Equacions diferencials estocàstiques dirigides per un moviment Brownià fraccionari

Mireia Besalú i Mayol

Equacions diferencials estocàstiques dirigides per un moviment Brownià fraccionari

Mireia Besalú i Mayol

Universitat de Barcelona

Memòria presentada per a aspirar
al grau de Doctora en Matemàtiques.

Programa de Doctorat de Matemàtiques.

Certifico que la present memòria
ha estat realitzada per
Mireia Besalú i Mayol
al Dept. de Probabilitat, Lògica i Estadística
de la Universitat de Barcelona,
sota la meva direcció.

Dr. Carles Rovira Escofet.
Dept. de Probabilitat, Lògica i Estadística.
Universitat de Barcelona.

Barcelona, desembre de 2010.

Als meus pares, a l'Aina i a la Irene

demà seràs memòria,
demà seràs ahir.

Cançó dels dies de cada dia,
Maria Cabrera

Agraïments

La memòria que teniu a les mans va començar fa ben bé cinc anys, al despatx d'en David i en Carles. En aquella època, ni doctorat ni tesi em treien la son; fa cinc anys, l'únic horitzó possible era acabar Matemàtiques. D'entre les assignatures optatives que oferia la facultat, les tres lletres del TAD em van cridar l'atenció. Sobretot, si feien referència a un treball de probabilitats. Llavors va ser quan, amb la prudència d'una estudiant de matemàtiques que està a punt d'acabar i pensa que encara ho ha d'aprendre tot, vaig anar a picar la porta del despatx d'en David. Spin Glasses. I gràcies a la tenacitat, amabilitat, i capacitat per confiar més que jo en el que podia fer, van fer d'en David el millor mentor. Tant és així, que a finals de gener vaig aconseguir lliurar un treball que em semblava el final d'una etapa però que avui situo als inicis d'una altra.

Poc després, i gràcies a una beca d'investigació i docència, vaig entrar a formar part del departament de Probabilitat, Lògica i Estadística. Voldria agraïr a la Marta haver acceptat el difícil repte de guiar-me en el que va ser el meu primer treball d'investigació. Un teorema del Suport. Amb la seva experiència i les meves ganes d'avançar, vam intentar elaborar un treball senzill i rigorós, que va ensenyar-me que els procediments en la recerca, no sempre són fructuosos. I va ser dur entendre que de vegades, tot el camí recorregut, no porta enlloc. Dono doncs les gràcies a la Marta, per encoratjar-me a continuar, a prendre altres camins, a no abandonar la recerca.

I en el moment que semblava que el camí no arribava enlloc, em vaig veure com tres anys abans, amb la quasi desesperació d'una estudiant de doctorat que pensa que no acabarà mai la tesi que ha començat, tornant a picar la porta del despatx d'en Carles. Sí, em va dir, però no ho sé, hauré de pensar alguna cosa. Dos dies després, em saturava la safata d'entrada amb articles d'equacions dirigides pel moviment Brownià fraccionari. Sempre disposat a discutir un article, ajudar-me a resoldre un dubte o a proposar-me nous reptes han fet d'en Carles el millor director. Treballant amb ell he après que l'exigència i l'eficàcia combinen perfectament amb el sentit de l'humor i un bon croissant. Aquest ha estat un camí planer i productiu, que ha donat com a resultat el treball que teniu a les mans, i molts bons moments per recordar. Gràcies, Carles! i avui ja puc respondre't que sí, he acabat la tesi!

Durant tot aquest temps, he tingut assignada una taula en un despatx. Amb la Carme al costat, el dia a dia d'aquests quatre anys ha estat menys solitari. Més que una companya, ha llegit, escoltat i comentat amb ulls d'amiga, moltes qüestions d'aquesta tesi. Gràcies, Carme, per totes les estones viscudes, a dins i a fora del nostre despatx.

Des de l'altre costat del vidre, intentant complaure a tothom, i a punt per resoldre qualsevol incidència, que pot ser tan diversa en un departament, com la falta de tòner o la preparació d'aperitius, la Dolors, experta secretària i algú en qui confiar.

El camí recorregut és llarg, si compto els companys i amics que he conegut. Gràcies als companys del Departament que des del primer dia van acollir-me. A tots i a totes us dono les gràcies pel que m'heu ensenyat, encara que no us ho sembli, he après molt de cadascun de vosaltres. Sobretot a en Salvador, els seus consells, i tota la seva experiència viscuda en el món de la recerca, han estat d'una gran ajuda i font de suport en les decisions més complicades. També guardo un record especial per als companys del grup de Probabilitat de la UAB, especialment a la Noèlia, en Lluís, en David i l'Albert, per les converses, i viatges compartits.

Una beca per una estada curta em va portar fins a Kansas. Allà vaig tenir l'oportunitat de poder treballar amb en David Nualart, font incessant d'idees i excel·lent professor. Gràcies, David, pel temps que em vas dedicar i l'acollida que vaig rebre; part d'aquesta tesi és fruit del treball compartit.

Una de les persones que més ha sentit a parlar dels ets i uts de les meves equacions diferencials estocàstiques, en català i en anglès, que encara de vegades em pregunta: però, exactament, de què va la teva tesi? La Irene, sense el seu suport incondicional, la seva habilitat per les paraules, i les seves cremes de verdures, aquesta tesi no hauria estat possible.

L'amor i les gràcies per a les de sempre: la Bet, l'Anaïs i la Laura, la Maria-Elvira, l'Ariadna; i per a l'Abraham, un gran matemàtic, professor i millor amic.

Per últim, un record i moltes gràcies a l'Aina i als meus pares que m'han acompanyat en tot aquest recorregut.

Barcelona, desembre de 2010

Índex

1

Introducció

Durant l'última dècada s'han publicat una quantitat notable de treballs relacionats amb el moviment Brownià fraccionari (fBm).

El moviment Brownià fraccionari, W^H, és un procés Gaussià que generalitza el moviment Brownià estàndard i que va ser estudiat per primera vegada per Mandelbrot i Van Ness a [MVN68]. Aquest procés depèn d'un paràmetre H que s'anomena paràmetre de Hurst en honor al treball de l'hidròleg Hurst sobre el cabal del riu Nil. El paràmetre de Hurst pren valors entre $(0, 1)$, essent el cas particular $H = \frac{1}{2}$, el moviment Brownià estàndard. Per la resta de valors, hem de diferenciar si $H > \frac{1}{2}$ o si $H < \frac{1}{2}$, ja que les propietats que obtenim són diferents. Per exemple, si $H > \frac{1}{2}$ les trajectòries del moviment Brownià fraccionari són més regulars que les del moviment Brownià estàndard, i una altra propietat en aquest mateix cas és que podem utilitzar-lo com a model en situacions de dependència a llarg termini, en el cas contrari, per a $H < \frac{1}{2}$ les trajectòries són més irregulars que les del moviment Brownià estàndard.

En aquesta memòria presentem tres treballs dedicats a l'estudi d'equacions diferencials estocàstiques dirigides per un moviment Brownià fraccionari amb diferents valors del paràmetre de Hurst.

Treballarem tres equacions diferents totes elles dirigides per un moviment Brownià fraccionari: la primera equació serà una equació amb retard i restriccions de positivitat amb el paràmetre de Hurst $H > \frac{1}{2}$, la segona serà una equació de Volterra amb $H > \frac{1}{2}$ i finalment l'última serà una equació d-dimensional amb $H \in \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{2}\right)$.

Quan estudiem equacions diferencials estocàstiques, una de les primeres qüestions que ens hem de plantejar és com entenem la integral estocàstica. En particular, en el cas d'equacions dirigides pel moviment Brownià fraccionari, com que les propietats d'aquest procés varien depenent del valor del paràmetre de Hurst H, la manera com treballarem amb les equacions dirigides per un moviment Brownià fraccionari amb $H > \frac{1}{2}$ serà diferent del cas on $H \in \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{2}\right)$.

En el cas on $H > \frac{1}{2}$, la integral estocàstica $\int_0^T u_s dW_s^H$ apareix en els dos primers treballs es pot definir trajectorialment com una integral de Riemann-Stieltjes utilitzant els resultats d'existència obtinguts per Young [You36]. A més a més, el treball de Zähle [Zäh98] ens permet expressar les nostres integrals en termes d'operadors de derivades fraccionàries (veure al Capítol 2, apartats 2.2 i 2.3).

Els nostres treballs amb equacions dirigides per un moviment Brownià fraccionari amb $H > \frac{1}{2}$ estan directament inspirats amb el treball de Nualart i Răşcanu [NR02]. En aquest treball els autors obtenen, seguint les idees donades per Zähle a [Zäh98], l'existència i unicitat de solució per una classe d'equacions diferencials estocàstiques multidimensionals depenents en temps dirigides per un moviment Brownià fraccionari amb paràmetre de Hurst $H > \frac{1}{2}$. La seva demostració s'organitza en tres etapes: la primera constisteix en obtenir estimacions de la integral de Lebesgue i de la integral de Stieltjes generalitzada, en la segona proven un resultat d'existència i unicitat determinista basat en les estimacions anteriors, i finalment a la tercera etapa s'utilitzen els resultats deterministes per obtenir l'existència i unicitat de solució de l'equació estocàstica

Pel que fa a la integral estocàstica $\int_0^T u_s dW_s^H$ de l'equació dirigida per un moviment Brownià fraccionari amb $H \in \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{2}\right)$, utilitzarem la definició donada recentment per Hu i Nualart a [HN09]. Aquesta definició s'obté seguint les idees dels treballs de Nualart i Răşcanu [NR02] i de Zähle [Zäh98]. De fet, Hu i Nualart donen una expressió explícita per a una integral de tipus $\int_0^t f(x_s) dy_s$, on y és una funció β-Hölder contínua per a $\beta \in \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{2}\right)$. Aquesta expressió, que no requereix de cap argument d'aproximació, està basada en la fórmula d'integració per parts fraccionària, i depèn de les funcions x, y i del funcional multiplicatiu quadràtic $x \otimes y$.

Ara que ja hem explicat com definim les integrals estocàstiques que apareixeran anem a presentar les tres equacions diferencials estocàstiques que estudiarem.

La primera equació diferencial estocàstica que estudiarem és una equació amb retard i amb restriccions de positivitat, o sigui considerarem una equació tal que la seva solució serà sempre zero o positiva. Una equació del tipus

$$X(t) = \eta(0) + \int_0^t b(s, X)ds + \int_0^t \sigma(s, X(s-r))dW_s^H + Y(t), \quad t \in (0, T].$$

Com que r (el retard) és un valor positiu, hem de donar com a condició inicial la solució de l'equació a l'interval $[-r, 0]$, en el nostre cas serà $X(t) = \eta(t)$, on la funció η serà una funció determinista no negativa. I el terme Y que apareix a l'equació és el que ens permetrà assegurar que la solució de l'equació sigui sempre positiva.

Les equacions diferencials estocàstiques amb retard han estat àmpliament estudiades degut a les seves múltiples aplicacions relacionades amb models poblacionals, reaccions bioquímiques, repressió genètica, models climàtics... (veure per exemple a [Wu96]). Una referència bàsica és el treball de Mohammed a [Moh98]. Existeixen molts treballs estudiant diferents aspectes d'aquest tipus d'equacions, però els treballs referents a equacions diferencials estocàstiques amb retard dirigides per un moviment Brownià fraccionari són molt més escassos. Podem fer esment, per exemple, a les següents referències: als treballs [FR06], [LT08], [NNT08] i [TT09] on s'estudia l'existència i unicitat de solució de l'equació, a l'article [LT08] on es prova que la solució de l'equació té una densitat $\mathcal{C}^\infty$ i finalment al treball de [FR10] on s'estudia la convergència en L^p i quasi segurament de la solució de l'equació amb retard cap a la solució de l'equació sense retard quan el retard tendeix a 0.

D'altra banda, observem que alguns d'aquests models que acabem d'anomenar tracten només amb quantitats que no poden ser negatives, per exemple concentracions de ions o proporcions de poblacions infectades. Per tant, en aquests casos sembla natural utilitzar equacions diferencials estocàstiques amb retard i restriccions de positivitat. De treballs amb aquest tipus de condicions gairebé no en trobem. De fet, només ens podem referir al llibre de Kushner [Kus08], dedicat a l'estudi de mètodes numèrics per aquesta classe d'equacions i al treball de Kinnally i Williams [KW10], on els autors obtenen condicions suficients per a l'existència i unicitat de solucions estacionàries per a equacions diferencials estocàstiques amb retard i restriccions de positivitat dirigides per un moviment Brownià estàndard.

Finalment, també tenim treballs a on el moviment Brownìà fraccionari s'utilitza per descriure comunitats biològiques, models climàtics... (veure per exemple a [FG08]) degut a la seva possibilitat de descriure diferents situacions d'influències externes com a dependències a llarg o a curt termini.

Per això, la nostra principal aportació en aquest treball és la de tractar equacions diferencials estocàstiques amb retard on les restriccions de positivitat apareixen conjuntament amb el moviment Brownià fraccionari.

Per aquesta primera equació donarem un resultat d'existència i unicitat de solució i un altre d'existència de moments de tots els ordres. Utilitzarem unes hipòtesis més febles que les que apareixen en els treballs [NR02] i [FR10], i de fet, també millorem el resultat obtingut per Ferrante i Rovira a [FR10]. Com ja hem comentat anteriorment, la metodologia que utilitzarem és la introduïda per Nualart i Răşcanu a [NR02]. Seguint el seu mètode, el primer que necessitem són estimacions de la integrals de Lebesgue i de la integral de Riemann-Stieltjes. Podem fer servir les cotes del terme hereditari, la integral de Lebesgue, obtingudes a [NR02] i [FR10] i pel que fa a les cotes de la integral de Riemann-Stieltjes podem utilitzar també resultats semblants als dels dos treballs anteriors. Ara bé, la principal dificultat d'aquest treball és la demostració de l'existència i la unicitat de solució per a l'equació determinista. Utilitzant el retard podem simplificar la demostració de l'existència i unicitat de la solució i és també el retard el que ens permet tractar el terme Y.

La segona equació que treballarem és una equació diferencial estocàstica de Volterra a $\mathbb{R}^d$, com la següent

$$X(t) = X_0 + \int_0^t b(t,s,X(s))ds + \int_0^t \sigma(t,s,X(s))dW_s^H, \qquad t \in [0,T].$$

Les equacions diferencials estocàstiques de Volterra han estat utilitzades per les seves aplicacions en el camp de la biologia i la física. En particular els casos més estudiats són les equacions de Volterra estocàstiques dirigides per un moviment Brownià estàndard o més en general el cas d'equacions dirigides per una semimartingala. En trobem alguns exemples en els següents articles: [AN97], [BM80a], [BM80b] i [Wan08] on s'estudia l'existència i unicitat de solució d'equacions dirigides pel moviment Brownià estàndard en diferents contextos, i [Pro85] on s'obté un resultat d'existència i unicitat de solució per les equacions dirigides per una semimartingala. En canvi, pel que fa a la literatura sobre equacions de Volterra dirigides per un moviment Brownià fraccionari aquesta és més escassa. Les principals referències són els treballs de Deya i Tindel [DT09] i [DT08]. En aquests treballs els autors consideren el cas $H > \frac{1}{3}$ i el cas $H > \frac{1}{2}$ on també utilitzen la integral de Young amb el terme $b = 0$, amb unes condicions sobre els coeficients diferents.

Per aquesta equació, igual que per a l'anterior demostrarem l'existència i la unicitat de solució, i provarem que la solució té moments finits. Observem que els nostres resultats inclouen com a cas particular els resultats obtinguts per Nualart i Răşcanu a [NR02].

Com en l'equació amb retard, utilitzarem per demostrar el nostre resultat la metodologia de Nualart i Răşcanu a [NR02]. En aquest cas, a diferència de l'equació anterior, la nostra principal dificultat és obtenir estimacions per a les integrals de Volterra de Lesbesgue i de Riemann-Stieltjes. De fet, l'interés de l'estudi d'aquesta equació recau en l'obtenció d'aquestes estimacions, especialment les que fan referència a la integral de Volterra de Riemann-Stieltjes, que requereixen de càlculs llargs i acurats. Una vegada obtingudes aquestes estimacions, tenint en compte que obtenim les mateixes cotes que les de [NR02], la demostració de l'existència i unicitat s'aconsegueix seguint els mateixos passos que fan Nualart i Răşcanu per la seva equació. Les hipòtesis sota les quals treballem són les que generalitzen les hipòtesis de [NR02] al cas d'equacions de Volterra.

Finalment, l'últim treball fa referència a l'estudi d'una equació diferencial d-dimensional d'aquest tipus

$$dx_t = f(x_t)dy_t$$

on la funció de control y no és diferenciable però és β-Hölder contínua. Una de les maneres d'estudiar aquest tipus d'equacions i de la qual hi ha actualment molts treballs és la teoria de *rough paths analysis* (un llibre de referència és [FV10]). Alternativament, un altre mètode per a estudiar aquestes equacions si la funció de control és β Hölder contínua d'ordre $\beta > \frac{1}{2}$, és el que hem utilitzat per tractar amb les dues equacions anteriors. Aquest mètode, com ja hem dit abans, ha sigut estès en un treball recent de Hu i Nualart [HN09] pel cas que $\beta \in \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{2}\right)$. En aquest treball els autors estableixen l'existència i unicitat de solució per la mateixa equació que nosaltres quan f és una funció acotada. La principal idea és transformar l'equació en un sistema d'equacions que depengui només de x, $x \otimes y$ i $x \otimes (y \otimes y)$ que es pot resoldre per un argument de punt fix.

El pròposit del nostre treball és obtenir estimacions precises per a la norma del suprem per a la solució de la nostra equació utilitzant la metodologia introduïda a [HN09]. A més, els principals resultats que hem obtingut són: l'extensió del resultat de l'existència d'una solució al cas que f tingui creixement sublineal de la forma $|f(x)| \leq c\,(1 + |x|^\gamma)$ amb $\gamma < \beta$ i l'obtenció d'estimacions que ens permetran provar l'existència d'una solució de l'equació lineal de la forma $dz_t = g(x_t)z_t dy_t$. Per aquesta última equació també obtindrem una estimació per la norma del suprem de la solució. Com aplicació de tots aquests resultats, deduïrem l'existència de moments per a les solucions d'equacions diferencials estocàstiques dirigides per un moviment Brownià fraccionari amb paràmetre de Hurst $H \in \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{2}\right)$ del tipus

$$X_t = X_0 + \sum_{j=1}^{d} \int_0^t \sigma_j(X_s) dB_s^{H,j}, \qquad t \in [0, T].$$

Un dels objectius d'aquest treball era concloure que la derivada de Malliavin $\|DX_t^i\|_{\mathcal{H}}$ té moments de tots els ordres, malauradament obtenim una estimació de la norma del suprem de la derivada, però no ens permet concloure l'existència de moments de tots els ordres. Aquest problema encara resta obert. Els resultats d'aquest treball generalitzen el treball de Hu i Nualart [HN07] pel cas $H > \frac{1}{2}$.

Estructura de la memòria

Aquesta memòria consta de 4 capítols que es poden llegir independentment. En els tres últims capítols es troben les nostres aportacions a la tesi. Abans d'aquests capítols trobem aquesta introducció seguida d'un capítol de preliminars, on es troben definicions i resultats coneguts que són utilitzats en els altres capítols. Al final, hi trobem dos apèndixs amb alguns resultats tècnics.

En el segon capítol de Preliminars hi podem trobar definicions d'espais, que apareixeran en els posteriors capítols, i les seves respectives normes. Seguidament donem fórmules i regles d'integració per parts per a integrals i derivades fracciònaries i alguns resultats de la integral de Stietjes generalitzada. Finalment, hi ha una breu introducció del moviment Brownià fraccionari i de la integració respecte el moviment Brownià fraccionari.

En el tercer capítol estudiem l'existència i unicitat de solució d'equacions amb retard i restriccions de positivitat dirigides per un moviment Brownià fraccionari amb paràmetre de Hurst $H > \frac{1}{2}$. Els resultats d'aquest capítol han donat lloc a un article que sortirà publicat a *Bernoulli*.

En el quart capítol estudiem l'existència i unicitat de solució d'equacions de Volterra dirigides per un moviment Brownià fraccionari amb paràmetre de Hurst $H > \frac{1}{2}$. Els resultats d'aquest treball han donat lloc a un preprint que està sotmès a publicació.

En el cinquè capítol està dedicat a obtenir estimacions de la solució d'equacions dirigides per una funció β-Hölder contínua amb $\beta \in \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{2}\right)$ i la seva aplicació al cas d'equacions dirigides per un moviment Brownià fraccionari amb paràmetre de Hurst $H \in \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{2}\right)$. Aquest treball va ser realitzat durant la meva estada a la Universitat de Kansas amb en David Nualart i sortirà publicat a *Stochastics and Dynamics*.

Finalment, tenim dos apèndixs amb alguns resultats tècnics utilitzats en el segon i en el tercer capítol.

2

Preliminars

En els resultats que provarem, considerarem equacions diferencials estocàstiques dirigides per un moviment Brownià fraccionari. En els casos en què $H > \frac{1}{2}$, la integral estocàstica que apareix a les nostres equacions serà una integral trajectorial de Riemann-Stieltjes. Zälhe a [Zäh98] introdueix la integral de Stieltjes generalitzada. Utilitzant fórmules de composició, regles d'integració per parts per a integrals fraccionàries i derivades de Weyl, aquesta integral s'expressa en termes d'operadors de derivades fraccionàries. A més aquesta integral coincideix amb la integral de Riemann-Stieltjes $\int_0^t f dg$ quan les funcions f i g són Hölder contínues d'ordres λ i μ respectivament tals que $\lambda + \mu > 1$ (veure en el Teorema 2.3.2).

Per tal de situar-nos en tots aquests conceptes introduïm en aquest capítol les definicions i propietats que utilitzarem en els successius capítols per a la presentació dels resultats obtinguts.

Començarem presentant la definició d'alguns espais i les normes respectives associades que apareixaran més endavant, després farem una breu introducció de les integrals i derivades fraccionàries, les integrals de Stieltjes generalitzades i el moviment Brownià fraccionari.

2.1 Espais i normes

En aquest apartat definirem diversos espais que necessitarem més endavant en els capítols 3 i 4.

Denotarem per $W_0^{\alpha,\infty}(s,t;\mathbb{R}^d)$ l'espai de funcions mesurables $f : [s,t] \to \mathbb{R}^d$ tals que

$$\|f\|_{\alpha,\infty,(s,t)} := \sup_{u\in[s,t]} \left(|f(u)| + \int_s^u \frac{|f(u)-f(v)|}{(u-v)^{\alpha+1}} dv \right) < \infty.$$

Per tal de simplificar l'escriptura, ja que alguns d'aquests espais per a s i t determinades els utilitzarem intensivament, farem servir les següents notacions en aquests casos particulars:

- $s = 0$ i $t = T$, escriurem la norma de $W_0^{\alpha,\infty}(0,T;\mathbb{R}^d)$ com $\|f\|_{\alpha,\infty} := \|f\|_{\alpha,\infty(0,T)}$,
- $s = -r$ i $t = T$, amb $r > 0$, escriurem la norma de $W_0^{\alpha,\infty}(-r,T;\mathbb{R}^d)$ com $\|f\|_{\alpha,\infty(r)} := \|f\|_{\alpha,\infty(-r,T)}$.

Un altre dels espais que necessitarem és l'espai de les funcions λ-Hölder contínues, per a qualsevol $0 < \lambda \leq 1$, i el denotarem per $C^\lambda(s,t;\mathbb{R}^d)$. Aquest espai està format per les funcions $f : [s,t] \to \mathbb{R}^d$ tals que

$$\|f\|_{\lambda(s,t)} := \|f\|_{\infty(s,t)} + \sup_{s\leq u\leq v\leq t} \frac{|f(v)-f(u)|}{(v-u)^\lambda} < \infty,$$

on

$$\|f\|_{\infty(s,t)} := \sup_{u\in[s,t]} |f(u)|.$$

I pels mateixos casos que abans simplificarem la notació, així que denotarem per $\|f\|_\lambda := \|f\|_{\lambda(0,T)}$, $\|f\|_{\lambda(r)} := \|f\|_{\lambda(-r,T)}$ i farem el mateix per la norma infinit $\|f\|_\infty := \|f\|_{\infty(0,T)}$ i $\|f\|_{\infty(r)} := \|f\|_{\infty(-r,T)}$.

I finalment, introduïm també una nova norma en l'espai $W_0^{\alpha,\infty}(s,t;\mathbb{R}^d)$. Aquesta serà per a qualsevol $\lambda \geq 1$:

$$\|f\|_{\alpha,\lambda(s,t)} := \sup_{u\in[s,t]} \exp(-\lambda u) \left(|f(u)| + \int_s^u \frac{|f(u)-f(v)|}{(u-v)^{\alpha+1}} dv \right).$$

Es comprova fàcilment que aquesta nova norma és equivalent a la norma $\|\cdot\|_{\alpha,\infty(s,t)}$, que hem definit abans, per a qualsevol $\lambda \geq 1$.

I com hem fet per les altres normes, utilitzarem les següents notacions simplificades $\|f\|_{\alpha,\lambda} := \|f\|_{\alpha,\lambda(0,T)}$ i $\|f\|_{\alpha,\lambda(r)} := \|f\|_{\alpha,\lambda(-r,T)}$.

2.2 Integrals fraccionàries i derivades

Una presentació més exhasutiva de les nocions d'aquest apartat es pot trobar a [SKM93]. Tots els resultats presentats en aquest apartat es troben justament a [SKM93].

Sigui λ^n la mesura de Lebesgue a $\mathbb{R}^n$. Denotarem per dx la integració respecte $\lambda(dx)$. Per a $a, b \in \mathbb{R}$ amb $a < b$ i $p \geq 1$, sigui $L^p(a,b)$ l'espai de funcions $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ tals que $\|f\|_{L^p(a,b)} < \infty$, on

$$\|f\|_{L^p(a,b)} = \begin{cases} \left(\int_a^b |f(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} & \text{si } 1 \leq p < \infty, \\ \underset{x\in[a,b]}{\operatorname{ess\ sup}} \{|f(x)|\} & \text{si } p = \infty. \end{cases}$$

On $\operatorname{ess\,sup} |f(x)|$ és el suprem essencial de la funció $|f(x)|$

$$\operatorname{ess\,sup} |f(x)| = \inf \{M \geq 0; \lambda(\{x; |f(x)| > M\}) = 0\}.$$

Definim en primer lloc les integrals fraccionàries de Riemman-Liouville. Donada $f \in L^1(a,b)$ i per a qualsevol $\alpha > 0$, definim per quasi tota $x \in (a,b)$ les integrals fraccionàries de Riemman-Liouville per l'esquerra/la dreta d'ordre α

$$I^\alpha_{a+} f(x) := \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x-y)^{\alpha-1} f(y) dy, \qquad x > a \tag{2.1}$$

$$I^\alpha_{b-} f(x) := \frac{(-1)^{-\alpha}}{\Gamma(\alpha)} \int_x^b (y-x)^{\alpha-1} f(y) dy, \qquad x < b \tag{2.2}$$

on $\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty r^{\alpha-1} e^{-r} dr$ és la funció d'Euler i $(-1)^{-\alpha} = e^{-i\pi\alpha}$.

Per a introduir ara les derivades fraccionàries el més natural és fer-ho com l'operació inversa de les integrals fraccionàries.

Definició 2.2.1 *Per a funcions $f(x)$ definides a l'interval $[a,b]$, les següents expressions*

$$(\mathcal{D}^\alpha_{a+} f)(x) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dx} \int_a^x \frac{f(t)}{(x-t)^\alpha} dt,$$
$$(\mathcal{D}^\alpha_{b-} f)(x) = \frac{-1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dx} \int_x^b \frac{f(t)}{(t-x)^\alpha} dt,$$

s'anomenen **derivades fraccionàries** *d'ordre $0 < \alpha < 1$, per la dreta i per l'esquerra respectivament. Aquestes derivades fraccionàries s'anomenen* **derivades de Riemann-Liouville**.

El següent lema ens dóna una expressió equivalent per a les derivades fraccionàries en el cas que $f(x)$ sigui una funció absolutament contínua.

Lema 2.2.1 *Si $f(x)$ és una funció absolutament contínua en l'interval $[a,b]$, llavors $\mathcal{D}^{\alpha}_{a+}f$ i $\mathcal{D}^{\alpha}_{b-}f$ existeixen q.p.t per a $0<\alpha<1$. A més, $\mathcal{D}^{\alpha}_{a+}f$, $\mathcal{D}^{\alpha}_{b-}f \in L^r(a,b)$ on $1\leq r<\frac{1}{\alpha}$ i*

$$(\mathcal{D}^{\alpha}_{a+}f)(x)=\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\left(\frac{f(a)}{(x-a)^{\alpha}}+\int_a^x\frac{f'(t)}{(x-t)^{\alpha}}dt\right),$$
$$(\mathcal{D}^{\alpha}_{b-}f)(x)=\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\left(\frac{f(b)}{(b-x)^{\alpha}}-\int_x^b\frac{f'(t)}{(t-x)^{\alpha}}dt\right).$$

Com a cas particular, si $f(x)$ és diferenciable podem obtenir

$$(\mathcal{D}^{\alpha}_{a+}f)(x)=\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\left(\frac{f(x)}{(x-a)^{\alpha}}+\lim_{t\to x}\frac{f(t)-f(x)}{(x-t)^{\alpha}}+\alpha\int_a^x\frac{f(x)-f(t)}{(x-t)^{\alpha+1}}dt\right),$$
$$(\mathcal{D}^{\alpha}_{b-}f)(x)=\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\left(\frac{f(x)}{(b-x)^{\alpha}}+\lim_{t\to x}\frac{f(t)-f(x)}{(t-x)^{\alpha}}+\alpha\int_x^b\frac{f(x)-f(t)}{(t-x)^{\alpha+1}}dt\right).$$

Si $f(x)\in C^1(a,b)$, aleshores el terme del mig s'anul·la i escrivim

$$D^{\alpha}_{a+}f(x)=\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\left(\frac{f(x)}{(x-a)^{\alpha}}+\alpha\int_a^x\frac{f(x)-f(t)}{(x-t)^{\alpha+1}}dt\right)\mathbf{1}_{(a,b)}(x), \tag{2.3}$$
$$D^{\alpha}_{b-}f(x)=\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\left(\frac{f(x)}{(b-x)^{\alpha}}+\alpha\int_x^b\frac{f(x)-f(t)}{(t-x)^{\alpha+1}}dt\right)\mathbf{1}_{(a,b)}(x). \tag{2.4}$$

Aquestes són les que anomenarem **derivades fraccionàries de Weyl-Marchaud** per l'esquerra i la dreta respectivament. Aquestes derivades estan ben definides per quasi tota $x\in(a,b)$. La convergència de les integrals a la singularitat $t=x$ és puntual per quasi tota $x\in(a,b)$ en el cas que $p=1$ i és en L^p si $1<p<\infty$.

A partir d'ara treballarem només en els espais a on coincideixin les derivades de Riemann-Liouville amb la versió més general en el sentit de Weyl-Marchaud.

Si $p\geq 1$, $I^{\alpha}_{a+}(L^p)$ (respectivament $I^{\alpha}_{b-}(L^p)$) és la classe de funcions f que es poden escriure en forma d'una integral fraccionària de Riemann-Liouville per l'esquerra (respectivament per la dreta) d'ordre α d'alguna funció de $L^p(a,b)$.

Teorema 2.2.2 *Per a funcions $f\in I^{\alpha}_{a+}(L^p)$ (respectivament $I^{\alpha}_{b-}(L^p)$), la derivada de Riemann-Liouville $\mathcal{D}^{\alpha}_{a+}f$ (resp. $\mathcal{D}^{\alpha}_{b-}f$) i la derivada de Weyl-Marchaud $D^{\alpha}_{a+}f$ (resp. $D^{\alpha}_{b-}f$) coincideixen quasi per tot.*

Observació 2.2.1 *I com que podem escriure $f=I^{\alpha}_{a+}\varphi$ per a $\varphi\in L^1(a,b)$, aleshores es compleix que*

$$(\mathcal{D}^{\alpha}_{a+}f)(x) \equiv (D^{\alpha}_{a+}f)(x) \equiv \varphi(x)$$
$$(resp. \quad (\mathcal{D}^{\alpha}_{b-}f)(x) \equiv (D^{\alpha}_{b-}f)(x) \equiv \varphi(x)).$$

Observem que amb la construcció que hem donat de D^{α}_{a+} i D^{α}_{b-} és cert que:

- per a qualsevol $f \in I^{\alpha}_{a+}(L^p)$ (respectivament per a $f \in I^{\alpha}_{b-}(L^p)$) per a $p \in [1, \infty)$

$$I^{\alpha}_{a+}(D^{\alpha}_{a+}f) = f \quad (\text{respectivament} \quad I^{\alpha}_{b-}(D^{\alpha}_{b-}f) = f),$$

- per a qualsevol $f \in L^1(a,b)$

$$D^{\alpha}_{a+}(I^{\alpha}_{a+}f) = f,$$
$$D^{\alpha}_{b-}(I^{\alpha}_{b-}f) = f.$$

A més també es compleix que:

- Per a $\alpha p < 1$
$$I^{\alpha}_{a+}(L^p) = I^{\alpha}_{b-}(L^p) \subseteq L^q(a,b)$$
per a $\frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \alpha$.
- I per a $\alpha p < 1$,

$$\text{si } f \in I^{\alpha}_{a+}(L^p) \text{ o } f \in I^{\alpha}_{b-}(L^p) \text{ aleshores } f \in C^{\alpha - \frac{1}{p}}(a,b).$$

També es compleixen les següents fórmules de composició i d'integració per parts de les derivades i les integrals fraccionàries

1. **Primera fórmula de composició:**, per a qualsevol $f \in L^1(a,b)$ tenim que

$$I^{\alpha}_{a+}(I^{\beta}_{a+}) = I^{\alpha+\beta}_{a+}f,$$
$$I^{\alpha}_{b-}(I^{\beta}_{b-}) = I^{\alpha+\beta}_{b-}f.$$

2. **Primera fórmula d'integració per parts:**, si $f \in L^p(a,b)$ i $g \in L^q(a,b)$ on $p \geq 1$, $q \geq 1$ tals que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} \leq 1 + \alpha$ per a $\alpha \in [0,1]$ es compleix que

$$\int_a^b f(x) I^{\alpha}_{a+} g(x) dx = (-1)^{\alpha} \int_a^b g(x) I^{\alpha}_{b-} f(x) dx.$$

3. **Segona fórmula de composició:**, si $f \in I_{a+}^{\alpha+\beta}(L^1)$ (respectivament si $f \in I_{b-}^{\alpha+\beta}(L^1)$) per a $\alpha, \beta \geq 0$ i tals que $\alpha + \beta \leq 1$ aleshores

$$D_{a+}^{\alpha}(D_{a+}^{\beta} f) = D_{a+}^{\alpha+\beta} f \quad \text{(respectivament} \quad D_{b-}^{\alpha}(D_{b-}^{\beta} f) = D_{b-}^{\alpha+\beta} f).$$

4. **Segona fórmula d'integració per parts:**, si $f \in I_{a+}^{\alpha}(L^p)$ i $g \in I_{b-}^{\alpha}(L^q)$ on $p \geq 1$ i $q \geq 1$ són tals que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} \leq 1 + \alpha$ per a $\alpha \in [0,1]$ és cert que

$$(-1)^{\alpha} \int_a^b D_{a+}^{\alpha} f(x) g(x) dx = \int_a^b f(x) D_{b-}^{\alpha} g(x) dx.$$

2.3 Integrals de Stieltjes generalitzades

En aquest apartat recordarem la definició i els resultats obtinguts per Zälhe a [Zäh98] sobre la generalització de la integral de Lebesgue-Stieltjes clàssica. A [Zäh98] s'estenen les integrals de Stieltjes a funcions de variació no acotada utilitzant com a eina principal el càlcul fraccionari que hem introduït en l'apartat anterior.

Començarem definint la integral de Stieltjes generalitzada de f respecte g, però abans denotem per $f(a+) = \lim_{\delta \searrow 0} f(a+\delta)$ i $g(b-) = \lim_{\delta \searrow 0} g(b-\delta)$ i a més introduim les següents funcions auxiliars

$$\begin{aligned} f_{a+}(x) &= (f(x) - f(a+)) \mathbf{1}_{(a,b)}(x), \\ g_{b-}(x) &= (g(x) - g(b-)) \mathbf{1}_{(a,b)}(x). \end{aligned}$$

Definició 2.3.1 *Suposem que f i g són funcions tals que es compleixen les següents condicions:*

1. $f(a+)$, $g(a+)$ *i* $g(b-)$ *existeixen,*
2. $f_{a+} \in I_{a+}^{\alpha}(L^p)$ *i* $g_{b-} \in I_{b-}^{1-\alpha}(L^q)$ *per algunes* $p, q \geq 1$ *tals que* $1/p + 1/q \leq 1$.

Aleshores la **integral de Stieltjes generalitzada** *de f respecte de g es defineix per*

$$\begin{aligned} \int_a^b f dg = (-1)^{\alpha} \int_a^b & D_{a+}^{\alpha} f_{a+}(x) D_{b-}^{1-\alpha} g_{b-}(x) dx \\ & + f(a+)(g(b-) - g(a+)). \end{aligned} \tag{2.5}$$

on $\alpha \in [0,1]$.

Observació 2.3.1 *Si $\alpha p < 1$ és cert que*

$$f_{a+} \in I^{\alpha}_{a+}(L^p) \Leftrightarrow f \in I^{\alpha}_{a+}(L^p) \text{ i } f(a+) \text{ existeix.}$$

En aquest cas també es compleix la següent relació

$$D^{\alpha}_{a+} f_{a+}(x) = D^{\alpha}_{a+} f(x) - \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{f(a+)}{(x-a)^{\alpha}} \mathbf{1}_{(a,b)}(x).$$

I per tant podem reescriure la igualtat (2.5) que ens queda de la següent manera

$$\int_a^b f(x) dg(x) = (-1)^{\alpha} \int_a^b D^{\alpha}_{a+} f(x) D^{1-\alpha}_{b-} g_{b-}(x) dx, \tag{2.6}$$

i que queda determinada si $f \in I^{\alpha}_{a+}(L^p)$ i $g_{b-} \in I^{1-\alpha}_{b-}(L^q)$.

A més veiem com en el següent teorema es demostra que la integral definida a (2.5) és una funció additiva.

