UNIVERSIDAD DE BARCELONA

DIVISION DE CIENCIAS JURIDICAS, ECONOMICAS Y SOCIALES

FACULTAD CIENCIAS ECONOMICAS Y EMPRESARIALES

DEPARTAMENTO DE MATEMATICA ECONOMICA, FINANCIERA

Y ACTUARIAL

REASEGURO

Y

PLANES DE PENSIONES

Tesis Doctoral presentada por:

Fº Javier Sarrasí Vizcarra.

Director de la Tesis:

Dr. D. Antonio Alegre Escolano.

Barcelona Junio 1993.

Capítulo 4

Reaseguro en las operaciones individuales. Expresiones particulares

Capítulo 4

Reaseguro en las operaciones individuales. Expresiones particulares

4.1 introducción

En muchos trabajos se establecen hipótesis sobre la distribución de la variable aleatoria L_i, siendo una de las más usadas la distribución normal, sin embargo puede comprobarse empíricamente [1] que la distribución de la variable aleatória pérdida individual L_i, está muy alejada de la distribución normal, no resultando aceptable la hipótesis de normalidad. Esta circunstancia hace que no se puedan obtener expresiones analíticas simplificadas para los conceptos desarrollados en el capítulo anterior , y por tanto para poder estudiar las relaciones entre todas las magnitudes que aparecen en el modelo y determinar que política recargo-reaseguro es la más adecuada para minimizar el coste total del plan, habrá que recurrir a casos concretos, trabajando con la distribución real de L_i en cada caso.

En este capítulo analizaremos operaciones concretas en las que se dan prestaciones de renta y seguro obtenidas como casos particulares del modelo analizado. Para cada caso nos plantearemos dos análisis:

1. Obtención de la prima de reaseguro Π^R y de la prima ajustada de reaseguro

[1] CLARAMUNT, M.M.(1992)

$\Pi^{R,A}$ para cada modalidad de reaseguro estudiada.

2. Estudio de la estrategia recargo-reaseguro que minimice el coste de la operación.

   En este apartado analizamos la estrategia óptima recargo reaseguro determinando para aquellas operaciones que nos sea posible la expresión analítica de la función K.

En el APÉNDICE, situado al final de la tesis, se presentan los nombres de los programas informáticos realizados en FORTRAN 77, utilizados para los cálculos que se muestran en los ANEXOS de este capítulo, en los cuales se cuantifican las operaciones y magnitudes estudiadas. El listado de estos programas se encuentran en el DISKETTE que incluimos en la tesis.

Los cálculos han sido realizados bajo los siguientes supuestos:

- Tablas de mortalidad de la población española masculina (1982) elaboradas por **NAVARRO, E. (1991)**.
- Tanto las prestaciones como las contraprestaciones, presentan periodicidad anual.

El presente capítulo se estructura en los siguientes apartados:

4.2 Operación de renta a prima única. Renta diferida temporal con cuantías constantes

4.2.1 Cálculo de la prima de reaseguro

4.2.2 Estudio de la estrategia óptima

4.3 Operación de seguro a prima única. Seguro diferido y temporal con cuantías constantes

4.3.1 Cálculo de la prima de reaseguro

4.7.2 Estudio de la estrategia óptima

4.2 Operación de renta a prima única. Renta diferida temporal con cuantías constantes

4.2.1 Cálculo de la prima de reaseguro

En este apartado obtendremos la expresiones de la prima única de reaseguro Π^R y de la prima de reaseguro ajustada $\Pi^{R,A}$ para la operación objeto de estudio. El esquema que seguiremos será el utilizado en el estudio general.

4.2.1.1 Descripción de la operación objeto de estudio

La operación presenta las siguientes características:

$C = \Pi$: prima pura única de la operación.

$\alpha_i^r = \alpha^r$. La cuantía de la renta es constante.

$\alpha_i^s = 0$. No hay prestación de seguro.

La ecuación de equilibrio viene dada por la siguiente expresión:

$$\Pi = \sum_{j=d_r}^{d_r+m_r-1} \alpha^r \; {}_jE_x$$

4.2.1.2 Variable aleatoria pérdida individual del plan. Cálculo de la prima única

Para poder determinar la variable aleatoria pérdida individual del plan L_i , estudiaremos previamente las variables aleatorias que la componen ξ_i^c y ξ_i^p.

Las realizaciones $\alpha(i,t)$ de la variable aleatoria ξ_i^p vienen dadas por:

$$\alpha(i,t) = \begin{cases} 0 & 0 \leq t < d_r \\ \alpha^r \ {}_{d_r/}\ddot{a}_{\overline{t+1-d_r}|Ip} & d_r \leq t < d_r + m_r \\ \alpha^r \ {}_{d_r/}\ddot{a}_{\overline{m_r}|Ip} & d_r + m_r \leq t < w - x \end{cases}$$

Por consiguiente, la variable aleatoria ξ_i^p queda definida de la siguiente forma:

REALIZACIONES	PROBABILIDADES
0	q_x
$\vdots$	$\vdots$
0	${}_{d_r-1/}q_x$
${}_{d_r/}\ddot{a}_{\overline{1}|Ip}$	${}_{d_r/}q_x$
$\vdots$	$\vdots$
${}_{d_r/}\ddot{a}_{\overline{m_r}|Ip}$	${}_{d_r+m_r-1/}q_x$
$\vdots$	$\vdots$
${}_{d_r/}\ddot{a}_{\overline{m_r}|Ip}$	${}_{w-x-1/}q_x$

Respecto a la variable aleatoria ξ_i^c, al ser la operación a prima única, deja de ser aleatoria para convertirse en un valor cierto de importe la prima pura Π, por tanto:

$$\xi_i^c = \Pi$$

en consecuencia la variable aleatoria pérdida individual L_i viene dada por:

REALIZACIONES	PROBABILIDADES
$-\Pi$	q_x
$\vdots$	$\vdots$
$-\Pi$	${}_{d_r-1/}q_x$
${}_{d_r/}\ddot{a}_{\overline{1}\vert Ip} - \Pi$	${}_{d_r/}q_x$
$\vdots$	$\vdots$
${}_{d_r/}\ddot{a}_{\overline{m_r}\vert Ip} - \Pi$	${}_{d_r+m_r-1/}q_x$
$\vdots$	$\vdots$
${}_{d_r/}\ddot{a}_{\overline{m_r}\vert Ip} - \Pi$	${}_{w-x-1/}q_x$

El valor de la prima única vendrá dado por la esperanza matemática de la variable aleatoria ξ_i^p, por tanto: [2]

$$\Pi = E[\xi_i^p]$$

El cálculo de la esperanza de la variable aleatoria ξ_i^p podemos también obtenerlo como:

$$E[\xi_i^p] = \sum_{t=d_r}^{d_r+m_r-1} \alpha^r \ {}_tE_x$$

o bien si utilizamos la simbología actuarial:

$$E[\xi_i^p] = \alpha^r \ {}_{d_r/m_r}\ddot{a}_x$$

[2]La esperanza de la variable aleatoria ξ_i coincide con el valor actual actuarial de un renta temporal m_r periodos y diferida d_r periodos $\alpha^r \ {}_{d_r/m_r}\ddot{a}_x$.

4.2.1.3 Cálculo del recargo de seguridad

Para poder determinar el recargo de seguridad necesitamos definir la variable aletoria L_i^*, que como ya vimos en el capítulo anterior, viene dada por la variable aleatoria pérdida individual L_i, pero ordenada sus realizaciones de menor a mayor valor.

En nuestro caso particular al tratarse la operación de una renta a prima única la variable aleatoria L_i ya queda automáticamente ordenada de menor a mayor valor, ya que el número de términos de la renta va aumentando conforme el partícipe vive más períodos enteros, haciendo que aumente la cuantía de las realizaciones.

En el caso de prestación de renta podemos calcular el percentil-ϵ de la variable aleatoria L_i^* mediante la siguiente expresión:

$$Per_\epsilon[L_i^*] = \alpha^r \; {}_{d_r/}\ddot{a}_{\overline{t_h+1-d_r}|Ip} - \Pi$$

siendo $t_h + 1 - d_r = s^\epsilon$: número entero de términos que a lo sumo puede hacerse cargo el plan.

En consecuencia, si el plan cobra la prima recargada con el recargo λ^ϵ, éste será autosuficiente simpre y cuando el partícipe viva como mucho un número de períodos igual a $t_h = s^\epsilon + d_r - 1$.

El recargo de seguridad del plan vendrá dado por la siguiente expresión:

$$\lambda^\epsilon = \frac{\alpha(i,t_h) - P(i,t_h)}{P(i,t_h)} = \frac{Per_\epsilon[L_i^*]}{P(i,t_h)}$$

que particularizándola a nuestro caso:

$P(i,t_h) = \Pi$. Por ser la operación a prima única.

$\alpha(i,t_h) = \alpha^r \; {}_{d_r/}\ddot{a}_{\overline{s^\epsilon}|Ip} = \Pi(1+\lambda^\epsilon) = \Pi^\epsilon$.

por tanto:

$$\lambda^\epsilon = \frac{\Pi^\epsilon - \Pi}{\Pi}$$

Conocido el recargo podemos explicitar las realizaciones y probabilidades de la variable aleatoria L_i^ϵ:

REALIZACIONES	PROBABILIDADES	Periodos enteros vividos t_k
$-\Pi^\epsilon$	q_x	$t_0 = 0$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$-\Pi^\epsilon$	${}_{d_r-1/}q_x$	$t_{d_r-1} = d_r - 1$
$\alpha^r\ {}_{d_r/}\ddot{a}_{\overline{1}\vert Ip} - \Pi^\epsilon$	${}_{d_r/}q_x$	$t_{d_r} = d_r$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$\alpha^r\ {}_{d_r/}\ddot{a}_{\overline{s^\epsilon}\vert Ip} - \Pi^\epsilon$	${}_{d_r+s^\epsilon-1/}q_x$	$t_{d_r+s^\epsilon-1} = t_h = d_r + s^\epsilon - 1$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$\alpha^r\ {}_{d_r/}\ddot{a}_{\overline{m_r}\vert Ip} - \Pi^\epsilon$	${}_{d_r+m_r-1/}q_x$	$t_{d_r+m_r-1} = d_r + m_r - 1$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$\alpha^r\ {}_{d_r/}\ddot{a}_{\overline{m_r}\vert Ip} - \Pi^\epsilon$	${}_{w-x-1/}q_x$	$t_{w-x-1} = w - x - 1$

En nuestro caso, ϵ satisface:

$$1 - \sum_{k=0}^{d_r+s^\epsilon-1} {}_{k/}q_x = 1 - {}_{/d_r+s^\epsilon}q_x \leq \epsilon$$

en consecuencia:

$${}_{/d_r+s^\epsilon}q_x \geq 1 - \epsilon$$

El número de términos enteros s^{ϵ^t} que a lo sumo puede hacerse cargo el plan asociado a un nivel de riesgo reasegurado ϵ^t, estará comprendido entre el número de términos que se haría cargo el plan si sólo cobrase la prima pura $s^{\epsilon^{max}}$ y el número de términos máximo que el plan podría hacerse cargo si el riesgo a reasegurar fuese nulo, $s^{\epsilon^{min}}$. Por tanto:

$$s^{\epsilon^{max}} \leq s^{\epsilon^t} \leq s^{\epsilon^{min}} = m_r$$

donde:

- $s^{\epsilon^{min}}$ coincide con la la temporalidad de la renta m_r.
- $s^{\epsilon^{max}}$ satisfará la siguiente condición:

$$\Pi = \alpha^r \ {}_{d_r/}\ddot{a}_{\overline{s^{\epsilon^{max}}}|Ip}$$

viniendo dado el valor de $s^{\epsilon^{max}}$ por la parte entera de:

$$-\frac{\ln\left[1 - \frac{Ip\,\Pi}{\alpha^r (1+Ip)^{-d_r+1}}\right]}{\ln(1+Ip)}$$

Podemos también determinar en general, el valor de s^{ϵ^t} $\forall \epsilon^t \in (\epsilon^{min}, \epsilon^{max})$ mediante la expresión:

$$\Pi^{\epsilon^t} = \Pi(1+\lambda^{\epsilon^t}) = \alpha^r \ {}_{d_r/}\ddot{a}_{\overline{s^{\epsilon^t}}|Ip}$$

en la cual despejando s^{ϵ^t}:

$$s^{\epsilon^t} = -\frac{\ln\left[1 - \frac{Ip\,\Pi^{\epsilon^t}}{\alpha^r (1+Ip)^{-d_r+1}}\right]}{\ln(1+Ip)}$$

4.2.1.4 Variable aleatoria pérdida del reasegurador. Cálculo de la prima pura de reaseguro

Analizaremos previamente las variables aleatorias que componen la variable pérdida del reasegurador L_i^R para la operación objeto de estudio $\xi_i^{p,R}$ y $\xi_i^{c,R}$.

Análisis de la variable aleatoria prestaciones del reasegurador en la modalidad de reaseguro del percentil

En general, las realizaciones de la variable aleatoria $\xi_i^{p,R}$ para esta modalidad de reaseguro $M(i,t_k)$ vienen definidas por la siguiente expresión:

$$M(i,t_k) = \begin{cases} 0 & k \leq h \\ M_1(i,t_k) & k > h \quad \text{y} \quad t_k < d_r + s^\epsilon \\ M_2(i,t_k) & k > h \quad \text{y} \quad t_k \geq d_r + s^\epsilon \end{cases}$$

siendo:

$$M_1(i,t_k) = l(i,t_k)^\epsilon \left(\frac{1+Ip}{1+Ir}\right)^{t_k+1/2} \qquad \forall t_k < d_r + s^\epsilon$$

$$M_2(i,t_k) = \left(\sum_{j=d_r+s^\epsilon}^{t_k} \alpha_j^r (1+Ir)^{d_r+s^\epsilon-j} + \alpha_{t_k+1}^s (1+Ir)^{-(d_r+s^\epsilon-t_k+1/2)} - R_{d_r+s^\epsilon}^\epsilon\right)(1+Ir)^{-(d_r+s^\epsilon)} \quad \forall t_k \geq d_r + s^\epsilon$$

En nuestro caso particular:

$M_1(x,t_k) = 0$ ya que al haber exclusivamente prestación de renta no se ha producido pérdida.

$R_{d_r+s^\epsilon} = 0$, por tratarse la operación de una renta.

$$M_2(i,t_k) = \left(\sum_{j=d_r+s^\epsilon}^{t_k} \alpha^r (1+Ir)^{d_r+s^\epsilon-j}\right)(1+Ir)^{-(d_r+s^\epsilon)} =$$

$$= \sum_{j=d_r+s^\epsilon}^{t_k} \alpha^r (1+Ir)^{-j} =$$

$$= \begin{cases} \sum_{j=d_r+s^\epsilon}^{t_k} \alpha^r (1+Ir)^{-j} & t_k < d_r + m_r \\ \sum_{j=d_r+s^\epsilon}^{d_r+m_r-1} \alpha^r (1+Ir)^{-j} & t_k \geq d_r + m_r \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \alpha^r \ {}_{d_r+s^\epsilon/}\ddot{a}_{\overline{t_k+1-(d_r+s^\epsilon)}|Ir} & t_k < d_r + m_r \\ \\ \alpha^r \ {}_{d_r+s^\epsilon/}\ddot{a}_{\overline{m_r-s^\epsilon}|Ir} & t_k \geq d_r + m_r \end{cases}$$

Análisis de la variable aleatoria prestaciones del reasegurador en la modalidad de reaseguro de diferencia de siniestralidad

Estudiaremos las expresiones particulares de la función $Z_{i,h}$ y $T_{i,h}$ para la operación objeto de estudio, tanto para el reaseguro Tipo A como para el Tipo B.

Si el reaseguro es del **Tipo A** la expresión formal de la función $Z_{i,h}$ es:

$$Z_{i,h} = \begin{cases} \Pi^{Rec}(1+Ip) & h=1 \\ \\ Z_{i,h}(1+Ip) & \text{si} \quad Z_{i,h-1} \geq R_{i,h-1}+V_{i,h-1} \\ (R_{i,h-1}+V_{i,h-1})(1+Ip) & \text{si} \quad Z_{i,h-1} < R_{i,h-1}+V_{i,h-1} \\ & 1 < h \leq d_r \\ \\ (Z_{i,h-1}-\alpha^r)(1+Ip) & \text{si} \quad Z_{i,h-1} \geq R_{i,h-1}+V_{i,h-1} \\ (R_{i,h-1}+V_{i,h-1}-\alpha^r)(1+Ip) & \text{si} \quad Z_{i,h-1} < R_{i,h-1}+V_{i,h-1} \\ & d_r < h \leq d_r+m_r \end{cases}$$

siendo: Π^{Rec}: prima única recargada de la operación.

En el supuesto que $d_r = 0$, el disponible al finalizar el primer período tendrá que tener en cuenta el importe del primer término de la renta, por tanto:

$$Z_{i,1} = (\Pi^{Rec} - \alpha^r)(1+Ip)$$

Respecto a la función $T_{i,h}$ en este caso al no haber prestación de seguro:

$$T_{i,h} = T^1_{i,h}$$

donde:

$$T^1_{i,h} = \max\{0, \quad V_{i,h} + R_{i,h} - Z_{i,h}\} \quad h = 1, \ldots, d_r + m_r - 1$$

A continuación estudiaremos el efecto que tiene sobre los términos a pagar por el reasegurador $T^1_{i,h}$ una variación en el recargo de seguridad del plan. Este análisis lo realizaremos a través de la función $Z_{i,h}$, y será de interés de cara a poder determinar la expresión analítica de la función K, como veremos en el apartado correspondiente a la estrategia óptima.

Si *el margen de solvencia es una proporción de la provisión matemática*, podemos distinguir dos casos:

- Si el recargo de seguridad es tal, que $Z_{i,1} \leq R_{i,1} + V_{i,1}$, condición que se cumple cuando:
$$\lambda < \frac{R_{i,1} + V_{i,1}}{\Pi(1 + Ip)} - 1 \quad (I)$$
una variación en el recargo de seguridad del plan sólo afecta al primer término que debe de satisfacer el reasegurador $T^1_{i,1}$, en la medida en que sólo se ve afectado el valor de $Z_{i,1}$. En este caso el reasegurador debe de intervenir al final del primer período para conseguir que el plan tenga las provisiones matemáticas y márgenes de solvencia correspondientes.

- Sin embargo, si el recargo de seguridad satisface:
$$\lambda \geq \frac{R_{i,1} + V_{i,1}}{\Pi(1 + Ip)} - 1 \quad (II)$$
un incremento del mismo, hace variar la función $Z_{i,h}$ en un número de términos que no podremos establecer a priori, lo único que podemos afirmar es que cuanto mayor sea el recargo, mayor es el número de términos afectados y más tarde empezará a intervenir el reasegurador. Esta circuntancia hace que no podamos determinar a priori en este caso, que efecto tendrá sobre los términos a pagar por el reasegurador $Z_{i,h}$ una variación en el recargo de seguridad.

Si *el margen de solvencia viene dado por las reservas de solvencia*, $RS^{\epsilon}_{i,h}$, al venir el recargo de seguridad dado por el riesgo ϵ, el cual a su vez condiciona el valor de las reservas de solvencia $RS^{\epsilon}_{i,h}$, una variación en el recargo de seguridad vía modificación del riesgo ϵ afectaría a todos los términos positivos que debe de satisfacer el reasegurador $T_{i,h}$ $\forall h$, ya que se vería modificadas las reservas de solvencia $RS^{\epsilon}_{i,h}$ $\forall h$.

Si el reaseguro es del **Tipo B**, la expresión formal de la función $Z_{i,h}$ viene dada por :

$$Z_{i,h} = \begin{cases} \Pi^{Rec}(1 + Ip) & h = 1 \\ (R_{i,h-1} + V_{i,h-1})(1 + Ip) & 1 < h \leq d_r \\ (R_{i,h-1} + V_{i,h-1} - \alpha^r)(1 + Ip) & d_r < h \leq d_r + m_r \end{cases}$$

En el supuesto que $d_r = 0$, al igual que el disponible del tipo A, el disponible del primer período debe de tener en cuenta el importe del primer término de la renta, por tanto:

$$Z_{i,1} = (\Pi^{Rec} - \alpha^r)(1 + Ip)$$

Respecto a la función $T_{i,h}$ al no haber prestación de seguro:

$$T_{i,h} = T^1_{i,h}$$

donde:

$$T^1_{i,h} = V_{i,h} + R_{i,h} - Z_{i,h} \quad h = 1, \ldots, d_r + m_r - 1$$

Si estudiamos al igual que en el caso anterior, el efecto que tiene sobre los términos a pagar por el resegurador una variación en el recargo de seguridad del plan llegaremos a las siguientes conclusiones:

En el supuesto de que *el margen de solvencia sea un porcentaje de la provisión matemática correspondiente*, una variación en el recargo de seguridad sólo afectará al primer término que ha de satisfacer el reasegurador $T_{i,1}$, sea cual sea la magnitud de dicha variación. Esto es debido a que la función disponible sólo queda modificada en su primer término ($Z_{i,1}$) al variar el recargo de seguridad del plan, ya que el resto de términos $Z_{i,h} \quad \forall h > 1$ dependen exclusivamente de la provisión matemática y del margen de solvencia.

Si *el margen de solvencia viene dado por las reservas de solvencia*, $RS^{\epsilon}_{i,h}$, al igual que sucede con el Tipo A, una variación en el recargo de seguridad vía modificación del riesgo ϵ afectaría a todos los términos (tanto positivos como negativos) que debe de satisfacer el reasegurador, $T_{i,h} \quad \forall h$ por verse modificadas las reservas de solvencia $RS^{\epsilon}_{i,h} \quad \forall h$.

Conclusión:

Una variación en el recargo de seguridad del plan afecta exclusivamente al primer término que debe de satisfacer el reasegurador $T_{i,h}$ cuando:

- El reaseguro es del tipo A

  $R_{i,h} = pV_{i,h} \quad \forall h$

  $\lambda < \frac{R_{i,1}+V_{i,1}}{\Pi(1+Ip)} - 1$

- El reaseguro es del tipo B

  $R_{i,h} = pV_{i,h} \quad \forall h$

Una variación en el recargo de seguridad del plan afecta a más de un término que debe de satisfacer el reasegurador cuando:

- El reaseguro es del tipo A

  $R_{i,h} = pV_{i,h} \quad \forall h$

  $\lambda > \frac{R_{i,1}+V_{i,1}}{\Pi(1+Ip)} - 1$

- El reaseguro es del tipo A o B

  $R_{i,h} = RS^{\epsilon}_{i,h} \quad \forall h$

Para aquellos casos en los cuales una modificación en el recargo de seguridad del plan sólo hace variar el primer término que debe de satisfacer el reasegurador $T^1_{i,1}$, será interesante conocer, de cara a determinar la estrategia óptima recargo reaseguro, cual será la expresión analítica de dicho término $T^1_{i,1}$.

A continuación damos con caracter general la expresión analítica de $T^1_{i,h}$ $h = 1,\ldots,d_r+m_r-1$ para el reaseguro tipo B, cuyo primer término $T^1_{i,1}$ coincide con el que le correspondería al reaseguro tipo A si $\lambda < \frac{R_{i,1}+V_{i,1}}{\Pi(1+Ip)} - 1$:

Teniendo presente que:

$$R_{i,h} = p\,V_{i,h}$$

y

$$V_{i,h} = \begin{cases} \alpha^r \sum_{t=d_r}^{d_r+m_r-1} \frac{l_{x+t}}{l_{x+h}}(1+Ip)^{-t+h} & 0 < h \le d_r \\ \alpha^r \sum_{t=h}^{d_r+m_r-1} \frac{l_{x+t}}{l_{x+h}}(1+Ip)^{-t+h} & d_r < h \le d_r+m_r-1 \end{cases}$$

entonces:

$$T_{i,h} = \begin{cases} \alpha^r \left[\frac{(1+p)}{l_{x+1}} - \frac{(1+\lambda)}{l_x}\right] \sum_{s=d_r}^{d_r+m_r-1} l_{x+s}(1+Ip)^{-s+h} & h=1 \\ \left[\frac{\alpha^r(1+p)d_{x+h-1}}{l_{x+h-1}l_{x+h}}\right] \sum_{s=d_r}^{d_r+m_r-1} l_{x+s}(1+Ip)^{-s+h} & 1 < h \le d_r \\ \left[\frac{\alpha^r(1+p)d_{x+h-1}}{l_{x+h-1}l_{x+h}}\right] \sum_{s=h}^{d_r+m_r-1} l_{x+s}(1+Ip)^{-s+h} - p\alpha(1+Ip) & d_r < h \le d_r+m_r-1 \end{cases}$$

Conocida la función $T_{i,h}$, podemos determinar las realizaciones $M(i,t)$ de la variable aleatoria $\xi_i^{p,R}$:

$$M(i,t) = \begin{cases} \sum_{s=1}^{t} T^1_{i,s}(1+Ir)^{-s} & 0 \le t < d_r+m_r-1 \\ \sum_{s=1}^{d_r+m_r-1} T^1_{i,s}(1+Ir)^{-s} & t \ge d_r+m_r-1 \end{cases}$$

siendo para $t=0$, $\sum_{s=1}^{0} T^1_{i,s}(1+Ir)^{-s} = 0$

En este caso, la $E[\xi_i^{c,R}]$ podemos también calcularla como el valor actual actuarial al tipo de interés del reasegurador de una renta vencida inmediata y temporal de d_r+m_r-1 términos de cuantía $T^1_{i,h}\,\forall h$.

$$E[\xi_i^{c,R}] = \sum_{t=1}^{d_r+m_r-1} T_{i,t}^1 \; {}_tP_x \, (1+Ir)^{-t}$$

Por último, es interesante destacar que en el caso de la operación actuarial que nos ocupa (renta diferido temporal) si el margen de solvencia es una proporción de la provisión matemática correspondiente, el reaseguro tipo A cuando :

$$\lambda < \frac{R_{i,1} + V_{i,1}}{\Pi(1+Ip)} - 1$$

al no presentar ningún término $T_{i,h}^1 < 0$, será equivalente al reaseguro Tipo B.

Esto es debido a que en las operaciones de renta, (si el recargo de seguridad del plan no es muy grande) con la prima recargada cobrada y capitalizada convenientemente al tipo de interés técnico del plan, no se llega incluso ni a cubrir la provisión matemática del período. Lo que da lugar a que el reasegurador intervenga en esta modalidad de reaseguro desde el primer momento.

En el caso particular que el margen de solvencia venga dada por las reservas de solvencia, el recargo λ^ϵ siempre satisfará la condición (I), ya que una variación del mismo conllevará una variación en las reservas de solvencia tal, que el recargo asociado a ellas siempre cumplirá dicha condición. Por tanto en este caso, el reaseguro tipo A y tipo B serán siempre equivalentes sea cual sea el nivel de riesgo del plan ϵ.

Análisis de la variable aleatoria asociada a las contraprestaciones del reasegurador

La variable aleatoria $\xi_i^{c,R}$, al ser la opeación a prima única, es una variable cierta de importe la prima pura de reaseguro Π^R:

$$\xi_i^{c,R} = E[\xi_i^{p,R}] = \Pi^R$$

Por consiguiente, la prima pura de reaseguro viene dada por esperanza matemática de la variable aleatoria $\xi_i^{p,R}$.

En la modalidad de *reaseguro del percentil*, la prima de raseguro coincide con el valor actual actuarial valorada al tipo de interés del reaseguro Ir de una renta constante de cuantía α^r, prepagable, diferida $d_r + s^\epsilon$ y temporal $m_r - s^\epsilon$ períodos:

$$\Pi^R = E[\xi_i^{p,R}] = \alpha^r \ {}_{d_r+s^\epsilon/m_r-s^\epsilon}\ddot{a}_x$$

En el *reaseguro de diferencia de siniestralidad*, podemos calcular la prima de reaseguro como el valor actual actuarial valorada al tipo de interés del reaseguro de una renta de cuantía variable $T^1_{i,h}$ inmediata y temporal $d_r + m_r - 1$ términos:

$$\Pi^R = \sum_{h=1}^{d_r+m_r-1} T^1_{i,h} \ {}_hP_x(1 + Ir)^{-h}$$

4.2.1.5 Variable aleatoria pérdida ajustada del reasegurador. Cálculo de la prima pura ajustada de reaseguro.

En este apartado calcularemos la prima ajustada de reaseguro $\Pi^{R,A}$, analizando previamente la variable aleatoria $\xi_i^{b,R}$, en las dos modalidades de reaseguro estudiadas.

Analisis de la variable asociada al beneficio del plan en la modalidad de reaseguro del percentil

En general, las realizaciones de la variable aleatoria $\xi_i^{b,R}$ en esta modalidad de reaseguro son:

$$b(i,t_k) = \begin{cases} -l(i,t_k)^\epsilon \left(\frac{1+Ip}{1+Ir}\right)^{t_k+1/2} & k \leq h \\ 0 & k > h \end{cases}$$

Para la operación objeto de estudio:

$$b(i,t_k) = \begin{cases} \Pi^\epsilon \left(\frac{1+Ip}{1+Ir}\right)^{t_k+1/2} & t_k \leq d_r - 1 \\ \\ (\Pi^\epsilon - \ {}_{d_r/}\ddot{a}_{\overline{t_k+1-d_r}|Ir}) \left(\frac{1+Ip}{1+Ir}\right)^{t_k+1/2} & d_r \leq t_k < d_r + s^\epsilon \\ \\ 0 & t_k \geq d_r + s^\epsilon \end{cases}$$

Podemos observar que en el periodo de diferimiento de la renta el beneficio del plan a la muerte del partícipe coincide con la prima única recargada, convenientemente actualizada al tipo de interés técnico del reasegurador. Este beneficio empieza a disminuir con el pago de los términos de la renta hasta hacerse cero en el momento $d_r + s^{\epsilon} - 1$, a partir del cual empieza a intervenir el reaseguro.

Analisis de la variable asociada al beneficio del plan en la modalidad de reaseguro diferencia de siniestralidad

La expresión de la función $H_{i,h}$ en este caso es:

$$H_{i,h} = \begin{cases} Z_{i,h}(1+Ip)^{-1/2} & 0 < h < d_r + m_r \\ \\ Z_{i,d_r+m_r}(1+Ip)^{-1/2} & h \geq d_r + m_r \end{cases}$$

Las realizaciones de la variable aleatoria $\xi_i^{b,R}$, las obtendremos a través de la función $H_{i,h}$:

$$b(i,h) = \begin{cases} H_{i,h+1}(1+Ir)^{-t-\frac{1}{2}} & 0 \leq h < d_r + m_r \\ \\ H_{i,d_r+m_r}(1+Ir)^{-d_r-m_r-\frac{1}{2}} & h \geq d_r + m_r \end{cases}$$

La esperanza de la variable aleatoria $\xi_i^{b,R}$ podemos también expresarla en términos de $H_{i,h}$ coincidiendo con el valor actual de un seguro inmediato y vitalicio de cuantía $H_{i,h} \quad \forall h$:

$$\sum_{h=1}^{w-x-1} H_{i,h}\ {}_{h-1/}q_x(1+Ir)^{-h+1/2}$$

Cálculo de la prima ajustada de reaseguro

Conocida la esperanza de $\xi_i^{b,R}$, podemos calcular la prima pura ajustada de reaseguro aplicando la expresión:

$$\Pi^{R,A} = E[\xi_i^{p,R}] - E[\xi_i^{b,R}]$$

Si la modalidad es el *reaseguro del percentil*, la prima ajustada de reaseguro podemos expresarla como:

$$\Pi^{R,A} = \alpha^r \ {}_{d_r+s^\epsilon/m_r+s^\epsilon}\ddot{a}_x - E[\xi_i^{b,R}]$$

siendo:

$$E[\xi_i^{b,R}] = \sum_{j=1}^{d_r+s^\epsilon} \Pi^\epsilon \left(\frac{1+Ip}{1+Ir}\right)^{j-1/2} {}_{j-1/}q_x -$$

$$\sum_{j=d_r+1}^{d_r+s^\epsilon} \alpha^r \ {}_{d_r/}\ddot{a}_{\overline{j-d_r}|Ip} \left(\frac{1+Ip}{1+Ir}\right)^{j-1/2} {}_{j-1/}q_x$$

Si la modalidad de reaseguro es el *reaseguro de diferencia de siniestralidad*, entonces:

$$\Pi^{R,A} = \sum_{h=1}^{d_r+m_r-1} T_{i,h}^1 \ {}_hP_x \, (1+Ir)^{-h} - \sum_{h=1}^{w-x-1} H_{i,h} \ {}_{h-1/}q_x \, (1+Ir)^{-h+1/2}$$

En el caso particular que $Ip = Ir$ el reaseguro tipo A y tipo B tendrán la misma prima ajustada de reaseguro para cualquier valor del recargo, ya que el valor actualizado del beneficio repartido coincidirá en ambos casos.

El signo de $\Pi^{R,A}$ en la modalidad de reaseguro del percentil depende de la relación entre Ip y Ir, así:

- Si $Ip < Ir$ la prima ajustada de reaseguro es siempre negativa sea cual sea el nivel de riesgo del plan $\epsilon^t \in [0, \epsilon^{max}]$, esto es debido a que en promedio, el valor actual actuarial del beneficio cedido al reaseguro es mayor que el valor actual actuarial del coste que supone reasegurar un determinado nivel de insolvencia ϵ. Esta circunstancia hace que el coste total de la operación resulte en ocasiones más barato que la propia prima pura de la operación.

- Si $Ip = Ir$ la prima ajustada será negativa para cualquier riesgo del plan, menos para cuando $\epsilon = \epsilon^{max}$, en cuyo caso el valor de la prima ajustada de reaseguro será cero.

- Si $Ip > Ir$, la prima de reaseguro será positiva para aquellos niveles grandes de riesgo del plan.

En el caso particular del reaseguro de diferencia de siniestralidad, si el margen de solvencia es una proporción "p" de la provisión matemática, el signo de $\Pi^{R,A}$ depende no sólo de Ip e Ir, sino también de la proporción p, teniendo que analizar cada operación en concreto. Por último si el margen de solvencia es la reserva de solvencia, el valor de $\Pi^{R,A}$ será siempre negativo.

Cabe destacar como caso particular de renta diferida temporal, la renta de *jubilación* , caracterizada por:

$d_r = x_{jub} - x$, la renta es diferida hasta la jubilación del partícipe.[3]

$m_r = w - x_{jub}$, la renta es vitalicia.

La obtención de Π^R y $\Pi^{R,A}$ se haría de igual forma que la ya descrita, llegando a las siguientes expresiones en el caso del reaseguro del percentil:

$$\Pi^R = E[\xi_i^{p,R}] = \alpha^r \ {}_{d_r+s^\epsilon/}\ddot{a}_x$$

$$\Pi^{R,A} = \alpha^r \ {}_{d_r+s^\epsilon/}\ddot{a}_x - E[\xi_i^{b,R}$$

siendo también en este caso:

$$E[\xi_i^{b,R}] = \sum_{j=1}^{d_r+s^\epsilon} \Pi^\epsilon \left(\frac{1+Ip}{1+Ir}\right)^{j-1/2} \ {}_{j-1/}q_x -$$

$$\sum_{j=d_r+1}^{d_r+s^\epsilon} \alpha^r \ {}_{d_r/}\ddot{a}_{\overline{j-d_r}|Ip} \left(\frac{1+Ip}{1+Ir}\right)^{j-1/2} \ {}_{j-1/}q_x$$

[3]Suponemos que la edad del partícipe en el momento de contratar la operación x, es menor que la edad de jubilación x_{jub}.

4.2.2 Estudio de la estrategia óptima

En este apartado obtendremos la estrategia óptima recargo reaseguro, a través del análisis de la función K para las dos modalidades de reaseguro estudiadas. Para ello, deduciremos para cada caso y en la medida que sea posible, la expresión analítica de la función K.

4.2.3 Modalidad de reaseguro del percentil sin reparto de beneficios

Nuestro objetivo es determinar el riesgo óptimo a reasegurar ϵ^*, y por tanto, cual debe ser el recargo de seguridad λ^{ϵ^*} que debe de aplicar el plan para minimizar el valor actual del coste total de la operación.

Para ello, determinaremos la expresión analítica de la función $K(\epsilon)$ para la operación objeto de estudio, a través de la expresiones particulares de $VPREC(\epsilon)$ y de $VPREA(\epsilon)$.

En nuestro caso:

$$VPREC(\epsilon) = \Pi(1+\lambda^\epsilon) = \Pi^\epsilon = \alpha^r \ {}_{d_r/}\ddot{a}_{\overline{s^\epsilon}|Ip}$$

$$VPREA(\epsilon) = (1+\lambda^R)\Pi^R = (1+\lambda^R)\alpha^r \ {}_{d_r+s^\epsilon/m_r-s^\epsilon}\ddot{a}_x$$

Si el riesgo del plan queda fijado a un nivel ϵ^t, entonces:

$$VPREC(\epsilon^t) = \alpha^r \ {}_{d_r/}\ddot{a}_{\overline{s^{\epsilon^t}}|Ip}$$

$$VPREA(\epsilon^t) = (1+\lambda^R)\alpha^r \ {}_{d_r+s^{\epsilon^t}/m_r-s^{\epsilon^t}}\ddot{a}_x$$

Análogamente si ahora el riesgo se fija a un nivel ϵ^{t+1}:

$$VPREC(\epsilon^{t+1}) = \alpha^r \ {}_{d_r/}\ddot{a}_{\overline{s^{\epsilon^{t+1}}}|Ip}$$

$$VPREA(\epsilon^{t+1}) = (1+\lambda^R)\alpha^r \ {}_{d_r+s^{\epsilon^{t+1}}/m_r-s^{\epsilon^{t+1}}}\ddot{a}_x$$

A continuación determinaremos la expresión analítica de $\Delta VPREC(\epsilon^t)$ aplicando la definición de Δ a $VPREC(\epsilon^t)$:

$$\Delta VPREC(\epsilon^t) = VPREC(\epsilon^{t+1}) - VPREC(\epsilon^t)$$

en nuestro caso :

$$\Delta VPREC(\epsilon^t) = \alpha^r \ {}_{d_r/}\ddot{a}_{\overline{s^{\epsilon^{t+1}}}|Ip} - \alpha^r \ {}_{d_r/}\ddot{a}_{\overline{s^{\epsilon^t}}|Ip} =$$

$$\alpha^r \sum_{j=d_r}^{d_r+s^{\epsilon^{t+1}}-1} (1+Ip)^{-j} - \alpha^r \sum_{j=d_r}^{d_r+s^{\epsilon^t}-1} (1+Ip)^{-j}$$

al trabajar con variables discretas, consideraremos que ϵ^{t+1} es aquel nivel de riesgo del plan que satisface: $s^{\epsilon^{t+1}} = s^{\epsilon^t} - 1$, por tanto sustituyendo esta relación en la expresión anterior:

$$\Delta VPREC(\epsilon^t) = \alpha^r \ {}_{d_r/}\ddot{a}_{\overline{s^{\epsilon^t}-1}|Ip} - \alpha^r \ {}_{d_r/}\ddot{a}_{\overline{s^{\epsilon^t}}|Ip} =$$

$$\alpha^r \sum_{j=d_r}^{d_r+s^{\epsilon^t}-2} (1+Ip)^{-j} - \alpha^r \sum_{j=d_r}^{d_r+s^{\epsilon^t}-1} (1+Ip)^{-j} = -\alpha^r (1+Ip)^{-d_r-s^{\epsilon^t}+1}$$

Podemos también expresar $\Delta VPREC(\epsilon^{t+1})$ en función de $\Delta VPREC(\epsilon^t)$:

$$\Delta VPREC(\epsilon^{t+1}) = \Delta VPREC(\epsilon^t)(1+Ip)$$

$\Delta VPREC(\epsilon^t)$ presenta las siguientes características:

- $\Delta VPREC(\epsilon^t) < 0$ ya que cuanto mayor sea el riesgo reasegurado, menor será el recargo de seguridad, y por tanto menor la prima recargada.
- $\Delta VPREC(\epsilon^t)$ sigue una progresión geométrica de razón $(1+Ip)$ conforme aumenta el riesgo reasegurado.
- Es directamente proporcional al tipo de interés técnico del plan Ip, al diferimiento de la operación d_r y al número de términos s^{ϵ^t}. Por tanto, cuanto mayor sea una de estas tres variables menos negativo será el valor de $\Delta VPREC(\epsilon^t)$.

- El valor de $\Delta VPREC(\epsilon^t)$, es inversamente proporcional a la cuantía α^r.

Si procedemos de forma análoga para calcular $\Delta VPREA(\epsilon^t)$:

$$\Delta VPREA(\epsilon^t) = VPREA(\epsilon^{t+1}) - VPREA(\epsilon^t)$$

en nuestro caso :

$$\Delta VPREA(\epsilon^t) = (1+\lambda^R)\left[\alpha^r \ {}_{d_r+s^{\epsilon^{t+1}}/m_r-s^{\epsilon^{t+1}}}\ddot{a}_x - \alpha^r \ {}_{d_r+s^{\epsilon^t}/m_r-s^{\epsilon^t}}\ddot{a}_x\right] =$$

$$(1+\lambda^R)\alpha^r \left[\sum_{j=d_r+s^{\epsilon^{t+1}}}^{d_r+m_r-1} (1+Ir)^{-j} \ {}_jP_x - \sum_{j=d_r+s^{\epsilon^t}}^{d_r+m_r-1} (1+Ir)^{-j} \ {}_jP_x\right]$$

como $s^{\epsilon^{t+1}} = s^{\epsilon^t} - 1$, sutituyendo:

$$\Delta VPREA(\epsilon^t) = (1+\lambda^R)\left[\alpha^r \ {}_{d_r+s^{\epsilon^t}-1/m_r-s^{\epsilon^t}+1}\ddot{a}_x - \alpha^r \ {}_{d_r+s^{\epsilon^t}/m_r-s^{\epsilon^t}}\ddot{a}_x\right] =$$

$$= \alpha^r(1+\lambda^R)\left[\sum_{j=d_r+s^{\epsilon^t}-1}^{d_r+m_r-1} (1+Ir)^{-j} \ {}_jP_x - \sum_{j=d_r+s^{\epsilon^t}}^{d_r+m_r-1} (1+Ir)^{-j} \ {}_jP_x\right] =$$

$$= \alpha^r(1+\lambda^R) \ {}_{d_r+s^{\epsilon^t}-1}P_x(1+Ir)^{-d_r-s^{\epsilon^t}+1}$$

o bien, si expresamos $\Delta VPREA(\epsilon^t)$ en función de $\Delta VPREA(\epsilon^{t+1})$, tenemos:

$$\Delta VPREA(\epsilon^t) = \Delta VPREA(\epsilon^{t+1})(1+Ir)^{-1}P_{x+d_r+s^{\epsilon^t}-2}$$

Las observaciones que podemos hacer entorno a $\Delta VPREA$ son las siguientes:

- $\Delta VPREA(\epsilon^t) > 0$, ya que cuanto mayor sea el riesgo reasegurado, mayor será la prima de reaseguro asociada.

- $\Delta VPREA(\epsilon^t) > 0$ es inversamente proporcional al diferimiento de la operación d_r , al tipo de interés técnico del reaseguro, y al número de términos s^{ϵ^t}.

- El valor de $\Delta VPREA(\epsilon^t)$, es directamente proporcional a la cuantía α^r, a la probabilidad de fallecimiento ${}_{d_r+s^{\epsilon^t}-1}P_x$ y al recargo de seguridad del reasegurador λ^R.

La conclusión a la que llegamos es que:

$$\Delta VPREC(\epsilon^t) = -\alpha^r(1+Ip)^{-d_r-s^{\epsilon^t}+1} \qquad (I)$$

$$\Delta VPREA(\epsilon^t) = \alpha^r(1+\lambda^R)\ {}_{d_r+s^{\epsilon^t}-1}P_x(1+Ir)^{-d_r-s^{\epsilon^t}+1} \qquad (II)$$

Podemos expresar $\Delta VPREA(\epsilon^t)$ en función de $\Delta VPREC(\epsilon^t)$, multiplicando y dividiendo (II) por: $-(1+Ip)^{-d_r-s^{\epsilon^t}+1}$:

$$\Delta VPREA(\epsilon^t) = -(1+\lambda^R)\ {}_{d_r+s^{\epsilon^t}-1}P_x\alpha^r(1+Ip)^{-d_r-s^{\epsilon^t}+1}\frac{-(1+Ip)^{-d_r-s^{\epsilon^t}+1}}{(1+Ip)^{-d_r-s^{\epsilon^t}+1}}$$

agrupando:

$$\Delta VPREA(\epsilon^t) = -(1+\lambda^R)\ {}_{d_r+s^{\epsilon^t}-1}P_x\frac{(1+Ir)^{-d_r-s^{\epsilon^t}+1}}{(1+Ip)^{-d_r-s^{\epsilon^t}+1}}\left(-\alpha^r(1+Ip)^{-d_r-s^{\epsilon^t}+1}\right)$$

(III)

sustituyendo la expresión (I) en (III):

$$\Delta VPREA(\epsilon^t) = -(1+\lambda^R)\ {}_{d_r+s^{\epsilon^t}-1}P_x\frac{(1+Ir)^{-d_r-s^{\epsilon^t}+1}}{(1+Ip)^{-d_r-s^{\epsilon^t}+1}}\Delta VPREC(\epsilon^t)$$

como:

$$K(\epsilon^t) = -\frac{\Delta VPREA(\epsilon^t)}{\Delta VPREC(\epsilon^t)}$$

entonces:

$$K(\epsilon^t) = (1+\lambda^R)\ {}_{d_r+s^{\epsilon^t}-1}P_x\left(\frac{1+Ir}{1+Ip}\right)^{-d_r-s^{\epsilon^t}+1}$$

El valor del riesgo ϵ^*, vendrá determinado por el valor de $k(\epsilon^*)$, ya que conocido éste, podemos obtener por tanteo el valor de s^{ϵ^*} a través de la siguiente espresión:

$$K(\epsilon^*) = (1+\lambda^R)\ {}_{d_r+s^{\epsilon^*}-1}P_x \left(\frac{1+Ir}{1+Ip}\right)^{-d_r-s^{\epsilon^*}+1}$$

Sabiendo que:

$$\epsilon = 1 - \ {}_{/d_r+s^{\epsilon}}q_x$$

entonces:

$$\epsilon^* = 1 - \ {}_{/d_r+s^{\epsilon^*}}q_x$$

A continuación estudiaremos la función $K(\epsilon)$ para poder determinar, en la medida que sea posible, el riesgo óptimo ϵ^* dadas las características técnicas de la operación (edad, diferimiento, e interés técnico del plan) y del reaseguro (recargo del reasegurado y tipo de interés técnico del reasegurador).

Este estudio lo basaremos en determinar como evoluciona la función $K(\epsilon)$ conforme aumenta el riesgo reasegurado ϵ. Para ello descompondremos la función $K(\epsilon)$ en dos bloques, analizando el comportamiento de éstos en función de ϵ.

Los dos bloques en que dividimos la función $K(\epsilon)$ son los siguientes:

1. $(1+\lambda^R)\ {}_{d_r+s^{\epsilon^*}-1}P_x \quad (A)$
2. $(\frac{1+Ip}{1+Ir})^{d_r+s^{\epsilon^*}-1} \quad (B)$

Respecto al bloque (A), siempre será creciente, ya que cuanto mayor sea el riesgo reasegurado ϵ, más pequeño será el número de términos que a lo sumo pueda hacerse cargo el plan s^{ϵ}, y por tanto mayor será la probabilidad de que viva x.

En el segundo bloque tendremos que contemplar tres casos:

Si $\frac{1+Ip}{1+Ir} < 1$ entonces (B) será siempre creciente conforme aumenta ϵ.

Si $\frac{1+Ip}{1+Ir} = 1$ entonces (B) será siempre igual a uno y por tanto independiente de ϵ.

Si $\frac{1+Ip}{1+Ir} > 1$ entonces (B) será siempre decreciente conforme aumenta el riesgo reasegurado ϵ.

Como podemos observar, el comportamiento respecto al crecimiento de la función $K(\epsilon)$ viene dado exclusivamente por la relación entre el tipo de interés técnico del plan y el tipo de interés técnico del reasegurador.

Si $\frac{1+Ip}{1+Ir} \leq 1$ y por tanto $Ip \leq Ir$, $K(\epsilon)$ es siempre creciente $\forall\epsilon \in [\epsilon^{min},\epsilon^{max}]$ por estar formado por producto de funciones crecientes si $\frac{1+Ip}{1+Ir} < 1$, o bien, por ser (A) creciente en el caso de que $\frac{1+Ip}{1+Ir} = 1$.

Sin embargo si $\frac{1+Ip}{1+Ir} > 1$ o lo que es lo mismo $Ip > Ir$, no podemos garantizar que la función $K(\epsilon)$ sea siempre creciente $\forall\epsilon \in [\epsilon^{min},\epsilon^{max}]$, ya que $K(\epsilon)$ es en este caso el resultado del producto de una función creciente (A) por otra decreciente (B).

A continuación analizaremos la estrategia óptima a través de la función $K(\epsilon)$ según el tipo de interés del plan sea mayor menor o igual al tipo de interés técnico del reaseguro.

Análisis del riesgo óptimo a reasegurar ϵ^*, en el supuesto que $Ip \leq Ir$

Como hemos podido deducir, la función $K(\epsilon)$ será en este caso siempre creciente $\forall\epsilon \in [\epsilon^{min},\epsilon^{max}]$, por tanto el mayor valor que puede tomar $K(\epsilon)$ vendrá dado por $K(\epsilon^{max})$. Contemplaremos tres casos que pueden darse y que darán lugar a estrategias recargo reaseguro distintas:

1. $K(\epsilon^{max}) \leq 1$. El riesgo óptimo a reasegurar $\epsilon^* = \epsilon^{max}$.

2. $K(\epsilon^{max}) > 1$ y $K(\epsilon^{min}) < 1$. El riesgo óptimo pertenecerá al siguiente intervalo: $\epsilon^{min} = 0 < \epsilon^* \leq \epsilon^{max}$

3. $K(\epsilon^{min}) \geq 1$. El riesgo óptimo $\epsilon^* = \epsilon^{min} = 0$.

A continuación buscaremos qué restricciones ha de cumplir el recargo del reasegurador λ^R , para que se den cada uno de los tres casos.

- Respecto al primer caso $K(\epsilon^{max}) \leq 1$, si aplicamos la definición de $K(\epsilon)$ a esta restricción entonces:

$$K(\epsilon^{max}) = (1 + \lambda^R)\ {}_{d_r+s^{\epsilon^{max}}-1}P_x \left(\frac{1+Ip}{1+Ir}\right)^{d_r+s^{\epsilon^{max}}-1} \leq 1$$

despejando el recargo del reasegurador λ^R :

$$\lambda^R \leq \frac{1}{_{d_r+s^{\epsilon^{max}}-1}P_x}\left(\frac{1+Ir}{1+Ip}\right)^{d_r+s^{\epsilon^{max}}-1} - 1 \quad (C)$$

En consecuencia si λ^R cumple esta desigualdad podemos afirmar que el riesgo óptimo a reasegurar $\epsilon^* = \epsilon^{max}$.

- En el segundo caso, dos son las condiciones que se han de cumplir: $K(\epsilon^{max}) > 1$ y $K(\epsilon^{min}) < 1$. Estas se darán si λ^R satisface:

$$\lambda^R > \frac{1}{_{d_r+s^{\epsilon^{max}}-1}P_x}\left(\frac{1+Ir}{1+Ip}\right)^{d_r+s^{\epsilon^{max}}-1} - 1 \quad (C)$$

$$\lambda^R < \frac{1}{_{d_r+s^{\epsilon^{min}}-1}P_x}\left(\frac{1+Ir}{1+Ip}\right)^{d_r+s^{\epsilon^{min}}-1} - 1 \quad (D)$$

como $s^{\epsilon^{min}} = m_r$, podemos también expresar (D) :

$$D = \frac{1}{_{d_r+m_r-1}P_x}\left(\frac{1+Ir}{1+Ip}\right)^{d_r+m_r-1} - 1$$

por tanto si $C < \lambda^R < D$, el riesgo óptimo vendrá dado por aquel $\epsilon^s \in (0,\epsilon^{max}]$ tal que $K(\epsilon^s) \geq 1$ y $K(\epsilon^{s-1}) < 1$. Estas condiciones también las podemos expresar así:

$$\lambda^R \geq \frac{1}{_{d_r+s^{\epsilon^s}-1}P_x}\left(\frac{1+Ir}{1+Ip}\right)^{d_r+s^{\epsilon^s}-1} - 1$$

y

$$\lambda^R < \frac{1}{_{d_r+s^{\epsilon^s}}P_x}\left(\frac{1+Ir}{1+Ip}\right)^{d_r+s^{\epsilon^s}} - 1$$

- Por último, $\epsilon^* = 0$ si $K(\epsilon^{min}) \geq 1$, por tanto el recargo del reasegurador deberá cumplir:

$$\lambda^R \geq \frac{1}{{}_{d_r+m_r-1}P_x} \left(\frac{1+Ir}{1+Ip}\right)^{d_r+m_r-1} - 1 \quad (D)$$

Conclusión:

Si $\lambda^R \leq (C) \longrightarrow \epsilon^* = \epsilon^{max}$.

Si $(C) < \lambda^R < (D) \longrightarrow \epsilon^* \in (0,\epsilon^{max}]$

Si $\lambda^R \geq (D) \longrightarrow \epsilon^* = \epsilon^{min} = 0$.

Podemos constatar que conforme aumenta el recargo del reasegurador a partir de (C), el riesgo óptimo va disminuyendo.

Al ser $Ir \geq Ip$, podemos observar que:

- (D), es directamente proporcional al diferimiento y temporalidad de la operación, a la edad del partícipe y a la diferencia entre el tipo de interés técnico del reasegurador y el tipo de interés técnico del plan.

- (C), es directamente proporcional al diferimiento de la operación, a la edad del partícipe, a la diferencia entre el tipo de interés técnico del reasegurador y el tipo de interés técnico del plan y al número máximo de términos que puede hacerse cargo el plan con la prima pura cobrada.

En el ANEXO 4-1 estudiamos estas relaciones.

Análisis del riesgo óptimo a reasegurar ϵ^*, en el supuesto que $Ip > Ir$.

En este caso no podemos garantizar el crecimento de la función $K(\epsilon)$ $\forall\epsilon \in (0,\epsilon^{max}]$, ya que dependerá del crecimiento de (A) y del decrecimiento de (B) . Aún así podemos señalar dos diferencias con respecto a la función $K(\epsilon)$ si $Ip \leq Ir$:

- Los valores de la función $K(\epsilon)$ son más grandes en este caso que en el anterior, siendo $K(\epsilon)$ directamente proporcional a la relación $\frac{1+Ip}{1+Ir}$, así cuanto mayor sea ésta, es decir cuanto mayor sea el interés técnico del plan con respecto al interés técnico del reaseguro, mayor serán los valores de la función $K(\epsilon)$.

- Puede garantizarse el crecimiento de la función $K(\epsilon) \quad \forall\epsilon \in [0, \epsilon^{max}]$ hasta un determinado valor de Ir, que denominaremos Ir^*, fijado el tipo de interés técnico del plan, el cual (Ir^*) dependerá de las caraterísticas técnicas de la operación y del tipo de interés técnico fijado por el plan. A partir del mismo la función deja de ser creciente, presentando un máximo en un determinado $\epsilon \in [0, \epsilon^{max})$. Cuanto más pequeño sea Ir con respecto a Ir^* , más pequeño es el nivel de riesgo que hace máximo $K(\epsilon)$. A pesar de que la función a partir del mencionado límite deja de ser creciente, ésta puede presentar un punto de corte con el eje $K = 1$ (éste será único y siempre definido en un tramo creciente), o incluso puede darse el caso extremo de que la función $K(\epsilon^t)$ sea totalmente decreciente (en este caso $K(\epsilon^t) > 1 \forall\epsilon^t \in [0, \epsilon^{max}]$). Este comoportamiento se ilustra en el ANEXO 4-1.

Si el tipo de interés del reaseguro $Ir > Ir^*$, la función seguirá siendo creciente y por tanto podemos proceder al mismo análisis que ya hicimos en el apartado anterior, es decir:

Si $\lambda^R \leq (C) \longrightarrow \epsilon^* = \epsilon^{max}$.

Si $(C) < \lambda^R < (D) \longrightarrow \epsilon^* \in (0,\epsilon^{max}]$

Si $\lambda^R \geq (D) \longrightarrow \epsilon^* = \epsilon^{min} = 0$.

Al ser $Ip > Ir$, los valores de (C) y (D) será menores que en el caso anterior, pudiéndose dar el caso que (C) tome valores negativos, lo que significará que el riesgo óptimo ϵ^* será siempre menor a ϵ^{max}, sea cual sea el valor del recargo del reaseguro λ^R.

En el supuesto que $Ir < Ir^*$ entonces $K(\epsilon)$ no será creciente $\forall\epsilon \in [0, \epsilon^{max}]$, obteniendo la estrategia óptima analizando la función $K(\epsilon^t)$, para cada operación concreta.

4.2.2.2 Modalidad de reaseguro del percentil con reparto de beneficios

Nuestro objetivo es obtener la expresión analítica de la función K, que para diferenciarla del caso anterior la simbolizaremos K^A, la cual nos permitirá determinar cual es el riesgo óptimo reasegurar ϵ^*.

