



**UNIVERSIDAD DE MURCIA**

**FACULTAD DE MATEMÁTICAS**

Cálculo de la Distancia Aparente de Códigos  
Abelianos. Códigos BCH Multivariados

**Dña. Diana Haidive Bueno Carreño**  
**2014**

A Dios y a mis padres.

## Agradecimientos

A mis directores de tesis José Joaquín Bernal Buitrago y Juan Jacobo Simón Pinero, por todas sus enseñanzas y por orientarme pacientemente en la elaboración de esta tesis.

A mi familia que, sin importar la distancia, me hacen sentir su amor, su apoyo incondicional y su confianza en mí.

A la Pontificia Universidad Javeriana de Cali y al Departamento Administrativo de Ciencia, Tecnología e Innovación de Colombia, Colciencias. Porque gracias a su apoyo económico a través de la beca Francisco José de Caldas, con patrocinio institucional, me ha sido posible cursar el doctorado en Matemáticas en la Universidad de Murcia. Asimismo, agradezco al Ministerio de Economía y Competitividad de España que financia el proyecto *Anillos de grupo, acciones parciales y métodos algebraicos en códigos correctores y dinámica simbólica*, con referencia MTM2012-35240, pues como miembro del grupo investigador he sido respaldada en el desarrollo de esta tesis y en la divulgación de algunos resultados parciales de la misma.

A las personas que en representación de la Pontificia Universidad Javeriana -Cali, Colciencias, Laspau y la Universidad de Murcia me han brindado apoyo económico, logístico, profesional y personal durante todo este proceso.

A mis amigos, los de siempre y los de ahora, por darme su respaldo y por hacerme sentir en familia, por todas las experiencias de vida compartidas y por todo lo que vendrá.

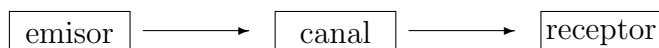
A todas aquellas personas que, de una u otra forma, estuvieron pendientes de mi proceso educativo y mi bienestar.

# Índice general

<b>Introducción</b>	<b>I</b>
<b>1. Preliminares</b>	<b>1</b>
1.1. Hipermatrices . . . . .	5
1.2. Transformada de Fourier discreta . . . . .	8
<b>2. Distancia aparente de códigos cíclicos. Cota BCH y códigos BCH.</b>	<b>10</b>
2.1. Distancia aparente de códigos cíclicos . . . . .	13
2.2. Códigos cíclicos cuya distancia mínima coincide con su distancia aparente	17
2.3. Aplicaciones: Distancia aparente óptima en códigos BCH . . . . .	25
<b>3. Distancia aparente mínima de una hipermatriz</b>	<b>30</b>
3.1. Distancia aparente de un código abeliano . . . . .	38
<b>4. Cálculo de la distancia aparente mínima de una hipermatriz</b>	<b>42</b>
4.1. Cálculo en matrices. Caso $s=2$ . . . . .	45
4.2. Cálculo en hipermatrices. Caso general. . . . .	49
<b>5. Una noción de código BCH multivariable</b>	<b>64</b>
<b>6. Aplicaciones</b>	<b>70</b>
6.1. Códigos abelianos con dimensión multiplicada . . . . .	70
6.2. Diseño de códigos MD . . . . .	73
<b>7. Apéndice</b>	<b>81</b>

# Introducción

Este trabajo se desarrolla en el marco de la denominada Teoría de la Información, la cual fue introducida por C. E. Shannon en su trabajo “A mathematical theory of communications” de 1948 [11]. Dicha teoría aborda, desde un punto de vista matemático, el problema de la transmisión de un mensaje desde un emisor hasta un receptor a través de un canal de comunicación .



Entendemos por *mensaje* una sucesión de entidades mínimas de información que llamamos de forma genérica *símbolos*. El conjunto de dichos símbolos será el *alfabeto* de la comunicación. En cuanto al canal, son ejemplos de canales habituales de comunicación, desde el espacio, un cable de teléfono o la fibra óptica, hasta la persona que teclea en la caja el código de barras de un producto cuando falla el lector. De acuerdo con la fiabilidad de la transmisión hay dos tipos de canales; a saber, los canales con interferencia o ruido y los canales sin interferencia. Nosotros nos interesamos por los primeros, en los cuales el mensaje recibido es susceptible de diferir del enviado. Siempre consideraremos que los alfabetos de entrada y salida coinciden.

En la práctica, el mensaje es codificado antes de ser transmitido; es decir, es transformado en un nuevo mensaje usando un código intermedio con algún fin específico. Según cuál sea este objetivo, nos encontramos con la división de la Teoría de la Información en tres ramas. La primera es la Criptografía, que estudia los códigos secretos; es decir, los usados con la finalidad de que el mensaje enviado sea solo comprensible por el receptor. La segunda rama se encarga del estudio de los códigos compresores, esto es, códigos en los que lo primordial es reducir el “espacio” necesario para albergar el mensaje. Finalmente, la última rama de la Teoría de la Información, y en la cual se sitúa nuestro trabajo, es la de Teoría de Códigos Correctores de Errores o simplemente Teoría de Códigos. En este caso, supuesto el uso de un canal con ruido, el mensaje enviado es codificado con el fin de que el receptor pueda corregir, o al menos detectar, los posibles errores que aparezcan en el mensaje recibido respecto del original.

Denotamos por  $\mathcal{A}$  el alfabeto utilizado para codificar la información antes de ser enviada; de este modo concretamos la idea de símbolo como cada uno de los elementos

de  $\mathcal{A}$ . Entonces, un *código* (bloque)  $C$  de longitud  $r$  es un subconjunto de  $\mathcal{A}^r$ , el producto cartesiano de  $r$  copias de  $\mathcal{A}$ . Llamamos *palabra* a cada uno de los elementos de  $C$ . Una *codificación* será una aplicación que asocie unívocamente a cada mensaje que deseemos transmitir, una palabra de  $C$ .

Se entiende como decodificación el proceso que lleva a decidir cuál fue la palabra enviada a través del canal a partir de la recibida. El canal con ruido quedará, por definición, determinado por la probabilidad de que cada símbolo que entra en él se transforme en cada uno de los símbolos de salida. Puesto que en la práctica la palabra enviada es desconocida, se entiende que el mejor método de decodificación es aquél que es capaz de hallar la palabra de  $C$  que con mayor probabilidad ha sido la enviada. Si suponemos que la probabilidad de que un símbolo sea alterado es menor que la de que no lo sea, la decodificación de mayor probabilidad es aquella que determina que la palabra del código enviada fue la que (o una de las que) más símbolos en común tiene con la palabra recibida. Así, un código será mejor cuanto mayor “distancia” haya entre sus palabras. La medida de esta propiedad viene dada por el concepto de distancia (de Hamming) mínima. En concreto, dadas dos palabras  $u = (u_1, \dots, u_r), v = (v_1, \dots, v_r) \in C$ , se llama distancia de Hamming entre  $u$  y  $v$  al número  $d(u, v) = |\{i \in \{1, \dots, r\} : u_i \neq v_i\}|$ , y entonces, la *distancia mínima* de  $C$  es

$$d(C) = \min\{d(u, v) : u \neq v\}.$$

Un problema central dentro de la Teoría de Códigos, y que surge de manera natural, es la búsqueda de códigos óptimos. Se sigue del párrafo anterior que para que un código tenga buenas propiedades de decodificación, debe poseer una distancia mínima grande. Sin embargo, se deben tener en cuenta otros aspectos. Por un lado, si pensamos en su aplicabilidad, un código debe tener un cardinal o número de palabras suficientemente grande como para que permita codificar un número elevado de posibles mensajes. Por otro lado, utilizar un código de una longitud excesiva supone un gasto adicional del canal, y por tanto, una menor eficiencia en la comunicación. Estos tres parámetros del código: distancia mínima, cardinal y longitud, entran en conflicto entre sí, y no es posible optimizarlos simultáneamente. Por tanto, un buen código será aquel que conjugue un buen equilibrio entre ellos. En general, la existencia de códigos óptimos para un canal dado está resuelta de forma teórica por un resultado de Shannon, bajo ciertas limitaciones sobre el canal de transmisión [11]. Sin embargo, la demostración de este resultado no es constructiva, por lo que la búsqueda de códigos óptimos es todavía un problema abierto. En la práctica, se trabaja fijando alguno o algunos de los parámetros y buscando los códigos que posean el mejor valor posible para los otros. En este trabajo mostramos algunas aportaciones en este sentido, en diferentes contextos. Concretamente, trabajamos con códigos con una longitud determinada y construimos explícitamente códigos con el mayor cardinal posible para una distancia mínima prefijada.

Unido a la búsqueda de códigos con buenos parámetros debe estudiarse el problema de diseñar métodos de codificación y decodificación lo más eficientes posible. Históricamente, se ha abordado esta cuestión a partir de la utilización de códigos que poseen de partida cierta estructura, ya sea algebraica, geométrica o combinatoria. En todos los

casos, dicha estructura es utilizada tanto en la implementación de métodos de codificación y decodificación como en el estudio de los parámetros de los códigos utilizados. En particular, el estudio de la determinación de la distancia mínima sigue siendo un problema central para toda familia de códigos. Nuestro trabajo se centra en la Teoría de Códigos Algebraicos; es decir, en la situación en la que los códigos poseen cierta estructura algebraica. A partir de aquí éste será el contexto durante toda la exposición.

La estructura algebraica básica más importante en la literatura es la de código lineal. Un *código lineal* es un subespacio vectorial de  $\mathbb{F}^r$ , donde  $\mathbb{F}$  es un cuerpo finito que hace las veces de alfabeto. En primer término, la estructura de espacio vectorial permite enfocar de un modo diferente el concepto de distancia mínima. En efecto, si  $C$  es un código lineal, se define el peso de una palabra  $c = (c_1, \dots, c_r) \in C$  como  $\omega(c) = |\{i \in \{1, \dots, r\} : c_i \neq 0\}|$ . Entonces la distancia mínima de  $C$  es

$$d(C) = \min\{\omega(c) : c \in C, c \neq 0\}.$$

Además, el hecho de ser código lineal, procura métodos de codificación y decodificación alternativos al método elemental de búsqueda exhaustiva de la palabra más “cercana” a la recibida. Si  $C$  es un código lineal de dimensión  $k$ , consideramos el espacio  $\mathbb{F}^k$  como el conjunto de posibles mensajes a transmitir. Fijada una matriz generadora  $G$  de  $C$ ; es decir, una matriz cuyas filas forman una base de  $C$ , el sistema de codificación consiste en asociar a cada mensaje  $x \in \mathbb{F}^k$  la palabra de  $C$  obtenida del producto  $c = xG^t$ , donde  $G^t$  es la matriz transpuesta de  $G$ . A partir de esta codificación, el método de decodificación utilizado hace uso del concepto de código dual. Consideramos el producto escalar usual sobre  $\mathbb{F}^r$ , que denotamos por  $u \cdot v$  ( $u, v \in \mathbb{F}^r$ ). Entonces, el código dual de  $C$  es  $C^\perp = \{u \in \mathbb{F}^r : u \cdot c = 0 \text{ para todo } c \in C\}$ . Si  $H$  es una matriz generadora de  $C^\perp$ , se llama síndrome de  $u \in \mathbb{F}^r$  a  $uH^t$ . El método de decodificación de un vector recibido  $y \in \mathbb{F}^r$  se reduce a encontrar la palabra de  $C$  de peso mínimo tal que su síndrome coincida con el de  $y$ . Aunque, en general, este método, conocido como método de decodificación por síndrome, mejora con mucho el método exhaustivo, cuando la lista de síndromes diferentes de elementos de  $\mathbb{F}^r$  es grande el método sigue sin ser eficiente.

En cuanto al problema central que ocupa este trabajo, el estudio de la distancia mínima, la estructura de código lineal permite abordar su cálculo mediante técnicas de álgebra lineal. De modo general, se sabe que si  $C$  es un código lineal y  $G$  es una matriz generadora,  $d(C)$  es el mayor número tal que cualquier conjunto de  $r - d(C) + 1$  columnas de  $G$  son linealmente independientes. Cuando el código tiene una longitud o una dimensión, como espacio vectorial, grande este cálculo se torna inviable. En estos casos se busca al menos una cota inferior para el valor real de la distancia mínima. La más relevante entre las cotas válidas para cualquier código lineal es la llamada cota de Singleton. Esta cota establece que si  $C$  es un código lineal de longitud  $r$  y dimensión  $k$ , entonces  $d(C) \leq r - k + 1$ . Un código MDS (maximum distance separable) es aquel cuyos parámetros  $r, k, d(C)$  satisfacen la igualdad anterior. Para una longitud y una dimensión fijas no existen códigos lineales con una distancia mínima mayor que la de un código MDS. Son códigos MDS, por ejemplo, los códigos de Reed-Solomon.

Sin lugar a dudas, a partir de los códigos lineales, la estructura algebraica más rele-

vante en la Teoría de Códigos es la de los códigos cíclicos. Un código cíclico es un código lineal  $C$  que cumple que si  $c = (c_1, \dots, c_r) \in C$  entonces  $(c_r, c_1, \dots, c_{r-1})$  también es una palabra de  $C$ . Esta propiedad, en apariencia combinatoria, se traduce en que todo código cíclico de longitud  $r$  sobre el alfabeto  $\mathbb{F}_q$ , el cuerpo de  $q$  elementos, puede identificarse con un ideal del álgebra de polinomios

$$A_q(r) = \mathbb{F}_q[x]/(x^r - 1).$$

Esta visión polinómica ha permitido desarrollar enormemente las aplicaciones prácticas de los códigos cíclicos. Gran parte de los códigos más relevantes en la literatura son cíclicos: códigos de Hamming, códigos de Golay, códigos BCH, códigos de Reed-Solomon, etc.

La propiedad que define a un código cíclico, añadida a la de código lineal, permite mejorar el método de decodificación por síndrome, pues reduce la lista de síndromes módulo la equivalencia de las palabras de  $C$  por permutaciones cíclicas. Por otro lado, el punto de vista polinómico proporciona un método de decodificación alternativo basado en la división de polinomios.

Si bien no existe ningún método general específico para el cálculo de la distancia mínima de un código cíclico arbitrario, sí que existen numerosas cotas inferiores. La más antigua de ellas es la cota Bose-Ray-Chaudhuri-Hocquenghem, usualmente llamada cota BCH. Esta cota se basa en la estructura del conjunto de raíces de los elementos de un código cíclico vistos como polinomios en el álgebra  $A_q(r)$ . El acercamiento a este conjunto de raíces, tradicionalmente parte de la suposición de que  $r$  y  $q$  sean coprimos. En ese caso, todas las raíces de  $x^r - 1$  son distintas y pueden estudiarse en términos de clases ciclotómicas (que definimos más adelante); además, el álgebra  $A_q(r)$  es semisimple y pueden aplicarse los teoremas de estructura de Wedderburn. Todo nuestro trabajo se desarrolla bajo esta suposición de semisimplicidad.

En primer lugar, dado un código cíclico  $C \subseteq A_q(r)$  existe un único polinomio mónico  $g(x)$ , divisor de  $x^r - 1$ , que lo genera como ideal. Se dice que  $g(x)$  es el polinomio generador de  $C$ . Se define entonces el conjunto de ceros de  $C$ , que denotamos por  $Z(C)$ , como el conjunto de raíces comunes a todas sus palabras. Como  $C$  está generado por  $g(x)$ , sus raíces serán precisamente las raíces de  $g(x)$ , y por tanto raíces  $r$ -ésimas de la unidad. Fijada  $\alpha$  una raíz  $r$ -ésima primitiva de la unidad en una extensión de  $\mathbb{F}_q$ , se llama conjunto de definición de  $C$  respecto de  $\alpha$  a

$$D_\alpha(C) = \{0 \leq i < r : \alpha^i \in Z(C)\}.$$

Puesto que  $g(x)$  pertenece a  $\mathbb{F}_q[x]$ , se cumple que si  $i \in D_\alpha(C)$  entonces también  $iq \in D_\alpha(C)$ , es decir,  $D_\alpha(C)$  es cerrado para la multiplicación por  $q$  módulo  $r$ . Ya que  $q$  y  $r$  son coprimos, la multiplicación por  $q$  módulo  $r$  divide al grupo cíclico  $\mathbb{Z}_r$ , de los enteros módulo  $r$ , en órbitas disjuntas denominadas clases  $q$ -ciclotómicas, esto es, para todo  $a \in \mathbb{Z}_r$  su clase  $q$ -ciclotómica módulo  $r$  es el conjunto

$$C_q(a) = \{aq^i : i \in \mathbb{N}\} \subseteq \mathbb{Z}_r.$$



Se tiene por tanto que cualquier conjunto de definición de todo código cíclico es unión de clases ciclotómicas.

Así, la cota BCH para un código cíclico establece que, si  $D_\alpha(C)$  contiene  $\delta - 1$  enteros consecutivos módulo  $r$  entonces  $d(C) \geq \delta$ . Por lo tanto, se trata de una cota dependiente de la estructura de  $D_\alpha(C)$ . Puesto que este conjunto depende a su vez de la elección de la raíz de la unidad, existen varias cotas BCH posibles para un mismo código. Han aparecido en la literatura mejoras de esta cota, como las obtenidas por Hartmann y Tzeng, Roos o van Lint y Wilson. Todas estas mejoras nos acercan más al valor real de la distancia mínima aunque subsiste el problema de determinarlo.

Asociada a la cota BCH se define la familia de códigos que lleva el mismo nombre. Fijados los enteros  $b \geq 0, \delta \geq 2$  y una raíz  $r$ -ésima primitiva de la unidad  $\alpha$ , el código BCH en  $A_q(r)$  de distancia designada  $\delta$  es el código cíclico con mayor dimensión tal que el conjunto  $\{b, b + 1, \dots, b + \delta - 2\}$  está contenido en  $D_\alpha(C)$ . Esta familia de códigos contiene a muchas de las familias más importantes dentro de la Teoría de Códigos, como son algunos de los códigos de Hamming o los ya mencionados códigos de Reed-Solomon (códigos BCH para los que  $r = q - 1$ ).

Un problema clásico en el estudio de la cota BCH es la búsqueda de condiciones necesarias y suficientes para que en un código cíclico la mayor de las cotas BCH y la distancia mínima coincidan. Presentamos en este trabajo algunos resultados en este sentido. En concreto, hemos encontrado condiciones en términos de los divisores de  $x^r - 1$  en ciertas extensiones del cuerpo  $\mathbb{F}_q$ . Es más, a partir de estos resultados mostramos un método de construcción de códigos para los cuales el máximo de sus cotas BCH y su distancia mínima coinciden.

Además de los códigos cíclicos, la familia fundamental de estudio en nuestro trabajo, es la familia de los códigos de grupo; en particular, en el caso abeliano. Si denotamos por  $C_r$  el grupo cíclico de orden  $r$ , existe un isomorfismo de álgebras entre el álgebra de grupo  $\mathbb{F}C_r$  y el álgebra de polinomios  $A_q(r)$ . Esta identificación lleva a la definición general de código de grupo. Un *código de grupo* (por la izquierda, por la derecha) es un ideal (por la izquierda, por la derecha) de un álgebra de grupo  $\mathbb{F}_q G$ , donde  $G$  es un grupo finito arbitrario. La relevancia de la familia de los códigos de grupo supera la mera generalización de código cíclico. Muchas de las familias más importantes dentro de la Teoría de Códigos no pertenecen a la familia de los códigos cíclicos pero sí poseen estructura de código de grupo. Por ejemplo, las extensiones por paridad de los códigos de Golay, los códigos generalizados de residuos cuadráticos o los códigos de Reed-Muller.

El diseño de métodos de codificación y decodificación para el caso de los códigos de grupo mejora el caso lineal en el mismo sentido que los códigos cíclicos, es decir, reduciendo la tabla de síndromes. Además, la estructura de grupo asociada al conjunto de posiciones de las entradas de las palabras procura una aproximación diferente a la decodificación plasmada en el método denominado decodificación por permutación. En muchos casos, este método mejora notablemente la decodificación por síndrome.

En lo que respecta al cálculo de la distancia mínima, no hay método general para un

código de grupo arbitrario. De nuevo los avances existentes se basan en la búsqueda de cotas inferiores. En concreto, es tema central en este trabajo el estudio de una de ellas: la distancia aparente.

En 1970, P. Camion [4] extendió el estudio de la cota BCH a la familia de los códigos abelianos al introducir las nociones de *distancia aparente* de un polinomio y de un código abeliano. En el caso de los códigos cíclicos, la distancia aparente y la (máxima) cota BCH del código, coinciden.

La distancia aparente de un código abeliano en un anillo semisimple es el mínimo de la distancia aparente de ciertos polinomios. Dichos polinomios corresponden con la transformada de Fourier discreta de los elementos de todos los subconjuntos del conjunto de idempotentes que pertenecen al código. Esto implica que el cálculo es de orden exponencial. Así, en la práctica, el número de operaciones requeridas es muy elevado, por lo que es pertinente plantearse la búsqueda de un método alternativo que simplifique el original. En [8], R. E. Sabin realizó la primera reducción de los cálculos para obtener la distancia aparente de un polinomio fijo usando ciertas manipulaciones de matrices en el contexto de los llamados “2-D cyclic codes” (códigos abelianos en dos variables). Aún cuando el método de Sabin simplifica el original, no ayuda en nada a reducir el número de distancias aparentes que es necesario calcular. Así que el problema de la complejidad siguió abierto.

En el trabajo de Camion antes mencionado, uno puede comprobar que la distancia aparente de un código cíclico es precisamente la distancia aparente de un polinomio asociado al idempotente generador del código (concretamente, la transformada de Fourier). Hay ejemplos que muestran que, en el caso multivariable, la igualdad anterior no se verifica. Así, es natural preguntarse si en ese caso puede obtenerse la distancia aparente a partir de ciertas manipulaciones sobre dicho polinomio o específicamente sobre la hipermatriz (de coeficientes) asociada a la imagen bajo la transformada de Fourier discreta del idempotente generador, respecto de ciertas raíces de la unidad prefijadas. Éste es el objetivo principal alcanzado en este trabajo: presentar un algoritmo para calcular la distancia aparente de un código abeliano basándose en el manejo de hipermatrices, de tal forma que la cantidad de operaciones involucradas se reduzca hasta el orden lineal en el caso de dos variables (en varias variables, se aprecia una reducción drástica, pero no hemos demostrado que sea lineal).

Una vez obtenido el algoritmo mencionado, el siguiente paso natural ha sido desarrollar una noción de código BCH multivariable que nos ha permitido extender ciertos resultados clásicos sobre códigos BCH cíclicos. Además, hemos encontrado aplicaciones de nuestras técnicas en la construcción de códigos abelianos con distancia aparente pre-determinada.

Por tanto, esta tesis está dedicada al estudio del cálculo de la distancia aparente de un código abeliano y al desarrollo de la noción de cota BCH y código BCH multivariable, así como a las construcciones multivariables y a las aplicaciones a los códigos cíclicos que se desprenden de dichas nociones.

En el Capítulo 1 introducimos aquellos resultados preliminares y técnicas necesarias para el desarrollo de nuestro trabajo; en particular, el estudio de la transformada de Fourier discreta de un polinomio, respecto a una lista de raíces primitivas de la unidad, que es el objeto sobre el que estaremos calculando la distancia aparente.

Comenzamos el Capítulo 2 repasando la noción clásica de cota BCH, pasamos al concepto de distancia aparente en el caso de una variable y lo aplicamos al estudio de los códigos cíclicos considerando tres problemas relacionados con la cota BCH. El primero es dar condiciones necesarias y suficientes para que la cota BCH alcance la distancia mínima, el segundo problema consiste en dar técnicas de construcción de códigos que satisfagan las condiciones anteriores y el tercer problema es determinar técnicas de construcción como las anteriores, pero aplicadas a códigos BCH.

En el Capítulo 3 presentamos la noción de distancia aparente de un polinomio dada por P. Camion. Después exponemos nuestra extensión del método diseñado por R. E. Sabin para calcular la distancia aparente con métodos matriciales, en el caso de dos variables. Finalmente, introducimos el concepto de distancia aparente mínima de una hipermatriz y mostramos que, aplicado al idempotente generador de un código abeliano, conduce a su distancia aparente.

El Capítulo 4 es una de las partes centrales de esta tesis. Está dedicado exclusivamente a presentar un algoritmo para el cálculo de la distancia aparente mínima de una hipermatriz, a través de ciertas manipulaciones de las  $q$ -órbitas que componen el soporte de lo que llamaremos la hipermatriz proporcionada por un código abeliano. Como hemos comentado, nuestro método reduce drásticamente el número de cálculos necesarios para alcanzar la distancia aparente mínima.

En el Capítulo 5 desarrollamos la noción de cota BCH multivariable y código BCH multivariable, extendiendo ciertos resultados clásicos.

Dedicamos el Capítulo 6 a la aplicación de nuestras técnicas y resultados en dos direcciones. La primera consiste en la construcción de códigos abelianos a partir de códigos cíclicos, que multiplican su dimensión pero preservan la distancia aparente. La segunda consiste en el diseño de códigos abelianos de dimensión maximal, respecto a una distancia aparente y una longitud dadas.

Finalmente, el Capítulo 7 es un apéndice en el cual presentamos un ejemplo del cálculo detallado de la distancia aparente de una hipermatriz de 2-órbitas de dimensión 3, siguiendo el algoritmo dado en el Capítulo 4.

# Capítulo 1

## Preliminares

En este capítulo introduciremos toda la notación y terminología básicas que necesitaremos en el desarrollo de esta tesis. Además, presentaremos los elementos de la Teoría de Códigos abelianos que son de nuestro interés y dos herramientas fundamentales para la obtención de nuestros resultados: las hipermatrices y la transformada de Fourier discreta.

Dado un código  $C$ , denotamos por  $d(C)$  su distancia mínima y por  $\omega(c)$  el peso de una palabra  $c \in C$ . A lo largo de este trabajo  $\mathbb{F}_q$  denotará el cuerpo finito con  $q$ -elementos, donde  $q$  es una potencia de un número primo  $p$ , que será el cuerpo base de los códigos.

La notación y terminología que exponemos a continuación están basadas en las presentadas en [6], [9] y [10].

**Definición 1.1** [6, Definition 9.1.1] *Un código abeliano sobre  $\mathbb{F}_q$  es un ideal en el álgebra de grupo  $\mathbb{F}_q G$ , donde  $G$  es un grupo abeliano finito.*

Es bien sabido que cada grupo abeliano finito admite una descomposición directa en producto de grupos cíclicos; es decir, existen enteros positivos  $s$  y  $r_1, \dots, r_s$  tales que  $G \cong C_{r_1} \times \dots \times C_{r_s}$ , donde  $C_{r_k}$  es el grupo cíclico de orden  $r_k$  para  $k = 1, \dots, s$ . Esta descomposición induce un isomorfismo canónico de  $\mathbb{F}_q$ -álgebras entre  $\mathbb{F}_q G$  y  $\mathbb{F}_q[x_1, \dots, x_s]/(x_1^{r_1} - 1, \dots, x_s^{r_s} - 1)$ , donde  $\mathbb{F}_q[x_1, \dots, x_s]$  es el anillo de polinomios con coeficientes en  $\mathbb{F}_q$  en las indeterminadas  $x_1, \dots, x_s$ . Denotamos esta álgebra cociente por  $A_q(r_1, \dots, r_s)$ . Cada uno de sus elementos tiene un único polinomio representante canónico cuyos monomios satisfacen que el grado de la indeterminada  $x_k$  pertenece a  $\mathbb{Z}_{r_k}$ , el anillo de enteros módulo  $r_k$ , cuyos elementos siempre entenderemos como representantes canónicos; esto es, enteros no negativos menores que  $r_k$ . Así pues, escribiremos los elementos  $f \in A_q(r_1, \dots, r_s)$  como  $f = f(x_1, \dots, x_s) = \sum a_{\mathbf{i}} X^{\mathbf{i}}$ , donde  $\mathbf{i} = (i_1, \dots, i_s) \in \mathbb{Z}_{r_1} \times \dots \times \mathbb{Z}_{r_s}$  y  $X^{\mathbf{i}} = x_1^{i_1} \dots x_s^{i_s}$ . Si alguno de los monomios de un polinomio  $f \in \mathbb{F}_q[x_1, \dots, x_s]$  es tal que el grado de la indeterminada  $x_k$  es mayor o igual que  $r_k$ ,

denotaremos con  $\bar{f}$  su imagen bajo la proyección canónica sobre  $A_q(r_1, \dots, r_s)$ .

**Definición 1.2** Sea  $f = \sum a_i X^i$  un polinomio en  $A_q(r_1, \dots, r_s)$ . El soporte de  $f$  es el conjunto

$$\text{supp}(f) = \{\mathbf{i} \in \mathbb{Z}_{r_1} \times \dots \times \mathbb{Z}_{r_s} : a_{\mathbf{i}} \neq 0\}.$$

En esta tesis solo consideraremos códigos abelianos en álgebras semisimples. Por lo tanto, a lo largo de este trabajo tendremos que los enteros positivos  $r_1, \dots, r_s$  mencionados anteriormente verifican que  $\text{mcd}(q, r_1 \cdots r_s) = 1$  y denotaremos

$$I = \prod_{k=1}^s \mathbb{Z}_{r_k}.$$

Cuando consideremos el caso  $s = 1$ , escribiremos  $r$  en vez de  $r_1$ .

Recordemos que un elemento  $e \in A_q(r_1, \dots, r_s)$  se dice idempotente si  $e^2 = e$ , dos idempotentes  $e_1, e_2$  son ortogonales si  $e_1 e_2 = 0$  y un idempotente es primitivo si no puede escribirse como suma de idempotentes ortogonales no nulos. Como consecuencia del teorema de Weddeburn-Artin, en concreto de los resultados [7, Theorem 3.4.9] y [7, Theorem 2.6.9], tenemos que existe un conjunto de idempotentes no nulos, primitivos y ortogonales, que denotamos  $\text{Icp} = \{e_1, \dots, e_t\}$ , tal que

$$A_q(r_1, \dots, r_s) = A_q(r_1, \dots, r_s) \cdot e_1 \oplus \dots \oplus A_q(r_1, \dots, r_s) \cdot e_t. \quad (1.1)$$

Más aún, cada ideal  $C$  en  $A_q(r_1, \dots, r_s)$  es suma directa de algunos miembros de la familia de ideales minimales  $\{A_q(r_1, \dots, r_s) \cdot e_i\}_{i=1}^t$ . Así que  $C$  es un ideal principal y está generado por una palabra (un polinomio) idempotente.

Para cada  $i \in \{1, \dots, s\}$ , denotamos por  $U_{r_i}$  el conjunto de todas las raíces  $r_i$ -ésimas primitivas de la unidad y definimos

$$U = \{\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_s) : \alpha_i \in U_{r_i}\}. \quad (1.2)$$

Se define el **conjunto de ceros de un polinomio**  $f \in A_q(r_1, \dots, r_s)$  como

$$Z(f) = \{\alpha \in U : f(\alpha) = 0\} \quad (1.3)$$

y, si fijamos  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_s) \in U$ , el **conjunto de definición** de  $f$ , respecto de  $\alpha$ , es

$$D_\alpha(f) = \{\mathbf{i} \in I : \alpha^{\mathbf{i}} \in Z(f)\}. \quad (1.4)$$

Observemos que el conjunto de ceros de un polinomio es un subconjunto de  $\{\alpha^{\mathbf{i}} : \mathbf{i} \in I\}$  y por lo tanto, es un subconjunto del conjunto de raíces del polinomio, visto como elemento del anillo  $\mathbb{F}_q[x_1, \dots, x_s]$ .

En algunas ocasiones estaremos interesados en los complementos de estos conjuntos. Denotamos  $\overline{Z}(f) = U \setminus Z(f)$  y  $\overline{D}_\alpha(f) = I \setminus D_\alpha(f)$ .

Todo ideal  $C$  en  $A_q(r_1, \dots, r_s)$  está totalmente determinado por su conjunto de ceros, también llamado conjunto raíz de  $C$ .

**Definición 1.3** Sea  $C$  un código abeliano en  $A_q(r_1, \dots, r_s)$ . El conjunto

$$Z(C) = \{\alpha \in U : \alpha \in Z(f), \forall f \in C\} = \{\alpha \in U : f(\alpha) = 0, \forall f \in C\}$$

es el conjunto de ceros de  $C$ .

Asimismo, si fijamos  $\alpha \in U$ ,  $C$  está determinado por su conjunto de definición respecto de  $\alpha$ .

**Definición 1.4** Sean  $C$  un código abeliano en  $A_q(r_1, \dots, r_s)$  y  $\alpha \in U$ . El conjunto de definición de  $C$  respecto de  $\alpha$  es

$$D_\alpha(C) = \{\mathbf{i} \in I : \alpha^{\mathbf{i}} \in Z(C)\} = \{\mathbf{i} \in I : f(\alpha^{\mathbf{i}}) = 0, \forall f \in C\}.$$

Notemos que si  $C$  está generado por el idempotente  $e$  entonces  $D_\alpha(C) = D_\alpha(e)$ , para todo  $\alpha \in U$ , pues  $f = fe$  para todo  $f \in C$ .

**Definición 1.5** Sean  $C$  un código abeliano en  $A_q(r_1, \dots, r_s)$  y  $\alpha \in U$ . El soporte de  $C$  respecto de  $\alpha$  es el conjunto complementario de su conjunto de definición respecto de  $\alpha$ ; es decir,

$$\text{supp}_\alpha(C) = I \setminus D_\alpha(C) = \{\mathbf{i} \in I : \alpha^{\mathbf{i}} \notin Z(C)\}.$$

Un hecho importante, cuya demostración puede encontrarse en [6, pp. 835-836], es que la dimensión de un código abeliano  $C$  verifica la igualdad

$$\dim_{\mathbb{F}_q} C = \prod_{j=1}^s r_j - |D_\alpha(C)| = |\text{supp}_\alpha(C)|, \quad \text{para todo } \alpha \in U. \quad (1.5)$$

Dado  $i \in \mathbb{Z}_r$ , la **clase  $q^t$ -ciclotómica** de  $i$  módulo  $r$  es el conjunto

$$C_{q^t}(i) = \{i \cdot q^{tl} \in \mathbb{Z}_r : l \in \mathbb{N}\} = \{i, qi, \dots, q^{n_i-1}i\} \quad (1.6)$$

donde  $n_i$  es el menor entero positivo tal que  $q^{n_i}i \equiv i \pmod{r}$ . La siguiente definición de  $q^t$ -órbita generaliza la definición de clase  $q^t$ -ciclotómica.

**Definición 1.6** Sean  $t$  un número entero positivo e  $\mathbf{i} = (i_1, \dots, i_s) \in I$ . Definimos la  $q^t$ -órbita de  $\mathbf{i}$ , módulo  $(r_1, \dots, r_s)$ , como

$$Q_t(\mathbf{i}) = \{(i_1 \cdot q^{tl}, \dots, i_s \cdot q^{tl}) \in I : l \in \mathbb{N}\}.$$

Notemos que  $|Q_t(\mathbf{i})| = \eta$ , donde  $\eta$  es el menor entero positivo tal que  $q^\eta i_k \equiv i_k \pmod{r_k}$  para todo  $k = 1, \dots, s$ .

Con el fin de simplificar la escritura, al hablar de  $q^t$ -órbitas omitiremos la  $s$ -upla de enteros  $(r_1, \dots, r_s)$  sobre la que tomamos congruencias, pues siempre quedará clara a partir del contexto. Denotaremos por  $\mathcal{Q}_t$  el conjunto de todas las  $q^t$ -órbitas módulo  $(r_1, \dots, r_s)$  y en el caso  $t = 1$  escribiremos  $Q(\mathbf{i})$  y  $\mathcal{Q}$  en vez de  $Q_1(\mathbf{i})$  y  $\mathcal{Q}_1$ , respectivamente.

El conjunto de definición de un código cíclico respecto de  $\alpha \in U_r$ , y por ende su soporte respecto de  $\alpha$ , es unión de clases  $q$ -ciclotómicas módulo  $r$  (véase [10, p. 104]). Este hecho se puede generalizar para todo ideal en  $A_q(r_1, \dots, r_s)$ ; es decir, si  $\alpha \in U$  y  $C$  es un código abeliano en  $A_q(r_1, \dots, r_s)$  entonces  $D_\alpha(C)$  es unión disjunta de  $q$ -órbitas. En efecto, dado que todo polinomio  $f(x_1, \dots, x_s) \in A_q(r_1, \dots, r_s)$  tiene coeficientes en  $\mathbb{F}_q$ , si  $\alpha^{\mathbf{i}} \in Z(C)$  entonces  $\alpha^{\mathbf{j}} \in Z(C)$ , para todo  $\mathbf{j} \in Q(\mathbf{i})$ . Recíprocamente, toda unión disjunta de  $q$ -órbitas en  $\mathcal{Q}$  define un código abeliano en  $A_q(r_1, \dots, r_s)$ .

Como casos particulares consideremos los códigos triviales en  $A_q(r_1, \dots, r_s)$ . El código nulo,  $C = \{0\}$ , es tal que su conjunto de definición respecto de cualquier  $\alpha \in U$  es la unión de todas las  $q$ -órbitas en  $I$ ; esto es,  $D_\alpha(\{0\}) = I$ . Por otra parte, el conjunto vacío (en  $I$ ) determina el código impropio  $A_q(r_1, \dots, r_s)$ .

Notemos que si  $C$  es un código abeliano en  $A_q(r_1, \dots, r_s)$  y consideramos dos juegos distintos de raíces  $\alpha, \alpha' \in U$  entonces es posible que  $D_\alpha(C) \neq D_{\alpha'}(C)$ . Para el desarrollo de nuestro trabajo se hace necesario considerar todos los conjuntos de definición de un código abeliano  $C$ , es decir,  $\{D_\alpha(C) : \alpha \in U\}$ . La siguiente observación nos proporciona una estrategia para determinar todos los elementos de este último conjunto. Recordemos que si  $a$  y  $b$  son enteros positivos coprimos, el **orden multiplicativo** de  $a$  módulo  $b$  es el primer entero positivo  $m$ , tal que  $b$  divide a  $a^m - 1$ . Denotaremos este entero por  $\mathcal{O}_b(a)$ .

**Observación 1.7** Sean  $Q(\mathbf{a}_1), Q(\mathbf{a}_2), \dots, Q(\mathbf{a}_h)$  las diferentes  $q$ -órbitas módulo  $(r_1, \dots, r_s)$  y fijemos  $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_h$ . Supongamos que hemos elegido  $\alpha \in U$  para obtener el conjunto  $D_\alpha(C)$ . Buscamos los elementos  $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_s) \in U$  para los cuales sea posible que  $D_\beta(C) \neq D_\alpha(C)$ . De este modo,  $\beta \in U$  debe satisfacer la igualdad  $\beta^{\mathbf{a}_i} = \alpha$  para algún  $\mathbf{a}_i = (a_{i1}, \dots, a_{is})$  tal que  $\text{mcd}(a_{ij}, r_j) = 1$  con  $j = 1, \dots, s$ . En este caso, es claro que  $D_\beta(C) = \mathbf{a}_i \cdot D_\alpha(C)$ , donde la multiplicación tiene el significado obvio. Además, dado que  $D_{\beta^{\mathbf{a}_i}}(C) = D_{(\beta_1^{a_{i1}q}, \dots, \beta_s^{a_{is}q})}(C)$  y  $|Q(\mathbf{a}_i)| = \text{mcm}\{\mathcal{O}_{r_i}(q)\}_{i=1}^s$  para cualquier  $\mathbf{a}_i = (a_{i1}, \dots, a_{is})$  tal que  $\text{gcd}(a_{ij}, r_j) = 1$ ,  $j = 1, \dots, s$ , tenemos que considerar a lo sumo  $\frac{\prod_{i=1}^s \phi(r_i)}{\text{mcm}\{\mathcal{O}_{r_i}(q)\}_{i=1}^s}$  conjuntos de definición distintos o elementos en  $U$ .

Introducimos entonces las siguientes notaciones

$$K(r_1, \dots, r_s) = \{\mathbf{a}_i = (a_{i1}, \dots, a_{is}) : \text{mcd}(a_{ij}, r_j) = 1, j = 1, \dots, s, i = 1, \dots, h\} \quad (1.7)$$

$$\mathcal{R}_\alpha = \{\beta \in U : \beta^{\mathbf{a}_i} = \alpha, \mathbf{a}_i \in K(r_1, \dots, r_s)\}, \quad \text{para cada } \alpha \in U. \quad (1.8)$$

La primera parte de nuestros resultados atañe solamente a los códigos cíclicos. Con el fin de facilitar la lectura, a continuación establecemos notación y terminología específicas para el caso  $s = 1$ . Denotamos por  $A_q(r)$  el álgebra cociente  $\mathbb{F}_q[x]/(x^r - 1)$ . Cada uno de sus elementos tiene un único polinomio representante canónico cuyo grado pertenece a  $\mathbb{Z}_r$ , por lo tanto identificamos los elementos de  $A_q(r)$  como polinomios de grado menor que  $r$ , es decir, los escribimos de la forma  $f(x) = \sum a_i x^i$  con  $i \in \mathbb{Z}_r$ . Cuando sea posible que un polinomio  $f \in \mathbb{F}_q[x]$  tenga grado mayor o igual que  $r$ , denotaremos con  $\bar{f}$  su imagen bajo la proyección canónica sobre  $A_q(r)$ .

Consideremos el conjunto de todas las raíces  $r$ -ésimas primitivas de la unidad,  $U_r$ . Definimos el conjunto de ceros de un polinomio  $f \in A_q(r)$  como

$$Z(f) = \{\alpha \in U_r : f(\alpha) = 0\}. \quad (1.9)$$

y, dado  $\alpha \in U_r$ , el conjunto de definición de  $C$ , respecto de  $\alpha$ , es

$$D_\alpha(f) = \{i \in \mathbb{Z}_r : \alpha^i \in Z(f)\}. \quad (1.10)$$

Cabe resaltar que en el caso de códigos cíclicos binarios y ternarios, para  $r \leq 70$  tenemos que  $\frac{\phi(r)}{\mathcal{O}_r(q)} \leq 6$ . Por lo tanto, de la Observación 1.7 podemos concluir que existen a lo sumo 6 conjuntos de definición del código distintos. Si  $r \leq 90$  entonces  $\frac{\phi(r)}{\mathcal{O}_r(q)} \leq 8$  y así existen a lo sumo 8 conjuntos de definición diferentes.

## 1.1. Hipermatrices

A cada código abeliano vamos a asociar un arreglo multivariable, que llamaremos hipermatriz y que usaremos para calcular una cota para la distancia mínima del código. Definimos a continuación, en forma general, dicho tipo de arreglos.

**Definición 1.8** [13] *Una hipermatriz con entradas en un anillo  $R$  e índices en  $I = \prod_{k=1}^s \mathbb{Z}_{r_k}$ , es un  $I$ -arreglo de dimensión  $s$ , que denotamos por  $M = (a_{\mathbf{i}})_{\mathbf{i} \in I}$ , con  $a_{\mathbf{i}} \in R$ . En el caso  $s = 2$ , diremos que  $M$  es una matriz y en el caso  $s = 1$  diremos simplemente que  $M$  es un vector o una matriz fila (o columna).*

El conjunto de índices  $I$ , la dimensión y el anillo  $R$  se omitirán si quedan claros a partir del contexto o si no son relevantes.

Nos referiremos a las entradas de la hipermatriz  $M$  como elementos; es decir, si  $a_{\mathbf{i}}$  es una entrada de  $M$ , diremos que  $a_{\mathbf{i}} \in M$ . Escribiremos  $M = 0$  si todas las entradas de  $M$



son cero; en caso contrario escribiremos  $M \neq 0$ .

Dado  $\mathbf{i} \in I$  escribimos su  $k$ -ésima coordenada como  $\mathbf{i}(k)$  y definimos el conjunto

$$I(k, b) = \{\mathbf{i} \in I : \mathbf{i}(k) = b\}.$$

**Definición 1.9** Una hipercolumna de la hipermatriz  $M$  se define como

$$H_M(k, b) = \{a_{\mathbf{i}} \in M : \mathbf{i} \in I(k, b)\}$$

con  $1 \leq k \leq s$  y  $b \in \mathbb{Z}_{r_k}$ .

Una hipercolumna a menudo será vista como una hipermatriz de dimensión  $s - 1$ , especialmente en algunos procesos donde haremos inducción sobre la dimensión de las hipermatrices. Recíprocamente, observemos que dados  $k \in \{1, \dots, s\}$  y  $b \in \mathbb{Z}_{r_k}$ , una hipermatriz con índices en  $\prod_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^s \mathbb{Z}_{r_j}$  puede ser vista como una hipercolumna (de cierta hipermatriz de dimensión  $s$ ) con índices en  $I(k, b)$ .

Definimos a continuación dos tipos especiales de hipermatrices.

**Definición 1.10** Sea  $f = \sum_{\mathbf{i} \in I} a_{\mathbf{i}} X^{\mathbf{i}}$  un polinomio en  $A_q(r_1, \dots, r_s)$ . La hipermatriz de coeficientes de  $f$  se define como  $M(f) = (a_{\mathbf{i}})_{\mathbf{i} \in I}$ .

**Definición 1.11** Sea  $D \subseteq I$ . Llamaremos hipermatriz (booleana) proporcionada por  $D$ , a la hipermatriz  $M = (a_{\mathbf{i}})_{\mathbf{i} \in I}$ , cuyas entradas están definidas como sigue:

$$a_{\mathbf{i}} = \begin{cases} 1 & \text{si } \mathbf{i} \notin D \\ 0 & \text{si } \mathbf{i} \in D. \end{cases}$$

Si  $D$  es unión de  $q^t$ -órbitas, diremos que  $M$  es la hipermatriz de  $q^t$ -órbitas proporcionada por  $D$  y se denotará por  $M(D)$ .

A lo largo de este trabajo, cuando lo consideremos apropiado, asignaremos un recuadro de color a cada  $q^t$ -órbita en  $I$  con el fin de visualizar la distribución de las mismas en las hipermatrices de  $q^t$ -órbitas.

**Ejemplo 1.12** Consideremos  $A_2(5, 7)$  y el conjunto de las 2-órbitas, módulo  $(5, 7)$ , a las cuales asignamos un recuadro de color como se ve a continuación.

$$\begin{aligned} \text{Q}(0,0) &= \{(0,0)\} \\ \text{Q}(0,1) &= \{(0,1), (0,2), (0,4)\} \\ \text{Q}(0,3) &= \{(0,3), (0,5), (0,6)\} \\ \text{Q}(1,0) &= \{(1,0), (2,0), (3,0), (4,0)\} \\ \text{Q}(1,1) &= \{(1,1), (1,2), (1,4), (2,1), (2,2), (2,4), (3,1), (3,2), \\ &\quad (3,4), (4,1), (4,2), (4,4)\} \\ \text{Q}(1,3) &= \{(1,3), (1,5), (1,6), (2,3), (2,5), (2,6), (3,3), (3,5), \\ &\quad (3,6), (4,3), (4,5), (4,6)\} \end{aligned}$$

Si tenemos que  $D = Q(0, 0) \cup Q(0, 1) \cup Q(1, 3)$ , entonces

$$M(D) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

**Definición 1.13** Sea  $M = (a_i)_{i \in I}$  una hipermatriz con entradas en un anillo. El soporte de  $M$  es el conjunto

$$\text{supp}(M) = \{\mathbf{i} \in I : a_{\mathbf{i}} \neq 0\}.$$

Denotaremos su complemento por  $\mathcal{D}(M)$ .

De modo similar, dada una hipercolumna de  $M$ ,  $H_M(k, b)$ , tenemos que

$$\text{supp}(H_M(k, b)) = \{\mathbf{i} \in I(k, b) : a_{\mathbf{i}} \neq 0\} \quad (1.11)$$

y denotamos

$$D_M(k, b) = \mathcal{D}(H_M(k, b)) = I(k, b) \setminus \text{supp}(H_M(k, b)). \quad (1.12)$$

A continuación presentamos algunos hechos notables acerca de las hipermatrices de órbitas y sus soportes, que se deducen directamente de las definiciones anteriores.

**Observaciones 1.14** 1. Sea  $M$  una hipermatriz de  $q^t$ -órbitas. Por definición,  $\mathcal{D}(M)$  es unión de  $q^t$ -órbitas.

2. Si  $M$  es una hipermatriz de  $q$ -órbitas y  $\text{supp}(M)$  es unión de  $q^t$ -órbitas, para algún entero positivo  $t$ , entonces  $M$  es también una hipermatriz de  $q^t$ -órbitas proporcionada por  $\mathcal{D}(M)$ .

3. Si  $D$  es unión de  $q^t$ -órbitas, entonces la hipermatriz de  $q^t$ -órbitas proporcionada por  $D$  verifica que  $\mathcal{D}(M(D)) = D$ .

4. Como comentamos en el párrafo posterior a (1.1), si  $e \in \text{Icp}$  entonces el ideal generado por  $e$ ,  $A_q(r_1, \dots, r_s) \cdot e$ , es minimal. Por lo tanto, para cada  $\alpha \in U$  tenemos que el conjunto de definición  $D_\alpha(e)$  es maximal en  $I$ .

Ahora bien, supongamos que  $e$  es un idempotente en  $A_q(r_1, \dots, r_s)$  tal que  $e = e_{j_1} + \dots + e_{j_l}$ , con  $e_{j_1}, \dots, e_{j_l} \in \text{Icp}$  y consideremos  $\alpha \in U$  (véase (1.2)). Entonces  $D_\alpha(e)$  es unión de exactamente  $|\mathcal{Q}| - l$   $q$ -órbitas en  $\mathcal{Q}$ , el conjunto de  $q$ -órbitas módulo  $(r_1, \dots, r_s)$ . Por otra parte, para cada  $k \in \{1, \dots, l\}$  consideremos  $Q_{j_k} = I \setminus D_\alpha(e_{j_k})$ , la  $q$ -órbita de no ceros de  $e_{j_k}$ . Entonces  $\text{supp}(M(D_\alpha(e))) = \cup_{k=1}^l Q_{j_k}$ . Por lo tanto,  $|\text{Icp}| = |\mathcal{Q}|$ , pues  $D_\alpha(e_1 + \dots + e_t) = D_\alpha(1) = \emptyset$ .

Recordemos que  $\mathcal{Q}_t$  denota el conjunto de todas las  $q^t$ -órbitas módulo  $(r_1, \dots, r_s)$ , para algún entero positivo  $t$ . Vamos a definir un orden parcial sobre el conjunto de todas las hipermatrices de  $q^t$ -órbitas  $\{M(D) : D \text{ es unión de } q^t\text{-órbitas}\}$ , como sigue. Sean  $M = M(D)$  y  $M' = M(D')$  hipermatrices de órbitas. Definimos la relación

$$M' \leq M \Leftrightarrow \text{supp}(M') \subseteq \text{supp}(M) \Leftrightarrow D \subseteq D'. \quad (1.13)$$

## 1.2. Transformada de Fourier discreta

La transformada de Fourier discreta será una herramienta fundamental en el estudio de los códigos abelianos, particularmente en el cálculo de cotas para su distancia mínima. Sea  $\mathbb{F}_{q^v}|\mathbb{F}_q$  una extensión de cuerpos tal que  $U \subseteq \mathbb{F}_{q^v}$  (véase (1.2)) y denotemos con  $A_{q^v}(r_1, \dots, r_s)$  el álgebra cociente  $\mathbb{F}_{q^v}[x_1, \dots, x_s]/(x^{r_1} - 1, \dots, x^{r_s} - 1)$ .

**Definición 1.15** Sea  $\alpha \in U$ . La transformada de Fourier discreta, respecto de  $\alpha$ , es la función

$$\varphi_\alpha : \begin{array}{ccc} A_{q^v}(r_1, \dots, r_s) & \longrightarrow & A_{q^v}(r_1, \dots, r_s) \\ f & \mapsto & \varphi_{\alpha, f} \end{array}$$

donde

$$\varphi_{\alpha, f} = \varphi_{\alpha, f}(X) = \sum_{\mathbf{i} \in I} f(\alpha^{\mathbf{i}}) X^{\mathbf{i}}.$$

Algunos autores se refieren a la transformada de Fourier discreta como el polinomio de Mattson-Solomon (M-S) (véase, por ejemplo, [8]).

La función transformada de Fourier discreta es una aplicación inyectiva, más aún, puede ser vista como un isomorfismo de  $\mathbb{F}_q$ -álgebras

$$\varphi_\alpha : \begin{array}{ccc} A_{q^v}(r_1, \dots, r_s) & \longrightarrow & (\mathbb{F}_{q^v}^{(r_1 \dots r_s)}, +, \star) \\ f & \mapsto & \varphi_{\alpha, f} \end{array}$$

donde la multiplicación “ $\star$ ” en  $\mathbb{F}_{q^v}^{(r_1 \dots r_s)}$  se define coordenada a coordenada (véase [4, pp. 4-7]). Así que,  $\varphi_{\alpha, f}$  se puede interpretar como un vector en  $\mathbb{F}_{q^v}^{(r_1 \dots r_s)}$  o como un polinomio en  $A_{q^v}(r_1, \dots, r_s)$ .

La transformada de Fourier discreta inversa de un polinomio  $g$ , respecto de  $\alpha$ , está dada por el polinomio

$$\varphi_{\alpha, g}^{-1} = \varphi_{\alpha, g}^{-1}(X) = \frac{1}{r_1 \dots r_s} \sum_{\mathbf{i} \in I} g(\alpha^{-\mathbf{i}}) X^{\mathbf{i}} \quad (1.14)$$

(véanse, por ejemplo, [4, p. 6] y [8, p. 186]).

Notemos que, si  $g \in A_{q^v}(r_1, \dots, r_s)$  y  $g(\alpha^{-\mathbf{i}}) = 0$ , entonces el monomio  $X^{\mathbf{i}}$  no aparece en  $\varphi_{\alpha, g}^{-1}$ . Por lo tanto, como lo expone P. Camion en [4], dados un código abeliano  $C$  en  $A_q(r_1, \dots, r_s)$  y una palabra  $f \in C$  tenemos que, acotando la cantidad de no ceros de  $\varphi_{\alpha, f}$  se puede acotar también  $\omega(f)$ . Esta idea lleva a la construcción de una cota para la distancia mínima de  $C$ .

**Observaciones 1.16** Los siguientes hechos se siguen directamente de la definición de transformada de Fourier discreta y de la semisimplicidad de  $A_q(r_1, \dots, r_s)$ .

1. Para todo par de polinomios  $f_1, f_2 \in A_q(r_1, \dots, r_s)$  tenemos que  $\varphi_{\alpha, f_1+f_2} = \varphi_{\alpha, f_1} + \varphi_{\alpha, f_2}$  y  $\varphi_{\alpha, f_1 f_2} = \varphi_{\alpha, f_1} \star \varphi_{\alpha, f_2}$ , donde “ $\star$ ” denota la multiplicación de polinomios coeficiente a coeficiente.

2. Si  $e \in A_q(r_1, \dots, r_s)$  es un idempotente entonces  $\varphi_{\alpha,e} = \varphi_{\alpha,e^2} = \varphi_{\alpha,e} \star \varphi_{\alpha,e}$ . Luego, cada coeficiente es igual a su cuadrado y, como éstos son polinomios sobre un cuerpo,  $\varphi_{\alpha,e}$  debe ser un polinomio con coeficientes en  $\{0, 1\}$ .
3. Supongamos que  $C$  es un código abeliano en  $A_q(r_1, \dots, r_s)$ , con idempotente generador  $e$ . Entonces, para cada  $f \in C$ , se tiene que  $f = fe$  y por lo tanto  $\varphi_{\alpha,f} = \varphi_{\alpha,f} \star \varphi_{\alpha,e}$ . Así que,  $\text{supp}(\varphi_{\alpha,f}) \subseteq \text{supp}(\varphi_{\alpha,e})$ , para toda palabra  $f \in C$ .

En la Definición 1.15 presentamos la transformada de Fourier discreta en el álgebra multivariable  $A_q(r_1, \dots, r_s)$ . En el Capítulo 2 trabajaremos exclusivamente con la transformada de Fourier discreta univariable. Para la comodidad del lector, aclaramos la notación en este caso. Consideremos una extensión de cuerpos  $\mathbb{F}_{q^v} | \mathbb{F}_q$  tal que  $U_r$ , el conjunto de todas las raíces  $r$ -ésimas primitivas de la unidad, esté contenido en  $\mathbb{F}_{q^v}$ . Dados  $\alpha \in U_r$  y  $f \in A_q(r)$ , la transformada de Fourier discreta de  $f$  respecto de  $\alpha$  se escribirá

$$\varphi_{\alpha,f} = \varphi_{\alpha,f}(x) = \sum_{j=0}^{r-1} f(\alpha^j) x^j. \quad (1.15)$$

Como hemos mencionado antes, la transformada de Fourier discreta puede ser vista como un isomorfismo de álgebras  $\varphi : A_{q^v}(r) \rightarrow (\mathbb{F}_{q^v}^r, \star)$ , donde la multiplicación “ $\star$ ” en  $\mathbb{F}_{q^v}^r$  se define coordenada a coordenada (véase [10, §8.6]); así que podemos ver a  $\varphi_{\alpha,f}$  como un vector en  $\mathbb{F}_{q^v}^r$  o como un polinomio en  $A_{q^v}(r)$ . La transformada de Fourier discreta inversa de un polinomio  $g \in A_{q^v}(r)$  respecto de  $\alpha \in U$  se escribirá

$$\varphi_{\alpha,g}^{-1} = \varphi_{\alpha,g}^{-1}(x) = \sum_{j=0}^{r-1} g(\alpha^{-j}) x^j. \quad (1.16)$$

## Capítulo 2

# Distancia aparente de códigos cíclicos. Cota BCH y códigos BCH.

Calcular la distancia mínima de códigos cíclicos, o una cota para ella, es uno de los problemas más estudiados en este tipo de códigos (véanse, por ejemplo, [5, 10, 12]). La primera cota inferior conocida para la distancia mínima de un código cíclico  $C$ , que denotamos por  $d(C)$ , es la cota BCH [9, p.151]. El estudio de esta cota y sus generalizaciones es un tema clásico, el cual incluye la muy conocida familia de códigos BCH. Es bien sabido que un código cíclico puede tener varias cotas BCH, así que un problema interesante es determinar cuándo el máximo de sus cotas BCH es igual a su distancia mínima (véanse [6, 10]).