Teorema 2.3.1 *Si es compleixen totes les condicions necessàries per tal que totes les integrals que apareixen estiguin determinades en el sentit de (2.5), aleshores per a $a \leq x < y < z \leq b$,*

1. $\int_x^y f dg = \int_a^b \mathbf{1}_{(x,y)} f dg,$
2. $\int_x^y f dg + \int_y^z f dg = \int_x^z f dg - f(y)(g(y+) - g(y-)).$

El següent resultat ens diu quan la integral definida a (2.5) es correspon amb la integral de Riemann-Stieltjes i es demostra a [Zäh98].

Teorema 2.3.2 *Si $f \in C^{\lambda}(a,b)$ i $g \in C^{\mu}(a,b)$ per λ i μ tals que $\lambda + \mu > 1$ la integral de Riemann-Stieltjes $\int_a^b f dg$ existeix i coincideix amb les definides a la definició 2.3.1 i l'observació 2.3.1.*

Introduïm ara, uns nous espais de funcions mesurables que ens permetran obtenir algunes cotes de la integral de Stieltjes generalitzada.

Fixem $\alpha \in (0, \frac{1}{2})$. Denotarem per $W_T^{1-\alpha,\infty}(0,T;\mathbb{R})$ l'espai de funcions mesurables $g : [0,T] \to \mathbb{R}$ tal que

$$\|g\|_{1-\alpha,\infty,T} := \sup_{0<s<t<T} \left(\frac{|g(t) - g(s)|}{(t-s)^{1-\alpha}} + \int_s^t \frac{|g(y) - g(s)|}{(y-s)^{2-\alpha}} dy \right) < \infty.$$

Observem que clarament per a tot $\varepsilon > 0$,

$$C^{1-\alpha+\varepsilon}(0,T;\mathbb{R}) \subset W_T^{1-\alpha,\infty}(0,T;\mathbb{R}) \subset C^{1-\alpha}(0,T;\mathbb{R}).$$

A més, veiem que si $g \in W_T^{1-\alpha,\infty}(0,T;\mathbb{R})$, aleshores restringint g a l'interval $(0,t)$, per qualsevol $t \in (0,T)$, g pertanyarà a l'espai $I_{t-}^{1-\alpha}(L^\infty(0,t))$. A més, definint

$$\Lambda_\alpha(g) := \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \sup_{0<s<t<T} |(D_{t-}^{1-\alpha} g_{t-})(s)|,$$

i utilitzant la definició de la derivada fraccionària per l'esquerra, tenim fàcilment la següent acotació

$$\Lambda_\alpha(g) \leq \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)\Gamma(\alpha)} \|g\|_{1-\alpha,\infty,T}.$$

Ara introduïm un nou espai, $W_0^{\alpha,1}(0,T;\mathbb{R})$, que serà l'espai de funcions f mesurables a $[0,T]$ tals que

$$\|f\|_{\alpha,1} := \int_0^T \frac{|f(s)|}{s^\alpha} ds + \int_0^T \int_0^s \frac{|f(s)-f(y)|}{(s-y)^{\alpha+1}} dy ds < \infty.$$

Observem que si a $f \in W_0^{\alpha,1}(0,T;\mathbb{R})$ la restringim a un interval $(0,t)$ llavors tindrem que $f \in I_{0+}^\alpha(L^1(0,t))$ per a qualsevol $t \in (0,T)$.

Per tant utilitzant els nous espais que acabem d'introduir, podem afirmar que si tenim que $f \in W_0^{\alpha,1}(0,T;\mathbb{R})$ i $g \in W_T^{1-\alpha,\infty}(0,T;\mathbb{R})$, llavors la integral $\int_0^t f dg$ existeix per a qualsevol $t \in [0,T]$ i a partir del Teorema 2.3.1 podem escriure que

$$\int_0^t f dg = \int_0^T f \mathbf{1}_{(0,t)} dg.$$

I finalment obtenim la cota de la integral en termes de la norma de f a l'espai $W_0^{\alpha,1}(0,T;\mathbb{R})$.

$$\begin{aligned}
\left|\int_0^t f dg\right| &= \left|\int_0^t (D_{0+}^\alpha f)(s)(D_{t-}^{1-\alpha} g_{t-})(s) ds\right| \\
&\leq \sup_{0<s<t} \left|(D_{t-}^{1-\alpha} g_{t-})(s)\right| \int_0^t |(D_{0+}^\alpha f)(s)| ds \\
&\leq C_\alpha \Lambda_\alpha(g) \int_0^t \left(\frac{|f(s)|}{s^\alpha} + \alpha \int_0^s \frac{|f(s)-f(y)|}{(s-y)^{\alpha+1}} dy \right) ds && (2.7) \\
&\leq C_\alpha \Lambda_\alpha(g) \|f\|_{\alpha,1}. && (2.8)
\end{aligned}$$

2.4 Moviment Brownià fraccionari

En aquest apartat introduïrem el moviment Brownià fraccionari i algunes de les seves propietats més destacades, així com la descripció de diferents mètodes per tal de definir les integrals estocàstiques respecte el moviment Brownià fraccionari.

El moviment Brownià fraccionari és una generalització del moviment brownià clàssic. És un procés gaussià centrat amb increments estacionaris i variància t^{2H}, on H és un paràmetre que està en l'interval $(0,1)$. Aquest procés va ser introduït per Kolmogorov al 1940 [Kol40]. Posteriorment els primers autors que l'estudien són Mandelbrot i Van Ness al 1968 [MVN68], que aconsegueixen la representació integral del moviment Brownià fraccionari en termes del moviment Brownià clàssic. Actualment s'han publicat bastants articles sobre el moviment Brownià fraccionari ja que gràcies a les seves propietats es pot utilitzar per a models de diversos camps, com són la hidrologia, les finances, les telecomunicacions...

2.4.1 Definició i propietats

Definició 2.4.1 *Un procés Gaussià* $W^H = \left\{W_t^H, t \geq 0\right\}$*, definit en un espai de probabilitat* $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ *s'anomena* **moviment Brownià fraccionari** *(fBm) amb paràmetre de Hurst* $H \in (0,1)$*, si és centrat i té la següent funció de covariància*

$$\mathbf{E}(W_t^H W_s^H) = R_H(t,s) = \frac{1}{2}\left(s^{2H} + t^{2H} - |t-s|^{2H}\right).$$

El paràmetre H deu al seu nom al hidrologista H.E. Hurst que va estudiar el cabal anual del riu Nil pel seu treball sobre la capacitat d'emmagatzematge dels embassaments [Hur51].

Observació 2.4.1 *Si* $H = \frac{1}{2}$*, la seva covariància es pot escriure* $R_{1/2}(t,s) = \min(s,t)$ *i el procés* $W^{1/2}$ *és el moviment Brownià clàssic.*

Algunes de les principals propietats del moviment Brownià fraccionari són:

1. **Autosimilitud**: Per a qualsevol constant $a > 0$, els processos $\left\{a^{-H} W_{at}^H, t \in [0,\infty)\right\}$ i $\left\{W_t^H, t \in [0,\infty)\right\}$ tenen la mateixa llei. Aquesta propietat és una conseqüència immediata del fet que la funció de covariància és una funció homogènia d'ordre $2H$.

2. **Increments estacionaris**: Utilitzant la funció de covariància és fàcil comprovar que els increments del procés en un interval $[s,t]$ tenen una distribució normal centrada amb variància
$$\mathbf{E}\left[\left(W_t^H - W_s^H\right)^2\right] = |t-s|^{2H}. \tag{2.9}$$
Observem però que els increments no són independents, llevat del cas $H = \frac{1}{2}$.

3. **Existeix una versió amb trajectòries contínues**: Es comprova fàcilment utilitzant el criteri de continuïtat de Kolmogorov i (2.9). A més, utilitzant el lema de Garsia-Rodemich-Rumsey [GRR71] podem deduïr el següent mòdul de continuïtat de les trajectòries del fBm: per a tot $\varepsilon > 0$ i $T > 0$, existeix una variable aleatòria nonegativa $G_{\varepsilon,T}$ amb moments de tots els ordres i que compleix per a tota $s,t \in [0,T]$
$$|W_t^H - W_s^H| \leq G_{\varepsilon,T}|t-s|^{H-\varepsilon}.$$
O sigui, el paràmetre H ens indica la regularitat de les trajectòries, que seran Hölder contínues d'ordre $H-\varepsilon$ per a qualsevol $\varepsilon > 0$.

Observació 2.4.2 *Una diferència important, que hem de tenir en compte, és que el moviment Brownià clàssic és una semimartingala i un procés de Markov, propietats que no satisfà el moviment Brownià fraccionari per $H \neq \frac{1}{2}$.*

El següent resultat (veure a lema 7.5 de [NR02]) fa referència a derivades fraccionàries del moviment Brownià fraccionari i ens serà útil en els capítols 3 i 4.

Lema 2.4.1 *Sigui $\left\{W_t^H; t \geq 0\right\}$ un moviment Brownià fraccionari amb paràmetre de Hurst $H \in \left(\frac{1}{2}, 1\right)$. Si $1-H < \alpha < \frac{1}{2}$, llavors*
$$\mathbf{E} \sup_{0 \leq s \leq t \leq T} \left|D_{t-}^{1-\alpha} W_{t-}^H(s)\right|^p < \infty,$$
per a qualsevol $T > 0$ i $p \in [1,\infty)$.

2.4.2 Integració respecte el fBm

Ara volem donar sentit a integrar respecte el moviment Brownià fraccionari. Per a $H = \frac{1}{2}$, no tenim problemes ja que el moviment Brownià estàndard és una semimartingala i podem utilitzar la integració estocàstica clàssica, però per a la resta de casos hem de fer servir eines diferents.

S'han proposat diferents vies per definir la integral respecte el moviment Brownià fraccionari. Presentarem aquí les més destacades (una descripció més exhaustiva la trobareu a [Mis08]). Separarem els mètodes en dos grups:

1. **Mètodes Probabilístics**

   a) **Càlcul de Malliavin.** És essencialment un càlcul diferencial de dimensió infinita en l'espai de Wiener, introduït per Malliavin [Mal78]. Si tenim en compte que el moviment Brownià fraccionari és un procés gaussià, podem desenvolupar el càlcul de Malliavin pel fBm. Els operadors bàsics del càlcul de Malliavin són l'operador derivada D i el seu adjunt, l'operador divergència δ. En el cas del fBm l'operador divergència es pot interpretar com a una integral estocàstica, coneguda com l'integral divergència i denotada per $\int_0^T u_s \delta W_s^H$, on u és del domini de l'operador divergència. Ens referim a [Nua06] per a resultats detallats del càlcul de Malliavin i de la seva aplicació pel moviment Brownià fraccionari.

   b) **Producte de Wick.** És un nou tipus d'integral amb esperança igual a zero definida utilitzant sumes de Riemann de productes de Wick. Va ser introduïda per Ducan, Hu i Pasik-Duncan [DHPD00] pel cas $H > \frac{1}{2}$. Aquesta integral coincideix amb la integral divergència.

2. **Mètodes trajectorials:** aquests mètodes es basen en les propietats de les trajectòries del moviment Brownià fraccionari.

   a) **Integrals trajectorials.** Si tenim un procés estocàstic $u = \{u_t, t \in [0,1]\}$ amb trajectòries γ-Hölder contínues tal que $\gamma + H > 1$, llavors la integral $\int_0^t u_t dW_t^H$ de Riemann-Stieljes existeix trajectorialment [You36]. A més, podem utilitzar el Teorema 2.3.2 i la integral de Riemann-Stieltjes coincideix amb la integral de Stieltjes generalitzada [Zäh98]. I en particular pel cas $H > \frac{1}{2}$, podem considerar processos $u_t = F(W_t^H)$, per alguna F contínua i diferenciable.

   b) **Rough paths.** És un mètode introduït per Lyons [Lyo98], basat en les àrees de Lévy estocàstiques. Es consideren integradors amb p-variació per a $p > 1$ i construeix un rough path geomètric canònic associat al procés. I són posteriorment, Coutin i Qian que apliquen aquest mètode al moviment Brownià fraccionari. A [CQ02] proven l'existència d'un rough path geomètric associat a un fBm amb $H > \frac{1}{4}$. Referim a [FV10] per a una introducció detallada del mètode.

3

Equacions diferencials estocàstiques amb retard amb restriccions de positivitat dirigides per un moviment Brownià fraccionari

En aquest capítol considerem la següent equació diferencial estocàstica amb restriccions de positivitat. Més precisament, tractarem amb una equació diferencial estocàstica amb retard i amb reflexió normal a $\mathbb{R}^d$ de la forma

$$\begin{aligned} X(t) &= \eta(0) + \int_0^t b(s,X)ds + \int_0^t \sigma(s, X(s-r))dW_s^H + Y(t), \quad t \in (0,T], \\ X(t) &= \eta(t) \qquad t \in [-r, 0]. \end{aligned} \tag{3.1}$$

En aquesta equació denotarem per r un retard estrictament positiu en temps, a més $W^H = \left\{W^{H,j},\, j = 1, \ldots, m\right\}$ seran moviments Brownians fraccionaris independents amb paràmetre de Hurst $H > \frac{1}{2}$ definits en un espai de probabilitat complet $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, $b(s, X)$ serà el terme hereditari que depèn de la trajectòria $\{X(u), -r \leq u \leq s\}$, $\eta : [-r, 0] \to \mathbb{R}_+^d$ una funció regular no negativa i finalment Y serà un procés no decreixent que ens assegura que X serà no-negativa.

Sigui

$$Z(t) = \eta(0) + \int_0^t b(s,X)ds + \int_0^t \sigma(s, X(s-r))dW_s^H, \qquad t \in [0,T]. \tag{3.2}$$

És un resultat conegut l'existència d'una fórmula explícita pel terme regulador Y en funció de Z. Aquesta fórmula ens dóna per a cada $i = 1, \ldots, d$

$$Y^i(t) = \max_{s \in [0,t]} \left(Z^i(s)\right)^-, \qquad t \in [0,T].$$

on X^- és la notació utilitzada per $X^- = \max(0, -X)$.

Llavors la solució de (3.1) satisfà

$$X(t) = \begin{cases} Z(t) + Y(t) & t \in [0,T], \\ \eta(t) & t \in [-r,0]. \end{cases}$$

Per tal d'assegurar que la solució X és no-negativa, hem utilitzat l'aplicació de Skorokhod.

Observem que com que estem treballant en un cas multidimensional, l'aplicació de Skorokhod l'utilitzarem per a cada component.

Sigui

$$\mathcal{C}_+(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}^d) := \left\{ x \in \mathcal{C}(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}^d) : x(0) \in \mathbb{R}^d_+ \right\}.$$

Anem a recordar ara el problema de Skorokhod (veure per exemple a [DI91])

Definició 3.0.2 *Donada una trajectòria $z \in \mathcal{C}_+(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}^d)$, direm que la parella de funcions (x,y) a $\mathcal{C}_+(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}^d)$ és la* **solució del problema de Skorokhod** *per a z amb reflexió si*

1. *$x(t) = z(t) + y(t)$ per a tota $t \geq 0$ i $x(t) \in \mathbb{R}^d_+$ per cada $t \geq 0$,*
2. *per cada $i = 1, \ldots, d$, $y^i(0) = 0$ i y^i és no decreixent,*
3. *per cada $i = 1, \ldots, d$, $\int_0^t x^i(s) dy^i(s) = 0$ per tota $t \geq 0$, per tant y^i pot créixer només quan x^i és al zero.*

És coneguda la fórmula explícita per y en termes de z: per a cada $i = 1, \ldots, d$

$$y^i(t) = \max_{s \in [0,t]} \left(z^i(s) \right)^- .$$

La trajectòria z s'anomena el reflector de x i la trajectòria y es coneix com el regulador de x. Utilitzarem l'aplicació de Skorokhod per tal de restringir una funció real i contínua a ser no-negativa a través de reflexió a l'origen. Això ho aplicarem a cada trajectòria de Z definida per (3.2).

Hem d'explicar també de com entenem la integral estocàstica respecte el moviment Brownià fraccionari que apareix a l'equació (3.1). Es tracta d'una integral trajectorial de Riemann-Stieltjes. Aquesta integral l'hem presentat a l'apartat 2.3 del capítol 2 i també hem parlat de les seves característiques particulars quan l'integrant és el moviment Brownià fraccionari en l'apartat 2.4.2 del mateix capítol.

En aquest capítol, utilitzant la integral de Riemann-Stieltjes, provarem l'existència i la unicitat de solució per a l'equació (3.1). Aquests resultats estan inspirats en els obtinguts per Nualart i Rǎşcanu [NR02] i Ferrante i Rovira [FR10]. Fent servir les estimacions presentades en aquests articles, demostrarem primer els nostres resultats per a equacions deterministes i després els podrem aplicar trajectorialment a l'equació dirigida pel moviment Brownià fraccionari.

L'estructura d'aquest capítol és la següent: en l'apartat que trobem a continuació donarem les hipòtesis sota les quals hem obtingut els nostres resultats i presentarem els resultats principals que hem obtingut. A l'apartat 3.2 donarem algunes estimacions útils per a les integrals de Lebesgue i les de Riemann-Stieltjes inspirades ens els resultats de [NR02] i [FR10]. A l'apartat 3.3 ens dedicarem a provar el nostre resultat principal: l'existència, la unicitat i també una acotació de la solució per a equacions deterministes. I finalment en l'apartat 3.4 recordarem com aplicar els resultats obtinguts pel cas determinista al cas estocàstic. Finalment podem trobar a l'apèndix A alguns lemes tècnics, com ara un teorema del punt fix, el teorema de Fernique i algunes propietats relacionades amb el problema de Skorokhod utilitzades durant el capítol.

Observació 3.0.3 *La definició dels espais de funcions i les seves normes que apareixen durant aquest capítol es poden trobar a l'apartat 2.1 del capítol 2.*

3.1 Resultats principals

Siguin $\alpha \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$, $r > 0$ i $(s,t) \subseteq [-r, T]$.

Considerarem les següents hipòtesis:

- **(H1)** $\sigma : [0,T] \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^m$ és una funció mesurable per la qual existeixen unes constants $\beta > 0$ i $M_0 > 0$ tals que les següents propietats es compleixen:
  1. $|\sigma(t,x) - \sigma(t,y)| \leq M_0 \, |x-y| \,, \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^d, \ \forall t \in [0,T],$
  2. $|\sigma(t,x) - \sigma(s,x)| \leq M_0 \, |t-s|^\beta \,, \quad \forall x \in \mathbb{R}^d, \ \forall t, s \in [0,T].$
- **(H2)** $b : [0,T] \times C(-r,T;\mathbb{R}^d) \to \mathbb{R}^d$ és una funció mesurable tal que per a tota $t > 0$ i $f \in C(-r,T;\mathbb{R}^d)$, $b(t,f)$ depèn només de $\{f(s); -r \leq s \leq t\}$. A més, existeix $b_0 \in L^\rho(0,t;\mathbb{R}^d)$ per a $\rho \geq 2$ i $\forall N \geq 0$ existeix $L_N > 0$ tal que:

1. $|b(t,x) - b(t,y)| \leq L_N \sup_{-r\leq s\leq t} |x(s) - y(s)|\,, \quad \forall t \in [0,T],\ \forall x,y \in \mathbb{R}^d$ tals que $\|x\|_{\infty(r)} \leq N,\ \|y\|_{\infty(r)} \leq N$,
2. $|b(t,x)| \leq L_0 \sup_{-r\leq s\leq t} |x(s)| + b_0(t), \quad \forall t \in [0,T]$.

- **(H3)** Existeixen $\gamma \in [0,1]$ i $K_0 > 0$ tals que

$$|\sigma(t,x)| \leq K_0(1 + |x|^\gamma), \qquad \forall x \in \mathbb{R}^d,\ \forall t \in [0,T].$$

Observació 3.1.1 *Notem que les hipòtesis que imposem sobre la σ,* **(H1)***, són més febles que les hipòtesis amb què es treballen a [NR02] i [FR10]. Recordem que les hipòtesis sobre σ d'aquests dos treballs són les següents:*

(H1)' *$\sigma : [0,T] \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^m$ és una funció mesurable, tal que $\sigma(t,x)$ és diferenciable en x i per la qual existeixen unes constants $\beta > 0$, $\delta \leq 1$, $M_0 > 0$ i per a cada $N \geq 0$ existeix $M_N > 0$ tals que les següents propietats es compleixen:*

1. *$|\sigma(t,x) - \sigma(t,y)| \leq M_0 |x-y|\,, \quad \forall x,y \in \mathbb{R}^d,\ \forall t \in [0,T]$,*
2. *$|\partial_{x_i}\sigma(t,x) - \partial_{y_i}\sigma(t,y)| \leq M_N |x-y|^\delta\,, \quad \forall x,y \in \mathbb{R}^d;\ |x|,|y| \leq N,\ \forall t \in [0,T]$, i per a tota $i = 1,\dots,d$*
3. *$|\sigma(t,x) - \sigma(s,x)| + |\partial_{x_i}\sigma(t,x) - \partial_{x_i}\sigma(s,x)| \leq M_0 |t-s|^\beta\,, \quad \forall x \in \mathbb{R}^d,\ \forall t,s \in [0,T]$ i per a tota $i = 1,\dots,d$.*

Podem afeblir les hipòtesis sobre σ utilitzant el retard i que durant la demostració de l'existència i unicitat de solució, treballem amb l'equació en intervals petits, utilitzant a cada nou interval l'informació que tenim de l'interval anterior.

Sota aquestes condicions podem demostrar que la nostra equació (3.1) admet una única solució. L'enunciat del nostre resultat principal és el següent:

Teorema 3.1.1 *Assumim que $\eta \in W_0^{\alpha,\infty}(-r,0;\mathbb{R}^d_+)$ i que σ i b satisfan les hipòtesis* **(H1)** *i* **(H2)** *respectivament, per a $\beta > 1-H$. Sigui $\alpha_0 := \min\left\{\frac{1}{2},\beta\right\}$. Llavors si $\alpha \in (1-H,\alpha_0)$ i $\rho \leq \frac{1}{\alpha}$, l'equació (3.1) té una única solució*

$$X \in L^0(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P};W_0^{\alpha,\infty}(-r,T;\mathbb{R}^d))$$

i per P-q.p.t $\omega \in \Omega$, $X(\omega,.) \in C^{1-\alpha}(0,T;\mathbb{R}^d)$.

A més, si $\alpha \in (1-H, \alpha_0 \vee \frac{2-\gamma}{4})$ *i les hipòtesis* **(H3)** *es compleixen, llavors*

$$\mathbf{E}(\|X\|^p_{\alpha,\infty(r)}) < \infty, \quad \forall p \geq 1.$$

Exemples: Observem que les següents equacions satisfant les nostres hipòtesis.

(a)(Exemple lineal) Per qualssevol $a, b \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} X(t) &= r + \int_0^t X(s-r)ds + \int_0^t (aX(s-r)+b)dW^H_s + Y(t), \qquad t \in (0,T], \\ X(t) &= t + r \qquad t \in [-r, 0]. \end{aligned}$$

(b)(Exemple no lineal)

$$\begin{aligned} X(t) &= \int_0^t \cos(X(s))ds + \int_0^t \sin(s + X(s-r))dW^H_s + Y(t), \qquad t \in (0,T], \\ X(t) &= t^2 \qquad t \in [-r, 0]. \end{aligned}$$

3.2 Preliminars

En aquest apartat donarem algunes estimacions útils per a les integrals de Lesbesgue i les integrals de Riemann-Stieltjes, Aquest tipus d'estimacions es troben en el treball de Nualart i Răşcanu [NR02] i van ser adaptades pel cas d'equacions amb retard per Ferrante i Rovira [FR10]. En aquest capítol utilitzarem resultats molt semblants als de Ferrante i Rovira, però generalitzats a un interval qualsevol $(s,t) \subseteq [-r, T]$.

3.2.1 Integral de Lebesgue

Considerem en primer lloc la integral de Lebesgue. Donada $f : [-r, T] \to \mathbb{R}^d$ una funció mesurable definirem per a $t \in [0, T]$

$$F^{(b)}(f)(t) = \int_0^t b(u, f)du.$$

Recordem algunes estimacions que són òbviament una adaptació de les de la proposició 2.2 de [FR10].

Proposició 3.2.1 *Assumim que b satisfà* **(H2)** *per a* $\rho = \frac{1}{\alpha}$ *i* $[s,t] \subseteq [0,T]$.
Si $f \in W_0^{\alpha,\infty}(-r,t;\mathbb{R}^d)$ *llavors* $F^{(b)}(f)(\cdot) = \int_0^{\cdot} b(u,f)du \in C^{1-\alpha}(s,t;\mathbb{R}^d)$ *i*

1. $\left\|F^{(b)}(f)\right\|_{1-\alpha(s,t)} \leq d^{(1)}(1 + \|f\|_{\infty(-r,t)})$,
2. $\left\|F^{(b)}(f)\right\|_{\alpha,\lambda(s,t)} \leq d^{(2)}\left(\dfrac{1}{\lambda^{1-2\alpha}} + \dfrac{\|f\|_{\alpha,\lambda(-r,t)}}{\lambda^{1-\alpha}}\right)$,

per a tota $\lambda \geq 1$, *i a on* $d^{(i)}$, $i \in \{1,2\}$ *són constants positives que depenen només de* α, t, L_0 *i* $B_{0,\alpha} = \|b_0\|_{L^{1/\alpha}}$.

D'aquesta proposició no donarem la demostració ja que és una repetició dels càlculs realitzats a [FR10].

3.2.2 Integral de Riemann-Stieltjes

Considerem ara la integral de Riemann-Stieltjes que hem introduït a l'apartat 2.3 del capítol 2.

Observem que si f és una funció de l'espai $W_0^{\alpha,1}(0,T;\mathbb{R})$ i $g \in W_T^{1-\alpha,\infty}(0,T;\mathbb{R})$ llavors la integral $\int_0^t f dg$ existeix per a tota $t \in [0,T]$ i podem definir

$$G(f)(t) := \int_0^t f(s)dg_s = \int_0^T f(s)\mathbf{1}_{(0,t)}(s)dg_s.$$

A més, si $f \in W_0^{\alpha,\infty}(0,T;\mathbb{R})$, es demostra a la proposició 4.1 de [NR02] que per a tota $s < t$

$$\left|\int_s^t f dg\right| \leq \Lambda_\alpha(g) C_{\alpha,T}(t-s)^{1-\alpha} \|f\|_{\alpha,\infty}. \tag{3.3}$$

La següent proposició ens dóna una estimació per a l'anterior integral. Es tracta d'una generalització de la proposició 4.1 de [NR02] per a un interval $[s,t] \subseteq [0,T]$ qualsevol.

Proposició 3.2.2 *Sigui* $g \in W_T^{1-\alpha,\infty}(0,T;\mathbb{R})$ *i* $f \in W_0^{\alpha,1}(0,T;\mathbb{R})$, *llavors per a tota* $0 < s < x < u < t < T$ *tenim que es compleixen les següents estimacions*

$$|G_u(f) - G_x(f)| \leq \Lambda_\alpha(g) \int_x^u \left(\frac{|f(y)|}{(y-x)^\alpha} + \alpha \int_x^y \frac{|f(y)-f(z)|}{(y-z)^{\alpha+1}} dz\right) dy, \tag{3.4}$$

i

$$
\begin{aligned}
|G_u(f)| + \int_s^u \frac{|G_u(f) - G_x(f)|}{(u-x)^{\alpha+1}} dx \leq \mathit{\Lambda}_\alpha(g) \Bigg(& C_\alpha^{(1)} (1 + u^\alpha) \\
& \times \int_s^u (u-y)^{-2\alpha} \left(|f(y)| + \int_s^y \frac{|f(y) - f(z)|}{(y-z)^{\alpha+1}} dz \right) dy \qquad (3.5) \\
& + \int_0^u (\alpha + y^{-\alpha}) \left(|f(y)| + \int_0^y \frac{|f(y) - f(z)|}{(y-z)^{\alpha+1}} dz \right) dy \Bigg).
\end{aligned}
$$

A més per a $[s,t] \subseteq [0,T]$ tenim que si $f \in W_0^{\alpha,\infty}(0,t;\mathbb{R})$ llavors $G_\cdot(f) \in \mathcal{C}^{1-\alpha}(s,t;\mathbb{R})$ i

$$
\|G(f)\|_{1-\alpha(s,t)} \leq C_{\alpha,t}^{(2)} \mathit{\Lambda}_\alpha(g) \|f\|_{\alpha,\infty(0,t)}\,, \tag{3.6}
$$

on la constant $C_{\alpha,t}^{(2)}$ depèn només de α i de t.

Demostració: Pel que fa a la demostració de (3.4), observem que l'obtenim directament a partir de l'expressió (2.6). Aquesta ens dóna una forma d'escriure la integral de Riemann-Stieltjes a partir de derivades fraccionàries, així doncs utilitzant-la ens queda

$$
\begin{aligned}
|G_u(f) - G_x(f)| &= \left| \int_x^u f dg \right| = \left| \int_x^u D_{x+}^\alpha (f)(y) \left(D_{u-}^{1-\alpha} g_{u-} \right)(y) dy \right| \\
&\leq \mathit{\Lambda}_\alpha(g) \int_x^u \left(\frac{|f(y)|}{(y-x)^\alpha} + \alpha \int_x^y \frac{|f(y) - f(z)|}{(y-z)^{\alpha+1}} dz \right) dy.
\end{aligned}
$$

Ara utilitzant el resultat anterior tenim que

$$
\begin{aligned}
\int_s^u \frac{|G_u(f) - G_x(f)|}{(u-x)^{\alpha+1}} dx \leq \mathit{\Lambda}_\alpha(g) \int_s^u (u-x)^{-\alpha-1} \Bigg(& \int_x^u \frac{|f(y)|}{(y-x)^\alpha} dy \\
& + \alpha \int_x^u \int_x^y \frac{|f(y) - f(z)|}{(y-z)^{\alpha+1}} dz dy \Bigg) dx. \qquad (3.7)
\end{aligned}
$$

Si separem l'expressió anterior en dos termes, podem tractar el primer utilitzant el teorema de Fubini, de manera que ens queda

$$
\int_s^u (u-x)^{-\alpha-1} \int_x^u \frac{|f(y)|}{(y-x)^\alpha} dy dx = \int_s^u \int_s^y (u-x)^{-\alpha-1} \frac{|f(y)|}{(y-x)^\alpha} dx dy. \tag{3.8}
$$

Aleshores, fent el canvi de variable $y - x = (u-y)z$, obtenim

$$
\int_s^y (u-x)^{-\alpha-1} (y-x)^{-\alpha} dx = (u-y)^{-2\alpha} \int_0^{\frac{y-s}{u-y}} (1+z)^{-\alpha-1} z^{-\alpha} dz \leq (u-y)^{-2\alpha} B(1-\alpha, 2\alpha). \tag{3.9}
$$

on $B(\cdot,\cdot)$ és la funció Beta.

Pel que fa a l'altre terme, altre cop usem Fubini i obtenim

$$\int_s^u (u-x)^{-\alpha-1} \int_x^u \int_x^y \frac{|f(y)-f(z)|}{(y-z)^{\alpha+1}} dz dy dx = \int_s^u \int_s^y \int_s^z (u-x)^{-\alpha-1} \frac{|f(y)-f(z)|}{(y-z)^{\alpha+1}} dx dz dy. \tag{3.10}$$

Observem a més que

$$\int_s^z (u-x)^{-\alpha-1} dx = \frac{(u-z)^{-\alpha}}{\alpha} - \frac{(u-s)^{-\alpha}}{\alpha} \leq \frac{1}{\alpha}(u-z)^{-\alpha}. \tag{3.11}$$

Aleshores a partir dels resultats (3.7)-(3.11) tenim que

$$\begin{aligned} \int_s^u \frac{|G_u(f)-G_x(f)|}{(u-x)^{\alpha+1}} dx \leq \Lambda_\alpha(g) \int_s^u \bigg(B(1-\alpha, 2\alpha) & \frac{|f(y)|}{(u-y)^{2\alpha}} \\ & + \int_s^y \frac{|f(y)-f(z)|}{(y-z)^{\alpha+1}} (u-z)^{-\alpha} dz \bigg) dy. \end{aligned} \tag{3.12}$$

També podem escriure que

$$\begin{aligned} & \int_s^u \left(\frac{|f(y)|}{(u-y)^{2\alpha}} + \int_s^y \frac{|f(y)-f(z)|}{(y-z)^{\alpha+1}} (u-z)^{-\alpha} dz \right) dy \\ & \qquad \leq \int_s^u \frac{1}{(u-y)^{2\alpha}} \left(|f(y)| + \int_s^y \frac{|f(y)-f(z)|}{(y-z)^{\alpha+1}} (u-y)^{\alpha} dz \right) dy \\ & \qquad \leq (1+u^\alpha) \int_s^u \frac{1}{(u-y)^{2\alpha}} \left(|f(y)| + \int_s^y \frac{|f(y)-f(z)|}{(y-z)^{\alpha+1}} dz \right) dy. \end{aligned} \tag{3.13}$$

D'altra banda, a partir de (3.4) per a $x = 0$ tenim la següent expressió

$$|G_u(f)| \leq \Lambda_\alpha(g) \int_0^u \left(\frac{|f(y)|}{y^\alpha} + \alpha \int_0^y \frac{|f(y)-f(z)|}{(y-z)^{\alpha+1}} dz \right) dy. \tag{3.14}$$

Observem que

$$\begin{aligned} & \int_0^u \left(\frac{|f(y)|}{y^\alpha} + \alpha \int_0^y \frac{|f(y)-f(z)|}{(y-z)^{\alpha+1}} dz \right) dy \\ & \qquad \leq \int_0^u \left(\alpha + \frac{1}{y^\alpha} \right) \left(|f(y)| + \int_0^y \frac{|f(y)-f(z)|}{(y-z)^{\alpha+1}} dz \right) dy, \end{aligned} \tag{3.15}$$

Per tant utilitzant les expressions (3.12)-(3.15) obtenim el resultat (3.5) com volíem per a $C_\alpha^{(1)} = \max(B(1-\alpha, 2\alpha), 1)$.

Ens centrem ara amb la segona part del teorema. A partir de (3.14) i (3.15) tenim que

$$\begin{aligned}
\|G(f)\|_{\infty(s,t)} &\leq \Lambda_\alpha(g) \sup_{u\in[s,t]} \int_0^u \left(\alpha + \frac{1}{y^\alpha}\right)\left(|f(y)| + \int_0^y \frac{|f(y)-f(z)|}{(y-z)^{\alpha+1}}dz\right) dy \\
&\leq \Lambda_\alpha(g) \|f\|_{\alpha,\infty(0,t)} \sup_{u\in[s,t]} \left(\int_0^u (y^{-\alpha}+\alpha)dy\right) \\
&= \Lambda_\alpha(g)\left(\frac{t^{1-\alpha}}{1-\alpha} + \alpha t\right)\|f\|_{\alpha,\infty(0,t)}. \qquad (3.16)
\end{aligned}$$

D'altra banda, a partir de (3.4), tenim per a tota $x < u$

$$\begin{aligned}
\left|\int_x^u f dg\right| &\leq \Lambda_\alpha(g) \|f\|_{\alpha,\infty(x,u)} \int_x^u \big((y-x)^{-\alpha}+\alpha\big)\, dy \\
&\leq \Lambda_\alpha(g) \|f\|_{\alpha,\infty(x,u)} \left(\frac{(u-x)^{1-\alpha}}{1-\alpha} + \alpha(u-x)\right). \qquad (3.17)
\end{aligned}$$

Per tant, a partir de (3.16) i (3.17) fàcilment obtenim (3.6) per a $C^{(2)}_{\alpha,t} = \frac{t^{1-\alpha}}{1-\alpha} + \alpha t + \frac{1}{\alpha} + \alpha t^\alpha$, i per tant que $G(f)$ és una funció $(1-\alpha)$-Hölder contínua. □

Ara, donada $f : [-r,T] \to \mathbb{R}^d$ tal que $f \in W_0^{\alpha,\infty}(-r,T;\mathbb{R}^d)$, $g \in W_T^{1-\alpha,\infty}(0,T)$ i σ tal que satisfà les condicions **(H1)** considerem per a $t \in [0,T]$

$$G_r^{(\sigma)}(f)(t) = \int_0^t \sigma(s, f(s-r))dg_s.$$

Per aquesta integral de Riemann-Stieltjes demostrarem una versió de la proposició 2.4 de [FR10].

Proposició 3.2.3 *Sigui $g \in W_T^{1-\alpha,\infty}(0,T;\mathbb{R})$. Assumim que σ satisfà* **(H1)** *i també que $[s,t] \subseteq [0,T]$. Si $f \in W_0^{\alpha,\infty}(-r,T;\mathbb{R}^d)$ llavors*

$$G_r^{(\sigma)}(f) \in C^{1-\alpha}(s,t;\mathbb{R}^d) \subset W_0^{\alpha,\infty}(s,t;\mathbb{R}^d),$$

i es compleix que

1. $\left\|G_r^{(\sigma)}(f)\right\|_{1-\alpha(s,t)} \leq \Lambda_\alpha(g) d^{(3)}(1 + \|f\|_{\alpha,\infty(-r,t-r)})$,
2. $\left\|G_r^{(\sigma)}(f)\right\|_{\alpha,\lambda(s,t)} \leq \dfrac{\Lambda_\alpha(g)d^{(4)}}{\lambda^{1-2\alpha}}(1 + \|f\|_{\alpha,\lambda(-r,t-r)})$,

per a tota $\lambda \geq 1$, on $d^{(i)}, i \in \{3,4\}$ són constants positives independents de λ, f i g.

Demostració: Farem el cas que $d = m = 1$. Observem que si $f \in W_0^{\alpha,\infty}(-r,T;\mathbb{R})$ llavors $\sigma(\cdot, f(\cdot - r)) \in W_0^{\alpha,\infty}(s,t;\mathbb{R})$,

$$\begin{aligned}
|\sigma(u, f(u-r))| &+ \int_s^u \frac{|\sigma(u, f(u-r)) - \sigma(v, f(v-r))|}{(u-v)^{\alpha+1}} dv \\
&\leq M_0 u^\beta + |\sigma(0,0)| + M_0 \frac{(u-s)^{\beta-\alpha}}{\beta-\alpha} \\
&\quad + M_0 \left(|f(u-r)| + \int_s^u \frac{|f(u-r) - f(v-r)|}{(u-v)^{\alpha+1}} dv \right). \qquad (3.18)
\end{aligned}$$

A més es compleix que

$$\begin{aligned}
\|f(\cdot - r)\|_{\alpha,\infty(s,t)} &= \sup_{u\in(s,t)} \left(|f(u-r)| + \int_s^u \frac{|f(u-r) - f(y-r)|}{(u-y)^{\alpha+1}} dy \right) \\
&= \sup_{v\in(s-r,t-r)} \left(|f(v)| + \int_{s-r}^v \frac{|f(v) - f(y)|}{(u-y)^{\alpha+1}} dy \right) \\
&= \|f\|_{\alpha,\infty(s-r,t-r)} .
\end{aligned}$$

Per tant,

$$\|\sigma(\cdot, f(\cdot - r))\|_{\alpha,\infty(s,t)} \leq A + M_0 \|f(\cdot - r)\|_{\alpha,\infty(s,t)} = A + M_0 \|f\|_{\alpha,\infty(-r,t-r)} , \qquad (3.19)$$

on $A = M_0 t^\beta + |\sigma(0,0)| + M_0 \frac{(t-s)^{\beta-\alpha}}{\beta-\alpha}$.

