



UNIVERSITAT AUTÒNOMA DE BARCELONA

DESENVOLUPAMENT D'ALGORISMES NUMÈRICS PER AL CàLCUL
DE LA TOPOGRAFIA DELS MIRALLS PER A UN SINCROTRÓ

TESI QUE PRESENTA:

JOSEP VIDAL GONZÁLEZ

PER OBTENIR EL TÍTOL DE DOCTOR EN
CIÈNCIES FÍSiques

DIRECTORS DE TESI: JUAN CAMPOS i JOSEP NICOLÁS

En Juan Campos Coloma, Catedràtic d'Òptica de la Universitat Autònoma de Barcelona i en Josep Nicolás Román, Doctor en Físiques a la Universitat Autònoma de Barcelona i investigador del Sincrotró ALBA

CERTIFIQUEN

Que en Josep Vidal González, llicenciat en Matemàtiques, ha realitzat sota la seva direcció i en el Departament de Física de la Universitat Autònoma de Barcelona, el treball *Desenvolupament d'algorismes numèrics per al càlcul de la topografia dels miralls per a un sincrotró*, que es recull en aquesta memòria per optar al grau de Doctor en Ciències Físiques.

I per a que així consti, d'acord amb la legislació vigent, firmen aquest certificat a Bellaterra, 21 de setembre de 2014.

Prof. Juan Campos

Dr. Josep Nicolás

Als meus pares.

AGRAÏMENTS

A modo de agradecimientos e inspirándome en Perec que a la vez se inspiró en Brainard, hago mis *Je me souviens* de la tesis.

Me acuerdo de la ilusión del principio.

Me acuerdo de la luz del fondo del pasillo de Juan.

Me acuerdo de los ojos brillantes de complicidad de Ángel por encima la pantalla.

Me acuerdo de las patillas a lo *rockabilly* de Manel, a veces.

Me acuerdo de la primera charla de congreso que di, en Munich.

Me acuerdo que soné que no entedía las preguntas.

Me acuerdo del *Run Run Run* de la Velvet.

Me acuerdo de haber paseado por París un día que llovía a borbotones.

Me acuerdo de ver la carretera pasar, cada día.

Me acuerdo del anuncio de la beca.

Me acuerdo de lo elegante que iba Marifí en las conferencias del SPIE.

Me acuerdo de la práctica de difracción, y de como la matemática se convertía en física.

Me acuerdo de *Reckoner* de Radiohead en Berlin, claro.

Me acuerdo de Nico enseñándome su reino.

Me acuerdo de la entrevista.

Me acuerdo de Juan y yo mano a mano con un programa.

Me acuerdo de Alba y Laura, en Notre Dame.

Me acuerdo de las room balls de San Diego.

Me acuerdo de cuando me dieron el premio.

Me acuerdo de *Le Jardin des Plantes*.

Me acuerdo de aquél avión del que me salí para no volver.

Me acuerdo de tener *Je me souviens* de Perec en las manos y estallarme la cabeza.
Me acuerdo de pensar estoy-aquí-y-ahora-vivo-y-eso-es-mucho.
Me acuerdo del *A dinaaaaaaar* de la Laura.
Me acuerdo de *Fargo*, vista millones de veces.
Me acuerdo del rojo de los tomates con sal de mi abuela.
Me acuerdo de preguntarme como era posible que echara de menos las bromas de Àngel.
Me acuerdo de la charla con Andrés en aquella cena con palmeras.
Me acuerdo de la ilusión del primer proceeding.
Me acuerdo de la tormenta en la cabana, que bestialidad.
Me acuerdo de las mesas redondas de rey Arturo del Pagès.
Me acuerdo de la cena del congreso de Ourense.
Me acuerdo de la manera valiente en que Marifí afrontó lo de aquel *paper*.
Me acuerdo del *Follow rivers* con Toni, eufóricos de alegría.
Me acuerdo de John poniendo un mapa de Australia del revés.
Me acuerdo con Marc y Luz, trabajando a destajo.
Me acuerdo de las comidas con Manel y del yogur más rápido del mundo.
Me acuerdo de Juan dándome aquel abrazo.
Me acuerdo de las manos de bailarina de Laura.
Me acuerdo de cuando me desperté llorando junto a Àngel y nos abrazamos.
Me acuerdo del primer congreso en Trieste y lo bonita que era la ciudad.
Me acuerdo del *Tokio ya no nos quiere* de Ray Loriga.
Me acuerdo del día con Vania.
Me acuerdo de los barcos amarrados, y las luces al fondo.
Me acuerdo del olor del hospital.
Me acuerdo cuando volví al sincrotrón para hacer el ultra-vacío.
Me acuerdo de pensar que sí, que sí.
Me acuerdo con Jonathan *when we were kings*.
Me acuerdo del 3rd floor member.
Me acuerdo de la sirena infinita del Talabot con Toni y Pol.

Me acuerdo de París.

Me acuerdo de la sensación de entrar al *Palais de Tokyo* por primera vez.

Me acuerdo de la noche en el *Death Valley* con Maria, viendo lágrimas celestiales caer.

Me acuerdo del viaje en tren, todo blanco nevado.

Me acuerdo de los *recibido* de Irene, camino a Bagués.

Me acuerdo de los paseos alrededor del PTB.

Me acuerdo de Alba, dándome también aquel abrazo.

Me acuerdo del *Hey Moon!* de Molly Nilsson.

Me acuerdo del camino en coche hacia Oxford.

Me acuerdo de la conversación con Ángel en el banco de madera, una de tantas.

Me acuerdo del día en que entró Laura por la puerta.

Me acuerdo del baile en la boda de Manel y Ana Pilar.

Me acuerdo del pájaro volando.

Me acuerdo de cuando salió la *artist proof*.

Me acuerdo de la silla de antes, sin ruedas y tapiz roja.

Me acuerdo de lo mucho que me gustaba leer el *Optical Shop Testing*.

Me acuerdo de cuando pensé en hacer una cabana para acabar la tesis.

Me acuerdo del silencio cuando acabé la charla.

Me acuerdo de cuando me hice la foto de la puerta del despacho.

Me acuerdo de las primeras correcciones.

Me acuerdo de *Libertad*, de Jonathan Franzen.

Me acuerdo del verde intenso del que pensaba sería mi último congreso.

Me acuerdo de los primeros días de nieve en Alemania.

Me acuerdo de Isaac, presentando la suya.

Me acuerdo de aquella foto todos juntos abrazados.

Me acuerdo de llorar hasta no poder más.

Me acuerdo de la alegría que tuve cuando me vino una idea.

Me acuerdo de Laura diciendo *the yellow and blue part*.

Me acuerdo de cuando les conté a mis padres que me iba a vivir a una cabana.

Me acuerdo de la ciudad aquella rara, con Àngel, Laura y Alba.

Me acuerdo de sentir que ya estaba todo demasiado lejos.

Me acuerdo de cuando Alba hizo el sonido de la montana.

Me acuerdo de cuando subimos con Àngel una colina y bajamos una montana.

Me acuerdo del *Gamma Ray* de Beck.

Me acuerdo del primer día en la cabana y el olor de madera intenso.

Me acuerdo del ascensor parado, ya muy de madrugada.

Me acuerdo de cuando nos dejamos 100 euros en una noche.

Me acuerdo del lago helado.

Me acuerdo del *I take it* de Anny.

Me acuerdo de Berlín.

Me acuerdo de *La soledad del corredor de fondo*.

Me acuerdo de la conversación con Juan y lo mucho que la he agradecido.

Me acuerdo de aquella cena con Maria y Marifí.

Me acuerdo de cuando nos enfadamos con Àngel y empezó todo lo bueno.

Me acuerdo de pensar que no la acabaría nunca, de camino hacia el tren.

Me acuerdo de cuando tuve la página 100 de esta tesis.

Aquesta tesi ha comptat amb l'ajut del Sincrotró ALBA, Hangar Centre de Producció, Sant Andreu Contemporani, AGAUR i Can Felipa Arts Visuals.

Guanyadora del Premi Miquel Casablanca 2014 (publicació).

ÍNDEX GENERAL

AGRAÏMENTS	v
ÍNDEX GENERAL	xi
1 INTRODUCCIÓ I PROPÒSIT	1
1.1 Introducció	1
1.1.1 Mesura de superfícies òptiques	2
1.1.1.1 Interferometria òptica	4
1.1.1.2 Deflectometria	10
1.1.2 Miralls i Metrologia de sincrotró	14
1.1.2.1 Miralls de sincrotró	14
1.1.2.2 Metrologia de sincrotró	16
1.2 Propòsit i esquema	21
2 INTRODUCCIÓ AL LATERAL SHEARING SEQÜENCIAL	23
2.1 Muntatge	24
2.2 En domini infinit	26
2.2.1 Funció de transferència	32
2.3 En domini finit	37
2.3.1 SUT periòdica	39
2.3.2 SUT no periòdica	42
2.3.2.1 L extensió Natural	42

3	LATERAL SHEARING SEQÜENCIAL EN DOMINI DISCRET	49
3.1	Un desplaçament sense extensió natural	54
3.1.1	Indeterminació del pla $Ax + C$	54
3.1.2	Error periòdic en la reconstrucció	57
3.1.3	Reconstrucció utilitzant un desplaçament no divisor del domini ξ	63
3.1.4	Reconstrucció utilitzant un desplaçament divisor del domini ξ	65
3.2	Un desplaçament amb extensió natural	68
3.3	Dos desplaçaments	70
3.3.1	Extensió natural	72
3.3.1.1	Dos desplaçaments no divisors del domini	78
3.3.1.2	Dos desplaçaments divisors del domini i no co-primers	79
3.3.1.3	Dos desplaçaments divisors del domini i co-primers	80
4	SOROLL I ERROR DE POSICIONAMENT	83
4.1	Soroll a les mesures	84
4.2	Error de posicionament	92
5	ERRORS DE GUIATGE	109
5.1	Error de guiatge	116
5.1.1	Pitch	117
5.1.2	Roll	120
5.2	Nou mètode per a l'estimació dels errors de guiatge	122
5.2.1	Explicació del mètode	123
5.2.2	Pitch	126
5.2.2.1	Superfícies planes	130
5.2.2.2	Superfícies quadràtiques	135
5.2.3	Roll	138
5.2.3.1	Superfícies planes	140
5.2.3.2	Superfícies quadràtiques	145
5.3	Resultats de reconstruccions	147

<i>ÍNDIX GENERAL</i>	xiii
5.3.1 Superfícies planes	147
5.3.2 Superfícies amb quadràtica	151
6 INFORMACIÓ DE LA QUADRÀTICA 3-flat test	155
6.1 Eliminació de la quadràtica	156
6.2 3-flat test	160
6.2.1 Nou mètode per a l'estimació de la quadràtica	161
6.2.1.1 Resultats de l'estimació de la quadràtica de la superfície C . . .	170
6.3 Lateral Shearing Sequencial + 3-flat test	177
7 DISCUSSIÓ I CONCLUSIONS	193
BIBLIOGRAFIA	199

CAPÍTOL 1

INTRODUCCIÓ I PROPÒSIT

1.1 Introducció

Avui la tecnologia s ha esdevingut un dels motors industrials i socials del món. La òptica i la indústria òptica també han tingut grans canvis en els últims anys. El desenvolupament de tècniques relacionades amb la imatge òptica s ha esdevingut ja un referent i una necessitat en molts de les àrees d interès i investigació, com en la salut humana i ciències de la vida, tecnologia de la informació i de les comunicacions, sensors òptics i noves làmpades més eficients energèticament, etc. És per això que s estan desenvolupament nous mètodes i tècniques per tal de millorar en totes les àrees de la òptica. Sense anar molt lluny en el temps, com a exemple, és té el fet que es va donar el premi Nobel de Física del 2009 a tres científics, el britànic/nord-america Charles K. Kao, per un costat, i els nord-americans Willard S. Boyle y Georges E. Smith, per l altre, pels seus treballs en la comunicació òptica i de circuits semiconductors.

Dins d aquest desenvolupament de tecnologies que utilitzen la òptica o fenòmens òptics, grans instal·lacions científiques com el CERN, l LHC o el XFEL s estan esdevenint elements essencials en molts dels camps de la investigació de la ciència i la biociència. L XFEL és l últims de tota una nova generació de sincrotrons. Els sincrotrons i la radiació de sincrotró són una eina de gran potència per a molts camps de la recerca, especialment en el context

científic i d'indústria. L'increment de l'interès en aquest tipus de font de llum es demostra amb el número de sincrotrons que hi ha arreu del món. En els últims 50 anys la radiació de sincrotró s'ha esdevingut una eina de primeríssima necessitat per a l'estudi de la matèria en totes les seves manifestacions. Noves generacions de sincrotró s'estan construint o ho han fet recentment, com per exemple els de Free Electron Lasers, obrint noves possibilitats per a la recerca. El sincrotró ALBA, situat a Cerdanyola del Vallès i amb una inversió inicial de 201 milions d'euros, és un sincrotró de 3a generació, inaugurat al 2011 que s'ha esdevingut ja punt central de la recerca del sud d'Europa amb 7 línies de llum plenament operatives, més de 1000 usuaris actius i de 5000 hores de llum a l'any.

La brillantor que s'està aconseguint amb les fonts de llums de les noves generacions de sincrotrons va en augment, passant d'1 GeV al 2004 als 17.5 GeV previstos al 2016. Per tal d'aprofitar al màxim aquesta brillantor, els components òptics utilitzats han d'estar fets de materials de gran qualitat que mantinguin la forma a molt altes temperatures i tinguin una baixa degradació, així com han d'estar polits amb una gran precisió per tal de focalitzar la màxima energia en el mínim punt de focus. És per això que la precisa mesura de les superfícies òptiques utilitzades en els sincrotrons pels laboratoris de metrologia s'esdevé punt important dins de l'estructura científica d'un sincrotró com l'ALBA.

1.1.1 Mesura de superfícies òptiques

La mesura de superfícies òptiques ha esdevingut un camp d'investigació molt important en els últims anys. La demanda de la millora de la precisió d'aquest tipus de superfícies per part de la indústria — bàsicament farmacèutica i de semiconductors — fa que sigui necessari un augment de la precisió alhora de poder mesurar aquestes superfícies. Hi ha molts mètodes per a la mesura de superfícies òptiques. Bàsicament es poden dividir en dos grups: mètodes de contacte i de pseudo-contacte. Els mètodes de contacte, com per exemple el perfilòmetre d'agulla, van caracteritzant la superfície a mesura que es recorre amb una agulla. En funció de l'alçada de l'agulla en cada punt es calcula l'alçada de la superfície. El problema d'aquest

mètode és que al necessitar del contacte amb la superfície, aquesta pot fer-se malbé al recorre-la amb l'agulla. En canvi els mètodes de pseudo contacte no necessiten d'aquest contacte amb la superfície per tal de mesurar-la. Generalment són mètodes òptics que utilitzen la llum i les seves propietats per tal de mesurar la superfície. Alguns d'aquests mètodes es troben en la figura 1.1 en funció de la seva precisió [Mor06]. Alguns d'aquests mètodes estan descrits més endavant.

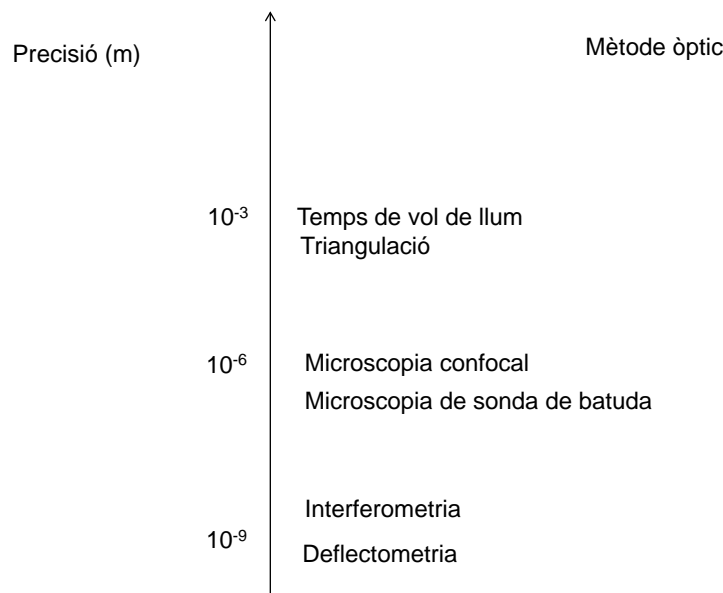


Figura 1.1: Esquema dels principals mètodes per a la mesura de la topografia de superfícies en funció de la seva precisió.

En la figura 1.2 es representen les possibles desviacions de la superfície en respecte de la seva forma ideal. Una primera aproximació de la caracterització de la superfície està representada en negre, corresponent a la seva forma nominal. En vermell està marcada l'ondulació, que correspon a desviacions de freqüències baixes en respecte de la forma nominal. Finalment en blau es marca el que s'anomena la rugositat de la superfície i que correspon a desviacions d'alta freqüència de la forma nominal. Dels nombrosos mètodes que hi ha per a la mesura de superfícies òptiques, l'elecció del mètode dependrà bàsicament de la resolució amb que es

desitgi caracteritzar la superfície. Els mètodes que més s'utilitzen per a la mesura de superfícies òptiques, degut a la seva precisió, són l'interferometria i la deflectometria [MC07].

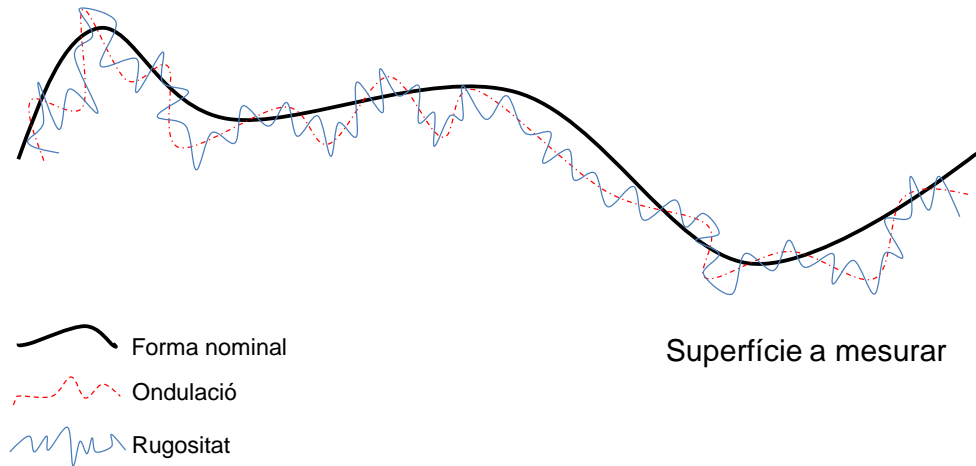


Figura 1.2: Esquema de les irregularitats de la superfície a mesurar.

1.1.1.1 Interferometria òptica

L'interferometria és probablement el mètode més emprat per a la mesura de superfícies òptiques. La precisió d'aquest mètode és en el rang d'una fracció de la longitud d'ona utilitzada. Normalment s'utilitza una font de llum d'He-Ne, arribant a precisions en l'ordre d'uns quants nanòmetres, tal com es pot veure en la figura 1.1. El principi de l'interferometria és la superposició de dos fronts d'ona, una en relació a la superfície que es vol mesurar i una altra en relació a la superfície de referència. La figura 1.3 mostra el principi de l'interferòmetre de Michelson, el clàssic dels interferòmetres.

El muntatge es basa en una font de llum, normalment d'He-Ne, un separador de llum (beamsplitter), dos miralls — la superfície a mesurar i la superfície de referència — i un detector. Aleshores seguint els camins òptics de l'esquema, el front d'ones surt de la font de llum, es separa en el divisor de llum, i una part del front d'ones és reflectit en la superfície de referència i l'altra part del front d'ones és reflectit en la superfície a mesurar. Aleshores els

dos fronts d'ones tornen altra vegada al separador de llum, que els condueix al detector. Si la diferència de camins òptics entre un i altre front d'ones és suficientment petit — menor que la longitud de coherència de la font de llum —, aleshores en el detector es produeix un patró de franges d'interferències. Aquest patró de franges està relacionat amb la forma de la superfície que es vol mesurar i la forma de la superfície de referència. Mitjançant el piezoelèctric, es pot moure la superfície de referència, per tal de tenir al menys 3 interferogrames amb els que reconstruir la superfície a mesurar, mitjançant algun dels diferents algorismes que hi ha per al desenrotllament de la fase [EC96].

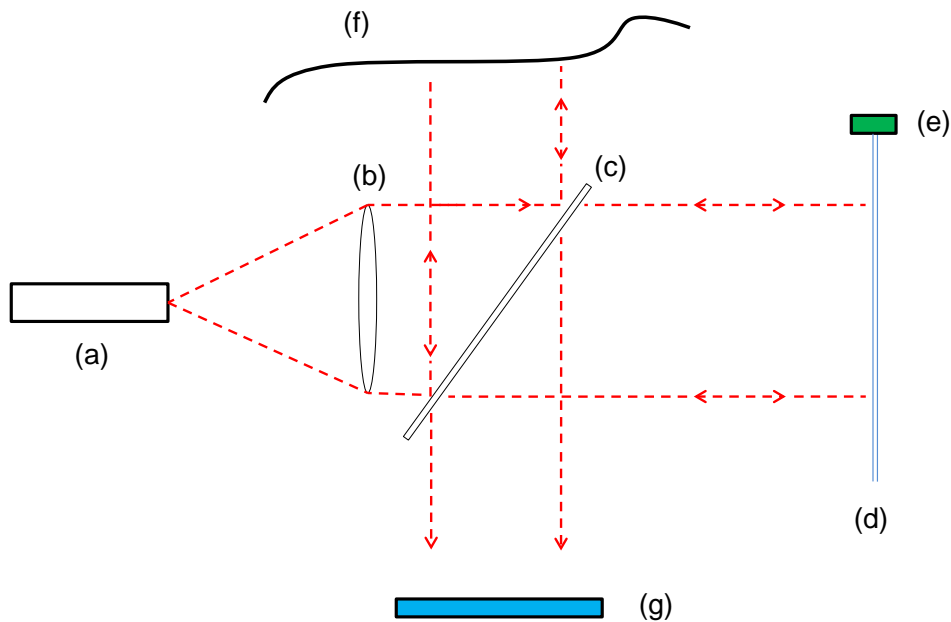


Figura 1.3: Esquema del funcionament i setup d'un interferòmetre de Michelson. (a) Font de llum, (b) Lent, (c) Divisor de llum, (d) Superfície de referència, (e) Piezoelèctric de translació, (f) Superfície a mesurar, (g) Detector.

L'interferometria és abundantment utilitzada per la rapidesa de les mesures, perquè són mesures bidimensionals i per la precisió del mètode. El principal inconvenient del mètode és el fet que la precisió de l'interferòmetre està limitada per la precisió de la superfície de referència. Això vol dir que la precisió en la mesura amb l'interferòmetre vindrà donada per la precisió

de la calibració de la superfície de referència. És per això necessari mètodes addicionals, com pot ser la cal·libració de la superfície de referència mitjançant deflectometria [Gec07], que fan que la interferometria no sigui un mètode autosuficient per tal d'obtenir una altra precisió en la mesura de superfícies òptiques.

Interferòmetre de Fizeau

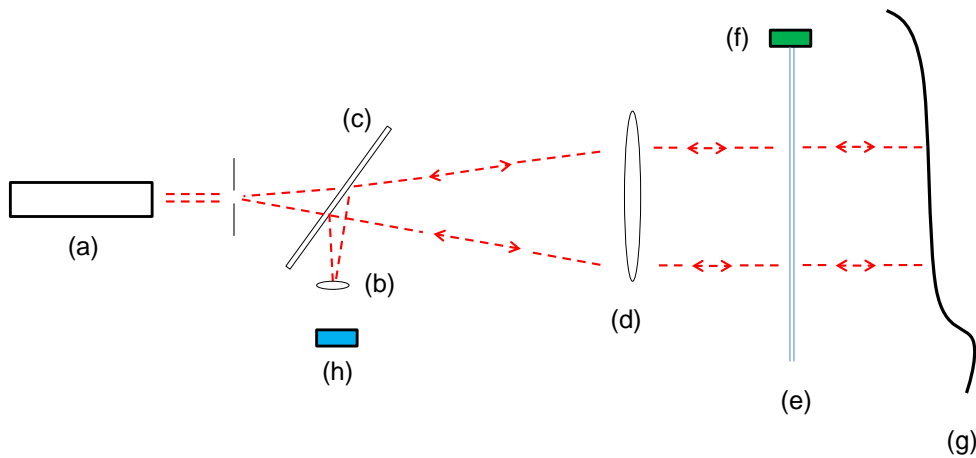


Figura 1.4: Esquema d'un interferòmetre de Fizeau, compost pels següents elements, (a) font de llum, (b) lent, (c) separador de feix de llum, (d) lent, (e) superfície de referència, (f) piezoelèctric de translació, (g) superfície a mesurar, (h) detector.

L'interferòmetre de Fizeau és un dels més utilitzats dins de la interferometria. Això és degut a la seva configuració, que es pot veure a la figura 1.4. Hi ha una font de llum, que passa per un filtre espacial, per després focalitzar en una lent. El front d'ones pla es divideix en el divisor de front d'ones, anant una part a incidir sobre la superfície de referència. Part del feix és reflectit per la superfície de referència i part segueix, per finalment incidir sobre la superfície a mesurar. Els dos fronts d'ona, el reflectit en la superfície de referència i el reflectit en la superfície a mesurar formen un patró d'interferències que és mesurat en el detector. Com es pot veure, el principi és el mateix que s'ha vist a la figura 1.3 amb l'interferòmetre de Michelson. La diferència, i és el que el fa que el principi conceptual sigui més precís que qualsevol altre, és la mínima diferència que hi ha entre la superfície de referència i la superfície

a mesurar. Això fa que és minimitzi la diferència de camins òptics entre els dos fronts d'ona, reduint possibles elements externs que puguin afectar a les mesures com fluctuacions de l'aire o canvis de temperatura. Al estar els dos fronts d'ona influenciats en la major part del recorregut pels mateixos elements, redueix elements que els puguin afectar per separat i, per tant, augmenta la precisió en les mesures.

Interferòmetre per desplaçament

La interferometria per desplaçament és un altre tipus d'interferometria que, a diferència de les altres i és la seva gran avantatge no necessita d'una superfície de referència per a fer una reconstrucció de superfície. Això és degut a que el patró d'interferències necessari es fa amb un front d'ones i el mateix front d'ones desplaçat una distància, anomenada *shear* en anglès. En la regió de solapament entre els dos fronts d'ones es té un patró d'interferències relacionat amb la superfície a mesurar, més concretament amb la seva derivada [Mal07]. A la figura 1.5 es pot veure l'esquema del principi de l'interferometria per desplaçament. Es tenen un front d'ones i ell mateix desplaçat una distància s , anomenada *shear*. Després de passar per la lent arriben al detector. Si s és suficientment petit, els dos fronts d'ones tenen una regió de solapament. En aquesta regió és on es produeix el patró de franges relacionat amb el front d'ones i el desplaçament s .

L'interferometria per desplaçament, a part de presentar l'avantatge mencionada anteriorment de no necessitar superfície de referència, també és menys sensible a turbulències, vibracions i altres efectes externs, doncs els dos fronts d'ona recorren el mateix camí òptic. El principal inconvenient és que al només tenir un patró d'interferències i aquest estar relacionat amb la derivada de la funció a reconstruir, no és possible recuperar amb un sol interferograma la funció mesurada a no ser que es suposin que la superfície compleix certes propietats de simetria [MC07].

