UNIVERSIDAD DE BARCELONA

DIVISION DE CIENCIAS JURIDICAS, ECONOMICAS Y SOCIALES

FACULTAD CIENCIAS ECONOMICAS Y EMPRESARIALES

DEPARTAMENTO DE MATEMATICA ECONOMICA, FINANCIERA

Y ACTUARIAL

REASEGURO
Y
PLANES DE PENSIONES

Tesis Doctoral presentada por:

Fo Javier Sarrasí Vizcarra.

Director de la Tesis:

Dr. D. Antonio Alegre Escolano.

Barcelona Junio 1993.

ANEXO 4-2

ANEXO 4-2 SEGURO DIFERIDO TEMPORAL CON CUANTIAS CONSTANTES A PRIMA UNICA

En el presente anexo estudiaremos la prima de reaseguro para el caso de un seguro en las dos modalidades de reaseguro estudiadas (modalidad del percentil y modalidad de diferencia de siniestralidad). En particular nos centraremos en la determinación de la estrategia óptima para cada caso a partir de la función K en la medida en que ésta esté definida.

En el caso particular del reaseguro del percentil, haremos un estudio del comportamiento de la función K con respecto a las variables de las que depende, y analizaremos como se comportan las cotas del recargo del reasegurador (CS) y (DS) con respecto a las variables de la operación (en la modalidad de reaseguro del percentil sin reparto de beneficios). Por último estudiaremos la relación entre la prima de reaseguro y la temporalidad de la operación.

4-2.1 REASEGURO DEl PERCENTIL. ANALISIS DE LA ESTRATEGIA OPTIMA (NO HAY REPARTO DE BENEFICIOS)

Analizaremos como evoluciona la función $K(\epsilon^t)$ conforme va variando el tipo de interés del reaseguro, dada una operación de seguro diferido temporal. Este estudio lo realizaremos para seis operaciones calculando para cada una de ellas el riesgo del plan ϵ^t, el número de períodos enteros b^{ϵ^t} a partir del diferimiento de la operación y dentro del plazo de vigencia de la misma que ha de vivir el partícipe para que el reaseguro cubra el riesgo ϵ^t, y los valores de la función $K(\epsilon^t)$ asociados a los tipos de intereses técnicos de reaseguro siguientes: $Ir = 0.15$ $Ir = 0.09$ $Ir = 0.06$ $Ir = 0.03$ $Ir = 0.01$ $Ir = 0.0001$.

Sin embargo el tipo de interés técnico del plan lo fijaremos en $Ip = 0.09$ para las seis operaciones, diferenciándose éstas por la temporalidad, diferimiento y edad del partícipe, permitiéndonos así estudiar como influyen estas variables en la función $K(\epsilon^t)$.

Cada operación va acompañada de una gráfica, donde se relaciona los valores de la función $K(\epsilon^t)$ asociados a cada tipo de interés de reaseguro Ir, con el riesgo reasegurado ϵ^t.

Recordemos que la función $K(\epsilon)^t$ asociada a un seguro diferido y temporal a prima única y de cuantías constantes tiene la siguiente expresión:

$$K(\epsilon^t) = (1 + \lambda^R) \left[\sum_{j=d_s}^{d_s+b^{\epsilon^t}} \left(\frac{1 + Ip}{1 + Ir} \right)^{j+1/2} {}_{j/}q_x \right]$$

Operación (I)

Seguro diferido temporal.

Edad del partícipe: $x = 60$ años.

Diferimiento del seguro $d_s = 5$

Temporalidad del seguro $m_s = 43$

Recargo del reasegurador $\lambda^R = 0$

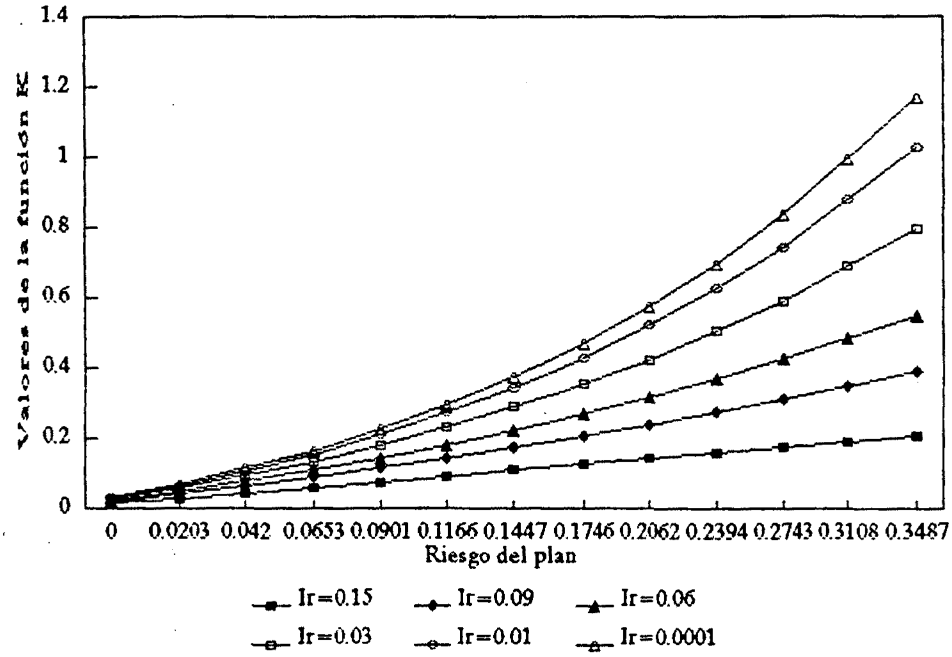
Cuantía periódica y anual $\alpha^s = 1$

$Ip = 0.09$

ϵ^t	b^{ϵ^t}	$Ir = 0.15$	$Ir = 0.09$	$Ir = 0.06$
0.000000	0	0.015096	0.020270	0.023633
0.020270	1	0.030436	0.042001	0.049686
0.042001	2	0.045996	0.065257	0.078358
0.065257	3	0.061749	0.090099	0.109850
0.090099	4	0.077663	0.116576	0.144366
0.116576	5	0.093703	0.144730	0.182106
0.144730	6	0.109825	0.174586	0.223261
0.174586	7	0.125980	0.206151	0.268003
0.206151	8	0.142113	0.239409	0.316478
0.239409	9	0.158163	0.274315	0.368795
0.274315	10	0.174059	0.310789	0.425011
0.310789	11	0.189724	0.348714	0.485116
0.348714	12	0.205076	0.387924	0.549017

ϵ^t	b^{ϵ^t}	$Ir = 0.03$	$Ir = 0.01$	$Ir = 0.0001$
0.000000	0	0.027676	0.030827	0.032543
0.020270	1	0.059074	0.066494	0.070568
0.042001	2	0.094634	0.107687	0.114920
0.065257	3	0.134830	0.155174	0.166554
0.090099	4	0.180169	0.209797	0.226535
0.116576	5	0.231188	0.272479	0.296047
0.144730	6	0.288442	0.344215	0.376388
0.174586	7	0.352500	0.426066	0.468964
0.206151	8	0.423925	0.519136	0.575271
0.239409	9	0.503255	0.624555	0.696876
0.274315	10	0.590980	0.743438	0.835369
0.310789	11	0.687506	0.876838	0.992311
0.348714	12	0.793117	1.025684	1.169160

Gráfico 4−2.1.1



Si reducimos la temporalidad $m_s = 20$:

Operación (II)

Seguro diferido temporal.

Edad del partícipe: $x = 60$ años.

Diferimiento del seguro $d_s = 5$

Temporalidad del seguro $m_s = 20$

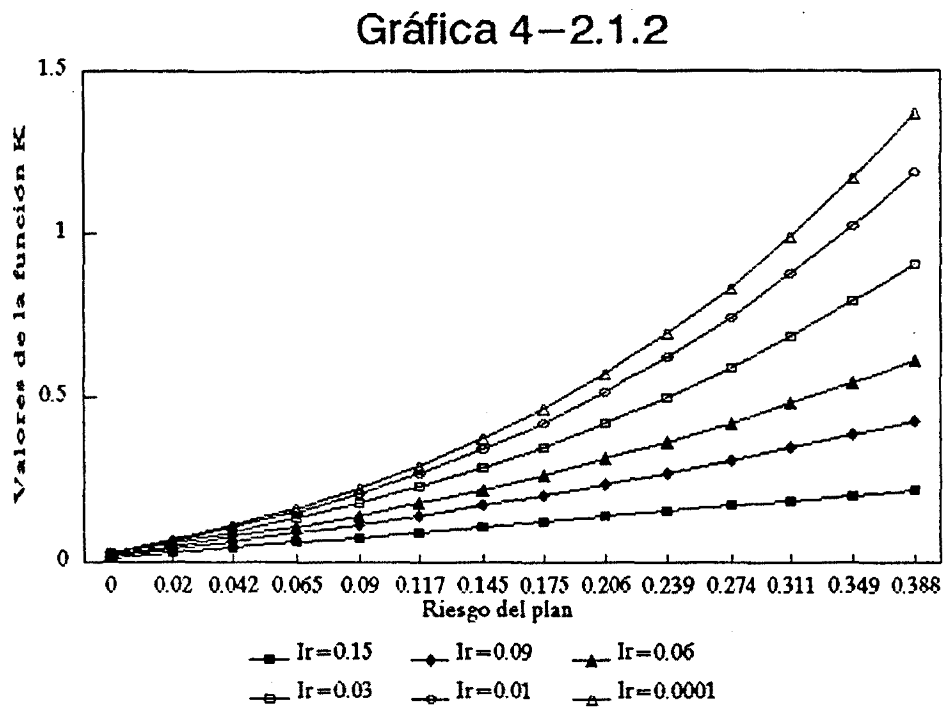
Recargo del reasegurador $\lambda^R = 0$

Cuantía periódica y anual $\alpha^s = 1$

$Ip = 0.09$

ϵ^t	b^{ϵ^t}	$Ir = 0.15$	$Ir = 0.09$	$Ir = 0.06$
0.000000	0	0.015096	0.020270	0.023633
0.020270	1	0.030436	0.042001	0.049686
0.042001	2	0.045996	0.065257	0.078358
0.065257	3	0.061749	0.090099	0.109850
0.090099	4	0.077663	0.116576	0.144366
0.116576	5	0.093703	0.144730	0.182106
0.144730	6	0.109825	0.174586	0.223261
0.174586	7	0.125980	0.206151	0.268003
0.206151	8	0.142113	0.239409	0.316478
0.239409	9	0.158163	0.274315	0.368795
0.274315	10	0.174059	0.310789	0.425011
0.310789	11	0.189724	0.348714	0.485116
0.348714	12	0.205076	0.387924	0.549017
0.387924	13	0.220023	0.428204	0.616521

ϵ^t	b^{ϵ^t}	$Ir = 0.03$	$Ir = 0.01$	$Ir = 0.0001$
0.000000	0	0.027676	0.030827	0.032543
0.020270	1	0.059074	0.066494	0.070568
0.042001	2	0.094634	0.107687	0.114920
0.065257	3	0.134830	0.155174	0.166554
0.090099	4	0.180169	0.209797	0.226535
0.116576	5	0.231188	0.272479	0.296047
0.144730	6	0.288442	0.344215	0.376388
0.174586	7	0.352500	0.426066	0.468964
0.206151	8	0.423925	0.519136	0.575271
0.239409	9	0.503255	0.624555	0.696876
0.274315	10	0.590980	0.743438	0.835369
0.310789	11	0.687506	0.876838	0.992311
0.348714	12	0.793117	1.025684	1.169160
0.387924	13	0.907931	1.190704	1.367167



Si reducimos la temporalidad $m_s = 5$

Operación (III)

Seguro diferido temporal.

Edad del partícipe: $x = 60$ años.

Diferimiento del seguro $d_s = 5$

Temporalidad del seguro $m_s = 5$

Recargo del reasegurador $\lambda^R = 0$

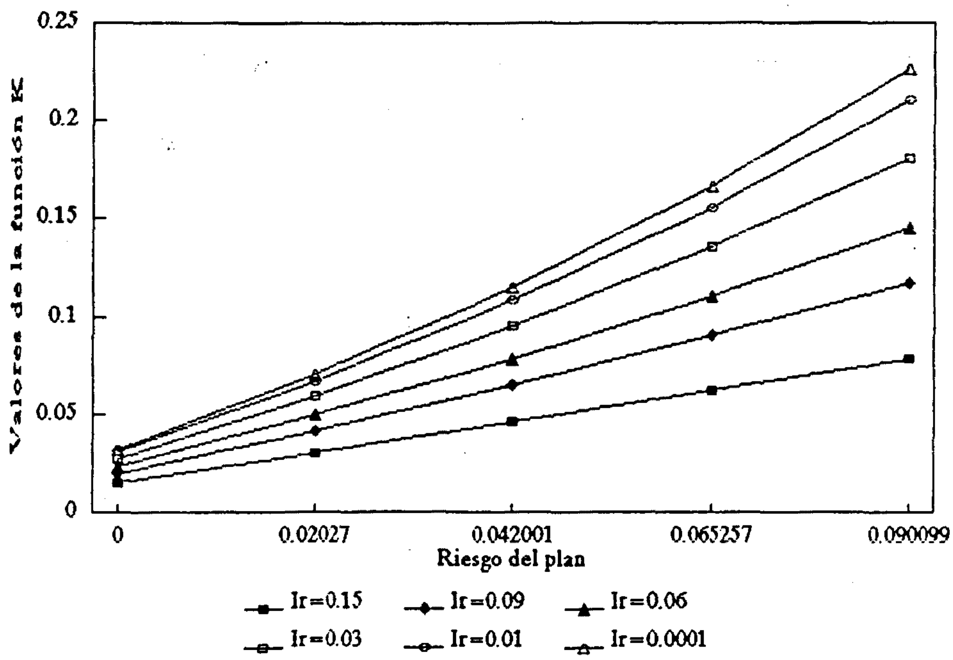
Cuantía periódica y anual $\alpha^s = 1$

$Ip = 0.09$

ϵ^t	b^{ϵ^t}	$Ir = 0.15$	$Ir = 0.09$	$Ir = 0.06$
0.000000	0	0.015096	0.020270	0.023633
0.020270	1	0.030436	0.042001	0.049686
0.042001	2	0.045996	0.065257	0.078358
0.065257	3	0.061749	0.090099	0.109850
0.090099	4	0.077663	0.116576	0.144366

ϵ	b^ϵ	$Ir = 0.03$	$Ir = 0.01$	$Ir = 0.0001$
0.000000	0	0.027676	0.030827	0.032543
0.020270	1	0.059074	0.066494	0.070568
0.042001	2	0.094634	0.107687	0.114920
0.065257	3	0.134830	0.155174	0.166554
0.090099	4	0.180169	0.209797	0.226535

Gráfica 4−2.1.3



Si mantenemos la temporalidad en 43 términos y hacemos la operación inmediata $d_s = 0$

Operación (IV)

Seguro diferido temporal.

Edad del partícipe: $x = 60$ años.

Diferimiento del seguro $d_s = 0$

Temporalidad del seguro $m_s = 43$

Recargo del reasegurador $\lambda^R = 0$

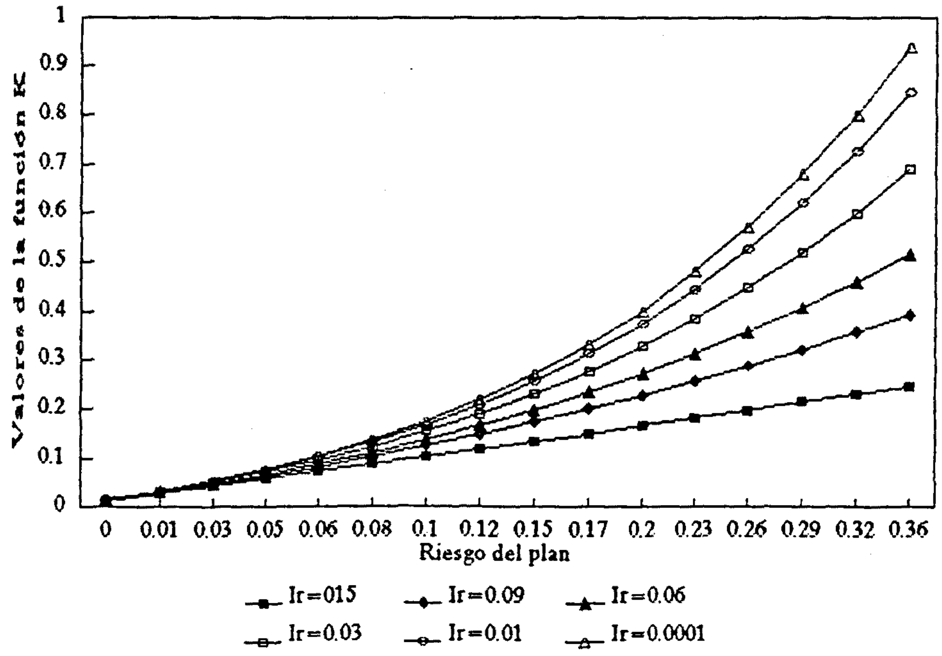
Cuantía periódica y anual $\alpha^s = 1$

$Ip = 0.09$

ϵ^t	b^{ϵ^t}	$Ir = 0.15$	$Ir = 0.09$	$Ir = 0.06$
0.000000	0	0.013642	0.014012	0.014209
0.014012	1	0.027598	0.029136	0.029980
0.029136	2	0.041858	0.045441	0.047463
0.045441	3	0.056412	0.062997	0.066820
0.062997	4	0.071245	0.081875	0.088224
0.081875	5	0.086341	0.102145	0.111857
0.102145	6	0.101681	0.123875	0.137910
0.123875	7	0.117240	0.147132	0.166581
0.147132	8	0.132994	0.171973	0.198073
0.171973	9	0.148908	0.198451	0.232590
0.198451	10	0.164948	0.226605	0.270330
0.226605	11	0.181070	0.256461	0.311485
0.256461	12	0.197225	0.288026	0.356226
0.288026	13	0.213358	0.321283	0.404702
0.321283	14	0.229408	0.356189	0.457019
0.356189	15	0.245340	0.392664	0.513235

ϵ^t	b^{ϵ^t}	$Ir = 0.03$	$Ir = 0.01$	$Ir = 0.0001$
0.000000	0	0.014415	0.014557	0.014628
0.014012	1	0.030879	0.031513	0.031837
0.029136	2	0.049663	0.051240	0.052056
0.045441	3	0.071066	0.074164	0.075784
0.062997	4	0.095422	0.100767	0.103593
0.081875	5	0.123098	0.131594	0.136136
0.102145	6	0.154496	0.167261	0.174161
0.123875	7	0.190056	0.208454	0.218513
0.147132	8	0.230252	0.255941	0.270147
0.171973	9	0.275592	0.310564	0.330128
0.198451	10	0.326610	0.373246	0.399640
0.226605	11	0.383864	0.444982	0.479981
0.256461	12	0.447922	0.526832	0.572556
0.288026	13	0.519347	0.619903	0.678864
0.321283	14	0.598677	0.725322	0.800469
0.356189	15	0.686402	0.844205	0.938961

Gráfico 4−2.1.4



Si con respecto a la primera operación reducimos la edad del partícipe $x = 30$:

Operación (V)

Seguro diferido temporal.

Edad del partícipe: $x = 30$ años.

Diferimiento del seguro $d_s = 5$

Temporalidad del seguro $m_s = 43$

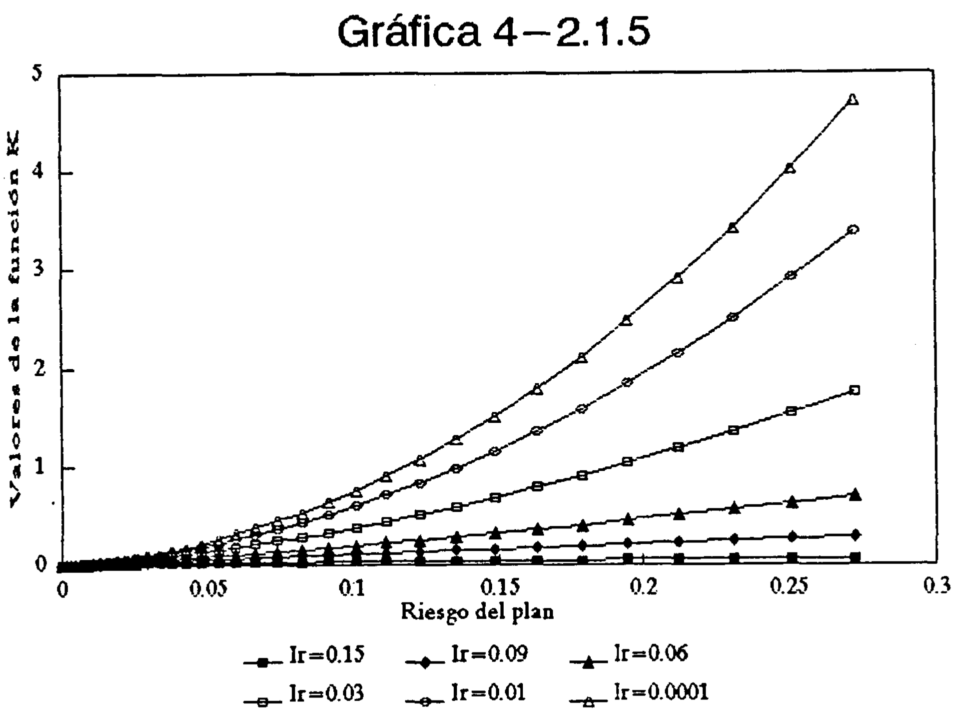
Recargo del reasegurador $\lambda^R = 0$

Cuantía periódica y anual $\alpha^s = 1$

$Ip = 0.09$

ϵ^t	b^{ϵ^t}	$Ir = 0.15$	$Ir = 0.09$	$Ir = 0.06$
0.000000	0	0.001075	0.001444	0.001683
0.001444	1	0.002175	0.003002	0.003552
0.003002	2	0.003306	0.004692	0.005635
0.004692	3	0.004472	0.006531	0.007966
0.006531	4	0.005677	0.008536	0.010580
0.008536	5	0.006926	0.010728	0.013518
0.010728	6	0.008221	0.013126	0.016823
0.013126	7	0.009564	0.015751	0.020545
0.015751	8	0.010959	0.018627	0.024736
0.018627	9	0.012407	0.021776	0.029456
0.021776	10	0.013910	0.025224	0.034771
0.025224	11	0.015469	0.028998	0.040752
0.028998	12	0.017085	0.033125	0.047479
0.033125	13	0.018759	0.037637	0.055039
0.037637	14	0.020492	0.042563	0.063528
0.042563	15	0.022284	0.047939	0.073054
0.047939	16	0.024136	0.053799	0.083732
0.053799	17	0.026047	0.060181	0.095691
0.060181	18	0.028018	0.067126	0.109072
0.067126	19	0.030050	0.074675	0.124029
0.074675	20	0.032141	0.082874	0.140734
0.082874	21	0.034291	0.091769	0.159370
0.091769	22	0.036500	0.101411	0.180142
0.101411	23	0.038767	0.111851	0.203270
0.111851	24	0.041091	0.123144	0.228995
0.123144	25	0.043472	0.135346	0.257579
0.135346	26	0.045907	0.148516	0.289303
0.148516	27	0.048395	0.162715	0.324473
0.162715	28	0.050935	0.178003	0.363413
0.178003	29	0.053523	0.194442	0.406470
0.194442	30	0.056158	0.212094	0.454012
0.212094	31	0.058834	0.231018	0.506422
0.231018	32	0.061550	0.251271	0.564099
0.251271	33	0.064298	0.272903	0.627449
0.272903	34	0.067076	0.295961	0.696884

ϵ^t	b^{ϵ^t}	$Ir = 0.03$	$Ir = 0.01$	$Ir = 0.0001$
0.000000	0	0.001971	0.002196	0.002318
0.001444	1	0.004223	0.004754	0.005045
0.003002	2	0.006807	0.007747	0.008268
0.004692	3	0.009782	0.011261	0.012089
0.006531	4	0.013216	0.015399	0.016632
0.008536	5	0.017188	0.020278	0.022044
0.010728	6	0.021786	0.026040	0.028496
0.013126	7	0.027114	0.032848	0.036196
0.015751	8	0.033289	0.040895	0.045388
0.018627	9	0.040447	0.050406	0.056359
0.021776	10	0.048740	0.061645	0.069452
0.025224	11	0.058345	0.074919	0.085069
0.028998	12	0.069463	0.090588	0.103685
0.033125	13	0.082321	0.109069	0.125861
0.037637	14	0.097182	0.130851	0.152255
0.042563	15	0.114341	0.156500	0.183643
0.047939	16	0.134136	0.186675	0.220937
0.053799	17	0.156952	0.222144	0.265206
0.060181	18	0.183225	0.263795	0.317705
0.067126	19	0.213448	0.312658	0.379906
0.074675	20	0.248184	0.369929	0.453530
0.082874	21	0.288066	0.436987	0.540589
0.091769	22	0.333813	0.515428	0.643435
0.101411	23	0.386232	0.607091	0.764807
0.111851	24	0.446237	0.714096	0.907895
0.123144	25	0.514851	0.838877	1.076405
0.135346	26	0.593223	0.984225	1.274632
0.148516	27	0.682636	1.153332	1.507546
0.162715	28	0.784517	1.349839	1.780877
0.178003	29	0.900453	1.577880	2.101211
0.194442	30	1.032190	1.842135	2.476088
0.212094	31	1.181648	2.147871	2.914106
0.231018	32	1.350916	2.500988	3.425013
0.251271	33	1.542251	2.908045	4.019794
0.272903	34	1.758069	3.376280	4.710737



Si con respecto a la segunda operación reducimos la edad del partícipe $x = 30$:

Operación (VI)

Seguro diferido temporal.

Edad del partícipe: $x = 30$ años.

Diferimiento del seguro $d_s = 5$

Temporalidad del seguro $m_s = 20$

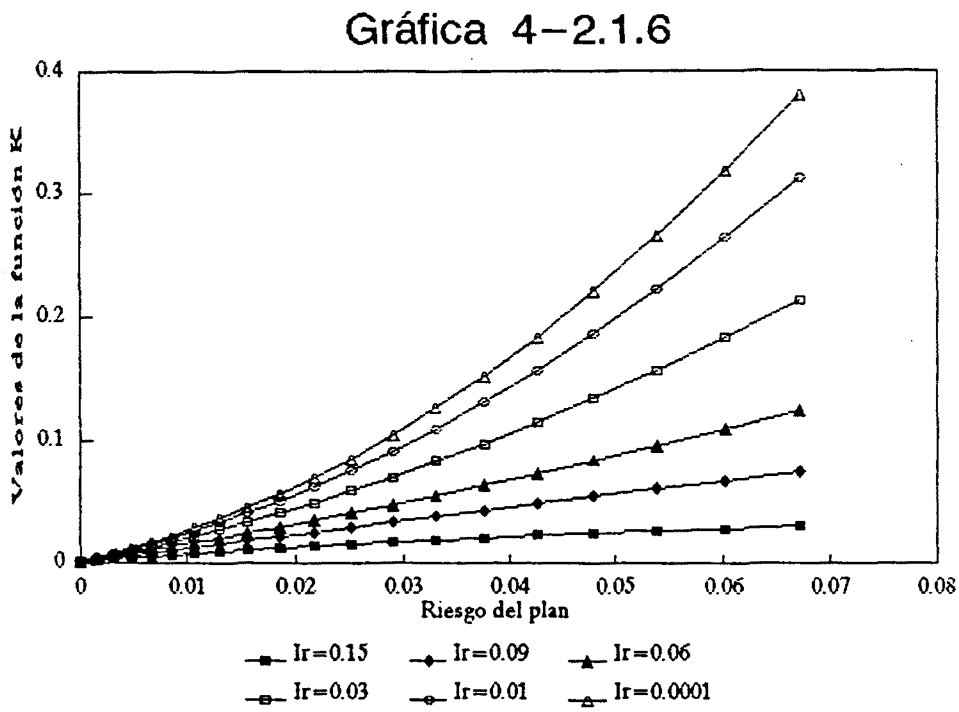
Recargo del reasegurador $\lambda^R = 0$

Cuantía periódica y anual $\alpha^s = 1$

$Ip = 0.09$

ϵ^t	b^{ϵ^t}	$Ir = 0.15$	$Ir = 0.09$	$Ir = 0.06$
0.000000	0	0.001075	0.001444	0.001683
0.001444	1	0.002175	0.003002	0.003552
0.003002	2	0.003306	0.004692	0.005635
0.004692	3	0.004472	0.006531	0.007966
0.006531	4	0.005677	0.008536	0.010580
0.008536	5	0.006926	0.010728	0.013518
0.010728	6	0.008221	0.013126	0.016823
0.013126	7	0.009564	0.015751	0.020545
0.015751	8	0.010959	0.018627	0.024736
0.018627	9	0.012407	0.021776	0.029456
0.021776	10	0.013910	0.025224	0.034771
0.025224	11	0.015469	0.028998	0.040752
0.028998	12	0.017085	0.033125	0.047479
0.033125	13	0.018759	0.037637	0.055039
0.037637	14	0.020492	0.042563	0.063528
0.042563	15	0.022284	0.047939	0.073054
0.047939	16	0.024136	0.053799	0.083732
0.053799	17	0.026047	0.060181	0.095691
0.060181	18	0.028018	0.067126	0.109072
0.067126	19	0.030050	0.074675	0.124029

ϵ^t	b^{ϵ^t}	$Ir = 0.03$	$Ir = 0.01$	$Ir = 0.0001$
0.000000	0	0.001971	0.002196	0.002318
0.001444	1	0.004223	0.004754	0.005045
0.003002	2	0.006807	0.007747	0.008268
0.004692	3	0.009782	0.011261	0.012089
0.006531	4	0.013216	0.015399	0.016632
0.008536	5	0.017188	0.020278	0.022044
0.010728	6	0.021786	0.026040	0.028496
0.013126	7	0.027114	0.032848	0.036196
0.015751	8	0.033289	0.040895	0.045388
0.018627	9	0.040447	0.050406	0.056359
0.021776	10	0.048740	0.061645	0.069452
0.025224	11	0.058345	0.074919	0.085069
0.028998	12	0.069463	0.090588	0.103685
0.033125	13	0.082321	0.109069	0.125861
0.037637	14	0.097182	0.130851	0.152255
0.042563	15	0.114341	0.156500	0.183643
0.047939	16	0.134136	0.186675	0.220937
0.053799	17	0.156952	0.222144	0.265206
0.060181	18	0.183225	0.263795	0.317705
0.067126	19	0.213448	0.312658	0.379906



Podemos hacer las siguientes observaciones:

- Los valores de la función $K(\epsilon^t)$ son más grandes conforme disminuye el tipo de interés técnico del reaseguro, dado un determinado tipo de interés técnico del plan.

- La función $K(\epsilon^t)$ siempre es creciente con respecto al riesgo reasegurado, sean cuales sean las caraterísticas técnicas del plan.

- Los valores de la función $K(\epsilon^t)$ han sido calculados para un recargo del reasegurador $\lambda^R = 0$. Si el recargo fuera positivo, todos los valores quedarían multiplicados por $(1 + \lambda^R)$, lo que supondría un desplazamiento de la función $K(\epsilon^t)$.

- La temporalidad no influye en los valores de $K(\epsilon^t)$ dado un determinado nivel de riesgo ϵ^t. Si observamos las tres primeras operaciones, las cuales se diferencian exclusivamente en la temporalidad, podemos constatar por ejemplo que para el nivel de riesgo $\epsilon^t = 0.065257$ la función $K(\epsilon^t)$ toma los mismos valores en las tres operaciones. Así, si $Ip = 0.15$ entonces $K(0.065257) = 0.061749$ tanto si $m_s = 43$, como si $m_s = 20$, o como si $m_s = 5$.

La temporalidad influye exclusivamente en el dominio en el que está definida la función $K(\epsilon^t)$ en la medida en que afecta a $b^{\epsilon^{max}}$.[11] Por ejemplo, en la operación (I) donde $m_s = 43$, $b^{\epsilon^{max}} = 12$, sin embargo si reducimos la temporalidad a $m_s = 20$ (operación (II)), puede suceder como así pasa en nuestro caso, que pueda aumentar $b^{\epsilon^{max}}$,($b^{\epsilon^{max}} = 13$), debido a la disminución producida en la prima pura de la operación.

Si disminuimos la temporalidad por debajo de $b^{\epsilon^{max}} = 13$ entonces siempre se satisface $b^{\epsilon^{max}} = m_s - 1$.

Así, cuando $m_s = 5$ (operación (III)), entonces $b^{\epsilon^{max}} = 4$.

- El efecto que tiene el diferimiento sobre la función $K(\epsilon^t)$ queda reflejado comparando la operación (I) y la operación (IV). Podemos constatar como una disminución en el diferimiento de la operación provoca un efecto distinto sobre la función $K(\epsilon^t)$ según los tipos de interés técnicos del reaseguro y del plan. En nuestro caso particular si $Ip \geq Ir$ una disminución del diferimiento reduce los valores de $K(\epsilon^t)$ para los niveles altos de riesgo a reasegurar. Sin embargo, si $Ip < Ir$ el efecto es el inverso.

  En consecuencia no existe un comportamiento determinado de la función $K(\epsilon^t)$ ante variaciones en el diferimiento, ya que dicha relación dependerá del resto de características técnicas del plan.

- El efecto que presenta la edad del partícipe sobre la función $K(\epsilon^t)$, queda reflejado comparando la operación (I) con la operación (V), y la operación (II) con la operación (VI). Puede observarse como el comportamiento de la función $K(\epsilon^t)$ con respecto a la edad depende de la temporalidad de la operación. Si compara-

[11]Recordemos que $b^{\epsilon^{max}}$ se obtiene como el mayor $b^{\epsilon^t} \forall b^{\epsilon^t} \in [0, m_s - 1]$

mos las operaciones (I) y (V), caraterizadas ambas por una alta temporalidad, el efecto que presenta la edad sobre la función $K(\epsilon^t)$ depende de los tipos de interés técnicos del plan y del reaguro. Así si $Ip \leq Ir$ una disminución en la edad provoca una disminución en los valores de la función $K(\epsilon^t)$ para niveles de riesgo a reasegurar ϵ^t parecidos. Sin embargo si $Ip > Ir$, este comportamiento no tiene porque darse. En nuestro ejemplo si $Ir = 0.06 < Ip = 0.09$, una disminución en la edad provoca un aumento de los valores de la función $K(\epsilon^t)$ exclusivamente para valores de riesgo a reasegurar pequeños. Si $Ir = 0.03$, una disminución en la edad provoca un aumento en los valores de la función $K(\epsilon^t)$, sea cual sea el riesgo a reasegurar. Esta tendencia se mantiene con mayor incidencia si reducimos aún más el tipo de interés técnico del reaseguro.

Por el contrario, si comparamos la operación (II) con la operación (VI), caracterizadas por una temporalidad más baja que las operaciones (I) y (V), una reducción en la edad del partícipe provoca una reducción en los valores de la función $K(\epsilon^t)$, para niveles de riesgo a reasegurar similares, sea cual sea el tipo de interés del reaseguro.

Podemos concluir comentando que el efecto que presenta la edad sobre los valores de la función $K(\epsilon^t)$ depende de las caraterístcas técnicas de la operación, y en particular de los tipos técnicos de interés del plan y del reaseguro y de la temporalidad de la operación. Sin embargo, podemos afirmar (como así se constata en los ejemplos anteriores) que una reducción en la edad provoca un aumento de $b^{\epsilon^{max}}$ como consecuencia de la disminución en la prima pura de la operación.

Analisis de la cota inferior (CS) y superior (DS)

En este apartado estudiaremos el comportamiento de (CS) y (DS) con respecto a la temporalidad, diferimiento de la operación, edad del partícipe y relación entre el tipo de interés técnico del plan y el tipo de interés técnico del reaseguro.

El análisis se realizará con ejemplos concretos, los cuales nos permitirán ilustrar cual será la tendencia de (CS) y (DS) conforme van variando las magnitudes antes señaladas, permaneciendo constantes las demás características técnicas del plan.

a) Análisis de (CS) y (DS) con respecto a la temporalidad de la operación

Este estudio lo realizaremos variando la temporalidad en la siguiente operación actuarial:

Seguro diferido temporal.

Edad del partícipe: $x = 60$ años.

Diferimiento del seguro $d_s = 5$

Recargo del reasegurador $\lambda^R = 0$

Cuantía periódica y anual $\alpha^s = 1$

$Ip = Ir = 0.09$

m_s	$b^{\epsilon^{max}}$	CS	DS
5	4	7.5781	48.3336
10	9	2.6455	48.3336
15	14	1.1309	48.3336
20	13	1.3353	48.3336
25	13	1.3353	48.3336
35	12	1.8075	48.3336
43	12	1.8075	48.3335

El valor de la cota superior (DS) es independiente de la temporalidad, sin embargo ésta actúa sobre (CS) en la medida que a afecta a $b^{\epsilon^{max}}$, por tanto el comportamiento no uniforme de (CS) con respecto a la temporalidad se debe al caracter truncado de la función $b^{\epsilon^{max}}$. Así cuando $b^{\epsilon^{max}} = m_s - 1$ entonces (CS) es inversamente proporcional a la temporalidad. En nuestro ejemplo sucede cuando la temporalidad $m_s \leq 14$. Sin embargo, cuando $b^{\epsilon^{max}} < m_s - 1$, en nuestro caso se da para temporalidades $m_s > 14$, (CS) puede permanecer invariante a cambios en la temporalidad, o incluso puede aumentar para temporalidades elevadas. Así si $m_s = 25$ el valor de $(CS) = 1.3353$, sim embargo si aumentamos la temporalidad de la operación $m_s = 43$, el valor de (CS) aumenta siendo ahora su valor de 1.8075

Hay que señalar que el tope máximo de temporalidad para el cual se cumple $b^{\epsilon^{max}} = m_s - 1$ aumenta conforme disminuye la edad del partícipe, y el diferimiento de la operación. Esta idea la ilustramos en el siguiente ejemplo, el cual se diferencia del anterior en que la edad del partícipe $x = 30$ años:

m_s	$b^{\epsilon^{max}}$	CS	DS
5	4	116.1488	691.6785
10	9	44.9223	691.6785
15	14	22.4945	691.6785
20	19	12.3914	691.6785
25	24	7.1206	691.6785
35	34	2.3788	691.6785
43	33	2.6643	691.6785

En este caso la temporalidad máxima que satisface la condición $b^{\epsilon^{max}} = m_s - 1$ es $m_s = 35$. En consecuencia para operaciones en las cuales $m_s \leq 35$ el valor de (CS) será inversamente proporcional a la temporalidad como queda reflejado en el ejemplo.

b) Análisis de (CS) y (DS) con respecto a la edad del partícipe

Consideraremos el siguiente ejemplo:

Seguro diferido temporal.

Temporalidad del seguro $m_s = 43$

Diferimiento del seguro $d_s = 5$

Recargo del reasegurador $\lambda^R = 0$

Cuantía periódica y anual $\alpha^s = 1$

$Ip = Ir = 0.09$

Edad del partícipe	$b^{\epsilon^{max}}$	CS	DS
20	41	3.1714	945.9905
25	37	2.9071	918.3342
26	36	2.9196	883.2414
27	35	2.9329	850.4563
28	34	2.9472	793.8890
29	33	2.9628	740.3456
30	33	2.6643	691.6785
35	28	2.7598	452.5369
40	24	2.5941	284.7803
45	21	2.1989	179.8599
50	18	1.8984	115.0430
55	15	1.6885	74.3384
60	12	1.5778	48.3336

Podemos apreciar como (DS) es inversamente proporcional a la edad del partícipe, así cuanto mayor es la edad de éste más pequeño es el valor de la cota superior (DS).

Por el contrario, no existe un comportamiento fijo entre la edad y (CS) como podemos observar en el ejemplo. De todas formas, según que caraterísticas técnicas tenga la operación, puede darse el caso que exista una determinada relación entre la edad y (CS). Esta idea queda ilustrada en el siguiente ejemplo:

Seguro diferido temporal.

Temporalidad del seguro $m_s = 43$

Diferimiento del seguro $d_s = 5$

Recargo del reasegurador $\lambda^R = 0$

Cuantía periodica y anual $\alpha^s = 1$

$Ip = 0.09$

$Ir = 0.15$

Edad del partícipe	$b^{\epsilon^{max}}$	CS	DS
20	41	23.6290	1270.5033
25	37	18.6710	1233.4281
26	36	17.9265	1186.3075
27	35	17.2106	1129.7375
28	34	16.5248	1060.3297
29	33	15.8701	998.666
30	33	14.5525	929.0881
35	28	11.9707	607.9877
40	24	9.5483	382.7290
45	21	7.3378	241.8480
50	18	5.7491	154.8158
55	15	4.6257	100.1599
60	12	3.8762	65.2423

En este caso puede observarse que (CS) es inversamente proporcional a la edad del partícipe.

c) Análisis de (CS) y (DS) con respecto al diferimiento de la operación

Como comprobaremos en el siguiente ejemplo, no existe un comportamiento regular de (CS) y (DS) ante variaciones en el diferimiento:

Seguro diferido temporal.

Edad del partícipe $X = 30$ años.

Temporalidad del seguro $m_s = 20$

Recargo del reasegurador $\lambda^R = 0$

Cuantía periódica y anual $\alpha^s = 1$

$Ip = Ir = 0.09$

d_s	$b^{\epsilon^{max}}$	CS	DS
0	19	19.5809	913.5143
5	19	12.3914	691.6785
15	19	4.7915	289.0033
20	19	2.9464	185.0318
25	19	1.7882	120.9694
30	19	1.9245	80.9519
35	18	1.2479	55.6512
40	15	1.2311	39.7875
45	13	1.2098	30.4830
50	13	1.6630	26.6362
55	19	3.6026	31.3390

Observamos como (CS) disminuye conforme aumenta el diferimiento hasta $d_s = 45$. Lo mismo sucede con (DS) cuando $d_s = 55$.

d) Análisis de (CS) y (DS) con respecto a la relación entre el tipo de interés técnico del reaseguro y el tipo de interés técnico del plan

Seguro diferido y temporal.

Edad del partícipe $x = 30$ años.

Temporalidad $m_s = 20$

Diferimiento $d_s = 5$

Recargo del reasegurador $\lambda^R = 0$

Cuantía periodica y anual $\alpha^s = 1$

$Ip = 0,06$

Ir	$\frac{Ir}{Ip}$	Valor de (CS)	Valor de (DS)
0.12	2	33.0794	936.6669
0.09	1.5	20.7532	806.5979
0.06	1	12.3914	691.6785
0.05	0.833	10.2986	656.4922
0.04	0.66	8.4935	622.7820
0.01	0.166	4.4932	530.0275

En este caso sí que hay un comportamiento uniforme entre la relación $\frac{Ir}{Ip}$ y (CS) y (DS), podemos comprobar como una disminución en la relación $\frac{Ir}{Ip}$ produce una reducción tanto en (CS) como (DS).

Conclusión:

Los valores de (CS) y (DS) no presentan un comportamiento regular ante variaciones en la temporalidad, edad del partícipe y diferimiento de la operación , ya que dicho comportamiento se ve afectado por el resto de características técnicas de la operación. Lo único que podemos asegurar es que tanto (CS) como (DS) son directamente proporcionales a la relación entre el tipo de interés ténico del reaseguro y el tipo de interés técnico del plan.

Determinar la estrategia óptima para cada operación, conocido el recargo del reasegurador λ^R, supondrá calcular para cada caso concreto los valores de (CS) y (DS). Lo que sí podemos afirmar es que el valor de la cota superior (DS) suele presentar valores tan elevados, que son desde un punto de vista práctico resultan inalcanzables por el recargo del reasegurador, por lo que la estrategia óptima difícilmente vendrá dada por un riesgo óptimo $\epsilon^* = \epsilon^{min}$.

Sin embargo el valor de (CS) si que puede resultar lo suficientemente bajo, como para que pueda ser alcanzado por λ^R (dando lugar a estrategias óptimas mixtas), o incluso en ocasiones puede llegar a ser negativo, siendo la estrategia óptima la estrategia mixta recargo reaseguro, sea cual sea el valor de λ^R. Esta idea queda ilustrada en el siguiente ejemplo:

Seguro diferido y temporal.

Edad del partícipe $x = 30$ años.

Temporalidad $m_s = 20$

Diferimiento $d_s = 5$

Recargo del reasegurador $\lambda^R = 0$

Cuantía periodica y anual $\alpha^s = 1$

$Ip = 0,09$

$Ir = 0,03$

$(CS) = -0.3516$ $(DS) = 506.3302$

4-2.2 REASEGURO DEl PERCENTIL. ANALISIS DE LA ESTRATEGIA OPTIMA (HAY REPARTO DE BENEFICIOS)

En este apartado ilustraremos que la estrategia óptima depende de la relación entre Ip y Ir, mediante cuatro ejemplos en los cuales se dan las tres posibles relaciones entre Ip y Ir ($Ip < Ir$, $Ip = Ir$ y $Ip > Ir$) Para cada uno de ellos calcularemos el riesgo susceptible de ser reasegurado ϵ^t, el recargo de seguridad del plan λ^{ϵ^t}, el percentil o prima recargada Π^{ϵ^t}, la prima ajustada de reaseguro $\Pi^{R,A}$, la función $K^A(\epsilon^t)$ y el valor actual del coste total de la operación $VCT(\epsilon^t)$

Operación (I)

Seguro vitalicio

Edad del partícipe: $x = 65$ años.