En este capítulo consideraremos tres problemas relacionados con el estudio de la cota BCH. El primero consiste en dar una caracterización de aquellos códigos cíclicos para los cuales su distancia mínima coincide con el máximo de sus cotas BCH. Para ello utilizaremos dos herramientas: la transformada de Fourier discreta y la noción de distancia aparente de un código, definida originalmente para códigos abelianos multivariados en [4, p. 21]. El segundo problema consiste en mostrar algunas técnicas para construir códigos cíclicos cuya distancia mínima sea igual al máximo de sus cotas BCH, para lo cual desarrollamos una estrategia basada en el análisis de los divisores de un polinomio de la forma  $x^r - 1$ , donde  $r$  es un número entero positivo. El tercer problema estriba en presentar técnicas de construcción de códigos BCH para los cuales su distancia designada, el máximo de sus cotas BCH y su distancia mínima coinciden. Abordamos esta cuestión, aplicando los resultados obtenidos en la resolución de los dos problemas anteriores, al estudio de códigos BCH cuya distancia mínima es igual a su distancia designada.

A lo largo de este capítulo,  $q$  y  $r$  serán enteros positivos, donde  $q$  es potencia de un primo  $p$  tal que  $\text{mcd}(p, r) = 1$ . Denotaremos por  $U_r$  el conjunto de las raíces  $r$ -ésimas primitivas de la unidad (véase (1.2)) y consideraremos una extensión de cuerpos  $\mathbb{F}_{q^v} | \mathbb{F}_q$  tal que  $U_r \subseteq \mathbb{F}_{q^v}$ . Para un polinomio  $g = g(x) \in \mathbb{F}_q[x]$ , denotamos por  $gr(g)$  su grado y por  $\text{supp}(g)$  su soporte. Ya introdujimos en el capítulo de preliminares el contexto

general de los códigos abelianos sobre el que vamos a trabajar,  $A_q(r_1, \dots, r_s)$  y su reducción al caso cíclico  $A_q(r)$ . Sea  $\alpha \in U_r$ . Para cada polinomio  $f \in A_q(r)$  mantenemos las notaciones  $\bar{f}$ ,  $Z(f)$ ,  $D_\alpha(f)$  y las demás notaciones y nociones dadas en el párrafo previo a (1.9) y (1.10).

Es bien sabido que todo código cíclico  $C$ , de longitud  $r$  en el alfabeto  $\mathbb{F}_q$ , se puede identificar con un ideal en  $A_q(r)$  (véase [10, p. 189]). Como  $r$  y  $q$  son números coprimos, el álgebra  $A_q(r)$  es semisimple, así que  $C$  posee un único polinomio generador mónico (véase [10, Theorem 7.1]).

Sea  $\alpha \in U_r$ . Recordemos que un código cíclico, siendo abeliano, está determinado por su conjunto de definición respecto de  $\alpha$  (véase la Definición 1.4). Observemos que si tenemos un código cíclico  $C$ , generado por un polinomio  $g$ , entonces  $D_\alpha(C) = D_\alpha(g)$ . De otra parte, podemos determinar si un polinomio  $f \in A_q(r)$  está en  $C$  basándonos en que  $f \in C$  si y solo si  $D_\alpha(g) \subseteq D_\alpha(f)$ .

Presentamos ahora el concepto central de este capítulo, la cota Bose-Ray-Chaudhuri-Hocquenghem (BCH), que es la más antigua de las cotas para la distancia mínima de un código cíclico [3].

**Teorema 2.1** [10, Theorem 7.8] (*Teorema de la Cota BCH*) Sean  $\alpha \in U_r$  y  $C$  un código cíclico con polinomio generador  $g(x)$  tal que para algunos enteros  $b \geq 0$  y  $\delta \geq 1$  se tiene que

$$g(\alpha^b) = g(\alpha^{b+1}) = \dots = g(\alpha^{b+\delta-2}) = 0.$$

Es decir, el código tiene una cadena de  $\delta - 1$  potencias consecutivas de  $\alpha$  como ceros. Entonces la distancia mínima del código es al menos  $\delta$ .

Claramente, para cada código cíclico  $C$  puede existir más de una cota BCH, dependiendo de la raíz de la unidad fijada y de las cadenas de potencias consecutivas respecto de cada una de ellas. Denotaremos el máximo de todas las cotas BCH de  $C$  por  $\Delta(C)$ . Algunas veces este valor es llamado *la* cota (inferior) BCH del código (véanse [4, p. 22] y [6, p. 984]).

**Ejemplo 2.2** Consideremos  $r = 41$  y  $q = 2$ . Las clases 2-ciclotómicas módulo 41 son

$$\begin{aligned} C_2(0) &= \{0\}, \\ C_2(1) &= \{1, 2, 4, 5, 8, 9, 10, 16, 18, 20, 21, 23, 25, 31, 32, 33, 36, 37, 39, 40\} \quad \text{y} \\ C_2(3) &= \{3, 6, 7, 11, 12, 13, 14, 15, 17, 19, 22, 24, 26, 27, 28, 29, 30, 34, 35, 38\}. \end{aligned}$$

Fijemos  $\alpha \in U_r$  y sea  $C$  el código cíclico con conjunto de definición  $D_\alpha(C) = C_2(1)$ . Algunas cotas BCH para  $C$  respecto de  $\alpha$  son  $\delta_1 = 3$ , considerando  $\{1, 2\} \subset D_\alpha(C)$ ; y  $\delta_2 = 4$ , tomando  $\{8, 9, 10\} \subset D_\alpha(C)$ .

Para determinar todas las posibles cotas BCH de  $C$ , es necesario considerar también el

conjunto de definición  $D_\beta = 3 \cdot D_\alpha(C) = C_2(3)$ . En este caso tenemos que la cota BCH más alta es  $\delta_3 = 6$ , considerando  $\{11, 12, 13, 14, 15\} \subset D_\beta(C)$ . Por lo tanto, el máximo de todas las cotas BCH de  $C$  es  $\Delta(C) = 6$ .

A partir del Teorema 2.1 surge la noción de código BCH, la siguiente definición está basada en la que aparece en [10, p. 202].

**Definición 2.3** *Un código cíclico  $C$  en  $A_q(r)$ , con polinomio generador  $g(x)$ , es un código BCH con distancia designada  $\delta \geq 2$ , si existen  $b \in \{0, \dots, r-1\}$  y  $\alpha \in U_r$  tales que  $g(x)$  es el polinomio de menor grado sobre  $\mathbb{F}_q$  de modo que*

$$\{\alpha^{b+j} : j = 0, \dots, \delta - 2\} \subseteq Z(C)$$

*o, equivalentemente, si para cada clase ciclotómica  $Q \subseteq D_\alpha(C)$  se tiene que  $Q \cap \{b+j : j = 0, \dots, \delta - 2\} \neq \emptyset$ .*

Denotamos este tipo de códigos como  $B_q(\alpha, \delta, b)$ . La definición anterior implica que el código  $B_q(\alpha, \delta, b)$  es el código cíclico con mayor dimensión que satisface la inclusión  $\{\alpha^{b+j} : j = 0, \dots, \delta - 2\} \subseteq Z(B_q(\alpha, \delta, b))$ .

La distancia de Bose de un código BCH,  $C = B_q(\alpha, \delta, b)$ , se define como el mayor valor  $\delta'$  tal que  $C = B_q(\alpha', \delta', b')$  para algún  $b' \in \{0, \dots, r-1\}$  y algún  $\alpha' \in U_r$  (véase [10, p. 205]). Vamos a ver que, dado un código  $B_q(\alpha, \delta, b)$ , es posible que su distancia de Bose sea menor que su cota BCH,  $\Delta(B_q(\alpha, \delta, b))$ . Ilustramos este hecho a través del siguiente ejemplo.

Para cualquier elemento  $a \in \mathbb{F}_{q^v}$  denotamos por  $\min_q(a)$  el polinomio mínimo de  $a$  en  $\mathbb{F}_q[x]$ . En el caso  $q = 2$  escribimos simplemente  $\min(a)$ .

**Ejemplo 2.4** Consideremos  $A_2(21)$  y fijemos  $\alpha \in U_{21}$  tal que  $\min(\alpha) = x^6 + x^5 + x^4 + x^2 + 1$ . Sea  $C = B_2(\alpha, 4, 15)$  el código BCH generado por  $\text{mcm}\{\min(\alpha), \min(\alpha^3), \min(\alpha^7)\}$ . Consideremos las clases 2-ciclotómicas módulo 21

$$\begin{aligned} C_2(0) &= \{0\}, \\ C_2(1) &= \{1, 2, 4, 8, 11, 16\}, \\ C_2(3) &= \{3, 6, 12\}, \\ C_2(5) &= \{5, 10, 13, 17, 19, 20\}, \\ C_2(7) &= \{7, 14\} \text{ y} \\ C_2(9) &= \{9, 15, 18\}. \end{aligned}$$

El conjunto de definición del código  $C$  respecto de  $\alpha$  es  $D_\alpha(C) = C_2(1) \cup C_2(3) \cup C_2(7)$ . Según la Observación 1.7, para determinar todos los posibles conjuntos de definición de  $C$ , tenemos que considerar también el elemento  $\beta \in U_{21}$  tal que  $\beta^5 = \alpha$ . Así obtenemos el conjunto de definición  $D_\beta(C) = 5 \cdot D_\alpha(C) = C_2(5) \cup C_2(7) \cup C_2(9)$ .

La distancia de Bose es  $\delta = 4$ , pues  $\{6, 7, 8\} \subset D_\alpha(C)$  y  $\{13, 14, 15\} \subset D_\beta(C)$  proporcionan la máxima cota BCH de modo que  $C$  sea un código BCH, en cada caso. Por otra

parte,  $\Delta(C) = 5$ , pues  $\{1, 2, 3, 4\} \subset D_\alpha(C)$  y  $\{17, 18, 19, 20\} \subset D_\beta(C)$ . Sin embargo,  $\{1, 2, 3, 4\} \subset C_2(1) \cup C_2(3)$  y  $\{17, 18, 19, 20\} \subset C_2(5) \cup C_2(9)$ , así que  $C$  no puede ser un código BCH con distancia designada  $\delta = 5$ . Por lo tanto la distancia de Bose es menor que el máximo de todas las posibles cotas BCH del código,  $\Delta(C)$ .

La cota BCH fue mejorada por Hartmann-Tzeng en 1972, demostrando que si  $s$  y  $\delta$  son enteros positivos con  $\delta \geq 2$ ,  $C$  es un cíclico código en  $A_q(r)$  y  $\beta$  es una raíz  $r$ -ésima primitiva de la unidad tal que  $D_\beta(C)$  contiene los conjuntos consecutivos  $\{\beta^{i+ja}, \beta^{i+1+ja}, \dots, \beta^{i+\delta-2+ja}\}$ ,  $0 \leq j \leq s$ , y si  $\text{mcd}(a, r) < \delta$  entonces la distancia mínima del código es al menos  $\delta + s$ . Esta cota, que algunos autores llaman cota HT, fue modificada en 1983 por Ross. Manteniendo la notación, lo que propone el autor es que si las condiciones de la cota HT no se cumplen para todo  $j$  entre 0 y  $s$ , pero sí para una cantidad suficiente  $s'$  de valores de  $j$ , entonces  $d(C) \geq \delta + s' - 1$ . Finalmente, en 1986 van Lint y Wilson generalizan las cotas dadas por Hartmann-Tzeng y Ross demostrando que si  $f(x)$  es una palabra no nula en  $C$  tal que  $f(\alpha^b) = f(\alpha^{b+1}) = \dots = f(\alpha^{b+s-1}) = 0$  pero  $f(\alpha^{b+s}) \neq 0$  entonces el peso de  $f(x)$  es al menos  $s + 1$  (véanse [9, p.151-155] y [12]).

## 2.1. Distancia aparente de códigos cíclicos

Para caracterizar los códigos cíclicos para los cuales el máximo de sus cotas BCH es igual a su distancia mínima, vamos a usar dos herramientas: la transformada de Fourier discreta y la distancia aparente (de un polinomio y de un código). Presentamos a continuación algunas definiciones relacionadas con el cálculo de la cota BCH, basadas en aquellas expuestas por P. Camion en [4, Chapter 3], adaptadas a polinomios en una variable.

**Definición 2.5** Dado  $g \in A_{q^v}(r)$  definimos su distancia aparente, que denotamos  $d^*g$ , como sigue.

1. Si  $g = 0$  entonces  $d^*0 = 0$ .
2. Si  $g \neq 0$  entonces  $d^*g = \max \left\{ r - gr \left( \overline{x^h g} \right) : 0 \leq h \leq r - 1 \right\}$ .

Notemos que si  $0 < h < r$  entonces  $d^*x^h = d^*1$ . Luego,  $d^*x^h = r$  para todo  $h \in \mathbb{Z}_r$ .

**Ejemplo 2.6** Consideremos el polinomio  $g = x + x^2 + x^4$  en  $A_2(7)$ . De la siguiente tabla deducimos que  $d^*g = \max \left\{ 7 - gr \left( \overline{x^h g} \right) : 0 \leq h \leq 6 \right\} = 4$ .



$h$	$x^h g$	$gr(\overline{x^h g})$	$7-gr(\overline{x^h g})$
0	$x + x^2 + x^4$	4	3
1	$x^2 + x^3 + x^5$	5	2
2	$x^3 + x^4 + x^6$	6	1
3	$1 + x^4 + x^5$	5	2
4	$x + x^5 + x^6$	6	1
5	$1 + x^2 + x^6$	6	1
6	$1 + x + x^3$	3	4

**Observación 2.7** Sean  $f$  y  $g$  polinomios en  $A_{q^v}(r)$ . Si  $\text{supp}(g) \subseteq \text{supp}(f)$  entonces  $gr(g) \leq gr(f)$  y para todo  $h \in \mathbb{Z}_r$  tenemos que  $gr(\overline{x^h g}) \leq gr(\overline{x^h f})$ . Luego,

$$\max \left\{ r - gr(\overline{x^h f}) : 0 \leq h \leq r - 1 \right\} \leq \max \left\{ r - gr(\overline{x^h g}) : 0 \leq h \leq r - 1 \right\}$$

y de este modo  $d^* f \leq d^* g$ .

Diremos que una lista de representantes canónicos  $b_0, b_1, \dots, b_l \in \mathbb{Z}_r$  es una lista de **enteros consecutivos** módulo  $r$ , si para cada  $0 \leq k < l$  se tiene que  $b_{k+1} \equiv b_k + 1 \pmod{r}$ . Si  $b = b_k$  (resp.  $b = b_{k+1}$ ) denotamos por  $b^+ = b_{k+1}$  (resp.  $b^- = b_k$ ).

**Definición 2.8** Sean  $M = (a_0, \dots, a_{r-1})$  un vector en  $\mathbb{F}_{q^v}^r$  y  $a_i$  una entrada no nula de  $M$ . El conjunto de entradas nulas adyacentes a  $a_i$  es el conjunto de entradas

$$C_M(i) = \{a_{i_0}, a_{i_1}, \dots, a_{i_l}\}$$

tales que  $a_{i_j} = 0$  para todo  $j \in \{0, \dots, l\}$ ,  $i_0, i_1, \dots, i_l$  es una lista de enteros consecutivos módulo  $r$ ,  $i^+ = i_0$  y  $a_{i^+} \neq 0$ .

**Notación 2.9** Denotamos por  $\omega_M(i)$  el valor  $|C_M(i)|$ .

Observemos que, dado un vector  $M$  y una entrada no nula  $a_i \in M$ , el conjunto de entradas nulas adyacentes a  $a_i$  puede ser vacío.

Recordemos que, dado un polinomio  $g = \sum_{i=0}^{r-1} a_i x^i \in A_{q^v}(r)$  decimos que el vector  $M(g) = (a_0, \dots, a_{r-1})$  en  $\mathbb{F}_{q^v}^r$  es el vector de coeficientes de  $g$ . El siguiente resultado permite calcular la distancia aparente de un polinomio  $g$  a partir del vector  $M(g)$ .

**Proposición 2.10** Para todo polinomio  $0 \neq g \in A_{q^v}(r)$ , con vector de coeficientes  $M(g)$ , se tiene que  $d^* g = \max_{i \in \mathbb{Z}_r} \{\omega_{M(g)}(i) + 1\}$ .

**Demostración.** Consideremos el polinomio  $0 \neq g = \sum_{i=0}^{r-1} a_i x^i$  y su vector de coeficientes  $M = M(g) = (a_0, a_1, \dots, a_{r-1})$ . Sea  $i \in \text{supp}(M(g))$  hagamos  $h = r - 1 - \omega_M(i) - i$  y consideremos  $\overline{x^h g}$ . Notemos que  $a_{i+j} = 0$  para todo  $0 < j \leq \omega_M(i)$ , con lo cual  $gr(\overline{x^h g}) = i+h$  y su coeficiente principal es  $a_i$ . De aquí tenemos que  $r - gr(\overline{x^h g}) = \omega_M(i) + 1$

y por lo tanto,  $d^*g \geq \max_{i \in \mathbb{Z}_r} \{\omega_M(i) + 1\}$ . Ahora consideremos  $h \in \mathbb{Z}_r$ . Entonces el coeficiente principal de  $\overline{x^h g}$  es  $a_{gr(\overline{x^h g})-h}$  y  $\omega_M(gr(\overline{x^h g}) - h) \geq r - 1 - gr(\overline{x^h g})$ . Con lo cual obtenemos el resultado.  $\blacksquare$

**Ejemplo 2.11** Sea  $g = 1 + x + x^4 \in A_2(5)$  y consideremos la tabla

$h$	$\overline{x^h g}$	$gr(\overline{x^h g})$	$5 - gr(\overline{x^h g})$
0	$1 + x + x^4$	4	1
1	$1 + x + x^2$	2	3
2	$x + x^2 + x^3$	3	2
3	$x^2 + x^3 + x^4$	4	1
4	$1 + x^3 + x^4$	4	1

De la Definición 2.5 tenemos que  $d^*g = 5 - gr(\overline{xg}) = 3$ . Por otra parte, notemos que  $M(g) = (1, 1, 0, 0, 1)$ ,  $\omega_M(a_0) = \omega_M(a_4) = 0$  y  $\omega_M(a_1) = 2$ .

Sean  $f \in A_q(r)$  un polinomio arbitrario y  $\alpha \in U_r$ . Si  $g = \varphi_{\alpha, f}$  (véase (1.15)) entonces  $Z(g) = Z(\overline{x^h g})$  para todo  $h \in \{0, \dots, r-1\}$  y  $gr(\overline{x^h g}) \geq |D_\alpha(g)|$ , luego  $d^*g \leq r - |D_\alpha(g)|$ . Por otra parte, de la definición de transformada de Fourier discreta inversa tenemos que  $\omega(f) = r - |D_\alpha(g)|$ . Así que,

$$d^* \varphi_{\alpha, f} \leq \omega(f), \text{ para todo } f \in A_q(r) \text{ y } \alpha \in U_r. \quad (2.1)$$

Por lo tanto, el mínimo de las distancias aparentes de las transformadas de Fourier de las palabras del código es una cota inferior para la distancia mínima del mismo. De aquí surge de forma natural la siguiente definición, que está basada en la presentada por P. Camion en [4, p. 21].

**Definición 2.12** Sean  $C$  un código cíclico en  $A_q(r)$  y  $\alpha \in U_r$ . La distancia aparente de  $C$ , respecto de  $\alpha$ , es

$$d_\alpha^* C = \min_{c \in C} \{d^* \varphi_{\alpha, c}\}.$$

La distancia aparente de  $C$  es

$$d^* C = \max \{d_\alpha^* C : \alpha \in U_r\}.$$

Definimos también el conjunto de raíces óptimas de  $C$  como

$$\mathcal{R}(C) = \{\beta \in U : d^* C = d_\beta^* C\}.$$

Consideremos un código cíclico  $C$  en  $A_q(r)$ , con polinomio generador  $g(x)$ . Notemos que si  $\alpha \in U_r$  y  $g(\alpha^i) = 0$ , para algún  $i \in \mathbb{Z}_r$ , entonces  $c(\alpha^i) = 0$  para todo  $c \in C$ . Por lo tanto,  $\text{supp}(\varphi_{\alpha, c}) \subseteq \text{supp}(\varphi_{\alpha, g})$  para todo  $c \in C$  y  $\alpha \in U_r$ . Ahora, si  $e$  es el idempotente generador de  $C$ ,  $c = ce$  para todo  $c \in C$ . Así que,  $\text{supp}(\varphi_{\alpha, c}) \subseteq \text{supp}(\varphi_{\alpha, e})$  para todo  $c \in C$  y  $\alpha \in U_r$ . Por lo tanto,  $\text{supp}(\varphi_{\alpha, e}) = \text{supp}(\varphi_{\alpha, g})$  y de este modo  $d^* \varphi_{\alpha, g} = d^* \varphi_{\alpha, e} \leq d^* \varphi_{\alpha, c}$  para todo  $c \in C$  y  $\alpha \in U_r$  (véase la Observación 2.7). Luego, para cada  $\alpha \in U_r$  tenemos que  $\min_{c \in C} \{d^* \varphi_{\alpha, c}\} = d^* \varphi_{\alpha, e}$  y de este modo,  $d^* C = \max_{\beta \in U_r} \{d^* \varphi_{\beta, e}\}$ . Esto demuestra el siguiente resultado.

**Proposición 2.13** [4, p. 22] Sean  $C$  un código cíclico en  $A_q(r)$  con idempotente generador  $e$  y  $\beta \in \mathcal{R}(C)$ . Entonces  $d^*C = d^*\varphi_{\beta,e}$ .

Veamos ahora que, en códigos cíclicos, la distancia aparente coincide con una cota ya conocida.

**Proposición 2.14** [4, p. 22] Sea  $C$  un código cíclico en  $A_q(r)$ . Entonces  $d^*C = \Delta(C)$ .

**Demostración.** Sean  $\Delta = \Delta(C)$ ,  $\alpha \in U_r$  y  $b \in \{0, \dots, n-1\}$  tales que  $\{\alpha^{b+j} : j = 0, \dots, \Delta-2\} \subseteq Z(C)$ . Si  $e$  es el idempotente generador del código, por las Observaciones 1.16 tenemos que  $\varphi_{\alpha,e}(x) = \sum_{i=0}^{r-1} a_i x^i$ , donde  $a_i \in \{0, 1\}$  y, particularmente,  $a_i = 0$  para todo  $i \in \{b, b+1, \dots, b+\Delta-2\}$ . Haciendo  $h = r - b - \Delta + 1$  tenemos que  $gr(\overline{x^h \varphi_{\alpha,e}}) = b + h - 1 = r - \Delta$ . Así que,  $d^*C \geq d^*\varphi_{\alpha,e} \geq r - (r - \Delta) = \Delta$ .

Ahora, supongamos que  $d^*C > \Delta$ ; es decir, supongamos que  $d^*\varphi_{\beta,e} > \Delta$  donde  $\beta \in \mathcal{R}(C)$ . Entonces existe  $h' \in \mathbb{Z}_r$ , tal que  $r - d(h') > \Delta$ , donde  $d(h') = gr(\overline{x^{h'} \varphi_{\beta,e}})$  y así  $e(\beta^{d(h')-h'+1+j}) = 0$ , para  $j = 0, \dots, r - d(h') - 2$ . Si  $b' = gr(\overline{x^{h'} \varphi_{\beta,e}}) - h' + 1$  tenemos que  $\beta^{b'}, \dots, \beta^{b'+r-d(h')-2}$  son ceros (consecutivos) de  $e$ . Luego, se tiene una cota BCH,  $\delta = r - d(h') > \Delta$ , lo cual es imposible. ■

De los resultados anteriores se deduce que

$$\Delta(C) = d^*C = d^*\varphi_{\beta,e} \leq d(C) \quad \text{para todo } \beta \in \mathcal{R}(C). \quad (2.2)$$

**Ejemplo 2.15** Consideremos  $q = 2$  y  $n = 17$ . Las clases 2-ciclotómicas módulo 17 son  $C_2(0)$ ,  $C_2(1)$  y  $C_2(3)$  y  $K(17) = \{1, 3\}$  (véase (1.7)). Sea  $C$  el código cíclico con conjunto de definición  $D_\alpha(C) = C_2(1) = \{1, 2, 4, 8, 9, 13, 15, 16\}$  respecto de  $\alpha \in U_{17}$ , tal que  $min(\alpha) = x^8 + x^7 + x^6 + x^4 + x^2 + x + 1$ . Entonces  $e = x^{16} + x^{15} + x^{13} + x^9 + x^8 + x^4 + x^2 + x + 1$  es el idempotente generador de  $C$  y  $M(\varphi_{\alpha,e}) = (1, 0, 0, 1, 0, 1, 1, 1, 0, 0, 1, 1, 1, 0, 1, 0, 0)$ . Luego,  $d^*(\varphi_{\alpha,e}) = 3$ . Tomando  $\beta$  tal que  $\beta^3 = \alpha$ , se puede verificar que  $M(\varphi_{\beta,e}) = (1, 1, 1, 0, 1, 0, 0, 0, 1, 1, 0, 0, 0, 1, 0, 1, 1)$  y así  $d^*(\varphi_{\beta,e}) = 4$ . Por lo tanto,  $\Delta(C) = d^*(C) = d^*(\varphi_{\beta,e}) = 4$ .

**Corolario 2.16** Sea  $C$  un código cíclico en  $A_q(r)$  con idempotente generador  $e$ . Si  $d^*\varphi_{\alpha,e} = \omega(e)$  para algún  $\alpha \in U_r$ , entonces  $d(C) = \Delta(C)$  y  $\alpha \in \mathcal{R}(C)$ .

**Demostración.** Por hipótesis,  $d^*\varphi_{\alpha,e} = \omega(e) \geq d(C)$ . Ahora, si  $\beta \in \mathcal{R}(C)$  entonces  $d^*\varphi_{\beta,e} \geq d^*\varphi_{\alpha,e}$  y el resultado se obtiene de (2.2). ■

Notemos que el corolario anterior se tiene también para cualesquier palabra  $c \in C$  y  $\alpha \in U$  tales que  $d^*\varphi_{\alpha,e} = \omega(c)$ .

Vamos a comentar a continuación cómo, utilizando estos resultados, podemos construir códigos cíclicos y calcular su distancia aparente, o el máximo de sus cotas BCH.

Aquí a los polinomios en  $A_{q^v}(r)$  los interpretaremos también como vectores en  $\mathbb{F}_{q^v}^r$  y dado un vector en  $f \in \mathbb{F}_{q^v}^r$ , denotaremos por  $f(k)$  la coordenada  $k$ -ésima de  $f$ .

A cada idempotente  $e \in A_q(r)$  asociamos el vector  $\varphi_{\alpha,e} \in \mathbb{F}_{q^v}^r$ , donde  $\alpha \in U_r$ . Como  $\varphi_{\alpha,e}$  es un idempotente en  $(\mathbb{F}_{q^v}^r, \star)$  tenemos que  $\varphi_{\alpha,e}(k) = 0$  si  $k \in D_\alpha(C)$  y 1 en otro caso.

Determinemos ahora las clases  $q$ -ciclotómicas módulo  $r$ , digamos:  $C_q(a_1), \dots, C_q(a_h)$  con  $h \in \mathbb{N}$  y fijemos  $a_1, \dots, a_h$ . Entonces, dado que en nuestro contexto cada código cíclico tiene un único idempotente generador, para construir un código cíclico en  $A_q(r)$  para cada elección  $D = \cup_{j=1}^t C_q(a_{i_j})$  con  $i_j \in \{1, \dots, h\}$  y  $1 \leq t \leq h$ , definimos el vector  $F_D \in \mathbb{F}_{q^v}^r$  tal que  $F_D(k) = 0$  si  $k \in D$  y 1 en otro caso. Este vector puede ser visto como la imagen bajo la transformada de Fourier discreta respecto de algún  $\alpha$  (fijado arbitrariamente), del idempotente generador  $e$  de un código cíclico  $C$  en  $A_q(r)$ , tal que  $D = D_\alpha(C)$ . Así, de la Proposición 2.10 tenemos que  $d^* \varphi_{\alpha,e} = \max_{k \in \mathbb{Z}_r} \{\omega_{F_D}(k) + 1\}$ .

Por otra parte, la Observación 1.7 nos permite deducir que, en la práctica, para calcular la distancia aparente de  $C$  basta con fijar  $\alpha \in U_r$  y recorrer los elementos de  $\mathcal{R}_\alpha$ ; es decir,

$$d^* C = \max\{d_\beta^* C : \beta \in \mathcal{R}_\alpha\}$$

y de este modo, podemos redefinir  $\mathcal{R}(C) = \{\beta \in \mathcal{R}_\alpha : d^* C = d_\beta^* C\}$ . Por lo tanto, de la Proposición 2.13 deducimos que  $d^* C = \max\{d^* \varphi_{\beta,e} : \beta \in \mathcal{R}_\alpha\}$ .

**Ejemplo 2.17** Sean  $r = 21$  y  $q = 2$ . Como vimos en el Ejemplo 2.4, las clases 2-ciclotómicas módulo 21 son  $C_2(0)$ ,  $C_2(1)$ ,  $C_2(3)$ ,  $C_2(5)$ ,  $C_2(7)$  y  $C_2(9)$  y así  $K(21) = \{1, 5\}$ . Elijamos  $D = C_2(1) \cup C_2(3) \cup C_2(7)$ . Entonces

$$F_D = (1, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 1, 1, 0, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 1, 1, 1).$$

Sea  $C$  el código cíclico tal que  $D_\alpha(C) = D$  para algún  $\alpha \in U_r$ . Entonces  $d^* \varphi_{\alpha,e} = 5$ . Ahora, tomando  $\beta^5 = \alpha$  tenemos que  $D_\beta = 5 \cdot D_\alpha = C_2(5) \cup C_2(7) \cup C_2(9)$  y

$$F_{D_\beta} = (1, 1, 1, 1, 1, 0, 1, 1, 1, 0, 0, 1, 1, 0, 1, 0, 1, 0, 0, 0, 0).$$

Luego,  $d^* \varphi_{\beta,e} = 5$ . Por lo tanto,  $d^* C = 5$  y  $\mathcal{R}(C) = \{\alpha, \beta\}$ . Claramente, este código tiene cuatro cotas BCH: 2, 3, 4 y 5.

## 2.2. Códigos cíclicos cuya distancia mínima coincide con su distancia aparente

**Definición 2.18** Sea  $C$  un código cíclico en  $A_q(r)$ . Diremos que  $C$  tiene distancia aparente óptima si  $d(C) = d^* C = \Delta(C)$ .

Un primer ejemplo de códigos cíclicos con distancia aparente óptima son los códigos de Reed-Solomon. Recordemos que un código de Reed-Solomon sobre  $\mathbb{F}_q$  con distancia designada  $\delta$  se define como un código BCH de longitud  $r = q - 1$ . Todas las clases  $q$ -ciclotómicas módulo  $r$  tienen tamaño uno; es decir, los ceros de  $x^r - 1$  son exactamente los elementos no nulos de  $\mathbb{F}_q$  y de este modo la dimensión del código es  $r - (\delta - 1)$ . Entonces, por la cota de Singleton [10, Theorem 1.11], tenemos que la distancia mínima del código coincide con su distancia designada  $\delta$ .

Dado un polinomio  $g \in A_{q^v}(r)$ , visto en  $\mathbb{F}_{q^v}[x]$  con  $gr(g) \leq r - 1$ , es fácil comprobar que  $\text{mcd}(g, x^r - 1) = \text{mcd}(x^h g, x^r - 1)$  para todo  $h \in \{0, \dots, r - 1\}$ , puesto que  $x^h$  y  $x^r - 1$  son polinomios coprimos. Entonces, definimos

$$m_g = \text{mcd}(x^h g, x^r - 1) \quad (2.3)$$

que claramente no depende de  $h$ . Para cada  $h \in \{0, \dots, r - 1\}$  escribimos

$$x^h g = (x^r - 1)f_{g,h} + \overline{x^h g} \quad (2.4)$$

donde  $f_{g,h}$  es el cociente del algoritmo de la división. Notemos que si  $g \neq 0$  entonces  $\overline{x^h g} \neq 0$ , para todo  $h \in \mathbb{Z}_r$ , porque  $gr(g) < r$ . Basado en resultados como [5, Theorem 2] y [10, Theorem 8.6.31] presentamos el siguiente lema.

**Lema 2.19** *Consideremos un polinomio  $g$  en  $A_{q^v}(r)$  y sea  $m_g = \text{mcd}(x^h g, x^r - 1)$  con  $h \in \{0, \dots, r - 1\}$ . Entonces:*

1.  $d^*g \leq r - gr(m_g)$ .
2. Si  $g \mid x^r - 1$  entonces  $d^*g = r - gr(g)$ .

**Demostración.**

1. Sea  $h \in \{0, \dots, r - 1\}$ , de la definición de  $m_g$  tenemos que  $m_g = m_{\overline{x^h g}}$ , luego  $gr(\overline{x^h g}) \geq gr(m_g)$ . Así  $d^*g \leq r - gr(m_g)$ .
2. De la definición de distancia aparente tenemos que  $d^*g \geq r - gr(g)$ . Para verificar la otra desigualdad, notemos que, bajo la suposición de que  $g \mid x^r - 1$ ,  $g$  y  $m_g$  son polinomios asociados y así,  $d^*g \leq r - gr(m_g) = r - gr(g)$ .

■

Recordemos que si  $C$  es un código cíclico en  $A_q(r)$  y  $c \in C$  entonces  $d^* \varphi_c \leq \omega(c)$  (véase (2.1)). Nuestro interés ahora es determinar cuándo se tiene la igualdad. El siguiente resultado nos ayudará a determinar condiciones para ello (véanse [4, Theorem 4.1] y [5, Theorem 2]).

**Lema 2.20** Sean  $C$  un código cíclico en  $A_q(r)$  y  $c \in C$ . Entonces  $r - gr(m_{\varphi_{\alpha,c}}) = \omega(c)$ , para todo  $\alpha \in U_r$ .

**Demostración.** Notemos que  $r - gr(m_{\varphi_{\alpha,c}}) = |\{\alpha^i : \varphi_{\alpha,c}(\alpha^i) \neq 0\}|$ . De aquí el resultado se tiene inmediatamente. ■

El Lema 2.19 nos dice que la distancia aparente de cualquier  $g \in A_{q^v}(r)$  es menor o igual que el número de no ceros de  $m_g$ . El siguiente resultado nos muestra una condición necesaria y suficiente para que se alcance la igualdad.

**Proposición 2.21** Sean  $f \in A_{q^v}(r)$  y  $m_f$  como en (2.3). Entonces  $d^*f = r - gr(m_f)$  si y solo si existe  $h \in \{0, \dots, r-1\}$  tal que  $\overline{x^h f} \mid x^r - 1$  (equivalentemente,  $\overline{x^h f}$  y  $m_f$  son polinomios asociados en  $\mathbb{F}_{q^v}[x]$ ).

**Demostración.** Supongamos primero que se tiene la igualdad. Por definición de distancia aparente, existe  $h \in \{0, \dots, r-1\}$  tal que  $d^*f = r - gr(\overline{x^h f})$  y así  $gr(\overline{x^h f}) = gr(m_f)$ . De (2.3) y (2.4) tenemos que los conjuntos de ceros de  $m_f$  y  $\overline{x^h f}$  coinciden. De donde  $\overline{x^h f} \mid x^r - 1$ .

Recíprocamente, supongamos que existe  $h \in \{0, \dots, r-1\}$  tal que  $\overline{x^h f} \mid x^r - 1$ . De (2.3) y (2.4) tenemos que  $m_f \mid \overline{x^h f}$  y de este modo,  $\overline{x^h f}$  y  $m_f$  deben ser polinomios asociados. Por la definición de distancia aparente, tenemos que  $d^*f = d^*(\overline{x^h f})$  y por el Lema 2.19 (2),  $d^*(\overline{x^h f}) = r - gr(\overline{x^h f})$ . De aquí el resultado se sigue inmediatamente. ■

Hasta aquí hemos conseguido dar una condición suficiente para que un código cíclico tenga distancia aparente óptima (véase Corolario 2.16) y en la Proposición 2.21 hemos podido dar ya condiciones necesarias y suficientes para que, dado un polinomio  $g \in A_{q^v}(r)$ , su distancia aparente coincida con el número de no ceros de  $m_g$ . A continuación presentaremos resultados que nos permiten caracterizar aquellos códigos cíclicos que tienen distancia aparente óptima.

**Teorema 2.22** Sean  $r, v$  enteros positivos,  $p$  un número primo y  $q$  una potencia de  $p$ . Supongamos que  $\text{mcd}(r, q) = 1$  y consideremos la extensión de cuerpos  $\mathbb{F}_{q^v} | \mathbb{F}_q$  tal que  $U_r \subseteq \mathbb{F}_{q^v}$ . Sea  $C$  un código cíclico en  $A_q(r)$ . Entonces  $d(C) = \Delta(C)$  si y solo si existe un polinomio  $f \in A_{q^v}(r)$ , tal que:

1.  $d^*f = d^*C$ .
2.  $d^*f = r - gr(m_f)$ .
3.  $\varphi_{\alpha,f}^{-1} \in C$ , para algún  $\alpha \in \mathcal{R}(C)$ .

Más aún; en ese caso, existe  $h \in \{0, \dots, r-1\}$  tal que  $\overline{x^h f} \mid x^r - 1$ .

**Demostración.** Supongamos que  $d(C) = \Delta(C)$ , equivalentemente que  $d(C) = d^*C$ . Sean  $c \in C$  tal que  $\omega(c) = d(C)$ ,  $\alpha \in \mathcal{R}(C)$  y  $m_{\varphi_{\alpha,c}} = \text{mcd}(\varphi_{\alpha,c}, x^r - 1)$ , como en (2.3). De (2.1), la definición de distancia aparente de un código y el Lema 2.20 tenemos que

$$\omega(c) \geq d^* \varphi_{\alpha,c} \geq d^*C = d(C) = \omega(c) = r - gr(m_{\varphi_{\alpha,c}}).$$

Luego, del Lema 2.19 deducimos que  $d^* \varphi_{\alpha,c} = r - gr(m_{\varphi_{\alpha,c}})$  y así  $d^* \varphi_{\alpha,c} = d^*C$ . Entonces  $f = \varphi_{\alpha,c}$  verifica todas las condiciones requeridas.

Recíprocamente, supongamos que existe  $f \in A_{q^v}(r)$  que satisface las condiciones (1-3) del enunciado. Por el Lema 2.20 y la definición de distancia mínima tenemos que  $d^*f = \omega(\varphi_{\alpha,f}^{-1}) \geq d(C)$ . Entonces, por el apartado (1),  $d^*C \geq d(C)$  y, de (2.2),  $\Delta(C) = d(C)$ .

La afirmación final se sigue directamente de la Proposición 2.21.  $\blacksquare$

Para verificar si un código satisface la condición (2) del teorema anterior, la Proposición 2.21 nos muestra que solo tenemos que fijarnos en las propiedades de los divisores de  $x^r - 1$ .

**Corolario 2.23** *Sea  $C$  un código cíclico en  $A_q(r)$ . Entonces  $d(C) = \Delta(C)$  si y solo si existen  $k \in \{0, \dots, r-1\}$  y un divisor  $g \mid x^r - 1$ , en  $\mathbb{F}_{q^v}[x]$ , tales que  $f = \overline{x^k g}$  cumple las siguientes condiciones:*

1.  $d^*f = d^*C$ .
2.  $\varphi_{\alpha,f}^{-1} \in C$ , para algún  $\alpha \in \mathcal{R}(C)$ .

**Demostración.** Recordemos que  $d^*f = d^*g$ . Si  $\Delta(C) = d(C)$  entonces del Teorema 2.22 tenemos que existen  $f \in A_{q^v}(r)$  y  $h \in \mathbb{Z}_r$  tales que  $\overline{x^h f} \mid x^r - 1$ . Tomando  $k = r - h$  se cumplen las condiciones requeridas.

Por otra parte, si existen  $k \in \{0, \dots, r-1\}$  y un divisor  $g \mid x^r - 1$ , en  $\mathbb{F}_{q^v}[x]$ , tal que  $f = \overline{x^k g}$  cumple las condiciones (1) y (2), entonces tomando  $h = r - k$  tenemos que  $\overline{x^h f} \mid x^r - 1$  y de la Proposición 2.21 deducimos que  $d^*f = r - gr(m_f)$ , con lo cual se satisfacen las condiciones del teorema anterior y obtenemos que  $d(C) = \Delta(C)$ .  $\blacksquare$

Notemos que, en los términos del corolario anterior, puede ocurrir que encontremos  $\alpha, \beta \in U_r$  tales que  $\varphi_{\alpha,f}^{-1} \in C$  pero  $\varphi_{\beta,f}^{-1} \notin C$ .

Es bien sabido que un elemento  $a \in \mathbb{F}_{q^v}$  verifica que  $a \in \mathbb{F}_q$  si y solo si  $a^q = a$ . Vamos a usar este hecho para reescribir la condición (3) del Teorema 2.22 o la condición (2) del Corolario 2.23, como sigue.

**Corolario 2.24** *Sea  $C$  un código cíclico en  $A_q(r)$ . Entonces  $d(C) = \Delta(C)$  si y solo si existen  $k \in \{0, \dots, r-1\}$  y un divisor  $g \mid x^r - 1$ , en  $\mathbb{F}_{q^v}[x]$ , tales que se cumplen las siguientes condiciones:*

1.  $d^*g = d^*C$  y  $f = \overline{x^k g}$  cumple que
2.  $\text{supp}(f) \subseteq \mathbb{Z}_r \setminus D_\alpha(C)$ , para algún  $\alpha \in \mathcal{R}(C)$  y
3.  $(f(\alpha^j))^q = f(\alpha^j)$ , para todo  $j \in \{0, \dots, r-1\}$ .

**Demostración.** Supongamos que  $f$  cumple la condición (2) del Corolario 2.23; es decir que  $\varphi_{\alpha,f}^{-1} \in C$ , para algún  $\alpha \in \mathcal{R}(C)$  y sea  $i \in \text{supp}(f)$ . Entonces, por definición de transformada de Fourier inversa tenemos que  $\varphi_{\alpha,f}^{-1}(\alpha^i) \neq 0$  (véase (1.16)), con lo cual  $i \notin D_\alpha(C)$ , luego  $\text{supp}(f) \subseteq \mathbb{Z}_r \setminus D_\alpha(C)$ . Por otra parte, dado que  $\varphi_{\alpha,f}^{-1} \in C$ , tenemos que sus coeficientes son elementos de  $\mathbb{F}_q$  y de la definición de transformada de Fourier discreta inversa sabemos que si  $j \in \mathbb{Z}_r$ ,  $f(\alpha^j)$  se corresponde con un coeficiente de  $\varphi_{\alpha,f}^{-1}$ . Luego,  $(f(\alpha^j))^q = f(\alpha^j)$ , para todo  $j \in \{0, \dots, r-1\}$ .

Supongamos ahora que se satisfacen las condiciones (2) y (3) de este corolario. Entonces los coeficientes de  $\varphi_{\alpha,f}^{-1}$  son elementos de  $\mathbb{F}_q$  y por lo tanto  $\varphi_{\alpha,f}^{-1} \in A_q(r)$ . Dado que  $\text{supp}(f) \subseteq \mathbb{Z}_r \setminus D_\alpha(C)$  tenemos que  $D_\alpha(C) \subseteq D_\alpha(\varphi_{\alpha,f}^{-1})$ . Observemos que un polinomio  $f \in A_q(r)$  pertenece a  $C$  si y solo si  $D_\alpha(C) \subseteq D_\alpha(f)$ . Esto implica que  $\varphi_{\alpha,f}^{-1} \in C$ . ■

Vamos a comentar ahora cómo podemos aplicar los corolarios anteriores. Sea  $C$  un código cíclico de longitud  $r$ . Buscamos determinar si  $d(C) = \Delta(C)$ . Para aplicar cualquiera de los corolarios previos tenemos que considerar los divisores  $g \mid x^r - 1$  en  $\mathbb{F}_{q^v}[x]$  con  $gr(g) = r - \Delta(C)$ . Esto significa que tenemos que considerar a lo sumo  $h \cdot \binom{r}{r-\Delta(C)}$  polinomios, donde  $h = |K(r)|$  (véase (1.7)). Claramente, si  $\Delta(C)$  no es un número muy grande podemos verificar todos los divisores en  $\mathbb{F}_{q^v}[x]$ . En el caso en que  $\Delta(C)$  sea un número grande, probablemente tendremos que reducir la extensión a un cuerpo intermedio  $\mathbb{F}_q \subset \mathbb{F} \subset \mathbb{F}_{q^v}$ , y calcular solamente los divisores apropiados de  $x^r - 1$  en  $\mathbb{F}[x]$ . En este caso, nuestro método no será exhaustivo.

Por ejemplo, consideremos el código cíclico binario  $C$  de longitud 45 con  $D_\alpha(C) = C_2(3) \cup C_2(5)$ , para algún  $\alpha \in U_{45}$ . Se puede comprobar que  $\Delta(C) = 3$ ,  $\dim_{\mathbb{F}_2}(C) = 35$  y  $K(45) = \{1, 7\}$ . Entonces para verificar cualquiera de nuestros corolarios anteriores tenemos que considerar  $2 \binom{45}{42}$  polinomios (notemos que  $2^{14} < 2 \binom{45}{42} < 2^{15}$ ) y nuestro método es viable. Por otra parte, para códigos cíclicos con distancia aparente mayor que 5, podríamos elegir considerar los factores de  $x^{45} - 1$  en un anillo de polinomios intermedio. Por ejemplo, en  $\mathbb{F}_{2^4}[x]$  tenemos 15 factores de grado 1 y 10 factores de grado 3. Lo que implica menos de 50 cálculos. Esencialmente lo mismo ocurre en  $\mathbb{F}_{2^6}[x]$ .

**Observación 2.25** En los términos de los comentarios anteriores, en el caso  $\mathbb{F} = \mathbb{F}_q = \mathbb{F}_2$  verificar la condición (3) en el Corolario 2.24 es especialmente simple. Basta con verificar que  $\text{supp}(\overline{x^k g})$  es unión de clases 2-ciclotómicas. En efecto, tomando esto como hipótesis, dado que  $g \in \mathbb{F}_2[x]$  entonces  $\overline{x^k g} = \sum_{i \in \text{supp}(\overline{x^k g})} x^i$  y de este modo

$$((\overline{x^k g})(\alpha^j))^2 = \left( \sum_{i \in \text{supp}(\overline{x^k g})} (\alpha^j)^i \right)^2 = \sum_{i \in \text{supp}(\overline{x^k g})} (\alpha^{2j})^i = \sum_{i \in \text{supp}(\overline{x^k g})} (\alpha^j)^i = \overline{x^k g}(\alpha^j);$$



es decir,  $(f(\alpha^j))^2 = f(\alpha^j)$ , para todo  $j \in \{0, \dots, r-1\}$  y  $\alpha \in U_r$ .

Presentamos a continuación otra condición suficiente para determinar cuándo un código cíclico tiene distancia aparente óptima.

**Corolario 2.26** *Sea  $C$  un código cíclico en  $A_q(r)$  con idempotente generador  $e \in C$ . Si existen  $h \in \{0, \dots, r-1\}$  y  $\alpha \in U_r$  tales que  $\overline{x^h \varphi_{\alpha,e} \mid x^r - 1}$  entonces  $d(C) = \Delta(C)$  y  $\alpha \in \mathcal{R}(C)$ .*

**Demostración.** De la Proposición 2.21 y el Lema 2.20 podemos deducir que  $d^* \varphi_{\alpha,e} = r - gr(m_{\varphi_{\alpha,e}}) = \omega(e)$ . Entonces el resultado se sigue directamente del Corolario 2.16. ■

**Observación 2.27** Dados  $g \in A_{q^v}(r)$  y  $\alpha, \beta \in U_r$  tenemos que  $\varphi_{\alpha,g}^{-1} \in A_q(r)$  si y solo si  $\varphi_{\beta,g}^{-1} \in A_q(r)$ . En efecto, existe  $a \in \mathbb{Z}_r$  con  $\text{mcd}(a, r) = 1$  tal que  $\alpha = \beta^a$  y si suponemos que  $\varphi_{\alpha,g}^{-1} \in A_q(r)$  tenemos que  $(g(\alpha^j))^q = g(\alpha^j)$ , para todo  $j \in \mathbb{Z}_r$ . Luego,  $(g(\beta^{aj}))^q = g(\beta^{aj})$ , para todo  $j \in \mathbb{Z}_r$  y así  $\varphi_{\beta,g}^{-1} \in A_q(r)$ .

Del Corolario 2.23, tenemos que para construir un código cíclico  $C$  que satisfaga la igualdad  $\Delta(C) = d(C)$ , podemos centrarnos en la transformada de Fourier discreta inversa de los divisores de  $x^r - 1$  en algún cuerpo intermedio  $\mathbb{F}$ . En el siguiente resultado mostramos una manera de hacerlo. Como antes, finalmente tenemos que imponer restricciones sobre la distancia mínima o el cuerpo intermedio con el fin de acotar la cantidad de cálculos.

**Corolario 2.28** *Consideremos un cuerpo intermedio  $\mathbb{F}_q \subset \mathbb{F} \subset \mathbb{F}_{q^v}$ . Sean  $g \in \mathbb{F}_2[x]$  un divisor de  $x^r - 1$  y  $\beta \in U_r$ . Si  $\varphi_{\beta, x^{kg}}^{-1}$  es un elemento de  $A_q(r)$  para algún  $k \in \{0, \dots, r-1\}$ , entonces la familia de códigos cíclicos permutación equivalentes*

$$\left\{ C_\alpha = \left( \varphi_{\alpha, x^{kg}}^{-1} \right) : \alpha \in U_r \right\}$$

*verifica que  $\Delta(C_\alpha) = d(C_\alpha)$ . Más aún,  $\dim_{\mathbb{F}_q}(C_\alpha) = |\text{supp}(g)|$ , para todo  $\alpha \in U_r$ .*

**Demostración.** Sean  $f = \overline{x^k g}$  y  $e \in A_q(r)$  el idempotente generador del ideal  $C = (\varphi_{\alpha,f}^{-1})$  en  $A_q(r)$ . De la Proposición 2.21 tenemos que  $d^* f = r - gr(m_f)$ , tomando  $h = r - k$ , y del Lema 2.20 deducimos que  $\omega(\varphi_{\alpha,f}^{-1}) = r - gr(m_f)$ . Por lo tanto,  $d^* f \geq d^*(C_\alpha)$ . Siguiendo la exposición hecha en el párrafo previo a la Proposición 2.13, se puede verificar fácilmente que  $\text{supp}(\varphi_{\alpha,e}) = \text{supp}(f)$  con lo cual  $d^* \varphi_{\alpha,e} = d^* f$ . Luego, por la Proposición 2.13 tenemos que  $d^* C \geq d^* \varphi_{\alpha,e} = d^* f$  y así, del Corolario 2.23 obtenemos que  $\Delta(C) = d(C)$ . Finalmente, de (1.5) y lo observado en el párrafo posterior a la Definición 1.4 tenemos que

$$\dim_{\mathbb{F}_q}(C_\alpha) = r - |D_\alpha(C)| = r - |D_\alpha(e)| = |\text{supp}(\varphi_{\alpha,e})| = |\text{supp}(f)| = |\text{supp}(g)|.$$

■

Como en la Observación 2.25, en el caso  $\mathbb{F} = \mathbb{F}_2$  solamente tenemos que verificar que  $\text{supp}(g)$  es unión de clases 2-ciclotómicas.

El corolario anterior nos permite concluir que para construir códigos cíclicos con distancia aparente óptima basta verificar que alguna transformada de Fourier discreta inversa de  $f = \overline{x^k g}$ , para algún divisor  $g$  de  $x^r - 1$  y  $k \in \mathbb{Z}_r$ , tenga coeficientes en  $\mathbb{F}_q$ ; es decir, que  $(f(\alpha^j))^q = f(\alpha^j)$ , para todo  $j \in \{0, \dots, r-1\}$  y algún  $\alpha \in U_r$ . Ilustramos esta idea con un ejemplo.

**Ejemplo 2.29** Consideremos  $q = 2$ ,  $r = 45$ ,  $K(45) = \{1, 7\}$  y  $g = x^{40} + x^{39} + x^{38} + x^{36} + x^{35} + x^{32} + x^{30} + x^{25} + x^{24} + x^{23} + x^{21} + x^{20} + x^{17} + x^{15} + x^{10} + x^9 + x^8 + x^6 + x^5 + x^2 + 1$ . Se puede verificar que  $g \mid x^{45} - 1$  en  $\mathbb{F}_2[x]$  (así que  $\mathbb{F} = \mathbb{F}_2$ ). Sea  $\beta \in U_{45}$  tal que  $\min(\beta) = x^{12} + x^3 + 1$ . Para encontrar el valor  $k$  que cumpla las hipótesis del corolario anterior, podemos verificar que el soporte del vector  $M(g)$  es unión de clases 2-ciclotómicas o podemos calcular  $g(1)$  y  $g(\beta^3)$ , puesto que  $D_\beta(g)$  es  $\mathbb{Z}_{45} \setminus (C_2(0) \cup C_2(3))$ . Tomamos la segunda alternativa. Dado que  $g(1) = 1$  y  $g(\beta^3) = \beta^{30}$ , para  $f = \overline{x^5 g}$  tenemos que  $\varphi_{\beta, f}^{-1} \in A_2(45)$  (así,  $\varphi_{\alpha, f}^{-1} \in A_2(45)$ , para todo  $\alpha \in U_{45}$ ). Sea  $C = (\varphi_{\beta, f}^{-1})$ . Entonces  $D_\beta(C) = C_2(1) \cup C_2(3) \cup C_2(9) \cup C_2(21) = \mathbb{Z}_{45} \setminus \text{supp}(f)$  y, analizando  $M(g)$  o, como en el Ejemplo 2.17,

$$M(f) = F_{D_\beta(C)} = \begin{pmatrix} \text{1}, & \text{0}, & \text{0}, & \text{0}, & \text{0}, & \text{1}, & \text{0}, & \text{1}, & \text{0}, & \text{0}, & \text{1}, & \text{1}, & \text{0}, & \text{1}, & \text{1}, \\ \text{1}, & \text{0}, & \text{0}, & \text{0}, & \text{0}, & \text{1}, & \text{0}, & \text{1}, & \text{0}, & \text{0}, & \text{1}, & \text{1}, & \text{0}, & \text{1}, & \text{1}, \\ \text{1}, & \text{0}, & \text{0}, & \text{0}, & \text{0}, & \text{1}, & \text{0}, & \text{1}, & \text{0}, & \text{0}, & \text{1}, & \text{1}, & \text{0}, & \text{1}, & \text{1} \end{pmatrix}$$

tenemos que  $5 = d(C) = \Delta(C)$  y  $\dim(C) = 21$ .

Ahora buscaremos un código con distancia aparente óptima que tenga mayor dimensión, lo cual se aprecia viable observando la estructura de las clases 2-ciclotómicas. Como  $\text{supp}(x^5 g) = \mathbb{Z}_{45} \setminus D_\beta(C)$ , se puede verificar que hay tres subconjuntos de  $D_\beta(C)$  (conjuntos de entradas nulas consecutivas de  $M(f)$ , módulo 45) que determinan  $d^*C$ ; a saber,  $\{1, 2, 3, 4\}$ ,  $\{16, 17, 18, 19\}$  y  $\{31, 32, 33, 34\}$ . Elegimos  $\{1, 2, 3, 4\}$  y construimos el código  $C'$  tal que  $D_\beta(C') = D_\beta(C) \setminus C_2(21)$ . De este modo,

$$F_{D_\beta(C')} = \begin{pmatrix} \text{1}, & \text{0}, & \text{0}, & \text{0}, & \text{0}, & \text{1}, & \text{0}, & \text{1}, & \text{0}, & \text{0}, & \text{1}, & \text{1}, & \text{0}, & \text{1}, & \text{1}, \\ \text{1}, & \text{0}, & \text{0}, & \text{0}, & \text{0}, & \text{1}, & \text{1}, & \text{1}, & \text{0}, & \text{0}, & \text{1}, & \text{1}, & \text{0}, & \text{1}, & \text{1}, \\ \text{1}, & \text{0}, & \text{0}, & \text{1}, & \text{0}, & \text{1}, & \text{0}, & \text{1}, & \text{0}, & \text{1}, & \text{1}, & \text{1}, & \text{1}, & \text{1}, & \text{1} \end{pmatrix}$$

y  $d^*C' = d^*C = d^*f = 5$ . Dado que  $D_\beta(C') \subseteq D_\beta(C)$  tenemos que  $C$  es un subcódigo de  $C'$  y  $\varphi_{\beta, f}^{-1} \in C \subset C'$ . Luego, por el Corolario 2.23, obtenemos  $5 = d(C') = \Delta(C')$  y  $\dim(C') = 25$ , un código con mayor dimensión.

En la Sección 3.3. refinaremos este tipo de construcciones para obtener códigos cíclicos con distancia aparente óptima y que sean códigos BCH.

El siguiente resultado da una condición para la existencia de códigos cíclicos tales que su distancia aparente y su distancia mínima coincidan.

**Corolario 2.30** Sean  $\mathbb{F}_q \subseteq \mathbb{F} = \mathbb{F}_{q'} \subseteq \mathbb{F}_{q^v}$  una cadena de cuerpos,  $h$  un factor irreducible de  $x^r - 1$  en  $\mathbb{F}_{q'}[x]$  con conjunto de definición  $D_\alpha(h)$  para algún  $\alpha \in U_r$  y  $g = (x^r - 1)/h$ .

Si existen enteros positivos  $j, k$  tales que  $g(\alpha^j) = \alpha^k$  y  $\text{mcd}(j, \frac{r}{\text{mcd}(q-1, r)}) \mid k$ , entonces existe un código cíclico  $q$ -ario con distancia aparente óptima.

**Demostración.** Por hipótesis, la congruencia (en la variable  $X$ )

$$\frac{q-1}{\text{mcd}(q-1, r)} jX \equiv -\frac{q-1}{\text{mcd}(q-1, r)} k \pmod{\frac{r}{\text{mcd}(q-1, r)}}$$

tiene una solución  $X = t$ , con  $0 \leq t < \frac{r}{\text{mcd}(q-1, r)}$ .