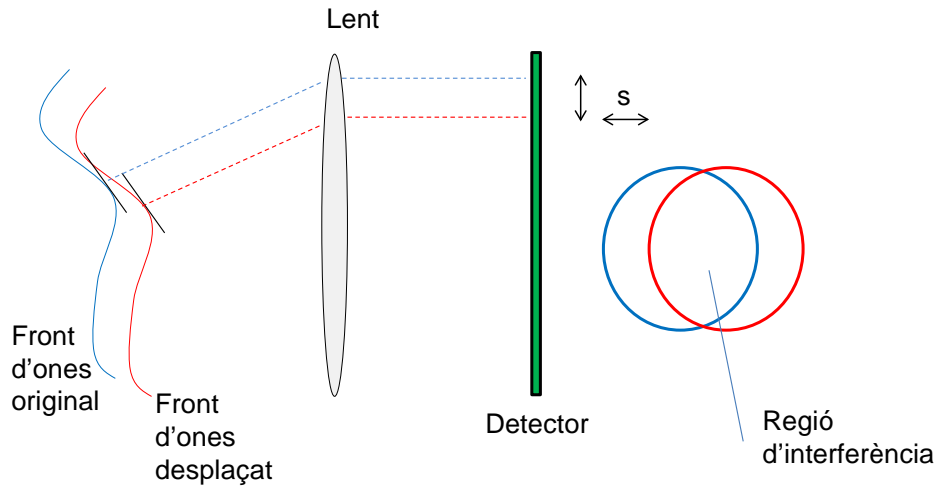


Figura 1.5: Esquema d'un interferòmetre de desplaçament, compost per un front d'ones i ell mateix desplaçat una distància s . Els dos fronts d'ones passen per la lent per anar al detector. En la regió de solapament es produeix un patró de franges en relació al front d'ones.

3-flat test

Tal com s'ha vist, en general, quan es parla de mesurar una superfície en veritat el que s'està fent és una comparació d'aquesta superfície amb una altra que és coneguda o molt plana. En la investigació de la mesura de superfícies planes, s'han buscat mètodes directes que mesurin la superfície sense la necessitat d'aquest estàndard de referència. Una idea inicial va ser la de fer servir superfícies líquides com a superfícies de referència, basant en la idea de que els líquids només tenen curvatura del radi de la Terra. Aquesta idea es va desestimar per problemes d'errors en les vores de les superfícies líquides [Ma107].

Una idea alternativa que sí que va funcionar va ser la del 3-flat test. Aquest mètode es basa de manera més simple en el fet de que si es tenen dos valors a i b , es pot determinar com a combinació d' a i b , $a = ((a + b)(ba))^{-2}$. Si a i b són alçades puntuals de dues superfícies, es pot determinar a a partir de la combinació de dues mesures d' a i b . En aquest cas, no seria necessària una superfície plana o coneguda de referència. Portant el problema al camp de la metrologia, els primers experiments que es van fer va ser mesurant 3 superfícies A , B i C com

es mostra en la figura 1.6 [Mal07], on es tenen tres superfícies en una combinació de diferents posicions.

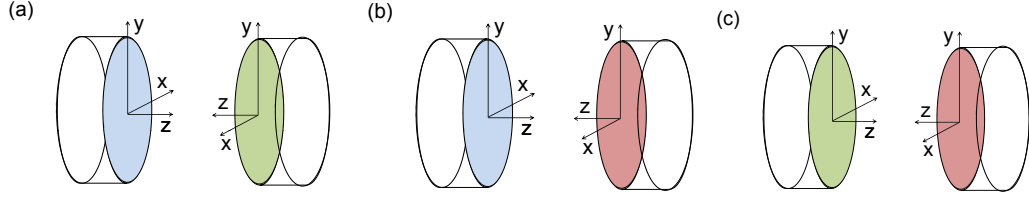


Figura 1.6: Esquema per al 3-flat test amb tres superfícies i 3 mesures, A (blau), B (verd) i C (vermell). Les coordenades x , y i z senyalen les coordenades del detector de l'interferòmetre. (a) Superfície A (posició frontal) i superfície B (posició darrera), (b) Superfície A (frontal) i superfície C (darrera), (c) Superfície B (frontal) i superfície C (darrera).

Si es fan servir 3 superfícies A , B i C com en el cas de la figura 1.6, dóna la sensació que amb 3 mesures en seria suficient per a determinar-les, doncs hi ha el mateix nombre de superfícies que de mesures. Això no és així doncs degut a la diferència que hi ha entre la posició frontal i la posició de darrera en la figura 1.6. Les mesures de les superfícies A , B i C són

$$\begin{aligned}
 g^{AB}(x, y) &= f^A(x, y) + f^B(-x, y) \\
 g^{AC}(x, y) &= f^A(x, y) + f^C(-x, y) \\
 g^{BC}(x, y) &= f^B(x, y) + f^C(-x, y)
 \end{aligned} \tag{1.1}$$

on $g^{AB}(x, y)$, $g^{AC}(x, y)$ i $g^{BC}(x, y)$ corresponen a la figura 1.6 (a), (b) i (c), respectivament.

Per tant, només si $f^B(x, y) = f^B(-x, y)$ aleshores sí que es tindria solució per a les mesures. Sense assumir aquesta condició de simetria, sempre hi haurà una indeterminació més que mesures es tinguin per més combinacions que es facin i superfícies s'afegeixin [Kuc01].

El problema de la incertesa de la reversió de la superfície es resol fent una rotació d'una de les superfícies a mesurar, és a dir, invertint els eixos x i y . D'aquesta manera es resol la reconstrucció de les superfícies sense la influència de cap altre element extern com pot ser la necessitat d'una superfície de referència [AW93]. A partir d'aquest principi s'han fet moltes variacions del mètode per tal d'anar millorant la precisió de la reconstrucció, afegint noves mesures i superfícies i afegint diferents tipus de girs [Kuc01, Gri07], proposant algorismes iteratius per al càlcul de les superfícies [VM07, VM08] o descomponent les superfícies en parts simètriques [Gri06]. De totes maneres, a no ser que es facin infinits girs, sempre hi ha una part de la informació que no es pot obtenir. Naturalment, al augmentar el nombre de girs l'error comès va disminuint, arribant a una precisió en la reconstrucció de la superfície en l'ordre del nanòmetre [YMM⁺13].

1.1.1.2 Deflectometria

La deflectometria és una de les tècniques amb les que s'obté més precisió, tal com es pot veure en la figura 1.1. En moltes aplicacions s'usen deflectòmetres per tal de mesurar superfícies. Per exemple, en metrologia es necessiten superfícies que serveixin com a estàndards de superfícies planes, usades com a punt d'inici de la cadena per tal d'obtenir mesures amb alta precisió, com podria ser per a la cal·libració d'interferòmetres [GWJP01, Gec06]. Deflectòmetres també s'utilitzen per a la metrologia de superfícies òptiques de gran llargada, com pot ser per exemple els miralls utilitzats en telescopis [BKM⁺06, MZB07, Vir93]. Una altra dels grans camps d'acció de la deflectometria és el de la metrologia de sincrotró [RHM05, SBB⁺12, YGS14], tal com es veurà més endavant a la secció 1.1.2.

La deflectometria presenta una alta resolució en la mesura de les pendents de les superfícies a caracteritzar [MC07]. La idea de mesurar la pendent de la superfície és equivalent al proposat per Evans per mesurar la curvatura de miralls còncaus mesurant la direcció del feix de llum del làser reflectit sobre els miralls [Eva71]. Les tècniques deflectomètriques es basen en la mesura de la desviació d'un feix de llum quan incideix sobre la superfície que es vol mesurar. Bàsicament la deflectometria és una tècnica que mesura la topografia d'una superfície polida

a partir de l'avaluació de la mesura de l'angle amb el que es reflectit un feix de llum, seguint l'esquema de la figura 1.7.

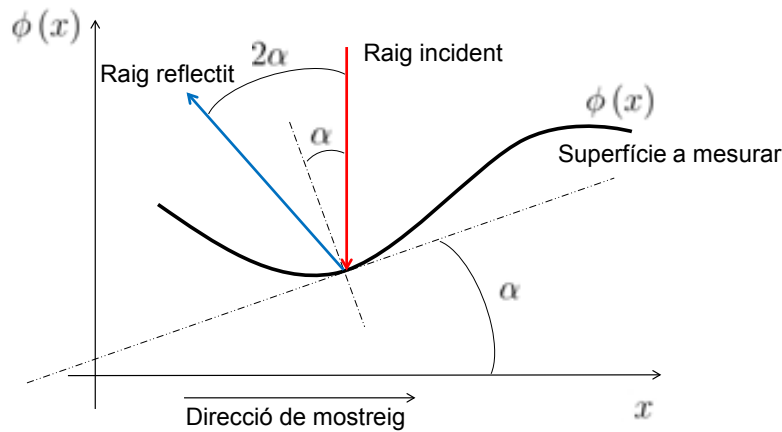


Figura 1.7: Esquema del principi de la deflectometria. Un raig incideix (en vermell) sobre un punt de la superfície que es vol mesurar. Aquest mateix raig és reflectit (en blau), i l'angle 2α que formen el raig incident i el raig reflectit és el doble de la pendent de la superfície ϕ a mesurar en aquest punt.

La figura 1.7 mostra esquemàticament el principi de la deflectometria. Un feix de llum (en vermell) incideix sobre la superfície a mesurar. Com que aquesta superfície a mesurar està polida, el feix de llum incident es reflexa en el superfície, formant un angle α entre el feix de llum incident i el feix de llum reflectit. Aquest angle està relacionat amb la forma de la superfície polida, més concretament, amb la derivada de la funció $\phi(x)$ que descriu la superfície. Per les lleis de la reflexió, aquest angle entre el feix incident i l'angle reflectit està en el pla entre l'angle incident i la normal de la superfície. Més concretament, aquest angle té la següent relació

$$\operatorname{tg}\alpha = \phi'(x) \quad (1.2)$$

on $\phi'(x)$ és, de manera natural, la derivada de la funció que descriu la superfície a mesurar.

Mitjançant una càmera CCD o un detector de posició es pot captar la diferència entre l'angle incident i l'angle reflectit α de l'equació 1.2 i figura 1.7. D'aquesta manera es té la pendent de la superfície mesurada en aquell punt. Si es vol tenir informació de diferents punts de la superfície, mitjançant la batuda de tota una línia, es pot anar captant la diferència d'angle entre el feix incident i el feix reflectit, tenint d'aquesta manera les mesures dels pendents del perfil de la mesura. Mitjançant algorismes numèrics, a partir dels angles captats pel sensor durant l'scan, es pot obtenir la topografia original de la superfície [CYMY02, YMC05, MCY05, MC09]. S'ha de tenir en compte que amb aquest mètode no és necessari cap superfície addicional a part de la que s'està mesurant. Investigacions al respecte del setup s'estant duent a terme per tal de millorar la precisió de la mesura i tenint mesures dels pendents extremadament precises [WSE99, WWG⁺02].

Un aspecte important és la mida del feix del laser incident. Si la mida del feix és gran, es farà una mitja de tots els feixos que incideixen sobre la superfície, perdent resolució alhora d'obtenir la mesura. Si la mida del feix és petit és té una informació més puntual de la superfície a mesurar i per tant més resolució però s'ha de tenir en compte que un feix molt petit pot produir efectes de difracció a les mesures. S'ha d'establir un compromís per tal de tenir una mesura lo suficientment puntual però sense problemes de difracció. Un altre aspecte important a tenir en compte és la distància entre el sensor i la superfície a mesurar. Reduint aquesta distància s'augmenta la precisió de la mesura donada pel detector doncs influeixen menys les turbulències de l'aire, però es redueix l'angle de mesura, doncs la mida del sensor n'és un de determinat. El rang de l'angle d'incidència determina com de plana ha de ser la superfície a mesurar. Altra vegada s'ha d'establir un compromís entre la precisió de la mesura i el rang de l'angle a detectar pel sensor.

La precisió de la deflectometria, tal com es pot veure de l'esquema de la figura 1.1, és de l'ordre del nanòmetre, essent així un dels mètodes més precisos per a la mesura de topografia de superfícies. S'ha de tenir en compte que una altra avantatge de la deflectometria és el fet que es la possibilitat de correcció dels errors de la mesura abans de la reconstrucció del perfil

degut a la redundància de dades que es tenen al llarg de tot l'escaneig. El mètode, però, presenta alguns inconvenients o desavantatges en respecte altres mètodes que s'han de tenir en compte. Bàsicament:

- Adquisició de mesures unidimensionals. El perfil que es reconstrueix de la mesura és unidimensional, que correspon a la línia d'escaneig que ha fet el feix del làser. Aquest fet fa que sigui difícil tenir una mesura bidimensional de la superfície, doncs s'han de fer múltiples escaneigs en diferents direccions.
- Gran requeriment de temps per a les reconstruccions. Degut al punt anterior i degut també al fet que l'escaneig és relativament lent, la reconstrucció de la superfície és lenta. Per aquest motiu, elements externs poden influenciar en la precisió de la reconstrucció, com poden ser fluctuacions en l'aire durant les mesures o canvis de temperatura. És per això que s'ha de tenir encara més un control de tots els possibles factors externs que poden interferir durant el temps de mesura.
- Impossibilitat de mesurar superfícies amb cert grau de curvatura, degut a que aleshores el feix reflectit de la figura 1.7 surt del rang del sensor.

1.1.2 Miralls i Metrologia de sincrotró

1.1.2.1 Miralls de sincrotró

Tal com s ha dit, les noves generacions de sincrotrons tenen una altíssima brillantor i potència del feix de llum. Això requereix una precisió en la forma dels mirall per tal de tenir la màxima brillantor possible. Els miralls de sincrotró han de suportar extremades altes temperatures, per tant, els materials utilitzats han de ser capaços d aguantar aquestes temperatures sense perdre forma i propietats. Cada línia de llum necessita un tipus de materials en funció de les seves necessitats. Molts dels miralls utilitzats es fan de Silici per la seva alta conductivitat i baixa degradació, però també d altres materials com cristall de Silici (SiO_2), GlidCop, Alumi-
mini o Coure amb una capa de NiP, *Zerodur*® i d altres [Zei13].

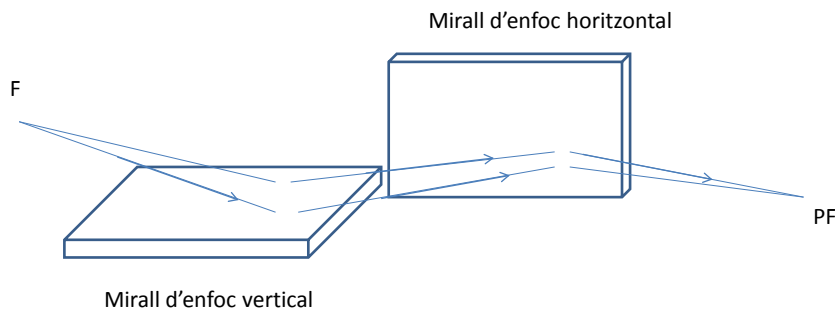


Figura 1.8: Esquema de la configuració de Kirkpatrick-Baez per a focalitzar el feix de llum de sincrotró, format per dos miralls, el mirall d enfoc vertical i el mirall d enfoc vertical. F representa la font de llum i PF el punt focal.

Cada línia de llum fa servir el número de miralls que són necessaris per tal de focalitzar al màxim el feix de llum incident. Normalment els miralls es col·loquen en la línia de llum amb la configuració de Kirkpatrick-Baez representada a la figura 1.8. Es posen dos miralls en la direcció del feix de llum (F), un s encarrega de focalitzar verticalment i l altre horitzontalment fins al punt focal (PF). Mitjançant aquesta configuració, amb dos miralls es focalitza el feix de llum. S ha de tenir en compte que per tal de portar a terme aquesta configuració, es necessita que els dos miralls estiguin en incidència molt rasant. Degut a això, errors en la

forma de la superfície dels miralls afecta encara més en la pèrdua de brillantor del feix de llum de sincrotró. La longitud i la forma dels miralls també varia, en funció de les necessitats. De llargada estan en el rang de 100-1000 *mm* i les formes normalment són seccions d'una cònica —el·lipsoide, paraboloides— o altres formes fonamentals com esfèrica, cilíndrica, toroidal o planes [Zei13].

Un altre tipus de miralls són els miralls bimorfs. Aquests tipus de miralls són usats cada cop més en les línies de llum dels sincrotrons d'última generació en els darrers anys. Aplicant voltatges a una sèrie de piezoelèctrics que hi ha dins dels miralls, es pot anar deformant el mirall per tal d'arribar a la forma desitjada. Estan formats per una sèrie de components descrits a la figura 1.9. La part externa, en groc, correspon a un mirall pla de Silici com els que són habituals en miralls de sincrotró. La part superior està degudament polida, mentre que la inferior en principi està sense polir. La part interna està formada per 16 miralls actius que treballen en vertical. La part central vermella són els elèctrodes de guiatge, mentre que la part verda són elèctrodes comuns. Les parts d'entremig blanques són piezoelèctrics de ceràmica.

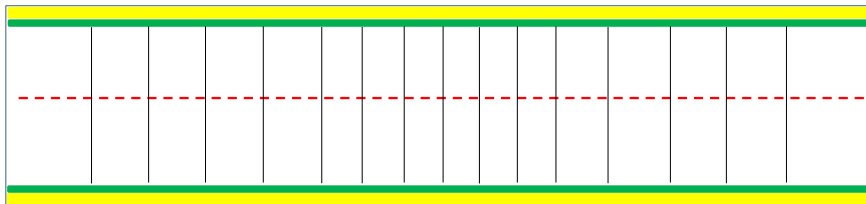


Figura 1.9: Estructura d'un mirall bimorf modulad per piezoelèctrics. Part externa, en groc, correspon a un mirall pla de Silici. Part interna està formada per 16 miralls bimorfs que actuen en vertical. La part central vermella són els elèctrodes de guiatge, mentre que la part verda són elèctrodes comuns. Les parts d'entremig blanques són piezoelèctrics de ceràmica.

Cada un dels 16 mòduls del miralls bimorfs es deformen en funció del voltatge aplicat, seguint quelcom similar al mostrat a la figura 1.10, per tal d'aconseguir una forma concreta amb una aplicació de voltatges adequada. L'avantatge dels miralls bimorfs és que es pot aplicar

la forma *in situ*, a diferència dels anteriors miralls que s'han vist, on s'havia de treballar la forma al laboratori, per després portar-los a les línies de llum. Aquest fet és molt important per tal de reduir les possibles fonts d'error alhora de obtenir la forma del mirall que es desitja en la línia de llum, així com el fet que es pugui controlar *in-situ* la forma del mirall fa que en alguns casos la precisió obtinguda estigui en l'ordre del sub-nanòmetre [SAS10].

Un dels problemes que s'han detectat en algunes de les línies de llum on estan instal·lats és que els miralls no focalitzen correctament l'espota de llum amb la brillantor requerida. Això és degut al que s'anomena efecte de juntura, i correspon al fet de significants deformacions de la forma en les parts en el piezoelèctric està unit amb el substrat òptic (part verda de la figura 1.9). Al tenir tantes unions com graus de llibertat té el mirall bimorf, en alguns casos la resposta que estan donant en l'actualitat aquestes superfícies no tinguin la precisió requerida en les línies de llum dels sincrotrons [ASS⁺13].

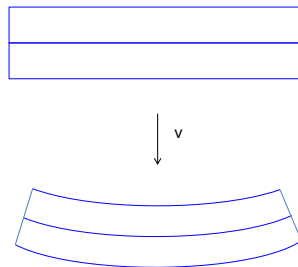


Figura 1.10: Esquema d'actuació d'un dels 16 miralls bimorfs. Inicialment el mirall està pla i al aplicar-li un voltatge pren una curvatura determinada, que depèn d'aquest voltatge.

1.1.2.2 Metrologia de sincrotró

La metrologia de sincrotró és l'encarregada de mesurar els components òptics que s'utilitzen en el sincrotró. Els laboratoris de metrologia han de ser capaços de verificar la qualitat de les òptiques rebudes per la indústria. Al ser els requeriments cada cop més elevats, degut a les millores que es van obtenint en el poliment de superfícies, és necessari augmentar la precisió de mesura de les superfícies òptiques. Els laboratoris de metrologia de sincrotró són els en-

carregats també de donar el feedback a la indústria encarregada de manufacturar els miralls per tal de millorar els seus processos amb mètodes que augmentin la precisió i la consistència [HR96]. Això és degut a que per tal de tenir la brillantor necessària en els sincrotrons de 3a i 4a generació, les òptiques que transporten els feixos de llum han de tenir una precisió en la topografia en l'ordre del nanòmetre. En alguns casos, per exemple, miralls plans de 1000 *mm* de llargada necessiten una precisió de 2-3 *nm* peak-to-valley (pv) en l'error de la topografia [SSS+09].

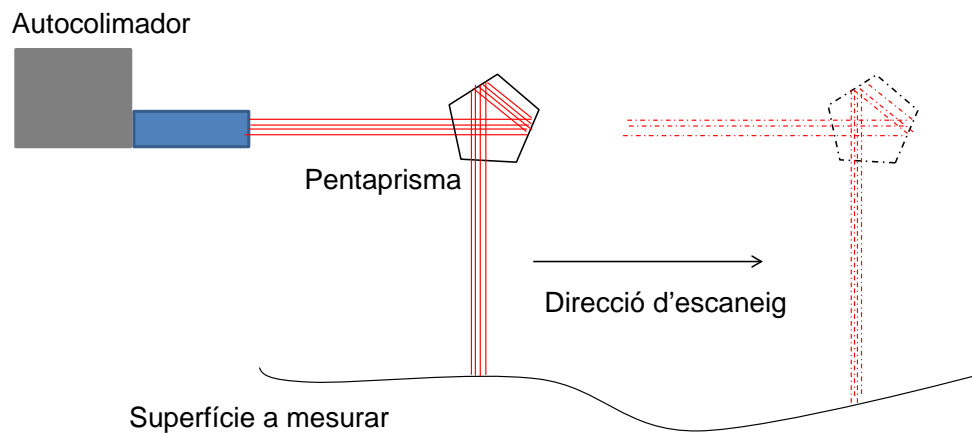


Figura 1.11: Esquema de setup utilitzat en els tres dispositius deflectomètrics usats en la metrologia de sincrotró, basat en el principi de la deflectometria però usant un pentaprisma. Un raig incideix (en vermell) sobre la superfície que es vol mesurar. El raig és reflectit i torna, seguint l'esquema de la figura 1.7. El pentaprisma es va desplaçant, obtenint d'aquesta manera pendents en tota la traçada de la direcció d'escaneig. Els elements en discontinuu representen l'esquema en una segona posició del pentaprisma.

Un gran nombre de mètodes i aparells es fan servir en els laboratoris de metrologia sincrotró, que bàsicament es basen en dos mètodes: interferometria i deflectometria. Dins de l'interferometria s'usen instruments que provenen directament de la indústria, com pot ser l'interferòmetre de Fizeau, explicat a la secció 1.1.1.1. Els sistemes d'escaneig mitjançant deflectometria representen l'alternativa més important a les tècniques interferomètriques, ob-

tenint una gran precisió en la mesura de superfícies òptiques [Gec07]. Els instruments més utilitzats dins de la deflectometria en els laboratoris de metrologia de sincrotró són el perfilòmetre de traça llarga (LTP) [TQC87, TQ89, QJT95], l'instrument de mesura nano-òptica (NOM) [SNS+04, SLN+05, SBB+12] i el mètode basat en la diferència de l'angle de desplaçament estàs (ESAD) [WS99, EW99a, GW02]. A continuació es descriurà breument el principi i la tècnica d'aquests tres instruments, cadascun dissenyat i concebut en un laboratori de metrologia de sincrotró diferent.

En tots tres casos, s'utilitza un esquema similar al de la figura 1.11, on la màxima diferència en respecte a l'esquema de la figura 1.7 és que s'afegeix un penta-prisma que mitjançant les reflexions en dues de les seves cares connecta el feix de llum incident amb el feix de llum reflectit que arriba al detector. A partir de les mesures dels pendents, i amb els algorismes adequats, es pot reconstruir la topografia de la superfície mesurada [EW02]. L'ajustament òptim de tots els components òptics del dispositiu és fonamental per minimitzar els errors en les mesures, així com el desenvolupament de nous tipus de penta-prismes [Gec07].

LTP i NOM

El perfilòmetre de traça llarga (LTP, de l'anglès Long Trace Profiler) és un dels dispositius més utilitzats en la metrologia de sincrotró. També basat en la deflectometria i actualment amb una aparença bàsica similar a la de la figura 1.11, ha anat replicant-se i evolucionant en diferents laboratoris de metrologia, passant de l'original LTP al LTP-V. Aquestes evolucions han anat reduint les fonts d'error, millorant la precisió i la repetibilitat de les mesures. Bàsicament el que ha millorat és el tipus de feix, la qualitat del divisor de llum, o el canvi de tot el sistema òptic inicial per un pentaprima i el passar d'un detector 1D a 2D [MAB+10].

El principi esquemàtic del LTP es pot veure a la figura 1.12. El feix de llum passa per un primer separador de feix de llum BS_1 . El feix dividit va a dos refractors s'obtenen dos feixos de llum perfectament col·limats separats una distància d'1mm aproximadament cap a la superfície a caracteritzar. Per tal que es pugui controlar aquesta distància, un dels dos

refractors és mòbil. Més endavant s han anat afegint diferents elements per tal d augmentar la precisió, com el d incloure una superfície de referència i també el d incloure el pentaprisma.

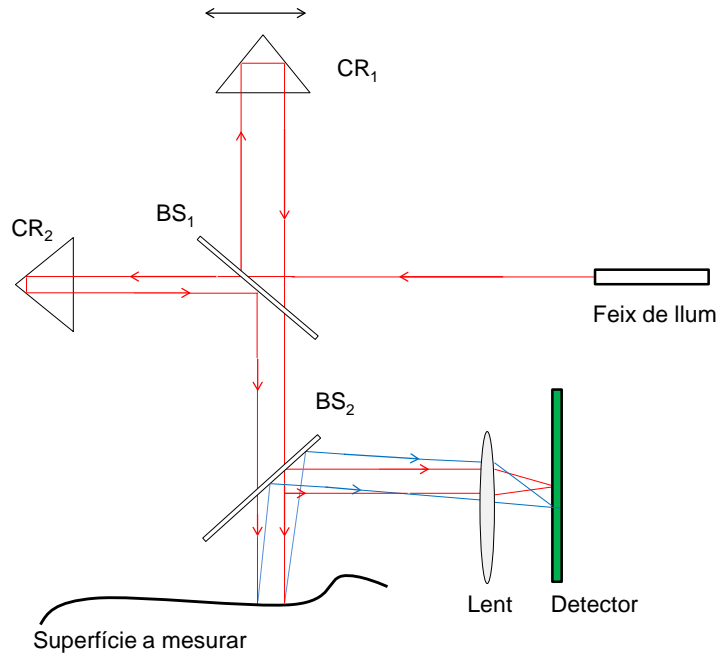


Figura 1.12: Esquema del LTP

El dispositiu NOM (Nanometer Optical Component Measuring Machine) és un altre dels dispositius format a partir de l LTP. El NOM va ser desenvolupat al laboratori de metrologia del sincrotró BESSY, a Alemanya i és l aparell amb el que es mesuren les òptiques en aquest sincrotró. El principi és el d utilitzar un autocolimador i un pentaprisma per a tenir una mesura directe del pendent de la superfície, seguint el model de la figura 1.11 [SBB⁺12].

Esquemàticament, un autocolimador el feix del qual va incidint en la superfície a mesurar, gràcies al guiatge d un pentaprisma que es va desplaçant al llarg de la superfície. Basant-se en aquest mètode, i amb la diferència d usar una apertura especial de 2 mm per a l auto-colimador, i amb una gran qualitat opto-mecànica dels components, s arriba a una precisió del mateix ordre que l aconseguit per l ESAD per superfícies gairebé planes [Gec07]. Una

precisa caracterització i cal·libració de tots els elements, en especial el sensor, és essencial per aconseguir la màxima precisió del dispositiu. El NOM també ha estat implantat al sincrotró Diamond, a Anglaterra, obtenint resultats del mateix ordre de precisió que el de BESSY [ASS+10].

