begin{aligned} \hat{m} &= 9.380 \\ \hat{S}^2 &= 216.07 \\ \hat{a} &= 12.45 \end{aligned} \tag{2.70}$$

que són necessaris per calcular la resta del problema, i que han estat trobats fent servir les expressions (2.47)-(2.49) de la secció 2.3.2. A continuació, exposem en la taula 2.5 les dades que hem aconseguit a partir de les dades de les taules 2.1 i

2.2, aquesta última degut al fet que en aquest model tenim en compte els pesos o ponderacios:

Taula 2.5 *Dades empíriques*

	$j=1$	$j=2$	$j=3$	$j=4$	$j=5$	$j=6$	$j=7$
$\bar{X}_j$	3.07	19.45	4.96	6.98	9.54	12.12	9.16
Σ_j^2	116.35	694.41	134.35	34.58	89.51	169.63	273.7
z_j	0.70	0.78	0.87	0.88	0.89	0.94	0.96

La primera fila ens indica la mitjana dels ràtios de pèrdua de cada pòlissa j en els cinc anys observats. En canvi la segona, ens informa de la variabilitat en cada contracte durant aquest període, és a dir, és la variància de cada pòlissa. Aquí és on podem veure quina de les pòlisses té més variabilitat i per tant caldrà afegir-li un recàrrec més gran que les altres. Per exemple, $j = 2$ té una gran variabilitat; cal recordar que la pòlissa $j = 1$ té uns resultats un tan estranys a causa que tres de les observacions són zero. Per últim, la tercera fila són els valors dels coeficients de credibilitat de la part del valor esperat, calculats segons (2.46). Si observem la taula 2.2, ens adonarem que per a les pòlisses on w_{js} és més gran, el seu corresponent coeficient de credibilitat z_j és també més gran; a més volum d'experiència, més gran és la credibilitat.

El coeficient de credibilitat per la part de la variància és $c = 0.403$. Com podem veure, en la part del valor esperat, podem donar més confiança a l'experiència individual que a la col·lectiva, és a dir, a la combinació lineal (2.44), les primes de credibilitat donaran més importància a les primes individuals que a la col·lectiva, ja que els z_j són més grans del 70 per cent. En canvi, no passa el mateix a la part de la variància, on, per molt poc, la variància col·lectiva (S^2) serà més important que les individuals (Σ_j^2).

A la darrera taula, exposem els resultats finals del problema:

Taula 2.6 *Primes de credibilitat*

	$j=1$	$j=2$	$j=3$	$j=4$	$j=5$	$j=6$	$j=7$
$P1$	4.94	17.25	5.55	7.26	9.52	11.95	9.17
$P2$	175.89	408.79	183.15	142.95	165.08	197.36	239.29
$P3$	3.70	2.72	1.66	1.46	1.30	0.74	0.49
P	11.24	26.17	7.99	8.99	11.23	13.04	9.99
R	6.29	8.92	2.44	1.73	1.71	1.09	0.88
%	127.08	51.78	43.96	23.80	17.95	9.08	9.03

$P1$ és la prima de credibilitat de la part del valor esperat, o sigui, la prima per aplicar si utilitzéssim el model de Bühlmann-Straub sense cap recàrrec de seguretat: la prima pura de credibilitat. $P2$ és la prima de credibilitat de la part de la variància que juntament amb la de la part de fluctuació ($P3$) seran la base sobre la qual es carrega la prima pura ($\alpha = 0.25$). La prima de credibilitat amb recàrrec és la quarta fila (P). Per últim, la cinquena i la sisena files són, respectivament, la diferència $R = P - P1$ i el tant per cent en què ha augmentat la prima a causa del recàrrec.

Deixant de banda la primera pòlissa, totes les primes amb recàrrec són més petites que les seves corresponents primes del model anterior. Igualment, les pòlisses $j = 2$ i $j = 3$ són les que tenen un percentatge més gran per les mateixes raons que hem comentat a 2.2.3. No obstant això, cal destacar que el valor de les $P2$ és molt més gran ara, a causa dels pesos que hi intervenen, hem de tenir en compte però, que abans de sumar-se a la prima pura seran dividits per w_{j,t_j+1} . Per obtenir l'estimació de w_{j,t_j+1} calculem la mitjana dels volums de primes que hem observat fins t , com ja hem vist a (2.68).

Per fer el model operacional per a casos pràctics, s'han de fer les estimacions dels paràmetres estructurals. Aquests, que es defineixen a continuació, són els utilitzats en els exemples i en la secció 3.6. Un estimador senzill per a la mitjana global m és la mitjana ponderada:

$$\hat{m} = X_{www} = \sum_{i=1}^{I}\sum_{j=1}^{J} \frac{w_{ij\Sigma}}{w_{\Sigma\Sigma\Sigma}} X_{ijw} \tag{3.44}$$

Per S^2 , l'estimador no esbiaixat és:

$$\hat{S}^2 = \sum_{i=1}^{I}\sum_{j=1}^{J}\sum_{s=1}^{t_{ij}} w_{ijt}\,(X_{ijt} - X_{ijw})^2 \,/\, \sum_{i=1}^{I}\sum_{j=1}^{J} (t_{ij}-1)_+ \tag{3.45}$$

amb $(t_{ij}-1)_+ = t_{ij} - 1$ if $t_{ij} > 2$ i zero en altres casos.

Pels paràmetres $b^{(1)}$, $b^{(2)}$ i $b^{(12)}$ podem obtindre un gran nombre d'estimadors fent servir les relacions:

$$E[X_{ijs}X_{klu}] = m^2 + \delta_{ik}b^{(1)} + \delta_{jl}b^{(2)} + \delta_{ij,kl}b^{(12)} + \delta_{ijt,klu}S^2 \,/\, w_{ijs} \tag{3.46}$$

De les moltes possibilitats d'estimadors no esbiaixats que es poden construir fent combinacions lineals dels productes $(X_{ijs}X_{klu})$, s'ha seleccionat el següent procediment basat en les esperances, tal i com es pot veure a Dannenburg, D. (1996b):

$$E\left[\sum_{i=1}^{I} \frac{g_i^{(1)}}{g_\Sigma^{(1)}} \left(\sum_{j=1}^{J} \frac{w_{ij\Sigma}}{w_{i\Sigma\Sigma}} (X_{ijw} - X_{iww})^2 - S^2(J-1)\,/\,w_{i\Sigma\Sigma}\right)\right] =$$

$$= \left(b^{(2)} + b^{(12)}\right)\left(1 - \sum_{i=1}^{I}\sum_{j=1}^{J} \frac{g_i^{(1)}}{g_\Sigma^{(1)}} \left(\frac{w_{ij\Sigma}}{w_{i\Sigma\Sigma}}\right)^2\right), \tag{3.47}$$

amb

$$X_{iww} = \sum_{j=1}^{J} \frac{w_{ij\Sigma}}{w_{i\Sigma\Sigma}} X_{ijw}.$$

Aquesta igualtat pot ser derivada fent servir

$$Cov[X_{ijs}, X_{klu}] = b^{(1)} + \delta_{jl}\left(b^{(2)} + b^{(12)} + S^2 \,/\, w_{ij\Sigma}\right) \tag{3.48}$$

a

$$E\left[\sum_{j=1}^{J}\frac{w_{ij\Sigma}}{w_{\Sigma\Sigma\Sigma}}(X_{ijw} - X_{iww})^2\right] = \sum_{j=1}^{J}\frac{w_{ij\Sigma}}{w_{\Sigma\Sigma\Sigma}}(Var[X_{ijw}] - Var[X_{iww}]). \quad (3.49)$$

Els coeficients $g_i^{(1)}$ poden ser escollits arbitràriament. De la mateixa manera, trobem una expressió canviant i per j :

$$E\left[\sum_{j=1}^{J}\frac{g_j^{(2)}}{g_\Sigma^{(2)}}\left(\sum_{i=1}^{I}\frac{w_{ij\Sigma}}{w_{\Sigma j\Sigma}}(X_{ijw} - X_{wjw})^2 - S^2(I-1)/w_{\Sigma j\Sigma}\right)\right] =$$

$$= \left(b^{(1)} + b^{(12)}\right)\left(1 - \sum_{i=1}^{I}\sum_{j=1}^{J}\frac{g_j^{(2)}}{g_\Sigma^{(2)}}\left(\frac{w_{ij\Sigma}}{w_{\Sigma j\Sigma}}\right)^2\right), \quad (3.50)$$

A més, també tindrem

$$E\left[\sum_{i=1}^{I}\sum_{j=1}^{J}\frac{w_{ij\Sigma}}{w_{\Sigma\Sigma\Sigma}}(X_{ijw} - X_{www})^2 - S^2(IJ-1)/w_{\Sigma\Sigma\Sigma}\right] =$$

$$= b^{(1)}\left(1 - \sum_{i=1}^{I}\left(\frac{w_{i\Sigma\Sigma}}{w_{\Sigma\Sigma\Sigma}}\right)^2\right) + b^{(2)}\left(1 - \sum_{j=1}^{J}\left(\frac{w_{\Sigma j\Sigma}}{w_{\Sigma\Sigma\Sigma}}\right)^2\right) + \quad (3.51)$$

$$+ \quad b^{(12)}\left(1 - \sum_{i=1}^{I}\sum_{j=1}^{J}\left(\frac{w_{ij\Sigma}}{w_{\Sigma\Sigma\Sigma}}\right)^2\right)$$

Es pot verificar això, si fem servir

$$Cov[X_{ijs}, X_{klu}] = \delta_{ik}b^{(1)} + \delta_{jl}b^{(2)} + \delta_{ij,kl}\left(b^{(12)} + S^2/w_{ij\Sigma}\right) \quad (3.52)$$

a

$$E\left[\sum_{i=1}^{I}\sum_{j=1}^{J}\frac{w_{ij\Sigma}}{w_{\Sigma\Sigma\Sigma}}(X_{ijw} - X_{www})^2\right] = \sum_{i=1}^{I}\sum_{j=1}^{J}\frac{w_{ij\Sigma}}{w_{\Sigma\Sigma\Sigma}}(Var[X_{ijw}] - Var[X_{www}]).$$

(3.53)

Una vegada definides aquestes equacions, es poden obtenir els paràmetres $b^{(1)}$, $b^{(2)}$ i $b^{(12)}$ solucionant el sistema d'equacions lineals format per les tres expressions (3.47), (3.50) i (3.51). Aquest procediment no pot ser considerat com l'òptim, perquè només és una selecció de les moltes possibilitats per estimar aquestes variàncies. Buchanan, Heppell i Neuhaus (1989) descriuen un procediment similar pel seu model. En canvi, a Searle et al. (1992), constata que encara no s'ha derivat el procediment òptim per a aquest model.

3.3.2 Model "two-way" unitari

Pel que fa al model unitari, és a dir, amb $t_{ij} = t$ i $w_{ijs} = 1$, el sistema d'equacions del Teorema 3.2 pot solucionar-se explícitament. En aquest cas, els factors de credibilitat són, a partir de (3.31) :

$$z^{(12)} = \frac{b^{(12)}}{b^{(12)} + S^2/t}; \qquad z^{(1)} = \frac{Jb^{(1)}}{b^{(12)} + Jb^{(1)} + S^2/t}; \tag{3.54}$$
$$z^{(2)} = \frac{Ib^{(2)}}{b^{(12)} + Ib^{(2)} + S^2/t}; \qquad z = \frac{Jb^{(1)} + Ib^{(2)}}{b^{(12)} + Jb^{(1)} + Ib^{(2)} + S^2/t}$$

i a més tenim les següents mitjanes per a l'estimació de $X_{ij,t_{ij}+1}$:

$$\bar{X}_{ij}^{(12)} = \frac{1}{t}\sum_{s=1}^{t} X_{ijs}; \qquad \bar{X}_i^{(1)} = \frac{1}{J}\sum_{l=1}^{J} \bar{X}_{il}^{(12)}; \tag{3.55}$$

$$\bar{X}_j^{(2)} = \frac{1}{I}\sum_{k=1}^{I} \bar{X}_{kj}^{(12)}; \qquad \bar{X} = \frac{1}{IJ}\sum_{k=1}^{I}\sum_{l=1}^{J} \bar{X}_{kl}^{(12)} \tag{3.56}$$

Els factors de credibilitat $z^{(12)}$, $z^{(1)}$ i $z^{(2)}$ són les versions reduïdes de $z_{ij}^{(12)}$, $z_i^{(1)}$ i $z_j^{(2)}$. A més, es defineix un nou factor global z .

