

UNIVERSITAT DE BARCELONA

DEPARTAMENT DE MATEMÀTICA ECONÒMICA,

FINANCERA I ACTUARIAL

**El reaseguro proporcional de umbral y su influencia  
en la probabilidad y el momento de ruina  
en una cartera de seguros no vida**

**Anna Castañer Garriga**

**Directoras: Dra. M.Mercè Claramunt Bielsa  
Dra. Maite Mármol Jiménez**

Barcelona, Julio 2009



**El reaseguro proporcional de umbral y su influencia  
en la probabilidad y el momento de ruina  
en una cartera de seguros no vida**

Anna Castañer Garriga

Departament de Matemàtica Econòmica, Financera i Actuarial

Facultat d'Economia i Empresa

Universitat de Barcelona

Programa de Doctorado en

Estudios Empresariales

Especialidad en Ciencias Actuariales y Financieras

Bienio 2003-05

Tesis Doctoral presentada para optar al título de doctora por la Universitat de Barcelona

Directoras: Dra. M.Mercè Claramunt Bielsa y Dra. Maite Mármol Jiménez

Barcelona, Julio 2009



*Als meus Avis,*

*Pares, Germana,*

*i Família.*

*Amics i Company,*

*GRÀCIES.*



---

## Agradecimientos

*A lo largo de estos años, durante la preparación de la tesis doctoral he recibido la ayuda y apoyo de numerosas personas que de una u otra manera han hecho que el camino recorrido haya resultado más llevadero. Por su implicación en el día a día de esta investigación, quiero comenzar estas líneas agradeciendo a mis directoras de tesis, la Dra. Mercè Claramunt y la Dra. Maite Mármol, su confianza, dedicación y constante apoyo, tanto en el ámbito académico como en el personal. Me siento afortunada de haber tenido y tener la oportunidad de trabajar con ellas.*

*De la misma manera, quiero hacer patente mi agradecimiento al Dr. Antonio Alegre, co-director del trabajo presentado para la obtención del Diploma de Estudios Avanzados (DEA). Sus ideas y sugerencias representaron un estímulo y enriquecieron desde sus inicios la tesis doctoral que ahora se presenta.*

*Asimismo, los compañeros del Departament de Matemàtica Econòmica, Financera i Actuarial de la Universitat de Barcelona, han sido también importantes en este tiempo no sólo para la investigación, la docencia y demás actividades propias de cualquier departamento universitario, sino también por su apoyo y compañía. A los grupos “Anàlisi Financera-Actuarial del Risc i de les Assegurances” (AFARA) y “Modelització actuarial” (MODA) les he de agradecer su apoyo económico y financiero que me ha permitido presentar los resultados de la investigación en diferentes congresos durante estos años.*

*En el área más personal, que incluye a aquellas personas que no se hallan directamente vinculadas al ámbito académico, quiero hacer constar mi agradecimiento a los amigos y amigas de los que siempre he recibido cariño y comprensión, de manera especial a Alba, Isabel, Jairo, Montse, Pep y Vanessa. Y a Julio, compañero de viaje estos años. A mi familia, a “Marta, Pau i Nicolau”, y especialmente “als meus avis i pares” les quiero agradecer su comprensión porque este proyecto me ha robado muchas horas de estar a su lado. A ellos, especialmente, va dedicada esta tesis.*





# Índice general

<b>1. Introducción</b>	<b>9</b>
<b>2. Antecedentes de la teoría del riesgo</b>	<b>13</b>
2.1. Introducción . . . . .	13
2.2. Modelo clásico de riesgo . . . . .	14
2.2.1. Proceso de las reservas . . . . .	16
2.2.2. Probabilidad de ruina . . . . .	18
2.2.3. Momento de ruina . . . . .	30
2.2.4. Función Gerber-Shiu . . . . .	32
2.3. Modelo con barrera de dividendos constante . . . . .	33
2.3.1. Proceso de las reservas . . . . .	34
2.3.2. Probabilidad de ruina . . . . .	36
2.3.3. Momento de ruina . . . . .	38
2.3.4. Función Gerber-Shiu . . . . .	48
2.3.5. Valor actual de los dividendos . . . . .	49
<b>3. El reaseguro proporcional y su influencia en un modelo con barrera</b>	<b>53</b>
3.1. Introducción . . . . .	53
3.2. Reaseguro proporcional en un modelo clásico . . . . .	55
3.2.1. Proceso de las reservas . . . . .	58
3.3. Reaseguro proporcional en un modelo con barrera . . . . .	59
3.3.1. Momento de ruina . . . . .	61

3.3.1.1.	Esperanza del momento de ruina . . . . .	61
3.3.1.2.	Transformada del momento de ruina . . . . .	64
3.3.2.	Esperanza del valor actual de los dividendos . . . . .	66
<b>4.</b>	<b>Estrategia de reaseguro proporcional de umbral</b>	<b>69</b>
4.1.	Introducción . . . . .	69
4.2.	Proceso de las reservas . . . . .	71
4.3.	Función Gerber-Shiu . . . . .	74
4.4.	Probabilidad y momento de ruina con cuantía de los siniestros exponencial . . .	79
4.4.1.	Transformada de Laplace del momento de ruina . . . . .	80
4.4.2.	Probabilidad de ruina . . . . .	84
4.4.3.	Momentos de la variable aleatoria momento de ruina . . . . .	86
4.4.4.	Aplicación numérica . . . . .	89
4.5.	Probabilidad y momento de ruina con cuantía de los siniestros phase-type( $N$ ) .	95
4.5.1.	Transformada de Laplace del momento de ruina phase-type(2) . . . . .	104
4.5.2.	Probabilidad de ruina phase-type(2) . . . . .	106
4.5.3.	Cuantía de los siniestros Erlang( $2, \beta$ ) . . . . .	108
4.5.4.	Aplicación numérica . . . . .	114
4.6.	Análisis numérico y comparativo . . . . .	120
4.6.1.	Estrategia óptima con reaseguro proporcional de umbral . . . . .	120
4.6.2.	Estrategia óptima con reaseguro proporcional con nivel de retención $k$ .	125
4.6.3.	Comparación de estrategias de reaseguro proporcional . . . . .	131
4.6.4.	Estrategia de reaseguro proporcional de umbral con $k_1 = 1$ y $\forall k_2$ . . .	133
<b>5.</b>	<b>Conclusiones</b>	<b>137</b>
<b>A.</b>	<b>Transformadas de Laplace</b>	<b>141</b>
A.1.	Introducción . . . . .	141
A.2.	Propiedades de la transformada de Laplace . . . . .	148

---

A.3. Métodos de cálculo . . . . .	163
<b>B. Ejemplos del momento de ruina con barrera</b>	<b>165</b>
<b>C. Programas en Mathematica: Ejemplos con reaseguro y barrera constante</b>	<b>169</b>
C.1. Esperanza del momento de ruina . . . . .	169
C.2. Transformada del momento de ruina . . . . .	182
C.3. Esperanza del valor actual de los dividendos . . . . .	192
<b>Bibliografía</b>	<b>197</b>



# Índice de figuras

2.1.	Trayectoria típica del proceso de las reservas . . . . .	17
2.2.	Trayectoria del proceso de las reservas en caso de ruina . . . . .	19
2.3.	Coefficiente de ajuste . . . . .	21
2.4.	Proceso de las reservas con barrera constante . . . . .	35
2.5.	Proceso de las reservas y dividendos repartidos . . . . .	36
2.6.	Cuando $t = T_1$ es menor que $t^*$ . . . . .	39
2.7.	Cuando $t = T_1$ es mayor que $t^*$ . . . . .	39
2.8.	$W(u, b)$ valor actual de los dividendos repartidos . . . . .	50
3.1.	Recargo de seguridad interno del asegurador . . . . .	57
3.2.	Proceso de las reservas sin y con reaseguro proporcional con $b(t) = b$ . . . . .	60
3.3.	$E_R[T]$ para distintos $\rho_R = (0.3, 0.4, 0.5, 0.6, 0.7, 0.8, 0.9)$ . . . . .	63
3.4.	Esperanzas óptimas para distintos niveles de retención . . . . .	63
3.5.	$E_R[e^{-\delta T}]$ para los distintos $\rho_R$ en los casos $\delta = 0.01, \delta = 0.03$ y $\delta = 0.1$ . . . . .	65
3.6.	$W_k(5, 10)$ para $\rho_R = 0.3, \dots, 0.9$ . . . . .	67
4.1.	Estrategia de reaseguro proporcional de umbral . . . . .	73
4.2.	Transformada de Laplace del momento de ruina con cuantía exponencial . . . . .	90
4.3.	Probabilidad de ruina con cuantía exponencial . . . . .	92
4.4.	Esperanza, varianza y $C_V$ de la v.a. momento de ruina con cuantía exponencial . . . . .	94
4.5.	Transformada de Laplace del momento de ruina con cuantía Erlang(2, 2) . . . . .	116
4.6.	Probabilidad de ruina con cuantía Erlang(2, 2) . . . . .	117

4.7. Esperanza, varianza y $C_V$ de la v.a. momento de ruina con cuantía Erlang(2, 2)	118
4.8. $\psi(u)$ en un modelo de reaseguro proporcional de umbral para distintas $u$ y $b$	121
4.9. $\psi_{\min}(20)$ con $b = 2$ en un modelo con reaseguro proporcional de umbral	121
4.10. Curvas de nivel con umbral $b = 2$ para distintas $u$	122
4.11. Curvas de nivel con umbral $b = 8$ para distintas $u$	123
4.12. Curvas de nivel con umbral $b = 15$ para distintas $u$	123
4.13. $\psi(u)$ con reaseguro proporcional en función de $k$ y para distintas $u$ con $\rho = 0.15$ y $\rho_R = 0.25$	126
4.14. Comportamiento de la $k$ que minimiza la probabilidad de ruina en función de $u$	128
4.15. $k_{op}(u)$ que minimiza la probabilidad de ruina en función de $u$	128
4.16. $\psi(u)$ con reaseguro proporcional en función de $k$ y para distintas $u$ con $\rho = 0.1$ y $\rho_R = 0.3$	129
4.17. $\psi_{\min}^{k_{op}}(u) - \psi_{\min}^{k_1 \neq k_2}(u)$ para distintas $u$ y $b$	132
A.1. Función continua a trozos	143
A.2. $f(t)$ es una función de orden exponencial	144
A.3. $f(t)$ no es una función de orden exponencial	145
A.4. $f(t) = \frac{1}{\sqrt{t}}$	146
A.5. Función periódica $f(t + T) = f(t)$	157
A.6. Función periódica $f(t + 3) = f(t)$	159

# Índice de tablas

3.1.	Conversión de parámetros en un modelo de reaseguro proporcional . . . . .	58
3.2.	Comportamiento de la $E_R[T]$ . . . . .	64
3.3.	Comportamiento de la $E_R[e^{-\delta T}]$ . . . . .	66
3.4.	Valores de $\widehat{k}$ para diferentes valores de $\delta$ . . . . .	68
4.1.	Valores de $\phi(u)$ para distintas $u$ y $b$ . . . . .	91
4.2.	Valores de $\psi(u)$ para distintas $u$ y $b$ . . . . .	92
4.3.	$E[T   T < \infty]$ para distintas $u$ y $b$ con cuantía exponencial . . . . .	94
4.4.	$V[T   T < \infty]$ y $C_V$ para distintas $u$ y $b$ con cuantía exponencial . . . . .	95
4.5.	Valores de $\phi(u)$ para distintas $u$ y $b$ con cuantía Erlang(2, 2) . . . . .	116
4.6.	Valores de $\psi(u)$ para distintas $u$ y $b$ con cuantía Erlang(2, 2) . . . . .	118
4.7.	$E[T   T < \infty]$ para distintas $u$ y $b$ con cuantía Erlang(2, 2) . . . . .	119
4.8.	$V[T   T < \infty]$ y $C_V$ para distintas $u$ y $b$ con cuantía Erlang(2, 2) . . . . .	119
4.9.	$\psi_{\min}(u)$ con reaseguro proporcional de umbral para distintas $u$ y $b$ . . . . .	124
4.10.	$\psi_{\min}(u)$ , esperanza, varianza y $C_V$ del momento de ruina con reaseguro proporcional de umbral para distintas $u$ y $b = 3.3$ . . . . .	125
4.11.	$\psi_{\min}^{k_{op}}(u)$ y $\psi_{\min}^{k_R}(u)$ . . . . .	130
4.12.	$\psi_{\min}^{k_{op}}(u)$ , esperanza, varianza y $C_V$ del momento de ruina con reaseguro proporcional para distintas $u$ . . . . .	131
4.13.	$\psi_{\min}^{k_{op}}(u)$ y $\psi_{\min}^{k_1 \neq k_2}(u)$ . . . . .	132
4.14.	$\psi_{\min}(u)$ con $k_1 = 1$ y $\forall k_2   0,4 < k \leq 1$ para distintas $u$ y $b$ . . . . .	134

4.15. $u$ necesarias para distintas estrategias para obtener la misma $\psi_{\min}^{k_1 \neq k_2}(u)$ . . . . .	135
4.16. Porcentajes de reducción en las reservas iniciales . . . . .	135
A.1. Transformadas de Laplace de funciones elementales . . . . .	147
A.2. Propiedades de las transformadas de Laplace . . . . .	162
A.3. Algunos teoremas de las transformadas de Laplace . . . . .	163
B.1. Esperanza, varianza, desviación típica y $C_V$ para distintas $u$ . . . . .	166
B.2. Esperanza, varianza, desviación típica y $C_V$ para distintas $b$ . . . . .	166
B.3. Esperanza, varianza, desviación típica y $C_V$ cuando $b = u$ . . . . .	167



# Capítulo 1

## Introducción

Esta tesis se enmarca dentro del ámbito del análisis de la solvencia de las entidades aseguradoras no vida, entendiéndose por solvencia del asegurador la capacidad de hacer frente a sus obligaciones, es decir, de pagar los siniestros presentes y futuros de los asegurados (IAIS (2000)).

El contexto metodológico usado en el presente trabajo es la teoría del riesgo. Según Nieto y Vegas (1993), “el objeto de toda teoría del riesgo es el de proporcionar un modelo de naturaleza estocástica respecto a las fluctuaciones aleatorias derivadas de las operaciones de seguro, a fin de instrumentar las medidas necesarias para garantizar la solvencia dinámica de la empresa”.

En la actualidad el proyecto de Solvencia II, iniciado con el objetivo de investigar la necesidad de revisar el actual sistema de solvencia de la Unión Europea, está diseñando una metodología de análisis y de cuantificación que permita determinar cuál es el posicionamiento de las aseguradoras frente a los riesgos, y con ello establecer los niveles de recursos propios que necesitan.

El principal riesgo al que se enfrentan las compañías de seguros no vida es la derivada de la siniestralidad, ya que su actividad consta precisamente en la cobertura de dicho riesgo. Sin embargo, no es el único riesgo que las compañías asumen. Existen diversas clasificaciones de los riesgos a los que generalmente se encuentran expuestas las instituciones de seguros, siendo la principal clasificación, a nivel internacional, la propuesta por la International Actuarial

Association (IAA) en 2004. En ella se dividen los riesgos en cuatro categorías, entre las que se halla el riesgo de suscripción, en el que la tesis centra su interés<sup>1</sup>.

El riesgo de siniestralidad se define como el riesgo que ocurran más siniestros de los esperados o que algunos siniestros sean de importe superior al esperado, de manera que se obtengan pérdidas inesperadas que puedan llevar a la compañía incluso a la ruina. Este riesgo de siniestralidad, en la clasificación mencionada anteriormente, se encuentra dentro de los riesgos de suscripción.

Dentro de la teoría del riesgo, la teoría de la ruina se ocupa de las variaciones aleatorias en los resultados financieros del asegurador provocados por las fluctuaciones en el número e importe de los siniestros, es decir, del riesgo de siniestralidad. Surge así la necesidad de modelizar el proceso de las reservas de una cartera de seguros no vida, considerándose en los modelos más sencillos, que las reservas en un determinado momento  $t$  se calculan como  $u + ct - S(t)$ , es decir, la suma de las reservas iniciales,  $u$ , más las primas ingresadas,  $ct$ , menos la siniestralidad ocurrida hasta el momento  $t$ ,  $S(t)$ . La forma clásica de modelizar el proceso de las reservas es el de considerar que el coste total de los siniestros sigue un proceso de Poisson Compuesto, donde la hipótesis básica es que el número de siniestros sigue un proceso estocástico de Poisson.

Se pueden incorporar diferentes modificaciones al proceso de las reservas. Una de ellas, la que aquí nos preocupa, es la introducción de políticas de reaseguro, mediante las cuales las compañías aseguradoras realizan contratos de reaseguro con el fin de poder asumir riesgos mayores o protegerse mejor de la ruina. Este contrato transfiere parte de los riesgos de la compañía aseguradora a la reaseguradora a cambio de cederle también una parte de las primas que recibe de los asegurados. En este sentido, uno de los reaseguros más trabajados en la literatura actuarial es el reaseguro proporcional o cuota-parte, en el que todos los riesgos se transfieren en la misma proporción.

El objetivo de la tesis es analizar el efecto de una nueva estrategia de reaseguro proporcional en las medidas de solvencia del asegurador. Esta nueva estrategia, que denominamos estrategia de reaseguro proporcional de umbral consiste en aplicar diferentes niveles de retención depen-

---

<sup>1</sup>Al riesgo de suscripción se añadirían el riesgo de crédito, el de mercado y el operacional.

diendo de si las reservas del asegurador son inferiores o superiores a un determinado umbral. La estrategia de reaseguro proporcional clásica consiste en la cesión al reasegurador de una proporción fija e independiente del nivel de las reservas de la cuantía de los siniestros que ocurren en la cartera de seguros gestionada por el asegurador y, en consecuencia, también de una proporción fija de las primas. Cuando se consideran modelos a largo plazo, como el que se plantea en este trabajo, el gestor toma las decisiones en el presente teniendo en cuenta el futuro de la empresa. La consideración del largo plazo permite ofrecer una visión más amplia de la estabilidad de la cartera a lo largo del tiempo. Ahora bien, cuando se considera un horizonte temporal infinito, con un reaseguro proporcional se asume que la proporción cedida al reasegurador es constante a lo largo del tiempo independientemente del nivel de reservas del asegurador en cada momento. Sin embargo, parece más razonable asumir que la proporción cedida en reaseguro depende de la cantidad de las reservas que el asegurador tiene en cada momento del tiempo. De aquí surge la idea de presentar una política de reaseguro proporcional de umbral.

La tesis se estructura de la siguiente manera. En el Capítulo 2, que sigue a esta introducción, se revisan algunos de los antecedentes de la teoría del riesgo como paso previo para desarrollar las modificaciones que sobre el modelo clásico de riesgo se llevan a cabo en capítulos posteriores. En este contexto, se presenta el modelo clásico de riesgo, definiendo el proceso que siguen las reservas y analizando la probabilidad de ruina y la variable aleatoria momento de ruina. Se introduce, además, la función Gerber-Shiu, a partir de la cual se pueden obtener las anteriores expresiones, y que será, a su vez, necesaria en desarrollos posteriores. A continuación, se estudia una de las modificaciones aplicadas al modelo clásico del proceso de las reservas, surgida a partir de la crítica de De Finetti (1957), que propone el reparto de parte de las reservas en forma de dividendos. Se presenta así, el modelo clásico modificado con una barrera de dividendos constante, analizándose igualmente la probabilidad y el momento de ruina junto con la esperanza del valor actual de los dividendos.

En el Capítulo 3, el modelo de la teoría del riesgo se modifica incorporando la opción de establecer un contrato de reaseguro proporcional para el gestor de la cartera. En el caso del modelo clásico de la teoría del riesgo, diversos estudios demuestran que el reaseguro proporcional

influye en la probabilidad de ruina última. Se completa el capítulo, con el análisis del efecto de la estrategia del reaseguro proporcional en un modelo con barrera de dividendos constante. La introducción de esta estrategia de reaseguro proporcional produce una modificación en el proceso de las reservas en ambos modelos. En el modelo con barrera de dividendos constante, se aportan las expresiones de la esperanza y la transformada del momento de ruina, y se obtiene la esperanza del valor actual de los dividendos repartidos.

En el Capítulo 4, se presenta la nueva política de reaseguro, denominada reaseguro proporcional de umbral, que supone una contribución a la mejora de los modelos de largo plazo en el sentido expresado anteriormente. La ventaja de esta nueva estrategia de reaseguro es que permite al gestor calcular, en el momento inicial, el efecto de una política de reaseguro dinámica dependiente del nivel de reservas de la compañía. En este capítulo se introduce el teorema que permite calcular la probabilidad de ruina y la variable aleatoria momento de ruina con este nuevo tipo de reaseguro proporcional y se obtienen las expresiones para el caso concreto en que la cuantía individual de los siniestros se distribuye según una exponencial y una  $\text{phase-type}(N)$ . En el último apartado del capítulo, se comparan los efectos de la estrategia de reaseguro proporcional de umbral con los efectos de un modelo donde no se aplica reaseguro y con los efectos de un modelo con reaseguro proporcional con un nivel fijo de retención independiente del nivel de las reservas. Estas dos últimas estrategias se pueden obtener como casos particulares de la estrategia de reaseguro proporcional de umbral.

Por último, en el Capítulo 5, se recogen las principales conclusiones y aportaciones de la investigación. El trabajo se completa con un conjunto de apéndices explicativos: A. Transformadas de Laplace; B. Ejemplos del momento de ruina con barrera; y C. Programas en *Mathematica* para obtener la esperanza del momento de ruina, su transformada y la esperanza del valor actual de los dividendos.

# Capítulo 2

## Antecedentes de la teoría del riesgo

### 2.1. Introducción

El objetivo de este capítulo es definir los aspectos básicos de la teoría del riesgo. Es éste un paso previo que resulta necesario para desarrollar las modificaciones que se introducirán sobre el modelo clásico de riesgo en capítulos posteriores.

Para ello, la estructura elegida es la siguiente. En primer lugar, se presenta en el apartado 2.2. el modelo clásico del riesgo, un modelo que ha sido ampliamente tratado en la literatura actuarial. A continuación, en el apartado 2.3. queda recogida una de las modificaciones aplicadas a este modelo y que nace en 1957 a partir de la crítica de De Finetti: la introducción de políticas que proponen el reparto de parte de las reservas en forma de dividendos. En este apartado se considera el caso de una barrera de dividendos constante.

En ambos casos, tanto en el modelo clásico de riesgo como en el caso del modelo con barrera constante, se definen dos de las medidas que permiten analizar la solvencia en las carteras de seguros no vida: la probabilidad de ruina y el momento de ruina. Estas dos medidas se pueden obtener a partir de la función Gerber-Shiu que también se incluye en cada apartado.

Además de estas medidas de solvencia, en el caso del modelo modificado con políticas de reparto de dividendos, se presenta el cálculo de los dividendos repartidos mediante la esperanza del valor actual de los dividendos.

## 2.2. Modelo clásico de riesgo

En 1903, Filip Lundberg introdujo los fundamentos de la teoría del riesgo en el campo de los seguros no vida, con un modelo simple, pero que era capaz de describir las dinámicas básicas de una cartera de seguros no vida. Este modelo asume un proceso de Poisson para describir el número de siniestros y presenta un análisis en tiempo continuo.

Como primer paso, se definen los conceptos básicos sobre procesos estocásticos que serán necesarios para el desarrollo posterior del modelo. Entre las referencias bibliográficas a destacar en este campo se encuentran, por ejemplo, Feller (1971), Beard *et al.* (1990), Bowers *et al.* (1997) o Asmussen (2000).

### Definición 1 (Proceso de recuento)

Un proceso de recuento,  $\{N(t), t \geq 0\}$ , es una representación del número total de acontecimientos u ocurrencias hasta el momento  $t$ . Estos procesos tienen las siguientes propiedades:

1.  $N(t) \geq 0$ .
2.  $N(t)$  es un valor entero.
3. Si  $t_0 < t_1$ , entonces  $N(t_0) \leq N(t_1)$ . Es decir,  $N(t)$  es no decreciente.
4. Si  $t_0 < t_1$ , entonces  $N(t_1) - N(t_0)$  es el número de ocurrencias en  $(t_0, t_1]$ .

### Definición 2 (Incrementos independientes)

Un proceso estocástico tiene incrementos independientes o de renovación si para algún  $t_i$ ,  $i = 0, \dots, n$ , y  $n \geq 1$  tal que  $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n$ , los incrementos  $N(t_i) - N(t_{i-1})$ ,  $i = 1, \dots, n$  son mutuamente independientes. Es decir, la ocurrencia de un suceso no influye en la ocurrencia de sucesos posteriores.

### Definición 3 (Incrementos estacionarios)

Un proceso estocástico tiene incrementos estacionarios si la distribución de  $N(t_1) - N(t_0)$  depende únicamente de la duración del intervalo  $(t_0, t_1]$  y no de la localización de éste. Si diferentes intervalos coinciden en duración, éstos tendrán la misma probabilidad.

Por lo tanto, un proceso de recuento será de incrementos independientes si el número de ocurrencias que tienen lugar en intervalos de tiempo disjuntos son variables aleatorias independientes. Y será de incrementos estacionarios si el número de ocurrencias que tienen lugar en un intervalo de tiempo es el mismo en intervalos de igual longitud. Un ejemplo de estos tipos de procesos son los de renovación, dentro de los cuales hallamos como caso particular el proceso de Poisson, el cual se define a continuación.

**Definición 4** (*Proceso de Poisson*)

Un proceso de recuento,  $\{N(t), t \geq 0\}$ , es un proceso de Poisson homogéneo con tasa  $\lambda > 0$  si se verifica:

1.  $N(0) = 0$ .
2. Es de incrementos independientes y estacionarios.
3.  $P(N(t+h) - N(t) = 1) = \lambda h + o(h)$ , siendo  $h$  un intervalo corto de tiempo y  $o(h)$  un infinitésimo tal que  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{o(h)}{h} = 0$ .
4.  $P(N(t+h) - N(t) \geq 2) = o(h)$ , esta propiedad elimina la probabilidad de más de un suceso en un mismo instante.

Si un proceso de recuento es un proceso de Poisson, entonces el número de siniestros  $N(t)$  para  $\forall t > 0$ , es  $Poisson(\lambda t)$ , es decir, se distribuye según una distribución Poisson de media  $\lambda t$ .

**Definición 5** (*Tiempos de interocurrencia*)

Sean  $0 < T_1 < T_2 < T_3 < \dots$  los momentos de ocurrencia, se definen los tiempos de interocurrencia como

$$W_i = T_i - T_{i-1}, \quad i = 1, 2, \dots,$$

siendo  $W_1 = T_1$ .

**Definición 6** (*Proceso de renovación*)

Un proceso de recuento,  $\{N(t), t \geq 0\}$ , es de renovación cuando los tiempos entre ocurrencias son variables aleatorias positivas idénticas e independientemente distribuidas.

En particular, el proceso de Poisson con parámetro  $\lambda$  es un proceso de renovación en que los tiempos de interocurrencia son variables idénticas e independientemente distribuidas, con distribución exponencial de media  $\frac{1}{\lambda}$ .

**Definición 7** (*Proceso de Poisson compuesto*)

Si se combina un proceso de Poisson,  $\{N(t), t \geq 0\}$  con una sucesión de variables aleatorias,  $\{X_i\}_{i=1}^{\infty}$ , idénticas e independientemente distribuidas, e independientes de  $N(t)$ , se obtiene un proceso de Poisson compuesto  $\{S(t), t \geq 0\}$ ,

$$S(t) = \sum_{i=1}^{N(t)} X_i.$$

Si  $N(t) = 0$  entonces  $S(t) = 0$ .

La manera de interpretar el proceso anterior en una cartera de seguros no vida es considerar  $N(t)$  como el número de siniestros ocurridos hasta el momento  $t$  y  $X_i$  como la cuantía individual del siniestro  $i$ -ésimo. Este tipo de proceso, que recoge la siniestralidad agregada de la cartera, forma parte del proceso de las reservas, el cual se explica en el siguiente subapartado.

**2.2.1. Proceso de las reservas**

El modelo clásico de riesgo para modelizar la actividad de una compañía de seguros cuando se analiza en tiempo continuo (Gerber (1979), Latorre (1992), Bowers *et al.* (1997), Dickson (2005)), viene definido por un proceso estocástico  $\{U(t), t \geq 0\}$ , siendo

$$U(t) = u + ct - S(t), \quad t \geq 0, \quad (2.1)$$

donde  $U(t)$  es el nivel de las reservas en el momento  $t$ , calculadas como la cuantía de las reservas en el momento 0, más la cuantía de las primas recibidas, menos la cuantía pagada por los siniestros hasta el momento  $t$ .



Así  $u = U(0) \geq 0$ , es el nivel inicial de las reservas,  $c$  la intensidad de prima, siendo por tanto  $ct$  el total de primas cobradas hasta  $t$ , y  $S(t)$  la siniestralidad agregada, es decir, el total de los siniestros ocurridos en  $(0, t]$ ,

$$S(t) = \sum_{i=1}^{N(t)} X_i, \quad (2.2)$$

siendo  $N(t)$  el número de siniestros ocurridos hasta  $t$ , y  $X_i$  la cuantía del  $i$ -ésimo siniestro.

En la Figura 2.1 se representa una posible trayectoria del proceso. Las variables aleatorias  $T_1, T_2, \dots$  son los momentos en los cuales sucede un siniestro. La pendiente del proceso es  $c$  en el caso en que no hay siniestros, y cuando  $t = T_i, i = 1, \dots, n$ , las reservas caen escalonadamente por la cuantía del siniestro  $i$ -ésimo,  $X_i$ .

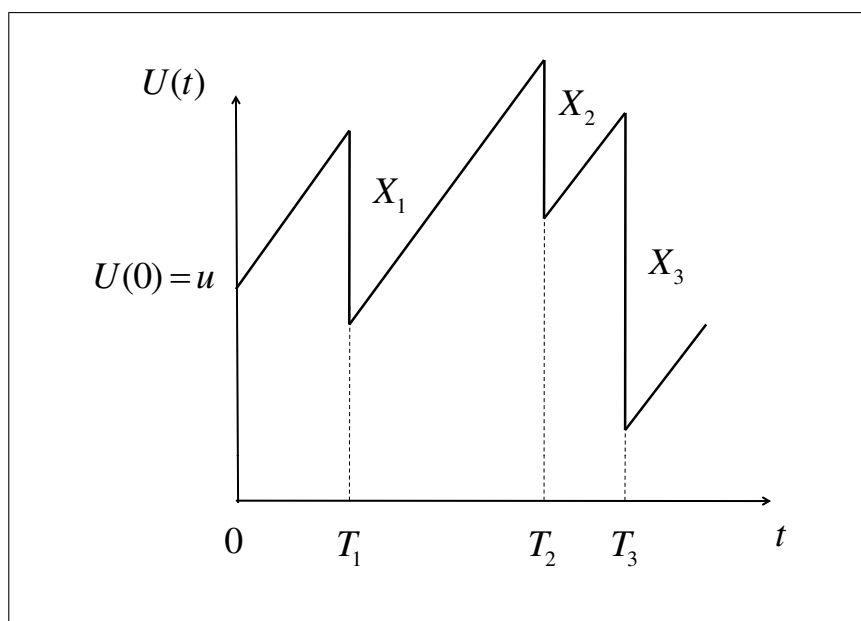


Figura 2.1: Trayectoria típica del proceso de las reservas

En el modelo no se incluyen elementos como la inflación, rendimientos de la inversión, reparto de dividendos o gastos de carácter administrativo o de gestión.

En el modelo clásico, el proceso de ocurrencia de siniestros  $\{N(t), t \geq 0\}$  es un proceso de Poisson de media  $\lambda$ , donde  $N(t)$  es el número de siniestros ocurridos en  $(0, t]$ . Como se ha comentado anteriormente,  $S(t) = \sum_{i=1}^{N(t)} X_i$  es un proceso de Poisson compuesto,  $\{S(t), t \geq 0\}$ , cumpliéndose que  $S(t) = 0$  si  $N(t) = 0$ .

Las cuantías individuales de los siniestros se representan por una secuencia de variables aleatorias idénticas e independientemente distribuidas,  $\{X_i\}_{i=1}^{\infty}$ , e independientes de  $N(t)$ . La función de distribución de la variable  $X_i$  se representa por  $F(x) = P(X \leq x)$  y su respectiva función de densidad por  $f(x)$ .

A partir de aquí, se hace una serie de supuestos. En primer lugar, se asume que  $F(0) = 0$  y se considera que todas las cuantías de los siniestros son positivas. Se supone además la existencia de la esperanza de la variable aleatoria cuantía del siniestro, siendo  $E(X) = p_1$ . También se definen el momento de orden  $k$  y la función generatriz de momentos de  $X_i$  como:

$$p_k = E(X^k),$$

$$m(s) = E(e^{sX_i}),$$

y se supone que ambas existen.

Por último, se considera que los ingresos por primas por unidad de tiempo deben ser superiores a la siniestralidad agregada esperada, es decir  $c > \lambda p_1$ . Esta condición es conocida como beneficio neto, y evita la ruina segura en la cartera. Así, se define  $c = (1 + \rho)\lambda p_1$ , siendo  $\rho > 0$  un coeficiente de seguridad que recarga la prima pura, de tal forma que:

$$\rho = \frac{c}{\lambda p_1} - 1 \tag{2.3}$$

### 2.2.2. Probabilidad de ruina

En el análisis del proceso de las reservas, se considera que la ruina se produce cuando  $U(t)$  toma valores negativos. En la Figura 2.2, se observa que la trayectoria de las reservas es negativa por primera vez en  $T$ , siendo éste el momento en que se produce la ruina. Posteriormente, se pasa a definir la probabilidad de ruina, y la de supervivencia, así como el momento de ruina (Bühlmann (1996)).

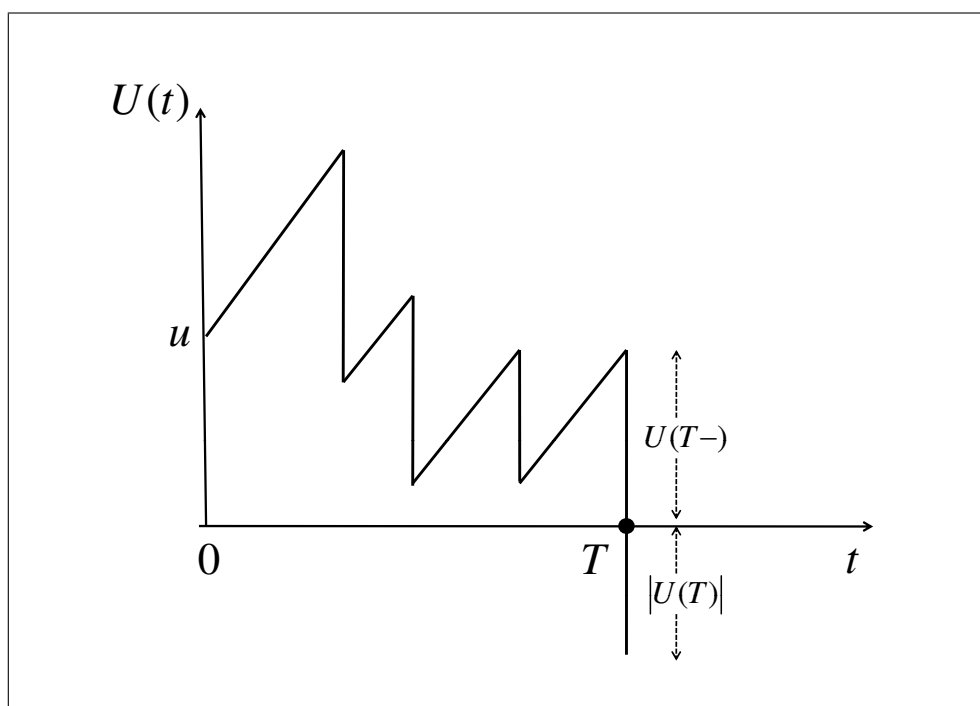


Figura 2.2: Trayectoria del proceso de las reservas en caso de ruina

**Definición 8** (Probabilidad de ruina en tiempo infinito)

Se define la probabilidad de ruina como

$$\psi(u) = P \{U(t) < 0 \text{ para algún } t > 0 \mid U(0) = u\} = P(T < \infty \mid U(0) = u),$$

siendo  $T = \inf \{t > 0 \text{ y } U(t) < 0\}$ , la variable aleatoria que representa el momento de ruina para  $U(0) = u$ . Así,  $T$  es el primer momento en que el nivel de las reservas toma valores negativos. Si las reservas son positivas para todo  $t$  no negativo no se produce la ruina, es decir  $U(t) \geq 0, \forall t > 0$ , y el momento de ruina es  $T = \infty$ .

La probabilidad de ruina está comprendida entre  $0 \leq \psi(u) \leq 1$ , se trata de una función decreciente respecto a  $u$  y tiende a cero cuando las reservas iniciales tienden a infinito.

**Definición 9** (Probabilidad de ruina en tiempo finito)

Se define la probabilidad de ruina como

$$\psi(u, t) = P \{U(\tau) < 0, 0 < \tau \leq t \mid U(0) = u\} = P(T < t \mid U(0) = u),$$

siendo  $\psi(u, t)$  la función distribución de la variable aleatoria  $T$ .

**Definición 10** (*Probabilidad de Supervivencia en tiempo infinito*)

Se define la probabilidad de supervivencia como la complementaria de la probabilidad de ruina, es decir

$$\varphi(u) = 1 - \psi(u) = P \{U(t) \geq 0, \forall t > 0 \mid U(0) = u\} = P(T = \infty \mid U(0) = u).$$

**Definición 11** (*Probabilidad de Supervivencia en tiempo finito*)

Se define la probabilidad de supervivencia como

$$\varphi(u, t) = 1 - \psi(u, t)$$

Una primera aproximación para la probabilidad de ruina en un horizonte temporal infinito es la proporcionada por el coeficiente de ajuste de Lundberg. Es éste un instrumento útil para conseguir límites de la probabilidad de ruina. Por este motivo, es preciso definir previamente el coeficiente de ajuste, una constante que designaremos por  $R$ . Las siguientes definiciones que se recogen a continuación se pueden encontrar, por ejemplo, en Dickson (2005), Kaas *et al.* (2001) o Bowers *et al.* (1997).

**Definición 12** (*Coficiente de ajuste*)

Para el proceso clásico, asumiendo un proceso de Poisson, el coeficiente de ajuste  $R$  es definido como la única raíz positiva de

$$\lambda m(r) - \lambda - cr = 0 \tag{2.4}$$

siendo  $m(r)$  la función generatriz de momentos (asumiendo que exista).

Se cumple por tanto que

$$\lambda + cR = \lambda m(R), \tag{2.5}$$

$$1 + p_1(1 + \rho)R = m(R),$$

y se observa que  $R$  es independiente del parámetro de Poisson  $\lambda$ .

Para poder comprobar que  $R$  es la única raíz positiva de (2.4), se considera la función

$$g(r) = \lambda m(r) - \lambda - cr,$$

cuya forma se muestra en la Figura 2.3. Se observa que  $g(0) = 0$  y que se trata de una función estrictamente convexa ya que

$$g'(r) = \lambda m'(r) - c \Rightarrow g'(0) = \lambda p_1 - c < 0, \text{ por la condición de beneficio neto y}$$

$$g''(r) = \lambda m''(r) = \lambda E(X^2 e^{rX}) > 0, \text{ por lo tanto } g(r) \text{ es convexa.}$$

Entonces existe un valor  $R > 0$  tal que  $g(R) = 0$ .

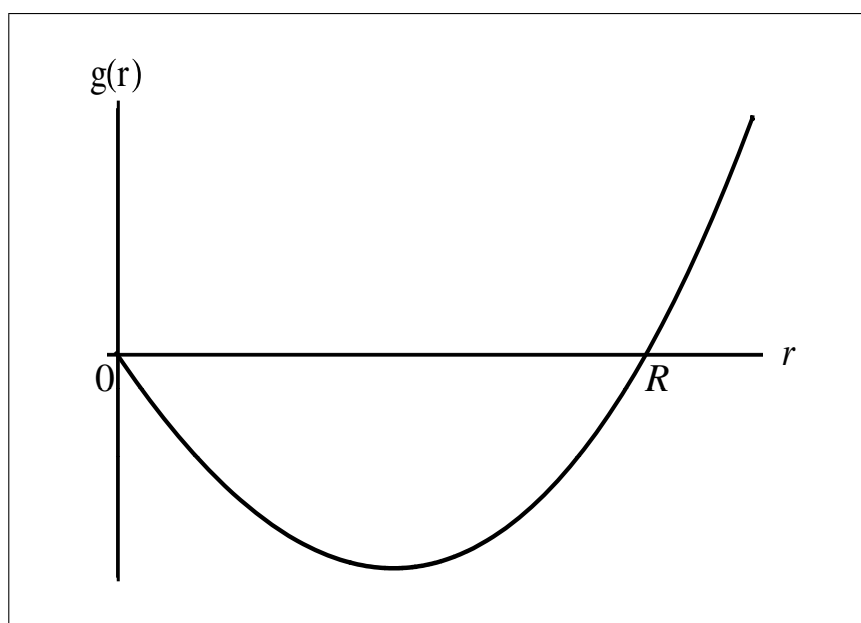


Figura 2.3: Coeficiente de ajuste

Si el coeficiente de ajuste existe, se puede hallar la cota superior para la probabilidad de ruina, de acuerdo con el teorema y la demostración recogidos en Kaas *et al.* (2001).

**Teorema 1** (*Desigualdad de Lundberg*)

Sea  $S(t) \sim$  Poisson Compuesta, y exista el coeficiente de ajuste  $R$ , entonces,

$$\psi(u) \leq e^{-Ru}.$$

**Demostración.**

Sea  ${}_n\psi(u)$  la probabilidad de ruina antes o en el  $n$ -ésimo siniestro, se puede comprobar por inducción que  ${}_n\psi(u) \leq e^{-Ru}$ .

Para  $n = 1$ , se considera que la ruina sólo puede ocurrir en el primer siniestro. Si se asume un proceso de Poisson para el número de siniestros ocurridos, el tiempo que transcurre hasta la ocurrencia del primer siniestro se distribuye según una exponencial. Entonces, condicionando a la ocurrencia del primer siniestro,

$$\begin{aligned}
 {}_1\psi(u) &= \int_0^\infty \lambda e^{-\lambda t} \int_{u+ct}^\infty f(x) dx dt \\
 &\leq \int_0^\infty \lambda e^{-\lambda t} \int_{u+ct}^\infty e^{-R(u+ct-x)} f(x) dx dt \\
 &\leq \int_0^\infty \lambda e^{-\lambda t} \int_0^\infty e^{-R(u+ct-x)} f(x) dx dt \\
 &= e^{-Ru} \int_0^\infty \lambda e^{-\lambda t} e^{-Rct} \int_0^\infty e^{Rx} f(x) dx dt \\
 &= e^{-Ru} \int_0^\infty \lambda m(R) e^{-(\lambda+cR)t} dt
 \end{aligned}$$

recordando que

$$\lambda + cR = \lambda m(R),$$

se obtiene

$${}_1\psi(u) \leq e^{-Ru} \int_0^\infty (\lambda + cR) e^{-(\lambda+cR)t} dt = e^{-Ru}.$$

Para  $n + 1$ , asumiendo válido  $n$ , tenemos que

$$\begin{aligned}
 {}_{n+1}\psi(u) &= \int_0^\infty \lambda e^{-\lambda t} \int_{u+ct}^\infty f(x) dx dt \\
 &\quad + \int_0^\infty \lambda e^{-\lambda t} \int_0^{u+ct} f(x) {}_n\psi(u+ct-x) dx dt \\
 &\leq \int_0^\infty \lambda e^{-\lambda t} \int_{u+ct}^\infty e^{-R(u+ct-x)} f(x) dx dt \\
 &\quad + \int_0^\infty \lambda e^{-\lambda t} \int_0^{u+ct} e^{-R(u+ct-x)} f(x) dx dt.
 \end{aligned}$$

Ya que por hipótesis  ${}_n\psi(u+ct-x) \leq e^{-R(u+ct-x)}$  y además

$$\int_{u+ct}^\infty f(x) dx \leq \int_{u+ct}^\infty e^{-R(u+ct-x)} f(x) dx,$$

entonces

$$\begin{aligned}
 {}_{n+1}\psi(u) &\leq \int_0^\infty \lambda e^{-\lambda t} \int_0^\infty e^{-R(u+ct-x)} f(x) dx dt \\
 &= e^{-Ru} \int_0^\infty \lambda e^{-(\lambda+cR)t} \int_0^\infty e^{Rx} f(x) dx dt = e^{-Ru}.
 \end{aligned}$$

Por tanto, queda demostrado por el método de inducción que  ${}_n\psi(u) \leq e^{-Ru}$  para todo  $n$ . Ya que el  $\lim_{n \rightarrow \infty} {}_n\psi(u) = \psi(u)$ , entonces

$$\psi(u) \leq e^{-Ru}.$$

□

A continuación, se pasa a determinar la probabilidad de ruina de manera exacta en el modelo clásico a través de ecuaciones íntegro-diferenciales. La probabilidad de ruina se puede obtener bien mediante el argumento diferencial, basado en la ocurrencia o no de un siniestro en un diferencial de tiempo, o bien con el planteamiento de ecuaciones de renovación propuesto por Feller (1971), Gerber (1979) o Grandell (1991).

En el planteamiento diferencial, de acuerdo con un proceso de Poisson, nos encontramos con diferentes posibilidades en función del número de siniestros ocurridos en  $(0, dt)$ , un intervalo infinitesimal:

- La probabilidad de que no ocurra siniestro es  $1 - \lambda dt + o(dt)$ <sup>1</sup>.
- La probabilidad de que ocurra 1 siniestro es  $\lambda dt + o(dt)$ .
- La probabilidad de que ocurra más de 1 siniestro es  $o(dt)$ .

Entonces, y teniendo en cuenta que la ruina puede o no ocurrir con la ocurrencia del primer siniestro, tenemos:

$$\begin{aligned} \psi(u) = & (1 - \lambda dt)\psi(u + cdt) + \lambda dt \int_0^{u+cdt} f(x)\psi(u + cdt - x)dx \\ & + \lambda dt [1 - F(u + cdt)] + o(dt), \end{aligned}$$

expresión que podemos escribir como

$$\begin{aligned} \frac{\psi(u+cdt) - \psi(u)}{cdt} = & \frac{\lambda}{c}\psi(u + cdt) - \frac{\lambda}{c} \int_0^{u+cdt} f(x)\psi(u + cdt - x)dx \\ & - \frac{\lambda}{c}[1 - F(u + cdt)] + \frac{o(dt)}{cdt}, \end{aligned}$$

y haciendo  $dt \rightarrow 0$ , se obtiene la ecuación íntegro-diferencial que determina la probabilidad de ruina en el modelo clásico.

$$\psi'(u) = \frac{\lambda}{c}\psi(u) - \frac{\lambda}{c} \int_0^u f(x)\psi(u - x)dx - \frac{\lambda}{c}[1 - F(u)]. \quad (2.6)$$

---

<sup>1</sup>siendo  $o(dt)$  un infinitésimo, tal que

$$\lim_{dt \rightarrow 0} \frac{o(dt)}{dt} = 0$$



Mediante el planteamiento alternativo, basado en ecuaciones de renovación (Grandell (1991)), llegamos a la misma expresión (2.6),

$$\begin{aligned}\psi(u) &= E[\psi(u + ct - x)] \\ &= \int_0^\infty \lambda e^{-\lambda t} \left[ \int_0^{u+ct} \psi(u + ct - x) f(x) dx \right. \\ &\quad \left. + \int_{u+ct}^\infty f(x) dx \right] dt.\end{aligned}\tag{2.7}$$

Si en (2.7) se hace el cambio de variable  $u + ct = s$ , siendo por tanto  $t = \frac{s-u}{c}$ , tendremos  $dt = \frac{ds}{c}$  y los extremos de la integral quedarán:

$$\begin{cases} t = 0 \rightarrow s = u, \\ t = \infty \rightarrow s = \infty, \end{cases}$$

obteniéndose,

$$\begin{aligned}\psi(u) &= \frac{\lambda}{c} \int_u^\infty e^{-\lambda \frac{s-u}{c}} \left[ \int_0^s \psi(s-x) f(x) dx \right. \\ &\quad \left. + \int_s^\infty f(x) dx \right] ds.\end{aligned}\tag{2.8}$$

Al derivar (2.8) respecto a  $u$ , se obtiene la expresión (2.6):

$$\psi'(u) = \frac{\lambda}{c} \psi(u) - \frac{\lambda}{c} \int_0^u f(x) \psi(u-x) dx - \frac{\lambda}{c} [1 - F(u)].\tag{2.9}$$

A partir de la ecuación íntegro-diferencial (2.6) o (2.9), integrando entre 0 y  $t$

$$\begin{aligned}\int_0^t \psi'(u) du &= \frac{\lambda}{c} \int_0^t \psi(u) du - \frac{\lambda}{c} \int_0^t \int_0^u f(x) \psi(u-x) dx du \\ &\quad - \frac{\lambda}{c} \int_0^t [1 - F(u)] du,\end{aligned}\tag{2.10}$$

de donde,

$$\begin{aligned}\psi(u) &= \psi(0) - \frac{\lambda}{c} \int_0^u (1 - F(x)) dx \\ &\quad + \frac{\lambda}{c} \int_0^u \psi(u-x) (1 - F(x)) dx.\end{aligned}\tag{2.11}$$

A partir de este resultado se puede hallar la probabilidad de ruina para un nivel inicial de las reservas cero. Haciendo  $u \rightarrow \infty$  en (2.11)

$$\begin{aligned}\psi(\infty) &= \psi(0) - \frac{\lambda}{c} \int_0^{\infty} (1 - F(x)) dx \\ &\quad + \frac{\lambda}{c} \int_0^{\infty} \psi(\infty) (1 - F(x)) dx,\end{aligned}$$

y sabiendo que  $\psi(\infty) = 0$  y  $p_1 = \int_0^{\infty} (1 - F(x)) dx$ , tenemos

$$\psi(0) = \frac{\lambda}{c} p_1,$$

y recordando que  $c = \lambda p_1 (1 + \rho)$ , obtenemos la probabilidad de ruina para unas reservas iniciales nulas, que no dependen del número medio de siniestros  $\lambda$  ni de la función distribución de la cuantía de los siniestros  $F(x)$ ,

$$\psi(0) = \frac{1}{1 + \rho}. \quad (2.12)$$

Esta probabilidad sólo depende del recargo de seguridad. Así, si  $\rho = 0$ , la probabilidad de ruina es 1.

Sustituyendo (2.12) en (2.11) tenemos

$$\psi(u) = \frac{\lambda}{c} \int_u^{\infty} (1 - F(x)) dx + \frac{\lambda}{c} \int_0^u \psi(u - x) (1 - F(x)) dx. \quad (2.13)$$

A partir de la ecuación íntegro-diferencial obtenida, diferentes hipótesis para la distribución de la cuantía individual de los siniestros darán como resultado expresiones para la probabilidad de ruina. El proceso se puede hacer mediante derivación sucesiva o por transformadas de Laplace.

Así, si se asume que la distribución de la cuantía de los siniestros es una exponencial de parámetro  $\beta$ , la probabilidad de ruina se puede obtener de dos maneras.

Por derivación sucesiva:

Si realizamos derivación sucesiva, en primer lugar se sustituye la función de distribución y de densidad correspondientes a la exponencial,  $F(x) = 1 - e^{-\beta x}$  y  $f(x) = \beta e^{-\beta x}$ , en la

expresión (2.9), y teniendo en cuenta que

$$\int_0^u f(x)\psi(u-x)dx = \int_0^u f(u-x)\psi(x)dx$$

se obtiene

$$\psi'(u) = \frac{\lambda}{c}\psi(u) - \frac{\lambda\beta}{c}e^{-\beta u} \int_0^u e^{\beta x}\psi(x)dx - \frac{\lambda}{c}e^{-\beta u}. \quad (2.14)$$

Derivando (2.14) respecto a  $u$

$$\begin{aligned} \psi''(u) &= \frac{\lambda}{c}\psi'(u) + \frac{\lambda\beta^2}{c}e^{-\beta u} \int_0^u e^{\beta x}\psi(x)dx \\ &\quad - \frac{\lambda\beta}{c}\psi(u) + \frac{\lambda\beta}{c}e^{-\beta u}, \end{aligned} \quad (2.15)$$

y sustituyendo

$$\frac{\lambda\beta}{c}e^{-\beta u} \int_0^u e^{\beta x}\psi(x)dx = \frac{\lambda}{c}\psi(u) - \psi'(u) - \frac{\lambda}{c}e^{-\beta u}$$

se puede reescribir la expresión (2.15) como

$$\psi''(u) + \left(\beta - \frac{\lambda}{c}\right)\psi'(u) = 0, \quad (2.16)$$

ecuación diferencial ordinaria de segundo orden, cuya solución es

$$\psi(u) = A_1 + A_2e^{-(\beta - \frac{\lambda}{c})u} \quad (2.17)$$

donde  $A_1$  y  $A_2$  son constantes que hallamos a partir de las siguientes condiciones:

$$\begin{cases} \lim_{u \rightarrow \infty} \psi(u) = 0 \\ \psi(0) = \frac{1}{1+\rho} \end{cases}. \quad (2.18)$$

A partir de la primera condición

$$\psi(\infty) = A_1 + A_2e^{-(\beta - \frac{\lambda}{c})\infty} = 0$$

y teniendo en cuenta que  $c > \frac{\lambda}{\beta}$  obtenemos  $A_1 = 0$ . Con la segunda condición

$$\psi(0) = A_2e^{-(\beta - \frac{\lambda}{c})0} = \frac{1}{1+\rho},$$

obtenemos  $A_2 = \frac{1}{1+\rho}$ . Por tanto, podemos escribir (2.17) como

$$\psi(u) = \frac{1}{1+\rho} e^{-\frac{\beta\rho}{1+\rho}u}, \quad (2.19)$$

obteniéndose la probabilidad exacta de ruina cuando la cuantía del siniestro es una distribución exponencial de parámetro  $\beta$ .

Por transformadas de Laplace:

La aplicación de la transformada de Laplace para solucionar otros problemas planteados en la teoría del riesgo ha sido ampliado en Mármol *et al.* (2007). En el Apéndice A se incluyen algunas propiedades de la transformada de Laplace y se adjunta una pequeña tabla de transformadas inmediatas.

Partimos de la expresión (2.9)

$$\psi'(u) = \frac{\lambda}{c}\psi(u) - \frac{\lambda}{c} \int_0^u f(x)\psi(u-x)dx - \frac{\lambda}{c}[1 - F(u)].$$

Si aplicamos transformadas de Laplace a esta ecuación íntegro-diferencial, utilizando algunas propiedades de las mismas, obtenemos

$$s\tilde{\psi}(s) - \psi(0) = \frac{\lambda}{c}\tilde{\psi}(s) - \frac{\lambda}{c}\tilde{\psi}(s)\tilde{f}(s) - \frac{\lambda}{cs} + \frac{\lambda}{cs}\tilde{f}(s), \quad (2.20)$$

siendo,

$$\tilde{\psi}(s) = \int_0^{\infty} e^{-su}\psi(u)du$$

$$\tilde{f}(s) = \int_0^{\infty} e^{-sx}f(x)dx$$

donde  $s$ , es el parámetro de la transformación.

Y despejando  $\tilde{\psi}(s)$  de la expresión (2.20),

$$\tilde{\psi}(s) = \frac{c\psi(0) - \frac{\lambda}{s}(1 - \tilde{f}(s))}{cs - \lambda(1 - \tilde{f}(s))}, \quad (2.21)$$

siendo el denominador la ecuación de Lundberg (2.4), teniendo en cuenta que  $\tilde{f}(s) = m(-s)$ .

A continuación el análisis se restringe al caso en que la función densidad de la cuantía de los siniestros tiene transformada de Laplace racional, es decir  $\tilde{f}(s) = \frac{Q_{r-1}(s)}{P_r(s)}$ , donde  $P_r(s)$  y  $Q_{r-1}(s)$  son polinomios de grado  $r$  y  $r - 1$ , respectivamente, sin raíces comunes. Así, la transformada de la probabilidad de ruina, (2.21), puede ser invertida por fracciones parciales.

A modo de ejemplo, se soluciona el caso en que la cuantía individual de los siniestros sigue una exponencial de parámetro  $\beta$ , tal que  $f(x) = \beta e^{-\beta x}$ , siendo su transformada de Laplace,

$$\tilde{f}(s) = \frac{\beta}{s + \beta}. \quad (2.22)$$

Sustituyendo (2.22) en (2.21), obtenemos

$$\tilde{\psi}(s) = \frac{c\psi(0)s + (c\beta\psi(0) - \lambda)}{cs^2 + (c\beta - \lambda)s}. \quad (2.23)$$

Aplicando el método de fracciones parciales, podemos escribir (2.23) como

$$\tilde{\psi}(s) = \frac{A_1}{(s - s_1)} + \frac{A_2}{(s - s_2)}, \quad (2.24)$$

siendo  $s_1$  y  $s_2$  las raíces del denominador  $cs^2 + (c\beta - \lambda)s$ ,

$$\begin{aligned} s_1 &= 0 \\ s_2 &= \frac{\lambda}{c} - \beta = -\frac{\beta\rho}{1 + \rho}, \end{aligned}$$

donde  $|s_2|$  es el coeficiente de ajuste  $R$ .

A continuación invertimos (2.24), y obtenemos

$$\psi(u) = A_1 + A_2 e^{s_2 u}.$$

Esta expresión es la misma que se había obtenido anteriormente mediante derivación sucesiva al solucionar la ecuación diferencial ordinaria. Para hallar las constantes  $A_1$  y  $A_2$  se utilizan las condiciones expresadas en (2.18), obteniendo (2.19),

$$\psi(u) = \frac{1}{1 + \rho} e^{-\frac{\beta\rho}{1 + \rho} u}.$$

### 2.2.3. Momento de ruina

En el apartado anterior ya se ha introducido la variable aleatoria  $T$ , que representa el momento de ruina, es decir, el momento en el cual las reservas pasan a ser negativas por primera vez.

**Definición 13** (*Momento de ruina*)

Se define el momento de ruina como,

$$T = \begin{cases} \inf \{t > 0 \text{ y } U(t) < 0\}; \\ \infty \text{ si } U(t) \geq 0 \text{ para todo } t. \end{cases}$$

Esta variable aleatoria  $T$  es una v.a. incompleta, ya que la probabilidad de  $T = \infty$  es positiva.

**Definición 14** (*Transformada del momento de ruina*)

Se define la función  $\phi$  como,

$$\phi(u, \delta) = E [e^{-\delta T} I(T < \infty)]$$

donde  $\delta$  es un parámetro no negativo que se interpreta como el parámetro de la transformada de Laplace,  $I$  es la función indicadora, tal que  $I(A) = 1$  si ocurre el suceso  $A$  y es igual a 0 en caso contrario.

Es posible obtener la ecuación íntegro-diferencial para  $\phi$  condicionando al momento de ocurrencia del primer siniestro.

$$\begin{aligned} \phi(u, \delta) &= \int_0^\infty \lambda e^{-\lambda t} e^{-\delta t} \int_0^{u+ct} \phi(u+ct-x, \delta) f(x) dx dt \\ &+ \int_0^\infty \lambda e^{-\lambda t} e^{-\delta t} \int_{u+ct}^\infty f(x) dx dt. \end{aligned} \quad (2.25)$$

Haciendo un cambio de variable  $\bar{t} = u + ct$  en la ecuación (2.25) tenemos,

$$\begin{aligned} \phi(u, \delta) &= \frac{\lambda}{c} \int_u^\infty e^{-(\lambda+\delta)(\bar{t}-u)/c} \int_0^{\bar{t}} \phi(\bar{t}-x, \delta) f(x) dx d\bar{t} \\ &+ \frac{\lambda}{c} \int_u^\infty e^{-(\lambda+\delta)(\bar{t}-u)/c} \int_{\bar{t}}^\infty f(x) dx d\bar{t}, \end{aligned}$$

derivando esta ecuación respecto a  $u$  obtenemos

$$\phi'(u, \delta) = \frac{\lambda + \delta}{c} \phi(u, \delta) - \frac{\lambda}{c} \int_0^u \phi(x, \delta) f(u-x) dx - \frac{\lambda}{c} [1 - F(u)] \quad (2.26)$$

Si consideramos que la cuantía individual tiene una función de distribución exponencial  $F(x) = 1 - e^{-\beta x}$  para  $x \geq 0$ , sustituyendo en (2.26) y aplicando técnicas de derivación sucesiva obtenemos la siguiente ecuación diferencial

$$\phi''(u, \delta) + \left( \beta - \frac{\lambda + \delta}{c} \right) \phi'(u, \delta) - \frac{\beta \delta}{c} \phi(u, \delta) = 0. \quad (2.27)$$

La solución general de la ecuación (2.27) es

$$\phi(u, \delta) = A_1 e^{r_1 u} + A_2 e^{r_2 u}$$

donde  $r_1 > 0$  y  $r_2 < 0$  son las raíces de la ecuación característica asociada a (2.27), que es

$$r^2 + \left( \beta - \frac{\lambda + \delta}{c} \right) r - \frac{\beta \delta}{c} = 0, \quad (2.28)$$

y  $A_1$  y  $A_2$  dependerán de  $\delta$ . Ya que  $\phi(u, \delta) \leq \psi(u)$ , también se cumplirá que

$$\lim_{u \rightarrow \infty} \phi(u, \delta) = 0.$$

Por lo tanto, tendremos que  $A_1 = 0$  y  $A_2 = \phi(0, \delta)$ . A partir de la expresión de Dickson (2005) para  $\phi(0, \delta)$  que es

$$\phi(0, \delta) = 1 - \frac{R_\delta}{\beta},$$

siendo  $R_\delta = |r_2|$ .