El proceso que seguiremos para poder calcular K^A será el mismo que en el apartado 4.2.2.1, a partir de las expresiones particulares de $VPREC(\epsilon)$ y $VPREA(\epsilon)$ para la operación objeto de estudio:

$$VPREC(\epsilon) = \alpha^r \ {}_{d_r/}\ddot{a}_{\overline{s^\epsilon}|Ip}$$

$$VPREA(\epsilon) = \left[\alpha^r \ {}_{d_r+s^\epsilon/m_r-s^\epsilon}\ddot{a}_x - \sum_{j=1}^{d_r+s^\epsilon} \Pi^\epsilon \left(\frac{1+Ip}{1+Ir}\right)^{j-1/2} {}_{j-1/}q_x + \right.$$

$$\left. + \sum_{j=d_r+1}^{d_r+s^\epsilon} \alpha^r \ {}_{d_r/}\ddot{a}_{\overline{j-d_r}|Ip} \left(\frac{1+Ip}{1+Ir}\right)^{j-1/2} {}_{j-1/}q_x \right] (1+\lambda^R)$$

En aquellos casos en que $VPREA(\epsilon) \leq 0$, no tendrá sentido contemplar recargo por parte del reasegurador, por tanto $\lambda^R = 0$

Podemos observar que $VPREC(\epsilon)$ coincide exactamente con la modalidad de reaseguro en la que no hay reparto de benificios, por tanto $\Delta VPREC(\epsilon^t)$, vendrá dada por la siguiente expresión:

$$\Delta VPREC(\epsilon^t) = -\alpha^r (1+Ip)^{-d_r - s^{\epsilon^t}+1}$$

Respecto a $VPREA(\epsilon^t)$, sabemos:

$$\Delta VPREA(\epsilon^t) = VPREA(\epsilon^{t+1}) - VPREA(\epsilon^t)$$

donde:

$$VPREA(\epsilon^t) = \left[\alpha^r \ {}_{d_r+s^{\epsilon^t}/m_r-s^{\epsilon^t}}\ddot{a}_x - \sum_{j=1}^{d_r+s^{\epsilon^t}} \Pi^\epsilon \left(\frac{1+Ip}{1+Ir}\right)^{j-1/2} {}_{j-1/}q_x + \right.$$

$$\left. + \sum_{j=d_r+1}^{d_r+s^{\epsilon^t}} \alpha^r \ {}_{d_r/}\ddot{a}_{\overline{j-d_r}|Ip} \left(\frac{1+Ip}{1+Ir}\right)^{j-1/2} {}_{j-1/}q_x \right] (1+\lambda^R)$$

$$VPREA(\epsilon^{t+1}) = \left[\alpha^r \ {}_{d_r+s^{\epsilon^{t+1}}/m_r-s^{\epsilon^{t+1}}}\ddot{a}_x - \sum_{j=1}^{d_r+s^{\epsilon^{t+1}}} \Pi^\epsilon \left(\frac{1+Ip}{1+Ir}\right)^{j-1/2} {}_{j-1/}q_x + \right.$$

$$\left. + \sum_{j=d_r+1}^{d_r+s^{\epsilon^{t+1}}} \alpha^r \ {}_{d_r/}\ddot{a}_{\overline{j-d_r}|Ip} \left(\frac{1+Ip}{1+Ir}\right)^{j-1/2} {}_{j-1/}q_x \right] (1+\lambda^R)$$

sabiendo que $s^{\epsilon^{t+1}} = s^{\epsilon^t} - 1$ y simplificando, llegamos a la siguiente expresión :

$$\Delta VPREA(\epsilon^t) = \alpha^r (1+\lambda^R) \left[{}_{d_r+s^{\epsilon^t}-1}P_x (1+Ir)^{-d_r-s^{\epsilon^t}+1} + \right.$$

$$\left. (1+Ip)^{-d_r-s^{\epsilon^t}+1} \sum_{j=1}^{d_r+s^{\epsilon^t}-1} \left(\frac{1+Ip}{1+Ir}\right)^{j-1/2} {}_{j-1/}q_x \right] \quad (I)$$

Las observaciones que podemos hacer entorno a $\Delta VPREA(\epsilon^t)$ son las siguientes:

- $\Delta VPREA(\epsilon^t) > 0$, ya que cuanto mayor es el riesgo reasegurado, mayor será la prima de reaseguro asociada. Podemos observar que el valor $\Delta VPREA(\epsilon^t)$ es mayor al correspondiente de la modalidad anterior.

- Es inversamente proporcional al diferimiento de la operación y al tipo de interés técnico del reaseguro.

A continuación obtendremos la expresión de K^A, relacionando $\Delta VPREA(\epsilon^t)$ con $\Delta VPREC(\epsilon^t)$.

Si a la expresión (I), multiplicamos y dividimos por $(1+Ip)^{-d_r-s^{\epsilon^t}+1}$ y sacamos factor común $\alpha^r(1+Ip)^{-d_r-s^{\epsilon^t}+1}$ entonces:

$$\Delta VPREA(\epsilon^t) = \alpha^r(1+Ip)^{-d_r-s^{\epsilon^t}+1}(1+\lambda^R)\left[{}_{d_r+s^{\epsilon^t}-1}P_x\left(\frac{1+Ip}{1+Ir}\right)^{d_r+s^{\epsilon^t}-1}\right.$$

$$\left.+\sum_{j=1}^{d_r+s^{\epsilon^t}-1}\left(\frac{1+Ip}{1+Ir}\right)^{j-1/2}{}_{j-1/}q_x\right]$$

como $\Delta VPREC = -\alpha^r(1+Ip)^{d_r-s^{\epsilon^t}+1}$, sutituyendo tenemos:

$$\Delta VPREA(\epsilon^t) = -\Delta VPREC[(1+\lambda^R)\left[{}_{d_r+s^{\epsilon^t}-1}P_x\left(\frac{1+Ip}{1+Ir}\right)^{d_r+s^{\epsilon^t}-1}\right.$$

$$\left.+\sum_{j=1}^{d_r+s^{\epsilon^t}-1}\left(\frac{1+Ip}{1+Ir}\right)^{j-1/2}{}_{j-1/}q_x\right]$$

por tanto $K^A(\epsilon^t)$, definida como la relación entre $\Delta VPREA(\epsilon^t)$ y y $-\Delta VPREC(\epsilon^t)$ viene dada por la siguiente expresión:

$$K^A(\epsilon^t) = (1+\lambda^R)\left[{}_{d_r+s^{\epsilon^t}-1}P_x\left(\frac{1+Ip}{1+Ir}\right)^{d_r+s^{\epsilon^t}-1}\right.$$

$$\left.+\sum_{j=1}^{d_r+s^{\epsilon^t}-1}\left(\frac{1+Ip}{1+Ir}\right)^{j-1/2}{}_{j-1/}q_x\right]$$

Si consideramos el caso particular en el que $Ip = Ir$ entonces:

$$K^A(\epsilon^t) = (1+\lambda^R)$$

Està circunstancia nos va a permitir acotar los valores de la función $K^A(\epsilon^t)$ cuando $Ip \neq Ir$.

Así:

- Si $Ip < Ir$ entonces $K^A(\epsilon^t) < (1+\lambda^R)$
- Si $Ip > Ir$ entonces $K^A(\epsilon^t) > (1+\lambda^R)$

A continuación estudiaremos el crecimiento de $K^A(\epsilon^t)$, en función del riesgo reasegurado ϵ, descomponiendo la función en dos bloques y analizando el comportamiento de éstos en función de ϵ.

Los bloques son los siguientes:

1o $(1+\lambda^R)\left[\,{}_{d_r+s^{\epsilon^t}-1}P_x\left(\frac{1+Ip}{1+Ir}\right)^{d_r+s^{\epsilon^t}-1}\right] \quad (A)$

2o $(1+\lambda^R)\left[\sum_{j=1}^{d_r+s^{\epsilon^t}-1}\left(\frac{1+Ip}{1+Ir}\right)^{j-1/2}\ {}_{j-1/}q_x\right] \quad (B)$

Respecto al bloque (A), podemos observar que coincide con la función $K(\epsilon^t)$ estudiada en el apartado anterior, por tanto será creciente si $Ip \leq Ir$, sin embargo si $Ip > Ir$, no podemos asegurar nada respecto al crecimiento de (A).

Por el contrario (B) es siempre decreciente conforme aumenta el riesgo reasegurado, sea cual sea el tipo de interés técnico del plan y el tipo de interés técnico del reasegurador.

Por tanto, el comportamiento en cuanto al crecimiento de la función $K(\epsilon^t)$ depende exclusivamente, al igual que en la modalidad de reaseguro anterior, de los tipos de interés técnicos del plan y del reasegurador, dándose tres casos:

- $Ip < Ir$. En este supuesto la función $K^A(\epsilon^t)$ es siempre creciente conforme aumenta el riesgo reasegurado. Por tanto (B) no llega a anular la tendencia creciente dada por (A).

- $Ip = Ir$. La función $K^A(\epsilon^t)$ es constante y por tanto independiente del riesgo reasegurado. El crecimiento de (A), queda totalmente compensado con el decrecimiento de (B).

- $Ip > Ir$. La función $K^A(\epsilon^t)$ es siempre decreciente conforme aumenta el riesgo reasegurado. En este caso la tendencia dada por (B) es la que tiene más peso.

En ANEXO 4-1 analizamos las relaciones anteriores.

Análisis del riesgo óptimo a reasegurar ϵ^*, en el supuesto que $Ip = Ir$

Si $Ip = Ir$, la función $K^A(\epsilon^t)$ viene dada por:

$$K^A(\epsilon^t) = (1 + \lambda^R)$$

dependiendo exclusivamene del recargo del reasegurador λ^R. De todas maneras hay que tener presente que si $Ip = Ir$, la prima ajustada de reaseguro $\Pi^{R,A}$, siempre será negativa o igual a cero $\forall \epsilon^t \in [0, \epsilon^{max}]$, por tanto, no tendrá sentido plantearnos la existencia de recargo por parte del reasegurador, siendo entonces:

$$K^A(\epsilon^t) = 1$$

Esto nos lleva a concluir que el coste de la opeación es independiente del nivel de riesgo del plan ϵ.

En este caso el coste total de la operación coincide con la prima pura.

Análisis del riesgo óptimo a reasegurar ϵ^*, en el supuesto que $Ip < Ir$

En este caso hay que destacar , al igual que en el caso anterior, que la prima ajustada de reaseguro siempre es negativa sea cual sea el riesgo que se reasegure $\epsilon^t \in [0, \epsilon^{max}]$, por ser $Ip < Ir$. No tiene sentido, por tanto, plantearse la exitencia de recargo del reasegurador.

En consecuencia la función $K^A(\epsilon^t) < 1 \; \forall \epsilon^t \in [0, \epsilon^{max}]$, siendo el riesgo óptimo a reasegurar $\epsilon^* = \epsilon^{max}$, sea cual sea la edad del partícipe, el diferimiento o la temporalidad de la operación.

Análisis del riesgo óptimo a reasegurar ϵ^*, en el supuesto que $Ip > Ir$

Si bien en los casos anteriores la prima ajustada de reaseguro era negativa, y por tanto no tenía sentido plantearse la exitencia de recargo del reasegurador, no sucede así cuando $Ip > Ir$, ya que la prima ajustada de reaseguro puede ser positiva cuando el riesgo a reasegurar es grande, y por tanto el recargo del reasegurador puede estar definido para estos valores de riesgo.

De todas formas hay que destacar que la función $K(\epsilon^t) > 1 \; \forall \epsilon^t \in [0, \epsilon^{max}]$ por ser $Ip > Ir$, sea cual sea la edad del partícipe, recargo del reasegurador, diferimiento o temporalidad de la operación. Por tanto, el riesgo óptimo a reasegurar $\epsilon^* = \epsilon^{min}$, siendo la estrategia óptima será cubrir vía recargo de seguridad el riesgo de insolvencia del plan .

Hemos de resaltar que el valor actual del coste total en este caso no coincidirá con la prima pura financiera, sino que será menor a ésta, debido al descuento que nos proporciona el reasegurador como consecuencia del reparto de beneficios.

4.2.2.3 Modalidad de reaseguro de diferencia de siniestralidad sin reparto de beneficios

En esta modalidad de reaseguro al no disponer de una expresión analítica tan operativa de la prima de reaseguro como en la modalidad anterior, hace que no siempre nos sea posible determinar las expresiones de $\Delta VPREA(\lambda_t)$ y por tanto la expresión analítica de la función K.

Respecto al cálculo de $\Delta VPREC(\lambda_t)$, no tendremos problemas, ya que este es inmediato aplicando la definición del operador Δ a $VPREC(\lambda_t)$.

En este caso al ser la operación a prima única:

$$\Delta VPREC(\lambda_t) = \Pi(1 + \lambda_{t+1}) - \Pi(1 + \lambda_t) = \Pi(\lambda_{t+1} - \lambda_t) = \Pi \, \Delta\lambda_t$$

Respecto a $\Delta VPREA(\lambda_t)$ no siempre será posible determinar una expresión analítica de la misma, ya que como a continuación veremos, su obtención dependerá del número de términos $T_{i,h} \;\; \forall h$ que se vean modificados al variar el recargo de seguridad del plan .

Si aplicamos el operador Δ a $VPREA(\lambda_t)$:

$$\Delta VPREA(\lambda_t) = [\Pi^{R,\lambda_{t+1}} - \Pi^{R,\lambda_t}](1+\lambda^R)$$

donde:

$$\Pi^{R,\lambda_{t+1}} = \sum_{h=1}^{d_r+m_r-1} T_{i,h,\lambda_{t+1}} \, {}_hP_x(1+Ir)^{-h}$$

$$\Pi^{R,\lambda_t} = \sum_{h=1}^{d_r+m_r-1} T_{i,h,\lambda_t} \, {}_hP_x(1+Ir)^{-h}$$

siendo $T_{i,h,\lambda_{t+1}}$ el término a satisfacer por el reasegurador en el momento h, si el plan aplica el recargo de seguridad λ_{t+1} y el partícipe llega vivo a h.

Sea cual sea el tipo de reaseguro (tipo A o tipo B), si el margen de solvencia coincide con las reservas de solvencia RS^{ϵ}, o bien, si el reaseguro es del tipo A, el margen de solvencia sea una proporción de la provisión matemática y $\lambda > \frac{R_{i,1}+V_{i,1}}{\Pi(1+Ip)} - 1$, no podremos calcular una expresión simplificada de $\Delta VPREA(\lambda_t)$ ya que una variación en el recargo de seguridad del plan, supone una modificación de algunos o de todos los términos $T_{i,h}$ y por tanto no podremos disponer de una expresión analítica operativa de la función $K(\lambda_t)$.

En este caso, tendremos que determinar la estrategia óptima empíricamente para cada caso.

Sin embargo, en los restantes casos: el margen de solvencia es una proporción de la provisión matemática, y el reasegurador es del tipo B, o bien es del tipo A siempre y cuando $\lambda < \frac{R_{i,1}+V_{i,1}}{\Pi(1+Ip)} - 1$, entonces sí que podremos obtener la expresión analítica de la función $K(\lambda_t)$, gracias a que una variación en el recargo de seguridad, al afectar sólo al primer término de pago del reasegurador $T_{i,1}$, nos permitirá expresar $\Delta VPREA(\lambda_t)$ en función tan sólo de $T_{i,1}$.

Para ilustrar esta implicación, expresaremos la prima de reaseguro de la siguiente forma:

$$\Pi^{R,\lambda_{t+1}} = T_{1,h,\lambda_{t+1}} P_x(1+Ir)^{-1} + \sum_{h=2}^{d_r+m_r-1} T_{i,h,\lambda_{t+1}} \, {}_hP_x(1+Ir)^{-h} \quad (I)$$

$$\Pi^{R,\lambda_t} = T_{i,1,\lambda_t} P_x (1+Ir)^{-1} + \sum_{h=2}^{d_r+m_r-1} T_{i,h,\lambda_t} \; {}_hP_x (1+Ir)^{-h} \quad (II)$$

satisfaciéndose:

$$\sum_{h=2}^{d_r+m_r-1} T_{i,h,\lambda_{t+1}} \; {}_tP_x (1+Ir)^{-h} = \sum_{h=2}^{d_r+m_r-1} T_{i,h,\lambda_t} \; {}_tP_x (1+Ir)^{-h} \quad (III)$$

En consecuencia, si sustituimos (I) y (II) en la expresión general de $\Delta VPREA(\lambda_t)$ y simplificamos la misma teniendo presente (III):

$$\Delta VPREA(\lambda_t) = \left[T_{i,1,\lambda_{t+1}} - T_{i,1,\lambda_t}\right] (1+Ir)^{-1} P_x (1+\lambda^R)$$

Por tanto, $\Delta VPREA(\lambda_t)$ viene dado exclusivamente por la variación que experimenta $T_{i,1}$, actualizada actuarialmente al tipo de interés del reasegurador y ponderada por el recargo del reasegurador λ^R.

Esta nueva definición de $\Delta VPREA(\lambda_t)$ nos permitirá obtener una expresión sencilla de la misma, sustituyendo $T_{i,1,\lambda_{t+1}}$ y $T_{i,1,\lambda_t}$ por sus expresiones correspondientes:

$$T_{i,1,\lambda_{t+1}} = \alpha^r \left[\frac{(1+p)}{l_{x+1}} - \frac{(1+\lambda_{t+1})}{l_x}\right] \sum_{s=d_r}^{d_r+m_r} l_{x+s} (1+Ip)^{-s+1}$$

$$T_{i,1,\lambda_t} = \alpha^r \left[\frac{(1+p)}{l_{x+1}} - \frac{(1+\lambda_t)}{l_x}\right] \sum_{s=d_r}^{d_r+m_r} l_{x+s} (1+Ip)^{-s+1}$$

donde simplificando, llegamos a la siguiente expresión:

$$\Delta VPREA(\lambda_t) = -\Pi \, \Delta\lambda_t \left(\frac{1+Ip}{1+Ir}\right) P_x (1+\lambda^R)$$

Podemos observar que:

a) $\Delta VPREA(\lambda_t) < 0$ ya que cuanto mayor sea la variación del recargo de seguridad del plan más pequeña será la prima de reaseguro asociada.

b) $\Delta VPREA(\lambda_t)$ aumentará en valores absolutos, (se hará más negativo) cuanto mayor sea la prima pura de la operación Π, el tipo de interés del plan Ip, la probabilidad P_x y el recargo del reasegurador λ^R. Disminuirá en valores absolutos cuanto mayor sea el tipo de interés del reaseguro Ir.

La obtención de la función $K(\lambda_t)$ es inmediata aplicando la definición:

$$K(\lambda_t) = -\frac{\Delta VPREA(\lambda_t)}{\Delta VPREC(\lambda_t)}$$

sustituyendo $\Delta VPREA(\lambda_t)$ y $\Delta VPREC(\lambda_t)$ en la expresión anterior:

$$K(\lambda_t) = \left(\frac{1+Ip}{1+Ir}\right) P_x(1+\lambda^R)$$

Podemos observar como la función $K(\lambda_t)$ es independiente del recargo de seguridad, dependiendo la estrategia óptima de la relación entre el tipo de interés del plan y de reaseguro, de la probabilidad de supervivencia P_x y del recargo del reasegurador λ^R.

Debemos de tener presente que si el reaseguro es del tipo A, la expresión de $K(\lambda_t)$, obtenida anteriormente sólo será válida si $\lambda_t < \frac{R_{i,1}+V_{i,1}-\Pi}{\Pi}$, en cualquier otro caso, el valor de $K(\lambda_t)$ tendrá que que obtenerse empíricamente a posteriori.

Por tanto, sólo podremos determinar a priori qué recargo de seguridad del plan perteneciente al intervalo $[0, \lambda_m]$, siendo λ_m es el que minimize el coste total de la operación.

Siendo

$$\lambda_m = \frac{R_{i,1}+V_{i,1}-\Pi}{\Pi}$$

De todas formas, el conocimiento parcial de la función $K(\lambda_t)$ también será de interés, ya que puede darse el caso que el recargo establecido por el plan como $\lambda_{max} \leq \lambda_m$, conociendo entonces la expresión analítica de la función $K(\lambda_t)$ para todo el conjunto de soluciones factibles.

De todas formas, si el recargo de seguridad óptimo del intervalo $[0, \lambda_m]$ es $\lambda = 0$, entonces $\lambda^* = 0 \ \forall \lambda \in [0, \lambda_{max}]$ pues cualquier recargo superior a $\lambda = 0$ encarecerá el coste de la operación, y por tanto la estrategia óptima recargo reaseguro vendrá precisamente dada por dicho recargo.

Sin embargo, si el recargo óptimo perteneciente al intervalo $[0, \lambda_m]$ es λ_m, no podremos determinar a priori la estrategia óptima recargo reaseguro, lo único que podremos asegurar es que $\lambda^* \geq \lambda_m$. Esta conclusión también será de aplicación en el caso del seguro.

Si el reasegurado es del tipo B, puede darse el caso que a partir de un determinado valor del recargo de seguridad, (éste dependerá de las características técnicas de la operación), la prima de reaseguro se haga negativa, ya que el reasegurador recibe en término medio más de lo que da, en este caso supondremos que no hay recargo del reasegurador $\lambda^R = 0$. Por tanto, la función K quedará modificada de la siguiente forma:

$$K(\lambda_t) = \begin{cases} \left(\frac{1+Ip}{1+Ir}\right) P_x(1+\lambda^R) & \forall \lambda_t \quad \text{tq} \quad \Pi^{R,\lambda_t} > 0 \\ \\ \left(\frac{1+Ip}{1+Ir}\right) P_x & \forall \lambda_t \quad \text{tq} \quad \Pi^{R,\lambda_t} < 0 \end{cases}$$

siendo Π^{R,λ_t} la prima ajustada de reaseguro asociada al recargo de seguridad λ_t.

La estrategia óptima dependerá del valor de $K(\lambda_t)$, si suponemos que la misma adopta los dos tramos, entonces tendremos que diferenciar los siguientes casos:

- Si $K(\lambda_t) > 1$, en nuestro caso dicha condición se satisfará cuando:

  $$\left(\frac{1+Ip}{1+Ir}\right) P_x > 1$$

  la política óptima será recargar la prima del plan lo máximo posible.

  Si el reaseguro es del tipo A, el recargo que minimiza el coste total perteneciente al intervalo $[0, \lambda_m]$ es λ_m y por tanto tendremos que determinar el recargo óptimo empíricamente.

- Si $K(\lambda_t) < 1$, en nuestro caso dicha condición se cumple cuando:

  $$\left(\frac{1+Ip}{1+Ir}\right) P_x(1+\lambda^R) < 1$$

la política que minimiza el coste de la operación es no recargar la prima pura del plan, $\lambda^* = 0$. En este caso la función $K(\lambda_t)$ decide a cerca de la estrategia óptima en el reaseguro tipo A.

- Si:

$$\left(\frac{1+Ip}{1+Ir}\right) P_x < 1$$

y

$$\left(\frac{1+Ip}{1+Ir}\right) P_x(1+\lambda^R) > 1$$

en este caso la estrategia óptima vendrá dada por aquel recargo que anula la prima de reaseguro. Esta opción sólo tendrá sentido en el reaseguro Tipo B, ya que en el reaseguro Tipo A, la prima de reaseguro es siempre positiva y por tanto la función $K(\lambda_t)$ adoptará un sólo tramo.

- Por último, si $K(\lambda_t) = 1$, el coste total de la operación es independiente del recargo de seguridad para el reaseguro tipo B. Respecto al reaseguro tipo A esta afirmación sólo será válida para aquellos recargos que pertenezcan al intervalo $[0, \lambda_m]$, en consecuencia la estrategia óptima en este caso, tendrá que ser calculada empiricamente.

4.2.2.4 Modalidad de reaseguro de diferencia de siniestralidad con reparto de beneficios

Determinaremos las expresiones de $\Delta VPREA(\lambda_t)$ y de $\Delta VPREC(\lambda_t)$ utilizando la misma metodología del apartado anterior.

El cálculo de $\Delta VPREC(\lambda_t)$ es inmediato aplicando la definición del operador Δ, por tanto, al ser la operación a prima única:

$$\Delta VPREC(\lambda_t) = \Pi(1+\lambda_{t+1}) - \Pi(1+\lambda_t) = \Pi(\lambda_{t+1} - \lambda_t) = \Pi\,\Delta\lambda_t$$

Respecto a $\Delta VPREA(\lambda_t)$, sabemos que:

$$\Delta VPREA(\lambda_t) = \left[\Pi^{R,A,\lambda_{t+1}} - \Pi^{R,A,\lambda_t}\right](1+\lambda^R)$$

donde:

$$\Pi^{R,A,\lambda_{t+1}} = E[\xi_i^{p,R}] - E[\xi_i^{b,R}] =$$

$$\sum_{h=1}^{d_r+m_r-1} T_{i,h,\lambda_{t+1}} \; {}_hP_x(1+Ir)^{-h} - \sum_{h=1}^{w-x-1} H_{i,h,\lambda_{t+1}} \; {}_{h-1/}q_x(1+Ir)^{-h+1/2}$$

y

$$\Pi^{R,A,\lambda_t} = E[\xi_i^{p,R}] - E[\xi_i^{b,R}] =$$

$$\sum_{h=1}^{d_r+m_r-1} T_{i,h,\lambda_t} \; {}_hP_x(1+Ir)^{-h} - \sum_{h=1}^{w-x-1} H_{i,h,\lambda_t} \; {}_{h-1/}q_x(1+Ir)^{-h+1/2}$$

siendo:

- T_{i,h,λ_t} el término que debe de satisfacer el reasegurador en el momento h asociado al recargo del plan λ_t, si el partícipe llega vivo a h.

- H_{i,h,λ_t} el término que debe de satisfacer el plan al reasegurador a mitad del período h-ésimo asociado al recargo del plan λ_t, si el partícipe fallece en el período h.

En este caso, al igual que sucedía cuando no había reparto de beneficios al reasegurador, sólo podremos calcular una expresión simplificada de $\Delta VPREA(\lambda_t)$ y por tanto obtener la expresión analítica de la función K^A cuando el margen de solvencia sea una proporción de la provisión matemática y el reasegurador sea del tipo B o del tipo A, teniendo presente que en este último caso deberá satisfacerse la condición $\lambda < \frac{R_{i,1}+V_{i,1}}{\Pi(1+Ip)} - 1$ [4].

[4]Debemos de tener en cuenta que la expresión analítica de la función K^A que obtengamos, también será válida para cualquier recargo del reaseguro tipo A, si $Ip = Ir$, caso en el que ambos reaseguros coinciden.

Sabemos que bajo este supuesto, una variación del recargo de seguridad modifica exclusivamente el primer término de la función disponible $Z_{i,1}$, esta circunstancia hace que sólo se vea afectado el primer término que debe de satisfacer el reasegurador $T_{i,1}$ en el caso de que viva el partícipe, y el primer término del beneficio que tendría que satisfacer el plan al reasegurador si el partícipe falleciese en el primer período, cuyo importe viene dado por $H_{i,1}$. Resultando el resto de términos independientes del recargo de seguridad del plan, por tanto:

$$\sum_{h=2}^{d_r+m_r-1} T_{i,h,\lambda_{t+1}}\ {}_hP_x(1+Ir)^{-h} - \sum_{h=2}^{w-x-1} H_{i,h,\lambda_{t+1}}\ {}_{h-1/}q_x(1+Ir)^{-h+1/2} =$$

$$= \sum_{h=2}^{d_r+m_r-1} T_{i,h,\lambda_t}\ {}_hP_x(1+Ir)^{-h} - \sum_{h=2}^{w-x-1} H_{i,h,\lambda_t}\ {}_{h-1/}q_x(1+Ir)^{-h+1/2}$$

lo que nos permite expresar $\Delta VPREA(\lambda_t)$ como:

$$\Delta VPREA(\lambda_t) = \left[T_{1,h,\lambda_{t+1}} P_x(1+Ir)^{-1} - H_{1,h,\lambda_{t+1}} q_x(1+Ir)^{-1/2}\right] -$$

$$\left[T_{1,h,\lambda_t} P_x(1+Ir)^{-1} - H_{1,h,\lambda_t} q_x(1+Ir)^{-1/2}\right] =$$

$$= \left[T_{1,h,\lambda_{t+1}} - T_{1,h,\lambda_t}\right] P_x(1+Ir)^{-1} - \left[H_{1,h,\lambda_{t+1}} - H_{1,h,\lambda_t}\right] q_x(1+Ir)^{-1/2}$$

Teniendo presente que:

$$H_{i,1,\lambda_t} = Z_{i,1,\lambda_t}(1+Ip)^{-1/2} = \Pi(1+\lambda_t)(1+Ip)^{1/2}$$

y simplificando, llegamos a la siguiente expresión de $\Delta VPREA(\lambda_t)$:

$$\Delta VPREA(\lambda_t) = -\Pi\,\Delta\lambda_t \left(\frac{1+Ip}{1+Ir}\right)^{1/2} \left[P_x \left(\frac{1+Ip}{1+Ir}\right)^{1/2} + q_x\right] (1+\lambda^R)$$

El cálculo de $K^A(\lambda_t)$ es ya inmediato aplicando la definición, resultando en este caso:

$$K^A(\lambda_t) = \left(\frac{1+Ip}{1+Ir}\right)^{1/2} \left[P_x \left(\frac{1+Ip}{1+Ir}\right)^{1/2} + q_x\right] (1+\lambda^R)$$

podemos observar que si $Ip = Ir$ entonces:

$$K^A(\lambda_t) = (1 + \lambda^R)$$

En los casos en que la prima ajustada de reaseguro sea negativa, no contemplaremos la existencia de recargo del reasegurador , por lo que la función K^A quedará modificada de la siguiente forma:

$$K^A(\lambda_t) = \begin{cases} \left(\frac{1+Ip}{1+Ir}\right)^{1/2} \left[P_x \left(\frac{1+Ip}{1+Ir}\right)^{1/2} + q_x\right] (1 + \lambda^R) & \forall \lambda_t \quad \text{tq} \quad \Pi^{R,A,\lambda_t} > 0 \\ \left(\frac{1+Ip}{1+Ir}\right)^{1/2} \left[P_x \left(\frac{(1+Ip)}{(1+Ir)}\right)^{1/2} + q_x\right] & \forall \lambda_t \quad \text{tq} \quad \Pi^{R,A,\lambda_t} \leq 0 \end{cases}$$

siendo Π^{R,A,λ_t} la prima ajustada de reaseguro asociada al recargo de seguridad λ_t.

La estrategia óptima dependerá de los valores que tome la función $K^A(\lambda_t)$, si suponemos que la función $K^A(\lambda_t)$ adopta los dos tramos, entonces:

- Si $K^A(\lambda_t) > 1$, en nuestro caso dicha condición se satisfará cuando:

  $$\left(\frac{1 + Ip}{1 + Ir}\right)^{1/2} \left[P_x \left(\frac{1 + Ip}{1 + Ir}\right)^{1/2} + q_x\right] > 1$$

  el coste total de la operación será inversamente proporcional al recargo de seguridad del plan.

- Si $K^A(\lambda_t) < 1$, en nuestro caso dicha condición se cumple cuando:

  $$\left(\frac{1 + Ip}{1 + Ir}\right)^{1/2} \left[P_x \left(\frac{1 + Ip}{1 + Ir}\right)^{1/2} + q_x\right] (1 + \lambda^R) < 1$$

  la política que minimiza el coste de la operación es no recargar la prima pura del plan.

- Si:

  $$\left(\frac{1 + Ip}{1 + Ir}\right)^{1/2} \left[P_x \left(\frac{1 + Ip}{1 + Ir}\right)^{1/2} + q_x\right] < 1$$

y

$$\left(\frac{1+Ip}{1+Ir}\right)^{1/2}\left[P_x\left(\frac{1+Ip}{1+Ir}\right)^{1/2}+q_x\right](1+\lambda^R)>1$$

en este caso la estrategia óptima vendrá dada por aquel recargo de seguridad del plan que anule la prima ajustada de reaseguro.

- Por último, si $K^A(\lambda_t)=1$, entonces el coste total de la operación es independiente del recargo de seguridad.

4.3 Operación de seguro a prima única. Seguro diferido y temporal con cuantías constantes

4.3.1 Cálculo de la prima de reaseguro

En este apartado obtendremos la prima de reaseguro y la prima de reaseguro ajustada siguiendo el modelo general.

4.3.1.1 Descripción de la operación objeto de estudio

La operación presenta las siguientes características:

C: Aportación inicial que coincidirá con la prima pura única Π

$\alpha_i^s=\alpha^s$. La cuantía del seguro constante.

$\alpha_i^r=0$. No hay prestación de renta

La ecuación de equilibrio viene dada por la siguiente expresión:

$$\Pi=\sum_{j=d_s+1}^{d_s+m_s}\alpha^s\ {}_{j-1}q_xV^{j-1/2}$$

4.3.1.2 Variable aleatoria pérdida individual del plan. Cálculo de la prima única

Estudiaremos las variables aleatorias que forman la variable aleatoria pérdida del plan: ξ_i^c y ξ_i^p.

Respecto a la variable aleatoria ξ_i^p, sus realizaciones $\alpha(i,t)$ vienen dadas en este caso por la siguiente expresión:

$$\alpha(i,t) = \begin{cases} 0 & 0 \leq t < d_s \\ \alpha^s V^{t+1/2} & d_s \leq t < d_s + m_s \\ 0 & d_s + m_s \leq t < w - x \end{cases}$$

A continuación expresamos las realizaciones y probabilidades (ordenados temporalmente) de ξ_i^p:

REALIZACIONES	PROBABILIDADES
0	q_x
$\vdots$	$\vdots$
0	${}_{d_r-1/}q_x$
$\alpha^s V^{d_s+1/2}$	${}_{d_s/}q_x$
$\vdots$	$\vdots$
$\alpha^s V^{d_s+m_s-1+1/2}$	${}_{d_s+m_s-1/}q_x$
0	${}_{d_s+m_s}q_x$
$\vdots$	$\vdots$
0	${}_{w-x-1/}q_x$

Respecto a la variable aleatoria ξ_i^c, al ser la operación a prima única, deja de ser aleatoria para convertirse en un valor cierto de importe la prima pura Π, por tanto:

$$\xi_i^c = \Pi$$

en consecuencia la variable aleatoria pérdida individual L_i queda definida del siguiente modo:

REALIZACIONES	PROBABILIDADES
$-\Pi$	q_x
$\vdots$	$\vdots$
$-\Pi$	$_{d_r-1/}q_x$
$\alpha^s V^{d_s+1/2} - \Pi$	$_{d_s/}q_x$
$\vdots$	$\vdots$
$\alpha^s V^{d_s+m_s-1+1/2} - \Pi$	$_{d_s+m_s-1/}q_x$
$-\Pi$	$_{d_s+m_s}q_x$
$\vdots$	$\vdots$
$-\Pi$	$_{w-x-1/}q_x$

El valor de la prima al ser la operación a prima única vendrá dado por la esperanza matemática de la variable aleatoria ξ_i^p, por tanto:

$$\Pi = E[\xi_i^p]$$

La esperanza de la variable aleatoria ξ_i^p puede también calcularse como:

$$E[\xi_i^p] = \sum_{j=d_s+1}^{d_s+m_s} \alpha^s \ {}_{j-1}q_x V^{j-1/2}$$

o bien, podemos expresarla utilizando la simbología actuarial:

$$E[\xi_i^p] = \alpha^s \ {}_{d_s/m_s}A_x$$

4.3.1.3 Cálculo del recargo de seguridad

Para poder determinar el recargo de seguridad, necesitaremos definir la variable aleatoria L_i^*.

En nuestro caso particular al tratarse la operación de un seguro , la ordenación temporal dada por la variable L_i no coincide con L_i^*, por lo que se hace necesario ordenar de menor a mayor las realizaciones junto con sus probabilidades de la variable aleatoria L_i. No es directo el cambio que se tiene que introducir en L_i para poder obtener L_i^*, todo dependerá de la forma de variación de las cuantías del seguro. En nuestro caso particular al ser las cuantías del seguro constantes, el cambio coincide con una inversión en la ordenación para aquellas realizaciones de L_i distintas de cero. Por tanto podemos definir la variable aleatoria L_i^* como sigue:

REALIZACIONES	PROBABILIDADES	Periodos enteros vividos t_k
$-\Pi$	q_x	$t_0 = 0$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$-\Pi$	$_{d_s-1/}q_x$	$t_{d_s-1} = d_s - 1$
$-\Pi$	$_{d_s+m_s}$	$t_{d_s} = d_s - m_s$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$-\Pi$	$_{w-x-1/}q_x$	$t_{w-x-m_s-1} = w - x - 1$
$\alpha^s V^{d_s+m_s-1/2} - \Pi$	$_{d_s+m_s-1/}q_x$	$t_{w-x-m_s} = d_s + m_s - 1$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$\alpha^s V^{d_s+b^\epsilon+1/2} - \Pi$	$_{d_s+b^\epsilon/}q_x$	$t_h = d_s + b^\epsilon$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$\alpha^s V^{d_s+1/2} - \Pi$	$_{d_s/}q_x$	$t_{w-x-1} = d_s$

El percentil asociado a L_i^* fijado un determinado nivel de solvencia ϵ viene dado por la primera realización de la variable aleatoria L_i^* que acumula una probabilidad mayor o igual a $1-\epsilon$. En nuestro caso podemos expresar el percentil de la siguiente forma:

$$Per_\epsilon[L_i^*] = \alpha^s V^{d_s+b^\epsilon+1/2} - \Pi$$

coincidiendo éste, con el valor actual de la pérdida ocasionada por el seguro que tendría que satisfacer al partícipe, si éste viviese b^ϵ períodos enteros a contar a partir del diferimiento de la operación.

Por tanto, el reaseguro cubre un riesgo ϵ si se responsabiliza de la pérdida ocasionada por los b^{ϵ} primeros términos del seguro, los cuales corresponden con aquellas realizaciones de la variable aleatoria L_i^{ϵ} con signo positivo.

Por consiguiente, podemos definir b^{ϵ} como el número de períodos enteros a partir del diferimiento de la operación y dentro del plazo de vigencia de la misma, que ha de vivir el partícipe para que la pérdida ocasionada por el seguro coincida con el $Per_{\epsilon}[L_i^*]$.

Cuanto mayor sea el riesgo reasegurado ϵ más pequeño será el valor del percentil y por tanto mayor será b^{ϵ}.

El recargo vendrá dado por la siguiente expresión:

$$\lambda^{\epsilon} = \frac{\alpha(i,t_h) - P(i,t_h)}{P(i,t_h)} = \frac{Per_{\epsilon}[L_i^*]}{P(i,t_h)}$$

que particularizándola a nuestro caso:

$P(i,t_h) = \Pi$. Por ser la operación a prima única.

$\alpha(i,t_h) = \alpha^s V^{d_s + b^{\epsilon} + 1/2} = \Pi(1+\lambda^{\epsilon}) = \Pi^{\epsilon} \quad (I)$.

por tanto:

$$\lambda^{\epsilon} = \frac{\Pi^{\epsilon} - \Pi}{\Pi}$$

Calculado el recargo, podremos definir la variable aleatoria L_i^{ϵ}.

El número entero de periodos b^{ϵ} sólo tendrá sentido definirlo para realizaciones positivas del percentil $Per_{\epsilon}[L_i^*]$, esta circunstancia nos permite acotar los valores que puede tomar b^{ϵ^t}, satisfaciendo la siguiente condición:

$$b^{\epsilon^{min}} \leq b^{\epsilon^t} \leq b^{\epsilon^{max}}$$

donde:

$b^{\epsilon^{min}} = 0$. En este caso el valor de $Per_{\epsilon^{min}}[L_i^*]$ vendrá dada por aquella realización de L_i^* que tiene lugar cuando el partícipe vive exclusivamente d_s períodos, o lo que es lo mismo , cero períodos a partir del diferimiento. Por tanto la prima recargada de la operación, permitirá cubrir la prestación de seguro asociada al período $d_s + 1$.

En este caso, la pérdida del plan nunca será positiva.

$b^{\epsilon^{max}}$ viene dado por el mayor número de períodos enteros vividos por el partícipe a partir del diferimiento d_s, tal que la prestación de seguro asociada a ese período sea mayor o igual a la prima pura de la operación Π.

Por tanto $b^{\epsilon^{max}}$ es el mayor b^{ϵ^t} $\forall b^{\epsilon^t} \in [0, m_s - 1]$ tal que $\alpha^s V^{d_s + b^{\epsilon^t} + 1/2} \geq \Pi$

Una forma cómoda de calcular $b^{\epsilon^{max}}$ es a través de b. Siendo b aquel valor entero que satisface:

$$\Pi = \alpha^s V^{d_s + b + 1/2}$$

por tanto, despejando, el valor de b de la expresión anterior, su valor vendrá dado por la parte entera de:

$$\frac{ln\Pi - ln\alpha^s}{lnV} - (d_s + 1/2)$$

como $b^{\epsilon^{max}} \leq m_s - 1$ entonces :

$$b^{\epsilon^{max}} = \begin{cases} m_s - 1 & b \geq m_s - 1 \\ \text{b} & b < m_s - 1 \end{cases}$$

En general, el valor de b^{ϵ^t} $\forall b^{\epsilon^t} \in [b^{\epsilon^{min}}, b^{\epsilon^{max}-1}]$ podemos obtenerlo a través de la siguiente expresión:

$$b^{\epsilon^t} = \frac{ln\Pi^{\epsilon^t} - ln\alpha^s}{lnV} - (d_s + 1/2)$$

Conocido b^{ϵ^t}, podemos determinar el riesgo ϵ^t, a través de la siguiente relación:

$$\epsilon^t = {}_{d_s/b^{\epsilon^t}}q_x$$

4.3.1.4 Variable aleatoria pérdida del reasegurador. Cálculo de la prima pura de reaseguro

Estudiaremos previamente las variables aleatorias que componen la variable aleatoria pérdida del reaseguradora L_i^R, analizando la variable aleatoria ξ_i^p en las dos modalidades de reaseguro.

Análisis de la variable aleatoria prestaciones del reasegurador en la modalidad de reaseguro del percentil

Las realizaciones de la variable aleatoria $\xi_i^{p,R}$ vienen definidas por la siguiente expresión:

$$M(i,t_k) = \begin{cases} 0 & k \leq h \\ M_1(i,t_k) & k > h \quad \text{y} \quad t_k < d_r + s^\epsilon \\ M_2(i,t_k) & k > h \quad \text{y} \quad t_k \geq d_r + s^\epsilon \end{cases}$$

en nuestro caso al no haber prestación de renta:

$$M(i,t_k) = \begin{cases} 0 & k \leq h \\ M_1(i,t_k) & k > h \end{cases}$$

siendo:

$$M_1(i,t_k) = l(i,t_k)^\epsilon \left(\frac{1+Ip}{1+Ir}\right)^{t_k+1/2} \qquad \forall k > h \quad (I)$$

como $l(i,t_k)^\epsilon = \alpha^s V^{t_k+1/2} - \Pi^\epsilon$ y

$\Pi^\epsilon = \alpha^s \, V^{d_s+b^\epsilon+1/2} = \alpha^s \, V^{t_h+1/2}$

sustituyendo y simplificando en (I):

$$M_1(i,t_k) = (\alpha^s - \Pi^\epsilon) \left(\frac{1+Ip}{1+Ir}\right)^{t_k+1/2} =$$

$$= \alpha^s \left[(1+Ip)^{t_k+1/2} - (1+Ip)^{t_k-t_h}\right] - (1+Ir)^{-t_k-1/2} \quad \forall k > h$$

Análisis de la variable aleatoria prestaciones del reasegurador en la modalidad de reaseguro de diferencia de siniestralidad

A continuación damos las expresiones de la función $Z_{i,h}$ y de la función $T_{i,h}$ para la operación objeto de estudio, para el reaseguro tipo A y tipo B.

Si el reasegurador es del **tipo A**, la función $Z_{i,h}$ vendrá dada por la siguiente expresión:

$$Z_{i,h} = \begin{cases} \Pi^{Rec}(1+Ip) & h = 1 \\ \\ Z_{i,h-1}(1+Ip) & \text{si} \quad Z_{i,h-1} \geq R_{i,h-1} + V_{i,h-1} \\ (R_{i,h-1} + V_{i,h-1})(1+Ip) & \text{si} \quad Z_{i,h-1} < R_{i,h-1} + V_{i,h-1} \\ & 1 < h \leq d_s + m_s \end{cases}$$

Podemos observar que la función $Z_{i,h}$ es muy parecida a la de la renta diferida y temporal, la única diferencia la encontramos en el último tramo donde no se contempla el pago en concepto de seguro al partícipe.

Respecto a la función $T_{i,h}$, en este caso el reasegurador no sólo cubre las desviaciones por provisiones matemáticas y reservas de solvencia, sino que también ha de cubrir el capital en riesgo de la operación, por tanto:

$$T_{i,h} = \begin{cases} T^1_{i,h} & h = 1, \ldots, d_s + m_s - 1 \\ \\ T^2_{i,h} & h = d_s + 1, \ldots, d_s + m_s \end{cases}$$

donde:

$$T^1_{i,h} = \max\{0, V_{i,h} + R_{i,h} - Z_{i,h}\} \quad h = 1, \ldots, d_s + m_s - 1$$

y

$$T^2_{i,h} = \max\{0, \alpha^s - Z_{i,h}(1+Ip)^{-1/2}\} \quad h = d_s + 1, \ldots, d_s + m_s$$

Al igual que hicimos con las rentas, estudiaremos como se ven afectados los términos del reasegurador ante una variación en el recargo de seguridad del plan.

Si el *margen de solvencia es una proporción de la provisión matemática* , y el recargo satisface:

$$\lambda \leq \frac{V_{i,1} + R_{i,1}}{\Pi(1 + Ip)} - 1 \quad (I)$$

una variación en el recargo de seguridad del plan sólo afectará al primer término del disponible $Z_{i,1}$ (como puede verse a través de la fórmula), y por tanto a $T_{i,1}^1$, y sólo a $T_{i,1}^2$ en el supuesto que la operación sea inmediata $d_s = 0$ y el capital en riesgo asociado al primer período positivo $T_{i,1}^2 > 0$).

En caso contrario no podremos establecer a priori qué términos del disponible $Z_{i,h}$, y por tanto, qué términos a pagar por el reasegurador se verán afectados.

Si *el margen de solvencia, son las reservas de solvencia*, al igual que sucede con la renta, una variación en el recargo de seguridad vía modificación del riesgo ϵ afectaría a todos los términos que debe de satisfacer el reasegurador, tanto los dados por la función $T_{i,h}^1$ como por la función $T_{i,h}^2$, ya que se vería modificadas las reservas de solvencia $RS_{i,h}^{\epsilon} \quad \forall h$.

Si el reasegurador es del **tipo B**, la función $Z_{i,h}$ vendrá dada por la siguiente expresión:

$$Z_{i,h} = \begin{cases} \Pi^{Rec}(1 + Ip) & h = 1 \\ (R_{i,h-1} + V_{i,h-1})(1 + Ip) & 1 < h \leq d_s + m_s \end{cases}$$

Respecto a la función $T_{i,h}$:

$$T_{i,h} = \begin{cases} T_{i,h}^1 & h = 1, \ldots, d_s + m_s - 1 \\ T_{i,h}^2 & h = d_s + 1, \ldots, d_s + m_s \end{cases}$$

donde:

$$T^1_{i,h} = V_{i,h} + R_{i,h} - Z_{i,h} \quad h = 1, \ldots, d_s + m_s - 1$$

y

$$T^2_{i,h} = \max\{0, \alpha^s - Z_{i,h}(1 + Ip)^{-1/2}\} \quad h = d_s + 1, \ldots, d_s + m_s$$

Si *el margen de solvencia es un porcentaje de la provisión matemática*, una variación del recargo de seguridad, sea cual sea su valor, sólo afecta al primer término que ha de satisfacer el reasegurador en concepto de desviaciones por provisiones matemáticas y márgenes de solvencia $T^1_{i,1}$, permaneciendo el resto de términos iguales.

Con respecto al capital en riesgo asociado a cada período h, sólo se verá afectado por una variación en el recargo de seguridad el término asociado al primer período $T^2_{i,1}$, el cual sólo estará definido para operaciones inmediatas $d_s = 0$ y cuyo capital en riesgo en dicho período sea positivo $T^2_{i,1} > 0$, por ser el único que depende de $Z_{h,1}$.

Si *el margen de solvencia son las reservas de solvencia*, al igual que sucede cuando el reasegurador es del tipo A, una variación en el recargo de seguridad vía modificación del riesgo ϵ afectaría a todos los términos que debe de satisfacer el reasegurador, tanto los dados por la función $T^1_{i,h}$ como por la función $T^2_{i,h}$.

En las operaciones de seguro , la provisión matemática asociada a cada período será siempre menor que el disponible correspondiente a ese período, salvo en los períodos de diferimiento en los cuales la provisión matemática si supera al disponible del plan . Esta circunstancia hace que salvo en los períodos de diferimiento del seguro, en los cuales siempre queda garantizado $R_{i,h} + V_{i,h} > Z_{i,h} \quad \forall h < d_s$, en el resto de de períodos, si $R_{i,h} + V_{i,h} < Z_{i,h} \quad \forall h \geq d_s$ (que suele ser lo normal, a no ser que las reservas de solvencia sean muy elevadas) , el reasegurador tipo A no satisfará desembolsos de importe $T^1_{i,h}$, y el reasegurador tipo B obtendrá un beneficio en cada período de importe el valor absoluto de $T^1_{i,h}$.

Por consiguiente, podemos afirmar que en la mayoría de los casos, a diferencia de lo que sucede en las opearciones de renta, el reaseguro tipo A y el reaseguro tipo B no serán equivalentes sea cual sea el valor del recargo dando lugar a primas de reaseguro distintas.

En el supuesto que el margen de solvencia vengan dado por las reservas de solvencia el reaseguro tipo A y el reaseguro tipo B tampoco serán equivalentes ya que $RS^{\epsilon}_{i,h} + V_{i,h} < Z_{i,h} \quad \forall h \geq d_s$.

Al igual que hicimos con las rentas, para aquellos casos en que una variación en el recargo de seguridad, provoca una variación solamente en el primer término del disponible $Z^1_{i,h}$, (reaseguro tipo A siempre y cuando $\lambda < \frac{R_{i,1}+V_{i,1}}{\Pi(1+Ip)} - 1$ o bien el reaseguro tipo B, sea cual sea el valor de λ siempre y cuando en ambos el margen de solvencia sea una proporción de la provisión matemática correspondiente), determinaremos cual será la expresión analítica $T^1_{i,1}$, que será común para ambos tipos. Nosotros lo que haremos, al igual que hicimos con las rentas, será obtener la expresión analítica no sólo de $T^1_{i,1}$, sino de $T^1_{i,h} \quad h = 1, \ldots, d_r + m_r - 1$ para el reaseguro tipo B.

Teniendo presente que

$$R_{i,h} = p\, V_{i,h}$$

y

$$V_{i,h} = \begin{cases} \alpha^s \sum_{t=d_s}^{d_s+m_s-1} \frac{d_{x+t}}{l_{x+h}} (1+Ip)^{-t-1/2+h} & 0 < h \leq d_s \\ \\ \alpha^r \sum_{t=h}^{d_s+m_s-1} \frac{d_{x+t}}{l_{x+h}} (1+Ip)^{-t-1/2+h} & d_r < h \leq d_s + m_s - 1 \end{cases}$$

la función $T^1_{i,h}$, adoptará la siguiente expresión:

$$T^1_{i,h} = \begin{cases} \alpha^s \left[\frac{(1+p)}{l_{x+1}} - \frac{(1+\lambda)}{l_x} \right] \sum_{s=d_s}^{d_s+m_s-1} d_{x+s} (1+Ip)^{-s-1/2+h} & h = 1 \\ \\ \left[\frac{\alpha^s (1+p) d_{x+h-1}}{l_{x+h-1} l_{x+h}} \right] \sum_{s=d_s}^{d_s+m_s-1} d_{x+s} (1+Ip)^{-s-1/2+h} & 1 < h \leq d_s \\ \\ \left[\frac{\alpha^s (1+p) d_{x+h-1}}{l_{x+h-1} l_{x+h}} \right] \sum_{s=h}^{d_s+m_s-1} d_{x+s} (1+Ip)^{-s-1/2+h} & d_s < h \leq d_s + m_s - 1 \end{cases}$$

Conocida la función $T_{i,h}$ podemos calcular las realizaciones de la variable aleatoria $\xi^{c,R}_i$:

$$M(i,t) = \begin{cases} \sum_{h=1}^{t} T_{i,h}^1 (1+Ir)^{-h} & 0 \leq t < d_s \\ \sum_{h=1}^{t} T_{i,h}^1 (1+Ir)^{-h} + T_{i,t+1}^2 (1+Ir)^{-t-1/2} & d_s \leq t < d_s + m_s \\ \sum_{h=1}^{d_s+m_s-1} T_{i,h}^1 (1+Ir)^{-h} & t \geq d_s + m_s \end{cases}$$

siendo para $t = 0$, $\sum_{h=1}^{0} T_{i,h}^1 (1+Ir)^{-h} = 0$

Una forma alternativa de obtener la $E[\xi_i^{c,R}]$ es como suma de: el valor actual actuarial al tipo de interés del reasegurador de una renta vencida, inmediata y temporal de $d_s + m_s - 1$ términos de cuantía $T_{i,h}^1 \quad \forall h = 1, \ldots, d_s + m_s - 1$, y del valor actual al tipo de interés del reasegurador de un seguro diferido d_s períodos y temporal de m_s términos variables de cuantía $T_{i,h}^2 \quad \forall h = d_s + 1, \ldots, d_s + m_s$.

$$E[\xi_i^{c,R}] = \sum_{t=1}^{d_s+m_s-1} T_{i,t}^1 \; {}_tP_x (1+Ir)^{-t} + \sum_{t=d_s+1}^{d_s+m_s} T_{i,t}^2 \; {}_{t-1/}q_x (1+Ir)^{-t+1/2}$$

Análisis de la variable aleatoria contraprestaciones del reasegurador

La variable aleatoria $\xi_i^{c,R}$, por ser la operación a prima única, pasa a ser una variable cierta de importe la prima de reaseguro Π^R:

$$\xi_i^{c,R} = \Pi^R$$

En consecuencia, la prima pura de reaseguro vendrá dada por la esperanza matemática de la variable aleatoria $\xi_i^{p,R}$:

$$\Pi^R = E[\xi_i^{p,R}]$$

Si la modalidad de reaseguro es el del percentil entonces la prima de reaseguro se podrá calcular como:

$$\Pi^R = \sum_{j=d_s}^{d_s+b^\epsilon-1} (\alpha^s - \Pi^\epsilon (1+Ip)^{j+1/2})(1+Ir)^{-j-1/2} \; {}_{j/}q_x$$

Podemos observar que la prima pura de reaseguro, fijado un nivel de riesgo a reasegurar ϵ, es independiente de la temporalidad de la operación, siempre y cuando

$m_s - 1 \geq b^\epsilon$, debido a que un aumento en ésta no afecta al valor del $Per_\epsilon[L_i^*]$ y por tanto al riesgo de insolvencia, por ser los términos de la variable aleatoria L_i^* asociados a la nueva temporalidad más pequeños que el percentil.

En consecuencia, la temporalidad no afecta al valor de b^ϵ y por extensión a la prima de reaseguro.

Si el reaseguro es de diferencia de siniestralidad podemos calcular la prima de raseguro del siguiente modo:

$$\Pi^R = \sum_{h=1}^{d_s+m_s-1} T^1_{i,h}\ {}_hP_x(1+Ir)^{-h} + \sum_{h=d_s+1}^{d_s+m_s} T^2_{i,h}\ {}_{h-1/}q_x(1+Ir)^{-h+1/2}$$

4.2.1.5 Variable aleatoria pérdida ajustada del reasegurador. Cálculo de la prima pura ajustada de reaseguro

En este apartado analizamos la variable aleatoria asociada al beneficio del plan $\xi_i^{b,R}$ en las dos modalidades de reaseguro estudiadas.

Análisis de la variable asociada al beneficio del plan en la modalidad de reaseguro del percentil

En general, las realizaciones de la variable $\xi_i^{b,R}$ en la modalidad del reaseguro del percentil $b(i,t_k)$ vienen dadas por:

$$b(i,t_k) = \begin{cases} -l(i,t_k)^\epsilon \left(\frac{1+Ip}{1+Ir}\right)^{t_k+1/2} & k \leq h \\ 0 & k > h \end{cases}$$

en nuestro caso particular:

$$b(i,t_k) = \begin{cases} \Pi^\epsilon \left(\frac{1+Ip}{1+Ir}\right)^{t_k+1/2} & t_k \leq d_s - 1 \\ 0 & d_s - 1 < t_k \leq d_s + b^\epsilon \\ [\Pi^\epsilon(1+Ip)^{t_k+1/2} - \alpha^s](1+Ir)^{-t_k-1/2} & d_s + b^\epsilon < t_k \leq d_s + m_s \\ \Pi^\epsilon \left(\frac{1+Ip}{1+Ir}\right)^{t_k+1/2} & t_k > d_s + m_s \end{cases}$$

La explicación es sencilla, si el partícipe fallece en el período de diferimiento de la operación, o bien, en un período fuera ya del plazo de vigencia de la misma, el beneficio del plan en ese período viene dado por la prima recargada cobrada y capitalizada a ese período. En el supuesto que el fallecimiento del partícipe se de en un período comprendido entre $d_s + b^c$ y $d_s + m_s$ el beneficio en ese período viene dado por la diferencia entre la prima recargada y capitalizada, y el pago del seguro. Si el partícipe fallece en un período comprendido entre $d_s - 1$ y $d_s + b^c$, el plan tiene pérdidas y por tanto las realizaciones de $\xi_i^{b,R}$ son cero.

La actualización para determinar el beneficio actual, se realiza con el tipo de interés técnico del reaseguro.

Análisis de la variable asociada al beneficio del plan en la modalidad de reaseguro de diferencia de siniestralidad

En este caso la función $H_{i,h}$ viene dada por la siguiente expresión:

$$H_{i,h} = \begin{cases} Z_{i,h}(1+Ip)^{-1/2} & 1 \le h < d_s \\ & \\ Z_{i,h}(1+Ip)^{-1/2} - \alpha_h^s & \text{si} \quad Z_{i,h}(1+Ip)^{-1/2} - \alpha_h^s > 0 \\ 0 & \text{si} \quad Z_{i,h}(1+Ip)^{-1/2} - \alpha_h^s \le 0 \\ & d_s < h \le d_s + m_s \\ & \\ Z_{i,d_s+m_s)}(1+Ip)^{-1/2} & h > d_s + m_s \end{cases}$$

Conocida la función $H_{i,h}$ podemos determinar las realizaciones de la variable aleatoria $\xi_i^{b,R}$:

$$b(i,t) = \begin{cases} H_{i,t+1}(1+Ir)^{-t-\frac{1}{2}} & 0 \le t < d_s + m_s \\ & \\ H_{i,d_s+m_s}(1+Ir)^{-d_s-m_s-\frac{1}{2}} & t \ge d_s + m_s \end{cases}$$

Cálculo de la prima ajustada de reaseguro

Conocidas las realizaciones de $\xi_i^{b,R}$ podemos determinar la prima ajustada de reaseguro aplicando la siguiente expresión:

$$\Pi^{R,A} = E[\xi_i^{p,R}] - E[\xi_i^{b,R}]$$

En la modalidad de reaseguro del percentil

$$\Pi^{R,A} = E[\xi_i^{p,R}] - E[\xi_i^{b,R}] =$$

$$\sum_{j=d_s}^{d_s+b^\epsilon-1} (\alpha^s - \Pi^\epsilon(1+Ip)^{j+1/2})(1+Ir)^{-j-1/2}\ {}_{j/}q_x - E[\xi_i^b]$$

como:

$$E[\xi_i^{b,R}] = \sum_{j=0}^{d_s-1} \Pi^\epsilon \left(\frac{1+Ip}{1+Ir}\right)^{j+1/2} {}_{j/}q_x +$$

$$\sum_{j=d_s+b^\epsilon}^{d_s+m_s-1} (\Pi^\epsilon(1+Ip)^{j+1/2} - \alpha^s)(1+Ir)^{-j-1/2}\ {}_{j/}q_x +$$

$$\sum_{j=d_s+m_s}^{w-x-1} \Pi^\epsilon \left(\frac{1+Ip}{1+Ir}\right)^{j+1/2} {}_{j/}q_x$$

en consecuencia:

$$\Pi^{R,A} = \sum_{j=d_s}^{d_s+m_s-1} (\alpha^s - \Pi^\epsilon(1+Ip)^{j+1/2})(1+Ir)^{-j-1/2}\ {}_{j/}q_x -$$

$$\Pi^\epsilon \left[\sum_{j=0}^{d_s-1} \left(\frac{1+Ip}{1+Ir}\right)^{j+1/2} {}_{j/}q_x + \sum_{j=d_s+m_s}^{w-x-1} \left(\frac{1+Ip}{1+Ir}\right)^{j+1/2} {}_{j/}q_x\right]$$

En este caso hay que hacer constar, a diferencia de lo que sucedía cuando no había reparto de beneficios, que la prima de reaseguro si que depende de la temporalidad de la operación m_s, así cuanto mayor sea ésta, menor será el beneficio medio cedido al reaseguro $E[\xi_i^{b,R}]$ y por tanto menor será la prima de reaseguro $\Pi^{R,A}$. Ver ANEXO 4-2.