Cuantía periódica y anual $\alpha^s = 1$

$Ip = 0.06$

$Ir = 0.06$

ϵ^t	λ^{ϵ^t}	Π^{ϵ^t}	$\Pi^{R,A}$	$K^A(\epsilon^t)$	$VCT(\epsilon^t)$
0.00000	1.08306	0.97129	−0.50501	1.00000	0.46628
0.02208	0.96515	0.91631	−0.45003	1.00000	0.46628
0.04575	0.85392	0.86444	−0.39816	1.00000	0.46628
0.07108	0.74898	0.81551	−0.34923	1.00000	0.46628
0.09813	0.64998	0.76935	−0.30307	1.00000	0.46628
0.12697	0.55659	0.72580	−0.25952	1.00000	0.46628
0.15764	0.46848	0.68472	−0.21844	1.00000	0.46628
0.19015	0.38536	0.64596	−0.17968	1.00000	0.46628
0.22453	0.30694	0.60940	−0.14312	1.00000	0.46628
0.26076	0.23296	0.57490	−0.10862	1.00000	0.46628
0.29878	0.16317	0.54236	−0.07608	1.00000	0.46628
0.33850	0.09733	0.51166	−0.04538	1.00000	0.46628
0.37981	0.03522	0.48270	−0.01642	1.00000	0.46628
0.42252	0.00000	0.46628	0.00000	1.00000	0.46628

En este ejemplo donde $Ip = Ir$ podemos hacer las siguientes observaciones:

1. La prima ajustada de reaseguro es negativa para todos los niveles de riesgo a reasegurar menos para el mayor de ellos, donde se hace cero.
2. la función $K^A = 1$, por tanto, el coste total de la operación es independiente del rieso de insolvencia del plan.
3. El valor óptimo coincide con la prima pura de la operación.

Operación (II)

Seguro vitalicio

Edad del partícipe: $x = 65$ años.

Cuantía periódica y anual $\alpha^s = 1$

$Ip = 0.08$

$Ir = 0.06$

ϵ^t	λ^{ϵ^t}	Π^{ϵ^t}	$\Pi^{R,A}$	$K^A(\epsilon^t)$	$VCT(\epsilon^t)$
0.00000	1.53027	0.96225	−0.81904	1.33574	0.14321
0.02208	1.34285	0.89097	−0.72383	1.33574	0.16714
0.04575	1.16930	0.82497	−0.63567	1.33574	0.18930
0.07108	1.00861	0.76387	−0.55405	1.33574	0.20982
0.09813	0.85983	0.70728	−0.47847	1.33574	0.22882
0.12697	0.72206	0.65489	−0.40849	1.33574	0.24641
0.15764	0.59450	0.60638	−0.34369	1.33574	0.26269
0.19015	0.47639	0.56146	−0.28369	1.33574	0.27777
0.22453	0.36703	0.51987	−0.22814	1.33574	0.29174
0.26076	0.26577	0.48136	−0.17670	1.33574	0.30467
0.29878	0.17201	0.44571	−0.12907	1.33574	0.31664
0.33850	0.08519	0.41269	−0.08497	1.33574	0.32772
0.37981	0.00481	0.38212	−0.04414	1.33574	0.33798
0.42252	0.00000	0.35382	−0.04173		0.33869

En este ejemplo donde $Ip > Ir$ podemos observar que:

1. La prima ajustada de reaseguro es negativa para todos los niveles de riesgo a reasegurar.

2. la función $K^A > 1$, lo que da lugar a una estrategia óptima basada en cubrir la insolvencia vía recargo de seguridad, como puede comprobarse en el ejemplo, donde el valor actual del coste total se minimiza cuando $\epsilon^* = \epsilon^{min} = 0$.

3. El valor óptimo es menor que la prima pura de la operación $\Pi = 0.35382$.

Operación (III)

Seguro vitalicio

Edad del partícipe: $x = 65$ años.

Cuantía periódica y anual $\alpha^s = 1$

Recargo del reasegurador $\lambda^R = 0$

$Ip = 0.06$

$Ir = 0.08$

ϵ^t	λ^{ϵ^t}	Π^{ϵ^t}	$\Pi^{R,A}$	$K^A(\epsilon^t)$	$VCT(\epsilon^t)$
0.00000	1.08306	0.97129	−0.36331	0.76559	0.60797
0.02208	0.96515	0.91631	−0.32122	0.76559	0.59509
0.04575	0.85392	0.86444	−0.28151	0.76559	0.58293
0.07108	0.74898	0.81551	−0.24405	0.76559	0.57146
0.09813	0.64998	0.76935	−0.20871	0.76559	0.56064
0.12697	0.55659	0.72580	−0.17537	0.76559	0.55043
0.15764	0.46848	0.68472	−0.14392	0.76559	0.54080
0.19015	0.38536	0.64596	−0.11425	0.76559	0.53171
0.22453	0.30694	0.60940	−0.08625	0.76559	0.52314
0.26076	0.23296	0.57490	−0.05985	0.76559	0.51506
0.29878	0.16317	0.54236	−0.03493	0.76559	0.50743
0.33850	0.09733	0.51166	−0.01143	0.76559	0.50023
0.37981	0.03522	0.48270	0.01074	0.76559	0.49344
0.42252	0.00000	0.46630	0.02330		0.48960

En este ejemplo contemplamos el caso donde $Ip < Ir$. En él podemos observar que:

1. La prima ajustada de reaseguro es positiva para los niveles más grandes de riesgo a reasegurar.

2. En este caso el recargo del reasegurador afecta a la estrategia óptima, así si $\lambda^R < 0.30618$, [12] entonces la función $K^A < 1$,(como así sucede en nuestro ejemplo donde $\lambda^R = 0$) lo que da lugar a una estrategia óptima basada en cubrir la insolvencia vía reaseguro. Como puede comprobarse en el ejemplo, el valor actual del coste total se minimiza cuando $\epsilon^* = \epsilon^{max}$ siendo $VCT(\epsilon^{max}) = 0.48960$

[12] Este valor ha sido calculado aplicando la expresión $\frac{1}{\sum_{j=0}^{w-x-1}\left(\frac{1+Ip}{1+Ir}\right)^{j+1/2}{}_{j/}q_x} - 1 = \frac{1}{0.76559} - 1$, la cual como ya se vió, nos da la cota superior de λ^R a partir de la cual el riesgo óptimo deja de ser ϵ^{max}.

A continuación exponemos un ejemplo, que se diferencia del anterior en que presenta un recargo de reasegurador $\lambda^R = 0.5$.

ϵ^t	λ^{ϵ^t}	Π^{ϵ^t}	$\Pi^{R,A}$	$K^A(\epsilon^t)$	$VCT(\epsilon^t)$
0.00000	1.08306	0.97129	−0.36331	0.76559	0.60797
0.02208	0.96515	0.91631	−0.32122	0.76559	0.59509
0.04575	0.85392	0.86444	−0.28151	0.76559	0.58293
0.07108	0.74898	0.81551	−0.24405	0.76559	0.57146
0.09813	0.64998	0.76935	−0.20871	0.76559	0.56064
0.12697	0.55659	0.72580	−0.17537	0.76559	0.55043
0.15764	0.46848	0.68472	−0.14392	0.76559	0.54080
0.19015	0.38536	0.64596	−0.11425	0.76559	0.53171
0.22453	0.30694	0.60940	−0.08625	0.76559	0.52314
0.26076	0.23296	0.57490	−0.05985	0.76559	0.51506
0.29878	0.16317	0.54236	−0.03493	0.76559	0.50743
0.33850	0.09733	0.51166	−0.01143	0.95109	0.50023
0.37981	0.03522	0.48270	0.01612	1.14839	0.49882
0.42252	0.00000	0.45538	0.04749		0.50287

Podemos observar como la estrategia óptima queda modificada con respecto al ejemplo anterior en el cual $\lambda^R = 0$, (en este ejemplo $\epsilon^* = 0.37981$ a diferencia del anterior donde $\epsilon^* = \epsilon^{max} = 0.42252$) debido a la existencia de un recargo del reasegurador $\lambda^R = 0.5 > 0.30618$.

De todas formas, el riesgo óptimo a reasegurar no podrá ser menor a 0.37981 por muy elevado que pueda ser el recargo del reasegurador, debido que 0.37981 es el menor riesgo susceptible de ser reasegurado con una prima ajustada positiva.

Hay que hacer constar que no siempre que $Ip < Ir$, las primas ajustadas de reaseguro son positivas para riesgos a reasegurar grandes, puede darse el caso de que todas sean negativas, siendo por tanto la estrategia óptima $\epsilon^* = \epsilon^{max}$, como queda ilustrado en el siguiente ejemplo:

Operación (IV)

Seguro vitalicio

Edad del partícipe: $x = 50$ años.

Diferimiento del seguro $d_s = 15$

Cuantía periódica y anual $\alpha^s = 1$

Recargo del reasegurador $\lambda^R = 0$

$Ip = 0.04$

$Ir = 0.08$

ϵ^t	λ^{ϵ^t}	Π^{ϵ^t}	$\Pi^{R,A}$	$K^A(\epsilon^t)$	$VCT(\epsilon^t)$
0.00000	0.99373	0.54448	−0.11693	0.39978	0.42756
0.01855	0.91705	0.52354	−0.10855	0.39978	0.41499
0.03844	0.84332	0.50340	−0.10050	0.39978	0.40290
0.05973	0.77242	0.48404	−0.09276	0.39978	0.39128
0.08247	0.70425	0.46543	−0.08532	0.39978	0.38010
0.10670	0.63870	0.44752	−0.07816	0.39978	0.36936
0.13247	0.57568	0.43031	−0.07128	0.39978	0.35903
0.15980	0.51507	0.41376	−0.06467	0.39978	0.34909
0.18869	0.45680	0.39785	−0.05830	0.39978	0.33954
0.21913	0.40077	0.38255	−0.05219	0.39978	0.33036
0.25108	0.34689	0.36783	−0.04631	0.39978	0.32153
0.28447	0.29509	0.35368	−0.04065	0.39978	0.31304
0.31918	0.24528	0.34008	−0.03521	0.39978	0.30487
0.35507	0.19738	0.32700	−0.02998	0.39978	0.29702
0.39194	0.15133	0.31442	−0.02495	0.39978	0.28947
0.42954	0.10705	0.30233	−0.02012	0.39978	0.28221
0.46757	0.06447	0.29070	−0.01547	0.39978	0.27523
0.50538	0.02353	0.27952	−0.01100	0.39978	0.26852
0.54225	−0.01584	0.26877	−0.00670		0.26207

4-2.3 REASEGURO DEL PERCENTIL. ANALISIS DE LA PRIMA DE REASEGURO CON RESPECTO A LA TEMPORALIDAD DE LA OPERACION

A continuación ilustraremos la relación entre la temporalidad de la operación m_s y la prima de reaseguro en la modalidad de reaseguro del percentil, mediante tres ejemplos que se difereciarán en la temporalidad de la operación. Para cada ejemplo calcularemos: el número de períodos b^{ϵ^t}, la prima pura de la operación Π, el recargo de seguridad del plan λ^{ϵ^t}, la prima del plan recargada Π^{ϵ^t}, la prima de reaseguro Π^R, y la prima ajustada de reaseguro $\Pi^{R,A}$.

Seguro diferido temporal

Diferimiento de la operación $d_s = 5$

Nivel de riesgo a reasegurar $\epsilon^t = 0.09$

Cuantía periódica y anual $\alpha^s = 1$

$Ip = 0.09$

$Ir = 0.09$

Temporalidad de la operación $m_s = 5$

b^{ϵ^t}	Π	λ^{ϵ^t}	Π^{ϵ^t}	Π^R	$\Pi^{R,A}$
4	0.0608	6.24950	0.44101	0.00942	−0.38018

Si mantenemos la características técnicas de la operación y aumentamos la temporalidad en 20 términos: $m_s = 20$

b^{ϵ^t}	Π	λ^{ϵ^t}	Π^{ϵ^t}	Π^R	$\Pi^{R,A}$
4	0.1867	1.36204	0.44101	0.00942	−0.25430

Si aumentamos la temporalidad en 43 términos: $m_s = 43$ (Seguro vitalicio a partir del diferimiento).

b^{ϵ}	Π	λ^{ϵ^t}	Π^{ϵ^t}	Π^R	$\Pi^{R,A}$
4	0.2066	1.13479	0.44101	0.00942	−0.23443

Si pretendemos que el reaseguro cubra el nivel de riesgo $\epsilon^t = 0.09$, entonces éste sólo intervendrá si el partícipe vive a lo sumo cuatro períodos enteros a partir del diferimiento, $b^{\epsilon^t} = 4$, ya que si fallece con posterioridad a este plazo, el plan ya será autosuficiente.

Por consiguiente, sea cual sea la temporalidad de la operación , siempre y cuando ésta sea mayor que cuatro, la prima de reaseguro que garantiza el nivel de riesgo $\epsilon^t = 0.09$ siempre será la misma. En nuestro ejemplo podemos comprobar como la prima de reaseguro es la misma para las tres temporalidades estudiadas $\Pi^R = 0.00942$.

Respecto a la prima recargada o percentil que garantiza el nivel de solvencia $1-\epsilon^t$, (en nuestro caso $1-0.09 = 0.91$) es también independiente de la temporalidad, ya que ésta no incorpora riesgo al mantener b^{ϵ^t} constante (recordemos que la fórmula que nos permite calcular el percentil viene dada por: $\mathrm{Per}_{\epsilon^t}[L_i^*] = \Pi^{\epsilon} = \alpha^s V^{d_s+b^{\epsilon^t}+1/2} - \Pi$). En nuestro caso $\Pi^{\epsilon^t} = 0.44101$.

Esta cincunstancia hace que el recargo de seguridad λ^{ϵ^t} sea mayor cuanto más pequeña sea la temporalidad, ya que cada vez que disminuye ésta, el recargo de seguridad ha de aplicarse a una prima pura cada vez más pequeña para obtener el mismo percentil.

En nuestro caso si la temporalidad $m_s = 5$, la prima pura de la operación $\Pi = 0.0608$, por lo que $\lambda^{\epsilon^t} = 6.24950$, para que el percentil $\Pi^{\epsilon^t} = 0.44101$.

Si la temporalidad de la operación $m_s = 20$, la prima pura de la operación será mayor a la anterior $\Pi = 0.1867$, y por tanto el percentil se consigue con un recargo se seguridad más pequeño $\lambda^{\epsilon^t} = 1.36204$.

La misma conclusión obtenemos si la temporalidad de la operación $m_s = 43$ términos, donde la prima pura $\Pi = 0.2066$, consiguiéndose el percentil $\Pi^{\epsilon^t} = 0.44101$

con un recargo de seguridad más pequeño que en los casos anteriores $\lambda^{c^t} = 1.13479$.

Respecto a la prima ajustada de reaseguro, ésta es más pequeña (más negativa) conforme disminuye la temporalidad de la operación, debido a la reducción en el beneficio esperado cedido al reasegurador.

Por tanto, cuando tenemos una operación de seguro a prima única y de términos constantes, el coste de la operación $(\Pi^{c^t} + \Pi^R)$, es independiente de la temporalidad m_s siempre y cuando $m_s > b^{c^t}$. Esto supone que podamos añadir gratuitamente prestaciones de seguro de la misma cuantía que las que ya tenía la operación.

4-24 REASEGURO DE DIFERENCIA DE SINIESTRALIDAD. ANALISIS DE LA ESTRATEGIA OPTIMA (NO HAY REPARTO DE BENEFICIOS)

En este apartado estudiamos la estrategia óptima para el caso de una seguro diferido y temporal donde el margen de solvencia viene dado por un % de las provisiones matemáticas.

Supongamos un seguro con las siguientes características:

Operación (I)

Seguro diferido hasta la jubilación y vitalicio.

Edad del partícipe: $x = 60$ años.

Edad de jubilación $x_{jub} = 65$ años.

Recargo del reasegurador $\lambda^R = 0$

Cuantía periódica y anual $\alpha^s = 1$

Reservas de sovencia = 4% de las provisiones matemáticas

$Ip = 0.09$

$Ir = 0.09$

En este caso, al ser la operación diferida, la obtención del recargo óptimo que minimiza el valor actual del coste total tanto para reasegurador tipo A como para el tipo B, resulta inmediato a través de la función K, cuyo valor, al ser $\lambda^R = 0$ y $Ip = Ir$, viene dado por:

$$K(\lambda_t) = \left(\frac{1+Ip}{1+Ir}\right) P_x(1+\lambda^R) = P_x = P_{60} = 0.985987 < 1$$

Debemos de tener en cuenta que si el reaseguro es del tipo A, la función $K(\lambda_t)$ sólo estará definida en el intervalo $[0\ \lambda_m]$, siendo en este caso λ_m:

$$\lambda_m = \frac{V_{i,1}(1.04)}{\Pi(1.09)} - 1 = 0.05469$$

De todas formas, al ser $K(\lambda_t) < 1$ la política que minimiza el coste total de la operación vendrá dada por $\lambda^* = 0$, tanto para el reaseguro tipo B como para el reaseguro tipo A.

A continuación comprobaremos este resultado calculando para cada recargo compredido entre 0% y el 24%, la prima recargada del plan Π^{Rec}, la prima de reaseguro $\Pi^R(A)$ asociada al tipo A, el valor actual del coste total $VCT(\lambda_t)(A)$ asociada al reaseguro tipo A, la prima de reaseguro $\Pi^R(B)$ asociada al reaseguro tipo B y el valor actual del coste total $VCT(\lambda_t)(B)$ asociada al reaseguro tipo B.

λ_t	Π^{Rec}	$\Pi^R(A)$	$VCT(\lambda_t)(A)$	$\Pi^R(B)$	$VCT(\lambda_t)(B)$
0.000000	0.206582	0.077932	0.284515	0.018078	0.224661
0.010000	0.208648	0.075895	0.284543	0.016041	0.224690
0.020000	0.210714	0.073858	0.284572	0.014004	0.224718
0.030000	0.212780	0.071822	0.284601	0.011968	0.224747
0.040000	0.214846	0.069785	0.284630	0.009931	0.224776
0.050000	0.216912	0.067748	0.284659	0.007894	0.224805
0.060000	0.218977	0.065727	0.284705	0.005857	0.224834
0.070000	0.221043	0.063722	0.284765	0.003820	0.224863
0.080000	0.223109	0.061746	0.284855	0.001783	0.224892
0.090000	0.225175	0.059775	0.284950	−0.000254	0.224921
0.100000	0.227241	0.057840	0.285080	−0.002291	0.224950
0.110000	0.229306	0.055904	0.285211	−0.004327	0.224979
0.120000	0.231372	0.054008	0.285380	−0.006364	0.225008
0.130000	0.233438	0.052111	0.285549	−0.008401	0.225037
0.140000	0.235504	0.051068	0.286572	−0.010438	0.225066
0.150000	0.237570	0.050348	0.287917	−0.012475	0.225095
0.160000	0.239636	0.049627	0.289263	−0.014512	0.225124
0.170000	0.241701	0.048924	0.290625	−0.016549	0.225153
0.180000	0.243767	0.048282	0.292049	−0.018586	0.225182
0.190000	0.245833	0.047640	0.293473	−0.020622	0.225211
0.200000	0.247899	0.046998	0.294897	−0.022659	0.225240
0.210000	0.249965	0.046356	0.296321	−0.024696	0.225268
0.220000	0.252031	0.045714	0.297744	−0.026733	0.225297
0.230000	0.254096	0.045072	0.299168	−0.028770	0.225326
0.240000	0.256162	0.044430	0.300592	−0.030807	0.225355

Podemos comprobar que para ambos tipos de reaseguro, el coste total se minimiza no recargando la prima pura del plan, a pesar de que la prima de reaseguro para el tipo B sea negativa para valores del recargo mayores al 9%.

A diferencia de lo que sucede con la renta de jubilación, podemos observar como la prima de reaseguro del tipo A es siempre mayor a la prima de reaseguro del tipo B, para cualquier valor del recargo se seguridad del plan.

Esta estrategia sólo se verá modificada si variamos el tipo de interés del plan y/o el recargo del reasegurador en tales magnitudes que $K(\lambda_t) > 1$

Para ilustrar esta idea, si a la operación anterior le disminuimos el tipo interés del reaseguro $Ir = 0.06$, la estrategia óptima como a continuación veremos variará sustancialmente.

Respecto al reaseguro tipo A, al ser el valor de $K(\lambda_t) = \frac{1.09}{1.06} P_{60} = 1.013802$ la estrategia óptima recargo reaseguro tendrá que obtenerse empíricamente, lo que si podremos adelantar, es que el recargo óptimo será mayor a $\lambda_m = 0.05469$

Sin embargo, para el reaseguro tipo B podremos afirmar que cuanto mayor sea el recargo de seguridad del plan, menor será el coste total de la operación.

A continuación comprobamos estas conclusiones calculando los valores de las primas de reaseguro y valores actuales del coste total para esta nueva situación:

λ_t	Π^{Rec}	$\Pi^R(A)$	$VCT(\lambda_t)(A)$	$\Pi^R(B)$	$VCT(\lambda_t)(B)$
0.000000	0.206582	0.094937	0.301519	0.013399	0.219981
0.010000	0.208648	0.092842	0.301490	0.011304	0.219952
0.020000	0.210714	0.090748	0.301462	0.009209	0.219924
0.030000	0.212780	0.088653	0.301433	0.007115	0.219895
0.040000	0.214846	0.086559	0.301404	0.005020	0.219866
0.050000	0.216912	0.084464	0.301375	0.002926	0.219837
0.060000	0.218977	0.082356	0.301333	0.000831	0.219809
0.070000	0.221043	0.080235	0.301278	−0.001263	0.219780
0.080000	0.223109	0.078094	0.301203	−0.003358	0.219751
0.090000	0.225175	0.075949	0.301123	−0.005452	0.219723
0.100000	0.227241	0.073784	0.301025	−0.007547	0.219694
0.110000	0.229306	0.071620	0.300926	−0.009641	0.219665
0.120000	0.231372	0.069439	0.300811	−0.011736	0.219637
0.130000	0.233438	0.067258	0.300696	−0.013830	0.219608
0.140000	0.235504	0.065933	0.301437	−0.015925	0.219579
0.150000	0.237570	0.064931	0.302501	−0.018019	0.219550
0.160000	0.239636	0.063929	0.303564	−0.020114	0.219522
0.170000	0.241701	0.062954	0.304655	−0.022208	0.219493
0.180000	0.243767	0.062076	0.305843	−0.024303	0.219464
0.190000	0.245833	0.061198	0.307031	−0.026397	0.219436
0.200000	0.247899	0.060320	0.308219	−0.028492	0.219407
0.210000	0.249965	0.059442	0.309406	−0.030586	0.219378
0.220000	0.252031	0.058564	0.310594	−0.032681	0.219350
0.230000	0.254096	0.057686	0.311782	−0.034776	0.219321
0.240000	0.256162	0.056808	0.312970	−0.036870	0.219292

Podemos comprobar que la estrategia óptima para el reaseguro tipo A viene dada por el recargo $\lambda_* = 0.1300$ con un coste total de $VCT(\lambda_*)(A) = 0.300696$.

Para el reaseguro tipo B, cuanto mayor sea el recargo de seguridad del plan, menor será el coste total de la operación.

A continuación estudiaremos la operación inicial (Operación(I)) pero suponiendo que el margen de solvencia viene dado por las reservas de solvencia RS^{ϵ^t}. En este caso, al igual que sucede con las operaciones de rentas, la estrategia óptima no podrá determinarse a priori, pues desconocemos la expresión analítica de la función K.

Desarrollaremos el estudio de la operación calculando para cada valor del nivel de insolvencia ϵ^t comprendido entre 0 y 0.35, el recago de seguridad asociado λ^{ϵ^t}, la prima recargada del plan Π^{Rec}, la prima de reaseguro tipo A, $\Pi^R(A)$, el valor actual del coste total asociado al reaseguro tipo A, $VCT(\lambda^{\epsilon^t})(A)$, la prima de reaseguro tipo B, $\Pi^R(B)$, y el valor actual del coste total asociado al reaseguro tipo B, $VCT(\lambda^{\epsilon^t})(B)$.

ϵ^t	λ^{ϵ^t}	Π^{Rec}	$\Pi^R(A)$	$VCT(\lambda^{\epsilon^t})(A)$	$\Pi^R(B)$	$VCT(\lambda^{\epsilon^t})(B)$
0.000000	2.013429	0.622521	0.000000	0.622521	−0.364970	0.257551
0.050000	1.536343	0.523964	0.003023	0.526986	−0.274482	0.249482
0.100000	1.134789	0.441010	0.009422	0.450432	−0.198320	0.242690
0.150000	0.796809	0.371189	0.045556	0.416745	−0.132999	0.238190
0.200000	0.648449	0.340541	0.023853	0.364393	−0.106077	0.234464
0.250000	0.387466	0.286626	0.054273	0.340900	−0.055637	0.230990
0.300000	0.272905	0.262960	0.042317	0.305277	−0.034848	0.228112
0.350000	0.071379	0.221328	0.068705	0.290033	0.004727	0.226055

Podemos observar que cuanto menos recarguemos la prima del plan, menor será el valor actual del coste total de la operación para los dos tipos de reaseguro. Por tanto la estrategia óptima para este caso particular coincide con el caso en el que el margen de solvencia era un % de la provisión matemática.

4-2.5 REASEGURO DE DIFERENCIA DE SINIESTRALIDAD. ANALISIS DE LA ESTRATEGIA OPTIMA (HAY REPARTO DE BENEFICIOS)

En este apartado realizaremos el mismo estudio para las mismas operaciones que en el apartado anterior, pero suponiendo que el reasegurador distribuye el posible beneficio al plan.

Supongamos la operación (I) del apartado anterior:

Renta de jubilación prepagable.

Edad del partícipe: $x = 60$ años.

Edad de jubilación $x_{jub} = 65$ años.

Recargo del reasegurador $\lambda^R = 0$

Cuantía periódica y anual $\alpha^s = 1$

Margen de sovencia $= 4\%$ de las provisiones matemáticas

$Ip = 0.09$

$Ir = 0.09$

En este caso al ser $Ip = Ir$, la prima de reaseguro ajustada para el tipo A y el tipo B coinciden para cualquier recargo.

La obtención del recargo óptimo que minimiza el valor actual del coste total es inmediato a través de la función $K^A(\lambda_t)$, cuyo valor, al ser $\lambda^R = 0$ y $Ip = Ir$ viene dado por:

$$K^A(\lambda_t) = \left(\frac{1+Ip}{1+Ir}\right)^{1/2} \left[P_x \left(\frac{1+Ip}{1+Ir}\right)^{1/2} + q_x\right] (1+\lambda^R) = 1$$

Por tanto, el recargo de seguridad será independiente del valor actual del coste total.

Este resultado puede comprobarse calculando para cada recargo compredido entre 0% y el 15%, la prima recargada del plan Π^{Rec}, la prima de reaseguro ajustada $\Pi^{R,A}$, y el valor actual del coste total $VCT(\lambda_t)$:

λ_t	Π^{Rec}	$\Pi^{R,A}$	$VCT(\lambda_t)$
0.000000	0.206582	0.000000	0.206582
0.010000	0.208648	−0.002066	0.206582
0.020000	0.210714	−0.004132	0.206582
0.030000	0.212780	−0.006197	0.206582
0.040000	0.214846	−0.008263	0.206582
0.050000	0.216912	−0.010329	0.206582
0.060000	0.218977	−0.012395	0.206582
0.070000	0.221043	−0.014461	0.206582
0.080000	0.223109	−0.016527	0.206582
0.090000	0.225175	−0.018592	0.206582
0.100000	0.227241	−0.020658	0.206582
0.110000	0.229306	−0.022724	0.206582
0.120000	0.231372	−0.024790	0.206582
0.130000	0.233438	−0.026856	0.206582
0.140000	0.235504	−0.028922	0.206582
0.150000	0.237570	−0.030987	0.206582

Podemos observar que $VCT(\lambda_t) = 0.206582$ sea cual sea el valor del recargo.

Esta estrategia óptima se verá modificada si variamos Ip, Ir, o λ^R. Por ejemplo, si disminuimos el tipo de interés del reaseguro $Ir = 0.6$, la estrategia óptima de la operación será distinta como puede comporbarse al calcular el nuevo valor de $K^A(\lambda_t)$:

$$K(\lambda_t) = \left(\frac{1+Ip}{1+Ir}\right)^{1/2}\left[P_x\left(\frac{1+Ip}{1+Ir}\right)^{1/2} + q_x\right](1+\lambda^R) = 1.0281 > 1$$

En este caso, al ser distintos Ip e Ir, el reaseguro tipo A dará lugar a primas más grandes que el reaseguro tipo B, estando la función K definida para el reaseguro tipo A sólo para aquellos valores del recargo de seguridad menores a λ_m:

$$\lambda_m = \frac{V_{i,1}(1.04)}{\Pi(1.09)} - 1 = 0.05469$$

Por consiguiente, para el reaseguro tipo A podemos afirmar que el recargo óptimo será mayor que λ_m, y para el reaseguro tipo B el coste total de la operación será siempre inversamente proporcional al recargo de seguridad del plan.

A continuación comprobaremos estos resultados calculando para cada recargo compredido entre 0% y el 24%, la prima recargada del plan Π^{Rec}, la prima de reaseguro ajustada asociada al tipo A, $\Pi^{R,A}(A)$, el valor actual del coste total asociada al reaseguro tipo A, $VCT(\lambda_t)(A)$, la prima de reaseguro ajustada asociada al reaseguro tipo B, $\Pi^{R,A}(B)$, y el valor actual del coste total asociada al reaseguro tipo B, $VCT(\lambda_t)(B)$

λ_t	Π^{Rec}	$\Pi^{R,A}(A)$	$VCT(\lambda_t)(A)$	$\Pi^{R,A}(B)$	$VCT(\lambda_t)(B)$
0.000000	0.206582	−0.055124	0.151459	−0.006107	0.200476
0.010000	0.208648	−0.057248	0.151401	−0.008231	0.200418
0.020000	0.210714	−0.059372	0.151343	−0.010355	0.200359
0.030000	0.212780	−0.061495	0.151284	−0.012478	0.200301
0.040000	0.214846	−0.063619	0.151226	−0.014602	0.200243
0.050000	0.216912	−0.065743	0.151168	−0.016726	0.200185
0.060000	0.218977	−0.067898	0.151080	−0.018850	0.200127
0.070000	0.221043	−0.070080	0.150963	−0.020974	0.200069
0.080000	0.223109	−0.072315	0.150794	−0.023098	0.200011
0.090000	0.225175	−0.074561	0.150614	−0.025222	0.199953
0.100000	0.227241	−0.076863	0.150378	−0.027346	0.199895
0.110000	0.229306	−0.079166	0.150141	−0.029469	0.199837
0.120000	0.231372	−0.081529	0.149844	−0.031593	0.199779
0.130000	0.233438	−0.083892	0.149546	−0.033717	0.199721
0.140000	0.235504	−0.087131	0.148373	−0.035841	0.199663
0.150000	0.237570	−0.090701	0.146868	−0.037965	0.199605
0.160000	0.239636	−0.094272	0.145364	−0.040089	0.199547
0.170000	0.241701	−0.097842	0.143859	−0.042213	0.199489
0.180000	0.243767	−0.101413	0.142354	−0.044337	0.199431
0.190000	0.245833	−0.104983	0.140850	−0.046461	0.199373
0.200000	0.247899	−0.108554	0.139345	−0.048584	0.199314
0.210000	0.249965	−0.112124	0.137840	−0.050708	0.199256
0.220000	0.252031	−0.115695	0.136336	−0.052832	0.199198
0.230000	0.254096	−0.119265	0.134831	−0.054956	0.199140
0.240000	0.256162	−0.122836	0.133327	−0.057080	0.199082

Ahora estudiaremos la operación (I) pero suponiendo que el margen de solvencia viene dado por las reservas de solvencia RS^{ϵ^t}. En este caso la estrategia óptima no podrá determinarse a priori, pues desconocemos la expresión analítica de la función

K.

Desarrollaremos el estudio de la operación, calculando para cada valor del nivel de insolvencia ϵ^t comprendido entre 0 y 0.35, el recago de seguridad asociado λ^{ϵ^t}, la prima recargada del plan Π^{Rec}, la prima ajustada de reaseguro $\Pi^{R,A}$, (en este caso al ser $Ip = Ir$ coincidirá para los dos tipo de reaseguro) y el valor actual del coste total $VCT(\lambda^{\epsilon^t})$

ϵ^t	λ^{ϵ^t}	Π^{Rec}	Π^R	$VCT(\lambda^{\epsilon^t})$
0.000000	2.013429	0.622521	−0.415939	0.206582
0.050000	1.536343	0.523964	−0.317381	0.206582
0.100000	1.134789	0.441010	−0.234427	0.206582
0.150000	0.796809	0.371189	−0.164607	0.206582
0.200000	0.648449	0.340541	−0.133958	0.206582
0.250000	0.387466	0.286626	−0.080044	0.206582
0.300000	0.272905	0.262960	−0.056377	0.206582
0.350000	0.071379	0.221328	−0.014746	0.206582

En este caso la estrategia óptima y el coste de la operación coincide con el caso en el que el margen de solvencia es una proporción de la provisión matemática.

ANEXO 4-3

ANEXO 4-3 OPERACION DE RENTA Y SEGURO CON CUANTIAS CONSTANTES A PRIMA UNICA

En este anexo ilustraremos el efecto que tiene sobre la prima de reaseguro y sobre la estrategia óptima, la incorporación de un seguro hasta la jubilación del partícipe a una renta de jubilación. El análisis lo realizaremos en las dos modalidades de raseguro estudiadas.

Consideraremos conjuntamente dentro de cada modalidad el hecho de que pueda haber o no reparto de beneficios.

4-3.1 REASEGURO DEL PERCENTIL

Consideremos la siguiente operación:

Renta de jubilación prepagable.

Edad de jubilación: $x = 65$ años.

Edad del partícipe: $x = 50$ años.

Cuantía periódica y anual $\alpha^r = 1$

$Ip = 0.06$

$Ir = 0.09$

A continuación determinaremos para cada valor de ϵ^t comprendido entre 0 y 0.58928, el recargo de seguridad del plan λ^ϵ, la prima recargada del plan Π^{ϵ^t}, la prima de reaseguro Π^R, la función $K(\epsilon^t)$, la prima ajustada de reaseguro $\Pi^{R,A}$ y la función $K^A(\epsilon^t)$:

ϵ^t	λ^{ϵ^t}	Π^{ϵ^t}	Π^R	$K(\epsilon^t)$	$\Pi^{R,A}$	$K^A(\epsilon^t)$
0.00000	0.98679	6.73383	0.00000	0.00001	−1.97515	0.49926
0.00003	0.97550	6.69556	0.00000	0.00003	−1.95604	0.49926
0.00012	0.96353	6.65499	0.00000	0.00008	−1.93579	0.49926
0.00037	0.95084	6.61199	0.00000	0.00020	−1.91432	0.49927
0.00088	0.93740	6.56641	0.00001	0.00042	−1.89156	0.49928
0.00180	0.92314	6.51809	0.00003	0.00078	−1.86744	0.49929
0.00325	0.90803	6.46688	0.00007	0.00132	−1.84186	0.49932
0.00533	0.89201	6.41259	0.00015	0.00207	−1.81476	0.49937
0.00813	0.87503	6.35504	0.00027	0.00307	−1.78602	0.49944
0.01170	0.85704	6.29404	0.00045	0.00434	−1.75556	0.49954
0.01613	0.83796	6.22939	0.00073	0.00597	−1.72326	0.49969
0.02156	0.81774	6.16085	0.00114	0.00806	−1.68901	0.49988
0.02829	0.79630	6.08820	0.00173	0.01073	−1.65269	0.50015
0.03664	0.77358	6.01119	0.00255	0.01413	−1.61418	0.50049
0.04692	0.74950	5.92956	0.00371	0.01841	−1.57332	0.50095
0.05944	0.72397	5.84303	0.00530	0.02374	−1.52998	0.50153
0.07454	0.69690	5.75131	0.00748	0.03030	−1.48398	0.50229
0.09252	0.66822	5.65409	0.01042	0.03827	−1.43514	0.50324
0.11364	0.63781	5.55104	0.01437	0.04779	−1.38328	0.50444
0.13802	0.60558	5.44180	0.01959	0.05896	−1.32818	0.50593
0.16558	0.57142	5.32600	0.02641	0.07176	−1.26959	0.50775
0.19599	0.53520	5.20326	0.03522	0.08603	−1.20727	0.50995
0.22849	0.49682	5.07316	0.04642	0.10165	−1.14092	0.51257
0.26256	0.45613	4.93525	0.06043	0.11869	−1.07023	0.51565
0.29811	0.41299	4.78906	0.07778	0.13714	−0.99485	0.51921
0.33499	0.36728	4.63410	0.09904	0.15694	−0.91440	0.52332
0.37279	0.31881	4.46985	0.12481	0.17784	−0.82844	0.52799
0.41083	0.26744	4.29574	0.15578	0.19962	−0.73651	0.53325
0.44843	0.21299	4.11118	0.19262	0.22214	−0.63810	0.53913
0.48530	0.15527	3.91555	0.23608	0.24532	−0.53263	0.54565
0.52119	0.09409	3.70818	0.28695	0.26907	−0.41947	0.55283
0.55590	0.02923	3.48837	0.34609	0.29330	−0.29796	0.56068
0.58928	0.00000	3.38930	0.37510		−0.16732	

A continuación, incorporamos un seguro unitario hasta la jubilación del partícipe, ($\delta = 1$), siendo [13], las características de la nueva operación las siguientes:

Renta de jubilación prepagable y seguro temporal hasta la jubilación del partícipe.

Edad de jubilación: $x = 65$ años.

Edad del partícipe: $x = 50$ años.

Cuantía periódica y anual de la renta $\alpha^r = 1$

Cuantía periódica y anual del seguro $\alpha^s = 1$

$Ip = 0.06$

$Ir = 0.09$

[13]Recordemos que $\delta = \frac{\alpha^s}{\alpha^r}$

ϵ^t	λ^{ϵ^t}	Π^{ϵ^t}	Π^R	$K(\epsilon^t)$	$\Pi^{R,A}$	$K^A(\epsilon^t)$
0.00000	0.93113	6.73383	0.00000	0.00001	−1.89623	0.49926
0.00003	0.92016	6.69556	0.00000	0.00003	−1.87712	0.49926
0.00012	0.90852	6.65499	0.00000	0.00008	−1.85686	0.49926
0.00037	0.89619	6.61199	0.00000	0.00020	−1.83540	0.49927
0.00088	0.88312	6.56641	0.00001	0.00042	−1.81264	0.49928
0.00180	0.86926	6.51809	0.00003	0.00078	−1.78851	0.49929
0.00325	0.85458	6.46688	0.00007	0.00132	−1.76294	0.49932
0.00533	0.83901	6.41259	0.00015	0.00207	−1.73584	0.49937
0.00813	0.82251	6.35504	0.00027	0.00307	−1.70710	0.49944
0.01170	0.80501	6.29404	0.00045	0.00434	−1.67663	0.49954
0.01613	0.78647	6.22939	0.00073	0.00597	−1.64433	0.49969
0.02156	0.76681	6.16085	0.00114	0.00806	−1.61009	0.49988
0.02829	0.74598	6.08820	0.00173	0.01073	−1.57377	0.50015
0.03664	0.72389	6.01119	0.00255	0.01413	−1.53525	0.50049
0.04692	0.70048	5.92956	0.00371	0.01841	−1.49440	0.50095
0.05944	0.67567	5.84303	0.00530	0.02374	−1.45105	0.50153
0.07454	0.64937	5.75131	0.00748	0.03030	−1.40505	0.50229
0.09252	0.62149	5.65409	0.01042	0.03827	−1.35622	0.50324
0.11364	0.59193	5.55104	0.01437	0.04779	−1.30436	0.50444
0.13802	0.56060	5.44180	0.01959	0.05896	−1.24925	0.50593
0.16558	0.52740	5.32600	0.02641	0.07176	−1.19067	0.50775
0.19599	0.49220	5.20326	0.03522	0.08603	−1.12835	0.50995
0.22849	0.45488	5.07316	0.04642	0.10165	−1.06200	0.51257
0.26256	0.41533	4.93525	0.06043	0.11869	−0.99131	0.51565
0.29811	0.37341	4.78906	0.07778	0.13714	−0.91593	0.51921
0.33499	0.32897	4.63410	0.09904	0.15694	−0.83548	0.52332
0.37279	0.28187	4.46985	0.12481	0.17784	−0.74952	0.52799
0.41083	0.23194	4.29574	0.15578	0.19962	−0.65759	0.53325
0.44843	0.17901	4.11118	0.19262	0.22214	−0.55918	0.53913
0.48530	0.12291	3.91555	0.23608	0.24532	−0.45370	0.54565
0.52119	0.06344	3.70818	0.28695	0.26907	−0.34055	0.55283
0.55590	0.00040	3.48837	0.34609	0.29330	−0.21904	0.56068
0.58928	0.00000	3.38930	0.37510		−0.08840	

Podemos hacer las siguientes observaciones:

- El valor del percentil o prima recargada del plan Π^{ϵ^t}, la prima de reaseguro Π^R, la función $K(\epsilon^t)$ y la función $K^A(\epsilon^t)$, no se ven alterados por la introducción del seguro. Por consiguiente, la estrategia óptima de la operación mixta coincide con la estrategia óptima de la renta de jubilación.

En este caso, la incoporación de seguro a la renta resulta gratuito desde el punto de vista del coste de la operación.

- El valor del recargo de seguridad λ^{ϵ^t} es más pequeño en la operación mixta, ya que éste se aplica a una prima pura mayor.

- La prima de reaseguro ajustada $\Pi^{R,A}$ es menos negativa en la operación mixta que en la operación de renta, como consecuencia del menor beneficio esperado repartido al reasegurador.

La incorporación de un seguro a una renta de jubilación resultará siempre gratuito si δ satisface la condición:

$$\delta \leq \xi_i^p(\epsilon^{max})(1 + Ip)^{1/2} = 3.8303$$

Sin embargo, si δ supera este valor, entonces no podemos garantizar esta implicación para todos los riesgos susceptibles de ser reasegurados. Esta circunstancia queda reflejada en el siguiente ejemplo donde $\alpha^s = 5$ y por tanto $\delta = 5$:

Renta de jubilación prepagable y seguro temporal hasta la jubilación del partícipe.

Edad de jubilación: $x = 65$ años.

Edad del partícipe: $x = 50$ años.

Cuantía periódica y anual de la renta $\alpha^r = 1$

Cuantía periódica y anual del seguro $\alpha^s = 5$

$Ip = 0.06$

$Ir = 0.09$

ϵ^t	λ^{ϵ^t}	Π^{ϵ^t}	Π^R	$K(\epsilon^t)$	$\Pi^{R,A}$	$K^A(\epsilon^t)$
0.00000	0.73654	6.73383	0.00000	0.00001	−1.58054	0.49926
0.00003	0.72667	6.69556	0.00000	0.00003	−1.56143	0.49926
0.00012	0.71621	6.65499	0.00000	0.00008	−1.54118	0.49926
0.00037	0.70512	6.61199	0.00000	0.00020	−1.51971	0.49927
0.00088	0.69337	6.56641	0.00001	0.00042	−1.49695	0.49928
0.00180	0.68091	6.51809	0.00003	0.00078	−1.47283	0.49929
0.00325	0.66770	6.46688	0.00007	0.00132	−1.44726	0.49932
0.00533	0.65370	6.41259	0.00015	0.00207	−1.42015	0.49937
0.00813	0.63886	6.35504	0.00027	0.00307	−1.39141	0.49944
0.01170	0.62313	6.29404	0.00045	0.00434	−1.36095	0.49954
0.01613	0.60646	6.22939	0.00073	0.00597	−1.32865	0.49969
0.02156	0.58878	6.16085	0.00114	0.00806	−1.29440	0.49988
0.02829	0.57005	6.08820	0.00173	0.01073	−1.25809	0.50015
0.03664	0.55019	6.01119	0.00255	0.01413	−1.21957	0.50049
0.04692	0.52914	5.92956	0.00371	0.01841	−1.17871	0.50095
0.05944	0.50682	5.84303	0.00530	0.02374	−1.13537	0.50153
0.07454	0.48317	5.75131	0.00748	0.03030	−1.08937	0.50229
0.09252	0.45810	5.65409	0.01042	0.03827	−1.04054	0.50324
0.11364	0.43152	5.55104	0.01437	0.04779	−0.98867	0.50444
0.13802	0.40335	5.44180	0.01959	0.05896	−0.93357	0.50593
0.16558	0.37349	5.32600	0.02641	0.07176	−0.87499	0.50775
0.19599	0.34184	5.20326	0.03522	0.08603	−0.81266	0.50995
0.22849	0.30828	5.07316	0.04642	0.10165	−0.74632	0.51257
0.26256	0.27272	4.93525	0.06043	0.11869	−0.67563	0.51565
0.29811	0.25239	4.85643	0.06979	0.12426	−0.63498	0.51565
0.30376	0.23502	4.78906	0.07816	0.14271	−0.60025	0.51921
0.34064	0.19506	4.63410	0.10027	0.16251	−0.51979	0.52332
0.37844	0.18150	4.58154	0.10882	0.16842	−0.49228	0.52332
0.38460	0.15270	4.46985	0.12763	0.18932	−0.43383	0.52799
0.42264	0.11463	4.32220	0.15558	0.19558	−0.35588	0.52799
0.42934	0.10780	4.29574	0.16076	0.21735	−0.34191	0.53325
0.46694	0.06021	4.11118	0.20087	0.23988	−0.24349	0.53913
0.50381	0.05153	4.07755	0.20894	0.24650	−0.22536	0.53913
0.51111	0.00976	3.91555	0.24887	0.26968	−0.13802	0.54565
0.54700	0.00000	3.84675	0.26742		−0.10048	

Podemos observar como el riesgo del plan ϵ cuando es mayor de 0.29811 [14] toma

[14] Eéste valor será más pequeño cuanto mayor sea el valor de δ

valores distintos con respecto a la operación mixta cuando $\delta = 1$.