Utilitzant els resultats (3.6) i (3.19), tenim que

$$\begin{aligned}
\left\|G_r^{(\sigma)}(f)\right\|_{1-\alpha(s,t)} &\leq \Lambda_\alpha(g) C_{\alpha,t}^{(2)} \|\sigma(\cdot, f(\cdot - r))\|_{\alpha,\infty(0,t)} \\
&\leq \Lambda_\alpha(g) d^{(3)} \left(1 + \|f\|_{\alpha,\infty(-r,t-r)} \right),
\end{aligned}$$

per a $d^{(3)} = C_{\alpha,T}^{(2)}(A + M_0)$, i per tant $G_r^{(\sigma)}(f) \in \mathcal{C}^{1-\alpha}(s,t;\mathbb{R})$.

Busquem ara una cota per a l'altra norma. Utilitzant (3.5) tenim que

$$\begin{aligned}
\left\|G_r^{(\sigma)}(f)\right\|_{\alpha,\lambda(s,t)} &\leq \Lambda_\alpha(g) \sup_{u\in[s,t]} e^{-\lambda u} \left(C_\alpha^{(1)}(1+u^\alpha) \int_s^u \frac{1}{(u-y)^{2\alpha}} \right. \\
&\quad \times \left(|\sigma(y, f(y-r))| + \int_s^y \frac{|\sigma(y, f(y-r)) - \sigma(z, f(z-r))|}{(y-z)^{\alpha+1}} dz \right) dy \\
&\quad + \int_0^u \left(\alpha + y^{-\alpha}\right) \left(|\sigma(y, f(y-r))| \right. \\
&\quad \left. \left. + \int_0^y \frac{|\sigma(y, f(y-r)) - \sigma(z, f(z-r))|}{(y-z)^{\alpha+1}} dz \right) dy \right) \\
&= \Lambda_\alpha(g) \sup_{u\in[s,t]} e^{-\lambda u} \left(C_\alpha^{(1)}(1+u^\alpha) F_1 + F_2 \right), \qquad (3.20)
\end{aligned}$$

on

$$F_1 = \int_s^u \frac{1}{(u-y)^{2\alpha}} \left(|\sigma(y, f(y-r))| + \int_s^y \frac{|\sigma(y, f(y-r)) - \sigma(z, f(z-r))|}{(y-z)^{\alpha+1}} dz \right) dy,$$

$$F_2 = \int_0^u (\alpha + y^{-\alpha}) \left(|\sigma(y, f(y-r))| + \int_0^y \frac{|\sigma(y, f(y-r)) - \sigma(z, f(z-r))|}{(y-z)^{\alpha+1}} dz \right) dy.$$

Per una banda, amb el mateix procediment que a (3.18) tenim per a $y \in (s,t)$

$$\begin{aligned} |\sigma(y, f(y-r))| &+ \int_s^y \frac{|\sigma(y, f(y-r)) - \sigma(z, f(z-r))|}{(y-z)^{\alpha+1}} dz \\ &\le M_0|y|^\beta + M_0|f(y-r)| + |\sigma(0,0)| \\ &\quad + \int_s^y \frac{M_0|f(y-r) - f(z-r)| + M_0(y-z)^\beta}{(y-z)^{\alpha+1}} dz \\ &\le M_0 y^\beta + |\sigma(0,0)| + \frac{M_0(y-s)^{\beta-\alpha}}{\beta-\alpha} + e^{\lambda y} M_0 \left\| f(\cdot - r) \right\|_{\alpha,\lambda(s,t)}, \end{aligned} \tag{3.21}$$

i pel cas $s = 0$ tenim que

$$\begin{aligned} |\sigma(y, f(y-r))| &+ \int_0^y \frac{|\sigma(y, f(y-r)) - \sigma(z, f(z-r))|}{(y-z)^{\alpha+1}} dz \\ &\le M_0 y^\beta + |\sigma(0,0)| + \frac{M_0 y^{\beta-\alpha}}{\beta-\alpha} + e^{\lambda y} M_0 \left\| f(\cdot - r) \right\|_{\alpha,\lambda(0,t)}. \end{aligned} \tag{3.22}$$

Si substituïm el resultat (3.21) a F_1 ens queda que

$$F_1 \le \int_s^u (u-y)^{-2\alpha} \left(M_0 y^\beta + |\sigma(0,0)| + \frac{M_0(y-s)^{\beta-\alpha}}{\beta-\alpha} + e^{\lambda y} M_0 \left\| f(\cdot - r) \right\|_{\alpha,\lambda(s,t)} \right) dy. \tag{3.23}$$

Per tal d'acotar F_1, observem que fent dos canvis de variables, primer $z = u - y$ i després $z = (1-v)u$ per la primera integral i dos més $y - s = z$ i $z = (1-v)(u-s)$ per la segona obtenim que

$$\begin{aligned} \int_s^u (u-y)^{-2\alpha} y^\beta dy &= \int_0^{u-s} z^{-2\alpha}(u-z)^\beta dz \le \int_0^u z^{-2\alpha}(u-z)^\beta dz \\ &= u^{\beta-2\alpha+1} \int_0^1 (1-v)^{-2\alpha} v^\beta dv = B(1-2\alpha, 1-\beta) u^{\beta-2\alpha+1}, \end{aligned}$$

i

$$\begin{aligned} \int_s^u (u-y)^{-2\alpha}(y-s)^{\beta-\alpha} dy &= \int_0^{u-s} (u-s-z)^{-2\alpha} z^{\beta-\alpha} dz \\ &= (u-s)^{\beta-3\alpha+1} \int_0^1 v^{-2\alpha}(1-v)^{\beta-\alpha} dv \\ &= B(1-2\alpha, \beta-\alpha+1)(u-s)^{\beta-3\alpha+1}. \end{aligned}$$

Aleshores, utilitzant el Lema B.0.5, F_1 té la següent cota

$$
\begin{aligned}
F_1 \leq & M_0 B(1-2\alpha, 1-\beta) u^{\beta-2\alpha+1} + \frac{|\sigma(0,0)|}{1-2\alpha}(u-s)^{1-2\alpha} \\
& + \frac{M_0}{\beta-\alpha} B(1-2\alpha, \beta-\alpha+1)(u-s)^{\beta-3\alpha+1} \\
& + \Gamma(1-2\alpha)\lambda^{2\alpha-1} e^{\lambda u} \left\| f(\cdot - r) \right\|_{\alpha,\lambda(s,t)} . \qquad (3.24)
\end{aligned}
$$

Per altra banda si substituim el resultat (3.22) a F_2 i busquem una cota pel terme resultant, utilitzant el Lema B.0.6, tenim que

$$
\begin{aligned}
F_2 \leq & \int_0^u \left(\alpha + y^{-\alpha}\right) \left(M_0 y^\beta + |\sigma(0,0)| + \frac{M_0 y^{\beta-\alpha}}{\beta-\alpha} + e^{\lambda y} \left\| f(\cdot - r) \right\|_{\alpha,\lambda(0,t)} \right) dy \\
\leq & \alpha M_0 \frac{u^{\beta+1}}{\beta+1} + \alpha |\sigma(0,0)| u + \frac{M_0 \alpha u^{\beta-\alpha+1}}{(\beta-\alpha)(\beta-\alpha+1)} + \alpha C_\alpha e^{\lambda u} \lambda^{2\alpha-1} \left\| f(\cdot - r) \right\|_{\alpha,\lambda(0,t)} \\
& + M_0 \frac{u^{\beta-\alpha+1}}{\beta-\alpha+1} + |\sigma(0,0)| \frac{u^{1-\alpha}}{1-\alpha} + M_0 \frac{u^{\beta-2\alpha+1}}{(\beta-2\alpha)(\beta-2\alpha+1)} . \qquad (3.25)
\end{aligned}
$$

Així doncs substituïnt les cotes (3.24), (3.25) a (3.20) i utilitzant el resultat (B.2) obtenim la cota de $\left\| G_r^{(\sigma)}(f) \right\|_{\alpha,\lambda(s,t)}$ que volíem. □

Finalment, recordem la Proposició 2.6 de [FR10], que necessitarem per provar l'existència de moments.

Considerem $\varphi(\gamma,\alpha)$ definida tal que $\varphi(\gamma,\alpha) = 2\alpha$ si $\gamma = 1$, $\varphi(\gamma,\alpha) > 1 + \frac{2\alpha-1}{\gamma}$ si $\frac{1-2\alpha}{1-\alpha} \leq \gamma < 1$ i $\varphi(\gamma,\alpha) = \alpha$ si $0 \leq \gamma < \frac{1-2\alpha}{1-\alpha}$. Observem que $\varphi(\gamma,\alpha) \in [\alpha, 2\alpha]$.

Proposició 3.2.4 *Sigui* $g \in W_T^{1-\alpha,\infty}(0,T)$. *Assumim que* σ *satisfà les condicions* **(H1)** *i* **(H3)**. *Si* $f \in W_0^{\alpha,\infty}(-r,T;\mathbb{R}^d)$ *llavors*

$$
\left\| G_r^{(\sigma)}(f) \right\|_{\alpha,\lambda} \leq \Lambda_\alpha(g) d^{(5)} \left(1 + \frac{\|f\|_{\alpha,\lambda(r)}}{\lambda^{1-\varphi(\gamma,\alpha)}} \right),
$$

per a tota $\lambda \geq 1$, *on* $d^{(5)}$ *és una constant positiva depenent només de* α, β, T, d, m *i* $B_{0,\alpha} = \|b_0\|_{L^{1/\alpha}}$.

3.3 Equacions deterministes

En aquest apartat treballarem amb equacions deterministes. D'aquestes equacions donarem un resultat d'existència i unicitat de solució, provarem que la solució d'aquestes equacions és $(1-\alpha)$-Hölder contínua i donarem una cota de la solució amb la norma $\|\cdot\|_{\alpha,\infty(r)}$.

Per simplificar assumirem que $T = Mr$. Sigui $0 < \alpha < \frac{1}{2}$, $g \in W_T^{1-\alpha,\infty}(0,T;\mathbb{R}^d)$ i que $\eta \in W_0^{\alpha,\infty}(-r,0;\mathbb{R}_+^d)$. Aleshores considerem la següent equació diferencial determinista a $\mathbb{R}^d$

$$
\begin{aligned}
&x(t) = \eta(0) + \int_0^t b(s,x)ds + \int_0^t \sigma(s,x(s-r))dg_s + y(t), \quad t \in (0,T],\\
&x(t) = \eta(t) \quad t \in [-r,0],
\end{aligned}
\tag{3.26}
$$

on per cada $i = 1,\dots,d$

$$
y^i(t) = \max_{s\in[0,t]} \left(z^i(s)\right)^-, \qquad t \in [0,T],
$$

i

$$
z(t) = \eta(0) + \int_0^t b(s,x)ds + \int_0^t \sigma(s,x(s-r))dg_s, \qquad t \in [0,T].
$$

El resultat d'existència i unicitat que presentem és el següent.

Teorema 3.3.1 *Assumim que σ i b satisfant les hipòtesis* **(H1)** *i* **(H2)** *respectivament, per a $\rho = \frac{1}{\alpha}$ i $0 < \alpha < \min\{\frac{1}{2},\beta\}$. Llavors l'equació (3.26) té una única solució $x \in W_0^{\alpha,\infty}(-r,T;\mathbb{R}_+^d)$.*

Demostració: Per tal de provar que l'equació (3.26) admet una única solució a l'interval $[-r,T]$, utilitzarem un argument d'inducció. Provarem que si l'equació (3.26) admet una única solució a l'interval $[-r,nr]$, podem demostrar que hi ha una única solució a l'interval $[-r,(n+1)r]$.

La nostra hipòtesis d'inducció, per $k \le M$, serà doncs la següent:

$(\mathbf{H_k})$ *L'equació*

$$
\begin{aligned}
&x^k(t) = \eta(0) + \int_0^t b(s,x^k)ds + \int_0^t \sigma(s,x^k(s-r))dg_s + y_k(t), \qquad t \in [0,kr],\\
&x^k(t) = \eta(t), \qquad t \in [-r,0],
\end{aligned}
$$

té una única solució $x^k \in W_0^{\alpha,\infty}(-r,kr;\mathbb{R}_+^d)$.

Per cada $i = 1, \ldots, d$

$$y_k^i(t) = \max_{s\in[0,t]} \left(z_k^i(s)\right)^-, \qquad t \in [0, kr],$$

per a

$$z_k(t) = \eta(0) + \int_0^t b(s, x^k) ds + \int_0^t \sigma(s, x^k(s-r)) dg_s, \qquad t \in [0, kr].$$

El cas incial $(\mathbf{H_0})$ es pot comprovar fàcilment. Assumim ara que $(\mathbf{H_i})$ és certa per a tota $i \leq n$, per a $n < M$. Volem provar que $(\mathbf{H_{n+1}})$ també és certa.

Clarament per $t \in [-r, nr]$, $x^{n+1}(t)$ coincidirà amb $x^n(t)$, la solució de l'equació de $(\mathbf{H_n})$. A més, per $t \in [-r, nr]$, $y_{n+1}(t)$ també coincidirà amb $y_n(t)$. Per tant, podem escriure l'equació de $(\mathbf{H_{n+1}})$ com

$$\begin{aligned} &x^{n+1}(t) = \eta(0) + \int_0^t b(s, x^{n+1}) ds + \int_0^t \sigma(s, x^n(s-r)) dg_s + y_{n+1}(t), \quad t \in [0, (n+1)r], \\ &x^{n+1}(t) = \eta(t), \quad t \in [-r, 0]. \end{aligned} \tag{3.27}$$

A més, usant la notació introduïda en els apartats anteriors tenim que,

$$\begin{aligned} &x^{n+1}(t) = \eta(0) + F^{(b)}(x^{n+1}) + G^{(\sigma)}(x^n) + y_{n+1}(t), \quad t \in [0, (n+1)r], \\ &x^{n+1}(t) = \eta(t), \quad t \in [-r, 0]. \end{aligned}$$

La demostració es dividirà en tres passos:

1. Si x^{n+1} és una solució de $(\mathbf{H_{n+1}})$ a l'espai $\mathcal{C}(-r, (n+1)r; \mathbb{R}_+^d)$ llavors aquesta solució $x^{n+1} \in W_0^{\alpha,\infty}(-r, (n+1)r; \mathbb{R}_+^d)$.
2. La solució és única a l'espai $\mathcal{C}(-r, (n+1)r; \mathbb{R}_+^d)$.
3. Existeix una solució a l'espai $\mathcal{C}(-r, (n+1)r; \mathbb{R}_+^d)$.

Pas 1: *Veurem que si* x^{n+1} *és una solució de l'equació de* $(\mathbf{H_{n+1}})$ *a l'espai* $\mathcal{C}(-r, (n+1)r; \mathbb{R}_+^d)$ *llavors* $x^{n+1} \in W_0^{\alpha,\infty}(-r, (n+1)r; \mathbb{R}_+^d)$.

Podem escriure

$$
\begin{aligned}
\left\|x^{n+1}\right\|_{\alpha,\infty(-r,(n+1)r)} &= \sup_{t\in[-r,(n+1)r]}\left(\left|x^{n+1}(t)\right| + \int_{-r}^{t}\frac{|x^{n+1}(t)-x^{n+1}(s)|}{(t-s)^{\alpha+1}}ds\right)\\
&\leq \sup_{t\in[-r,nr]}\left(|x^{n}(t)| + \int_{-r}^{t}\frac{|x^{n}(t)-x^{n}(s)|}{(t-s)^{\alpha+1}}ds\right)\\
&\quad + \sup_{t\in[nr,(n+1)r]}\left(\left|x^{n+1}(t)\right| + \int_{-r}^{nr}\frac{|x^{n+1}(t)-x^{n}(s)|}{(t-s)^{\alpha+1}}ds\right.\\
&\quad \left. + \int_{nr}^{t}\frac{|x^{n+1}(t)-x^{n+1}(s)|}{(t-s)^{\alpha+1}}ds\right)\\
&\leq \|x^{n}\|_{\alpha,\infty(-r,nr)} + \left\|x^{n+1}\right\|_{\alpha,\infty(nr,(n+1)r)}\\
&\quad + \sup_{t\in[nr,(n+1)r]}\int_{-r}^{nr}\frac{|x^{n+1}(t)-x^{n}(nr)+x^{n}(nr)-x^{n}(s)|}{(t-s)^{\alpha+1}}ds\\
&\leq 2\,\|x^{n}\|_{\alpha,\infty(-r,nr)} + \left\|x^{n+1}\right\|_{\alpha,\infty(nr,(n+1)r)}\\
&\quad + \sup_{t\in[nr,(n+1)r]}\frac{|x^{n+1}(t)-x^{n}(nr)|}{\alpha(t-nr)^{\alpha}}\\
&= 2\,\|x^{n}\|_{\alpha,\infty(-r,nr)} + A_1 + A_2, \qquad (3.28)
\end{aligned}
$$

on

$$
\begin{aligned}
A_1 &= \left\|x^{n+1}\right\|_{\alpha,\infty(nr,(n+1)r)},\\
A_2 &= \sup_{t\in[nr,(n+1)r]}\frac{|x^{n+1}(t)-x^{n}(nr)|}{\alpha(t-nr)^{\alpha}}.
\end{aligned}
$$

Com que hem assumit que $(\mathbf{H_n})$ és certa, és clar que $\|x^{n}\|_{\alpha,\infty(-r,nr)} < \infty$. Per tant, per tal d'acabar la demostració d'aquest pas només ens queda comprovar que $A_1 < \infty$ i $A_2 < \infty$.

Comencem estudiant el terme A_1. Clarament

$$
\begin{aligned}
A_1 &\leq |\eta(0)| + \left\|F^{(b)}(x^{n+1})\right\|_{\alpha,\infty(nr,(n+1)r)}\\
&\quad + \left\|G_r^{(\sigma)}(x^{n})\right\|_{\alpha,\infty(nr,(n+1)r)} + \|y_{n+1}(\cdot)\|_{\alpha,\infty(nr,(n+1)r)}\,. \qquad (3.29)
\end{aligned}
$$

Una de les claus de la nostra demostració és l'estudi del comportament de y. Remarquem que si y^i és creixent en t (és a dir, $y^i(t) > y^i(t-\varepsilon)$ per a $\varepsilon \leq \varepsilon_0$ suficientment petita) llavors $y^i(t) = -z^i(t) \geq 0$. A més, per construcció tenim que $y^i(s) \geq -z^i(s)$ per a qualsevol s.

Per tant si y^i és creixent en t, llavors per qualssevol s, t tal que $s < t$

$$|y^i(t) - y^i(s)| = y^i(t) - y^i(s) \leq -z^i(t) + z^i(s) \leq |z^i(t) - z^i(s)|. \tag{3.30}$$

Per a $t \in (nr, (n+1)r)$ i $i \in \{1, \ldots, d\}$ denotem per

$$t_0^i = \inf \left\{u; y^i(u) = y^i(t)\right\} \vee nr.$$

Com que y^i és no decreixent, observem que $y^i(s) = y^i(t_0^i)$ per a tota $s \in [t_0^i, t]$. Llavors,

$$\begin{aligned}
\int_{nr}^{t} \frac{\left|y_{n+1}^i(t) - y_{n+1}^i(s)\right|}{(t-s)^{\alpha+1}} ds &= \int_{nr}^{t_0^i} \frac{\left|y_{n+1}^i(t_0^i) - y_{n+1}^i(s)\right|}{(t-s)^{\alpha+1}} ds \\
&\leq \int_{nr}^{t_0^i} \frac{\left|y_{n+1}^i(t_0^i) - y_{n+1}^i(s)\right|}{(t_0^i-s)^{\alpha+1}} ds \\
&\leq \int_{nr}^{t_0^i} \frac{\left|z_{n+1}^i(t_0^i) - z_{n+1}^i(s)\right|}{(t_0^i-s)^{\alpha+1}} ds.
\end{aligned} \tag{3.31}$$

Per altra banda també tenim que,

$$\left|y_{n+1}^i(t)\right| = \left|y_{n+1}^i(t_0^i)\right| \leq \sup_{0 \leq s \leq t_0^i} \left|z_{n+1}^i(s)\right|. \tag{3.32}$$

Per tant, si utilitzem alhora les desigualtats (3.31) i (3.32) tenim que

$$\|y_{n+1}\|_{\alpha,\infty(nr,(n+1)r)} \leq d \left(\|z_{n+1}\|_{\alpha,\infty(nr,(n+1)r)} + \|z_n\|_{\infty(0,nr)} \right), \tag{3.33}$$

i podrem usar la següent cota

$$\begin{aligned}
\|z_{n+1}\|_{\alpha,\infty(nr,(n+1)r)} \leq |\eta(0)| &+ \left\|F^{(b)}(x^{n+1})\right\|_{\alpha,\infty(nr,(n+1)r)} \\
&+ \left\|G_r^{(\sigma)}(x^n)\right\|_{\alpha,\infty(nr,(n+1)r)}.
\end{aligned} \tag{3.34}$$

Per tant, ajuntant ara (3.29), (3.33) i (3.34) obtenim que

$$\begin{aligned}
A_1 \leq (d+1) &\left(|\eta(0)| + \left\|F^{(b)}(x^{n+1})\right\|_{\alpha,\infty(nr,(n+1)r)} + \left\|G_r^{(\sigma)}(x^n)\right\|_{\alpha,\infty(nr,(n+1)r)} \right) \\
&+ d \|z_n\|_{\infty(0,nr)}.
\end{aligned}$$

A partir de les nostres hipòtesis i les Proposicions 3.2.1 i 3.2.3 és fàcil obtenir que $\|z_n\|_{\infty(0,nr)} < \infty$. Per tant, reduïm el problema a comprovar que les normes de les integrals de Lebesgue i de Riemann-Stieltjes són finites.

D'una banda, tenint en compte que sabem que $\|x^{n+1}\|_{\infty(-r,(n+1)r)} < \infty$, obtenim

$$\begin{aligned}\left\|F^{(b)}(x^{n+1})\right\|_{\alpha,\infty(nr,(n+1)r)} &\leq \sup_{t\in[nr,(n+1)r]}\left(\int_0^t \left|b(s,x^{n+1})\right| ds + \int_{nr}^t \frac{\int_s^t |b(u,x^{n+1})|\,du}{(t-s)^{\alpha+1}} ds\right)\\ &\leq \sup_{t\in[nr,(n+1)r]}\left(\int_0^t \left(L_0 \sup_{-r\leq u\leq s}|x^{n+1}(u)| + b_0(s)\right) ds\right.\\ &\quad \left.+ \int_{nr}^t \frac{L_0\int_s^t \left(\sup_{-r\leq v\leq u}|x^{n+1}(v)| + b_0(u)\right) du}{(t-s)^{\alpha+1}} ds\right)\\ &\leq L_0\left(T + \frac{r^{1-\alpha}}{1-\alpha}\right)\left\|x^{n+1}\right\|_{\infty(-r,(n+1)r)}\\ &\quad + \left(T^{1-\alpha} + \frac{r^{1-2\alpha}}{1-2\alpha}\right)\|b_0\|_{L^{1/\alpha}} < \infty.\end{aligned}$$

I d'altra banda, per tal d'estudiar la integral de Young podem utilitzar la Proposició 3.2.3 i tenir en compte que $x^n \in W_0^{\alpha,\infty}\left(-r,nr;\mathbb{R}_+^d\right)$. Llavors per a qualsevol $\lambda \geq 1$

$$\begin{aligned}\left\|G_r^{(\sigma)}(x^n)\right\|_{\alpha,\infty(nr,(n+1)r)} &\leq e^{\lambda(n+1)r}\left\|G_r^{(\sigma)}(x^n)\right\|_{\alpha,\lambda(nr,(n+1)r)}\\ &\leq \frac{\Lambda_\alpha(g)d^{(4)}}{\lambda^{1-2\alpha}} e^{\lambda(n+1)r}\left(1 + \|x^n\|_{\alpha,\lambda(-r,nr)}\right) < \infty.\end{aligned}$$

Comencem a treballar ara amb el terme A_2. Aquest terme el podem descompondre de la següent forma:

$$\begin{aligned}\frac{|x^{n+1}(t) - x^n(nr)|}{(t-nr)^\alpha} &\leq \frac{\left|\int_{nr}^t b(s,x^{n+1})ds\right|}{(t-nr)^\alpha} + \frac{\left|\int_{nr}^t \sigma(s,x^n(s-r))dg_s\right|}{(t-nr)^\alpha}\\ &\quad + \frac{|y_{n+1}(t) - y_{n+1}(nr)|}{(t-nr)^\alpha}.\end{aligned} \tag{3.35}$$

Amb els mateixos arguments que hem utilitzat per al càlcul de (3.31) obtenim que

$$\begin{aligned}\sup_{t\in[nr,(n+1)r]}\frac{|y_{n+1}(t) - y_{n+1}(nr)|}{(t-nr)^\alpha} &\leq d \sup_{t\in[nr,(n+1)r]}\frac{|z_{n+1}(t) - z_{n+1}(nr)|}{(t-nr)^\alpha}\\ \leq d\left(\sup_{t\in[nr,(n+1)r]}\frac{\left|\int_{nr}^t b(s,x^{n+1})ds\right|}{(t-nr)^\alpha}\right. &+ \left.\sup_{t\in[nr,(n+1)r]}\frac{\left|\int_{nr}^t \sigma(s,x^n(s-r))dg_s\right|}{(t-nr)^\alpha}\right).\end{aligned} \tag{3.36}$$

I ara, a partir de les Proposicions 3.2.1 i 3.2.3 obtenim respectivament les següents estimacions

$$\begin{aligned}\sup_{t\in[nr,(n+1)r]} \frac{\left|\int_{nr}^{t} b(s,x^{n+1})ds\right|}{(t-nr)^{\alpha}} &\leq \left\|F^{(b)}(x^{n+1})\right\|_{1-\alpha(nr,(n+1)r)} r^{1-2\alpha} \\ &\leq \frac{d^{(1)}}{r^{2\alpha-1}}\left(1+\left\|x^{n+1}\right\|_{\infty(-r,(n+1)r)}\right), \end{aligned} \tag{3.37}$$

i

$$\begin{aligned}\sup_{t\in[nr,(n+1)r]} \frac{\left|\int_{nr}^{t} \sigma(s,x^{n}(s-r))dg_s\right|}{(t-nr)^{\alpha}} &\leq \left\|G^{(\sigma)}(x^{n})\right\|_{1-\alpha(nr,(n+1)r)} r^{1-2\alpha} \\ &\leq \frac{d^{(3)}\Lambda_{\alpha}(g)}{r^{2\alpha-1}}\left(1+\left\|x^{n}\right\|_{\alpha,\infty(-r,nr)}\right). \end{aligned} \tag{3.38}$$

I com que sabem que $\|x^n\|_{\alpha,\infty(-r,nr)} < \infty$ i que $\|x^{n+1}\|_{\infty(-r,(n+1)r)} < \infty$, a partir dels resultats obtinguts a (3.35), (3.36), (3.37) i (3.38) podem dir que $A_2 < \infty$.

I així doncs la demostració del primer pas queda completada.

<u>Pas 2:</u> *Unicitat de solució a l'espai* $\mathcal{C}(-r,(n+1)r;\mathbb{R}_+^d)$.

Siguin x i x' dues solucions de l'equació (3.27) a l'espai $\mathcal{C}(-r,(n+1)r;\mathbb{R}_+^d)$ i triem N suficientment gran per tal que $\|x\|_{\infty(-r,(n+1)r)} \leq N$ i $\|x'\|_{\infty(-r,(n+1)r)} \leq N$.

Per qualsevol $t \in [0,(n+1)r]$ és cert que,

$$\sup_{s\in[0,t]} |x(s)-x'(s)| \leq \sup_{s\in[0,t]} |z(s)-z'(s)| + \sup_{s\in[0,t]} |y(s)-y'(s)|.$$

A més, utilitzant el Lema A.0.2 tenim que

$$\sup_{s\in[0,t]} |y(s)-y'(s)| \leq K_l \sup_{s\in[0,t]} |z(t)-z'(t)|.$$

Per tant, fent servir les dues últimes desigualtats obtingudes podem veure que

$$\begin{aligned}
\sup_{s\in[0,t]} |x(s)-x'(s)| &\le (1+K_l)\sup_{s\in[0,t]} |z(s)-z'(s)| \\
&\le (1+K_l)\sup_{s\in[0,t]} \left| \int_0^s (b(u,x)-b(u,x'))\,du \right| \\
&\le (1+K_l)L_N \sup_{s\in[0,t]} \left| \int_0^s \sup_{0\le v\le u} |x(v)-x'(v)| du \right| \\
&\le L_N(1+K_l)\int_0^t \sup_{v\in[0,u]} |x(v)-x'(v)| du.
\end{aligned}$$

I ara, aplicant la desigualtat de Gronwall (veure Lema A.0.3), tenim que per a tota $t\in[0,(n+1)r]$

$$\sup_{s\in[0,t]} |x(s)-x'(s)| = 0.$$

Per tant,

$$\|x-x'\|_{\infty(-r,(n+1)r)} = 0$$

i la unicitat a $\mathcal{C}(-r,(n+1)r;\mathbb{R}^d)$ queda provada.

<u>Pas 3:</u> *Existència de solució a* $\mathcal{C}(-r,(n+1)r;\mathbb{R}^d_+)$.

A l'espai $\mathcal{C}(-r,(n+1)r;\mathbb{R}^d_+)$ podríem tractar el terme de la reflexió usant l'aplicació de Skorokhod, però com que el coeficient b és només localment Lipschitz, necessitarem d'un argument de punt fix a $\mathcal{C}(-r,(n+1)r;\mathbb{R}^d_+)$ basat en el Lema A.0.1 per tal de provar l'existència de solució.

Considerem doncs el següent operador

$$\mathcal{L}:\mathcal{C}(-r,(n+1)r;\mathbb{R}^d_+)\to\mathcal{C}(-r,(n+1)r;\mathbb{R}^d_+)$$

definit de la següent manera

$$\begin{aligned}
&\mathcal{L}(u)(t)=\eta(0)+\int_0^t b(s,u)ds+\int_0^t \sigma(s,x^n(s-r))dg_s+y_{n+1,u}(t), \qquad t\in[0,(n+1)r],\\
&\mathcal{L}(u)(t)=\eta(t), \qquad t\in[-r,0],
\end{aligned}$$

on x^n és la solució obtinguda a $(\mathbf{H_n})$ i si

$$z_{n+1,u}(t)=\eta(0)+\int_0^t b(s,u)ds+\int_0^t \sigma(s,x^n(s-r))dg_s,$$

llavors $y^i_{n+1,u}(t) = \max\limits_{s\in[0,t]} (z^i_{n+1,u}(s))^-$ per a tota $i = 1, \ldots, d$.

Observem que $\mathcal{L}$ està ben definida i farem servir la notació $u^* = \mathcal{L}(u)$.
Necessitem introduir unes normes noves a l'espai $\mathcal{C}(-r,(n+1)r;\mathbb{R}^d_+)$. Aquestes seran per a qualsevol $\lambda \geq 1$

$$\|f\|_{\infty,\lambda(-r,(n+1)r)} := \sup_{t\in[-r,(n+1)r]} e^{-\lambda t}|f(t)|$$

i es pot comprovar que són equivalents a $\|f\|_{\infty(-r,(n+1)r)}$.

Demostrarem que $\mathcal{L}$ compleix les condicions necessàries per tal que puguem aplicar el Lema A.0.1.

Primer observem que

$$\begin{aligned}
\|u^*\|_{\infty,\lambda(-r,(n+1)r)} &\leq \sup_{t\in[-r,0]} e^{-\lambda t}|\eta(t)| + \sup_{t\in[0,(n+1)r]} e^{-\lambda t}|u^*(t)| \\
&\leq \|\eta\|_{\infty,\lambda(-r,0)} + |\eta(0)| + \sup_{t\in[0,(n+1)r]} e^{-\lambda t}\left|\int_0^t b(s,u)ds\right| \\
&\quad + \sup_{t\in[0,(n+1)r]} e^{-\lambda t}\left|\int_0^t \sigma(s,x^n(s-r))dg_s\right| \\
&\quad + \sup_{t\in[0,(n+1)r]} e^{-\lambda t}|y_{n+1,u}(t)| \\
&\leq \|\eta\|_{\infty,\lambda(-r,0)} + |\eta(0)| + \sup_{t\in[0,(n+1)r]} e^{-\lambda t}\left|\int_0^t b(s,u)ds\right| \\
&\quad + \sup_{t\in[0,(n+1)r]} e^{-\lambda t}\left|\int_0^t \sigma(s,x^n(s-r))dg_s\right| \\
&\quad + d\sup_{t\in[0,(n+1)r]} e^{-\lambda t}|z_{n+1,u}(t)| \\
&\leq \|\eta\|_{\infty,\lambda(-r,0)} + (d+1)|\eta(0)| \\
&\quad + (d+1)\sup_{t\in[0,(n+1)r]} e^{-\lambda t}\left|\int_0^t b(s,u)ds\right| \\
&\quad + (d+1)\sup_{t\in[0,(n+1)r]} e^{-\lambda t}\left|\int_0^t \sigma(s,x^n(s-r))dg_s\right|, \qquad (3.39)
\end{aligned}$$

on hem utilitzat un càlcul molt similar al de la desigualtat (3.32). Ara fixada t si anomenem $t_1 := \inf\{u; y^i(u) = y^i(t)\}$, tenim

$$e^{-\lambda t}|y^i_{n+1,u}(t)| \leq e^{-\lambda t_1}|y^i_{n+1,u}(t_1)| \leq e^{-\lambda t_1}|z^i_{n+1,u}(t_1)|,$$

i prenent suprems a les dues bandes, ens queda que

$$\sup_{t\in[0,(n+1)r]} e^{-\lambda t}|y_{n+1,u}(t)| \le d \sup_{t\in[0,(n+1)r]} e^{-\lambda t}|z_{n+1,u}(t)|. \tag{3.40}$$

Pel que fa al terme de la integral de Lebesgue tenim que

$$\begin{aligned} \sup_{t\in[0,(n+1)r]} e^{-\lambda t}\left|\int_0^t b(s,u)ds\right| &\le L_0 \sup_{t\in[0,(n+1)r]} e^{-\lambda t}\int_0^t \sup_{-r\le v\le s}|u(v)|ds \\ &\quad + \sup_{t\in[0,(n+1)r]} e^{-\lambda t}\left|\int_0^t b_0(s)ds\right| \\ &\le \frac{L_0}{\lambda}\left\|u\right\|_{\infty,\lambda(-r,(n+1)r)} + \frac{C_\alpha}{\lambda^{1-\alpha}}\left\|b_0\right\|_{L^{1/\alpha}}, \end{aligned} \tag{3.41}$$

i pel terme de la integral de Riemann-Stieltjes, a partir de la Proposició 3.2.3, s'assoleix que

$$\begin{aligned} \sup_{t\in[0,(n+1)r]} e^{-\lambda t}\left|\int_0^t \sigma(s,x^n(s-r))dg_s\right| &\le \left\|G_r^{(\sigma)}(x^n)\right\|_{\alpha,\lambda(0,(n+1)r)} \\ &\le \frac{\Lambda_\alpha(g)d^{(4)}}{\lambda^{1-2\alpha}}\left(1+\left\|x^n\right\|_{\alpha,\lambda(-r,nr)}\right). \end{aligned} \tag{3.42}$$

Per tant, unint els resultats (3.39), (3.41) i (3.42), obtenim que

$$\left\|u^*\right\|_{\infty,\lambda(-r,(n+1)r)} \le M_1(\lambda) + M_2(\lambda)\left\|u\right\|_{\infty,\lambda(-r,(n+1)r)},$$

per a

$$\begin{aligned} M_1(\lambda) &= \left\|\eta\right\|_{\infty,\lambda(-r,0))} + (d+1)|\eta(0)| + \frac{(d+1)C_\alpha}{\lambda^{1-\alpha}}\left\|b_0\right\|_{L^{1/\alpha}} \\ &\quad + (d+1)\frac{\Lambda_\alpha(g)d^{(4)}}{\lambda^{1-2\alpha}}\left(1+\left\|x^n\right\|_{\alpha,\lambda(-r,nr)}\right), \\ M_2(\lambda) &= (d+1)L_0\frac{1}{\lambda}. \end{aligned}$$

Si triem $\lambda=\lambda_0$ suficientment gran per tal que $M_2(\lambda_0)\le\frac{1}{2}$, llavors per a u tal que $\left\|u\right\|_{\infty,\lambda_0(-r,(n+1)r)} \le 2M_1(\lambda_0)$ tenim que

$$\left\|u^*\right\|_{\infty,\lambda_0(-r,(n+1)r)} \le 2M_1(\lambda_0)$$

i això implica que $\mathcal{L}(B_0)\subseteq B_0$ per a

$$B_0 = \left\{ u \in \mathcal{C}(-r,(n+1)r;\mathbb{R}_+^d); \|u\|_{\infty,\lambda_0(-r,(n+1)r)} \leq 2M_1(\lambda_0) \right\}.$$

Per tant, la primera hipòtesi del Lema A.0.1 es compleix per la mètrica ρ_0 associada a la norma $\|\cdot\|_{\infty,\lambda_0(-r,(n+1)r)}$.

Ara per acabar la demostració només cal que trobem una mètrica ρ_1 que satisfaci la segona hipòtesi del Lema A.0.1.

