

UNIVERSIDAD DE CANTABRIA
DEPARTAMENTO DE ELECTRONICA

TESIS DOCTORAL

CARACTERIZACION DE DISCONTINUIDADES
ENTRE GUIAS CON MEDIOS ANISOTROPOS

Autor :

Miguel Angel Solano Vérez

Santander, Diciembre de 1991

Esta tesis fue juzgada por el siguiente Tribunal:

Presidente: Prof. Dr. D. José Luis García García
Doctor en Ciencias Físicas
Catedrático de Electromagnetismo
Universidad de Cantabria

Secretario: Prof. Dr. D. Angel Vegas García
Doctor en Ciencias Físicas
Profesor Titular de Electromagnetismo
Universidad de Cantabria

Vocales: Prof. Dr. D. Juan E. Page de la Vega
Doctor Ingeniero de Telecomunicación
Catedrático de Teoría de la Señal y Comunicaciones
Universidad Politécnica de Madrid

Prof. Dr. D. Manuel Horno Montijano
Doctor en Ciencias Físicas
Catedrático de Electromagnetismo
Universidad de Sevilla

Prof. Dr. D. Carlos Martín Pascual
Doctor en Ciencias Físicas
Investigador. Director del Instituto de Teledetección
y Telecomunicación
Centro Superior de Investigaciones Científicas - CSIC

Suplentes: Prof. Dr. D. Manuel Felipe Catédra Pérez
Doctor Ingeniero de Telecomunicación
Catedrático de Teoría de la Señal y Comunicaciones
Universidad de Cantabria

Prof. Dr. D. Jesús María Rebollar
Doctor Ingeniero de Telecomunicación
Catedrático de Teoría de la Señal y Comunicaciones
Universidad Politécnica de Madrid

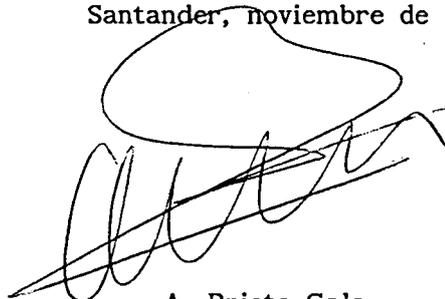
Santander, diciembre de 1991

D. Andrés Prieto Gala, Profesor Titular de Electromagnetismo del Departamento de Electrónica de la Universidad de Cantabria

Hace constar:

Que el trabajo titulado "CARACTERIZACION DE DISCONTINUIDADES ENTRE GUIAS CON MEDIOS ANISOTROPOS" ha sido realizado por Miguel Angel Solano Vérez en el Departamento de Electrónica de la Universidad de Cantabria, bajo mi dirección, y que reúne las condiciones exigidas en los trabajos de Doctorado.

Santander, noviembre de 1991.

A handwritten signature in black ink, consisting of several loops and a long horizontal stroke at the end, positioned above the printed name.

A. Prieto Gala

AGRADECIMIENTOS

Deseo expresar mi más sincero agradecimiento al Profesor D. Andrés Prieto Gala, Director de esta Tesis, no sólo por haberme iniciado en el campo de las microondas, sino por las horas y esfuerzos dedicados a la realización de este trabajo.

Al Profesor D. Angel Vegas García por sus constantes ánimos durante todo este tiempo.

También deseo agradecer a Rosa M. su paciente tarea en la realización de muchas de las gráficas y sobre todo su "paciencia" en lo que no eran gráficas.

Gracias también a Clara Cagigal por sus valiosos comentarios y por suministrarme parte de la bibliografía.

Por último a todos los miembros del Departamento de Electrónica, que están ahora y que pasaron por aquí, y en especial a la Profesora Alicia Casanueva y a José Antonio Pereda, gracias.

A mis padres

INDICE

CAPITULO 1: INTRODUCCION Y ORGANIZACION DE LA TESIS	1
1.1 INTRODUCCION	3
1.2 ORGANIZACION DE LA TESIS	6
1.3 REFERENCIAS	8
CAPITULO 2 METODO DE MODOS ACOPLADOS	15
2.1 INTRODUCCION	19
2.2 POTENCIALES ESCALARES	16
2.3 DESARROLLO DE LAS COMPONENTES TRANSVERSALES	21
2.4 DESARROLLO DE LAS COMPONENTES AXIALES	22
2.5 ECUACIONES DEL TELEGRAFISTA GENERALIZADAS	23
2.6 APLICACION A MEDIOS ANISOTROPOS	25
2.7 FORMULACION INDIRECTA	30
2.7.1 Cálculo de $K_{c(n)} V_{(n)}^z$	30
2.7.2 Cálculo de $K_{c(m)} I_{(m)}^z$	31
2.7.3 Formulación matricial	34
2.8 FORMULACION DIRECTA	39
2.8.1 Cálculo de $K_{c(n)} V_{(n)}^z$	39
2.8.2 Cálculo de $K_{c(m)} I_{(m)}^z$	41
2.8.3 Formulación matricial	42
2.9 DISCUSION DE LAS DOS FORMULACIONES	46
2.10 FORMULACION ORIGINAL DE MODOS ACOPLADOS	48
2.10.1 Formulación indirecta	49
2.10.2 Formulación directa	50
2.11 METODO DE MODOS ACOPLADOS PARA LAMINAS DE FERRITA VERTICALES: FORMULACION RESTRINGIDA	50
2.12 REFERENCIAS	58
CAPITULO 3: RESULTADOS DEL METODO DE MODOS ACOPLADOS	61
3.1 INTRODUCCION	63
3.2 CONVERGENCIA DE LAS CONSTANTES DE PROPAGACION	64

3.3	CONVERGENCIA DEL CAMPO ELECTROMAGNETICO	69
3.4	VALIDEZ DE LAS DISTINTAS FORMULACIONES	73
3.4.1	Medios isótropos	73
3.4.1.1	Comparación con soluciones analíticas exactas	73
3.4.1.2	Comparación con resultados en guía imagen	79
3.4.1.3	Modos complejos	83
3.5	MEDIOS ANISOTROPOS	85
3.5.1	Comparación con soluciones analíticas exactas	85
3.6	APLICACION A DEFASADORES TOROIDALES DE FERRITA	94
3.7	DISPOSITIVOS NO RECIPROCOS EN GUIAS ABIERTAS	102
3.7.1	Introducción	102
3.7.2	Estructura con magnetización transversal	104
3.8	REFERENCIAS	112
CAPITULO 4: MODOS COMPLEJOS Y RELACIONES DE ORTOGONALIDAD		115
4.1	INTRODUCCION	117
4.2	MODOS COMPLEJOS EN ESTRUCTURAS ISOTROPAS	118
4.2.1	Propiedades de los modos complejos	118
4.2.2	Resultados numéricos	123
4.3	TEOREMA DE RECIPROCIDAD GENERALIZADO	127
4.4	PROPIEDADES DE LAS SOLUCIONES EN MEDIOS GIROTROPICOS	129
4.4.1	Caso de magnetización longitudinal	130
4.4.2	Caso de magnetización transversal	130
4.5	RELACIONES DE ORTOGONALIDAD ENTRE MODOS	131
4.5.1	Medios isótropos	131
4.5.2	Medios anisótropos	131
4.5.1.1	Magnetización longitudinal	132
4.5.1.2	Magnetización transversal	133
4.6	CUMPLIMIENTO DE LAS RELACIONES DE ORTOGONALIDAD	133
4.7	REFERENCIAS	142

CAPITULO 5: ANALISIS DE DISCONTINUIDADES ENTRE GUIAS	
ANISOTROPAS	145
5.1 INTRODUCCION	147
5.2 M.A.M. CON ORTOGONALIDADES GENERALIZADAS	148
5.2.1 Incidencia por la guía "a"	148
5.2.2 Incidencia por la guía "b"	150
5.2.3 Incidencia por las dos guías	151
5.3 COMBINACION DEL METODO DE MODOS ACOPLADOS CON EL M.A.M.	153
5.4 M.A.M. MEDIANTE FUNCIONES BASE ORTONORMALES	155
5.4.1 Incidencia modo a modo	156
5.4.1.1 Matrices de autovalores y autovectores	157
5.4.1.2 Campo en guía "b"	161
5.4.1.3 Campo en guía "a"	163
5.4.1.4 Condiciones de contorno en la discontinuidad	166
5.4.2 Incidencia total	169
5.5 ENLACE DE DISCONTINUIDADES	175
5.6 RESULTADOS	178
5.6.1 Ferritas de altura completa	180
5.6.1.1 Comparación entre las formulaciones restringida e indirecta con H_0	180
5.6.1.2 Comprobación de resultados	181
5.6.2 Ferritas de altura parcial	196
5.7 REFERENCIAS	203
CAPITULO 6: CONCLUSIONES Y PRINCIPALES APORTACIONES	207
APENDICES	211
APENDICE A: Matrices de las formulaciones generales	213
APENDICE B: Matrices de la formulación restringida	221
APENDICE C: Tensor permeabilidad	223

FE DE ERRATAS

<u>Dice</u>	<u>Debe decir</u>
<p>Pag. 38:</p> $- \left[S_{[ml][j]}^{Btotal} \right]^{-1} \quad (2.56b)$	$- \left[S_{[ml][j]}^{Btotal} \right]^{-1} \quad (2.56b)$
<p>Pag. 43:</p> <p>y (2.61) junto con ...</p>	<p>y (2.62) junto con ...</p>
<p>Pag. 125:</p> <p>Tabla 4.1, arriba</p> $\dots -\Gamma_2 \quad -\Gamma_3^* \quad -\Gamma_3 \quad -\Gamma_4$ <p>Tabla 4.2, arriba</p> $\dots -\Gamma_2 \quad -\Gamma_3^* \quad -\Gamma_3 \quad -\Gamma_4$	$\dots -\Gamma_2 \quad -\Gamma_3 \quad -\Gamma_3^* \quad -\Gamma_4$ $\dots -\Gamma_2 \quad -\Gamma_3 \quad -\Gamma_3^* \quad -\Gamma_4$
<p>Pag. 108:</p> <p>Figura 3.40 (rótulos)</p> <p>... Be+ (Itho)</p> <p>- - - Bo+ (Itho)</p> <p>Figura 3.41 (rótulos)</p> <p>... Be- (Itho)</p> <p>- - - Bo- (Itho)</p>	<p>... Be+ [11]</p> <p>- - - Bo+ [11]</p> <p>... Be- [11]</p> <p>- - - Bo- [11]</p>
<p>Pag. 173:</p> $\left[\beta_1 \quad \beta_2 \quad \dots \quad \beta_{NM} \right] = \dots \quad (5.60)$ $\left[\beta'_1 \quad \beta'_2 \quad \dots \quad \beta'_{NM} \right] = \dots \quad (5.61)$	$\left[\gamma_1 \quad \gamma_2 \quad \dots \quad \gamma_{NM} \right] = \dots \quad (5.60)$ $\left[\gamma'_1 \quad \gamma'_2 \quad \dots \quad \gamma'_{NM} \right] = \dots \quad (5.61)$

CAPITULO 1

INTRODUCCION Y ORGANIZACION DE LA TESIS

1.1 INTRODUCCION

Los avances en tecnología microondas a frecuencias cada vez más elevadas exigen modificaciones de las guías clásicas como la guía rectangular o la circular; así surgen, primeramente, las guías de tipo plano como por ejemplo las guías impresas y, posteriormente, las guías dieléctricas [1-3]. Los ajustes posteriores a la fabricación de los dispositivos realizados en estos tipos de guías son muy difíciles e incluso imposibles en los circuitos monolíticos de microondas.

Cuando se diseñan dispositivos en guía es preciso hacer alteraciones de su sección recta, mediante la inclusión de medios materiales de diferentes características eléctricas y geométricas, o por modificación de las dimensiones de los existentes, de tal manera que se producen transiciones entre distintos tipos de estructuras [4-7]. Esto da lugar a reflexiones internas del dispositivo lo que complica fuertemente su análisis.

El aumento de la complejidad de las estructuras a diseñar, hace que los problemas anteriormente mencionados sean mayores en dispositivos con líneas microtira y aún más cuando se trabaja con guías dieléctricas [4-7]. Por otra parte, existen elementos tales como defasadores, aisladores, circuladores de potencia y giradores, caracterizados porque en su diseño se deben incluir necesariamente medios no recíprocos como ferritas o semiconductores que están sometidos a la acción de un campo magnético estático externo [8-16]. También los circuitos monolíticos de microondas, construídos en AsGa, cuando están bajo la acción de un campo magnético estático, se comportan de forma no recíproca. La no reciprocidad puede ser magnética (ferritas) o eléctrica (AsGa). El circuito resultante es, lógicamente, mucho más complejo electromagnéticamente que en el correspondiente caso isótropo.

El diseño de circuitos microondas tiene, normalmente, dos etapas claramente diferenciadas. En la primera, (etapa de síntesis), el dispositivo a diseñar se modela mediante una serie de secciones de guías uniformes, cuyas características de propagación se pueden obtener mediante métodos sencillos, despreciándose las interacciones entre ellas. Este proceso permite determinar las dimensiones y características iniciales de los materiales que componen la estructura. Para realizar esta fase se precisa conocer únicamente las

características de propagación (constantes de propagación y estructura de campos) de cada guía que compone el circuito.

La segunda etapa consiste en analizar el circuito ya diseñado, empleando un modelo riguroso que permita determinar de la manera más exacta posible su comportamiento; normalmente ésto implica tener en cuenta las discontinuidades entre las secciones o guías de que consta el dispositivo. Si los resultados del análisis cumplen las especificaciones esperadas del circuito, el proceso de diseño ha terminado, mientras que si los resultados son insuficientes, se puede, mediante un proceso de optimización por ordenador, modificar las dimensiones del circuito hasta alcanzar el comportamiento esperado. Esta segunda etapa implica el conocimiento no sólo de las constantes de propagación y la estructura del campo electromagnético, sino también caracterizar cada discontinuidad así como las interacciones entre ellas.

El objetivo de este trabajo es proporcionar una herramienta que contribuya a facilitar la realización de las dos etapas fundamentales de diseño mencionadas, para el caso de estructuras no recíprocas. Esto implica estudiar un método que proporcione las constantes de propagación y estructura de campo electromagnético, así como analizar una o varias discontinuidades entre guías no recíprocas encadenadas.

Ciertas estructuras sencillas con comportamiento no recíproco, tienen solución analítica exacta [17-22], o se pueden resolver mediante métodos relativamente sencillos [23-28]. Sin embargo, en la mayoría de los casos prácticos, no es posible emplear métodos analíticos exactos.

Genéricamente, se pueden establecer dos grupos de métodos. Uno de ellos engloba a los métodos con un gran contenido numérico; a esta categoría pertenecen el método de elementos finitos o de diferencias finitas [29-31], el método de elementos de contorno [32] o el método de la matriz de líneas de transmisión TLM [33]. Sin embargo, estos métodos al tener un mayor contenido numérico que analítico, presentan convergencias lentas, tiempos de cálculo elevados y suelen fallar en la previsión de resultados, o bien dar errores de ejecución, cuando las dimensiones de los elementos son muy pequeñas o las constantes eléctricas y magnéticas elevadas.

En el otro grupo se encuentran aquellos métodos que se basan en un mayor contenido analítico que numérico. Entre ellos se pueden nombrar el método de la ecuación integral [34], el método espectral [35], el método de la resonancia transversal generalizada [36] o el método de modos acoplados [37-45]. Todos ellos dan lugar en su aplicación a una mayor tarea analítica que los métodos total o casi totalmente numéricos, pero proporcionan unos procesos más sencillos de interpretar y manejar. Los problemas asociados a los métodos numéricos puros, entre ellos la débil convergencia, también se presentan en estos casos pero en un grado mucho menor.

En este trabajo se ha elegido el método de modos acoplados debido, tanto a su simplicidad analítica, como a que presenta una gran generalidad. Además, permite obtener una formulación reducida en la caracterización de discontinuidades, cuando se emplea para obtener el conjunto de modos propios que soporta cada sección diferenciada.

Cuando se trata de analizar discontinuidades simples existen varios métodos, desde los puramente numéricos [46-48] hasta los variacionales o de la ecuación integral [49-56], pasando por el método de adaptación modal [57-73]. Sin embargo cuando hay que caracterizar un dispositivo completo que consta de un conjunto de discontinuidades electromagnéticas muy cercanas entre sí, sólo se puede recurrir a métodos como elementos finitos o diferencias finitas o bien al método de adaptación modal unido al concepto de matriz de dispersión generalizada [74-76].

En este trabajo se aplica el método de adaptación modal para hallar la matriz de dispersión generalizada (M.D.G.); posteriormente se unen entre sí las distintas matrices que describen las sucesivas discontinuidades simples. Con esta técnica, se puede caracterizar un dispositivo complicado, mediante su descomposición en discontinuidades simples, conectadas entre sí mediante guías. La principal ventaja de utilizar este método combinado, es que permite el análisis de múltiples discontinuidades encadenadas sin más limitaciones en cuanto al número de discontinuidades simples y al número de modos a considerar, que las que imponga el tiempo de cálculo o la memoria del ordenador.

1.2 ORGANIZACION DE LA TESIS

La tesis se divide en seis capítulos. En el segundo capítulo se describe el método de modos acoplados usado en el análisis de guías rectangulares cerradas con su interior lleno parcialmente con dieléctricos isótropos o anisótropos. La descripción abarca cinco formulaciones del método, las cuatro primeras aplicables a, prácticamente, cualquier geometría de los dieléctricos o ferritas, mientras que la quinta formulación, de tipo restringido, es aplicable sólo a dieléctricos o ferritas cuya altura coincide con la de la caja conductora, es decir, sólo tiene discontinuidad según una dirección.

El tercer capítulo estudia los resultados de convergencia de las distintas formulaciones empleadas en el capítulo segundo, encontrando el orden máximo que se puede emplear en las matrices, tanto para el cálculo de las constantes de propagación como de los campos. La aplicación de las distintas formulaciones a estructuras simples con solución analítica permite determinar que la denominada formulación indirecta, con inclusión de la solución trivial, es la que presenta mejores resultados; las diferencias con los resultados obtenidos con la llamada formulación de tipo directo con inclusión de la solución trivial, son muy pequeños, excepto quizá en las proximidades de la frecuencia de resonancia de los tensores permeabilidad o permitividad.

Posteriormente, en este mismo capítulo se estudian dos tipos de estructuras. La primera corresponde a un defasador toroidal en remanencia, obteniéndose resultados comparables a los obtenidos mediante el método de elementos finitos, pero en una fracción de su tiempo. La segunda estructura es un conjunto formado por dos guías imágenes abiertas, acopladas entre sí mediante una lámina de ferrita transversalmente magnetizada, con objeto de conseguir realizar un aislador en guía imagen. Los resultados permiten realizar el diseño de la misma forma que el método de la constante dieléctrica efectiva generalizada, obteniéndose resultados similares.

En cuarto capítulo se analizan las propiedades de ortogonalidad de los modos existentes en guías no recíprocas; se comprueba que los modos propios

que proporciona el método de modos acoplados cumplen unas propiedades de ortogonalidad modificadas, que será necesario tener en cuenta al analizar discontinuidades mediante el método de adaptación modal. Posteriormente, se analizan las propiedades que los modos complejos verifican en estructuras isótropas; las soluciones para estos modos aparecen de forma totalmente natural al aplicar el método de los modos acoplados, sin necesidad de realizar búsquedas de soluciones especiales. Además, se muestra como se deben emparejar para su inclusión en el cálculo de discontinuidades mediante el método de adaptación modal.

En el quinto capítulo se analiza el método de adaptación modal empleando los criterios de ortogonalidad mencionados en el capítulo cuarto. Se ha elegido emplear la matriz de dispersión frente a la matriz de transmisión, debido a los problemas numéricos que presenta esta última. El encadenamiento de las distintas matrices de dispersión es ligeramente diferente al equivalente en medios isótropos, debido a los distintos valores de las constantes de propagación de los modos según se desplacen en uno u otro sentido de la dirección de propagación.

Al analizar la convergencia se demuestra que la formulación indirecta con inclusión de la solución trivial es la más estable numéricamente y la única capaz de proporcionar soluciones en cualquier circunstancia. Además se presenta una nueva formulación en la que cada discontinuidad se analiza no en función de sus modos propios sino en función de un nuevo conjunto de modos (TE y TM), ortogonales en sentido clásico; se demuestra que al emplear este conjunto de modos junto con el método de modos acoplados, el estudio de discontinuidades se reduce a la reordenación de una matriz.

Por último, en el capítulo sexto se enumeran las conclusiones y aportaciones a las que se ha llegado en esta tesis.

1.3 REFERENCIAS

- [1] Knox, R.M. and Toulius, P.P.: "*Integrated circuits for the millimeter through optical frequency range*", Symposium on Millimeter Waves, New York, March 1970.
- [2] Itoh, T.: "*Inverted strip dielectric waveguide for millimeter wave integrated circuits*", IEEE, Vol. MTT-24, No. 11, pp. 821-827, November 1976.
- [3] Rudokas, R. and Itoh, T.: "*Passive millimeter wave IC components made of inverted strip dielectric waveguides*", IEEE, Vol. MTT-24, No. 12, pp. 978-981, December 1976.
- [4] Rubio, E., García, J.L. y Prieto, A.: "*Estudio de las guías dieléctricas T y π* ", Anales de Física, serie B, 78, 22.
- [5] Solano, M.A., Prieto, A. and Rodríguez, J.: "*Reduction of losses in dielectric waveguide Y-Junctions with wide aperture angles*", Int. J. Electronics, Vol. 63, No. 5, pp. 741-749, May 1987.
- [6] Rodríguez, J. and Prieto, A.: "*Wide-Band directional couplers in dielectric waveguide*", IEEE, Vol. MTT-35, No. 8, pp. 681- 687, August 1987.
- [7] Rodríguez, J., Solano, M.A. and Prieto, A.: "*Characterization of discontinuities in dielectric waveguides using Schelkunoff's Method: application to tapers and transitions*", Int. J. Electronics, Vol. 66, No. 5, pp. 807- 820. 1989.
- [8] Tedjini, S. and Pic, E.: "*New analysis of semiconductor isolators: The modified spectral domain analysis*", IEEE, Vol. MTT-33, No. 1, pp. 59-63, January 1983.
- [9] Kother, D., Wolff, I. and Beyer, A.: "*A field theoretical analysis of ferrite-loaded image line isolators for the Ka- band*", 15th Europ. Microw. Conf., pp. 831-836, Paris, 1985.
- [10] Yun, S.W. and Itoh, T.: "*A novel distributed millimeter wave isolator*", 13 Europ. Microw. Conf., pp. 174-178, Nürnberg, 1983.
- [11] Talisa, S.H. and Bolle, D.: "*Performance predictions for isolators and differential phase shifters for the near millimeter wave range*", IEEE, Vol. MTT-29, No. 12, pp. 1338- 1443, December 1981.
- [12] Bolioli, S., Benzina, H., Baudrand, H. and Chan, B.: "*Centimeter wave microstrip phase shifter on a ferrite dielectric substrate*", IEEE, Vol. MTT-37, No. 4, pp. 698- 705, April 1989.

- [13] Mazur, J. and Mrozowski, M.: "Nonreciprocal operation of structures comprising a section of coupled ferrite lines with longitudinal magnetization", IEEE, Vol. MTT-37, No. 6, pp. 1012-1020, June 1989.
- [14] Suzuki, K. and Mirotta, R.: "Nonreciprocal millimeter wave devices using a solid state plasma at room temperature", IEEE, Trans. Electron. Devices, Vol. ED-18, pp. 408-411, July 1971.
- [15] Schlomann, E.: "On the theory of the ferrite resonance isolator", IRE, Vol. MTT-8, pp. 199-206, March 1960.
- [16] César, A. C. and Souza, R. I.: "Propagation in anisotropic NRD waveguide", IEEE, AP-S, Int. Symp., pp. 1209-1242, San José (California) June 1989.
- [17] Lax, B., Button, J. and Roth, L.M.: "Ferrite phase shifters in rectangular wave guide", Journal Appl. Phys., Vol. 25, No. 11, pp. 1413-1421, November 1954.
- [18] Van Trier, A. A.: "Guided electromagnetic waves in anisotropic media", Appl. Sci. Res., Vol. B3, No. 4 and 5, pp. 305-371, 1953.
- [19] Kales, M. L.: "Modes in waveguides containing ferrites", J. of Appl. Phys., Vol. 24, pp. 604-608, May 1953.
- [20] Suhl, H. and Walker, R.L.: "Topics in guided wave propagation through gyromagnetic media, part II", B.S.T.J., Vol. 33, pp. 939-986, July 1964.
- [21] Sorrentino, R.: "Exact analysis of rectangular waveguides inhomogeneously filled with transversely magnetized semiconductor", IEEE, Vol. MTT-24, No. 4, pp. 201-208, April 1976.
- [22] Gardiol, F.E.: "Anisotropic slabs in rectangular waveguides", IEEE, Vol. MTT-18, No.8, pp. 461-467, August 1970.
- [23] Barlow, H.E. and Koike, R.: "Microwave propagation in a waveguide containing a semiconductor to which is applied a steady transverse magnetic field", Proc. Inst. Elec. Eng., Vol. 110, pp.2177-2181, 1963.
- [24] Gabriel, G.J. and Brodwin, M.E.: "The solution of guide waves in inhomogeneous anisotropic media by perturbation and variational methods", IEEE, Vol. MTT-13, No. 5, pp. 364-370 May 1965.
- [25] Lindell, I.V. and Oksanen, M.I.: "Variational method for anisotropic dielectric waveguide", 13 Europ. Microw. Conf., pp. 419-424, Nurnberg, September 1983.
- [26] Chew, W.C. and Nasir, M.A.: "A variational analysis of anisotropic,

- inhomogenous dielectric waveguides*", IEEE, Vol. MTT-37, No. 4, pp. 661-668, April 1989.
- [27] Kitazawa, T.: "*Variational method for multiconductor coupled striplines with stratified anisotropic media*", IEEE, Vol. MTT-37, No. 3, pp. 484-491, March 1989.
- [28] Mrozowski, M. and Mazur, J.: "*Lower bound on the eigenvalues of the characteristic equation for an arbitrary multilayered gyromagnetic structure with perpendicular magnetization*", IEEE, Vol. MTT-37, No. 3, pp. 640-643, March 1989.
- [29] Cendes, Z.J. and Lee, J.: "*The transfinite element method for modeling MMIC devices*", IEEE, Vol. MTT-36, No. 12, pp.1639- 1649, December 1988.
- [30] Hayata, K., Miura, K. and Koshiba, M.: "*Full vectorial finite element formalism for lossy anisotropic waveguides*", IEEE, Vol. MTT-37, No. 4, pp. 875-883, May 1989.
- [31] Gibson, A.A.P. and Helszajn, J.: "*Finite element solution of longitudinally magnetized elliptical gyromagnetic waveguides*", IEEE, Vol. MTT-37, No. 6, pp. 999-1005, June 1989.
- [32] Yashiro, K., Moriyasu, M. and Sumio, O.: "*Boundary element method approach to magnetostatic wave problems*", IEEE, Vol. MTT-33, No. 3, pp. 248-253, March 1985.
- [33] Hofer W. J. R.: "*The Transmission-Line Matrix Method: Theory and applications*", IEEE, Vol. MTT-33, No. 10, pp. 882-893, October 1985.
- [34] Omar A. S. and Schunemann K. F.: "*Formulation of the singular integral equation technique for planar transmission line*", IEEE, Vol. MTT-33, No. 12, pp. 1313-1322, December 1985.
- [35] Itoh, T.: "*Spectral domain inittance approach for dispersion characteristics of generalized printed transmission lines*", IEEE, Vol. MTT-28, No. 7, pp. 733-736, July 1980.
- [36] Yee, H.: "*Transverse modal analysis of printed circuit transmission lines*", IEEE, Vol. MTT-33, No. 9, pp. 808-816, September 1985.
- [37] Hung-Chia, H.: "*Coupled mode theory*", VNU Science Press, Utrecht, The Netherlands, 1984.
- [38] Hord, W.E. and Rosenbaum, F.J.: "*Approximation technique for dielectric loaded waveguides*", IEEE, Vol. MTT-16, No. 4, pp. 228-233, April 1968.
- [39] Arnold, R.M. and Rosenbaum, F.J.: "*Nonreciprocal wave propagation in semiconductor loaded waveguides in the presence of a transverse magnetic*

- field*", IEEE, Vol. MTT-19, No. 1, pp. 57-65, January 1971.
- [40] Schelkunoff, S.A.: "Generalized Telegraphist's Equations for waveguides", B.S.T.J., Vol. 3, pp. 784-801, July 1952.
- [41] Gauthier, F.: "Application de la méthode des modes couples a l'étude des structures guidées partiellement remplies de matériaux isotropes et anisotropes", Tesis Doctoral. Limoges, Francia 1979.
- [42] Awai, I and Itoh T.: "Coupled-Mode theory analysis of distributed nonreciprocal structures", IEEE, Vol. MTT-29, No. 10, pp. 1077-1086, October 1981.
- [43] Mazur, J. and Mrozowski, M.: "Coupled mode analysis of a finline", IEEE, Vol. MTT-37, No. 2, pp. 281-288, February 1989.
- [44] Ness, J.B. and Gunn, M.W.: "Microwave propagation in rectangular waveguide containing a semiconductor subject to a transverse magnetic field", IEEE, Vol. MTT-23, No. 9, pp. 767-772, September 1975.
- [45] Ogusu, K.: "Numerical Analysis of Rectangular Dielectric Waveguide and its Modifications", IEEE, Vol. MTT-25, No. 11, pp. 874-885, Nov. 1977.
- [46] Svedin, J., Carlegrim, B. and Hagelin, S.: "Accurate Design of Ferrite Toroid Phase Shifters. Theoretical and Experimental Results", 18 th Europ. Microw. Conf., pp. 391-396, Stockholm, 1988.
- [47] Carlegrim, B., Hagelin, S. and Stenström, S.: "A Fast Ferrite Phase Shifter for 10.7 - 11.7 GHz", 17th Europ. Microw. Conf., pp. 1016-1020, Roma, 1987.
- [48] Mur., G.: "Finite Difference Method for the solution of electromagnetic waveguide discontinuities", IEEE, Vol. MTT-16, pp. 1007-1017, December 1968.
- [49] Koshiba, M. and Suzuki, M.: "Application of Boundary-Element Method to waveguide discontinuities", IEEE, Vol. MTT-34, No. 2, pp. 301-307, February 1968.
- [50] Wu, K.L., Delisle, G.Y. Fang, D.G. and Lecours, M.: "Waveguide discontinuity analysis with a coupled Finite-Boundary Element Method", IEEE, Vol. MTT-37, No. 6, pp. 993-998, June 1989.
- [51] Yang, H.Y., Alexopoulos, N.G. and Jackson D.R.: "Microstrip open-end and gap discontinuities in substrate-superstrate structure", IEEE, Vol. MTT-37, No. 10, pp. 1542-1546, October 1989.
- [52] Collin, R.E.: "Field Theory of Guide Waves", Second Edition, IEEE Press, New York, 1991.

- [53] Lewin, L.: *"Theory of Waveguides"*, Butterworths, London, 1975.
- [54] Lewin, L.: *"A Ferrite Boundary-Value Problem in a Rectangular Waveguide"*, Proc. IEEE, pt. C, pp. 559-563, November 1959.
- [55] Bresler, A.D.: *"On the Discontinuity Problem at the input to an Anisotropic Waveguide"*, IRE Trans. on Antennas and Propagat., Vol. AP-7, pp. S261-S272, December 1959.
- [56] Tao, J.W., Baudrand, H.: *"Multimodal Variational Analysis of Uniaxial Waveguide Discontinuities"*, IEEE, Vol. MTT-39, No. 3, pp. 506-516, March 1991.
- [57] Epstein, P.S.: *"Theory of Wave Propagation in Gyromagnetic Medium"*, Reviews of Modern Physics, Vol. 28, No. 1, pp. 3-17, January 1956.
- [58] Wexler, A.: *"Solution of Waveguide Discontinuities by Modal Analysis"*, IEEE, Vol. MTT-15, No. 9, pp. 508-517, September 1967.
- [59] Casanueva, A.: *"Análisis de Líneas de Transmisión Uniformes y de Discontinuidades en Estructuras Planas"*, Tesis Doctoral, Universidad de Cantabria, Junio 1987.
- [60] Esteban, J.: *"Contribución al Análisis Electromagnético de Estructuras Cerradas mediante Métodos de Ajuste de Campo: Aplicación al Diseño de Dispositivos de RF"*, Tesis Doctoral, E.T.S.I. Telecomunicación (Madrid), 1990.
- [61] Clarricoats, P.J.B. and Sharpe, A.: *"Modal Matching Applied to a Discontinuity in a planar Surface Waveguide"*, Electron. Lett., Vol. 8, pp. 28-29, 1972.
- [62] Zaki, K.A., Chen S.W. and Chen C.: *"Modeling Discontinuities in Dielectric Loaded Waveguides"*, IEEE, Vol. MTT-36 No. 12, pp. 1804-1810, December 1988.
- [63] Xu, Q., Webb, K.J. and Mittra, R.: *"Study of Modal Solution Procedures for Microstrip Step Discontinuities"*, IEEE, Vol. MTT-37, No. 2, pp. 381-387, February 1989.
- [64] Arndt, F. Tucholke, V. and Wriedt, T.: *"Broadband Dual Depth E-Plane Corrugated Square Waveguide Polarizer"*, Electronics Letters, Vol. 20, No. 11, pp. 458-459, May 1984.
- [65] Chu, T.S., Itoh, T. and Shih, Y.: *"Comparative Study of Mode-Matching Formulations for Microstrip Discontinuity Problems"*, IEEE, Vol. MTT-33, No. 10, pp. 1018-1023, October 1985.
- [66] Uhde, K.: *"Discontinuities in Finline on Semiconductor Substrate"*,

- IEEE, Vol. MTT-34, No. 12, pp. 1499-1507, December 1986.
- [67] Helard, M., Citerne, J., Picon, O. and Fouad Hanna, V.: "*Theoretical and Experimental Investigation of Finline Discontinuities*", IEEE, Vol. MTT-33, No. 10, pp. 994-1003, October 1985.
- [68] Carin, L., Webb, K.J. and Weinreb, S.: "*Matched Windows in Circular Waveguide*", IEEE, Vol. MTT-36, No. 9, pp. 1359-1362, September 1988.
- [69] Vahldieck, R. Bornemann, J., Arndt, F. and Graverholz D.: "*W-Band low insertion loss E-Plane filter*", IEEE, Vol. MTT-32, No. 1, pp. 133-135, January 1984.
- [70] Arndt, F., Bornemann, J. and Vahldieck, R.: "*Design of Multisection Impedance Matched Dielectric-Slab Filled Waveguide Phase Shifters*", IEEE, Vol. MTT-32, No. 1, pp. 34-39, January 1984.
- [71] Yun, S.W., Lee, M.J. and Chang S.: "*Analysis of step discontinuities on planar dielectric waveguide containing a gyrotropic layer*", IEEE, Vol. MTT-37, No. 3, pp. 492-496, March 1989.
- [72] Bernues, F. J., Bolle, D.M.: "*The Ferrite-Loaded waveguide Discontinuity Problem*", IEEE, Vol. MTT-22, No. 12, pp. 1187-1193, December 1974
- [73] Enegren, T.A. and Kharadly, M.M.Z.: "*Transverse Discontinuities in Nonreciprocal Waveguides*", IEEE, Vol. MTT-28, No. 6, pp. 609-615, June 1980.
- [74] Zhang, Q. and Itoh, T.: "*Spectral-Domain Analysis of Scattering from E-Plane Circuit Element*", IEEE, Vol. MTT-35, pp. 138-150, February 1987.
- [75] Chu, T.S. and Itoh, T.: "*Generalized Scattering Matrix Method for Analysis of Cascaded and Offset Microstrip Step Discontinuities*", IEEE, Vol. MTT-34, pp. 280-284, February 1986.
- [76] Patzelt, H. and Arndt, F.: "*Double-Plane Steps in Rectangular Waveguides and their Application for Transformers, Irises and Filters*", IEEE, Vol. MTT-30, No. 5, pp. 771-776, May 1982.

C A P I T U L O 2

METODO DE MODOS ACOPLADOS

2.1 INTRODUCCION

Uno de los métodos analíticos más eficiente y general, que permite estudiar cualquier tipo de estructura con anisotropía eléctrica o magnética, sin necesidad de rehacer la formulación cuando la estructura a estudiar cambie es el método de modos acoplados [1-8]. La base teórica del método, formulada originalmente por Schelkunoff [1] consiste en encerrar el dispositivo a caracterizar entre paredes perfectamente conductoras (en el caso en que no lo esté), y desarrollar el campo electromagnético (modos propios) en función de un conjunto completo de funciones ortogonales que verifiquen las condiciones de contorno sobre las paredes conductoras. Normalmente estas funciones son los modos de una estructura análoga a la estudiada pero más sencilla o básica, y se denominan modos básicos. Las funciones base empleadas en el desarrollo suelen ser los modos TE y TM de la guía vacía; los coeficientes de las funciones base empleados en el desarrollo de las componentes transversales y longitudinales son, para que se obtenga solución, necesariamente distintos [9,10].

El proceso matemático conduce a un problema de valores propios. Para el caso de medios isótropos sin pérdidas, la matriz resultante es real y no simétrica, mientras que si el material en el interior de la guía tiene pérdidas o posee características anisótropas, la matriz resultante es compleja. Los valores propios coinciden con las constantes de propagación y los vectores propios son los coeficientes del desarrollo en serie de las componentes transversales.

Los problemas de autovalores ya están ampliamente estudiados y existe una gran cantidad de métodos numéricos para su resolución; debido a su estabilidad se ha elegido el método conocido como QR [11], transformando previamente la matriz en una de tipo Heisemberg. De esta forma, resulta fácil hallar todos los valores propios de la matriz en cuestión, entre ellos los modos complejos, sin que sea preciso realizar un tipo de búsqueda especial en una zona de frecuencias previamente determinada.

Existen varias formulaciones del método de modos acoplados, pero todas ellas se basan en la originalmente propuesta por Schelkunoff [1] y en la posterior modificación debida a Ogusu [2]. La diferencia esencial entre ambas

es que, en la formulación de Schelkunoff los coeficientes de las componentes longitudinales de los campos se hallan mediante un proceso que implica la inversión de matrices, mientras que en la formulación debida a Ogusu no es preciso realizar ninguna inversión de las matrices. Aparentemente la formulación de Ogusu, más directa, debiera proporcionar ventajas numéricas frente a la formulación original de Schelkunoff, de tipo indirecto. Veremos que, no por motivos numéricos, sino por continuidad de determinadas componentes del campo, en la mayor parte de los casos una modificación de la formulación indirecta mejora la convergencia de la solución.

La aplicación de ambas formulaciones al estudio de guías dieléctricas en las que la permitividad es baja muestra diferencias mínimas en los resultados obtenidos. Así, el método se ha aplicado a guías dieléctricas isótropas, caracterizadas por valores bajos de la permitividad con excelentes resultados en precisión y convergencia [12,13]. Incluso cuando los valores de la permitividad eran altos, pero el medio era no magnético los resultados obtenidos eran buenos. Así, se ha conseguido caracterizar discontinuidades entre guías dieléctricas isótropas mediante la aplicación del método de Schelkunoff (en formulación directa) combinado con el de adaptación modal [14,15].

Sin embargo, al aplicar las formulaciones anteriores a estructuras anisótropas sencillas (láminas de ferrita que llenan la altura completa de la guía rectangular) [4,5,16,17], empleando en número muy bajo de funciones base, la concordancia que se obtenía entre los resultados teóricos y las medidas era insuficiente. El aumento del número de modos no suponía, en muchos casos, mejores resultados cuando se trabajaba con ferritas.

La mayoría de los trabajos publicados hasta la fecha emplea el conjunto de modos TE y TM de la guía vacía como funciones base, excepto en un trabajo aparecido recientemente, donde se emplean modos LSE y LSM [18]. El primer modo TE es, entonces, el modo TE_{10} . Esto supone olvidar la solución trivial del conjunto de modos TE_{nm} , es decir, la solución con ambos índices "n" y "m" nulos, lo que tiene como consecuencia no añadir a la componente "z" del campo magnético una cantidad independiente de las coordenadas transversales. La inclusión de la solución trivial no modifica las soluciones obtenidas para

medios no magnéticos, pues en ese caso el valor de esa cantidad es nulo. Sin embargo, en el caso de medios magnéticos isótropos o anisótropos, los valores de las constantes de propagación de algunos de los modos se modifican apreciablemente. Esta modificación afecta tanto a las formulaciones directa como indirecta.

Un problema que suele presentarse en todas las formulaciones del método de modos acoplados, afecta a la continuidad o no de algunas componentes de los campos al atravesar un dioptrio. Supongamos, por ejemplo, el caso de una guía con discontinuidad dieléctrica siguiendo el eje "y". La componente "y" del campo eléctrico no es continua, pero al desarrollarla como suma finita de funciones base continuas resulta ser continua; sin embargo, la componente "y" del vector desplazamiento, que debe ser continua, estará dada como el producto de una función discontinua, la permitividad, por otra función que de hecho resulta ser continua, la componente "y" del campo eléctrico. Parece claro que este tipo de problema dará lugar a una convergencia de la solución muy pobre. Sin embargo, invirtiendo la formulación, y expresando $E_y = D_y / \epsilon$ el problema quedaría resuelto.

En un caso general, lo expuesto en el párrafo anterior no es posible conseguirlo para todas las componentes del campo electromagnético. Sin embargo, cuando la lámina de ferrita o de dieléctrico llena totalmente la altura de la guía y se estudian modos sin variación con la coordenada "y" sí es posible aplicarlo con un aumento importante de la velocidad de convergencia. Incluso en el caso general, la aplicación de cambios de este tipo en la formulación conduce a soluciones numéricamente mucho más estables.

2.2 POTENCIALES ESCALARES

En guías rectangulares vacías o llenas de forma homogénea con medios dieléctricos, las componentes transversales de los campos eléctrico y magnético pueden expresarse mediante la introducción de un potencial escalar T según las siguientes expresiones

$$\begin{cases} \vec{e}_{(1)}(x,y) = \vec{\nabla}_t T_{(1)}(x,y) \\ \vec{h}_{(1)}(x,y) = \vec{a}_z \times \vec{\nabla}_t T_{(1)}(x,y) \end{cases} \quad \text{(modos TM)} \quad (2.1a)$$

$$\begin{cases} \vec{e}_{[j]}(x,y) = -\vec{a}_z \times \vec{\nabla}_t T_{[j]}(x,y) \\ \vec{h}_{[j]}(x,y) = \vec{\nabla}_t T_{[j]}(x,y) \end{cases} \quad \text{(modos TE)} \quad (2.1b)$$

donde \vec{a}_z es el vector unitario en la dirección "z".

De ahora en adelante, emplearemos los subíndices entre paréntesis cuando nos refiramos a modos TM y subíndices entre corchetes cuando nos refiramos a modos TE.

Siguiendo el proceso descrito en [12-13], los potenciales escalares $T_{(1)}$ y $T_{[j]}$, que son soluciones de la ecuación de Helmholtz, se pueden expresar como (expresados con dobles subíndices)

$$T_{[n,m]} = \frac{\eta_{[n,m]}}{K_{c[n,m]} (a b)^{1/2}} \cos\left(\frac{n \pi}{a} x\right) \cos\left(\frac{m \pi}{b} y\right) \quad (2.2a)$$

$$T_{(n,m)} = \frac{\eta_{(n,m)}}{K_{c(n,m)} (a b)^{1/2}} \operatorname{sen}\left(\frac{n \pi}{a} x\right) \operatorname{sen}\left(\frac{m \pi}{b} y\right) \quad (2.2b)$$

donde

$$\eta_{\{n,m\}} = \begin{cases} 2 & \text{si } n \neq 0 \text{ y } m \neq 0 \\ \sqrt{2} & \text{si } n = 0 \text{ ó } m = 0 \end{cases} \quad (2.3a)$$

$$K_c^2 = \left(\frac{n \pi}{a} \right)^2 + \left(\frac{m \pi}{b} \right)^2 \quad (2.3b)$$

siendo "a" la anchura y "b" la altura de la guía de onda.

Estas funciones satisfacen las siguientes relaciones de ortogonalidad

$$\iint_S T_{(i)} \cdot T_{(j)} ds = \iint_S T_{[i]} \cdot T_{[j]} ds = 0 \quad \text{si } i \neq j \quad (2.4)$$

$$\iint_S \left(\frac{\partial T_{(i)}}{\partial x} \cdot \frac{\partial T_{(j)}}{\partial x} + \frac{\partial T_{(i)}}{\partial y} \cdot \frac{\partial T_{(j)}}{\partial y} \right) ds =$$

$$\iint_S \left(\frac{\partial T_{[i]}}{\partial x} \cdot \frac{\partial T_{[j]}}{\partial x} + \frac{\partial T_{[i]}}{\partial y} \cdot \frac{\partial T_{[j]}}{\partial y} \right) ds = 0 \quad \text{si } i \neq j \quad (2.5)$$

$$\iint_S \left(\frac{\partial T_{(i)}}{\partial x} \cdot \frac{\partial T_{(j)}}{\partial y} - \frac{\partial T_{(i)}}{\partial y} \cdot \frac{\partial T_{(j)}}{\partial x} \right) ds =$$

$$\iint_S \left(\frac{\partial T_{[i]}}{\partial x} \cdot \frac{\partial T_{[j]}}{\partial y} - \frac{\partial T_{[i]}}{\partial y} \cdot \frac{\partial T_{[j]}}{\partial x} \right) ds = 0 \quad \forall i, j \quad (2.6)$$

En general

$$\iint_S \left(\frac{\partial T_{[i]}}{\partial x} \cdot \frac{\partial T_{[j]}}{\partial y} - \frac{\partial T_{[i]}}{\partial y} \cdot \frac{\partial T_{[j]}}{\partial x} \right) ds \neq 0 \quad (2.7)$$

2.3 DESARROLLO DE LAS COMPONENTES TRANSVERSALES

Desarrollando las componentes transversales del campo electromagnético para una guía rectangular cerrada, en cuyo interior existen medios no homogéneos, mediante las soluciones de las componentes transversales de los campos correspondientes a la guía vacía $\vec{e}(x,y)$, $\vec{h}(x,y)$ se obtiene

$$\vec{E}_t = \sum_1^{\infty} V_{(i)}(z) \vec{e}_{(i)}(x,y) + \sum_J^{\infty} V_{[j]}(z) \vec{e}_{[j]}(x,y) \quad (2.8)$$

$$\vec{H}_t = \sum_1^{\infty} I_{(i)}(z) \vec{h}_{(i)}(x,y) + \sum_J^{\infty} I_{[j]}(z) \vec{h}_{[j]}(x,y) \quad (2.9)$$

donde $V(z)$ e $I(z)$ son los coeficientes del desarrollo, denominados tensiones y corrientes de cada modo. Los subíndices, como ya se indicó, son dobles subíndices.

Sustituyendo las expresiones (2.1) en (2.8) y (2.9) y desdoblado en componentes queda

$$E_x = \sum_1^{\infty} V_{(i)}(z) \frac{\partial T_{(i)}}{\partial x} + \sum_J^{\infty} V_{[j]}(z) \frac{\partial T_{[j]}}{\partial y} \quad (2.10)$$

$$E_y = \sum_1^{\infty} V_{(i)}(z) \frac{\partial T_{(i)}}{\partial y} - \sum_J^{\infty} V_{[j]}(z) \frac{\partial T_{[j]}}{\partial x} \quad (2.11)$$

$$H_x = - \sum_1^{\infty} I_{(i)}(z) \frac{\partial T_{(i)}}{\partial y} + \sum_J^{\infty} I_{[j]}(z) \frac{\partial T_{[j]}}{\partial x} \quad (2.12)$$

$$H_y = + \sum_1^{\infty} V_{(i)}(z) \frac{\partial T_{(i)}}{\partial x} + \sum_J^{\infty} V_{[j]}(z) \frac{\partial T_{[j]}}{\partial y} \quad (2.13)$$

2.4 DESARROLLO DE LAS COMPONENTES AXIALES

Las componentes longitudinales las desarrollamos como

$$E_z = \sum_1^{\infty} K_{c(i)} V_{(i)}^z(z) T_{(i)} \quad (2.14)$$

$$H_z = \sum_j^{\infty} K_{c(j)} I_{(j)}^z(z) T_{(j)} + H_0(z) \quad (2.15)$$

Así estas ecuaciones permiten que E_z y H_z satisfagan las condiciones de contorno en la guía conductora rectangular. La introducción de los parámetros K_c tiene por objeto que las ecuaciones sean dimensionalmente consistentes. La diferencia con el desarrollo clásico es la introducción del factor $H_0(z)$ que depende de la coordenada longitudinal. Este factor se corresponde con la solución trivial ($n=m=0$) para los modos TE.

La validez de las expresiones (2.8,2.9) es consecuencia de la propiedad fundamental de completitud que posee el conjunto de las funciones transversales de los modos de la guía vacía. No ocurre lo mismo cuando lo que se pretende es desarrollar las componentes axiales empleando las componentes longitudinales de los modos de la guía vacía [20,21]. En ese caso la formulación puede ser inexacta. Este hecho proviene de poder expresar las componentes longitudinales del campo en función de las transversales (o viceversa). Cuando se sustituyen los desarrollos para los campos transversales en función de los modos de la guía vacía (o sin perturbar) y se pretende reproducir una de las componentes longitudinales, que a su vez se ha expresado como desarrollo en serie de funciones de la guía sin perturbar, es necesario intercambiar la diferenciación con el sumatorio de cada función, lo cual no está ni mucho menos justificado y, lógicamente, puede no ser siempre válido. Un ejemplo de ello se puede ver en [21].

2.5 ECUACIONES DEL TELEGRAFISTA GENERALIZADAS

Las ecuaciones de Maxwell para el caso en que no existan fuentes son (separadas en componentes)

$$\frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} = -j\omega B_x \quad \frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z} = j\omega D_x \quad (2.16a)$$

$$\frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} = -j\omega B_y \quad \frac{\partial H_x}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial x} = j\omega D_y \quad (2.16b)$$

$$\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} = -j\omega B_z \quad \frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} = j\omega D_z \quad (2.16c)$$

Sustituyendo los valores de las componentes del campo eléctrico y magnético en las ecuaciones (2.16) y después de un laborioso proceso matemático en el que se utilizan el método de Galerkin y las relaciones de ortogonalidad de las funciones "T" se obtiene el siguiente sistema de ecuaciones [12,13]

$$\frac{d V_{(n)}}{d z} = +j\omega \iint_S \left[B_x \frac{\partial T_{(n)}}{\partial y} - B_y \frac{\partial T_{(n)}}{\partial x} \right] ds + K_{c(n)} V_{(n)}^z \quad (2.17)$$

$$\frac{d V_{[m]}}{d z} = -j\omega \iint_S \left[B_x \frac{\partial T_{[m]}}{\partial x} + B_y \frac{\partial T_{[m]}}{\partial y} \right] ds \quad (2.18)$$

$$\frac{d I_{[n]}}{d z} = -j\omega \iint_S \left[D_x \frac{\partial T_{(n)}}{\partial x} + D_y \frac{\partial T_{(n)}}{\partial y} \right] ds \quad (2.19)$$

$$\frac{d I_{[m]}}{d z} = -j\omega \iint_S \left[D_x \frac{\partial T_{[m]}}{\partial y} - D_y \frac{\partial T_{[m]}}{\partial x} \right] ds + K_{c[m]} I_{[m]}^z \quad (2.20)$$

Si las componentes de \vec{B} y \vec{D} son funciones lineales de las componentes de \vec{H} y \vec{E} , respectivamente, las expresiones (2.17-2.20) se pueden poner de forma genérica como

$$\frac{d V_{(n)}}{d z} = T_{(n)(l)}^v V_{(n)} + T_{(n)(j)}^v V_{[m]} + Z_{(n)(l)}^T I_{(n)} + Z_{(n)(j)}^T I_{[m]} \quad (2.21)$$

$$\frac{d V_{[m]}}{d z} = T_{[m](l)}^V V_{(n)} + T_{[m](j)}^V V_{[m]} + Z_{[m](l)}^T I_{(n)} + Z_{[m](j)}^T I_{[m]} \quad (2.22)$$

$$\frac{d I_{(n)}}{d z} = Y_{(n)(l)}^T V_{(n)} + Y_{(n)(j)}^T V_{[m]} + T_{(n)(l)}^I I_{(n)} + T_{(n)(j)}^I I_{[m]} \quad (2.23)$$

$$\frac{d I_{[m]}}{d z} = Y_{[m](l)}^T V_{(n)} + Y_{[m](j)}^T V_{[m]} + T_{[m](l)}^I I_{(n)} + T_{[m](j)}^I I_{[m]} \quad (2.24)$$

donde los subíndices, que son en realidad dobles, se refieren a los modos TM (paréntesis) y TE (corchetes). Las ecuaciones (2.21-2.24) son las ecuaciones del Telegrafista Generalizadas. Los acoplos entre los distintos modos vienen dados por las impedancias de transferencia Z , las admitancias de transferencia Y , los coeficientes de transferencia en tensión T^V y los coeficientes de transferencia en intensidad T^I . Todos ellos son, en general, función de la coordenada "z", que es la dirección de propagación y son constantes si las propiedades de la guía de onda no varían a lo largo de ella; en ese caso, el problema de resolver las ecuaciones del Telegrafista Generalizadas se reduce a resolver un sistema infinito de ecuaciones algebraicas lineales y su correspondiente ecuación característica.

El objetivo es calcular todos estos coeficientes de acoplo entre modos para un caso general en el que, en el interior de una guía de onda, exista un medio caracterizado por su tensor permeabilidad " μ " y su tensor permitividad " ϵ ".