Si el reaseguro es de diferencia de siniestralidad, podemos calcular la prima ajustada de reaseguro mediante la expresión:

$$\Pi^{R,A} = \sum_{h=1}^{d_s+m_s-1} T^1_{i,h}\ {}_hP_x(1+Ir)^{-h} + \sum_{h=d_s+1}^{d_s+m_s} T^2_{i,h}\ {}_{h-1/}q_x(1+Ir)^{-h+1/2} -$$

$$\sum_{h=1}^{w-x-1} H_{i,h}\ {}_{h-1/}q_x(1+Ir)^{-h+1/2}$$

Al igual que sucede con las rentas, si $Ip = Ir$ el reaseguro tipo A y tipo B, tendrán la mima prima ajustada de reaseguro para cualquier valor del recargo, ya que el valor actualizado del beneficio repartido coincidirá en ambos casos.

Si la operación actuarial es un seguro inmediato y vitalicio, y el reaseguro es del tipo B, puede darse el caso que la prima de reaseguro coincida con la prima de reaseguro ajustada:

$$\Pi^R = \Pi^{R,A}$$

cuando el disponible del plan en el momento del fallecimiento del partícipe, no pueda cubrir el importe del seguro, siendo entonces $H_{i,h} = 0 \quad \forall h = 1, \ldots, w-x-1$. Esta circunstancia sucederá cuando el margen de solvencia venga dado por las reservas de solvencia o por porcentajes "pequeños" de la provisión matemática.

Respecto al signo de $\Pi^{R,A}$ en la modalidad de reaseguro del percentil, depende al igual que en la operación de renta, de la relación entre Ip y Ir, dándose en este caso el siguiente comportamiento:

- Si $Ip > Ir$ la prima ajustada de reaseguro es siempre negativa sea cual sea el riesgo del plan $\epsilon^t \in [0, \epsilon^{max}]$,
- Si $Ip = Ir$ la prima ajustada será negativa para cualquier nivel de insolvencia del plan, menos para cuando $\epsilon = \epsilon^{max}$, en cuyo caso el valor de la prima ajustada de reaseguro será cero.

- Si $Ip < Ir$, la prima de reaseguro puede ser positiva , según el resto de características técnicas de la operación, para aquellos niveles grandes de riesgo de riesgo del plan.

En el ANEXO 4-2 ilustramos esta relación.

En el caso particular del reaseguro de diferencia de siniestralidad, si el margen de solvencia es una proporción p de la provisión matemática, el signo de $\Pi^{R,A}$ depende no sólo de Ip e Ir, sino también de la proporción p, teniéndose que analizar el signo en cada caso. Por último si el margen de solvencia es la reserva de solvencia, el valor de $\Pi^{R,A}$ será siempre negativo.

4.3.2 Estudio de la estrategia óptima

En este apartado estudiamos la estrategia óptima recargo reaseguro de la operación de seguro , determinando en la medida que nos sea posible la expresión analítica de la función K.

4.3.2.1 Modalidad de reaseguro del percentil sin reparto de beneficios

Nos plantearemos obtener la función $K(\epsilon)$, utilizando la misma metodología realizada en el caso de las rentas diferidas y temporales.

Iniciaremos el análisis estudiando el comportamiento de $\Delta VPREC(\epsilon^t)$ y $\Delta VPREA(\epsilon^t)$.

Si el nivel de riesgo del plan queda fijado en un nivel ϵ^t entonces:

$$VPREC(\epsilon^t) = \Pi(1+\lambda^{\epsilon^t}) = \Pi^{\epsilon^t} = \alpha^s V^{d_s+b^{\epsilon^t}+1/2} \quad (I)$$

$$VPREA(\epsilon^t) = \sum_{j=d_s}^{d_s+b^{\epsilon^t}-1} \left(\alpha^s - \Pi^{\epsilon^t}(1+Ip)^{j+1/2}\right)(1+Ir)^{-j-1/2} \ {}_{j/}q_x(1+\lambda^R)$$

Análogamente, si el riesgo a reasegurar queda fijado en un nivel ϵ^{t+1} entonces:

$$VPREC(\epsilon^{t+1}) = \Pi(1+\lambda^{\epsilon^{t+1}}) = \Pi^{\epsilon^{t+1}} = \alpha^s V^{d_s+b^{\epsilon^{t+1}}+1/2}$$

$$VPREA(\epsilon^{t+1}) = \sum_{j=d_s}^{d_s+b^{\epsilon^{t+1}}-1} \left(\alpha^s - \Pi^{\epsilon^{t+1}}(1+Ip)^{j+1/2}\right)(1+Ir)^{-j-1/2} \ {}_{j/}q_x(1+\lambda^R)$$

A través de las expresiones anteriores podemos determinar $\Delta VPREC(\epsilon^t)$ y de $\Delta VPREA(\epsilon^t)$:

$$\Delta VPREC(\epsilon^t) = VPREC(\epsilon^{t+1}) - VPREC(\epsilon^t)$$

sustituyendo:

$$\Delta VPREC(\epsilon^t) = \alpha^s V^{d_s + b^{\epsilon^{t+1}} + 1/2} - \alpha^s V^{d_s + b^{\epsilon^t} + 1/2}$$

como trabajamos con variables aleatorias discretas, consideraremos ϵ^{t+1} como aquel nivel de riesgo a reasegurar que satisface: $b^{\epsilon^{t+1}} = b^{\epsilon^t} + 1$, por tanto:

$$\Delta VPREC(\epsilon^t) = \alpha^s V^{d_s + b^{\epsilon^t} + 3/2} - \alpha^s V^{d_s + b^{\epsilon^t} + 1/2} =$$

$$= -\alpha^s V^{d_s + b^{\epsilon^t} + 3/2} Ip = -VPREC(\epsilon^t)\, Ip\, V$$

podemos también expresar $\Delta VPREC(\epsilon^{t+1})$ en función de $\Delta VPREC(\epsilon^t)$:

$$\Delta VPREC(\epsilon^{t+1}) = \Delta VPREC(\epsilon^t) V$$

Las observaciones entorno a $\Delta VPREC(\epsilon^t)$ son las siguientes:

- $\Delta VPREC(\epsilon^t) < 0$ conforme aumenta el riesgo reasegurado.
- $\Delta VPREC(\epsilon^t)$ sigue una progresión geométrica decreciente de razón V conforme aumenta el riesgo reasegurado.
- $\Delta VPREC(\epsilon^t)$ considerado en valores absolutos, es inversamente proporcional al diferimiento de la operación , y directamente proporcional al término de cuantía α^s y al tipo de interés téncnico del plan.

Respecto a $\Delta VPREA(\epsilon^t)$ sabemos que :

$$\Delta VPREA(\epsilon^t) = VPREA(\epsilon^{t+1}) - VPREA(\epsilon^t)$$

sustituyendo:

$$\Delta VPREA(\epsilon^t) = (1+\lambda^R)\left[\sum_{j=d_s}^{d_s+b^{\epsilon^{t+1}}-1}\left(\alpha^s - \Pi^{\epsilon^{t+1}}(1+Ip)^{j+1/2}\right)(1+Ir)^{-j-1/2}\ {}_{j/}q_x - \right.$$

$$\left.\sum_{j=d_s}^{d_s+b^{\epsilon^t}-1}\left(\alpha^s - \Pi^{\epsilon^t}(1+Ip)^{j+1/2}\right)(1+Ir)^{-j-1/2}\ {}_{j/}q_x\right]$$

como $b^{\epsilon^{t+1}} = b^{\epsilon^t}+1$ y $\Pi^{\epsilon^{t+1}} = \Pi^{\epsilon^t}(1+Ip)^{-1}$ entonces:

$$\Delta VPREA(\epsilon^t) = (1+\lambda^R)\left[\sum_{j=d_s}^{d_s+b^{\epsilon^t}}\left(\alpha^s - \Pi^{\epsilon^t}(1+Ip)^{-1}(1+Ip)^{j+1/2}\right)(1+Ir)^{-j-1/2}\ {}_{j/}q_x - \right.$$

$$\left.\sum_{j=d_s}^{d_s+b^{\epsilon^t}-1}\left(\alpha^s - \Pi^{\epsilon^t}(1+Ip)^{j+1/2}\right)(1+Ir)^{-j-1/2}\ {}_{j/}q_x\right]$$

simplificando y sacando factor común Π^{ϵ^t} y Ip:

$$\Delta VPREA(\epsilon^t) = (1+\lambda^R)\Pi^{\epsilon^t} Ip\left[\sum_{j=d_s}^{d_s+b^{\epsilon^t}}(1+Ip)^{j-1/2}(1+Ir)^{-j-1/2}\ {}_{j/}q_x\right] \quad (II)$$

podemos también expresar $\Delta VPREA(\epsilon^{t+1})$ en función de $\Delta VPREA(\epsilon^t)$:

$$\Delta VPREA(\epsilon^{t+1}) = (1+\lambda^R)\left[\Delta VPREA(\epsilon^t)(1+Ip)^{-1} + \right.$$

$$\left.\Pi^{\epsilon^t} Ip(1+Ip)^{d_s+b^{\epsilon^t}-1/2}(1+Ir)^{-d_s-b^{\epsilon^t}-3/2}\ {}_{d_s+b^{\epsilon^t}-1/}q_x\right]$$

Las observaciones entorno a $\Delta VPREA(\epsilon^t)$ son las siguientes:

- $\Delta VPREC(\epsilon^t) > 0$ conforme aumenta el riesgo reasegurado.
- $\Delta VPREC(\epsilon^t)$, es inversamente proporcional al diferimiento de la operación y al tipo de interés técnico del reaseguro, y directamente proporcional al término de cuantía α^s, al tipo de interés téncnico del plan, al recargo del reasegurador y a la edad del partícipe.

Podemos relacionar $\Delta VPREC(\epsilon^t)$ con $\Delta VPREA(\epsilon^t)$ multiplicando y dividiendo a la expresión (II) por $(1+Ip)$:

$$\Delta VPREA(\epsilon^t) = (1+\lambda^R)\Pi^{\epsilon^t} Ip \left(\frac{1+Ip}{1+Ip}\right) \left[\sum_{j=d_s}^{d_s+b^{\epsilon^t}} (1+Ip)^{j-1/2}(1+Ir)^{-j-1/2} \; {}_{j/}q_x\right]$$

como $-\Delta VPREC(\epsilon^t) = \Pi^{\epsilon^t} \frac{Ip}{(1+Ip)}$ entonces:

$$\Delta VPREA(\epsilon^t) = -\Delta VPREC(\epsilon^t)(1+\lambda^R) \left[\sum_{j=d_s}^{d_s+b^{\epsilon^t}} (1+Ip)^{j+1/2}(1+Ir)^{-j-1/2} \; {}_{j/}q_x\right]$$

por tanto:

$$K(\epsilon^t) = (1+\lambda^R) \left[\sum_{j=d_s}^{d_s+b^{\epsilon^t}} \left(\frac{1+Ip}{1+Ir}\right)^{j+1/2} \; {}_{j/}q_x\right]$$

[5]

Podemos comprobar que la función $K(\epsilon^t)$ es siempre creciente conforme aumenta el riesgo reasegurado sean cuales sean las características técnicas de la operación, por tanto la estrategia óptima dependerá del valor que tome $K(\epsilon^{max})$ y $K(\epsilon^{min})$. Así si:

1. $K(\epsilon^{max}) \leq 1$. El riesgo óptimo a reasegurar $\epsilon^* = \epsilon^{max}$.

2. $K(\epsilon^{max}) > 1$ y $k(\epsilon^{min}) < 1$. El riesgo óptimo pertenecerá al siguiente intervalo: $\epsilon^{min} = 0 < \epsilon^* \leq \epsilon^{max}$

3. $K(\epsilon^{min}) \geq 1$. El riesgo óptimo $\epsilon^* = \epsilon^{min} = 0$. En este caso el coste de la operación coincide con la prima pura financiera.

A continuación buscaremos las restricciones que ha de cumplir el recargo del reasegurador λ^R para que se satisfagan cada uno de los tres casos.

[5]En el caso particular que $Ip = Ir$, $K(\epsilon^t) = (1+\lambda^R)\left[\sum_{j=d_s}^{d_s+b^{\epsilon^t}} {}_{j/}q_x\right] = (1+\lambda^R)\; {}_{d_s/b^{\epsilon^t}}q_x = (1+\lambda^R)\epsilon^t$, por tanto la función K^{ϵ^t} es una proporción $(1+\lambda^R)$ del riesgo reasegurado.

- Respecto al primer caso $K(\epsilon^{max}) \leq 1$, si aplicamos la definición de $K(\epsilon)$ a esta restricción :

$$K(\epsilon^{max}) = (1+\lambda^R)\left[\sum_{j=d_s}^{d_s+b^{\epsilon^{max}}} \left(\frac{1+Ip}{1+Ir}\right)^{j+1/2} {}_{j/}q_x\right]$$

despejando el recargo del reasegurador λ^R :

$$\lambda^R \leq \frac{1}{\sum_{j=d_s}^{d_s+b^{\epsilon^{max}}} \left(\frac{1+Ip}{1+Ir}\right)^{j+1/2} {}_{j/}q_x} - 1 \quad (CS)$$

En consecuencia si λ^R cumple esta desigualdad podemos afirmar que el riesgo óptimo a reasegurar $\epsilon^* = \epsilon^{max}$.

- En el segundo caso dos son las condiciones que se han de cumplir: $k(\epsilon^{max}) > 1$ y $k(\epsilon^{min}) < 1$. Estas se darán si λ^R satisface:

$$\lambda^R > \frac{1}{\sum_{j=d_s}^{d_s+b^{\epsilon^{max}}} \left(\frac{1+Ip}{1+Ir}\right)^{j+1/2} {}_{j/}q_x} - 1 \quad (CS)$$

y

$$\lambda^R < \frac{1}{\sum_{j=d_s}^{d_s+b^{\epsilon^{min}}} \left(\frac{1+Ip}{1+Ir}\right)^{j+1/2} {}_{j/}q_x} - 1 \quad (DS)$$

como $b^{\epsilon^{min}} = 0$, podemos también expresar (DS) :

$$DS = \frac{1}{\left(\frac{1+Ip}{1+Ir}\right)^{d_s+1/2} {}_{d_s/}q_x} - 1$$

por tanto si $CS < \lambda^R < DS$, el riesgo óptimo vendrá dado por aquel $\epsilon^s \in (0,\epsilon^{max}]$ tal que $K(\epsilon^s) \geq 1$ y $K(\epsilon^{s-1}) < 1$. Estas condiciones también las podemos expresar así:

$$\lambda^R \geq \frac{1}{\sum_{j=d_s}^{d_s+b^{\epsilon^s}} \left(\frac{1+Ip}{1+Ir}\right)^{j+1/2} {}_{j/}q_x} - 1$$

y

$$\lambda^R < \frac{1}{\sum_{j=d_s}^{d_s+b^{\epsilon^s}-1} \left(\frac{1+Ip}{1+Ir}\right)^{j+1/2} {}_{j/}q_x} - 1$$

- Por último, $\epsilon^* = 0$ si $K(\epsilon^{min}) \geq 1$. En este caso el recargo del reasegurador deberá cumplir:

$$\lambda^R \geq \frac{1}{\left(\frac{1+Ip}{1+Ir}\right)^{d_s+1/2} {}_{d_s/}q_x} - 1 \quad (DS)$$

Conclusión:

Si $\lambda^R \leq (CS) \longrightarrow \epsilon^* = \epsilon^{max}$.

Si $(CS) < \lambda^R < (DS) \longrightarrow \epsilon^* \in (0, \epsilon^{max}]$

Si $\lambda^R \geq (DS) \longrightarrow \epsilon^* = \epsilon^{min} = 0$.

En el ANEXO 4-2 se estudiamos el comportamiento de (CS) y (DS).

4.3.2.2 Modalidad de reaseguro del percentil con reparto de beneficios

El objetivo en este apartado es determinar la expresión analítica de la función K^A, para ello necesitamos conocer $VPREC(\epsilon)$ y $VPREA(\epsilon)$, que en nuestro caso toman las siguientes expresiones:

$$VPREC(\epsilon) = \Pi(1+\lambda^\epsilon) = \Pi^{\epsilon'} = \alpha^s V^{d_s+b^\epsilon+1/2}$$

$$VPREA(\epsilon) = (1+\lambda^R)\left[\sum_{j=d_s}^{d_s+m_s-1} (\alpha^s - \Pi^\epsilon(1+Ip)^{j+1/2})(1+Ir)^{-j-1/2} {}_{j/}q_x - \right.$$

$$\left. \Pi^\epsilon \left(\sum_{j=0}^{d_s-1} \left(\frac{1+Ip}{1+Ir}\right)^{j+1/2} {}_{j/}q_x + \sum_{j=d_s+m_s}^{w-x-1} \left(\frac{1+Ip}{1+Ir}\right)^{j+1/2} {}_{j/}q_x\right)\right]$$

Como $VPREC(\epsilon)$ coincide con la modalidad de reaseguro anterior, entonces:

$$\Delta VPREC(\epsilon^t) = -\alpha^s V^{d_s+b^{\epsilon^t}+3/2} Ip = \Pi^{\epsilon^t} IpV$$

Respecto a $\Delta VPREA(\epsilon^t)$, como:

$$\Delta VPREA(\epsilon^t) = VPREA(\epsilon^{t+1}) - VPREA(\epsilon^t)$$

y

$$VPREA(\epsilon^t) = (1+\lambda^R)\left[\sum_{j=d_s}^{d_s+m_s-1}\left(\alpha^s - \Pi^{\epsilon^t}(1+Ip)^{j+1/2}\right)(1+Ir)^{-j-1/2}\ {}_{j/}q_x - \right.$$

$$\left.\Pi^{\epsilon^t}\left(\sum_{j=0}^{d_s-1}\left(\frac{1+Ip}{1+Ir}\right)^{j+1/2}{}_{j/}q_x + \sum_{j=d_s+m_s}^{w-x-1}\left(\frac{1+Ip}{1+Ir}\right)^{j+1/2}{}_{j/}q_x\right)\right]$$

$$VPREA(\epsilon^{t+1}) = (1+\lambda^R)\left[\sum_{j=d_s}^{d_s+m_s-1}(\alpha^s - \Pi^{\epsilon^{t+1}}(1+Ip)^{j+1/2})(1+Ir)^{-j-1/2}\ {}_{j/}q_x - \right.$$

$$\left.\Pi^{\epsilon^{t+1}}\left(\sum_{j=0}^{d_s-1}\left(\frac{1+Ip}{1+Ir}\right)^{j+1/2}{}_{j/}q_x + \sum_{j=d_s+m_s}^{w-x-1}\left(\frac{1+Ip}{1+Ir}\right)^{j+1/2}{}_{j/}q_x\right)\right]$$

sutituyendo y simplificando :

$$\Delta VPREA(\epsilon^t) = (1+\lambda^R)\Pi^{\epsilon^t} Ip\,V\left[\sum_{j=0}^{w-x-1}\left(\frac{1+Ip}{1+Ir}\right)^{j+1/2}{}_{j/}q_x\right]$$

Podemos observar que:

- $\Delta VPREA(\epsilon^t) > 0$ conforme aumenta el riesgo reasegurado.
- $\Delta VPREA(\epsilon^t)$ es directamente proporcional al tipo de interés técnico del plan y a la prima pura recargada Π^{ϵ^t}, e inversamente proporcional al tipo de interés técnico del reaseguro.

La obtención de K^A es inmediata relacionando $\Delta VPREA(\epsilon^t)$ con $\Delta VPREC(\epsilon^t)$ del siguiente modo:

como $\Delta VPREC(\epsilon^t) = -\Pi^{\epsilon^t} IpV$ entonces:

$$\Delta VPREA(\epsilon^t) = -\Delta VPREC(\epsilon^t)(1+\lambda^R)\left[\sum_{j=0}^{w-x-1}\left(\frac{1+Ip}{1+Ir}\right)^{j+1/2} {}_{j/}q_x\right]$$

al ser:

$$K^A(\epsilon^t) = -\frac{\Delta VPREA(\epsilon^t)}{\Delta VPREC(\epsilon^t)}$$

la función $K^A(\epsilon^t)$ tendrá la siguiente expresión:

$$K^A(\epsilon^t) = (1+\lambda^R)\left[\sum_{j=0}^{w-x-1}\left(\frac{1+Ip}{1+Ir}\right)^{j+1/2} {}_{j/}q_x\right]$$

Podemos observar como $K^A(\epsilon^t)$ es una función que depende de la relación entre el tipo de interés técnico del plan y el tipo de interés técnico del reaseguro, del recargo del reasegurador y de la edad del partícipe, siendo por tanto independiente con respecto al riesgo reasegurado, en consecuencia :

$$K^A(\epsilon^t) = K^A$$

Si consideramos el caso particular $Ip = Ir$ entonces:

$$K^A = (1+\lambda^R)$$

por tanto, podemos acotar los valores de K^A, en función de los tipo de interés técnicos del plan y del reaseguro. Así si:

$Ip > Ir$ entonces $K^A > (1+\lambda^R)$.

$Ip < Ir$ entonces $K^A < (1+\lambda^R)$

Esta propiedad de la función $K^A(\epsilon^t)$, al igual que sucedía con la renta, nos va a permitir determinar a priori cual es la estrategia óptima de la operación de seguro tan sólo conociendo la relación entre Ip y Ir.

Análisis del riesgo óptimo a reasegurar ϵ^*, en el supuesto que $Ip = Ir$

Si $Ip = Ir$, la función K^A asociada la podemos expresar como:

$$K^A = (1 + \lambda^R)$$

dependiendo exclusivamente del recargo del reasegurador λ^R. De todas maneras hay que tener presente que si $Ip = Ir$, la prima ajustada de reaseguro $\Pi^{R,A}$, siempre será menor o igual a cero $\forall \epsilon^t \in [0, \epsilon^{max}]$, por tanto, no tendrá sentido plantearnos la existencia de recargo por parte del reasegurador, siendo entonces:

$$K^A = 1$$

Esto nos lleva a que el coste de la operación es independiente del nivel de riesgo del plan.

En este caso el coste total de la operación coincide con la prima pura de la operación.

Análisis del riesgo óptimo a reasegurar ϵ^*, en el supuesto que $Ip > Ir$

En este caso hay que destacar que la prima ajustada de reaseguro siempre es negativa sea cual sea el riesgo que se reasegure $\epsilon^t \in [0, \epsilon^{max}]$, por ser $Ip > Ir$, en consecuencia no tiene sentido plantearse la exitencia de recargo del reasegurador, lo que nos lleva a que la función

$K^A > 1$

Esta circunstancia nos permite conocer a priori el riesgo óptimo a reasegurar ϵ^*, el cual vendrá dado por ϵ^{min}, siendo la estrategia óptima cubrir vía recargo de seguridad el riesgo de insolvencia del plan.

El coste total óptimo de la operación será en este caso menor que la prima pura.

Análisis del riesgo óptimo a reasegurar ϵ^*, en el supuesto que $Ip < Ir$

Si bien en los casos anteriores la prima ajustada de reaseguro era negativa, y por tanto no tenía sentido plantearse la exitencia de recargo del reasegurador, no tiene porque suceder así cuando $Ip < Ir$, ya que la prima ajustada de reaseguro puede ser positiva para riesgos a reasegurar grandes, y por tanto el recargo del reasegurador puede estar definido para estos valores de riesgo. En consecuencia la función K^A tendrá dos tramos:

$$K^A = \begin{cases} (1+\lambda^R)\left[\sum_{j=0}^{w-x-1}\left(\frac{1+Ip}{1+Ir}\right)^{j+1/2} {}_{j/}q_x\right] & \forall \epsilon_t \quad \text{tq} \quad \Pi^{R,A,\epsilon^t} > 0 \\ \left[\sum_{j=0}^{w-x-1}\left(\frac{1+Ip}{1+Ir}\right)^{j+1/2} {}_{j/}q_x\right] & \forall \epsilon_t \quad \text{tq} \quad \Pi^{R,A,\epsilon^t} \leq 0 \end{cases}$$

siendo Π^{R,A,ϵ^t} la prima ajustada de reaseguro asociada al nivel de riesgo del plan ϵ.

La estrategia óptima dependerá del recargo del reasegurador:

- Así, para aquellos valores de λ^R tal que:

$$K^A = (1+\lambda^R)\left[\sum_{j=0}^{w-x-1}\left(\frac{1+Ip}{1+Ir}\right)^{j+1/2} {}_{j/}q_x\right] < 1$$

  o bien despejando λ^R

$$\lambda^R < \frac{1}{\sum_{j=0}^{w-x-1}\left(\frac{1+Ip}{1+Ir}\right)^{j+1/2} {}_{j/}q_x} - 1$$

  el riesgo óptimo $\epsilon^* = \epsilon^{max}$, en consecuencia estrategia óptima será cubrir vía recargo de seguridad el riesgo de insolvencia.

- Para aquellos valores de λ^R tal que:

$$\lambda^R \geq \frac{1}{\sum_{j=0}^{w-x-1}\left(\frac{1+Ip}{1+Ir}\right)^{j+1/2} {}_{j/}q_x} - 1$$

  la estrategia óptima pasará a ser una combinación recargo reaseguro, debido al salto sufrido en los valores de la función $K^A(\epsilon^t)$, que ahora serán mayores que uno para aquellos niveles de riesgo que tengan asociadas primas ajustadas positivas. En particular la estrategia óptima vendrá dada por el menor nivel de riesgo que tenga asociada una prima ajustada positiva.

En el supuesto que todas la primas ajustadas fuesen negativas, al ser la función $K^A < (1+\lambda^R)$ la estrategia óptima vendrá dada por el riesgo a reasegurar $\epsilon^* = \epsilon^{max}$, ya que la ausencia de recargo de seguridad del reasegurador garantiza que $K^A < 1 \quad \forall \epsilon^t \in \quad [\epsilon^{min}, \epsilon^{max}]$

4.3.2.3 Modalidad de reaseguro de diferencia de siniestralidad sin reparto de beneficios

Al igual que sucede con la operación de renta, sólo podremos determinar la expresión de la función $K(\lambda_t)$ en aquellos reaseguros donde una variación en el recargo de seguridad modifique solamente el primer término de la función disponible $Z_{i,1}$.

Como ya vimos en su momento, esto sucede cuando el margen de solvencia es una proporción de la provisión matemática y el reaseguro es del Tipo B, o bien es del Tipo A y $\lambda < \frac{R_{i,1}+V_{i,1}}{\Pi(1+Ip)} - 1$.

El proceso que seguiremos será totalmente paralelo al que desarrollamos con la renta.

El cálculo de $\Delta VPREC(\lambda_t)$ es idéntico al que realizamos con la operación de renta, aplicando la definición del operador Δ a $VPREC(\lambda_t)$.

Al ser la operación a prima única:

$$\Delta VPREC(\lambda_t) = \Pi(1+\lambda_{t+1}) - \Pi(1+\lambda_t) = \Pi(\lambda_{t+1} - \lambda_t) = \Pi\,\Delta\lambda_t$$

Respecto a $\Delta VPREA(\lambda_t)$ sabemos que:

$$\Delta VPREA(\lambda_t) = [\Pi^{R,\lambda_{t+1}} - \Pi^{R,\lambda_t}](1+\lambda^R)$$

donde:

$$\Pi^{R,\lambda_{t+1}} = \sum_{h=1}^{d_s+m_s-1} T^1_{i,h,\lambda_{t+1}}\ {}_hP_x(1+Ir)^{-h} + \sum_{h=d_s+1}^{d_s+m_s} T^2_{i,h,\lambda_{t+1}}\ {}_{h-1/}q_x(1+Ir)^{-h+1/2}$$

$$\Pi^{R,\lambda_t} = \sum_{h=1}^{d_s+m_s-1} T^1_{i,h,\lambda_t}\ {}_hP_x(1+Ir)^{-h} + \sum_{h=d_s+1}^{d_s+m_s} T^2_{i,h,\lambda_t}\ {}_{h-1/}q_x(1+Ir)^{-h+1/2}$$

siendo:

- T^1_{i,h,λ_t} el término a satisfacer por el reasegurador en el momento h, si el plan aplica el recargo de seguridad λ_t siempre y cuando el partícipe llege vivo a h.
- T^2_{i,h,λ_t} el término a satisfacer por el reasegurador en el momento h (capital en riesgo en h), si el plan aplica el recargo de seguridad λ_t y el partícipe fallece en el periodo h.

La repercusión que tiene una variación en el recargo de seguridad del plan sobre los términos a pagar por el reasegurador en el primer periodo $T^1_{i,1}$ y $T^2_{i,1}$ dependerá del diferimiento de la operación:

a) Si la operación de seguro es inmediata $d_s = 0$, una variación del recargo afectará a $T^1_{i,1}$ y a $T^1_{i,2}$ sólo en el caso que se satisfaga:

$$\alpha^s - Z_{i,1}(1+Ip)^{-1/2} > 0$$

b) Si la operación de seguro es diferida $d_s > 0$, la variación en el recargo de seguridad sólo afectará a $T^1_{i,1}$, ya que no existirá capital en riesgo en el primer período ($T^2_{i,1} = 0$)

Esta circunstancia hace que la expresión de $\Delta VPREA(\lambda_t)$ sea distinta según se den los siguientes tipos de operaciones:

- Tipo I: aquellas en las que una variación en el recargo afectan tanto a $T^1_{i,1}$ como a $T^2_{i,1}$. Esta se caracterizarán por ser inmediatas, y $\alpha^s - Z_{i,1}(1+Ip)^{-1/2} > 0$
- Tipo II: aquellas otras operaciones en las cuales una variación en el recargo afecta sólo a $T^1_{i,1}$. Estas pueden ser de dos tipos:

1. Inmediatas ($d_s = 0$) y $\alpha^s - Z_{i,1}(1+Ip)^{-1/2} < 0$
2. Diferidas ($d_s > 0$)

A continuación obtendremos $\Delta VPREA(\lambda_t)$ para cada tipo.

Si la operación es del **tipo I**, podemos establecer las siguientes igualdades:

$$\sum_{h=2}^{d_s+m_s-1} T^1_{i,h,\lambda_{t+1}} \; {}_hP_x(1+Ir)^{-h} + \sum_{h=d_s+2}^{d_s+m_s} T^2_{i,h,\lambda_{t+1}} \; {}_{h-1/}q_x(1+Ir)^{-h+1/2} =$$

$$\sum_{h=2}^{d_s+m_s-1} T^1_{i,h,\lambda_t} \; {}_hP_x(1+Ir)^{-h} + \sum_{h=d_s+2}^{d_s+m_s} T^2_{i,h,\lambda_t} \; {}_{h-1/}q_x(1+Ir)^{-h+1/2}$$

por tanto, podemos expresar $\Delta VPREA(\lambda_t)$ como:

$$\Delta VPREA(\lambda_t) = \left[T^1_{i,1,\lambda_{t+1}} P_x(1+Ir)^{-1} + T^2_{i,1,\lambda_{t+1}} q_x(1+Ir)^{-1/2}\right] -$$

$$\left[T^1_{i,1,\lambda_t} P_x(1+Ir)^{-1} + T^2_{i,1,\lambda_t} q_x(1+Ir)^{-1/2}\right]$$

si reagrupamos términos:

$$\Delta VPREA(\lambda_t) = \left[T^1_{i,1,\lambda_{t+1}} - T^1_{i,1,\lambda_t}\right] P_x(1+Ir)^{-1} +$$

$$\left[T^2_{i,1,\lambda_{t+1}} - T^2_{i,1,\lambda_t}\right] q_x(1+Ir)^{-1/2}$$

Por tanto, $\Delta VPREA(\lambda_t)$ vendrá dado por dos variaciones:

- Aquella que se produce en el primer término que debe de satisfacer el reasegurador siempre y cuando el patícipe viva un período anual y actualizada al tipo de interés del reasegurador.
- Aquella que se produce en el capital en riesgo que el reasegurador debe de satisfacer al plan si el partícipe fallece en el transcurso del primer año, y actualizada al tipo de interés del reaseguro.

Por último, sabiendo que:

$$T^1_{i,1,\lambda_t} = \alpha^s \left[\frac{(1+p)}{l_{x+1}} - \frac{(1+\lambda_t)}{l_x} \right] \sum_{s=d_s}^{d_s+m_s-1} d_{x+s}(1+Ip)^{-s+1/2}$$

y

$$T^2_{i,1,\lambda_t} = \alpha^s - \Pi(1+\lambda_t)(1+Ip)^{1/2}$$

sustituyéndolas en $\Delta VPREA(\lambda_t)$, llegamos a la siguiente expresión:

$$\Delta VPREA(\lambda_t) = -\Pi \Delta\lambda_t \left(\frac{1+Ip}{1+Ir}\right)^{1/2} \left[P_x \left(\frac{1+Ip}{1+Ir}\right)^{1/2} + q_x \right] (1+\lambda^R)$$

Por último, si la operación es del **tipo II**, procediendo de forma análoga llegamos a la siguiente expresión de $\Delta VPREA(\lambda_t)$

$$\Delta VPREA(\lambda_t) = \left[T^1_{i,1,\lambda_{t+1}} - T^1_{i,1,\lambda_t} \right] P_x(1+Ir)^{-1} =$$

$$-\Pi\, \Delta\lambda_t(1+Ip)(1+Ir)^{-1} P_x$$

El cálculo de la función $K(\lambda_t)$, es inmediato aplicando la definición:

$$K(\lambda_t) = -\frac{\Delta VPREA(\lambda_t)}{\Delta VPREC(\lambda_t)}$$

obteniendo las siguientes expresiones:

- Si la operación es del tipo I:

$$K(\lambda_t) = \left(\frac{1+Ip}{1+Ir}\right)^{1/2} \left[P_x \left(\frac{1+Ip}{1+Ir}\right)^{1/2} + q_x \right] (1+\lambda^R)$$

- Si la operación es del tipo II:

$$K(\lambda_t) = \left(\frac{1+Ip}{1+Ir}\right) P_x(1+\lambda^R)$$

Podemos observar que las expresiones formales de $\Delta VPREC(\lambda_t)$ y de $K(\lambda_t)$ en el caso de que la operación sea del tipo I coinciden con las que obtuvimos con la operación de renta en la modalidad de reparto de beneficios. Sin embargo, si la operación es del tipo II, dichas expresiones coinciden con las correspondientes a la operación de renta cuando no había reparto de beneficios.

Puede darse el caso, según sea la estructura de la operación para los reaseguros tipo B, que la prima de reaseguro sea negativa, cuando así suceda el recargo del reasegurador asociado a dichas primas lo supondremos nulo, circunstáncia que influirá en la expresión de la función $K(\lambda_t)$, la cual quedará modificada de la siguiente forma:

- Si la operación es del tipo I:

$$K(\lambda_t) = \begin{cases} \left(\frac{1+Ip}{1+Ir}\right)^{1/2} \left[P_x \left(\frac{1+Ip}{1+Ir}\right)^{1/2} + q_x\right] (1+\lambda^R) & \forall \lambda_t \quad \text{tq} \quad \Pi^{R,\lambda_t} > 0 \\ \left(\frac{1+Ip}{1+Ir}\right)^{1/2} \left[P_x \left(\frac{1+Ip}{1+Ir}\right)^{1/2} + q_x\right] & \forall \lambda_t \quad \text{tq} \quad \Pi^{R,\lambda_t} \leq 0 \end{cases}$$

- Si la operación es del tipo II:

$$K(\lambda_t) = \begin{cases} \left(\frac{1+Ip}{1+Ir}\right) P_x(1+\lambda^R) & \forall \lambda_t \quad \text{tq} \quad \Pi^{R,\lambda_t} > 0 \\ \left(\frac{1+Ip}{1+Ir}\right) P_x & \forall \lambda_t \quad \text{tq} \quad \Pi^{R,\lambda_t} \leq 0 \end{cases}$$

La estrategia óptima dependerá de los valores que tome la función K^A, si suponemos que la función $K^A(\lambda_t)$ adopta los dos tramos, entonces:

- Si $K^A(\lambda_t) > 1$, en nuestro caso dicha condición se satisface cuando:

  Si la operación del tipo I:

$$\left(\frac{1+Ip}{1+Ir}\right)^{1/2} \left[P_x \left(\frac{1+Ip}{1+Ir}\right)^{1/2} + q_x\right] > 1$$

  Si la operación del tipo II:

$$\left(\frac{1+Ip}{1+Ir}\right) P_x > 1$$

  la política óptima será recargar la prima del plan lo máximo posible.

- Si $K^A(\lambda_t) < 1$, en nuestro caso dicha condición se cumple cuando:

  Si la operación del tipo I:

$$\left(\frac{1+Ip}{1+Ir}\right)^{1/2}\left[P_x\left(\frac{1+Ip}{1+Ir}\right)^{1/2}+q_x\right](1+\lambda^R) < 1$$

  Si la operación del tipo II:

$$\left(\frac{1+Ip}{1+Ir}\right)P_x(1+\lambda^R) < 1 \quad \text{Si} \quad d_s > 0$$

  la política que minimiza el coste de la operación es no recargar la prima pura del plan.

- Si la operación es del tipo I y satisfce:

$$\left(\frac{1+Ip}{1+Ir}\right)^{1/2}\left[P_x\left(\frac{1+Ip}{1+Ir}\right)^{1/2}+q_x\right] < 1$$

  y

$$\left(\frac{1+Ip}{1+Ir}\right)^{1/2}\left[P_x\left(\frac{1+Ip}{1+Ir}\right)^{1/2}+q_x\right](1+\lambda^R) > 1 \quad \text{Si} \quad d_s = 0$$

  o bien , si la operación es del tipo II y satisface:

$$\left(\frac{1+Ip}{1+Ir}\right)P_x < 1$$

  y

$$\left(\frac{1+Ip}{1+Ir}\right)P_x(1+\lambda^R) > 1$$

  entonces la estrategia óptima vendrá dada por aquel recargo de seguridad del plan que anule la prima ajustada de reaseguro.

- Por último, si $K^A(\lambda_t) = 1$, supuesto que se dará cuando $\lambda^R = 0$ y $Ip = Ir$ en el caso de que la operación sea del tipo I, el coste total de la operación es independiente del recargo de seguridad.

4.3.2.4 Modalidad de reaseguro de diferencia de siniestralidad con reparto de beneficios

Al igual que sucede en la modalidad de no reparto de beneficios, sólo podremos determinar la función $K^A(\lambda_t)$ para aquellos casos en los cuales el margen de solvencia sea una proporción de la provisión matemática y el reaseguro sea del tipo B, o bien sea del tipo A y $\lambda < \frac{R_{i,1}+V_{i,1}}{\Pi(1+Ip)} - 1$.

Para ello determinaremos para este caso particular, las expresiones de $\Delta VPREC(\lambda_t)$ y de $\Delta VPREA(\lambda_t)$.

Sabemos que,

$$\Delta VPREC(\lambda_t) = \Pi(1+\lambda_{t+1}) - \Pi(1+\lambda_t) = \Pi(\lambda_{t+1} - \lambda_t) = \Pi\,\Delta\lambda_t$$

Respecto a $\Delta VPREA(\lambda_t)$:

$$\Delta VPREA(\lambda_t) = [\Pi^{R,A,\lambda_{t+1}} - \Pi^{R,A,\lambda_t}](1+\lambda^R)$$

donde:

$$\Pi^{R,A,\lambda_{t+1}} = \sum_{h=1}^{d_s+m_s-1} T^1_{i,h,\lambda_{t+1}}\ {}_hP_x(1+Ir)^{-h} + \sum_{h=d_s+1}^{d_s+m_s} T^2_{i,h,\lambda_{t+1}}\ {}_{h-1/}q_x(1+Ir)^{-h+1/2} - \sum_{h=1}^{w-x-1} H_{i,h,\lambda_{t+1}}\ {}_{h-1/}q_x(1+Ir)^{-h+1/2}$$

$$\Pi^{R,A,\lambda_t} = \sum_{h=1}^{d_s+m_s-1} T^1_{i,h,\lambda_t}\ {}_hP_x(1+Ir)^{-h} + \sum_{h=d_s+1}^{d_s+m_s} T^2_{i,h,\lambda_t}\ {}_{h-1/}q_x(1+Ir)^{-h+1/2} - \sum_{h=1}^{w-x-1} H_{i,h,\lambda_t}\ {}_{h-1/}q_x(1+Ir)^{-h+1/2}$$

donde:

- $T^1_{i,h,\lambda_{t+1}}$ el término a satisfacer por el reasegurador en el momento h, si el plan aplica el recargo de seguridad λ_{t+1} siempre y cuando el partícipe llege vivo a h.

- $T^2_{i,h,\lambda_{t+1}}$ el término a satisfacer por el reasegurador en el momento h (capital en riesgo en h), si el plan aplica el recargo de seguridad λ_{t+1} y el partícipe fallece en el período h.

- $H_{i,h,\lambda_{t+1}}$ el beneficio que satisface el plan al reasegurador en el momento h, si el plan aplica el recargo de seguridad λ_{t+1} y el partícipe fallece en el período h.

Sabiendo que una variación en el recargo de seguridad sólo afecta al disponible del primer período, este afectará a la $\Delta VPREA(\lambda_t)$ de forma distinta según el tipo de operación:

a) Si la operación de seguro es inmediata $d_s = 0$, una variación en el recargo de seguridad del plan afectará a $T^1_{i,1}$ y puede afectar a $T^2_{i,1}$ o bien a $H_{i,1}$. La explicación es sencilla, sabemos que:

$$H(i,1) = \begin{cases} Z_{i,1}(1+Ip)^{-1/2} - \alpha^s & \text{Si} \quad Z_{i,1}(1+Ip)^{-1/2} - \alpha^s > 0 \\ 0 & \text{Si} \quad Z_{i,1}(1+Ip)^{-1/2} - \alpha^s < 0 \end{cases}$$

Por tanto, una variación en el recargo de seguridad tendrá repercusión en el término $H_{i,1}$, si y sólo si $Z_{i,1}(1+Ip)^{-1/2} - \alpha^s > 0$ no afectando a $T^2_{i,1}$ por ser $T^2_{i,1} = 0$.

Por el contrario, si $Z_{i,1}(1+Ip)^{-1/2} - \alpha^s \leq 0$ el recargo de seguridad no afectará a $H_{i,1}$ ya que no habrá beneficio a repartir al reasegurador, siendo $H_{i,1} = 0$, pero si a $T^2_{i,1}$, ya que el capital en riesgo asociado al primer periodo será positivo.

b) Sin embargo, si la operación de seguro es diferida $d_s > 0$, la variación en el recargo de seguridad sólo afectará a $T^1_{i,1}$, ya que al no existir capital en riesgo en el primer periodo $T^2_{i,1} = 0$, y también afectará a $H_{i,1}$, ya que en este caso $H_{i,1} = Z_{i,1}(1+Ip)^{-1/2}$.

Esta circunstancia hace que distingamos tres tipos de operaciones, en función de los términos afectados al variar el recargo del rasegurador.

1. $d_s = 0$ y $Z_{i,1}(1+Ip)^{-1/2} - \alpha^s > 0$

2. $d_s = 0$ y $Z_{i,1}(1+Ip)^{-1/2} - \alpha^s \leq 0$

3. $d_s > 0$

Si $d_s = 0$, y $Z_{i,1}(1+Ip)^{-1/2} - \alpha^s > 0$ al afectar una variación en el recargo de seguridad a $T^1_{i,1}$ y a $H_{i,1}$ entonces se darán las siguientes igualdades:

$$\sum_{h=2}^{m_s-1} T^1_{i,h,\lambda_{t+1}}\ {}_hP_x(1+Ir)^{-h} + \sum_{h=1}^{m_s} T^2_{i,h,\lambda_{t+1}}\ {}_{h-1/}q_x(1+Ir)^{-h+1/2} =$$

$$\sum_{h=2}^{m_s-1} T^1_{i,h,\lambda_t}\ {}_hP_x(1+Ir)^{-h} + \sum_{h=1}^{m_s} T^2_{i,h,\lambda_t}\ {}_{h-1/}q_x(1+Ir)^{-h+1/2}$$

y

$$\sum_{h=2}^{w-x-1} H_{i,h,\lambda_{t+1}}\ {}_{h-1/}q_x(1+Ir)^{-h+1/2} = \sum_{h=2}^{w-x-1} H_{i,h,\lambda_t}\ {}_{h-1/}q_x(1+Ir)^{-h+1/2}$$

por tanto, podemos expresar $\Delta VPREA(\lambda_t)$ como:

$$\Delta VPREA(\lambda_t) = \left[T^1_{i,1,\lambda_{t+1}} P_x(1+Ir)^{-1} - H_{i,1,\lambda_{t+1}} q_x(1+Ir)^{-1/2}\right] -$$

$$\left[T^1_{i,1,\lambda_t} P_x(1+Ir)^{-1} - H_{i,1,\lambda_t} q_x(1+Ir)^{-1/2}\right]$$

si reagrupamos términos:

$$\Delta VPREA(\lambda_t) = \left[T^1_{i,1,\lambda_{t+1}} - T^1_{i,1,\lambda_t}\right] P_x(1+Ir)^{-1} -$$

$$\left[H_{i,1,\lambda_{t+1}} - H_{i,1,\lambda_t}\right] q_x(1+Ir)^{-1/2}$$

sabiendo que

$$H_{i,1,\lambda_t} = \alpha^s - \Pi(1+\lambda_t)(1+Ip)^{1/2}$$

entonces:

$$\Delta VPREA(\lambda_t) = -\Pi\,\Delta\lambda_t \left(\frac{1+Ip}{1+Ir}\right)^{1/2} \left[P_x \left(\frac{1+Ip}{1+Ir}\right)^{1/2} + q_x\right] (1+\lambda^R)$$

Si $d_s = 0$**, y** $Z_{i,1}(1+Ip)^{-1/2} - \alpha^s \leq 0$ una variación en el recargo de seguridad sólo afectará a $T^1_{i,1}$ y a $T^2_{i,1}$, por tanto:

$$\sum_{h=2}^{m_s-1} T^1_{i,h,\lambda_{t+1}}\ {}_hP_x(1+Ir)^{-h} + \sum_{h=2}^{m_s} T^2_{i,h,\lambda_{t+1}}\ {}_{h-1/}q_x(1+Ir)^{-h+1/2} =$$

$$\sum_{h=2}^{m_s-1} T^1_{i,h,\lambda_t}\ {}_hP_x(1+Ir)^{-h} + \sum_{h=2}^{d_s+m_s} T^2_{i,h,\lambda_t}\ {}_{h-1/}q_x(1+Ir)^{-h+1/2}$$

y

$$\sum_{h=1}^{w-x-1} H_{i,h,\lambda_{t+1}}\ {}_{h-1/}q_x(1+Ir)^{-h+1/2} = \sum_{h=1}^{w-x-1} H_{i,h,\lambda_t}\ {}_{h-1/}q_x(1+Ir)^{-h+1/2}$$

lo que nos permite expresar $\Delta VPREA(\lambda_t)$ como:

$$\Delta VPREA(\lambda_t) = \left[T^1_{i,1,\lambda_{t+1}} P_x(1+Ir)^{-1} + T^2_{i,1,\lambda_{t+1}} q_x(1+Ir)^{-1/2}\right] -$$

$$\left[T^1_{i,1,\lambda_t} P_x(1+Ir)^{-1} + T^2_{i,1,\lambda_t} q_x(1+Ir)^{-1/2}\right]$$

si reagrupamos términos:

$$\Delta VPREA(\lambda_t) = \left[T^1_{i,1,\lambda_{t+1}} - T^1_{i,1,\lambda_t}\right] P_x(1+Ir)^{-1} +$$

$$\left[T^2_{i,1,\lambda_{t+1}} - T^2_{i,1,\lambda_t}\right] q_x(1+Ir)^{-1/2}$$

simplificando:

$$\Delta VPREA(\lambda_t) = -\Pi\,\Delta\lambda_t\,(\{frac1 + Ip1 + Ir)^{1/2} \left[P_x \left(\frac{1+Ip}{1+Ir}\right)^{1/2} + q_x\right] (1+\lambda^R)$$

Si $d_s > 0$ entonces:

$$\sum_{h=2}^{d_s+m_s-1} T^1_{i,h,\lambda_{t+1}}\ {}_hP_x(1+Ir)^{-h} + \sum_{h=d_s+1}^{d_s+m_s} T^2_{i,h,\lambda_{t+1}}\ {}_{h-1/}q_x(1+Ir)^{-h+1/2} =$$

$$\sum_{h=2}^{d_s+m_s-1} T^1_{i,h,\lambda_t}\ {}_hP_x(1+Ir)^{-h} + \sum_{h=d_s+1}^{d_s+m_s} T^2_{i,h,\lambda_t}\ {}_{h-1/}q_x(1+Ir)^{-h+1/2}$$

y

$$\sum_{h=2}^{w-x-1} H_{i,h,\lambda_{t+1}}\ {}_{h-1/}q_x(1+Ir)^{-h+1/2} = \sum_{h=2}^{w-x-1} H_{i,h,\lambda_t}\ {}_{h-1/}q_x(1+Ir)^{-h+1/2}$$

por tanto, podemos expresar $\Delta VPREA(\lambda_t)$ como:

$$\Delta VPREA(\lambda_t) = \left[T^1_{i,1,\lambda_{t+1}} P_x(1+Ir)^{-1} - H_{i,1,\lambda_{t+1}} q_x(1+Ir)^{-1/2}\right] -$$

$$\left[T^1_{i,1,\lambda_t} P_x(1+Ir)^{-1} - H_{i,1,\lambda_t} q_x(1+Ir)^{-1/2}\right]$$

si reagrupamos términos:

$$\Delta VPREA(\lambda_t) = \left[T^1_{i,1,\lambda_{t+1}} - T^1_{i,1,\lambda_t}\right] P_x(1+Ir)^{-1} -$$

$$\left[H_{i,1,\lambda_{t+1}} - H_{i,1,\lambda_t}\right] q_x(1+Ir)^{-1/2}$$

sabiendo que

$$H_{i,1,\lambda_t} = \Pi(1+\lambda_t)(1+Ip)^{1/2}$$

entonces:

$$\Delta VPREA(\lambda_t) = -\Pi\Delta\lambda_t \left(\frac{1+Ip}{1+Ir}\right)^{1/2} \left[P_x \left(\frac{1+Ip}{1+Ir}\right)^{1/2} + q_x\right] (1+\lambda^R)$$

En este caso una variación en el recargo de seguridad, afecta a $T^1_{i,1}$ y a $H_{i,1}$.

Podemos observar que existe una misma expresión de $\Delta VPREA(\lambda_t)$, para las tres operaciones estudiadas , por tanto la expresión analítica de la función $K^A(\lambda_t)$ será única. En nuestro caso:

$$K^A(\lambda_t) = \left(\frac{1+Ip}{1+Ir}\right)^{1/2} \left[P_x \left(\frac{1+Ip}{1+Ir}\right)^{1/2} + q_x\right] (1+\lambda^R)$$

En los casos en que la prima ajustada de reaseguro sea negativa, al no haber recargo del reasegurador , la función K^A quedará modificada de la siguiente forma:

$$K^A(\lambda_t) = \begin{cases} \left(\frac{1+Ip}{1+Ir}\right)^{1/2} \left[P_x \left(\frac{1+Ip}{1+Ir}\right)^{1/2} + q_x\right] (1+\lambda^R) & \forall \lambda_t \quad \text{tq} \quad \Pi^{R,A,\lambda_t} > 0 \\ \left(\frac{1+Ip}{1+Ir}\right)^{1/2} \left[P_x \left(\frac{1+Ip}{1+Ir}\right)^{1/2} + q_x\right] & \forall \lambda_t \quad \text{tq} \quad \Pi^{R,A,\lambda_t} \leq 0 \end{cases}$$

Podemos observar que la expresión formal de la función $K^A(\lambda_t)$ para el caso del seguro, coincide con la expresión formal de la función $K^A(\lambda_t)$ de la renta.

Respecto al estudio de la estrategia óptima nos remitimos al estudio que en este sentido hicimos en el caso de la renta.

4.4 Operación renta y seguro a prima única. Renta de jubilación y seguro temporal hasta la jubilación con cuantías constantes

El problema con el que nos encontramos en esta operación es que según qué relación haya entre las prestaciones de la renta y las prestaciones del seguro, no siempre podremos conocer una expresión simplificada que nos permita conocer las primas de reaseguro Π^R y $\Pi^{R,A}$, en la modalidad de reaseguro del percentil, circunstáncia que si ocurría en las dos operaciones anteriores, y por tanto nos será imposible, para esa relación, obtener una expresión analítica de la función $K(\epsilon^t)$ y $K^A(\epsilon^t)$.

Nuestro objetivo será sistematizar en la medida que nos sea posible la operación objeto de estudio, deteminando qué relación debe haber entre las prestaciones de seguro y de renta para que podamos obtener una expresión de Π^R y $\Pi^{R,A}$ que nos permita determinar la función $K(\epsilon^t)$ y $K^A(\epsilon^t)$. Para ello realizaremos el estudio expresando la cuantía del seguro como una proporción de la cuantía de la renta.

4.4.1 Cálculo de la prima de reaseguro

Seguiremos el esquema utilizado en el modelo general.

4.4.1 Descripción de la operación objeto de estudio

$d_r = x_{jub} - x$ La renta es diferida hasta la jubilación del partícipe.

$m_r = w - x_{jub}$ La renta es vitalicia.

$\alpha_i^r = \alpha$. La cuantía de la renta es constante.

$d_s = 0$. El seguro es inmediato.

$m_s = x_{jub} - x$. El seguro es temporal hasta la jubilación del partícipe.

$\alpha_i^s = \alpha^s = \delta\,\alpha$. La cuantía del seguro la expresamos como una proporción δ de la cuantía de la renta.

La ecuación de equilibrio viene dada en este caso por la siguiente expresión:

$$\Pi = \sum_{j=1}^{x_{jub}-x} \delta\alpha \quad {}_{j-1/}q_x V^{j-1/2} + \sum_{j=x_{jub}-x}^{w-x-1} \alpha \quad {}_jE_x$$

4.4.1.1 Variable aleatoria pérdida individual del plan. Cálculo de la prima única

Para poder determinar la variable aleatoria pérdida individual del plan L_i , estudiaremos previamente las variables aleatorias que la componen ξ_i^c y ξ_i^p.

Las realizaciones $\alpha(i,t)$ de la variable aleatoria ξ_i^c, vienen dadas en este caso por:

$$\alpha(i,t) = \begin{cases} \delta\alpha \quad V^{t+1/2} & 0 \leq t < x_{jub} - x \\ \alpha \ {}_{x_{jub}-x/}\ddot{a}_{\overline{t+1-(x_{jub}-x)}|Ip} & x_{jub} - x \leq t < w - x \end{cases}$$

A continuación expresamos las realizaciones y probabilidades (ordenados temporalmente) de ξ_i^c:

<u>REALIZACIONES</u>	<u>PROBABILIDADES</u>
$\delta\,\alpha \quad V^{1/2}$	q_x
$\vdots$	$\vdots$
$\delta\,\alpha \quad V^{x_{jub}-x-1/2}$	$x_{jub} - x - 1/q_x$
$\alpha \ {}_{x_{jub}-x/}\ddot{a}_{\overline{r}\|Ip}$	$x_{jub} - x + r - 1/q_x$

con $\quad r = 1, \ldots, w - x_{jub}$

Respecto a la variable aleatoria ξ_i^c, al ser la operación a prima única, deja de ser aleatoria para convertirse en un valor cierto de importe la prima pura única Π, por tanto:

$$\xi_i^c = \Pi$$

en consecuencia la variable aleatoria pérdida individual L_i, queda expresada del siguiente modo:

<u>REALIZACIONES</u>	<u>PROBABILIDADES</u>
$\delta\,\alpha\,V^{1/2} - \Pi$	q_x
$\vdots$	$\vdots$
$\delta\,\alpha\,V^{x_{jub}-x-1/2} - \Pi$	$x_{jub} - x - 1/q_x$
$\alpha \ {}_{x_{jub}-x/}\ddot{a}_{\overline{r}\|Ip} - \Pi$	$x_{jub} - x + r - 1/q_x$

con $\quad r = 1, \ldots, w - x_{jub}$

El valor de la prima única viene dado por la esperanza matemática de la variable aleatoria ξ_i, por tanto:

$$\Pi = E[\xi_i^p]$$

o bien utilizando la simbología actuarial:

$$\Pi = \alpha \left(\delta \quad /_{x_{jub}-x}A_x + \ _{x_{jub}-x/}\ddot{a}_x\right)$$

4.4.2.1 Cálculo del recargo de seguridad

Para poder determinar el recargo de seguridad, necesitamos definir la variable aletoria L_i^*, cuya estructura dependerá del valor que tome δ.

Sabemos que respecto a las realizaciones de L_i , en las que se satisface la prestación de renta, la ordenación temporal coincide con la ordenación de menor a mayor de dichas realizaciones. Sin embargo, en aquellas realizaciones de L_i , en las que se se satisface exclusivamente prestaciones de seguro, al ser éstas de importe constante, la ordenación de menor a mayor coincide con una inversión de los valores ordenados temporalmente. Esta circunstancia hace que nos podamos encontrar entrecruzamientos entre realizaciones que presentan prestación de renta y realizaciones que presentan prestación de seguro a la hora de ordenar de la variable aleatoria L_i de menor a mayor. En consecuencia, es difícil de establecer a priori el cambio a introducir en la ordenación temporal de todas las realizaciones de la variable aleatoria L_i para obtener la variable aleatoria ordenada de menor a mayor L_i^*.