Entonces  $(q-1)(jt+k) \equiv 0 \pmod{r}$ ; es decir,  $q(jt+k) \equiv jt+k \pmod{r}$  y así  $\overline{x^t g}(\alpha^j)^q = \overline{x^t g}(\alpha^j)$ . Además, para todo  $jq^{t_a} \in D_\alpha(h)$  tenemos que  $q^{t_a}(jt+k) \equiv jt+k \pmod{r}$ , entonces  $\overline{x^t g}(\alpha^j)^{q^{t_a}} = \overline{x^t g}(\alpha^j)$  y por lo tanto  $\overline{x^t g}(\alpha^j) \in \mathbb{F}_q$ . Dado que  $x^t g(\alpha^i) = 0$  para todo  $i \in \mathbb{Z}_r \setminus D_\alpha(h)$ , podemos aplicar el Corolario 2.28 para obtener que  $C = \left( \varphi_{\alpha, \overline{x^t g}}^{-1} \right)$  tiene distancia aparente óptima. ■

El siguiente resultado nos permite contar, bajo ciertas condiciones, el número mínimo de códigos cíclicos binarios con distancia aparente óptima. Sea  $n$  un entero positivo. El número de enteros  $i \in \{1, \dots, n\}$  tales que  $\text{mcd}(n, i) = 1$  se denota por  $\phi(n)$ , lo que se conoce como la función  $\phi$  de Euler de  $n$ .

**Corolario 2.31** Sea  $r = 2^m - 1$ , para algún  $m \in \mathbb{N}$ . Existen al menos  $\frac{\phi(r)}{m}$  códigos cíclicos binarios con distancia aparente óptima.

**Demostración.** Para cada  $0 < j < r$ , coprimo con  $r$ , consideremos la clase 2-ciclotómica  $C_2(j)$ , la cual tiene exactamente  $m$  elementos. Sean  $\alpha \in U_r$  y  $h \mid x^r - 1$  el polinomio en  $\mathbb{F}_2[x]$  tales que  $D_\alpha(h) = C_2(j)$ . Consideremos  $g = (x^r - 1)/h$ . Por hipótesis,  $\alpha$  es un elemento primitivo de  $\mathbb{F}_{2^m}$ , así que  $g(\alpha^j) = \alpha^k$  para algún  $k \in \mathbb{Z}_r$ . Entonces aplicamos el corolario anterior tomando  $q = q' = 2$  y tenemos que existe un código cíclico binario con distancia aparente óptima, a saber  $C = (\varphi_{\alpha, g}^{-1})$ .

Para ver que el número de códigos que podemos obtener de esta forma es al menos  $\frac{\phi(r)}{m}$ , consideremos el conjunto  $A = \{j \in \mathbb{Z}_r : \text{mcd}(j, r) = 1\}$  cuyo cardinal es justamente  $\frac{\phi(r)}{m}$ . Sean  $j \neq j' \in A$  tales que  $C_2(j) \neq C_2(j')$ . Si  $\alpha \in U_r$  y  $h, h'$  son divisores de  $x^r - 1$  tales que  $D_\alpha(h) = C_2(j)$  y  $D_\alpha(h') = C_2(j')$  entonces  $g = (x^r - 1)/h$  y  $g' = (x^r - 1)/h'$  tienen el mismo grado, y por lo tanto  $\text{supp}(g) \neq \text{supp}(g')$ , porque son polinomios binarios. Luego, los códigos  $C_h = (\varphi_{\alpha, g}^{-1})$  y  $C_{h'} = (\varphi_{\alpha, g'}^{-1})$  no son iguales. ■

**Ejemplo 2.32** Consideremos  $q = 2$ ,  $r = 15$  y  $K(15) = \{1, 7\}$ . En este caso, el Corolario 2.31 garantiza la existencia de al menos dos códigos con distancia aparente óptima (los determinados por  $g_3$  y  $g_4$ , en la tabla siguiente). Denotemos los factores irreducibles de  $x^{15} - 1$  en  $\mathbb{F}_2[x]$  por  $h_1 = \Phi_2$ ,  $h_2 = \Phi_3$ ,  $h_3 = x^4 + x + 1$ ,  $h_4 = x^4 + x^3 + 1$  y  $h_5 = \Phi_5$ , donde  $\Phi_n$  denota el  $n$ -ésimo polinomio ciclotómico. Tomando  $g_i = \frac{x^r - 1}{h_i}$ ,  $i = 1, \dots, 5$ , aplicamos los corolarios anteriores (con  $\mathbb{F} = \mathbb{F}_2$ ) como sigue.

Consideremos el factor  $g_2$ . Se puede verificar que  $\varphi_{\alpha, \overline{xg_2}}^{-1} = x^{10} + x^5 \in A_2(15)$ , para todo

$\alpha \in U_{15}$ . El código cíclico  $C$  generado por  $x^{10} + x^5$  tiene dimensión 10 y satisface  $\Delta(C) = d(C) = 2$ . Ahora fijemos  $\alpha \in U_{15}$  tal que  $h_3 = \min(\alpha)$  y  $h_4 = \min(\alpha^3)$ . Entonces  $\varphi_{\alpha, \overline{xg_3}}^{-1} = x^{14} + x^{13} + x^{11} + x^7 \in A_2(15)$  y  $\varphi_{\alpha, x^3g_4}^{-1} = x^8 + x^4 + x^2 + x \in A_2(15)$ . Esto nos da la siguiente tabla

Generador	Dimensión	$\Delta(C) = d(C)$
$\varphi_{\alpha, \overline{xg_2}}^{-1}$	10	2
$\varphi_{\alpha, \overline{xg_3}}^{-1}$	8	4
$\varphi_{\alpha, x^3g_4}^{-1}$	8	4

El polinomio  $g_1$  determina un código impropio. En el caso de  $g_5$ , como  $D_\alpha(g_5) = \mathbb{Z}_{15} \setminus C_2(3)$ , tenemos que  $g_5(\alpha^3) = \alpha^{14}$ , con lo cual las condiciones del Corolario 2.30 no se satisfacen. Hay otros códigos que son interesantes. Se puede ver que el polinomio  $h_2h_3h_5$  verifica las condiciones del Corolario 2.28, con  $k = 0$ . Luego,  $h_2h_3h_5$  determina un código, digamos  $C'$ , tal que  $\Delta(C') = d(C') = 5$  y  $\dim(C') = 7$ .

**Ejemplo 2.33** Sean  $q = 2$  y  $r = 21$  y denotemos los factores irreducibles de  $x^{21} - 1$  en  $\mathbb{F}_2[x]$  por  $h_1 = \Phi_2$ ,  $h_2 = \Phi_3$ ,  $h_3 = x^3 + x + 1$ ,  $h_4 = x^3 + x^2 + 1$ ,  $h_5 = x^6 + x^4 + x^2 + x + 1$  y  $h_6 = x^6 + x^5 + x^4 + x^2 + 1$ .

Consideremos  $g_i = \frac{x^r - 1}{h_i}$ ,  $i = 1, \dots, 6$  y fijemos  $\alpha \in U_{21}$  tal que  $\min(\alpha) = h_6$ . Aplicamos el Corolario 2.30 como antes (con  $q' = 2$ ) y obtenemos 5 códigos binarios de longitud 21 con distancia aparente óptima. Por otra parte, aplicando el Corolario 2.28 al polinomio  $h_1h_3h_5h_6$  obtenemos otro código que satisface esta propiedad. Los presentamos todos en la siguiente tabla:

Factor	Dimensión	$\Delta(C) = d(C)$
$\varphi_{\alpha, \overline{xg_2}}^{-1}$	14	2
$\varphi_{\alpha, g_3}^{-1}$	12	3
$\varphi_{\alpha, x^3g_4}^{-1}$	12	3
$\varphi_{\alpha, \overline{xg_5}}^{-1}$	8	6
$\varphi_{\alpha, x^5g_6}^{-1}$	8	6
$\varphi_{\alpha, h_1h_3h_5h_6}^{-1}$	10	5

### 2.3. Aplicaciones: Distancia aparente óptima en códigos BCH

A partir de los resultados de las secciones anteriores podemos obtener algunas aplicaciones en el caso de la familia de los códigos BCH. Recordemos que  $B_q(\alpha, \delta, b)$  denota un código BCH, con distancia designada  $\delta$ , tal que  $\{\alpha^{b+j} : j = 0, \dots, \delta - 2\} \subseteq Z(C)$ . El siguiente resultado nos permite construir códigos BCH con distancia aparente óptima.

**Teorema 2.34** Sean  $r$  un entero positivo,  $p$  un número primo,  $q$  una potencia de  $p$  y  $U_r$  el conjunto de raíces  $r$ -ésimas primitivas de la unidad. Supongamos que  $\text{mcd}(r, q) = 1$ .

Consideremos los cuerpos  $\mathbb{F}_q \subseteq \mathbb{F} \subseteq \mathbb{F}_{q^v}$  tales que  $U_r \subset \mathbb{F}_{q^v}$ . Sea  $g \in \mathbb{F}[x]$  un divisor de  $x^r - 1$ . Si existen  $k \in \{0, \dots, r-1\}$  y  $\beta \in U_r$  tales que  $\varphi_{\beta, x^k g}^{-1} \in A_q(r)$  entonces existe una familia de códigos BCH permutación equivalentes  $\{C_\alpha = B_q(\alpha, \delta, b) : \alpha \in U_r\}$  con  $\delta = r - gr(g)$  para algún  $b \in \mathbb{Z}_r$ , de modo que  $\delta = \Delta(C_\alpha) = d(C_\alpha)$  y  $\varphi_{\alpha, x^k g}^{-1} \in C_\alpha$ .

**Demostración.** Sean  $g = \sum_{i=0}^{r-1} a_i x^i$ ,  $f = \overline{x^k g}$  y  $\alpha \in U_r$ . Por el Lema 2.19, tenemos que  $d^*g = r - gr(g)$ . Claramente,  $m_f = \text{mcd}(x^h f, x^r - 1) = g$  y  $d^*f = d^*g$ . Consideremos la unión de clases  $q$ -ciclotómicas módulo  $r$ ,  $T = \cup_{j=gr(g)+k+1}^{r+k-1} C_q(\bar{j})$ , donde  $\bar{j}$  es el representante canónico de  $j$  en  $\mathbb{Z}_r$  y sea  $\varepsilon = \sum_{i=0}^{r-1} r_i x^i$  tal que  $r_i = 0$  si  $i \in T$  y 1 en otro caso. Observemos que, como  $\text{supp}(f)$  es unión de clases  $q$ -ciclotómicas,  $\text{supp}(f) \subseteq \text{supp}(\varepsilon)$ . Luego, por la Observación 2.7 tenemos que  $d^*\varepsilon \leq d^*f$ . Es más, como  $d^*f = \omega_{M(f)}(gr(g) + k) + 1$  entonces  $d^*\varepsilon = d^*f = d^*g$ . Notemos que si  $i \in \mathbb{Z}_r$  entonces  $\sum_{j \in C_q(i)} \alpha^j \in \mathbb{F}_q$ . En efecto,  $\sum_{j \in C_q(i)} \alpha^j = \alpha^i + \alpha^{iq} + \dots + \alpha^{iq|C_q(i)|-1}$ , entonces  $(\sum_{j \in C_q(i)} \alpha^j)^q = \sum_{j \in C_q(i)} \alpha^j$ . Por construcción,  $\text{supp}(\varepsilon)$  es unión de clases  $q$ -ciclotómicas, así que  $\varepsilon(\alpha^j) \in \mathbb{F}_q$  para todo  $j \in \mathbb{Z}_r$  y de este modo  $\varphi_{\alpha, \varepsilon}^{-1} \in A_q(r)$ . Sea  $C_\alpha = (\varphi_{\alpha, \varepsilon}^{-1})$ . Como  $\varphi_{\alpha, \varepsilon}^{-1}$  es idempotente, de la Proposición 2.13 deducimos que  $d^*C_\alpha \geq d^*\varepsilon = d^*f$ . Por otra parte, dado que  $\text{supp}(f) \subseteq \text{supp}(\varepsilon)$ , tenemos que  $f \star \varepsilon = f$  y entonces  $\varphi_{\alpha, f}^{-1} \cdot \varphi_{\alpha, \varepsilon}^{-1} = \varphi_{\alpha, f}^{-1}$ . Por lo tanto, la Observación 2.27 nos permite concluir que  $\varphi_{\alpha, f}^{-1} \in C_\alpha$  pues  $\varphi_{\beta, f}^{-1} \in A_q(r)$ . Así, de la Proposición 2.21 y el Lema 2.20 tenemos que  $d^*C_\alpha = d^*\varepsilon = d^*f$ . Como consecuencia del Corolario 2.23 obtenemos que  $\Delta(C_\alpha) = d(C_\alpha)$ . Finalmente, notemos que, si  $Q$  es una clase  $q$ -ciclotómica módulo  $r$  contenida en  $\text{supp}(\varepsilon)$  entonces  $Q \cap \{\overline{gr(g) + k + 1}, \dots, \overline{r + k - 1}\} = \emptyset$ . Por lo tanto  $C_\alpha$  es un código BCH con distancia designada  $\delta = \Delta(C_\alpha) = r - gr(g)$ . ■

En la Sección 3.2. mostramos una manera de construir códigos cíclicos con distancia aparente óptima. La demostración del Teorema 2.34 es constructiva, no sólo se demuestra la existencia de un código BCH por cada  $\alpha \in U_r$ , sino que presenta una manera de construirlo, como lo describiremos a continuación. Dados  $g \in \mathbb{F}_{q^v}[x]$  un divisor de  $x^r - 1$ ,  $k \in \{0, \dots, r-1\}$  y  $\beta \in U_r$  tales que  $\varphi_{\beta, x^k g}^{-1} \in A_q(r)$ , consideramos los coeficientes  $\overline{g(r) + k + 1}$ -ésimo a  $\overline{r + k - 1}$ -ésimo de  $f$ , que sabemos que son nulos, y tomando  $T = \cup_{j=gr(g)+k+1}^{r+k-1} C_q(\bar{j})$ , definimos el polinomio  $\varepsilon = \sum_{i \notin T} x^i$ . Como se demostró, el código  $C = (\varphi_{\alpha, \varepsilon}^{-1})$  es un código BCH con distancia aparente óptima. Notemos que el conjunto  $T$  es una elección particular de índices que corresponderán a los coeficientes cero de  $\varepsilon$ , pero pueden considerarse otros bloques de coeficientes nulos de  $f$ . Es decir, podemos modificar de diferentes formas el soporte de un código cíclico para obtener un código BCH, como se muestra en los siguientes ejemplos.

**Ejemplo 2.35** Continuamos con el Ejemplo 2.29. Recordemos que  $q = 2$ ,  $r = 45$  y  $C'$  es un código cíclico con  $D_\alpha(C') = C_2(1) \cup C_2(3) \cup C_2(9)$  donde  $\min(\alpha) = x^{12} + x^3 + 1$ . Siguiendo la prueba del teorema anterior, consideremos  $T = C_2(1) \cup C_2(3)$  y  $\varepsilon = \sum_{i \notin T} x^i$ . Entonces  $C'' = (\varphi_{\alpha, \varepsilon}^{-1})$  con  $D_\alpha(C'') = C_2(1) \cup C_2(3)$  es el código BCH,  $B_2(\alpha, 1, 5)$ , tal que  $d(C'') = \delta = 1$  y  $\dim(C'') = 29$ .

También podemos obtener, a partir de  $C'$ , el código  $B_2(\alpha, 5, 16)$  con distancia aparente óptima,  $\delta = 5$ , y dimensión 29, tomando  $T' = C_2(1) \cup C_2(9)$ .

El siguiente teorema es un resultado clásico de la Teoría de Códigos BCH que caracteriza, bajo ciertas condiciones, los códigos BCH con distancia aparente óptima.

**Teorema 2.36** (Véase, por ejemplo, [10, Theorem 9.2.5]). Sean  $h, m \in \mathbb{N}$ . Un código BCH, sobre  $\mathbb{F}_q$ , de longitud  $r = q^m - 1$  y distancia designada  $\delta = q^h - 1$  tiene distancia aparente óptima.

Nuestros resultados nos permiten presentar algunos ejemplos de códigos BCH, con distancia aparente óptima, que no cumplen las condiciones del teorema anterior.

**Ejemplo 2.37** Sean  $q = 2$  y  $r = 15$ . Consideremos el polinomio  $g = g_3$  del Ejemplo 2.32; es decir,  $g = x^{11} + x^8 + x^7 + x^5 + x^3 + x^2 + x + 1$ . Entonces su vector de coeficientes es

$$M(g) = (1, 1, 1, 1, 0, 1, 0, 1, 1, 0, 0, 1, 0, 0, 0)$$

y  $d^*g = 4$ . Dado que, por ejemplo,  $C_2(7)$  no está contenida en  $\text{supp}(g)$  tenemos que  $\varphi_{\alpha, g}^{-1} \notin A_2(15)$  para todo  $\alpha \in U_{15}$  (véase Observación 2.27). Sin embargo, el polinomio  $\overline{xg}$  con vector de coeficientes

$$M(\overline{xg}) = (0, 1, 1, 1, 1, 0, 1, 0, 1, 1, 0, 0, 1, 0, 0)$$

ya verifica que  $\varphi_{\alpha, \overline{xg}}^{-1} \in A_2(15)$  para algún  $\alpha \in U_{15}$ , por lo tanto,  $C = \left( \varphi_{\alpha, \overline{xg}}^{-1} \right)$  es un código binario con  $d(C) = d^*C = 4$  y  $\dim(C) = 8$ . Pero  $C$  no es un código BCH, pues la clase 2-ciclotómica  $C_2(5) \subseteq D_\alpha(C)$  es tal que  $C_2(5) \cap \{b + j : j = 0, \dots, \delta - 2\} = \emptyset$ . Siguiendo las ideas expuestas en el párrafo posterior a la demostración del Teorema 2.34, podemos considerar  $T = C_2(0) \cup C_2(7)$  y de este modo construimos el polinomio  $\varepsilon = \sum_{i \in T} x^i$  cuyo vector de coeficientes es

$$M(\varepsilon) = (0, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 0, 1, 1, 1, 0, 1, 0, 0)$$

el cual determina el código BCH en  $A_2(15)$ ,  $C' = \left( \varphi_{\alpha, \varepsilon}^{-1} \right)$ , con distancia aparente óptima  $d^*C' = d(C') = \delta = 4$  y  $\dim_{\mathbb{F}_2}(C') = 10$ . Este código no puede ser considerado en el Teorema 2.36, pues  $\delta$  no es de la forma  $2^h - 1$ .

El siguiente resultado es la extensión del Corolario 2.30 a códigos BCH; es decir, presentamos condiciones para la existencia de códigos BCH con distancia aparente óptima.

**Corolario 2.38** Sean  $\mathbb{F}_q \subseteq \mathbb{F}_{q'} \subseteq \mathbb{F}_{q^v}$  una cadena de cuerpos,  $h$  un factor irreducible de  $x^r - 1$  en  $\mathbb{F}_{q'}[x]$  con conjunto de definición  $D_\alpha(h)$ , para algún  $\alpha \in U_r$  y  $g = (x^r - 1)/h$ . Si existen enteros positivos  $j, k$  tales que  $g(\alpha^j) = \alpha^k$  y  $\text{mcd}(j, \frac{r}{\text{mcd}(q-1, r)}) \mid k$ , entonces existe un código BCH de distancia designada  $\delta$ ,  $C = B_q(\alpha, \delta, b)$ , tal que  $\delta = \Delta(C) = d(C) = gr(h)$ , para algún  $b \in \mathbb{Z}_r$ .

**Demostración.** Se sigue inmediatamente del Corolario 2.30 y del procedimiento de la demostración del Teorema 2.34. ■

A continuación presentamos dos ejemplos en los que modificaremos los conjuntos de definición de los códigos obtenidos en los ejemplos 2.32 y 2.33, para obtener códigos BCH con distancia aparente óptima.

**Ejemplo 2.39** Continuamos con los códigos del Ejemplo 2.32 determinados por los polinomios  $g_2$ ,  $g_3$  y  $g_4$ . Recordemos que en este contexto  $\alpha$  es tal que  $\min(\alpha) = h_3$ . Aplicando el Teorema 2.34 podemos obtener los siguientes códigos BCH con distancia aparente óptima.

Es posible encontrar códigos con distancia aparente óptima y dimensión mayor que la del código  $(\varphi_{\alpha, \overline{xg_2}})$  en  $A_2(15)$ . Para ello, modificamos su conjunto de definición respecto de  $\alpha$  hasta obtener los códigos  $B_2(\alpha, 2, 0)$  de dimensión 14 y  $B_2(\alpha, 2, 3t)$  de dimensión 11, para  $t = 1, 2, 3$ . En el caso del código cíclico determinado por  $g_3$ ; es decir,  $(\varphi_{\alpha, \overline{xg_3}})$ , encontramos el código  $B_2(\alpha, 4, 13)$  de dimensión 10. Finalmente, a partir del código  $(\varphi_{\alpha, \overline{x^3g_4}})$  podemos construir el código  $B_2(\alpha, 4, 0)$  de dimensión 10.

Notemos que los códigos BCH determinados por  $g_2$ ,  $g_3$  y  $g_4$  no están considerados en el resultado clásico [10, Theorem 9.2.5].

Hay otro código BCH, de distancia aparente óptima, que no ha sido considerado. Nos referimos a  $B_2(\alpha, 5, 11)$ , de dimensión 10, obtenido a partir del código  $(\varphi_{\alpha, \overline{h_2h_3h_5}})$ , del Ejemplo 2.32.

**Ejemplo 2.40** Vamos a considerar los códigos del Ejemplo 2.33 donde  $q = 2$ ,  $r = 21$  y  $\alpha$  es tal que  $\min(\alpha) = h_6$ .

Podemos modificar el conjunto de definición, respecto de  $\alpha$ , del código  $(\varphi_{\alpha, \overline{xg_3}})$  en tres formas diferentes. La dimensión más grande posible (con estas técnicas) es 20 y es la del código  $B_2(\alpha, 2, 0)$ . En el caso del código cíclico  $(\varphi_{\alpha, \overline{g_3}})$ , modificamos su conjunto de definición, respecto de  $\alpha$ , en dos formas para construir así dos códigos BCH:  $B_2(\alpha, 3, 19)$  de dimensión 15 y  $B_2(\alpha, 3, 12)$  de dimensión 12. Modificando el conjunto de definición, respecto de  $\alpha$ , del código generado por  $\varphi_{\alpha, \overline{x^3g_4}}$  obtenemos los códigos  $B_2(\alpha, 3, 15)$  de dimensión 12 y  $B_2(\alpha, 3, 1)$  de dimensión 15. A partir del código generado por  $\varphi_{\alpha, \overline{xg_5}}$  construimos el código  $B_2(\alpha, 6, 17)$  de dimensión 11. En el caso de  $\varphi_{\alpha, \overline{x^5g_6}}$ , tenemos  $B_2(\alpha, 6, 0)$  de dimensión 11. Finalmente, el código generado por  $\varphi_{\alpha, \overline{h_1h_3h_5h_6}}$  es justamente el código  $B_2(\alpha, 5, 17)$  de dimensión 10.

Finalizamos el capítulo con un ejemplo de un código binario BCH con distancia mínima  $\delta$  de longitud 33 y dimensión 23. No hemos encontrado en la literatura códigos BCH con distancia aparente óptima que tengan esta longitud y dimensión.

**Ejemplo 2.41** Sean  $q = 2$ ,  $r = 33$ ,  $\alpha \in U_{33}$  tal que  $\min(\alpha) = x^{10} + x^7 + x^5 + x^3 + 1$  y  $g = x^{30} + x^{27} + x^{24} + x^{21} + x^{18} + x^{15} + x^{12} + x^9 + x^6 + x^3 + 1$ . Se puede verificar que  $g$  satisface

las condiciones del Teorema 2.34 con  $k = 0$ ; en efecto,  $\varphi_{\alpha,g} = x^{22} + x^{11} + 1$ . Tomando  $T = C_2(1)$  obtenemos el código  $B(\alpha, 3, 31)$  de dimensión 23.



## Capítulo 3

# Distancia aparente mínima de una hipermatriz

En 1970, P. Camion extendió la noción de cota BCH a la familia de códigos abelianos introduciendo la definición de distancia aparente (véase [4]). El cálculo de la distancia aparente de un código abeliano  $C$  en un anillo semisimple requiere del cálculo de la distancia aparente de algunos polinomios que corresponden al conjunto de idempotentes de  $C$ , bajo la transformada de Fourier discreta. En [8], R. E. Sabin calcula la distancia aparente de un polinomio en dos variables operando entre las filas y columnas de su matriz de coeficientes. Este método es una forma práctica de llevar a cabo dicho cálculo.

En este capítulo presentamos nuestra propuesta de extensión del método diseñado por R. E. Sabin; calculamos la distancia aparente de un polinomio en varias variables manipulando su hipermatriz de coeficientes. También introducimos el concepto de distancia aparente mínima de una hipermatriz, el cual nos será de gran utilidad en el cálculo de la distancia aparente de un código abeliano por medio de hipermatrices.

Retomamos la notación dada en los preliminares. El cálculo de la distancia aparente de un código abeliano en  $A_q(r_1, \dots, r_s)$  requiere el cálculo de la distancia aparente de polinomios en el álgebra  $A_{q^v}(r_1, \dots, r_s)$ . Por tal razón, las definiciones y resultados de este capítulo estarán enmarcados en esta última álgebra.

Sea  $f = \sum_{\mathbf{i} \in I} a_{\mathbf{i}} X^{\mathbf{i}} \in A_{q^v}(r_1, \dots, r_s)$ . Consideremos  $f$  como polinomio en  $\mathbb{F}_{q^v}[x_1, \dots, x_s]$  y dado  $k \in \{1, \dots, s\}$  hagamos  $Y_k = X/x_k$ . Entonces podemos escribir  $f$  como un polinomio en  $\mathbb{F}_{q^v}[Y_k][x_k]$

$$f = f_k = \sum_{b=0}^{r_k-1} f_{k,b} x_k^b \quad (3.1)$$

donde  $f_{k,b} = \sum_{\substack{\mathbf{i} \in I \\ i^{(k)}=b}} a_{\mathbf{i}} Y_k^{\mathbf{i}}$  e  $Y_k^{\mathbf{i}} = X^{\mathbf{i}}/x_k^b$ . El grado de  $f$  como polinomio en  $\mathbb{F}_{q^v}[Y_k][x_k]$ ; es decir el grado de  $f_k$ , es llamado el **grado  $k$ -ésimo** de  $f$  y se denota por  $gr(f_k)$ .

Para cada  $\mathbf{h} \in I$  denotamos por  $d_k[\mathbf{h}](f)$  el grado en la variable  $x_k$  del producto  $\overline{X^{\mathbf{h}}f}$  en  $A_{q^v}(r_1, \dots, r_s)$ , esto es, el grado  $k$ -ésimo de  $\overline{X^{\mathbf{h}}f}$ . Denotamos por  $c_k[\mathbf{h}](f)$  el coeficiente de  $x_k^{d_k[\mathbf{h}](f)}$ ; es decir  $(\overline{X^{\mathbf{h}}f})_{k, d_k[\mathbf{h}](f)}$ , si consideramos  $\overline{X^{\mathbf{h}}f}$  como polinomio en  $\mathbb{F}_{q^v}[Y_k][x_k]$ . Si no hay lugar a confusión, escribiremos  $d_k[\mathbf{h}]$  y  $c_k[\mathbf{h}]$  en vez de  $d_k[\mathbf{h}](f)$  y  $c_k[\mathbf{h}](f)$ , respectivamente.

En el caso de una variable, como lo vimos en el capítulo de preliminares, trabajaremos en el álgebra  $A_{q^v}(r)$ , donde  $r$  es un entero positivo tal que  $\text{mcd}(r, q) = 1$ , escribiremos  $h$  en vez de  $\mathbf{h}$  y denotaremos por  $d[h]$  el grado del polinomio  $\overline{x^h f}$  en  $A_{q^v}(r)$ .

En el capítulo anterior presentamos la noción de distancia aparente de un polinomio en una variable (véase la Definición 2.5) y comentamos que en el contexto de la definición original corresponde a las álgebras de varias variables. Vamos a verla ahora.

**Definición 3.1** [4, p.21] Sea  $f$  un polinomio en  $A_{q^v}(r_1, \dots, r_s)$ . La distancia aparente de  $f$ , denotada por  $d^*f$ , es

1. Para el polinomio nulo,  $d^*0 = 0$ .

2. En el caso  $s = 1$

$$d^*f = \text{máx}\{r - d[h] : 0 \leq h \leq r - 1\}.$$

3. Para  $s \geq 2$

$$d^*f = \text{máx}_{\mathbf{h} \in I} \left\{ \text{máx}_{1 \leq k \leq s} \{d^*c_k[\mathbf{h}](r_k - d_k[\mathbf{h}])\} \right\}.$$

Notemos que, de acuerdo con esta definición,  $d^*\overline{X^{\mathbf{h}}f}(X) = d^*f(X)$  para todo  $\mathbf{h} \in I$ .

**Ejemplo 3.2** Consideremos el polinomio  $f = x_2^3 - (x_1 + 1)x_2$  en  $A_3(2, 4)$  y tomemos  $\mathbf{h} = (1, 2)$ . Entonces  $\overline{X^{\mathbf{h}}f} = x_1x_2^2f = (x_2 - x_2^3)x_1 - x_2^3 = (-1 - x_1)x_2^3 + x_1x_2$ . Luego,  $c_1[(1, 2)] = x_2 - x_2^3$ ,  $d_1[(1, 2)] = 1$ ,  $c_2[(1, 2)] = -1 - x_1$ ,  $d_2[(1, 2)] = 3$  y tenemos que  $d^*c_1[(1, 2)] = 2$  y  $d^*c_2[(1, 2)] = 1$ . Por lo tanto, para  $\mathbf{h} = (1, 2)$  tenemos que  $\text{máx}_{1 \leq k \leq 2} \{d^*c_k[\mathbf{h}](r_k - d_k[\mathbf{h}])\} = 2$ . Recopilamos todos los valores que debemos considerar para determinar  $d^*f$ :

$\mathbf{h}$	$k$	$d^*c_k[\mathbf{h}]$	$r_k - d_k[\mathbf{h}]$	$\text{máx}_{1 \leq k \leq 2} \{d^*c_k[\mathbf{h}](r_k - d_k[\mathbf{h}])\}$
(0,0)	1	4	1	4
	2	2	1	
(0,1)	1	4	1	4
	2	1	2	
(0,2)	1	4	1	4
	2	1	1	
(0,3)	1	4	1	4
	2	2	2	

$\mathbf{h}$	$k$	$d^*c_k[\mathbf{h}]$	$r_k - d_k[\mathbf{h}]$	$\max_{1 \leq k \leq 2} \{d^*c_k[\mathbf{h}](r_k - d_k[\mathbf{h}])\}$
(1,0)	1	2	1	2
	2	2	1	
(1,1)	1	2	1	2
	2	1	2	
(1,2)	1	2	1	2
	2	1	1	
(1,3)	1	2	1	4
	2	2	2	

y de aquí es claro que  $d^*f = \max_{\mathbf{h} \in I} \{\max_{1 \leq k \leq s} \{d^*c_k[\mathbf{h}](r_k - d_k[\mathbf{h}])\}\} = 4$ .

Recordemos que, dado  $g \in A_{q^v}(r_1, \dots, r_s)$ , denotamos por  $Z(g)$  el conjunto de ceros de  $g$  y por  $\overline{Z}(g)$  su conjunto de no ceros (véase (1.3)). Observemos que para todo  $\mathbf{i}, \mathbf{h} \in I$  y  $\alpha \in U = \{(\alpha_1, \dots, \alpha_s) : \alpha_i \in U_{r_i}\}$ , donde  $U_{r_i}$  es el conjunto de todas las raíces  $r_i$ -ésimas primitivas de la unidad, tenemos que  $g(\alpha^{\mathbf{i}}) = 0$  si y solo si  $(\overline{X^{\mathbf{h}}g})(\alpha^{\mathbf{i}}) = 0$ . Así que,  $g$  y  $\overline{X^{\mathbf{h}}g}$  tienen los mismos ceros; en consecuencia,

$$|Z(g)| = |Z(\overline{X^{\mathbf{h}}g})| \quad (3.2)$$

Por otra parte, si  $C$  es un código abeliano en  $A_q(r_1, \dots, r_s)$ ,  $f \in C$  y  $\varphi_{\alpha, f}(\alpha^{-\mathbf{i}}) = 0$  entonces el monomio  $X^{\mathbf{i}}$  no aparece en  $f$  (véanse la Definición 1.15 y (1.14)). Por lo tanto, el peso de  $f$  es igual al número de no ceros de  $\varphi_{\alpha, f}$ . En general,

$$\omega(f) = |\overline{Z}(\varphi_{\alpha, f})|, \quad \text{para todo } \alpha \in U. \quad (3.3)$$

El siguiente resultado es muy útil en la consecución de la cota para la distancia mínima de un código abeliano, dada por P. Camion en [4, p.22].

**Proposición 3.3** *Sea  $f \in A_{q^v}(r_1, \dots, r_s)$ . La distancia aparente de  $f$  es menor o igual que el número de no ceros de  $f$ . En otras palabras,  $d^*f \leq |\overline{Z}(f)|$ .*

**Demostración.** Procederemos por inducción sobre  $s$ . Si  $f$  es un polinomio en una variable tenemos que  $d[h]$  es igual al número de raíces de  $x^h f$  que, a su vez, es mayor o igual que  $|Z(\overline{x^h f})|$ , para todo  $h \in \mathbb{Z}_r$ . De (3,2) tenemos que  $d[h] \geq |Z(f)|$ . Así que,  $r - d[h] \leq |\overline{Z}(f)|$  para todo  $h \in \mathbb{Z}_r$  y por lo tanto  $d^*f \leq |\overline{Z}(f)|$ .

Supongamos ahora que el resultado se tiene para  $s - 1$  variables. Consideremos  $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_{s-1}) \in \prod_{j=1}^{s-1} U_{r_j}$ ,  $\mathbf{h} \in I$  y supongamos que  $(c_s[\mathbf{h}](f))(\beta) = (\overline{X^{\mathbf{h}}f})_{s, d_s[\mathbf{h}](f)}(\beta) \neq 0$ . Escribamos el polinomio  $\overline{X^{\mathbf{h}}f}$  como un elemento de  $\mathbb{F}_{q^v}[Y_s][x_s]$ ; es decir,

$$(\overline{X^{\mathbf{h}}f})(X) = (\overline{X^{\mathbf{h}}f})_s(x_s) = \sum_{i=0}^{d_s[\mathbf{h}](f)} (\overline{X^{\mathbf{h}}f})_{s,i} x_s^i.$$

Sea  $g_i(\beta) = (\overline{X^{\mathbf{h}}f})_{s,i}(\beta)$  y denotemos por  $g[\mathbf{h}, \beta](x_s)$  al polinomio en una variable  $\sum_{i=0}^{d_s[\mathbf{h}]} g_i(\beta) x_s^i$ , el cual tiene grado  $gr(g[\mathbf{h}, \beta]) = d_s[\mathbf{h}]$  pues  $(c_s[\mathbf{h}](f))(\beta) \neq 0$ . Entonces, por lo visto en el caso  $s = 1$ ,  $|\overline{Z}(g[\mathbf{h}, \beta])| \geq r_s - d[\hat{h}]$  para todo  $\hat{h} \in \mathbb{Z}_{r_s}$ , donde  $d[\hat{h}]$  es

el grado del polinomio  $x_s^{\hat{h}}g[\mathbf{h}, \beta]$ , en la variable  $x_s$ . Luego, si tomamos  $\hat{h} = 0$ , tenemos que  $|\overline{Z}(g[\mathbf{h}, \beta])| \geq r_s - d_s[\mathbf{h}]$ . Por otra parte, de la hipótesis de inducción tenemos que  $d^*(c_s[\mathbf{h}]) \leq |\overline{Z}(c_s[\mathbf{h}])|$ . Por lo tanto,

$$d^*(c_s[\mathbf{h}])(r_s - d_s[\mathbf{h}]) \leq |\overline{Z}(c_s[\mathbf{h}])||\overline{Z}(g[\mathbf{h}, \beta])|.$$

Observemos que para todo  $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_{s-1}) \in \overline{Z}(c_s[\mathbf{h}])$  y todo  $\beta_s \in \overline{Z}(g[\mathbf{h}, \beta])$ , tenemos que

$$(\overline{X^{\mathbf{h}}f})(\beta_1, \dots, \beta_{s-1}, \beta_s) = g[\mathbf{h}, \beta](\beta_s) \neq 0$$

luego,  $(\beta_1, \dots, \beta_{s-1}, \beta_s)$  es un no cero de  $\overline{X^{\mathbf{h}}f}$ . De lo anterior y teniendo en cuenta la ecuación (3.2) podemos concluir que

$$d^*(c_s[\mathbf{h}])(r_s - d_s[\mathbf{h}]) \leq |\overline{Z}(c_s[\mathbf{h}])||\overline{Z}(g[\mathbf{h}, \beta])| \leq |\overline{Z}(\overline{X^{\mathbf{h}}f})| = |\overline{Z}(f)|, \quad \forall \beta \in \overline{Z}(c_s[\mathbf{h}]).$$

Esto se tiene, usando el mismo argumento, para cualquier  $d^*(c_k[\mathbf{h}])(r_k - d_k[\mathbf{h}])$  con  $\mathbf{h} \in I$  y  $1 \leq k \leq s$ . Así  $d^*f \leq |\overline{Z}(f)|$ .  $\blacksquare$

En [8, Section 2.4] R. E. Sabin presenta un algoritmo para calcular la distancia aparente de un polinomio en dos variables usando matrices. Describimos el proceso a continuación. Dado un polinomio  $f = \sum_{(i,j) \in \mathbb{Z}_{r_1} \times \mathbb{Z}_{r_2}} a_{i,j} x_1^i x_2^j$ , consideramos la matriz  $M = (a_{j,i})$  para todo  $0 \leq i < r_1$ ,  $0 \leq j < r_2$ . Denotamos por  $M_{\gamma,\rho}$ , con  $\gamma = 1, 2$  y  $\rho = 1, \dots, r_\gamma - 1$ , la matriz de coeficientes del polinomio  $\overline{x_\gamma^\rho f}$  (véase la Definición 1.10). Recordemos que las hipercolumnas de esta matriz son vectores y por lo tanto, de acuerdo con la Notación 2.9, definimos

$$b_1 = \max_{\rho \in \mathbb{Z}_{r_1}} \left\{ \left( \max_{i \in \mathbb{Z}_{r_2}} \{ \omega_{H_{M_2,\rho}(2,d_1[(0,\rho])]}(i) + 1 \} \right) \cdot (r_1 - d_1[(0,\rho)]) \right\}$$

$$b_2 = \max_{\rho \in \mathbb{Z}_{r_2}} \left\{ \left( \max_{i \in \mathbb{Z}_{r_1}} \{ \omega_{H_{M_1,\rho}(1,d_2[(\rho,0])]}(i) + 1 \} \right) \cdot (r_2 - d_2[(\rho,0)]) \right\}.$$

De este modo,  $d^*f = \max\{b_1, b_2\}$ . Basados en el algoritmo anterior, para calcular la distancia aparente de un polinomio en  $A_{q^v}(r_1, \dots, r_s)$  le asociamos una única hipermatriz a la cual le calcularemos su distancia aparente. El método que proponemos para determinar la distancia aparente de una hipermatriz no requiere considerar todas las hipermatrices de coeficientes  $M_{\gamma,\rho}$ , con  $\gamma = 1, \dots, s$  y  $\rho = 1, \dots, r_\gamma - 1$ . Desarrollamos a continuación nuestra propuesta.

Recordemos que, dado un entero positivo  $r$ , una lista de representantes canónicos  $b_0, b_1, \dots, b_l \in \mathbb{Z}_r$  es una lista de enteros consecutivos módulo  $r$ , si para cada  $0 \leq k < l$  se tiene que  $b_{k+1} \equiv b_k + 1 \pmod{r}$ . Si  $b = b_k$  (resp.  $b = b_{k+1}$ ) denotamos por  $b^+ = b_{k+1}$  (resp.  $b^- = b_k$ ).

**Definición 3.4** Sea  $M$  una  $I$ -hipermatriz no nula sobre  $\mathbb{F}_{q^v}$ ,  $k \in \{1, \dots, s\}$ ,  $b \in \mathbb{Z}_{r_k}$  y  $H_M(k, b)$  una hipercolumna no nula. El conjunto de hipercolumnas nulas adyacentes a  $H_M(k, b)$  es el conjunto de hipercolumnas

$$CH_M(k, b) = \{H_M(k, b_0), H_M(k, b_1), \dots, H_M(k, b_l)\}$$

tales que  $H_M(k, b_j) = 0$  para todo  $j \in \{0, \dots, l\}$ ,  $b_0, b_1, \dots, b_l$  es una lista de enteros consecutivos módulo  $r_k$ ,  $b^+ = b_0$  y  $H_M(k, b_l^+) \neq 0$ .

En el caso  $s = 1$  esta definición coincide con la de entradas nulas adyacentes dada en la Definición 2.8.

**Notación 3.5** Denotamos por  $\omega_M(k, b)$  el valor  $|CH_M(k, b)|$ . Si  $s = 1$  escribiremos simplemente  $\omega_M(b)$ , como en la Notación 2.9.

Observemos que, dadas una hipermatriz  $M$  y una hipercolumna no nula  $H_M(k, b)$ , el conjunto de hipercolumnas nulas adyacentes a  $H_M(k, b)$  puede ser vacío. Notemos también que si  $H_M(k, b) = 0$  entonces  $CH_M(k, b)$  y  $\omega_M(k, b)$  no están definidos.

Presentamos ahora la noción de distancia aparente de una hipermatriz. Recordemos que una hipercolumna de una hipermatriz de dimensión  $s$  puede ser vista como una hipermatriz de dimensión  $s - 1$ . La siguiente definición es recursiva puesto que para calcular la distancia aparente de una hipermatriz necesitamos determinar primero la distancia aparente de sus hipercolumnas (o de algunas de ellas). Como en el capítulo de preliminares, en el caso de una variable escribiremos  $r$  en vez de  $r_1$ .

**Definición 3.6** Sean  $M$  una  $I$ -hipermatriz sobre  $\mathbb{F}_{q^v}$  y  $k \in \{1, \dots, s\}$ .

1. Si  $M$  es la  $I$ -hipermatriz nula, su distancia aparente es  $d^*0 = 0$ .
2. En el caso  $s = 1$ , la distancia aparente del vector  $M$  es

$$d^*M = \max_{b \in \mathbb{Z}_r} \{\omega_M(b) + 1\}.$$

3. Para  $s \geq 2$ , damos la definición en dos pasos:

a) La distancia aparente de  $M$  respecto de la variable  $x_k$  es

$$d_k^*M = \max_{b \in \mathbb{Z}_{r_k}} \{(\omega_M(k, b) + 1) \cdot d^*H_M(k, b)\}.$$

b) Y la distancia aparente de  $M$  es  $d^*M = \max_{1 \leq k \leq s} \{d_k^*M\}$ .

Dado que la distancia aparente de una hipermatriz es un máximo, estamos interesados en identificar aquellas hipercolumnas, o entradas en su caso, cuyo valor generado ha alcanzado dicho máximo.

**Definición 3.7** Sean  $M$  una hipermatriz no nula,  $k \in \{1, \dots, s\}$  y  $b \in \mathbb{Z}_{r_k}$ . Decimos que  $(k, b)$  es una pareja involucrada (en el cálculo de  $d^*M$ ) y que  $H_M(k, b)$  es una hipercolumna involucrada (en el cálculo de  $d^*M$ ) si  $d^*M = (\omega_M(k, b) + 1) \cdot d^*H_M(k, b)$ . En el caso  $s = 1$ , si  $M = (a_b)_{b \in I}$  es un vector no nulo, diremos que la coordenada  $b$ -ésima de  $M$  es una coordenada involucrada (en el cálculo de  $d^*M$ ) y que  $a_b$  es una entrada involucrada (en el cálculo de  $d^*M$ ) si  $d^*M = \omega_M(b) + 1$ .

**Notación 3.8** Denotaremos por  $Ip(M)$  el conjunto de parejas (o entradas) involucradas en el cálculo de la distancia aparente de  $M$ .

En los siguientes ejemplos aplicamos las definiciones anteriores a hipermatrices de dimensiones 1, 2 y 3.

**Ejemplos 3.9** 1. En primer lugar consideremos  $I = \mathbb{Z}_4$  y sea  $M = (2, 0, 0, 1)$  el vector sobre  $\mathbb{F}_3$ . Dado que  $\omega_M$  no está definido para las entradas nulas, tenemos que  $d^*M = \max\{\omega_M(b) + 1 : 0 \leq b \leq 3\} = \max\{\omega_M(0) + 1, \omega_M(3) + 1\} = \max\{3, 1\} = 3$ . La coordenada involucrada en el cálculo  $d^*M$  es  $b = 0$  y la entrada involucrada es  $a_0 = 2$ .

2. Consideremos ahora  $I = \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_5$  y la  $I$ -matriz sobre  $\mathbb{F}_2$

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Vamos a determinar la distancia aparente de  $M$  respecto de la variable  $x_1$  (en este caso por filas):

$b$	$\omega_M(1, b)$	$d^*H_M(1, b)$	$(\omega_M(1, b) + 1) \cdot d^*H_M(1, b)$
0	0	5	5
1	0	3	3
2	0	3	3

luego  $d_1^*M = 5$ . Ahora veamos el cálculo respecto de la variable  $x_2$  (en este caso por columnas):

$b$	$\omega_M(2, b)$	$d^*H_M(2, b)$	$(\omega_M(2, b) + 1) \cdot d^*H_M(2, b)$
0	0	1	1
1	2	2	6
4	0	2	2

entonces,  $d_2^*M = 6$  y por lo tanto,  $d^*M = 6$ . La hipercolumna involucrada en el cálculo de  $d^*M$  es  $H_M(2, 1)$ .

3. Sea  $I = \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_5$  y consideremos la  $I$ -hipermatriz sobre  $\mathbb{F}_5$ ,  $M$ , cuyas hipercolumnas son

$$\begin{matrix} H_M(1, 0) & H_M(1, 1) & H_M(1, 2) \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 4 & 1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 4 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} H_M(2,0) & H_M(2,1) & H_M(2,2) \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} H_M(3,0) & H_M(3,1) & H_M(3,2) \\ \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 1 & 4 & 1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} H_M(3,3) & H_M(3,4) \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

Para determinar la distancia aparente de  $M$  respecto de la variable  $x_1$ , primero calculamos la distancia aparente de las hipercolumnas  $H_M(1, -)$  no nulas:

$$d^* H_M(1,1) = d^* \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 4 & 1 \end{pmatrix} = d^* H_M(1,2) = d^* \begin{pmatrix} 4 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} = 3.$$

Observemos que  $\omega_M(1,1) = 0$  y  $\omega_M(1,2) = 1$ . Recopilamos esta información en la siguiente tabla

$b$	$\omega_M(1,b)$	$d^* H_M(1,b)$	$(\omega_M(1,b) + 1) \cdot d^* H_M(1,b)$
1	0	3	3
2	1	3	6

y de aquí podemos deducir de  $d_1^* M = 6$ . Ahora determinamos la distancia aparente de  $M$  respecto de la variable  $x_2$ . Observemos que

$b$	$\omega_M(2,b)$	$d^* H_M(2,b)$	$(\omega_M(2,b) + 1) \cdot d^* H_M(2,b)$
0	0	5	5
1	1	2	4

entonces  $d_2^* M = 5$ . Para calcular la distancia aparente de  $M$  respecto de la variable  $x_3$  tenemos los siguientes datos

$b$	$\omega_M(3,b)$	$d^* H_M(3,b)$	$(\omega_M(3,b) + 1) \cdot d^* H_M(3,b)$
0	0	3	3
1	2	3	9
4	0	4	4

así que  $d_3^* M = 9$ . Por lo tanto  $d^* M = \max\{d_1^* M, d_2^* M, d_3^* M\} = 9$  e  $Ip(M) = \{(3,1)\}$ .

Recordemos que, dado un polinomio  $f = \sum_{\mathbf{i} \in I} a_{\mathbf{i}} X^{\mathbf{i}}$  en  $A_{q^v}(r_1, \dots, r_s)$ , la hipermatriz de coeficientes de  $f$  es  $M(f) = (a_{\mathbf{i}})_{\mathbf{i} \in I}$ .

Fijemos  $k \in \{1, \dots, s\}$  y consideremos  $f$  como un polinomio en  $\mathbb{F}_q[Y_k][x_k]$ ; es decir,  $f = f_k = \sum_{b=0}^{r_k-1} f_{k,b} x_k^b$ . Es inmediato comprobar que la hipermatriz de coeficientes del polinomio  $f_{k,b}$  es precisamente  $H_{M(f)}(k, b)$ .

Como lo mencionamos anteriormente, en [8, pp. 189-190] R. E. Sabin determina la distancia aparente de un polinomio  $f$  operando sobre su matriz de coeficientes  $M(f)$ . El siguiente resultado extiende este hecho y nos muestra que la distancia aparente de un polinomio en  $A_{q^v}(r_1, \dots, r_s)$  es igual a la distancia aparente de su hipermatriz de coeficientes.

**Teorema 3.10** Sean  $s, v, q$  y  $r_1, \dots, r_s$  enteros positivos, donde  $q$  es potencia de un primo  $p$  tal que  $\text{mcd}(p, r_i) = 1$ , para  $i = 1, \dots, s$ . Consideremos  $I = \prod_{i=1}^s \mathbb{Z}_{r_i}$  y  $A_{q^v}(r_1, \dots, r_s) = \mathbb{F}_{q^v}[x_1, \dots, x_s]/(x_1^{r_1} - 1, \dots, x_s^{r_s} - 1)$ . Para todo polinomio  $f$  en  $A_{q^v}(r_1, \dots, r_s)$ , con hipermatriz de coeficientes  $M(f)$ , se tiene que  $d^* f = d^* M(f)$ .

**Demostración.** Procederemos por inducción sobre  $s$ . Recordemos que una hipercolumna de una hipermatriz de dimensión  $s$  puede interpretarse como una hipermatriz de dimensión  $s - 1$ .

El caso  $s = 1$  corresponde a la Proposición 2.10. Supongamos entonces que el resultado se tiene para los enteros positivos menores que  $s$ , probaremos que se cumple también para  $s$ . Consideremos el polinomio  $f = \sum_{\mathbf{i} \in I} a_{\mathbf{i}} X^{\mathbf{i}}$  y su hipermatriz de coeficientes  $M = M(f)$ . Expresando  $f$  como  $f_k = \sum_{b=0}^{r_k-1} f_{k,b} x_k^b$  tenemos que  $M(f_{k,b}) = H_M(k, b)$  para todo  $k \in \{1, \dots, s\}$  y todo  $b \in \mathbb{Z}_{r_k}$ . Consideremos  $k \in \{1, \dots, s\}$  e  $\mathbf{i} \in I$  con  $\mathbf{i}(k) = b$ , donde  $b$  es un entero arbitrario en  $\mathbb{Z}_{r_k}$  tal que  $H_M(k, b) \neq 0$  y construyamos  $\mathbf{h} \in I$  de modo que  $\mathbf{h}(k) = r_k - 1 - \omega_M(k, b) - b$  y  $\mathbf{h}(j) = 0$  para  $j \neq k$ . Entonces  $d_k[\mathbf{h}] = b + \mathbf{h}(k)$  y  $c_k[\mathbf{h}] = f_{k,b}$ , con lo cual  $r_k - d_k[\mathbf{h}] = \omega_M(k, b) + 1$  y, por hipótesis de inducción,  $d^* f_{k,b} = d^* H_M(k, b)$ . Por lo tanto,  $d^* M \leq d^* f$ . Ahora tomemos  $\mathbf{h} \in I$ ,  $k \in \{1, \dots, s\}$  y consideremos  $\overline{X^{\mathbf{h}} f}$ ,  $d_k[\mathbf{h}]$  y  $c_k[\mathbf{h}]$ . Entonces  $\omega_M(k, d_k[\mathbf{h}] - \mathbf{h}(k)) \geq r_k - 1 - d_k[\mathbf{h}]$ . Claramente  $c_k[\mathbf{h}] = (\overline{X^{\mathbf{h}} f})_{k, d_k[\mathbf{h}]} = f_{k, d_k[\mathbf{h}] - \mathbf{h}(k)}$  y por hipótesis de inducción tenemos que  $d^* H_M(k, d_k[\mathbf{h}] - \mathbf{h}(k)) = d^* c_k[\mathbf{h}]$ . Luego,  $d^* M \geq d^* f$ . ■

**Ejemplo 3.11** Consideremos el polinomio  $g = 1 + x_1 + x_1 x_2 + x_1 x_2^4 + x_1^2 + x_1^2 x_2 + x_1^2 x_2^4$  en  $A_2(3, 5)$ . Su matriz de coeficientes es

$$M(g) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Como vimos en el Ejemplo 3.9,  $d^* M(g) = 6$ . En consecuencia,  $d^* g = 6$ . En este caso, el cálculo de la distancia aparente de la matriz resulta más práctico que el de la distancia



aparente del polinomio, puesto que para determinar  $d^*g$  es necesario considerar todos los polinomios de la forma  $\overline{x_1^i x_2^j}g$ , con  $i = 0, 1, 2$  y  $j = 0, 1, \dots, 5$ .

### 3.1. Distancia aparente de un código abeliano

Hemos estudiado la distancia aparente de polinomios e hipermatrices. Ahora presentaremos la definición de distancia aparente de un código abeliano, a partir de los cálculos hechos para polinomios e hipermatrices, tomando como referencia la definición dada por P. Camion en [4, p. 21]. Recordemos que el soporte de un código abeliano  $C$  en  $A_q(r_1, \dots, r_s)$ , respecto de  $\alpha \in U$ , es el conjunto  $\text{supp}(C) = I \setminus D_\alpha(C)$ .

**Definición 3.12 (P. Camion)** *Sea  $C$  un código abeliano en  $A_q(r_1, \dots, r_s)$  y consideremos el conjunto*

$$F = \left\{ f = \sum_{\mathbf{i} \in \text{supp}(C)} a_{\mathbf{i}} X^{\mathbf{i}} \in A_{q^v}(r_1, \dots, r_s) : a_{\mathbf{i}} \in \{0, 1\} \right. \\ \left. \text{y } f^q = f \text{ como polinomios en } A_{q^v}(r_1, \dots, r_s) \right\}.$$

Entonces la distancia aparente de  $C$  está dada por

$$d^*C = \min_{f \in F} \{d^*f\}.$$

Recordemos que un código abeliano  $C$  en  $A_q(r_1, \dots, r_s)$  tiene un único idempotente generador el cual se descompone como suma de idempotentes (centrales) primitivos (véase el párrafo posterior a (1.1)). Observemos que  $f \in F$  si y solo si existen un idempotente  $0 \neq e \in C$  y  $\alpha \in U$  tales que  $\varphi_{\alpha, e} = f$ . En efecto, si  $f \in F$  es claro que  $f = f \star f$  y por tanto,  $e = \varphi_{\alpha, f}^{-1}$  es un idempotente (véase el párrafo posterior a la Definición 1.15). Además, si  $\mathbf{i} \in I$  y  $g = \sum_{\mathbf{j} \in Q(\mathbf{i})} X^{\mathbf{j}}$  entonces  $g(\alpha) \in \mathbb{F}_q$ . En efecto,

$$(g(\alpha))^q = \left( \sum_{t=0}^{|Q(\mathbf{i})|-1} \prod_{k=1}^s \alpha_k^{\mathbf{i}^{(k)q^t}} \right)^q = \sum_{t=0}^{|Q(\mathbf{i})|-1} \prod_{k=1}^s \alpha_k^{\mathbf{i}^{(k)q^{t+1}}} = g(\alpha).$$

Entonces, como  $\text{supp}(C)$  es unión de  $q$ -órbitas tenemos que  $f(\alpha^{-\mathbf{j}}) \in \mathbb{F}_q$  y de este modo  $e \in A_q(r_1, \dots, r_s)$ . El recíproco es inmediato de las Observaciones 1.16. Este hecho junto con el Teorema 3.10 nos permite reescribir la Definición 3.12 como sigue.

**Definición 3.13** *Sean  $C$  un código en  $A_q(r_1, \dots, r_s)$  y  $\alpha \in U$ . La distancia aparente de  $C$ , respecto de  $\alpha$ , es*

$$d_\alpha^*C = \min \{d^*(\varphi_{\alpha, e}) : 0 \neq e^2 = e \in C\},$$

donde  $\varphi_{\alpha, e}$  denota la imagen de  $e$  bajo la transformada de Fourier discreta respecto de  $\alpha$ . En términos de matrices tenemos que

$$d_\alpha^*C = \min \{d^*M(\varphi_{\alpha, e}) : 0 \neq e^2 = e \in C\},$$

donde  $M(\varphi_{\alpha,e})$  es la hipermatriz de coeficientes de  $\varphi_{\alpha,e}$ . La distancia aparente de  $C$  es

$$d^*C = \text{máx} \{d_\alpha^*C : \alpha \in U\}.$$

Definimos también el conjunto de raíces óptimas de  $C$  como

$$\mathcal{R}(C) = \{\beta \in U : d^*C = d_\beta^*C\}.$$

Algunos autores, como P. Camion en [4] y R. E. Sabin en [8], se refieren a la distancia aparente de un código abeliano como la cota BCH del mismo. Dicha referencia está basada en el resultado que presentamos a continuación.

**Teorema 3.14** [4, Theorem 4.1] Sean  $s, q$  y  $r_1, \dots, r_s$  enteros positivos, donde  $q$  es potencia de un primo  $p$  tal que  $\text{mcd}(p, r_i) = 1$ , para  $i = 1, \dots, s$ . Consideremos  $I = \prod_{i=1}^s \mathbb{Z}_{r_i}$ ,  $A_q(r_1, \dots, r_s) = \mathbb{F}_q[x_1, \dots, x_s]/(x_1^{r_1} - 1, \dots, x_s^{r_s} - 1)$  y  $C$  un código abeliano en  $A_q(r_1, \dots, r_s)$ . Entonces  $d^*C$  es una cota inferior para la distancia mínima de  $C$ .