Asi para valores de $\epsilon \leq 0.29811$, los valores de la prima recargada Π^{ϵ^t}, de la prima de reaseguro Π^R, de la función $K(\epsilon^t)$ y de la función $K^A(\epsilon^t)$ son los mismos que en el caso $\delta = 1$, debido a que para $\epsilon^t \leq 0.29811$ y para $\delta = 5$ se satisface la condición:

$$\delta \leq \mathrm{Per}_{\epsilon^t}[\xi_i^p(renta\,unitaria)](1 + Ip)^{1/2} \quad \forall \epsilon \in [0, 0.2981]$$

Sin embargo, para valores de $\epsilon^t > 0.29811$, debido al cambio en los valores de ϵ^t con respecto al caso $\delta = 1$, hace que también se produzcan cambios en los valores de $K(\epsilon^t)$ y de $K^A(\epsilon^t)$. Aún así en este caso, los cambios en los valores de dichas funciones no han alterado la estrategia óptima, ya que todos ellos siguen siendo menores que uno.

4-3.2 REASEGURO DE DIFERENCIA DE SINIESTRALIDAD

Estudiaremos qué efecto tiene sobre el coste total y sobre la estrategia óptima la incorporación de un seguro inmediato y temporal hasta la jubilación a un renta de jubilación. El estudio lo haremos sobre un ejemplo concreto, diferenciando si el margen de solvencia viene dado por un porcentaje de la provisión matemática o por las reservas de solvencia.

Supongamos en primer lugar que el margen de solvencia es un porcentaje de las provisiones matemáticas.

Consideremos la siguiente operación:

Renta de jubilación prepagable.

Edad de jubilación: $x = 65$ años.

Edad del partícipe: $x = 60$ años.

Cuantía periódica y anual $\alpha^r = 1$

Margen de solvencia: 4% de las provisiones matemáticas.

$Ip = 0.09$

$Ir = 0.09$

A continuación determinaremos para cada del recargo λ_t comprendido entre 0 y 0.24 , la prima recargada del plan Π^{Rec}, la prima de reaseguro tipo A, $\Pi^R(A)$, la prima de reaeguro tipo B, $\Pi^R(B)$ y la prima de reaseguro ajustada que en este caso coincidirán para ambos tipo de reaseguro $\Pi^{R,A}$:

λ_t	Π^{Rec}	$\Pi^R(A)$	$\Pi^R(B)$	$\Pi^{R,A}$
0.000000	4.830499	1.602531	1.602531	0.000000
0.010000	4.878804	1.554903	1.554903	−0.048305
0.020000	4.927109	1.507275	1.507275	−0.096610
0.030000	4.975414	1.459646	1.459646	−0.144915
0.040000	5.023719	1.412018	1.412018	−0.193220
0.050000	5.072024	1.364390	1.364390	−0.241525
0.060000	5.120329	1.317143	1.316762	−0.289830
0.070000	5.168634	1.270246	1.269134	−0.338135
0.080000	5.216939	1.224041	1.221506	−0.386440
0.090000	5.265244	1.177972	1.173878	−0.434745
0.100000	5.313549	1.132710	1.126250	−0.483050
0.110000	5.361854	1.087456	1.078621	−0.531355
0.120000	5.410159	1.043106	1.030993	−0.579660
0.130000	5.458464	0.998755	0.983365	−0.627965
0.140000	5.506769	0.955116	0.935737	−0.676270
0.150000	5.555074	0.911769	0.888109	−0.724575
0.160000	5.603379	0.869448	0.840481	−0.772880
0.170000	5.651684	0.827482	0.792853	−0.821185
0.180000	5.699989	0.786284	0.745225	−0.869490
0.190000	5.748294	0.745821	0.697596	−0.917795
0.200000	5.796599	0.705824	0.649968	−0.966100
0.210000	5.844904	0.666995	0.602340	−1.014405
0.220000	5.893209	0.628583	0.554712	−1.062710
0.230000	5.941514	0.591224	0.507084	−1.111015
0.240000	5.989819	0.554659	0.459456	−1.159320

Si a la operación anterior le incorporamos un seguro unitario e inmediato hasta la jubilación del partícipe, la operación quedará modificada de la siguiente forma:

Renta de jubilación prepagable y seguro inmediato y temporal hasta la jubilación.

Edad de jubilación: $x = 65$ años.

Edad del partícipe: $x = 60$ años.

Cuantía periódica y anual $\alpha^r = 1$

Cuantía periódica y anual $\alpha^s = 1$

Margen de solvencia: 4% de las provisiones matemáticas.

$Ip = 0.09$

$Ir = 0.09$

λ_t	Π^{Rec}	$\Pi^R(A)$	$\Pi^R(B)$	$\Pi^{R,A}$
0.000000	4.896149	1.540076	1.540076	0.000000
0.010000	4.945110	1.491800	1.491800	−0.048961
0.020000	4.994072	1.443525	1.443525	−0.097923
0.030000	5.043033	1.395250	1.395250	−0.146884
0.040000	5.091995	1.346974	1.346974	−0.195846
0.050000	5.140956	1.298699	1.298699	−0.244807
0.060000	5.189918	1.251024	1.250423	−0.293769
0.070000	5.238879	1.203859	1.202148	−0.342730
0.080000	5.287841	1.157122	1.153872	−0.391692
0.090000	5.336802	1.111190	1.105597	−0.440653
0.100000	5.385764	1.065503	1.057322	−0.489615
0.110000	5.434725	1.020550	1.009046	−0.538576
0.120000	5.483687	0.975840	0.960771	−0.587538
0.130000	5.532648	0.931880	0.912495	−0.636499
0.140000	5.581610	0.888520	0.864220	−0.685461
0.150000	5.630571	0.845624	0.815944	−0.734422
0.160000	5.679533	0.803731	0.767669	−0.783384
0.170000	5.728494	0.762216	0.719394	−0.832345
0.180000	5.777456	0.721674	0.671118	−0.881307
0.190000	5.826417	0.681813	0.622843	−0.930268
0.200000	5.875379	0.642568	0.574567	−0.979230
0.210000	5.924340	0.604506	0.526292	−1.028191
0.220000	5.973302	0.566940	0.478016	−1.077153
0.230000	6.022263	0.530535	0.429741	−1.126114
0.240000	6.071225	0.495008	0.381466	−1.175076

Podemos hacer las siguientes observaciones:

- Las primas de reaseguro tanto para el reaseguro tipo A como para el tipo B, asi como las primas ajustadas correspondientes (que en este caso coinciden al ser $Ip = Ir$,) son más pequeñas para cualquier regargo de seguridad del plan, que si consideramos la operación de renta aisladamente, debido a que $\alpha^r = \alpha^s$. Sin embargo si $\alpha^r < \alpha^s$, no podremos garantizar este comportamiento.

  De todas formas, en este caso concreto, àl ser la prima pura de la operación mayor en la operación mixta, el coste total asociado a cada recargo es también mayor en la operación mixta que en la operación de renta para cada nivel de recargo de seguridad. Esto es debido a que el incremento producido en la prima recargada del plan compensa la disminución de la prima de reaseguro.

  Hay que tener en cuenta que este comportamiento no es general, ya que según sea la estructura de los tipos de interés del plan y del reaseguro, puede darse el caso contrario, , es decir, la disminución en la prima de reaseguro sí compense el incremento de la prima recargada del plan, dando lugar a un coste total de la operación más pequeño. En este caso, la incorporación de un seguro a la renta de jubilación abarata la operación. A continuación ilustramos esta implicación en el siguiente ejemplo:

  Supongamos la siguiente operación:

  Renta de jubilación prepagable.

  Edad de jubilación: $x = 65$ años.

  Edad del partícipe: $x = 60$ años.

  Cuantía periódica y anual $\alpha^r = 1$

  Margen de solvencia: 4% de las provisiones matemáticas.

  $Ip = 0.09$

  $Ir = 0.06$

$\underline{\lambda_t}$	$\underline{\Pi^{Rec}}$	$\underline{\Pi^R}$	Coste total
00000	4.830499	2.144836	6.975335

Si agregamos a la renta un seguro de cuantía unitaria, inmediato y temporal hasta la jubilación:

$\underline{\lambda_t}$	$\underline{\Pi^{Rec}}$	$\underline{\Pi^R}$	Coste total
00000	4.896149	2.076715	6.972863

Podemos observar que la disminución en la prima de reaseguro (coinciden el tipo A y el tipo B) ocasionada por la incorporación del seguro, es mayor al incremento producido en la prima pura de la operación.

- Respecto a la estrategia óptima en el caso de no reparto de beneficios, al ser $\alpha^s = 1 < Z_{i,1}(1 + Ip)^{-.5} = 5.111$ la expresión analítica de la función K es la misma que la de la renta y por tanto la estrategia óptima coincide.

  Si hay reparto de beneficios, al ser $Ip = Ir$, entonces la estrategia óptima, al igual que sucede con la renta, siempre será independiente del recargo de seguridad del plan.

A continuación realizaremos un estudio paralelo al anterior, pero suponiendo que el margen de solvencia venga dado por las reservas de solvencia RS^ϵ.

Consideraremos la siguiente operación:

Renta de jubilación prepagable.

Edad de jubilación: $x = 65$ años.

Edad del partícipe: $x = 60$ años.

Cuantía periódica y anual $\alpha^r = 1$

$Ip = 0.09$

$Ir = 0.09$

A continuación determinaremos para cada nivel de riesgo ϵ^t comprendido entre 0 y 0.24, el recargo de seguridad asociado al nivel de riesgo λ^{ϵ^t} , la prima recargada del plan Π^{ϵ^t}, la prima de reaseguro Π^R que coincidirá para ambos tipo de reaseguro, y la prima de reaseguro ajustada que en este caso también será igual para ambos tipo de reaseguro $\Pi^{R,A}$:

ϵ^t	λ^{ϵ^t}	Π^{Rec}	Π^R	$\Pi^{R,A}$
0.000000	0.589459	7.677878	0.000000	−2.847379
0.050000	0.495647	7.224720	0.125879	−2.394221
0.100000	0.456151	7.033935	0.185065	−2.203436
0.150000	0.423540	6.876409	0.236039	−2.045910
0.200000	0.384795	6.689252	0.328995	−1.858753
0.250000	0.338763	6.466891	0.465424	−1.636393
0.300000	0.312595	6.340487	0.509516	−1.509988
0.350000	0.284071	6.202705	0.557970	−1.372206
0.400000	0.252981	6.052524	0.624457	−1.222025
0.450000	0.182154	5.710395	0.869914	−0.879896
0.500000	0.141891	5.515905	0.981250	−0.685406
0.550000	0.098005	5.303911	1.118540	−0.473412

Si incorporamos un seguro unitario a la operación anterior:

Renta de jubilación prepagable y seguro inmdiato y temporal hasta la jubilación.

Edad de jubilación: $x = 65$ años.

Edad del partícipe: $x = 60$ años.

Cuantía periódica y anual $\alpha^r = 1$

Cuantía periódica y anual $\alpha^s = 1$

$Ip = 0.09$

$Ir = 0.09$

ϵ^t	λ^{ϵ^t}	Π^{Rec}	Π^R	$\Pi^{R,A}$
0.000000	0.568146	7.677878	0.000000	−2.781729
0.050000	0.475592	7.224720	0.125879	−2.328571
0.100000	0.436626	7.033935	0.185065	−2.137786
0.150000	0.404453	6.876409	0.236039	−1.980260
0.200000	0.366227	6.689252	0.328995	−1.793103
0.250000	0.320812	6.466891	0.465424	−1.570743
0.300000	0.294995	6.340487	0.509516	−1.444338
0.350000	0.266854	6.202705	0.557970	−1.306556
0.400000	0.236181	6.052524	0.624457	−1.156375
0.450000	0.166303	5.710395	0.869914	−0.814246
0.500000	0.126580	5.515905	0.981250	−0.619756
0.550000	0.083282	5.303911	1.118540	−0.407762

Podemos hacer las siguientes observaciones:

- Al ser $\delta = 1 < Per_\epsilon[\xi_i^p(renta\,unitaria)](1+Ip)^{1/2}$ $\quad \epsilon \in [0, 0.55]$ la prima de reaseguro de la operación mixta coincide con la prima de reaseguro de la renta, en el caso que no haya reparto de beneficios. Sin embargo, la prima de reaseguro ajustada es mayor (menos negativa) en la operación mixta, debido al menor valor de $E[\xi_i^{b,R}]$.

  Por otro lado, el valor de la prima recargada coincide en ambas operaciones, a pesar de que la prima pura para la operación mixta es mayor que en la renta. Esto es debido al menor recargo asociado a cada nivel de riesgo en la operación mixta.

  Por consiguiente, si no hay reparto de beneficios, el añadir un seguro inmediato unitario y temporal hasta la jubilación a una renta de jubilación unitaria, no supone coste adicional para el partícipe.

- La estrategia óptima, que en este caso ha de obtenerse empíricamente, no se ve modificada por la incorporación del seguro.

ANEXO 4-4

ANEXO 4-4 OPERACION DE RENTA Y SEGURO CON CUANTIAS CONSTANTES Y PRIMAS PERIODICAS CONSTANTES

En este anexo ilustramos mediante dos ejemplos (una renta de jubilación y un seguro diferido temporal), como puede variar la estrategia óptima recargo reaseguro conforme aumentamos la temporalidad en el pago de primas. El estudio lo realizaremos para la modalidad de reaseguro del percentil y en el caso que no haya reparto de beneficios.

Consideraremos la siguiente operación a prima única:

Renta de jubilación prepagable a prima única.

Edad del partícipe: $x = 50$ años.

Edad de jubilación $x_{jub} = 65$ años.

Recargo del reasegurador $\lambda^R = 0$

Cuantía periódica y anual $\alpha^r = 1$

$Ip = 0.09$

$Ir = 0.03$

A continuación calculamos para cada nivel de riesgo del plan ϵ^t, el recargo de seguridad del plan λ^{ϵ^t}, la prima recargada del plan Π^{ϵ^t}, la prima de reaseguro Π^R, la función $K(\epsilon^t)$ y la prima total:

ϵ^t	λ^{ϵ^t}	Π^{ϵ^t}	Π^R	$K(\epsilon^t)$	Prima total
0.00000	0.73260	3.23586	0.00000	0.00074	3.23586
0.00003	0.72830	3.22784	0.00001	0.00280	3.22785
0.00012	0.72362	3.21910	0.00003	0.00782	3.21913
0.00037	0.71852	3.20957	0.00011	0.01768	3.20968
0.00088	0.71296	3.19919	0.00029	0.03411	3.19948
0.00180	0.70690	3.18787	0.00068	0.05825	3.18855
0.00325	0.70029	3.17553	0.00139	0.09043	3.17693
0.00533	0.69309	3.16208	0.00261	0.13030	3.16469
0.00813	0.68524	3.14743	0.00452	0.17722	3.15195
0.01170	0.67669	3.13145	0.00735	0.23083	3.13880
0.01613	0.66736	3.11403	0.01137	0.29161	3.12540
0.02156	0.65720	3.09505	0.01691	0.36147	3.11196
0.02829	0.64612	3.07435	0.02439	0.44244	3.09874
0.03664	0.63404	3.05180	0.03437	0.53537	3.08617
0.04692	0.62088	3.02722	0.04753	0.64096	3.07474
0.05944	0.60653	3.00042	0.06470	0.75953	3.06512
0.07454	0.59089	2.97121	0.08689	0.89089	3.05810
0.09252	0.57385	2.93937	0.11525	1.03398	3.05463
0.11364	0.55526	2.90467	0.15114	1.18665	3.05580
0.13802	0.53501	2.86684	0.19602	1.34531	3.06287
0.16558	0.51293	2.82561	0.25149	1.50467	3.07710
0.19599	0.48887	2.78067	0.31911	1.65764	3.09978
0.22849	0.46264	2.73169	0.40031		3.13200

En este ejemplo podemos observar cómo la estrategia óptima viene dada por un nivel de riesgo del plan $\epsilon^* = 0.09252$.

Sin embargo, si en lugar de establecerse dicha operación mediante el pago de una sóla prima , se contratase mediante el pago de seis primas periódicas y anuales $n = 6$, la estrategia óptima ya no sería la misma como queda reflejado a continuación:

ϵ^t	λ^{ϵ^t}	P^{ϵ^t}	P^R	K^{ϵ^t}	Prima total
0.00000	0.70792	0.66178	0.00000	0.00066	0.66178
0.00003	0.70369	0.66014	0.00000	0.00249	0.66014
0.00012	0.69907	0.65835	0.00001	0.00696	0.65836
0.00037	0.69404	0.65640	0.00002	0.01574	0.65642
0.00088	0.68856	0.65428	0.00005	0.03036	0.65433
0.00180	0.68259	0.65196	0.00012	0.05185	0.65209
0.00325	0.67608	0.64944	0.00025	0.08048	0.64969
0.00533	0.66898	0.64669	0.00048	0.11596	0.64716
0.00813	0.66124	0.64369	0.00082	0.15772	0.64451
0.01170	0.65281	0.64042	0.00134	0.20544	0.64176
0.01613	0.64361	0.63686	0.00207	0.25953	0.63893
0.02156	0.63359	0.63298	0.00308	0.32171	0.63606
0.02829	0.62267	0.62875	0.00444	0.39376	0.63319
0.03664	0.61077	0.62413	0.00626	0.47647	0.63039
0.04692	0.59779	0.61911	0.00865	0.57044	0.62776
0.05944	0.58365	0.61363	0.01178	0.67597	0.62540
0.07454	0.56823	0.60765	0.01582	0.79287	0.62347
0.09252	0.55143	0.60114	0.02098	0.92022	0.62212
0.11364	0.53311	0.59404	0.02751	1.05610	0.62155
0.13802	0.51315	0.58631	0.03568	1.19730	0.62199
0.16558	0.49138	0.57788	0.04577	1.33913	0.62365
0.19599	0.46766	0.56868	0.05808	1.47527	0.62677
0.22849	0.44181	0.55867	0.07286		0.63153

donde:

- P^{ϵ^t} : es la prima periódica recargada.
- P^R : es la prima periódica del reaseguro.

En este caso la estrategia óptima viene dado por un riesgo a reasegurar $\epsilon^* = 0.11364$. La reducción experimentada en los valores de la función $K(\epsilon^t)$ con respecto a la operación a prima única al aumentar la temporalidad en las primas, ha sido suficiente como para que el primer valor de $K(\epsilon^t) \geq 1$ lo alcance en un nivel de riesgo a reasegurar mayor (0.11364), que con respecto a la operación a prima única (0.09252).

Podemos observar como los valores de la función $K(\epsilon^t)$ para esta operación, pueden obtenerse a través de los valores de la función $K(\epsilon^t)$ de la operación a primas únicas, aplicando la relación:

$$K(\epsilon^t)(\text{Primas periódicas (n=6)}) = K(\epsilon^t)(\text{Prima única}) \left(\frac{\ddot{a}_{\overline{6|}I_p}}{{}_{/6}\ddot{a}_x} \right)$$

[15] en nuestro caso:

$$K(\epsilon^t)(\text{Primas periódicas (n=6)}) = K(\epsilon^t)(\text{Prima única}) \quad 0.889982$$

Si aumentásemos la temporalidad en una sóla prima, $n = 7$, la estrategia óptima se seguiría manteniendo, debido a que el aumento ocasionado en la función $K(\epsilon^t)$, no sería lo suficiente como para que el primer valor de $K(\epsilon^t) \geq 1$ lo alcance en un ϵ^t más pequeño.

Sin embargo, si aumentamos el número de primas en $n = 15$:

[15] Recordemos que ${}_{/6}\ddot{a}_x$ está calculado con el tipo de interés del reasegurador.

ϵ^t	λ^{ϵ^t}	P^{ϵ^t}	P^R	K^{ϵ^t}	Prima total
0.00000	0.65673	0.36829	0.00000	0.00056	0.36829
0.00003	0.65262	0.36738	0.00000	0.00211	0.36738
0.00012	0.64815	0.36638	0.00000	0.00591	0.36639
0.00037	0.64327	0.36530	0.00001	0.01335	0.36531
0.00088	0.63795	0.36412	0.00002	0.02576	0.36414
0.00180	0.63216	0.36283	0.00006	0.04398	0.36289
0.00325	0.62584	0.36142	0.00012	0.06828	0.36154
0.00533	0.61896	0.35989	0.00022	0.09838	0.36012
0.00813	0.61145	0.35823	0.00039	0.13381	0.35861
0.01170	0.60327	0.35641	0.00063	0.17429	0.35704
0.01613	0.59435	0.35442	0.00098	0.22018	0.35540
0.02156	0.58463	0.35226	0.00145	0.27293	0.35372
0.02829	0.57404	0.34991	0.00210	0.33406	0.35200
0.03664	0.56249	0.34734	0.00295	0.40423	0.35030
0.04692	0.54990	0.34454	0.00408	0.48395	0.34863
0.05944	0.53618	0.34149	0.00556	0.57348	0.34705
0.07454	0.52123	0.33817	0.00747	0.67266	0.34564
0.09252	0.50493	0.33455	0.00990	0.78070	0.34445
0.11364	0.48716	0.33060	0.01299	0.89597	0.34358
0.13802	0.46780	0.32629	0.01685	1.01577	0.34314
0.16558	0.44669	0.32160	0.02161	1.13609	0.34321
0.19599	0.42368	0.31648	0.02742	1.25159	0.34391
0.22849	0.39860	0.31091	0.03440		0.34531

Observamos que la estrategia óptima se alcanza para un nivel de riesgo a reasegurar mayor que con respecto a los ejemplos anteriores $\epsilon^* = 0.13802$.

En este caso se da la siguiente relación:

$$K(\epsilon^t)(\text{Primas periódicas (n=15)}) = K(\epsilon^t)(\text{Prima única}) \quad 0.7550433$$

En general, podemos concluir que la estrategia óptima depende del número de primas que se satisfagan y de la relación entre Ip y Ir. En nuestro ejemplo al ser Ip considerablemente mayor que Ir, aumentos en la temporalidad en el pago de primas, provocan una reducción en la función $K(\epsilon^t)$ en tal magnitud que hace que el riesgo a reasegurar óptimo aumente.

A continuación realizaremos el mismo estudio del apartado anterior sobre la siguiente operación de **seguro**:

Seguro diferido y temporal a prima única.

Edad del partícipe: $x = 40$ años.

Diferimiento de la operación $d_s = 5$

Recargo del reasegurador $\lambda^R = 0.05$

Cuantía periódica y anual $\alpha^s = 1$

Temporalidad de la operación $m_s = 43$

$Ip = 0.09$

$Ir = 0.01$

ϵ^t	λ^{ϵ^t}	Π^{ϵ^t}	Π^R	K^{ϵ^t}	Prima total
0.00000	7.39079	0.62252	0.00000	0.00559	0.62252
0.00350	6.69797	0.57112	0.00029	0.01219	0.57141
0.00733	6.06236	0.52396	0.00086	0.01998	0.52483
0.01152	5.47923	0.48070	0.00173	0.02917	0.48243
0.01610	4.94425	0.44101	0.00288	0.04000	0.44389
0.02109	4.45344	0.40460	0.00434	0.05275	0.40894
0.02655	4.00316	0.37119	0.00610	0.06775	0.37729
0.03250	3.59005	0.34054	0.00818	0.08538	0.34872
0.03897	3.21106	0.31242	0.01058	0.10609	0.32300
0.04602	2.86335	0.28663	0.01332	0.13039	0.29994
0.05368	2.54436	0.26296	0.01640	0.15886	0.27936
0.06200	2.25171	0.24125	0.01985	0.19220	0.26110
0.07103	1.98322	0.22133	0.02368	0.23120	0.24501
0.08081	1.73690	0.20305	0.02790	0.27677	0.23096
0.09141	1.51091	0.18629	0.03255	0.32997	0.21883
0.10287	1.30359	0.17091	0.03762	0.39201	0.20853
0.11525	1.11339	0.15679	0.04315	0.46427	0.19995
0.12861	0.93889	0.14385	0.04916	0.54835	0.19301
0.14302	0.77880	0.13197	0.05568	0.64604	0.18765
0.15854	0.63192	0.12107	0.06272	0.75942	0.18379
0.17522	0.49718	0.11108	0.07031	0.89080	0.18138
0.19313	0.37356	0.10191	0.07848	1.04281	0.18038
0.21233	0.26014	0.09349	0.08725	1.21837	0.18074
0.23289	0.15609	0.08577	0.09666	1.42074	0.18243
0.25484	0.06064	0.07869	0.10672		0.18541

Cuando la operación es a prima única la estrategia óptima se consigue para un nivel de riesgo $\epsilon^* = 0.19393$, con una prima total asociada de 0.18038. Sin embago, si aumentamos la temporalidad de las primas a cinco $n = 5$, la estrategia óptima variará:

ϵ^t	λ^{ϵ^t}	P^{ϵ^t}	P^R	K^{ϵ^t}	Prima total
0.00000	7.35345	0.14683	0.00000	0.00486	0.14683
0.00350	6.66372	0.13471	0.00006	0.01059	0.13477
0.00733	6.03093	0.12358	0.00018	0.01736	0.12376
0.01152	5.45040	0.11338	0.00035	0.02535	0.11373
0.01610	4.91780	0.10402	0.00059	0.03476	0.10461
0.02109	4.42917	0.09543	0.00089	0.04584	0.09632
0.02655	3.98089	0.08755	0.00125	0.05888	0.08880
0.03250	3.56962	0.08032	0.00168	0.07421	0.08200
0.03897	3.19232	0.07369	0.00217	0.09220	0.07586
0.04602	2.84616	0.06760	0.00273	0.11332	0.07033
0.05368	2.52859	0.06202	0.00336	0.13806	0.06539
0.06200	2.23724	0.05690	0.00407	0.16704	0.06097
0.07103	1.96994	0.05220	0.00485	0.20093	0.05706
0.08081	1.72472	0.04789	0.00572	0.24054	0.05361
0.09141	1.49974	0.04394	0.00667	0.28678	0.05061
0.10287	1.29334	0.04031	0.00771	0.34070	0.04802
0.11525	1.10398	0.03698	0.00885	0.40350	0.04583
0.12861	0.93026	0.03393	0.01008	0.47657	0.04401
0.14302	0.77088	0.03113	0.01141	0.56148	0.04254
0.15854	0.62466	0.02856	0.01286	0.66002	0.04141
0.17522	0.49051	0.02620	0.01441	0.77420	0.04061
0.19313	0.36744	0.02404	0.01609	0.90631	0.04012
0.21233	0.25454	0.02205	0.01789	1.05889	0.03994
0.23289	0.15095	0.02023	0.01981	1.23478	0.04004
0.25484	0.05592	0.01856	0.02188		0.04044

En este caso, la estrategia óptima se consigue para un nivel de riesgo a reasegurar mayor que el de la operación anterior $\epsilon^* = 0.21233$, debido a la reducción experimentada en los valores de la función $K(\epsilon^t)$ como consecuencia del aumento en la temporalidad en el pago de primas.

Podemos comprobar en este caso, al ser $n \leq d_s$, como los valores de la función $K(\epsilon^t)$ para esta operación pueden obtenerse a través de los valores de la función

$K(\epsilon^t)$ de la operación a primas únicas, aplicando la relación:

$$K(\epsilon^t)(\text{Primas periódicas (n=5)}) = K(\epsilon^t)(\text{Prima única}) \left(\frac{\ddot{a}_{\overline{5|}I_p}}{{}_{/5}\ddot{a}_x} \right)$$

que en nuestro caso es:

$$K(\epsilon^t)(\text{Primas periódicas (n=6)}) = K(\epsilon^t)(\text{Prima única})\, 0.86911046$$

Esta tendencia en el aumento de ϵ^* también se mantiene si las primas se satisfacen en el período de pago del seguro.

Supongamos la misma operación pero contratada mediante pago de quince primas $n = 15$:

ϵ^t	λ^{ϵ^t}	P^{ϵ^t}	P^R	K^{ϵ^t}	Prima total
0.00000	13.80879	0.12731	0.00000	0.00200	0.12731
0.00350	11.10937	0.10411	0.00005	0.00465	0.10415
0.00733	9.10217	0.08685	0.00013	0.00808	0.08698
0.01152	7.55627	0.07356	0.00023	0.01247	0.07379
0.01610	6.33311	0.06304	0.00037	0.01801	0.06341
0.02109	5.34451	0.05455	0.00052	0.02493	0.05506
0.02655	4.53165	0.04756	0.00069	0.03349	0.04825
0.03250	3.85382	0.04173	0.00089	0.04401	0.04262
0.03897	3.28190	0.03681	0.00110	0.05686	0.03792
0.04602	2.79455	0.03262	0.00134	0.07247	0.03396
0.05368	2.48124	0.02993	0.00154	0.09076	0.03147
0.06200	2.19380	0.02746	0.00176	0.11218	0.02922
0.07103	1.93009	0.02519	0.00202	0.13724	0.02721
0.08081	1.68816	0.02311	0.00230	0.16651	0.02541
0.09141	1.46620	0.02120	0.00262	0.20069	0.02382
0.10287	1.26257	0.01945	0.00297	0.24055	0.02242
0.11525	1.07575	0.01785	0.00336	0.28697	0.02120
0.12861	0.90436	0.01637	0.00378	0.34098	0.02015
0.14302	0.74712	0.01502	0.00424	0.40375	0.01926
0.15854	0.60286	0.01378	0.00474	0.47659	0.01852
0.17522	0.47051	0.01264	0.00528	0.56099	0.01793
0.19313	0.34909	0.01160	0.00587	0.65865	0.01747
0.21233	0.23770	0.01064	0.00650	0.77143	0.01714
0.23289	0.13551	0.00976	0.00718	0.90145	0.01694
0.25484	0.04175	0.00896	0.00790		0.01686

Podemos observar como $\epsilon^* = 0.25484$. Por tanto en nuestro ejemplo, la relación que se da entre el tipo de interés del plan y del reaseguro permite que un aumento en la temporalidad en el pago de primas haga aumentar el riesgo a reasegurar ϵ^*, siempre y cuando la disminución producida en la función $K(\epsilon^t)$ sea la suficiente.

El problema que nos encontramos en este caso, es que al ser $n > d_s$, no podremos obtener los valores de la función $K(\epsilon^t)$ a partir de la función $K(\epsilon^t)$ de la operación a prima única. Si calculásemos la prima ajustada de reaseguro en las operaciones anteriores, hubiésemos podido comprobar que la estrategia óptima es independiente de la temporalidad en el pago de primas.

ANEXO 4-5

ANEXO 4-5 OPERACION DE RENTA Y SEGURO CON CON CUANTIAS VARIABLES Y Y PRIMAS PERIODICAS VARIABLES

En este anexo desarrollamos un ejemplo de renta-seguro con prestaciones y contraprestaciones variables, calculando la prima de reaseguro para las dos modalidades estudiadas.

Supongamos una operación con las siguientes características:

- Edad del partícipe $x = 60$ años.
- Seguro inmediato y temporal hasta la jubilación del partícipe.

  Los términos del seguro siguen la siguiente ley de variación: $\alpha_t^s = t \quad t = 1 \ldots 5$
- Renta vitalicia, prepagable y diferida hasta la jubilación del partícipe ($x_{jub} = 65$ años).

  Los términos de la renta siguen la siguiente función: $\alpha_t^r = 1.01^{t-5} \quad t = 5 \ldots 47$
- $Ip = 0.09$
- $Ir = 0.09$
- $\lambda^R = 0$
- Se satisfacen cinco primas ($n = 5$) crecientes en un 2% anual acumulativo.
- No existe aportación inicial independiente de la ley de variación de primas.

Respecto a cada modalidad de reaseguro tenemos:

- Si la modalidad de reaseguro es la del percentil, supondremos que el plan parte con un nivel de riesgo $\epsilon^t = 0.04003$
- Si la modalidad de reaseguro es la de diferencia de siniestralidad, supondremos que:

  a) Recargo de seguridad del plan $\lambda = 10\%$

  b) Margen de solvencia es un 4% de las provisiones matemáticas.

  Para esta modalidad de reaseguro calcularemos la prima de reaseguro distinguiendo en cada caso si es del tipo A o del tipo B:

Este anexo se dividirá en dos apartados, en el primero calcularemos el coste de la operación , y en el segundo apartado determinaremos la estrategia óptima recargo reaseguro asociada a la operación objeto de estudio.

Análisis del coste de la operación

Explicaremos el proceso de cálculo de la prima del plan, el recargo de seguridad asociado al nivel de insolvencia prefijado $\epsilon^t = 0.04003$ (será necesario para calcular la prima de reaseguro del percentil), la prima de reaseguro y la prima ajustada de reaseguro.

Cálculo de la prima del plan

Expresaremos las primas periódicas como el producto entre su ley de variación y la constante k, en nuestro caso al seguir la primera prima la ley de variación de primas:

$$P_t = f(t+1)\,k \quad t = 0, ..., n-1$$

donde:

- $f(t+1) = (1.02)^t$ por ser la prima creciente en un 2% anual acumulativo. La función f satisface la condición $f(1) = 1$.
- $n = 5$

por tanto:

$$P_t = (1.02)^t\, k \quad t = 0, ..., 4 \quad (I)$$

siendo :

$$k = \frac{E[\xi_i^p]}{E[\xi_i^q]}$$

Si calculamos el valor de $E[\xi_i^p]$ y de $E[\xi_i^q]$ para la operación objeto de estudio:

- $E[\xi_i^p] = 5.326544$
- $E[\xi_i^q] = 4.273563$
- $k = 1.24637076$

Tendremos de esta manera determinado el valor de las cinco primas, sustituyendo el valor de k en la expresión (I):

$$P_t = (1.02)^t\, 1.24637076 \quad t = 0, ..., 4$$

Cálculo del recargo de seguridad del plan

Para el reaseguro de diferencia siniestralidad, al suponer que el margen de solvencia es una proporción de la provisiones matemáticas, el recargo del plan ya viene dado. En nuestro caso hemos supuesto $\lambda = 10\%$

Respecto al reaseguro del percentil, el recargo vendrá dado por el nivel de risgo del plan $\epsilon^* = 0.04003$

El problema con el que nos encontramos en nuestro ejemplo, es que no podemos conocer a priori la ordenación de menor a mayor de las realizaciones de variable aleatoria L_i por existir entrecruzamientos entre las prestaciones del seguro y de la renta, lo que nos impide tener expresiones simplificadas que nos permitan calcular el recargo de seguridad, recurriendo por tanto a la fórmula general:

$$\lambda^{\epsilon^t} = \frac{Per_\epsilon[L_i^*]}{P(i,t_h)}$$

en nuestro caso:

$$\lambda^{0.04003} = \frac{Per_{0.04003}[L_i^*]}{P(i,t_h)} = 0.438425$$

Conocido el recargo de seguridad, podemos determinar la prima recargada.

Si *el reaseguro es el del percentil*, la prima del plan asociada al nivel de riesgo $\epsilon^t = 0.04003$ vendrá dada por la siguiente expresión:

$$P_t^{0.04003} = (1.02)^t\, 1.246370\, (1.438425) \quad t = 0, \ldots, 4$$

o bién simplificando:

$$P_t^{0.04003} = (1.02)^t\, 1.792809 \quad t = 0, \ldots, 4$$

Si *el reaseguro es de diferencia de siniestralidad*, la prima recargada P_t^{Rec} es:

$$P_t^{Rec} = (1.02)^t\, 1.246370\, (1.1) \quad t = 0, \ldots, 4$$

o bién simplificando:

$$P_t^{Rec} = (1.02)^t\, 1.371007 \quad t = 0, \ldots, 4$$

Cálculo de la prima de reaseguro

El proceso de cálculo de la prima de reaseguro es muy similar al del cálculo de la prima del plan, por suponer que las primeras siguen la misma ley de variación que las segundas, por tanto:

$$P_t^R = (1.02)^t \, k^R \quad t = 0, \ldots, 4 \quad (II)$$

siendo :

$$k^R = \frac{E[\xi_i^{p,R}]}{E[\xi_i^{q,R}]}$$

A continuación calculamos el valor de $E[\xi_i^{p,R}]$, $E[\xi_i^{q,R}]$, k^R, de la prima de reaseguro y de la prima total para las dos modalidades de reaseguro :

Para el *reaseguro del percentil*:

- $E[\xi_i^{p,R}] = 0.008976$
- $E[\xi_i^{q,R}] = 4.273563$ Coincide con el de la renta por ser $Ip = Ir$.
- $k^R = 0.00210$

La prima de reaseguro P_t^R asociada a cada momento t, la obtenemos sustituyendo el valor de k^R en la expresión (II):

$$P_t^R = (1.02)^t \, 0.00210 \quad t = 0, ..., 4$$

La prima total que tendrá que satisfacer el partícipe en cada período vendrá dada por:

$$VCT(0.04003) = (1.02)^t \, 1.792809 + (1.02)^t \, 0.00210 = (1.02)^t \, 1.794909 \quad t = 0, ..., 4$$

Para el *reaseguro de diferencia de siniestralidad tipo A*:

- $E[\xi_i^{p,R}] = 0.951335$
- $E[\xi_i^{q,R}] = 4.273563$

- $k^R = 0.222609$

Siendo en este caso :

$$P_t^R = (1.02)^t\, 0.222609 \quad t = 0, ..., 4$$

La prima total que tendrá que satisfacer el partícipe en cada período vendrá dada por:

$$VCT(0.04003) = (1.02)^t\, 1.371007 + (1.02)^t\, 0.222609 = (1.02)^t\, 1.593616 \quad t = 0, ..., 4$$

Para el *reaseguro de diferencia de siniestralidad tipo B*:

- $E[\xi_i^{p,R}] = 0.933161$
- $E[\xi_i^{q,R}] = 4.273563$
- $k^R = 0.218357$

La prima de reaseguro es en este caso:

$$P_t^R = (1.02)^t\, 0.218357 \quad t = 0, ..., 4$$

La prima total que tendrá que satisfacer el partícipe en cada período vendrá dada por:

$$VCT(0.04003) = (1.02)^t\, 1.371007 + (1.02)^t\, 0.218357 = (1.02)^t\, 1.589364 \quad t = 0, ..., 4$$

Cálculo de la prima de reaseguro ajustada

En este caso :

$$P_t^{R,A} = (1.02)^t\, k^{R,A} \quad t = 0, ..., 4 \quad (III)$$

siendo :

$$k^{R,A} = \frac{E[\xi_i^{p,R}] - E[\xi_i^{b,R}]}{E[\xi_i^{q,R}]}$$

A continuación calculamos el valor de $E[\xi_i^{p,R}]$, $E[\xi_i^{q,R}]$, $E[\xi_i^{b,R}]$, k^R, de la prima ajustada de reaseguro y de la prima total para las dos modalidades de reaseguro:

Para el *reaseguro del percentil*:

- $E[\xi_i^{p,R}] = 0.008976$
- $E[\xi_i^{q,R}] = 4.273563$
- $E[\xi_i^{b,R}] = 2.344271$
- $k^{R,A} = -0.54645$

La prima de reaseguro ajustada $P_t^{R,A}$ asociada a cada momento t la obtenemos sustituyendo el valor de $k^{R,A}$ en la expresión (III):

$$P_t^{R,A} = (1.02)^t\,(-0.54645) \quad t = 0, ..., 4$$

La prima total que tendrá que satisfacer el partícipe en cada momento t vendrá dada por:

$$VCT(0.04003) = (1.02)^t\, 1.792809 + (1.02)^t\,(-0.54645) = 1.02^t\, 1.246359 \quad t = 0, ..., 5$$

Para el *reaseguro de diferencia de siniestralidad tipo A*:

- $E[\xi_i^{p,R}] = 0.951335$
- $E[\xi_i^{q,R}] = 4.273563$
- $E[\xi_i^{b,R}] = 1.483989$
- $k^{R,A} = -0.124639$

Viniendo dada la prima de reaseguro ajustada en este caso por:

$$P_t^{R,A} = (1.02)^t\,(-0.124639) \quad t = 0, ..., 4$$

La prima total que tendrá que satisfacer el partícipe en cada momento t vendrá dada por:

$$VCT(0.04003) = (1.02)^t\,1.371007 + (1.02)^t\,(-0.124639) = 1.02^t\,1.246368 \quad t = 0, ..., 5$$

Para el *reaseguro de diferencia de siniestralidad tipo B*:

- $E[\xi_i^{p,R}] = 0.9331616$
- $E[\xi_i^{q,R}] = 4.273563$
- $E[\xi_i^{b,R}] = 1.4651614$
- $k^{R,A} = -0.124639$

La prima de reaseguro ajustada asociada a cada momento t viene dada por la siguiente expresión:

$$P_t^{R,A} = (1.02)^t\,(-0.124639) \quad t = 0, ..., 4$$

Podemos observar que coincide con la $P_t^{R,A}$ del reaseguro tipo A.

Estudio de la estrategia óptima recargo reaseguro

Analizaremos para la operación objeto de estudio la estrategia óptima recargo reaseguro, el problema con el que nos encontramos es que no podemos conocer la expresión analítica de la función K, lo que nos lleva a determinar a posteriori el riesgo óptimo del plan ϵ^* para la modalidad del percentil, o el recargo óptimo λ_* para la modalidad de diferencia de siniestralidad.

A continuación calculamos los valores de las primas de reaseguro y las primas de reaseguro ajustadas, para las modalidades de reaseguro estudiadas:

a) Reaseguro del percentil

Calculamos para cada nivel de riesgo ϵ^t compredido entre 0 y 05498, el recargo de seguridad λ^{ϵ^t}, la prima recargada a satisfacer al inicio de la operación $P_0^{\epsilon^t}$, la prima de reaseguro a satisfacer al inicio de la operación P_0^R , la suma de las dos anteriores Prima total, la prima de reaseguro ajustada a satisfacer al inicio de la operación $P_0^{R,A}$, y la prima total ajustada (Prima total ajus.):

ϵ^t	λ^{ϵ^t}	$P_0^{\epsilon^t}$	P_0^R	Prima total	$P_0^{R,A}$	Prima total ajus.
0.00001	0.54980	1.93166	0.00000	1.93166	−0.68526	1.24639
0.00003	0.54459	1.92517	0.00000	1.92517	−0.67877	1.24639
0.00014	0.53897	1.91816	0.00000	1.91816	−0.67177	1.24639
0.00040	0.53290	1.91060	0.00000	1.91060	−0.66421	1.24639
0.00096	0.52636	1.90244	0.00001	1.90245	−0.65605	1.24639
0.00196	0.51929	1.89364	0.00003	1.89367	−0.64724	1.24639
0.00355	0.51167	1.88413	0.00006	1.88420	−0.63774	1.24639
0.00583	0.50344	1.87388	0.00013	1.87400	−0.62748	1.24639
0.00888	0.49456	1.86281	0.00023	1.86304	−0.61641	1.24639
0.01278	0.48498	1.85086	0.00038	1.85125	−0.60447	1.24639
0.01762	0.47463	1.83797	0.00062	1.83859	−0.59158	1.24639
0.02356	0.46347	1.82406	0.00096	1.82502	−0.57767	1.24639
0.03090	0.45143	1.80905	0.00143	1.81048	−0.56265	1.24639
0.04003	0.43843	1.79285	0.00210	1.79495	−0.54645	1.24639
0.05126	0.42440	1.77536	0.00302	1.77838	−0.52897	1.24639
0.06494	0.40926	1.75649	0.00428	1.76077	−0.51009	1.24639
0.08144	0.39292	1.73612	0.00599	1.74211	−0.48973	1.24639
0.10108	0.37528	1.71414	0.00828	1.72242	−0.46775	1.24639
0.12415	0.35625	1.69042	0.01131	1.70173	−0.44403	1.24639
0.15079	0.33571	1.66482	0.01528	1.68010	−0.41843	1.24639
0.18091	0.31355	1.63720	0.02042	1.65762	−0.39080	1.24639
0.21412	0.28963	1.60738	0.02699	1.63438	−0.36099	1.24639
0.24963	0.26381	1.57521	0.03526	1.61046	−0.32881	1.24639
0.28685	0.23595	1.54048	0.04551	1.58599	−0.29409	1.24639
0.32570	0.20588	1.50301	0.05807	1.56107	−0.25661	1.24639
0.36598	0.17344	1.46256	0.07330	1.53586	−0.21617	1.24639
0.40729	0.13842	1.41892	0.09159	1.51051	−0.17252	1.24639
0.44884	0.10062	1.37181	0.11335	1.48516	−0.12542	1.24639
0.48992	0.05984	1.32098	0.13898	1.45996	−0.07458	1.24639
0.53020	0.01582	1.26611	0.16891	1.43503	−0.01972	1.24639
0.56941	0.00000	1.24639	0.18361	1.42990	0.00000	1.24639

Podemos observar cómo la estrategia óptima, si la modalidad de reaseguro contratada es sin reparto de beneficios, el nivel de riesgo óptimo del plan es $\epsilon^{max} = 0.56941$, con una prima inicial total de 1.42990, la cual irá aumentando en un 2% cada año .