Teorema 3.3 *L'estimador de credibilitat de* $X_{ij,t+1}$ *en el model de classificació creuada "two way" unitari és igual a*

$$\begin{aligned} X_{ij,t+1}^{*} &= m + z^{(12)}\left(\bar{X}_{ij}^{(12)} - m\right) + \left(1 - z^{(12)}\right) z^{(1)} \left(\bar{X}_i^{(1)} - \bar{X}\right) + \\ &+ \left(1 - z^{(12)}\right) z^{(2)} \left(\bar{X}_i^{(2)} - \bar{X}\right) + \left(1 - z^{(12)}\right) z \left(\bar{X} - m\right) \end{aligned} \tag{3.57}$$

Demostració

Les igualtats (3.34) i (3.35) del Teorema 3.2 es redueixen a

$$\Xi_i^{(1)*} = z^{(1)}\left(\bar{X}_i^{(1)} - m\right) + z^{(1)}\frac{1}{J}\sum_{l=1}^{J}\Xi_l^{(2)*} \tag{3.58}$$

$$\Xi_j^{(2)*} = z^{(2)}\left(\bar{X}_j^{(2)} - m\right) - z^{(2)}\frac{1}{I}\sum_{k=1}^{I}\Xi_k^{(1)*} \tag{3.59}$$

Substituint l'expressió (3.58) a (3.59) ens queda:

$$\Xi_j^{(2)*} = z^{(2)}\left(\bar{X}_j^{(2)} - m\right) - z^{(1)}z^{(2)}\left(\bar{X}_i^{(1)} - m\right) - z^{(1)}z^{(2)}\frac{1}{J}\sum_{l=1}^{J}\Xi_l^{(2)*} \tag{3.60}$$

Prenent la suma sobre j , dividint per J i reordenant termes ens dóna:

$$\frac{1}{J}\sum_{l=1}^{J}\Xi_l^{(2)*} = \frac{z^{(2)}\left(1 - z^{(1)}\right)}{1 - z^{(1)}z^{(2)}}\left(\bar{X} - m\right) \tag{3.61}$$

Després, substituint aquesta expressió a (3.58) ens porta a

$$\begin{aligned}
\Xi_i^{(1)*} &= z^{(1)}\left(\bar{X}_i^{(1)} - m\right) - z^{(1)}\frac{z^{(2)}\left(1 - z^{(1)}\right)}{1 - z^{(1)}z^{(2)}}\left(\bar{X} - m\right) = \\
&= z^{(1)}\left(\bar{X}_i^{(1)} - \bar{X}\right) + z^{(1)}\left(1 - \frac{z^{(2)}\left(1 - z^{(1)}\right)}{1 - z^{(1)}z^{(2)}}\right)\left(\bar{X} - m\right) = \\
&= z^{(1)}\left(\bar{X}_i^{(1)} - \bar{X}\right) + \left(\frac{z^{(1)}\left(1 - z^{(2)}\right)}{1 - z^{(1)}z^{(2)}}\right)\left(\bar{X} - m\right)
\end{aligned}$$

Seguint un procediment similar, s'obtindria l'estimador per $\Xi_j^{(2)*}$. Amb la corresponent expressió per $\Xi_j^{(2)*}$ i agafant com a referència l'expressió (3.40), es té:

$$\begin{aligned}
X^*_{ij,t_{ij}+1} &= m + \Xi_{ij}^{(12)*} + \Xi_i^{(1)*} + \Xi_j^{(2)*} = \\
&= m + z^{(12)}\left(\bar{X}_{ij}^{(12)} - m\right) + \left(1 - z^{(12)}\right)\left(\Xi_i^{(1)*} + \Xi_j^{(2)*}\right) = \\
&= m + z^{(12)}\left(\bar{X}_{ij}^{(12)} - m\right) + \left(1 - z^{(12)}\right)z^{(1)}\left(\bar{X}_i^{(1)} - \bar{X}\right) + \\
&+ \left(1 - z^{(12)}\right)z^{(2)}\left(\bar{X}_j^{(2)} - \bar{X}\right) + \\
&+ \frac{z^{(1)}\left(1 - z^{(2)}\right) + z^{(2)}\left(1 - z^{(1)}\right)}{1 - z^{(1)}z^{(2)}}\left(1 - z^{(12)}\right)\left(\bar{X} - m\right)
\end{aligned} \tag{3.62}$$

El coeficient $\left(1 - z^{(12)}\right)\left(\bar{X} - m\right)$ pot ser escrit com

$$\frac{\frac{1}{z^{(2)}} - 1 + \frac{1}{z^{(1)}} - 1}{\frac{1}{z^{(1)}z^{(2)}} - 1} = \frac{\frac{b^{(12)} + S^2/t}{Ib^{(2)}} + \frac{b^{(12)} + S^2/t}{Jb^{(1)}}}{\left(1 + \frac{b^{(12)} + S^2/t}{Jb^{(1)}}\right)\left(1 + \frac{b^{(12)} + S^2/t}{Ib^{(2)}}\right) - 1} =$$

$$= \frac{\left(b^{(12)} + \frac{S^2}{t}\right)\left(\frac{1}{Ib^{(2)}} + \frac{1}{Jb^{(1)}}\right)}{\left(b^{(12)} + \frac{S^2}{t}\right)\left(\frac{1}{Ib^{(2)}} + \frac{1}{Jb^{(1)}}\right) + \left(b^{(12)} + \frac{S^2}{t}\right)^2\left(\frac{1}{Ib^{(2)}} \cdot \frac{1}{Jb^{(1)}}\right)} =$$

$$= \frac{Jb^{(1)} + Ib^{(2)}}{Jb^{(1)} + Ib^{(2)} + b^{(12)} + S^2/t} = z$$

Després de substituir aquest valor a (3.62) trobem l'expressió (3.57). □

Si m és estimada per l'estimador (no òptim) $\bar{X}$ per aproximar l'estimador homogeni de credibilitat, l'últim terme de (3.57) desapareix. La prima de credibilitat és igual a $\bar{X}$ ajustat per les desviacions de $\bar{X}_{ij}^{(12)}$, $\bar{X}_i^{(1)}$ i $\bar{X}_j^{(2)}$ des d'aquesta mitjana.

En la pràctica asseguradora, normalment les dades no són unitàries i, fins i tot, en ocasions, es pot presentar alguna cel·la sense observacions possibles. En situacions com aquesta, l'expressió del Teorema 3.2 segueix éssent vàlida com veurem a continuació.

3.3.3 Cel·les buides

Si la suma dels pesos $w_{ij\Sigma}$ és definida com zero, això és, la cel·la (i,j) és buida o $t_{ij} = 0$, aleshores l'estimador de credibilitat de $X_{ij,t_{ij}+1}$ definit en el Teorema 3.2 és igualment vàlid. Quan ens trobem amb un cas com aquest, l'estimador de credibilitat d'un nou risc X_{ij1} emergent en aquella cel·la és igual a:

$$X_{ij1}^* = m + z_i^{(1)}(Y_{izw} - m) + z_j^{(2)}(Y_{zjw} - m) \tag{3.63}$$

Això ho podem derivar de (3.32) en el Teorema 3.2, prenent $z_{ij}^{(12)} = 0$, que ve donat per $w_{ij\Sigma} = 0$.

La relació (3.63) és el resultat de les següents consideracions. D'acord amb la propietat de linealitat, l'estimador de credibilitat de X_{ij1} és igual a:

$$X_{ij1}^* = m + \Xi_i^{(1)*} + \Xi_j^{(2)*} + \Xi_{ij}^{(12)*} + \Xi_{ijs}^{(123)*} \tag{3.64}$$

Si $\vec{X}$ és definit com el vector que conté totes les observacions del risc X_{ijt} (amb ordre arbritari), llavors l'estimador de credibilitat de $\Xi_{ij}^{(12)}$ és igual a (vegeu Dannenburg, D. (1996b))

$$\Xi_{ij}^{(12)*} = E\left[\Xi_{ij}^{(12)}\right] + Cov\left[\Xi_{ij}^{(12)}, \vec{X}\right]\left(Var[\vec{X}]\right)^{-1}\left(\vec{X} - E[\vec{X}]\right) \tag{3.65}$$

El vector fila $Cov\left[\Xi_{ij}^{(12)}, \vec{X}\right]$ consisteix en els elements

$$Cov\left[\Xi_{ij}^{(12)}, X_{klt}\right] = Cov\left[\Xi_{ij}^{(12)}, m + \Xi_{k}^{(1)} + \Xi_{l}^{(2)} + \Xi_{kl}^{(12)} + \Xi_{klt}^{(123)}\right] = \delta_{ij,kl} b^{(12)} \tag{3.66}$$

A causa de no tenir observacions a la cel·la (i, j), el vector $\vec{X}$ no té elements, per la qual cosa simultàniament sempre $i = k$ i $j = l$. Per tant, el vector $Cov\left[\Xi_{ij}^{(12)}, \vec{X}\right]$ només conté zeros i a més $\Xi_{ij}^{(12)*} = E\left[\Xi_{ij}^{(12)}\right] = 0$. Per la mateixa raó $\Xi_{klt}^{(123)}$ és zero, i l'expressió (3.64) es redueix a

$$X_{ij1}^{*} = m + \Xi_{i}^{(1)*} + \Xi_{j}^{(2)*} \tag{3.67}$$

Com la cel·la (i, j) no conté cap informació sobre $\Xi_{i}^{(1)}$ o $\Xi_{j}^{(2)}$, X_{ijw} ha de ser exclós del sistema d'equacions que porta a $\Xi_{i}^{(1)*}$ i $\Xi_{j}^{(2)*}$ (vegeu (3.34) i (3.35)). Això es pot fer definint $w_{ij\Sigma}$ com zero, aquesta afirmació fa que el valor de $X_{ij\Sigma}$ no existeixi. Per conveniència, $X_{ij\Sigma}$ és igual a zero en aquests casos per evitar problemes a l'hora d'estimar paràmetres.

També pot ocórrer que una columna sencera sigui buida, com per exemple, quan afegim una nova categoria $I+1$ pel primer factor de risc i encara no hi ha possibles observacions dels riscos X_{I+1j1} . En aquest cas, l'estimador de X_{I+1j1} és igual a

$$X_{ij1}^{*} = m + z_{j}^{(2)}\left(Y_{zjw} - m\right) = m + \Xi_{j}^{(2)*} \tag{3.68}$$

3.4 El model additiu

3.4.1 Estructura del model

El model general de classificació creuada "multi-way" presentat a l'apartat 3.2.1 es pot escriure de la següent manera:

$$\begin{aligned} E\left[X_{j_1 \dots j_p s} \,|\, \Theta_{j_{i_1}}^{(i_1)}, \dots, \Theta_{j_{i_q}}^{(i_q)}\right] &= \mu_{i_1 \dots 1_q}(\Theta_{j_{i_1}}^{(i_1)}, \dots, \Theta_{j_{i_q}}^{(i_q)}) = \\ &= m + v_{i_1}\left(\Theta_{j_{i_1}}^{(i_1)}\right) + \cdots + v_{i_p}\left(\Theta_{j_{i_p}}^{(i_p)}\right) \end{aligned} \quad (3.69)$$

per $p, i_1, \dots, i_p \in (1, \dots, P)$; $j_{i_1} \in (1, \dots, J_{i_1})$. S'assumeix que $i_1 < i_2 < \cdots < i_p$. Com ja hem comprovat, les components v tenen mitjana zero i no estan correlacionades. Cada factor de risc genera el seu propi efecte additiu a la prima de risc, i no s'inclouen les interaccions entre factors. Fent servir la notació emprada al model "two-way", aplicarem el model de components de variàncies per derivar estimadors de credibilitat i definir els riscos $X_{j_1 \dots j_p s}$ com:

$$X_{j_1 \dots j_p s} = m + \Xi_{j_1}^{(1)} + \cdots + \Xi_{j_p}^{(P)} + \Xi_{j_1 \dots j_p s}^{(P+1)} \quad (3.70)$$

on els termes Ξ d'aquesta expressió són independents amb mitjana zero i variàncies

$$Var\left[\Xi_{j_i}^{(i)}\right] = b^{(i)} \quad \text{i} \quad Var\left[\Xi_{j_1 \dots j_p s}^{(P+1)}\right] = S^2 \,/\, w_{j_1 \dots j_p s} \quad (3.71)$$

És evident la manca de termes mixtos de l'estil $\Xi_{j_{i_1} \dots j_{i_p}}^{(i_1 \dots i_p)}$, com hem dit abans, no és permesa la seva participació en aquest model.