**Demostración.** Sean  $\alpha \in U$  y  $g$  una palabra no nula en  $C$ . Consideremos el código generado por  $g$ ,  $C_g = (g)$ . Si  $g(\alpha^{\mathbf{i}}) = 0$ , para algún  $\mathbf{i} \in I$ , entonces  $c(\alpha^{\mathbf{i}}) = 0$  para todo  $c \in C_g$ . Por lo tanto,  $\text{supp}(\varphi_{\alpha,c}) \subseteq \text{supp}(\varphi_{\alpha,g})$  para todo  $c \in C_g$ . Por otra parte, dado que  $C_g$  es un ideal en  $A_q(r_1, \dots, r_s)$ , existe un idempotente  $e_g$ , tal que  $C_g = (e_g)$  y  $c = ce_g$  para todo  $c \in C_g$ . Así que,  $\text{supp}(\varphi_{\alpha,c}) \subseteq \text{supp}(\varphi_{\alpha,e_g})$  para todo  $c \in C_g$ . En consecuencia, para cada  $g \in C$  existe un idempotente  $e_g \in C$  tal que  $\text{supp}(\varphi_{\alpha,g}) = \text{supp}(\varphi_{\alpha,e_g})$ , lo que implica que  $d^*\varphi_{\alpha,g} = d^*\varphi_{\alpha,e_g}$ .

Además, de la Proposición 3.3 y la ecuación (3.3) tenemos que

$$d^*\varphi_{\alpha,e_g} = d^*\varphi_{\alpha,g} \leq |\overline{Z}(\varphi_{\alpha,g})| = \omega(g).$$

Teniendo en cuenta que  $d_\alpha^*C = \text{mín} \{d^*\varphi_{\alpha,e} : 0 \neq e^2 = e \in C\}$  y  $d(C) = \text{mín} \{\omega(g) : g \in C\}$ , concluimos que  $d_\alpha^*C \leq d(C)$  para toda  $\alpha \in U$ . Por lo tanto,  $d^*C \leq d(C)$  ■

En este punto es natural plantearse la generalización de la Proposición 2.13 a códigos abelianos multivariantes. Veremos que dicha generalización no es posible.

Un código abeliano  $C$  queda determinado tanto por su idempotente generador como por cualquiera de sus conjuntos de definición. De la Definición 3.13 tenemos que, para calcular la distancia aparente de  $C$  respecto de  $\alpha \in U$ , necesitamos conocer la imagen bajo la transformada de Fourier discreta de todos sus idempotentes. El siguiente resultado nos permite determinar  $d_\alpha^*C$  a partir de  $D_\alpha(C)$ . Recordemos que si  $M(D)$  y  $M(D')$  son hipermatrices de  $q^t$ -órbitas, decimos que  $M(D') \leq M(D)$  si y solo si  $D \subseteq D'$  si y solo si  $\text{supp}(M') \subseteq \text{supp}(M)$ .

**Lema 3.15** Sean  $C$  un código en  $A_q(r_1, \dots, r_s)$ ,  $\alpha \in U$  y  $M$  la hipermatriz de  $q$ -órbitas proporcionada por  $D_\alpha(C)$ . Entonces

$$\{P : P \leq M\} = \{M(\varphi_{\alpha,e}) : e^2 = e, e \in C\}.$$

**Demostración.** Sean  $P \leq M$  y  $D = \mathcal{D}(P) = I \setminus \text{supp}(P)$  (véase la Definición 1.13). Consideremos el código  $C'$  en  $A_q(r_1, \dots, r_s)$  tal que  $D_\alpha(C') = D$  y sea  $e$  el idempotente generador de  $C'$ . Entonces  $P = M(D) = M(\varphi_{\alpha,e})$ .

Ahora, consideremos  $e$  un idempotente en  $C$ ,  $\varphi_{\alpha,e}$  su imagen bajo la transformada de Fourier discreta respecto de  $\alpha$  y  $M(\varphi_{\alpha,e})$  su hipermatriz de coeficientes, que claramente es hipermatriz de  $q$ -órbitas. De las Observaciones 1.16 sabemos que los coeficientes de  $\varphi_{\alpha,e}$ , y por tanto las entradas de  $M(\varphi_{\alpha,e})$ , son elementos en el conjunto  $\{0, 1\}$ . Más aún, si  $\mathbf{i} \in \text{supp}(M(\varphi_{\alpha,e}))$  entonces  $\mathbf{i} \notin D_\alpha(C)$  y por lo tanto  $\mathbf{i} \in \text{supp}(M)$ . Así que,  $M(\varphi_{\alpha,e}) \leq M$ . ■

La siguiente definición es fundamental en el desarrollo de nuestro método de cálculo de la distancia aparente de un código abeliano.

**Definición 3.16** *Sea  $M$  una hipermatriz de  $q^t$ -órbitas no nula. La distancia aparente mínima de  $M$  es*

$$\text{dam}(M) = \min\{d^*P : 0 \neq P \leq M\}.$$

Notemos que dados un código abeliano  $C$  y  $\alpha \in U$ , de la Definición 3.13, la Definición 3.16 y el Lema 3.15 obtenemos que

$$d_\alpha^*C = \min\{d^*M(\varphi_{\alpha,e}) : 0 \neq e^2 = e \in C\} = \min\{d^*P : 0 \neq P \leq M\} = \text{dam}(M)$$

donde  $M = M(D_\alpha(C))$ . Por otra parte, observemos que si  $e = \sum_{\mathbf{i} \in I} a_{\mathbf{i}} X^{\mathbf{i}}$  es el idempotente generador de un código  $C$  en  $A_q(r_1, \dots, r_s)$ , entonces  $a_{\mathbf{i}} = 0$  si y solo si  $\mathbf{i} \in D_\alpha(C)$ . Por lo tanto,  $M(\varphi_{\alpha,e}) = M(D_\alpha(C))$ . Esto demuestra el siguiente resultado.

**Proposición 3.17** *Sean  $C$  un código abeliano en  $A_q(r_1, \dots, r_s)$  y  $e$  su idempotente generador. Entonces  $d^*C = \max_{\alpha \in U}\{\text{dam}(M(\varphi_{\alpha,e}))\} = \max_{\alpha \in U}\{\text{dam}(M(D_\alpha(C)))\}$ .*

La Observación 1.7 nos permite deducir que, en la práctica, para calcular la distancia aparente de  $C$  basta con fijar  $\alpha \in U$  y recorrer los elementos de  $\mathcal{R}_\alpha$ ; es decir,

$$d^*C = \max\{d_\beta^*C : \beta \in \mathcal{R}_\alpha\}$$

y de este modo, podemos redefinir  $\mathcal{R}(C) = \{\beta \in \mathcal{R}_\alpha : d^*C = d_\beta^*C\}$ .

**Observación 3.18** Consideremos el conjunto de todas las  $q$ -órbitas módulo  $(r_1, \dots, r_s)$ ,  $\mathcal{Q}$ , y sea  $C$  un código abeliano en  $A_q(r_1, \dots, r_s)$  cuyo conjunto de definición respecto de  $\alpha$  es  $D = \bigcup_{j=1}^{\mu} Q_j$ , con  $Q_j \in \mathcal{Q}$  y  $0 < \mu < |\mathcal{Q}|$ . Sea  $M = M(D)$ . Observemos que  $|\{P : 0 \neq P \leq M\}| = 2^{|\mathcal{Q}|-\mu} - 1$  y de este modo el cálculo de  $d_\alpha^*C$  requiere el cómputo de  $2^{|\mathcal{Q}|-\mu} - 1$  distancias aparentes de hipermatrices de  $q$ -órbitas. Luego, el cálculo de  $d^*C$  requiere  $|\mathcal{R}_\alpha| \cdot (2^{|\mathcal{Q}|-\mu} - 1)$  cálculos de este tipo.

El cálculo de la distancia aparente mínima de un vector de  $q^t$ -órbitas se simplifica notablemente, como lo muestra nuestro siguiente resultado.

**Corolario 3.19** Si  $M$  es un vector de  $q^t$ -órbitas entonces  $\text{dam}(M) = d^*M$ .

**Demostración.** Consideremos un vector de  $q^t$ -órbitas  $P$  tal que  $P \leq M$ . Entonces  $\text{supp}(P) \subseteq \text{supp}(M)$ . Para todo  $i \in \text{supp}(P)$  tenemos que  $C_M(i) \subseteq C_P(i)$  (véase la Definición 3.4). Por lo tanto,  $C_M(i) \leq C_P(i)$  para todo  $i \in \text{supp}(P)$  y de este modo  $d^*M \leq d^*P$ . ■

En el caso multivariable, como es de esperar, la igualdad del corolario anterior no se verifica en general. Así que se tienen que considerar todas las hipermatrices menores o iguales que  $M$ , según la relación de orden parcial dada en (1.13), con la cantidad de cálculos que esto conlleva. Vamos a ver un ejemplo.

**Ejemplo 3.20** Consideremos la matriz de 2-órbitas proporcionada por  $D = Q(0, 1) \cup Q(0, 3) \cup Q(1, 3)$  (véase el Ejemplo 1.12). Entonces

$$M = M(D) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

y tenemos que  $d^*M = 7$ . Sin embargo, la matriz

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

proporcionada por  $D' = D \cup Q(0, 0)$  cumple que  $P < M$  y  $d^*P = 6 < d^*M$ . De hecho, puede comprobarse que  $\text{dam}(M) = d^*P$ .

Para terminar este capítulo, cabe notar que el concepto de distancia aparente mínima y la Proposición 3.17 garantizan la existencia de un idempotente  $e' \in C$ ,  $\alpha \in U$  y una hipermatriz  $P \leq M(D_\alpha(C))$  tales que  $d^*C = d^*M(\varphi_{\alpha, e'}) = d^*M(\mathcal{D}(P))$ .

# Capítulo 4

## Cálculo de la distancia aparente mínima de una hipermatriz

Como se desprende del capítulo anterior, el cálculo de la distancia aparente de un código abeliano  $C$  (no trivial) respecto de  $\alpha \in U$ , en un anillo semisimple, requiere o bien el cálculo de las distancias aparentes de las imágenes bajo la transformada de Fourier discreta de todos los idempotentes del código, (por la Definición 3.13), o bien el cálculo de las distancias aparentes de todas las hipermatrices menores o iguales que  $M(D_\alpha(C))$ , con respecto a la relación de orden parcial dada en (1.13), según la definición de distancia aparente mínima (véase el párrafo previo a la Proposición 3.17). Esto implica que, si  $|\{e \in C : 0 \neq e^2 = e\}| = l$  entonces determinar la distancia aparente de  $C$ , respecto de  $\alpha$ , requiere del cálculo de las distancias aparentes de  $2^l - 1$  polinomios o hipermatrices de  $q$ -órbitas, según la definición que se disponga seguir (véanse las observaciones 1.14(4) y 3.18).

En este capítulo presentaremos un algoritmo para calcular la distancia aparente de un código abeliano, respecto de un juego de raíces  $\alpha \in U$ , basado en ciertas manipulaciones de las  $q$ -órbitas que componen el soporte de la hipermatriz proporcionada por  $D_\alpha(C)$ ; nuestro método usa menos cálculos que los utilizados por P. Camion en [4] y R. E. Sabin en [8]. De hecho, en el caso  $s = 2$ , tomando como referencia el cálculo de la distancia aparente de una hipermatriz  $P \leq M(D_\alpha(C))$ , la expresión que da el número máximo de pasos necesarios para determinar  $\text{dam}(M(D_\alpha(C)))$  es  $l - 1$ ; es decir, es una expresión lineal y no exponencial como en los métodos propuestos por los autores antes mencionados.

Como en los capítulos anteriores,  $s, t, q$  y  $r_1, \dots, r_s$  serán enteros positivos, donde  $q$  es potencia de un primo  $p$  tal que  $\text{mcd}(p, r_i) = 1$ , para  $i = 1, \dots, s$  e  $I = \prod_{i=1}^s \mathbb{Z}_{r_i}$ . Recordemos que  $\mathcal{Q}_t$  denota el conjunto de todas las  $q^t$ -órbitas en  $I$ .

Vamos a comenzar desarrollando una serie de resultados de carácter técnico que serán necesarios a lo largo de todo el capítulo. En particular, la siguiente observación será referida en múltiples ocasiones.

**Observación 4.1** Sea  $M$  una hipermatriz de  $q^t$ -órbitas (de dimensión  $s$ , con índices en  $I$ ) y consideremos una hipercolumna arbitraria de  $M$ , digamos  $H_M(k, b)$ , donde  $k \in \{1, \dots, s\}$  y  $b \in \mathbb{Z}_{r_k}$ . Recordemos que  $I(k, b) = \{\mathbf{i} \in I : \mathbf{i}(k) = b\}$ ,  $H_M(k, b) = \{a_{\mathbf{i}} \in M : \mathbf{i} \in I(k, b)\}$  y  $D_M(k, b) = I(k, b) \setminus \text{supp}(H_M(k, b))$  (véanse (1.11) y (1.12)). Afirmamos que  $H_M(k, b)$  puede ser vista como una hipermatriz de  $q^{t'}$ -órbitas con dimensión  $s-1$ , donde  $t' = t|C_{q^t}(b)|$  y  $C_{q^t}(b)$  es la clase  $q^t$ -ciclotómica de  $b$ , módulo  $r_k$ ; además, que como tal,  $H_M(k, b)$  está proporcionada por  $D_M(k, b)$ . De hecho, podemos calcular  $\text{dam}(H_M(k, b))$ . En efecto, notemos que para cada  $\mathbf{i} \in I(k, b)$  tenemos que  $q^{t'}\mathbf{i}(k) = q^{t'}b = b = \mathbf{i}(k)$ , por tanto  $q^{t'}\mathbf{i} \in I(k, b)$ ; es decir,  $I(k, b)$  es cerrado para  $q^{t'}$ -órbitas. Ahora, consideremos  $\mathbf{i} \in I(k, b)$  tal que  $a_{\mathbf{i}} = 0$ . Como  $\mathbf{i} \in I$ , existe  $Q \in \mathcal{Q}_t$  tal que  $\mathbf{i} \in Q$  y por tanto  $q^{t'}\mathbf{i} \in Q$ , con lo cual  $a_{q^{t'}\mathbf{i}} = 0$ , pues  $M$  es una hipermatriz de  $q^t$ -órbitas. Esto prueba que  $H_M(k, b)$  puede ser vista como una hipermatriz de  $q^{t'}$ -órbitas. De las Observaciones 1.14 podemos concluir que  $H_M(k, b)$  está proporcionada por  $D_M(k, b)$ .

Recordemos que para calcular la distancia aparente mínima de una hipermatriz  $M$  necesitamos considerar todas las hipermatrices  $0 \neq P \leq M$ , donde  $\leq$  es la relación de orden parcial dada en (1.13). Nuestro objetivo es reducir el número de hipermatrices a considerar para este cálculo y como primer paso en esta dirección vamos a ver que, dadas las hipermatrices de  $q^t$ -órbitas  $N \leq M$ , se puede heredar la relación “ $\leq$ ” a sus hipercolumnas correspondientes.

**Proposición 4.2** Sean  $M$  una hipermatriz de  $q^t$ -órbitas y  $N < M$ . Entonces para cada  $k = 1, \dots, s$  y  $b \in \mathbb{Z}_{r_k}$  tenemos que  $H_N(k, b) \leq H_M(k, b)$ , consideradas como hipermatrices de  $q^{t'}$ -órbitas, donde  $t' = t|C_{q^t}(b)|$  y  $C_{q^t}(b)$  es la clase  $q^t$ -ciclotómica de  $b$ , módulo  $r_k$ .

**Demostración.** Como  $N < M$  entonces  $\mathcal{D}(M) \subset \mathcal{D}(N)$  y así,  $D_M(k, b) \subseteq D_N(k, b)$ . Luego, de la Observación 4.1 tenemos que  $H_N(k, b) \leq H_M(k, b)$ , consideradas como hipermatrices de  $q^{t'}$ -órbitas. ■

El siguiente resultado técnico será esencial para nuestros cálculos. Vamos a ver que si  $M$  es una hipermatriz de  $q$ -órbitas y  $H_M(k, b) \neq 0$ , existe una hipermatriz  $N < M$  de soporte máximo, con respecto a la inclusión, tal que  $H_N(k, b) = 0$ . Recordemos que dados  $k \in \{1, \dots, s\}$  y  $b \in \mathbb{Z}_{r_k}$ , una hipermatriz con índices en  $\prod_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^s \mathbb{Z}_{r_j}$  puede ser vista como una hipercolumna con índices en  $I(k, b)$  (véase el párrafo posterior a la Definición 1.9).

**Lema 4.3** Sea  $M$  una hipermatriz de  $q^t$ -órbitas no nula. Sean  $k \in \{1, \dots, s\}$ ,  $b \in \mathbb{Z}_{r_k}$  y  $A$  una hipermatriz de dimensión  $s-1$  con índices en  $\prod_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^s \mathbb{Z}_{r_j}$ , tal que  $\text{supp}(A) \subseteq \text{supp}(H_M(k, b))$ . Entonces, existe  $N \leq M$  tal que

1.  $\text{supp}(H_N(k, b)) \subseteq \text{supp}(A)$ .
2. Si  $P < M$  verifica que  $\text{supp}(H_P(k, b)) \subseteq \text{supp}(A)$ , entonces  $P \leq N$ .

3. Si  $A$  es una hipermatriz de  $q^{t|C_{q^t}(b)|}$ -órbitas, donde  $C_{q^t}(b)$  es la clase  $q^t$ -ciclotómica de  $b$  módulo  $r_k$ , entonces  $A = H_N(k, b)$ .

Por lo tanto,  $N$  es la hipermatriz de  $q^t$ -órbitas, de soporte máximo (con respecto a la inclusión), tal que  $\text{supp}(H_N(k, b)) \subseteq \text{supp}(A)$ .

**Demostración.** Hagamos  $\bar{A} = \text{supp}(H_M(k, b)) \setminus \text{supp}(A)$  y consideremos la hipermatriz de  $q^t$ -órbitas  $N$ , tal que  $\mathcal{D}(N) = \mathcal{D}(M) \cup (\cup_{\mathbf{i} \in \bar{A}} Q_t(\mathbf{i}))$ . Es claro que  $N \leq M$  y  $\text{supp}(H_N(k, b)) \subseteq \text{supp}(H_M(k, b))$ . Veamos que  $N$  satisface las condiciones del enunciado.

1. Sea  $\mathbf{i} \in \text{supp}(H_N(k, b))$ , arbitrario. Entonces  $Q_t(\mathbf{i}) \cap \mathcal{D}(N) = \emptyset$  y en consecuencia  $Q_t(\mathbf{i}) \cap \bar{A} = \emptyset$ , con lo cual  $Q_t(\mathbf{i}) \subseteq \text{supp}(A)$ , pues  $\mathbf{i} \in I(k, b)$ . Por lo tanto,  $\mathbf{i} \in \text{supp}(A)$ .

2. Supongamos que  $P < M$  es tal que  $\text{supp}(H_P(k, b)) \subseteq \text{supp}(A)$ . Tomemos  $\mathbf{i} \in \text{supp}(P)$ ; es decir,  $\mathbf{i} \notin \mathcal{D}(P)$ . Entonces  $Q_t(\mathbf{i}) \cap \mathcal{D}(P) = \emptyset$ . Vamos a ver que  $Q_t(\mathbf{i}) \cap \mathcal{D}(N) = \emptyset$ . Dado que  $P < M$  tenemos que  $\mathcal{D}(M) \subset \mathcal{D}(P)$  y así  $Q_t(\mathbf{i}) \cap \mathcal{D}(M) = \emptyset$ , luego  $\mathbf{i} \notin \mathcal{D}(M)$ . Supongamos que  $Q_t(\mathbf{i}) \cap \mathcal{D}(N) \neq \emptyset$ . Entonces  $Q_t(\mathbf{i}) \cap \bar{A} \neq \emptyset$ ; es decir, existe  $\mathbf{j} \in \bar{A}$  tal que  $Q_t(\mathbf{i}) = Q_t(\mathbf{j})$ . De aquí, tenemos que  $\mathbf{j} \in \text{supp}(P)$  y como  $\mathbf{j}(k) = b$  entonces  $\mathbf{j} \in \text{supp}(H_P(k, b)) \subseteq \text{supp}(A)$ , lo cual es imposible.

3. Supongamos que  $A$  es una hipermatriz de  $q^{t|C_{q^t}(b)|}$ -órbitas tal que  $\text{supp}(A) \setminus \text{supp}(H_N(k, b)) \neq \emptyset$  y consideremos  $\mathbf{i} \in \text{supp}(A) \setminus \text{supp}(H_N(k, b))$ . Dado que  $\mathbf{i} \notin \text{supp}(H_N(k, b))$ ,  $\mathbf{i} \notin \text{supp}(N)$  entonces  $\mathbf{i} \in \mathcal{D}(N)$  y así,  $Q_t(\mathbf{i}) \subseteq \mathcal{D}(N)$ . Sea  $N'$  la hipermatriz proporcionada por  $\mathcal{D}(N) \setminus Q_t(\mathbf{i})$ . Entonces  $N < N'$  y

$$D_{N'}(k, b) = D_N(k, b) \setminus Q_{t|C_{q^t}(b)|}(\mathbf{i}) \supseteq \mathcal{D}(A).$$

Por lo tanto,  $H_{N'}(k, b) \leq A$ , lo cual contradice lo probado en la parte (2) de este resultado. ■

Aplicando repetidamente el Lema 4.3, con  $A = 0$ , obtenemos de forma directa el siguiente corolario.

**Corolario 4.4** *Sea  $M$  una hipermatriz de  $q^t$ -órbitas no nula. Consideremos la lista de pares  $(k_1, b_1), \dots, (k_l, b_l)$  donde  $1 \leq k_j \leq s$  y  $b_j \in \mathbb{Z}_{r_{k_j}}$ , con  $j = 1, \dots, l$ . Entonces existe una hipermatriz  $N \leq M$ , de soporte máximo, tal que  $H_N(k_j, b_j) = 0$ , con  $j = 1, \dots, l$ .*

Recordemos que el conjunto de hipercolumnas nulas adyacentes a una hipercolumna  $H_M(k, b)$  se denota por  $CH_M(k, b)$  (véase la Definición 3.4) y que una hipercolumna  $H_M(k, b)$  se dice involucrada en el cálculo de  $d^*M$  si  $d^*M = (\omega_M(k, b) + 1) \cdot d^*H_M(k, b)$  (véase la Definición 3.7). Nuestro siguiente resultado establece una condición suficiente para obtener de inmediato la distancia aparente mínima de una hipermatriz.

**Proposición 4.5** *Sean  $D$  una unión de  $q^t$ -órbitas y  $M = M(D) \neq 0$ . Sea  $H_M(k, b)$  una hipercolumna involucrada en el cálculo de  $d^*M$ , con  $1 \leq k \leq s$  y  $b \in \mathbb{Z}_{r_k}$ . Si  $d^*H_M(k, b) = 1$  entonces  $\text{dam}(M) = d^*M$ .*

**Demostración.** Por hipótesis, tenemos que

$$d^*M = (\omega_M(k, b) + 1)d^*H_M(k, b) = \omega_M(k, b) + 1$$

Consideremos una hipermatriz  $0 \neq M' \leq M$ . Claramente, si  $l \in \mathbb{Z}_{r_k}$  es tal que  $H_M(k, l)$  es una hipercolumna nula, entonces  $H_{M'}(k, l)$  también lo es. De aquí, dado que  $H_M(k, b) \neq 0$  tenemos que  $CH_M(k, b) \subseteq CH_{M'}(k, b')$ , para algún  $b' \in \mathbb{Z}_{r_k}$  y por lo tanto,  $d^*M' \geq (\omega_{M'}(k, b') + 1)d^*H_{M'}(k, b') \geq \omega_M(k, b) + 1 = d^*M$ . ■

La condición que se establece en esta proposición no es una condición necesaria.

**Ejemplo 4.6** Sean  $q = 2$  e  $I = \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_9$ . La matriz de 2-órbitas, con índices en  $I$ ,

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

es tal que  $dam(M) = d^*M = 3$  con  $Ip(M) = \{(1, 0), (2, 0), (2, 3), (2, 6)\}$ . Así que la distancia aparente mínima de  $M$  coincide con su distancia aparente. Sin embargo, ninguna de sus hipercolumnas involucradas tiene distancia aparente 1.

La Proposición 4.5 no es aplicable al caso  $s = 1$ . Sin embargo, si  $M$  es un vector tenemos que  $dam(M) = d^*M$ . De hecho, si  $P$  y  $M$  son vectores de  $q^t$ -órbitas con  $P < M$ , tales que  $d^*P < d^*M$ , entonces del Corolario 3.19 concluimos que  $P = 0$ . En el caso multivariable tenemos el siguiente resultado.

**Lema 4.7** Sean  $D$  una unión de  $q^t$ -órbitas y  $M = M(D) \neq 0$ . Sea  $H_M(k, b)$  una hipercolumna involucrada en el cálculo de  $d^*M$ , con  $1 \leq k \leq s$  y  $b \in \mathbb{Z}_{r_k}$ . Si  $P < M$  y  $d^*P < d^*M$  entonces  $d^*H_P(k, b) < d^*H_M(k, b)$ . En consecuencia,  $H_P(k, b) < H_M(k, b)$ , consideradas como hipermatrices de  $q^{t|C_{q^t}(b)|}$ -órbitas.

**Demostración.** Dado que  $d^*P < d^*M$ , entonces

$$d^*M = d^*H_M(k, b)(\omega_M(k, b) + 1) > d^*P \geq d^*H_P(k, b)(\omega_P(k, b) + 1).$$

Si  $H_P(k, b) = 0$  obtenemos directamente el resultado. Supongamos ahora que  $H_P(k, b) \neq 0$ . Entonces tenemos que  $CH_M(k, b) \subseteq CH_P(k, b)$  y así  $\omega_M(k, b) \leq \omega_P(k, b)$ . Este hecho, junto con la desigualdad anterior, implican que  $d^*H_P(k, b) < d^*H_M(k, b)$ . De aquí,  $H_P(k, b) < H_M(k, b)$ . ■

## 4.1. Cálculo en matrices. Caso $s=2$ .

Recordemos el contexto del cálculo de la distancia aparente mínima en el caso de dos variables. Consideremos el código abeliano  $C$  en  $A_q(r_1, r_2)$  cuyo conjunto de definición



respecto de  $\alpha \in U$  es  $D_\alpha = \cup_{j=1}^\mu Q_j$ , con  $Q_j \in \mathcal{Q}$  y  $0 < \mu < |\mathcal{Q}|$  y sea  $M_\alpha = M(D_\alpha)$  la matriz proporcionada por dicho conjunto de definición. Determinar la distancia aparente de  $C$  es equivalente a calcular el máximo, sobre los elementos  $\alpha \in U$ , de las distancias aparentes mínimas  $dam(M_\alpha)$ . Cada una de ellas se obtiene determinando las distancias aparentes de un conjunto de  $2^{|\mathcal{Q}|-\mu} - 1$  matrices de  $q$ -órbitas (véase la Observación 3.18). Nuestro siguiente resultado proporciona un algoritmo que reduce el número de operaciones necesarias para determinar la distancia aparente mínima de cualquier  $M_\alpha$ .

**Proposición 4.8** *Sean  $t, q$  y  $r_1, r_2$  enteros positivos, donde  $q$  es potencia de un primo  $p$  tal que  $\text{mcd}(p, r_i) = 1$ , para  $i = 1, 2$ ;  $I = \mathbb{Z}_{r_1} \times \mathbb{Z}_{r_2}$  y  $\mathcal{Q}_t$  el conjunto de todas las  $q^t$ -órbitas módulo  $(r_1, r_2)$ . Sean  $\mu \in \{1, \dots, |\mathcal{Q}_t| - 1\}$  y  $\{Q_j\}_{j=1}^\mu$  un subconjunto de  $\mathcal{Q}_t$ . Si  $D = \cup_{j=1}^\mu Q_j$  y  $M = M(D)$  entonces existen dos sucesiones; una de matrices de  $q^t$ -órbitas, no nulas,*

$$M = M_0 > M_1 > \dots > M_l \neq 0$$

*y otra de números enteros positivos*

$$m_0 \geq m_1 \geq \dots \geq m_l$$

*con  $l \leq \mu$  y  $m_i \leq d^*M_i$ , para  $0 \leq i \leq l$ . Dichas sucesiones verifican las siguientes propiedades: Si  $P$  es una matriz de  $q^t$ -órbitas tal que  $0 \neq P \leq M$ , entonces  $d^*P \geq m_l$  y si  $d^*P < m_{i-1}$  entonces  $P \leq M_i$ , donde  $0 < i \leq l$ . Más aún, si  $l' \in \{0, \dots, l\}$  es el primer elemento con la propiedad de que  $m_{l'} = m_l$  entonces  $d^*M_{l'} = dam(M)$ .*

**Demostración.** Primero notemos que  $M \neq 0$  porque  $\mu \leq |\mathcal{Q}_t| - 1$ . Vamos a construir nuestras sucesiones por recurrencia. Sean  $M_0 = M$ ,  $m_0 = d^*M$  e  $Ip(M)$  el conjunto de parejas involucradas en el cálculo de  $d^*M$  (véase la Notación 3.8). Si existe una pareja  $(k, b) \in Ip(M)$ , con  $k \in \{1, 2\}$  y  $b \in \mathbb{Z}_{r_k}$ , tal que  $d^*H_M(k, b) = 1$  entonces, por la Proposición 4.5, habremos terminado (con  $l = 0$ ). Supongamos ahora que  $d^*H_M(k, b) \neq 1$  para toda pareja  $(k, b) \in Ip(M)$ . En este caso, por el Corolario 4.4, podemos construir la matriz de  $q^t$ -órbitas  $M_1 < M$ , de soporte máximo, tal que  $H_M(k, b) = 0$  para todo  $(k, b) \in Ip(M)$ .

Afirmamos que, para cualquier matriz de  $q^t$ -órbitas  $P < M$ , si  $d^*P < m_0$  entonces  $P \leq M_1$ . Supongamos que  $P < M$  con  $d^*P < m_0$  y consideremos  $(k, b) \in Ip(M)$ . Por el Lema 4.7 y el Corolario 3.19, tenemos que  $d^*H_P(k, b) < d^*H_M(k, b) = dam(H_M(k, b))$ , pues  $H_M(k, b)$  es un vector, y  $H_P(k, b) < H_M(k, b)$ . Luego,  $H_P(k, b) = 0$  para toda  $(k, b) \in Ip(M)$ . Dado que  $M_1$  tiene soporte máximo tenemos que  $P \leq M_1$ . Si  $M_1 = 0$  habremos terminado, tomando de nuevo  $l = 0$ .

Si  $M_1 \neq 0$ , finalizamos el paso base definiendo  $m_1 = \min\{m_0, d^*M_1\}$ . Por el párrafo anterior, tenemos que  $M_1$  y  $m_1$  satisfacen las condiciones requeridas: Si  $P$  es una matriz de  $q^t$ -órbitas tal que  $0 \neq P \leq M_1$ , entonces  $d^*P \geq m_1$  y si  $d^*P < m_0$  entonces  $P \leq M_1$ .

Supongamos que hemos construido las sucesiones  $M = M_0 > \dots > M_\delta \neq 0$  y  $m_0 \geq \dots \geq m_\delta$ , con  $\delta \in \{1, \dots, \mu\}$ , tales que para todo  $i \in \{1, \dots, \delta\}$ , se tiene que  $m_i = \min\{m_{i-1}, d^*M_i\}$  y si  $P \leq M$  satisface que  $d^*P < m_{i-1}$  entonces  $P \leq M_i$ .

Para obtener el paso  $\delta + 1$  procederemos con  $M_\delta$  como lo hicimos con  $M_0$ . Primero veamos que si existe una pareja  $(k, b) \in Ip(M_\delta)$ , con  $k \in \{1, 2\}$  y  $b \in \mathbb{Z}_{r_k}$ , tal que  $d^*H_{M_\delta}(k, b) = 1$  entonces habremos terminado (con  $l = \delta$ ). En efecto, si esto ocurre y tenemos una matriz  $0 \neq P < M$  tal que  $d^*P < m_\delta \leq m_{\delta-1}$  entonces  $P < M_\delta$ , lo cual es una contradicción pues por la Proposición 4.5 tenemos que  $dam(M_\delta) = d^*M_\delta$ . Supongamos que  $d^*H_{M_\delta}(k, b) \neq 1$  para cualquier pareja  $(k, b) \in Ip(M_\delta)$ . Como antes, el Corolario 4.4 nos permite construir la hipermatriz de  $q^t$ -órbitas  $M_{\delta+1} < M_\delta$ , de soporte máximo, tal que  $H_{M_{\delta+1}}(k, b) = 0$  para toda  $(k, b) \in Ip(M_\delta)$ . Si  $M_{\delta+1} = 0$ , terminamos haciendo  $l = \delta$ ; en otro caso, el Lema 4.7, el Corolario 3.19 y la definición de distancia aparente mínima nos permiten garantizar que cualquier matriz de  $q^t$ -órbitas  $0 \neq P < M_\delta$ , tal que  $d^*P < m_\delta$  verifica que  $P \leq M_{\delta+1}$ , pues  $H_{M_{\delta+1}}(k, b) = 0$  para toda pareja  $(k, b) \in Ip(M_\delta)$ .

Definimos  $m_{\delta+1} = \min\{m_\delta, d^*M_{\delta+1}\}$  y así obtenemos un elemento más para cada una de las sucesiones y, por los argumentos expuestos en el párrafo anterior, estas nuevas sucesiones satisfacen las condiciones requeridas.

Este proceso debe detenerse en a lo sumo  $|\mathcal{Q}_t| - \mu$  pasos, pues los soportes de las matrices de  $q^t$ -órbitas de la sucesión difieren en al menos una  $q^t$ -órbita. Las sucesiones se detienen en el paso  $l$ , en el que o bien  $d^*H_{M_l}(k, b) = 1$  para alguna pareja  $(k, b) \in Ip(M_l)$ , con  $k \in \{1, 2\}$  y  $b \in \mathbb{Z}_{r_k}$ ; o bien  $M_{l+1} = 0$ . Notemos que, si  $l' \in \{0, \dots, l\}$  es el primer elemento tal que  $m_l = m_{l'}$  entonces  $m_{l'} = d^*M_{l'} = d^*M_l$ . Vamos a demostrar que  $dam(M) = d^*M_{l'}$ . Supongamos que existe una matriz de  $q^t$ -órbitas  $0 \neq P \leq M$  con  $d^*P < m_{l'} = m_l$ . Por la construcción de nuestras sucesiones debería pasar que  $P \leq M_{l+1} \leq M_l$ . Si la sucesión se hubiese detenido porque  $d^*H_{M_l}(k, b) = 1$  para alguna pareja  $(k, b) \in Ip(M_l)$  entonces por la Proposición 4.5 tendríamos que  $dam(M_l) = d^*M_l$  y  $P$  debería ser nula. Ahora bien, si la sucesión se hubiese detenido porque  $M_{l+1} = 0$  entonces  $P$  debería ser nula. En cualquier caso tendríamos una contradicción y por lo tanto,  $dam(M) = d^*M_{l'}$ . ■

Se deduce de la Proposición 4.8 que, si  $M$  es una matriz de  $q^t$ -órbitas proporcionada por  $D = \cup_{j=1}^{\mu} Q_j$ , determinar  $dam(M)$  requiere como máximo el cálculo de las distancias aparentes de  $|\mathcal{Q}_t| - \mu - 1$  matrices de  $q^t$ -órbitas, en lugar de  $2^{|\mathcal{Q}_t| - \mu} - 1$ , que es la cantidad necesaria siguiendo la Definición 3.16. Veamos un ejemplo para ilustrar lo que aportan nuestros resultados. Con el fin de facilitar el proceso, asignaremos un recuadro de color a cada  $q^t$ -órbita en  $I = \mathbb{Z}_{r_1} \times \mathbb{Z}_{r_2}$ .

**Ejemplo 4.9** Sean  $q = 2$ ,  $r_1 = 3$  y  $r_2 = 15$ . Consideremos el conjunto de las 2-órbitas en  $I = \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_{15}$

$$\begin{aligned} \mathcal{Q} = \{ & Q(0, 0), Q(0, 1), Q(0, 3), Q(0, 5), Q(0, 7), Q(1, 0), Q(1, 1), \\ & Q(1, 2), Q(1, 3), Q(1, 5), Q(1, 6), Q(1, 7), Q(1, 10), Q(1, 11) \} \end{aligned}$$

y sea  $D = Q(0, 0) \cup Q(0, 5) \cup Q(1, 0) \cup Q(1, 5) \cup Q(1, 10)$ . Entonces

$$M = M(D) = \begin{pmatrix} \boxed{0} & \boxed{1} & \boxed{1} & \boxed{1} & \boxed{1} & \boxed{0} & \boxed{1} & \boxed{1} & \boxed{1} & \boxed{1} & \boxed{0} & \boxed{1} & \boxed{1} & \boxed{1} & \boxed{1} \\ \boxed{0} & \boxed{1} & \boxed{1} & \boxed{1} & \boxed{1} & \boxed{0} & \boxed{1} & \boxed{1} & \boxed{1} & \boxed{1} & \boxed{0} & \boxed{1} & \boxed{1} & \boxed{1} & \boxed{1} \\ \boxed{0} & \boxed{1} & \boxed{1} & \boxed{1} & \boxed{1} & \boxed{0} & \boxed{1} & \boxed{1} & \boxed{1} & \boxed{1} & \boxed{0} & \boxed{1} & \boxed{1} & \boxed{1} & \boxed{1} \end{pmatrix}.$$

Observemos que  $d^*M = 2$  y que  $(1, 4) \in Ip(M)$  es tal que  $d^*H_M(1, 4) = 1$ . Entonces, por la Proposición 4.5 tenemos que  $dam(M) = d^*M = 2$ .

Notemos que  $|\mathcal{Q}| = 14$  y el número de elementos de  $\mathcal{Q}$  que componen a  $D$  es 5. Por lo tanto, siguiendo la Definición 3.16, tendríamos que calcular la distancia aparente de  $2^9 - 1$  matrices de 2-órbitas con índices en  $I$ , para determinar  $dam(M)$ . Sin embargo, con nuestro método solo hemos necesitado calcular la distancia aparente de una matriz.

Presentamos a continuación el algoritmo para calcular la distancia aparente mínima de una matriz de  $q^t$ -órbitas  $M$ , correspondiente al proceso descrito en la demostración de la Proposición 4.8.

**Algoritmo 4.10** Sea  $I = \mathbb{Z}_{r_1} \times \mathbb{Z}_{r_2}$  y consideremos la matriz  $M = (m_{ij})_{(i,j) \in I}$ . Calculemos su distancia aparente y definamos  $m_0 = d^*M$ . Sea  $Ip(M)$  el conjunto de parejas involucradas en el cálculo de  $d^*M$ . Si para alguna pareja  $(k, b) \in Ip(M)$  se tiene que  $d^*H_M(k, b) = 1$  entonces finalizamos el proceso entregando las sucesiones  $M$  y  $m_0$  (por la Proposición 4.5).

Si  $d^*H_M(k, b) \neq 1$  para toda  $(k, b) \in Ip(M)$ , definimos  $S = \cup_{(k,b) \in Ip(M)} \text{supp}(H_M(k, b))$  y construimos la matriz  $M_1 = (a_{ij})_{(i,j) \in I}$  tal que

$$a_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{si } (i, j) \in \cup \{Q(a_1, a_2) : (a_1, a_2) \in S\} \\ m_{ij} & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Como se demostró, si  $0 \neq P < M$  y  $d^*P < m_0$  entonces  $P \leq M_1$ . Si  $M_1 = 0$  entonces finalizamos obteniendo las sucesiones  $M$  y  $m_0$ . Si  $M_1 \neq 0$ , definimos  $m_1 = \min\{m_0, d^*M_1\}$  y obtenemos las sucesiones  $M > M_1$  and  $m_0 \geq m_1$ ; luego aplicamos el proceso anterior a  $M_1$  en vez de  $M$  y  $m_1$  en vez de  $m_0$ .

El algoritmo termina cuando se encuentra un entero  $l \geq 0$ , tal que  $M_l \neq 0$  y  $d^*H_{M_l}(k, b) = 1$  para alguna  $(k, b) \in Ip(M)$ , o bien  $M_l \neq 0$  pero  $M_{l+1} = 0$ ; lo cual está garantizado porque en cada paso el soporte de la correspondiente matriz decrece en al menos una  $q^t$ -órbita. Así que el algoritmo tiene a lo sumo  $|\mathcal{Q}_t| - \mu - 1$  pasos.

**Ejemplo 4.11** Sean  $q = 2$ ,  $r_1 = 3$  y  $r_2 = 9$ . Consideremos el conjunto de las 2-órbitas en  $I = \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_9$

$$\mathcal{Q} = \{Q(0, 0), Q(0, 1), Q(0, 3), Q(1, 0), Q(1, 1), Q(1, 2), Q(1, 3), Q(1, 5)\}$$

y la matriz proporcionada por  $D = Q(1, 0) \cup Q(0, 1) \cup Q(1, 3) \cup Q(1, 6)$

$$M = M(D) = \begin{pmatrix} \boxed{1} & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Denotemos  $M = (a_{i,j})_{(i,j) \in I}$ . Siguiendo el algoritmo anterior, calculamos  $m_0 = d^*M = 3$  y obtenemos que  $Ip(M_0) = \{(1,0), (2,0), (2,3), (2,6)\}$ . Consideremos el conjunto  $S = \cup_{(k,b) \in Ip(M)} \text{supp}(H_M(k,b)) = \{(0,0), (0,3), (0,6)\}$  y construyamos  $M_1$  haciendo cero las entradas  $a_{i,j}$  tales que  $(i,j) \in Q(0,0) \cup Q(0,3)$  (pues  $(0,6) \in Q(0,3)$ ). En este caso, las entradas en color verde y la entrada enmarcada en azul. Así obtenemos

$$M_1 = \begin{pmatrix} \boxed{0} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Dado que  $M_1 \neq 0$ , repetimos el proceso tomando  $M_1$  en vez de  $M$  y  $m_1$  en vez de  $m_0$ . Calculamos  $d^*M_1 = 4$ ,  $Ip(M_1) = \{(1,2), (2,2), (2,5), (2,8)\}$  y  $m_1 = \min\{m_0, d^*M_1\} = \min\{3, 4\} = 3$ . En este caso,

$$S = \{(1,j) : j = 2, 5, 8\} \cup \{(2,j) : j = 1, 2, 4, 5, 7, 8\}$$

y por lo tanto  $\{Q(a_1, a_2) : (a_1, a_2) \in S\} = Q(1,2) \cup Q(2,2)$ . Así que al construir  $M_2$  siguiendo el algoritmo, es decir, haciendo cero las entradas  $a_{i,j}$  tales que  $(i,j) \in Q(1,2) \cup Q(2,2)$  vemos que  $M_2 = 0$ . Entonces obtenemos las sucesiones  $M > M_1$ ,  $m_0 = 3 \geq m_1 = 3$  y podemos concluir que  $\text{dam}(M) = 3 = d^*M$ .

Ahora bien,  $|\mathcal{Q}| = 8$  y el número de elementos de  $\mathcal{Q}$  que conforman  $D$  es 4. En este caso, siguiendo los métodos de P. Camion y R. E. Sabin para determinar la distancia aparente mínima de  $M$ , tendríamos que calcular las distancias aparentes de 15 matrices de 2-órbitas. Sin embargo, con nuestro método solamente hemos tenido que calcular las distancias aparentes de 2 de estas matrices.

## 4.2. Cálculo en hipermatrices. Caso general.

Presentamos en esta sección la generalización, para dimensión arbitraria, del algoritmo para el caso bidimensional visto en la sección anterior. Se observa que dicho algoritmo contiene un proceso anidado de cálculos, de modo que el paso a dimensiones mayores aumenta considerablemente la cantidad de dichos cálculos. Aún así, nuestro método generalmente mejora los presentados por P. Camion y R. E. Sabin.

En el siguiente resultado, que generaliza la Proposición 4.8, presentamos un método que simplifica notablemente el cálculo de  $\text{dam}(M)$ .

**Teorema 4.12** Sean  $s, q, t, r_1, \dots, r_s$  enteros positivos, donde  $q$  es una potencia de un número primo  $p$ , tal que  $p \nmid r_i$ , para  $i = 1, \dots, s$ ;  $I = \prod_{k=1}^s \mathbb{Z}_{r_k}$  y  $\mathcal{Q}_t$  es el conjunto de todas las  $q^t$ -órbitas módulo  $(r_1, \dots, r_s)$ . Sean  $\mu \in \{1, \dots, |\mathcal{Q}_t| - 1\}$  y  $\{Q_j\}_{j=1}^\mu$  un subconjunto

de  $\mathcal{Q}_t$ . Si  $D = \cup_{j=1}^{\mu} Q_j$  y  $M = M(D)$  es la hipermatriz de  $q^t$ -órbitas proporcionada por  $D$ , entonces existen dos sucesiones; una de conjuntos de hipermatrices de  $q^t$ -órbitas, no nulas,

$$\{M\} = \mathcal{M}_0, \dots, \mathcal{M}_l \quad (4.1)$$

y otra de enteros positivos

$$m_0 \geq \dots \geq m_l, \quad (4.2)$$

donde  $l \leq \mu$ , cada  $L \in \mathcal{M}_i$  es tal que  $L \leq M$  y  $m_i \leq \min\{d^*L : L \in \mathcal{M}_i\}$ , con  $0 \leq i \leq l$ . Además, estas sucesiones verifican que:

1. Si  $0 < i$  y  $L \in \mathcal{M}_i$  entonces existe  $L' \in \mathcal{M}_{i-1}$  tal que  $L < L'$ .
2. Si  $0 < i$  y  $P \leq M$  con  $d^*P < m_{i-1}$  entonces  $P \leq L$  para alguna hipermatriz  $L \in \mathcal{M}_i$ .
3. Si  $0 \neq P \leq M$  entonces  $d^*P \geq m_l$ .
4. Si  $l' \in \{0, \dots, l\}$  es el primer elemento tal que  $m_{l'} = m_l$ , entonces existen  $P \leq M$  y  $L \in \mathcal{M}_{l'}$  tales que  $P \leq L$  y  $d^*P = \text{dam}(M) = m_l$ .

**Demostración.** Dado que  $\mu \leq |\mathcal{Q}_t| - 1$  entonces  $M \neq 0$ . Procedemos por inducción sobre  $s$ . El caso  $s = 1$  se sigue del Corolario 3.19 y  $s = 2$  coincide con la Proposición 4.8, tomando  $\mathcal{M}_i = \{M_i\}$ , para  $i = 0, \dots, l$ . Ahora supongamos que nuestro teorema se tiene para  $2 \leq s - 1$ . Lo probaremos para  $s$ .

Recordemos que cada hipercolumna de  $M$ , digamos  $H_M(k, b)$ , con  $1 \leq k \leq s$  y  $b \in \mathbb{Z}_{r_k}$ , puede ser vista como una hipermatriz de  $q^{t|C_{q^t}(b)|}$ -órbitas de dimensión  $s - 1$ , como vimos en la Observación 4.1, y, de este modo, por hipótesis de inducción, calculamos  $\text{dam}(H_M(k, b))$  y obtenemos la sucesiones de este teorema.

Vamos a asociar a cada hipermatriz de  $q^t$ -órbitas  $0 \neq P \leq M$  un conjunto de hipermatrices de  $q^t$ -órbitas, que denotamos por  $\mathcal{S}(P)$ , donde cada hipermatriz  $L \in \mathcal{S}(P)$  verifica que  $L \leq P$ . Recordemos que  $Ip(P)$  denota el conjunto de parejas involucradas en el cálculo de  $d^*P$  (véase la Definición 3.7). Como hemos mencionado antes, para cada  $(k, b) \in Ip(P)$  podemos calcular  $\text{dam}(H_P(k, b))$  y construir las sucesiones  $\{H_P(k, b)\} = \mathcal{H}_0, \dots, \mathcal{H}_{l(k, b)}$  y  $h_0 \geq \dots \geq h_{l(k, b)}$  que satisfacen las condiciones (1) a (4) de este teorema. Para cada  $(k, b) \in Ip(P)$ , hagamos  $h(k, b, i) = |\mathcal{H}_i|$ , con  $i \in \{0, \dots, l(k, b)\} = \mathbb{N}_{l(k, b)}$ . Fijamos una indexación arbitraria de los elementos de  $\mathcal{H}_i$  con  $\mathbb{N}_{h(k, b, i)} = \{0, \dots, h(k, b, i) - 1\}$  y definimos  $\gamma(k, b) = \{(u, v) : u \in \mathbb{N}_{l(k, b)}, v \in \mathbb{N}_{h(k, b, u)}\}$ .

Para cada  $(k, b) \in Ip(P)$  y  $E = (u, v) \in \gamma(k, b)$  podemos construir la hipermatriz de  $q^t$ -órbitas que denotamos por  $(P, E)$ , con  $(P, E) \leq P$ , de soporte máximo, tal que  $H_{(P, E)}(k, b)$  es exactamente el elemento de  $\mathcal{H}_u$  con índice correspondiente  $v$ . Basta aplicar el Lema 4.3 tomando  $A$  como el elemento de  $\mathcal{H}_u$  con índice correspondiente  $v$ . Reunimos estas matrices en los conjuntos

$$R(P, k, b) = \{(P, E) : E \in \gamma(k, b)\} \setminus \{P\} \quad \text{y} \quad \mathcal{S}(P) = \bigcup_{(k, b) \in Ip(P)} R(P, k, b).$$

Esto termina la construcción de  $\mathcal{S}(P)$  para una hipermatriz arbitraria  $0 \neq P \leq M$ .

Sea ahora  $\mathcal{M}_0 = \{M\}$ . Para obtener  $\mathcal{M}_1$  vamos a construir, por recurrencia, una sucesión de conjuntos de hipermatrices menores o iguales que  $M$ , respecto al orden dado en (1.13), que denotamos por  $\mathcal{T}_0(M), \dots, \mathcal{T}_{n(M)}(M)$ , donde  $n(M) \in \mathbb{N}$ , y que cumplirá las siguientes propiedades. Para cada  $i = 0, \dots, n(M)$ ,  $\mathcal{T}_i(M) \neq \emptyset$  y para cualquier  $P \in \mathcal{T}_i(M)$ , se tiene que  $\mathcal{S}(P) \subseteq \mathcal{T}_{i+1}(M)$ . Además,  $\mathcal{T}_{n(M)+1}(M) = \emptyset$ .

Para esto, consideramos  $\mathcal{T}_0(M) = \{M\}$  y  $\mathcal{T}_1(M) = \mathcal{S}(M)$ . Ahora, una vez construido  $\mathcal{T}_i(M)$ , definimos  $\mathcal{T}_{i+1}(M) = \bigcup_{P \in \mathcal{T}_i(M)} \mathcal{S}(P)$ . De este modo, si  $\mathcal{T}_i(M) \neq \emptyset$  y  $P \in \mathcal{T}_i(M)$ , tenemos que  $\mathcal{S}(P) \subseteq \mathcal{T}_{i+1}(M)$ . Notemos también que, para cada  $j \in \{1, \dots, i+1\}$  y  $P \in \mathcal{T}_j(M)$ , debe existir  $L \in \mathcal{T}_{j-1}(M)$  para la cual  $P < L$  (estrictamente) y por lo tanto, la construcción de la sucesión tiene que detenerse. Sea  $n(M) \in \mathbb{N}$  el primer elemento para el cual  $\mathcal{T}_{n(M)+1}(M) = \emptyset$ . Sea

$$\begin{aligned} \mathcal{T}(\mathcal{M}_0) &= \bigcup_{j=0}^{n(M)} \mathcal{T}_j(M) \\ m_0 &= \text{mín} \{d^*N : N \in \mathcal{T}(\mathcal{M}_0)\} \quad \text{y} \\ \eta_0 &= \{N \in \mathcal{T}(\mathcal{M}_0) : \mathcal{S}(N) = \emptyset\} \end{aligned}$$

Observemos que, si  $N \in \eta_0$  entonces para cada  $(k, b) \in Ip(N)$  tenemos que  $l(k, b) = 0$  y así  $d^*H_N(k, b) = \text{dam}(H_N(k, b))$ ; de aquí, para cada  $(k, b) \in Ip(N)$  y cada hipermatriz  $0 \neq L < H_N(k, b)$  tenemos que  $d^*L \geq d^*H_N(k, b)$ , como hipermatrices de  $q^{t|C_{q^t}(b)|}$ -órbitas de dimensión  $s-1$ .

Otra propiedad de  $\eta_0$  que necesitaremos es la siguiente: si  $P < M$  y  $d^*P < m_0$  entonces existe  $N \in \eta_0$  tal que  $P < N$ . En efecto, notemos que por el Lema 4.7,  $H_P(k, b) < H_M(k, b)$  (estrictamente), para toda  $(k, b) \in Ip(M)$  y entonces  $P \leq L$  para alguna hipermatriz  $L \in \mathcal{S}(M) = \mathcal{T}_1(M)$  y  $d^*P < m_0 \leq d^*L$ , por lo tanto, podemos encontrar nuevamente  $L' \in \mathcal{S}(L) \subseteq \mathcal{T}_2(M)$  con  $P < L'$ . Podemos continuar este proceso hasta encontrar  $N \in \eta_0$  con  $P < N$ , como se buscaba.

Supongamos ahora que  $P < M$ , con  $d^*P < m_0$  y  $N \in \eta_0$  es tal que  $P < N$ . De nuevo,  $d^*P < m_0 \leq d^*N$  y por el Lema 4.7 tenemos que  $H_P(k, b) < H_N(k, b)$  (estrictamente) para todo  $(k, b) \in Ip(N)$ , lo cual implica que  $H_P(k, b) = 0$ , por la observación hecha dos párrafos arriba.

Estamos preparados para construir  $\mathcal{M}_1$ . Para cada  $N \in \eta_0$ , definimos  $L(N) < N$  como la hipermatriz de soporte máximo tal que  $H_{L(N)}(k, b) = 0$ , para toda  $(k, b) \in Ip(N)$ , cuya existencia está garantizada por el Corolario 4.4. Así,

$$\mathcal{M}_1 = \{L(N) : 0 \neq L(N) \text{ y } N \in \eta_0\}.$$

Notemos que  $\mathcal{M}_0 \cap \mathcal{M}_1 = \emptyset$ , por la construcción de los conjuntos  $R(P, k, b)$ .

Si  $\mathcal{M}_1 \neq \emptyset$  obtenemos un nuevo elemento para nuestra primera sucesión (4.1), basta comprobar que se cumplen las propiedades (1) y (2) del enunciado (las propiedades (3) y (4) se verificarán cuando terminemos la construcción de las sucesiones). Dado que

$\mathcal{M}_0 = \{M\}$ , la propiedad (1) resulta obvia. Para comprobar la propiedad (2), supon-  
gamos que existe  $P \leq M$  con  $d^*P < m_0$ . Como ya hemos visto, existe una hipermatriz  
 $N \in \eta_0$  tal que  $P < N$ , y para toda pareja  $(k, b) \in Ip(N)$  tenemos que  $H_P(k, b) = 0$ ,  
así que  $P \leq L(N)$ , pues  $L(N)$  tiene soporte máximo.

Supongamos que hemos construido la sucesión de conjuntos, disjuntos dos a dos,  
 $\mathcal{M}_0, \mathcal{M}_1, \dots, \mathcal{M}_i$  y la sucesión de enteros positivos  $m_0 \geq \dots \geq m_{i-1}$ , que satisfacen las  
propiedades (1) y (2) del enunciado y además verifican que, si  $P \in \mathcal{M}_{j+1}$  y  $N \in \mathcal{M}_j$  es  
tal que  $P < N$ , entonces  $H_P(k, b) = 0$  para toda pareja  $(k, b) \in Ip(N)$  (de forma similar  
a las hipermatrices en  $\mathcal{M}_1$ ). Supongamos que hemos construido también  $\eta_0, \dots, \eta_{i-1}$ .

El paso inductivo es completamente análogo al paso base. Para cada  
 $P \in \mathcal{M}_i$ , construimos  $\mathcal{T}_0(P), \dots, \mathcal{T}_{n(P)}(P)$  y definimos

$$\begin{aligned}\mathcal{T}(\mathcal{M}_i) &= \bigcup_{P \in \mathcal{M}_i} \bigcup_{j=0}^{n(P)} \mathcal{T}_j(P) \\ m_i &= \text{mín}(\{d^*P : P \in \mathcal{T}(\mathcal{M}_i)\} \cup \{m_{i-1}\}), \\ \eta_i &= \{N \in \mathcal{T}(\mathcal{M}_i) : \mathcal{S}(N) = \emptyset\}\end{aligned}$$

y

$$\mathcal{M}_{i+1} = \{L(N) : 0 \neq L(N) \text{ y } N \in \eta_i\}.$$

Claramente, se satisfacen las propiedades (1) y (2) de nuestro teorema.

La propiedad (1) nos garantiza que el proceso tiene que detenerse; de hecho, a lo  
sumo se podrían construir  $\mu$  términos para cada una de las sucesiones (4.1) y (4.2)  
(recordemos que  $\mu$  es el número de  $q^t$ -órbitas que conforman  $D$ ).

Supongamos que hemos construido  $\mathcal{M}_0, \dots, \mathcal{M}_l$ ,  $m_0 \geq \dots \geq m_l$  tales que  $\mathcal{M}_l \neq \emptyset$  y  
 $\mathcal{M}_{l+1} = \emptyset$ . Obtenemos,  $\eta_l \neq \emptyset$  y  $m_l$  como hemos indicado anteriormente y así completa-  
mos las sucesiones. Ahora tenemos que comprobar que se satisfacen las propiedades (1)  
a (4) del enunciado. Como hemos visto antes, las propiedades (1) y (2) son inmediatas.  
Para verificar la propiedad (3), consideremos una hipermatriz de  $q^t$ -órbitas  $0 \neq P \leq M$  y  
supongamos que  $d^*P < m_l$ . Entonces,  $P \leq N$  para algún  $N \in \eta_l$  y, dado que  $d^*P < d^*N$ ,  
debe pasar que  $H_P(k, b) = 0$  para toda pareja  $(k, b) \in Ip(N)$ , así que  $P \leq L(N)$ . Sin  
embargo,  $\mathcal{M}_{l+1} = \emptyset$ , con lo cual  $P = 0$ .