Por tanto,  $\phi(u, \delta)$  es

$$\phi(u, \delta) = \left( 1 - \frac{R_\delta}{\beta} \right) e^{-u R_\delta}. \quad (2.29)$$

Si  $\delta = 0$ , entonces  $R_0$  es el coeficiente de ajuste de la probabilidad de ruina y  $\phi(u, \delta) = \psi(u)$ .

Como  $\phi(u, \delta)$  de (2.29) está definida como una transformada de Laplace, podemos obtener los momentos de orden  $k$  para la variable momento de ruina.

$$(-1)^k \left. \frac{\partial^k \phi(u, \delta)}{\partial \delta^k} \right|_{\delta=0} = E[T^k I(T < \infty)].$$

La esperanza es,

$$E [T I (T < \infty)] = \frac{R'_0}{\beta} e^{-R_0 u} + \left(1 - \frac{R_0}{\beta}\right) R'_0 u e^{-R_0 u}, \quad (2.30)$$

siendo  $R_0 = \beta - \lambda/c$ .

Dividiendo (2.30) por la probabilidad de ruina  $\psi(u) = (1 - R_0/\beta) e^{-R_0 u}$  se llega a la esperanza del momento de ruina, condicionada a que la ruina ocurra,

$$E [T | T < \infty] = \frac{c + \lambda u}{c(c\beta - \lambda)}. \quad (2.31)$$

Por último, respecto a la distribución del momento de ruina, variable aleatoria en la que se centra este apartado, en la literatura actuarial se encuentran muchos estudios sobre métodos de cálculo y aproximaciones para hallar dicha distribución, por ejemplo, Dickson y Waters (2002), Egídio dos Reis (2000) o Lin y Willmot (2000).

#### 2.2.4. Función Gerber-Shiu

En este último apartado de antecedentes del modelo clásico, se introduce la denominada función Gerber-Shiu, que será utilizada en capítulos posteriores. En Gerber y Shiu (1998) se definió por primera vez esta función, que incluye el estudio sobre la distribución conjunta del momento de ruina, la reserva antes de la ruina y la cuantía de la ruina.

##### **Definición 15** (*Función Gerber-Shiu*)

*Se define la función Gerber-Shiu,*

$$\phi(u) = E [w (U (T-), |U(T)|) e^{-\delta T} I (T < \infty) | U(0) = u], \quad (2.32)$$

*siendo  $w (U (T-), |U(T)|)$  la función de penalización no negativa que depende de  $U (T-) > 0$ , la reserva inmediata antes de la ruina, y de  $|U(T)| > 0$ , el déficit de la ruina.*

Esta función  $\phi(u)$ , se interpreta como la esperanza de una función de penalización actualizada que se produce en el momento de ruina. La penalización depende de la cuantía de la ruina (el déficit de la ruina) y del nivel de las reservas justo antes del momento de ruina.



Podemos observar en la Figura 2.2 (en el apartado 2.2.2.) la representación de estas dos variables a las que nos referimos.

Si se interpreta  $\delta$  como la tasa de interés y  $w$  como una penalización cuando ocurre la ruina, la expresión (2.32) representa la esperanza de la penalización actualizada. Si  $w$  es interpretada como el importe de un seguro pagadero en el momento de ruina, entonces  $\phi(u)$  sería la prima única del seguro.

A partir de la función Gerber-Shiu podemos obtener medidas para valorar la solvencia de la cartera. Así, haciendo  $w(U(T-), |U(T)|) = 1$  en (2.32) obtenemos  $\phi(u, \delta)$ , la transformada del momento de ruina, definida anteriormente en el apartado 2.2.3.

Para hallar la probabilidad de ruina, además de considerar la función de penalización igual a 1, supondremos que  $\delta = 0$ . De tal forma que

$$\phi(u) = E[I(T < \infty) | U(0) = u] = \psi(u).$$

A partir de su definición, se han realizado muchos estudios con la función Gerber-Shiu. Lin y Willmot (1999), estudian en detalle la solución de esta ecuación que contiene las variables aleatorias momento de ruina, reserva inmediata antes de producirse la ruina y la cuantía por la que te arruinas, considerando distintas distribuciones para la cuantía del siniestro. En Gerber y Shiu (2005), se propone un modelo colectivo de riesgo en el que la distribución del tiempo de interocurrencia es una suma de  $n$  variables aleatorias independientes exponenciales, tal que el modelo Erlang( $n$ ) es un caso especial de éste. En Li y Garrido (2005) se obtiene una generalización de la función Gerber-Shiu dada en Gerber y Shiu (2005), donde se asume que los tiempos de interocurrencia son una familia de distribuciones cuya función de densidad tiene transformada de Laplace racional.

### 2.3. Modelo con barrera de dividendos constante

Una vez definido el modelo clásico, a continuación éste se modifica con la introducción de una barrera de dividendos constante. En este apartado, se estudia el proceso de las reservas que

se genera con dicho modelo y se analiza la probabilidad de ruina y el momento de ruina. Se trata de un modelo alternativo, ampliamente analizado en la literatura actuarial, que propone el reparto de una parte de las reservas en forma de dividendos.

### 2.3.1. Proceso de las reservas

La base técnica para proponer el control de las reservas nace de la crítica de De Finetti (1957), que afirma que bajo las hipótesis del modelo clásico de riesgo el nivel de las reservas tiende a  $\infty$  cuando  $t$  tiende a  $\infty$  con probabilidad 1. Así, las políticas de dividendos aparecen como una forma de control del crecimiento ilimitado de las reservas,  $U(t)$ .

Surge, en este caso, la necesidad de cuantificar la parte de las reservas que se destinan al pago de dividendos. La magnitud elegida será la esperanza del valor actual de las cuantías repartidas. El reparto de dividendos afectará a la probabilidad de ruina, ya que al limitar el nivel de acumulación de las reservas la probabilidad de ruina es mayor. La causa es que siniestros que en el modelo clásico no provocaban la ruina, ahora pueden producirla debido a que el nivel de las reservas es más pequeño por el reparto de parte de éstas en forma de dividendos.

Para el cálculo de los dividendos repartidos podemos analizar dos hipótesis en función del período de reparto considerado (Mármol (2003)):

1. Hipótesis 1: En el momento en que se produce la ruina se da por acabado el proceso. Se representa la esperanza del valor actual de los dividendos repartidos hasta ese momento como  $W$ .
2. Hipótesis 2: El proceso no acaba con la ruina, permitiendo así la recuperación de  $U(t)$ . Se representa por  $V$  la esperanza del valor actual de los dividendos.

Se pueden diferenciar dos tipos de barrera que modifican el proceso de las reservas cuando asumimos análisis continuo,

1. Barreras absorbentes: El proceso acaba cuando el nivel de las reservas llega al valor de la barrera fijada. El caso más relevante es el de colocar la barrera en cero para poder así controlar la ruina.

2. Barreras reflectantes: Cuando el nivel de las reservas alcanza la barrera,  $U(t)$  se mantiene en ese nivel hasta la ocurrencia del siguiente siniestro. En la Figura 2.4, se representa una posible trayectoria del proceso incluyendo una barrera reflectante constante,  $b$ . Se observa que  $U(t)$  alcanza  $b$ , donde permanece hasta la ocurrencia del siguiente siniestro. En la Figura 2.4, se puede observar también el momento de ruina  $T$ , momento en el cual se produce la ruina.

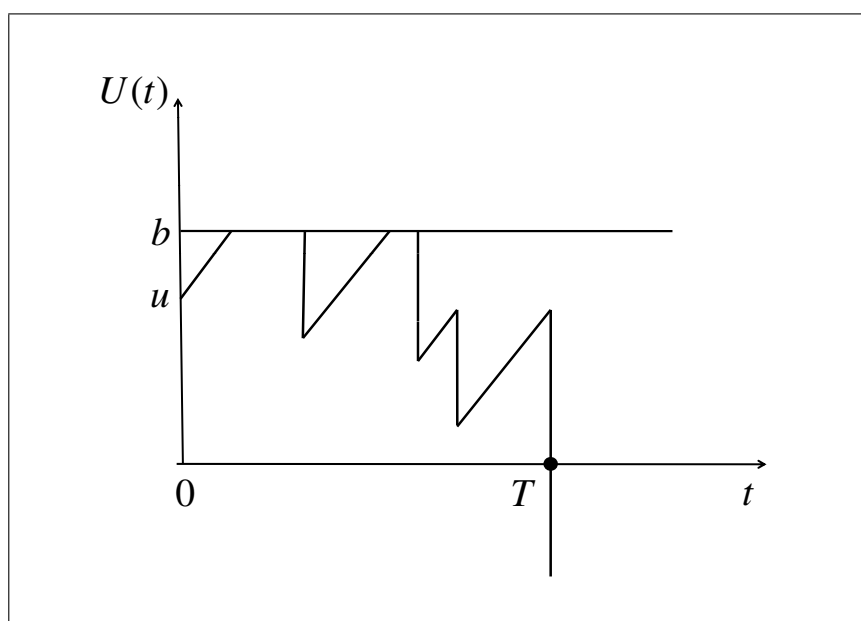


Figura 2.4: Proceso de las reservas con barrera constante

A partir de ahora, el estudio se centra en el caso en que el proceso acaba con la ruina y que existe una barrera reflectante constante, que matemáticamente representaremos como  $b(t) = b$ . La idea es que cada vez que el nivel de las reservas alcanza la barrera  $b$ , todas las primas ingresadas se reparten en forma de dividendos hasta la ocurrencia del siguiente siniestro.

De esta manera, tenemos que el proceso de las reservas modificado con una barrera de dividendos constante,  $b(t) = b$ ,  $0 \leq u \leq b$ , es (ver Bühlmann (1996))

$$U(t) = u + ct - S(t) - SD(t),$$

siendo  $SD(t)$  el acumulado de los dividendos repartidos en el intervalo  $[0, t]$ ,

$$SD(t) = \int_0^t D(s) ds$$

donde  $D(s)$  es la intensidad de los dividendos repartidos en cada instante, definida como

$$D(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } U(t) < b \\ c & \text{si } U(t) = b. \end{cases}$$

En la figura 2.5 se representa el proceso de las reservas junto con el acumulado de los dividendos, para una mejor interpretación del modelo.

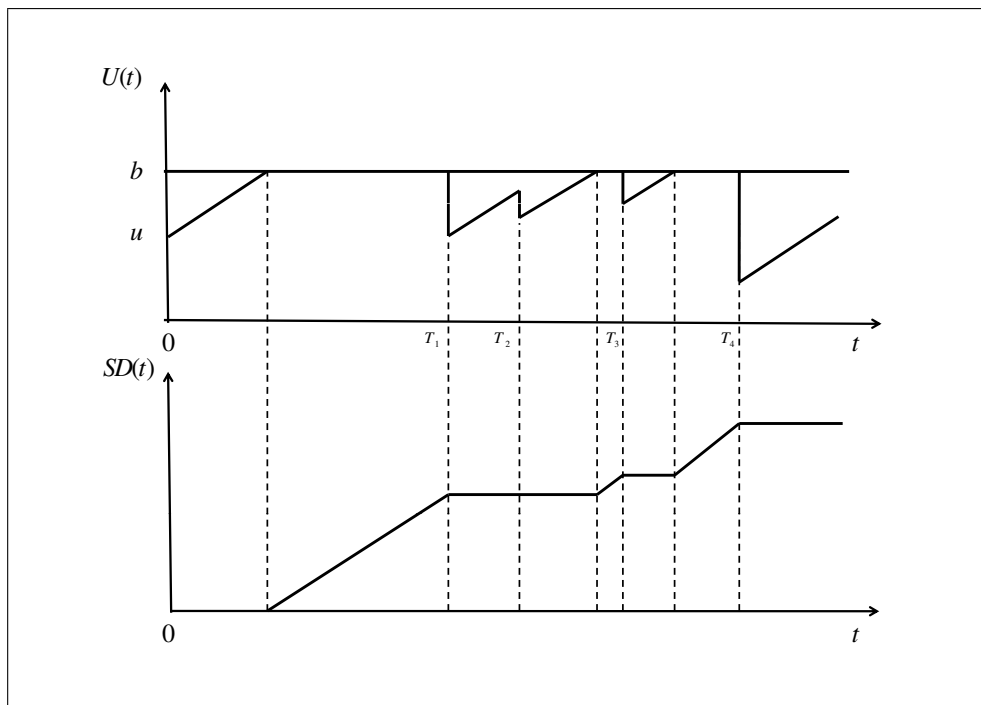


Figura 2.5: Proceso de las reservas y dividendos repartidos

### 2.3.2. Probabilidad de ruina

En el modelo clásico modificado con una barrera constante,  $b(t) = b$ , la probabilidad de ruina es 1. Independientemente del nivel en el que pongamos la barrera, todas las trayectorias acabarán en ruina.

**Teorema 2** *En un proceso modificado con una barrera constante,  $b(t) = b$ , la probabilidad de ruina en tiempo infinito y chequeo continuo,  $\psi(u, b)$ , es 1.*

**Demostración.**

En Mármol (2003) se plantea una ecuación íntegro-diferencial para el cálculo de la probabilidad de ruina en un modelo modificado con una barrera de dividendos constante  $b(t) = b$ , a la que denotaremos por  $\psi(u, b)$ , suponiendo que el nivel de las reservas iniciales coincida con el valor de la barrera, es decir  $u = b$ . Sabemos que la probabilidad de ruina es decreciente respecto al nivel de las reservas, por tanto,

$$\psi(b, b) \leq \psi(u, b) \leq 1, \text{ si } 0 \leq u \leq b.$$

Usando el argumento diferencial,

$$\psi(b, b) = (1 - \lambda dt)\psi(b, b) + \lambda dt \int_0^b \psi(b - x, b)f(x)dx + \lambda dt[1 - F(b)] + o(dt), \quad (2.33)$$

dividiendo por  $\lambda dt$  y haciendo que  $dt \rightarrow 0$ , nos queda:

$$\begin{aligned} \psi(b, b) &= \int_0^b \psi(b - x, b)f(x)dx + [1 - F(b)] \\ &\geq \int_0^b \psi(b, b)f(x)dx + [1 - F(b)] = \psi(b, b)F(b) + 1 - F(b), \end{aligned}$$

por lo tanto

$$\psi(b, b)[1 - F(b)] \geq 1 - F(b),$$

de donde

$$\psi(b, b) \geq 1,$$

y como sabemos que  $\psi(b, b) \leq \psi(u, b) \leq 1$ , y que  $\psi(b, b) \geq 1$  entonces

$$\psi(u, b) = 1.$$

□

Acabamos de ver cómo, en un modelo con barrera constante, la probabilidad de ruina en tiempo continuo es 1. Lo anterior también es cierto si se realiza un análisis discreto, como se demuestra en Claramunt *et al.* (2003). Por ello, en un modelo con barrera constante el análisis

del momento de ruina es de especial interés ya que con niveles de barrera distintos, aunque la probabilidad de ruina sea 1, además de obtenerse esperanzas del valor actual de los dividendos distintas, el momento de ruina será diferente.

### 2.3.3. Momento de ruina

Igual que en el modelo clásico, hacemos uso de la transformada de Laplace para esta variable, ya que es de gran utilidad para la resolución de diversos problemas que se tratan en la teoría de la ruina. Encontramos en la literatura actuarial trabajos como Avram y Usabel (2003), Drekic y Willmot (2003) o Dickson y Willmot (2005) donde se utilizan las transformadas de Laplace para el análisis del momento de ruina (Ver Apéndice A.2 para más detalle de las propiedades). Recuperamos la expresión estudiada en la definición 14

$$\phi(u, \delta) = E [e^{-\delta T} I(T < \infty)], \quad (2.34)$$

donde  $I(T < \infty)$  es la función indicadora, que es igual a 1 cuando ocurre la ruina, y 0 en caso contrario.

En el modelo clásico, asumiendo horizonte temporal infinito  $[0, \infty)$ , la ruina no es segura, motivo por el cual se hace necesario el uso de la función indicadora definida previamente. La inclusión de la barrera en el modelo hace que la función indicadora sea 1 para el caso del horizonte infinito, ya que la probabilidad de ruina es 1, quedando la función (2.34) de la forma siguiente<sup>2</sup>:

$$\phi_\delta(u, b) = E[e^{-\delta T}]. \quad (2.35)$$

Debido a que el modelo se ve modificado con la introducción de la barrera constante, el proceso de las reservas también se ve modificado. Para hallar la ecuación íntegro-diferencial de  $\phi_\delta(u, b)$ , condicionamos a la ocurrencia del primer siniestro, diferenciando entre el caso en que ese primer siniestro ocurra antes o después de un determinado valor  $t^*$ . Este  $t^*$  es el punto de

---

<sup>2</sup>Con el objetivo de incorporar el nivel de la barrera,  $b$ , en la notación de  $\phi(u, \delta)$ , se denota a partir de ahora por  $\phi_\delta(u, b)$  la transformada de Laplace del momento de ruina en un modelo con barrera constante

corte entre el proceso de las reservas y la barrera, suponiendo que no ocurre siniestro, es decir

$$u + c \cdot t^* = b \Rightarrow t^* = \frac{b - u}{c}.$$

En las Figuras 2.6 y 2.7 se representan gráficamente los casos en que el primer siniestro ocurre antes o después de  $t^*$ .

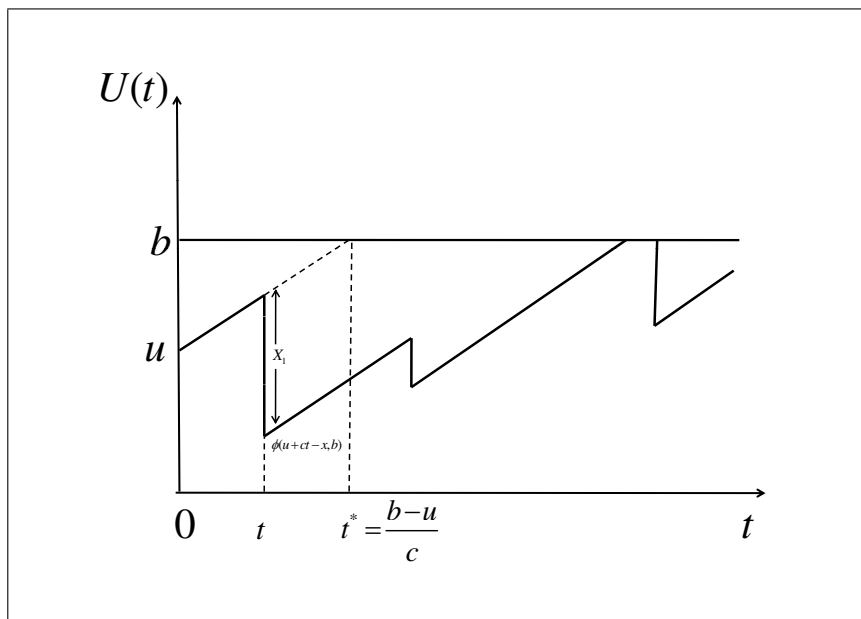


Figura 2.6: Cuando  $t = T_1$  es menor que  $t^*$

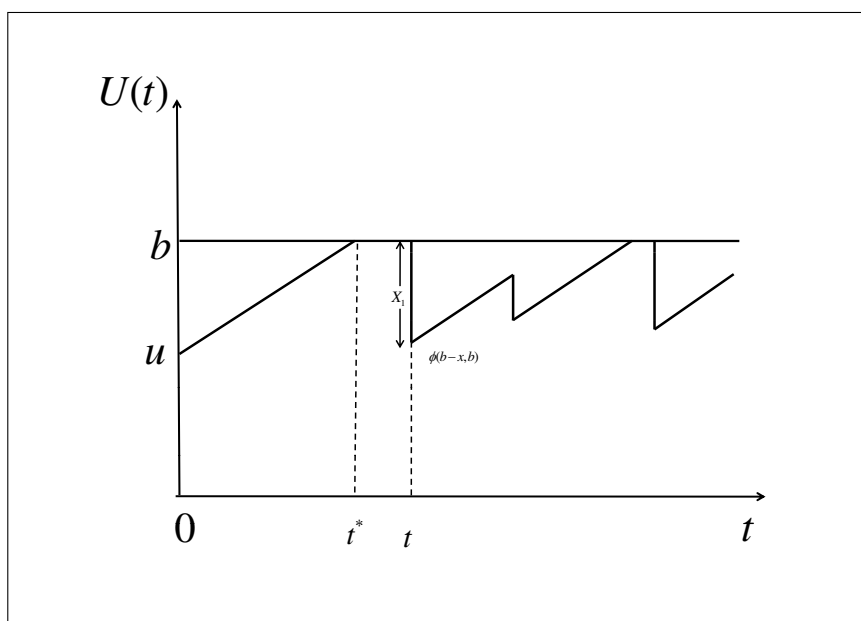


Figura 2.7: Cuando  $t = T_1$  es mayor que  $t^*$

Por tanto, se puede escribir  $\phi_\delta(u, b)$  como

$$\begin{aligned}
\phi_\delta(u, b) &= \int_0^{t^*} \lambda e^{-\lambda t} e^{-\delta t} \left[ \int_0^{u+ct} \phi(u+ct-x, b) f(x) dx + \int_{u+ct}^\infty f(x) dx \right] dt \\
&\quad + \int_{t^*}^\infty \lambda e^{-\lambda t} e^{-\delta t} \left[ \int_0^b \phi(b-x, b) f(x) dx + \int_b^\infty f(x) dx \right] dt \\
&= \int_0^{t^*} \lambda e^{-(\lambda+\delta)t} \left[ \int_0^{u+ct} \phi(u+ct-x, b) f(x) dx + [1 - F(u+ct)] \right] dt \\
&\quad + \int_{t^*}^\infty \lambda e^{-(\lambda+\delta)t} \left[ \int_0^b \phi(b-x, b) f(x) dx + [1 - F(b)] \right] dt. \tag{2.36}
\end{aligned}$$

donde el primer sumando es el representado en la Figura 2.6 y el segundo sumando es el correspondiente a la Figura 2.7.

Se aplica el cambio de variable  $s = u + ct$ , quedando los extremos de la integral

$$\begin{cases} t = 0 \rightarrow s = u + c \cdot 0 = u, \\ t = t^* \rightarrow s = u + c \cdot \frac{b-u}{c} = b, \end{cases}$$

por tanto, podemos escribir (2.36) como

$$\begin{aligned}
\phi_\delta(u, b) &= \frac{1}{c} \int_u^b \lambda e^{-(\lambda+\delta)\left(\frac{s-u}{c}\right)} \left[ \int_0^s \phi(s-x, b) f(x) dx + [1 - F(s)] \right] ds \\
&\quad + \frac{1}{c} \int_b^\infty \lambda e^{-(\lambda+\delta)\left(\frac{s-u}{c}\right)} \left[ \int_0^b \phi(b-x, b) f(x) dx + [1 - F(b)] \right] ds
\end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
&= \frac{\lambda}{c} e^{(\lambda+\delta)\frac{u}{c}} \int_u^b e^{-(\lambda+\delta)\frac{s}{c}} \int_0^s \phi(s-x, b) f(x) dx ds \\
&\quad + \frac{\lambda}{c} e^{(\lambda+\delta)\frac{u}{c}} \int_u^b e^{-(\lambda+\delta)\frac{s}{c}} [1 - F(s)] ds \\
&\quad + \frac{\lambda}{c} e^{(\lambda+\delta)\frac{u}{c}} \int_b^\infty e^{-(\lambda+\delta)\frac{s}{c}} \int_0^b \phi(b-x, b) f(x) dx ds \\
&\quad + \frac{\lambda}{\lambda + \delta} e^{(\lambda+\delta)\frac{u}{c}} e^{-(\lambda+\delta)\frac{b}{c}} [1 - F(b)] \\
&= \frac{\lambda}{c} e^{(\lambda+\delta)\frac{u}{c}} \left[ \underbrace{\int_u^b e^{-(\lambda+\delta)\frac{s}{c}} \int_0^s \phi(s-x, b) f(x) dx ds + \int_u^b e^{-(\lambda+\delta)\frac{s}{c}} [1 - F(s)] ds}_{A_1} \right. \\
&\quad \left. + \underbrace{\int_b^\infty e^{-(\lambda+\delta)\frac{s}{c}} \int_0^b \phi(b-x, b) f(x) dx ds + \frac{c}{\lambda + \delta} e^{-(\lambda+\delta)\frac{b}{c}} [1 - F(b)]}_{A_2} \right], \quad (2.37)
\end{aligned}$$

quedando (2.37) de forma simplificada

$$\phi_\delta(u, b) = \frac{\lambda}{c} e^{(\lambda+\delta)\frac{u}{c}} (A_1 + A_2),$$

donde  $A_1 + A_2 = A$ , y por tanto

$$A = \frac{c}{\lambda} e^{-(\lambda+\delta)\frac{u}{c}} \phi_\delta(u, b). \quad (2.38)$$

Derivando  $A$  de la ecuación (2.37) y de la ecuación (2.38) respecto a  $u$  e igualándolas, se obtiene

$$\frac{c}{\lambda} \phi'_\delta(u, b) + \int_0^u \phi(u-x, b) f(x) dx + 1 - F(u) = \frac{\lambda + \delta}{\lambda} \phi(u, b).$$

Despejando  $\phi(u, b)$  se llega a

$$\phi_\delta(u, b) = \frac{\lambda}{\lambda + \delta} \left[ \frac{c}{\lambda} \phi'_\delta(u, b) + \int_0^u \phi(u-x, b) f(x) dx + 1 - \int_0^u f(x) dx \right]. \quad (2.39)$$

Aplicando transformadas de Laplace a (2.39)

$$\tilde{\phi}(s) = \frac{c}{\lambda + \delta} s \tilde{\phi}(s) - \frac{c}{\lambda + \delta} \phi(0) + \frac{\lambda}{\lambda + \delta} \tilde{\phi}(s) \tilde{f}(s) + \frac{\lambda}{\lambda + \delta} \left( \frac{1 - \tilde{f}(s)}{s} \right).$$

Despejando  $\tilde{\phi}(s)$  se obtiene,

$$\tilde{\phi}(s) = \frac{\lambda (1 - \tilde{f}(s)) - cs\phi(0)}{(\lambda + \delta) s - cs^2 - \lambda s \tilde{f}(s)}. \quad (2.40)$$

Si  $\tilde{f}(s)$  es racional, el denominador de la función (2.40) es la ecuación característica de Lundberg. Se hallarán las raíces,  $r_1, r_2, \dots, r_n$ , donde  $n$  es el grado de la ecuación característica, para poder expresar  $\tilde{\phi}(s)$  en fracciones parciales de la siguiente forma:

$$\tilde{\phi}(s) = \frac{A_1}{s - r_1} + \frac{A_2}{s - r_2} + \dots + \frac{A_n}{s - r_n},$$

siendo su inversa,

$$\phi_\delta(u, b) = \sum_{i=1}^n A_i e^{r_i u}, \quad (2.41)$$

donde  $A_i$  son constantes que dependerán de  $b$ , pero no de  $u$ . Para determinarlas necesitaremos hallar  $n$  condiciones.

A continuación, hacemos el estudio para el caso en que la cuantía individual de los siniestros sigue una distribución exponencial unitaria. En Castañer (2006) se hallan los casos para una exponencial de parámetro  $\beta$  y también para una Erlang(2,  $\beta$ ). Si  $X \sim Exp(1)$ , su función de densidad es  $f(x) = e^{-x}$ , y su transformada de Laplace es  $\tilde{f}(s) = \frac{1}{s+1}$ .

Sustituyendo  $\tilde{f}(s)$  en (2.40) obtenemos

$$\begin{aligned} \tilde{\phi}(s) &= \frac{\lambda \left(1 - \frac{1}{s+1}\right) - cs\phi(0)}{(\lambda + \delta) s - cs^2 - \lambda s \frac{1}{s+1}} \\ &= \frac{\lambda - c\phi(0)(s+1)}{cs^2 - (\lambda + \delta - c)s - \delta}, \end{aligned} \quad (2.42)$$

siendo,  $cs^2 - (\lambda + \delta - c)s - \delta$ , la ecuación característica de Lundberg y sus raíces:

$$r_1 = \frac{\lambda + \delta - c + \sqrt{(\lambda + \delta - c)^2 + 4\delta c}}{2c},$$

$$r_2 = \frac{\lambda + \delta - c - \sqrt{(\lambda + \delta - c)^2 + 4\delta c}}{2c}.$$

Expresando la transformada  $\tilde{\phi}(s)$  en fracciones parciales nos queda de la siguiente forma:

$$\tilde{\phi}(s) = \frac{A_1}{s - r_1} + \frac{A_2}{s - r_2},$$

siendo su inversa,

$$\phi_\delta(u, b) = A_1 e^{r_1 u} + A_2 e^{r_2 u}. \quad (2.43)$$

Para hallar  $A_1$  y  $A_2$  necesitamos dos condiciones:

- En la expresión (2.39) si la distribución de cuantía del siniestro sigue una exponencial unitaria tenemos,

$$\phi_\delta(u, b) = \frac{\lambda}{\lambda + \delta} \left[ \frac{c}{\lambda} \phi'(u, b) + \int_0^u \phi(u - x, b) e^{-x} dx + e^{-u} \right]. \quad (2.44)$$

Si se sustituye la estructura de solución (2.43) en (2.44):

$$\begin{aligned} A_1 e^{r_1 u} + A_2 e^{r_2 u} &= \frac{\lambda}{\lambda + \delta} \left[ \frac{c}{\lambda} (A_1 r_1 e^{r_1 u} + A_2 r_2 e^{r_2 u}) \right. \\ &\quad \left. + \int_0^u (A_1 e^{r_1(u-x)} + A_2 e^{r_2(u-x)}) e^{-x} dx + e^{-u} \right] \\ &= \frac{\lambda}{\lambda + \delta} e^{-u} + \frac{c}{\lambda + \delta} (A_1 r_1 e^{r_1 u} + A_2 r_2 e^{r_2 u}) \\ &\quad + \frac{\lambda}{\lambda + \delta} \left[ \frac{A_1}{(r_1 + 1)} (e^{r_1 u} - e^{-u}) + \frac{A_2}{(r_2 + 1)} (e^{r_2 u} - e^{-u}) \right]. \end{aligned}$$

Simplificando, se obtiene la primera ecuación que nos servirá para hallar los valores de  $A_1$  y  $A_2$ . A continuación se detallan los pasos seguidos,

$$A_1 e^{r_1 u} \left[ 1 - \frac{c r_1}{\lambda + \delta} - \frac{\lambda}{(\lambda + \delta)(r_1 + 1)} \right] + A_2 e^{r_2 u} \left[ 1 - \frac{c r_2}{\lambda + \delta} - \frac{\lambda}{(\lambda + \delta)(r_2 + 1)} \right]$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\lambda}{\lambda + \delta} e^{-u} + \frac{\lambda}{\lambda + \delta} \left[ \frac{-A_1}{(r_1 + 1)} e^{-u} - \frac{A_2}{(r_2 + 1)} e^{-u} \right], \\
0 &= \frac{\lambda}{\lambda + \delta} e^{-u} + \frac{\lambda}{\lambda + \delta} \left[ \frac{-A_1}{(r_1 + 1)} e^{-u} - \frac{A_2}{(r_2 + 1)} e^{-u} \right], \\
0 &= e^{-u} \left[ 1 - \frac{A_1}{(r_1 + 1)} - \frac{A_2}{(r_2 + 1)} \right], \\
&\frac{A_1}{(r_1 + 1)} + \frac{A_2}{(r_2 + 1)} = 1. \tag{2.45}
\end{aligned}$$

- Nos planteamos la ecuación  $\phi_\delta(b, b)$ ,

$$\begin{aligned}
\phi_\delta(b, b) &= \int_0^\infty \lambda e^{-\lambda t} e^{-\delta t} \left[ \int_0^b \phi(b-x, b) f(x) dx + [1 - F(b)] \right] dt \\
&= \frac{\lambda}{\lambda + \delta} e^{-b} + \frac{\lambda}{\lambda + \delta} \int_0^b \phi(b-x, b) e^{-x} dx. \tag{2.46}
\end{aligned}$$

Sustituyendo la estructura de solución (2.43) en (2.46):

$$\begin{aligned}
A_1 e^{r_1 b} + A_2 e^{r_2 b} &= \frac{\lambda}{\lambda + \delta} e^{-b} + \frac{\lambda}{\lambda + \delta} \int_0^b (A_1 e^{r_1(b-x)} + A_2 e^{r_2(b-x)}) e^{-x} dx, \\
&A_1 e^{r_1 b} \left[ \lambda + \delta - \frac{\lambda}{(r_1 + 1)} \right] + A_2 e^{r_2 b} \left[ \lambda + \delta - \frac{\lambda}{(r_2 + 1)} \right] \\
&= \lambda e^{-b} \left[ 1 - \underbrace{\left( \frac{A_1}{(r_1 + 1)} + \frac{A_2}{(r_2 + 1)} \right)}_{\text{igual a 1 por la ecuación (2.45)}} \right].
\end{aligned}$$

Por lo tanto, nos queda la segunda ecuación expresada de la siguiente manera:

$$A_1 e^{r_1 b} \left[ \lambda + \delta - \frac{\lambda}{(r_1 + 1)} \right] + A_2 e^{r_2 b} \left[ \lambda + \delta - \frac{\lambda}{(r_2 + 1)} \right] = 0. \tag{2.47}$$

Una vez obtenidas las ecuaciones (2.45) y (2.47) tendremos que resolver el siguiente sistema para poder hallar  $A_1$  y  $A_2$ :

$$\begin{cases} \frac{A_1}{(r_1+1)} + \frac{A_2}{(r_2+1)} = 1 \\ A_1 e^{r_1 b} \left[ \lambda + \delta - \frac{\lambda}{(r_1+1)} \right] + A_2 e^{r_2 b} \left[ \lambda + \delta - \frac{\lambda}{(r_2+1)} \right] = 0, \end{cases}$$

obteniéndose

$$A_1 = \frac{-(r_1 + 1) [r_2 (\lambda + \delta) + \delta] e^{r_2 b}}{-e^{r_2 b} [r_2 (\lambda + \delta) + \delta] + e^{r_1 b} [r_1 (\lambda + \delta) + \delta]},$$

$$A_2 = \frac{(r_2 + 1) [r_1 (\lambda + \delta) + \delta] e^{r_1 b}}{-e^{r_2 b} [r_2 (\lambda + \delta) + \delta] + e^{r_1 b} [r_1 (\lambda + \delta) + \delta]},$$

y sustituyendo en (2.43),

$$\phi_\delta(u, b) = \frac{-(r_1 + 1) [r_2 (\lambda + \delta) + \delta] e^{r_1 u + r_2 b} + (r_2 + 1) [r_1 (\lambda + \delta) + \delta] e^{r_2 u + r_1 b}}{e^{r_1 b} [r_1 (\lambda + \delta) + \delta] - e^{r_2 b} [r_2 (\lambda + \delta) + \delta]}. \quad (2.48)$$

Mediante la utilización del teorema de Vieta, a partir del polinomio de segundo grado que tenemos en el denominador de la expresión (2.42),  $cs^2 - (\lambda + \delta - c)s - \delta = 0$ , obtendremos una serie de expresiones<sup>3</sup> que nos servirán para poder simplificar la función (2.48).

Así (2.48) puede simplificarse, obteniendo

$$\phi_\delta(u, b) = E[e^{-\delta T}] = \frac{\lambda}{c} \frac{r_1 e^{r_2 u + r_1 b} - r_2 e^{r_1 u + r_2 b}}{(r_1 + 1)r_1 e^{r_1 b} - (r_2 + 1)r_2 e^{r_2 b}}, \quad (2.49)$$

que es la transformada del momento de ruina cuando la cuantía del siniestro sigue una distribución exponencial unitaria. A esta misma expresión llegaron Dickson y Waters (2004) mediante

<sup>3</sup>Las expresiones utilizadas según el teorema de Vieta son:

$$r_1 + r_2 = \frac{\lambda + \delta - c}{c},$$

$$r_1 r_2 = \frac{-\delta}{c},$$

$$(r_1 + 1)(r_2 + 1) = \frac{\lambda}{c}.$$

un proceso de derivaciones sucesivas para el caso en que la cuantía del siniestro es una exponencial  $\beta$ .

La expresión para el caso Erlang(2,  $\beta$ ) es obtenida de forma similar, teniendo en cuenta que la transformada de su función densidad es

$$\tilde{f}(s) = \frac{\beta^2}{(s + \beta)^2}. \quad (2.50)$$

Sustituyendo (2.50) en (2.40), obtenemos

$$\tilde{\phi}(s) = \frac{\lambda(s + 2\beta) - c\phi(0)(s + \beta)^2}{cs^3 - (\lambda + \delta - 2\beta c)s^2 - \beta(2\lambda + 2\delta - \beta c)s - \beta^2\delta}, \quad (2.51)$$

siendo el denominador, la ecuación característica de Lundberg de raíces  $r_1, r_2$  y  $r_3$ . Expresamos  $\tilde{\phi}(s)$  en fracciones parciales

$$\tilde{\phi}(s) = \frac{A_1}{s - r_1} + \frac{A_2}{s - r_2} + \frac{A_3}{s - r_3},$$

de donde,

$$\phi_\delta(u, b) = A_1 e^{r_1 u} + A_2 e^{r_2 u} + A_3 e^{r_3 u}, \quad (2.52)$$

necesitando tres condiciones para hallar  $A_i, i = 1, 2, 3$ :

- En la expresión (2.39), si la distribución de cuantía del siniestro sigue una distribución Erlang(2,  $\beta$ ) tenemos,

$$\phi_\delta(u, b) = \frac{\lambda}{\lambda + \delta} \left[ \frac{c}{\lambda} \phi'(u, b) + \int_0^u \phi(u - x, b) \beta^2 x e^{-\beta x} dx + e^{-\beta u} (u\beta + 1) \right]. \quad (2.53)$$

Sustituyendo la estructura de solución (2.52) en (2.53) y simplificando, obtenemos

$$0 = u\beta \left[ \sum_{i=1}^3 \frac{\beta A_i}{(r_i + \beta)} - 1 \right] + \left[ \sum_{i=1}^3 \frac{\beta^2 A_i}{(r_i + \beta)^2} - 1 \right]. \quad (2.54)$$

A partir de la expresión (2.54), hallamos las dos primeras ecuaciones:

$$\sum_{i=1}^3 \frac{\beta A_i}{(r_i + \beta)} = 1, \quad (2.55)$$

$$\sum_{i=1}^3 \frac{\beta^2 A_i}{(r_i + \beta)^2} = 1. \quad (2.56)$$

- A continuación, se parte de la ecuación  $\phi_\delta(b, b)$ ,

$$\begin{aligned}\phi_\delta(b, b) &= \frac{\lambda}{\lambda + \delta} [1 - F(b)] + \frac{\lambda}{\lambda + \delta} \int_0^b \phi(b - x, b) f(x) dx \\ &= \frac{\lambda}{\lambda + \delta} e^{-\beta b} (b\beta + 1) + \frac{\lambda}{\lambda + \delta} \int_0^b \phi(b - x, b) \beta^2 e^{-\beta x} x dx. \quad (2.57)\end{aligned}$$

Sustituyendo la estructura de solución (2.52) en (2.57):

$$\begin{aligned}& \sum_{i=1}^3 A_i e^{r_i b} \left[ 1 - \frac{\lambda \beta^2}{(\lambda + \delta)(r_i + \beta)} \right] \\ &= \frac{\lambda}{\lambda + \delta} e^{-\beta b} \left[ \underbrace{b\beta + 1 - \sum_{i=1}^3 \frac{\beta^2 A_i b}{(r_i + \beta)} - \sum_{i=1}^3 \frac{\beta^2 A_i}{(r_i + \beta)^2}}_{\text{igual a 0 por las ecuaciones (2.55) y (2.56)}} \right]\end{aligned}$$

Por lo tanto, la tercera ecuación queda expresada de la siguiente manera:

$$\sum_{i=1}^3 A_i e^{r_i b} \left[ \frac{\lambda + \delta}{\lambda} - \frac{\beta^2}{(r_i + \beta)} \right] = 0. \quad (2.58)$$

Una vez obtenidas las ecuaciones (2.55), (2.56) y (2.58) se ha de resolver el siguiente sistema para poder hallar  $A_1$ ,  $A_2$  y  $A_3$ :

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^3 \frac{\beta A_i}{(r_i + \beta)} = 1 \\ \sum_{i=1}^3 \frac{\beta^2 A_i}{(r_i + \beta)^2} = 1 \\ \sum_{i=1}^3 A_i e^{r_i b} \left[ \frac{\lambda + \delta}{\lambda} - \frac{\beta^2}{(r_i + \beta)} \right] = 0. \end{cases}$$

Halladas  $A_1$ ,  $A_2$ ,  $A_3$  y sustituyendo en (2.52) se consigue la transformada del momento de ruina cuando la cuantía del siniestro sigue una distribución Erlang(2,  $\beta$ ). A partir de esta transformada se pueden encontrar los momentos de orden  $k$  para la variable aleatoria momento de ruina, como hemos comentado para el modelo clásico, y analizar la distribución de ésta.

En el Apéndice B se adjuntan los ejemplos numéricos que muestran el comportamiento de la esperanza, varianza, desviación típica y el coeficiente de variación de la variable aleatoria

momento de ruina cuando la distribución de la cuantía sigue una Erlang(2,  $\beta$ ) con  $\beta = 2$  (los resultados han sido obtenidos mediante programas realizados en *Mathematica 6.0*).

### 2.3.4. Función Gerber-Shiu

En este modelo, la expresión (2.32) definida en el modelo clásico, conocida como función Gerber-Shiu, queda

$$\phi_b(u) = E [w(U(T-), |U(T)|) e^{-\delta T} | U(0) = u], \quad (2.59)$$

siendo  $w(U(T-), |U(T)|)$  la función de penalización y  $\delta$  el factor de descuento. Hay que tener en cuenta que para  $w(U(T-), |U(T)|) = 1$ , se halla la transformada de Laplace del momento de ruina. En Lin *et al.* (2003) se plantea una ecuación integral para (2.59), condicionando al momento de ocurrencia del primer siniestro. A través de derivación en ambos lados de la integral respecto a  $u$ , se obtiene una ecuación íntegro-diferencial que permite hallar una solución general. Así, la ecuación integral para  $0 \leq u \leq b$  que define la función (2.59) es

$$\phi_b(u) = \int_0^{t^*} \lambda e^{-(\lambda+\delta)t} \gamma_b(u+ct) dt + \int_{t^*}^{\infty} \lambda e^{-(\lambda+\delta)t} \gamma_b(b) dt, \quad (2.60)$$

donde

$$\gamma_b(t) = \int_0^t \phi_b(t-x) f(x) dx + \xi(t), \quad (2.61)$$

y

$$\xi(t) = \int_t^{\infty} w(t, x-t) f(x) dx. \quad (2.62)$$

En este punto, es preciso recordar que  $t^* = (b-u)/c$ , ha sido definido anteriormente como el punto de cruce de las reservas al alcanzar el nivel  $b$  de la barrera si no ha ocurrido siniestro.

La integral (2.60) se puede reescribir también de la siguiente forma

$$\phi_b(u) = \frac{\lambda}{c} \int_u^b e^{-(\frac{\lambda+\delta}{c})(t-u)} \gamma_b(t) dt + \frac{\lambda}{\lambda+\delta} \gamma_b(b) e^{-(\frac{\lambda+\delta}{c})(b-u)}, \quad 0 \leq u \leq b. \quad (2.63)$$



Derivando (2.63) respecto a  $u$  se obtiene la ecuación íntegro-diferencial para  $0 \leq u \leq b$

$$\begin{aligned} \phi'_b(u) = & -\frac{\lambda}{c}\gamma_b(u) + \left(\frac{\lambda + \delta}{c}\right) \frac{\lambda}{c} \int_u^b e^{-\left(\frac{\lambda + \delta}{c}\right)(t-u)} \gamma_b(t) dt \\ & + \left(\frac{\lambda + \delta}{c}\right) \frac{\lambda}{\lambda + \delta} \gamma_b(b) e^{-\left(\frac{\lambda + \delta}{c}\right)(b-u)}. \end{aligned}$$

Si se tiene en cuenta (2.63), se puede reescribir la íntegro-diferencial anterior como

$$\phi'_b(u) = \frac{\lambda + \delta}{c} \phi_b(u) - \frac{\lambda}{c} \gamma_b(u), \quad (2.64)$$

o bien, si se considera (2.61), se obtiene

$$\phi'_b(u) = -\frac{\lambda}{c} \int_0^u \phi_b(u-x) f(x) dx + \frac{\lambda + \delta}{c} \phi_b(u) - \frac{\lambda}{c} \xi(u). \quad (2.65)$$

Si hacemos  $u = b$  en (2.63) tenemos que,

$$\phi_b(b) = \frac{\lambda}{\lambda + \delta} \gamma_b(b)$$

y sustituyendo ésta última en (2.64)

$$\phi'_b(b) = 0. \quad (2.66)$$

Por lo tanto, la función Gerber-Shiu (2.59), se puede decir que satisface la expresión (2.65) y la condición (2.66). En Lin *et al.* (2003) se obtiene la solución general de la función Gerber-Shiu gracias a la estructura de (2.65) y se expresa como la suma de dos funciones.

### 2.3.5. Valor actual de los dividendos

En este último apartado del modelo clásico con barrera constante, se lleva a cabo una breve introducción al cálculo del valor actual de los dividendos en el caso continuo suponiendo que el proceso acaba con la ruina, es decir, que el reparto de dividendos sólo se produce hasta el momento de ruina  $T$ .

Los dividendos repartidos se cuantifican mediante la esperanza del valor actual de los dividendos,  $W(u, b)$ , siendo  $u$  el nivel inicial de las reservas, y  $b$  el nivel de barrera, para  $0 \leq u \leq b$ . En Bühlmann (1996), se plantea el cálculo como,

$$W(u, b) = E \left[ \int_0^T D(s) e^{-\delta s} ds \right], \quad (2.67)$$

donde  $\delta$  es la tasa de actualización, y  $D(s)$  la intensidad de los dividendos repartidos en cada instante.

$$D(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } U(t) < b \\ c & \text{si } U(t) = b. \end{cases}$$

En la figura 2.8 se representa el reparto de dividendos cuando se produce el momento de ruina  $T$ .

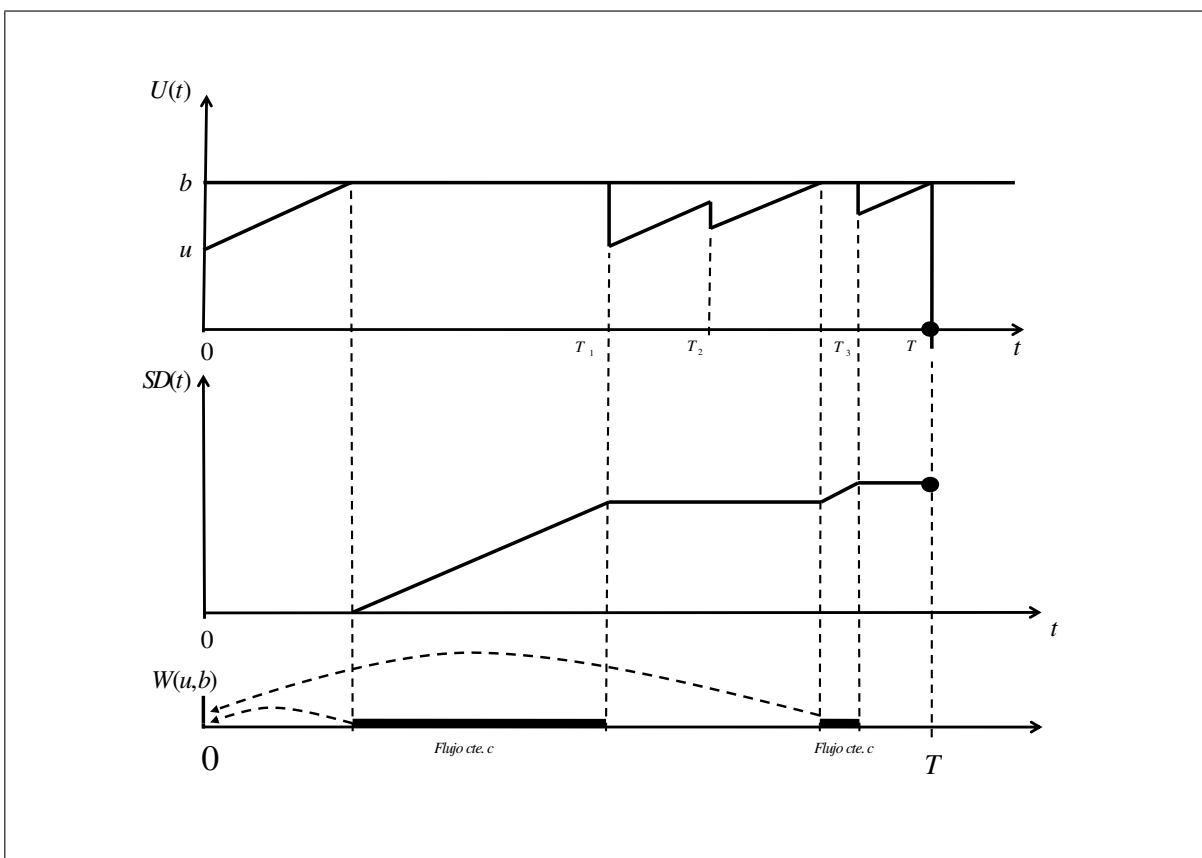


Figura 2.8:  $W(u, b)$  valor actual de los dividendos repartidos

Para el cálculo de (2.67) se puede recurrir al planteamiento diferencial realizado en Bühlmann (1996), o el realizado en Mármol (2003), planteado con ecuaciones de renovación. Esta es una herramienta ya utilizada en Grandell (1991) y Feller (1971) para el cálculo de probabilidades de supervivencia. Éste último, es el mismo procedimiento que hemos utilizado para calcular la función Gerber-Shiu, teniendo en cuenta el valor de las reservas,  $U(t)$ , que depende de si  $t = T_1$  es mayor o menor que  $t^*$ , el punto de corte entre el proceso y la barrera.



## Capítulo 3

# El reaseguro proporcional y su influencia en un modelo con barrera

### 3.1. Introducción

Las compañías aseguradoras pueden optar por realizar contratos de reaseguro para poder asumir riesgos mayores o protegerse mejor de la ruina. Este contrato de reaseguro transfiere parte de los riesgos asumidos por la compañía aseguradora a la reaseguradora a cambio de cederle también una parte de las primas que recibe de los asegurados.

Se define la función de retención,  $h(X)$ , que determinará la cantidad retenida de riesgo por parte de la compañía aseguradora, siendo  $X - h(X)$  la parte de la que se hará cargo la reaseguradora. La función  $h(X)$  cumple las siguientes propiedades (Melnikov (2003), Kaas *et al.* (2001)):

1.  $h(X)$  y  $X - h(X)$  son funciones no decrecientes,
2.  $0 \leq h(X) \leq X$ ,  $h(0) = 0$ .

Se puede diferenciar dos grandes grupos de reaseguro: el reaseguro proporcional y el no proporcional. Dentro de los reaseguros proporcionales se incluyen los reaseguros conocidos como cuota-parte y de excedentes. El primero transfiere todos los riesgos en la misma proporción, mientras que en el segundo dicha proporción puede variar. En cuanto a los reaseguros

no proporcionales se encuentran los conocidos como *Stop-Loss* y *Excess-Loss*. Ambos ofrecen protección cuando la siniestralidad supera un determinado nivel acordado.

A partir de ahora nos centraremos en el reaseguro cuota-parte, que denominamos genéricamente reaseguro proporcional. Por lo tanto, se considera que la función de retención

$$h(X) = kX,$$

siendo  $k$ , el nivel de retención de la aseguradora, que estará comprendido entre  $0 \leq k \leq 1$ .

En este capítulo, el modelo de la teoría del riesgo se modifica incorporando la opción de establecer un contrato de reaseguro proporcional para el gestor de la cartera. En el caso de un modelo clásico de la teoría del riesgo, diversos estudios demuestran que el reaseguro proporcional influye en la probabilidad de ruina última. Centeno (1986, 2002) y Dickson y Waters (1996) han estudiado dicha influencia a través del efecto del reaseguro sobre el coeficiente de ajuste. Por otro lado, en este capítulo, también se analizará el efecto de la estrategia de reaseguro proporcional en un modelo con barrera de dividendos constante, que propone el pago de una parte de las reservas a los accionistas en forma de dividendos. Evidentemente, la introducción de esta estrategia también produce una modificación en el proceso de las reservas.

El objeto de estudio en este capítulo será, por tanto, el efecto que genera la introducción del reaseguro proporcional en un modelo clásico del riesgo y en un modelo con barrera de dividendos constantes que propone el reparto de una parte de las reservas a los accionistas. Como se demostrará, este tipo de reaseguro proporcional y la relación entre los recargos de seguridad del asegurador y del reasegurador tiene una repercusión directa sobre las medidas de solvencia del asegurador.

En el modelo con barrera de dividendos constante no se estudia el comportamiento de la probabilidad de ruina ya que ésta es igual a 1. Sí que será de interés, en cambio, observar cómo el proceso de las reservas queda modificado y analizar, en los dos últimos subapartados (3.3.2. y 3.3.3.), la variable aleatoria momento de ruina y la esperanza del valor actual de los dividendos. En estos dos últimos subapartados se desarrolla el caso correspondiente a una distribución exponencial( $\beta$ ) para la cuantía de los siniestros.

## 3.2. Reaseguro proporcional en un modelo clásico

En el reaseguro proporcional, el asegurador, de cada siniestro  $X$ , asume una determinada proporción  $k$ , cediendo al reasegurador la diferencia  $(1 - k)$ . Por lo tanto, la intensidad de siniestralidad esperada para el asegurador asciende a  $k\lambda E[X]$ , siendo la siniestralidad esperada cedida al reasegurador de  $(1 - k)\lambda E[X]$ . Ese valor  $k$  recibe el nombre de porcentaje de retención.

Sabiendo que  $\rho$  es el recargo de seguridad del asegurador recogido en (2.3), se define  $\rho_R$  como el recargo de seguridad del reasegurador. Así, la prima retenida o ingresada por el asegurador dependerá de  $\rho_R$  y del porcentaje de retención  $k$ , siendo, (Dickson (2005))

$$\begin{aligned} c' &= c - (1 - k)(1 + \rho_R)\lambda E[X] \\ &= \lambda p_1(1 + \rho) - \lambda p_1(1 - k)(1 + \rho_R) \\ &= \lambda p_1(1 + \rho - (1 - k)(1 + \rho_R)). \end{aligned}$$

donde  $E[X] = p_1$ .

Esta prima retenida,  $c'$ , permite calcular el nuevo recargo de seguridad interno del asegurador o neto de reaseguro,  $\rho_N$ , de forma que

$$k\lambda p_1(1 + \rho_N) = \lambda p_1(1 + \rho - (1 - k)(1 + \rho_R)),$$

de donde,

$$\rho_N = \rho_R - \frac{\rho_R - \rho}{k} \quad \text{para } \forall k > 0. \quad (3.1)$$

Esta expresión puede encontrarse en Dickson y Waters (1996).

El asegurador debe mantener la condición de beneficio neto en su cartera retenida, es decir  $\rho_N > 0$ . Esta condición define un límite inferior para la proporción de negocio retenida,

$$\text{Max} \left\{ 0, \frac{\rho_R - \rho}{\rho_R} \right\} < k \leq 1, \quad \text{con } \rho > 0, \rho_R > 0. \quad (3.2)$$

Si se analiza  $\rho_N$ , en función del recargo original del asegurador,  $\rho$ , del recargo de seguridad cobrado por el reasegurador,  $\rho_R$ , y del porcentaje de retención  $k$ , se puede diferenciar tres casos según sea la relación existente entre  $\rho$  y  $\rho_R$ :

**1. El recargo del reasegurador es superior al del asegurador ( $\rho_R > \rho > 0$ )**

Entonces, la proporción retenida  $k$  debe pertenecer al intervalo  $(\frac{\rho_R - \rho}{\rho_R}, 1]$ , para que  $\rho_N > 0$ . En la Figura 3.1 se observa que  $\rho_N$  es una función creciente respecto a  $k$ .

**2. El recargo del reasegurador y del asegurador son iguales ( $\rho_R = \rho$ )**

Entonces  $k$  puede tomar cualquier valor entre  $(0, 1]$ . En este caso particular,  $\rho_N = \rho_R = \rho$  y es independiente de  $k$ . De esta forma, el recargo interno,  $\rho_N$ , que le queda al asegurador después del reaseguro es independiente de la proporción de la cartera cedida y se mantiene en el recargo prefijado por el asegurador. En la Figura 3.1 ésto sucede cuando  $\rho_R = \rho = 0.2$ , generando una línea constante en  $\rho_N = 0.2$  e independiente del valor que tome la proporción  $k$ .

**3. El recargo de seguridad del reasegurador es inferior al del asegurador ( $0 < \rho_R < \rho$ )**

En este caso  $k \in (0, 1]$  y  $\rho_N$  es decreciente respecto a  $k$ .

En la Figura 3.1 se representa  $\rho_N$  en función de  $k$ , para los tres casos comentados, con un recargo de seguridad fijo del asegurador  $\rho = 0.2$  y distintos valores del recargo de seguridad del reasegurador  $\rho_R = 0, 0.19, 0.2, 0.21, 0.5, 0.8$ .



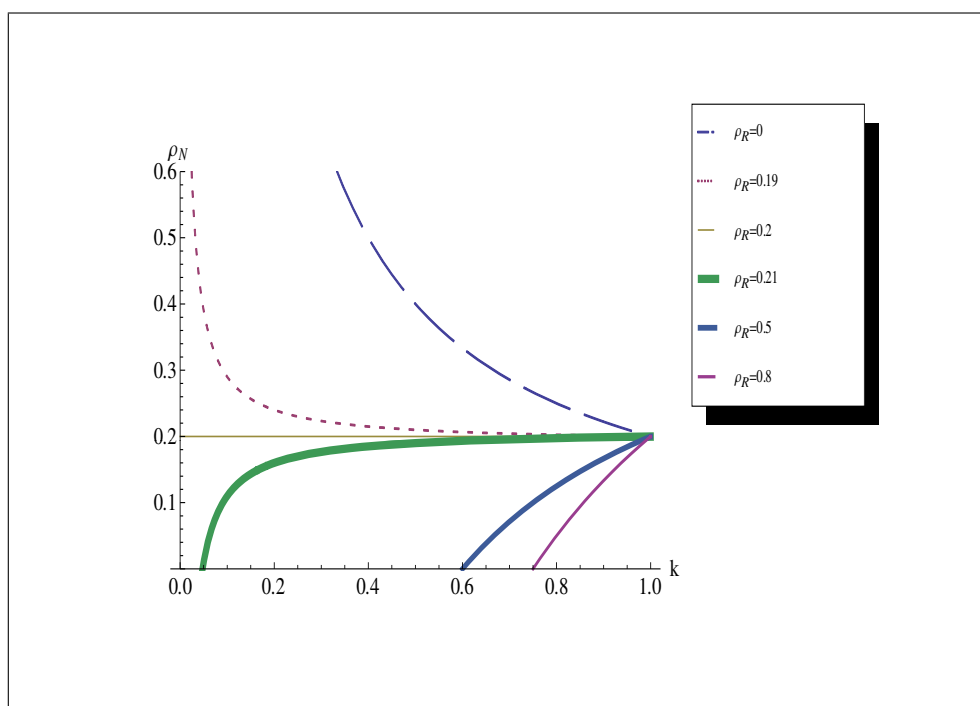


Figura 3.1: Recargo de seguridad interno del asegurador

La proporción de la intensidad de prima total retenida por el asegurador, denominada  $k'$ , al aplicar un reaseguro proporcional con un nivel de retención  $k$  de cada siniestro, se define como

$$\begin{aligned} k'c &= c - (1 - k)(1 + \rho_R)\lambda p_1 \\ &= c - (1 - k)(1 + \rho_R)\frac{c}{(1 + \rho)}, \end{aligned}$$

$$k' = 1 - (1 - k)\frac{(1 + \rho_R)}{(1 + \rho)},$$

o bien,

$$k'c = k\lambda p_1(1 + \rho_N),$$

$$k'\lambda p_1(1 + \rho) = k\lambda p_1(1 + \rho_N),$$

$$k' = k\frac{(1 + \rho_N)}{(1 + \rho)}.$$

Si  $\rho_R = \rho$ , la prima total que paga el asegurado,  $c$ , es compartida entre asegurador y reasegurador en la misma proporción  $k$ , de tal forma que la prima neta de reaseguro es  $c' = kc$  y  $\rho_N = \rho$ .