ESAD

L ESAD és un dispositiu que es comença a desenvolupar al Physikalisch-Technische Bundesanstalt (PTB), a finals dels anys 90, per a l'obtenció del pendent i la topografia de superfícies òptiques [WS99]. Aquest dispositiu aconsegueix una precisió i repetibilitat sub-nanomètrica en les mesures [GW02]. És una combinació de deflectometria i tècniques de shearing, utilitzant la diferència d'angles en la reflexió de la superfície, seguint el principi deflectomètric explicat a la secció 1.1.1.2. A nivell estructural segueix l'esquema de la figura 1.11, és a dir, un pentaprisma que es va desplaçant al llarg de la superfície i un feix de llum incident i reflectit que dona l'angle corresponent a la superfície a mesurar en aquell punt.

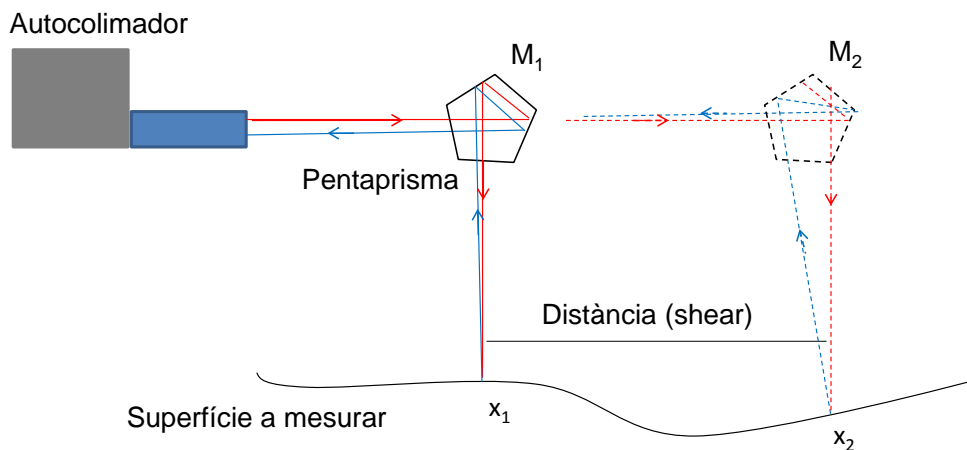


Figura 1.13: Esquema de l'ESAD, on M_1 i M_2 són les mesures necessàries per obtenir la reconstrucció en el punt x_1 de la superfície a mesurar.

La diferència està en el tractament que es fa de les mesures. A la figura 1.13 es mostra l'esquema de funcionament. L'ESAD no reconstrueix el perfil de la superfície a mesurar

directament a partir del pendent en cada punt com sí que fan el LTP i el NOM sinó que utilitza la diferència de dues mesures M_1 i M_2 , separades una gran distància, donades per la pendent de la superfície en els punts x_1 i x_2 respectivament. A partir d'aquestes dues mesures fa la reconstrucció de la superfície en el punt x_1 utilitzant tècniques de shearing [EW99a]. Aquest mètode no està influenciat per moviments o tilts de la superfície a mesurar, essent aquest fet especialment útil per quan es necessita d'una gran duració de temps per a tenir la mesura completa de la superfície [SWE08].

1.2 Propòsit i esquema

Tal com s'ha vist anteriorment, la topografia de superfícies reflectants és un camp d'investigació constant degut a les demandes de la indústria i la recerca al respecte. Nombrosos mètodes i aparells s'usen per tal d'aconseguir la precisió desitjada segons les necessitats. Les dues tècniques més utilitzades quan les necessitats de precisió són en l'ordre del nanòmetre són la interferometria i la deflectometria. L'interferometria que és la més utilitzada té l'avantatge que és un mètode ràpid de mesura i bidimensional, i la desavantatge que necessita d'una superfície de referència per a les mesures. La deflectometria té l'avantatge que és una mesura directa i és molt precís, i la desavantatge que és unidimensional i relativament lent.

El propòsit d'aquesta tesi és presentar un nou mètode, el lateral shearing sequencial bidimensional, per a la mesura de miralls utilitzats en un sincrotró i altres superfícies de grans dimensions que necessitin d'una precisió al voltant del nanòmetre en la reconstrucció. El nou mètode presentat combina les avantatges de l'interferometria i la deflectometria, doncs són mesures bidimensionals i s'elimina la influència de la superfície de referència. A partir de mesures donades per un interferòmetre i a partir d'una sèrie de mètodes i algorismes numèrics, es fa la reconstrucció de la superfície a mesurar. D'aquesta manera s'obtenen mesures bidimensionals de manera ràpida i amb una precisió que no depèn de la superfície de referència de l'interferòmetre.

Un dels propòsits d aquesta tesi, per tant, és fer un desenvolupament teòric, exhaustiu i detallat, del lateral shearing sequencial bidimensional per tal de comprovar que, efectivament, el mètode a nivell teòric funciona i que la idea proposada és d interès. Això és el que es fa en els capítols 2 i 3 de la present tesi.

Un cop vist que el mètode funciona a nivell teòric, un altre propòsit és el d arribar a un escenari el més realista possible. Mitjançant simulacions, es vol arribar a un escenari el màxim de realista possible. En el capítol 4 s afegeix soroll a les mesures i error l error de posicionament en el desplaçament. En el capítol 5 s afegeixen els errors de guiatge de pitch i roll, i en el capítol 6 es tracta el cas de la mesura de superfícies no tan planes, és a dir, amb termes quadràtics.

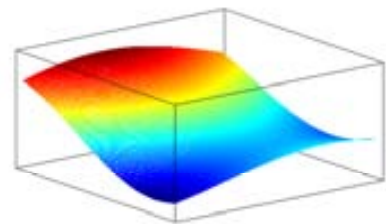
Un altre dels propòsits d aquesta tesi és la d obtenir nous mètodes per tal de reduir al màxim la influència dels errors i situacions descrits en el paràgraf anterior. És per això que en capítol 4 es fa un anàlisi de com afecta el soroll de les mesures a les reconstruccions i també com afecta l error de posicionament. En el capítol 5 es proposa dos nous mètodes per a l estimació dels errors de guiatge pitch i roll. En el capítol 6 es proposa un nou mètode basat en el 3-flat test per a l estimació dels termes quadràtics de la superfície a mesurar.

La present tesi consolida la proposta del mètode a nivell teòric, així com dóna les bases per a l implementació en el laboratori. Com en tot procés d investigació, hi ha propostes per a fer en un futur immediat, com seguir afegint més fonts d error possible durant l adquisició de les mesures, així com implementar el mètode de l stitching per tal de poder fer una reconstrucció completa de la superfície que no depengui de les dimensions de les mesures de l interferòmetre. Un cop fet tot això, finalment implementar el mètode del lateral shearing sequencial bidimensional al laboratori.

CAPÍTOL 2

INTRODUCCIÓ AL LATERAL SHEARING SEQÜENCIAL

En aquest capítol es fa una introducció del mètode del lateral shearing sequencial. S explica l esquema de muntatge i una descripció del mètode en un domini unidimensional i continu.



En aquest capítol es suposa que s'està en un domini unidimensional i continu. En aquesta situació, el perfil de la superfície a mesurar (SUT) i la superfície de referència de l'interferòmetre venen descrites mitjançant les funcions analítiques $\phi(x)$ i $\gamma(x)$, respectivament. Com que una mesura de l'interferòmetre la definim com la diferència entre la SUT i la superfície de referència, una primera mesura inicial ve descrita també per una altra funció analítica, $\tau^0(x)$.

Si la superfície de referència fos completament plana o coneguda, aleshores un cop sabuda $\tau^0(x)$ es coneixeria la SUT amb precisió. Aquesta suposició de la superfície de referència no és certa i fa que la precisió de l'interferòmetre estigui limitada per com de plana o coneguda és la superfície de referència utilitzada.

És per això que en aquesta tesi es desenvolupa un nou mètode, el lateral shearing sequencial bidimensional, utilitzant un interferòmetre, per millorar la precisió mitjançant algorismes matemàtics que, utilitzant la sobre-informació que es pot tenir sobre la mesura, elimina la influència de la superfície de referència. Es veurà a continuació en què consisteix el mètode.

2.1 Muntatge

El muntatge utilitzat per al desenvolupament del mètode del lateral shearing sequencial és el mostrat esquemàticament en la figura 2.1. Es té una taula lineal, que es desplaça en dues direccions perpendiculars. Es té la superfície a mesurar (SUT) a sobre de la taula lineal i es té l'interferòmetre en direcció perpendicular a la taula lineal i la SUT. Quant més en paral·lel estan la SUT i la superfície de referència, menys franges es tindran en la mesura i menys errors es produiran en el desenrotllament de la fase de la mesura.

Hi ha altres geometries possibles per al desenvolupament del mètode utilitzant elements addicionals i fent mesures en rasant, per exemple , però aquesta és la més directe, on inter-

venen menys variables i on la interferència entre la SUT i la superfície de referència és més directe. És per això que per a l'anàlisi del mètode del lateral shearing seqüencial es farà servir aquesta geometria.

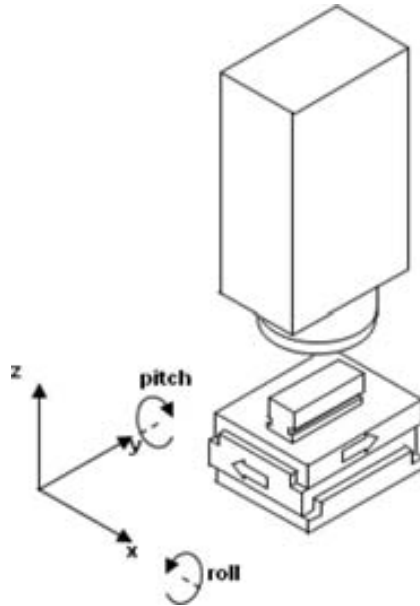


Figura 2.1: Muntatge del lateral shearing seqüencial. La superfície a mesurar (SUT) està sobre una taula lineal, que es desplaça en l'eix x i l'eix y . L'interferòmetre està sobre la SUT, en perpendicular a la SUT i a la taula lineal.

Una primera mesura donada per l'interferòmetre està representada esquemàticament a la figura 2.2 (a). Aquesta mesura abarca una regió concreta de la SUT. Si es desplaça la taula lineal en la direcció x una distància δ_1 es té una segona mesura (figura 2.2 (b)). I desplaçant una distància δ_2 respecte la inicial es té una tercera mesura (figura 2.2 (c)). En el cas bidimensional es realitzaran dues mesures addicionals desplaçant la mostra en la direcció perpendicular, tal com s'indica en les figures 2.2 (d) i (e).

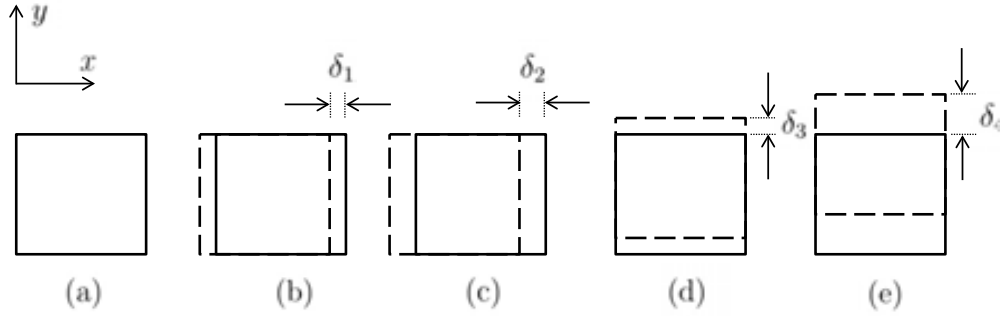


Figura 2.2: Esquema de la posició de les mesures de la SUT. (a) Posició inicial, (b) Posició amb un desplaçament δ_1 , (c) Posició amb un desplaçament δ_2 respecte l inicial, (d) Posició amb un desplaçament δ_3 i (e) Posició amb un desplaçament δ_4 .

Un cop descrit el muntatge utilitzat i l origen de les tres mesures, figures 2.2 (a) (c), que s utilitzaran en les seccions 2 i 3, es comença amb l anàlisi unidimensional del lateral shearing sequencial.

2.2 En domini infinit

Es suposa que les mesures donades per l interferòmetre són contínues, unidimensionals i en un domini infinit. La SUT i la superfície de referència venen descrites per $\phi(x)$ i $\gamma(x)$, respectivament

$$\phi(x) \quad x \in \mathbb{R} \quad (2.1)$$

$$\gamma(x) \quad x \in \mathbb{R} \quad (2.2)$$

Inicialment es té la primera mesura de l interferòmetre figura 2.2 (a) descrita per l equació

$$\tau^0(x) = \phi(x) - \gamma(x) \quad x \in \mathbb{R} \quad (2.3)$$

Al desplaçar la taula lineal unes distàncies δ_1 i δ_2 respecte de la posició inicial, també es desplaça la SUT (figura 2.2 (b) i (c)). Per tant, dues noves mesures de l'interferòmetre en aquestes posicions venen descrites per

$$\tau^j(x) = \phi(x - \delta_j) - \gamma(x) \quad j = 1, 2 \quad x \in \mathbb{R} \quad (2.4)$$

on el subíndex $j = 1, 2$ indica el desplaçament fet.

És important observar que la superfície de referència es manté en la mateixa posició tant en la mesura inicial com en les mesures amb $\phi(x)$ desplaçada, i per tant $\gamma(x)$ és exactament la mateixa en les equacions 2.3 i 2.4. Aquest fet és bàsic en el lateral shearing seqüencial i serà utilitzat per eliminar la influència de la superfície de referència en les mesures donades per l'interferòmetre, no depenen així de la precisió de la superfície de referència per a les mesures de la SUT.

Subtraient a la mesura inicial $\tau^0(x)$ les mesures amb desplaçament $\tau^j(x)$, s'obtenen les funcions diferència $\tau^j(x)$

$$\tau^j(x) = \tau^0(x) - \tau^j(x) = \phi(x) - \phi(x - \delta_j) \quad j = 1, 2 \quad x \in \mathbb{R} \quad (2.5)$$

on $\tau^j(x)$ ja no té la superfície de referència. Les funcions diferència $\tau^j(x)$ tenen un comportament com de derivada, una relació entre $\phi(x)$ i ella mateixa desplaçada. Es treballa en l'espectre de Fourier de $\tau^j(x)$ per tal de recuperar la SUT.

La transformada de Fourier d'una funció qualsevol $f(x)$ té diverses definicions, totes elles

anàlogues. Aquí s'utilitza

$$\mathcal{F} f(x)(u) = \int_{-}^{+} f(x)e^{-i2\pi ux} dx \quad (2.6)$$

on x és la coordenada de longitud i u és la freqüència espacial.

Per tant, la transformada de Fourier de la funció diferències, $\Omega^j(u)$, és

$$\begin{aligned} \Omega^j(u) &= \mathcal{F} \left[\phi(x) - \phi(x - \delta_j) \right](u) \\ &= \int_{-}^{+} (\phi(x) - \phi(x - \delta_j))e^{-i2\pi ux} dx \quad j = 1, 2 \end{aligned} \quad (2.7)$$

Com que \mathcal{F} és una aplicació lineal [FP73], $\Omega^j(u)$ es pot separar com la diferència de dues transformades de Fourier,

$$\Omega^j(u) = \underbrace{\mathcal{F} \phi(x)}_{(a)} - \underbrace{\mathcal{F} \phi(x - \delta_j)}_{(b)} \quad j = 1, 2 \quad (2.8)$$

El terme (a) és la pròpia definició bàsica de la transformada de Fourier d'una funció anàloga a l'equació 2.6,

$$\mathcal{F} \phi(x)(u) = \int_{-}^{+} \phi(x)e^{-i2\pi ux} dx \quad (2.9)$$

i el terme (b) de l'equació 2.8 és la transformada de Fourier d'una funció desplaçada una distància δ_j ,

$$\begin{aligned}
\mathcal{F} \phi(x - \delta_j) (u) &= \int_{-} \phi(x - \delta_j) e^{-i2\pi ux} dx = \\
= \int_{-} \phi(v) e^{-i2\pi u(v + \delta_j)} dv &= e^{-i2\pi u \delta_j} \int_{-} \phi(v) e^{-i2\pi uv} dv \\
&= e^{-i2\pi u \delta_j} \mathcal{F} \phi(x) (u)
\end{aligned} \tag{2.10}$$

amb el canvi de variable $v = x - \delta_j$, $dv = dx$.

Comparant les equacions 2.9 i 2.10, una i altra difereixen en una fase lineal $e^{-i2\pi u \delta_j}$ relacionada amb el desplaçament δ_j aplicat a $\phi(x)$. Aquesta relació entre la transformada de Fourier d'una funció i la seva desplaçada és el que es coneix com teorema de translació en l'espai [Goo05] i és essencial en la correcta i acurada reconstrucció de la SUT aplicant el lateral shearing sequencial.

Aplicant el teorema de translació als termes (a) i (b) de l'equació 2.8, $\Omega^j(u)$ s'escriu com

$$\begin{aligned}
\Omega^j(u) &= \mathcal{F} \phi(x) (u) - e^{-i2\pi \delta_j u} \mathcal{F} \phi(x) (u) \\
&= \mathcal{F} \phi(x) (u) [1 - e^{-i2\pi \delta_j u}] \quad j = 1, 2
\end{aligned} \tag{2.11}$$

D'aquí s'aislla $\mathcal{F} \phi(x) (u)$,

$$\mathcal{F} \phi(x) (u) = \Omega^j(u) \mathcal{T}^j(u) \quad \text{on} \quad \mathcal{T}^j(u) = \frac{1}{1 - e^{-i2\pi \delta_j u}} \quad j = 1, 2 \tag{2.12}$$

A la funció $\mathcal{T}^j(u)$ se la coneix com la funció de transferència [Mor03, GFE06]. Tal com es veu en l'equació 2.12, hi ha certs valors de u en que s'anul·la el denominador i no està

definida, quan

$$e^{-i2\pi\delta_j u} = 1 \quad u = \frac{k}{\delta_j} \quad k \in \mathbb{Z} \quad k = 0 \quad j = 1, 2 \quad (2.13)$$

Per tant, s'ha de tornar a redefinir la funció de transferència en aquests valors de la següent manera,

$$\mathcal{T}^{*j}(u) = \begin{cases} \mathcal{T}^j(u) & u = \frac{k}{\delta_j} \quad k \in \mathbb{Z} \quad k = 0 \quad j = 1, 2 \\ 0 & u = \frac{k}{\delta_j} \quad k \in \mathbb{Z} \quad j = 1, 2 \end{cases} \quad (2.14)$$

Aquesta anul·lació de freqüències es fa degut a la pròpia naturalesa de la funció diferències $\phi^j(x)$ de l'equació 2.5. Al ser una resta entre dos termes de $\phi(x)$, $\phi^j(x)$ té una indeterminació d'una funció periòdica de freqüència $1/\delta_j$ o múltiple a aquesta freqüència. A continuació es comprovarà que no s'és capaç de distingir entre una funció i ella mateixa a la que se li suma una funció periòdica de freqüència $1/\delta_j$ o múltiple a aquesta freqüència.

Suposem que es té una nova funció

$$\phi^j(x) = \phi(x) + \mu_j(x) \quad x \in \mathbb{R} \quad j = 1, 2 \quad (2.15)$$

on $\phi(x)$ és la SUT i $\mu_j(x)$ és una funció periòdica de període igual al desplaçament δ_j . Per tant $\mu_j(x)$ compleix que

$$\mu_j(x) = \mu_j(x \pm k\delta_j) \quad k \in \mathbb{Z} \quad x \in \mathbb{R} \quad j = 1, 2 \quad (2.16)$$

La funció diferències de l'equació 2.5, en aquest cas $\phi^j(x)$, queda descrita com

$$\phi_j^j(x) := \phi^j(x) - \phi^j(x - \delta_j) \quad (2.17)$$

$$\begin{aligned} &= \phi(x) + \mu_j(x) - \phi(x - \delta_j) - \mu_j(x - \delta_j) \\ &= \phi(x) - \phi(x - \delta_j) \end{aligned} \quad (2.18)$$

$$= \phi(x) \quad x \in \mathbb{R} \quad j = 1, 2$$

Comparant $\phi(x)$ i $\phi_j^j(x)$ es veu són iguals i que no és possible distingir entre $\phi^j(x)$ i $\phi(x)$, creant una indeterminació en la reconstrucció de la SUT d una funció $\mu_j(x)$ periòdica de freqüència igual o múltiple a $1/\delta_j$. Aquesta indeterminació és la causant de que s hagi de tornar a redefinir $\mathcal{T}^j(u)$ en l equació 2.14.

Un cop es té $\mathcal{T}^{*j}(u)$, quan s aplica la transformada de Fourier inversa (\mathcal{F}^{-1}) a l equació 2.12 s obté la funció $\phi_j^*(x)$,

$$\phi_j^*(x) = \mathcal{F}^{-1} \left[\Omega^j(u) \mathcal{T}^{*j}(u) \right] \quad (2.19)$$

on

$$\phi_j^*(x) = \phi(x) + \mu_j(x) \quad x \in \mathbb{R} \quad j = 1, 2 \quad (2.20)$$

Aquesta és la descripció teòrica del lateral shearing seqüencial, pel qual a partir de diferents mesures de la SUT donades per l interferòmetre, s obté la reconstrucció de $\phi(x)$ sense influència de la funció de referència $\gamma(x)$. La indeterminació de $\mu(x)$ de l equació 2.20 s analitzarà a la secció 2.2.1.

2.2.1 Funció de transferència

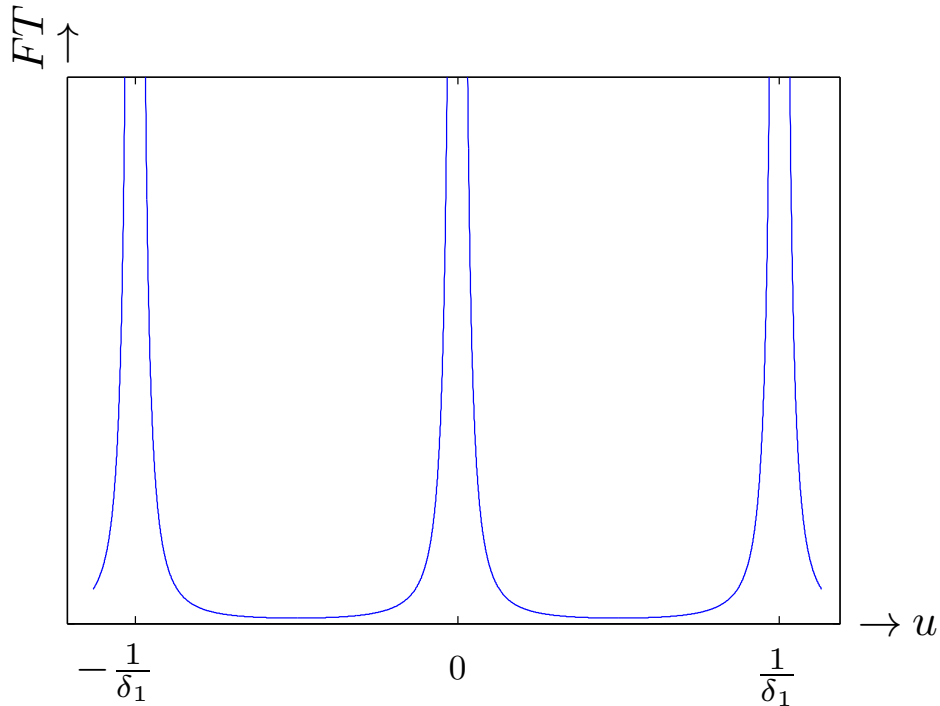


Figura 2.3: Funció de transferència en funció del domini de freqüències, amb un desplaçament δ_1 arbitrari.

Tal com s'ha vist a l'equació 2.13, la funció de transferència $\mathcal{T}^j(u)$ no està definida a les freqüències $u = \frac{k}{\delta_j}$ $k \in \mathbb{Z}$ $j = 1, 2$. El nombre d'indeterminacions és infinit ja que $k \in \mathbb{Z}$. Per tal de visualitzar la naturalesa de les indeterminacions, la figura 2.3 mostra la funció de transferència per a un desplaçament δ_1 arbitrari, en un domini $u \in [a, b]$. Es pot veure com en tres valors de l'espai de freqüències la funció de transferència tendeix a infinit, $u = -\frac{1}{\delta_1}, 0, \frac{1}{\delta_1}$. Si el domini de u fos més gran, apareixerien altres indeterminacions amb freqüències separades $\frac{1}{\delta_1}$.

Un altre exemple és el de la figura 2.4, on es mostra la funció de transferència per a un desplaçament δ_2 , on $\delta_2 \gg \delta_1$, en el mateix domini $u \in [a, b]$ de la figura 2.3. Tot i ser el mateix domini de freqüències que en la figura 2.3, en aquest cas es tenen 9 indeterminacions,

$u = -\frac{4}{\delta_2} \quad 0 \quad \frac{4}{\delta_2}$. Observar de la comparativa entre les figures 2.3 i 2.4 que davant d'un mateix domini, a la figura 2.4 hi ha el triple d'indeterminacions. Això és degut a que la relació que hi ha entre els desplaçaments δ_1 i δ_2 és de 1 a 3. La relació entre la magnitud dels desplaçaments i el número d'indeterminacions segueix una relació lineal.

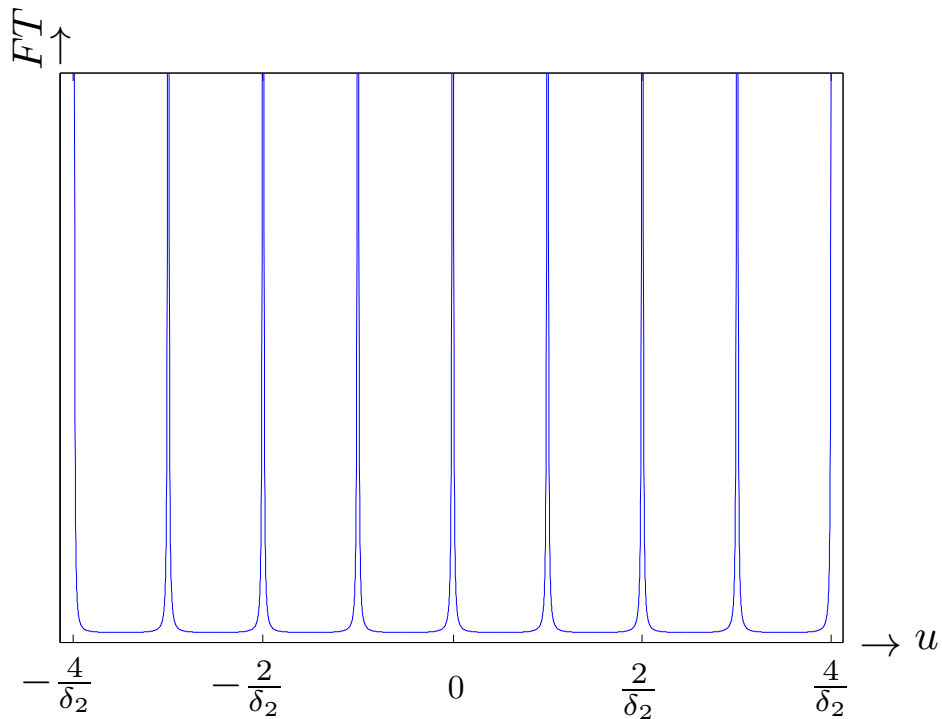


Figura 2.4: Funció de transferència en funció del domini de freqüències amb un desplaçament δ_2 arbitrari, on $\delta_2 \gg \delta_1$.

A la secció 4.1 es farà un anàlisi de la STF quan s'introdueix soroll a les mesures de la SUT i es veurà com afecta aquest soroll en el comportament de les indeterminacions.