Finalmente, sea  $l' \in \{0, \dots, l\}$  el primer elemento tal que  $m_{l'} = m_l$ . Por la construcción  
de  $m_{l'}$  debe existir  $P \in \mathcal{T}(\mathcal{M}_{l'})$  tal que  $m_{l'} = d^*P$  y  $P \leq L$  para alguna hipermatriz  
 $L \in \mathcal{M}_{l'}$ . El hecho de que  $d^*P = \text{dam}(M)$  es obvio. Esto prueba (4). ■

**Ejemplo 4.13** Consideremos el código  $C$  en  $A_2(3, 3, 5)$  cuyo conjunto de definición,

respecto de algún  $\alpha \in U$ , es

$$D = Q(0,0,0) \cup Q(1,0,0) \cup Q(0,1,0) \cup Q(0,0,1) \cup Q(1,2,0) \cup Q(1,2,1) \\ Q(1,2,2) \cup Q(1,0,1) \cup Q(0,1,1) \cup Q(1,0,2) \cup Q(0,1,2)$$

y determinemos  $d_\alpha^* C$ ; es decir, calculemos la distancia aparente mínima de la hipermatriz  $M = M(D)$ . Asignamos, a cada 2-órbita en  $\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_5$ , un recuadro de color y entonces la hipermatriz  $M$  puede verse, por hipercolumnas, como:

$$\begin{array}{ccc} H_M(1,0) & H_M(1,1) & H_M(1,2) \\ \left( \begin{array}{ccccc} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) & \left( \begin{array}{ccccc} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) & \left( \begin{array}{ccccc} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{array} \right) \\ H_M(2,0) & H_M(2,1) & H_M(2,2) \\ \left( \begin{array}{ccccc} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) & \left( \begin{array}{ccccc} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) & \left( \begin{array}{ccccc} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{array} \right) \\ H_M(3,0) & H_M(3,1) & H_M(3,2) \\ \left( \begin{array}{ccc} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array} \right) & \left( \begin{array}{ccc} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array} \right) & \left( \begin{array}{ccc} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \\ H_M(3,3) & H_M(3,4) & \\ \left( \begin{array}{ccc} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array} \right) & \left( \begin{array}{ccc} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array} \right) & \end{array}$$

Realizando los cálculos oportunos tenemos que  $d^* M = 6$  e  $Ip(M) = \{(1,2), (2,2), (3,0), (3,1), (3,2), (3,3), (3,4)\}$ . Vamos a determinar  $\mathcal{S}(M)$ . A cada  $H_M(k, b)$  tal que  $(k, b) \in Ip(M)$  le aplicamos el Algoritmo 4.10 para obtener su sucesión de matrices, pues cada una de estas hipercolumnas se puede ver como una matriz de  $2^{t'}$ -órbitas con  $t' = |C_2(b)|$ . Como sabemos, la primera matriz de dicha sucesión es la propia hipercolumna. En este caso tenemos que las sucesiones de matrices para  $H_M(1,2)$ ,  $H_M(2,2)$  y  $H_M(3,0)$  tienen un solo elemento. Notemos que  $H_M(3,1) = H_M(3,4)$  y la sucesión de matrices correspondiente es:

$$\left( \begin{array}{ccc} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array} \right) > \left( \begin{array}{ccc} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right).$$



También tenemos que  $H_M(3,2) = H_M(3,3)$  y la sucesión de matrices correspondiente es:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} > \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Siguiendo el proceso dado en la demostración del resultado anterior, tenemos que  $R(M,1,2) = R(M,2,2) = R(M,3,0) = \emptyset$ ,  $R(M,3,1) = R(M,3,4) = \{B_1\}$  donde  $B_1$  es la hipermatriz cuyas hipercolumnas son:

$$\begin{array}{ccc} H_{B_1}(1,0) & H_{B_1}(1,1) & H_{B_1}(1,2) \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \\ H_{B_1}(2,0) & H_{B_1}(2,1) & H_{B_1}(2,2) \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \\ H_{B_1}(3,0) & H_{B_1}(3,1) & H_{B_1}(3,2) \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ H_{B_1}(3,3) & H_{B_1}(3,4) & \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} & \end{array}$$

y  $R(M,3,2) = R(M,3,3) = \{B_2\}$  donde  $B_2$  es la hipermatriz cuyas hipercolumnas son:

$$\begin{array}{ccc} H_{B_2}(1,0) & H_{B_2}(1,1) & H_{B_2}(1,2) \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ H_{B_2}(2,0) & H_{B_2}(2,1) & H_{B_2}(2,2) \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc}
H_{B_2}(3,0) & H_{B_2}(3,1) & H_{B_2}(3,2) \\
\begin{pmatrix} \boxed{0} & \boxed{0} & \boxed{0} \\ \boxed{0} & \boxed{1} & \boxed{0} \\ \boxed{0} & \boxed{0} & \boxed{1} \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} \boxed{0} & \boxed{0} & \boxed{0} \\ \boxed{0} & \boxed{0} & \boxed{0} \\ \boxed{0} & \boxed{0} & \boxed{1} \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} \boxed{0} & \boxed{0} & \boxed{0} \\ \boxed{0} & \boxed{1} & \boxed{0} \\ \boxed{0} & \boxed{0} & \boxed{0} \end{pmatrix} \\
H_{B_2}(3,3) & H_{B_2}(3,4) & \\
\begin{pmatrix} \boxed{0} & \boxed{0} & \boxed{0} \\ \boxed{0} & \boxed{1} & \boxed{0} \\ \boxed{0} & \boxed{0} & \boxed{0} \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} \boxed{0} & \boxed{0} & \boxed{0} \\ \boxed{0} & \boxed{0} & \boxed{0} \\ \boxed{0} & \boxed{0} & \boxed{1} \end{pmatrix} & 
\end{array}$$

Entonces  $\mathcal{S}(M) = \{B_1, B_2\}$ . Se puede verificar que  $d^*B_1 = 12$ ,  $Ip(B_1) = \{(1, 2), (2, 2)\}$ ,  $\mathcal{S}(B_1) = \emptyset$ ,  $d^*B_2 = 18$ ,  $Ip(B_2) = \{(1, 2), (2, 2)\}$  y  $\mathcal{S}(B_2) = \emptyset$ . Entonces  $\mathcal{T}_0(M) = \{M\}$ ,  $\mathcal{T}_1(M) = \{B_1, B_2\}$  y  $\mathcal{T}_3(M) = \emptyset$ . Así que  $\mathcal{T}(M) = \{M, B_1, B_2\}$ ,  $m_0 = \min\{6, 12, 18\} = 6$  y  $\eta_0 = \{B_1, B_2\}$ .

Ahora vamos a construir  $\mathcal{M}_1$ . Para cada  $N \in \eta_0$  hallamos  $L(N) < N$ , la hipermatriz de soporte máximo tal que  $H_{L(N)}(k, b) = 0$ , para toda  $(k, b) \in Ip(N)$ . En este caso tenemos que  $L(B_1) = L(B_2) = 0$ . Luego,  $\mathcal{M}_1 = \emptyset$  y finalizamos el proceso obteniendo las sucesiones  $\{M\}$  y  $m_0 = 6$ . Así que  $d_\alpha^*C = \text{dam}(M) = 6$ .

De la demostración del Teorema 4.12 se sigue el algoritmo general de cálculo de la distancia aparente mínima de una hipermatriz de  $q^t$ -órbitas. Detallamos a continuación el caso  $s = 3$ .

**Algoritmo 4.14** Este algoritmo consta de dos partes, la primera parte es un algoritmo para determinar el conjunto  $\mathcal{S}(P)$  para cualquier hipermatriz de  $q^t$ -órbitas  $P$ , de dimensión 3. En la segunda parte, se plantea el proceso general recurriendo en varias ocasiones al algoritmo de la primera parte.

### I. Cálculo de $\mathcal{S}(P)$ .

Sean  $I = \mathbb{Z}_{r_1} \times \mathbb{Z}_{r_2} \times \mathbb{Z}_{r_3}$ ,  $P = (p_i)_{i \in I}$  una hipermatriz de  $q^t$ -órbitas e  $Ip(P)$  el conjunto de parejas involucradas en el cálculo de  $d^*P$ . Vamos a asociar a  $P$  un conjunto de hipermatrices de  $q^t$ -órbitas, que denotamos por  $\mathcal{S}(P)$ , donde cada hipermatriz  $L \in \mathcal{S}(P)$  verifica que  $L \leq P$ .

Dado que para cada  $(k, b) \in Ip(P)$  la hipercolumna  $H_P(k, b)$  puede ser vista como una hipermatriz de dimensión 2, utilizamos el Algoritmo 4.10 para obtener sus sucesiones  $\{H_0^{k,b}\}, \dots, \{H_{l(k,b)-1}^{k,b}\}$  y  $m_0^{k,b}, \dots, m_{l(k,b)-1}^{k,b}$ . Notemos que, cada elemento de la sucesión de conjuntos de hipermatrices tiene un solo elemento, por lo cual en tres variables definimos  $\gamma(k, b) = \{0, \dots, l(k, b) - 1\}$ . Para cada  $c \in \gamma(k, b)$  construimos  $(P, c) \leq P$ , donde  $(P, c) = (a_i)_{i \in I}$  es tal que, haciendo

$$S = \text{supp}(H_P(k, b)) \setminus \text{supp}(H_c^{k, b}),$$

$$a_{\mathbf{i}} = \begin{cases} 0 & \text{si } \mathbf{i} \in \cup\{Q(\mathbf{j}) : \mathbf{j} \in S\} \\ p_{\mathbf{i}} & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Reunimos estas matrices en el conjunto

$$R(P, k, b) = \{(P, c) : c \in \gamma(k, b)\} \setminus \{P\}$$

y entonces

$$\mathcal{S}(P) = \bigcup_{(k, b) \in Ip(P)} R(P, k, b).$$

## II. Proceso general.

Sea  $I = \mathbb{Z}_{r_1} \times \mathbb{Z}_{r_2} \times \mathbb{Z}_{r_3}$ . Consideremos la hipermatriz de dimensión 3,  $M = (m_{\beta i})_{i \in I}$  y sea  $Ip(M)$  el conjunto de parejas involucradas en el cálculo de  $d^*M$ .

Si para alguna  $(k, b) \in Ip(M)$  se tiene que  $d^*H_M(k, b) = 1$  entonces finalizamos el proceso obteniendo las sucesiones  $\{M\}$  y  $m_0$ .

En caso de que  $d^*H_M(k, b) \neq 1$  para toda  $(k, b) \in Ip(M)$ , definimos  $\mathcal{T}_0(M) = \{M\}$  y  $\mathcal{T}_1(M) = \mathcal{S}(M)$ . Ahora, una vez construido  $\mathcal{T}_i(M)$ , definimos  $\mathcal{T}_{i+1}(M) = \bigcup_{P \in \mathcal{T}_i(M)} \mathcal{S}(P)$ . Repetimos este proceso hasta obtener  $\mathcal{T}_{n(M)}(M) \neq \emptyset$  tal que  $\mathcal{T}_{n(M)+1}(M) = \emptyset$ . Sean

$$\begin{aligned} \mathcal{T}(\mathcal{M}_0) &= \bigcup_{j=0}^{n(M)} \mathcal{T}_j(M), \\ m_0 &= \text{mín} \{d^*N : N \in \mathcal{T}(\mathcal{M}_0)\} \quad \text{y} \\ \eta_0 &= \{N \in \mathcal{T}(\mathcal{M}_0) : \mathcal{S}(N) = \emptyset\} \end{aligned}$$

Para cada  $N \in \eta_0$ ,  $N = (n_{\mathbf{i}})_{\mathbf{i} \in I}$ , consideramos el conjunto

$$S_N = \bigcup_{(k, b) \in Ip(N)} \text{supp}(H_N(k, b))$$

y construimos la hipermatriz  $L(N) = (a_{\mathbf{i}})_{\mathbf{i} \in I}$  tal que

$$a_{\mathbf{i}} = \begin{cases} 0 & \text{si } \mathbf{i} \in \cup\{Q(\mathbf{j}) : \mathbf{j} \in S_N\} \\ n_{\mathbf{i}} & \text{en otro caso.} \end{cases} \quad (4.3)$$

Según la demostración del Teorema 4.12, el siguiente paso sería definir  $\mathcal{M}_1$  como el conjunto de las hipermatrices  $L(N) \neq 0$  con  $N \in \eta_0$ . Sin embargo, es posible reducir este conjunto antes de continuar. Para explicar esta reducción se hace necesario un cambio de notación. Sea  $M_N = L(N)$ . Si  $M_N < N_1$  para algún  $N \neq N_1 \in \eta_0$  entonces construimos  $M_{N, N_1} = (c_{\mathbf{i}})_{\mathbf{i} \in I} < L_1$  como sigue. Consideramos el conjunto

$$S_{N_1} = \bigcup_{(k, b) \in Ip(N_1)} \text{supp}(H_{N_1}(k, b))$$

y definimos

$$c_{\mathbf{i}} = \begin{cases} 0 & \text{si } \mathbf{i} \in \cup\{Q(\mathbf{j}) : \mathbf{j} \in S_{N_1}\} \\ a_{\mathbf{i}} & \text{en otro caso.} \end{cases} \quad (4.4)$$

Repetimos esta construcción hasta que  $M_{N,N_1,\dots,N_t} \not\leq P$  para todo  $P$  en  $\eta_0 \setminus \{N, N_1, \dots, N_t\}$ . Finalmente, si  $\hat{M}_N = M_{N,N_1,\dots,N_t}$  definimos

$$\mathcal{M}_1 = \{M' \neq 0 : M' = \hat{M}_N \text{ para algún } N \in \eta_0\}.$$

Si  $\mathcal{M}_1 \neq \emptyset$ , entonces para cada  $P \in \mathcal{M}_1$  construimos  $\mathcal{T}_0(P), \dots, \mathcal{T}_{n(P)}(P)$  y definimos

$$\begin{aligned} \mathcal{T}(\mathcal{M}_1) &= \bigcup_{P \in \mathcal{M}_1} \bigcup_{j=0}^{n(P)} \mathcal{T}_j(P), \\ m_1 &= \text{mín}(\{d^*P : P \in \mathcal{T}(\mathcal{M}_1)\} \cup \{m_0\}), \\ \eta_1 &= \{N \in \mathcal{T}(\mathcal{M}_1) : \mathcal{S}(N) = \emptyset\} \quad \text{y} \\ \mathcal{M}_2 &= \{M' \neq 0 : M' = \hat{M}_N \text{ para algún } N \in \eta_1\}. \end{aligned}$$

Ahora, repetimos el proceso para  $\mathcal{M}_2$  en vez de  $\mathcal{M}_1$  y  $m_1$  en vez de  $m_0$ . El algoritmo termina cuando se halla un entero  $l \geq 0$ , tal que  $\mathcal{M}_l \neq \emptyset$  pero  $\mathcal{M}_{l+1} = \emptyset$ , lo cual está garantizado por la propiedad (1) del Teorema 4.12.

En el siguiente ejemplo ilustramos el proceso de cálculo de la distancia aparente mínima de una hipermatriz planteado en el algoritmo anterior. Hemos elegido esta hipermatriz con el fin de mostrar un cálculo no trivial y exhibir ampliamente la aplicación del Algoritmo 4.14. Por lo tanto, presentamos aquí un esquema de dicho ejemplo y los detalles pueden consultarse en el Apéndice (Capítulo 7). Para mayor claridad, en este ejemplo denotaremos por  $H_i^{k,b}(P)$  el  $i$ -ésimo elemento de la sucesión de matrices obtenida para  $H_P(k,b)$ , siguiendo el Algoritmo 4.10.

**Ejemplo 4.15** Consideremos  $q = 2$ ,  $r_1 = r_2 = r_3 = 3$  y  $D = Q(0,1,0) \cup Q(1,0,2) \cup Q(0,0,1) \cup Q(1,2,2)$ . Sea  $M = M(D)$ . Vamos a construir las sucesiones de hipermatrices y de enteros positivos correspondientes a  $M$ , siguiendo el proceso propuesto en el Algoritmo 4.14. Asignamos, a cada 2-órbita en  $\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3$ , un recuadro de color y entonces la hipermatriz  $M$  puede verse como:

$$\begin{array}{ccc} H_M(1,0) & H_M(1,1) & H_M(1,2) \\ \left( \begin{array}{ccc} \boxed{1} & \boxed{0} & \boxed{0} \\ \boxed{0} & \boxed{1} & \boxed{1} \\ \boxed{0} & \boxed{1} & \boxed{1} \end{array} \right) & \left( \begin{array}{ccc} \boxed{1} & \boxed{1} & \boxed{0} \\ \boxed{1} & \boxed{1} & \boxed{1} \\ \boxed{1} & \boxed{1} & \boxed{0} \end{array} \right) & \left( \begin{array}{ccc} \boxed{1} & \boxed{0} & \boxed{1} \\ \boxed{1} & \boxed{0} & \boxed{1} \\ \boxed{1} & \boxed{1} & \boxed{1} \end{array} \right) \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc}
H_M(2,0) & H_M(2,1) & H_M(2,2) \\
\left( \begin{array}{ccc} \boxed{1} & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{array} \right) & \left( \begin{array}{ccc} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{array} \right) & \left( \begin{array}{ccc} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{array} \right)
\end{array}$$

$$\begin{array}{ccc}
H_M(3,0) & H_M(3,1) & H_M(3,2) \\
\left( \begin{array}{ccc} \boxed{1} & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{array} \right) & \left( \begin{array}{ccc} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{array} \right) & \left( \begin{array}{ccc} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{array} \right)
\end{array}$$

1. Sea  $\mathcal{M}_0 = \{M\}$ .

a) Vamos a determinar  $m_0$ . Empezamos por la construcción de  $\mathcal{S}(M)$ , calculando  $d^*M = 3$  e  $Ip(M) = \{(1,0), (1,1), (1,2), (2,0), (3,0), (3,1), (3,2)\}$ . Para cada hipercolumna involucrada en el cálculo de  $d^*M$ , de la Proposición 4.8, tenemos una sucesión de matrices.

Para  $H_M(1,0)$ , tenemos que  $d^*H_M(1,0) = 3$  e  $Ip(H_M(1,0)) = \{(1,0), (2,0)\}$ . Entonces la segunda matriz de la sucesión para esta hipercolumna es la matriz de soporte máximo,  $H_1^{1,0}(M) < H_M(1,0)$ , tal que sus hipercolumnas  $(1,0)$  y  $(2,0)$  son nulas, es decir,

$$H_1^{1,0}(M) = \left( \begin{array}{ccc} \boxed{0} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{array} \right).$$

Ahora bien,  $d^*H_1^{1,0}(M) = 4$  e  $Ip(H_1^{1,0}(M)) = \{(1,2), (2,2)\}$ . Así que la siguiente matriz de la sucesión sería  $H_2^{1,0}(M) < H_1^{1,0}(M)$ , con soporte máximo, tal que la fila 2 y la columna 2 sean nulas. Luego,  $H_2^{1,0}(M) = 0$ . Por lo tanto, la sucesión de matrices para  $H_M(1,0)$  es  $H_M(1,0) > H_1^{1,0}(M)$ .

Para  $H_M(1,1)$  tenemos que  $d^*H_M(1,1) = 3$  e  $Ip(H_M(1,1)) = \{(2,2)\}$ . Luego, la primera matriz de la sucesión para esta hipercolumna es la matriz de soporte máximo,  $H_1^{1,1}(M) < H_M(1,1)$ , tal que su columna 2 es nula:

$$H_1^{1,1}(M) = \left( \begin{array}{ccc} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{array} \right).$$

Ahora,  $d^*H_1^{1,1}(M) = 2$  e  $Ip(H_1^{1,1}(M)) = \{(1,0), (1,1), (1,2), (2,1)\}$ . Dado que  $d^*H_{H_1^{1,1}(M)}(2,1) = 1$  tenemos que  $H_2^{1,1}(M) = 0$  (véase Proposición 4.5). Por lo tanto, la sucesión de matrices para  $H_M(1,1)$  es  $H_M(1,1) > H_1^{1,1}(M)$ .

Siguiendo este mismo proceso obtendremos las sucesiones para cada hipercolumna involucrada en el cálculo de  $d^*M$  y las utilizaremos para crear nuevas hipermatrices a partir de  $M$ . Para cada hipercolumna  $H_M(k, b)$ , con  $(k, b) \in Ip(M)$ , denotamos por  $l(k, b)$  la longitud de la sucesión correspondiente a  $H_M(k, b)$ . Para cada elemento de esta sucesión,  $H_i^{k,b}(M)$ , con  $i = 0, \dots, l(k, b)$ , hacemos la hipermatriz de 2-órbitas de soporte máximo,  $(M, H_i^{k,b}(M))$  tal que  $H_{(M, H_i^{k,b}(M))}(k, b) = 0$ . Notemos que  $(M, H_0^{k,b}(M)) = M$  para todo  $(k, b) \in Ip(M)$ . Con estas hipermatrices hacemos los conjuntos

$$R(M, k, b) = \{(M, H_i^{k,b}(M)) : i = 0, \dots, l(k, b)\} \setminus \{M\}$$

$$\mathcal{S}(M) = \bigcup_{(k,b) \in Ip(M)} R(M, k, b).$$

Notemos que

$$(M, H_1^{1,0}(M)) = (M, H_1^{3,0}(M))$$

$$(M, H_1^{1,1}(M)) = (M, H_1^{1,2}(M)).$$

Luego, si  $B_1 = (M, H_1^{1,0}(M))$ ,  $B_2 = (M, H_1^{1,1}(M))$ ,  $B_3 = (M, H_1^{2,0}(M))$ ,  $B_4 = (M, H_1^{3,1}(M))$ ,  $B_5 = (M, H_1^{3,2}(M))$  y  $B_6 = (M, H_2^{3,2}(M))$ , tenemos que  $\mathcal{T}_0 = \{M\}$  y  $\mathcal{T}_1(M) = \mathcal{S}(M) = \{B_1, B_2, B_3, B_4, B_5, B_6\}$ .

- b) Vamos a construir  $\mathcal{T}_2(M)$  determinando  $\mathcal{S}(B)$  para cada  $B \in \mathcal{T}_1(M)$ . Consideremos  $B_1$ ,  $d^*B_1 = 4$  e  $Ip(B_1) = \{(1, 0), (2, 0)\}$ . En este caso, para todo  $(k, b) \in Ip(B_1)$  tenemos que la sucesión para  $H_{B_1}(k, b)$  tiene sólo un elemento (la misma hipercolumna), con lo cual  $R(B_1, k, b) = \emptyset$  para todo  $(k, b) \in Ip(B_1)$ . Por lo tanto,  $\mathcal{S}(B_1) = \emptyset$ . Por la misma razón,  $\mathcal{S}(B_3) = \mathcal{S}(B_6) = \emptyset$ . Así que,

$$\mathcal{T}_2(M) = \bigcup_{B \in \mathcal{T}_1(M)} \mathcal{S}(B) = \mathcal{S}(B_2) \cup \mathcal{S}(B_4) \cup \mathcal{S}(B_5).$$

La siguiente notación nos facilitará la escritura; en adelante  $B_{i_1, \dots, i_j}$  denotará la hipermatriz de 2-órbitas  $(B_{i_1, \dots, i_{j-1}}, H_l^{k,b}(B_{i_1, \dots, i_{j-1}})) \leq B_{i_1, \dots, i_{j-1}}$  donde  $(k, b) \in Ip(B_{i_1, \dots, i_{j-1}})$ ,  $l = 1, \dots, l(k, b)$  e  $i_j = 1, \dots, \sum_{(k,b) \in Ip(B_{i_1, \dots, i_{j-1}})} l(k, b)$ .

Entonces,  $\mathcal{S}(B_2) = \{B_{2,i} : i = 1, \dots, 6\}$ ,  $\mathcal{S}(B_4) = \{B_{4,1}\}$  y  $\mathcal{S}(B_5) = \{B_{5,i} : i = 1, \dots, 3\}$ .

- c) Ahora para construir  $\mathcal{T}_3(M)$  determinamos  $\mathcal{S}(B)$  para cada  $B \in \mathcal{T}_2(M)$ . Se puede verificar que  $\mathcal{S}(B_{5,2}) = \mathcal{S}(B_{5,1})$  y  $\mathcal{S}(B_{2,2}) = \mathcal{S}(B_{2,4}) = \mathcal{S}(B_{2,6}) = \mathcal{S}(B_{5,3}) = \emptyset$ . Con lo cual,

$$\mathcal{T}_3(M) = \bigcup_{B \in \mathcal{T}_2(M)} \mathcal{S}(B) = \mathcal{S}(B_{2,1}) \cup \mathcal{S}(B_{2,3}) \cup \mathcal{S}(B_{2,5}) \cup \mathcal{S}(B_{4,1}) \cup \mathcal{S}(B_{5,1}),$$

donde  $\mathcal{S}(B_{2,1}) = \{B_{2,1,1}\}$ ,  $\mathcal{S}(B_{2,3}) = \{B_{2,3,i} : i = 1, \dots, 4\}$ ,  $\mathcal{S}(B_{2,5}) = \{B_{2,5,i} : i = 1, \dots, 3\}$ ,  $\mathcal{S}(B_{4,1}) = \{B_{4,1,1}\}$  y  $\mathcal{S}(B_{5,1}) = \{B_{5,1,1}\}$ .

d) Para construir  $\mathcal{T}_4(M)$  repetimos el proceso y obtenemos que  $\mathcal{S}(B_{2,3,2}) = \mathcal{S}(B_{2,3,3}) = \mathcal{S}(B_{2,3,4}) = \mathcal{S}(B_{2,5,3}) = \mathcal{S}(B_{4,1,1}) = \mathcal{S}(B_{5,1,1}) = \emptyset$  y  $\mathcal{S}(B_{2,5,2}) = \mathcal{S}(B_{2,5,1})$ . Por lo tanto,

$$\mathcal{T}_4(M) = \mathcal{S}(B_{2,1,1}) \cup \mathcal{S}(B_{2,3,1}) \cup \mathcal{S}(B_{2,5,1}) = \{B_{2,1,1,1}, B_{2,3,1,1}, B_{2,5,1,1}\}.$$

e) Observemos que  $\mathcal{S}(B_{2,3,1,1}) = \mathcal{S}(B_{2,5,1,1}) = \emptyset$ , así que  $\mathcal{T}_5(M) = B_{2,1,1,1,1}$  y  $\mathcal{S}(B_{2,1,1,1,1}) = \emptyset$ , luego  $\mathcal{T}_6(M) = \emptyset$ .

Entonces  $\mathcal{T}(\mathcal{M}_0) = \bigcup_{j=0}^5 \mathcal{T}_j(M)$ ,  $m_0 = \min \{d^*N : N \in \mathcal{T}(\mathcal{M}_0)\} = 3$  y

$$\begin{aligned} \eta_0 &= \{N \in \mathcal{T}(\mathcal{M}_0) : \mathcal{S}(N) = \emptyset\} \\ &= \{B_1, B_3, B_6\} \cup \{B_{2,2}, B_{2,4}, B_{2,6}, B_{5,3}\} \\ &\quad \cup \{B_{2,3,2}, B_{2,3,3}, B_{2,3,4}, B_{2,5,3}, B_{4,1,1}, B_{5,1,1}\} \\ &\quad \cup \{B_{2,3,1,1}, B_{2,5,1,1}\} \cup \{B_{2,1,1,1,1}\} \end{aligned}$$

como se puede verificar con la siguiente tabla:

Hipermatriz $B$	Dist. aparente	$\mathcal{S}(B) = \emptyset \rightarrow Si$
$B_1$	4	<i>Si</i>
$B_2$	3	
$B_{2,1}$	4	
$B_{2,1,1}$	6	
$B_{2,1,1,1}$	8	
$B_{2,1,1,1,1}$	6	<i>Si</i>
$B_{2,2}$	6	<i>Si</i>
$B_{2,3}$	4	
$B_{2,3,1}$	6	
$B_{2,3,1,1}$	9	<i>Si</i>
$B_{2,3,2}$	9	<i>Si</i>
$B_{2,3,3}$	9	<i>Si</i>
$B_{2,3,4}$	9	<i>Si</i>
$B_{2,4}$	9	<i>Si</i>
$B_{2,5}$	4	
$B_{2,5,1}$	6	
$B_{2,5,1,1}$	9	<i>Si</i>
$B_{2,5,2}$	6	
$B_{2,5,3}$	9	<i>Si</i>
$B_{2,6}$	9	<i>Si</i>
$B_3$	6	<i>Si</i>
$B_4$	4	
$B_{4,1}$	4	
$B_{4,1,1}$	3	<i>Si</i>

Hipermatriz $B$	Dist. aparente	$S(B) = \emptyset \rightarrow Si$
$B_5$	4	
$B_{5,1}$	6	
$B_{5,1,1}$	9	$Si$
$B_{5,2}$	6	
$B_{5,3}$	9	$Si$
$B_6$	9	$Si$

2. Vamos a construir  $\mathcal{M}_1$ . Para cada  $N \in \eta_0$ , hallamos la hipermatriz  $L(N) < N$ , de soporte máximo, tal que  $H_{L(N)}(k, b) = 0$ , para toda  $(k, b) \in Ip(N)$ . Notemos que  $L(B_{2,6}) = L(B_{5,3}) = L(B_{2,5,3}) = L(B_6)$  y  $L(B_{2,3,3}) = L(B_4)$ . Luego,

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_1 &= \{L(N) : 0 \neq L(N) \text{ y } N \in \eta_0\} \\ &= \{L(B_1), L(B_3), L(B_6), L(B_{2,2}), L(B_{2,4}), L(B_{2,3,2}), \\ &\quad L(B_{2,3,4}), L(B_{2,3,1,1}), L(B_{2,5,1,1})\} \end{aligned}$$

a) Ahora calcularemos  $m_1$ . Para ello, determinaremos la sucesión  $\mathcal{T}_1(B), \dots, \mathcal{T}_n(B)(B)$  para cada hipermatriz  $B' \in \mathcal{M}_1$ .

Para  $B'_1 = L(B_1)$  tenemos que  $\mathcal{T}_0(B'_1) = B'_1$ ,  $\mathcal{T}_1(B'_1) = \mathcal{S}(B'_1) = \{B'_{1,i} : i = 1 \dots 4\}$ ,  $\mathcal{T}_2(B'_1) = \mathcal{S}(B'_{1,1}) \cup \mathcal{S}(B'_{1,3}) = \{B'_{1,1,1}, B'_{1,1,2}, B'_{1,3,1}, B'_{1,3,2}\}$  y  $\mathcal{T}_3(B'_1) = \emptyset$ .

Si  $B'_2 = L(B_3)$ , tenemos que  $\mathcal{T}_0(B'_2) = B'_2$ ,  $\mathcal{T}_1(B'_2) = \mathcal{S}(B'_2) = \{B'_{2,i} : i = 1 \dots 3\}$ ,  $\mathcal{T}_2(B'_2) = \mathcal{S}(B'_{2,1}) \cup \mathcal{S}(B'_{2,3}) = \{B'_{2,1,1}, B'_{2,3,1}, B'_{2,3,2}\}$ ,  $\mathcal{T}_3(B'_2) = \mathcal{S}(B'_{2,1,1}) \cup \mathcal{S}(B'_{2,3,1}) = \{B'_{2,1,1,1}, B'_{2,1,1,2}, B'_{2,3,1,1}, B'_{2,3,1,2}\}$  y  $\mathcal{T}_4(B'_2) = \emptyset$ .

Sea  $B'_4 = L(B_{2,2})$ , para este caso obtenemos  $\mathcal{T}_0(B'_4) = B'_4$ ,  $\mathcal{T}_1(B'_4) = \mathcal{S}(B'_4) = \{B'_{4,i} : i = 1 \dots 4\}$ ,  $\mathcal{T}_2(B'_4) = \mathcal{S}(B'_{4,2}) \cup \mathcal{S}(B'_{4,3}) \cup \mathcal{S}(B'_{4,4}) = \{B'_{4,2,1}, B'_{4,2,2}, B'_{4,3,1}, B'_{4,4,1}, B'_{4,4,2}\}$  y  $\mathcal{T}_3(B'_4) = \emptyset$ .

Si  $B'_5 = L(B_{2,4})$ , entonces  $\mathcal{T}_0(B'_5) = B'_5$ ,  $\mathcal{T}_1(B'_5) = \mathcal{S}(B'_5) = \{B'_{5,1}\}$  y  $\mathcal{T}_2(B'_5) = \emptyset$ .

Siendo  $B'_6 = L(B_{2,3,2})$  tenemos que  $\mathcal{T}_0(B'_6) = B'_6$ ,  $\mathcal{T}_1(B'_6) = \mathcal{S}(B'_6) = \{B'_{6,1}\}$  y  $\mathcal{T}_2(B'_6) = \emptyset$ .

Si  $B'_8 = L(B_{2,3,1,1})$ , entonces  $\mathcal{T}_0(B'_8) = B'_8$ ,  $\mathcal{T}_1(B'_8) = \mathcal{S}(B'_8) = \{B'_{8,1}\}$  y  $\mathcal{T}_2(B'_8) = \emptyset$ .

Sean  $B'_3 = L(B_6)$ ,  $B'_7 = L(B_{2,3,4})$  y  $B'_9 = L(B_{2,5,1,1})$ . Para estas hipermatrices tenemos que,  $\mathcal{S}(B'_3) = \mathcal{S}(B'_7) = \mathcal{S}(B'_9) = \emptyset$ . Y así obtenemos que,

$$\begin{aligned} \mathcal{T}(\mathcal{M}_1) &= \bigcup_{P \in \mathcal{M}_1} \bigcup_{j=0}^{n(P)} \mathcal{T}_j(P) \\ &= \bigcup_{j=0}^2 \mathcal{T}_j(B'_1) \cup \bigcup_{j=0}^3 \mathcal{T}_j(B'_2) \cup \bigcup_{j=0}^2 \mathcal{T}_j(B'_4) \\ &\quad \cup \bigcup_{j=0}^1 \mathcal{T}_j(B'_5) \cup \bigcup_{j=0}^1 \mathcal{T}_j(B'_6) \cup \bigcup_{j=0}^1 \mathcal{T}_j(B'_8). \end{aligned}$$



Es decir,  $\mathcal{T}(\mathcal{M}_1)$  es el conjunto de las matrices que se relacionan en la siguiente tabla:

Hipermatriz $B$	Dist. aparente	$S(B) = \emptyset \rightarrow Si$
$B'_1$	6	
$B'_{1,1}$	8	
$B'_{1,2}$	18	<i>Si</i>
$B'_{1,3}$	8	
$B'_{1,4}$	18	<i>Si</i>
$B'_{1,1,1}$	18	<i>Si</i>
$B'_{1,1,2}$	12	<i>Si</i>
$B'_{1,3,1}$	12	<i>Si</i>
$B'_{1,3,2}$	18	<i>Si</i>
$B'_2$	4	
$B'_{2,1}$	8	
$B'_{2,2}$	18	<i>Si</i>
$B'_{2,3}$	6	
$B'_{2,1,1}$	6	
$B'_{2,3,1}$	8	
$B'_{2,3,2}$	18	<i>Si</i>
$B'_{2,1,1,1}$	12	<i>Si</i>
$B'_{2,1,1,2}$	12	<i>Si</i>
$B'_{2,3,1,1}$	12	<i>Si</i>
$B'_{2,3,1,2}$	18	<i>Si</i>
$B'_3$	18	<i>Si</i>
$B'_4$	4	
$B'_{4,1}$	9	<i>Si</i>
$B'_{4,2}$	12	
$B'_{4,3}$	8	
$B'_{4,4}$	12	
$B'_{4,2,1}$	18	<i>Si</i>
$B'_{4,2,2}$	12	<i>Si</i>
$B'_{4,3,1}$	12	<i>Si</i>
$B'_{4,4,1}$	12	<i>Si</i>
$B'_{4,4,2}$	18	<i>Si</i>
$B'_5$	9	
$B'_{5,1}$	18	<i>Si</i>
$B'_6$	8	
$B'_{6,1}$	18	<i>Si</i>
$B'_7$	12	<i>Si</i>
$B'_8$	9	
$B'_{8,1}$	12	<i>Si</i>
$B'_9$	18	<i>Si</i>

De aquí tenemos que,

$$m_1 = \min(\{d^* P : P \in \mathcal{T}(\mathcal{M}_1)\} \cup \{m_0\}) = \min\{4, 3\} = 3.$$

Y también que,

$$\begin{aligned} \eta_1 = \{N \in \mathcal{T}(\mathcal{M}_1) : \mathcal{S}(N) = \emptyset\} = \{ & B'_{1,2}, B'_{1,4}, B'_{1,1,1}, B'_{1,1,2}, \\ & B'_{1,3,1}, B'_{1,3,2}, B'_{2,2}, B'_{2,3,2}, B'_{2,1,1,1}, B'_{2,1,1,2}, B'_{2,3,1,1}, B'_{2,3,1,2}, \\ & B'_{4,1}, B'_{4,2,1}, B'_{4,2,2}, B'_{4,3,1}, B'_{4,4,1}, B'_{4,4,2}, B'_{5,1}, B'_{6,1}, B'_{7,1}, B'_{8,1}, B'_{9,1}\}. \end{aligned}$$

3. Vamos a construir  $\mathcal{M}_2 = \{L(N) : 0 \neq L(N) \text{ y } N \in \eta_1\}$ . Observemos que  $L(B'_{1,2}) = L(B'_{1,4}) = L(B'_{1,1,1}) = L(B'_{1,1,2}) = L(B'_{1,3,1}) = L(B'_{1,3,2}) = L(B'_{2,2}) = L(B'_{2,3,2}) = L(B'_{2,1,1,1}) = L(B'_{2,1,1,2}) = L(B'_{2,3,1,1}) = L(B'_{2,3,1,2}) = L(B'_{4,2,1}) = L(B'_{4,2,2}) = L(B'_{4,3,1}) = L(B'_{4,4,1}) = L(B'_{4,4,2}) = L(B'_{5,1}) = L(B'_{6,1}) = L(B'_{8,1}) = L(B'_{7,1}) = 0$ .

Entonces

$$\mathcal{M}_2 = \{L(B'_{4,1}), L(B'_{9,1})\}.$$

- a) Determinaremos  $m_2$ . Recordemos que para ello debemos construir la sucesión  $\mathcal{T}_1(B), \dots, \mathcal{T}_{n(B)}(B)$  para toda hipermatriz  $B \in \mathcal{M}_2$ . Sea  $B''_1 = L(B'_{4,1})$ , en este caso  $\mathcal{T}_0(B''_1) = B''_1$  y  $\mathcal{T}_1(B''_1) = \mathcal{S}(B''_1) = \emptyset$ . Para  $B''_2 = L(B'_{9,1})$  tenemos que  $\mathcal{T}_0(B''_2) = B''_2, \mathcal{T}_1(B''_2) = \mathcal{S}(B''_2) = \{B''_{2,1}\}$  y  $\mathcal{T}_2(B''_2) = \emptyset$ . Por lo tanto,

$$\mathcal{T}(\mathcal{M}_2) = \bigcup_{P \in \mathcal{M}_2} \bigcup_{j=0}^{n(P)} \mathcal{T}_j(P) = \{B''_1, B''_2, B''_{2,1}\}.$$

En la siguiente tabla relacionamos algunos datos sobre las hipermatrices de  $\mathcal{T}(\mathcal{M}_2)$ :

Hipermatriz $B$	Dist. aparente	$\mathcal{S}(B) = \emptyset \rightarrow Si$
$B''_1$	12	$Si$
$B''_2$	9	
$B''_{2,1}$	18	$Si$

De aquí tenemos que,

$$m_2 = \min(\{d^* P : P \in \mathcal{T}(\mathcal{M}_2)\} \cup \{m_1\}) = \min\{9, 3\} = 3.$$

Y también que,

$$\eta_2 = \{N \in \mathcal{T}(\mathcal{M}_2) : \mathcal{S}(N) = \emptyset\} = \{B''_1, B''_{2,1}\}.$$

Siguiendo el proceso de construcción de los conjuntos de hipermatrices  $\mathcal{M}_i$ , se puede verificar que  $\mathcal{M}_3 = \emptyset$ . Por lo tanto, como resultado final obtenemos las sucesiones  $\mathcal{M}_0, \mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2$  y  $m_0 = 3 \geq m_1 = 3 \geq m_2 = 3$ . Con lo cual,  $dam(M) = 3$ , que coincide en este caso con  $d^* M$ .

Es claro que este algoritmo es muy laborioso y por lo tanto, calcular a mano la distancia aparente de un código abeliano puede ser un proceso bastante extenso. Así que, un problema interesante, que surge naturalmente y que queda abierto, es la implementación de un algoritmo informático a partir del Algoritmo 4.14.

# Capítulo 5

## Una noción de código BCH multivariable

En el capítulo anterior presentamos un algoritmo para calcular la distancia aparente de un código abeliano en términos de hipermatrices. Basándonos en el hecho de que, en el caso de códigos cíclicos, la distancia aparente de un código coincide con el máximo de sus cotas BCH, vamos a usar las técnicas que hemos descrito antes para desarrollar una noción de cota BCH y código BCH en el caso multivariable. Con el fin de contrastar nuestra noción, vamos a extender ciertos resultados clásicos para códigos BCH.

En este capítulo utilizaremos la notación que ya introdujimos en Preliminares y que hemos venido utilizando en los capítulos anteriores.

El siguiente lema supone un primer paso en la extensión de la cota BCH y será necesario para establecer nuestra noción de cota BCH multivariable (véase el Teorema 5.3).

**Lema 5.1** *Consideremos  $\delta \in \mathbb{Z}$  tal que  $\delta \geq 2$  y  $\alpha \in U$ . Sean  $0 \neq C$  un código abeliano en  $A_q(r_1, \dots, r_s)$ ,  $D_\alpha(C)$  su conjunto de definición y  $M$  la hipermatriz de  $q$ -órbitas proporcionada por  $D_\alpha(C)$ . Si existen un elemento  $k \in \{1, \dots, s\}$  y una lista de  $(\delta - 1)$  enteros consecutivos módulo  $r_k$ ,  $\{j_0, \dots, j_{\delta-2}\}$  tales que  $H_M(k, j_i) = 0$ , con  $i = 0, \dots, \delta - 2$ , entonces  $d^*C \geq d_\alpha^*C \geq \delta$ .*

**Demostración.** De la Proposición 3.17 y el Teorema 3.14 tenemos que  $\text{dam}(M) = d_\alpha^*C \leq d^*C \leq d(C)$ . Por lo tanto, basta con verificar que  $\delta \leq \text{dam}(M)$ . Sea  $P \leq M$  una hipermatriz tal que  $d^*P = \text{dam}(M)$ . Como  $P \leq M$  tenemos que  $H_P(k, j_i) = 0$ , para todo  $i = 0, \dots, \delta - 2$ , y de aquí  $\delta \leq d^*P$ . ■

**Ejemplo 5.2** Consideremos el código abeliano  $C$  en  $A_2(5, 7)$  con conjunto de definición

$D = D_{\alpha_1} = Q(0, 1) \cup Q(1, 1)$ , para algún  $\alpha_1 \in U$ . Entonces

$$M = M(D) = \begin{pmatrix} \text{1} & \text{0} & \text{0} & \text{1} & \text{0} & \text{1} & \text{1} \\ \text{1} & \text{0} & \text{0} & \text{1} & \text{0} & \text{1} & \text{1} \\ \text{1} & \text{0} & \text{0} & \text{1} & \text{0} & \text{1} & \text{1} \\ \text{1} & \text{0} & \text{0} & \text{1} & \text{0} & \text{1} & \text{1} \\ \text{1} & \text{0} & \text{0} & \text{1} & \text{0} & \text{1} & \text{1} \end{pmatrix}.$$

Observemos que  $H_M(2, 1) = H_M(2, 2) = H_M(2, 4) = 0$  y tomando  $k = 2$ ,  $j_0 = 1$  y  $j_1 = 2$  tenemos que  $\delta = 3$ . Así que  $d^*C \geq 3$ .

Veamos ahora la noción de cota BCH, para códigos abelianos, en el caso general (una o más variables).

**Teorema 5.3 (Cota BCH multivariable)** Sean  $s$ ,  $q$  y  $r_1, \dots, r_s$  enteros positivos, donde  $q$  es potencia de un primo  $p$  tal que  $\text{mcd}(p, r_i) = 1$ , para  $i = 1, \dots, s$ ,  $I = \prod_{i=1}^s \mathbb{Z}_{r_i}$  y  $\alpha \in U$ . Sean  $0 \neq C$  un código abeliano en  $A_q(r_1, \dots, r_s)$  con conjunto de definición  $D_\alpha(C)$  y  $M$  la hipermatriz de  $q$ -órbitas proporcionada por  $D_\alpha(C)$ . Supongamos que existen un subconjunto  $\gamma \subseteq \{1, \dots, s\}$  y una lista de enteros  $\{\delta_k \geq 2 : k \in \gamma\}$  que satisfacen la siguiente propiedad: para cada  $k \in \gamma$ , la hipermatriz  $M$  tiene hipercolumnas nulas  $H_M(k, j_{(k,0)}), \dots, H_M(k, j_{(k, \delta_k - 2)})$ , donde  $\{j_{(k,0)}, \dots, j_{(k, \delta_k - 2)}\}$  es una lista de enteros consecutivos módulo  $r_k$ . Entonces  $d_\alpha^*C \geq \prod_{k \in \gamma} \delta_k$ . De aquí,  $d^*C \geq \prod_{k \in \gamma} \delta_k$ .

**Demostración.** Procedemos por inducción sobre  $|\gamma| = l$ . El caso  $l = 1$  corresponde al lema anterior. Supongamos entonces que nuestro teorema se tiene para  $l - 1$  y sean  $C \neq 0$  un código abeliano en  $A_q(r_1, \dots, r_s)$  con conjunto de definición  $D_\alpha(C)$  y  $M$  la hipermatriz de  $q$ -órbitas proporcionada por  $D_\alpha(C)$ . Sea  $P \leq M$  una hipermatriz tal que  $d^*P = \text{dam}(M)$ . Dado que  $P \leq M$  entonces  $H_P(k, j_{(k,i)}) = 0$  para todo  $k \in \gamma$  e  $i = 0, \dots, \delta_k - 2$ . Para cada  $k \in \gamma$ , denotamos por  $N_k = H_P(k, b_k)$  la hipercolumna no nula de  $P$  tal que  $\{H_P(k, j_{(k,i)})\}_{i=0}^{\delta_k - 2} \subseteq CH_P(k, b_k)$  (véase la Definición 3.4). Por definición de distancia aparente de una hipermatriz, tenemos que  $d^*N_k \cdot \delta_k \leq d^*P$  para todo  $k \in \gamma$ . Ahora, sabemos que  $H_{N_k}(u, j_{(u,i)}) = 0$ , con  $u \in \gamma \setminus \{k\}$  e  $i = 0, \dots, \delta_u - 2$ . Sea  $C_{N_k}$  el código abeliano tal que  $M(D_\alpha(C_{N_k})) = N_k$ . Por hipótesis de inducción tenemos que  $d^*N_k \geq \text{dam}(N_k) = d^*C_{N_k} \geq \prod_{u \in \gamma \setminus \{k\}} \delta_u$ . De aquí,  $d^*P \geq \prod_{k \in \gamma} \delta_k$ . Por lo tanto,

$$d^*C \geq d_\alpha^*C \geq \prod_{k \in \gamma} \delta_k. \quad \blacksquare$$

**Ejemplo 5.4** Sean  $\alpha_2 \in U$  y  $C$  el código en  $A_2(5, 7)$  con conjunto de definición, respecto de  $\alpha_2$ ,  $D = D_{\alpha_2}(C) = Q(0, 0) \cup Q(0, 1) \cup Q(0, 3) \cup Q(1, 1)$ . Entonces

$$M = M(D) = \begin{pmatrix} \text{0} & \text{0} & \text{0} & \text{0} & \text{0} & \text{0} & \text{0} \\ \text{1} & \text{0} & \text{0} & \text{1} & \text{0} & \text{1} & \text{1} \\ \text{1} & \text{0} & \text{0} & \text{1} & \text{0} & \text{1} & \text{1} \\ \text{1} & \text{0} & \text{0} & \text{1} & \text{0} & \text{1} & \text{1} \\ \text{1} & \text{0} & \text{0} & \text{1} & \text{0} & \text{1} & \text{1} \end{pmatrix}.$$

Notemos que  $H_M(1,0) = H_M(2,1) = H_M(2,2) = H_M(2,4) = 0$ . Luego, tomando  $\gamma = \{1,2\}$ ,  $j_{1,0} = 0$ ,  $j_{2,0} = 1$  y  $j_{2,1} = 2$  tenemos que  $\delta_1 = 2$ ,  $\delta_2 = 3$  y  $d^*C \geq 6$ .

El teorema anterior puede reformularse en términos de listas de enteros positivos. Recordemos que dados  $b \in \mathbb{Z}$  y un entero positivo  $r$ , denotamos por  $\bar{b}$  el representante canónico de  $b$  en  $\mathbb{Z}_r$ . Nuestra notación no deja explícito el valor de  $r$  porque siempre será claro desde el contexto.

**Corolario 5.5** *Supongamos que existen un conjunto  $\gamma \subseteq \{1, \dots, s\}$  y listas de enteros positivos  $\delta = \{\delta_k \geq 2 : k \in \gamma\}$  y  $b = \{b_k : k \in \gamma\}$ . Para cada  $k \in \gamma$  consideremos la lista de enteros consecutivos módulo  $r_k$ ,  $J_k = \{\bar{b}_k, \dots, \bar{b}_k + \delta_k - 2\}$  y sea  $A_k = \{\mathbf{i} \in I : \mathbf{i}(k) \in J_k\}$ . Si  $C$  es un código abeliano, no nulo, en  $A_q(r_1, \dots, r_s)$  tal que  $\cup_{k=1}^s A_k \subseteq D_\alpha(C)$ , para algún  $\alpha \in U$ , entonces  $d^*C \geq \prod_{k \in \gamma} \delta_k$ .*

**Demostración.** El resultado se obtiene inmediatamente del teorema anterior, tomando  $j_{(k,0)} = \bar{b}_k, \dots, j_{(k,\delta_k-2)} = \bar{b}_k + \delta_k - 2$ . ■

**Ejemplo 5.6** Consideremos  $\alpha_3 \in U$  y el código  $C$  en  $A_2(3, 5, 5)$  con conjunto de definición, respecto de  $\alpha_3$ ,  $D = D_{\alpha_3}(C) = Q(0,0,0) \cup Q(0,0,1) \cup Q(0,1,0) \cup Q(1,0,0) \cup Q(1,0,1) \cup Q(1,0,2) \cup Q(1,1,0) \cup Q(1,2,0)$ . Sea  $M = M(D)$  la hipermatriz

$$\begin{array}{ccc}
H_M(1,0) & H_M(1,1) & H_M(1,2) \\
\left( \begin{array}{ccccc} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{array} \right) & \left( \begin{array}{ccccc} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{array} \right) & \left( \begin{array}{ccccc} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{array} \right) \\
\\
H_M(2,0) & H_M(2,1) & H_M(2,2) \\
\left( \begin{array}{ccccc} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) & \left( \begin{array}{ccccc} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{array} \right) & \left( \begin{array}{ccccc} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{array} \right) \\
\\
H_M(2,3) & H_M(2,4) \\
\left( \begin{array}{ccccc} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{array} \right) & \left( \begin{array}{ccccc} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{array} \right)
\end{array}$$

$$\begin{array}{ccc}
H_M(3,0) & H_M(3,1) & H_M(3,2) \\
\left( \begin{array}{ccccc} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) & \left( \begin{array}{ccccc} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{array} \right) & \left( \begin{array}{ccccc} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{array} \right) \\
H_M(3,3) & H_M(3,4) & \\
\left( \begin{array}{ccccc} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{array} \right) & \left( \begin{array}{ccccc} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{array} \right) & 
\end{array}$$

Notemos que  $H_M(2,0) = H_M(3,0) = 0$ . Así que, podemos tomar  $\gamma = \{1,2\}$ ,  $\delta = \{2,2\}$  y  $\beta = \{0,0\}$  para concluir que  $d^*C \geq 4$ .

Como mencionamos al inicio de este capítulo, la noción de cota BCH multivariable nos conduce de forma natural a la siguiente definición de código BCH multivariable. Recordemos que, dados  $k \in \{1, \dots, s\}$  y  $l \in \mathbb{Z}_{r_k}$ , denotamos  $I(k, l) = \{\mathbf{i} \in I : \mathbf{i}(k) = l\}$ .

**Definición 5.7** Sean  $s, q$  y  $r_1, \dots, r_s$  enteros positivos, donde  $q$  es potencia de un primo  $p$  tal que  $\text{mcd}(p, r_i) = 1$ , para  $i = 1, \dots, s$  e  $I = \prod_{i=1}^s \mathbb{Z}_{r_i}$ . Sean  $\gamma \subseteq \{1, \dots, s\}$  y  $\delta = \{\delta_k : k \in \gamma\}$ , con  $2 \leq \delta_k \leq r_k$ . Un código abeliano  $C$  en  $A_q(r_1, \dots, r_s)$  es un código BCH multivariable con distancia designada  $\delta$ , si existen una lista de enteros positivos  $b = \{b_k : k \in \gamma\}$  y  $\alpha \in U$  tales que

$$D_\alpha(C) = \bigcup_{k \in \gamma} \bigcup_{l=0}^{\delta_k-2} \bigcup_{\mathbf{i} \in I(k, \overline{b_k+l})} Q(\mathbf{i})$$

donde  $\{\overline{b_k}, \dots, \overline{b_k + \delta_k - 2}\}$  es una lista de enteros consecutivos módulo  $r_k$ .

Denotamos  $C = B_q(\alpha, \gamma, \delta, b)$ .

**Corolario 5.8** Sea  $C = B_q(\alpha, \gamma, \delta, b)$  un código BCH multivariable, con distancia designada  $\delta = \{\delta_k : k \in \gamma\}$ . Entonces  $d^*C \geq \prod_{k \in \gamma} \delta_k$ .

**Demostración.** Se sigue directamente del Teorema 5.3. ■

**Ejemplo 5.9** Retomando ejemplos anteriores encontramos algunos códigos BCH multivariables. En el Ejemplo 5.2 el código  $C$  es justamente el código BCH multivariable  $B_2(\alpha_1, \{2\}, \{3\}, \{1\})$ . En el Ejemplo 5.4 tenemos el código  $B_2(\alpha_2, \{1, 2\}, \{2, 3\}, \{0, 1\})$  y en el Ejemplo 5.6 el código  $B_2(\alpha_3, \{1, 2\}, \{2, 2\}, \{0, 0\})$ .

**Ejemplo 5.10** Sean  $q = 2, s = 3, I = \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3$  y  $\alpha \in U$ . El código abeliano con conjunto de definición  $D = I \setminus (Q(0,0,0) \cup Q(1,0,0) \cup Q(1,1,0))$  es un código BCH multivariable

$B_2(\alpha, \gamma, \delta, b)$  donde  $\gamma = \{3\}$ ,  $\delta = \{2\}$  y  $b = \{1\}$ . Para ilustrar veamos la hipermatriz proporcionada por  $D$ .

$$\begin{array}{ccc}
H_{M(D)}(1,0) & H_{M(D)}(1,1) & H_{M(D)}(1,2) \\
\begin{pmatrix} \boxed{1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
H_{M(D)}(2,0) & H_{M(D)}(2,1) & H_{M(D)}(2,2) \\
\begin{pmatrix} \boxed{1} & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
H_{M(D)}(3,0) & H_{M(D)}(3,1) & H_{M(D)}(3,2) \\
\begin{pmatrix} \boxed{1} & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}
\end{array}$$

Como última parte de nuestras aportaciones en este capítulo, extenderemos al caso multivariable ciertas propiedades básicas de los códigos BCH que atañen al cálculo de su dimensión. La siguiente se deduce inmediatamente.

**Corolario 5.11** *Sea  $B_q(\alpha, \gamma, \delta, b)$  un código BCH multivariable, con la notación de la Definición 5.7. Para cada  $k \in \gamma$ , definimos  $J_k = \{\overline{b_k}, \dots, \overline{b_k + \delta_k - 2}\}$  y  $A_k = \{\mathbf{i} \in I : \mathbf{i}(k) \in J_k\}$ . Si  $C$  es un código abeliano en  $A_q(r_1, \dots, r_s)$  tal que  $\cup_{k=1}^s A_k \subseteq D_\alpha(C)$  entonces  $\dim C \leq \dim B_q(\alpha, \gamma, \delta, b)$ .*

Recordemos que si  $a$  y  $b$  son enteros positivos coprimos, el orden multiplicativo de  $a$  módulo  $b$  es el primer entero positivo  $m$ , tal que  $b$  divide a  $a^m - 1$ . Lo denotaremos por  $\mathcal{O}_b(a)$ . Es sabido que, dado un código BCH,  $B = B_q(\alpha, \delta, b)$ , en  $A_q(r)$  se tiene que  $d(B) \geq \delta$  y  $\dim(B) \geq r - m(\delta - 1)$ , donde  $m = \mathcal{O}_r(q)$  (véase [10, Theorem 10, p. 203]). En el caso multivariable tenemos el siguiente resultado.

**Teorema 5.12** *Sean  $s, q$  y  $r_1, \dots, r_s$  enteros positivos, donde  $q$  es potencia de un primo  $p$  tal que  $\text{mcd}(p, r_i) = 1$ , para  $i = 1, \dots, s$  e  $I = \prod_{i=1}^s \mathbb{Z}_{r_i}$ . Sea  $B_q(\alpha, \gamma, \delta, b)$  un código BCH multivariable con  $\delta = \{\delta_k : k \in \gamma\}$  y  $b = \{b_k : k \in \gamma\}$  como en la Definición 5.7. Entonces*

$$\dim_{\mathbb{F}_q} B_q(\alpha, \gamma, \delta, b) \geq n - m \left( \sum_{k \in \gamma} \left( (\delta_k - 1) \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^s r_j \right) \right),$$

donde  $m = \text{mcm}\{\mathcal{O}_{r_k}(q)\}_{k=1}^s$  y  $n = \prod_{k=1}^s r_k$ .