2.6 APLICACION A MEDIOS ANISOTROPOS

Las relaciones entre \vec{B} y \vec{H} , \vec{D} y \vec{E} son

$$\vec{B} = \begin{bmatrix} \mu_{11} & \mu_{12} & \mu_{13} \\ \mu_{21} & \mu_{22} & \mu_{23} \\ \mu_{31} & \mu_{32} & \mu_{33} \end{bmatrix} \vec{H} \quad ; \quad \vec{D} = \begin{bmatrix} \epsilon_{11} & \epsilon_{12} & \epsilon_{13} \\ \epsilon_{21} & \epsilon_{22} & \epsilon_{23} \\ \epsilon_{31} & \epsilon_{32} & \epsilon_{33} \end{bmatrix} \vec{E} \quad (2.25)$$

En coordenadas rectangulares el sistema matricial anterior se puede

poner como

$$\begin{aligned}
 B_x &= \mu_{11} H_x + \mu_{12} H_y + \mu_{13} H_z \\
 B_y &= \mu_{21} H_x + \mu_{22} H_y + \mu_{23} H_z \\
 B_z &= \mu_{31} H_x + \mu_{32} H_y + \mu_{33} H_z
 \end{aligned} \tag{2.26}$$

$$\begin{aligned}
 D_x &= \epsilon_{11} E_x + \epsilon_{12} E_y + \epsilon_{13} E_z \\
 D_y &= \epsilon_{21} E_x + \epsilon_{22} E_y + \epsilon_{23} E_z \\
 D_z &= \epsilon_{31} E_x + \epsilon_{32} E_y + \epsilon_{33} E_z
 \end{aligned} \tag{2.27}$$

Sustituyendo cada componente de \vec{B} (ecuaciones 2.26) y cada componente de \vec{D} (ecuaciones 2.27) en el sistema formado por (2.17-2.20) y utilizando además las ecuaciones (2.10-2.15) se obtiene

$$\begin{aligned}
 \frac{d V_{(n)}}{d z} &= -j\omega \sum_1^{\infty} I_{(1)} \iint_S \left[\mu_{11} \frac{\partial T_{(1)}}{\partial y} \frac{\partial T_{(n)}}{\partial y} - \mu_{12} \frac{\partial T_{(1)}}{\partial x} \frac{\partial T_{(n)}}{\partial y} - \right. \\
 &\quad \left. - \mu_{21} \frac{\partial T_{(1)}}{\partial y} \frac{\partial T_{(n)}}{\partial x} + \mu_{22} \frac{\partial T_{(1)}}{\partial x} \frac{\partial T_{(n)}}{\partial x} \right] ds + \\
 &+ j\omega \sum_J^{\infty} I_{(J)} \iint_S \left[\mu_{11} \frac{\partial T_{(J)}}{\partial x} \frac{\partial T_{(n)}}{\partial y} + \mu_{12} \frac{\partial T_{(J)}}{\partial y} \frac{\partial T_{(n)}}{\partial y} - \right. \\
 &\quad \left. - \mu_{21} \frac{\partial T_{(J)}}{\partial x} \frac{\partial T_{(n)}}{\partial x} - \mu_{22} \frac{\partial T_{(J)}}{\partial y} \frac{\partial T_{(n)}}{\partial x} \right] ds +
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + j\omega \sum_J K_{c[J]} I_{[J]}^z \iint_S \left[\mu_{13} T_{[J]} \frac{\partial T_{(n)}}{\partial y} - \mu_{23} T_{[J]} \frac{\partial T_{(n)}}{\partial x} \right] ds + \\
& + j\omega H_0(z) \iint_S \left[\mu_{13} \frac{\partial T_{(n)}}{\partial y} - \mu_{23} \frac{\partial T_{(n)}}{\partial x} \right] ds + K_{c(n)} V_{(n)}^z \quad (2.28)
\end{aligned}$$

desde $n = 1$ hasta $n = \text{NTM}(\infty)$.

donde "NTM" es el número de modos TM empleados (en principio infinito).

$$\begin{aligned}
\frac{d V_{[m]}}{d z} = & j\omega \sum_I I_{(I)} \iint_S \left[\mu_{11} \frac{\partial T_{(I)}}{\partial y} \frac{\partial T_{[m]}}{\partial x} - \mu_{12} \frac{\partial T_{(I)}}{\partial x} \frac{\partial T_{[m]}}{\partial x} + \right. \\
& \left. + \mu_{21} \frac{\partial T_{(I)}}{\partial y} \frac{\partial T_{[m]}}{\partial y} - \mu_{22} \frac{\partial T_{(I)}}{\partial x} \frac{\partial T_{[m]}}{\partial y} \right] ds - \\
& - j\omega \sum_J I_{[J]} \iint_S \left[\mu_{11} \frac{\partial T_{[J]}}{\partial x} \frac{\partial T_{[m]}}{\partial x} + \mu_{12} \frac{\partial T_{[J]}}{\partial y} \frac{\partial T_{[m]}}{\partial x} + \right. \\
& \left. + \mu_{21} \frac{\partial T_{[J]}}{\partial x} \frac{\partial T_{[m]}}{\partial y} + \mu_{22} \frac{\partial T_{[J]}}{\partial y} \frac{\partial T_{[m]}}{\partial y} \right] ds - \\
& - j\omega \sum_J K_{c[J]} I_{[J]}^z \iint_S \left[\mu_{13} T_{[J]} \frac{\partial T_{[m]}}{\partial x} + \mu_{23} T_{[J]} \frac{\partial T_{[m]}}{\partial y} \right] ds -
\end{aligned}$$

$$-j\omega H_0(z) \iint_S \left[\mu_{13} \frac{\partial T_{[m]}}{\partial x} + \mu_{23} \frac{\partial T_{[m]}}{\partial y} \right] ds \quad (2.29)$$

desde $m = 1$ hasta $m = NTE(\infty)$.

donde "NTE" es el número de modos TE empleados (en principio infinito).

$$\begin{aligned} \frac{d I_{(n)}}{d z} = & -j\omega \sum_1^{\infty} V_{(1)} \iint_S \left[\epsilon_{11} \frac{\partial T_{(1)}}{\partial x} \frac{\partial T_{(n)}}{\partial x} + \epsilon_{12} \frac{\partial T_{(1)}}{\partial y} \frac{\partial T_{(n)}}{\partial x} + \right. \\ & \left. + \epsilon_{21} \frac{\partial T_{(1)}}{\partial x} \frac{\partial T_{(n)}}{\partial y} + \epsilon_{22} \frac{\partial T_{(1)}}{\partial y} \frac{\partial T_{(n)}}{\partial y} \right] ds + \\ & + j\omega \sum_J^{\infty} V_{[J]} \iint_S \left[-\epsilon_{11} \frac{\partial T_{[J]}}{\partial y} \frac{\partial T_{(n)}}{\partial x} + \epsilon_{12} \frac{\partial T_{[J]}}{\partial x} \frac{\partial T_{(n)}}{\partial x} - \right. \\ & \left. - \epsilon_{21} \frac{\partial T_{[J]}}{\partial y} \frac{\partial T_{(n)}}{\partial y} + \epsilon_{22} \frac{\partial T_{[J]}}{\partial x} \frac{\partial T_{(n)}}{\partial y} \right] ds - \\ & - j\omega \sum_1^{\infty} K_{c(1)} V_{(1)}^z \iint_S \left[\epsilon_{13} T_{(1)} \frac{\partial T_{(n)}}{\partial x} + \epsilon_{23} T_{(1)} \frac{\partial T_{(n)}}{\partial y} \right] ds \quad (2.30) \end{aligned}$$

desde $n = 1$ hasta $n = NTM(\infty)$.

$$\frac{d I_{[m]}}{d z} = j\omega \sum_1^{\infty} V_{(1)} \iint_S \left[-\epsilon_{11} \frac{\partial T_{(1)}}{\partial x} \frac{\partial T_{[m]}}{\partial y} - \epsilon_{12} \frac{\partial T_{(1)}}{\partial y} \frac{\partial T_{[m]}}{\partial y} + \right.$$

$$\begin{aligned}
& + \epsilon_{21} \frac{\partial T_{(1)}}{\partial x} \frac{\partial T_{[m]}}{\partial x} + \epsilon_{22} \frac{\partial T_{(1)}}{\partial y} \frac{\partial T_{[m]}}{\partial x} \Big] ds - \\
& - j\omega \sum_j^{\infty} V_{[j]} \iint_S \left[\epsilon_{11} \frac{\partial T_{[j]}}{\partial y} \frac{\partial T_{[m]}}{\partial y} - \epsilon_{12} \frac{\partial T_{[j]}}{\partial x} \frac{\partial T_{[m]}}{\partial y} - \right. \\
& \left. - \epsilon_{21} \frac{\partial T_{[j]}}{\partial y} \frac{\partial T_{[m]}}{\partial x} + \epsilon_{22} \frac{\partial T_{[j]}}{\partial x} \frac{\partial T_{[m]}}{\partial x} \right] ds + \\
& + j\omega \sum_1^{\infty} K_{c(1)} V_{(1)}^z \iint_S \left[- \epsilon_{13} T_{(1)} \frac{\partial T_{[m]}}{\partial y} + \epsilon_{23} T_{(1)} \frac{\partial T_{[m]}}{\partial x} \right] ds + \\
& + K_{c[m]} I_{[m]}^z, \quad \text{desde } m = 1 \text{ hasta } m = \text{NTE}(\omega). \quad (2.31)
\end{aligned}$$

Para obtener las ecuaciones del Telegrafista Generalizadas es necesario expresar $K_{c[j]} I_{[j]}^z$, $K_{c(1)} V_{(1)}^z$ y H_0 en función de las tensiones V y de las intensidades I . Cada proceso se puede hacer por dos caminos diferentes:

- Siguiendo un camino parecido al marcado en la formulación original de Schelkunoff [1], y que llamaremos formulación indirecta, de manera que el cálculo de las amplitudes de las componentes del campo longitudinal se hace resolviendo dos sistemas de ecuaciones infinitos (uno para las tensiones y otro para las intensidades), que es preciso truncar.
- Siguiendo el proceso propuesto por Ogusu [2], que denominaremos formulación directa, en un trabajo en el que analizaba las características de dispersión de guías dieléctricas isotrópicas. En este caso, los valores de $K_{c[j]} I_{[j]}^z$ y $K_{c(1)} V_{(1)}^z$ se obtienen directamente, no siendo necesario resolver ningún sistema de ecuaciones.

Seguidamente vamos a desarrollar cada formulación por separado y así obtendremos los términos de las ecuaciones del telegrafista generalizadas, en cada caso.

2.7 FORMULACION INDIRECTA

Este método de calcular los coeficientes $K_{c[j]I[j]}^z$ y $K_{c(l)V(l)}^z$, da lugar a dos sistemas de ecuaciones, de manera que su resolución obliga a realizar inversiones de matrices.

2.7.1 Cálculo de $K_{c(n)V(n)}^z$

Multiplicando (2.14) por ϵ_{33} tenemos

$$\epsilon_{33} E_z = \sum_1^{\infty} K_{c(l)} \epsilon_{33} V_{(l)}^z T_{(l)}$$

Multiplicando por $T_{(n)}$ e integrando (método de Galerkin)

$$\iint_S \sum_1^{\infty} K_{c(l)} \epsilon_{33} V_{(l)}^z T_{(l)} T_{(n)} = \iint_S \epsilon_{33} E_z T_{(n)} ds \quad (2.32)$$

desde $n=1$ hasta NTM

Si observamos esta expresión, vemos que debemos desarrollar en funciones ortogonales el producto $(\epsilon_{33} E_z)$, que a partir de las relaciones de constitución se puede poner como

$$\epsilon_{33} E_z = D_z - \epsilon_{31} E_x - \epsilon_{32} E_y \quad (2.33)$$

De las ecuaciones de Maxwell dadas en (2.16)

$$\frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} = j\omega D_z \Rightarrow D_z = \frac{1}{j\omega} \left[\frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} \right]$$

obtenemos

$$\epsilon_{33} E_z = \frac{1}{j\omega} \left[\frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} \right] - \epsilon_{31} E_x - \epsilon_{32} E_y \quad (2.34)$$

Veamos el significado de estas últimas expresiones. Supongamos que tenemos una estructura isótropa, es decir $\epsilon_{33} E_z = D_z$, como por ejemplo una guía imagen habitual. Por la ecuación (2.34), D_z se puede expresar como un desarrollo en serie de funciones sinusoidales; lo mismo ocurre con E_z en virtud de la ecuación (2.14). La componente E_z es una función continua y D_z es una función discontinua. Como estamos desarrollando el producto $\epsilon_{33} E_z$ que en total es una función discontinua (pues lo es ϵ_{33}), parece lógico pensar que estamos "colocando" esta ecuación de partida en la posición adecuada para obtener una buena convergencia en el cálculo de la componente E_z .

Sustituyendo en (2.32) los valores de las componentes de los campos \vec{D} y \vec{E} se obtiene

$$\begin{aligned} \left[K_{c(l)} V_{(l)}^z \right] &= - \left[R_{(n)(l)}^C \right]^{-1} \left[I_{(n)} \right] - \left[R_{(n)(l)}^C \right]^{-1} \left[R_{(n)(l)}^A \right] \left[V_{(l)} \right] + \\ &\left[R_{(n)(l)}^C \right]^{-1} \left[R_{(n)(l)}^B \right] \left[V_{(l)} \right] \end{aligned} \quad (2.35)$$

donde las expresiones de las matrices se pueden ver en el apéndice A (ecuaciones A3-A5).

2.7.2 Cálculo de $K_{c(m)} I_{(m)}^z$

Multiplicando (2.15) por $(\mu_{33} T_{(m)})$ e integrando

$$\iint_S \mu_{33} H_z T_{[m]} ds = \sum_j^{\infty} K_{c[j]} \iint_S \mu_{33} I_{[j]}^z T_{[j]} T_{[m]} ds \quad (2.36)$$

Mediante las ecuaciones de Maxwell y las relaciones de constitución se obtiene $\mu_{33} H_z$ como

$$\mu_{33} H_z = -\frac{1}{j\omega} \left[\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} \right] - \mu_{31} H_x - \mu_{32} H_y \quad (2.37)$$

Aquí se puede hacer el mismo comentario que en el apartado anterior, pero respecto a la continuidad de las componentes H_z , B_z y del parámetro μ_{33} .

Sustituyendo en (2.36) se obtiene

$$\begin{aligned} & \left[S_{[m][j]}^B \right] \left[K_{c[j]} I_{[j]}^z \right] + H_0(z) \left[S_{[m]}^A \right] = \left[V_{[m]} \right] + \\ & + \left[S_{[m](1)}^C \right] \left[I_{(1)} \right] - \left[S_{[m][j]}^D \right] \left[I_{[j]} \right] \end{aligned} \quad (2.38)$$

Para obtener $K_{c[j]} I_{[j]}^z$ en función de las tensiones V e intensidades I falta por obtener el producto $H_0(z) \left[S_{[m]}^A \right]$.

De la ecuación de Maxwell (2.16c) tenemos

$$\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} = -j\omega B_z \quad (2.39)$$

Sustituyendo las expresiones de los campos obtenemos

$$\sum_J^{\infty} V_{[J]} K_{c[J]}^2 T_{[J]}(x,y) = -j \omega B_z \quad (2.40)$$

Integrando la ecuación anterior a la sección recta de la guía

$$\sum_J^{\infty} V_{[J]} K_{c[J]}^2 \iint_S T_{[J]} ds = -j \omega \iint_S B_z ds$$

y como

$$\iint_S T_{[J]} ds = 0$$

podemos poner

$$-j \omega \iint_S B_z ds = 0 \quad (2.41)$$

Sustituyendo el valor de B_z dado por las relaciones de constitución (2.26)

$$-j \omega \iint_S B_z ds = -j \omega \left\{ \iint_S \mu_{31} H_x ds + \iint_S \mu_{32} H_y ds + \iint_S \mu_{33} H_z ds \right\}$$

y reemplazando cada componente de \vec{H} por su desarrollo en serie de funciones T tenemos

$$H_0(z) = \frac{1}{\xi} \left\{ -[SS_{[1]}^C]^t [I_{(1)}] - [SS_{[J]}^D]^t [I_{[J]}] + [S_{[J]}^A]^t [K_{c[J]} I_{[J]}^z] \right\} \quad (2.42)$$

donde

$$\xi = -j \omega \iint_S \mu_{33} ds \quad (2.43)$$

Sustituyendo el valor encontrado para $H_0(z)$ en la ecuación (2.38) obtenemos la ecuación deseada

$$\begin{aligned} \left[K_{c[m]} I_{[m]}^z \right] = & - \left[S_{[m][j]}^{Btotal} \right]^{-1} \left[V_{[j]} \right] + \left[S_{[m][s]}^{Btotal} \right]^{-1} \left[S_{[s](1)}^{Ctotal} \right] \left[I_{(1)} \right] - \\ & - \left[S_{[m][s]}^{Btotal} \right]^{-1} \left[S_{[s][j]}^{Dtotal} \right] \left[I_{[j]} \right] \end{aligned} \quad (2.44)$$

Las expresiones para las matrices de este apartado se pueden ver en el apéndice A ecuaciones (A6-A14).

2.7.3 Formulación matricial

Hasta ahora hemos visto cómo se calculan los coeficientes de acoplo entre los modos que intervienen en las ecuaciones del Telegrafista Generalizadas. Para obtener un desarrollo más compacto, en este apartado vamos a reescribir toda la formulación anterior utilizando notación matricial, ya en parte iniciada en el cálculo de las amplitudes de las componentes longitudinales del campo.

Utilizando las matrices definidas en el apéndice A, las ecuaciones (2.28-2.30) se pueden poner en forma matricial, obteniéndose el siguiente sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} \frac{d}{dz} \left[V_{(n)} \right] = & \left[Z_{(n)(1)} \right] \left[I_{(1)} \right] + \left[Z_{(n)[j]} \right] \left[I_{[j]} \right] + \\ & + \left[Z_{(n)[j]}^z \right] \left[K_{c[j]} I_{[j]}^z \right] + \left[K_{c(n)} V_{(n)}^z \right] + \left[Z Z_{(n)}^z \right] H_0(z) \end{aligned} \quad (2.45)$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dz} \begin{bmatrix} V_{[m]} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} Z_{[m](i)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_{(i)} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} Z_{[m](j)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_{(j)} \end{bmatrix} + \\ &+ \begin{bmatrix} Z_{[m](j)}^z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} K_{c(j)} I_{(j)}^z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} ZZ_{[m]}^z \end{bmatrix} H_0(z) \end{aligned} \quad (2.46)$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dz} \begin{bmatrix} I_{(n)} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} Y_{(n)(i)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_{(i)} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} Y_{(n)(j)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_{(j)} \end{bmatrix} + \\ &+ \begin{bmatrix} Y_{(n)(i)}^z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} K_{c(i)} V_{(i)}^z \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (2.47)$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dz} \begin{bmatrix} I_{[m]} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} Y_{[m](i)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_{(i)} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} Y_{[m](j)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_{(j)} \end{bmatrix} + \\ &+ \begin{bmatrix} Y_{[m](i)}^z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} K_{c(i)} V_{(i)}^z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} K_{c(m)} I_{[m]}^z \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (2.48)$$

Para obtener las ecuaciones finales del Telegrafista Generalizadas ya sólo queda sustituir las expresiones de H_0 , $K_{c(i)} V_{(i)}^z$ y $K_{c(m)} I_{[m]}^z$ calculadas anteriormente y tener en cuenta que la variación con "z" de los coeficientes en tensión V e intensidad I es de la forma $e^{-\Gamma z}$.

- De la ecuación (2.45)

$$\begin{aligned} -\Gamma \begin{bmatrix} V_{(n)} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} Z_{(n)(i)}^{\text{total}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_{(i)} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} Z_{(n)(j)}^{\text{total}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_{(j)} \end{bmatrix} - \\ &- \begin{bmatrix} Z_{(n)[s]}^{\text{total}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} S_{[s](j)}^{\text{Btotal}} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} V_{(j)} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} Z_{(n)[s]}^{\text{total}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} S_{[s](m)}^{\text{Btotal}} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} S_{[m](i)}^{\text{Ctotal}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_{(i)} \end{bmatrix} - \\ &- \begin{bmatrix} Z_{(n)[s]}^{\text{total}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} S_{[s](m)}^{\text{Btotal}} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} S_{[m](j)}^{\text{Dtotal}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_{(j)} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} R_{(n)(i)}^{\text{C}} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} I_{(i)} \end{bmatrix} - \end{aligned}$$

$$- \left[R_{(n)(r)}^C \right]^{-1} \left[R_{(r)(l)}^A \right] \left[V_{(l)} \right] + \left[R_{(n)(r)}^C \right]^{-1} \left[R_{(r)(j)}^B \right] \left[V_{(j)} \right] \quad (2.49)$$

comparando con (2.21) se tiene

$$\left[T_{(n)(l)}^V \right] = - \left[R_{(n)(t)}^C \right]^{-1} \left[R_{(t)(l)}^A \right] \quad (2.50a)$$

$$\left[T_{(n)(j)}^V \right] = - \left[Z_{(n)(s)}^{ztotal} \right] \left[S_{(s)(j)}^{Btotal} \right]^{-1} + \left[R_{(n)(r)}^C \right]^{-1} \left[R_{(r)(j)}^B \right] \quad (2.50b)$$

$$\left[Z_{(n)(l)}^T \right] = \left[Z_{(n)(l)}^{total} \right] + \left[Z_{(n)(s)}^{ztotal} \right] \left[S_{(s)(m)}^{Btotal} \right]^{-1} \left[S_{(m)(l)}^{Ctotal} \right] - \left[R_{(n)(l)}^C \right]^{-1} \quad (2.50c)$$

$$\left[Z_{(n)(j)}^T \right] = \left[Z_{(n)(j)}^{total} \right] - \left[Z_{(n)(s)}^{ztotal} \right] \left[S_{(s)(m)}^{Btotal} \right]^{-1} \left[S_{(m)(j)}^{Dtotal} \right] \quad (2.50d)$$

De la ecuación (2.46)

$$-\Gamma \left[V_{(m)} \right] = \left[Z_{(m)(l)}^{total} \right] \left[I_{(l)} \right] + \left[Z_{(m)(j)}^{total} \right] \left[I_{(j)} \right] - \left[Z_{(m)(s)}^{ztotal} \right] \left[S_{(s)(j)}^{Btotal} \right]^{-1} \left[V_{(j)} \right] + \quad (2.51)$$

$$+ \left[Z_{(m)(r)}^{ztotal} \right] \left[S_{(r)(s)}^{Btotal} \right]^{-1} \left[S_{(s)(l)}^{Ctotal} \right] \left[I_{(l)} \right] - \left[Z_{(m)(r)}^{ztotal} \right] \left[S_{(r)(s)}^{Btotal} \right]^{-1} \left[S_{(s)(j)}^{Dtotal} \right] \left[I_{(j)} \right]$$

comparando con (2.22) se tiene

$$\left[T_{(m)(l)}^V \right] = 0 \quad (2.52a)$$

$$\left[T_{(m)(j)}^V \right] = - \left[Z_{(m)(s)}^{ztotal} \right] \left[S_{(s)(j)}^{Btotal} \right]^{-1} \quad (2.52b)$$

$$\left[Z_{\{m\}(i)}^T \right] = \left[Z_{\{m\}(i)}^{\text{total}} \right] + \left[Z_{\{m\}(r)}^{\text{ztotal}} \right] \left[S_{\{r\}(s)}^{\text{Btotal}} \right]^{-1} \left[S_{\{s\}(i)}^{\text{Ctotal}} \right] \quad (2.52c)$$

$$\left[Z_{\{m\}(j)}^T \right] = \left[Z_{\{m\}(j)}^{\text{total}} \right] - \left[Z_{\{m\}(r)}^{\text{ztotal}} \right] \left[S_{\{r\}(s)}^{\text{Btotal}} \right]^{-1} \left[S_{\{s\}(j)}^{\text{Dtotal}} \right] \quad (2.52d)$$

De la ecuación (2.47)

$$\begin{aligned} -\Gamma \left[I_{(n)} \right] &= \left[Y_{(n)(i)} \right] \left[V_{(i)} \right] + \left[Y_{(n)(j)} \right] \left[V_{(j)} \right] - \left[Y_{(n)(r)}^z \right] \left[R_{(r)(i)}^C \right]^{-1} \left[I_{(i)} \right] - \\ &- \left[Y_{(n)(r)}^z \right] \left[R_{(r)(s)}^C \right]^{-1} \left[R_{(s)(i)}^A \right] \left[V_{(i)} \right] + \left[Y_{(n)(r)}^z \right] \left[R_{(r)(s)}^C \right]^{-1} \left[R_{(s)(j)}^B \right] \left[V_{(j)} \right] \end{aligned} \quad (2.53)$$

comparando con (2.23) se tiene

$$\left[Y_{(n)(i)}^T \right] = \left[Y_{(n)(i)} \right] - \left[Y_{(n)(r)}^z \right] \left[R_{(r)(s)}^C \right]^{-1} \left[R_{(s)(i)}^A \right] \quad (2.54a)$$

$$\left[Y_{(n)(j)}^T \right] = \left[Y_{(n)(j)} \right] + \left[Y_{(n)(r)}^z \right] \left[R_{(r)(s)}^C \right]^{-1} \left[R_{(s)(j)}^B \right] \quad (2.54b)$$

$$\left[T_{(n)(i)}^I \right] = - \left[Y_{(n)(r)}^z \right] \left[R_{(r)(i)}^C \right]^{-1} \quad (2.54c)$$

$$\left[T_{(n)(j)}^I \right] = [0] \quad (2.54d)$$

De la ecuación (2.48)

$$\begin{aligned}
-\Gamma \begin{bmatrix} I_{[m]} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} Y_{[m](l)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_{(l)} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} Y_{[m](j)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_{(j)} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} Y_{[m](r)}^z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R_{(r)(s)}^C \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} I_{(l)} \end{bmatrix} - \\
- \begin{bmatrix} Y_{[m](r)}^z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R_{(r)(s)}^C \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} R_{(s)(l)}^A \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_{(l)} \end{bmatrix} &+ \begin{bmatrix} Y_{[m](r)}^z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R_{(r)(s)}^C \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} R_{(s)(j)}^B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_{(j)} \end{bmatrix} - \\
- \begin{bmatrix} S_{[m](j)}^{Btotal} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} V_{(j)} \end{bmatrix} &+ \begin{bmatrix} S_{[m](s)}^{Btotal} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} S_{[s](l)}^{Ctotal} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_{(l)} \end{bmatrix} - \\
- \begin{bmatrix} S_{[m](s)}^{Btotal} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} S_{[s](j)}^{Dtotal} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_{(j)} \end{bmatrix} & \quad (2.55)
\end{aligned}$$

comparando con (2.24) se tiene

$$\begin{bmatrix} Y_{[m](l)}^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Y_{[m](l)} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} Y_{[m](r)}^z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R_{(r)(s)}^C \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} R_{(s)(l)}^A \end{bmatrix} \quad (2.56a)$$

$$\begin{bmatrix} Y_{[m](j)}^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Y_{[m](j)} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} Y_{[m](r)}^z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R_{(r)(s)}^C \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} R_{(s)(j)}^B \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} S_{[m](j)}^{Btotal} \end{bmatrix}^{-1} \quad (2.56b)$$

$$\begin{bmatrix} T_{[m](l)}^I \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} Y_{[m](r)}^z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R_{(r)(s)}^C \end{bmatrix}^{-1} + \begin{bmatrix} S_{[m](s)}^{Btotal} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} S_{[s](l)}^{Ctotal} \end{bmatrix} \quad (2.56c)$$

$$\begin{bmatrix} T_{[m](j)}^I \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} S_{[m](s)}^{Btotal} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} S_{[s](j)}^{Dtotal} \end{bmatrix} \quad (2.56d)$$

Las expresiones de las matrices empleadas en (2.45-2.56) se pueden ver en el apéndice A.

Todo esto se puede expresar en forma matricial como

$$-\Gamma \begin{pmatrix} V_{(n)} \\ V_{[m]} \\ I_{(n)} \\ I_{[m]} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} T_{(n)(i)}^v & T_{(n)[j]}^v & Z_{(n)(i)}^T & Z_{(n)[j]}^T \\ T_{[m](i)}^v & T_{[m][j]}^v & Z_{[m](i)}^T & Z_{[m][j]}^T \\ Y_{(n)(i)}^T & Y_{(n)[j]}^T & T_{(n)(i)}^I & T_{(n)[j]}^I \\ Y_{[m](i)}^T & Y_{[m][j]}^T & T_{[m](i)}^I & T_{[m][j]}^I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_{(n)} \\ V_{[m]} \\ I_{(n)} \\ I_{[m]} \end{pmatrix} \quad (2.57)$$

donde los índices (n) e (i) varían desde 1 hasta NTM y los índices [m] y [j] desde 1 hasta NTE. La expresión (2.57) es la ecuación de autovalores, a partir de la cual se pueden calcular las constantes de propagación y las corrientes e intensidades de cada modo. Los valores propios de dicha matriz, serán las constantes de propagación de los distintos modos (cambiadas de signo) y sus vectores propios nos darán los valores de las tensiones $V_{(n)}$ y $V_{[m]}$ así como las intensidades $I_{(n)}$ e $I_{[m]}$. Una vez conocidos estos valores se pueden calcular los campos electromagnéticos a partir de las ecuaciones (2.10-2.15).

2.8 FORMULACION DIRECTA

La segunda manera de calcular los coeficientes V^z e I^z en función de las tensiones V y las intensidades I, da lugar a una formulación en la que no es necesario realizar ninguna inversión de matrices; veamos como es este nuevo proceso.

2.8.1 Cálculo de $K_{c(n)} V_{(n)}^z$

Multiplicando (2.14) por $T_{(n)}$ ds e integrando a la sección recta del contorno metálico se obtiene

$$K_{c(n)} V_{(n)}^z = K_{c(n)}^2 \iint_S E_z T_{(n)} ds \quad (2.58)$$

De las relaciones de constitución y las ecuaciones de Maxwell se obtiene

$$E_z = \frac{1}{j\omega\epsilon_{33}} \left[\frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} \right] - \frac{\epsilon_{31}}{\epsilon_{33}} E_x - \frac{\epsilon_{32}}{\epsilon_{33}} E_y$$

Si comparamos con el paso análogo en el método indirecto, vemos que la diferencia esencial es que aquí se divide la ecuación de constitución correspondiente por el valor de ϵ_{33} , con lo que ahora deberemos desarrollar en funciones ortogonales sinusoidales (si seguimos con el mismo ejemplo de allí) la expresión

$$E_z = \frac{1}{\epsilon_{33}} D_z$$

lo cual implica igualar una función continua (E_z) a una discontinua (pues lo son tanto D_z como ϵ_{33}). Analíticamente, esto no presenta ningún tipo de problema, pues el cociente de dos funciones discontinuas puede ser una función continua (de hecho la ecuación anterior se debe cumplir si se tienen las componentes exactas). Sin embargo, numéricamente tanto E_z como D_z son funciones continuas, pues se obtienen como desarrollo en serie de funciones sinusoidales; por lo tanto y según la ecuación anterior, se expresaría E_z (función analítica y numéricamente continua) como el producto de una función discontinua ($1/\epsilon_{33}$) por una función numéricamente continua D_z , cuyo resultado es una función discontinua. Esto no parece ser la situación ideal para conseguir una buena convergencia de la componente E_z . Por tanto, podemos afirmar que una diferencia esencial entre la formulación original de Schekunoff y la posterior de Ogusu, es la posición inicial de las relaciones de constitución, en el cálculo de las componentes longitudinales del campo, que obliga a desarrollar funciones discontinuas como producto de dos funciones, una continua y otra discontinua en el caso del método indirecto, mientras que en el caso del método directo, se llega a una igualdad de una función continua con el producto de dos discontinuas. Ello hace que la convergencia de cada método sea dependiente de la estructura a analizar, es decir, de qué condiciones de continuidad verifica cada componente del campo.

Procediendo de forma análoga a la formulación indirecta se obtiene

$$\left[K_{c(n)} V_{(n)}^z \right] = - \left[P_{(n)(I)}^C \right] \left[I_{(I)} \right] - \left[P_{(n)(I)}^A \right] \left[V_{(I)} \right] + \left[P_{(n)(J)}^B \right] \left[V_{(J)} \right] \quad (2.59)$$

donde las expresiones de las matrices se pueden ver en el apéndice A (expresiones A15-A17). Como se puede observar, para calcular $K_{c(n)} V_{(n)}^z$ ahora no es necesario realizar inversiones de matrices.

2.8.2 Cálculo de $K_{c(m)} I_{(m)}^z$

Multiplicando (2.15) por $T_{(m)}$ ds e integrando

$$K_{c(m)} I_{(m)}^z = K_{c(m)}^2 \iint_S H_z T_{(m)} ds \quad (2.60)$$

Como antes, de las relaciones de constitución y de las ecuaciones de Maxwell podemos poner

$$H_z = -\frac{1}{j\omega \mu_{33}} \left[\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} \right] - \frac{\mu_{31}}{\mu_{33}} H_x - \frac{\mu_{32}}{\mu_{33}} H_y \quad (2.61)$$

De nuevo se puede hacer el mismo análisis anterior para las componentes longitudinales del campo magnético.

Sustituyendo los valores de las componentes de los campos se tiene

$$\left[K_{c(m)} I_{(m)}^z \right] = - \left[Q_{(m)(j)}^B \right] \left[V_{(j)} \right] + \left[Q_{(m)(i)}^C \right] \left[I_{(i)} \right] - \left[Q_{(m)(j)}^D \right] \left[I_{(j)} \right] \quad (2.62)$$

donde las expresiones de las matrices se pueden ver en el apéndice A expresiones (A15-A20).

De nuevo, no es necesario realizar inversiones de matrices. Además, y a diferencia del método indirecto, en el cálculo del término $K_{c(m)} I_{(m)}^z$ no interviene H_0 .

Ahora resta por obtener el valor de H_0 . Como ya hemos visto, conceptualmente la diferencia entre las formulaciones indirecta y directa es

que en la primera de ellas se realiza el desarrollo en serie después de sustituir las componentes longitudinales de los campos \vec{D} y \vec{B} , mientras que en la segunda se lleva a cabo el desarrollo después de sustituir las mismas componentes divididas por alguna de las componentes de los tensores $[\epsilon]$ y $[\mu]$, respectivamente. Así, en el cálculo del parámetro H_0 seguiremos el camino de despejar B_z/μ_{33} .

Multiplicando la ecuación (2.40) por $\frac{1}{\mu_{33}}$ y utilizando las relaciones de constitución se obtiene

$$\frac{1}{\mu_{33}} \sum_j^{\infty} V_{[j]} K_{c[j]}^2 T_{[j]} = -j \omega \left[\frac{\mu_{31}}{\mu_{33}} H_x + \frac{\mu_{32}}{\mu_{33}} H_y + H_z \right] \quad (2.63)$$

Sustituyendo H_x , H_y y H_z , integrando a la sección recta de la guía, y teniendo en cuenta que

$$\iint_S T_{[j]} ds = 0, \quad \text{y} \quad \iint_S ds = a b \quad (2.64)$$

donde "a" y "b" son la anchura y la altura del contorno conductor, se obtiene el valor de H_0 como

$$H_0 = [Q_{[m]}^A]^t [V_{[m]}] - [QQ_{(n)}^B]^t [I_{(n)}] - [QQ_{[m]}^C]^t [I_{[j]}] \quad (2.65)$$

donde las expresiones de las matrices se pueden ver en el apéndice A ecuaciones (A21-A23).

2.8.3 Formulación matricial

Siguiendo el proceso ya conocido, la formulación anterior se puede poner en una forma más compacta empleando una formulación matricial. Las ecuaciones de partida siguen siendo (2.45-2.48), y en ellas habrá que sustituir las nuevas amplitudes de las componentes axiales dadas por las expresiones (2.59)

y (2.61), junto con el nuevo valor de H_0 dado por (2.65).

De la ecuación (2.45)

$$\begin{aligned}
-\Gamma \begin{bmatrix} V_{(n)} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} Z_{(n)(i)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_{(i)} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} Z_{(n)(j)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_{(j)} \end{bmatrix} - \\
&- \begin{bmatrix} Z_{(n)(s)}^Z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q_{[s][j]}^B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_{[j]} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} Z_{(n)(s)}^Z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q_{[s](i)}^C \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_{(i)} \end{bmatrix} - \\
&- \begin{bmatrix} Z_{(n)(m)}^Z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q_{[s][j]}^D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_{[j]} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} P_{(n)(i)}^C \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_{(i)} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} P_{(n)(i)}^A \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_{(i)} \end{bmatrix} + \\
&+ \begin{bmatrix} P_{(n)(j)}^B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_{[j]} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} ZZ_{(n)}^Z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q_{[j]}^A \end{bmatrix}^t \begin{bmatrix} V_{[j]} \end{bmatrix} - \\
&- \begin{bmatrix} ZZ_{(n)}^Z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} QQ_{(i)}^B \end{bmatrix}^t \begin{bmatrix} I_{(i)} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} ZZ_{(n)}^Z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} QQ_{[j]}^C \end{bmatrix}^t \begin{bmatrix} I_{[j]} \end{bmatrix}
\end{aligned} \tag{2.66}$$

comparando con (2.21) podemos poner

$$\begin{bmatrix} T_{(n)(i)}^V \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} P_{(n)(i)}^A \end{bmatrix} \tag{2.67a}$$

$$\begin{bmatrix} T_{(n)(j)}^V \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} Z_{(n)(s)}^Z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q_{[s][j]}^B \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} P_{(n)(j)}^B \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} ZZ_{(n)}^Z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q_{[j]}^A \end{bmatrix}^t \tag{2.67b}$$

$$\begin{bmatrix} Z_{(n)(i)}^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z_{(n)(i)} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} Z_{(n)(s)}^Z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q_{[s](i)}^C \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} P_{(n)(i)}^C \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} ZZ_{(n)}^Z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} QQ_{(i)}^B \end{bmatrix}^t \tag{2.67c}$$

$$\begin{bmatrix} Z_{(n)(j)}^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z_{(n)(j)} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} Z_{(n)(s)}^Z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q_{[s][j]}^D \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} ZZ_{(n)}^Z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} QQ_{[j]}^C \end{bmatrix}^t \tag{2.67d}$$

De la ecuación (2.46)

$$\begin{aligned}
 -\Gamma \begin{bmatrix} V_{[m]} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} Z_{[m](i)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_{(i)} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} Z_{[m](j)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_{(j)} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} Z^z_{[m](s)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q^B_{[r](j)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_{(j)} \end{bmatrix} + \\
 &+ \begin{bmatrix} Z^z_{[m](s)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q^C_{[s](i)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_{(i)} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} Z^z_{[m](s)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q^D_{[r](j)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_{(j)} \end{bmatrix} + \\
 &+ \begin{bmatrix} ZZ^z_{[m]} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q^A_{[j]} \end{bmatrix}^t \begin{bmatrix} V_{(j)} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} ZZ^z_{[m]} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} QQ^B_{(i)} \end{bmatrix}^t \begin{bmatrix} I_{(i)} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} ZZ^z_{[m]} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} QQ^C_{[j]} \end{bmatrix}^t \begin{bmatrix} I_{(j)} \end{bmatrix} \quad (2.68)
 \end{aligned}$$

comparando con (2.22) podemos poner

$$\begin{bmatrix} T^v_{[m](i)} \end{bmatrix} = 0 \quad (2.69a)$$

$$\begin{bmatrix} T^v_{[m](j)} \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} Z^z_{[m](s)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q^B_{[s](j)} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} ZZ^z_{[m]} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q^A_{[j]} \end{bmatrix}^t \quad (2.69b)$$

$$\begin{bmatrix} Z^T_{[m](i)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z_{[m](i)} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} Z^z_{[m](s)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q^C_{[s](i)} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} ZZ^z_{[m]} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} QQ^B_{(i)} \end{bmatrix}^t \quad (2.69c)$$

$$\begin{bmatrix} Z^T_{[m](j)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z_{[m](j)} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} Z^z_{[m](s)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q^D_{[s](j)} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} ZZ^z_{[m]} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} QQ^C_{[j]} \end{bmatrix}^t \quad (2.69d)$$

De la ecuación (2.47)

$$-\Gamma \begin{bmatrix} I_{(n)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Y_{(n)(i)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_{(i)} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} Y_{(n)(j)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_{(j)} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} Y^z_{(n)(r)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P^C_{(r)(i)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_{(i)} \end{bmatrix} -$$

$$-\left[Y_{(n)(t)}^z \right] \left[P_{(t)(i)}^A \right] \left[V_{(i)} \right] + \left[Y_{(n)(i)}^z \right] \left[P_{(i)(j)}^B \right] \left[V_{(j)} \right] \quad (2.70)$$

comparando con (2.23) podemos poner

$$\left[Y_{(n)(i)}^T \right] = \left[Y_{(n)(i)} \right] - \left[Y_{(n)(r)}^z \right] \left[P_{(r)(i)}^A \right] \quad (2.71a)$$

$$\left[Y_{(n)(j)}^T \right] = \left[Y_{(n)(j)} \right] + \left[Y_{(n)(i)}^z \right] \left[P_{(i)(j)}^B \right] \quad (2.71b)$$

$$\left[T_{(n)(i)}^I \right] = - \left[Y_{(n)(r)}^z \right] \left[P_{(r)(i)}^C \right] \quad (2.71c)$$

$$\left[T_{(n)(j)}^I \right] = [0] \quad (2.71d)$$

De la ecuación (2.48)

$$\begin{aligned} -\Gamma \left[I_{[m]} \right] &= \left[Y_{[m](i)} \right] \left[V_{(i)} \right] + \left[Y_{[m](j)} \right] \left[V_{(j)} \right] - \left[Y_{[m](r)}^z \right] \left[P_{(r)(i)}^C \right] \left[I_{(i)} \right] - \\ & - \left[Y_{[m](r)}^z \right] \left[\left[P_{(r)(i)}^A \right] \left[V_{(i)} \right] + \left[Y_{[m](r)}^z \right] \left[P_{(r)(j)}^B \right] \left[V_{(j)} \right] \right] - \\ & - \left[Q_{[m](j)}^B \right] \left[V_{(j)} \right] + \left[Q_{[m](i)}^C \right] \left[I_{(i)} \right] - \left[Q_{[m](j)}^D \right] \left[I_{(j)} \right] \end{aligned} \quad (2.72)$$

comparando con (2.24) podemos poner

$$\left[Y_{[m](i)}^T \right] = \left[Y_{[m](i)} \right] - \left[Y_{[m](r)}^z \right] \left[P_{(r)(i)}^A \right] \quad (2.73a)$$

$$\left[Y_{[m][j]}^T \right] = \left[Y_{[m][j]} \right] + \left[Y_{[m](r)}^z \right] \left[P_{(r)[j]}^B \right] - \left[Q_{[m][j]}^B \right] \quad (2.73b)$$

$$\left[T_{[m](l)}^I \right] = - \left[Y_{[m](r)}^z \right] \left[P_{(r)(l)}^C \right] + \left[Q_{[m](l)}^C \right] \quad (2.73c)$$

$$\left[T_{[m][j]}^I \right] = - \left[Q_{[m][j]}^D \right] \quad (2.73d)$$

donde las expresiones de las matrices en las expresiones (2.66-2.73) se pueden ver en el apéndice A.

Con todo esto, se obtiene una ecuación de autovalores, formalmente igual a la (2.57), donde ahora las submatrices que forman la matriz del sistema vienen dadas por las ecuaciones anteriores.

2.9 DISCUSION DE LAS DOS FORMULACIONES

En la determinación de las ecuaciones de modos acoplados, hemos visto que un paso decisivo es encontrar los coeficientes V^z e I^z , que son las funciones amplitud de las componentes longitudinales del campo electromagnético, en función de las tensiones V e intensidades I , que son las funciones amplitud de los campos transversales.

En la primera formulación, este cálculo se hace resolviendo dos sistemas de ecuaciones infinitos (uno para V^z y otro para I^z). Obviamente, ello es imposible, teniendo que truncar a un número finito de ecuaciones, correspondientes al número de modos que se quiera emplear para resolver el sistema. Ello provoca un error de truncamiento en el cálculo de los coeficientes, añadido al propio del método. Por ejemplo, podríamos considerar una estructura en la que se utilicen M modos básicos para desarrollar los campos electromagnéticos (ecuaciones 2.8 y 2.9); ello da lugar a un primer error de truncamiento. Ahora bien, cuando se realiza el cálculo de V^z e I^z se deben invertir dos matrices que, en principio, son de tamaño infinito, y que lógicamente hay que cortar. En otras palabras, hay que realizar un nuevo

truncamiento para poder resolver un sistema de ecuaciones finito. Lógicamente, aquí se comete un nuevo error, de manera que, a priori, cuantos más modos escojamos en el planteamiento de estos sistemas más exactamente determinaremos los coeficientes V^z e I^z , y menor error cometeremos en el cálculo de los campos longitudinales. Por otro lado, al aumentar fuertemente el orden de los sistemas a resolver, se pueden originar problemas de matrices mal condicionadas o errores acumulativos en las soluciones que proporcionan las subrutinas matemáticas.

En la segunda formulación (directa), los coeficientes V^z e I^z se calculan "directamente", en el sentido de que no es necesario realizar inversión alguna de matrices, con lo cual este caso evita ese segundo error de truncamiento mencionado en el párrafo anterior.

Además de las diferencias evidentes entre las formulaciones directa e indirecta, dadas por las diferentes ecuaciones que intervienen en cada caso, existe una diferencia conceptual muy importante. Supongamos, por ejemplo, que desarrollamos el campo de una estructura dada empleando 2 modos básicos (TM) en el cálculo de las ecuaciones del Telegrafista Generalizadas. En la formulación indirecta (con inversas), la matriz $[R^C]$, de orden 2×2 , está formada por acoplos entre esos modos, según la ecuación (A3) del apéndice A; cuando se calcula su inversa, que interviene en el cálculo de la ecuación (2.35), sus términos no sólo se ven influenciados por los acoplos entre sí mismos, sino por los acoplos entre los distintos modos. Esto es evidente, pues, por ejemplo, el término (1,1) de la matriz inversa de $[R^C]$, es no sólo función del término (1,1) de la matriz $[R^C]$, sino también de los demás. De manera análoga, se podría hacer el mismo razonamiento para la matriz $[S^B]$, en el caso de modos básicos de tipo TE. En el caso de la formulación directa, y siguiendo con el mismo ejemplo, la ecuación (2.35) se sustituye por la (2.59), en donde la matriz $[P^C]$ interviene directamente (y no su inversa), de manera que el término (1,1) de dicha matriz, definido por la ecuación (A.15) del apéndice A, es independiente de los demás acoplos con otros modos básicos. Análogamente, se puede extender el razonamiento para la matriz $[Q^B]$.

Por último, ya se ha apuntado una diferencia esencial entre ambas formulaciones que consiste en la diferente forma de expresar las componentes

longitudinales, a partir de las relaciones de constitución. En la formulación indirecta se despejan los valores de $\epsilon_{33} E_z$ y $\mu_{33} H_z$, mientras que en la directa, se despejan los valores de E_z y H_z , individualmente. Recordemos, que, en cualquier caso, el proceso del método de modos acoplados consiste en sustituir en las ecuaciones de Maxwell las relaciones de constitución adecuadas a cada caso, y después resolver el sistema que se obtiene mediante el método de Galerkin y la sustitución de cada componente por la adecuada serie de funciones (sinusoidales en este caso). Dependiendo de cada estructura, y con la debida previsión, se pueden reagrupar algunas de las ecuaciones a las que aplicar Galerkin para que tengan funciones discontinuas a cada lado de la igualdad, y no una función continua a un lado y el producto de dos discontinuas al otro. Esta situación no es la ideal para obtener una buena convergencia en el cálculo de la componente de campo que corresponda [19], lo cual revierte en el proceso total. Por tanto, dependiendo de cada situación habrá que ver que componente longitudinal es continua y discontinua para elegir la formulación directa o indirecta, correspondiéndose con la componente que despejemos en las relaciones de constitución, bien E_z o bien $\epsilon_{33} E_z$ (análogamente para H_z o $\mu_{33} H_z$).

Parece lógico pensar en un razonamiento análogo para las componentes transversales del campo electromagnético. Lamentablemente, en un caso general en que tengamos las seis componentes del campo y discontinuidades en ambas direcciones transversales ("x" e "y"), es imposible reagrupar las ecuaciones de partida para que en todos los casos representen a una función discontinua como producto de una continua por una discontinua. Sí es posible, sin embargo, seguir este proceso en algún caso particular, en que sólo haya discontinuidad en una sola dirección transversal.

2.10 FORMULACION ORIGINAL DE MODOS ACOPLADOS

En la formulación original del método de modos acoplados debida a Schelkunoff [1] o la posterior modificación de Ogusu [2] se utiliza un desarrollo de las componentes axiales del campo en función de las componentes axiales de los modos de la guía vacía, sin la inclusión del término correspondiente a la solución trivial para los modos TE. En este caso, los desarrollos de las componentes transversales y de la componente E_z no se

modifican respecto a la formulación anterior; únicamente queda modificada la ecuación (2.9) correspondiente a la componente H_z que pasa a ser

$$H_z = \sum_J^{\infty} K_{c[J]} I_{[J]}^z(z) T_{[J]} \quad (2.74)$$

A partir de aquí, el proceso es idéntico al mostrado anteriormente en los métodos indirecto y directo, siendo posible llegar a la ecuación de autovalores final de cada caso, sin más que hacer unas pequeñas simplificaciones, consistentes en eliminar del proceso todas aquellas matrices que o bien intervengan directamente en el cálculo de H_0 , o bien aparezcan como productos por H_0 . Veamos brevemente cada caso por separado.

2.10.1 Formulación Indirecta

En esta formulación hay que eliminar del desarrollo las siguientes matrices

$$\left[ZZ_{[m]}^z \right], \left[ZZ_{(n)}^z \right], \left[S_{[m]}^A \right], \left[SS_{[1]}^C \right], \left[SS_{[J]}^D \right] \text{ y } \left[S_{[J]}^A \right]$$

Si se hace ésto, se puede ver fácilmente que los términos de acoplo de las ecuaciones del Telegrafista Generalizadas vienen dados por las ecuaciones (2.50, 2.52, 2.54 y 2.56) reemplazando todas aquellas matrices que poseen como atributo de superíndice la palabra "total" por sus análogas sin el superíndice "total"; por ejemplo

$$\left[Z_{(n)(1)}^{\text{total}} \right] \xrightarrow{\text{reemplazar por}} \left[Z_{(n)(1)}^{\text{total}} \right]$$

$$\left[S_{[m][J]}^{\text{Btotal}} \right] \xrightarrow{\text{reemplazar por}} \left[S_{[m][J]}^{\text{B}} \right]$$

y así sucesivamente con todas las demás.

2.10.2 Formulación Directa

Ahora hay que eliminar de la formulación las siguientes matrices

$$\left[ZZ_{[m]}^z \right], \left[ZZ_{(n)}^z \right], \left[Q_{[m]}^A \right], \left[QQ_{(n)}^B \right] \text{ y } \left[QQ_{[m]}^C \right]$$

Las expresiones que ahora dan los términos de las ecuaciones del Telegrafista Generalizadas se obtienen a partir de (2.67, 2.69, 2.71 y 2.73) sin más que eliminar el último sumando de cada una de las ecuaciones (2.67b,c,d) y (2.69b,c,d).

2.11 METODO DE MODOS ACOPLADOS PARA LAMINAS DE FERRITA

VERTICALES: FORMULACION RESTRINGIDA

En esta sección vamos a desarrollar una formulación de las ecuaciones del Telegrafista Generalizadas válida para el caso en que la guía de onda esté parcialmente llena con una o varias láminas de ferrita verticales, sometidas a un campo magnético externo en la dirección "y" (figura 2.1). Los motivos para plantearnos este caso especial son básicamente los siguientes:

- Estos tipos de estructuras son muy utilizados en la realización de dispositivos no recíprocos, tanto por sí mismas, como por servir de modelo para estructuras más complejas [22-25]

- Resulta una estructura ideal para mostrar cómo el método de modos acoplados puede plantearse de manera que no presente productos de funciones discontinuas igualados a funciones continuas. Esto, como veremos, da lugar a una excelente convergencia de la solución [19].

Las láminas de ferrita están caracterizadas por el tensor

$$[\mu] = \begin{bmatrix} \mu_{11} & 0 & \mu_{13} \\ 0 & \mu_{22} & 0 \\ \mu_{31} & 0 & \mu_{33} \end{bmatrix} \quad (2.75)$$

es decir, la ferrita está magnetizada según "y".

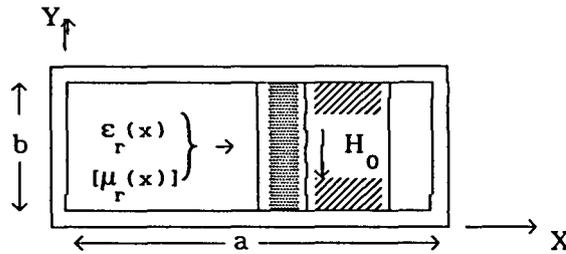


Figura 2.1.- Estructura a estudiar

Los parámetros del tensor $[\mu]$ así como ϵ_r , son funciones continuas a trozos de "x", mientras que son independientes de "y" sobre la altura total de la guía. Sólo se considerarán modos incidentes del tipo TE_{n0} ; así, el campo electromagnético sólo tiene componentes E_y , H_x , H_z , que además son independientes de la coordenada "y".

Con las restricciones anteriores, las ecuaciones de Maxwell (2.16) se reducen a

$$\frac{\partial H_x}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial x} = j \omega D_y \quad (2.76a)$$

$$\frac{\partial E_y}{\partial z} = j \omega B_x \quad (2.76b)$$

$$\frac{\partial E_y}{\partial x} = -j \omega B_z \quad (2.76c)$$

Las relaciones de constitución se pueden poner como

$$D_y = \epsilon E_y \quad (2.77)$$

$$B_x = \mu_{11} H_x + \mu_{13} H_z \quad (2.78a)$$

$$B_z = \mu_{31} H_x + \mu_{33} H_z \quad (2.78b)$$

Además, las ecuaciones (2.10-2.15), para modos TE se reducen a

$$E_y = - \sum_J V_J \frac{\partial T_J}{\partial x} \quad (2.79)$$

$$H_x = \sum_J I_J \frac{\partial T_J}{\partial x} \quad (2.80)$$

$$E_z = \sum_J K_{cJ} I_J^z T_J + H_0(z) \quad (2.81)$$

Por simplicidad y ya que sólo tenemos modos TE_{n0} hemos eliminado los subíndices entre corchetes.

Las ecuaciones de partida (2.17-2.20) para la obtención de las ecuaciones del Telegrafista Generalizadas se reducen a

$$\frac{d V_m}{d z} = - j\omega \iint_S \left[B_x \frac{\partial T_m}{\partial x} \right] ds \quad (2.82)$$

$$\frac{d I_m}{d z} = j\omega \iint_S \left[D_y \frac{\partial T_m}{\partial x} \right] ds + K_{cm} I_m^z \quad (2.83)$$

El proceso, ahora, es sustituir los valores de D_y y B_x mediante las relaciones de constitución (2.77, 2.78a), y calcular el valor de $K_{cm} I_m^z$ para lo cual, si se siguen los pasos del método directo, se usaría la relación de

constitución (2.78b) puesta como

$$H_z = \frac{1}{\mu_{33}} B_z - \frac{\mu_{31}}{\mu_{33}} H_x \quad (2.84)$$

y si se siguen los pasos del método indirecto se expresaría como

$$\mu_{33} H_z = B_z - \mu_{31} H_x \quad (2.85)$$

Analíticamente, la continuidad o no de las componentes de los campos es como sigue

D_y	→	Discontinua
E_y	→	Continua
B_x	→	Continua
H_x	→	Discontinua
B_z	→	Discontinua
H_z	→	Continua

Como ya se ha mencionado, la condición para obtener una buena convergencia de la solución es que las ecuaciones no presenten productos de dos funciones discontinuas (cuando una de ellas resulta, de hecho, continua al desarrollarla en serie), o de una continua por una discontinua, igualados a funciones continuas. Como se puede comprobar, sólo la ecuación (2.77) verifica la condición anterior. Sin embargo, para la estructura que estamos estudiando es posible "colocar" las dos relaciones de constitución que no verifican la condición anterior de manera que sí la cumplan. De (2.78a)

$$H_x = \mu_c B_x - \mu_d H_z \quad (2.86)$$

Sustituyendo en (2.78b)

$$B_z = \mu_a B_x + \mu_b H_z \quad (2.87)$$

que se puede poner sustituyendo B_z de las ecuaciones de Maxwell como

$$\frac{j}{\omega} \frac{\partial E_y}{\partial x} = \mu_a B_x + \mu_b H_z \quad (2.88)$$

donde

$$\mu_a = \frac{\mu_{31}}{\mu_{11}}, \quad \mu_b = \frac{\mu_{11}\mu_{33} - \mu_{13}\mu_{31}}{\mu_{11}}, \quad \mu_c = \frac{1}{\mu_{11}}, \quad \mu_d = \frac{\mu_{13}}{\mu_{11}} \quad (2.89)$$

Como se puede observar, ahora las relaciones (2.86-2.87) cumplen la condición anterior. El problema es que tanto H_z como B_x no están despejadas explícitamente. Por tanto, hay que obtenerlas a partir de (2.86-2.88) mediante el método de Galerkin. Para ello, es necesario tomar un desarrollo en serie de funciones T para la componente B_x de la forma

$$B_x = \sum_j J_j \frac{\partial T_j}{\partial x} \quad (2.90)$$

Para realizar este proceso de una manera más compacta, es conveniente partir de las ecuaciones de Maxwell de las que se obtienen (2.82,2.83) y que son las que dan las derivadas de las componentes transversales de \vec{E} y \vec{H} respecto a la coordenada axial. Estas dos ecuaciones (después de sustituir el valor de D_y) más las dos relaciones de constitución (2.86,2.88) constituyen ahora el sistema a partir del cual se pueden obtener los coeficientes de las ecuaciones del Telegrafista Generalizadas, y que por comodidad vamos escribir conjuntamente

$$\frac{\partial E_y}{\partial z} = j \omega B_x \quad (2.91)$$

$$\frac{\partial H_x}{\partial z} = j \omega \epsilon E_y + \frac{\partial H_z}{\partial x} \quad (2.92)$$

$$\frac{j}{\omega} \frac{\partial E_y}{\partial x} = \mu_a B_x + \mu_b H_z \quad (2.93)$$

$$H_x = \mu_c B_x - \mu_d H_z \quad (2.94)$$

Siguiendo el proceso habitual de sustituir los desarrollos en funciones T (truncando a N funciones) de cada componente y aplicando el método de Galerkin se obtiene el siguiente sistema matricial

$$\frac{d [V_m]}{d z} = j \omega [J_m] \quad (2.95)$$

$$\frac{d [I_m]}{d z} = - j \omega [E_{mj}][V_j] + [K_{cmj} I_j^z] \quad (2.96)$$

$$[D_{mm}] [V_m] = [M_{mj}^a][J_j] + [M_{mj}^b][K_{cj} I_j^z] + H_0 [N_m^b] \quad (2.97)$$

$$[I_m] = [M_{mj}^c][J_j] - [M_{mj}^d][K_{cj} I_j^z] + H_0 [N_m^a] \quad (2.98)$$

donde las expresiones de las matrices se pueden ver en el apéndice B.

Falta calcular el valor de H_0 . Para ello se integra la ecuación (2.93) entre "0" y "a" (anchura de la guía) obteniéndose

$$H_0(z) = \Xi \left([N_j^a]^t [J_j] + [N_j^b]^t [K_{cj} I_j^z] \right) \quad (2.99)$$

donde

$$\Xi = \frac{1}{\int_0^a \mu_b dx} \quad (2.100)$$

Multiplicando (2.97) por la inversa de la matriz [D] y sustituyendo el valor encontrado para H_0 en las ecuaciones (2.97,2.98) se obtiene

$$\begin{bmatrix} [V_m] \\ [I_m] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [A_{mj}^{11}] & [A_{mj}^{12}] \\ [A_{mj}^{21}] & [A_{mj}^{22}] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} [J_j] \\ [K_{cj} I_j^z] \end{bmatrix} \quad (2.101)$$

donde

$$[A_{mj}^{11}] = [D_{mm}]^{-1} \left([M_{mj}^a] + \Xi [N_j^a]^t [N_m^b] \right) \quad (2.102)$$

$$[A_{mj}^{12}] = [D_{mm}]^{-1} \left([M_{mj}^b] + \Xi [N_j^b]^t [N_m^b] \right) \quad (2.103)$$

$$[A_{mj}^{21}] = [D_{mm}]^{-1} \left([M_{mj}^c] + \Xi [N_j^a]^t [N_m^a] \right) \quad (2.104)$$

$$[A_{mj}^{22}] = [D_{mm}]^{-1} \left([M_{mj}^d] + \Xi [N_j^a]^t [N_m^a] \right) \quad (2.105)$$

Invirtiendo la matriz de las "A" en (2.101) se obtendría

$$\begin{bmatrix} [J_j] \\ [K_{cj} I_j^z] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [A_{mj}^{11}] & [A_{mj}^{12}] \\ [A_{mj}^{21}] & [A_{mj}^{22}] \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} [V_j] \\ [I_j] \end{bmatrix} \quad (2.106)$$

que es la expresión que proporciona B_x y H_z en función de E_y y H_x .

Si identificamos esta matriz inversa con otra [B] tendríamos

$$\begin{bmatrix} [J_j] \\ [K_{cj} I_j^z] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [B_{mj}^{11}] & [B_{mj}^{12}] \\ [B_{mj}^{21}] & [B_{mj}^{22}] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} [V_j] \\ [I_j] \end{bmatrix} \quad (2.107)$$

Sustituyendo los valores de $[J_j]$ y $[K_{cj} I_j^z]$ que se obtienen de (2.107) en

las dos ecuaciones de partida (2.95,2.96) y comparando con las ecuaciones del Telegrafista Generalizadas (2.21-2.24) se tiene

$$\begin{bmatrix} T_{mj}^v \end{bmatrix} = j \omega \begin{bmatrix} B_{mj}^{11} \end{bmatrix} \quad (2.108)$$

$$\begin{bmatrix} Z_{mj}^T \end{bmatrix} = j \omega \begin{bmatrix} B_{mj}^{12} \end{bmatrix} \quad (2.109)$$

$$\begin{bmatrix} Y_{mj}^T \end{bmatrix} = - j \omega \begin{bmatrix} E_{mj} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_{mj}^{21} \end{bmatrix} \quad (2.110)$$

$$\begin{bmatrix} T_{mj}^I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B_{mj}^{22} \end{bmatrix} \quad (2.111)$$

siendo todos los demás términos nulos.