D'acord amb la propietat de linealitat, l'estimador de credibilitat de $X_{j_1 \dots j_P, t_{j_1 \dots j_P}+1}$ és igual a:

$$X^*_{j_1 \dots j_P, t_{j_1 \dots j_P}+1} = m + \Xi_{j_1}^{(1)*} + \cdots + \Xi_{j_p}^{(P)*} + \Xi_{j_1 \dots j_P, t_{j_1 \dots j_P}+1}^{(P+1)*} \quad (3.72)$$

Com $\Xi_{j_1 \dots j_P, t_{j_1 \dots j_P}+1}^{(P+1)}$ és independent dels riscos observats en els que l'estimador de credibilitat està basat, el darrer terme de (3.72) és igual al seu valor esperat, que és zero. Per calcular l'estimador de l' i -èsim terme $\Xi_{j_i}^{(i)*}$, ho condicionem, en primer lloc, a les realitzacions

$$\Xi_{k_1}^{(1)} = \xi_{k_1}^{(1)}, \ldots, \Xi_{k_{i-1}}^{(i-1)} = \xi_{k_{i-1}}^{(i-1)}, \Xi_{k_{i+1}}^{(i+1)} = \xi_{k_{i+1}}^{(i+1)}, \ldots, \Xi_{k_P}^{(P)} = \xi_{k_P}^{(P)} \tag{3.73}$$

per tot $k_l = 1, \ldots, J_l$ $(l \neq i)$. Ara es poden definir les següents variables aleatòries:

$$\begin{aligned} U_{k_1 \ldots k_{i-1} j_i k_{i+1} \ldots k_P s}^{(i)} &= X_{k_1 \ldots k_{i-1} j_i k_{i+1} \ldots k_P s} - m - \xi_{k_1}^{(1)} - \cdots - \xi_{k_{i-1}}^{(i-1)} - \xi_{k_{i+1}}^{(i+1)} - \cdots - \xi_{k_P}^{(P)} \\ &= \Xi_{j_i}^{(i)} + \Xi_{k_1 \ldots k_{i-1} j_i k_{i+1} \ldots k_P s}^{(P+1)} \end{aligned} \tag{3.74}$$

Subjectes a la condició de (3.73), aquestes variables aleatòries satisfant les hipòtesis del model de Bühlmann-Straub:

1. Els grups $\left\{\Xi_{j_i}^{(i)}, \vec{U}_{j_i}^{(i)}\right\}$ són independents per $j_i = 1, \ldots, J_i$. On el vector $\vec{U}_{j_i}^{(i)}$ conté tots els $U_{k_1 \ldots k_{i-1} j_i k_{i+1} \ldots k_P s}^{(i)}$ per $k_l = 1, \ldots, J_l$ $(l \neq i)$ i tots els valors de s .

2. $E\left[U_{k_1 \ldots k_{i-1} j_i k_{i+1} \ldots k_P s}^{(i)} \,|\, \Xi_{j_i}^{(i)}\right] = \Xi_{j_i}^{(i)}$ per tot s .

3. $E\left[Cov\left[U_{k_1 \ldots k_{i-1} j_i k_{i+1} \ldots k_P s}^{(i)}, U_{h_1 \ldots h_{i-1} j_i h_{i+1} \ldots h_P u} \,|\, \Xi_{j_i}^{(i)}\right]\right] =$
$$= \prod_{\substack{l=1 \\ l \neq i}}^{P} \delta_{k_l h_l} \cdot \delta_{su} \cdot S^2 / w_{k_1 \ldots k_{i-1} j_i k_{i+1} \ldots k_P s} \,.$$

Fent servir l'estimador de credibilitat de Bühlmann-Straub (de manera similar a la demostració del Teorema 3.2), trobem que l'estimador de credibilitat condicional de $\Xi_{j_i}^{(i)}$ és igual a

$$z_{j_i}^{(i)} \sum_{k_1=1}^{J_1} \cdots \sum_{k_{i-1}=1}^{J_{i-1}} \sum_{k_{i+1}=1}^{J_{i+1}} \cdots \sum_{k_P=1}^{J_P} \sum_{s=1}^{t_{k_1 \ldots k_{i-1} j_i k_{i+1} \ldots k_P}} \frac{w_{k_1 \ldots k_{i-1} j_i k_{i+1} \ldots k_P s}}{w_{\Sigma j_i}^{(i)}} U_{k_1 \ldots k_{i-1} j_i k_{i+1} \ldots k_P s}^{(i)} \tag{3.75}$$

$$= z_{j_i}^{(i)} \sum_{\substack{q=1 \\ q \neq i}}^{P} \sum_{k_q=1}^{J_q} \sum_{s=1}^{t_{k_1 \ldots k_{i-1} j_i k_{i+1} \ldots k_P}} \frac{w_{k_1 \ldots k_{i-1} j_i k_{i+1} \ldots k_P s}}{w_{\Sigma j_i}^{(i)}} \left(X_{k_1 \ldots k_{i-1} j_i k_{i+1} \ldots k_P s} - m - \sum_{\substack{g=1 \\ g \neq i}}^{P} \xi_{k_g}^{(g)} \right)$$

on han estat definits

$$z_{j_i}^{(i)} = \frac{b^{(i)}}{b^{(i)} + S^2 \,/\, w_{\Sigma j_i}^{(i)}}; \tag{3.76}$$

$$w_{\Sigma j_i}^{(i)} = \sum_{\substack{l=1 \\ l\neq i}}^{P} \cdots \sum_{k_l=1}^{J_l} \sum_{s=1}^{t_{k_1 \ldots k_{i-1} j_i k_{i+1} \ldots k_P}} w_{k_1 \ldots k_{i-1} j_i k_{i+1} \ldots k_P} \tag{3.77}$$

D'acord amb les propietats de linealitat i iteractivitat, l'estimador de credibilitat $\Xi_{j_i}^{(i)*}$ per $\Xi_{j_i}^{(i)}$ l'obtenim de (3.75), substituint cada $\xi_{k_g}^{(g)}$ pel corresponent estimador de $\Xi_{k_g}^{(g)*}$. Després d'arreglar-la una mica, l'expressió final és:

$$\Xi_{j_i}^{(i)*} = z_{j_i}^{(i)} \left(X_{wj_i}^{(i)} - m \right) - z_{j_i}^{(i)} \sum_{\substack{g=1 \\ g\neq i}}^{P} \sum_{k_g=1}^{J_g} \frac{w_{\Sigma k_g j_i}^{(g,i)}}{w_{\Sigma j_i}^{(i)}} \Xi_{k_g}^{(g)*}, \tag{3.78}$$

amb

$$X_{wj_i}^{(i)} = \sum_{\substack{q=1 \\ q\neq i}}^{P} \sum_{k_q=1}^{J_q} \sum_{s=1}^{t_{k_1 \ldots k_{i-1} j_i k_{i+1} \ldots k_P}} \frac{w_{k_1 \ldots k_{i-1} j_i k_{i+1} \ldots k_P s}}{w_{\Sigma j_i}^{(i)}} X_{k_1 \ldots k_{i-1} j_i k_{i+1} \ldots k_P s} \tag{3.79}$$

i

$$w_{\Sigma k_g j_i}^{(g,i)} = \sum_{\substack{q=1 \\ q\neq i \\ q\neq g}}^{P} \sum_{k_q=1}^{J_q} \sum_{s=1}^{t_{k_1 \ldots k_{i-1} j_i k_{i+1} \ldots k_P}} w_{k_1 \ldots k_{i-1} j_i k_{i+1} \ldots k_P s}. \tag{3.80}$$

Substituint (3.78) dins de (3.72) resulta el següent teorema:

Teorema 3.4 *L'estimador de credibilitat de* $X_{j_i \ldots j_P, t_{j_i \ldots j_P}+1}$ *en el model additiu "multi-way" és igual a:*

$$X^*_{j_i \ldots j_P, t_{j_i \ldots j_P}+1} = m + \sum_{i=1}^{P} z_{j_i}^{(i)} \left(Y_{wj_i}^{(i)} - m \right) \tag{3.81}$$

amb

$$Y_{wj_i}^{(i)} = X_{wj_i}^{(i)} - \sum_{\substack{g=1 \\ g\neq i}}^{P} \sum_{k_g=1}^{J_g} \frac{w_{\Sigma k_g j_i}^{(g,i)}}{w_{\Sigma j_i}^{(i)}} \Xi_{k_g}^{(g)*}. \tag{3.82}$$

Per determinar la correcció dels termes $\Xi_{k_g}^{(g)*}$ *s'ha de solucionar el següent sistema d'equacions lineals per* $g = 1, \ldots, P$ *i* $k_g = 1, \ldots, J_g$ *:*

$$\Xi_{k_g}^{(g)*} = z_{k_g}^{(g)} \left(X_{wk_g}^{(g)} - m \right) - z_{k_g}^{(g)} \sum_{\substack{q=1 \\ q\neq i}}^{P} \sum_{k_q=1}^{J_q} \frac{w_{\Sigma k_q k_g}^{(q,g)}}{w_{\Sigma k_g}^{(g)}} \Xi_{k_q}^{(q)*} \tag{3.83}$$

L'estimador de credibilitat de (3.81) és igual a la mitjana global m més un nombre d'ajustaments per a cada classe de riscos a que pertany $X_{j_i \dots j_P, t_{j_i \dots j_P}+1}$. L'experiència del risc de classe j_i del i -èsim factor de risc es mesura per $Y_{wj_i}^{(i)}$. Una fracció $z_{j_i}^{(i)}$ de la diferència entre $Y_{wj_i}^{(i)}$ i m és afegida a la mitjana global per a cada i .

En general, el sistema d'equacions a (3.83) ha de ser solucionat numèricament, a menys que els pesos $w_{j_1 \dots j_P s}$ tinguin alguna forma molt especial. Per exemple, suposem que $t_{j_1 \dots j_p} = t$, i que els pesos són multiplicatius. Això significa que

$$w_{j_1 \dots j_P s} = w_{j_1}^{(1)} \cdot w_{j_2}^{(2)} \cdot \dots \cdot w_{j_P}^{(P)} \cdot w_s^{(P+1)}, \tag{3.84}$$

per certs factors $w_{j_k}^{(k)}$ i $w_s^{(P+1)}$. En aquest cas els ràtios $w_{\Sigma j_k j_i}^{(k,i)} / w_{\Sigma j_i}^{(i)}$ no depenen de j_i i (3.83) pot ser solucionat analíticament. De totes maneres, a la pràctica, generalment els pesos no són així, i a més una solució explícita només es dóna en el cas del model unitari amb $w_{j_1 \dots j_P s} = 1$. Si J_Π és definit com

$$J_\Pi = t \cdot \prod_{l=1}^{P} J_l \tag{3.85}$$

tal que

$$w_{\Sigma j_i}^{(i)} = J_\Pi / J_i \tag{3.86}$$

aleshores s'obtenen, de (3.76) i (3.79), els següents factors de credibilitat i mitjanes corresponents a riscos de la classe j_i del factor de risc i :

$$z_{j_i}^{(i)} = z^{(i)} = \frac{b^{(i)} / J_i}{b^{(i)} / J_i + S^2 / J_\Pi}; \tag{3.87}$$

$$X_{wj_i}^{(i)} = \bar{X}_{j_i}^{(i)} = \frac{J_i}{J_\Pi} \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^{P} \sum_{j_k=1}^{J_k} \sum_{s=1}^{t_{j_1 \dots j_P s}} X_{j_1 \dots j_P s} \tag{3.88}$$

a més, la mitjana global dels riscs observats es defineix com

$$\bar{X} = \frac{1}{J_k} \sum_{j_k=1}^{J_k} \bar{X}_{j_k}^{(k)} = \frac{1}{J_\Pi} \sum_{l=1}^{P} \sum_{j_l=1}^{J_l} \sum_{s=1}^{t} X_{j_1 \dots j_P s} \tag{3.89}$$

i el factor de credibilitat associat

$$z = \frac{\sum_{i=1}^{P} \frac{z^{(i)}}{1 - z^{(i)}}}{1 + \sum_{i=1}^{P} \frac{z^{(i)}}{1 - z^{(i)}}} = \frac{\sum_{i=1}^{P} b^{(i)} / J_i}{\sum_{i=1}^{P} b^{(i)} / J_i + S^2 / J_\Pi} \tag{3.90}$$

La prima de credibilitat per $X_{j_1 \ldots j_P, t_{j_1 \ldots j_P}+1}$ és igual a la mitjana global m més les diferències parcials entre $X_{j_i}^{(i)}$ i la mitjana $\bar{X}$, i tambe una part de la diferència entre $\bar{X}$ i m .