De estos tres casos, únicamente es de interés analizar el primero, ya que si el  $\rho_R \leq \rho$ , utilizando como criterio la probabilidad de ruina, el asegurador simplemente cedería toda la cartera al reasegurador. Y esta situación carece de sentido.

### 3.2.1. Proceso de las reservas

Si introducimos un reaseguro proporcional, de forma que el asegurador retiene una proporción  $k$  de todos y cada uno de los siniestros y una proporción  $k'$  de la intensidad de prima  $c$ , el nivel de las reservas en  $t$ , es

$$U_R(t) = u + ck't - \sum_{i=1}^{N(t)} kX_i. \quad (3.3)$$

Obviamente la introducción del contrato de reaseguro proporcional modifica la ruina del asegurador. Igualmente, el momento de ruina, el importe de ruina y el resto de magnitudes relacionadas con la solvencia del asegurador se ven afectadas.

Sin embargo, dadas las características del reaseguro proporcional, no es necesario la reformulación teórica para el análisis de estas magnitudes. Se plantean dos opciones:

- a) Modelo sin reaseguro pero cambiando convenientemente los valores de las reservas iniciales  $u$  y la intensidad de prima  $c$  por  $\frac{u}{k}$  y  $c\frac{k'}{k}$ , respectivamente.

	Sin reaseguro	Con reaseguro proporcional
Reservas iniciales	$u$	$\frac{u}{k}$
Intensidad de prima	$c$	$c\frac{k'}{k}$

Tabla 3.1: Conversión de parámetros en un modelo de reaseguro proporcional

De esta forma, el proceso de las reservas en un modelo clásico con reaseguro proporcio-

nal, es

$$U_R(t) = k \left( \frac{u}{k} + c \frac{k'}{k} t - \sum_{i=1}^{N(t)} X_i \right) = kU_s(t), \quad (3.4)$$

siendo  $U_s(t)$  las reservas en un modelo clásico sin reaseguro proporcional (pero con valores iniciales  $\frac{u}{k}$ , e intensidad de prima  $c \frac{k'}{k}$ ).

- b) La otra opción está relacionada con el recargo neto de reaseguro,  $\rho_N$ , sobre el negocio retenido, que nos da la misma información que  $k'$  sobre la prima total cobrada por el asegurador. Entonces,

$$U_R(t) = u + c't - \sum_{i=1}^{N(t)} Y_i, \quad (3.5)$$

siendo  $Y_i = kX_i$  y  $c' = \lambda E[Y_i](1 + \rho_N)$ . En este caso, todas las magnitudes relacionadas con la ruina en un modelo de reaseguro proporcional, pueden calcularse utilizando un modelo clásico sin reaseguro, teniendo en cuenta que los parámetros son  $u$ ,  $c'$  y la cuantía de los siniestros dada por la variable aleatoria  $Y = kX$ .

### 3.3. Reaseguro proporcional en un modelo con barrera

A continuación, introducimos un reaseguro proporcional en un modelo con barrera de dividendos constante  $b(t) = b$ , de tal forma que cuando las reservas alcanzan el nivel de la barrera  $b$ , éstas permanecen en dicho nivel hasta la ocurrencia del siguiente siniestro.

En la Figura 3.2 se representa, por un lado, una posible trayectoria descrita por el proceso de las reservas en un modelo clásico con barrera constante, y por otro, una trayectoria en la que se ha incluido un reaseguro proporcional.

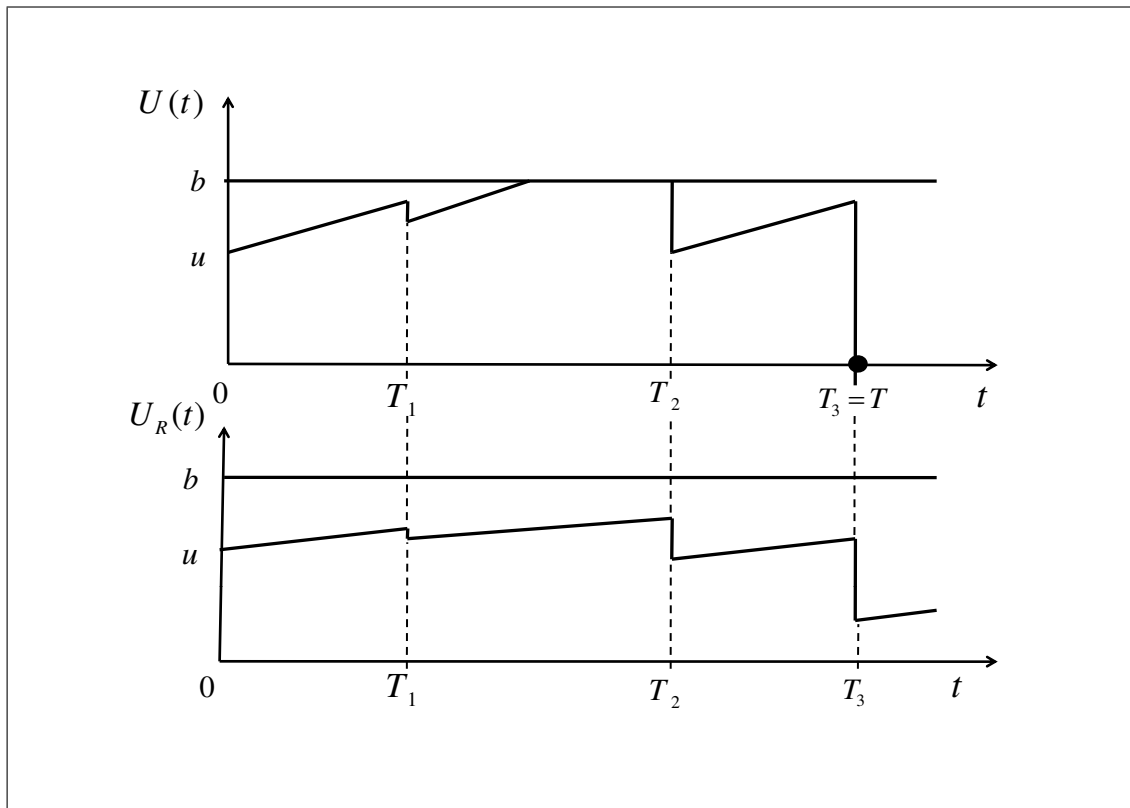


Figura 3.2: Proceso de las reservas sin y con reaseguro proporcional con  $b(t) = b$

En la primera trayectoria representada en la Figura 3.2, el asegurador reparte dividendos y se arruina al ocurrir el tercer siniestro si no reasegura, mientras que si reasegura (segunda trayectoria con  $k$  y  $k'$ ), no llega a repartir dividendos, pero no se arruina después del tercer siniestro.

Con la introducción de la estrategia de reaseguro proporcional en este modelo con barrera de dividendos constante, se ven afectados el momento de ruina, el importe de ruina, el valor actual de los dividendos repartidos y el resto de magnitudes, como sucedía en el modelo clásico de la teoría del riesgo.

En este modelo tampoco será necesaria, la reformulación teórica para el análisis de estas magnitudes. Si se utiliza la opción (a) anterior, sólo se tendrá que cambiar el nivel de la barrera constante  $b$  por  $\frac{b}{k}$  juntamente con los parámetros utilizados en el proceso de las reservas en (3.4). Si se escoge la opción (b), el parámetro de la barrera constante sigue siendo  $b$  pero con el resto de parámetros utilizados en el proceso (3.5).

### 3.3.1. Momento de ruina

Si se asume que la cuantía individual de un siniestro sigue una distribución exponencial de parámetro  $\beta$ , se pueden obtener expresiones analíticas para la transformada de Laplace y para los momentos de orden  $n$  del momento de ruina<sup>1</sup> como ya se ha comentado en el anterior capítulo.

En un modelo sin reaseguro con barrera constante  $b$ , la transformada de Laplace del momento de ruina (Dickson y Waters (2004), Castañer (2006)) es

$$E[e^{-\delta T}] = \frac{\lambda}{c} \frac{r_1 e^{r_2 u + r_1 b} - r_2 e^{r_1 u + r_2 b}}{(r_1 + \beta)r_1 e^{r_1 b} - (r_2 + \beta)r_2 e^{r_2 b}}, \quad (3.6)$$

donde  $r_1$  y  $r_2$  son las raíces de la ecuación de Lundberg

$$cs^2 - (\lambda + \delta - \beta c)s - \beta\delta = 0. \quad (3.7)$$

A partir de (3.6) se obtienen los momentos de orden  $n$  derivando sucesivamente respecto a  $\delta$  y evaluando dichas derivadas en  $\delta = 0$ ,

$$E[T^n] = (-1)^n \left. \frac{\partial^n E[e^{-\delta T}]}{\partial \delta^n} \right|_{\delta=0}. \quad (3.8)$$

A continuación, se analizan en un modelo con reaseguro proporcional y barrera constante  $b$ , la esperanza del momento de ruina y la transformada de Laplace de dicho momento.

#### 3.3.1.1. Esperanza del momento de ruina

En el caso de la esperanza del momento de ruina la expresión es compleja, pero puede utilizarse para simplificarla, como variable instrumental, el coeficiente de ajuste  $R$ , de forma que, (Lin *et al.* (2003))

$$E[T] = \frac{c\beta e^{R(b-u)}(c\beta e^{Ru} - \lambda)}{\lambda(c\beta - \lambda)^2} - \frac{1 + \beta u}{c\beta - \lambda} \quad (3.9)$$

<sup>1</sup>En este caso, el orden de los momentos se expresa mediante  $n$ . De esta manera, se intenta evitar la posible confusión con el porcentaje aplicado en un modelo con reaseguro proporcional.

siendo

$$R = \frac{\beta\rho}{(1+\rho)}.$$

Considerando ahora un reaseguro proporcional, se utiliza la expresión (3.9) y se aplica la opción (b) de la sección anterior para hallar las nuevas ecuaciones. De esta forma, reemplazando la intensidad de prima  $c$  por  $c' = \lambda \frac{k}{\beta} (1 + \rho_N)$ , donde el nuevo coeficiente de ajuste es

$$R = \frac{\beta\rho_N}{(1+\rho_N)k},$$

la esperanza del momento de ruina queda

$$E_R[T] = \frac{1 + \rho_N}{\lambda\rho_N} e^{\frac{\beta\rho_N(b-u)}{k(1+\rho_N)}} \left( \frac{1 + \rho_N}{\rho_N} e^{\frac{\beta\rho_N}{k(1+\rho_N)}u} - \frac{1}{\rho_N} \right) - \frac{1 + \frac{u\beta}{k}}{\lambda\rho_N}. \quad (3.10)$$

**Ejemplo 1** Se estudia el comportamiento de la esperanza del momento de ruina (3.10) para distintos recargos del reasegurador,  $\rho_R = (0.3, 0.4, 0.5, 0.6, 0.7, 0.8, 0.9)$  teniendo unas reservas iniciales  $u = 5$ ,  $b = 10$ , un recargo de seguridad  $\rho = 0.2$  y suponiendo que el número de siniestros sigue una distribución de Poisson de parámetro  $\lambda = 0.5$  y la cuantía de los siniestros una exponencial de parámetro  $\beta = 1$ . Los cálculos se han realizado con el programa Mathematica 6.0 que se adjunta en el Apéndice C.1.

Los  $\rho_R$  considerados son superiores al recargo de seguridad del asegurador  $\rho = 0.2$ . Así, el dominio de la proporción retenida  $k$ , es  $\left( \frac{\rho_R - \rho}{\rho_R}, 1 \right]$ . En la Figura 3.3 se pueden observar los resultados: al incrementar  $\rho_R$ , el dominio de  $k$  se ve reducido y también disminuyen los valores de la esperanza del momento de ruina.

Las distintas curvas dibujadas respecto a  $k$  en la Figura 3.3, tienen un primer tramo creciente hasta llegar a un máximo, que es el valor óptimo  $k^*$  que maximiza la  $E_R[T]$ , para continuar luego decreciendo hasta llegar al valor de  $E_R[T] = 183.145$  para  $k = 1$ . Este valor es el del momento de ruina esperado si no se reasegura, ya que una  $k = 1$  significa que se retiene la totalidad de la cartera.

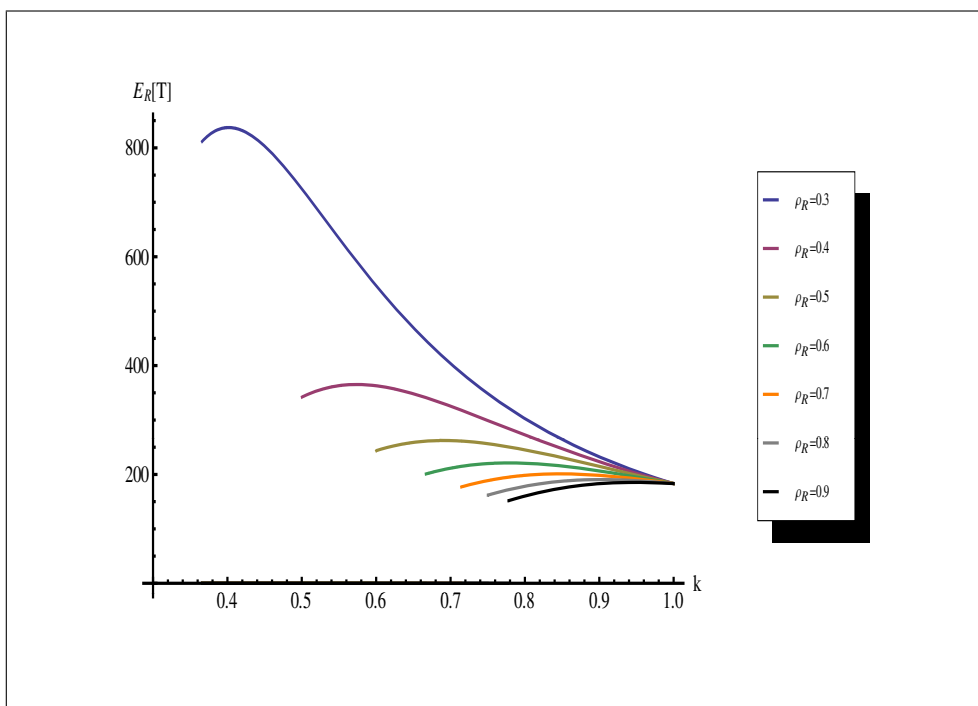


Figura 3.3:  $E_R[T]$  para distintos  $\rho_R = (0.3, 0.4, 0.5, 0.6, 0.7, 0.8, 0.9)$

En la Figura 3.4, se observan los máximos de  $E_R[T]$  y los valores de  $k^*$  que permiten obtener dichos máximos para los distintos recargos del reasegurador  $\rho_R$ .

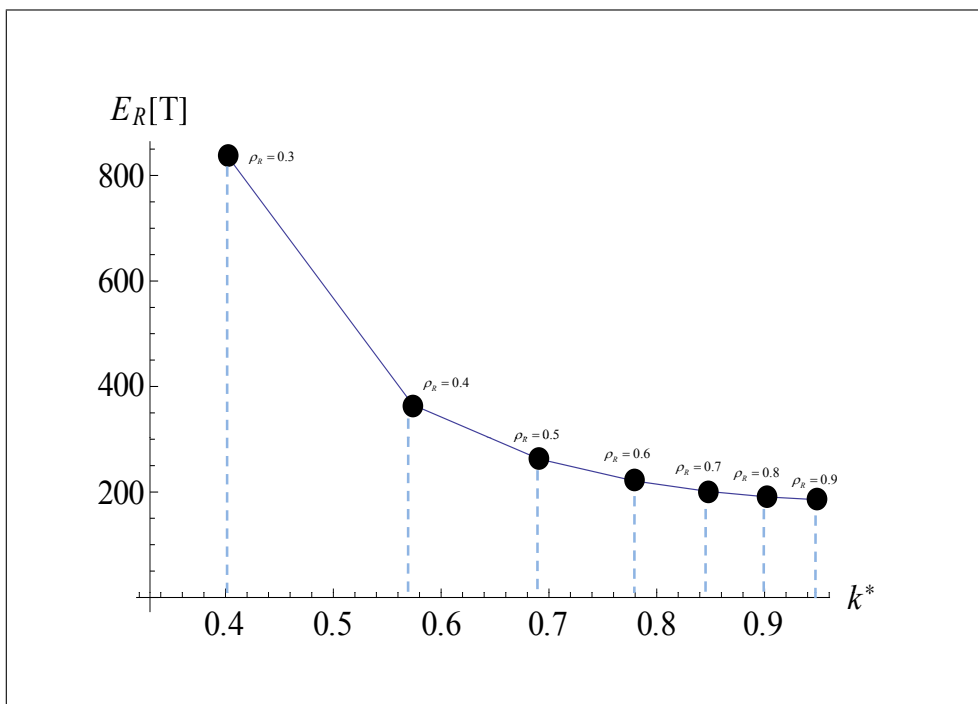


Figura 3.4: Esperanzas óptimas para distintos niveles de retención

A medida que aumenta el recargo del reasegurador, la porción de cartera que debe retener el asegurador para conseguir la máxima esperanza del momento de ruina, aumenta y se acerca a 1, y dicha esperanza óptima del momento de ruina disminuye y se acerca al valor sin reaseguro.

Para recargos de seguridad del reasegurador grandes,  $\rho_R = 0.7$ ,  $\rho_R = 0.8$ ,  $\rho_R = 0.9$  se identifica que en el primer tramo del dominio de  $k$ , los valores de la  $E_R[T]$  son inferiores al que se obtendría sin reasegurar. En la Tabla 3.2 se recogen para cada recargo del reasegurador, el dominio de  $k$ , el  $k^*$ , valor de  $k$  que optimiza  $E_R[T]$ ,  $E_{R(k^*)}[T]$ , y los valores de  $k$  para los que  $E_R[T] < E[T]$ .

$\rho_R$	$Max \left\{ 0, \frac{\rho_R - \rho}{\rho_R} \right\} < k \leq 1$	$k^*$ (óptimo)	$E_{R(k^*)}[T]$	valores de $k$ donde $E_R[T] < E[T]$
0.3	$0.333 < k \leq 1$	0.4017	837.33	$\#$
0.4	$0.500 < k \leq 1$	0.5736	365.28	$\#$
0.5	$0.600 < k \leq 1$	0.6911	262.32	$\#$
0.6	$0.666 < k \leq 1$	0.7789	221.18	$\#$
0.7	$0.714 < k \leq 1$	0.8476	201.07	$0.714 < k < 0.731$
0.8	$0.750 < k \leq 1$	0.9027	190.60	$0.750 < k < 0.821$
0.9	$0.777 < k \leq 1$	0.9478	185.37	$0.777 < k < 0.900$
$\rho$				$E[T]$
0.2	Sin reaseguro			183.145

Tabla 3.2: Comportamiento de la  $E_R[T]$

### 3.3.1.2. Transformada del momento de ruina

Partiendo de la expresión (3.6), se realizan los cambios correspondientes al introducir un reaseguro proporcional y se obtiene

$$E_R[e^{-\delta T}] = \frac{\lambda}{\frac{\lambda k}{\beta} (1 + \rho_N)} \frac{r_1 e^{r_2 u + r_1 b} - r_2 e^{r_1 u + r_2 b}}{\left(r_1 + \frac{\beta}{k}\right) r_1 e^{r_1 b} - \left(r_2 + \frac{\beta}{k}\right) r_2 e^{r_2 b}} \quad (3.11)$$



donde  $r_1$  y  $r_2$  son las raíces de la siguiente ecuación de Lundberg

$$\frac{\lambda k}{\beta} (1 + \rho_N) s^2 - (\delta - \lambda \rho_N) s - \frac{\beta \delta}{k} = 0.$$

**Ejemplo 2** Con los mismos datos del ejemplo anterior, se estudia el comportamiento de la transformada de Laplace del momento de ruina para los distintos recargos del reasegurador y para distintas tasas de actualización  $\delta = 0.01$ ,  $\delta = 0.03$  y  $\delta = 0.1$ . En los gráficos de la Figura 3.5 se representa dicho comportamiento. Se adjunta el programa realizado en Mathematica 6.0 en el Apéndice C.2.

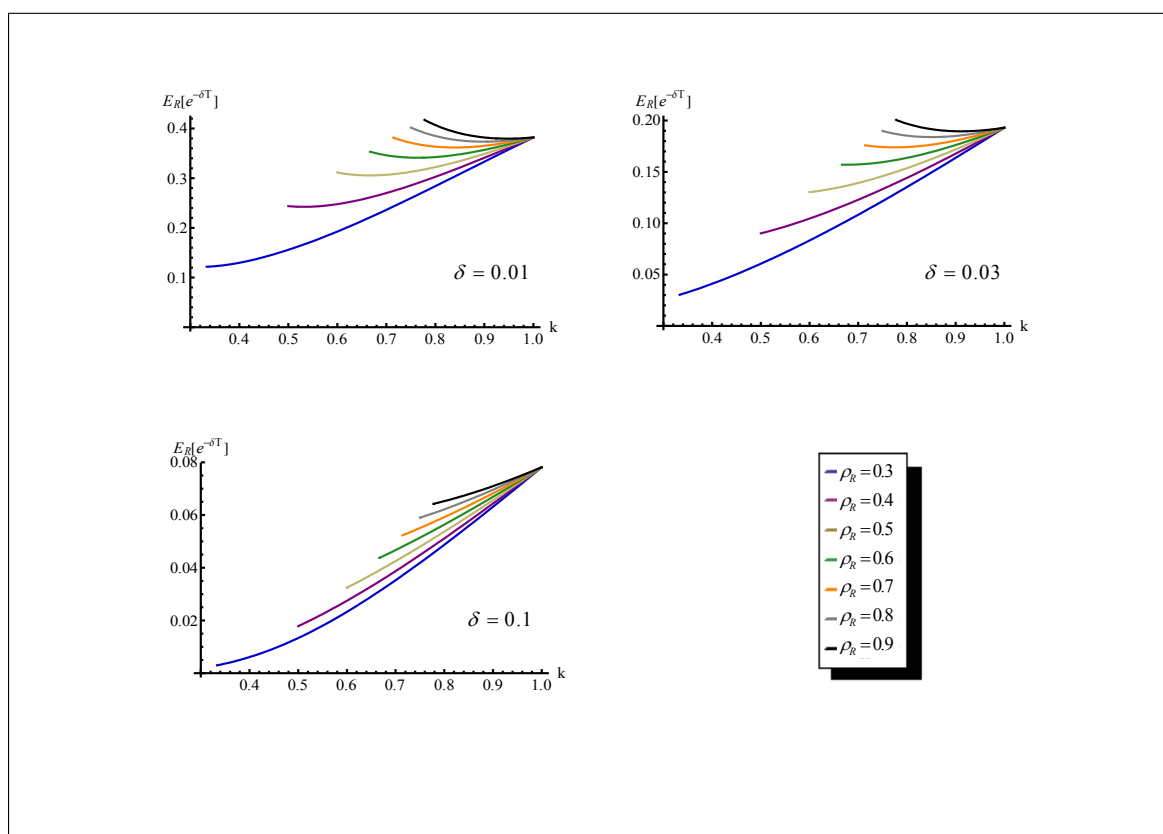


Figura 3.5:  $E_R[e^{-\delta T}]$  para los distintos  $\rho_R$  en los casos  $\delta = 0.01$ ,  $\delta = 0.03$  y  $\delta = 0.1$

En la Tabla 3.3 se recogen los valores de  $k^*$  que minimizan la transformada de Laplace del momento de ruina, así como los intervalos de  $k$  para los que la  $E_R[e^{-\delta T}]$  es inferior a la correspondiente sin reaseguro.

$\rho_R$	$Max\left\{0, \frac{\rho_R - \rho}{\rho_R}\right\} < k \leq 1$	$\delta = 0.01$			$\delta = 0.03$		
		$k^*$	$E_{R(k^*)}[e^{-\delta T}]$	valores de $k$ donde $E_R[e^{-\delta T}] < E_{R(k^*)}[e^{-\delta T}]$	$k^*$	$E_{R(k^*)}[e^{-\delta T}]$	valores de $k$ donde $E_R[e^{-\delta T}] < E_{R(k^*)}[e^{-\delta T}]$
0.3	$0.333 < k \leq 1$	∅	∅	∅	∅	∅	∅
0.4	$0.500 < k \leq 1$	0.5315	0.2423	∅	∅	∅	∅
0.5	$0.600 < k \leq 1$	0.6661	0.3056	∅	∅	∅	∅
0.6	$0.666 < k \leq 1$	0.7637	0.3411	∅	0.6757	0.1569	∅
0.7	$0.714 < k \leq 1$	0.8388	0.3618	∅	0.7747	0.1738	∅
0.8	$0.750 < k \leq 1$	0.8985	0.3735	$0.750 < k < 0.812$	0.8508	0.1838	∅
0.9	$0.777 < k \leq 1$	0.9470	0.3796	$0.777 < k < 0.898$	0.9112	0.1895	$0.777 < k < 0.832$
$\rho$	Sin Reaseguro	$k$	$E[e^{-\delta T}]$	Sin Reaseguro	$k$	$E[e^{-\delta T}]$	
0.2	Reaseguro	1	0.3820	Reaseguro	1	0.1930	

Tabla 3.3: Comportamiento de la  $E_R[e^{-\delta T}]$ 

Los comentarios a realizar respecto de las gráficas de la Figura 3.5 y de la Tabla 3.3 son similares a los realizados en el ejemplo anterior. La diferencia es que aquí, el objetivo es minimizar la esperanza del valor actual (a un tipo de interés concreto) de una unidad monetaria pagadera en el momento de ruina, mientras que si analizamos la esperanza del momento de ruina, el objetivo es maximizar dicha esperanza. Con una tasa de actualización  $\delta = 0.1$  no existe una  $k^*$  que minimiza la transformada de Laplace del momento de ruina como tampoco intervalos de  $k$  para los que la  $E_R[e^{-\delta T}]$  es inferior a  $E[e^{-\delta T}] = 0.0781$ .

### 3.3.2. Esperanza del valor actual de los dividendos

En un modelo sin reaseguro, la esperanza del valor actual de los dividendos repartidos,  $W(u, b)$ , bajo la hipótesis de que la cuantía de los siniestros sigue una distribución exponencial es (Bühlmann (1996))

$$W(u, b) = \frac{-\frac{\beta + r_1}{\beta + r_2} e^{r_1 u} + e^{r_2 u}}{-\frac{\beta + r_1}{\beta + r_2} r_1 e^{r_1 b} + r_2 e^{r_2 b}} \quad (3.12)$$

donde  $r_1$  y  $r_2$  son las raíces de la expresión (3.7) y  $\delta$  la tasa de actualización de los dividendos repartidos.

Con la incorporación de un reaseguro proporcional, el valor actual de los dividendos viene representado por  $W_k(u, b)$ , recordando que  $k$  es la proporción retenida, y puede calcularse a

partir de (3.12) realizando los cambios indicados anteriormente.

**Ejemplo 3** Con los mismos datos de los ejemplos anteriores y para  $\delta = 0.01$ , en la Figura 3.6 se presenta el valor de  $W_k(u, b)$  para  $\rho_R = 0.3, \dots, 0.9$ . El programa realizado con Mathematica 6.0 se adjunta en el Apéndice C.3.

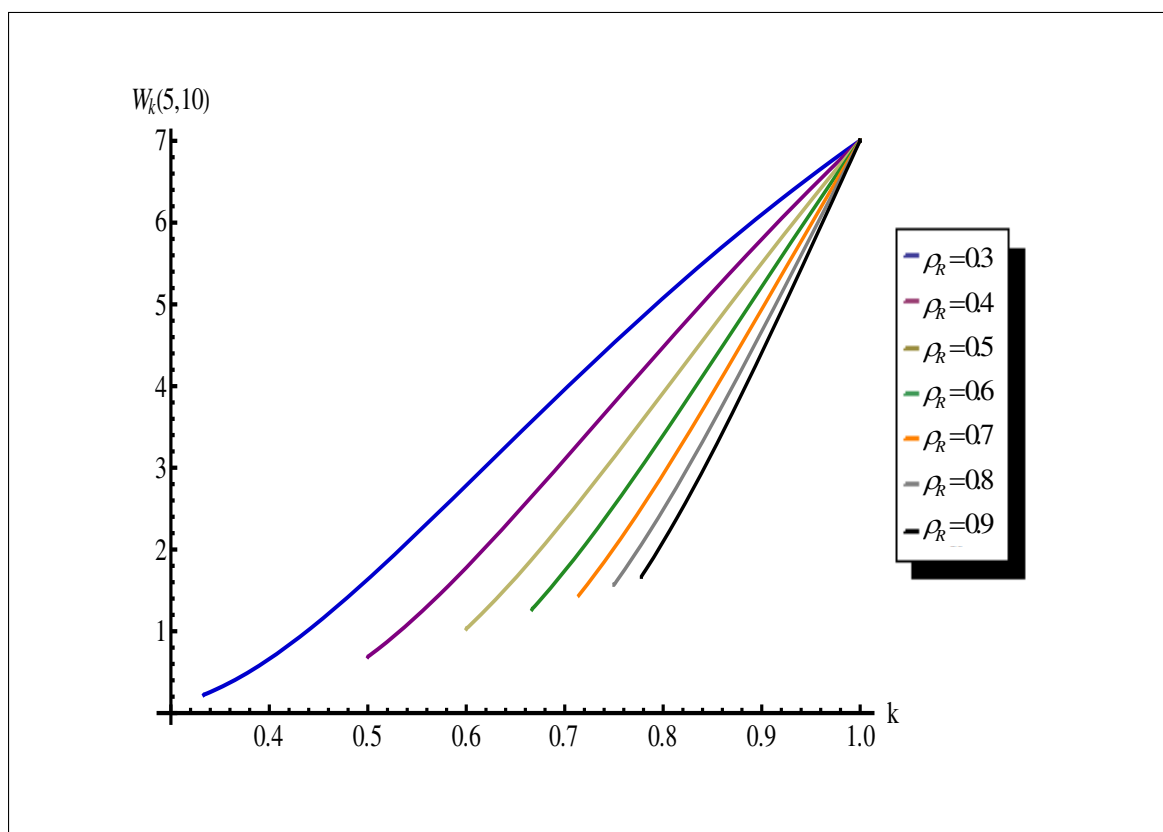


Figura 3.6:  $W_k(5, 10)$  para  $\rho_R = 0.3, \dots, 0.9$

En la Figura 3.6, se puede observar que la esperanza del valor actual de los dividendos es creciente respecto a  $k$  para los diferentes valores del  $\rho_R$ . Por tanto cuanto mayor es la retención que decide el asegurador mayor es la cuantía de dividendos repartidos.

Si consideramos la cartera de seguros no vida como una inversión para los accionistas, podemos interpretar que a cambio de una inversión inicial de  $u$ , la esperanza del valor actual de los ingresos recibidos es  $W_k(u, b)$ . Si el tipo de interés de mercado es  $\delta$ , parece lógico exigir

que para realizar la inversión el nivel de retención estuviese entre el conjunto de  $k$  que hacen que  $W_k(u, b)$  sea mayor que  $u$ .

Denominamos  $\hat{k}$  al valor que hace que  $W_{\hat{k}}(u, b) = u$ . Para el valor  $\hat{k}$ , la tasa interna de rentabilidad del accionista coincide con la tasa  $\delta$  utilizada para actualizar los dividendos repartidos. Para valores  $k > \hat{k}$ , se cumple que  $W_k(u, b) > u$ , y por tanto la tasa de rentabilidad del accionista es superior a  $\delta$ . Por el contrario, para  $k < \hat{k}$ , la tasa de rentabilidad del accionista es inferior a  $\delta$ , cumpliéndose que  $W_k(u, b) < u$ . Así, para un tipo de interés de mercado  $\delta$ , desde el punto de vista del accionista el conjunto de  $k$  que hace rentable la operación son  $k \in (\hat{k}, 1]$ .

**Ejemplo 4** En la Tabla 3.4 se recogen los valores de  $\hat{k}$  para  $u = 1$ ,  $b = 5$ ,  $\lambda = 0.5$ ,  $\beta = 1$  y  $\rho = 0.2$ .

$\rho_R$	$\hat{k}$						
	$\delta = 0.01$	$\delta = 0.015$	$\delta = 0.02$	$\delta = 0.025$	$\delta = 0.03$	$\delta = 0.04$	$\delta = 0.1$
0.3	0.477891	0.5541	0.6267	0.8958	0.7619	0.8864	$> 1$
0.4	0.579216	0.6370	0.6933	0.7481	0.8015	0.9041	$> 1$
0.5	0.644592	0.6919	0.7385	0.7843	0.8293	0.9169	$> 1$
0.6	0.691156	0.7315	0.7714	0.8110	0.8500	0.9267	$> 1$
0.7	0.726342	0.7616	0.7967	0.8316	0.8662	0.9344	$> 1$
0.8	0.754014	0.7855	0.8168	0.8481	0.8791	0.9406	$> 1$
0.9	0.77642	0.8048	0.8332	0.8615	0.8897	0.9457	$> 1$

Tabla 3.4: Valores de  $\hat{k}$  para diferentes valores de  $\delta$

Se puede observar que a mayor tasa de actualización de los dividendos para un mismo  $\rho_R$ , mayor es el nivel de  $\hat{k}$ . Por tanto, el accionista exigiría mayor nivel de retención para considerar rentable su inversión.

## Capítulo 4

# Estrategia de reaseguro proporcional de umbral

### 4.1. Introducción

Los estudios que tratan los efectos de una estrategia de reaseguro sobre las medidas de solvencia han centrado su atención en la probabilidad de ruina última.

En primer lugar, un buen número de estos estudios analizan el efecto del reaseguro en el coeficiente de ajuste o exponente de Lundberg (p.e. Waters (1979), Gerber (1979), Centeno (1986, 2002) y Hesselager (1990)).

Por otro lado, diversos autores han considerado el problema de la determinación del nivel óptimo y/o del tipo de reaseguro. El óptimo lo definen en términos de algún criterio de estabilidad, principalmente la probabilidad de ruina (Waters (1983), Goovaerts *et al.* (1989), Bühlmann (1996), Bowers *et al.* (1997), Schmidli (2001, 2002), Verlaak y Beirlant (2003), Hipp y Vogt (2003) o Taksar y Markussen (2003)). En este contexto, la estrategia de reaseguro considerada puede ser estática o dinámica. En una estrategia de reaseguro estática (Waters (1983), Centeno (1986, 2005) y Dickson y Waters (1996)), se asume que el nivel y el tipo de reaseguro permanece constante a lo largo del período considerado, siendo en la mayoría de los casos infinito. En el caso de una estrategia dinámica, se considera que, para un tipo fijo de reaseguro, el nivel de reaseguro puede variar de manera continua (Hojgaard y Taksar (1998), Schmidli (2001,

2002), Hipp y Vogt (2003) y Taksar y Markussen (2003)). Estos trabajos utilizan la herramienta de control estocástico óptimo en tiempo continuo. En cambio, Dickson y Waters (2006) estudian el problema del control estocástico en tiempo discreto, asumiendo que el asegurador puede cambiar el tipo y/o el nivel de reaseguro al comienzo de cada período.

En este capítulo, se considera el modelo clásico (Poisson compuesto) para las reservas del asegurador y se introduce una estrategia de reaseguro dinámica. Para ello, se asume que el asegurador acuerda un contrato de reaseguro proporcional, donde el nivel de retención no es constante sino que depende del nivel de las reservas. Así, se define una estrategia de reaseguro proporcional de umbral que consiste en aplicar un nivel de retención  $k_1$  siempre que las reservas son inferiores a un determinado umbral<sup>1</sup>  $b$ , y en aplicar un nivel de retención  $k_2$  en caso contrario. Puesto que el reaseguro es una herramienta para el control de la solvencia de la cartera, es natural que el nivel de retención dependa del nivel de las reservas en cada momento. La estrategia de reaseguro proporcional de umbral que se propone es una forma clara y fácil de considerar esta dependencia.

Esta nueva estrategia se analiza desde el punto de vista del asegurador, dejando para futuras investigaciones el efecto que tiene la adopción de esta nueva política de reaseguro sobre la cartera del reasegurador.

El objetivo de este capítulo es analizar el efecto de esta nueva estrategia en las medidas de solvencia utilizando la función Gerber-Shiu, que permite obtener entre otras medidas la probabilidad de ruina y la transformada de Laplace del momento de ruina.

La organización es similar a la seguida en los capítulos anteriores. Primero, se introduce esta nueva estrategia, estudiando el efecto que tiene sobre el proceso de las reservas. Posteriormente se obtiene la ecuación íntegro-diferencial de la función Gerber-Shiu. El procedimiento matemático seguido es similar al aplicado en Lin y Pavlova (2006), cuyo trabajo se centra en analizar problemas de dividendos. A partir de la función Gerber-Shiu, se estudian algunos casos especiales, obteniéndose expresiones para la probabilidad de ruina y la transformada de Lapla-

---

<sup>1</sup>En este caso, no se ha de confundir el umbral ( $b$ ) con el valor de la barrera constante ( $b$ ). A lo largo del capítulo, ( $b$ ) hace referencia al nivel de umbral.

ce del momento de ruina. En los apartados 4.4. y 4.5. se analizan estas expresiones cuando la cuantía individual de los siniestros se distribuye según una exponencial y una phase-type( $N$ ). Se cierra este capítulo con un análisis numérico y comparativo de la nueva estrategia de reaseguro proporcional de umbral.

## 4.2. Proceso de las reservas

A lo largo de este apartado, se presenta una nueva estrategia de reaseguro proporcional que podemos considerar dinámica, ya que varía en función del nivel de las reservas en cada momento. A esta nueva estrategia, la denominamos estrategia de reaseguro proporcional de umbral, en ella se consideran dos tramos diferenciados en función de si las reservas son inferiores o superiores a un determinado nivel de umbral  $b \geq 0$ :

- Primer tramo, para  $0 \leq u < b$ : En este tramo, el asegurador (al que se denomina cedente) asume un porcentaje  $k_1$  de la cuantía de los siniestros, porcentaje que se denomina nivel de retención. El reasegurador se hace cargo del  $(1 - k_1)$  restante.

Así, la siniestralidad agregada esperada que asume el asegurador es  $k_1 \lambda E[X]$  y la siniestralidad agregada esperada que asume el reasegurador es  $(1 - k_1) \lambda E[X]$ .

De igual forma que se cede la obligación de pagos de una parte del siniestro, también se cede a la reaseguradora una parte de la prima que cobra el asegurador a su cliente. Tanto cedente como reasegurador deben incluir un recargo de seguridad positivo en sus primas. El asegurador cobra al asegurado un recargo de seguridad  $\rho$  y el reasegurador cobra un recargo  $\rho_R$  al asegurador.

Se tiene, por lo tanto, que la prima retenida por el asegurador neta de reaseguro, denominada  $c_1$ , dependerá de dicho recargo  $\rho_R$  y de la proporción  $k_1$  de la cartera retenida,

$$\begin{aligned} c_1 &= c - (1 - k_1)(1 + \rho_R)\lambda E[X] \\ &= \lambda p_1(1 + \rho) - (1 - k_1)(1 + \rho_R)\lambda p_1. \end{aligned} \tag{4.1}$$

Al mismo tiempo, se puede calcular el recargo interno o neto de reaseguro para el asegurador, al que se denomina  $\rho_{N1}$ , a partir de

$$c_1 = k_1 \lambda p_1 (1 + \rho_{N1}). \quad (4.2)$$

Este recargo neto sólo depende de  $\rho$ ,  $\rho_R$  y  $k_1$  y puede calcularse fácilmente a partir de la expresión anterior y de (4.1) siendo

$$\rho_{N1} = \rho_R - \frac{\rho_R - \rho}{k_1}, \quad \forall k_1 > 0. \quad (4.3)$$

Como el asegurador debe mantener la condición de beneficio neto, la prima neta de reaseguro no puede inferior a la siniestralidad esperada asumida, por tanto  $\rho_{N1} > 0$ . De esta condición, obtenemos el mismo límite inferior para la proporción de negocio retenida  $k_1$  que teníamos en (3.2).

- Segundo tramo, para  $u \geq b$ : Cuando las reservas superan el nivel de umbral  $b$ , el asegurador asume un porcentaje  $k_2$  de la cuantía de los siniestros, mientras que el reasegurador se hace cargo del  $(1 - k_2)$  restante. En este caso, tendremos una siniestralidad agregada esperada de  $k_2 \lambda E[X]$  para el asegurador y de  $(1 - k_2) \lambda E[X]$  para el reasegurador. Igual que en el tramo anterior, ahora la prima retenida por el asegurador,  $c_2$ , dependerá también del recargo  $\rho_R$  y de la proporción  $k_2$  de la cartera retenida,

$$c_2 = \lambda p_1 (1 + \rho) - (1 - k_2) (1 + \rho_R) \lambda p_1. \quad (4.4)$$

Esta prima retenida, también nos permite calcular el nuevo recargo neto de reaseguro,  $\rho_{N2}$ , a partir de

$$c_2 = k_2 \lambda p_1 (1 + \rho_{N2}), \quad (4.5)$$

obteniendo una expresión similar a (4.3) expresada en función de  $k_2$ . Esta nueva proporción de negocio retenida tendrá el mismo límite inferior, (3.2), al cumplirse la condición de beneficio neto.



En el modelo clásico, el proceso de las reservas viene definido como  $U(t) = u + ct - S(t)$  que determina una variación  $dU(t) = cdt - dS(t)$ . Con la introducción de la estrategia de reaseguro proporcional de umbral, se ve modificado el proceso, llegando a la siguiente expresión,

$$dU(t) = \begin{cases} c_1 dt - dS^*(t), & 0 \leq U(t) < b, \\ c_2 dt - dS^*(t), & U(t) \geq b, \end{cases}$$

donde  $S^*(t)$  es la siniestralidad agregada, teniendo en cuenta que los siniestros asumidos son  $k_1 X$  cuando  $0 \leq U(t) < b$  y  $k_2 X$  para  $U(t) \geq b$ .

La idea gráfica del proceso de las reservas con la introducción del reaseguro proporcional de umbral se muestra en la Figura 4.1.

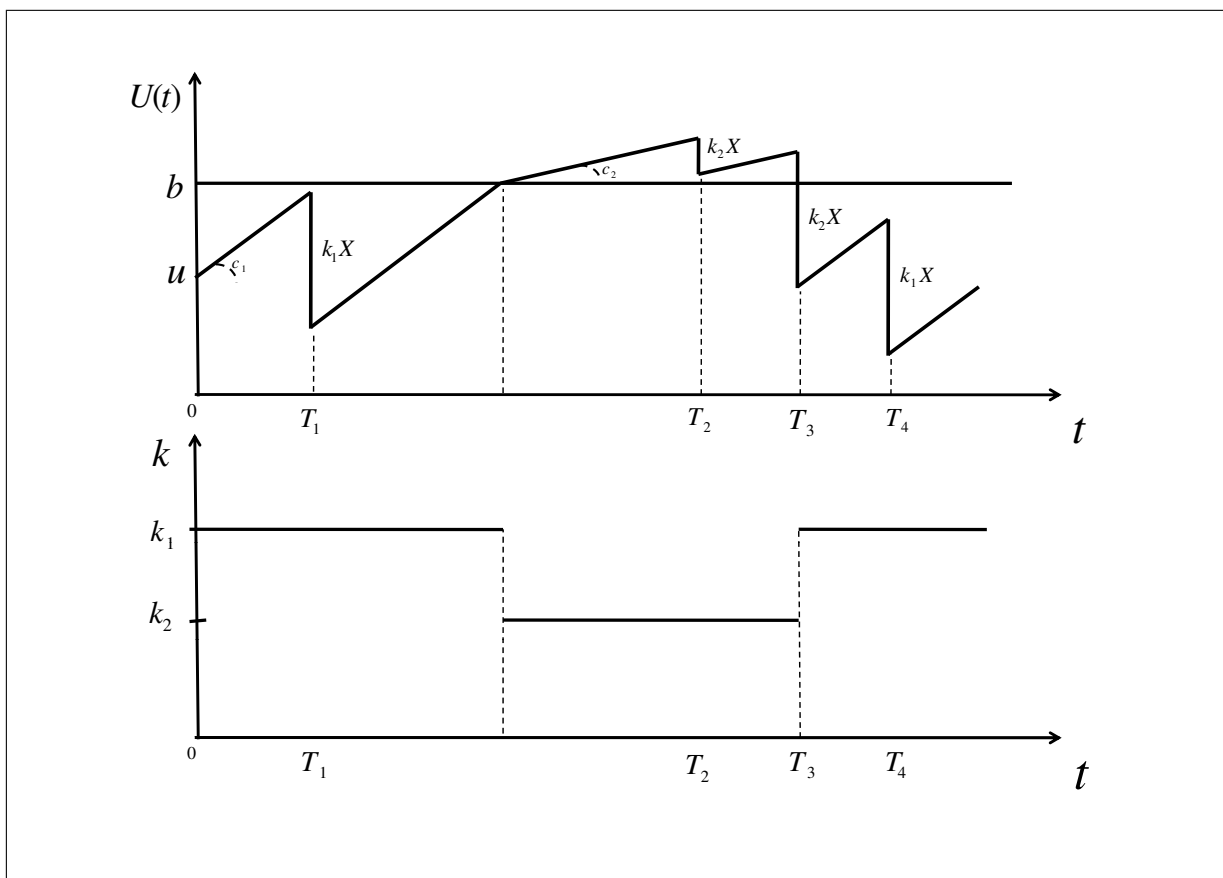


Figura 4.1: Estrategia de reaseguro proporcional de umbral

### 4.3. Función Gerber-Shiu

El objetivo de este apartado es obtener la ecuación íntegro-diferencial que cumple la función Gerber-Shiu, definida previamente en (2.32), cuando se modifica el modelo clásico con una estrategia de reaseguro proporcional de umbral.

Esta función,  $\phi(u)$ , se comporta de forma distinta, dependiendo de si las reservas iniciales  $u$  son inferiores o superiores a un determinado nivel  $b$ . Por lo tanto, por conveniencia se utiliza la siguiente notación,

$$\phi(u) = \begin{cases} \phi_1(u), & 0 \leq u < b, \\ \phi_2(u), & u \geq b. \end{cases}$$

**Teorema 3** *La función Gerber-Shiu,  $\phi(u)$ , satisface las ecuaciones íntegro-diferenciales*

$$\phi'(u) = \begin{cases} \phi'_1(u), & 0 \leq u < b, \\ \phi'_2(u), & u \geq b, \end{cases} \quad (4.6)$$

donde

$$\phi'_1(u) = \frac{\lambda + \delta}{c_1} \phi_1(u) - \frac{\lambda}{c_1} \int_0^{\frac{u}{k_1}} \phi_1(u - k_1 x) dF(x) - \frac{\lambda}{c_1} \xi_1(u),$$

$$\begin{aligned} \phi'_2(u) = & \frac{\lambda + \delta}{c_2} \phi_2(u) - \frac{\lambda}{c_2} \left[ \int_0^{\frac{u-b}{k_2}} \phi_2(u - k_2 x) dF(x) \right. \\ & \left. + \int_{\frac{u-b}{k_2}}^{\frac{u}{k_2}} \phi_1(u - k_2 x) dF(x) \right] - \frac{\lambda}{c_2} \xi_2(u), \end{aligned}$$

y

$$\xi_1(t) = \int_{\frac{t}{k_1}}^{\infty} w(t, k_1 x - t) f(x) dx,$$

$$\xi_2(t) = \int_{\frac{t}{k_2}}^{\infty} w(t, k_2 x - t) f(x) dx.$$

Siendo  $w(U(T-), |U(T)|)$  la función de penalización que es no negativa y depende de  $U(T-) > 0$ , la reserva inmediata antes de la ruina, y de  $|U(T)| > 0$ , el déficit de la ruina.

### Demostración.

Para  $0 \leq u < b$ ,

$$\begin{aligned}
\phi_1(u) &= \int_0^{\frac{b-u}{c_1}} e^{-\delta t} \lambda e^{-\lambda t} \left[ \int_0^{\frac{u+c_1 t}{k_1}} \phi(u + c_1 t - k_1 x) dF(x) \right. \\
&\quad \left. + \int_{\frac{u+c_1 t}{k_1}}^{\infty} w(u + c_1 t, k_1 x - u - c_1 t) dF(x) \right] dt \\
&\quad + \int_{\frac{b-u}{c_1}}^{\infty} e^{-\delta t} \lambda e^{-\lambda t} \left[ \int_0^{\frac{b+c_2(t-\frac{b-u}{c_1})}{k_2}} \phi\left(b + c_2\left(t - \frac{b-u}{c_1}\right) - k_2 x\right) dF(x) \right. \\
&\quad \left. + \int_{\frac{b+c_2(t-\frac{b-u}{c_1})}{k_2}}^{\infty} w\left(b + c_2\left(t - \frac{b-u}{c_1}\right), k_2 x - b - c_2\left(t - \frac{b-u}{c_1}\right)\right) dF(x) \right] dt \\
&= \lambda \int_0^{\frac{b-u}{c_1}} e^{-(\lambda+\delta)t} \gamma_1(u + c_1 t) dt + \lambda \int_{\frac{b-u}{c_1}}^{\infty} e^{-(\lambda+\delta)t} \gamma_2\left(b + c_2\left(t - \frac{b-u}{c_1}\right)\right) dt,
\end{aligned} \tag{4.7}$$

donde

$$\gamma_1(t) = \int_0^{\frac{t}{k_1}} \phi(t - k_1 x) dF(x) + \xi_1(t),$$

$$\gamma_2(t) = \int_0^{\frac{t}{k_2}} \phi(t - k_2 x) dF(x) + \xi_2(t).$$

Se realiza un cambio de variable en (4.7) quedando

$$\begin{aligned}
\phi_1(u) &= \frac{\lambda}{c_1} e^{\frac{(\lambda+\delta)u}{c_1}} \int_u^b e^{-\frac{(\lambda+\delta)t}{c_1}} \gamma_1(t) dt \\
&\quad + \frac{\lambda}{c_2} e^{\frac{(\lambda+\delta)u}{c_1}} \int_b^{\infty} e^{-(\lambda+\delta)\left(t - \frac{(c_1-c_2)b}{c_1}\right)/c_2} \gamma_2(t) dt.
\end{aligned} \tag{4.8}$$

Al derivar (4.8) respecto a  $u$ , se obtiene

$$\phi_1'(u) = \frac{\lambda + \delta}{c_1} \phi_1(u) - \frac{\lambda}{c_1} \int_0^{\frac{u}{k_1}} \phi_1(u - k_1 x) dF(x) - \frac{\lambda}{c_1} \xi_1(u).$$

De forma similar, para  $u \geq b$ ,

$$\begin{aligned}\phi_2(u) &= \int_0^\infty e^{-\delta t} \lambda e^{-\lambda t} \left[ \int_0^{\frac{u+c_2 t}{k_2}} \phi(u + c_2 t - k_2 x) dF(x) \right. \\ &\quad \left. + \int_{\frac{u+c_2 t}{k_2}}^\infty w(u + c_2 t, k_2 x - u - c_2 t) dF(x) \right] dt \\ &= \lambda \int_0^\infty e^{-(\lambda+\delta)t} \gamma_2(u + c_2 t) dt,\end{aligned}$$

haciendo un cambio de variable y derivando respecto a  $u$  se obtiene

$$\begin{aligned}\phi_2'(u) &= \frac{\lambda+\delta}{c_2} \phi_2(u) - \frac{\lambda}{c_2} \left[ \int_0^{\frac{u-b}{k_2}} \phi_2(u - k_2 x) dF(x) \right. \\ &\quad \left. + \int_{\frac{u-b}{k_2}}^{\frac{u}{k_2}} \phi_1(u - k_2 x) dF(x) \right] - \frac{\lambda}{c_2} \xi_2(u).\end{aligned}$$

□

A partir de este teorema, se obtienen dos corolarios para la transformada de Laplace del momento de ruina y la probabilidad de ruina.

**Corolario 1** *La transformada de Laplace del momento de ruina,  $\phi(u) = E[e^{-\delta T} I(T < \infty)]$ , cumple las siguientes ecuaciones íntegro-diferenciales,*

$$\phi'(u) = \begin{cases} \phi_1'(u), & 0 \leq u < b, \\ \phi_2'(u), & u \geq b, \end{cases} \quad (4.9)$$

donde

$$\begin{aligned}\phi_1'(u) &= \frac{\lambda + \delta}{c_1} \phi_1(u) - \frac{\lambda}{c_1} \int_0^{\frac{u}{k_1}} \phi_1(u - k_1 x) dF(x) - \frac{\lambda}{c_1} \left[ 1 - F\left(\frac{u}{k_1}\right) \right], \\ \phi_2'(u) &= \frac{\lambda + \delta}{c_2} \phi_2(u) - \frac{\lambda}{c_2} \left[ \int_0^{\frac{u-b}{k_2}} \phi_2(u - k_2 x) dF(x) \right. \\ &\quad \left. + \int_{\frac{u-b}{k_2}}^{\frac{u}{k_2}} \phi_1(u - k_2 x) dF(x) \right] - \frac{\lambda}{c_2} \left[ 1 - F\left(\frac{u}{k_2}\right) \right].\end{aligned}$$

**Demostración.**

Si sustituimos  $w(x, y) = 1$  en (4.6) se obtienen las ecuaciones íntegro-diferenciales para la transformada de Laplace del momento de ruina,  $\phi(u) = E [e^{-\delta T} I (T < \infty)]$ .  $\square$

**Corolario 2** *La probabilidad de ruina,  $\phi(u) = E [I (T < \infty)] = \psi(u)$ , cumple las siguientes ecuaciones íntegro-diferenciales,*

$$\psi'(u) = \begin{cases} \psi'_1(u), & 0 \leq u < b, \\ \psi'_2(u), & u \geq b, \end{cases} \quad (4.10)$$

donde

$$\begin{aligned} \psi'_1(u) &= \frac{\lambda}{c_1} \psi_1(u) - \frac{\lambda}{c_1} \int_0^{\frac{u}{k_1}} \psi_1(u - k_1 x) dF(x) - \frac{\lambda}{c_1} \left[ 1 - F\left(\frac{u}{k_1}\right) \right], \\ \psi'_2(u) &= \frac{\lambda}{c_2} \psi_2(u) - \frac{\lambda}{c_2} \left[ \int_0^{\frac{u-b}{k_2}} \psi_2(u - k_2 x) dF(x) \right. \\ &\quad \left. + \int_{\frac{u-b}{k_2}}^{\frac{u}{k_2}} \psi_1(u - k_2 x) dF(x) \right] - \frac{\lambda}{c_2} \left[ 1 - F\left(\frac{u}{k_2}\right) \right]. \end{aligned}$$

**Demostración.**

Si sustituimos  $w(x, y) = 1$  y  $\delta = 0$  en (4.6) se obtienen las ecuaciones íntegro-diferenciales para la probabilidad de ruina,  $\phi(u) = E [I (T < \infty)] = \psi(u)$ .  $\square$

A partir de las expresiones obtenidas en (4.6) para la estrategia de reaseguro proporcional de umbral, podemos hallar los siguientes casos particulares:

- **Caso 1:** Si  $k_1 = k_2 = k$ , a partir del teorema anterior, se consigue la ecuación íntegro-diferencial de la función Gerber-Shiu en un modelo con reaseguro proporcional con un nivel de retención  $k$  fijado, independiente del nivel de las reservas

$$\phi'(u) = \frac{\lambda + \delta}{c} \phi(u) - \frac{\lambda}{c} \int_0^{\frac{u}{k}} \phi(u - kx) dF(x) - \frac{\lambda}{c} \xi(u), \quad u \geq 0 \quad (4.11)$$

siendo

$$\xi(t) = \int_{\frac{t}{k}}^{\infty} w(t, kx - t)f(x)dx.$$

**Demostración.**

Sustituyendo el nivel de retención  $k$  en las expresiones (4.6) del teorema anterior y teniendo en cuenta que

$$\rho_N = \rho_{N1} = \rho_{N2} = \rho_R - \frac{\rho_R - \rho}{k}, \quad (4.12)$$

por tanto

$$c = c_1 = c_2 = k\lambda p_1(1 + \rho_N), \quad (4.13)$$

se obtiene,

$$\phi_1'(u) = \frac{\lambda + \delta}{c} \phi_1(u) - \frac{\lambda}{c} \int_0^{\frac{u}{k}} \phi_1(u - kx)dF(x) - \frac{\lambda}{c} \xi(u), \quad (4.14)$$

$$\begin{aligned} \phi_2'(u) = & \frac{\lambda + \delta}{c} \phi_2(u) - \frac{\lambda}{c} \left[ \int_0^{\frac{u-b}{k}} \phi_2(u - kx)dF(x) \right. \\ & \left. + \int_{\frac{u-b}{k}}^{\frac{u}{k}} \phi_1(u - kx)dF(x) \right] - \frac{\lambda}{c} \xi(u), \end{aligned} \quad (4.15)$$

donde,

$$\xi(t) = \xi_1(t) = \xi_2(t) = \int_{\frac{t}{k}}^{\infty} w(t, kx - t)f(x)dx.$$

La integral de la expresión (4.14), se puede transformar en dos, de forma que

$$\begin{aligned} \frac{\lambda}{c} \int_{\frac{u-b}{k}}^{\frac{u}{k}} \phi_1(u - kx)dF(x) &= -\frac{\lambda}{c} \int_0^{\frac{u-b}{k}} \phi_1(u - kx)dF(x) \\ &+ \frac{\lambda + \delta}{c} \phi_1(u) - \phi_1'(u) - \frac{\lambda}{c} \xi(u), \end{aligned} \quad (4.16)$$

Ya que (4.16), tiene el mismo valor que la siguiente integral de (4.15)

$$\begin{aligned} \frac{\lambda}{c} \int_{\frac{u-b}{k}}^{\frac{u}{k}} \phi_1(u - kx)dF(x) &= -\frac{\lambda}{c} \int_0^{\frac{u-b}{k}} \phi_2(u - kx)dF(x) \\ &+ \frac{\lambda + \delta}{c} \phi_2(u) - \phi_2'(u) - \frac{\lambda}{c} \xi(u), \end{aligned}$$

se deduce que

$$\phi_1(u) = \phi_2(u) = \phi(u).$$

□

- Caso 2: Si  $k_1 = k_2 = 1$  en las expresiones (4.6) del teorema 3, se consigue la ecuación íntegro-diferencial de la función Gerber-Shiu en un modelo clásico sin ninguna estrategia de reaseguro, siendo esta expresión (Gerber y Shiu (1998)),

$$\phi'(u) = \frac{\lambda + \delta}{c} \phi(u) - \frac{\lambda}{c} \int_0^u \phi(u-x) dF(x) - \frac{\lambda}{c} \xi(u), \quad u \geq 0 \quad (4.17)$$

donde

$$\xi(t) = \int_t^\infty w(t, x-t) f(x) dx.$$

#### **Demostración.**

A partir del Caso 1, se sustituye  $k = 1$  en (4.11), obteniendo la ecuación íntegro-diferencial de la función Gerber-Shiu en un modelo clásico sin reaseguro. □

## **4.4. Probabilidad y momento de ruina con cuantía de los siniestros exponencial**

En este apartado, se considera el caso en que la cuantía individual de los siniestros se distribuye como una exponencial unitaria. En primer lugar, se hallan las expresiones para la transformada de Laplace del momento de ruina,  $\phi(u) = E [e^{-\delta T} I (T < \infty)]$  y, posteriormente, se obtienen las expresiones de la probabilidad de ruina,  $\psi(u)$  y de los momentos de la variable aleatoria momento de ruina.

#### 4.4.1. Transformada de Laplace del momento de ruina

Sustituyendo la función de densidad,  $f(x) = e^{-x}$  en (4.9) y derivando respecto a  $u$  se obtienen las siguientes ecuaciones diferenciales ordinarias,

$$\phi_1''(u) - \left( \frac{\lambda+\delta}{c_1} - \frac{1}{k_1} \right) \phi_1'(u) - \frac{\delta}{c_1 k_1} \phi_1(u) = 0, \quad 0 \leq u < b, \quad (4.18)$$

$$\phi_2''(u) - \left( \frac{\lambda+\delta}{c_2} - \frac{1}{k_2} \right) \phi_2'(u) - \frac{\delta}{c_2 k_2} \phi_2(u) = 0, \quad u \geq b,$$

cuyas correspondientes ecuaciones características son,

$$r^2 - \left( \frac{\lambda+\delta}{c_1} - \frac{1}{k_1} \right) r - \frac{\delta}{c_1 k_1} = 0, \quad 0 \leq u < b, \quad (4.19)$$

$$s^2 - \left( \frac{\lambda+\delta}{c_2} - \frac{1}{k_2} \right) s - \frac{\delta}{c_2 k_2} = 0, \quad u \geq b,$$

siendo  $r_1 < 0$ ,  $r_2 > 0$ ,  $s_1 < 0$  y  $s_2 > 0$  sus raíces reales.