2.12 REFERENCIAS

- [1] Schelkunoff, S.A.: *Generalized Telegraphist's Equations for waveguides*, B.S.T.J., Vol. 3, pp. 784-801, July 1952.
- [2] Ogusu, K.: *Numerical Analysis of Rectangular Dielectric Waveguide and its Modifications*, IEEE, Vol. MTT-25, No. 11, pp. 874-885, Nov. 1977.
- [3] Hung-Chia, H.: *Coupled mode theory*, VNU Science Press, Utrech, The Netherlands, 1984.
- [4] Hord, W.E. and Rosenbaum, F.J.: *Approximation technique for dielectric loaded waveguides*, IEEE, Vol. MTT-16, No. 4, pp. 228-233, April 1968.
- [5] Arnold, R.M. and Rosenbaum, F.J.: *Nonreciprocal wave propagation in semiconductor loaded waveguides in the presence of a tranverse magnetic field*, IEEE, Vol. MTT-19, No. 1, pp. 57-65, January 1971.
- [6] Gauthier, F.: *Application de la méthode des modes couplés a l'étude des structures guidées partiellement remplies de materiaux isotropes et anisotropes*, Tesis Doctoral. Limoges, Francia 1979.
- [7] Awai, I and Itoh T.: *Coupled-Mode theory analysis of distributed nonreciprocal structures*, IEEE, Vol. MTT-29, No. 10, pp. 1077-1086, October 1981.
- [8] Mazur, J. and Mrozowski, M.: *Coupled mode analysis of a finline*, IEEE, Vol. MTT-37, No. 2, pp. 281-288, February 1989.
- [9] Amalric, J.L., Baudrand, H. and Hollinger, M.: *Various Aspects of Coupled Mode Theory for Anisotropic Partially-Filled Waveguides. Application to a Semiconductor Loaded Wave-guide with Perpendicular Induction*, 7th Europ. Microw. Conf., pp. 156-150, Copenhagen 1977.
- [10] Amalric, J.L.: *Contribution a L'étude de L'effect de déplacement de champ dans les guides chargés par des lames semi-conductrices*, Tesis Doctoral, Toulouse (Francia), 1978.
- [11] Wilkinson, J.H.: *The Algebraic Eigenvalue Problem*, Clarendon Press. Oxford, 1965.
- [12] Prieto, A.: *Estudio Teórico y experimental de la guía dieléctrica en banda invertida*, Tesis Doctoral, Universidad de Cantabria, 1977.
- [13] Rubio, E.: *Análisis de diversas Guías Dieléctricas*, Tesis Doctoral, Universidad de Cantabria. 1983.
- [14] Rodríguez, J.: *Contribución al análisis y optimización de dispositivos pasivos en guía dieléctrica*, Tesis Doctoral, Universidad de Cantabria. 1987.

- [15] Rodríguez, J., Solano, M.A. and Prieto, A.: "Characterization of discontinuities in dielectric waveguides using Schelkunoff's Method: application to tapers and transitions", *Int. J. Electronics*, Vol. 66, No. 5, pp. 807- 820. 1989.
- [16] Vander Vorts, A. and Govaerts, R.: "On the Accuracy obtained when using Variational Techniques for Asymmetrically Loaded Waveguides", *IEEE*, Vol. MTT-17 (Correspondence), pp. 51-51, January 1969.
- [17] Ness, J.B. and Gunn, M.W.: "Microwave propagation in rectangular waveguide containing a semiconductor subject to a transverse magnetic field", *IEEE*, Vol. MTT-23, No. 9, pp. 767-772, September 1975.
- [18] Tao, J.W., Atechian, J., Ratovondrahanta, R. and Baudrand, H.: "Transverse operator study of a large class of multielectric waveguides", *Proc. IEE*, Vol. 137, Pt. H., No. 5, pp. 311-317, 1990.
- [19] Chaloupka, H.: "A coupled-line model for the Scattering by dielectric and ferrimagnetic obstacles in waveguides", *AEÜ*, Vol. 34, No. 3, pp. 145-151, April 1980.
- [20] Gabriel, G.J. and Brodwin, M.E.: "The solution of guide waves in inhomogeneous anisotropic media by perturbation and variational methods", *IEEE*, Vol. MTT-13, No. 5, pp. 364-370 May 1965.
- [21] Vassallo, C.: "On the expansion of axial field components in terms of normal modes in perturbed waveguides", *IEEE*, Vol. MTT-23, No. 2, pp. 264-265, February 1975.
- [22] Uher, J., Arndt, F. and Bornemann, J.: "Field theory design of ferrite loaded waveguide nonreciprocal phase shifters with multisection ferrite or dielectric slab impedance transformers", *IEEE*, Vol. MTT-35, No. 6, pp. 552-560, June 1987.
- [23] Yansheng, Xu and Guangchuang, Z.: "A rigorous method for computation of ferrite toroidal phase shifters", *IEEE*, Vol. MTT-36, No. 6, pp. 929-933, June 1988.
- [24] Thompson, S.B. and Rodrigue, G.P.: "The application of planar anisotropy to millimeter wave ferrite phase shifters", *IEEE*, Vol. MTT-33, No. 11, pp. 1204-1209, November 1985.
- [25] Hauth, W.: "Accurate analysis of latching phase shifters", *IEE Proceedings*, Vol. 133, Pt.H, No. 3, pp. 165-168, June 1986.

CAPITULO 3

RESULTADOS DEL METODO DE MODOS ACOPLADOS

3.1 INTRODUCCION

Los objetivos de este capítulo son: determinar cuáles de las formulaciones empleadas proporciona mejores resultados en un caso general en el que se trabaje con ferritas, cuáles son los límites en el número de funciones base a emplear en cada formulación para hallar las constantes de propagación y los campos y, por último, aplicar el método al estudio de dos estructuras tipo.

Los errores de redondeo y truncamiento que se producen en el proceso matemático de cálculo de los autovalores y autovectores de una matriz dan lugar a que, sobrepasado un número de modos dado, los valores y vectores propios hallados presenten errores considerables. El límite del orden de la matriz será independiente de formulación a emplear, y únicamente dependerá del método matemático de resolución y de la precisión del ordenador utilizado. Para incrementar lo más posible el orden de la matriz se ha elegido como método de hallar autovalores y autovectores el método QR [1].

De entre todas las formulaciones presentadas en el capítulo anterior, parece razonable, siempre que sea posible, utilizar la formulación restringida. En un caso general, la formulación indirecta con solución trivial de modos TE debiera presentar resultados más exactos.

La aplicación del método a estructuras no recíprocas puede hacerse tanto en guías cerradas como abiertas. Un ejemplo característico y bastante complejo de aplicación a guías cerradas lo constituyen los defasadores toroidales magnetizados en remanencia [2-6]. El modelado de estos dispositivos mediante láminas verticales equivalentes no conduce a resultados satisfactorios [2,3]. Hasta ahora sólo mediante la técnica de elementos finitos se ha podido predecir su comportamiento con suficiente precisión [7]. Este es un caso en el que el método de modos acoplados puede aplicarse con perspectivas de éxito.

Las guías dieléctricas son guías abiertas que pueden estudiarse como guías cerradas, en las que las paredes conductoras superior y laterales se alejan suficientemente [8-10]. No existe ningún trabajo donde estas guías se estudien de forma rigurosa cuando contienen elementos no recíprocos.

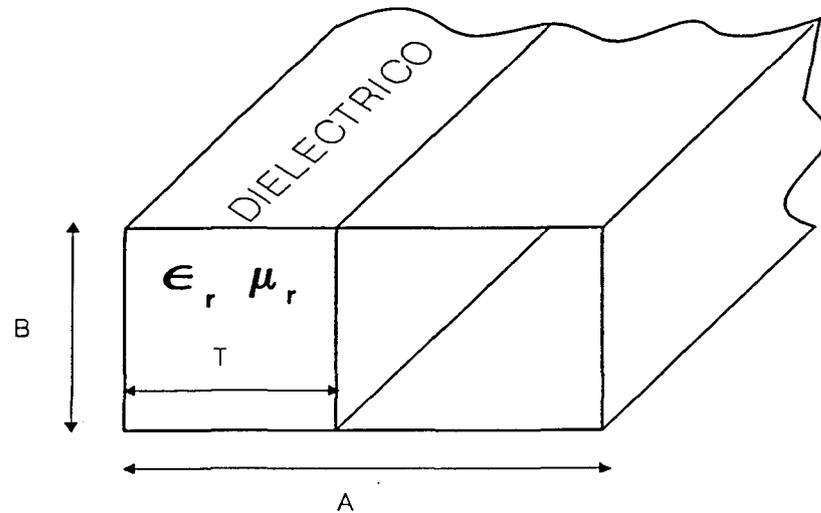


Figura 3.1.- Lámina de dieléctrica de altura completa. Dim. (mm.)
 $A=15.8$, $B=7.9$, $T=3$.

Aplicaremos el método de modos acoplados a un caso complejo de guías dieléctricas acopladas mediante una lámina de ferrita transversalmente magnetizada [11].

3.2 CONVERGENCIA DE LAS CONSTANTES DE PROPAGACION

Inicialmente, el número máximo de modos que se puede incluir en el desarrollo viene limitado por la memoria del ordenador y por el tiempo de cálculo. El primer límite impone como máximo el uso de 400 modos, que ha sido el número máximo considerado, pues el segundo límite, no parecía ser muy restrictivo para los propósitos actuales. Una vez fijado el límite de 400 modos como cota superior, la otra limitación proviene del comportamiento de las subrutinas matemáticas empleadas en la resolución del sistema de autovalores y, en su caso, en la inversión de matrices. Al ir aumentando el número de funciones, los errores de redondeo se van propagando a través del proceso de cálculo pudiendo llegar a alcanzar a cifras significativas de la solución. Cuando esto se produce, el resultado es que el parámetro estudiado no permanece estable, oscilando en torno a un valor, o simplemente no

convergiendo. El proceso para la determinación de este límite, consiste en ir aumentando el número de modos empleados en el desarrollo, hasta que se dé la situación anterior. Estudiaremos dos casos por separado: uno para la determinación de las constantes de propagación y otro para el cálculo de los campos.

La estructura que vamos a analizar es la de la figura 3.1., empleando los modos básicos (TE y TM) seleccionados por frecuencias de corte. En todos los casos el espesor de la lámina es de 3 mm. y el contorno metálico el de banda Ka (15.8x7.9mm.). La permeabilidad y la permitividad relativas tienen un valor de 15. En este caso se obtendrán todos los tipos de modos (LSE_{nm} y LSM_{nm}). En las figuras 3.2-3.7 se representa la constante de propagación, en función del número de modos empleado, obtenida con las formulaciones directa e indirecta ambas con el término H_0 (rotuladas en las gráficas como directa-H0 e indirecta-H0, respectivamente), comparándola con la obtenida analíticamente.

Observando estas figuras, queda claro que en el cálculo de las constantes de propagación los posibles errores de redondeo producidos por las subrutinas matemáticas no alcanzan a perturbar la estabilidad de la solución. Para otras estructuras analizadas, tanto isótropas como anisótropas, en ningún caso se producía una situación distinta a la mencionada. Hay que notar que la estructura analizada representa una de las peores situaciones a resolver, debido a los altos valores de las permitividades y permeabilidades empleados. Por tanto, se puede concluir que el límite de funciones base a emplear, sin problemas de convergencia, es de 400. Además, este límite es insensible al tipo de formulación empleada, aún teniendo en cuenta que la indirecta emplea subrutinas para inversión de matrices.

Los resultados obtenidos para todos los modos muestran una mejor convergencia para la formulación indirecta que para la directa. En este sentido, en la formulación indirecta es suficiente considerar sólo 50 funciones base para obtener una buena aproximación de las constantes de propagación para los primeros modos.

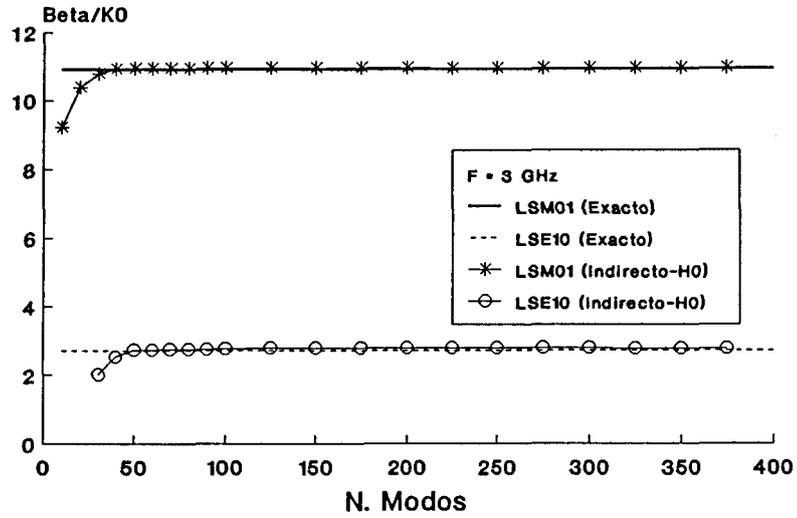


Figura 3.2.- Variación de las constantes de fase en función del número de modos, para la estructura de la figura 3.1. $F=3$ GHz, $\epsilon_r=15$, $\mu_r=15$.

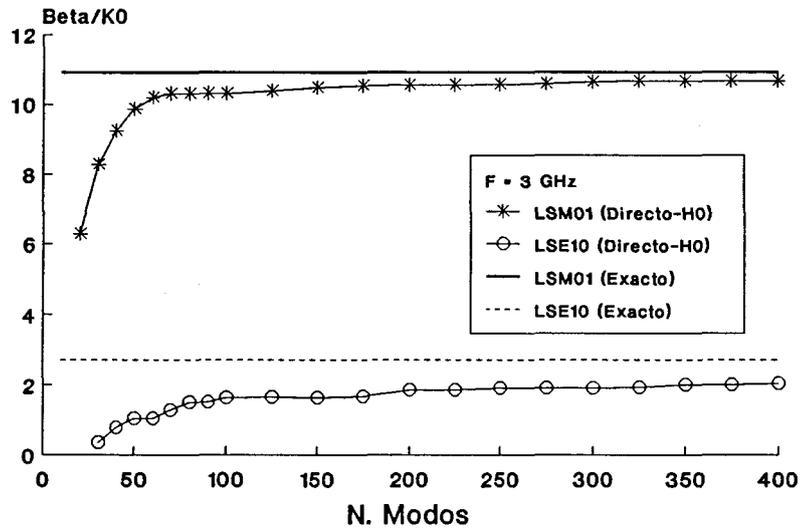


Figura 3.3.- Variación de las constantes de fase en función del número de modos, para la estructura de la figura 3.1. $F=3$ GHz, $\epsilon_r=15$, $\mu_r=15$.

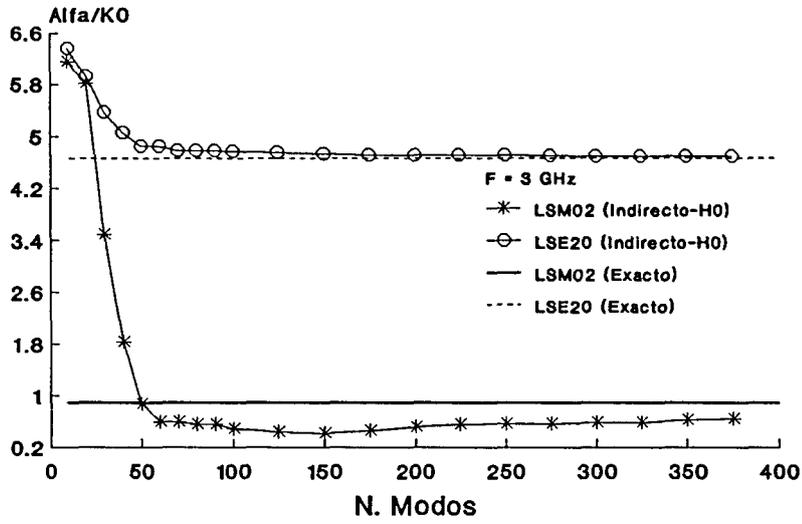


Figura 3.4.- Variación de las constantes de atenuación en función del número de modos, para la estructura de la figura 3.1. $F=3$ GHz, $\epsilon_r=15$, $\mu_r=15$.

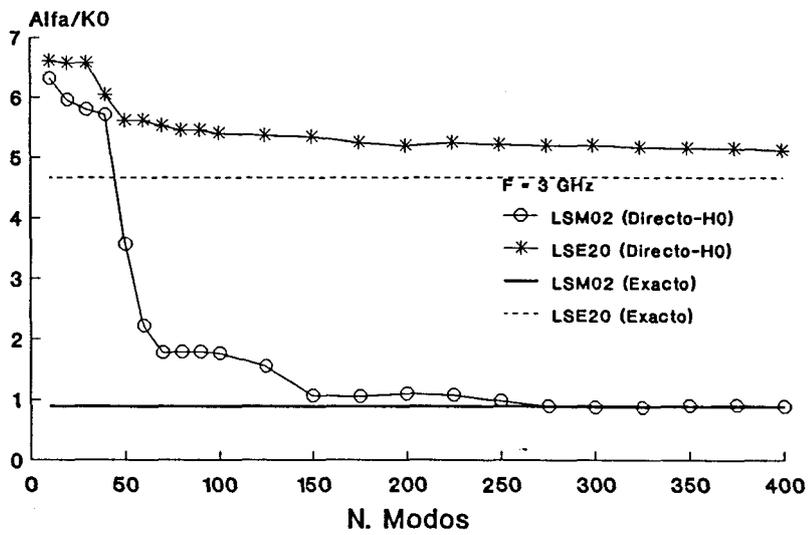


Figura 3.5.- Variación de las constantes de atenuación en función del número de modos, para la estructura de la figura 3.1. $F=3$ GHz, $\epsilon_r=15$, $\mu_r=15$.

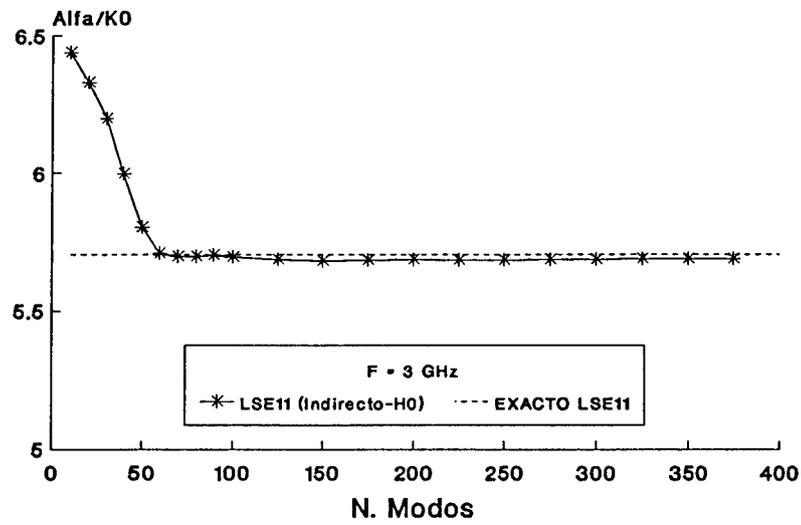


Figura 3.6.- Variación de la constante de atenuación en función del número de modos, para la estructura de la figura 3.1. $F=3$ GHz, $\epsilon_r=15$, $\mu_r=15$.

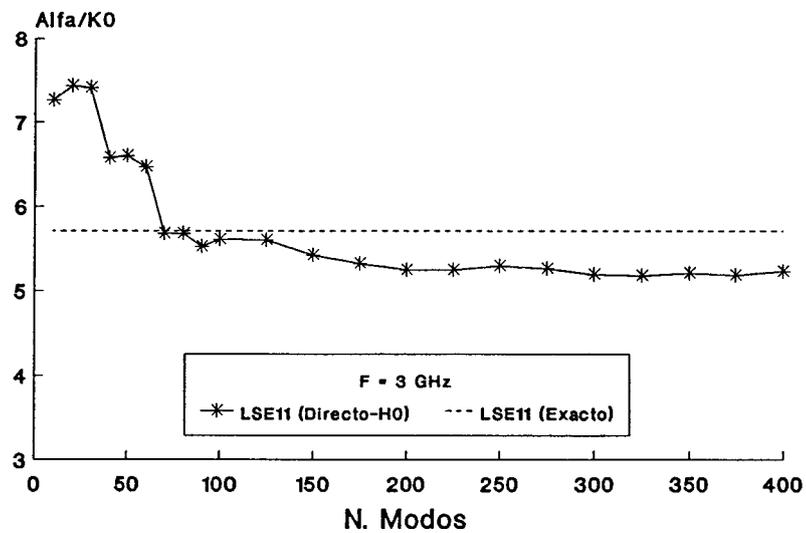


Figura 3.7.- Variación de la constante de atenuación en función del número de modos, para la estructura de la figura 3.1. $F=3$ GHz, $\epsilon_r=15$, $\mu_r=15$.

3.3 CONVERGENCIA DEL CAMPO ELECTROMAGNETICO

En la determinación del número máximo de funciones base que se pueden emplear para el cálculo de los campos, se ha estudiado una lámina dieléctrica vertical de espesor 3 mm. pegada a la pared lateral con $\epsilon_r = \mu_r = 10$, a una frecuencia de 4 GHz (figura 3.1). El contorno metálico es el de banda Ka (15.8x7.9 mm.).

En las figuras 3.8-3.13 se muestran una componente continua (E_y) y una discontinua (H_x), correspondientes al modo fundamental, empleando 70, 90 y 100 modos base. Se puede observar como las componentes van oscilando cada vez más en torno al valor exacto y, especialmente, la componente discontinua H_x que sufre más oscilaciones cerca de la zona donde tiene su discontinuidad. Para esta componente del campo, al considerar 100 funciones base la solución deja claramente de converger. Sin embargo, la componente E_y todavía sigue sin presentar un comportamiento oscilatorio, aunque ya está muy próximo a él. Como ejemplo, en la figura 3.14 se muestra la variación de H_x obtenida empleando 98 modos base. Se observa como todavía el resultado no es oscilatorio.

De todos los resultados anteriores se puede concluir que el máximo número de modos que se puede emplear para describir cualquier componente del campo, sin que aparezca el error anterior, es de aproximadamente 95, pudiéndose en el cálculo de algunas componentes emplear mayor número de modos. Notar que la convergencia de la constante de propagación no se altera hasta 400 modos, lo cual confirma su carácter variacional.

Para otras estructuras anisótropas, se ha comprobado que el límite de utilización en el cálculo de campos es el mismo.

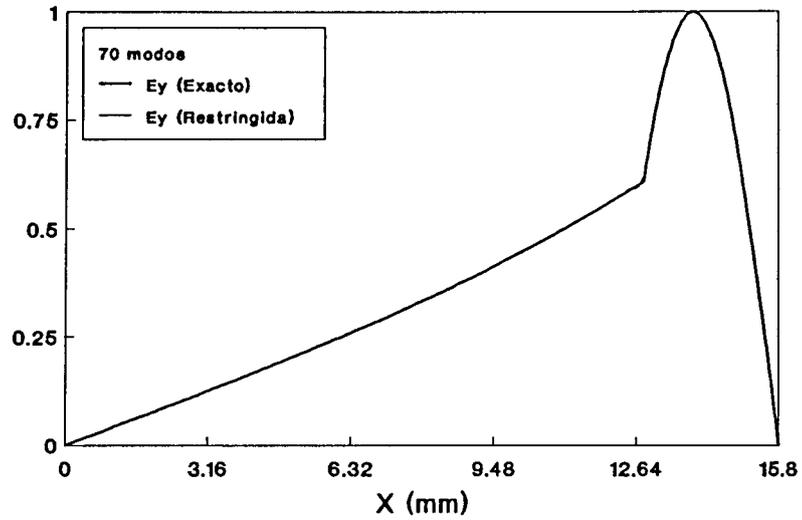


Figura 3.8.- Variación de la componente E_y con la coordenada "x", para la estructura de la figura 3.1, obtenida con la formulación Restringida, empleando 70 funciones base. $F=4\text{Ghz}$, $\epsilon_r=10$, $\mu_r=10$.

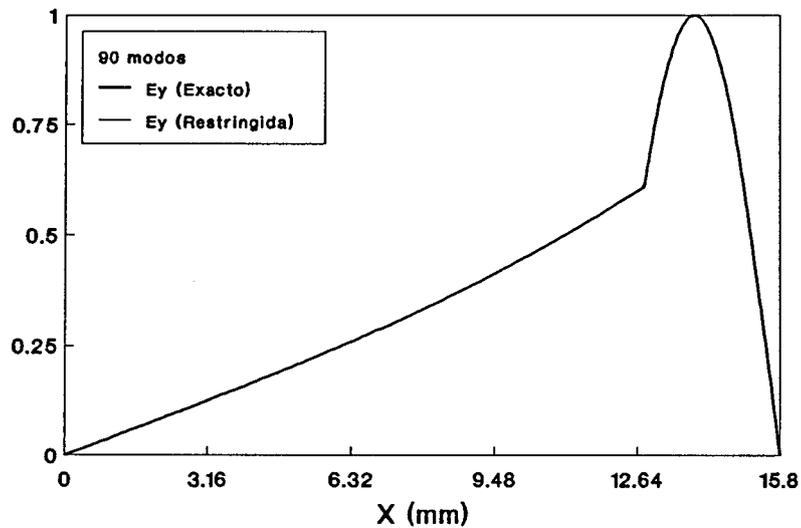


Figura 3.9.- Variación de la componente E_y con la coordenada "x", para la estructura de la figura 3.1, obtenida con la formulación Restringida, empleando 90 funciones base. $F=4\text{Ghz}$, $\epsilon_r=10$, $\mu_r=10$.

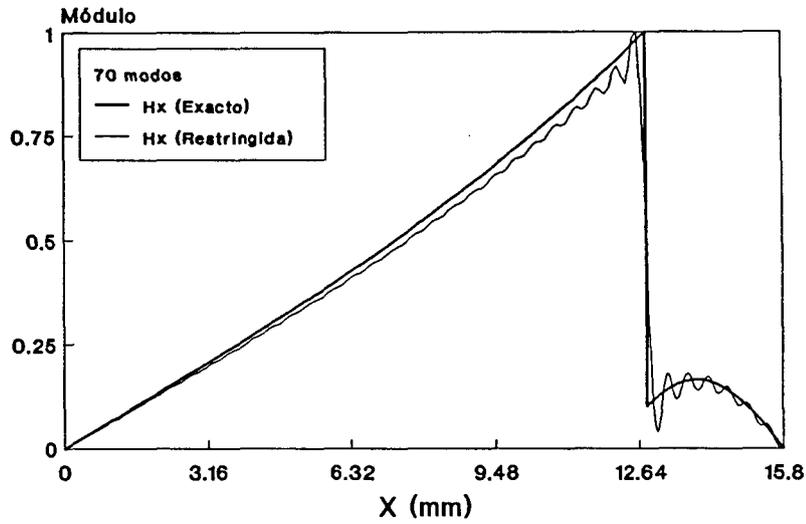


Figura 3.10.- Variación de la componente H_x con la coordenada " x ", para la estructura de la figura 3.1, obtenida con la formulación Restringida, empleando 70 funciones base. $F=4\text{Ghz}$, $\epsilon_r=10$, $\mu_r=10$.

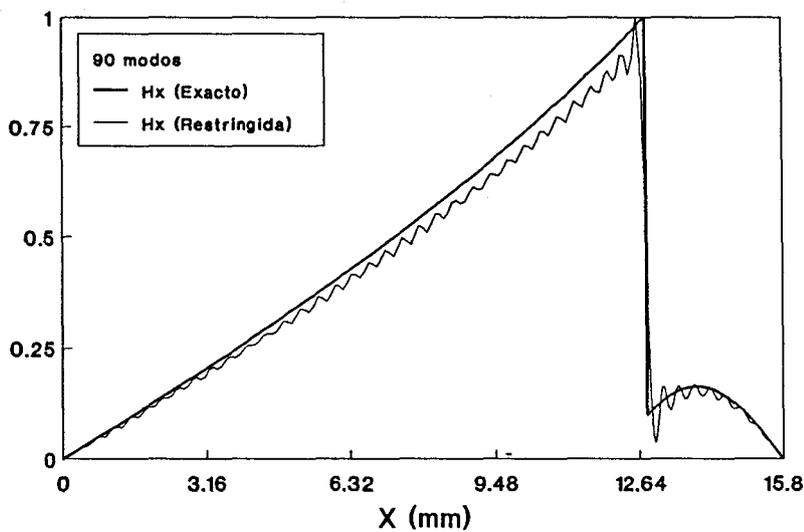


Figura 3.11.- Variación de la componente H_x con la coordenada " x ", para la estructura de la figura 3.1, obtenida con la formulación Restringida, empleando 90 funciones base. $F=4\text{Ghz}$, $\epsilon_r=10$, $\mu_r=10$.

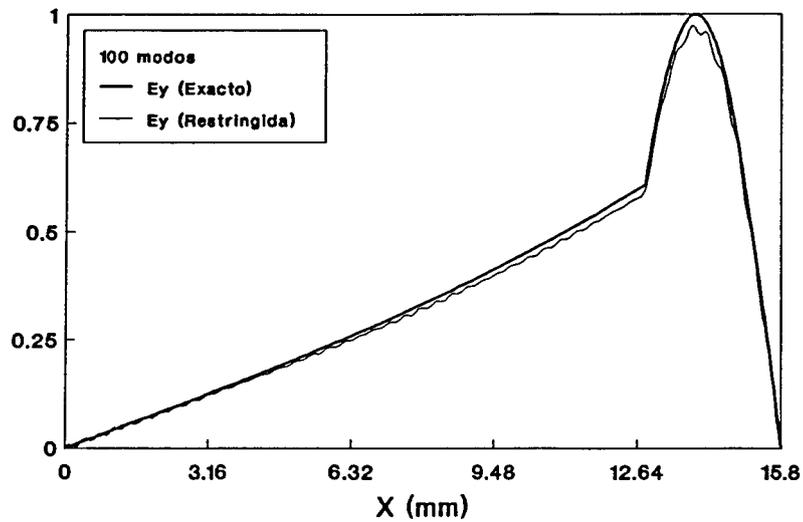


Figura 3.12.- Variación de la componente E_y con la coordenada "x", para la estructura de la figura 3.1, obtenida con la formulación Restringida, empleando 100 funciones base. $F=4\text{Ghz}$, $\epsilon_r=10$, $\mu_r=10$.

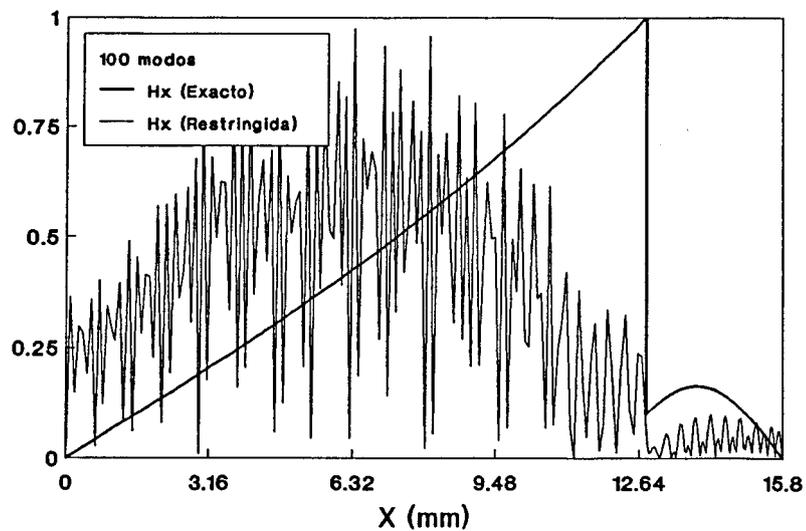


Figura 3.13.- Variación de la componente H_x con la coordenada "x", para la estructura de la figura 3.1, obtenida con la formulación Restringida, empleando 100 funciones base. $F=4\text{Ghz}$, $\epsilon_r=10$, $\mu_r=10$.

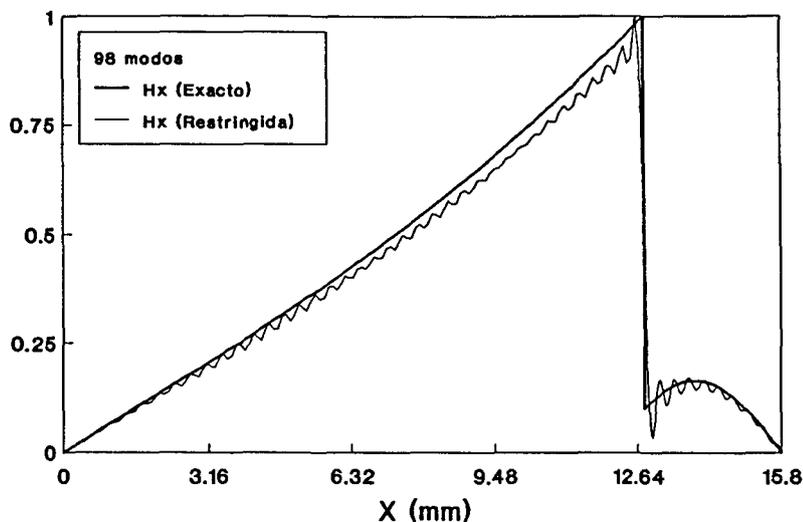


Figura 3.14.- Variación de la componente H_x con la coordenada "x", para la estructura de la figura 3.1, obtenida con la formulación Restringida, empleando 98 funciones base. $F=4\text{Ghz}$, $\epsilon_r=10$, $\mu_r=10$.

3.4 VALIDEZ DE LAS DISTINTAS FORMULACIONES

3.4.1 MEDIOS ISOTROPOS

3.4.1.1 Comparación con soluciones analíticas exactas

En el capítulo anterior se indicó que la formulación de modos acoplados que emplea los modos de la guía vacía para obtener las componentes longitudinales del campo, no da resultados correctos cuando se aplica a estructuras con valores de μ bastante mayores que el correspondiente al vacío. Este caso se presentará siempre que se pretenda resolver una guía que contenga ferritas en una zona de frecuencia cercana a la de resonancia. En este apartado vamos a presentar resultados que confirman este hecho. Para ello se ha resuelto una estructura como la de la figura 3.1.

En las figuras 3.15-3.19 se presentan las constantes de propagación normalizadas al número de onda en el vacío para los 5 primeros modos, correspondientes a una estructura dieléctrica isotrópica en lámina pegada a la

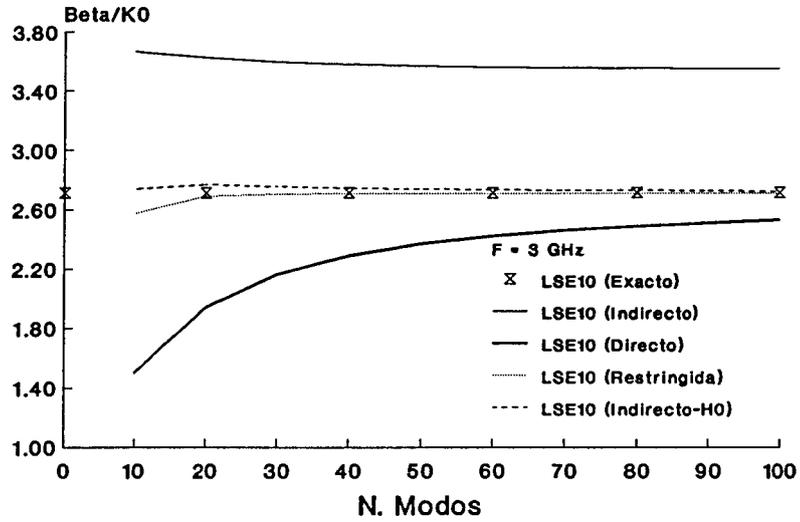


Figura 3.15.- Variación de la constante de fase del modo LSE_{10} en función del número de modos, para las distintas formulaciones. $F=3\text{GHz}$, $\epsilon_r=15$, $\mu_r=15$.

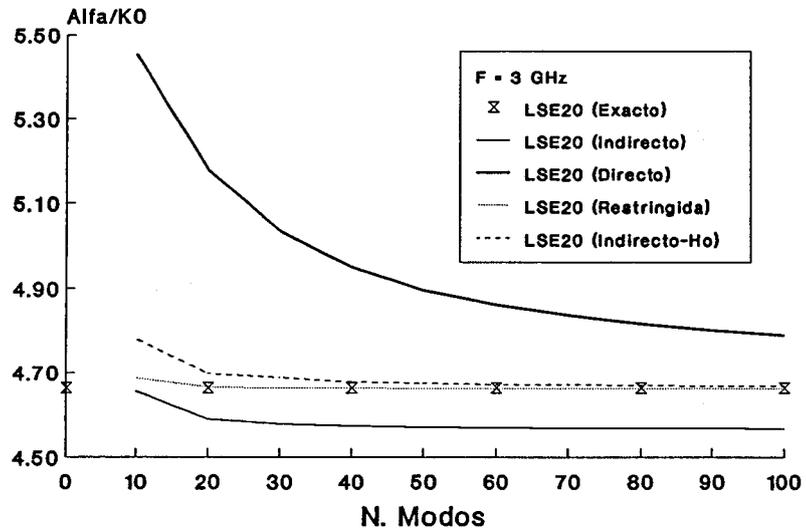


Figura 3.16.- Variación de la constante de atenuación del modo LSE_{20} en función del número de modos, para las distintas formulaciones. $F=3\text{GHz}$, $\epsilon_r=15$, $\mu_r=15$.

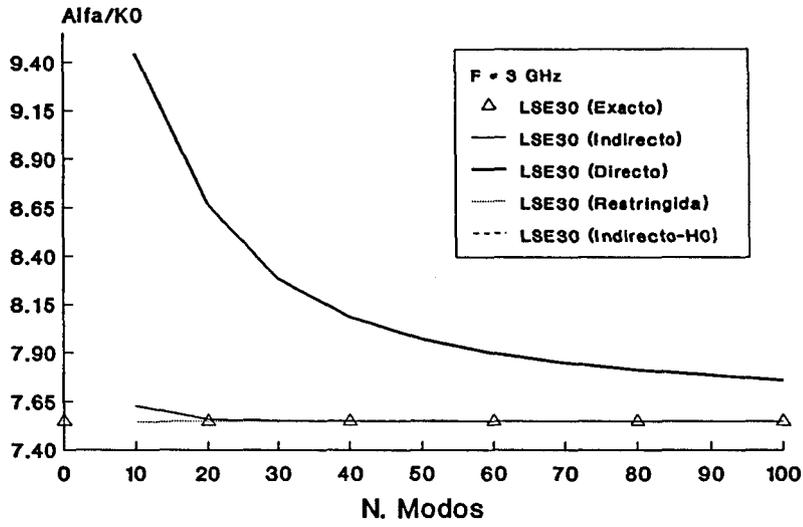


Figura 3.17.- Variación de la constante de atenuación del modo LSE_{30} en función del número de modos, para las distintas formulaciones. $F=3\text{GHz}$, $\epsilon_r=15$, $\mu_r=15$.

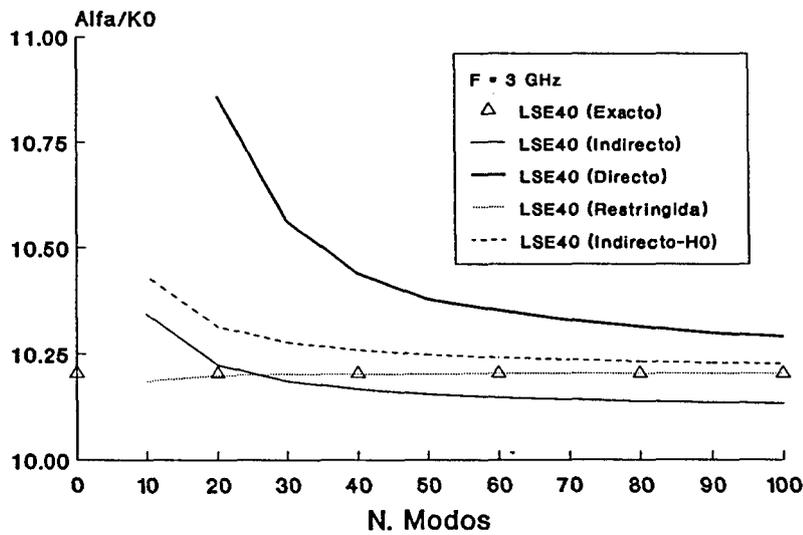


Figura 3.18.- Variación de la constante de atenuación del modo LSE_{40} en función del número de modos, para las distintas formulaciones. $F=3\text{GHz}$, $\epsilon_r=15$, $\mu_r=15$.

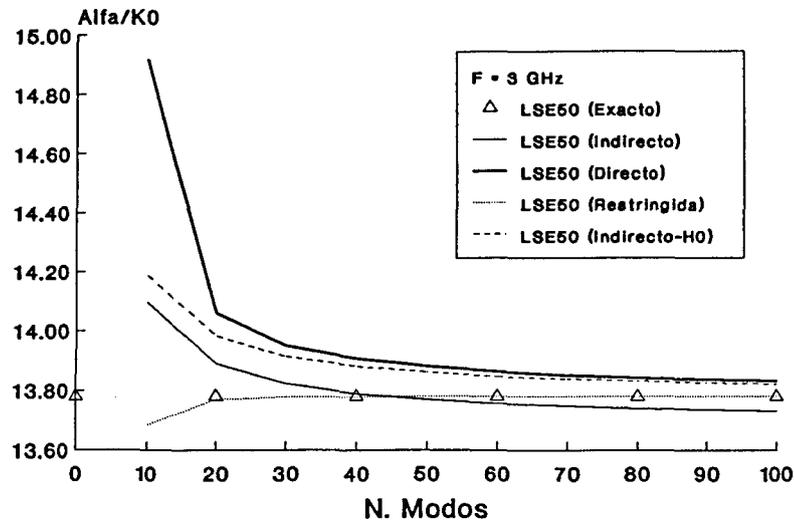


Figura 3.19.- Variación de la constante de atenuación del modo LSE_{50} en función del número de modos, para las distintas formulaciones. $F=3\text{GHz}$, $\epsilon_r=15$, $\mu_r=15$.

pared estrecha del contorno metálico (figura 3.1). La lámina tiene permitividad y permeabilidad relativas igual a 15, y la frecuencia de operación es de 3 GHz. En todos los casos el espesor de la lámina es de 3 mm. y el contorno metálico externo el de banda Ka (15.8x7.9mm.). En cada figura, se representan 4 líneas correspondientes a los valores obtenidos por las formulaciones directa, indirecta, indirecta con solución trivial (rotulada como indirecta-H0) y restringida; los puntos individuales corresponden a los valores de β/K_0 o α/K_0 obtenidos al resolver la estructura analíticamente mediante modos LSE (y que, lógicamente, no dependen del número de funciones base). No se representan valores para la formulación directa con H_0 porque, en este caso, y como se puede comprobar examinando las ecuaciones correspondientes, la introducción del término H_0 no tiene influencia alguna sobre los valores obtenidos para las constantes de propagación. Las funciones base escogidas corresponden a modos de tipo TE_{n0} ; así se obtienen modos de tipo LSE_{n0} correspondientes a la estructura dieléctrica. El motivo de elegir este tipo de modos es el de poder comparar las formulaciones generales con la restringida, válida únicamente para modos del tipo mencionado. Observando las

figuras, se aprecia que la formulación restringida lleva a una rápida convergencia al valor exacto, como resulta lógico de lo explicado en el capítulo anterior.

Se puede observar como, en casi todos los casos, la formulación indirecta no da buenos resultados, obteniéndose diferencias apreciables respecto al valor exacto que pueden llegar al 30%. Además, también se observa por la tendencia de las curvas que, no por aumentar el número de modos parece que se consiga una mejor aproximación al valor exacto, contrariamente a lo que sucede con la formulación directa, en la que un aumento del número de funciones base da lugar a un resultado más próximo al exacto. De todas maneras, está claro que con los métodos directo e indirecto tradicionales no se consigue una buena convergencia. La razón para ello es que el conjunto de funciones base empleado para desarrollar en serie las componentes longitudinales del campo no es completo. Ello se demuestra si se observa la figura 3.20a, en donde se ha representado la componente H_z , empleando 25 modos, obtenida con la formulación indirecta, comparándola con la obtenida analíticamente. Se ve que la diferencia entre ambas es importante. Además, no por aumentar el número de funciones base se consigue aproximar la variación de H_z al valor exacto. Sin embargo, si calculamos la componente H_z empleando la formulación indirecta incluyendo el término H_0 (figura 3.20b) se observa que con sólo 25 funciones se consigue reproducir la variación de H_z con suficiente precisión. Se obtienen resultados en el mismo sentido con las formulaciones directas.

Confirmando la discusión hecha en el capítulo anterior, se puede concluir que la formulación indirecta con el término H_0 produce resultados correctos en la determinación tanto de las constantes de propagación como de las componentes de los campos. La formulación directa presenta una convergencia muy lenta en el cálculo de las constantes de propagación.

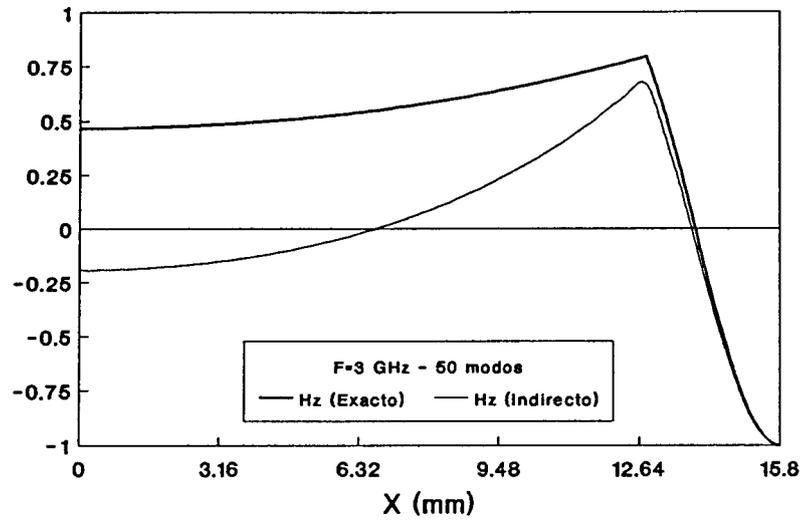


Figura 3.20a.- Variación de la componente H_z con la coordenada "x" obtenida con la formulación indirecta, empleando 50 modos base. $F=3\text{GHz}$, $\epsilon_r=15$, $\mu_r=15$.

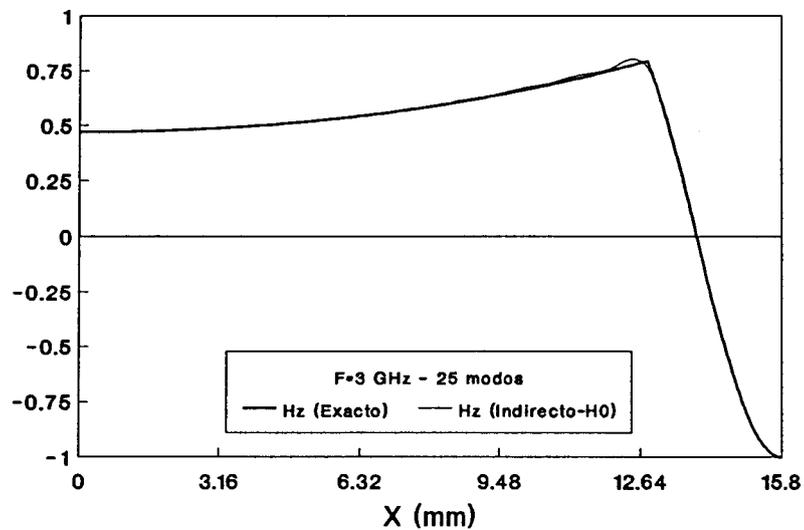


Figura 3.20b.- Variación de la componente H_z con la coordenada "x" obtenida con la formulación indirecta con H_0 , empleando 25 modos base. $F=3\text{GHz}$, $\epsilon_r=15$, $\mu_r=15$.

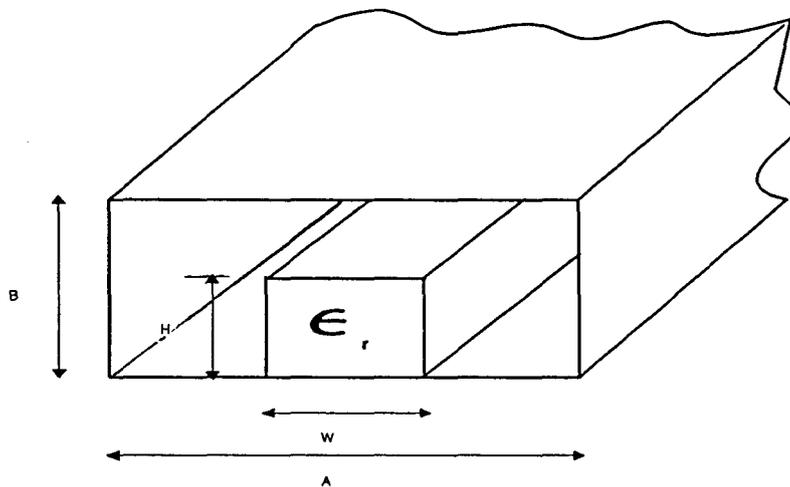


Figura 3.21.- Guía imagen apantallada. Dim (mm.), $A=15.8$, $B=7.9$.

3.4.1.2 Comparación con resultados en guía imagen

Para finalizar con la parte correspondiente a medios isótropos, se han realizado comparaciones con estructuras que contienen discontinuidades en las dos direcciones transversales. Para ello se ha elegido una estructura en guía imagen apantallada en banda Ka (15.8x7.9mm.), (figura 3.21) con constante dieléctrica relativa ϵ_r y permeabilidad μ_0 , comparando los resultados para las constantes de propagación con los obtenidos por Strube y Arndt [12]. Para resolver medios dieléctricos de este tipo ($\epsilon = \epsilon_r \epsilon_0$ y $\mu = \mu_0$) las formulaciones realizadas con desarrollo modal clásico y con el desarrollo incluyendo la solución trivial para los modos TE son idénticas, porque el término H_0 es nulo. Por tanto, para estructuras del tipo de las mostradas originalmente en [13] o posteriormente en [8-10], el nuevo desarrollo aquí mostrado no introduce modificación alguna, y los resultados que mostraremos se corresponden con el desarrollo clásico.

Los modos que soporta una estructura de este tipo son de carácter híbrido, aunque siguiendo la notación de [12] se pueden clasificar en modos de tipo EH_{nm} en donde las componentes E_y , E_z y H_x dominan, y modos HE_{nm} donde las componentes dominantes son E_x , H_y y H_z . Recordemos una vez más que en el método indirecto y, para esta estructura particular, se desarrolla la

componente axial D_z en función de $\epsilon_r E_z$ (desarrollo "correcto"), mientras que en la formulación directa se desarrolla D_z/ϵ_r en función de E_z (desarrollo "incorrecto"). No existe problema alguno con la componente axial H_z (B_z) pues $\mu=\mu_0$. Por tanto para los modos HE las dos formulaciones deben dar resultados similares (la componente E_z no es dominante), mientras que para los modos EH, al ser E_z una componente dominante, los resultados deben diferir (a no ser que se consideren un gran número de modos); esta diferencia no significa que el método directo proporcione resultados erróneos, en el sentido de no converger hacia el valor correcto, sino que, a diferencia de lo asegurado en [14], la convergencia se alcanza con un mayor número de modos. Todo esto se muestra en las figuras 3.22-3.25, donde se dibuja la variación la constante de propagación para los primeros modos en una guía imagen de $\epsilon_r=20$, altura 3.2 mm. y anchura 3.45 mm., comparando los resultados con los obtenidos en [12]. Las dos primeras figuras se han obtenido con 30 modos (seleccionados por frecuencias de corte) y las dos siguientes con 80 modos. Se observa como en los modos EH las diferencias entre ambas formulaciones son grandes mientras que para los modos HE las discrepancias no son tan acusadas. Por otro lado, al aumentar el número de modos a 80, las diferencias en los modos EH se hacen menores, lo cual muestra que la convergencia es más lenta pero no incorrecta. Los resultados concuerdan perfectamente con los obtenidos en [12], especialmente si se emplean 80 modos base. Hay que tener en cuenta que la selección de modos para obtener estos resultados no es muy eficiente, pero se utiliza para obtener todos los modos, independientemente del tipo de excitación y así poder comparar con los mostrados en [12]. Cuando se buscan modos con determinadas simetrías, la convergencia es mucha más rápida. Más adelante comentaremos la aparición de modos complejos en guías isótropas.

Como conclusión podemos afirmar que, para medios isótropos y cuando $\mu>1$, las formulaciones originales de modos acoplados que utilizan los modos de la guía vacía como funciones base proporcionan resultados erróneos, por lo que es necesario recurrir a las formulaciones directa e indirecta con H_0 . A la luz de los resultados anteriores, la formulación indirecta con el término H_0 presenta, en general, una mejor convergencia que la formulación directa, por lo que será la utilizada para el análisis de medios isótropos. Además, cuando la estructura a estudiar se pueda caracterizar mediante la formulación restringida su utilización es lo más conveniente y eficiente.

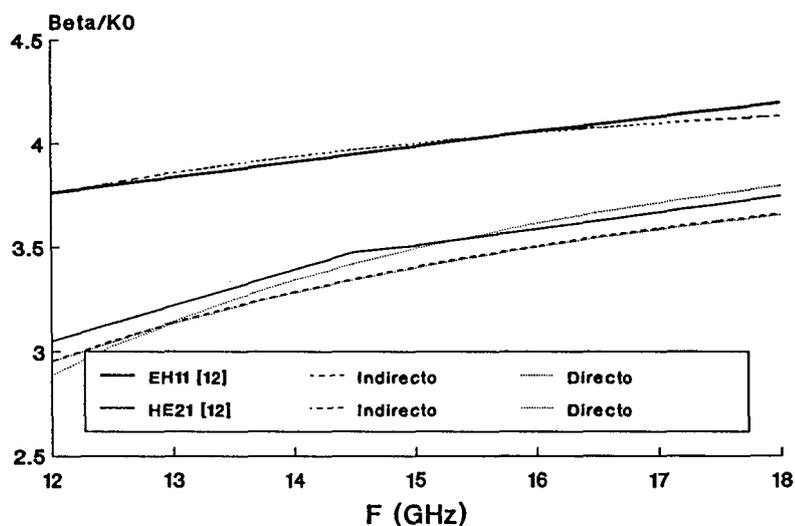


Figura 3.22.- Diagrama de dispersión correspondiente a la estructura de la figura 3.21, obtenido con las formulaciones directa e indirecta. Dim. mm., $W=3.45$, $H=3.2$, $\epsilon_r=20$. (30 modos base)

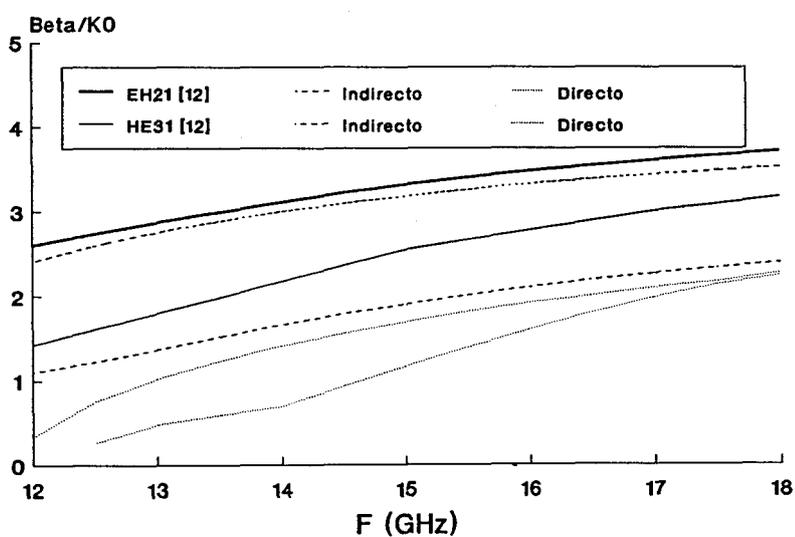


Figura 3.23.- Diagrama de dispersión correspondiente a la estructura de la figura 3.21, obtenido con las formulaciones directa e indirecta. Dim. mm., $W=3.45$, $H=3.2$, $\epsilon_r=20$. (30 modos base)

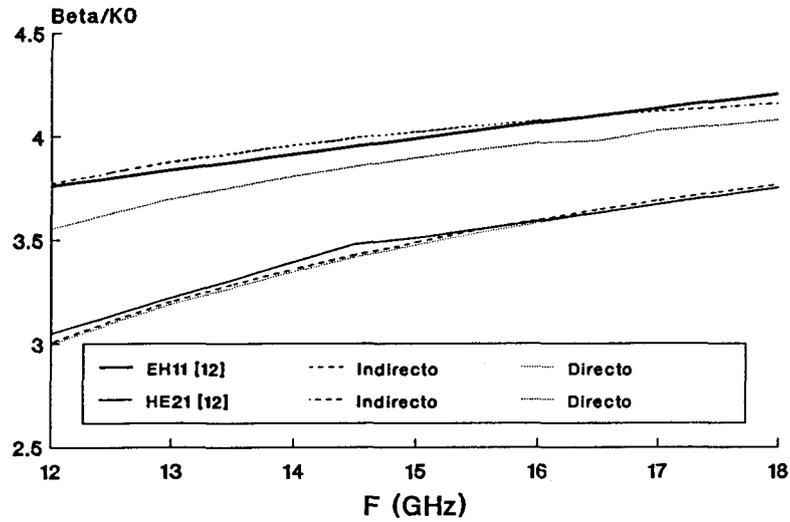


Figura 3.24.- Diagrama de dispersión correspondiente a la estructura de la figura 3.21, obtenido con las formulaciones directa e indirecta. Dim. mm., $W=3.45$, $H=3.2$, $\epsilon_r=20$. (80 modos base)

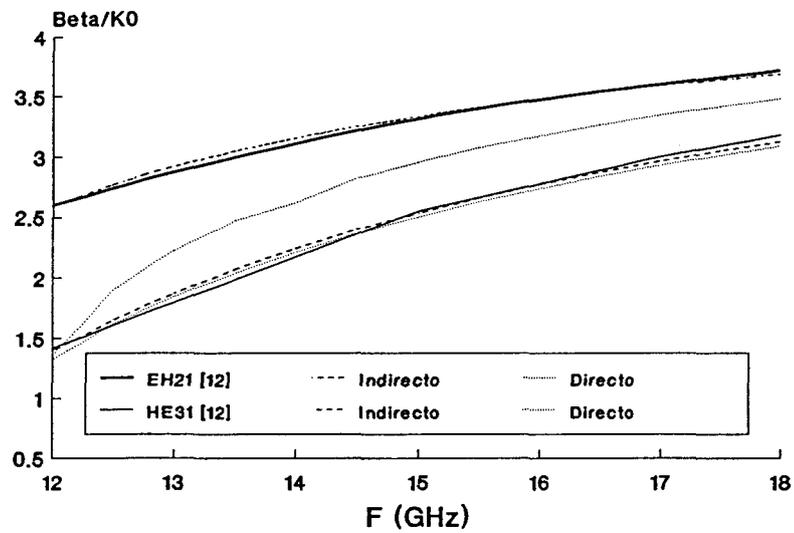


Figura 3.25.- Diagrama de dispersión correspondiente a la estructura de la figura 3.21, obtenido con las formulaciones directa e indirecta. Dim. mm., $W=3.45$, $H=3.2$, $\epsilon_r=20$. (80 modos base)

3.4.1.3 Modos complejos

El estudio de modos complejos en guías parcialmente llenas con dieléctricos ha constituido en los últimos años un tema de gran interés. La mayor parte de los métodos analíticos empleados presenta grandes dificultades cuando se pretende encontrar las soluciones correspondientes a los modos complejos, por lo que normalmente se dedica una gran esfuerzo a predecir qué tipo de guías pueden presentar modos complejos y, dadas las dimensiones de una estructura, determinar a priori el margen de frecuencia en el que se pueden encontrar. Cualquiera de las formulaciones del método de modos acoplados es capaz de encontrar directamente resultados para modos complejos, sin necesidad de analizar su posible existencia previa y sin dificultad numérica añadida.