Sin embargo, si la modalidad de reaseguro es con reparto de beneficios, el coste total de la operación es independiente del nivel de riesgo del plan.

b) Reaseguro de diferencia de siniestralidad tipo A

Calculamos para cada nivel de recargo de seguridad comprendido entre 0 y 0.15 , la prima recargada a satisfacer al inicio de la operación P_0^{Rec}, la prima de reaseguro a satisfacer al inicio de la operación P_0^R , la suma de las dos anteriores Prima total, la prima de reaseguro ajustada a satisfacer al inicio de la operación $P_0^{R,A}$, y la prima total ajustada Prima total ajus.:

λ_t	P_0^{Rec}	P_0^R	Prima total	$P_0^{R,A}$	Prima total ajus.
0.000000	1.246394	0.340917	1.587311	0.000000	1.246394
0.010000	1.258858	0.328661	1.587519	−0.012464	1.246394
0.020000	1.271322	0.316405	1.587727	−0.024928	1.246394
0.030000	1.283786	0.304149	1.587935	−0.037392	1.246394
0.040000	1.296250	0.291893	1.588143	−0.049856	1.246394
0.050000	1.308714	0.279703	1.588417	−0.062320	1.246394
0.060000	1.321178	0.267837	1.589015	−0.074784	1.246394
0.070000	1.333642	0.256311	1.589953	−0.087248	1.246394
0.080000	1.346106	0.244885	1.590991	−0.099712	1.246394
0.090000	1.358570	0.233648	1.592217	−0.112175	1.246394
0.100000	1.371034	0.222609	1.593643	−0.124639	1.246394
0.110000	1.383498	0.211672	1.595170	−0.137103	1.246394
0.120000	1.395962	0.201052	1.597013	−0.149567	1.246394
0.130000	1.408426	0.190546	1.598971	−0.162031	1.246394
0.140000	1.420889	0.180265	1.601155	−0.174495	1.246394
0.150000	1.433353	0.170226	1.603579	−0.186959	1.246394

Podemos observar como la estrategia óptima, si la modalidad de reaseguro contratada es sin reparto de beneficios, se obtiene con un recargo del plan $\lambda_* = 0$, el cual lleva un coste total de 1.587311.

Sin embargo, si la modalidad de reaseguro es con reparto de beneficios, la política óptima es independiente del recargo de seguridad.

c) Reaseguro de diferencia de siniestralidad tipo B

Calculamos para cada nivel de recargo de seguridad comprendido entre 0 y 0.15 , la prima recargada a satisfacer al inicio de la operación P_0^{Rec}, la prima de reaseguro a satisfacer al inicio de la operación P_0^R , la suma de las dos anteriores Prima total, la prima de reaseguro ajustada a satisfacer al inicio de la operación $P_0^{R,A}$, y la prima total ajustada Prima total ajus.:

λ_t	P_0^{Rec}	P_0^R	Prima total	$P_0^{R,A}$	Prima total ajus.
0.000000	1.246394	0.340917	1.587311	0.000000	1.246394
0.010000	1.258858	0.328661	1.587519	−0.012464	1.246394
0.020000	1.271322	0.316405	1.587727	−0.024928	1.246394
0.030000	1.283786	0.304149	1.587935	−0.037392	1.246394
0.040000	1.296250	0.291893	1.588143	−0.049856	1.246394
0.050000	1.308714	0.279637	1.588351	−0.062320	1.246394
0.060000	1.321178	0.267381	1.588559	−0.074784	1.246394
0.070000	1.333642	0.255125	1.588767	−0.087248	1.246394
0.080000	1.346106	0.242869	1.588975	−0.099712	1.246394
0.090000	1.358570	0.230613	1.589183	−0.112175	1.246394
0.100000	1.371034	0.218357	1.589391	−0.124639	1.246394
0.110000	1.383498	0.206101	1.589598	−0.137103	1.246394
0.120000	1.395962	0.193845	1.589806	−0.149567	1.246394
0.130000	1.408426	0.181589	1.590014	−0.162031	1.246394
0.140000	1.420889	0.169333	1.590222	−0.174495	1.246394
0.150000	1.433353	0.157077	1.590430	−0.186959	1.246394

En este caso, la estrategia óptima recargo reaseguro coincide con la del reaseguro tipo A.

Capítulo 5

Reaseguro en las operaciones de colectivos

Capítulo 5

Reaseguro en las operaciones de colectivos

5.1 Introducción

En el presente capítulo aplicaremos el modelo del capítulo 3 a un Plan de Pensiones formado por un colectivo de partícipes.

Abordaremos la problemática teórica que supone el tratamiento del reaseguro tanto en colectivos cerrados como abiertos, y complementaremos el capítulo con un ANEXO en el cual se cuantificarán la distintas magnitudes estudiadas. Las bases técnicas son las utilizadas en los ANEXOS del Capítulo 4, y que se indican al principio del mismo. Los programas informáticos en lenguaje de programación FORTRAN utilizados para realizar los cálculos que se presentan en el ANEXO de este capítulo, están definidos en el APENDICE, y los listados se encuentran en el DISKETTE que incluimos en la tesis.

El capítulo se estructurará en los siguientes apartados:

5.2 Definición del colectivo

5.3 Determinación de las variables aleatorias

5.4 Estudio de los métodos de simulación

5.5 Cálculo de la prima de reaseguro en colectivos cerrados

5.5.1 Descripción de la operación actuarial objeto de estudi.

5.5.2 Análisis de la variable aleatoria T_N

5.5.3 Análisis de la variable aleatoria: Pérdida del plan

5.5.3.1 Variable aleatoria asociada a las prestaciones del plan

5.5.3.2 Variable aleatoria asociada a las contraprestaciones del plan

5.5.3.3 Cálculo de la prima pura del plan

5.5.4 Cálculo del Recargo de Seguridad del plan

5.5.5 Análisis de la variable aleatoria: Pérdida del reasegurador

5.5.5.1 Variable aleatoria asociada a las prestaciones del Reasegurador

5.5.5.1.1 Variable aleatoria asociada a las prestaciones del reasegurador en la modalidad de reaseguro del percentil

5.5.5.1.2 Variable aleatoria asociada a las prestaciones del reasegurador en la modalidad de reaseguro de diferencia de siniestralidad

5.5.5.2 Variable asociada a las contraprestaciones del Reasegurador

5.5.5.3 Cálculo de la prima pura de reaseguro

5.5.6 Análisis de la variable aleatoria: Pérdida ajustada del reasegurador

5.5.6.1 Variable aleatória asociada al beneficio del plan

5.5.6.1.1 Variable aleatoria asociada al beneficio del plan en la modalidad de reaseguro del percentil

5.5.6.1.2 Variable aleatoria asociada al beneficio del plan en la modalidad de reaseguro de diferencia de siniestralidad

5.5.6.2 Cálculo de la prima pura ajustada de reaseguro

5.5.7 Análisis del coste total de la operación

5.6 Estudio de la prima de reaseguro en los colectivos abiertos

5.6.1 Problemática que se presenta cuando el plan desea mantener un nivel de riesgo prefijado ϵ en colectivos abiertos.

5.6.1.1 Cálculo del recargo de seguridad de los nuevos partícipes $\lambda_i^{EN(t_k),\epsilon}$

5.6.1.2 Modificación de las prestaciones de los partícipes pertenecientes al colectivo $N'(t_k)$

5.6.2 Cálculo de la prima de reaseguro cuando se reliza la k-ésima entrada de partícipes al plan

5.6.2.1 Cálculo de la nueva tasa de reaseguro correspondientes a los nuevos partícipes $\delta_{EN(t_k)}$

5.6.2.2 Cálculo de las nuevas prestaciones para el colectivo $N'(t_k)$

5.2 Definición del colectivo

Partiremos de un colectivo inicial de partícipes N, formado por n individuos, siendo $n = \text{car}(N)$.

Un colectivo es homogéneo, si los partícipes que lo forman tienen una serie de características comunes, en particular, un colectivo será totalmente homogéneo si todos y cada uno de los individuos que forman dicho colectivo coinciden en edad, tipo de prestaciones y contraprestaciones y cuantía de las mismas (y también en cualquier otro elemento diferenciador que pueda darse , como por ejemplo el sexo).

Todo colectivo inicial N, podremos dividirlo en colectivos homogéneos N^k, con $k = 1, ..., nc$, siendo nc el número de colectivos homogéneos.

Un aspecto importante es considerar como evoluciona el colectivo inicial N, en los distintos momentos de desarrollo del plan.

Si consideramos el colectivo inicial *cerrado*, entonces en cada momento t tendremos el subcolectivo $N(t)$, siendo:

$$N(0) = N$$

$$N(t+1) \subset N(t) \qquad t \geq 0$$

$N(t)$ estará formado por $n(t)$ partícipes vivos, habiendo fallecido hasta t , $n_f(t)$, siendo:

$$n = n(t) + n_f(t) \qquad \forall t$$

Si simbolizamos por $n_{fa}(t)$ con $t \geq 1$ el número de fallecidos en cada período $(t-1, t)$, entonces:

$$n_f(t) = \sum_{s=1}^{t} n_{fa}(s)$$

Si consideramos la posibilidad de colectivos *abiertos* entonces distinguiremos los siguientes:

$En(t)$: colectivo formado por $en(t,0)$ partícipes nuevos que se incorporan al plan en el momento t, y por consiguiente inician su trayectoria a partir de t.

$N'(t)$: colectivo formado todos los partícipes que hay en el plan en el momento t.

El colectivo $N'(t)$ estará formado por $n'(t)$ partícipes, siendo:

$$n'(t) = \sum_{h=0}^{t} en(h, t-h)$$

En el caso particular que $t = 0$, entonces $N'(0) = N(0) = N$.

$N(t)$: colectivo formado por los partícipes vivos que quedan vivos en el momento t, sin tener en cuenta los que en dicho momento entran de nuevos.

El colectivo $N(t)$ estará formado por n(t) partícipes, siendo:

$$n(t) = \sum_{h=0}^{t-1} en(h, t-h)$$

5.3 Determinación de las variables aleatorias

Cuando aplicamos el modelo de reaseguro a las operaciones individuales, obtuvimos directamente las distribuciones de probabilidad de cada una de las variables aleatorias implicadas en el modelo sin relativa dificultad, mediante las probabilidades de muerte del partícipe. Cada una de estas probabilidades constituían una trayectoria de fallecimiento del partícipe, así la probabilidad $_{t/}q_x$, corresponde a la trayectoria de vida hasta t y fallecimento entre t y $t+1$. Por tanto, para una persona de $x = 65$ años, si el infinito actuarial $w = 108$ años (como así resulta en las PEM 82 utilizadas en los ANEXOS), el número de trayectorias de fallecimiento asociadas a esa persona vendrá dada por la diferencia entre $(w - x) = 43$.

Sin embargo, si consideramos un colectivo de partícipes, las diferentes probabilidades corresponderán también a las diferentes trayectorias posibles de eliminación del colectivo, las cuales serán el resultado de la convolución de las variables aleatorias que nos indican la edad de fallecimiento de cada uno de los partícipes que integren el mismo. Utilizando este razonamiento, el número de trayectorias posibles de eliminación de un colectivo de n-partícipes, vendrá dado por la siguiente expresión:

$$NT = \prod_{i=1}^{n}(w - x_i)$$

siendo:

- NT: número de trayectorias de eliminación del colectivo.
- x_i: edad actuarial del individuo "i"-ésimo.

En consecuencia, cuando el colectivo presenta un número elevado de partícipes, el número de trayectorias de eliminación del colectivo es tan elevado [1], que resulta operativamente "imposible" determinar la distribución de probabilidad de las variables aleatorias que intervienen en el modelo. Este hecho hace que no podamos utilizar para el análisis del coste del reaseguro para un colectivo, los mismos instrumentos que utilizamos para el caso individual. Nosotros hemos solucionado esta dificultad mediante la simulación estocástica de las variables aleatorias. De todas maneras, las variables aleatorias prestaciones y contraprestaciones del plan asociadas al colectivo de partícipes N, pueden ajustarse a una distribución Normal, si suponemos independencia entre los distintos partícipes que forman el colectivo.

5.4 Métodos de simulación

Con la simulación se pretende reproducir el comportamiento de un modelo diseñado para describir un sistema real. En general el sistema está formado por unos datos de entrada "inputs" y unos resultados "outputs". El modelo que realizará una descripción simplificada de este sistema real, lo podemos representar como sigue:

$$\vec{Y} = F(\vec{X})$$

siendo:

[1] Si el número de partícipes que forman el plan es de 5, y todas ellas tienen 45 años, el número de trayectorias posibles de eliminación es de 147.008.443.

$\vec{X}$: vector de datos o inputs, que para nosotros serán variables aleatorias.

F: función de distribución conjunta de $\vec{X}$.

$\vec{Y}$: vector de resultados o outputs, que también serán variables aleatorias en la medida que los son los inputs.

El método de simulación que aplicaremos es el denominado método de Monte Carlo. Este consiste en el siguiente proceso: reemplazar el vector aleatorio $\vec{X}$ por otro vector $\vec{X}^1$ con la misma función de probabilidad conjunta, buscar una realización de $\vec{X}^1$, sea $\vec{x^1}$ y tomarla como realización simulada de $\vec{X}$, y por último calcular $\vec{Y^1} = F(\vec{x^1})$ y tomarlo como realización simulada de $\vec{Y}$.

Con el proceso descrito se produce una simulación; en general nos interesará obtener un conjunto de valores simulados de forma que podamos estimar la función de distribución de los outputs, siendo en este caso necesaria la utilización de un proceso iterativo.

Los problemas que nos encontramos con la simulación son de dos tipos:

a) El que se deriva de la necesidad de generar una cierta cantidad de valores simulados, para poder obtener la distribución conjunta de los outputs u otras características derivadas de ella, y consistente en determinar cuantas simulaciones deben hacerse. En este sentido no hay una respuesta concreta, ya que todo depende de la precisión deseada en la estimación de los diversos parámetros que busquemos. Lo que si podemos asegurar es que cuantas más simulaciones realicemos, más precisión obtendremos en nuestros resultados.

b) Este problema consiste en encontrar el "mejor" vector aleatorio $\vec{X}^1$ como sustituto de $\vec{X}$ y el "mejor" método (en el sentido de más rápido y menos costoso) para buscar las realizaciones de $\vec{X}^1$. La simulación sólo será efectiva en la medida en que sea rápida, ya que se han de hacer muchas repeticiones.

A continuación estudiaremos como llevar a cabo la simulación de:

a) *Variables aleatorias independientes distribuidas uniformemente* $(0, 1)$

Como la generación de $\vec{x^1}$ debe ser lo más rápido posible, ésta normalmente se realiza mediante un algoritmo por ordenador. Estos algoritmos generan lo que denominamos "números pseudoaleatorios", en el sentido en que son generados a través de un algoritmo determinista, a pesar de su apariencia aleatoria. Consideremos la secuencia $\mu_0, \mu_1, \ldots$ donde:

- $0 \leq \mu_h \leq 1$, para $h = 0, 1, \ldots$
- μ_0 es un número asignado
- $\mu_h = \vartheta(\mu_{h-1})$ para $h = 1, 2, \ldots$

Si la función ϑ está convenientemente elegida, los números μ_h parecerán las realizaciones de variables aleatorias independientes uniformes $(0, 1)$ (a partir de ahora una variable aleatoria uniforme (0,1) la simbolizaremos por U). La simulación de este tipo de variables aleatorias, será la base para la simulación de cualquier otra variable aleatoria.

Los algoritmos más utilizados para generar los valores μ_h son los que incluyen la fórmula "mixed congruential" recogida por **BEARD,R.E. et al.** (1987)[2] según la cual:

$$\mu_h = a\mu_{h-1} + b \mod 10^d \quad d \quad \text{entero positivo} \qquad (I)$$

PITACCO,E (1986)[3] recoge otra versión de este tipo de algoritmos.

Los valores de las constantes "a", "b" y "d" determinan las caraterísticas del algoritmos en cuanto a la generación de número aleatorios. En particular, si "b" es un número entero positivo no divisible por 2 ó 5 y $a = 1 + 20^i$ (siendo i

[2] *Risk Theory*, Ed.Chapman nad Hall, Third Edition, 1987 , pag 238

[3] "Simulation in insurance", In M. Goovaerts tl al. (eds.) Insurance and Risk Theory, pp: 43–44, 1986 D. Reidel Publishing Company.

cualquier número entero positivo), la formula (I) genera una secuencia de 10^d números diferentes hasta que vuelve a repetirse la siguiente secuencia.

El valor de μ_0 puede ser cualquier valor perteneciente al intervalo $(0, 1)$.

El problema de estos algoritmos es precisamente la existencia de ciclos de una longitud determinada. En las condiciones anteriores esta longitud será de 10^d.

La fórmula (I) es la utilizada en la presente tesis para la generación de los número aleatorios. Los valores concretos de las constantes que se han utilizado son: $a = 1 + 20^3$, $b = 0.1375128943\,10^{10}$, $d = 10$.

b) *Un suceso*

Podemos simular un suceso E con probabilidad p, a través de otro E^* definido como sigue: $E^* = U \leq p \quad \text{si} \quad P[U \leq p] = p$

c) *Una variable aleatoria discreta*

La variable aleatoria X toma valores x_j con probabilidades p_j, con $j = 0, 1, \ldots, n$. Si definimos X^* como:

$$X^* = x_j \quad \text{si y sólo si} \sum_{i=0}^{j-1} p_i < U \leq \sum_{i=0}^{j} p_i$$

tendremos entonces que:

$$P[X^* = x_j] = P\left[\sum_{i=0}^{j-1} p_i < U \leq \sum_{i=0}^{j} p_i\right] = \sum_{i=0}^{j-1} p_i - \sum_{i=0}^{j} p_i = p_j = P[X = x_j]$$

Por tanto, X^* puede simular a X pues tiene la misma función de distribución.

d) *Una variable aleatoria continua*

Supongamos que la variable aleatoria X tiene una función de distribución continua e invertible $F_X(\alpha)$. Sea $X^* = F_X^{-1}(U)$, entonces:

$$F_{X^*}(\alpha) = P[X^* \leq \alpha] = P[F_X^{-1}(U) \leq \alpha] = P[U \leq F_X(\alpha)] = F_X(\alpha)$$

de forma que X^* puede simular X.

Como podemos observar , la simulación de un suceso aleatorio o de cualquier variable aleatoria, puede reducirse a la simulación de una variable aleatoria uniformemente distribuida $(0, 1)$.

Nosotros aplicaremos el método de Monte Carlo para la simulación de la mortalidad de un colectivo de individuos, la cual será básica para poder determinar el conjunto de variables aleatorias que intervienen en el modelo.

Dado un colectivo inicial $N(0)$ formado por $n(0)$ vidas aseguradas, nuestro objetivo es simular el número de fallecidos en el período k entre los $n(0)$ partícipes vivos, $n_{fa}(k)$ $k = 1, 2\ldots$

Siguiendo a **PITACCO, E.** (1986) y **CRISMA,L.** (1982)[4]

podemos plantear dos enfoques para llevar a cabo esta simulación:

1. **Enfoque colectivo**

   Este enfoque sólo puede aplicarse sobre partes del colectivo con características homogéneas (misma edad, mismo sexo y misma estructura de prestaciones y contraprestaciones), es necesaria además la hipótesis de que los individuos pertenecientes a cada colectivo homogéneo sean independientes en cuanto al fenómeno de la mortalidad. Suponiendo que nuestro colectivo $N(0)$ cumple estas caraterísticas (y si no es así , se divide en subcolectivos que si las cumplan), podemos considerar que el número de fallecidos en el período 1, $n_{fa}(1)$, sigue una variable aleatoria binomial de parámetros $n(0)$ y q_x la cual simbolizaremos $\xi_{n(fa)}(1)$. Según esta distribución podemos simular $\xi_{n_{fa}}(1)$ (según el procedimiento señalado para la simulación de una variable aleatoria discreta), obteniendo el resultado $n^*_{fa}(1)$. Siguiendo este proceso, la variable aleatoria $\xi_{n(fa)}(2)$ será simulada a partir de la distribución condicionada al resultado $n^*_{fa}(1)$ obtenido, siendo por tanto una binomial de parámetros $n(0) - n(fa)^*_1$, q_{x+1}. La primera simulación terminará cuando el colectivo inicial se agote.

[4]"Esperienze di calcolo simulato poer la valutazione di oneri attuariali", Quad. N. 47 dell'Istituto di Matematica Finanziaria dell'Universita di Trieste, 1982

2. **Enfoque individual**

Este enfoque supone simular individuo a individuo, pudiéndo ser las características de los individuos que forman el colectivo tan diversas como se quiera. La idea es la siguiente:

Sean los sucesos:

$E_k^{(j)}$ con $j = 1, 2, \ldots, n(0)$: muerte del individuo j durante el año k.

$|E_k^{(j)}|$: indicador de los sucesos $E_k^{(j)}$, donde:

$$|E_k^{(j)}| = \begin{cases} 1 & \text{si } E_k^{(j)} \text{ es verdad} \\ 0 & \text{si } E_k^{(j)} \text{ es falso} \end{cases}$$

entonces tenemos:

$$n_{fa}(1) = \sum_j |E_1^{(j)}|, \quad n_{fa}(2) = \sum_j |E_2^{(j)}|, \ldots$$

La simulación dentro de este enfoque puede llevarse a cabo de dos formas:

a) Tomando como parámetro operativo el tiempo , "año a año", o en general "período a período". En este caso los sucesos a simular son los siguientes:

- período 1: $E_1^{(j)}$ para todos los miembros del colectivo.
- período 2: $\frac{E_2^{(j)}}{E_1^{(j)}}$ para todos lo que sobreviven en 1.

  y así sucesivamente, a través de los sucesos:

$$U \leq q_x, U \leq q_{x+1}, \ldots, \text{etc}$$

Este proceso es sencillo, pero requiere un número aleatorio de simulaciones (no sólo es aleatorio el número de simulaciones a realizar cada año; una por cada individuo que este vivo a principio de dicho año, sino que también lo es el número de años durante los cuales debe simularse, pues no sabemos cuando se agotará el colectivo) y por tanto de generación de números aleatorios.

b) Tomando como parámetro operativo el individuo, realizando una simulación "directa" del período de vida. Se trata por tanto de simular las variable aleatoria T_i siguiendo el proceso indicado en la simulación de variables aleatorias discretas. La simulación de T_i necesita únicamente de un número aleatorio; de forma que para simular la evolución del colectivo necesitaremos generar $n(0)$ números aleatorios, realizando un número cierto de simulaciones en cada proceso, el cual seguramente será inferior al necesario en el apartado anterior.

CRISMA,L y PITACCO,E (1982)[5] comparan la eficacia de ambas formas de realizar la simulación, según el enfoque individual. Señalan que el número de simulaciones necesarias en la simulación "año a año" es bastante superior al necesario en la simulación "individuo a individuo". De todas maneras, para no perder la ventaja del segundo método, el cálculo de la inversa de la distribución de la variable aleatoria T_i debe de utilizar poco tiempo. Con esta idea proponen cinco formas distintas , para encontrar, una vez simulado el número aleatorio uniforme, qué valor de la variable aleatoria T_i le corresponde. La más sencilla de ellas es la forma binaria: las otras cinco opciones también incorporan una forma binaria, pero utilizando un punto inicial de búsqueda lo más cercano posible al valor buscado.

EL método de simulación de Monte Carlo empezó a ser utilizado por **BOERMEESTER, J.M.** (1956)[6] para aproximar la distribución del valor actual de las rentas pagadas a un conjunto de personas, utilizando el enfoque individual "año a año".

HOVINEN, E. (1967)[7], **PESONEN, E. (1967)**[8] y **ERMAKOW, S.M. (1975)**[9] utilizaron el método de simulación de Monte Carlo para poder calcular la

[5]"Su due metodi simulativi per la valutazione di grandezze interessanti assicuracioni sulla vita", Rivista di Maematica per le Scienze economiche e sociali, N.1, 1982 pp:41-51

[6]"Frecuency Distribution of Mortality Costs" TSA, N. 8, 1956, pp:1-9

[7]"Procedure Values of the Generalised Poisson Function", Astin Bulletin Vol IV (1967) pp.:129

[8]"On the calculation of the Generalised Poisson Function, in Astin Bulletin Vol IV (1967) pp.:120

[9]*Die Monte- Carlo-Mhehotde und verwandte Fragen*, München (1975)

distribución del coste total de una entidad de seguros.

MCCRORY,R.T (1984)[10] aplica la simulación de Monte Carlo para la obtención de la distribución de la variable aleatoria media del valor actual de las rentas vitalicias pagaderas a un colectivo de individuos de las mismas características. Para cada proceso se calcula la edad de fallecimiento de cada una de las "n" vidas que forman el colectivo, de forma que realiza un enfoque individual de la simulación, con una simulación "directa" del momento de fallecimiento para cada componente del colectivo.

ALEGRE, A. y CLARAMUNT, M.M (1988)[11] utilizan la simulación de Monte Carlo para estimar la distribución del valor actual de las rentas de jubilación pagaderas a un colectivo determinado (con edades y cuantía de las rentas diferentes entre los componentes del colectivo). El método que utilizan es el colectivo.

BACINELLO, A.R. (1988)[12] explica el proceso de simulación estocástica a aplicar para el cálculo de distintas magnitudes de un Plan de Pensiones. diferenciando entre las dos formas incluidas en el enfoque individual (la que hemos denominado año a año, y la que simula el tiempo de vida de un individuo directamente).

Nosotros en la presente tesis, utilizaremos el enfoque individual tomando como parámetro operativo el individuo, éste método nos permitira calcular las primas de raseguro de cualquier colectivo, sin necesidad de constituir a priori subcolectivos homogéneos. De todas maneras debemos de tener presente las observaciones que ya en (1964) hicieron **FRETWELL, R. L. y HICKMAN, J. C.**[13] destacando el problema que presenta la simulación de Monte Carlo como método basado en un proceso aleatorio y por tanto conectado a un error de estimación, el cual siempre seguirá existiendo aunque repitamos el proceso un número suficiente de veces.

---

[10] "Mortality risk in life annuities", TSA, Vol XXXVI, 1984 pp:309-338

[11] "Análisis estocástico de las rentas de jubilación en un Plan de Pensiones", Cuadernos Actuariales, N.1, Septiembre, 1988

[12] "A stochastic simulation procedure for pensions schemes", Insurance: Mathematics and Economics, 7, 1988

[13] "Aproximate Probability Statementes About Life Annuity Costs", TSA, 16, 1964

5.5 Cálculo de la Prima de Reaseguro en colectivos cerrados

Las simulaciones las agruparemos en procesos de simulación, en particular supondremos que cada proceso de simulación estará formado por z simulaciones del colectivo, de tal forma que la prima de reaseguro obtenida con las z-primeras simulaciones constituirá la prima de reaseguro asociada al primer proceso de simulación. Nuestro objetivo será calcular un número determinado t de procesos de simulación siendo la prima de reaseguro final, la media de las primas de reaseguro asociadas a cada proceso. Cuanto mayor sea el número de simulaciones por proceso y mayor sea el número de procesos de simulación, menor será el error que cometamos en la estimación de la prima de reaseguro.

En este apartado, estudiamos como obtener la prima pura del plan y la prima del reaseguro asociada a cada proceso de simulación en las dos modalidades de reaseguro estudiadas cuando el colectivo sea cerrado.

5.5.1 Descripción de la operación actuarial objeto de estudio

Al igual que hicimos en el análisis individual, el estudio se realizará para la misma operación actuarial, siendo en este caso:

C^i: aportación inicial desembolsada por el partícipe "i", en el origen de la operación.

P_j^i: prima satisfecha por el partícipe "i", en el momento j.

n^i: número de primas satifechas por el partícipe "i", incluyendo en el cómputo la aportación inicial C^i.

d_s^i: diferimiento, en número de períodos, de la operación de seguro asociado al partícipe "i".

m_s^i: temporalidad, en número de períodos, de la operación de seguro asociado al partícipe "i".

$\alpha_j^{i,s}$: prestación de seguro que recibe el partícipe "i", si fallece en el periodo j-ésimo. La valoración de esta prestación se realiza a mitad de período, puesto que hemos asumido la hipótesis de distribución uniforme de la mortalidad dentro del mismo.

Si el partícipe "i" no es beneficiario del seguro en el período j−ésimo, ya sea por no haber fallecido en dicho período, o bien por haber fallecido en un período $j, \quad j \notin [d_s^i + 1, d_s^i + m_s^i]$, o simplemente por que no tenga prestación de seguro, entonces $\alpha_j^{i,s} = 0$

d_r^i: diferimiento, en número de períodos, de la operación de renta asociado al partícipe "i".

m_r^i: temporalidad, en número de períodos, de la prestación de renta, asociado al partícipe "i".

$\alpha_j^{i,r}$: importe de la renta que recibe el partícipe "i" en el momento j. Si el partícipe "i" no es beneficiario de la renta en el momento j, ya sea por que haya fallecido con anterioridad a dicho momento, o bien, por que llegando vivo al final del periodo $j, \quad j \notin [d_r^i, d_r^i + m_r^i - 1]$, o bien, por que no tenga prestación de renta, entonces $\alpha_j^{i,r} = 0$

5.5.2 Análisis de la variable aleatoria T_N

Definimos T_N como aquella variable aleatoria que nos da el número entero de períodos que van a permanecer con vida todos y cada uno de los partícipes que forman el colectivo N. Es por tanto una generalización de la conocida variable aleatoria T_i.

El campo de variabilidad de T_N dependerá del número de simulaciones que realizemos del colectivo, en el supuesto que hagamos z simulaciones, éste vendrá dado por el conjunto discreto:

$$\{\vec{p_1}, \vec{p_2} \ldots, \vec{p_l} \ldots, \vec{p_z}\}$$

donde:

$$\vec{p_l} = (t_1^l, t_2^l, \ldots, t_i^l, \ldots, t_n^l)$$

con:

$0 \leq t_i^l \leq w - x_i - 1$

siendo:

t_i^l: el número de períodos enteros que permanece con vida el partícipe "i" en la simulación l.

Obtendremos todas y cada una de las componentes de $\vec{p_l}$ por simulación de la variable aleatoria individual T_i asociada a cada uno de los individuos del colectivo. En particular, el valor de t_i^l vendrá dado como resultado de la simulación l-ésima de la variable aleatoria asociada al individio i-ésimo T_i.

El proceso que seguiremos para simular T_i es el siguiente: generaremos un número pseudoaleatorio uniformemente distribuido entre 0 y 1, este número corresponderá con un determinado valor de la probabilidad acumulada de la variable aleatoria T_i, de manera que si U es el número pseudoaleatorio generado y suponiendo x la edad del partícipe "i":

$$T_i = t \quad \text{si y sólo si} \quad \sum_{s=0}^{t-1} P\left[T_i = s\right] < U \leq \sum_{s=0}^{t} P\left[T_i = s\right]$$

como:

$$\sum_{s=0}^{t-1} P\left[T_i = s\right] = {}_{/t}q_x$$

$$\sum_{s=0}^{t} P\left[T_i = s\right] = {}_{/t+1}q_x$$

entonces:

$$T_i = t \quad \text{si y sólo si} \quad {}_{/t}q_x < U \leq {}_{/t+1}q_x$$

siendo t el valor simulado de T_i.

Una simulación del colectivo supondrá repetir este proceso tantas veces como individuos tenga el colectivo, dando lugar a una realización de T_N.

En consecuencia, cada realización de la variable aleatoria T_N supone una determinada trayectoria de evolución del colectivo, teniendo tantas trayectorias como simulaciones hagamos del mismo. Por tanto, las probabilidades asociadas a cada realización de T_N serán todas iguales, y su valor dependerá del número de simulaciones realizadas, así, si z es el número de simulaciones efectuadas en el colectivo, entonces:

$$P(T_N = \vec{p_l}) = \frac{1}{z}$$

Al igual que sucedía en el modelo individual, el conocimiento de T_N nos permitirá determinar el resto de variables aleatorias relevantes del modelo.

5.5.3 Análisis de la variable aleatoria: Pérdida del plan

En este apartado realizamos un estudio de las variables aleatorias que intervien en el cálculo de la variable aleatoria Pérdida del plan.

5.5.3.1 Variable aleatoria asociada a las prestaciones del Plan

Nuestro objetivo es estudiar la variable aleatoria asociada a las prestaciones que realiza el plan al colectivo N. La simbolizaremos por ξ_N^p y recogerá el valor actual financiero del conjunto de todas las prestaciones aociadas al colectivo N.

En consecuencia podemos determinar ξ_N^p como suma de $\xi_i^p \quad i = 1, 2, ..., n$:

$$\xi_N^p = \sum_{i=1}^{n} \xi_i^p$$

siendo:

ξ_i^P: la variable aleatoria valor actual financiero de las prestaciones que realiza el plan al partícipe "i".

El campo de variación de la variable aleatoria ξ_N^p vendrá dado por el conjunto discreto:

$$\{\alpha(N,1), \alpha(N,2), \ldots, \alpha(N,l), \ldots, \alpha(N,z)\}$$

siendo:

$\alpha(N,l)$: la realización de ξ_N^p asociada a la simulación l-ésima, y su valor viene dado por el valor actual financiero de las prestaciones asociadas al plan, fijada una trayectoria de evolución del colectivo dada por la simulación l-ésima de la variable aleatoria T_N.

A continuación estudiaremos como poder derminar una realización cualquiera $\alpha(N,l)$ de la variable aleatoria ξ_N^p, a través de la variable aleatoria individual ξ_i^p.

Como sabemos, ξ_i^p recoge el valor actual financiero de las prestaciones que realiza el plan al partícipe "i". El campo de variabilidad de ξ_i^p viene dado por el siguiente conjunto discreto:

$$\{\alpha(i,1), \alpha(i,2), \ldots, \alpha(i,l), \ldots, \alpha(i,z)\}$$

siendo:

$\alpha(i,l)$: el valor actual financiero de las prestaciones satisfechas por el plan al partícipe "i", asociada a la simulación l-ésima de T_i, y por tanto, suponiendo que el partícipe "i" vive t_i^l períodos enteros.

Si la operación asociada al partícipe "i", presenta las siguientes características:

a) $d_s^i < n^i$

b) $m_s^i + d_s^i < m_r^i + d_r^i$

podemos dar entonces la siguiente expresión de $\alpha(i,l)$:

$$\alpha(i,l)=\begin{cases} 0 & t_i^l < d_s^i \\ \alpha_{t_i^l+1}^{i,s} V^{t_i^l+1/2} & d_s^i \le t_i^l < d_r^i \\ \alpha_{t_i^l+1}^{i,s} V^{t_i^l+1/2} + \sum_{j=d_r^i}^{t_i^l} \alpha_j^{i,r} V^j & d_r^i \le t_i^l < d_s^i + m_s^i \\ \sum_{j=d_r^i}^{t_i^l} \alpha_j^{i,r} V^j & d_s^i + m_s^i \le t_i^l < d_r^i + m_r^i \\ \sum_{j=d_r^i}^{d_r^i+m_r^i-1} \alpha_j^{i,r} V^j & d_r^i + m_r^i \le t_i^l < w - x_i \end{cases}$$

La probabilidad asociada a cada una de las realizaciones de ξ_i^p vendrá inducida por la variable aleatoria T_N, por tanto:

$$P[\xi_i^p = \alpha(i,l)] = P[T_N = \vec{p_l}] = \frac{1}{z} \quad i = 1, \ldots, n$$

Si procedemos de igual forma con el resto de partícipes del colectivo, podremos entonces calcular $\alpha(N,l)$ como suma de prestaciones individuales:

$$\alpha(N,l) = \sum_{i=1}^{n} \alpha(i,l)$$

siendo:

$$P[\xi_N^p = \alpha(N,l)] = P[\xi_i^p = \alpha(i,l)] = \frac{1}{z} \quad i = 1, \ldots, n$$

Conocida las realizaciones de ξ_N^p y su distribución de probabilidad, estamos en condiciones de poder calcular cualquier momento de interés, como la esperanza, varianza o desviación tipo:

$$E[\xi_N^p] = \sum_{l=1}^{z} \alpha(N,l) \frac{1}{z}$$

$$Var[\xi_N^p] = \sum_{l=1}^{z} \alpha(N,l)^2 \frac{1}{z} - [E[\xi_N^p]]^2$$

$$D[\xi_N^p] = [Var[\xi_N^p]]^{\frac{1}{2}}$$

5.5.3.2 Variable aleatoria asociada a las contraprestaciones del plan

La variable asociada a las contraprestaciones del plan la simbolizaremos por ξ_N^c y recoge el valor actual financiero de las cotizaciones que realiza el colectivo N al plan. Por tanto al igual que sucedía con ξ_N^p, podemos obtener ξ_N^c como suma de variables aleatorias ξ_i^c:

$$\xi_N^c = \sum_{i=1}^{n} \xi_i^c.$$

siendo:

ξ_i^c: la variable aleatoria, valor actual financiero de las contraprestaciones que realiza el partícipe "i" al plan.

El campo de variación de la variable aleatoria ξ_N^c vendrá dado por el conjunto discreto:

$$\{P(N,1),\ldots,P(N,l),\ldots,P(N,z)\}$$

siendo $P(N,l)$: el valor actual de las contraprestaciones realizadas por el colectivo N al plan dada la simulación l-ésima del mencionado colectivo.

Al igual que en el apartado anterior, estudiaremos como calcular una determinada realización $P(N,l)$ de la variable aleatoria ξ_N^c, a través de realizaciones de las variables aleatorias individuales $\xi_i^c \quad i = 1, ...n$.

Si $\{P(i,1),\ldots,P(i,l),\ldots,P(i,z)\}$, es el conjunto discreto que define el campo de variabilidad de la variable aleatoria ξ_i^c , donde $P(i,l)$ es el valor actual de las primas puras satisfechas por el partícipe i, si éste vive t_i^l períodos enteros, siendo:

$$P(i,l) = \begin{cases} C^i & t_i^l = 0 \\ \\ C^i + \sum_{j=1}^{t_i^l} P_j^i V^j & 1 \le t_i^l < n^i \\ \\ C^i + \sum_{j=1}^{n^i-1} P_j^i V^j & t_i^l \ge n^i \end{cases}$$

donde: $P[\xi_i^c = P(i,l)] = \frac{1}{z}$

entonces, podemos calcular $P(N,l)$ como:

$$P(N,l) = \sum_{i=1}^{n} P(i,l)$$

siendo:

$$P[\xi_N^c = P(N,l)] = P[\xi_i^c = P(i,l)] = \frac{1}{z} \quad i = 1, \ldots, n$$

Conocidas las realizaciones de ξ_N^c y las probabilidades asociadas, podremos determinar cualquier momento como la esperanza, varianza y desviación tipo:

$$E[\xi_N^c] = \sum_{l=1}^{z} P(N,l)\frac{1}{z}$$

$$Var[\xi_N^c] = \sum_{l=1}^{z} P(N,l)^2\frac{1}{z} - [E[\xi_N^c]]^2$$

$$D[\xi_N^c] = [Var[\xi_N^c]]^{\frac{1}{2}}$$

Determinadas las variables aleatorias ξ_N^p y ξ_N^c podemos obtener la variable aleatoria Pérdida del plan L_N asociada al colectivo inicial N como:

$$L_N = \xi_N^p - \xi_N^c$$

dándose también en ella la siguiente relación:

$$L_N = \sum_{i=1}^{n} \xi_i^p - \sum_{i=1}^{n} \xi_i^c = \sum_{i=1}^{n} L_i \quad (I)$$

siendo L_i la variable aleatoria pérdida individual asociada al partícipe "i".

El cálculo de las primas puras para cada partícipe del colectivo coinciden con el cálculo de las prima puras asociadas al modelo individual ya que éstas últimas al satisfacer:

$$E[L_i] = 0 \quad i = 1, ...n$$

entonces también se cumple:

$$E[L_N] = 0$$

debido a la relación entre L_i y L_N dada por (I).

Esta circunstancia nos permite calcular la prima pura del colectivo como suma de primas puras individuales.

5.5.4 Cálculo del Recargo de Seguridad del plan

Nuestro objetivo es determinar cual debe ser la prima recargada que deben de satisfacer cada uno de los partícipes del colectivo N, para garantizar un nivel de insolvencia prefijado ϵ y que simbolizaremos:

$$P^{\epsilon,i} \quad \text{con} \quad i = 1, 2...n$$

siendo $P^{\epsilon,i}$ el vector de primas recargadas correspondientes al partícipe "i".

Calcular la prima recargada $P^{\epsilon,i}$ pasará por calcular el recargo $\lambda_i^{N,\epsilon}$, debido a la relación existente entre ellos:

$$P^{\epsilon,i} = (1 + \lambda_i^{N,\epsilon})P^i$$

donde:

- $\lambda_i^{N,\epsilon}$: recargo de seguridad que debe satisfacer el partícipe "i", y que garantiza un nivel de insolvencia ϵ, para el plan formado por el colectivo N.
- P^i: vector de primas puras asociadas al partícipe "i".

La condición que debe de cumplir el recargo de seguridad calculado es que :

$$Per_\epsilon[L_N^\epsilon] = 0$$

siendo L_N^ϵ la pérdida recargada del plan, por tanto:

$$L_N^\epsilon = \xi_N^p - \sum_{i=1}^{n}(1 + \lambda_i^{N,\epsilon})\xi_i^c = \xi_N^p - {}^{Rec}\xi_N^c$$

El problema con el que nos encontramos, es que el sistema formado por las ecuaciones:

$$\left.\begin{array}{c} Per_\epsilon[L_N^\epsilon] = 0 \\ P^{\epsilon,i} = (1+\lambda_i^{N,\epsilon})P^i \quad \forall i = 1,\ldots,n \\ \lambda_i^{N,\epsilon} \geq 0 \quad \forall i = 1,\ldots,n \end{array}\right\}$$

es indeterminado, es decir, muchos son los recargos $\lambda_i^{N,\epsilon}$ $\forall i = 1,\ldots,n$ que satisfacen el sistema de ecuaciones, por tanto habrá que incorporar información externa para convertir el sistema en determinado. Esta información externa adoptará la forma de criterios de determinación de $\lambda_i^{N,\epsilon}$, en consecuencia, el sistema a resolver será:

$$\left.\begin{array}{c} Per_\epsilon[L_N^\epsilon] = 0 \\ P^{\epsilon,i} = (1+\lambda_i^{N,\epsilon})P^i \quad \forall i = 1,\ldots,n \\ \lambda_i^{N,\epsilon} \geq 0 \quad \forall i = 1,\ldots,n \\ \lambda_i^{N,\epsilon} = f(\text{función de diversos parámetros según criterio.}) \qquad \mathbf{A} \end{array}\right\}$$

Del cual obtendremos los recargos $\lambda_i^{N,\epsilon}$ y por tanto las primas recargadas $P^{\epsilon,i}$

CLARAMUNT M. M. (1992)[14] expone cinco criterios de determinación del recargo de seguridad $\lambda_i^{N,\epsilon}$, calculando el recargo de seguridad para cada criterio de dos formas distintas:

- Por simulación individual de las variables aleatorias.
- Asumiendo hipótesis de normalidad para la variable aleatoria L_N^ϵ.

Nosotros nos limitaremos a enumerar dichos criterios :

1. Recargo común a todos los partícipes del colectivo:

$$\lambda_i^{N,\epsilon} = \lambda \quad \forall i = 1,\ldots,n$$

[14] "Control dinámico estocástico de la solvencia de los Planes de Pensiones", Tesis doctoral Universidad de Barcelona, capítulo VI pp.:745 – 762

2. Recargo que tiene en cuenta como único factor diferenciador la edad del partícipe:

$$\lambda_i^{N,\epsilon} = \delta \lambda_x$$

donde λ_x es una constante establecida a priori que depende exclusivamente de la edad del partícipe "i" y δ es la incógnita a determinar.

3. Recargo diferenciado para cada partícipe, expresándolo como una proporción δ del recargo individual:

$$\lambda_i^{N,\epsilon} = \delta \lambda_i^{\epsilon}$$

siendo λ_i^{ϵ} el recargo individual que le corresponde al partícipe "i" considerado aisladamente.

4. Recargo que tiene en cuenta la cuantía de la prestación como un factor que diferencia los recargos a aplicar a partícipes con edad y tipo de prestación idénticos. Se presentan dos funciones del recargo:

Primera función:

$$\lambda_i^{N,\epsilon} = \delta \lambda_K^{\epsilon} f(C_i) \quad \forall i \in N^K$$

Segunda función:

$$\lambda_i^{N,\epsilon} = \delta [1 + \lambda_K^{\epsilon}]^{f(C_i)} \quad \forall i \in N^K$$

siendo:

- $f(C_i)$: función que depende de la cuantía de la prestación del partícipe "i".
- λ_K^{ϵ} , el recargo asociado al subcolectivo N^k y que garantiza el nivel de riesgo ϵ.

  El subcolectivo N^k esta formado por aquellos partícipes del colectivo N que tienen la misma edad y el mismo tipo de prestaciones.

5. Calcular el recargo como resultado del siguiente programa de minimización:

$$Min \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^{\epsilon} C_i$$

sujeto a:

$$Per_{\epsilon}[L_N^{\epsilon}] = 0$$

$$\lambda(i)^{N,\epsilon} \geq 0 \quad \forall i = 1, \ldots, n$$

siendo: C_i: la prima pura única asociada al partícipe "i".