Observem que si $u \in B_0$ llavors es compleix que $\|u\|_{\infty(-r,(n+1)r)} \leq 2e^{\lambda_0(n+1)r}M_1(\lambda_0) := N_0$. Considerem $u, u' \in B_0$ i $\lambda \geq 1$. Llavors tenim que

$$\begin{aligned}\|\mathcal{L}(u) - \mathcal{L}(u')\|_{\infty,\lambda(-r,(n+1)r)} \leq & \sup_{t\in[0,(n+1)r]} e^{-\lambda t} \left| z_{n+1,u}(t) - z'_{n+1,u}(t) \right| \\ & + \sup_{t\in[0,(n+1)r]} e^{-\lambda t} \left| y_{n+1,u}(t) - y'_{n+1,u}(t) \right|.\end{aligned}$$

A partir del Lema A.0.2 notem que fixada $t \in [0,(n+1)r]$ existeix $t_2 \leq t$ tal que

$$\left| y_{n+1,u}(t) - y'_{n+1,u}(t) \right| \leq K_l \left| z_{n+1,u}(t_2) - z'_{n+1,u}(t_2) \right|.$$

Per tant,

$$e^{-\lambda t} \left| y_{n+1,u}(t) - y'_{n+1,u}(t) \right| \leq K_l e^{-\lambda t_2} \left| z_{n+1,u}(t_2) - z'_{n+1,u}(t_2) \right|$$

i podem escriure que

$$\sup_{t\in[0,(n+1)r]} e^{-\lambda t} \left| y_{n+1,u}(t) - y'_{n+1,u}(t) \right| \leq K_l \sup_{t\in[0,(n+1)r]} e^{-\lambda t} \left| z_{n+1,u}(t) - z'_{n+1,u}(t) \right|.$$

Llavors,

$$\begin{aligned}\|\mathcal{L}(u) - \mathcal{L}(u')\|_{\infty,\lambda(-r,(n+1)r)} &\leq (1+K_l) \sup_{t\in[0,(n+1)r]} e^{-\lambda t} \int_0^t |b(s,u) - b(s,u')|\, ds \\ &\leq L_{N_0}(1+K_l) \sup_{t\in[0,(n+1)r]} e^{-\lambda t} \int_0^t \sup_{0\leq v\leq s} |u(v) - u'(v)|\, ds \\ &\leq L_{N_0}(1+K_l) \sup_{t\in[0,(n+1)r]} \int_0^t e^{-\lambda(t-s)} e^{-\lambda s} \sup_{-r\leq v\leq s} |u(v) - u'(v)|\, ds \\ &\leq L_{N_0}(1+K_l) \frac{1}{\lambda} \|u - u'\|_{\infty,\lambda(-r,(n+1)r)}.\end{aligned}$$

Per tant, si tríem $\lambda = \lambda_1$ tal que $\dfrac{L_{N_0}(1+K_l)}{\lambda} \leq \dfrac{1}{2}$ la segona hipòtesis es satisfà per la mètrica ρ_1 associada a la norma $\|\cdot\|_{\infty,\lambda_1(-r,(n+1)r)}$ i $a = \dfrac{L_{N_0}(1+K_l)}{\lambda_1}$.

Per tant, ara que ja n'hem comprovat les condicions podem aplicar el lema A.0.1 i aleshores l'operador $\mathcal{L}$ té un punt fix a l'espai $\mathcal{C}(-r,(n+1)r;\mathbb{R}^d)$ i l'equació de la hipòtesi $(\mathbf{H_{n+1}})$ té solució en aquest espai. □

Provarem finalment que l'única solució de l'equació (3.26) és $(1-\alpha)$-Hölder contínua.

Proposició 3.3.2 *Assumim que σ i b satisfant les hipòtesis* **(H1)** *i* **(H2)** *respectivament, per a $\rho = \frac{1}{\alpha}$ i $0 < \alpha < \min\{\frac{1}{2}, \beta\}$. Llavors la solució x de l'equació (3.26) pertany a $C^{1-\alpha}(0,T;\mathbb{R}^d)$, i*

$$\|x\|_{1-\alpha(0,T)} \leq d^{(6)}(1+\Delta_\alpha(g))(1+\|x\|_{\alpha,\infty(-r,T)}),$$

on $d^{(6)}$ és una constant positiva independent de x i g.

Demostració: Observem que

$$\|x\|_{1-\alpha(0,T)} \leq \|z\|_{1-\alpha(0,T)} + \|y\|_{1-\alpha(0,T)}.$$

Fixada $t \in [0,T]$, anomenem $t_* = \inf\{u \leq t; y^i(u) = y^i(t)\}$. Llavors y^i serà creixent en t_* i per tant ja hem provat a (3.30) que $|y^i(t_*) - y^i(s)| \leq |z^i(t_*) - z^i(s)|$ per a tota $s \in (0,t_*)$. O sigui que, per a tota $s \in (0,t_*)$ s'assoleix que

$$\frac{|y^i(t) - y^i(s)|}{(t-s)^{1-\alpha}} \leq \frac{|z^i(t_*) - z^i(s)|}{(t_*-s)^{1-\alpha}}$$

i si hi afegim un càlcul similar al que hem fet a (3.32) es comprova fàcilment que $\|y\|_{1-\alpha(0,T)} \leq d\|z\|_{1-\alpha(0,T)}$.

Per tant,

$$\begin{aligned}\|x\|_{1-\alpha(0,T)} &\leq (d+1)\|z\|_{1-\alpha(0,T)} \\ &\leq (d+1)\left(|\eta(0)| + \|F^{(b)}(x)\|_{1-\alpha(0,T)} + \|G_r^{(\sigma)}(x)\|_{1-\alpha(0,T)}\right).\end{aligned}$$

I ara, utilitzant les Proposicions 3.2.1 i 3.2.3 arribem fàcilment al resultat que volíem per a

$$d^{(6)} = (d+1)\left(|\eta(0)| + d^{(1)} + d^{(3)}\right),$$

on $d^{(1)}$ i $d^{(3)}$ són les constants que apareixen en les Proposicions 3.2.1 i 3.2.3. □

Ara, per acabar amb els resultats que necessitem per a equacions deterministes, calcularem una cota superior per a la norma de la solució. Recordem la definició de $\varphi(\gamma,\alpha)$,

$$\varphi(\gamma,\alpha)=\begin{cases}2\alpha & \gamma=1,\\ >1+\frac{2\alpha-1}{\gamma} & \frac{1-2\alpha}{1-\alpha}\leq\gamma<1,\\ \alpha & 0\leq\gamma<\frac{1-2\alpha}{1-\alpha}.\end{cases}$$

Lema 3.3.3 *Assumim que són certes les hipòtesis* **(H1)**, **(H2)** *i* **(H3)**. *Llavors l'única solució de l'equació (3.26) satisfà*

$$\|x\|_{\alpha,\infty(r)}\leq d_\alpha^{(3)}\left(\|\eta\|_{\alpha,\infty(-r,0)}+\Lambda_\alpha(g)+1\right)\exp(T(d_\alpha^{(1)}+d_\alpha^{(2)}\Lambda_\alpha(g)^{\frac{1}{1-\varphi(\gamma,\alpha)}})).$$

Demostració: Primer, necessitarem aconseguir una cota superior per a $\|x\|_{\alpha,\lambda(r)}$. Comencem amb aquesta estimació

$$\begin{aligned}\|x\|_{\alpha,\lambda(r)}&\leq\|\eta\|_{\alpha,\lambda(-r,0)}+\sup_{t\in[0,T]}e^{-\lambda t}\left(|x(t)|+\int_{-r}^t\frac{|x(t)-x(s)|}{(t-s)^{\alpha+1}}ds\right)\\&\leq\|\eta\|_{\alpha,\lambda(-r,0)}+\sup_{t\in[0,T]}e^{-\lambda t}\left(|x(t)|+\int_{-r}^0\frac{|x(t)-\eta(s)|}{(t-s)^{\alpha+1}}ds\right.\\&\quad\left.+\int_0^t\frac{|x(t)-x(s)|}{(t-s)^{\alpha+1}}ds\right)\\&\leq\|\eta\|_{\alpha,\lambda(-r,0)}+\|x\|_{\alpha,\lambda(0,T)}+\sup_{t\in[0,T]}e^{-\lambda t}\int_{-r}^0\frac{|x(t)-\eta(s)|}{(t-s)^{\alpha+1}}ds.\end{aligned}\tag{3.43}$$

A més a més sabem que,

$$\|x\|_{\alpha,\lambda(0,T)}\leq\|z\|_{\alpha,\lambda(0,T)}+\|y\|_{\alpha,\lambda(0,T)}\,.\tag{3.44}$$

Pels mateixos arguments pels quals hem obtingut (3.31) i (3.32) tenim que,

$$\|y\|_{\alpha,\lambda(0,T)}\leq d\,\|z\|_{\alpha,\lambda(0,T)}\,.\tag{3.45}$$

També és clar que,

$$\|z\|_{\alpha,\lambda(0,T)}\leq|\eta(0)|+\left\|F^{(b)}(x)\right\|_{\alpha,\lambda(0,T)}+\left\|G_r^{(\sigma)}(x)\right\|_{\alpha,\lambda(0,T)}\,.\tag{3.46}$$

Per tant, a partir dels resultats (3.43)-(3.46) i aplicant les Proposicions 3.2.1 i 3.2.4 obtenim que

$$\begin{aligned}\|x\|_{\alpha,\lambda(r)} \leq \|\eta\|_{\alpha,\lambda(-r,0)} + (d+1)|\eta(0)| + (d+1)d^{(2)}\left(\frac{1}{\lambda^{1-2\alpha}} + \frac{\|x\|_{\alpha,\lambda(r)}}{\lambda^{1-\alpha}}\right)\\ +\Lambda_\alpha(g)(d+1)d^{(5)}\left(1+\frac{\|x\|_{\alpha,\lambda(r)}}{\lambda^{1-\varphi(\gamma,\alpha)}}\right)+B,\end{aligned} \tag{3.47}$$

on

$$B := \sup_{t\in[0,T]} e^{-\lambda t}\int_{-r}^{0}\frac{|x(t)-\eta(s)|}{(t-s)^{\alpha+1}}ds.$$

Ens queda doncs per estudiar el terme B. Podem descompondre aquest terme de la següent manera

$$\begin{aligned}B &\leq \sup_{t\in[0,T]} e^{-\lambda t}\int_{-r}^{0}\frac{|x(t)-\eta(0)|}{(t-s)^{\alpha+1}}ds + \sup_{t\in[0,T]} e^{-\lambda t}\int_{-r}^{0}\frac{|\eta(0)-\eta(s)|}{(-s)^{\alpha+1}}ds\\ &\leq \frac{1}{\alpha}\sup_{t\in[0,T]}\frac{e^{-\lambda t}}{t^\alpha}|x(t)-\eta(0)| + \|\eta\|_{\alpha,\lambda(-r,0)}\\ &\leq \frac{1}{\alpha}(B_1+B_2+B_3) + \|\eta\|_{\alpha,\lambda(-r,0)}\,,\end{aligned} \tag{3.48}$$

on

$$\begin{aligned}B_1 &= \sup_{t\in[0,T]}\frac{e^{-\lambda t}}{t^\alpha}\int_0^t |b(s,x)|ds,\\ B_2 &= \sup_{t\in[0,T]}\left|\frac{e^{-\lambda t}}{t^\alpha}\int_0^t \sigma(s,x(s-r))dg_s\right|,\\ B_3 &= \sup_{t\in[0,T]}\frac{e^{-\lambda t}}{t^\alpha}|y(t)|.\end{aligned}$$

Pels mateixos raonaments pels quals hem obtingut la desigualtat (3.40) tenim que

$$B_3 = \sup_{t\in[0,T]}\frac{e^{-\lambda t}}{t^\alpha}|y(t)| \leq d\sup_{t\in[0,T]}\frac{e^{-\lambda t}}{t^\alpha}|z(t)| \leq d(B_1+B_2).$$

Per tant, ens treballem ara amb els termes B_1 i B_2. Pel que fa a B_1 podem escriure

$$\begin{aligned}B_1 &\leq \sup_{t\in[0,T]}\frac{e^{-\lambda t}}{t^\alpha}\int_0^t\left(L_0\sup_{-r\leq u\leq s}|x(u)| + b_0(s)\right)ds\\ &\leq L_0\left(\sup_{s\in[-r,T]} e^{-\lambda s}|x(s)|\right)\sup_{t\in[0,T]}\int_0^t\frac{e^{-\lambda(t-s)}}{(t-s)^\alpha}ds + \sup_{t\in[0,T]}\frac{e^{-\lambda t}}{t^{2\alpha-1}}\|b_0\|_{L^{1/\alpha}}\\ &\leq L_0\lambda^{\alpha-1}\Gamma(1-\alpha)\|x\|_{\alpha,\lambda(r)} + C_\alpha\lambda^{2\alpha-1}\|b_0\|_{L^{1/\alpha}}\,.\end{aligned}$$

Anem a calcular ara una cota per a B_2, utilitzant les hipòtesis **(H3)**,

$$\begin{aligned}
B_2 \leq & \sup_{t\in[0,T]} \frac{e^{-\lambda t}}{t^\alpha} \Lambda_\alpha(g) \left(\int_0^t \frac{|\sigma(s,x(s-r))|}{s^\alpha} ds \right. \\
& \left. + \alpha \int_0^t \int_0^s \frac{|\sigma(s,x(s-r)) - \sigma(y,x(y-r))|}{(s-y)^{\alpha+1}} dyds \right) \\
\leq & \sup_{t\in[0,T]} \frac{e^{-\lambda t}}{t^\alpha} \Lambda_\alpha(g) \left(K_0 \int_0^t \frac{1+|x(s-r)|^\gamma}{s^\alpha} ds \right. \\
& \left. + \alpha M_0 \int_0^t \int_0^s \left(\frac{|x(s-r)-x(y-r)|}{(s-y)^{\alpha+1}} + \frac{1}{(s-y)^{\alpha+1-\beta}} \right) dyds \right) \\
\leq & \sup_{t\in[0,T]} \Lambda_\alpha(g) \left(K_0 \frac{t^{1-2\alpha}}{1-\alpha} e^{-\lambda t} + K_0 \frac{e^{-\lambda t}}{t^\alpha} \int_{-r}^{t-r} \frac{|x(s)|^\gamma}{(s+r)^\alpha} ds \right. \\
& \left. + \alpha M_0 \|x\|_{\alpha,\lambda(r)} \int_{-r}^{t-r} \frac{e^{-\lambda(t-s)}}{(t-s)^\alpha} ds + \frac{\alpha M_0 t^{\beta-2\alpha+1} e^{-\lambda t}}{(\beta-\alpha)(\beta-\alpha+1)} \right).
\end{aligned}$$

Observem que,

$$\begin{aligned}
\int_{-r}^{t-r} \frac{e^{-\lambda(t-s)}}{(t-s)^\alpha} ds &= e^{-\lambda r} \int_0^t \frac{e^{-\lambda(t-u)}}{(t-u+r)^\alpha} du \\
&\leq e^{-\lambda r} \int_0^t \frac{e^{-\lambda(t-u)}}{(t-u)^\alpha} du \leq e^{-\lambda r} \lambda^{\alpha-1} \Gamma(1-\alpha).
\end{aligned}$$

Ara utilitzant aquesta desigualtat, el resultat (B.2), la desigualtat de Hölder i el fet que $|f(s)|^\gamma \leq |f(s)|+1$ obtenim que

$$\begin{aligned}
\frac{e^{-\lambda t}}{t^\alpha} \int_{-r}^{t-r} \frac{|x(s)|^\gamma}{(s+r)^\alpha} ds &\leq e^{-\lambda t} t^{\varphi(\gamma,\alpha)\gamma-2\alpha+1-\gamma} \left(\int_{-r}^{t-r} \frac{|x(s)|}{(s+r)^{\varphi(\gamma,\alpha)}} ds \right)^\gamma \\
&\leq C_{\alpha,\gamma,T} e^{-\lambda t} \left(1 + \int_{-r}^{t-r} \frac{|x(s)|}{(s+r)^{\varphi(\gamma,\alpha)}} ds \right) \\
&\leq C_{\alpha,\gamma,T} \left(1 + \|x\|_{\alpha,\lambda(r)} e^{-\lambda r} \int_0^t \frac{e^{-\lambda(t-u)}}{u^{\varphi(\gamma,\alpha)}} du \right) \\
&\leq C_{\alpha,\gamma,T} \left(1 + \|x\|_{\alpha,\lambda(r)} e^{-\lambda r} \lambda^{\varphi(\gamma,\alpha)-1} \right),
\end{aligned}$$

on hem tingut en compte que $\varphi(\gamma,\alpha)\gamma - 2\alpha + 1 - \gamma \geq 0$.

Per tant finalment tenim que

$$B_2 \le \Lambda_\alpha(g)\Bigg(\frac{K_0}{1-\alpha}\left(\frac{1-2\alpha}{e}\right)^{1-2\alpha}\lambda^{2\alpha-1} + \frac{\alpha M_0\left((\beta-2\alpha+1)e\right)^{\beta-2\alpha+1}}{(\beta-\alpha)(\beta-\alpha+1)}\lambda^{2\alpha-1-\beta}$$
$$+C_{\alpha,\gamma,T} + \|x\|_{\alpha,\lambda(r)} e^{-\lambda r}\left(\alpha M_0 \Gamma(1-\alpha)\lambda^{\alpha-1} + K_0 C_{\alpha,\gamma,T}\lambda^{\varphi(\gamma,\alpha)-1}\right)\Bigg)$$
$$\le \Lambda_\alpha(g) C_{\alpha,\beta,\gamma}(1+\lambda^{2\alpha-1} + e^{-\lambda r}\lambda^{\varphi(\gamma,\alpha)-1}\|x\|_{\alpha,\lambda(r)}).$$

O sigui que, si unim (3.47), (3.48) i les estimacions que hem obtingut per a B_1, B_2 i B_3, s'assoleix que

$$\|x\|_{\alpha,\lambda(r)} \le M_1(\lambda) + M_2(\lambda)\|x\|_{\alpha,\lambda(r)},$$

per a

$$M_1(\lambda) = 2\|\eta\|_{\alpha,\lambda(-r,0)} + (d+1)\Bigg(|\eta(0)| + \Lambda_\alpha(g)d^{(5)} + C_{\alpha,\beta,\gamma}$$
$$+\frac{C_{\alpha,\beta}}{\lambda^{1-2\alpha}}\left(d^{(2)} + \|b_0\|_{L^{1/\alpha}} + \Lambda_\alpha(g)\right)\Bigg),$$
$$M_2(\lambda) = \frac{(d+1)C_\alpha}{\lambda^{1-\varphi(\gamma,\alpha)}}\left(\Lambda_\alpha(g)\left(d^{(5)} + C_{\alpha,\beta,\gamma}\right) + L_0\Gamma(1-\alpha) + d^{(2)}\right).$$

Triem ara $\lambda = \lambda_0$ suficientment gran per tal que $M_2(\lambda_0) \le \frac{1}{2}$ llavors tenim que

$$\|x\|_{\alpha,\lambda_0(r)} \le 2M_1(\lambda_0),$$

amb

$$\lambda_0 = \left[2C_{\alpha,d}\left(d^{(2)} + \Lambda_\alpha(g)(d^{(5)}+1) + L_0\right)\right]^{\frac{1}{1-\varphi(\gamma,\alpha)}}$$
$$\le d_\alpha\left(2C_{\alpha,d}\left(d^{(2)} + L_0\right)\right)^{\frac{1}{1-\varphi(\gamma,\alpha)}} + \Lambda_\alpha(g)^{\frac{1}{1-\varphi(\gamma,\alpha)}} d_\alpha\left(2C_{\alpha,d}\left(1+d^{(5)}\right)\right)^{\frac{1}{1-\varphi(\gamma,\alpha)}}$$
$$\le d_\alpha^{(1)} + d_\alpha^{(2)}\Lambda_\alpha(g)^{\frac{1}{1-\varphi(\gamma,\alpha)}}$$

on

$$d_\alpha^{(1)} = d_\alpha\left(2C_{\alpha,d}\left(d^{(2)} + L_0\right)\right)^{\frac{1}{\varphi(\gamma,\alpha)}},$$
$$d_\alpha^{(2)} = d_\alpha\left(2C_{\alpha,d}\left(1 + d^{(5)}\right)\right)^{\frac{1}{\varphi(\gamma,\alpha)}}.$$

I això implica que

$$\|x\|_{\alpha,\infty(r)} \leq \exp(T(d_\alpha^{(1)} + d_\alpha^{(2)} \Lambda_\alpha(g)^{\frac{1}{\varphi(\gamma,\alpha)}}))2M_1(\lambda_0)$$

i la demostració s'acaba fàcilment. Observem que en la nostra tria de $d_\alpha^{(1)}$ i $d_\alpha^{(2)}$ aquestes no depenen ni de β ni de γ. □

3.4 Equacions integrals estocàstiques

En aquest últim apartat del capítol aplicarem els resultats deterministes que hem obtingut a l'apartat 3.3 per tal de provar el principal teorema d'aquest capítol.

La integral estocàstica respecte el moviment Brownià fraccionària amb $H > \frac{1}{2}$ que apareix a l'equació (3.1), i que és del tipus $\int_0^T u(s)dW_s^H$, és una integral trajectorial de Riemann-Stieltjes com les que hem definit a l'apartat 2.3 del capítol 2 i és sabut que aquesta integral existeix si el procés $u(s)$ té trajectòries Hölder contínues d'ordre més gran que $1-H$ (veure a [You36]).

Prenem $\alpha \in \left(1-H, \frac{1}{2}\right)$. Si $u = \{u_t, t \in [0,T]\}$ és un procés estocàstic tal que les seves trajectòries pertanyen a l'espai $W_T^{\alpha,1}(0,T)$, llavors la integral de Riemann-Stieltjes $\int_0^T u(s)dW_s^H$ existeix en el sentit de la Definició 2.3.1 i tenim la següent estimació

$$\left| \int_0^T u(s)dW_s^H \right| \leq G\|u\|_{\alpha,1},$$

on G és una variable aleatòria amb moments de tots els ordres (veure a Lema 2.4.1).

A més, si les trajectòries de u pertanyen a $W_0^{\alpha,\infty}(0,T)$, llavors la integral indefinida $\int_0^T u(s)dW_s^H$ és Hölder contínua d'ordre $1-\alpha$ i amb trajectòries a $W_0^{\alpha,\infty}(0,T)$.

També tenim per a qualsevol $\delta \in (0,2)$, utilitzant el teorema de Fernique (veure a Teorema A.0.4) que

$$\mathbf{E}(\exp(\Lambda_\alpha(W^H)^\delta)) < \infty. \tag{3.49}$$

Demostració Teorema 3.1.1 L'existència i unicitat de solució de l'equació (3.1) l'obtenim directament aplicant el resultat del Teorema 3.3.1 a la nostra equació (3.1).

Igualment, a partir de la Proposició 3.3.2 tenim que, $X(\omega,\cdot) \in \mathcal{C}^{1-\alpha}(0,T;\mathbb{R}^d)$ per cada $\omega \in \Omega$.

Per tal d'obtenir l'existència de moments de qualsevol ordre, n'hi ha prou fent servir el lema 3.3.3, que ens dóna que

$$\mathbf{E}\left(\|X\|_{\alpha,\infty(r)}\right) \leq D^{(1)}_{\alpha,\eta}\mathbf{E}\left(\left(\Lambda_\alpha(W^H)+1\right)^p \exp\left(D^{(2)}_\alpha\left(1+\Lambda_\alpha(W^H)^{1/(1-\varphi(\gamma,\alpha))}\right)\right)\right).$$

on recordem $\Lambda_\alpha(W^H) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\sup_{0<s<t<T}\left|\left(D^{1-\alpha}_{t-}W^H_{t-}\right)(s)\right|$.

Aleshores per poder utilitzar el resultat (3.49) necessitem només, que es compleixi que $\frac{1}{1-\varphi(\gamma,\alpha)} < 2$, desigualtat que és certa si $\alpha < \frac{2-\gamma}{4}$. Sota aquesta condició tenim que

$$\mathbf{E}(\exp(C\Lambda_\alpha(W)^{1/(1-\varphi(\gamma,\alpha))})) < \infty$$

i per tant és cert que

$$\mathbf{E}\left(\|X\|^p_{\alpha,\infty(r)}\right) < \infty$$

per a qualsevol $p \geq 1$, com volíem. □

4

Equacions de Volterra estocàstiques dirigides per un moviment brownià fraccionari amb paràmetre de Hurst $H > 1/2$

Aquest capítol està dedicat a l'estudi de l'existència i la unicitat de la solució de la següent equació de Volterra estocàstica a $\mathbb{R}^d$

$$X(t) = X_0 + \int_0^t b(t, s, X(s))ds + \int_0^t \sigma(t, s, X(s))dW_s^H, \quad t \in (0, T], \tag{4.1}$$

on $W^H = \{W^{H,j}, j = 1, \ldots, m\}$ són moviments Brownians fraccionaris independents amb paràmetre de Hurst $H > \frac{1}{2}$ definits en un espai de probabilitat complet $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$.

Interpretarem la integral estocàstica respecte al moviment Brownià fraccionari que apareix a l'equació (4.1) com una integral trajectorial de Riemann-Stieltjes com la que hem definit a l'apartat 2.3 del capítol 2.

L'estructura d'aquest capítol és la següent: en el primer apartat presentarem el resultat principal que hem obtingut, en el següent estudiarem algunes estimacions per a la integral de Lebesgue i per a les integrals de Riemann-Stieltjes. En el tercer apartat recordem alguns resultats per a equacions deterministes i en l'últim apartat d'aquest capítol aplicarem els resultats obtinguts en el tercer apartat a equacions estocàstiques dirigides per un moviment brownià fraccionari. Finalment, a l'apèndix B s'hi troben alguns resultats tècnics que utilitzarem durant aquests capítol.

Observació 4.0.1 *La definició dels espais de funcions i les seves normes que apareixen durant aquest capítol estan definides a l'apartat 2.1 del capítol 2.*

4.1 Resultats principals

Presentem en aquest apartat el resultat principal que obtenim per a l'equació (4.1) i les hipòtesis sota les quals el provarem.

Suposarem que $\frac{1}{2} < H < 1$, $\alpha \in \left(1-H, \frac{1}{2}\right)$.

Les hipòtesis amb les que treballarem són les següents:

- **(H1)** Sigui $\sigma : [0,T]^2 \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^m$ una funció mesurable tal que existeixen les següents derivades $\partial_x \sigma(t,s,x)$, $\partial_t \sigma(t,s,x)$ i $\partial^2_{x,t}\sigma(t,s,x)$, suposem a més que també existeixen algunes constants $0 < \beta,\ \mu,\ \delta \leq 1$ i que per a cada $N \geq 0$ existeix $K_N > 0$ tal que les següents propietats es compleixen:
  1. $|\sigma(t,s,x) - \sigma(t,s,y)| + |\partial_t \sigma(t,s,x) - \partial_t \sigma(t,s,y)| \leq K\,|x-y|\,, \forall s,t \in [0,T],\ \forall x,y \in \mathbb{R}^d$,
  2. $|\partial_{x_i}\sigma(t,s,x) - \partial_{y_i}\sigma(t,s,y)| + \left|\partial^2_{x_i,t}\sigma(t,s,x) - \partial^2_{y_i,t}\sigma(t,s,y)\right| \leq K_N\,|x-y|^{\delta}$, $i = 1\dots d,\ \forall |x|,|y| \leq N,\ \forall s,t \in [0,T]$,
  3. $|\sigma(t_1,s,x) - \sigma(t_2,s,x)| + |\partial_{x_i}\sigma(t_1,s,x) - \partial_{x_i}\sigma(t_2,s,x)| \leq K\,|t_1-t_2|^{\mu}$, $i = 1\dots d,\ \forall x \in \mathbb{R}^d,\ \forall t_1,t_2,s \in [0,T]$,
  4. $|\sigma(t,s_1,x) - \sigma(t,s_2,x)| + |\partial_t\sigma(t,s_1,x) - \partial_t\sigma(t,s_2,x)| \leq K\,|s_1-s_2|^{\beta}\,, \forall x \in \mathbb{R}^d$, $\forall s_1,s_2,t \in [0,T]$,
  5. $\left|\partial^2_{x_i,t}\sigma(t,s_1,x) - \partial^2_{x_i,t}\sigma(t,s_2,x)\right| + |\partial_{x_i}\sigma(t,s_1,x) - \partial_{x_i}\sigma(t,s_2,x)| \leq K\,|s_1-s_2|^{\beta}$, $i = 1\dots d,\ \forall x \in \mathbb{R}^d,\ \forall s_1,s_2,t \in [0,T]$.
- **(H2)** Sigui $b : [0,T]^2 \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ una funció mesurable, tal que existeixen $b_0 \in L^{\rho}([0,T]^2;\mathbb{R}^d)$ per a $\rho \geq 2$, $0 < \mu \leq 1$ i que $\forall N \geq 0$ existeix $L_N > 0$ tal que es compleixen les següents propietats:
  1. $|b(t,s,x) - b(t,s,y)| \leq L_N\,|x-y|\,,\ \forall |x|,|y| \leq N, \forall s,t \in [0,T]$,
  2. $|b(t_1,s,x) - b(t_2,s,x)| \leq L\,|t_1-t_2|^{\mu}\,,\ \forall x \in \mathbb{R}^d, \forall s,t_1,t_2 \in [0,T]$,
  3. $|b(t,s,x)| \leq L_0|x| + b_0(t,s), \quad \forall x \in \mathbb{R}^d,\ \forall s,t \in [0,T]$,
  4. $|b(t_1,s,x_1) - b(t_1,s,x_2) - b(t_2,s,x_1) + b(t_2,s,x_2)| \leq L_N|t_1-t_2||x_1-x_2|$, $\forall |x_1|,|x_2| \leq N,\ \forall t_1,t_2,s \in [0,T]$.

- **(H3)** Existeixen $\gamma \in [0,1]$ i $K_0 > 0$ tal que

$$|\sigma(t,s,x)| \leq K_0(1+|x|^\gamma), \ \forall x \in \mathbb{R}^d, \, \forall s,t \in [0,T].$$

Observació 4.1.1 *De fet, podem considerar σ i b definides només en el conjunt $D \times \mathbb{R}^d$ on $D = \{(t,s) \in [0,T]^2; s \leq t\}$.*

Observació 4.1.2 *Les hipòtesis que hem considerat sobre els coeficients b i σ, són en general semblants a les hipòtesis de Nualart i Răşcanu [NR02], amb la diferència que com que incorporem una nova variable necessitem també noves condicions respecte aquesta nova variable. Per tant, les condicions que considerem són una generalització de les condicions considerades a [NR02] pel cas de l'equació de Volterra.*

Sota aquestes hipòtesis demostrarem que la nostra equació té una única solució. El resultat d'existència i d'unicitat de la solució és el següent:

Teorema 4.1.1 *Assumim que X_0 és una variable aleatòria a $\mathbb{R}^d$ i que σ i b satisfan les hipòtesis* **(H1)** *i* **(H2)** *respectivament per a $\beta > 1-H$, $\delta > \frac{1}{H} - 1$ i $\min\{\beta, \frac{\delta}{1+\delta}\} > 1-\mu$.*
Definim $\alpha_0 := \min\left\{\frac{1}{2}, \beta, \frac{\delta}{1+\delta}\right\}$.
Llavors si $\alpha \in ((1-H) \vee (1-\mu), \alpha_0)$ i $\rho \leq \frac{1}{\alpha}$, l'equació (4.1) té una única solució

$$X \in L^0(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}; W_0^{\alpha,\infty}(0,T;\mathbb{R}^d))$$

*i per $P-$*quasi tota $\omega \in \Omega, \ X(\omega,\cdot) \in C^{1-\alpha}(0,T;\mathbb{R}^d)$.
A més, si $\alpha \in ((1-H) \vee (1-\mu), \alpha_0 \vee \frac{2-\gamma}{4}), \ \rho \geq \frac{1}{\alpha}, \ X_0 \in L^\infty(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}; \mathbb{R}^d)$ i les condicions **(H3)** *es compleixen llavors $\forall p \geq 1$*

$$\mathbf{E}(\|X\|_{\alpha,\infty}^p) < \infty.$$

Exemple: Observem que hi ha molts coeficients que compleixen les nostres hipòtesis, un exemple pot ser la següent equació per a qualsevol $a \in \mathbb{R}$

$$X(t) = a + \int_0^t t\cos(X(s))ds + \int_0^t ts\sin(X(s))dW_s^H,$$

4.2 Càlcul d'estimacions

En aquest apartat trobarem algunes estimacions per a les integrals de Lebesgue i Riemann-Stieltjes que ens seran útils per a obtenir el resultat d'existència i unicitat per a equacions deterministes.

4.2.1 Integral de Lebesgue

Considerem en primer lloc l'integral de Lesbegue ordinària. Donada una funció mesurable $f : [0,T]^2 \to \mathbb{R}^d$ definim

$$F_t(f) := \int_0^t f(t,s)ds.$$

Proposició 4.2.1 *Sigui* $0 < \alpha < \frac{1}{2}$ *i* $f : [0,T]^2 \to \mathbb{R}^d$ *una funció mesurable que compleixi:* $|f(t_1,s) - f(t_2,s)| \leq L|t_1 - t_2|^{\mu}$ *per a* s, t_1, $t_2 \in [0,T]$ *tal que* $0 < s \leq t_1, t_2$, *i on* $\mu > \alpha$. *Si* $\sup_{t\in[0,T]} \int_0^t \frac{|f(t,s)|}{(t-s)^{\alpha}} ds < \infty$ *llavors* $F_{\cdot}(f) \in W_0^{\alpha,\infty}(0,T;\mathbb{R}^d)$ *i a més tenim que*

$$|F_t(f)| + \int_0^t \frac{|F_t(f) - F_s(f)|}{(t-s)^{\alpha+1}} ds \leq C^{(1)}_{\alpha,T} \int_0^t \frac{|f(t,s)|}{(t-s)^{\alpha}} ds + C^{(2)}_{\alpha,L,\mu} t^{1+\mu-\alpha}. \tag{4.2}$$

Demostració: Observem que

$$\begin{aligned} |F_t(f)| + \int_0^t \frac{|F_t(f) - F_s(f)|}{(t-s)^{\alpha+1}} ds &\leq \left| \int_0^t f(t,u)du \right| \\ &\quad + \int_0^t \frac{\int_0^s |f(t,u) - f(s,u)|\, du}{(t-s)^{\alpha+1}} ds + \int_0^t \frac{\int_s^t |f(t,u)| du}{(t-s)^{\alpha+1}} ds \\ &\leq T^{\alpha} \int_0^t \frac{|f(t,u)|}{(t-u)^{\alpha}} du + L \int_0^t \frac{s}{(t-s)^{1-\mu+\alpha}} ds \\ &\quad + \int_0^t \int_0^u \frac{|f(t,u)|}{(t-s)^{\alpha+1}} dsdu \\ &\leq \left(T^{\alpha} + \frac{1}{\alpha} \right) \int_0^t \frac{|f(t,u)|}{(t-u)^{\alpha}} du + \frac{L}{(\mu-\alpha)} t^{1+\mu-\alpha}, \end{aligned}$$

per tant (4.2) és cert per a $C^{(1)}_{\alpha,T} = \left(T^{\alpha} + \frac{1}{\alpha}\right)$ i $C^{(2)}_{\alpha,L,\mu} = \frac{L}{(\mu-\alpha)}$ i aleshores utilitzant les hipòtesis de l'enunciat també queda provat que $F_{\cdot}(f) \in W_0^{\alpha,\infty}(0,T;\mathbb{R}^d)$. □

Ara, donada $f : [0,T] \to \mathbb{R}^d$ definim

$$F_t^{(b)}(f) = \int_0^t b(t,s,f(s))ds.$$

Proposició 4.2.2 *Assumim que* b *satisfà* **(H2)** *per a* $\rho = \frac{1}{\alpha}$ *i* $\mu > (1-\alpha) \vee \alpha$.

1. *Si* $f \in W_0^{\alpha,\infty}(0,T;\mathbb{R}^d)$ *llavors* $F_\cdot^{(b)}(f) \in \mathcal{C}^{1-\alpha}(0,T;\mathbb{R}^d)$ *i tenim que*

$$\left\|F^{(b)}(f)\right\|_{1-\alpha} \leq d^{(1)}\left(1 + \|f\|_\infty\right), \tag{4.3}$$

$$\left\|F^{(b)}(f)\right\|_{\alpha,\lambda} \leq \frac{d^{(2)}}{\lambda^{1-2\alpha}}\left(1 + \|f\|_{\alpha,\lambda}\right), \tag{4.4}$$

   per a tota $\lambda \geq 1$, *i a on* $d^{(1)}$ *i* $d^{(2)}$ *són constants positives que depenen només de* μ, α, T, L, L_0 *i una constant* $B_{0,\alpha}$ *que depèn de* b_0.

2. *Si* $f, h \in W_0^{\alpha,\infty}\left(0,T;\mathbb{R}^d\right)$ *són tals que* $\|f\|_\infty \leq N$ *i* $\|h\|_\infty \leq N$, *llavors*

$$\left\|F^{(b)}(f) - F^{(b)}(h)\right\|_{\alpha,\lambda} \leq \frac{d_N}{\lambda^{1-\alpha}}\|f-h\|_{\alpha,\lambda}, \tag{4.5}$$

   per a tota $\lambda \geq 1$, *i a on* d_N *depèn de* α, T *i* L_N.

Demostració: Per tal de simplificar la presentació de la demostració assumirem que $d=1$. Sigui $f \in W_0^{\alpha,\infty}(0,T;\mathbb{R})$, llavors per $0 \leq s < t \leq T$

$$\begin{aligned}\left|F_t^{(b)}(f) - F_s^{(b)}(f)\right| &\leq \int_0^s |b(t,u,f(u)) - b(s,u,f(u))|\,du + \int_s^t |b(t,u,f(u))|du \\ &\leq Ls(t-s)^\mu + \int_s^t \left(L_0|f(u)| + b_0(t,u)\right)du \\ &\leq (t-s)^{1-\alpha}\left(LT^{\mu+\alpha} + L_0T^\alpha\|f\|_\infty + B_{0,\alpha}\right),\end{aligned} \tag{4.6}$$

on $B_{0,\alpha} := \sup_{t\in[0,T]}\left(\int_0^t |b_0(t,u)|^{1/\alpha}du\right)^\alpha$.

Si repetim els mateixos càlculs però per a $s=0$ obtenim que

$$\left|F_t^{(b)}(f)\right| \leq L_0 t\|f\|_\infty + B_{0,\alpha}t^{1-\alpha}.$$

Per tant,

$$\left\|F^{(b)}(f)\right\|_{1-\alpha} \leq L_0(T+T^\alpha)\|f\|_\infty + B_{0,\alpha}(1+T^{1-\alpha}) + LT^{\mu+\alpha},$$

i (4.3) s'assoleix per a $d^{(1)} = (1+T^{1-\alpha})(B_{0,\alpha} + T^\alpha L_0) + LT^{\mu+\alpha}$.