Con objeto de mostrar la aparición de modos complejos en estructuras isotropas sin pérdidas, en la figura 3.26 se representa la variación de la constante de propagación normalizada al número de onda en el vacío k_0 en función de la permitividad relativa ϵ_r del dieléctrico, para una guía imagen isotropa de anchura 6.9 mm. y altura 3.2mm., en banda Ka. La frecuencia de operación es 14 GHz. En esta figura, se puede ver la aparición de modos complejos, aún siendo la estructura isotropa. La representación en función de la permitividad se puede considerar como un diagrama de dispersión (levemente distorsionado), ya que incrementar ϵ_r es como aumentar la frecuencia de forma no lineal. Observando la figura 3.26, el proceso de aparición de un modo complejo se puede explicar como sigue: dos modos evanescentes se "juntan" en un determinado punto de frecuencia (o permitividad), dando lugar a la aparición de un modo con constantes de fase y atenuación no nulas; el proceso continúa hasta un punto en que la constante de atenuación se anula, obteniéndose dos modos en propagación; uno de ellos tiene un comportamiento electromagnético "usual" y el otro no, ya que su constante de fase disminuye con la permitividad (o la frecuencia). Es lo que se llama onda "backward". Como se puede observar en la figura 3.26, el método utilizado por Arndt [12] y el de modos acoplados da resultados análogos para los modos complejos, excepto para la onda "backward" donde hay una leve discrepancia. Para los demás modos la concordancia es excelente.

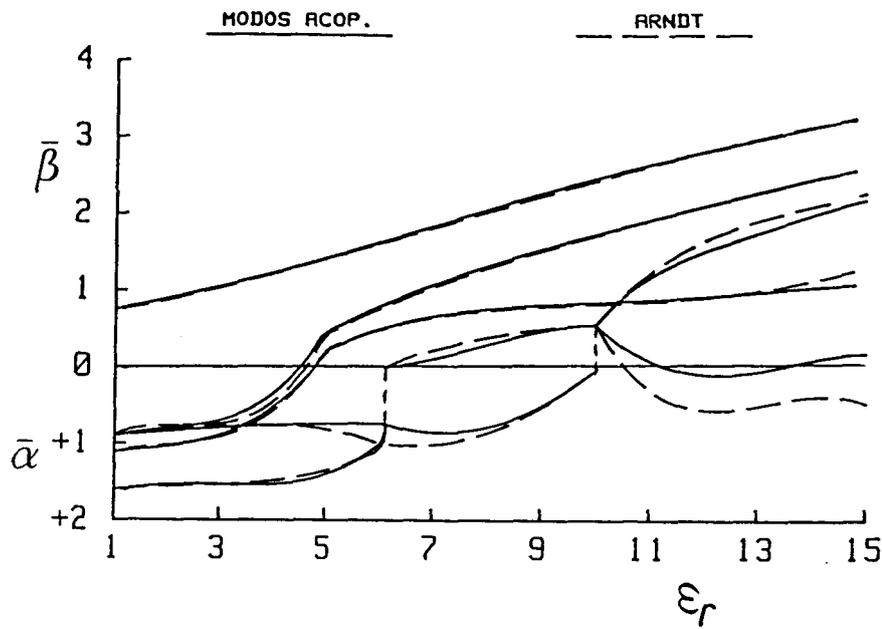


Figura 3.26.- Variación de las constantes de propagación de los primeros modos, en función de ϵ_r , correspondiente a la estructura de la figura 3.21. Formulación indirecta. Dim. mm., $W=6.9$, $H=3.2$, $\epsilon_r=20$, $F=14$ GHz, (30 modos base)

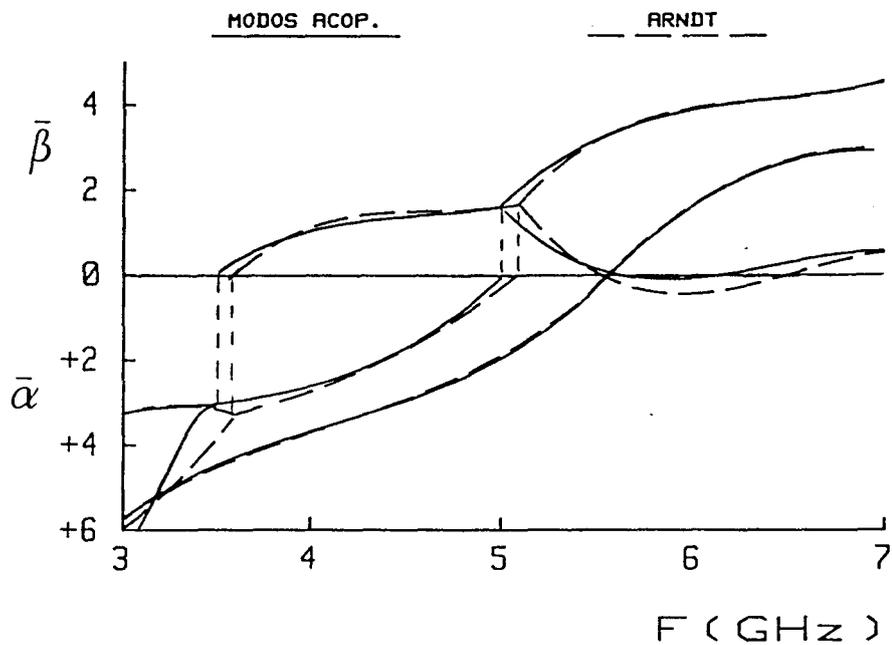


Figura 3.27.- Diagrama de dispersión correspondiente a la estructura de la figura 3.21. Formulación indirecta. Dim. mm., $W=6.9$, $H=3.2$, $\epsilon_r=37$. (30 modos base)

La zona de aparición de modos complejos en estructuras isótropas no está limitada a aquella parte del diagrama de dispersión en que existan modos en propagación, sino que pueden existir en zonas de frecuencia inferiores a la de corte, dependiendo, sobre todo, de la permitividad del medio. En la figura 3.27 se puede ver un caso de este tipo, para una guía imagen, de las mismas dimensiones a la de la figura 3.26 y de permitividad relativa alta ($\epsilon_r=37$). La frecuencia de corte para esta estructura es de alrededor de 5 GHz, pero en zonas de frecuencia más bajas la guía puede soportar un modo complejo, que es precisamente el que da lugar al modo fundamental. De nuevo la concordancia entre el método de modos acoplados y el presentado en [12] es bastante buena.

3.5 MEDIOS ANISOTROPOS

3.5.1 Comparación con soluciones analíticas exactas

El siguiente paso es comprobar si lo afirmado para el caso isótropo puede mantenerse para estructuras anisótropas. Para poder comparar con resultados exactos, se ha realizado un programa que resuelve una guía como la mostrada en la figura 3.28 por un método analítico sencillo [15], y que se basa en suponer que los campos no varían con la coordenada "y", y que sólo hay componentes E_y , H_x y H_z . En la tabla 3.1 se resumen las características de las estructuras anisótropas empleadas en las figuras de este apartado.

En la figuras 3.29a, 3.29b se muestra la convergencia de la constante de fase del modo que viaja según "z" positivo (β_+) y del que viaja según "z" negativo (β_-) en función del número de modos base empleados (TE_{n0}), para una estructura como la de la figura 3.28; la caja externa corresponde a la banda X (22.86x10.16mm). En cada figura se muestran 5 líneas correspondientes a las 5 formulaciones y los triángulos que corresponden a la solución analítica exacta. Se observa que, como era de esperar, la formulación restringida proporciona una convergencia excelente en la constante de fase, con un error menor del 0.1% empleando 30 modos. Las formulaciones con H_0 convergen más rápidamente que las formulaciones con desarrollo modal clásico, aunque éstas últimas no presentan un excesivamente mal comportamiento, especialmente en lo que se refiere al modo según "z" negativo; esto es lógico pues los valores de κ y μ no son muy altos, es decir, nos encontramos fuera de la resonancia. La formulación directa con el término H_0 presenta una convergencia ligeramente

superior a la de la formulación indirecta, pero para un número de modos superior a 50 la diferencia es mínima.

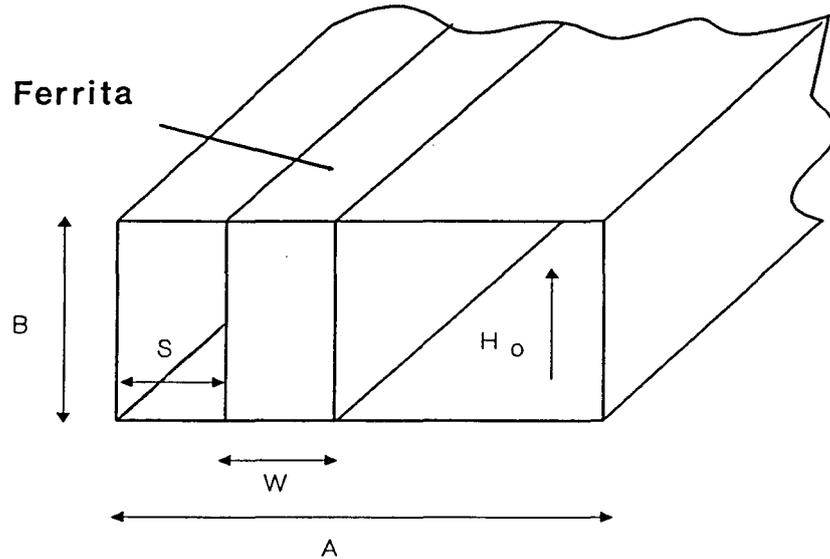


Figura 3.28.- Lámina de ferrita vertical magnetizada en la dirección "y". Dim. mm., A=22.86, B=10.16.

	ϵ_r	W(mm)	S(mm)	$4\pi M_s$ (Gauss)	H_0 (Oers)	F(GHz)	μ	κ
Figs. 3.29	10	1	3	3000	1000	9	1.033	.68
Figs. 3.30	15	3	0			4	15	10
Figs. 3.31	15	1	3	5000	4000			
Figs. 3.32	12.5 - -j.006	1.5	2.5			9.3	.5 - -j.03	1 + +j.03

Tabla 3.1. Características de las figuras del apartado 3.5.

μ es la componente del tensor $[\mu]$ en la diagonal principal

κ es la componente del tensor $[\mu]$ fuera de la diagonal principal

Para observar que sucedería cerca de la resonancia de la ferrita (valores de κ y μ altos), se ha realizado una prueba sobre una estructura en lámina igual a la empleada para el estudio de convergencia en láminas

isótropas. Para ello empleamos una lámina dieléctrica (ferrita) con permitividad relativa 15 y la sometemos a un campo magnético estático externo en la dirección "y" en sentido positivo, de tal manera que las componentes del tensor permeabilidad sean $\kappa=10$ y $\mu=15$. El contorno metálico es el de banda Ka (15.8x7.9mm.). Los resultados obtenidos se pueden ver en las figuras 3.30a, 3.30b. Se observa que las formulaciones directa e indirecta con desarrollo en modos de la guía vacía proporcionan resultados bastante alejados del exacto, produciéndose una situación del todo similar a la que tenía lugar en las guías isótropas. En la tabla 3.2 se muestran los errores (con 100 modos) en tanto por ciento respecto al valor exacto, para los casos de las figuras 3.29 y 3.30, correspondientes a los 5 métodos.

Errores %	Gráficas 3.29		Gráficas 3.30	
	β_+	β_-	β_+	β_-
Directo	2.63	0.41	12.1	28
Indirecto	3.09	0.44	21.8	16.2
Directo-H0	.66	0.37	0.9	0.5
Indirecto-H0	0.91	0.41	3.2	5.4
Restringido	2.5E-3	2.2E-3	7E-3	3E-3

Tabla 3.2.- Diferencia porcentual para láminas de ferrita verticales

En las figuras 3.31a y 3.31b se muestra el diagrama de dispersión (para los modos progresivos y regresivos) para la estructura indicada en la tabla 3.1, en el interior de una guía de banda X. Sólo se han empleado las formulaciones restringida y directa e indirecta, ambas con el término H_0 , con 50 funciones base (tipo TE_{n0}). Se observa el excelente resultado de la formulación restringida. Las otras dos formulaciones dan resultados bastante aproximados y se aleja ligeramente en aquellos puntos de frecuencia donde las componentes del tensor (μ y K_a , en las figuras) adquieren valores excesivamente altos. Esta zona corresponde a la de resonancia de la lámina de ferrita.

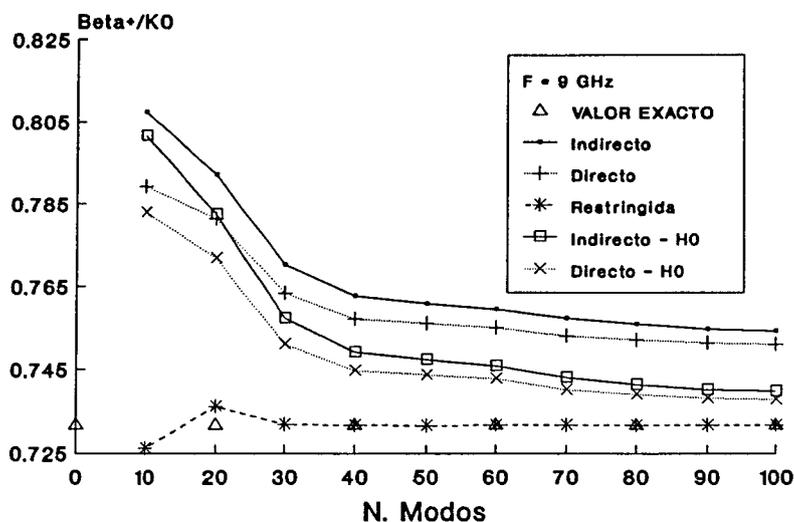


Figura 3.29a.- Constante de fase para el modo según "z" positivo en función del número de modos, correspondiente a la estructura de la figura 3.28, para las distintas formulaciones. Dimensiones: ver tabla 3.1.

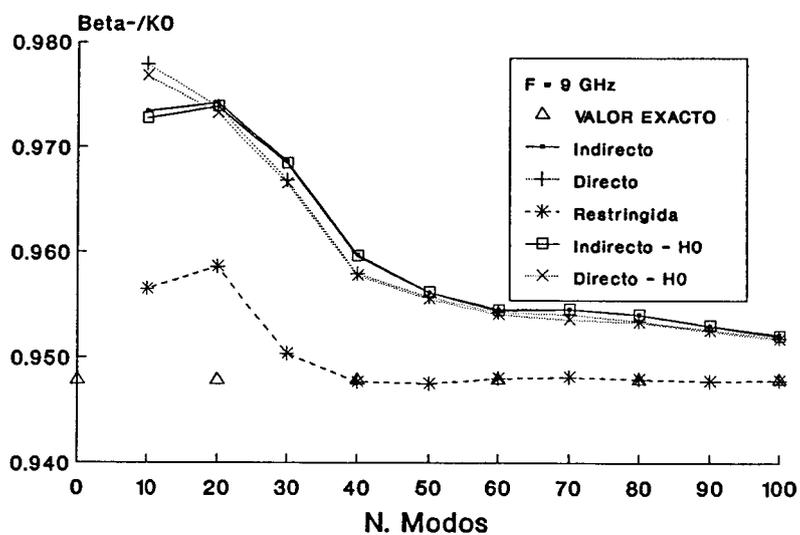


Figura 3.29b.- Constante de fase para el modo según "z" negativo en función del número de modos, correspondiente a la estructura de la figura 3.28, para las distintas formulaciones. Dimensiones: ver tabla 3.1.

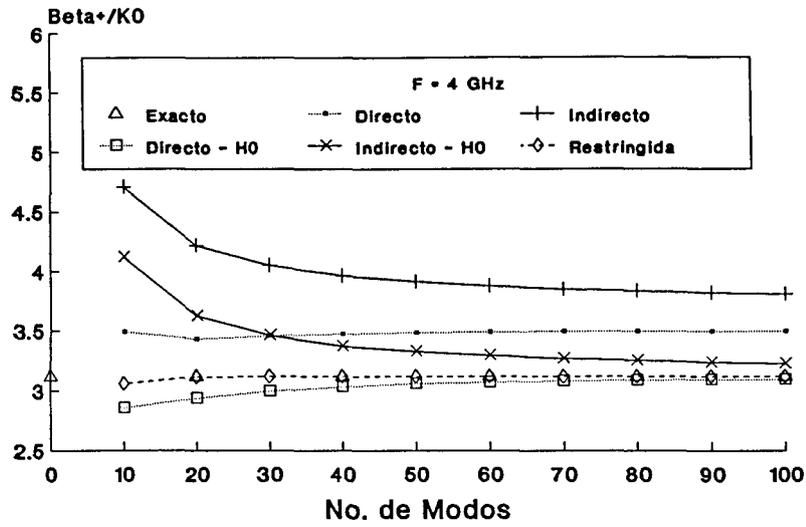


Figura 3.30a.- Constante de fase para el modo según "z" positivo en función del número de modos, correspondiente a la estructura de la figura 3.28, para las distintas formulaciones. Dimensiones: ver tabla 3.1.

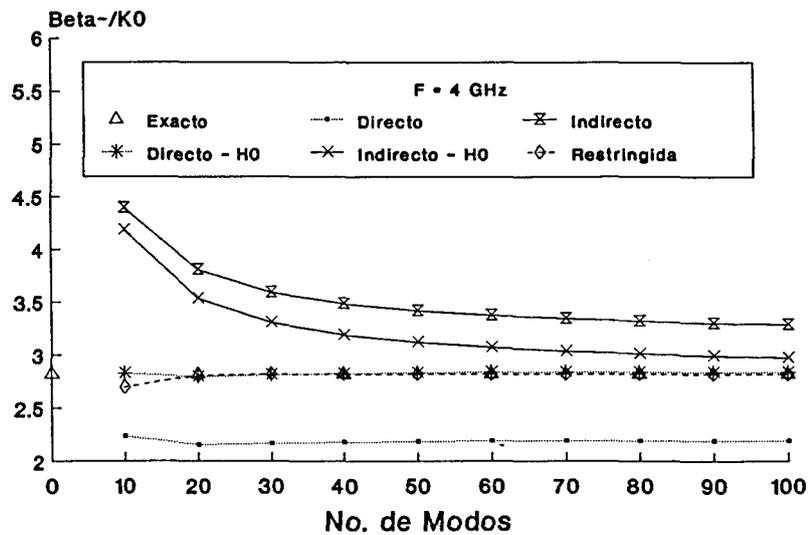


Figura 3.30b.- Constante de fase para el modo según "z" negativo en función del número de modos, correspondiente a la estructura de la figura 3.28, para las distintas formulaciones. Dimensiones: ver tabla 3.1.

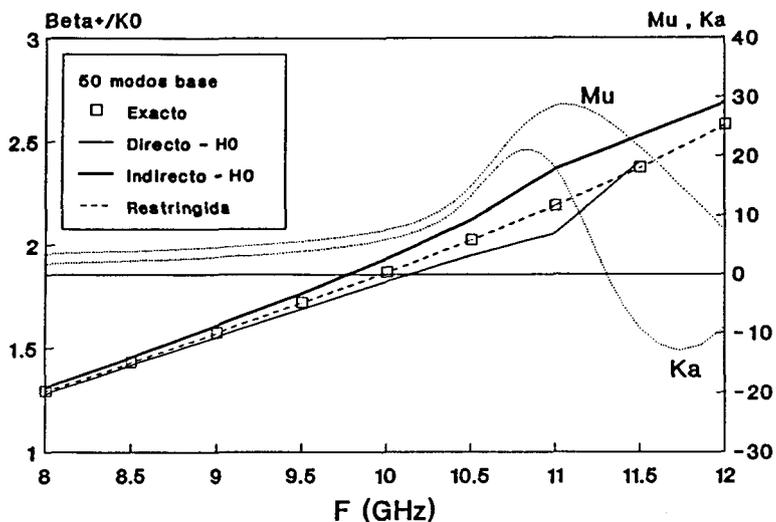


Figura 3.31a.- Digrama de dispersión (modo según "z" positivo) para la estructura de la figura 3.28, utilizando las formulaciones directa e indirecta con H_0 y restringida. Dimensiones: ver tabla 3.1.

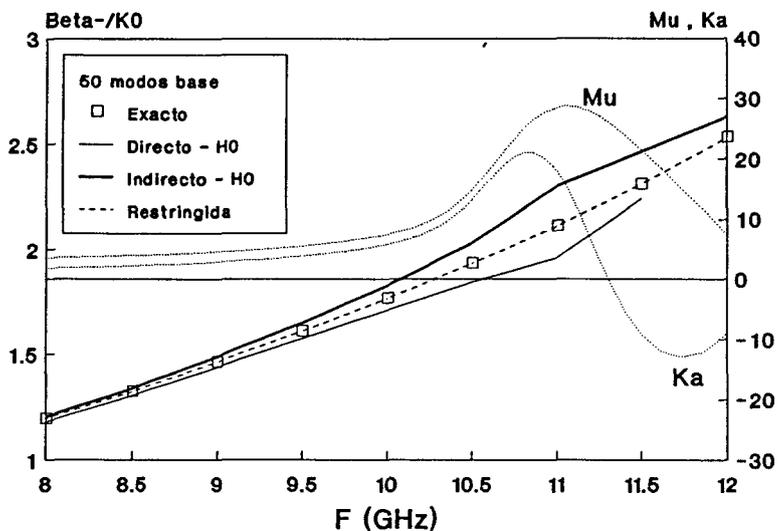


Figura 3.31b.- Digrama de dispersión (modo según "z" negativo) para la estructura de la figura 3.28, utilizando las formulaciones directa e indirecta con H_0 y restringida. Dimensiones: ver tabla 3.1.

Por último, vamos a ver la precisión obtenida en la caracterización de estructuras con pérdidas. Así, en las figuras 3.32a-3.32d se muestran resultados para la constante de fase β y la de atenuación α , en los dos sentidos de propagación, para una lámina de ferrita vertical con pérdidas, en el interior de una guía de 22.86×10.16 mm., en función del número de funciones base empleadas (tipo TE_{n0}). También en este caso sólo se han utilizado las formulaciones restringida y las dos con el término H_0 . Se observa la buena concordancia que se obtiene con la formulación restringida con sólo 30 modos.

De todo lo hasta aquí expuesto, parece claro que los métodos directo e indirecto originales, no son adecuados para estudiar guías de onda que contengan en su interior ferritas o dieléctricos isótropos con valores de permeabilidad altos. Además, en las estructuras en que se puede aplicar, es conveniente utilizar la formulación restringida, pues proporciona una convergencia excelente. En aquellas guías en que su aplicación no sea viable, las formulaciones directa e indirecta con la inclusión del término H_0 proporcionan resultados muy similares; la formulación indirecta produce una mayor precisión que la directa para ferritas con baja anisotropía en la zona de resonancia, mientras que la formulación directa proporciona mejores resultados cuando se estudian ferritas con alta anisotropía en la zona de resonancia. Teniendo en cuenta que las aplicaciones que se estudian en este trabajo utilizan ferritas fuera de la resonancia, utilizaremos principalmente la formulación indirecta con H_0 .

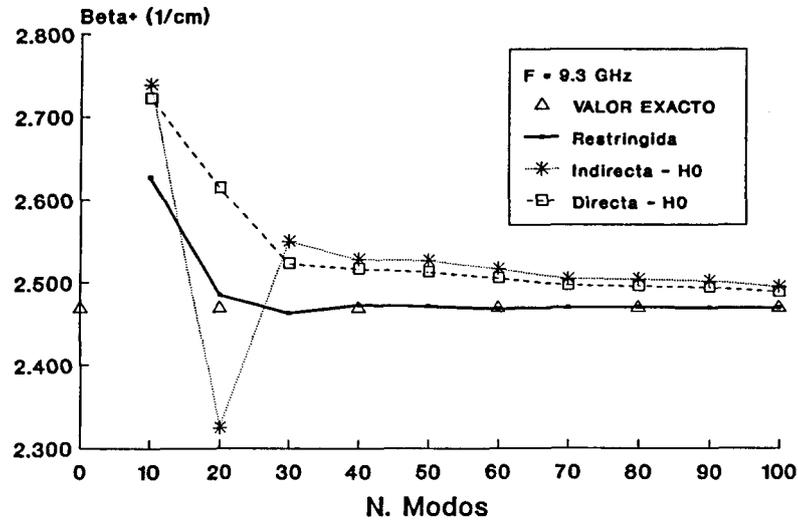


Figura 3.32a.- Constante de fase para el modo según "z" positivo en función del número de modos, correspondiente a la estructura de la figura 3.28, para las distintas formulaciones. Dimensiones: ver tabla 3.1.

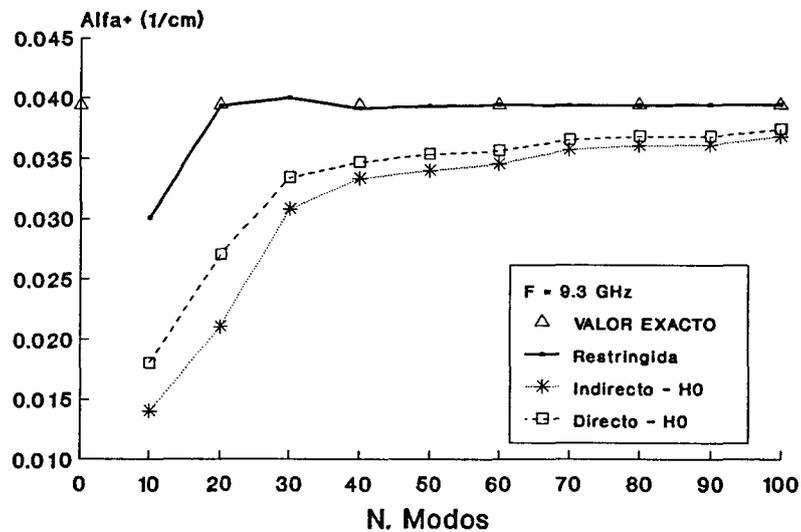


Figura 3.32b.- Constante de atenuación para el modo según "z" positivo en función del número de modos, correspondiente a la estructura de la figura 3.28, para las distintas formulaciones. Dimensiones: ver tabla 3.1.

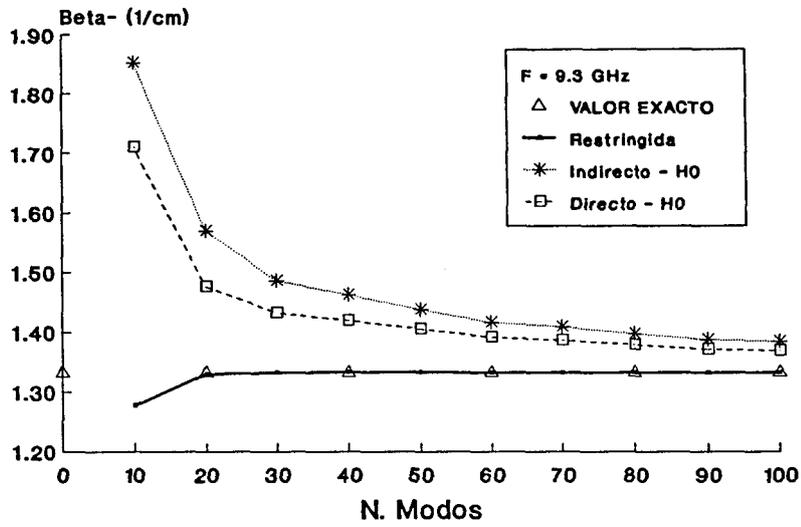


Figura 3.32c.- Constante de fase para el modo según "z" negativo en función del número de modos, correspondiente a la estructura de la figura 3.28, para las distintas formulaciones. Dimensiones: ver tabla 3.1.

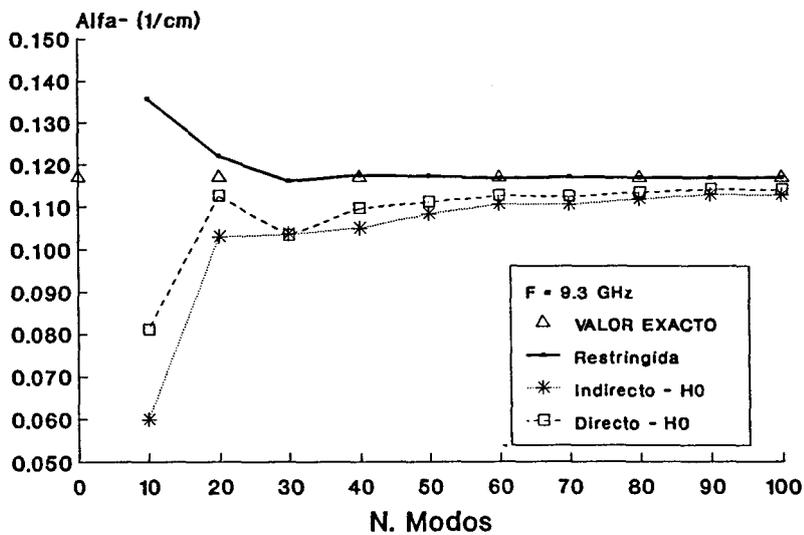


Figura 3.32d.- Constante de atenuación para el modo según "z" negativo en función del número de modos, correspondiente a la estructura de la figura 3.28, para las distintas formulaciones. Dimensiones: ver tabla 3.1.

3.6 APLICACION A DEFASADORES TOROIDALES DE FERRITA

Una de las aplicaciones del método aquí desarrollado, es la de diseñar y analizar elementos no recíprocos en guía de onda. Entre ellas, posiblemente las de aplicación más inmediata son los divisores de potencia variables y los cambiadores de fase. Estos son elementos críticos para la red de alimentación de los sistemas de antenas en satélites reconfigurables. Normalmente, estos elementos se construyen con materiales ferríticos en forma de toroide con objeto de disminuir la reluctancia.

El primer diseño de defasador empleando formas toroidales consiste en un toroide simple, con la posibilidad de incluir o no en la parte central un dieléctrico isótropo [2]. La estructura que parece ser óptima en cuanto al funcionamiento del defasador es la mostrada en la figura 3.33a, que consiste en dos toroides unidos por una lámina dieléctrica isótropa. El material de ferrita se encuentra magnetizado a la remanencia como se muestra en la figura 3.33b [7]. La predicción teórica de este dispositivo no se puede obtener exactamente mediante métodos analíticos, debido a que presenta discontinuidades en las dos direcciones transversales. Por ello se han estudiado modelos alternativos más simples, básicamente consistentes en modelar el doble toroide por láminas de ferrita magnetizadas vertical y alternativamente en sentido "y" positivo y negativo, de manera que cada sección de ferrita del toroide magnetizada verticalmente se sustituye por una lámina vertical de altura completa [2]. Las zonas con láminas magnetizadas horizontalmente, se sustituyen por aire o dieléctricos. Para la estructura resultante, que se muestra en la figura 3.33c se dispone de solución analítica, que corresponde a la explicada en los apartados anteriores y utilizada en esta memoria para realizar las comparaciones necesarias y ver la exactitud del método de modos acoplados. Obviamente, este modelo podría ser estudiado con gran exactitud mediante la formulación restringida, pues ya hemos visto la gran exactitud que proporciona para láminas de ferrita magnetizadas verticalmente. Como veremos posteriormente, al hacerlo se obtienen discrepancias con las medidas que oscilan en torno al 25%.

La razón para estas discrepancias es que en el modelo de láminas, la parte del toroide magnetizada horizontalmente no se tiene en cuenta. Pero la

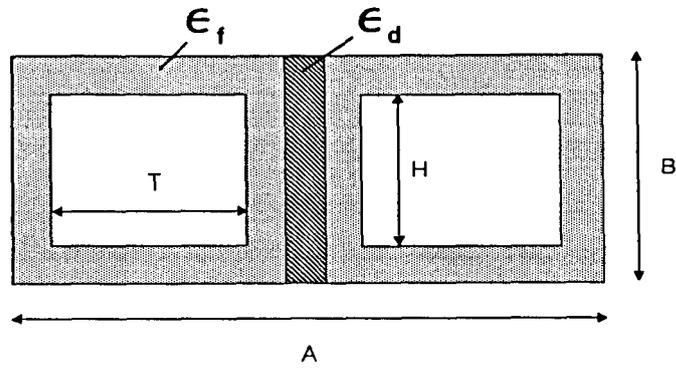
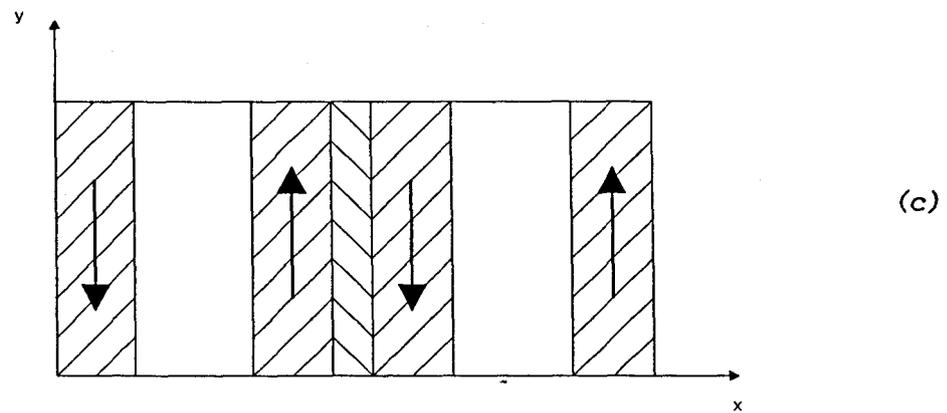
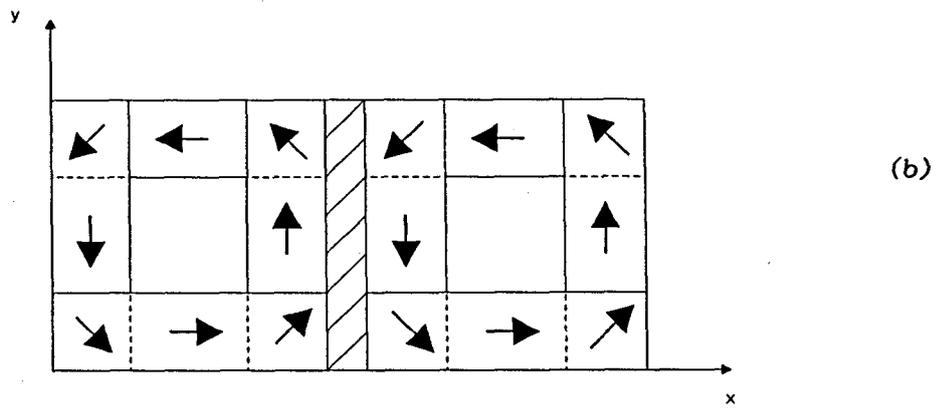


Figura 3.33a.- Defasador en forma de doble toroide de ferrita con separación dieléctrica.



Figuras 3.33b,c.- Dirección de magnetización y estructura en múltiples láminas equivalentes, respectivamente.

influencia decisiva es la eliminación del efecto que producen las esquinas de los toroides. En [2] se puede ver un modelo empírico para tener en cuenta la influencia de las esquinas empleando un principio variacional. El procedimiento consiste en suponer que en las zonas superior e inferior del toroide los campos son aproximadamente los mismos que en el modelo de láminas múltiples. Sustituyendo estos campos en una fórmula empírica con carácter variacional se obtiene una aproximación válida para la constante de propagación ya que, debido al carácter variacional de la expresión, el resultado es relativamente insensible a pequeños errores en las amplitudes de los campos. Los resultados que se obtienen así, para un toroide simple con dieléctrico interior de alta permitividad muestran un error del 23%. El mismo caso, pero con el interior aire, produce un error del 10%.

Una mejora al modelo anterior que proporciona mayor exactitud incluso para dieléctricos con alta permitividad, se debe a Hauth [4]. El proceso seguido es el de la técnica de adaptación modal, con la perturbación introducida en [2]. La dificultad de ambos métodos estriba en que es necesario realizar complicadas integraciones numéricas de componentes de campo sobre la superficie ocupada por las esquinas.

Otro tipo de método utilizado para resolver defasadores toroidales [3] se basa en estudiar un toroide simple mediante la aproximación de múltiples láminas y el uso del método de la resonancia transversal generalizada con matrices de transferencia. Sin embargo los resultados obtenidos no se comparan con los obtenidos con otros autores ni con medidas, por lo que es complicado conocer su grado de aproximación con la realidad.

Más recientemente han aparecido dos trabajos [5,6] donde se estudia el doble toroide de la figura 3.33a mediante el método de modos acoplados. La novedad introducida es considerar que el tensor de Polder es de la forma

$$[\mu] = \begin{bmatrix} \mu & 0 & j\kappa\gamma_y \\ 0 & \mu & j\kappa\gamma_x \\ j\kappa\gamma_y & j\kappa\gamma_x & \mu \end{bmatrix}$$

donde γ_x y γ_y son las proyecciones del vector unitario a lo largo de la

dirección de magnetización, sobre el eje "x" e "y", respectivamente; así, los factores γ_x y γ_y dependen de las coordenadas transversales de manera que

$$\gamma_x^2 + \gamma_y^2 = 1$$

Sin embargo, como valor de μ se toma la unidad, lo cual no siempre es correcto. Por otro lado, el método utilizado se corresponde con la que en esta memoria nosotros hemos denominado formulación directa. De los análisis presentados, hemos visto que los resultados que esta formulación

proporciona pueden diferir bastante de los correctos para determinados valores de las componentes del tensor. Nuestro propósito inicial fue comparar los resultados presentados en [6] con los obtenidos por nuestras distintas formulaciones. Sin embargo esto no fue posible, por carecer el artículo de los valores necesarios (Magnetización de saturación y remanencia) para poder reproducirlos. En [6] también se comparan los resultados del doble toroide con los del modelo en múltiples láminas. Sorprendentemente, los resultados ($\Delta\beta = \beta_+ - \beta_-$) entre ambos sólo muestran una discrepancia de alrededor de 10 grados, para todos los casos mostrados. Esto no concuerda con las predicciones hechas por otros autores, ni con las obtenidas en este trabajo estudiando el modelo de múltiples láminas, mediante la formulación restringida, para otras características del doble toroide.

Por último, en [7] se presenta un estudio teórico y experimental de la estructura mostrada en la figura 3.33a. El método teórico de análisis empleado es el método de diferencias finitas (MDF). Teóricamente, cuando el refinamiento del mallado se hace tender hacia infinito, las soluciones proporcionadas por MDF tenderán a las exactas, siempre que el material del cambiador de fase esté correctamente modelado. Para la estructura bajo análisis, el modelado del toroide de ferrita constituye el mayor problema., especialmente, como ya ha quedado apuntado, en lo que concierne a las esquinas que están parcialmente saturadas.

Para un material de ferrita parcialmente saturado las componentes del tensor $[\mu]$ resultan muy difíciles de calcular. Se puede hacer por un método riguroso cuya descripción se puede ver en [7]. Sin embargo, ésto requeriría

una gran cantidad de tiempo de cálculo, por lo que se prefiere emplear un modelo empírico [16] (apéndice C) que en primera aproximación es suficiente.

El modelo de 7 láminas (figura 3.33b) se puede resolver con gran precisión empleando la formulación restringida. En la figura 3.34 se muestra el cambio de fase diferencial, obtenido con dicha formulación, y se compara con los resultados del mismo modelo, resuelto mediante el método analítico de Lax, así como con las medidas [7]. Las características de la estructura se muestran en la tabla 3.3. Se observa el absoluto acuerdo entre los resultados teóricos, así como la gran diferencia que existe con los resultados experimentales, que en algunos casos llega hasta 25 grados. También se presenta la diferencia de fase $\Delta\beta$ para un modelo de 7 láminas, pero con las zonas en las que normalmente está el vacío rellena con un dieléctrico isótropo de permitividad relativa 8. Se observa como los resultados se acercan a los experimentales, e incluso, mediante una optimización de la permitividad simplemente empírica se podrían aproximar aún más.

Sin embargo, con el método de modos acoplados presentado se puede estudiar la estructura sin emplear modelos aproximados. La única dificultad es cómo colocar el tensor permeabilidad en las mencionadas esquinas. En la figura 3.35 se muestran los resultados obtenidos para tres ángulos distintos de la magnetización en las ocho esquinas del doble toroide, con las características indicadas en la tabla 3.3.

Figura	M_s (KA/m)	M_r (KA/m)	ϵ_f	ϵ_d	Ferrita - Temp.
3.34	145	103	14.74	24.96	YIG G-113 T=25C
3.35	145	103	14.74	24.96	YIG G-113 T=25C
3.36	145	114	14.74	24.96	YIG G-113 T=-50C
3.37	142	113	12.10	25.64	MgMnTT1-105 T=25C

Tabla 3.3.- Características del doble toroide:

$A = 13.4$ mm., $B = 4$ mm., $T = 4$ mm., $H = 2$ mm.

Se observa la gran concordancia que existe, para un ángulo de 30 grados con el eje "x", tanto con los resultados proporcionados por M.D.F. como con las medidas. Otros resultados obtenidos para diversas características de ferritas y dieléctricos se muestran en las figuras 3.36 y 3.37, (ver tabla 3.3), comparándolos con los obtenidos por Svedin [7] mediante M.D.F. y los experimentales. Se puede ver el gran acuerdo que se consigue entre ambos métodos teóricos. En los casos, en que se disminuye o eleva la temperatura (la figura 3.36 corresponde a una temperatura de -50 grados), se producen desviaciones debido a que la magnetización remanente no se corresponde con la suministrada por el fabricante [7]. La formulación empleada en este caso ha sido la indirecta con H_0 , con 30 modos seleccionados por frecuencias de corte del tipo TE_{nm} y TM_{nm} con n impar y m par. El tipo de selección se hace debido a la simetría de la estructura. Si se emplean más modos (hasta un total de 60) la diferencia con los resultados correspondientes a 30 modos, en todos los casos, no alcanza 1 grado. También se ha empleado la formulación directa con H_0 y no se encontró diferencia apreciable con la indirecta con H_0 . Notar que para este caso general en que el medio en el interior de la guía tiene discontinuidades en ambas direcciones transversales, el método restringido no es aplicable. Sí lo es para la estructura de múltiples láminas que modeliza el doble toroide.

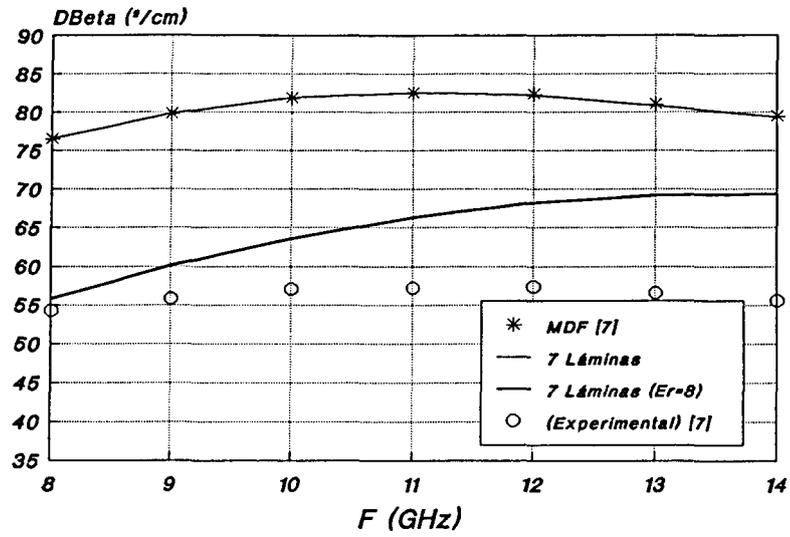


Figura 3.34.- Diferencia de fase para la estructura en 7 láminas. Dimensiones: ver tabla 3.3.

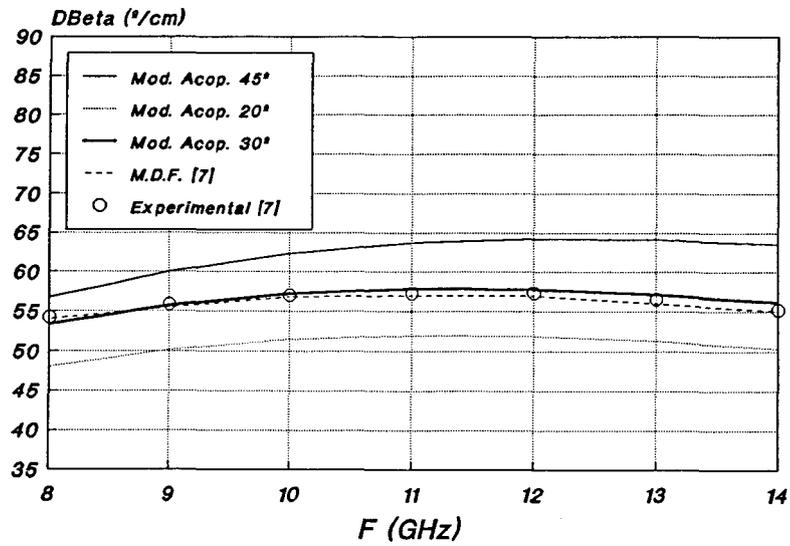


Figura 3.35.- Diferencia de fase para la estructura original (figura 3.33a), para distintos ángulos de magnetización. Dimensiones: ver tabla 3.3.

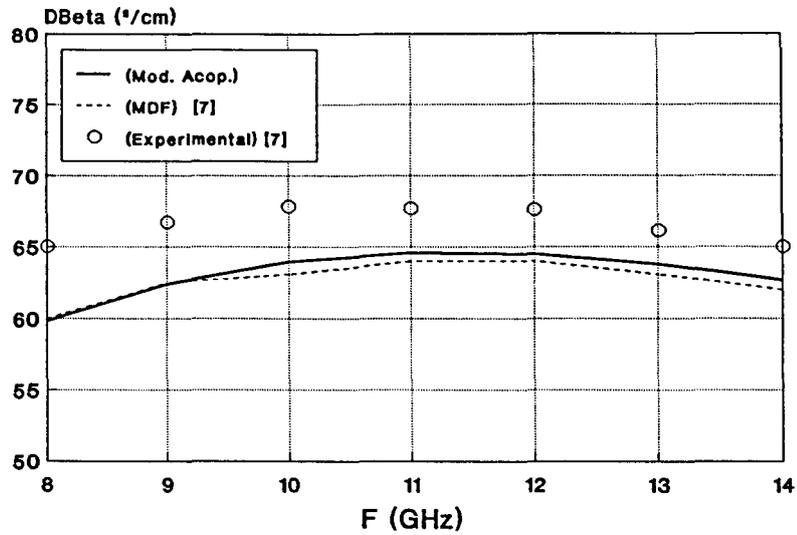


Figura 3.36.- Diferencia de fase para la estructura original (figura 3.33a). Dimensiones: ver tabla 3.3.

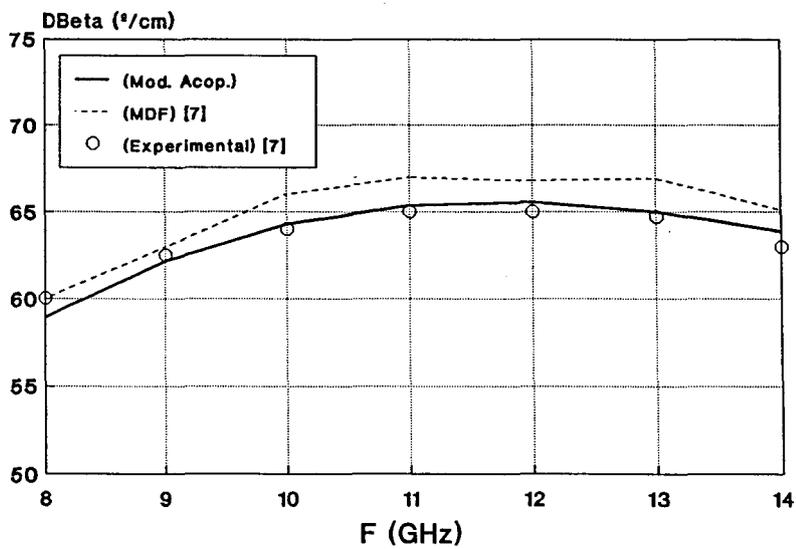


Figura 3.37.- Diferencia de fase para la estructura original (figura 3.33a). Dimensiones: ver tabla 3.3.

3.7 DISPOSITIVOS NO RECÍPROCOS EN GUIAS ABIERTAS

3.7.1 Introducción

El método de modos acoplados es directamente aplicable a estructuras cerradas. Sin embargo, también es posible aplicarlo a dispositivos construídos en guías dieléctricas abiertas. En [8] se obtienen las constantes de propagación de los modos E^x y E^y mediante el método de modos acoplados para la guía dieléctrica isótropa en banda invertida; el método también se ha aplicado al diseño de acopladores direccionales recíprocos construídos en guía imagen y guía π [10]. En esta sección vamos a ver que el método de modos acoplados se puede aplicar al análisis de estructuras no recíprocas en guías abiertas.

Con guías abiertas es posible diseñar prácticamente todos los tipos de elementos pasivos recíprocos y no recíprocos. Entre estos últimos se pueden señalar los aisladores, defasadores controlados magnéticamente, circuladores y acopladores no recíprocos. El dispositivo básico a diseñar es el acoplador no recíproco, pues debidamente dimensionado puede utilizarse para obtener aisladores y circuladores. La mayor desventaja que presentan los dispositivos en guía abierta es que se producen pérdidas por radiación, debidas principalmente a las discontinuidades y las curvas en las guías.

Existen diversos trabajos que estudian el efecto de la no reciprocidad en guías dieléctricas con ferritas magnetizadas transversalmente en su aplicación al análisis y diseño de aisladores. Así en [17] se aplica el fenómeno de desplazamiento de campo no recíproco para realizar un dispositivo con ferrita en guía imagen. También se ha estudiado el mismo fenómeno sobre guías fin-line [18].

A frecuencias milimétricas es preciso usar ferritas con alta magnetización de saturación pues las propiedades no recíprocas de estos dispositivos, que dependen de la razón entre los elementos de la diagonal (μ) y de fuera de la diagonal (κ) del tensor permeabilidad, disminuyen con la frecuencia, lo cual sólo se puede paliar disponiendo de ferritas con alta magnetización de saturación; esto influye negativamente en cuanto a la

magnitud del campo externo necesario para alcanzar la saturación que resulta ser excesivamente alto y por tanto difícil de conseguir.

Otra dificultad son las altas pérdidas dieléctricas y magnéticas de las ferritas a frecuencias milimétricas. A frecuencias por encima de 100GHz, en [19] se propone una estructura con ferrita y dieléctrico de bajas pérdidas. El sistema se diseña para que la constante de propagación en la guía con dieléctrico coincida con la del modo según $z > 0$ en la guía con ferrita y sea bastante diferente de la del modo según $z < 0$; así, se consigue un fuerte acoplo en un sentido y débil en el contrario.

A frecuencias más bajas [11], se propuso una estructura en guía π con la lámina superior compuesta de material de ferrita (figura 3.38) y magnetizada según la dirección "x". La ventaja de esta estructura respecto a las demás es que tiene más grados de libertad en el diseño, debido a la propia estructura geométrica de la guía π .

Todas las estructuras mencionadas tienen la característica común de estar magnetizadas por un campo externo perpendicular a la dirección de propagación. Por las dimensiones usadas para las ferritas (mucho más largas en la dirección de propagación que en las direcciones trasversales), el factor de desmagnetización en la dirección axial es prácticamente nulo. Así un campo externo relativamente pequeño sería suficiente para saturar la ferrita. Con esta idea se han realizado circuladores de 4 puertas y aisladores en tecnología fin-line [20]. En guía dieléctrica, y siguiendo este camino, se ha propuesto un aislador que consiste en dos guías imágenes acopladas mediante otra guía imagen de ferrita [21]. Sin embargo, tal y como se ve en una sección posterior de este trabajo sobre ortogonalidades en guías con elementos no recíprocos, la explicación teórica y el método numérico de solución empleado en [21], resulta erróneo en su totalidad [22,23], pues no es posible obtener no reciprocidad en guías con magnetización axial. Sin embargo, se ha observado experimentalmente comportamiento no recíproco en guías acopladas usando magnetización longitudinal [24], por lo que se ha propuesto en [23] que este comportamiento anisótropo no se debe a los distintos valores de las constantes de propagación según la dirección de

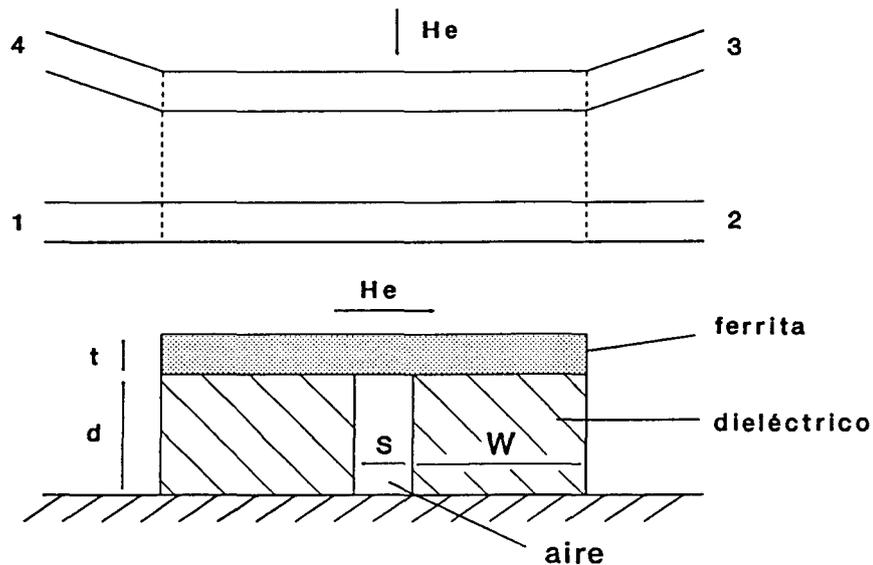


Figura 3.38.- Acoplador no recíproco en guía abierta.

propagación, sino al acoplamiento entre modos pares e impares según "z" positivo y "z" negativo .

3.7.2 Estructura con magnetización transversal

Supongamos una estructura como la de la figura 3.38. Esta estructura fue analizada en [11] mediante el método de la constante dieléctrica efectiva (M.C.D.E.), modificado para poder introducir las características no recíprocas de la ferrita. El acoplo entre las dos guías imágenes tiene lugar a través de la lámina superior de ferrita. En este caso sólo son de interés los modos E_{pq}^x pues los modos E_{pq}^y no presentan no reciprocidad. Cuando se aplica un campo externo H_e según el eje "x" el grado de acoplo del modo E_{11}^x que incide por uno de los brazos, acoplo que depende del sentido de propagación, se puede controlar mediante la variación de H_e . Por tanto, este acoplo no recíproco se puede utilizar para realizar un aislador.

El proceso de análisis se basa en calcular las constantes de propagación de los modos pares e impares en las dos direcciones de propagación. Si se

desprecian los acoplos entre las guías de conexión a la zona de acoplo, los coeficientes de dispersión se pueden poner como

$$|S_{21}| = |\cos(\beta_e - \beta_o)L/2| \quad (3.1)$$

$$|S_{31}| = |\sen(\beta_e - \beta_o)L/2| \quad (3.2)$$

donde "L" es la longitud de acoplo (los subíndices "e" y "o" se refieren a los modos pares e impares, respectivamente).

Para que el dispositivo presente características de aislador se necesita que

$$|S_{21}| = 1 \quad \text{y} \quad |S_{31}| = 0 \quad \text{en la dirección "z" positiva}$$

$$|S_{12}| = 0 \quad \text{y} \quad |S_{42}| = 1 \quad \text{en la dirección "z" negativa.}$$

La onda en la dirección "z" negativa se considera incidente por la puerta 2. Si nombramos con subíndice "f" a los modos progresivos y con subíndice "b" a los regresivos, e imponemos las condiciones anteriores se llega a

$$\Delta\beta_f L_f = 2n\pi \quad , \quad n=1,2, \dots \quad (3.3)$$

$$\Delta\beta_b L_b = (2m-1)\pi \quad , \quad m=1,2,3, \dots \quad (3.4)$$

donde

$$\Delta\beta_f = \beta_{ef} - \beta_{of} \quad \text{y} \quad \Delta\beta_b = \beta_{eb} - \beta_{ob} \quad (3.5)$$

L_f y L_b representan las longitudes requeridas en la región de acoplo (la de la guía π) para conseguir el efecto de aislamiento. Obviamente la posibilidad de que $\Delta\beta_f$ y $\Delta\beta_b$ sean distintas es la causa para que (3.4) y (3.5) se puedan verificar. Normalmente (3.4) y (3.5) no se podrán cumplir

exactamente, por lo que hay que elegir "n" y "m" de manera que las longitudes L_f y L_b resulten lo más parecidas posibles. Una vez obtenidas ambas longitudes, se elegirá aquella que haga que, a la frecuencia central de funcionamiento del aislador, $|S_{12}|$ sea lo más próximo posible a cero. Con esto se prima aumentar el aislamiento debido sólo a la señal reflejada.

Con el propósito de verificar la posibilidad de usar el método de modos acoplados para el análisis de estos dispositivos, analizaremos a continuación el aislador propuesto en [11] cuyas características son

Dieléctrico: $\epsilon_r = 9.6$, $d = 1.55\text{mm.}$, $w = 2.2\text{mm.}$

Ferrita: $\epsilon_f = 12.0$, $t = 0.35\text{mm.}$, $4\pi M_s = 1750$ Gauss, $H_e = 6000$ Oer.

Separación entre las guías imágenes $S = 0.2$ mm.

Las dimensiones se eligen para que sólo el modo fundamental E_{11}^x se pueda propagar.