**Demostración.** Sea  $C = B_q(\alpha, \gamma, \delta, b)$ . Por definición tenemos que

$$D_\alpha(C) = \bigcup_{k \in \gamma} \bigcup_{l=0}^{\delta_k-2} \bigcup_{\mathbf{i} \in I(k, \overline{b_k+l})} Q(\mathbf{i}).$$

Claramente,  $|I(k, h)| = \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^s r_j$ . Para todo  $h \in \mathbb{Z}_{r_k}$  y, para todo  $\mathbf{i} \in I$ , tenemos que  $|Q(\mathbf{i})| \leq \text{mcm} \{ \mathcal{O}_{r_k}(q) \}_{k=1}^s$ . Por lo tanto,

$$\dim(C) = n - |D_\alpha(C)| \geq n - m \left( \sum_{k \in \gamma} \left( (\delta_k - 1) \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^s r_j \right) \right),$$

donde  $m = \text{mcm} \{ \mathcal{O}_{r_k}(q) \}_{k=1}^s$  y  $n = \prod_{k \in \gamma} r_k$  (véase (1.5)). ■



# Capítulo 6

## Aplicaciones

Las técnicas introducidas en el Capítulo 4, para el cálculo de la distancia aparente de un código abeliano utilizan la estructura de  $q$ -órbitas de sus conjuntos de definición. Este hecho nos permite llevar a cabo el diseño de códigos abelianos con cotas para la distancia mínima predeterminadas a partir de una elección adecuada de  $q$ -órbitas para conformar un conjunto de definición. En este capítulo vamos a aplicar las técnicas desarrolladas en los capítulos anteriores en dos direcciones. En la primera estudiaremos la construcción de códigos abelianos en dos variables a partir de códigos cíclicos, de modo que sus distancias aparentes coincidan y sus dimensiones sean directamente proporcionales. En la segunda diseñaremos códigos abelianos de dimensión máxima, para una distancia aparente prefijada.

### 6.1. Códigos abelianos con dimensión multiplicada

En esta sección veremos un método de construcción de códigos abelianos bidimensionales a partir de códigos cíclicos, de manera que aumentamos la dimensión y la longitud de las palabras pero mantenemos la distancia aparente. Esto se concreta en el siguiente teorema que es el resultado principal de esta sección.

**Teorema 6.1** *Sean  $n$  y  $r$  enteros positivos tales que  $\text{mcd}(q, nr) = 1$ ,  $C$  un código cíclico en  $A_q(r)$  con  $d^*C = \Delta(C) = \delta > 1$  y  $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2) \in U_n \times \mathcal{R}(C)$ . Entonces el código abeliano  $C_n$  en  $A_q(n, r)$  tal que  $D_\alpha(C_n) = \mathbb{Z}_n \times D_{\alpha_2}(C)$ , satisface que  $d^*C_n = \delta$  y  $\dim_{\mathbb{F}_q}(C_n) = n \dim_{\mathbb{F}_q}(C)$ .*

La demostración del teorema anterior se basa en el siguiente resultado.

**Lema 6.2** *Sean  $\mathcal{Q}$  el conjunto de todas las  $q$ -órbitas en  $\mathbb{Z}_{r_1} \times \mathbb{Z}_{r_2}$ ,  $\mathcal{Q}' \subseteq \mathcal{Q}$  y  $D = \cup_{Q \in \mathcal{Q}'} Q$ . Consideremos la matriz de  $q$ -órbitas  $M = M(D)$ . Las siguientes condiciones sobre  $M$  son equivalentes:*

1. Cada columna  $H_M(2, j)$  verifica que, o bien  $H_M(2, j) = 0$  o bien todas sus entradas tienen valor constante 1.
2. Para todo  $(i, j) \in \mathbb{Z}_{r_1} \times \mathbb{Z}_{r_2}$ , se tiene que  $(i, j) \in D$  si y solo si  $(x, j) \in D$  para todo  $x \in \mathbb{Z}_{r_1}$ .

**Demostración.** El resultado se sigue inmediatamente de la definición de (hiper)matriz proporcionada por  $D$ . En efecto, para cada  $a_{ij} \in M$ ,  $a_{ij} = 0$  si y solo si  $(i, j) \in D$  y, en otro caso,  $a_{ij} = 1$ . ■

**Demostración. ( Del Teorema 6.1).** Sea  $\beta = (\beta_1, \beta_2) \in U_n \times U_r$  y sea  $D_\beta(C_n) = \mathbb{Z}_n \times D_{\beta_2}(C)$ . Es claro que  $D_\beta(C_n)$  satisface la condición (2) del Lema 6.2; así que la matriz de q-órbitas proporcionada por  $D_\beta(C_n)$ ,  $N = M(D_\beta(C_n))$ , verifica la condición (1) de dicho lema. Si  $M = (a_j), j \in \mathbb{Z}_r$ , es el vector de q-órbitas proporcionado por  $D_{\beta_2}(C)$  entonces  $H_N(2, j) = 0$  si y solo si  $a_j = 0$ . De aquí y dado que  $\Delta(C) = \delta$ , para toda fila no nula de  $N$ ,  $H_N(1, b)$ , tenemos que  $\omega_N(1, b) = 0$  y  $d^*H_N(1, b) = d^*M \leq \delta$ . Así  $d_1^*N = \max\{(\omega_N(1, b) + 1)d^*H_M(1, b)\} = d^*M \leq \delta$ . Es más, la igualdad se obtiene precisamente si  $\beta_2 \in \mathcal{R}(C)$ .

Ahora, para toda columna no nula de  $N$ ,  $H_N(2, b)$ , tenemos que  $\omega_N(2, b) \leq d^*M \leq \delta - 1$  y  $d^*H_N(2, b) = 1$ , de donde  $d_2^*N = \max\{(\omega_N(2, b) + 1)d^*H_M(2, b)\} \leq d^*M \leq \delta$ . Por lo tanto,  $d^*N = d^*M \leq \delta$  y por la Proposición 5.5,  $d_\beta^*C_n = \text{dam}(N) = d^*N \leq \delta$ . La igualdad se tiene si  $\beta_2 \in \mathcal{R}(C)$ .

Finalmente, dado que  $\dim_{\mathbb{F}_q}(C_n) = \text{supp}(N)$ , tenemos que  $\dim_{\mathbb{F}_q}(C_n) = n \dim_{\mathbb{F}_q}(C)$ . ■

El carácter constructivo de la demostración anterior nos proporciona una técnica para obtener los códigos abelianos bidimensionales que buscamos.

**Observación 6.3** Al reemplazar  $r_2$  por  $r_1$  y  $H_M(2, j)$  por  $H_M(1, j)$  en el enunciado del Lema 6.2 obtenemos un resultado análogo. Por lo tanto, dados un código cíclico  $C$  en  $A_q(r)$  con  $d^*C = \Delta(C) = \delta > 1$  y  $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2) \in U_n \times \mathcal{R}(C)$  también existe un código abeliano  $C_n$  en  $A_q(r, n)$  tal que  $D_\alpha(C_n) = D_{\alpha_1}(C) \times Z_n$ ,  $d^*C_n = \delta$  y  $\dim_{\mathbb{F}_q}(C_n) = n \dim_{\mathbb{F}_q}(C)$ .

El siguiente corolario, cuya demostración es inmediata, muestra que la construcción dada en el Teorema 6.1 preserva la propiedad de ser código BCH (Definición 5.7).

**Corolario 6.4** Sean  $C$  un código BCH en  $A_q(r)$  y  $n$  un entero positivo con  $\text{mcd}(q, nr) = 1$ . Entonces existen dos códigos BCH multivariantes  $C_1 = B_q(\alpha, \{2\}, \{\delta\}, \{b\})$  en  $A_q(r, n)$  y  $C_2 = B_q(\alpha, \{1\}, \{\delta\}, \{b\})$  en  $A_q(n, r)$ , tales que  $d^*C_1 = d^*C_2 = \delta$  y  $\dim_{\mathbb{F}_q}(C_1) = \dim_{\mathbb{F}_q}(C_2) = n \dim_{\mathbb{F}_q}(C)$ .

**Ejemplo 6.5** Sean  $q = 2$ ,  $r = 55$ ,  $n = 3$ ,  $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2) \in U_3 \times U_{55}$  y consideremos el código cíclico  $C$  en  $A_2(55)$  con conjunto de definición, respecto de  $\alpha_2$ ,  $D = C_2(1) \cup C_2(5)$ . Entonces el vector proporcionado por  $D$  es

$$M(D) = \begin{pmatrix} \mathbf{1}, & \mathbf{0}, & \mathbf{0}, & \mathbf{1}, & \mathbf{0}, & \mathbf{0}, & \mathbf{1}, & \mathbf{0}, & \mathbf{0}, & \mathbf{0}, & \mathbf{0}, & \mathbf{1}, & \mathbf{1}, & \mathbf{0}, & \mathbf{0}, & \mathbf{0}, & \mathbf{0}, & \mathbf{0}, & \mathbf{0}, \\ \mathbf{1}, & \mathbf{0}, & \mathbf{1}, & \mathbf{1}, & \mathbf{1}, & \mathbf{1}, & \mathbf{0}, & \mathbf{0}, & \mathbf{1}, & \mathbf{0}, & \mathbf{1}, & \mathbf{0}, & \mathbf{0}, & \mathbf{0}, & \mathbf{1}, & \mathbf{0}, & \mathbf{0}, & \mathbf{0}, & \mathbf{1}, \\ \mathbf{1}, & \mathbf{1}, & \mathbf{0}, & \mathbf{1}, & \mathbf{1}, & \mathbf{0}, & \mathbf{1}, & \mathbf{0}, & \mathbf{1}, & \mathbf{1}, & \mathbf{1}, & \mathbf{0}, & \mathbf{0}, & \mathbf{1}, & \mathbf{0}, & \mathbf{1}, & \mathbf{0}, & \mathbf{1}, & \mathbf{1} \end{pmatrix}$$

y vemos que  $C$  es un código BCH con distancia designada  $\delta = 7$ ,  $b = 13$  y dimensión 25. Aplicando el teorema anterior construimos el código  $C_3$  tal que  $D_\alpha(C_3) = \mathbb{Z}_3 \times D$ . Así que,  $d^*C_3 = 7$ ,  $\dim_{\mathbb{F}_2}(C_3) = 75$  y su longitud es 165. De hecho,  $C_3$  es el código BCH multivariable  $B_2(\alpha, \{2\}, \{7\}, \{13\})$ .

Notemos que la tasa de transmisión de los códigos  $C$  y  $C_n$ , del Teorema 6.1, coinciden pues  $\frac{\dim_{\mathbb{F}_2}(C)}{r} = \frac{n \dim_{\mathbb{F}_2}(C)}{nr}$ . Aunque la longitud del código  $C_n$  sea mayor, también es cierto que tiene mayor dimensión y, por consiguiente, mayor número de palabras.

En el capítulo anterior vimos la extensión de algunas propiedades de los códigos BCH cíclicos al caso multivariable que concernían al cálculo de su dimensión. El siguiente resultado, inspirado en el Teorema 6.1, proporciona otra propiedad para ciertos códigos BCH multivariables.

**Proposición 6.6** Sean  $s$ ,  $q$  y  $r_1, \dots, r_s$  enteros positivos, donde  $q$  es potencia de un primo  $p$  tal que  $\text{mcd}(p, r_i) = 1$ , para  $i = 1, \dots, s$  e  $I = \prod_{i=1}^s \mathbb{Z}_{r_i}$ . Sea  $C = B_q(\alpha, \gamma, \delta, b)$  un código BCH multivariable con  $\gamma = \{k\}$ ,  $\delta = \{\delta_k\}$  y  $b = \{b_k\}$ , para algún  $k \in \{1, \dots, s\}$ . Si  $r_k = q - 1$  entonces  $\dim_{\mathbb{F}_q}(C) = (r_k - \delta_k + 1) \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^s r_j$  y  $d_\alpha^* C = \delta_k$ .

**Demostración.** El caso en que  $C = 0$  es trivial. Supongamos entonces que  $C \neq 0$ . Por hipótesis,  $\gamma = \{k\}$ ,  $\delta = \{\delta_k\}$  y  $b = \{b_k\}$ , para algún  $k \in \{1, \dots, s\}$ ,  $\delta_k \geq 2$  y  $b_k > 0$ . Sea  $l \in \{\overline{b_k}, \dots, \overline{b_k + \delta_k - 2}\}$ . Dado que  $r_k = q - 1$ ,  $lq \equiv l \pmod{r_k}$  y así, para todo  $\mathbf{i} \in I(k, l)$  tenemos que  $Q(\mathbf{i}) \subseteq I(k, l)$ . Por lo tanto,  $\cup_{\mathbf{i} \in I(k, l)} Q(\mathbf{i}) = I(k, l)$  y por definición de código BCH multivariable tenemos que

$$D_\alpha(C) = \bigcup_{l=\overline{b_k}}^{\overline{b_k + \delta_k - 2}} I(k, l).$$

Entonces,  $\dim_{\mathbb{F}_q}(C) = \prod_{j=1}^s r_j - |D_\alpha(C)| = (r_k - \delta_k + 1) \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^s r_j$ . Notemos que si  $M = M(D_\alpha(C))$  y  $l \in \{\overline{b_k}, \dots, \overline{b_k + \delta_k - 2}\}$  tenemos que  $H_M(k, l) = 0$ , en otro caso, todas las entradas de  $H_M(k, l)$  tienen valor constante 1. Por consiguiente,  $\omega_M(k, \overline{b_k} - 1) = \delta_k - 1$  y  $d^* H_M(k, \overline{b_k} - 1) = 1$ , con lo cual  $d_k^* M = \delta_k$ .

Afirmamos que  $d^* M = d_k^* M = \delta_k$  y para demostrarlo procedemos por inducción sobre la dimensión  $s$ . El caso  $s = 1$  es trivial. Supongamos que la afirmación se cumple para  $s - 1$  ( $s \geq 2$ ) y consideremos  $j \in \{1, \dots, s\} \setminus k$ . Entonces, para todo  $l \in \mathbb{Z}_{r_j}$ , la hipercolumna  $H_M(j, l)$  se puede ver como una hipermatriz (de dimensión  $s - 1$ ) de  $q^{|C_q(l)|}$ -órbitas con índices en  $J = \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^s \mathbb{Z}_{r_i}$ , digamos  $H_M(j, l) = (a_{\mathbf{i}})_{\mathbf{i} \in J}$ , donde

$$a_{\mathbf{i}} = \begin{cases} 0 & \text{si } \mathbf{i}(k) \in \{\overline{b_k}, \dots, \overline{b_k + \delta_k - 2}\} \\ 1 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Notemos que para todo  $l \in \mathbb{Z}_{r_j}$  se tiene que  $H_M(j, l) \neq 0$ , es decir  $\omega_M(j, l) = 0$ . Además,  $H_M(j, l)$  puede ser vista como una hipermatriz de dimensión  $s - 1$  proporcionada por

$$\bigcup_{l=\overline{b_k}}^{\overline{b_k + \delta_k - 2}} \left\{ \mathbf{i} \in \prod_{\substack{m=1 \\ m \neq j}}^s \mathbb{Z}_{r_m} : \mathbf{i}(k) = l \right\}.$$

Por la hipótesis de inducción tenemos que  $d^* H_M(j, l) = d_k^* H_M(j, l) = \delta_k$ . Entonces  $d_j^* M = \delta_k$  para todo  $j \in \{1, \dots, s\} \setminus k$  y por lo tanto,  $d^* M = \max\{d_i^* M : i = 1, \dots, s\} = d_k^* M = \delta_k$ , como se quería demostrar. Ahora bien, por la Proposición 4.5 tenemos que  $\text{dam}(M) = d^* M = \delta_k$ . Así que,  $d_\alpha^* B_q(\gamma, \delta, b) = \delta_k$ . ■

La Proposición 6.6 es aplicable a los códigos que obtenemos usando la construcción dada en el Teorema 6.1, cuando partimos de un código de Reed-Solomon. Recordemos que un código de Reed-Solomon sobre  $\mathbb{F}_q$ , con distancia designada  $\delta$ , se define como un código BCH sobre  $\mathbb{F}_q$ , con distancia designada  $\delta$  y longitud  $r = q - 1$ .

**Corolario 6.7** *Sea  $R = B_q(\alpha, \delta, \beta)$  un código de Reed-Solomon de longitud  $r$ . Entonces, para cada entero positivo  $n$ , existe un código BCH multivariable,  $C$ , tal que  $\dim(C) = (r - \lambda + 1)n = n \cdot \dim(R)$  y  $d_\alpha^* C = \delta$ .*

## 6.2. Diseño de códigos abelianos con dimensión máxima (códigos MD) para cotas predeterminadas.

En esta sección presentaremos ejemplos donde aplicamos algunas de las ideas y técnicas desarrolladas a lo largo de este trabajo, para construir códigos abelianos de máxima dimensión con respecto a una distancia aparente dada, para una longitud fija (códigos MD, para simplificar). El método de trabajo consiste en estudiar el conjunto completo de  $q$ -órbitas en todos los posibles espacios ambiente para una longitud  $n$ . Es decir, cada posible producto de enteros positivos  $n_1 \cdots n_s = n$  dará como espacio ambiente para las  $q$ -órbitas el producto  $\mathbb{Z}_{n_1} \times \cdots \times \mathbb{Z}_{n_s}$ . Aunque algunos de estos productos sean isomorfos, el manejo de las  $q$ -órbitas en uno u otro caso varía. En cada caso nuestro algoritmo permite predecir cuáles son las elecciones adecuadas de  $q$ -órbitas para construir códigos abelianos que tengan una distancia aparente prefijada. Es más, para cada posible valor de esta distancia aparente y cada distribución de  $q$ -órbitas, seleccionaremos los códigos de dimensión máxima.

Cabe anotar que las distancias mínimas de códigos que se dan en estos ejemplos han sido calculadas usando el sistema para álgebra computacional discreta GAP (Groups, Algorithms, Programming) con la cooperación de Alexander Konovalov, a quien damos nuestro agradecimiento. Como antes, para una mejor visualización de nuestro método para diseñar códigos, asignaremos un recuadro de color a cada  $q$ -órbita en  $I$ .

**Ejemplo 6.8** Diseñaremos códigos MD binarios de longitud 35 para diferentes cotas (distancias aparentes). Empezamos con códigos MD cíclicos; es decir, códigos BCH

(véase el párrafo posterior a la Definición 2.3). Observemos que la distribución de 2-órbitas en  $\mathbb{Z}_{35}$  (clases 2-ciclotómicas en este caso) es la siguiente:

$$\begin{aligned}
C_2(0) &= \{0\} \\
C_2(1) &= \{1, 2, 4, 8, 9, 11, 16, 18, 22, 23, 29, 32\} \\
C_2(3) &= \{3, 6, 12, 13, 17, 19, 24, 26, 27, 31, 33, 34\} \\
C_2(5) &= \{5, 10, 20\} \\
C_2(7) &= \{7, 14, 21, 28\} \\
C_2(15) &= \{15, 25, 30\}.
\end{aligned}$$

Por lo tanto, podemos escribir  $K(35) = \{1, 7\}$ . Consideremos los vectores de 2-órbitas proporcionados por  $D_1 = C_2(1) \cup C_2(5)$  y  $D_2 = C_2(3) \cup C_2(15)$

$$M(D_1) = (\mathbf{1}, 0, 0, \mathbf{1}, 0, \mathbf{0}, \mathbf{1}, \mathbf{1}, 0, 0, \mathbf{0}, 0, \mathbf{1}, \mathbf{1}, \mathbf{1}, \mathbf{1}, 0, \mathbf{1}, \\
0, \mathbf{1}, \mathbf{0}, \mathbf{1}, 0, 0, \mathbf{1}, \mathbf{1}, \mathbf{1}, \mathbf{1}, \mathbf{1}, 0, \mathbf{1}, \mathbf{1}, 0, \mathbf{1}, \mathbf{1})$$

$$M(D_2) = (\mathbf{1}, \mathbf{1}, \mathbf{1}, \mathbf{0}, \mathbf{1}, \mathbf{1}, \mathbf{0}, \mathbf{1}, \mathbf{1}, \mathbf{1}, \mathbf{1}, \mathbf{0}, \mathbf{0}, \mathbf{1}, \mathbf{0}, \mathbf{1}, \mathbf{0}, \mathbf{1}, \mathbf{0}, \\
\mathbf{1}, \mathbf{0}, \mathbf{1}, \mathbf{1}, \mathbf{1}, \mathbf{1}, \mathbf{0}, \mathbf{0}, \mathbf{0}, \mathbf{0}, \mathbf{1}, \mathbf{1}, \mathbf{0}, \mathbf{0}, \mathbf{1}, \mathbf{0}, \mathbf{0})$$

Entonces,  $d^*M(D_1) = d^*M(D_2) = 5$ . Sean  $\alpha \in U_{35}$  y  $C_1$  el código cíclico tal que  $D_\alpha(C_1) = D_1$ . Observemos que  $D_2 = 7 \cdot D_1$ , con lo cual tenemos que  $d^*C_1 = 5$  (véase el párrafo posterior a la Proposición 3.17). Se puede verificar que  $C_1$  es un código BCH con dimensión 20 y distancia mínima  $d(C_1) = 6$ .

Si queremos incrementar la distancia aparente, podemos extender el conjunto de definición a  $D_3 = D_1 \cup C_2(7)$ . Sea  $D_4 = D_2 \cup C_2(7)$ . Notemos que  $D_4 = 7 \cdot D_3$  y que

$$M(D_3) = (\mathbf{1}, 0, 0, \mathbf{1}, 0, \mathbf{0}, \mathbf{1}, \mathbf{0}, 0, 0, \mathbf{0}, 0, \mathbf{1}, \mathbf{1}, \mathbf{0}, \mathbf{1}, 0, \mathbf{1}, \\
0, \mathbf{1}, \mathbf{0}, \mathbf{0}, 0, 0, \mathbf{1}, \mathbf{1}, \mathbf{1}, \mathbf{1}, \mathbf{0}, 0, \mathbf{1}, \mathbf{1}, 0, \mathbf{1}, \mathbf{1})$$

$$M(D_4) = (\mathbf{1}, \mathbf{1}, \mathbf{1}, \mathbf{0}, \mathbf{1}, \mathbf{1}, \mathbf{0}, \mathbf{0}, \mathbf{1}, \mathbf{1}, \mathbf{1}, \mathbf{1}, \mathbf{0}, \mathbf{0}, \mathbf{0}, \mathbf{0}, \mathbf{1}, \mathbf{0}, \mathbf{0}, \\
\mathbf{1}, \mathbf{0}, \mathbf{1}, \mathbf{0}, \mathbf{1}, \mathbf{1}, \mathbf{0}, \mathbf{0}, \mathbf{0}, \mathbf{0}, \mathbf{0}, \mathbf{1}, \mathbf{0}, \mathbf{0}, \mathbf{1}, \mathbf{0}, \mathbf{0})$$

Luego, el código  $C_3$  con  $D_3 = D_\alpha(C_3)$ , tiene distancia aparente  $d^*C_3 = 6$ , dimensión 16 y se puede comprobar que su distancia mínima es  $d(C_3) = 7$ . De hecho, una simple inspección nos muestra que este código tiene la máxima dimensión que puede tener un código cíclico en  $A_2(35)$  cuya distancia aparente sea 6. Finalmente, observemos que para que un código en  $A_2(35)$  sea un código BCH con distancia designada mayor que 6, su conjunto de definición (respecto de  $\alpha \in U_{35}$ ) debe contener la unión de clases 2-ciclotómicas  $C_2(1) \cup C_2(3)$  y por lo tanto su dimensión debe ser menor que 11.

Ahora consideremos códigos MD en dos variables con la misma longitud. Observemos que la distribución de 2-órbitas en  $I = \mathbb{Z}_5 \times \mathbb{Z}_7$  es la siguiente:

$$\begin{aligned}
Q(0,0) &= \{(0,0)\} \\
Q(0,1) &= \{(0,1), (0,2), (0,4)\} \\
Q(0,3) &= \{(0,3), (0,5), (0,6)\} \\
Q(1,0) &= \{(1,0), (2,0), (3,0), (4,0)\} \\
Q(1,1) &= \{(1,1), (1,2), (1,4), (2,1), (2,2), (2,4), (3,1), (3,2), \\
&\quad (3,4), (4,1), (4,2), (4,4)\} \\
Q(1,3) &= \{(1,3), (1,5), (1,6), (2,3), (2,5), (2,6), (3,3), (3,5), \\
&\quad (3,6), (4,3), (4,5), (4,6)\}
\end{aligned}$$

y tenemos que  $K(5,7) = \{(1,1), (1,3)\}$ . Consideremos  $D_5 = Q(0,0) \cup Q(1,0) \cup Q(0,3)$ . Entonces

$$M(D_5) = \begin{pmatrix}
\text{0} & \text{1} & \text{1} & \text{0} & \text{1} & \text{0} & \text{0} \\
\text{0} & \text{1} & \text{1} & \text{1} & \text{1} & \text{1} & \text{1} \\
\text{0} & \text{1} & \text{1} & \text{1} & \text{1} & \text{1} & \text{1} \\
\text{0} & \text{1} & \text{1} & \text{1} & \text{1} & \text{1} & \text{1} \\
\text{0} & \text{1} & \text{1} & \text{1} & \text{1} & \text{1} & \text{1}
\end{pmatrix}.$$

Vamos a calcular su distancia aparente mínima. Siguiendo el Algoritmo 4.10 tenemos las sucesiones

$$M(D_5)_0 > M(D_5)_1 = \begin{pmatrix}
\text{0} & \text{0} & \text{0} & \text{0} & \text{0} & \text{0} & \text{0} \\
\text{0} & \text{1} & \text{1} & \text{0} & \text{1} & \text{0} & \text{0} \\
\text{0} & \text{1} & \text{1} & \text{0} & \text{1} & \text{0} & \text{0} \\
\text{0} & \text{1} & \text{1} & \text{0} & \text{1} & \text{0} & \text{0} \\
\text{0} & \text{1} & \text{1} & \text{0} & \text{1} & \text{0} & \text{0}
\end{pmatrix} \quad \text{y } m_0 = 4 \geq m_1 = \min\{4, 8\},$$

con lo cual  $\text{dam}(M(D_5)) = 4$ . Sean  $\alpha \in U = U_5 \times U_7$  y  $C_5$  el código abeliano cuyo conjunto de definición respecto de  $\alpha$  es  $D_5$ . Observemos que para  $D = (1,3) \cdot D_5$  tenemos que  $\text{dam}(M(D)) = 4$ , con lo cual  $d^*C_5 = 4$ . Este código es de dimensión 27 y hemos comprobado que tiene distancia mínima  $d(C_5) = 4$  (no existen códigos cíclicos con estos parámetros). Notemos que  $C_5$  no es un código MD con distancia aparente prefijada 4, pues si tomamos  $D'_5 = D_5 \setminus Q(0,0)$  tenemos que  $\text{dam}(M(D'_5)) = 4$  y el código  $C'_5$  con  $D'_5 = D_\alpha(C'_5)$  tiene dimensión 28. Para esta distancia aparente prefijada 4,  $C'_5$  sí es un código de dimensión máxima, pues si aumentamos la dimensión; es decir, si consideramos  $D''_5 = D'_5 \setminus Q$  para alguna  $q$ -órbita  $Q \subset D'_5$  tenemos que  $\text{dam}(M(D''_5)) < 4$ . Además  $D'_5$  se compone de las  $q$ -órbitas de menor tamaño posible para obtener dicha distancia aparente mínima.

Con el fin de incrementar la distancia aparente, consideremos ahora el conjunto  $D_6 = Q(0,1) \cup Q(0,3) \cup Q(1,3)$ , que proporciona la matriz

$$M(D_6) = \begin{pmatrix} \text{1} & \text{0} & \text{0} & \text{0} & \text{0} & \text{0} & \text{0} \\ \text{1} & \text{1} & \text{1} & \text{0} & \text{1} & \text{0} & \text{0} \\ \text{1} & \text{1} & \text{1} & \text{0} & \text{1} & \text{0} & \text{0} \\ \text{1} & \text{1} & \text{1} & \text{0} & \text{1} & \text{0} & \text{0} \\ \text{1} & \text{1} & \text{1} & \text{0} & \text{1} & \text{0} & \text{0} \end{pmatrix}$$

para la cual tenemos las sucesiones

$$M(D_6)_0 > M(D_6)_1 = \begin{pmatrix} \text{0} & \text{0} & \text{0} & \text{0} & \text{0} & \text{0} & \text{0} \\ \text{1} & \text{1} & \text{1} & \text{0} & \text{1} & \text{0} & \text{0} \\ \text{1} & \text{1} & \text{1} & \text{0} & \text{1} & \text{0} & \text{0} \\ \text{1} & \text{1} & \text{1} & \text{0} & \text{1} & \text{0} & \text{0} \\ \text{1} & \text{1} & \text{1} & \text{0} & \text{1} & \text{0} & \text{0} \end{pmatrix} \quad \text{y } m_0 = 7 \geq m_1 = \min\{7, 6\}.$$

Luego,  $\text{dam}(M(D_6)) = 6$ . Consideremos el código abeliano  $C_6$  tal que  $D_6 = D_\alpha(C_6)$ . Como para  $D = (1, 3) \cdot D_6$  tenemos que  $\text{dam}(M(D)) = 6$  entonces  $d^*C_6 = 6$ . Este es un código MD de dimensión 17 y distancia mínima 6 (distancia aparente óptima).

Finalmente, sea  $D_7 = Q(0, 0) \cup Q(1, 0) \cup Q(0, 1) \cup Q(0, 3) \cup Q(1, 3)$ . La matriz proporcionada por  $D_7$ ,  $M(D_7)$ , coincide con  $M(D_5)_1$ . Así que,  $\text{dam}(M(D_7)) = 8$ . Se puede verificar además que  $\text{dam}(M((1, 3) \cdot D_7)) = 8$ , con lo cual el código abeliano cuyo conjunto de definición respecto de  $\alpha$  es  $D_7$ , es de distancia aparente óptima y de dimensión máxima respecto de la distancia aparente prefijada 8.

**Observación 6.9** En el ejemplo anterior, se puede verificar que para cualquier código cíclico binario  $C$  de longitud 35, se tiene que, si  $\dim_{\mathbb{F}_2} C \geq 25$  entonces  $d^*C \leq 3$ , puesto que  $D_\alpha(C)$  no puede incluir a la 2-órbita  $C_2(1)$  ni a la 2-órbita  $C_2(3)$ . Entonces, aunque el código abeliano  $C_4$  puede ser visto como un código cíclico (usando el Teorema Chino de los Residuos), su distancia aparente calculada como código cíclico nunca será mayor que 3.

**Ejemplo 6.10** En este ejemplo presentamos códigos MD binarios de longitud 45. Para empezar construimos códigos MD cíclicos. La distribución de clases 2-ciclotómicas en  $I = \mathbb{Z}_{45}$  es la siguiente:

$$\begin{aligned} C_2(0) &= \{0\} \\ C_2(1) &= \{1, 2, 4, 8, 16, 17, 19, 23, 31, 32, 34, 38\} \\ C_2(3) &= \{3, 6, 12, 24\} \\ C_2(5) &= \{5, 10, 20, 25, 35, 40\} \\ C_2(7) &= \{7, 11, 13, 14, 22, 26, 28, 29, 37, 41, 43, 44\} \\ C_2(9) &= \{9, 18, 27, 36\} \\ C_2(15) &= \{15, 30\} \\ C_2(21) &= \{21, 33, 39, 42\}. \end{aligned}$$

Por lo tanto  $K(45) = \{1, 7\}$ . Consideremos los conjuntos  $D_1 = C_2(1)$  y  $D_2 = C_2(7)$  y los vectores de 2-órbitas proporcionados por ellos

$$M(D_1) = (\begin{array}{cccccccccccccccccccccccccccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}).$$

$$M(D_2) = (\begin{array}{cccccccccccccccccccccccccccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{array}).$$

Observemos que  $D_2 = 7 \cdot D_1$  y  $d^*M(D_1) = d^*M(D_2) = 3$ . Sean  $\alpha \in U_{45}$  y  $C_1$  el código cíclico tal que  $D_\alpha(C_1) = M(D_1)$ .  $C_1$  es un código BCH con distancia aparente 3, que coincide con la de Bose, y  $\dim_{\mathbb{F}_2}(C_1) = 33$ .

Ahora consideremos el código  $C_3$  tal que  $D_\alpha(C_3) = D_3 = D_1 \cup C_2(15)$ . El vector proporcionado por  $D_3$  es

$$M(D_3) = (\begin{array}{cccccccccccccccccccccccccccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}).$$

Se puede verificar que  $d^*C_3 = 4$ . Más aún,  $C_3 = B_2(\alpha, 4, 15)$  y su dimensión es 31.

Aumentemos aún más la distancia aparente haciendo  $D_5 = D_3 \cup C_2(21)$  y  $D_6 = D_4 \cup C_2(9)$ . Esto nos proporciona códigos BCH  $C_5$  y  $C_6$  con distancia designada (y de Bose) 6 y dimensión 27, como se puede deducir directamente de los vectores

$$M(D_5) = (\begin{array}{cccccccccccccccccccccccccccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{array}).$$

$$M(D_6) = (\begin{array}{cccccccccccccccccccccccccccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}).$$

Finalmente, para  $D_7 = C_2(0) \cup C_2(1) \cup C_2(3) \cup C_2(5)$  y  $D_8 = C_2(0) \cup C_2(7) \cup C_2(5) \cup C_2(21)$  obtenemos códigos BCH  $C_7$  y  $C_8$  con distancia designada (y de Bose) 8 y dimensión 22, como se puede ver en los vectores

$$M(D_7) = (\begin{array}{cccccccccccccccccccccccccccc} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}).$$

$$M(D_8) = (\begin{array}{cccccccccccccccccccccccccccc} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}).$$



Ahora diseñaremos códigos en 2 variables con la misma longitud, en este caso los códigos serán ideales en  $A_2(5, 9)$ . La distribución de 2-órbitas en  $\mathbb{Z}_5 \times \mathbb{Z}_9$  es

$$\begin{aligned}
Q(0,0) &= \{(0,0)\} \\
Q(0,1) &= \{(0,1), (0,2), (0,4), (0,5), (0,7), (0,8)\} \\
Q(0,3) &= \{(0,3), (0,6)\} \\
Q(1,0) &= \{(1,0), (2,0), (3,0), (4,0)\} \\
Q(1,1) &= \{(1,1), (2,2), (4,4), (3,8), (1,7), (2,5), \\
&\quad (4,1), (3,2), (1,4), (2,8), (4,7), (3,5)\} \\
Q(1,2) &= \{(1,2), (2,4), (4,8), (3,7), (1,5), (2,1), \\
&\quad (4,2), (3,4), (1,8), (2,7), (4,5), (3,1)\} \\
Q(1,3) &= \{(1,3), (2,6), (4,3), (3,6)\} \\
Q(1,6) &= \{(1,6), (2,3), (4,6), (3,3)\}.
\end{aligned}$$

Así que, podemos escribir  $K(3, 15) = \{(1, 1), (1, 2)\}$ . Consideremos  $(\alpha_1, \alpha_2) \in U_5 \times U_9$  y el código abeliano en 2 variables,  $C_9$ , con  $D_\alpha(C) = D_9 = Q(1, 0) \cup (0, 1)$ ; con lo cual,

$$M(D_9) = \begin{pmatrix}
\begin{matrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{matrix} \\
\begin{matrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{matrix} \\
\begin{matrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{matrix} \\
\begin{matrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{matrix} \\
\begin{matrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{matrix}
\end{pmatrix}.$$

Vamos a determinar  $dam(M(D_9))$ . Del Algoritmo 4.10, tenemos la sucesión de matrices

$$\begin{aligned}
M(D_9)_0 &> M(D_9)_1 = \begin{pmatrix}
\begin{matrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{matrix} \\
\begin{matrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{matrix} \\
\begin{matrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{matrix} \\
\begin{matrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{matrix} \\
\begin{matrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{matrix}
\end{pmatrix} \\
&> M(D_9)_2 = \begin{pmatrix}
\begin{matrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{matrix} \\
\begin{matrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{matrix} \\
\begin{matrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{matrix} \\
\begin{matrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{matrix} \\
\begin{matrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{matrix}
\end{pmatrix}
\end{aligned}$$

y la sucesión de enteros positivos  $m_0 = 5 \geq m_1 = \min\{5, 6\} \geq m_2 = \min\{5, 4\}$ ; con lo cual  $dam(M(D_9)) = 4$ . Dado que  $D_9 = (1, 2) \cdot D_9$  tenemos que  $d^*C_9 = dam(M(D_9)) = 4$ . Este código tiene dimensión  $\dim_{\mathbb{F}_2}(C_9) = 35$  y es un código MD respecto a esta cota para la distancia mínima. En efecto, si consideramos  $D'_9 = D_9 \setminus Q$  para alguna  $q$ -órbitas  $Q \subset D_9$ , tenemos que  $dam(M(D'_9)) < 4$ . Además  $D_9$  se compone de las  $q$ -órbitas de menor tamaño posible para obtener distancia aparente mínima igual a 4.

Consideremos ahora la distancia aparente prefijada 5. Sean  $D_{10} = Q(1,0) \cup Q(0,3) \cup Q(1,1)$  y  $D_{11} = (1,2) \cdot D_{10} = Q(1,0) \cup Q(0,3) \cup Q(1,2)$ , que proporcionan las matrices

$$M(D_{10}) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$M(D_{11}) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

para las cuales, siguiendo el Algoritmo 4.10, tenemos las sucesiones de matrices

$$M(D_{10})_0 > M(D_{10})_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$> M(D_{10})_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$M(D_{11})_0 > M(D_{11})_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$> M(D_{11})_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

de donde podemos deducir que  $\text{dam}(M(D_{10})) = \text{dam}(M(D_{11})) = 5$ . Así que, el código  $C_{10}$  con  $D_{10} = D_\alpha(C_{10})$  es tal que  $d^*C_{10} = 5$  y  $\dim_{\mathbb{F}_2}(C_{10}) = 27$ . Luego, es un código MD con respecto a la distancia aparente 5.

El último código abeliano en  $A_2(5, 9)$  que presentamos es  $C_{12}$ , cuyo conjunto de definición es  $D_{12} = D_9 \cup Q(0, 0)$ . Notemos que  $M(D_{12}) = M(D_{10})_1$  y de este modo,  $\text{dam}(M(D_{12})) = 6$ . Se verifica fácilmente que  $d^*C_{12} = 6$  y  $\dim_{\mathbb{F}_2}(C_{12}) = 26$ .

Para ampliar las opciones, observemos que si consideramos  $r_1 = 3$ ,  $r_2 = 15$  y fijamos  $\alpha \in U_3 \times U_{15}$  podemos elegir representantes tales que  $K(3, 15) = \{(1, 1), (1, 7)\}$ . Así, podemos obtener el código abeliano  $C_{13}$  en  $A_2(3, 15)$  con  $D_\alpha(C_{13}) = Q(0, 0) \cup Q(1, 0) \cup Q(0, 7)$ ,  $d^*C_{13} = 4$  y dimensión 38. Un código con la misma longitud y distancia aparente que  $C_9$ , pero con mayor dimensión.

Por último, hemos estudiado la construcción de códigos abelianos de longitud 45 en 3 variables. Este caso se torna muy laborioso y consideramos que la exposición de los cálculos podría resultar tediosa para el lector. Los resultados más relevantes que hemos obtenido son los siguientes. Consideremos  $\alpha \in U_3 \times U_5 \times U_5$ . Si  $C_{14}$  es el código abeliano tal que  $D_\alpha(C_{14}) = Q(0, 0, 1) \cup Q(1, 0, 1) \cup Q(0, 1, 0)$ , entonces  $d^*C_{14} = 4$  y  $\dim_{\mathbb{F}_2}(C_{14}) = 37$ , la máxima posible para que el código tenga dicha distancia aparente con la distribución de  $q$ -órbitas en  $\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_5 \times \mathbb{Z}_5$ . También tenemos el código  $C_{15}$  con  $D_\alpha(C_{15}) = Q(0, 0, 0) \cup Q(0, 0, 1) \cup Q(1, 0, 1) \cup Q(0, 1, 0) \cup Q(1, 2, 2)$ , para el cual tenemos que  $d^*C_{15} = 6$  y  $\dim_{\mathbb{F}_2}(C_{15}) = 28$ .  $C_{15}$  es un código MD para la distancia aparente 6. Finalmente, el código  $C_{16}$  con  $D_\alpha(C_{16}) = Q(0, 0, 0) \cup Q(0, 0, 1) \cup Q(1, 0, 1) \cup Q(0, 1, 0) \cup Q(1, 2, 1) \cup Q(1, 0, 2) \cup Q(1, 2, 0)$  tiene  $d^*C_{16} = 8$  y  $\dim_{\mathbb{F}_2}(C_{16}) = 24$ .

# Capítulo 7

## Apéndice

Para mayor claridad, en este ejemplo denotaremos por  $H_i^{k,b}(P)$  el  $i$ -ésimo elemento de la sucesión de matrices obtenida para la hipercolumna  $H_P(k,b)$ , siguiendo el Algoritmo 4.10.

**Ejemplo 7.1** Consideremos  $q = 2$ ,  $r_1 = r_2 = r_3 = 3$  y  $D = Q(0,1,0) \cup Q(1,0,2) \cup Q(0,0,1) \cup Q(1,2,2)$ . Sea  $M = M(D)$ . Vamos a construir las sucesiones de hipermatrices y de enteros positivos correspondientes a  $M$ , siguiendo el proceso propuesto en la prueba del Teorema 4.12.

Asignamos, a cada 2-órbita en  $\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3$ , un recuadro de color y entonces la hipermatriz  $M$  puede verse, por hipercolumnas, como:

$$\begin{array}{ccc}
 H_M(1,0) & H_M(1,1) & H_M(1,2) \\
 \left( \begin{array}{ccc} \boxed{1} & \text{gris} & \text{gris} \\ \text{rojo} & \text{verde} & \text{rojo} \\ \text{rojo} & \text{rojo} & \text{rojo} \end{array} \right) & \left( \begin{array}{ccc} \text{rojo} & \text{rojo} & \text{rojo} \\ \text{rojo} & \text{rojo} & \text{rojo} \\ \text{rojo} & \text{rojo} & \text{rojo} \end{array} \right) & \left( \begin{array}{ccc} \text{rojo} & \text{rojo} & \text{rojo} \\ \text{rojo} & \text{rojo} & \text{rojo} \\ \text{rojo} & \text{rojo} & \text{rojo} \end{array} \right) \\
 H_M(2,0) & H_M(2,1) & H_M(2,2) \\
 \left( \begin{array}{ccc} \boxed{1} & \text{gris} & \text{gris} \\ \text{rojo} & \text{rojo} & \text{rojo} \\ \text{rojo} & \text{rojo} & \text{rojo} \end{array} \right) & \left( \begin{array}{ccc} \text{rojo} & \text{rojo} & \text{rojo} \\ \text{rojo} & \text{rojo} & \text{rojo} \\ \text{rojo} & \text{rojo} & \text{rojo} \end{array} \right) & \left( \begin{array}{ccc} \text{rojo} & \text{rojo} & \text{rojo} \\ \text{rojo} & \text{rojo} & \text{rojo} \\ \text{rojo} & \text{rojo} & \text{rojo} \end{array} \right) \\
 H_M(3,0) & H_M(3,1) & H_M(3,2) \\
 \left( \begin{array}{ccc} \boxed{1} & \text{rojo} & \text{rojo} \\ \text{rojo} & \text{rojo} & \text{rojo} \\ \text{rojo} & \text{rojo} & \text{rojo} \end{array} \right) & \left( \begin{array}{ccc} \text{rojo} & \text{rojo} & \text{rojo} \\ \text{rojo} & \text{rojo} & \text{rojo} \\ \text{rojo} & \text{rojo} & \text{rojo} \end{array} \right) & \left( \begin{array}{ccc} \text{rojo} & \text{rojo} & \text{rojo} \\ \text{rojo} & \text{rojo} & \text{rojo} \\ \text{rojo} & \text{rojo} & \text{rojo} \end{array} \right)
 \end{array}$$

1. Sea  $\mathcal{M}_0 = \{M\}$ .

1.1. Vamos a determinar  $m_0$ . Empezamos por la construcción de  $\mathcal{S}(M)$ , calculando  $d^*M = 3$  e  $Ip(M) = \{(1, 0), (1, 1), (1, 2), (2, 0), (3, 0), (3, 1), (3, 2)\}$ . Para cada hipercolumna involucrada en el cálculo de  $d^*M$ , de la Proposición 4.8, tenemos una sucesión de matrices.

Para  $H_M(1, 0)$ , tenemos que  $d^*H_M(1, 0) = 3$  e  $Ip(H_M(1, 0)) = \{(1, 0), (2, 0)\}$ . Entonces la segunda matriz de la sucesión para esta hipercolumna es la matriz de soporte máximo,  $H_1^{1,0}(M) < H_M(1, 0)$ , tal que sus hipercolumnas  $(1, 0)$  y  $(2, 0)$  son nulas; es decir,

$$H_1^{1,0}(M) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ahora bien,  $d^*H_1^{1,0}(M) = 4$  e  $Ip(H_1^{1,0}(M)) = \{(1, 2), (2, 2)\}$ . Así que la siguiente matriz de la sucesión sería  $H_2^{1,0}(M) < H_1^{1,0}(M)$ , con soporte máximo, tal que la fila 2 y la columna 2 sean nulas. Luego,  $H_2^{1,0}(M) = 0$ . Por lo tanto, la sucesión de matrices para  $H_M(1, 0)$  es  $H_M(1, 0) > H_1^{1,0}(M)$ .

Para  $H_M(1, 1)$  tenemos que  $d^*H_M(1, 1) = 3$  e  $Ip(H_M(1, 1)) = \{(2, 2)\}$ . Luego, la primera matriz de la sucesión para esta hipercolumna es la matriz de soporte máximo,  $H_1^{1,1}(M) < H_M(1, 1)$ , tal que su columna 2 es nula:

$$H_1^{1,1}(M) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ahora,  $d^*H_1^{1,1}(M) = 2$  e  $Ip(H_1^{1,1}(M)) = \{(1, 0), (1, 1), (1, 2), (2, 1)\}$ . Dado que  $d^*H_{H_1^{1,1}(M)}(2, 1) = 1$  tenemos que  $H_2^{1,1}(M) = 0$  (véase Proposición 4.5). Por lo tanto, la sucesión de matrices para  $H_M(1, 1)$  es  $H_M(1, 1) > H_1^{1,1}(M)$ .

Siguiendo este mismo proceso para cada hipercolumna involucrada en el cálculo de  $d^*M$ , obtenemos las siguientes sucesiones:

$$H_M(1, 0) = H_0^{1,0}(M) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} > H_1^{1,0}(M) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$H_M(1, 1) = H_0^{1,1}(M) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} > H_1^{1,1}(M) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$H_M(1, 2) = H_0^{1,2}(M) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} > H_1^{1,2}(M) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$H_M(2,0) = H_0^{2,0}(M) = \begin{pmatrix} \boxed{1} & \boxed{0} & \boxed{0} \\ \boxed{1} & \boxed{1} & \boxed{0} \\ \boxed{1} & \boxed{0} & \boxed{1} \end{pmatrix} > H_1^{2,0}(M) = \begin{pmatrix} \boxed{0} & \boxed{0} & \boxed{0} \\ \boxed{1} & \boxed{0} & \boxed{0} \\ \boxed{1} & \boxed{0} & \boxed{0} \end{pmatrix}$$

$$H_M(3,0) = H_0^{3,0}(M) = \begin{pmatrix} \boxed{1} & \boxed{0} & \boxed{0} \\ \boxed{1} & \boxed{1} & \boxed{1} \\ \boxed{1} & \boxed{1} & \boxed{1} \end{pmatrix} > H_1^{3,0}(M) = \begin{pmatrix} \boxed{0} & \boxed{0} & \boxed{0} \\ \boxed{1} & \boxed{1} & \boxed{1} \\ \boxed{1} & \boxed{1} & \boxed{1} \end{pmatrix}$$

$$H_M(3,1) = H_0^{3,1}(M) = \begin{pmatrix} \boxed{0} & \boxed{1} & \boxed{1} \\ \boxed{1} & \boxed{1} & \boxed{1} \\ \boxed{0} & \boxed{1} & \boxed{1} \end{pmatrix} > H_1^{3,1}(M) = \begin{pmatrix} \boxed{0} & \boxed{1} & \boxed{1} \\ \boxed{0} & \boxed{1} & \boxed{1} \\ \boxed{0} & \boxed{1} & \boxed{1} \end{pmatrix}$$

$$H_M(3,2) = H_0^{3,2}(M) = \begin{pmatrix} \boxed{0} & \boxed{1} & \boxed{1} \\ \boxed{0} & \boxed{1} & \boxed{0} \\ \boxed{1} & \boxed{1} & \boxed{1} \end{pmatrix} > H_1^{3,2}(M) = \begin{pmatrix} \boxed{0} & \boxed{1} & \boxed{1} \\ \boxed{0} & \boxed{0} & \boxed{0} \\ \boxed{0} & \boxed{1} & \boxed{1} \end{pmatrix} \\ > H_2^{3,2}(M) = \begin{pmatrix} \boxed{0} & \boxed{0} & \boxed{0} \\ \boxed{0} & \boxed{0} & \boxed{0} \\ \boxed{0} & \boxed{1} & \boxed{0} \end{pmatrix}$$

Vamos a crear, a partir de  $M$  y las sucesiones construidas anteriormente, nuevas hipermatrices. Para cada hipercolumna  $H_M(k,b)$ , con  $(k,b) \in Ip(M)$ , denotamos por  $l(k,b)$  la longitud de la sucesión correspondiente a  $H_M(k,b)$ . Para cada elemento de esta sucesión,  $H_i^{k,b}(M)$ , con  $i = 0, \dots, l(k,b)$ , construimos la hipermatriz de 2-órbitas de soporte máximo,  $(M, H_i^{k,b}(M))$  tal que  $H_{(M, H_i^{k,b}(M))}(k,b) = 0$ . Notemos que  $(M, H_0^{k,b}(M)) = M$  para todo  $(k,b) \in Ip(M)$ . Con estas hipermatrices formamos los conjuntos

$$R(M, k, b) = \{(M, H_i^{k,b}(M)) : i = 0, \dots, l(k,b)\} \setminus \{M\} \\ \mathcal{S}(M) = \bigcup_{(k,b) \in Ip(M)} R(M, k, b).$$

Presentamos a continuación la hipermatrices que forman el conjunto  $\mathcal{S}(M)$ .

$B_1 = (M, H_1^{1,0}(M)) = (M, H_1^{3,0}(M))$  es la hipermatriz

$$H_{B_1}(1,0) \quad H_{B_1}(1,1) \quad H_{B_1}(1,2) \\ \begin{pmatrix} \boxed{0} & \boxed{0} & \boxed{0} \\ \boxed{0} & \boxed{1} & \boxed{1} \\ \boxed{0} & \boxed{1} & \boxed{1} \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} \boxed{1} & \boxed{1} & \boxed{0} \\ \boxed{1} & \boxed{1} & \boxed{1} \\ \boxed{1} & \boxed{1} & \boxed{0} \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} \boxed{1} & \boxed{0} & \boxed{1} \\ \boxed{1} & \boxed{0} & \boxed{1} \\ \boxed{1} & \boxed{1} & \boxed{1} \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{ccc}
H_{B_1}(2,0) & H_{B_1}(2,1) & H_{B_1}(2,2) \\
\begin{pmatrix} \boxed{0} & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \\
H_{B_1}(3,0) & H_{B_1}(3,1) & H_{B_1}(3,2) \\
\begin{pmatrix} \boxed{0} & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}
\end{array}$$

$$B_2 = (M, H_1^{1,1}(M)) = (M, H_1^{1,2}(M))$$

$$\begin{array}{ccc}
H_{B_2}(1,0) & H_{B_2}(1,1) & H_{B_2}(1,2) \\
\begin{pmatrix} \boxed{1} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
H_{B_2}(2,0) & H_{B_2}(2,1) & H_{B_2}(2,2) \\
\begin{pmatrix} \boxed{1} & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
H_{B_2}(3,0) & H_{B_2}(3,1) & H_{B_2}(3,2) \\
\begin{pmatrix} \boxed{1} & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}
\end{array}$$

$$B_3 = (M, H_1^{2,0}(M))$$

$$\begin{array}{ccc}
H_{B_3}(1,0) & H_{B_3}(1,1) & H_{B_3}(1,2) \\
\begin{pmatrix} \boxed{0} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \\
H_{B_3}(2,0) & H_{B_3}(2,1) & H_{B_3}(2,2) \\
\begin{pmatrix} \boxed{0} & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}
\end{array}$$

$$\begin{array}{ccc}
H_{B_3}(3,0) & H_{B_3}(3,1) & H_{B_3}(3,2) \\
\left( \begin{array}{ccc} \boxed{0} & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{array} \right) & \left( \begin{array}{ccc} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{array} \right) & \left( \begin{array}{ccc} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{array} \right)
\end{array}$$

$$B_4 = (M, H_1^{3,1}(M))$$

$$\begin{array}{ccc}
H_{B_4}(1,0) & H_{B_4}(1,1) & H_{B_4}(1,2) \\
\left( \begin{array}{ccc} \boxed{1} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{array} \right) & \left( \begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{array} \right) & \left( \begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{array} \right)
\end{array}$$

$$\begin{array}{ccc}
H_{B_4}(2,0) & H_{B_4}(2,1) & H_{B_4}(2,2) \\
\left( \begin{array}{ccc} \boxed{1} & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{array} \right) & \left( \begin{array}{ccc} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{array} \right) & \left( \begin{array}{ccc} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{array} \right)
\end{array}$$

$$\begin{array}{ccc}
H_{B_4}(3,0) & H_{B_4}(3,1) & H_{B_4}(3,2) \\
\left( \begin{array}{ccc} \boxed{1} & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{array} \right) & \left( \begin{array}{ccc} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{array} \right) & \left( \begin{array}{ccc} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{array} \right)
\end{array}$$

$$B_5 = (M, H_1^{3,2}(M))$$

$$\begin{array}{ccc}
H_{B_5}(1,0) & H_{B_5}(1,1) & H_{B_5}(1,2) \\
\left( \begin{array}{ccc} \boxed{1} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{array} \right) & \left( \begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{array} \right) & \left( \begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{array} \right)
\end{array}$$

$$\begin{array}{ccc}
H_{B_5}(2,0) & H_{B_5}(2,1) & H_{B_5}(2,2) \\
\left( \begin{array}{ccc} \boxed{1} & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{array} \right) & \left( \begin{array}{ccc} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{array} \right) & \left( \begin{array}{ccc} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{array} \right)
\end{array}$$



$$\begin{array}{ccc}
H_{B_5}(3,0) & H_{B_5}(3,1) & H_{B_5}(3,2) \\
\left( \begin{array}{ccc} \boxed{1} & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{array} \right) & \left( \begin{array}{ccc} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{array} \right) & \left( \begin{array}{ccc} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{array} \right)
\end{array}$$

$$B_6 = (M, H_2^{3,2}(M))$$

$$\begin{array}{ccc}
H_{B_6}(1,0) & H_{B_6}(1,1) & H_{B_6}(1,2) \\
\left( \begin{array}{ccc} \boxed{1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right) & \left( \begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{array} \right) & \left( \begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{array} \right) \\
H_{B_6}(2,0) & H_{B_6}(2,1) & H_{B_6}(2,2) \\
\left( \begin{array}{ccc} \boxed{1} & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{array} \right) & \left( \begin{array}{ccc} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{array} \right) & \left( \begin{array}{ccc} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{array} \right) \\
H_{B_6}(3,0) & H_{B_6}(3,1) & H_{B_6}(3,2) \\
\left( \begin{array}{ccc} \boxed{1} & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{array} \right) & \left( \begin{array}{ccc} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{array} \right) & \left( \begin{array}{ccc} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{array} \right)
\end{array}$$

Luego tenemos que  $\mathcal{T}_0 = \{M\}$  y  $\mathcal{T}_1(M) = \mathcal{S}(M) = \{B_1, B_2, B_3, B_4, B_5, B_6\}$ .

1.2. Vamos a construir  $\mathcal{T}_2(M)$ . Entonces, para cada  $B \in \mathcal{T}_1(M)$  hallamos  $\mathcal{S}(B)$ . Consideremos  $B_1$ ,  $d^*B_1 = 4$  e  $Ip(B_1) = \{(1,0), (2,0)\}$ . En este caso, para todo  $(k,b) \in Ip(B_1)$  tenemos que la sucesión para  $H_{B_1}(k,b)$  tiene solo un elemento (la misma hipercolumna), con lo cual  $R(B_1, k, b) = \emptyset$  para todo  $(k,b) \in Ip(B_1)$ . Por lo tanto,  $\mathcal{S}(B_1) = \emptyset$ . Por la misma razón,  $\mathcal{S}(B_3) = \mathcal{S}(B_6) = \emptyset$ .