3.4.2 El model additiu "two-way"

Seguint el mateix esquema que el seguit per analitzar el model "two way" a 3.3.1 s'arriba als següents resultats. En el model additiu "two way", el risc $X_{j_1 j_2 s}$ pot ser escrit com:

$$X_{j_1 j_2 s}^{*} = m + \Xi_{j_1}^{(1)} + \Xi_{j_2}^{(2)} + \Xi_{j_1 j_2 s}^{(3)} \tag{3.91}$$

amb $j_1 = 1, \ldots, J_1$; $j_2 = 1, \ldots, J_2$ i $s = 1, \ldots, t_{j_1 j_2}$. I amb les variàncies $Var\left[\Xi_{j_1}^{(1)}\right] = b^{(1)}$; $Var\left[\Xi_{j_2}^{(2)}\right] = b^{(2)}$ i $Var\left[\Xi_{j_1 j_2 s}^{(3)}\right] = S^2 / w_{j_1 j_2 s}$. Per tant, l'estimador de credibilitat per $X_{j_1 j_2 t_{j_1 j_2}+1}$ serà igual a:

$$X_{j_1 j_2 t_{j_1 j_2}+1} = m + z_{j_1}^{(1)} \left(Y_{j_1 w} - m\right) + z_{j_2}^{(2)} \left(Y_{w j_2} - m\right), \tag{3.92}$$

on

$$Y_{j_1 w} = X_{j_1 w} - \sum_{k_2=1}^{J_2} \frac{w_{j_1 k_2 \Sigma}}{w_{j_1 \Sigma\Sigma}} \Xi_{k_2}^{(2)*}; \tag{3.93}$$

$$Y_{w j_2} = X_{w j_2} - \sum_{k_1=1}^{J_1} \frac{w_{k_1 j_2 \Sigma}}{w_{\Sigma j_2 \Sigma}} \Xi_{k_1}^{(1)*} \tag{3.94}$$

on les mitjananes ponderades amb pesos han estat definides com

$$X_{j_1 w} = \sum_{k_2=1}^{J_2} \sum_{s=1}^{t_{j_1 k_2}} \frac{w_{j_1 k_2 s}}{w_{j_1 \Sigma\Sigma}} X_{j_1 k_2 s} \tag{3.95}$$

les sumes dels pesos

$$w_{j_1\Sigma\Sigma} = \sum_{k_2=1}^{J_2} w_{j_1k_2\Sigma} = \sum_{k_2=1}^{J_2} \sum_{s=1}^{t_{j_1k_2}} w_{j_1k_2s} \tag{3.96}$$

i els factors de credibilitat

$$z_{j_1}^{(1)} = \frac{b^{(1)}}{b^{(1)} + S^2 / w_{j_1\Sigma\Sigma}} \tag{3.97}$$

Les quantitats X_{wj_2} , $w_{\Sigma j_2\Sigma}$ i $z_{j_2}^{(2)}$ són definides de manera anàloga. Les variables aleatòries $\Xi_{k_1}^{(1)*}$ i $\Xi_{k_2}^{(2)*}$ han de ser resoltes mitjanançant el següent sistema d'equacions lineals:

$$\Xi_{k_1}^{(1)*} = z_{k_1}^{(1)} (X_{k_1w} - m) - z_{k_1}^{(1)} \sum_{i_2=1}^{J_2} \frac{w_{k_1i_2\Sigma}}{w_{k_1\Sigma\Sigma}} \Xi_{i_2}^{(2)*}, \qquad k_1 = 1, \ldots, J_1 \tag{3.98}$$

$$\Xi_{k_2}^{(2)*} = z_{k_2}^{(2)} (X_{wk_2} - m) - z_{k_2}^{(2)} \sum_{i_1=1}^{J_1} \frac{w_{i_1k_2\Sigma}}{w_{\Sigma k_2\Sigma}} \Xi_{i_1}^{(1)*}, \qquad k_2 = 1, \ldots, J_2 \tag{3.99}$$

El model additiu "two-way" tal i com el presentem a (3.91) és obtingut a partir del model "two-way" general de la secció 3.3.1, quan eliminem la componenent interactiva $\Xi_{ij}^{(12)*}$ a (3.28). Això és el mateix que dir que la variància $b^{(12)} = Var[\Xi_{ij}^{(12)*}]$ és igual a zero i a més que la prima de credibilitat de (3.92) es derivada de la corresponent prima al Teorema 3.5. si prenem que $b^{(12)}$ tendeix a zero.

La prima de credibilitat per $X_{j_1j_2t_{j_1j_2}+1}$ (3.92) és igual a la mitjana col·lectiva m més les diferències parcials amb l'experiencia dels riscos de la classe j_1 del primer factor de risc i tanmateix la classe j_2 del segon factor de risc. En canvi l'experiència de cada cel·la (j_1, j_2) no es contempla.

3.4.3 El model additiu unitari

Com en el model "two way", aquí també tractarem el cas particular del model unitari. Enunciem, per això, el següent teorema.

Teorema 3.5 *En el model additiu unitari l'estimador de credibilitat per* $X_{j_1\ldots j_P, t_{j_1\ldots j_P}+1}$ *és igual a:*

$$X^*_{j_1\ldots j_P, t_{j_1\ldots j_P}+1} = m + \sum_{i=1}^{P} z^{(1)}\left(\bar{X}^{(i)}_{j_1} - \bar{X}\right) + z\left(\bar{X} - m\right) \tag{3.100}$$

Demostració

De (3.78) o (3.83) tenim

$$\Xi^{(i)*}_{j_i} = z^{(i)}\left(\bar{X}^{(i)}_{j_i} - m\right) - z^{(i)} \sum_{\substack{q=1\\q\neq i}}^{P} \sum_{k_q=1}^{J_q} \frac{J_{II} \,/\, J_q J_i}{J_{II} \,/\, J_i} \Xi^{(q)*}_{k_q} \tag{3.101}$$

o

$$\Xi^{(i)*}_{j_i} - z^{(i)} \frac{1}{J_i} \sum_{k_i=1}^{J_i} \Xi^{(i)*}_{k_i} = z^{(i)}\left(\bar{X}^{(i)}_{j_i} - m\right) - z^{(i)} \sum_{q=1}^{P} \frac{1}{J_q} \sum_{k_q=1}^{J_q} \Xi^{(q)*}_{k_q} \tag{3.102}$$

prenent la suma sobre j_i i dividint per $J_i(1 - z^{(i)})$ dóna

$$\frac{1}{J_i} \sum_{k_i=1}^{J_i} \Xi^{(i)*}_{k_i} = \frac{z^{(i)}}{1 - z^{(i)}}\left(\bar{X} - m\right) - \frac{z^{(i)}}{1 - z^{(i)}} \sum_{q=1}^{P} \frac{1}{J_q} \sum_{k_q=1}^{J_q} \Xi^{(q)*}_{k_q} \tag{3.103}$$

Sumant sobre i i reordenant els termes ens porta a

$$\sum_{i=1}^{P} \frac{1}{J_i} \sum_{k_i=1}^{J_i} \Xi^{(i)*}_{k_i} = \frac{\sum_{i=1}^{P} \frac{z^{(i)}}{1-z^{(i)}}}{1 + \sum_{i=1}^{P} \frac{z^{(i)}}{1-z^{(i)}}}\left(\bar{X} - m\right) = z\left(\bar{X} - m\right) \tag{3.104}$$

Amb això i tenint en compte (3.103)

$$\frac{1}{J_i} \sum_{k_i=1}^{J_i} \Xi^{(i)*}_{k_i} = \frac{z^{(i)}}{1 - z^{(i)}}(1 - z)\left(\bar{X} - m\right) \tag{3.105}$$

Si substituim (3.104) i (3.105) a (3.102) ens dóna que

$$\begin{aligned}
\Xi^{(i)*}_{j_i} &= z^{(i)}\left(X^{(i)}_{j_i} - m\right) - z^{(i)} z\left(\bar{X} - m\right) + z^{(i)} \frac{z^{(i)}}{1 - z^{(i)}}(1 - z)\left(\bar{X} - m\right) = \\
&= z^{(i)}\left(X^{(i)}_{j_i} - \bar{X}\right) + z^{(i)}\left((1 - z)\left(\bar{X} - m\right) + \frac{z^{(i)}}{1 - z^{(i)}}(1 - z)\left(\bar{X} - m\right)\right) \\
&= z^{(i)}\left(X^{(i)}_{j_i} - \bar{X}\right) + \frac{z^{(i)}}{1 - z^{(i)}}(1 - z)\left(\bar{X} - m\right)
\end{aligned} \tag{3.106}$$

Amb la definició de z a (3.90) i amb el fet que

$$X^*_{j_1\ldots j_P, t_{j_1\ldots j_P}+1} = m + \sum_{i=1}^{P} \Xi^{(i)*}_{j_i} \tag{3.107}$$

s'obté l'expressió (3.100). □

3.5 Extensió als models tradicionals

El model de components de variància es utilitzat per examinar les diferències bàsiques entre els diferents models de credibilitat, des del model clàssic de Bühlmann-Straub, passant pel model jeràrquic de Jewell i arribant als nous models de classificació creuada, incluint, fins i tot, possibles models mixtos jeràrquic-classificació creuada.

D'acord amb el vist fins ara, respecte dels models de classificació creuada, podem obtenir els models tradicionals d'una altra manera, per exemple, el model jeràrquic de dos nivells de Jewell pot ser definit de la següent manera:

$$X_{ijs} = m + \Xi_i^{(1)} + \Xi_{ij}^{(12)} + \Xi_{ijs}^{(123)} \tag{3.108}$$

Aquí el primer factor de risc és modelat amb un nivell més alt, amb les seves corresponents característiques específiques de la categoria i expressades a través del factor $\Xi_i^{(1)}$. A continuació, les característiques corresponents a la categoria j del segon factor de risc dins de la i -èsima categoria del primer factor hi són sumades a través de la variable aleatòria $\Xi_{ij}^{(12)}$. En canvi, no hi ha una variable aleatòria que representi les característiques comunes de tots els riscs per a la categoria j , independentment del primer factor. Aquesta informació vindria donada per la variable aleatòria $\Xi_j^{(2)}$, tal i com apareix en el model "two way" de classificació creuada, és a dir, podem extendre el model jeràrquic de Jewell afegint aquesta variable aleatòria:

$$X_{ijs} = m + \Xi_i^{(1)} + \Xi_j^{(2)} + \Xi_{ij}^{(12)} + \Xi_{ijs}^{(123)} \tag{3.109}$$

Aquesta és la definició que hem donat del model "two way" (3.28) i contràriament a (3.108) aquí els dos factors de risc són modelats simètricament, sense cap jerarquia entre ells. Així doncs, amb les variables aleatòries $\Xi_i^{(1)}$ i $\Xi_j^{(2)}$ es donen les principals característiques corresponents al primer i segon factor respectivament. Per altra banda, amb la variable $\Xi_{ij}^{(12)}$ es representa la interacció entre els dos factors. Per últim, tant en el model de Jewell com en el model "two way", les variables aleatòries

$\Xi^{(123)}_{ijs}$ denoten la desviació sobre el sinistre mitjà, donats $\Xi^{(1)}_i$, $\Xi^{(2)}_j$ i $\Xi^{(12)}_{ij}$ en un període d'observació s.