Entonces, la solución general para la transformada de Laplace del momento de ruina es

$$\phi(u) = \begin{cases} \phi_1(u) = C_1 e^{r_1 u} + C_2 e^{r_2 u}, & 0 \leq u < b, \\ \phi_2(u) = D_1 e^{s_1 u} + D_2 e^{s_2 u}, & u \geq b, \end{cases} \quad (4.20)$$

donde los valores  $C_i$ ,  $D_i$ ,  $i = 1, 2$ , dependerán de  $\delta$  y se encuentran a partir de las siguientes cuatro ecuaciones:

1. Considerando que  $\lim_{u \rightarrow \infty} \phi(u) = 0$ , debido a que cuando las reservas iniciales tienden a infinito la probabilidad de ruina es 0, obtenemos que

$$D_2 = 0 \quad (4.21)$$

2. Teniendo en cuenta que  $\phi(u)$  es continua en el punto  $u = b$ , es decir,  $\phi_1(b) = \phi_2(b)$ , obtenemos

$$\sum_{i=1}^2 C_i e^{r_i b} - D_1 e^{s_1 b} = 0. \quad (4.22)$$



3. Sustituyendo la estructura de solución (4.20) en (4.9), tendremos para el tramo  $0 \leq u < b$ ,

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^2 C_i e^{r_i u} r_i &= \frac{\lambda + \delta}{c_1} \sum_{i=1}^2 C_i e^{r_i u} - \frac{\lambda}{c_1} \int_0^{\frac{u}{k_1}} \left( \sum_{i=1}^2 C_i e^{r_i (u - k_1 x)} e^{-x} \right) dx - \frac{\lambda}{c_1} e^{-\frac{u}{k_1}} \\
&= \frac{\lambda + \delta}{c_1} \sum_{i=1}^2 C_i e^{r_i u} - \frac{\lambda}{c_1} \left( \sum_{i=1}^2 C_i e^{r_i u} \int_0^{\frac{u}{k_1}} e^{-x(r_i k_1 + 1)} dx \right) - \frac{\lambda}{c_1} e^{-\frac{u}{k_1}} \\
&= \frac{\lambda + \delta}{c_1} \sum_{i=1}^2 C_i e^{r_i u} - \frac{\lambda}{c_1} \left( \sum_{i=1}^2 C_i e^{r_i u} \frac{1}{r_i k_1 + 1} \left( 1 - e^{-ur_i - \frac{u}{k_1}} \right) \right) \\
&\quad - \frac{\lambda}{c_1} e^{-\frac{u}{k_1}},
\end{aligned}$$

por lo tanto,

$$\sum_{i=1}^2 C_i e^{r_i u} r_i = \frac{\lambda + \delta}{c_1} \sum_{i=1}^2 C_i e^{r_i u} - \frac{\lambda}{c_1} \sum_{i=1}^2 \frac{C_i e^{r_i u}}{r_i k_1 + 1} + \frac{\lambda}{c_1} \sum_{i=1}^2 \frac{C_i e^{-\frac{u}{k_1}}}{r_i k_1 + 1} - \frac{\lambda}{c_1} e^{-\frac{u}{k_1}}, \quad (4.23)$$

reordenando (4.23),

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^2 C_i e^{r_i u} \left( r_i - \frac{\lambda + \delta}{c_1} + \frac{\lambda}{c_1 (r_i k_1 + 1)} \right) &= \frac{\lambda}{c_1} e^{-\frac{u}{k_1}} \left( \sum_{i=1}^2 \frac{C_i}{r_i k_1 + 1} - 1 \right), \\
\sum_{i=1}^2 C_i e^{r_i u} \left( r_i^2 - \left( \frac{\lambda + \delta}{c_1} - \frac{1}{k_1} \right) r_i - \frac{\delta}{c_1 k_1} \right) &= \frac{\lambda}{c_1} e^{-\frac{u}{k_1}} \left( \sum_{i=1}^2 \frac{C_i}{r_i k_1 + 1} - 1 \right),
\end{aligned}$$

y simplificando,

$$0 = e^{-\frac{u}{k_1}} \left( \sum_{i=1}^2 \frac{C_i}{r_i k_1 + 1} - 1 \right). \quad (4.24)$$

Finalmente, de la expresión (4.24) se obtiene la tercera ecuación,

$$\sum_{i=1}^2 \frac{C_i}{r_i k_1 + 1} = 1. \quad (4.25)$$

Para el tramo  $u \geq b$ ,

$$\begin{aligned}
D_1 e^{s_1 u} s_1 &= \frac{\lambda + \delta}{c_2} D_1 e^{s_1 u} - \frac{\lambda}{c_2} \left[ \int_0^{\frac{u-b}{k_2}} D_1 e^{s_1(u-k_2 x)} e^{-x} dx \right. \\
&\quad \left. + \int_{\frac{u-b}{k_2}}^{\frac{u}{k_2}} \left( \sum_{i=1}^2 C_i e^{r_i(u-k_2 x)} e^{-x} \right) dx \right] - \frac{\lambda}{c_2} e^{-\frac{u}{k_2}} \\
&= \frac{\lambda + \delta}{c_2} D_1 e^{s_1 u} - \frac{\lambda}{c_2} \left[ \frac{D_1 e^{s_1 u}}{s_1 k_2 + 1} \left( 1 - e^{-\frac{(u-b)(s_1 k_2 + 1)}{k_2}} \right) \right. \\
&\quad \left. - \left( \sum_{i=1}^2 C_i e^{r_i u} \frac{1}{r_i k_2 + 1} \left( e^{-\frac{u(r_i k_2 + 1)}{k_2}} - e^{-\frac{(u-b)(r_i k_2 + 1)}{k_2}} \right) \right) \right] - \frac{\lambda}{c_2} e^{-\frac{u}{k_2}},
\end{aligned}$$

reordenando se obtiene,

$$\begin{aligned}
D_1 e^{s_1 u} \left( s_1 - \frac{\lambda + \delta}{c_2} + \frac{\lambda}{c_2 (s_1 k_2 + 1)} \right) &= \frac{\lambda}{c_2} \left[ \frac{D_1 e^{s_1 u} e^{-\frac{(u-b)(s_1 k_2 + 1)}{k_2}}}{s_1 k_2 + 1} \right. \\
&\quad \left. + \sum_{i=1}^2 \frac{C_i e^{r_i u} e^{-\frac{u(r_i k_2 + 1)}{k_2}}}{r_i k_2 + 1} - \sum_{i=1}^2 \frac{C_i e^{r_i u}}{r_i k_2 + 1} e^{-\frac{(u-b)(r_i k_2 + 1)}{k_2}} - e^{-\frac{u}{k_2}} \right],
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
D_1 e^{s_1 u} \left( s_1^2 - \left( \frac{\lambda + \delta}{c_2} - \frac{1}{k_2} \right) s_1 - \frac{\delta}{c_2 k_2} \right) &= \frac{\lambda}{c_2} \left[ \frac{D_1 e^{b(s_1 + \frac{1}{k_2})}}{s_1 k_2 + 1} e^{-\frac{u}{k_2}} \right. \\
&\quad \left. + \sum_{i=1}^2 \frac{C_i}{r_i k_2 + 1} e^{-\frac{u}{k_2}} - \sum_{i=1}^2 \frac{C_i e^{b(r_i + \frac{1}{k_2})}}{r_i k_2 + 1} e^{-\frac{u}{k_2}} - e^{-\frac{u}{k_2}} \right],
\end{aligned}$$

y simplificando,

$$0 = e^{-\frac{u}{k_2}} \left[ \frac{D_1 e^{b(s_1 + \frac{1}{k_2})}}{s_1 k_2 + 1} + \sum_{i=1}^2 \frac{C_i}{r_i k_2 + 1} \left( 1 - e^{b(r_i + \frac{1}{k_2})} \right) - 1 \right]. \quad (4.26)$$

De la expresión (4.26), se obtiene la cuarta y última ecuación, que es

$$\frac{D_1 e^{b(s_1 + \frac{1}{k_2})}}{s_1 k_2 + 1} + \sum_{i=1}^2 \frac{C_i}{r_i k_2 + 1} \left( 1 - e^{b(r_i + \frac{1}{k_2})} \right) = 1. \quad (4.27)$$

Resolviendo el sistema de las ecuaciones (4.22), (4.25) y (4.27), se hallan los coeficientes para  $C_i$ ,  $i = 1, 2$  y  $D_1$ , que explicitamos a continuación en función de  $\delta$ ,

$$C_1(\delta) = \frac{A_{[2,1]}A_{[1,1]} \left( (k_2s_1+1)r_2(k_2-k_1) - A_{[1,2]}k_2(r_2-s_1)e^{\frac{A_{[2,2]}b}{k_2}} \right)}{(k_2s_1+1)(r_1-r_2)(k_1-k_2) - k_2 \left( A_{[1,1]}A_{[2,2]}(s_1-r_1)e^{\frac{A_{[2,1]}b}{k_2}} - A_{[1,2]}A_{[2,1]}(s_1-r_2)e^{\frac{A_{[2,2]}b}{k_2}} \right)},$$

$$C_2(\delta) = A_{[1,2]} - \frac{A_{[1,2]}}{A_{[1,1]}}C_1(\delta),$$

$$D_1(\delta) = A_{[1,2]}e^{(r_2-s_1)b} + \left( e^{(r_1-s_1)b} - \frac{A_{[1,2]}}{A_{[1,1]}}e^{(r_2-s_1)b} \right) C_1(\delta),$$

siendo  $A_{[i,j]} = (k_i r_j + 1)$ ,  $i, j = 1, 2$ .

Analizando los casos particulares para la transformada de Laplace del momento de ruina tenemos:

- **Caso 1:** Si  $k_1 = k_2 = k$ , se obtiene el modelo con reaseguro proporcional con un nivel  $k$  fijo que no depende del nivel de las reservas. La transformada de Laplace del momento de ruina es, en este caso

$$\phi(u) = (1 - kR_\delta) e^{-R_\delta u}, \quad u \geq 0, \quad (4.28)$$

siendo  $R_\delta = |r_1|$  el coeficiente de ajuste. Donde  $r_1$  es la raíz negativa de

$$r^2 - \left( \frac{\lambda + \delta}{c} - \frac{1}{k} \right) r - \frac{\delta}{ck} = 0,$$

con valor

$$r_1 = \frac{-c + k(\delta + \lambda) - \sqrt{4ck\delta + (c - k(\delta + \lambda))^2}}{2ck}.$$

- **Caso 2:** Si  $k_1 = k_2 = 1$ , se obtiene la transformada de Laplace del momento de ruina en un modelo clásico sin ninguna estrategia de reaseguro. Esta expresión es (con  $\text{Exp}(\beta)$  ver ecuación (2.29)),

$$\phi(u) = (1 - R_\delta) e^{-R_\delta u}, \quad u \geq 0, \quad (4.29)$$

siendo  $R_\delta = |r_1|$  el coeficiente de ajuste y  $r_1$  la raíz negativa de

$$r^2 - \left( \frac{\lambda + \delta}{c} - 1 \right) r - \frac{\delta}{c} = 0,$$

con valor

$$r_1 = \frac{-c + \delta + \lambda - \sqrt{4c\delta + (c - \delta - \lambda)^2}}{2c}.$$

#### 4.4.2. Probabilidad de ruina

A partir del Corolario 2 del Teorema 3 (o a partir de (4.18) haciendo  $\delta = 0$ ), tenemos las siguientes ecuaciones diferenciales ordinarias,

$$\psi_1''(u) - \left( \frac{\lambda}{c_1} - \frac{1}{k_1} \right) \psi_1'(u) = 0, \quad 0 \leq u < b, \quad (4.30)$$

$$\psi_2''(u) - \left( \frac{\lambda}{c_2} - \frac{1}{k_2} \right) \psi_2'(u) = 0, \quad u \geq b,$$

y sus ecuaciones características

$$r^2 - \left( \frac{\lambda}{c_1} - \frac{1}{k_1} \right) r = 0, \quad 0 \leq u < b, \quad (4.31)$$

$$s^2 - \left( \frac{\lambda}{c_2} - \frac{1}{k_2} \right) s = 0, \quad u \geq b,$$

siendo  $r_1 = -\frac{\rho_{N1}}{k_1(1+\rho_{N1})}$ ,  $r_2 = 0$ ,  $s_1 = -\frac{\rho_{N2}}{k_2(1+\rho_{N2})}$  y  $s_2 = 0$  sus raíces reales.

La solución general para la probabilidad de ruina es

$$\psi(u) = \begin{cases} \psi_1(u) = C_1 e^{-\frac{\rho_{N1}}{k_1(1+\rho_{N1})}u} + C_2, & 0 \leq u < b, \\ \psi_2(u) = D_1 e^{-\frac{\rho_{N2}}{k_2(1+\rho_{N2})}u} + D_2, & u \geq b, \end{cases} \quad (4.32)$$

siendo los nuevos valores de los coeficientes  $C_i, D_i, i = 1, 2$ , los siguientes:

$$C_1(0) = \frac{h}{h(1 + \rho_{N1}) + (k_1 - k_2)\rho_{N1}(1 + \rho_{N1})e^{-\frac{b}{k_2}} + (k_2\rho_{N1} - h)e^{-\frac{\rho_{N1}}{k_1(1+\rho_{N1})}b}},$$

con  $h = (k_1 + \rho_{N1}(k_1 - k_2))\rho_{N2}$ .

$$C_2(0) = 1 - (1 + \rho_{N1})C_1(0),$$

$$D_1(0) = e^{\frac{\rho_{N2}}{k_2(1+\rho_{N2})}b} \left( 1 - \left( (1 + \rho_{N1}) - e^{-\frac{\rho_{N1}}{k_1(1+\rho_{N1})}b} \right) C_1(0) \right),$$

$$D_2(0) = 0.$$

Sustituyendo estos nuevos coeficientes en (4.32), se obtiene,

$$\psi(u) = \begin{cases} \psi_1(u) = 1 - (1 + \rho_{N1})C_1(0) + C_1(0)e^{-\frac{\rho_{N1}}{k_1(1+\rho_{N1})}u}, & 0 \leq u < b, \\ \psi_2(u) = e^{\frac{\rho_{N2}(b-u)}{k_2(1+\rho_{N2})}} \left( 1 - \left( (1 + \rho_{N1}) - e^{-\frac{b\rho_{N1}}{k_1(1+\rho_{N1})}} \right) C_1(0) \right), & u \geq b, \end{cases} \quad (4.33)$$

En los casos particulares de  $k_1 = k_2 = k$  y  $k_1 = k_2 = 1$ , se sustituye  $\delta = 0$  en las expresiones (4.28) y (4.29), obteniendo sus respectivas probabilidades de ruina. Por lo tanto:

- **Caso 1:** Si  $k_1 = k_2 = k$ , se tiene la probabilidad de ruina en un modelo con reaseguro proporcional con un nivel de retención  $k$  fijo,

$$\psi(u) = (1 - kR_0)e^{-R_0u}, \quad u \geq 0, \quad (4.34)$$

siendo  $R_0 = |r_1|$  el coeficiente de ajuste. Donde  $r_1$  es la raíz negativa de

$$r^2 - \left( \frac{\lambda}{c} - \frac{1}{k} \right) r = 0,$$

de valor

$$r_1 = -\frac{\rho_N}{k(1 + \rho_N)}.$$

- **Caso 2:** Si  $k_1 = k_2 = 1$ , se obtiene la ecuación para la probabilidad de ruina en un modelo clásico,

$$\psi(u) = (1 - R_0) e^{-R_0 u}, \quad u \geq 0, \quad (4.35)$$

siendo  $R_0 = |r_1|$  el coeficiente de ajuste. Donde  $r_1$  es la raíz negativa de

$$r^2 - \left(\frac{\lambda}{c} - 1\right) r = 0,$$

de valor

$$r_1 = -\frac{\rho}{(1 + \rho)}.$$

#### 4.4.3. Momentos de la variable aleatoria momento de ruina

A partir de las expresiones (4.20) y (4.33) para  $\phi(u) = E[e^{-\delta T} I(T < \infty)]$  y  $\psi(u)$  respectivamente, se pueden obtener los momentos de orden  $n$  de la variable aleatoria momento de ruina,

$$(-1)^n \frac{\partial^n \phi(u)}{\partial \delta^n} \Big|_{\delta=0} = E[T^n I(T < \infty)].$$

Así, la esperanza del momento de ruina considerando que la ruina ocurra viene dada por:

$$E[T | T < \infty] = -\frac{\frac{\partial \phi(u)}{\partial \delta} \Big|_{\delta=0}}{\psi(u)}. \quad (4.36)$$

Entonces, para  $0 \leq u < b$

$$E[T | T < \infty] = \frac{\frac{\partial C_1(\delta)}{\partial \delta} \Big|_{\delta=0} e^{-\frac{\rho_{N1}}{k_1(1+\rho_{N1})}u} - \frac{C_1(0)u e^{-\frac{\rho_{N1}}{k_1(1+\rho_{N1})}u}}{\lambda k_1 \rho_{N1} (1+\rho_{N1})} + \frac{\partial C_2(\delta)}{\partial \delta} \Big|_{\delta=0} + \frac{C_2(0)u}{\lambda k_1 \rho_{N1}}}{1 - (1 + \rho_{N1}) C_1(0) + C_1(0) e^{-\frac{\rho_{N1}}{k_1(1+\rho_{N1})}u}} \quad (4.37)$$

y para  $u \geq b$

$$E [T | T < \infty] = -\frac{\frac{\partial D_1(\delta)}{\partial \delta} \Big|_{\delta=0}}{D_1(0)} + \frac{1}{\lambda k_2 \rho_{N2} (1 + \rho_{N2})} u. \quad (4.38)$$

Se observa que para  $u \geq b$ , la expresión obtenida para la  $E [T | T < \infty]$  es un polinomio de grado 1 respecto a  $u$ . Si  $k_2 = 1$ , su pendiente coincide con la obtenida por Gerber (1979, pág. 138).

Para la obtención de la varianza del momento de ruina si la ruina ocurre, primero se halla el momento ordinario de orden 2 para luego sustituir en

$$V[T | T < \infty] = E [T^2 | T < \infty] - (E [T | T < \infty])^2. \quad (4.39)$$

Se tiene que para  $0 \leq u < b$

$$\begin{aligned} E [T^2 I (T < \infty)] &= \frac{\partial^2 C_1(\delta)}{\partial \delta^2} \Big|_{\delta=0} e^{-\frac{\rho_{N1}}{k_1(1+\rho_{N1})} u} - 2 \frac{\partial C_1(\delta)}{\partial \delta} \Big|_{\delta=0} \frac{u e^{-\frac{\rho_{N1}}{k_1(1+\rho_{N1})} u}}{\lambda k_1 \rho_{N1} (1 + \rho_{N1})} \quad (4.40) \\ &+ C_1(0) u e^{-\frac{\rho_{N1}}{k_1(1+\rho_{N1})} u} \left( \frac{u}{(\lambda k_1 \rho_{N1} (1 + \rho_{N1}))^2} + \frac{2}{\lambda^2 k_1 \rho_{N1}^3} \right) \\ &+ \frac{\partial^2 C_2(\delta)}{\partial \delta^2} \Big|_{\delta=0} + 2 \frac{\partial C_2(\delta)}{\partial \delta} \Big|_{\delta=0} \frac{u}{\lambda k_1 \rho_{N1}} \\ &+ C_2(0) u \left( \frac{u}{(\lambda k_1 \rho_{N1})^2} - \frac{2}{\lambda^2 k_1 \rho_{N1}^3} \right), \end{aligned}$$

y dividiendo (4.40) por la probabilidad de ruina, se obtiene el momento ordinario de orden 2 de la variable aleatoria momento de ruina, condicionado a que la ruina suceda,

$$E [T^2 | T < \infty] = \frac{E [T^2 I (T < \infty)]}{1 - (1 + \rho_{N1}) C_1(0) + C_1(0) e^{-\frac{\rho_{N1}}{k_1(1+\rho_{N1})} u}}. \quad (4.41)$$

Finalmente, con la expresión (4.41) y (4.37) sustituidas en (4.39) se obtiene la varianza para este primer tramo.

Para  $u \geq b$ ,

$$E [T^2 | T < \infty] = \frac{\frac{\partial^2 D_1(\delta)}{\partial \delta^2} \Big|_{\delta=0}}{D_1(0)} + 2 \left( \frac{1}{\lambda^2 k_2 \rho_{N2}^3} - \frac{\frac{\partial D_1(\delta)}{\partial \delta} \Big|_{\delta=0}}{D_1(0) \lambda k_2 \rho_{N2} (1 + \rho_{N2})} \right) u \quad (4.42)$$

$$+ \frac{1}{(\lambda k_2 \rho_{N2} (1 + \rho_{N2}))^2} u^2,$$

y sustituyendo (4.42) y (4.38) en (4.39) se obtiene la varianza para el segundo tramo, siendo

$$V[T | T < \infty] = \frac{\frac{\partial^2 D_1(\delta)}{\partial \delta^2} \Big|_{\delta=0}}{D_1(0)} - \left( \frac{\frac{\partial D_1(\delta)}{\partial \delta} \Big|_{\delta=0}}{D_1(0)} \right)^2 + \frac{2}{\lambda^2 k_2 \rho_{N2}^3} u. \quad (4.43)$$

Se observa que (4.43), vuelve a ser un polinomio de primer grado respecto a  $u$ , como ocurría con  $E [T | T < \infty]$  en la expresión (4.38). De igual manera, su pendiente coincide para el caso particular  $k_2 = 1$ , con la varianza del momento de ruina condicionada a que la ruina ocurra en un modelo sin reaseguro proporcional (ver Dickson (2005, pág. 188)).

Si se analizan los casos particulares que se derivan del reaseguro proporcional de umbral, obtenemos la esperanza y varianza condicionada a que la ruina ocurra, tanto en un modelo con reaseguro proporcional donde el nivel de retención  $k$  es fijo como en las de un modelo clásico. A continuación se detallan estas expresiones respectivamente para los dos modelos.

- **Caso 1:** Si  $k_1 = k_2 = k$ ,

$$E [T | T < \infty] = \frac{1}{\lambda \rho_N} + \frac{1}{\lambda k \rho_N (1 + \rho_N)} u \quad (4.44)$$

Y para la varianza del momento de ruina condicionada a que la ruina ocurra, a partir de la expresión (4.39) se obtiene

$$V[T | T < \infty] = \frac{2 + \rho_N}{\lambda^2 \rho_N^3} + \frac{2}{\lambda^2 k \rho_N^3} u. \quad (4.45)$$



- Caso 2: Si  $k_1 = k_2 = 1$ , sustituyendo el valor de 1 para el nivel de retención en (4.44) y (4.45), teniendo en cuenta que el recargo de seguridad es  $\rho$ , se obtienen la esperanza y varianza condicionada a que la ruina ocurra en un modelo clásico sin reaseguro, siendo respectivamente,

$$E[T | T < \infty] = \frac{1}{\lambda\rho} + \frac{1}{\lambda\rho(1+\rho)}u, \quad (4.46)$$

$$V[T | T < \infty] = \frac{2+\rho}{\lambda^2\rho^3} + \frac{2}{\lambda^2\rho^3}u. \quad (4.47)$$

#### 4.4.4. Aplicación numérica

El objetivo de este subapartado es analizar el comportamiento básico de las diferentes magnitudes (transformada de Laplace del momento de ruina, probabilidad de ruina y momentos de la variable aleatoria momento de ruina) con este nuevo modelo de reaseguro proporcional de umbral. Los cálculos se realizan con el programa *Mathematica 6.0* para los siguientes valores de los parámetros:  $\rho = 0.15$ ,  $\rho_R = 0.25$ ,  $\lambda = 1$ ,  $k_1 = 0.8$ ,  $k_2 = 0.45$ ,  $\delta = 0.03$  y distintos niveles de umbral (bajo  $b = 2$ , medio  $b = 8$  y alto  $b = 15$ ).

Se utiliza un recargo de seguridad del reasegurador superior al del asegurador, de forma que los límites para los niveles de retención son

$$0.4 < k_1 \leq 1,$$

$$0.4 < k_2 \leq 1.$$

Los niveles de retención utilizados en este ejemplo concreto ( $k_1 = 0.8$  y  $k_2 = 0.45$ ), se encuentran dentro del dominio anterior.

El comportamiento de las magnitudes obtenido para los valores concretos de los recargos de seguridad ( $\rho = 0.15$  y  $\rho_R = 0.25$ ) es generalizable para cualesquiera otros valores de los recargos, siempre que  $\rho_R > \rho$ . El parámetro  $\delta$  puede interpretarse, como ya se ha comentado en el Capítulo 2, como la tasa de actualización de la función de penalización situada en el momento de la ruina. En el ejemplo se ha elegido el valor de 0.03 pero las conclusiones obtenidas son

generalizables para cualquier otro valor. Los niveles de retención considerados en este ejemplo son  $k_1 = 0.8$  y  $k_2 = 0.45$ . Se ha elegido un  $k_1 > k_2$  ya que como veremos en el último apartado de este capítulo utilizando la probabilidad de ruina como criterio de decisión, en las combinaciones óptimas de  $k_1$  y  $k_2$ , el nivel de retención cuando las reservas son menores al umbral es siempre superior al nivel de retención cuando las reservas son mayores al umbral. Sin embargo es necesario destacar que el comportamiento de las magnitudes en este ejemplo no es generalizable a otras combinaciones de  $k_1$  y  $k_2$  en las que  $k_1 < k_2$ .

Iniciamos el ejemplo con la transformada de Laplace del momento de ruina para distintos niveles iniciales de las reservas y distintos niveles de umbral. En la Figura 4.2 se observa el comportamiento de  $\phi(u)$  y los valores concretos se encuentran en la Tabla 4.1.

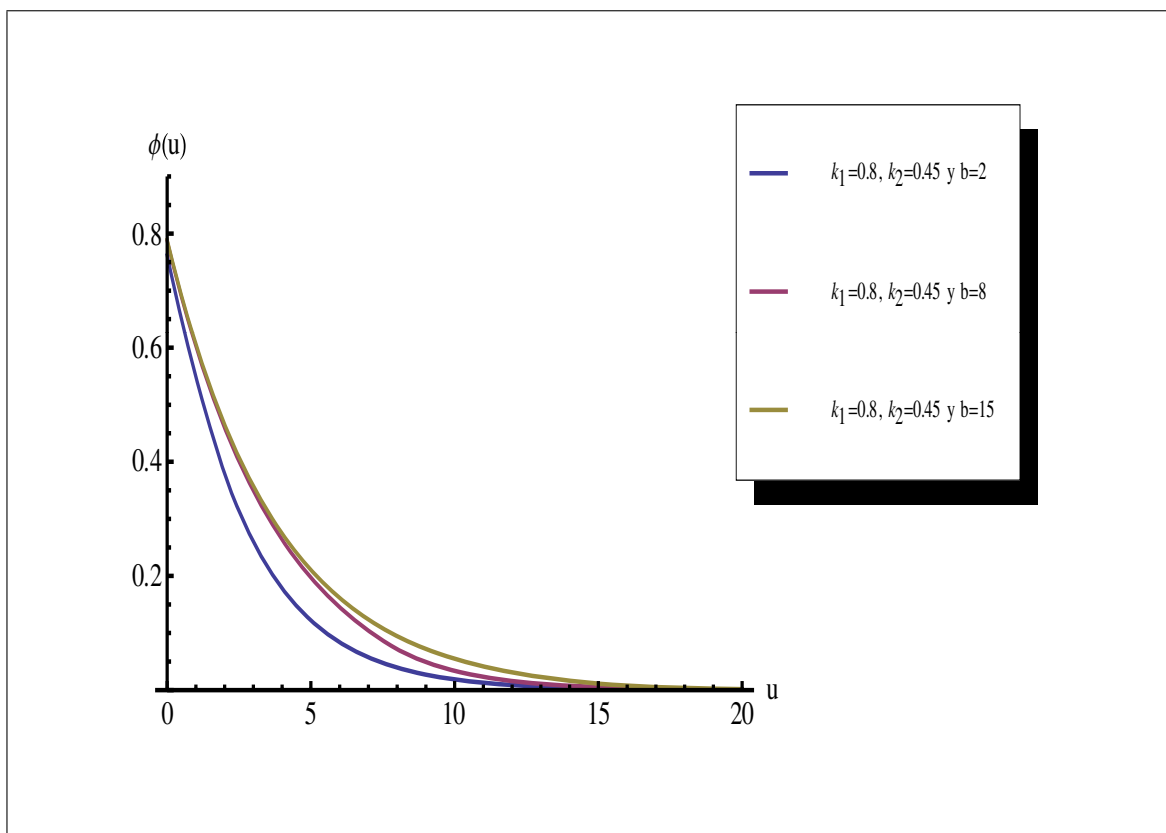


Figura 4.2: Transformada de Laplace del momento de ruina con cuantía exponencial

$u$	$\phi(u)$ con $b = 2$	$\phi(u)$ con $b = 8$	$\phi(u)$ con $b = 15$
0	0.7618	0.7870	0.7889
4	0.1780	0.2634	0.2743
8	0.0393	0.0715	0.0945
12	0.0087	0.0158	0.0309
16	0.0019	0.0034	0.0077
20	0.0004	0.0007	0.0017

Tabla 4.1: Valores de  $\phi(u)$  para distintas  $u$  y  $b$ 

Las expresiones correspondientes a la transformada de Laplace del momento de ruina, para los distintos niveles de umbral  $b = 2$ ,  $b = 8$  y  $b = 15$ , son respectivamente:

$$\begin{aligned} \blacksquare \phi(u) &= \begin{cases} \phi_1(u) = 0.8528e^{-0.2636u} - 0.0909e^{0.1580u}, & 0 \leq u < 2, \\ \phi_2(u) = 0.8051e^{-0.3772u}, & u \geq 2, \end{cases} \\ \blacksquare \phi(u) &= \begin{cases} \phi_1(u) = 0.7940e^{-0.2636u} - 0.0070e^{0.1580u}, & 0 \leq u < 8, \\ \phi_2(u) = 1.4625e^{-0.3772u}, & u \geq 8, \end{cases} \\ \blacksquare \phi(u) &= \begin{cases} \phi_1(u) = 0.7893e^{-0.2636u} - 0.0003e^{0.1580u}, & 0 \leq u < 15, \\ \phi_2(u) = 3.2215e^{-0.3772u}, & u \geq 15. \end{cases} \end{aligned}$$

La transformada de Laplace del momento de ruina puede interpretarse como la esperanza del valor actual de una unidad monetaria que se hiciese efectiva en el momento de ruina, siendo la tasa de actualización  $\delta$  (en nuestro ejemplo 0.03). En los resultados puede verse que para un determinado valor del umbral la transformada de Laplace del momento de ruina decrece respecto a  $u$ . Este comportamiento es lógico, ya que a mayor nivel de las reservas iniciales, el momento de ruina será superior y por lo tanto la unidad monetaria se encontrará más alejada siendo su valor actual inferior.

Con los mismos valores, en la Figura 4.3 se muestra la probabilidad de ruina en un modelo con estrategia de reaseguro proporcional de umbral. Los valores concretos se presentan en la Tabla 4.2 para distintos niveles de umbral  $b$ .

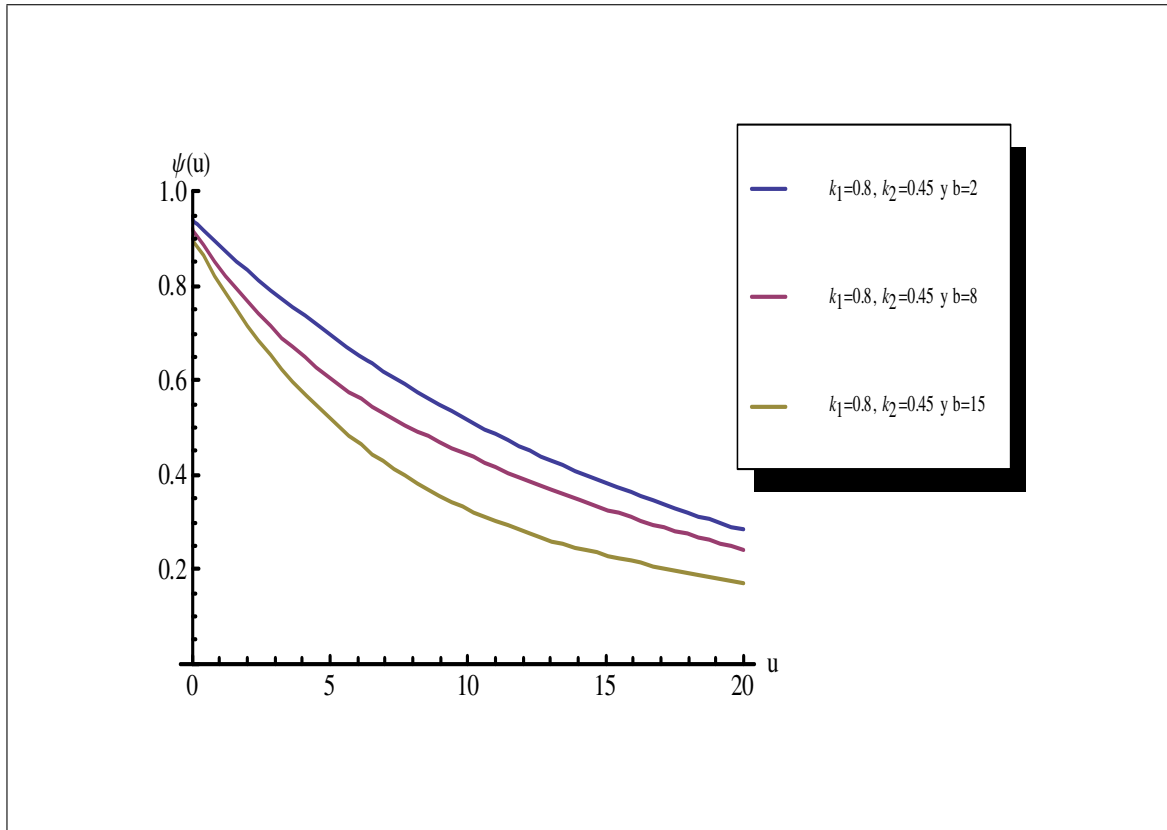


Figura 4.3: Probabilidad de ruina con cuantía exponencial

$u$	$\psi(u)$ con $b = 2$	$\psi(u)$ con $b = 8$	$\psi(u)$ con $b = 15$
0	0.9434	0.9211	0.9037
4	0.7393	0.6524	0.5757
8	0.5814	0.4981	0.3875
12	0.4572	0.3917	0.2795
16	0.3596	0.3081	0.2165
20	0.2828	0.2423	0.1703

Tabla 4.2: Valores de  $\psi(u)$  para distintas  $u$  y  $b$

Si sustituimos los valores dados en la expresión (4.33), se obtienen las siguientes expresiones de la probabilidad de ruina para distintos niveles de umbral  $b = 2$ ,  $b = 8$  y  $b = 15$  respectivamente:

$$\blacksquare \psi(u) = \begin{cases} \psi_1(u) = 0.4909 + 0.4524e^{-0.1388u}, & 0 \leq u < 2, \\ \psi_2(u) = 0.9401e^{-0.06006u}, & u \geq 2, \end{cases}$$

$$\blacksquare \psi(u) = \begin{cases} \psi_1(u) = 0.2906 + 0.6305e^{-0.1388u}, & 0 \leq u < 8, \\ \psi_2(u) = 0.8054e^{-0.06006u}, & u \geq 8, \end{cases}$$

$$\blacksquare \psi(u) = \begin{cases} \psi_1(u) = 0.1341 + 0.7696e^{-0.1388u}, & 0 \leq u < 15, \\ \psi_2(u) = 0.5662e^{-0.06006u}, & u \geq 15. \end{cases}$$

Como era de esperar, para un valor determinado del umbral, la probabilidad de ruina es decreciente respecto del nivel inicial de las reservas.

Por último, se obtienen los momentos de la variable aleatoria momento de ruina, en concreto el primer momento ordinario (esperanza) y el segundo momento ordinario necesario para conseguir la varianza de la variable aleatoria momento de ruina condicionada a que la ruina ocurra. Utilizando las expresiones (4.36), (4.39) y con los mismos valores iniciales, en la Figura 4.4 se presentan la esperanza, la varianza y el coeficiente de variación para distintos niveles de umbral.

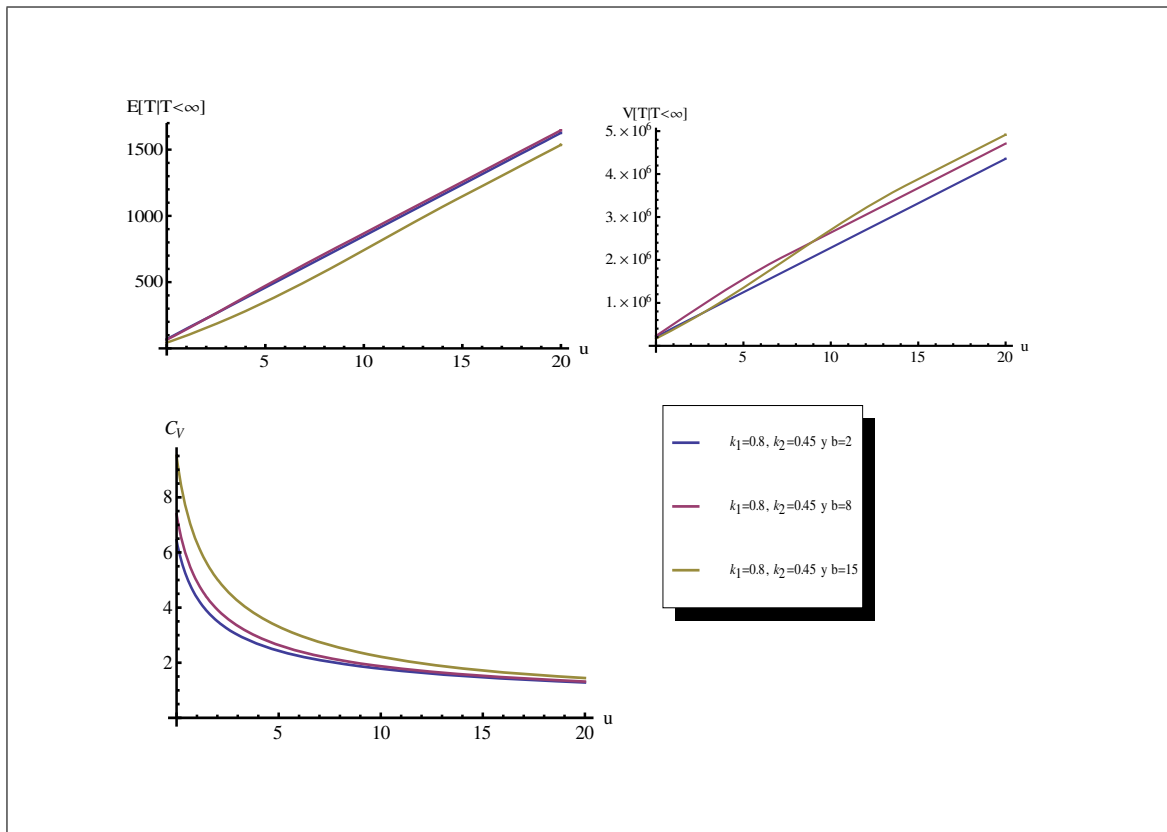


Figura 4.4: Esperanza, varianza y  $C_V$  de la v.a. momento de ruina con cuantía exponencial

En la siguiente Tabla 4.3 se recogen los valores obtenidos de la esperanza del momento de ruina condicionada a que la ruina ocurra para distintos valores de umbral  $b$ , y en la Tabla 4.4 se recogen los valores de la varianza y del coeficiente de variación también por los distintos valores de umbral.

$u$	$E [T   T < \infty]$ con $b = 2$	$E [T   T < \infty]$ con $b = 8$	$E [T   T < \infty]$ con $b = 15$
0	69.21	65.00	43.15
4	381.15	389.17	282.00
8	692.50	712.12	578.45
12	1003.86	1023.47	906.86
16	1315.21	1334.83	1224.86
20	1626.56	1646.18	1536.21

Tabla 4.3:  $E[T | T < \infty]$  para distintas  $u$  y  $b$  con cuantía exponencial

$u$	$b = 2$		$b = 8$		$b = 15$	
	$V[T   T < \infty]$	$C_V$	$V[T   T < \infty]$	$C_V$	$V[T   T < \infty]$	$C_V$
0	198609	6.43	230297	7.38	168036	9.49
4	$1.03 \times 10^6$	2.67	$1.30 \times 10^6$	2.93	$1.09 \times 10^6$	3.70
8	$1.86 \times 10^6$	1.97	$2.22 \times 10^6$	2.09	$2.16 \times 10^6$	2.54
12	$2.69 \times 10^6$	1.63	$3.05 \times 10^6$	1.70	$3.21 \times 10^6$	1.97
16	$3.52 \times 10^6$	1.42	$3.88 \times 10^6$	1.47	$4.08 \times 10^6$	1.65
20	$4.35 \times 10^6$	1.28	$4.71 \times 10^6$	1.31	$4.91 \times 10^6$	1.44

Tabla 4.4:  $V[T | T < \infty]$  y  $C_V$  para distintas  $u$  y  $b$  con cuantía exponencial

Para un nivel determinado del umbral, la esperanza y la varianza del momento de ruina condicionada a que la ruina ocurre, son crecientes respecto a  $u$ . Sin embargo el coeficiente de variación es decreciente respecto al nivel inicial de las reservas. Esto indica que la variable aleatoria momento de ruina está más concentrada entorno a su media cuando el nivel inicial de las reservas es superior.

## 4.5. Probabilidad y momento de ruina con cuantía de los siniestros phase-type( $N$ )

Se considera en este apartado, el caso en que la cuantía individual de los siniestros se distribuye según una phase-type( $N$ ) (ver p.e. Asmussen (2000) y Rolski *et al.* (1999)). Posteriormente, se analiza el caso particular de una distribución phase-type(2), distribución que recoge todas las combinaciones lineales y convoluciones de dos distribuciones exponenciales (no necesariamente con medias iguales) y se estudia la distribución Erlang(2,  $\beta$ ), que es una convolución de dos distribuciones exponenciales con medias iguales.

En Hipp (2006) trabaja con la distribución phase-type( $N$ ), sabiendo que su función de densidad,  $f(x)$ , satisface la siguiente ecuación diferencial de orden  $N$

$$\sum_{i=0}^N b_i f^{(i)}(x) = 0 \quad (4.48)$$

siendo  $b_0 = 1$ ,  $b_i$ ,  $i \geq 1, \dots, N \in \mathbb{R}$  y  $f^{(0)}(x) = f(x)$ .

De la ecuación diferencial (4.48), es fácil despejar las derivadas  $N$ -ésima y  $(N + 1)$ -ésima de la función de densidad, siendo éstas

$$f^{(N)}(x) = -\frac{1}{b_N} \sum_{i=0}^{N-1} b_i f^{(i)}(x), \quad (4.49)$$

$$f^{(N+1)}(x) = -\frac{1}{b_N} \sum_{i=0}^N b_{i-1} f^{(i)}(x). \quad (4.50)$$

A partir de (4.48) se presenta la siguiente relación que será de utilidad en cálculos posteriores,

$$1 - b_1 f(0) - b_2 f'(0) - \dots - b_N f^{(N-1)}(0) = 0. \quad (4.51)$$

También de (4.48) se obtiene la función distribución de la phase-type( $N$ ) en forma de ecuación diferencial de su función de densidad hasta el orden  $N - 1$ ,

$$F(x) = 1 - b_1 f(x) - b_2 f'(x) - \dots - b_N f^{(N-1)}(x). \quad (4.52)$$

A partir de (4.52),

$$1 - F(x) = \sum_{i=1}^N b_i f^{(i-1)}(x). \quad (4.53)$$

En primer lugar, se hallan las ecuaciones diferenciales ordinarias para una distribución phase-type( $N$ ) necesarias para hallar la transformada de Laplace del momento de ruina,  $\phi(u) = E[e^{-\delta T} I(T < \infty)]$  y seguidamente, se obtienen las de la probabilidad de ruina.

El procedimiento seguido es similar al del caso exponencial. A partir de las expresiones (4.9) del Corolario 1, se deriva respecto a  $u$   $N$ -veces más y se consiguen las ecuaciones diferenciales ordinarias de orden  $N + 1$ .

Previamente, para  $0 \leq u < b$ , se necesita la ayuda de la siguiente definición y 3 Lemas para la obtención de la ecuación diferencial ordinaria que se presenta en el Teorema 4.

**Definición 16** Sea  $IN_h$  la integral  $h$ -ésima

$$IN_h = \int_0^{\frac{u}{k_1}} \phi_1(u - k_1 x) f^{(h)}(x) dx, \quad (4.54)$$

siendo  $h = 0, \dots, N$  y  $f^{(0)}(x) = f(x)$ .



**Lema 1** *La derivada de la expresión (4.54) respecto a  $u$  es*

$$IN'_h = \frac{f^{(h)}(0)}{k_1} \phi_1(u) + \frac{IN_{h+1}}{k_1}. \quad (4.55)$$

**Demostración.**

A partir de la expresión (4.54), utilizando la regla de Leibniz

$$IN'_h = \frac{\phi_1(0) f^{(h)}\left(\frac{u}{k_1}\right)}{k_1} + \int_0^{\frac{u}{k_1}} f^{(h)}(x) \frac{\partial \phi_1(u - k_1 x)}{\partial u} dx, \quad (4.56)$$

y resolviendo la integral de (4.56) por partes

$$IN'_h = \frac{\phi_1(u) f^{(h)}(0)}{k_1} + \frac{1}{k_1} \int_0^{\frac{u}{k_1}} \phi_1(u - k_1 x) f^{(h+1)}(x) dx. \quad (4.57)$$

Por la definición anterior, la integral que aparece en (4.57) es  $IN_{h+1}$ , quedando demostrado el Lema 1.  $\square$

**Lema 2** *Sea  $IN_0$  la integral presentada en la definición anterior cuando  $h = 0$  Su derivada  $h$ -ésima respecto a  $u$  es*

$$IN_0^{(h)} = \frac{IN_h}{k_1^h} + \sum_{s=0}^{h-1} \frac{\phi_1^{(s)}(u)}{k_1^{h-s}} f^{(h-1-s)}(0), \quad (4.58)$$

donde  $1 \leq h \leq N$ .

**Demostración.**

Sea  $IN_0^{(h)}$  la derivada  $h$ -ésima respecto a  $u$  de la integral  $IN_0$ , se puede comprobar por inducción la expresión (4.58).

Para  $h = 1$ , utilizando el Lema 1

$$IN_0' = \frac{f(0)}{k_1} \phi_1(u) + \frac{IN_1}{k_1},$$

por tanto, la validez del Lema 2 para un número entero inicial es cierto.

Para  $h + 1$ , asumiendo válido para  $h$ , tenemos que

$$IN_0^{(h+1)} = \frac{IN_h'}{k_1^h} + \sum_{s=0}^{h-1} \frac{\phi_1^{(s+1)}(u)}{k_1^{h-s}} f^{(h-1-s)}(0),$$

utilizando el Lema 1 obtenemos que,

$$\begin{aligned}
IN_0^{h+1} &= \frac{1}{k_1^h} \left( \frac{f^{(h)}(0)}{k_1} \phi_1(u) + \frac{IN_{h+1}}{k_1} \right) + \sum_{s=0}^{h-1} \frac{\phi_1^{(s+1)}(u)}{k_1^{h-s}} f^{h-1-s}(0) \\
&= \frac{f^{(h)}(0)}{k_1^{h+1}} \phi_1(u) + \frac{IN_{h+1}}{k_1^{h+1}} + \sum_{s=0}^{h-1} \frac{\phi_1^{(s+1)}(u)}{k_1^{h-s}} f^{h-1-s}(0) \\
&= \frac{f^{(h)}(0)}{k_1^{h+1}} \phi_1(u) + \frac{IN_{h+1}}{k_1^{h+1}} + \sum_{s=1}^h \frac{\phi_1^{(s)}(u)}{k_1^{h-s+1}} f^{h-s}(0),
\end{aligned}$$

simplificando

$$IN_0^{h+1} = \frac{IN_{h+1}}{k_1^{h+1}} + \sum_{s=0}^h \frac{\phi_1^{(s)}(u)}{k_1^{h+1-s}} f^{h-s}(0),$$

siendo válido para  $h + 1$  la expresión (4.58). Por tanto, en virtud del principio de inducción matemática, la  $IN_0^{(h)}$  del Lema 2 es válida para todo número natural entre  $1 \leq h \leq N$ .  $\square$

**Lema 3** Sea  $IN_N$  la integral presentada en la definición anterior cuando  $h = N$ , en función de las  $IN_h$  restantes su expresión es

$$IN_N = -\frac{1}{b_N} \sum_{h=0}^{N-1} b_h IN_h. \quad (4.59)$$

**Demostración.**

Sustituyendo el valor de  $h = N$  en la expresión (4.54) se obtiene

$$IN_N = \int_0^{\frac{u}{k_1}} \phi_1(u - k_1 x) f^N(x) dx, \quad (4.60)$$

sustituyendo (4.49) en (4.60)

$$\begin{aligned}
IN_N &= -\frac{1}{b_N} \int_0^{\frac{u}{k_1}} \phi_1(u - k_1 x) \sum_{i=0}^{N-1} b_i f^i(x) dx \\
&= -\frac{1}{b_N} \sum_{i=0}^{N-1} b_i \int_0^{\frac{u}{k_1}} \phi_1(u - k_1 x) f^i(x) dx \\
&= -\frac{1}{b_N} \sum_{h=0}^{N-1} b_h \int_0^{\frac{u}{k_1}} \phi_1(u - k_1 x) f^h(x) dx,
\end{aligned} \quad (4.61)$$

donde la integral que aparece en (4.61) es la  $IN_h$  definida en (4.54).  $\square$

**Teorema 4** Para  $0 \leq u < b$ , la ecuación diferencial ordinaria de orden  $N + 1$  necesaria cuando la distribución de la cuantía del siniestro se distribuye según una phase-type(N), es

$$\begin{aligned} \phi_1^{(N+1)}(u) &= \left( \frac{\delta}{c_1 k_1^N b_N} \right) \phi_1(u) + \left( \frac{\lambda + \delta}{c_1} - \frac{b_{N-1}}{k_1 b_N} \right) \phi_1^{(N)}(u) \\ &\quad - \sum_{s=1}^{N-1} \frac{1}{k_1^{N-s}} \left( \frac{\lambda}{c_1} f^{(N-1-s)}(0) + \frac{b_{s-1}}{k_1 b_N} - \frac{(\lambda + \delta) b_s}{c_1 b_N} \right. \\ &\quad \left. + \frac{\lambda}{c_1 b_N} \sum_{h=s+1}^{N-1} b_h f^{(h-s-1)}(0) \right) \phi_1^{(s)}(u). \end{aligned} \tag{4.62}$$

**Demostración.**

Se expresa a continuación la ecuación íntegro-diferencial (4.9) del Corolario 1 y sus derivadas hasta  $N + 1$  respecto a  $u$ , en función de las derivadas de  $IN_0$

$$\begin{aligned} \phi_1'(u) &= \frac{\lambda + \delta}{c_1} \phi_1(u) - \frac{\lambda}{c_1} IN_0 - \frac{\lambda}{c_1} \left[ 1 - F\left(\frac{u}{k_1}\right) \right], \\ \phi_1''(u) &= \frac{\lambda + \delta}{c_1} \phi_1'(u) + \frac{\lambda}{c_1 k_1} f\left(\frac{u}{k_1}\right) - \frac{\lambda}{c_1} IN_0', \\ &\quad \vdots \\ \phi_1^{(h+1)}(u) &= \frac{\lambda + \delta}{c_1} \phi_1^{(h)}(u) + \frac{\lambda}{c_1 k_1^h} f^{(h-1)}\left(\frac{u}{k_1}\right) - \frac{\lambda}{c_1} IN_0^{(h)}, \quad 1 \leq h \leq N, \\ &\quad \vdots \\ \phi_1^{(N+1)}(u) &= \frac{\lambda + \delta}{c_1} \phi_1^{(N)}(u) + \frac{\lambda}{c_1 k_1^N} f^{(N-1)}\left(\frac{u}{k_1}\right) - \frac{\lambda}{c_1} IN_0^{(N)}. \end{aligned}$$

Sustituyendo las derivadas  $IN_0^{(h)}$  con la expresión (4.58) del Lema 2 se obtiene

$$\phi_1'(u) = \frac{\lambda + \delta}{c_1} \phi_1(u) - \frac{\lambda}{c_1} IN_0 - \frac{\lambda}{c_1} \left[ 1 - F \left( \frac{u}{k_1} \right) \right], \quad (4.63)$$

⋮

$$\begin{aligned} \phi_1^{(h+1)}(u) &= \frac{\lambda + \delta}{c_1} \phi_1^{(h)}(u) + \frac{\lambda}{c_1 k_1^h} f^{(h-1)} \left( \frac{u}{k_1} \right) \\ &\quad - \frac{\lambda}{c_1} \left( \frac{IN_h}{k_1^h} + \sum_{s=0}^{h-1} \frac{\phi_1^{(s)}(u)}{k_1^{h-s}} f^{(h-1-s)}(0) \right), \end{aligned} \quad (4.64)$$

⋮

$$\begin{aligned} \phi_1^{(N+1)}(u) &= \frac{\lambda + \delta}{c_1} \phi_1^{(N)}(u) + \frac{\lambda}{c_1 k_1^N} f^{(N-1)} \left( \frac{u}{k_1} \right) \\ &\quad - \frac{\lambda}{c_1} \left( \frac{IN_N}{k_1^N} + \sum_{s=0}^{N-1} \frac{\phi_1^{(s)}(u)}{k_1^{N-s}} f^{(N-1-s)}(0) \right). \end{aligned} \quad (4.65)$$

Se despeja de (4.63) y (4.64) la  $IN_0$  y  $IN_h$ , quedando

$$\begin{aligned} IN_0 &= \frac{c_1}{\lambda} \left( \frac{\lambda + \delta}{c_1} \phi_1(u) - \frac{\lambda}{c_1} \left[ 1 - F \left( \frac{u}{k_1} \right) \right] - \phi_1'(u) \right) \\ &= \frac{\lambda + \delta}{\lambda} \phi_1(u) - \left[ 1 - F \left( \frac{u}{k_1} \right) \right] - \frac{c_1}{\lambda} \phi_1'(u), \\ &\quad \vdots \\ IN_h &= \frac{c_1 k_1^h}{\lambda} \left( \frac{\lambda + \delta}{c_1} \phi_1^{(h)}(u) + \frac{\lambda}{c_1 k_1^h} f^{(h-1)} \left( \frac{u}{k_1} \right) \right. \\ &\quad \left. - \frac{\lambda}{c_1} \sum_{s=0}^{h-1} \frac{\phi_1^{(s)}(u)}{k_1^{h-s}} f^{(h-1-s)}(0) - \phi_1^{(h+1)}(u) \right), \end{aligned} \quad (4.66)$$

Sustituimos  $IN_0$  y  $IN_h$  de (4.66) en la expresión (4.59) del Lema 3, obteniendo

$$\begin{aligned}
 IN_N &= -\frac{1}{b_N}IN_0 - \frac{1}{b_N} \sum_{h=1}^{N-1} b_h IN_h, \\
 IN_N &= -\frac{1}{b_N} \left( \frac{\lambda + \delta}{\lambda} \phi_1(u) - \left[ 1 - F \left( \frac{u}{k_1} \right) \right] - \frac{c_1}{\lambda} \phi_1'(u) \right) \\
 &\quad - \frac{1}{b_N} \sum_{h=1}^{N-1} b_h \frac{c_1 k_1^h}{\lambda} \left( \frac{\lambda + \delta}{c_1} \phi_1^h(u) + \frac{\lambda}{c_1 k_1^h} f^{h-1} \left( \frac{u}{k_1} \right) \right. \\
 &\quad \left. - \frac{\lambda}{c_1} \sum_{s=0}^{h-1} \frac{\phi_1^s(u)}{k_1^{h-s}} f^{h-1-s}(0) - \phi_1^{h+1}(u) \right),
 \end{aligned}$$

simplificando

$$\begin{aligned}
 IN_N &= -\frac{(\lambda + \delta)}{b_N \lambda} \phi_1(u) + \frac{1}{b_N} \left[ 1 - F \left( \frac{u}{k_1} \right) \right] + \frac{c_1}{b_N \lambda} \phi_1'(u) \\
 &\quad - \frac{1}{b_N} \sum_{h=1}^{N-1} \frac{b_h k_1^h}{\lambda} (\lambda + \delta) \phi_1^h(u) - \frac{1}{b_N} \sum_{h=1}^{N-1} b_h f^{h-1} \left( \frac{u}{k_1} \right) \\
 &\quad + \frac{1}{b_N} \sum_{h=1}^{N-1} b_h \sum_{s=0}^{h-1} \phi_1^s(u) k_1^s f^{h-1-s}(0) + \frac{1}{b_N} \sum_{h=1}^{N-1} \frac{b_h c_1 k_1^h}{\lambda} \phi_1^{h+1}(u).
 \end{aligned} \tag{4.67}$$

Sustituyendo (4.53) en (4.67) y simplificando

$$\begin{aligned}
 IN_N &= -\frac{(\lambda + \delta)}{b_N \lambda} \phi_1(u) + f^{N-1} \left( \frac{u}{k_1} \right) + \frac{c_1}{b_N \lambda} \sum_{h=1}^N b_{h-1} k_1^{h-1} \phi_1^h(u) \\
 &\quad - \frac{(\lambda + \delta)}{b_N \lambda} \sum_{h=1}^{N-1} b_h k_1^h \phi_1^h(u) + \frac{1}{b_N} \sum_{h=1}^{N-1} b_h \sum_{s=0}^{h-1} \phi_1^s(u) k_1^s f^{h-1-s}(0).
 \end{aligned} \tag{4.68}$$

Del tercer sumando de (4.68) se extrae fuera el valor  $h = N$  del sumatorio y del último

sumando se cambia el orden de los sumatorios, tal que

$$\begin{aligned}
IN_N &= -\frac{(\lambda + \delta)}{b_N \lambda} \phi_1(u) + f^{N-1} \left( \frac{u}{k_1} \right) + \frac{c_1 b_{N-1} k_1^{N-1}}{b_N \lambda} \phi_1^{(N)}(u) \\
&+ \frac{c_1}{b_N \lambda} \sum_{h=1}^{N-1} b_{h-1} k_1^{h-1} \phi_1^{(h)}(u) - \frac{(\lambda + \delta)}{b_N \lambda} \sum_{h=1}^{N-1} b_h k_1^h \phi_1^{(h)}(u) \\
&+ \frac{1}{b_N} \sum_{s=0}^{N-2} \phi_1^{(s)}(u) k_1^s \sum_{h=s+1}^{N-1} b_h f^{h-1-s}(0).
\end{aligned} \tag{4.69}$$

Sabiendo que  $\sum_{s=N-1}^{N-2} = 0$ , se puede reagrupar la expresión (4.69) como

$$\begin{aligned}
IN_N &= f^{N-1} \left( \frac{u}{k_1} \right) + \left( \frac{1}{b_N} \sum_{h=1}^{N-1} b_h f^{h-1}(0) - \frac{\lambda + \delta}{b_N \lambda} \right) \phi_1(u) \\
&+ \sum_{s=1}^{N-1} \left( \frac{c_1 b_{s-1} k_1^{s-1}}{b_N \lambda} - \frac{(\lambda + \delta) b_s k_1^s}{b_N \lambda} + \frac{k_1^s}{b_N} \sum_{h=s+1}^{N-1} b_h f^{h-1-s}(0) \right) \phi_1^{(s)}(u) \\
&+ \frac{c_1 b_{N-1} k_1^{N-1}}{b_N \lambda} \phi_1^{(N)}(u).
\end{aligned} \tag{4.70}$$

Por tanto, se puede escribir (4.70) de la siguiente forma

$$IN_N = f^{N-1} \left( \frac{u}{k_1} \right) + \sum_{s=0}^N \phi_1^{(s)}(u) D_s, \tag{4.71}$$

siendo

$$D_s = \begin{cases} \frac{1}{b_N} \sum_{h=1}^{N-1} b_h f^{h-1}(0) - \frac{\lambda + \delta}{b_N \lambda}, & s = 0 \\ \frac{c_1 b_{s-1} k_1^{s-1}}{b_N \lambda} - \frac{(\lambda + \delta) b_s k_1^s}{b_N \lambda} + \frac{k_1^s}{b_N} \sum_{h=s+1}^{N-1} b_h f^{h-1-s}(0), & s = 1, \dots, N-1 \\ \frac{c_1 b_{N-1} k_1^{N-1}}{b_N \lambda}, & s = N \end{cases}$$

Por último, sustituyendo (4.71) en (4.65)

$$\begin{aligned}
\phi_1^{(N+1)}(u) &= \frac{\lambda + \delta}{c_1} \phi_1^{(N)}(u) - \frac{\lambda}{c_1 k_1^N} \sum_{s=0}^N \phi_1^{(s)}(u) D_s \\
&- \frac{\lambda}{c_1} \sum_{s=0}^{N-1} \frac{\phi_1^{(s)}(u)}{k_1^{N-s}} f^{N-1-s}(0).
\end{aligned} \tag{4.72}$$

Extrayendo el valor de  $s = 0$  y  $s = N$  del primer sumatorio de (4.72)

$$\begin{aligned} \phi_1^{(N+1)}(u) &= \left( \frac{\lambda + \delta}{c_1} - \frac{\lambda}{c_1 k_1^N} D_N \right) \phi_1^{(N)}(u) - \frac{\lambda}{c_1 k_1^N} \phi_1(u) D_0 \\ &\quad - \frac{\lambda}{c_1 k_1^N} \sum_{s=1}^{N-1} \phi_1^{(s)}(u) D_s - \frac{\lambda}{c_1} \sum_{s=0}^{N-1} \frac{\phi_1^{(s)}(u)}{k_1^{N-s}} f^{(N-1-s)}(0), \end{aligned} \quad (4.73)$$

sustituyendo los valores correspondientes de  $D_s$  en (4.73) y utilizando la relación (4.51)

$$\begin{aligned} \phi_1^{(N+1)}(u) &= \left( \frac{\lambda + \delta}{c_1} - \frac{b_{N-1}}{k_1 b_N} \right) \phi_1^{(N)}(u) + \frac{\delta}{c_1 b_N k_1^N} \phi_1(u) \\ &\quad - \sum_{s=1}^{N-1} \left( \frac{b_{s-1}}{k_1 b_N} - \frac{(\lambda + \delta) b_s}{c_1 b_N} + \frac{\lambda}{c_1 b_N} \sum_{h=s+1}^{N-1} b_h f^{(h-1-s)}(0) \right. \\ &\quad \left. + \frac{\lambda}{c_1} f^{(N-1-s)}(0) \right) \frac{1}{k_1^{N-s}} \phi_1^{(s)}(u), \end{aligned}$$

□

**Corolario 3** Para  $u \geq b$ , la ecuación diferencial ordinaria de orden  $N + 1$  cuando la distribución de la cuantía del siniestro se distribuye según una phase-type(N) es

$$\begin{aligned} \phi_2^{(N+1)}(u) &= \left( \frac{\delta}{c_2 k_2^N b_N} \right) \phi_2(u) + \left( \frac{\lambda + \delta}{c_2} - \frac{b_{N-1}}{k_2 b_N} \right) \phi_2^{(N)}(u) \\ &\quad - \sum_{s=1}^{N-1} \frac{1}{k_2^{N-s}} \left( \frac{\lambda}{c_2} f^{(N-1-s)}(0) + \frac{b_{s-1}}{k_2 b_N} - \frac{(\lambda + \delta) b_s}{c_2 b_N} \right. \\ &\quad \left. + \frac{\lambda}{c_2 b_N} \sum_{h=s+1}^{N-1} b_h f^{(h-s-1)}(0) \right) \phi_2^{(s)}(u). \end{aligned} \quad (4.74)$$

**Demostración.**

Si se realiza un proceso similar al anterior se obtiene la ecuación diferencial ordinaria de orden  $N + 1$  para  $u \geq b$  igual a la ecuación (4.62) del Teorema 4 variando únicamente  $c_1, k_1$  y  $\phi_1(u)$  por  $c_2, k_2$  y  $\phi_2(u)$ .