Ara utilitzant el resultat (4.2) tenim que

$$
\begin{aligned}
&\left|F_t^{(b)}(f)\right| + \int_0^t \frac{\left|F_t^{(b)}(f) - F_s^{(b)}(f)\right|}{(t-s)^{\alpha+1}} ds \\
&\qquad \le C_{\alpha,T}^{(1)} \int_0^t \frac{|b(t,s,f(s))|}{(t-s)^{\alpha}} ds + C_{\alpha,L}^{(2)} t^{1+\mu-\alpha} \\
&\qquad \le C_{\alpha,T}^{(1)} \int_0^t \frac{L_0|f(s)| + b_0(t,s)}{(t-s)^{\alpha}} ds + C_{\alpha,L}^{(2)} t^{1+\mu-\alpha} \\
&\qquad \le C_{\alpha,T}^{(1)} \left(L_0 \int_0^t \frac{|f(s)|}{(t-s)^{\alpha}} ds + B_{0,\alpha} \left(\frac{1-\alpha}{1-2\alpha}\right)^{1-\alpha} t^{1-2\alpha} \right) + C_{\alpha,L}^{(2)} t^{1+\mu-\alpha}. \quad (4.7)
\end{aligned}
$$

A més, usant els dos resultats del lema B.0.5 es compleix que

$$
\begin{aligned}
\left\|F^{(b)}(f)\right\|_{\alpha,\lambda} &\le C_{\alpha,T}^{(1)} L_0 \|f\|_{\alpha,\lambda} \sup_{t\in[0,T]} \int_0^t \frac{e^{-\lambda(t-s)}}{(t-s)^{\alpha}} ds \\
&\quad + C_{\alpha,T}^{(1)} B_{0,\alpha} \left(\frac{1-\alpha}{1-2\alpha}\right)^{1-\alpha} \sup_{t\in[0,T]} e^{-\lambda t} t^{1-2\alpha} + + C_{\alpha,L}^{(2)} \sup_{t\in[0,T]} e^{-\lambda t} t^{1+\mu-\alpha} \\
&\le C_{\alpha,T}^{(1)} L_0 \Gamma(1-\alpha) \lambda^{\alpha-1} \|f\|_{\alpha,\lambda} + C_{\alpha,T}^{(1)} B_{0,\alpha} \frac{(1-\alpha)^{1-\alpha}}{(1-2\alpha)^{\alpha}} e^{2\alpha-1} \lambda^{2\alpha-1} \\
&\quad + C_{\alpha,L}^{(2)} e^{\alpha-\mu-1} (1+\mu-\alpha)^{1+\mu-\alpha} \lambda^{\alpha-1-\mu} \\
&\le d^{(2)} \lambda^{2\alpha-1} \left(1 + \|f\|_{\alpha,\lambda}\right).
\end{aligned}
$$

Així doncs el resultat (4.4) és cert per a

$$
d^{(2)} = C_{\alpha,T}^{(1)} L_0 \Gamma(1-\alpha) + C_{\alpha,T}^{(1)} B_{0,\alpha} \frac{(1-\alpha)^{1-\alpha}}{(1-2\alpha)^{\alpha}} e^{2\alpha-1} + C_{\alpha,L}^{(2)} e^{\alpha-\mu-1} (1+\mu-\alpha)^{1+\mu-\alpha}.
$$

Ara, considerem $f, h \in W_0^{\alpha,\infty}(0,T;\mathbb{R})$ tals que $\|f\|_\infty \le N$ i $\|h\|_\infty \le N$. Fàcilment, podem obtenir que

$$
\begin{aligned}
\left|F_t^{(b)}(f) - F_t^{(b)}(h)\right| &\le \int_0^t |b(t,u,f(u)) - b(t,u,h(u))| \, du \\
&\le L_N \int_0^t |f(u) - h(u)| \, du \quad (4.8)
\end{aligned}
$$

i que

$$
\begin{aligned}
|F_t^{(b)}(f) - F_t^{(b)}(h) - F_s^{(b)}(f) + F_s^{(b)}(h)| &\le \int_s^t |b(t,u,f(u)) - b(t,u,h(u))|\, du \\
&+ \int_0^s |b(t,u,f(u)) - b(t,u,h(u)) - b(s,u,f(u)) + b(s,u,h(u))|\, du \qquad (4.9)\\
&\le L_N \int_s^t |f(u) - h(u)| du + L_N |t-s| \int_0^s |f(u) - h(u)| du.
\end{aligned}
$$

Llavors, utilitzant els resultats (4.8) i (4.9) es compleix que

$$
\begin{aligned}
&\left|F_t^{(b)}(f) - F_t^{(b)}(h)\right| + \int_0^t \frac{|F_t^{(b)}(f) - F_t^{(b)}(h) - F_s^{(b)}(f) + F_s^{(b)}(h)|}{(t-s)^{\alpha+1}} ds \\
&\qquad \le L_N \int_0^t |f(u) - h(u)|\, du + L_N \int_0^t \frac{\int_s^t |f(u) - h(u)| du}{(t-s)^{\alpha+1}} ds \\
&\qquad + L_N \int_0^t \frac{\int_0^s |f(u) - h(u)| du}{(t-s)^{\alpha}} ds \\
&\qquad \le L_N \int_0^t |f(u) - h(u)|\, du + \frac{L_N}{\alpha} \int_0^t \frac{|f(u) - h(u)|}{(t-u)^{\alpha}} du \\
&\qquad + \frac{L_N}{1-\alpha} \int_0^t \frac{|f(u) - h(u)|}{(t-u)^{\alpha-1}} du. \qquad (4.10)
\end{aligned}
$$

Podem acabar la demostració utilitzant la desigualtat obtinguda a (4.10) i el resultat B.1 que proven la desigualtat (4.5) com volíem,

$$
\begin{aligned}
\left\|F^{(b)}(f) - F^{(b)}(h)\right\|_{\alpha,\lambda} &\le \sup_{t\in[0,T]} \left(L_N \left(1 + \frac{T^{1-\alpha}}{1-\alpha}\right) \int_0^t e^{-\lambda(t-u)} du \right. \\
&\left. + \frac{L_N}{\alpha} \int_0^t \frac{e^{-\lambda(t-u)}}{(t-u)^{\alpha}} du \right) \|f - h\|_{\alpha,\lambda} \\
&\le L_N \left(\frac{1}{\lambda} \left(1 + \frac{T^{1-\alpha}}{1-\alpha}\right) + \frac{\Gamma(1-\alpha)}{\alpha \lambda^{1-\alpha}} \right) \|f - h\|_{\alpha,\lambda} \\
&\le \frac{d_N}{\lambda^{1-\alpha}} \|f - h\|_{\alpha,\lambda},
\end{aligned}
$$

on $d_N = L_N \left(1 + \dfrac{T^{1-\alpha}}{1-\alpha} + \dfrac{\Gamma(1-\alpha)}{\alpha}\right)$. □

4.2.2 Integral de Riemman-Stieltjes

Ens centrarem ara amb la integral de Riemann-Stieltjes. Fixem $\alpha \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$, i aleshores tal com hem vist en l'apartat 2.3 del capítol 2, donada $f : [0,T]^2 \to \mathbb{R}$ tal que per a tota

$t \in [0,T]$, $f(t,\cdot) \in W_0^{\alpha,1}(0,T;\mathbb{R})$ i per a $g : [0,T] \to \mathbb{R}$ que pertanyi a l'espai $W_T^{1-\alpha,\infty}(0,T)$, podem considerar la integral següent

$$G_t(f) = \int_0^t f(t,s)dg_s := \int_0^T f(t,s)\mathbf{1}_{(0,t)}(s)dg_s,$$

que compleix a més la següent estimació (veure a (2.8))

$$\left|\int_0^t f(t,s)dg_s\right| \leq \Lambda_\alpha(g) \left\|f(t,\cdot)\right\|_{\alpha,1}.$$

Proposició 4.2.3 *Siguin* $g \in W_T^{1-\alpha,\infty}(0,T;\mathbb{R})$ *i* $f : [0,T]^2 \to \mathbb{R}^d$*, tal que compleix que:* $f(t,\cdot) \in W_0^{\alpha,1}(0,T;\mathbb{R})$ *per a tota* $t \in [0,T]$ *i* $|f(t_1,s) - f(t_2,s)| \leq K(s)|t_1 - t_2|^\mu$*, per a* $\mu > \alpha$ *i* t_1*,* t_2*,* $s \in [0,T]$*. Llavors per a tota* $s < t$*, obtenim les següents estimacions*

$$\begin{aligned}|G_t(f) - G_s(f)| \leq \Lambda_\alpha(g) \Bigg(&|t-s|^\mu \int_0^s \frac{K(u)}{u^\alpha}du + \int_s^t \frac{|f(t,u)|}{(u-s)^\alpha}du \\ &+\alpha \int_0^s \int_0^u \frac{|f(t,u) - f(s,u) - f(t,y) + f(s,y)|}{(u-y)^{\alpha+1}}dydu \\ &+\alpha \int_s^t \int_s^u \frac{|f(t,u) - f(t,y)|}{(u-y)^{\alpha+1}}dydu \Bigg)\end{aligned} \tag{4.11}$$

i

$$\begin{aligned}|G_t(f)| + \int_0^t \frac{|G_t(f) - G_s(f)|}{(t-s)^{\alpha+1}}ds \leq \Lambda_\alpha(g) \Bigg(&C_\alpha^{(3)} \int_0^t \frac{K(u)}{u^\alpha}(t-u)^{\mu-\alpha}du \\ &+ C_{\alpha,T}^{(4)} \int_0^t \left((t-u)^{-2\alpha} + u^{-\alpha}\right) \left(|f(t,u)| + \int_0^u \frac{|f(t,u) - f(t,y)|}{(u-y)^{\alpha+1}}dy\right) du \\ &+ \alpha \int_0^t \int_0^s \int_0^u \frac{|f(t,u) - f(s,u) - f(t,y) + f(s,y)|}{(u-y)^{\alpha+1}(t-s)^{\alpha+1}}dyduds \Bigg).\end{aligned} \tag{4.12}$$

Demostració: Podem escriure, tenint en compte el resultat (2.7) que

$$
\begin{aligned}
|G_t(f) - G_s(f)| &\leq \left| \int_0^s (f(t,u) - f(s,u))\, dg_u \right| + \left| \int_s^t f(t,u) dg_u \right| \\
&\leq \Lambda_\alpha(g) \left(\int_0^s \frac{|f(t,u) - f(s,u)|}{u^\alpha} du + \int_s^t \frac{|f(t,u)|}{(u-s)^\alpha} du \right. \\
&\quad + \alpha \int_0^s \int_0^u \frac{|f(t,u) - f(s,u) - f(t,y) + f(s,y)|}{(u-y)^{\alpha+1}} dydu \\
&\quad \left. + \alpha \int_s^t \int_s^u \frac{|f(t,u) - f(t,y)|}{(u-y)^{\alpha+1}} dydu \right) \\
&\leq \Lambda_\alpha(g) \left(|t-s|^\mu \int_0^s \frac{K(u)}{u^\alpha} du + \int_s^t \frac{|f(t,u)|}{(u-s)^\alpha} du \right. \\
&\quad + \alpha \int_0^s \int_0^u \frac{|f(t,u) - f(s,u) - f(t,y) + f(s,y)|}{(u-y)^{\alpha+1}} dydu \\
&\quad \left. + \alpha \int_s^t \int_s^u \frac{|f(t,u) - f(t,y)|}{(u-y)^{\alpha+1}} dydu \right),
\end{aligned}
\tag{4.13}
$$

i per tant així obtenim la primera desigualtat (4.11). I ara, utilitzant (4.13) i les hipòtesis que compleix f tenim que

$$
\begin{aligned}
\int_0^t \frac{|G_t(f) - G_s(f)|}{(t-s)^{\alpha+1}} ds &\leq \Lambda_\alpha(g) \left(\int_0^t \int_0^s \frac{K(u)}{(t-s)^{u^\alpha \alpha+1-\mu}} duds \right. \\
&\quad + \alpha \int_0^t \int_0^s \int_0^u \frac{|f(t,u) - f(s,u) - f(t,y) + f(s,y)|}{(u-y)^{\alpha+1}(t-s)^{\alpha+1}} dyduds \\
&\quad \left. + \int_0^t (t-s)^{-\alpha-1} \left(\int_s^t \frac{|f(t,u)|}{(u-s)^\alpha} du + \alpha \int_s^t \int_s^u \frac{|f(t,u) - f(t,y)|}{(u-y)^{\alpha+1}} dydu \right) ds \right).
\end{aligned}
\tag{4.14}
$$

Podem escriure el primer terme com

$$
\begin{aligned}
\int_0^t \int_0^s \frac{K(u)}{u^\alpha (t-s)^{\alpha+1-\mu}} duds &= \int_0^t \int_u^t \frac{K(u)}{u^\alpha (t-s)^{\alpha+1-\mu}} dsdu \\
&= \frac{1}{\mu - \alpha} \int_0^t \frac{K(u)}{u^\alpha (t-u)^{\alpha-\mu}} du.
\end{aligned}
\tag{4.15}
$$

Pel que fa al terme

$$
\int_0^t (t-s)^{-\alpha-1} \left(\int_s^t \frac{|f(t,u)|}{(u-s)^\alpha} du + \alpha \int_s^t \int_s^u \frac{|f(t,u) - f(t,y)|}{(u-y)^{\alpha+1}} dydu \right) ds,
$$

observem que

$$\int_0^t (t-s)^{-\alpha-1} \int_s^t \frac{|f(t,u)|}{(u-s)^\alpha} du ds = \int_0^t \int_0^u (t-s)^{-\alpha-1} \frac{|f(t,u)|}{(u-s)^\alpha} ds du.$$

Fent un canvi de variable $u - s = y(t-s)$ podem resoldre la següent integral

$$\begin{aligned} \int_0^u (t-s)^{-\alpha-1}(u-s)^{-\alpha} ds &= (t-u)^{-2\alpha} \int_0^{\frac{u}{t-u}} (1+y)^{-\alpha-1} y^{-\alpha} dy \\ &\leq B(1-\alpha, 2\alpha)(t-u)^{-2\alpha}. \end{aligned}$$

Per altra banda

$$\int_0^t (t-s)^{-\alpha-1} \int_s^t \int_s^u \frac{|f(t,u)-f(t,y)|}{(u-y)^{\alpha+1}} dy du ds = \int_0^t \int_0^u \int_0^y \frac{|f(t,u)-f(t,y)|}{(t-s)^{\alpha+1}(u-y)^{\alpha+1}} ds dy du,$$

i a més,

$$\int_0^y (t-s)^{-\alpha-1} = \frac{1}{\alpha}\left[(t-y)^{-\alpha} - t^{-\alpha}\right] \leq \frac{1}{\alpha}(t-y)^{-\alpha}.$$

Per tant obtenim que

$$\begin{aligned} &\int_0^t (t-s)^{-\alpha-1} \left(\int_s^t \frac{|f(t,u)|}{(u-s)^\alpha} du + \alpha \int_s^t \int_s^u \frac{|f(t,u)-f(t,y)|}{(u-y)^{\alpha+1}} dy du \right) ds \\ &\quad \leq B(1-\alpha, 2\alpha) \int_0^t \frac{|f(t,u)|}{(t-u)^{2\alpha}} du + \int_0^t \int_0^u \frac{|f(t,u)-f(t,y)|}{(u-y)^{\alpha+1}} (t-y)^{-\alpha} dy du, \end{aligned} \tag{4.16}$$

on $B(\cdot,\cdot)$ és la funció beta. Recordem que

$$B(p,q) = \int_0^1 t^{p-1}(1-t)^{q-1} dt = \int_0^\infty \frac{t^{p-1}}{(1+t)^{p+q}} dt. \tag{4.17}$$

Finalment, utilitzant la desigualtat (4.13) per a $s = 0$ tenim que

$$|G_t(f)| \leq \Lambda_\alpha(g) \left(\int_0^t \frac{|f(t,u)|}{u^\alpha} du + \alpha \int_0^t \int_0^u \frac{|f(t,u)-f(t,y)|}{(u-y)^{\alpha+1}} dy du \right). \tag{4.18}$$

I per tant si ajuntem les estimacions (4.14), (4.15), (4.16) i (4.18), obtenim la desigualtat (4.12) com volíem amb les constants $C_\alpha^{(3)} = \frac{1}{\mu-\alpha}$ i $C_{\alpha,T}^{(4)} = \max(B(2\alpha, 1-\alpha), 1) + T^\alpha$. □

Donada ara, $f : [0,T] \to \mathbb{R}^d$, tal que $f \in W_0^{\alpha,\infty}(0,T;\mathbb{R}^d)$ i per a $g \in W_T^{1-\alpha,\infty}(0,T;\mathbb{R})$, podem definir

$$G_t^{(\sigma)}(f) := \int_0^t \sigma(t,s,f(s)) dg_s,$$

a on σ satisfà les condicions **(H1)** per a $\beta > \alpha > 1 - \mu$.

Proposició 4.2.4 *Sigui* $g \in W_T^{1-\alpha,\infty}(0,T;\mathbb{R})$. *Assumim que* σ *satisfà les condicions* **(H1)** *amb* $\beta > \alpha > 1-\mu$.

1. *Si* $f \in W_0^{\alpha,\infty}(0,T;\mathbb{R}^d)$ *llavors*

$$G^{(\sigma)}(f) \in \mathcal{C}^{1-\alpha}(0,T;\mathbb{R}^d) \subseteq W_0^{\alpha,\infty}(0,T;\mathbb{R}^d).$$

   A més,

$$\left\|G^{(\sigma)}(f)\right\|_{1-\alpha} \leq \Lambda_\alpha(g) d^{(3)} \left(1 + \|f\|_{\alpha,\infty}\right), \tag{4.19}$$

$$\left\|G^{(\sigma)}(f)\right\|_{\alpha,\lambda} \leq \frac{\Lambda_\alpha(g) d^{(4)}}{\lambda^{1-2\alpha}} \left(1 + \|f\|_{\alpha,\lambda}\right), \tag{4.20}$$

   per a tota $\lambda \geq 1$ *i a on les constants* $d^{(i)}$ *per a* $i = 3,4$ *depenen només de* α, β, μ, K, T *i* N.

2. *Si* $f, h \in W_0^{\alpha,\infty}(0,T;\mathbb{R}^d)$ *són tals que compleixen que* $\|f\|_\infty \leq N$, $\|h\|_\infty \leq N$, *llavors*

$$\left\|G^{(\sigma)}(f) - G^{(\sigma)}(h)\right\|_{\alpha,\lambda} \leq \frac{\Lambda_\alpha(g) d'_N}{\lambda^{1-2\alpha}} (1 + \Delta(f) + \Delta(h)) \|f-h\|_{\alpha,\lambda}, \tag{4.21}$$

   per tota $\lambda \geq 1$, *a on*

$$\Delta(f) = \sup_{u\in[0,T]} \int_0^u \frac{|f(u)-f(s)|^\delta}{(u-s)^{\alpha+1}} ds,$$

   i la constant d'_N *només depèn de* α, β, μ, N, K *i* T.

Demostració: Assumirem que $d = m = 1$ per tal de simplificar la presentació de la demostració.

Primer veurem que si $f \in W_0^{\alpha,\infty}(0,T;\mathbb{R})$ llavors $\sigma(t,\cdot,f(\cdot)) \in W_0^{\alpha,\infty}(0,T;\mathbb{R})$ per tota $t \in [0,T]$. De fet,

$$\begin{aligned}
|\sigma(t,r,f(r))| &+ \int_0^r \frac{|\sigma(t,r,f(r)) - \sigma(t,s,f(s))|}{(r-s)^{\alpha+1}} ds \\
&\leq K(t^\mu + r^\beta + |f(r)|) + |\sigma(0,0,0)| + K\int_0^r \frac{|f(r)-f(s)|}{(r-s)^{\alpha+1}} ds \\
&\quad + K\int_0^r (r-s)^{\beta-\alpha-1} ds \\
&\leq K\left(t^\mu + r^\beta + \frac{r^{\beta-\alpha}}{\beta-\alpha}\right) + |\sigma(0,0,0)| + K\left(|f(r)| + \int_0^r \frac{|f(r)-f(s)|}{(r-s)^{\alpha+1}} ds\right).
\end{aligned}$$

Per tant, per a tota t,

$$\|\sigma(t,\cdot,f(\cdot))\|_{\alpha,\infty} \le K^{(1)} + K\|f\|_{\alpha,\infty}, \tag{4.22}$$

per a $K^{(1)} = K\left(T^{\mu}+T^{\beta}+\dfrac{T^{\beta-\alpha}}{\beta-\alpha}\right)+|\sigma(0,0,0)|$.

Ara si $f \in W_0^{\alpha,\infty}(0,T;\mathbb{R})$, sota les condicions **(H1)** i a partir del resultat (4.18) tenim que,

$$\begin{aligned}\left\|G^{(\sigma)}(f)\right\|_{\infty} &\le \sup_{t\in[0,T]} \Lambda_{\alpha}(g)\left(\int_0^t \frac{|\sigma(t,u,f(u))|}{u^{\alpha}}du\right.\\ &\quad \left.+\alpha\int_0^t\int_0^u \frac{|\sigma(t,u,f(u))-\sigma(t,y,f(y))|}{(u-y)^{\alpha+1}}dydu\right)\\ &\le \Lambda_{\alpha}(g)\left(\frac{T^{1-\alpha}}{1-\alpha}+\alpha T\right)\sup_{t\in[0,T]}\|\sigma(t,\cdot,f(\cdot))\|_{\alpha,\infty}. \end{aligned} \tag{4.23}$$

Si ara retornem a la desigualtat (4.11) amb $K(u)=K$ i utilitzem el Lema B.0.7 tenim que,

$$\begin{aligned}\left|G_t^{(\sigma)}(f)-G_s^{(\sigma)}(f)\right| &\le \Lambda_{\alpha}(g)\left(|t-s|^{\mu}K\int_0^t u^{-\alpha}du + \int_s^t \frac{\|\sigma(t,\cdot,f(\cdot))\|_{\infty}}{(u-s)^{\alpha}}du\right.\\ &\quad +\alpha\int_0^s\int_0^u K\frac{|t-s|\left(|u-y|^{\beta}+|f(u)-f(y)|\right)}{(u-y)^{\alpha+1}}dydu\\ &\quad \left.+\alpha\int_s^t\int_s^u K\frac{|u-y|^{\beta}+|f(u)-f(y)|}{(u-y)^{\alpha+1}}dydu\right)\\ &\le (t-s)^{1-\alpha}\Lambda_{\alpha}(g)K\left(\frac{T^{\mu}}{1-\alpha}+\frac{\|\sigma(t,\cdot,f(\cdot)\|_{\infty}}{1-\alpha}\right.\\ &\quad +\alpha\left(\frac{T^{1+\beta}}{(\beta-\alpha)(1+\beta-\alpha)}+T^{1+\alpha}\|f\|_{\alpha,\infty}\right)\\ &\quad \left.+\alpha\left(\frac{T^{\beta}}{(\beta-\alpha)}+T^{\alpha}\|f\|_{\alpha,\infty}\right)\right)\\ &\le (t-s)^{1-\alpha}\Lambda_{\alpha}(g)K_{\alpha,T}^{(2)}\left(1+\|\sigma(t,\cdot,f(\cdot)\|_{\alpha,\infty}+\|f\|_{\alpha,\infty}\right), \end{aligned} \tag{4.24}$$

on

$$K_{\alpha,T}^{(2)} = K\left(\frac{1}{1-\alpha}+\frac{\alpha}{\beta-\alpha}+\frac{\alpha}{(\beta-\alpha)(1+\beta-\alpha)}+2\alpha\right)(1+T^{1+\beta}).$$

Per tant, utilitzant els resultats (4.23) i (4.24) ens queda que

$$\left\|G^{(\sigma)}(f)\right\|_{1-\alpha} \leq \Lambda_\alpha(g)\Bigg(\left(\frac{T^{1-\alpha}}{1-\alpha}+\alpha T\right)\sup_{t\in[0,T]}\|\sigma(t,\cdot,f(\cdot))\|_{\alpha,\infty}$$
$$+K^{(2)}_{\alpha,T}\left(1+\|\sigma(t,\cdot,f(\cdot))\|_{\alpha,\infty}+\|f\|_{\alpha,\infty}\right)\Bigg),$$

i a partir de (4.22) podem deduir que $G^{(\sigma)}(f)\in\mathcal{C}^{1-\alpha}(0,T)$ i que la desigualtat (4.19) s'assoleix per a

$$d^{(3)}=(K^{(1)}+K)\left(\frac{T^{1-\alpha}}{1-\alpha}+\alpha T+K^{(2)}_{\alpha,T}\right)+K^{(2)}_{\alpha,T}.$$

Anem a estudiar ara la norma $\|\cdot\|_{\alpha,\lambda}$. Observem que (veure a (4.17))

$$\int_0^t (t-u)^q u^p du = t^{p+q+1}\int_0^1 (1-y)^q y^p dy = B(p+1,q+1)t^{p+q+1}. \tag{4.25}$$

Aleshores si utilitzem els resultats (4.12) amb $K(u)=K$, (B.2) i (4.25) tenim que

$$\begin{aligned}
\left\|G^{(\sigma)}(f)\right\|_{\alpha,\lambda} \leq\; & \Lambda_\alpha(g)\sup_{t\in[0,T]} e^{-\lambda t}\Bigg(C^{(3)}_\alpha K\int_0^t \frac{(t-u)^{\mu-\alpha}}{u^\alpha}du \\
& +C^{(4)}_{\alpha,T}\int_0^t \left((t-u)^{-2\alpha}+u^{-\alpha}\right)\Bigg(|\sigma(t,u,f(u))| \\
& +\int_0^u \frac{|\sigma(t,u,f(u))-\sigma(t,y,f(y))|}{(u-y)^{\alpha+1}}dy\Bigg)du \\
& +\alpha\int_0^t\int_0^s\int_0^u \frac{|\sigma(t,u,f(u))-\sigma(s,u,f(u))-\sigma(t,y,f(y))+\sigma(s,y,f(y))|}{(u-y)^{\alpha+1}(t-s)^{\alpha+1}}dyduds\Bigg) \\
\leq\; & \Lambda_\alpha(g)\sup_{t\in[0,T]}\left(C^{(3)}_\alpha KB(1-\alpha,1+\mu-\alpha)e^{-\lambda t}t^{1+\mu-2\alpha}+C^{(4)}_{\alpha,T}A_1+\alpha A_2\right) \\
\leq\; & \Lambda_\alpha(g)\sup_{t\in[0,T]}\Bigg(C^{(3)}_\alpha KB(1-\alpha,1+\mu-\alpha)\left(\frac{1-\mu-2\alpha}{\lambda}\right)^{1+\mu-2\alpha} e^{2\alpha-1-\mu} \\
& +C^{(4)}_{\alpha,T}A_1+\alpha A_2\Bigg),
\end{aligned} \tag{4.26}$$

on

$$A_1 = e^{-\lambda t} \int_0^t \left((t-u)^{-2\alpha} + u^{-\alpha}\right) \Bigg(|\sigma(t,u,f(u))| + \int_0^u \frac{|\sigma(t,u,f(u)) - \sigma(t,y,f(y))|}{(u-y)^{\alpha+1}} dydu \Bigg),$$

$$A_2 = e^{-\lambda t} \int_0^t \int_0^s \int_0^u \frac{|\sigma(t,u,f(u)) - \sigma(s,u,f(u)) - \sigma(t,y,f(y)) + \sigma(s,y,f(y))|}{(u-y)^{\alpha+1}(t-s)^{\alpha+1}} dyduds.$$

Ara si utilitzem les hipòtesis **(H1)** s'assoleix que

$$\begin{aligned} A_1 &\leq e^{-\lambda t} \int_0^t ((t-u)^{-2\alpha} + u^{-\alpha}) \Bigg(K(t^\mu + u^\beta + |f(u)|) + |\sigma(0,0,0)| \\ &\quad + K \int_0^u \frac{|f(u) - f(y)|}{(u-y)^{\alpha+1}} dy + K \int_0^u (u-y)^{\beta-\alpha-1} dy \Bigg) du \\ &\leq A_{1,1} + A_{1,2}, \end{aligned} \tag{4.27}$$

on

$$\begin{aligned} A_{1,1} &= e^{-\lambda t} \int_0^t ((t-u)^{-2\alpha} + u^{-\alpha}) \\ &\quad \times \left(|\sigma(0,0,0)| + K \left(|f(u)| + \int_0^u \frac{|f(u) - f(y)|}{(u-y)^{\alpha+1}} dy \right) \right) du, \\ A_{1,2} &= K e^{-\lambda t} \int_0^t ((t-u)^{-2\alpha} + u^{-\alpha}) \left(t^\mu + u^\beta + \frac{1}{\beta - \alpha} u^{\beta-\alpha} \right) du. \end{aligned}$$

Utilitzant el resultat del lema B.0.6 podem tractar el terme $A_{1,1}$ igual que en la proposició 4.2 de [NR02], i obtenim que

$$\begin{aligned} \sup_{t\in[0,T]} A_{1,1} &\leq C_\alpha \lambda^{2\alpha-1} \sup_{u\in[0,T]} e^{-\lambda u} \left(|\sigma(0,0,0)| + K \left(|f(u)| + \int_0^u \frac{|f(u) - f(s)|}{(u-s)^{\alpha+1}} ds \right) \right) \\ &\leq \lambda^{2\alpha-1} C_\alpha (|\sigma(0,0,0)| + K)(1 + \|f\|_{\alpha,\lambda}), \end{aligned} \tag{4.28}$$

per a $C_\alpha \leq \Gamma(1-2\alpha) + 1 + \frac{3}{1-\alpha}$.

Pel que fa al terme $A_{1,2}$, aquest es pot computar fàcilment usant el resultat (4.25),

$$
\begin{aligned}
A_{1,2} &= Ke^{-\lambda t}\left(\frac{t^{1+\mu-2\alpha}}{1-2\alpha}+\frac{t^{1+\mu-\alpha}}{1-\alpha}+\frac{t^{\beta-\alpha+1}}{\beta-\alpha+1}+B(1+\beta-\alpha,1-2\alpha)\frac{t^{\beta-3\alpha+1}}{\beta-\alpha}\right.\\
&\quad\left.+t^{\beta-2\alpha+1}\left(\frac{1}{(\beta-\alpha)(\beta-2\alpha+1)}+B(\beta+1,1-2\alpha)\right)\right)\\
&\leq K^{(3)}_{\alpha,\beta}e^{-\lambda t}\left(t^{1+\mu-2\alpha}+t^{1+\mu-\alpha}+t^{\beta-\alpha+1}+t^{\beta-3\alpha+1}+t^{\beta-2\alpha+1}\right),
\end{aligned}
$$

per a

$$
\begin{aligned}
K^{(3)}_{\alpha,\beta} &= \frac{1}{1-2\alpha}+\frac{1}{1-\alpha}+\frac{1}{\beta-\alpha+1}+\frac{1}{\beta-\alpha}B(1+\beta-\alpha,1-2\alpha)\\
&\quad+\frac{1}{(\beta-\alpha)(\beta-2\alpha+1)}+B(\beta+1,1-2\alpha).
\end{aligned}
$$

I per tant, si ara utilitzem el resultat (B.2) obtenim que

$$
\sup_{t\in[0,T]} A_{1,2} \leq K^{(3)}_{\alpha,\beta}K^{(4)}_{\alpha,\beta,\mu}(\lambda^{3\alpha-\beta-1}+\lambda^{2\alpha-\mu-1}),
$$

per a

$$
\begin{aligned}
K^{(4)}_{\alpha,\beta,\mu} &= \left(\frac{1+\mu-2\alpha}{e}\right)^{1+\mu-2\alpha}+\left(\frac{1+\mu-\alpha}{e}\right)^{1+\mu-\alpha}+\left(\frac{\beta-\alpha+1}{e}\right)^{\beta-\alpha+1}\\
&\quad+\left(\frac{\beta-2\alpha+1}{e}\right)^{\beta-2\alpha+1}+\left(\frac{\beta-3\alpha+1}{e}\right)^{\beta-3\alpha+1}.
\end{aligned}
$$

I finalment, si unim els resultats (4.27) i (4.28), obtenim que

$$
\sup_{t\in[0,T]} A_1 \leq \lambda^{2\alpha-1}K^{(5)}_{\alpha,\beta,K,\mu}\left(1+\|f\|_{\alpha,\lambda}\right), \tag{4.29}
$$

on

$$
K^{(5)}_{\alpha,\beta,K,\mu} = C_\alpha(|\sigma(0,0,0)|+K)+K^{(3)}_{\alpha,\beta}K^{(4)}_{\alpha,\beta,\mu}.
$$

D'altra banda, utilitzarem el lema B.0.7 per a l'estudi del terme A_2. Així doncs, podem escriure que

$$\begin{aligned}
A_2 &\leq e^{-\lambda t}\int_0^t\int_0^s\int_0^u \frac{K|t-s||u-y|^{\beta}+K|t-s||f(u)-f(y)|}{(u-y)^{\alpha+1}(t-s)^{\alpha+1}}dyduds \\
&\leq Ke^{-\lambda t}\int_0^t\int_0^s\int_0^u |t-s|^{-\alpha}|u-y|^{\beta-\alpha-1}dyduds \\
&\quad + Ke^{-\lambda t}\int_0^t\int_0^u\int_u^t (t-s)^{-\alpha}\frac{|f(u)-f(y)|}{(u-y)^{\alpha+1}}dsdydu \\
&\leq \frac{K}{\beta-\alpha}e^{-\lambda t}\int_0^t\int_0^s (t-s)^{-\alpha}u^{\beta-\alpha}duds \\
&\quad + \frac{K}{1-\alpha}e^{-\lambda t}\int_0^t\int_0^u (t-u)^{1-\alpha}\frac{|f(u)-f(y)|}{(u-y)^{\alpha+1}}dydu \\
&\leq \frac{K}{(\beta-\alpha)(\beta-\alpha+1)}e^{-\lambda t}\int_0^t (t-s)^{-\alpha}s^{\beta-\alpha+1}ds \\
&\quad + \frac{K}{1-\alpha}\|f\|_{\alpha,\lambda}\int_0^t e^{-\lambda(t-u)}(t-u)^{1-\alpha}du \\
&\leq \frac{KB(1-\alpha,\beta-\alpha+2)}{(\beta-\alpha)(\beta-\alpha+1)}t^{\beta-2\alpha+2}e^{-\lambda t} + \frac{KT^{1-\alpha}}{1-\alpha}\lambda^{-1}\|f\|_{\alpha,\lambda}
\end{aligned}$$

i a partir de la desigualtat (B.2) obtenim que

$$\begin{aligned}
\sup_{t\in[0,T]} A_2 &\leq K^{(6)}_{\alpha,\beta}\lambda^{2\alpha-\beta-2} + K^{(7)}_{\alpha,\beta,N}\lambda^{-1}\|f\|_{\alpha,\lambda} \\
&\leq (K^{(6)}_{\alpha,\beta}+K^{(7)}_{\alpha,\beta})\lambda^{-1}(1+\|f\|_{\alpha,\lambda}),
\end{aligned} \tag{4.30}$$

on

$$K^{(6)}_{\alpha,\beta} = \frac{KB(1-\alpha,\beta-\alpha+2)}{(\beta-\alpha)(\beta-\alpha+1)}\left(\frac{\beta-2\alpha}{e}\right)^{\beta-2\alpha+2} \quad \text{i} \quad K^{(7)}_{\alpha,\beta} = \frac{KT^{1-\alpha}}{1-\alpha}.$$

A partir de les desigualtats (4.26), (4.29) i (4.30), obtenim el resultat (4.20) com volíem per a

$$d^{(4)} = C^{(3)}_{\alpha,K}KB(1-\alpha,1+\mu-\alpha)(1+\mu-2\alpha)^{1+\mu-2\alpha}e^{2\alpha-\mu-1} + C^{(4)}_{\alpha,T}K^{(5)}_{\alpha,\beta,K} + \alpha(K^{(6)}_{\alpha,\beta}+K^{(7)}_{\alpha,\beta}).$$

Assumim ara que $\|f\|_\infty \leq N$ i $\|h\|_\infty \leq N$. Observem que a partir del lema B.0.7 per a $s_1 = s_2$ obtenim que

$$|\sigma(t,u,f(u)) - \sigma(t,u,h(u)) - \sigma(s,u,f(u)) + \sigma(s,u,h(u))| \leq K|f(u)-h(u)||t-s|.$$

Si a més, utilitzem el resultat (4.12) per a $K(u) = K|f(u) - h(u)|$, podem escriure que

$$
\begin{aligned}
&\left\|G^{(\sigma)}(f) - G^{(\sigma)}(h)\right\|_{\alpha,\lambda} \\
&\quad \leq \Lambda_\alpha(g) \sup_{t\in[0,T]} e^{-\lambda t}\Bigg(C_\alpha^{(3)} K \int_0^t \frac{|f(u)-h(u)|}{u^\alpha}(t-u)^{1-\alpha} du \\
&\qquad + C_{\alpha,T}^{(4)} \int_0^t ((t-u)^{-2\alpha} + u^{-\alpha}) \Bigg(|\sigma(t,u,f(u)) - \sigma(t,u,h(u))| \\
&\qquad\quad + \int_0^u \frac{|\sigma(t,u,f(u)) - \sigma(t,u,h(u)) - \sigma(t,y,f(y)) + \sigma(t,y,h(y))|}{(u-y)^{\alpha+1}} dy \Bigg) du \\
&\qquad + \alpha \int_0^t \int_0^s \int_0^u (u-y)^{-\alpha-1}(t-s)^{-\alpha-1} \left| \sigma(t,u,f(u)) - \sigma(t,u,h(u)) - \sigma(s,u,f(u)) \right. \\
&\qquad \left. + \sigma(s,u,h(u)) - \sigma(t,y,f(y)) + \sigma(t,y,h(y)) + \sigma(s,y,f(y)) - \sigma(s,y,h(y)) \right| dyduds \Bigg) \\
&\quad = \Lambda_\alpha(g) \sup_{t\in[0,T]} \left(C_\alpha^{(3)} K B_0 + C_{\alpha,T}^{(4)} (B_1 + B_2) + \alpha B_3 \right),
\end{aligned}
$$

on

$$
\begin{aligned}
B_0 &= e^{-\lambda t} \int_0^t \frac{|f(u)-h(u)|}{u^\alpha}(t-u)^{1-\alpha} du, \\
B_1 &= e^{-\lambda t} \int_0^t ((t-u)^{-2\alpha} + u^{-\alpha}) |\sigma(t,u,f(u)) - \sigma(t,u,h(u))| du, \\
B_2 &= e^{-\lambda t} \int_0^t ((t-u)^{-2\alpha} + u^{-\alpha}) \\
&\quad \times \int_0^u \frac{|\sigma(t,u,f(u)) - \sigma(t,u,h(u)) - \sigma(t,y,f(y)) + \sigma(t,y,h(y))|}{(u-y)^{\alpha+1}} dydu, \\
B_3 &= e^{-\lambda t} \int_0^t \int_0^s \int_0^u (u-y)^{-\alpha-1}(t-s)^{-\alpha-1} \left| \sigma(t,u,f(u)) - \sigma(t,u,h(u)) - \sigma(s,u,f(u)) \right. \\
&\quad \left. + \sigma(s,u,h(u)) - \sigma(t,y,f(y)) + \sigma(t,y,h(y)) + \sigma(s,y,f(y)) - \sigma(s,y,h(y)) \right| dyduds.
\end{aligned}
$$

Anem a estudiar ara aquests 4 termes.