Cada criterio, dará lugar a unos recargos de seguridad $\lambda_i^{N,\epsilon}$ $i = 1, \ldots, n$ y por tanto a una primas recargadas $P^{\epsilon,i}$ $i = 1, \ldots, n$ distintas. En consecuencia el vector de primas recargadas del colectivo $P^{\epsilon,N}$, siendo:

$$P^{\epsilon,N} = \sum_{i=1}^{n} P^{\epsilon,i}$$

dependerán del criterio que utilicemos a la hora de calcular el recargo de seguridad. Así para cada conjunto de primas recargadas $P^{\epsilon,i}$ $i = 1, \ldots, n$ que sean solución del sistema de ecuaciones A, se obtiene un vector de primas recargadas $P^{\epsilon,N}$ distinto.

Sin embargo, si las primas del plan son únicas, la prima única recargada del colectivo $\Pi^{\epsilon,N}$ es independiente del criterio de determinación del recargo $\lambda_i^{N,\epsilon}$ $i = 1, \ldots, n$, ya que la misma puede obtenerse directamente a través de la siguiente expresión:

$$L_N^{\epsilon} = \xi_N^p - \Pi^{\epsilon,N}$$

donde $\Pi^{\epsilon,N}$ es la única incógnita relevante que satisface:

$$\mathrm{Per}_{\epsilon}[L_n^{\epsilon}] = 0$$

por tanto:

$$\Pi^{\epsilon,N} = \mathrm{Per}_{\epsilon}[\xi_N^p]$$

El cálculo de los recargos individuales de seguridad $\lambda_i^{N,\epsilon}$ $i = 1, \ldots, n$, se realizarán en este caso a posteriori, una vez determinado el valor de $\Pi^{\epsilon,N}$.

CLARAMUNT M.M. (1992) expone cinco criterios de determinación de dichos recargos. Los cuatro primeros criterios coinciden con los enumerados en el caso de primas periódicas y el último criterio se basa en la teoría de juegos cooperativos.

5.5.5 Análisis de la variable alatoria: Pérdida del reasegurador

En esta sección estudiamos las variables aleatorias que nos permiten determinar la variable aleatoria Pérdida del reasegurador, asociada a un colectivo de N partícipes L_N^R, siendo:

$$L_N^R = \xi_N^{p,R} - \xi_N^{c,R}$$

donde:

- $\xi_N^{p,R}$, es la variable aleatoria prestaciones del reasegurador asociada al colectivo de N partícipes.
- $\xi_N^{c,R}$, es la variable aleatoria contraprestaciones del reasegurador asociada al colectivo de N partícipes.

5.5.5.1. Variable aleatoria asociada a las prestaciones del reaseguro

Simbolizamos por $\xi_N^{p,R}$ la variable aleatoria asociada a las prestaciones que realiza el reaseguro al plan. Al igual que las variables aleatorias anteriores, su campo de variabilidad depende exclusivamente del número de simulaciones que realicemos del colectivo N, el cual viene representado por el siguiente conjunto discreto:

$$\{M(N,1), M(N,2), \ldots, M(N,l), \ldots M(N,z)\}$$

siendo:

$M(N,l)$: realización asociada a la simulación l-ésima de la variable aleatoria $\xi_N^{p,R}$, y su valor viene dado por el valor actual financiero de las prestaciones realizadas por el reaseguro al plan, dada la trayectoria l-ésima de eliminación del colectivo N y valoradas al tipo de interés técnico del reaseguro.

La distribución de probabilidad de la variable aleatoria $\xi_N^{p,R}$ depende del número de simulaciones que realicemos del colectivo, por tanto:

$$P[\xi_N^{p,R} = M(N,l)] = \frac{1}{z}$$

Conocidas las realizaciones, y las probabilidades asociadas a las mismas, el cálculo de la esperanza, varianza y desviación tipo es inmediato:

$$E[\xi_N^{p,R}] = \sum_{l=1}^{z} M(N,l)\frac{1}{z}$$

$$Var[\xi_N^{p,R}] = \sum_{l=1}^{z} M(N,l)^2\frac{1}{z} - [E[\xi_N^{p,R}]]^2$$

$$D[\xi_N^{p,R}] = [Var[\xi_N^{p,R}]]^{\frac{1}{2}}$$

A continuación, explicaremos cómo calcular las realizaciones $M(N,l)$, en las dos modalidades de reaseguro estudiadas.

El primer paso que tenemos que realizar es el mismo para las dos modalidades de reaseguro, y supone calcular para cada trayectoria de simulación del colectivo (haremos referencia a la simulación l-ésima), el total de prestaciones y contraprestaciones asociadas a la operación cierta que se deriva del conocimiento a priori, del instante de muerte de todos los partícipes del colectivo. Sea:

$\alpha_j^{s,N,l}$: prestación de seguro que reciben todos los partícipes del colectivo N fallecidos en el período j, valorado a mitad de dicho período, dada la trayectoria l-ésima de evolución del colectivo N, siempre y cuando sean beneficiarios de dicha prestación.

$\alpha_j^{r,N,l}$: prestación de renta que reciben todos los participes del colectivo N en el momento j, dada la trayectoria l-ésima de evolución del colectivo N y que sean beneficiarios de dicha prestación.

$P_j^{Rec,N,l}$: total de primas recargadas satisfechas por los partícipes del colectivo N en el momento j, dada la simulación l-ésima del colectivo N.

Podemos por tanto dar las siguientes relaciones:

$$\alpha_j^{s,N,l} = \sum_{i=1}^{n(j)^l} \alpha_j^{s,i} \quad j = 1,..,Q^{N,l}$$

$$\alpha_j^{r,N,l} = \sum_{i=1}^{n(j)^l} \alpha_j^{r,i} \quad j = 0,..,Q^{N,l} - 1$$

$$P_j^{Rec,N,l} = \sum_{i=1}^{n(j)^l} P_j^{R,i} \quad j = 0,...n_{max}^{N,l} - 1$$

siendo:

$n(j)^l$: número de partícipes que hay en el colectivo en el momento j , dada la simulación l-ésima del colectivo N.

$Q^{N,l}$: período de extinción del colectivo N asociada a la simulación l-ésima, por tanto:

$$Q^{N,l} = \max\{t_1^l + 1, t_2^l + 1..., t_n^l + 1\}$$

$n_{max}^{N,l}$: temporalidad máxima en el pago de primas con respecto a todos los elementos del colectivo N, asociado a la simulación l-ésima.

En particular, si el recargo aplicado es λ^ϵ, la prima recargada del colectivo la simbolizaremos $P_N^{\epsilon,N,l}$

5.5.5.1.1 Variable aleatoria asociada a las prestaciones del reasegurador en la modalidad de reaseguro del percentil

Calculado el total de prestaciones ($\alpha_j^{s,N,l}$, $\alpha_j^{r,N,l}$) y contraprestaciones ($P_j^{\epsilon,N,l}$) asociadas a la simulación l-ésima, determinaremos la pérdida del plan asociada a cada período, diferenciando en la misma la ocasionada por la renta y la ocasionada por el seguro. Esta matización es necesaria ya que las prestaciones de renta no coinciden temporalmente con las pretaciones del seguro. (Recordemos que las primeras se satisfacen al inicio de período, y las segundas se satisfacen a mitad del mismo.)

Sea:

$L_j^{\epsilon,r,l}$: pérdida del plan ocasionada por la renta en el momento j, y asociada a la simulación l-ésima del colectivo N.

$L_j^{\epsilon,s,l}$: pérdida del plan ocasionada por el seguro, valorada a mitad del período j-ésimo y asociada a la simulación l-ésima del colectivo N.

La obtención de dichos valores se obtienen aplicando la siguiente expresión:

$$A_j^{\epsilon,N,l} - \alpha_j^{r,N,l} = B_j^{\epsilon,r,l} \begin{cases} \text{Si } B_j^{\epsilon,r,l} < 0 \;\Rightarrow & \begin{array}{l} L_j^{\epsilon,r,l} = B_j^{\epsilon,r,l} \\ L_{j+1}^{\epsilon,s,l} = \alpha_{j+1}^{s,N,l} \end{array} \\ \\ \text{Si } B_j^{\epsilon,r,l} \geq 0 \;\Rightarrow & B_{j+1}^{\epsilon,s,l} = B_j^{\epsilon,r,l}(1+Ip)^{1/2} - \alpha_{j+1}^{s,N,l} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \text{Si } B_{j+1}^{\epsilon,s,l} \geq 0 \;\Rightarrow & \begin{array}{l} L_j^{\epsilon,r,l} = 0 \\ L_{j+1}^{\epsilon,s,l} = 0 \end{array} \\ \\ \text{Si } B_{j+1}^{\epsilon,s,l} < 0 \;\Rightarrow & \begin{array}{l} L_j^{\epsilon,r,l} = 0 \\ L_{j+1}^{\epsilon,s,l} = B_{j+1}^{\epsilon,s,l} \end{array} \end{cases}$$

Siendo:

$$A_0^{\epsilon,N,l} = P_0^{\epsilon,N,l}$$

$$\text{Si } B_{j+1}^{\epsilon,s,l} > 0 \quad \Rightarrow \quad A_{j+1}^{\epsilon,N,l} = P_{j+1}^{\epsilon,N,l} + B_{j+1}^{\epsilon,s,l}(1+Ip)^{1/2}$$

Si $B^{\epsilon,s,l}_{j+1} \leq 0 \quad \Rightarrow \quad A^{\epsilon,N,l}_{j+1} = P^{\epsilon,N,l}_{j+1}$

$j = 0, \ldots, Q^{N,l} - 1$

Una vez determinados los valores de la pérdida del plan ocasionada por la renta y por el seguro en cada período, podemos determinar una realización de la variable aleatoria $\xi^{p,R,\epsilon}_N$, como el valor actual financiero a tipo de interés del reaseguro de dicha pérdida periódica. En particular, la realización $M(N,l)$ viene dada por:

$$M(N,l) = \sum_{j=0}^{Q^{N,l}-1} L^{\epsilon,r,l}_j (1+Ir)^{-j} + \sum_{j=0}^{Q^{N,l}-1} L^{\epsilon,s,l}_{j+1}(1+Ir)^{-j-1/2}$$

Podemos observar que las realizaciones de la variable aleatoria $\xi^{p,R}_N$ dependen de $P^{\epsilon,N,l}_j \quad j = 0, ...n^l_{max} - 1$ por tanto, cuando en el plan hay partícipes que realizan aportaciones periódicas, la variable aleatoria $\xi^{p,R}_N$ dependerá del criterio utilizado en la determinación del recargo de seguridad, en la medida en que dicho criterio modifique el total de primas recargadas $P^{\epsilon,N,l}_j \quad j = 0, ...n^l_{max} - 1$.

Sin embargo, si todos los partícipes del plan realizan una única aportación, el criterio utilizado en la determinación del recargo no afecta a la variable aleatoria $\xi^{p,R}_N$, ya que en este caso la variables aleatoria $\xi^{p,R}_N$ depende, en cuanto a las contraprestacones se refiere, de $P^{\epsilon,N,l}_0$, cuyo valor, suma de primas únicas recargadas, es independiente del criterio aplicado.

5.5.5.1.2 Variable aleatoria asociada a las prestaciones del reasegurador en la modalidad de reaseguro diferencia de siniestralidad

Los pasos a seguir son totalmente paralelos a los descritios en el modelo individual, obteniendo las realizaciones de $\xi^{p,R}_N$ mediante las funciones:

- $Z^l_{N,h}$: función que recoge el disponible del plan al finalizar el período h-ésimo, asociado a la simulación l-ésima del colectivo N.
- $T^l_{N,h}$: función que recoge el importe que ha de satisfacer el reasegurador en el período h, asociado a la simulación del colectivo l-ésima del colectivo N.

Al final de esta sección, estudiaremos la problemática que se nos presenta para calcular las resevas de solvencia del colectivo $RS^{\epsilon}_{N,h}$.

Estudio de la función $Z^l_{N,h}$

Al igual que en el modelo individual, para poder determinar la función $Z^l_{N,h}$ necesitaremos definir las siguientes funciones:

a) $V^l_{N,h}$: función que recoge la provisión matemática en el instante h asociada a la simulación l-ésima del colectivo N. Su importe viene dado por la suma de las provisiones matemáticas individuales de los partícipes que vayan quedando vivos en cada período, dada la simulación l-ésima del coelctivo N:

$$V^l_{N,h} = \sum_{i=1}^{n(h)^l} V_{i,h} \quad h = 1, \ldots, Q^{N,l} - 1$$

siendo $V_{i,h}$ la provisión matemática en el momento h, asociada al partícipe "i".

b) $R^l_{N,h}$: función que recoge el margen de solvencia que el plan debe tener disponible en cada momento h, dada la simulación l-ésima del colectivo N.

Siendo:

- $R^l_{N,h} = p\, V^l_{N,h}$ si el margen de solvencia es un porcentaje "p" de la provisión matemática del colectivo.
- $R^l_{N,h} = RS^{\epsilon,l}_{N,h}$ si el margen de solvencia son las reservas de solvencia ϵ asociadas al colectivo.

Conocidas las funciones $R^l_{N,h}$ y $V^l_{N,h}$ podemos determinar la función $Z^l_{N,h}$, cuya expresión depende de si el reaseguro es del tipo A o del tipo B.

Si el reaseguro es del **tipo A**, entonces:

$$Z^l_{N,h} = \begin{cases} (P_0^{Rec,N,l} - \alpha_0^{r,N,l} - \alpha_1^{s,N,l}(1+Ip)^{-1/2})(1+Ip) & h=1 \\ \\ (Z^l_{N,h-1} + P_{h-1}^{Rec,N,l} - \alpha_{h-1}^{r,N,l} - \alpha_h^{s,N,l}(1+Ip)^{-1/2})(1+Ip) & \\ \text{si} \quad Z^l_{N,h-1} \geq R^l_{N,h-1} + V^l_{N,h-1} & \\ \\ (R^l_{N,h-1} + V^l_{N,h-1} + P_{h-1}^{Rec,N,l} - \alpha_{h-1}^{r,N,l} - \alpha_h^{s,N,l}(1+Ip)^{-1/2})(1+Ip) & \\ \text{si} \quad Z^l_{N,h-1} < R^l_{N,h-1} + V^l_{N,h-1} & 1 < h \leq Q^{N,l} \end{cases}$$

Si el reaseguro es del **tipo B**:

$$Z^l_{N,h} = \begin{cases} (P_0^{Rec,N,l} - \alpha_0^{r,N,l} - \alpha_1^{s,N,l}(1+Ip)^{-1/2})(1+Ip) & h=1 \\ \\ (R^l_{N,h-1} + V^l_{N,h-1} + P_{h-1}^{Rec,N,l} - \alpha_{h-1}^{r,N,l} - \alpha_h^{s,N,l}(1+Ip)^{-1/2})(1+Ip) & 1 < h \leq Q^{N,l} \end{cases}$$

Tenemos que hacer dos observaciones con respecto a la función disponible del colectivo asociada a la simulación l-ésima $Z^l_{N,h}$ y que la diferencia de la función disponible del modelo individual:

- Al suponer que el colectivo es totalmente heterogéneo, tanto en las prestaciones como en las contraprestaciones, el pago de prestaciones de renta , y el cobro de primas por parte del plan, pueden durar hasta la exitinción del colectivo.

- En este caso, el disponible del plan al final de cada período, debe de tener en cuenta los desembolsos realizados por éste, en concepto de prestaciones de seguros de aquellos partícipes fallecidos en cada período y que sean beneficiarios de dicha prestación.

Estudio de la función $T^l_{N,h}$

Al igual que sucede en el modelo individual, $T^l_{N,h}$ se desdobla en dos:

$$T^l_{N,h} = \begin{cases} T^{1,l}_{N,h} & h = 1, \ldots, Q^{N,l} - 1 \\ \\ T^{2,l}_{N,h} & h = 1, \ldots, Q^{N,l} \end{cases}$$

donde:

$T^{2,l}_{N,h}$ recoge el importe que tiene que satisfacer el reasegurador a mitad del período h, como consecuencia de la pérdida que puede tener el plan derivada del pago de las prestaciones del seguro.

Su importe dependerá del signo del diponible. Si el disponible del plan al final del período h es negativo $Z_{N,h} < 0$, entonces el plan no habrá tenido suficientes recursos para hacer frente al pago de las prestaciones del seguro satisfechas a mitad de período h, por tanto el reasegurador tendrá que satisfacer a mitad del mismo, los fondos necesarios para cubrir esas prestaciones.

Sin embargo, si $Z_{N,h} \geq 0$, el plan sí que habrá tenido fondos suficientes para poder hacer frente a las prestaciones de seguro del período h, no interviniendo el reasegurador. En consecuencia :

$$T^{2,l}_{N,h} = \begin{cases} -Z^l_{N,h}(1+Ip)^{-1/2} & \text{Si} \quad Z^l_{N,h} < 0 \\ \\ 0 & \text{Si} \quad Z^l_{N,h} \geq 0 \quad h = 1, \ldots, Q^{N,l} \end{cases}$$

tanto si el reaseguro es del tipo A como si es del tipo B.

$T^{1,l}_{N,h}$ recoge el importe que tiene que satisfacer el reasegurador al final del período h y su importe viene dado por las desviaciones, entre el disponible de la operación en el momento h y las provisiones matemáticas más el margen de solvencia correspondientes a dicho momento.

Hay que tener en cuenta que $T^{1,l}_{N,h}$ dependerá del signo del disponible.

Si $Z^l_{N,h} > 0$, entonces el reasegurador satisfará al final del período h, la diferencia entre lo que debiera tener $V^l_{N,h} + R^l_{N,h}$ y lo que tiene $Z^l_{N,h}$.

Si la diferencia es negativa, ésta irá a parar al reasegurador si es del tipo B, o bien no intervendrá si es del tipo A.

Si $Z^l_{N,h} \leq 0$, el reasegurador habrá cubierto la pérdida del plan originada por las prestaciones de seguro, y por tanto, el plan no tendrá recursos propios al final del período h. En consecuencia el reasegurador dotará totalmente al plan de los provisiones matemáticas y margenes de solvencia correspondientes.

En consecuencia, si el reaseguro es del Tipo A:

$$T^{1,l}_{N,h} = \begin{cases} \max\{0, \quad V^l_{N,h} + R^l_{N,h} - Z^l_{N,h}\} & \text{Si} \quad Z^l_{N,h} > 0 \\ V^l_{N,h} + R^l_{N,h} & \text{Si} \quad Z^l_{N,h} \leq 0 \quad h = 1, \ldots, Q^{N,l} - 1 \end{cases}$$

Si el reasegurador es del Tipo B:

$$T^{1,l}_{N,h} = \begin{cases} V^l_{N,h} + R^l_{N,h} - Z^l_{N,h} & \text{Si} \quad Z^l_{N,h} > 0 \\ V^l_{N,h} + R^l_{N,h} & \text{Si} \quad Z^l_{N,h} \leq 0 \quad h = 1, \ldots, Q^{N,l} - 1 \end{cases}$$

En el supuesto que nigún partícipe del colectivo tuviese prestaciones de seguro, al igual que sucede con el modelo individual, el riesgo de supervivencia quedaría cubierto con las aportaciones que realiza el reasegurador al final de cada período en concepto de diferencia de siniestralidad , ya que éstas garantizan como mínimo en cada período las provisiones matemáticas de la operación. Esta circunstancia hace que el disponible del plan sea siempre positivo o cero para cualquier período h, y por tanto la función $T^l_{N,h}$ en este caso, quedaría expresada del siguiente modo:

$$T^l_{N,h} = T^{1,l}_{N,h} = V^l_{N,h} + R^l_{N,h} - Z^l_{N,h} \quad h = 1, \ldots, Q^{N,l} - 1$$

Conocida la función $T^l_{N,h}$ podemos determinar la realización $M(N,l)$ de la variable aleatoria $\xi^{p,R}_N$ asociada a la simulación l-ésima:

$$M(N,l) = \sum_{h=1}^{Q^{N,l}-1} T_{N,h}^{1,l}(1+Ir)^{-h} + \sum_{h=1}^{Q^{N,l}} T_{N,h}^{2,l}(1+Ir)^{-h+1/2}$$

En la actualización hemos tenido presente el hecho que los términos de cuantía $T_{N,s}^{2,l}$ se satisfacen a mitad del período h-ésimo.

Cálculo de las reservas de solvencia $RS_{N,h}^{\epsilon}$

Estudiaremos la problemática que presenta en un colectivo N, el cálculo de las reservas de solvencia asociadas a un determinado nivel de riesgo ϵ en el momento h $RS_{N,h}^{\epsilon}$.

El cálculo de estas reservas, al igual que en el modelo individual, pasará por la variable aleatoria Pérdida Condicionada del plan asociada en este caso al colectivo N, $.^{Rec}L_{N,h}$, la cual recoge el valor actual financiero en h de las pérdidas futuras del plan (pagos futuros menos ingresos futuros) a partir de h con respecto a los partícipes que del colectivo N quedan vivos en h, conocidas las primas recargadas que deben de pagar estos partícipes en cada momento y que se calcularon en el momento 0, origen de la operación. De esta forma tendremos:

$$^{Rec}L_{N,h} = \xi_{N,h}^{p} + \ ^{Rec}\xi_{N,h}^{c}$$

donde:

- $\xi_{N,h}^{p}$ representa el valor actual financiero en h de las prestaciones del plan a realizar a partir de h, al colectivo de partícipes que quedan vivos en h. Hay que tener presente, que no todos los partícipes del colectivo inicial N, llegan vivos a h.

- $^{Rec}\xi_{N,h}^{c}$ representa el valor actual financiero en h de las cotizaciones o primas recargadas a satisfacer al plan, por los partícipes que quedan vivos del colectivo inicial en h.

Las reservas de solvencia, vendrán dadas por la siguiente expresión:

$$RS^{\epsilon}_{N,h} = \mathrm{Per}_{\epsilon}[\ {}^{Rec}L_{N,h}] - V_{N,h}$$

Como el recargo de seguridad aplicado por el plan para cada partícipe viene dado por $\lambda_i^{N,\epsilon}$, entonces:

$$RS^{\epsilon}_{N,h} = \mathrm{Per}_{\epsilon}[L^{\epsilon}_{N,h}] - V_{N,h}$$

El problema con el que nos encontramos es calcular por simulación el $\mathrm{Per}_{\epsilon}[L^{\epsilon}_{N,h}]$. El proceso a seguir es el siguiente:

Dada una determinada simulación l de evolución del colectivo N, el cálculo del $\mathrm{Per}_{\epsilon}[L^{\epsilon}_{N,h}]$ asociado a esa simulación y que simbolizaremos $\mathrm{Per}_{\epsilon}[L^{\epsilon,l}_{N,h}]$ consistirá en los siguientes pasos:

- Determinar para el período h, el número de partícipes que siguen vivos del colectivo inicial dada la simulación l-ésima $n(h)^l$.

- Conocido $n(h)^l$, volvemos a simular la evolución del colectivo a partir de h un número determinado de vezes z_1, condicionado a que en h viven $n(h)^l$. Para cada una de éstas últimas simulaciones (supongamos la simulación g-ésima) calculamos el valor actual en h de la diferencia entre las prestaciones y contraprestaciones de los partícipes del colectivo $N(h)^l$, habidas desde h hasta la exintinción del mismo.

  Esta diferencia que nos da la pérdida del plan en h condicionada a que en dicho momento el colectivo está formado por $n(h)^l$ partícipes, la simbolizaremos $L^{\epsilon,g}(N(h)^l, h)$ y su valor vendrá dado por la siguiente expresión:

$$L^{\epsilon,g}(N(h)^l,h) = \sum_{j=0}^{Q^{N(h)^l,g}-h-1} \alpha^{r,N(h)^l,g}_{h+j}(1+Ip)^{-j} + \sum_{j=1}^{Q^{N(h)^l,g}-h} \alpha^{s,N(h)^l,g}_{h+j}(1+Ip)^{-j+1/2} - \sum_{j=0}^{n_{max}^{N(h)^l,g}-h-1} P^{\epsilon,N(h)^l,g}_{h+j}(1+Ip)^{-j}$$

  donde:

$Q^{N(h)^l,g}$: período de extinción del colectivo $N(h)^l$ a contar desde el momento h, asociado a la simulación g-ésima del mismo.

$$Q^{N(h)^l,g} = \max\{t_1^g + 1, t_2^g + 1, \ldots, t_i^g + 1, \ldots, t_{n(h)^l}^g + 1\}$$

donde t_i^g es el número entero de períodos vividos por el partícipe $i \in N(h)^l$ a contar a partir de h, asociado a la evolución g-ésima del colectivo $N(h)^l$

$n_{max}^{N(h)^l,g}$: temporalidad máxima en el pago de primas a contar a partir de h, asociado a la simulación g-ésima, dol colectivo $N(h)^l$.

$\alpha_j^{s,N(h)^l,g}$ $j > h$: prestación de seguro que reciben todos los partícipes del colectivo $N(h)^l$, fallecidos en el período j, dada la trayectoria g-ésima de evolución del mencionado colectivo y que sean beneficiarios de dicha prestación.

$\alpha_j^{r,N(h)^l,g}$ $j \geq h$: prestación de renta que reciben todos los participes del colectivo $N(h)^l$ en el momento j, asociado a la trayectoria de evolución g-ésima del citado colectivo y que sean beneficiarios de dicha prestación.

$P_{h+j}^{Rec,N(h)^l,g}$ $j \geq h$: total de primas recargadas satisfechas por los partícipes del colectivo $N(h)^l$ en el momento j, dada la simulación g-ésima del citado colectivo.

donde:

$$\alpha_j^{s,N(h)^l,g} = \sum_{i=1}^{n(j)^{N(h)^l,g}} \alpha_j^{s,i} \quad j = h+1, \ldots, Q^{N(h)^l,g}$$

$$\alpha_j^{r,N(h)^l,g} = \sum_{i=1}^{n(j)^{N(h)^l,g}} \alpha_j^{r,i} \quad j = h, \ldots, Q^{N(h)^l,g} - 1$$

$$P_j^{Rec,N(h)^l,g} = \sum_{i=1}^{n(j)^{N(h)^l,g}} P_j^{R,i} \quad j = h, \ldots, n_{max}^{N(h)^l,g} - 1$$

siendo: $n(j)^{N(h)^l,g}$ el número de partícipes que hay en el plan en el momento j, dada la simulación g-ésima del colectivo $N(h)^l$. Siendo: $n(h)^{g,n(h)^l} = n(h)^l$.

Si repetimos este proceso z_1 veces, obtendremos z_1 valores de la pérdida condicionada del plan en h, $L^{\epsilon,g}(N(h)^l, h)$ $\quad g = 1, \ldots, z_1$, todos ellos con probabilidad $\frac{1}{z_1}$

Calculadas éstas, las ordenaremos de menor a mayor con sus correspondientes probabilidades, siendo $\mathrm{Per}_\epsilon[L^{\epsilon,l}_{N,h}]$ el primer valor de la pérdida condicionada en h, que acumule una probabilidad mayor o igual a $1-\epsilon$.

Calculado $\mathrm{Per}_\epsilon[L^{\epsilon,l}_{N,h}]$, podemos determinar las reservas de solvencia asociadas a la simulación l-ésima aplicando la siguiente expresión:

$$RS^{\epsilon,l}_{N,h} = R^l_{N,h} = \mathrm{Per}_\epsilon[L^{\epsilon,l}_{N,h}] - V^l_{N,h}$$

El problema con el que nos encontramos viene dado por el elevado número de simulaciones que tendriamos que realizar del colectivo, para para poder determinar las realizaciones de la variable aleatoria $\xi^{p,R}_N$, debido a los dos tipos de aleatoriedades con las que nos encontramos:

1. Aquella que tiene que ver con el número de partícipes que habrá en cada período h.

2. Aquella otra que tiene que ver con la evolución del colectivo a partir de h, condicionada al número de partícipes que hay en h.

De tal forma que, para cada simulación l del colectivo inicial N, y suponiendo que el colectivo se extingue en el periodo $Q^{N,l}$, tendremos que realizar $z_1\, Q^{N,l}$ simulaciones para poder calcular la realización $M(N,l)$. Por tanto, si realizamos z simulaciones del colectivo N para poder así obtener z realizaciones de la variable aleatoria $\xi^{p,R}_N$, el número de simulaciones que tendriamos que realizar y que simbolizaremos NSIM vendría dado por [15]:

$$NSIM = \sum_{l=1}^{z} z_1 \, Q^{N,l}$$

El número de simulaciones NSIM es tan elevado que resulta operativamente "imposible" determinar las realizaciones de $\xi_N^{p,R}$. Por tanto, si bien desde un punto de vista teórico no hay problema en abordar el reaseguro de diferencia de siniestralidad cuando el margen de solvencia son las reservas de solvencia, si que lo hay desde un punto de vista práctico a la hora de proceder a su cálculo, debido al gran número de simulaciones que tenemos realizar del colectivo.

5.5.5.2. Variable aleatoria asociada a las contraprestaciones del reaseguro

La variable aleatoria asociada a las contraprestaciones que realiza el plan al reaseguro la simbolizamos por $\xi_N^{c,R}$. Sus realizaciones, al igual que el resto de variables aleatorias del modelo, dependen de la trayectoria de evolución del colectivo simulada, viniendo por tanto dadas por el siguiente conjunto discreto:

$$\{P^R(N,1), \ldots, P^R(N,l), \ldots, P^R(N,z)\}$$

Siendo $P^R(N,l)$: el valor actual financiero valorado al tipo de interés del raseguro de las primas de reaseguro satisfechas por el colectivo N, dada la trayectoria de simulación l-ésima.

El proceso para determinar una realización cualquiera de la variable aleatoria $\xi_N^{c,R}$ es el siguiente:

Dada una determinada trayectoria de evolución del colectivo,(supongamos que ésta venga establecida por la simulación l-ésima), calculamos para cada período el total de primas de reaseguro $P_j^{R,(N),l}$ que corresponde pagar a todos los partícipes del colectivo N en el período j, donde:

[15]Por ejemplo si $z = 1000$, $z_1 = 1000$ y suponiendo que en término promedio el colectivo se extingue en 60 años, entonces $NSIM = 60.000.000$

$$P_j^{R,(N),l} = \sum_{i=1}^{n(j)} P_j^{R,(i)} \quad j = 0, \ldots, n_{max}^l - 1$$

siendo:$P_j^{R,(i)}$ la prima de reaseguro que le corresponde al partícipe "i", cuando éste pertenece al colectivo N.

Calculadas las primas totales de reaseguro asociadas a cada período, la realización de la variable aleatoria $\xi_N^{c,R}$ la obtendremos como el valor actual financiero al tipo de interés del reaseguro de dichas primas, por tanto:

$$P^R(N,l) = \sum_{j=0}^{n_{max}^l - 1} P_j^{R,(N),l}(1 + Ir)^{-j}$$

La distribución de probabilidad de la variable aleatoria $\xi_N^{c,R}$ viene dada por:

$$P[\xi_N^{c,R} = P^R(N,l)] = \frac{1}{z}$$

Conocidas las realizaciones, y las probabilidades asociadas a las mismas, el cálculo de la esperanza, varianza y desviación tipo es inmediato:

$$E[\xi_N^{c,R}] = \sum_{l=1}^{z} P^R(N,l)\frac{1}{z}$$

$$Var[\xi_N^{c,R}] = \sum_{l=1}^{z} P^R(N,l)^2\frac{1}{z} - [E[\xi_N^{c,R}]]^2$$

$$D[\xi_N^{c,R}] = [Var[\xi_N^{c,R}]]^{\frac{1}{2}}$$

En el caso particular de *Aportaciones únicas* de todos los elemento del colectivo, la variable $\xi_N^{c,R}$ deja de ser aleatoria para pasar a ser una variable cierta de importe el total de primas únicas recargadas $P_0^{R,(N)} = \Pi^{R,(N)}$, por tanto:

$$\xi_N^{c,R} = \Pi^{R,(N)}$$

Determinadas las variables aleatorias $\xi_N^{c,R}$ y $\xi_N^{p,R}$, estamos en condiciones de poder conocer la variable aleatoria pérdida del reasegurador L_N^R asociado al colectivo N:

$$L_N^R = \xi_N^{p,R} - \xi_N^{c,R}$$

5.5.5.3 Cálculo de la prima pura de reaseguro

En este apartado calcularemos las primas de reaseguro para cada uno de los partícipes del colectivo N. Se tratará por tanto de determinar:

$$P^{R,(i)} \quad \text{con} \quad i = 1, \ldots, n$$

siendo:

$P^{R,(i)}$: vector de primas de reaseguro que le corresponde satisfacer al partícipe i-ésimo, cuando pertenece al colectivo N.

Estas primas deben ser tales que:

$$\left. E[L_N^R] = E[\xi_N^{P,R}] - E[\xi_N^{c,R}] = 0 \quad (A) \right\}$$

El problema con el que nos encontramos es que tenemos un sistema con una ecuación y n conjuntos de incógnitas, aunque como cada conjunto de primas $P^{R,(i)}$ puede reducirse a una de ellas (normalmente la primera) a partir de la cual se calculan las posteriores de una forma determinada y conocida, tenemos en realidad n incógnitas.

Esta circunstáncia hace que el sistema sea compatible indeterminado, es decir, muchos son los vectores $P^{R,(i)}$ que pueden ser solución de (A). Este problema, al igual que sucede con el cálculo del recargo de seguridad λ_i^ξ , lo resolveremos introduciendo información externa, la cual adoptará la forma de criterios de determinación de la prima de reaseguro $P^{R,(i)}$.

En consecuencia el sistema de ecuaciones a resolver lo podremos expresar formalmente del siguiente modo:

$$\left.\begin{array}{c} E[L_N^R] = E[\xi_N^{P,R}] - E[\xi_N^{c,R}] = 0 \\ P^{R,(i)} = f(\text{función de diversos parámetros según el criterio}) \\ \forall i = 1, \ldots, n \end{array}\right\}$$

Los criterios a adoptar pueden ser parecidos a los enunciados en el caso del cálculo del recargo de seguridad $\lambda_i^{N,c}$, ya que la problemática desde un punto de vista formal es la misma, puesto que se trata de repartir entre los partícipes del colectivo el coste del reaseguro. Nosotros asumiremos el criterio de expresar la prima de reaseguro en función de algún o algunos elementos diferenciadores de los partícipes, como la cuantía de las prestaciones, el tipo de prestaciones, la edad, la prima de reaseguro individual etc. Por tanto:

$$P^{R,(i)} = \delta\, f(i) \quad i = 1, \ldots, n$$

donde:

$f(i)$: función establecida a priori y que depende del partícipe "i".

δ: proporción a determinar.

Nosotros consideraremos el caso particular en el que la prima de raseguro sea una proporción δ de la prima de reaseguro individual, $f(i) = P^{R,i}$, por tanto:

$$P^{R,(i)} = \delta\, P^{R,i} \quad i = 1, \ldots, n$$

donde:

$P^{R,i}$: vector de primas de reaseguro que le corresponde pagar al partícipe i , cuando en el plan sólo está dicho partícipe. Por tanto será un vector conocido.

No habría ningún problema en aplicar otro tipo de función $f(i)$ que estableciésemos a priori, ya que la metodología sería la misma que el caso que contemplamos.

A partir de ahora explicitaremos en la nomenclatura de δ el coletivo de partícipes del plan N:

$$\delta = \delta_N$$

El sistema de ecuaciones que nos permitirá obtener la prima de reaseguro podremos por consiguiente expresarlo así:

$$\left.\begin{array}{ll} E[\xi_N^{P,R}] - E[\xi_N^{c,R}] = E[L_N^R] = 0 & (I) \\ P^{R,(i)} = \delta_N \, P^{R,i} \quad i = 1, \ldots, n & (II) \end{array}\right\}$$

donde δ_N es la incógnita a deteminar.

La solución del mismo pasa por los siguientes pasos:

1. El primero es relacionar la $E[\xi_N^{c,R}]$ con δ_N, para ello partiremos de la relación entre las realizaciones de la variable aleatoria $\xi_N^{c,R}$ y δ_N.

   Sabemos que:

$$P^R(N,l) = \sum_{j=0}^{n_{max}^l - 1} P_j^{R,(N)} (1 + Ir)^{-j} = \sum_{j=0}^{n_{max}^l - 1} \sum_{i=1}^{n} P_j^{R,(i)} (1 + Ir)^{-j}$$

   como por la ecuación (II): $P^{R,(i)} = \delta_N \, P^{R,i} \Rightarrow$

$$P^R(N,l) = \delta_N \sum_{j=0}^{n_{max}^l - 1} \sum_{i=1}^{n} P_j^{R,i} (1 + Ir)^{-j} \quad (A)$$

   si simbolizamos por $P_j^{R,N}$ el total de primas de reaseguro individuales satisfechas en el instante j y calculadas según el modelo individual, entonces:

$$P_j^{R,N} = \sum_{i=1}^{n} P_j^{R,i}$$

   sustituyendo en (A) la anterior expresión :

$$P^R(N,l) = \delta_N \sum_{j=0}^{n_{max}^l - 1} P_j^{R,N} (1 + Ir)^{-j}$$

   A continuación definimos una variable aleatoria intermedia que simbolizamos por $\xi_N^{Q,R}$, la cual nos permite simplificar la expresión de $E[\xi_N^{c,R}]$ (recordemos que en el modelo individual, dicho papel venía asumido por la variable aleatoria $\xi_i^{Q,R}$).

Las realizaciones de la variable aleatoria intermedia $\xi_N^{Q,R}$ vienen dadas por el siguiente conjunto discreto:

$$\{Q(N,1),\ldots,Q(N,l),\ldots,Q(n,z)\}$$

siendo $Q(N,l)$: el valor actual financiero valorado al tipo de interés de reaseguro, del montante de las primas de reaseguro individuales asociadas a cada período, dada la simulación l-ésima:

$$Q(N,l) = \sum_{j=0}^{n_{max}^{l}-1} P_j^{R,N}(1+Ir)^{-j}$$

Por tanto, podemos dar la siguiente relación :

$$P^R(N,l) = \delta_N\, Q(N,l)$$

la cual, también se satisface en cuanto a las variables aleatorias que representan:

$$\xi_N^{c,R} = \delta_N\, \xi_N^{Q,R}$$

donde tomando esperanzas:

$$E[\xi_N^{c,R}] = \delta_N E[\xi_N^{Q,R}]$$

2. Conocida la relación entre $E[\xi_N^{c,R}]$ y δ_N, el siguiente paso es sutituir dicha relación en la ecuación (I), en consecuencia:

$$E[\xi_N^{P,R}] - \delta_N\, E[\xi_N^{Q,R}] = 0$$

de donde, despejando δ_N tenemos:

$$\delta_N = \frac{E[\xi_N^{P,R}]}{E[\xi_N^{Q,R}]}$$

Conocido el valor de δ_N, la obtención de las primas de reaseguro es inmediata, sustituyendo dicho valor en la ecuación (II):

$$P^{R,(i)} = \delta_N \, P^{R,i}$$

En el supuesto de que todas las aportaciones de todos los partícipes del colectivo N, sean *únicas*, la variable $\xi_N^{Q,R}$ dejará de ser aleatoria para convertirse en un valor cierto de importe el total de primas únicas de reaseguro individuales:

$$\xi_N^{Q,R} = E[\xi_N^{Q,R}] = \sum_{i=0}^{n} P_0^{R,i} = \sum_{i=0}^{n} C^{R,i} = \sum_{i=0}^{n} \Pi^{R,i}$$

siendo δ_N:

$$\delta_N = \frac{E[\xi_N^{P,R}]}{\sum_{i=0}^{n} \Pi^{R,i}}$$

Tenemos que hacer las siguientes observaciones:

- La prima de reaseguro, en aquellas modalidades de reaseguro en las que el recargo de seguridad del plan venga dado por el nivel de riesgo prefijado ϵ, dependerá del criterio utilizado en el cálculo del recargo de seguridad $\lambda_i^{N,\epsilon}$, en la medida en que éste afecte a la variable aleatoria $\xi_N^{p,R}$ y por tanto a su esperanza.

  Sin embargo, en el caso de primas únicas, la prima de reaseguro no depende del criterio utilizado en el cálculo del recargo de seguridad $\lambda_i^{N,\epsilon}$.

- La proporción δ_N depende del tamaño del colectivo, así, cuanto mayor sea el número de partícipes n, menor será la proporción δ, y por tanto menos tendrán que pagar los partícipes en concepto de reaseguro. Esto es debido a que la introducción de nuevos partícipes en el plan, reduce el riesgo global del mismo y por tanto el coste global del reaseguro, consecuencia de la disminución que se produce en las desviaciones existentes entre la mortalidad teórica y la mortalidad real. Por consiguiente:

Si $n = 1 \Rightarrow \delta_N = 1$. En este caso, si el plan está formado por un sólo partícipe, este tendrá que satisfacer la prima de reaseguro individual.

$$P^{R,(i)} = P^{R,i}$$

Si $n \to \infty \Rightarrow \delta_N \to 0$

En el caso extremo de que el plan estuviese formado por toda la población, la mortalidad teórica "coincidiría" con la mortalidad real, y por tanto con el cobro de la prima pura a cada partícipe, ya habría suficiente para hacer frente a la solvencia del plan, no siendo necesario ni el recargo de seguridad, ni tampoco el reaseguro.

Por tanto, $\delta_N \in (0, 1]$

Podemos considerar $1 - \delta_N$ como una tasa unitaria, que da idea del ahorro que con respecto a la prima de raseguro individual, presenta la prima de reaseguro de un determinado partícipe cuando éste forma parte de un colectivo.

A las implicaciones anteriores hay que hacer dos matizaciones:

- En la modalidad de reaseguro del percentil, si bien la prima total de cada partícipe del colectivo es siempre inversamente proporcional al tamaño del colectivo, en colectivos pequeños puede darse el caso que la prima de reaseguro para cada partícipe del colectivo, sea mayor que la prima de reaseguro que pagaría si considerasemos el partícipe individualmente. Esto es debido al menor recargo de seguridad del plan $\lambda_i^{N,\epsilon}$ que debe de satisfacer cada partícipe conforme aumenta el tamaño del colectivo, el cual hace que para colectivos reducidos haga aumentar la prima de reaseguro.

- En la modalidad de diferencia de siniestralidad si el reaseguro es del tipo B, el valor de δ_N puede hacerse negativo conforme aumenta el tamaño del colectivo. Esto es debido al excedente repartido por el plan al reasegurador en cada período, que hace que según sean las características técnicas de la operación, el reasegurador reciba más de lo que desembolsa conforme aumenta el tamaño del colectivo.

Estas matizaciones queda puestas de manifiesto en el ANEXO de este capítulo.

5.5.6 Análisis de la variable alatoria: Pérdida ajustada del reasegurador

Al igual que hicimos con el caso individual, nos plantearemos calcular cual sería la nueva prima de reaseguro, prima ajustada de reaseguro, que resultaría a los partícipes pertenecientes al colectivo N, si se le cede al reasegurador el posible beneficio que puede tener el plan en el momento de la extinción del colectivo.

La obtención de la variable aleatoria Pérdida ajustada del reaseguro y por tanto el cálculo de la prima ajustada de reaseguro pasará por la variable aleatoria asociada al beneficio del plan.

5.5.6.1 Variable aleatoria asociada al beneficio del plan

La variable aleatoria asociada al beneficio del plan en el momento de la extinción del colectivo la simbolizamos por $\xi_N^{b,R}$.

Sus realizaciones vienen dadas por el siguiente conjunto discreto:

$$\{b(N,1),\ldots,b(N,l),\ldots,b(N,z)\}$$

siendo $b(N,l)$: el valor actual financiero valorado al tipo de interés técnico del reaseguro del beneficio positivo que presenta el plan en el momento de extinción del colectivo N, dada la simulación l-ésima del mencionado colectivo.

Las realizaciones de $\xi_N^{b,R}$ son equiprobables, y su número depende del número de simulaciones que realizemos, siendo:

$$P[\xi_N^{b,R} = b(N,l)] = \frac{1}{z}$$

Conocida la variable aleatoria $\xi_N^{b,R}$, podremos determinar la variable aleatoria Pérdida del reasegurador ajustada $L_N^{R,A}$ que se define como:

$$L_N^{R,A} = \xi_N^{p,R} - \xi_N^{b,R} - \xi_N^{c,R}$$

La variable aleatoria asociada al beneficio del plan dependerá de la modalidad de reaseguro contratada.

A continuación determinaremos la expresión formal de $b(N,l)$, para cada modalidad de reaseguro.