Com veurem a continuació, també el model de Bühlmann-Straub pot ser redefinit a la manera dels models de classificació creuada. El model pot ser escrit de la següent manera:

$$X_{ijs} = m + \Xi^{(12)}_{ij} + \Xi^{(123)}_{ijs} \tag{3.110}$$

En aquesta secció, veurem amb més detall, com es defineixen els models de Bühlmann-Straub i Jewell d'acord amb la nova modelació. Abans però, apuntarem la possibilitat de formar models nous que siguin una combinació d'un model jeràrquic amb un de classificació creuada. Per exemple, podem aplicar-ho en una assegurança d'hospitalització. Suposem una cartera formada per contractes de famílies que són classificades d'acord a la zona de residència i del tipus de cobertura del contracte, aquest pot ser perfectament modelat amb un model de classificació creuada "two way". Si a més, les dades han estat agafades per cada membre de cada família durant un període de varis anys, llavors una estructura jeràrquica pot ser aplicada a cada una de les cel·les formades pel model "two way". Així doncs, quan X_{ijkls} representa el risc de l'any s del membre l de la família k en la cel·la corresponent a la regió i i al tipus de cobertura j, el model pot ser escrit com:

$$X_{ijkls} = m + \Xi^{(1)}_i + \Xi^{(2)}_j + \Xi^{(12)}_{ij} + \Xi^{(123)}_{ijk} + \Xi^{(1234)}_{ijkl} + \Xi^{(12345)}_{ijkls} \tag{3.111}$$

Per construir models de components de variàncies amb estructures més complicades, es poden consultar un conjunt de regles que es donen a Searle et al. (1992).

3.5.1 Model de Bühlmann-Straub

En primer lloc, veurem com podem redefinir el model de Bühlmann-Straub a partir del model de classificació creuada. Com acabem de mencionar, el model el podem escriure de la següent manera:

$$X_{ijs} = m + \Xi_{ij}^{(12)} + \Xi_{ijs}^{(123)} \tag{3.112}$$

Les caracterítiques del risc, en aquest cas, venen explicades únicament per la variable aleatòria $\Xi_{ij}^{(12)}$ que representa la interacció entre els dos factors. Comparat amb el model "two way", hi manquen les dues variables aleatòries $\Xi_i^{(1)}$ i $\Xi_j^{(2)}$ que denotaven les característiques de cada factor independentment de l'altre. Per últim, $\Xi_{ijs}^{(123)}$ denota la desviació sobre la mitjana, donat $\Xi_{ij}^{(12)}$ en un període d'observació s .

Suposem que el primer factor té I categories, mentre que el segon en té J . D'acord amb les hipòtesis dels models de components de variància, es dedueix la següent estructura de covariàncies:

$$Cov\,[X_{iju}\,,\,X_{kls}] = \delta_{ij,kl} b^{(12)} + \delta_{iju,kls} S^2 \,/\, w_{kls}\,; \tag{3.113}$$

$$Cov\left[X_{ij,t_{ij}+1}\,,\,X_{kls}\right] = \delta_{ij,kl} b^{(12)} \tag{3.114}$$

En l'estimador de credibilitat per $X_{ij,t_{ij}+1}$ trobem només un factor de credibilitat, l'associat amb la interacció dels dos factors, el $z_{ij}^{(12)}$ del model "two way" (3.31):

$$z_{ij}^{(12)} = \frac{b^{(12)}\,w_{ij\Sigma}}{b^{(12)}\,w_{ij\Sigma} + S^2} \tag{3.115}$$

Els factors de credibilitat $z_{ij}^{(12)}$ estaran, com ja hem dit, lligats a la mitjana ponderada del risc observat en cada cel·la (i,j) .

A continuació, definirem l'estimador de credibilitat per $X_{ij,t_{ij}+1}$ pel model de Bühlmann-Straub, que és igual a:

$$X^{*}_{ij,t_{ij}+1} = m + z_{ij}^{(12)}(X_{ijw} - m) \tag{3.116}$$

On la mitjana ponderada que apareix es defineix com:

$$X_{ijw} = \sum_{s=1}^{t_{ij}} \frac{w_{ijs}}{w_{ij\Sigma}} X_{ijs} \tag{3.117}$$

Per fer el model operacional en casos pràctics, s'han de fer les estimacions dels paràmetres estructurals. Aquests, que es defineixen a continuació, són els utilitzats en els exemples i en la secció 3.6.

L'estimador habitual que ja hem fet servir en els anteriors models de classificació creuada per a la mitjana global, m , és la mitjana ponderada:

$$\hat{m} \;=\; X_{www} \;=\; \sum_{i=1}^{I}\sum_{j=1}^{J} \frac{w_{ij\Sigma}}{w_{\Sigma\Sigma\Sigma}}\, X_{ijw} \tag{3.118}$$

En canvi, en els models clàssics, l'estimador per la mitjana global m és la següent mitjana ponderada segons els factors de credibilitat i no segons les ponderacions o pesos:

$$m \;=\; \sum_{i=1}^{I}\sum_{j=1}^{J} \frac{z_{ij\Sigma}}{z_{\Sigma\Sigma\Sigma}}\, X_{ijw} \tag{3.119}$$

Quan voldrem comparar els resultats dels models clàssics amb els de classificació creuada haurem de tenir en compte aquesta diferència. En els programes d'APL que hem elaborat per fer els càlculs numèrics dels exemples següents hi figura la primera definició de m que hem fet (3.118), en contraposició al conjunt de programes que Goovaerts, M. va crear per als models clàssics. A més, s'ha comprovat que els resultats no difereixen si fem servir només un dels esmentats estimadors.

Per S^2 , l'estimador no esbiaixat és:

$$\hat{S}^2 \;=\; \sum_{i=1}^{I}\sum_{j=1}^{J}\sum_{s=1}^{t_{ij}} w_{ijt}\,(X_{ijt} \,-\, X_{ijw})^2 \;/\; \sum_{i=1}^{I}\sum_{j=1}^{J}(t_{ij}-1)_{+} \tag{3.120}$$

amb $(t_{ij}-1)_{+} \;=\; t_{ij}-1$ if $t_{ij} \;>\; 2$ i zero en altres casos.

Pel paràmetre $b^{(12)}$, tal i com s'ha fet en els models anteriors, "two way" i additiu "two way", de les moltes possibilitats d'estimadors no esbiaixats que es poden construir, fent combinacions lineals dels productes $X_{ijs}{\cdot}X_{klu}$, s'ha seleccionat el següent procediment basat en les esperances:

$$E\left[\sum_{i=1}^{I}\sum_{j=1}^{J} \frac{w_{ij\Sigma}}{w_{\Sigma\Sigma\Sigma}}\,(X_{ijw} \,-\, X_{www})^2 \,-\, S^2(IJ\,-\,1)\,/\,w_{\Sigma\Sigma\Sigma}\right] \;=$$

$$= b^{(12)}\left(1 - \sum_{i=1}^{I}\sum_{j=1}^{J}\left(\frac{w_{ij\Sigma}}{w_{\Sigma\Sigma\Sigma}}\right)^2\right) \tag{3.121}$$

Una vegada definida aquesta equació, es pot obtenir el paràmetre $b^{(12)}$. Aquest procediment no pot ser considerat com l'òptim, perquè només és una selecció de les moltes possibilitats per estimar aquesta variància. Com podrem veure en l'exemple posterior, en aquest cas, $b^{(12)}$ és el mateix que a en el model clàssic (vegeu apèndix A).

3.5.2 El model jeràrquic de Jewell

Com hem vist al principi, el model jeràrquic de dos nivells de Jewell pot ser definit de la següent manera a partir dels models de components de variància:

$$X_{ijs} = m + \Xi_i^{(1)} + \Xi_{ij}^{(12)} + \Xi_{ijs}^{(123)} \tag{3.122}$$

La variable aleatòria $\Xi_i^{(1)}$ denota les principals característiques corresponents al primer factor de risc. $\Xi_{ij}^{(12)}$ representa la interacció entre aquest primer factor i el segon factor, de manera que el segon factor té una dependència jeràrquica amb el primer. Fixem-nos que, a diferència del model "two way", la variable aleatòria $\Xi_j^{(2)}$ que denotava les característiques del segon factor exclusivament, no hi figura. Per últim, $\Xi_{ijs}^{(123)}$ denota la desviació sobre la mitjana, donats $\Xi_i^{(1)}$ i $\Xi_{ij}^{(12)}$ en un període d'observació s .

Suposem que el primer factor té I categories, mentre que el segon en té J . D'acord amb les hipòtesis dels models de components de variància, es dedueix la següent estructura de covariàncies:

$$Cov\left[X_{iju}\,,\,X_{kls}\right] = \delta_{i,k}b^{(1)} + \delta_{ij,kl}b^{(12)} + \delta_{iju,kls}S^2\,/\,w_{kls}\,; \tag{3.123}$$

$$Cov\left[X_{ij,t_{ij}+1}\,,\,X_{kls}\right] = \delta_{i,k}b^{(1)} + \delta_{ij,kl}b^{(12)}. \tag{3.124}$$

En l'estimador de credibilitat per $X_{ij,t_{ij}+1}$ trobem els següents factors de credibilitat:

$$\begin{aligned} z_{ij}^{(12)} &= \frac{b^{(12)}\, w_{ij\Sigma}}{b^{(12)}\, w_{ij\Sigma} + S^2} \\ z_i^{(1)} &= \frac{b^{(1)}\, z_{i\Sigma}^{12}}{b^{(1)}\, z_{i\Sigma}^{12} + b^{12}} \end{aligned} \tag{3.125}$$

Els factors de credibilitat $z_{ij}^{(12)}$ estaran lligats a la mitjana ponderada del risc observat en cada cel·la (i,j) . A més, el factor $z_i^{(1)}$ representa la confiança que hom pot donar a la experiència del risc dins de les classes del primer factor de risc.

L'estimador de credibilitat per $X_{ij,t_{ij}+1}$ en el model jeràrquic de dos nivells de Jewell es pot escriure com:

$$X_{ij,t_{ij}+1}^{*} = m + z_{ij}^{(12)}(X_{ijw} - m) + (1 - z_{ij}^{(12)})z_i^{(1)}(Y_{izw} - m) \tag{3.126}$$

On les mitjanes ponderades que apareixen es defineixen com:

$$\begin{aligned} X_{ijw} &= \sum_{s=1}^{t_{ij}} \frac{w_{ijs}}{w_{ij\Sigma}} X_{ijs}; \\ Y_{izw} &= \sum_{l=1}^{J} \frac{z_{il}^{(12)}}{z_{i\Sigma}^{(12)}} X_{ijw} \end{aligned} \tag{3.127}$$

Per fer el model operacional per casos pràctics, també farem a continuació les estimacions dels paràmetres estructurals. Aquests, que es defineixen a continuació, són els utilitzats en els exemples i en la secció 3.6.

Un estimador per a la mitjana global m és la mitjana ponderada

$$\hat{m} = X_{www} = \sum_{i=1}^{I}\sum_{j=1}^{J} \frac{w_{ij\Sigma}}{w_{\Sigma\Sigma\Sigma}} X_{ijw} \tag{3.128}$$

S'ha de tenir en compte el que hem esmentat en el model de Bühlmann-Straub de classificació creuada a l'hora de fer comparacions amb els models clàssics.