Pel que fa al primer terme, B_0, es pot estudiar fàcilment,

$$\begin{aligned}\sup_{t\in[0,T]} B_0 &\leq \|f-h\|_{\alpha,\lambda} \sup_{t\in[0,T]} t^{1-\alpha}\int_0^t e^{-\lambda(t-u)}u^{-\alpha}du \\ &\leq \|f-h\|_{\alpha,\lambda} \sup_{t\in[0,T]} \frac{t^{1-\alpha}}{\lambda^{1-\alpha}}\int_0^{\lambda t} e^{-x}(\lambda t-x)^{-\alpha}dx \\ &\leq \|f-h\|_{\alpha,\lambda} \frac{T^{1-\alpha}}{\lambda^{1-\alpha}} \sup_{z>0}\int_0^{z} e^{-x}(z-x)^{-\alpha}dx \\ &\leq \|f-h\|_{\alpha,\lambda} KT^{1-\alpha}\lambda^{\alpha-1}. \end{aligned} \tag{4.31}$$

El resultat (B.3) ens permet treballar amb el terme B_1,

$$\begin{aligned}\sup_{t\in[0,T]} B_1 &\leq K \sup_{t\in[0,T]} e^{-\lambda t}\int_0^t ((t-u)^{-2\alpha}+u^{-\alpha})|f(u)-h(u)|du \\ &\leq K\|f-h\|_{\alpha,\lambda} \sup_{t\in[0,T]} \int_0^t e^{-\lambda(t-u)}((t-u)^{-2\alpha}+u^{-\alpha})du \\ &\leq KC_\alpha\lambda^{2\alpha-1}\|f-h\|_{\alpha,\lambda}, \end{aligned} \tag{4.32}$$

per a $C_\alpha \leq \Gamma(1-2\alpha)+1+\frac{3}{1-\alpha}$.

Ara utilitzarem el lema B.0.8 i uns càlculs similars als que hem utilitzat amb el terme anterior, B_1, per tal d'obtenir una estimació pel suprem de B_2

$$\begin{aligned}\sup_{t\in[0,T]} B_2 \leq& \sup_{t\in[0,T]} e^{-\lambda t}\int_0^t ((t-u)^{-2\alpha}+u^{-\alpha})\left(K\int_0^u \frac{|f(u)-h(u)|}{(u-y)^{\alpha+1-\beta}}dy\right. \\ &+K_N\int_0^u \frac{|f(u)-h(u)|}{(u-y)^{\alpha+1}}\left(|f(u)-f(y)|^\delta+|h(u)-h(y)|^\delta\right)dy \\ &\left.+K_N\int_0^u \frac{|f(u)-h(u)-f(y)+h(y)|}{(u-y)^{\alpha+1}}dy\right)du \\ \leq& \left[(K_N(\Delta(f)+\Delta(h))+1)\int_0^t e^{-\lambda(t-u)}\left((t-u)^{-2\alpha}+u^{-\alpha}\right)du\right. \\ &\left.+\frac{K}{\beta-\alpha}\sup_{t\in[0,T]}\int_0^t e^{-\lambda(t-u)}((t-u)^{-2\alpha}+u^{-\alpha})u^{\beta-\alpha}du\right]\|f-h\|_{\alpha,\lambda} \\ \leq& K^{(8)}_{\alpha,\beta,N}\lambda^{2\alpha-1}\|f-h\|_{\alpha,\lambda}(1+\Delta(f)+\Delta(h)), \end{aligned} \tag{4.33}$$

on $K^{(8)}_{\alpha,\beta,N} = C_\alpha\left(K_N+\dfrac{KT^{\beta-\alpha}}{\beta-\alpha}\right)$.

Per veure que el terme B_3 està acotat utilitzarem el lema B.0.9 que ens permetrà dividir-lo en 3 subtermes

$$B_3 \leq K_N B_{3,1} + K B_{3,2} + K_N B_{3,3}, \tag{4.34}$$

on

$$\begin{aligned}
B_{3,1} &= e^{-\lambda t} \int_0^t \int_0^s \int_0^u \frac{|f(u) - h(u) - f(y) + h(y)|}{|t-s|^\alpha (u-y)^{\alpha+1}} dyduds, \\
B_{3,2} &= e^{-\lambda t} \int_0^t \int_0^s \int_0^u \frac{|f(u) - h(u)|}{|t-s|^\alpha (u-y)^{\alpha-\beta+1}} dyduds, \\
B_{3,3} &= e^{-\lambda t} \int_0^t \int_0^s \int_0^u \frac{|f(u) - h(u)|}{|t-s|^\alpha (u-y)^{\alpha+1}} \left(|f(u) - f(y)|^\delta + |h(u) - h(y)|^\delta \right) dyduds.
\end{aligned}$$

Acotem ara, cadascun d'aquests termes

$$\begin{aligned}
B_{3,1} &\leq e^{-\lambda t} \frac{1}{1-\alpha} \int_0^t \int_0^u (t-u)^{1-\alpha} \frac{|f(u) - h(u) - f(y) + h(y)|}{(u-y)^{\alpha+1}} dydu \\
&\leq \frac{1}{1-\alpha} \|f - h\|_{\alpha,\lambda} \int_0^t e^{-\lambda(t-u)} (t-u)^{1-\alpha} du \\
&\leq \frac{T^{1-\alpha}}{1-\alpha} \lambda^{-1} \|f - h\|_{\alpha,\lambda},
\end{aligned} \tag{4.35}$$

$$\begin{aligned}
B_{3,2} &\leq e^{-\lambda t} \frac{1}{1-\alpha} \int_0^t \int_0^u |f(u) - h(u)| (u-y)^{\beta-\alpha-1} (t-u)^{1-\alpha} dydu \\
&\leq \frac{1}{(1-\alpha)(\beta-\alpha)} \|f - h\|_{\alpha,\lambda} \int_0^t e^{-\lambda(t-u)} u^{\beta-\alpha} (t-u)^{1-\alpha} du \\
&\leq \frac{T^{1+\beta-2\alpha}}{(1-\alpha)(\beta-\alpha)} \lambda^{-1} \|f - h\|_{\alpha,\lambda}.
\end{aligned} \tag{4.36}$$

I per l'últim terme recordem la definició de l'operador Δ que hem donat anteriorment

$$\Delta(f) = \sup_{u \in [0,T]} \int_0^u \frac{|f(u) - f(s)|^\delta}{(u-s)^{\alpha+1}} ds.$$

Així,

$$\begin{aligned}
B_{3,3} &\leq \frac{e^{-\lambda t}}{1-\alpha} \int_0^t \int_0^u \frac{|f(u) - h(u)|}{(t-u)^{\alpha-1} (u-y)^{\alpha+1}} (|f(u) - f(y)|^\delta + |h(u) - h(y)|^\delta) dydu \\
&\leq \frac{1}{(1-\alpha)} (\Delta(f) + \Delta(h)) e^{-\lambda t} \int_0^t \frac{|f(u) - h(u)|}{(t-u)^{\alpha-1}} du \\
&\leq \frac{1}{(1-\alpha)} (\Delta(f) + \Delta(h)) \|f - h\|_{\alpha,\lambda} \int_0^t \frac{e^{-\lambda(t-u)}}{(t-u)^{\alpha-1}} du \\
&\leq \frac{T^{1-\alpha}}{(1-\alpha)} \lambda^{-1} (\Delta(f) + \Delta(h)) \|f - h\|_{\alpha,\lambda}.
\end{aligned} \tag{4.37}$$

Finalment utilitzant les acotacions (4.34), (4.35), (4.36) i (4.37) obtenim que

$$\sup_{t\in[0,T]} B_3 \leq K^{(9)}_{\alpha,\beta,N}\lambda^{-1}(1+\Delta(f)+\Delta(h))\,\|f-h\|_{\alpha,\lambda}\,, \tag{4.38}$$

per a

$$K^{(9)}_{\alpha,\beta,N} = \frac{KT^{1+\beta-2\alpha}}{(\beta-\alpha)(1-\alpha)} + \frac{K_N T^{1-\alpha}}{(1-\alpha)}.$$

I per acabar, si unim els resultats que hem obtingut en (4.31), (4.32), (4.33) i aquest últim (4.38), obtenim el resultat (4.21) com volíem per a

$$d'_N = \left(C^{(4)}_{\alpha,T}+1\right)\left(C^{(3)}_{\alpha} K K_N T^{1-\alpha} + KC_\alpha + \left(K^{(8)}_{\alpha,\beta,N} + K^{(9)}_{\alpha,\beta,N}\right)\right).$$

□

4.3 Equacions deterministes

Siguin $0<\alpha<\frac{1}{2}$ i $g \in W_T^{1-\alpha,\infty}(0,T;\mathbb{R}^m)$. Considerem ara la següent equació diferencial determinista a $\mathbb{R}^d$

$$x(t) = x_0 + \int_0^t b(t,s,x(s))ds + \int_0^t \sigma(t,s,x(s))dg_s, \qquad t\in[0,T]. \tag{4.39}$$

En aquest apartat del capítol donarem dos resultats. El primer serà un resultat d'existència i unicitat de solució per a l'equació (4.39) i el segon ens donarà una cota superior per a la norma de la solució d'aquesta equació.

Llavors comencem per l'enunciat del resultat d'existència i unicitat de solució de l'equació (4.39).

Teorema 4.3.1 *Assumim que* σ *i* b *satisfant les hipòtesis* **(H1)** *i* **(H2)** *respectivament per a* $\rho = \frac{1}{\alpha}$, $\delta \leq 1$ *i tal que* $\min\{\beta, \frac{\delta}{1+\delta}\} > 1-\mu$ *i*

$$0 < 1-\mu < \alpha < \alpha_0 := \min\left\{\frac{1}{2}, \beta, \frac{\delta}{1+\delta}\right\}.$$

Llavors, l'equació (4.39) té una única solució $x \in W_0(0,T;\mathbb{R}^d) \cap \mathcal{C}^{1-\alpha}(0,T;\mathbb{R}^d)$.

Demostració: Per a la demostració d'aquest teorema es poden seguir els mateixos passos que els utilitzats en la demostració del teorema 5.1 de [NR02]. De fet, notem que les estimacions que hem obtingut per les integrals de Lebesgue i les integrals de Riemann-Stieltjes a les proposicions 4.2.2 i 4.2.4 són del mateix tipus, amb constants diferents, a les obtingudes en les Proposicions 4.4 i 4.2 de [NR02]. Per tant, podem repetir els mateixos càlculs que els realitzats en aquell teorema i obtindrem el resultat que volíem. □

Observem que utilitzant les notacions que hem introduït anteriorment podem escriure l'equació (4.39) de la següent forma:

$$x(t) = x_0 + F_t^{(b)}(x) + G_t^{(\sigma)}(x), \qquad t \in [0,T]. \tag{4.40}$$

Donarem ara una cota superior de la norma de la solució.

Definim $\varphi(\alpha,\gamma)$ com,

$$\varphi(\alpha,\gamma) = \begin{cases} \frac{1}{1-\alpha} & \text{si } 0 \leq \gamma < \frac{1-2\alpha}{1-\alpha}, \\ > \frac{1}{1-2\alpha} & \text{si } \frac{1-2\alpha}{1-\alpha} \leq \gamma < 1, \\ \frac{1}{1-2\alpha} & \text{si } \gamma = 1. \end{cases}$$

Proposició 4.3.2 *Assumim que b i σ satisfant les mateixes hipòtesis del teorema 4.3.1 i que σ satisfà també* **(H3)**. *Llavors, l'única solució de l'equació (4.39) satisfà*

$$\|x\|_{\alpha,\infty} \leq C_\alpha^{(5)} \exp\left(C_\alpha^{(6)} \Lambda_\alpha(g)^{\frac{1}{1-\varphi(\alpha,\gamma)}} \right),$$

on les constants $C_\alpha^{(5)}$ i $C_\alpha^{(6)}$ depenen només de T, α, γ i de les constants que apareixen a les condicions **(H1)**, **(H2)** *i* **(H3)**.

Demostració: Denotarem per C una constant positiva, que dependrà de T, α, γ i de les constants que apareixen a les condicions **(H1)**, **(H2)** i **(H3)**, aquesta constant canviarà d'una línia a una altra.

Usant (4.18) tenim que

$$
\begin{aligned}
\left|G_t^{(\sigma)}(x)\right| &\leq \Lambda_\alpha(g)\left(\int_0^t \frac{|\sigma(t,s,x(s))|}{s^\alpha}ds\right. \\
&\quad \left. + \alpha\int_0^t\int_0^s \frac{|\sigma(t,s,x(s))-\sigma(t,r,x(r))|}{(s-r)^{\alpha+1}}drds\right) \\
&\leq \Lambda_\alpha(g)\left(K_0\int_0^t \frac{1+|x(s)|^\gamma}{s^\alpha}ds + \alpha K\int_0^t\int_0^s \frac{|x(s)-x(r)|}{(s-r)^{\alpha+1}}drds\right. \\
&\quad \left. +\frac{\alpha K}{(\beta-\alpha)(\beta-\alpha+1)}t^{\beta-\alpha+1}\right) \\
&\leq C\Lambda_\alpha(g)\left(1+\int_0^t\left(s^{-\alpha}\,|x(s)|^\gamma + s^{-\alpha}\int_0^s \frac{|x(s)-x(r)|}{(s-r)^{\alpha+1}}dr\right)ds\right). \quad (4.41)
\end{aligned}
$$

Llavors utilitzant els resultats (4.14) per a $K(u) = K$, (4.15) i (4.16), tenim que

$$
\begin{aligned}
\int_0^t \frac{|G_t(f)-G_s(f)|}{(t-s)^{\alpha+1}}ds \leq \Lambda_\alpha(g)&\left(\frac{KB(1-\alpha,1+\mu-\alpha)}{\mu-\alpha}t^{1+\mu-2\alpha}\right. \\
&+\alpha\int_0^t\int_0^s\int_0^u \frac{|f(t,u)-f(s,u)-f(t,y)+f(s,y)|}{(u-y)^{\alpha+1}(t-s)^{\alpha+1}}dyduds \\
&+B(2\alpha,1-\alpha)\int_0^t \frac{|f(t,u)|}{(t-u)^{2\alpha}}du \\
&\left.+\int_0^t\int_0^u \frac{|f(t,u)-f(t,y)|}{(u-y)^{\alpha+1}}(t-y)^{-\alpha}dydu\right).
\end{aligned}
$$

I ara si seguim els mateixos càlculs que hem fet per a estudiar el terme A_2 i apliquem el resultat que hem obtingut prèviament combinat amb el lema B.0.7, obtenim que

$$
\begin{aligned}
\int_0^t \frac{|G_t^{(\sigma)}(x)-G_s^{(\sigma)}(x)|}{(t-s)^{\alpha+1}}ds &\leq C\Lambda_\alpha(g)\left(\frac{KB(1-\alpha,\mu-\alpha+1)}{(\mu-\alpha)}t^{\mu-2\alpha+1}\right.\\
&+\frac{K\alpha B(1-\alpha,\beta-\alpha+1)}{(\beta-\alpha)(\beta-\alpha+2)}t^{\beta-2\alpha+2}\\
&+\frac{K}{1-\alpha}\int_0^t\int_0^u (t-u)^{1-\alpha}\frac{|x(u)-x(y)|}{(u-y)^{\alpha+1}}dydu\\
&+K_0B(2\alpha,1-\alpha)\int_0^t \frac{1+|x(u)|^\gamma}{(t-u)^{2\alpha}}du\\
&+K\int_0^t\int_0^u \frac{|x(u)-x(y)|}{(u-y)^{\alpha+1}}(t-y)^{-\alpha}dydu\\
&\left.+K\int_0^t\int_0^u (u-y)^{\beta-\alpha-1}(t-y)^{-\alpha}dydu\right)\\
&\leq C\Lambda_\alpha(g)\left(1+\int_0^t\int_0^u (t-u)^{1-\alpha}\frac{|x(u)-x(y)|}{(u-y)^{\alpha+1}}dydu\right.\\
&\left.+\int_0^t \frac{|x(u)|^\gamma}{(t-u)^{2\alpha}}du+\int_0^t\int_0^u \frac{|x(u)-x(y)|}{(u-y)^{\alpha+1}}(t-y)^{-\alpha}dydu\right)\\
&\leq C\Lambda_\alpha(g)\left(1+\int_0^t\left(\frac{|x(u)|^\gamma}{(t-u)^{2\alpha}}+(t-u)^{-\alpha}\int_0^u\frac{|x(u)-x(y)|}{(u-y)^{\alpha+1}}dy\right)du\right).
\end{aligned}
\tag{4.42}
$$

Finalment utilitzant el resultat (4.7) tenim que

$$
\left|F_t^{(b)}(x)\right|+\int_0^t \frac{\left|F_t^{(b)}(x)-F_s^{(b)}(x)\right|}{(t-s)^{\alpha+1}}ds \leq C\left(1+\int_0^t (t-s)^{-\alpha}|x(s)|ds\right). \tag{4.43}
$$

Per acabar la demostració seguirem els mateixos càlculs que en la proposició 5.1 de [NR02]. Definim

$$
h(t) := |x(t)|+\int_0^t \frac{|x(t)-x(s)|}{(t-s)^{\alpha+1}}ds.
$$

I llavors amb les cotes (4.41), (4.42) i (4.43) la següent desigualtat s'assoleix

$$
h(t)\leq C(1+\Lambda_\alpha(g))\left(1+\int_0^t\left((t-s)^{-(1-1/\varphi(\alpha,\gamma))}+s^{-\alpha}\right)h(s)ds\right).
$$

Finalment, usant la desigualtat de Gronwall (veure Lema A.0.3) acabem la demostració. □

4.4 Equacions estocàstiques

En l'últim apartat d'aquest capítol acabarem aplicant els resultats que hem obtingut per a equacions deterministes a l'equacions estocàstica (4.1).

Per tal d'obtenir aquests resultats només cal seguir exactament els mateixos raonaments que hem utilitzat en la demostració de l'apartat 3.4 del capítol anterior. I així aconseguim provar el Teorema 4.1.1 com volíem.

5

Estimacions per la solució d'equacions diferencials estocàstiques dirigides per un moviment Brownià fraccionari amb paràmetre de Hurst $\boldsymbol{H \in (\frac{1}{3}, \frac{1}{2})}$

El propòsit d'aquest capítol és obtenir estimacions precises de la norma del suprem per a la solució d'un sistema dinàmic dirigit per una funció Hölder contínua y d'ordre $\beta \in \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{2}\right)$ del tipus

$$dx_t = f(x_t)dy_t.$$

Per aconseguir-ho utilitzarem els mètodes introduïts per Hu i Nualart a [HN09].

Després, també estendrem el resultat d'existència d'una solució obtingut a [HN09] al cas on f té un creixement sublineal de la forma $|f(x)| \leq c(1 + |x|^\gamma)$ amb $\gamma < \beta$.

Finalment també obtindrem estimacions que demostren l'existència d'una solució per una equació lineal de la forma

$$dz_t = g(x_t)z_t dy_t.$$

Com a aplicació d'aquests resultats deduirem l'existència de solució i de moments per a les solucions d'equacions diferencials estocàstiques dirigides per un moviment Brownià fraccionari amb paràmetre de Hurst $H \in \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{2}\right)$. A més també obtindrem una estimació per la derivada de Malliavin amb la norma del suprem. Aquests resultats generalitzen el treball de Hu i Nualart [HN07] pel cas $H > \frac{1}{2}$.

L'esquema d'aquest capítol és el següent: al primer apartat recordarem la definició de funcional multiplicatiu i presentarem les normes que utilitzarem durant el capítol i en el segon apartat estendrem les nocions de derivades i integral fraccionàries que hem introduït en el capítol 2 apartat 2.2. En el següent apartat, el tercer, demostrarem els resultats per a equacions diferencials deterministes, mentre que en el quart capítol considerem un sistema d'equacions diferencials semilineal. Finalment acabem aquest capítol aplicant tots aquests resultats al cas d'equacions dirigides per un moviment Brownià fraccionari.

5.1 Preliminars

Fixem un interval de temps $[0,T]$. Per a qualsevol funció $x:[0,T]\to\mathbb{R}^m$, considerarem la següent norma γ-Hölder a l'interval $[s,t]\subset[0,T]$, on $0<\gamma\leq 1$,

$$\|x\|_{s,t,\gamma}=\sup_{s\leq u<v\leq t}\frac{|x_v-x_u|}{(v-u)^\gamma}.$$

Si $\Delta:=\{(s,t):0\leq s<t\leq T\}$, per a qualsevol parell $(s,t)\in\Delta$ i per a qualsevol $g:\Delta\to\mathbb{R}^m$ establim

$$\|g\|_{s,t,\gamma}=\sup_{s\leq u<v\leq t}\frac{|g(u,v)|}{(v-u)^\gamma}.$$

A més, també utilitzarem, per tal de simplificar notacions, $\|x\|_\gamma=\|x\|_{0,T,\gamma}$. Finalment, $\|\cdot\|_{s,t,\infty}$ denotarà la norma del suprem a l'interval $[s,t]$.

Ara si fixem $0<\beta\leq 1$, com a [Lyo98], introduïm la següent definició.

Definició 5.1.1 *Direm que* $(x,y,x\otimes y)$ *és un* **funcional multiplicatiu β-Hölder continu (m,d)-dimensional** *si:*

1. $x:[0,T]\to\mathbb{R}^m$ *i* $y:[0,T]\to\mathbb{R}^d$ *són funcions β-Hölder contínues,*
2. $x\otimes y:\Delta\to\mathbb{R}^m\otimes\mathbb{R}^d$ *és una funció contínua que satisfà les següents propietats:*
   a) (Propietat multiplicativa) *Per a tota u tal que $s\leq u\leq t$ tenim que*

   $$(x\otimes y)_{s,u}+(x\otimes y)_{u,t}+(x_u-x_s)\otimes(y_t-y_u)=(x\otimes y)_{s,t}.$$

   b) Per a tot parell $(s,t)\in\Delta$

   $$|(x\otimes y)_{s,t}|\leq c|t-s|^{2\beta}.$$

Observació 5.1.1 *Remarquem que utilitzem la notació $\otimes$ en dues situacions diferents. Si x i y són dues funcions β-Hölder contínues, aleshores $x\otimes y$ és una matriu les components de la qual són funcions de dues variables en Δ (aquest seria el cas del primer i el segon* *factor de la propietat multiplicativa de la defenció anterior). En canvi, si u i v són dos vectors aleshores $v \otimes u$ és una matriu definida per $(v \otimes w)^{ij} = v^i w^j$ (com seria ek cas del tercer factor de la propietat multiplicativa).*

Per exemple, si x i y són funcions diferenciables amb continuïtat, aleshores per a $i = 1, \dots, m$ i $j = 1, \dots, d$ definim

$$(x \otimes y)^{i,j}_{s,t} = \int_{s<\xi<\eta<t} dx^i_\xi dy^i_\eta.$$

Llavors, $(x, y, x \otimes y)$ és un funcional multiplicatiu 1-Hölder continu (m, d)-dimensional.

Denotarem per $M^\beta_{m,d}(0, T)$ l'espai del funcionals multiplicatius β-Hölder continus (m, d)-dimensionals.

5.2 Derivades i integrals fraccionàries

Sigui $(x, y, x \otimes y)$ un funcional multiplicatiu β-Hölder continu (m, d)-dimensional, amb $\beta \in \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{2}\right)$ i considerem també una funció diferenciable amb continuïtat $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^d \otimes \mathbb{R}^m$.

Observem que no podem utilitzar el resultat del Teorema 2.3.2, com hem fet en els dos capítols anteriors, per tal de definir la integral $\int_a^b f(x_t) dy_t$, perquè la derivada fraccionària $D^\alpha_{a+} f(x)$ no està ben definida si $\alpha > \beta$. Per tant, el que farem serà utilitzar la construcció de la integral $\int_a^b f(x_t) dy_t$ donada per Hu i Nualart a [HN09] utilitzant una extensió de les derivades fraccionàries que hem presentat al Capítol 2.

Suposem que f' és localment λ-Hölder contínua, on $\lambda > \frac{1}{\beta} - 2$ i fixem $\alpha > 0$ tal que $1 - \beta < \alpha < 2\beta$, i $\alpha < \frac{\lambda\beta + 1}{2}$.

Per $r \in [0, a]$ definim la **derivada fraccionària compensada** d'aquesta forma

$$\widehat{D}^\alpha_{a+} f(x)(r) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \left(\frac{f(x_r)}{(r-a)^\alpha} \right.$$
$$\left. + \alpha \int_a^r \frac{f(x_r) - f(x_\theta) - \sum_{i=1}^m \partial_i f(x_\theta)(x^i_r - x^i_\theta)}{(r-\theta)^{\alpha+1}} d\theta \right),$$

on $\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty r^{\alpha-1} e^{-r} dr$ és la funció d'Euler.

Considerem també la següent extensió de la derivada fraccionària per a $x \otimes y$, definida per $r \in [0, b)$

$$\mathcal{D}_{b-}^{1-\alpha}(x \otimes y)(r) = \frac{(-1)^{1-\alpha}}{\Gamma(\alpha)} \left(\frac{(x \otimes y)_{r,b}}{(b-r)^{1-\alpha}} + (1-\alpha) \int_r^b \frac{(x \otimes y)_{r,s}}{(s-r)^{2-\alpha}} ds \right).$$

Es demostra en el [HN09, Lema 6.3] que la funció $\mathcal{D}_{b^-}^{1-\alpha}(x \otimes y)(r)$ és Hölder contínua d'ordre β.

Definició 5.2.1 *Sigui $(x, y, x \otimes y) \in M_{m,d}^{\beta}(0, T)$. Sigui $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^d \otimes \mathbb{R}^m$ una funció diferenciable amb continuïtat tal que f' és localment λ-Hölder contínua, per a $\lambda > \frac{1}{\beta} - 2$. Fixem $\alpha > 0$ tal que $1 - \beta < \alpha < 2\beta$, i $\alpha < \frac{\lambda\beta+1}{2}$. Llavors, per qualssevol a, b tals que $0 \leq a < b \leq T$ definim*

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x_r) dy_r = (-1)^{\alpha} \sum_{j=1}^{d} \int_a^b \widehat{D}_{a+}^{\alpha} f_j(x)(r) D_{b-}^{1-\alpha} y_{b-}^j(r) dr \\ -(-1)^{2\alpha-1} \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{d} \int_a^b D_{a+}^{2\alpha-1} \partial_i f_j(x)(r) D_{b-}^{1-\alpha} \mathcal{D}_{b-}^{1-\alpha}(x \otimes y)^{i,j}(r) dr. \end{aligned} \tag{5.1}$$

Es demostra a [HN09] que aquesta definició és coherent amb la definició clàssica d'integral, en el sentit que si y és diferenciable amb continuïtat, llavors la integral anterior coincideix amb

$$\sum_{j=1}^{d} \int_a^b f_j(x_r)(y^j)'_r dr.$$

A més, la integral (5.1) no depèn de la tria de α i coincideix amb la integral definida utilitzant la norma de la variació $\frac{1}{\beta}$ i la teoria de *rough path analysis* (veure a [Lyo98] o [LQ02]).

5.3 Equacions diferencials deterministes

Suposem ara que $(y, y, y \otimes y)$ pertany a $M_{d,d}^{\beta}(0, T)$ i sigui $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^d \otimes \mathbb{R}^m$. El nostre objectiu és resoldre la equació diferencial

$$x_t = x_0 + \int_0^t f(x_r) dy_r, \qquad t \in [0, T]. \tag{5.2}$$

La idea principal de Hu i Nualart a [HN09] per a resoldre aquesta equació és escriure-la com un sistema de tres equacions d'incògnites $(x, x \otimes y)$. La primera equació és justament l'equació (5.2), on la part dreta és una funció que depèn de $(x, y, x \otimes y)$, d'acord amb la Definició 5.2.1. La segona equació serà

$$(x \otimes y)_{s,t} = \int_s^t f(x_r) d(y \otimes y)_{\cdot,t}(r). \tag{5.3}$$

Observem que la part dreta de (5.3) és una funció de $(x, y \otimes y, x \otimes (y \otimes y))$, utilitzant altre cop la Definició 5.2.1. Finalment, la tercera equació és la que obtenim escrivint $x \otimes (y \otimes y)$ com un funcional de $(x, y, x \otimes y, y \otimes y)$ (veure a [HN09], Equació (3.26)) com presentem a continuació per a $s \leq t \leq u$

$$\begin{aligned}
&\Big(x \otimes (y \otimes y)_{\cdot,u}\Big)_{s,t} \\
&= \frac{(-1)^{\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)} \int_s^t \left(\frac{(x_r - x_s) \otimes (y_u - y_r)}{(r-s)^{\alpha}} + \alpha \int_s^r \frac{(x_\theta - x_r) \otimes (y_r - y_\theta)}{(r-\theta)^{\alpha+1}} d\theta \right) \\
&\qquad \otimes D_{t-}^{1-\alpha} y_{t-}(r) dr \\
&\quad - \frac{(-1)^{2\alpha-1}}{\Gamma(2-2\alpha)} \int_s^t D_{t-}^{1-\alpha} \mathcal{D}_{t-}^{1-\alpha} (x \otimes y)(r) \\
&\qquad \otimes \left[\frac{y_u - y_r}{(r-s)^{2\alpha-1}} + (2\alpha - 1) \int_s^r \frac{y_\theta - y_r}{(r-\theta)^{2\alpha}} d\theta \right] dr \\
&\quad + \frac{(-1)^{2\alpha-1}}{\Gamma(2-2\alpha)} \int_s^t \left[\frac{x_r - x_s}{(r-s)^{2\alpha-1}} + (2\alpha-1) \int_s^r \frac{x_r - x_\theta}{(r-\theta)^{2\alpha}} d\theta \right] D_{t-}^{1-\alpha} \mathcal{D}_{t-}^{1-\alpha} (y \otimes y)(r) dr.
\end{aligned} \tag{5.4}$$

Per definició, una solució de l'equació (5.2) és un element de $M_{m,d}^{\beta}(0,T)$ que satisfà les equacions (5.2)-(5.4).

L'existència d'una solució de l'equació (5.2) està provada en el Teorema 4.1 de [HN09] sota unes condicions de la funció f més fortes que les nostres, entre les quals hi ha la condició que f sigui acotada. En aquest mateix treball també obtenen aquesta cota de la norma del suprem de la solució

$$\sup_{t \in [0,T]} |x_t| \leq |x_0| + 1 + T \left\{ 2k\rho_f \left(\|y\|_{\beta} + \frac{\|y \otimes y\|_{2\beta}}{\|y\|_{\beta}} \right) \right\}^{\frac{1}{\beta}},$$

observem que el problema d'aquesta cota és la norma que apareix dividint, en la cota que nosaltres aconseguim no tenim cap terme d'aquest tipus.

En aquest apartat del capítol utilitzarem la construcció de la solució de l'equació donada en el Teorema 4.1 de [HN09], i obtindrem una cota superior de la norma del suprem per a la solució, assumint que f satisfà una condició de creixement sublineal de la forma $|f(x)| \leq C\,(1+|x|^\gamma)$, per a $\gamma < \beta$. Si $(y, y, y\otimes y)$ és un element de $M^\beta_{d,d}(0,T)$, podem escriure que

$$\Lambda_y = \|y\|_\beta + \max\left(1, \|y\|^2_\beta + \|y\otimes y\|_{2\beta}\right). \tag{5.5}$$

Teorema 5.3.1 *Sigui $(y, y, y\otimes y)$ un funcional que pertanyi a $M^\beta_{d,d}(0,T)$ i $f:\mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^d$ una funció diferenciable amb continuïtat tal que f' és acotada i λ-Hölder contínua, per a $\lambda > \dfrac{1}{\beta} - 2$. Suposem que f satisfà que $|f(x)| \leq C\,(1+|x|^\gamma)$ per a $\gamma < \beta$. Llavors hi ha una solució $(x, y, x\otimes y) \in M^\beta_{m,d}(0,T)$ per a l'equació (5.2).*

(i) Si la funció f és acotada (cas $\gamma = 0$), llavors x satisfà la següent estimació

$$\sup_{t\in[0,T]} |x_t| \leq |x_0| + 1 + T\,(K\rho_f\Lambda_y)^{\frac{1}{\beta}}, \tag{5.6}$$

on $\rho_f = \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty + \|f'\|_\lambda$ i K és una constant universal que depèn de β i λ.

(ii) En el cas general obtenim que

$$\sup_{t\in[0,T]} |x_t| \leq 2\left(|x_0| + 1 + T\left((K\widehat{\rho}_f)^{\frac{1}{\beta}} + 2(KC)^{\frac{1}{\beta}}\right)\Lambda_y^{\frac{1}{\beta}}\right)^{\frac{\beta}{\beta-\gamma}}, \tag{5.7}$$

on $\widehat{\rho}_f = \|f'\|_\infty + \|f'\|_\lambda$ i K és una constant universal que depèn de β i λ.

Demostració: Per tal de simplificar la demostració assumirem que $d = m = 1$.

Fixem $\alpha > 0$ tal que $1-\beta < \alpha < 2\beta$ i $\alpha < \dfrac{\lambda\beta+1}{2}$. Aleshores considerem l'aplicació $J : M^\beta_{1,1}(0,T) \to M^\beta_{1,1}(0,T)$ donada per $J(x, y, x\otimes y) = (J_1, y, J_2)$ on J_1 (resp. J_2) és la part dreta de l'Equació (5.2) (resp. de l'Equació (5.3)). Per tant ens queda

$$J_1(x, y, x\otimes y)(t) = x_0 + \int_0^t f(x_r)dy_r, \tag{5.8}$$

$$J_2(x, y, x\otimes y)(s,t) = \int_s^t f(x_r)d(y\otimes y)_{\cdot,t}(r). \tag{5.9}$$

Remarquem que aquesta aplicació està ben definida ja que $(J_1,\, y,\, J_2)$ és un funcional multiplicatiu real β-Hölder continu per cada $(x, y, x\otimes y) \in M_{1,1}^{\beta}(0,T)$.

Ara utilitzarem les estimacions de les normes Hölder de J_1 i J_2 obtingudes a la Proposició 4.1 de [HN09]. D'aquesta manera ens queda que,

$$\begin{aligned} \|J_1\|_{s,t,\beta} \leq K &\Big[|f(x_s)|\, \|y\|_{s,t,\beta} + \Big(\|x\otimes y\|_{s,t,2\beta} + \|x\|_{s,t,\beta}\, \|y\|_{s,t,\beta}\Big) \\ &\times \Big(\|f'\|_{\infty} + \|f'\|_{\lambda}\, \|x\|_{s,t,\beta}^{\lambda}\, (t-s)^{\lambda\beta}\Big)\, (t-s)^{\beta}\Big], \end{aligned} \tag{5.10}$$

$$\begin{aligned} \|J_2\|_{s,t,2\beta} \leq K &\Big[|f(x_s)|\, \Big(\|y\otimes y\|_{s,t,2\beta} + \|y\|_{s,t,\beta}^{2}\Big) \\ &+ \Big(\|f'\|_{\infty} + \|f'\|_{\lambda}\, \|x\|_{s,t,\beta}^{\lambda}\, (t-s)^{\lambda\beta}\Big) \Big(\|y\|_{s,t,\beta}^{2}\, \|x\|_{s,t,\beta} \\ &+ \|y\|_{s,t,\beta}\, \|x\otimes y\|_{s,t,2\beta} + \|x\|_{s,t,\beta}\, \|y\otimes y\|_{s,t,2\beta}\Big)\, (t-s)^{\beta}\Big]. \end{aligned} \tag{5.11}$$

A partir d'aquí, dividirem la demostració en tres passos.