5.5.6.1.1 Variable aleatoria asociada al beneficio del Plan en la modalidad de reaseguro del percentil

La obtención de $b(N,l)$ es inmediata en la modalidad de reaseguro del percentil:

$$b(N,l) = \begin{cases} 0 & \text{Si } B(N,l) \leq 0 \\ B(N,l) & \text{Si } B(N,l) > 0 \end{cases}$$

siendo $B(N,l)$: el valor actual al tipo de interés del reaseguro del beneficio asociado al período de extinción del colectivo $Q^{N,l}$ y valorado éste a mitad del mismo:

$$B(N,l) = \left[\left(\sum_{j=0}^{n_{N,max}^{l}-1} P_j^{c,N,l}(1+Ip)^{-j} \right) - \right.$$

$$\left. \left(\sum_{j=0}^{Q^{N,l}-1} \alpha_j^{r,N,l}(1+Ip)^{-j} + \sum_{j=1}^{Q^{N,l}} \alpha_j^{s,N,l}(1+Ip)^{-j+1/2} \right) \right] (1+Ip)^{Q^{N,l}-1/2}(1+Ir)^{-Q^{N,l}+1/2}$$

5.5.6.1.2 Variable aleatoria asociada al beneficio del Plan en la modalidad de raseguro diferencia de siniestralidad

Calculamos las realizaciones de la variable aleatoria $\xi_N^{b,R}$ a través de la función H_N^l, la cual recoge el excedente que presenta el plan valorado a mitad del período en el que se extingue el colectivo N, dada la simulación l-ésima del mencionado colectivo:

$$H_N^l = \begin{cases} Z_{N,Q^{N,l}}^l (1+Ip)^{-1/2} & \text{si} \quad Z_{N,Q^{N,l}}^l > 0 \\ 0 & \text{si} \quad Z_{N,Q^{N,l}} \leq 0 \end{cases}$$

La realización asociada a la simulación l-ésima de la variable aleatoria $\xi_N^{b,R}$, la obtenemos como el valor actual financiero al tipo de interés del reaseguro de la función H_N^l:

$$b(N,l) = H_N^l (1+Ir)^{-Q^{N,l}+1/2}$$

Conocidas las realizaciones de $\xi_N^{b,R}$, sea cual sea la modalidad de reaseguro, y sus probabilidades, podemos determinar cualquier momento como la esperanza, varianza y desviación tipo :

$$E[\xi_N^{b,R}] = \sum_{l=1}^{z} b(N,l)\frac{1}{z}$$

$$Var[\xi_N^{b,R}] = \sum_{l=1}^{z} b(N,l)^2\frac{1}{z} - [E[\xi_N^{b,R}]]^2$$

$$D[\xi_N^{b,R}] = [Var[\xi_N^{b,R}]]^{\frac{1}{2}}$$

5.5.6.2 Cálculo de la prima ajustada de reaseguro

El proceso de cálculo de la prima ajustada de reaseguro, es totalmente paralelo, al ya descrito en el cálculo de la prima de reaseguro. Supondremos por tanto, que la prima ajustada de reaseguro asociada a cada uno de los partícipes que forman el colectivo será una proporción de su prima de reaseguro ajustada individual:

$$P^{R,(i),A} = \delta_N^A \, P^{R,i,A} \quad i = 1,\ldots,n$$

siendo:

$P^{R,(i),A}$: vector de primas de reaseguro ajustadas que le corresponde satisfacer al partícipe "i", cuando pertenece al colectivo N.

$P^{R,i,A}$: vector de primas de reaseguro ajustadas que le corresponde pagar al partícipe "i" , cuando en el plan sólo existe dicho partícipe.

δ_N^A: incógnita a determinar.

En este caso, calcularemos el vector $P^{R,(i),A}$ $i = 1,\ldots,n$ determinando δ_N^A, a través del siguiente sistema de ecuaciones:

$$\left.\begin{array}{c} E[\xi_N^{P,R}] - E[\xi_N^{b,R}] - E[\xi_N^{c,R}] = E[L_N^{R,A}] = 0 \\ P^{R,(i),A} = \delta_N^A P^{R,i} \\ \forall i = 1,\ldots,n \end{array}\right\}$$

Si resolvemos el sistema de ecuaciones anterior, siguiendo el mismo proceso que utilizamos en el cálculo de δ_N (apartado 5.5.5.3), llegamos a la siguiente expresión de δ_N^A:

$$\delta_N^A = \frac{E[\xi_N^{P,R}] - E[\xi_N^{b,R}]}{E[\xi_N^{Q,R}]}$$

En este caso hay que matizar que una realización cualquiera de la variable aleatoria intermedia $\xi_N^{Q,R}$, por ejemplo, la asociada a la simulación l-ésima $Q(N,l)$ está constituida por el valor actual financiero, valorado al tipo de interés de reaseguro, del montante de las primas de reaseguro *ajustadas* individuales asociadas a cada período:

$$Q(N,l) = \sum_{j=0}^{n_{max}^l - 1} P_j^{R,N,A}(1+Ir)^{-j}$$

donde $P_j^{R,N,A} = \sum_{i=0}^{n} P_j^{R,i,A}$

Si todas la aportaciones de los partícipes del colectivo son *únicas* entonces:

$$E[\xi_i^{Q,R}] = \sum_{i=0}^{n} P_0^{R,i,A} = \sum_{i=0}^{n} C^{R,i,A} = \sum_{i=0}^{n} \Pi^{R,i,A}$$

por tanto:

$$\delta_N^A = \frac{E[\xi_N^{P,R}] - E[\xi_N^{b,R}]}{\sum_{i=0}^{n} \Pi^{R,i,A}}$$

5.5.7 Análisis del coste total de la operación

El coste total asociado al partícipe $i \in N$ viene dado por las primas puras del plan recargadas con el recargo del plan λ y por las primas de reaseguro recargadas con el recargo del reasegurador λ^R que para nosotros será un dato exógeno.

El valor actual actuarial del coste total $VACT^{(i)}$ valorado al tipo de interés del plan Ip y asociado al partícipe "i" vendrá dado por:

$$VACT^{(i)} = VAPREC^{(i)} + VAPREA^{(i)}$$

donde:

$VAPREC^{(i)} = \Pi^{Rec,(i)} + \sum_{j=1}^{n-1} P_j^{Rec,(i)} {}_jE_x$: valor actual actuarial de las primas puras recargadas.

$VAPREA = \Pi^{REA,(i)}(1+\lambda^R) + \sum_{j=1}^{n-1} P_j^{REA,(i)}(1+\lambda^R) {}_jE_x$:valor actual actuarial de las primas satisfecas al reaseguro.

Si la modalidad de reaseguro es sin reparto beneficios al reasegurador entonces: $\Pi^{REA,(i)} = \Pi^{R,(i)}$ y $P_j^{REA,(i)} = P_j^{R,(i)}$.

Si la modalidad es con reparto de beneficios al reasegurador: $\Pi^{REA,(i)} = \Pi^{R,(i),A}$ y $P_i^{REA,(i)} = P_i^{R,(i),A}$

El valor actual del coste total del plan en su conjunto, $VACT^N$, podremos obtenerlo como suma de $VACT^i$:

$$VACT^N = \sum_{i=1}^{n} VACT^i$$

Las variables que afectan al coste total son:

- Los tipos de intereses técnicos aplicados por el plan y por el reasegurador, Ip e Ir.

- La estructura del colectivo, tanto a lo que se refiere a las prestaciones, contraprestaciones y edad actuarial de los partícipes que lo forman.

- Del tamaño del colectivo n.
- El recargo del reasegurador λ^R.
- El recargo aplicado por el plan λ .

Al igual que sucede con el modelo individual, podemos expresar $VACT^N$ desde el punto de vista del plan, como una función de una sola variable λ, ya que el resto de variables le vendrán dadas:

$$VACT^N = f(\lambda)$$

Sin embargo, la determinación de la estrategia óptima recargo reaseguro, en el caso de colectivos es muy compleja de determinar a priori, por tratarse de colectivos heterogéneos. De todas formas, incluso cuando el colectivo es totalmente homogéneo tanto en edad como en tipo de prestaciones y contraprestaciones, la estrategia óptima no tiene porque coincidir con la que obtuvimos en el modelo individual (ver ANEXO 5-1), ya que el tamaño del colectivo también incide de forma definitiva en el coste total de la operación y por tanto en el recargo de seguridad óptimo. Por consiguiente, la estrategia óptima en el caso de colectivos tendremos que determinarla a posteriori, probando qué recargo λ es el que minimiza $VACT^N$.

5.6 Estudio de la prima de reaseguro en los colectivos abiertos

En este apartado contemplamos la problemática que existe en el cálculo de la prima de reaseguro cuando el colectivo es abierto.

En este caso, no tendrá sentido plantearmos la modalidad de reaseguro del percentil, ya que en esta modalidad de reaseguro, el reasegurador cubre las obligaciones del plan con los partícipes cuando éste se queda sin fondos. Evidentemente si el colectivo es cerrado, cabe la posibilidad de que el plan se quede sin fondos ya que éste sólo se nutre de las prima cobradas; sin embargo si el colectivo es abierto, en cualquier momento el plan puede disponer de nuevos fondos como consecuencia de la entrada de nuevos partícipes, siendo prácticamente imposible determinar la prima de reaseguro en esta modalidad, salvo que estableciésemos hipótesis sobre la entrada de nuevos partícipes al plan, que no será nuestro caso.

En colectivos abiertos tampoco tendrá sentido plantearnos calcular la prima ajustada de reaseguro, ya que tampoco podremos conocer a prioir, el momento de extinción del colectivo, por irse éste renovando con nuevos partícipes continuamente.

Esta circunstancia hace que nos planteemos el estudio del reaseguro en colectivos abiertos cuando se trate de la modalidad diferencia de sinietralidad. En este sentido destacar que cuando el margen de solvencia venga dado por las resevas de solvencia asociadas al nivel de riesgo ϵ, tendremos un problema añadido previo al cálculo de la prima de reaseguro, y tiene que ver con la variación que se produce en el nivel de riesgo del plan, como consecuencia de la incorporación de nuevos partícipes al colectivo.

Supondremos, para dar mayor generalidad al modelo, entradas periódicas [16] de partícipes al plan.

Nosotros realizaremos el estudio de la prima de reaseguro, en un determinado momento t_k, de vida del plan, en el cual se realiza la k-ésima entrada de partícipes al

[16] El periodo de entrada no tiene por que ser constante

plan.

La nomenclatura a utilizar será la siguiente:

t_k $k = 0, 1 \ldots$: es el momento en el que se produce la k-ésima entrada de partícipes al colectivo. En el supuesto que $k = 0$ entonces $t_0 = 0$

No consideraremos como entrada la constituida por el colectivo inicial, por tanto, cuando hagamos referencia a las entradas de partícipes al colectivo, contaremos como tales aquellas realizadas con posterioridad al origen del plan.

$EN(t_k)$ $k = 0, 1, \ldots$: colectivo constituido por aquellos partícipes que entran en el momento t_k, formado por $en(t_k, 0) = en(t_k)$ partícipes.

$N'(t_k)$ $k = 0, 1, \ldots$: colectivo constituido por los partícipes que hay en el momento t_k incluidos los que entran en t_k. Este colectivo estará formado por $n'(t_k)$ partícipes, siendo:

$$n'(t_k) = \sum_{h=0}^{k} en(t_h, t_k - t_h)$$

$Q^{N'(t_k)}$: período de extinción del colectivo $N'(t_k)$ a contar a partir de t_k

$N(t_k)$ $k = 0, 1, \ldots$: colectivo constituido por aquellos partícipes que son de $N'(t_k)$, pero que no han entrado en t_k. El colectivo $N(t_k)$ esta formado por $n(t_k)$ partícipes, siendo:

$$n(t_k) = \sum_{h=0}^{i-1} en(t_h, t_k - t_h) = n'(t_k) - en(t_k)$$

N'_k: colectivo del plan condicionado a que se han producido k entradas. El colectivo N'_k esta formado por aquellos partícipes que hay en el plan en cada momento, teniendo presente que se han producido k entradas. El número de elementos del colectivo N'_k y que simbolizaremos n'_k dependerá del momento que consideremos, por tanto:

$$n'_k = n'(s)_k \quad s = 0, 1, \ldots, t_k, \ldots, t_k + Q^{N'(t_k)}$$

Siendo:

$$n'(s)_k = \begin{cases} \sum_{h=0}^{i} en(t_h, s - t_h) & \text{siendo} \quad t_i \leq s < t_{i+1} \quad \text{si } s < t_k \\ \sum_{h=0}^{k} en(t_h, s - t_h) & \text{si } s \geq t_k \end{cases}$$

Si $s < t_k$ entonces $n'(s)_k$ estará formado por el total de partícipes que habrá en s, teniendo presente todas las entradas de partícipes desde el origen hasta s.

Si $s \geq t_k$ entonces $n'(s)_k$ estará formado por el total de partícipes que hay en el momento s, pero teniendo presente sólo las k primeras entradas de partícipes al colectivo.

En el caso particular que $s = 0$ entonces $n'(s)_k = n(0) = n$ (número de partícipes del colectivo inicial N).

Si $s = t_k + Q^{N'(t_k)}$ entonces $n'(s)_k = 0$, pues se habrá extinguido totalmente el colectivo N'_k

Si simbolizamos por $Q^{N'_k}$ el período de extinción del colectivo N'_k entonces:

$$Q^{N'_k} = t_k + Q^{N'(t_k)}$$

El estudio de los colectivos abiertos lo realizaremos bajo los siguientes apartados:

- Problemática que se presenta cuando el plan desea mantener un nivel de riesgo prefijado ϵ en colectivos abiertos.

- Cálculo de la prima de reaseguro cuando se realiza la k -ésima entrada de partícipes al plan.

5.6.1 Problemática que se presenta cuando el plan desea mantener un nivel de riesgo prefijado ϵ en colectivos abiertos

Cuando el margen de solvencia a cubrir por el reasegurador venga dado por las reservas de solvencia RS^{ϵ} asociadas al nivel de riesgo ϵ, tendremos un problema adicional previo al cálculo de la prima de reaseguro originado por la variación que se produce en el nivel de riesgo del plan, cuando se produce una entrada de nuevos partícipes al colectivo.

Si el colectivo es cerrado, entonces las reservas de solvencia $RS^{\epsilon}_{N,t}$ garantizan (junto con $V_{N,t}$) el nivel de riesgo ϵ para el plan en el momento t, sin embargo si en dicho momento entran nuevos partícipes, el nivel de riesgo del plan se verá modificado en t, si se mantienen los mismos recargos de seguridad del plan y las mismas prestaciones para todos los partícipes.

Puede darse la siguiente paradoja: si no variamos la prestaciones para ningún partícipe del colectivo y mantenemos el mismo recargo de seguridad para los partícipes que ya estaban, el nivel de riesgo prefijado por el plan ϵ puede conseguirse para niveles de recargos de seguridad para los nuevos partícipes, inferiores a los aplicados al resto de partícipes, o incluso pueden llegar a ser nulos o negativos, pagando en este último caso los nuevos partícipes un importe menor que la propia prima pura.

En esta sección estudiaremos como se tendrán que ver modificadas las prestaciones de los partícipes, para que el plan mantenga el nivel de riesgo ϵ en el momento de la entrada t_k.

Este estudio se hace necesario antes de analizar la prima de reaseguro en colectivos abiertos, ya que la determinación de ésta, supone conocer la estructura de las prestaciones que tendrá el plan con respecto a sus partícipes después de la incorporación de los nuevos; estructura que se verá modificada en este caso conforme vayan entrando nuevos partícipes al plan.

Nos plantearemos cual será el nuevo recargo de seguridad a satisfacer por los nuevos partícipes que entran en t_k y que simbolizaremos $\lambda_i^{EN(t_k),\epsilon}$, que garantice el nivel de riesgo del plan en el momento t_k en ϵ después de la entrada de nuevos partícipes. Este recargo lo compararemos con el recargo que satisfacen los partícipes que en t_k ya estaban en el plan y que simbolizaremos $\lambda_i^{N(t_k),\epsilon}$ de tal forma que:

- Si $\lambda_i^{EN(t_k),\epsilon} > \lambda_i^{N(t_k),\epsilon}$, (esta comparación sólo será posible si el criterio aplicado en el cálculo de $\lambda_i^{EN(t_k),\epsilon}$ es el mismo que el que se aplicó cuando se calculó $\lambda_i^{N(t_k),\epsilon}$ y además ambos sean comparables), entonces incorporación de nuevos partícipes al plan ha incrementado el nivel de riesgo de éste. En este caso no permitiremos la entrada al nuevo colectivo.

- Si $\lambda_i^{EN(t_k),\epsilon} \leq \lambda_i^{N(t_k),\epsilon}$, que será lo normal, permitiremos la entrada de los nuevos partícipes pues reducen el nivel de riesgo del plan.

  En este caso la estrategia que seguiremos será la de aplicar el mismo recargo $\lambda_i^{N(t_k),\epsilon}$ a todos los partícipes del plan incluidos los que entran y repercutir el beneficio que supone cobrar a los nuevos un recargo superior al que les corresponde, en aumentar las prestaciones a percibir partir de t_k a todos los partícipes pertenecientes al nuevo colectivo ampliado $N'(t_k)$.

  De esta forma, el recargo de seguridad que siempre aplicaremos vendrá dado por el que se calculó con el colectivo inicial N:

$$\lambda_i^{N(t_k),\epsilon} = \lambda_i^{N,\epsilon} \quad \forall k > 0$$

A continuación estudiaremos los siguientes apartados:

- Calculo del recargo de seguridad de los nuevos partícipes $\lambda_i^{EN(t_k),\epsilon}$

- Cálculo de las nuevas prestaciones para el colectivo ampliado $N'(t_k)$

5.6.1.1 Cálculo del recargo de seguridad de los nuevos partícipes $\lambda_i^{EN(t_k),\epsilon}$

Nuestro objetivo es determinar qué recargos de seguridad debemos de aplicar a los $en(t_k)$ partícipes en t_k, teniendo en cuenta que :

a) el nivel de riesgo del plan siga siendo ϵ en el momento t_k.

b) se mantengan los mismos recargos de seguridad para los partícipes que ya estaban en el plan.

c) el plan en el momento t_k presenta como mínimo los fondos necesarios que garantizan el nivel de solvencia $1-\epsilon$ en t_k, si no se hubiese producido la entrada de los $en(t_k)$ partícipes.

Si el colectivo es cerrado, el recargo $\lambda_i^{N,\epsilon}$ garantiza que el percentil-ϵ de la pérdida del plan asociado al colectivo del plan (que en este caso vendrá dado por N) sea cero:

$$\mathrm{Per}_\epsilon[L_N^\epsilon] = 0$$

Por tanto, en el origen (momento de la entrada al plan del colectivo N) cobramos un recargo de seguridad $\lambda^{N,\epsilon}$ que garantiza que en dicho momento la solvencia del plan sea $1-\epsilon$.

El criterio que seguiremos para calcular el recargo de los que entran en un determinado periodo $t_k > 0$ será el mismo que el anterior, es decir, en el momento de la entrada de los nuevos, el recargo a aplicar a estos será de tal cuantía que el nivel de solvencia del plan en t_k sea el nivel prefijado $(1-\epsilon)$ teniendo en cuenta los fondos que disponga el plan en ese momento. Por tanto, el recargo $\lambda_i^{EN(t_k)}$ deberá de satisfacer la siguiente ecuación:

$$\mathrm{Per}_\epsilon[L_{N'(t_k),t_k}^\epsilon] - F_{t_k} = 0$$

donde:

- $L_{N'(t_k),t_k}^\epsilon$ es la variable aleatoria pérdida condicionada del plan valorada en t_k, y asociada a los $N'(t_k)$ partícipes:

$$L^{\epsilon}_{N'(t_k),t_k} = \xi^{p}_{N'(t_k),t_k} - {}^{Rec}\xi^{c}_{N'(t_k),t_k}$$

$\xi^{p}_{N'(t_k),t_k}$: variable aleatoria valor financiero en t_k de las prestaciones que realiza el plan a los $n'(t_k)$ partícipes a partir de t_k.

${}^{Rec}\xi^{c}_{N'(t_k),t_k}$: variable aleatoria valor financiero en t_k de las primas recargadas que recibe el plan de los $N'(t_k)$ partícipes a partir de t_k.

Debemos de matizar que si en t_k se ha producido un pago o un ingreso, éste estará incluido en el cálculo de las variables aleatorias $\xi^{p}_{N'(t_k),t_k}$ y ${}^{Rec}\xi^{c}_{N'(t_k),t_k}$ si corresponde al período $(t_k, t_k + 1)$ (en el cual ya se ha producido la incorporación de los nuevos partícipes), y no al período (t_k-1, t_k).

- F_{t_k}: fondos que tiene el plan en t_k (dada la trayectoria real del colectivo N'_{k-1} desde el origen hasta t_k , sin tener en cuenta los fondos que en dicho momento generan los nuevos partícipes. En éstos deberemos de tener en cuenta la actuación del reasegurador, y dependerán del tipo de reaseguro:

Si el reaseguro es del **tipo A**:

$$F_{t_k} = \begin{cases} Z_{N'_{k-1},t_k} & \text{si } Z_{N'_{k-1},t_k} \geq RS^{\epsilon}_{N'_{k-1},t_k} + V_{N'_{k-1},t_k} \\ \\ RS^{\epsilon}_{N'_{k-1},t_k} + V_{N'_{k-1},t_k} & \text{si } Z_{N'_{k-1},t_k} < RS^{\epsilon}_{N'_{k-1},t_k} + V_{N'_{k-1},t_k} \end{cases}$$

Si el reasegurador es del **tipo B**:

$$F_{t_k} = RS^{\epsilon}_{N'_{k-1},t_k} + V_{N'_{k-1},t_k}$$

Siendo:

- $Z^{\epsilon}_{N'_{k-1},t_k}$: el disponible del plan en t_k dada la evolución real del colectivo N'_{k-1}.

- $RS^{\epsilon}_{N'_{k-1},t_k}$: las reservas de solvencia que garantiza el nivel de riesgo ϵ en t_k dada la evolución real del colectivo N'_{k-1}.
- $V^{\epsilon}_{N'_{k-1},t_k}$: la provisión matemática del plan en t_k dada la evolución real del colectivo N'_{k-1}.

La variable aleatoria ${}^{Rec}\xi^{c}_{N'(t_k),t_k}$ la expresaremos como suma de las siguientes variables aleatorias:

$$ {}^{Rec}\xi^{c}_{N'(t_k)} = {}^{Rec}\xi^{c}_{N(t_k),t_k} + {}^{Rec}\xi^{c}_{EN'(t_k),t_k} $$

donde:

${}^{Rec}\xi^{c}_{N(t_k),t_k}$: es la variable aleatoria que nos da el valor financiero en t_k de las contraprestaciones recargadas del plan a partir de t_k asociadas al colectivo $N(t_k)$.

${}^{Rec}\xi^{c}_{EN(t_k),t_k}$: es la variable aleatoria que nos da el valor financiero en t_k de las contraprestaciones recargadas del plan a partir de t_k asociadas al colectivo $EN(t_k)$.

Si ξ^{p}_{i,t_k} es la variable aleatoria que recoge el valor financiero en t_k de las contraprestaciones (primas puras) del plan a partir de t_k (t_k incluido) asociadas al partícipe "i", entonces podemos dar las siguientes relaciones:

$$ {}^{Rec}\xi^{c}_{N(t_k),t_k} = \sum_{i=1}^{n(t_k)} (1 + \lambda_i^{N,\epsilon})\xi^{p}_{i,t_k} $$

$$ {}^{Rec}\xi^{c}_{EN(kt)} = \sum_{i=1}^{en(kt)} (1 + \lambda_i^{EN(t_k),\epsilon})\xi^{p}_{i,t_k} $$

donde $\lambda_i^{EN(t_k),\epsilon}$ es el recargo incógnita a determinar para los nuevos partícipes, que garantiza un nivel de ϵ para el plan en el momento t_k.

Por tanto podemos expresar la variable aleatoria $L^{\epsilon}_{N'(t_k)}$ como :

$$ L^{\epsilon}_{N'(t_k),t_k} = \xi^{p}_{N'(t_k),t_k} - {}^{Rec}\xi^{c}_{N(t_k),t_k} - \sum_{i=1}^{en(t_k)} (1 + \lambda_i^{EN(t_k),\epsilon})\xi^{p}_{i,t_k} $$

Por consiguiente, el recargo de seguridad a determinar ha de satisfacer el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\left.\begin{array}{r}
Per_{\epsilon}[L^{\epsilon}_{N'(t_k),t_k}] - F_{t_k} = 0 \\
P^{\epsilon,i} = (1+\lambda_i^{EN(t_k),\epsilon})P^i \quad \forall i = 1,\ldots,en(t_k) \\
\lambda_i^{EN(t_k),\epsilon} = f(\text{función de diversos parámetros según criterio.})
\end{array}\right\}$$

Los criterios de determinación del recargo de seguridad coinciden con los que ya describimos para el cálculo del recargo de seguridad en un colectivo cerrado.

El criterio que utilicemos para calcular el recargo de seguridad para los nuevos, debe ser el mismo que se utilizó para calcular el recago de seguridad del colectivo inicial y además éste, debe de permitir la comparación de los recargos obtenidos.

5.6.1.2 Modificación de las prestaciones de los partícipes pertenecientes al colectivo $N'(t_k)$

Nuestro objetivo es calcular qué proporción β_i hay que aplicar a las prestaciones a cobrar a partir de t_k, a cada partícipe $i \in N'(t_k)$, para mantener el nivel de solvencia del plan en t_k en el nivel prefijado $1-\epsilon$. , si cobramos a todos los partícipes del colectivo ampliado a partir de t_k el recargo de seguridad $\lambda_i^{N,\epsilon}$

El planteamiento es muy parecido al del caso anterior, se trata de determinar β_i a través de la pérdida condicionada del plan en el momento t_k asociado al colectivo ampliado $N'(t_k)$, que en este caso simbolizaremos $L^{\epsilon,\beta_i}_{N'(t_k)}$, poniendo de manifiesto en la nomenclatura la proporción β_i. Deberemos de tener también en cuenta los fondos del plan en dicho momento.

La proporción β_i debe de satisfacer la siguiente relación:

$$Per_{\epsilon}[L^{\epsilon,\beta_i}_{N'(t_k),t_k}] - F_{t_k} = 0$$

Siendo:

$$L^{\epsilon,\beta_i}_{N'(t_k),t_k} = \xi^{p,\beta_i}_{N'(t_k),t_k} - {}^{Rec}\xi^{c}_{N'(t_k),t_k}$$

donde:

- $\xi^{p,\beta_i}_{N'(t_k),t_k}$: variable aleatoria valor financiero en t_k de las prestaciones que realiza el plan a los $n'(t_k)$ partícipes a partir del momento t_k; teniendo en cuenta el incremento en la proporción β_i en las prestaciones de los partícipes pertenecientes al colectivo $N'(t_k)$.
- ${}^{Rec}\xi^{c}_{N'(t_k),t_k}$: variable aleatoria contrapretaciones realizadas a partir de t_k, que recibe el plan de los $N'(t_k)$ partícipes y valoradas en el momento t_k.
- F_{t_k}: fondos que tiene el plan en t_k

Análisis de las prestaciones del plan $\xi^{p,\beta_i}_{N'(t_k),t_k}$

La variable aleatoria $\xi^{p,\beta_i}_{N'(t_k),t_k}$ la podemos expresar como:

$$\xi^{p,\beta_i}_{N'(t_k),t_k} = \sum_{i=1}^{n'(t_k)} (1+\beta_i)\xi^{p}_{i,t_k}$$

Análisis de las contraprestaciones del plan ${}^{Rec}\xi^{c}_{N'(kt)}$

En este caso conocemos las contraprestaciones del plan del colectivo $N'(t_k)$, ya que podemos aplicar el recargo $\lambda_i^{N,\epsilon}$ (conocido) a cada partícipe $i \in N'(t_k)$. Por tanto:

$${}^{Rec}\xi^{c}_{N'(t_k),t_k} = \sum_{i=1}^{n'(t_k)} (1+\lambda_i^{N,\epsilon})\xi^{c}_{i,t_k}$$

Por tanto:

$$L^{\epsilon,\beta_i}_{N'(t_k),t_k} = \xi^{p,\beta_i}_{N'(t_k),t_k} - {}^{Rec}\xi^{c}_{N'(t_k),t_k}$$

La proporción β_i a determinar, debe de satisfacer el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\left.\begin{array}{c} Per_\epsilon[L^{\epsilon,\beta_i}_{N'(t_k),t_k}] - F_{t_k} = 0 \\ \\ \alpha^{i,\beta_i} = (1+\beta_i)\alpha^i \quad i = 1,\ldots,n'(t_k) \end{array}\right\}$$

Siendo:

- α^i el vector de prestaciones del partícipe "i" a satisfacer a partir de t_k, si no se produce entrada de partícipes en t_k.
- α^{i,β_i} el vector de prestaciones del partícipe "i" a satisfacer a partir de t_k, ponderadas por la proporción β_i correspondiente.

El sistema que presenta una ecuación, y $n'(t_k)$ incógnitas, es resuelto incorporando nuevas ecuaciones o condiciones al mismo las cuales adoptarán la forma de criterios de determinación del cálculo de β_i, quedando por tanto el sistema de ecuaciones a resolver del siguiente modo:

$$\left.\begin{aligned} Per_\epsilon[L^{\epsilon,\beta_i}_{N'(t_k),t_k}] - F_{t_k} = 0 \\ \alpha^{i,\beta_i} = (1+\beta_i)\alpha^i \quad i = 1,\ldots,n'(t_k) \\ \beta_i = f(\text{diversos parámetros según criterio}) \end{aligned}\right\}$$

Nosotros asumiremos el mismo criterio que ya adoptamos en el cálculo de la prima de reaseguro en colectivos cerrados, consistente en expresar la incógnita a determinar β_i, como una proporción γ de algún o algunos elementos diferenciadores del partícipe "i".

$$\beta_i = \gamma f(i)$$

donde:

- $f(i)$: función establecida a prioiri y que depende el partícipe "i"
- γ: proporción a determinar.

Casos interesantes a destacar son:

- $f(i) = 1$: las prestaciones aumentan en una proporción constante γ a todos los partícipes del colectivo $N'(t_k)$. El inconveniente de este criterio es que tratamos a todos los partícipes por igual no teniendo en cuenta las obligaciones que tiene contraidas el plan en el momento t_k con respecto a cada uno de los $n'(t_k)$ partícipes.

- $f(i) = V^r_{i,t_k}$: el incremento es proporcional a la provisión matemática retrospectiva del partícipe "i" en el momento t_k. De esta forma el reparto se hace proporcional a las obligaciones que tiene contraidadas el plan con cada uno de los $n'(t_k)$ partícipes en el momento t_k.

Debemos de tener presente que, tanto $\lambda_i^{EN(t_k,\epsilon)}$ como β_i, han sido obtenidos a partir de la variable aleatoria pérdida del plan condicionada al número de partícipes "reales" que hay en el momento de la entrada, en consecuencia, tanto el recargo $\lambda_i^{EN(t_k),\epsilon}$ como β_i, recogen el efecto de las desviaciones habidas entre la mortalidad real y la mortalidad teórica del colectivo N'_k desde su origen hasta t_k.

5.6.2 Cálculo de la prima de reaseguro cuando se realiza la "k"-ésima entrada de partícicipes al plan

Conocidas las prestaciones y contraprestaciones del colectivo ampliado a partir de t_k (momento en en el que se realiza la k -ésima entrada de partícicipes al colectivo), el proceso que seguiremos para poder determinar la prima de reaseguro y que explicaremos en este apartado es el siguiente:

En primer lugar calcularemos la nueva prima de reaseguro que correspondería pagar al nuevo colectivo $EN(t_k)$. Como seguiremos con el mismo criterio de cálculo de primas de reaseguro que aplicamos en los colectivos cerrados, la prima de reaseguro del colectivo $EN(t_k)$ vendrá dada por una determinada proporción de su prima de reaseguro individual, y que simbolizaremos $\delta_{EN(t_k)}$.

Esta tasa o proporción la compararemos con la tasa que pagan aquellos partícipes que ya estaban en el plan antes de t_k, los cuales constituyen el colectivo $N(t_k)$. La tasa asociada al colectivo $N(t_k)$ la simbolizaremos δ_{k-1}, ya que ésta vino determinada cuando se realizó la $k-1$ entrada de partícipes al colectivo, (en el caso particular que $k = 1$ entonces $\delta_0 = \delta_N$), dándose los siguientes casos:

a) Si $\delta_{EN(t_k)} > \delta_{k-1}$, el nuevo colectivo $EN(t_k)$ hace aumentar el riesgo del plan, por lo que la prima de reaseguro de éstos con respecto a los que ya estaban será mayor.

Esta situación no es normal que se de, salvo en aquellos casos en los cuales el colectivo que entra sea muy heterogéneo[17] con respecto a los que están en el plan.

Ante esta situación el plan podría optar por dos soluciones:

- Repercutir el mayor riesgo que incorporan al plan los nuevos partícipes exclusivamente sobre ellos. Cobrándoles la tasa $\delta_{EN(t_k)}$ y manteniendo la misma prima de reaseguro a los que ya estaban.
- No permitir la entrada del colectivo $EN(t_k)$

Nosotros asumiremos la segunda postura, no permitiendo la entrada a colectivos que hagan aumentar el riesgo del plan.

b) Si $\delta_{EN(t_k)} \leq \delta_{k-1}$, el nuevo colectivo $EN(t_k)$ hace disminuir el riesgo del plan. En este caso podriamos plantearnos varias posibilidades:

1. Aplicar a todos los partícipes del coletivo $N'(t_k)$ una nueva tasa en la cual se tenga en cuenta el efecto positivo ocasionado por la entrada del colectivo $EN(t_k)$. Esta tasa que simbolizamos $\delta_{N'(t_k)}$ satisfaría la siguiente relación:

$$\delta_{k-1} > \delta_{N'(t_k)} > \delta_{EN(t_k)}$$

Por tanto, en este caso $\delta_k = \delta_{N'(t_k)}$

De esta forma estamos reduciendo la prima de reaseguro de aquellos partícipes que ya estaban en el plan antes de t_k

El inconveniente que presenta esta decisión es que los partícipes que en el momento de la entrada de los nuevos ya han satisfecho sus primas correspondientes, no quedarían beneficiados. Esta circunstancia nos lleva a plantear una segunda posibilidad.

[17]Las prestaciones de los que entran sean muy elevadas con respecto a los que están en t_k.

2. Aumentar las prestaciones solamente a aquellos partícipes pertenecientes al colectivo $N(t_k)$ cobrando a todos los partícipes del colectivo ampliado la tasa δ_{k-1}. En este caso $\delta_{N'(t_k)} = \delta_{k-1}$

   Si bien con este criterio evitamos el inconveniente del anterior, si no se producen más entradas de partícipes al plan, el colectivo que entra en último lugar siempre se verá perjudicado, pues estará pagando una prima de reaseguro superior a lo que les correspondería por el riesgo que aportan al plan.

3. Aumentar las prestaciones a todos los partícipes que están en t_k, incluyendo los que entran en ese momento. En este caso el reasegurador cobraría al colectivo ampliado $N'(t_k)$, la misma tasa de reaseguro δ_{k-1}.

   De todas maneras, en el supuesto que no se produjeran más entradas en el plan, el último colectivo que entró también se verá perjudicado pero en menor medida, pues participa también en una parte del beneficio que genera.

   Nosotros consideraremos el tercer criterio.

Conclusión:

- Si $\delta_{EN(t_k)} > \delta_{k-1}$ no permitiremos la entrada del nuevo colectivo.

- Si $\delta_{EN(t_k)} \leq \delta_{k-1}$ aumentaremos las prestaciones a todos los partícipes pertenecientes al colectivo $N'(t_k)$ cobrándoles a todos la tasa de reaseguro δ_{k-1} la cual coindirá con la asociada al colectivo inicial N, δ_N.

El asumir estas dos hipótesis, presenta la ventaja que la tasa de reaseguro que aplicaremos al colectivo ampliado en cada momento t_k, vendrá siempre dada por δ_N.

En consecuencia el colectivo inicial N, marca la barrera de entrada de los colectivos que entran posteriorimente, ya que su tasa δ_N es la que siempre nos servirá de referencia a la hora de determinar si se les permite la entrada o no a los nuevos partícipes.

El estudio lo realizaremos en base al siguiente esquema:

- Cálculo de la tasa de reaseguro correspondiente a los nuevos partícipes $\delta_{EN(t_k)}$
- Cálculo de las nuevas prestaciones para el colectivo $N'(t_k)$

5.6.2.1 Cálculo de la tasa de reaseguro correspondiente a los nuevos partícipes $\delta_{EN(t_k)}$

En este apartado estudiaremos cual es la nueva prima de reaseguro que tendrán que satisfacer los partícipes que entran al plan en el momento t_k y que constituyen el colectivo $EN(t_k)$. Determinaremos también las causas que pueden hacer diferentes la prima calculada con la que había antes de la entrada de los nuevos partícipes.

Siguiendo con el mismo criterio de cálculo de primas de reaseguro, obtener la prima de reaseguro del colectivo $EN(t_k)$ supone determinar cual es la nueva proporción de prima de reaseguro individual $\delta_{EN(t_k)}$, que tendrían que pagar a partir del momento t_k los partícipes del mencionado colectivo.

La obtención de $\delta_{EN(t_k)}$ es laboriosa, ya que en su cálculo debemos de aislar el efecto que puede tener en el riesgo del plan, las desviaciones entre la mortalidad esperada y la realmente producida en el colectivo N'_k, desde el origen del plan hasta el momento de la k-ésima entrada t_k.

Es importante aislar estas desviaciones, ya que éstas deben de correr a cargo del reasegurador y no de los partícipes que entran en el plan.

Si calculásemos $\delta_{EN(t_k)}$ teniendo presente los partícipes que hay realmente en t_k, entonces esta tasa incluiría las desviaciones por mortalidad habidas en el colectivo N'_k desde el origen hasta t_k y por tanto estariamos cargando a los nuevos partícipes una responsabilidad que no les corresponde, ya que de ser así, el reasegurador podría corregir en cada momento de entrada de partícipes su prima de reaseguro, ajustándola a la mortalidad real de ese momento.

Nuestro objetivo es por tanto repercutir en la tasa $\delta_{EN(t_k)}$ el riesgo que incorpora el colectivo $EN(t_k)$ al plan, independientemente de las desviaciones habidas en la siniestralidad del colectivo N'_k hasta t_k, por tanto tenemos que trabajar con el colectivo simulado y no con el colectivo real en t_k.

Trabajar con el colectivo simulado en t_k supone simular la evolución del colectivo N'_k desde su origen (origen del plan), hasta la exitinción del mismo; ya que si consideramos un momento distinto del origen, por ejemplo $t > 0$, suponiendo cierto el colectivo en t, y simulando su evolución a partir de t, la tasa calculada recogería las desviaciones en la mortalidad habidas desde el origen del plan hasta t.

Esta circunstáncia hace que las variables aleatorias que intervengan en el modelo, se refieran a valores actuales en el origen del plan.

Obtendremos $\delta_{EN(t_k)}$ como aquella proporción que anule la esperanza matemática de la variable aleatoria pérdida del reasegurador $L^R_{N'_k}$ la cual recoge el valor en el origen del plan de la pérdida del reasegurador ocasionada por el colectivo N'_k desde el origen de éste hasta la extinción del mismo.

Siendo:

$$L^R_{N'_k} = \xi^{p,R}_{N'_k} - \xi^{c,R}_{N'_k}$$

donde:

- $\xi^{p,R}_{N'_k}$ variable aleatoria valor actual financiero en 0 (origen del plan), de las prestaciones que tiene que satisfacer el reasegurador al colectivo N'_k
- $\xi^{c,R}_{N'_k}$ variable aleatoria valor actual financiero en 0, de las contraprestaciones del reasegurador, asociado al colectivo N'_k.

El cálculo de la variable aleatoria $L^R_{N'_k}$ pasará por simular la evolución del colectivo N'_k hasta su extinción.

El tratamiento desde un punto de vista formal es como si cálculásemos la prima que en el origen del plan, tendrían que pagar los partícipes que entran en t_k, suponiendo conocidas las entradas de nuevos partícipes hasta t_k y que en nuestro caso lo son.

A continuación analizaremos cada una de las dos variables aleatorias que forman la pérdida del reasegurador.

Estudio de la variable aleatoria $\xi_{N'_k}^{p,R}$

Las realizaciones de la variable aleatoria $\xi_{N'_k}^{p,R}$, dependen del número de simulaciones que realicemos del colectivo N'_k. Si simulamos la trayectoria de evolución del colectivo N'_k, z veces, entonces, las realizaciones de la variable aleatoria $\xi_{N'_k}^{p,R}$, vienen dadas por el siguiente conjunto discreto:

$$\{M(N'_k, 1), \ldots, M(N'_k, l), \ldots, M(N'_k, z)$$

donde $M(N'_k, l)$ representa el valor actual finanaciero en el origen del plan y valorado al tipo de interés del reasegurador, de las prestaciones realizadas por el reasegurador al plan desde el origen hasta la exitinción del colectivo N'_k, dada la trayectoria l-ésima de evolución de citado colectivo.

El cálculo de $M(N'_k, l)$ pasa por determinar, al igual que hicimos con los colectivos cerrados, el total de prestaciones y contraprestaciones que tienen que satisfacer al plan en cada período los partícipes del colectivo N'_k.

Sea:

$\alpha_j^{s,N'_k,l}$: prestación de seguro que reciben todos los partícipes del colectivo N'_k, fallecidos en el periodo j-ésimo, según la trayectoria l-ésima de evolución del mencionado colectivo y que sean beneficiarios de dicha prestación.

$\alpha_j^{r,N'_k,l}$: prestación de renta que reciben todos los participes del colectivo N'_k, en el momento j, dada la trayectoria l-ésima de evolución del colectivo N'_k y que sean beneficiarios de dicha prestación.

Tanto $\alpha_j^{r,N'_k,l}$ como $\alpha_j^{r,N'_k,l}$ no tienen por que coincidir con los inicialmente contratados con los partícipes, ya que éstos recogen el aumento en las prestaciones que origina la entrada periódica de nuevos partícipes.

$P_j^{Rec,N_k^l,l}$: total de primas recargadas satisfechas por los partícipes del colectivo N_k^l, en el momento j dada la trayectoria l-ésima del citado colectivo.

Podemos por tanto dar las siguientes relaciones:

$$\alpha_j^{s,N_k^l,l} = \sum_{i=1}^{n'(j)_k^l} \alpha_j^{s,i} \quad j = 1, ..., Q^{N_k^l,l}$$

$$\alpha_j^{r,N_k^l,l} = \sum_{i=1}^{n'(j)_k^l} \alpha_j^{r,i} \quad j = 0, .., Q^{N_k^l,l} - 1$$

$$P_j^{Rec,N_k^l,l} = \sum_{i=1}^{n'(j)_k^l} P_j^{Rec,i} \quad j = 0, .., Q^{N_k^l,l} - 1$$

siendo:

$n'(j)_k^l$: número de partícipes que hay en el plan en el momento j , dada la simulación l-ésima del colectivo N_k^l.

$Q^{N_k^l,l}$: período de extinción del colectivo N_k^l asociada a la simulación l-ésima de evolución del mencionado colectivo.

El siguiente paso es determinar las funciones:

- $Z_{N_k^l,h}^l$: función que recoge el disponible o excedente del plan al finalizar el período h, dada la simulación l-ésima del colectivo N_k^l.
- $T_{N_k^l,h}^l$: función que recoge el importe que ha de satisfacer el reasegurador en el periodo h, dada la simulación l-ésima del colectivo N_k^l.

Estudio de la función $Z_{N_k^l,h}^l$

Para poder determinar la función $Z_{N_k^l,h}^l$, necesitamos conocer :

a) $V^l_{N'_k,h}$: la provisión matemática en el instante h dada la simulación l-ésima del colectivo N'_k.

Su importe viene dado por la suma de las provisiones matemáticas individuales en h:

$$V^l_{N'_k,h} = \sum_{i=1}^{n'(h)^l_k} V_{i,h} \quad h = 1, \ldots Q^{N'_k,l} - 1$$

b) $R^l_{N'_k,h}$: el margen de solvencia que el plan debe de tener disponible en cada momento h dada la simulación l-ésima del colectivo N'_k.

En el caso particular que el margen de solvencia venga dado por las reservas de solvencia $RS^{\epsilon,l}_{N'_k,h}$, éstas deberán calcularse por tramos de entradas de partícipes al colectivo, ya que la estructura de las mismas dependerán de los colectivos que tenga el plan en el momento de la entrada de partícipes. Por tanto:

$$RS^{\epsilon,l}_{N'_k,h} = \begin{cases} RS^{\epsilon,l}_{N,h} & h = 1, \ldots, t_1 - 1 \\ RS^{\epsilon,l}_{N'(t_1)^l,h} & h = t_1, \ldots, t_2 - 1 \\ RS^{\epsilon,l}_{N'(t_s)^l,h} & h = t_s, \ldots, t_{s+1} - 1 \\ RS^{\epsilon,l}_{N'(t_k)^l,h} & h = t_k, \ldots, t_k + Q^{N'(t_k)^l,l} - 1 \end{cases}$$

donde:

$$RS^{\epsilon,l}_{N'(t_s)^l,h} = Per_\epsilon[L^{\epsilon,l}_{N'(t_s)^l,h} - V^l_{N'(t_s)^l,h}]$$

El cálculo del $Per_\epsilon[L^{\epsilon,l}_{N'(t_s)^l,h}]$ es idéntico al que explicamos en el caso de colectivos cerrados, pero en este caso el colectivo que consideramos de partida en t_s viene por el número de partícipes que hay en t_s dada la evolución l-ésima del colectivo N'_k, el cual esta formado por $n'(s)^l_k = n'(s)^l$ partícipes, los cuales constituyen el colectivo $N'(t_s)^l$.