El primer paso consiste en calcular las constantes de propagación para los modos pares e impares en las dos direcciones de propagación. Para ello, y ya que la estructura es abierta y el método de modos acoplados desarrollado es válido para estructuras cerradas, será necesario encerrar el dispositivo entre paredes perfectamente conductoras, colocándolo simétricamente, y calcular sus dimensiones para que su presencia no influya sobre las ondas superficiales. Para ello será necesario separar suficientemente las paredes conductoras externas. De estudios análogos para guías isótropas [8] se sabe que a medida que las dimensiones de la caja externa se hacen más grandes, es necesario utilizar un mayor número de modos para alcanzar la precisión deseada. En todo el desarrollo se han empleado 100 funciones base. Por otro lado, los valores obtenidos para las constantes de propagación de los modos E_{pq}^x siempre están por debajo de los proporcionados por el método de la constante dieléctrica efectiva [8]. Los resultados de este proceso se muestran en la figura 3.39, para uno de los cuatro modos buscados, tomando como parámetro la separación lateral de la estructura. Se observa que a partir de una altura de blindaje de 3.5 mm. y de una separación de 1.2 mm. el efecto de apantallamiento no influye sobre las constantes de propagación de los modos.

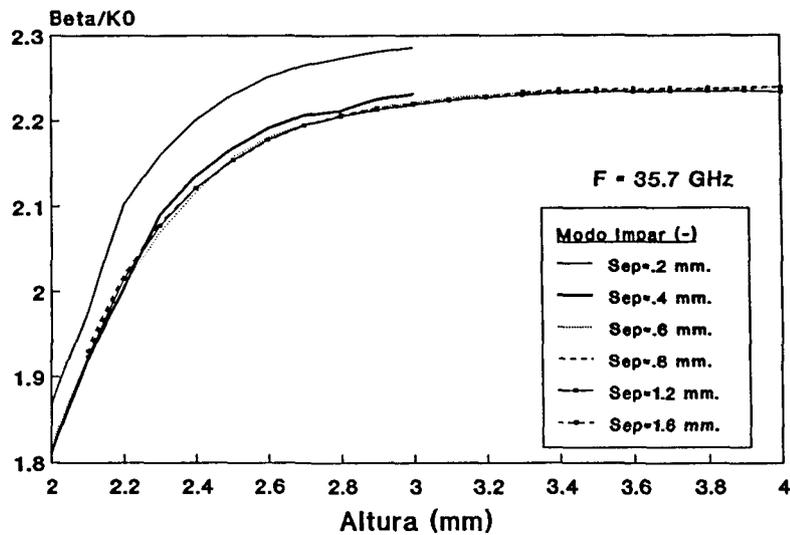


Figura 3.39.- Convergencia del modo impar según $z < 0$ en función de la altura del blindaje externo, utilizando como parámetro la separación a las paredes laterales.

En las figuras 3.40 y 3.41 se presentan los resultados para las constantes de propagación, en función de la frecuencia, en los dos sentidos de propagación para los modos pares e impares, comparándolos con los obtenidos en [11]. En la figura 3.42 también se comparan los resultados para las diferencias de fase entre los modos pares que se propagan según "z" positivo y los que lo hacen según "z" negativo. Hay que notar que el M.C.D.E. no es muy preciso cuando se emplean dieléctricos con altas permitividades (caso de las ferritas). En esos casos es más eficiente el uso del M.C.D.E. generalizado. Sin embargo el acuerdo con el método más potente de modos acoplados es aceptable.

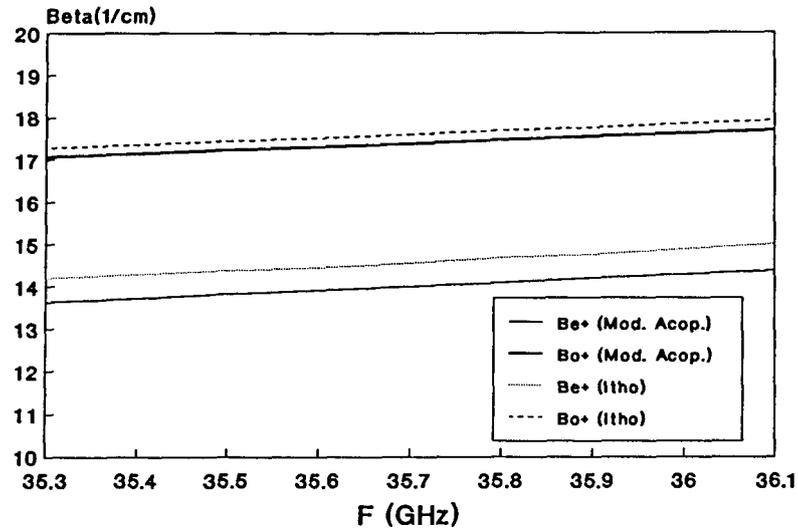


Figura 3.40.- Diagrama de dispersión para los modos par e impar que se propagan según $z > 0$, comparando con el obtenido en [11].

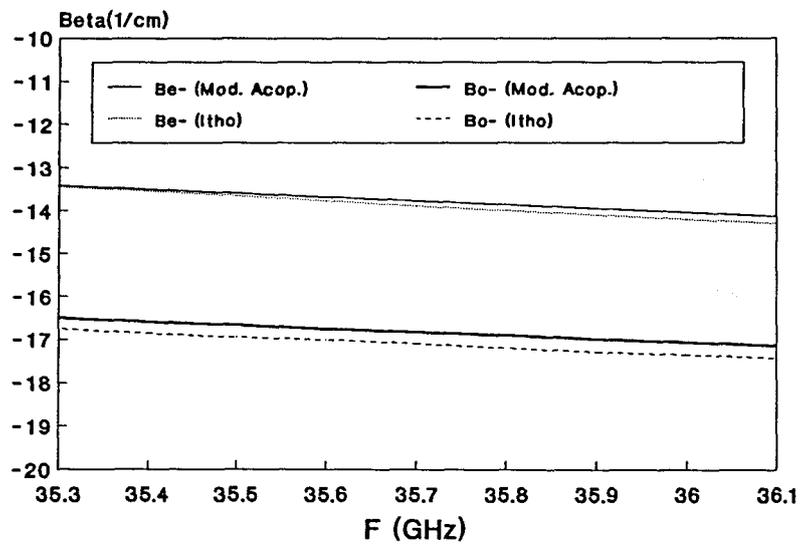


Figura 3.41.- Diagrama de dispersión para los modos par e impar que se propagan según $z < 0$, comparando con el obtenido en [11].

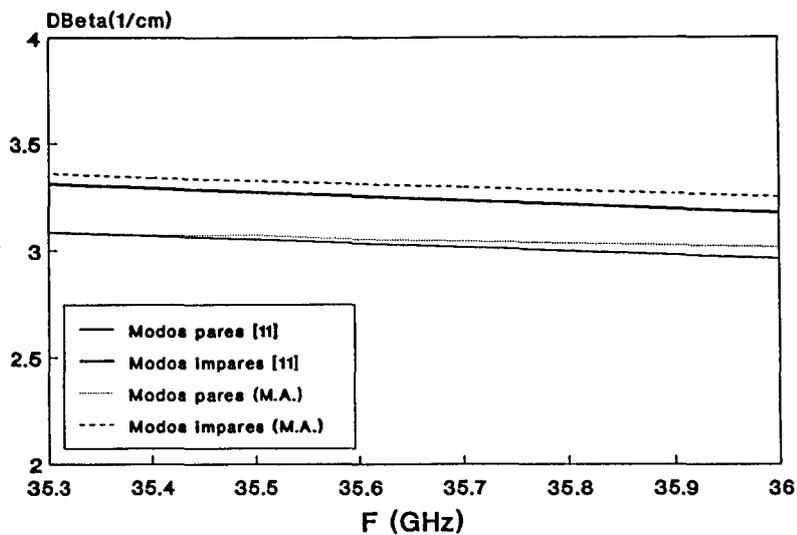


Figura 3.42.- Diferencia de fase de los modos pares e impares, en función de la frecuencia, comparada con la obtenida en [11].

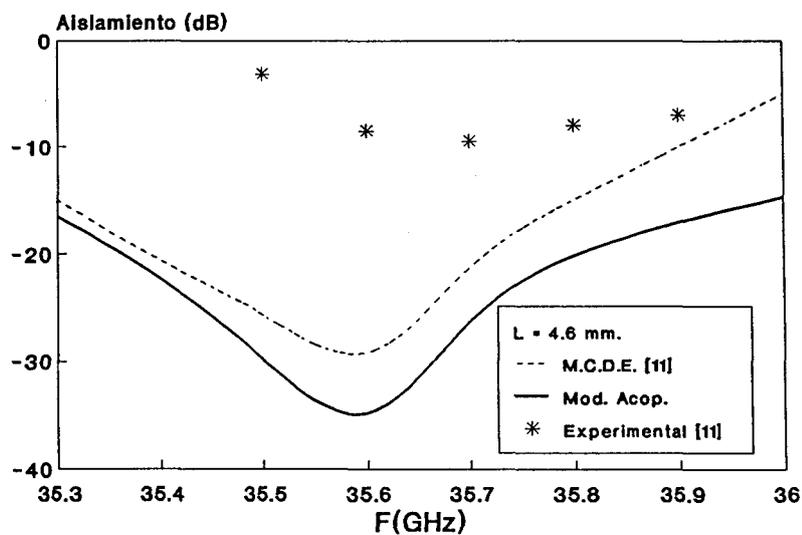


Figura 3.43.- Aislamiento del acoplador de la figura 3.38. Comparación con los resultados teóricos y experimentales de [11].

Siguiendo el método de diseño de [11], se eligen los valores de $n=2$ y $m=3$. Así se obtienen los valores de L_f y L_b siguientes ($F=35.7$ GHz)

De [11]: $L_f = 4.16$ mm. , $L_b = 4.85$ mm.

Mediante modos acoplados: $L_f = 4.13$ mm. , $L_b = 4.625$ mm.

Según el diseño propuesto en [11] la longitud elegida es 4.6 mm., como un valor medio entre L_f y L_b .

El parámetro medido en [11] es el aislamiento (pérdidas de inserción en "z" negativo menos pérdidas de inserción en "z" positivo). El cálculo teórico de $|S_{21}|$ y $|S_{12}|$ se hace a partir de (3.1). Los resultados se muestran en la figura 3.43.

Los resultados obtenidos mediante el método de modos acoplados, que se presentan en la figura 3.43 muestran una gran discrepancia con los resultados teóricos de aislamiento obtenidos en [11] y mucha mayor con los experimentales. La razón para la primera discrepancia es la gran sensibilidad que muestra el aislamiento a pequeñas variaciones en las diferencias de fase. En cuanto a las discrepancias con las medidas, existen varias razones, algunas de las cuales se enumeran en [11], y que exponemos a continuación.

En primer lugar no se han tenido en cuenta pérdidas magnéticas ni eléctricas. En el caso de [11] ello se debe a que no es posible considerarlas en su teoría. En el método de modos acoplados sí se podría hacer, pero no ha sido posible por no conocer qué tipo de ferrita se utiliza, con lo cual no podíamos conocer su tangente de pérdidas ni su ancho de línea.

En segundo lugar, la influencia de las discontinuidades y codos al principio de la zona de acoplo tiene una influencia decisiva sobre el funcionamiento del dispositivo. La zona de acoplo teórica considerada es la correspondiente a la guía π ; sin embargo, la zona de acoplo real es la teórica mas el acoplo en los codos.

Otra razón se debe a las pérdidas por radiación que se producen en los

codos, lo cual hace que las condiciones teóricas de análisis no sean las presentadas por el dispositivo experimental. Esta misma situación se da en acopladores en guías isótropas [10] donde es necesario eliminar estos acoplos indeseados mediante la introducción de algún tipo de blindaje lateral. También en [10] se producían en los codos pérdidas por radiación, que en ningún caso se han tenido en cuenta teóricamente.

Tal y como se muestra en [10], en este tipo de guías resulta imprescindible el conocimiento de los factores anteriormente mencionados para caracterizar un dispositivo de forma segura. De cualquier forma, resulta interesante señalar que el método de modos acoplados predice las diferencias de fase entre los modos progresivo y regresivo con gran seguridad, pudiendo, si así se desea, incluir las pérdidas dieléctricas y magnéticas. Creemos que mediante una caracterización experimental mas completa de las pérdidas de inserción, radiación en los codos y acoplos en las zonas curvas se podría explicar la discrepancia con los resultados experimentales. Por otra parte se ha observado que pequeñas variaciones de la diferencia de fase o lo que es lo mismo, pequeñas variaciones de la longitud de acoplo, producen fuertes variaciones del aislamiento, lo que implica que el actual diseño del dispositivo es excesivamente sensible a pequeños errores en sus dimensiones. Sería interesante realizar alguna modificación de la sección recta de la guía que la haga más insensible a errores de fabricación.

3.8 REFERENCIAS

- [1] Wilkinson, J.H.: *"The Algebraic Eigenvalue Problem"*, Oxford. Clarendon Press. 1965.
- [2] Gardiol, F.E.: *"Computer analysis of latching phase shifters in rectangular waveguide"*, Vol. MTT-21, No. 1, pp. 57,61, January 1973.
- [3] Thompson, S.B. and Rodrigue, G.P.: *"The application of planar anisotropy to millimeter-wave ferrite phase shifters"*, Vol. MTT-33, No. 11, pp. 1204-1209, November 1985.
- [4] Hauth, W.: *"Accurate analysis of latching phase shifters"*, IEE Proceedings, Vol. 133, Pt.H, No. 3, pp. 165-168, June 1986.
- [5] Xu, Y.: *"Microwave ferrite toroidal phase shifter in grooved waveguide with reduced sizes"*, Vol. MTT-36, No. 6, pp. 1095-1097, June 1988.
- [6] Xu, Y. and Zhang, G.: *"A rigorous method for computation of ferrite toroidal phase shifters"*, Vol. MTT-36, No. 6, pp. 929-983, June 1988.
- [7] Svedin, J. Carlegrim, B. and Hagelin, S.: *"Accurate design of ferrite toroid phase shifters. Theoretical and experimental results"*, 18th Europ. Microw. Conf., pp. 391-396, Stockholm, 1988.
- [8] Prieto, A.: *"Estudio Teórico y experimental de la guía dieléctrica en banda invertida"*, Tesis Doctoral, Universidad de Cantabria, 1977.
- [9] Rubio, E.: *"Análisis de diversas Guías Dieléctricas"*, Tesis Doctoral, Universidad de Cantabria. 1983.
- [10] Rodríguez, J.: *"Contribución al análisis y optimización de dispositivos pasivos en guía dieléctrica"*, Tesis Doctoral, Universidad de Cantabria. 1987.
- [11] Yun, S.W., Itoh, T.: *"Nonreciprocal wave propagation in a hollow image guide with a ferrite layer"*, Proc. IEE, Vol. 132, Pt. H, No. 4, pp. 222-226, June 1985.
- [12] Strube, J. and Arndt, F.: *"Rigorous hybrid mode analysis of transition from rectangular waveguide to shielded dielectric image guide"*, IEEE, Vol. MTT-33, No. 5, pp. 391-401, May 1985.
- [13] Ogusu, K.: *"Numerical Analysis of Rectangular Dielectric Waveguide and its Modifications"*, IEEE, Vol. MTT-25, No. 11, pp. 874-885, Nov. 1977.
- [14] Chaloupka, H.: *"A coupled-line model for the Scattering by dielectric and ferrimagnetic obstacles in waveguides"*, AEÜ, Vol. 34, No. 3, pp. 145-151, April 1980.
- [15] Lax, B., Button, J. and Roth, L.M.: *"Ferrite phase shifters in*

- rectangular wave guide*", Journal Appl. Phys., Vol. 25, No. 11, pp. 1413-1421, November 1954.
- [16] Green, J.J. and Sandy, F.: "*Microwave characterization of partially magnetized ferrites*", IEEE, Vol. MTT-22, No. 6, pp. 641-645, June 1974.
- [17] Nanda, V.P.: "*A new form of ferrite device for millimeter-wave integrated circuits*", IEEE, Vol. MTT-24, No. 6, pp. 870-879, June 1976.
- [18] Beyer, A. and Wolff, I.: "*A fin-line isolator and circulator for the R-band*", 12th Europ. Microw. Conf., pp. 11-18, Amsterdam, 1982.
- [19] Awai, I and Itoh T.: "*Coupled-Mode theory analysis of distributed nonreciprocal structures*", IEEE, Vol. MTT-29, No. 10, pp. 1077-1086, October 1981.
- [20] Davis, L.E. and Sillars, D.B.: "*Millimetrical nonreciprocal coupled-slot fin-line components*", Vol. MTT-34, No. 7, pp. 804-808, July 1986.
- [21] Sillars, D.B. and Davis, L.E.: "*Analysis of non reciprocal image lines*" Vol. MTT-35, No. 7, pp. 629-635, July 1987.
- [22] Mazur, J. and Mrozowski, M.: "*Comments on 'Analysis of nonreciprocal image lines',"*, Vol. MTT-37, No. 1, pp. 262, January 1989.
- [23] Mazur, J. and Mrozowski, M.: "*On the mode coupling in longitudinally magnetized waveguides structures*", Vol. MTT-37, No. 1, pp. 159-165, January 1989.
- [24] Nicol, A. and Davis, L.E.: "*Nonreciprocal coupling in dielectrical image lines*", Proc. IEE, Vol 132, Pt. H, No. 4, pp. 269-270, July 1985.
(Technical Memorandum)

CAPITULO 4

MODOS COMPLEJOS Y RELACIONES DE ORTOGONALIDAD

4.1 INTRODUCCION

En una guía isótropa se cumplen determinadas relaciones de ortogonalidad bien conocidas, debido a que se verifica el teorema de reciprocidad [1]. Cuando la guía contiene materiales no recíprocos el teorema de reciprocidad no se cumple, y por consiguiente tampoco las relaciones de ortogonalidad clásicas. Sin embargo, Rumsey [2] desarrolló un teorema de reciprocidad modificado que se puede aplicar a medios anisótropos.

Por otra parte, en determinadas condiciones, en las guías isótropas aparecen modos complejos [3-14], cuyas relaciones de ortogonalidad tampoco son exactamente las mismas que las que se obtienen a partir del teorema de reciprocidad clásico.

Cuando se utiliza un método numérico para el cálculo de los modos que soporta una guía, las soluciones obtenidas no son exactas, por lo que los criterios de ortogonalidad no se cumplen exactamente; una manera adicional de chequear la exactitud de esas soluciones es comprobar en qué medida se verifican las relaciones de ortogonalidad entre ellas. Por otro lado, cuando se analizan discontinuidades simples entre guías de cualquier tipo, el método más utilizado es el de adaptación modal (M.A.M). Esta técnica, es un método de Momentos en el que se realizan productos internos entre las componentes de los campos \vec{E} y \vec{H} , de manera que al utilizar las relaciones de ortogonalidad se producen simplificaciones en el sistema de ecuaciones resultante. El no cumplimiento de estas relaciones complica el sistema y empeora la exactitud de la solución. Así, por ejemplo, en [3] se puede ver el estudio de una discontinuidad de salto en línea microstrip cuando algunos de los modos introducidos en la adaptación no verifican "del todo" las relaciones de ortogonalidad, debido a errores en la precisión numérica del método de solución. La conclusión que se obtiene es que al introducir algún modo de este tipo, los resultados empeoran apreciablemente. Esto hace que en el estudio de convergencia del M.A.M. se produzcan saltos en la solución cada vez que se introduce un modo "no ortogonal".

Por todo lo expuesto, en este capítulo vamos a ver las propiedades de los modos complejos en guías isótropas sin pérdidas y posteriormente introduciremos el teorema de reciprocidad generalizado, y lo aplicaremos para

la obtención de unas relaciones de ortogonalidad válidas en medios anisótropos. Asimismo, veremos en qué medida los modos propios obtenidos mediante el método de modos acoplados verifican las relaciones de ortogonalidad.

4.2 MODOS COMPLEJOS EN ESTRUCTURAS ISOTROPAS

La existencia de modos complejos en diversas estructuras dieléctricas sin pérdidas ya ha sido predicha y estudiada, tanto teórica como experimentalmente [4-14]. También se ha estudiado la influencia de estos modos en la caracterización de discontinuidades en guías planas finline [15]. En estructuras formadas por varillas dieléctricas apantalladas, se demostró [7] que las ondas complejas se producen como una continuación de las ondas "backward" en el espectro modal. Pero también pueden existir en regiones del espectro donde no existan dichas ondas "backward" o regresivas. Los primeros estudios sobre la presencia de modos complejos se hicieron sobre guías cilíndricas; su continuación en guías con sección transversal rectangular, en particular para una guía dieléctrica imagen apantallada [4,10] han demostrado que se llega a las mismas conclusiones.

En el tercer capítulo se comprobó la buena concordancia entre los resultados dados por el método de modos acoplados y el presentado por Strube y Arndt [4], incluso en la zona de aparición de modos complejos, que se producía al estudiar una guía imagen. Allí se vio que la condición necesaria, pero no suficiente, para que se produzcan modos complejos, es que se igualen las constantes de atenuación de dos modos evanescentes

4.2.1 Propiedades de los modos complejos

La aparición de un modo complejo se debe a la degeneración de dos modos evanescentes que, un punto dado del espectro de frecuencias, llegan a tener idéntica constante de propagación, aunque su contribución a la potencia de la onda electromagnética sea de características diferentes. Así, cuando se "siguen" dos modos en corte que degeneran en un modo complejo, se ve que mientras uno almacena energía reactiva negativa (capacitiva) el otro la

almacena positiva (inductiva), de manera que al ir aumentando la frecuencia, ambas se van aproximando hasta que en el momento de la conversión de ambos modos las dos energías son iguales en valor absoluto.

Cuando una estructura dieléctrica isótropa y sin pérdidas, se encuentra una zona del espectro de frecuencias en la que existen soluciones complejas de la constante de propagación, se ve que se obtienen en forma de dos pares complejos conjugados, o sea

$$\Gamma = \pm \alpha \pm j\beta \quad (4.1)$$

Si tomamos una dependencia con "z" de la forma $\exp(-\Gamma z)$, con una dependencia temporal de la forma $\exp(j\omega t)$, las dos soluciones físicamente posibles son

$$\Gamma_1 = j\beta + \alpha \quad \text{y} \quad \Gamma_2 = -j\beta + \alpha \quad (4.2)$$

con α y β reales y positivos. La primera constante de propagación corresponde a una onda propagándose en el sentido "z" positivo y que se atenúa en ese mismo sentido. La segunda constante de propagación corresponde a una onda propagándose en el sentido "z" negativo pero que se atenúa en el sentido contrario. Todo esto se interpretaría como una onda que se propaga en el mismo sentido en que se atenúa, es decir, con una constante pérdida de energía, aunque la estructura sea sin pérdidas, mientras que la otra onda se propagaría en sentido contrario al que se atenúa, es decir, significaría una ganancia constante de energía, aunque la estructura sea pasiva. Esto sólo podría ser posible si ambos modos estuvieran acoplados. Se ha comprobado que ésto sucede para estructuras isótropas, de manera que el campo eléctrico de cada modo no está acoplado con su propio campo magnético, pero sí lo está con el campo magnético del otro modo, y cumpliéndose las siguientes relaciones de ortogonalidad [12] (ortogonalidades en sentido "p")

$$\int_S (\vec{e}_1 \times \vec{h}_1^*) \cdot \vec{n} dS = \int_S (\vec{e}_2 \times \vec{h}_2^*) \cdot \vec{n} dS = 0 \quad (4.3a)$$

$$\int_S (\vec{e}_1 \times \vec{h}_2^*) \cdot \vec{n} dS = p \quad \int_S (\vec{e}_2 \times \vec{h}_1^*) \cdot \vec{n} dS = -p^* ; \text{ con } p \neq 0 \quad (4.3b)$$

donde \vec{e}_1 y \vec{h}_1 ($i=1,2$) son los campos eléctrico y magnético transversales de cada modo y "S" la sección recta de la guía de onda. Las dos ecuaciones anteriores significan que estos dos modos complejos no pueden existir aislados, sino que la presencia de uno, obliga inevitablemente a la presencia del otro, ya que, como vemos de las ecuaciones anteriores considerar un modo individualmente lleva a violar el principio de conservación de la energía. La ecuación (4.3b) también se cumple cuando uno de los dos modos no es un complejo.

Los modos complejos verifican las siguientes relaciones de ortogonalidad (ortogonalidades en sentido "q")

$$\int_S (\vec{e}_1 \times \vec{h}_1) dS = p, \quad \int_S (\vec{e}_2 \times \vec{h}_2) dS = -p^*, \quad \text{con } p \neq 0. \quad (4.4a)$$

$$\int_S (\vec{e}_1 \times \vec{h}_2) dS = \int_S (\vec{e}_2 \times \vec{h}_1) dS = 0 \quad (4.4b)$$

Hay que hacer notar en este punto que esta última relación de ortogonalidad que verifican los modos complejos en estructuras isótropas también la cumplen todos los demás tipos de modos.

Para calcular la potencia que transporta el conjunto de estos dos modos complejos es suficiente estudiar la potencia que transportan conjuntamente, ya que no están acoplados con ningún otro del espectro, Supongamos que ambos modos se excitan por alguna discontinuidad. El campo eléctrico y magnético transversal será la superposición de los de cada modo por separado, es decir

$$\vec{E} = A_1 e^{-\Gamma_1 z} \vec{e}_1 + A_2 e^{-\Gamma_2 z} \vec{e}_2 \quad (4.5a)$$

$$\vec{H} = A_1 e^{-\Gamma_1 z} \vec{h}_1 + A_2 e^{-\Gamma_2 z} \vec{h}_2 \quad (4.5b)$$

Integrando el vector de Poynting sobre la sección recta del contorno conductor, se obtiene la potencia que transporta el conjunto [12]

$$\int_S (\vec{E} \times \vec{H}^*) \cdot d\vec{S} = jW/2 \sin(2\beta z + \theta) e^{-2\alpha z} \quad (4.6)$$

donde

$$A_1 A_2^* p = W/2 e^{-j\theta}$$

De esta expresión podemos concluir que la potencia transportada por la superposición de estos dos modos complejos conjugados es imaginaria pura, no llevando ninguna potencia activa, sino solamente potencia reactiva, es decir, se comportan conjuntamente como un modo enteramente evanescente. La energía almacenada en estos modos oscila, según la dirección "z", de inductiva (positiva) a capacitiva (negativa), y con un decaimiento exponencial, tal y como se muestra en la figura 4.1.

De entre las posibles soluciones complejas la elección anterior no es la única; se pueden escoger las soluciones de modos complejos de forma que, de las cuatro posibles se agrupen, por un lado, las dos que viajan en la dirección z positiva y por otro las dos que viajan en la dirección z negativa. Vamos a realizar un análisis idéntico al anterior con esta nueva agrupación. Las constantes de propagación en este caso son

$$\Gamma_1 = j\beta + \alpha \quad \text{y} \quad \Gamma_2 = j\beta - \alpha \quad (4.7)$$

con α y β reales y positivos. La primera constante de propagación corresponde a una onda propagándose en el sentido "z" positivo y que se atenúa en ese mismo sentido es decir con una continua pérdida de energía. La segunda constante de propagación corresponde a una onda propagándose en el sentido "z" positivo pero que se atenúa en el sentido contrario, es decir, con una continua ganancia de energía. Al igual que antes, ello sólo sería posible si ambos modos estuvieran acoplados. Efectivamente así sucede, cumpliéndose además las siguientes relaciones

$$\int_S (\vec{e}_1 \times \vec{h}_1^*) \cdot d\vec{S} = \int_S (\vec{e}_2 \times \vec{h}_2^*) \cdot d\vec{S} = 0 \quad (4.8a)$$

$$\int_S (\vec{e}_1 \times \vec{h}_2^*) dS = p, \quad \int_S (\vec{e}_2 \times \vec{h}_1^*) dS = p^*; \text{ con } p \neq 0 \quad (4.8b)$$

donde \vec{e}_i y \vec{h}_i ($i=1,2$) son los campos eléctrico y magnético transversales de cada modo y S la sección transversal de la guía de onda. La diferencia con el caso anterior, es que el acoplo del campo eléctrico transversal de un modo con el magnético transversal del otro es bien una cantidad compleja "p" o bien su conjugado (antes se producía un cambio de signo adicional) dependiendo del orden en que se haga el producto vectorial. De cualquier manera, de las dos ecuaciones anteriores se pueden extraer las mismas conclusiones que en el caso anterior, es decir, que estos dos modos complejos no pueden existir aislados, sino que la presencia de uno, obliga inevitablemente a la presencia del otro, ya que, un modo por sí solo no transporta energía al ser el flujo del vector de Poynting nulo.

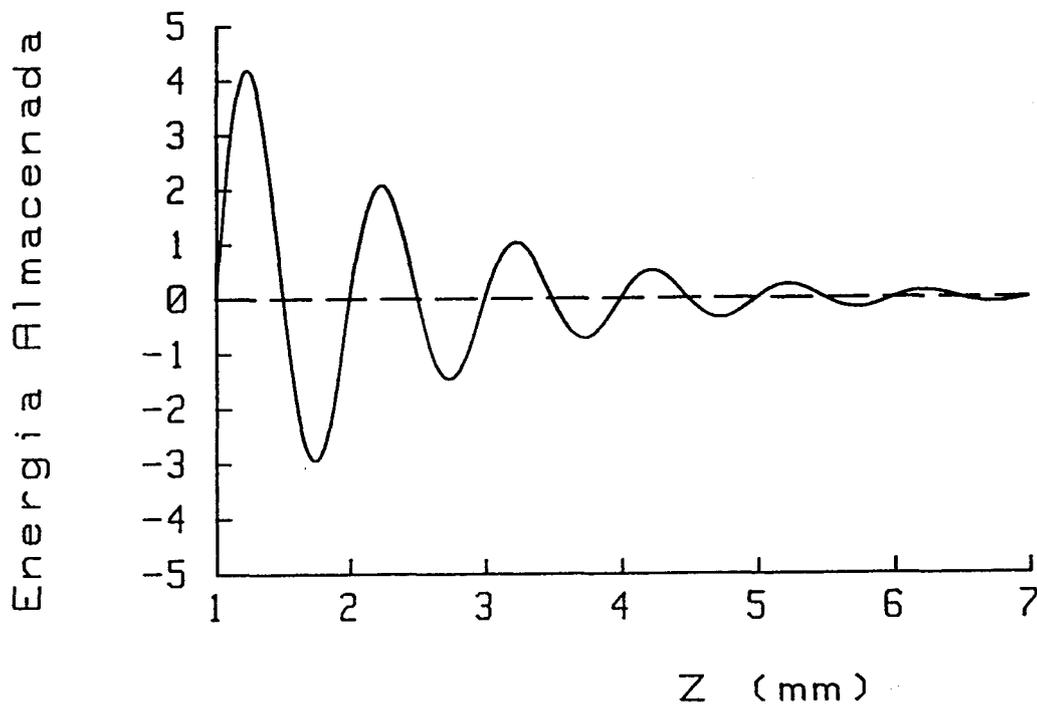


Figura 4.1.- Evolución en la dirección de propagación de la energía compleja almacenada por la asociación de dos modos complejos

Como vemos de las dos ecuaciones anteriores estos dos modos complejos no son ortogonales en el sentido de potencias; pero sí que verifican las siguientes relaciones de ortogonalidad

$$\int_S (\vec{e}_1 \times \vec{h}_1) dS = p, \quad \int_S (\vec{e}_2 \times \vec{h}_2) dS = p^*, \quad \text{con } p \neq 0. \quad (4.9a)$$

$$\int_S (\vec{e}_1 \times \vec{h}_2) dS = \int_S (\vec{e}_2 \times \vec{h}_1) dS = 0 \quad (4.9b)$$

donde de nuevo, en este caso no se produce cambio de signo.

Veamos ahora qué energía transporta el conjunto de estos dos modos. Realizando un proceso análogo al anterior, en el que se usan las relaciones de ortogonalidad (4.8) se llega a

$$\int_S (\vec{E} \times \vec{H}^*) dS = W \cos(\vartheta) \quad (4.10)$$

Esta ecuación implica que la superposición de estos dos modos complejos conlleva un transporte de energía activa y que, por lo tanto, se comportan como un modo en propagación. Este comportamiento no es físicamente posible, por lo que la asociación de esta pareja de modos complejos es errónea.

Como conclusión de esta discusión se puede decir que los modos complejos en estructuras isótropas aparecen como pares de soluciones complejas, de forma que, asociadas de la primera de las maneras mencionada, su comportamiento es igual al de un modo evanescente puesto que no transporta energía activa, sino solamente energía reactiva, que además va decreciendo conforme la onda electromagnética se propaga a lo largo de la dirección "z".

4.2.2 Resultados numéricos

Con objeto de comprobar en qué medida se verifican las relaciones de ortogonalidad, se ha resuelto una estructura en guía imagen apantallada

centrada (dimensiones de la guía externa 15.8x7.9 mm.), de anchura 6.9 mm, altura 3.2 mm. y $\epsilon_r = 8$ a una frecuencia de 14GHz, empleando la formulación indirecta con 30 funciones base. Los resultados de las constantes de propagación normalizada para los primeros modos son

Modos	$\Gamma/k_0 = \alpha/k_0 + j\beta/k_0$
Γ_1	0 + j2.0562
Γ_2	0 + j1.3143
Γ_3	0.7431 - j0.3137
Γ_3^*	0.7431 + j0.3137
Γ_4	0.8942 + j0
$-\Gamma_1$	0 - j2.0562
$-\Gamma_2$	0 - j1.3143
$-\Gamma_3$	-0.7431 + j0.3137
$-\Gamma_3^*$	-0.7431 - j0.3137
$-\Gamma_4$	-0.8942 + j0

El cumplimiento de las relaciones de ortogonalidad en sentido "p" se muestra en la tabla 4.1 y el cumplimiento en sentido "q" en la tabla 4.2. Los lugares vacíos de las tablas corresponden a valores nulos de los acoplos, aunque por errores de redondeo, en todos los casos corresponden a valores por debajo de $|10^{-12}|$.

Examinando estas dos tablas, se puede comprobar el cumplimiento de las relaciones de ortogonalidad descritas en el apartado anterior. Debido a los errores de redondeo introducidos por las subrutinas matemáticas, estas relaciones dejan de cumplirse cuando se toma un número de funciones base alrededor de 95, justamente el mismo límite que se indicó en el capítulo 3, para el cálculo del campo electromagnético.

	Γ_1	Γ_2	Γ_3	Γ_3^*	Γ_4	$-\Gamma_1$	$-\Gamma_2$	$-\Gamma_3^*$	$-\Gamma_3$	$-\Gamma_4$
Γ_1	1.0					-1				
Γ_2		1.0					-1			
Γ_3				$-.7535+$ $j.6573$					$.7535-$ $-j.6573$	
Γ_3^*			$.7535$ $j.6573$					$-.7535-$ $-j.6573$		
Γ_4					$j1.0$					$-j1.0$
$-\Gamma_1$	1.0					-1.0				
$-\Gamma_2$		1.0					-1.0			
$-\Gamma_3$				$-.7535+$ $j.6573$					$.7535$ $-j.6573$	
$-\Gamma_3^*$			$.7535+$ $j.6573$					$-.7535-$ $-j.6573$		
$-\Gamma_4$					$j1.0$					$-j1.0$

Tabla 4.1.- Ortogonalidades en sentido "p" para una guía imagen isótropa

	Γ_1	Γ_2	Γ_3	Γ_3^*	Γ_4	$-\Gamma_1$	$-\Gamma_2$	$-\Gamma_3^*$	$-\Gamma_3$	$-\Gamma_4$
Γ_1	1.0					-1				
Γ_2		1.0					-1			
Γ_3			$.7535-$ $-j.6573$					$-.7535+$ $+j.6573$		
Γ_3^*				$-.7535-$ $-j.6573$					$.7535+$ $+j.6573$	
Γ_4					$-j1.0$					$j1.0$
$-\Gamma_1$	1.0					-1.0				
$-\Gamma_2$		1.0					-1.0			
$-\Gamma_3$			$.7535+$ $-j.6573$					$-.7535+$ $j.6573$		
$-\Gamma_3^*$				$-.7535-$ $-j.6573$					$.7535+$ $+j.6573$	
$-\Gamma_4$					$-j1.0$					$j1.0$

Tabla 4.2.- Ortogonalidades en sentido "q" para una guía imagen isótropa

Para ver como evoluciona la ortogonalidad con la anisotropía, se ha resuelto la misma estructura anterior pero magnetizando el dieléctrico (ferrita) en la dirección "y", mediante la aplicación de un campo externo que haga que la componente del tensor permeabilidad en la diagonal principal tenga valor unidad ($\mu=1$) y la componente fuera de la diagonal principal sea $\kappa=0.001$, es decir, sometiendo al dieléctrico a una leve anisotropía. El resultado es que las constantes de propagación de todos los modos permanecen inalteradas, pero las relaciones de ortogonalidad que se cumplían para el caso isótropo, ahora dejan de verificarse, tal y como puede comprobarse en la tabla 4.3 para las relaciones de ortogonalidad en sentido "p" (las cajas con dos cifras significan: la superior la parte real del acoplo y la inferior la parte imaginaria; si sólo se indica una cifra el acoplo es o bien real o bien imaginario puro)

	Γ_1	Γ_2	Γ_3	Γ_3^*	Γ_4	$-\Gamma_1$	$-\Gamma_2$	$-\Gamma_3$	$-\Gamma_3^*$	$-\Gamma_4$
Γ_1	1.0	-.8E-3	-.9E-4 j.3E-3	.1E-3 .1E-3	.3E-6 .6E-7	-1	.27E-2	.93E-4 -.34E-3	-.1E-3 -.1E-3	-.3E-6 .6E-7
Γ_2	-.8E-3	1.0	.1E-5 .23E-6	-.3E-6 -.4E-6	.36E-3 .27E-3	-.2E-3	-1	.1E-5 -.2E-6	-.3E-6 .46E-6	.36E-3 -.23E-3
Γ_3	-.9E-4 -.3E-3	.1E-5 .23E-6	.753- -j.657	-.2E-5	.61E-3 -.2E-3	.11E-3 .1E-3	-.3E-6 .46E-6	-.753+ +j.657	.51E-5	.68E-3 .29E-2
Γ_3^*	.11E-3 -.1E-3	.32E-6 .46E-6	.26E-5	-.753 -j.657	.61E-3 .24E-3	-.9E-4 .34E-3	.1E-5 -.2E-6	.753+ +j.657	.51E-5	.68E-3 -.2E-2
Γ_4	.32E-6 -.8E-7	-.3E-3 -.2E-3	-.6E-3 .24E-3	-.6E-3 -.2E-3	-j1.0	-.3E-6 -.8E-7	-.3E-3 .23E-3	-.6E-3 -.2E-2	-.6E-3 .29E-2	j1.0
$-\Gamma_1$	1.0	-.2E-2	-.1E-3 -.1E-3	.93E-4 -.3E-3	.31E-6 .9E-7	-1.0	-.8E-3	.93E-4 .34E-3	-.1E-3 .1E-3	.31E-6 -.9E-7
$-\Gamma_2$.27E-2	1.0	.32E-6 -.4E-6	-.1E-5 .23E-6	.36E-3 -.2E-3	.82E-3	-1.0	-.1E-5 -.2E-6	.32E-6 .46E-6	.36E-3 .23E-3
$-\Gamma_3$.11E-3 .1E-3	.32E-6 -.4E-6	.753- -j.657	-j.5E-5	.68E-3 .29E-2	-.9E-4 -.3E-3	.1E-5 .23E-6	.753+ +j.657	.26E-5	.61E-3 -.2E-3
$-\Gamma_3^*$	-.9E-4 .34E-3	-.1E-5 .23E-6	-j.5E-5	-.753 -j.657	.68E-3 -.2E-2	.11E-3 -.1E-3	-.3E-6 -.4E-6	-.2E-5 +j.657	.753+ +j.657	.61E-3 .24E-3
$-\Gamma_4$.32E-6 .83E-7	-.3E-3 .23E-3	-.6E-3 -.2E-2	-.6E-3 .29E-2	-j1.0	-.3E-6 .83E-7	-.3E-3 -.2E-3	-.6E-3 .24E-3	-.6E-3 -.1E-3	j1.0

Tabla 4.3.- Ortogonalidades en sentido "p" para una guía imagen anisótropa

Se obtienen resultados en el mismo sentido para las relaciones en sentido "q".

4.3 TEOREMA DE RECIPROCIDAD GENERALIZADO

En este apartado vamos a plantear el teorema de reciprocidad generalizado, por medio del cual se obtienen las relaciones de ortogonalidad que se verifican en guías que contienen medios anisótropos.

Cuando una ferrita se sumerge en un campo magnético estático externo (campo dc) su comportamiento viene caracterizado por un tensor permeabilidad $[\mu]$ y una permitividad escalar ϵ , ambas independientes de la amplitud del campo alterno (campo ac), supuesto éste suficientemente pequeño. Cuando al campo dc se le invierte la polaridad, el tensor permeabilidad resultante es el traspuesto del anterior. Lo mismo sucede para un plasma gaseoso sometido a un campo dc, pero invirtiendo los papeles de μ y ϵ [16]. Estos medios se denominan girotrópicos.

Aplicando las ecuaciones de Maxwell a dos regiones, una de ellas conteniendo un medio girotrópico y otra idéntica a la anterior, pero invirtiendo la polaridad del campo magnético externo aplicado, se llega a la siguiente relación [1]

$$\iint_S (\hat{H}_a \times \vec{E}_b - \vec{H}_b \times \hat{E}_a) \cdot d\vec{S} = \iiint_V (\vec{J}_a \cdot \vec{E}_b - \vec{J}_b \cdot \hat{E}_a) dv \quad (4.11)$$

donde "s" es la superficie que rodea a la región y " $\vec{J}_{a,b}$ " las fuentes eléctricas que producen los campos en cada región. El símbolo " $\hat{}$ " indica, donde se aplique, que corresponde al medio con la polaridad del campo externo invertida. La ecuación (4.11) es el teorema general de reciprocidad, cuando todas las fuentes son de tipo eléctrico. La forma más general del teorema de reciprocidad modificado en el que se incluyen tanto fuentes eléctricas como magnéticas es

$$\iint_S (\hat{H}_a \times \vec{E}_b - \vec{H}_b \times \hat{E}_a) \cdot d\vec{S} = \iiint_V [(\vec{J}_a \cdot \vec{E}_b - \vec{K}_a \cdot \vec{H}_b) - (\vec{J}_b \cdot \hat{E}_a - \vec{K}_b \cdot \hat{H}_a)] dv \quad (4.12)$$

Una relación similar, que se verifica únicamente para medios sin pérdidas es

$$\iint_S (\hat{H}_a^* \times \vec{E}_b + \vec{H}_b \times \hat{E}_a^*) ds = \iiint_V [(\vec{J}_a^* \vec{E}_b + \vec{K}_a^* \vec{H}_b) + (\vec{J}_b \hat{E}_a^* + \vec{K}_b \hat{H}_a^*)] dv \quad (4.13)$$

donde el símbolo "*" indica el complejo conjugado.

El significado de este teorema se puede encontrar mediante el concepto de reacción. En efecto, si el lado izquierdo de la ecuación (4.11) se anula, bien porque la superficie de la región esté en el infinito o bien porque sea un conductor perfecto (puede haber lógicamente otras causas, pero éstas son las de mayor importancia física), el teorema de reciprocidad se reduce a

$$\iiint_V \vec{J}_a \vec{E}_b dv = \iiint_V \vec{J}_b \hat{E}_a dv \quad (4.14)$$

que es el teorema usual de reciprocidad, cuando $[\epsilon]$ y $[\mu]$ son tensores simétricos, cumpliéndose entonces que $\hat{E} = \vec{E}$. Las cantidades de la ecuación (4.14) se definen como reacciones [2], con lo que el teorema de reciprocidad se puede interpretar como: la reacción de un conjunto de fuentes sobre otro conjunto es igual a la reacción de éste último sobre el primero pero transponiendo los tensores $[\epsilon]$ y $[\mu]$.

En [1] se puede ver una aplicación del teorema anterior a circuitos que contienen medios girotrópicos. La conclusión a la que se llega es: la matriz impedancia de cualquier circuito se traspone al trasponer los tensores $[\epsilon]$ y $[\mu]$. Como corolario se llega a la misma conclusión para las matrices de admitancia y dispersión.

Estos resultados sobre trasposición de matrices en circuitos se pueden aplicar a circuitos microondas. De esta manera, la aplicación del teorema de reciprocidad permite asegurar las siguientes afirmaciones [1]

- La impedancia de entrada de cualquier dispositivo que contenga medios girotrópicos permanece inalterada cuando se invierte el campo dc. En efecto, la impedancia de entrada de un dispositivo de dos terminales (una puerta) consta de un solo elemento (orden de la matriz uno), que evidentemente coincide con su traspuesta.

- En una guía de onda conteniendo medios girotrópicos, las constantes de propagación de los modos que viajan en la dirección "z" positiva se intercambian con los que viajan en la dirección "z" negativa cuando invertimos la polaridad del campo magnético dc.

4.4 PROPIEDADES DE LAS SOLUCIONES EN MEDIOS GIROTROPICOS

De la aplicación del teorema de reciprocidad, sabemos que para cada constante de propagación Γ_a en el medio original, existe un medio traspuesto con constante de propagación $\hat{\Gamma}_a = -\Gamma_a$ y con campos \hat{E}_a y \hat{H}_a . Del planteamiento de las ecuaciones de Maxwell para los dos medios, o sea, el original y el traspuesto [16], se obtiene que en el caso general en el que el medio tenga pérdidas, no existe relación entre los campos electromagnéticos correspondientes a los medios con constante de propagación Γ_a y $-\Gamma_a$. Sin embargo, cuando los medios no tienen pérdidas, se verifica para los modos que se propagan que $-\Gamma_a = \Gamma_a^*$ y los campos en ambos medios cumplen las siguientes relaciones

$$\hat{E}_a = + \vec{E}_a^* \quad \text{y} \quad \hat{H}_a = + \vec{H}_a^* \quad (4.15)$$

es decir, el campo en el medio traspuesto es el complejo conjugado del correspondiente al medio original. Se puede escoger cada par de signos. En lo que sigue elegiremos la pareja superior.

En el caso que el modo en cuestión sea evanescente se verificará que la constante de propagación es real, con lo que $\Gamma_a^* = \Gamma_a$ y los campos caracterizados por constantes de propagación Γ_a y $-\Gamma_a$ no cumplen una relación sencilla análoga a la anterior.

De entre los medios anisótropos se pueden hacer dos claras distinciones: los que tienen unos tensores permitividad o permeabilidad correspondientes a magnetización dc puramente longitudinal o puramente transversal. Veamos los resultados que se obtienen para cada caso.

4.4.1 Caso de magnetización longitudinal

En este caso los tensores permeabilidad y permitividad son

$$[\mu] = \begin{bmatrix} \mu & -jk & 0 \\ jk & \mu & 0 \\ 0 & 0 & \mu_0 \end{bmatrix} \quad [\epsilon] = \begin{bmatrix} \epsilon & -j\eta & 0 \\ j\eta & \epsilon & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon_0 \end{bmatrix} \quad (4.16)$$

Si dividimos los campos en sus partes transversal y longitudinal (dirección "z"), es decir los ponemos de la forma

$$\vec{E}_{at}, E_{az} \quad \text{y} \quad \vec{H}_{at}, H_{az}$$

se puede comprobar [16] que si el campo caracterizado por \vec{E}_{at}, E_{az} y \vec{H}_{at}, H_{az} y una constante de propagación Γ_a satisface las ecuaciones de Maxwell, también el caracterizado por $\vec{E}_{at}, -E_{az}, -\vec{H}_{at}, H_{az}$ y $-\Gamma_a$ satisface las ecuaciones de Maxwell, así como las condiciones de contorno. Por tanto, cuando la magnetización es puramente longitudinal (es decir, la anisotropía puramente transversal) Γ_a y $-\Gamma_a$ son valores propios solución de las ecuaciones de Maxwell.

4.4.2 Caso de magnetización transversal

Para este caso los tensores permeabilidad y permitividad son

$$[\mu] = \begin{bmatrix} \mu_{11} & \mu_{12} & \mu_{13} \\ \mu_{12} & \mu_{22} & \mu_{23} \\ -\mu_{13} & -\mu_{23} & \mu_{33} \end{bmatrix} \quad [\epsilon] = \begin{bmatrix} \epsilon_{11} & \epsilon_{12} & \epsilon_{13} \\ \epsilon_{12} & \epsilon_{22} & \epsilon_{23} \\ -\epsilon_{13} & -\epsilon_{23} & \epsilon_{33} \end{bmatrix} \quad (4.17)$$

Haciendo la misma división anterior, se puede comprobar que para el medio original y el traspuesto se verifica que

$$\hat{E}_{at} = \vec{E}_{at}, \hat{E}_{az} = -E_{az}, \hat{H}_{at} = -\vec{H}_{at}, \hat{H}_{az} = H_{az} \quad \text{y} \quad \hat{\Gamma}_a = -\Gamma_a \quad (4.18)$$

Teniendo en cuenta la relación (4.15), para medios sin pérdidas y modos en propagación, podemos poner

$$\vec{E}_{at} = \vec{E}_{at}^*, \quad \vec{E}_{az} = -\vec{E}_{az}^*, \quad \vec{H}_{at} = \vec{H}_{at}^*, \quad \vec{H}_{az} = -\vec{H}_{az}^* \quad (4.19)$$

Estas ecuaciones establecen que las componentes transversales del campo electromagnético son reales y las longitudinales son imaginarias.

4.5 RELACIONES DE ORTOGONALIDAD ENTRE MODOS

4.5.1 Medios isótropos

Las relaciones de ortogonalidad para estos medios se pueden obtener del teorema usual de reciprocidad. Las más comunes son

$$\iint_S (\vec{E}_{bt} \times \vec{H}_{at}^*) \cdot \vec{n} \, dS = 0 \quad \Gamma_b \neq \pm \Gamma_a, \quad \pm \Gamma_a^* \quad (4.20)$$

$$\iint_S (\vec{E}_{bt} \times \vec{H}_{at}) \cdot \vec{n} \, dS = 0 \quad \Gamma_b \neq \pm \Gamma_a \quad (4.21)$$

Las integraciones se realizan sobre la sección transversal de la guía.

Si una guía de onda contiene medios isótropos no homogéneos, algunas relaciones de ortogonalidad no se cumplen. Así, la ecuación (4.21) se sigue verificando, pero la (4.20) sólo es cierta para medios sin pérdidas.

4.5.2 Medios anisótropos

Para una guía que contiene esta clase de materiales se verifica la siguiente relación de ortogonalidad [16]

$$\iint_S (\hat{H}_{bt} \times \vec{E}_{at} - \vec{H}_{at} \times \hat{E}_{bt}) \cdot \vec{n} \, dS = N_b \delta_{\hat{\Gamma}_b, -\Gamma_a} \quad (4.22)$$

donde "δ" es la delta de Kronecker, y N_b una constante de normalización.

En el caso en que el medio anisótropo no tenga pérdidas se verifica

$$\iint_S (\vec{H}_{bt}^* \times \vec{E}_{at} + \vec{H}_{at} \times \vec{E}_{bt}^*) \cdot \vec{n} \, dS = M_b \delta_{\Gamma_b^*, -\Gamma_a} \quad (4.23)$$

Aplicando la ecuación (4.15) se puede ver que, para modos en propagación las constantes de normalización cumplen que $M_b = -N_b$.

Las ecuaciones (4.22,4.23) son las relaciones de ortogonalidad generalizadas que se verifican para guías que contengan medios caracterizados por tensores permitividad o permeabilidad, sujetos a las apropiadas condiciones de contorno.

La ecuación (4.23) se puede interpretar en términos de la potencia que fluye a través de una guía. Si consideramos dos modos que existan a la vez en la guía y formamos el producto vectorial de \vec{E} y \vec{H} e integramos a la sección transversal de la guía de onda, se puede concluir que la potencia real neta transmitida por una guía sin pérdidas es la suma algebraica de la potencia transportada por cada modo individual. No se puede afirmar lo mismo sobre la potencia reactiva.

Para el caso general, las ecuaciones (4.22) y (4.23) parecen no ser unas relaciones de ortogonalidad "útiles". Debido a la falta de simetría en los tensores permitividad y permeabilidad es lógico pensar que no existe un camino para reducir las relaciones de ortogonalidad a productos cruzados simples, al igual que ocurre en el caso de medios isótropos. En los casos ya mencionados de medios anisótropos con direcciones especiales del campo de magnetización dc, las propiedades de los tensores discutidas dan lugar a otras relaciones de ortogonalidad.

4.5.2.1 Magnetización longitudinal

Para el caso de magnetización longitudinal en medios girotrópicos, hemos visto que tanto Γ_a como $-\Gamma_a$ son autovalores de las ecuaciones de Maxwell; la ecuación (4.22) para las dos posibles soluciones de los campos se pueden

transformar en

$$\iint_S (\hat{H}_{bt} \times \vec{E}_{at}) \cdot \vec{n} \, dS = - \iint_S (\vec{H}_{at} \times \hat{E}_{bt}) \cdot \vec{n} \, dS = 1/2 N_b \delta_{\Gamma_b, \Gamma_a}^+ \quad (4.24)$$

que en el caso sin pérdidas se puede escribir como

$$\iint_S (\vec{H}_{bt}^* \times \vec{E}_{at}) \cdot \vec{n} \, dS = \iint_S (\vec{H}_{at} \times \vec{E}_{bt}^*) \cdot \vec{n} \, dS = 1/2 N_b \delta_{\Gamma_b, \Gamma_a}^* \quad (4.25)$$

Esta ecuación se puede interpretar, en términos de la potencia que fluye, como: la potencia neta total transmitida en una guía sin pérdidas cuya anisotropía es puramente transversal, es la suma algebraica de las potencias complejas transportadas por cada modo individual. Como podemos observar, esta aseveración es menos restrictiva que la del caso general, pues ahora también se incluye la potencia reactiva.

4.5.2.2 Magnetización transversal

En vista de las relaciones que en un medio magnetizado transversalmente verifican los campos en el medio original y en el traspuesto, la relación de ortogonalidad (4.22) se puede poner como

$$\iint_S (\vec{H}_{bt} \times \vec{E}_{at} + \vec{H}_{at} \times \vec{E}_{bt}) \cdot \vec{n} \, dS = - N_b \delta_{\Gamma_b, \Gamma_a} \quad (4.26)$$

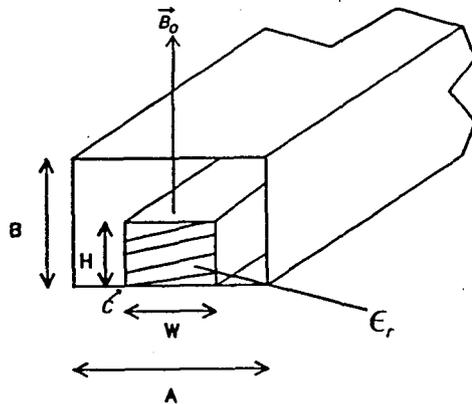
En este caso especial, la relación de ortogonalidad sólo contiene campos correspondientes al medio original.

4.6 CUMPLIMIENTO DE LAS RELACIONES DE ORTOGONALIDAD

En esta sección comprobaremos que los resultados proporcionados por el método de modos acoplados verifican las relaciones de ortogonalidad desarrolladas anteriormente.

Vamos a ver con un ejemplo como se cumplen estas relaciones. En la

figura 4.2, se presenta la sección transversal de una guía imagen que estudiaremos para diversos tipos de dieléctrico y diferentes direcciones del campo magnético externo aplicado. Cada caso se muestra en la tabla 4.4



Dimensiones en mm.

$$C = 8.93$$

$$W = 5$$

$$H = 5$$

$$A = 22.86$$

$$B = 10.16$$

Figura 4.2.- Sección transversal de una guía imagen sometida a campo magnético externo. El dieléctrico puede ser:

- Ferrita: $4\pi M_s = 5000$ Gauss

- Semiconductor: $\sigma = 10.344$ mho/m, $\mu_e = 0.1$ m²/Volt Seg. [17]

Casos	Tipo Material	ϵ_r	Valor Campo Magnético (Gauss)	Direc.
1	Ferrita	10	1000	X
2	Ferrita	10	1000	Z
3	Semiconduc.	10	10000	X

Tabla 4.4.- Casos a estudiar correspondientes a la figura 4.2.

En los tres casos mostrados en la tabla 4.4 se debe verificar la relación de ortogonalidad (4.22) y en los dos primeros se debe verificar también la relación (4.23) para medios anisótropos sin pérdidas. No ocurre lo mismo en el caso 3 ya que en él se consideran las pérdidas en el semiconductor. También se deben verificar las relaciones particulares (4.25) y (4.26) correspondientes a cada caso. Para comprobar que se cumplen las relaciones mencionadas, se han resuelto los tres casos empleando 5 modos básicos seleccionados por frecuencias de corte. El empleo de más modos no sería relevante para la comprobación de la relaciones de ortogonalidad. Veamos todo esto por separado.

Caso 1

Este caso corresponde a un medio anisótropo magnético sin pérdidas, con lo que, además de las relaciones generales (4.22) y (4.23), se cumple también la ecuación (4.25). Las constantes de propagación normalizadas al número de onda en el vacío k_0 de los modos que se obtienen son

- Modo 1: $j 1.485$
- Modo 2: $.4766 - j .242E-2$
- Modo 3: $1.03 + j .13$
- Modo 4: $1.076 - j .378$
- Modo 5: $2.318 + j .887E-2$
- Modo 6: $-j 1.48$
- Modo 7: $-.476 - j .242E-2$
- Modo 8: $-1.03 + j .13$
- Modo 9: $-1.076 - j .378$
- Modo 10: $-2.318 + j .887E-2$

Los 5 primeros modos corresponden a al sentido "z" positivo y los 5 siguientes al "z" negativo. Con objeto de verificar la ecuación (4.23), es necesario resolver la misma estructura anterior pero invirtiendo el sentido del campo magnético (es decir, sentido "x" negativo). Para ese caso se obtienen otros 10 modos de manera que sus constantes de propagación se intercambian con las anteriores, es decir, los modos que en el primer caso se propagaban en $z > 0$ ahora lo hacen en $z < 0$, como se muestra a continuación

Modo 1: $j 1.48$
 Modo 2: $.476 + j .242E-2$
 Modo 3: $1.03 - j .13$
 Modo 4: $1.076 + j .378$
 Modo 5: $2.318 - j .887E-2$
 Modo 6: $-j 1.485$
 Modo 7: $-.4766 + j .242E-2$
 Modo 8: $-1.03 - j .13$
 Modo 9: $-1.076 + j .378$
 Modo 10: $-2.318 - j .887E-2$

En la tabla 4.5 se muestran las ortogonalidades correspondientes a la relación (4.22). Las filas corresponden a los modos con el campo magnético en la dirección "x" positiva y las columnas los del campo invertido. Los lugares en blanco corresponden a valores prácticamente nulos, aunque por errores numéricos de cálculo se obtienen valores inferiores a $1E-15$.