□

A partir de (4.62) y (4.74), haciendo  $\delta = 0$ , se obtienen las siguientes ecuaciones diferenciales ordinarias para la probabilidad de ruina,

$$\begin{aligned} \psi_1^{(N+1)}(u) &= \left( \frac{\lambda}{c_1} - \frac{b_{N-1}}{k_1 b_N} \right) \psi_1^{(N)}(u) - \sum_{s=1}^{N-1} \frac{1}{k_1^{N-s}} \left( \frac{\lambda}{c_1} f^{N-1-s}(0) \right. \\ &\quad \left. + \frac{b_{s-1}}{k_1 b_N} - \frac{\lambda b_s}{c_1 b_N} + \frac{\lambda}{c_1 b_N} \sum_{h=s+1}^{N-1} b_h f^{h-s-1}(0) \right) \psi_1^{(s)}(u). \end{aligned} \quad 0 \leq u < b \quad (4.75)$$

$$\begin{aligned} \psi_2^{(N+1)}(u) &= \left( \frac{\lambda}{c_2} - \frac{b_{N-1}}{k_2 b_N} \right) \psi_2^{(N)}(u) - \sum_{s=1}^{N-1} \frac{1}{k_2^{N-s}} \left( \frac{\lambda}{c_2} f^{N-1-s}(0) \right. \\ &\quad \left. + \frac{b_{s-1}}{k_2 b_N} - \frac{\lambda b_s}{c_2 b_N} + \frac{\lambda}{c_2 b_N} \sum_{h=s+1}^{N-1} b_h f^{h-s-1}(0) \right) \psi_2^{(s)}(u). \end{aligned} \quad u \geq b$$

De las ecuaciones diferenciales ordinarias de una distribución phase-type ( $N$ ), se pueden hallar también las expresiones de la transformada de Laplace del momento de ruina y la probabilidad de ruina cuando la cuantía de los siniestros se distribuye según una distribución exponencial unitaria como se ha estudiado anteriormente, ya que ésta es una distribución phase-type(1) de parámetros  $b_0 = 1$  y  $b_1 = 1$ . En el siguiente subapartado consideramos que la cuantía de los siniestros se distribuye según una phase-type(2), analizando el caso concreto de una Erlang(2,  $\beta$ ) que es de este tipo de distribución con parámetros  $b_0 = 1$ ,  $b_1 = \frac{2}{\beta}$  y  $b_2 = \frac{1}{\beta^2}$ .

#### 4.5.1. Transformada de Laplace del momento de ruina phase-type(2)

Se considera en este subapartado, el caso en que la cuantía individual de los siniestros se distribuye según una phase-type(2). Dickson y Hipp (2000) trabajan con esta distribución, sabiendo que su función de densidad,  $f(x)$ , satisface la siguiente ecuación diferencial de segundo orden

$$f(x) + b_1 f'(x) + b_2 f''(x) = 0, \quad x > 0, \quad (4.76)$$

donde

$$b_2 > 0. \quad (4.77)$$



A partir de la expresión (4.62) del Teorema 4 se obtiene para  $0 \leq u < b$ ,

$$\begin{aligned} \phi_1'''(u) &= \left( \frac{\lambda+\delta}{c_1} - \frac{b_1}{k_1 b_2} \right) \phi_1''(u) + \left( \frac{b_1(\lambda+\delta)}{c_1 k_1 b_2} - \frac{1}{k_1^2 b_2} - \frac{\lambda}{k_1 c_1} f(0) \right) \phi_1'(u) \\ &\quad + \frac{\delta}{b_2 k_1^2 c_1} \phi_1(u). \end{aligned} \tag{4.78}$$

y de (4.74) para  $u \geq b$ , se obtiene

$$\begin{aligned} \phi_2'''(u) &= \left( \frac{\lambda+\delta}{c_2} - \frac{b_1}{k_2 b_2} \right) \phi_2''(u) + \left( \frac{b_1(\lambda+\delta)}{c_2 k_2 b_2} - \frac{1}{k_2^2 b_2} - \frac{\lambda}{k_2 c_2} f(0) \right) \phi_2'(u) \\ &\quad + \frac{\delta}{b_2 k_2^2 c_2} \phi_2(u). \end{aligned} \tag{4.79}$$

Las ecuaciones características correspondientes de (4.78) y (4.79) son respectivamente,

$$\begin{aligned} c_1 k_1 r^3 - \left( (\lambda + \delta) k_1 - c_1 \frac{b_1}{b_2} \right) r^2 + \left( \lambda f(0) + \frac{c_1}{k_1 b_2} - \frac{b_1(\lambda+\delta)}{b_2} \right) r - \frac{\delta}{b_2 k_1} &= 0, \\ c_2 k_2 s^3 - \left( (\lambda + \delta) k_2 - c_2 \frac{b_1}{b_2} \right) s^2 + \left( \lambda f(0) + \frac{c_2}{k_2 b_2} - \frac{b_1(\lambda+\delta)}{b_2} \right) s - \frac{\delta}{b_2 k_2} &= 0. \end{aligned} \tag{4.80}$$

Se supone que  $r_i, s_i, i = 1, 2, 3$  son reales y distintas. Entonces la estructura de solución general de la ecuación diferencial ordinaria de la transformada de Laplace del momento de ruina es

$$\phi(u) = \begin{cases} \phi_1(u) = \sum_{i=1}^3 F_i e^{r_i u}, & 0 \leq u < b \\ \phi_2(u) = \sum_{i=1}^3 G_i e^{s_i u}, & u \geq b. \end{cases} \tag{4.81}$$

donde los coeficientes  $F_i, G_i, i = 1, 2, 3$  no dependen de  $u$ .

Para poder hallar estos coeficientes, serán necesarias 6 ecuaciones. La primera ecuación es obtenida de la condición  $\lim_{u \rightarrow \infty} \phi(u) = 0$ ; la segunda ecuación, se obtiene considerando que  $\phi_1(b) = \phi_2(b)$ ; para las cuatro ecuaciones restantes se sustituye la estructura de solución (4.81) en (4.9), obteniendo exactamente dos ecuaciones adicionales en cada tramo.

Si se analizan los casos particulares de la estrategia de reaseguro proporcional de umbral, para la transformada de Laplace del momento de ruina con distribución de la cuantía de los siniestros phase-type(2) tenemos:

- Caso 1: Si  $k_1 = k_2 = k$ , se obtiene el modelo con reaseguro proporcional con un nivel  $k$  fijo que no depende del nivel inicial de las reservas, donde su transformada de Laplace del momento de ruina es,

$$\phi(u) = \sum_{i=1}^3 H_i e^{r_i u}, \quad u \geq 0, \quad (4.82)$$

donde  $H_i$ ,  $i = 1, 2, 3$  son los coeficientes que se hallarán a partir de tres ecuaciones y las raíces  $r_i$ ,  $i = 1, 2, 3$  de la ecuación

$$ckr^3 - \left( (\lambda + \delta)k - c\frac{b_1}{b_2} \right) r^2 + \left( \lambda f(0) + \frac{c}{kb_2} - \frac{b_1(\lambda + \delta)}{b_2} \right) r - \frac{\delta}{b_2 k} = 0.$$

- Caso 2: Si  $k_1 = k_2 = 1$ , se obtiene la transformada de Laplace del momento de ruina en un modelo clásico, donde ahora la cuantía del siniestro se supone que se distribuye como una phase-type(2), siendo la expresión

$$\phi(u) = \sum_{i=1}^3 J_i e^{r_i u}, \quad u \geq 0, \quad (4.83)$$

con  $J_i$ ,  $i = 1, 2, 3$  los coeficientes de la solución y las nuevas raíces  $r_i$ ,  $i = 1, 2, 3$  se obtienen de la ecuación

$$cr^3 - \left( \lambda + \delta - c\frac{b_1}{b_2} \right) r^2 + \left( \lambda f(0) + \frac{c}{b_2} - \frac{b_1(\lambda + \delta)}{b_2} \right) r - \frac{\delta}{b_2} = 0.$$

#### 4.5.2. Probabilidad de ruina phase-type(2)

Para hallar la probabilidad de ruina,  $\phi(u) = E[I(T < \infty)] = \psi(u)$ , se considera  $\delta = 0$  en las expresiones (4.78) y (4.79). De esta manera obtenemos las siguientes ecuaciones diferenciales ordinarias de tercer orden

$$\psi_1'''(u) = \left( \frac{\lambda}{c_1} - \frac{b_1}{k_1 b_2} \right) \psi_1''(u) + \left( \frac{b_1 \lambda}{c_1 k_1 b_2} - \frac{1}{k_1^2 b_2} - \frac{\lambda}{k_1 c_1} f(0) \right) \psi_1'(u), \quad 0 \leq u < b \quad (4.84)$$

$$\psi_2'''(u) = \left( \frac{\lambda}{c_2} - \frac{b_1}{k_2 b_2} \right) \psi_2''(u) + \left( \frac{b_1 \lambda}{c_2 k_2 b_2} - \frac{1}{k_2^2 b_2} - \frac{\lambda}{k_2 c_2} f(0) \right) \psi_2'(u), \quad u \geq b,$$

y sus respectivas ecuaciones características son

$$c_1 k_1 r^3 - \left( \lambda k_1 - c_1 \frac{b_1}{b_2} \right) r^2 + \left( \lambda f(0) + \frac{c_1}{k_1 b_2} - \frac{b_1 \lambda}{b_2} \right) r = 0,$$

$$c_2 k_2 s^3 - \left( \lambda k_2 - c_2 \frac{b_1}{b_2} \right) s^2 + \left( \lambda f(0) + \frac{c_2}{k_2 b_2} - \frac{b_1 \lambda}{b_2} \right) s = 0,$$

siendo ahora  $r_3 = s_3 = 0$ .

En este caso, la solución general de la ecuación diferencial ordinaria de la probabilidad de ruina es

$$\psi(u) = \begin{cases} \psi_1(u) = \sum_{i=1}^2 F_i e^{r_i u} + F_3, & 0 \leq u < b \\ \psi_2(u) = \sum_{i=1}^2 G_i e^{s_i u} + G_3, & u \geq b, \end{cases} \quad (4.85)$$

donde los coeficientes  $F_i, G_i, i = 1, 2, 3$ , son los mismos que en (4.81), teniendo en cuenta que el valor de  $\delta$  es igual a 0.

En los casos particulares donde  $k_1 = k_2 = k$  y  $k_1 = k_2 = 1$ , se obtiene la probabilidad de ruina en un modelo con reaseguro proporcional aplicando siempre la misma retención  $k$  y la probabilidad de ruina en un modelo clásico respectivamente.

- Caso 1: Si  $k_1 = k_2 = k$ , la probabilidad de ruina es

$$\psi(u) = \sum_{i=1}^2 M_i e^{r_i u} + M_3, \quad u \geq 0, \quad (4.86)$$

donde  $M_i, i = 1, 2, 3$  son los coeficientes de la solución y  $r_i, i = 1, 2, 3$  con  $r_3 = 0$  las raíces de la ecuación

$$ckr^3 - \left( \lambda k - c \frac{b_1}{b_2} \right) r^2 + \left( \lambda f(0) + \frac{c}{kb_2} - \frac{b_1 \lambda}{b_2} \right) r = 0.$$

- Caso 2: Si  $k_1 = k_2 = 1$ , se obtiene la probabilidad de ruina en un modelo clásico, siendo la expresión

$$\phi(u) = \sum_{i=1}^2 N_i e^{r_i u} + N_3, \quad u \geq 0, \quad (4.87)$$

con  $N_i$ ,  $i = 1, 2, 3$  los coeficientes de la solución y las nuevas raíces  $r_i$ ,  $i = 1, 2, 3$  con  $r_3 = 0$  se obtienen de la ecuación

$$cr^3 - \left(\lambda - c\frac{b_1}{b_2}\right)r^2 + \left(\lambda f(0) + \frac{c}{b_2} - \frac{b_1\lambda}{b_2}\right)r = 0.$$

### 4.5.3. Cuantía de los siniestros Erlang(2, $\beta$ )

Como se ha comentado al principio de este apartado, a continuación se hallan las expresiones de la transformada de Laplace del momento de ruina y, posteriormente, se obtiene la probabilidad de ruina para el caso particular en que la cuantía de los siniestros se distribuye según una distribución Erlang(2,  $\beta$ ), es decir  $f(x) = \beta^2 x e^{-\beta x}$ . Esta distribución es una distribución phase-type(2) con  $b_1 = \frac{2}{\beta}$  y  $b_2 = \frac{1}{\beta^2}$  (Dickson and Drekcic (2004)).

Se sustituye los valores de  $f(0) = 0$ ,  $b_1 = \frac{2}{\beta}$  y  $b_2 = \frac{1}{\beta^2}$  en las ecuaciones características (4.80), obteniendo

$$\begin{aligned} r^3 + \left(\frac{2\beta}{k_1} - \frac{\lambda+\delta}{c_1}\right)r^2 + \left(\frac{\beta^2}{k_1^2} - \frac{2\beta(\lambda+\delta)}{c_1 k_1}\right)r - \frac{\delta\beta^2}{c_1 k_1^2} &= 0, & 0 \leq u < b \\ s^3 + \left(\frac{2\beta}{k_2} - \frac{\lambda+\delta}{c_2}\right)s^2 + \left(\frac{\beta^2}{k_2^2} - \frac{2\beta(\lambda+\delta)}{c_2 k_2}\right)s - \frac{\delta\beta^2}{c_2 k_2^2} &= 0, & u \geq b. \end{aligned} \tag{4.88}$$

Es fácil demostrar que dos raíces de cada ecuación en (4.88) son negativas ( $r_i, s_i < 0$ ,  $i = 1, 2$ ), y que una es positiva<sup>2</sup>,  $r_3, s_3 > 0$ . Por tanto, la solución de la ecuación diferencial ordinaria para la transformada de Laplace del momento de ruina tiene la misma estructura que en (4.81)

$$\phi(u) = \begin{cases} \phi_1(u) = \sum_{i=1}^3 F_i e^{r_i u}, & 0 \leq u < b \\ \phi_2(u) = \sum_{i=1}^3 G_i e^{s_i u}, & u \geq b, \end{cases}$$

<sup>2</sup>La regla de Descartes de los signos establece que, el número de raíces positivas de la ecuación  $f(x) = 0$  es igual al número de variaciones de signo del polinomio  $f(x)$ . En las ecuaciones de (4.88), se observa que solamente hay un cambio de signo, y por lo tanto, tenemos una raíz positiva, ya que cuando el coeficiente  $\frac{2\beta}{k_i} - \frac{\lambda+\delta}{c_i} > 0$  también lo es  $\frac{\beta^2}{k_i^2} - \frac{2\beta(\lambda+\delta)}{c_i k_i} > 0$ , para  $i = 1, 2$ .

donde los coeficientes  $F_i, G_i, i = 1, 2, 3$  son constantes que no dependen de  $u$ . De nuevo, para hallar sus valores, necesitamos las 6 ecuaciones que se detallan a continuación:

1. Considerando que  $\lim_{u \rightarrow \infty} \phi(u) = 0$ ,

$$G_3 = 0. \tag{4.89}$$

2. Teniendo en cuenta que  $\phi(u)$  es continua,  $\phi_1(b) = \phi_2(b)$ , obtenemos

$$\sum_{i=1}^3 F_i e^{r_i b} - \sum_{i=1}^2 G_i e^{s_i b} = 0 \tag{4.90}$$

3. Sustituyendo la estructura de solución (4.81) en (4.9), tendremos para  $0 \leq u < b$ ,

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^3 F_i r_i e^{r_i u} &= \frac{\lambda + \delta}{c_1} \sum_{i=1}^3 F_i e^{r_i u} \\ &\quad - \frac{\lambda}{c_1} \int_0^{\frac{u}{k_1}} \left( \sum_{i=1}^3 F_i e^{r_i(u-k_1 x)} \right) \beta^2 x e^{-\beta x} dx \\ &\quad - \frac{\lambda}{c_1} \left( 1 + \beta \frac{u}{k_1} \right) e^{-\beta \frac{u}{k_1}}, \end{aligned}$$

resolviendo la integral por partes,

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^3 F_i r_i e^{r_i u} &= \frac{\lambda + \delta}{c_1} \sum_{i=1}^3 F_i e^{r_i u} - \frac{\lambda}{c_1} \beta^2 \sum_{i=1}^3 \frac{F_i e^{r_i u}}{(r_i k_1 + \beta)^2} \\ &\quad + \frac{\lambda}{c_1} \beta^2 e^{-\beta \frac{u}{k_1}} \sum_{i=1}^3 F_i \frac{u(r_i k_1 + \beta) + k_1}{(r_i k_1 + \beta)^2 k_1} \\ &\quad - \frac{\lambda}{c_1} \left( 1 + \beta \frac{u}{k_1} \right) e^{-\beta \frac{u}{k_1}}, \end{aligned}$$

y reordenando,

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^3 F_i e^{r_i u} \left( r_i - \frac{\lambda + \delta}{c_1} + \frac{\lambda}{c_1} \frac{\beta^2}{(r_i k_1 + \beta)^2} \right) &= \frac{\lambda}{c_1} \beta^2 e^{-\beta \frac{u}{k_1}} \sum_{i=1}^3 F_i \frac{u(r_i k_1 + \beta) + k_1}{(r_i k_1 + \beta)^2 k_1} \\ &\quad - \frac{\lambda}{c_1} \left( 1 + \beta \frac{u}{k_1} \right) e^{-\beta \frac{u}{k_1}}. \end{aligned} \tag{4.91}$$

Simplificando (4.91),

$$\begin{aligned}
0 &= \beta^2 u e^{-\beta \frac{u}{k_1}} \sum_{i=1}^3 \frac{F_i}{(r_i k_1 + \beta) k_1} + \beta^2 e^{-\beta \frac{u}{k_1}} \sum_{i=1}^3 \frac{F_i}{(r_i k_1 + \beta)^2} \\
&\quad - e^{-\beta \frac{u}{k_1}} - \beta \frac{u}{k_1} e^{-\beta \frac{u}{k_1}}, \\
0 &= u e^{-\beta \frac{u}{k_1}} \left( \beta^2 \sum_{i=1}^3 \frac{F_i}{(r_i k_1 + \beta) k_1} - \frac{\beta}{k_1} \right) \\
&\quad + e^{-\beta \frac{u}{k_1}} \left( \beta^2 \sum_{i=1}^3 \frac{F_i}{(r_i k_1 + \beta)^2} - 1 \right). \tag{4.92}
\end{aligned}$$

De (4.92), se obtienen dos ecuaciones más, necesarias para hallar los coeficientes, que son

$$\sum_{i=1}^3 \frac{F_i}{(r_i k_1 + \beta)} = \frac{1}{\beta}, \tag{4.93}$$

$$\sum_{i=1}^3 \frac{F_i}{(r_i k_1 + \beta)^2} = \frac{1}{\beta^2}. \tag{4.94}$$

4. Para obtener las dos últimas ecuaciones, se repite el proceso aplicado en el punto anterior.

Sustituyendo la estructura de solución (4.81) en (4.9), tendremos para  $u \geq b$ ,

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^2 G_i s_i e^{s_i u} &= \frac{\lambda + \delta}{c_2} \sum_{i=1}^2 G_i e^{s_i u} - \frac{\lambda}{c_2} \left[ \int_0^{\frac{u-b}{k_2}} \sum_{i=1}^2 G_i e^{s_i(u-k_2 x)} \beta^2 x e^{-\beta x} dx \right. \\
&\quad \left. + \int_{\frac{u-b}{k_2}}^{\frac{u}{k_2}} \sum_{i=1}^3 F_i e^{r_i(u-k_2 x)} \beta^2 x e^{-\beta x} dx \right] \\
&\quad - \frac{\lambda}{c_2} \left( 1 + \beta \frac{u}{k_2} \right) e^{-\beta \frac{u}{k_2}},
\end{aligned}$$

resolviendo las dos integrales, se obtiene

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^2 G_i s_i e^{s_i u} &= \frac{\lambda + \delta}{c_2} \sum_{i=1}^2 G_i e^{s_i u} - \frac{\lambda}{c_2} \beta^2 \sum_{i=1}^2 \frac{G_i e^{s_i u}}{(s_i k_2 + \beta)^2} \\
&\quad - \frac{\lambda}{c_2} \frac{\beta^2}{k_2} e^{\frac{\beta}{k_2}(b-u)} \sum_{i=1}^2 \frac{G_i e^{s_i b}}{(s_i k_2 + \beta)^2} (b(s_i k_2 + \beta) - \beta u - k_2(s_i u + 1)) \\
&\quad + \frac{\lambda}{c_2} \frac{\beta^2}{k_2} e^{\frac{\beta}{k_2}(b-u)} \sum_{i=1}^3 \frac{F_i e^{r_i b}}{(r_i k_2 + \beta)^2} (b(r_i k_2 + \beta) - \beta u - k_2(r_i u + 1)) \\
&\quad + \frac{\lambda}{c_2} \frac{\beta^2}{k_2} e^{-\beta \frac{u}{k_2}} \sum_{i=1}^3 \frac{F_i}{(r_i k_2 + \beta)^2} (\beta u + k_2(r_i u + 1)) \\
&\quad - \frac{\lambda}{c_2} \left(1 + \beta \frac{u}{k_2}\right) e^{-\beta \frac{u}{k_2}},
\end{aligned}$$

reordenando,

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^2 G_i e^{s_i u} &\left( s_i - \frac{\lambda + \delta}{c_2} + \frac{\lambda}{c_2} \frac{\beta^2}{(s_i k_2 + \beta)^2} \right) \\
&= -\frac{\lambda}{c_2} \frac{\beta^2}{k_2} e^{\frac{\beta}{k_2}(b-u)} \sum_{i=1}^2 \frac{G_i e^{s_i b}}{(s_i k_2 + \beta)^2} ((b-u)(s_i k_2 + \beta) - k_2) \\
&\quad + \frac{\lambda}{c_2} \frac{\beta^2}{k_2} e^{\frac{\beta}{k_2}(b-u)} \sum_{i=1}^3 \frac{F_i e^{r_i b}}{(r_i k_2 + \beta)^2} ((b-u)(r_i k_2 + \beta) - k_2) \\
&\quad + \frac{\lambda}{c_2} \frac{\beta^2}{k_2} e^{-\beta \frac{u}{k_2}} \sum_{i=1}^3 \frac{F_i}{(r_i k_2 + \beta)^2} ((r_i k_2 + \beta)u + k_2) \tag{4.95} \\
&\quad - \frac{\lambda}{c_2} \frac{\beta}{k_2} u e^{-\beta \frac{u}{k_2}} - \frac{\lambda}{c_2} e^{-\beta \frac{u}{k_2}}.
\end{aligned}$$

Simplificando la expresión (4.95),

$$\begin{aligned}
0 &= -e^{\frac{\beta}{k_2}(b-u)} \sum_{i=1}^2 \frac{G_i e^{s_i b}}{(s_i k_2 + \beta)^2} (b(s_i k_2 + \beta) - k_2) + e^{\frac{\beta}{k_2}(b-u)} u \sum_{i=1}^2 \frac{G_i e^{s_i b}}{(s_i k_2 + \beta)} \\
&+ e^{\frac{\beta}{k_2}(b-u)} \sum_{i=1}^3 \frac{F_i e^{r_i b}}{(r_i k_2 + \beta)^2} (b(r_i k_2 + \beta) - k_2) \\
&- e^{\frac{\beta}{k_2}(b-u)} u \sum_{i=1}^3 \frac{F_i e^{r_i b}}{(r_i k_2 + \beta)} + e^{-\beta \frac{u}{k_2}} u \sum_{i=1}^3 \frac{F_i}{(r_i k_2 + \beta)} \\
&+ e^{-\beta \frac{u}{k_2}} k_2 \sum_{i=1}^3 \frac{F_i}{(r_i k_2 + \beta)^2} - \frac{1}{\beta} u e^{-\beta \frac{u}{k_2}} - \frac{k_2}{\beta^2} e^{-\beta \frac{u}{k_2}}, \\
0 &= u e^{-\frac{\beta}{k_2} u} \left( e^{\frac{\beta}{k_2} b} \sum_{i=1}^2 \frac{G_i e^{s_i b}}{(s_i k_2 + \beta)} - e^{\frac{\beta}{k_2} b} \sum_{i=1}^3 \frac{F_i e^{r_i b}}{(r_i k_2 + \beta)} \right. \\
&+ \left. \sum_{i=1}^3 \frac{F_i}{(r_i k_2 + \beta)} - \frac{1}{\beta} \right) + e^{-\frac{\beta}{k_2} u} \left( -e^{\frac{\beta}{k_2} b} \sum_{i=1}^2 \frac{G_i e^{s_i b}}{(s_i k_2 + \beta)^2} (b(s_i k_2 + \beta) - k_2) \right. \\
&+ \left. e^{\frac{\beta}{k_2} b} \sum_{i=1}^3 \frac{F_i e^{r_i b}}{(r_i k_2 + \beta)^2} (b(r_i k_2 + \beta) - k_2) + k_2 \sum_{i=1}^3 \frac{F_i}{(r_i k_2 + \beta)^2} - \frac{k_2}{\beta^2} \right). \quad (4.96)
\end{aligned}$$

Finalmente, de la expresión (4.96), se obtienen las dos últimas ecuaciones necesarias para hallar los coeficientes. Éstas son,

$$\sum_{i=1}^3 \frac{F_i}{(r_i k_2 + \beta)} \left( 1 - e^{b(r_i + \frac{\beta}{k_2})} \right) + \sum_{i=1}^2 \frac{G_i e^{b(s_i + \frac{\beta}{k_2})}}{(s_i k_2 + \beta)} = \frac{1}{\beta} \quad (4.97)$$

$$\sum_{i=1}^3 \frac{F_i \left( e^{b(r_i + \frac{\beta}{k_2})} (b(r_i k_2 + \beta) - k_2) + k_2 \right)}{(r_i k_2 + \beta)^2} - \sum_{i=1}^2 \frac{G_i e^{b(s_i + \frac{\beta}{k_2})} (b(s_i k_2 + \beta) - k_2)}{(s_i k_2 + \beta)^2} = \frac{k_2}{\beta^2} \quad (4.98)$$



Por tanto, una vez obtenidas las 6 ecuaciones, resolviendo el sistema siguiente se hallan los coeficientes  $F_i, G_i, i = 1, 2, 3$

$$\left\{ \begin{array}{l} G_3 = 0 \\ \sum_{i=1}^3 F_i e^{r_i b} - \sum_{i=1}^2 G_i e^{s_i b} = 0 \\ \sum_{i=1}^3 \frac{F_i}{(r_i k_1 + \beta)} = \frac{1}{\beta} \\ \sum_{i=1}^3 \frac{F_i}{(r_i k_1 + \beta)^2} = \frac{1}{\beta^2} \\ \sum_{i=1}^3 \frac{F_i}{(r_i k_2 + \beta)} \left( 1 - e^{b(r_i + \frac{\beta}{k_2})} \right) + \sum_{i=1}^2 \frac{G_i e^{b(s_i + \frac{\beta}{k_2})}}{(s_i k_2 + \beta)} = \frac{1}{\beta} \\ \sum_{i=1}^3 \frac{F_i \left( e^{b(r_i + \frac{\beta}{k_2})} (b(r_i k_2 + \beta) - k_2) + k_2 \right)}{(r_i k_2 + \beta)^2} - \sum_{i=1}^2 \frac{G_i e^{b(s_i + \frac{\beta}{k_2})} (b(s_i k_2 + \beta) - k_2)}{(s_i k_2 + \beta)^2} = \frac{k_2}{\beta^2} \end{array} \right. \quad (4.99)$$

Por último, para obtener la probabilidad de ruina, utilizaremos las mismas ecuaciones del sistema (4.99), teniendo en cuenta que  $\delta = r_3 = s_3 = 0$ , y sustituiremos estos coeficientes en (4.85).

A continuación, se detallan las expresiones para la transformada de Laplace del momento de ruina y la probabilidad de ruina en los casos particulares donde  $k_1 = k_2 = k$  y  $k_1 = k_2 = 1$ , teniendo en cuenta que la distribución de la cuantía del siniestro sigue una Erlang( $2, \beta$ ).

- **Caso 1:** Si  $k_1 = k_2 = k$ , la transformada de Laplace del momento de ruina en un modelo con reaseguro proporcional con un nivel de retención fijo  $k$  es

$$\phi(u) = -\frac{r_2 (kr_1 + \beta)^2}{(r_1 - r_2) \beta^2} e^{r_1 u} + \frac{r_1 (kr_2 + \beta)^2}{(r_1 - r_2) \beta^2} e^{r_2 u}, \quad u \geq 0, \quad (4.100)$$

siendo  $r_1$  y  $r_2$  las raíces negativas de la ecuación

$$r^3 + \left( \frac{2\beta}{k} - \frac{\lambda + \delta}{c} \right) r^2 + \left( \frac{\beta^2}{k^2} - \frac{2\beta(\lambda + \delta)}{ck} \right) r - \frac{\delta\beta^2}{ck^2} = 0.$$

Y la probabilidad de ruina es

$$\begin{aligned} \psi(u) = & \frac{3 + 2\rho_N + \sqrt{9 + 8\rho_N}}{2(1 + \rho_N)\sqrt{9 + 8\rho_N}} e^{-\frac{(3-4\rho_N + \sqrt{9+8\rho_N})\beta}{4k(1+\rho_N)}u} \\ & + \frac{\sqrt{9 + 8\rho_N} - 3 - 2\rho_N}{2(1 + \rho_N)\sqrt{9 + 8\rho_N}} e^{-\frac{(3+4\rho_N + \sqrt{9+8\rho_N})\beta}{4k(1+\rho_N)}u}, \quad u \geq 0, \end{aligned} \quad (4.101)$$

- Caso 2: Si  $k_1 = k_2 = 1$ , se obtiene la transformada de Laplace del momento de ruina en un modelo clásico,

$$\phi(u) = -\frac{r_2(r_1 + \beta)^2}{(r_1 - r_2)\beta^2} e^{r_1 u} + \frac{r_1(r_2 + \beta)^2}{(r_1 - r_2)\beta^2} e^{r_2 u}, \quad u \geq 0, \quad (4.102)$$

siendo  $r_1$  y  $r_2$  las raíces negativas de la ecuación

$$r^3 + \left( 2\beta - \frac{\lambda + \delta}{c} \right) r^2 + \left( \beta^2 - \frac{2\beta(\lambda + \delta)}{c} \right) r - \frac{\delta\beta^2}{c} = 0.$$

Y la probabilidad de ruina es

$$\begin{aligned} \psi(u) = & \frac{3 + 2\rho + \sqrt{9 + 8\rho}}{2(1 + \rho)\sqrt{9 + 8\rho}} e^{-\frac{(3-4\rho + \sqrt{9+8\rho})\beta}{4(1+\rho)}u} \\ & + \frac{\sqrt{9 + 8\rho} - 3 - 2\rho}{2(1 + \rho)\sqrt{9 + 8\rho}} e^{-\frac{(3+4\rho + \sqrt{9+8\rho})\beta}{4(1+\rho)}u}, \quad u \geq 0. \end{aligned} \quad (4.103)$$

#### 4.5.4. Aplicación numérica

En el siguiente subapartado, se analiza de manera detallada el comportamiento de la transformada de Laplace del momento de ruina y la probabilidad de ruina en un modelo con estrategia de reaseguro proporcional de umbral con cuantía Erlang(2,  $\beta$ ). Los cálculos mostrados se han realizado mediante el programa *Mathematica 6.0*.

Se realiza una aplicación numérica con los mismos valores que se utilizaron en el caso de la cuantía exponencial unitaria:  $\rho = 0.15$ ,  $\rho_R = 0.25$ ,  $\lambda = 1$ ,  $k_1 = 0.8$ ,  $k_2 = 0.45$ ,  $\delta = 0.03$ ,  $\beta = 2$  para distintos niveles de umbral  $b = 2$ ,  $b = 8$  y  $b = 15$ .

La cuantía media de los siniestros para la distribución Erlang(2, 2) es 1, igual que en la aplicación numérica de la exponencial. Se ha analizado precisamente este caso, para ver si el cambio en la distribución de la cuantía del siniestro tiene algún efecto significativo en el comportamiento de las magnitudes, aunque la cuantía media no se viese alterada.

Sustituyendo estos valores en las ecuaciones de (4.99) se obtienen los coeficientes necesarios para la estructura de solución de la transformada de Laplace del momento de ruina en (4.81), donde las raíces se hallan a partir de las expresiones en (4.88). Teniendo en cuenta los distintos niveles de umbral  $b = 2$ ,  $b = 8$  y  $b = 15$  se obtienen las siguientes transformadas de Laplace del momento de ruina respectivamente:

$$\begin{aligned} \blacksquare \phi(u) &= \begin{cases} \phi_1(u) = -0.0246e^{-3.6975u} + 0.8840e^{-0.3291u} - 0.0742e^{0.1711u}, & 0 \leq u < 2, \\ \phi_2(u) = -109.357e^{-6.6392u} + 0.8703e^{-0.4507u}, & u \geq 2, \end{cases} \\ \blacksquare \phi(u) &= \begin{cases} \phi_1(u) = -0.0225e^{-3.6975u} + 0.8303e^{-0.3291u} - 0.0034e^{0.1711u}, & 0 \leq u < 8, \\ \phi_2(u) = -2.85 \times 10^{18}e^{-6.6392u} + 1.6969e^{-0.4507u}, & u \geq 8, \end{cases} \\ \blacksquare \phi(u) &= \begin{cases} \phi_1(u) = -0.0224e^{-3.6975u} + 0.8277e^{-0.3291u} - 0.0001e^{0.1711u}, & 0 \leq u < 15, \\ \phi_2(u) = -4.34 \times 10^{37}e^{-6.6392u} + 3.9633e^{-0.4507u}, & u \geq 15. \end{cases} \end{aligned}$$

Se observa que las raíces de las tres expresiones anteriores coinciden, ya que éstas no dependen del nivel de umbral  $b$ .

En la Figura 4.5 se representan las transformadas de Laplace del momento de ruina halladas, y en la Tabla 4.5 se recogen los valores correspondientes para distintos niveles de las reservas iniciales.

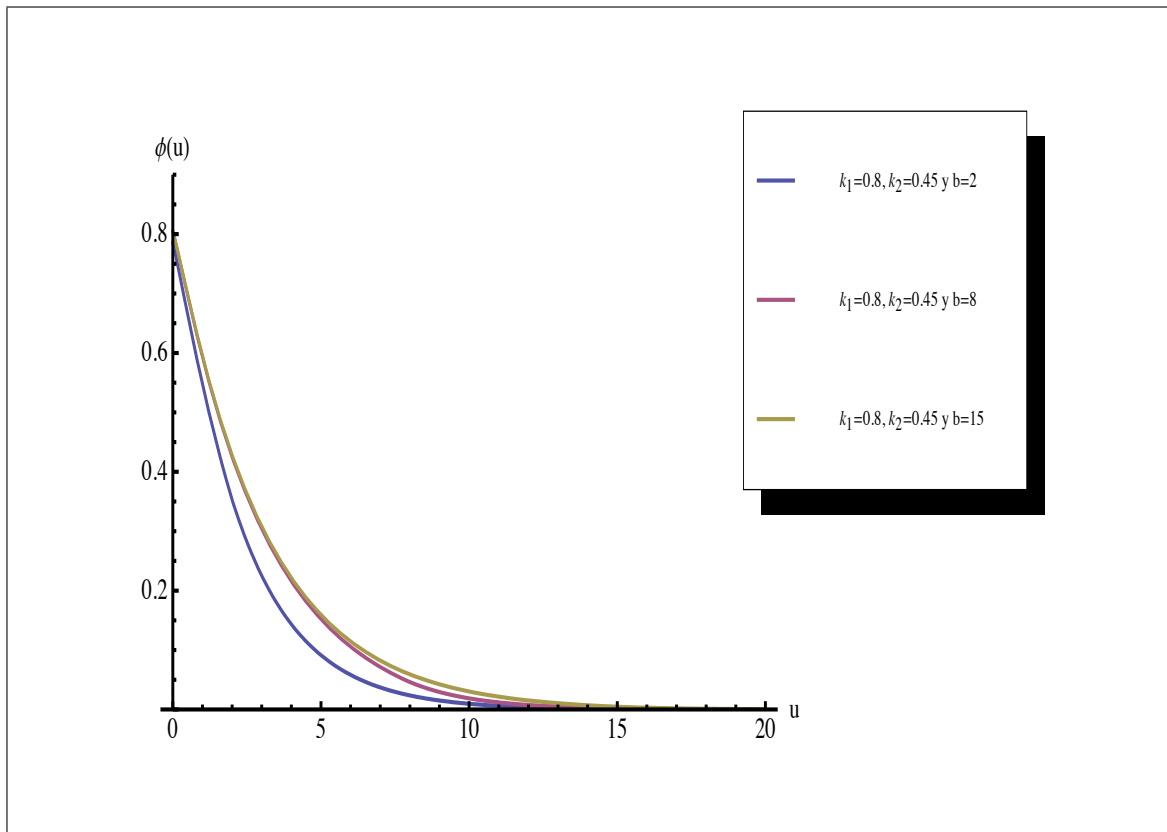


Figura 4.5: Transformada de Laplace del momento de ruina con cuantía Erlang(2, 2)

$u$	$\phi(u)$ con $b = 2$	$\phi(u)$ con $b = 8$	$\phi(u)$ con $b = 15$
0	0.7851	0.8043	0.8052
4	0.1434	0.2157	0.2216
8	0.0236	0.0460	0.0590
12	0.0038	0.0075	0.0151
16	0.0006	0.0012	0.0029
20	0.0001	0.0002	0.0004

Tabla 4.5: Valores de  $\phi(u)$  para distintas  $u$  y  $b$  con cuantía Erlang(2, 2)

Para la probabilidad de ruina, teniendo en cuenta los mismos valores, se obtienen las siguientes expresiones:

$$\begin{aligned} \blacksquare \psi(u) &= \begin{cases} \psi_1(u) = -0.0065e^{-3.7012u} + 0.4805e^{-0.1876u} + 0.4667, & 0 \leq u < 2, \\ \psi_2(u) = 24.2807e^{-6.6464u} + 0.9357e^{-0.0803u}, & u \geq 2, \end{cases} \\ \blacksquare \psi(u) &= \begin{cases} \psi_1(u) = -0.0095e^{-3.7012u} + 0.7017e^{-0.1876u} + 0.2213, & 0 \leq u < 8, \\ \psi_2(u) = 2.38 \times 10^{18}e^{-6.6464u} + 0.7182e^{-0.0803u}, & u \geq 8, \end{cases} \\ \blacksquare \psi(u) &= \begin{cases} \psi_1(u) = -0.0114e^{-3.7012u} + 0.8372e^{-0.1876u} + 0.0710, & 0 \leq u < 15, \\ \psi_2(u) = 1.22 \times 10^{38}e^{-6.6464u} + 0.4043e^{-0.0803u}, & u \geq 15. \end{cases} \end{aligned}$$

En la Figura 4.6 se representa el comportamiento de las probabilidades de ruina para distintos niveles de umbral, y en la Tabla 4.6 se adjuntan los valores concretos.

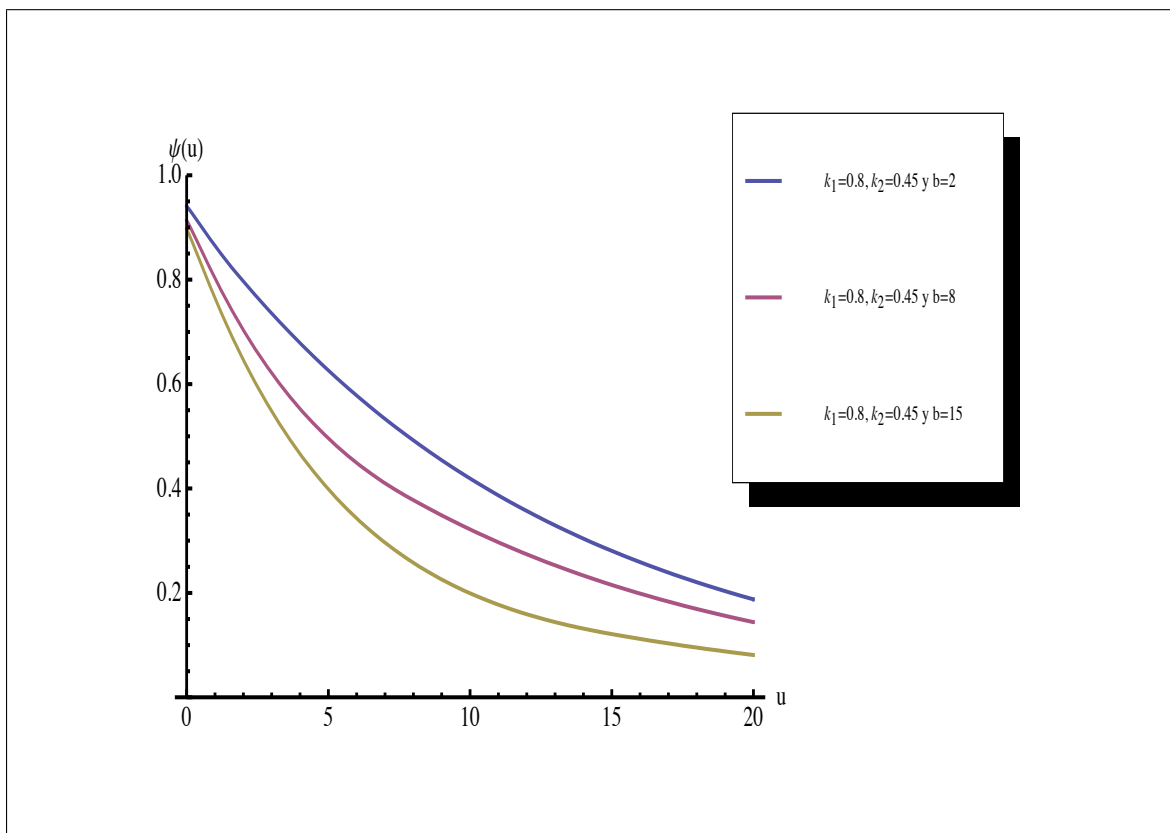


Figura 4.6: Probabilidad de ruina con cuantía Erlang(2, 2)

$u$	$\psi(u)$ con $b = 2$	$\psi(u)$ con $b = 8$	$\psi(u)$ con $b = 15$
0	0.9407	0.9134	0.8967
4	0.6786	0.5526	0.4662
8	0.4921	0.3777	0.2576
12	0.3569	0.2739	0.1591
16	0.2588	0.1986	0.1118
20	0.1877	0.1440	0.0811

Tabla 4.6: Valores de  $\psi(u)$  para distintas  $u$  y  $b$  con cuantía Erlang(2, 2)

Por último, en la Figura 4.7 se representan la esperanza, la varianza y el coeficiente de variación de la variable aleatoria momento de ruina, con los mismos valores iniciales y para distintos niveles de umbral  $b$ . En la tabla 4.7 y 4.8 se recogen los valores para una evaluación más detallada de su comportamiento.

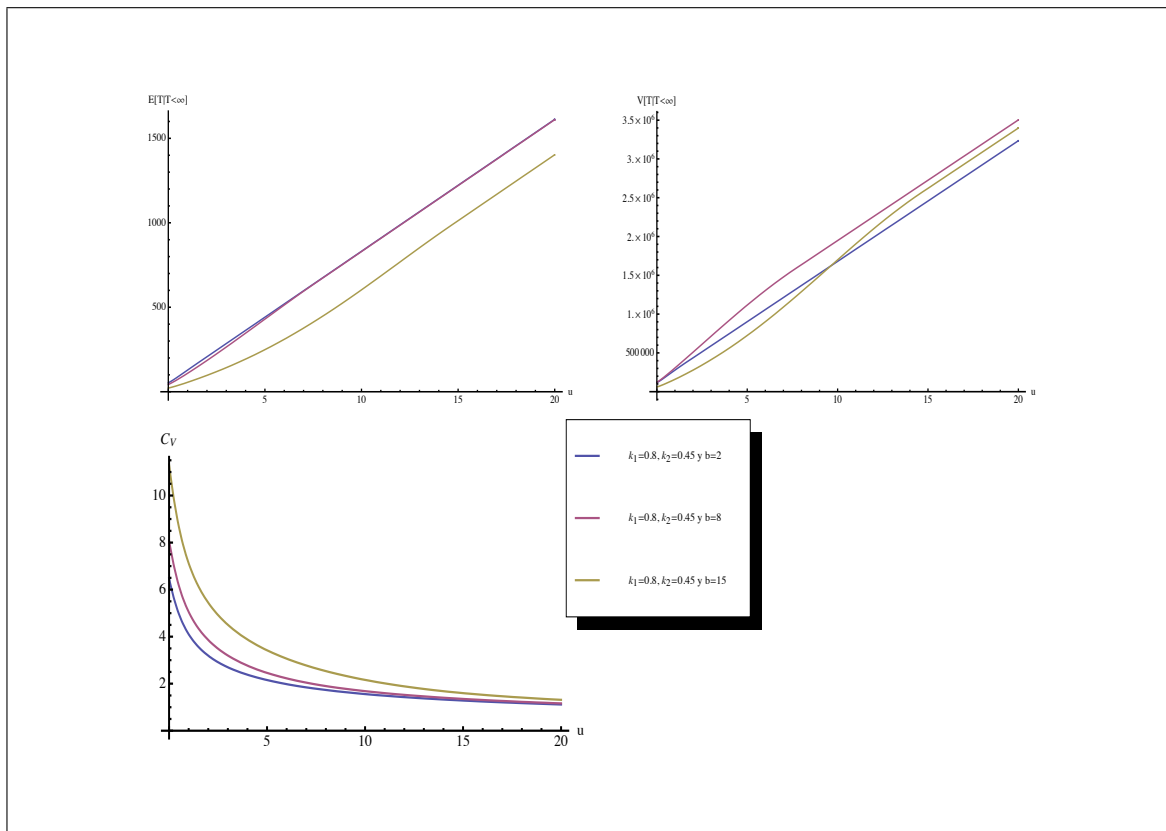


Figura 4.7: Esperanza, varianza y  $C_V$  de la v.a. momento de ruina con cuantía Erlang(2, 2)

$u$	$E [T   T < \infty]$ con $b = 2$	$E [T   T < \infty]$ con $b = 8$	$E [T   T < \infty]$ con $b = 15$
0	52.51	42.88	21.64
4	363.09	346.48	193.10
8	675.41	673.65	447.90
12	987.72	985.99	768.68
16	1300.04	1298.30	1090.57
20	1612.35	1610.61	1402.88

Tabla 4.7:  $E [T | T < \infty]$  para distintas  $u$  y  $b$  con cuantía Erlang(2, 2)

$u$	$b = 2$		$b = 8$		$b = 15$	
	$V[T   T < \infty]$	$C_V$	$V[T   T < \infty]$	$C_V$	$V[T   T < \infty]$	$C_V$
0	115797	6.47	120387	8.09	59995.5	11.31
4	746660	2.37	918753	2.76	560675	3.87
8	$1.36 \times 10^6$	1.73	$1.63 \times 10^6$	1.89	$1.28 \times 10^6$	2.53
12	$1.99 \times 10^6$	1.42	$2.25 \times 10^6$	1.52	$2.10 \times 10^6$	1.88
16	$2.61 \times 10^6$	1.24	$2.88 \times 10^6$	1.30	$2.77 \times 10^6$	1.52
20	$3,23 \times 10^6$	1.11	$3.50 \times 10^6$	1.16	$3.39 \times 10^6$	1.31

Tabla 4.8:  $V[T | T < \infty]$  y  $C_V$  para distintas  $u$  y  $b$  con cuantía Erlang(2, 2)

Podemos concluir que el cambio de la distribución de la cuantía de los siniestros, no provoca variaciones significativas en el comportamiento de las magnitudes analizadas.

## 4.6. Análisis numérico y comparativo

En este último apartado se presentan una serie de análisis numéricos y comparativos de la nueva estrategia de reaseguro proporcional de umbral junto con otras estrategias que se derivan de ella.

En primer lugar, se muestran los resultados numéricos, realizados con el programa *Mathematica 6.0*, para la probabilidad de ruina con una estrategia de reaseguro proporcional de umbral y se hallan las probabilidades mínimas para distintos niveles de umbral y distintas  $u$ . En segundo lugar, se estudia el caso 1,  $k_1 = k_2 = k$ , donde se hallan expresiones exactas para la  $k$  que minimiza la probabilidad de ruina en un reaseguro proporcional con retención fija y se comparan los resultados con la probabilidad de ruina mínima obtenida maximizando el coeficiente de ajuste. En tercer lugar, se comparan las distintas probabilidades mínimas teniendo en cuenta una estrategia de reaseguro proporcional de umbral y un reaseguro proporcional que no dependa del nivel de las reservas. Por último, se estudia el caso particular extremo de la estrategia de reaseguro proporcional de umbral cuando  $k_1 = 1$  y  $\forall k_2$ .

En todos los ejemplos, los cálculos están realizados para  $X \sim \text{Exponencial}(1)$ ,  $\lambda = 1$ ,  $\rho = 0.15$  y  $\rho_R = 0.25$ .

### 4.6.1. Estrategia óptima con reaseguro proporcional de umbral

El objetivo en este subapartado es encontrar, si existe, la estrategia óptima para el asegurador, es decir, aquella que minimiza la probabilidad de ruina, siendo las variables de decisión  $k_1$ ,  $k_2$  y  $b$ .

En primer lugar, se analizan los casos con distintos niveles de umbral  $b = 2$ ,  $b = 8$  y  $b = 15$  para diferentes valores de  $u$ . En la Figura 4.8 se pueden observar los gráficos obtenidos mediante el programa *Mathematica 6.0*, para las distintas probabilidades de ruina y los distintos niveles de umbral.



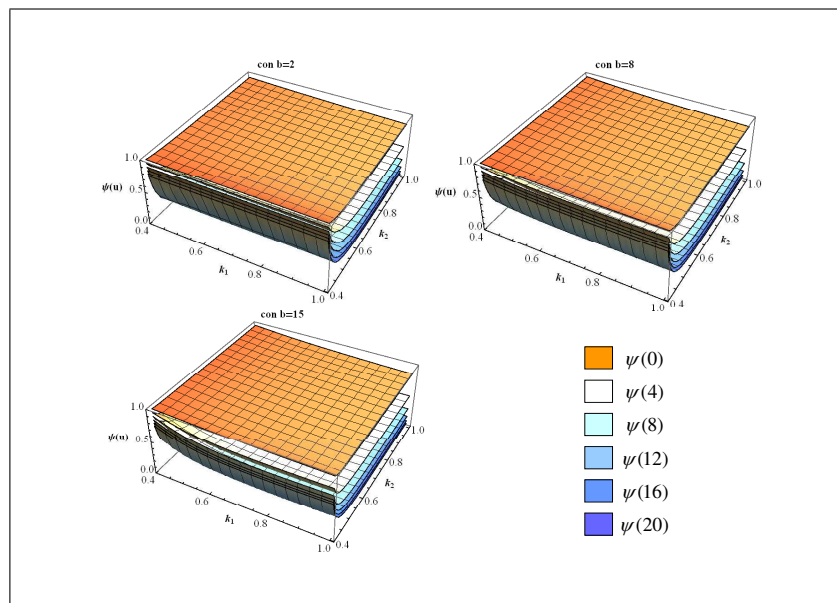


Figura 4.8:  $\psi(u)$  en un modelo de reaseguro proporcional de umbral para distintas  $u$  y  $b$

Con objeto de apreciar mejor la existencia de la probabilidad de ruina mínima para cada nivel de reserva y umbral presentado en la Figura anterior, se incluye la Figura 4.9. En ella se detalla el caso concreto de la estrategia de reaseguro proporcional de umbral con  $b = 2$ , donde para un nivel de reservas  $u = 20$ , se observa la existencia de una probabilidad de ruina mínima de valor 0.0538 con la combinación de niveles de retención  $k_1 = 1$  y  $k_2 = 0.7601$ .

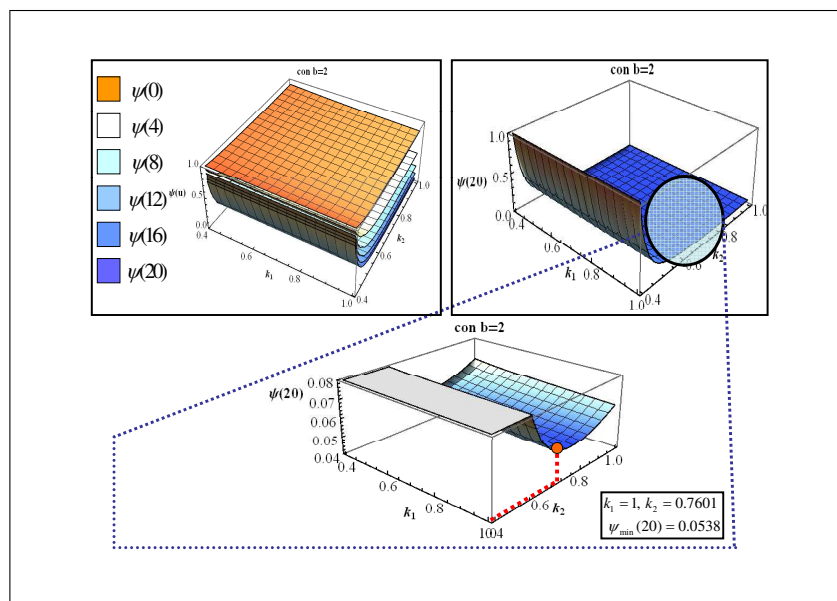


Figura 4.9:  $\psi_{\min}(20)$  con  $b = 2$  en un modelo con reaseguro proporcional de umbral

En las Figuras 4.10, 4.11 y 4.12 se dibujan las curvas de nivel en cada caso considerado en la Figura 4.8. Por lo tanto, se obtienen 6 gráficos, correspondientes a las 6 situaciones de niveles de reservas, para los tres niveles de umbral considerados en este análisis, siendo  $b = 2$ ,  $b = 8$  y  $b = 15$ . En cada caso se encuentra numéricamente la probabilidad de ruina mínima, obteniéndose así la estrategia óptima para cada nivel distinto de reservas y umbral  $b$ .