De toda formas podemos encontrar qué valores debe de satisfacer δ para que no se de entrecruzamiento en las realizaciones de la variable aleatoria L_i^*. Este no se dará si el mayor valor de la variable aleatoria L_i , que presenta prestación de seguro $(\delta\, \alpha\, V^{1/2} - \Pi)$, es menor que el mayor valor que toma la realización de la variable aleatoria L_i , que presenta prestación de renta $(\alpha \ _{x_{jub}-x/}\ddot{a}_{\overline{1|}Ip} - C)$, es decir, si:

$$\delta\alpha \quad V^{1/2} - \Pi < \alpha \ _{x_{jub}-x/}\ddot{a}_{\overline{1|}Ip} - \Pi = \alpha \quad V^{x_{jub}-x} - \Pi$$

por tanto si:

$$\delta < V^{x_{jub}-x-1/2}$$

no habrá entrecruzamiento , y la variable aleatoria L_i^* podremos definirla del siguiente modo:

REALIZACIONES	PROBABILIDADES	Periodos enteros vividos t_k
$\delta\alpha \quad V^{x_{jub}-x-1/2} - \Pi$	${}_{x_{jub}-x-1/}q_x$	$t_0 = x_{jub} - x - 1$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$\delta\alpha \quad V^{1/2} - \Pi$	q_x	$t_{x_{jub}-x-1} = 0$
$\alpha \ {}_{x_{jub}-x/}\ddot{a}_{\overline{1}\vert Ip} - \Pi$	${}_{x_{jub}-x/}q_x$	$t_{x_{jub}-x} = x_{jub} - x$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$\alpha \ {}_{x_{jub}-x/}\ddot{a}_{\overline{s^\epsilon}\vert Ip} - \Pi$	${}_{x_{jub}-x+s^\epsilon-1/}q_x$	$t_{x_{jub}-x+s^\epsilon-1} = t_h = x_{jub} - x + s^\epsilon - 1$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$\alpha \ {}_{x_{jub}-x/}\ddot{a}_{\overline{w-x_{jub}}\vert Ip} - \Pi$	${}_{w-x-1/}q_x$	$t_{w-x-1} = w - x - 1$

En caso contrario, no podemos definir a priori la variable aleatoria L_i^*, obteniendo la misma a posteriori según los datos de la operación.

Si $\delta < V^{x_{jub}-x-1/2}$, el percentil de la variable aleatoria L_i^* fijado un ϵ $\mathrm{Per}_\epsilon[L_i^*]$, coincidirá generalmente con la correspondiente a la misma operación pero sin el seguro de fallecimiento, debido al reducido valor que toma ϵ. En consecuencia, si ${}_{/t_h+1}q_x \geq 1 - \epsilon$ el percentil de la variable aleatoria L_i^* asociado al nivel de riesgo ϵ vendrá dado por:

$$\mathrm{Per}_\epsilon[L_i^*] = \alpha \ {}_{x_{jub}-x/}\ddot{a}_{\overline{s^\epsilon}\vert Ip} - \Pi = \mathrm{Per}_\epsilon[L_i^*(renta)]$$

[6]

[6] siendo $\mathrm{Per}_\epsilon[L_i^*(renta)]$ el percentil-ϵ de la varable aleatoria L_i^* ocasionada por la renta .

siendo s^{ϵ} el número entero de términos que a lo sumo puede hacerse cargo el plan con el percentil cobrado.

Sin embargo, puede darse el caso que $\delta > V^{x_{jub}-x-1/2}$ y el percentil siga siendo el mismo que el anterior.

Esto es debido a que si bien las realizaciones "pequeñas" de la variable aleatoria L_i^* no coinciden con la ordenación temporal, si sucede así con las realizaciones "grandes" las cuales siguen correspondiendo con la prestación de renta. En consecuencia lo importante es que la ordenación por la cola superior no se altere (como mínimo hasta que dichos valores grandes acumulen la probabilidad de ϵ). Por tanto, si la mayor realización de L_i en la cual hay prestación de seguro ($\delta\, \alpha\, V^{1/2} - \Pi$) sigue sin superar el $\mathrm{Per}_\epsilon[L_i^*] = \alpha\ {}_{x_{jub}-x/}\ddot{a}_{\overline{s^\epsilon}|Ip} - \Pi$, entonces el percentil de la variable aleatoria L_i^* seguirá siendo: $\mathrm{Per}_\epsilon[L_i^*] = \mathrm{Per}_\epsilon[L_i^*(renta)]$

Para ello, δ debe de satisfacer:

$$\delta \alpha V^{1/2} - \Pi \leq \alpha\ {}_{x_{jub}-x/}\ddot{a}_{\overline{s^\epsilon}|Ip} - \Pi$$

despejando δ:

$$\delta \leq\ {}_{x_{jub}-x/}\ddot{a}_{\overline{s^\epsilon}|Ip}(1+Ip)^{1/2} = \mathrm{Per}_\epsilon[\xi_i^p(renta\, unitaria)](1+Ip)^{1/2}$$

siendo $\mathrm{Per}_\epsilon[\xi_i^p(renta\, unitaria)]$ el percentil-ϵ de la variable aleatoria ξ_i^p asociada a la renta unitaria.

Conclusión:

- Si $\delta \leq \mathrm{Per}_\epsilon[\xi_i^p(renta\, unitaria)](1+Ip)^{1/2}$ el valor del percentil de la operación mixta renta-seguro coincidirá con el valor del percentil de la misma operación pero excluido el seguro, conociendo siempre en este caso a priori cual es la expresión que nos permite calcular el percentil. Esto conlleva a que podemos añadir una prestación de seguro a la que ya teniamos de renta, sin que se modifique el riesgo de insolvencia de la operación.

- Si δ supera este límite, la incorporación del seguro modificará el riesgo de insolvencia y en consecuencia el valor del percentil. En este caso resulta imposible conocer a priori una expresión que nos permita calcular el valor del percentil, calculándolo empíricamente para cada caso.

El recargo de seguridad que garantiza un nivel de solvencia $1-\epsilon$ viene dado por la ya conocida expresión:

$$\lambda^{\epsilon} = \frac{\mathrm{Per}_{\epsilon}[L_i^*]}{P(i,t_h)} = \frac{\mathrm{Per}_{\epsilon}[L_i^*]}{\Pi}$$

En el supuesto que $\delta \leq \mathrm{Per}_{\epsilon}[\xi_i^p(renta\,unitaria)](1+Ip)^{1/2}$ entonces:

$$\lambda^{\epsilon} = \frac{\alpha^r\ {}_{x_{jub}-x/}\ddot{a}_{\overline{s^{\epsilon}}|Ip} - \Pi}{\Pi}$$

En este caso, al ser la prima recargada de la operación mixta renta-seguro igual a la prima recargada de la operación de renta, el recargo de seguridad que garantiza el nivel ϵ de la operación renta-seguro deberá ser menor al correspondiente de la operación de renta, por ser la prima pura de la operación mayor.

Conocido el recargo de seguridad λ^{ϵ}, podemos conocer la varible aleatoria L_i^{ϵ}.

4.4.1.4 Variable aleatoria pérdida del reasegurador. Cálculo de la prima pura de reaseguro

A continuación analizamos las variables aleatorias ξ_i^p y ξ_i^c para la operación objeto de estudio.

Análisis de la variable aleatoria prestaciones del reasegurador en al modalidad de reaseguro del percentil

Las realizaciones de la variable aleatoria $\xi_i^{p,R}$ dependen de :

1. Si $\delta > \mathrm{Per}_{\epsilon}[\xi_i^p(renta\,unitaria)](1+Ip)^{1/2}$

2. Si $\delta \leq \mathrm{Per}_{\epsilon}[\xi_i^p(renta\,unitaria)](1+Ip)^{1/2}$

A continación estudiaremos los dos casos por separado:

1. Si $\delta > \mathrm{Per}_\epsilon[\xi_i^p(renta\,unitaria)](1+Ip)^{1/2}$ tenemos que recurrir a la expresión general que nos da las realizaciones de $\xi_i^{p,R}$:

$$M(i,t_k) = \begin{cases} 0 & k \leq h \\ M_1(i,t_k) & k > h \quad \text{y} \quad t_k < d_r + s^\epsilon \\ M_2(i,t_k) & k > h \quad \text{y} \quad t_k \geq d_r + s^\epsilon \end{cases}$$

donde:

$$M_1(i,t_k) = l(i,t_k)^\epsilon \left(\frac{1+Ip}{1+Ir}\right)^{t_k+1/2} \qquad \forall t_k < d_r + s^\epsilon$$

$$M_2(i,t_k) = \left(\sum_{j=d_r+s^\epsilon}^{t_k} \alpha_j^r (1+Ir)^{d_r+s^\epsilon-j} + \alpha_{t_k+1}^s (1+Ir)^{-(d_r+s^\epsilon-t_k+1/2)} - R_{d_r+s^\epsilon}^\epsilon\right)(1+Ir)^{-(d_r+s^\epsilon)} \quad \forall t_k \geq d_r + s^\epsilon$$

y por tanto, no podemos encontrar una expresión a priori que nos permita obtener $E[\xi_i^{p,R}]$

2. Si embargo, en el supuesto que

$\delta \leq \mathrm{Per}_\epsilon[\xi_i^p(renta\,unitaria)](1+Ip)^{1/2}$, si podemos simplificar $M(i,t_k)$ pues:

$M_1(i,t_k) = 0$ por no venir ocasionada la pérdida por el seguro.

$R_{x_{jub}-x+s^\epsilon} = 0$. Puesto que el percentil cobrado cubre un número entero de términos de la renta.

$$M_2(x,t_k) = \left(\sum_{j=x_{jub}-x+s^\epsilon}^{t_k} \alpha(1+Ir)^{x_{jub}-x+s^\epsilon-j}\right)(1+Ir)^{-(x_{jub}-x+s^\epsilon)} =$$

$$\alpha_{\ d_r+s^\epsilon}/\ddot{a}_{\overline{t_k+1-(x_{jub}-x+s^\epsilon)}|Ir} \quad t_k < w - x$$

Observamos que la variable aleatoria $\xi_i^{p,R}$ coincide con la que hubiese si sólo existiese prestación de renta $\xi_i^{p,R}(renta)$.

Análisis de la variable aleatoria prestaciones del reasegurador en la modalidad de reaseguro de diferencia de siniestralidad

Estudiaremos las expresiones particulares de las funciones $Z_{i,h}$ y $T_{i,h}$ para la operación objeto de estudio.

La expresión formal de la función $Z_{i,h}$ si el reaseguro actua según el **tipo A** es:

$$Z_{i,h} = \begin{cases} \Pi^{Rec}(1+Ip) & h=1 \\ & \\ Z_{i,h-1}(1+Ip) & \text{si } \; Z_{i,h-1} \geq R_{i,h-1} + V_{i,h-1} \\ (R_{i,h-1}+V_{i,h-1})(1+Ip) & \text{si } \; Z_{i,h-1} < R_{i,h-1} + V_{i,h-1} \\ & 1 < h \leq x_{jub} - x \\ & \\ (Z_{i,h-1} - \alpha^r_{h-1})(1+Ip) & \text{si } \; Z_{i,h-1} \geq R_{i,h-1} + V_{i,h-1} \\ (R_{i,h-1}+V_{i,h-1} - \alpha^r_{h-1})(1+Ip) & \text{si } \; Z_{i,h-1} < R_{i,h-1} + V_{i,h-1} \\ & x_{jub} - x < h \leq w - x - 1 \end{cases}$$

Respecto a la función $T_{i,h}$, en este caso el reasegurador no sólo cubre las desviaciones por provisiones matemáticas y reservas de solvencia, sino que también ha de cubrir el capital en riesgo de la operación en el periodo de diferimiento de la renta, por tanto:

$$T_{i,h} = \begin{cases} T^1_{i,h} & h = 1, \ldots, w-x-1 \\ & \\ T^2_{i,h} & h = 1, \ldots, m_s \end{cases}$$

$$T^1_{i,h} = \max\{0, \quad V_{i,h} + R_{i,h} - Z_{i,h}\} \quad h = 1, \ldots, w-x-1$$

y

$$T^2_{i,h} = \max\{0, \alpha^s - Z_{i,h}(1+Ip)^{-1/2}\} \quad h = 1, \ldots, m_s$$

La expresión formal de la función $Z_{i,h}$ si el reaseguro es del **tipo B** es:

$$Z_{i,h} = \begin{cases} \Pi^{Rec}(1+Ip) & h=1 \\ (R_{i,h-1}+V_{i,h-1})(1+Ip) & 1 < h \le x_{jub}-x \\ (R_{i,h-1}+V_{i,h-1}-\alpha^r_{h-1})(1+Ip) & x_{jub}-x < h \le w-x-1 \end{cases}$$

Respecto a la función $T_{i,h}$:

$$T_{i,h} = \begin{cases} T^1_{i,h} & h=1,\ldots,w-x-1 \\ T^2_{i,h} & h=1,\ldots,m_s \end{cases}$$

$$T^1_{i,h} = V_{i,h} + R_{i,h} - Z_{i,h} \quad h=1,\ldots,w-x-1$$

y

$$T^2_{i,h} = \max\{0, \alpha^s - Z_{i,h}(1+Ip)^{-1/2}\} \quad h=1,\ldots,m_s$$

El comportamiento de los término a pagar al reasegurador, con respecto a una variación en el recargo de seguridad es idéntico al que ya estudiamos con la renta.

En el supuesto de que el margen de solvencia sea un porcentaje de la provisión matemática correspondiente:

$$R_{i,h} = p\, V_{i,h}$$

será de interés para determinar la expresión analítica de la función K, conocer $T^1_{i,h}$ para el reaseguro tipo B.

Teniendo presente que la provisión matemática $V_{i,h}$ para la operación objeto de estudio viene dada por :

$$V_{i,h} = \begin{cases} \alpha^s \sum_{t=h}^{m_s-1} \frac{d_{x+t}}{l_{x+h}}(1+Ip)^{-t-1/2+h} + \\ \alpha^r \sum_{t=d_r}^{d_r+m_r-1} \frac{l_{x+t}}{l_{x+h}}(1+Ip)^{-t+h} & 0 < h \le d_r \\ \\ \alpha^r \sum_{t=h}^{d_r+m_r-1} \frac{l_{x+t}}{l_{x+h}}(1+Ip)^{-t+h} & d_r < h \le d_r+m_r-1 \end{cases}$$

la función $T^1_{i,h}$ si el reasegurador es del tipo B, adopta la siguiente expresión:

$$T_{i,h} = \begin{cases} \left(\frac{(1+p)}{l_{x+1}} - \frac{(1+\lambda)}{l_x}\right)\left[\alpha^r \sum_{s=d_r}^{d_r+m_r-1} l_{x+s}(1+Ip)^{-s+h} + \right. \\ \left. \alpha^s \sum_{s=1}^{m_s-1} d_{x+s}(1+Ip)^{-s-1/2+h}\right] & h=1 \\ \\ \left(\frac{(1+p)d_{x+h-1}}{l_{x+h-1}l_{x+h}}\right)\left[\alpha^r \sum_{s=d_r}^{d_r+m_r-1} l_{x+s}(1+Ip)^{-s+h} + \right. \\ \left. \alpha^s \sum_{s=1}^{m_s-1} d_{x+s}(1+Ip)^{-s-1/2+h}\right] & 1 < h \leq d_r \\ \\ \left[\frac{\alpha(1+p)d_{x+h-1}}{l_{x+h-1}l_{x+h}}\right] \sum_{s=h}^{d_r+m_r-1} l_{x+s}(1+Ip)^{-s+h} - p\alpha(1+Ip) & d_r < h \leq d_r+m_r-1 \end{cases}$$

Conocida la función $T_{i,h}$ podemos calcular las realizaciones $M(i,t)$ de la variable aleatoria $\xi_i^{c,R}$:

$$M(i,t) = \begin{cases} T^2_{i,1}(1+Ir)^{-1/2} & t=0 \\ \sum_{s=1}^{t} T^1_{i,s}(1+Ir)^{-s} + T^2_{i,t+1}(1+Ir)^{-t-1/2} & 0 < t < m_s \\ \sum_{s=1}^{t} T^1_{i,s}(1+Ir)^{-i} & t \geq m_s \end{cases}$$

A continuación estudiaremos el efecto que tiene en el coste total de la operación, la incorporación de un seguro inmediato hasta la jubilación a una renta de jubilación.

Si el margen de solvencia es una proporción de la provisión matemática distinguiremos dos casos :

1. Si el reaseguro es del tipo A entonces:

   si $\alpha^r \geq \alpha^s$ entonces siempre se satisfará:

$$E[\xi_i^{p,R}] < E[\xi_i^{p,R}(\text{renta})] \quad \forall \lambda$$

   siendo:

- $E[\xi_i^{p,R}]$ la esperanza de la variable aleatoria $\xi_i^{p,R}$ asociada a la operación mixta.
- $E[\xi_i^{p,R}(\text{renta})]$ la esperanza de la variable aleatoria $\xi_i^{p,R}$ asociada exclusivamente a la renta de jubilación.

Esto es debido a que la incorporación de un seguro inmediato hasta la jubilación, a una renta de jubilación, hace disminuir los valores de $T_{i,h}^1$ $h = 1,\dots,d_s$ en tal magnitud que, en valor actual actuarial supera al capital en riesgo generado por la operación de seguro $T_{i,h}^2$ $h = 1,\dots,d_s$.

En el supuesto que $\alpha^r < \alpha^s$ no queda garantizado el comportamiento anterior. Aunque para valores de α^s "próximos" a α^r, la $E[\xi_i^{p,R}]$ es menor que $E[\xi_i^{p,R}(\text{renta})]$ e inversamente proporcional a α^s. Para ilustrar esta idea consideraremos el siguiente ejemplo:

Dada la siguiente renta de jubilación:

- $x = 60$
- Edad de jubilación $x_{jub} = 65$ años
- $Ip = Ir = 0.09$
- Recargo del reasegurador $\lambda^R = 0$
- Reservas de solvencia son un 4% de las provisiones matemáticas
- Recargo del plan $\lambda = 0$
- Cuantía de la renta $\alpha^r = 1$
- Prima de reaseguro $\Pi^R = 1.602531$

estudiaremos como variará la prima de reaseguro si incoporamos un seguro inmediato y temporal 5 términos de cuantía constante α^s:

Si $\alpha^s = 1$ entonces $\Pi^R = 1.540076$

Si $\alpha^s = 5$ entonces $\Pi^R = 1.290256$

Si $\alpha^s = 10$ entonces $\Pi^R = 1.185568$

Si $\alpha^s = 20$ entonces $\Pi^R = 1.267035$

Si $\alpha^s = 30$ entonces $\Pi^R = 1.515055$

Si $\alpha^s = 32$ entonces $\Pi^R = 1.597085$

Si $\alpha^s = 32.5$ entonces $\Pi^R = 1.619029$

Podemos observar como la prima de reaseguro va disminuyendo conforme aumenta la cuantía del seguro hasta $\alpha^s = 10$. En este ejemplo

$$E[\xi_i^{p,R}] < E[\xi_i^{p,R}(\text{renta})]$$

siempre y cuando $\alpha^s < 32.5$

2. Si el reaseguro es del tipo B siempre se satisfará:

$$E[\xi_i^{p,R}] < E[\xi_i^{p,R}(\text{renta})] \quad \forall\lambda$$

ya que en este caso, la disminución de $T_{i,h}^1$ $h = 1, \ldots, d_s$ producida al incorporarse el seguro, no está acotada inferiormente por el cero, como sucede en el reaseguro tipo A.

Si el tipo de interés del reaseguro es menor al tipo de interés técnico del plan, (tanto en el reaseguro tipo A como en el tipo B) puede darse el caso que la disminución producida en la prima de reaseguro, consecuencia de la incorporación del seguro a la renta de jubilación, puede que llegue a compensar el incremento que se produce en la prima recargada de la operación, por lo que la incorporación del seguro no sólo sería gratuito en términos de coste total, sino que incluso abarataría el coste total de la operación con respecto al coste total de la renta de jubilación. Este caso queda recogido en el ANEXO 4-3

Si el margen de solvencia coincide con las reservas de solvencia RS^ϵ, distinguiremos dos casos:

- Si $\delta \leq Per_\epsilon[\xi_i^p(renta\,unitaria)](1+Ip)^{1/2}$ (en este caso serán equivalentes el reaseguro tipo A y tipo B) entonces:

$$E[\xi_i^{p,R}] = E[\xi_i^{p,R}(\text{renta})]$$

ya que la función $Z_{i,h}$ y $T_{i,h}$ no se ven alteradas por la incorporación del seguro. Para comprobarlo, analizaremos con detalle las dos funciones.

Respecto a la función $Z_{i,h}$ de la operación de renta-seguro, teniendo presente que $Per_\epsilon[\xi_{i,h}^p] = RS_{i,h}^\epsilon + V_{i,h}$

podemos expresarla de la siguiente forma:

$$Z_{i,h} = \begin{cases} \Pi^{Rec}(1+Ip) & h=1 \\ Per_\epsilon[\xi_{i,h}^p](1+Ip) & 1 < h \leq x_{jub} - x \\ Per_\epsilon[\xi_{i,h}^p] - \alpha_{h-1}^r)(1+Ip) & x_{jub} - x < h \leq w - x - 1 \end{cases}$$

en este caso, al ser $\delta \leq \text{Per}_\epsilon[\xi_i^p(renta)](1+Ip)^{1/2}$ entonces queda garantizado que:

$$Per_\epsilon[\xi_{i,h}^p] = \text{Per}_\epsilon[\xi_{i,h}^p(renta)] \quad h = 1, \ldots, w-x-1$$

y teniendo presente que la prima recargada de la operación mixta, coincide con la prima recargada de la renta, llegamos a la conclusión que la función $Z_{i,h}$ y por tanto la función $T_{i,h}^1$ no se ven modificadas por la introducción del seguro.

Respecto al capital en riesgo de la operación mixta , $T_{i,h}^2 = 0$ ya que la prima recargada cobrada , cubre el riesgo de fallecimiento en cualquier periodo de vigencia del seguro, por tanto tampoco se ve modificada la función $T_{i,h}$. En consecuencia, la incorporación de un seguro inmediato y temporal hasta la jubilación del partícipe a una renta de jubilación, no modificará el coste total de la operación.

- Si $\delta > \text{Per}_\epsilon[\xi_i^p(renta\,unitaria)](1+Ip)^{1/2}$ el reaseguro tipo A y el reaseguro tipo B no serán equivalentes y el comportamiento de la $E[\xi_i^{p,R}]$ con respecto a

$E[\xi_i^{p,R}(\text{renta})]$ será muy similar al caso en el que el margen de solvencia es una proporción de la provisión matemática.

Analisis de la variable aleatoria asociada a las contraprestaciones del reasegurador

En este caso la ser la operación a prima única, la variable aleatoria $\xi_i^{c,R}$ pasa a ser una variable cierta de importe la prima pura de reseguro Π^R.

Por tanto, la prima de reaseguro viene dada por la esperanza matemática de la variable aleatoria $\xi_i^{p,R}$:

$$\Pi^R = E[\xi_i^{p,R}] = \sum_{j=0}^{w-x-1} M(i,t_j)\ {}_{j/}q_x$$

Esto nos permite obtener una expresión a priori de dicha prima en la modalidad de reaseguro del percentil cuando $\delta \leq Per_\epsilon[\xi_i^p(renta\,unitaria)](1+Ip)^{1/2}$, coincidiendo ésta, con la prima de reaseguro que se obtendría si la operación fuese exclusivamente la renta de la operación. El importe de dicha prima de reaseguro se obtiene por tanto, como el valor actual actuarial de una renta prepagable valorada al tipo de interés del reaseguro Ir de importe α, diferida $x_{xub} - x + s^\epsilon$ y vitalicia:

$$\Pi^R = E[\xi_i^{p,R}(renta)] = \alpha\ {}_{x_{xub}-x+s^\epsilon/}\ddot{a}_x$$

Si el reaseguro es de diferencia de siniestralidad, la prima de reaseguro podremos calcularla a través de la conocida expresión:

$$\Pi^R = \sum_{h=1}^{w-x-1} T^1_{i,h}\ {}_hP_x(1+Ir)^{-h} + \sum_{h=1}^{d_r} T^2_{i,h}\ {}_{h-1/}q_x(1+Ir)^{-h+1/2}$$

4.4.1.5 Variable aleatoria pérdida del reasegurador. Cálculo de la prima pura ajustada de reaseguro

En este apartado obtendremos la prima ajustada de reaseguro $\Pi^{R,A}$, analizando previamente la variable aleatoria asociada al beneficio del plan $\xi_i^{b,R}$ en las dos modalidades de reaseguro estudiadas.

Análisis de la variable asociada al beneficio del plan en la modalidad de reaseguro del percentil

Distinguimos los siguientes casos:

Si $\delta > Per_\epsilon[\xi_i^p(\text{renta unitaria})](1+Ip)^{1/2}$ no podremos obtener una expresión general que nos permita obtener ni las realizaciones de la variable aleatoria ξ_i^p ni por tanto, la $E[\xi_i^{p,R}]$.

Si $\delta \leq Per_\epsilon[\xi_i^p(\text{renta unitaria})](1+Ip)^{1/2}$ las realizaciones de ξ_i^p vienen dadas por la siguiente expresión:

$$b(i,t_k) = \begin{cases} \Pi^\epsilon \left(\frac{1+Ip}{1+Ir}\right)^{t_k+1/2} - \delta\alpha & t_k \leq d_r - 1 \\ \\ (\Pi^\epsilon - {}_{d_r/}\ddot{a}_{\overline{t_k+1-d_r}|Ir}) \left(\frac{1+Ip}{1+Ir}\right)^{t_k+1/2} & d_r \leq t_k < d_r + s^\epsilon \\ \\ 0 & t_k \geq d_r + s^\epsilon \end{cases}$$

Observemos que las realizaciones de $\xi_i^{b,R}$ coinciden con la de la operación de renta, menos para el periodo de diferimiento de la misma, en el cual ha de tenenerse en cuenta el pago del seguro si el partícipe fallece en ese período.

Análisis de la variable asociada al beneficio del plan en la modalidad de reaseguro de diferencia de siniestralidad

La expresión formal de $H_{i,h}$ viene dada en este caso por:

$$H_{i,h} = \begin{cases} Z_{i,h}(1+Ip)^{-1/2} - \alpha^s & \text{si} \quad Z_{i,h}(1+Ip)^{-1/2} - \alpha_h^s > 0 \\ \\ 0 & \text{si} \quad Z_{i,h}(1+Ip)^{-1/2} - \alpha_h^s \leq 0 \\ \\ & 1 \leq h \leq x_{jub} - x \\ \\ Z_{i,h}(1+Ip)^{-1/2} & x_{jub} - x < h < w - x \end{cases}$$

Conocida la función $H_{i,h}$ podemos determinar las realizaciones de la variable aleatoria $\xi_i^{b,R}$:

$$b(i,t) = H_{i,t+1}(1+Ir)^{-t-\frac{1}{2}} \quad 0 \leq t < w-x$$

En ambas modalidades de reaseguro, tanto la del percentil como la de diferencia de siniestralidad se da la siguiente relación:

$$E[\xi_i^{b,R}] < E[\xi_i^{b,R}(renta)]$$

debido al menor beneficio esperado que tendremos en la operación mixta con respecto a la operación de renta de jubilación como consecuencia del pago del seguro si el partícipe fallece en el período de diferimiento de la renta.

Cálculo de la prima ajustada de reaseguro

La prima pura ajustada de reaseguro $\Pi^{R,A}$ la obtendremos aplicando la dexpresión general:

$$\Pi^{R,A} = E[\xi_i^{p,R}] - E[\xi_i^{b,R}] \quad (I)$$

En la modalidad de *reaseguro del percentil* podemos obtener la expresión analítica de $\Pi^{R,A}$ si $\delta \leq \mathrm{Per}_\epsilon[\xi_i^p(renta\,unitaria)](1+Ip)^{1/2}$.

Sabemos que en nuestro caso particular:

$$E[\xi_i^{p,R}] = E[\xi_i^{p,R}(renta)] = \alpha\ {}_{d_r+s^\epsilon/}\ddot{a}_x$$

sin embargo

$$E[\xi_i^{b,R}] \text{ no coincide con } \quad E[\xi_i^{b,R}(renta)]$$

ya que en el cómputo del beneficio esperado, tenemos en cuenta la prestación de seguro que se tiene que satisfacer al partícipe si éste fallece antes de llegar a la edad de la jubilación. Esta circunstáncia reduce el beneficio esperado que se le cede al reasegurador con respecto a la operación de renta. Por tanto:

$$E[\xi_i^{b,R}] < E[\xi_i^{b,R}(renta)]$$

siendo:

$$E[\xi_i^{b,R}] = E[\xi_i^{b,R}(renta)] - \sum_{j=1}^{d_r} \delta\alpha(1+Ir)^{-j+1/2}\ {}_{j-1/}q_x (II)$$

como:

$$E[\xi_i^{b,R}(renta)] = \sum_{j=1}^{d_r+s^e} \Pi^e \left(\frac{1+Ip}{1+Ir}\right)^{j-1/2}\ {}_{j-1/}q_x -$$

$$\sum_{j=d_r+1}^{d_r+s^e} \alpha^r\ {}_{d_r/}\ddot{a}_{\overline{j-d_r}|Ip} \left(\frac{1+Ip}{1+Ir}\right)^{j-1/2}\ {}_{j-1/}q_x$$

sustituyendo en (II):

$$E[\xi_i^{b,R}] = \sum_{j=1}^{d_r+s^e} \Pi^e \left(\frac{1+Ip}{1+Ir}\right)^{j-1/2}\ {}_{j-1/}q_x -$$

$$\sum_{j=d_r+1}^{d_r+s^e} \alpha^r\ {}_{d_r/}\ddot{a}_{\overline{j-d_r}|Ip} \left(\frac{1+Ip}{1+Ir}\right)^{j-1/2}\ {}_{j-1/}q_x -$$

$$\sum_{j=1}^{d_r} \delta\alpha(1+Ir)^{-j+1/2}\ {}_{j-1/}q_x$$

Por último, sustituyendo las expresiones de $E[\xi_i^{b,R}]$ y $E[\xi_i^{p,R}]$ en (I):

$$\Pi^{R,A} = \Pi^{R,A}(\text{renta}) + \sum_{j=1}^{d_r} \delta\alpha(1+Ir)^{-j+1/2}\ {}_{j-1/}q_x$$

En el caso de *reaseguro de diferencia de siniestralidad*, podemos obtener la prima ajustada de reaseguro aplicando la expresión :

$$\Pi^{R,A} = \sum_{h=1}^{w-x-1} T_{i,h}^1\ {}_hP_x(1+Ir)^{-h} + \sum_{h=1}^{d_r} T_{i,h}^2\ {}_{h-1/}q_x(1+Ir)^{-h+1/2} -$$

$$\sum_{h=1}^{w-x-1} H_{i,h}\ {}_{h-1/}q_x(1+Ir)^{-h+1/2}$$

4.4.2 Estudio de la estrategia óptima

Nos plantearemos el estudio de la función $K(\epsilon)$ para las dos modalidades de reaseguro.

4.4.2.1 Modalidad de reaseguro del percentil sin reparto de beneficios

Cabe plantearnos dos situaciones:

1. Si $\delta \leq \text{Per}_{\epsilon^t}[\xi_i^p(renta\,unitaria)](1+Ip)^{1/2}$,$\forall \epsilon^t \in [0, \epsilon^{max}]$ o lo que es lo mismo debido al carater decreciente de $\text{Per}_{\epsilon^t}[\xi_i^p(renta\,unitaria)]$ con respecto al riesgo reasegurado, $\delta \leq \text{Per}_{\epsilon^{max}}[\xi_i^p(rentaunitaria)](1+Ip)^{1/2}$, nos remitimos al analísis que en este sentido se hizo sobre la renta.

2. Si $\delta > \text{Per}_{\epsilon^{max}}[\xi_i^p(renta\,unitaria)](1+Ip)^{1/2}$ no podemos conocer a priori la expresión del percentil y en consecuencia la expresión de la prima de reaseguro Π^R, lo cual nos imposibilita deteminar, también a priori, la función $K(\epsilon)$. Esta circunstacia nos obliga a obtener la estrategia óptima a posteriori, calculando una a una las posibles estrategias recargo reaseguro.

4.4.2.2 Modalidad de reaseguro del percentil con reparto de beneficios

Nos volvemos a plantear las mismas situaciones :

Si $\delta > \text{Per}_{\epsilon^{max}}[\xi_i^p(renta\,unitaria)](1+Ip)^{1/2}$ y por el mismo motivo que en el apartado anterior, no podemos deteminar a priori la función $K^A(\epsilon)$, circunstacia que nos obliga a determinar la estrategia óptima a posteriori, calculando una a una las posibles estrategias recargo reaseguro.

Si $\delta \leq \text{Per}_{\epsilon^{max}}[\xi_i^p(renta\,unitaria)](1+Ip)^{1/2}$, entonces sí que podemos conocer la función $K^A(\epsilon^t)$ a priori. A continuación demostraremos que dicha función coincide con la que lleva asociada la operación de renta, a pesar de que la prima ajustada de reaseguro sea distinta en la operación mixta renta- seguro.

Sabemos que:

$VPREC(\epsilon^t) = \Pi(1+\lambda^\epsilon) =$

$= \Pi^{\epsilon^t}(\text{renta}) = VPREC(\epsilon^t)(\text{renta})$, por ser el percentil el mismo que el de la renta, por tanto:

$$\Delta VPREC(\epsilon^t) = \Delta VPREC(\epsilon^t)(renta) = -\alpha(1+Ip)^{-(x_{jub}-x)-s^{\epsilon^t}+1}$$

Respecto a $VPREA(\epsilon^t)$ sabemos que:

$$VPREA(\epsilon^t) = (1+\lambda^R)\left[\Pi^{R,A}(\text{renta}) + \sum_{j=1}^{d_r} \delta\alpha(1+Ir)^{-j+1/2}\ {}_{j-1/}q_x\right]$$

.

También podemos expresarlo en función de $VPREA(\epsilon^t)(renta)$:

$$VPREA(\epsilon^t) = VPREA(\epsilon^t)(renta) + (1+\lambda^R)\left[\sum_{j=1}^{d_r} \delta\alpha(1+Ir)^{-j+1/2}\ {}_{j-1/}q_x\right]$$

.

Sin embargo, como $(1+\lambda^R)\sum_{j=1}^{d_r} \delta\alpha(1+Ir)^{-j+1/2}\ {}_{j-1/}q_x$ no depende de ϵ^t, entonces:

$$\Delta VPREA(\epsilon^t) = \Delta VPREA(\epsilon^t)(renta) =$$

$$= \alpha^r(1+Ir)^{-d_r-s^{\epsilon^t}+1}(1+\lambda^R)\left[\ {}_{d_r+s^{\epsilon^t}-1}P_x\left(\frac{1+Ip}{1+Ir}\right)^{d_r+s^{\epsilon^t}-1}\right.$$

$$\left. + \sum_{j=1}^{d_r+s^{\epsilon^t}-1}\ {}_{j-1/}q_x\left(\frac{1+Ip}{1+Ir}\right)^{j-1/2}\right]$$

lo que nos lleva a que :

$$K^A(\epsilon^t) = -\frac{\Delta VPREA(\epsilon^t)(renta)}{\Delta VPREC(\epsilon^t)(renta)} = K^A(\epsilon^t)(renta) =$$

$$= (1+\lambda^R)\left[\ {}_{d_r+s^{\epsilon^t}-1}P_x\left(\frac{1+Ip}{1+Ir}\right)^{d_r+s^{\epsilon^t}-1}\right.$$

$$+\sum_{j=1}^{d_r+s^{\epsilon^t}-1} {}_{j-1/}q_x \left(\frac{1+Ip}{1+Ir}\right)^{j-1/2}\Bigg]$$

Por consiguiente, la estrategia óptima coincide en este caso con la de la renta.

4.4.2.3 Modalidad de reaseguro de diferencia de siniestralidad sin reparto de beneficios

Daremos directamente la expresión analítica de la función $K(\lambda_t)$, pues el proceso es idéntico al ya descrito tanto en la renta como en el seguro, llegando a las siguientes expresiones:

Para el reaseguro tipo B, como la prima de reaseguro puede ser negativa:

- Si $\alpha_s > Z_{i,1}(1+Ip)^{-1/2}$

$$K(\lambda_t) = \begin{cases} \left(\frac{1+Ip}{1+Ir}\right)^{1/2}\left[P_x\left(\frac{1+Ip}{1+Ir}\right)^{1/2} + q_x\right](1+\lambda^R) & \forall\lambda_t \quad \text{tq} \quad \Pi^{R,\lambda_t} > 0 \\ \left(\frac{1+Ip}{1+Ir}\right)^{1/2}\left[P_x\left(\frac{1+Ip}{1+Ir}\right)^{1/2} + q_x\right] & \forall\lambda_t \quad \text{tq} \quad \Pi^{R,\lambda_t} \leq 0 \end{cases}$$

- Si $\alpha_s \leq Z_{i,1}(1+Ip)^{-1/2}$

$$K(\lambda_t) = \begin{cases} \left(\frac{1+Ip}{1+Ir}\right) P_x(1+\lambda^R) & \forall\lambda_t \quad \text{tq} \quad \Pi^{R,\lambda_t} > 0 \\ \left(\frac{1+Ip}{1+Ir}\right) P_x & \forall\lambda_t \quad \text{tq} \quad \Pi^{R,\lambda_t} \leq 0 \end{cases}$$

Para el reaseguro tipo A (siempre y cuando $\lambda < \frac{R_{i,1}+V_{i,1}}{\Pi(1+Ip)} - 1$)

- Si $\alpha_s > Z_{i,1}(1+Ip)^{-1/2}$

$$K(\lambda_t) = \left(\frac{1+Ip}{1+Ir}\right)^{1/2}\left[P_x\left(\frac{1+Ip}{1+Ir}\right)^{1/2} + q_x\right](1+\lambda^R)$$

- Si $\alpha_s \leq Z_{i,1}(1+Ip)^{-1/2}$

$$K(\lambda_t) = \left(\frac{1+Ip}{1+Ir}\right) P_x(1+\lambda^R)$$

4.4.2.4 Modalidad de reaseguro de diferencia de siniestralidad con reparto de beneficios

Daremos directamente la expresión analítica de la función $K^A(\lambda_t)$ cuando el margen de solvencia es una proporción de la provisión matemática, pues el proceso es idéntico al ya descrito tanto en la renta como en el seguro:

Para el reaseguro tipo B, como la prima de reaseguro puede ser negativa:

$$K(\lambda_t) = \begin{cases} \left(\frac{1+Ip}{1+Ir}\right)^{1/2}\left[P_x\left(\frac{1+Ip}{1+Ir}\right)^{1/2} + q_x\right](1+\lambda^R) & \forall\lambda_t \quad \text{tq} \quad \Pi^{R,\lambda_t} > 0 \\ \left(\frac{1+Ip}{1+Ir}\right)^{1/2}\left[P_x\left(\frac{1+Ip}{1+Ir}\right)^{1/2} + q_x\right] & \forall\lambda_t \quad \text{tq} \quad \Pi^{R,\lambda_t} \leq 0 \end{cases}$$

Para el reaseguro tipo A (siempre y cuando $\lambda < \frac{R_{i,1}+V_{i,1}}{\Pi(1+Ip)} - 1$):

$$K(\lambda_t) = \left(\frac{1+Ip}{1+Ir}\right)^{1/2}\left[P_x\left(\frac{1+Ip}{1+Ir}\right)^{1/2} + q_x\right](1+\lambda^R)$$

4.5 Operación de renta a primas periódicas y constantes. Renta diferida temporal con cuantías constantes

El problema que nos encontramos en las operaciones a primas periódicas, es que en la modalidad de diferencia de siniestralidad, en el caso en el que el margen de solvencia sea una proporción de la provisión matemática, una variación en el recargo de seguridad afectará a los n-primeros términos de la función $Z_{i,h}$ y por tanto a los n primeros términos de la función $T_{i,h}$. Siendo n el número de primas satisfechas en la operación. Esta circunstancia unida a la dificultad de obtener expresiones operativas de $T_{i,h} \quad h = 1, \ldots, n$, a diferencia de lo que sucedía a prima única, nos impedirá conocer una expresión operativa de $\Delta VPREA(\lambda_t)$ y por tanto, no podremos obtener la expresión analítica de la función K para ésta modalidad de reaseguro.

Tan sólo comentar que dicha función obtenida a posteriori, y si el reasegurador es del tipo B, al igual que sucedía con las operaciones a prima única, es independiente del recargo de seguridad del plan.

En consecuencia sólo podremos obtener la expresión formal de K, cuando la modalidad de reaseguro sea la del percentil.

4.5.1 Cálculo de la prima de reseguro

Seguiremos, al igual que hemos hecho en los casos a prima única, el esquema utilizado en el estudio general.

4.4.1 Descripción de la operación objeto de estudio

La operación presenta las siguientes características:

$P_t = P \quad t = 0, \ldots, n-1$. Por ser la operación a prima periódica y de importe P.

$\alpha_i^r = \alpha^r$. La cuantía de la renta es constante.

$\alpha_i^s = 0$. No hay prestación de seguro.

La ecuación de equilibrio viene dada por la siguiente expresión:

$$P\sum_{j=0}^{n-1} {}_jE_x = \sum_{j=d_r}^{d_r+m_r-1} \alpha^r \; {}_jE_x$$

4.4.1.2 Variable aleatoria pérdida individual del plan. Cálculo de la prima única.

Para poder determinar la variable aleatoria pérdida individual del plan L_i , estudiaremos previamente las variables aleatorias que la componen ξ_i^c y ξ_i^p.

•El conocimiento de la variable aleatoria ξ_i^p, pasará por conocer la expresión particular de sus realizaciones $\alpha(i,t)$, las cuales coinciden con las que ya definimos para la misma operación a prima única, por tanto:

$$\alpha(i,t) = \begin{cases} 0 & 0 \le t < d_r \\ \alpha^r \; {}_{d_r/}\ddot{a}_{\overline{t+1-d_r}|Ip} & d_r \le t < d_r + m_r \\ \alpha^r \; {}_{d_r/}\ddot{a}_{\overline{m_r}|Ip} & d_r + m_r \le t < w - x \end{cases}$$

Respecto a la variable aleatoria ξ_i^c, al ser la operación a primas periódicas y constantes las realizaciones de la misma $P(i,t)$ vienen recogidas por la siguiente expresión:

$$P(i,t) = \begin{cases} P\ddot{a}_{\overline{t+1}|Ip} & 0 \le t < n \\ P\ddot{a}_{\overline{n}|Ip} & n \le t < w - x \end{cases}$$

En consecuencia, la variable aleatoria pérdida individual L_i queda expresada del siguiente modo:

REALIZACIONES	PROBABILIDADES
$-P\ddot{a}_{\overline{1}\vert Ip}$	q_x
$\vdots$	$\vdots$
$-P\ddot{a}_{\overline{n}\vert Ip}$	${}_{n-1/}q_x$
$\vdots$	$\vdots$
$-P\ddot{a}_{\overline{n}\vert Ip}$	${}_{d_r-1/}q_x$
${}_{d_r/}\ddot{a}_{\overline{1}\vert Ip} - P\ddot{a}_{\overline{n}\vert Ip}$	${}_{d_r/}q_x$
$\vdots$	$\vdots$
${}_{d_r/}\ddot{a}_{\overline{m_r}\vert Ip} - P\ddot{a}_{\overline{n}\vert Ip}$	${}_{d_r+m_r-1/}q_x$
$\vdots$	$\vdots$
${}_{d_r/}\ddot{a}_{\overline{m_r}\vert Ip} - P\ddot{a}_{\overline{n}\vert Ip}$	${}_{w-x-1/}q_x$

El cálculo de la prima periódica es inmediato, tan sólo hay que tener presente dos observaciones con respecto al modelo general:

- Al ser todas las prima constantes, tenemos que considerar dentro del modelo general de cálculo de primas, aquel en el que la primera de ellas sigue la misma ley de variación que el resto de primas.
- La ley de variación de primas $f(t+1) = 1$ por ser constantes, en consecuencia, si bien podemos definir las primas periódicas en general como:

  $$P_t = f(t+1)\,k \quad \forall t = 0, ..., n-1$$

  en nuestro caso particular al tratarse de primas constantes:

  $$P_t = k = P$$

Conocida la ley de variación podemos definir la variable aleatoria intermedia ξ_i^q, la cual presenta las siguientes relalizaciones $q(i,t)$:

$$q(i,t) = \begin{cases} \ddot{a}_{\overline{t+1}|Ip} & 0 \leq t < n \\ \ddot{a}_{\overline{n}|Ip} & n \leq t < w - x \end{cases}$$

Como sabemos k viene dada por la siguiente expresión:

$$k = \frac{E[\xi_i^p]}{E[\xi_i^q]}$$

al ser en nuestro caso:

$k = P$

$E[\xi_i^p] = \alpha^r \ {}_{d_r/m_r}\ddot{a}_x$

$E[\xi_i^q] = \ {}_{/n}\ddot{a}_x$

entonces:

$$P = \frac{\alpha^r \ {}_{d_r/m_r}\ddot{a}_x}{{}_{/n}\ddot{a}_x}$$

4.4.1.3 Cálculo del recargo de seguridad

Para poder determinar el recargo de seguridad necesitaremos definir la variable aletoria L_i^*.

En nuestro caso particular al tratarse la operación de una renta, la variable aleatoria L_i ya queda automáticamente ordenada de menor a mayor valor, ya que el número de términos de la renta va aumentando conforme el partícipe vive más períodos enteros. De todas formas, las realizaciones de L_i^* asociadas al período de pago de primas, no coinciden con las realizaciones de la variable aleatoria L_i, sin embargo para este período, es sencillo obtener las realizaciones ordenadas de menor a mayor, ya que éstas coinciden con una inversión de los valores ordenados temporalmente, quedando definida la variable aleatoria L_i^* del siguiente modo:

REALIZACIONES	PROBABILIDADES
$-P\ddot{a}_{\overline{n}\|Ip}$	${}_{n-1/}q_x$
$\vdots$	$\vdots$
$-P\ddot{a}_{\overline{n}\|Ip}$	${}_{d_r-1/}q_x$
$\vdots$	$\vdots$
$-P\ddot{a}_{\overline{1}\|Ip}$	q_x
${}_{d_r/}\ddot{a}_{\overline{1}\|Ip} - P\ddot{a}_{\overline{n}\|Ip}$	${}_{d_r/}q_x$
$\vdots$	$\vdots$
${}_{d_r/}\ddot{a}_{\overline{s^\epsilon}\|Ip} - P\ddot{a}_{\overline{n}\|Ip}$	${}_{d_r+s^\epsilon-1/}q_x$
$\vdots$	$\vdots$
${}_{d_r/}\ddot{a}_{\overline{m_r}\|Ip} - P\ddot{a}_{\overline{n}\|Ip}$	${}_{d_r+m_r-1/}q_x$
$\vdots$	$\vdots$
${}_{d_r/}\ddot{a}_{\overline{m_r}\|Ip} - P\ddot{a}_{\overline{n}\|Ip}$	${}_{w-x-1/}q_x$

En el caso de prestación de renta, puede observarse que fijado un nivel de insolvencia del plan ϵ, la expresión del percentil asociado a L_i^* siempre vendrá dado por:

$$Per_\epsilon[L_i^*] = \alpha^r \; {}_{d_r/}\ddot{a}_{\overline{s^\epsilon}|Ip} - P\ddot{a}_{\overline{n}|Ip}$$

siendo s^ϵ el número de entero de términos que a lo sumo podrá hacerse cargo el plan cobrando la prima recargada.

Sabemos que el recargo viene dado por la siguiente expresión:

$$\lambda^{\epsilon} = \frac{\alpha(i,t_h) - P(i,t_h)}{P(i,t_h)} = \frac{Per_{\epsilon}[L_i^*]}{P(i,t_h)}$$

que particularizándola a nuestro caso:

$P(i,t_h) = P\ddot{a}_{\overline{n}|Ip}$, por ser la operación a primas periódicas.

$\alpha(i,t_h) = \alpha^r\ {}_{d_r/}\ddot{a}_{\overline{s^{\epsilon}}|Ip}$, expresión que coincide con la que obtuvimos en la operación a prima única.

por tanto:

$$\lambda^{\epsilon} = \frac{\alpha^r\ {}_{d_r/}\ddot{a}_{\overline{s^{\epsilon}}|Ip} - P\ddot{a}_{\overline{n}|Ip}}{P\ddot{a}_{\overline{n}|Ip}}$$

Conocido el recargo podemos conocer las realizaciones y probabilidades de la variable aleatoria L_i^{ϵ}.

El número de términos s^{ϵ^t} que a lo sumo puede hacerse cargo el plan asociado a un nivel de riesgo reasegurado ϵ^t, estará comprendido al igual que en el caso de prima única, entre el número de términos que se haría cargo el plan si sólo cobrase la prima pura $s^{\epsilon^{max}}$ y el número de términos máximo que el plan podría hacerse cargo si el nivel de insolvencia del plan fuese nulo, $s^{\epsilon^{min}}$. Por tanto:

$$s^{\epsilon^{max}} \leq s^{\epsilon^t} \leq s^{\epsilon^{min}} = m_r$$

donde:

$s^{\epsilon^{min}}$ coincidirá con la temporalidad de la renta $s^{\epsilon^{min}} = m_r$.

$s^{\epsilon^{max}}$ satisfará la siguiente condición:

$$P\ddot{a}_{\overline{n}|Ip} = \alpha^r\ {}_{d_r/}\ddot{a}_{\overline{s^{\epsilon^{max}}}|Ip}$$

viniendo su valor dado por la parte entera de :

$$-\frac{\ln\left[1 - \frac{Ip\,P\ddot{a}_{\overline{n}|Ip}}{\alpha^r(1+Ip)^{-d_r+1}}\right]}{\ln(1+Ip)}$$

De todas maneras, al igual que ya hicimos con prima única, podemos determinar cualquier valor de s^{ϵ^t} $\forall \epsilon^t \in (\epsilon^{min}, \epsilon^{max})$, mediante la siguiente expresión:

$$P^{\epsilon^t} \ddot{a}_{\overline{n}|Ip} = \alpha^r \; {}_{d_r/}\ddot{a}_{\overline{s^{\epsilon^t}}|Ip}$$

en la cual despejando s^{ϵ^t}:

$$s^{\epsilon^t} = -\frac{\ln\left[1 - \frac{Ip\, P^{\epsilon^t} \ddot{a}_{\overline{n}|Ip}}{\alpha^r (1+Ip)^{-d_r+1}}\right]}{\ln(1+Ip)}$$

4.4.1.4 Variable aleatoria pérdida del reasegurador. Cálculo de la prima periódica de reaseguro

Analizaremos las variables aleatorias que forman la pérdida del reasegurador $\xi_i^{p,R}$ y $\xi_i^{c,R}$.

Análisis de la variable aleatoria asociada a las prestaciones del reasegurador en la modalidad de reaseguro del percentil

Sabemos que las realizaciones de la variable aleatoria $\xi_i^{p,R}$ vienen definidas en esta modalidad de reaseguro por la siguiente expresión:

$$M(i,t_k) = \begin{cases} 0 & k \leq h \\ M_1(i,t_k) & k > h \quad \text{y} \quad t_k < d_r + s^\epsilon \\ M_2(i,t_k) & k > h \quad \text{y} \quad t_k \geq d_r + s^\epsilon \end{cases}$$

siendo:

$$M_1(i,t_k) = l(i,t_k)^\epsilon \left(\frac{1+Ip}{1+Ir}\right)^{t_k+1/2} \qquad \forall t_k < d_r + s^\epsilon$$

$$M_2(i,t_k) = \left[\sum_{j=d_r+s^\epsilon}^{t_k} \alpha_j^r(1+Ir)^{d_r+s^\epsilon-j} + \alpha_{t_k+1}^s(1+Ir)^{-(d_r+s^\epsilon-t_k+1/2)} - \right.$$

$$\left. R_{d_r+s^\epsilon}^\epsilon\right)(1+Ir)^{-(d_r+s^\epsilon)} \quad \forall t_k \geq d_r + s^\epsilon$$

En nuestro caso, al igual que sucedía con la operación a prima única:

$M_1(i,t_k) = 0$ ya que al haber exclusivamente prestación de renta no se ha producido pérdida.

$R_{d_r+s^\epsilon} = 0.$

$$M_2(i,t_k) = \sum_{j=d_r+s^\epsilon}^{t_k} \alpha^r(1+Ir)^{-j} =$$

$$= \begin{cases} \sum_{j=d_r+s^\epsilon}^{t_k} \alpha^r(1+Ir)^{-j} & t_k < d_r + m_r \\ \sum_{j=d_r+s^\epsilon}^{d_r+m_r-1} \alpha^r(1+Ir)^{-j} & t_k \geq d_r + m_r \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \alpha^r \ {}_{d_r+s^\epsilon/}\ddot{a}_{\overline{t_k+1-(d_r+s^\epsilon)}|Ir} & t_k < d_r + m_r \\ \alpha^r \ {}_{d_r+s^\epsilon/}\ddot{a}_{\overline{m_r-s^\epsilon}|Ir} & t_k \geq d_r + m_r \end{cases}$$

Análisis de la variable aleatoria asociada a las prestaciones del reasegurador en la modalidad de reaseguro de diferencia de siniestralidad

La expresión formal de la función $Z_{i,h}$ para la operación objeto de estudio si el reasegurador es del **tipo A**, viene dada por:

$$Z_{i,h} = \begin{cases} P^{Rec}(1+Ip) & h=1 \\ \\ (Z_{i,h-1}+P^R)(1+Ip) & \text{si} \quad Z_{i,h-1} \geq R_{i,h-1}+V_{i,h-1} \\ (R_{i,h-1}+V_{i,h-1}+P^R)(1+Ip) & \text{si} \quad Z_{i,h-1} < R_{i,h-1}+V_{i,h-1} \\ & 1 < h \leq n \\ \\ Z_{i,h-1}(1+Ip) & \text{si} \quad Z_{i,h-1} \geq R_{i,h-1}+V_{i,h-1} \\ (R_{i,h-1}+V_{i,h-1})(1+Ip) & \text{si} \quad Z_{i,h-1} < R_{i,h-1}+V_{i,h-1} \\ & n < h \leq d_r \\ \\ (Z_{i,h-1}-\alpha^r)(1+Ip) & \text{si} \quad Z_{i,h-1} \geq R_{i,h-1}+V_{i,h-1} \\ (R_{i,h-1}+V_{i,h-1}-\alpha^r)(1+Ip) & \text{si} \quad Z_{i,h-1} < R_{i,h-1}+V_{i,h-1} \\ & d_r < h \leq d_r+m_r \end{cases}$$

Respecto a la función $T_{i,h}$ en este caso al no haber prestación de seguro:

$$T_{i,h} = T^1_{i,h}$$

donde:

$$T^1_{i,h} = \max\{0, \quad V_{i,h}+R_{i,h}-Z_{i,h}\}, \quad h=1,\ldots,d_r+m_r-1$$

La expresión formal de la función $Z_{i,h}$ si el reasegurador es del **tipo B**, viene dada por:

$$Z_{i,h} = \begin{cases} P^{Rec}(1+Ip) & h=1 \\ \\ (R_{i,h-1}+V_{i,h-1}+P^R)(1+Ip) & 1 < h \leq n \\ \\ (R_{i,h-1}+V_{i,h-1})(1+Ip) & n < h \leq d_r \\ \\ (R_{i,h-1}+V_{i,h-1}-\alpha^r)(1+Ip) & d_r < h \leq d_r+m_r \end{cases}$$

Respecto a la función $T_{i,h}$ al no haber prestación de seguro:

$$T_{i,h} = T^1_{i,h}$$

donde:

$$T^1_{i,h} = V_{i,h} + R_{i,h} - Z_{i,h}, \quad h = 1, \ldots, d_r + m_r - 1$$

A diferencia de las operaciones a prima únicas, las operaciones a primas periódicas no presentan, en el caso de que el el margen de solvencia sea una proporción de la provisión matemática, expresiones analíticas sencillas de la función $T^1_{i,h}$, por lo que para su cálculo recurriremos directamente a su definición.

En este caso es fácil observar, tal y como adelantamos al principio, que una variación en el recargo de seguridad afectará a los n-primeros términos de la función $Z_{i,h}$ y por tanto a los n primeros términos de la función $T_{i,h}$. Siendo n el número de primas satisfechas en al operación. Esta circunstancia se dará en cualquier operación a primas periódicas, ya sea de renta como de seguro, y tanto si el reasegurador es del tipo A como si es del tipo B.

Conocida la función $T_{i,h}$ podemos determinar las realizaciones $M(i,t)$ de la variable aleatoria $\xi_i^{p,R}$:

$$M(i,t) = \begin{cases} \sum_{s=1}^{t} T^1_{i,s}(1+Ir)^{-s} & 0 \le t < d_r + m_r \\ \sum_{s=1}^{d_r+m_r-1} T^1_{i,s}(1+Ir)^{-s} & t \ge d_r + m_r \end{cases}$$

siendo para $t = 0$, $\quad \sum_{s=1}^{0} T^1_{i,s}(1+Ir)^{-s} = 0$

Análisis de la variable aleatoria asociada a las contraprestaciones del reasegurador

La variable aleatoria $\xi_i^{c,R}$, viene definida por las siguientes realizaciones $P^R(i,t)$:

$$P^R(i,t) = \begin{cases} P^R \ddot{a}_{\overline{t+1|}Ir} & 0 \le t < n \\ P^R \ddot{a}_{\overline{n|}Ir} & n \le t < w - x \end{cases}$$

El proceso que seguimos para calcular la prima periódica de reaseguro P^R, es idéntico al que ya hicimos cuando calculamos la prima periódica pura del plan.