Como se puede observar, las relaciones de ortogonalidad expresadas en la ecuación (4.22) se verifican para todos los modos. Además, se observa que si el acoplo entre el modo "i" y el "j" es la cantidad compleja "A", el acoplo entre los modos "j" e "i" es su complejo conjugado A^* .

En la tabla 4.6 se muestran las ortogonalidades correspondientes a la ecuación (4.23), válida para medios sin pérdidas; en este caso, sólo es necesario trabajar con los modos resultantes de una dirección del campo magnético aplicado. Sólo debe haber valores distintos de cero en aquellas constantes de propagación que cambiadas de signo coincidan con su conjugada. Inspeccionando la tabla 4.6, se ve que ésto efectivamente así sucede.

Las guías isótropas verifican las relaciones de ortogonalidad clásicas, que hemos denominado ortogonalidades "p" (si intervienen los campos E y H^*) y ortogonalidades "q" (si son los campos E y H), dadas por las ecuaciones (4.20) y (4.21) respectivamente. Estas relaciones indican que todos los modos tienen acoplos distintos de cero consigo mismos y cero con todos los demás, tal y como se muestra en las tablas 4.1 y 4.2, de manera sólo hay términos no nulos en la diagonal principal. Este comportamiento tiene la excepción de los

modos complejos, que tienen acoplo en sentido "p" con su pareja, aunque una vez agrupados como un único modo su comportamiento es análogo al de un modo evanescente. En este sentido, la relación (4.26), válida únicamente para medios anisótropos con magnetización transversal (como es el caso que estamos estudiando), verifica las pautas indicadas para medios isótropos. Esto se puede ver en la tabla 4.7.

Como vemos, la ortogonalidad que expresa la ecuación (4.26) tiene un comportamiento análogo al de las ortogonalidades clásicas en medios isótropos.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1						-.0037				
2							-.8E-5 -j.008			
3								-.2E-3 j.0035		
4									-.4E-3 j.004	
5										.44E-4 -j.002
6	.0037									
7		-.8E-5 j.008								
8			-.2E-3 -j.003							
9				-.4E-3 -j.004						
10					.44E-4 j.002					

Tabla 4.5.- Ortogonalidades del caso 1 correspondientes a la ecuación (4.22).

Caso 2

Este caso corresponde a un medio anisótropo magnético sin pérdidas con magnetización longitudinal (anisotropía transversal). En este caso, las relaciones de ortogonalidad que se verifican son análogas a las de los medios isótropos. Además, como la anisotropía es transversal, las constantes de

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	.0037									
2							-.8E-5 j.0086			
3								-.2E-3 -j.003		
4									-.4E-3 -j.004	
5										.44E-4 j.002
6						-.0037				
7		-.8E-5 -j.008								
8			-.2E-3 j.003							
9				-.4E-3 j.004						
10					.44E-4 -j.002					

Tabla 4.6.- Ortogonalidades del caso 1 correspondientes a la ecuación (4.23).

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	.0037									
2		-.8E-5 j.0086								
3			-.2E-3 -j.003							
4				-.4E-3 -j.004						
5					.44E-4 j.002					
6						-.0037				
7							-.8E-5 -j.0086			
8								-.2E-3 j.003		
9									-.4E-3 j.004	
10										.44E-4 -j.002

Tabla 4.7.- Ortogonalidades del caso 1 correspondientes a la ecuación (4.26).

propagación que se obtienen en los dos sentidos de "z" son las mismas (excepto el signo). Por lo tanto, no vamos a repetir las relaciones de ortogonalidad generales, que evidentemente también se verifican para este caso. Sólo escribiremos los resultados obtenidos para la relación dada en la ecuación (4.25) específica de un medio de este tipo; los resultados se muestran en la tabla 4.8. Las constantes de propagación normalizadas que se obtienen son

Modo 1: $j 1.283$
 Modo 2: $.839 - j .1275$
 Modo 3: $.839 + j .1275$
 Modo 4: $.933$
 Modo 5: 2.272

Las otras cinco constantes de propagación serían estas mismas cambiadas de signo.

Como se puede observar en la tabla 4.8, la pareja de modos complejos 2 y 3 tienen acoplo distinto de cero entre sí y nulo con los demás; si se agrupan como se mostró anteriormente, su acoplo "p" es imaginario y el conjunto se comporta como un modo evanescente. Asimismo, la inspección de esta tabla confirma que un medio con anisotropía transversal cumple las relaciones de ortogonalidad "p" igualmente que un medio isótropo.

Caso 3

Este caso corresponde a un medio anisótropo eléctrico con pérdidas, no cumpliéndose las relaciones de ortogonalidad simplificadas, siendo sólo válida la general dada en la ecuación (4.22) en la que se hace uso del medio traspuesto, y su particularización dada en (4.26). Las constantes de propagación normalizadas para los modos que se obtienen son

<u>Medio original</u>	<u>Medio traspuesto</u>
Modo 1: $.576 + j .766$	$.188 + j .941$
Modo 2: $.794 + j 2.141$	$.978 - j .756E-2$

Modo 3:	$.893 + j .240$	$1.027 + j .389$
Modo 4:	$1.00 + j .0868$	$1.949 + j .934$
Modo 5:	$2.50 + j .0211$	$2.524 - j .534$
Modo 6:	$-.188 - j .941$	$-.576 - j .766$
Modo 7:	$-.978 + j .756E-2$	$-.794 - j 2.141$
Modo 8:	$-1.027 - j .389$	$-.893 - j .240$
Modo 9:	$-1.949 - j .934$	$-1.00 - j .0868$
Modo 10:	$-2.524 + j .534$	$-2.50 - j .0211$

	1	2	3	4	5
1	$.173E-2$	0	0	0	0
2	0	0	$.147E-2 + j .147E-2$	0	0
3	0	$-.147E-2 + j .147E-2$	0	0	0
4	0	0	0	$j .123E-2$	0
5	0	0	0	0	$-j .987E-3$

Tabla 4.8.- Ortogonalidades del caso 2, correspondientes a la ecuación (4.25)

Los resultados de ortogonalidad se muestran en la tabla 4.9. Las filas se corresponden con los modos del medio original y las columnas a los del medio traspuesto.

En este caso en el que el medio es con pérdidas, los acoplos de los modos "i" con "j" y viceversa no son complejos conjugados, lo cual sí es cierto cuando el medio no tiene pérdidas.

Igual que en el caso 1, la aplicación de la relación de ortogonalidad (4.26) produce un comportamiento análogo al de medios isótropos; ello se puede ver en la tabla 4.10.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1						-.4E-2 -j.2E-2				
2							-.8E-2 j.3E-2			
3								-.1E-2 j.4E-2		
4									-.1E-2 j.3E-2	
5										-.2E-3 -j.2E-3
6	.4E-2 j.4E-3									
7		.12E-2 -j.3E-2								
8			.21E-2 -j.2E-2							
9				.46E-2 j.7E-2						
10					.51E-3 j.2E-2					

Tabla 4.9.- Ortogonalidades del caso 3 correspondientes a la ecuación (4.22)

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	-.4E-2 -j.2E-2									
2		-.8E-2 j.3E-2								
3			-.1E-2 j.4E-2							
4				-.1E-2 j.3E-2						
5					-.2E-3 -j.2E-3					
6						.4E-2 j.4E-3				
7							.12E-2 -j.3E-2			
8								.21E-2 -j.2E-2		
9									.46E-2 j.7E-2	
10										.51E-3 j.2E-2

Tabla 4.10.- Ortogonalidades del caso 3 correspondientes a la ecuación (4.26)

4.7 REFERENCIAS

- [1] Harrington, R.F. and Villeneuve, A.T.: "*Reciprocity Relationships for Gyrotropic Media*", IRE, Vol. MTT-6, pp. 308-310, Julio 1958.
- [2] Rumsey, V.H.: "*Reaction Concept in Electromagnetic Theory*", Physical Review, Vol. 94, No. 6, pp. 1483-1491, July 1954. Errata: vol. 95, p. 1705, September 1954.
- [3] Xu, Q., Webb, K.J. and Mittra, R.: "*Study of Modal Solution Procedures for Microstrip Step Discontinuities*", IEEE, Vol. MTT-37, No. 2, pp. 381-387, February 1989.
- [4] Strube, J. and Arndt, F.: "*Rigorous Hybrid-Mode Analysis of the Transition from Rectangular Waveguide to Shielded Dielectric Image Guide*", IEEE, Vol. MTT-33, No. 5, pp. 391-401, May 1985.
- [5] Omar, A.S. and Schunemann, K.: "*Formulation of the Singular Integral Equation Technique for Planar Transmission Lines*", IEEE, Vol. MTT-33, No. 12, pp. 1313-1322, December 1985.
- [6] Suhl, H. and Walker, L.R.: "*Topics in Guided Wave Propagation through Gyrotropic Media*", B.S.T.J. Vol. 33, pp. 579-659, May 1954.
- [7] Clarricoats, P.J.B. and Taylor, B.C.: "*Evanescence and Propagating modes of Dielectric-Loaded Circular Waveguides*", Proc. Inst. Elec. Eng., Vol. 111, pp. 1951-1956, 1964.
- [8] Clarricoats, P.J.B. and Slinn, K.R.: "*Complex Modes of Propagation in Dielectric Loaded Circular Waveguides*", Electron Lett., Vol. 1, pp. 145-146, 1965.
- [9] Rayevskiy, S.B.: "*Some Properties of Complex Waves in a Double Layer Circular, Shielded Waveguides*", Radio Eng. Electron Phys., vol. 23, pp. 16-19, 1978.
- [10] Crombach, U.: "*Complex Waves on Shielded Lossless Rectangular Image Guide*", Electron Lett., Vol. 19, pp. 557-558, 1983.
- [11] Omar, A.S. and Schunemann, K.: "*New type of evanescent Modes in Finlines*", 15th Europ. Microw. Conf., pp. 317-322, Paris, 1985.
- [12] Omar, A.S. and Schunemann, K.: "*Complex and Backward Wave Modes in Inhomogeneously and Anisotropically Filled Waveguides*", IEEE, Vol. MTT-35, No. 3, March 1987.
- [13] Railton, C.J. and Rozzi, T.: "*Complex Modes in Boxed Microstrip*", IEEE, Vol. MTT-36, No. 5, pp.865-874, May 1988.
- [14] Mrozowski, M. and Mazur, J.: "*Complex Waves in Lossless Dielectric*

- Waveguides*", 19th Europ. Microw. Conf, pp. 528-533, London, 1989.
- [15] Omar, A.B. and Schunemann, K.: *"The Effect of Complex Modes at Finline Discontinuities"*, IEEE, Vol. MTT-34, No. 12, pp. 1508-1514, December 1986.
- [16] Villeneuve, A.T.: *"Orthogonality Relationships for Waveguides and Cavities with Inhomogenous Anisotropic Media"*, IRE, Vol. MTT-7, pp. 441-446, October, 1959.
- [17] Engineer, M.H. and Nag, B.R.: *"Propagation of electromagnetic waves in rectangular guides filled with a semiconductor in the presence of a transverse magnetic field"*, IEEE, Vol. MTT-13, No. 5, pp. 641-645, September 1965.

CAPITULO 5

ANALISIS DE DISCONTINUIDADES ENTRE GUIAS ANISOTROPAS

5.1 INTRODUCCION

Una gran parte de las discontinuidades entre guías se producen de forma abrupta en un solo plano normal a la dirección de propagación, es decir, distintas guías de onda se disponen en cascada separadas por discontinuidades [1-5]. Existen diversas maneras de caracterizar cada discontinuidad individual, tales como métodos variacionales [6], técnica de la ecuación integral [7,8], mezcla de ambos [9] o incluso métodos multimodales variacionales [10].

En general estos métodos no son adecuados cuando es necesario tener en cuenta la influencia de los modos superiores que se excitan en cada discontinuidad [3,11]; ésto sucede cuando las discontinuidades individuales se encuentran muy próximas eléctricamente. El concepto de matriz de dispersión o transmisión generalizadas puede emplearse para analizar discontinuidades próximas entre sí. Por razones numéricas, es preferible emplear la matriz de dispersión generalizada (M.D.G.) a la matriz de transmisión. Con el uso de la M.D.G. se evitan las limitaciones de las aproximaciones circuitales clásicas, con sus límites de validez en frecuencia y rango de parámetros [5]

Para el cálculo de la M.D.G. el método más habitualmente utilizado es el método de adaptación modal (M.A.M.). Epstein [12] realizó una aplicación primitiva del método al analizar una discontinuidad entre una guía vacía y otra totalmente llena de ferrita. Posteriormente Wexler [13] introdujo su clásica formulación del M.A.M. para el análisis de bifurcaciones en guías de onda rectangulares. Su utilización se ha extendido a la caracterización de discontinuidades en líneas microstrip, fin-line, guías dieléctricas apantalladas y abiertas, etc. [14-19]. En otros casos, el método se ha extendido al estudio de dispositivos multipuerta [5].

El estudio de discontinuidades entre guías parcialmente llenas con ferritas, ha sido realizado por varios autores. En la mayor parte de los casos, el M.A.M. junto con el concepto de M.D.G. es la estrategia utilizada para caracterizar el conjunto de discontinuidades en cascada [1,2]. Las estructuras normalmente analizadas están formadas por guías de onda con

diferentes geometrías de ferritas y dieléctricos en su interior, pero con las características comunes de llenar totalmente la altura de la guía rectangular y estar magnetizadas por un campo externo transversal a la dirección de propagación [20-22]. De esta manera, cada sección individual sólo tiene discontinuidad en la dirección "x", lo que permite hallar soluciones analíticas de cada sección.

En este trabajo se pretende extender el M.A.M. a discontinuidades entre secciones parcialmente llenas de ferrita con dos discontinuidades en el plano transversal, lo que permitiría analizar los dispositivos de ferrita más utilizados tales como aisladores, defasadores toroidales, etc.

5.2 M.A.M. CON ORTOGONALIDADES GENERALIZADAS

5.2.1 Incidencia por la guía "a"

Consideremos una discontinuidad como la de la figura 5.1 en la que sólo inciden modos por la guía "a" y no hay ninguna otra discontinuidad después de la guía "b", es decir ésta es seminfinita. Planteando los campos a cada lado de la discontinuidad e imponiendo las condiciones de continuidad en la interfase se obtiene

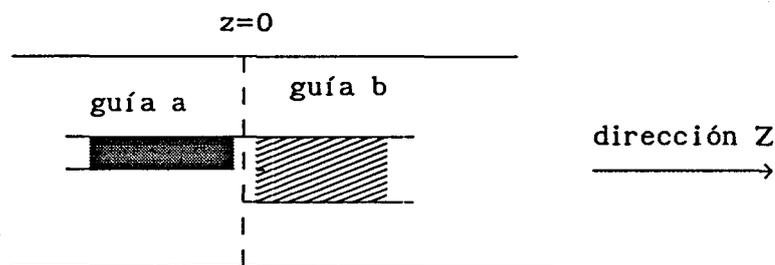


Figura 5.1.- Discontinuidad entre dos guías apantalladas

$$\sum_{l=1}^{M1} \left[a_l \vec{e}_{al} + \sum_{r=1}^{M2} a'_r \vec{e}'_{ar} \right] = \sum_{j=1}^{M1} \sum_{j1=1}^N b_{j1} \vec{e}_{bj} \quad (5.1)$$

$$\sum_{i=1}^{M1} \left[a_i \vec{h}_{ai} + \sum_{r=1}^{M2} a'_{ri} \vec{h}'_{ar} \right] = \sum_{j=1}^{M1} \sum_{l=1}^N b_{jl} \vec{h}_{bj} \quad (5.2)$$

donde "N1" es el número de modos incidentes y "N2" el de reflejados en la guía "a" y "N" el número de modos transmitidos a la guía "b". Las magnitudes denotadas con "" corresponden a campos que se propagan en el sentido "z" negativo y los distintos coeficientes "a" y "b" son las amplitudes de cada modo. Se han empleado los subíndices "a" y "b" para diferenciar las dos guías que forman la discontinuidad.

La resolución de este sistema de ecuaciones se aborda mediante el método de Galerkin, que es el Método de los Momentos cuando las funciones prueba y base coinciden. Clásicamente, en el M.A.M. se han empleado las funciones prueba siguientes: campo magnético de cada modo en la guía de entrada (\vec{h}_a) y campo eléctrico de cada modo en la guía de salida (\vec{e}_b) [5, 13-19]. Sin embargo, y como claramente se observa de las ecuaciones (5.1) y (5.2), estas no son las únicas funciones prueba por las que se puede multiplicar. Así se pueden elegir como funciones prueba (\vec{h}_b) y (\vec{e}_a) y se obtiene otro sistema de ecuaciones distinto y, acaso, otras soluciones. Sin embargo, si el conjunto de modos propios elegido es completo, en el límite ambas soluciones deben coincidir. En nuestro caso, elegiremos las funciones test necesarias para poder expresar los coeficientes del sistema de ecuaciones resultante en forma de las relaciones de ortogonalidad generalizadas.

Multiplicando vectorialmente (5.1) por \vec{h}'_{am} y \vec{h}_{bn} y (5.2) por \vec{e}_{bn} y \vec{e}'_{am} se obtiene el siguiente sistema matricial

$$\left[\begin{array}{c} \int_a (\vec{e}'_{a1} \times \vec{h}'_{am} + \vec{e}'_{am} \times \vec{h}'_{a1}) \cdot \vec{u}_z \, dx dy \\ \int_a (\vec{e}'_{a1} \times \vec{h}_{bn} + \vec{e}_{bn} \times \vec{h}'_{a1}) \cdot \vec{u}_z \, dx dy \end{array} \right] \left| \begin{array}{c} - \int_a (\vec{e}_{bj} \times \vec{h}'_{am} + \vec{e}'_{am} \times \vec{h}_{bj}) \cdot \vec{u}_z \, dx dy \\ - \int_a (\vec{e}_{bj} \times \vec{h}_{bn} + \vec{e}_{bn} \times \vec{h}_{bj}) \cdot \vec{u}_z \, dx dy \end{array} \right]$$

$$\begin{bmatrix} \frac{a'_{r1}}{a_1} \\ \dots \\ \frac{b_{j1}}{a_1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\int_a (\vec{e}'_{a1} \times \vec{h}'_{am} + \vec{e}'_{am} \times \vec{h}'_{a1}) \cdot \vec{u}_z dx dy \\ -\int_a (\vec{e}'_{a1} \times \vec{h}'_{bn} + \vec{e}'_{bn} \times \vec{h}'_{a1}) \cdot \vec{u}_z dx dy \end{bmatrix} \quad (5.4)$$

La resolución de este sistema de ecuaciones permite obtener las submatrices S_{11} y S_{21} de la matriz de dispersión que caracteriza la discontinuidad.

5.2.2 Incidencia por la guía "b"

Consideremos ahora incidencia con "N1" modos por la guía "b"; si se reflejan "N2" modos, se transmiten "M" modos a la guía "a" y, como antes, se plantean las ecuaciones del campo en las dos guías imponiéndose la condición de continuidad se obtiene

$$\sum_{j=1}^{N1} \left[b'_j \vec{e}'_{bj} + \sum_{r=1}^{N2} b_{rj} \vec{e}'_{br} \right] = \sum_{j=1}^{N1} \sum_{l=1}^M a'_{lj} \vec{e}'_{al} \quad (5.4)$$

$$\sum_{j=1}^{N1} \left[b'_j \vec{h}'_{bj} + \sum_{r=1}^{N2} b_{rj} \vec{h}'_{br} \right] = \sum_{j=1}^{N1} \sum_{l=1}^M a'_{lj} \vec{h}'_{al} \quad (5.5)$$

Procediendo de igual manera que el apartado anterior con las funciones \vec{h}'_{bn} , \vec{e}'_{bn} y \vec{e}'_{am} , \vec{h}'_{am} , se obtiene el siguiente sistema matricial

$$\left[\begin{array}{c} \int_a (\vec{e}'_{bj} \times \vec{h}'_{bn} + \vec{e}'_{bn} \times \vec{h}'_{bj}) \cdot \vec{u}_z dx dy \\ \int_a (\vec{e}'_{bj} \times \vec{h}'_{am} + \vec{e}'_{am} \times \vec{h}'_{bj}) \cdot \vec{u}_z dx dy \end{array} \right] \left| \begin{array}{c} - \int_a (\vec{e}'_{a1} \times \vec{h}'_{bn} + \vec{e}'_{bn} \times \vec{h}'_{a1}) \cdot \vec{u}_z dx dy \\ - \int_a (\vec{e}'_{a1} \times \vec{h}'_{am} + \vec{e}'_{am} \times \vec{h}'_{a1}) \cdot \vec{u}_z dx dy \end{array} \right]$$

$$\begin{bmatrix} \frac{b'_{rj}}{b'_j} \\ \dots \\ \frac{a'_{1j}}{b'_j} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} - \int_a (\vec{e}'_{bj} \times \vec{h}'_{bn} + \vec{e}'_{bn} \times \vec{h}'_{bj}) \cdot \vec{u}_z dx dy \\ \dots \\ - \int_a (\vec{e}'_{bj} \times \vec{h}'_{am} + \vec{e}'_{am} \times \vec{h}'_{bj}) \cdot \vec{u}_z dx dy \end{bmatrix} \quad (5.6)$$

de donde se obtiene el resto de la matriz de dispersión S_{12} y S_{22} .

5.2.3 Incidencia completa por las dos guías

Otra manera de caracterizar una discontinuidad cualquiera mediante el método de adaptación modal es considerar que todos los modos inciden a la vez por ambos lados de la discontinuidad, o lo que es lo mismo, plantear el campo total en cada guía como superposición de todos los modos, y obligar después al cumplimiento de las condiciones de continuidad. Siguiendo con la notación anterior y, suponiendo por simplicidad, que en la guía "a" inciden y se reflejan "M" modos y en la guía "b" "N" modos, tenemos

$$\sum_{i=1}^M a_i \vec{e}'_{ai} + \sum_{i=1}^M a'_i \vec{e}'_{ai} = \sum_{j=1}^N b'_j \vec{e}'_{bj} + \sum_{j=1}^N b_j \vec{e}'_{bj} \quad (5.7a)$$

$$\sum_{i=1}^M a_i \vec{h}'_{ai} + \sum_{i=1}^M a'_i \vec{h}'_{ai} = \sum_{j=1}^N b'_j \vec{h}'_{bj} + \sum_{j=1}^N b_j \vec{h}'_{bj} \quad (5.7b)$$

Las amplitudes de los modos se muestran en la figura 5.2

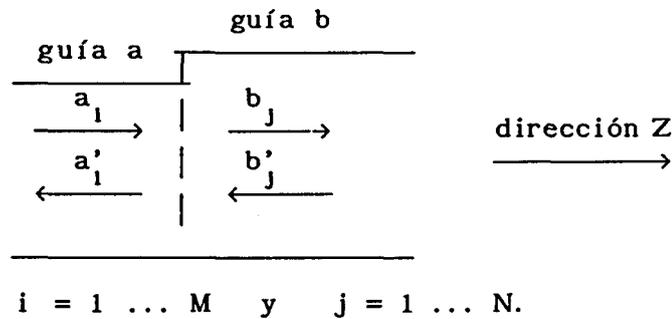


Figura 5.2.- Amplitudes de los modos en una discontinuidad

Si se eligen como funciones prueba \vec{h}'_{am} y \vec{e}'_{am} ($m=1\dots M$) y \vec{e}_{bn} y \vec{h}_{bn} ($n=1\dots N$) se obtiene el siguiente sistema matricial

$$\begin{bmatrix} A \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_i \\ b'_j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a'_i \\ b_j \end{bmatrix} \quad (5.8)$$

donde las matrices formadas por las amplitudes de los modos son vectores columna de dimensión $M+N$ y $[A]$ y $[B]$ son matrices cuadradas de orden $(M+N) \times (M+N)$ definidas como

$$\begin{bmatrix} A \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{MM} & A_{MN} \\ A_{NM} & A_{NN} \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad \begin{bmatrix} B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B_{MM} & B_{MN} \\ B_{NM} & B_{NN} \end{bmatrix} \quad (5.9)$$

donde

$$A_{MM}(m,i) = \int_a (\vec{e}'_{ai} \times \vec{h}'_{am} + \vec{e}'_{am} \times \vec{h}'_{ai}) \cdot \vec{u}_z \, dx \, dy \quad (5.10a)$$

$$A_{MN}(m,j) = - \int_a (\vec{e}'_{bj} \times \vec{h}'_{am} + \vec{e}'_{am} \times \vec{h}'_{bj}) \cdot \vec{u}_z \, dx \, dy \quad (5.10b)$$

$$A_{NM}(n,i) = \int_a (\vec{e}_{bn} \times \vec{h}'_{ai} + \vec{e}'_{ai} \times \vec{h}_{bn}) \cdot \vec{u}_z \, dx \, dy \quad (5.10c)$$

$$A_{NN}(n,j) = - \int_a (\vec{e}_{bn} \times \vec{h}'_{bj} + \vec{e}'_{bj} \times \vec{h}_{bn}) \cdot \vec{u}_z \, dx \, dy \quad (5.10d)$$

$$B_{MM}(m,i) = - \int_a (\vec{e}'_{ai} \times \vec{h}'_{am} + \vec{e}'_{am} \times \vec{h}'_{ai}) \cdot \vec{u}_z \, dx \, dy \quad (5.11a)$$

$$B_{MN}(m,j) = \int_a (\vec{e}'_{bj} \times \vec{h}'_{am} + \vec{e}'_{am} \times \vec{h}'_{bj}) \cdot \vec{u}_z \, dx \, dy \quad (5.11b)$$

$$B_{MM}(m,i) = - \int_a (\vec{e}_{bn} \times \vec{h}'_{ai} + \vec{e}'_{ai} \times \vec{h}_{bn}) \cdot \vec{u}_z \, dx \, dy \quad (5.11c)$$

$$B_{NN}(n,j) = \int_a (\vec{e}_{bn} \times \vec{h}'_{bj} + \vec{e}'_{bj} \times \vec{h}_{bn}) \cdot \vec{u}_z \, dx \, dy \quad (5.11d)$$

De la ecuación (5.8) se deduce que la matriz de dispersión que caracteriza la discontinuidad es

$$\begin{bmatrix} S \\ S \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{21} & S_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} A \end{bmatrix} \quad (5.12)$$

5.4 COMBINACION DEL METODO DE MODOS ACOPLADOS CON EL M.A.M.

Una vez seleccionados los modos básicos \vec{e} y \vec{h} en que desarrollar las componentes transversales de los modos propios de las guías parcialmente llenas, podemos expresar los modos propios como suma de los modos básicos, en nuestro caso los modos TE y TM de la guía vacía. Estos modos verifican la

siguiente propiedad de ortogonalidad

$$\int_s (\vec{e}_i \times \vec{h}_j) \cdot \vec{u}_z \, dx \, dy = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases} \quad (5.13)$$

donde la letra "s" de la integral se refiere a la sección recta de la guía conductora que rodea al dieléctrico y los subíndices "i", "j" son, en realidad, dobles subíndices. En nuestro caso esa sección recta será indistintamente la de la guía "a" o el de la guía "b", pues consideraremos que ambas tienen las mismas dimensiones externas, ya que si esto no fuera así se añadiría una nueva discontinuidad al problema.

Sustituyendo las expresiones que dan los modos propios en función de los modos básicos, en las integrales que proporcionan los coeficientes del sistema de ecuaciones anterior, y aplicando la propiedad de ortogonalidad (5.13) podemos reducir el cálculo integral a un sumatorio; por ejemplo, para uno de los sumandos de las integrales (5.10,5.11) tendríamos

$$\begin{aligned} \int_a (\vec{e}_{al} \times \vec{h}_{am}) \cdot \vec{u}_z \, dx \, dy &= \int_a \left(\sum_s V_{al(r)} \vec{e}_{ar} \times \sum_s I_{am(s)} \vec{h}_{as} \right) \cdot \vec{u}_z \, dx \, dy = \\ &= \sum_r \sum_s V_{al(r)} I_{am(s)} \int_a (\vec{e}_{ar} \times \vec{h}_{as}) \cdot \vec{u}_z \, dx \, dy = \sum_r V_{al(r)} I_{am(r)} \end{aligned} \quad (5.14)$$

Análogamente

$$\int_a (\vec{e}_{bj} \times \vec{h}_{am}) \cdot \vec{u}_z \, dx \, dy = \sum_r V_{bj(r)} I_{am(r)} \quad (5.15)$$

Para que las expresiones (5.14,5.15) sean válidas, es claro que a la hora de desarrollar los modos propios en ambas guías es necesario elegir el mismo número de modos básicos empleados para describirlos, además de ser exactamente los mismos. Por lo tanto en todas las expresiones, los índices mudos "r" y "s", que significan sumatorio a todos los modos TE y TM de la guía vacía serán los mismos.

Con estas expresiones, los coeficientes que forman la matriz de dispersión [S] de la discontinuidad, que eran integrales dobles extendidas a la sección recta del contorno metálico, pasan a ser sumatorios de los coeficientes que dan el desarrollo de los modos propios en función de los modos básicos, es decir, los coeficientes V e I calculados en el método de modos acoplados. Este paso proporciona una gran mejora en el tiempo de ordenador requerido para caracterizar una discontinuidad.

5.4 M.A.M. MEDIANTE FUNCIONES BASE ORTONORMALES

En los apartados anteriores se ha aplicado el M.A.M. para obtener la M.D.G. que caracteriza una discontinuidad. Al estudiar medios no recíprocos se utilizan las relaciones de ortogonalidad generalizadas. El uso de las relaciones de ortogonalidad correspondientes a medios isótropos, daría lugar a una complejidad creciente del sistema de ecuaciones a resolver, a no ser que se pudieran expresar los modos propios no ortogonales en función de otros modos "equivalentes" que sí verificarán las mismas condiciones de ortogonalidad que los modos de medios isótropos.

Bernues y Bolle [23] estudiaron una discontinuidad entre una guía vacía y una guía parcialmente llena con una lámina vertical deferrita. Debido a la no ortogonalidad de los modos en la sección con ferrita, no se podía seguir el método utilizado para guías isótropas, optando por expresar cada modo propio en la ferrita como suma de unos "*modos dieléctricos equivalentes*" que corresponden a los modos de una guía igual a la de ferrita pero reemplazándola por un dieléctrico isótropo de la misma permitividad. De esta forma, los modos en la sección anisótropa se reemplazaban por los modos de una guía dieléctrica equivalente. Algo similar se puede ver en [24] empleando una aproximación de Galerkin.

En este apartado se propone una alternativa que consiste en descomponer el conjunto no ortogonal en sentido clásico de los modos propios de las guías no recíprocas en el conjunto de modos básicos empleado en el método de modos acoplados (modos TE y TM de la guía vacía).

5.4.1 Incidencia modo a modo

Consideremos una discontinuidad como la de la figura 3.1 y supongamos incidencia por la guía "a" con un único modo. Imponiendo la conservación de las componentes transversales del campo electromagnético, en el plano de la discontinuidad ($z=0$) se obtiene

$$a_1 \vec{e}_{a1} + \sum_{i=1}^M a'_i \vec{e}'_{ai} = \sum_{j=1}^N b_j \vec{e}_{bj} \quad (5.16)$$

$$a_1 \vec{h}_{a1} + \sum_{i=1}^M a'_i \vec{h}'_{ai} = \sum_{j=1}^N b_j \vec{h}_{bj} \quad (5.17)$$

donde ya se ha supuesto que hay "M" modos reflejados en la guía "a" y "N" modos transmitidos en la guía "b". Igual que antes, se ha denotado al campo reflejado con "'". Por simplicidad, haremos a partir de ahora $a_1=1$, análogo a dividir cada ecuación por a_1 . Las ecuaciones (5.16) y (5.17) se pueden poner matricialmente como

$$\begin{bmatrix} 1, a'_1 & \dots & a'_M \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{e}_{a1} \\ \vec{e}'_{a1} \\ \vdots \\ \vec{e}'_{aM} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 & b_2 & \dots & b_N \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{e}_{b1} \\ \vec{e}_{b2} \\ \vdots \\ \vec{e}_{bN} \end{bmatrix} \quad (5.18)$$

$$\begin{bmatrix} 1, a'_1 & \dots & a'_M \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{h}_{a1} \\ \vec{h}'_{a1} \\ \vdots \\ \vec{h}'_{aM} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 & b_2 & \dots & b_N \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{h}_{b1} \\ \vec{h}_{b2} \\ \vdots \\ \vec{h}_{bN} \end{bmatrix} \quad (5.19)$$

Empleando las tensiones e intensidades proporcionadas por el método de modos acoplados, podemos expresar los campos electromagnéticos transversales a cada lado de la discontinuidad en función de los modos TE y TM de la guía vacía como

$$\vec{e}_{tk} = \sum_{i=1}^{\infty} V_{(i)} \vec{e}_{(i)} + \sum_{j=1}^{\infty} V_{(j)} \vec{e}_{(j)} \quad (5.20)$$

$$\vec{h}_{tk} = \sum_{i=1}^{\infty} I_{(i)} \vec{h}_{(i)} + \sum_{j=1}^{\infty} I_{(j)} \vec{h}_{(j)} \quad (5.21)$$

donde \vec{e}_{tk} es el campo eléctrico transversal del modo propio k-ésimo, $\vec{e}_{(i)}$ es el campo eléctrico transversal del modo básico TM i-ésimo, $V_{(i)}$ su correspondiente coeficiente, $\vec{e}_{(j)}$ el campo eléctrico transversal del modo básico TE j-ésimo y $V_{(j)}$ su correspondiente coeficiente. Análogamente con los campos magnéticos de la ecuación (5.21). Como es lógico, los sumatorios se deben truncar a un número finito de modos básicos, que llamaremos "NM", de manera que el número de modos básicos TM más el número de modos básicos TE sea precisamente "NM". Obviando la diferencia entre modos TM y TE, y truncando los sumatorios, las expresiones (5.20, 5.21) se pueden reescribir como

$$\vec{e}_{tk} = \sum_{i=1}^{NM} V_i \vec{e}_i \quad (5.22)$$

$$\vec{h}_{tk} = \sum_{i=1}^{NM} I_i \vec{h}_i \quad (5.23)$$

donde ahora los primeros valores del índice "i" corresponderán a los modos TM y los siguientes hasta el número total "NM" de modos básicos a los modos TE.

5.4.1.1 Matrices de autovalores y autovectores

Como ya hemos visto, el desarrollo teórico del método de modos acoplados

conduce a una ecuación de autovalores que se resuelve mediante cálculo numérico. Los autovalores obtenidos son las constantes de propagación de los modos propios que soporta la guía y los autovectores son las tensiones e intensidades que permiten expresar cada modo propio en función de los modos básicos escogidos. Por el propio funcionamiento de las subrutinas matemáticas y la organización de la matriz de autovalores, los autovectores resultantes vienen dados en una matriz cuadrada $[A]$ de orden $(2NM \times 2NM)$, con NM el número total de modos básicos empleados; los autovalores (constantes de propagación) vienen dados en un vector columna $[\xi]$ de orden $2NM$ (se obtendrían por tanto, $2NM$ modos propios, NM modos en el sentido "z" positivo y NM modos en el sentido "z" negativo); entonces la columna j -ésima de la matriz $[A]$ es un vector columna de $2NM$ elementos, que contiene en sus NM primeros elementos las tensiones " V_1 " ($i=1, \dots, NM$) y en sus siguientes NM elementos las intensidades " I_1 " ($i=NM+1, \dots, 2NM$) correspondientes al modo cuya constante de propagación ocupa el lugar j -ésimo del vector $[\xi]$. Además, el programa de cálculo realizado organiza el vector $[\xi]$ de manera que en sus primeros NM lugares coloca los modos que se propagan en el sentido "z" positivo ordenados por constantes de fase decrecientes y constantes de atenuación crecientes y en los siguientes NM lugares los modos que se propagan en el sentido "z" negativo y con la misma ordenación. Evidentemente, las columnas de la matriz $[A]$ también se reorganizan convenientemente para que la columna j -ésima sea el autovector correspondiente al modo cuya constante de propagación ocupa el lugar j -ésimo del vector $[\xi]$. De esta manera, el vector $[\xi]$ se puede dividir en otros dos, cada uno de ellos conteniendo los modos que se propagan unos en sentido "z" positivo y los otros en "z" negativo. Así

$$[\xi] = \begin{bmatrix} \Gamma_1 \\ \Gamma_2 \\ \vdots \\ \Gamma_{NM} \\ \Gamma'_1 \\ \Gamma'_2 \\ \vdots \\ \Gamma'_{NM} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Gamma \\ \Gamma' \end{bmatrix}, \quad \text{con} \quad \begin{bmatrix} [\Gamma] = \begin{bmatrix} \Gamma_1 \\ \Gamma_2 \\ \vdots \\ \Gamma_{NM} \end{bmatrix} \\ [\Gamma'] = \begin{bmatrix} \Gamma'_1 \\ \Gamma'_2 \\ \vdots \\ \Gamma'_{NM} \end{bmatrix} \end{bmatrix} \quad (5.24)$$

donde los términos Γ_1 son las constantes de propagación de los modos que viajan en el sentido "z" positivo y los términos Γ'_1 las de los modos que lo hacen en el contrario.

Con la matriz [A] de autovectores, podemos realizar un proceso análogo. La forma general de [A], ya organizada según lo expuesto anteriormente sería

$$[A] = \begin{bmatrix} A_{1,1} & A_{1,2} & \dots & A_{1,NM} & A_{1,NM+1} & A_{1,NM+2} & \dots & A_{1,2NM} \\ A_{2,1} & A_{2,2} & \dots & A_{2,NM} & A_{2,NM+1} & A_{2,NM+2} & \dots & A_{2,2NM} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{NM,1} & A_{NM,2} & \dots & A_{NM,NM} & A_{NM,NM+1} & A_{NM,NM+2} & \dots & A_{NM,2NM} \\ \hline A_{NM+1,1} & A_{1,2} & \dots & A_{NM+1,NM} & A_{NM+1,NM+1} & A_{NM+1,NM+2} & \dots & A_{NM+1,2NM} \\ A_{NM+2,1} & A_{2,2} & \dots & A_{NM+2,NM} & A_{NM+2,NM+1} & A_{NM+2,NM+2} & \dots & A_{NM+2,2NM} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{2NM,1} & A_{2NM,2} & \dots & A_{2NM,NM} & A_{2NM,NM+1} & A_{2NM,NM+2} & \dots & A_{2NM,2NM} \end{bmatrix} \quad (5.25)$$

con lo que la matriz [A] se puede dividir en cuatro cajas (las divididas por las líneas discontinuas); así

$$[A] = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}$$

de forma que en A_{11} están las tensiones de los modos que viajan hacia las "z" positivas y en A_{21} sus correspondientes intensidades y en las cajas A_{12} y A_{22} las tensiones e intensidades, respectivamente, de los modos que viajan hacia las "z" negativas. Por lo tanto renombrando los términos " A_{ij} " a " V_{ij} " y a " I_{ij} " para los modos que viajan en el sentido "z" positivo y a " V'_{ij} " y a " I'_{ij} " los que lo hacen hacia "z" negativo, y renumerando los subíndices podemos poner

$$[A_{11}] = [\tilde{V}] = \begin{bmatrix} V_{1,1} & V_{1,2} & \dots & V_{1,NM} \\ V_{2,1} & V_{2,2} & \dots & V_{2,NM} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ V_{NM,1} & V_{NM,2} & \dots & V_{NN,NM} \end{bmatrix} \quad (5.26a)$$

$$[A_{21}] = [\tilde{I}] = \begin{bmatrix} I_{1,1} & I_{1,2} & \dots & I_{1,NM} \\ I_{2,1} & I_{2,2} & \dots & I_{2,NM} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ I_{NM,1} & I_{NM,2} & \dots & I_{NN,NM} \end{bmatrix} \quad (5.26b)$$

$$[A_{12}] = [\tilde{V}'] = \begin{bmatrix} V'_{1,1} & V'_{1,2} & \dots & V'_{1,NM} \\ V'_{2,1} & V'_{2,2} & \dots & V'_{2,NM} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ V'_{NM,1} & V'_{NM,2} & \dots & V'_{NN,NM} \end{bmatrix} \quad (5.27a)$$

$$[A_{22}] = [\tilde{I}'] = \begin{bmatrix} I'_{1,1} & I'_{1,2} & \dots & I'_{1,NM} \\ I'_{2,1} & I'_{2,2} & \dots & I'_{2,NM} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ I'_{NM,1} & I'_{NM,2} & \dots & I'_{NM,NM} \end{bmatrix} \quad (5.27b)$$

Por conveniencia, en la formulación que sigue, vamos a trasponer las matrices anteriores de forma que

$$[V] = [\tilde{V}]^t, \quad [V'] = [\tilde{V}']^t, \quad [I] = [\tilde{I}]^t \quad [I'] = [\tilde{I}']^t$$

donde "t" indica trasponer la matriz.

5.4.1.2 Campo en guía "b"

Los modos propios de la guía "b" se pueden poner en función de los modos básicos como

$$\begin{bmatrix} \vec{e}_{b1} \\ \vec{e}_{b2} \\ \vdots \\ \vec{e}_{bN} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V_{11}^b & V_{12}^b & \dots & V_{1NM}^b \\ V_{21}^b & V_{22}^b & \dots & V_{2NM}^b \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ V_{N1}^b & V_{N2}^b & \dots & V_{NNM}^b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{e}_1 \\ \vec{e}_2 \\ \vdots \\ \vec{e}_{NM} \end{bmatrix} \quad (5.28)$$

donde "NM" es el número de modos básicos empleado en el método de modos acoplados y \vec{e}_1, \vec{h}_1 los campos eléctrico y magnético transversales, respectivamente, de dichos modos básicos. Se ha utilizado el superíndice "b" para diferenciar de los correspondientes parámetros de la guía "a".

Sustituyendo en la parte derecha de la ecuación (5.18) se tiene

$$\begin{bmatrix} b_1 & b_2 & \dots & b_N \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{e}_{b1} \\ \vec{e}_{b2} \\ \vdots \\ \vec{e}_{bN} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 & b_2 & \dots & b_N \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_{11}^b & V_{12}^b & \dots & V_{1NM}^b \\ V_{21}^b & V_{22}^b & \dots & V_{2NM}^b \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ V_{N1}^b & V_{N2}^b & \dots & V_{NNM}^b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{e}_1 \\ \vec{e}_2 \\ \vdots \\ \vec{e}_{NM} \end{bmatrix} \quad (5.29)$$

Llamando

$$\begin{bmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \dots & \alpha_{NM} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 & b_2 & \dots & b_N \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_{11}^b & V_{12}^b & \dots & V_{1NM}^b \\ V_{21}^b & V_{22}^b & \dots & V_{2NM}^b \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ V_{N1}^b & V_{N2}^b & \dots & V_{NNM}^b \end{bmatrix} \quad (5.30)$$

tendremos que el campo eléctrico total en la guía "b" es

$$\begin{bmatrix} b_1 & b_2 & \dots & b_N \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{e}_{b1} \\ \vec{e}_{b2} \\ \vdots \\ \vec{e}_{bN} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \dots & \alpha_{NM} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{e}_1 \\ \vec{e}_2 \\ \vdots \\ \vec{e}_{NM} \end{bmatrix} \quad (5.31)$$

Realizando el mismo proceso con el campo magnético se obtiene

$$\begin{bmatrix} \vec{h}_{b1} \\ \vec{h}_{b2} \\ \vdots \\ \vec{h}_{bN} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_{11}^b & I_{12}^b & \dots & I_{1NM}^b \\ I_{21}^b & I_{22}^b & \dots & I_{2NM}^b \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ I_{N1}^b & I_{N2}^b & \dots & I_{NNM}^b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{h}_1 \\ \vec{h}_2 \\ \vdots \\ \vec{h}_{NM} \end{bmatrix} \quad (5.32)$$

con lo que, la parte derecha de la ecuación (5.19) se puede poner como

$$\begin{bmatrix} b_1 & b_2 & \dots & b_N \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{h}_{b1} \\ \vec{h}_{b2} \\ \vdots \\ \vec{h}_{bN} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 & b_2 & \dots & b_N \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_{11}^b & I_{12}^b & \dots & I_{1NM}^b \\ I_{21}^b & I_{22}^b & \dots & I_{2NM}^b \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ I_{N1}^b & I_{N2}^b & \dots & I_{NNM}^b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{h}_1 \\ \vec{h}_2 \\ \vdots \\ \vec{h}_{NM} \end{bmatrix} \quad (5.33)$$

Llamando

$$\begin{bmatrix} \beta_1 & \beta_2 & \dots & \beta_{NM} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 & b_2 & \dots & b_N \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_{11}^b & I_{12}^b & \dots & I_{1NM}^b \\ I_{21}^b & I_{22}^b & \dots & I_{2NM}^b \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ I_{N1}^b & I_{N2}^b & \dots & I_{NNM}^b \end{bmatrix} \quad (5.34)$$

tendremos que el campo magnético total en la guía "b" es

$$\begin{bmatrix} b_1 & b_2 & \dots & b_N \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{h}_{b1} \\ \vec{h}_{b2} \\ \vdots \\ \vec{h}_{bN} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \beta_1 & \beta_2 & \dots & \beta_{NM} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{h}_1 \\ \vec{h}_2 \\ \vdots \\ \vec{h}_{NM} \end{bmatrix} \quad (5.35)$$

5.4.1.3 Campo en guía "a"

Ahora vamos a expresar el campo electromagnético en la guía "a" es decir, la parte izquierda de las ecuaciones (5.18) y (5.19) en función de los mismos modos básicos anteriores; para el campo eléctrico tendremos

$$\begin{bmatrix} \vec{e}_{a1} \\ \vec{e}_{a1} \\ \vec{e}_{a2} \\ \vdots \\ \vec{e}_{aM} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V_{11}^a & V_{12}^a & V_{1NM}^a \\ V_{11}^a & V_{12}^a & \dots & V_{1NM}^a \\ V_{21}^a & V_{22}^a & \dots & V_{2NM}^a \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ V_{M1}^a & V_{M2}^a & \dots & V_{MNM}^a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{e}_1 \\ \vec{e}_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vec{e}_{NM} \end{bmatrix} \quad (5.36)$$

Los coeficientes V e I se corresponden con los de los modos que se propagan en la dirección "z" negativa. Hemos empleado el superíndice "a" para denotar parámetros de la guía "a".

Sustituyendo en el primer miembro de la ecuación (5.18) se obtiene

$$\begin{bmatrix} 1, a'_1 & \dots & a'_M \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{e}_{a1} \\ \vec{e}_{a1} \\ \vec{e}_{a2} \\ \vdots \\ \vec{e}_{aM} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1, a'_1 & \dots & a'_M \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_{11}^a & V_{12}^a & V_{1NM}^a \\ V_{11}^a & V_{12}^a & \dots & V_{1NM}^a \\ V_{21}^a & V_{22}^a & \dots & V_{2NM}^a \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ V_{M1}^a & V_{M2}^a & \dots & V_{MNM}^a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{e}_1 \\ \vec{e}_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vec{e}_{NM} \end{bmatrix} \quad (5.37)$$

Llamando

$$\begin{bmatrix} \gamma_1 & \gamma_2 & \dots & \gamma_{NM} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1, a'_1 & \dots & a'_M \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_{11}^a & V_{12}^a & V_{1NM}^a \\ V_{11}^a & V_{12}^a & \dots & V_{1NM}^a \\ V_{21}^a & V_{22}^a & \dots & V_{2NM}^a \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ V_{M1}^a & V_{M2}^a & \dots & V_{MNM}^a \end{bmatrix} \quad (5.38)$$

el campo eléctrico total en la guía de entrada se puede expresar como

$$\begin{bmatrix} 1, a'_1 & \dots & a'_M \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{e}'_{a1} \\ \vec{e}'_{a1} \\ \vec{e}'_{a2} \\ \vdots \\ \vec{e}'_{aM} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma_1 & \gamma_2 & \dots & \gamma_{NM} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{e}_1 \\ \vec{e}_2 \\ \vdots \\ \vec{e}_{NM} \end{bmatrix} \quad (5.39)$$

Realizando un proceso similar para el campo magnético tendremos

$$\begin{bmatrix} \vec{h}'_{a1} \\ \vec{h}'_{a1} \\ \vec{h}'_{a2} \\ \vdots \\ \vec{h}'_{aM} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_{11}^a & I_{12}^a & I_{1NM}^a \\ I_{11}^a & I_{12}^a & \dots & I_{1NM}^a \\ I_{21}^a & I_{22}^a & \dots & I_{2NM}^a \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ I_{M1}^a & I_{M2}^a & \dots & I_{MNM}^a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{h}_1 \\ \vec{h}_2 \\ \vdots \\ \vec{h}_{NM} \end{bmatrix} \quad (5.40)$$

Sustituyendo en el primer miembro de la ecuación (5.19) tenemos

$$\begin{bmatrix} 1, a'_1 & \dots & a'_M \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{h}'_{a1} \\ \vec{h}'_{a1} \\ \vec{h}'_{a2} \\ \vdots \\ \vec{h}'_{aM} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1, a'_1 & \dots & a'_M \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_{11}^a & I_{12}^a & I_{1NM}^a \\ I_{11}^a & I_{12}^a & \dots & I_{1NM}^a \\ I_{21}^a & I_{22}^a & \dots & I_{2NM}^a \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ I_{N1}^a & I_{N2}^a & \dots & I_{NNM}^a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{h}_1 \\ \vec{h}_2 \\ \vdots \\ \vec{h}_{NM} \end{bmatrix} \quad (5.41)$$

Llamando

$$\begin{bmatrix} \delta_1 & \delta_2 & \dots & \delta_{NM} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1, a'_1 & \dots & a'_M \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_{11}^a & I_{12}^a & \dots & I_{1NM}^a \\ I_{11}^{a'} & I_{12}^{a'} & \dots & I_{1NM}^{a'} \\ I_{21}^{a'} & I_{22}^{a'} & \dots & I_{2NM}^{a'} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ I_{N1}^{a'} & I_{N2}^{a'} & \dots & I_{NNM}^{a'} \end{bmatrix} \quad (5.42)$$

el campo magnético total en la guía de entrada se puede poner como

$$\begin{bmatrix} 1, a'_1 & \dots & a'_M \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{h}_{a1} \\ \vec{h}'_{a1} \\ \vec{h}'_{a2} \\ \vdots \\ \vec{h}'_{aM} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \delta_1 & \delta_2 & \dots & \delta_{NM} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{h}_1 \\ \vec{h}_2 \\ \vdots \\ \vec{h}_{NM} \end{bmatrix} \quad (5.43)$$

5.4.1.4 Condiciones de contorno en la discontinuidad

Sustituyendo en las ecuaciones (5.18) y (5.19) las expresiones de los campos eléctrico y magnéticos halladas tendremos :

– del campo eléctrico

$$\begin{bmatrix} \gamma_1 & \gamma_2 & \dots & \gamma_{NM} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{e}_1 \\ \vec{e}_2 \\ \vdots \\ \vec{e}_{NM} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \dots & \alpha_{NM} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{e}_1 \\ \vec{e}_2 \\ \vdots \\ \vec{e}_{NM} \end{bmatrix} \quad (5.44)$$

– del campo magnético

$$\begin{bmatrix} \delta_1 & \delta_2 & \dots & \delta_{NM} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{h}_1 \\ \vec{h}_2 \\ \vdots \\ \vec{h}_{NM} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \beta_1 & \beta_2 & \dots & \beta_{NM} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{h}_1 \\ \vec{h}_2 \\ \vdots \\ \vec{h}_{NM} \end{bmatrix} \quad (5.45)$$

Examinando las ecuaciones (5.44) y (5.45) y ya que el conjunto de modos de la guía vacía es ortogonal, podemos deducir las dos siguientes igualdades

$$\begin{cases} \alpha_i = \gamma_i \\ \beta_i = \delta_i \end{cases} \quad \text{desde } i=1 \text{ hasta } NM \text{ (No. modos básicos)} \quad (5.46)$$

con lo cual podemos plantear las siguientes ecuaciones

$$\begin{bmatrix} b_1 & b_2 & \dots & b_N \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_{11}^b & V_{12}^b & \dots & V_{1NM}^b \\ V_{21}^b & V_{22}^b & \dots & V_{2NM}^b \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ V_{N1}^b & V_{N2}^b & \dots & V_{NNM}^b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1, a'_1 & a'_2 & \dots & a'_M \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_{11}^a & V_{12}^a & \dots & V_{1NM}^a \\ V_{21}^a & V_{22}^a & \dots & V_{2NM}^a \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ V_{M1}^a & V_{M2}^a & \dots & V_{MNM}^a \end{bmatrix} \quad (5.47)$$

$$\begin{bmatrix} b_1 & b_2 & \dots & b_N \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_{11}^b & I_{12}^b & \dots & I_{1NM}^b \\ I_{21}^b & I_{22}^b & \dots & I_{2NM}^b \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ I_{N1}^b & I_{N2}^b & \dots & I_{NNM}^b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1, a'_1 & a'_2 & \dots & a'_M \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_{11}^a & I_{12}^a & \dots & I_{1NM}^a \\ I_{21}^a & I_{22}^a & \dots & I_{2NM}^a \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ I_{N1}^a & I_{N2}^a & \dots & I_{NNM}^a \end{bmatrix} \quad (5.48)$$

Las expresiones (5.47) y (5.48) constituyen un sistema lineal de

ecuaciones no homogéneo, con "2NM" ecuaciones y M+N incógnitas que son los "M" coeficientes de reflexión y los "N" coeficientes de transmisión. Reordenando el sistema de ecuaciones para que tenga una estructura similar a la mostrada en la formulación típica del M.A.M. se obtiene

$$\begin{bmatrix} a'_1 & a'_2 & \dots & a'_M & b_1 & b_2 & \dots & b_N \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -V_{11}^a & -V_{12}^a & \dots & -V_{1NM}^a & -I_{11}^a & -I_{12}^a & \dots & -I_{1NM}^a \\ -V_{21}^a & -V_{22}^a & \dots & -V_{2NM}^a & -I_{21}^a & -I_{22}^a & \dots & -I_{2NM}^a \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ -V_{M1}^a & -V_{M2}^a & \dots & -V_{MNM}^a & -I_{M1}^a & -I_{M2}^a & \dots & -I_{MNM}^a \\ V_{11}^b & V_{12}^b & \dots & V_{1NM}^b & I_{11}^b & I_{12}^b & \dots & I_{1NM}^b \\ V_{21}^b & V_{22}^b & \dots & V_{2NM}^b & I_{21}^b & I_{22}^b & \dots & I_{2NM}^b \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ V_{N1}^b & V_{N2}^b & \dots & V_{NNM}^b & I_{N1}^b & I_{N2}^b & \dots & I_{NNM}^b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V_{11}^a & V_{12}^a & \dots & V_{1NM}^a & I_{11}^a & I_{12}^a & \dots & I_{1NM}^a \end{bmatrix} \quad (5.49)$$

Para que el sistema tenga solución, el número de incógnitas M+N debe ser igual al número de ecuaciones 2NM. Por tanto, escogido el número de modos básicos a emplear, el número de modos propios empleados en la caracterización de la discontinuidad debe ser el mismo en ambas guías e igual a "NM".

El sistema de ecuaciones (5.49) es válido para un solo modo incidente (en este caso el fundamental). Si consideramos incidencia completa por la guía "a", bastaría resolver el sistema (5.49) cambiando el vector de términos independientes por las tensiones e intensidades correspondientes al i-ésimo modo que incida, obteniéndose los coeficientes de reflexión y transmisión correspondientes a ese modo, y que ocuparían la columna i-ésima de la M.D.G.. Para incidencia por la guía "b" se procedería de igual manera. La diferencia con la formulación habitual, es que en este caso no existen integraciones a la sección recta de la guía. Recordemos, que la combinación de los métodos de adaptación modal con el de modos acoplados, reducía este cálculo integral a

sumatorios de productos de tensiones por intensidades, lo cual era un avance importante en sencillez y rapidez de cálculo en comparación con otros métodos de cálculo de modos electromagnéticos, en los que es necesario realizar esas integraciones de forma numérica. Con esta nueva formulación, incluso se evita el realizar esos sumatorios y simplemente, es necesario realizar una reorganización de la matriz de tensiones e intensidades que proporciona el método de modos acoplados.