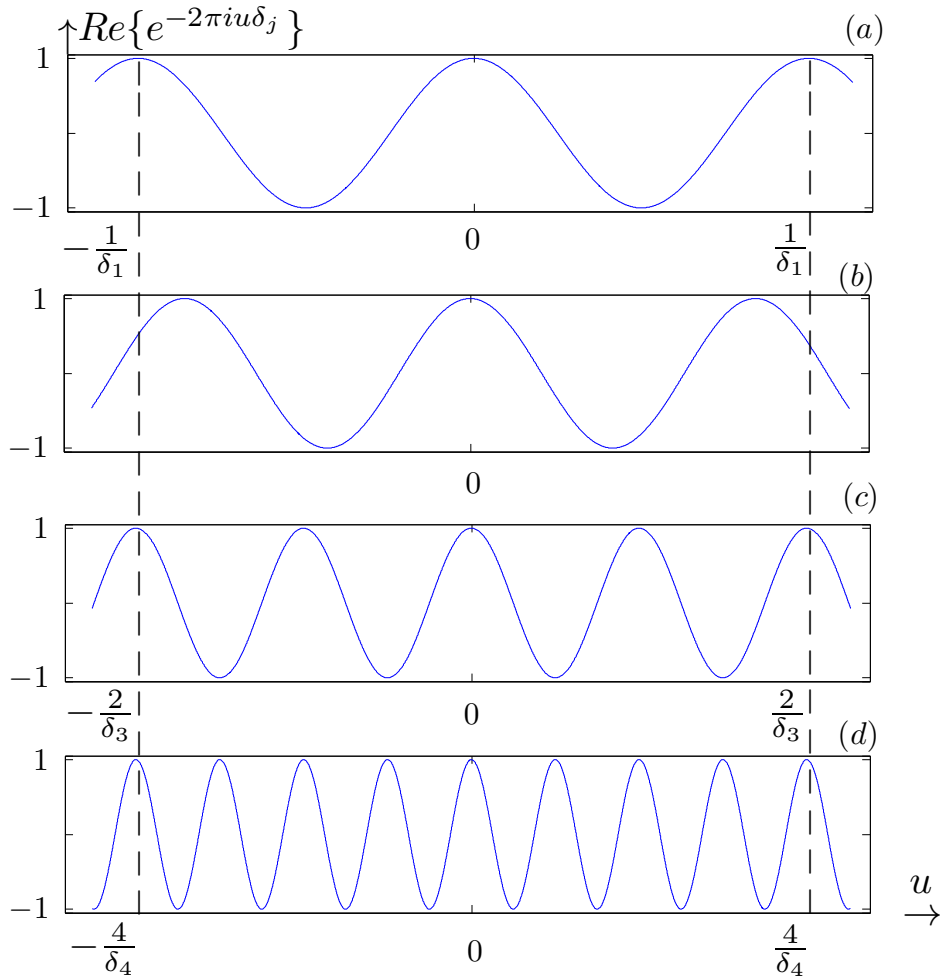


Figura 2.5: Part real de $e^{-i2\pi u \delta_j}$ amb desplaçaments (a) δ_1 , (b) δ_2 , (c) δ_3 , (d) δ_4 . La relació entre desplaçaments és $\delta_3 = 2\delta_1$, $\delta_4 = 4\delta_1$ i $\delta_2 \approx \delta_1$, on δ_2 no té cap relació de proporció amb els altres.

Per tal de visualitzar millor quan apareixen les indeterminacions de la STF i la seva relació amb el desplaçament, la figura 2.5 mostra la part real de $e^{-i2\pi u \delta_j}$ de la funció de transferència per a diferents desplaçaments δ_j . El desplaçament δ_1 és arbitrari el mateix que el de la funció de transferència de la figura 2.3 i segueix una relació de proporció amb els altres. És δ_3 el doble que δ_1 ($\delta_3 = 2\delta_1$) i δ_4 quatre vegades més gran que δ_1 ($\delta_4 = 4\delta_1$). El cas de δ_2 és un desplaçament similar a δ_1 , sense cap factor amb els altres.

Les indeterminacions de la funció de transferència venen donades quan la part real de $e^{-i2\pi u\delta_j}$ mostrades a la figura 2.5 són exactament igual a 1 i anul·len el denominador de l'equació 2.12. Es pot observar que amb δ_3 i δ_4 s'arriba a 1 en una relació del doble i quatre vegades més que amb δ_1 , respectivament. En el cas de δ_3 es té les mateixes indeterminacions que δ_1 , afegint-se el doble en els valors d'entremig. El mateix passa amb δ_4 en relació a δ_3 . Això confirma que quan un desplaçament és múltiple de l'altre es mantenen les mateixes singularitats i se'n afegixen el doble en valors d'entremig.

La situació canvia quan els desplaçaments són co-primers. És el cas de δ_2 amb qualsevol dels altres. Les comparacions de les gràfiques mostren que no comparteixen cap indeterminació en les seves funcions de transferència, excepte l'origen. En el cas de δ_1 i δ_2 , es veu que tenen el mateix nombre, doncs són desplaçaments propers, però cap de comú, excepte el 0. La no-repetició d'indeterminacions és molt important per tal de combinar funcions de transferència de diferents desplaçaments i eliminar la funció periòdica mostrada en l'equació 2.20.

Per a fer aquesta combinació a partir de les mesures donades per l'interferòmetre, es comença amb una primera mesura $\tau^0(x)$. Després es fan dos desplaçaments δ_1 i δ_2 , tornant a mesurar a cada un d'ells i obtenint la segona i la tercera mesura, $\tau^1(x)$ i $\tau^2(x)$, respectivament. Fent el procés descrit entre les equacions 2.5 i 2.12, es combinen les tres mesures, $\tau^0(x)$ amb $\tau^1(x)$, i $\tau^0(x)$ amb $\tau^2(x)$. D'aquesta manera s'obtenen $\Omega^1(u)\mathcal{T}^1(u)$ i $\Omega^2(u)\mathcal{T}^2(u)$ —equació 2.12— amb les seves indeterminacions respectives, en funció dels desplaçaments δ_1 i δ_2 . Per l'equació 2.13, les indeterminacions de $\mathcal{T}^1(u)$ i $\mathcal{T}^2(u)$ apareixen, respectivament, quan es compleix que

$$u = \frac{k}{\delta_1} \quad \text{i} \quad u = \frac{k}{\delta_2} \quad k \in \mathbb{Z} \quad (2.21)$$

Tal com s'ha vist en l'equació 2.13 i en l'anàlisi posterior, quan els desplaçaments no

tenen factors en comú, les freqüències en les que apareixen les indeterminacions d'una i altra funció de transferència són diferents excepte a l'origen¹. Tenint això en compte, es fa una reconstrucció de la SUT, $\phi^*(x)$, mitjançant la combinació de les funcions de transferència de la següent manera

$$\mathcal{F} \phi^*(x)(u) = \begin{cases} \Omega^1(u)\mathcal{T}^1(u) & u \in [\frac{k}{\delta_1} - \epsilon, \frac{k}{\delta_1} + \epsilon], \quad k \in \mathbb{Z} \\ \Omega^2(u)\mathcal{T}^2(u) & u \in [\frac{k}{\delta_1} - \epsilon, \frac{k}{\delta_1} + \epsilon], \quad k \in \mathbb{Z} \end{cases} \quad (2.22)$$

Com que no són singularitats evitables, com es pot veure en les figures 2.3 i 2.4, la reconstrucció mitjançant la combinació de funcions de transferència és més correcta fer-la en un interval proper a la indeterminació, quan $u \in [\frac{k}{\delta_1} - \epsilon, \frac{k}{\delta_1} + \epsilon]$. La magnitud de ϵ és la que es cregui convenient, sempre evitant que l'interval $u \in [\frac{k}{\delta_1} - \epsilon, \frac{k}{\delta_1} + \epsilon]$ contingui una indeterminació de $\mathcal{T}^2(u)$.

Amb el procés descrit s'eviten les indeterminacions, eliminant la funció periòdica de l'equació 2.20 i arribant a una reconstrucció exacta de $\phi(x)$ usant el lateral shearing sequencial, només diferint de la SUT en un pla,

$$\phi^*(x) = \phi(x) + Ax + C \quad A, C \in \mathbb{R} \quad x \in \mathbb{R} \quad (2.23)$$

La indeterminació del pla $Ax + C$ prové d'eliminar la freqüència de l'origen en les funcions de transferència $\mathcal{T}^1(u)$ i $\mathcal{T}^2(u)$ de l'equació 2.14. Aquesta indeterminació és una constant A en la funció diferències. Al fer la transformada de Fourier inversa en l'equació 2.19, que és una integració, la constant A es converteix en $Ax + C$. Aquest pla no és d'importància, doncs $\phi(x)$ i $\phi^*(x)$ tenen exactament la mateixa forma, tal com es veurà en la secció 3.1.1.

¹Aquesta singularitat a l'origen dona lloc a un pla en la reconstrucció, tal com es veurà en l'equació 2.23.

2.3 En domini finit

A continuació es veurà quins són els canvis que s han de tenir en compte en un domini finit. El domini en el que es restringeixen les funcions analítiques que descriuen les diferents superfícies i posterior operacions està ara determinat per la dimensió de les mesures de l interferòmetre. Es suposarà que la longitud en x de la mesura de l interferòmetre és ξ .

Les equacions 2.1 2.5, descrites en domini infinit, es restringeixen a un interval de longitud finita. La SUT i la superfície de referència queden descrites per

$$\phi(x) \quad x \quad [c \ d] \quad (2.24)$$

$$\gamma(x) \quad x \quad [a \ b] \quad (2.25)$$

on $[a \ b] \subset [c \ d]$.

Les mesures de l interferòmetre $\tau^0(x)$ i $\tau^j(x)$, restringides a l interval $[a \ b]$ de la superfície de referència, queden expressades analíticament com

$$\tau^0(x) = \phi(x) - \gamma(x) \quad x \quad [a \ b] \quad (2.26)$$

$$\tau^j(x) = \phi(x - \delta_j) - \gamma(x) \quad j \quad 1 \ 2 \quad x \quad [a \ b] \quad (2.27)$$

Per tal de visualitzar aquestes equacions, la figura 2.6 mostra una SUT en el domini $[c \ d]$ i la part que mesura l interferòmetre, en vermell. A la primera mesura, representada en vermell a la figura 2.6 (a), el domini de $\phi(x)$ mesurat és el corresponent a $[a \ b]$, de longitud ξ . Mentre que a la segona mesura, representada en vermell a la figura 2.6 (b), al haver-se desplaçat δ_j , la part de $\phi(x)$ mesurada és la corresponent a l interval $[a - \delta_j \ b - \delta_j]$, també de longitud ξ .

D aquí es veu que la funció diferències $\phi^j(x)$ queda definida per

$$\phi^j(x) = \phi(x) - \phi(x - \delta_j) \quad x \in [a, b] \quad j = 1, 2 \quad (2.28)$$

que està mesurant valors de $\phi(x)$ en el rang $[a - \delta_j, b]$. Aquest fet i la relació que hi ha entre els valors de $\phi(x)$ en $[a, b]$ i $[a - \delta_j, b - \delta_j]$ és un dels canvis més importants que es produeixen al treballar en un domini finit. Aquests canvis comporten variacions en l'espai de Fourier, equacions 2.7 - 2.14, especialment amb el teorema de translació i la funció de transferència.

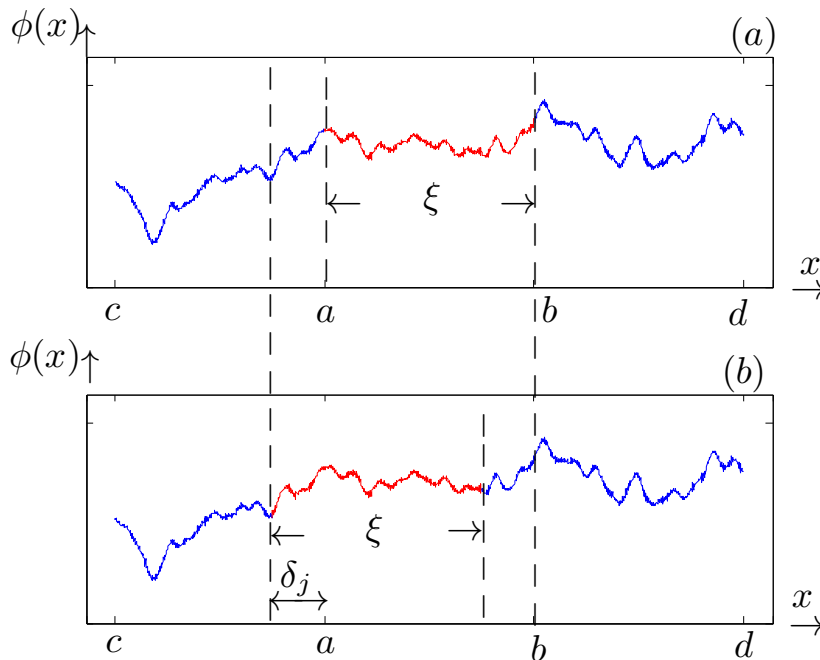


Figura 2.6: Exemple de SUT definida en el domini $[c, d]$. (a) En vermell, part de $\phi(x)$, de longitud ξ , mesurada per l'interferòmetre en la primera mesura. (b) En vermell, part de $\phi(x)$, també de longitud ξ , mesurada en la segona mesura, desplaçant δ_j la SUT.

A continuació s'analitzen dues situacions. A la primera, en la secció 2.3.1 es suposa que la SUT és periòdica. La periodicitat de $\phi(x)$ és necessària per a que el teorema de translació es compleixi en un domini finit, tal com es veurà més endavant. A la segona, en la secció

2.3.2, la SUT no té cap restricció de periodicitat — un cas més realista — i s'ha de fer servir el mètode de l'extensió natural [WSE99, EW99b] per tal de perioditzar $\phi(x)$.

2.3.1 SUT periòdica

En aquesta secció es suposa que la SUT és periòdica de període ξ . Al ser $\phi(x)$ una funció periòdica de període ξ , es compleix que

$$\phi(x) = \phi(x \pm k\xi) \quad k \in \mathbb{Z} \quad x \in [c, d] \quad (2.29)$$

La figura 2.7 mostra una $\phi(x)$ periòdica de període ξ i les seves diferències, també periòdiques. La SUT està definida en un domini $[c, d]$ i l'interferòmetre mesura en $[a, b]$. En aquest cas de la figura 2.7, la longitud de $[c, d]$ és tres vegades més gran que la de $[a, b]$ i al ser $\phi(x)$ periòdica de període ξ , es tenen tres períodes, tant de $\phi(x)$ com de la funció diferències.

La figura 2.7 (a) mostra en blau la SUT, i en vermell la part de $\phi(x)$ mesurada en la primera mesura de l'interferòmetre. S'està mesurant un període complet de $\phi(x)$. La figura 2.7 (b) mostra en blau la SUT, i en vermell la part mesurada per l'interferòmetre, un cop s'ha desplaçat δ_j . Com que $\phi(x)$ és periòdica de període ξ , la part en vermell de la figura 2.7 (b) és la mateixa que a la part en vermell de la figura 2.7 (a). És a dir, que la informació nova de $\phi(x)$ de la segona mesura (en blau a 2.7 (a) i en vermell a 2.7 (b)), que correspon a l'interval $[a - \delta_j, a]$, és exactament igual a la informació que es perd de la primera mesura al fer el desplaçament δ_j (en vermell a 2.7 (a) i en blau a 2.7 (b)) corresponent a l'interval $[b - \delta_j, b]$.

Per tant, quan una SUT és periòdica de període igual a la longitud de mesura de l'interferòmetre — ξ en aquest cas —, amb una sola mesura ja s'obté tota la informació diferent de $\phi(x)$. El que succeeix és que la informació de la SUT està barrejada amb la de la superfície de referència, tal com es veu a l'equació 2.3 i és per aquest motiu que són necessàries mesures addicionals per tal de treure la informació de la superfície de referència, seguint la secció 2.2.

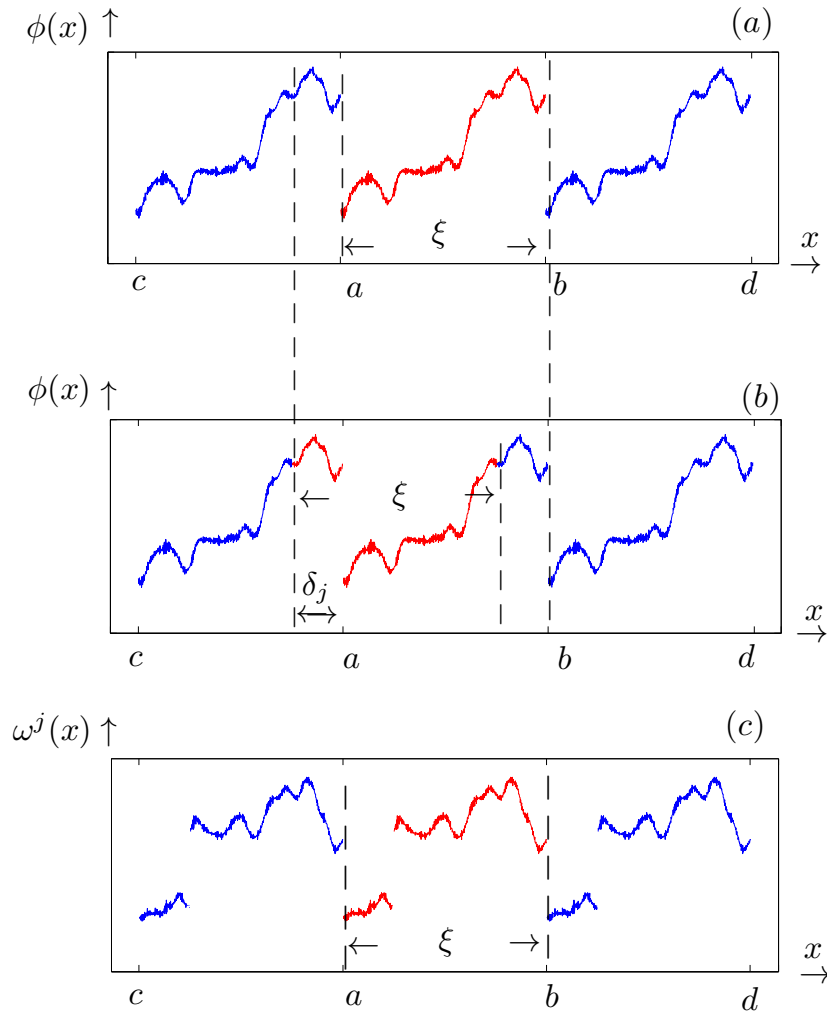


Figura 2.7: Exemple de SUT periòdica de període ξ . (a) En blau la SUT en el domini $[c, d]$, i en vermell la part mesurada per l'interferòmetre en la primera mesura, (b) En blau SUT en el domini $[c, d]$, i en vermell la part mesurada en la segona mesura de l'interferòmetre, amb un desplaçament de δ_j , (c) Diferències de les dues mesures de 2.7 (a) i 2.7 (b).

La figura 2.7 (c) representa $\omega^j(x)$ de les dues mesures de la SUT, és a dir, la diferència de les dues parts en vermell de les figures 2.7 (a) i 2.7 (b). El salt a $a + \delta_j$ és degut al salt de $\phi(x)$ quan $x = a$, al canviar de període en la segona mesura.

Les funcions $\phi(x)$ i $j(x)$ mostrades a la figura 2.7 són funcions periòdiques i contínues per parts i, per tant, es poden desenvolupar en sèries de Fourier [BC08], és a dir, en una sèrie infinita de sinus i cosinus convergeix puntualment a elles. En el cas de $\phi(x)$, aquesta suma està explícitament expressada per

$$\phi(x) = \frac{1}{\bar{\xi}} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \phi_k e^{i2\pi \frac{kx}{\bar{\xi}}} \quad (2.30)$$

on els coeficients ϕ_k venen donats per

$$\phi_k = \int_0^{\bar{\xi}} \frac{1}{\bar{\xi}} \phi(x) e^{-i2\pi \frac{kx}{\bar{\xi}}} dx \quad (2.31)$$

A partir del desenvolupament de $\phi(x)$ en sèrie de Fourier, $j(x)$ de l'equació 2.28 està descomposada com

$$\begin{aligned} j(x) &= \frac{1}{\bar{\xi}} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \phi_k [e^{i2\pi \frac{kx}{\bar{\xi}}} - e^{i2\pi \frac{k(x-\delta_j)}{\bar{\xi}}}] \\ &= \frac{1}{\bar{\xi}} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \phi_k [1 - e^{-i2\pi \frac{k\delta_j}{\bar{\xi}}}] e^{i2\pi \frac{kx}{\bar{\xi}}} \end{aligned} \quad (2.32)$$

on els coeficients ϕ_k són els mateixos de l'equació 2.31.

Un cop es té $j(x)$ en la seva descomposició en sèrie de Fourier, s'està en una situació anàloga a la descrita per l'equació 2.11, i es pot seguir el mètode descrit en domini infinit per tal de recuperar la SUT.

Observar que, al igual que passava amb el domini infinit, es tenen indeterminacions al fer servir només un desplaçament (eq. 2.20). A partir de l'anàlisi de l'equació 2.32, es veu

que s'anul·len certes freqüències de $j(x)$ periòdicament quan $e^{i2\pi \frac{k\delta_j}{\xi}} = 0$. Això succeeix, coincidint amb el descrit a l'equació 2.21, cada vegada que es compleix que $\frac{k\delta_j}{\xi} \in \mathbb{Z}$. Per tant, amb el lateral shearing sequencial s'obté tota la SUT excepte una funció periòdica de període δ_j . Amb la reconstrucció de la SUT a partir de la combinació de la funció de transferència provinent de diferents mesures descrita de l'equació 2.22 es soluciona aquesta indeterminació.

2.3.2 SUT no periòdica

A la secció 2.3.1 s'està suposant que $\phi(x)$ és una funció periòdica de període ξ . Aquesta suposició en la majoria de SUT analitzades no es compleix. En la funció diferència $j(x)$, si es suposa que $\phi(x)$ és periòdica de període ξ quan no ho és, es comet un error en l'interval $[a, a + \delta_j]$ descrit per ϵ_{δ_j} , determinat per $\phi(x)$ i pel desplaçament δ_j ,

$$\epsilon_{\delta_j}(\phi, \delta_j) = \sum_{i=1}^{\delta_j} \phi(x - \delta_j) - \phi(x + \xi - \delta_j) \quad x \in [a, a + \delta_j] \quad j = 1, 2 \quad (2.33)$$

Quan $\phi(x)$ és periòdica $\epsilon_{\delta_j}(\phi, \delta_j) = 0$ ja que sempre es compleix que $\phi(x - \delta_j) = \phi(x + \xi - \delta_j)$.

En la majoria de casos, tal com s'ha dit, no es pot suposar que $\phi(x)$ és periòdica de període la longitud de la mesura ξ , ja que en les mesures donades per l'interferòmetre quan es desplaça la taula lineal, corresponents a l'equació 2.4, apareixen δ_j nous valors de $\phi(x)$ que no tenen cap relació de periodicitat amb els anteriors. El que sí que es pot suposar és que la SUT és $\xi + \delta_j$ periòdica, és a dir, la longitud de la mesura més el desplaçament. Aquesta suposició de periodicitat $\xi + \delta_j$ és la que es farà servir i la que s'aconsegueix mitjançant l'extensió natural.

2.3.2.1 L'extensió Natural

L'extensió Natural és un algorisme numèric necessari per a la millora de la precisió en el lateral shearing sequencial. El que fa l'extensió natural és crear una nova funció de diferències

estesa, $j(x)$, amb la hipòtesi de que $\phi(x)$ és periòdica de període $\xi + \delta_1$, de la següent manera

$$j(x) = \begin{cases} j(x) & x \in [a, b] \\ -\sum_{k=1}^{\frac{\xi}{\delta_j}} j(x - k\delta_j) & x \in (b, b + \delta_j] \end{cases} \quad (2.34)$$

on $j(x)$ es la funció de diferències estesa, de longitud $\xi + \delta_j$ ².

De les parelles de mesures τ^0, τ^1 i τ^0, τ^2 usades en la funció diferències $j(x)$, $j = 1, 2$, es tenen $\xi + \delta_j$ valors diferents de $\phi(x)$ sense cap relació de periodicitat entre ells. A la figura 2.8 (a), en vermell, es mostren els ξ valors de $\phi(x)$ de la primera mesura. A la figura 2.8 (b), en vermell, es mostren els altres ξ valors de $\phi(x)$ de la segona mesura. La figura 2.8 (c), en vermell, mostra el total de valors diferents que es tenen de $\phi(x)$ amb les parelles de mesures τ^0, τ^j . La figura 2.8 (d) mostra gràficament el resultat de l'extensió natural. En vermell es tenen els $\xi + \delta_j$ valors diferents procedents de les dues mesures, i es repeteix la informació fora del domini $[a - \delta_j, b]$ per tal de perioditzar-la.

En el domini $x \in [a, b]$ la funció de diferències esteses és igual que la de l'equació 2.28, doncs tal com s'ha vist no hi ha diferència entre una funció periòdica de període la mesura de l'interferòmetre i qualsevol altre funció. En canvi, en el domini estès sí que hi ha d'haver-hi la suposició de periodicitat de $\phi(x)$.

²Observar que per tal que el límit superior del sumatori que apareix en $\varpi^j(x)$ sigui correcte, es necessita que la longitud del desplaçament δ_j sigui divisor de ξ .

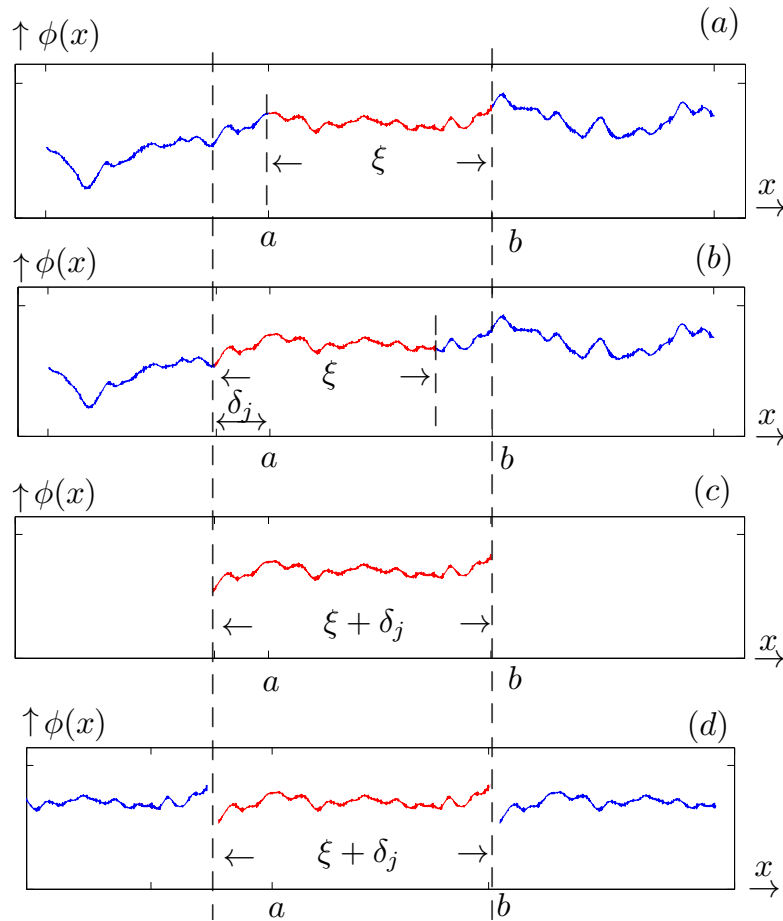


Figura 2.8: Procés de l'extensió natural. (a) Primera mesura inicial, en vermell, de la SUT, (b) Segona mesura inicial, en vermell, de la SUT, després d'un desplaçament δ_j , (c) Unió de tots els valors mesurats en 2.8 (a) i 2.8 (b) fent la primera mesura estesa de l'extensió natural, (d) Periodització de $\phi(x)$ a partir de la primera mesura estesa i obtenció de la segona mesura estesa, en vermell, amb un desplaçament de δ_j .