Como la ley de variación de la prima de reaseguro es $f(t+1) = 1 \quad \forall t = 0, ...n-1$, por ser ésta constante, entonces la expresión general de la misma :

$$P_t^R = f(t+1)\, k^R \quad \forall t = 0, ..., n-1$$

queda simplificada del siguiente modo:

$$P_t^R = k^R = P^R$$

Conocida la ley de variación estamos en condiciones de poder conocer la variable aleatoria intermedia $\xi_i^{q,R}$ cuyas realizaciones $q^R(i,t)$ vienen dadas por :

$$q^R(i,t) = \begin{cases} \ddot{a}_{\overline{t+1}|Ir} & 0 \leq t < n \\ \ddot{a}_{\overline{n}|Ir} & n \leq t < w - x \end{cases}$$

Viniendo k^R dada por la siguiente expresión:

$$k^R = \frac{E[\xi_i^{p,R}]}{E[\xi_i^{q,R}]}$$

En la modalidad de reaseguro del percentil podemos obtener una expresión operativa que nos permita calcular k^R y por tanto la prima periódica de reaseguro, ya que:

$k^R = P^R$

$E[\xi_i^{p,R}] = \alpha^r \ {}_{d_r+s^\epsilon/m_r-s^\epsilon}\ddot{a}_x$

$E[\xi_i^{q,R}] = E[\xi_i^q] = {}_{/n}\ddot{a}_x$ valorado al tipo de interés técnico del reaseguro Ir.

siendo por tanto la prima pura :

$$P^R = \frac{\alpha^r \ {}_{d_r+s^\epsilon/m_r-s^\epsilon}\ddot{a}_x}{{}_{/n}\ddot{a}_x}$$

4.4.1.5 Variable aleatoria pérdida ajustada del reasegurador. Cálculo de la prima pura ajustada de reaseguro

En este apartado calculamos la prima ajustada de reaseguro, analizando previamente la variable aleatoria asociada al beneficio del plan en cada modalidad de reaseguro estudiada.

Análisis de la variable aleatoria asociada al beneficio del plan en la modalidad de reaseguro del percentil

Las realizaciones de la variable aleatoria $\xi_i^{b,R}$ viene dadas en la presente modalidad de reaseguro por la siguiente expresión:

$$b(i,t_k) = \begin{cases} P^c \ddot{a}_{\overline{t_k+1}|Ip} \left(\frac{1+Ip}{1+Ir}\right)^{t_k+1/2} & t_k \leq n-1 \\ P^c \ddot{a}_{\overline{n}|Ir} \left(\frac{1+Ip}{1+Ir}\right)^{t_k+1/2} & n-1 < t_k \leq d_r - 1 \\ (P^c \ddot{a}_{\overline{n}|Ir} - {}_{d_r/}\ddot{a}_{\overline{t_k+1-d_r}|Ir}) \left(\frac{1+Ip}{1+Ir}\right)^{t_k+1/2} & d_r \leq t_k < d_r + s^c \\ 0 & t_k \geq d_r + s^c \end{cases}$$

En el período de diferimiento de la renta el beneficio del plan a la muerte del partícipe coincide con las prima primas periódicas cobradas hasta ese momento y convenientemente actualizadas al tipo de interés técnico del reasegurador. Este beneficio empieza a disminuir con el pago de los términos de la renta hasta hacerse cero en el momento $d_r + s^c - 1$, a partir del cual empieza a intervenir el reaseguro.

Analisis de la variable asociada al beneficio del plan en la modalidad de reaseguro diferencia de siniestralidad

La expresión de la función $H_{i,h}$ en este caso es:

$$H_{i,h} = \begin{cases} Z_{i,h}(1+Ip)^{-1/2} & 0 < h < d_r + m_r \\ Z_{i,d_r+m_r}(1+Ip)^{-1/2} & h \geq d_r + m_r \end{cases}$$

Las realizaciones de la variable aleatoria $\xi_i^{b,R}$ las obtendremos a través de la función $H_{i,h}$:

$$b(i,t) = \begin{cases} H_{i,t+1}(1+Ir)^{-t-\frac{1}{2}} & 0 \leq t < d_r + m_r \\ H_{i,d_r+m_r}(1+Ir)^{-d_r-m_r-\frac{1}{2}} & t \geq d_r + m_r \end{cases}$$

Cálculo de la prima ajustada de reaseguro

Para poder determinar la prima ajustada de reaseguro $P^{R,A}$, aplicaremos la siguiente expresión:

$$k^{R,A} = \frac{E[\xi_i^{p,R}] - E[\xi_i^{b,R}]}{E[\xi_i^{q,R}]} \quad (I)$$

al ser $P^{R,A}$ constante se da la siguiente relación $P^{R,A} = k^{R,A}$, por tanto:

$$P^{R,A} = \frac{E[\xi_i^{p,R}] - E[\xi_i^{b,R}]}{E[\xi_i^{q,R}]}$$

En la modalidad de reaseguro del percentil podemos dar una expresión de la esperanza de la variable aleatoria $\xi_i^{b,R}$, la cual no coincide con la de la operación a prima única, por ser distinto el importe del beneficio esperado cedido en el período de pago de primas, por tanto, si contemplamos esta circunstáncia, podemos calcular $E[\xi_i^{b,R}]$ aplicando la siguiente expresión:

$$E[\xi_i^{b,R}] = \sum_{j=1}^{n-1} P^{\epsilon} \ddot{a}_{\overline{j}|Ip} \left(\frac{1+Ip}{1+Ir}\right)^{j-1/2} {}_{j-1/}q_x$$

$$+ \sum_{j=n}^{d_r+s^{\epsilon}} P^{\epsilon} \ddot{a}_{\overline{n}|Ip} \left(\frac{1+Ip}{1+Ir}\right)^{j-1/2} {}_{j-1/}q_x -$$

$$\sum_{j=d_r+1}^{d_r+s^{\epsilon}} \alpha^{r} \; {}_{d_r/}\ddot{a}_{\overline{j-d_r}|Ip} \left(\frac{1+Ip}{1+Ir}\right)^{j-1/2} {}_{j-1/}q_x$$

Siendo:

$P^{\epsilon} = P(1+\lambda^{\epsilon})$

donde:

- $\sum_{j=1}^{n-1} P^{\epsilon}\ddot{a}_{\overline{j}|Ip}\left(\frac{1+Ip}{1+Ir}\right)^{j-1/2} {}_{j-1/}q_x$ es el valor actual actuarial valorado al tipo de interés del reaseguro, del beneficio que cederá el plan al reasegurador si el partícipe fallece en el periodo de vigencia del pago de primas.

- $\sum_{j=n}^{d_r+s^{\epsilon}} P^{\epsilon}\ddot{a}_{\overline{n}|Ip}\left(\frac{1+Ip}{1+Ir}\right)^{j-1/2} {}_{j-1/}q_x -$ $\sum_{j=d_r+1}^{d_r+s^{\epsilon}} \alpha^r\ {}_{d_r/}\ddot{a}_{\overline{j-d_r}|Ip}\left(\frac{1+Ip}{1+Ir}\right)^{j-1/2} {}_{j-1/}q_x$ es el valor actual actuarial valorado al tipo de interés del reaseguro del beneficio que cederá el plan al reasegurador, si el partícipe fallece con posterioridad al pago de primas, y hasta aquel período donde el plan que se quede sin fondos $d_{r+s^{\epsilon}}$. Su importe viene dado por las primas cobradas $P^{\epsilon}\ddot{a}_{\overline{n}|Ip}$ menos los términos de renta satisfechos en dicho período convenientemente actualizados.

En consecuencia sustituyendo en (I), tendremos calculada la prima ajustada y periódica de reaseguro $P^{R,A}$.

$$P^{R,A} = \frac{1}{{}_{/n}\ddot{a}_x}\left[\alpha^r\ {}_{d_r+s^{\epsilon}/m_r-s^{\epsilon}}\ddot{a}_x - \right.$$

$$\sum_{j=1}^{n-1} P^{\epsilon}\ddot{a}_{\overline{j}|Ip}\left(\frac{1+Ip}{1+Ir}\right)^{j-1/2} {}_{j-1/}q_x -$$

$$\sum_{j=n}^{d_r+s^{\epsilon}} P^{\epsilon}\ddot{a}_{\overline{n}|Ip}\left(\frac{1+Ip}{1+Ir}\right)^{j-1/2} {}_{j-1/}q_x +$$

$$\left.\sum_{j=d_r+1}^{d_r+s^{\epsilon}} \alpha^r\ {}_{d_r/}\ddot{a}_{\overline{j-d_r}|Ip}\left(\frac{1+Ip}{1+Ir}\right)^{j-1/2} {}_{j-1/}q_x\right]$$

Respecto al signo de $P^{R,A}$ en la modalidad de reaseguro del percentil, presenta el mismo comportamiento que $\Pi^{R,A}$, dependiendo exclusivamente de la relación entre el tipo de interés técnico del plan y el tipo de interés técnico del reaseguro:

- Si $Ip < Ir$ la prima ajustada de reaseguro es siempre negativa sea cual sea el riesgo que se reasegure $\epsilon^t \in [0, \epsilon^{max}]$.
- Si $Ip = Ir$ la prima ajustada será negativa para cualquier riesgo susceptible de ser reasegurado, menos para cuando el reaseguro cubra ϵ^{max}, cuyo valor será cero.
- Si $Ip > Ir$, la prima de reaseguro será positiva para aquellos niveles grandes de riesgo a reasegurar.

En la modalidad de diferencia de siniestralidad, el comportamiento también coincide con el correspondiente a la misma operación a prima única.

4.5.2 Estudio de la estrategia óptima

En este apartado estudiaremos la estrategia óptima recargo reaseguro para la modalidad de reaseguro del percentil mediante la determinación de la función $K(\epsilon)$.

4.4.2.1 Modalidad de reaseguro del percentil sin reparto de beneficios

Nuestro objetivo será determinar la expresión analítica de la función $K(\epsilon^t)$, para la operación objeto de estudio. Para ello analizaremos cuales son las expresiones particulares de $VPREA(\epsilon^t)$, $VPREC(\epsilon^t)$, $\Delta VPREA(\epsilon^t)$ y $\Delta VPREC(\epsilon^t)$

$$VPREC(\epsilon^t) = P(1 + \lambda^{\epsilon^t}) = P^{\epsilon^t} = \frac{\alpha^r \;{}_{d_r/}\ddot{a}_{\overline{s^{\epsilon^t}}|Ip}}{\ddot{a}_{\overline{n}|Ip}}$$

$$VPREA(\epsilon^t) = P^R(1 + \lambda^R) = (1 + \lambda^R)\frac{\alpha^r \;{}_{d_r+s^{\epsilon^t}/m_r-s^{\epsilon^t}}\ddot{a}_x}{{}_{/n}\ddot{a}_x}$$

Si aplicamos la definición de Δ a la expresiones anteriores y simplificamos:

$$\Delta VPREC(\epsilon^t) = \frac{-\alpha^r(1+Ip)^{-d_r-s^{\epsilon^t}+1}}{\ddot{a}_{\overline{n}|Ip}}$$

$$\Delta VPREA(\epsilon^t) = (1+\lambda^R)\frac{{}_{d_r+s^{\epsilon^t}-1}P_x\alpha^r(1+Ir)^{-d_r-s^{\epsilon^t}+1}}{{}_{/n}\ddot{a}_x}$$

como:

$$K(\epsilon^t) = -\frac{\Delta VPREA(\epsilon^t)}{\Delta VPREC(\epsilon^t)} \quad (I)$$

sustituyendo $\Delta VPREA(\epsilon^t)$ y $\Delta VPREC(\epsilon^t)$ en (I):

$$K(\epsilon^t) = (1+\lambda^R)\ {}_{d_r+s^{\epsilon^t}-1}P_x\left(\frac{1+Ir}{1+Ip}\right)^{-d_r-s^{\epsilon^t}+1}\left(\frac{\ddot{a}_{\overline{n}|Ip}}{{}_{/n}\ddot{a}_x}\right)$$

Se da la siguiente relación entre la función $K(\epsilon^t)$ cuando la operación es a primas periódicas y que simbolizaremos $K(\epsilon^t)$(Primas Periódicas) y la función $K(\epsilon^t)$ cuando la operación es a prima única $K(\epsilon^t)$(Prima única):

$$K(\epsilon^t)(\text{Primas Periódicas}) = K(\epsilon^t)(\text{Prima única})\left(\frac{\ddot{a}_{\overline{n}|Ip}}{{}_{/n}\ddot{a}_x}\right)$$

Señalar que ${}_{/n}\ddot{a}_x$ está valorado al tipo de interés técnico del reaseguro.

La conclusión a la que llegamos es que la estrategia óptima cuando la operación es a primas periódicas, no tiene porque coincidir con la estrategia óptima de la misma operación a prima única , es más, ésta depende también del número de términos que se tengan que satisfacer de prima en la medida que aumenta o disminuye (según la relación entre Ip y Ir) los valores de la función $K(\epsilon^t)$(Primas Periódicas) conforme aumenta el número de primas n.

En el ANEXO 4-4 del presente capítulo ilustramos mediante un ejemplo como la estrategia óptima depende de la temporalidad en las primas.

La expresión de $K(\epsilon^t)$(Primas Periódicas) es general , sea cual sea el número de primas satisfechas, así en el supuesto que $n = 1$, (prima única) podemos observar que:

$$K(\epsilon^t)(\text{Primas Periódicas}) = K(\epsilon^t)(\text{Prima única})$$

4.4.2.2 Modalidad de reaseguro del percentil con reparto de beneficios

Determinaremos en este caso cual es la expresión analítica de la función $K^A(\epsilon^t)$, mediante las expresiones particulares de $VPREA(\epsilon^t)$, $VPREC(\epsilon^t)$, $\Delta VPREA(\epsilon^t)$ y $\Delta VPREC(\epsilon^t)$ al igual que hemos hecho en el caso anterior.

$$VPREC(\epsilon^t) = P(1+\lambda^{\epsilon^t}) = P^{\epsilon^t} = \frac{\alpha^r \;{}_{d_r/}\ddot{a}_{\overline{s^{\epsilon^t}}|Ip}}{\ddot{a}_{\overline{n}|Ip}}$$

$$VPREA(\epsilon^t) = P^{R,A}(1+\lambda^R) =$$

$$= \frac{(1+\lambda^R)}{{}_{/n}\ddot{a}_x}\Bigg[\alpha^r \;{}_{d_r+s^\epsilon/m_r-s^\epsilon}\ddot{a}_x - \sum_{j=1}^{n-1} P^\epsilon \ddot{a}_{\overline{j}|Ip}\left(\frac{1+Ip}{1+Ir}\right)^{j-1/2} {}_{j-1/}q_x -$$

$$\sum_{j=n}^{d_r+s^\epsilon} P^\epsilon \ddot{a}_{\overline{n}|Ip}\left(\frac{1+Ip}{1+Ir}\right)^{j-1/2} {}_{j-1/}q_x +$$

$$\sum_{j=d_r+1}^{d_r+s^\epsilon} \alpha^r \;{}_{d_r/}\ddot{a}_{\overline{j-d_r}|Ip}\left(\frac{1+Ip}{1+Ir}\right)^{j-1/2} {}_{j-1/}q_x\Bigg]$$

Si aplicamos la definición de Δ a la expresiones anteriores y simplificamos:

$$\Delta VPREC(\epsilon^t) = \frac{-\alpha^r(1+Ip)^{-d_r-s^{\epsilon^t}+1}}{\ddot{a}_{\overline{n}|Ip}}$$

$$\Delta VPREA(\epsilon^t) =$$

$$\frac{\alpha^r(1+Ip)^{-d_r-s^{\epsilon^t}+1}(1+\lambda^R)}{\ddot{a}_{\overline{n}|Ip}\ {}_{/n}\ddot{a}_x}\left[\ddot{a}_{\overline{n}|Ip}\left({}_{d_r+s^{\epsilon^t}-1}P_x\left(\frac{1+Ip}{1+Ir}\right)^{d_r+s^{\epsilon^t}-1}\right)+\right.$$

$$\ddot{a}_{\overline{n}|Ip}\left(\sum_{j=n}^{d_r+s^{\epsilon^t}-1}\left(\frac{1+Ip}{1+Ir}\right)^{j-1/2}{}_{j-1/}q_x\right)+$$

$$\left.\sum_{j=1}^{n-1}\ddot{a}_{\overline{j}|Ip}\left(\frac{1+Ip}{1+Ir}\right)^{j-1/2}{}_{j-1/}q_x\right]$$

como podemos observar, $\Delta VPREA(\epsilon^t)$ puede expresarse en función de $\Delta VPREC(\epsilon^t)$:

$$\Delta VPREA(\epsilon^t) =$$

$$\frac{-\Delta VPREC(\epsilon^t)(1+\lambda^R)}{{}_{/n}\ddot{a}_x}\left[\ddot{a}_{\overline{n}|Ip}\left({}_{d_r+s^{\epsilon^t}-1}P_x\left(\frac{1+Ip}{1+Ir}\right)^{d_r+s^{\epsilon^t}-1}\right)+\right.$$

$$\ddot{a}_{\overline{n}|Ip}\left(\sum_{j=n}^{d_r+s^{\epsilon^t}-1}\left(\frac{1+Ip}{1+Ir}\right)^{j-1/2}{}_{j-1/}q_x\right)+$$

$$\left.\sum_{j=1}^{n-1}\ddot{a}_{\overline{j}|Ip}\left(\frac{1+Ip}{1+Ir}\right)^{j-1/2}{}_{j-1/}q_x\right]$$

como:

$$K^A(\epsilon^t) = -\frac{\Delta VPREA(\epsilon^t)}{\Delta VPREC(\epsilon^t)}$$

entonces:

$$K^A(\epsilon^t) = \frac{(1+\lambda^R)}{{}_{/n}\ddot{a}_x}\left[\ddot{a}_{\overline{n}|Ip}\ {}_{d_r+s^{\epsilon^t}-1}P_x\left(\frac{1+Ip}{1+Ir}\right)^{d_r+s^{\epsilon^t}-1}+\right.$$

$$\ddot{a}_{\overline{n}|Ip}\sum_{j=n}^{d_r+s^{\epsilon^t}-1}\left(\frac{1+Ip}{1+Ir}\right)^{j-1/2}\ {}_{j-1/}q_x+$$

$$\left.\sum_{j=1}^{n-1}\ddot{a}_{\overline{j}|Ip}\left(\frac{1+Ip}{1+Ir}\right)^{j-1/2}\ {}_{j-1/}q_x\right]$$

Al igual que hicimos en el caso anterior, también podemos relacionar la función $K^A(\epsilon^t)$ obtenida, ($K^A(\epsilon^t)$(Primas periódicas)), con la correspondiente a la misma operación a prima única $K^A(\epsilon^t)$(Prima única) :

$$K^A(\epsilon^t)(\text{Primas Periódicas}) = K^A(\epsilon^t)(\text{Prima única})\left(\frac{\ddot{a}_{\overline{n}|Ip}}{{}_{/n}\ddot{a}_x}\right)+$$

$$\frac{(1+\lambda^R)}{{}_{/n}\ddot{a}_x}\left[\sum_{j=1}^{n-1}\ddot{a}_{\overline{j}|Ip}\left(\frac{1+Ip}{1+Ir}\right)^{j-1/2}\ {}_{j-1/}q_x\right.$$

$$\left.-\ddot{a}_{\overline{n}|Ip}\sum_{j=1}^{n-1}\ {}_{j-1/}q_x\left(\frac{1+Ip}{1+Ir}\right)^{j-1/2}\right]$$

Cabe destacar como caso particular, aquel en el que $Ip = Ir$:

$$K^A(\epsilon^t)(\text{Primas Periódicas}) = (1+\lambda^R)\left(\frac{\ddot{a}_{\overline{n}|Ip}}{{}_{/n}\ddot{a}_x}\right)+$$

$$\frac{(1+\lambda^R)}{{}_{/n}\ddot{a}_x}\left[\sum_{j=1}^{n-1}\ddot{a}_{\overline{j}|Ip}\ {}_{j-1/}q_x - \ddot{a}_{\overline{n}|Ip}\sum_{j=1}^{n-1}\ {}_{j-1/}q_x\right]$$

simplificando:

$$K^A(\epsilon^t)(\text{Primas Periódicas}) = (1+\lambda^R)$$

Hay que tener presente que la prima ajustada de reaseguro $P^{R,A}$ es negativa o nula cuando $Ip = Ir$, por tanto no tiene sentido plantearse la existencia de recargo del reasegurador, siendo:

$$K^A(\epsilon^t)(\text{Primas Periódicas}) = K^A(\epsilon^t)(\text{Prima única}) = 1$$

Esta circunstacia, nos va a permitir acotar los valores de la función $K^A(\epsilon^t)$(Primas Periódicas) cuando $Ip \neq Ir$.

Así:

- Si $Ip < Ir$ entonces $K^A(\epsilon^t)$(Primas Periódicas) $< (1+\lambda^R)$, pero al ser $P^{R,A} < 0$ entonces: $K^A(\epsilon^t)$(Primas periódicas) < 1 $\forall\epsilon^t \in [0, \epsilon^{max}]$

- Si $Ip > Ir$ entonces $K^A(\epsilon^t)$(Primas periódicas) $> (1+\lambda^R)$ y por tanto : $K^A(\epsilon^t)$(Primas periódicas) > 1 $\forall\epsilon^t \in [0, \epsilon^{max}]$

Podemos observar que $K^A(\epsilon^t)$(Primas periódicas) presenta el mismo comportamiento que $K^A(\epsilon^t)$(Prima única) con respecto a si supera o no supera la unidad.

Por sonsiguiente podemos llegar a la siguiente conclusión:

Si bien los valores de la función $K^A(\epsilon^t)$(Primas Periódicas) no coinciden con los que toma la función $K^A(\epsilon^t)$(Prima única) como queda reflejado en las expresiones anteriores, esto no influye en la estrategia óptima de la operación, la cual es independiente de la temporalidad en el pago de primas, así sea cual sea ésta, la estrategia óptima dependerá exclusivamene de la relación entre los tipos de interés técnico del plan y del reaseguro.

4.6 Operación de seguro a primas periódicas. Seguro diferido y temporal con cuantías constantes

4.6.1 Cálculo de la prima de reaseguro

Calcularemos la prima de reaseguro apliando el modelo general.

4.6.1.1 Descripción de la operación objeto de estudio

La operación presenta las siguientes características:

$P_t = P \; \forall t = 0, ...n-1$ La operación es a primas periódicas y constantes.

$\alpha_i^s = \alpha^s$. La cuantía del seguro constante.

$\alpha_i^s = 0$. No hay prestación de renta

Contemplaremos la circunstancia de que puedan satisfacerse primas con posterioridad al diferimiento de la operación, es decir $d_s < n < d_s + m_s$

La ecuación de equilibrio viene dada en este caso por la siguiente expresión:

$$P \sum_{j=0}^{n-1} {}_jE_x = \sum_{j=d_s+1}^{d_s+m_s} \alpha^s \; {}_{j-1}q_x V^{1/2}$$

4.6.1.2 Variable aleatoria pérdida individual del plan. Cálculo de la prima única.

Estudiaremos las variables aleatorias que forman la variable aleatoria pérdida: ξ_i^c y ξ_i^p.

Con respecto a la variable aleatoria ξ_i^p, sus realizaciones $\alpha(i,t)$ coinciden con las que ya dimos cuando la operación es a prima única:

$$\alpha(i,t) = \begin{cases} 0 & 0 \leq t < d_s \\ \alpha^s V^{t+1/2} & d_s \leq t < d_s + m_s \\ 0 & d_s + m_s \leq t < w - x \end{cases}$$

La variable aleatoria ξ_i^c, al ser la operación a primas periódicas y constantes, las realizaciones de la misma $P(i,t)$ vienen recogidas por la siguiente expresión:

$$P(i,t) = \begin{cases} P\ddot{a}_{\overline{t+1}|Ip} & 0 \leq t < n \\ P\ddot{a}_{\overline{n}|Ip} & n \leq t < w - x \end{cases}$$

A continuación expresamos las realizaciones y probabilidades de la variable aleatoria pérdida individual L_i ordenados temporlamente bajo los siguientes supuestos:

1. $n \leq d_s$, es decir, las primas se satisfacen antes de que empiece el período de pago del seguro.

2. $d_s < n < d_s + m_s$, las primas se satisfacen en pleno periodo de pago del seguro.

1. $n \leq d_s$

<u>REALIZACIONES</u>	<u>PROBABILIDADES</u>
$-P\ddot{a}_{\overline{1}\vert Ip}$	q_x
$\vdots$	$\vdots$
$-P\ddot{a}_{\overline{n}\vert Ip}$	${}_{n-1/}q_x$
$\vdots$	$\vdots$
$-P\ddot{a}_{\overline{n}\vert Ip}$	${}_{d_s-1/}q_x$
$\alpha^s V^{d_s+1/2} - P\ddot{a}_{\overline{n}\vert Ip}$	${}_{d_s/}q_x$
$\vdots$	$\vdots$
$\alpha^s V^{d_s+m_s-1+1/2} - P\ddot{a}_{\overline{n}\vert Ip}$	${}_{d_s+m_s-1/}q_x$
$-P\ddot{a}_{\overline{n}\vert Ip}$	${}_{d_s+m_s}q_x$
$\vdots$	$\vdots$
$-P\ddot{a}_{\overline{n}\vert Ip}$	${}_{w-x-1/}q_x$

2. $d_s < n < d_s + m_s$

REALIZACIONES	PROBABILIDADES
$-P\ddot{a}_{\overline{1}\|Ip}$	q_x
$-P\ddot{a}_{\overline{2}\|Ip}$	${}_{1/}q_x$
$\vdots$	$\vdots$
$-P\ddot{a}_{\overline{d_s}\|Ip}$	${}_{d_s-1/}q_x$
$\alpha^s V^{d_s+1/2} - P\ddot{a}_{\overline{d_s+1}\|Ip}$	${}_{d_s/}q_x$
$\vdots$	$\vdots$
$\alpha^s V^{n-1+1/2} - P\ddot{a}_{\overline{n}\|Ip}$	${}_{n-1/}q_x$
$\vdots$	$\vdots$
$\alpha^s V^{d_s+m_s-1+1/2} - P\ddot{a}_{\overline{n}\|Ip}$	${}_{d_s+m_s-1/}q_x$
$-P\ddot{a}_{\overline{n)}\|Ip}$	${}_{d_s+m_s}q_x$
$\vdots$	$\vdots$
$-P\ddot{a}_{\overline{n}\|Ip}$	${}_{w-x-1/}q_x$

El procedimiento para calcular la prima periódica de la operación es el mismo que ya utilizamos para el caso de la renta a primas periódicas, por tanto:

$$P_t = k = P$$

es decir, la prima coincidirá con el valor k, y la variable aleatoria intermedia ξ_i^q presentará las siguientes realizaciones:

$$q(i,t) = \begin{cases} \ddot{a}_{\overline{t+1}|Ip} & 0 \leq t < n \\ \\ \ddot{a}_{\overline{n}|Ip} & n \leq t < w - x \end{cases}$$

Al venir k dada por la siguiente expresión:

$$k = \frac{E[\xi_i^p]}{E[\xi_i^q]}$$

y sabiendo que en nuestro caso:

$k = P$

$E[\xi_i^p] = \sum_{j=d_s+1}^{d_s+m_s} \alpha^s \ {}_{j-1}q_x V^{1/2}$

$E[\xi_i^q] = \ {}_{/n}\ddot{a}_x$

entonces:

$$P = \frac{\sum_{j=d_s+1}^{d_s+m_s} \alpha^s \ {}_{j-1}q_x V^{1/2}}{{}_{/n}\ddot{a}_x}$$

o bien, utilizando la simbología actuarial:

$$P = \frac{\alpha^s \ {}_{d_s/m_s}A_x}{{}_{/n}\ddot{a}_x}$$

4.6.1.3 Cálculo del recargo de seguridad

Para poder determinar el recargo de seguridad, necesitamos conocer la variable aletoria L_i^*

Sabemos que en el caso del seguro, la ordenación temporal de las realizaciones de la pérdida no coinciden con la ordenación de menor a mayor de las mismas, sin embargo, al ser el seguro de cuantía constante y a primas periódicas constantes, sí que podemos conocer a priori la ordenación de menor a mayor de las realizaciones de la variable alatoria L_i, y por tanto, conocer a priori L_i^*.

El cambio a introducir en la variable aleatoria L_i para poder obtener L_i^* es el siguiente:

- Respecto a las realizaciones de la pérdida localizadas en pleno período de pago del seguro, la ordenación de menor a mayor coincide con una inversión en la ordenación de aquellas realizaciones ordenadas temporalmente.

- Las realizaciones de la pérdida en las cuales sólo se satisfacen primas, la ordenación de menor a mayor también coincide con una inversión en la ordenación con respecto aquellas realizaciones ordenadas temporalmente.

A continuación damos las realizaciones y probabilidades de la variable aleatoria L_i^* para los dos casos que nos ocupan:

1. $n \leq d_s$

<u>REALIZACIONES</u>	<u>PROBABILIDADES</u>
$-P\ddot{a}_{\overline{n}\mid Ip}$	${}_{d_s+m_s}q_x$
$\vdots$	$\vdots$
$-P\ddot{a}_{\overline{n}\mid Ip}$	${}_{w-x-1/}q_x$
$-P\ddot{a}_{\overline{n}\mid Ip}$	${}_{d_s-1/}q_x$
$\vdots$	$\vdots$
$-P\ddot{a}_{\overline{n}\mid Ip}$	${}_{n-1/}q_x$
$-P\ddot{a}_{\overline{n-1}\mid Ip}$	${}_{n-2/}q_x$
$\vdots$	$\vdots$
$-P\ddot{a}_{\overline{1}\mid Ip}$	q_x
$\alpha^s V^{d_s+m_s-1+1/2} - P\ddot{a}_{\overline{n}\mid Ip}$	${}_{d_s+m_s-1/}q_x$
$\vdots$	$\vdots$
$\alpha^s V^{d_s+b^c+1/2} - P\ddot{a}_{\overline{n}\mid Ip}$	${}_{d_s+b^c/}q_x$
$\vdots$	$\vdots$
$\alpha^s V^{d_s+1/2} - P\ddot{a}_{\overline{n}\mid Ip}$	${}_{d_s/}q_x$

2. $d_s < n < d_s + m_s$

<u>REALIZACIONES</u>	<u>PROBABILIDADES</u>
$-P\ddot{a}_{\overline{n}\|Ip}$	${}_{d_s+m_s}q_x$
$\vdots$	$\vdots$
$-P\ddot{a}_{\overline{n}\|Ip}$	${}_{w-x-1/}q_x$
$-P\ddot{a}_{\overline{d_s}\|Ip}$	${}_{d_s-1/}q_x$
$\vdots$	$\vdots$
$-P\ddot{a}_{\overline{1}\|Ip}$	q_x
$\alpha^s V^{d_s+m_s-1+1/2} - P\ddot{a}_{\overline{n}\|Ip}$	${}_{d_s+m_s-1/}q_x$
$\vdots$	$\vdots$
$\alpha^s V^{d_s+b_1^\epsilon+1/2} - P\ddot{a}_{\overline{n}\|Ip}$	${}_{d_s+b_1^\epsilon/}q_x$
$\vdots$	$\vdots$
$\alpha^s V^{n-1+1/2} - P\ddot{a}_{\overline{n}\|Ip}$	${}_{n-1/}q_x$
$\alpha^s V^{n-2+1/2} - P\ddot{a}_{\overline{n-1}\|Ip}$	${}_{n-2/}q_x$
$\vdots$	$\vdots$
$\alpha^s V^{d_s+b_2^\epsilon+1/2} - P\ddot{a}_{\overline{d_s+p_2^\epsilon+1}\|Ip}$	${}_{d_s+b_2^\epsilon/}q_x$
$\vdots$	$\vdots$
$\alpha^s V^{d_s+1/2} - P\ddot{a}_{\overline{d_s+1}\|Ip}$	${}_{d_s/}q_x$

El percentil asociado a L_i^* fijado un determinado nivel de solvencia ϵ viene dado por la primera realización de la variable aleatoria L_i^* que acumula una probabilidad mayor o igual a $1-\epsilon$. En nuestro caso daremos la expresión de dicho percentil bajo los siguientes supuestos:

- Si $n \leq d_s$

$$Per_\epsilon[L_i^*] = \alpha^s V^{d_s+b^\epsilon+1/2} - P\ddot{a}_{\overline{n}|Ip}$$

- Si $d_s < n < d_s + m_s$ distinguiremos dos casos:

  1. El percentil venga dado por una realización de la variable aleatoria L_i^* en la cual se halla satisfecho el pago de las n-primas, por tanto $b^\epsilon = b_1^\epsilon \geq n - d_s - 1$, siendo:

$$Per_\epsilon[L_i^*] = \alpha^s V^{d_s+b^\epsilon+1/2} - P\ddot{a}_{\overline{n}|Ip}$$

  2. El percentil venga dado por una realización de la variable aleatoria L_i^* en la cual aún no se halla satisfecho el pago de las n-primas, por tanto $b^\epsilon = b_2^\epsilon < n - d_s - 1$, siendo:

$$Per_\epsilon[L_i^*] = \alpha^s V^{d_s+b^\epsilon+1/2} - P\ddot{a}_{\overline{d_s+b^\epsilon+1}|Ip}$$

El recargo vendrá dado por la siguiente expresión:

$$\lambda^\epsilon = \frac{\alpha(i,t_h) - P(i,t_h)}{P(i,t_h)} = \frac{Per_\epsilon[L_i^*]}{P(i,t_h)}$$

por tanto si:

- Si $n \leq d_s$, o bien, $d_s < n < d_s + m_s$ y $b^\epsilon \geq n - d_s - 1$, entonces

$$P(i,t_h) = P\ddot{a}_{\overline{n}|Ip}$$
$$\alpha(i,t_h) = \alpha^s V^{d_s+b^\epsilon+1/2}$$

siendo:

$$\lambda^\epsilon = \frac{\alpha^s V^{d_s+b^\epsilon+1/2} - P\ddot{a}_{\overline{n|}Ip}}{P\ddot{a}_{\overline{n|}Ip}}$$

- Si $d_s < n < d_s + m_s$ y $b^\epsilon < n - d_s - 1$, entonces

$$P(i, t_h) = P\ddot{a}_{\overline{d_s+b^\epsilon+1|}Ip}$$
$$\alpha(i, t_h) = \alpha^s V^{d_s+b^\epsilon+1/2}$$

siendo:

$$\lambda^\epsilon = \frac{\alpha^s V^{d_s+b^\epsilon+1/2} - P\ddot{a}_{\overline{d_s+b^\epsilon+1|}Ip}}{P\ddot{a}_{\overline{d_s+b^\epsilon+1|}Ip}}$$

Calculado el recargo, podremos definir la variable aleatoria L_i^ϵ.

El valor b^{ϵ^t}, presenta las mismas caraterísticas que en el caso de prima única, satisfaciendo la condición:

$$b^{\epsilon^{min}} \leq b^{\epsilon^t} \leq b^{\epsilon^{max}}$$

donde:

$b^{\epsilon^{min}} = 0$, por el mismo motivo que en el caso de prima unica.

$b^{\epsilon^{max}}$ viene dado al igual que en el caso de prima única, por el mayor número de períodos vividos por el partícipe a partir del diferimiento d_s, tal que la prestación de seguro asociada a ese periodo sea mayor o igual al valor actual financiero de las n-primas puras. Por tanto $b^{\epsilon^{max}}$ es el mayor b^{ϵ^t} $\forall b^{\epsilon^t} \in [0, m_s - 1]$ tal que $\alpha^s V^{d_s+b^{\epsilon^t}+1/2} \geq P\ddot{a}_{\overline{n|}Ip}$

Una forma cómoda de calcular $b^{\epsilon^{max}}$ es a través de b, siendo b aquel valor entero que satisface:

$$P\ddot{a}_{\overline{n|}Ip} = \alpha^s V^{d_s+b+1/2} \quad (I)$$

Esta igualdad es válida incluso en el caso en el que $d_s < n < d_s + m_s$, debido a que $\alpha^s V^{d_s+b+1/2}$ coincide con la última prestación del seguro, momento en el cual ya se han satisfecho las n-primas.

Si despejamos b de (I), entonces su valor vendrá dado por la parte entera de:

$$\frac{lnP\ddot{a}_{\overline{n}|Ip} - ln\alpha^s}{lnV} - (d_s + 1/2)$$

como $b^{\epsilon^{max}} \leq m_s - 1$ entonces :

$$b^{\epsilon^{max}} = \begin{cases} m_s - 1 & b \geq m_s - 1 \\ \text{b} & b < m_s - 1 \end{cases}$$

Sólo en el caso $n \leq d_s$, como ya se han satisfecho las n- primas antes de que empiece el período de pago del seguro, podemos calcular el valor de b^{ϵ^t} $\forall b^{\epsilon^t} \in [b^{\epsilon^{min}}, b^{\epsilon^{max}-1}]$ a través de la expresión:

$$P^{\epsilon^t}\ddot{a}_{\overline{n}|Ip} = \alpha^s V^{d_s + b^{\epsilon^t} + 1/2}$$

despejando b^{ϵ^t}:

$$b^{\epsilon^t} = \frac{lnP^{\epsilon^t}\ddot{a}_{\overline{n}|Ip} - ln\alpha^s}{lnV} - (d_s + 1/2)$$

Conocido b^{ϵ^t} podemos determinar el riesgo ϵ^t asociado a través de la siguiente expresión:

$$\epsilon^t = {}_{d_s/b^{\epsilon^t}}q_x$$

4.6.1.4 Variable aleatoria pérdida del reasegurador. Cálculo de la prima pura de reaseguro

Para poder determinar la prima de reaseguro analizaremos las variables aleatorias $\xi_i^{p,R}$ y $\xi_i^{c,R}$ para las dos modalidades de raseguro estudiadas .

Variable aleatoria asociada a las prestaciones del reasegurador en la modalidad de reaseguro del percentil

Sabemos que las realizaciones de la variable aleatoria $\xi_i^{p,R}$, $M(i,t_k)$ vienen definidas en general para la modalidad de reaseguro del percentil por:

$$M(i,t_k) = \begin{cases} 0 & k \leq h \\ M_1(i,t_k) & k > h \quad \text{y} \quad t_k < d_r + s^\epsilon \\ M_2(i,t_k) & k > h \quad \text{y} \quad t_k \geq d_r + s^\epsilon \end{cases}$$

en nuestro caso al no haber prestación de renta:

$$M(i,t_k) = \begin{cases} 0 & k \leq h \\ M_1(i,t_k) & k > h \end{cases}$$

siendo:

$$M_1(i,t_k) = l(i,t_k)^\epsilon \left(\frac{1+Ip}{1+Ir}\right)^{t_k+1/2} \qquad \forall k > h$$

La expresión de $M_1(i,t_k)$ depende de las características de la operación, así:

- Si $n \leq d_s$ entonces:

$$M(i,t_k) = \begin{cases} 0 & t_k < d_s \\ \left(\alpha^s - P^\epsilon \ddot{a}_{\overline{n}|Ip}(1+Ip)^{t_k+1/2}\right)(1+Ir)^{-t_k-1/2} & d_s \leq t_k < d_s + b^\epsilon \\ 0 & t_k \geq d_s + b^\epsilon \end{cases}$$

- Si $d_s < n < d_s + m_s$ y $b^\epsilon \geq n - d_s - 1$, entonces:

$$M(i,t_k) = \begin{cases} 0 & t_k < d_s \\ \left(\alpha^s - P^\epsilon \ddot{a}_{\overline{t_k+1}|Ip}(1+Ip)^{t_k+1/2}\right)(1+Ir)^{-t_k-1/2} & d_s \le t_k < n \\ \left(\alpha^s - P^\epsilon \ddot{a}_{\overline{n}|Ip}(1+Ip)^{t_k+1/2}\right)(1+Ir)^{-t_k-1/2} & n \le t_k < d_s + b^\epsilon \\ 0 & t_k \ge d_s + b^\epsilon \end{cases}$$

- Si $d_s < n < d_s + m_s$ y $b^\epsilon < n - d_s - 1$, entonces:

$$M(i,t_k) = \begin{cases} 0 & t_k < d_s \\ \left(\alpha^s - P^\epsilon \ddot{a}_{\overline{t_k+1}|Ip}(1+Ip)^{t_k+1/2}\right)(1+Ir)^{-t_k-1/2} & d_s \le t_k < d_s + b^\epsilon \\ 0 & t_k \ge d_s + b^\epsilon \end{cases}$$

Conocidas las expresiones de las realizaciones de $\xi_i^{p,R}$, podemos determinar la $E[\xi_i^{p,R}]$ para los tres casos:

- Si $n \le d_s$ entonces:

$$E[\xi_i^{p,R}] = \sum_{j=d_s}^{d_s+b^\epsilon-1} \left(\alpha^s - P^\epsilon \ddot{a}_{\overline{n}|Ip}(1+Ip)^{j+1/2}\right)(1+Ir)^{-j-1/2}\ {}_{j/}q_x$$

- Si $d_s < n < d_s + m_s$ y $b^\epsilon \ge n - d_s - 1$, entonces:

$$E[\xi_i^{p,R}] = \sum_{j=d_s}^{n-1} \left(\alpha^s - P^\epsilon \ddot{a}_{\overline{j+1}|Ip}(1+Ip)^{j+1/2}\right)(1+Ir)^{-j-1/2}\ {}_{j/}q_x +$$

$$\sum_{j=n}^{d_s+b^\epsilon-1} \left(\alpha^s - P^\epsilon \ddot{a}_{\overline{n}|Ip}(1+Ip)^{j+1/2}\right)(1+Ir)^{-j-1/2}\ {}_{j/}q_x$$

- Si $d_s < n < d_s + m_s$ y $b^\epsilon < n - d_s - 1$, entonces:

$$E[\xi_i^{p,R}] = \sum_{j=d_s}^{d_s+b^\epsilon-1} \left(\alpha^s - P^\epsilon \ddot{a}_{\overline{j+1}|Ip}(1+Ip)^{j+1/2}\right)(1+Ir)^{-j-1/2}\ {}_{j/}q_x$$

Variable aleatoria asociada a las prestaciones del reasegurador en la modalidad de reaseguro de diferencia de siniestralidad

La expresión formal de la función $Z_{i,h}$ para la operación objeto de estudio, si el reasegurador es del **tipo A**, viene dada en este caso por:

$$Z_{i,h} = \begin{cases} P_0^{Rec}(1+Ip) & h=1 \\ & \\ (Z_{i,h-1}+P^R)(1+Ip) & \text{si} \quad Z_{i,h-1} \geq R_{i,h-1}+V_{i,h-1} \\ (R_{i,h-1}+V_{i,h-1}+P^R)(1+Ip) & \text{si} \quad Z_{i,h-1} < R_{i,h-1}+V_{i,h-1} \\ & 1<h\leq n \\ & \\ Z_{i,h-1}(1+Ip) & \text{si} \quad Z_{i,h-1} \geq R_{i,h-1}+V_{i,h-1} \\ (R_{i,h-1}+V_{i,h-1})(1+Ip) & \text{si} \quad Z_{i,h-1} < R_{i,h-1}+V_{i,h-1} \\ & n<h\leq d_s+m_s \end{cases}$$

En este caso la función $T_{i,h}$ se desdobla en

$$T_{i,h} = \begin{cases} T_{i,h}^1 & h=1,\ldots,d_s+m_s-1 \\ & \\ T_{i,h}^2 & h=d_s+1,\ldots,d_s+m_s \end{cases}$$

siendo:

$$T_{i,h}^1 = \max\{0, \quad V_{i,h}+R_{i,h}-Z_{i,h}\} \quad h=1,\ldots,d_s+m_s-1$$

$$T_{i,h}^2 = \max\{0, \alpha_h^s - Z_{i,h}(1+Ip)^{-1/2}\} \quad h=d_s+1,\ldots,d_s+m_s$$

La expresión formal de la función $Z_{i,h}$ para la operación objeto de estudio, si el reasegurador esa del **tipo B**, viene dada en este caso por:

$$Z_{i,h} = \begin{cases} P_0^{Rec}(1+Ip) & h=1 \\ & \\ (R_{i,h-1}+V_{i,h-1}+P_{h-1}^R)(1+Ip) & 1<h\leq n \\ & \\ (R_{i,h-1}+V_{i,h-1})(1+Ip) & n<h\leq d_s+m_s \end{cases}$$

La función $T_{i,h}$ se desdobla en

$$T_{i,h} = \begin{cases} T^1_{i,h} & h = 1, \ldots, d_s + m_s - 1 \\ T^2_{i,h} & h = d_s + 1, \ldots, d_s + m_s \end{cases}$$

siendo:

$$T^1_{i,h} = V_{i,h} + R_{i,h} - Z_{i,h} \quad h = 1, \ldots, d_s + m_s - 1$$

$$T^2_{i,h} = \max\{0, \alpha^s_h - Z_{i,h}(1 + Ip)^{-1/2}\} \quad h = d_s + 1, \ldots, d_s + m_s$$

Conocida la función $T_{i,h}$ podemos determinar las realizaciones $M(i,t)$ de la variable aleatoria $\xi^{p,R}_i$:

$$M(i,t) = \begin{cases} \sum_{s=1}^{t} T^1_{i,s}(1 + Ir)^{-s} & 0 \leq t < d_s \\ \sum_{s=1}^{t} T^1_{i,s}(1 + Ir)^{-s} + T^2_{i,t+1}(1 + Ir)^{-t-1/2} & d_s \leq t < d_s + m_s \\ \sum_{s=1}^{d_s+m_s-1} T^1_{i,s}(1 + Ir)^{-s} & t \geq d_s + m_s \end{cases}$$

siendo para $t = 0$, $\sum_{s=1}^{0} T^1_{i,s}(1 + Ir)^{-s} = 0$

Variable aleatoria asociada a las contraprestaciones del reasegurador

La variable aleatoria $\xi^{c,R}_i$, viene definida por las siguientes realizaciones $P^R(i,t)$:

$$P^R(i,t) = \begin{cases} P^R \ddot{a}_{\overline{t+1}|Ir} & 0 \leq t < n \\ P^R \ddot{a}_{\overline{n}|Ir} & n \leq t < w - x \end{cases}$$

Al ser la prima periódica de reaseguro constante:

$$k^R = P^R$$

Las realizaciones de la variable aleatoria intermedia $\xi^{q,R}_i$ vienen dadas por :

$$q^R(i,t) = \begin{cases} \ddot{a}_{\overline{t+1}|Ir} & 0 \leq t < n \\ \ddot{a}_{\overline{n}|Ir} & n \leq t < w - x \end{cases}$$

La $E[\xi_i^{q,R}]$ puede obtenerse como el valor actual actuarial al tipo de interés del reaseguro de una renta prepagable inmediata y temporal n términos:

$$E[\xi_i^{q,R}] = {}_{/n}\ddot{a}_x$$

Conocida la $E[\xi_i^{p,R}]$ y la $E[\xi_i^{q,R}]$ y conocida también la relación entre P^R y k^R, (en nuestro caso $P^R = k^R$), podemos calcular la prima pura de reaseguro P^R aplicando la expresión:

$$k^R = P^R = \frac{E[\xi_i^{p,R}]}{E[\xi_i^{q,R}]}$$

Para el caso de reaseguro del percentil, la prima de reaseguro dependerá de la temporalidad en el pago de primas:

- $n \leq d_s$ entonces:

$$P^R = \frac{\sum_{j=d_s}^{d_s+b^\epsilon-1}\left(\alpha^s - P^\epsilon \ddot{a}_{\overline{n}|Ip}(1+Ip)^{j+1/2}\right)(1+Ir)^{-j-1/2}\ {}_{j/}q_x}{{}_{/n}\ddot{a}_x}$$

- Si $d_s < n < d_s + m_s$ y $b^\epsilon \geq n - d_s - 1$, entonces:

$$P^R = \frac{1}{{}_{/n}\ddot{a}_x}\left[\sum_{j=d_s}^{n-1}\left(\alpha^s - P^\epsilon \ddot{a}_{\overline{j+1}|Ip}(1+Ip)^{j+1/2}\right)(1+Ir)^{-j-1/2}\ {}_{j/}q_x + \right.$$

$$\left.\sum_{j=n}^{d_s+b^\epsilon-1}\left(\alpha^s - P^\epsilon \ddot{a}_{\overline{n}|Ip}(1+Ip)^{j+1/2}\right)(1+Ir)^{-j-1/2}\ {}_{j/}q_x\right]$$

- Si $d_s < n < d_s + m_s$ y $b^\epsilon < n - d_s - 1$, entonces:

$$P^R = \frac{\sum_{j=d_s}^{d_s+b^\epsilon-1}\left(\alpha^s - P^\epsilon \ddot{a}_{\overline{j+1}|Ip}(1+Ip)^{j+1/2}\right)(1+Ir)^{-j-1/2}\ {}_{j/}q_x}{{}_{/n}\ddot{a}_x}$$

Podemos observar que la prima periódica de reaseguro, al igual que sucede en el caso de prima única, es independiente de la temporalidad de la operación, por consiguiente fijado un nivel de riesgo a reasegurar ϵ, la prima de reaseguro siempre será la misma sea cual sea la temporalidad de la operación, siempre y cuando ésta satifaga $b^\epsilon \leq m_s - 1$.

4.6.1.5 Variable aleatoria pérdida ajustada del reasegurador. Cálculo de la prima pura ajustada de reaseguro

Calcularemos la variable aleatoria $\xi_i^{b,R}$ para las dos mdalidades de reaseguro estudiadas.

Variable aleatoria asociada al beneficio del plan en la modalidad de reaseguro del percentil

Las realizaciones de la variable aleatoria $\xi_i^{b,R}$, vienen dadas en general por:

$$b(i,t_k) = \begin{cases} -l(i,t_k)^{\epsilon}(1+Ip)^{t_k+1/2}(1+Ir)^{-t_k-1/2} & k \leq h \\ 0 & k > h \end{cases}$$

En nestro caso particular, las realizaciones de la misma dependerán de las características de la operación, distinguiendo tres casos:

- Si $n \leq d_s$

$$b(i,t_k) = \begin{cases} P^{\epsilon}\ddot{a}_{\overline{t_k+1}|Ip}\left(\frac{1+Ip}{1+Ir}\right)^{t_k+1/2} & 0 \leq t_k < n \\ P^{\epsilon}\ddot{a}_{\overline{n}|Ip}\left(\frac{1+Ip}{1+Ir}\right)^{t_k+1/2} & n \leq t_k < d_s \\ 0 & d_s \leq t_k < d_s + b^{\epsilon} \\ [P^{\epsilon}\ddot{a}_{\overline{n}|Ip}(1+Ip)^{t_k+1/2} - \alpha^s](1+Ir)^{-t_k-1/2} & d_s + b^{\epsilon} \leq t_k < d_s + m_s \\ P^{\epsilon}\ddot{a}_{\overline{n}|Ip}\left(\frac{1+Ip}{1+Ir}\right)^{t_k+1/2} & d_s + m_s \leq t_k < w - x \end{cases}$$

- Si $d_s < n < d_s + m_s$ y $b^{\epsilon} \geq n - d_s - 1$

$$b(i,t_k) = \begin{cases} P^{\epsilon}\ddot{a}_{\overline{t_k+1}|Ip}\left(\frac{1+Ip}{1+Ir}\right)^{t_k+1/2} & 0 \leq t_k < d_s \\ 0 & d_s \leq t_k < d_s + b^{\epsilon} \\ [P^{\epsilon}\ddot{a}_{\overline{n}|Ip}(1+Ip)^{t_k+1/2} - \alpha^s](1+Ir)^{-t_k-1/2} & d_s + b^{\epsilon} \leq t_k < d_s + m_s \\ P^{\epsilon}\ddot{a}_{\overline{n}|Ip}\left(\frac{1+Ip}{1+Ir}\right)^{t_k+1/2} & d_s + m_s \leq t_k < w - x \end{cases}$$

- Si $d_s < n < d_s + m_s$ y $b^{\epsilon} < n - d_s - 1$

$$b(i,t_k) = \begin{cases} P^{\epsilon}\ddot{a}_{\overline{t_k+1}|Ip}\left(\frac{1+Ip}{1+Ir}\right)^{t_k+1/2} & 0 \leq t_k < d_s \\ 0 & d_s \leq t_k < d_s + b^{\epsilon} \\ [P^{\epsilon}\ddot{a}_{\overline{t_k+1}|Ip}(1+Ip)^{t_k+1/2} - \alpha^s](1+Ir)^{-t_k-1/2} & d_s + b^{\epsilon} \leq t_k < n \\ [P^{\epsilon}\ddot{a}_{\overline{n}|Ip}(1+Ip)^{t_k+1/2} - \alpha^s](1+Ir)^{-t_k-1/2} & n \leq t_k < d_s + m_s \\ P^{\epsilon}\ddot{a}_{\overline{n}|Ip}\left(\frac{1+Ip}{1+Ir}\right)^{t_k+1/2} & d_s + m_s \leq t_k < w - x \end{cases}$$

A continuación daremos la expresión de la $E[\xi_i^{b,R}]$ para cada caso:

1. $n \leq d_s$

$$E[\xi_i^{b,R}] = \sum_{j=0}^{n-1} P^{\epsilon}\ddot{a}_{\overline{j+1}|Ip}\left(\frac{1+Ip}{1+Ir}\right)^{j+1/2} {}_{j/}q_x +$$

$$\sum_{j=n}^{d_s-1} P^{\epsilon}\ddot{a}_{\overline{n}|Ip}\left(\frac{1+Ip}{1+Ir}\right)^{j+1/2} {}_{j/}q_x +$$

$$\sum_{j=d_s+m_s}^{w-x-1} P^{\epsilon}\ddot{a}_{\overline{n}|Ip}\left(\frac{1+Ip}{1+Ir}\right)^{j+1/2} {}_{j/}q_x +$$

$$\sum_{j=d_s+b^{\epsilon}}^{d_s+m_s-1} \left(P^{\epsilon}\ddot{a}_{\overline{n}|Ip} - \alpha^s(1+Ip)^{j+1/2}\right)(1+Ir)^{-j-1/2} {}_{j/}q_x$$

2. $d_s < n < d_s + m_s$ y $b^\epsilon \geq n - d_s - 1$

$$E[\xi_i^{b,R}] = \sum_{j=0}^{d_s-1} P^\epsilon \ddot{a}_{\overline{j+1}|Ip} \left(\frac{1+Ip}{1+Ir}\right)^{j+1/2} {}_{j/}q_x +$$

$$\sum_{j=d_s+m_s}^{w-x-1} P^\epsilon \ddot{a}_{\overline{n}|Ip} \left(\frac{1+Ip}{1+Ir}\right)^{j+1/2} {}_{j/}q_x +$$

$$\sum_{j=d_s+b^\epsilon}^{d_s+m_s-1} \left(P^\epsilon \ddot{a}_{\overline{n}|Ip} - \alpha^s (1+Ip)^{j+1/2}\right) (1+Ir)^{-j-1/2} {}_{j/}$$

3. $d_s < n < d_s + m_s$ y $b^\epsilon < n - d_s - 1$

$$E[\xi_i^b] = \sum_{j=0}^{d_s-1} P^\epsilon \ddot{a}_{\overline{j+1}|Ip} \left(\frac{1+Ip}{1+Ir}\right)^{j+1/2} {}_{j/}q_x +$$

$$\sum_{j=d_s+m_s}^{w-x-1} P^\epsilon \ddot{a}_{\overline{n}|Ip} \left(\frac{1+Ip}{1+Ir}\right)^{j+1/2} {}_{j/}q_x +$$

$$\sum_{j=d_s+b^\epsilon}^{n-1} \left(P^\epsilon \ddot{a}_{\overline{j+1}|Ip} - \alpha^s (1+Ip)^{j+1/2}\right) (1+Ir)^{-j-1/2} {}_{j/}q_x +$$

$$\sum_{j=n}^{d_s+m_s-1} \left(P^\epsilon \ddot{a}_{\overline{n}|Ip} - \alpha^s (1+Ip)^{j+1/2}\right) (1+Ir)^{-j-1/2} {}_{j/}q_x$$

Variable aleatoria asociada al beneficio del plan en la modalidad de reaseguro de diferencia de siniestralidad

En este caso particular, la expresión de la función $H_{i,h}$ es la siguiente:

$$H_{i,h} = \begin{cases} Z_{i,h}(1+Ip)^{-1/2} & 1 \leq h < d_s \\ \begin{cases} Z_{i,h}(1+Ip)^{-1/2} - \alpha_h^s & \text{si} \quad Z_{i,h}(1+Ip)^{-1/2} - \alpha_h^s > 0 \\ 0 & \text{si} \quad Z_{i,h}(1+Ip)^{-1/2} - \alpha_h^s \leq 0 \end{cases} & d_s < h \leq d_s + m_s \\ Z_{i,d_s+m_s}(1+Ip)^{-1/2} & d_s + m_s < h \leq w - x \end{cases}$$

Conocida la función $H_{i,h}$ podemos determinar las realizaciones de la variable aleatoria $\xi_i^{b,R}$:

$$b(i,t) = \begin{cases} H_{i,t+1}(1+Ir)^{-t-\frac{1}{2}} & 0 \leq t < d_s + m_s \\ H_{i,d_r+m_r}(1+Ir)^{-d_s-m_s-\frac{1}{2}} & t \geq d_s + m_s \end{cases}$$

Calculo de la prima ajustada de reaseguro

La prima ajustada de reaseguro la obtenemos del siguiente modo:

$$P^{R,A} = \frac{E[\xi_i^{p,R}] - E[\xi_i^{b,R}]}{{}_{/n}\ddot{a}_x}$$

En la modalidad de reaseguro del percentil, la expresión de la prima ajustada depende de la temporalidad en el pago de primas:

1. Si $n \leq d_s$

$$P^{R,A} = \frac{1}{{}_{/n}\ddot{a}_x} \left[\sum_{j=d_s}^{d_s+m_s-1} \left(\alpha^s - P^c \ddot{a}_{\overline{n|}Ip}(1+Ip)^{j+1/2}\right)(1+Ir)^{-j-1/2} \; {}_{j/}q_x - \right.$$

$$P^{\epsilon}\ddot{a}_{\overline{n}|Ip}\left(\sum_{j=n}^{d_s-1}\left(\frac{1+Ip}{1+Ir}\right)^{j+1/2}{}_{j/}q_x+\sum_{j=d_s+m_s}^{w-x-1}\left(\frac{1+Ip}{1+Ir}\right)^{j+1/2}{}_{j/}q_x\right)$$

$$\left.-\sum_{j=0}^{n-1}P^{\epsilon}\ddot{a}_{\overline{j+1}|Ip}\left(\frac{1+Ip}{1+Ir}\right)^{j+1/2}{}_{j/}q_x\right]$$

2. Si $d_s < n < d_s + m_s$ y $b^{\epsilon} \geq n - d_s - 1$

$$P^{R,A}=\frac{1}{{}_{/n}\ddot{a}_x}\left[\sum_{j=d_s}^{n-1}\left(\alpha^s-P^{\epsilon}\ddot{a}_{\overline{j+1}|Ip}(1+Ip)^{j+1/2}\right)(1+Ir)^{-j-1/2}{}_{j/}q_x+\right.$$

$$\sum_{j=n}^{d_s+m_s-1}\left(\alpha^s-P^{\epsilon}\ddot{a}_{\overline{n}|Ip}(1+Ip)^{j+1/2}\right)(1+Ir)^{-j-1/2}{}_{j/}q_x-$$

$$\sum_{j=0}^{d_s-1}P^{\epsilon}\ddot{a}_{\overline{j+1}|Ip}\left(\frac{1+Ip}{1+Ir}\right)^{j+1/2}{}_{j/}q_x-$$

$$\left.\sum_{j=d_s+m_s}^{w-x-1}P^{\epsilon}\ddot{a}_{\overline{n}|Ip}\left(\frac{1+Ip}{1+Ir}\right)^{j+1/2}{}_{j/}q_x\right]$$

3. Si $d_s < n < d_s + m_s$ y $b^{\epsilon} < n - d_s - 1$ La prima de reaseguro coincide con la anterior, como consecuencia de la distribución del beneficio:

$$P^{R,A}=\frac{1}{{}_{/n}\ddot{a}_x}\left[\sum_{j=d_s}^{n-1}(\alpha^s-P^{\epsilon}\ddot{a}_{\overline{j+1}|Ip}(1+Ip)^{j+1/2})(1+Ir)^{-j-1/2}{}_{j/}q_x+\right.$$

$$\sum_{j=n}^{d_s+m_s-1}\left(\alpha^s-P^{\epsilon}\ddot{a}_{\overline{n}|Ip}(1+Ip)^{j+1/2}\right)(1+Ir)^{-j-1/2}{}_{j/}q_x-$$

$$\sum_{j=0}^{d_s-1}P^{\epsilon}\ddot{a}_{\overline{j+1}|Ip}\left(\frac{1+Ip}{1+Ir}\right)^{j+1/2}{}_{j/}q_x-$$

$$\left.\sum_{j=d_s+m_s}^{w-x-1}P^{\epsilon}\ddot{a}_{\overline{n}|Ip}\left(\frac{1+Ip}{1+Ir}\right)^{j+1/2}{}_{j/}q_x\right]$$

En este caso hay que hacer constar, al igual que sucedía con la prima única ajustada de reaseguro $\Pi^{R,A}$, que la prima de reaseguro $P^{R,A}$ depende de la temporalidad de la operación m_s, así, cuanto mayor sea ésta, menor será el beneficio medio cedido al reaseguro $E[\xi_i^{b,R}]$ y por tanto menor será la prima de reaseguro $P^{R,A}$.