5.4.2 Incidencia total

En la formulación anterior es necesario resolver un sistema de $2NM$ ecuaciones con $2NM$ incógnitas, $2NM$ veces. Aunque esta forma de plantear el problema resulta trasparente a la hora de interpretar los términos de la matriz de dispersión, es aún lenta cuando se pretende resolver en el ordenador. Por ello, vamos a plantear una formulación alternativa con modos ortogonales, basada en considerar que todos los modos inciden a la vez sobre la discontinuidad. Partiendo de la ecuación de continuidad para el campo eléctrico (en forma matricial)

$$\begin{aligned}
 & \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_M \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{e}_{a1} \\ \vec{e}_{a2} \\ \vdots \\ \vec{e}_{aM} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a'_1 & a'_2 & \dots & a'_M \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{e}'_{a1} \\ \vec{e}'_{a2} \\ \vdots \\ \vec{e}'_{aM} \end{bmatrix} = \\
 & = \begin{bmatrix} b'_1 & b'_2 & \dots & b'_N \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{e}'_{b1} \\ \vec{e}'_{b2} \\ \vdots \\ \vec{e}'_{bN} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1 & b_2 & \dots & b_N \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{e}_{b1} \\ \vec{e}_{b2} \\ \vdots \\ \vec{e}_{bN} \end{bmatrix} = \quad (5.50)
 \end{aligned}$$

y realizando un proceso similar al de incidencia con un único modo se llega a

$$\begin{aligned}
 & [\alpha_1 \ \alpha_2 \ \dots \ \alpha_{NM}] \begin{bmatrix} \vec{e}_1 \\ \vec{e}_2 \\ \vdots \\ \vec{e}_{NM} \end{bmatrix} + [\alpha'_1 \ \alpha'_2 \ \dots \ \alpha'_{NM}] \begin{bmatrix} \vec{e}_1 \\ \vec{e}_2 \\ \vdots \\ \vec{e}_{NM} \end{bmatrix} = \\
 & = [\beta'_1 \ \beta'_2 \ \dots \ \beta'_{NM}] \begin{bmatrix} \vec{e}_1 \\ \vec{e}_2 \\ \vdots \\ \vec{e}_{NM} \end{bmatrix} + [\beta_1 \ \beta_2 \ \dots \ \beta_{NM}] \begin{bmatrix} \vec{e}_1 \\ \vec{e}_2 \\ \vdots \\ \vec{e}_{NM} \end{bmatrix} \tag{5.51}
 \end{aligned}$$

donde

$$[\alpha_1 \ \alpha_2 \ \dots \ \alpha_{NM}] = [a_1 \ a_2 \ \dots \ a_M] \begin{bmatrix} V_{11}^a & V_{12}^a & \dots & V_{1NM}^a \\ V_{21}^a & V_{22}^a & \dots & V_{2NM}^a \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ V_{M1}^a & V_{M2}^a & \dots & V_{MNM}^a \end{bmatrix} \tag{5.52}$$

$$[\alpha'_1 \ \alpha'_2 \ \dots \ \alpha'_{NM}] = [a'_1 \ a'_2 \ \dots \ a'_M] \begin{bmatrix} V_{11}^{,a} & V_{12}^{,a} & \dots & V_{1NM}^{,a} \\ V_{21}^{,a} & V_{22}^{,a} & \dots & V_{2NM}^{,a} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ V_{M1}^{,a} & V_{M2}^{,a} & \dots & V_{MNM}^{,a} \end{bmatrix} \tag{5.53}$$

$$\begin{bmatrix} \beta_1 & \beta_2 & \dots & \beta_{NM} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 & b_2 & \dots & b_N \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_{11}^b & V_{12}^b & \dots & V_{1NM}^b \\ V_{21}^b & V_{22}^b & \dots & V_{2NM}^b \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ V_{N1}^b & V_{N2}^b & \dots & V_{NNM}^b \end{bmatrix} \quad (5.54)$$

$$\begin{bmatrix} \beta'_1 & \beta'_2 & \dots & \beta'_{NM} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b'_1 & b'_2 & \dots & b'_N \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_{11}^{b'} & V_{12}^{b'} & \dots & V_{1NM}^{b'} \\ V_{21}^{b'} & V_{22}^{b'} & \dots & V_{2NM}^{b'} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ V_{N1}^{b'} & V_{N2}^{b'} & \dots & V_{NNM}^{b'} \end{bmatrix} \quad (5.55)$$

Realizando el mismo proceso con el campo magnético, tendríamos

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_M \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{h}_{a1} \\ \vec{h}_{a2} \\ \vdots \\ \vec{h}_{aM} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a'_1 & a'_2 & \dots & a'_M \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{h}'_{a1} \\ \vec{h}'_{a2} \\ \vdots \\ \vec{h}'_{aM} \end{bmatrix} = \\ & = \begin{bmatrix} b'_1 & b'_2 & \dots & b'_N \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{h}'_{b1} \\ \vec{h}'_{b2} \\ \vdots \\ \vec{h}'_{bN} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1 & b_2 & \dots & b_N \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{h}_{b1} \\ \vec{h}_{b2} \\ \vdots \\ \vec{h}_{bN} \end{bmatrix} = \end{aligned} \quad (5.56)$$

Sustituyendo como antes, se obtiene el sistema

$$\begin{aligned}
 & [\delta_1 \ \delta_2 \ \dots \ \delta_{NM}] \begin{bmatrix} \vec{h}_1 \\ \vec{h}_2 \\ \vdots \\ \vec{h}_{NM} \end{bmatrix} + [\delta'_1 \ \delta'_2 \ \dots \ \delta'_{NM}] \begin{bmatrix} \vec{h}_1 \\ \vec{h}_2 \\ \vdots \\ \vec{h}_{NM} \end{bmatrix} = \\
 & = [\gamma'_1 \ \gamma'_2 \ \dots \ \gamma'_{NM}] \begin{bmatrix} \vec{h}_1 \\ \vec{h}_2 \\ \vdots \\ \vec{h}_{NM} \end{bmatrix} + [\gamma_1 \ \gamma_2 \ \dots \ \gamma_{NM}] \begin{bmatrix} \vec{h}_1 \\ \vec{h}_2 \\ \vdots \\ \vec{h}_{NM} \end{bmatrix} = \quad (5.57)
 \end{aligned}$$

donde

$$[\delta_1 \ \delta_2 \ \dots \ \delta_{NM}] = [a_1 \ a_2 \ \dots \ a_M] \begin{bmatrix} I_{11}^a & I_{12}^a & \dots & I_{1NM}^a \\ I_{21}^a & I_{22}^a & \dots & I_{2NM}^a \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ I_{M1}^a & I_{M2}^a & \dots & I_{MNM}^a \end{bmatrix} \quad (5.58)$$

$$[\delta'_1 \ \delta'_2 \ \dots \ \delta'_{NM}] = [a'_1 \ a'_2 \ \dots \ a'_M] \begin{bmatrix} I'_{11}{}^a & I'_{12}{}^a & \dots & I'_{1NM}{}^a \\ I'_{21}{}^a & I'_{22}{}^a & \dots & I'_{2NM}{}^a \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ I'_{M1}{}^a & I'_{M2}{}^a & \dots & I'_{MNM}{}^a \end{bmatrix} \quad (5.59)$$

$$[\beta_1 \ \beta_2 \ \dots \ \beta_{NM}] = [b_1 \ b_2 \ \dots \ b_N] \begin{bmatrix} I_{11}^b & I_{12}^b & \dots & I_{1NM}^b \\ I_{21}^b & I_{22}^b & \dots & I_{2NM}^b \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ I_{N1}^b & I_{N2}^b & \dots & I_{NNM}^b \end{bmatrix} \quad (5.60)$$

$$[\beta'_1 \ \beta'_2 \ \dots \ \beta'_{NM}] = [b'_1 \ b'_2 \ \dots \ b'_N] \begin{bmatrix} I_{11}^{b,b} & I_{12}^{b,b} & \dots & I_{1NM}^{b,b} \\ I_{21}^{b,b} & I_{22}^{b,b} & \dots & I_{2NM}^{b,b} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ I_{N1}^{b,b} & I_{N2}^{b,b} & \dots & I_{NNM}^{b,b} \end{bmatrix} \quad (5.61)$$

Debido a la ortogonalidad de los modos de la guía vacía, las ecuaciones (5.51) y (5.57) se transforman en

$$[\alpha_i] + [\alpha'_i] = [\beta_i] + [\beta'_i] \quad \text{desde } i = 1 \text{ hasta } NM \quad (5.62)$$

$$[\delta_i] + [\delta'_i] = [\gamma_i] + [\gamma'_i] \quad \text{desde } i = 1 \text{ hasta } NM \quad (5.63)$$

Con estas condiciones se obtiene

$$[a_1 \ a_2 \ \dots \ a_M \ b'_1 \ b'_2 \ \dots \ b'_N] \begin{bmatrix} V_{11}^a & V_{12}^a & \dots & V_{1NM}^a & -V_{11}^{b,b} & -V_{12}^{b,b} & \dots & -V_{1NM}^{b,b} \\ V_{21}^a & V_{22}^a & \dots & V_{2NM}^a & -V_{21}^{b,b} & -V_{22}^{b,b} & \dots & -V_{2NM}^{b,b} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ V_{M1}^a & V_{M2}^a & \dots & V_{MNM}^a & -V_{N1}^{b,b} & -V_{N2}^{b,b} & \dots & -V_{NNM}^{b,b} \\ I_{11}^a & I_{12}^a & \dots & I_{1NM}^a & -I_{11}^{b,b} & -I_{12}^{b,b} & \dots & -I_{1NM}^{b,b} \\ I_{21}^a & I_{22}^a & \dots & I_{2NM}^a & -I_{21}^{b,b} & -I_{22}^{b,b} & \dots & -I_{2NM}^{b,b} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ I_{M1}^a & I_{M2}^a & \dots & I_{MNM}^a & -I_{N1}^{b,b} & -I_{N2}^{b,b} & \dots & -I_{NNM}^{b,b} \end{bmatrix} =$$

matriz -A-

$$\begin{matrix}
 [a'_1 a'_2 \dots a'_M b_1 b_2 \dots b_j] & \begin{bmatrix}
 -V'_{11}{}^a & -V'_{12}{}^a & \dots & -V'_{1NM}{}^a & V_{11}{}^b & V_{12}{}^b & \dots & V_{1NM}{}^b \\
 -V'_{21}{}^a & -V'_{22}{}^a & \dots & -V'_{2NM}{}^a & V_{21}{}^b & V_{22}{}^b & \dots & V_{2NM}{}^b \\
 \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\
 -V'_{M1}{}^a & -V'_{M2}{}^a & \dots & -V'_{MNM}{}^a & V_{N1}{}^b & V_{N2}{}^b & \dots & V_{NNM}{}^b \\
 -I'_{11}{}^a & -I'_{12}{}^a & \dots & -I'_{1NM}{}^a & I_{11}{}^b & I_{12}{}^b & \dots & I_{1NM}{}^b \\
 -I'_{21}{}^a & -I'_{22}{}^a & \dots & -I'_{2NM}{}^a & I_{21}{}^b & I_{22}{}^b & \dots & I_{2NM}{}^b \\
 \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\
 -I'_{M1}{}^a & -I'_{M2}{}^a & \dots & -I'_{MNM}{}^a & I_{N1}{}^b & I_{N2}{}^b & \dots & I_{NNM}{}^b
 \end{bmatrix} & (5.64)
 \end{matrix}$$

Matriz -B-

Trasponiendo se puede escribir abreviadamente

$$[A]^t \begin{bmatrix} a'_1 \\ b'_j \end{bmatrix} = [B]^t \begin{bmatrix} a'_1 \\ b_j \end{bmatrix} \quad (5.65)$$

con lo que la matriz de dispersión es

$$[S] = \left([B]^t \right)^{-1} [A]^t \quad (5.66)$$

Para poder realizar la inversión indicada en (5.66) es necesario que la matriz [B] sea cuadrada, o lo que es lo mismo, que el número de modos propios escogidos en la guía "a" (M) más los de la guía "b" (N) sea igual al número de funciones base (NM).

Como se puede observar en la ecuación (5.66), el problema ha quedado reducido a una reorganización de los coeficientes obtenidos por el método de modos acoplados.

5.5 ENLACE DE DISCONTINUIDADES

El concepto de matriz de dispersión generalizada [25-30], surge por el gran interés despertado en el estudio de discontinuidades múltiples tanto desde un punto de vista práctico como de su aplicación a la caracterización de distintas estructuras.

En la descripción del método de adaptación modal se ha visto cómo obtener la MDG de una discontinuidad individual. Con el concepto de matriz de dispersión generalizada es posible conocer la influencia mutua entre dos discontinuidades, separadas por una guía de longitud dada, independientemente del resto del conjunto en el que estén inmersas. Cuando el problema sea el de enlazar distintas discontinuidades, la forma de trabajo será ir calculando la matriz de dispersión generalizada de cada par de discontinuidades individuales, de manera que, con la resultante de cada par, se obtenga otra que a su vez se enlazará con la siguiente y así sucesivamente, hasta llegar a la última discontinuidad.

La forma general de la M.D.G. es

$$[S] = \begin{bmatrix} [S_{11}] & [S_{12}] \\ [S_{21}] & [S_{22}] \end{bmatrix} \quad (5.67)$$

donde cada elemento de la matriz total S es una matriz que da cuenta de la influencia entre los distintos modos que se propagan por las guías.

En la figura 5.3 se representa un problema con varias discontinuidades encadenadas. La nomenclatura que emplearemos es la siguiente:

a_2^I : matriz columna de amplitudes complejas de los modos propagándose en la dirección $z > 0$, a la izquierda de la discontinuidad i -ésima. Dimensión: $M \times 1$

b_2^I : matriz columna de amplitudes complejas de los modos propagándose en la dirección $z < 0$, a la izquierda de la discontinuidad i -ésima. Dimensión $M \times 1$

a_1^{I+1} : matriz columna de amplitudes complejas de los modos propagándose en la dirección $z < 0$, a la derecha de la discontinuidad i -ésima. Dimensión: $N2 \times 1$.

b_1^{I+1} : matriz columna de amplitudes complejas de los modos propagándose en la dirección $z > 0$, a la derecha de la discontinuidad i -ésima. Dimensión $N1 \times 1$.

Una vez establecida la nomenclatura, consideremos la primera discontinuidad. Puede establecerse el siguiente sistema matricial de ecuaciones

$$b^I = S_{11}^I a^I + S_{12}^I a_1^{II} \quad (5.68)$$

$$b_1^{II} = S_{21}^I a^I + S_{22}^I a_1^{II} \quad (5.69)$$

$$b_2^{II} = S_{11}^{II} a_2^{II} + S_{12}^{II} a_1^{III} \quad (5.70)$$

$$b_1^{III} = S_{21}^{II} a_2^{II} + S_{22}^{II} a_1^{III} \quad (5.71)$$

donde las dimensiones de los matrices "S" son

$$S_{11}^I: M2 \times M1; S_{12}^I: M2 \times N2; S_{21}^I: N1 \times M1; S_{22}^I: N1 \times N2$$

$$S_{11}^{II}: N2 \times N1; S_{12}^{II}: N2 \times P2; S_{21}^{II}: P1 \times N1; S_{22}^{II}: P1 \times P2$$

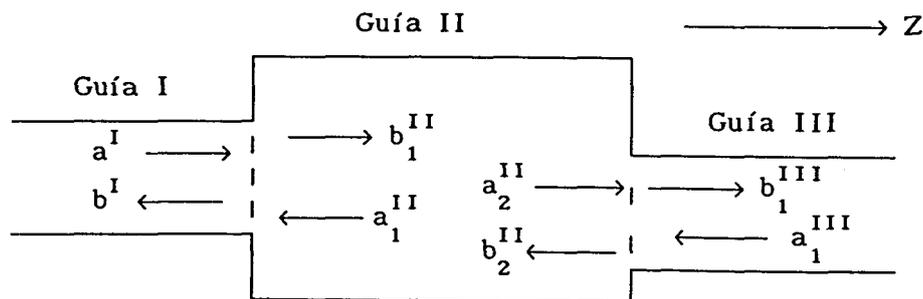


Figura 5.3.- Disposición de dos discontinuidades en cascada

El objetivo es conocer las relaciones entre b^I , b_1^{III} , a^I y a_1^{III} , es decir, entre las ondas que emergen de las dos discontinuidades y las que inciden sobre ellas, estando ambas conectadas por una guía de longitud "L". En este sentido, se pueden establecer las siguientes relaciones entre las amplitudes de las ondas que viajan por la guía de conexión

$$a_2^{II} = \gamma_+^I b_1^{II} \quad (5.72)$$

$$a_1^{II} = \gamma_-^I b_2^{II} \quad (5.73)$$

siendo γ_+^I una matriz cuadrada de dimensión $N1 \times N1$, con todos los términos nulos excepto la diagonal principal, cuyos términos son de la forma $\exp(-\Gamma_i L)$, $i=1\dots N1$, con Γ_i las constantes de propagación de los modos que viajan por la guía de conexión según $z > 0$ y γ_-^I otra matriz de análoga a la anterior, de dimensión $N2 \times N2$ y cuyos términos no nulos son de la forma $\exp(-\Gamma_j L)$, $j=1\dots N2$, siendo Γ_j las constantes de propagación de los modos que viajan por esa guía según $z < 0$.

Sustituyendo las dos ecuaciones anteriores en las expresiones (5.68-5.71) se obtiene

$$b^I = S_{11}^I a^I + S_{12}^I \gamma_-^I b_2^{II} \quad (5.74)$$

$$b_1^{II} = S_{21}^I a^I + S_{22}^I \gamma_-^I b_2^{II} \quad (5.75)$$

$$b_2^{II} = S_{11}^{II} \gamma_+^I b_1^{II} + S_{12}^{II} a_1^{III} \quad (5.76)$$

$$b_1^{III} = S_{21}^{II} \gamma_+^I b_1^{II} + S_{22}^{II} a_1^{III} \quad (5.77)$$

Eliminando b_1^{II} y b_2^{II} de las ecuaciones (5.74-5.77) se obtiene la relación matricial buscada

$$\begin{bmatrix} S_{11}^I + S_{12}^I \gamma_-^I E S_{11}^{II} \gamma_+^I S_{21}^I \\ -S_{11}^I - S_{12}^I \gamma_-^I E S_{11}^{II} \gamma_+^I S_{21}^I \\ S_{21}^{II} \gamma_+^I F S_{21}^I \\ S_{21}^{II} \gamma_+^I F S_{22}^I \gamma_-^I S_{12}^{II} + S_{22}^{II} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} S_{12}^I \gamma_-^I E S_{12}^{II} \\ S_{21}^{II} \gamma_+^I F S_{22}^I \gamma_-^I S_{12}^{II} + S_{22}^{II} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1^I \\ a_1^{III} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1^I \\ b_1^{III} \end{bmatrix} \quad (5.78)$$

donde E y F son las matrices siguientes

$$F = \left(I - S_{22}^I \gamma_-^I S_{11}^{II} \gamma_+^I \right)^{-1} \quad (5.79)$$

$$E = \left(I - S_{11}^{II} \gamma_+^I S_{22}^I \gamma_-^I \right)^{-1} \quad (5.80)$$

De esta manera, se podrían ir enlazando discontinuidades, y se obtendría la matriz de dispersión total de la estructura con un número de discontinuidades arbitrario.

5.6 RESULTADOS

En los apartados anteriores se han presentado dos procesos diferentes para hallar la M.D.G.. En el primero se obtiene mediante el procedimiento "clásico" y en el segundo los modos propios a cada lado de la discontinuidad se descomponen en modos TE y TM de la guía vacía. Cuando el número de modos propios elegido a cada lado de una discontinuidad es igual al número total de modos TE más TM, la M.D.G. obtenida con ambos procesos es idéntica, con lo que, desde el punto de vista de obtención de resultados, emplear uno u otro método es indiferente. Sin embargo, cuando se aplica el segundo proceso, el tiempo de cálculo empleado para resolver una discontinuidad, cuando se consideran 80 modos a cada lado, se reduce a la décima parte. Por ello, todos los resultados que se presentan a continuación se han obtenido utilizando el M.A.M. mediante funciones base ortonormales, que obliga a elegir el mismo número de modos propios que básicos.

Una manera de chequear si los resultados obtenidos para la M.D.G. son correctos, es comprobar en qué medida se cumplen las propiedades que debe verificar la matriz de dispersión. Para una estructura no recíproca, en el

capítulo 3 se vio que el coeficiente de reflexión permanece invariante respecto a una inversión del sentido del campo externo aplicado y los modos que viajan según $z > 0$ se intercambian con los que viajan según $z < 0$. Ello implica que los coeficientes de reflexión S_{11} y S_{22} deben coincidir. Para estructuras de ferrita que llenen completamente la altura de la guía, esta condición se cumple, en todos los casos, con una exactitud hasta la tercera cifra decimal. Si la pieza de ferrita no llena completamente la altura de la guía, existen puntos del espectro de frecuencia donde se producen desviaciones en módulo no superiores a 1 dB y en fase no superiores a 3 grados.

Los resultados que vamos a presentar los dividiremos en dos apartados. En el primero se estudiarán discontinuidades producidas por guías cargadas con ferritas de altura completa, con magnetización transversal a la dirección de propagación, y se compararán los resultados obtenidos cuando se emplean las formulaciones restringida e indirecta con H_0 del método de modos acoplados. El objetivo de este paso consiste en chequear la exactitud de los resultados obtenidos mediante la formulación indirecta con H_0 frente a la restringida, que en principio supondremos muy precisa, debido a que en un caso general en el que la estructura a analizar tenga discontinuidades en las dos direcciones trasnversales, sólo se pueden aplicar las formulaciones de tipo general. A continuación compararemos los resultados de la formulación restringida con los obtenidos por otros autores mediante otros métodos teóricos o experimentalmente y con nuestras propias medidas.

En el segundo apartado se estudiarán guías cargadas con láminas de ferrita de altura parcial. Al no existir datos conocidos de discontinuidades para este tipo de guías, la comparación de los resultados teóricos obtenidos mediante el método indirecto con H_0 se hará con nuestras propias medidas.

Todos nuestros resultados experimentales harán referencia a una misma pieza de ferrita, situada en el interior de la guía rectangular, en distintas posiciones y con valores del campo magnético externo diferentes.

5.6.1 Ferritas de altura completa

La estructura que vamos a estudiar se muestra en la figura 5.4. Consiste en una lámina de ferrita, de longitud "L", que ocupa la altura total de la guía de onda

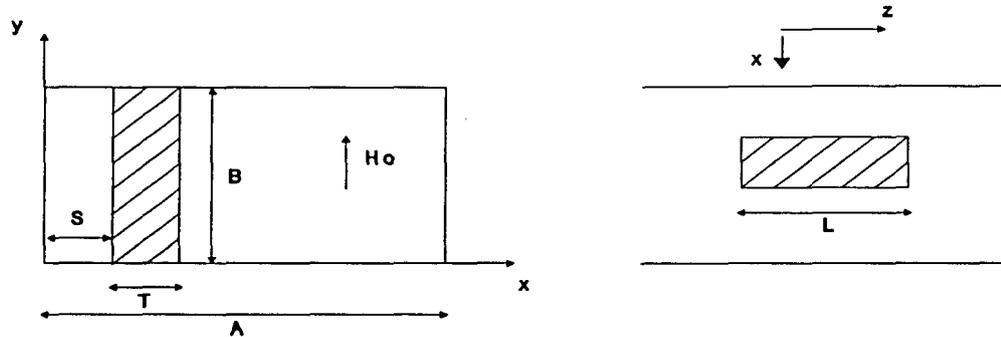


Figura 5.4.- Estructura en guía de onda con ferrita de altura completa.
Dim. (mm.): $A=22.86$, $B=10.16$

5.6.1.1 Comparación entre las formulaciones restringida e indirecta con H_0

Para realizar esta comparación se ha estudiado, en función del número de modos, la evolución de los parámetros S_{21} y S_{12} con la frecuencia de una estructura como la mostrada en la figura 5.4. Los resultados se muestran en las figuras 5.5, con las dimensiones y características de la ferrita indicadas en las propias figuras. Se ha elegido este caso por ser uno de los peores que pueden darse, pues presenta dos discontinuidades en la dirección "x" muy próximas entre sí. Como se vio en el método de modos acoplados, geometrías de este tipo producen un mayor error en la determinación del campo electromagnético. A pesar de ello, la formulación restringida y la indirecta con H_0 proporcionan, a partir de 70 modos, valores para los módulos de S_{21} y S_{12} muy similares. Para las fases se obtiene un excelente acuerdo con sólo 40 modos. Al emplear la formulación directa con H_0 para la obtención de los modos propios, debido a errores numéricos por mal condicionamiento de la matriz, no se obtienen resultados de la M.D.G. a todas las frecuencias. Esto prueba la mejor estabilidad numérica de la formulación indirecta con H_0

frente a la directa.

Al estudiar los resultados del método de modos acoplados se vio que las mayores discrepancias para los valores de las constantes de propagación se producen justamente en la zona de resonancia. Con objeto de estudiar uno de los casos más adversos, se ha llevado la misma estructura analizada anteriormente hasta la resonancia haciendo que el campo interno estático de la ferrita sea de 3400 Oe. En las figuras 5.6, se ve que los resultados para los coeficientes de transmisión en los dos sentidos de propagación empeoran apreciablemente.

Para separar los efectos de la resonancia de los de alta concentración de discontinuidades en las direcciones transversales, se han modificado la anchura de la lámina de ferrita y su separación a la pared lateral, que han pasado a ser de 4 y 3 mm., respectivamente, aunque manteniendo la misma frecuencia de operación y el mismo campo interno, de manera que la ferrita continúa en resonancia. Los resultados obtenidos (figuras 5.7) vuelven a mostrar una concordancia similar a los de las figuras 5.5.

Como conclusión se puede decir que, cuando se analizan discontinuidades empleando al menos 70 modos, tanto la formulación restringida como la formulación indirecta con H_0 proporcionan resultados similares, siempre que no se den situaciones límite tales como discontinuidades transversales muy puntualmente localizadas y próximas entre sí y ferrita magnetizadas en la zona de resonancia, al mismo tiempo.

5.6.1.2 Comprobación de resultados

En este apartado se comparan las predicciones teóricas obtenidas a partir de la formulación restringida con las obtenidas en [31] y [32]

Para el caso de la figura 5.4, con una ferrita magnetizada en laremanencia, la concordancia de los módulos y las fases de S_{21} y S_{12} , en función de la frecuencia, con los resultados presentados en [31] es excelente, tal y como se puede ver en las figuras 5.8. Esto es lógico debido a que los valores de las componentes del tensor permeabilidad son cercanas a

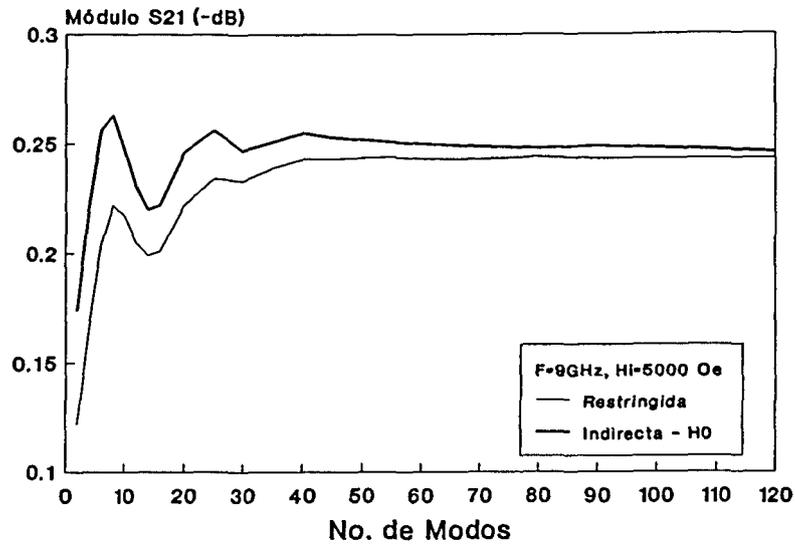


Figura 5.5a.- Convergencia del módulo de S_{21} en función del número de modos. Dim. (mm.): $T=0.95$, $S=1$. $L=74.9$. $4\pi M_S=2200$ Gauss, $\Delta H=365$ Oe. $\epsilon_r=12.5-j.005$. $H_1=5000$ Oe. $F=9$ Ghz

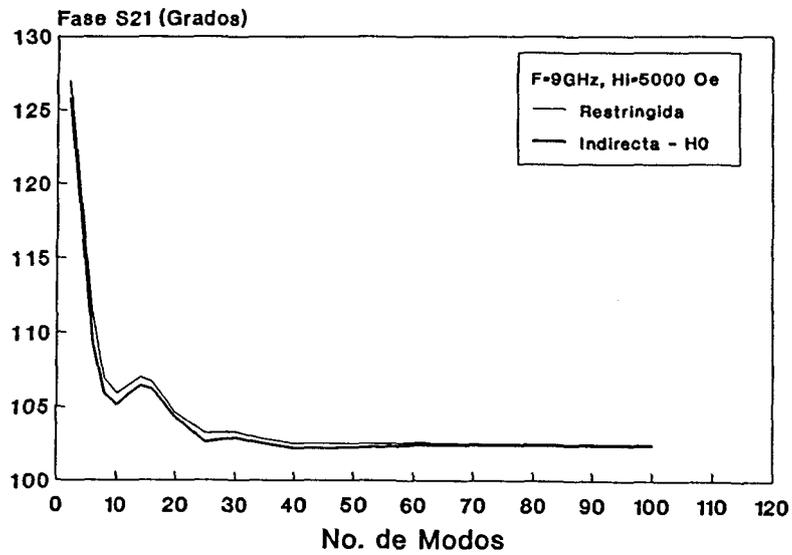


Figura 5.5b.- Convergencia de la fase de S_{21} en función del número de modos, para el mismo caso que la figura 5.5a.

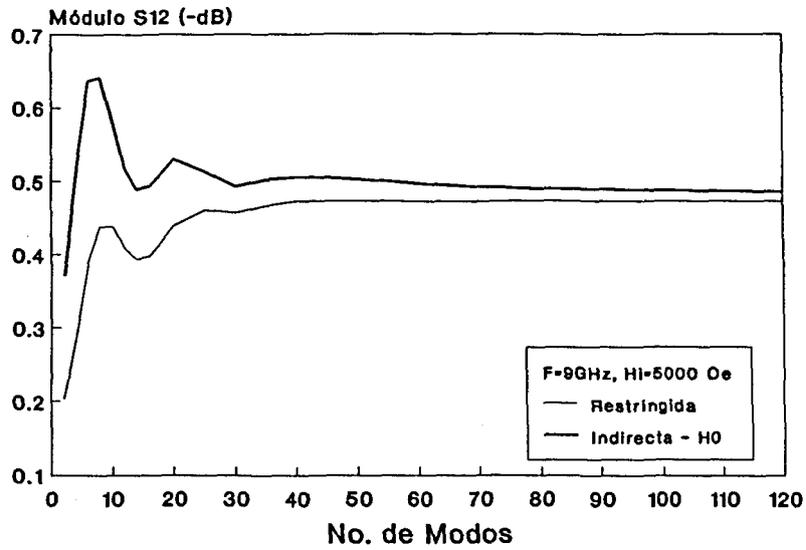


Figura 5.5c.- Convergencia del módulo de S_{12} en función del número de modos para el mismo caso que la figura 5.5a.

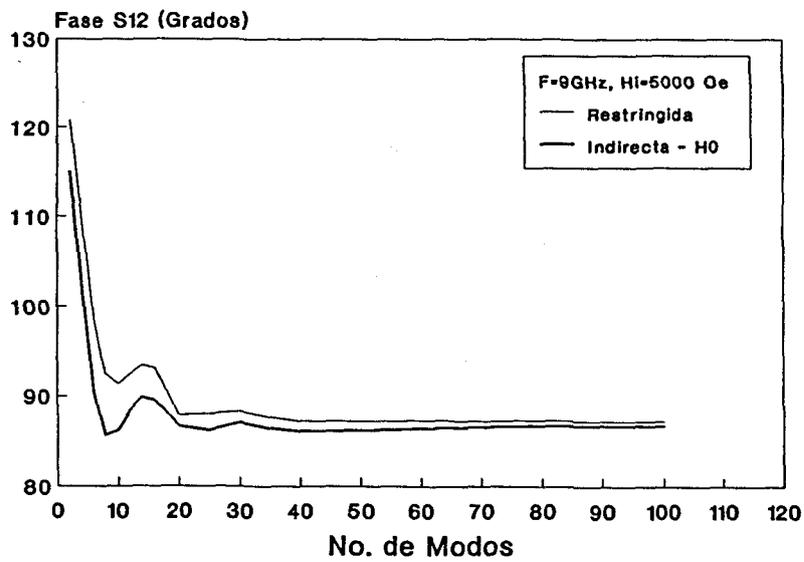


Figura 5.5d.- Convergencia de la fase de S_{12} en función del número de modos para el mismo caso que la figura 5.5a.

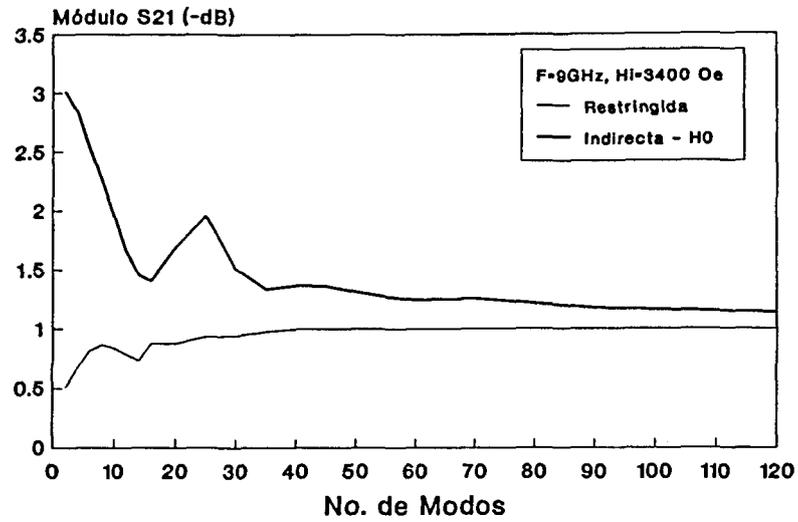


Figura 5.6a.- Convergencia del módulo de S_{21} en función del número de modos. Dim. (mm.): $T=0.95$, $S=1$. $L=74.9$. $4\pi M_S=2200$ Gauss, $\Delta H=365$ Oe. $\epsilon_r=12.5-j.005$. $H_1=3400$ Oe. $F=9$ Ghz. (En resonancia).

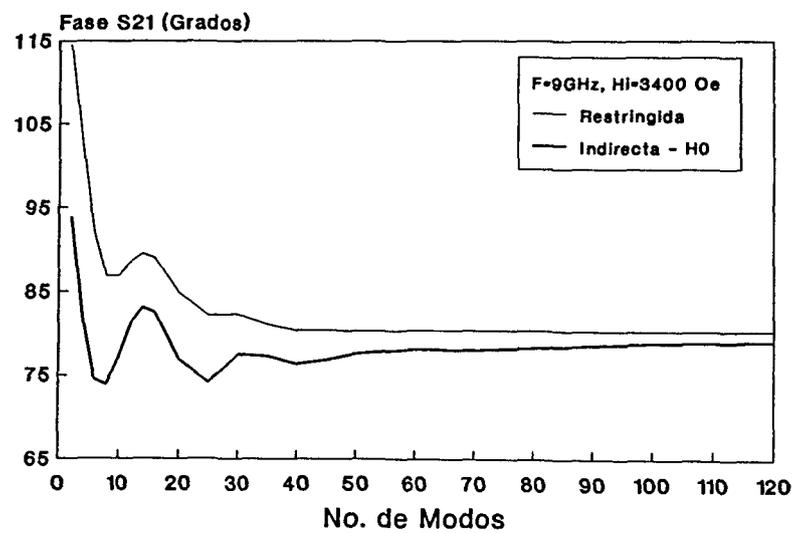


Figura 5.6b.- Convergencia de la fase de S_{21} en función del número de modos, para el mismo caso que la figura 5.6a.

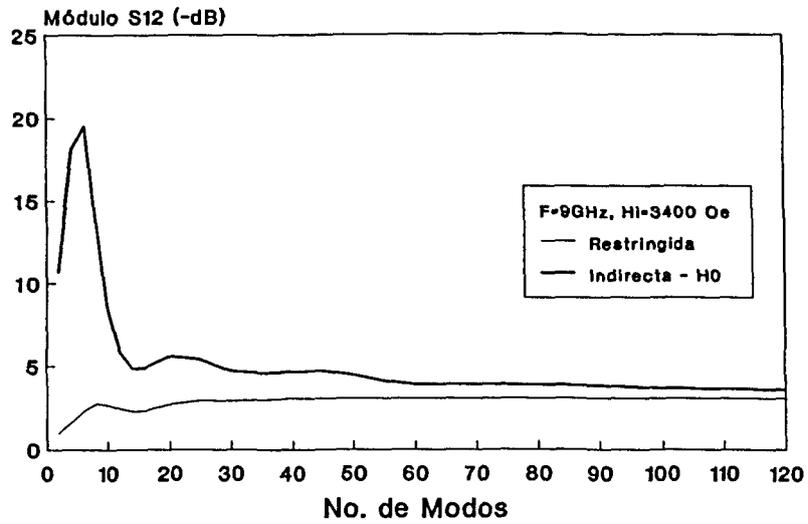


Figura 5.6c.- Convergencia del módulo de S_{12} en función del número de modos, para el mismo caso que la figura 5.6a.

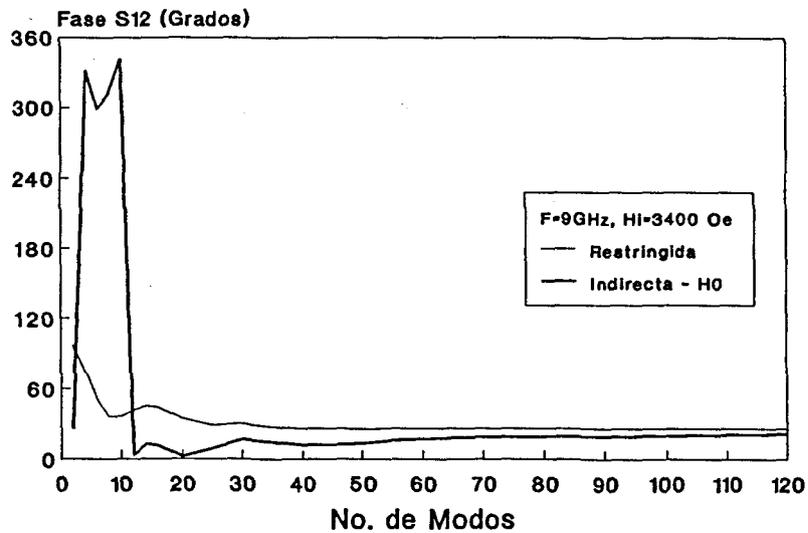


Figura 5.6d.- Convergencia de la fase de S_{12} en función del número de modos, para el mismo caso que la figura 5.6a.

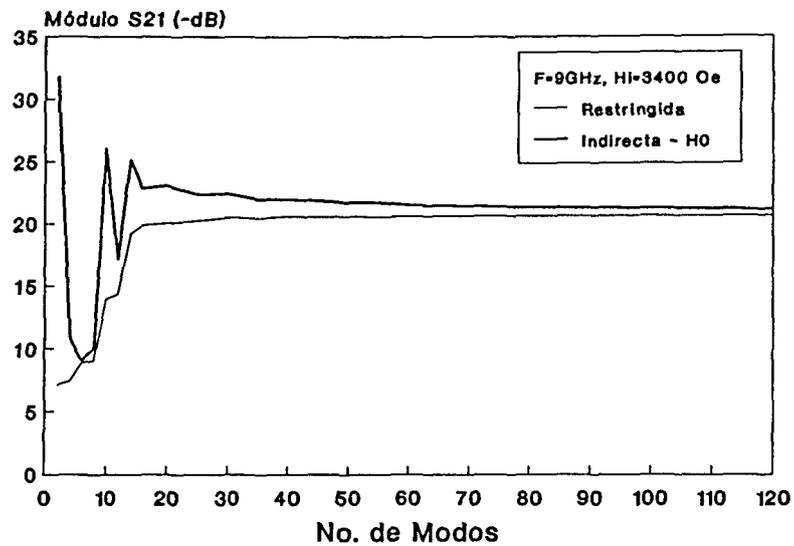


Figura 5.7a.- Convergencia del módulo de S_{21} en función del número de modos. Dim. (mm.): $T=4$, $S=3$, $L=74.9$. $4\pi M_S=2200$ Gauss, $\Delta H=365$ Oe. $\epsilon_r=12.5-j.005$. $H_1=3400$ Oe. $F=9$ Ghz. (En resonancia).

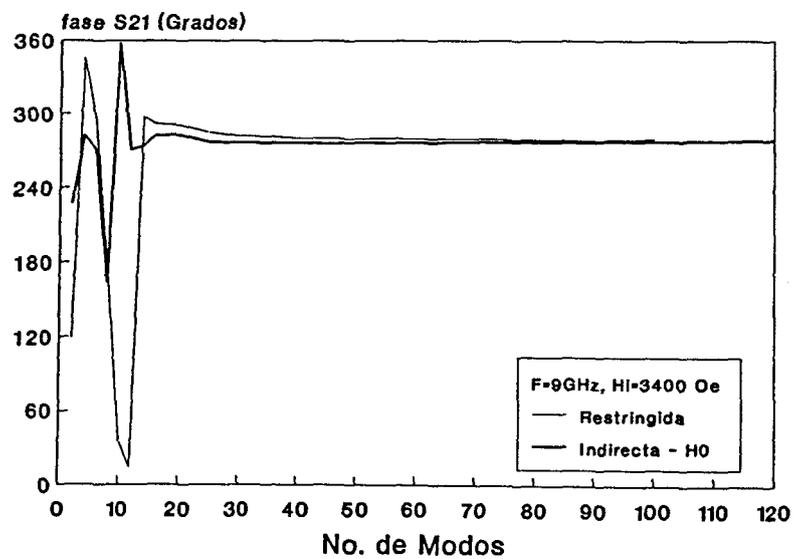


Figura 5.7b.- Convergencia de la fase de S_{21} en función del número de modos, para el mismo caso que la figura 5.7a.

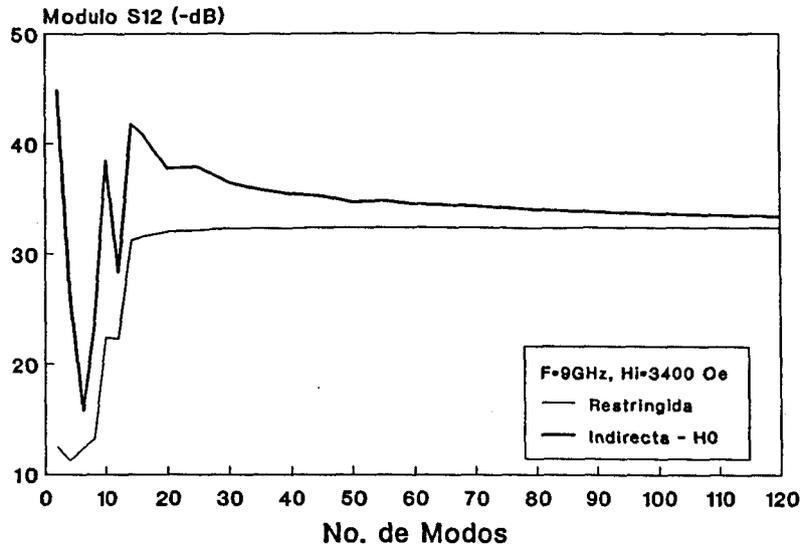


Figura 5.7c.- Convergencia del módulo de S_{12} en función del número de modos, para el mismo caso que la figura 5.7a.

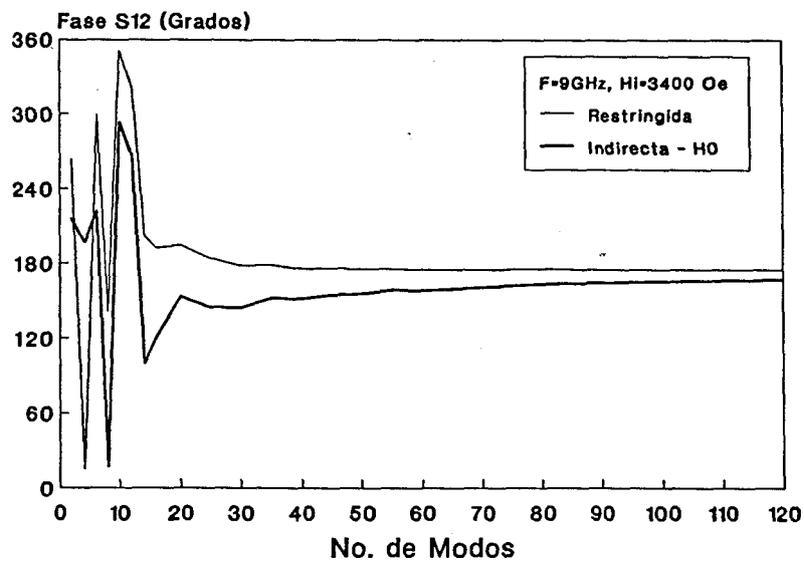


Figura 5.7d.- Convergencia de la fase de S_{12} en función del número de modos, para el mismo caso que la figura 5.7a.

la unidad, y el campo electromagnético en el interior de la guía queda caracterizado con gran exactitud mediante el método de modos acoplados.

En las figuras 5.9 se comparan los resultados experimentales de [31] correspondientes a los parámetros S_{21} y S_{12} en función del campo magnético externo aplicado, para una guía con ferrita saturada cuyos datos se muestran en las propias figuras, con los obtenidos mediante la formulación restringida. Los resultados teóricos describen bastante bien el comportamiento de S_{21} y S_{12} . En este caso los valores del tensor permeabilidad se han obtenido directamente a partir de [33], y no se han empleado las fórmulas correspondientes al tensor de Polder. La razón para utilizar directamente los valores de μ y κ obtenidos en [33] de forma experimental, estriba en la pobre utilidad de la formulación que da el tensor de Polder. En muestras de forma prismática el campo magnético estático interno no es uniforme, por lo que a lo sumo se podría hablar de un tensor permeabilidad efectivo, pero nunca real, pues sus valores serían función de la posición dentro de la pieza de ferrita.

Por todo ello Hoffmann [32] utiliza un proceso inverso al que aparentemente parecería lógico, que consiste en realizar medidas de dos parámetros de la matriz de dispersión en módulo y fase y, a partir de ellos junto con un proceso fiable de análisis de la discontinuidad, se logran obtener los parámetros del tensor permeabilidad. La comparación entre los resultados que se obtienen al utilizar estos valores de μ y κ y los obtenidos mediante el tensor de Polder, muestran una clara ventaja a favor del procedimiento utilizado en [32]. Esto se puede ver comparando las figuras 5.10a,b, donde se presentan los valores de S_{21} y S_{12} en función de la frecuencia, obtenidos con μ y κ experimental, utilizando la formulación restringida, con las figuras 5.11a,b donde se muestran los mismos resultados pero obtenidos mediante el tensor de Polder. Hay que notar que los valores de μ y κ experimentales se calcularon directamente de las gráficas publicadas en [32] por lo que los resultados presentados no son absolutamente seguros.

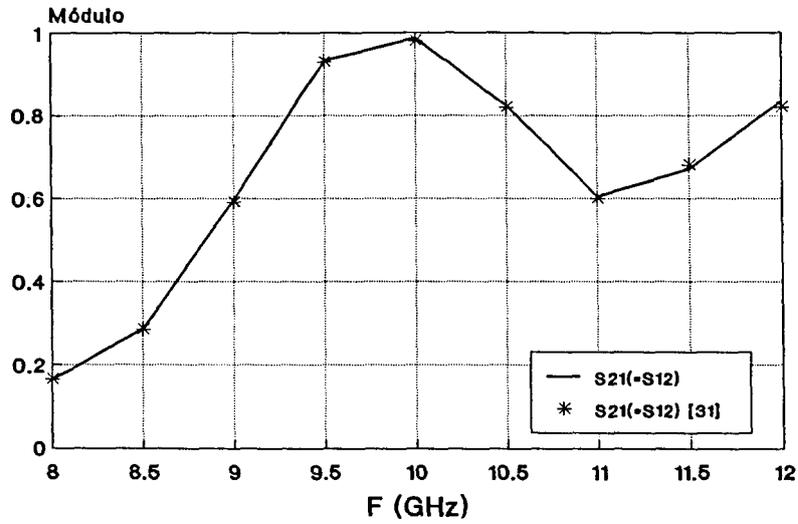


Figura 5.8a.- Variación del módulo de S_{21} con la frecuencia, para una ferrita magnetizada en remanencia. Dim. (mm.) $T=3.5$, $S=5.5$, $L=5.4$, $M_r=1000$ Gauss, $\epsilon_r=14$.

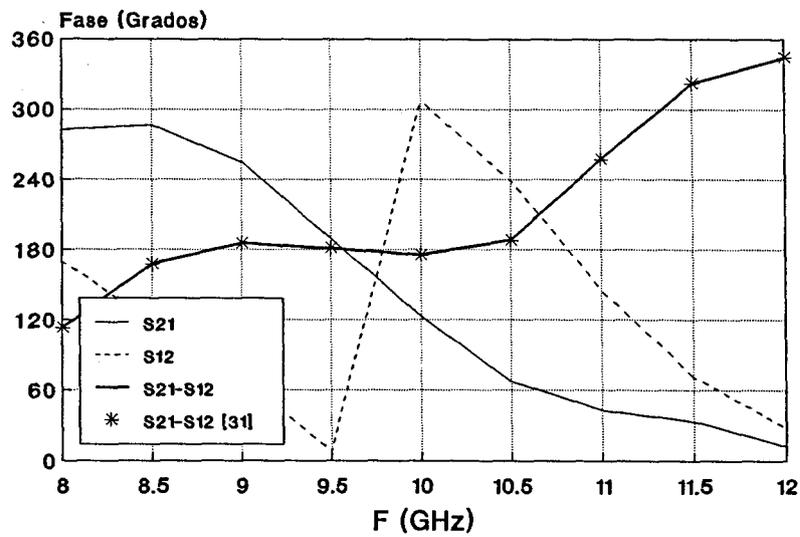


Figura 5.8b.- Variación de la diferencia de las fases de S_{21} y S_{12} con la frecuencia, para el mismo caso de la figura 5.8a.

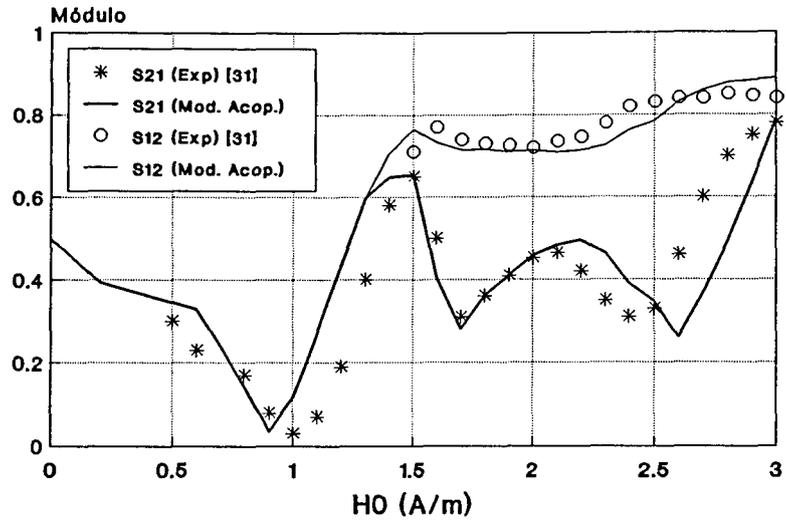


Figura 5.9a.- Variación de los módulos de S_{21} y S_{12} con el campo externo aplicado. Dim. (mm.) $T=4$, $S=2$, $L=4$, $\epsilon_r=12-j0.005$. Valores del tensor $[\mu]$ obtenidos de [33]

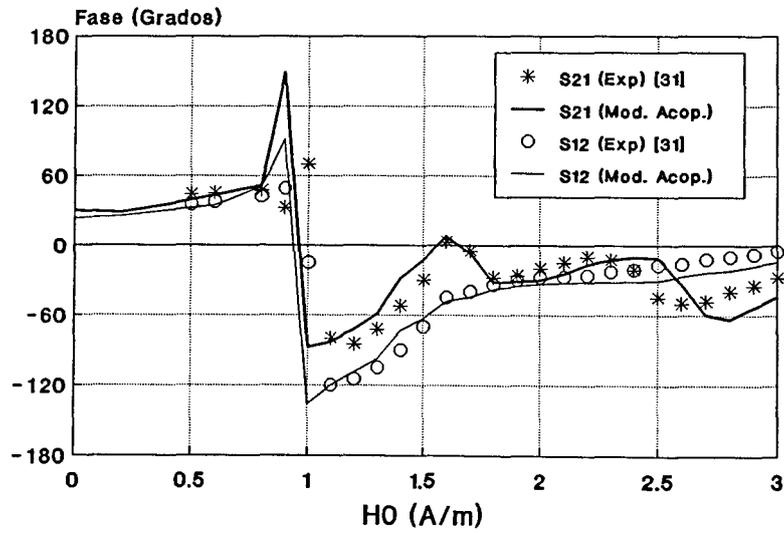


Figura 5.9b.- Variación de las fases de S_{21} y S_{12} con el campo externo aplicado, para el mismo caso de la figura 5.9a.

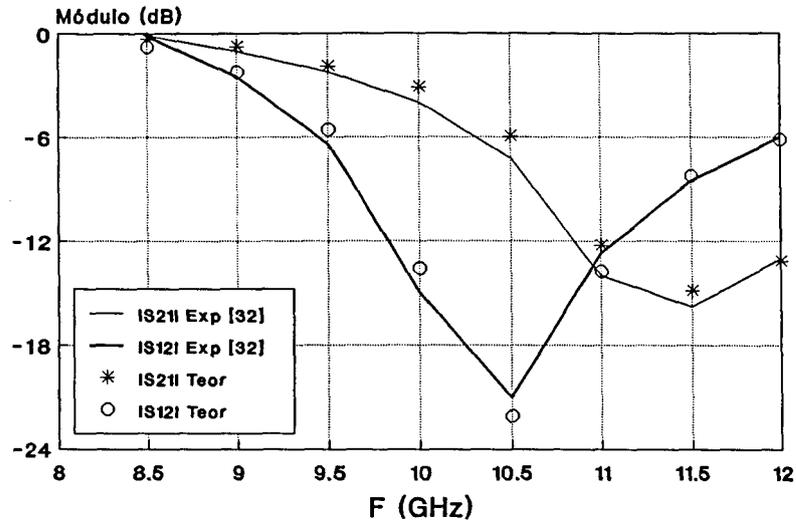


Figura 5.10a.- Variación de los módulos de S_{21} y S_{12} en función de la frecuencia. Dim. (mm.) $T=.95$, $S=1$, $L=74.9$. $4\pi M_S=2200$ Gauss, $\Delta H=365$ Oe. $\epsilon_r=12.5-j.005$, $H_1=3400$ Oe. Valores del tensor $[\mu]$ obtenidos de [32].

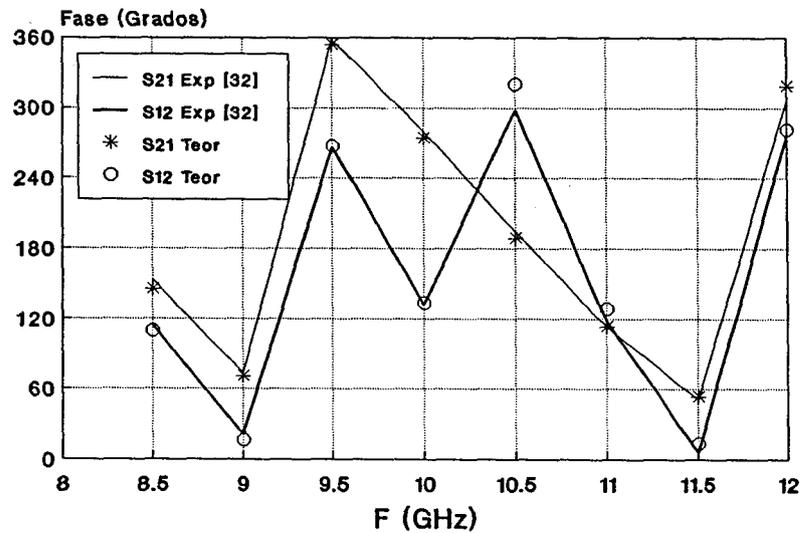


Figura 5.10b.- Variación de las fases de S_{21} y S_{12} en función de la frecuencia, para el mismo caso de la figura 5.10a.

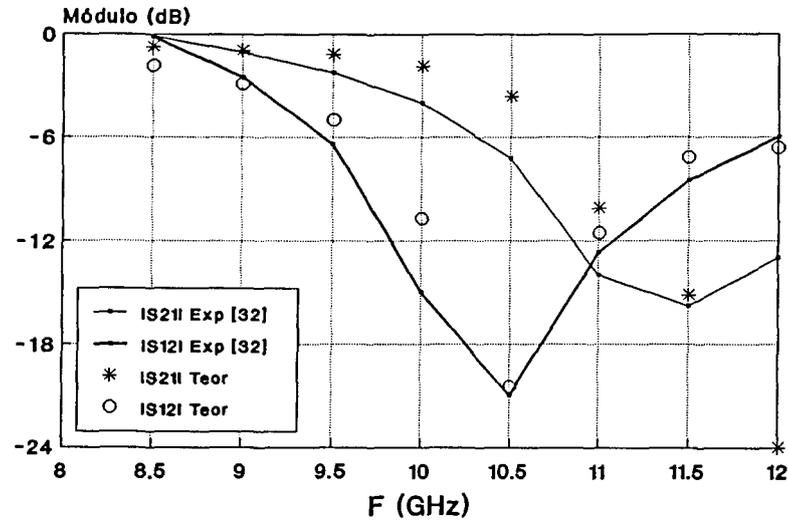


Figura 5.11a.- Variación de los módulos de S_{21} y S_{12} en función de la frecuencia. Dim. (mm.) $T=,95$, $S=1$, $L=74,9$. $4\pi M_S=2200$ Gauss, $\Delta H=365$ Oe. $\epsilon_r=12,5-j,005$, $H_1=3400$ Oe. (En resonancia).

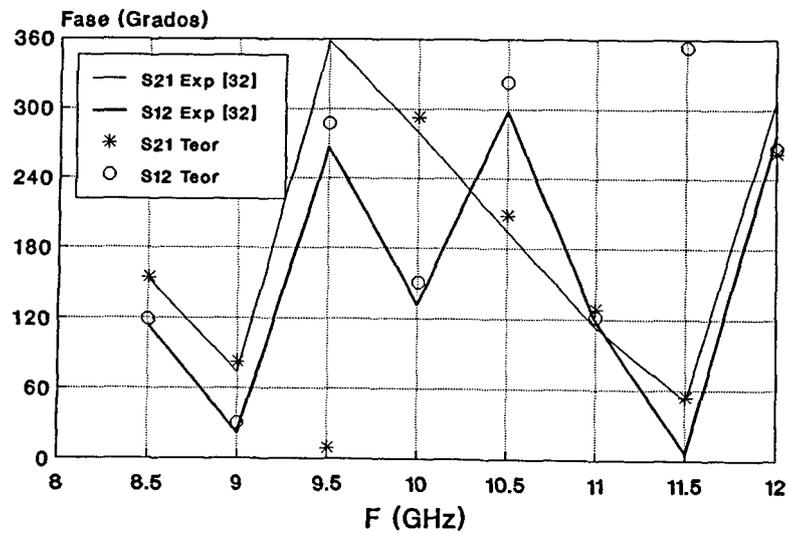


Figura 5.11b.- Variación de las fases de S_{21} y S_{12} en función de la frecuencia, para el mismo caso de la figura 5.11a.