Si es fa el desenvolupament de $j(x)$ en el domini estès observar que és anàleg estendre en l'interval $[a - \delta_1, b]$ que en l'interval $[b, b + \delta_j]$ es veu com es cancel·len tots els termes del sumatori, excepte el primer i l'últim,

$$\begin{aligned}
 j(x) &:= - \sum_{k=1}^{\frac{b}{\delta_j}} j(x - k \delta_j) \\
 &= - \sum_{k=1}^{\frac{b}{\delta_j}} [\phi(x - k \delta_j) - \phi(x - (k+1)\delta_j)] \\
 &= - [\phi(x - \delta_j) - \cancel{\phi(x - 2\delta_j)} + \cancel{\phi(x - 2\delta_j)} - \cancel{\phi(x - 3\delta_j)} + \\
 &\quad + \cancel{\phi(x - b)} - \phi(x - b - \delta_j)] \\
 &= \phi(x - b - \delta_j) - \phi(x - \delta_j) \quad x \in (b, b + \delta_j] \tag{2.35}
 \end{aligned}$$

Per altra banda, el desenvolupament de la funció diferències en el domini estès, en el cas que $\phi(x)$ fos periòdica de període $\xi + \delta_j$, seria

$$\begin{aligned}
 j(x) &:= \phi(x) - \phi(x - \delta_j) \\
 &= \phi(x - b - \delta_j) - \phi(x - \delta_j) \quad x \in (b, b + \delta_j] \tag{2.36}
 \end{aligned}$$

Comparant les equacions 2.35 i 2.36, es comprova que efectivament l'extensió natural periòdica de la SUT només utilitzant la funció diferències j . D'aquesta manera, es pot seguir el mètode del lateral shearing seqüencial en el cas d'una $\phi(x)$ periòdica de les equacions 2.30 i 2.32, complint amb el teorema de translació de la transformada de Fourier.

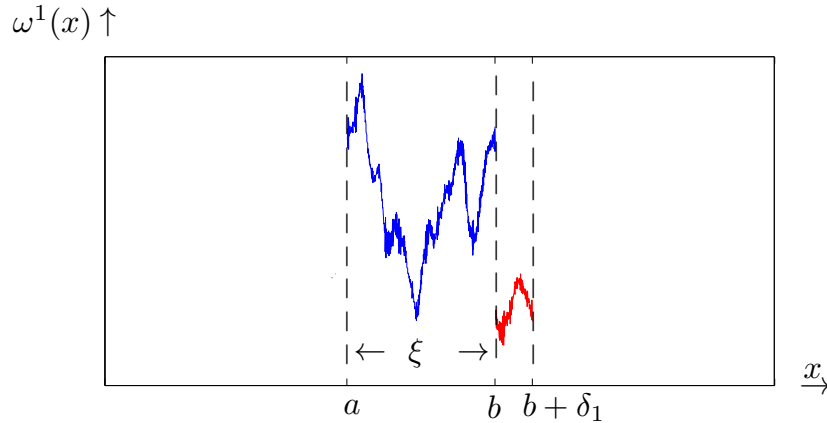


Figura 2.9: Funció diferències $\omega^1(x)$ estesa, utilitzant l'extensió natural. En blau es mostra $\omega^1(x)$ inicial, utilitzant les mesures de les figures 2.8 (a) i 2.8 (b), prèvia a l'extensió natural. En vermell es mostra l'extensió de la funció diferències feta amb l'extensió natural. El conjunt, de $[a, b + \delta_1]$, conforma la funció de diferències estesa i és $\omega^j(x)$ com si les mesures inicials fossin les de les figures 2.8 (c) i 2.8(d).

La figura 2.9 mostra gràficament el que fa l'extensió natural. En blau és la funció diferències $\omega^1(x)$ de les dues mesures inicials de les figures 2.8 (a) i 2.8 (b), on el domini és $[a, b]$. La longitud de la funció diferències inicial és ξ . Com que les mesures esteses amb l'extensió natural de la figura 2.8 (c) i 2.8 (d) tenen domini $\xi + \delta_1$, la funció diferències també ha de tenir la mateixa longitud. L'extensió de la funció diferències feta per l'extensió natural es mostra en vermell, en l'interval $[b, b + \delta_1]$. Observar que el salt que es produeix quan $x = b$ és anàleg al que es veu a la figura 2.7 (c), on la SUT és inicialment periòdica.

D'aquesta manera s'aconsegueix que $\phi(x)$ sigui una funció periòdica de període $\xi + \delta_1$ i les mesures de l'interferòmetre siguin també de longitud $\xi + \delta_1$ i s'estigui en una situació anàloga a la de la secció 2.3.1, on $\phi(x)$ és periòdica inicialment i es compleixi el teorema de translació de la transformada de Fourier. Les diferències de resultats entre usar o no l'extensió natural es veuran en el següent capítol. Ara per finalitzar es mostra l'esquema de procés de treball, en funció de si s'utilitza o no l'extensió natural.

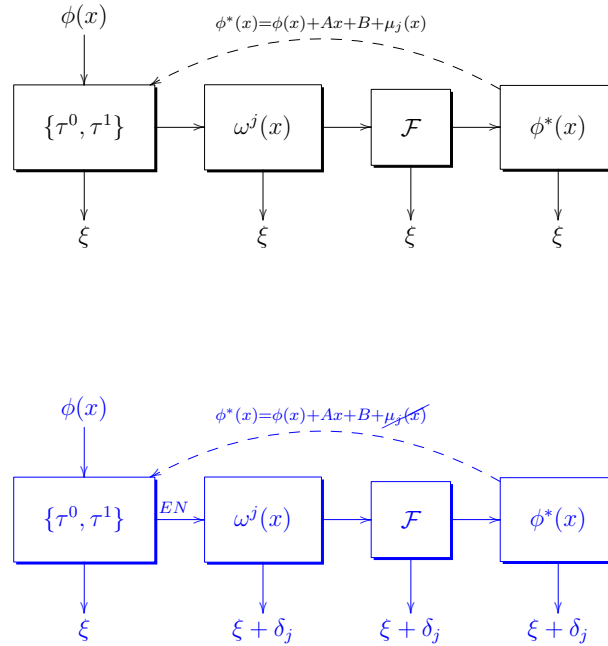


Figura 2.10: Esquema de reconstrucció dividit per blocs, en funció si s'utilitza l'extensió natural o no. En negre, sense extensió natural. En blau, utilitzant l'extensió natural. Cada bloc significa una part del procés: bloc 1, les dues mesures $\tau^0 \tau^1$; bloc 2, funció diferències; bloc 3, treball en el domini de Fourier; bloc 4, reconstrucció de $\phi(x)$. A la part inferior de cada procés s'indica la longitud del domini amb el que es treballa.

Per tal de veure tot el procés, la figura 2.10 divideix en blocs la reconstrucció del lateral shearing sequencial, en funció si s'usa l'extensió natural o no en el procés de reconstrucció de la SUT. En negre, el procés sense extensió natural. En blau, amb extensió natural. En ambdós casos inicialment a partir de $\phi(x)$ es tenen dues mesures donades per l'interferòmetre³, la inicial $\tau^0(x)$ i la desplaçada $\tau^1(x)$. Ambdues mesures amb un domini de longitud ξ .

Si s'agafa el mètode inicial, és a dir, sense extensió natural, a partir de les dues mesures es té la funció diferències $\omega^1(x)$, també de domini ξ , sense cap relació de periodicitat de la SUT entre les dues mesures. En aquest cas, al no tenir relació de periodicitat, al treballar en

³Es fa per claredat l'explicació amb dues mesures, però és anàleg amb les tres.

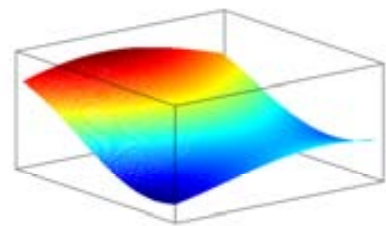
l'espai de Fourier (bloc 3, \mathcal{F}) no es compleix el teorema de translació de la transformada de Fourier de l'equació 2.10 i s'introdueix un error periòdic en la reconstrucció, $\phi^*(x)$, tal com es veurà en la secció 3.1.

En el cas en què s'utilitzi l'extensió natural, és en el segon bloc $\phi^1(x)$ amb un domini $\xi + \delta_1$ on es fa l'extensió natural, agafant tota la informació diferent que hi ha en les dues primeres mesures τ^0 i τ^1 i utilitzant-les per a fer una nova primera mesura estesa. És a dir, es tenen $\xi + \delta_1$ valors diferents de $\phi(x)$ en les dues mesures i l'extensió natural els uneix tots formant una nova primera mesura estesa de domini $\xi + \delta_1$. D'aquesta manera s'ha augmentat el rang de mesura de l'interferòmetre, passant de ξ a $\xi + \delta_1$. I abans s'ha vist en la secció 2.3.1, que amb una SUT periòdica de període igual a la mesura de l'interferòmetre sí que es compleix el teorema de translació de la transformada de Fourier de l'equació 2.10.

CAPÍTOL 3

LATERAL SHEARING SEQÜENCIAL EN DOMINI DISCRET

En aquest capítol es fa un anàlisi del mètode més detallat, en domini discret, donant especial èmfasi a la funció de transferència i a la combinació de desplaçaments amb l'extensió natural per tal d'evitar les singularitats de la funció de transferència. Es mostren els primers resultats de reconstruccions amb el lateral shearing seqüencial.



Per tal d'introduir el lateral shearing seqüencial s'ha treballat amb un domini continu, però una aproximació més realista a les mesures donades per l'interferòmetre és que el domini sigui discret. Per exemple el domini $[a, b]$ de la secció anterior on estava definida la mesura de l'interferòmetre es discretitza de la següent manera,

$$x_k = x_1 + (k - 1) \Delta x \quad k = 1, \dots, n \quad (3.1)$$

on Δx és la distància de mostreig, x_1 és un origen arbitrari. Seguint amb la notació de la secció anterior, $x_1 = a$, $x_n = b$.

La distància de mostreig determina el número n de divisions del domini o equivalentment el número de valors que es tenen de la SUT i les dimensions del sensor determinen el rang d'abastament, és a dir, la distància entre x_1 i x_n , que seguint amb la notació de la secció anterior, aquesta distància és ξ ,

$$x_n - x_1 = \xi \quad (3.2)$$

El domini de $\phi(x)$ de l'equació 2.1 és $[c, d]$, on $[a, b] \subset [c, d]$ que fa que la seqüència discreta de valors ϕ_1, \dots, ϕ_m definida per

$$\phi_k = \phi(x_k) \quad k = 1, \dots, m \quad (3.3)$$

sigui de més longitud que la seqüència $\gamma_1, \dots, \gamma_n$ de la funció de referència,

$$\gamma_k = \gamma(x_k) \quad k = 1, \dots, n \quad (3.4)$$

on $n < m$.

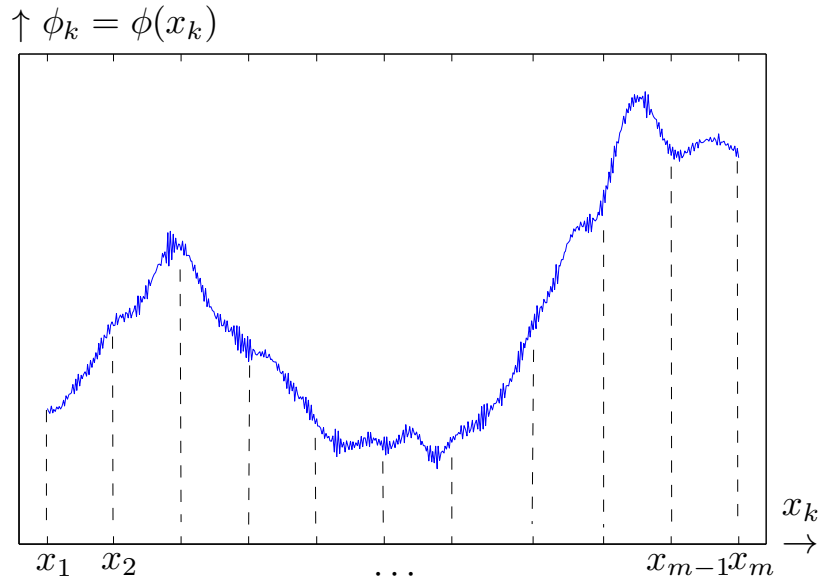


Figura 3.1: Esquema de discretització de $\phi(x)$.

A partir d'aquí la primera mesura donada per l'interferòmetre (en continu equació 2.3) és

$$\tau_k^0 = \phi(x_k) - \gamma(x_k) = \phi_k - \gamma_k \quad k = 1 \dots n \quad (3.5)$$

A la figura 3.1 es veu gràficament la discretització d'una $\phi(x)$ qualsevol. S'està suposant per facilitat que el comportament del píxel és el d'una delta de Dirac tenint un únic valor puntual de la SUT per a cada píxel, perdent els valors de $\phi(x)$ entre un píxel i un altre.

Degut a la diferència de dimensions entre la mida del píxel Δx i els desplaçaments δ_j la mida del píxel és més petit que els dos desplaçaments de la taula lineal es compta que

qualsevol distància desplaçada δ_j és múltiple de la mida del píxel,

$$\frac{\delta_j}{\Delta x} = t_j \in \mathbb{N} \quad j = 1, 2 \quad (3.6)$$

on t_j és a partir d'ara el valor que quantifica la magnitud dels desplaçaments.

Un cop discretitzada la SUT i els desplaçaments, es pot definir les mesures de l'interferòmetre quan es desplaça la taula lineal (en continu equació 2.2),

$$\begin{aligned} \tau_k^j &= \phi(x_k - \delta_j) - \gamma(x_k) \\ &= \phi(x_{k-t_j}) - \gamma(x_k) \\ &= \phi_{k-t_j} - \gamma_k \quad k = 1, \dots, n \quad j = 1, 2 \end{aligned} \quad (3.7)$$

i la funció diferències de l'equació 2.4 com

$$\begin{aligned} \tau_k^j &= \phi(x_k) - \phi(x_{k-t_j}) - \cancel{\gamma(x_k)} + \cancel{\gamma(x_k)} \\ &= \phi_k - \phi_{k-t_j} \quad k = 1, \dots, n \quad j = 1, 2 \end{aligned} \quad (3.8)$$

Fins ara s'ha vist els diferents canvis que es produeixen en el domini espacial. La discretització de l'espai de Fourier es fa a partir de la transformada de Fourier discreta (TFD) [Goo05], que està definida com una seqüència n-periòdica.

Primer s'ha de definir el domini de freqüències. En el domini de freqüències u es tenen el mateix nombre de valors que en el domini espacial x . Les freqüències u_1, \dots, u_n sempre estan en l'interval $[-\frac{1}{2\Delta x}, \frac{1}{2\Delta x})$ i explícitament s'expressen com

$$u_p = u_1 + p\Delta u \quad p = 1, \dots, n \quad (3.9)$$

on $\Delta u = \frac{1}{(n+1)\Delta x}$ i els límits de l'interval són $u_1 = \frac{-1}{2\Delta x}$ i $u_n = \frac{1}{2\Delta x} - \Delta u$.

La TFD queda expressada explícitament per

$$p = \sum_{k=1}^n \phi_k \cdot e^{-i2\pi \frac{pk}{n}} \quad p = 1 \quad n \quad (3.10)$$

a partir de la seqüència $\phi_1 \quad \phi_k$ de la SUT.

D'aquí que la TFD de la funció diferències $\overset{j}{\phi}_k$ estigui definida com,

$$\Omega_p^j = \sum_{k=1}^n \overset{j}{\phi}_k \cdot e^{-i2\pi \frac{pk}{n}} \quad p = 1 \quad n \quad j = 1, 2 \quad (3.11)$$

El teorema de translació de l'equació 2.11 també és cert en domini discret, conservant la relació lineal entre la TFD d'una funció i ella mateixa desplaçada,

$$\Omega_p^j = p(1 - e^{-i2\pi \frac{pt_j}{n}}) \quad j = 1, 2 \quad (3.12)$$

i d'aquí s'obté p ,

$$\overset{j}{\phi}_p = \Omega_p^j \mathcal{T}_p^j \quad \text{on} \quad \mathcal{T}_p^j = \frac{1}{1 - e^{-i2\pi \frac{pt_j}{n}}} \quad p = 1 \quad n \quad j = 1, 2 \quad (3.13)$$

S'està en una situació similar a la descrita en el domini continu finit de les equacions 2.12 - 2.20. Degut a les singularitats que es tenen quan $p = r \quad t_j \quad j = 1, 2 \quad r \in \mathbb{Z}$, en domini

discret la funció de transferència queda re-definida com

$$\mathcal{T}_p^{*j} = \begin{cases} \mathcal{T}_p^j & p = \frac{r}{t_j} \quad r \in \mathbb{Z} - 0 \quad j = 1, 2, \dots, p = 1, \dots, n \\ 0 & p = \frac{r}{t_j} \quad r \in \mathbb{Z} \quad j = 1, 2, \dots, p = 1, \dots, n \end{cases} \quad (3.14)$$

\mathcal{T}_p^{*j} té bàsicament les mateixes característiques que a la secció anterior 2.2, però amb algunes particularitats que s'analitzaran a la secció 3.1.2.

Aplicant la transformada de Fourier inversa discreta a ϕ_p de l'equació 3.13, s'obté la reconstrucció de la SUT utilitzant el lateral shearing seqüencial,

$$\phi_k^* = \mathcal{F}^{-1} \left[\phi_p \right] \quad k = p = 1, \dots, n \quad (3.15)$$

A continuació es veuran una sèrie de reconstruccions utilitzant el lateral shearing seqüencial en diferents situacions, en funció de com són les SUT mesurades, els desplaçaments i el domini de mesura. Primer utilitzant un únic desplaçament i després amb la combinació de dos desplaçaments amb i sense extensió natural.

3.1 Un desplaçament sense extensió natural

3.1.1 Indeterminació del pla $Ax + C$

En les reconstruccions amb el mètode del lateral shearing seqüencial hi ha una indeterminació d'un pla $Ax + C$, tal com ja s'ha vist en l'equació 2.23. La indeterminació d'aquest pla és degut a que, sigui quin sigui el mètode utilitzat en la reconstrucció un desplaçament o més, amb o sense extensió natural, etc. sempre hi ha la indeterminació a la freqüència 0 en la funció de transferència del shearing. Aquesta freqüència, tal com es pot veure en l'equació

2.14, s'anul·la, i és equivalent a tenir una incertesa d'una constant A que s'afegeix a la funció diferències. Com que la funció diferències té naturalesa de derivada en respecte de $\phi(x)$, al fer la transformada de Fourier inversa a les equacions 2.19 i 2.22 és una integral la constant A es converteix en un pla $Ax + C$. Per a veure el pla en la reconstrucció i per tal de confirmar que el pla $Ax + C$ prové del propi mètode i no d'altres elements afegits més endavant com, per exemple, la extensió natural, es farà una reconstrucció el més senzilla possible, és a dir, sense extensió natural i utilitzant un sol desplaçament.

La figura 3.2 mostra la indeterminació del pla. La funció en vermell de la figura 3.2 (a) és una SUT a mesurar, de domini $\xi = 512 \text{ mm}$ i en el rang del nanòmetre¹. En aquestes figures, i al llarg de la tesi fins que no es digui el contrari, es suposa que la mida del píxel és d'1 mm , és a dir, $\Delta x = 1 \text{ mm}$ de l'equació 3.1. En blau, la reconstrucció utilitzant un desplaçament $\delta_1 = 64 \text{ mm}$, sense extensió natural. La reconstrucció comença amb valors per sobre de la SUT, per més endavant passar a valors per sota. Això és degut a que hi ha un pla que modifica la tendència de la reconstrucció. A la figura 3.2 (b) hi ha l'error de la reconstrucció, on clarament es distingeixen dos sub-errors: un pla i un error periòdic que augmenta als extrems. El pla és produït per la indeterminació comentada, i l'error periòdic que augmenta als extrems és degut a utilitzar només un desplaçament, sense extensió natural, i que el desplaçament sigui divisor del domini ξ . Aquest error periòdic s'analitzarà a la secció 3.1.2.

La figura 3.2 (c) mostra en vermell la mateixa SUT que a la figura 3.2 (a), i en blau la reconstrucció utilitzant aquest cop un desplaçament $\delta_2 = 62 \text{ mm}$, que no és divisor del domini ξ . A la figura 3.2 (d) es mostra l'error de reconstrucció, on l'error periòdic canvia en aquest cas el desplaçament no és divisor del domini, però el pla afegit és exactament el mateix, confirmant que la indeterminació del pla $Ax + C$ és independent del desplaçament.

¹Les SUTs a mesurar estan en aquest rang.

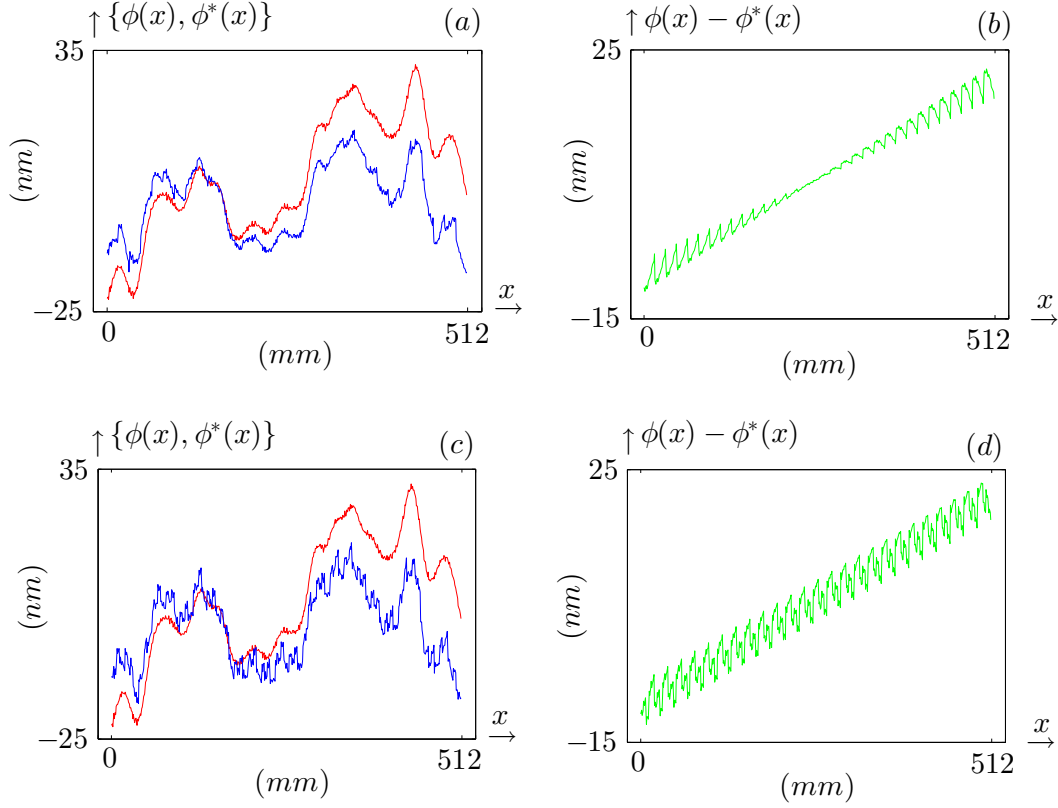


Figura 3.2: (a) SUT a mesurar, en vermell, i la seva reconstrucció ϕ^* , en blau, amb un desplaçament $t_1 = 64$ mm, sense utilitzar l'extensió natural, (b) Error comès en la reconstrucció de la figura 3.2 (a), (c) SUT a mesurar, en vermell, i la reconstrucció, en blau, amb un desplaçament $t_1 = 62$ mm, sense utilitzar l'extensió natural, (d) Error comès en la reconstrucció de la figura 3.2 (c). En tots els casos el domini $\xi = 512$.

Aquest pla no afecta a la reconstrucció ja que no té termes més elevats quadràtics, cúbics, etc. que sí que modificarien el perfil de la SUT reconstruïda. És equivalent $\phi(x)$ a $\phi(x) + Ax + C$. Per això, a partir d'ara, si no es diu el contrari, en tots els resultats de reconstruccions i anàlisi d'errors es faran sostraint el pla que millor s'ajusti per mínims quadrats a la $\phi^*(x)$ reconstruïda. L'error periòdic de les figures 3.2 (b) i (d) s'anitzarà a la secció 3.1.2.

3.1.2 Error periòdic en la reconstrucció

L'error periòdic de les figures 3.2 (b) i (d) és degut a les indeterminacions de la funció de transferència, analitzat a la secció 2.2.1. Es pot veure que tot i ésser desplaçaments molt propers, tenen diferent influència i forma. Això és degut a que en el cas de 3.2 (b) el desplaçament $t_1 = 64 \text{ mm}$ que és divisor del domini $\xi = 512 \text{ mm}$, mentre que en el cas de 3.2 (d) el desplaçament $t_1 = 62 \text{ mm}$ que no ho és. En funció de si és divisor o no es produeixen diferents comportaments de la funció de transferència que afecta posteriorment a la reconstrucció. Per exemple, l'augment de l'error en els extrems a la figura 3.2 (b) és degut al que s'anomena errors de vora [Mor03] i es tractaran a la secció 3.2. En canvi, a les figures 3.2 (d) es pot veure que l'error també és periòdic, i de major magnitud que en el cas de la reconstrucció de la figura 3.2 (b), però no augmenta a les vores.

Per veure més exemples d'errors de reconstrucció en aquest primer cas en que es fa servir un únic desplaçament sense extensió natural, la figura 3.3 mostra la relació entre el desplaçament, les singularitats de la funció de transferència i l'error en la reconstrucció $\phi - \phi^*$ a partir de diferents desplaçaments t_j , (a) $t_1 = 2 \text{ mm}$, (b) $t_2 = 20 \text{ mm}$, (c) $t_3 = 80 \text{ mm}$. Es mostren en blau el denominador de la funció de transferència i en verd els errors en la reconstrucció.

A la figura 3.3 (a.1) es tenen 2 períodes amb $t_1 = 2$. Hem de tenir en compte que cada cop que el denominador arriba a 0 és quan hi ha una singularitat. En la figura 3.3 (a.1) es tenen dos singularitats, a $u_1 = -1$ i $u_{257} = 0$. Sembla que a la freqüència $u_p = 1/2$ n'hi hagi una altra però recordem que el domini de les freqüències és $u \in [-1/2, 1/2)$, per tant no arriba a l'últim 0. Anàlogament, a la figura 3.3 (b.1) es tenen 20 singularitats perquè $t_2 = 20$ i a 3.3 (c.1) n'hi ha 80 perquè $t_3 = 80$. Totes les funcions de transferència tenen una singularitat a l'origen.