Respecto al signo de $P^{R,A}$, depende de la relación entre Ip y Ir, dándose el mismo comportamiento que en prima única.

Si la modalidad de reaseguro es el de diferencia de siniestralidad, el comportamiento es similar al caso de prima única.

4.6.2 Estudio de la estrategia òptima

En este apartado determinamos la expresión de la función $K(\epsilon^t)$ para la operación objeto de estudio.

4.6.2.1 Modalidad de reaseguro del percentil sin reparto de beneficios

Nuestro objetivo es determinar la estrategia óptima recargo reaseguro a través de la función $K(\epsilon)$. Obtendremos dicha función utilizando la misma metodología que en los casos anteriores, estudiando las expresiones particulares de $VPREC(\epsilon^t)$, $VPREA(\epsilon^t)$, $\Delta VPREC(\epsilon^t)$ y $\Delta VPREA(\epsilon^t)$, para los siguientes casos:

- $n \leq d_s$
- $d_s < n < d_s + m_s$

Caso en el que $n \leq d_s$

$$VPREC(\epsilon^t) = P(1+\lambda^{\epsilon^t}) = P^{\epsilon^t} = \frac{\alpha^s V^{d_s+b^{\epsilon^t}+1/2}}{\ddot{a}_{\overline{n}|Ip}}$$

$$VPREA(\epsilon^t) = P^R(1+\lambda^R) =$$

$$(1+\lambda^R)\frac{\sum_{j=d_s}^{d_s+b^\epsilon-1}(\alpha^s - P^\epsilon \ddot{a}_{\overline{j+1}|Ip}(1+Ip)^{j+1/2})(1+Ir)^{-j-1/2}\ {}_{j/}q_x}{{}_{/n}\ddot{a}_x}$$

Si aplicamos la definición de Δ a las expresiones anteriores y simplificamos:

$$\Delta VPREC(\epsilon^t) = \frac{\alpha^s V^{d_s+b^{\epsilon^t}+3/2}}{\ddot{a}_{\overline{n}|Ip}}$$

$$\Delta VPREA(\epsilon^t) = \frac{(1+\lambda^R)}{{}_{/n}\ddot{a}_x} P^{\epsilon^t}\ddot{a}_{\overline{n}|Ip} Ip \left[\sum_{j=d_s}^{d_s+b^{\epsilon^t}}(1+Ip)^{j-1/2}(1+Ir)^{-j-1/2}\ {}_{j/}q_x\right]$$

sabiendo que: $-\Delta VPREC(\epsilon^t) = P^{\epsilon^t} IpV$

y

$$K(\epsilon^t) = -\frac{\Delta VPREA(\epsilon^t)}{\Delta VPREC(\epsilon^t)}$$

entonces:

$$K(\epsilon^t) = (1+\lambda^R)\left[\sum_{j=d_s}^{d_s+b^{\epsilon^t}}\left(\frac{1+Ip}{1+Ir}\right)^{j+1/2}\ {}_{j/}q_x\right]\left(\frac{\ddot{a}_{\overline{n}|Ip}}{{}_{/n}\ddot{a}_x}\right)$$

Si relacionamos dicha función $K(\epsilon^t)$ ($K(\epsilon^t)$(Primas Periódicas)) con la que obtuvimos cuando la operación era a prima única ($K(\epsilon^t)$(Prima única)) llegamos a la siguiente conclusión:

$$K(\epsilon^t)(\text{Primas Periódicas}) = K(\epsilon^t)(\text{Prima única})\left(\frac{\ddot{a}_{\overline{n}|Ip}}{{}_{/n}\ddot{a}_x}\right)$$

Podemos observar que la relación entre $K(\epsilon^t)$(Primas Periódicas) y $K(\epsilon^t)$(Prima única) es la misma que cuando se trataba de una operación de renta a primas periódicas, por tanto al igual que sucedía con las rentas, la estrategia óptima cuando la operación es a primas periódicas y $n \leq d_s$ no tiene porque coincidir con la estrategia óptima cuando la operación es a prima única.

Caso en el que $d_s < n < d_s + m_s$

En este caso la función $K(\epsilon^t)$ no vendrá dada por una única expresión, sino que vendrá definida por dos tramos según $b^{\epsilon^t} \geq n - d_s - 1$, o bien, $b^{\epsilon^t} < n - d_s - 1$, en consecuencia, definimos la función $K(\epsilon^t)$ de la siguiente forma:

$$K(\epsilon^t) = \begin{cases} K_1(\epsilon^t) & b^{\epsilon^t} \geq n - d_s - 1 \\ \\ K_2(\epsilon^t) & b^{\epsilon^t} < n - d_s - 1 \end{cases}$$

A continuación determinaremos las expresiones de $K_1(\epsilon^t)$ y $K_2(\epsilon^t)$.

Obtención de la función $K_1(\epsilon^t)$ Para tal fin, determinaremos las expresiones de $VPREC(\epsilon^t)$, $VPREA(\epsilon^t)$, $\Delta VPREC(\epsilon^t)$ y $\Delta VPREA(\epsilon^t)$, teniendo presente que $b^{\epsilon^t} \geq n - d_s - 1$:

$$VPREC(\epsilon^t) = P(1 + \lambda^{\epsilon^t}) = P^{\epsilon^t} = \frac{\alpha^s V^{d_s + b^{\epsilon^t} + 1/2}}{\ddot{a}_{\overline{n}|Ip}}$$

$$VPREA(\epsilon^t) = P^R(1 + \lambda^R) =$$

$$= \frac{(1 + \lambda^R)}{{}_{/n}\ddot{a}_x} \left[\sum_{j=d_s}^{n-1} (\alpha^s - P^{\epsilon} \ddot{a}_{\overline{j+1}|Ip} (1 + Ip)^{j+1/2})(1 + Ir)^{-j-1/2} \; {}_{j/}q_x \right.$$

$$\left. + \sum_{j=n}^{d_s + b^{\epsilon} - 1} (\alpha^s - P^{\epsilon} \ddot{a}_{\overline{n}|Ip} (1 + Ip)^{j+1/2})(1 + Ir)^{-j-1/2} \; {}_{j/}q_x \right]$$

Aplicando la definición de Δ a las expresiones anteriores y simplificando:

$$\Delta VPREC(\epsilon^t) = \frac{\alpha^s V^{d_s + b^{\epsilon^t} + 3/2}}{\ddot{a}_{\overline{n}|Ip}}$$

$$\Delta VPREA(\epsilon^t) =$$

$$= \frac{-\Delta VPREC(\epsilon^t)(1+\lambda^R)}{{}_{/n}\ddot{a}_x} \left[\ddot{a}_{\overline{n}|Ip} \sum_{j=n-1}^{d_s+b^{\epsilon^t}} \left(\frac{1+Ip}{1+Ir}\right)^{j+1/2} {}_{j/}q_x \right.$$

$$\left. + \sum_{j=d_s}^{n-1} \ddot{a}_{\overline{j+1}|Ip} \left(\frac{1+Ip}{1+Ir}\right)^{j+1/2} {}_{j/}q_x \right]$$

como:

$$K(\epsilon^t) = K_1(\epsilon^t) = -\frac{\Delta VPREA(\epsilon^t)}{\Delta VPREC(\epsilon^t)} \quad \forall b^{\epsilon^t} \geq n - d_s - 1$$

entonces:

$$K_1(\epsilon^t) = \frac{(1+\lambda^R)}{{}_{/n}\ddot{a}_x} \left[\ddot{a}_{\overline{n}|Ip} \sum_{j=n-1}^{d_s+b^{\epsilon^t}} \left(\frac{1+Ip}{1+Ir}\right)^{j+1/2} {}_{j/}q_x \right.$$

$$\left. + \sum_{j=d_s}^{n-1} \ddot{a}_{\overline{j+1}|Ip} \left(\frac{1+Ip}{1+Ir}\right)^{j+1/2} {}_{j/}q_x \right]$$

Podemos expresar $K_1(\epsilon^t)$ en función de $K(\epsilon^t)$(Prima única) sumando y restando a la expresión anterior que va entre corchetes $\ddot{a}_{\overline{n}|Ip} \sum_{j=d_s}^{n-1} (1+Ip)^{j+1/2}(1+Ir)^{-j-1/2} {}_{j/}q_x$:

$$K_1(\epsilon^t) = K(\epsilon^t)(\text{Prima única}) \left(\frac{\ddot{a}_{\overline{n}|Ip}}{{}_{/n}\ddot{a}_x}\right) +$$

$$\frac{(1+\lambda^R)}{{}_{/n}\ddot{a}_x} \left[\sum_{j=d_s}^{n-1} \ddot{a}_{\overline{j+1}|Ip} \left(\frac{1+Ip}{1+Ir}\right)^{j+1/2} {}_{j/}q_x \right.$$

$$\left. - \ddot{a}_{\overline{n}|Ip} \sum_{j=d_s}^{n-1} \left(\frac{1+Ip}{1+Ir}\right)^{j+1/2} {}_{j/}q_x \right]$$

Obtención de la función $K_2(\epsilon^t)$ Determinaremos las expresiones de $VPREC(\epsilon^t)$, $VPREA(\epsilon^t)$, $\Delta VPREC(\epsilon^t)$ y $\Delta VPREA(\epsilon^t)$, teniendo presente que en este caso $b^{\epsilon^t} < n - d_s - 1$:

$$VPREC(\epsilon^t) = P(1+\lambda^{\epsilon^t}) = P^{\epsilon^t} = \frac{\alpha^s V^{d_s+b^{\epsilon^t}+1/2}}{\ddot{a}_{\overline{d_s+b^{\epsilon^t}+1}|Ip}}$$

$$VPREA(\epsilon^t) = P^R(1+\lambda^R) =$$

$$= \frac{(1+\lambda^R)}{/_n\ddot{a}_x}\left[\sum_{j=d_s}^{d_s+b^{\epsilon^t}-1}(\alpha^s - P^{\epsilon}\ddot{a}_{\overline{j+1}|Ip}(1+Ip)^{j+1/2})(1+Ir)^{-j-1/2}\ {}_{j/}q_x\right]$$

Aplicando la definición de Δ a las expresiones anteriores y simplificando:

$$\Delta VPREC(\epsilon^t) = \alpha^s V^{d_s+b^{\epsilon^t}+1/2}\left[\frac{\ddot{a}_{\overline{d_s+b^{\epsilon^t}+1}|Ip}V - \ddot{a}_{\overline{d_s+b^{\epsilon^t}+2}|Ip}}{\ddot{a}_{\overline{d_s+b^{\epsilon^t}+2}|Ip}\ddot{a}_{\overline{d_s+b^{\epsilon^t}+1}|Ip}}\right]$$

$$\Delta VPREA(\epsilon^t) = \frac{-\Delta VPREC(\epsilon^t)(1+\lambda^R)}{/_n\ddot{a}_x}$$

$$\left[\sum_{j=d_s}^{d_s+b^{\epsilon^t}-1}\ddot{a}_{\overline{j+1}|Ip}\left(\frac{1+Ip}{1+Ir}\right)^{j+1/2}\ {}_{j/}q_x - \frac{1}{\Delta VPREC(\epsilon^t)}\right.$$

$$\left.\left(\alpha^s - P^{\epsilon^{t+1}}\ddot{a}_{\overline{d_s+b^{\epsilon^t}+1}|Ip}(1+Ip)^{d_s+b^{\epsilon^t}+1/2}\right)(1+Ir)^{-d_s-b^{\epsilon^t}-1/2}\ {}_{d_s+b^{\epsilon^t}/}q_x\right]$$

como:

$$K(\epsilon^t) = K_2(\epsilon^t) = -\frac{\Delta VPREA(\epsilon^t)}{\Delta VPREC(\epsilon^t)} \quad \forall b^{\epsilon^t} < n - d_s - 1$$

entonces:

$$K_2(\epsilon^t) =$$

$$\frac{(1+\lambda^R)}{{}_{/n}\ddot{a}_x}\left[\sum_{j=d_s}^{d_s+b^{\epsilon^t}-1} \ddot{a}_{\overline{j+1}|Ip}\left(\frac{1+Ip}{1+Ir}\right)^{j+1/2} {}_{j/}q_x - \frac{1}{\Delta VPREC(\epsilon^t)}\right.$$

$$\left.\left(\alpha^s - P^{\epsilon^{t+1}}\ddot{a}_{\overline{d_s+b^{\epsilon^t}+1}|Ip}(1+Ip)^{d_s+b^{\epsilon^t}+1/2}\right)(1+Ir)^{-d_s-b^{\epsilon^t}-1/2}\ {}_{d_s+b^{\epsilon^t}/}q_x\right]$$

En este caso no podemos expresar $K_2(\epsilon^t)$ en función de $K(\epsilon^t)$(Prima única).

La conclusión a la que llegamos es que la estrategia óptima recargo-reaseguro cuando la operación es a primas periódicas, ya sea $d_s < n < d_s + m_s$ como $n \leq d_s$, no tiene porque coincidir con la estrategia óptima de la operación cuando ésta es a prima única, por depender los valores de la función $K(\epsilon^t)$ de la temporalidad en el pago de primas.

4.6.2.2 Modalidad de reaseguro del percentil con reparto de beneficios

Nuestro objetivo es determinar la estrategia óptima recargo reaseguro a través de la función $K^A(\epsilon)$. Calcularemos la expresión analítica de dicha función estudiando las expresiones particulares de

$VPREC(\epsilon^t)$, $VPREA(\epsilon^t)$, $\Delta VPREC(\epsilon^t)$ y $\Delta VPREA(\epsilon^t)$, para los siguientes casos:

- $n \leq d_s$
- $d_s < n < d_s + m_s$

Caso en el que $n \leq d_s$

$$VPREC(\epsilon^t) = P(1+\lambda^{\epsilon^t}) = P^{\epsilon^t} = \frac{\alpha^s V^{d_s+b^{\epsilon^t}+1/2}}{\ddot{a}_{\overline{n}|Ip}}$$

$$VPREA(\epsilon^t) = P^{R,A}(1+\lambda^R) =$$

$$\frac{(1+\lambda^R)}{{}_{/n}\ddot{a}_x}\left[\sum_{j=d_s}^{d_s+m_s-1}(\alpha^s - P^{\epsilon}\ddot{a}_{\overline{n}|Ip}(1+Ip)^{j+1/2})(1+Ir)^{-j-1/2}\ {}_{j/}q_x - \right.$$

$$P^{\epsilon}\ddot{a}_{\overline{n}|Ip}\left(\sum_{j=n}^{d_s-1}\left(\frac{1+Ip}{1+Ir}\right)^{j+1/2}\ {}_{j/}q_x + \sum_{j=d_s+m_s}^{w-x-1}\left(\frac{1+Ip}{1+Ir}\right)^{j+1/2}\ {}_{j/}q_x\right)$$

$$\left. -\sum_{j=0}^{n-1}P^{\epsilon}\ddot{a}_{\overline{j+1}|Ip}\left(\frac{1+Ip}{1+Ir}\right)^{j+1/2}\ {}_{j/}q_x\right]$$

Si aplicamos la definición de Δ a las expresiones anteriores y simplificamos:

$$\Delta VPREC(\epsilon^t) = \frac{\alpha^s V^{d_s+b^{\epsilon^t}+3/2}}{\ddot{a}_{\overline{n}|Ip}}$$

$$\Delta VPREA(\epsilon^t) =$$

$$\frac{(1+\lambda^R)}{{}_{/n}\ddot{a}_x}P^{\epsilon^t}\ddot{a}_{\overline{n}|Ip}IpV\left[\sum_{j=n}^{w-x-1}(1+Ip)^{j-1/2}(1+Ir)^{-j-1/2}\ {}_{j/}q_x\right]$$

$$-\frac{\Delta VPREC(\epsilon^t)(1+\lambda^R)}{{}_{/n}\ddot{a}_x}\sum_{j=0}^{n-1}\ddot{a}_{\overline{j+1}|Ip}(1+Ip)^{j-1/2}(1+Ir)^{-j-1/2}\ {}_{j/}q_x$$

sabiendo que :

$$-\Delta VPREC(\epsilon^t) = P^{\epsilon^t} IpV$$

y

$$K^A(\epsilon^t) = -\frac{\Delta VPREA(\epsilon^t)}{\Delta VPREC(\epsilon^t)}$$

entonces:

$$K^A(\epsilon^t) = \frac{(1+\lambda^R)}{{}_{/n}\ddot{a}_x}\left[\ddot{a}_{\overline{n}|Ip}\sum_{j=n}^{w-x-1}(1+Ip)^{j-1/2}(1+Ir)^{-j-1/2}\ {}_{j/}q_x+\right.$$

$$\left.\sum_{j=0}^{n-1}\ddot{a}_{\overline{j+1}|Ip}(1+Ip)^{j-1/2}(1+Ir)^{-j-1/2}\ {}_{j/}q_x\right]$$

Podemos relacionar la función $K^A(\epsilon^t)$ obtenida, $K^A(\epsilon^t)$(Primas Periódicas), con la función $K^A(\epsilon^t)$(Prima única), sumando y restando a la expresión anterior que va entre corchetes $\ddot{a}_{\overline{n}|Ip}\sum_{j=0}^{n-1}(1+Ip)^{j-1/2}(1+Ir)^{-j-1/2}\ {}_{j/}q_x$:

$$K^A(\epsilon^t)(\text{Primas Periódicas}) = K^A(\epsilon^t)(\text{Prima única})\left(\frac{\ddot{a}_{\overline{n}|Ip}}{{}_{/n}\ddot{a}_x}\right)+$$

$$\frac{1}{{}_{/n}\ddot{a}_x}\left[\sum_{j=0}^{n-1}\ddot{a}_{\overline{j+1}|Ip}(1+Ip)^{j-1/2}(1+Ir)^{-j-1/2}\ {}_{j/}q_x-\right.$$

$$\left.\ddot{a}_{\overline{n}|Ip}\sum_{j=0}^{n-1}(1+Ip)^{j-1/2}(1+Ir)^{-j-1/2}\ {}_{j/}q_x\right]$$

Podemos observar que la función $K^A(\epsilon^t)$ al igual que sucedía en el caso de prima única, es independiente del riesgo reasegurado ϵ^t.

Respecto a la relación entre $K^A(\epsilon^t)$(Primas Periódicas) y $K^A(\epsilon^t)$(Prima única) es la misma que la que se da en la renta .

Caso en el que $d_s < n < d_s + m_s$

A diferencia de lo que sucedía con la renta, la función $K^A(\epsilon^t)$ presenta una única expresión , por ser también sólo una la expresión que nos permite calcular $P^{R,A}$ sea cual sea el valor de b^ϵ.

A continuación , al igual que hemos ido haciendo en los demás casos particulares, determinaremos las expresiones representativas que nos permitirán obtener la función $K^A(\epsilon^t)$:

$$VPREC(\epsilon^t) = P(1+\lambda^{\epsilon^t}) = P^{\epsilon^t} = \frac{\alpha^s V^{d_s + b^{\epsilon^t} + 1/2}}{\ddot{a}_{\overline{n}|Ip}}$$

$$VPREA(\epsilon^t) = P^{R,A}(1+\lambda^R) =$$

$$\frac{(1+\lambda^R)}{{}_{/n}\ddot{a}_x}\left[\sum_{j=d_s}^{n-1}(\alpha^s - P^{\epsilon^t}\ddot{a}_{\overline{j+1}|Ip}(1+Ip)^{j+1/2})(1+Ir)^{-j-1/2}\ {}_{j/}q_x)+\right.$$

$$\sum_{j=n}^{d_s+m_s-1}(\alpha^s - P^{\epsilon^t}\ddot{a}_{\overline{n}|Ip}(1+Ip)^{j+1/2}(1+Ir)^{-j-1/2}\ {}_{j/}q_x)-$$

$$\sum_{j=0}^{d_s-1} P^{\epsilon^t}\ddot{a}_{\overline{j+1}|Ip}\left(\frac{1+Ip}{1+Ir}\right)^{j+1/2}\ {}_{j/}q_x-$$

$$\left.-\sum_{j=d_s+m_s}^{w-x-1} P^{\epsilon^t}\ddot{a}_{\overline{n}|Ip}\left(\frac{1+Ip}{1+Ir}\right)^{j+1/2}\ {}_{j/}q_x\right]$$

Si aplicamos la definición de Δ a las expresiones anteriores y simplificamos:

$$\Delta VPREC(\epsilon^t) = \frac{\alpha^s V^{d_s + b^{\epsilon^t} + 3/2}}{\ddot{a}_{\overline{n}|Ip}}$$

$$\Delta VPREA(\epsilon^t) = -\frac{(\Delta VPREC)(1+\lambda^R)}{{}_{/n}\ddot{a}_x}$$

$$\left[\ddot{a}_{\overline{n}|Ip} \sum_{j=d_s+m_s}^{w-x-1} (1+Ip)^{j-1/2}(1+Ir)^{-j-1/2}\ {}_{j/}q_x + \right.$$

$$\left. \sum_{j=0}^{n-1} \ddot{a}_{\overline{j+1}|Ip}(1+Ip)^{j-1/2}(1+Ir)^{-j-1/2}\ {}_{j/}q_x \right]$$

sabiendo que :

$$K^A(\epsilon^t) = -\frac{\Delta VPREA(\epsilon^t)}{\Delta VPREC(\epsilon^t)}$$

entonces:

$$K^A(\epsilon^t) = \frac{(1+\lambda^R)}{{}_{/n}\ddot{a}_x} \left[\ddot{a}_{\overline{n}|Ip} \sum_{j=n}^{w-x-1} (1+Ip)^{j-1/2}(1+Ir)^{-j-1/2}\ {}_{j/}q_x \right.$$

$$\left. \sum_{j=0}^{n-1} \ddot{a}_{\overline{j+1}|Ip}(1+Ip)^{j-1/2}(1+Ir)^{-j-1/2}\ {}_{j/}q_x \right]$$

Podemos observar como la función $K^A(\epsilon^t)$ coincide con la que obtuvimos cuando $n \leq d_s$, dándose por tanto la misma relación entre $K^A(\epsilon^t)$(Primas Periódicas) y $K^A(\epsilon^t)$(Prima única):

$$K^A(\epsilon^t)(\text{Primas Periódicas}) = K^A(\epsilon^t)(\text{Prima única}) \left(\frac{\ddot{a}_{\overline{n}|Ip}}{{}_{/n}\ddot{a}_x}\right) +$$

$$\frac{1}{{}_{/n}\ddot{a}_x} \left[\sum_{j=0}^{n-1} \ddot{a}_{\overline{j+1}|Ip}(1+Ip)^{j-1/2}(1+Ir)^{-j-1/2}\ {}_{j/}q_x - \right.$$

$$\left. \ddot{a}_{\overline{n}|Ip} \sum_{j=0}^{n-1} (1+Ip)^{j-1/2}(1+Ir)^{-j-1/2}\ {}_{j/}q_x \right]$$

Cabe destacar, al igual que hicimos con la renta, el caso particular $Ip = Ir$. Si aplicamos esta condición a la función $K^A(\epsilon^t)$:

$$K^A(\epsilon^t)(\text{Primas Periódicas}) = (1+\lambda^R)(\frac{\ddot{a}_{\overline{n}|Ip}}{{}_{n/}\ddot{a}_x}) +$$

$$\frac{(1+\lambda^R)}{{}_{n/}\ddot{a}_x}\left[\sum_{j=1}^{n-1}\ddot{a}_{\overline{j}|Ip}\ {}_{j-1/}q_x - \ddot{a}_{\overline{n}|Ip}\sum_{j=1}^{n-1}\ {}_{j-1/}q_x\right]$$

simplificando:

$$K^A(\epsilon^t)(\text{Primas Periódicas}) = (1+\lambda^R)$$

Hay que tener presente que la prima ajustada de reaseguro $P^{R,A}$ es negativa o nula cuando $Ip = Ir$, por tanto, no tiene sentido plantearse la existencia de recargo del reasegurador, en consecuencia, cuando $Ip = Ir$:

$$K^A(\epsilon^t)(\text{Primas Periódicas}) = [K^A(\epsilon^t)(\text{Prima única}) = 1$$

Esta circunstacia, nos va a permitir acotar los valores de la función $K^A(\epsilon^t)$(Primas Periódicas) cuando $Ip \neq Ir$.
Así:

- Si $Ip < Ir$ entonces $K^A(\epsilon^t)$(Primas Periódicas) $< (1+\lambda^R)$, pudiendo tener sentido el recargo del reasegurador para riesgos a reasegurar elevados, ya que en ellos puede darse el caso que $P^{R,A} > 0$.

- Si $Ip > Ir$ entonces $K^A(\epsilon^t)$(Primas periódicas) $> (1+\lambda^R)$, sin embargo hay que tener presente en este caso que $P^{R,A} < 0$, por tanto no tiene sentido plantearse la existencia del recargo del reasegurador, en consecuencia: $K^A(\epsilon^t)$(Primas periódicas) $> 1\ \forall\epsilon^t \in [0, \epsilon^{max}]$

El hecho de que podamos acotar los valores de la función $K^A(\epsilon^t)$(Primas periodicas) nos va a permitir determinar a priori la estrategia óptima recargo-reaseguro dada la relación entre el tipo de interés del plan y del reaseguro cuando la operación de seguro es a primas periódicas, se satisfagan éstas o no en el periodo de pago del seguro.

Así:

- Si $Ip = Ir$ la estrategia óptima vendrá dada por cualquier riesgo susceptible de ser reasegurado, por ser $K^A(\epsilon^t)$(Primas periódicas) $= 1$ $\forall \epsilon^t \in [0, \epsilon^{max}]$

- Si $Ip > Ir$ la estrategia óptima vendrá dada por el riesgo a reasegurar $\epsilon^* = \epsilon^{min}$, ya que $K^A(\epsilon^t)$(Primas periódicas) > 1 $\forall \epsilon^t \in [0, \epsilon^{max}]$

- Si $Ip < Ir$, puede tener sentido plantearse la existencia de recargo del reasegurador para los niveles de riesgo a reasegurar que presente primas ajustadas de reaseguro positivas, en estos casos la estrategia óptima dependerá del valor del recargo del reasegurador:

  En consecuencia si λ^R es tal que $K^A(\epsilon^t) < 1$, entonces $\epsilon^* = \epsilon^{max}$.

  Sin embargo si λ^R es tal que $K^A(\epsilon^t) \geq 1$ la estrategia óptima pasará a ser una combinación recargo reaseguro, por el salto sufrido en los valores de la función $K^A(\epsilon^t)$, que ahora será mayor que uno, para aquellos valores de riesgo que tengan asociadas primas ajustadas positivas.

  Si todas la primas ajustadas de reaseguro son negativas, la estrategia óptima vendrá dada por $\epsilon^* = \epsilon^{max}$.

La conclusión a la que llegamos es muy parecida a la que en su momento hicimos con la renta , en el sentido de que si bien los valores de la función $K^A(\epsilon^t)$(Primas Periódicas) no coinciden con los que toma la función $K^A(\epsilon^t)$(Prima única) , esta circunstancia no influye en la estrategia óptima de la operación, la cual depende exclusivamene de la relación entre los tipos de interés técnico del plan y del reaseguro, teniendo la función $K^A(\epsilon^t)$(Primas Periódicas) el mismo comportamiento con respecto a la estrategia óptima que $K^A(\epsilon^t)$(Prima única), siendo por tanto ésta independiente de la temporalidad en el pago de primas.

4.7 Operación renta y seguro a primas periódicas. Renta de jubilación y seguro temporal hasta la jubilación con cuatías constantes

En este caso se nos plantea el mismo problema que ya tuvimos en la modalidad de reaseguro del percentil cuando la operación era a prima única, en el sentido de que según qué relación haya entre las prestaciones de la renta y las prestaciones del seguro, no siempre podremos conocer una expresión simplificada que nos permita conocer las primas de reaseguro P^R y $P^{R,A}$, siendo imposible, para esa relación, obtener una expresión analítica de la función $K(\epsilon^t)$ y $K^A(\epsilon^t)$.

Nuestro objetivo será al igual que hicimos con el caso de prima única, sistematizar en la medida que nos sea posible la operación objeto de estudio, deteminando qué relación debe haber entre las prestaciones del seguro y las prestaciones de la renta para que podamos obtener una expresión de P^R y $P^{R,A}$ que nos permita determinar la función $K(\epsilon^t)$ y $K^A(\epsilon^t)$. Para ello expresaremos la cuantía del seguro como una proporción de la cuantía de la renta.

4.7.1 Cálculo de la prima de reaseguro

4.7.1.1 Descripción de la operación objeto de estudio

$d_r = x_{jub} - x$ La renta es diferida hasta la jubilación del partícipe.

$m_r = w - x_{jub}$ La renta es vitalicia.

$\alpha_i^r = \alpha$. La cuantía de la renta es constante.

$d_s = 0$. El seguro es inmediato.

$m_s = x_{jub} - x = d_r$. El seguro es temporal hasta la jubilación del partícipe.

$P_t = P \quad t = 0, ..., n-1$ La operación presenta n-primas periódicas y constantes de importe P.

$n \leq d_r = m_s$ Las primas se satisfacen exclusivamente en el período de pago del seguro, o lo que es lo mismo, antes de que empiece a satisfacerse la prestación de renta.

$\alpha_i^s = \alpha^s = \delta\,\alpha$. Al igual que hicimos cuando la operación es a prima única, la cuantía del seguro la expresamos como una proporción δ de la cuantía de la renta.

La ecuación de equilibrio viene dada en este caso por la siguiente expresión:

$$P\sum_{j=0}^{n-1} {}_jE_x = \sum_{j=1}^{x_{jub}-x} \delta\alpha \quad {}_{j-1/}q_x V^{j-1/2} + \sum_{j=x_{jub}-x}^{w-x-1} \alpha \quad {}_jE_x$$

4.7.1.2 Variable aleatoria pérdida individual del plan. Cálculo de la prima única

Para poder determinar la variable aleatoria pérdida individual del plan L_i , estudiaremos las variables aleatorias que la forman: ξ_i^c y ξ_i^p.

Respecto a la variable aleatoria ξ_i^c, presenta las misma realizaciones $\alpha(i,t)$ que cuando la operación era a prima única:

$$\alpha(i,t) = \begin{cases} \delta\alpha \quad V^{t+1/2} & 0 \leq t < x_{jub} - x \\ \\ \alpha \ {}_{x_{jub}-x/}\ddot{a}_{\overline{t+1-(x_{jub}-x)}|Ip} & x_{jub} - x \leq t < w - x \end{cases}$$

La variable aleatoria ξ_i^c, al ser la operación a primas periódicas y constantes, las realizaciones de la misma $P(i,t)$ vienen recogidas por la siguiente expresión:

$$P(x,t) = \begin{cases} P\ddot{a}_{\overline{t+1}|Ip} & 0 \leq t < n \\ \\ P\ddot{a}_{\overline{n}|Ip} & n \leq t < w - x \end{cases}$$

En consecuencia, la variable aleatoria pérdida individual L_i la podemos expresar del siguiente modo:

REALIZACIONES	PROBABILIDADES
$\delta\alpha \quad V^{1/2} - P\ddot{a}_{\overline{1}\|Ip}$	q_x
$\vdots$	$\vdots$
$\delta\alpha \quad V^{n-1+1/2} - P\ddot{a}_{\overline{n}\|Ip}$	${}_{n-1/}q_x$
$\vdots$	$\vdots$
$\delta\alpha \quad V^{x_{jub}-x-1/2} - P\ddot{a}_{\overline{n}\|Ip}$	${}_{x_{jub}-x-1/}q_x$
$\alpha \; {}_{x_{jub}-x/}\ddot{a}_{\overline{r}\|Ip} - P\ddot{a}_{\overline{n}\|Ip}$	${}_{x_{jub}-x+r-1/}q_x$
con $\quad r = 1, \ldots, w - x_{jub}$	

El procedimiento para calcular la prima periódica de la operación , es el mismo que ya utilizamos para el caso de la operación de renta o del seguro a primas periódicas, por tanto:

$$P_t = k = P$$

es decir, la prima coincidirá con el valor k, y la variable aleatoria intermedia ξ_i^q, presentará las siguientes realizaciones:

$$q(i,t) = \begin{cases} \ddot{a}_{\overline{t+1}|Ip} & 0 \leq t < n \\ \\ \ddot{a}_{\overline{n}|Ip} & n \leq t < w - x \end{cases}$$

Al venir k dada por la siguiente expresión:

$$k = \frac{E[\xi_i^p]}{E[\xi_i^q]}$$

y sabiendo que en nuestro caso:

$k = P$

$$E[\xi_i^p] = \alpha\left(\delta \quad {}_{/x_{jub}-x}A_x + {}_{x_{jub}-x/}\ddot{a}_x\right)$$

$$E[\xi_i^q] = {}_{/n}\ddot{a}_x$$

entonces:

$$P = \alpha\left(\frac{\delta \quad {}_{/x_{jub}-x}A_x + {}_{x_{jub}-x/}\ddot{a}_x}{{}_{/n}\ddot{a}_x}\right)$$

4.7.1.3 Cálculo del recargo de seguridad

Para calcular el recargo de seguridad, estudiaremos la variable aletoria L_i^*, cuya estructura dependerá del valor que tome δ.

También en este caso, y por el mismo motivo que cuando tratamos la operación a prima única, puede presentarse el problema de entrecruzamientos entre prestaciones del seguro y prestaciones de la renta en las realizaciones de la variable aleatoria L_i^*.

De todas formas, podemos conocer los valores que debe de satisfacer δ para que no se de entrecruzamiento en las realizaciones de la variable aleatoria L_i^*.

No habrá entrecruzamiento, y por tanto podremos conocer a priori la variable aleatoria L_i^*, si el mayor valor de la variable aleatoria L_i que presenta prestación de seguro ($\delta\alpha \quad V^{1/2} - P\ddot{a}_{\overline{1}|Ip}$), es menor que el mayor valor que toma la realización de la variable aleatoria L_i que presenta prestación de renta ($\alpha \ {}_{x_{jub}-x/}\ddot{a}_{\overline{1}|Ip} - P\ddot{a}_{\overline{n}|Ip}$), es decir, si:

$$\delta\alpha \quad V^{1/2} - P\ddot{a}_{\overline{1}|Ip} < \alpha \ {}_{x_{jub}-x/}\ddot{a}_{\overline{1}|Ip} - P\ddot{a}_{\overline{n}|Ip}$$

por tanto si:

$$\delta < \left(V^{x_{jub}-x} - \frac{P}{\alpha}a_{\overline{n-1}|Ip}\right)(1+Ip)^{1/2}$$

la variable aleatoria L_i^* podremos definirla del siguiente modo:

REALIZACIONES	PROBABILIDADES	Periodos enteros vividos t_k
$\delta\alpha \quad V^{x_{jub}-x-1/2} - P\ddot{a}_{\overline{n}\|Ip}$	${}_{x_{jub}-x-1/}q_x$	$t_0 = x_{jub} - x - 1$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$\delta\alpha \quad V^{1/2} - P\ddot{a}_{\overline{1}\|Ip}$	q_x	$t_{x_{jub}-x-1} = 0$
$\alpha^r \; {}_{x_{jub}-x/}\ddot{a}_{\overline{1}\|Ip} - P\ddot{a}_{\overline{n}\|Ip}$	${}_{x_{jub}-x/}q_x$	$t_{x_{jub}-x} = x_{jub} - x$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$\alpha^r \; {}_{x_{jub}-x/}\ddot{a}_{\overline{s^\epsilon}\|Ip} - P\ddot{a}_{\overline{n}\|Ip}$	${}_{x_{jub}-x+s^\epsilon-1/}q_x$	$t_h = x_{jub} - x + s^\epsilon - 1$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$\alpha^r \; {}_{x_{jub}-x/}\ddot{a}_{\overline{w-x_{jub}}\|Ip} - P\ddot{a}_{\overline{n}\|Ip}$	${}_{w-x-1/}q_x$	$t_{w-x-1} = w - x - 1$

En caso contrario, no podemos definir a priori la variable aleatoria L_i^*, determinando la misma a posteriori según los datos de la operación.

Si $\delta < \left(V^{x_{jub}-x} - \frac{P}{\alpha} a_{\overline{n-1}|Ip}\right)(1+Ip)^{1/2}$, el percentil de la variable aleatoria L_i^* fijado un ϵ $\mathrm{Per}_\epsilon[L_i^*]$, coincidirá generalmente con la correspondiente a la misma operación pero sin el seguro de fallecimiento, debido al reducido valor que toma ϵ. En consecuencia, si ${}_{/t_h+1}q_x \leq 1 - \epsilon$ entonces el percentil de la variable aleatoria L_i^* asociado al nivel de riesgo ϵ vendrá dado por:

$$\mathrm{Per}_\epsilon[L_i^*] = \alpha^r \; {}_{x_{jub}-x/}\ddot{a}_{\overline{s^\epsilon}|Ip} - P\ddot{a}_{\overline{n}|Ip} = \mathrm{Per}_\epsilon[L_i^*(renta)]$$

[7]

siendo s^ϵ el número entero de términos que a lo sumo puede hacerse cargo el plan sin necesidad de recurrir al reaseguro.

[7]siendo $\mathrm{Per}_\epsilon[L_i^*(renta)]$ el percentil-ϵ de la varable aleatoria L_i^* ocasionada por la renta .

Sin embargo, al igual que sucede en prima única, puede darse el caso que $\delta > \left(V^{x_{jub}-x} - \frac{P}{\alpha} a_{\overline{n-1}|Ip}\right)(1+Ip)^{1/2}$ y el percentil siga siendo el mismo que el anterior. La explicación es la misma que ya explicamos en su momento cuando estudiamos la operación a prima única, de tal manera que si la mayor realización de L_i en la cual hay prestación de seguro $(\delta\alpha V^{1/2} - P\ddot{a}_{\overline{1}|Ip})$ sigue sin superar el $\mathrm{Per}_\epsilon[L_i^*] = \alpha\ {}_{x_{jub}-x/}\ddot{a}_{\overline{s^\epsilon}|Ip} - P\ddot{a}_{\overline{n}|Ip}$, entonces el percentil de la variable aleatoria L_i^* seguirá siendo: $\mathrm{Per}_\epsilon[L_i^*] = \mathrm{Per}_\epsilon[L_i^*(renta)]$,

Para ello, δ debe de satisfacer:

$$\delta\,\alpha\,V^{1/2} - P\ddot{a}_{\overline{1}|Ip} \leq \alpha\ {}_{x_{jub}-x/}\ddot{a}_{\overline{s^\epsilon}|Ip} - P\ddot{a}_{\overline{n}|Ip}$$

despejando δ:

$$\delta \leq \left[\ {}_{x_{jub}-x/}\ddot{a}_{\overline{s^\epsilon}|Ip} - \frac{P}{\alpha} a_{\overline{n-1}|Ip}\right](1+Ip)^{1/2}$$

Como ${}_{x_{jub}-x/}\ddot{a}_{\overline{s^\epsilon}|Ip}$ coincide con el percentil-ϵ de la variable aleatoria ξ_i^p asociada a la renta unitaria (y que lo simbolizaremos por la expresión $\mathrm{Per}_\epsilon[\xi_i^p(renta\,unitaria)]$), entonces podemos expresar la desigualdad del siguiente modo:

$$\delta \leq \left[\mathrm{Per}_\epsilon[\xi_i^p(renta\,unitaria)] - \frac{P}{\alpha} a_{\overline{n-1}|Ip}\right](1+Ip)^{1/2}$$

Conclusión:

- Si $\delta \leq \left[\mathrm{Per}_\epsilon[\xi_i^p(renta\,unitaria)] - \frac{P}{\alpha} a_{\overline{n-1}|Ip}\right](1+Ip)^{1/2}$ el valor del percentil de la operación mixta renta-seguro coincidirá con el valor del percentil de la misma operación pero excluido el seguro, conociendo siempre a priori cual es la expresión que nos permite calcular el dicho percentil. Esto conlleva a que podemos añadir, en este caso, una prestación de seguro a la que ya teniamos de renta, sin que se modifique el riesgo de insolvencia .

- Si δ supera este límite, la incorporación del seguro modificará el riesgo de insolvencia y por tanto , el valor del percentil. En este caso resulta imposible conocer a priori una expresión que nos permita calcular el valor de dicho el percentil.

El recargo de seguridad que garantiza un nivel de solvencia $1-\epsilon$ viene dado por la ya conocida expresión:

$$\lambda^{\epsilon} = \frac{\mathrm{Per}_{\epsilon}[L_i^*]}{P(i,t_h)} = \frac{\mathrm{Per}_{\epsilon}[L_i^*]}{\Pi}$$

En el supuesto que $\delta \leq \left[\mathrm{Per}_{\epsilon}[\xi_i^p(renta\, unitaria)] - \frac{P}{\alpha} a_{\overline{n-1}|Ip}\right](1+Ip)^{1/2}$ entonces:

$$\lambda^{\epsilon} = \frac{\alpha^{r}\ {}_{x_{jub}-x/}\ddot{a}_{\overline{s^{\epsilon}}|Ip} - \ddot{a}_{\overline{n}|Ip}}{\ddot{a}_{\overline{n}|Ip}}$$

Conocido el recargo de seguridad λ^{ϵ}, podemos conocer la varible aleatoria L_i^{ϵ}

4.7.1.4 Variable aleatoria pérdida del reasegurador. Cálculo de la prima pura de reaseguro.

En esta sección calcularemos la prima de reaseguro para las dos modalidades estudiadas.

Análisis de la variable aleatoria prestaciones del reasegurador en la modalidad de reaseguro del percentil

Distinguiremos dos casos:

Si $\delta \leq \left[\mathrm{Per}_{\epsilon}[\xi_i^p(renta\, unitaria)] - \frac{P}{\alpha} a_{\overline{n-1}|Ip}\right](1+Ip)^{1/2}$ entonces las realizaciones de la variable aletatoria $\xi_i^{p,R}$ coincidirán con las realizaciones de la renta de la operación (renta de jubilación).

Sin embargo, si $\delta > \left[\mathrm{Per}_{\epsilon}[\xi_i^p(renta\, unitaria)] - \frac{P}{\alpha} a_{\overline{n-1}|Ip}\right](1+Ip)^{1/2}$ tendremos que determinar las realizaciones de $\xi_i^{p,R}$ aplicando la expresión general.

Análisis de la variable aleatoria prestaciones del reasegurador en la modalidad de reaseguro de diferencia de siniestralidad

La expresión de la función $Z_{i,h}$ si el reasegurador es del **tipo A** :

$$Z_{i,h} = \begin{cases} P_0^{Rec}(1+Ip) & h=1 \\ & \\ (Z_{i,h-1}+P_{h-1}^{Rec})(1+Ip) & \text{si} Z_{i,h-1} \geq V_{i,h-1}+R_{i,h-1} \\ (V_{i,h-1}+R_{i,h-1}+P_{h-1}^{Rec})(1+Ip) & \text{si} Z_{i,h-1} < V_{i,h-1}+R_{i,h-1} \\ & 1 < h \leq n \\ & \\ (Z_{i,h-1})(1+Ip) & \text{si} Z_{i,h-1} \geq V_{i,h-1}+R_{i,h-1} \\ (V_{i,h-1}+R_{i,h-1})(1+Ip) & \text{si} Z_{i,h-1} < V_{i,h-1}+R_{i,h-1} \\ & n < h \leq d_r \\ & \\ (Z_{i,h-1}-\alpha_{h-1}^r)(1+Ip) & \text{si} Z_{i,h-1} \geq V_{i,h-1}+R_{i,h-1} \\ (V_{i,h-1}+R_{i,h-1}-\alpha_{h-1}^r)(1+Ip) & \text{si} Z_{i,h-1} < V_{i,h-1}+R_{i,h-1} \end{cases}$$

En este caso:

$$T_{i,h} = \begin{cases} T_{i,h}^1 & h = 1,\ldots,d_r+m_r-1 \\ & \\ T_{i,h}^2 & h = 1,\ldots,m_s \end{cases}$$

donde:

$$T_{i,h}^1 = \max\{0, \quad V_{i,h}+R_{i,h}-Z_{i,h}\} \quad h = 1,\ldots,d_r+m_r-1$$

$$T_{i,h}^2 = \max\left\{0, \alpha_h^s - Z_{i,h}(1+Ip)^{-1/2}\right\} \quad h = 1,\ldots,m_s$$

La expresión de la función $Z_{i,h}$ si el reasegurador es del **tipo B** es :

$$Z_{i,h} = \begin{cases} P_0^{Rec}(1+Ip) & h=1 \\ & \\ (R_{i,h-1}+V_{i,h-1}+P_{h-1}^{Rec})(1+Ip) & 1 < h \leq n \\ & \\ (R_{i,h-1}+V_{i,h-1})(1+Ip) & n < h \leq d_r \\ & \\ (R_{i,h-1}+V_{i,h-1}-\alpha_{h-1}^r)(1+Ip) & d_r < h \leq d_r+m_r \end{cases}$$

En este caso:

$$T_{i,h} = \begin{cases} T^1_{i,h} & h = 1, \ldots, d_r + m_r - 1 \\ T^2_{i,h} & h = 1, \ldots, m_s \end{cases}$$

donde:

$$T^1_{i,h} = V_{i,h} + R_{i,h} - Z_{i,h} \quad h = 1, \ldots, d_r + m_r - 1$$

$$T^2_{i,h} = \text{Max}\left\{0, \alpha^s_h - Z_{i,h}(1 + Ip)^{-1/2}\right\} \quad h = 1, \ldots, m_s$$

Conocida la función $T_{i,h}$, podremos obtener las realizaciones $M(i,t)$ de la variable aleatoria $\xi^{p,R}_i$:

$$M(i,t) = \begin{cases} T^2_{i,1}(1 + Ir)^{-1/2} & t = 0 \\ \sum_{s=1}^{t} T^1_{i,s}(1 + Ir)^{-s} + T^2_{i,t+1}(1 + Ir)^{-t-1/2} & 0 < t < m_s \\ \sum_{s=1}^{t} T^1_{i,s}(1 + Ir)^{-s} & t \geq m_s \end{cases}$$

siendo para $t = 0$, $\sum_{s=1}^{0} T^1_{i,s}(1 + Ir)^{-s} = 0$

Análisis de la variable aleatoria asociada a las contraprestaciones del reasegurador

Las realizaciones de la variable aleatoria $\xi^{c,R}_i$, coinciden con las que hemos dado en las dos operaciones anteriores:

$$P^R(i,t) = \begin{cases} P^R \ddot{a}_{\overline{t+1}|Ir} & 0 \leq t < n \\ P^R \ddot{a}_{\overline{n}|Ir} & n \leq t < w - x \end{cases}$$

La prima periódica de reaseguro viene dada por la siguiente expresión:

$$P^R = \frac{E[\xi^{p,R}_i]}{E[\xi^{q,R}_i]}$$

Respecto a la $E[\xi^{q,R}_i]$ sabemos que viene dada, al igual que en las operaciones a primas periodicas que hemos estudiado, por el valor actuarial de una renta prepagable de n-términos valorada al tipo de interés del reaseguro:

$$E[\xi^{q,R}_i] = {}_{/n}\ddot{a}_x$$

En la modalidad de reaseguro del percentil sólo podremos dar una expresión simplificada de la prima de reaseguro en el caso que :
$\delta \leq \left[\mathrm{Per}_\epsilon[\xi_i^p(renta\, unitaria)] - \frac{P}{\alpha} a_{\overline{n-1}|Ip}\right](1+Ip)^{1/2}$ ya que al ser:

$$E[\xi_i^{p,R}] = E[\xi_i^{p,R}(renta)] = \alpha\ {}_{x_{sub}-x+s^\epsilon/}\ddot{a}_x$$

la prima de reaseguro P^R tomará la siguiente expresión:

$$P^R = P^R(\text{renta}) = \frac{\alpha\ {}_{x_{sub}-x+s^\epsilon/}\ddot{a}_x}{{}_{/n}\ddot{a}_x}$$

Sin embargo si $\delta > \left[\mathrm{Per}_\epsilon[\xi_i^p(renta\, unitaria)] - \frac{P}{\alpha} a_{\overline{n-1}|Ip}\right](1+Ip)^{1/2}$ no podremos conocer a priori una expresión que nos permita calcular la prima de reaseguro P^R.

4.7.1.5 Variable aleatoria pérdida ajustada de reaseguro. Cálculo de la prima pura ajustada de reaseguro

Calcularemos la variable aleatoria $\xi_i^{b,R}$ para las dos modalidades de reaseguro.

Análisis de la variable aleatoria asociada al beneficio del plan en la modalidad de reaseguro del percentil

Distinguiremos dos casos:

1. Si $\delta \leq \left[\mathrm{Per}_\epsilon[\xi_i^p(renta\, unitaria)] - \frac{P}{\alpha} a_{\overline{n-1}|Ip}\right](1+Ip)^{1/2}$

   Las realizaciones $b(i,t_k)$ de la variable aleatoria $\xi_i^{b,R}$, viene dadas por la siguiente función:

$$b(i,t_k) = \begin{cases} [P^\epsilon \ddot{a}_{\overline{t_k+1}|Ip}(1+Ip)^{t_k+1/2} - \alpha^s](1+Ir)^{-t_k-1/2} & t_k \leq n-1 \\ [P^\epsilon \ddot{a}_{\overline{n}|Ir}(1+Ip)^{t_k+1/2} - \alpha^s](1+Ir)^{-t_k-1/2} & n-1 < t_k \leq d_r - 1 \\ (P^\epsilon \ddot{a}_{\overline{n}|Ir} - \alpha^r\ {}_{d_r/}\ddot{a}_{\overline{t_k+1-d_r}|Ir})(1+Ip)^{t_k+1/2}(1+Ir)^{-t_k-1/2} & d_r \leq t_k < d_r + s^\epsilon \\ 0 & t_k \geq d_r + s^\epsilon \end{cases}$$

   Podemos observar que:

$$E[\xi_{i)}^{b,R}] = E[\xi_i^b(renta)] - \sum_{j=1}^{d_r} \delta\alpha^r(1+Ir)^{-j+1/2}\ {}_{j-1/}q_x$$

2. Si $\delta > \left[\mathrm{Per}_\epsilon[\xi_i^p(renta\,unitaria)] - \frac{P}{\alpha}a_{\overline{n-1}|Ip}\right](1+Ip)^{1/2}$ no podremos encontrar una expresión simplificada que nos de las realizaciones de $\xi_i^{b,R}$, recurriendo a la expresión general para el cálculo de éstas.

Análisis de la variable aleatoria asociada al beneficio del plan en la modalidad de reaseguro de diferencia de siniestralidad

En este caso la función $H_{i,h}$ y las realizaciones de $\xi_i^{b,R}$, coinciden con las expresiones que con carater general vimos en su momento.

Cálculo de la prima ajustada de reaseguro La prima ajustada de reaseguro viene definida por la siguiente expresión:

$$P^{R,A} = \frac{E[\xi_i^{p,R}] - E[\xi_i^{b,R}]}{E[\xi_i^{q,R}]}$$

En la modalidad de reaseguro del percentil, sólo podremos conocer la expresión a priori de $P^{R,A}$ si:

$$\delta > \left[\mathrm{Per}_\epsilon[\xi_i^p(renta\,unitaria)] - \frac{P}{\alpha}a_{\overline{n-1}|Ip}\right](1+Ip)^{1/2}$$

ya que al ser

$$E[\xi_i^{b,R}] = E[\xi_i^b(renta)] - \sum_{j=1}^{d_r} \delta\alpha^r(1+Ir)^{-j+1/2}\ {}_{j-1/}q_x$$

siendo:

$$E[\xi_i^{b,R}(\text{renta})] = \sum_{j=1}^{n-1} P^\epsilon \ddot{a}_{\overline{j}|Ip}\left(\frac{1+Ip}{1+Ir}\right)^{j-1/2}\ {}_{j-1/}q_x$$

$$+\sum_{j=n}^{d_r+s^\epsilon} P^\epsilon \ddot{a}_{\overline{n}|Ip}\left(\frac{1+Ip}{1+Ir}\right)^{j-1/2}\ {}_{j-1/}q_x -$$

$$\sum_{j=d_r+1}^{d_r+s^\epsilon} \alpha^r \; {}_{d_r/}\ddot{a}_{\overline{j-d_r}|Ip} \left(\frac{1+Ip}{1+Ir}\right)^{j-1/2} \; {}_{j-1/}q_x$$

entonces:

$$P^{R,A} = P^{R,A}(\text{renta}) + \frac{1}{{}_{/n}\ddot{a}_x}\left[\sum_{j=1}^{d_r} \delta\alpha^r (1+Ir)^{-j+1/2} \; {}_{j-1/}q_x\right]$$

4.7.2 Estudio de la estrategia óptima

En este apartado obtendremos las expresiones analíticas de las funciones K, en la medida en que éstas puedan obtenerse.

4.7.2.1 Modalidad de reaseguro del percentil sin reparto de beneficios

1. Si

$$\delta \leq \left[\text{Per}_{\epsilon^t}[\xi_i^p(\textit{renta unitaria})] - \frac{P}{\alpha} a_{\overline{n-1}|Ip}\right](1+Ip)^{1/2} \quad \forall \epsilon^t \in [0, \epsilon^{max}]$$

o lo que es lo mismo debido al carater decreciente de $\text{Per}_{\epsilon^t}[\xi_i^p(\textit{renta})]$ con respecto al riesgo reasegurado:

$$\delta \leq \left[\text{Per}_{\epsilon^{max}}[\xi_i^p(\textit{renta unitaria})] - \frac{P}{\alpha} a_{\overline{n-1}|Ip}\right](1+Ip)^{1/2}$$

entonces nos remitimos al analísis que en este sentido se hizo sobre la renta a primas periódicas por coincidir estrictamente condicha operación.

2. Si

$$\delta > \left[\text{Per}_{\epsilon^{max}}[\xi_i^p(\textit{renta unitaria})] - \frac{P}{\alpha} a_{\overline{n-1}|Ip}\right](1+Ip)^{1/2}$$

no podemos conocer a priori la expresión del percentil y en consecuencia la expresión de la prima de reaseguro P^R, lo cual nos imposibilita calcular a priori, la función $K(\epsilon)$. Esta circunstancia nos obliga a determinar la estrategia óptima a posteriori, calculando una a una las posibles estrategias recargo reaseguro.

4.7.2.2 Modalidad de reaseguro con reparto de beneficios.

Nos volvemos a plantear las mismas situaciones :

Si $\delta > \left[\mathrm{Per}_{\epsilon^{max}}[\xi_i^p(renta\, unitaria)] - \frac{P}{\alpha} a_{\overline{n-1}|Ip}\right](1+Ip)^{1/2}$ por el mismo motivo que en el apartado anterior no podemos deteminar a priori la función $K^A(\epsilon)$, determinando la estrategia óptima a posteriori, calculando una a una las posibles estrategias recargo reaseguro.

Sin embargo, si $\delta \leq \left[\mathrm{Per}_{\epsilon^{max}}[\xi_i^p(renta\, unitaria)] - \frac{P}{\alpha} a_{\overline{n-1}|Ip}\right](1+Ip)^{1/2}$
entonces si que podemos conocer la función $K^A(\epsilon^t)$ a priori. A continuación demostraremos que dicha función coincide con la que lleva asociada la operación de renta, a pesar de que la prima ajustada de reaseguro sea distinta en la operación mixta renta- seguro.

Sabemos que:

$$VPREC(\epsilon^t) = P(1+\lambda^\epsilon) = P^{\epsilon^t}(\text{renta}) = VPREC(\epsilon^t)(renta)$$

, por ser el percentil el mismo que el de la renta, por tanto:

$$\Delta VPREC(\epsilon^t) = \Delta VPREC(\epsilon^t)(renta) = \frac{-\alpha(1+Ip)^{-(x_{jub}-x)-s^{\epsilon^t}+1}}{\ddot{a}_{\overline{n}|Ip}}$$

Respecto a $VPREA(\epsilon^t)$ sabemos que:

$$VPREA(\epsilon^t) = P^{R,A}(1+\lambda^R) =$$

$$VPREA(\epsilon^t)(\text{renta}) + \frac{(1+\lambda^R)}{{}_{/n}\ddot{a}_x}\left[\sum_{j=1}^{d_r} \delta\alpha(1+Ir)^{-j+1/2}\ {}_{j-1/}q_x\right]$$

Sin embargo, como $\frac{(1+\lambda^R)}{{}_{/n}\ddot{a}_x}\left[\sum_{j=1}^{d_r} \delta\alpha(1+Ir)^{-j+1/2}\ {}_{j-1/}q_x\right]$ no depende de ϵ^t, entonces:

$$\Delta VPREA(\epsilon^t) = \Delta VPREA(\epsilon^t)(renta) =$$

$$\frac{\alpha^r(1+Ip)^{-d_r-s^{\epsilon^t}+1}(1+\lambda^R)}{\ddot{a}_{\overline{n}|Ip}\ {}_{n/}\ddot{a}_x}\left[\ddot{a}_{\overline{n}|Ip}\left({}_{d_r+s^{\epsilon^t}-1}P_x\alpha^r\left(\frac{1+Ip}{1+Ir}\right)^{d_r+s^{\epsilon^t}-1}\right)+\right.$$

$$\ddot{a}_{\overline{n}|Ip}\left(\sum_{j=n}^{d_r+s^{\epsilon^t}-1}{}_{j-1/}q_x(1+Ip)^{j-1/2}(1+Ir)^{-j+1/2}\right)+$$

$$\left.\sum_{j=1}^{n-1}\ddot{a}_{\overline{j}|Ip}\ {}_{j-1/}q_x(1+Ip)^{j-1/2}(1+Ir)^{-j+1/2}\right]$$

lo que nos lleva a la conclusión de que :

$$K^A(\epsilon^t) = -\frac{\Delta VPREA(\epsilon^t)(renta)}{\Delta VPREC(\epsilon^t)(renta)} = K^A(\epsilon^t)(renta)$$

Por tanto la estrategia óptima coincide con la de la renta a primas periódicas, siendo por tanto ésta independiente de la temporalidad.