Al igual que sucediá en los colectivo cerrados, tenemos el mismo problema técnico derivado del gran número de simulaciones a realizar para poder determinar el $Per_\epsilon[L^{\epsilon,l}_{N'(t_s)^l,h}]$

La función $Z^l_{N'_k,h}$ viene dada por las siguientes expresiones:

Si el reaseguro es del **tipo A**:

$$Z^l_{N'_k,h} = \begin{cases} \left(P^{Rec,N'_k,l}_{h-1} - \alpha^{r,N'_k,l}_{h-1} - \alpha^{s,N'_k,l}_{h}(1+Ip)^{-1/2}\right)(1+Ip) \\ h=1 \\ \\ \left(Z^l_{N'_k,h-1} + P^{Rec,N'_k,l}_{h-1} - \alpha^{r,N'_k,l}_{h-1} - \alpha^{s,N'_k,l}_{h}(1+Ip)^{-1/2}\right)(1+Ip) \\ \text{si} \quad Z^l_{N'_k,h-1} \geq R^l_{N'_k,h-1} + V^l_{N'_k,h-1} \\ \left(R^l_{N'_k,h-1} + V^l_{N'_k,h-1} + P^{Rec,N'_k,l}_{h-1} - \alpha^{r,N'_k,l}_{h-1} - \alpha^{s,N'_k,l}_{h}(1+Ip)^{-1/2}\right)(1+Ip) \\ \text{si} \quad Z^l_{N'_k,h-1} < R^l_{N'_k,h-1} + V^l_{N'_k,h-1} \\ 1 < h \leq Q^{N'_k,l} \end{cases}$$

Si el reaseguro es del **tipo B**:

$$Z^l_{N'_k,h} = \begin{cases} \left(P^{Rec,N'_k,l}_{h-1} - \alpha^{r,N'_k,l}_{h-1} - \alpha^{s,N'_k,l}_{h}(1+Ip)^{-1/2}\right)(1+Ip) \\ h=1 \\ \\ \left(R^l_{N'_k,h-1} + V^l_{N'_k,h-1} + P^{Rec,N'_k,l}_{h-1} - \alpha^{r,N'_k,l}_{h-1} - \alpha^{s,N'_k,l}_{h}(1+Ip)^{-1/2}\right)(1+Ip) \\ 1 < h \leq Q^{N'_k,l} \end{cases}$$

Estudio de la función $T^l_{N'_k,h}$

La función $T^l_{N'_k,h}$ se desdobla en dos:

$$T^l_{N'_k,h} = \begin{cases} T^{1,l}_{N'_k,h} & h = 1,\ldots,Q^{N'_k,l}-1 \\ \\ T^{2,l}_{N'_k,h} & h = 1,\ldots,Q^{N'_k,l} \end{cases}$$

Si el reaseguro es del **tipo A**:

$$T^{1,l}_{N'_k,h} = \begin{cases} \max\{0, \quad V^l_{N'_k,h} + R^l_{N'_k,h} - Z^l_{N'_k,h}\} & \text{si} \quad Z^l_{N'_k,h} > 0 \\ V^l_{N'_k,h} - R^l_{N'_k,h} & \text{si} \quad Z^l_{N'_k,h} \leq 0 \\ & h = 1, \ldots, Q^{N'_k,l} - 1 \end{cases}$$

Si el reaseguro es del **tipo B**:

$$T^{1,l}_{N'_k,h} = \begin{cases} V^l_{N'_k,h} + R^l_{N'_k,h} - Z^l_{N'_k,h} & \text{si} \quad Z^l_{N'_k,h} > 0 \\ V^l_{N'_k,h} - R^l_{N'_k,h} & \text{si} \quad Z^l_{N'_k,h} \leq 0 \\ & h = 1, \ldots, Q^{N'_k,l} - 1 \end{cases}$$

En ambos tipos de reaseguro:

$$T^{2,l}_{N'_k,h} = \begin{cases} -Z^l_{N'_k,h}(1 + Ip)^{-1/2} & \text{si} \quad Z^l_{N'_k,h} < 0 \\ 0 & \text{si} \quad Z^l_{N'_k,h} \geq 0 \\ & h = 1, \ldots, Q^{N'_k,l} \end{cases}$$

Conocidos los términos a pagar por el reasegurador a partir de t dada la simulación l-ésima $T^l_{N'_k,h}$, el cálculo de $M(N'_k, l)$ es inmediato:

$$M(N'_k, l) = \begin{cases} \sum_{s=1}^{h} T^{1,l}_{N'_k,s}(1 + Ir)^{-s} + \sum_{s=1}^{h} T^{2,l}_{N'_k,s}(1 + Ir)^{-s+\frac{1}{2}} \\ 1 \leq h \leq Q^{N'_k,l} \end{cases}$$

Estudio de la variable aleatoria $\xi^{c,R}_{N'_k}$

La variable aleatoria $\xi^{c,R}_{N'_k}$ la descomponemos en dos nuevas variables aleatorias, separando de esta forma los partícipes que ya estaban en el colectivo en t_k de los que entran nuevos en ese momento.

$$\xi^{c,R}_{N'_k} = \xi^{c,R}_{N'_{k-1}} + \xi^{c,R}_{En(t_k)}$$

donde:

- $\xi^{c,R}_{N'_{k-1}}$ es la variable aleatoria valor actual en el origen del plan de las prestaciones del reasegurador satisfechas al colectivo N'_{k-1}. El campo de variabilidad de $\xi^{c,R}_{N'_{k-1}}$ viene definido por el siguiente conjunto discreto:

$$\{P^R(N'_{k-1},1),\ldots,P^R(N'_{k-1},l),\ldots,P^R(N'_{k-1},z)\}$$

siendo:

$P^R(N'_{k-1},l)$ el valor actual financiero en el origen del plan de las contraprestaciones a satisfacer por los partícipes pertenecientes al colectivo N'_{k-1} dada la simulación l-ésima del mencionado colectivo:

$$P^R(N'_{k-1}),l) = \sum_{h=0}^{Q^{N'_{k-1},l}-1} P_h^{R,(N'_{k-1}),l}(1+Ir)^{-h}$$

donde: $P_h^{R,(N'_{k-1}),l}$ es el total de primas de reaseguro satisfechas en el momento h por el colectivo N'_{k-1}, y asociadas a la simulación l-ésima del mismo.

En el supuesto que no se haya modificado la proporción de prima de reaseguro δ_N, durante las $k-1$ primeras entradas de partícipes al plan, entonces:

$$P_h^{R,(N'_{k-1}),l} = \delta_N\, P_h^{R,N'_{k-1},l} = \delta_N \sum_{j=1}^{n(h)^l_{k-1}} P_h^{R,j} \quad h = 1,\ldots Q^{N'_{k-1},l}-1$$

donde $P_h^{R,j}$ es la prima de raseguro del partícipe j, satisfecha en el momento h y calculada según el modelo individual.

Por tanto:

$$P^R(N'_{k-1}),l) = \delta_N \sum_{h=0}^{Q^{N'_{k-1},l}-1} P_h^{R,N'_{k-1},l}(1+Ir)^{-h}$$

A continuación definimos una variable aleatoria intermedia, que nos permita expresar la variable aleatoria $\xi^{c,R}_{N'_{k-1}}$ en función de δ_N (siempre y cuando esta tasa se mantenga independiente de las $k-1$ primeras entradas de partícipes al colectivo). Esta variable intermedia la simbolizamos $\xi^{Q,R}_{N'_{k-1}}$ y el campo de variabilidad de la misma viene definido por el siguiente conjunto discreto:

$$\{Q^R(N'_{k-1}),1),\ldots,Q^R(N'_{k-1}),l),\ldots,Q^R(N'_{k-1}),z)\}$$

siendo:

$Q^R(N'_{k-1},l)$ el valor actual financiero en el origen del plan de las prestaciones satisfechas al reasegurador por los partícipes pertenecientes al colectivo N'_{k-1}. Siendo la prima de reaseguro de cada uno de ellos la correspondiente al modelo individual, por tanto:

$$Q^R(N'_{k-1},l)=\sum_{h=0}^{Q^{N'_{k-1},l}-1} P_h^{R,N'_{k-1},l}(1+Ir)^{-h}$$

Siendo la relación entre $\xi^{Q,R}_{N'_{k-1}}$ y $\xi^{c,R}_{N'_{k-1}}$ la que se deriva de las relaciones de sus realizaciones:

$$\xi^{c,R}_{N'_{k-1}}=\delta_N\,\xi^{Q,R}_{N'_{k-1}}$$

- $\xi^{c,R}_{EN(t_k)}$ es la variable aleatoria valor actual en el origen del plan de las contraprestaciones del reasegurador referidas exclusivamente al colectivo que entra en el momento t_k, $EN(t_k)$. El campo de variabilidad de ésta viene definido por el siguiente conjunto discreto:

$$\{P^R(EN(t_k),1),\ldots,P^R(EN(t_k),l),\ldots,P^R(EN(t_k),z)\}$$

Siendo $P^R(EN(t_k),l)$ el valor actual financiero en el origen del plan de las contraprestaciones que debe de satisfacer los nuevos partícipes que entran en t_k al reasegurador, dada la simulación l-ésima de evolución del colectivo $EN(t_k)$:

$$P^R(EN(t_k),l) = \sum_{h=0}^{Q^{EN(t_k),l}-1} P_h^{R,(EN(t_k)),l}(1+Ir)^{-t_k-h}$$

donde $P_h^{R,(EN(t_k)),l}$ es la prima periódica de reaseguro que le corresponde satisfacer en h a todos los partícipes del colectivo $EN(t_k)$ dada la simulació l-ésima del mismo:

$$P_h^{R,(EN(t_k)),l} = \sum_{j=1}^{en(h)^l} P_h^{R,(j)} \quad h \geq t_k$$

Nosotros expresaremos esta nueva prima como la proporción a determinar $\delta_{EN(t_k)}$ de su prima individual $P_h^{R,j}$:

$$P_h^{R,(j)} = \delta_{EN(t_k)} P_h^{R,j} \quad h \geq t_k$$

lo que nos permite expresar:

$$P_h^{R,(EN(t_k)),l} = \delta_{EN(t_k)} \sum_{j=1}^{en(h)^l} P_h^{R,j} = \delta_{EN(t_k)}\, P_h^{R,EN(t_k),l}$$

por tanto:

$$P^R(EN(t_k),l) = \delta_{EN(t_k)} \sum_{h=0}^{Q^{EN(t_k),l}-1} P_h^{R,EN(t_k),l}(1+Ir)^{-t_k-h}$$

Al igual que en el caso anterior, definimos una variable aleatoria intermedia que nos permita expresar la variable aleatoria $\xi_{EN(t_k)}^{c,R}$ en función de $\delta_{EN(t_k)}$. Esta variable intermedia la simbolizamos $\xi_{EN(t_k)}^{Q,R}$ y el campo de variabilidad de la misma viene definido por el siguiente conjunto discreto:

$$\{Q^R(EN(t_k),1),\ldots,Q^R(EN(t_k),l),\ldots,Q^R(EN(t_k),z)\}$$

donde $Q^R(EN(t_k), l)$ es el valor actual financiero en el origen del plan de las prestaciones realizadas a partir de t_k, por los partícipes que entran en el plan en el momento t_k, y que constituyen el colectivo $EN(t_k)$.

Siendo la prima de reaseguro de cada uno de ellos la correspondiente al caso individual, por tanto, en nuestro caso particular:

$$P^R(EN(t_k), l) = \sum_{h=0}^{Q^{EN(t_k),l}-1} P_h^{R,EN(t_k),l}(1+Ir)^{-t_k-h}$$

La relación entre $\xi^{Q,R}_{EN(t_k)}$ y $\xi^{c,R}_{EN(t_k)}$ vendrá dada por:

$$\xi^{c,R}_{EN(t_k)} = \delta_{EN(t_k)}\, \xi^{Q,R}_{EN(t_k)}$$

En consecuencia, la variable aleatoria $\xi^{c,R}_{N'_k}$ podemos expresarla como:

$$\xi^{c,R}_{N'_k} = \xi^{c,R}_{N'_{k-1}} + \delta_{EN(t_k)}\, \xi^{Q,R}_{EN(t_k)}$$

En el caso que la proporción de prima de reaseguro sea independiente de las $k-1$ primeras entradas:

$$\xi^{c,R}_{N'_k} = \delta_N\, \xi^{Q,R}_{N'_{k-1}} + \delta_{EN(t_k)}\, \xi^{Q,R}_{EN(t_k)}$$

Cálculo de $\delta_{EN(t_k)}$

Deteminadas las variables aleatorias que componen la pérdida del reasegurador, la tasa $\delta_{EN(t_k)}$ deberá de satisfacer la siguiente condición:

$$E[L^R_{N'_k}] = 0$$

o bien:

$$E[\xi^{p,R}_{N'_k}] - E[\xi^{c,R}_{N'_k}] = 0 \quad (I)$$

como:

$$E[\xi^{c,R}_{N'_k}] = E[\xi^{c,R}_{N'_{k-1}}] + \delta_{EN(t_k)} E[\xi^{Q,R}_{EN(t_k)}]$$

sustituyendo en (I) y despejando $\delta_{EN(t_k)}$:

$$\delta_{EN(t_k)} = \frac{E[\xi^{p,R}_{N'_k}] - E[\xi^{c,R}_{N'_{k-1}}]}{E[\xi^{Q,R}_{EN(t_k)}]}$$

Calculada $\delta_{EN(t_k)}$ la compararemos con δ_{k-1}.

$$\delta_{EN(t_k)} - \delta_{k-1} = F$$

En nuestro caso, al no modificar las primas de reaseguro de los partícpes del colectivo:

$$\delta_{EN(t_k)} - \delta_N = F$$

La diferencia entre estas dos tasas F recoge la variación que se produce en la nueva prima de reaseguro de los nuevos partícipes en el momento t_k con respecto a los que ya estaban. Esta variación se debe a:

a) El aumento que se produce en el tamaño del colectivo en el momento t_k. Este factor siempre actua disminuyendo el riesgo global del plan en la medida que da más estabilidad al colectivo.

b) Al riesgo que incorporan los nuevos partícipes como consecuencia de la estructura de sus prestaciones y contraprestaciones.

Lo normal es que la diferencia F sea negativa, salvo en casos en los que el nuevo colectivo sea muy heterogéneo en cuanto a las prestaciones (prestaciones muy elevadas) con respecto a los que estaban en el momento de la entrada.

Por ejemplo, si tenemos un colectivo formado por cinco partícipes beneficiarios de un seguro de 1.000.000 de pts pagadero a la muerte de los mismos y se incorpora un nuevo partícipe al plan beneficiario de un seguro de 100.000.000 de pts, queda claro que en este caso, el nuevo partícipe hará aumentar el riesgo global del plan, ya que éste, tiene un nivel de prestaciones 100 veces mayor a la prestación que presentan cada uno de los cinco que ya estaban. En este caso, el aumento producido en el tamaño del colectivo como consecuencia de la entrada del nuevo, no compensa el riesgo que incorpora debido a sus prestaciones; dando lugar a que $F > 0$.

El valor que tome F dependerá de la estructura y tamaño que tenga el colectivo en el momento de la entrada, y del colectivo que entra; así en el caso del ejemplo, si el colectivo en el momento de la entrada es de 1000 personas, la incorporación del nuevo partícipe hará variar el riesgo global del plan, pero no en la misma proporción que en el caso anterior, siendo menor el valor de F o incluso podrá ser negativo.

Un estudio interesante para el reasegurador, sería calcular cual hubiese sido la tasa a aplicar a los nuevos partícipes que entran en t_k, si en esta incorporamos las desviaciones en la mortalidad habidas en el plan desde su origen hasta el momento de la entrada t_k. El proceso de cálculo de esta nueva tasa que simbolizaremos $\delta_{EN(t_k^*)}$ sería similar al cálculo de $\delta_{EN(t_k)}$, con la única diferencia que al calcular la simulación de colectivo N_k' y N_{k-1}', considerariamos para cada simulación de los mismos, una única trayectoria de evolución desde el origen hasta t_k (la trayectoria real), siendo por tanto sólo aleatorio la evolución de éstos desde t_k hasta su extinción.

Si definimos la diferencia:

$$\delta_{EN(t_k^*)} - \delta_{EN(t_k)} = G$$

G recoge la variación que se produce en la nueva prima de reaseguro a satisfacer por los nuevos partícipes, como consecuencia de las desviaciones producidas entre la mortalidad esperada y la realmente producida hasta el momento t_k. En el caso del ejemplo, si la mortalidad esperada en el momento t_k es de un partícipe, y sin embargo la mortalidad real del colectivo hasta dicho momento es de tres, al ser las prestaciones seguros, la sobresiniestralidad real hace que al haber menos partícipes de los esperados, aumente en mayor proporción la prima a pagar por los nuevos partícipes, siendo $G > 0$.

Para nosotros, el estudio del reaseguro en colectivos abiertos dependerá del riesgo que incorpore los nuevos al plan en el momento de la entrada. Dos serán por tanto los supuestos con los que nos encontraremos:

1. Los nuevos partícipes aumentan el riesgo global del plan: $F > 0$

2. Los nuevos partícipes no aumenta el riesgo global del plan: $F \leq 0$

Las estrategias posibles a seguir dependerán por tanto del valor de F:

- Si $F > 0$ no permitiremos la entrada de los nuevos partícipes al plan.

- Si $F < 0$ entonces cobraremos a los nuevos partícipes la misma proporción de reaseguro que los que ya estaban, (en particular les cobraremos la tasa δ_N) , aumentando las prestaciones del colectivo ampliado $N'(t_k)$.

5.6.2.2 Calculo de las nuevas prestaciones para el colectivo $N'(t_k)$

En este apartado calcularemos la nuevas prestaciones que recibirán a partir de t_k, los partícipes pertenecientes al colectivo ampliado $N'(t_k)$, teniendo presente que la tasa de prima de reaseguro individual para el mencionado colectivo viene dada por δ_N.

Al cobrar a los partícipes que entran en t_k una tasa mayor δ_N a la que les corresponde $\delta_{EN(t_k)}$, se genera un excedente que valorado en el origen del plan viene dado por S_0:

$$S_0 = E[\xi^{c,R}_{N'_k}] - E[\xi^{p,R}_{N'_k}]$$

En este caso, al venir dada la prima de reaseguro de todos los partícipes del colectivo $N'(t_k)$ como una proporción δ_N de su prima de reaseguro individual, entonces:

$$E[\xi^{c,R}_{N'_k}] = \delta_N \left[E[\xi^{Q,R}_{N'_{k-1}}] + E[\xi^{Q,R}_{EN(t_k)}] \right]$$

Nuestro objetivo es repartir el exceso S_0 en las prestaciones que recibirán a partir de t_k, los partícipes pertenecientes al colectivo $N'(t_k)$.

El criterio que aplicamos es el de aumentar las prestaciones pendientes de cobro a partir de t_k, de todos los partícipes del colectivo $N'(t_k)$ en una proporción $\mu_i(\quad \forall i \in N'(t_k))$ la cual puede ser diferente para cada partícipe.

La proporción μ_i la calculamos como aquella tasa que anule la esperanza de la variable aleatoria pérdida del reasegurador $L^{R,\mu_i}_{N'(t_k)}$:

$$L^{R,\mu_i}_{N'(t_k)} = \xi^{p,R,\mu_i}_{N'_k} - \xi^{c,R}_{N'_k}$$

donde $\xi^{p,R,\mu_i}_{N'_k}$ es la variable aleatoria valor actual en el origen del plan de las prestaciones que ha de satisfacer el reasegurador al colectivo N'_k, teniendo en cuenta el aumento en la proporción μ_i de las prestaciones a cobrar por los partícipes del colectivo N'_k a partir de t_k.

Estudio de la variable aleatoria $\xi^{p,R,\mu_i}_{N'_k}$

Las realizaciones de ésta dependen del número de simulaciones que realicemos del colectivo N'_k.

Dada la simulación l-ésima del mismo, la realización de $\xi^{p,R,\mu_i}_{N'(t_k)}$ asociada a dicha simulación la representamos $M^R(N'_k), l, \mu_i)$ y su valor viene dado por el valor actual financiero en el origen del plan de las prestaciones realizadas por el reasegurador al plan teniendo en cuenta el aumento en las prestaciones de los partícipes pertenecientes al colectivo $N'(t_k)$, en la proporción μ_i

Para cada trayectoria de evolución del colectivo N'_k debemos de calcular , el total de prestaciones y contraprestaciones que tiene que satisfacer el plan en cada período, teniendo en cuenta el incremento que se produce en las prestaciones de todos los partícipes del colectivo en el momento de la entrada de los nuevos.

Sea:

$\alpha_j^{s,N'_k,l,\mu_i}$: prestación de seguro que reciben todos los partícipes del colectivo N'_k, fallecidos en el periodo j-ésimo, según la trayectoria l-ésima de evolución del colectivo N_k^l y que sean beneficiarios de dicha prestación. Estas prestaciones tiene en cuenta el incremento que se produce en las prestaciones de seguro de los $n'(t_k)$ partícipes en la proporción μ_i .

$\alpha_j^{r,N_k^l,l,\mu_i}$: prestación de renta que reciben todos los participes del colectivo N_k^l en el momento j, según la trayectoria l-ésima de evolución del colectivo N_k^l y que sean beneficiarios de dicha prestación. Estas prestaciones tiene en cuenta el incremento que se produce en las prestaciones de renta de los $n'(t_k)$ partícipes en la proporción μ_i .

$P_j^{Rec,N_k^l,l}$: total de primas recargadas satisfechas por los partícipes del colectivo N_k^l en el momento j, dada la simulación l-ésima del colectivo N_k^l.

Podemos por tanto dar las siguientes relaciones:

$$\alpha_j^{s,N_k^l,l,\mu_i} = \begin{cases} \alpha_j^{s,N_k^l,l} & j = 1, \ldots, t_k \\ \sum_{i=1}^{n'(j)_k^l}(1+\mu_i)\alpha_j^{s,i} & j = t_k+1, \ldots, Q^{N_k^l,l} \end{cases}$$

$$\alpha_j^{r,N_k^l,l,\mu_i} = \begin{cases} \alpha_j^{r,N_k^l,l} & j = 0, \ldots, t_k - 1 \\ \sum_{i=1}^{n'(j)_k^l}(1+\mu_i)\alpha_j^{r,i} & j = t_k, \ldots, Q^{N_k^l,l} - 1 \end{cases}$$

$$P_j^{Rec,N_k^l,l} = \sum_{i=1}^{n'(j)_k^l} P_j^{R,i} \quad j = 0, \ldots, Q^{N_k^l,l} - 1$$

A continuación obtenemos las realizaciones de $\xi_{N_k^l}^{p,R,\mu_i}$ mediante las funciones:

- $Z_{N_k^l,h}^{l,\mu_i}$: función que recoge el disponible o excedente del plan al final el período h, dada la proporción μ_i y asociado a la simulación l-ésima. del colectivo N_k^l.

- $T^{l,\mu_i}_{N'_k,h}$: función que recoge el importe que ha de satisfacer el reasegurador en el período h, dada la proporción μ_i y asociado a la simulación l-ésima del colectivo de N'_k

Estudio de la función $Z^{l,\mu_i}_{N'_k,h}$

Para poder determinar la función $Z^{l,\mu_i}_{N'_k}$, necesitamos conocer las siguientes funciones:

a) $V^{l,\mu^i}_{N'_k,h}$ $h > t_k$: función que recoge la provisión matemática en el instante h, teniendo presente las nuevas prestaciones incrementadas en la proporción μ_i, dada la simulación l-ésima del colectivo N'_k. Su importe viene dado por la suma de las provisiones matemáticas individuales :

$$V^{l,\mu_i}_{N'_k,h} = \begin{cases} V^{l}_{N'_k,h} & h = 1,\dots,t_k \\ \sum_{i=1}^{n'(h)^l} V^{\mu_i}_{i,h} & h = t_k+1,\dots,Q^{N'_k,l} \end{cases}$$

Siendo $V^{\mu_i}_{i,h}$ la provisión matemática individual del partícipe "i" en el momento h, teniendo en cuenta que las prestaciones del mencionado partícipe están ponderadas por la proporción μ_i.

b) $R^{l,\mu_i}_{N'_k,h}$ $h > t_k$: función que recoge el margen de solvencia que el plan debe de tener disponible en cada momento h, dada la simulación l-ésima del colectivo N'_k y teniendo en cuenta las nuevas prestaciones.

La función $Z^{l,\mu_i}_{N'_k,h}$ viene dada por las siguientes expresiones:

Si el reaseguro es del **tipo A**:

$$Z^{l,\mu^0}_{N'_k,h} = \begin{cases} (P^{Rec,N'_k,l}_{h-1} - \alpha^{r,N'_k,l,\mu_i}_{h-1} - \alpha^{s,N'_k,l,\mu_i}_{h}(1+Ip)^{-1/2})(1+Ip) \\ h=1 \\ \\ (Z^{l,\mu_i}_{N'_k,h-1} + P^{Rec,N'_k,l}_{h-1} - \alpha^{r,N'_k,l,\mu_i}_{h-1} - \alpha^{s,N'_k,l,\mu_i}_{h}(1+Ip)^{-1/2})(1+Ip) \\ \text{si} \quad Z^{l,\mu_i}_{N'_k,h-1} > R^{l,\mu_i}_{N'_k,h-1} + V^{l,\mu_i}_{N'_k,h-1} \\ \\ (R^{l,\mu_i}_{N'_k,h-1} + V^{l,\mu_i}_{N'_k,h-1} + P^{Rec,N'_k,l}_{h-1} - \alpha^{r,N'_k,l,\mu_i}_{h-1} - \alpha^{s,N'_k,l,\mu_i}_{h}(1+Ip)^{-1/2})(1+Ip) \\ \text{si} \quad Z^{l,\mu_i}_{N'_k,h-1} \leq R^{l,\mu_i}_{N'_k,h-1} + V^{l,\mu_i}_{N'_k,h-1} \\ \\ 1 < h \leq Q^{N'_k,l} \end{cases}$$

Si el reaseguro es del **tipo B**:

$$Z^{l,\mu^0}_{N'_k,h} = \begin{cases} (P^{Rec,N'_k,l}_{h-1} - \alpha^{r,N'_k,l,\mu_i}_{h-1} - \alpha^{s,N'_k,l,\mu_i}_{h}(1+Ip)^{-1/2})(1+Ip) \\ h=1 \\ \\ (R^{l,\mu_i}_{N'_k,h-1} + V^{l,\mu_i}_{N'_k,h-1} + P^{Rec,N'_k,l}_{h-1} - \alpha^{r,N'_k,l,\mu_i}_{h-1} - \alpha^{s,N'_k,l,\mu_i}_{h}(1+Ip)^{-1/2})(1+Ip) \\ 1 < h \leq Q^{N'_k,l} \end{cases}$$

Estudio de la función $T^{l,\mu_i}_{N'_k,h}$

La función $T^{l,\mu_i}_{N'_k,h}$ se desdobla en :

$$T^{l,\mu_i}_{N'_k,h} = \begin{cases} T^{1,l,\mu_i}_{N'_k,h} & h = 1,\dots,Q^{N'_k,l}-1 \\ \\ T^{2,l,\mu_i}_{N'_k,h} & h = 1,\dots,Q^{N'_k,l} \end{cases}$$

Si el reaseguro es del **tipo A**:

$$T^{1,l,\mu_i}_{N'_k,h} = \begin{cases} \max\{0, \quad V^{l,\mu_i}_{N'_k,h} + R^{l,\mu_i}_{N'_k,h} - Z^{l,\mu_i}_{N'_k,h}\} & \text{si} \quad Z^{l,\mu_i}_{N'_k,h} > 0 \\ \\ V^{l,\mu_i}_{N'_k,h} - R^{l,\mu_i}_{N'_k,h} & \text{si} \quad Z^{l,\mu_i}_{N'_k,h} \leq 0 \\ \\ & h = 1,\dots,Q^{N'_k,l}-1 \end{cases}$$

Si el reaseguro es del **tipo B**:

$$T^{1,l,\mu_i}_{N'_k,h} = \begin{cases} V^{l,\mu_i}_{N'_k,h} + R^{l,\mu_i}_{N'_k,h} - Z^{l,\mu_i}_{N'_k,h} & \text{si} \quad Z^{l,\mu_i}_{N'_k,h} > 0 \\ \\ V^{l,\mu_i}_{N'_k,h} - R^{l,\mu_i}_{N'_k,h} & \text{si} \quad Z^{l,\mu_i}_{N'_k,h} \leq 0 \\ \\ & h = 1,\dots,Q^{N'_k,l}-1 \end{cases}$$

En ambos tipo de reaseguro:

$$T^{2,l,\mu_i}_{N'_k,h} = \begin{cases} -Z^{l,\mu_i}_{N'_k,h}(1+Ip)^{-1/2} & \text{si} \quad Z^{l,\mu_i}_{N'_k,h} < 0 \\ \\ 0 & \text{si} \quad Z^{l,\mu_i}_{N'_k,h} \geq 0 \\ \\ & h = 1,\dots,Q^{N'_k,l} \end{cases}$$

Conocida la función $T^{l,\mu_i}_{N'_k,h}$ podemos determinar la realización de la variable aleatoria $\xi^{p,R,\mu_i}_{N'_k}$ asociada a la simulación l-ésima $M(N'_k, l, \mu_i)$:

$$M(N'_k, l, \mu_i) = \sum_{s=1}^{Q^{N'_k,l}-1} T^{1,l,\mu_i}_{N'_k,s}(1+Ir)^{-s} + \sum_{s=1}^{Q^{N'_k,l}} T^{2,l,\mu_i}_{N'_k,s}(1+Ir)^{-s+\frac{1}{2}}$$

Conocida la variable aleatoria $\xi_{N'_k}^{p,R,\mu_i}$, la incógnita μ_i debe de satisfacer el siguiente sistema de ecuaciones:

$$E[\xi_{N'_k}^{p,R,\mu_i}] = E[\xi_{N'_k}^{c,R}] \quad (A)$$

El problema que nos encontramos es que tenemos un sistema con una ecuación y $n'(t_k)$ incógnitas $\mu_i \quad i = 1, \ldots n'(t_k)$. Por tanto tenemos infinitas soluciones que satisfagan (A). Para que (A) sea compatible determinado , debemos de incorporar nuevas condiciones al sistema las cuales adoptarán la forma de criterios de determinación de la incógnita $\mu_i \quad i = 1, \ldots n'(t_k)$. Estos criterios los haremos depender de las características peculiares de cada partícipe, por tanto el sistema de ecuaciones a determinar queda como sigue:

$$\left.\begin{array}{c} E[\xi_{N'_k}^{p,R,\mu_i}] = E[\xi_{N'_k}^{c,R}] \\ \mu_i = f(\text{depende de las características propias del individuo}) \quad i = 1, \ldots n(t_k) \end{array}\right\} (B)$$

Nosotros expresaremos μ_i como una proporción γ de algún o algunos elementos diferenciadores del partícipe "i":

$$\mu_i = \gamma\, f(i)$$

donde:

- $f(i)$: función establecida a priori y que dependerá del partícipe "i"
- γ: proporción a determinar

Consideraremos los siguientes casos:

1. $f(i) = 1$ En este caso las prestaciones a percibir a partir de t_k de todos los partícipes del colectivo $N'(t_k)$ aumentarían en una misma proporción γ. El inconveniente de este criterio es que no se tiene en cuenta las obligaciones que tiene el plan en el momento t_k con respecto a cada uno de los $n'(t_k)$ partícipes.

2. $f(i) = V^r_{i,t_k}$ El incremento es proporcional a la provisión matemática retrospectiva del partícipe "i" en el momento t_k. De esta forma el reparto se haría proporcional a las obligaciones que tiene contraidadas el plan con cada uno de los $n'(t_k)$ partícipes en el momento t_k.

En consecuencia la incógnita a determinar será γ, la cual será obtenida por tanteo del sistema de ecuaciones (B).

Conclusiones: la problemática del reaseguro en los colectivos abiertos se ha centrado en el cálculo de las nuevas prestaciones del colectivo ampliado como consecuencia de cobrar a los nuevos una tasa de prima de reaseguro δ_N mayor de la que les corresponde.

Esta circunstáncia nos ha permitido simplificar el análisis, ya que siempre tenemos determinada la tasa de prima a aplicar a los nuevos partícipes que se incorporan al colectivo. Pero tiene el inconveniente de considerar como referencia, para ver si se acepta o no la entrada de nuevos partícipes al plan, la tasa de reaseguro del colectivo inicial.

El sistema estudiado tiene por tanto sentido en aquellos períodos de entrada de nuevos colectivos, en los cuales, los partícipes del colectivo inicial tiene un peso considerable dentro del plan. Sin embargo, de no ser así, se tendría que considerar una nueva tasa δ a aplicar a los nuevos partícipes, la cual sirviera de referencia al plan para permitir la entrada o no de los nuevos. Esta tasa tendría que ser representativa de la situación del colectivo del plan, y en buena lógica no tendría que lesionar los derechos de los partícipes que ya estaban en el plan antes de considerar la misma; ya sea manteniendo la tasa que pagaban, si la nueva tasa es mayor, o reduciendo la que tenían si la nueva tasa es menor a la inicial.

Este problema se hubiese podido evitar cobrando a cada subcolectivo que entra en el plan, la tasa de prima de reaseguro $\delta_{EN(t_k)}$, pero como ya hemos comentado, esta política sólo estaría beneficiando a los nuevos.

Queda por tanto claro que el estudio del reaseguro en colectivos abiertos es una cuestión abierta, donde nosotros hemos dado algunas soluciones que por supuesto no son definitivas.

ANEXO 5-1

ANEXO 5-1 OPERACIONES EN COLECTIVOS

En este anexo vamos a calcular como influye el tamaño del colectivo en la prima de reaseguro y en el coste total de la operación. Para ver este efecto iremos ampliando el colectivo inicial formado por un sólo partícipe.

Las operaciones contempladas se realizan todas ellas con aportaciones únicas.

Supondremos en este anexo que los colectivos son homogéneos en cuanto a la edad y a las prestaciones.

Salvo que digamos lo contrario, los datos de los ejemplos siguientes han sido obtenidos mediante 5 procesos de simulación con 10.000 simulaciones cada uno, eligiendo como resultado el promedio de los 5 procesos.

El estudio lo realizaremos para las modalidades de reaseguro estudiadas: reaseguro de diferencia de siniestralidad tipo A y tipo B, y reaseguro del percentil. Supondremos en todas ellas que no hay reparto de beneficios.

Por último realizaremos un ejemplo donde contemplaremos la posibilidad de entradas de partícipes al colectivo inicial.

Raseguro de diferencia de siniestralidad tipo A sin reparto de beneficios

Supongamos la siguiente operación actuarial:

Operación (I)

Renta de jubilación prepagable.

Edad de los partícipes: $x = 60$ años.

Edad de jubilación $x_{jub} = 65$ años.

Recargo del reasegurador $\lambda^R = 0$

Recargo de seguridad del plan $\lambda = 0$

Cuantía periódica y anual $\alpha^r = 1$

Margen de solvencia = 4% de las provisiones matemáticas.

$Ip = 0.09$

$Ir = 0.09$

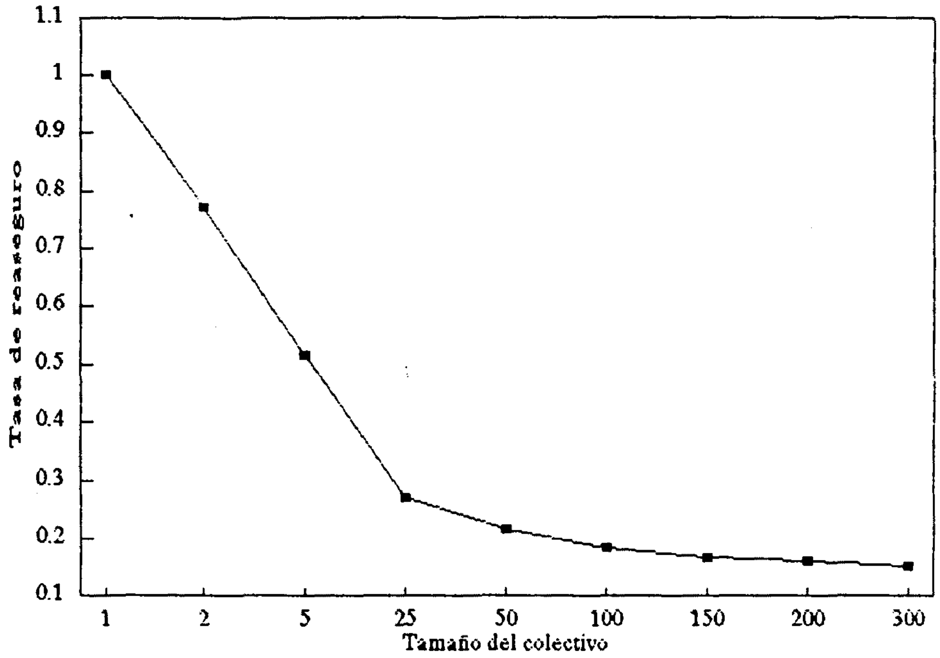
A continuación calcularemos para cada cada tamaño del colectivo n, la prima del plan Π, la proporción de prima de reaseguro individual, δ_N , la prima de reaseguro $\Pi_N^{R,(i)}$ asociada a cada partícipe del colectivo N y la prima total $\Pi_N^{Total,(i)}$ asociada a cada partícipe del colectivo N

Variables	$n = 1$	$n = 2$	$n = 5$	$n = 25$	$n = 50$
$\Pi =$	4.83049	4.83049	4.83049	4.83049	4.83049
$\delta_N =$	1	0.76904	0.51613	0.27148	0.21705
$\Pi_N^{R,(i)} =$	1.6025	1.2324	0.8271	0.4350	0.3478
$\Pi_N^{Total,(i)} =$	6.433030	6.0629	5.6576	5.2655	5.1783

Variables	$n = 100$	$n = 150$	$n = 200$	$n = 300$
$\Pi =$	4.83049	4.83049	4.83049	4.83049
$\delta_N =$	0.1832	0.16921	0.16134	0.1525
$\Pi_N^{R,(i)} =$	0.2935	0.2711	0.2585	0.24438
$\Pi_N^{Total,(i)} =$	5.124082	5.1016	5.0890	5.0748

Podemos observar que la tasa δ_N disminuye conforme aumenta el tamaño del colectivo. Esta evolución queda representada en la siguiente gráfica, donde relacionamos la tasa δ_N y el tamaño del colectivo n:

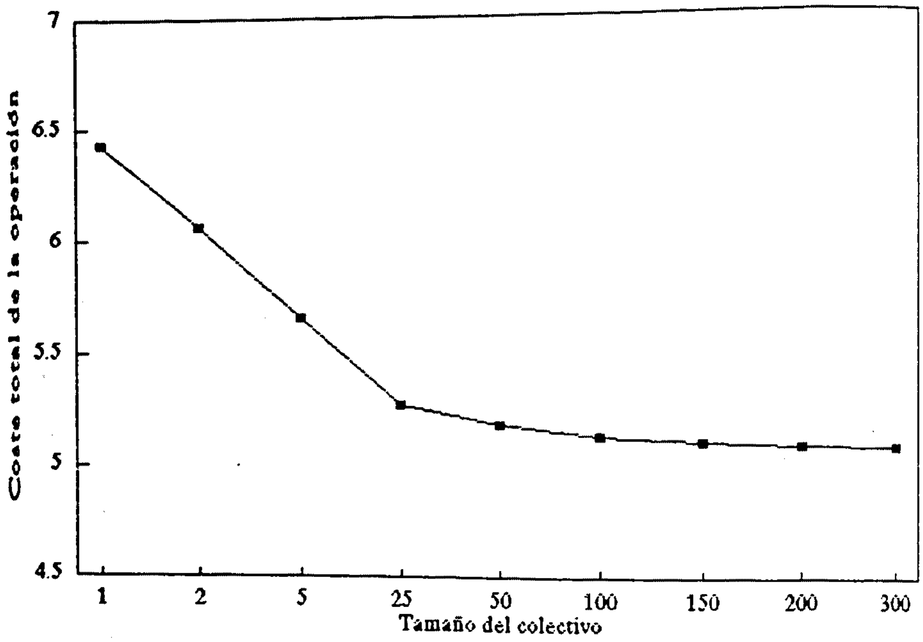
GRAFICO 5-1.1



En este caso, podemos comprobar que cuanto mayor es el tamaño del colectivo, menor es la disminución producida en δ_N.

Este comportamiento también se manifiesta en la prima total a pagar cada partícipe, como muestra el siguiente gráfico, en el cual relacionamos el tamaño del colectivo con la prima total de la operación:

GRAFICO 5-1.2



De todas formas debemos de señalar que el comportamiento de δ_N, con respecto al tamaño del colectivo depende de las características técnicas de la operación de cada partícipe que forma el colectivo y por tanto no podemos generalizar el comportamiento de la tasa δ_N anterior. Esta conclusión queda reflejada en los siguientes ejemplos:

Operación (II)

Renta de jubilación prepagable.

Edad de los partícipes: $x = 60$ años.

Edad de jubilación $x_{jub} = 65$ años.

Cuantía periódica y anual $\alpha^r = 1$

Recargo del reasegurador $\lambda^R = 0$

Recargo de seguridad del plan $\lambda = 0.1$

Margen de solvencia = 4% de las provisiones matemáticas.

$Ip = 0.09$

$Ir = 0.09$

Este ejemplo se diferencia del anterior en el recargo de seguridad del plan $\lambda = 0.1$.

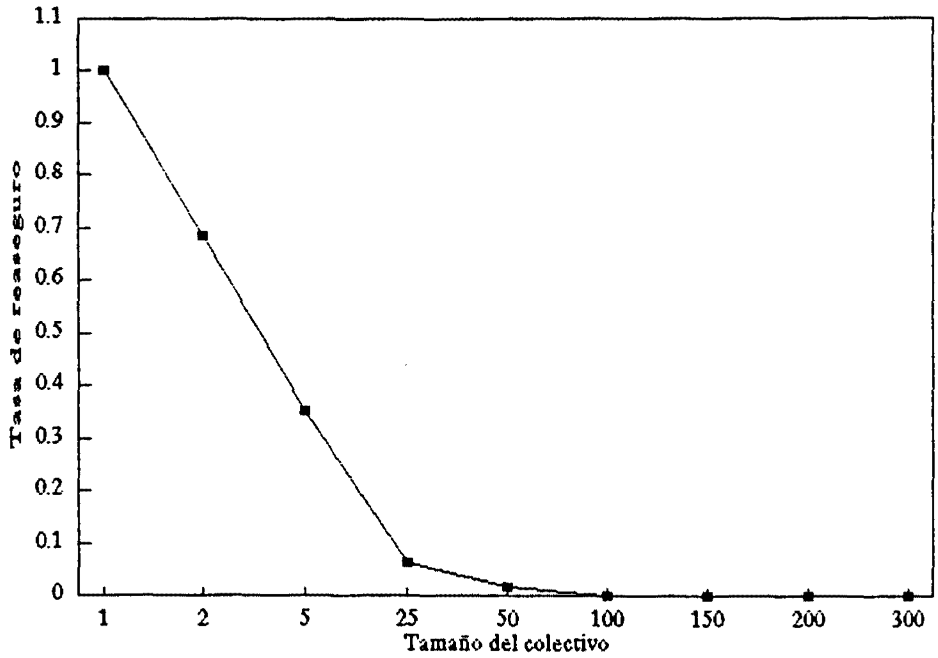
Si calculamos las mismas magnitudes que en el caso anterior:

Variables	$n = 1$	$n = 2$	$n = 5$	$n = 25$	$n = 50$
$\Pi =$	5.31354	5.31354	5.31354	5.31354	5.31354
$\delta_N =$	1	0.68654	0.35353	0.06375	0.01970
$\Pi_N^{R,(i)} =$	1.1327	0.7776	0.4004	0.0722	0.0223
$\Pi_N^{Total,(i)} =$	6.446259	6.0911	5.7139	5.3857	5.3358

Variables	$n = 100$	$n = 150$	$n = 200$	$n = 300$
$\Pi =$	5.31354	5.31354	5.31354	5.31354
$\delta_N =$	0.0033	0.00073	0.00018	0.00002
$\Pi_N^{R,(i)} =$	0.0037	0.00082	0.0002	0.00002
$\Pi_N^{Total,(i)} =$	5.3172	5.3143	5.3137	5.3135

En este caso podemos comprobar cómo el recargo de seguridad del plan ha hecho modificar el comportamiento de la tasa δ_N con respecto al tamaño del colectivo. Este comportamiento queda reflejado en la siguiente gráfica:

GRAFICO 5–1.3



Podemos observar que la tasa δ_N presenta una disminución bastante considerable para tamaños del colectivo "reducidos". En nuestro caso, cuando el colectivo tan solo presenta 25 partícipes, la tasa $\delta_N = 0.0637$. Esto es debido a que el recargo de seguridad del plan disminuye el riesgo, por las contingencias que cubre el reasegurador, de forma considerable conforme el colectivo anumenta de tamaño. En nuestro caso, si el colectivo supuera los 300 partícipes, la prima de reaseguro se podría despreciar, ya que el recargo de seguridad es suficiente como para cubrir las contingencia previstas en esta modalidad de reaseguro.

A continuación consideremos una operación igual a la primera, pero con un tipo de interés del reaseguro menor $Ir = 0.06$:

Operación (III)

Renta de jubilación prepagable.

Edad de los partícipes: $x = 60$ años.

Edad de jubilación $x_{jub} = 65$ años.

Cuantía periódica y anual $\alpha^r = 1$

Recargo del reasegurador $\lambda^R = 0$

Recargo de seguridad del plan $\lambda = 0$

Margen de solvencia = 4% de las provisiones matemáticas.