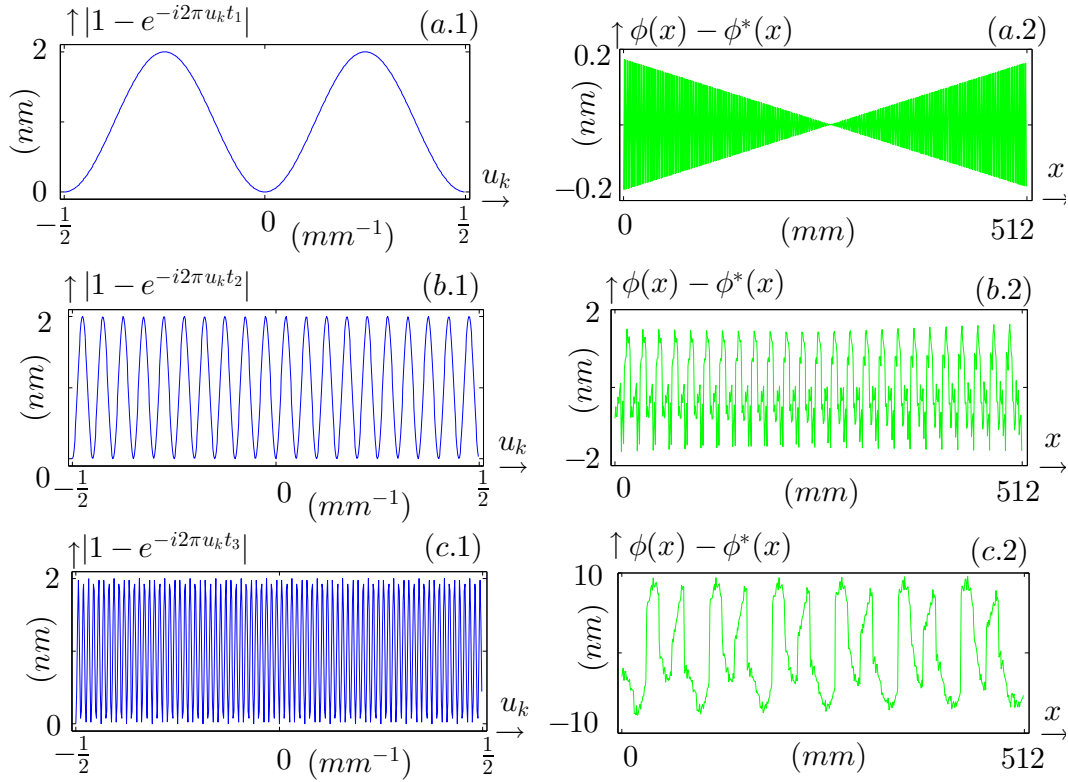


Figura 3.3: Denominador de la funció de transferència, en blau, i error en la reconstrucció ϕ^* , en verd, en funció de diferents desplaçaments (a) $t_1 = 2 \text{ mm}$, (b) $t_2 = 20 \text{ mm}$, (c) $t_3 = 80 \text{ mm}$. En tots els casos el domini és $\xi = 512 \text{ mm}$.

Totes les singularitats de la funció de transferència són freqüències que es perden en la reconstrucció i influeixen en l'error de la reconstrucció ϕ^* , tant en el període com en la magnitud. La figura 3.3 mostra, en verd, els errors $\phi - \phi^*$. Tots els errors són periòdics. L'error en forma de triangles de 3.3 (a.2) es veurà en detall amb l'explicació de la figura 3.9, que es produeix quan el desplaçament és divisor del domini. En aquesta comparativa d'errors de reconstrucció es pot veure com el període de l'error també depèn del desplaçament. De fet, el període és igual a t_j . Per tant, a la figura 3.3 (a.2) el període és 2 i es tenen $\frac{\xi}{t_1} = \frac{512}{2} = 256$ períodes. Anàlogament, a la figura 3.3 (b.2) el període de l'error és 20 i es tenen aproximadament 25 períodes, mentre que a la figura 3.3 (c.2) el període de l'error és 80 i es tenen aproximadament 6 períodes. En aquests dos últims el nombre de períodes són aproximatiu

perquè al no ser desplaçaments divisors del domini, l'error de reconstrucció té tants períodes com la part entera de la divisió, més la part proporcional del residu. Per exemple, a la figura 3.3 (c.2) hi ha $\frac{\xi}{t_3} = \frac{512}{80} = 6$ períodes i una part d'un altre, corresponent a la part proporcional del període que queda fraccionat.

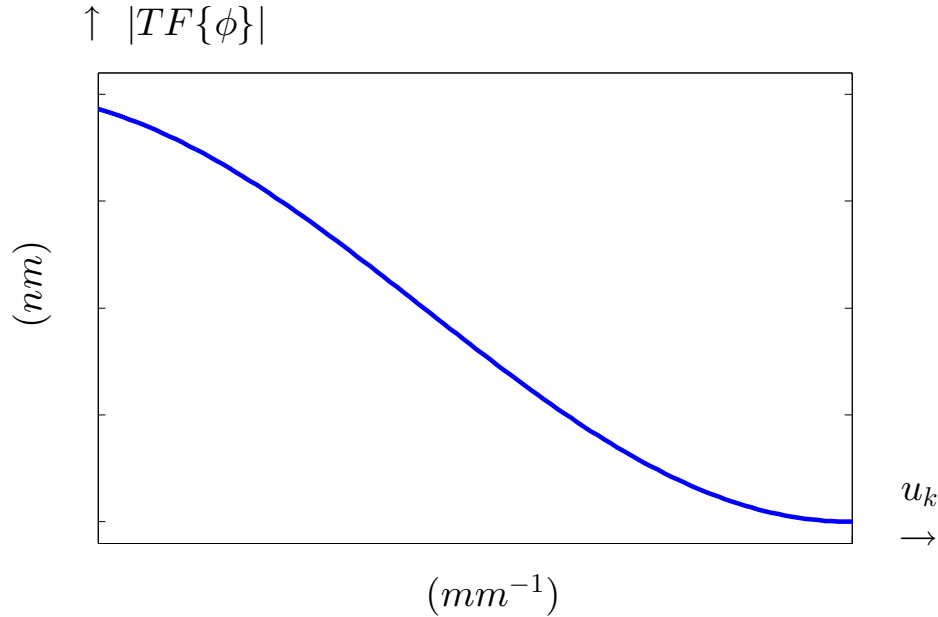


Figura 3.4: Perfil habitual de la transformada de Fourier d'una funció ϕ qualsevol.

La magnitud dels errors està relacionada amb la magnitud del desplaçament: com més gran és el desplaçament, més singularitats es tenen a la funció de transferència i, més important, les freqüències que s'estan perdent són més baixes. A les figures 2.3 i 2.4 es pot veure que amb desplaçaments més grans es perden més freqüències baixes. Per tant, al perdre més freqüències i més baixes, es perd més la forma de la SUT a l'hora de la reconstrucció. La magnitud del desplaçament és directament proporcional al número de singularitats, que ahora és proporcional a les freqüències que es perden en la reconstrucció. Per tant, com més petit és el desplaçament més petit és l'error en la reconstrucció. Observem que a la figura 3.3 (a.2), amb el menor dels desplaçaments, el rang d'error és de $[-0.2 \ 0.2] \text{ nm}$, mentre que amb $t_2 = 20 \text{ mm}$ és ja un ordre de magnitud més, i amb $t_3 = 80 \text{ mm}$ l'error va de $[-10 \ 10] \text{ nm}$.

A més, normalment l'amplitud de les components de freqüències baixes sol ser major, amb el que l'error és també major quan s'eliminen. És a dir, si es mira el mòdul de la transformada de Fourier, normalment segueix un perfil similar al de la figura 3.4. Les freqüències baixes tenen més pes i, per tant, si s'elimina alguna d'elles, l'error comès és més gran que si s'elimina una freqüència alta, amb menor pes.

La figura 3.3 mostra la relació d'1 a 1 que hi ha entre les singularitats de la funció de transferència i els desplaçaments, és a dir, la magnitud del desplaçament és igual al número de singularitats de la funció de transferència, seguint l'equació 3.14. Experimentalment aquesta divisió binària dels valors no és del tot acurada doncs si el valor del denominador és molt proper a 0, però no exactament 0, segons l'equació 3.14 aquest freqüència no es substitueix, ja que la funció de transferència no és infinit, però valors molt petits en el denominador repercuteixen en la precisió de la reconstrucció ϕ^* . Per tant, és necessari un tractament més flexible de la funció de transferència, modificant l'equació 3.14 per la següent,

$$\mathcal{T}_p^{j*} = \begin{cases} \mathcal{T}_p^j & \text{si } \mathcal{T}_p^j < M \quad p \in \mathbb{Z} \\ 0 & \text{altrament} \end{cases} \quad (3.16)$$

on M és el valor de control.

Les equacions 3.14 i 3.16 moltes vegades són equivalents si no hi ha valors pròxims a 0. Aquesta és una de les diferències que hi ha entre les funcions de transferència a partir de desplaçaments divisors del domini i els que no són divisors. Quan el desplaçament és divisor del domini, les equacions 3.14 i 3.16 són equivalents i es correspon exactament el desplaçament amb el nombre de singularitats. Quan el desplaçament no és divisor del domini, els valors que pren el denominador de la funció de transferència varien molt més tenint d'aquesta manera valors propers a 0. La diferència entre si els desplaçaments són divisors del domini o no es pot veure gràficament a la figura 3.5.

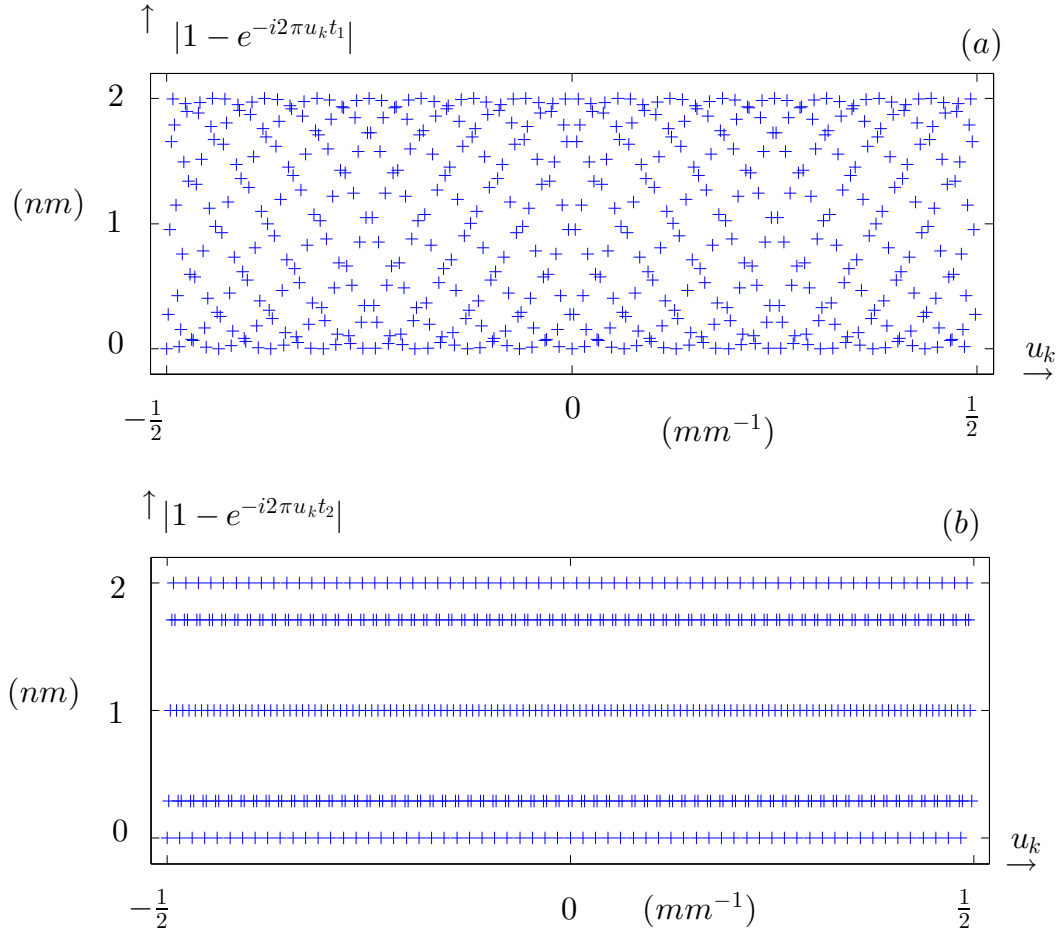


Figura 3.5: Denominador de la funció de transferència del shearing (STF) de les reconstruccions d una SUT, amb un domini $\xi = 512 \text{ mm}$ i els desplaçaments (a) $t_1 = 62 \text{ mm}$ i (b) $t_2 = 64 \text{ mm}$

La figura 3.5 mostra el denominador de la funció de transferència quan els desplaçaments són (a) $t_1 = 62 \text{ mm}$ (b) $t_2 = 64 \text{ mm}$. Observar que el domini de freqüència $u_k \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ per l'equació 3.9 i perquè $\Delta x = 1$. La figura 3.5 (b) mostra el denominador quan el desplaçament és $t_1 = 64 \text{ mm}$. Al ser divisor del domini, els valors del denominador van a parar de manera regular sobre els mateixos valors. En aquest cas estan sobre cinc possibles valors $0, 0.25, 1, 1.75, 2$. Per tant regularment $p = 1 - n - t - q = 1 - e^{-i2\pi \frac{pt_j}{n}} = 0$ donant

periòdicament indeterminacions a la funció de transferència. Els altres valors no són propers a 0. Aleshores, les equacions 3.14 i 3.16 coincideixen fent que la magnitud del desplaçament t_j i el número d indeterminacions de la funció de transferència siguin iguals.

La figura 3.5 (a) és també el denominador de la funció de transferència, però en aquest cas amb un desplaçament $t_2 = 62 \text{ mm}$ que no és divisor del domini. Podem observar que els valors són menys regulars fent que $p = 1 - n - t q = 1 - e^{-i2\pi \frac{pt_j}{n}} = 0$ siguin menys i que n hi hagi moltes d altres $p = 1 - n - t q = 1 - e^{-i2\pi \frac{pt_j}{n}} \approx 0$. Aquests últims són els que depenen del control M de l equació 3.16 i en funció d això coincidiran la magnitud del desplaçament amb el nombre d indeterminacions de la funció de transferència.

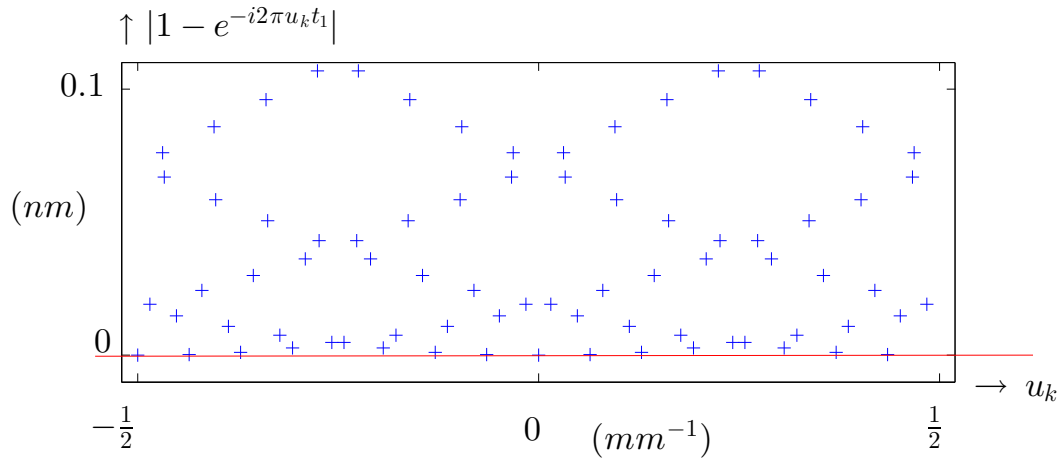


Figura 3.6: Augment de la figura 3.5 (a) en el rang $[0 \ 0 \ 1]$ nm de l eix d ordenades. La línia en vermell marca el 0.

Per veure que efectivament hi ha molts valors propers a 0 però no són exactament 0, la figura 3.6 mostra augmentat l eix d ordenades en el rang $[0 \ 0 \ 1]$ de la figura 3.5 (a). La línia vermella marca el 0. Tal com es pot veure, molt poques $p = 1 - n$ estan exactament a sobre la línia, el que vol dir que la majoria de valors estan al voltant de 0, però molt pocs són exactament 0. Aquesta és la diferència entre els desplaçaments que són divisors del domini i els que no. A continuació es veuran reconstruccions amb diferents desplaçaments.

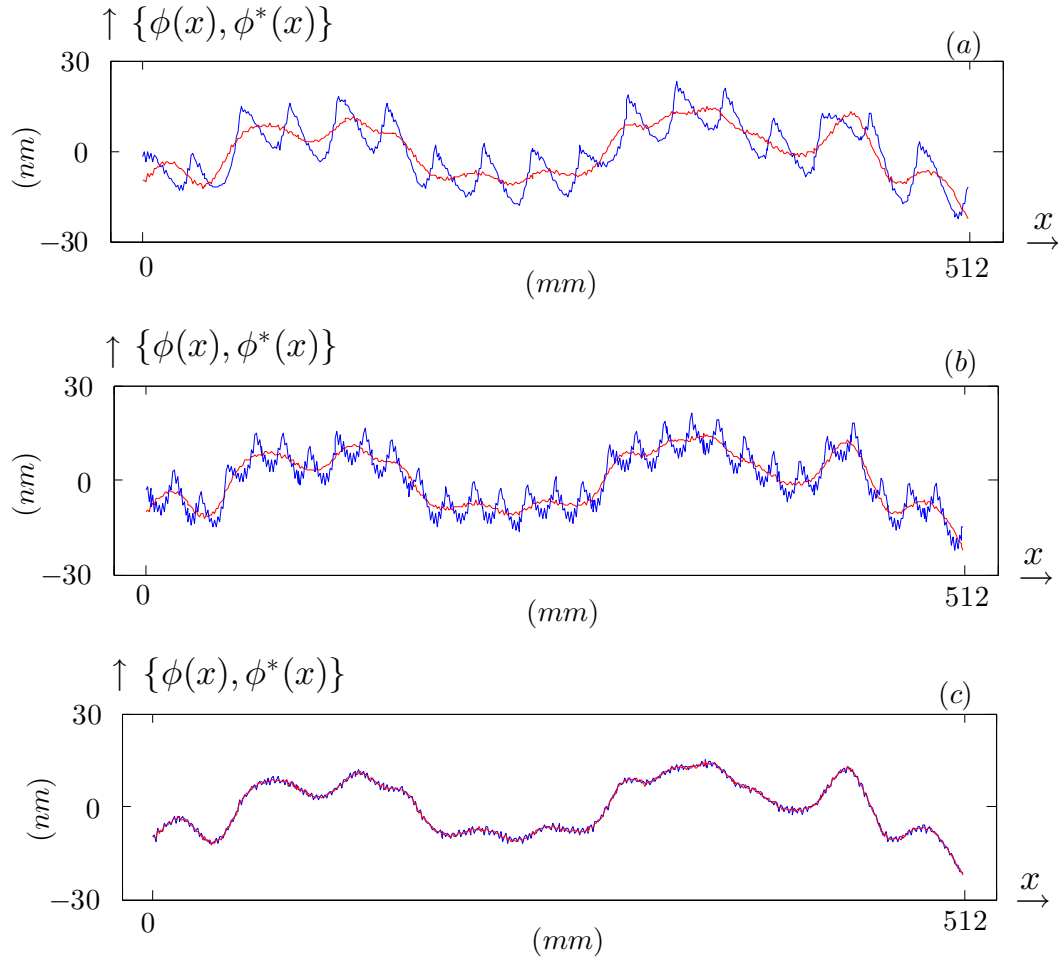
3.1.3 Reconstrucció utilitzant un desplaçament no divisor del domini ξ 

Figura 3.7: Una mateixa SUT, en vermell, i diferents reconstruccions ϕ^* , en blau, utilitzant diferents desplaçaments, (a) $t_1 = 33$ mm, (b) $t_2 = 17$ mm i (c) $t_3 = 3$ mm. Tots ells no són divisors del domini $\xi = 512$ mm.

Ja s'ha vist a les figures 3.5 (a) i 3.6 com és el denominador de la funció de transferència quan el desplaçament no és divisor del domini. A continuació es veuran diferents reconstruccions en funció de la longitud del desplaçament. A la figura 3.7 es mostra una mateixa SUT i diferents reconstruccions utilitzant desplaçaments (a) $t_1 = 33$ mm, (b) $t_2 = 17$ mm i (c) $t_3 = 3$ mm,

que no són divisors del domini $\xi = 512 \text{ mm}$. En vermell, la SUT, i en blau, la reconstrucció.

Es pot veure que les reconstruccions depenen del desplaçament: com més gran és el desplaçament, més quantitat de freqüències i de freqüències més baixes es perden a la funció de transferència, perdent més la forma de la SUT a reconstruir. Això fa que l'error periòdic sigui més gran i confirma el que s'havia vist analíticament amb l'error ϵ_{δ_j} de l'equació 2.33. En tots els casos la reconstrucció va seguint el perfil de la SUT, però sempre introduint errors periòdics. El període de l'error de les reconstruccions és el propi desplaçament t_j i es tenen ξ/t_j períodes en tot el domini.

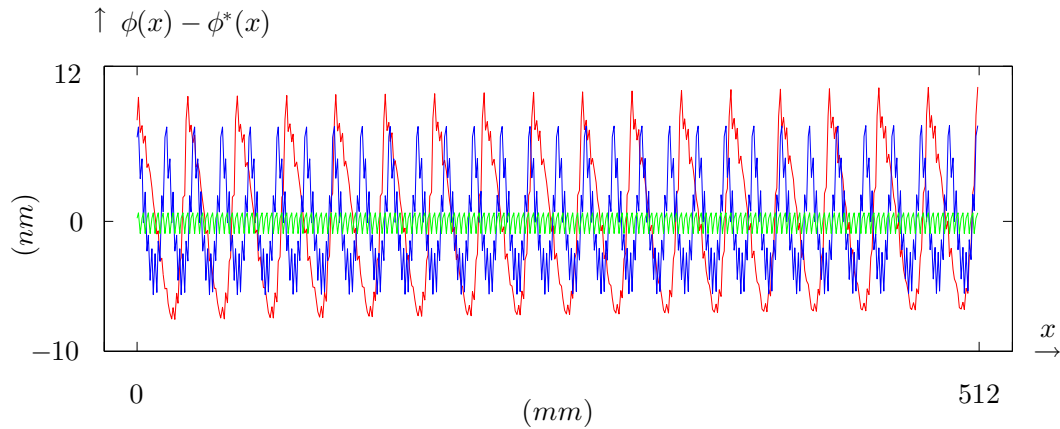


Figura 3.8: Errors de reconstrucció de la figura 3.7 en que s'han utilitzat diferents desplaçaments no divisors del domini, $t_1 = 3 \text{ mm}$ en vermell, $t_2 = 17 \text{ mm}$ en blau i $t_3 = 33 \text{ mm}$ en verd.

La reconstrucció es pot dividir en dos parts: el perfil que coincideix amb el perfil de la SUT i una funció periòdica el període de la qual és el desplaçament i és el que ens dona l'error. A la figura 3.8 es mostren els errors de la reconstrucció $\phi - \phi^*$ per a diferents desplaçaments no divisors del domini $\xi = 512 \text{ mm}$. En vermell $t_1 = 3 \text{ mm}$, en blau $t_2 = 17 \text{ mm}$ i en verd $t_3 = 33 \text{ mm}$. Es confirma que tenen un comportament periòdic i que a mesura que es van fent petit els desplaçaments augmenta la freqüència i disminueix la magnitud de l'error. Cada cop s'ajusta més a la funció, però és important observar que amb el menor dels

desplaçaments, $t_3 = 3 \text{ mm}$, l'error en la reconstrucció està per sobre dels 2 nm . Aquest error està ja fora del rang dels errors permesos en la reconstrucció d'una SUT utilitzant el lateral shearing sequencial.

Al capítol 4.1 es veuran reconstruccions on s'hi afegeix soroll electrònic a les mesures.

3.1.4 Reconstrucció utilitzant un desplaçament divisor del domini ξ

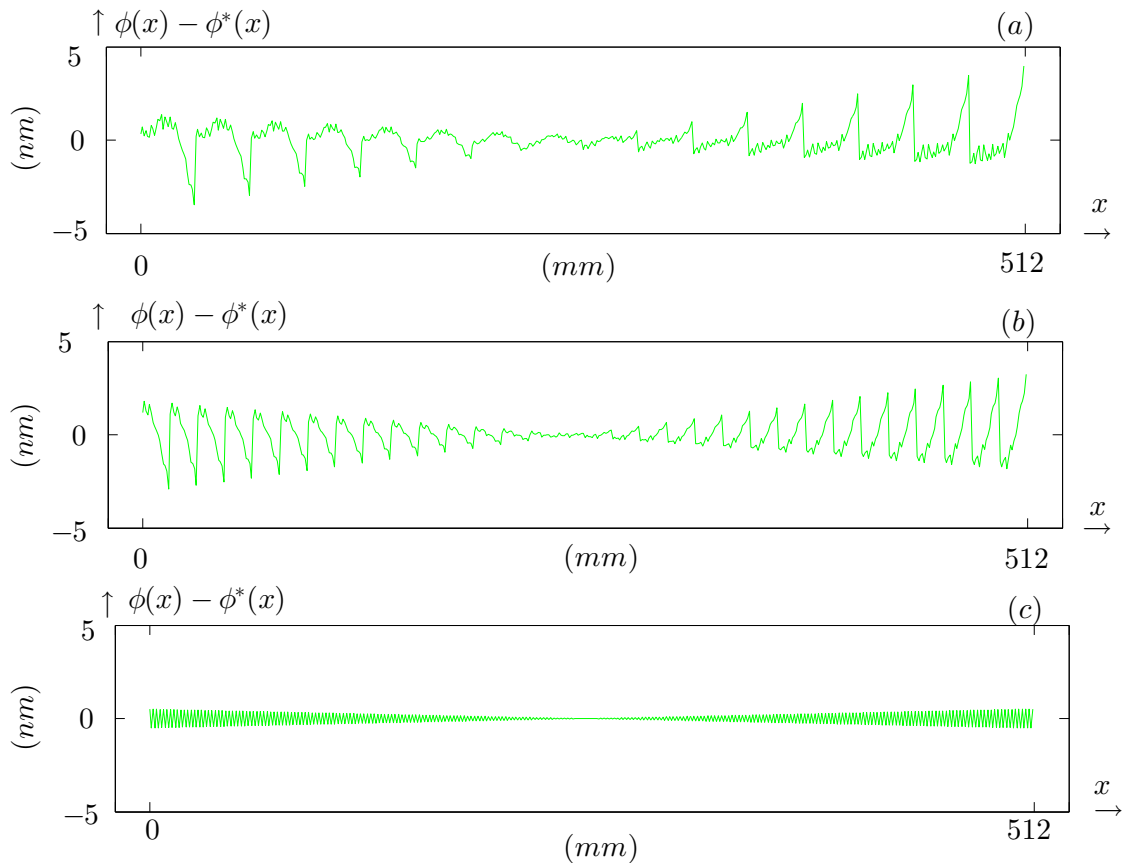


Figura 3.9: Errors de reconstrucció de la mateixa SUT que a la figura 3.7, utilitzant diferents desplaçaments divisors dels domini (a) $t_1 = 32 \text{ mm}$, (b) $t_2 = 16 \text{ mm}$ i (c) $t_3 = 2 \text{ mm}$.

Quan el desplaçament és divisor del domini, el comportament de la reconstrucció és menys regular que quan no ho és. La figura 3.9 mostra els errors de reconstrucció utilitzant la mateixa

SUT que a la figura 3.7 però amb desplaçaments que sí són divisors del domini, (a) $t_1 = 32$ mm, en (b) $t_2 = 16$ mm i en (c) $t_3 = 2$ mm.

En aquest cas, igual que quan no són divisors, el període de l'error depèn del desplaçament. El període és t_j , anant de freqüències més baixes amb desplaçaments més grans, a freqüències altes amb desplaçament com el de t_3 . La diferència de comportaments en relació als de la figura 3.8 és la magnificació dels errors als extrems, passant d'errors al voltant de 0 en la part central de gràfica a errors al voltant de 5 nm als extrems amb t_1 .