Para  $B_2$  tenemos que  $d^*B_2 = 3$  e  $Ip(B_2) = \{(1,0), (2,0), (3,0), (3,1), (3,2)\}$ . Las sucesiones para cada una de las hipercolumnas involucradas en el cálculo de  $d^*B_2$  son:

$$H_{B_2}(1,0) = H_0^{1,0}(B_2) = \left( \begin{array}{ccc} \boxed{1} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{array} \right) > H_1^{1,0}(B_2) = \left( \begin{array}{ccc} \boxed{0} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{array} \right)$$

$$H_{B_2}(2,0) = H_0^{2,0}(B_2) = \left( \begin{array}{ccc} \boxed{1} & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{array} \right) > H_1^{2,0}(B_2) = \left( \begin{array}{ccc} \boxed{0} & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

$$H_{B_2}(3,0) = H_0^{3,0}(B_2) = \begin{pmatrix} \boxed{1} & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} > H_1^{3,0}(B_2) = \begin{pmatrix} \boxed{0} & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$H_{B_2}(3,1) = H_0^{3,1}(B_2) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} > H_1^{3,1}(B_2) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ > H_2^{3,1}(B_2) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$H_{B_2}(3,2) = H_0^{3,2}(B_2) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} > H_1^{3,2}(B_2) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \\ > H_2^{3,2}(B_2) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Y así,  $\mathcal{S}(B_2) = \{B_{2,i} : i = 1, \dots, 6\}$ , donde

$$B_{2,1} = (B_2, H_1^{1,0}(B_2)) = (B_2, H_1^{3,0}(B_2))$$

$$\begin{array}{ccc} H_{B_{2,1}}(1,0) & H_{B_{2,1}}(1,1) & H_{B_{2,1}}(1,2) \\ \begin{pmatrix} \boxed{0} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ H_{B_{2,1}}(2,0) & H_{B_{2,1}}(2,1) & H_{B_{2,1}}(2,2) \\ \begin{pmatrix} \boxed{0} & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ H_{B_{2,1}}(3,0) & H_{B_{2,1}}(3,1) & H_{B_{2,1}}(3,2) \\ \begin{pmatrix} \boxed{0} & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$



$$\begin{array}{ccc}
H_{B_{2,4}}(2,0) & H_{B_{2,4}}(2,1) & H_{B_{2,4}}(2,2) \\
\left( \begin{array}{ccc} \boxed{1} & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{array} \right) & \left( \begin{array}{ccc} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right) & \left( \begin{array}{ccc} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{array} \right) \\
H_{B_{2,4}}(3,0) & H_{B_{2,4}}(3,1) & H_{B_{2,4}}(3,2) \\
\left( \begin{array}{ccc} \boxed{1} & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{array} \right) & \left( \begin{array}{ccc} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right) & \left( \begin{array}{ccc} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right)
\end{array}$$

$$B_{2,5} = (B_2, H_1^{3,2}(B_2)).$$

$$\begin{array}{ccc}
H_{B_{2,5}}(1,0) & H_{B_{2,5}}(1,1) & H_{B_{2,5}}(1,2) \\
\left( \begin{array}{ccc} \boxed{1} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{array} \right) & \left( \begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{array} \right) & \left( \begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{array} \right) \\
H_{B_{2,5}}(2,0) & H_{B_{2,5}}(2,1) & H_{B_{2,5}}(2,2) \\
\left( \begin{array}{ccc} \boxed{1} & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{array} \right) & \left( \begin{array}{ccc} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{array} \right) & \left( \begin{array}{ccc} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{array} \right) \\
H_{B_{2,5}}(3,0) & H_{B_{2,5}}(3,1) & H_{B_{2,5}}(3,2) \\
\left( \begin{array}{ccc} \boxed{1} & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{array} \right) & \left( \begin{array}{ccc} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{array} \right) & \left( \begin{array}{ccc} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{array} \right)
\end{array}$$

$$B_{2,6} = (B_2, H_2^{3,2}(B_2)).$$

$$\begin{array}{ccc}
H_{B_{2,6}}(1,0) & H_{B_{2,6}}(1,1) & H_{B_{2,6}}(1,2) \\
\left( \begin{array}{ccc} \boxed{1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right) & \left( \begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{array} \right) & \left( \begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{array} \right) \\
H_{B_{2,6}}(2,0) & H_{B_{2,6}}(2,1) & H_{B_{2,6}}(2,2) \\
\left( \begin{array}{ccc} \boxed{1} & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{array} \right) & \left( \begin{array}{ccc} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{array} \right) & \left( \begin{array}{ccc} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{array} \right)
\end{array}$$

$$\begin{array}{ccc}
H_{B_{2,6}}(3,0) & H_{B_{2,6}}(3,1) & H_{B_{2,6}}(3,2) \\
\left( \begin{array}{ccc} \boxed{1} & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{array} \right) & \left( \begin{array}{ccc} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{array} \right) & \left( \begin{array}{ccc} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{array} \right)
\end{array}$$

Para  $B_4$ , tenemos que  $d^*B_4 = 4$  e  $Ip(B_4) = \{(3, 2)\}$ . La sucesión para la hipercolumna involucrada en el cálculo de  $d^*B_4$  es:

$$H_{B_4}(3,2) = H_0^{3,2}(B_4) = \left( \begin{array}{ccc} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{array} \right) > H_1^{3,2}(B_4) = \left( \begin{array}{ccc} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{array} \right)$$

Y así,  $\mathcal{S}(B_4) = \{B_{4,1}\}$ , donde  $B_{4,1} = (B_4, H_1^{3,2}(B_4))$  es la hipermatriz

$$\begin{array}{ccc}
H_{B_{4,1}}(1,0) & H_{B_{4,1}}(1,1) & H_{B_{4,1}}(1,2) \\
\left( \begin{array}{ccc} \boxed{1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{array} \right) & \left( \begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{array} \right) & \left( \begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{array} \right) \\
H_{B_{4,1}}(2,0) & H_{B_{4,1}}(2,1) & H_{B_{4,1}}(2,2) \\
\left( \begin{array}{ccc} \boxed{1} & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{array} \right) & \left( \begin{array}{ccc} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{array} \right) & \left( \begin{array}{ccc} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{array} \right) \\
H_{B_{4,1}}(3,0) & H_{B_{4,1}}(3,1) & H_{B_{4,1}}(3,2) \\
\left( \begin{array}{ccc} \boxed{1} & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{array} \right) & \left( \begin{array}{ccc} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{array} \right) & \left( \begin{array}{ccc} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{array} \right)
\end{array}$$

En el caso de  $B_5$ , tenemos  $d^*B_5 = 4$  e  $Ip(B_5) = \{(1, 1), (3, 1), (3, 2)\}$ . La sucesiones para las hipercolumnas involucradas en el cálculo de  $d^*B_5$  son:

$$H_{B_5}(1,1) = H_0^{1,1}(B_5) = \left( \begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{array} \right) > H_1^{1,1}(B_5) = \left( \begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

$$H_{B_5}(3,1) = H_0^{3,1}(B_5) = \left( \begin{array}{ccc} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{array} \right) > H_1^{3,1}(B_5) = \left( \begin{array}{ccc} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{array} \right)$$

$$H_{B_5}(3, 2) = H_0^{3,2}(B_5) = \begin{pmatrix} \text{0} & \text{1} & \text{1} \\ \text{0} & \text{0} & \text{0} \\ \text{0} & \text{1} & \text{1} \end{pmatrix} > H_1^{3,2}(B_5) = \begin{pmatrix} \text{0} & \text{0} & \text{0} \\ \text{0} & \text{0} & \text{0} \\ \text{0} & \text{1} & \text{0} \end{pmatrix}$$

Por lo tanto,  $\mathcal{S}(B_5) = \{B_{5,i} : i = 1, \dots, 3\}$ , donde

$$B_{5,1} = (B_5, H_1^{1,1}(B_5))$$

$$\begin{array}{ccc} H_{B_{5,1}}(1, 0) & H_{B_{5,1}}(1, 1) & H_{B_{5,1}}(1, 2) \\ \begin{pmatrix} \text{1} & \text{0} & \text{0} \\ \text{0} & \text{1} & \text{1} \\ \text{0} & \text{1} & \text{1} \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} \text{1} & \text{0} & \text{0} \\ \text{1} & \text{0} & \text{0} \\ \text{1} & \text{0} & \text{0} \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} \text{1} & \text{0} & \text{0} \\ \text{1} & \text{0} & \text{0} \\ \text{1} & \text{0} & \text{0} \end{pmatrix} \\ H_{B_{5,1}}(2, 0) & H_{B_{5,1}}(2, 1) & H_{B_{5,1}}(2, 2) \\ \begin{pmatrix} \text{1} & \text{0} & \text{0} \\ \text{1} & \text{0} & \text{0} \\ \text{1} & \text{0} & \text{0} \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} \text{0} & \text{1} & \text{1} \\ \text{1} & \text{0} & \text{0} \\ \text{1} & \text{0} & \text{0} \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} \text{0} & \text{1} & \text{1} \\ \text{1} & \text{0} & \text{0} \\ \text{1} & \text{0} & \text{0} \end{pmatrix} \\ H_{B_{5,1}}(3, 0) & H_{B_{5,1}}(3, 1) & H_{B_{5,1}}(3, 2) \\ \begin{pmatrix} \text{1} & \text{0} & \text{0} \\ \text{1} & \text{1} & \text{1} \\ \text{1} & \text{1} & \text{1} \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} \text{0} & \text{1} & \text{1} \\ \text{0} & \text{0} & \text{0} \\ \text{0} & \text{1} & \text{0} \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} \text{0} & \text{1} & \text{1} \\ \text{0} & \text{0} & \text{0} \\ \text{0} & \text{0} & \text{0} \end{pmatrix} \end{array}$$

$$B_{5,2} = (B_5, H_1^{3,1}(B_5))$$

$$\begin{array}{ccc} H_{B_{5,2}}(1, 0) & H_{B_{5,2}}(1, 1) & H_{B_{5,2}}(1, 2) \\ \begin{pmatrix} \text{1} & \text{0} & \text{0} \\ \text{0} & \text{1} & \text{0} \\ \text{0} & \text{0} & \text{1} \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} \text{1} & \text{0} & \text{0} \\ \text{1} & \text{1} & \text{0} \\ \text{1} & \text{0} & \text{0} \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} \text{1} & \text{0} & \text{0} \\ \text{1} & \text{0} & \text{0} \\ \text{1} & \text{0} & \text{1} \end{pmatrix} \\ H_{B_{5,2}}(2, 0) & H_{B_{5,2}}(2, 1) & H_{B_{5,2}}(2, 2) \\ \begin{pmatrix} \text{1} & \text{0} & \text{0} \\ \text{1} & \text{0} & \text{0} \\ \text{1} & \text{0} & \text{0} \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} \text{0} & \text{1} & \text{0} \\ \text{1} & \text{1} & \text{0} \\ \text{1} & \text{0} & \text{0} \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} \text{0} & \text{0} & \text{1} \\ \text{1} & \text{0} & \text{0} \\ \text{1} & \text{0} & \text{1} \end{pmatrix} \\ H_{B_{5,2}}(3, 0) & H_{B_{5,2}}(3, 1) & H_{B_{5,2}}(3, 2) \\ \begin{pmatrix} \text{1} & \text{0} & \text{0} \\ \text{1} & \text{1} & \text{1} \\ \text{1} & \text{1} & \text{1} \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} \text{0} & \text{1} & \text{0} \\ \text{0} & \text{1} & \text{0} \\ \text{0} & \text{1} & \text{0} \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} \text{0} & \text{0} & \text{1} \\ \text{0} & \text{0} & \text{0} \\ \text{0} & \text{0} & \text{1} \end{pmatrix} \end{array}$$

$$B_{5,3} = (B_5, H_1^{3,2}(B_5))$$

$$\begin{array}{ccc}
H_{B_{5,3}}(1,0) & H_{B_{5,3}}(1,1) & H_{B_{5,3}}(1,2) \\
\left( \begin{array}{ccc} \boxed{1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right) & \left( \begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{array} \right) & \left( \begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{array} \right) \\
H_{B_{5,3}}(2,0) & H_{B_{5,3}}(2,1) & H_{B_{5,3}}(2,2) \\
\left( \begin{array}{ccc} \boxed{1} & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{array} \right) & \left( \begin{array}{ccc} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{array} \right) & \left( \begin{array}{ccc} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{array} \right) \\
H_{B_{5,3}}(3,0) & H_{B_{5,3}}(3,1) & H_{B_{5,3}}(3,2) \\
\left( \begin{array}{ccc} \boxed{1} & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{array} \right) & \left( \begin{array}{ccc} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{array} \right) & \left( \begin{array}{ccc} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{array} \right)
\end{array}$$

Luego,  $\mathcal{T}_2(M) = \cup_{B \in \mathcal{T}_1(M)} \mathcal{S}(B) = \mathcal{S}(B_2) \cup \mathcal{S}(B_4) \cup \mathcal{S}(B_5)$ .

1.3. Vamos a construir ahora  $\mathcal{T}_3(M)$ . Para cada  $B \in \mathcal{T}_2(M)$  hallamos  $\mathcal{S}(B)$ .

Consideremos  $B_{2,1}$ . Entonces  $d^*B_{2,1} = 4$  e  $Ip(B_{2,1}) = \{(1,0), (2,0), (3,2)\}$ . La sucesión de matrices para  $H_{B_{2,1}}(1,0)$  tiene solo un elemento (la misma hipercolumna), con lo cual  $R(B_{2,1}, 1, 0) = \emptyset$ . Por el mismo motivo,  $R(B_{2,1}, 2, 0) = \emptyset$ . Veamos la sucesión para  $H_{B_{2,1}}(3,2)$  :

$$H_{B_{2,1}}(3,2) = H_0^{3,2}(B_{2,1}) = \left( \begin{array}{ccc} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{array} \right) > H_1^{3,2}(B_{2,1}) = \left( \begin{array}{ccc} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{array} \right)$$

Luego,  $\mathcal{S}(B_{2,1}) = \{B_{2,1,1}\}$  donde  $B_{2,1,1} = (B_{2,1}, H_1^{3,2}(B_{2,1}))$  es la hipermatriz:

$$\begin{array}{ccc}
H_{B_{2,1,1}}(1,0) & H_{B_{2,1,1}}(1,1) & H_{B_{2,1,1}}(1,2) \\
\left( \begin{array}{ccc} \boxed{0} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right) & \left( \begin{array}{ccc} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{array} \right) & \left( \begin{array}{ccc} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{array} \right)
\end{array}$$

$$\begin{array}{ccc}
H_{B_{2,1,1}}(2,0) & H_{B_{2,1,1}}(2,1) & H_{B_{2,1,1}}(2,2) \\
\begin{pmatrix} \boxed{0} & \text{0} & \text{0} \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} \text{0} & \text{0} & \text{0} \\ \text{1} & \text{1} & \text{0} \\ \text{1} & \text{0} & \text{1} \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} \text{0} & \text{0} & \text{0} \\ \text{1} & \text{1} & \text{0} \\ \text{1} & \text{0} & \text{1} \end{pmatrix} \\
H_{B_{2,1,1}}(3,0) & H_{B_{2,1,1}}(3,1) & H_{B_{2,1,1}}(3,2) \\
\begin{pmatrix} \boxed{0} & \text{0} & \text{0} \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} \text{0} & \text{0} & \text{0} \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} \text{0} & \text{0} & \text{0} \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}
\end{array}$$

Consideremos  $B_{2,3}$ . Entonces  $d^*B_{2,3} = 4$  e  $Ip(B_{2,3}) = \{(1,1), (1,2), (3,1), (3,2)\}$ . La sucesiones para las hipercolumnas involucradas en el cálculo de  $d^*B_{2,3}$  son:

$$H_{B_{2,3}}(1,1) = H_0^{1,1}(B_{2,3}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} > H_1^{1,1}(B_{2,3}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$H_{B_{2,3}}(1,2) = H_0^{1,2}(B_{2,3}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} > H_1^{1,2}(B_{2,3}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$H_{B_{2,3}}(3,1) = H_0^{3,1}(B_{2,3}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} > H_1^{3,1}(B_{2,3}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$H_{B_{2,3}}(3,2) = H_0^{3,2}(B_{2,3}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} > H_1^{3,2}(B_{2,3}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Luego,  $\mathcal{S}(B_{2,3}) = \{B_{2,3,i} : i = \{1, \dots, 4\}\}$  donde

$$B_{2,3,1} = (B_{2,3}, H_1^{1,1}(B_{2,3}))$$

$$\begin{array}{ccc}
H_{B_{2,3,1}}(1,0) & H_{B_{2,3,1}}(1,1) & H_{B_{2,3,1}}(1,2) \\
\begin{pmatrix} \boxed{1} & \text{0} & \text{0} \\ \text{0} & \text{1} & \text{1} \\ \text{0} & \text{1} & \text{1} \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}
\end{array}$$



$$\begin{array}{ccc}
H_{B_{2,3,1}}(2,0) & H_{B_{2,3,1}}(2,1) & H_{B_{2,3,1}}(2,2) \\
\begin{pmatrix} \boxed{1} & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
H_{B_{2,3,1}}(3,0) & H_{B_{2,3,1}}(3,1) & H_{B_{2,3,1}}(3,2) \\
\begin{pmatrix} \boxed{1} & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}
\end{array}$$

$$B_{2,3,2} = (B_{2,3}, H_1^{1,2}(B_{2,3}))$$

$$\begin{array}{ccc}
H_{B_{2,3,2}}(1,0) & H_{B_{2,3,2}}(1,1) & H_{B_{2,3,2}}(1,2) \\
\begin{pmatrix} \boxed{1} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
H_{B_{2,3,2}}(2,0) & H_{B_{2,3,2}}(2,1) & H_{B_{2,3,2}}(2,2) \\
\begin{pmatrix} \boxed{1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
H_{B_{2,3,2}}(3,0) & H_{B_{2,3,2}}(3,1) & H_{B_{2,3,2}}(3,2) \\
\begin{pmatrix} \boxed{1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}
\end{array}$$

$$B_{2,3,3} = (B_{2,3}, H_1^{3,1}(B_{2,3}))$$

$$\begin{array}{ccc}
H_{B_{2,3,3}}(1,0) & H_{B_{2,3,3}}(1,1) & H_{B_{2,3,3}}(1,2) \\
\begin{pmatrix} \boxed{1} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
H_{B_{2,3,3}}(2,0) & H_{B_{2,3,3}}(2,1) & H_{B_{2,3,3}}(2,2) \\
\begin{pmatrix} \boxed{1} & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}
\end{array}$$

$$\begin{array}{ccc}
H_{B_{2,3,3}}(3,0) & H_{B_{2,3,3}}(3,1) & H_{B_{2,3,3}}(3,2) \\
\left( \begin{array}{ccc} \boxed{1} & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{array} \right) & \left( \begin{array}{ccc} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right) & \left( \begin{array}{ccc} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right)
\end{array}$$

$$B_{2,3,4} = (B_{2,3}, H_1^{3,2}(B_{2,3}))$$

$$\begin{array}{ccc}
H_{B_{2,3,4}}(1,0) & H_{B_{2,3,4}}(1,1) & H_{B_{2,3,4}}(1,2) \\
\left( \begin{array}{ccc} \boxed{1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right) & \left( \begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{array} \right) & \left( \begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{array} \right)
\end{array}$$

$$\begin{array}{ccc}
H_{B_{2,3,4}}(2,0) & H_{B_{2,3,4}}(2,1) & H_{B_{2,3,4}}(2,2) \\
\left( \begin{array}{ccc} \boxed{1} & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{array} \right) & \left( \begin{array}{ccc} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array} \right) & \left( \begin{array}{ccc} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{array} \right)
\end{array}$$

$$\begin{array}{ccc}
H_{B_{2,3,4}}(3,0) & H_{B_{2,3,4}}(3,1) & H_{B_{2,3,4}}(3,2) \\
\left( \begin{array}{ccc} \boxed{1} & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{array} \right) & \left( \begin{array}{ccc} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right) & \left( \begin{array}{ccc} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{array} \right)
\end{array}$$

Para  $B_{2,5}$ ,  $d^*B_{2,5} = 4$  e  $Ip(B_{2,5}) = \{(1,1), (3,1), (3,2)\}$ . La sucesiones para las hipercolumnas involucradas en el cálculo de  $d^*B_{2,5}$  son:

$$H_{B_{2,5}}(1,1) = H_0^{1,1}(B_{2,5}) = \left( \begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{array} \right) > H_1^{1,1}(B_{2,5}) = \left( \begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

$$H_{B_{2,5}}(3,1) = H_0^{3,1}(B_{2,5}) = \left( \begin{array}{ccc} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{array} \right) > H_1^{3,1}(B_{2,5}) = \left( \begin{array}{ccc} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{array} \right)$$

$$H_{B_{2,5}}(3,2) = H_0^{3,2}(B_{2,5}) = \left( \begin{array}{ccc} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{array} \right) > H_1^{3,2}(B_{2,5}) = \left( \begin{array}{ccc} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{array} \right)$$

Entonces,  $\mathcal{S}(B_{2,5}) = \{B_{2,5,i} : i = \{1, \dots, 3\}\}$  donde



$$\begin{array}{ccc}
H_{B_{2,5,3}}(2,0) & H_{B_{2,5,3}}(2,1) & H_{B_{2,5,3}}(2,2) \\
\left( \begin{array}{ccc} \boxed{1} & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{array} \right) & \left( \begin{array}{ccc} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{array} \right) & \left( \begin{array}{ccc} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{array} \right) \\
H_{B_{2,5,3}}(3,0) & H_{B_{2,5,3}}(3,1) & H_{B_{2,5,3}}(3,2) \\
\left( \begin{array}{ccc} \boxed{1} & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{array} \right) & \left( \begin{array}{ccc} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{array} \right) & \left( \begin{array}{ccc} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{array} \right)
\end{array}$$

Consideremos  $B_{4,1}$ . Entonces,  $d^*B_{4,1} = 4$  e  $Ip(B_{4,1}) = \{(2,1)\}$ . La sucesión para la hipercolumna involucrada en el cálculo de  $d^*B_{4,1}$  es:

$$H_{B_{4,1}}(2,1) = H_0^{2,1}(B_{4,1}) = \left( \begin{array}{ccc} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{array} \right) > H_1^{2,1}(B_{4,1}) = \left( \begin{array}{ccc} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

Y así,  $\mathcal{S}(B_{4,1}) = \{B_{4,1,1}\}$  donde  $B_{4,1,1} = (B_{4,1}, H_1^{2,1}(B_{4,1}))$  es la hipermatriz:

$$\begin{array}{ccc}
H_{B_{4,1,1}}(1,0) & H_{B_{4,1,1}}(1,1) & H_{B_{4,1,1}}(1,2) \\
\left( \begin{array}{ccc} \boxed{1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{array} \right) & \left( \begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{array} \right) & \left( \begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{array} \right) \\
H_{B_{4,1,1}}(2,0) & H_{B_{4,1,1}}(2,1) & H_{B_{4,1,1}}(2,2) \\
\left( \begin{array}{ccc} \boxed{1} & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{array} \right) & \left( \begin{array}{ccc} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{array} \right) & \left( \begin{array}{ccc} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{array} \right) \\
H_{B_{4,1,1}}(3,0) & H_{B_{4,1,1}}(3,1) & H_{B_{4,1,1}}(3,2) \\
\left( \begin{array}{ccc} \boxed{1} & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{array} \right) & \left( \begin{array}{ccc} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{array} \right) & \left( \begin{array}{ccc} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{array} \right)
\end{array}$$

Para  $B_{5,1}$ ,  $d^*B_{5,1} = 6$ ,  $Ip(B_{5,1}) = \{(3,1), (3,2)\}$  y  $R(B_{5,1}, 3, 2) = \emptyset$ . La sucesión correspondiente a  $H_{B_{5,1}}(3,1)$  es:

$$H_{B_{5,1}}(3,1) = H_0^{3,1}(B_{5,1}) = \left( \begin{array}{ccc} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{array} \right) > H_1^{3,1}(B_{5,1}) = \left( \begin{array}{ccc} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{array} \right)$$

Por lo tanto,  $\mathcal{S}(B_{5,1}) = \{B_{5,1,1}\}$  donde  $B_{5,1,1} = (B_{5,1}, H_1^{3,1}(B_{5,1}))$  es la hipermatriz:

$$\begin{array}{ccc}
H_{B_{5,1,1}}(1,0) & H_{B_{5,1,1}}(1,1) & H_{B_{5,1,1}}(1,2) \\
\left( \begin{array}{ccc} \boxed{1} & \text{0} & \text{0} \\ \text{0} & \text{1} & \text{0} \\ \text{0} & \text{0} & \text{1} \end{array} \right) & \left( \begin{array}{ccc} \text{1} & \text{0} & \text{0} \\ \text{1} & \text{0} & \text{0} \\ \text{1} & \text{0} & \text{0} \end{array} \right) & \left( \begin{array}{ccc} \text{1} & \text{0} & \text{0} \\ \text{1} & \text{0} & \text{0} \\ \text{1} & \text{0} & \text{0} \end{array} \right) \\
H_{B_{5,1,1}}(2,0) & H_{B_{5,1,1}}(2,1) & H_{B_{5,1,1}}(2,2) \\
\left( \begin{array}{ccc} \boxed{1} & \text{0} & \text{0} \\ \text{1} & \text{0} & \text{0} \\ \text{1} & \text{0} & \text{0} \end{array} \right) & \left( \begin{array}{ccc} \text{0} & \text{1} & \text{0} \\ \text{1} & \text{0} & \text{0} \\ \text{1} & \text{0} & \text{0} \end{array} \right) & \left( \begin{array}{ccc} \text{0} & \text{0} & \text{1} \\ \text{1} & \text{0} & \text{0} \\ \text{1} & \text{0} & \text{0} \end{array} \right) \\
H_{B_{5,1,1}}(3,0) & H_{B_{5,1,1}}(3,1) & H_{B_{5,1,1}}(3,2) \\
\left( \begin{array}{ccc} \boxed{1} & \text{0} & \text{0} \\ \text{1} & \text{1} & \text{1} \\ \text{1} & \text{1} & \text{1} \end{array} \right) & \left( \begin{array}{ccc} \text{0} & \text{1} & \text{0} \\ \text{0} & \text{1} & \text{0} \\ \text{0} & \text{1} & \text{0} \end{array} \right) & \left( \begin{array}{ccc} \text{0} & \text{0} & \text{1} \\ \text{0} & \text{0} & \text{0} \\ \text{0} & \text{0} & \text{0} \end{array} \right)
\end{array}$$

Para  $B_{5,2}$  tenemos  $d^*B_{5,2} = 6$ ,  $Ip(B_{5,2}) = \{(1,1), (3,2)\}$  y  $R(B_{5,2}, 3, 2) = \emptyset$ . La sucesión para  $H_{B_{5,2}}(1,1)$  es:

$$H_{B_{5,2}}(1,1) = H_0^{1,1}(B_{5,1}) = \left( \begin{array}{ccc} \text{1} & \text{0} & \text{0} \\ \text{1} & \text{1} & \text{0} \\ \text{1} & \text{0} & \text{0} \end{array} \right) > H_1^{1,1}(B_{5,2}) = \left( \begin{array}{ccc} \text{1} & \text{0} & \text{0} \\ \text{1} & \text{0} & \text{0} \\ \text{1} & \text{0} & \text{0} \end{array} \right)$$

Luego,  $\mathcal{S}(B_{5,2}) = \{B_{5,2,1}\}$  donde  $B_{5,2,1} = (B_{5,2}, H_1^{1,1}(B_{5,2}))$ . Pero  $B_{5,2,1} = B_{5,1,1}$ , entonces  $\mathcal{S}(B_{5,2}) = \mathcal{S}(B_{5,1})$ .

Por otra parte,  $\mathcal{S}(B_{2,2}) = \mathcal{S}(B_{2,4}) = \mathcal{S}(B_{2,6}) = \mathcal{S}(B_{5,3}) = \emptyset$ . Con lo cual,  $\mathcal{T}_3(M) = \cup_{B \in \mathcal{T}_2(M)} \mathcal{S}(B) = \mathcal{S}(B_{2,1}) \cup \mathcal{S}(B_{2,3}) \cup \mathcal{S}(B_{2,5}) \cup \mathcal{S}(B_{4,1}) \cup \mathcal{S}(B_{5,1})$ .

1.4. Para construir  $\mathcal{T}_4(M)$ , repetimos el proceso. Para cada  $B \in \mathcal{T}_3(M)$  hallamos  $\mathcal{S}(B)$ .

Consideremos  $B_{2,1,1}$ . Entonces  $d^*B_{2,1,1} = 6$  e  $Ip(d^*B_{2,1,1}) = \{(3,1)\}$ . La sucesión correspondiente a la hipercolumna involucrada en el cálculo de  $d^*B_{2,1,1}$  es

$$\begin{aligned}
H_{B_{2,1,1}}(3,1) &= H_0^{3,1}(B_{2,1,1}) = \left( \begin{array}{ccc} \text{0} & \text{0} & \text{0} \\ \text{1} & \text{1} & \text{1} \\ \text{0} & \text{1} & \text{0} \end{array} \right) \\
&> H_1^{3,1}(B_{2,1,1}) = \left( \begin{array}{ccc} \text{0} & \text{0} & \text{0} \\ \text{1} & \text{1} & \text{1} \\ \text{0} & \text{0} & \text{0} \end{array} \right)
\end{aligned}$$

Luego,  $\mathcal{S}(B_{2,1,1}) = \{B_{2,1,1,1}\}$  donde  $B_{2,1,1,1} = (B_{2,1,1}, H_1^{3,1}(B_{2,1,1}))$  es la hipermatriz:

$$\begin{array}{ccc}
H_{B_{2,1,1,1}}(1,0) & H_{B_{2,1,1,1}}(1,1) & H_{B_{2,1,1,1}}(1,2) \\
\begin{pmatrix} \boxed{0} & \text{0} & \text{0} \\ \text{0} & \text{0} & \text{0} \\ \text{0} & \text{0} & \text{0} \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} \text{1} & \text{1} & \text{0} \\ \text{1} & \text{1} & \text{0} \\ \text{0} & \text{1} & \text{0} \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} \text{1} & \text{0} & \text{1} \\ \text{0} & \text{0} & \text{1} \\ \text{1} & \text{0} & \text{1} \end{pmatrix} \\
H_{B_{2,1,1,1}}(2,0) & H_{B_{2,1,1,1}}(2,1) & H_{B_{2,1,1,1}}(2,2) \\
\begin{pmatrix} \boxed{0} & \text{0} & \text{0} \\ \text{1} & \text{1} & \text{0} \\ \text{1} & \text{0} & \text{1} \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} \text{0} & \text{0} & \text{0} \\ \text{1} & \text{1} & \text{0} \\ \text{0} & \text{0} & \text{1} \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} \text{0} & \text{0} & \text{0} \\ \text{0} & \text{1} & \text{0} \\ \text{1} & \text{0} & \text{1} \end{pmatrix} \\
H_{B_{2,1,1,1}}(3,0) & H_{B_{2,1,1,1}}(3,1) & H_{B_{2,1,1,1}}(3,2) \\
\begin{pmatrix} \boxed{0} & \text{0} & \text{0} \\ \text{1} & \text{1} & \text{0} \\ \text{1} & \text{0} & \text{1} \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} \text{0} & \text{0} & \text{0} \\ \text{1} & \text{1} & \text{1} \\ \text{0} & \text{0} & \text{0} \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} \text{0} & \text{0} & \text{0} \\ \text{0} & \text{0} & \text{0} \\ \text{1} & \text{1} & \text{1} \end{pmatrix}
\end{array}$$

Para  $B_{2,3,1}$ ,  $d^* B_{2,3,1} = 6$  e  $Ip(d^* B_{2,3,1}) = \{(1,1), (1,2), (2,1), (3,1), (3,2)\}$ . Las parejas  $(1,1), (1,2), (3,1), (3,2)$  no aportan en la construcción de  $\mathcal{S}(B_{2,3,1})$ . La sucesión correspondiente a  $(2,1)$  es:

$$\begin{aligned}
H_{B_{2,3,1}}(2,1) &= H_0^{2,1}(B_{2,3,1}) = \begin{pmatrix} \text{0} & \text{1} & \text{1} \\ \text{1} & \text{0} & \text{0} \\ \text{0} & \text{0} & \text{0} \end{pmatrix} \\
&> H_1^{2,1}(B_{2,3,1}) = \begin{pmatrix} \text{0} & \text{1} & \text{1} \\ \text{0} & \text{0} & \text{0} \\ \text{0} & \text{0} & \text{0} \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Luego,  $\mathcal{S}(B_{2,3,1}) = \{B_{2,3,1,1}\}$  donde  $B_{2,3,1,1} = (B_{2,3,1}, H_1^{2,1}(B_{2,3,1}))$  es la hipermatriz:

$$\begin{array}{ccc}
H_{B_{2,3,1,1}}(1,0) & H_{B_{2,3,1,1}}(1,1) & H_{B_{2,3,1,1}}(1,2) \\
\begin{pmatrix} \boxed{1} & \text{0} & \text{0} \\ \text{0} & \text{1} & \text{1} \\ \text{0} & \text{1} & \text{1} \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} \text{1} & \text{0} & \text{0} \\ \text{0} & \text{0} & \text{0} \\ \text{0} & \text{0} & \text{0} \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} \text{1} & \text{0} & \text{0} \\ \text{0} & \text{0} & \text{0} \\ \text{0} & \text{0} & \text{0} \end{pmatrix} \\
H_{B_{2,3,1,1}}(2,0) & H_{B_{2,3,1,1}}(2,1) & H_{B_{2,3,1,1}}(2,2) \\
\begin{pmatrix} \boxed{1} & \text{0} & \text{0} \\ \text{1} & \text{0} & \text{0} \\ \text{1} & \text{0} & \text{0} \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} \text{0} & \text{1} & \text{1} \\ \text{0} & \text{0} & \text{0} \\ \text{0} & \text{0} & \text{0} \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} \text{0} & \text{1} & \text{1} \\ \text{0} & \text{0} & \text{0} \\ \text{0} & \text{0} & \text{0} \end{pmatrix}
\end{array}$$

$$\begin{array}{ccc}
H_{B_{2,3,1,1}}(3,0) & H_{B_{2,3,1,1}}(3,1) & H_{B_{2,3,1,1}}(3,2) \\
\left( \begin{array}{ccc} \boxed{1} & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{array} \right) & \left( \begin{array}{ccc} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right) & \left( \begin{array}{ccc} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right)
\end{array}$$

Para  $B_{2,5,1}$  tenemos que  $d^*B_{2,5,1} = 6$ ,  $Ip(d^*B_{2,5,1}) = \{(3,1), (3,2)\}$  y  $R(B_{2,5,1}, 3, 2) = \emptyset$ . La sucesión correspondiente a  $(3,1)$  es:

$$\begin{aligned}
H_{B_{2,5,1}}(3,1) &= H_0^{3,1}(B_{2,5,1}) = \left( \begin{array}{ccc} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{array} \right) \\
&> H_1^{3,1}(B_{2,5,1}) = \left( \begin{array}{ccc} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{array} \right)
\end{aligned}$$

Entonces,  $\mathcal{S}(B_{2,5,1}) = \{B_{2,5,1,1}\}$  donde  $B_{2,5,1,1} = (B_{2,5,1}, H_1^{3,1}(B_{2,5,1}))$  es la hipermatriz:

$$\begin{array}{ccc}
H_{B_{2,5,1,1}}(1,0) & H_{B_{2,5,1,1}}(1,1) & H_{B_{2,5,1,1}}(1,2) \\
\left( \begin{array}{ccc} \boxed{1} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array} \right) & \left( \begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{array} \right) & \left( \begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{array} \right) \\
H_{B_{2,5,1,1}}(2,0) & H_{B_{2,5,1,1}}(2,1) & H_{B_{2,5,1,1}}(2,2) \\
\left( \begin{array}{ccc} \boxed{1} & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{array} \right) & \left( \begin{array}{ccc} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{array} \right) & \left( \begin{array}{ccc} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{array} \right) \\
H_{B_{2,5,1,1}}(3,0) & H_{B_{2,5,1,1}}(3,1) & H_{B_{2,5,1,1}}(3,2) \\
\left( \begin{array}{ccc} \boxed{1} & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{array} \right) & \left( \begin{array}{ccc} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{array} \right) & \left( \begin{array}{ccc} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right)
\end{array}$$

Para  $B_{2,5,2}$  tenemos que  $d^*B_{2,5,2} = 6$ ,  $Ip(d^*B_{2,5,2}) = \{(1,1), (3,2)\}$  y  $R(B_{2,5,2}, 3, 2) = \emptyset$ . La sucesión correspondiente a  $(1,1)$  es:

$$\begin{aligned}
H_{B_{2,5,2}}(1,1) &= H_0^{1,1}(B_{2,5,2}) = \left( \begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{array} \right) \\
&> H_1^{1,1}(B_{2,5,2}) = \left( \begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{array} \right)
\end{aligned}$$

Así que,  $\mathcal{S}(B_{2,5,2}) = \{B_{2,5,2,1}\}$  donde  $B_{2,5,2,1} = (B_{2,5,2}, H_1^{1,1}(B_{2,5,2}))$ . Pero  $B_{2,5,2,1} = B_{2,5,1,1}$ , entonces  $\mathcal{S}(B_{2,5,2}) = \mathcal{S}(B_{2,5,1})$ .

De otro lado tenemos que

$$\mathcal{S}(B_{2,3,2}) = \mathcal{S}(B_{2,3,3}) = \mathcal{S}(B_{2,3,4}) = \mathcal{S}(B_{2,5,3}) = \mathcal{S}(B_{4,1,1}) = \mathcal{S}(B_{5,1,1}) = \emptyset.$$

$$\text{Entonces } \mathcal{T}_4(M) = \bigcup_{B \in \mathcal{T}_3(M)} \mathcal{S}(B) = \{B_{2,1,1,1}, B_{2,3,1,1}, B_{2,5,1,1}\}.$$

1.5. Construiremos ahora  $\mathcal{T}_5(M)$ , para lo cual hallamos  $\mathcal{S}(B)$ , para toda hipermatriz  $B \in \mathcal{T}_4(M)$ .

Consideremos  $B_{2,1,1,1}$ . Entonces  $d^*B_{2,1,1,1} = 8$ ,  $Ip(B_{2,1,1,1}) = \{(1, 2)\}$  y la sucesión correspondiente a la hipercolumna involucrada en el cálculo de  $d^*B_{2,1,1,1}$  es:

$$\begin{aligned} H_{B_{2,1,1,1}}(1, 2) &= H_0^{1,2}(B_{2,1,1,1}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &> H_1^{1,2}(B_{2,1,1,1}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Entonces,  $\mathcal{S}(B_{2,1,1,1}) = \{B_{2,1,1,1,1}\}$  donde  $B_{2,1,1,1,1} = (B_{2,1,1,1}, H_1^{1,2}(B_{2,1,1,1}))$  es la hipermatriz:

$$\begin{array}{ccc} H_{B_{2,1,1,1,1}}(1, 0) & H_{B_{2,1,1,1,1}}(1, 1) & H_{B_{2,1,1,1,1}}(1, 2) \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ H_{B_{2,1,1,1,1}}(2, 0) & H_{B_{2,1,1,1,1}}(2, 1) & H_{B_{2,1,1,1,1}}(2, 2) \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ H_{B_{2,1,1,1,1}}(3, 0) & H_{B_{2,1,1,1,1}}(3, 1) & H_{B_{2,1,1,1,1}}(3, 2) \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

Dado que  $\mathcal{S}(B_{2,3,1,1}) = \mathcal{S}(B_{2,5,1,1}) = \emptyset$ , tenemos que  $\mathcal{T}_5(M) = B_{2,1,1,1,1}$ . Y  $\mathcal{S}(B_{2,1,1,1,1}) = \emptyset$ , luego  $\mathcal{T}_6(M) = \emptyset$ .



Entonces  $\mathcal{T}(\mathcal{M}_0) = \bigcup_{j=0}^5 \mathcal{T}_j(M)$ ,  $m_0 = \min \{d^* N : N \in \mathcal{T}(\mathcal{M}_0)\} = 3$  y

$$\begin{aligned} \eta_0 = & \{N \in \mathcal{T}(\mathcal{M}_0) : \mathcal{S}(N) = \emptyset\} \\ & \{B_1, B_3, B_6\} \cup \{B_{2,2}, B_{2,4}, B_{2,6}, B_{5,3}\} \\ & \cup \{B_{2,3,2}, B_{2,3,3}, B_{2,3,4}, B_{2,5,3}, B_{4,1,1}, B_{5,1,1}\} \\ & \cup \{B_{2,3,1,1}, B_{2,5,1,1}\} \cup \{B_{2,1,1,1,1}\} \end{aligned}$$

como se puede verificar con la siguiente tabla:

Hipermatriz $B$	Dist. aparente	$S(B) = \emptyset \rightarrow Si$
$B_1$	4	$Si$
$B_2$	3	
$B_{2,1}$	4	
$B_{2,1,1}$	6	
$B_{2,1,1,1}$	8	
$B_{2,1,1,1,1}$	6	$Si$
$B_{2,2}$	6	$Si$
$B_{2,3}$	4	
$B_{2,3,1}$	6	
$B_{2,3,1,1}$	9	$Si$
$B_{2,3,2}$	9	$Si$
$B_{2,3,3}$	9	$Si$
$B_{2,3,4}$	9	$Si$
$B_{2,4}$	9	$Si$
$B_{2,5}$	4	
$B_{2,5,1}$	6	
$B_{2,5,1,1}$	9	$Si$
$B_{2,5,2}$	6	
$B_{2,5,3}$	9	$Si$
$B_{2,6}$	9	$Si$
$B_3$	6	$Si$
$B_4$	4	
$B_{4,1}$	4	
$B_{4,1,1}$	3	$Si$
$B_5$	4	
$B_{5,1}$	6	
$B_{5,1,1}$	9	$Si$
$B_{5,2}$	6	
$B_{5,3}$	9	$Si$
$B_6$	9	$Si$

2. Vamos a construir  $\mathcal{M}_1$ . Para cada  $N \in \eta_0$ , hallamos la hipermatriz  $L(N) < N$ , de soporte máximo, tal que  $H_{L(N)}(k, b) = 0$ , para toda  $(k, b) \in Ip(N)$ .

$d^* B_1 = 4$ ,  $Ip(B_1) = \{(2, 0), (1, 0)\}$  y  $L(B_1)$  es la hipermatriz:

$$\begin{array}{ccc}
 H_{L(B_1)}(1, 0) & H_{L(B_1)}(1, 1) & H_{L(B_1)}(1, 2) \\
 \left( \begin{array}{ccc} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right) & \left( \begin{array}{ccc} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{array} \right) & \left( \begin{array}{ccc} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{array} \right) \\
 \\
 H_{L(B_1)}(2, 0) & H_{L(B_1)}(2, 1) & H_{L(B_1)}(2, 2) \\
 \left( \begin{array}{ccc} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right) & \left( \begin{array}{ccc} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{array} \right) & \left( \begin{array}{ccc} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{array} \right) \\
 \\
 H_{L(B_1)}(3, 0) & H_{L(B_1)}(3, 1) & H_{L(B_1)}(3, 2) \\
 \left( \begin{array}{ccc} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{array} \right) & \left( \begin{array}{ccc} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{array} \right) & \left( \begin{array}{ccc} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{array} \right)
 \end{array}$$

$d^* B_3 = 6$ ,  $Ip(B_3) = \{(2, 0)\}$  y  $L(B_3)$  es la hipermatriz:

$$\begin{array}{ccc}
 H_{L(B_3)}(1, 0) & H_{L(B_3)}(1, 1) & H_{L(B_3)}(1, 2) \\
 \left( \begin{array}{ccc} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{array} \right) & \left( \begin{array}{ccc} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{array} \right) & \left( \begin{array}{ccc} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{array} \right) \\
 \\
 H_{L(B_3)}(2, 0) & H_{L(B_3)}(2, 1) & H_{L(B_3)}(2, 2) \\
 \left( \begin{array}{ccc} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right) & \left( \begin{array}{ccc} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{array} \right) & \left( \begin{array}{ccc} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{array} \right) \\
 \\
 H_{L(B_3)}(3, 0) & H_{L(B_3)}(3, 1) & H_{L(B_3)}(3, 2) \\
 \left( \begin{array}{ccc} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{array} \right) & \left( \begin{array}{ccc} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{array} \right) & \left( \begin{array}{ccc} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{array} \right)
 \end{array}$$

$d^* B_6 = 9$ ,  $Ip(B_6) = \{(1, 0), (3, 2)\}$  y  $L(B_6)$  es la hipermatriz:

$$\begin{array}{ccc}
H_{L(B_6)}(1,0) & H_{L(B_6)}(1,1) & H_{L(B_6)}(1,2) \\
\begin{pmatrix} \boxed{0} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
H_{L(B_6)}(2,0) & H_{L(B_6)}(2,1) & H_{L(B_6)}(2,2) \\
\begin{pmatrix} \boxed{0} & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
H_{L(B_6)}(3,0) & H_{L(B_6)}(3,1) & H_{L(B_6)}(3,2) \\
\begin{pmatrix} \boxed{0} & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}
\end{array}$$

$d^* B_{2,2} = 6$ ,  $Ip(B_{2,2}) = \{(2,0)\}$  y  $L(B_{2,2})$  es la hipermatriz:

$$\begin{array}{ccc}
H_{L(B_{2,2})}(1,0) & H_{L(B_{2,2})}(1,1) & H_{L(B_{2,2})}(1,2) \\
\begin{pmatrix} \boxed{0} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
H_{L(B_{2,2})}(2,0) & H_{L(B_{2,2})}(2,1) & H_{L(B_{2,2})}(2,2) \\
\begin{pmatrix} \boxed{0} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
H_{L(B_{2,2})}(3,0) & H_{L(B_{2,2})}(3,1) & H_{L(B_{2,2})}(3,2) \\
\begin{pmatrix} \boxed{0} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}
\end{array}$$

$d^* B_{2,4} = 9$ ,  $Ip(B_{2,4}) = \{(3,1), (3,2)\}$  y  $L(B_{2,4})$  es la hipermatriz:

$$\begin{array}{ccc}
H_{L(B_{2,4})}(1,0) & H_{L(B_{2,4})}(1,1) & H_{L(B_{2,4})}(1,2) \\
\begin{pmatrix} \boxed{1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}
\end{array}$$

$$\begin{array}{ccc}
H_{L(B_{2,4})}(2,0) & H_{L(B_{2,4})}(2,1) & H_{L(B_{2,4})}(2,2) \\
\begin{pmatrix} \boxed{1} & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
H_{L(B_{2,4})}(3,0) & H_{L(B_{2,4})}(3,1) & H_{L(B_{2,4})}(3,2) \\
\begin{pmatrix} \boxed{1} & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}
\end{array}$$

$d^* B_{2,6} = 9$ ,  $Ip(B_{2,6}) = \{(1, 0), (3, 2)\}$  y  $L(B_{2,6}) = L(B_6)$ .

$d^* B_{5,3} = 9$ ,  $Ip(B_{5,3}) = \{(1, 0), (3, 2)\}$  y  $L(B_{5,3}) = L(B_6)$ .

$d^* B_{2,3,2} = 9$ ,  $Ip(B_{2,3,2}) = \{(2, 0), (3, 0)\}$  y  $L(B_{2,3,2})$  es la hipermatriz:

$$\begin{array}{ccc}
H_{L(B_{2,3,2})}(1,0) & H_{L(B_{2,3,2})}(1,1) & H_{L(B_{2,3,2})}(1,2) \\
\begin{pmatrix} \boxed{0} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
H_{L(B_{2,3,2})}(2,0) & H_{L(B_{2,3,2})}(2,1) & H_{L(B_{2,3,2})}(2,2) \\
\begin{pmatrix} \boxed{0} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
H_{L(B_{2,3,2})}(3,0) & H_{L(B_{2,3,2})}(3,1) & H_{L(B_{2,3,2})}(3,2) \\
\begin{pmatrix} \boxed{0} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}
\end{array}$$

$d^* B_{2,3,3} = 9$ ,  $Ip(B_{2,3,3}) = \{(3, 1), (3, 2)\}$  y  $L(B_{2,3,3}) = L(B_4)$ .

$d^* B_{2,3,4} = 9$ ,  $Ip(B_{2,3,4}) = \{(1, 0), (3, 1), (3, 2)\}$  y  $L(B_{2,3,4})$  es la hipermatriz:

$$\begin{array}{ccc}
H_{L(B_{2,3,4})}(1,0) & H_{L(B_{2,3,4})}(1,1) & H_{L(B_{2,3,4})}(1,2) \\
\begin{pmatrix} \boxed{0} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}
\end{array}$$

$$\begin{array}{ccc}
H_{L(B_{2,3,4})}(2,0) & H_{L(B_{2,3,4})}(2,1) & H_{L(B_{2,3,4})}(2,2) \\
\begin{pmatrix} \boxed{0} & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
H_{L(B_{2,3,4})}(3,0) & H_{L(B_{2,3,4})}(3,1) & H_{L(B_{2,3,4})}(3,2) \\
\begin{pmatrix} \boxed{0} & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}
\end{array}$$

$d^* B_{2,5,3} = 9$ ,  $Ip(B_{2,5,3}) = \{(1,0), (3,1), (3,2)\}$  y  $L(B_{2,5,3}) = L(B_6)$ .

$d^* B_{2,3,1,1} = 9$ ,  $Ip(B_{2,3,1,1}) = \{(1,1), (1,2)\}$  y  $L(B_{2,3,1,1})$  es la hipermatriz:

$$\begin{array}{ccc}
H_{L(B_{2,3,1,1})}(1,0) & H_{L(B_{2,3,1,1})}(1,1) & H_{L(B_{2,3,1,1})}(1,2) \\
\begin{pmatrix} \boxed{1} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
H_{L(B_{2,3,1,1})}(2,0) & H_{L(B_{2,3,1,1})}(2,1) & H_{L(B_{2,3,1,1})}(2,2) \\
\begin{pmatrix} \boxed{1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
H_{L(B_{2,3,1,1})}(3,0) & H_{L(B_{2,3,1,1})}(3,1) & H_{L(B_{2,3,1,1})}(3,2) \\
\begin{pmatrix} \boxed{1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}
\end{array}$$

$d^* B_{2,5,1,1} = 9$ ,  $Ip(B_{2,5,1,1}) = \{(3,2)\}$  y  $L(B_{2,5,1,1})$  es la hipermatriz:

$$\begin{array}{ccc}
H_{L(B_{2,5,1,1})}(1,0) & H_{L(B_{2,5,1,1})}(1,1) & H_{L(B_{2,5,1,1})}(1,2) \\
\begin{pmatrix} \boxed{1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
H_{L(B_{2,5,1,1})}(2,0) & H_{L(B_{2,5,1,1})}(2,1) & H_{L(B_{2,5,1,1})}(2,2) \\
\begin{pmatrix} \boxed{1} & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}
\end{array}$$

$$\begin{array}{ccc}
H_{L(B_{2,5,1,1})}(3,0) & H_{L(B_{2,5,1,1})}(3,1) & H_{L(B_{2,5,1,1})}(3,2) \\
\begin{pmatrix} \boxed{1} & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}
\end{array}$$

$d^* B_{2,1,1,1,1} = 6$ ,  $Ip(B_{2,1,1,1,1}) = \{(1,2), (2,0), (2,1), (2,2), (3,2)\}$  y  $L(B_{2,1,1,1,1}) = 0$ .

Luego

$$\begin{aligned}
\mathcal{M}_1 &= \{L(N) : 0 \neq L(N) \text{ y } N \in \eta_0\} \\
&= \{L(B_1), L(B_3), L(B_6), L(B_{2,2}), L(B_{2,4}), L(B_{2,3,2}), \\
&\quad L(B_{2,3,4}), L(B_{2,3,1,1}), L(B_{2,5,1,1})\}
\end{aligned}$$

2.1. Ahora calcularemos  $m_1$ . Para ello, determinaremos la sucesión  $\mathcal{T}_1(B), \dots, \mathcal{T}_n(B)(B)$  para toda hipermatriz  $B \in \mathcal{M}_1$ .

Sea  $B'_1 = L(B_1)$ . Entonces,  $d^* B'_1 = 6$  e  $Ip(B'_1) = \{(1,2), (2,2), (3,2)\}$ . Las sucesiones para las hipercolumnas involucradas en el cálculo de  $d^* B'_1$  son las siguientes:

$$\begin{aligned}
H_{B'_1}(1,2) = H_0^{1,2}(B'_1) &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} > H_1^{1,2}(B'_1) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
&> H_2^{1,2}(B'_1) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
H_{B'_1}(2,2) = H_0^{2,2}(B'_1) &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} > H_1^{2,2}(B'_1) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \\
&> H_2^{2,2}(B'_1) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
H_{B'_1}(3,2) = H_0^{2,2}(B'_1) &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} > H_1^{2,2}(B'_1) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Consideremos ahora las siguientes hipermatrices

$$B'_{1,1} = (B'_1, H_1^{1,2}(B'_1))$$

$$\begin{array}{ccc}
H_{B'_{1,1}}(1,0) & H_{B'_{1,1}}(1,1) & H_{B'_{1,1}}(1,2) \\
\left( \begin{array}{ccc} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right) & \left( \begin{array}{ccc} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{array} \right) & \left( \begin{array}{ccc} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{array} \right) \\
H_{B'_{1,1}}(2,0) & H_{B'_{1,1}}(2,1) & H_{B'_{1,1}}(2,2) \\
\left( \begin{array}{ccc} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right) & \left( \begin{array}{ccc} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{array} \right) & \left( \begin{array}{ccc} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{array} \right) \\
H_{B'_{1,1}}(3,0) & H_{B'_{1,1}}(3,1) & H_{B'_{1,1}}(3,2) \\
\left( \begin{array}{ccc} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{array} \right) & \left( \begin{array}{ccc} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{array} \right) & \left( \begin{array}{ccc} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{array} \right)
\end{array}$$

$$B'_{1,2} = (B'_1, H_2^{1,2}(B'_1))$$

$$\begin{array}{ccc}
H_{B'_{1,2}}(1,0) & H_{B'_{1,2}}(1,1) & H_{B'_{1,2}}(1,2) \\
\left( \begin{array}{ccc} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right) & \left( \begin{array}{ccc} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{array} \right) & \left( \begin{array}{ccc} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \\
H_{B'_{1,2}}(2,0) & H_{B'_{1,2}}(2,1) & H_{B'_{1,2}}(2,2) \\
\left( \begin{array}{ccc} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right) & \left( \begin{array}{ccc} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array} \right) & \left( \begin{array}{ccc} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \\
H_{B'_{1,2}}(3,0) & H_{B'_{1,2}}(3,1) & H_{B'_{1,2}}(3,2) \\
\left( \begin{array}{ccc} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right) & \left( \begin{array}{ccc} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right) & \left( \begin{array}{ccc} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{array} \right)
\end{array}$$

$$B'_{1,3} = (B'_1, H_1^{2,2}(B'_1)) = (B'_1, H_1^{3,2}(B'_1))$$

$$\begin{array}{ccc}
H_{B'_{1,3}}(1,0) & H_{B'_{1,3}}(1,1) & H_{B'_{1,3}}(1,2) \\
\begin{pmatrix} \boxed{0} & \text{0} & \text{0} \\ \text{0} & \text{0} & \text{0} \\ \text{0} & \text{0} & \text{0} \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} \text{0} & \text{0} & \text{0} \\ \text{1} & \text{0} & \text{1} \\ \text{1} & \text{1} & \text{0} \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} \text{0} & \text{0} & \text{0} \\ \text{1} & \text{0} & \text{1} \\ \text{1} & \text{1} & \text{0} \end{pmatrix} \\
H_{B'_{1,3}}(2,0) & H_{B'_{1,3}}(2,1) & H_{B'_{1,3}}(2,2) \\
\begin{pmatrix} \boxed{0} & \text{0} & \text{0} \\ \text{0} & \text{0} & \text{0} \\ \text{0} & \text{0} & \text{0} \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} \text{0} & \text{0} & \text{0} \\ \text{1} & \text{0} & \text{1} \\ \text{1} & \text{0} & \text{1} \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} \text{0} & \text{0} & \text{0} \\ \text{1} & \text{1} & \text{0} \\ \text{1} & \text{1} & \text{0} \end{pmatrix} \\
H_{B'_{1,3}}(3,0) & H_{B'_{1,3}}(3,1) & H_{B'_{1,3}}(3,2) \\
\begin{pmatrix} \boxed{0} & \text{0} & \text{0} \\ \text{0} & \text{1} & \text{1} \\ \text{0} & \text{1} & \text{1} \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} \text{0} & \text{0} & \text{0} \\ \text{0} & \text{0} & \text{1} \\ \text{0} & \text{1} & \text{1} \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} \text{0} & \text{0} & \text{0} \\ \text{0} & \text{1} & \text{0} \\ \text{0} & \text{1} & \text{0} \end{pmatrix}
\end{array}$$

$$B'_{1,4} = (B'_1, H_2^{2,2}(B'_1))$$

$$\begin{array}{ccc}
H_{B'_{1,4}}(1,0) & H_{B'_{1,4}}(1,1) & H_{B'_{1,4}}(1,2) \\
\begin{pmatrix} \boxed{0} & \text{0} & \text{0} \\ \text{0} & \text{0} & \text{0} \\ \text{0} & \text{0} & \text{0} \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} \text{0} & \text{0} & \text{0} \\ \text{0} & \text{0} & \text{0} \\ \text{1} & \text{0} & \text{0} \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} \text{0} & \text{0} & \text{0} \\ \text{1} & \text{0} & \text{0} \\ \text{0} & \text{0} & \text{0} \end{pmatrix} \\
H_{B'_{1,4}}(2,0) & H_{B'_{1,4}}(2,1) & H_{B'_{1,4}}(2,2) \\
\begin{pmatrix} \boxed{0} & \text{0} & \text{0} \\ \text{0} & \text{0} & \text{0} \\ \text{0} & \text{0} & \text{0} \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} \text{0} & \text{0} & \text{0} \\ \text{0} & \text{0} & \text{0} \\ \text{1} & \text{0} & \text{0} \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} \text{0} & \text{0} & \text{0} \\ \text{1} & \text{0} & \text{0} \\ \text{0} & \text{0} & \text{0} \end{pmatrix} \\
H_{B'_{1,4}}(3,0) & H_{B'_{1,4}}(3,1) & H_{B'_{1,4}}(3,2) \\
\begin{pmatrix} \boxed{0} & \text{0} & \text{0} \\ \text{0} & \text{0} & \text{1} \\ \text{0} & \text{1} & \text{0} \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} \text{0} & \text{0} & \text{0} \\ \text{0} & \text{0} & \text{0} \\ \text{0} & \text{1} & \text{0} \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} \text{0} & \text{0} & \text{0} \\ \text{0} & \text{0} & \text{0} \\ \text{0} & \text{0} & \text{0} \end{pmatrix}
\end{array}$$

Entonces  $\mathcal{S}(B'_1) = \{B'_{1,i} : i = 1, \dots, 4\}$ . Ahora para cada  $B \in \mathcal{S}(B'_1)$  hallamos  $\mathcal{S}(B)$ .