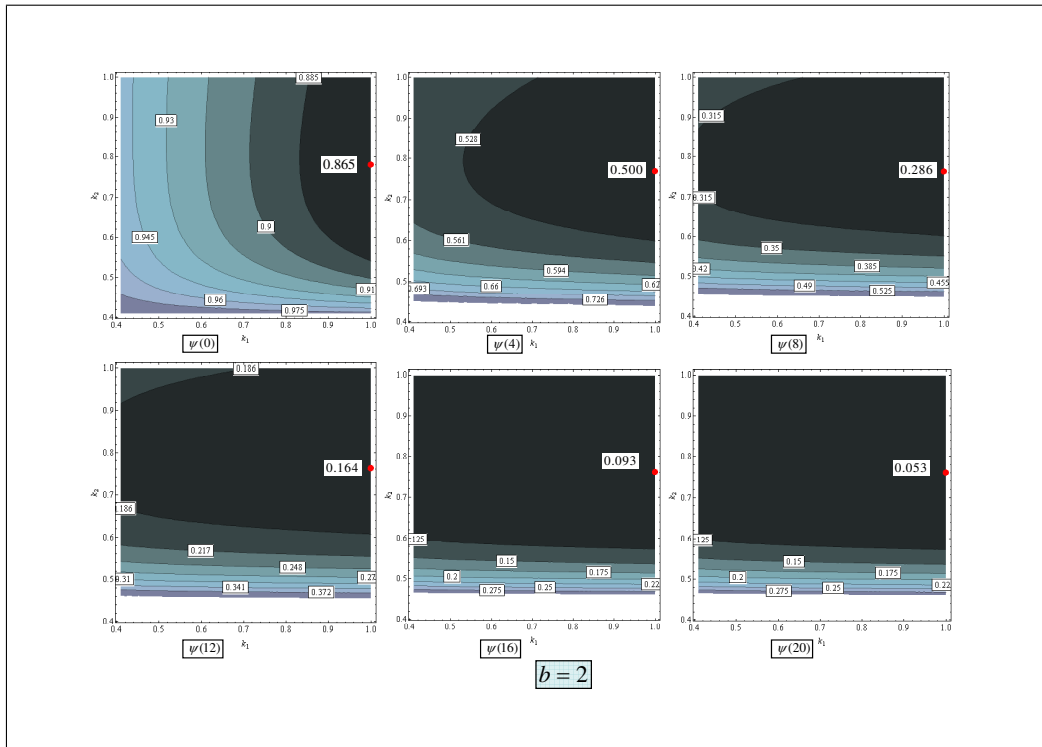


Figura 4.10: Curvas de nivel con umbral  $b = 2$  para distintas  $u$

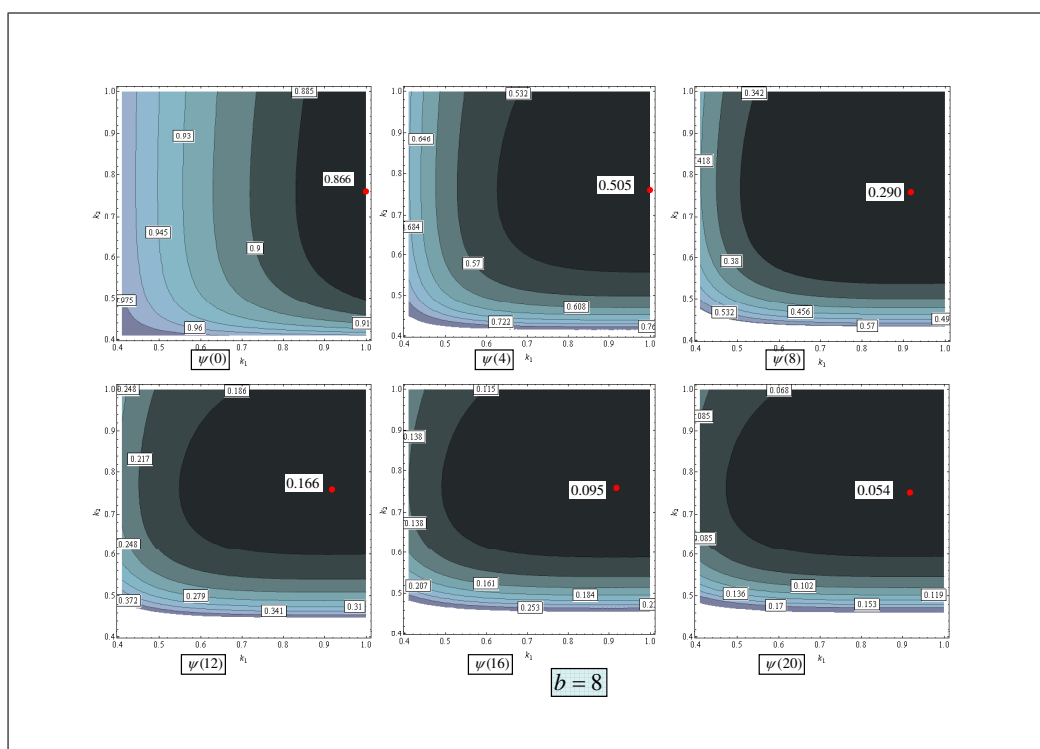


Figura 4.11: Curvas de nivel con umbral  $b = 8$  para distintas  $u$

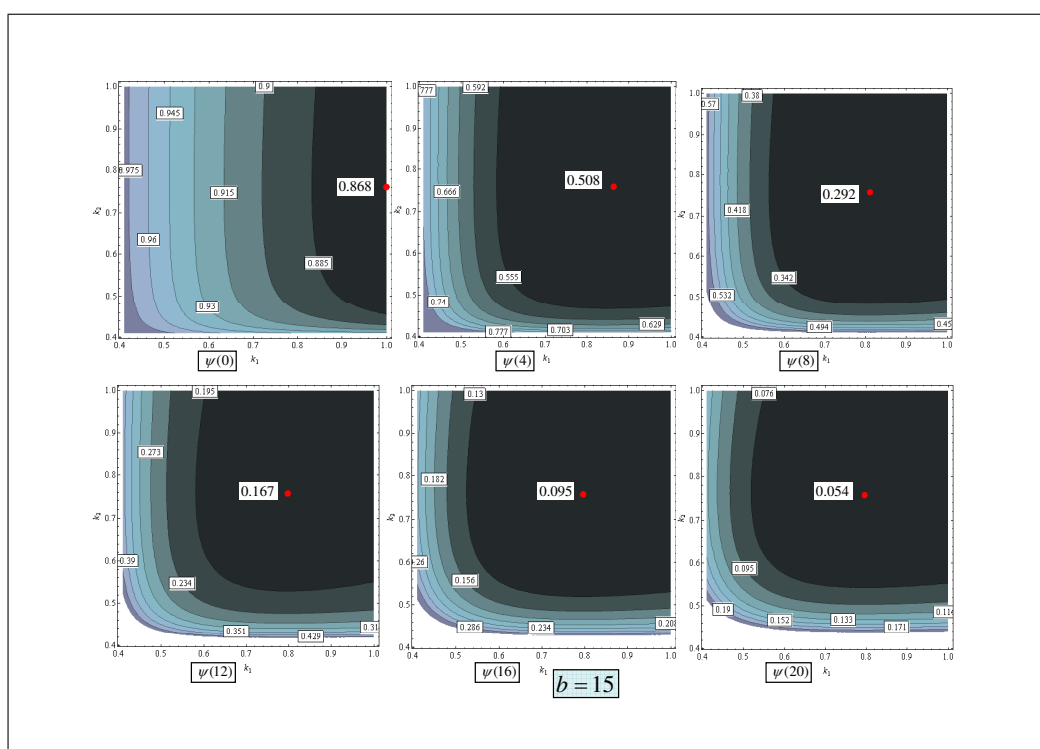


Figura 4.12: Curvas de nivel con umbral  $b = 15$  para distintas  $u$

En la Tabla 4.9 se recogen las combinaciones de  $k_1$  y  $k_2$  que dan la mínima probabilidad de ruina para distintos valores de  $u$  ( $b = 2, 8$  y  $15$ ). Estos valores se obtienen mediante un algoritmo del *Mathematica 6.0* que permite minimizar numéricamente con restricciones.

	$b = 2$			$b = 8$			$b = 15$		
$u$	$\psi_{\min}(u)$	$k_1$	$k_2$	$\psi_{\min}(u)$	$k_1$	$k_2$	$\psi_{\min}(u)$	$k_1$	$k_2$
0	0.8659	1	0.7806	0.8666	1	0.7602	0.8684	1	0.7603
4	0.5001	1	0.7693	0.5053	1	0.7602	0.5086	0.8639	0.7584
8	0.2865	1	0.7636	0.2905	0.91742	0.7590	0.2923	0.8105	0.7579
12	0.1641	1	0.7616	0.1664	0.91738	0.7585	0.1675	0.7977	0.7578
16	0.0939	1	0.7607	0.0953	0.91736	0.7583	0.0959	0.7963	0.7578
20	0.0538	1	0.7601	0.0545	0.91735	0.7581	0.0549	0.7963	0.7578

Tabla 4.9:  $\psi_{\min}(u)$  con reaseguro proporcional de umbral para distintas  $u$  y  $b$

En la Tabla 4.9 se observa que, para un determinado umbral  $b$ , a mayor nivel de reservas la probabilidad de ruina mínima disminuye, es decir, la probabilidad óptima es decreciente respecto al nivel de las reservas.

En segundo lugar, nos planteamos el cálculo del valor óptimo para el umbral. Numéricamente se comprueba que el valor óptimo para el umbral es  $b = 3.3$  y es independiente del nivel inicial de las reservas.

En la Tabla 4.10 se presentan las probabilidades de ruina mínima para distintas  $u$  y nivel de umbral  $b = 3.3$  con su combinación óptima de retenciones. En las tres últimas columnas se obtienen la esperanza, la varianza y el coeficiente de variación del momento de ruina condicionado a que la ruina ocurra, considerando como criterio la combinación óptima de retenciones obtenidas que hacen mínima la probabilidad de ruina.

$u$	$\psi_{\min}(u)$	$k_1$	$k_2$	$E[T   T < \infty]$	$V[T   T < \infty]$	$C_V$
0	0.8646	1	0.7599	9.272	1556.0	4.25
4	0.4980	1	0.7595	47.157	7780.2	1.87
8	0.2852	1	0.7586	87.159	14205.6	1.36
12	0.1633	1	0.7583	127.161	20627.4	1.12
16	0.0935	1	0.7582	167.161	27048.4	0.98
20	0.0536	1	0.7581	207.161	33468.7	0.88

Tabla 4.10:  $\psi_{\min}(u)$ , esperanza, varianza y  $C_V$  del momento de ruina con reaseguro proporcional de umbral para distintas  $u$  y  $b = 3.3$

Por lo tanto, la estrategia óptima a considerar por la entidad aseguradora es la de optar por un nivel de umbral bajo (en este ejemplo  $b = 3.3$ ). Así, no reasegurar ( $k_1 = 1$ ) cuando las reservas son inferiores a dicho nivel de umbral y reasegurar con un nivel de retención aproximadamente del 76 % cuando las reservas son superiores. Más adelante se estudia este caso extremo de la estrategia de reaseguro proporcional de umbral, en el que se considera  $k_1 = 1$  para  $\forall k_2$ , puesto que minimiza la probabilidad de ruina y se convierte en la estrategia óptima a seguir por la entidad aseguradora.

#### 4.6.2. Estrategia óptima con reaseguro proporcional con nivel de retención $k$

Si estudiamos el caso 1,  $k_1 = k_2 = k$ , como se ha realizado en el apartado 4.4.2. para la probabilidad de ruina, se obtiene que a partir de la estrategia de reaseguro proporcional de umbral se consigue la estrategia de reaseguro proporcional para un nivel  $k$  fijo que no depende del nivel de las reservas. Si se considera que la cuantía de los siniestros se distribuye según una exponencial(1) y el número medio de siniestros es  $\lambda = 1$ , se obtiene que la expresión (4.34) es

$$\psi(u) = \frac{k}{k(1 + \rho_R) + \rho - \rho_R} e^{-\frac{\rho_R(k-1) + \rho}{k((1 + \rho_R)k + \rho - \rho_R)}u}, \quad (4.104)$$

donde

$$\frac{\rho_R - \rho}{\rho_R} < k \leq 1 \text{ si } \rho_R > \rho > 0.$$

A continuación, utilizando la expresión (4.104), se calcula la probabilidad de ruina para un modelo con reaseguro proporcional considerando que  $\rho = 0.15$  y  $\rho_R = 0.25$  en función del nivel de retención  $k$ . Por tanto, estos recargos de seguridad harán que el porcentaje de retención esté comprendido entre  $0.4 < k \leq 1$ . En la Figura 4.13 se representan estas probabilidades para distintos niveles iniciales de las reservas.

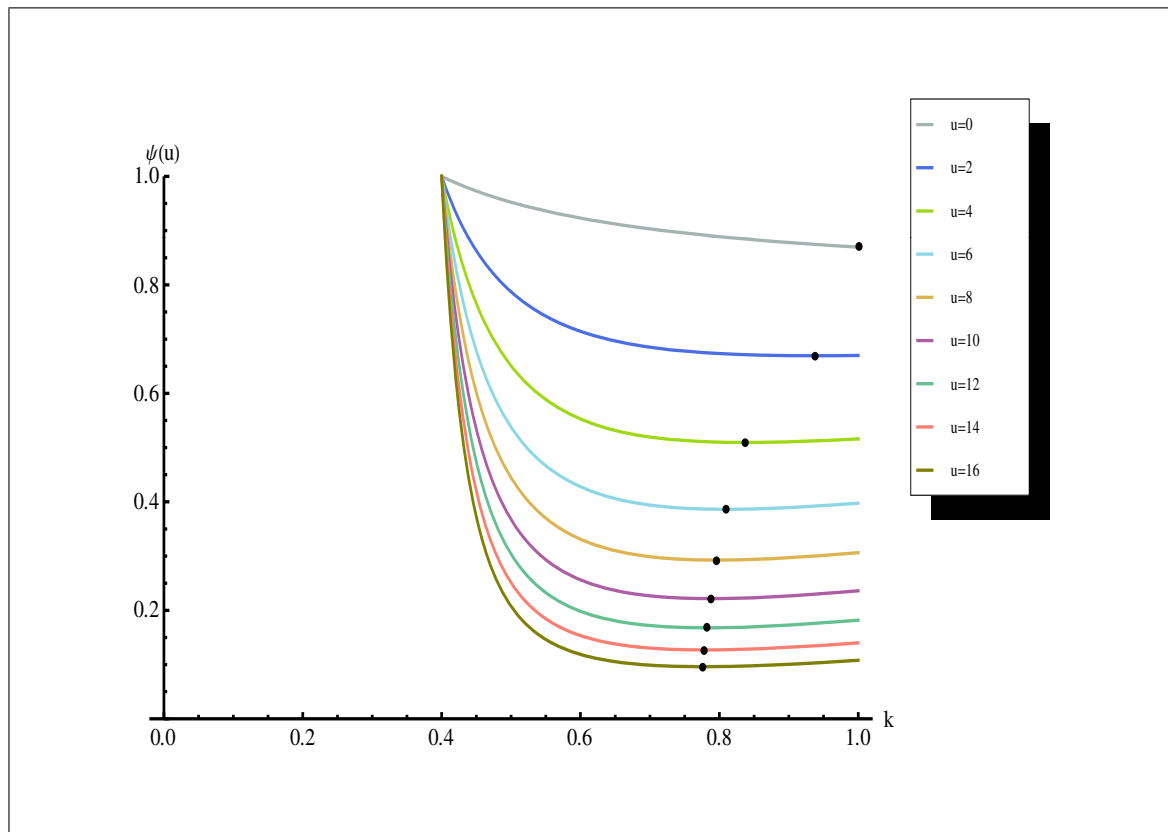


Figura 4.13:  $\psi(u)$  con reaseguro proporcional en función de  $k$  y para distintas  $u$  con  $\rho = 0.15$  y  $\rho_R = 0.25$

En la Figura 4.13 se observa que las diferentes probabilidades de ruina para distintas  $u$  parten del mismo valor de  $k = \frac{\rho_R - \rho}{\rho_R} = 0.4$  con probabilidad de ruina 1. Estas probabilidades para unas reservas iniciales  $u > \frac{\rho_R - \rho}{\rho_R}$  decrecen hasta llegar a un nivel de retención  $k$  donde la probabilidad de ruina alcanza su valor mínimo y vuelven a crecer. En caso de tener unas reservas

iniciales entre  $0 \leq u < \frac{\rho_R - \rho}{\rho_R}$ , la probabilidad decrece siempre en función de  $k$  obteniéndose la probabilidad de ruina mínima en  $k = 1$ . Desde el punto de vista del asegurador, su estrategia óptima será hallar el valor de  $k$  que minimiza la probabilidad de ruina dependiendo de las reservas iniciales que tenga.

A partir del análisis anterior, se presentan expresiones explícitas para el valor de  $k$  que minimiza la probabilidad de ruina, la cual se denota  $k_{op}(u)$ , y para la probabilidad de ruina mínima, que se denota  $\psi_{\min}^{k_{op}}(u)$ . Para hacer este análisis general se ha de tener en cuenta que el comportamiento de la probabilidad de ruina representado en la Figura 4.13 no es generalizable para cualquier valor de los recargos de seguridad (asegurador y reasegurador). En concreto, el comportamiento anterior es el correspondiente a  $\rho(2 + \rho) > \rho_R$ . En este caso, el  $k$  que minimiza la probabilidad de ruina es

$$k_{op}(u) = \begin{cases} -\frac{(\rho_R - \rho)(\rho + 2u + \rho_R(2u - 1) + \sqrt{(\rho - \rho_R)^2 + 4(1 + \rho_R)u^2})}{2(1 + \rho_R)(\rho + \rho_R(u - 1))}, & u \geq \frac{(1 + \rho)(\rho_R - \rho)}{\rho(2 + \rho) - \rho_R}, \\ 1, & 0 \leq u < \frac{(1 + \rho)(\rho_R - \rho)}{\rho(2 + \rho) - \rho_R}, \end{cases} \quad (4.105)$$

y la probabilidad de ruina mínima

$$\psi_{\min}^{k_{op}}(u) = \begin{cases} \frac{e^{\frac{(2 + \rho_R)u - \sqrt{(\rho - \rho_R)^2 + 4(1 + \rho_R)u^2}}{\rho - \rho_R}} \left( \rho + 2u + \rho_R(2u - 1) + \sqrt{(\rho - \rho_R)^2 + 4(1 + \rho_R)u^2} \right)}{(1 + \rho_R) \left( \rho_R - \rho + 2u + \sqrt{(\rho - \rho_R)^2 + 4(1 + \rho_R)u^2} \right)}, & u \geq \frac{(1 + \rho)(\rho_R - \rho)}{\rho(2 + \rho) - \rho_R}, \\ \frac{1}{1 + \rho} e^{-\frac{\rho}{1 + \rho}u}, & 0 \leq u < \frac{(1 + \rho)(\rho_R - \rho)}{\rho(2 + \rho) - \rho_R}. \end{cases}$$

En la Figura 4.14 se muestra el primer tramo de la función (4.105) donde se observa con mayor detalle dicho tramo en función del nivel inicial de las reservas.

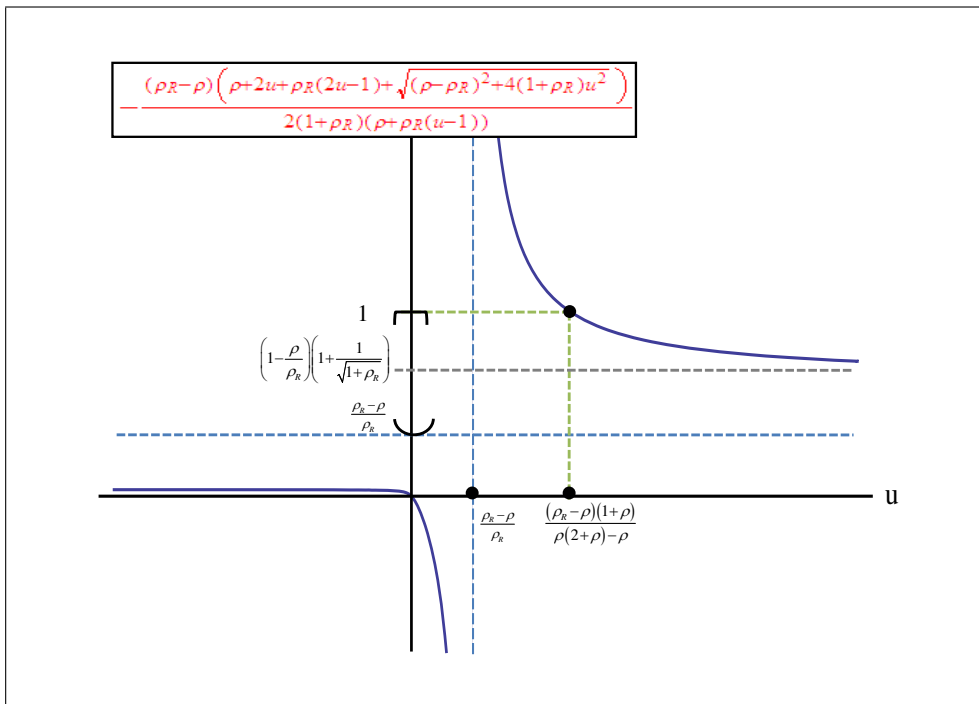


Figura 4.14: Comportamiento de la  $k$  que minimiza la probabilidad de ruina en función de  $u$

Por lo tanto, el  $k_{op}(u)$  que minimiza las probabilidades de ruina de la Figura 4.13, donde se considera que  $\rho = 0.15$  y  $\rho_R = 0.25$ , se representa en la Figura 4.15

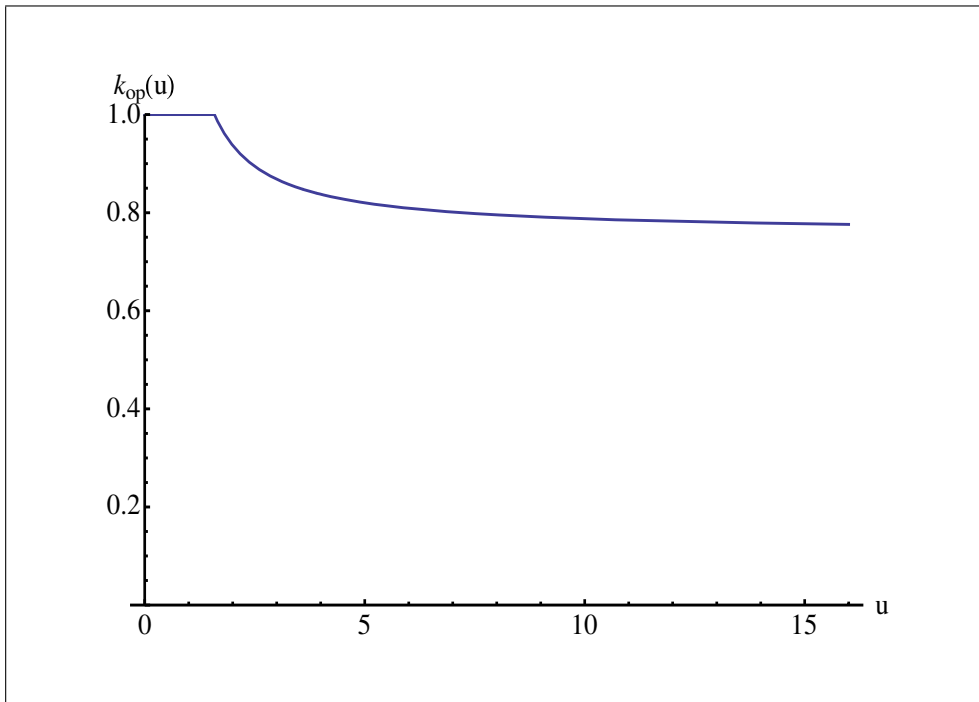


Figura 4.15:  $k_{op}(u)$  que minimiza la probabilidad de ruina en función de  $u$



Si  $\rho(2 + \rho) < \rho_R$ , el comportamiento de la probabilidad de ruina no es el reflejado en la Figura 4.13 y tampoco lo es el comportamiento de la  $k$  que minimiza la probabilidad de ruina representado en la Figura 4.14. Por ejemplo para  $\rho = 0.1$  y  $\rho_R = 0.3$ , se observa en la Figura 4.16 que la probabilidad de ruina es siempre decreciente y su valor mínimo se alcanza en  $k = 1$ , de manera que  $k_{op}(u) = 1$  para todo nivel inicial de las reservas.

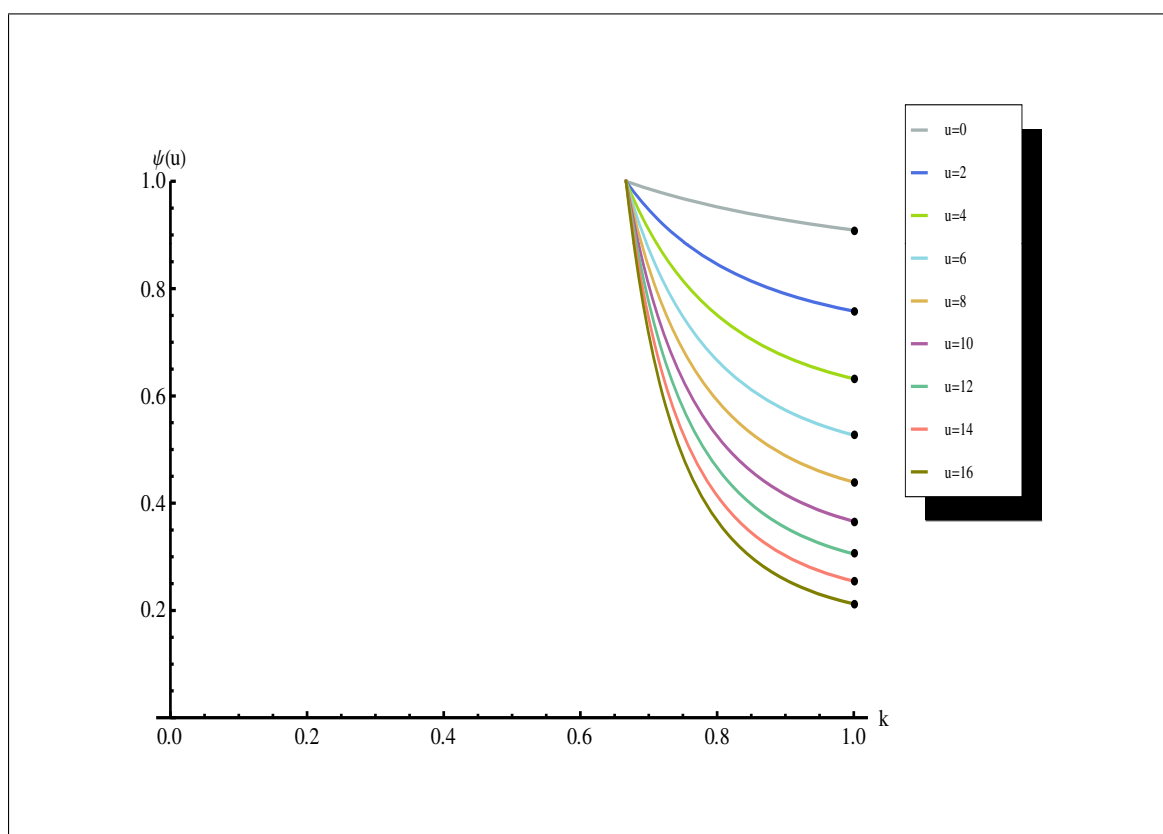


Figura 4.16:  $\psi(u)$  con reaseguro proporcional en función de  $k$  y para distintas  $u$  con  $\rho = 0.1$  y  $\rho_R = 0.3$

Por otro lado, Waters (1983), Schmidli (2001, 2006), Hald y Schmidli (2004), hallan el  $k$  que maximiza el coeficiente de ajuste  $R$ , para obtener la probabilidad de ruina mínima en un modelo con reaseguro proporcional para un  $k$  fijo que no depende del nivel de las reservas. A este nivel de retención se le denomina  $k^R$  para diferenciar de (4.105) y la probabilidad de ruina mínima obtenida a partir de éste se le denomina por  $\psi_{\min}^{k^R}(u)$ . A continuación, se detallan las

expresiones

$$k^R = \left(1 - \frac{\rho}{\rho_R}\right) \left(1 + \frac{1}{\sqrt{1 + \rho_R}}\right), \quad (4.106)$$

$$\psi_{\min}^{k^R}(u) = \frac{1}{\sqrt{1 + \rho_R}} e^{\frac{2 + \rho_R - 2\sqrt{1 + \rho_R}}{\rho - \rho_R} u}. \quad (4.107)$$

Si se consideran los mismos valores de partida para los recargos de seguridad,  $\rho = 0.15$  y  $\rho_R = 0.25$ , sustituyendo estos valores en (4.106) se obtiene  $k^R = 0.7577$ .

A continuación, en la Tabla 4.11 se hallan los valores de  $k_{op}(u)$  y sus respectivas probabilidades de ruina mínima considerando el caso particular de la estrategia de reaseguro proporcional de umbral  $k_1 = k_2 = k$  para distintos valores de  $u$ . Los resultados obtenidos se comparan con las probabilidades de ruina mínima obtenidas a partir de  $k^R = 0.7577$  que maximiza el coeficiente de ajuste.

$u$	$k_{op}(u)$	$\psi_{\min}^{k_{op}}(u)$	$\psi_{\min}^{k^R}(u)$ con $k^R = 0.7577$
0	1	0.8695	0.8944
2	0.9373	0.6693	0.6769
4	0.8375	0.5094	0.5122
6	0.8090	0.3862	0.3877
8	0.7955	0.2926	0.2934
10	0.7876	0.2215	0.2220
12	0.7825	0.1677	0.1680
14	0.7788	0.1269	0.1271
16	0.7761	0.0961	0.0962
18	0.7740	0.0727	0.0728
20	0.7724	0.0550	0.0551

Tabla 4.11:  $\psi_{\min}^{k_{op}}(u)$  y  $\psi_{\min}^{k^R}(u)$

En la Tabla 4.11, se observa que las probabilidades de ruina son menores en la estrategia de reaseguro proporcional de umbral, teniendo en cuenta  $k_1 = k_2 = k_{op}$ , que en una estrategia de

reaseguro proporcional con un  $k^R$  que maximiza el coeficiente, ya que este último no depende del nivel inicial de las reservas. Para niveles elevados de las reservas iniciales, los valores de  $k_{op}(u)$  tienden al valor de  $k^R = 0.7577$ , como mostraban anteriormente las Figuras 4.14 y 4.15.

Por último, en la Tabla 4.12 se presentan los valores de la esperanza, la varianza y el coeficiente de variación del momento de ruina condicionado a que la ruina ocurra considerando el  $k$  óptimo que minimiza la probabilidad de ruina. Se observa que la esperanza aumenta a mayor nivel inicial de las reservas, la varianza también y el coeficiente de variación tiene una menor dispersión a mayores reservas.

$u$	$\psi_{\min}^{k_{op}}(u)$	$k_{op}$	$E [T   T < \infty]$	$V [T   T < \infty]$	$C_V$
0	0.8695	1	6.666	637.03	3.78
4	0.5094	0.8375	40.004	5245.04	1.81
8	0.2926	0.7955	80.011	11581.0	1.34
12	0.1677	0.7825	120.008	17968.9	1.11
16	0.0961	0.7761	160.034	24380,4	0.97
20	0.0550	0.7724	200.011	30783.9	0.87

Tabla 4.12:  $\psi_{\min}^{k_{op}}(u)$ , esperanza, varianza y  $C_V$  del momento de ruina con reaseguro proporcional para distintas  $u$

### 4.6.3. Comparación de estrategias de reaseguro proporcional

A continuación, se comparan las probabilidades de ruina mínima obtenidas con una estrategia de reaseguro proporcional de umbral,  $\psi_{\min}^{k_1 \neq k_2}(u)$ , con una estrategia de reaseguro proporcional con un nivel de retención fijo que depende del nivel inicial de las reservas,  $\psi_{\min}^{k_{op}}(u)$ . Estas probabilidades se han calculado teniendo en cuenta que  $X \sim \text{Exponencial}(1)$ ,  $\lambda = 1$ ,  $\rho = 0.15$  y  $\rho_R = 0.25$ .

En el caso de la estrategia de reaseguro proporcional de umbral se habían considerado distintos niveles de umbral  $b = 2$ ,  $b = 3.3$ ,  $b = 8$  y  $b = 15$ . En la Tabla 4.13 se recogen las diferentes probabilidades ya obtenidas anteriormente para observar las diferencias entre ellas.

$u$	$\psi_{\min}^{k_{op}}(u)$	$\psi_{\min}^{k_1 \neq k_2}(u)$ con $b = 2$	$\psi_{\min}^{k_1 \neq k_2}(u)$ con $b = 3.3$	$\psi_{\min}^{k_1 \neq k_2}(u)$ con $b = 8$	$\psi_{\min}^{k_1 \neq k_2}(u)$ con $b = 15$
0	0.8695	0.8659	0.8646	0.8666	0.8684
4	0.5094	0.5001	0.4980	0.5053	0.5086
8	0.2926	0.2865	0.2852	0.2905	0.2923
12	0.1677	0.1641	0.1633	0.1664	0.1675
16	0.0961	0.0939	0.0935	0.0953	0.0959
20	0.0550	0.0538	0.0536	0.0545	0.0549

Tabla 4.13:  $\psi_{\min}^{k_{op}}(u)$  y  $\psi_{\min}^{k_1 \neq k_2}(u)$

En la Figura 4.17, se muestran gráficamente las diferencias entre  $\psi_{\min}^{k_{op}}(u)$  y  $\psi_{\min}^{k_1 \neq k_2}(u)$  de los resultados obtenidos en la Tabla 4.13, para distintos valores de  $u$  y umbrales  $b$ , i.e., la diferencia entre la probabilidad de ruina mínima con reaseguro proporcional con un nivel de retención fijo  $k$ , y la probabilidad de ruina mínima con una estrategia de reaseguro proporcional de umbral  $b = 2, b = 3.3, b = 8$  y  $b = 15$ .

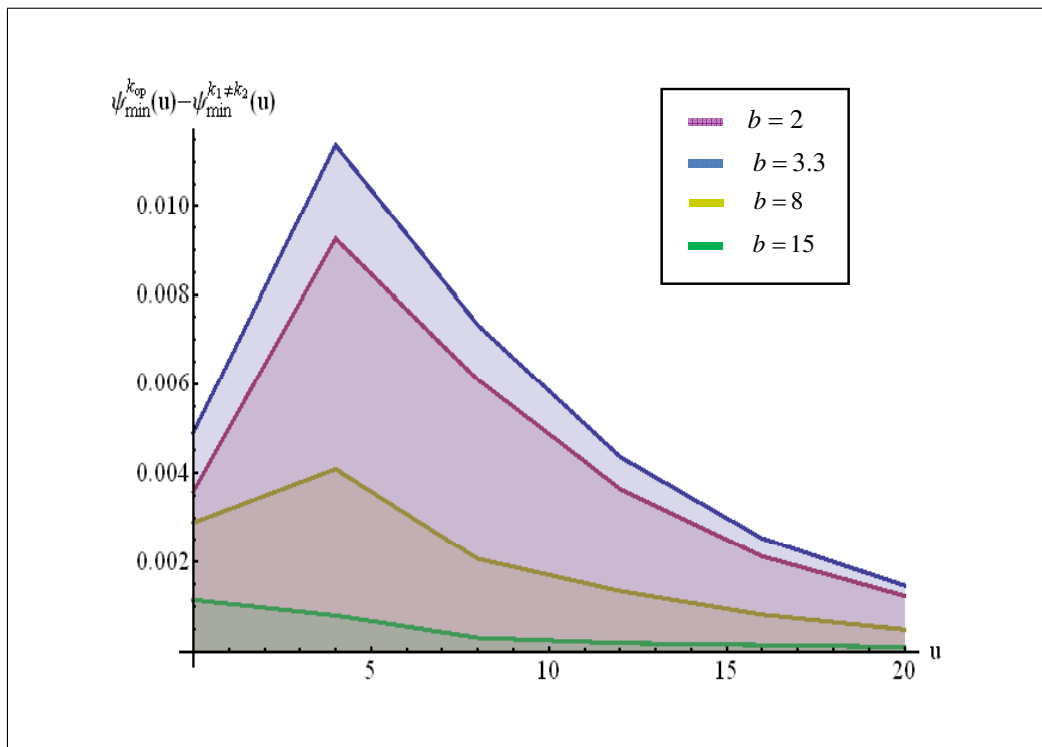


Figura 4.17:  $\psi_{\min}^{k_{op}}(u) - \psi_{\min}^{k_1 \neq k_2}(u)$  para distintas  $u$  y  $b$

Se puede observar que la diferencia es importante para valores de  $u$  pequeños y que esta diferencia decrece respecto a  $u$ . Así, para valores pequeños de las reservas iniciales, la estrategia de reaseguro proporcional de umbral nos permite obtener mejores resultados en términos de probabilidad de ruina que la estrategia de un reaseguro proporcional con un nivel de retención  $k$  fijo. La mejor estrategia en este ejemplo concreto es la de un reaseguro proporcional de umbral  $b = 3.3$ , donde se consiguen las máximas diferencias respecto al reaseguro proporcional independiente del nivel de las reservas.

#### 4.6.4. Estrategia de reaseguro proporcional de umbral con $k_1 = 1$ y $\forall k_2$

Se aborda ahora el estudio del caso particular extremo de la estrategia de reaseguro proporcional de umbral cuando  $k_1 = 1$  y  $\forall k_2$ , es decir, un modelo en el que sólo se reasegura cuando las reservas son superiores al nivel de umbral prefijado. El caso extremo contrario,  $\forall k_1$  con  $k_2 = 1$ , un modelo en el que sólo se reasegura cuando las reservas son inferiores al umbral prefijado, ha sido estudiado en Claramunt *et al.* (2009).

El motivo de estudio de este caso  $k_1 = 1$  y  $\forall k_2$ , es que al observar la Tabla 4.9, donde se recogen las probabilidades de ruina mínimas con reaseguro proporcional de umbral, se encuentra que la estrategia óptima es no reasegurar ( $k_1 = 1$ ) por debajo de un nivel de umbral  $b$  y reasegurar por encima de este nivel en un porcentaje  $k_2$ .

A continuación, se calculan las probabilidades de ruina mínimas en este caso extremo de la estrategia de reaseguro proporcional de umbral, teniendo en cuenta los mismos valores de  $X \sim \text{Exponencial}(1)$ ,  $\lambda = 1$ ,  $\rho = 0.15$  y  $\rho_R = 0.25$ .

En la Tabla 4.14 se presentan las distintas probabilidades de ruina mínimas para diferentes  $u$  y niveles de umbral  $b = 2$ ,  $b = 3.3$ ,  $b = 8$  y  $b = 15$ . Si se comparan estos resultados con los obtenidos en la Tabla 4.9, se observa que para un nivel de umbral  $b = 2$  y  $b = 3.3$  las probabilidades de ruina mínimas coinciden y con niveles de umbral  $b = 8$  y  $b = 15$ , las estrategias óptimas serían las de un modelo con reaseguro proporcional de umbral con sus combinaciones de niveles de retención  $k_1$  y  $k_2$ .

$u$	$b = 2$		$b = 3.3$		$b = 8$		$b = 15$	
	$\psi_{\min}(u)$	$k_2$	$\psi_{\min}(u)$	$k_2$	$\psi_{\min}(u)$	$k_2$	$\psi_{\min}(u)$	$k_2$
0	0.865982	0.78067	0.864665	0.759937	0.866676	0.76027	0.86842	0.76033
4	0.500191	0.76938	0.498068	0.759568	0.505356	0.76027	0.511829	0.76033
8	0.286512	0.76362	0.285276	0.758681	0.290917	0.76027	0.300196	0.76033
12	0.164108	0.76168	0.163396	0.75838	0.166628	0.75923	0.174595	0.76033
16	0.093996	0.76071	0.093587	0.758229	0.095438	0.75880	0.100231	0.76001
20	0.053838	0.76012	0.053603	0.758138	0.054663	0.75857	0.057408	0.75926

Tabla 4.14:  $\psi_{\min}(u)$  con  $k_1 = 1$  y  $\forall k_2 | 0,4 < k \leq 1$  para distintas  $u$  y  $b$

En vista de los resultados obtenidos hasta ahora, la mejor estrategia para el asegurador, en términos de probabilidad de ruina, sería fijar un nivel de umbral bajo (en el ejemplo  $b = 3.3$ ) y no reasegurar cuando las reservas estén por debajo de ese umbral  $b$  y cuando el nivel de las reservas superen ese nivel establecido, optar por reasegurar a un determinado nivel de retención  $k_2$ .

Otro enfoque de esta estrategia óptima, sería estudiar qué nivel de reservas iniciales harían falta en un modelo sin reaseguro y en uno en que se considerase un reaseguro proporcional con una determinada  $k$  óptima fija e independiente del nivel de las reservas, para poder conseguir las probabilidades de ruina mínima del modelo con reaseguro proporcional de umbral (el caso de  $b = 3.3$ , Tabla 4.14). En la Tabla 4.15, se presentan dichas reservas iniciales.

Se observa en la Tabla 4.15, que para conseguir las probabilidades de ruina mínimas, son necesarias unas reservas superiores tanto en un modelo sin reaseguro como en uno con reaseguro proporcional con retención  $k_{op}$  fijo.

reaseguro	umbral	sin reaseguro	reaseguro $k_{op}$ fijo
	$\psi_{\min}^{k_1 \neq k_2}(u)$		
$u$	con $b = 3.3$	$u$	$u$
0	0.864665	0.0433	0.0433
4	0.498068	4.2723	4.1636
8	0.285276	8.5447	8.1825
12	0.163396	12.8173	12.1890
16	0.093587	17.0898	16.1923
20	0.053603	21.3623	20.1943

Tabla 4.15:  $u$  necesarias para distintas estrategias para obtener la misma  $\psi_{\min}^{k_1 \neq k_2}(u)$

En la Tabla 4.16 se recogen los porcentajes de reducción en el capital inicial necesario para conseguir las probabilidades de ruina mínimas, que resultan de comparar la estrategia de reaseguro proporcional de umbral con la estrategia sin reaseguro (reducción 1) y la estrategia de reaseguro proporcional  $k_{op}$  fijo (reducción 2).

$u$	reducción 1	reducción 2
0		
4	6.3736 %	3.9311 %
8	6.3755 %	2.2309 %
12	6.3765 %	1.5505 %
16	6.3769 %	1.1876 %
20	6.3771 %	0.9621 %

Tabla 4.16: Porcentajes de reducción en las reservas iniciales

Así, con una estrategia de reaseguro proporcional de umbral el asegurador puede ahorrarse aproximadamente un 6.37 % del capital inicial necesario si no reasegura. Este porcentaje de reducción es prácticamente constante respecto del nivel inicial de las reservas.

Si se compara la estrategia de reaseguro proporcional de umbral con la estrategia de rease-

guro proporcional  $k_{op}$  fijo estos porcentajes de reducción en el capital inicial son obviamente menores y además si que dependen del nivel inicial de las reservas, consiguiendo el mayor ahorro para niveles iniciales bajos.



# Capítulo 5

## Conclusiones

Esta tesis se enmarca dentro del ámbito general de la teoría del riesgo. Tras presentar en la introducción las principales líneas de trabajo que se desarrollan en esta investigación, en el Capítulo 2 se definen los aspectos básicos de la teoría del riesgo, incluyendo el modelo clásico a partir del cual se trabaja en los capítulos posteriores aplicando diferentes modificaciones. Es en este punto donde se sitúa el origen del presente trabajo, hace ahora aproximadamente cuatro años.

En este sentido, y directamente relacionado con el capítulo 2, apareció en 2005 un primer artículo donde, en colaboración con mis directoras de tesis, se estudiaba la “Política de reparto de dividendos en una cartera de seguros no vida: Análisis discreto”. Este trabajo, desarrollado durante los cursos de doctorado, fue publicado en Cuadernos Actuariales, y fue mi primera aproximación a los modelos con barreras de dividendos. Posteriormente, el estudio del modelo clásico del proceso de las reservas y el de un modelo con barrera de dividendos constante, donde se analizaba la variable aleatoria momento de ruina, dio origen a un segundo trabajo titulado “Análisis de la teoría del riesgo: la transformada del momento de ruina”. Este trabajo de investigación fue presentado para la obtención del Diploma de Estudios Avanzados y obtuvo en el año 2006 el 2º Premio para jóvenes investigadores de la asociación “Asepuma”. En el Capítulo 2 se incorpora parte del análisis realizado en estos trabajos. Uno de los aspectos metodológicos a destacar es la utilización de ecuaciones íntegro-diferenciales y la forma de solucionarlas.

A lo largo de la tesis, la manera más habitual de solucionar las distintas ecuaciones integro-diferenciales planteadas en cada caso ha sido mediante derivación sucesiva. Sin embargo, en el capítulo 2, se plantea la posibilidad de solucionar estas ecuaciones con una herramienta alternativa, las transformadas de Laplace, que en los últimos años han sido muy utilizadas dentro de la literatura actuarial. Como resultado del estudio de esta herramienta matemática y su aplicación a la teoría del riesgo, surgió un artículo que fue publicado en 2007 en la revista Anales del Instituto de Actuarios titulado “Aplicaciones de las transformadas de Laplace a la teoría del riesgo”.

En el Capítulo 3, se estudia una modificación del modelo clásico de riesgo que consiste en la introducción de un reaseguro proporcional. Además, se analiza su influencia en un modelo con barrera de dividendos. En este caso, se considera el efecto que tiene la aplicación de un reaseguro proporcional sobre la variable aleatoria momento de ruina y sobre la esperanza del valor actual de los dividendos. Los primeros resultados obtenidos fueron presentados en la “2ª Reunión de Investigación en Seguros y Gestión de Riesgos” en la Universidad de Cantabria en 2007, bajo el título “Influencia del reaseguro proporcional en las medidas de solvencia del asegurador”. Este trabajo apareció publicado como capítulo del libro “Investigaciones en Seguros y Gestión de Riesgos: RIESGO 2007”. Las principales conclusiones del análisis realizado en este capítulo son:

- Existe un valor óptimo para el porcentaje retenido que maximiza la esperanza del momento de ruina con barrera de dividendos. Esta retención óptima depende del recargo de seguridad del reasegurador de forma que a medida que aumenta el recargo del reasegurador, la proporción de cartera que debe retener el asegurador para conseguir la máxima esperanza del momento de ruina aumenta y se acerca a 1.
- La esperanza óptima del momento de ruina depende del recargo de seguridad del reasegurador y disminuye al aumentar  $\rho_R$ .
- La esperanza del valor actual de los dividendos con reaseguro proporcional es creciente respecto a  $k$ .

---

En el Capítulo 4 se presenta la estrategia de reaseguro proporcional de umbral, que es una de las principales contribuciones de la tesis. En esta estrategia se define una política nueva de reaseguro, permitiendo que sea dinámica en función del nivel de las reservas. Por tanto, el asegurador tiene la opción de determinar en cada momento su proporción de cartera retenida a cubrir en función de sus reservas. En tal caso, el asegurador decidirá cubrir una proporción cuando las reservas se encuentran por debajo de un nivel de umbral prefijado y otra proporción cuando sus reservas superan dicho nivel.

En primer lugar, se estudió el caso en que el asegurador opta por reasegurar parte de la cartera cuando sus reservas son inferiores al nivel de umbral, y considera no reasegurar cuando las reservas superan el umbral prefijado, quedándose con la totalidad de la cartera. Una vez definido este primer modelo, se analizó la probabilidad de supervivencia. Los resultados aparecieron publicados en la revista *Estadística Española* con el título “El reaseguro proporcional de umbral y la probabilidad de supervivencia como criterio de elección de estrategias”. El siguiente paso fue profundizar en este modelo, llegando a generalizar el reaseguro proporcional de umbral que se presenta en esta tesis. Se permite así la posibilidad de elegir la mejor retención de la cartera desde el punto de vista del asegurador. Este modelo de la estrategia de reaseguro proporcional de umbral, queda definido en el Teorema 3, y a partir de éste se obtienen como casos particulares el modelo proporcional con un porcentaje fijo de retención y el modelo clásico sin reaseguro. Se analiza la probabilidad de ruina y la variable aleatoria momento de ruina y se comparan con los resultados obtenidos para otras estrategias. Parte del Capítulo 4 está publicado como documento de trabajo de la Facultat d’Economia i Empresa (2009) con el título “The effect of a threshold proportional reinsurance strategy on ruin probabilities” y se ha presentado en los congresos *Insurance: Mathematics and Economics* (Piraeus 2007 e Istanbul 2009) y en el *Primer Congreso Ibérico de Actuarios* (Lisboa 2008).

La definición de esta nueva estrategia, su estudio detallado y la comparación con otras estrategias de reaseguro proporcional constituyen la principal aportación original de esta tesis a nivel teórico y matemático. Las expresiones obtenidas para esta estrategia de reaseguro proporcional de umbral contienen como casos particulares las ya conocidas correspondientes al reaseguro

proporcional con  $k$  fija y al modelo clásico sin reaseguro.

Otra aportación a nivel teórico es la obtención del porcentaje óptimo de retención, que minimiza la probabilidad de ruina, en un modelo con reaseguro proporcional con  $k$  fija. Este porcentaje depende del nivel inicial de las reservas a diferencia del que se encuentra habitualmente en la literatura actuarial obtenido a partir de la maximización del coeficiente de ajuste.

En el Capítulo 4 se encuentran detalladas diversas conclusiones. A modo de conclusión general podemos indicar que, en términos de probabilidad de ruina, la estrategia de reaseguro proporcional de umbral mejora las clásicas conocidas y permite, por tanto, una mejor gestión del capital inicial.

# Apéndice A

## Transformadas de Laplace

### A.1. Introducción

En este apéndice se introduce la herramienta de las transformadas de Laplace.

**Definición 17** Sea  $f(t)$  una función real (o compleja) de  $t$  definida en  $[0, \infty)$ . La transformada de Laplace de  $f(t)$ , denotada por  $\tilde{f}(s)$  o por  $\mathcal{L}\{f(t)\}$ , se define como

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \tilde{f}(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt = \lim_{z \rightarrow \infty} \int_0^z e^{-st} f(t) dt, \quad (\text{A.1})$$

donde  $s$  (real o complejo) es el parámetro de la transformada, siempre que el límite exista (como un número finito).

No toda función  $f(t)$  tiene transformada de Laplace. La transformada de Laplace existe cuando la integral  $\int_0^z e^{-st} f(t) dt$  converge para algún valor de  $s$ .

**Ejemplo 5** Sea  $f(t) = e^{at}$ , entonces

$$\tilde{f}(s) = \int_0^{\infty} e^{at} e^{-st} dt = \frac{1}{s - a},$$

existe para toda  $s > a$ .

**Demostración.**

$$\begin{aligned}\tilde{f}(s) &= \int_0^{\infty} e^{at} e^{-st} dt = \int_0^{\infty} e^{(a-s)t} dt \\ &= \frac{1}{a-s} \cdot e^{(a-s)t} \Big|_0^{\infty} = \{si \ s > a\} = \frac{1}{s-a}\end{aligned}$$

□

**Ejemplo 6** Sea  $f(t) = e^{t^2}$ , entonces

$$\tilde{f}(s) = \int_0^{\infty} e^{t^2} e^{-st} dt \rightarrow +\infty,$$

no admite transformada de Laplace para ninguna  $s$ .

Para que una función sea transformable tiene que satisfacer todas las condiciones de Dirichlet, un conjunto de condiciones suficientes pero no necesarias (Schiff (1999) y Poularikas (2000)):

1. Requisito de continuidad:  $f(t)$  debe ser continua a trozos en  $[0, \infty)$ .
2. Requisito de crecimiento:  $f(t)$  tiene que ser de orden exponencial  $\alpha$ .

**Requisito de continuidad:**

Se dice que  $f(t)$  es continua a trozos en un intervalo  $[a, b]$ , si  $f(t)$  es continua en todos los puntos de dicho intervalo, excepto quizás en un número finito de ellos, en los que  $f(t)$  deberá tener límites laterales finitos. Este último requisito implica que las discontinuidades son discontinuidades de salto, del tipo que aparecen en el gráfico de la Figura A.1.

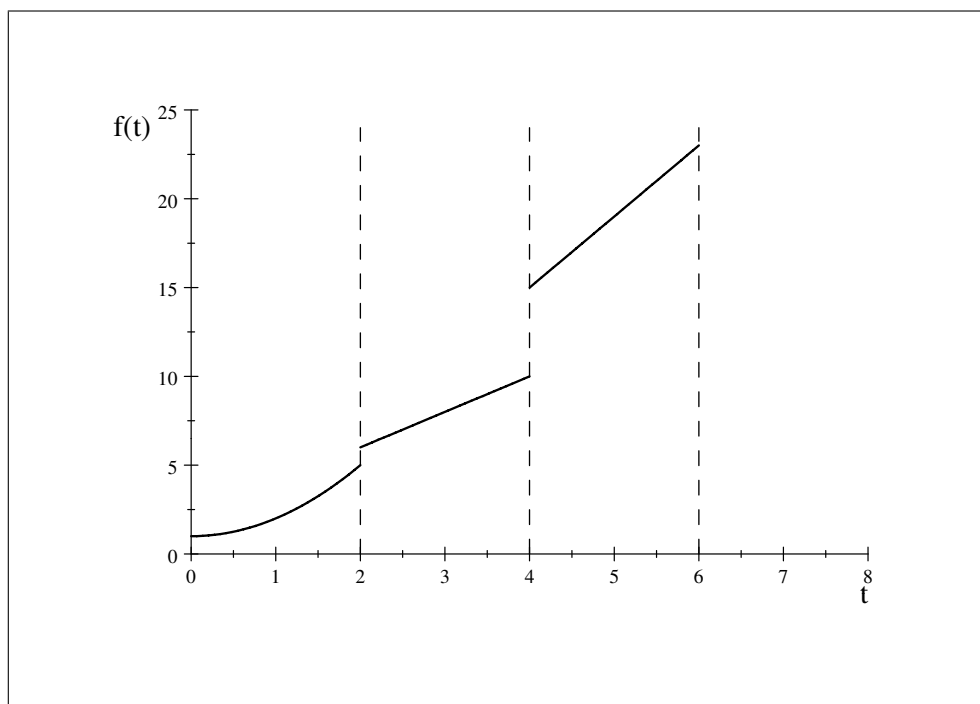


Figura A.1: Función continua a trozos

Por otro lado, decimos que  $f(t)$  es continua a trozos en  $[0, \infty)$ , si lo es en  $[0, b]$ ,  $\forall b > 0$ .

### Requisito de crecimiento:

Si  $f(t)$  no crece “demasiado rápido”, la integral  $\int_0^z e^{-st} f(t) dt$  convergerá. Se dice que  $f(t)$ , continua a trozos en  $[0, \infty)$ , es de orden exponencial  $\alpha$  cuando  $t \rightarrow \infty$ , si existen constantes  $M > 0$  y  $\alpha$  tales que para algún  $T \geq 0$ ,

$$|f(t)| < Me^{\alpha t}, \quad t \geq T,$$

es decir,  $f(t)$  no crece más rápido que una función de la forma  $Me^{\alpha t}$ .

**Ejemplo 7** Comprobamos que  $f(t) = t^2$  es de orden exponencial.

Para verificar que la función es de orden exponencial, se ha de calcular el siguiente límite:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{|f(t)|}{e^{\alpha t}} = L,$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{t^2}{e^{\alpha t}} = \left\{ \begin{array}{l} \text{aplicando la} \\ \text{regla de L'Hôpital} \end{array} \right\} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{2t}{\alpha e^{\alpha t}} = \{L'Hôpital\} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{2}{\alpha^2 e^{\alpha t}} = 0,$$

para cualquier número positivo  $\alpha$ . Por lo tanto en el caso que  $\alpha = 1$  se puede comprobar que  $|t^2| < e^t$ , siendo  $t^2$  una función de orden exponencial. En el gráfico de la Figura A.2 se observa que la función  $f(t) = t^2$  no crece más rápido que  $e^t$ .

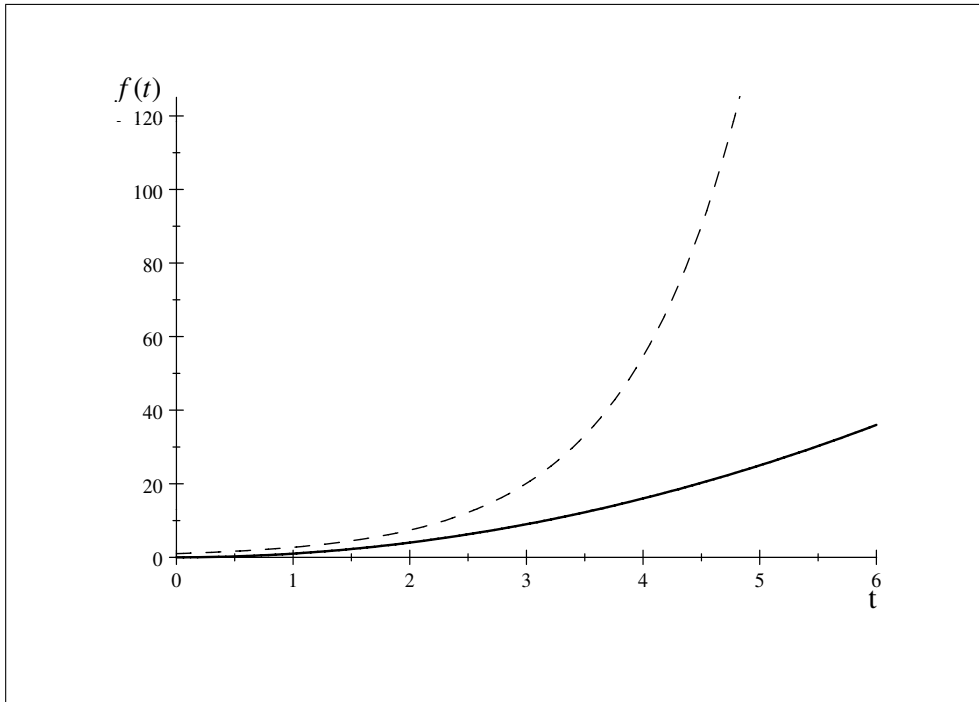


Figura A.2:  $f(t)$  es una función de orden exponencial

**Ejemplo 8** Comprobamos que  $f(t) = e^{t^2}$  no es de orden exponencial.

Se calcula el límite:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{|f(t)|}{e^{\alpha t}} = L,$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{e^{t^2}}{e^{\alpha t}} = \lim_{t \rightarrow \infty} e^{t(t-\alpha)} = \infty,$$

para cualquier  $\alpha$  la función  $f(t) = e^{t^2}$  crece más rápido que  $e^{\alpha t}$  cuando  $t \rightarrow \infty$ . Por lo tanto en el caso que  $\alpha = 1$ , en el gráfico de la Figura A.3 se observa que  $|e^{t^2}| > e^t$ .



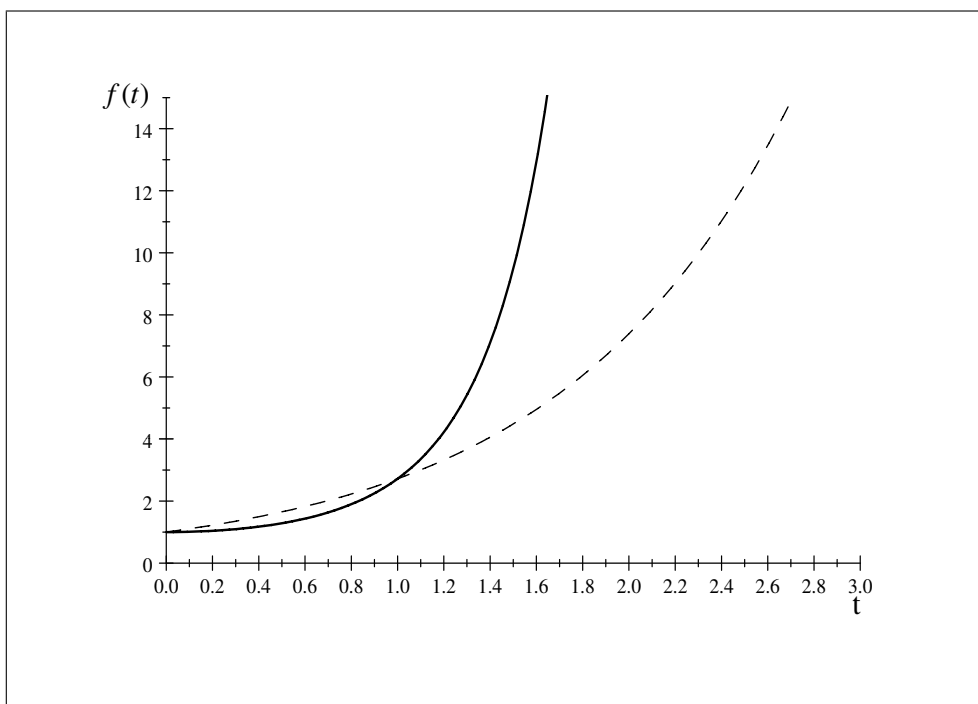


Figura A.3:  $f(t)$  no es una función de orden exponencial

**Teorema 5** Si  $f(t)$  es continua a trozos en  $[0, \infty)$  y de orden exponencial  $\alpha$  entonces la transformada de Laplace  $\mathcal{L}\{f(t)\} = \tilde{f}(s)$  existe para  $\text{Re}(s)^1 > \alpha$  y converge.

La demostración de este teorema se puede encontrar en Schiff (1999).

Tal y como se ha indicado anteriormente, las condiciones recogidas en el teorema son suficientes pero no necesarias, de forma que podemos encontrar funciones que no las cumplan y que a pesar de ello tengan transformada de Laplace como por ejemplo:

**Ejemplo 9**  $f(t) = \frac{1}{\sqrt{t}}$  no cumple las condiciones de Dirichlet pero tiene transformada de Laplace. Es discontinua en  $t = 0$ , ya que tiene una asíntota vertical en  $0^+$  (Figura A.4), por lo tanto no es continua a trozos en  $[0, \infty)$ :

<sup>1</sup> $\text{Re}(s)$  es la parte real de  $s$ .

$$\begin{aligned}\tilde{f}(s) &= \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt = \int_0^{\infty} e^{-st} t^{-\frac{1}{2}} dt = \left\{ \begin{array}{l} u = st \quad du = s dt \\ t = \frac{u}{s} \quad dt = \frac{du}{s} \end{array} \right\} \\ &= \int_0^{\infty} e^{-u} \left(\frac{u}{s}\right)^{-\frac{1}{2}} \frac{du}{s} = \frac{1}{s^{-\frac{1}{2}+1}} \int_0^{\infty} e^{-u} u^{-\frac{1}{2}} du = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{s^{\frac{1}{2}}} = \sqrt{\frac{\pi}{s}}\end{aligned}$$

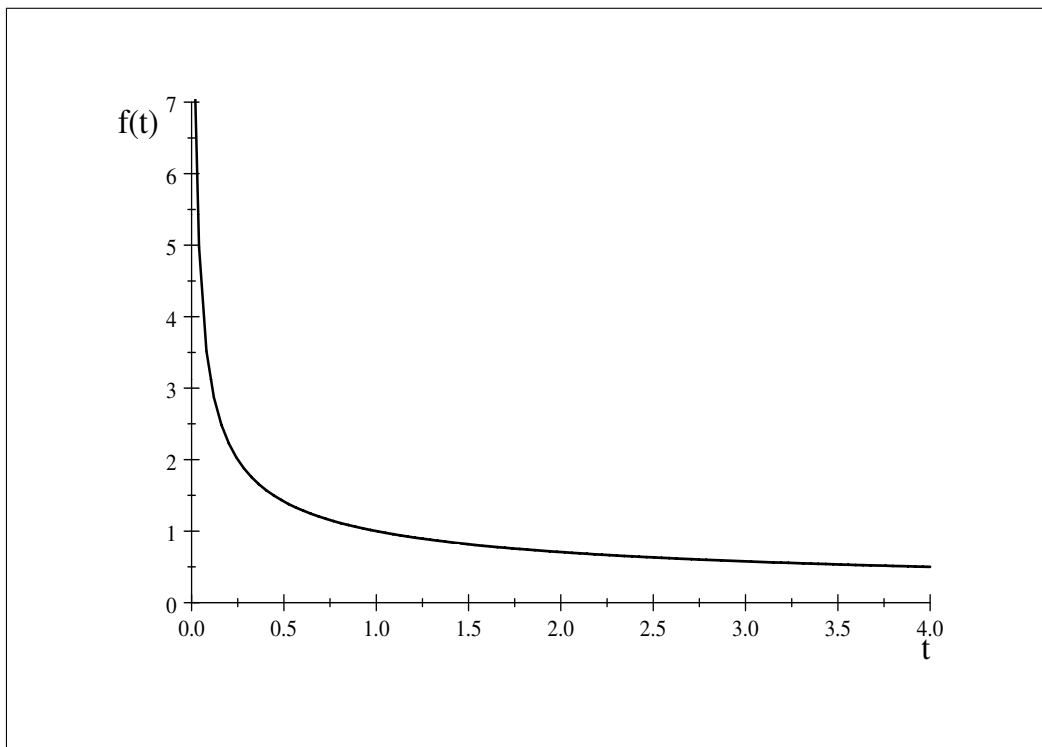


Figura A.4:  $f(t) = \frac{1}{\sqrt{t}}$

Puede demostrarse que existe una correspondencia uno a uno entre una función  $f(t)$  y su transformada de Laplace  $\mathcal{L}\{f(t)\}$ . Entonces tiene sentido hablar de la transformada de Laplace de una función y de la función inversa de una transformada de Laplace dada.