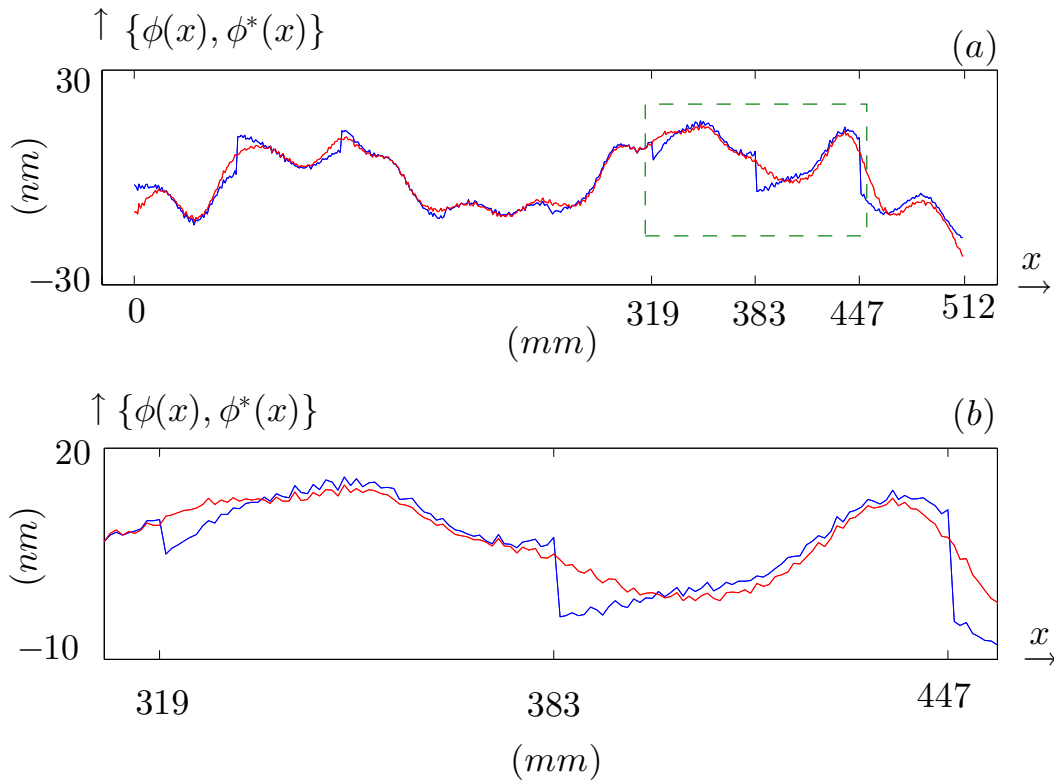


Figura 3.10: Perfil de la SUT de la figura 3.7, en vermell, i reconstrucció ϕ^* , en blau, utilitzant un desplaçament $t_4 = 64$ mm, (a) Domini habitual $k \in [0, 512]$ mm, (b) Domini ampliat $k \in [319, 455]$ mm. La figura 3.10 (b) correspon al requadre discontinu verd de la figura 3.10 (a).

Aquesta magnificació als extrems és coneguda com efectes de vora, i són deguts a que la funció SUT s'està suposant que és periòdica quan no ho és i aleshores no compleix el teorema de translació utilitzat en el mètode del lateral shearing sequencial². Per tal d'evitar els efectes de vora, és necessari perioditzar la SUT mitjançant l'extensió natural. Es pot veure comparant els errors de les figures 3.8 i 3.9 que les magnituds d'error de la figura 3.8 són més grans que els de la figura 3.9, tot i ser molt propers entre ells, $33 \cdot 32$, $17 \cdot 16$ i $3 \cdot 2$, respectivament. Per tant, les reconstruccions amb desplaçaments que són divisors del domini, tot i tenir els efectes de vora, són més acurades que les reconstruccions on el desplaçament no és divisor.

Per tal de poder veure amb detall com és el comportament de la ϕ^* en relació a la SUT, a la figura 3.10 (a) es mostra la SUT de la figura 3.7, en vermell, i la reconstrucció ϕ^* , en blau, utilitzant el desplaçament $t_1 = 64 \text{ mm}$. Es veuen els salts periòdics i com va augmentant la magnitud d'aquests salts als extrems deguts als errors de vora. El període dels salts és igual al desplaçament. Per tant, en aquest cas el període és 64 i es tenen $\frac{\xi}{t_4} = \frac{512}{64} = 8$ períodes. La regió en verd discontinua és una part del domini que s'amplia a la figura 3.10 (b) per a poder-ho observar amb més detall.

A la figura 3.10 (b) es mostren ampliades la SUT i la reconstrucció de la figura 3.10 (a), només en el domini $x \in [310 \ 455]$. En aquest domini es poden veure tres salts en la funció de reconstrucció. El salt menor és el de $x = 319$, mentre que el major és el corresponent a $x = 447$, confirmant que l'error de vora es fa més gran en els extrems. Els errors de vora mostrats en aquesta secció es solucionen amb l'ús de l'extensió natural explicada a la secció 2.3.2 i mostrats els resultats a continuació.

²Això s'ha analitzat analíticament a la secció 2.2.1.

3.2 Un desplaçament amb extensió natural

Amb els resultats anteriors s'ha vist que els errors quan el desplaçament no és divisor del domini estan per sobre dels $2nm$ i que els errors més petits, quan el desplaçament és divisor del domini, de la figura 3.9, tenen errors de vora, produïts perquè la SUT s'està suposant periòdica quan en realitat no ho és.

És per això necessari introduir l'extensió natural, seguint l'esquema de la figura 2.10, per tal de perioditzar la SUT i obtenir reconstruccions més acurades utilitzant el lateral shearing sequencial. S'ha de tenir en compte que, tot i que es milloren els resultats de les reconstruccions amb l'ús de l'extensió natural, eliminant els errors de vora, els errors periòdics en les reconstruccions deguts a les singularitats de la funció de transferència segueixen apareixent.

La figura 3.11 mostra els errors de reconstrucció $\phi - \phi^*$ utilitzant la mateixa SUT que en la figura 3.9 i amb els mateixos desplaçaments, (a) $t_1 = 32 \text{ mm}$, (b) $t_2 = 16 \text{ mm}$ i (c) $t_3 = 2 \text{ mm}$. Aquest cop utilitzant l'extensió natural. Tal com s'ha dit, es segueix tenint l'error periòdic produït per les indeterminacions de la funció de transferència en funció del desplaçament, sense els errors de vora. Els errors van disminuint a mesura que va disminuint el desplaçament. Amb $t_1 = 32 \text{ mm}$ està al voltant dels $2nm$, amb $t_2 = 16 \text{ mm}$ al voltant del nanòmetre i amb $t_3 = 2 \text{ mm}$ s'arriba a un rang d'error de $[-0.02 \text{ } 0.02]nm$.

Comparant els resultats de les figures 3.9 i 3.11, s'observa un augment de la precisió, ja que sense utilitzar l'extensió natural el menor dels errors de la figura 3.9 està al voltant dels $2nm$, quan amb l'extensió natural ja s'arriba a aquesta precisió amb el pitjor dels resultats, arribant a errors per sota del nanòmetre. Aquest augment de la precisió és degut a que al perioditzar la SUT mitjançant l'extensió natural s'han eliminat els errors de vora dels extrems de la figura 3.9.

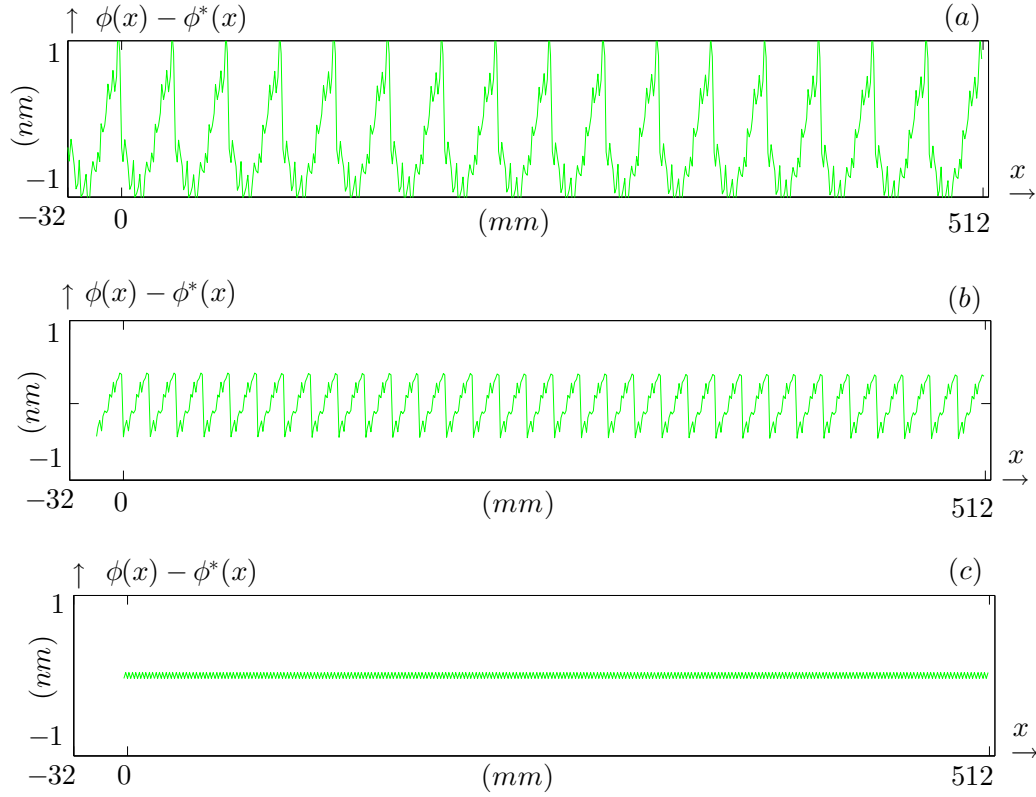


Figura 3.11: Errors de reconstrucció de la mateixa SUT que a la figura 3.9, utilitzant l'extensió natural, amb diferents desplaçaments (a) $t_1 = 32 \text{ mm}$, (b) $t_2 = 16 \text{ mm}$ i (c) $t_3 = 2 \text{ mm}$.

Una altra diferència al utilitzar l'extensió natural és l'augment del domini reconstruït. En les reconstruccions amb un desplaçament t_j , sense extensió natural, el domini reconstruït de ϕ^* és el mateix domini de mesura de l'interferòmetre, ξ . Ja s'havia vist a la secció 2.3.2.1 que amb l'extensió natural, amb un desplaçament t_j s'augmenta el domini de reconstrucció passant de ξ a $\xi + t_j$. És per això que els dominis reconstruïts de la figura 3.11 van canviant en funció del desplaçament t_j , en (a) és $544 = 512 + 32 \text{ mm}$, en (b) és $528 = 512 + 16 \text{ mm}$ i en (c) és $514 = 512 + 2 \text{ mm}$, doncs s'han fet servir uns desplaçaments $t_1 = 32 \text{ mm}$, $t_2 = 16 \text{ mm}$ i $t_3 = 2 \text{ mm}$, respectivament.

Els resultats de la figura 3.11 demostren que amb l'extensió natural es millora la precisió de les reconstruccions ja que s'eliminen els errors de vora, però no s'eliminen els errors pe-

riòdics produïts per les singularitats de la funció de transferència. Amb la combinació de dos desplaçaments s'aconsegueix eliminar l'error periòdic, tal com es veurà a continuació.

3.3 Dos desplaçaments

Una combinació de dos desplaçaments en la reconstrucció permet combinar les respectives singularitats de la funció de transferència de cada desplaçament. La combinació de funcions de transferència es fa a partir de l'equació 2.22, que en domini discret és

$$\mathcal{F}_p \phi_k^{*c} = \begin{cases} \Omega_p^1 \mathcal{T}_p^1 & p \in [\frac{r}{t_1} - \epsilon, \frac{r}{t_1} + \epsilon], \quad r \in \mathbb{Z} \quad p = 1 \dots n \\ \Omega_p^2 \mathcal{T}_p^2 & p \in [\frac{r}{t_1} - \epsilon, \frac{r}{t_1} + \epsilon], \quad r \in \mathbb{Z} \quad p = 1 \dots n \end{cases} \quad (3.17)$$

Per veure reconstruccions amb diferents combinacions de desplaçaments, la figura 3.12 mostra els errors de reconstrucció d'una mateixa SUT utilitzant la combinació de diferents desplaçaments, (a) $t_1 = 4$ $t_2 = 8$ mm , (b) $t_1 = 5$ $t_2 = 7$ mm i (c) $t_1 = 3$ $t_2 = 16$ mm . Al ser el domini $\xi = 512$ mm , alguns dels desplaçaments són divisors del domini i altres no. S'ha de tenir en compte que en aquesta secció el domini inicial ξ de la SUT és igual al domini final ξ de la reconstrucció, independentment de la longitud dels desplaçaments que es fan durant el procés, doncs no s'està fent servir l'extensió natural.

A la figura 3.12 (a) els dos desplaçaments són divisors del domini i, a més, un és múltiple de l'altre. Es pot veure que el perfil de l'error és similar al que es produeix amb un sol desplaçament divisor del domini de la figura 3.8. Això és degut a que com que un desplaçament és divisor de l'altre, hi ha singularitats de la funció de transferència que són comuns als dos desplaçaments i que no es poden solucionar mitjançant la combinació de funcions de transferència. En les reconstruccions pels casos 3.12 (b) i 3.12 (c) s'han utilitzat desplaçaments que són similars entre ells i sense cap denominador comú. Els perfils d'error de reconstrucció són similars en forma. No hi ha l'error periòdic tan marcat, i es segueixen tenint uns

errors de vora que, al ser l'error periòdic menor, són en proporció més grans que a la figura 3.12 (a). En tots tres casos, els errors de vora produïts perquè la SUT no és periòdica es mostren de manera clara. En quant a magnitud, els errors de la figura 3.12 (c) són els més grans, al voltant de $\pm 2nm$. Això és degut a que un dels desplaçaments, $t_2 = 16 mm$, és el més gran de tots, augment l'error que es té suposant que SUT és periòdica quan no ho és.

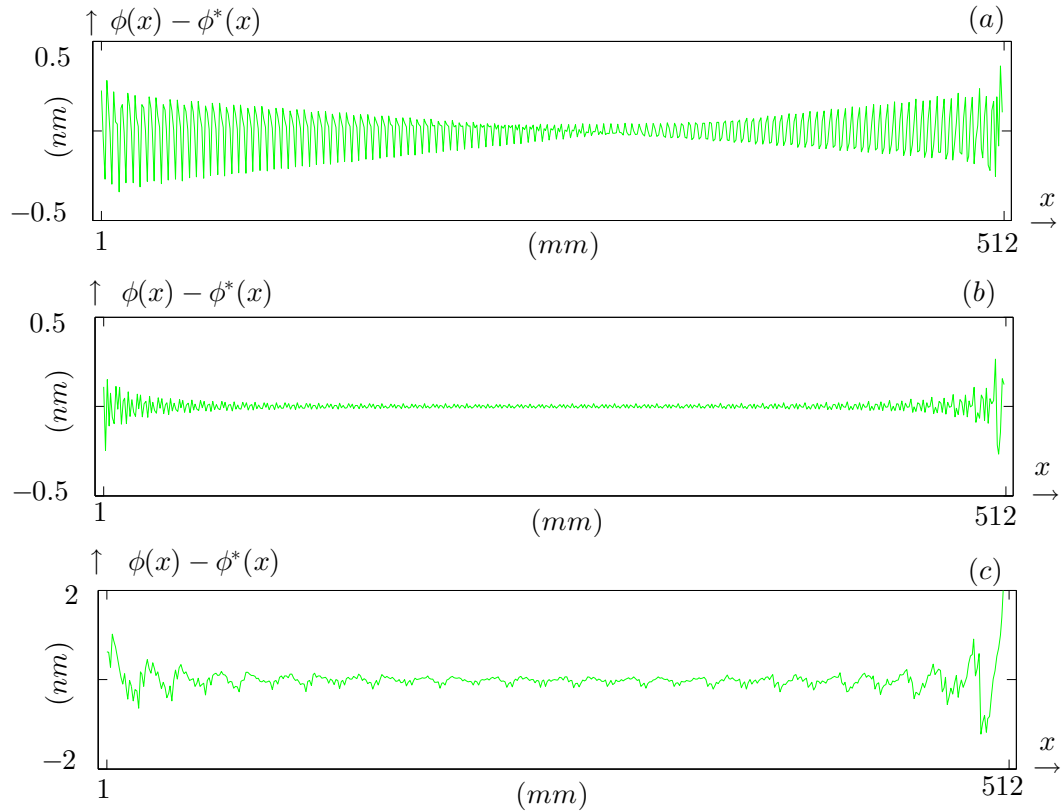


Figura 3.12: Errors en les reconstruccions, $\phi - \phi^*$, de la mateixa SUT, combinant dos desplaçaments, divisors o no del domini $\xi = 512 mm$, (a) $t_1 = 4 t_2 = 8 mm$, (b) $t_1 = 5 t_2 = 7 mm$, (c) $t_1 = 3 t_2 = 16 mm$.

En totes les reconstruccions vistes fins ara es produeixen errors de vora. No es millora gaire la precisió de la reconstrucció ϕ^* utilitzant el lateral shearing seqüencial amb la combinació de dues mesures. Els errors en la reconstrucció són del mateix ordre que els que es tenia amb

un sol desplaçament. Si a la combinació de desplaçaments s hi afegeix també l extensió natural, els errors en la reconstrucció es minimitzen notablement, tal com es veurà a continuació.

3.3.1 Extensió natural

L extensió natural és el mètode que s ha explicat a la secció 2.3.2 per tal de perioditzar qualsevol SUT i d aquesta manera evitar els errors de vora de la figura 3.12. Ara es tenen dues funcions diferències f_1 i f_2 a partir de dos desplaçaments de la SUT. Seguint l esquema de procés de la figura 2.10 es tenen $n + t_2$ valors diferents de la SUT. Es podria optar per utilitzar-los tots junts com a primera mesura i d aquí fer l extensió natural per fer la que la SUT fos $n + t_2$ periòdica, si $t_1 < t_2$. Aleshores els resultats serien similars als mostrats a la figura 3.11, ja que es seguirien tenint els errors periòdics de la funció de transferència, però amb un domini més gran.

Una altra opció és combinar les dues mesures en processos paral·lels a partir de f_1 fer l extensió natural i el mateix amb f_2 . A partir de les dues funcions diferències, les noves mesures esteses tenen un domini de $n + t_1$ i $n + t_2$, respectivament. També és important tenir en compte que l extensió natural perioditza les SUT, fent que siguin $n + t_1$ -periòdica i $n + t_2$ -periòdica, respectivament. Al tenir dominis diferents i perioditzar-les amb diferents períodes, al fer una combinació de les funcions de transferència no es té una relació directa entre una i altra i es tindrien errors en la combinació de les funcions de transferència.

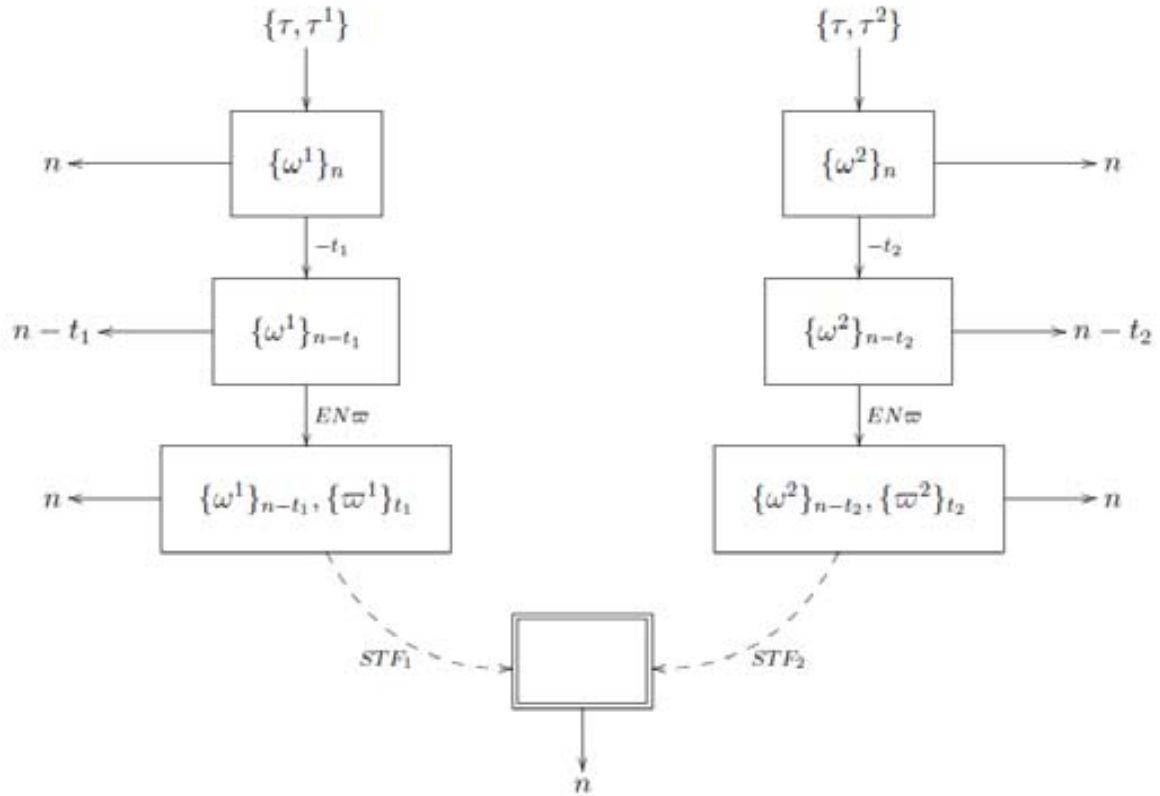


Figura 3.13: Esquema de com utilitzar l'extensió natural a partir de la combinació de dues funcions diferències ω^1 i ω^2 .

Seguint el mètode de combinació de dos desplaçaments [EW99a], per tal de que hi hagi una correcta combinació fent servir l'extensió natural i dos desplaçaments, el que s'ha de fer és una reducció apropiada del domini de les mesures inicial, perquè finalment les dues funcions de transferència tinguin el mateix domini, s'estigui perioditzant les dues amb el mateix període i, d'aquesta manera, la combinació de les funcions de transferència sigui correcta.

La figura 3.13 mostra el procés de com manipular les mesures inicials per tal de combinar les funcions de transferència de manera correcta. Des de l'inici fins a la combinació de les funcions de transferència. Hi ha cinc nivells, on cada un representa un pas a seguir. A la

dreta i esquerra de cada nivell es mostren la longitud del domini amb el que es treballa. Es fan dos processos en paral·lel, a partir de les parelles $\tau \tau^1$ i $\tau \tau^2$, que acaben fusionant-se en una funció de transferència conjunta STF en el cinquè i últim nivell.

Inicialment es tenen tres mesures de la SUT donades per l'interferòmetre que les agrupem per parelles, $\tau \tau^1$ i $\tau \tau^2$. Totes quatre tenen longitud n i formen el primer nivell de l'esquema de la figura 3.13. D'elles es fan les funcions diferències, 1 i 2 , de longitud n també segon nivell de l'esquema. Fins ara s'ha seguit l'esquema utilitzat anteriorment, en aquest cas en paral·lel amb dos desplaçaments diferents.

A partir d'aquí és on es fan les modificacions. A 1 , que té n valors, se li eliminen els t_1 primers valors. A 2 , que també té n valors, se li eliminen els t_2 primers valors. Passen a tenir, per tant, $n - t_1$ i $n - t_2$ valors, respectivament. Això queda mostrat a l'esquema amb $^j_{n-t_j}$ on el subíndex representa el número de valors que es tenen. Analíticament, a partir de

$$\begin{array}{ccc} \begin{array}{c} 1 \\ 1 \end{array} & \begin{array}{c} 1 \\ 2 \end{array} & \begin{array}{c} 1 \\ t_1 \end{array} \end{array} \quad \begin{array}{cc} \begin{array}{c} 1 \\ n-1 \end{array} & \begin{array}{c} 1 \\ n \end{array} \end{array} \quad (3.18)$$

$$\begin{array}{ccc} \begin{array}{c} 2 \\ 1 \end{array} & \begin{array}{c} 2 \\ 2 \end{array} & \begin{array}{c} 2 \\ t_1 \end{array} & \begin{array}{c} 2 \\ t_1+1 \end{array} & \begin{array}{c} 2 \\ t_2 \end{array} \end{array} \quad \begin{array}{cc} \begin{array}{c} 2 \\ n-1 \end{array} & \begin{array}{c} 2 \\ n \end{array} \end{array}$$

s'eliminen els t_1 i t_2 primers valors, respectivament,

$$\begin{array}{ccc} \begin{array}{c} \cancel{1} \\ \cancel{1} \end{array} & \begin{array}{c} \cancel{1} \\ \cancel{2} \end{array} & \begin{array}{c} \cancel{1} \\ \cancel{t_1} \end{array} \end{array} \quad \begin{array}{cc} \begin{array}{c} 1 \\ n-1 \end{array} & \begin{array}{c} 1 \\ n \end{array} \end{array} \quad (3.19)$$

$$\begin{array}{ccc} \begin{array}{c} \cancel{2} \\ \cancel{1} \end{array} & \begin{array}{c} \cancel{2} \\ \cancel{2} \end{array} & \begin{array}{c} \cancel{2} \\ \cancel{t_1} \end{array} & \begin{array}{c} \cancel{2} \\ \cancel{t_1+1} \end{array} & \begin{array}{c} \cancel{2} \\ \cancel{t_2} \end{array} \end{array} \quad \begin{array}{cc} \begin{array}{c} 2 \\ n-1 \end{array} & \begin{array}{c} 2 \\ n \end{array} \end{array}$$

passant de tenir dues funcions de diferències 1_n i 2_n de n valors cada una, en el nivell

2 de l'esquema de la figura 3.13, al nivell 3 de l'esquema on es tenen dues funcions diferències $^1_{n-t_1}$ i $^2_{n-t_2}$ que tenen $n - t_1$ i $n - t_2$ valors, respectivament.

En el nivell 4, es fan les extensions naturals per $^1_{n-t_1}$ i $^2_{n-t_2}$. Com que en el primer cas es té un domini $n - t_1$ i s'ha fet un desplaçament t_1 , l'extensió natural estendrà la nova funció de diferències al domini $n - t_1 + t_1$, fent com que la SUT és n periòdica. Igualment en el segon cas, $^2_{n-t_2}$ té $n - t_2$ valors amb un desplaçament t_2 , i la nova funció de diferència a partir de l'extensió natural tindrà també un domini $n - t_1 + t_1$ fent que la SUT és n periòdica. Un cop en aquest nivell, es tenen dues funcions de diferències equivalents, les dues n periòdiques i amb n valors. Ara és el moment de la reconstrucció de la SUT seguint l'equació 3.17.

La figura 3.14 mostra les funcions de diferència esteses $^j_{t_j}$, $^j_{n-t_j}$ del nivell 4 de l'esquema de la figura 3.13, amb uns desplaçaments $t_1 = 3 \text{ mm}$ i $t_2 = 16 \text{ mm}$. Tal com ens indica l'esquema, les dues funcions de diferència estesa tenen un domini n , que en aquest cas és 480. Seguint l'esquema, a partir d'unes funcions de diferència j del nivell 2, en aquest cas de 480 valors, se'ls han eliminat 3 valors a 1 en el cas de la figura 3.14 (a) i 16 valors a 2 en el cas de la figura 3.14 (b). Aquestes noves funcions diferències $^j_{n-t_j}$ del nivell 3 es mostren en blau en el domini $[t_j, n]$ a la figura 3.14. A partir d'aquestes s'estenen les funcions diferències mitjançant l'extensió natural afegint 3 valors en 3.14 (a) i 16 valors en la figura 3.14 (b), que són les extensions $^j_{t_j}$ del nivell 4 mostrades en vermell a la figura 3.14 entre les línies horitzontals discontinues en el domini $[1, t_j]$.

D'aquesta manera es tenen unes funcions diferències $^j_{t_j}$, $^j_{n-t_j}$ de n valors periòditzades a un període n , amb els dos desplaçaments t_1 i t_2 . Si es comparen les funcions de diferències esteses amb la funció de diferència de la figura 2.7 (c), on inicialment la SUT era periòdica, es veu que també tenen el salt en la regió estesa, característica de la funció diferències quan la SUT és periòdica.