Con esta operación acabamos el estudio de las operaciones paticulares.

Se podría haber hecho también el estudio concreto de operaciones en las cuales las prestaciones y contraprestaciones fuesen variables, el problema que se nos plantea en este caso, es que en aquellas operaciones donde intervienen pretaciones de seguro, la determinación de la estrategia óptima a priori será muy dificil de obtener, dependiendo ésta de la variación concreta que presente tanto la prestaciones como las contraprestaciones de la operación.

Nosotros en lugar de entrar en la casuística particular de cada variación, la cual no nos aportaría nada de nuevo, hemos realizado un ejemplo (ver anexo 4-5) en el que se estudia una operación mixta renta-seguro con prestaciones y contraprestaciones variables.

ANEXO 4-1

ANEXO 4-1 RENTA DIFERIDA TEMPORAL CON CUANTIAS CONSTANTES A PRIMA UNICA

En este anexo calcularemos la prima de reaseguro para la mencionada operación en las dos modalidades de reaseguro estudiadas (modalidad del percentil y modalidad de diferencia de siniestralidad). En particular nos centraremos en la determinación de la estrategia óptima para cada caso a partir de la función K, en la medida en que ésta esté definida. En el caso particular del reaseguro del percentil, haremos un estudio del comportamiento de la función K con respecto a las variables de las que depende, veremos gráficamente qué relación hay entre la función K y el coste total de la operación y por último analizaremos como se comportan las cotas del recargo del reasegurador (C) y (D) con respecto a las variables de la operación (en la modalidad de reaseguro del percentil sin reparto de beneficios) .

4-1.1 REASEGURO DEL PERCENTIL. ANALISIS DE LA ESTRATEGIA OPTIMA (NO HAY REPARTO DE BENEFICIOS)

Analizaremos como evoluciona la función $K(\epsilon^t)$ conforme va variando el tipo de interés del reaseguro para la operación objeto de estudio. El análisis lo realizaremos para cuatro operaciones distintas, estudiando para cada una de ellas el riesgo susceptible de ser reasegurado ϵ^t, el número de términos s^{ϵ^t} que a lo sumo puede hacerse cargo el plan dado el riesgo reasegurado ϵ^t y los valores de la función $K(\epsilon^t)$ asociados a los tipos de intereses técnicos del reaseguro siguientes: $Ir = 0.15$ $Ir = 0.09$ $Ir = 0.06$ $Ir = 0.03$ $Ir = 0.01$ $Ir = 0.0001$.

El tipo de interés técnico del plan lo fijaremos en $Ip = 0.09$ para las cuatro operaciones, diferenciándose éstas por la temporalidad, diferimiento y edad del partícipe. De esta forma podremos estudiar como influyen estos parámetros en la función $K(\epsilon^t)$.

Cada operación va acompañada de una gráfica, donde se relaciona los valores de la función $K(\epsilon^t)$ asociados a cada tipo de interés de reaseguro Ir, con el riesgo reasegurado ϵ^t.

Recordemos que la función $K(\epsilon)^t$ asociada a una renta diferida y temporal a prima única y de cuantías constantes tiene la siguiente expresión:

$$K(\epsilon^t) = (1+\lambda^R)\ {}_{d_r+s^{\epsilon^t}-1}P_x \left(\frac{1+Ir}{1+Ip}\right)^{-d_r-s^{\epsilon^t}+1}$$

Operación (I)

Renta de jubilación prepagable.

Edad del partícipe: $x = 60$ años.

Edad de jubilación $x_{jub} = 65$ años.

Recargo del reasegurador $\lambda^R = 0$

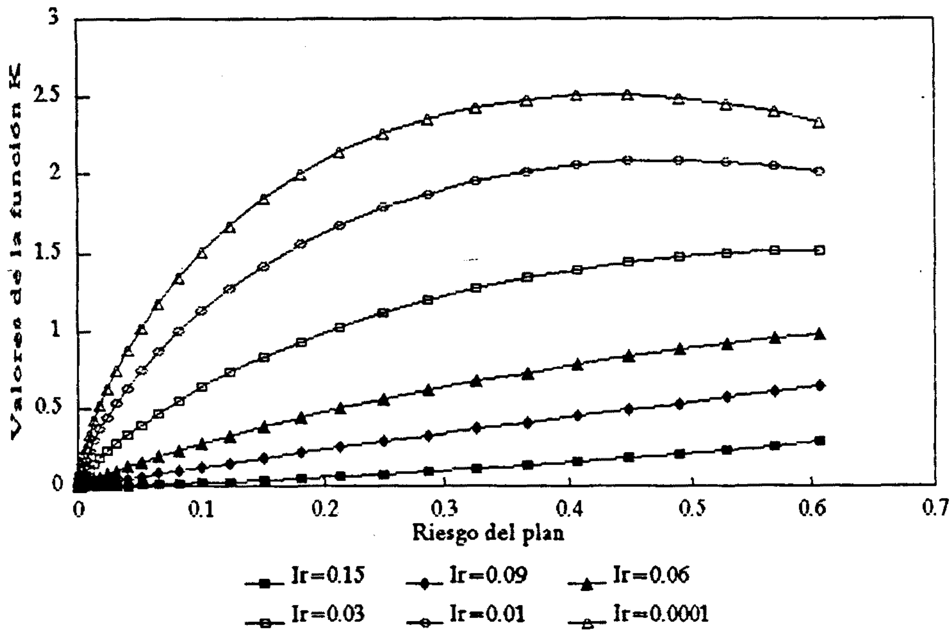
Cuantía periódica y anual $\alpha^r = 1$

$Ip = 0.09$

ϵ^t	s^{ϵ^t}	$Ir = 0.15$	$Ir = 0.09$	$Ir = 0.06$
0.000000	43	0.000000	0.000005	0.000019
0.000005	42	0.000003	0.000034	0.000123
0.000034	41	0.000012	0.000136	0.000477
0.000136	40	0.000038	0.000402	0.001372
0.000402	39	0.000096	0.000961	0.003191
0.000961	38	0.000207	0.001962	0.006336
0.001962	37	0.000394	0.003546	0.011134
0.003546	36	0.000683	0.005825	0.017788
0.005825	35	0.001099	0.008882	0.026376
0.008882	34	0.001669	0.012784	0.036919
0.012784	33	0.002427	0.017621	0.049488
0.017621	32	0.003423	0.023558	0.064339
0.023558	31	0.004737	0.030903	0.082076
0.030903	30	0.006473	0.040028	0.103386
0.040028	29	0.008746	0.051257	0.128746
0.051257	28	0.011690	0.064940	0.158626
0.064940	27	0.015467	0.081437	0.193446
0.081437	26	0.020256	0.101085	0.233509
0.101085	25	0.026248	0.124155	0.278909
0.124155	24	0.033633	0.150787	0.329414
0.150787	23	0.042572	0.180906	0.384335
0.180906	22	0.053163	0.214122	0.442383
0.214122	21	0.065391	0.249631	0.501551
0.249631	20	0.079277	0.286852	0.560471
0.286852	19	0.094968	0.325700	0.618859
0.325700	18	0.112588	0.365984	0.676264
0.365984	17	0.132192	0.407290	0.731875
0.407290	16	0.153697	0.448841	0.784342
0.448841	15	0.176999	0.489921	0.832566
0.489921	14	0.202096	0.530202	0.876219
0.530202	13	0.228989	0.569412	0.915118
0.569412	12	0.257684	0.607336	0.949204
0.607336	11	0.288196	0.643811	0.978516

ϵ^t	s^{ϵ^t}	$Ir = 0.03$	$Ir = 0.01$	$Ir = 0.0001$
0.000000	43	0.000075	0.000188	0.000299
0.000005	42	0.000459	0.001132	0.001781
0.000034	41	0.001736	0.004196	0.006537
0.000136	40	0.004853	0.011500	0.017738
0.000402	39	0.010968	0.025486	0.038927
0.000961	38	0.021158	0.048211	0.072915
0.001962	37	0.036130	0.080727	0.120897
0.003546	36	0.056088	0.122887	0.182231
0.005825	35	0.080814	0.173622	0.254943
0.008882	34	0.109916	0.231559	0.336685
0.012784	33	0.143166	0.295751	0.425805
0.017621	32	0.180861	0.366367	0.522303
0.023558	31	0.224191	0.445321	0.628639
0.030903	30	0.274407	0.534484	0.747110
0.040028	29	0.332046	0.634193	0.877796
0.051257	28	0.397531	0.744523	1.020405
0.064940	27	0.471073	0.865127	1.174076
0.081437	26	0.552540	0.995037	1.337142
0.101085	25	0.641287	1.132433	1.506860
0.124155	24	0.735977	1.274406	1.679153
0.150787	23	0.834379	1.416744	1.848399
0.180906	22	0.933218	1.553800	2.007343
0.214122	21	1.028090	1.678523	2.147217
0.249631	20	1.116350	1.787232	2.263871
0.286852	19	1.197763	1.880335	2.358458
0.325700	18	1.271822	1.957831	2.431588
0.365984	17	1.337452	2.018883	2.482836
0.407290	16	1.392767	2.061558	2.510466
0.448841	15	1.436556	2.085085	2.514229
0.489921	14	1.469089	2.090901	2.496528
0.530202	13	1.490885	2.080720	2.460020
0.569412	12	1.502650	2.056418	2.407457
0.607336	11	1.505211	2.019925	2.341555

Gráfico 4−1.1.1



Si disminuimos la temporalidad de la operación a 20 términos:

Operación (II)

Renta prepagable, diferida y temporal.

Edad del partícipe: $x = 60$ años.

Diferimiento de la renta $d_r = 5$ años.

Temporalidad de la renta $m_r = 20$ años.

Recargo del reasegurador $\lambda^R = 0$

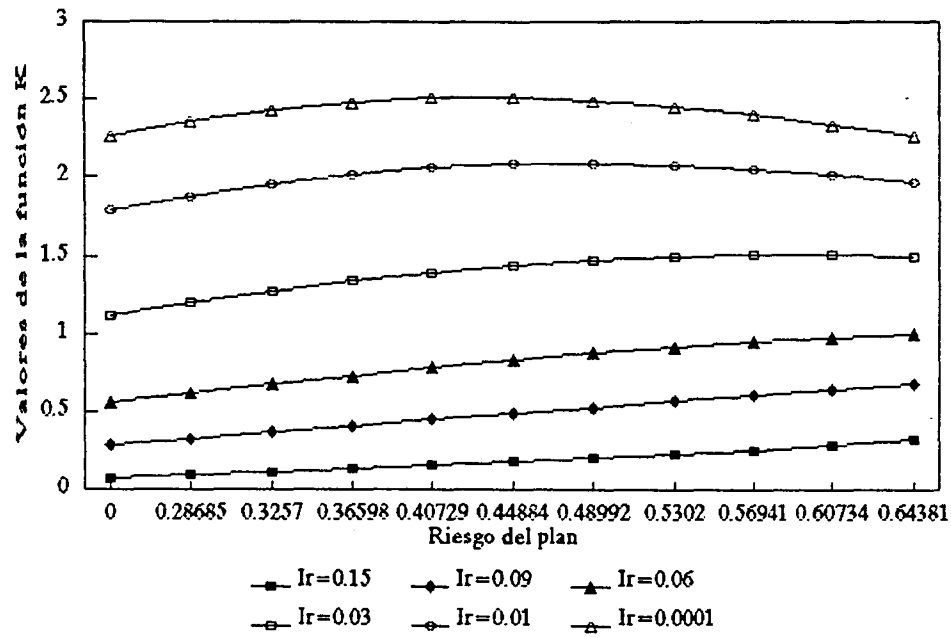
Cuantía periódica y anual $\alpha^r = 1$

$Ip = 0.09$

ϵ^t	s^{ϵ^t}	$Ir = 0.15$	$Ir = 0.09$	$Ir = 0.06$
0.000000	20	0.079277	0.286852	0.560471
0.286852	19	0.094968	0.325700	0.618859
0.325700	18	0.112588	0.365984	0.676264
0.365984	17	0.132192	0.407290	0.731875
0.407290	16	0.153697	0.448841	0.784342
0.448841	15	0.176999	0.489921	0.832566
0.489921	14	0.202096	0.530202	0.876219
0.530202	13	0.228989	0.569412	0.915118
0.569412	12	0.257684	0.607336	0.949204
0.607336	11	0.288196	0.643811	0.978516
0.643811	10	0.320545	0.678717	1.003176

ϵ^t	s^{ϵ^t}	$Ir = 0.03$	$Ir = 0.01$	$Ir = 0.0001$
0.000000	20	1.116350	1.787232	2.263871
0.286852	19	1.197763	1.880335	2.358458
0.325700	18	1.271822	1.957831	2.431588
0.365984	17	1.337452	2.018883	2.482836
0.407290	16	1.392767	2.061558	2.510466
0.448841	15	1.436556	2.085085	2.514229
0.489921	14	1.469089	2.090901	2.496528
0.530202	13	1.490885	2.080720	2.460020
0.569412	12	1.502650	2.056418	2.407457
0.607336	11	1.505211	2.019925	2.341555
0.643811	10	1.499472	1.973150	2.264912

Gráfico 4–1.1.2



Si reducimos el diferimiento de la operación a un período:

Operación (III)

Renta prepagable, diferida y temporal.

Edad del partícipe: $x = 60$ años.

Diferimiento de la renta $d_r = 1$ años.

Temporalidad de la renta $m_r = 20$ años.

Recargo del reasegurador $\lambda^R = 0$

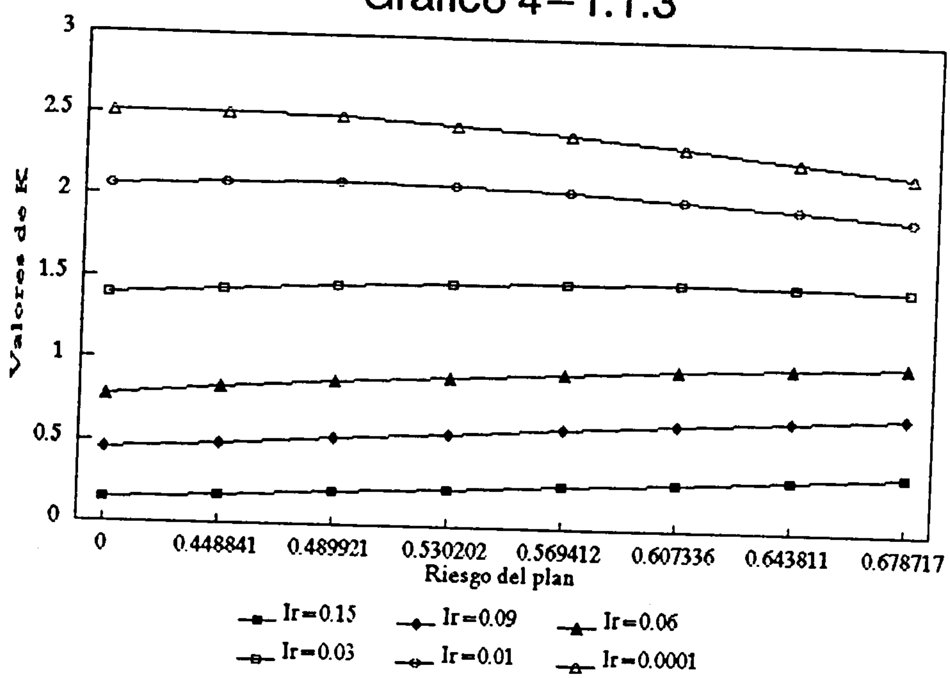
Cuantía periódica y anual $\alpha^r = 1$

$Ip = 0.09$

ϵ^t	s^{ϵ^t}	$Ir = 0.15$	$Ir = 0.09$	$Ir = 0.06$
0.000000	20	0.153697	0.448841	0.784342
0.448841	19	0.176999	0.489921	0.832566
0.489921	18	0.202096	0.530202	0.876219
0.530202	17	0.228989	0.569412	0.915118
0.569412	16	0.257684	0.607336	0.949204
0.607336	15	0.288196	0.643811	0.978516
0.643811	14	0.320545	0.678717	1.003176
0.678717	13	0.354762	0.711974	1.023370

ϵ^t	s^{ϵ^t}	$Ir = 0.03$	$Ir = 0.01$	$Ir = 0.0001$
0.000000	20	1.392767	2.061558	2.510466
0.448841	19	1.436556	2.085085	2.514229
0.489921	18	1.469089	2.090901	2.496528
0.530202	17	1.490885	2.080720	2.460020
0.569412	16	1.502650	2.056418	2.407457
0.607336	15	1.505211	2.019925	2.341555
0.643811	14	1.499472	1.973150	2.264912
0.678717	13	1.486363	1.917922	2.179938

Gráfico 4−1.1.3



Si reducimos la edad del partícipe a 30 años y mantenemos el diferimiento en 5 años:

Operación (IV)

Renta prepagable, diferida y temporal.

Edad del partícipe: $x = 30$ años.

Diferimiento de la renta $d_r = 5$ años.

Temporalidad de la renta $m_r = 20$ años.

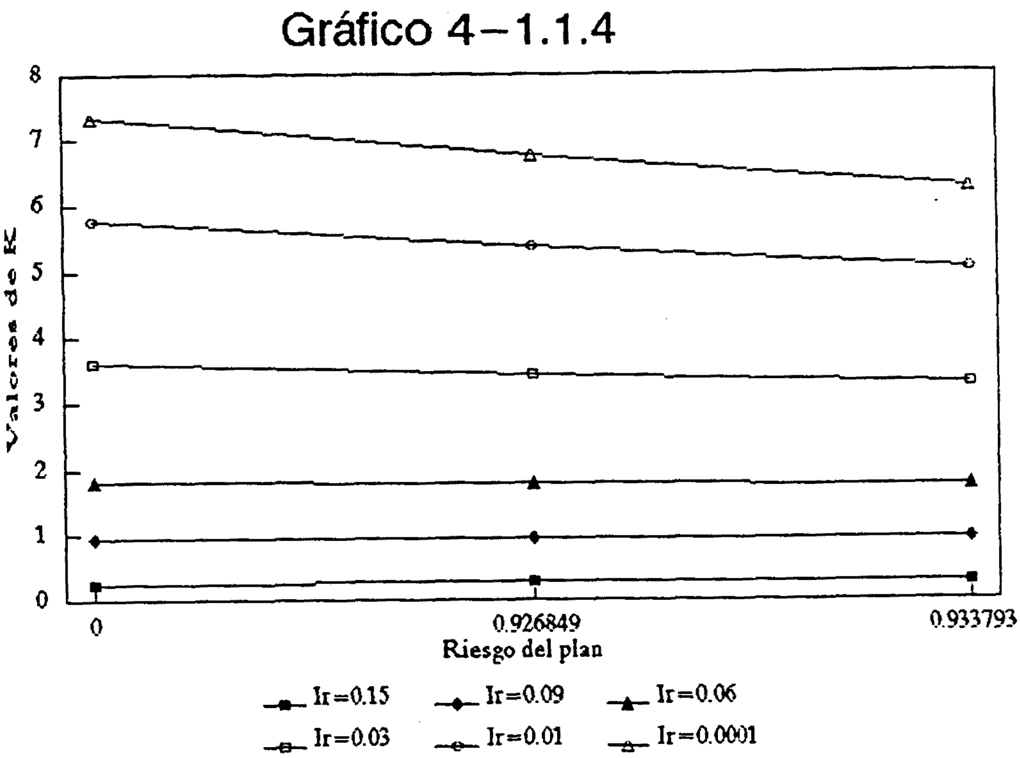
Recargo del reasegurador $\lambda^R = 0$

Cuantía periódica y anual $\alpha^r = 1$

$Ip = 0.09$

ϵ^t	s^{ϵ^t}	$Ir = 0.15$	$Ir = 0.09$	$Ir = 0.06$
0.000000	20	0.256151	0.926849	1.810940
0.926849	19	0.272276	0.933793	1.774293
0.933793	18	0.289227	0.940176	1.737253

ϵ	s^{ϵ}	$Ir = 0.03$	$Ir = 0.01$	$Ir = 0.0001$
0.000000	20	3.607044	5.774732	7.314801
0.926849	19	3.434030	5.390992	6.761786
0.933793	18	3.267180	5.029465	6.246498



Podemos hacer las siguientes observaciones:

- Los valores de la función $K(\epsilon^t)$ aumentan, conforme disminuye el tipo de interés técnico del reaseguro, fijado el tipo de interés técnico del plan.

- El crecimiento de la función $K(\epsilon^t)$ depende exclusivamente de la relación entre el tipo de interés técnico del plan Ip y el tipo de interés técnico del reaseguro Ir. Puede constatarse en los cuatro casos que la función $K(\epsilon^t)$ es siempre creciente cuando $Ip \leq Ir$, e incluso se mantiene este comportamiento para valores de $Ip > Ir$, (puede observarse que la función $K(\epsilon^t)$ sigue siendo creciente cuando $Ir = 0.06 < Ip = 0.09$ en los tres casos estudiados), sin embargo , a partir de un determinado valor de $Ir < Ip$, la función deja de ser creciente, (por ejemplo, el valor de Ir por debajo del cual la función deja de ser creciente en la operación (I) es $Ir^* = 0.022$) alcanzando un máximo en un $\epsilon^t \in [0, \epsilon^{max}))$. Cuanto más bajo sea Ir por debajo del límite, más pequeño es el nivel de riesgo ϵ^t que hace máximo la función $K(\epsilon^t)$; pudiéndose dar el caso extremo, según las características técnicas de la operación, que la función $K(\epsilon^t)$ sea totalmente decreciente y por tanto, nivel de riesgo que hace máximo la función $K(\epsilon^t)$ sea $\epsilon^t = 0$.

Esta idea queda reflejada en los ejemplos anteriores, así si observamos la operación (I) y contemplamos el caso en el que $Ir = 0.01 < 0.022$, la función $K(\epsilon^t)$ deja de ser creciente alcanzado un máximo para el valor $\epsilon^t = 0.48992 \in [0,\ 0.643811)$. Si consideramos un tipo de interes técnico del reaseguro más pequeño como $Ir = 0.0001$ el máximo se desplaza para valores de riesgo más pequeños, observemos como en este segundo caso el máximo viene asociado a un valor de $\epsilon^t = 0.44884 \in [0,\ 0.643811)$.

Si observamos la operación (IV), el tipo de interés técnico de reaseguro a partir del cual la función $K(\epsilon^t)$ ya no es creciente viene dado por $Ir^* = 0.062$, por tanto si consideramos un Ir inferior a éste como por ejemplo $Ir = 0.06$ la función $K(\epsilon^t)$ no deja de ser sólo creciente, sino que invierte la tendencia siendo ahora decreciente, localizándose el máximo de la función $K(\epsilon^t)$ en $\epsilon^t = 0$.

- Los valores de la función $K(\epsilon)$ han sido calculados para un recargo del reasegurador $\lambda^R = 0$. Si el recargo fuera positivo, todos los valores quedarían multiplicados por $(1 + \lambda^R)$, lo que supondría un desplazamiento de la función $K(\epsilon^t)$.

- Puede observarse que cuanto mayor es la probabilidad de que el partícipe llegue con vida al final de la operación (esta probabilidad será mayor cuanto más pequeño sea el diferimiento, temporalidad y edad del partícipe), menor es la concentración de valores de la función $K(\epsilon^t)$ en el origen.

  En la operación (I), al tratarse de una renta de jubilación, la probabilidad de que llegue con vida el partícipe al final de la operación es cero, por tanto esta circunstancia hace que en el origen la función $K(\epsilon^t)$ tome valores muy próximos a cero[8], sea cual sea el tipo de interes técnico del reaseguro.

[8]Los valores están muy concentrados en un entorno del origen

Sin embargo en la operación (II) , al reducirse la temporalidad de la operación, pasa de 43 términos a 20 términos, aumenta la probabilidad de que el partícipe llegue vivo al final de la operación, lo que da lugar a que los valores de la función $K(\epsilon^t)$ no estén tan concentrados en el origen.

Lo mismo sucede si se reduce el diferimiento de la operación o la edad del partícipe, como podemos observar en las operaciones (III) y (IV).

- Respecto al dominio de la función $K(\epsilon^t)$, dado por el intervalo discreto $[0, \epsilon^{max}]$, es independiente del tipo de interés técnico del reasegurador como puede contemplarse en los cuatro ejemplos.

  Si contemplamos la operación (I), el dominio viene definido por los 33 valores de (ϵ^t) siendo la cota superior del intervalo $\epsilon^{max} = 0.607336$, sea cual sea el tipo de interés del reaseguro.

  Si reducimos la temporalidad a 20 términos (operación (II)), el dominio disminuye en cuanto a número de términos, (11 en este caso), y sin embargo aumenta $\epsilon^{max} = 0.643811$. Este comportamiento del dominio se repite si reducimos el diferimiento de la operación, (en la operación (III), el dominio está formado por 8 valores, y $\epsilon^{max} = 0.678717$) o disminuimos la edad del participe (en la operación (IV) 3 son los valores que forman el dominio y $\epsilon^{max} = 0.933793$)).

  Por tanto, cuanto mayor sea la probabilidad de que el partícipe llegue con vida al final del operación, menos valores tendrá el dominio,(por ser la prima pura más proxima a la prima financiera), mayor será ϵ^{max} y mayor será también la diferencia entre ϵ^{min} y su siguiente $\epsilon^{min} + 1$, como puede constatarse en los ejemplos.

  El dominio de la función $K(\epsilon^t)$ también se ve afectado por el tipo de interés técnico del plan, así cuanto mayor sea éste, más valores tendrá el dominio y mayor será por tanto ϵ^{max} dada una determinada operación actuarial. Por ejemplo si en la operación (I) aumentamos el tipo de interés técnico del plan a $Ip = 0.14$, el dominio estará formado por 35 valores, siendo $\epsilon^{max} = 0.67872$.

Relación entre la función $K(\epsilon^t)$ y el coste total de la operación

En este apartado contrastaremos empíricamente la relación entre la función $K(\epsilon^t)$ y el coste de operación. Como puede observarse en el apartado anterior, podemos clasificar la función $K(\epsilon^t)$ en tres tipos, atendiendo al criterio de si la función corta o no corta al eje $K = 1$:

Tipo A La función esta por debajo del eje $K = 1$

Tipo B La función presenta un sólo corte con el eje $K = 1$. (Este corte siempre lo hará en un tramo creciente, y nunca en uno decreciente como puede observarse empíricamente en los ejemplos anteriores).

Tipo C La función esta por encima del eje $K = 1$.

Para ver la relación entre el coste total de la operación y la función $K(\epsilon^t)$ consideraremos tres ejemplos que presenten cada uno de los tres tipos de funciones $K(\epsilon^t)$ mencionados.

Para cada ejemplo calcularemos: el nivel de riesgo del plan ϵ^t, el número de términos que puede hacerse cargo el plan asociado a ese riesgo s^{ϵ^t}, el recargo de seguridad λ^{ϵ^t} asociado al nivel de insolvencia (ϵ^t), y el valor actual del coste total de la operación $VCT(\epsilon^t)$.

Cada ejemplo irá acompañado de dos gráficas, la primera relacionará la función k con el nivel de riesgo del plan, y la segunda relacionará el valor actual del coste total con el nivel de riesgo del plan.

Operación (I) Renta prepagable, diferida y temporal.

Edad del partícipe: $x = 60$ años.

Temporalidad de la renta $m_r = 20$ años.

Diferimiento de la renta $d_r = 5$ años

Recargo del reasegurador $\lambda^R = 0$

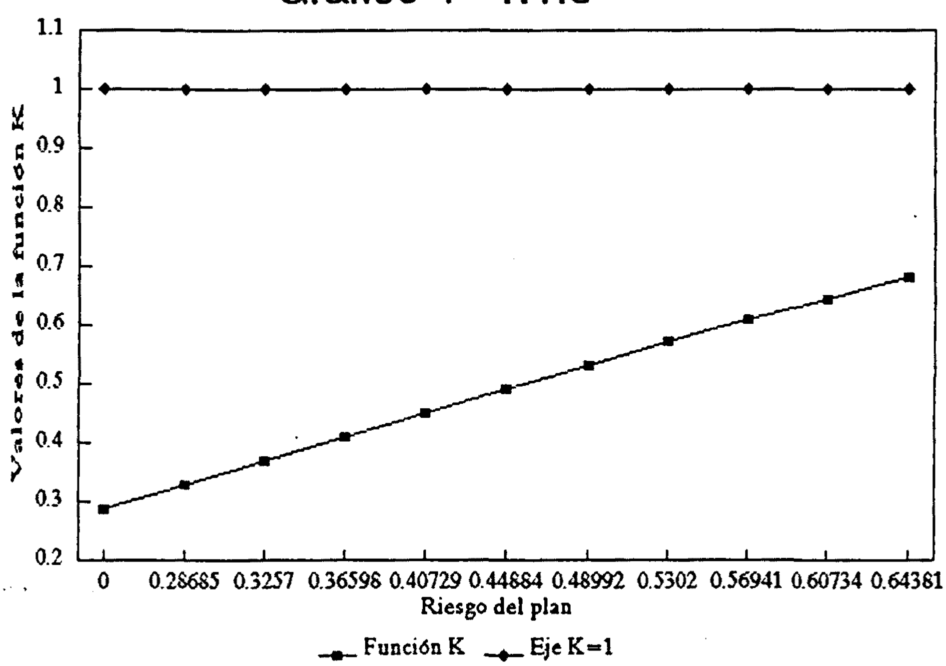
Cuantía periódica y anual $\alpha^r = 1$

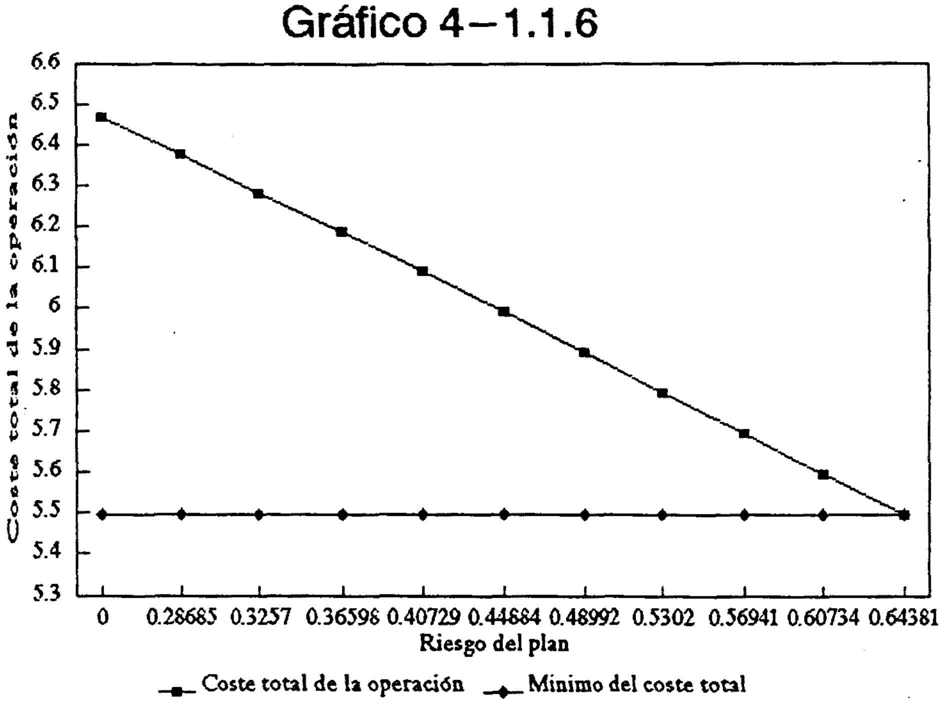
$Ip = 0.09$

$Ir = 0.09$

ϵ^t	s^{ϵ^t}	λ^{ϵ^t}	$K(\epsilon^t)$	$VCT(\epsilon^t)$
0.000000	20	0.37288	0.286852	6.46689
0.286852	19	0.34605	0.325700	6.37675
0.325700	18	0.31680	0.365984	6.28384
0.365984	17	0.28491	0.407290	6.18862
0.407290	16	0.25016	0.448841	6.09160
0.448841	15	0.21228	0.489921	5.99325
0.489921	14	0.17099	0.530202	5.89405
0.530202	13	0.12599	0.569412	5.79445
0.569412	12	0.07693	0.607336	5.69496
0.607336	11	0.02346	0.643811	5.59606
0.643811	10	0.00000	0.678717	5.49827

Gráfico 4−1.1.5





Puede observarse por el gráfico 4-1.1.5, que la función $K(\epsilon^t)$ responde al tipo (A), (todos los valores son inferiores a uno). En este caso el valor actual del coste total se hace mínimo cuando el riesgo del plan $\epsilon^t = 0.64381 = \epsilon^{max}$ (ver gráfico 4-1.1.6). Por tanto, la estrategia óptima será no recargar la prima de la operación, y cubrir el riesgo de insolvencia asociado a la prima pura ($\epsilon^* = 0.643811$) vía reaseguro.

Podemos observar que cuanto mayor es el recargo se seguridad aplicado a la prima pura λ^{ϵ^t}, mayor es el valor actual del coste total , por ser menor el riesgo de insolvencia del plan.

En nuestro caso, el coste óptimo de la operación $VCT(\epsilon^*) = 5.49827$ y el número de términos que puede hacerse cargo el plan sin que actúe el reaseguro $s^{\epsilon^*} = 10$.

Operación (II) Renta prepagable, diferida y temporal.

Edad del partícipe: $x = 60$ años.

Temporalidad de la renta $m_r = 20$ años.

Diferimiento de la renta $d_r = 5$ años

Recargo del reasegurador $\lambda^R = 0$

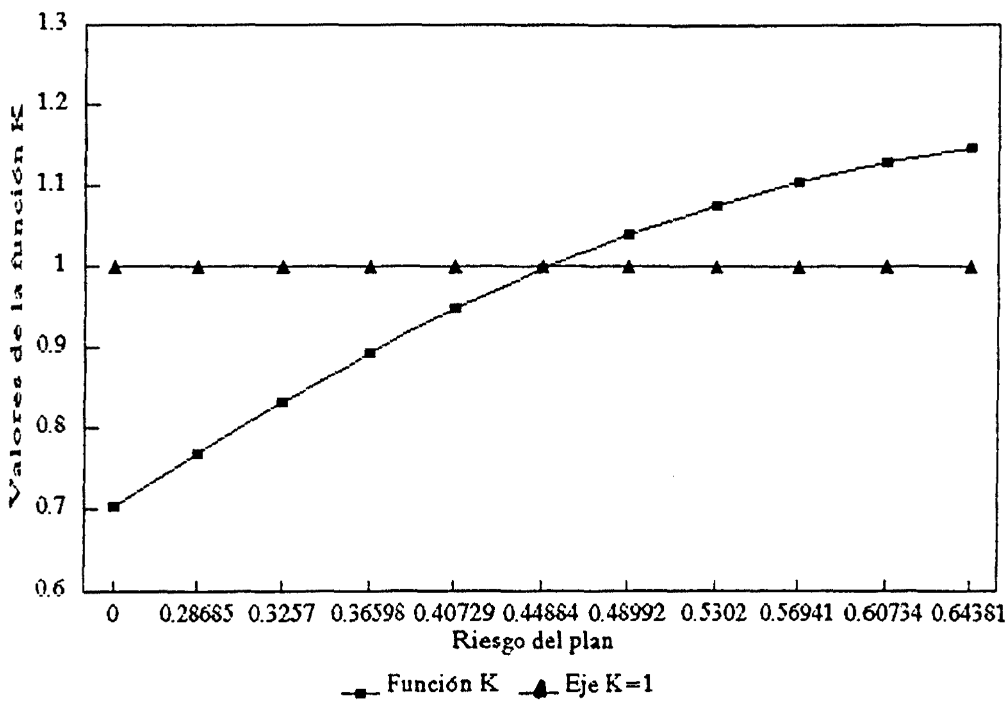
Cuantía periódica y anual $\alpha^r = 1$

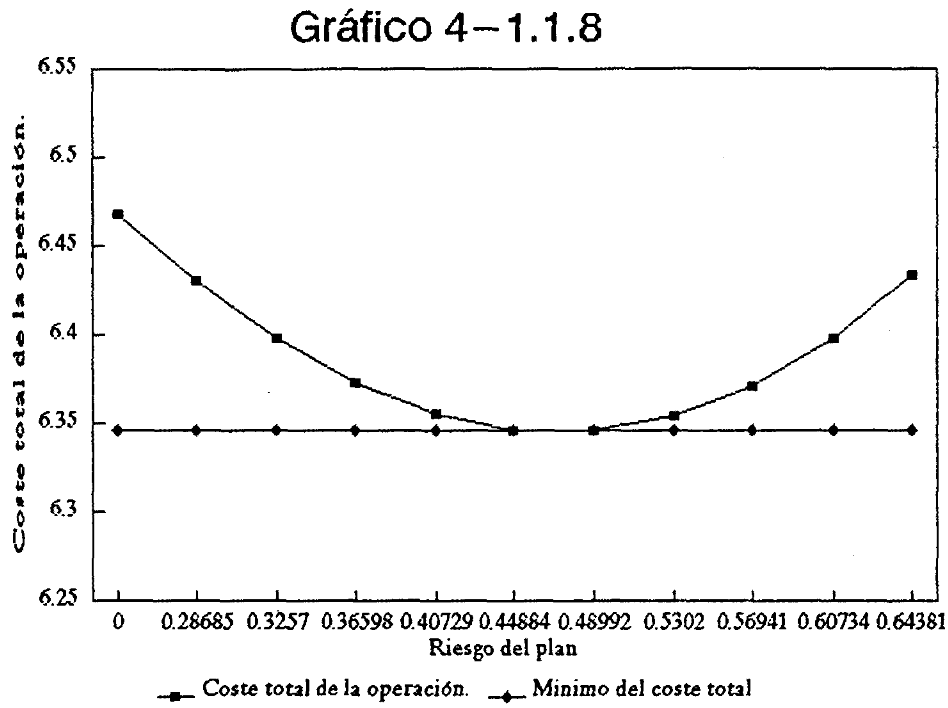
$Ip = 0.09$

$Ir = 0.05$

ϵ^t	s^{ϵ^t}	λ^{ϵ^t}	$K(\epsilon^t)$	$VCT(\epsilon^t)$
0.000000	20	0.37288	0.703640	6.46689
0.286852	19	0.34605	0.769614	6.42943
0.325700	18	0.31680	0.833069	6.39769
0.365984	17	0.28491	0.893068	6.37262
0.407290	16	0.25016	0.948062	6.35511
0.448841	15	0.21228	0.996858	6.34585
0.489921	14	0.17099	1.039228	6.34523
0.530202	13	0.12599	1.075125	6.35355
0.569412	12	0.07693	1.104650	6.37091
0.607336	11	0.02346	1.128019	6.39727
0.643811	10	0.00000	1.145537	6.43241

Gráfico 4-1.1.7





En esta operación, la función $K(\epsilon^t)$ responde al tipo(B), (presenta un corte con el eje K=1), como puede fácilmente observarse en el gráfico 4-1.1.7. Sin embargo, a diferencia del caso anterior, el valor actual del coste total se hace mínimo para un nivel de riesgo del plan $\epsilon = 0.48992 = \epsilon^s < \epsilon^{max}$, (ver gráfico 4-1.1.8) , siendo $K(0.48992) = K(\epsilon^s) = 1.039228$ (coincidiendo con el primer valor de $k(\epsilon^t)$ mayor o igual a uno). Podemos comprobar que el valor de $K(\epsilon^s)$ cumple la condición de óptimo, pues satisface: $K(\epsilon^{s-1}) = K(0.448841) = 0.996858 < 1$ y $k(\epsilon^s) = K(0.48992) = 1.039228 \geq 1$

Por tanto, en este caso la estrategia óptima es aplicar un recargo de seguridad que lleve asociado un nivel de insolvencia $\epsilon^* = 0.48992$, siendo en nuestro ejemplo $\lambda^{0.48992} = 0.17099$.

El valor actual del coste total asociado a la estrategia óptima $VCT(\epsilon^*) = 6.34523$, y el número de términos que a lo sumo puede hacerse cargo el plan sin que intervenga el reaseguro $s^{\epsilon^*} = 14$.

Operación (III) Renta prepagable, diferida y temporal.

Edad del partícipe: $x = 60$ años.

Temporalidad de la renta $m_r = 20$ años.

Diferimiento de la renta $d_r = 5$ años

Recargo del reasegurador $\lambda^R = 0$

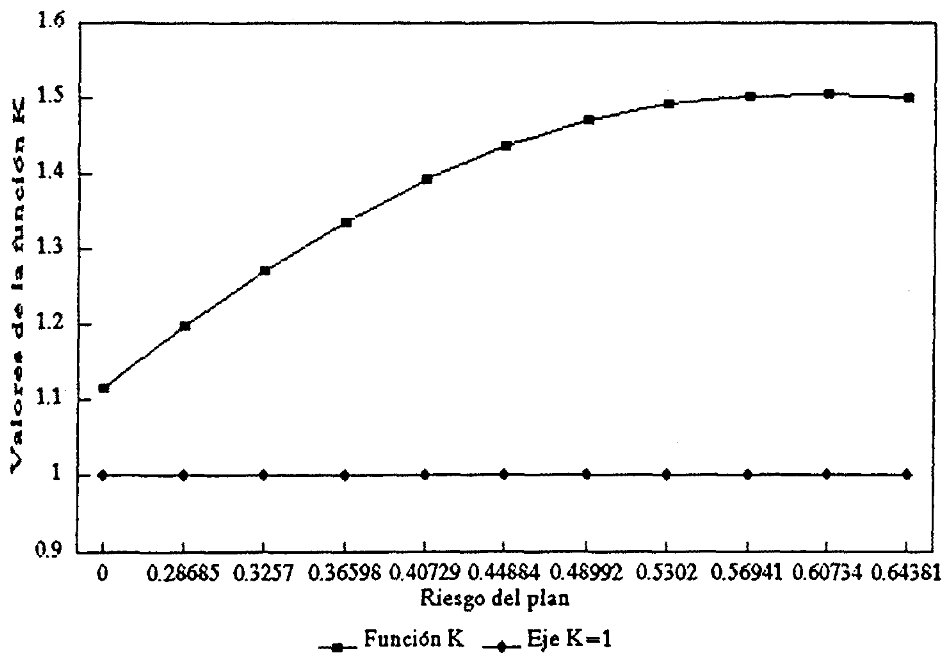
Cuantía periodica y anual$\alpha^r = 1$

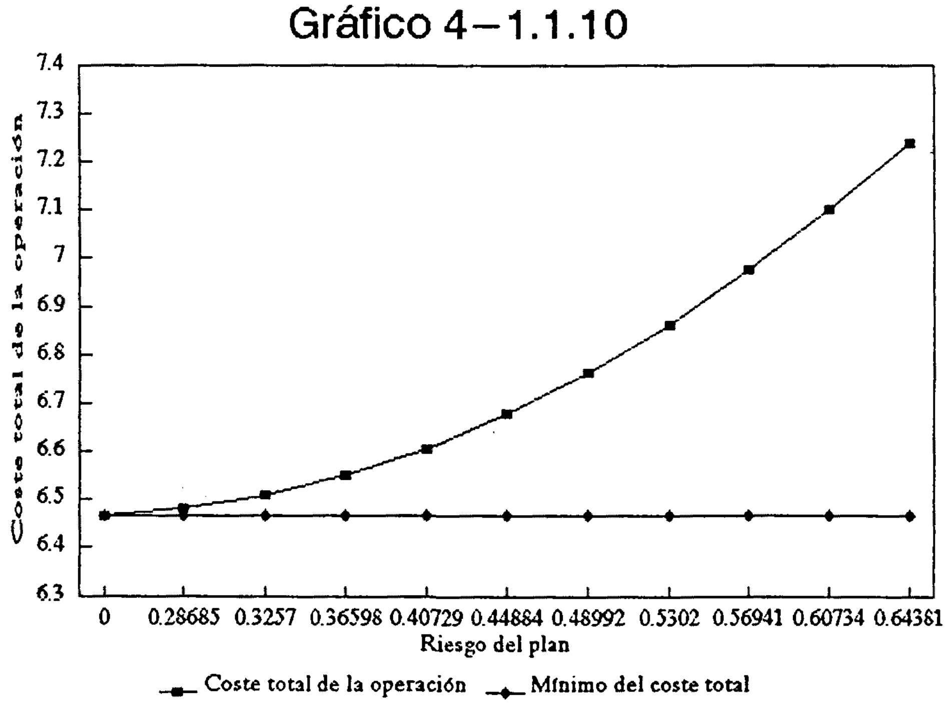
$Ip = 0.09$

$Ir = 0.03$

s^{ϵ^t}	ϵ^t	λ^{ϵ^t}	$K(\epsilon^t)$	$VCT(\epsilon^t)$
0.000000	20	0.37288	1.116350	6.46689
0.286852	19	0.34605	1.197763	6.48160
0.325700	18	0.31680	1.271822	6.50885
0.365984	17	0.28491	1.337452	6.54967
0.407290	16	0.25016	1.392767	6.60491
0.448841	15	0.21228	1.436556	6.67499
0.489921	14	0.17099	1.469089	6.75990
0.530202	13	0.12599	1.490885	6.85934
0.569412	12	0.07693	1.502650	6.97277
0.607336	11	0.02346	1.505211	7.09937
0.643811	10	0.00000	1.499472	7.23807

Gráfico 4–1.1.9





En este último ejemplo la función $K(\epsilon^t)$ responde al tipo (III), (todos los valores de $K(\epsilon^t)$ son mayores a uno) como podemos ver en la gráfica 4-1.1.9.

El coste (ver gráfico 4-1.1.10) se hace mínimo cuando el nivel de riesgo del plan $\epsilon^* = \epsilon^{min} = 0$, por consiguiente la estrategia óptima será cubrir totalmente la insolvencia del plan con el recargo de seguridad, no aplicando reaseguro ya que este lo que hace es encarecer el coste de la operación.

En nuestro caso el recargo de seguridad que cubre totalmente la insolvencia del plan es $\lambda^{\epsilon^{min}} = 0.37288$, el valor actual del coste total de la operación $VCT(\epsilon^*) = 6.46689$ y el número de términos que puede hacerse cargo el plan sin que intervenga el reasegurador coincide con la temporalidad de la operación $s^{\epsilon^*} = 20$. Por tanto el valor actual del coste total óptimo coincidirá con la prima financiera de la operación.

En este tipo de operaciones, no podremos encontrar nunca una estrategia recargo reaseguro que cubra totalmente la pérdida del plan y su coste sea menor al de la prima financiera asociada.

Conclusión:

- Si $K(\epsilon^t) < 1 \forall \epsilon^t \in [\epsilon^{min}, \epsilon^{max}]$, entonces $\epsilon^* = \epsilon^{max}$
- Si $K(\epsilon^t)$ presenta un corte con el eje $K = 1$ en un tramo creciente, entonces $\epsilon^* \in (\epsilon^{min}, \epsilon^{max}]$
- Si $K(\epsilon^t) > 1 \forall \epsilon^t \in [\epsilon^{min}, \epsilon^{max}]$, entonces $\epsilon^* = \epsilon^{min}$ y $VCT(\epsilon^*) =$ prima financiera.

Estas estrategias pueden generalizarse para cualquier tipo de operación, tanto de renta como de seguro.

Analisis de la cota inferior (C) y superior (D)

En este apartado estudiaremos el comportamiento de (C) y (D) con respecto a la temporalidad, diferimiento de la operación, edad del partícipe y relación entre el tipo de interés técnico del plan y el tipo de interés técnico del reaseguro.

El análisis se realizará con ejemplos concretos, los cuales nos permitirán ilustrar cual será la tendencia de (C) y (D) conforme van variando las magnitudes antes señaladas, permaneciendo constantes las demás características técnicas del plan.

a) Análisis de (C) y (D) con respecto a la temporalidad de la operación

El estudio lo realizaremos variando la temporalidad de la siguiente operación actuarial :

Renta prepagable, diferida y temporal.

Edad del partícipe: $x = 60$ años.

Diferimiento de la renta $d_r = 5$ años

Recargo del reasegurador $\lambda^R = 0$

Cuantía periódica y anual $\alpha^r = 1$

$Ip = 0.06$

$Ir = 0.07$

m_r	Valor de (C)	Valor de (D)
5	0.2640	0.3142
10	0.4337	0.6804
15	0.6804	1.4398
20	0.7882	3.3673
25	0.7882	9.5754
43	0.7882	297574.64

Podemos observar que si bien (C) y (D) son directamente proporcionales a la temporalidad de la operación, (D) es mucho más sensible a cambios en la temporalidad que (C). Esto es debido a que la temporalidad , si bien afecta directamente al valor de (D), no es así con (C), que recoge el efecto de la temporalidad a través de $s^{\epsilon^{max}}$.

Repecto al valor de (C), podemos observar que para temporalidades bajas hay un crecimiento sostenido pero decreciente hasta $m_r = 20$, a partir de entonces (C) y por tanto $s^{\epsilon^{max}}$ es independiente de la temporalidad manteniendo siempre el mismo valor. Esto es debido a que cuando la operación presenta una baja temporalidad, la probabilidad de que el partícipe llegue vivo al final de la operación es lo suficiente considerable, que un aumento en la temporalidad provocan incrementos tales en la prima pura de la operación que hacen aumentar $s^{\epsilon^{max}}$ y por tanto el valor de (C).

Sin embargo cuando la operación presenta una determinada temporalidad de tal forma que la duración de la operación empiece a alcanzar las últimas edades de las tablas, es decir, la probabilidad de que llegue el partícipe vivo al final de la operación empieza a ser pequeña, un aumento en la temporalidad provoca una diferencia en la prima pura tan pequeña, que ésta última no llega a modificar $s^{\epsilon^{max}}$. En nuestro caso sucede cuando la operación alcanza una temporalidad $m_r = 20$. Esta temporalidad apartir de la cual (C) es constante dependerá de las características técnicas de la operación (a parte del efecto que puedan tener otras variables, cuanto mayor sea la edad del partícipe y diferimento de la operación, menor será el valor de la temporalidad a partir del cual (C) es constante).

Respecto a valor de (D), presenta un crecimiento exponencial conforme aumenta la temporalidad de la operación.

Para aquellos operaciones que presenten funciones $K(\epsilon^t)$ crecientes y $Ip > Ir$ el comportamiento de (C) y (D) con respecto a la temporalidad es el mismo que en el caso anterior en el cual $Ip < Ir$, como queda ilustrado en el siguiente ejemplo:

Renta prepagable, diferida y temporal.

Edad del partícipe: $x = 60$ años.

Diferimiento de la renta $d_r = 5$ años

Recargo del reasegurador $\lambda^R = 0$

Cuantía periodica y anual $\alpha^r = 1$

$Ip = 0.07$

$Ir = 0.06$

m_r	Valor de (C)	Valor de (D)
5	0.0877	0.1098
10	0.1661	0.2919
15	0.2431	0.7076
20	0.3492	1.7827
25	0.3492	5.1345
43	0.3492	123103.41

Puede observarse que la única diferencia con respecto al anterior es que los valores de (C) y (D) asociados a cada temporalidad son más pequeños.

b) Análisis de (C) y (D) con respecto a la edad del partícipe

Para ello consideraremos el siguiente ejemplo:

Renta prepagable, diferida y temporal.

Temporalidad de la operación $m_r = 20$

Diferimiento de la renta $d_r = 5$ años

Recargo del reasegurador $\lambda^R = 0$

Cuantía periódica y anual $\alpha^r = 1$

$Ip = 0.06$

$Ir = 0.07$

Edad del partícipe	Valor de (C)	Valor de (D)
30	0.3290	0.3516
35	0.3545	0.4116
40	0.3978	0.5129
45	0.4672	0.6891
50	0.5771	1.0166
55	0.6655	1.6994
60	0.7882	3.3673

Podemos comprobar que la edad, al igual que la temporalidad, es directamente proporcional a (C) y (D). Aún así (D) es más sensible para edades altas que (C).

Al igual que sucede con la temporalidad el comportamiento de (C) y (D) se mantiene con respecto a la edad del partícipe para aquellas operaciones que presenten funciones $K(\epsilon^t)$ crecientes y $Ip > Ir$, como se ilustra en el siguiente ejemplo:

Renta prepagable diferida y temporal.

Temporalidad de la operación $m_r = 20$

Diferimiento de la renta $d_r = 5$ años

Recargo del reasegurador $\lambda^R = 0$

Cuantía periódica y anual $\alpha^r = 1$

$Ip = 0.07$

$Ir = 0.06$

Edad del partícipe	Valor de (C)	Valor de (D)
30	−0.1371	−0.1388
35	−0.1039	−0.1006
40	−0.0577	−0.0360
45	0.0078	0.0762
50	0.1038	0.2849
55	0.2103	0.7200
60	0.3492	1.7827

Para aquellas edades en las que $(D) < 0$, la estrategia óptima será no reasegurar y recargar la operación hasta cubrir el riesgo de insolvencia del plan (el coste de la operación coincidirá con la prima pura financiera), debido a que al ser el recargo del reasegurador $\lambda^R \geq 0$, entonces siempre $\lambda^R > (D)$.

c) Análisis de (C) y (D) con respecto al diferimento de la operación

Sea:

Edad del partícipe $x = 50$ años.

Renta prepagable, diferida y temporal.

Temporalidad $m_r = 20$

Recargo del reasegurador $\lambda^R = 0$

Cuantía periódica y anual $\alpha^r = 1$

$Ip = 0.06$

$Ir = 0.07$

d_r	Valor de (C)	Valor de (D)
0	0.4141	0.5771
5	0.5771	1.0166
10	0.7206	1.9280
15	1.0166	4.2411
20	1.2963	11.6914

El diferimiento de la operación también es directamente proporcional a (C) y (D), siendo más sensible (D) para valores altos del diferimiento.

Este comportamiento también se repite para aquellas operaciones en las que $Ip > Ir$ y la función $K(\epsilon^t)$ sea creciente, como puede observarse en el siguiente ejemplo:

Edad del partícipe $x = 50$ años.

Renta prepagable, diferida y temporal.

Temporalidad $m_r = 20$

Diferimiento $d_r = 5$

Recargo del reasegurador $\lambda^R = 0$

Cuantía periódica y anual $\alpha^r = 1$

$Ip = 0.07$

$Ir = 0.06$

d_r	Valor de (C)	Valor de (D)
0	0.0471	0.1038
5	0.1038	0.2849
10	0.1598	0.6984
15	0.2365	1.7678
20	0.3419	5.1014

Observamos que la única diferencia con respecto al caso anterior, es el menor valor que toman los valores de (C) y (D) asociados a cada diferimiento.

d) Análisis de (C) y (D) con respecto a la relación entre el tipo de interés técnico del reaseguro y el tipo de interés técnico del plan

Sea :

Edad del partícipe $x = 50$ años.

Renta prepagable, diferida y temporal.

Temporalidad $m_r = 20$

Diferimiento $d_r = 5$

Recargo del reasegurador $\lambda^R = 0$

Cuantía periódica y anual $\alpha^r = 1$

$Ip = 0.06$

Ir	$\frac{Ir}{Ip}$	Valor de (C)	Valor de (D)
0.12	2	2.7560	5.0345
0.09	1.5	1.2422	2.1451
0.06	1	0.3194	0.6097
0.05	0.833	0.1020	0.2822
0.04	0.66	−0.0812	0.0191

Podemos observar que conforme disminuye la relación $\frac{Ir}{Ip}$, disminuyen los valores de (C) y (D) asociados, pudiéndose dar la circunstancia que el valor (C) resulte negativo (en este último caso la estrategia óptima nunca podría ser reasegurar totalmente el riesgo de insovencia por ser siempre $\lambda^R > (C)$, como así sucede en nuestro caso cuando la relación $\frac{Ir}{Ip} = 0.66$).

La **conclusión** a la que llegamos después de hacer este estudio es la siguiente:

- (C) y (D) son directamente proporcionales al diferimiento y la temporalidad de la operación, a la edad del partícipe, y a la relación entre el tipo de interés técnico del reaseguro y el tipo de interés técnico del plan.

- Este comportamiento se mantiene tanto si $Ir \geq Ip$, como si $Ir < Ip$. En este último caso sólo tendrá sentido plantearse (C) y (D) si la operación presenta una función $K(\epsilon^t)$ creciente.

Si bien los valores de (C) y (D) son distintos para cada operación en particular, y por tanto para determinar la estrategia óptima teniendo como información el recargo del reasegurador λ^R, tendremos que calcular dichos valores para cada caso, lo que si podemos asegurar es que cuanto mayor sea la edad del partícipe, la temporalidad , el diferimiento y la relación $\frac{Ir}{Ip}$ de una operación respecto de otra, mayor serán los valores de (C) y (D) asociados, y por tanto más posible será que la estrategia óptima venga dada por $\epsilon^* = \epsilon^{max}$.

Cabe destacar un caso particular de rentas diferido temporales, las *rentas de jubilación*, caracterizadas por una alta temporalidad. Esta circunstancia nos permitirá determinar con cierta generalidad cual será la estrategia óptima asociada a las mismas. Para ello analizaremos dos ejemplos, el primero se caracterizará por tener una relación $\frac{Ir}{Ip} < 1$, y el segundo por presentar una relación $\frac{Ip}{Ir} = 1$. Dentro de cada ejemplo consideraremos dos casos: en el primero la edad del partícipe es $x = 65$ años y en el segundo caso la edad del partícipe $x = 20$ años.