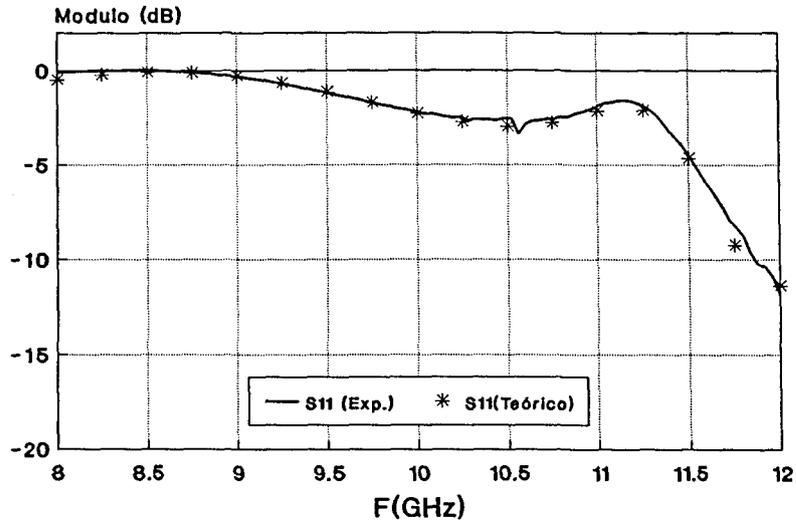


Figura 5.12a.- Comparación entre los resultados teóricos y experimentales, para el módulo de S_{11} (fig. 5.4). Dim. (mm.) $T=3$, $S=3$, $L=6$, $4\pi M_s = 1790$ Gauss, $\Delta H = 39$ Oe, $\epsilon_r = 15.3$, $H_{ex} = 1500$ Oe.

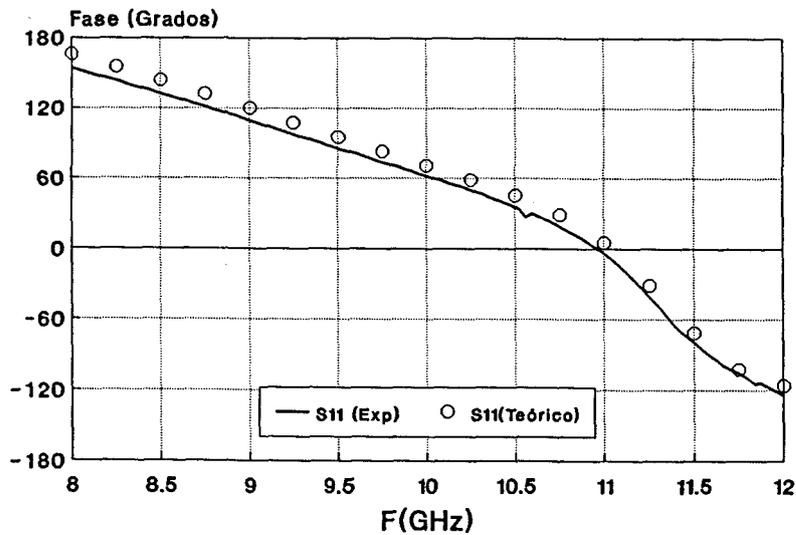


Figura 5.12b.- Comparación entre los resultados teóricos y experimentales, para la fase de S_{11} , para el mismo caso de la figura 5.12a.

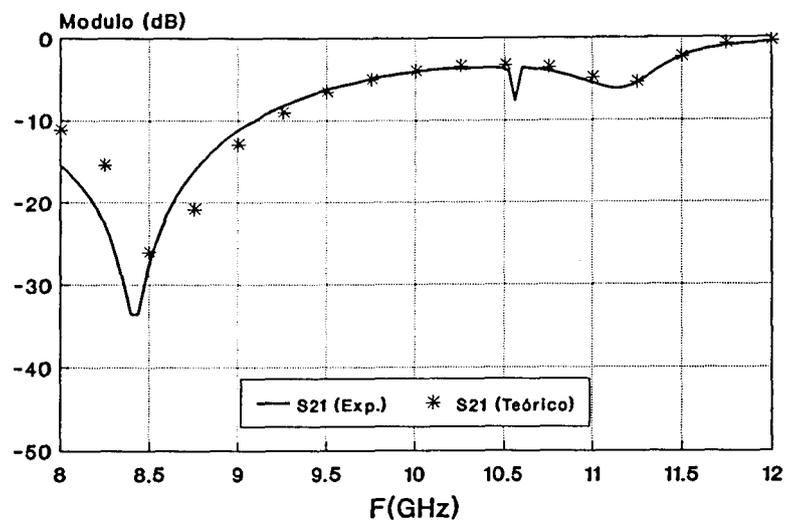


Figura 5.12c.- Comparación entre los resultados teóricos y experimentales, para el módulo de S_{21} , para el mismo caso de la figura 5.12a.

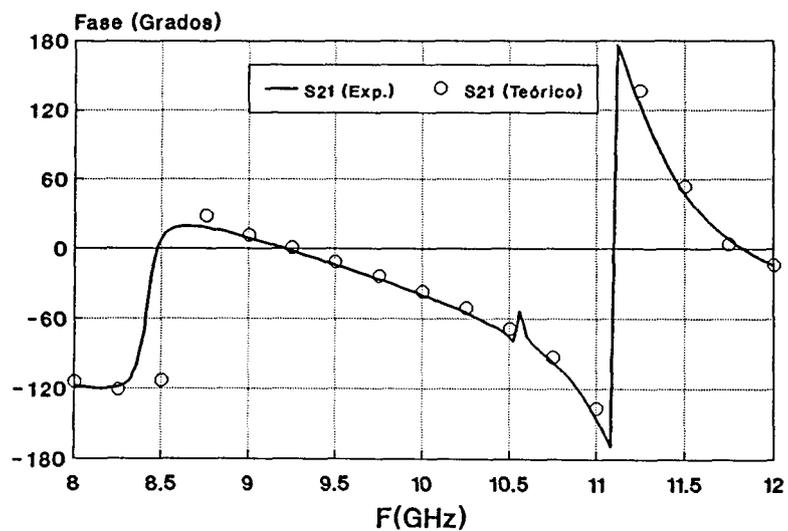


Figura 5.12d.- Comparación entre los resultados teóricos y experimentales, para la fase de S_{21} , para el mismo caso de la figura 5.12a.

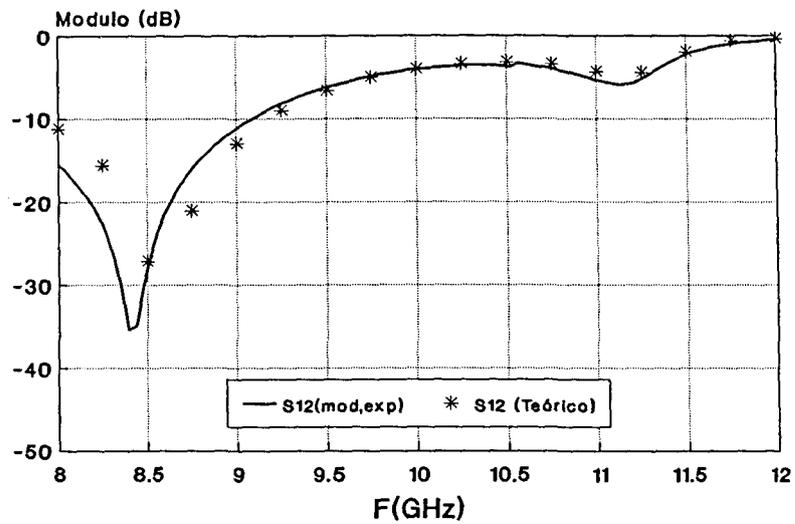


Figura 5.12e.- Comparación entre los resultados teóricos y experimentales, para el módulo de S_{12} , para el mismo caso de la figura 5.12a.

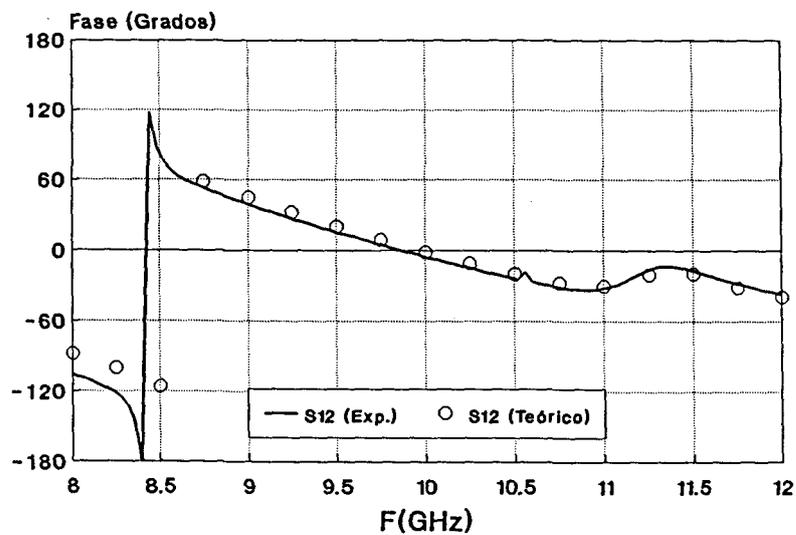


Figura 5.12f.- Comparación entre los resultados teóricos y experimentales, para la fase de S_{12} , para el mismo caso de la figura 5.12a.

Por último, en las figuras 5.12 se presentan comparaciones entre los resultados obtenidos por la formulación restringida y nuestras medidas para todos los parámetros de la matriz de dispersión tanto en módulo como en fase. El campo magnético externo aplicado fue de 1500 Oe. y en este caso el factor de desmagnetización es prácticamente nulo, con lo que el campo externo y el interno, son aproximadamente los mismos. La coincidencia entre la teoría y el experimento es buena.

5.6.2 Ferritas de altura parcial

En este caso la configuración estudiada se muestra en la figura 5.13. Se han realizado dos tipos de medida, una con la pieza de ferrita pegada a la pared lateral y otra separada una distancia de 3 mm. Los resultados teóricos se han obtenido mediante la formulación indirecta con H_0 , empleando un total de 80 modos básicos seleccionados por frecuencias de corte crecientes. El campo magnético externo aplicado ha sido de 2000 Oe. y los parámetros del tensor permeabilidad se han obtenido empleando la formulación correspondiente al tensor de Polder con los factores de desmagnetización apropiados. En las figuras 5.14 y 5.15 se comparan los resultados teóricos y experimentales de todos los parámetros de dispersión, como función de la frecuencia. Las características y dimensiones de la ferrita se muestran en la propia figura. Al aplicar un campo externo de 2000 Oe., el valor teórico del campo interno resultaba ser de 950 Oe. Los resultados teóricos que se presentan se han obtenido con un valor del campo interno de 1000 Oe que, comparado con el teórico de 950, está dentro del error de los dispositivos de medida de que se disponía. A partir de los resultados mostrados en las gráficas y mediante un proceso similar al mostrado por Hoffmann [32] se podrían obtener valores optimizados de las componentes del tensor permeabilidad.

Como conclusión se puede decir que tanto la formulación restringida, allá donde sea aplicable, como la indirecta con H_0 proporcionan resultados comparables con la experiencia, siempre y cuando las componentes del tensor permeabilidad que caracteriza el material de ferrita se encuentren bien determinadas.

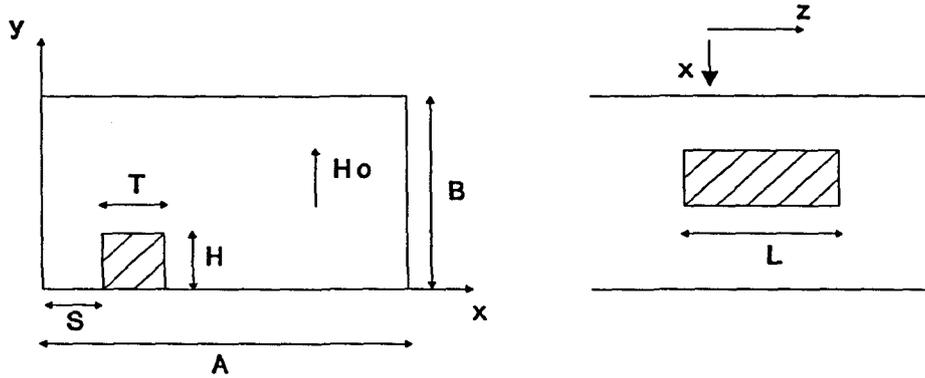


Figura 5.13.- Discontinuidad en guía imagen anisótropa. Dim. (mm.):
 $A=22.86$, $B=10.16$, $T=6$, $H=3$, $L=10.16$. $4\pi M_s=1790$, $\Delta H=39$, $\epsilon_r=15.3$. $H_{ex}=2000$ Oe.

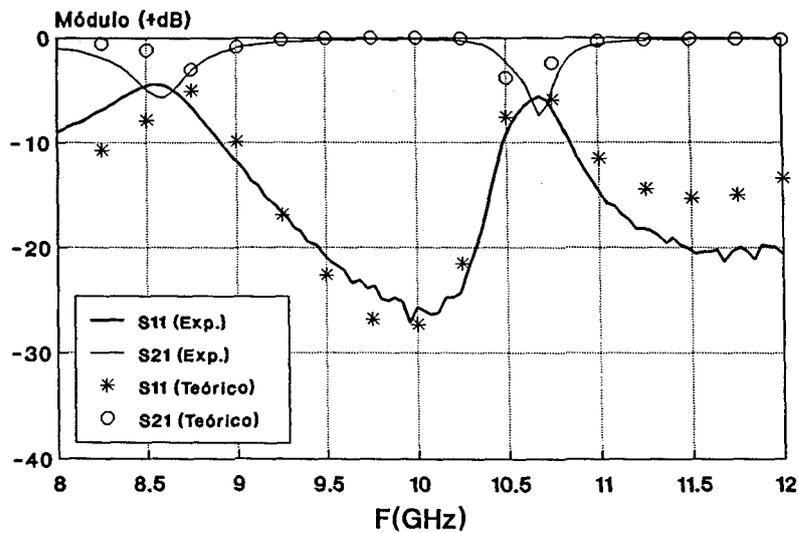


Figura 5.14a.- Comparación entre los resultados teóricos y experimentales, para los módulos de S_{11} y S_{21} correspondiente a la estructura de la figura 5.13 con $S=0$.

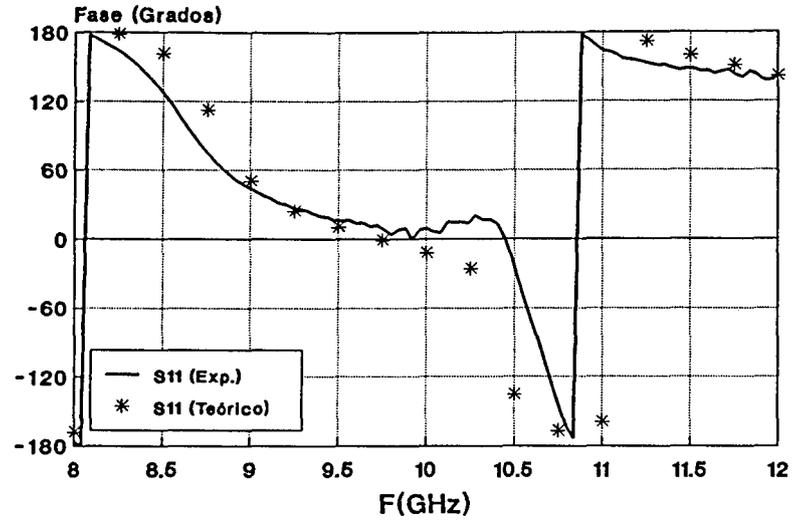


Figura 5.14b.- Comparación entre los resultados teóricos y experimentales, para la fase de S_{11} , correspondiente a la estructura de la figura 5.13 con $S=0$.

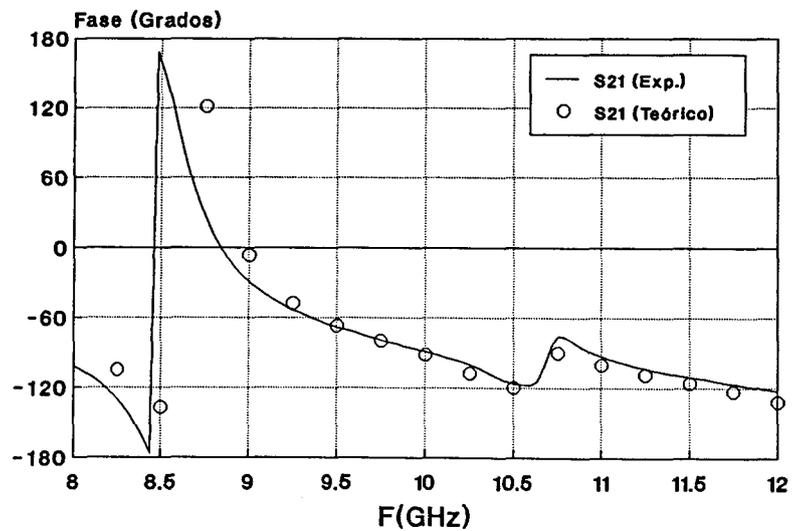


Figura 5.14c.- Comparación entre los resultados teóricos y experimentales, para la fase de S_{21} , correspondiente a la estructura de la figura 5.13 con $S=0$.

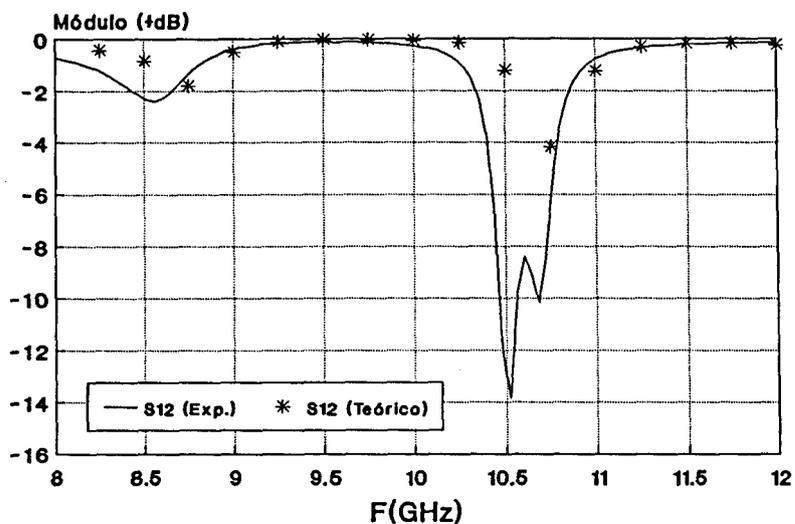


Figura 5.14d.- Comparación entre los resultados teóricos y experimentales, para el módulo de S_{12} , correspondiente a la estructura de la figura 5.13 con $S=0$.

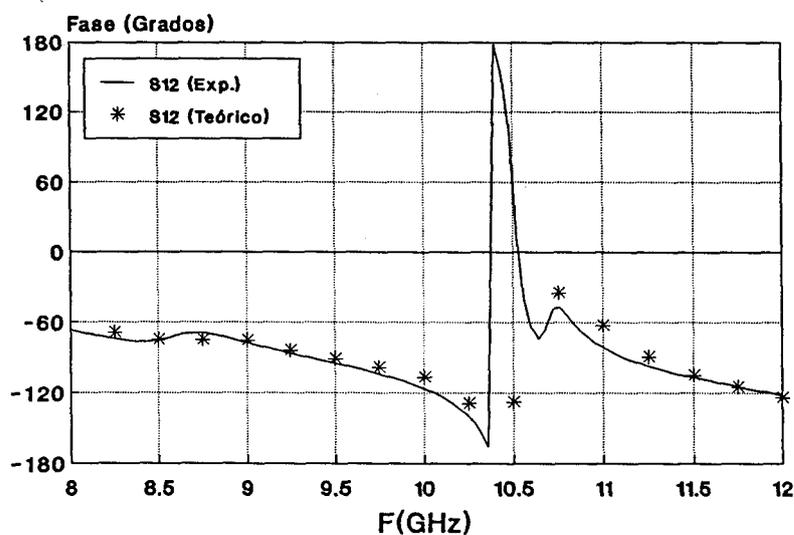


Figura 5.14e.- Comparación entre los resultados teóricos y experimentales, para la fase S_{12} , correspondiente a la estructura de la figura 5.13 con $S=0$.

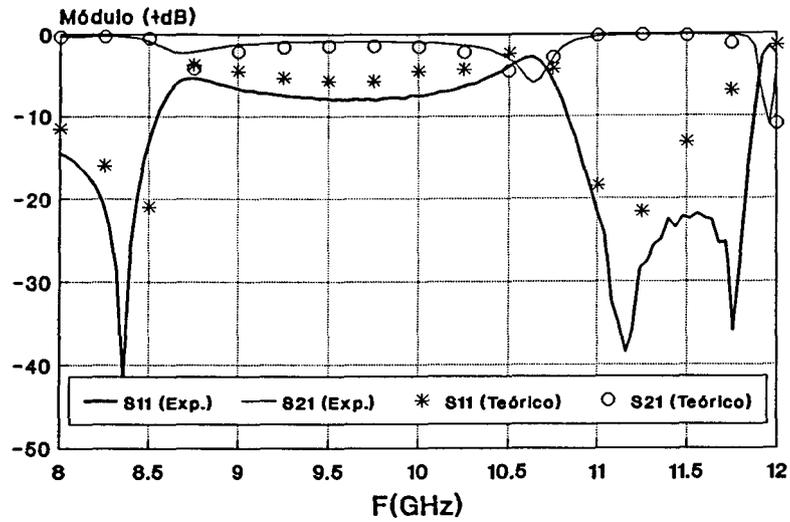


Figura 5.15a.- Comparación entre los resultados teóricos y experimentales, para los módulos de S_{11} y S_{21} , correspondiente a la estructura de la figura 5.13 con $S=3$.

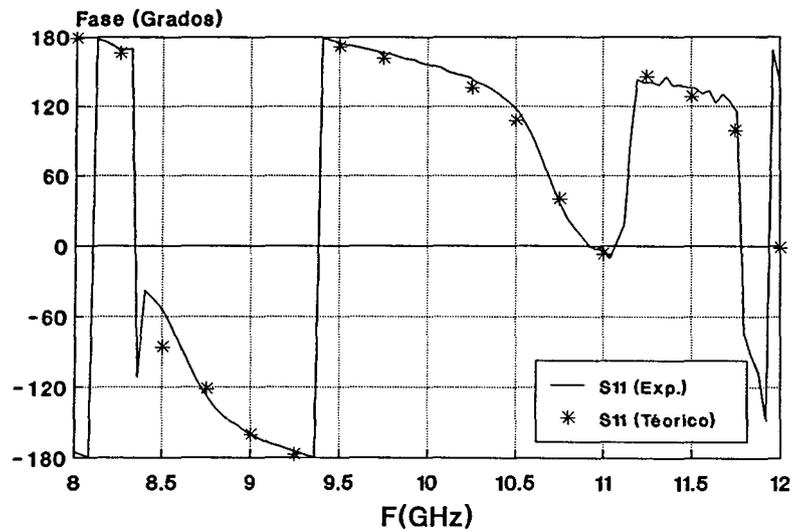


Figura 5.15b.- Comparación entre los resultados teóricos y experimentales, para la fase S_{11} , correspondiente a la estructura de la figura 5.13 con $S=3$.

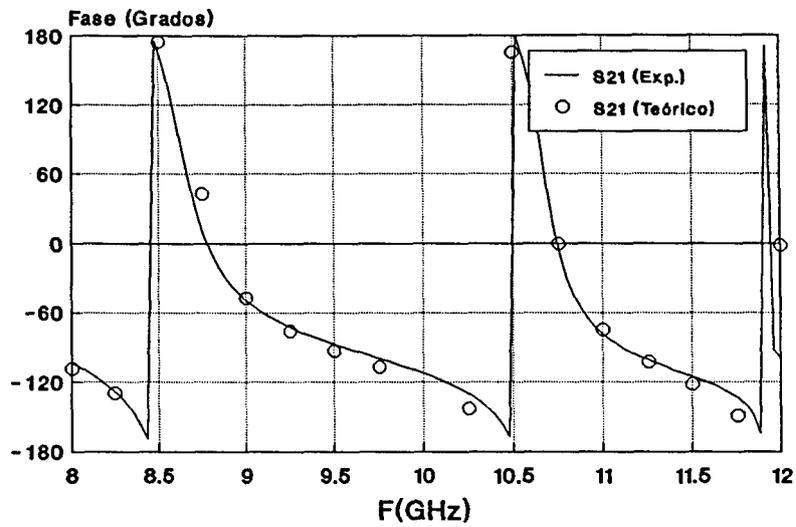


Figura 5.15c.- Comparación entre los resultados teóricos y experimentales, para la fase de S_{21} , correspondiente a la estructura de la figura 5.13 con $S=3$.

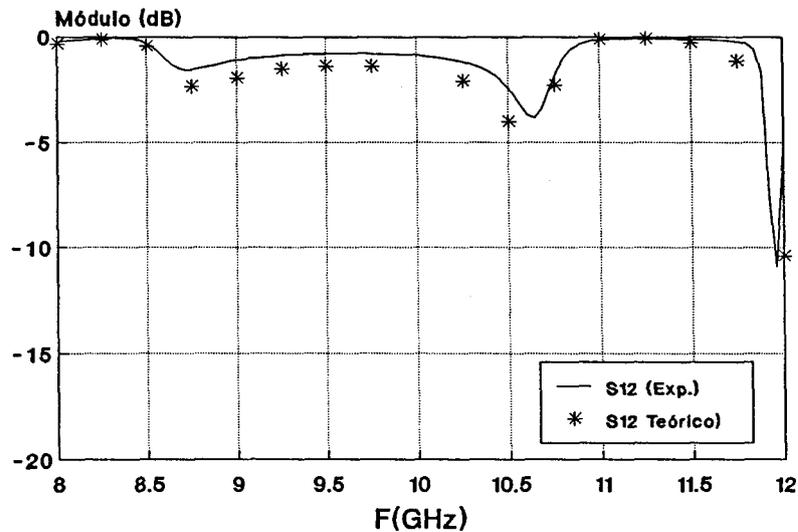


Figura 5.15d.- Comparación entre los resultados teóricos y experimentales, para el módulo de S_{12} , correspondiente a la estructura de la figura 5.13 con $S=3$.

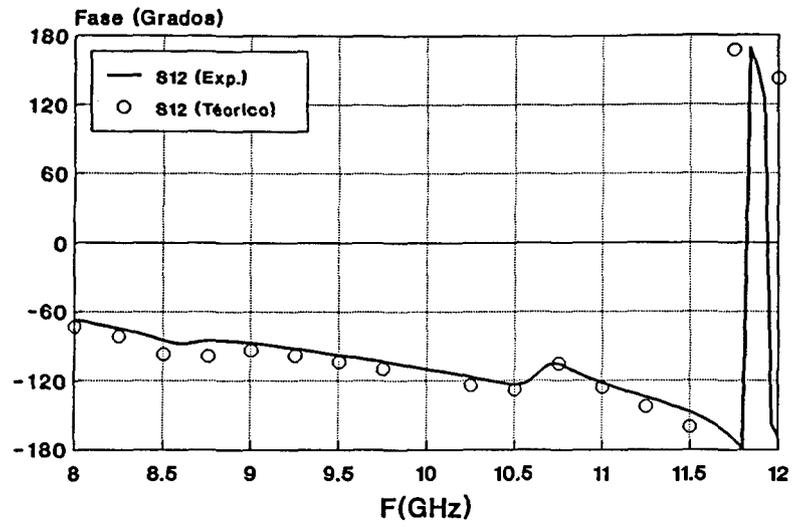


Figura 5.15e.- Comparación entre los resultados teóricos y experimentales, para la fase de S_{12} , correspondiente a la estructura de la figura 5.13 con $S=3$.

5.7 REFERENCIAS

- [1] Uher, J., Arndt, F. and Bornemann, J.: "*Field Theory Design of Ferrite Loaded Waveguide Nonreciprocal Phase Shifters with Multisection Ferrite or Dielectric Slab Impedance Transformers*", IEEE, Vol. MTT-35, No. 6, pp. 552-560, June 1987.
- [2] Arndt, F., Frye, A., Wellnitz, M. and Wirsing, R.: "*Double Dielectric Slab Filled Waveguide Phase Shifter*", IEEE, Vol. MTT-33, No. 5, pp. 373-381, May 1985.
- [3] Eneqren, T.A. and Kharadly, M.M.Z.: "*Higher Order Mode Interaction in Nonreciprocal Periodic Structures*", IEEE, Vol. MTT-30, No. 5, pp. 809-812, May 1982.
- [4] Carlegrim, B., Hagelin, S. and Stenström, S.: "*A Fast Ferrite Phase Shifter for 10.7 - 11.7 GHz*", 17th Europ. Microw. Conf., pp. 1016-1020, Rome, 1987.
- [5] Esteban, J.: "*Contribución al Análisis Electromagnético de Estructuras Cerradas mediante Métodos de Ajuste de Campo: Aplicación al Diseño de Dispositivos de RF*", Tesis Doctoral, E.T.S.I. Telecomunicación (Madrid), 1990.
- [6] Collin, R.E.: "*Field Theory of Guide Waves*", Second Edition, IEEE Press, New York 1991.
- [7] Lewin, L.: "*Theory of Waveguides*", Butterwords, London, 1951.
- [8] Lewin, L.: "*A Ferrite Boundary-Value Problem in a Rectangular Waveguide*", Proc. IEEE, pt. C, pp. 559-563, November 1959.
- [9] Bresler, A.D.: "*On the Discontinuity Problem at the input to an Anisotropic Waveguide*", IRE Trans. on Antennas and Propagat., Vol. AP-7, pp. S261-S272, December 1959.
- [10] Tao, J.W., Baudrand, H.: "*Multimodal Variational Analysis of Uniaxial Waveguide Discontinuities*", IEEE, Vol. MTT-39, No. 3, pp. 506-516, March 1991.
- [11] García Jiménez, J.: "*Análisis de Dispositivos Pasivos de Microondas Mediante el Uso Combinado del Método de Elementos Finitos y la Matriz de Dispersión Generalizada*", Tesis Doctoral, E.T.S.I. Telecomunicación (Madrid), 1991.
- [12] Epstein, P.S.: "*Theory of Wave Propagation in Gyromagnetic Medium*", Reviews of Modern Physics, Vol. 28, No. 1, pp. 3-17, January 1956.

- [13] Wexler, A.: *"Solution of Waveguide Discontinuities by Modal Analysis"*, IEEE, Vol. MTT-15, No. 9, pp. 508-517, September 1967.
- [14] Casanueva, A.: *"Análisis de Líneas de Transmisión Uniformes y de Discontinuidades en Estructuras Planas"*, Tesis Doctoral, Universidad de Cantabria, Junio 1987.
- [15] Clarricoats, P.J.B. and Sharpe, A.: *"Modal Matching Applied to a Discontinuity in a planar Surface Waveguide"*, Electron. Lett., Vol. 8, pp. 28-29, 1972.
- [16] Zaki, K.A., Chen S.W. and Chen C.: *"Modeling Discontinuities in Dielectric Loaded Waveguides"*, IEEE, Vol. MTT-36 No. 12, pp. 1804-1810, December 1988.
- [17] Clarricoats, P.J.B. and Sharpe, A.B.: *"Modal Matching Applied to a Discontinuity in a Planar Surface Waveguide"*, Electronics Letters, Vol. 8, No. 2, pp. 28-29, January 1972.
- [18] Arndt, F. Tucholke, V. and Wriedt, T.: *"Broadband Dual Depth E-Plane Corrugated Square Waveguide Polarizer"*, Electronics Letters, Vol. 20, No. 11, pp. 458-459, May 1984.
- [19] Rodríguez, J.: *"Contribución al Análisis y Optimización de Dispositivos Pasivos en Guía Dieléctrica"*, Tesis Doctoral, Universidad de Cantabria, Julio 1987.
- [20] Chaloupka, H.: *"A Coupled-Line Model for the Scattering by Dielectric and Ferrimagnetic Obstacles in Waveguides"*, AEÜ, Vol. 34, No. 4, pp. 145-151, April 1980.
- [21] Yun, S.W., Lee, M.J. and Chang S.: *"Analysis of step discontinuities on planar dielectric waveguide containing a gyrotropic layer"*, IEEE, Vol. MTT-37, No. 3, pp. 492-496, March 1989.
- [22] Hoffmann, M.: *"Die streumatrix von Rechteckhohlleitungen mit magnetisierten ferriteinsätzen endlicher Länge"*, AEÜ, Vol. 32, No. 2, pp. 62-68, 1978.
- [23] Bernues, F. J., Bolle, D.M.: *"The Ferrite-Loaded waveguide Discontinuity Problem"*, IEEE, Vol. MTT-22, No. 12, pp. 1187-1193, December 1974
- [24] Enegren, T.A. and Kharadly, M.M.Z.: *"Transverse Discontinuities in Nonreciprocal Waveguides"*, IEEE, Vol. MTT-28, No. 6, pp. 609-615, June 1980.
- [25] Zhang, Q. and Itoh, T.: *"Spectral-Domain Analysis of Scattering from*

- E-Plane Circuit Element*", IEEE, Vol. MTT-35, pp. 138-150, February 1987.
- [26] Chu, T.S. and Itoh, T.: "*Generalized Scattering Matrix Method for Analysis of Cascaded and Offset Microstrip Step Discontinuities*", IEEE, Vol. MTT-34, pp. 280-284, February 1986.
- [27] Patzelt, H. and Arndt, F.: "*Double-Plane Steps in Rectangular Waveguides and their Application for Transformers, Irises and Filters*", IEEE, Vol. MTT-30, No. 5, pp. 771-776, May 1982.
- [28] Rebollar, J.M.: "*Estudio de Discontinuidades múltiples en planos Z constantes*", Comunicación Interna. Grupo de Electromagnetismo Aplicado. Universidad Politécnica de Madrid. Mayo 1984.
- [29] Yi-Chi, S. and Itoh, T.: "*Computer Aided Design of Millimeter Wave E-Plane Filters*", IEEE, Vol. MTT-31, No. 2, pp. 135-142, February 1983.
- [30] James, G.L.: "*On the Problem of Applying Mode Matching Techniques in Analyzing Conical Waveguide Discontinuities*", IEEE, Vol. MTT-31, No. 9, pp. 718-723, September 1983.
- [31] Chaloupka, H.: "*Berechnung der streumatrix von Rechteckhohlleitungen mit dielektrischen und ferrimagnetischen stoffinsätzen über die verallgemeinerten leitungsgleichungen*", Tesis Doctoral, Ruhr Universität, Bochum 1975.
- [32] Hoffmann, M. and Severin, Hans: "*Hohlleitungsmeßverfahren zur bestimmung der materialdaten magnetisierter mikrowellenferrite in abhängigkeit von der frequenz*", AEÜ, No. 32, No. 2, pp. 60-74, 1978.
- [33] Entschladen, H. and Severin, H.: "*Messung der eingewerte des Permeabilitätstensors von ferrite and stäben in der rundhohlleitung*", AEÜ, Vol. 27, No. 4, pp. 153-162, 1973.

CAPITULO 6

CONCLUSIONES Y PRINCIPALES APORTACIONES

Las conclusiones y principales aportaciones de esta tesis son las siguientes:

- Se han estudiado diversas formulaciones del método de modos acoplados, extendiendo su validez al análisis de guías con medios magnéticos en su interior. Las formulaciones aplicables a estructuras de tipo general se han modificado para mejorar su convergencia mediante los apropiados desarrollos de funciones que fuerzan a cumplir algunas de las relaciones de continuidad.

- Se ha introducido una formulación del método de modos acoplados válida para el caso de guías parcialmente llenas de ferritas magnetizadas transversalmente de altura completa, supuesta la propagación de modos que no varían con la dirección del campo externo; los resultados obtenidos, tanto en la determinación de las constantes de fase, atenuación y de los campos, han demostrado una fuerte mejora en la convergencia y exactitud de las soluciones.

- La formulación indirecta, de tipo general, se ha aplicado al análisis de defasadores toroidales, obteniéndose resultados similares a los conseguidos por un método numérico puro como es el de diferencias finitas. Asimismo, se han estudiado estructuras dieléctricas abiertas con medios no recíprocos, obteniéndose resultados comparables a los proporcionados por otros métodos teóricos. Las discrepancias con los resultados experimentales se han explicado cualitativamente, pero no cuantitativamente debido a la insuficiencia de los datos publicados.

- Se ha introducido una formulación del método de adaptación modal, que junto con el método de modos acoplados, permite analizar discontinuidades simples mediante una simple reordenación de la matriz de tensiones e intensidades; esto produce una reducción del tiempo de cálculo, sobre aplicaciones anteriores de ambos métodos, de un orden de magnitud.

- La unión del método de modos acoplados en su formulación general, junto con el método de adaptación modal y la matriz de dispersión generalizada, ha permitido analizar discontinuidades en guías de onda con

ferrita transversalmente magnetizadas, cuando existen discontinuidades en las tres direcciones del sistema de coordenadas.

A P E N D I C E S

APENDICE A

Matrices de las formulaciones generales

En todo el desarrollo teórico del método de modos acoplados se consideran las matrices columna de tensiones e intensidades siguientes

$$\begin{bmatrix} V_{(n)} \end{bmatrix}_{(NTM \times 1)}, \begin{bmatrix} V_{[m]} \end{bmatrix}_{(NTE \times 1)}, \begin{bmatrix} I_{(n)} \end{bmatrix}_{(NTM \times 1)}, \begin{bmatrix} I_{[m]} \end{bmatrix}_{(NTE \times 1)} \quad (A.1)$$

$$\begin{bmatrix} K_{c(n)} & V_{(n)}^z \end{bmatrix}_{(NTM \times 1)}, \begin{bmatrix} K_{c[m]} & I_{[m]}^z \end{bmatrix}_{(NTE \times 1)} \quad (A.2)$$

donde NTM es el número de modos TM y NTE el de modos TE.

a) Matrices del Método Indirecto

Matrices de $K_{c(l)} V_{(l)}^z$

$$\begin{bmatrix} R_{(n)(l)}^c \end{bmatrix}_{NTM \times NTM} = \iint_S j\omega \epsilon_{33} T_{(l)} T_{(n)} ds \quad (A.3)$$

$$\begin{bmatrix} R_{(n)(l)}^A \end{bmatrix}_{NTM \times NTM} = \iint_S j\omega \left[\epsilon_{31} \frac{\partial T_{(l)}}{\partial x} + \epsilon_{32} \frac{\partial T_{(l)}}{\partial y} \right] T_{(n)} ds \quad (A.4)$$

$$\begin{bmatrix} R_{(n)[j]}^B \end{bmatrix}_{NTM \times NTE} = \iint_S j\omega \left[-\epsilon_{31} \frac{\partial T_{[j]}}{\partial y} + \epsilon_{32} \frac{\partial T_{[j]}}{\partial x} \right] T_{(n)} ds \quad (A.5)$$

Matrices de $K_{c[j]} I_{[j]}^z$

$$\left[S_{[m][j]}^{Btotal} \right]_{NTE \times NTE} = \left[S_{[m][j]}^B \right] + \frac{1}{\xi} \left[S_{[m]}^A \right] \left[S_{[j]}^A \right]^t \quad (A.6)$$

$$\left[S_{[m](1)}^{Ctotal} \right]_{NTE \times NTM} = \left[S_{[m](1)}^C \right] + \frac{1}{\xi} \left[S_{[m]}^A \right] \left[SS_{[1]}^C \right]^t \quad (A.7)$$

$$\left[S_{[m][j]}^{Dtotal} \right]_{NTE \times NTE} = \left[S_{[m][j]}^D \right] - \frac{1}{\xi} \left[S_{[m]}^A \right] \left[SS_{[j]}^D \right]^t \quad (A.8)$$

donde

$$\left[S_{[m]}^A \right]_{NTE \times 1} = \iint_S j\omega \mu_{33} T_{[m]} ds \quad (A.9)$$

$$\left[S_{[m][j]}^B \right]_{NTE \times NTE} = \iint_S j\omega \mu_{33} T_{[j]} T_{[m]} ds \quad (A.10)$$

$$\left[S_{[m](1)}^C \right]_{NTE \times NTM} = \iint_S j\omega \left[\mu_{31} \frac{\partial T_{(1)}}{\partial y} - \mu_{32} \frac{\partial T_{(1)}}{\partial x} \right] T_{[m]} ds \quad (A.11)$$

$$\left[S_{[m][j]}^D \right]_{NTE \times NTE} = \iint_S j\omega \left[\mu_{31} \frac{\partial T_{[j]}}{\partial x} + \mu_{32} \frac{\partial T_{[j]}}{\partial y} \right] T_{[m]} ds \quad (A.12)$$

$$\left[SS_{[n]}^C \right]_{NTE \times 1} = -j\omega \iint_S \left(-\mu_{31} \frac{\partial T_{(1)}}{\partial y} + \mu_{32} \frac{\partial T_{(1)}}{\partial x} \right) ds \quad (A.13)$$

$$\left[SS_{[m]}^D \right]_{NTE \times 1} = -j\omega \iint_S \left(\mu_{31} \frac{\partial T_{[j]}}{\partial x} + \mu_{32} \frac{\partial T_{[j]}}{\partial y} \right) ds \quad (A.14)$$

a2) Matrices del Método Directo

Matrices de $K_{c(l)} V_{(l)}^z$

$$\left[P_{(n)(l)}^C \right]_{NTM \times NTM} = \frac{1}{j\omega} K_{c(n)}^2 K_{c(l)}^2 \iint_S \frac{1}{\epsilon_{33}} T_{(l)} T_{(n)} ds \quad (A.15)$$

$$\left[P_{(n)(l)}^A \right]_{NTM \times NTM} = K_{c(n)}^2 \iint_S \left(\frac{\epsilon_{31}}{\epsilon_{33}} \frac{\partial T_{(l)}}{\partial x} + \frac{\epsilon_{32}}{\epsilon_{33}} \frac{\partial T_{(l)}}{\partial y} \right) T_{(n)} ds \quad (A.16)$$

$$\left[P_{(n)(j)}^B \right]_{NTM \times NTE} = K_{c(n)}^2 \iint_S \left(-\frac{\epsilon_{31}}{\epsilon_{33}} \frac{\partial T_{(j)}}{\partial y} + \frac{\epsilon_{32}}{\epsilon_{33}} \frac{\partial T_{(j)}}{\partial x} \right) T_{(n)} ds \quad (A.17)$$

Matrices de $K_{m(j)} I_{(j)}^z$

$$\left[Q_{(m)(j)}^B \right]_{NTE \times NTE} = \frac{1}{j\omega} K_{c(m)}^2 K_{c(j)}^2 \iint_S \frac{1}{\mu_{33}} T_{(j)} T_{(m)} ds \quad (A.18)$$

$$\left[Q_{(m)(l)}^C \right]_{NTE \times NTM} = K_{c(m)}^2 \iint_S \left(\frac{\mu_{31}}{\mu_{33}} \frac{\partial T_{(l)}}{\partial y} - \frac{\mu_{32}}{\mu_{33}} \frac{\partial T_{(l)}}{\partial x} \right) T_{(m)} ds \quad (A.19)$$

$$\left[Q_{(m)(j)}^D \right]_{NTE \times NTE} = K_{c(m)}^2 \iint_S \left(\frac{\mu_{31}}{\mu_{33}} \frac{\partial T_{(j)}}{\partial x} + \frac{\mu_{32}}{\mu_{33}} \frac{\partial T_{(j)}}{\partial y} \right) T_{(m)} ds \quad (A.20)$$

Matrices del término $H_0(z)$

$$\left[Q_{(m)}^A \right]_{NTE \times 1} = \frac{j K_{c(j)}^2}{\omega a b} \sum_j^\infty K_{c(j)}^2 \iint_S \frac{1}{\mu_{33}} T_{(j)} ds \quad (A.21)$$

$$\left[\text{QQ}_{(n)}^B \right]_{\text{NTM} \times 1} = \frac{1}{a \ b} \iint_S \left(- \frac{\mu_{31}}{\mu_{33}} \frac{\partial T_{(1)}}{\partial y} + \frac{\mu_{32}}{\mu_{33}} \frac{\partial T_{(1)}}{\partial x} \right) ds \quad (\text{A.22})$$

$$\left[\text{QQ}_{[m]}^C \right]_{\text{NTE} \times 1} = \frac{1}{a \ b} \iint_S \left(\frac{\mu_{31}}{\mu_{33}} \frac{\partial T_{[j]}}{\partial x} + \frac{\mu_{32}}{\mu_{33}} \frac{\partial T_{[j]}}{\partial y} \right) ds \quad (\text{A.23})$$

a3) Matrices de la ecuación de autovalores

$$\left[Z_{(n)(1)}^{\text{total}} \right]_{\text{NTM} \times \text{NTM}} = \left[Z_{(n)(1)} \right] - \frac{1}{\xi} \left[ZZ_{(n)}^Z \right] \left[SS_{(1)}^C \right]^t \quad (\text{A.24})$$

$$\left[Z_{(n)[j]}^{\text{total}} \right]_{\text{NTM} \times \text{NTE}} = \left[Z_{(n)[j]} \right] - \frac{1}{\xi} \left[ZZ_{(n)}^Z \right] \left[SS_{[j]}^D \right]^t \quad (\text{A.25})$$

$$\left[Z_{(n)[j]}^{\text{ztotal}} \right]_{\text{NTM} \times \text{NTE}} = \left[Z_{(n)[j]}^Z \right] + \frac{1}{\xi} \left[ZZ_{(n)}^Z \right] \left[S_{[j]}^A \right]^t \quad (\text{A.26})$$

$$\left[Z_{[m](1)}^{\text{total}} \right]_{\text{NTE} \times \text{NTM}} = \left[Z_{[m](1)} \right] - \frac{1}{\xi} \left[ZZ_{[m]}^Z \right] \left[SS_{(1)}^C \right]^t \quad (\text{A.27})$$

$$\left[Z_{[m][j]}^{\text{total}} \right]_{\text{NTE} \times \text{NTE}} = \left[Z_{[m][j]} \right] - \frac{1}{\xi} \left[ZZ_{[m]}^Z \right] \left[SS_{[j]}^D \right]^t \quad (\text{A.28})$$

$$\left[Z_{[m][j]}^{\text{ztotal}} \right]_{\text{NTE} \times \text{NTE}} = \left[Z_{[m][j]}^Z \right] + \frac{1}{\xi} \left[ZZ_{[m]}^Z \right] \left[S_{[j]}^A \right]^t \quad (\text{A.29})$$

donde

$$\begin{aligned} \left[Z_{(n)(l)} \right]_{(NTM \times NTM)} = -j \omega \iint_S & \left(\mu_{11} \frac{\partial T_{(l)}}{\partial y} \frac{\partial T_{(n)}}{\partial y} - \right. \\ & \left. - \mu_{12} \frac{\partial T_{(l)}}{\partial x} \frac{\partial T_{(n)}}{\partial y} - \mu_{21} \frac{\partial T_{(l)}}{\partial y} \frac{\partial T_{(n)}}{\partial x} + \mu_{22} \frac{\partial T_{(l)}}{\partial x} \frac{\partial T_{(n)}}{\partial x} \right) ds \end{aligned} \quad (A.30)$$

$$\begin{aligned} \left[Z_{(n)(j)} \right]_{(NTM \times NTE)} = j \omega \iint_S & \left(\mu_{11} \frac{\partial T_{(j)}}{\partial x} \frac{\partial T_{(n)}}{\partial y} + \right. \\ & \left. + \mu_{12} \frac{\partial T_{(j)}}{\partial y} \frac{\partial T_{(n)}}{\partial y} - \mu_{21} \frac{\partial T_{(j)}}{\partial x} \frac{\partial T_{(n)}}{\partial x} - \mu_{22} \frac{\partial T_{(j)}}{\partial y} \frac{\partial T_{(n)}}{\partial x} \right) ds \end{aligned} \quad (A.31)$$

$$\begin{aligned} \left[Z_{(m)(l)} \right]_{(NTE \times NTM)} = j \omega \iint_S & \left(\mu_{11} \frac{\partial T_{(l)}}{\partial y} \frac{\partial T_{(m)}}{\partial x} - \right. \\ & \left. - \mu_{12} \frac{\partial T_{(l)}}{\partial x} \frac{\partial T_{(m)}}{\partial x} + \mu_{21} \frac{\partial T_{(l)}}{\partial y} \frac{\partial T_{(m)}}{\partial y} - \mu_{22} \frac{\partial T_{(l)}}{\partial x} \frac{\partial T_{(m)}}{\partial y} \right) ds \end{aligned} \quad (A.32)$$

$$\begin{aligned} \left[Z_{(m)(j)} \right]_{(NTE \times NTE)} = -j \omega \iint_S & \left(\mu_{11} \frac{\partial T_{(j)}}{\partial x} \frac{\partial T_{(m)}}{\partial x} + \right. \\ & \left. + \mu_{12} \frac{\partial T_{(j)}}{\partial y} \frac{\partial T_{(m)}}{\partial x} + \mu_{21} \frac{\partial T_{(j)}}{\partial x} \frac{\partial T_{(m)}}{\partial y} + \mu_{22} \frac{\partial T_{(j)}}{\partial y} \frac{\partial T_{(m)}}{\partial y} \right) ds \end{aligned} \quad (A.33)$$

$$\left[Z_{(n)(j)}^z \right]_{(NTM \times NTE)} = j \omega \iint_S \left[\mu_{13} T_{(j)} \frac{\partial T_{(n)}}{\partial y} - \mu_{23} T_{(j)} \frac{\partial T_{(n)}}{\partial x} \right] ds \quad (A.34)$$

$$\left[Z_{[m][j]}^z \right]_{(NTE \times NTE)} = -j\omega \iint_S \left[\mu_{13} T_{[j]} \frac{\partial T_{[m]}}{\partial x} + \mu_{23} T_{[j]} \frac{\partial T_{[m]}}{\partial y} \right] ds \quad (A.35)$$

$$\left[ZZ_{(n)}^z \right]_{(NTM \times 1)} = j\omega \iint_S \left[\mu_{13} \frac{\partial T_{(n)}}{\partial y} - \mu_{23} \frac{\partial T_{(n)}}{\partial x} \right] ds \quad (A.36)$$

$$\left[ZZ_{[m]}^z \right]_{(NTE \times 1)} = -j\omega \iint_S \left[\mu_{13} \frac{\partial T_{[m]}}{\partial x} + \mu_{23} \frac{\partial T_{[m]}}{\partial y} \right] ds \quad (A.37)$$

$$\begin{aligned} \left[Y_{(n)(l)} \right]_{(NTM \times NTM)} = & -j\omega \iint_S \left(\epsilon_{11} \frac{\partial T_{(l)}}{\partial x} \frac{\partial T_{(n)}}{\partial x} + \right. \\ & \left. + \epsilon_{12} \frac{\partial T_{(l)}}{\partial y} \frac{\partial T_{(n)}}{\partial x} + \epsilon_{21} \frac{\partial T_{(l)}}{\partial x} \frac{\partial T_{(n)}}{\partial y} + \epsilon_{22} \frac{\partial T_{(l)}}{\partial y} \frac{\partial T_{(n)}}{\partial y} \right) ds \end{aligned} \quad (A.38)$$

$$\begin{aligned} \left[Y_{(n)[j]} \right]_{(NTM \times NTE)} = & j\omega \iint_S \left(-\epsilon_{11} \frac{\partial T_{[j]}}{\partial y} \frac{\partial T_{(n)}}{\partial x} + \right. \\ & \left. + \epsilon_{12} \frac{\partial T_{[j]}}{\partial x} \frac{\partial T_{(n)}}{\partial x} - \epsilon_{21} \frac{\partial T_{[j]}}{\partial y} \frac{\partial T_{(n)}}{\partial y} + \epsilon_{22} \frac{\partial T_{[j]}}{\partial x} \frac{\partial T_{(n)}}{\partial y} \right) ds \end{aligned} \quad (A.39)$$

$$\left[Y_{[m](l)} \right]_{(NTE \times NTM)} = j\omega \iint_S \left(\epsilon_{11} \frac{\partial T_{(l)}}{\partial x} \frac{\partial T_{[m]}}{\partial y} - \right.$$

$$- \left. \epsilon_{12} \frac{\partial T_{(l)}}{\partial y} \frac{\partial T_{[m]}}{\partial y} - \epsilon_{21} \frac{\partial T_{(l)}}{\partial x} \frac{\partial T_{[m]}}{\partial x} + \epsilon_{22} \frac{\partial T_{(l)}}{\partial y} \frac{\partial T_{[m]}}{\partial x} \right] ds \quad (A.40)$$

$$\left[Y_{[m][j]} \right]_{(NTE \times NTE)} = -j\omega \iint_S \left(\epsilon_{11} \frac{\partial T_{[j]}}{\partial y} \frac{\partial T_{[m]}}{\partial y} -$$

$$- \epsilon_{12} \frac{\partial T_{[j]}}{\partial x} \frac{\partial T_{[m]}}{\partial y} - \epsilon_{21} \frac{\partial T_{[j]}}{\partial y} \frac{\partial T_{[m]}}{\partial x} + \epsilon_{22} \frac{\partial T_{[j]}}{\partial x} \frac{\partial T_{[m]}}{\partial x} \right) ds \quad (A.41)$$

$$\left[Y_{(n)(l)}^z \right]_{(NTM \times NTM)} = -j\omega \iint_S \left[\epsilon_{13} T_{(l)} \frac{\partial T_{(n)}}{\partial x} + \epsilon_{23} T_{(l)} \frac{\partial T_{(n)}}{\partial y} \right] ds \quad (A.42)$$

$$\left[Y_{[m](l)}^z \right]_{(NTE \times NTM)} = j\omega \iint_S \left[-\epsilon_{13} T_{(l)} \frac{\partial T_{[m]}}{\partial y} + \epsilon_{23} T_{(l)} \frac{\partial T_{[m]}}{\partial x} \right] ds \quad (A.43)$$

APENDICE B

Matrices de la formulación restringida

Las matrices utilizadas en el apartado correspondiente a la formulación restringida son las siguientes

$$\begin{bmatrix} V_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V_1 \\ \vdots \\ V_m \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} I_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_1 \\ \vdots \\ I_m \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} J_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} J_1 \\ \vdots \\ J_m \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} K_{cm} I_m^z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{c1} I_1^z \\ \vdots \\ K_{cm} I_m^z \end{bmatrix} \quad (B.1)$$

$$(E_{mj}) = \int_0^a \varepsilon \frac{\partial T_j}{\partial x} \frac{\partial T_m}{\partial x} dx \quad (B.2)$$

$$(M_{mj}^a) = - \int_0^a \mu_a T_j T_m dx \quad (B.3)$$

$$(M_{mj}^b) = - \int_0^a \mu_b \frac{\partial T_j}{\partial x} T_m dx \quad (B.4)$$

$$(M_{mj}^c) = - \int_0^a \mu_c \frac{\partial T_j}{\partial x} \frac{\partial T_m}{\partial x} dx \quad (B.5)$$

$$(M_{mj}^d) = - \int_0^a \mu_a T_j \frac{\partial T_m}{\partial x} dx \quad (B.6)$$

$$(N_m^a) = - \int_0^a \mu_a \frac{\partial T_m}{\partial x} dx \quad (B.7)$$

$$(N_m^b) = - \int_0^a \mu_b T_m dx \quad (B.8)$$

$$[D_{mm}] = - \frac{j}{\omega} \begin{bmatrix} K_{c1}^2 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & & \vdots \\ 0 & & & K_{cm}^2 \end{bmatrix} \quad (B.9)$$

APENDICE C

Tensor Permeabilidad

En la tabla C.I se muestran esquematicamente la disposición de las componentes del tensor permeabilidad según la dirección de magnetización.

Direc. Campo Magnético H_0	Componentes de la diagonal	Componentes de fuera de la diagonal
X	$\xi_{11} = \xi_0$ $\xi_{22} = \xi_1$ $\xi_{33} = \xi_2$	$\xi_{23} = j\kappa$ $\xi_{32} = -j\kappa$ $\xi_{12} = \xi_{13} = \xi_{21} = \xi_{31} = 0$
Y	$\xi_{22} = \xi_0$ $\xi_{11} = \xi_1$ $\xi_{33} = \xi_2$	$\xi_{13} = j\kappa$ $\xi_{31} = -j\kappa$ $\xi_{12} = \xi_{21} = \xi_{23} = \xi_{32} = 0$
Z	$\xi_{33} = \xi_0$ $\xi_{11} = \xi_1$ $\xi_{22} = \xi_2$	$\xi_{12} = j\kappa$ $\xi_{21} = -j\kappa$ $\xi_{13} = \xi_{31} = \xi_{23} = \xi_{32} = 0$

Tabla C.I.- Componentes del Tensor permeabilidad

Magnetización a saturación

Se ha utilizado el tensor permeabilidad de Polder, válido para ferritas infinitas

$$\xi_0 = 1, \quad \xi_1 = \xi_2 = 1 + \frac{(\omega_1 + j\omega_d)\omega_s}{(\omega_1 + j\omega_d)^2 - \omega^2} \tag{C.1}$$

$$\kappa = - \frac{\omega \omega_s}{(\omega_1 + j \omega_d) - \omega^2} \quad (C.2)$$

donde

$$\omega_s = \gamma 4\pi M_s, \quad \omega_1 = \gamma H_1, \quad \omega_d = \frac{1}{2} \gamma \Delta H$$

$\gamma = ge/2mc$, es la razón giromagnética del electrón.

"g" es el factor de Landé para del electrón

H_1 es la intensidad de campo magnético interno (en Oersteds),

$4\pi M_s$ es la magnetización de saturación de la ferrita (en Gauss),

ΔH es el ancho de línea de la ferrita (en Oersteds)

ω es la frecuencia angular de operación ($\omega=2\pi f$).

Se puede observar que tanto ξ como κ pueden ser complejos, es decir, el material puede presentar pérdidas, lo cual se produce cuando el ancho de línea es distinto de cero. En otro caso, tanto ξ_1 como κ son reales (la componente del tensor permeabilidad fuera de la diagonal principal imaginaria pura). Cuando la ferrita es finita, el campo externo y el interno no son iguales, y es necesario tener en cuenta el factor de desmagnetización en la dirección del campo externo

Magnetización a remanencia (M_r)

En este caso, se utilizan fórmula empíricas obtenidas a partir de resultados experimentales (referencia [16] del capítulo tercero)

$$\xi = \mu'_0 + (1 - \mu'_0) \left(\frac{M_r}{M_s} \right)^{3/2} \quad (C.3)$$

donde M_r es la magnetización en la remanencia y

$$\mu'_0 = \frac{2}{3} \left[1 - \left(\frac{\omega_s}{\omega} \right)^2 \right]^{1/2} + \frac{1}{3} \quad (C.4)$$

$$\kappa = \frac{\gamma 4\pi M_r}{\omega} \quad (\text{C.5})$$

En este caso, también es conveniente definir

$$\xi_0 = \mu'_0 \left[1 - \left(\frac{M_r}{M_s} \right)^{5/2} \right] \quad (\text{C.6})$$

En caso de magnetización a la remanencia, muchos autores consideran ξ_0 igual a la unidad. Sin embargo, no es siempre una buena aproximación. En este caso, no se han considerado pérdidas por ser normalmente poco relevantes.