Per S^2 , l'estimador no esbiaixat és:

$$\hat{S}^2 = \sum_{i=1}^{I}\sum_{j=1}^{J}\sum_{s=1}^{t_{ij}} w_{ijt}\,(X_{ijt} - X_{ijw})^2 \;/\; \sum_{i=1}^{I}\sum_{j=1}^{J}(t_{ij} - 1)_+ \tag{3.129}$$

amb $(t_{ij}-1)_+ = t_{ij}-1$ if $t_{ij} > 2$ i zero en altres casos.

Pels paràmetres $b^{(1)}$ i $b^{(12)}$ podem obtenir un gran nombre d'estimadors fent servir les relacions:

$$E[X_{ijs}X_{klu}] = m^2 + \delta_{ik}b^{(1)} + \delta_{ij,kl}b^{(12)} + \delta_{ijt,klu}S^2 \,/\, w_{ijs} \tag{3.130}$$

De les moltes possibilitats d'estimadors no esbiaixats que es poden construir fent combinacions lineals dels productes $X_{ijs}\cdot X_{klu}$, s'ha seleccionat el següent procediment basat en les esperances:

$$E\left[\sum_{j=1}^{J}\frac{g_j^{(2)}}{g_\Sigma^{(2)}}\left(\sum_{i=1}^{I}\frac{w_{ij\Sigma}}{w_{\Sigma j\Sigma}}(X_{ijw}-X_{wjw})^2 - S^2(I-1)\,/\,w_{\Sigma j\Sigma}\right)\right] =$$

$$= \left(b^{(1)} + b^{(12)}\right)\left(1-\sum_{i=1}^{I}\sum_{j=1}^{J}\frac{g_j^{(2)}}{g_\Sigma^{(2)}}\left(\frac{w_{ij\Sigma}}{w_{\Sigma j\Sigma}}\right)^2\right), \tag{3.131}$$

on els coeficients $g_i^{(1)}$ poden ser escollits arbitràriament. A més, també tindrem:

$$E\left[\sum_{i=1}^{I}\sum_{j=1}^{J}\frac{w_{ij\Sigma}}{w_{\Sigma\Sigma\Sigma}}(X_{ijw}-X_{www})^2 - S^2(IJ-1)\,/\,w_{\Sigma\Sigma\Sigma}\right] =$$

$$= b^{(1)}\left(1-\sum_{i=1}^{I}\left(\frac{w_{i\Sigma\Sigma}}{w_{\Sigma\Sigma\Sigma}}\right)^2\right) + $$

$$+ \; b^{(12)}\left(1-\sum_{i=1}^{I}\sum_{j=1}^{J}\left(\frac{w_{ij\Sigma}}{w_{\Sigma\Sigma\Sigma}}\right)^2\right) \tag{3.132}$$

Una vegada definides aquestes equacions, es poden obtenir els paràmetres $b^{(1)}$ i $b^{(12)}$ solucionant el sistema d'equacions lineals. Aquest procediment no pot ser considerat com l'òptim, perquè només és una selecció de les moltes possibilitats per estimar aquestes variàncies.

Per altra banda, ampliant el ventall de possibilitats, el model jeràrquic de dos nivells de Jewell pot ser definit de la següent manera:

$$X_{ijs} = m + \Xi_j^{(2)} + \Xi_{ij}^{(12)} + \Xi_{ijs}^{(123)} \tag{3.133}$$

És a dir, canviant el primer factor pel segon factor com a principal nivell, i deixant pel segon nivell, per a la component mixta, la informació del primer factor. En els següents exemples mostrarem les dues possibilitats del model de Jewell.

3.6 Exemple numèric

Com a exemple per mostrar l'aplicabilitat dels models de credibilitat de classificació creuada, hem escollit unes dades oferides per una companyia belga d'assegurances sobre crèdits privats. Les taules de dades que apareixen a continuació fan referència a cada un dels pagaments, que la empresa asseguradora va haver de fer a diferents bancs, per cobrir les pèrdues causades pels clients d'aquests bancs que no van poder fer front o cancel·lar els seus prèstecs privats.

Taula 3.2 *Quanties pagades per l'asseguradora dels deutors amb menys de dos anys d'antiguitat a l'actual lloc de treball.*

	75.30	7.72	133.23	202.63	223.68	199.95	49.62	63.97
	293.02	218.24	242.69	113.68	196.30	380.65	388.53	326.63
$i = 1$	91.41	326.63	106.38	266.48	156.06	43.80	484.22	90.07
	27.06	122.02	80.97	61.24	133.68	445.67	265.84	231.10
	10.29	325.23	68.63	87.61	84.79	27.48	314.31	248.60
	54.92	164.22	396.50	554.12	163.77	52.67	77.99	65.40
	102.35	107.72	79.17	208.78	106.38	268.77	209.69	80.80
	166.02	148.62	71.84	84.18	254.47	97.79	80.97	665.58
$i = 2$	73.22	109.34	154.87	184.61	55.57	173.10	7.06	486.38
	176.24	62.66	67.74	26.78	305.27	213.05	47.18	87.88
	321.16	86.70	425.24	300.52	69.13	141.89	134.91	118.57
	180.37	106.38	491.71	5.05	321.15	93.98		
	363.10	267.58	66.82	93.05	295.78	59.36	313.61	395.56
	118.71	15.096	371.92	166.47	312.18	103.37	452.58	293.79
$i = 3$	286.09	96.27	403.13	540.88	523.66	103.35	140.82	196.93
	298.89	96.28	187.40	136.81	24.92	94.36	261.02	109.34
	81.67	150.11	87.44	137.64	113.57	332.67	51.60	

Taula 3.3 *Quanties pagades per l'asseguradora dels deutors amb antiguitat a l'actual lloc de treball de entre 2 i 10 anys.*

	158.72	616.01	405.37	53.58	123.04	34.98	316.44	323.07
	364.56	221.55	165.78	477.92	107.48	253.04	406.20	58.31
$i = 1$	77.93	103.37	400.06	550.82	101.68	358.21	56.18	513.20
	82.79	151.52	342.59	402.08	413.70	257.69	47.99	638.10
	97.31	133.48	113.57	177.84	406.86	225.10	234.76	406.86
	56.09	25.05	147.45					
	513.14	40.35	529.67	260.59	425.27	163.77	640.47	53.00
	272.63	81.67	378.23	494.40	264.02	95.01	316.37	133.37
	532.93	145.99	42.67	157.20	202.68	331.85	27.32	563.61
$i = 2$	273.65	97.04	150.13	332.02	184.14	102.29	398.88	77.34
	47.94	319.02	97.72	416.72	456.57	107.96	150.90	483.78
	134.27	147.06	192.16	149.56	309.78	98.96	111.04	166.00
	56.23	134.27	46.66	228.23	194.81			
	173.69	63.47	414.06	205.19	295.89	536.37	48.29	74.51
	100.01	20.97	403.24	221.20	196.30	400.06	405.70	203.34
$i = 3$	398.01	90.92	609.78	12.82	142.28	608.41	311.53	496.28
	268.45	111.55	168.30	33.02	84.40	350.82	497.90	12.11
	122.62	457.48	168.02	309.32	381.98	748.68	366.05	

Taula 3.4 *Quanties pagades per l'asseguradora dels deutors amb més de deu anys d'antiguitat a l'actual lloc de treball.*

	293.78	185.62	488.89	314.31	46.47	49.86	483.03	73.09
	527.52	214.25	37.12	295.07	447.74	242.96	298.26	222.98
$i = 1$	219.79	539.43	22.68	420.87	155.79	34.23	170.73	252.84
	84.31	358.32	287.12	411.58	434.72	502.44	247.09	157.63
	145.27	314.85	400.06	56.56	210.21	251.92	561.44	117.82
	145.92							
	215.06	440.24	48.16	10.29	382.19	374.19	563.36	271.07
	37.10	36.43	324.44	133.16	392.61	135.26	238.92	313.01
$i = 2$	388.53	139.42	77.37	314.01	60.60	134.11	163.87	290.97
	361.60	414.72	529.82	471.13	272.92	520.18	258.75	232.75
	94.52	421.51	487.45	380.65	416.76	277.07	214.37	157.63
	89.62	36.85	99.73	290.97	78.43	209.32	209.51	143.69
	48.56	57.06	518.60	287.28	480.38	423.87	711.86	259.00
	505.18	177.51	394.34	145.99	95.04	110.22	463.98	129.01
$i = 3$	469.67	516.97	203.34	386.37	103.11	331.60	105.88	643.38
	724.22	648.69	783.54	814.95	251.56	685.96	162.40	602.69
	203.00	591.94	239.66	221.54	182.72	297.93	556.78	208.54
	133.16	509.60	274.23	469.48				

En ordre a la confidencialitat de les dades, aquestes han estat retocades i expressades amb unes unitats diferents.

Les observacions han estat dividides o catalogades d'acord amb la situació civil dels clients, i el temps que porten treballant en la seva feina o lloc de treball habitual. Així doncs, el primer factor de risc té a veure amb l'estat civil de la persona, i el segon factor amb l'antiguitat a la seva feina. Cada un d'aquests factors s'ha dividit en tres categories diferents, $I = J = 3$ segons el model "two way" vist a la secció

3.3. L'estat civil del client pot ser solter, divorciat o separat, i la resta dels casos, és a dir, casats, ajuntats o vidus. Pel que fa referència al temps que porta a la seva feina, també hi han tres classes diferents: menys de dos anys, entre dos i deu anys, i més de deu anys.

El nombre total d'observacions és 401, variant de 39 a 54 per a cada cel·la de la taula "two way" amb la que hem presentat les dades. En la següent taula hem col·locat les quanties mitjanes que l'assegurador ha pagat. Les nou mitjanes del centre de la taula són les mitjanes per a cada cel·la. Als marges hi han les mitjanes de les files i les columnes. Per últim, a la cantonada inferior dreta es mostra la mitjana global de les quanties pagades.

Taula 3.5 *Mitjanes de la sinistralitat*

			Antiguitat laboral			
			< 2	2 - 10	> 10	
			$j = 1$	$j = 2$	$j = 3$	
	solter	$i = 1$	180.38	246.70	261.57	230.23
Estat Civil	divorciat	$i = 2$	172.04	232.67	253.21	217.91
	aparellat	$i = 3$	212.30	269.56	366.61	286.26
			186.36	247.80	293.30	242.51

La quantia de la mitjana creix amb el nombre d'anys que el client ha treballat a la seva feina actual. Això podria ser explicat, en part, perquè la gent amb més experiència guanya uns salaris més alts i tenen menys probabilitat de ser acomiadats. En conseqüència, aquests clients poden aconseguir crèdits més alts que en el cas de fallida econòmica farà la pèrdua per al banc també més alta. Per altra banda, pels clients solters i divorciats la quantia mitjana és menor que la dels clients en qualsevol altre estat civil (aparellats). Això s'explica, perquè principalment aquest últim grup viuen amb parelles i tenen majors ingressos, per tant tenen menys probabilitat de fallida i conseqüentment la quantia a tornar és un altre cop més alta.

3.6.1 Model "two way"

En primer lloc, aplicarem les dades al model "two way" pròpiament dit. Tal i com hem vist en la secció 3.3.1, seguirem el procediment allà indicat per estimar les primes de credibilitat. Per això, hem programat amb llenguatge APL el model "two way" (vegeu apèndix C). Els paràmetres estructurals estimats per l'exemple són:

$$\begin{aligned} m^* &= 242.51 \\ b^{(1)*} &= 960.70 \\ b^{(2)*} &= 2645.71 \\ b^{(12)*} &= 34.34 \\ S^{2*} &= 26986.55 \end{aligned} \tag{3.134}$$

Hem fet servir els estimadors indicats a la secció 3.3.1. Pel que fa als coeficients arbitraris $g_i^{(1)}$ i $g_j^{(2)}$, que apareixen a (3.47) i (3.50) respectivament, són iguals a la unitat.

A la taula 3.6 hem fet un resum dels estimadors de credibilitat de les quanties que hauran de ser pagades per la companyia asseguradora a causa de la fallida dels nous clients el proper any, és a dir, els $X_{ijt_{ij}+1}$.