- Renta de jubilación

- Edad $x = 65$ años

- Diferimiento $d_r = 0$ (Renta de jubilación.)

- $Ip = 0.07$

- $Ir = 0.05$

- $(C) = 0.2857$ y $(D) = 79554,35$

Si ahora modificamos la edad y calculamos la misma operación para un partícipe de $x = 20$ años, (siendo por tanto el diferimiento $d_r = 45$ años) [9] $(C) = -0.4303$ y $(D) = 43026.44$

Podemos observar que el efecto que produce en (C) y (D) la reducción en la edad del partícipe,(disminución de los valores (C) y (D)), no se ve compensado por el efecto creciente que sobre dichos valores provoca el aumento en el diferimiento de la operación; lo cual supone una reducción de (C) y (D) al disminuir la edad y al aumentar el diferimiento de la operación, como puede observase en el ejemplo.

Este comportamiento se da siempre que $\frac{Ir}{Ip} < 1$, observemos que en nuestro ejemplo $\frac{Ir}{Ip} = 0.714 < 1$.

Por tanto, si $\frac{Ir}{Ip} < 1$ podemos asegurar que la estrategia óptima nunca vendrá dada por un riesgo a reasegurar $\epsilon^* = \epsilon^{min}$, por presentar (D) valores inalcanzables desde un punto de vista práctico por el recargo del reasegurador, observemos que en nuestro ejemplo concreto $(D) = 43026.44$. Sin embargo cuanto menor es la edad del partícipe, más fácil es que la estrategia óptima venga dada por una estrategia mixta recargo reaseguro. Como podemos constatar en nuestro anterior ejemplo, si la edad del partícipe es de $x = 20$ años, la estrategia óptima siempre vendrá dada por una estrategia mixta recargo reaseguro sea cual sea el recargo del reasegurador, por presentar un valor de $(C) = -0.4303 < 0$.

Contemplemos ahora el siguiente ejemplo:

- Renta de jubilación
- Edad $x = 65$ años
- Diferimiento $d_r = 0$ (Renta inmediata)
- $Ip = 0.06$

[9] Suponemos que la edad de jubilación es a los 65 años.

- $Ir = 0.06$
- $(C) = 0.61247$ y $(D) = 175725,61$

Si ahora modificamos la edad y calculamos la misma operación para un partícipe de $x = 20$ años, y $d_r = 45$ años $(C) = 0.6303$ y $(D) = 222158,66$

En este caso el efecto creciente que sobre (C) y (D) tiene un aumento en el diferimiento compensa el efecto decreciente que sobre estos mismos valores presenta una disminución en la edad del partícipe.

Por tanto siempre que $\frac{Ir}{Ip} \geq 1$ una reducción en la edad del partícipe, lleva asociado un aumento en el diferimiento tal, que provoca un aumento en (C) y en (D).

Si bien en este caso, al igual que sucedía con el ejemplo anterior, los valores de (D) son tan elevados que resultan inalcanzables por el recargo del reasegurador, también podemos extender esta idea a (C). Observemos que el valor de (C) más pequeño que puede tomar la operación del ejemplo es aquel que lleva asociado como edad del partícipe la edad de jubilación, en donde $(C) = 0.6124$, lo que supondría un recargo del reasegurador de 61.24%, siendo muy poco probable que en la práctica dicho recargo alcance este valor. Incluso podemos ir más allá, y decir que $(C) = 0.6124$ es uno de los valores más pequeños [10] que puede tomar del conjunto de rentas de jubilación que podemos formar siempre y cuando $Ir \geq Ip$, puesto que cualquier otra renta de jubilación que presente una relación $\frac{Ir}{Ip} > 1$ el valor de (C) será mayor. En consecuencia la estrategia óptima vendrá dada en la generalidad de los casos en que $Ip \leq Ir$ por un riesgo óptimo $\epsilon^* = \epsilon^{max}$.

Conclusión:

- Si una renta de jubilación se caracteriza por tener $Ip \leq Ir$, la estrategia óptima se conseguira con un nivel de riesgo del plan $\epsilon^* = \epsilon^{max}$.

[10]No podemos asegurar que es el más pequeño, por que $s^{\epsilon^{max}}$ depende también del valor que tome el tipo de interés técnico del plan, así cuanto mayor sea Ip, menor será $s^{\epsilon^{max}}$, y más pequeño será el valor de (C). Por ejemplo si en la operación definida anteriormente $Ip = 0,18$ el valor de $(C) = 0,473369$. De todas maneras puede observarse que aumentando el triple Ip, el valor de (C) disminuye ligeramente.

- Si una renta de jubilación se caracteriza por tener $Ip > Ir$, cuanto menor sea la edad del partícipe, más probable será que la estrategia óptima venga dada por una estrategia mixta recargo reaseguro.

4-1.2 REASEGURO DEL PERCENTIL. ANALISIS DE LA ESTRATEGIA OPTIMA (HAY REPARTO DE BENEFICIOS)

Antes de abordar la problemática de la estrategia óptima a partir de la función K, analizaremos en el siguiente apartado la relación entre la prima ajustada de reaseguro, el tipo de interés técnico del plan y el tipo de interés técnico del reaseguro.

Analisis de la prima ajustada de reaseguro con respecto a la relación entre el tipo de interés técnico del plan y el tipo de interés técnico del reaseguro

En este apartado ilustraremos como se comporta la prima de reaseguro $\Pi^{R,A}$ con respecto a la relación entre Ip y Ir, mediante tres ejemplos en los cuales se dan las tres posibles relaciones entre Ip y Ir ($Ip < Ir$, $Ip = Ir$ y $Ip > Ir$).

Para cada uno de ellos calcularemos el riesgo del plan ϵ^t, el recargo de seguridad asociado al del plan λ^{ϵ^t}, el percentil o prima recargada Π^{ϵ^t}, la prima ajustada de reaseguro $\Pi^{R,A}$ y el valor actual del coste total de la operación $VCT(\epsilon^t)$

Operación (I)

Renta prepagable diferida temporal.

Temporalidad de la operación $m_r = 20$

Edad del partícipe: $x = 60$ años.

Edad de jubilación $x_{jub} = 65$ años.

Cuantía periódica y anual $\alpha^r = 1$

$Ip = 0.06$

$Ir = 0.07$

ϵ^t	λ^{ϵ^t}	Π^{ϵ^t}	$\Pi^{R,A}$	$VCT(\epsilon^t)$
0.00000	0.42632	9.08525	−2.49140	6.59385
0.28685	0.38755	8.83827	−2.28032	6.55796
0.32570	0.34645	8.57648	−2.05597	6.52051
0.36598	0.30288	8.29897	−1.81742	6.48155
0.40729	0.25670	8.00482	−1.56370	6.44112
0.44884	0.20775	7.69301	−1.29371	6.39930
0.48992	0.15586	7.36250	−1.00632	6.35618
0.53020	0.10086	7.01215	−0.70027	6.31189
0.56941	0.04256	6.64079	−0.37423	6.26656
0.60734	0.00000	6.36970	−0.13490	6.23480

Podemos observar en este ejemplo, que la prima de reaseguro ajustada es siempre negativa, sea cual sea el riesgo reasegurado ϵ^t, aumentando ésta (haciéndose menos negativa) conforme aumenta el nivel de riesgo del plan. Este comportamiento se da siempre que $Ip < Ir$ sea cual sea la temporalidad, edad del partícipe, o temporalidad de la operación.

Operación (II)

Renta prepagable diferido temporal.

Temporalidad de la operación $m_r = 20$

Edad del partícipe: $x = 60$ años.

Edad de jubilación $x_{jub} = 65$ años.

Cuantía periódica y anual $\alpha^r = 1$

$Ip = 0.06$

$Ir = 0.06$

ϵ^t	λ^{ϵ^t}	Π^{ϵ^t}	$\Pi^{R,A}$	$VCT(\epsilon^t)$
0.00000	0.42632	9.08525	−2.71554	6.36971
0.28685	0.38755	8.83827	−2.46857	6.36971
0.32570	0.34645	8.57648	−2.20677	6.36971
0.36598	0.30288	8.29897	−1.92926	6.36971
0.40729	0.25670	8.00482	−1.63511	6.36971
0.44884	0.20775	7.69301	−1.32330	6.36971
0.48992	0.15586	7.36250	−0.99279	6.36971
0.53020	0.10086	7.01215	−0.64245	6.36971
0.56941	0.04256	6.64079	−0.27108	6.36971
0.60734	0.00000	6.36971	0.00000	6.36971

En este caso, en el que $Ir = Ip = 0.06$, la prima de reaseguro también es negativa como en el anterior, con la única diferencia de que ésta se hace nula cuando el reaseguro cubre el máximo riesgo posible $\epsilon^{max} = 0.60734$.

Operación (III)

Renta prepagable diferido temporal.

Temporalidad de la operación $m_r = 20$

Edad del partícipe: $x = 60$ años.

Edad de jubilación $x_{jub} = 65$ años.

Cuantía periódica y anual $\alpha^r = 1$

$Ip = 0.08$

$Ir = 0.06$

ϵ^t	λ^{ϵ^t}	Π^{ϵ^t}	$\Pi^{R,A}$	$VCT(\epsilon^t)$
0.00000	0.38954	7.21663	−2.40664	4.80999
0.28685	0.35918	7.05893	−2.18828	4.87065
0.32570	0.32638	6.88862	−1.95396	4.93465
0.36598	0.29096	6.70468	−1.70271	5.00196
0.40729	0.25271	6.50602	−1.43351	5.07251
0.44884	0.21140	6.29147	−1.14528	5.14619
0.48992	0.16679	6.05976	−0.83693	5.22283
0.53020	0.11860	5.80951	−0.50728	5.30224
0.56941	0.06656	5.53924	−0.15510	5.38414
0.60734	0.01036	5.24735	0.22088	5.46823
0.64381	0.00000	5.19350	0.28930	5.48290

En este último ejemplo en el cual $Ip > Ir$, la prima de reaseguro ajustada deja de ser negativa para riesgos a reasegurar elevados, en nuestro caso así sucede cuando el riesgo a reasegurar es igual o mayor a 0.60734. Cuanto más pequeño sea el tipo de interés del reaseguro en relación al tipo de interés del plan, menor será el riesgo a reasegurar para el cual la prima de reaseguro es positiva. Así, si en la operación anterior el tipo de interés del plan se mantuviera en $Ip = 0.08$ y el tipo de interés del reaseguro fuera aún menor que el anterior, por ejemplo $Ir = 0.04$, la prima ajustada de reaseguro, empezaría a ser positiva para un nivel de riesgo a reasegurar de 0.056941

Conclusión:

- Si $Ip < Ir$ la prima ajustada será siempre negativa, parar cualquier riesgo susceptible de ser reasegurado.

- Si $Ip = Ir$ la prima ajustada será negativa para cualquier riesgo susceptible de ser reasegurado, menos para cuando el reaseguro cubra ϵ^{max}, cuyo valor será cero.

- Si $Ip > Ir$, la prima de reaseguro será positiva para aquellos niveles grandes de riesgo a reasegurar.

Analisis de la función $K^A(\epsilon^t)$

Analizaremos como evoluciona la función $K^A(\epsilon^t)$ conforme va variando el tipo de interés del reaseguro, dada una operación de renta diferido temporal. Este estudio lo realizaremos para las mismas operaciones que estudiamos en la sección 4-1.1, calculando para cada una de ellas, el riesgo del plan a reasegurar ϵ^t, el número de términos s^{ϵ^t} que a lo sumo puede hacerse cargo el plan dado el riesgo reasegurado ϵ^t y los valores de la función $K^A(\epsilon^t)$ asociados a los tipos de intereses técnicos del reaseguro siguientes: $Ir = 0.15$ $Ir = 0.09$ $Ir = 0.06$ $Ir = 0.03$ $Ir = 0.01$ $Ir = 0.0001$.

Cada operación va acompañada de una gráfica, donde se relaciona los valores de la función $K^A(\epsilon^t)$ asociados a cada tipo de interés de reaseguro Ir, con el riesgo reasegurado ϵ^t.

Recordemos que la función $K^A(\epsilon^t)$ asociada a una renta diferida y temporal a prima única y de cuantías constantes tiene la siguiente expresión:

$$K^A(\epsilon^t) = (1+\lambda^R)\left[{}_{d_r+s^{\epsilon^t}-1}P_x \left(\frac{1+Ip}{1+Ir}\right)^{d_r+s^{\epsilon^t}-1} \right.$$

$$\left. + \sum_{j=1}^{d_r+s^{\epsilon^t}-1} \left(\frac{1+Ip}{1+Ir}\right)^{j-1/2} {}_{j-1/}q_x \right]$$

Operación (I) Renta de jubilación prepagable..

Edad del partícipe: $x = 60$ años.

Edad de jubilación $x_{jub} = 65$ años.

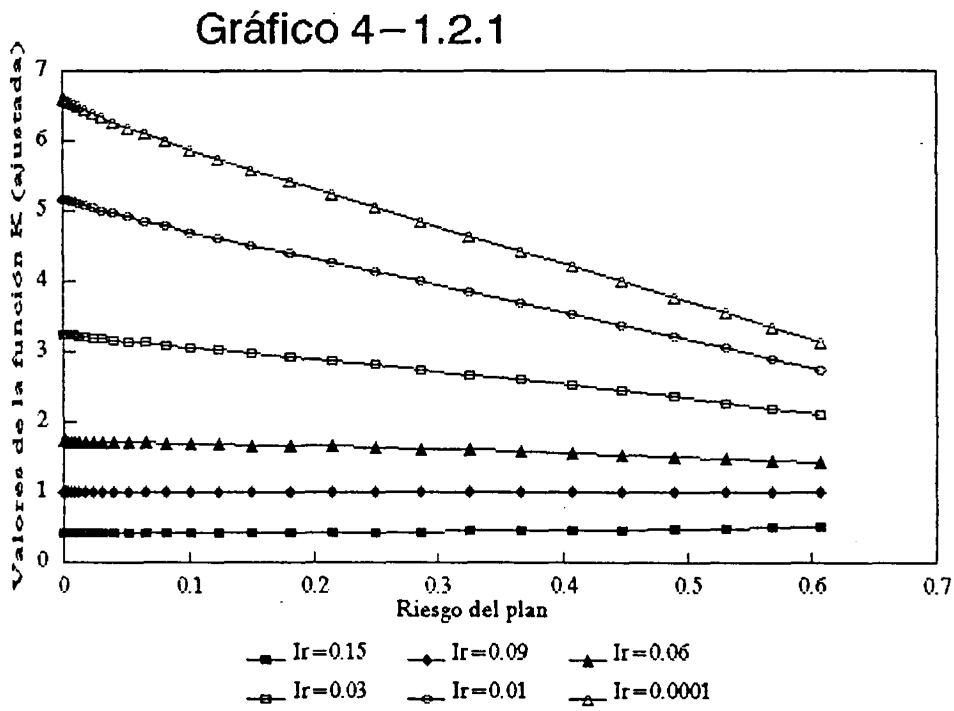
Recargo del reasegurador $\lambda^R = 0$

Cuantía periódica y anual $\alpha^r = 1$

$Ip = 0.09$

ϵ^t	s^{ϵ^t}	$Ir = 0.15$	$Ir = 0.09$	$Ir = 0.06$
0.000000	43	0.416903	1.000000	1.728350
0.000005	42	0.416903	1.000000	1.728348
0.000034	41	0.416903	1.000000	1.728340
0.000136	40	0.416905	1.000000	1.728314
0.000402	39	0.416908	1.000000	1.728250
0.000961	38	0.416916	1.000000	1.728117
0.001962	37	0.416932	1.000000	1.727872
0.003546	36	0.416961	1.000000	1.727468
0.005825	35	0.417009	1.000000	1.726851
0.008882	34	0.417083	1.000000	1.725967
0.012784	33	0.417192	1.000000	1.724760
0.017621	32	0.417348	1.000000	1.723170
0.023558	31	0.417567	1.000000	1.721125
0.030903	30	0.417866	1.000000	1.718535
0.040028	29	0.418273	1.000000	1.715293
0.051257	28	0.418820	1.000000	1.711280
0.064940	27	0.419546	1.000000	1.706363
0.081437	26	0.420112	1.000000	1.700401
0.101085	25	0.421746	1.000000	1.693246
0.124155	24	0.423347	1.000000	1.684752
0.150787	23	0.425386	1.000000	1.674786
0.180906	22	0.427948	1.000000	1.663244
0.214122	21	0.431120	1.000000	1.650066
0.249631	20	0.434991	1.000000	1.635240
0.286852	19	0.439655	1.000000	1.618777
0.325700	18	0.445210	1.000000	1.600698
0.365984	17	0.451762	1.000000	1.581042
0.407290	16	0.459415	1.000000	1.559878
0.448841	15	0.468267	1.000000	1.537310
0.489921	14	0.478416	1.000000	1.513460
0.530202	13	0.489958	1.000000	1.488458
0.569412	12	0.502988	1.000000	1.462439
0.607336	11	0.517604	1.000000	1.435535

ϵ^t	s^{ϵ^t}	$Ir = 0.03$	$Ir = 0.01$	$Ir = 0.0001$
0.000000	43	3.239222	5.161042	6.592779
0.000005	42	3.239206	5.160991	6.592688
0.000034	41	3.239144	5.160785	6.592326
0.000136	40	3.238956	5.160181	6.591270
0.000402	39	3.238505	5.158761	6.588811
0.000961	38	3.237592	5.155935	6.583965
0.001962	37	3.235964	5.150996	6.575576
0.003546	36	3.233345	5.143203	6.562469
0.005825	35	3.229459	5.131863	6.543580
0.008882	34	3.224047	5.116374	6.518034
0.012784	33	3.216868	5.096225	6.485124
0.017621	32	3.207679	5.070931	6.444217
0.023558	31	3.196193	5.039930	6.394568
0.030903	30	3.182056	5.002512	6.335229
0.040028	29	3.164862	4.957887	6.265153
0.051257	28	3.144179	4.905246	6.183299
0.064940	27	3.119557	4.843794	6.088679
0.081437	26	3.090542	4.772784	5.980415
0.101085	25	3.056706	4.691579	5.857817
0.124155	24	3.017673	4.599720	5.720493
0.150787	23	2.973172	4.497023	5.568468
0.180906	22	2.923086	4.383677	5.402323
0.214122	21	2.867517	4.260361	5.223330
0.249631	20	2.806765	4.128158	5.033315
0.286852	19	2.741213	3.988272	4.834227
0.325700	18	2.671261	3.841893	4.627937
0.365984	17	2.597358	3.690245	4.416313
0.407290	16	2.520034	3.534656	4.201315
0.448841	15	2.439910	3.376556	3.984988
0.489921	14	2.357628	3.217351	3.769281
0.530202	13	2.273813	3.058325	3.555924
0.569412	12	2.189052	2.900622	3.346418
0.607336	11	2.103889	2.745247	3.142024



Si disminuimos la temporalidad de la operación a 20 términos:

Operación (II) Renta prepagable, diferida y temporal.

Edad del partícipe: $x = 60$ años.

Diferimiento de la renta $d_r = 5$ años.

Temporalidad de la renta $m_r = 20$ años.

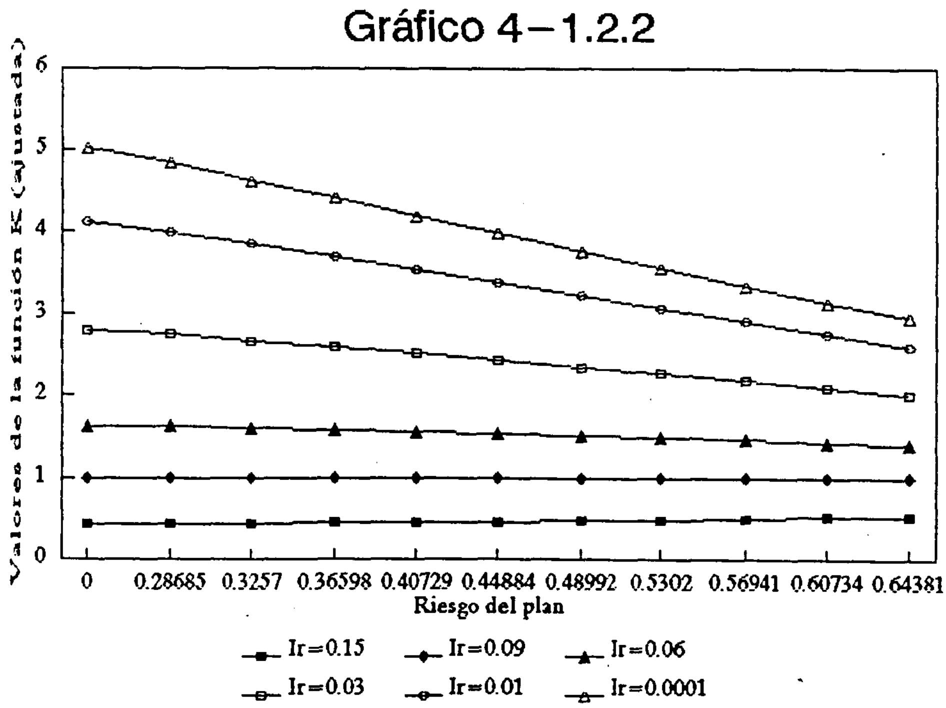
Recargo del reasegurador $\lambda^R = 0$

Cuantía periódica y anual $\alpha^r = 1$

$Ip = 0.09$

ϵ^t	s^{ϵ^t}	$Ir = 0.15$	$Ir = 0.09$	$Ir = 0.06$
0.000000	20	0.434991	1.000000	1.635240
0.286852	19	0.439655	1.000000	1.618777
0.325700	18	0.445210	1.000000	1.600698
0.365984	17	0.451762	1.000000	1.581042
0.407290	16	0.459415	1.000000	1.559878
0.448841	15	0.468267	1.000000	1.537310
0.489921	14	0.478416	1.000000	1.513460
0.530202	13	0.489958	1.000000	1.488458
0.569412	12	0.502988	1.000000	1.462439
0.607336	11	0.517604	1.000000	1.435535
0.643811	10	0.533904	1.000000	1.407878

ϵ^t	s^{ϵ^t}	$Ir = 0.03$	$Ir = 0.01$	$Ir = 0.0001$
0.000000	20	2.806765	4.128158	5.033315
0.286852	19	2.741213	3.988272	4.834227
0.325700	18	2.671261	3.841893	4.627937
0.365984	17	2.597358	3.690245	4.416313
0.407290	16	2.520034	3.534656	4.201315
0.448841	15	2.439910	3.376556	3.984988
0.489921	14	2.357628	3.217351	3.769281
0.530202	13	2.273813	3.058325	3.555924
0.569412	12	2.189052	2.900622	3.346418
0.607336	11	2.103889	2.745247	3.142024
0.643811	10	2.018819	2.593053	2.943776



Si reducimos el diferimiento de la operación a un periodo:

Operación (III) Renta prepagable, diferida y temporal.

Edad del partícipe: $x = 60$ años.

Diferimiento de la renta $d_r = 1$ años.

Temporalidad de la renta $m_r = 20$ años.

Recargo del reasegurador $\lambda^R = 0$

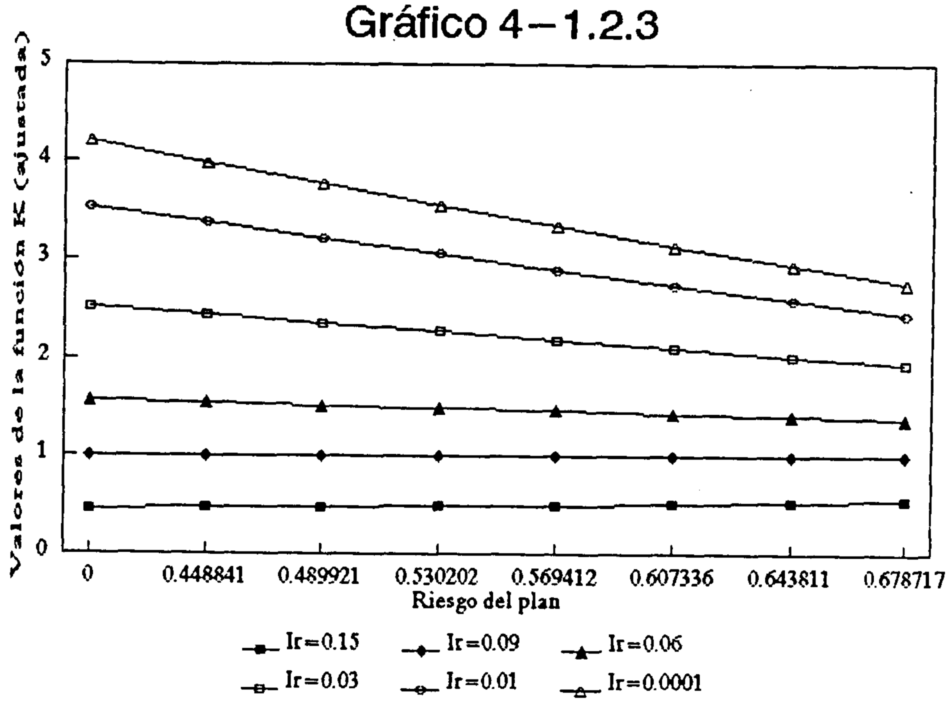
Cuantía periódica y anual $\alpha^r = 1$

$Ip = 0.09$

ϵ^t	s^{ϵ^t}	$Ir = 0.15$	$Ir = 0.09$	$Ir = 0.06$
0.000000	20	0.459415	1.000000	1.559878
0.448841	19	0.468267	1.000000	1.537310
0.489921	18	0.478416	1.000000	1.513460
0.530202	17	0.489958	1.000000	1.488458
0.569412	16	0.502988	1.000000	1.462439
0.607336	15	0.517604	1.000000	1.435535
0.643811	14	0.533904	1.000000	1.407878
0.678717	13	0.551987	1.000000	1.379596

ϵ^t	s^{ϵ^t}	$Ir = 0.03$	$Ir = 0.01$	$Ir = 0.0001$
0.000000	20	2.520034	3.534656	4.201315
0.448841	19	2.439910	3.376556	3.984988
0.489921	18	2.357628	3.217351	3.769281
0.530202	17	2.273813	3.058325	3.555924
0.569412	16	2.189052	2.900622	3.346418
0.607336	15	2.103889	2.745247	3.142024
0.643811	14	2.018819	2.593053	2.943776
0.678717	13	1.934285	2.444754	2.752495

Gráfico 4−1.2.3



Si reducimos la edad del partícipe a 30 años y mantenemos el direrimiento en 5 años:

Operación (IV) Renta prepagable, diferida y temporal.

Edad del partícipe: $x = 30$ años.

Diferimiento de la renta $d_r = 5$ años.

Temporalidad de la renta $m_r = 20$ años.

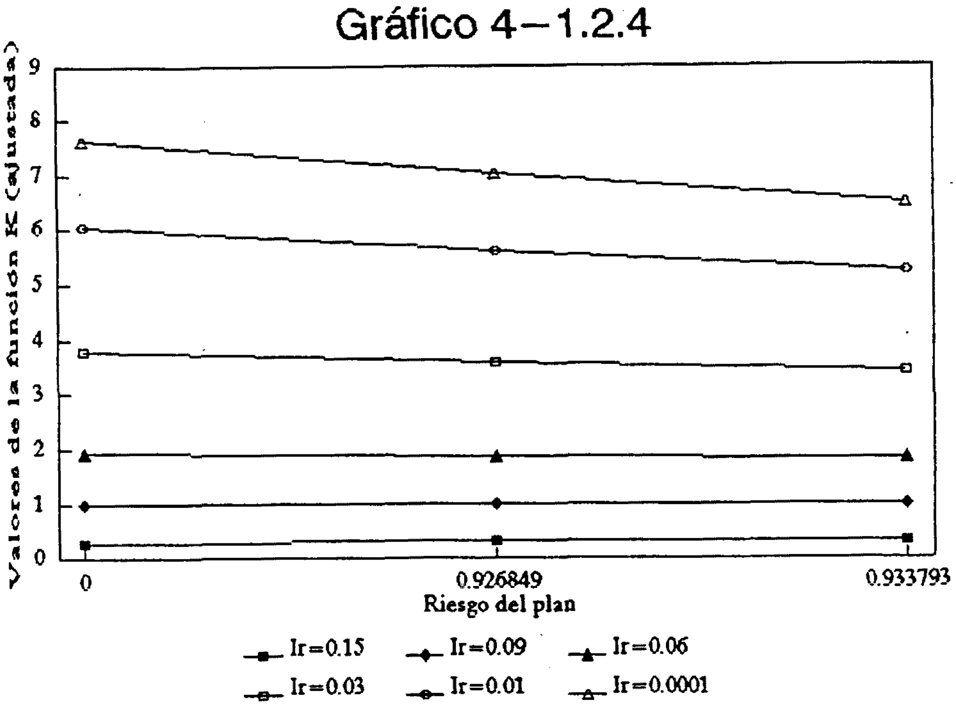
Recargo del reasegurador $\lambda^R = 0$

Cuantía periódica y anual $\alpha^r = 1$

$Ip = 0.09$

ϵ^t	s^{ϵ^t}	$Ir = 0.15$	$Ir = 0.09$	$Ir = 0.06$
0.000000	20	0.289426	1.00000	1.926496
0.926849	19	0.303579	1.00000	1.876469
0.933793	18	0.318619	1.00000	1.827469

ϵ^t	s^{ϵ^t}	$Ir = 0.03$	$Ir = 0.01$	$Ir = 0.0001$
0.000000	20	3.797274	6.045918	7.640103
0.926849	19	3.597987	5.620527	7.034588
0.933793	18	3.408321	5.223532	6.475030



Podemos hacer las siguientes observaciones:

- Los valores de la función $K^A(\epsilon^t)$ son mayores conforme disminuye el tipo de interés técnico del reaseguro, dado el resto de características técnicas de la operación.

- El crecimiento de la función $K^A(\epsilon^t)$ depende exclusivamente de la relación entre el tipo del plan Ip y el tipo de interés técnico del reaseguro Ir, dándose el siguiente comportamiento:

  1. Si $Ip < Ir$ la función $K^A(\epsilon^t)$ es siempre creciente.
  2. Si $Ip = Ir$ la función $K^A(\epsilon^t)$ es siempre constante.
  3. Si $Ip > Ir$ la función $K^A(\epsilon^t)$ es siempre decreciente.

este comportamiento puede constatarse en los cuatro ejemplos.

- Respecto al dominio de la función $K^A(\epsilon^t)$ presenta idéntico comportamiento que el que ya describimos en la sección 4-1.1 para la función $K(\epsilon^t)$ como podemos comprobar en los ejemplos.

- El comportamiento de la función $K^A(\epsilon^t)$ con respecto a si corta o no corta al eje $K^A = 1$, depende exclusivamente de la relación entre el tipo de interés técnico del plan Ip y el tipo de interés técnico del reasegurador Ir, dándose el siguiente comportamiento como podemos observar en los ejemplos:

  1. Si $Ip < Ir$ la función $K^A(\epsilon^t) < 1$ $\forall\epsilon \in [0, \epsilon^{max}]$.
  2. Si $Ip = Ir$ la función $K^A(\epsilon^t) = 1$ $\forall\epsilon \in [0, \epsilon^{max}]$.
  3. Si $Ip > Ir$ la función $K^A(\epsilon^t) > 1$ $\forall\epsilon \in [0, \epsilon^{max}]$.

  Este comportamiento de la función $K^A(\epsilon^t)$, implica que la estrategia óptima es independiente de la temporalidad, edad del partícipe, diferimiento de la operación y del reacargo del reasegurador.

Relación entre la función $K^A(\epsilon^t)$ y el coste total de la operación

En este apartado ilustraremos con ejemplos como la estrategia óptima depende exclusivamente de la relación entre el tipo de interés técnico del plan Ip y el tipo de interés técnico del reasegurador Ir. Para ello analizaremos tres ejemplos en los que se den cada una de las posibles relaciones entre los tipos de interés técnicos del plan y del reaseguro:

1. $Ip < Ir$
2. $Ip = Ir$
3. $Ip > Ir$

En cada ejemplo calcularemos las siguientes magnitudes : el riesgo susceptible de ser reasegurado ϵ^t, el número de términos s^{ϵ^t} que puede hacerse cargo el plan asociado al riesgo ϵ^t, el recargo de seguridad λ^{ϵ^t}, la prima recargada Π^{ϵ^t}, prima de reaseguro ajustada $\Pi^{R,A}$, y el valor actual del coste total de la operación $VCT(\epsilon^t)$.

Operación (I)

Renta prepagable, diferida y temporal.

Edad del partícipe: $x = 60$ años.

Temporalidad de la renta $m_r = 20$ años.

Diferimiento de la renta $d_r = 5$ años

Recargo del reasegurador $\lambda^R = 0$

Cuantía periódica y anual $\alpha^r = 1$

$Ip = 0.09$

$Ir = 0.12$

ϵ^t	s^{ϵ^t}	λ^{ϵ^t}	Π^{ϵ^t}	$\Pi^{R,A}$	$K^A(\epsilon^t)$	$VCT(\epsilon^t)$
0.00000	20	0.37288	6.46689	−1.39797	0.64305	5.06892
0.28685	19	0.34605	6.34049	−1.31669	0.64745	5.02380
0.32570	18	0.31680	6.20271	−1.22748	0.65255	4.97523
0.36598	17	0.28491	6.05252	−1.12948	0.65841	4.92304
0.40729	16	0.25016	5.88883	−1.02170	0.66507	4.86713
0.44884	15	0.21228	5.71039	−0.90303	0.67258	4.80736
0.48992	14	0.17099	5.51591	−0.77222	0.68096	4.74368
0.53020	13	0.12599	5.30391	−0.62786	0.69025	4.67605
0.56941	12	0.07693	5.07284	−0.46836	0.70045	4.60447
0.60734	11	0.02346	4.82097	−0.29194	0.71161	4.52903
0.64381	10	0.00000	4.54643	−0.19658	0.72372	4.49985

Observamos como la función $K^A(\epsilon^t) < 1\ \forall\epsilon \in [0, \epsilon^{max}]$ por ser $Ip < Ir$, en consecuencia la estratégia óptima vendrá dada por $\epsilon^* = \epsilon^{max} = 0.64381$, Podemos constatar en el ejemplo como dicha estrategia es la que minimiza el valor actual del coste total, siendo el coste mínimo $VCT(\epsilon^*) = 4.49985$.

Operación (II)

Renta prepagable, diferida y temporal.

Edad del partícipe: $x = 60$ años.

Temporalidad de la renta $m_r = 20$ años.

Diferimiento de la renta $d_r = 5$ años

Recargo del reasegurador $\lambda^R = 0$

Cuantía periódica y anual $\alpha^r = 1$

$Ip = 0.09$

$Ir = 0.09$

ϵ^t	s^{ϵ^t}	λ^{ϵ^t}	Π^{ϵ^t}	$\Pi^{R,A}$	$K^A(\epsilon^t)$	$VCT(\epsilon^t)$
0.00000	20	0.37288	6.46689	−1.75644	1.00000	4.71045
0.28685	19	0.34605	6.34049	−1.63004	1.00000	4.71045
0.32570	18	0.31680	6.20271	−1.49226	1.00000	4.71045
0.36598	17	0.28491	6.05252	−1.34207	1.00000	4.71045
0.40729	16	0.25016	5.88883	−1.17838	1.00000	4.71045
0.44884	15	0.21228	5.71039	−0.99995	1.00000	4.71045
0.48992	14	0.17099	5.51591	−0.80546	1.00000	4.71045
0.53020	13	0.12599	5.30391	−0.59346	1.00000	4.71045
0.56941	12	0.07693	5.07284	−0.36239	1.00000	4.71045
0.60734	11	0.02346	4.82097	−0.11052	1.00000	4.71045
0.64381	10	0.00000	4.54643	0.00000	1.00000	4.71045

En este ejemplo en el que $Ip = Ir$ se contempla como la función $K^A(\epsilon^t) = 1$ sea cual sea el riesgo del plan. Por tanto la estrategia óptima vendrá dada por cualquier combinación recargo reaseguro, ya que todas éstas combinaciones dan lugar al mismo coste de la operación. Podemos observar que el coste total cuando $Ip = Ir$ coincide con la prima pura de la operación.

Operación (III)

Renta prepagable, diferida y temporal.

Edad del partícipe: $x = 60$ años.

Temporalidad de la renta $m_r = 20$ años.

Diferimiento de la renta $d_r = 5$ años

Recargo del reasegurador $\lambda^R = 0$

Cuantía periódica y anual $\alpha^r = 1$

$Ip = 0.12$

$Ir = 0.09$

ϵ^t	s^{ϵ^t}	λ^{ϵ^t}	Π^{ϵ^t}	$\Pi^{R,A}$	$K^A(\epsilon^t)$	$VCT(\epsilon^t)$
0.00000	20	0.32917	4.74697	−1.48984	0.31385	3.25713
0.28685	19	0.31072	4.68108	−1.38359	1.61280	3.29750
0.32570	18	0.29006	4.60730	−1.26574	1.59707	3.34155
0.36598	17	0.26692	4.52465	−1.13518	1.57978	3.38947
0.40729	16	0.24100	4.43209	−0.99070	1.56097	3.44139
0.44884	15	0.21198	4.32843	−0.83098	1.54070	3.49744
0.48992	14	0.17947	4.21232	−0.65461	1.51906	3.55771
0.53020	13	0.14305	4.08228	−0.46005	1.49618	3.62223
0.56941	12	0.10227	3.93664	−0.24563	1.47218	3.69100
0.60734	11	0.05660	3.77352	−0.00957	1.44718	3.76395
0.64381	10	0.00544	3.59082	0.25010	1.42131	3.84092
0.67872	9	0.00000	3.38620	0.27720	1.39470	3.84860

Por último reflejamos un ejemplo en el que $Ip > Ir$, en el cual podemos constatar como la función $K^A(\epsilon^t) > 1$ sea cual sea el riesgo susceptible de ser reasegurado. Esta circuntancia conlleva a que la estrategia óptima venga dada por un nivel de riesgo del plan $\epsilon^* = 0$, siendo el coste mínimo $VCT(\epsilon^*) = 3.25713$.

Esta prima resulta menor que la prima financiera que en nuestro ejemplo es 4.7470, debido al reparto del beneficio esperado al reaseguro , a pesar de que éste no intervenga en cubrir el riesgo de insolvencia del plan.

4-1.3 REASEGURO DE DIFERENCIA DE SINIESTRALIDAD. ANALISIS DE LA ESTRATEGIA OPTIMA (NO HAY REPARTO DE BENEFICIOS)

En este apartado estudiamos la estrategia óptima para el caso de una renta de jubilación prepagable, donde el margen de solvencia viene dado por un % de las provisiones matemáticas.

Supongamos una operación con las siguientes características

Operación (I)

Renta de jubilación prepagable.

Edad del partícipe: $x = 60$ años.

Edad de jubilación $x_{jub} = 65$ años.

Recargo del reasegurador $\lambda^R = 0$

Cuantía periódica y anual $\alpha^r = 1$

Margen de solvencia = 4% de las provisiones matemáticas

$Ip = 0.09$

$Ir = 0.09$

En este ejemplo, la obtención del recargo óptimo que minimiza el valor actual del coste total tanto para reasegurador tipo A como para el tipo B resulta inmediato a través de la función K, cuyo valor, al ser $\lambda^R = 0$ y $Ip = Ir$ viene dado por:

$$K(\lambda_t) = \left(\frac{1+Ip}{1+Ir}\right) P_x(1+\lambda^R) = P_x = P_{60} = 0.985987 < 1$$

Si el reaseguro es del tipo A, la función $K(\lambda_t)$ sólo estará definida en el intervalo $[0\ \lambda_m]$ siendo en nuestro caso:

$$\lambda_m = \frac{V_{i,1}(1.04)}{\Pi(1.09)} - 1 = 0.05477$$

De todas formas, al ser $K(\lambda_t) < 1$, la política que minimiza el coste total de la operación vendrá dada por $\lambda_* = 0$ tanto para el reaseguro tipo B como para el reaseguro tipo A.

A continuación comprobaremos este resultado calculando para cada recargo de seguridad del plan compredido entre 0% y el 24%, la prima recargada del plan Π^{Rec}, la prima de reaseguro $\Pi^R(A)$ asociada al reaseguro tipo A, el valor actual del coste total $VCT(\lambda_t)(A)$ asociado al reaseguro tipo A, la prima de reaseguro $\Pi^R(B)$ asociada al reaseguro tipo B, y el valor actual del coste total $VCT(\lambda_t)(B)$ asociada al reaseguro tipo B.

λ	Π^{Rec}	$\Pi^R(A)$	$VCT(\lambda_t)(A)$	$\Pi^R(B)$	$VCT(\lambda_t)(B)$
0.000000	4.830499	1.602531	6.433030	1.602531	6.433030
0.010000	4.878804	1.554903	6.433707	1.554903	6.433707
0.020000	4.927109	1.507275	6.434383	1.507275	6.434383
0.030000	4.975414	1.459646	6.435060	1.459646	6.435060
0.040000	5.023719	1.412018	6.435737	1.412018	6.435737
0.050000	5.072024	1.364390	6.436414	1.364390	6.436414
0.060000	5.120329	1.317143	6.437472	1.316762	6.437091
0.070000	5.168634	1.270246	6.438880	1.269134	6.437768
0.080000	5.216939	1.224041	6.440979	1.221506	6.438445
0.090000	5.265244	1.177972	6.443216	1.173878	6.439121
0.100000	5.313549	1.132710	6.446259	1.126250	6.439798
0.110000	5.361854	1.087456	6.449309	1.078621	6.440475
0.120000	5.410159	1.043106	6.453264	1.030993	6.441152
0.130000	5.458464	0.998755	6.457219	0.983365	6.441829
0.140000	5.506769	0.955116	6.461885	0.935737	6.442506
0.150000	5.555074	0.911769	6.466842	0.888109	6.443183
0.160000	5.603379	0.869448	6.472826	0.840481	6.443859
0.170000	5.651684	0.827482	6.479166	0.792853	6.444536
0.180000	5.699989	0.786284	6.486273	0.745225	6.445213
0.190000	5.748294	0.745821	6.494115	0.697596	6.445890
0.200000	5.796599	0.705824	6.502422	0.649968	6.446567
0.210000	5.844904	0.666995	6.511899	0.602340	6.447244
0.220000	5.893209	0.628583	6.521792	0.554712	6.447921
0.230000	5.941514	0.591224	6.532738	0.507084	6.448597
0.240000	5.989819	0.554659	6.544477	0.459456	6.449274

Podemos comprobar que para ambos tipos de reaseguro, el coste total se minimiza no recargando la prima pura del plan. Observamos también que para aquellos niveles de recargos de seguridad menores a $\lambda_m = 0.05477$ la prima de reaseguro y por tanto el valor actual del coste total coinciden para ambos tipos de reaseguro , sin embargo para valores de $\lambda_t > \lambda_m$, tenemos que $\Pi^R(A) > \Pi^R(B)$

La estrategia óptima sólo se verá modificada si aumentamos el tipo de interés del plan y/o el recargo del reasegurador en tales magnitudes que $K(\lambda_t) > 1$

Para ilustrar esta idea supondremos que a la operación anterior, le asignamos un recargo del reasegurador $\lambda^R = 0.1$. La estrategia óptima como a continuación veremos, variará sustancialmente.

Respecto al reaseguro tipo A, al ser el nuevo valor de:

$$K(\lambda_t) = P_x(1+\lambda^R) = 0.985987\,1.1 = 1.08458$$

la estrategia óptima recargo reaseguro tendrá que obtenerse empíricamente, lo que está claro es que el recargo óptimo será mayor a $\lambda_m = 0.0547$

Sin embargo para el reaseguro tipo B, sí que tendremos información sobre el recargo óptimo, así teniendo presente en este caso que:

$$K(\lambda_t) = \left(\frac{1+Ip}{1+Ir}\right) P_x = P_x = 0.985987 < 1$$

y

$$K(\lambda_t) = \left(\frac{1+Ip}{1+Ir}\right) P_x(1+\lambda^R) = P_x(1+\lambda^R) = 1.08458 > 1$$

la estrategia óptima vendrá dado por aquel recargo que anule la prima de reaseguro.

Si calculamos los valores de las primas de reaseguro y valores actuales del coste total para esta nueva situación tenemos:

λ	Π^{Rec}	$\Pi^{R}(A)$	$VCT(\lambda_t)(A)$	$\Pi^{R}(B)$	$VCT(\lambda_t)(B)$
0.000000	4.830499	1.762784	6.593283	1.762784	6.593283
0.010000	4.878804	1.710393	6.589197	1.710393	6.589197
0.020000	4.927109	1.658002	6.585111	1.658002	6.585111
0.030000	4.975414	1.605611	6.581025	1.605611	6.581025
0.040000	5.023719	1.553220	6.576939	1.553220	6.576939
0.050000	5.072024	1.500829	6.572853	1.500829	6.572853
0.060000	5.120329	1.448858	6.569187	1.448438	6.568767
0.070000	5.168634	1.397270	6.565904	1.396047	6.564681
0.080000	5.216939	1.346445	6.563383	1.343656	6.560595
0.090000	5.265244	1.295769	6.561013	1.291265	6.556509
0.100000	5.313549	1.245981	6.559530	1.238874	6.552423
0.110000	5.361854	1.196201	6.558055	1.186484	6.548337
0.120000	5.410159	1.147416	6.557575	1.134093	6.544251
0.130000	5.458464	1.098631	6.557095	1.081702	6.540165
0.140000	5.506769	1.050628	6.557396	1.029311	6.536079
0.150000	5.555074	1.002946	6.558019	0.976920	6.531993
0.160000	5.603379	0.956392	6.559771	0.924529	6.527908
0.170000	5.651684	0.910230	6.561914	0.872138	6.523822
0.180000	5.699989	0.864913	6.564901	0.819747	6.519736
0.190000	5.748294	0.820404	6.568697	0.767356	6.515650
0.200000	5.796599	0.776406	6.573005	0.714965	6.511564
0.210000	5.844904	0.733694	6.578598	0.662574	6.507478
0.220000	5.893209	0.691441	6.584650	0.610183	6.503392
0.230000	5.941514	0.650347	6.591860	0.557792	6.499306
0.240000	5.989819	0.610124	6.599943	0.505401	6.495220
0.250000	6.038124	0.570616	6.608740	0.453010	6.491134
0.260000	6.086429	0.532602	6.619030	0.400619	6.487048
0.270000	6.134734	0.495213	6.629946	0.348229	6.482962
0.280000	6.183039	0.459149	6.642187	0.295838	6.478876
0.290000	6.231344	0.424255	6.655599	0.243447	6.474790
0.300000	6.279648	0.390115	6.669763	0.191056	6.470704
0.310000	6.327953	0.357844	6.685797	0.138665	6.466618
0.320000	6.376258	0.326510	6.702768	0.086274	6.462532
0.330000	6.424563	0.296254	6.720817	0.033883	6.458446
0.340000	6.472868	0.267917	6.740785	−0.01682	6.456043
0.350000	6.521173	0.240612	6.761785	−0.06445	6.456720

Podemos observar que la estrategia óptima para el reaseguro tipo A vendrá dado por el recargo $\lambda_* = 0.1300$ con un coste total de $VCT(\lambda_*)(A) = 5.458464$.

Para el reaseguro tipo B el recargo óptimo estará comprendido entre 0.33 y 0.34. Si calculamos dicho recargo por tanteo con un error de 0.000001 este vendrá dado por $\lambda_* = 0.336467$, siendo el valor actual del coste total $VCT(\lambda_*)(B) = 5.455804$.

A continuación estudiaremos la operación inicial (Operación(I)) pero suponiendo que el margen de solvencia viene dado por las reservas de solvencia RS^{ϵ}. En este caso la estrategia óptima no podrá determinarse a priori, pues desconocemos la expresión analítica de la función K.

Desarrollaremos el estudio de la operación, calculando para cada nivel de insolvencia del plan ϵ^t comprendido entre 0 y 0.65, el recargo de seguridad asociado λ^{ϵ^t}, la prima recargada del plan Π^{Rec}, la prima de reaseguro Π^R, (en este caso coincidirá para los dos tipo de reaseguro) y el valor actual del coste total $VCT(\lambda^{\epsilon^t})$

ϵ^t	λ^{ϵ^t}	Π^{Rec}	Π^R	$VCT(\lambda^{\epsilon^t})$
0.000000	0.589459	7.677878	0.000000	7.677877
0.050000	0.495647	7.224720	0.125879	7.350599
0.100000	0.456151	7.033935	0.185065	7.218999
0.150000	0.423540	6.876409	0.236039	7.112448
0.200000	0.384795	6.689252	0.328995	7.018247
0.250000	0.338763	6.466891	0.465424	6.932315
0.300000	0.312595	6.340487	0.509516	6.850002
0.350000	0.284071	6.202705	0.557970	6.760675
0.400000	0.252981	6.052524	0.624457	6.676981
0.450000	0.182154	5.710395	0.869914	6.580309
0.500000	0.141891	5.515905	0.981250	6.497155
0.550000	0.098005	5.303911	1.118540	6.422452
0.600000	0.050169	5.072838	1.305487	6.378325
0.650000	−0.058807	4.546430	1.815291	6.361721

Podemos observar que cuanto menos recarguemos la prima del plan, menor será el valor actual del coste total de la operación. Por tanto la estrategia óptima para este caso particular coincide con el caso anterior en el que el margen de solvencia era un % de la provisión matemática.

Sin embargo, si el recargo del reasegurador es $\lambda^R = 0.1$, la estrategia óptima no se verá modificada como a continuación podemos comprobar:

ϵ^t	λ^{ϵ^t}	Π^{Rec}	Π^R	$VCT(\lambda^{\epsilon^t})$
0.000000	0.589459	7.677878	0.000000	7.677877
0.050000	0.495647	7.224720	0.138467	7.363187
0.100000	0.456151	7.033935	0.203571	7.237506
0.150000	0.423540	6.876409	0.259643	7.136052
0.200000	0.384795	6.689252	0.361894	7.051146
0.250000	0.338763	6.466891	0.511966	6.978858
0.300000	0.312595	6.340487	0.560467	6.900954
0.350000	0.284071	6.202705	0.613767	6.816472
0.400000	0.252981	6.052524	0.686902	6.739426
0.450000	0.182154	5.710395	0.956906	6.667301
0.500000	0.141891	5.515905	1.079375	6.595280
0.550000	0.098005	5.303911	1.230394	6.534306
0.600000	0.050169	5.072838	1.436036	6.508874
0.650000	−0.058807	4.546430	1.996820	6.543251

4-1.4 REASEGURO DE DIFERENCIA DE SINIESTRALIDAD. ANALISIS DE LA ESTRATEGIA OPTIMA (HAY REPARTO DE BENEFICIOS)

En este apartado realizaremos un estudio similar al anterior, pero suponiendo que el reasegurador distribuye el posible beneficio al plan.

Determinaremos la estrategia óptima en el caso de una renta de jubilación prepagable y suponiendo que el margen de solvencia venga dado por un % de las provisiones matemáticas.

Supongamos la operación (I) del apartado anterior:

Renta de jubilación prepagable.

Edad del partícipe: $x = 60$ años.

Edad de jubilación $x_{jub} = 65$ años.

Recargo del reasegurador $\lambda^R = 0$

Cuantía periódica y anual $\alpha^r = 1$

Reservas de sovencia = 4% de las provisiones matemáticas

$Ip = 0.09$

$Ir = 0.09$

En este caso, al ser $Ip = Ir$, la prima de reaseguro ajustada para el tipo A y el tipo B coinciden para cualquier recargo.

La obtención del recargo óptimo que minimiza el valor actual del coste total es inmediato a través de la función $K^A(\lambda_t)$, cuyo valor, al ser $\lambda^R = 0$ y $Ip = Ir$ viene dado por:

$$K^A(\lambda_t) = \left(\frac{1+Ip}{1+Ir}\right)^{1/2} \left[P_x \left(\frac{1+Ip}{1+Ir}\right)^{1/2} + q_x\right] (1+\lambda^R) = 1$$

Por tanto, el recargo de seguridad será independiente del valor actual del coste total.

Este resultado puede comprobarse calculando para cada recargo compredido entre 0% y el 24%, la prima recargada del plan Π^{Rec}, la prima de reaseguro ajustada $\Pi^{R,A}(A)$, el valor actual del coste total $VCT(\lambda_t)$

λ_t	Π^{Rec}	$\Pi^{R,A}$	$VCT(\lambda_t)$
0.000000	4.830499	0.000000	4.830499
0.010000	4.878804	−0.048305	4.830499
0.020000	4.927109	−0.096610	4.830499
0.030000	4.975414	−0.144915	4.830499
0.040000	5.023719	−0.193220	4.830499
0.050000	5.072024	−0.241525	4.830499
0.060000	5.120329	−0.289830	4.830499
0.070000	5.168634	−0.338135	4.830499
0.080000	5.216939	−0.386440	4.830499
0.090000	5.265244	−0.434745	4.830499
0.100000	5.313549	−0.483050	4.830499
0.110000	5.361854	−0.531355	4.830499
0.120000	5.410159	−0.579660	4.830499
0.130000	5.458464	−0.627965	4.830499
0.140000	5.506769	−0.676270	4.830499
0.150000	5.555074	−0.724575	4.830499

Podemos observar que $VCT(\lambda_t) = 4.83049$ sea cual sea el valor del recargo.

Esta estrategia óptima se verá modificada si variamos Ip, Ir, o λ^R. Por ejemplo, si aumentamos el tipo de interés del reaseguro en un 1%, $Ir = 0.1$, la estrategia óptima de la operación será distinta como puede comporbarse al calcular el nuevo valor de $K^A(\lambda_t)$:

$$K(\lambda_t) = \left(\frac{1+Ip}{1+Ir}\right)^{1/2}\left[P_x\left(\frac{1+Ip}{1+Ir}\right)^{1/2} + q_x\right](1+\lambda^R) = 0.990972641 < 1$$

En consecuencia, la política que minimiza el coste total de la operación vendrá dada por $\lambda_* = 0$, tanto para el reaseguro tipo B como para el reaseguro tipo A.

En este caso, al ser distintos Ip e Ir, el reaseguro tipo A y el reaseguro tipo B darán lugar a primas de reaseguro diferentes, salvo para aquellos niveles de recargo de seguridad del plan que no superen λ_m:

$$\lambda_m = \frac{V_{i,1}(1.04)}{\Pi(1.09)} - 1 = 0.05477$$

A continuación comprobaremos este resultado calculando para cada recargo compredido entre 0% y el 24%, la prima recargada del plan Π^{Rec}, la prima de reaseguro ajustada $\Pi^{R,A}(A)$ asociada al tipo A, el valor actual del coste total asociada al reaseguro tipo A $VCT(\lambda_t)(A)$, la prima de reaseguro ajustada $\Pi^{R,A}(B)$ asociada al reaseguro tipo B, y el valor actual del coste total $VCT(\lambda_t)(B)$ asociada al reaseguro tipo B.

λ_t	Π^{Rec}	$\Pi^{R,A}(A)$	$VCT(\lambda_t)(A)$	$\Pi^{R,A}(B)$	$VCT(\lambda_t)(B)$
0.000000	4.830499	0.011312	4.841811	0.011312	4.841811
0.010000	4.878804	−0.036557	4.842247	−0.036557	4.842247
0.020000	4.927109	−0.084426	4.842683	−0.084426	4.842683
0.030000	4.975414	−0.132295	4.843119	−0.132295	4.843119
0.040000	5.023719	−0.180164	4.843555	−0.180164	4.843555
0.050000	5.072024	−0.228033	4.843991	−0.228033	4.843991
0.060000	5.120329	−0.275679	4.844649	−0.275902	4.844427
0.070000	5.168634	−0.323123	4.845511	−0.323771	4.844863
0.080000	5.216939	−0.370201	4.846738	−0.371640	4.845299
0.090000	5.265244	−0.417209	4.848035	−0.419508	4.845735
0.100000	5.313549	−0.463833	4.849716	−0.467377	4.846171
0.110000	5.361854	−0.510454	4.851400	−0.515246	4.846607
0.120000	5.410159	−0.556685	4.853474	−0.563115	4.847044
0.130000	5.458464	−0.602916	4.855547	−0.610984	4.847480
0.140000	5.506769	−0.648871	4.857898	−0.658853	4.847916
0.150000	5.555074	−0.694713	4.860361	−0.706722	4.848352
0.160000	5.603379	−0.740194	4.863184	−0.754591	4.848788
0.170000	5.651684	−0.785563	4.866120	−0.802460	4.849224
0.180000	5.699989	−0.830689	4.869300	−0.850329	4.849660
0.190000	5.748294	−0.875604	4.872690	−0.898198	4.850096
0.200000	5.796599	−0.920386	4.876212	−0.946067	4.850532

Ahora estudiaremos la operación (I) pero suponiendo que el margen de solvencia viene dado por las reservas de solvencia RS^{ϵ}. En este caso la etrategia óptima no podrá determinarse a priori, pues desconocemos la expresión analítica de la función K.

Desarrollaremos el estudio de la operación, calculando para cada valor del nivel de insolvencia ϵ^t comprendido entre 0 y 0.65, el recago de seguridad asociado λ^{ϵ^t}, la prima recargada del plan Π^{Rec}, la prima ajustada de reaseguro $\Pi^{R,A}$, (en este caso coincidirá para los dos tipo de reaseguro) y el valor actual del coste total $VCT(\lambda^{\epsilon^t})$

ϵ^t	λ^{ϵ^t}	Π^{Rec}	Π^R	$VCT(\lambda^{\epsilon^t})$
0.000000	0.589459	7.677878	−2.847379	4.830499
0.100000	0.456151	7.033935	−2.203436	4.830499
0.200000	0.384795	6.689252	−1.858753	4.830499
0.300000	0.312595	6.340487	−1.509988	4.830499
0.400000	0.252981	6.052524	−1.222025	4.830499
0.500000	0.141891	5.515905	−0.685406	4.830499

En este caso la estrategia óptima coincide con el caso en el que el margen de solvencia es una proporción de la provisión matemática.

Si aumentamos el tipo de interés del reaseguro en un 1%, la estrategia óptima se verá modificada como muestra el siguiente cuadro:

ϵ^t	λ^{ϵ^t}	Π^{Rec}	Π^R	$VCT(\lambda)^{\epsilon^t}$
0.000000	0.589459	7.677878	−2.559521	5.118356
0.100000	0.456151	7.033935	−2.002362	5.031573
0.200000	0.384795	6.689252	−1.698159	4.991094
0.300000	0.312595	6.340487	−1.385233	4.955254
0.400000	0.252981	6.052524	−1.136018	4.916506
0.500000	0.141891	5.515905	−0.644246	4.871659

Podemos observar que cuanto menos recarguemos la prima del plan, menor será el valor actual del coste total de la operación.