Consideremos  $B'_{1,1}$ . Entonces  $d^*B'_{1,1} = 8$  e  $Ip(B'_{1,1}) = \{(1,2), (2,2)\}$ . Las sucesiones para las hipercolumnas involucradas en el cálculo de  $d^*B'_{1,1}$  son las siguientes:



$$\begin{aligned}
H_{B'_{1,1}}(1,2) &= H_0^{1,2}(B'_{1,1}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
&> H_1^{1,2}(B'_{1,1}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
H_{B'_{1,1}}(2,2) &= H_0^{2,2}(B'_{1,1}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
&> H_1^{1,2}(B'_{1,1}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Entonces  $\mathcal{S}(B'_{1,1}) = \{B'_{1,1,1}, B'_{1,1,2}\}$  donde  $B'_{1,1,1} = (B'_{1,1}, H_1^{1,2}(B'_{1,1}))$  es la hipermatriz

$$\begin{array}{ccc}
H_{B'_{1,1,1}}(1,0) & H_{B'_{1,1,1}}(1,1) & H_{B'_{1,1,1}}(1,2) \\
\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
H_{B'_{1,1,1}}(2,0) & H_{B'_{1,1,1}}(2,1) & H_{B'_{1,1,1}}(2,2) \\
\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
H_{B'_{1,1,1}}(3,0) & H_{B'_{1,1,1}}(3,1) & H_{B'_{1,1,1}}(3,2) \\
\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}
\end{array}$$

y  $B'_{1,1,2} = (B'_{1,1}, H_1^{2,2}(B'_{1,1}))$  es la hipermatriz

$$\begin{array}{ccc}
H_{B'_{1,1,2}}(1,0) & H_{B'_{1,1,2}}(1,1) & H_{B'_{1,1,2}}(1,2) \\
\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}
\end{array}$$

$$\begin{array}{ccc}
H_{B'_{1,1,2}}(2,0) & H_{B'_{1,1,2}}(2,1) & H_{B'_{1,1,2}}(2,2) \\
\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
H_{B'_{1,1,2}}(3,0) & H_{B'_{1,1,2}}(3,1) & H_{B'_{1,1,2}}(3,2) \\
\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}
\end{array}$$

Para  $B'_{1,2}$  tenemos que  $d^* B'_{1,2} = 18$ ,  $Ip(B'_{1,2}) = \{(1,2), (2,2), (3,2)\}$  y  $\mathcal{S}(B'_{1,2})$  es el conjunto vacío.

Consideremos  $B'_{1,3}$ . Entonces  $d^* B'_{1,3} = 8$  e  $Ip(B'_{1,3}) = \{(1,2), (2,2)\}$ . Las sucesiones para las hipercolumnas involucradas en el cálculo de  $d^* B'_{1,3}$  son las siguientes:

$$\begin{aligned}
H_{B'_{1,3}}(1,2) &= H_0^{1,2}(B'_{1,3}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \\
&> H_1^{1,2}(B'_{1,3}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
H_{B'_{1,3}}(2,2) &= H_0^{2,2}(B'_{1,3}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \\
&> H_1^{2,2}(B'_{1,3}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Entonces  $\mathcal{S}(B'_{1,3}) = \{B'_{1,3,1}, B'_{1,3,2}\}$  donde  $B'_{1,3,1} = (B'_{1,3}, H_1^{1,2}(B'_{1,3}))$  es la hipermatriz

$$\begin{array}{ccc}
H_{B'_{1,3,1}}(1,0) & H_{B'_{1,3,1}}(1,1) & H_{B'_{1,3,1}}(1,2) \\
\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}
\end{array}$$

$$\begin{array}{ccc}
H_{B'_{1,3,1}}(2,0) & H_{B'_{1,3,1}}(2,1) & H_{B'_{1,3,1}}(2,2) \\
\begin{pmatrix} \boxed{0} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
H_{B'_{1,3,1}}(3,0) & H_{B'_{1,3,1}}(3,1) & H_{B'_{1,3,1}}(3,2) \\
\begin{pmatrix} \boxed{0} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}
\end{array}$$

y  $B'_{1,3,2} = (B'_{1,3}, H_1^{2,2}(B'_{1,3}))$  es la hipermatriz

$$\begin{array}{ccc}
H_{B'_{1,3,2}}(1,0) & H_{B'_{1,3,2}}(1,1) & H_{B'_{1,3,2}}(1,2) \\
\begin{pmatrix} \boxed{0} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
H_{B'_{1,3,2}}(2,0) & H_{B'_{1,3,2}}(2,1) & H_{B'_{1,3,2}}(2,2) \\
\begin{pmatrix} \boxed{0} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
H_{B'_{1,3,2}}(3,0) & H_{B'_{1,3,2}}(3,1) & H_{B'_{1,3,2}}(3,2) \\
\begin{pmatrix} \boxed{0} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}
\end{array}$$

Para  $B'_{1,4}$  tenemos que  $d^* B'_{1,4} = 18$ ,  $Ip(B'_{1,4}) = \{(1,2), (2,2), (3,1)\}$  y  $\mathcal{S}(B'_{1,4})$  es el conjunto vacío.

En conclusión  $\mathcal{T}_0(B'_1) = B'_1$ ,  $\mathcal{T}_1(B'_1) = \mathcal{S}(B'_1) = \{B'_{1,i} : i = 1 \dots 4\}$ ,  $\mathcal{T}_2(B'_1) = \mathcal{S}(B'_{1,1}) \cup \mathcal{S}(B'_{1,3}) = \{B'_{1,1,1}, B'_{1,1,2}, B'_{1,3,1}, B'_{1,3,2}\}$  y  $\mathcal{T}_3(B'_1) = \emptyset$ .

Sea  $B'_2 = L(B_3)$ .  $d^* B'_2 = 4$ ,  $Ip(B'_2) = \{(1,0), (1,1), (2,2), (3,0), (3,2)\}$  y  $R(B'_2, 1, 0) = R(B'_2, 3, 0) = \emptyset$ . Las sucesiones para las demás hipercolumnas involucradas en el cálculo de  $d^* B'_2$  son las siguientes:

$$H_{B'_2}(1,1) = H_0^{1,1}(B'_2) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} > H_1^{1,1}(B'_2) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$H_{B'_2}(2,2) = H_0^{2,2}(B'_2) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} > H_1^{2,2}(B'_2) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$H_{B'_2}(3,2) = H_0^{3,2}(B'_2) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} > H_1^{3,2}(B'_2) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Consideremos ahora las siguientes hipermatrices

$$B'_{2,1} = (B'_2, H_1^{1,1}(B'_2))$$

$$\begin{array}{ccc} H_{B'_{2,1}}(1,0) & H_{B'_{2,1}}(1,1) & H_{B'_{2,1}}(1,2) \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \\ H_{B'_{2,1}}(2,0) & H_{B'_{2,1}}(2,1) & H_{B'_{2,1}}(2,2) \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \\ H_{B'_{2,1}}(3,0) & H_{B'_{2,1}}(3,1) & H_{B'_{2,1}}(3,2) \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

$$B'_{2,2} = (B'_2, H_1^{2,2}(B'_2))$$

$$\begin{array}{ccc} H_{B'_{2,2}}(1,0) & H_{B'_{2,2}}(1,1) & H_{B'_{2,2}}(1,2) \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \\ H_{B'_{2,2}}(2,0) & H_{B'_{2,2}}(2,1) & H_{B'_{2,2}}(2,2) \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

$$\begin{matrix} H_{B'_{2,2}}(3,0) & H_{B'_{2,2}}(3,1) & H_{B'_{2,2}}(3,2) \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

$$B'_{2,3} = (B'_2, H_1^{3,2}(B'_2))$$

$$\begin{matrix} H_{B'_{2,3}}(1,0) & H_{B'_{2,3}}(1,1) & H_{B'_{2,3}}(1,2) \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \\ H_{B'_{2,3}}(2,0) & H_{B'_{2,3}}(2,1) & H_{B'_{2,3}}(2,2) \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \\ H_{B'_{2,3}}(3,0) & H_{B'_{2,3}}(3,1) & H_{B'_{2,3}}(3,2) \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

Entonces  $\mathcal{S}(B'_2) = \{B'_{2,i} : i = 1, \dots, 3\}$ . Y ahora, para cada  $B \in \mathcal{S}(B'_2)$  halamos  $\mathcal{S}(B)$ .

Consideremos  $B'_{2,1}$ . Entonces  $d^*B'_{2,1} = 8$  e  $Ip(B'_{2,1}) = \{(2,2)\}$ . La sucesión para  $H_{B'_{2,1}}(2,2)$  es

$$\begin{aligned} H_{B'_{2,1}}(2,2) &= H_0^{2,2}(B'_{2,1}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \\ &> H_1^{2,2}(B'_{2,1}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Entonces  $\mathcal{S}(B'_{2,1}) = \{B'_{2,1,1}\}$  donde  $B'_{2,1,1} = (B'_{2,1}, H_1^{2,2}(B'_{2,1}))$  es la hipermatriz

$$\begin{matrix} H_{B'_{2,1,1}}(1,0) & H_{B'_{2,1,1}}(1,1) & H_{B'_{2,1,1}}(1,2) \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

$$\begin{array}{ccc}
H_{B'_{2,1,1}}(2,0) & H_{B'_{2,1,1}}(2,1) & H_{B'_{2,1,1}}(2,2) \\
\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \\
H_{B'_{2,1,1}}(3,0) & H_{B'_{2,1,1}}(3,1) & H_{B'_{2,1,1}}(3,2) \\
\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}
\end{array}$$

Para  $B'_{2,2}$  tenemos que  $d^* B'_{2,2} = 18$ ,  $Ip(B'_{2,2}) = \{(1,2), (2,2), (3,2)\}$  y  $\mathcal{S}(B'_{2,2})$  es el conjunto vacío.

Consideremos  $B'_{2,3}$ . Entonces  $d^* B'_{2,3} = 6$ ,  $Ip(B'_{2,3}) = \{(1,0), (2,2)\}$  y  $R(B'_{2,3}, 1, 0) = \emptyset$ . La sucesión para  $H_{B'_{2,3}}(2,2)$  es

$$\begin{aligned}
H_{B'_{2,3}}(2,2) &= H_0^{2,2}(B'_{2,3}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \\
&> H_1^{2,2}(B'_{2,3}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \\
&> H_2^{2,2}(B'_{2,3}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Entonces  $\mathcal{S}(B'_{2,3}) = \{B'_{2,3,1}, B'_{2,3,2}\}$  donde  $B'_{2,3,1} = (B'_{2,3}, H_1^{2,2}(B'_{2,3}))$  es la hipermatriz

$$\begin{array}{ccc}
H_{B'_{2,3,1}}(1,0) & H_{B'_{2,3,1}}(1,1) & H_{B'_{2,3,1}}(1,2) \\
\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \\
H_{B'_{2,3,1}}(2,0) & H_{B'_{2,3,1}}(2,1) & H_{B'_{2,3,1}}(2,2) \\
\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}
\end{array}$$

$$\begin{matrix} H_{B'_{2,3,1}}(3,0) & H_{B'_{2,3,1}}(3,1) & H_{B'_{2,3,1}}(3,2) \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

y  $B'_{2,3,2} = (B'_{2,3}, H_2^{2,2}(B'_{2,3}))$  es la hipermatriz

$$\begin{matrix} H_{B'_{2,3,2}}(1,0) & H_{B'_{2,3,2}}(1,1) & H_{B'_{2,3,2}}(1,2) \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ H_{B'_{2,3,2}}(2,0) & H_{B'_{2,3,2}}(2,1) & H_{B'_{2,3,2}}(2,2) \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ H_{B'_{2,3,2}}(3,0) & H_{B'_{2,3,2}}(3,1) & H_{B'_{2,3,2}}(3,2) \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

Hasta aquí tenemos que ,  $\mathcal{T}_0(B'_2) = B'_2$ ,  $\mathcal{T}_1(B'_2) = \mathcal{S}(B'_2) = \{B'_{2,i} : i = 1 \dots 3\}$  y  $\mathcal{T}_2(B'_2) = \mathcal{S}(B'_{2,1}) \cup \mathcal{S}(B'_{2,3}) = \{B'_{2,1,1}, B'_{2,3,1}, B'_{2,3,2}\}$ .

Construiremos  $\mathcal{T}_2(B'_2)$ . Entonces para cada  $B \in \mathcal{T}_2(B'_2)$  hallamos  $\mathcal{S}(B)$ .

Para  $B'_{2,1,1}$  tenemos que  $d^*B'_{2,1,1} = 6$ ,  $Ip(B'_{2,1,1}) = \{(1,2), (2,2), (3,0), (3,1), (3,2)\}$  y  $R(B'_{2,1,1}, 1,2) = R(B'_{2,1,1}, 2,2) = R(B'_{2,1,1}, 3,0) = \emptyset$ . Las sucesiones para las otras parejas involucradas en el cálculo de  $d^*B'_{2,1,1}$  son:

$$\begin{aligned} H_{B'_{2,1,1}}(3,1) &= H_0^{3,1}(B'_{2,1,1}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &> H_1^{3,1}(B'_{2,1,1}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ H_{B'_{2,1,1}}(3,2) &= H_0^{3,2}(B'_{2,1,1}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &> H_1^{3,2}(B'_{2,1,1}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Entonces  $\mathcal{S}(B'_{2,1,1}) = \{B'_{2,1,1,1}, B'_{2,1,1,2}\}$  donde  $B'_{2,1,1,1} = (B'_{2,1,1}, H_1^{3,1}(B'_{2,1,1}))$  es la hipermatriz

$$\begin{array}{ccc}
 H_{B'_{2,1,1,1}}(1,0) & H_{B'_{2,1,1,1}}(1,1) & H_{B'_{2,1,1,1}}(1,2) \\
 \begin{pmatrix} \boxed{0} & \text{grey} & \text{grey} \\ \text{pink} & \text{purple} & \text{brown} \\ \text{pink} & \text{brown} & \text{purple} \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} \text{pink} & \text{blue} & \text{yellow} \\ \text{red} & \text{green} & \text{blue} \\ \text{yellow} & \text{olive} & \text{orange} \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} \text{pink} & \text{yellow} & \text{blue} \\ \text{yellow} & \text{orange} & \text{brown} \\ \text{red} & \text{blue} & \text{green} \end{pmatrix} \\
 \\
 H_{B'_{2,1,1,1}}(2,0) & H_{B'_{2,1,1,1}}(2,1) & H_{B'_{2,1,1,1}}(2,2) \\
 \begin{pmatrix} \boxed{0} & \text{grey} & \text{grey} \\ \text{pink} & \text{blue} & \text{yellow} \\ \text{pink} & \text{yellow} & \text{blue} \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} \text{pink} & \text{purple} & \text{brown} \\ \text{red} & \text{green} & \text{blue} \\ \text{yellow} & \text{orange} & \text{olive} \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} \text{pink} & \text{brown} & \text{purple} \\ \text{yellow} & \text{olive} & \text{orange} \\ \text{red} & \text{blue} & \text{green} \end{pmatrix} \\
 \\
 H_{B'_{2,1,1,1}}(3,0) & H_{B'_{2,1,1,1}}(3,1) & H_{B'_{2,1,1,1}}(3,2) \\
 \begin{pmatrix} \boxed{0} & \text{pink} & \text{pink} \\ \text{pink} & \text{red} & \text{yellow} \\ \text{pink} & \text{yellow} & \text{red} \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} \text{grey} & \text{purple} & \text{brown} \\ \text{blue} & \text{green} & \text{olive} \\ \text{yellow} & \text{yellow} & \text{blue} \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} \text{grey} & \text{brown} & \text{purple} \\ \text{yellow} & \text{blue} & \text{orange} \\ \text{blue} & \text{olive} & \text{green} \end{pmatrix}
 \end{array}$$

y  $B'_{2,1,1,2} = (B'_{2,1,1}, H_1^{3,2}(B'_{2,1,1}))$  es la hipermatriz

$$\begin{array}{ccc}
 H_{B'_{2,1,1,2}}(1,0) & H_{B'_{2,1,1,2}}(1,1) & H_{B'_{2,1,1,2}}(1,2) \\
 \begin{pmatrix} \boxed{0} & \text{grey} & \text{grey} \\ \text{pink} & \text{purple} & \text{brown} \\ \text{pink} & \text{brown} & \text{purple} \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} \text{pink} & \text{blue} & \text{yellow} \\ \text{red} & \text{green} & \text{blue} \\ \text{yellow} & \text{olive} & \text{orange} \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} \text{pink} & \text{yellow} & \text{blue} \\ \text{yellow} & \text{orange} & \text{brown} \\ \text{red} & \text{blue} & \text{green} \end{pmatrix} \\
 \\
 H_{B'_{2,1,1,2}}(2,0) & H_{B'_{2,1,1,2}}(2,1) & H_{B'_{2,1,1,2}}(2,2) \\
 \begin{pmatrix} \boxed{0} & \text{grey} & \text{grey} \\ \text{pink} & \text{blue} & \text{yellow} \\ \text{pink} & \text{yellow} & \text{blue} \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} \text{pink} & \text{purple} & \text{brown} \\ \text{red} & \text{green} & \text{blue} \\ \text{yellow} & \text{orange} & \text{olive} \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} \text{pink} & \text{brown} & \text{purple} \\ \text{yellow} & \text{olive} & \text{orange} \\ \text{red} & \text{blue} & \text{green} \end{pmatrix} \\
 \\
 H_{B'_{2,1,1,2}}(3,0) & H_{B'_{2,1,1,2}}(3,1) & H_{B'_{2,1,1,2}}(3,2) \\
 \begin{pmatrix} \boxed{0} & \text{pink} & \text{pink} \\ \text{pink} & \text{red} & \text{yellow} \\ \text{pink} & \text{yellow} & \text{red} \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} \text{grey} & \text{purple} & \text{brown} \\ \text{blue} & \text{green} & \text{olive} \\ \text{yellow} & \text{yellow} & \text{blue} \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} \text{grey} & \text{brown} & \text{purple} \\ \text{yellow} & \text{blue} & \text{orange} \\ \text{blue} & \text{olive} & \text{green} \end{pmatrix}
 \end{array}$$

Consideremos  $B'_{2,3,1}$ . Entonces  $d^* B'_{2,3,1} = 8$  e  $Ip(B'_{2,3,1}) = \{(1,2), (2,2)\}$ . Las sucesiones para las parejas involucradas en el cálculo de  $d^* B'_{2,3,1}$  son:



$$\begin{aligned}
H_{B'_{2,3,1}}(1,2) &= H_0^{1,2}(B'_{2,3,1}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \\
&> H_1^{1,2}(B'_{2,3,1}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
H_{B'_{2,3,1}}(2,2) &= H_0^{2,2}(B'_{2,3,1}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \\
&> H_1^{2,2}(B'_{2,3,1}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Entonces  $\mathcal{S}(B'_{2,3,1}) = \{B'_{2,3,1,1}, B'_{2,3,1,2}\}$  donde  $B'_{2,3,1,1} = (B'_{2,3,1}, H_1^{1,2}(B'_{2,3,1}))$  es la hipermatriz

$$\begin{array}{ccc}
H_{B'_{2,3,1,1}}(1,0) & H_{B'_{2,3,1,1}}(1,1) & H_{B'_{2,3,1,1}}(1,2) \\
\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
H_{B'_{2,3,1,1}}(2,0) & H_{B'_{2,3,1,1}}(2,1) & H_{B'_{2,3,1,1}}(2,2) \\
\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
H_{B'_{2,3,1,1}}(3,0) & H_{B'_{2,3,1,1}}(3,1) & H_{B'_{2,3,1,1}}(3,2) \\
\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}
\end{array}$$

y  $B'_{2,3,1,2} = (B'_{2,3,1}, H_1^{2,2}(B'_{2,3,1}))$  es la hipermatriz

$$\begin{array}{ccc}
H_{B'_{2,3,1,2}}(1,0) & H_{B'_{2,3,1,2}}(1,1) & H_{B'_{2,3,1,2}}(1,2) \\
\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}
\end{array}$$

$$\begin{array}{ccc}
H_{B'_{2,3,1,2}}(2,0) & H_{B'_{2,3,1,2}}(2,1) & H_{B'_{2,3,1,2}}(2,2) \\
\begin{pmatrix} \boxed{0} & \text{0} & \text{0} \\ \text{0} & \text{0} & \text{0} \\ \text{0} & \text{0} & \text{0} \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} \text{0} & \text{0} & \text{0} \\ \text{0} & \text{0} & \text{0} \\ \text{1} & \text{0} & \text{0} \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} \text{0} & \text{0} & \text{0} \\ \text{1} & \text{0} & \text{0} \\ \text{0} & \text{0} & \text{0} \end{pmatrix} \\
H_{B'_{2,3,1,2}}(3,0) & H_{B'_{2,3,1,2}}(3,1) & H_{B'_{2,3,1,2}}(3,2) \\
\begin{pmatrix} \boxed{0} & \text{0} & \text{0} \\ \text{0} & \text{0} & \text{1} \\ \text{0} & \text{1} & \text{0} \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} \text{0} & \text{0} & \text{0} \\ \text{0} & \text{0} & \text{0} \\ \text{0} & \text{1} & \text{0} \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} \text{0} & \text{0} & \text{0} \\ \text{0} & \text{0} & \text{0} \\ \text{0} & \text{0} & \text{0} \end{pmatrix}
\end{array}$$

Para  $B'_{2,3,2}$  tenemos que  $d^*B'_{2,3,2} = 18$ ,  $Ip(B'_{2,3,2}) = \{(1,2), (2,2), (3,1)\}$  y  $\mathcal{S}(B'_{2,3,2}) = \emptyset$ . En conclusión,  $\mathcal{T}_3(B'_2) = \mathcal{S}(B'_{2,1,1}) \cup \mathcal{S}(B'_{2,3,1})$ ; es decir,  $\mathcal{T}_3(B'_2) = \{B'_{2,1,1,1}, B'_{2,1,1,2}, B'_{2,3,1,1}, B'_{2,3,1,2}\}$  y  $\mathcal{T}_4(B'_2) = \emptyset$ .

Sea  $B'_4 = L(B_{2,2})$ . Entonces  $d^*B'_4 = 4$ , el conjunto de parejas involucradas es  $Ip(B'_4) = \{(1,0), (1,1), (1,2), (2,2), (3,0), (3,1), (3,2)\}$  y en consecuencia, tenemos que  $R(B'_4, 1, 0) = R(B'_4, 2, 2) = R(B'_4, 3, 0) = \emptyset$ . Las sucesiones para las demás hipercolumnas involucradas en el cálculo de  $d^*B'_4$  son las siguientes:

$$H_{B'_4}(1,1) = H_0^{1,1}(B'_4) = \begin{pmatrix} \text{0} & \text{0} & \text{0} \\ \text{1} & \text{1} & \text{0} \\ \text{1} & \text{1} & \text{0} \end{pmatrix} > H_1^{1,1}(B'_4) = \begin{pmatrix} \text{0} & \text{0} & \text{0} \\ \text{1} & \text{0} & \text{0} \\ \text{0} & \text{0} & \text{0} \end{pmatrix}$$

$$H_{B'_4}(1,2) = H_0^{1,2}(B'_4) = \begin{pmatrix} \text{0} & \text{0} & \text{0} \\ \text{1} & \text{0} & \text{1} \\ \text{1} & \text{0} & \text{1} \end{pmatrix} > H_1^{1,2}(B'_4) = \begin{pmatrix} \text{0} & \text{0} & \text{0} \\ \text{0} & \text{0} & \text{1} \\ \text{0} & \text{0} & \text{0} \end{pmatrix}$$

$$H_{B'_4}(3,1) = H_0^{3,1}(B'_4) = \begin{pmatrix} \text{0} & \text{1} & \text{1} \\ \text{0} & \text{1} & \text{1} \\ \text{0} & \text{1} & \text{0} \end{pmatrix} > H_1^{3,1}(B'_4) = \begin{pmatrix} \text{0} & \text{1} & \text{0} \\ \text{0} & \text{1} & \text{0} \\ \text{0} & \text{1} & \text{0} \end{pmatrix}$$

$$H_{B'_4}(3,2) = H_0^{3,2}(B'_4) = \begin{pmatrix} \text{0} & \text{1} & \text{1} \\ \text{0} & \text{0} & \text{0} \\ \text{0} & \text{1} & \text{1} \end{pmatrix} > H_1^{3,2}(B'_4) = \begin{pmatrix} \text{0} & \text{0} & \text{0} \\ \text{0} & \text{0} & \text{0} \\ \text{0} & \text{1} & \text{0} \end{pmatrix}$$

Consideremos ahora las siguientes hipermatrices



$$\begin{array}{ccc}
H_{B'_{4,3}}(2,0) & H_{B'_{4,3}}(2,1) & H_{B'_{4,3}}(2,2) \\
\begin{pmatrix} \boxed{0} & \text{0} & \text{0} \\ \text{0} & \text{0} & \text{0} \\ \text{0} & \text{0} & \text{0} \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} \text{0} & \text{1} & \text{0} \\ \text{1} & \text{1} & \text{0} \\ \text{1} & \text{0} & \text{0} \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} \text{0} & \text{0} & \text{1} \\ \text{1} & \text{0} & \text{0} \\ \text{1} & \text{0} & \text{1} \end{pmatrix} \\
H_{B'_{4,3}}(3,0) & H_{B'_{4,3}}(3,1) & H_{B'_{4,3}}(3,2) \\
\begin{pmatrix} \boxed{0} & \text{0} & \text{0} \\ \text{0} & \text{1} & \text{1} \\ \text{0} & \text{1} & \text{1} \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} \text{0} & \text{1} & \text{0} \\ \text{0} & \text{1} & \text{0} \\ \text{0} & \text{1} & \text{0} \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} \text{0} & \text{0} & \text{1} \\ \text{0} & \text{0} & \text{0} \\ \text{0} & \text{0} & \text{1} \end{pmatrix}
\end{array}$$

$$B'_{4,4} = (B'_4, H_1^{3,2}(B'_4))$$

$$\begin{array}{ccc}
H_{B'_{4,4}}(1,0) & H_{B'_{4,4}}(1,1) & H_{B'_{4,4}}(1,2) \\
\begin{pmatrix} \boxed{0} & \text{0} & \text{0} \\ \text{0} & \text{0} & \text{0} \\ \text{0} & \text{0} & \text{0} \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} \text{0} & \text{0} & \text{0} \\ \text{1} & \text{0} & \text{0} \\ \text{1} & \text{1} & \text{0} \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} \text{0} & \text{0} & \text{0} \\ \text{1} & \text{0} & \text{1} \\ \text{1} & \text{0} & \text{0} \end{pmatrix} \\
H_{B'_{4,4}}(2,0) & H_{B'_{4,4}}(2,1) & H_{B'_{4,4}}(2,2) \\
\begin{pmatrix} \boxed{0} & \text{0} & \text{0} \\ \text{0} & \text{0} & \text{0} \\ \text{0} & \text{0} & \text{0} \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} \text{0} & \text{0} & \text{0} \\ \text{1} & \text{0} & \text{0} \\ \text{1} & \text{0} & \text{1} \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} \text{0} & \text{0} & \text{0} \\ \text{1} & \text{1} & \text{0} \\ \text{1} & \text{0} & \text{0} \end{pmatrix} \\
H_{B'_{4,4}}(3,0) & H_{B'_{4,4}}(3,1) & H_{B'_{4,4}}(3,2) \\
\begin{pmatrix} \boxed{0} & \text{0} & \text{0} \\ \text{0} & \text{1} & \text{1} \\ \text{0} & \text{1} & \text{1} \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} \text{0} & \text{0} & \text{0} \\ \text{0} & \text{1} & \text{1} \\ \text{0} & \text{1} & \text{0} \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} \text{0} & \text{0} & \text{0} \\ \text{0} & \text{0} & \text{0} \\ \text{0} & \text{1} & \text{0} \end{pmatrix}
\end{array}$$

Entonces  $\mathcal{S}(B'_4) = \{B'_{4,i} : i = 1, \dots, 4\}$ . Ahora para cada  $B \in \mathcal{S}(B'_4)$  determinamos  $\mathcal{S}(B)$ .

Consideremos  $B'_{4,1}$ . Entonces  $d^*B'_{4,1} = 9$ ,  $Ip(B'_{4,1}) = \{(1,1), (1,2)\}$  y  $\mathcal{S}(B'_{4,1})$  es el conjunto vacío.

Para  $B'_{4,2}$  tenemos que  $d^*B'_{4,2} = 12$  e  $Ip(B'_{4,2}) = \{(2,2), (3,2)\}$ . Las sucesiones correspondientes a las hipercolumnas involucradas en el cálculo de  $d^*B'_{4,2}$  son:

$$\begin{aligned}
H_{B'_{4,2}}(2,2) &= H_0^{2,2}(B'_{4,2}) = \begin{pmatrix} \text{0} & \text{1} & \text{1} \\ \text{0} & \text{1} & \text{0} \\ \text{0} & \text{0} & \text{0} \end{pmatrix} \\
&> H_1^{2,2}(B'_{4,2}) = \begin{pmatrix} \text{0} & \text{1} & \text{0} \\ \text{0} & \text{0} & \text{0} \\ \text{0} & \text{0} & \text{0} \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
H_{B'_{4,2}}(3,2) &= H_0^{3,2}(B'_{4,2}) = \begin{pmatrix} \text{gris} & \text{marrón} & \text{púrpura} \\ \text{amarillo} & \text{azul} & \text{naranja} \\ \text{cyan} & \text{verde} & \text{rojo} \\ \text{gris} & \text{marrón} & \text{púrpura} \\ \text{amarillo} & \text{azul} & \text{naranja} \\ \text{cyan} & \text{verde} & \text{rojo} \end{pmatrix} \\
&> H_1^{3,2}(B'_{4,2}) = \begin{pmatrix} \text{gris} & \text{marrón} & \text{púrpura} \\ \text{amarillo} & \text{azul} & \text{naranja} \\ \text{cyan} & \text{verde} & \text{rojo} \\ \text{gris} & \text{marrón} & \text{púrpura} \\ \text{amarillo} & \text{azul} & \text{naranja} \\ \text{cyan} & \text{verde} & \text{rojo} \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Entonces  $\mathcal{S}(B'_{4,2}) = \{B'_{4,2,1}, B'_{4,2,1}\}$  donde  $B'_{4,2,1} = (B'_{4,2}, H_1^{2,2}(B'_{4,2}))$  es la hipermatriz

$$\begin{array}{ccc}
H_{B'_{4,2,1}}(1,0) & H_{B'_{4,2,1}}(1,1) & H_{B'_{4,2,1}}(1,2) \\
\begin{pmatrix} \text{blanco} & \text{gris} & \text{gris} \\ \text{magenta} & \text{púrpura} & \text{marrón} \\ \text{magenta} & \text{marrón} & \text{púrpura} \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} \text{rojo} & \text{cyan} & \text{amarillo} \\ \text{rojo} & \text{verde} & \text{azul} \\ \text{amarillo} & \text{verde} & \text{naranja} \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} \text{rojo} & \text{amarillo} & \text{cyan} \\ \text{amarillo} & \text{naranja} & \text{verde} \\ \text{rojo} & \text{azul} & \text{verde} \end{pmatrix} \\
H_{B'_{4,2,1}}(2,0) & H_{B'_{4,2,1}}(2,1) & H_{B'_{4,2,1}}(2,2) \\
\begin{pmatrix} \text{blanco} & \text{gris} & \text{gris} \\ \text{rojo} & \text{cyan} & \text{amarillo} \\ \text{rojo} & \text{verde} & \text{azul} \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} \text{magenta} & \text{púrpura} & \text{marrón} \\ \text{rojo} & \text{verde} & \text{azul} \\ \text{amarillo} & \text{naranja} & \text{verde} \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} \text{magenta} & \text{marrón} & \text{púrpura} \\ \text{amarillo} & \text{verde} & \text{naranja} \\ \text{rojo} & \text{azul} & \text{verde} \end{pmatrix} \\
H_{B'_{4,2,1}}(3,0) & H_{B'_{4,2,1}}(3,1) & H_{B'_{4,2,1}}(3,2) \\
\begin{pmatrix} \text{blanco} & \text{magenta} & \text{rojo} \\ \text{rojo} & \text{rojo} & \text{amarillo} \\ \text{rojo} & \text{verde} & \text{rojo} \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} \text{gris} & \text{púrpura} & \text{marrón} \\ \text{cyan} & \text{verde} & \text{verde} \\ \text{amarillo} & \text{verde} & \text{azul} \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} \text{gris} & \text{marrón} & \text{púrpura} \\ \text{amarillo} & \text{azul} & \text{naranja} \\ \text{cyan} & \text{verde} & \text{rojo} \end{pmatrix}
\end{array}$$

y  $B'_{4,2,2} = (B'_{4,2}, H_1^{3,2}(B'_{4,2}))$  es la hipermatriz

$$\begin{array}{ccc}
H_{B'_{4,2,2}}(1,0) & H_{B'_{4,2,2}}(1,1) & H_{B'_{4,2,2}}(1,2) \\
\begin{pmatrix} \text{blanco} & \text{gris} & \text{gris} \\ \text{magenta} & \text{púrpura} & \text{marrón} \\ \text{magenta} & \text{marrón} & \text{púrpura} \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} \text{rojo} & \text{cyan} & \text{amarillo} \\ \text{rojo} & \text{verde} & \text{azul} \\ \text{amarillo} & \text{verde} & \text{naranja} \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} \text{rojo} & \text{amarillo} & \text{cyan} \\ \text{amarillo} & \text{naranja} & \text{verde} \\ \text{rojo} & \text{azul} & \text{verde} \end{pmatrix} \\
H_{B'_{4,2,2}}(2,0) & H_{B'_{4,2,2}}(2,1) & H_{B'_{4,2,2}}(2,2) \\
\begin{pmatrix} \text{blanco} & \text{gris} & \text{gris} \\ \text{rojo} & \text{cyan} & \text{amarillo} \\ \text{rojo} & \text{verde} & \text{azul} \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} \text{magenta} & \text{púrpura} & \text{marrón} \\ \text{rojo} & \text{verde} & \text{azul} \\ \text{amarillo} & \text{naranja} & \text{verde} \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} \text{magenta} & \text{marrón} & \text{púrpura} \\ \text{amarillo} & \text{verde} & \text{naranja} \\ \text{rojo} & \text{azul} & \text{verde} \end{pmatrix} \\
H_{B'_{4,2,2}}(3,0) & H_{B'_{4,2,2}}(3,1) & H_{B'_{4,2,2}}(3,2) \\
\begin{pmatrix} \text{blanco} & \text{magenta} & \text{rojo} \\ \text{rojo} & \text{rojo} & \text{amarillo} \\ \text{rojo} & \text{verde} & \text{rojo} \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} \text{gris} & \text{púrpura} & \text{marrón} \\ \text{cyan} & \text{verde} & \text{verde} \\ \text{amarillo} & \text{verde} & \text{azul} \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} \text{gris} & \text{marrón} & \text{púrpura} \\ \text{amarillo} & \text{azul} & \text{naranja} \\ \text{cyan} & \text{verde} & \text{rojo} \end{pmatrix}
\end{array}$$

Para  $B'_{4,3}$  tenemos que  $d^*B'_{4,3} = 8$  e  $Ip(B'_{4,3}) = \{(2,2)\}$ . La sucesión para  $H_{B'_{4,3}}(2,2)$  es:

$$H_{B'_{4,3}}(2,2) = H_0^{2,2}(B'_{4,3}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} > H_1^{2,2}(B'_{4,3}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Entonces  $\mathcal{S}(B'_{4,3}) = \{B'_{4,3,1}\}$  donde  $B'_{4,3,1} = (B'_{4,3}, H_1^{2,2}(B'_{4,3}))$  es la hipermatriz

$$\begin{array}{ccc} H_{B'_{4,3,1}}(1,0) & H_{B'_{4,3,1}}(1,1) & H_{B'_{4,3,1}}(1,2) \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ \\ H_{B'_{4,3,1}}(2,0) & H_{B'_{4,3,1}}(2,1) & H_{B'_{4,3,1}}(2,2) \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ \\ H_{B'_{4,3,1}}(3,0) & H_{B'_{4,3,1}}(3,1) & H_{B'_{4,3,1}}(3,2) \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

Consideremos  $B'_{4,4}$ . Entonces  $d^*B'_{4,4} = 12$  e  $Ip(B'_{4,4}) = \{(1,2), (2,2)\}$ . Las sucesiones para las parejas en  $Ip(B'_{4,4})$  son:

$$H_{B'_{4,4}}(1,2) = H_0^{1,2}(B'_{4,4}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} > H_1^{1,2}(B'_{4,4}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}
H_{B'_{4,4}}(2,2) &= H_0^{2,2}(B'_{4,4}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
&> H_1^{2,2}(B'_{4,4}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Luego  $\mathcal{S}(B'_{4,4}) = \{B'_{4,4,1}, B'_{4,4,2}\}$  donde  $B'_{4,4,1} = (B'_{4,4}, H_1^{1,2}(B'_{4,4}))$  es la hipermatriz

$$\begin{array}{ccc}
H_{B'_{4,4,1}}(1,0) & H_{B'_{4,4,1}}(1,1) & H_{B'_{4,4,1}}(1,2) \\
\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
H_{B'_{4,4,1}}(2,0) & H_{B'_{4,4,1}}(2,1) & H_{B'_{4,4,1}}(2,2) \\
\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
H_{B'_{4,4,1}}(3,0) & H_{B'_{4,4,1}}(3,1) & H_{B'_{4,4,1}}(3,2) \\
\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}
\end{array}$$

y  $B'_{4,4,2} = (B'_{4,4}, H_1^{2,2}(B'_{4,4}))$  es la hipermatriz

$$\begin{array}{ccc}
H_{B'_{4,4,2}}(1,0) & H_{B'_{4,4,2}}(1,1) & H_{B'_{4,4,2}}(1,2) \\
\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
H_{B'_{4,4,2}}(2,0) & H_{B'_{4,4,2}}(2,1) & H_{B'_{4,4,2}}(2,2) \\
\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
H_{B'_{4,4,2}}(3,0) & H_{B'_{4,4,2}}(3,1) & H_{B'_{4,4,2}}(3,2) \\
\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}
\end{array}$$

Por lo tanto,  $\mathcal{T}_0(B'_4) = B'_4$ ,  $\mathcal{T}_1(B'_4) = \mathcal{S}(B'_4) = \{B'_{4,i} : i = 1 \dots 4\}$ ,  $\mathcal{T}_2(B'_4) = \mathcal{S}(B'_{4,2}) \cup \mathcal{S}(B'_{4,3}) \cup \mathcal{S}(B'_{4,4}) = \{B'_{4,2,1}, B'_{4,2,2}, B'_{4,3,1}, B'_{4,4,1}, B'_{4,4,2}\}$  y  $\mathcal{T}_3(B'_4) = \emptyset$ .

Sea  $B'_5 = L(B_{2,4})$ . Entonces  $d^*B'_5 = 9$ ,  $Ip(B'_5) = \{(1,0), (2,1), (2,2), (3,0)\}$  y  $R(B'_4, 1, 0) = R(B'_4, 2, 1) = R(B'_4, 2, 2) = \emptyset$ . La sucesión para  $(3,0)$  es:

$$H_{B'_5}(3,0) = H_0^{3,0}(B'_5) = \begin{pmatrix} \boxed{1} & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} > H_1^{3,0}(B'_5) = \begin{pmatrix} \boxed{0} & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Luego,  $\mathcal{S}(B'_5) = \{B'_{5,1}\}$ , donde  $B'_{5,1} = (B'_5, H_1^{3,0}(B'_5))$  es la hipermatriz

$$\begin{array}{ccc} H_{B'_{5,1}}(1,0) & H_{B'_{5,1}}(1,1) & H_{B'_{5,1}}(1,2) \\ \begin{pmatrix} \boxed{0} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ H_{B'_{5,1}}(2,0) & H_{B'_{5,1}}(2,1) & H_{B'_{5,1}}(2,2) \\ \begin{pmatrix} \boxed{0} & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ H_{B'_{5,1}}(3,0) & H_{B'_{5,1}}(3,1) & H_{B'_{5,1}}(3,2) \\ \begin{pmatrix} \boxed{0} & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

Con lo cual,  $\mathcal{T}_0(B'_5) = B'_5$ ,  $\mathcal{T}_1(B'_5) = \mathcal{S}(B'_5) = \{B'_{5,1}\}$  y  $\mathcal{T}_2(B'_5) = \emptyset$ .

Sea  $B'_6 = L(B_{2,3,2})$ . Entonces  $d^*B'_6 = 8$ ,  $Ip(B'_6) = \{(3,2)\}$  y la sucesión para  $(3,2)$  es:

$$H_{B'_6}(3,2) = H_0^{3,2}(B'_6) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} > H_1^{3,2}(B'_6) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Luego,  $\mathcal{S}(B'_6) = \{B'_{6,1}\}$ , donde  $B'_{6,1} = (B'_6, H_1^{3,2}(B'_6))$  es la hipermatriz



$$\begin{array}{ccc}
H_{B'_{6,1}}(1,0) & H_{B'_{6,1}}(1,1) & H_{B'_{6,1}}(1,2) \\
\begin{pmatrix} \boxed{0} & \text{0} & \text{0} \\ \text{0} & \text{0} & \text{0} \\ \text{0} & \text{0} & \text{0} \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} \text{0} & \text{0} & \text{0} \\ \text{0} & \text{0} & \text{0} \\ \text{0} & \text{1} & \text{0} \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} \text{0} & \text{0} & \text{0} \\ \text{0} & \text{0} & \text{1} \\ \text{0} & \text{0} & \text{0} \end{pmatrix} \\
H_{B'_{6,1}}(2,0) & H_{B'_{6,1}}(2,1) & H_{B'_{6,1}}(2,2) \\
\begin{pmatrix} \boxed{0} & \text{0} & \text{0} \\ \text{0} & \text{0} & \text{0} \\ \text{0} & \text{0} & \text{0} \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} \text{0} & \text{0} & \text{0} \\ \text{0} & \text{0} & \text{0} \\ \text{0} & \text{0} & \text{1} \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} \text{0} & \text{0} & \text{0} \\ \text{0} & \text{1} & \text{0} \\ \text{0} & \text{0} & \text{0} \end{pmatrix} \\
H_{B'_{6,1}}(3,0) & H_{B'_{6,1}}(3,1) & H_{B'_{6,1}}(3,2) \\
\begin{pmatrix} \boxed{0} & \text{0} & \text{0} \\ \text{0} & \text{0} & \text{0} \\ \text{0} & \text{0} & \text{0} \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} \text{0} & \text{0} & \text{0} \\ \text{0} & \text{0} & \text{1} \\ \text{0} & \text{0} & \text{0} \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} \text{0} & \text{0} & \text{0} \\ \text{0} & \text{0} & \text{0} \\ \text{0} & \text{1} & \text{0} \end{pmatrix}
\end{array}$$

Así que,  $\mathcal{T}_0(B'_6) = B'_6$ ,  $\mathcal{T}_1(B'_6) = \mathcal{S}(B'_6) = \{B'_{6,1}\}$  y  $\mathcal{T}_2(B'_6) = \emptyset$ .

Sea  $B'_8 = L(B_{2,3,1,1})$ . Entonces  $d^*B'_8 = 9$ ,  $Ip(B'_8) = \{(1,0), (2,0), (3,0)\}$  y  $R(B'_8, 2,0) = R(B'_8, 3,0) = \emptyset$ . La sucesión para  $(1,0)$  es:

$$H_{B'_8}(1,0) = H_0^{1,0}(B'_8) = \begin{pmatrix} \boxed{1} & \text{0} & \text{0} \\ \text{0} & \text{1} & \text{1} \\ \text{0} & \text{1} & \text{1} \end{pmatrix} > H_1^{1,0}(B'_8) = \begin{pmatrix} \boxed{0} & \text{0} & \text{0} \\ \text{0} & \text{1} & \text{1} \\ \text{0} & \text{1} & \text{1} \end{pmatrix}$$

Luego  $\mathcal{S}(B'_8) = \{B'_{8,1}\}$ , donde  $B'_{8,1} = (B'_8, H_1^{1,0}(B'_8))$  es la hipermatriz

$$\begin{array}{ccc}
H_{B'_{8,1}}(1,0) & H_{B'_{8,1}}(1,1) & H_{B'_{8,1}}(1,2) \\
\begin{pmatrix} \boxed{0} & \text{0} & \text{0} \\ \text{0} & \text{1} & \text{1} \\ \text{0} & \text{1} & \text{1} \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} \text{0} & \text{0} & \text{0} \\ \text{0} & \text{0} & \text{0} \\ \text{0} & \text{0} & \text{0} \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} \text{0} & \text{0} & \text{0} \\ \text{0} & \text{0} & \text{0} \\ \text{0} & \text{0} & \text{0} \end{pmatrix} \\
H_{B'_{8,1}}(2,0) & H_{B'_{8,1}}(2,1) & H_{B'_{8,1}}(2,2) \\
\begin{pmatrix} \boxed{0} & \text{0} & \text{0} \\ \text{0} & \text{0} & \text{0} \\ \text{0} & \text{0} & \text{0} \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} \text{0} & \text{1} & \text{1} \\ \text{0} & \text{0} & \text{0} \\ \text{0} & \text{0} & \text{0} \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} \text{0} & \text{1} & \text{1} \\ \text{0} & \text{0} & \text{0} \\ \text{0} & \text{0} & \text{0} \end{pmatrix} \\
H_{B'_{8,1}}(3,0) & H_{B'_{8,1}}(3,1) & H_{B'_{8,1}}(3,2) \\
\begin{pmatrix} \boxed{0} & \text{0} & \text{0} \\ \text{0} & \text{0} & \text{0} \\ \text{0} & \text{0} & \text{0} \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} \text{0} & \text{1} & \text{1} \\ \text{0} & \text{0} & \text{0} \\ \text{0} & \text{0} & \text{0} \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} \text{0} & \text{1} & \text{1} \\ \text{0} & \text{0} & \text{0} \\ \text{0} & \text{0} & \text{0} \end{pmatrix}
\end{array}$$

Por lo tanto,  $\mathcal{T}_0(B'_8) = B'_8$ ,  $\mathcal{T}_1(B'_8) = \mathcal{S}(B'_8) = \{B'_{8,1}\}$  y  $\mathcal{T}_2(B'_8) = \emptyset$ .

Sean  $B'_3 = L(B_6)$ ,  $B'_7 = L(B_{2,3,4})$  y  $B'_9 = L(B_{2,5,1,1})$ . Para estas hipermatrices tenemos que,  $\mathcal{S}(B'_3) = \mathcal{S}(B'_7) = \mathcal{S}(B'_9) = \emptyset$ . Y así obtenemos que,

$$\begin{aligned} \mathcal{T}(\mathcal{M}_1) &= \bigcup_{P \in \mathcal{M}_1} \bigcup_{j=0}^{n(P)} \mathcal{T}_j(P) \\ &= \bigcup_{j=0}^2 \mathcal{T}_j(B'_1) \cup \bigcup_{j=0}^3 \mathcal{T}_j(B'_2) \cup \bigcup_{j=0}^2 \mathcal{T}_j(B'_4) \\ &\quad \cup \bigcup_{j=0}^1 \mathcal{T}_j(B'_5) \cup \bigcup_{j=0}^1 \mathcal{T}_j(B'_6) \cup \bigcup_{j=0}^1 \mathcal{T}_j(B'_8). \end{aligned}$$

Es decir,  $\mathcal{T}(\mathcal{M}_1)$  es el conjunto de las matrices que se relacionan en la siguiente tabla:

Hipermatriz $B$	Dist. aparente	$\mathcal{S}(B) = \emptyset \rightarrow Si$
$B'_1$	6	
$B'_{1,1}$	8	
$B'_{1,2}$	18	<i>Si</i>
$B'_{1,3}$	8	
$B'_{1,4}$	18	<i>Si</i>
$B'_{1,1,1}$	18	<i>Si</i>
$B'_{1,1,2}$	12	<i>Si</i>
$B'_{1,3,1}$	12	<i>Si</i>
$B'_{1,3,2}$	18	<i>Si</i>
$B'_2$	4	
$B'_{2,1}$	8	
$B'_{2,2}$	18	<i>Si</i>
$B'_{2,3}$	6	
$B'_{2,1,1}$	6	
$B'_{2,3,1}$	8	
$B'_{2,3,2}$	18	<i>Si</i>
$B'_{2,1,1,1}$	12	<i>Si</i>
$B'_{2,1,1,2}$	12	<i>Si</i>
$B'_{2,3,1,1}$	12	<i>Si</i>
$B'_{2,3,1,2}$	18	<i>Si</i>
$B'_3$	18	<i>Si</i>
$B'_4$	4	
$B'_{4,1}$	9	<i>Si</i>
$B'_{4,2}$	12	
$B'_{4,3}$	8	
$B'_{4,4}$	12	
$B'_{4,2,1}$	18	<i>Si</i>
$B'_{4,2,2}$	12	<i>Si</i>
$B'_{4,3,1}$	12	<i>Si</i>
$B'_{4,4,1}$	12	<i>Si</i>
$B'_{4,4,2}$	18	<i>Si</i>

Hipermatriz $B$	Dist. aparente	$S(B) = \emptyset \rightarrow Si$
$B'_5$	9	
$B'_{5,1}$	18	$Si$
$B'_6$	8	
$B'_{6,1}$	18	$Si$
$B'_7$	12	$Si$
$B'_8$	9	
$B'_{8,1}$	12	$Si$
$B'_9$	18	$Si$

De aquí tenemos que,

$$m_1 = \min(\{d^* P : P \in \mathcal{T}(\mathcal{M}_1)\} \cup \{m_0\}) = \min\{4, 3\} = 3.$$

Y también que,

$$\begin{aligned} \eta_1 &= \{N \in \mathcal{T}(\mathcal{M}_1) : \mathcal{S}(N) = \emptyset\} \\ &= \{B'_{1,2}, B'_{1,4}, B'_{1,1,1}, B'_{1,1,2}, B'_{1,3,1}, B'_{1,3,2}, B'_{2,2}, B'_{2,3,2}, B'_{2,1,1,1}, B'_{2,1,1,2}, \\ &B'_{2,3,1,1}, B'_{2,3,1,2}, B'_{4,1}, B'_{4,2,1}, B'_{4,2,2}, B'_{4,3,1}, B'_{4,4,1}, B'_{4,4,2}, B'_{5,1}, B'_{6,1}, \\ &B'_7, B'_{8,1}, B'_9\}. \end{aligned}$$

3. Vamos a construir

$$\mathcal{M}_2 = \{L(N) : 0 \neq L(N) \text{ y } N \in \eta_1\}.$$

Observemos que

$$L(B'_{1,2}) = L(B'_{1,4}) = L(B'_{1,1,1}) = L(B'_{1,1,2}) = L(B'_{1,3,1}) = L(B'_{1,3,2}) = 0$$

$$L(B'_{2,2}) = L(B'_{2,3,2}) = L(B'_{2,1,1,1}) = L(B'_{2,1,1,2}) = L(B'_{2,3,1,1}) = L(B'_{2,3,1,2}) = 0$$

$$L(B'_{4,2,1}) = L(B'_{4,2,2}) = L(B'_{4,3,1}) = L(B'_{4,4,1}) = L(B'_{4,4,2}) = 0$$

$$L(B'_{5,1}) = L(B'_{6,1}) = L(B'_{8,1}) = L(B'_7) = 0$$

Para  $B'_{4,1}$  tenemos que  $Ip(B'_{4,1}) = \{(1, 1), (1, 2)\}$ . Entonces  $L(B'_{4,1})$  es la hipermatriz

$$\begin{aligned} &H_{L(B'_{4,1})}(1, 0) \quad H_{L(B'_{4,1})}(1, 1) \quad H_{L(B'_{4,1})}(1, 2) \\ &\left( \begin{array}{ccc} \boxed{0} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{array} \right) \quad \left( \begin{array}{ccc} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \quad \left( \begin{array}{ccc} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{array}{ccc}
H_{L(B'_{4,1})}(2,0) & H_{L(B'_{4,1})}(2,1) & H_{L(B'_{4,1})}(2,2) \\
\begin{pmatrix} \boxed{0} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
H_{L(B'_{4,1})}(3,0) & H_{L(B'_{4,1})}(3,1) & H_{L(B'_{4,1})}(3,2) \\
\begin{pmatrix} \boxed{0} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}
\end{array}$$

Y, para  $B'_9$  tenemos que  $Ip(B'_9) = \{(3, 1)\}$ . Entonces  $L(B'_9)$  es la hipermatriz

$$\begin{array}{ccc}
H_{L(B'_9)}(1,0) & H_{L(B'_9)}(1,1) & H_{L(B'_9)}(1,2) \\
\begin{pmatrix} \boxed{1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
H_{L(B'_9)}(2,0) & H_{L(B'_9)}(2,1) & H_{L(B'_9)}(2,2) \\
\begin{pmatrix} \boxed{1} & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
H_{L(B'_9)}(3,0) & H_{L(B'_9)}(3,1) & H_{L(B'_9)}(3,2) \\
\begin{pmatrix} \boxed{1} & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}
\end{array}$$

Entonces

$$\mathcal{M}_2 = \{L(B'_{4,1}), L(B'_9)\}.$$

3.1. Vamos a construir ahora  $m_2$ . Recordemos que para ello debemos construir la sucesión  $\mathcal{T}_1(B), \dots, \mathcal{T}_n(B)$  para toda hipermatriz  $B \in \mathcal{M}_2$ .

Sea  $B''_1 = L(B'_{4,1})$ . Entonces  $d^*B''_1 = 12$ ,  $Ip(B''_1) = \{(1, 0), (2, 2), (3, 2)\}$  y  $\mathcal{S}(B''_1) = \emptyset$ . Por lo tanto,  $\mathcal{T}_0(B''_1) = B''_1$  y  $\mathcal{T}_1(B''_1) = \mathcal{S}(B''_1) = \emptyset$ .

Sea  $B''_2 = L(B'_9)$ . Entonces  $d^*B''_2 = 12$ ,  $Ip(B''_2) = \{(1, 0), (2, 1), (2, 2), (3, 0)\}$  y  $R(B''_2, 1, 0) = R(B''_2, 2, 1) = R(B''_2, 2, 2) = \emptyset$ . La sucesión correspondiente a  $H_{B''_2}(3, 0)$  es :

$$\begin{aligned}
H_{B_2''}(3,0) &= H_0^{3,0}(B_2'') = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
&> H_1^{3,0}(B_2'') = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Luego,  $\mathcal{S}(B_2'') = \{B_{2,1}''\}$  donde  $B_{2,1}'' = (B_2'', H_1^{3,0}(B_2''))$  es la hipermatriz:

$$\begin{array}{ccc}
H_{B_{2,1}''}(1,0) & H_{B_{2,1}''}(1,1) & H_{B_{2,1}''}(1,2) \\
\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
H_{B_{2,1}''}(2,0) & H_{B_{2,1}''}(2,1) & H_{B_{2,1}''}(2,2) \\
\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
H_{B_{2,1}''}(3,0) & H_{B_{2,1}''}(3,1) & H_{B_{2,1}''}(3,2) \\
\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}
\end{array}$$

Ahora bien,  $d^* B_{2,1}'' = 18$ ,  $Ip(B_{2,1}'') = \{(1,2), (2,0), (3,0)\}$  y  $\mathcal{S}(B_{2,1}'') = \emptyset$ . Por lo tanto,  $\mathcal{T}_0(B_2'') = B_2'', \mathcal{T}_1(B_2'') = \mathcal{S}(B_2'') = \{B_{2,1}''\}$  y  $\mathcal{T}_2(B_2'') = \emptyset$ .

Entonces tenemos que:

$$\mathcal{T}(\mathcal{M}_2) = \bigcup_{P \in \mathcal{M}_2} \bigcup_{j=0}^{n(P)} \mathcal{T}_j(P) = \{B_1'', B_2'', B_{2,1}''\}.$$

En la siguiente tabla relacionamos algunos datos sobre las hipermatrices de  $\mathcal{T}(\mathcal{M}_2)$ :

Hipermatriz $B$	Dist. aparente	$\mathcal{S}(B) = \emptyset \rightarrow Si$
$B_1''$	12	$Si$
$B_2''$	9	
$B_{2,1}''$	18	$Si$

De aquí tenemos que,

$$m_2 = \min(\{d^* P : P \in \mathcal{T}(\mathcal{M}_2)\} \cup \{m_1\}) = \min\{9, 3\} = 3.$$

Y también que,

$$\eta_2 = \{N \in \mathcal{T}(\mathcal{M}_2) : \mathcal{S}(N) = \emptyset\} = \{B''_1, B''_{2,1}\}.$$

Siguiendo el proceso de construcción de los conjuntos de hipermatrices  $\mathcal{M}_i$ , se puede verificar que  $\mathcal{M}_3 = \emptyset$ . Por lo tanto, como resultado final obtenemos las sucesiones  $\mathcal{M}_0, \mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2$  y  $m_0 = 3 \geq m_1 = 3 \geq m_2 = 3$ . Con lo cual,  $dam(M) = 3$ , que coincide en este caso con  $d^*M$ .

# Bibliografía

- [1] I. Assem, D. Simson y A. Skowroński, *Elements of the Representation Theory of Associative Algebras, Volume 1 Techniques of Representation Theory*, Cambridge University Press, 2006.
- [2] J.J. Bernal and J.J. Simón, *Information sets from defining sets in abelian codes*, IEEE Trans. Inform. Theory, vol. 57, no. 12, pp. 7990-7999, 2011.
- [3] R. C. Bose and D. K. Ray-Chaudhuri, *On A Class of Error Correcting Binary Group Codes*, Information and Control, No. 3, 1960, pp. 68 –79.
- [4] P. Camion, *Abelian Codes*, MRC Tech. Sum. Rep. # 1059, University of Wisconsin, 1971.
- [5] R.T. Chien and D.M. Chow, *Algebraic Generalization of BCH-Goppa-Helgert Codes*, IEEE Transactions on Information Theory, vol.IT-21, No.1, 1975.
- [6] V.S. Pless y W.C. Huffman (editors), *Handbook of Coding Theory*, vol. I, North-Holland, Amsterdam, 1998.
- [7] C. Polcino y S. Sehgal, *An Introduction to Group Rings*, Kluwer Academic Publishers, 2002.
- [8] R. Evans Sabin, *On Minimum Distance Bounds for Abelian Codes*, Applicable Algebra in Engineering Communication and Computing, Springer-Verlag, 1992.
- [9] W.C. Huffman y V. Pless, *Fundamentals of Error-Correcting Codes*, Cambridge, 2003.
- [10] F.J. Macwilliams y N.J.A. Sloane, *The Theory of Error-Correcting Codes*, North-Holland Mathematical Library, 1977.
- [11] C. E. Shannon, “*A mathematical theory of communication*”, Bell Syst. Tech. J, **27** (1948), 379-423, 623-656.
- [12] J.H. Van Lint y R.M. Wilson, *On the Minimum Distance of Cyclic Codes*, IEEE Trans. Inform. Theory, vol. 32, no.1, 1986.
- [13] K. Yamada, *Hypermatrix and its application*, Hitotsubashi J. Arts Sci., No. 6, 1965, pp.34–44.