<u>Pas 1:</u> *Busquem un conjunt C^y d'elements $(x, y, x\otimes y) \in M_{1,1}^{\beta}(0,T)$ tal que $J(C^y) \subset C^y$.*

Utilitzant que $\gamma < \beta$, sabem que existeix una única constant $M_y > 0$ tal que

$$|x_0| + 1 + T\left(K\left(\hat{\rho}_f + C(1+M_y^{\gamma})\right) \varLambda_y\right)^{\frac{1}{\beta}} = M_y. \tag{5.12}$$

Per simplificar, definim

$$H_y := K\left(\hat{\rho}_f + C(1+M_y^{\gamma})\right),$$

i

$$\varDelta_y := (H_y \varLambda_y)^{-\frac{1}{\beta}}.$$

Anem a definir ara el conjunt C^y i comprovarem que $J(C^y) \subset C^y$. Sigui C^y el conjunt d'elements $(x, y, x\otimes y) \in M_{1,1}^{\beta}(0,T)$ que compleixen les següents condicions

$$\|x\|_{\infty} \leq M_y, \tag{5.13}$$

$$\sup_{0<t-s\leq \varDelta_y} \|x\|_{s,t,\beta} \leq H_y \Big(\|y\|_{\beta} + 1\Big), \tag{5.14}$$

$$\sup_{0<t-s\leq \varDelta_y} \|x\otimes y\|_{s,t,2\beta} \leq H_y \Big(\|y\|_{\beta} + \|y\|_{\beta}^{2} + \|y\otimes y\|_{2\beta}\Big). \tag{5.15}$$

Volem demostrar que $J\left(C^y\right) \subset C^y$. Suposem que $(x, y, x\otimes y) \in C^y$ i fixem s i t tals que

$$0 < t - s \leq \varDelta_y. \tag{5.16}$$

Per tant es compleix que que

$$(t-s)^{\beta} \leq \Delta_y^{\beta} \leq \frac{1}{H_y\left(\|y\|_{\beta}+1\right)} \tag{5.17}$$

i també que

$$(t-s)^{\beta} \leq \Delta_y^{\beta} \leq \frac{1}{H_y\left(\|y\|_{\beta}+\|y\|_{\beta}^2+\|y\otimes y\|_{2\beta}\right)}. \tag{5.18}$$

Llavors, utilitzant les condicions (5.14) i (5.17) per la primera desigualtat, i la condició (5.15) i la (5.18) per la segona, obtenim que

$$(t-s)^{\beta}\|x\|_{s,t,\beta} \leq 1, \tag{5.19}$$

$$(t-s)^{\beta}\|x\otimes y\|_{s,t,2\beta} \leq 1. \tag{5.20}$$

Com a conseqüència, de l'estimació (5.10) i a partir dels resultats (5.19) i (5.20) obtenim fàcilment que

$$\begin{aligned}\|J_1\|_{s,t,\beta} &\leq K\left[C(1+\|x\|_{\infty}^{\gamma})\|y\|_{\beta}+(1+\|y\|_{\beta})(\|f'\|_{\infty}+\|f'\|_{\lambda})\right]\\ &\leq K\left[\|y\|_{\beta}\left(C(1+M_y^{\gamma})+\|f'\|_{\infty}+\|f'\|_{\lambda}\right)+\|f'\|_{\infty}+\|f'\|_{\lambda}\right]\\ &\leq H_y\left(\|y\|_{\beta}+1\right).\end{aligned} \tag{5.21}$$

A més a més, a partir de l'estimació (5.11) i utilitzant altra vegada les desigualtats (5.19) i (5.20) tenim que

$$\begin{aligned}\|J_2\|_{s,t,2\beta} &\leq K\Big[C(1+\|x\|_{\infty}^{\gamma})\left(\|y\otimes y\|_{2\beta}+\|y\|_{\beta}^2\right)\\ &\qquad+(\|f'\|_{\infty}+\|f'\|_{\lambda})\left(\|y\|_{\beta}^2+\|y\|_{\beta}+\|y\otimes y\|_{2\beta}\right)\Big]\\ &\leq K\Big[\left(C(1+M_y^{\gamma})+\|f'\|_{\infty}+\|f'\|_{\lambda}\right)\left(\|y\otimes y\|_{2\beta}+\|y\|_{\beta}^2\right)\\ &\qquad+(\|f'\|_{\infty}+\|f'\|_{\lambda})\|y\|_{\beta}\Big]\\ &\leq H_y\left(\|y\|_{\beta}+\|y\|_{\beta}^2+\|y\otimes y\|_{2\beta}\right).\end{aligned}$$

Això prova que les estimacions (5.14) i (5.15) són certes per a J_1 i J_2 respectivament.

Ara doncs, només ens queda provar que (5.13) també es compleix per a J_1.

Sigui $N = [T\Delta_y^{-1}] + 1$ i definim la partició $\{t_0, \ldots, t_N\}$ de l'interval $[0, T]$ donada per $t_i = i\Delta_y$, $i = 0, \ldots, N-1$ i $t_N = T$. A partir de les estimacions (5.17) i (5.21) obtenim que

$$\sup_{u \in [t_{i-1}, t_i]} |(J_1)_u| \leq \left|(J_1)_{t_{i-1}}\right| + (t_{i-1} - t_i)^{\beta} \|J_1\|_{t_{i-1}, t_i, \beta} \leq \left|(J_1)_{t_{i-1}}\right| + 1.$$

Aleshores, també és cert que

$$\sup_{u \in [0, t_i]} |(J_1)_u| \leq \sup_{u \in [0, t_{i-1}]} |(J_1)_u| + 1.$$

I per tant, utilitzant un argument d'iteració obtenim finalment que

$$\sup_{u \in [0, T]} |(J_1)_u| \leq |x_0| + N \leq |x_0| + 1 + T\Delta_y^{-1} = |x_0| + 1 + T(H_y\Lambda_y)^{\frac{1}{\beta}} = M_y.$$

Així hem provat que, $(J_1, y, J_2) \in C^y$.

Pas 2: *Provem l'existència d'una solució a l'Equació (5.2).*

Per tal de demostrar l'existència de solució podem construir una seqüència de funcions $x^{(n)}$ i $(x \otimes y)^{(n)}$ tals que,

$$x^{(0)} = x_0, \qquad (x \otimes y)^{(0)} = 0$$

i

$$\begin{aligned} x^{(n)} &= J_1\left(x^{(n-1)}, y, (x \otimes y)^{(n-1)}\right), \\ (x \otimes y)^{(n)} &= J_2\left(x^{(n-1)}, y, (x \otimes y)^{(n-1)}\right). \end{aligned}$$

Observem que $\left(x^{(0)}, y, (x \otimes y)^{(0)}\right) \in C^y$, i llavors com que en el Pas 1 hem provat que $J(C^y) \subset C^y$, també és cert que $\left(x^{(n)}, y, (x \otimes y)^{(n)}\right) \in C^y$ per cada $n \geq 1$. Com a conseqüència d'això, tenim que $\|x^{(n)}\|_\infty \leq M_y$.

Per altra banda, podem estimar $\left\|x^{(n)}\right\|_\beta$ de la següent manera utilitzant la condició (5.14)

$$\begin{aligned} \left\|x^{(n)}\right\|_\beta &\leq \sup_{\substack{0 \leq s < t \leq T \\ t-s \leq \Delta_y}} \frac{\left|x_t^{(n)} - x_s^{(n)}\right|}{(t-s)^\beta} + \sup_{\substack{0 \leq s < t \leq T \\ t-s > \Delta_y}} \frac{\left|x_t^{(n)} - x_s^{(n)}\right|}{(t-s)^\beta} \\ &\leq H_y\left(\|y\|_\beta + 1\right) + 2\Delta_y^{-\beta} M_y := C_1. \end{aligned} \tag{5.22}$$

Això implica que la successió de funcions $x^{(n)}$ és acotada a $C^\beta(0, T)$. Per tant, existeix una subsuccessió que convergeix amb la norma β'-Hölder si $\beta' < \beta$.

D'una manera molt similar obtenim el mateix resultat per a $(x \otimes y)^{(n)}$. De fet, utilitzant la mateixa definició de t_i que en el Pas 1, podem escriure que

$$\left\|(x \otimes y)^{(n)}\right\|_{t_{i-1},t_i,2\beta} \leq H_y \left(\|y\|_\beta + \|y\|_\beta^2 + \|y \otimes y\|_{2\beta}\right),$$

i per tant, utilitzant el resultat (5.20) tenim que

$$\begin{aligned}\sup_{t_{i-1}\leq s<t\leq t_i} \left|(x \otimes y)^{(n)}_{s,t}\right| &\leq \left\|(x \otimes y)^{(n)}\right\|_{t_{i-1},t_i,2\beta}(t_i - t_{i-1})^{2\beta} \\ &\leq (t_i - t_{i-1})^\beta \leq \Delta_y^\beta,\end{aligned}$$

i iterant la desigualtat obtenim que

$$\sup_{0\leq s<t\leq T} \left| (x \otimes y)^{(n)}_{s,t} \right| \leq N\Delta_y^\beta \leq \Delta_y^\beta + T\Delta_y^{\beta-1}.$$

Utilitzant el mateix argument que a (5.22) per a $(x \otimes y)^{(n)}$ obtenim que

$$\left\| (x \otimes y)^{(n)} \right\|_{2\beta} \leq H_y \left(\|y\|_\beta^2 + \|y\|_\beta + \|y \otimes y\|_{2\beta}\right) + \Delta_y^{-\beta} + T\Delta_y^{-\beta-1} := C_2. \qquad (5.23)$$

Denotem per $C^{2\beta}(\Delta)$ el conjunt de funcions g sobre Δ tals que $\|g\|_{2\beta} < \infty$. Aleshores, hem demostrat que la successió de funcions $(x \otimes y)^{(n)}$ és acotada a $C^{2\beta}(\Delta)$. Aleshores, existeix una subsuccessió tal que convergeix amb la norma β'-Hölder si $\beta' < \beta$.

Ara quan n tendeix a infinit és fàcil veure que el límit és una solució, i que el límit defineix un funcional multiplicatiu β-Hölder continu $(x, y, x\otimes y)$. Per tant, l'existència d'una solució ha estat provada i aquesta solució satisfà les condicions (5.14) i la desigualtat (5.15) si es compleix (5.16).

Pas 3: *Provarem el resultat (5.7).*

Per provar que és certa la desigualtat (5.7), és suficient veure que M_y està acotada per la part dreta de (5.7). A partir de la igualtat (5.12) podem escriure

$$M_y \leq A' + BM_y^{\frac{\gamma}{\beta}}, \qquad (5.24)$$

amb

$$A' = |x_0| + 1 + T2^{\frac{1}{\beta}-1} \left[K\left(\hat{\rho}_f + C\right)\Lambda_y\right]^{\frac{1}{\beta}},$$

i

$$B = T2^{\frac{1}{\beta}-1}\left[CK\Lambda_y\right]^{\frac{1}{\beta}}.$$

La desigualtat (5.24) segueix essent certa si substituïm A' per A, on

$$A = \left[|x_0| + 1 + T2^{\frac{1}{\beta}-1}\left((K\hat{\rho}_f)^{\frac{1}{\beta}} + 2(CK)^{\frac{1}{\beta}}\right)\Lambda_y^{\frac{1}{\beta}}\right]^{\frac{\beta}{\beta-\gamma}}.$$

Ara, si N_y és tal que $N_y = A + BN_y^{\frac{\gamma}{\beta}}$, llavors obtenim que

$$M_y \leq A + BN_y^{\frac{\gamma}{\beta}} = N_y.$$

Per tant en tenim prou calculant una cota superior per a N_y.

Utilitzant que $N_y \geq A$ i que $\gamma < \beta$ tenim que

$$A + \frac{B}{A^{1-\frac{\gamma}{\beta}}}N_y = A + BN_y^{\frac{\gamma}{\beta}}\frac{N_y^{1-\frac{\gamma}{\beta}}}{A^{1-\frac{\gamma}{\beta}}} \geq A + BN_y^{\frac{\gamma}{\beta}} = N_y,$$

i això implica que

$$A \geq \left(1 - \frac{B}{A^{1-\frac{\gamma}{\beta}}}\right)N_y.$$

Per tant si ara comprovem que $\frac{B}{A^{1-\frac{\gamma}{\beta}}} \leq \frac{1}{2}$, tindrem que $N_y \leq 2A$, i la desigualtat (5.7) serà immediata. Podem escriure que

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}A^{\frac{\beta-\gamma}{\beta}} &= \frac{1}{2}\left(|x_0| + 1 + T2^{\frac{1}{\beta}-1}\left(K\hat{\rho}_f\Lambda_y\right)^{\frac{1}{\beta}} + 2T2^{\frac{1}{\beta}-1}\left(KC\Lambda_y\right)^{\frac{1}{\beta}}\right)\\ &= \frac{1}{2}\left(|x_0| + 1 + T2^{\frac{1}{\beta}-1}\left(K\hat{\rho}_f\Lambda_y\right)^{\frac{1}{\beta}}\right) + B \geq B,\end{aligned}$$

i aquest resultat completa la demostració. □

En el Teorema 4.2 de [HN09] es prova la unicitat de la solució assumint que$f$ és dues vegades diferenciable amb continuïtat, f'' és λ-Hölder contínua per a $\lambda > \frac{1}{\beta} - 2$, i f, f' i f'' són acotades.

5.4 Un sistema d'equacions semilineal

Considerem el següent sistema d'equacions

$$x_t = x_0 + \int_0^t f(x_r) dy_r, \tag{5.25}$$

$$z_t = z_0 + \int_0^t g(x_r) z_r dy_r, \tag{5.26}$$

on $y : [0,T] \to \mathbb{R}^d$ és tal que $(y, y, y \otimes y) \in M^{\beta}_{d,d}(0,T)$. Considerem les següents condicions sobre els coeficients:

(H1) $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^d$ i $g : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^d$ són funcions acotades amb derivades acotades, i a més f' i g' són λ-Hölder contínues d'ordre $\lambda > \dfrac{1}{\beta} - 2$.

Amb el resultat que hem obtingut del Teorema 5.3.1 sabem que existeix un funcional multiplicatiu (m,d)-dimensional i β-Hölder continu $(x, y, x \otimes y)$ tal que és una solució de l'Equació (5.25). En aquest apartat treballarem amb l'Equació (5.26), on $(x, y, x \otimes y)$ serà la solució de l'Equació (5.25) construïda com en el Teorema 5.3.1.

Llavors, considerarem que una solució de l'Equació (5.26) és un funcional multiplicatiu β-Hölder continu $(z, y, z \otimes y) \in M^{\beta}_{n,d}(0,T)$ tal que satisfaci la igualtat (5.26), l'equació

$$(z \otimes y)_{s,t} = \int_s^t g(x_r) z_r d(y \otimes y)_{\cdot,r}, \tag{5.27}$$

i una equació similar a la (5.4) expressant $z \otimes (y \otimes y)$ com una funció de z, y, $z \otimes y$ i $y \otimes y$.

Podem utilitzar altra vegada la Definició 5.2.1 per tal de definir la integral

$$\int_a^b g(x_r) z_r dy_r \tag{5.28}$$

utilitzant càlcul fraccionari.

Observem que per a la integral (5.28), la derivada fraccionària compensada la podem escriure de la següent manera per $0 \le a < r \le T$ i $j = 1, \dots, d$

$$\begin{aligned} \widehat{D}^{\alpha}_{a+} \left(g_j(x) z_\cdot \right)(r) &= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \Bigg(\frac{g_j(x_r) z_r}{(r-a)^{\alpha}} \\ &\quad + \alpha \int_a^r \frac{g_j(x_r) z_r - g_j(x_\theta) z_\theta - \sum_{i=1}^m \partial_i g_j(x_\theta) z_\theta (x_r^i - x_\theta^i) - g_j(x_\theta)(z_r - z_\theta)}{(r-\theta)^{\alpha+1}} d\theta \Bigg). \end{aligned} \tag{5.29}$$

Ara suposem que $(x, y, x \otimes y) \in M_{m,d}^{\beta}(0, T)$ i $(z, y, z \otimes y) \in M_{n,d}^{\beta}(0, T)$. També fixem $\alpha > 0$ tal que $1 - \beta < \alpha < 2\beta$, i $\alpha < \frac{\lambda\beta+1}{2}$. Llavors, la Definició 5.2.1 aplicada a la integral (5.28) s'escriu de la manera següent per $0 \leq s < t \leq T$

$$\begin{aligned}\int_a^b g(x_r) z_r dy_r &= (-1)^{\alpha} \sum_{j=1}^{d} \int_a^b \widehat{D}_{a^+}^{\alpha} \left(g_j(x) z. \right)(r) D_{t^-}^{1-\alpha} y_{t^-}^{j}(r) dr \\ &\quad -(-1)^{2\alpha-1} \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{d} \int_a^b D_{a^+}^{2\alpha-1} \left(\partial_i g_j(x) z. \right)(r) D_{t^-}^{1-\alpha} \mathcal{D}_{t^-}^{1-\alpha} (x \otimes y)^{i,j}(r) dr \\ &\quad -(-1)^{2\alpha-1} \sum_{\ell=1}^{n} \sum_{j=1}^{d} \int_a^b D_{a^+}^{2\alpha-1} g_{\ell,j}(x)(r) D_{t^-}^{1-\alpha} \mathcal{D}_{t^-}^{1-\alpha} (z \otimes y)^{\ell,j}(r) dr.\end{aligned} \tag{5.30}$$

Les dues proposicions següents ens donaran unes estimacions necessàries per a la integral (5.28) i la integral que apareix a la part dreta de l'Equació (5.27). Aquestes estimacions són similars a les utilitzades en el Teorema 5.3.1 per obtenir els resultats referents a l'equació (5.25).

Denotem per K una constant genèrica que depèn només dels paràmetres α, β i λ. Farem ús de la següent notació, per $(x, y, x \otimes y) \in M_{m,d}^{\beta}(0, T)$, $(z, y, z \otimes y) \in M_{n,d}^{\beta}(0, T)$ i $0 \leq s < t \leq T$:

$$\begin{aligned}\Phi_{s,t,\beta}(x, y) &= \|x \otimes y\|_{s,t,2\beta} + \|x\|_{s,t,\beta} \|y\|_{s,t,\beta}, \\ \Phi_{s,t,\beta}(x, y, z) &= \|y\|_{s,t,\beta} \|x\|_{s,t,\beta} \|z\|_{s,t,\beta} + \|z\|_{s,t,\beta} \|x \otimes y\|_{s,t,2\beta} \\ &\quad + \|x\|_{s,t,\beta} \|y \otimes z\|_{s,t,2\beta}.\end{aligned}$$

Proposició 5.4.1 *Sigui $(x, y, x \otimes y) \in M_{m,d}^{\beta}(0, T)$ i $(z, y, z \otimes y) \in M_{n,d}^{\beta}(0, T)$. Assumim la condició* **(H1)**. *Llavors per qualssevol a i b tals que $0 \leq a < b \leq T$ tenim que*

$$\begin{aligned}\left\| \int g(x_r) z_r dy_r \right\|_{a,b,\beta} &\leq K \Big(\|y\|_{a,b,\beta} \|g\|_{\infty} \|z\|_{a,b,\infty} \\ &\quad + \Phi_{a,b,\beta}(x, y)(b-a)^{\beta} \Big(\|g'\|_{\lambda} \|z\|_{a,b,\infty} \|x\|_{a,b,\beta}^{\lambda} (b-a)^{\lambda\beta} \\ &\quad + \|g'\|_{\infty} \|z\|_{a,b,\beta} (b-a)^{\beta} + \|g'\|_{\infty} \|z\|_{a,b,\infty} \Big) \\ &\quad + \Phi_{a,b,\beta}(z, y)(b-a)^{\beta} \Big(\|g\|_{\infty} + \|g'\|_{\infty} \|x\|_{a,b,\beta} (b-a)^{\beta} \Big) \Big).\end{aligned} \tag{5.31}$$

Demostració: Sense pèrdua de generalitat assumirem que $d = m = n = 1$. Per qualssevol $\theta,\ r \in [a, b]$, $\theta < r$, tenim que

$$
\begin{aligned}
& g(x_r)z_r - g(x_\theta)z_\theta - g'(x_\theta)z_\theta(x_r - x_\theta) - g(x_\theta)(z_r - z_\theta) \\
&\qquad = z_r \left(g(x_r) - g(x_\theta)\right) - g'(x_\theta)z_\theta(x_r - x_\theta) \\
&\qquad = z_r \int_0^1 g'(\mu x_r + (1-\mu)x_\theta)(x_r - x_\theta)d\mu - g'(x_\theta)z_\theta(x_r - x_\theta) \\
&\qquad = (x_r - x_\theta)\left[z_r \int_0^1 \left(g'(\mu x_r + (1-\mu)x_\theta) - g'(x_\theta)\right)d\mu - g'(x_\theta)(z_r - z_\theta)\right].
\end{aligned}
\tag{5.32}
$$

Per tant, utilitzant els resultats (5.29) i (5.32) obtenim

$$
\begin{aligned}
\left|\widehat{D}^{\alpha}_{a+}\left(g(x)z.\right)(r)\right| &\le \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\Bigg(\frac{\|g\|_\infty |z_r|}{(r-a)^\alpha} \\
&\quad + \alpha \|x\|_{a,r,\beta} \int_a^r \frac{|z_r| \, \|g'\|_\lambda \|x\|^\lambda_{a,r,\beta} (r-\theta)^{\lambda\beta} + \|g'\|_\infty \|z\|_{a,r,\beta} (r-\theta)^\beta}{(r-\theta)^{\alpha-\beta-1}} d\theta\Bigg) \\
&\le K \Big(\|g\|_\infty \|z\|_{a,r,\infty} (r-a)^{-\alpha} + \|x\|^{\lambda+1}_{a,r,\beta} \|g'\|_\lambda \|z\|_{a,r,\infty} (r-a)^{(\lambda+1)\beta-\alpha} \\
&\quad + \|g'\|_\infty \|z\|_{a,r,\beta} \|x\|_{a,r,\beta} (r-a)^{2\beta-\alpha}\Big).
\end{aligned}
\tag{5.33}
$$

Les següents estimacions són les mateixes que les que s'obtenen a la Proposició 3.4 de [HN09],

$$\left|D^{1-\alpha}_{b-} y^j_{b-}(r)\right| \le K \|y\|_{r,b,\beta} (b-r)^{\alpha+\beta-1}, \tag{5.34}$$

$$\left|D^{1-\alpha}_{b-} \mathcal{D}^{1-\alpha}_{b-}(x \otimes y)(r)\right| \le K \Phi_{r,b,\beta}(x,y)(b-r)^{2\beta+2\alpha-2}, \tag{5.35}$$

$$\left|D^{1-\alpha}_{b-} \mathcal{D}^{1-\alpha}_{b-}(z \otimes y)(r)\right| \le K \Phi_{r,b,\beta}(z,y)(b-r)^{2\beta+2\alpha-2}. \tag{5.36}$$

Per altra banda, a partir de la definició de les derivades de Weyl que hem donat al capítol 2, i utilitzant el resultat (2.3), obtenim que

$$
\begin{aligned}
\left|D^{2\alpha-1}_{a+}\left(g'(x)z.\right)(r)\right| &\le K \Bigg(\frac{\|g'\|_\infty \|z\|_{a,r,\infty}}{(r-a)^{2\alpha-1}} \\
&\quad + \int_a^r \frac{g'(x_r)(z_r - z_\theta) + z_\theta(g'(x_r) - g'(x_\theta))}{(r-\theta)^{2\alpha}} d\theta\Bigg) \\
&\le K \Big(\|g'\|_\infty \|z\|_{a,r,\infty} (r-a)^{1-2\alpha} + \|g'\|_\infty \|z\|_{a,r,\beta} (r-a)^{\beta-2\alpha+1} \\
&\quad + \|g'\|_\lambda \|z\|_{a,r,\infty} \|x\|^\lambda_{a,r,\beta} (r-a)^{\beta\lambda-2\alpha+1}\Big),
\end{aligned}
\tag{5.37}
$$

i

$$\left|D_{a^+}^{2\alpha-1}g(x)(r)\right| \leq K\left(\|g\|_\infty (r-a)^{1-2\alpha} + \|g'\|_\infty \|x\|_{a,r,\beta}(r-a)^{\beta-2\alpha+1}\right). \tag{5.38}$$

Per tant, substituïnt les estimacions (5.33)-(5.38) al resultat (5.30) s'aconsegueix que

$$\begin{aligned}
\left|\int_a^b g(x_r)z_r dy_r\right| &\leq K\|y\|_{a,b,\beta}\left(\|g\|_\infty \|z\|_{a,b,\infty}\int_a^b (r-a)^{-\alpha}(b-r)^{\alpha+\beta-1}dr\right.\\
&\quad + \|x\|_{a,b,\beta}^{\lambda+1}\|g'\|_\lambda \|z\|_{a,b,\infty}\int_a^b (r-a)^{(\lambda+1)\beta-\alpha}(b-r)^{\alpha+\beta-1}dr\\
&\quad \left. + \|g'\|_\infty \|z\|_{a,b,\beta}\|x\|_{a,b,\beta}\int_a^b (r-a)^{2\beta-\alpha}(b-r)^{\alpha+\beta-1}dr\right)\\
&+K\Phi_{a,b,\beta}(x,y)\int_a^b (b-r)^{2\beta+2\alpha-2}\left(\|g'\|_\infty \|z\|_{a,b,\infty}(r-a)^{1-2\alpha}\right.\\
&\quad \left. + \|g'\|_\infty \|z\|_{a,b,\beta}(r-a)^{\beta+1-2\alpha} + \|g'\|_\lambda \|z\|_{a,b,\infty}\|x\|_{a,b,\beta}^{\lambda}(r-a)^{\beta\lambda-2\alpha+1}\right)dr\\
&+K\Phi_{a,b,\beta}(z,y)\int_a^b (b-r)^{2\beta+2\alpha-2}\left(\|g\|_\infty (r-a)^{1-2\alpha} + \|g'\|_\infty \|x\|_{a,b,\beta}(r-a)^{\beta-2\alpha+1}\right)dr.
\end{aligned}$$

Finalment, usant que

$$\int_a^b (r-a)^p(b-r)^q dr = B(p+1,q+1)(b-a)^{p+q+1},$$

on $B(p,q)$ és la funció Beta, obtenim

$$\begin{aligned}
\left|\int_a^b g(x_r)z_r dy_r\right| &\leq K(b-a)^\beta \|y\|_{a,b,\beta}\|g\|_\infty \|z\|_{a,b,\infty}\\
&+K\Phi_{a,b,\beta}(x,y)(b-a)^{2\beta}\left(\|x\|_{a,b,\beta}^{\lambda}\|g'\|_\lambda \|z\|_{a,b,\infty}(b-a)^{\lambda\beta}\right.\\
&\quad \left. + \|g'\|_\infty \|z\|_{a,b,\beta}(b-a)^\beta + \|g'\|_\infty \|z\|_{a,b,\infty}\right)\\
&+K\Phi_{a,b,\beta}(z,y)(b-a)^{2\beta}\left(\|g\|_\infty + \|g'\|_\infty \|x\|_{a,b,\beta}(b-a)^\beta\right),
\end{aligned}$$

i això implica fàcilment el resultat (5.31) que volíem. □

Proposició 5.4.2 *Sigui* $(x, y, x \otimes y) \in M^{\beta}_{m,d}(0,T)$ *i* $(z, y, z \otimes y) \in M^{\beta}_{n,d}(0,T)$. *Assumim la condició* **(H1)**. *Fixem* $\alpha > 0$ *tal que* $1-\beta < \alpha < 2\beta$, $\alpha < \frac{\lambda\beta+1}{2}$. *Llavors per qualssevol* a *i* b *tals que* $0 \le a < b \le T$ *tenim*

$$\begin{aligned}\left\| \int g(x_r) z_r d(y \otimes y)_{r,\cdot} \right\|_{a,b,2\beta} &\le K\Phi_{a,b,\beta}(y,y) \|g\|_{\infty} \|z\|_{a,b,\infty} \\ &+K\Phi_{a,b,\beta}(x,y,y)(b-a)^{\beta} \Big(\|x\|^{\lambda}_{a,b,\beta} \|g'\|_{\lambda} \|z\|_{a,b,\infty} (b-a)^{\lambda\beta} \\ &\quad + \|g'\|_{\infty} \|z\|_{a,b,\beta} (b-a)^{\beta} + \|g'\|_{\infty} \|z\|_{a,b,\infty} \Big) \\ &+K\Phi_{a,b,\beta}(z,y,y)(b-a)^{\beta} \Big(\|g\|_{\infty} + \|g'\|_{\infty} \|x\|_{s,t,\beta} (b-a)^{\beta} \Big).\end{aligned}$$

Demostració: Per tal de simplificar la demostració assumim que $d = m = n = 1$. A partir de la Proposició 3.9 de [HN09], tenim que

$$\|(y \otimes y)_{\cdot,b}\|_{a,b,2\beta} \le \Phi_{a,b,\beta}(y,y)(b-a)^{\beta}, \tag{5.39}$$

i que

$$\|x \otimes (y \otimes y)_{\cdot,b}\|_{a,b,2\beta} \le K\Phi_{a,b,\beta}(x,y,y)(b-a)^{\beta}.$$

Aquestes desigualtats impliquen que

$$\begin{aligned}\Phi_{a,b,\beta}(x,(y \otimes y)_{\cdot,b}) &\le K\Phi_{a,b,\beta}(x,y,y)(b-a)^{\beta} + \|x\|_{a,b,\beta} \Phi_{a,b,\beta}(y,y)(b-a)^{\beta} \\ &\le K\Phi_{a,b,\beta}(x,y,y)(b-a)^{\beta}.\end{aligned} \tag{5.40}$$

Estimacions similars s'assoleixen substituïnt x per z.

I ara, a partir de la desigualtat (5.31) i utilitzant els resultats (5.39) i (5.40) tenim que,

$$
\begin{aligned}
\left|\int_a^b g(x_r) z_r d(y\otimes y)_{r,b}\right| &\le K(b-a)^{\beta} \left\|(y\otimes y)_{\cdot,b}\right\|_{a,b,\beta} \|g\|_{\infty} \|z\|_{a,b,\infty} \\
&\quad + K\Phi_{a,b,\beta}(x,(y\otimes y)_{\cdot,b})(b-a)^{2\beta}\left(\|x\|_{a,b,\beta}^{\lambda} \|g'\|_{\lambda} \|z\|_{a,b,\infty}(b-a)^{\lambda\beta}\right. \\
&\quad \left. + \|g'\|_{\infty} \|z\|_{a,b,\beta}(b-a)^{\beta} + \|g'\|_{\infty} \|z\|_{a,b,\infty}\right) \\
&\quad + K\Phi_{a,b,\beta}(z,(y\otimes y)_{\cdot,b})(b-a)^{2\beta}\left(\|g\|_{\infty} + \|g'\|_{\infty}\|x\|_{a,b,\beta}(b-a)^{\beta}\right) \\
&\le K(b-a)^{2\beta}\Phi_{a,b,\beta}(y,y)\|g\|_{\infty}\|z\|_{a,b,\infty} \\
&\quad + K\Phi_{a,b,\beta}(x,y,y)(b-a)^{3\beta}\left(\|x\|_{a,b,\beta}^{\lambda} \|g'\|_{\lambda} \|z\|_{a,b,\infty}(b-a)^{\lambda\beta}\right. \\
&\quad \left. + \|g'\|_{\infty} \|z\|_{a,b,\beta}(b-a)^{\beta} + \|g'\|_{\infty} \|z\|_{a,b,\infty}\right) \\
&\quad + K\Phi_{a,b,\beta}(z,y,y)(b-a)^{3\beta}\left(\|g\|_{\infty} + \|g'\|_{\infty}\|x\|_{a,b,\beta}(b-a)^{\beta}\right),
\end{aligned}
$$

i aquesta desigualtat ens implica el resultat desitjat. □

Ara ja tenim tots els resultats necessaris per tal d'establir l'existència d'una solució per a l'Equació (5.26), igual que hem fet abans per a l'Equació (5.2). També podem trobar ja una cota superior per aquesta solució.

Recordem que, per definició, una solució de l'Equació (5.26) és un element de $M^{\beta}_{n,d}(0,T)$ tal que es compleixen les dues equacions següents

$$z_t = z_0 + \int_0^t g(x_r) z_r dy_r, \tag{5.41}$$

$$(z\otimes y)^{k,l}_{s,t} = \sum_{j=1}^{d} \int_s^t \left(g_j(x_r) z_r\right)^k d(y\otimes y)^{j,l}_{\cdot,t}(r), \tag{5.42}$$

per a $k = 1,\dots,n$ i $l = 1,\dots,d$, i també es compleix una equació igual a l'Equació (5.4) per z expressant $z\otimes(y\otimes y)$ com a funció de z, y, $z\otimes y$ i $y\otimes y$.

Teorema 5.4.3 *Suposem que f i g satisfan la condició* **(H1)**. *Sigui $(y, y, y \otimes y) \in M_{d,d}^{\beta}(0,T)$. Suposem que $(x, y, x \otimes y) \in M_{m,d}^{\beta}(0,T)$ és la solució de l'Equació (5.25) construïda en el Teorema 5.3.1. Sigui $\rho_g = \|g\|_\infty + \|g'\|_\infty + \|g'\|_\lambda$. Llavors, hi ha una solució $(z, y, z \otimes y) \in M_{n,d}^{\beta}$ a l'equació (5.26). A més a més, la solució z satisfà la següent estimació*

$$\sup_{0\le t\le T} |z_t| \le |z_0| \exp\left(c\left(1 + T\left(K \max(\rho_f, 12\rho_g)\Lambda_y\right)^{\frac{1}{\beta}}\right)\right), \tag{5.43}$$

per a $c = \log(4/3)$.

Demostració: Per tal de simplificar la demostració assumirem que $d = m = n = 1$. Fixem $\alpha > 0$ tal que $1 - \beta < \alpha < 2\beta$ i $\alpha < \frac{\lambda\beta+1}{2}$. Considerem l'aplicació $J : M_{1,1}^{\beta}(0,T) \to M_{1,1}^{\beta}(0,T)$ donada per $J(z, y, z \otimes y) = (J_1, y, J_2)$, on J_1 (resp. J_2) és la part dreta de l'Equació (5.41) (resp. de l'Equació (5.42)), per tant ens queda que,

$$J_1(z, y, z \otimes y)(t) = z_0 + \int_0^t g(x_r) z_r dy_r,$$

$$J_2(z, y, z \otimes y)(s,t) = \int_s^t g'(x_r) z_r d(y \otimes y)_{\cdot,t}(r).$$

Recordem que x és la solució de l'Equació (5.25) que hem construït en el Teorema 5.3.1.

A partir de les Proposicions 5.4.1 i 5.4.2 tenim que

$$\begin{aligned}\|J_1\|_{s,t,\beta} \le{}& K\|y\|_\beta \|g\|_\infty \|z\|_{s,t,\infty} \\ &+ K\Phi_{s,t,\beta}(x,y)(t-s)^\beta \Big(\|x\|_{s,t,\beta}^{\lambda} \|g'\|_\lambda \|z\|_{s,t,\infty}(t-s)^{\lambda\beta} \\ &+ \|g'\|_\infty \|z\|_{s,t,\beta}(t-s)^\beta + \|g'\|_\infty \|z\|_{s,t,\infty}\Big) \\ &+ K\Phi_{s,t,\beta}(z,y)(t-s)^\beta \Big(\|g\|_\infty + \|g'\|_\infty \|x\|_{s,t,\beta}(t-s)^\beta\Big)\end{aligned} \tag{5.44}$$

i

$$\begin{aligned}\|J_2\|_{s,t,2\beta} \le{}& K\Phi_{s,t,\beta}(y,y) \|g\|_\infty \|z\|_{s,t,\infty} \\ &+ K\Phi_{s,t,\beta}(x,y,y)(t-s)^\beta \Big(\|x\|_{s,t,\beta}^{\lambda} \|g'\|_\lambda \|z\|_{s,t,\infty}(t-s)^{\lambda\beta} \\ &+ \|g'\|_\infty \|z\|_{s,t,\beta}(t-s)^\beta + \|g'\|_\infty \|z\|_{s,t,\infty}\Big) \\ &+ K\Phi_{s,t,\beta}(z,y,y)(t-s)^\beta \Big(\|g\|_\infty + \|g'\|_\infty \|x\|_{s,t,\beta}(t-s)^\beta\Big).\end{aligned} \tag{5.45}$$

Dividirem la demostració en diversos passos.

<u>Pas 1:</u> *Busquem una nova cota per a les normes* $\|J_1\|_{s,t,\beta}$ *i* $\|J_2\|_{s,t,2\beta}$ *que no depengui de* x *ni de* Φ.