En la Tabla A.1, así como en la mayoría de los libros de texto sobre transformadas de Laplace, pueden encontrarse las expresiones de las transformadas de Laplace de diversas funciones elementales.

$f(t)$	$\mathcal{L}\{f(t)\} = \tilde{f}(s)$	
1	$\frac{1}{s}$	$s > 0$
$t$	$\frac{1}{s^2}$	$s > 0$
$t^n$ $n=0,1,2,\dots$	$\frac{n!}{s^{n+1}}$	$s > 0$
$e^{at}$	$\frac{1}{s-a}$	$s > a$
$\text{sen } at$	$\frac{a}{s^2+a^2}$	$s > 0$
$\text{cos } at$	$\frac{s}{s^2+a^2}$	$s > 0$
$\text{senh } at$	$\frac{a}{s^2-a^2}$	$s >  a $
$\text{cosh } at$	$\frac{s}{s^2-a^2}$	$s >  a $

Tabla A.1: Transformadas de Laplace de funciones elementales

A continuación, y a modo de ejemplo, se demuestran algunas de las transformadas de Laplace de la Tabla A.1.

**Demostración.**

$f(t) = 1$ , aplicando la expresión (A.1) obtenemos la transformada:

$$\mathcal{L}\{1\} = \tilde{f}(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} \cdot 1 dt = -\frac{1}{s} e^{-st} \Big|_0^{\infty} = \frac{1}{s} \quad \text{si } s > 0.$$

□

**Demostración.**

$f(t) = t$ , igual que en la función anterior obtenemos la transformada:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{t\} &= \tilde{f}(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} t dt = \left\{ \begin{array}{l} u = t \quad du = dt \\ dv = e^{-st} \quad v = -\frac{1}{s} e^{-st} \end{array} \right\} \\ &= -t \frac{1}{s} e^{-st} \Big|_0^{\infty} + \int_0^{\infty} \frac{1}{s} e^{-st} dt = -\frac{1}{s^2} e^{-st} \Big|_0^{\infty} = \frac{1}{s^2} \text{ si } s > 0.\end{aligned}$$

□

**A.2. Propiedades de la transformada de Laplace**

A continuación se muestran algunas de las propiedades más importantes que tienen las transformadas de Laplace. Para más detalle, se puede consultar Spiegel (1967), Schiff (1999) y Poularikas (2000):

**1. Propiedad de linealidad.**

Si  $c_1$  y  $c_2$  son constantes y  $f_1(t)$  y  $f_2(t)$  son funciones cuyas transformadas de Laplace son  $\tilde{f}_1(s)$  y  $\tilde{f}_2(s)$  respectivamente, entonces la transformada de Laplace de

$$\mathcal{L}\{c_1 f_1(t) + c_2 f_2(t)\}$$

es:

$$\mathcal{L}\{c_1 f_1(t) + c_2 f_2(t)\} = c_1 \tilde{f}_1(s) + c_2 \tilde{f}_2(s).$$

**Demostración.**

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{c_1 f_1(t) + c_2 f_2(t)\} &= \int_0^{\infty} e^{-st} (c_1 f_1(t) + c_2 f_2(t)) dt \\ &= \int_0^{\infty} e^{-st} c_1 f_1(t) dt + \int_0^{\infty} e^{-st} c_2 f_2(t) dt \\ &= c_1 \tilde{f}_1(s) + c_2 \tilde{f}_2(s).\end{aligned}$$

□

**Ejemplo 10** La transformada de Laplace del polinomio  $f(t) = 5 + 2t - 3t^5$ .

De acuerdo con la Tabla A.1, las transformadas de Laplace de  $\mathcal{L}\{1\}$ ,  $\mathcal{L}\{t\}$  y  $\mathcal{L}\{t^5\}$  son  $\frac{1}{s}$ ,  $\frac{1}{s^2}$  y  $\frac{120}{s^6}$ , respectivamente. Aplicando la propiedad de linealidad

$$\mathcal{L}\{5 + 2t - 3t^5\} = \frac{5}{s} + \frac{2}{s^2} - \frac{360}{s^6}.$$

## 2. Propiedades de traslación.

a) Primera propiedad de traslación: Si  $f(t)$  tiene transformada de Laplace  $\tilde{f}(s)$  para  $s > 0$ , entonces para la función  $g(t) = e^{at}f(t)$  su transformada de Laplace será:

$$\mathcal{L}\{e^{at}f(t)\} = \tilde{f}(s - a) \quad \text{donde } s - a > 0.$$

### Demostración.

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{e^{at}f(t)\} &= \int_0^{\infty} e^{-st}g(t)dt = \int_0^{\infty} e^{-st}e^{at}f(t)dt \\ &= \int_0^{\infty} e^{-(s-a)t}f(t)dt = \tilde{f}(s - a). \end{aligned}$$

□

**Ejemplo 11** La transformada de Laplace de la función  $g(t) = t^2e^{3t}$ .

De acuerdo con la Tabla A.1, la transformada de Laplace de  $\mathcal{L}\{t^2\}$  es  $\frac{2}{s^3}$  para  $s > 0$  y  $a = 3$ . Aplicando la propiedad de traslación anterior encontramos directamente que su transformada es:

$$\mathcal{L}\{t^2e^{3t}\} = \frac{2}{(s - 3)^3}, \quad s > 3.$$

b) Segunda propiedad de traslación: Si  $f(t)$  tiene transformada de Laplace  $\tilde{f}(s)$  y

$$g(t) = \begin{cases} f(t - a) & t > a \\ 0 & t < a \end{cases},$$

entonces la transformada de Laplace para la función  $g(t)$  es:

$$\mathcal{L}\{g(t)\} = e^{-as}\tilde{f}(s) \quad \text{cuando } a \geq 0.$$

**Demostración.**

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{g(t)\} &= \int_0^{\infty} e^{-st}g(t)dt = \int_0^a e^{-st} \cdot 0dt + \int_a^{\infty} e^{-st}f(t-a)dt \\ &= \left. \begin{array}{l} t-a = u \Rightarrow t = u+a \\ dt = du \\ t \rightarrow \infty \Rightarrow u \rightarrow \infty \\ t \rightarrow a \Rightarrow u \rightarrow 0 \end{array} \right\} = \int_0^{\infty} e^{-s(a+u)}f(u)du \\ &= e^{-as} \int_0^{\infty} e^{-su}f(u)du = e^{-as}\tilde{f}(s). \end{aligned}$$

□

**Ejemplo 12** Si

$$g(t) = \begin{cases} \cos(t - \frac{2\pi}{3}) & t > \frac{2\pi}{3} \\ 0 & t < \frac{2\pi}{3} \end{cases},$$

su transformada de Laplace será:

$$\mathcal{L}\{g(t)\} = \left. \begin{array}{l} f(t-a) = \cos(t - \frac{2\pi}{3}) \\ a = \frac{2\pi}{3} \\ f(t) = \cos t \Rightarrow \tilde{f}(s) = \frac{s}{s^2+1} \end{array} \right\} = e^{-\frac{2\pi}{3}s} \frac{s}{s^2+1}.$$

### 3. Propiedad del cambio de escala

Si  $f(t)$  tiene transformada de Laplace  $\tilde{f}(s)$ , entonces la transformada de Laplace de  $f(at)$

será:

$$\mathcal{L}\{f(at)\} = \frac{1}{a}\tilde{f}\left(\frac{s}{a}\right).$$

**Demostración.**

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{f(at)\} &= \int_0^\infty e^{-st} f(at) dt = \left. \begin{array}{l} u = at \Rightarrow t = \frac{u}{a} \\ du = a dt \Rightarrow dt = \frac{du}{a} \\ t \rightarrow 0 \Rightarrow u \rightarrow 0 \\ t \rightarrow \infty \Rightarrow u \rightarrow \infty \end{array} \right\} \\ &= \int_0^\infty e^{-s(\frac{u}{a})} \frac{f(u)}{a} du = \frac{1}{a} \int_0^\infty e^{-\frac{s}{a}u} f(u) du \\ &= \frac{1}{a} \tilde{f}\left(\frac{s}{a}\right). \end{aligned}$$

□

**Ejemplo 13** La transformada de Laplace de la función  $g(t) = 2t$ .

De acuerdo con la Tabla A.1, la transformada de Laplace de  $\mathcal{L}\{t\}$  es  $\frac{1}{s^2}$  para  $s > 0$  y  $a = 2$ . Aplicando la segundo propiedad de traslación encontramos que su transformada es:

$$\mathcal{L}\{2t\} = \frac{1}{2} \frac{1}{\left(\frac{s}{2}\right)^2} = \frac{2}{s^2}, \quad s > 0.$$

#### 4. Transformadas de Laplace de las derivadas

- Si  $f(t)$  tiene transformada de Laplace  $\tilde{f}(s)$ , entonces la transformada de la derivada de la función,  $\mathcal{L}\{f'(t)\}$ , será:

$$\mathcal{L}\{f'(t)\} = s\tilde{f}(s) - f(0). \tag{A.2}$$

**Demostración.**

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{f'(t)\} &= \int_0^\infty e^{-st} f'(t) dt = \left\{ \begin{array}{ll} u = e^{-st} & du = -se^{-st} \\ dv = f'(t) & v = f(t) \end{array} \right\} \\ &= e^{-st} f(t) \Big|_0^\infty + \int_0^\infty se^{-st} f(t) dt = -f(0) + s \int_0^\infty e^{-st} f(t) dt \\ &= s\tilde{f}(s) - f(0). \end{aligned}$$

□

**Ejemplo 14** La transformada de Laplace para la derivada de la función  $f(t) = t^2$ . Se Comprueba que efectivamente utilizando la expresión (A.2) se llega al mismo resultado que en el ejemplo anterior. Su transformada de Laplace será:

$$\mathcal{L}\{2t\} = s \frac{2!}{s^{2+1}} - 0 = \frac{2s}{s^3} = \frac{2}{s^2}, \quad s > 0.$$

- Si  $f(t)$  no es continua en  $t = 0$  pero el  $\lim_{t \rightarrow 0} f(t) = f(0^+)$  existe, y de orden exponencial  $\alpha$ , y  $f'(t)$  sea continua a trozos en  $[0, \infty)$ , entonces la transformada de la derivada de la función será:

$$\mathcal{L}\{f'(t)\} = s\tilde{f}(s) - f(0^+).$$

- Si  $f(t)$  deja de ser continua en  $t = a$ , la transformada de la derivada de la función será:

$$\mathcal{L}\{f'(t)\} = s\tilde{f}(s) - f(0) - \underbrace{e^{-as}\{f(a^+) - f(a^-)\}}_{\substack{\text{salto en la} \\ \text{discontinuidad } t=a}}.$$

- Si  $f(t)$  tiene transformada de Laplace  $\tilde{f}(s)$ , entonces la transformada de la segunda derivada,  $\mathcal{L}\{f''(t)\}$ , será:

$$\mathcal{L}\{f''(t)\} = s^2\tilde{f}(s) - sf(0) - f'(0).$$

### Demostración.

Sabemos que la transformada de la primera derivada es  $\mathcal{L}\{f'(t)\} = s\tilde{f}(s) - f(0)$ , entonces para la derivada segunda su transformada de Laplace será:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{f''(t)\} &= s\tilde{f}'(s) - f'(0) = s\left(s\tilde{f}(s) - f(0)\right) - f'(0) \\ &= s^2\tilde{f}(s) - sf(0) - f'(0). \end{aligned}$$

□



- Para  $n$  derivadas la transformada de Laplace será:

$$\mathcal{L}\{f^{(n)}(t)\} = s^n \tilde{f}(s) - s^{n-1}f(0) - s^{n-2}f'(0) - \dots - sf^{(n-2)}(0) - f^{(n-1)}(0).$$

### 5. Transformadas de Laplace de las integrales

Si  $f(t)$  tiene transformada de Laplace  $\tilde{f}(s)$ , entonces la transformada de la integral de la función será:

$$\mathcal{L}\left\{\int_0^t f(u)du\right\} = \frac{\tilde{f}(s)}{s}. \quad (\text{A.3})$$

#### Demostración.

Sea  $g(t) = \int_0^t f(u)du \Rightarrow g'(t) = f(t)$  y  $g(0) = 0$  entonces:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{g'(t)\} &= s\mathcal{L}\{g(t)\} - g(0) \\ &= s\mathcal{L}\{g(t)\} = \mathcal{L}\{f(t)\} = \tilde{f}(s), \end{aligned}$$

$$\tilde{f}(s) = s\mathcal{L}\{g(t)\} \Rightarrow \mathcal{L}\{g(t)\} = \frac{\tilde{f}(s)}{s}.$$

□

**Ejemplo 15** La transformada de Laplace de la integral  $g(t) = \int_0^t \sin 6u du$ .

La función  $f(u) = \sin 6u$ , de acuerdo con la Tabla A.1, su transformada de Laplace es:

$$\mathcal{L}\{\sin 6u\} = \frac{6}{s^2 + 6^2} = \frac{6}{s^2 + 36},$$

utilizando la expresión (A.3) se obtiene

$$\mathcal{L}\left\{\int_0^t \sin 6u du\right\} = \frac{\frac{6}{s^2+36}}{s} = \frac{6}{s(s^2+36)}.$$

### 6. Multiplicación por $t^n$

Si  $f(t)$  tiene transformada de Laplace  $\tilde{f}(s)$ , entonces la transformada de Laplace para  $g(t) = t^n \cdot f(t)$  será:

$$\mathcal{L} \{t^n f(t)\} = (-1)^n \frac{d^n}{ds^n} \tilde{f}(s) = (-1)^n \tilde{f}^{(n)}(s), \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (\text{A.4})$$

#### Demostración.

Para el caso  $n = 1$ , tenemos que  $g(t) = tf(t)$ , y si  $f(t)$  tiene transformada de Laplace  $\tilde{f}(s)$  entonces:

$$\tilde{f}(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt,$$

derivando respecto a  $s$ ,

$$\begin{aligned} \frac{d\tilde{f}(s)}{ds} &= \tilde{f}'(s) = \frac{d}{ds} \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt \\ &= \int_0^{\infty} -te^{-st} f(t) dt = - \int_0^{\infty} e^{-st} t f(t) dt \\ &= -\mathcal{L} \{t f(t)\} \end{aligned}$$

obteniendo

$$\mathcal{L} \{t f(t)\} = -\tilde{f}'(s).$$

Por tanto, para  $n = 1$  la transformada de la función  $g(t) = tf(t)$  es  $\mathcal{L} \{t f(t)\} = (-1)^1 \tilde{f}'(s)$ .

Mediante inducción matemática, suponemos que es cierto para  $n = k$ ,

$$\mathcal{L} \{t^k f(t)\} = \int_0^{\infty} e^{-st} (t^k f(t)) dt = (-1)^k \tilde{f}^{(k)}(s),$$

entonces para  $n = k + 1$ ;

$$\begin{aligned} \frac{d\mathcal{L} \{t^k f(t)\}}{ds} &= \frac{d}{ds} \int_0^{\infty} e^{-st} (t^k f(t)) dt \\ &= - \int_0^{\infty} e^{-st} (t^{k+1} f(t)) dt \end{aligned} \quad (\text{A.5})$$

y

$$\frac{d}{ds}(-1)^k \tilde{f}^k(s) = (-1)^k \tilde{f}^{k+1}(s), \quad (\text{A.6})$$

igualando (A.5) y (A.6) tenemos:

$$-\int_0^{\infty} e^{-st} (t^{k+1} f(t)) = (-1)^k \tilde{f}^{k+1}(s),$$

$$\mathcal{L} \{t^{k+1} f(t)\} = \int_0^{\infty} e^{-st} (t^{k+1} f(t)) = (-1)^{k+1} \tilde{f}^{k+1}(s).$$

Por tanto, podemos concluir que la fórmula (A.4) es válida para todos los enteros positivos de  $n$ . □

**Ejemplo 16** La transformada de Laplace de la función  $g(t) = te^{3t}$ , utilizando la propiedad anterior es:

$$\begin{aligned} \mathcal{L} \{te^{3t}\} &= \left\{ \begin{array}{l} t^n = t \Rightarrow n = 1 \\ f(t) = e^{3t} \Rightarrow \tilde{f}(s) = \frac{1}{s-3} \Rightarrow \tilde{f}'(s) = \frac{-1}{(s-3)^2} \end{array} \right\} \\ &= (-1)^1 \frac{-1}{(s-3)^2} = \frac{1}{(s-3)^2}. \end{aligned}$$

### 7. División por $t$

Si  $f(t)$  tiene transformada de Laplace  $\tilde{f}(s)$ , entonces la transformada de Laplace para  $g(t) = \frac{f(t)}{t}$  será:

$$\mathcal{L} \left\{ \frac{f(t)}{t} \right\} = \int_s^{\infty} \tilde{f}(u) du, \quad (\text{A.7})$$

si existe  $\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{f(t)}{t}$  finito.

**Demostración.**

$$\begin{aligned} g(t) &= \frac{f(t)}{t} \\ \Rightarrow tg(t) &= f(t), \end{aligned} \quad (\text{A.8})$$

haciendo la transformada de Laplace en ambos lados de (A.8),

$$-\tilde{g}'(s) = \tilde{f}(s), \quad (\text{A.9})$$

e integrando de  $s$  a  $\infty$  la expresión (A.9)

$$\begin{aligned} -[\tilde{g}(u)]_s^\infty &= \int_s^\infty \tilde{f}(u) du \\ \tilde{g}(s) - \tilde{g}(\infty) &= \int_s^\infty \tilde{f}(u) du, \end{aligned}$$

y teniendo en cuenta el comportamiento de la transformada de Laplace cuando  $s \rightarrow \infty$ ,

$$\lim_{s \rightarrow \infty} \tilde{f}(s) = 0,$$

obtenemos

$$\tilde{g}(s) = \left\{ \frac{f(t)}{t} \right\} = \int_s^\infty f(u) du.$$

□

**Ejemplo 17** *Calculamos la transformada de Laplace para la función  $g(t) = \frac{e^{-t}}{t}$  mediante el uso de la propiedad anterior:*

$$\begin{aligned} \mathcal{L} \left\{ \frac{e^{-t}}{t} \right\} &= \int_s^\infty \mathcal{L} \{ e^{-t} \} du \\ &= \int_s^\infty \frac{1}{u+1} du = [\ln(u+1)]_s^\infty \\ &= 0 - \ln(s+1) = -\ln(s+1). \end{aligned}$$

### 8. Funciones periódicas

Si una función real de variable real tiene período  $T$ , siendo  $T > 0$ , entonces  $f(t + T) = f(t)$ , para todo  $t \in \mathbb{R}$  (ver ejemplo en el gráfico de la Figura A.5). Se puede calcular la transformada de una función periódica integrando sobre un período.

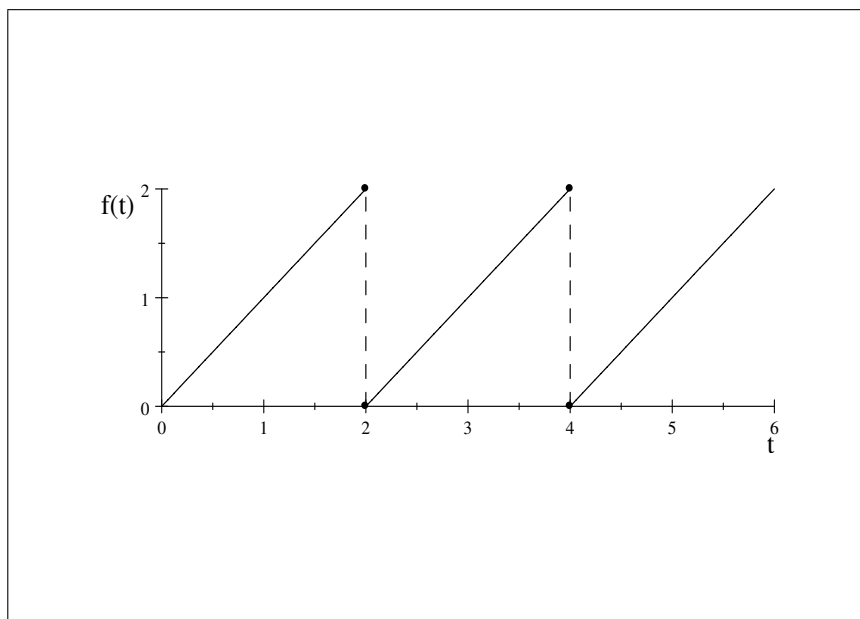


Figura A.5: Función periódica  $f(t + T) = f(t)$

Por tanto, sea  $f(t)$  una función continua a trozos en  $[0, +\infty)$  y de orden exponencial, si  $f(t)$  es periódica de período  $T$ , entonces

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \frac{\int_0^T e^{-st} f(t) dt}{1 - e^{-sT}}. \quad (\text{A.10})$$

**Demostración.**

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \int_0^\infty e^{-st} f(t) dt = \int_0^T e^{-st} f(t) dt + \int_T^\infty e^{-st} f(t) dt, \quad (\text{A.11})$$

haciendo el cambio  $t = u + T$  en la última integral de la expresión (A.11) se transforma

en

$$\begin{aligned}
 \int_T^\infty e^{-st} f(t) dt &= \left\{ \begin{array}{l} t = u + T \Rightarrow u = t - T \\ dt = du \\ t = T \rightarrow u = 0 \\ t = \infty \rightarrow u = \infty \end{array} \right\} \\
 &= \int_0^\infty e^{-s(u+T)} f(u+T) du \\
 &= e^{-sT} \int_0^\infty e^{-su} f(u) du \\
 &= e^{-sT} \mathcal{L}\{f(t)\}. \tag{A.12}
 \end{aligned}$$

Sustituyendo la expresión obtenida (A.12) en la segunda integral de (A.11), obtenemos

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \int_0^T e^{-st} f(t) dt + e^{-sT} \mathcal{L}\{f(t)\},$$

por tanto,

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \frac{\int_0^T e^{-st} f(t) dt}{1 - e^{-sT}}.$$

□

**Ejemplo 18** *Determinamos la transformada de Laplace de la función periódica que muestra el gráfico de la Figura A.6.*

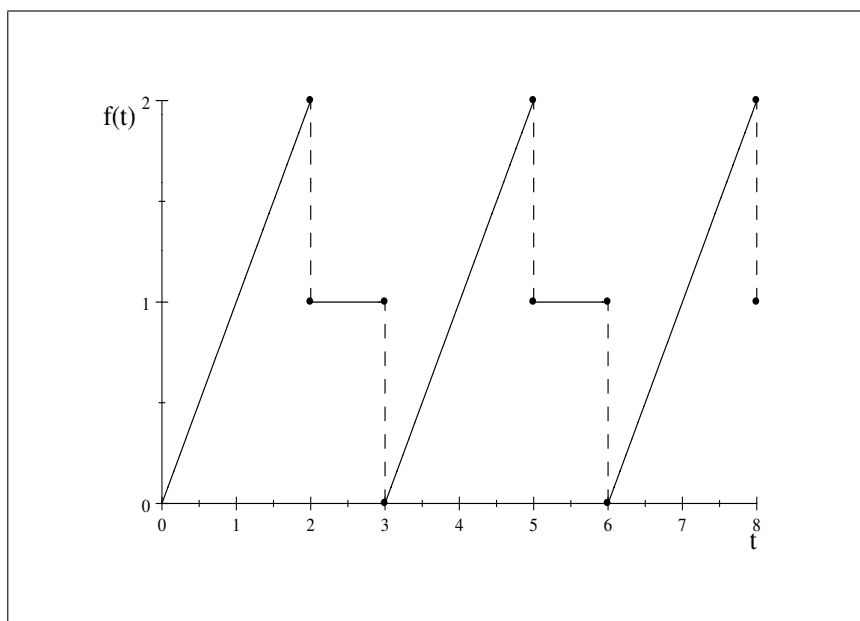


Figura A.6: Función periódica  $f(t+3) = f(t)$

La función se puede definir en el intervalo  $0 \leq t < 3$  como sigue:

$$f(t) = \begin{cases} t, & 0 \leq t < 2 \\ 1, & 2 \leq t < 3 \end{cases},$$

y fuera del intervalo mediante  $f(t+3) = f(t)$ . Con  $T = 3$  aplicamos la expresión (A.10)

y la integración por partes:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{f(t)\} &= \frac{1}{1 - e^{-3s}} \int_0^3 e^{-st} f(t) dt = \frac{1}{1 - e^{-3s}} \left[ \int_0^2 e^{-st} t dt + \int_2^3 e^{-st} dt \right] \\ &= \frac{1}{1 - e^{-3s}} \left[ -\frac{2e^{-2s}}{s} - \frac{e^{-2s}}{s^2} + \frac{1}{s^2} + \frac{e^{-2s}}{s} - \frac{e^{-3s}}{s} \right] \\ &= \frac{e^{3s} - e^s(s+1) - s}{s^2(e^{3s} - 1)}. \end{aligned}$$

## 9. Transformada de la convolución de funciones

Sean  $f(t)$  y  $g(t)$  dos funciones continuas a trozos en  $[0, \infty)$  y de orden exponencial  $\alpha$ , y sus correspondientes transformadas de Laplace sean  $\tilde{f}(s)$  y  $\tilde{g}(s)$ . La convolución de  $f(t)$

y  $g(t)$ , denotada por  $f * g$ , se define por la función:

$$(f * g)(t) = \int_0^t f(\tau)g(t - \tau)d\tau.$$

Entonces la transformada de la convolución será:

$$\mathcal{L}\{(f * g)(t)\} = \tilde{f}(s)\tilde{g}(s),$$

para  $s > \alpha$ .

### Demostración.

Sean

$$\tilde{f}(s) = \mathcal{L}\{f(t)\} = \int_0^{\infty} e^{-s\tau} f(\tau)d\tau,$$

$$\tilde{g}(s) = \mathcal{L}\{g(t)\} = \int_0^{\infty} e^{-s\beta} g(\beta)d\beta.$$

Se parte del producto entre ellas, obteniendo

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{f(t)\} \mathcal{L}\{g(t)\} &= \left( \int_0^{\infty} e^{-s\tau} f(\tau)d\tau \right) \left( \int_0^{\infty} e^{-s\beta} g(\beta)d\beta \right) \\ &= \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} e^{-s(\tau+\beta)} f(\tau)g(\beta)d\beta d\tau. \end{aligned}$$

Sustituyendo  $t = \tau + \beta$ ,  $dt = d\beta$ , de modo que

$$\tilde{f}(s)\tilde{g}(s) = \int_0^{\infty} \int_{\tau}^{\infty} e^{-st} f(\tau)g(t - \tau)dt d\tau. \quad (\text{A.13})$$

Si definimos que  $g(t) = 0$  para  $t < 0$ , entonces  $g(t - \tau) = 0$  para  $t < \tau$  y podemos escribir (A.13) de la siguiente forma

$$\int_0^{\infty} \int_0^{\infty} e^{-st} f(\tau)g(t - \tau)dt d\tau.$$



Ya que  $f(t)$  y  $g(t)$  son continuas por tramos en  $[0, \infty)$  y son de orden exponencial, es posible intercambiar el orden de integración:

$$\tilde{f}(s)\tilde{g}(s) = \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-st} f(\tau)g(t - \tau)d\tau dt. \quad (\text{A.14})$$

Del mismo modo que antes, ahora  $g(t - \tau) = 0$  para  $\tau > t$  y podemos escribir (A.14) de la siguiente forma

$$\begin{aligned} \tilde{f}(s)\tilde{g}(s) &= \int_0^\infty \int_0^t e^{-st} f(\tau)g(t - \tau)d\tau dt \\ &= \int_0^\infty e^{-st} \int_0^t f(\tau)g(t - \tau)d\tau dt \\ &= \mathcal{L} \{(f * g)(t)\} \end{aligned}$$

□

**Ejemplo 19** Calculamos  $\mathcal{L} \left\{ \int_0^t \tau \sin(t - \tau)d\tau \right\}$ . Si  $f(t) = t$  y  $g(t) = \sin t$ , la transformada de una convolución establece que es el producto de sus transformadas respectivas  $\tilde{f}(s) = \frac{1}{s^2}$  y  $\tilde{g}(s) = \frac{1}{s^2+1}$ , por lo tanto:

$$\mathcal{L} \left\{ \int_0^t \tau \sin(t - \tau)d\tau \right\} = \mathcal{L} \{t\} \mathcal{L} \{\sin t\} = \frac{1}{s^2} \frac{1}{s^2 + 1}.$$

En la Tabla A.2 se presenta un resumen de las propiedades comentadas anteriormente y en la Tabla A.3 se adjuntan teoremas importantes necesarios para hallar algunas transformadas de Laplace.

1. Propiedad de linealidad	$\mathcal{L}\{c_1 f_1(t) + c_2 f_2(t)\} = c_1 \tilde{f}_1(s) + c_2 \tilde{f}_2(s)$ , siendo $c_1$ y $c_2$ constantes
2. Propiedades de traslación:	
a) primera propiedad de traslación	$\mathcal{L}\{e^{at} f(t)\} = \tilde{f}(s - a)$ donde $s - a > 0$
b) segunda propiedad de traslación	Si $g(t) = \begin{cases} f(t - a) & t > a \\ 0 & t < a \end{cases}$ , $\mathcal{L}\{g(t)\} = e^{-as} \tilde{f}(s)$ cuando $a \geq 0$ ,
3. Propiedad del cambio de escala	$\mathcal{L}\{f(at)\} = \frac{1}{a} \tilde{f}\left(\frac{s}{a}\right)$
4. Transformadas de Laplace de las derivadas	$\mathcal{L}\{f'(t)\} = s \tilde{f}(s) - f(0)$
5. Transformadas de Laplace de las integrales	$\mathcal{L}\left\{\int_0^t f(u) du\right\} = \frac{\tilde{f}(s)}{s}$
6. Multiplicación por $t^n$	$\mathcal{L}\{t^n f(t)\} = (-1)^n \tilde{f}^{(n)}(s)$ , $n = 1, 2, 3, \dots$
7. División por $t$	$\mathcal{L}\left\{\frac{f(t)}{t}\right\} = \int_s^\infty \tilde{f}(u) du$ , si existe $\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{f(t)}{t}$ finito
8. Funciones periódicas	$\mathcal{L}\{f(t)\} = \frac{\int_0^T e^{-st} \cdot f(t) dt}{1 - e^{-sT}}$ , $f(t)$ es periódica de período $T$
9. Transformada de la convolución	$\mathcal{L}\{(f * g)(t)\} = \tilde{f}(s) \tilde{g}(s)$ , para $s > \alpha$

Tabla A.2: Propiedades de las transformadas de Laplace

1. Comportamiento de $\tilde{f}(s)$ cuando $s \rightarrow \infty$ :	$\lim_{s \rightarrow \infty} \tilde{f}(s) = 0$
2. Teorema del valor inicial:	$\lim_{t \rightarrow 0} f(t) = \lim_{s \rightarrow \infty} s\tilde{f}(s),$ <i>si existen estos límites</i>
3. Teorema del valor final:	$\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = \lim_{s \rightarrow 0} s\tilde{f}(s),$ <i>si existen finitos estos límites</i>

Tabla A.3: Algunos teoremas de las transformadas de Laplace

### A.3. Métodos de cálculo

1. **Método directo:** Haciendo uso de la definición de la integral de la transformada mostrada en la expresión (A.1):

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \tilde{f}(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt$$

Este método está utilizado en el ejemplo de  $f(t) = e^{at}$ .

2. **Método de las series:** Se puede utilizar en aquellas funciones

$$f(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n$$

que aplicando la propiedad (1) entonces,

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \frac{a_0}{s} + \frac{a_1}{s^2} + \frac{2!a_2}{s^3} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!a_n}{s^{n+1}}.$$

3. **Mediante el uso de tablas:** Consultar Spiegel (1967).



## Apéndice B

### Ejemplos del momento de ruina con barrera

A continuación, se presentan ejemplos numéricos para analizar el comportamiento de la esperanza, varianza, desviación típica y el coeficiente de variación de la variable momento de ruina cuando la distribución de cuantía del siniestro sigue una Erlang( $2, \beta$ ) con  $\beta = 2$ . Los resultados han sido obtenidos mediante programas realizados en *Mathematica 6.0*.

**Ejemplo 20** Para una distribución de cuantía del siniestro Erlang( $2, 2$ ), considerando  $\lambda = 1$ ,  $b = 10$ ,  $c = 1.1$ ,  $p_1 = 1$ , obtenemos la Tabla B.1 para distintos valores de  $u$ .

*Podemos observar como la esperanza del momento de ruina va aumentando a medida que el nivel inicial de las reservas es mayor, lo cual nos indica que cuanto mayor sea el nivel inicial de las reservas, la ruina sucederá más tarde. Se observa que cuanto mayores son las reservas iniciales, el incremento de la variación o dispersión de la variable es cada vez menor. Con el coeficiente de variación podemos medir la dispersión relativa de los datos. A la vista de los resultados, observamos que a mayor nivel inicial de las reservas cada vez tenemos menos dispersión.*

$u$	$E[T]$	$E[T^2]$	$\sigma^2$	$\sigma$	$C_V = \left(\frac{\sigma}{E[T]}\right) \times 100$
0	20.0631	3867.47	3464.94	58.6638	293.3930
1	39.9579	7889.50	6292.87	79.3276	198.5280
2	58.1935	11666.10	8279.59	90.9922	156.3620
3	73.2655	14865.50	9497.67	97.4560	133.0180
4	85.4515	17507.70	10205.70	101.0230	118.2230
5	95.0798	19632.00	10591.90	102.9170	108.2430
6	102.4450	21279.60	10784.70	103.8490	101.3710
7	107.8080	22491.80	10869.20	104.2550	96.7046
8	111.4000	23309.10	10899.20	104.3990	93.7157
9	113.4250	23771.40	10906.30	104.4330	92.0728
10	114.0630	23917.20	10906.90	104.4360	91.5600

Tabla B.1: Esperanza, varianza, desviación típica y  $C_V$  para distintas  $u$ 

**Ejemplo 21** Para una distribución de cuantía del siniestro Erlang(2, 2), considerando  $\lambda = 1$ ,  $u = 7$ ,  $c = 1.1$ ,  $p_1 = 1$ , obtenemos la Tabla B.2 para distintos valores de  $b$ .

$b$	$E[T]$	$E[T^2]$	$\sigma^2$	$\sigma$	$C_V$
7	51.09	4790.72	2181.00	46.70	91.42
8	67.73	8488.80	3901.49	62.46	92.22
9	86.54	14133.60	6643.89	81.51	94.18
10	107.81	22491.80	10869.20	104.26	96.70
20	551.25	761936.00	458065.00	676.81	122.78

Tabla B.2: Esperanza, varianza, desviación típica y  $C_V$  para distintas  $b$ 

También en este caso la esperanza del momento de ruina va aumentando a medida que tenemos una barrera de nivel superior, ya que el efecto de una barrera más alta retrasa el momento de ruina. Se observa que la varianza aumenta con un mayor nivel de la barrera. Respecto al coeficiente de variación, la dispersión relativa de los datos aumenta cuanto mayor es el nivel de la barrera.

**Ejemplo 22** Para una distribución de cuantía del siniestro Erlang(2, 2), considerando  $\lambda = 1$ ,  $c = 1.1$ ,  $p_1 = 1$ , obtenemos la Tabla B.3 para distintos valores cuando  $b = u$ .

$b = u$	$E[T]$	$E[T^2]$	$\sigma^2$	$\sigma$	$C_V$
0	1.0000	2.00	1.00	1.00	100.000
1	2.1962	9.56	4.73	2.18	99.052
5	25.5944	1210.02	554.95	23.56	92.042
10	114.0630	23917.20	10906.90	104.44	91.560
20	740.9260	1037600.00	488629.00	699.02	94.344

Tabla B.3: Esperanza, varianza, desviación típica y  $C_V$  cuando  $b = u$

*En el caso en que la barrera es igual a las reservas, la esperanza del momento de ruina va aumentando a medida que las reservas son mayores. La varianza también aumenta a mayor nivel de la  $b = u$ . Y en el coeficiente de variación se observan diferentes dispersiones relativas en función de los datos.*

A continuación, se adjunta el programa realizado en *Mathematica 6.0* que se ha utilizado para la obtención de los datos anteriores.

```

In[1]:= (*Momento de ruina cuantía del siniestro Erlang(2,β) siendo β=2;*)
In[2]:= λ = 1; u = 0; b = 10; β = 2;
In[3]:= c = 1.1;
        a := c
        bb := -(λ + δ - 2 * β * c)
        cc := -β ((2 * λ) + (2 * δ) - β * c)
        dd := -(β^2) * δ
        rr := Solve[(a * r^3) + (bb * r^2) + (cc * r) + dd == 0, r]
        r1 = r /. rr[[1]];
        r2 = r /. rr[[2]];
        r3 = r /. rr[[3]];
In[12]:= A1A2A3=Solve[{{(β*A1)/(r1+β)}+{(β*A2)/(r2+β)}+{(β*A3)/(r3+β)}==1,
  (((β^2)*A1)/((r1+β)^2))+(((β^2)*A2)/((r2+β)^2))+(((β^2)*A3)/((r3+β)^2))=1,
  A1*Exp[r1*b]*((λ+δ)/λ)-(β^2/((r1+β)^2))+A2*Exp[r2*b]*((λ+δ)/λ)-(β^2/((r2+β)^2))+A3*Exp[r3*b]*((λ+δ)/λ)-(β^2/((r3+β)^2))=0},{A1,A2,A3}];
In[13]:= φ[δ_]= (A1*Exp[r1*u]+(A2*Exp[r2*u]))+(A3*Exp[r3*u])/ . A1A2A3[[1]];
In[14]:= derivadaφ[δ_] = D[φ[δ], δ];
In[15]:= momento1 = Re[N[-derivadaφ[0]]]
Out[15]= 20.0631
In[16]:= derφ2[δ_] = D[derivadaφ[δ], δ];
In[17]:= momento2 = Re[N[derφ2[0]]]
Out[17]= 3867.47
In[18]:= {momento1, momento2}
Out[18]= {20.0631, 3867.47}
In[19]:= Esperanza = momento1;
        Varianza = momento2 - (momento1^2);
In[21]:= desviacion = Varianza^(1/2);
In[22]:= {Esperanza, Varianza, desviacion}
Out[22]= {20.0631, 3464.94, 58.8638}

```



## Apéndice C

# Programas en Mathematica: Ejemplos con reaseguro y barrera constante

### C.1. Esperanza del momento de ruina

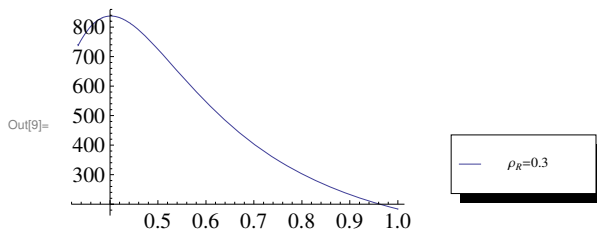
**Ejemplo 23** Programa realizado en Mathematica 6.0 para el estudio del comportamiento de la esperanza del momento de ruina (3.10) para distintos recargos del reasegurador,  $\rho_R = (0.3, 0.4, 0.5, 0.6, 0.7, 0.8, 0.9)$  teniendo unas reservas iniciales  $u = 5$ ,  $b = 10$ , un recargo de seguridad  $\rho = 0.2$  y suponiendo que los siniestros siguen una distribución de Poisson de parámetro  $\lambda = 0.5$  y la cuantía de los siniestros una exponencial de parámetro  $\beta = 1$ .

Los  $\rho_R$  considerados son los del caso (1), comentado en el capítulo 3, los cuales son superiores al recargo de seguridad del asegurador  $\rho = 0.2$ . Estos recargos limitan el dominio de la proporción retenida  $k$ , la cual debe pertenecer al intervalo  $\left(\frac{\rho_R - \rho}{\rho_R}, 1\right]$ . Se observa en los resultados que al incrementar el  $\rho_R$ , el dominio de  $k$  se ve reducido y también disminuyen los valores de la esperanza del momento de ruina.

```
In[1]:= (*Esperanza del momento de ruina con reaseguro proporcional y barrera constante*)
<< "PlotLegends" >>
b = 10; β = 1; λ = 0.5; ρ = 0.2; c = λ + 1 / β * (1 + ρ); ρr = 0.3; u = 5;
ρN[k_] := ρr -  $\frac{\rho x - \rho}{k}$ ;
kp[k_] :=  $\frac{k (1 + \rho N[k])}{1 + \rho}$ ;
R[k_] :=  $\frac{\rho N[k] \beta}{1 + \rho N[k]}$ ;
Er1[k_] =  $\frac{(1 + \rho N[k]) e^{\frac{\rho N[k] \beta (b-u)}{\lambda (1 + \rho N[k])}} \left( \frac{\rho N[k] \beta u}{(1 + \rho N[k]) e^{\frac{\rho N[k] \beta u}{\rho N[k]}} - \frac{1}{\rho N[k]}} - \frac{1}{\rho N[k]} \right)}{\lambda \rho N[k]} - \frac{1 + \frac{u \beta}{k}}{\lambda \rho N[k]}$ ;
Er1[1]
```

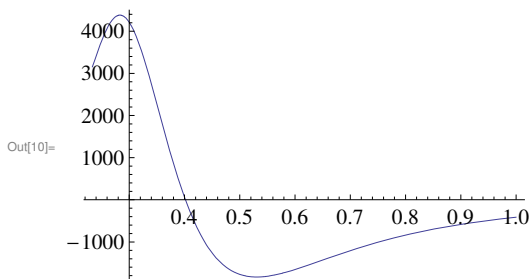
Out[7]= 183.145

```
In[8]:= DerivadaEr1 = ∂kEr1[k];
ρdiferent1 = Plot[Er1[k], {k, Max[{0, 1 -  $\frac{\rho}{\rho r}$ ]}, 1},
  BaseStyle → {FontFamily → "Times", FontSize → 14}, PlotRange → All,
  PlotLegend → {"ρR=0.3"}, LegendPosition → {1.1, -0.4}, AxesOrigin → Automatic]
```



In[10]:= derivadal =

```
Plot[DerivadaEr1, {k, 1 -  $\frac{\rho}{\rho r}$  - 0.1, 1}, BaseStyle → {FontFamily → "Times", FontSize → 14}]
```



```
In[11]:= FindRoot[DerivadaEr1 == 0, {k, 0.05 +  $\frac{\rho x - \rho}{\rho r}$ }]
```

Out[11]= {k → 0.401725}

```
In[12]:= puntooptimol = k /. %;
```

```

In[13]:= Dominio1 = {Max[{0, 1 -  $\frac{\rho}{\rho r}$ }], 1}
Out[13]= {0.333333, 1}

In[14]:= Esperanzaeneloptimo1 = Er1[puntooptimo1]
Out[14]= 837.331

In[15]:= Clear[ $\rho r$ ]; c = 0.6; b = 10;  $\beta$  = 1;  $\lambda$  = 0.5;  $\rho$  = 0.2;  $\rho r$  = 0.4; u = 5;

In[16]:=  $\rho N[k\_]$  :=  $\rho r - \frac{\rho r - \rho}{k}$ ;
kp[k_] :=  $\frac{k(1 + \rho N[k])}{1 + \rho}$ ;
R[k_] :=  $\frac{\rho N[k] \beta}{1 + \rho N[k]}$ ;

Er2[k_] =  $\frac{(1 + \rho N[k]) e^{\frac{\rho N[k] \beta (b-u)}{k(1 + \rho N[k])}} \left( \frac{(1 + \rho N[k]) e^{k(1 + \rho N[k])}}{\rho N[k]} - \frac{1}{\rho N[k]} \right)}{\lambda \rho N[k]} - \frac{1 + \frac{u \beta}{k}}{\lambda \rho N[k]}$ ;
Er2[1]

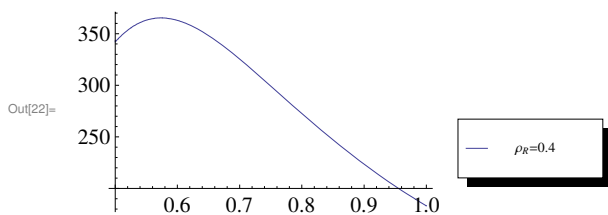
```

Out[20]= 183.145

```

In[21]:= DerivadaEr2 =  $\partial_k$  Er2[k];
 $\rho$ rdiferent2 = Plot[Er2[k], {k, Max[{0, 1 -  $\frac{\rho}{\rho r}$ ]], 1},
BaseStyle -> {FontFamily -> "Times", FontSize -> 14}, PlotLegend -> {" $\rho r=0.4$ "},
LegendPosition -> {1.1, -0.4}, PlotRange -> All, AxesOrigin -> Automatic]

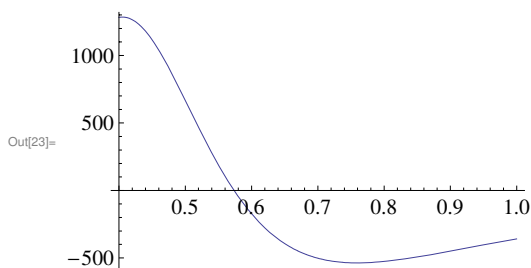
```



```

In[23]:= derivada2 =
Plot[DerivadaEr2, {k, 1 -  $\frac{\rho}{\rho r}$  - 0.1, 1}, BaseStyle -> {FontFamily -> "Times", FontSize -> 14}]

```



```

In[24]:= FindRoot[DerivadaEr2 == 0, {k, 0.05 +  $\frac{\rho r - \rho}{\rho r}$ }]
Out[24]= {k -> 0.57369}

In[25]:= puntooptimo2 = k /. %;
Dominio2 = {Max[{0, 1 -  $\frac{\rho}{\rho r}$ }], 1}
Out[26]= {0.5, 1}

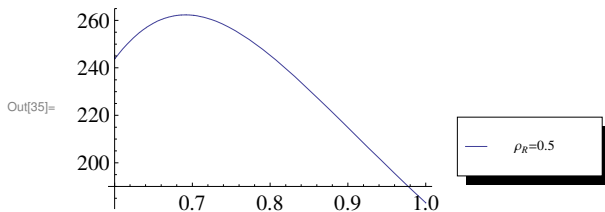
In[27]:= Esperanzaenloptimo2 = Er2[puntooptimo2]
Out[27]= 365.286

In[28]:= Clear[ $\rho r$ ]; c = 0.6; b = 10;  $\beta$  = 1;  $\lambda$  = 0.5;  $\rho$  = 0.2;  $\rho r$  = 0.5; u = 5;

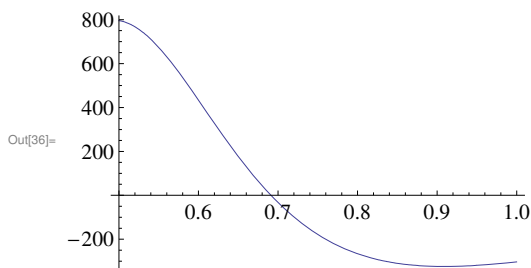
In[29]:=  $\rho N[k\_]$  :=  $\rho r - \frac{\rho r - \rho}{k}$ ;
kp[k_] :=  $\frac{k (1 + \rho N[k])}{1 + \rho}$ ;
R[k_] :=  $\frac{\rho N[k] \beta}{1 + \rho N[k]}$ ;
Er3[k_] =  $\frac{(1 + \rho N[k]) e^{\frac{\rho N[k] \beta (b-u)}{k (1 + \rho N[k])}} \left( \frac{(1 + \rho N[k]) e^{\frac{\rho N[k] \beta u}{k (1 + \rho N[k])}}}{\rho N[k]} - \frac{1}{\rho N[k]} \right)}{\lambda \rho N[k]} - \frac{1 + \frac{u \beta}{k}}{\lambda \rho N[k]}$ ;
Er3[1]
Out[33]= 183.145

In[34]:= DerivadaEr3 =  $\theta_k$  Er3[k];
ordiferent3 = Plot[Er3[k], {k, Max[{0, 1 -  $\frac{\rho}{\rho r}$ ]], 1},
BaseStyle -> {FontFamily -> "Times", FontSize -> 14}, PlotLegend -> {" $\rho_R=0.5$ "},
LegendPosition -> {1.1, -0.4}, PlotRange -> All, AxesOrigin -> Automatic]

```



```
In[36]:= derivada3 =
Plot[DerivadaEr3, {k, 1 -  $\frac{\rho}{\rho x}$  - 0.1, 1}, BaseStyle -> {FontFamily -> "Times", FontSize -> 14}]
```



```
In[37]:= FindRoot[DerivadaEr3 == 0, {k, 0.05 +  $\frac{\rho x - \rho}{\rho x}$ }]
```

Out[37]= {k -> 0.691103}

```
In[38]:= puntooptimo3 = k /. %;
Dominio3 = {Max[{0, 1 -  $\frac{\rho}{\rho x}$ }], 1}
```

Out[39]= {0.6, 1}

```
In[40]:= Esperanzaenloptimo3 = Er3[puntooptimo3]
```

Out[40]= 262.32

```
In[41]:= Clear[ $\rho x$ ]; c = 0.6; b = 10;  $\beta$  = 1;  $\lambda$  = 0.5;  $\rho$  = 0.2;  $\rho x$  = 0.6; u = 5;
```

```
In[42]:=  $\rho N[k\_]$  :=  $\rho x - \frac{\rho}{k}$ ;
```

$$kp[k\_]$$
 :=  $\frac{k(1 + \rho N[k])}{1 + \rho}$ ;

$$R[k\_]$$
 :=  $\frac{\rho N[k] \beta}{1 + \rho N[k]}$ ;

$$Er4[k_] = \frac{(1 + \rho N[k]) e^{\frac{\rho N[k] \beta (b-u)}{k(1 + \rho N[k])}} \left( \frac{(1 + \rho N[k]) e^{\frac{\rho N[k] \beta u}{k(1 + \rho N[k])}}}{\rho N[k]} - \frac{1}{\rho N[k]} \right)}{\lambda \rho N[k]} - \frac{1 + \frac{u \beta}{k}}{\lambda \rho N[k]}$$
;

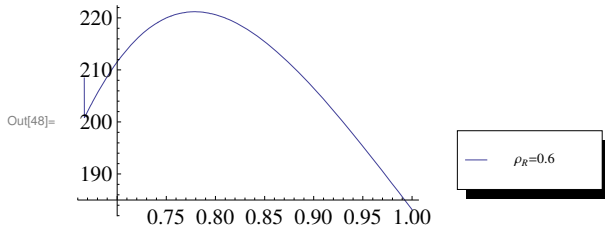
```
Er4[1]
```

Out[46]= 183.145

```
In[47]:= DerivadaEr4 =  $\partial_k \text{Er4}[k]$ ;
```

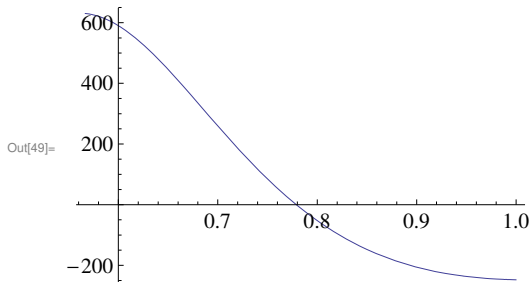
```
 $\rho$ rdiferent4 = Plot[Er4[k], {k, Max[0, 1 -  $\frac{\rho}{\rho r}$ ], 1},
```

```
BaseStyle -> {FontFamily -> "Times", FontSize -> 14}, PlotLegend -> {" $\rho r=0.6$ "},
LegendPosition -> {1.1, -0.4}, PlotRange -> All, AxesOrigin -> Automatic]
```



```
In[49]:= derivada4 =
```

```
Plot[DerivadaEr4, {k, 1 -  $\frac{\rho}{\rho r}$  - 0.1, 1}, BaseStyle -> {FontFamily -> "Times", FontSize -> 14}]
```



```
In[50]:= FindRoot[DerivadaEr4 == 0, {k, 0.05 +  $\frac{\rho r - \rho}{\rho r}$ }]
```

```
Out[50]= {k -> 0.778983}
```

```
In[51]:= puntooptimo4 = k /. %;
```

```
Dominio4 = {Max[0, 1 -  $\frac{\rho}{\rho r}$ ], 1}
```

```
Out[52]= {0.666667, 1}
```

```
In[53]:= Esperanzaeneloptimo4 = Er4[puntooptimo4]
```

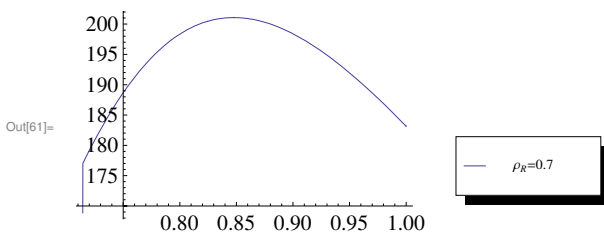
```
Out[53]= 221.185
```

```
In[54]:= Clear[ $\rho r$ ]; c = 0.6; b = 10;  $\beta$  = 1;  $\lambda$  = 0.5;  $\rho$  = 0.2;  $\rho r$  = 0.7; u = 5;
```

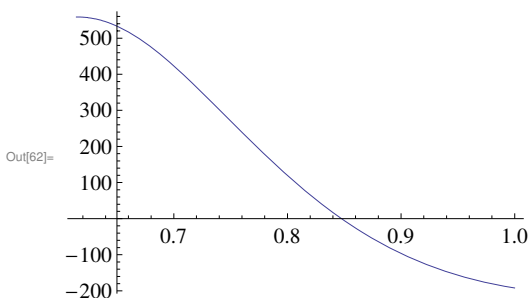
```
In[55]:= ρN[k_] := ρx -  $\frac{\rho x - \rho}{k}$ ;
kp[k_] :=  $\frac{k(1 + \rho N[k])}{1 + \rho}$ ;
R[k_] :=  $\frac{\rho N[k] \beta}{1 + \rho N[k]}$ ;
Er5[k_] =  $\frac{(1 + \rho N[k]) e^{\frac{\rho N[k] \beta (h-u)}{k(1 + \rho N[k])}} \left( \frac{(1 + \rho N[k]) e^{\frac{\rho N[k] \beta u}{k(1 + \rho N[k])}}}{\rho N[k]} - \frac{1}{\rho N[k]} \right)}{\lambda \rho N[k]} - \frac{1 + \frac{u \beta}{k}}{\lambda \rho N[k]}$ ;
Er5[1]
```

Out[59]= 183.145

```
In[60]:= DerivadaEr5 = D[Er5[k], k];
ordiferent5 = Plot[Er5[k], {k, Max[{0, 1 -  $\frac{\rho}{\rho x}$ ]}, 1],
BaseStyle -> {FontFamily -> "Times", FontSize -> 14}, PlotLegend -> {"ρR=0.7"},
LegendPosition -> {1.1, -0.4}, PlotRange -> All, AxesOrigin -> Automatic]
```



```
In[62]:= derivada5 =
Plot[DerivadaEr5, {k, 1 -  $\frac{\rho}{\rho x}$  - 0.1, 1}, BaseStyle -> {FontFamily -> "Times", FontSize -> 14}]
```



```
In[63]:= FindRoot[DerivadaEr5 == 0, {k, 0.05 +  $\frac{\rho x - \rho}{\rho x}$ }]
```

Out[63]= {k -> 0.847667}

```
In[64]:= puntooptimo5 = k /. %;
Dominio5 = {Max[{0, 1 -  $\frac{\rho}{\rho x}$ ]}, 1}
```

Out[65]= {0.714286, 1}

```

In[66]:= Esperanzaenloptimo5 = Er5[puntooptimo5]
Out[66]= 201.075

In[67]:= FindRoot[Er5[k] == Er5[1], {k, rho}]
puntoreaseguro5 = k /. %;
Out[67]= {k -> 0.731586}

In[69]:= Clear[rho]; c = 0.6; b = 10; beta = 1; lambda = 0.5; rho = 0.2; rhoR = 0.8; u = 5;

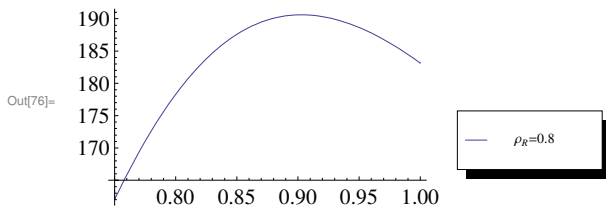
In[70]:= rhoN[k_] := rhoR - rho/k;
kp[k_] := k (1 + rhoN[k]);
R[k_] := rhoN[k] beta / (1 + rhoN[k]);
Er6[k_] := (1 + rhoN[k]) e^{rhoN[k] beta (b-u)} \left( \frac{(1 + rhoN[k]) e^{k (1 + rhoN[k])}}{rhoN[k]} - \frac{1}{rhoN[k]} \right) - \frac{1 + u/k}{lambda rhoN[k]};
Er6[1]
Out[74]= 183.145

```

```

In[75]:= DerivadaEr6 = D[Er6[k], k];
rhoDiferent6 = Plot[Er6[k], {k, Max[0, 1 - rho/rhoR], 1},
  BaseStyle -> {FontFamily -> "Times", FontSize -> 14}, PlotLegend -> {"rhoR=0.8"},
  LegendPosition -> {1.1, -0.4}, PlotRange -> All, AxesOrigin -> Automatic]

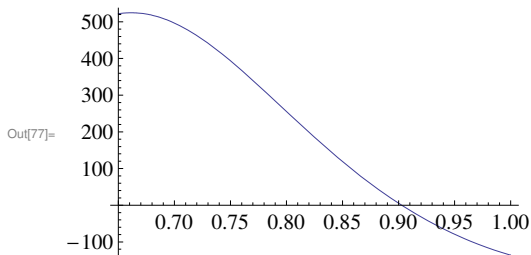
```



```

In[77]:= derivada6 =
  Plot[DerivadaEr6, {k, 1 - rho/rhoR - 0.1, 1}, BaseStyle -> {FontFamily -> "Times", FontSize -> 14}]