$Ip = 0.09$

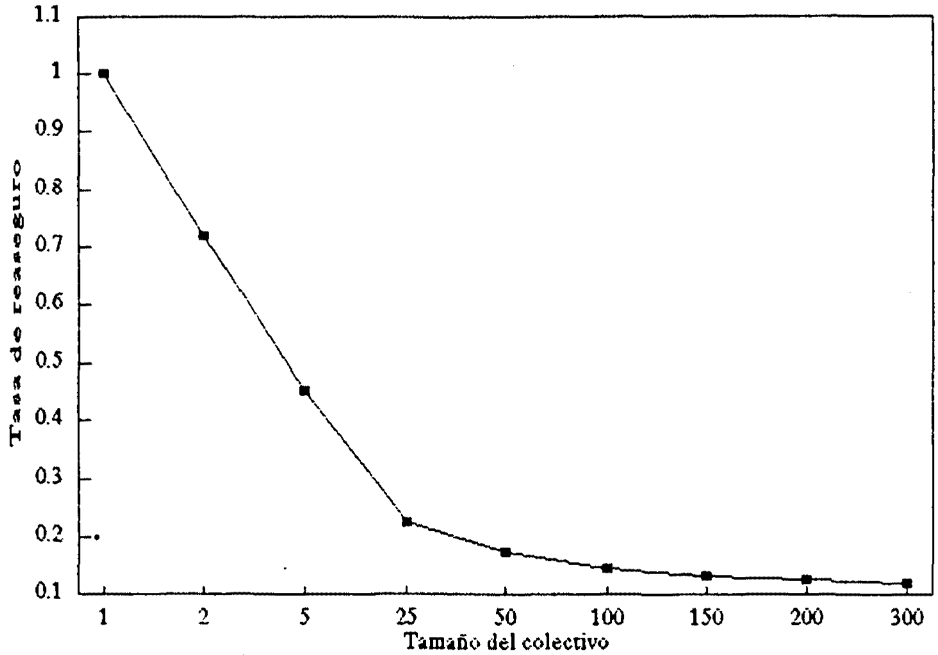
$Ir = 0.06$

Variables	$n=1$	$n=2$	$n=5$	$n=25$	$n=50$
$\Pi =$	4.83049	4.83049	4.83049	4.83049	4.83049
$\delta_N =$	1	0.71904	0.45258	0.22497	0.17623
$\Pi_N^{R,(i)} =$	2.1448	1.5421	0.9706	0.48251	0.3779
$\Pi_N^{Total,(i)} =$	6.97529	6.3725	5.8011	5.31291	5.2084

Variables	$n=100$	$n=150$	$n=200$	$n=300$
$\Pi =$	4.83049	4.83049	4.83049	4.83049
$\delta_N =$	0.14597	0.13361	0.12677	0.1191
$\Pi_N^{R,(i)} =$	0.3130	0.2865	0.2718	0.2554
$\Pi_N^{Total,(i)} =$	5.143492	5.1169	5.1022	5.0858

En la siguiente gráfica relacionamos la evolución de la tasa δ_N con el tamaño del colectivo n:

GRAFICO 5−1.4



Podemos observar que presenta un comportamiento muy similar al de la operación (I), pero con una tasa δ_N más pequeña asociada a cada tamaño del colectivo. Esta circunstancia nos permite llegar a la conclusión que cuanto mayor es el tamaño del colectivo, menor es el incremento que tiene sobre la prima de reaseguro una disminución del tipo de interés técnico del reaseguro con respecto al tipo de interés técnico del plan.

Por el contrario, si el tipo de interés del reaseguro es más alto que el tipo de interés del plan, la disminución que se produce en la prima de reaseguro se ve compensado por una tasa δ_N mayor, conforme aumenta el tamaño del colectivo.

Esta última idea queda ilustrada en el siguiente ejemplo:

Operación (IV)

Renta de jubilación prepagable.

Edad de los partícipes: $x = 60$ años.

Edad de jubilación $x_{jub} = 65$ años.

Cuantía periódica y anual $\alpha^r = 1$

Recargo del reasegurador $\lambda^R = 0$

Recargo de seguridad del plan $\lambda = 0$

Margen de solvencia = 4% de las provisiones matemáticas.

$Ip = 0.09$

$Ir = 0.12$

Variables	$n = 1$	$n = 2$	$n = 5$	$n = 25$	$n = 50$
$\Pi =$	4.83049	4.83049	4.83049	4.83049	4.83049
$\delta_N =$	1	0.80953	0.57301	0.31590	0.25680
$\Pi_N^{R,(i)} =$	1.2589	1.0191	0.7213	0.3976	0.3232
$\Pi_N^{Total,(i)} =$	6.08942	5.8496	5.5518	5.2280	5.1537

Si en lugar de considerar una renta considerásemos un seguro con características similares a la renta de la operación (I) , el valor de δ_N será mayor para cada tamaño del colectivo, como a continuación podemos comprobar:

Operación (V)

Seguro diferido hasta la jubilación y vitalicio.

Edad de los partícipes: $x = 60$ años.

Edad de jubilación $x_{jub} = 65$ años.

Recargo del reasegurador $\lambda^R = 0$

Recargo de seguridad del plan $\lambda = 0$

Cuantía periódica y anual $\alpha^s = 1$

Margen de solvencia = 4% de las provisiones matemáticas.

$Ip = 0.09$

$Ir = 0.09$

Variables	$n=1$	$n=2$	$n=5$	$n=25$	$n=50$
$\Pi =$	0.20658	0.20658	0.20658	0.20658	0.20658
$\delta_N =$	1	0.85639	0.63964	0.34100	0.26436
$\Pi_N^{R,(i)} =$	0.0779	0.0854	0.0638	0.0340	0.0263
$\Pi_N^{Total,(i)} =$	0.3064	0.2920	0.2704	.2406	0.2329

Respecto a la *estrategia óptima recargo reaseguro*, vamor a ver con el siguiente ejemplo, cómo el tamaño del colectivo puede modificar en ocasiones la estrategia óptima con respecto al caso individual.

Consideremos la operación (I) y la operación (II) pero con un recargo del reasegurador $\lambda^R = 0.1$, veremos como la estrategia óptima recargo reaseguro cambia conforme aumenta el tamaño del colectivo.

Operación (VI)

Renta de jubilación prepagable.

Edad de los partícipes: $x = 60$ años.

Edad de jubilación $x_{jub} = 65$ años.

Recargo del reasegurador $\lambda^R = 0.1$

Recargo de seguridad del plan $\lambda = 0$

Cuantía periódica y anual $\alpha^r = 1$

Margen de solvencia = 4% de las provisiones matemáticas.

$Ip = 0.09$

$Ir = 0.09$

Variables	$n = 1$	$n = 2$	$n = 5$	$n = 25$	$n = 50$
$\Pi =$	4.83049	4.83049	4.83049	4.83049	4.83049
$\delta_N =$	1	0.76904	0.51613	0.27148	0.21705
$\Pi_N^{R,(i)} =$	1.7627	1.3556	0.9098	0.4785	0.3826
$\Pi_N^{Total,(i)} =$	6.5932	6.1851	5.7403	5.3090	5.2131

Variables	$n = 100$	$n = 150$	$n = 200$	$n = 300$
$\Pi =$	4.83049	4.83049	4.83049	4.83049
$\delta_N =$	0.1832	0.16921	0.16134	0.1525
$\Pi_N^{R,(i)} =$	0.3239	0.2982	0.2844	0.2688
$\Pi_N^{Total,(i)} =$	5.1534	5.1287	5.1149	5.0993

Si recargo de seguridad del plan $\lambda = 0.1$:

Operación (VII)

Renta de jubilación prepagable.

Edad de los partícipes: $x = 60$ años.

Edad de jubilación $x_{jub} = 65$ años.

Recargo del reasegurador $\lambda^R = 0.1$

Recargo de seguridad del plan $\lambda = 0.1$

Cuantía periódica y anual $\alpha^r = 1$

Margen de solvencia = 4% de las provisiones matemáticas.

$Ip = 0.09$

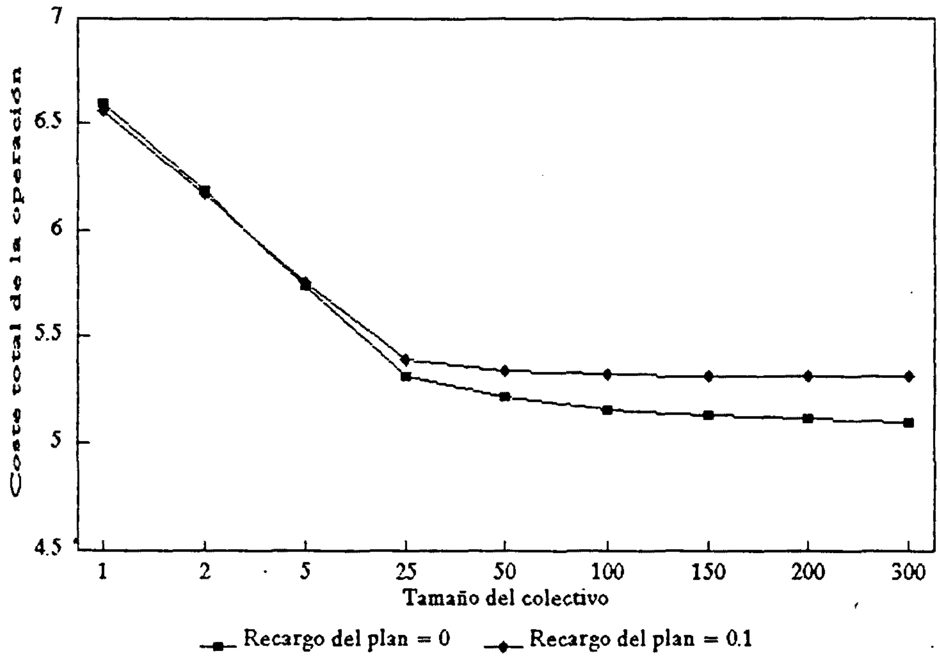
$Ir = 0.09$

Variables	$n = 1$	$n = 2$	$n = 5$	$n = 25$	$n = 50$
$\Pi =$	5.31354	5.31354	5.31354	5.31354	5.31354
$\delta_N =$	1	0.68654	0.35353	0.06375	0.01970
$\Pi_N^{R,(i)} =$	1.2459	0.8553	0.4404	0.0794	0.0216
$\Pi_N^{Total,(i)} =$	6.5595	6.1689	5.7540	5.3929	5.3352

Variables	$n = 100$	$n = 150$	$n = 200$	$n = 300$
$\Pi =$	5.31354	5.31354	5.31354	5.31354
$\delta_N =$	0.0033	0.00073	0.00018	0.00002
$\Pi_N^{R,(i)} =$	0.0041	0.0009	0.00022	0.000024
$\Pi_N^{Total,(i)} =$	5.3176	5.3144	5.3137	5.3135

En el siguiente gráfico relacionamos el coste total de la operación para cada recargo de seguridad del plan ($\lambda = 0$ y $\lambda = 0.1$) con respecto al tamaño del colectivo:

GRAFICO 5−1.5



Podemos observar que ante la decisión de no recargar el plan $\lambda = 0$ o la de aplicar el recargo $\lambda = 0.1$, la estrategia óptima en el caso que el colectivo esté formado por "pocos" partícipes (uno o dos partícipes) viene dada por el recargo $\lambda = 0.1$, sin embargo, si el colectivo tiene cinco partícipe o más, ésta se consigue para un recargo de seguridad del plan $\lambda = 0$.

Reaseguro de diferencia de siniestralidad tipo B sin reparto de beneficios

El comportamiento de δ_N en esta modalidad de reaseguro puede diferir bastante con respecto al tipo A.

Si bien en la modalidad anterior, $\delta_N > 0$, tendiendo a cero si el tamaño del colectivo tiende a infinito. No tiene por qué suceder así cuando el plan cede al reasegurador en cada período los fondos que exceden de las provisiones matemáticas más los márgenes de solvencia correspondientes. Pudiéndose dar el caso, según las características técnicas de la operación que $\delta_N < 0$ si el colectivo sobrepasa un determinado volumen de partícipes. En estos casos, el reasegurador recibe en término promedio más de lo que paga.

A continuación exponemos algunos ejemplos:

Operación (I)

Renta de jubilación prepagable.

Edad de los partícipes: $x = 60$ años.

Edad de jubilación $x_{jub} = 65$ años.

Recargo del reasegurador $\lambda^R = 0$

Recargo de seguridad del plan $\lambda = 0$

Cuantía periódica y anual $\alpha^r = 1$

Margen de solvencia = 4% de las provisiones matemáticas.

$Ip = 0.09$

$Ir = 0.09$

Variables	$n=1$	$n=2$	$n=5$	$n=25$	$n=50$
$\Pi =$	4.83049	4.83049	4.83049	4.83049	4.83049
$\delta_N =$	1	0.2536	0.0443	0.0035	0.00087
$\Pi_N^{R,(i)} =$	1.6025	0.4064	0.0709	0.0056	0.0013
$\Pi_N^{Total,(i)} =$	6.433030	5.2369	4.9014	4.8361	4.8327

Variables	$n = 75$	$n = 100$	$n = 200$
$\Pi =$	4.83049	4.83049	4.83049
$\delta_N =$	0.0007	−0.00007	−0.00014
$\Pi_N^{R,(i)} =$	0.001121	0.0000	0.0000
$\Pi_N^{Total,(i)} =$	4.83162	4.83049	4.83049

En nuestro caso podemos observar que conforme aumenta el tamaño del colectivo, la prima total de la operación tiende a la prima pura. De hecho cuando el colectivo está formado por 75 partícipes, la prima de reaseguro se hace prácticamente cero.

Debemos de indicar que los valores de las tasas de reaseguro asociadas a 100 y a 200 partícipes son prácticamente cero, ya que aunque la simulación nos haya dado valores negativos, estos no son lo suficientemente significativos como para considerarlos menores que cero. Esto es debido a las fluctuaciones que presentan los valores de las tasas de reaseguro simuladas, las cuales (las fluctuaciones) son directamente proporcionales al tamaño del colectivo.

También podemos señalar que cuando el colectivo está formado por un solo partícipe, el reaseguro tipo A y el reaseguro tipo B son equivalentes, sin embargo esta equivalencia se rompe cuando añadimos partícipes al colectivo.

Al igual que en el reaseguro tipo A, cuanto mayor es el recargo de seguridad del plan, menor es la tasa δ_N

Por ejemplo, si el recargo de seguridad del plan $\lambda = 0.1$, entonces la disminución producida en δ_N es de tal magnitud que δ_N empieza a ser negativa cuando el colectivo está formado tan solo por dos partícipes:

Operación (II)

Renta de jubilación prepagable.

Edad de los partícipes: $x = 60$ años.

Edad de jubilación $x_{jub} = 65$ años.

Cuantía periódica y anual $\alpha^r = 1$

Recargo del reasegurador $\lambda^R = 0$

Recargo de seguridad del plan $\lambda = 0.1$

Margen de solvencia = 4% de las provisiones matemáticas.

$Ip = 0.09$

$Ir = 0.09$

Variables	$n=1$	$n=2$	$n=5$	$n=25$	$n=50$
$\Pi =$	5.31354	5.31354	5.31354	5.31354	5.31354
$\delta_N =$	1	−0.0658	−0.36391	−0.42192	−0.42565
$\Pi_N^{R,(i)} =$	1.1262	−0.0741	−0.4098	−0.4751	−0.479388
$\Pi_N^{Total,(i)} =$	6.439749	5.2393	4.9036	4.8383	4.8341

Variables	$n=100$	$n=200$
$\Pi =$	5.31354	5.31354
$\delta_N =$	−0.42699	−0.42709
$\Pi_N^{R,(i)} =$	−0.4808	−0.4810
$\Pi_N^{Total,(i)} =$	4.8327	4.8325

Podemos comprobar en este caso que el coste total de la operación tiende también, como en el caso anterior en el que no había recargo del plan, a la prima pura de la operación ($\Pi = 4.830499$) conforme aumenta de tamaño el colectivo.

En el caso de las operaciones de seguros, el coste de la operación también tiende a la prima pura de la operación conforme aumenta el tamaño del colectivo. Esta idea queda reflejada en el siguiente ejemplo:

Operación (III)

Seguro diferido hasta la jubilación y vitalicio.

Edad de los partícipes: $x = 60$ años.

Edad de jubilación $x_{jub} = 65$ años.

Recargo del reasegurador $\lambda^R = 0$

Recargo de seguridad del plan $\lambda = 0$

Cuantía periódica y anual $\alpha^s = 1$

Margen de solvencia = 4% de las provisiones matemáticas.

$Ip = 0.09$

$Ir = 0.09$

Variables	$n = 1$	$n = 2$	$n = 5$	$n = 25$
$\Pi =$	0.20658	0.20658	0.20658	0.20658
$\delta_N =$	1	0.08279	0.00184	−0.00763
$\Pi_N^{R,(i)} =$	0.1808	0.0149	0.00033	−0.001379
$\Pi_N^{Total,(i)} =$	0.3873	0.2215	0.2069	0.2065

Podemos observar que el coste total de la operación para un colectivo formado por 5 partícipes ya corresponde prácticamente con la prima pura de la operación. El valor negativo de δ_N cuando el tamaño del colectivo $n = 25$ se debe a las fluctuaciones propias de la simulación, por tanto podemos considerala cero.

Raseguro del percentil sin reparto de beneficios

En esta modalidad de reaseguro debemos de tener en cuenta la variación que se produce en el recargo de seguridad del plan que garantiza el nivel de solvencia $(1-\epsilon)$, conforme aumenta el tamaño del colectivo. De tal forma que cuanto mayor es el tamaño del colectivo, menor es el recargo se seguridad asociado a cada partícipe. Esta circuntancia provoca un hecho curioso, y es que la tasa de reaseguro δ_N para colectivos de pequeñas dimensiones puede ser mayor que 1, debido a la reducción experimentada en el recargo de seguridad.

Al suponer que la operación es a primas únicas, la prima de reaseguro será independiente del criterio aplicado en el cálculo del recargo de seguridad, el cual será sencillo de obtener en este caso por tratarse de un colectivo homogéneo.

Consideremos la siguiente operación:

Operación (I)

Renta de jubilación prepagable.

Edad de los partícipes: $x = 60$ años.

Edad de jubilación $x_{jub} = 65$ años.

Recargo del reasegurador $\lambda^R = 0$

Nivel de insolvencian $\epsilon = 0.05$

Cuantía periódica y anual $\alpha^r = 1$

$Ip = 0.09$

$Ir = 0.09$

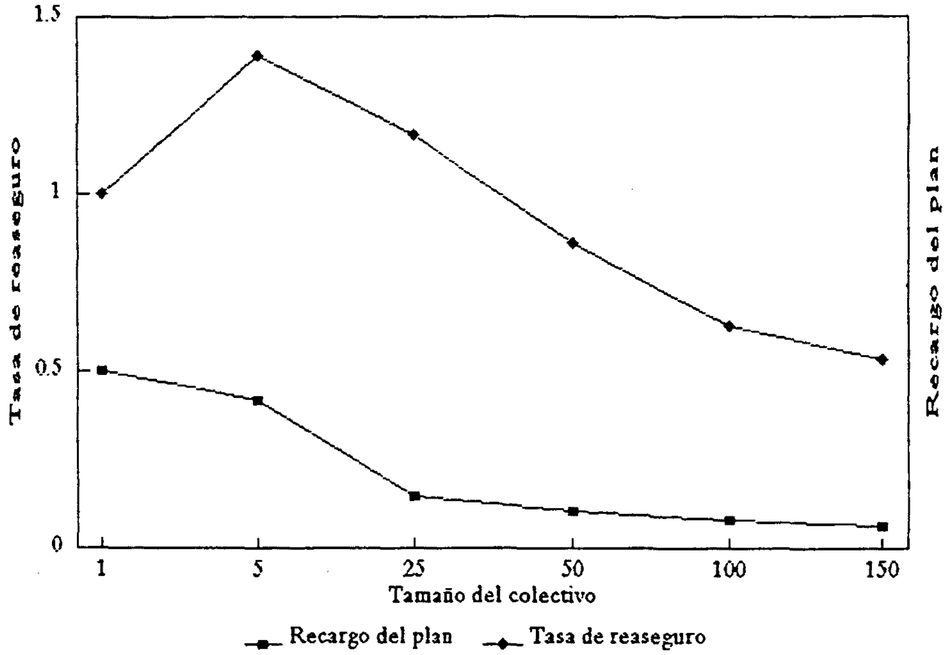
A continuación calcularemos para cada cada tamaño del colectivo n, la prima del plan Π, el recargo se seguridad del plan $\lambda_i^{N,\epsilon}$ asociado a cada partícipe del colectivo N, la proporción de prima de reaseguro individual, δ_N , la prima de reaseguro $\Pi_N^{R,(i)}$ asociada a cada partícipe del colectivo N y la prima total $\Pi_N^{Total,(i)}$ asociada a cada partícipe del colectivo N

Los datos han sido obtenidos mediante 10 procesos de simulación con 2000 simulaciones cada uno, eligiendo como resultado final el promedio de los 10 procesos.

Variables	$n=1$	$n=2$	$n=25$	$n=50$	$n=100$	$n=150$
$\Pi =$	4.83049	4.83049	4.83049	4.83049	4.83049	4.83049
$\lambda_i^{N,\epsilon} =$	0.4956	0.4150	0.1423	0.1037	0.07396	0.0595
$\delta_N =$	1	1.3880	1.1653	0.8568	0.62175	0.5303
$\Pi_N^{R,(i)} =$	0.00661	0.009175	0.00770	0.00566	0.00410	0.00349
$\Pi_N^{Total,(i)} =$	7.23133	6.844225	5.52568	5.3375228	5.19189	5.12165

En el siguiente gráfico relacionamos la tasa de reaseguro δ_N y el recargo de seguridad del plan $\lambda_i^{N,\epsilon}$ con el tamaño del colectivo:

GRAFICO 5-1.6



Podemos observar que la tasa de reaseguro $\delta_N > 1$ para $n = 2$ y $n = 25$. Esto es debido al descenso del recargo de seguridad del plan en tal medida, que provoca un mayor coste del reaseguro.

De todas formas, esta circunstancia no influye en la prima total de la operación, la cual siempre será inversamente proporcional al tamaño del colectivo.

A continuación consideraremos el estudio de **un colectivo abierto** suponiendo que el plan contrata un reaseguro de diferencia de siniestralidad del tipo A.

Los valores de las magnitudes calculadas en este ejemplo han sido obtenidos mediante 6 procesos de simulación con 4000 simulaciones cada uno, eligiendo como resultado el promedio de los 6 procesos.

Supongamos que el plan está formado inicialmente por un colectivo homogéneo constituido por 50 partícipes, las características de todos ellos son las siguientes:

- Edad de los partícipes $x = 60$

- Todos los partícipes son beneficiarios de una renta de jubilación prepagable a prima única, siendo:

- Recargo del reasegurador $\lambda^R = 0$

- Recargo de seguridad del plan $\lambda = 0$

- Cuantía periódica y anual de la renta $\alpha^r = 1$

- Margen de solvencia del plan = 4% de las provisiones matemáticas.

- $Ip = 0.09$

- $Ir = 0.09$

La tasa de reaseguro asociada a este colectivo ya fue calculada en el primer ejemplo de este ANEXO, siendo su valor $\delta_N = 0.21705$, y por tanto la prima de reaseguro $\Pi_N^{R,(i)} = 0.3478$

A continuación supondremos que al cabo de un año, entra al plan un nuevo colectivo formado por 10 partícipes con idénticas características en el momento de la entrada (momento 1) que el colectivo inicial, (son personas de 60 años, y beneficiarias de una renta de jubilación con las mismas características que las del colectivo inicial).

Por consiguiente, al cabo de un año (momento 1), el plan estará formado por los partícipes que del colectivo inicial llegan vivos al momento 1, (partícipes que ahora tendrán 61 años) y por los partícipes que entran.

Un primer estudio que podemos hacer es analizar si permitiremos la entrada o no a este nuevo colectivo, para ello calcularemos cual sería la tasa de reaseguro δ_{EN} que les correspondería pagar a los nuevos. En el supuesto que:

- $\delta_N = 0.21705 < \delta_{EN}$, no permitiremos la entrada al nuevo colectivo.

- $\delta_N = 0.21705 \geq< \delta_{EN}$, sí permitiremos la entrada del nuevo colectivo.

En nuestro caso $\delta_{EN} = 0.11985$ por tanto permitiremos la entrada de los nuevos partícipes ya que estos no empeoran el nivel de riesgo del plan.

En nuestro caso, si no modificamos las prestaciones de los partícipes del colectivo ampliado y seguimos cobrando a los partícipes del colectivo inicial la tasa $\delta_N = 0.21705$, la prima de reaseguro a satisfacer por lo nuevos $\Pi_{EN}^{R,(i)}$ teniendo en cuenta que la prima de reaseguro de cada uno de ellos considerados individualemte es de 1.6025 vendría dada por:

$$\Pi_{EN}^{R,(i)} = 0.11985\,1.6025 = 0.1920$$

Sin embargo, si a los que entran les cobramos la misma prima de reaseguro que la que satisfacen los partícipes del colectivo inicial $\delta_N = 0.21705$ y distribuimos el exceso que supone cobrar a los nuevos una tasa mayor a la que les corresponde, en aumentar en una proporción constante μ las prestaciones de renta de todo el colectivo ampliado, entonces:

$$\mu = 0.005$$

Por consiguiente, las nuevas prestaciones del colectivo ampliado vendrán dadas por $\alpha^{r,\mu}$ siendo en nuestro caso:

$$\alpha^{r,\mu} = (1+\mu)\,\alpha^{r} = 1.005$$

Capítulo 6

Conclusiones

Capítulo 6

Conclusiones

6.1 Introducción

En este capítulo, el último de la tesis, presentaremos la conclusiones del trabajo realizado y las futuras investigaciones que, creemos, pueden derivarse del mismo.

Realizaremos en primer lugar unas conclusiones con carácter general, que se derivan de nuestro estudio.

Posteriormente desarrollaremos los principales resultados o conclusiones que por otra parte, ya han ido apareciendo a lo largo de la tesis y que serán:

- Conclusiones relativas al capítulo 1, en el cual estudiamos los principales aspectos del reaseguro en general y del reaseguro de vida en particular.

- Conclusiones relativas al modelo de reaseguro considerado en operaciones individuales.

  Esta parte viene recogida por el Capítulo 3 y el Capítulo 4.

- Conclusiones relativas al modelo de reaseguro considerado en operaciones de colectivos.

  Esta parte viene recogida por el capítulo 5.

Por último, indicaremos las ampliaciones y futuras investigaciones que pueden derivarse de esta tesis.

Este capítulo se estructurará en los siguientes apartados:

6.2 Conclusiones generales

6.3 Conclusiones relativas al Capítulo 1

6.4 Conclusiones relativas al modelo de reaseguro aplicado en operaciones individuales

6.5 Conclusiones relativas al modelo de reaseguro aplicado en operaciones de colectivos

6.6 Ampliaciones y futuras investigaciones

6.2 Conclusiones generales

Las conclusiones generales pueden resumirse en las siguientes:

1. Creemos que el objetivo esencial en un Plan de Pensiones debe de ser su solvencia. Por esta razón, el objetivo de la tesis ha sido el estudio de modalidades de reaseguro que garanticen la solvencia de un Plan de Pensiones, en los términos especificados en cada modalidad.

2. El modelo planteado permite calcular la prima de reaseguro de un Plan de Pensiones bajo las siguientes condiciones:

   - Las prestaciones se relacionan únicamente con la vida y fallecimiento de los partícipes.
   - El único riesgo es el derivado de las fluctuaciones aleatorias de la mortalidad respecto de su valor esperado.
   - El tipo de interés está deteminado y es determinista.
   - El Plan de Pensiones, no persigue la generación de beneficios.
   - El Plan de Pensiones una vez reasegurado, no asume ningún riesgo.

- El Plan de Pensiones carece de capital social y sólo se financia por las aportaciones de los partícipes.

3. Las modalidades de reaseguro que hemos planteado han sido las siguientes:

   Reaseguro del Percentil, contrato de reaseguro por el cual el reasegurador se obliga a cubrir la pérdida que puede tener el plan, como consecuencia de las desviaciones en la mortalidad de los partícipes del colectivo. En esta modalidad hemos supuesto que el Plan de Pensiones parte con un nivel de solvencia prefijado ϵ [1]

   Reaseguro de Diferencia de Siniestralidad, contrato de reaseguro por el cual el reasegurador se encarga de cubrir en cada período las provisiones matemáticas y márgenes de solvencia que pudieran establecerse, y el riesgo de fallecimiento.[2]

   Dentro de esta modalidad hemos planteado dos tipo de reaseguro:

   Tipo A: el reasegurador interviene siempre y cuando con las primas recargadas cobradas, no tenga suficiente para poder hacer frente a las contingencias indicadas.

   Tipo B: se diferencia del anterior en que en aquellos períodos donde el plan no requiere de financiación externa (reaseguro) para cubrir la provisión y el margen de solvencia correspondiente, éste cede al reasegurador aquella parte de sus fondos que exceden de la provisión matemática y el margen de solvencia del período.

   De esta forma el plan, con este contrato de reaseguro, consigue tener garantizados exactamente en cada período la provisión matemática y el margen de solvencia a un coste menor al que tendría con el reaseguro tipo A.

[1] Un plan tiene un nivel de solvencia ϵ si la probabilidad de que tenga pérdidas en el futuro es inferior o igual a una predeterminada ϵ.

[2] El riesgo de supervivencia quedará cubierto al garantizarse la provisiones matemáticas en cada período.

Para cada modalidad de reaseguro hemos contemplado la posibilidad de ceder al reaseguro el posible beneficio del plan en el momento de extinción del colectivo (sólo posible en colectivos cerrados). Lo cual ha permitido reducir el coste de la operación sin menoscabo en los objetivos del reaseguro.

4. La consideración del recargo de seguridad del plan como variable independiente que puede manejar el plan, nos ha permitido encontrar combinaciones óptimas recargo reaseguro, en el sentido que hacen mínimo el coste total de la operación,[3] dadas el resto de variables que intervienen en el modelo.

5. No podemos establecer una prima de reaseguro general y válida en cada modalidad y para cualquier Plan de Pensiones, ya que ésta depende del tipo de prestaciones y contraprestaciones del colectivo, de los tipos de interés de valoración, de los recargos de seguridad coorespondientes al plan y al reasegurador, y por último, de la composición del colectivo.

   Por tanto, cada Plan de Pensiones requerirá de un análisis particular para determinar la prima de reaseguro de los partícipes que forman el mismo.

6.3 Conclusiones relativas al Capítulo 1

El reaseguro presenta tres funciones principales:

1. Función técnica consistente en suministrar protección a la entidad de seguros en caso de desviaciones entre las indemizaciones reales y las previstas. En el ramo de vida, estas desviaciones puede ser debidas a:

   - Cambios en el nivel general de mortalidad.
   - Aparición de epidemias o cualquier otro acontecimiento que de lugar a un cúmulo de siniestros superior al normal.

[3]El coste total viene dado por el valor actual actuarial de la suma de las primas recargadas del plan y las primas recargada de reaseguro

- Fluctuaciones aleatorias en la siniestralidad debidas al reducido número de asegurados.

Esta última causa tiene especial relevancia en los Planes de Pensiones, ya que los mismo suelen estar formados por colectivos reducidos.

Nosotros nos hemos centrado en la tesis en la función técnica del reaseguro.

2. El reaseguro presenta un función financiera, en la medida que puede contribuir a financiar las actividades de la empresa de seguros vía comisiones o claúsulas que se establezcan al respecto.

3. Las compañías de reaseguros pueden suministrar asesoramiento técnico y servicios de gestión.

Los tres problemas básicos que se presentan en el reaseguro son:

a) Fijación de la modalidad de reaseguro óptima.

b) Determinación del pleno de retención óptimo.

c) Cálculo de la prima para las distintas modalidades una vez fijados los plenos.

Los dos primeros problemas son de elección y requieren la existencia de un criterio que permita tomar la mejor decisión posible. Estos criterios pueden estructurarse en tres tipos:

- Criterios de estabilidad.
- Criterios económicos.
- Criterios basados en un orden de preferencias.

Respecto al reaseguro en el ramo de vida, las modalidades más importantes son:

1. Modalidades proporcionales:

- Reaseguro a condiciones originales.

- Reaseguro a prima de riesgo.

2. Modalidades no proporcionales:

   - Reaseguro Excess-loss.

   - Reaseguro Stop-loss.

Las modalidades proporcionales son las que más se aplican en la práctica. En particular, los planes de seguros colectivos de vida suelen reasegurarse a condiciones originales mediante contratos de cuota parte. Respecto a trabajos que se refieran a reaseguro de Planes de Pensiones, la modalidad Stop-loss suele ser la elegida.

Todas estas modalidades se caracterizan por calcular la prima de reaseguro para un período determinado (que suele ser el año), considerando exlusivamente el riesgo de la operación en ese período.

Sin embargo en nuestro modelo, siguiendo la linea del reaseguro de Riesgo de Ruina propuesto por **AMSLER, M. H.(1991)**, hemos obtenido la prima de reaseguro considerando todo el período de la operación, determinando en qué momentos dentro del plazo de su vigencia tiene que intervenir el reasegurador, y los desembolsos de éste asociados a cada momento de acuerdo con la modalidad contratada.

Esta circunstancia ha hecho que consideremos como variables relevantes no sólo las propias del riesgo de cada modalidad, sino también otras como el tipo de interés técnico del plan y el tipo de interés técnico del reaseguro.

6.4 Conclusiones relativas al modelo de reaseguro aplicado en operaciones individuales

En este bloque de la tesis hemos aplicado el modelo descrito en el Capítulo 2 a las operaciones individuales. Las conclusiones que se derivan de este bloque son las siguientes:

1. Hemos calculado las primas de reaseguro con caracter general, suponiendo que éstas pueden seguir cualquier ley de variación f.

   En este sentido hemos considerado dos casos:

   Si la primera prima de reaseguro es independiente de la ley de variación que siguen el resto de las primas(sólo tiene sentido en caso de primas periódicas), entonces la prima de reaseguro P_t^R en el momento t a satisfacer por el partícipe "i", viene dada por la siguiente expresión:

   $$P_t^R = f(t)\,\frac{E[\xi_i^{p,R}] - C^R}{E[\xi_i^{Q,R}]} \qquad t = 0,\ldots,n-1$$

   En el caso de que haya reparto de beneficios, la nueva prima de reaseguro, prima de reaseguro ajustada $P_t^{R,A}$, viene dada por:

   $$P_t^{R,A} = f(t)\,\frac{E[\xi_i^{p,R}] - C^R - E[\xi_i^{b,R}]}{E[\xi_i^{Q,R}]} \qquad t = 0,\ldots,n-1$$

   donde:

   - $f(t)$: es la función que recoge la ley de variación de primas.
   - C^R : es la prima de reaseguro satisfecha en el origen de la operación y es independiente de la ley de variación del resto de primas de reaseguro. Evidentemente, su valor tendrá que venir dado y deberá ser menor que la prima de reaseguro única.

- $E[\xi_i^{p,R}]$: esperanza de la variable aleatoria valor actual de las prestaciones del reaseguro. Esta variable depende de la modalidad de reaseguro contratada.
- $E[\xi_i^{Q,R}]$: esperanza de la variable aleatoria valor actual financiero de la ley de variación de primas $f(t)$.
- $E[\xi_i^{b,R}]$: esperanza de la variable aleatoria valor actual financiero del beneficio del plan en el momento del fallecimiento del partícipe. Esta variable depende de cada modalidad de reaseguro.

Si la primera prima de reaseguro sigue la ley de variación que siguen el resto de las primas (sólo tiene sentido en caso de primas periódicas), entonces la prima de reaseguro P_t^R en el momento t a satisfacer por el partícipe "i", viene dada por la siguiente expresión:

$$P_t^R = f(t+1)\,\frac{E[\xi_i^{p,R}]}{E[\xi_i^{q,R}]} \quad t = 0, \ldots, n-1$$

donde $E[\xi_i^{q,R}]$: es la esperanza de la variable aleatoria valor actual financiero de la ley de variación de primas $f(t+1)$.

En el caso de que haya reparto de beneficios, la nueva prima de reaseguro, prima de reaseguro ajustada $P_t^{R,A}$, viene dada por:

$$P_t^R = f(t+1)\,\frac{E[\xi_i^{p,R}] - E[\xi_i^{b,R}]}{E[\xi_i^{q,R}]} \quad t = 0, \ldots, n-1$$

2. Puede darse el caso en aquellas modalidades donde haya cesión de fondos al reaseguro por parte del plan (reaseguro tipo B o reparto de beneficios), que la prima de reaseguro resulte negativa. Esto es debido a que en términos de esperanzas, el reasegurador recibe más de lo que da a cambio. En este caso el coste total de la operación resulta inferior a la prima del plan.

3. La agregación de varias prestaciones sobre un mismo partícipe, no tiene por que encarecer la prima de reaseguro de la operación.

   Esto es debido a la dependencia entre las variables aleatorias representantes de cada prestación.

   Incluso, puede darse el caso en la modalidad de diferencia de siniestralidad, que el coste total de la operación conjunta sea inferior al de la operación considerada aisladamente, de tal forma que la agregación de un seguro a una renta disminuya el coste total de la operación. Esta idea la ilustraremos en un ejemplo realizado en el ANEXO 4-3. Supongamos una renta de jubilación con las siguientes características, en la cual establecemos un reaseguro de diferencia de siniestralidad sin reparto de beneficios y del tipo A:

   Renta de jubilación prepagable.

   Edad de jubilación: $x = 65$ años.

   Edad del partícipe: $x = 60$ años.

   Cuantía periódica y anual $\alpha^r = 1$

   Margen de solvencia: 4% de las provisiones matemáticas.

   $Ip = 0.09$

   $Ir = 0.06$

λ^t	Π^{Rec}	$\Pi^R(A)$	Coste total(A)
00000	4.830499	2.144836	6.975335

   Si agregamos a la renta un seguro de cuantía unitaria, inmediato y temporal hasta la jubilación:

λ^t	Π^{Rec}	Π^R	Coste total
00000	4.896149	2.076715	6.972863

Podemos comprobar como el coste total de la operación pasa de 6.975335 a 6.972863.

4. Para cada modalidad de reaseguro puede existir una estrategia óptima recargo reaseguro. Esto es debido a que recargos de seguridad diferentes pueden dar lugar a costes totales de la operación diferentes, fijadas el resto de características técnicas del plan. Teniendo por tanto en cuenta que el recargo de seguridad del plan es la única variable que puede manejar el plan, (ya que el resto de varibles le viene dadas por las características de la operación y por la coyuntura financiera), entonces para cada operación puede existir un recargo óptimo que minimiza el valor actual del coste total de la operación.

   La obtención de esta estrategia o recargo óptimo para cada modalidad de reaseguro no es sencilla y dependerá de las características de cada operación. Nosotros hemos solucionado este problema de dos maneras:

   a) A posteriori, calculando los posibles recargos de seguridad del plan, fijado un intervalo de variación de los mismos, y viendo para cual de ellos se minimiza el valor actual del coste total de la operación, con un margen de error dado por la amplitud del intervalo.

   b) A priori, obteniendo una función que hemos denominado K, a partir de la cual podemos tener información de la estrategia óptima de cada operación sin necesidad de recurrir al primer método.

   La función K la hemos definido a través de la siguiente expresión:

$$K = -\frac{\Delta VPREA}{\Delta VPREC}$$

   siendo:

   - $\Delta VPREA$: La variación que experimenta la prima de reaseguro al variar el recargo de seguridad del plan.

- $\Delta VPREC$: La variación que experimenta la prima de recargada del plan al variar el recargo de seguridad del plan.

De tal forma que:

- Si $K < 1$ para cualquier recargo de seguridad del plan, la estrategia óptima recargo reaseguro es no recargar la operación.
- Si $K > 1$ para cualquier recargo de seguridad del plan, cuanto mayor sea el recargo de seguridad del plan menor será el coste total de la operación.
- Si $K = 1$ para cualquier recargo de seguridad del plan, el recargo de seguridad del plan es independiente del coste total de la operación.
- Si K toma valores mayores y menores que 1, entonces ha de analizarse la estructura de la función K para cada caso particular, pudiendo dar lugar a estrategias mixtas recargo reaseguro.

La ventaja que presenta el conocimiento de la función K es que nos ha permitido sistematizar la relación entre las viariables que influyen en la estrategia óptima. Sin embargo, el problema que tenemos es que no siempre nos es posible obtener la función K de una operación. En el Capítulo 4, en la medida que ha sido posible, hemos obtenido la expresión analítica de la función K de las operaciones particulares estudiadas.

6.5 Conclusiones relativas al modelo de reaseguro aplicado en operaciones de colectivos

En este bloque de la tesis hemos aplicado el modelo descrito en el Capítulo 2 a las operaciones de colectivos. Las conclusiones que se derivan de este bloque son las siguientes:

1. La imposibilidad práctica de poder estudiar la prima de reaseguro en un colectivo de partícipes, utilizando la misma metodología utilizada en el modelo in-

dividual, nos ha llevado a utilizar como instrumento para poder determinar la evolución del colectivo, el método de simulación de Monte Carlo.

2. El cálculo de la prima de reaseguro de cada elemento del colectivo, aparece como un problema de reparto del coste del reaseguro entre los partícipes que forman el colectivo. Este reparto se puede realizar de distintas formas, las cuales dan lugar a criterios en la determinación de la prima de reaseguro.

   Nosotros hemos utilizado el criterio de expresar la prima de reaseguro de un partícipe perteneciente a un determinado colectivo, como una proporción de su prima de reaseguro individual, es decir, como un porcentaje de la prima que tendría que satisfacer este partícipe si sólo él estuviese en el plan. Recordemos que esta prima de reaseguro individual es conocida.

3. El tamaño del colectivo hace disminuir el coste total de la operación para cada partícipe que forma el mismo. Incluso en colectivos homogéneos, el tamaño puede modificar la estrategia óptima recargo reaseguro con respecto al modelo individual.

4. En la modalidad de reaseguro del percentil, la prima de reaseguro en caso de primas periódicas, depende del criterio utilizado en la determinación del recargo de seguridad del plan que garantiza el nivel de solvencia prefijado $1 - \epsilon$.

5. En colectivos abiertos, sólo tiene sentido plantearse la modalidad de reaseguro de diferencia de siniestalidad y sin reparto de beneficios, ya que el resto de modalidades requieren el conocimiento del momento de extinción del colectivo, circunstancia que no puede determinarse en un colectivo abierto por estar éste siempre sometido a constantes entradas.

6. El cobrar a los nuevos partícipes que se incorporan al plan la misma tasa de reaseguro que satisfacen los partícipes que ya estaban en el colectivo, nos ha permitido abordar el estudio del reaseguro en colectivos abiertos, como un problema de cálculo del incremento de las prestaciones del colectivo ampliado (teniendo

en cuenta en el colectivo los que entran) a partir del momento de la entrada de los nuevos.

Esto ha sido posible gracias a que sólo hemos permitido la entrada a colectivos que mejoran la situación de riesgo del plan.

6.6 Ampliaciones y futuras investigaciones

Debemos de indicar que es necesario profundizar en el modelo presentado en las siguientes lineas:

1. Intentar determinar un método que nos permitiese determinar la estrategia óptima recargo reaseguro en el caso de operaciones de colectivos.

2. Abordar la problemática de cálculo por simulación de las reservas de solvencia asociadas al colectivo RS_N^c. La solución prodría venir utilizando un sistema de simulación distinta que tuviese en cuenta exclusivamente aquellas trayectorias de simulación más probables de evolución del colectivo.

3. Estudiar en la modalidad de reaseguro del percentil en el caso de primas periódicas, qué relación concreta hay entre la prima de reaseguro y el criterio utilizado en la determinación del recargo de seguridad.

4. Se tendría que profundizar en el estudio del reaseguro en colectivos abiertos.

   Creemos que una de las lineas de investigación a seguir en este terreno tiene que ver con el estudio de la evolución que tiene que seguir la tasa de prima de reaseguro a aplicar al colectivo ampliado, conforme se van produciendo nuevas entradas de partícipes al plan, la cual a su vez podría servir de referencia para permitir la entrada de nuevos partícipes al colectivo.

   Nosotros hemos asumido la hipótesis de aplicar una tasa constante al colectivo ampliado y por tanto independiente del momento donde se producen las entradas y de la composición del colectivo en ese momento. Esta tasa viene dada por la correspondiente al colectivo inicial δ_N, la cual a su vez nos ha servido de referencia, para ver si se acepta o no la entrada de nuevos partícipes al plan. De tal forma que si la tasa de reaseguro del colectivo que desea entrar en el plan, es mayor que δ_N, no hemos permitido la entrada del colectivo al plan.

Creemos que esta hipótesis tiene sentido asumirla en aquellos períodos de entrada de nuevos partícipes en los cuales, el colectivo inicial tiene un peso considerable dentro del plan. Sin embargo, de no ser así, se tendría que considerar una nueva tasa δ a aplicar al colectivo ampliado, la cual sirviera de referencia al plan para permitir la entrada o no de los nuevos. Esta tasa tendría que ser representativa de la composición del colectivo en el momento de la entrada de nuevos partícipes al plan, y en buena lógica no tendría que lesionar los derechos de los partícipes que ya estaban en el plan antes de considerar la misma; ya sea manteniendo la tasa que pagaban, si la nueva tasa es mayor, o reduciendo la que tenían si la nueva tasa es menor a la inicial.

Posteriormente sería necesario ampliar el modelo suprimiendo o relajando las hipótesis de partida en los siguientes aspectos:

- La primera linea de investigación afecta a la hipótesis del tipo de interés, que lo hemos supuesto determinista.

  Una hipótesis más realista sería considerar el tipo de interés aleatorio. Esta circunstancia permitiría tener en cuenta no sólo el riesgo ocasionado por las fluctuaciones en la mortalidad, sino también el riesgo de la rentabilidad obtenida por las inversiones.

- Una segunda linea de investigación afectaría a la inclusión de más riesgos dentro del modelo, como pueden ser los relacionados con la invalidez.