Taula 3.6 *Primes de Credibilitat*

	$j=1$	$j=2$	$j=3$
$i=1$	181.05	238.44	277.33
$i=2$	172.24	229.38	268.40
$i=3$	224.46	281.38	324.49

Per aconseguir aquests resultats ha estat necessari, en primer lloc, calcular els coeficients de credibilitat, a partir dels paràmetres estructurals, segons (3.31). A la taula següent, hi han les quanties dels coeficients de credibilitat:

Taula 3.7 *Coeficients de credibilitat*

	$j=1$	$j=2$	$j=3$	
$i=1$	0.048	0.052	0.050	0.807
$i=2$	0.064	0.063	0.058	0.838
$i=3$	0.047	0.047	0.053	0.805
	0.925	0.926	0.925	

La mitjana dels coeficients de credibilitat $z_{ij}^{(12)}$ lligats a l'experiència del risc dins de cada cel·la és 5.4%, la qual és bastant baixa. Això pot ser causat per la relativa gran variabilitat de les observacions dins de cada cel·la. Per tant, podem afirmar que la component $\Xi_{ij}^{(12)}$ no és molt important a l'hora d'explicar la composició dels estimadors de credibilitat. Més importants semblen les altres dues components del model $\Xi_i^{(1)}$ i $\Xi_j^{(2)}$. Així doncs, més credibilitat és donada a l'experiència de les files i columnes en conjunt. Per l'experiència amb grups de clients amb el mateix estat civil, els factors de credibilitat $z_i^{(1)}$ són més grans, en tots els casos, del 80%. Per l'antiguitat en el lloc de treball els coeficients $z_j^{(2)}$ són encara més alts, rondant el 92%. Un cop calculats els coeficients de credibilitat, i per arribar als resultats de la taula 3.3, hem fet servir les expressions (3.32)-(3.35) del Teorema 3.2, de manera que per a cada cel·la (i,j) l'estimador de credibilitat és igual a:

$$\begin{aligned} X_{ij,t_{ij}+1} = m + z_{ij}^{(12)}(X_{ijw} - m) &+ (1 - z_{ij}^{(12)})z_i^{(1)}(Y_{izw} - m) \\ &+ (1 - z_{ij}^{(12)})z_j^{(2)}(Y_{zjw} - m). \quad (3.135) \end{aligned}$$

On les mitjanes ponderades que apareixen es defineixen com:

$$
\begin{aligned}
X_{ijw} &= \sum_{s=1}^{t_{ij}} \frac{w_{ijs}}{w_{ij\Sigma}} X_{ijs}; \\
Y_{izw} &= \sum_{l=1}^{J} \frac{z_{il}^{(12)}}{z_{i\Sigma}^{(12)}} \left(X_{ilw} - \Xi_l^{(2)*}\right) \\
Y_{zjw} &= \sum_{k=1}^{I} \frac{z_{kj}^{(12)}}{z_{\Sigma j}^{(12)}} \left(X_{kjw} - \Xi_k^{(1)*}\right)
\end{aligned}
\tag{3.136}
$$

En la cel·la corresponent als clients solters i que tenen menys de dos anys d'experiència, és a dir, $(i, j) = (1, 1)$ els càlculs van de la següent manera. Com es pot veure en la taula 3.1, la mitjana de la cel·la X_{11w} és igual a 180.39. El corresponent factor de credibilitat $z_{11}^{(12)}$ és 0.048. A més, el factor de credibilitat $z_1^{(1)}$, lligat a l'experiència de tots els clients deutors solters, és 0.807. Per últim, el factor corresponent a la gent que té poca experiència laboral és 0.925. Els dos últims factors de credibilitat són multiplicats respectivament per les següents mitjanes de classes ponderades amb els coeficients de credibilitat:

$$
Y_{1zw} = \sum_{l=1}^{3} \frac{z_{1l}^{(12)}}{z_{1\Sigma}^{(12)}} \left(X_{1lw} - \Xi_l^{(2)*}\right) = 228.53 \tag{3.137}
$$

$$
Y_{z1w} = \sum_{k=1}^{3} \frac{z_{k1}^{(12)\,(12)}}{z_{\Sigma 1}} \left(X_{k1w} - \Xi_k^{(1)*}\right) = 188.30 \tag{3.138}
$$

Els vectors Y_{izw} i Y_{zjw} que representen aquestes mitjanes són:

$$
\begin{aligned}
Y_{izw} &= (228.53\,,\, 218.51\,,\, 283.12) \\
Y_{zjw} &= (188.30\,,\, 249.81\,,\, 293.24)
\end{aligned}
$$

Finalment, hom pot veure que la prima de credibilitat de la cel·la (1,1) pot ser calculada de la manera següent:

$$
\begin{aligned}
181.05 = 242.51 \; &+ \; 0.048 \cdot (180.39 - 242.51) \\
&+ \; (1 - 0.048) \cdot 0.807 \cdot (228.53 - 242.51) \\
&+ \; (1 - 0.048) \cdot 0.925 \cdot (188.30 - 242.51)
\end{aligned}
\tag{3.139}
$$

En el Teorema 3.5 s'ha demostrat que l'estimador de credibilitat per a la cel·la (i, j) és:

$$X_{ijs} = m + \Xi_i^{(1)*} + \Xi_j^{(2)*} + \Xi_{ij}^{(12)*} \tag{3.140}$$

Els valors de cadascuna de les components estan expressades en la taula 3.2. En el centre de la taula són donades les nou realitzacions de la variable $\Xi_{ij}^{(12)*}$. L'última columna conté les realitzacions de la variable $\Xi_i^{(1)*}$, i la fila d'abaix de tot les de $\Xi_j^{(2)*}$. En l'extrem inferior dreta es troba la mitjana global de les quanties pagades, és a dir, m .

Taula 3.8 *Composició de les primes de credibilitat*

	$j=1$	$j=2$	$j=3$	
$i=1$	−0.03	0.45	−0.82	−11.29
$i=2$	−0.01	0.22	−0.93	−20.12
$i=3$	−0.60	−0.59	2.36	32.69
	−50.14	6.76	46.93	242.51

Podem veure que les característiques de la taula 3.1 també apareixen en els resultats de credibilitat. Així, la quantia estimada per ser pagada per a cada client nou és més petita si el client té poca experiència laboral (−50.14) o si és solter (−11.29) o divorciat (−20.32). Els marges de la taula mostren que l'experiència dels riscos dels factors de risc per separat, tenen molt més efecte en la prima de credibilitat que l'experiència lligada a les combinacions entre factors, com ja havíem endevinat a l'analitzar els coeficients de credibilitat.

L'estimador de credibilitat per a les persones solteres que han treballat menys de dos anys en el seu actual lloc de treball és obtingut a partir de la taula 3.2 de la següent manera:

$$\begin{aligned} X_{11s} &= m + \Xi_1^{(1)*} + \Xi_1^{(2)*} + \Xi_{11}^{(12)*} \\ &= 242.51 - 11.29 - 50.14 - 0.03 = 181.05 \qquad (3.141) \end{aligned}$$

El primer terme és la mitjana global estimada. A causa de que la mitjana pagada pels solters és menor, una quantia de 11.29 és restada de la mitjana global. La limitada experiència laboral causa un descens de 50.14 unitats en la estimació de credibilitat. Per últim, segons la interacció que causa el fet de ser solter i nou a la feina, es resten 0.03 unitats a la mitjana global. En conclusió, i a la vista dels resultats obtinguts, el model jeràrquic de dos nivells de Jewell no hauria estat apropiat per aquesta aplicació. Ja que els estimadors de credibilitat de les components $\Xi_i^{(1)*}$ i $\Xi_j^{(2)*}$ tenen un sustancial efecte a la prima de credibilitat a pagar per als nous clients. Cap d'aquestes components pot ser eliminada del model "two way" com s'hauria de fer si apliquèssim el model de Jewell. De totes maneres, a la secció 3.6.4 realitzarem els càlculs del model de Jewell per comprovar-ho i per comparar els resultats, utilitzant el model de classificació creuada, amb els obtinguts amb el model tradicional. Per últim, indicar que el petit valor de $b^{(12)*}$ i la poca importància de la component $\Xi_{ij}^{(12)*}$ indiquen que el model utilitzat potser hauria de ser reduït al model additiu "two way" explicat a 3.4.2. Aquest exercici és el que farem a continuació.

3.6.2 Model additiu "two way"

Un cop hem vist els resultats pel model "two way", creiem convenient calcular els resultats pel model additiu amb dos factors de risc. Com hem comprovat, la component $\Xi_{ij}^{(12)}$ no és gaire important en el conjunt de la prima de credibilitat, a més la seva variància és molt petita. Tal i com hem vist en la secció 3.4.2, seguirem el procediment allà indicat per estimar les primes de credibilitat. Per això, hem programat amb llenguatge APL el model "two way" (vegeu apèndix C). Els paràmetres estructurals estimats per l'exemple són:

$$\begin{aligned} m^* &= 242.51 \\ b^{(1)*} &= 995.04 \\ b^{(2)*} &= 2680.05 \\ S^{2*} &= 26986.55 \end{aligned} \tag{3.142}$$

Hem fet servit els estimadors indicats a la secció 3.4.2. Pel que fa als coeficients arbitraris $g_i^{(1)}$ i $g_j^{(2)}$, són iguals a la unitat. Si comparem les variàncies de les components d'aquest model amb les de l'anterior, observem com $b^{(1)}$ i $b^{(2)}$ s'han fet una mica més grans a causa de la retirada de $b^{(12)}$. A la taula 3.9 hem fet un resum dels estimadors de credibilitat de les quanties que hauran de ser pagades per la companyia asseguradora a causa de la fallida dels nous clients el proper any, és a dir, els $X_{ijt_{ij}+1}$.

Taula 3.9 *Primes de Credibilitat*

	$j=1$	$j=2$	$j=3$
$i=1$	180.68	237.87	278.16
$i=2$	171.74	228.93	269.22
$i=3$	225.42	282.62	322.91

Per aconseguir aquests resultats ha estat necessari, en primer lloc, calcular els coeficients de credibilitat, a partir dels paràmetres estructurals, segons (3.97). A la taula següent, hi han les quanties dels coeficients de credibilitat:

Taula 3.10 *Coeficients de credibilitat*

		Coeficients de credibilitat
	$i=1$	0.820
Estat civil	$i=2$	0.851
	$i=3$	0.818
	$j=1$	0.930
Antiguitat	$j=2$	0.931
	$j=3$	0.930

Igual que ha passat amb les variàncies de les components, els coeficients de credibilitat $z_{ij}^{(12)}$ desapareixen. En canvi, les dues altres components $\Xi_i^{(1)}$ i $\Xi_j^{(2)}$ del model s'incrementen. Així doncs, més credibilitat és donada a l'experiència de les files i columnes en conjunt. Per l'experiència amb grups de clients amb el mateix estat civil, els factors de credibilitat $z_i^{(1)}$ són més grans, en tots els casos, del 82%. Per l'antiguitat en el lloc de treball els coeficients $z_j^{(2)}$ són encara més alts, rondant el 93%. Un cop calculats els coeficients de credibilitat i per arribar als resultats de la taula 3.9, considerem les expressions (3.81)-(3.83) del Teorema 3.4, de manera que per cada cel·la (i,j) l'estimador de credibilitat és igual a:

$$\begin{aligned} X_{ij,t_{ij}+1} = m &+ z_i^{(1)}(Y_{iw} - m) \\ &+ z_j^{(2)}(Y_{wj} - m) \end{aligned} \tag{3.143}$$

on les mitjanes ponderades que apareixen es defineixen com:

$$Y_{iw} = X_{iw} - \sum_{l=1}^{J} \frac{w_{il\Sigma}}{w_{i\Sigma\Sigma}} \Xi_l^{(2)*}; \tag{3.144}$$

$$Y_{wj} = X_{wj} - \sum_{k=1}^{I} \frac{w_{kj\Sigma}}{w_{\Sigma j\Sigma}} \Xi_k^{(1)*}; \tag{3.145}$$