Definim

$$\Delta'_y := [K\max(\rho_f, 12\rho_g)\Lambda_y]^{-\frac{1}{\beta}}\,,$$

on Λ_y està introduït a (5.5). Utilitzant els resultats que hem obtingut a la demostració del Teorema 5.3.1, per $C = \|f\|_\infty$ i $\gamma = 0$, sabem que si s, t són tals que $0 < t - s \leq \Delta_y$ llavors es compleix que

$$\begin{aligned}\|x\|_{s,t,\beta} &\leq K\rho_f\left(\|y\|_\beta + 1\right),\\ (t-s)^\beta\|x\|_{s,t,\beta} &\leq 1,\\ (t-s)^\beta\|x\otimes y\|_{s,t,2\beta} &\leq 1.\end{aligned}$$

Com a conseqüencia obtenim que

$$\begin{aligned}\Phi_{s,t,\beta}(x,y)(t-s)^\beta &\leq \|y\|_\beta + 1,\\ \Phi_{s,t,\beta}(x,y,y)(t-s)^\beta &\leq \|y\|_\beta + \|y\|_\beta^2 + \|y\otimes y\|_{2\beta}\,.\end{aligned}$$

Observem també que si s, t, satisfan que $0 < t - s \leq \Delta'_y \leq \Delta_y$, llavors també és cert que

$$(t-s)^\beta \leq \frac{1}{12K\rho_g\left(1 + \|y\|_\beta\right)}, \tag{5.46}$$

$$(t-s)^\beta \leq \frac{1}{12K\rho_g\left(\|y\|_\beta + \|y\|_\beta^2 + \|y\otimes y\|_{2\beta}\right)}. \tag{5.47}$$

Per tant, si ara fixem $0 < t-s \leq \Delta'_y$ i $(z, y, z\otimes y) \in M^\beta_{1,1}(0,T)$, a partir de les desigualtats (5.44) i (5.45) i utilitzant totes les cotes anteriors obtenim que

$$\begin{aligned}\|J_1\|_{s,t,\beta} \leq{}& K\rho_g(1+\|y\|_\beta)\|z\|_{s,t,\infty} + 2K\rho_g\left(1+\|y\|_\beta\right)\|z\|_{s,t,\beta}(t-s)^\beta\\ &+K\rho_g\|z\otimes y\|_{s,t,2\beta}(t-s)^\beta,\end{aligned}$$

i que

$$\begin{aligned}\|J_2\|_{s,t,2\beta} \leq{}& K\rho_g\Lambda_y\|z\|_{s,t,\infty} + 2K\rho_g\Lambda_y\|z\|_{s,t,\beta}(t-s)^\beta\\ &+K\rho_g\|y\|_\beta\|z\otimes y\|_{s,t,2\beta}(t-s)^\beta.\end{aligned}$$

Finalment tenint en compte que

$$\|z\|_{s,t,\infty} \leq |z_s| + \|z\|_{s,t,\beta} (t-s)^{\beta},$$

podem escriure que

$$\begin{aligned} \|J_1\|_{s,t,\beta} + \|J_2\|_{s,t,2\beta} &\leq 2K\rho_g \Lambda_y |z_s| + 6K\rho_g \Lambda_y (t-s)^{\beta} \left[\|z\|_{s,t,\beta} + \|z \otimes y\|_{s,t,2\beta} \right] \\ &\leq 2K\rho_g \Lambda_y |z_s| + \frac{1}{2} \left[\|z\|_{s,t,\beta} + \|z \otimes y\|_{s,t,2\beta} \right]. \end{aligned} \tag{5.48}$$

<u>Pas 2:</u> *Establim l'existència de solució per a l'equació (5.26).*

Sigui $N = [T(\Delta'_y)^{-1}] + 1$ i definim la partició $\{t_0, \dots, t_N\}$ de l'interval $[0,T]$ donada per $t_i = i\Delta'_y$, $i = 0, \dots, N-1$ i $t_N = T$. Ara construïrem una successió de funcions z^n i $(z \otimes y)^n$ tals que,

$$z^{(0)} = z_0, \;\; \text{i} \;\; (z \otimes y)^{(0)} = 0,$$

i per a $n \geq 1$,

$$\begin{aligned} z^{(n)} &= J_1 \left(z^{(n-1)}, y, (z \otimes y)^{(n-1)} \right), \\ (z \otimes y)^{(n)} &= J_2 \left(z^{(n-1)}, y, (z \otimes y)^{(n-1)} \right). \end{aligned}$$

A partir de la desigualtat (5.48) obtenim

$$\begin{aligned} \left\| z^{(n)} \right\|_{t_{i-1},t_i,\beta} + \left\| (z \otimes y)^{(n)} \right\|_{t_{i-1},t_i,2\beta} &\leq 2K\rho_g \Lambda_y |z^{(n-1)}_{t_{i-1}}| \\ &\quad + \frac{1}{2} \left[\left\| z^{(n-1)} \right\|_{t_{i-1},t_i,\beta} + \left\| \, (z \otimes y)^{(n-1)} \, \right\|_{t_{i-1},t_i,2\beta} \right]. \end{aligned}$$

Iterant aquesta desigualtat obtenim que

$$\left\| z^{(n)} \right\|_{t_{i-1},t_i,\beta} + \left\| (z \otimes y)^{(n)} \right\|_{t_{i-1},t_i,2\beta} \leq 4K\rho_g \Lambda_y \sup_{0 \leq m \leq n-1} |z^{(m)}_{t_{i-1}}|. \tag{5.49}$$

Aleshores, per una banda podem escriure que

$$\sup_{r \in [t_{i-1},t_i]} \left| z^{(n)}_r \right| \leq \left| z^{(n)}_{t_{i-1}} \right| + (\Delta'_y)^{\beta} \left\| z^{(n)} \right\|_{t_{i-1},t_i,\beta} \leq \left| z^{(n-1)}_{t_{i-1}} \right| + 4K\rho_g \Lambda_y (\Delta'_y)^{\beta} \sup_{0 \leq m \leq n-1} |z^{(m)}_{t_{i-1}}|,$$

i així obtenim, a partir de (5.47), que

$$\sup_{0 \leq m \leq n} \sup_{r \in [t_{i-1},t_i]} \left| z^{(m)}_r \right| \leq \frac{4}{3} \sup_{0 \leq m \leq n} \left| z^{(m)}_{t_{i-1}} \right|$$

i per tant és cert que,

$$\sup_{0\le m\le n}\sup_{r\in[0,t_i]}\left|z_r^{(m)}\right| \le \frac{4}{3}\sup_{0\le m\le n}\sup_{r\in[0,t_{i-1}]}\left|z_s^{(m)}\right|.$$

Si iterem una altra vegada, obtenim que

$$\sup_{0\le m\le n}\sup_{r\in[0,T]}\left|z_r^{(m)}\right| \le \left(\frac{4}{3}\right)^N |z_0| \le \left(\frac{4}{3}\right)^{T(\Delta_y')^{-1}+1}|z_0|. \tag{5.50}$$

Ara estem en condicions d'obtenir una estimació per $\left\|z^{(n)}\right\|_\beta$, a partir dels resultats (5.49) i (5.50)

$$\begin{aligned}
\left\|z^{(n)}\right\|_\beta &\le \sup_{\substack{0\le s<t\le T\\ t-s\le\Delta_y'}}\frac{\left|z_t^{(n)}-z_s^{(n)}\right|}{(t-s)^\beta} + \sup_{\substack{0\le s<t\le T\\ t-s\ge\Delta_y'}}\frac{\left|z_t^{(n)}-z_s^{(n)}\right|}{(t-s)^\beta}\\
&\le 8K\rho_g\Lambda_y\sup_{0\le m\le n}\left\|z^{(m)}\right\|_\infty + 2(\Delta_y')^{-\beta}\left\|z^{(n)}\right\|_\infty\\
&\le \left(\frac{4}{3}\right)^{T(\Delta_y')^{-1}+1}|z_0|\left(8K\rho_g\Lambda_y + 2K\max(\rho_f,12\rho_g)\Lambda_y\right)\\
&\le \left(\frac{4}{3}\right)^{T(\Delta_y')^{-1}+1}|z_0|2K\max\left(\rho_f,12\rho_g\right)\Lambda_y := C_5.
\end{aligned} \tag{5.51}$$

Això implica que la successió de funcions $z^{(n)}$ és equicontínua i acotada a $C^\beta(0,T)$. Per tant, existeix una subsuccessió que convergeix amb la norma β'-Hölder si $\beta'<\beta$.

I per altra banda, amb un argument similar, tenim el mateix resultat per a $\|(z\otimes y)^{(n)}\|_{2\beta}$

$$\begin{aligned}
\sup_{t_{i-1}\le s<t\le t_i}|(z\otimes y)_{s,t}^{(n)})| &\le (\Delta_y')^{2\beta}\|(z\otimes y)^{(n)}\|_{t_{i-1},t_i,2\beta}\\
&\le (\Delta_y')^{2\beta}4K\rho_g\Lambda_y\sup_{0\le m\le n-1}\left|z_{t_{i-1}}^{(m)}\right|\\
&\le \frac{\Delta_y'}{3}\sup_{0\le m\le n-1}\left|z_{t_{i-1}}^{(m)}\right|.
\end{aligned}$$

I per tant, aconseguim que

$$\sup_{0\le m\le n}\sup_{0\le s<t\le T}\left|(z\otimes y)_{s,t}^m\right| \le \left(\frac{\Delta_y'}{3}\right)^N|z_0| \le \left(\frac{\Delta_y'}{3}\right)^{T(\Delta_y')^{-1}+1}|z_0|.$$

I ara amb el mateix argument que a (5.51) tenim que

$$\begin{aligned}\|(z\otimes y)^{(n)}\|_{2\beta} &\leq 8K\rho_g\Lambda_y \sup_{0\leq m\leq n}\left\|z^{(m)}\right\|_\infty + (\Delta'_y)^{-2\beta}\left\|(z\otimes y)^{(n)}\right\|_\infty \\ &\leq |z_0|\left(\frac{4}{3}\right)^{T(\Delta'_y)^{-1}+1}\left(8K\rho_g\Lambda_y + \left(K\max\left(\rho_f, 12\rho_g\right)\Lambda_y\right)^2\right) := C_6.\end{aligned}$$

Per tant, les normes $\|(z\otimes y)^{(n)}\|_{2\beta}$ són uniformement acotades, i també obtenim que $|(z\otimes y)^{(n)}_{s,t}|$ està uniformement acotat. Llavors $(z\otimes y)^{(n)}$ és equicontinu i acotat a $C^{2\beta}(\Delta)$ i per tant, té una subsuccessió que convergeix en la norma β'-Hölder per $\beta' < \beta$.

Quan n tendeix a infinit el límit és una solució i defineix un funcional multiplicatiu β-Hölder continu $(z, y, z\otimes y)$.

Per acabar, l'estimació (5.43) l'obtenim com una conseqüència dels càlculs que hem fet per aconseguir el resultat (5.51). □

Utilitzant tècniques de *rough path analysis* (veure a [FV10], fórmula (20.17)) es pot aconseguir una estimació similar a la que hem obtingut en el teorema 5.4.3, Friz i Oberhauser a [FO09] han demostrat que l'estimació que obtenen és òptima.

5.5 Equacions diferencials estocàstiques dirigides per un fBm

Sigui $W^H = \left\{W^H_t, t\geq 0\right\}$ un moviment Brownià fraccionari d-dimensional (fBm), amb paràmetre de Hurst $H\in\left(\frac{1}{3},\frac{1}{2}\right)$.

Considerem la següent equació diferencial estocàstica a $\mathbb{R}^m$

$$X_t = X_0 + \sum_{j=1}^{d}\int_0^t \sigma_j(X_s)dW^{H,j}_s, \tag{5.52}$$

on X_0 és una variable aleatòria m-dimensional fixada.

Aleshores hem de definir com entenem

$$\left(W^{H,i}\otimes W^{H,j}\right)_{s,t} = \int_{s<u<v<t} dW^{H,i}_u dW^{H,i}_v$$

$$\left(W^{H,i} \otimes W^{H,j}\right)_{s,t} = \begin{cases} \frac{1}{2}\left(W_t^{H,i} - W_s^{H,i}\right)^2 & \text{si} \quad i = j, \\ \int_s^t \left(W_v^{H,i} - W_s^{H,i}\right) \delta W_v^{H,j} & \text{si} \quad i \neq j, \end{cases}$$

per $0 \leq s < t \leq T$ i $i, j = 1, \ldots, d$. δ és l'operador divergència i coincideix en aquest cas amb la integral estocàstica anticipativa clàssica.

És conegut que podem triar una versió de $(W^H \otimes W^H)_{s,t}$ de manera que $(W^H, W^H, W^H \otimes W^H)$ sigui un funcional multiplicatiu β-Hölder continu per a una $\beta \in \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{2}\right)$ fixada. Veure per exemple a [CQ02].

Si apliquem el Teorema 5.3.1 a l'equació (5.52) podem deduir que existeix una solució trajectorial a l'equació (5.52) si: $|\sigma(x)| \leq C\,(1 + |x|^\gamma)$ per alguna $\gamma < H$, σ és diferenciable amb continuïtat, σ' està acotada i també és λ-Hölder contínua, per a $\lambda > \frac{1}{H} - 2$.
A més també obtenim la següent estimació per la solució quan σ està acotada, si triem $\beta \in \left(\frac{1}{3}, H\right)$,

$$\sup_{0 \leq t \leq T} |X_t| \leq |X_0| + 1 + T\left(K\rho_\sigma\left(\left\|W^H\right\|_\beta + \max\left(1, \left\|W^H\right\|_\beta^2 + \left\|W^H \otimes W^H\right\|_{2\beta}\right)\right)\right)^{\frac{1}{\beta}}. \tag{5.53}$$

I pel cas general podem escriure que

$$\begin{aligned} \sup_{t \in [0,T]} |X_t| \leq 2\Bigg(& |X_0| + 1 + T\left((K\hat{\rho}_\sigma)^{\frac{1}{\beta}} + 2(KC)^{\frac{1}{\beta}}\right) \\ & \times \left(\left\|W^H\right\|_\beta + \max\left(1, \left\|W^H\right\|_\beta^2 + \left\|W^H \otimes W^H\right\|_{2\beta}\right)\right)^{\frac{1}{\beta}}\Bigg)^{\frac{\beta}{\beta-\gamma}}. \end{aligned} \tag{5.54}$$

A partir de les estimacions (5.53) i (5.54) podem establir les següents propietats d'integrabilitat per a la solució de l'Equació (5.52).

Teorema 5.5.1 *Considerem l'equació diferencial estocàstica (5.52). Si σ és diferenciable amb continuïtat, tal que $|\sigma(x)| \leq C(1 + |x|^\gamma)$, $\gamma < H$, σ' és acotada i Hölder contínua d'ordre $\lambda > \frac{1}{H} - 2$ llavors,*

$$\mathbf{E}\left(\sup_{0 \leq t \leq T} |X_t|^p\right) < \infty,$$

per a tota $p \geq 2$.

A més, si σ és acotada per qualssevol $\lambda > 0$ i $\delta < H$, llavors

$$\mathbf{E}\left(\exp\lambda\left(\sup_{0\le t\le T}|X_t|^{\delta}\right)\right) < \infty.$$

Exemple: Observem que la següent equació satisfà les hipòtesis del Teorema 5.5.1 per a qualsevol $a \in \mathbb{R}$

$$X(t) = a + \int_0^t \sin(X_s)dW_s^H,$$

Considerem ara l'espai de Cameron-Martin $\mathcal{H}$ associat amb el moviment Brownià fraccionari W^H, que engloba totes les funcions $h_t = \mathbb{E}(\langle Z, W_t\rangle)$, on Z és un funcional d-dimensional de W^H de quadrat integrable.

La $\mathcal{H}$-diferenciabilitat de la variable aleatòria X_t, solució del l'Equació (5.52), és l'ingredient principal en l'aplicació del càlcul de Malliavin a l'Equació (5.52). Referim al lector al Capítol 20 del monogràfic [FV10] per una explicació detallada de l'aplicació del càlcul de Malliavin al moviment Brownià fraccionari i processos rough Gaussians relacionats.

Per qualsevol element $h \in \mathcal{H}$, la derivada D_hX_t de X_t en la direcció de h satisfà la següent equació lineal diferencial estocàstica

$$D_hX_t^i = \langle\sigma^i(X.), h\rangle_{\mathcal{H}} + \sum_{k=1}^{m}\int_0^t \sum_{l=1}^{d} \partial_k\sigma^{il}(X_u)D_hX_u^k d(W^H)_u^l. \tag{5.55}$$

Pel cas $H > \frac{1}{2}$, va ser provat per Hu i Nualart a [HN07] que la derivada $\|DX_t^i\|_{\mathcal{H}}$ té moments de tots els ordres. Un resultat que va ser utilitzat posteriorment per Baudoin i Hairer a [BH07] per tal d'establir una versió del teorema de hipoel·lipticitat de Hörmander pel moviment Brownià fraccionari amb paràmetre de Hurst $H > \frac{1}{2}$.

En el nostre cas, on $H \in (\frac{1}{3}, \frac{1}{2})$, podem aplicar els resultats obtinguts en el Teorema 5.4.3 per tal d'aconseguir la següent estimació de la norma de la derivada de X_t en el sentit del càlcul de Malliavin, on $\beta \in \left(\frac{1}{3}, H\right)$

$$\sup_{0\le t\le T}\|DX_t^i\|_{\mathcal{H}} \le \|\sigma(X)\|_{\mathcal{H}} \exp\Bigg(c\Bigg(1 + T\Bigg(K(\max(\rho_\sigma, 8\rho_{\sigma'}) \times\left(\left\|W^H\right\|_\beta + \max(1, \left\|W^H\right\|_\beta^2 + \left\|W^H\otimes W^H\right\|_{2\beta}\right)\Bigg)^{\frac{1}{\beta}}\Bigg)\Bigg).$$

Desafortunadament, aquesta estimació no ens permet concloure que $\|DX_t^i\|_{\mathcal{H}}$ tingui moments de tots els ordres.

L'existència d'una funció de densitat per a les solucions d'equacions diferencials estocàstiques dirigides per processos rough Gaussians (que inclouen el moviment Brownià fraccionari per a $H \in \left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right)$) sota la condició de Hörmander ha estat obtinguda per Cass i Friz a [CF10]. La regularitat de la densitat, però requereix l'existència de moments per la derivada i de moment encara és un problema obert.

A

Demostració de lemes tècnics del capítol 3

En aquest apèndix donarem un teorema del punt fix aplicat al nostre problema, recordarem algunes de les propietats de la solució del problema de Skorohod, el lema de Gronwall i l'enunciat del teorema de Fernique que utilitzem en el pas d'equacions deterministes a equacions estocàstiques en els capítols 3 i 4.

Lema A.0.1 *Sigui (X,ρ) un espai mètric complet, i ρ_0 i ρ_1 dues mètriques a X equivalents a ρ. Si $\mathcal{L} : X \to X$ satisfà que:*

1. *Existeix $r_0 > 0$, $x_0 \in X$ tal que si $B_0 = \{x \in X; \rho_0(x_0, x) \le r_0\}$ llavors $\mathcal{L}(B_0) \subseteq B_0$,*
2. *Existeix $a \in (0,1)$ tal que $\rho_1(\mathcal{L}(x), \mathcal{L}(y)) \le a\rho_1(x,y)$ per a tota $x, y \in B_0$.*

Llavors existeix $x^* \in \mathcal{L}(B_0) \subseteq X$ tal que $x^* = \mathcal{L}(x^*)$.

Demostració: Sigui per a tota $n \in \mathbb{N}$

$$x_{n+1} = \mathcal{L}(x_n).$$

Clarament $x_n \in \mathcal{L}(B_0)$, per a tota n. A més

$$\rho_1(x_{n+1}, x_n) = \rho_1(\mathcal{L}(x_n), \mathcal{L}(x_{n-1})) \le a\rho_1(x_n, x_{n-1}) \le \ldots \le a^n \rho_1(x_1, x_0).$$

i

$$\begin{aligned}\rho_1(x_{n+p}, x_n) &\le \rho_1(x_{n+p}, x_{n+p-1}) + \ldots + \rho_1(x_{n+1}, x_n) \\ &\le a^n(a^{p-1} + \ldots + a + 1)\rho_1(x_1, x_0) \le \frac{a^n}{1-a}\rho_1(x_1, x_0) \to 0,\end{aligned}$$

quan $n \to \infty$.

Com que (X,ρ) és un espai mètric complet i B_0 és tancat a X, llavors existeix $x^* \in B_0$ tal que $x_n \to x^*$. A més a més, a partir de la segona hipòtesis del lema tenim que

$$\rho_1\left(\mathcal{L}(x_n),\mathcal{L}(x^*)\right) \leq a\rho_1(x_n,x^*).$$

Llavors, com que $\rho_1(x_n,x^*)\to 0$, $\mathcal{L}(x_n)\to\mathcal{L}(x^*)$ i per tant tenim que $x^*=\mathcal{L}(x^*)$. □

Lema A.0.2 *Per a cada trajectòria $z\in\mathcal{C}(\mathbb{R}_+,\mathbb{R}^d)$, existeix una única solució (x,y) al problema de Skorohod per a z. A més, existeixen un parell de funcions $(\phi,\varphi):\mathcal{C}_+(\mathbb{R}_+,\mathbb{R}^d)\to\mathcal{C}_+(\mathbb{R}_+,\mathbb{R}^{2d})$ definides per $(\phi(z),\varphi(z))=(x,y)$. Aquest parell (ϕ,φ) satisfan el següent:*

Existeix una constant $K_l>0$ tal que per a qualssevol $z_1,z_2\in\mathcal{C}_+(\mathbb{R}_+,\mathbb{R}^d)$ tenim per a cada $t\geq 0$,

$$\|\phi(z_1)-\phi(z_2)\|_{\infty,[0,t]} \leq K_l\,\|z_1-z_2\|_{\infty,[0,t]}\,,$$
$$\|\varphi(z_1)-\varphi(z_2)\|_{\infty,[0,t]} \leq K_l\,\|z_1-z_2\|_{\infty,[0,t]}\,.$$

Demostració: Veure a la Proposició A.0.1 de [KW10] o en el Teorema 2.2 de [DI91]. □

Lema A.0.3 *Fixat $T>0$. Suposem que f i g són funcions integrables i no-negatives definides a l'interval $[0,T]$. Suposem també qie existeix una constant $C>0$ tal que per a tota $t\in[0,T]$*

$$f(t)\leq g(t)+C\int_0^t f(s)ds.$$

Aleshores, per a tota $t\in[0,T]$

$$f(t)\leq g(t)+C\int_0^t e^{C(t-s)}g(s)ds.$$

En particular, si g és tal que $g(t)=A$, aleshores, per a tota $t\in[0,T]$

$$f(t)\leq Ae^{Ct}.$$

Demostració: Veure en el lema 10.2 (pàgina 224) de [CW90]. □

I finalment donarem l'enunciat del teorema de Fernique (veure a Teorema 1.3.2 de [Fer75])

Teorema A.0.4 *Sigui $(E,\mathcal{E})$ un espai vectorial mesurable, i X un vector gaussià amb valors a E. Assumim que $P(\|X\|<\infty)$ és estrictament postiva. Llavors sota aquestes condicions existeix $\varepsilon_0>0$, tal que per a qualsevol ε, $0<\varepsilon<\varepsilon_0$*

$$\mathbf{E}\left(\exp(\varepsilon\,\|X\|^2)\right)<\infty.$$

B

Demostració de lemes tècnics del capítol 4

En aquest apèndix detallarem alguns càlculs que apareixen diverses vegades ens els capítols 3 i 4 i donarem també alguns resultats tècnics que hem utilitzat per a obtenir les estimacions del capítol 4.

Lema B.0.5 *Per qualssevol constants positives $\lambda \leq 1$ i $0 < \alpha < 1$ tenim que*

$$\int_0^t \frac{e^{-\lambda(t-s)}}{(t-s)^\alpha} ds \leq \lambda^{\alpha-1} \Gamma(1-\alpha). \tag{B.1}$$

on Γ és la funció Gamma. I a més, per a $\mu > 0$ s'assoleix que

$$\sup_{t \in [0,T]} t^\mu e^{-\lambda t} \leq \left(\frac{\mu}{\lambda}\right)^\mu e^{-\mu}. \tag{B.2}$$

Demostració: Provarem primer el resultat (B.1) fent un canvi de variable $u = \lambda(t-s)$

$$\int_0^t \frac{e^{-\lambda(t-s)}}{(t-s)^\alpha} ds = \lambda^{\alpha-1} \int_0^{\lambda t} e^{-u} u^{-\alpha} du \leq \lambda^{\alpha-1} \Gamma(1-\alpha).$$

Anem a provar ara que el resultat (B.2) també és cert. Calculem el màxim, en el cas que existeixi, de la funció $f(t) = t^\mu e^{-\lambda t}$ a l'interval $[0, +\infty)$.
Observem que la derivada $f'(t) = e^{-\lambda t} t^{\mu-1}(\mu - \lambda t)$ s'anul·la en els punts $t = 0$ i $t = \frac{\mu}{\lambda}$. I com que a més tenim que

$$f'(t) = \begin{cases} > 0 & \text{si } t \in (0, \frac{\mu}{\lambda}), \\ < 0 & \text{si } t \in (\frac{\mu}{\lambda}, +\infty), \end{cases}$$

obtenim que en el punt $t = \frac{\mu}{\lambda}$ la funció f té un màxim i per tant podem establir la cota (B.2) com volíem. $\square$

Lema B.0.6 *Sigui* $\lambda \geq 1$ *i* $0 < \alpha < 1$, *aleshores es compleix que*

$$\int_0^t e^{-\lambda(t-r)} \left((t-r)^{-2\alpha} + r^{-\alpha}\right) dr \leq C_\alpha \lambda^{2\alpha-1} \tag{B.3}$$

on $C_\alpha \leq \Gamma(1-2\alpha) + 1 + \frac{3}{1-\alpha}$.

Demostració: Per tal d'acotar aquesta integral farem un canvi de variable $y = \lambda(t-r)$, i així tenim

$$\begin{aligned}\int_0^t e^{-\lambda(t-r)} \left((t-r)^{-2\alpha} + r^{-\alpha}\right) dr &\leq \lambda^{2\alpha-1} \int_0^{\lambda t} e^{-y} \left(y^{-2\alpha} + (\lambda t - y)^{-\alpha}\right) dy \\ &\leq \lambda^{2\alpha-1} \left(\Gamma(1-2\alpha) + \int_0^{\lambda t} e^{-y} (\lambda t - y)^{-\alpha} dy\right).\end{aligned}$$

Observem que

$$\int_0^{\lambda t} e^{-y} (\lambda t - y)^{-\alpha} dy \leq \sup_{z>0} \int_0^z e^{-y} (z-y)^{-\alpha} dy.$$

Si $z \in (0,2)$, fem el canvi de variable $y = zx$ i obtenim

$$\begin{aligned}\int_0^z e^{-y} (z-y)^{-\alpha} dy &= z^{1-\alpha} \int_0^1 e^{-zx} (1-x)^{-\alpha} dx \\ &\leq z^{1-\alpha} \int_0^1 (1-x)^{-\alpha} dx = \frac{z^{1-\alpha}}{1-\alpha} \leq \frac{2}{1-\alpha}.\end{aligned}$$

En el cas $z > 2$ podem escriure

$$\begin{aligned}\int_0^z e^{-y} (z-y)^{-\alpha} dy &= \int_0^{z-1} e^{-y} (z-y)^{-\alpha} dy + \int_{z-1}^z e^{-y} (z-y)^{-\alpha} dy \\ &\leq \int_0^{z-1} e^{-y} dy + \int_{z-1}^z (z-y)^{-\alpha} dy \leq 1 + \frac{1}{1-\alpha}.\end{aligned}$$

Per tant $\sup_{z>0} \int_0^z e^{-y} (z-y)^{-\alpha} dy \leq 1 + \frac{3}{1-\alpha}$ i així obtenim la cota que buscàvem. □

Lema B.0.7 *Sigui* $\sigma : [0,T]^2 \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *una funció que satisfà les hipòtesis* **(H1)**. *Llavors per a qualssevol* $t_1, t_2, s_1, s_2 \in \mathbb{R}$ *i* $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned}&|\sigma(t_1, s_1, x_1) - \sigma(t_2, s_1, x_1) - \sigma(t_1, s_2, x_2) + \sigma(t_2, s_2, x_2)| \\ &\qquad \leq K|t_1 - t_2| \left(|s_1 - s_2|^\beta + |x_1 - x_2|\right).\end{aligned} \tag{B.4}$$

Demostració: A partir del teorema del valor mig podem escriure

$$
\begin{aligned}
&\sigma(t_1,s_1,x_1)-\sigma(t_2,s_1,x_1)-\sigma(t_1,s_2,x_2)+\sigma(t_2,s_2,x_2)\\
&\qquad=\int_0^1(t_1-t_2)\partial_t\sigma(\theta t_1+(1-\theta)t_2,s_1,x_1)d\theta\\
&\qquad\quad-\int_0^1(t_1-t_2)\partial_t\sigma(\theta t_1+(1-\theta)t_2,s_2,x_2)d\theta\\
&\qquad=\int_0^1(t_1-t_2)\left(\partial_t\sigma(\theta t_1+(1-\theta)t_2,s_1,x_1)-\partial_t\sigma(\theta t_1+(1-\theta)t_2,s_2,x_1)\right)d\theta\\
&\qquad\quad+\int_0^1(t_1-t_2)\left(\partial_t(\theta t_1+(1-\theta)t_2,s_2,x_1)-\partial_t\sigma(\theta t_1+(1-\theta)t_2,s_2,x_2)\right)d\theta,
\end{aligned}
$$

i podem obtenir (B.4) usant les hipòtesis **(H1)**. □

Lema B.0.8 *Sigui $\sigma:[0,T]^2\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ una funció que satisfà les hipòtesis* **(H1)**. *Llavors per a tota $N>0$, $t,s_1,s_2\in\mathbb{R}$ i $|x_1|,|x_2|,|x_3|,|x_4|\le N$*

$$
\begin{aligned}
&|\sigma(t,s_1,x_1)-\sigma(t,s_2,x_2)-\sigma(t,s_1,x_3)+\sigma(t,s_2,x_4)|\\
&\qquad\le K_N|x_1-x_2-x_3+x_4|+K|x_1-x_3||s_2-s_1|^{\beta} \qquad (B.5)\\
&\qquad\quad+K_N|x_1-x_3|\left(|x_1-x_2|^{\delta}+|x_3-x_4|^{\delta}\right).
\end{aligned}
$$

Demostració: Utilitzant el teorema del valor mig, podem escriure

$$
\begin{aligned}
&\sigma(t,s_1,x_1)-\sigma(t,s_2,x_2)-\sigma(t,s_1,x_3)+\sigma(t,s_2,x_4)\\
&\qquad=\int_0^1(x_1-x_3)\partial_x\sigma(t,s_1,\theta x_1+(1-\theta)x_3)d\theta\\
&\qquad\quad-\int_0^1(x_2-x_4)\partial_x\sigma(t,s_2,\theta x_2+(1-\theta)x_4)d\theta\\
&\qquad=\int_0^1(x_1-x_2-x_3+x_4)\partial_x\sigma(t,s_2,\theta x_2+(1-\theta)x_4)d\theta\\
&\qquad\quad+\int_0^1(x_1-x_3)\left(\partial_x(t,s_1,\theta x_1+(1-\theta)x_3)-\partial_x\sigma(t,s_2,\theta x_2+(1-\theta)x_4)\right)d\theta.
\end{aligned}
$$

I obtenim fàcilment (B.5) a partir de les hipòtesis **(H1)**. □

Lema B.0.9 *Sigui* $\sigma : [0,T]^2 \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *una funció que satisfà les hipòtesis* **(H1)**. *Llavors per qualssevol* $N > 0$, $t_1, t_2, s_1, s_2 \in \mathbb{R}$ *i* $|x_1|, |x_2|, |x_3|, |x_4| \leq N$

$$\begin{aligned}
&|\sigma(t_1,s_1,x_1) - \sigma(t_1,s_1,x_2) - \sigma(t_2,s_1,x_1) + \sigma(t_2,s_1,x_2) \\
&\qquad -\sigma(t_1,s_2,x_3) + \sigma(t_1,s_2,x_4) + \sigma(t_2,s_2,x_3) - \sigma(t_2,s_2,x_4)| \\
&\qquad \leq K_N|t_1-t_2||x_1-x_2-x_3+x_4| + K|x_1-x_2||t_1-t_2||s_1-s_2|^{\beta} \\
&\qquad\quad +K_N|x_1-x_2||t_1-t_2|\left(|x_1-x_3|^{\delta} + |x_2-x_4|^{\delta}\right).
\end{aligned} \tag{B.6}$$

Demostració: Utilitzant el teorema del valor mig obtenim que

$$\begin{aligned}
&\sigma(t_1,s_1,x_1) - \sigma(t_1,s_1,x_2) - \sigma(t_2,s_1,x_1) + \sigma(t_2,s_1,x_2) - \sigma(t_1,s_2,x_3) \\
&\qquad +\sigma(t_1,s_2,x_4) + \sigma(t_2,s_2,x_3) - \sigma(t_2,s_2,x_4) \\
&= (x_1-x_2)\int_0^1 \left[\partial_x\sigma(t_1,s_1,\theta x_1+(1-\theta)x_2) - \partial_x\sigma(t_2,s_1,\theta x_1+(1-\theta)x_2)\right] d\theta \\
&\quad -(x_3-x_4)\int_0^1 \left[\partial_x\sigma(t_1,s_2,\theta x_3+(1-\theta)x_4) - \partial_x\sigma(t_2,s_2,\theta x_3+(1-\theta)x_4)\right] d\theta \\
&= (t_1-t_2)\Big[(x_1-x_2)\int_0^1\int_0^1 \partial^2_{x,t}\sigma(\lambda t_1+(1-\lambda)t_2,s_1,\theta x_1+(1-\theta)x_2)d\lambda d\theta \\
&\quad -(x_3-x_4)\int_0^1\int_0^1 \partial^2_{x,t}(\lambda t_1+(1-\lambda)t_2,s_2,\theta x_3+(1-\theta)x_4)d\lambda d\theta\Big] \\
&\leq (t_1-t_2)\left[(x_1-x_2)\int_0^1\int_0^1 \left(\partial^2_{x,t}(\lambda t_1+(1-\lambda)t_2,s_1,\theta x_1+(1-\theta)x_2)\right.\right. \\
&\qquad \left. -\partial^2_{x,t}(\lambda t_1+(1-\lambda)t_2,s_2,\theta x_3+(1-\theta)x_4)\right) d\lambda d\theta \\
&\quad \left. +(x_1-x_2-x_3+x_4)\int_0^1\int_0^1 \partial^2_{x,t}\sigma(\lambda t_1+(1-\lambda)t_2,s_2,\theta x_3+(1-\theta)x_4)d\lambda d\theta\right].
\end{aligned}$$

I per tant obtenim el resultat (B.6) a partir de les hipòtesis **(H1)**. □

Referències

[AN97] E. Alòs and D. Nualart. Anticipating stochastic Volterra equations. *Stochastic Process. Appl.*, 72(1):73–95, 1997.

[BH07] F. Baudoin and M. Hairer. A version of Hörmander's theorem for the fractional Brownian motion. *Probab. Theory Related Fields*, 139(3-4):373–395, 2007.

[BM80a] M. A. Berger and V. J. Mizel. Volterra equations with Itô integrals. I. *J. Integral Equations*, 2(3):187–245, 1980.

[BM80b] M. A. Berger and V. J. Mizel. Volterra equations with Itô integrals. II. *J. Integral Equations*, 2(4):319–337, 1980.

[CF10] T. Cass and P. Friz. Densities for rough differential equations under Hörmander's condition. *Ann. of Math. (2)*, 171(3):2115–2141, 2010.

[CQ02] L. Coutin and Z. Qian. Stochastic analysis, rough path analysis and fractional Brownian motions. *Probab. Theory Related Fields*, 122(1):108–140, 2002.

[CW90] K. L. Chung and R. J. Williams. *Introduction to stochastic integration*. Probability and its Applications. Birkhäuser Boston Inc., Boston, MA, second edition, 1990.

[DHPD00] T. E. Duncan, Y. Hu, and B. Pasik-Duncan. Stochastic calculus for fractional Brownian motion. I. Theory. *SIAM J. Control Optim.*, 38(2):582–612 (electronic), 2000.

[DI91] P. Dupuis and H. Ishii. On Lipschitz continuity of the solution mapping to the Skorokhod problem, with applications. *Stochastics Stochastics Rep.*, 35(1):31–62, 1991.

[DT08] A. Deya and S. Tindel. Rough volterra equations 2: convolutional generalized integrals. *ArXiv e-prints 0810.1824*, 2008.

[DT09] A. Deya and S. Tindel. Rough Volterra equations. I. The algebraic integration setting. *Stoch. Dyn.*, 9(3):437–477, 2009.

[Fer75] X. Fernique. Regularité des trajectoires des fonctions aléatoires gaussiennes. In *École d'Été de Probabilités de Saint-Flour, IV-1974*, pages 1–96. Lecture Notes in Math., Vol. 480. Springer, Berlin, 1975.

[FG08] D.V. Filatova and M. Grzywaczewski. Mathematical modeling in selected biological systems with fractional brownian motion. In *Human System Interactions, 2008 Conference on*, pages 909 –914, 2008.

[FO09] P. Friz and H. Oberhauser. Rough path limits of the Wong-Zakai type with a modified drift term. *J. Funct. Anal.*, 256(10):3236–3256, 2009.

[FR06] M. Ferrante and C. Rovira. Stochastic delay differential equations driven by fractional Brownian motion with Hurst parameter $H > \frac{1}{2}$. *Bernoulli*, 12(1):85–100, 2006.

[FR10] M. Ferrante and C. Rovira. Convergence of delay differential equations driven by fractional brownian motion. *Journal of Evolution Equations*, 2010.

[FV10] P. K. Friz and N. B. Victoir. *Multidimensional stochastic processes as rough paths*, volume 120 of *Cambridge Studies in Advanced Mathematics*. Cambridge University Press, Cambridge, 2010.

[GRR71] A. M. Garsia, E. Rodemich, and H. Rumsey, Jr. A real variable lemma and the continuity of paths of some Gaussian processes. *Indiana Univ. Math. J.*, 20:565–578, 1970/1971.

[HN07] Y. Hu and D. Nualart. Differential equations driven by Hölder continuous functions of order greater than 1/2. In *Stochastic analysis and applications*, volume 2 of *Abel Symp.*, pages 399–413. Springer, Berlin, 2007.

[HN09] Y. Hu and D. Nualart. Rough path analysis via fractional calculus. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 361(5):2689–2718, 2009.

[Hur51] H. E. Hurst. Long-term storage capacity of reservoirs. *Transactions of the American Society of Civil Engineers*, 116:400–410, 1951.

[Kol40] A. N. Kolmogoroff. Wienersche Spiralen und einige andere interessante Kurven im Hilbertschen Raum. *C. R. (Doklady) Acad. Sci. URSS (N.S.)*, 26:115–118, 1940.

[Kus08] H. J. Kushner. *Numerical methods for controlled stochastic delay systems*. Systems & Control: Foundations & Applications. Birkhäuser Boston Inc., Boston, MA, 2008.

[KW10] M. Kinnally and R. Williams. On existence and uniqueness of stationary distributions for stochastic delay differential equations with positivity constraints. *Electronic Journal of Probability*, 15:409–451, 2010.

[LQ02] T. Lyons and Z. Qian. *System control and rough paths*. Oxford Mathematical Monographs. Oxford University Press, Oxford, 2002.

[LT08] J. A. Leon and S. Tindel. Malliavin calculus for fractional delay equations. *ArXiv e-prints 0912.2180*, 2008.

[Lyo98] T. J. Lyons. Differential equations driven by rough signals. *Rev. Mat. Iberoamericana*, 14(2):215–310, 1998.

[Mal78] P. Malliavin. Stochastic calculus of variation and hypoelliptic operators. In *Proceedings of the International Symposium on Stochastic Differential Equations (Res. Inst. Math. Sci., Kyoto Univ., Kyoto, 1976)*, pages 195–263, New York, 1978. Wiley.

[Mis08] Y. S. Mishura. *Stochastic calculus for fractional Brownian motion and related processes*, volume 1929 of *Lecture Notes in Mathematics*. Springer-Verlag, Berlin, 2008.

[Moh98] S.-E. A. Mohammed. Stochastic differential systems with memory: theory, examples and applications. In *Stochastic analysis and related topics, VI (Geilo, 1996)*, volume 42 of *Progr. Probab.*, pages 1–77. Birkhäuser Boston, Boston, MA, 1998.

[MVN68] B. B. Mandelbrot and J. W. Van Ness. Fractional Brownian motions, fractional noises and applications. *SIAM Rev.*, 10:422–437, 1968.

[NNT08] A. Neuenkirch, I. Nourdin, and S. Tindel. Delay equations driven by rough paths. *Electron. J. Probab.*, 13:no. 67, 2031–2068, 2008.

[NR02] D. Nualart and A. Răşcanu. Differential equations driven by fractional Brownian motion. *Collect. Math.*, 53:55–81, 2002.

[Nua06] D. Nualart. *The Malliavin calculus and related topics.* Probability and its Applications (New York). Springer-Verlag, Berlin, second edition, 2006.

[Pro85] P. Protter. Volterra equations driven by semimartingales. *Ann. Probab.*, 13(2):519–530, 1985.

[SKM93] S. G. Samko, A. A. Kilbas, and O. I. Marichev. *Fractional integrals and derivatives.* Gordon and Breach Science Publishers, 1993.

[TT09] S. Tindel and I. Torrecilla. Some differential systems driven by a fbm with hurst parameter greater than 1/4. *ArXiv e-prints 0901.2010*, 2009.

[Wan08] Z. Wang. Existence and uniqueness of solutions to stochastic Volterra equations with singular kernels and non-Lipschitz coefficients. *Statist. Probab. Lett.*, 78(9):1062–1071, 2008.

[Wu96] J. Wu. *Theory and applications of partial functional-differential equations*, volume 119 of *Applied Mathematical Sciences.* Springer-Verlag, New York, 1996.

[You36] L. C. Young. An inequality of the Hölder type, connected with Stieltjes integration. *Acta Math.*, 67(1):251–282, 1936.

[Zäh98] M. Zähle. Integration with respect to fractal functions and stochastic calculus. I. *Probab. Theory Related Fields*, 111:333–374, 1998.