```





```

In[78]:= FindRoot[DerivadaEr6 == 0, {k, 0.05 +  $\frac{\rho x - \rho}{\rho x}$ }]
Out[78]:= {k -> 0.902798}

In[79]:= puntooptimo6 = k /. %;
Dominio6 = {Max[{0, 1 -  $\frac{\rho}{\rho x}$ }], 1}

Out[80]:= {0.75, 1}

In[81]:= Esperanzaeneloptimo6 = Er6[puntooptimo6]
Out[81]:= 190.602

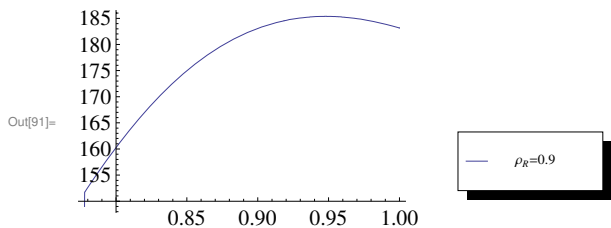
In[82]:= FindRoot[Er6[k] == Er6[1], {k,  $\rho x$ }]
puntoincreaseguro6 = k /. %;
Out[82]:= {k -> 0.821577}

In[84]:= Clear[ $\rho x$ ]; c = 0.6; b = 10;  $\beta$  = 1;  $\lambda$  = 0.5;  $\rho$  = 0.2;  $\rho x$  = 0.9; u = 5;

In[85]:=  $\rho N[k\_]$  :=  $\rho x - \frac{\rho x - \rho}{k}$ ;
kp[k_] :=  $\frac{k(1 + \rho N[k])}{1 + \rho}$ ;
R[k_] :=  $\frac{\rho N[k] \beta}{1 + \rho N[k]}$ ;
Er7[k_] =  $\frac{(1 + \rho N[k]) e^{\frac{\rho N[k] \beta (b-u)}{k(1 + \rho N[k])}} \left( \frac{(1 + \rho N[k]) e^{\frac{\rho N[k] \beta u}{k(1 + \rho N[k])}}}{\rho N[k]} - \frac{1}{\rho N[k]} \right) - \frac{1 + \frac{u \beta}{k}}{\lambda \rho N[k]}}$ ;
Er7[1]
Out[89]:= 183.145

In[90]:= DerivadaEr7 =  $\partial_k$  Er7[k];
 $\rho$ different7 = Plot[Er7[k], {k, Max[{0, 1 -  $\frac{\rho}{\rho x}$ ]], 1},
BaseStyle -> {FontFamily -> "Times", FontSize -> 14}, PlotLegend -> {" $\rho_R=0.9$ "},
LegendPosition -> {1.1, -0.4}, PlotRange -> All, AxesOrigin -> Automatic]

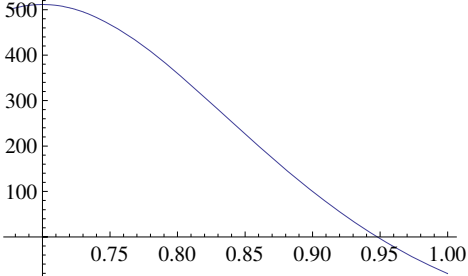
```



```

In[92]:= derivada7 =
Plot[DerivadaEr7, {k, 1 -  $\frac{\rho}{\rho r}$  - 0.1, 1}, BaseStyle -> {FontFamily -> "Times", FontSize -> 14}]

```



```

Out[92]:=

```

```

In[93]:= FindRoot[DerivadaEr7 == 0, {k, 0.05 +  $\frac{\rho r - \rho}{\rho r}$ }]

```

```

Out[93]:= {k -> 0.947887}

```

```

In[94]:= puntooptimo7 = k /. %;
Dominio7 = {Max[{0, 1 -  $\frac{\rho}{\rho r}$ }], 1}

```

```

Out[95]:= {0.777778, 1}

```

```

In[96]:= Esperanzaenloptimo7 = Er7[puntooptimo7]

```

```

Out[96]:= 185.371

```

```

In[97]:= FindRoot[Er7[k] == Er7[1], {k,  $\rho r$ }]
puntooreaseguro7 = k /. %;

```

```

Out[97]:= {k -> 0.900718}

```

```

In[99]:= Clear[ $\rho r$ ];

```

```

In[100]:= << "ErrorBarPlots`"

```

```

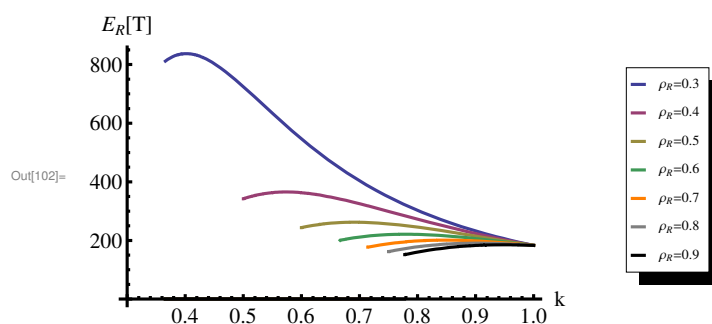
In[101]:= << "PlotLegends`"

```

```

In[102]= Plot[{Piecewise[{{Er1[k], 1 -  $\frac{\rho}{0.3} < k$ }}],
  Piecewise[{{Er2[k], 1 -  $\frac{\rho}{0.4} < k$ }}], Piecewise[{{Er3[k], 1 -  $\frac{\rho}{0.5} < k$ }}],
  Piecewise[{{Er4[k], 1 -  $\frac{\rho}{0.6} < k$ }}], Piecewise[{{Er5[k], 1 -  $\frac{\rho}{0.7} < k$ }}],
  Piecewise[{{Er6[k], 1 -  $\frac{\rho}{0.8} < k$ }}], Piecewise[{{Er7[k], 1 -  $\frac{\rho}{0.9} < k$ }}]},
{k, 0.366, 1}, PlotRange -> All, AxesLabel -> {"k", "ER[T]"}, AxesOrigin -> {0.3, 0},
BaseStyle -> {FontFamily -> "Times", FontSize -> 14}, Axes -> True, AxesStyle -> Directive[Thick],
PlotLegend -> {" $\rho_R=0.3$ ", " $\rho_R=0.4$ ", " $\rho_R=0.5$ ", " $\rho_R=0.6$ ", " $\rho_R=0.7$ ", " $\rho_R=0.8$ ", " $\rho_R=0.9$ "},
LegendPosition -> {1.1, -0.4}, PlotStyle -> {Thick, Thick, Thick, Thick, Thick, Thick, Thick},
Directive[Thick, Orange], Directive[Thick, Gray], Directive[Thick, Black]}]

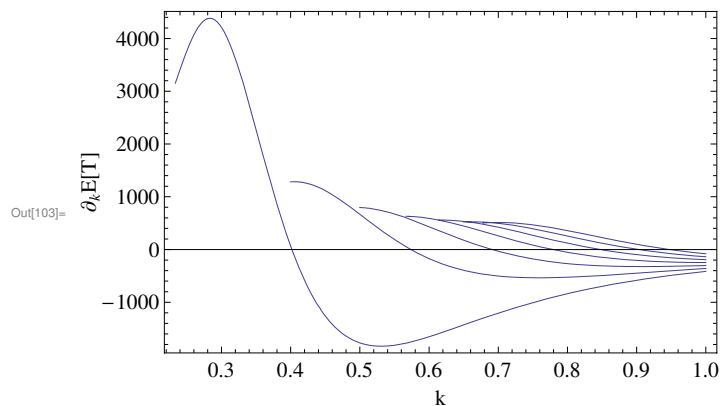
```



```

In[103]= Show[{derivada1, derivada2, derivada3, derivada4, derivada5, derivada6, derivada7},
FrameLabel -> {"k", " $\partial_k E[T]$ "}, AxesOrigin -> {0, 0},
Frame -> True, BaseStyle -> {FontFamily -> "Times", FontSize -> 14}]

```



```

In[104]= optimos = {puntooptimo1, puntooptimo2, puntooptimo3,
  puntooptimo4, puntooptimo5, puntooptimo6, puntooptimo7}

```

```

Out[104]= {0.401725, 0.57369, 0.691103, 0.778983, 0.847667, 0.902798, 0.947887}

```

```

In[105]= diferentesror = {0.3, 0.4, 0.5, 0.6, 0.7, 0.8, 0.9}

```

```

Out[105]= {0.3, 0.4, 0.5, 0.6, 0.7, 0.8, 0.9}

```

```

In[106]= Esperanzasoptimas = {Esperanzaeneloptimo1, Esperanzaeneloptimo2, Esperanzaeneloptimo3,
    Esperanzaeneloptimo4, Esperanzaeneloptimo5, Esperanzaeneloptimo6, Esperanzaeneloptimo7}
Out[106]= {837.331, 365.286, 262.32, 221.185, 201.075, 190.602, 185.371}

In[107]= rorconesperanzas = {{0.3, 837.331}, {0.4, 365.286}, {0.5, 262.32},
    {0.6, 221.185}, {0.7, 201.075}, {0.8, 190.602}, {0.9, 185.371}}
Out[107]= {{0.3, 837.331}, {0.4, 365.286}, {0.5, 262.32},
    {0.6, 221.185}, {0.7, 201.075}, {0.8, 190.602}, {0.9, 185.371}}

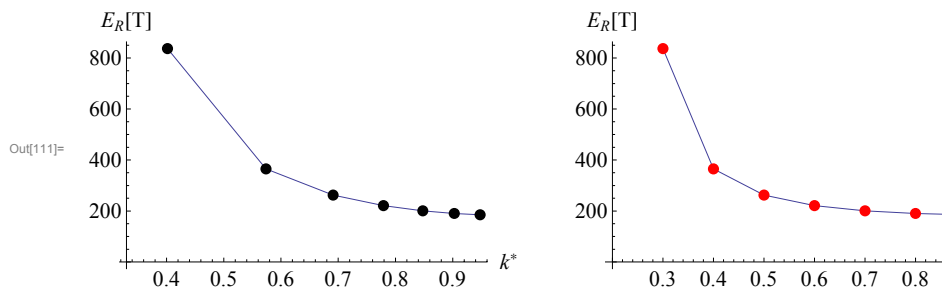
In[108]= kconesperanzas = {{puntooptimo1, 837.331},
    {puntooptimo2, 365.286}, {puntooptimo3, 262.32}, {puntooptimo4, 221.185},
    {puntooptimo5, 201.075}, {puntooptimo6, 190.602}, {puntooptimo7, 185.371}}
Out[108]= {{0.401725, 837.331}, {0.57369, 365.286}, {0.691103, 262.32},
    {0.778983, 221.185}, {0.847667, 201.075}, {0.902798, 190.602}, {0.947887, 185.371}}

In[109]= Grafico1 = ListPlot[kconesperanzas, PlotStyle -> PointSize[0.02],
    Joined -> True, Frame -> False, PlotRange -> All, AxesOrigin -> {0.33, 0},
    Epilog -> {PointSize[0.03], Point[{puntooptimo1, 837.331}],
    Point[{puntooptimo2, 365.286}], Point[{puntooptimo3, 262.32}],
    Point[{puntooptimo4, 221.185}], Point[{puntooptimo5, 201.075}],
    Point[{puntooptimo6, 190.602}], Point[{puntooptimo7, 185.371}]},
    AxesLabel -> {"k", "ER[T]"}, BaseStyle -> {FontFamily -> "Times", FontSize -> 14}];

In[110]= Grafico2 = ListPlot[rorconesperanzas, PlotStyle -> PointSize[0.02],
    PlotRange -> All, Joined -> True, Frame -> False, AxesOrigin -> {0.2, 0},
    Epilog -> {PointSize[0.03], Hue[1], Point[{0.3, 837.331}],
    Point[{0.4, 365.286}], Point[{0.5, 262.32}], Point[{0.6, 221.185}],
    Point[{0.7, 201.075}], Point[{0.8, 190.602}], Point[{0.9, 185.371}]},
    AxesLabel -> {"ρR", "ER[T]"}, BaseStyle -> {FontFamily -> "Times", FontSize -> 14}];

In[111]= Show[GraphicsArray[{Grafico1, Grafico2}]]

```



```

In[112]= diferentesdominios = {Dominio1, Dominio2, Dominio3, Dominio4, Dominio5, Dominio6, Dominio7}
Out[112]= {{0.333333, 1}, {0.5, 1}, {0.6, 1}, {0.666667, 1}, {0.714286, 1}, {0.75, 1}, {0.777778, 1}}

In[113]= puntosenquenoreaseguro =
    {"todo", "todo", "todo", "todo", puntonoreaseguro5, puntonoreaseguro6, puntonoreaseguro7}
Out[113]= {todo, todo, todo, todo, 0.731586, 0.821577, 0.900718}

```

```
In[114]= TableForm[{diferentesror, optimos, Esperanzasoptimas, puntosenquenoreaseguro},  
TableDirections -> {Row, Column}, TableHeadings -> {" $\rho_R$ ", "k*", "ER[T]", "no reaseguro"}]
```

```
Out[114]/TableForm=  


| $\rho_R$ | k*       | E <sub>R</sub> [T] | no reaseguro |
|----------|----------|--------------------|--------------|
| 0.3      | 0.401725 | 837.331            | todo         |
| 0.4      | 0.57369  | 365.286            | todo         |
| 0.5      | 0.691103 | 262.32             | todo         |
| 0.6      | 0.778983 | 221.185            | todo         |
| 0.7      | 0.847667 | 201.075            | 0.731586     |
| 0.8      | 0.902798 | 190.602            | 0.821577     |
| 0.9      | 0.947887 | 185.371            | 0.900718     |


```

## C.2. Transformada del momento de ruina

**Ejemplo 24** *Con los mismos datos del Ejemplo 23, se realiza el siguiente programa en Mathematica 6.0 con objeto de estudiar el comportamiento de la transformada de Laplace del momento de ruina para los distintos recargos del reasegurador y para distintas tasas de actualización  $\delta = 0.01$ ,  $\delta = 0.03$  y  $\delta = 0.1$ .*

```

In[1]= (*Comportamiento de la transformada de Laplace del momento de ruina para
distintos recargos del reasegurador y distintas tasas de actualización*)
δ = 0.03; c = 0.6; b = 10; β = 1; λ = 0.5; ρ = 0.2; ρx = 0.3; u = 5;
kp[k_] := 1 -  $\frac{(1 + \rho x)(1 - k)}{1 + \rho}$ ;
Elundberg[s_] :=  $\frac{c \text{kp}[k] s^2}{k} - \left( \lambda + \delta - \frac{\beta c \text{kp}[k]}{k} \right) s - \beta \delta$ 
Solve[Elundberg[s] == 0, s];
Arrels = s /. %;
Simplify[Arrels];
r1 = First[Arrels]; r2 = Last[Arrels];

In[8]=
EsperanzaTransformada[k_] :=  $\frac{\lambda \left( r1 e^{\frac{r2 u}{k} + \frac{r1 b}{k}} - r2 e^{\frac{r1 u}{k} + \frac{r2 b}{k}} \right)}{(c \text{kp}[k]) \left( (r1 + \beta) r1 e^{\frac{r1 b}{k}} - (r2 + \beta) r2 e^{\frac{r2 b}{k}} \right)}$ 
g1 = Plot[EsperanzaTransformada[k], {k, Max[{0, 1 -  $\frac{\rho}{\rho x}$ ]}, 1},
  AxesLabel -> {"k", "ER[e-δx"]}, AxesOrigin -> {0, 0}, Frame -> False,
  PlotStyle -> Directive[ColorData["HTML"]["MediumBlue"], Thick],
  BaseStyle -> {FontFamily -> "Times", FontSize -> 14}];

In[10]= FindRoot[EsperanzaTransformada[k] == 0.193007, {k, ρx}]
puntoincreaseguo1 = k /. %;

Out[10]= {k -> 1.}

In[12]= Derivadatransformada = ∂k EsperanzaTransformada[k];
FindRoot[Derivadatransformada == 0, {k, 0.05 +  $\frac{\rho x - \rho}{\rho x}$ }]
puntooptimol = k /. %;
k = puntooptimol;

Out[13]= {k -> 0.0104989}

In[16]= kp[k_] := 1 -  $\frac{(1 + \rho x)(1 - k)}{1 + \rho}$ ;
Elundberg[s_] :=  $\frac{c \text{kp}[k] s^2}{k} - \left( \lambda + \delta - \frac{\beta c \text{kp}[k]}{k} \right) s - \beta \delta$ 
Solve[Elundberg[s] == 0, s];
Arrels = s /. %;
Simplify[Arrels];
r1 = First[Arrels];
r2 = Last[Arrels];

Out[19]= {-1.12238, -0.0064996}

```

```

In[23]= Esperanzatransformadaeneloptimo1 = EsperanzaTransformada[puntooptimo1]
Out[23]= -8.86831 × 10-234

In[24]= gtl = Plot[Derivadatransformada, {k, 1 -  $\frac{\rho}{\rho r}$  - 0.1, 1}, PlotRange → All,
    PlotStyle → Directive[ColorData["HTML"]["MediumBlue"], Thick],
    FrameLabel → {"k", " $\partial_k E_R[e^{-\delta r}]$ "}, AxesOrigin → {0, 0},
    Frame → True, BaseStyle → {FontFamily → "Times", FontSize → 14}];

In[25]= Clear[k]; c = 0.6; b = 10;  $\beta$  = 1;  $\lambda$  = 0.5;  $\rho$  = 0.2;  $\rho r$  = 0.4; u = 5;
kp[k_] := 1 -  $\frac{(1 + \rho r)(1 - k)}{1 + \rho}$ ;
Elundberg[s_] :=  $\frac{c \text{kp}[k] s^2}{k} - \left( \lambda + \delta - \frac{\beta c \text{kp}[k]}{k} \right) s - \beta \delta$ 
Solve[Elundberg[s] == 0, s];
Arrels = s /. %;
Simplify[Arrels];
r1 = First[Arrels];
r2 = Last[Arrels];

In[33]= EsperanzaTransformada[k_] :=  $\frac{\lambda \left( r1 e^{\frac{r2 u}{k} + \frac{r1 b}{k}} - r2 e^{\frac{r1 u}{k} + \frac{r2 b}{k}} \right)}{(c \text{kp}[k]) \left( (r1 + \beta) r1 e^{\frac{r1 b}{k}} - (r2 + \beta) r2 e^{\frac{r2 b}{k}} \right)}$ 
EsperanzaTransformada[k];
g2 = Plot[EsperanzaTransformada[k], {k, Max[{0, 1 -  $\frac{\rho}{\rho r}$ ]}, 1},
    AxesOrigin → {0, 0}, PlotStyle → Directive[Purple, Thick],
    Frame → False, BaseStyle → {FontFamily → "Times", FontSize → 14}];

In[36]= FindRoot[EsperanzaTransformada[k] == 0.193007, {k,  $\rho r$ }]
puntooreaseguro2 = k /. %;
Out[36]= {k → 1.}

In[38]= Derivadatransformada =  $\partial_k$  EsperanzaTransformada[k];
FindRoot[Derivadatransformada == 0, {k, 0.05 +  $\frac{\rho r - \rho}{\rho r}$ }]
puntooptimo2 = k /. %;
k = puntooptimo2;
Out[39]= {k → 0.362198}

In[42]= kp[k_] := 1 -  $\frac{(1 + \rho r)(1 - k)}{1 + \rho}$ ;
Elundberg[s_] :=  $\frac{c \text{kp}[k] s^2}{k} - \left( \lambda + \delta - \frac{\beta c \text{kp}[k]}{k} \right) s - \beta \delta$ 
Solve[Elundberg[s] == 0, s];
Arrels = s /. %;
Simplify[Arrels];
r1 = First[Arrels];
r2 = Last[Arrels];
Out[45]= {-0.168852, 0.419125}

```



```

In[49]= EsperanzaTransformadaenloptimo2 = EsperanzaTransformada[puntooptimo2]
Out[49]= 0.0808008

In[50]= gt2 = Plot[Derivadatransformada, {k, 1 -  $\frac{\rho}{\rho x}$  - 0.1, 1}, PlotRange -> All,
    PlotStyle -> Directive[Purple, Thick], FrameLabel -> {"k", " $\partial_k E_R[e^{-\delta x}]$ "},
    AxesOrigin -> {0, 0}, Frame -> True, BaseStyle -> {FontFamily -> "Times", FontSize -> 14}];

In[51]= Clear[k]; c = 0.6; b = 10;  $\beta$  = 1;  $\lambda$  = 0.5;  $\rho$  = 0.2;  $\rho x$  = 0.5; u = 5;
kp[k_] := 1 -  $\frac{(1 + \rho x)(1 - k)}{1 + \rho}$ ;
Elundberg[s_] :=  $\frac{c kp[k] s^2}{k} - \left( \lambda + \delta - \frac{\beta c kp[k]}{k} \right) s - \beta \delta$ 
Solve[Elundberg[s] == 0, s];
Arrels = s /. %;
Simplify[Arrels];
r1 = First[Arrels];
r2 = Last[Arrels];

In[59]= EsperanzaTransformada[k_] := 
$$\frac{\lambda \left( r1 e^{\frac{r2 u}{k} + \frac{r1 b}{k}} - r2 e^{\frac{r1 u}{k} + \frac{r2 b}{k}} \right)}{(c kp[k]) \left( (r1 + \beta) r1 e^{\frac{r1 b}{k}} - (r2 + \beta) r2 e^{\frac{r2 b}{k}} \right)}$$

EsperanzaTransformada[k];
g3 = Plot[EsperanzaTransformada[k], {k, Max[{0, 1 -  $\frac{\rho}{\rho x}$ ]}, 1},
    AxesOrigin -> {0, 0}, PlotStyle -> Directive[ColorData["HTML"]["DarkKhaki"], Thick],
    Frame -> False, BaseStyle -> {FontFamily -> "Times", FontSize -> 14}];

In[62]= FindRoot[EsperanzaTransformada[k] == 0.193007, {k,  $\rho x$ }]
puntooreaseguro3 = k /. %;
Out[62]= {k -> 0.261952}

In[64]= Derivadatransformada =  $\partial_k$  EsperanzaTransformada[k];
FindRoot[Derivadatransformada == 0, {k, 0.05 +  $\frac{\rho x - \rho}{\rho x}$ }]
puntooptimo3 = k /. %;
k = puntooptimo3;
Out[65]= {k -> 0.541828}

In[68]= kp[k_] := 1 -  $\frac{(1 + \rho x)(1 - k)}{1 + \rho}$ ;
Elundberg[s_] :=  $\frac{c kp[k] s^2}{k} - \left( \lambda + \delta - \frac{\beta c kp[k]}{k} \right) s - \beta \delta$ 
Solve[Elundberg[s] == 0, s];
Arrels = s /. %;
Simplify[Arrels];
r1 = First[Arrels];
r2 = Last[Arrels];
Out[71]= {-0.1988, 0.318931}

```

```

In[75]= Esperanzatransformadaeneloptimo3 = EsperanzaTransformada[puntooptimo3]
Out[75]= 0.128609

In[76]= gt3 = Plot[Derivadatransformada, {k, 1 -  $\frac{\rho}{\rho r}$  - 0.1, 1}, PlotRange -> All,
    PlotStyle -> Directive[ColorData["HTML"]["DarkKhaki"], Thick],
    FrameLabel -> {"k", " $\partial_k E_R[e^{-\delta r}]$ "}, AxesOrigin -> {0, 0},
    Frame -> True, BaseStyle -> {FontFamily -> "Times", FontSize -> 14}];

In[77]= Clear[k]; c = 0.6; b = 10;  $\beta$  = 1;  $\lambda$  = 0.5;  $\rho$  = 0.2;  $\rho r$  = 0.6; u = 5;
kp[k_] := 1 -  $\frac{(1 + \rho r)(1 - k)}{1 + \rho}$ ;
Elundberg[s_] :=  $\frac{c \text{kp}[k] s^2}{k} - \left( \lambda + \delta - \frac{\beta c \text{kp}[k]}{k} \right) s - \beta \delta$ 
Solve[Elundberg[s] == 0, s];
Arrels = s /. %;
Simplify[Arrels];
r1 = First[Arrels];
r2 = Last[Arrels];

In[85]= EsperanzaTransformada[k_] :=  $\frac{\lambda \left( r1 e^{\frac{r2 u}{k} + \frac{r1 b}{k}} - r2 e^{\frac{r1 u}{k} + \frac{r2 b}{k}} \right)}{(c \text{kp}[k]) \left( (r1 + \beta) r1 e^{\frac{r1 b}{k}} - (r2 + \beta) r2 e^{\frac{r2 b}{k}} \right)}$ 
EsperanzaTransformada[k];
g4 = Plot[EsperanzaTransformada[k], {k, Max[{0, 1 -  $\frac{\rho}{\rho r}$ ]}, 1}, AxesOrigin -> {0, 0},
    PlotStyle -> Directive[ColorData["HTML"]["ForestGreen"], Thick],
    Frame -> False, BaseStyle -> {FontFamily -> "Times", FontSize -> 14}];

In[88]= FindRoot[EsperanzaTransformada[k] == 0.193007, {k,  $\rho r$ }]
puntooreaseguro4 = k /. %;
Out[88]= {k -> 0.450745}

In[90]= Derivadatransformada =  $\partial_k$  EsperanzaTransformada[k];
FindRoot[Derivadatransformada == 0, {k, 0.05 +  $\frac{\rho r - \rho}{\rho r}$ }]
puntooptimo4 = k /. %;
k = puntooptimo4;
Out[91]= {k -> 0.675732}

In[94]= kp[k_] := 1 -  $\frac{(1 + \rho r)(1 - k)}{1 + \rho}$ ;
Elundberg[s_] :=  $\frac{c \text{kp}[k] s^2}{k} - \left( \lambda + \delta - \frac{\beta c \text{kp}[k]}{k} \right) s - \beta \delta$ 
Solve[Elundberg[s] == 0, s];
Arrels = s /. %;
Simplify[Arrels];
r1 = First[Arrels];
r2 = Last[Arrels];
Out[97]= {-0.219558, 0.271094}

```

```

In[101]= EsperanzaTransformadaeneloptimo4 = EsperanzaTransformada[puntooptimo4]
Out[101]= 0.156985

In[102]= gt4 = Plot[Derivadatransformada, {k, 1 -  $\frac{\rho}{\rho r}$  - 0.1, 1}, PlotRange -> All,
    PlotStyle -> Directive[ColorData["HTML"]["ForestGreen"], Thick],
    FrameLabel -> {"k", " $\partial_k E_R[e^{-\delta x}]$ "}, AxesOrigin -> {0, 0},
    Frame -> True, BaseStyle -> {FontFamily -> "Times", FontSize -> 14}];

In[103]= Clear[k]; c = 0.6; b = 10;  $\beta$  = 1;  $\lambda$  = 0.5;  $\rho$  = 0.2;  $\rho r$  = 0.7; u = 5;
kp[k_] := 1 -  $\frac{(1 + \rho r)(1 - k)}{1 + \rho}$ ;
Elundberg[s_] :=  $\frac{c kp[k] s^2}{k} - \left( \lambda + \delta - \frac{\beta c kp[k]}{k} \right) s - \beta \delta$ 
Solve[Elundberg[s] == 0, s];
Arrels = s /. %;
Simplify[Arrels];
r1 = First[Arrels];
r2 = Last[Arrels];

In[111]= EsperanzaTransformada[k_] := 
$$\frac{\lambda \left( r1 e^{\frac{\rho r u}{k} + \frac{\rho b}{k}} - r2 e^{\frac{\rho r u}{k} + \frac{\rho b}{k}} \right)}{(c kp[k]) \left( (r1 + \beta) r1 e^{\frac{\rho b}{k}} - (r2 + \beta) r2 e^{\frac{\rho b}{k}} \right)}$$

EsperanzaTransformada[k];
g5 = Plot[EsperanzaTransformada[k], {k, Max[{0, 1 -  $\frac{\rho}{\rho r}$ ]}], 1},
    PlotStyle -> Directive[Orange, Thick], AxesOrigin -> {0, 0},
    Frame -> False, BaseStyle -> {FontFamily -> "Times", FontSize -> 14}];

In[114]= FindRoot[EsperanzaTransformada[k] == 0.193007, {k,  $\rho r$ }]
puntooreaseguro5 = k /. %;
Out[114]= {k -> 0.603968}

In[116]= Derivadatransformada =  $\partial_k$  EsperanzaTransformada[k];
FindRoot[Derivadatransformada == 0, {k, 0.05 +  $\frac{\rho r - \rho}{\rho r}$ }]
puntooptimo5 = k /. %;
k = puntooptimo5;
Out[117]= {k -> 0.774733}

In[120]= kp[k_] := 1 -  $\frac{(1 + \rho r)(1 - k)}{1 + \rho}$ ;
Elundberg[s_] :=  $\frac{c kp[k] s^2}{k} - \left( \lambda + \delta - \frac{\beta c kp[k]}{k} \right) s - \beta \delta$ 
Solve[Elundberg[s] == 0, s];
Arrels = s /. %;
Simplify[Arrels];
r1 = First[Arrels];
r2 = Last[Arrels];
Out[123]= {-0.235983, 0.241088}

```

```
In[127]= Esperanzatransformadaeneloptimo5 = EsperanzaTransformada[puntooptimo5]
```

```
Out[127]= 0.17388
```

```
In[128]= gt5 = Plot[Derivadatransformada, {k, 1 - \frac{\rho}{\rho r} - 0.1, 1}, PlotRange \to All,
  PlotStyle \to Directive[Orange, Thick], FrameLabel \to {"k", "\partial_k E_R[e^{-\delta x}]"},
  AxesOrigin \to {0, 0}, Frame \to True, BaseStyle \to {FontFamily \to "Times", FontSize \to 14}];
```

```
In[129]= Clear[k]; c = 0.6; b = 10; \beta = 1; \lambda = 0.5; \rho = 0.2; \rho r = 0.8; u = 5;
```

$$kp[k_] := 1 - \frac{(1 + \rho r)(1 - k)}{1 + \rho};$$

$$Elundberg[s_] := \frac{c kp[k] s^2}{k} - \left( \lambda + \delta - \frac{\beta c kp[k]}{k} \right) s - \beta \delta$$

```
Solve[Elundberg[s] == 0, s];
```

```
Arrels = s /. %
```

```
Simplify[Arrels];
```

```
r1 = First[Arrels];
```

```
r2 = Last[Arrels];
```

$$\text{Out[133]} = \left\{ \frac{0.5 k \left( -0.37 + \frac{0.3}{k} - \frac{0.494874 \sqrt{0.367497 - 1.05349 k + 1. k^2}}{k} \right)}{-0.3 + 0.9 k}, \right. \\ \left. \frac{0.5 k \left( -0.37 + \frac{0.3}{k} + \frac{0.494874 \sqrt{0.367497 - 1.05349 k + 1. k^2}}{k} \right)}{-0.3 + 0.9 k} \right\}$$

$$\text{In[137]} = \text{EsperanzaTransformada}[k_] := \frac{\lambda \left( r1 e^{\frac{r1 u}{k} + \frac{r1 b}{k}} - r2 e^{\frac{r1 u}{k} + \frac{r2 b}{k}} \right)}{(c kp[k]) \left( (r1 + \beta) r1 e^{\frac{r1 b}{k}} - (r2 + \beta) r2 e^{\frac{r2 b}{k}} \right)}$$

```
EsperanzaTransformada[k];
```

```
g6 = Plot[EsperanzaTransformada[k], {k, Max[{0, 1 - \frac{\rho}{\rho r}}], 1},
  PlotStyle \to Directive[Gray, Thick], AxesOrigin \to {0, 0},
  Frame \to False, BaseStyle \to {FontFamily \to "Times", FontSize \to 14}];
```

```
In[140]= FindRoot[EsperanzaTransformada[k] == 0.193007, {k, \rho r}]
puntooreaseguro6 = k /. %;
```

```
Out[140]= {k \to 0.728416}
```

```
In[142]= Derivadatransformada = \partial_k EsperanzaTransformada[k];
```

```
FindRoot[Derivadatransformada == 0, {k, 0.05 + \frac{\rho r - \rho}{\rho r}}]
```

```
puntooptimo6 = k /. %;
```

```
k = puntooptimo6;
```

```
Out[143]= {k \to 0.850829}
```

```

In[146]= kp[k_] := 1 -  $\frac{(1 + \rho x)(1 - k)}{1 + \rho}$ ;

Elundberg[s_] :=  $\frac{c kp[k] s^2}{k} - \left( \lambda + \delta - \frac{\beta c kp[k]}{k} \right) s - \beta \delta$ 

Solve[Elundberg[s] == 0, s];
Arrels = s /. %
Simplify[Arrels];
r1 = First[Arrels];
r2 = Last[Arrels];

Out[149]= {-0.250538, 0.218747}

In[153]= Esperanzatransformadaeneloptimo6 = EsperanzaTransformada[puntooptimo6]
Out[153]= 0.183891

In[154]= gt6 = Plot[Derivadatransformada, {k, 1 -  $\frac{\rho}{\rho x}$  - 0.1, 1}, PlotRange -> All,
PlotStyle -> Directive[Gray, Thick], FrameLabel -> {"k", " $\partial_k E_R[e^{-\delta t}]$ "},
AxesOrigin -> {0, 0}, Frame -> True, BaseStyle -> {FontFamily -> "Times", FontSize -> 14}];

In[155]= Clear[k]; c = 0.6; b = 10;  $\beta$  = 1;  $\lambda$  = 0.5;  $\rho$  = 0.2;  $\rho x$  = 0.9; u = 5;
kp[k_] := 1 -  $\frac{(1 + \rho x)(1 - k)}{1 + \rho}$ ;
Elundberg[s_] :=  $\frac{c kp[k] s^2}{k} - \left( \lambda + \delta - \frac{\beta c kp[k]}{k} \right) s - \beta \delta$ 
Solve[Elundberg[s] == 0, s];
Arrels = s /. %
Simplify[Arrels];
r1 = First[Arrels];
r2 = Last[Arrels];

Out[159]=  $\left\{ \frac{0.5 k \left( -0.42 + \frac{0.35}{k} - \frac{0.538888 \sqrt{0.421832 - 1.15702 k + 1. k^2}}{k} \right)}{-0.35 + 0.95 k}, \frac{0.5 k \left( -0.42 + \frac{0.35}{k} + \frac{0.538888 \sqrt{0.421832 - 1.15702 k + 1. k^2}}{k} \right)}{-0.35 + 0.95 k} \right\}$ 

In[163]= EsperanzaTransformada[k_] :=  $\frac{\lambda \left( r1 e^{\frac{r2 u}{k} + \frac{r1 b}{k}} - r2 e^{\frac{r1 u}{k} + \frac{r2 b}{k}} \right)}{(c kp[k]) \left( (r1 + \beta) r1 e^{\frac{r1 b}{k}} - (r2 + \beta) r2 e^{\frac{r2 b}{k}} \right)}$ 
EsperanzaTransformada[k];
g7 = Plot[EsperanzaTransformada[k], {k, Max[{0, 1 -  $\frac{\rho}{\rho x}$ ]}, 1},
PlotStyle -> Directive[Black, Thick], AxesOrigin -> {0, 0},
Frame -> False, BaseStyle -> {FontFamily -> "Times", FontSize -> 14}];

In[166]= FindRoot[EsperanzaTransformada[k] == 0.193007, {k,  $\rho x$ }]
puntoincreaseguro7 = k /. %;
Out[166]= {k -> 0.832846}

```

```

In[168]= Derivadatransformada =  $\partial_k$ EsperanzaTransformada[k];
FindRoot[Derivadatransformada == 0, {k, 0.05 +  $\frac{\rho x - \rho}{\rho r}$ }]

puntooptimo7 = k /. %;
k = puntooptimo7;

Out[169]= {k  $\rightarrow$  0.911201}

In[172]= kp[k_] :=  $1 - \frac{(1 + \rho r)(1 - k)}{1 + \rho}$ ;

Elundberg[s_] :=  $\frac{c kp[k] s^2}{k} - \left( \lambda + \delta - \frac{\beta c kp[k]}{k} \right) s - \beta \delta$ 

Solve[Elundberg[s] == 0, s];
Arrels = s /. %;
Simplify[Arrels];
r1 = First[Arrels];
r2 = Last[Arrels];

Out[175]= {-0.264133, 0.200708}

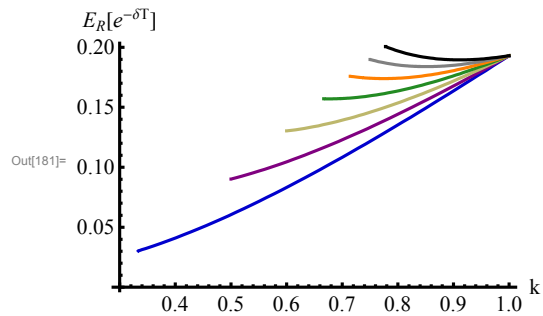
In[179]= Esperanzatransformadaeneloptimo7 = EsperanzaTransformada[puntooptimo7]

Out[179]= 0.189527

In[180]= gt7 = Plot[Derivadatransformada, {k, 1 -  $\frac{\rho}{\rho r} - 0.1$ , 1}, PlotStyle  $\rightarrow$  Directive[Black, Thick],
PlotRange  $\rightarrow$  All, FrameLabel  $\rightarrow$  {"k", " $\partial_k E_R[e^{-\delta T}]$ "}, AxesOrigin  $\rightarrow$  {0, 0},
Frame  $\rightarrow$  True, BaseStyle  $\rightarrow$  {FontFamily  $\rightarrow$  "Times", FontSize  $\rightarrow$  14}];

In[181]= Show[{g1, g2, g3, g4, g5, g6, g7}, PlotRange  $\rightarrow$  All, AxesOrigin  $\rightarrow$  {0.3, 0},
AxesStyle  $\rightarrow$  Thick, Frame  $\rightarrow$  False, BaseStyle  $\rightarrow$  {FontFamily  $\rightarrow$  "Times", FontSize  $\rightarrow$  14}]

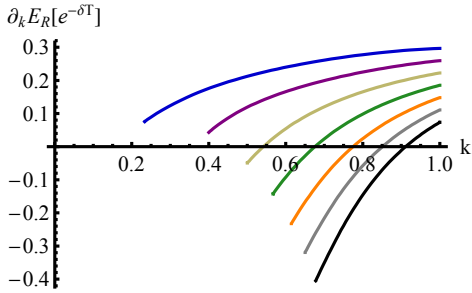
```



```

In[182]= Show[{gt1, gt2, gt3, gt4, gt5, gt6, gt7}, PlotRange -> All,
  AxesOrigin -> {0, 0}, Frame -> False, AxesLabel -> {"k", " $\partial_k E_R[e^{-\delta T}]$ "},
  AxesStyle -> Thick, BaseStyle -> {FontFamily -> "Times", FontSize -> 14}]

```



```

Out[182]=

```

```

In[183]= {puntooptimo1, puntooptimo2, puntooptimo3,
  puntooptimo4, puntooptimo5, puntooptimo6, puntooptimo7}

```

```

Out[183]= {0.0104989, 0.362198, 0.541828, 0.675732, 0.774733, 0.850829, 0.911201}

```

```

In[184]= {Esperanzatransformadaeneloptimo1,
  Esperanzatransformadaeneloptimo2, Esperanzatransformadaeneloptimo3,
  Esperanzatransformadaeneloptimo4, Esperanzatransformadaeneloptimo5,
  Esperanzatransformadaeneloptimo6, Esperanzatransformadaeneloptimo7}

```

```

Out[184]= {-8.86831 \times 10^{-234}, 0.0808008, 0.128609, 0.156985, 0.173888, 0.183891, 0.189527}

```

```

In[185]= {puntooreaseguro1, puntooreaseguro2, puntooreaseguro3,
  puntooreaseguro4, puntooreaseguro5, puntooreaseguro6, puntooreaseguro7}

```

```

Out[185]= {1., 1., 0.261952, 0.450745, 0.603968, 0.728416, 0.832846}

```

```

In[186]= (*SIN REASEGURO*)
Clear[k]; k = 1; c = 0.6; b = 10; \beta = 1; \lambda = 0.5; \rho = 0.2; \rho x = 0.9; u = 5;
kp[k_] := 1 - ((1 + \rho x) / (1 + \rho)) * (1 - k);
Elundberg[s_] := c * kp[k] / k * (s^2) - (\lambda + \delta - \beta * c * kp[k] / k) * s - \beta * \delta
Solve[Elundberg[s] == 0, s];
Arrels = s /. %
Simplify[Arrels];
r1 = First[Arrels];
r2 = Last[Arrels];

```

```

Out[190]= {-0.289424, 0.172757}

```

```

In[194]= EsperanzaTransformada[k_] :=
  (\lambda / (c * (kp[k] / k))) * (r1 * Exp[(r2 * u / k) + (r1 * b / k)] - r2 * Exp[(r1 * u / k) + (r2 * b / k)]) /
  ((r1 + \beta) * r1 * Exp[r1 * b / k] - (r2 + \beta) * r2 * Exp[r2 * b / k])
EsperanzaTransformada[
  k]

```

```

Out[195]= 0.193007

```

### C.3. Esperanza del valor actual de los dividendos

**Ejemplo 25** Con los mismos datos de los Ejemplos 23 y 24, para  $\delta = 0.01$ , se realiza el siguiente programa en Mathematica 6.0 para calcular el valor de  $W_k(u, b)$  para  $\rho_R = 0.3, \dots, 0.9$ .

*Se observa que la esperanza del valor actual de los dividendos es creciente respecto a  $k$  para los diferentes valores del  $\rho_R$ . Por tanto cuanto mayor es la retención que decide el asegurador, mayor es la cuantía de dividendos repartidos.*



```

ln[1]= (*Wk(u,b) para diferentes recargos del reasegurador*)
u = 5; b = 10; λ = 0.5; β = 1; ρ = 0.2; ρr = 0.3;
ρn = ρr -  $\frac{\rho r - \rho}{k}$ ; δ = 0.01; c =  $\frac{\lambda k (1 + \rho n)}{\beta}$ ; β =  $\frac{\beta}{k}$ ; k = k;
a := c
bb := - (λ + δ - β c)
cc := -δ β
rr := Solve[a r2 + bb r + cc == 0, r]

r1 = r /. rr[[1]]; r2 = r /. rr[[2]]; w[k_] =  $\frac{e^{r_1 u} - \frac{(r_2 + \beta) e^{r_2 u}}{r_1 + \beta}}{r_1 e^{r_1 b} - \frac{(r_2 + \beta) r_2 e^{r_2 b}}{r_1 + \beta}}$ ; Dominio = {Max[{0, 1 -  $\frac{\rho}{\rho r}$ }], 1};

ln[7]= g1 = Plot[w[k], {k, Max[{0, 1 -  $\frac{\rho}{\rho r}$ ]}], 1}, BaseStyle -> {FontFamily -> "Times", FontSize -> 14},
PlotStyle -> Directive[ColorData["HTML"]["MediumBlue"], Thick],
AxesLabel -> {"k", "Wk(5,10)"}, Frame -> False, AxesOrigin -> {0, 0}];

ln[8]= u = 5; b = 10; λ = 0.5; β = 1; ρ = 0.2; ρr = 0.4;
ρn = ρr -  $\frac{\rho r - \rho}{k}$ ; δ = 0.01; c =  $\frac{\lambda k (1 + \rho n)}{\beta}$ ; β =  $\frac{\beta}{k}$ ; k = k;
a := c
bb := - (λ + δ - β c)
cc := -δ β
rr := Solve[a r2 + bb r + cc == 0, r]

r1 = r /. rr[[1]]; r2 = r /. rr[[2]]; w[k_] =  $\frac{e^{r_1 u} - \frac{(r_2 + \beta) e^{r_2 u}}{r_1 + \beta}}{r_1 e^{r_1 b} - \frac{(r_2 + \beta) r_2 e^{r_2 b}}{r_1 + \beta}}$ ;

Dominio = {Max[{0, 1 -  $\frac{\rho}{\rho r}$ }], 1};

g2 = Plot[w[k], {k, Max[{0, 1 -  $\frac{\rho}{\rho r}$ ]}], 1},
BaseStyle -> {FontFamily -> "Times", FontSize -> 14}, PlotStyle -> Directive[Purple, Thick],
AxesLabel -> {"k", "Wk(5,10)"}, Frame -> False, AxesOrigin -> {0, 0}];

ln[16]= u = 5; b = 10; λ = 0.5; β = 1; ρ = 0.2; ρr = 0.5;
ρn = ρr -  $\frac{\rho r - \rho}{k}$ ; δ = 0.01; c =  $\frac{\lambda k (1 + \rho n)}{\beta}$ ; β =  $\frac{\beta}{k}$ ; k = k;
a := c
bb := - (λ + δ - β c)
cc := -δ β
rr := Solve[a r2 + bb r + cc == 0, r]

r1 = r /. rr[[1]]; r2 = r /. rr[[2]]; w[k_] =  $\frac{e^{r_1 u} - \frac{(r_2 + \beta) e^{r_2 u}}{r_1 + \beta}}{r_1 e^{r_1 b} - \frac{(r_2 + \beta) r_2 e^{r_2 b}}{r_1 + \beta}}$ ; Dominio = {Max[{0, 1 -  $\frac{\rho}{\rho r}$ }], 1};

g3 = Plot[w[k], {k, Max[{0, 1 -  $\frac{\rho}{\rho r}$ ]}], 1}, BaseStyle -> {FontFamily -> "Times", FontSize -> 14},
PlotStyle -> Directive[ColorData["HTML"]["DarkKhaki"], Thick],
Frame -> False, AxesOrigin -> {0, 0}];

```

```

In[23]= u = 5; b = 10; λ = 0.5; β = 1; ρ = 0.2; ρx = 0.6;
ρn = ρx -  $\frac{\rho x - \rho}{k}$ ; δ = 0.01; c =  $\frac{\lambda k (1 + \rho n)}{\beta}$ ; β =  $\frac{\beta}{k}$ ; k = k;
a := c
bb := - (λ + δ - β c)
cc := -δ β
rr := Solve[a r2 + bb r + cc == 0, r]

r1 = r /. rr[[1]]; r2 = r /. rr[[2]]; w[k_] =  $\frac{e^{r_1 u} - \frac{(x_2 + \beta) e^{r_2 u}}{r_1 + \beta}}{r_1 e^{r_1 b} - \frac{(x_2 + \beta) r_2 e^{r_2 b}}{r_1 + \beta}}$ ; Dominio = {Max[{0, 1 -  $\frac{\rho}{\rho x}$ ]}], 1};

g4 = Plot[w[k], {k, Max[{0, 1 -  $\frac{\rho}{\rho x}$ ]}], 1}, BaseStyle -> {FontFamily -> "Times", FontSize -> 14},
PlotStyle -> Directive[ColorData["HTML"]["ForestGreen"], Thick],
Frame -> False, AxesOrigin -> {0, 0}];

In[30]= u = 5; b = 10; λ = 0.5; β = 1; ρ = 0.2; ρx = 0.7;
ρn = ρx -  $\frac{\rho x - \rho}{k}$ ; δ = 0.01; c =  $\frac{\lambda k (1 + \rho n)}{\beta}$ ; β =  $\frac{\beta}{k}$ ; k = k;
a := c
bb := - (λ + δ - β c)
cc := -δ β
rr := Solve[a r2 + bb r + cc == 0, r]

r1 = r /. rr[[1]]; r2 = r /. rr[[2]]; w[k_] =  $\frac{e^{r_1 u} - \frac{(x_2 + \beta) e^{r_2 u}}{r_1 + \beta}}{r_1 e^{r_1 b} - \frac{(x_2 + \beta) r_2 e^{r_2 b}}{r_1 + \beta}}$ ; Dominio = {Max[{0, 1 -  $\frac{\rho}{\rho x}$ ]}], 1};

g5 = Plot[w[k], {k, Max[{0, 1 -  $\frac{\rho}{\rho x}$ ]}], 1}, BaseStyle -> {FontFamily -> "Times", FontSize -> 14},
PlotStyle -> Directive[Orange, Thick], Frame -> False, AxesOrigin -> {0, 0}];

In[37]= u = 5; b = 10; λ = 0.5; β = 1; ρ = 0.2; ρx = 0.8;
ρn = ρx -  $\frac{\rho x - \rho}{k}$ ; δ = 0.01; c =  $\frac{\lambda k (1 + \rho n)}{\beta}$ ; β =  $\frac{\beta}{k}$ ; k = k;
a := c
bb := - (λ + δ - β c)
cc := -δ β
rr := Solve[a r2 + bb r + cc == 0, r]

r1 = r /. rr[[1]]; r2 = r /. rr[[2]]; w[k_] =  $\frac{e^{r_1 u} - \frac{(x_2 + \beta) e^{r_2 u}}{r_1 + \beta}}{r_1 e^{r_1 b} - \frac{(x_2 + \beta) r_2 e^{r_2 b}}{r_1 + \beta}}$ ; Dominio = {Max[{0, 1 -  $\frac{\rho}{\rho x}$ ]}], 1};

g6 = Plot[w[k], {k, Max[{0, 1 -  $\frac{\rho}{\rho x}$ ]}], 1}, BaseStyle -> {FontFamily -> "Times", FontSize -> 14},
PlotStyle -> Directive[Gray, Thick], Frame -> False, AxesOrigin -> {0, 0}];

```

```

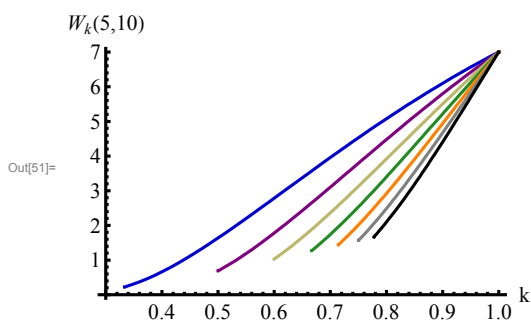
In[44]:= u = 5; b = 10; λ = 0.5; β = 1; ρ = 0.2; ρr = 0.9;
ρn = ρr -  $\frac{\rho r - \rho}{k}$ ; δ = 0.01; c =  $\frac{\lambda k (1 + \rho n)}{\beta}$ ; β =  $\frac{\beta}{k}$ ; k = k;
a := c
bb := - (λ + δ - β c)
cc := - δ β
rr := Solve[a r2 + bb r + cc == 0, r]

r1 = r /. rr[[1]]; r2 = r /. rr[[2]]; w[k_] =  $\frac{e^{r_1 u} - \frac{(r_2 + \beta) e^{r_2 u}}{r_1 + \beta}}{r_1 e^{r_1 b} - \frac{(r_2 + \beta) e^{r_2 b}}{r_1 + \beta}}$ ; Dominio = {Max[{0, 1 -  $\frac{\rho}{\rho r}$ }], 1};

g7 = Plot[w[k], {k, Max[{0, 1 -  $\frac{\rho}{\rho r}$ }], 1}, BaseStyle -> {FontFamily -> "Times", FontSize -> 14},
PlotStyle -> Directive[Black, Thick], Frame -> False, AxesOrigin -> {0, 0.3}];

In[51]:= Show[{g1, g2, g3, g4, g5, g6, g7}, BaseStyle -> {FontFamily -> "Times", FontSize -> 14},
AxesStyle -> Thick, Frame -> False, AxesOrigin -> {0.3, 0}, PlotRange -> All]

```





# Bibliografía

- Asmussen, S. (2000). *Ruin probabilities*. World Scientific, Singapore.
- Avram, F. y Usabel, M. (2003). “Finite time ruin probabilities with one Laplace inversion”. *Insurance: Mathematics and Economics*, 32(3), pp. 371–377.
- Beard, R. E.; Pentikäinen, T. y Pesonen, E. (1990). *Risk theory*. Chapman and Hall, London.
- Bühlmann, H. (1996). *Mathematical methods in risk theory*. Springer-Verlag, Berlin.
- Bowers, N.L.; Gerber, H.U.; Hickman, J.C.; Jones, D.A. y Nesbitt, C.J. (1997). *Actuarial mathematics*. Society of Actuaries, Illinois.
- Carter, R.L. (1979). *Reinsurance*. Kluwer, London.
- Castañer, A. (2006). “Análisis de la teoría del riesgo: La transformada del momento de ruina”. *Rect@*, (7), pp. 55–94.
- Castañer, A.; Claramunt, M.M. y Mármol, M. (2007). *Investigaciones en seguros y gestión de riesgos: RIESGO 2007*. capítulo Influencia del reaseguro proporcional en las medidas de solvencia del asegurador, pp. 87–101. TGD, Santander.
- Castañer, A.; Claramunt, M.M. y Mármol, M. (2009). “The effect of a threshold proportional reinsurance strategy on ruin probabilities”. *Documents de Treball de la Facultat d’Economia i Empresa*, E09/222.
- Centeno, L. (1986). “Measuring the effects of reinsurance by the adjustment coefficient”. *Insurance: Mathematics and Economics*, 5(2), pp. 169–182.

- Centeno, L. (2002). "Measuring the effects of reinsurance by the adjustment coefficient in the Sparre Anderson model". *Insurance: Mathematics and Economics*, 30(1), pp. 37–49.
- Centeno, L. (2005). "Dependent risks and excess of loss reinsurance". *Insurance: Mathematics and Economics*, 37(2), pp. 228–239.
- Claramunt, M.M. y Mármol, M. (2003). "Solvencia: Una introducción a la probabilidad de ruina". *Col·lecció de publicacions del Departament de Matemàtica Econòmica, Financera i Actuarial*, 65.
- Claramunt, M.M.; Mármol, M. y Alegre, A. (2003). "A note on the expected present value of dividends with a constant barrier on the discrete time model". *Mitteilungen der Schweizerischen Aktuarvereinigung*, 2, pp. 149–159.
- Claramunt, M.M.; Mármol, M. y Castañer, A. (2008). "La probabilidad de supervivencia en un modelo con reaseguro proporcional de umbral". *Documents de treball de la Facultat d'Economia i Empresa*, E08/200.
- Claramunt, M.M.; Mármol, M. y Castañer, A. (2009). "El reaseguro proporcional de umbral y la probabilidad de supervivencia como criterio de elección de estrategias". *Estadística Española*, 171.
- De Finetti, B. (1957). "Su un impostazione alternativa della teoria collectiva del rischio". En: *Trans. XV. Int. Congr. Act.*, volumen 2, pp. 433–443.
- Dickson, D.C. M. (2005). *Insurance risk and ruin*. Cambridge University press, United Kingdom.
- Dickson, D.C. M. y Waters, H.R. (2006). "Optimal dynamic reinsurance". *Astin Bulletin*, 36(2), pp. 415–432.
- Dickson, D.C.M y Hipp, C. (2000). "Ruin Problems for Phase-Type(2) risk processes". *Scandinavian Actuarial Journal*, 2000(2), pp. 147–167.
- Dickson, D.C.M y Waters, H.R. (1996). "Reinsurance and ruin". *Insurance: Mathematics and Economics*, 19(1), pp. 61–80.

- Dickson, D.C.M y Waters, H.R. (2002). “The distribution of the time to ruin in the classical risk model”. *Astin Bulletin*, 32(2), pp. 299–313.
- Dickson, D.C.M y Waters, H.R. (2004). “Some optimal dividends problems”. *Astin Bulletin*, 34(1), pp. 49–74.
- Dickson, D.C.M y Willmot, G.E. (2005). “The density of the time to ruin in the classical Poisson risk model”. *Astin Bulletin*, 35(1), pp. 45–60.
- Drekic, S. y Willmot, G.E. (2003). “On the density and moments of the time of ruin with exponential claims”. *Astin Bulletin*, 33(1), pp. 11–21.
- Egídio dos Reis, A.D. (1999). “Teoria da ruína”. *CEMAPRE/ISEG*, 17, pp. 1–48.
- Egídio dos Reis, A.D. (2000). “On the moments of ruin and recovery times”. *Insurance: Mathematics and Economics*, 27(3), pp. 331–343.
- Feller, W. (1971). *An introduction to probability theory and its applications*. volumen II. John Wiley & Sons, New York.
- Gajek, L. y Zagrodny, D. (2004). “Optimal reinsurance under general risk measures”. *Insurance: Mathematics and Economics*, 34(2), pp. 227–240.
- Gerber, H. y Shiu, E. (1998). “On the time value of ruin”. *North American Actuarial Journal*, 2(1), pp. 48–78.
- Gerber, H. y Shiu, E. (2005). “The time value of ruin in a Sparre Andersen model”. *North American Actuarial Journal*, 9(2), pp. 49–84.
- Gerber, H.U. (1979). *An introduction to mathematical risk theory*. S.S. Huebner Foundation, University of Pennsylvania, Philadelphia.
- Goovaerts, J.; Van Heerwaarden, A.E. y Kaas, R. (1989). “Optimal reinsurance in relation to ordering of risk”. *Insurance: Mathematics and Economics*, 8(1), pp. 11–17.
- Grandell, J. (1991). *Aspects of risk theory*. Springer-Verlag, New York.

- Hald, M. y Schmidli, H. (2004). "On the maximisation of the adjustment coefficient under proportional reinsurance". *Astin Bulletin*, 34(1), pp. 75–83.
- Hesselager, O. (1990). "Some results on optimal reinsurance in terms of the adjustment coefficient". *Scandinavian Actuarial Journal*, 1990(1), pp. 80–95.
- Hipp, C. (2006). "Speedy convolution algorithms and Panjer recursions for phase-type distributions". *Insurance: Mathematics and Economics*, 38(1), pp. 176–188.
- Hipp, C. y Vogt, M. (2003). "Optimal dynamic XL reinsurance". *Astin Bulletin*, 33(2), pp. 193–207.
- Højgaard, B. y Taksar, M. (1998). "Optimal proportional reinsurance policies for diffusion models with transaction costs". *Insurance: Mathematics and Economics*, 22(1), pp. 41–51.
- IAA (2004). "A global framework for insurer solvency assessment". *Research Report of the Insurer Solvency Assessment WP of the IAA*.  
<http://www.iaisweb.org>
- IAIS (2000). "On solvency, solvency assessments and actuarial issues,". *An IAIS Issues Paper*, pp. 1–50.  
<http://www.iaisweb.org>
- Kaas, R.; Goovaerts, M.; Dhaene, J. y Denuit, M. (2001). *Modern actuarial risk theory*. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht.
- Latorre, L. (1992). *Teoría del riesgo y sus aplicaciones a la empresa aseguradora*. Mapfre, S.A., Madrid.
- Li, S. y Garrido, J. (2005). "On a general class of renewal risk process: analysis of the Gerber-Shiu function". *Advances Applied Probability*, 37(3), pp. 836–856.
- Lin, X.S. y Pavlova, K. (2006). "The compound Poisson risk model with a threshold dividend strategy". *Insurance: Mathematics and Economics*, 38(1), pp. 57–80.
- Lin, X.S. y Willmot, G.E. (1999). "Analysis of a defective renewal equation arising in the ruin theory". *Insurance: Mathematics and Economics*, 25(1), pp. 63–84.



- Lin, X.S. y Willmot, G.E. (2000). “The moments of the time of ruin, the surplus before ruin, and the deficit at ruin”. *Insurance: Mathematics and Economics*, 27(1), pp. 19–44.
- Lin, X.S.; Willmot, G.E. y Drekić, S. (2003). “The classical risk model with a constant dividend barrier: analysis of the Gerber-Shiu discounted penalty function”. *Insurance: Mathematics and Economics*, 33(3), pp. 551–566.
- Lundberg, F. (1903). *I approximerad Framställning av Sannolikhetsfunktionen. II Aterförsäkving av Kollektivrisker*. Alqvimist & Wiksell, Uppsala.
- Melnikov, A. (2003). *Risk analysis in finance and insurance*. volumen 131 de *Monographs & Surveys in Pure & Applied Math*. Chapman and Hall, University of Alberta, Edmonton, Canada.
- Mármol, M. (2003). *Política de dividendos en una cartera de seguros no vida: Un análisis desde la teoría colectiva del riesgo*. Tesis doctoral, Facultat de Ciències Econòmiques i Empresariales, UB, Barcelona.
- Mármol, M.; Claramunt, M.M. y Castañer, A. (2005). “Política de reparto de dividendos en una cartera de seguros no vida: Análisis discreto”. *Cuadernos Actuariales*.
- Mármol, M.; Claramunt, M.M. y Castañer, A. (2007). “Aplicaciones de las transformadas de Laplace a la teoría de riesgo”. *Anales del Instituto de Actuarios Españoles*, 13, pp. 9–36.
- Nieto, U. y Vegas, J. (1993). *Matemática Actuarial*. Mapfre, S.A., Madrid.
- Poularikas, A. D. (2000). *The Transforms and applications handbook*. Boca Raton: CRC Press LLC, United States.
- Rolski, T.; Schmidli, H.; Schmidt, V. y Teugels, J. (1999). *Stochastic processes for insurance and finance*. Wiley, New York.
- Schiff, J.L. (1999). *The Laplace transform. Theory and applications*. Springer-Verlag, New York.
- Schmidli, H. (2001). “Optimal proportional reinsurance policies in a dynamic setting”. *Scandinavian Actuarial Journal*, 2001(1), pp. 55–68.

- Schmidli, H. (2002). “On minimizing the ruin probability by investment and reinsurance,”. *The Annals of Applied Probability*, 12(3), pp. 890–907.
- Schmidli, H. (2006). “Optimisation in non-life insurance”. *Stochastic Models*, 22(4), pp. 689–722.
- Spiegel, M.R. (1967). *Transformadas de Laplace*. McGraw-Hill, México.
- Taksar, M. y Markussen, C. (2003). “Optimal dynamic reinsurance policies for large insurance portfolios”. *Finance and Stochastics*, 7(1), pp. 97–121.
- Verlaak, R. y Beirlant, J. (2003). “Optimal reinsurance programs: an optimal combination of several reinsurance protections on a heterogeneous insurance portfolios”. *Insurance: Mathematics and Economics*, 33(2), pp. 381–403.
- Waters, H.R. (1979). “Excess of loss reinsurance limits”. *Scandinavian Actuarial Journal*, 1979(1), pp. 37–43.
- Waters, H.R. (1983). “Some mathematical aspects of reinsurance”. *Insurance: Mathematics and Economics*, 2(1), pp. 17–26.