En la cel·la corresponent als clients solters i que tenen menys de dos anys d'experiència, és a dir, $(i,j)=(1,1)$ els càlculs van de la següent manera. Com es pot veure en la taula 3.1, la mitjana de la cel·la X_{11w} és igual a 180.38. El factor de credibilitat $z_1^{(1)}$ lligat a l'experiència de tots els clients deutors solters és 0.820. Per últim, el factor corresponent a la gent que té poca experiència laboral és 0.930. Els dos últims factors de credibilitat són multiplicats, respectivament, per les següents mitjanes:

$$Y_{1w} = X_{1w} - \sum_{l=1}^{3} \frac{w_{1l\Sigma}}{w_{1\Sigma\Sigma}} \Xi_l^{(2)*} = 228.51 \tag{3.146}$$

$$Y_{w1} = X_{w1} - \sum_{k=1}^{3} \frac{w_{k1\Sigma}}{w_{\Sigma 1\Sigma}} \Xi_k^{(1)*} = 188.35 \tag{3.147}$$

Els vectors Y_{iz} i Y_{zj} que representen aquestes mitjanes són:

$$Y_{iz} = (228.51\,,\,218.51\,,\,283.17)$$
$$Y_{zj} = (188.35\,,\,249.87\,,\,293.22)$$

Finalment, hom pot veure que la prima de credibilitat de la cel·la (1,1) pot ser calculada de la manera següent:

$$\begin{aligned} 181.05 = 242.51 &+ 0.820 \cdot (228.51 - 242.51) \\ &+ 0.930 \cdot (188.35 - 242.51) \end{aligned} \tag{3.148}$$

En el Teorema 3.4 s'ha demostrat que l'estimador de credibilitat per la cel·la (i,j) és:

$$X_{ijs} = m + \Xi_i^{(1)*} + \Xi_j^{(2)*} \tag{3.149}$$

Els valors de cadascuna de les components estan expressats en la taula 3.11. Com es pot veure, només tenim les components relacionades amb $\Xi_i^{(1)}$ i $\Xi_j^{(2)}$. Aquestes components segueixen la tendència mostrada per les dades de l'exemple. Les semblances amb el model anterior són obvies.

Taula 3.11 *Composició de les primes de credibilitat*

		Components
	$i=1$	-11.49
Estat civil	$i=2$	-20.42
	$i=3$	33.26
	$j=1$	-50.35
Antiguitat	$j=2$	6.84
	$j=3$	47.13

Els resultats són molt semblants als apareguts en l'anterior model, no hi ha canvis en les tendències. Només petits augments en les quanties, a causa de la desaparició de la component mixta. L'estimador de credibilitat per les persones solteres que han treballat menys de dos anys en el seu actual lloc de treball és obtinguda a partir de la taula 3.2 de la següent manera:

$$\begin{aligned} X_{11s} &= m + \Xi_1^{(1)*} + \Xi_1^{(2)*} \\ &= 242.51 - 11.49 - 50.35 = 180.68 \end{aligned} \tag{3.150}$$

El primer terme és la mitjana global estimada. Degut al fet que la mitjana pagada pels solters és menor, una quantia de 11.49 és restada de la mitjana global. La limitada experiència laboral causa un descens de 50.35 unitats en l'estimació de credibilitat. En conclusió, i a la vista dels resultats obtinguts, el model additiu de dos factors és probablament el més apropiat per aquesta aplicació, ja que com s'ha vist, els estimadors de credibilitat de les components $\Xi_i^{(1)*}$ i $\Xi_j^{(2)*}$ tenen un sustancial efecte a la prima de credibilitat a pagar per als nous clients.

Encara que sembla evident que aquest model és el més apropiat, ens sembla convenient també calcular els resultats pels models clàssics Bühlmann-Straub i Jewell.

Com veurem en els següents apartats, els models de classificació creuada també hi poden ser aplicats.

3.6.3 Model Bühlmann-Straub

Què passaria si estiguèssim interessats en conèixer com afecten conjuntament els dos factors de risc, estat civil i antiguitat? El més fàcil seria aplicar el model de Bühlmann-Straub. Tal i com hem vist en la secció 3.5.1, seguirem el procediment allà indicat per estimar les primes de credibilitat. Per això, hem programat amb llenguatge APL el model Bühlmann-Straub (vegeu apèndix C). Els paràmetres estructurals estimats per l'exemple són:

$$\begin{aligned} m^* &= 242.51 \\ b^{(12)*} &= 2739.61 \\ S^{2*} &= 26986.55 \end{aligned} \tag{3.151}$$

Hem fet servit els estimadors indicats a la secció 3.5.1.

Cal destacar que el paràmetre $b^{(12)}$ trobat coincideix amb el paràmetre $\hat{a}$ del model clàssic, definit a l'apèndix A. A la taula 3.12 hem fet un resum dels estimadors de credibilitat de les quanties que hauran de ser pagades per la companyia asseguradora el proper any a causa de la fallida dels nous clients, és a dir, els $X_{ijt_{ij}+1}$.

Taula 3.12 *Primes de Credibilitat*

	$j=1$	$j=2$	$j=3$
$i=1$	192.66	245.92	257.88
$i=2$	182.92	234.21	251.39
$i=3$	218.39	264.11	343.91

Per aconseguir aquests resultats ha estat necessari, en primer lloc, calcular els coeficients de credibilitat, a partir dels paràmetres estructurals, segons (3.115). A la taula següent, hi han les quanties dels coeficients de credibilitat:

Taula 3.13 *Coeficients de credibilitat*

	$j=1$	$j=2$	$j=3$
$i=1$	0.802	0.814	0.806
$i=2$	0.846	0.843	0.830
$i=3$	0.798	0.798	0.817

La mitjana dels coeficients de credibilitat $z_{ij}^{(12)}$ lligats a l'experiència del risc dins de cada cel·la està al voltant del 81%, la qual és bastant alta. Evidentment si eliminem les dues components $\Xi_i^{(1)}$ i $\Xi_j^{(2)}$ del model, $\Xi_{ij}^{(12)}$ és més important a l'hora d'explicar la composició dels estimadors de credibilitat, ja que és la única variable. En aquest cas, també es pot comprovar que els coeficients de credibilitat són els mateixos que els trobats si utilitzem el model clàssic.

Un cop calculats els coeficients de credibilitat i per arribar als resultats de la taula 3.12, considerem les expressions del Teorema 3.2, de manera que per a cada cel·la (i,j) l'estimador de credibilitat és igual a:

$$X_{ij,t_{ij}+1} = m + z_{ij}^{(12)}(X_{ijw} - m) \tag{3.152}$$

on les mitjanes ponderades que apareixen són definides com:

$$X_{ijw} = \sum_{s=1}^{t_{ij}} \frac{w_{ijs}}{w_{ij\Sigma}} X_{ijs} \tag{3.153}$$

Finalment, hom pot veure que la prima de credibilitat de la cel·la (1,1) pot ser calculada de la manera següent:

$$192.66 = 242.51 + 0.802 \cdot (180.39 - 242.51) \tag{3.154}$$

En el 3.5.1 s'ha vist que l'estimador de credibilitat per a la cel·la (i, j) es pot escriure com:

$$X_{ijs} = m + \Xi_{ij}^{(12)*} \tag{3.155}$$

Els valors de l'única component $\Xi_{ij}^{(12)*}$ estan expressades a la taula 3.14.

Taula 3.14 *Composició de les primes de credibilitat*

	$j = 1$	$j = 2$	$j = 3$
$i = 1$	−49.85	3.41	15.37
$i = 2$	−59.60	−8.30	8.88
$i = 3$	−24.12	21.60	101.40

Podem veure que les característiques de la taula 3.1 també apareixen en els resultats de credibilitat. Així, la quantia estimada per ser pagada per a cada client nou és més petita si el client té poca experiència laboral (−49.85 , −59.60 i −24.12) sigui solter, divorciat o aparellat, respectivament. Per tant, a més antiguitat més prima. Pel que fa a l'estat civil, és prou clar que els aparellats han de pagar més prima sigui quina sigui la seva antiguitat.

L'estimador de credibilitat per a les persones solteres que han treballat menys de dos anys en el seu actual lloc de treball és obtinguda a partir de la taula 3.2 de la següent manera:

$$\begin{aligned} X_{11s} &= m + \Xi_{11}^{(12)*} \\ &= 242.51 - 49.86 = 192.66 \end{aligned} \tag{3.156}$$

Per últim, només resaltar que els resultats del model de Bühlmann-Straub utilitzant els models de classificació creuada són els mateixos que els resultats segons el model clàssic, sempre i quan utilitzem 3.119 com a prima col·lectiva, segons el que es va explicar a 3.5.1.

3.6.4 Model jeràrquic de Jewell

Com en el model anterior, calculem els resultats del model jeràrquic de Jewell per comprovar que el model de classificació creuada és compatible amb el model clàssic, tal i com hem vist en la secció 3.5.2. Seguirem, doncs, el procediment allà indicat per estimar les primes de credibilitat. Per això, hem programat amb llenguatge APL el model de Jewell (vegeu apèndix C). Els paràmetres estructurals estimats per l'exemple són:

$$\begin{aligned} m^* &= 242.51 \\ b^{(1)*} &= 0 \\ b^{(12)*} &= 7880.27 \\ S^{2*} &= 26986.55 \end{aligned} \tag{3.157}$$

Hem fet servir els estimadors indicats a la secció 3.3.1. Pel que fa als coeficients arbitraris $g_j^{(2)}$, que apareixen a (3.131), són iguals a la unitat. A la taula 3.15 hem fet un resum dels estimadors de credibilitat de les quanties que hauran de ser pagades per la companyia asseguradora el proper any a causa de la fallida dels nous clients, és a dir, els $X_{ijt_{ij}+1}$.

Taula 3.15 *Primes de Credibilitat*

	$j=1$	$j=2$	$j=3$
$i=1$	185.28	246.40	260.10
$i=2$	176.25	233.26	252.50
$i=3$	214.74	267.38	357.65

Per aconseguir aquests resultats ha estat necessari, en primer lloc, calcular els coeficients de credibilitat, a partir dels paràmetres estructurals, segons (3.125). A la taula següent, hi han les quanties dels coeficients de credibilitat:

Taula 3.16 *Coeficients de credibilitat*

	$j=1$	$j=2$	$j=3$	
$i=1$	0.921	0.926	0.923	0
$i=2$	0.940	0.939	0.933	0
$i=3$	0.919	0.919	0.928	0

Com es pot veure, només trobem els coeficients de credibilitat $z_{ij}^{(12)}$ lligats a $\Xi_{ij}^{(12)}$, ja que els coeficients de credibilitat $z_i^{(1)}$ són iguals a zero. Per tant, la component $\Xi_i^{(1)}$ del model no aporta cap explicació a les primes de credibilitat. Així doncs, els resultats són molt semblants als que obteníem del model de Bühlmann-Straub.

Un cop calculats els coeficients de credibilitat i per arribar als resultats de la taula 3.15, considerem les expressions del Teorema 3.2, de manera que per a cada cel·la (i,j) l'estimador de credibilitat és igual a:

$$X_{ij,t_{ij}+1} = m + z_{ij}^{(12)}(X_{ijw} - m) + (1 - z_{ij}^{(12)})z_i^{(1)}(Y_{izw} - m) \tag{3.158}$$

on les mitjanes ponderades que apareixen es defineixen com:

$$\begin{aligned} X_{ijw} &= \sum_{s=1}^{t_{ij}} \frac{w_{ijs}}{w_{ij\Sigma}} X_{ijs}; \\ Y_{izw} &= \sum_{l=1}^{J} \frac{z_{il}^{(12)}}{z_{i\Sigma}^{(12)}} \left(X_{ilw} - \Xi_l^{(2)*}\right) \end{aligned} \tag{3.159}$$

i el vector Y_{izw} és igual a $(229.61\,, 219.22\,, 283.08)$.

Finalment, hom pot veure que la prima de credibilitat de la cel·la (1,1) pot ser calculada de la manera següent:

$$\begin{aligned} 185.28 = 242.51 &+ 0.921 \cdot (180.39 - 242.51) \\ &+ (1 - 0.921) \cdot 0 \cdot (229.61 - 242.51) \end{aligned} \tag{3.160}$$