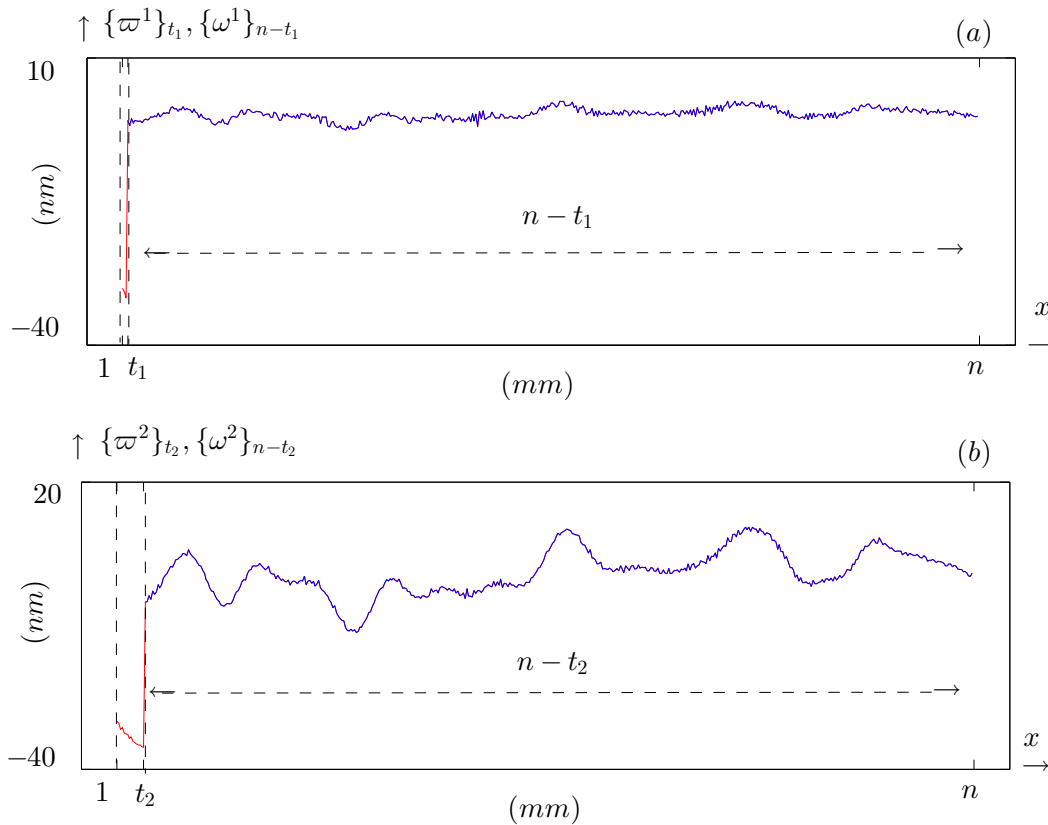


Figura 3.14: Aplicant el mètode de mostrat a l'esquema de la figura 3.13. Funció diferències exteses per l'extensió natural, $\varpi^j_{t_j}$, dins del domini $[1, t_j]$ (en vermell entre les línies horitzontals discontinües), i els $n-t_j$ valors $\omega^j_{n-t_j}$ (en blau) dins del domini $[t_j+1, n]$ de la funció diferències ϖ^j inicial, amb els desplaçaments (a) $t_1 = 3 \text{ mm}$, (b) $t_2 = 16 \text{ mm}$.

Observar que al eliminar-se els primers t_k termes de les funcions diferències de l'equació 3.19, l'extensió natural s'ha de fer en aquests primers termes, afegint-ne t_k més, mentre que el desenvolupament explícit de l'extensió natural de l'equació 2.34 és fa estenent als últims termes de la funció diferències. Analíticament l'extensió natural utilitzada per l'esquema de

la figura 3.13 és

$$j_k = \begin{cases} -\sum_{l=1}^{\frac{n-t_j}{t_j}} j_{k-lt_j} & k = 1, \dots, t_j \\ j_k & k = t_j + 1, \dots, n \end{cases} \quad (3.20)$$

Aquesta equació és anàloga a la de l'equació 2.34 ajustant-se a les necessitats de l'esquema de la figura 3.13. Bàsicament el que es fa és un ajustament de dominis i dels termes del sumatori per tal que la suma correspongui als termes de la funció diferències en el domini $k = 1, \dots, t_j$. Per tal d'aprofundir a la funció de diferències esteses, en algunes situacions es mostra la funció de diferències esteses de l'equació 3.20 com j_n , referint-se a tots els n valors, i a vegades com la concatenació dels dos subgrups diferenciats que la formen $j_n = j_{t_j}, j_{n-t_j}$.

Ara les funcions diferències esteses de la figura 3.14 tenen el mateix domini i estan perioditzant la SUT amb el mateix període n . Observem que aquestes dues característiques sempre hi seran independentment dels desplaçaments t_1 i t_2 que es facin servir per a les mesures. Canviaran els dominis en nivells d'entremig de l'esquema de la figura 3.13, però finalment sempre es tindrà un parell de funcions de diferències esteses j_{t_j}, j_{n-t_j} de domini n i perioditzant la SUT com si fos n -periòdica.

A continuació s'analitzaran primer dos desplaçaments que no són divisors del domini, després dos desplaçaments divisors del domini i divisors entre ells, per finalment fer la reconstrucció a partir de dos desplaçaments divisors del domini i co-primers. Amb aquest últim tipus de desplaçaments és quan s'arriba als resultats esperats.

3.3.1.1 Dos desplaçaments no divisors del domini

Utilitzant l'esquema de la figura 3.13 i a partir de l'equació 3.17, ϕ^* que és la reconstrucció de la SUT, en aquest cas utilitzant el lateral shearing sequencial amb dos desplaçaments i l'extensió natural queda com

$$\phi_k^* = \phi_k + e_k + C \quad k = 1 \dots n \quad (3.21)$$

on C és la constant d'incertesa i e_k és el que anomenarem error en la reconstrucció. L'error de reconstrucció e_k es refereix a $e_k = \phi_k - \phi_k^*$ sense la constant C de l'equació 3.21, doncs aquesta constant no afecta a la forma de la superfície reconstruïda.

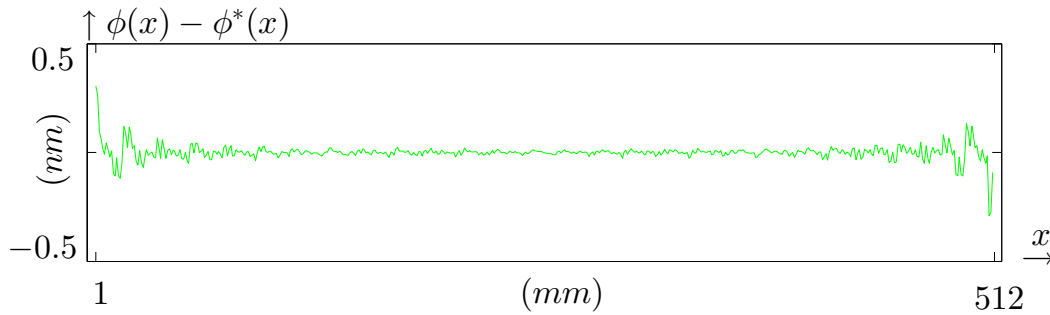


Figura 3.15: (a) Error en la reconstrucció $\phi - \phi^*$, amb el procés d'extensió natural de l'esquema de la figura 3.13, combinant dos desplaçaments no divisors del domini $\xi = 512 \text{ mm}$, (a) $t_1 = 3 \text{ mm}$, (b) $t_2 = 16 \text{ mm}$.

La figura 3.15 mostra els errors de reconstrucció $e_k = \phi_k - \phi_k^*$, amb el procés de l'esquema de la figura 3.13 amb els desplaçaments $t_1 = 3 \text{ mm}$ i $t_2 = 15 \text{ mm}$, cap d'ells no divisors del domini $\xi = 512 \text{ mm}$. Com es pot veure, hi ha errors de vora, tot i haver fet l'extensió natural. Això és degut a que l'extensió natural no s'ha fet correctament amb el desplaçament $t_2 = 15 \text{ mm}$, doncs l'extensió natural necessita que els desplaçaments siguin divisors del domini ja que sinó la suma de l'equació 3.20 no es fa completa doncs el límit superior $(n - t_k) t_k$ del sumatori ha de ser un valor enter. Al no perioditzar-se correctament la funció diferències

en respecte a t_2 , la combinació de funcions de transferència no es fa de manera correcta. El mateix succeeix si els dos no són divisors del domini.

3.3.1.2 Dos desplaçaments divisors del domini i no co-primers

En aquest cas els dos desplaçaments són divisors del domini i per tant es fan correctament les extensions naturals. Al no ser co-primers comparteixen algun divisor comú. Tal com s'ha vist les funcions de transferència \mathcal{T}^1 i \mathcal{T}^2 comparteixen singularitats. Això fa que tot i que l'extensió natural s'hagi fet de forma correcta, al combinar-se les funcions de transferència, hi ha valors en que les dues tenen singularitats i per tant, no és vàlida cap de les dues, havent d'anular aquella freqüència, perdent-la i produint l'error periòdic.

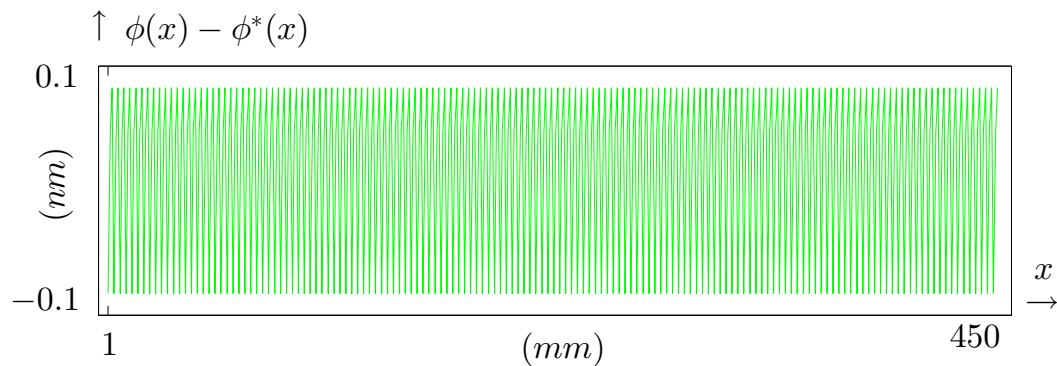


Figura 3.16: Error en la reconstrucció $\phi - \phi^*$, amb el procés d'extensió natural de l'esquema de la figura 3.13, combinant dos desplaçaments $t_1 = 3 \text{ mm}$ i $t_2 = 15 \text{ mm}$ amb divisors comuns i divisors del domini $\xi = 450 \text{ mm}$.

La figura 3.16 mostra l'error de reconstrucció $\phi - \phi^*$ utilitzant l'esquema de la figura 3.13, amb desplaçaments $t_1 = 3 \text{ mm}$ i $t_2 = 15 \text{ mm}$, i domini $\xi = 450 \text{ mm}$. Tal com es pot veure és un error menor als de la figura 3.11, que són resultats de fer extensió natural només amb un desplaçament, però segueix tenint la mateixa forma periòdica, el que confirma que tot i evitar algunes singularitats mitjançant la combinació de desplaçaments, n'hi ha d'altres que no es poden evitar.

3.3.1.3 Dos desplaçaments divisores del domini i co-primers

A partir de les figures anteriors 3.15 i 3.16 s'ha vist que quan els dos desplaçaments són divisores del domini i alhora són co-primers entre ells, la combinació de desplaçaments i extensió natural de l'esquema de la figura 3.13 dóna els resultats esperats.

La figura 3.17 (a) mostra ϕ en vermell, ϕ^1 en blau, que és ϕ desplaçada un desplaçament $t_1 = 11 \text{ mm}$, ϕ^2 en negre, que és ϕ desplaçada un desplaçament $t_2 = 23 \text{ mm}$. La reconstrucció ϕ^* utilitzant l'extensió natural combinada es mostra en verd. Observem que ϕ i ϕ^* tenen la mateixa forma amb una constant de diferència. Aquesta constant és deguda a la freqüència 0 que es perd en la funció de transferències combinada \mathcal{T}^c i que genera una indeterminació d'una constant, que no afecta a la forma, tal com es veurà a continuació³. La figura 3.17 (b) mostra l'error en la reconstrucció $\phi - \phi^*$. Tal com es pot veure, està en l'ordre del 10^{-13} nm . Aquest error és numèric. Amb altres desplaçaments co-primers i divisores del domini els errors són iguals als de la figura 3.17 (b), canviant la forma però mantenint-se en el rang del 10^{-13} nm .

Per tant, a partir d'ara les reconstruccions es faran sempre usant l'extensió combinada de l'esquema de la figura 3.13, utilitzant dos desplaçaments co-primers i divisores del domini, doncs la diferència entre la SUT mesurada ϕ i la superfície reconstruïda ϕ^* difereixen en un error de l'ordre de 10^{-13} , purament numèric.

³Aquesta constant, tal com s'ha dit en la secció anterior, s'elimina sempre quan es mostren els errors de reconstrucció ja que no afecta a la forma.

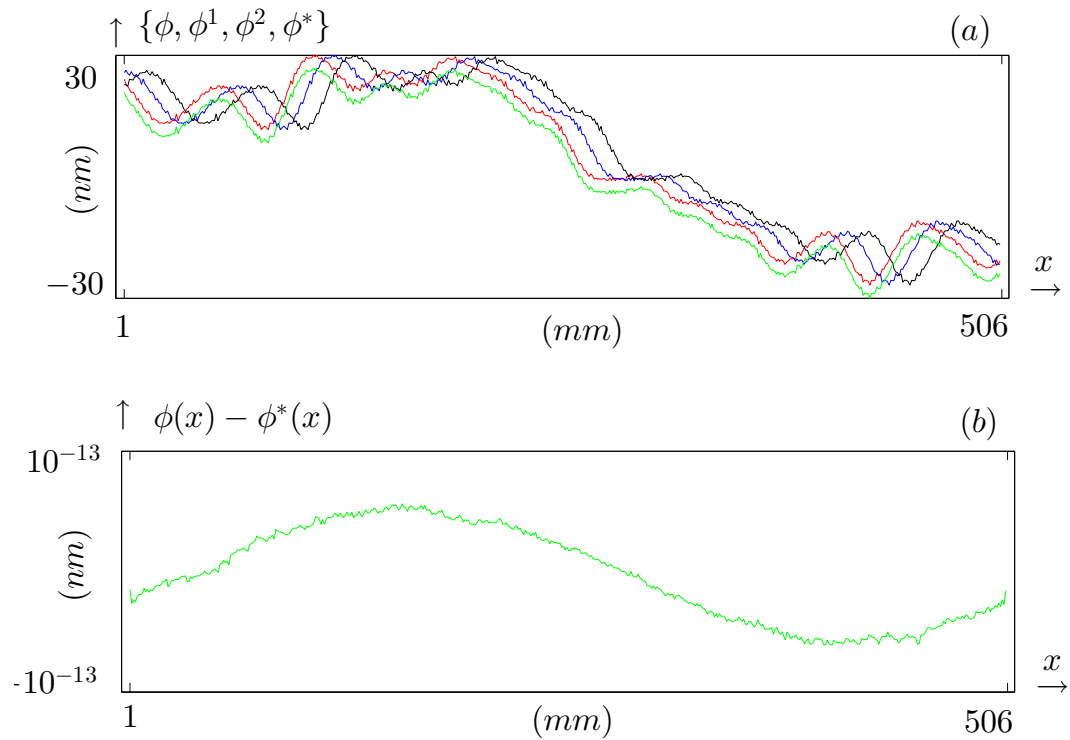
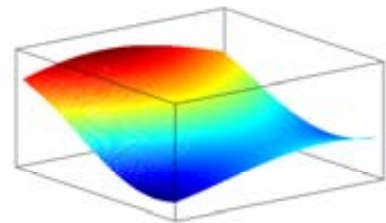


Figura 3.17: (a) En vermell ϕ , en blau ϕ^1 , que és ϕ desplaçada $t_1 = 11$ mm, en negre ϕ^2 , que és ϕ desplaçada $t_2 = 23$ mm, i ϕ^* en verd, que és la reconstrucció de ϕ amb el procés d'extensió natural de l'esquema de la figura 3.13. (b) Error en la reconstrucció $\phi - \phi^*$. El domini és $\xi = 506$ mm, múltiple dels desplaçaments t_1 i t_2 .

CAPÍTOL 4

SOROLL I ERROR DE POSICIONAMENT

En els capítols anteriors s ha estudiat el mètode del lateral shearing sequencial i s han donat alguns resultats en el cas ideal en que les mesures no tenen soroll i en que no es produeix cap error en la taula lineal a l hora de fer el desplaçament. En aquest capítol s afegirà soroll a les mesures, així com errors de posicionament a la taula lineal.



4.1 Soroll a les mesures

En aquesta secció s'afegeix un soroll blanc gaussià a les mesures donades per l'interferòmetre. Hi ha una relació directa entre els desplaçaments utilitzats, el tipus de combinació de les funcions de transferència, amb la propagació del soroll a les reconstruccions utilitzant el lateral shearing seqüencial unidimensional, fent servir com a SUTs funcions que són acumulació de gaussianes [Mor03]. En aquesta secció s'analitza com afecta el soroll experimental afegit a les mesures, utilitzant SUTs com les que s'han mostrat als capítols anteriors, primer analitzant com afecta el soroll en la funció de transferència amb un sol desplaçament, per després analitzar com afecta a les reconstruccions usant dos desplaçaments i veure quines són les combinacions de desplaçaments més eficients per tal de minimitzar aquest soroll.

Suposem que les funcions diferències j de l'equació 3.8 presenten soroll additiu gaussià μ_k ,

$$\dot{j}_k = \dot{j}_k + \mu_k = \phi_k - \phi_{k-t_j} + \mu_k \quad k = 1 \dots n \quad j = 1, 2 \quad (4.1)$$

on el soroll és gaussià de mitja nula i variança σ^2

$$E(\mu_k) = 0 \quad E(\mu_k)^2 = \sigma^2 \quad k = 1 \dots n \quad (4.2)$$

Anem a veure com es propaga el soroll a les transformades de Fourier en funció del soroll a les mesures. La variança de l'error en la reconstrucció σ_r^2 i la variança σ^2 de les funcions

diferències j estan relacionades [Mor03] analíticament amb

$$\sigma_r^2 = \delta^2 \sigma^2 \quad (4.3)$$

on δ^2 és l'indicador de propagació del soroll en la reconstrucció

$$\delta^2 = \frac{t_j}{\xi^2} \sum_{k=1}^{\xi-1} \sum_{l=1}^{\frac{\xi}{t_j}-1} \frac{\sin^2\left(\frac{\pi l k t_j}{\xi}\right)}{\sin^2\left(\frac{\pi k t_j}{\xi}\right)} = \frac{t_j}{\xi^2} \sum_{k=1}^{\xi-1} \frac{1}{\sin^2\left(\frac{\pi k t_j}{\xi}\right)} \sum_{l=1}^{\frac{\xi}{t_j}-1} \sin^2\left(\frac{\pi l k t_j}{\xi}\right) \quad (4.4)$$

A partir de l'equació 4.4 es pot quantificar com de relacionada està la variança σ_r^2 de la reconstrucció amb la variança σ^2 de la funció diferències. La figura 4.1 mostra gràficament aquesta relació. Es mostra des del punt de vista zenital z l'indicador de soroll δ_2 en funció dels paràmetres t_j i ξ , on t_j és el desplaçament i ξ és el domini sobre el que es fan les mesures. Tant una com altra variable estan dins del rang que s'han anat utilitzant al llarg de les figures anteriors. El desplaçament $t_j \in [2, 50]$ i el domini $\xi \in [400, 600]$ mm.

El primer i més important que s'ha de tenir en compte és que el rang de la variable z de l'indicador $\delta^2 \in [0, 10^6]$ i la uniformitat de tota la figura. Davant d'aquest rang tan gran la majoria de valors estan en color blau propers a 0. Apareixen alguns valors, quan $t_j \in [30, 50]$, que estan en el rang al voltant de 10^6 , que són aquests puntets de colors i que són els que fan que la resta de la gràfica sigui molt uniforme (després es veurà que no ho és tant). El que ens mostra la figura 4.1 és que en aquests valors puntuals el sumatori de l'equació 4.4 es dispara i per tant és molt més elevada la propagació del soroll de les mesures. Observem que són com deltes de Dirac, valors puntuals, en combinacions t_j i ξ de desplaçament i domini concrets, però que no es propaguen al seu voltant.

Totes les combinacions t_j i ξ en que apareixen les deltes de Dirac coincideixen amb que $\frac{\xi}{\delta_j} = q \in \mathbb{N}$. Analitzant amb més detall l'equació 4.4, és el terme $\sin^2\left(\frac{\pi k t_j}{\xi}\right)$ del primer quoci-

ent que gairebé s'anul·la en certes combinacions, i si no es compensa amb el segon sumatori, és quan apareixen les deltes de Dirac de la figura 4.1.

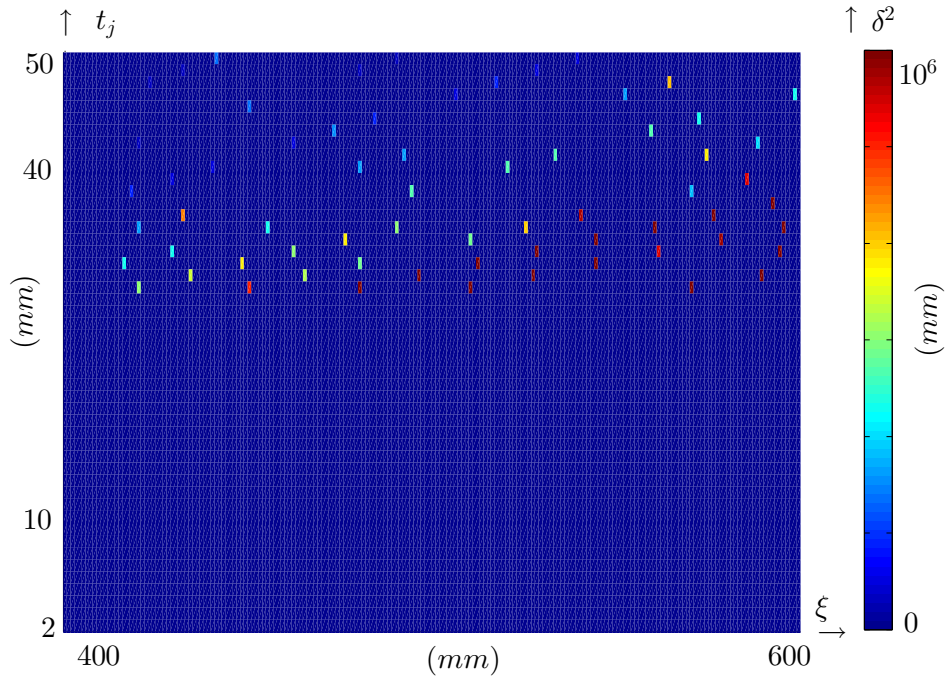


Figura 4.1: Vista zenital en z . Indicador del soroll δ^2 , en funció del desplaçament t_j i el domini ξ . Graella t_j ξ del desplaçament i el domini, i σ^2 en funció de t_j ξ seguint l'equació 4.4.

Per tant, per a reconstruccions usant només un sol desplaçament i fent servir el lateral shearing seqüencial, és necessari prèviament mirar a la figura 4.1 i evitar que s'estigui en una de les combinacions de desplaçaments i dominis on apareixen les deltes. D'aquesta manera s'evita una propagació indeguda a la reconstrucció del soroll de les mesures.

Per poder veure el que succeeix fora d'aquestes deltes de Dirac, la figura 4.2 mostra el mateix resultat que la figura 4.1, però reduint el rang de δ^2 a un domini $[0 \ 300]$ mm. Es pot veure que amb desplaçaments petits $t_j = 2 \ 5$ és on més es propaga el soroll, arribant δ^2 al rang de les 300 mm, en vermell intens, en quasi tot el domini ξ . En el rang de desplaçaments $t_j = 2 \ 10$ hi ha una tendència al augment de l'indicador de la propagació δ^2

a mesura que augmenta el domini ξ , és a dir, davant d'un mateix desplaçament t_j , augmenta δ^2 a mesura que augmenta el domini ξ . Això és degut al límit superior del primer sumatori de l'equació 4.4, que augmenta en funció del domini ξ i no es compensa pel quocient t_j / ξ^2 inicial. Quan $t_j > 10 \text{ mm}$ l'indicador de propagació de l'error δ^2 s'estabilitza en tot el domini ξ , excepte en combinacions t_j / ξ puntuals.

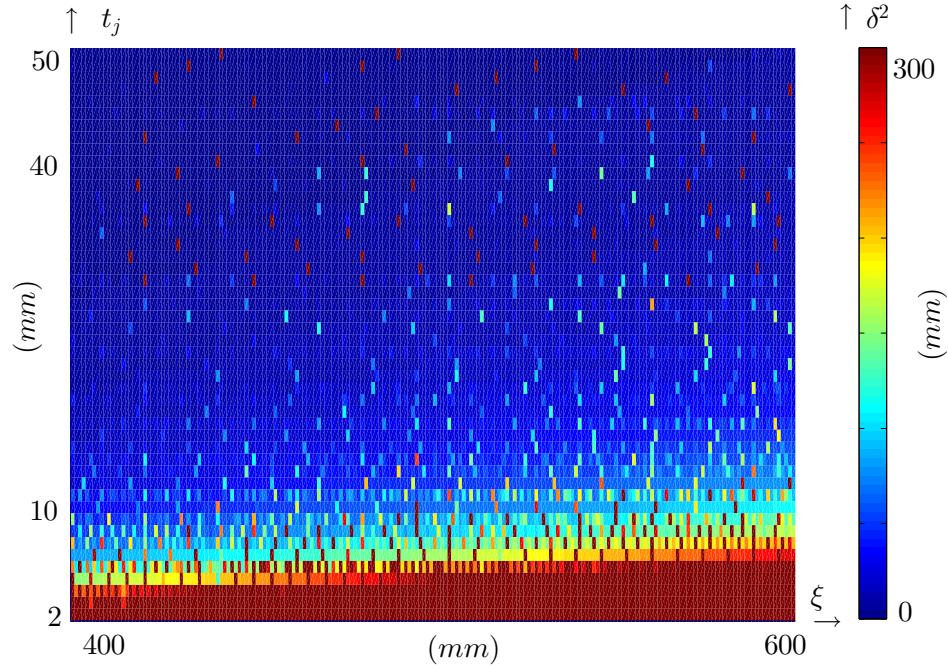


Figura 4.2: Figura 4.1 reduïda al rang de $\delta^2 \in [0, 300] \text{ mm}$. Vista zenital en z . Indicador del soroll δ^2 , en funció del desplaçament t_j i el domini ξ . Graella t_j / ξ del desplaçament i el domini, i δ^2 en funció de t_j / ξ seguint l'equació 4.4.

La conclusió a la que es pot arribar a partir de l'indicador de propagació del soroll δ^2 de l'equació 4.4 i de les figures 4.1 i 4.2 és que en relació a la propagació del soroll, les reconstruccions utilitzant desplaçaments $t_j > 10 \text{ mm}$ s'ajusten en general més a la SUT ϕ que amb desplaçaments de l'ordre dels $t_j \in [2, 10]$ i que per tal d'evitar les deltes de Dirac puntuals que poden aparèixer amb desplaçaments grans, l'òptim i més segur és utilitzar un rang de desplaçament $10 < t_j < 30 \text{ mm}$.

Un cop analitzat quina és la influència del soroll en la reconstrucció utilitzant un sòl desplaçament, el següent pas és utilitzar la combinació de dos desplaçaments per tal de minimitzar la influència del soroll en la reconstrucció. Fins ara s'ha utilitzat per a la reconstrucció de la SUT la combinació de desplaçaments de l'equació 3.14.

Elster et al [EW99a] proposen una altra combinació per tal de minimitzar el soroll a partir de dues funcions de transferència \mathcal{T}^1 i \mathcal{T}^2 provinents de dos desplaçaments t_1 i t_2

$$\mathcal{F}_p \phi_k^* = \frac{h_p^{t_1} \mathcal{T}_p^1 \Omega_p^1 + h_p^{t_2} \mathcal{T}_p^2 \Omega_p^2}{h_p^{t_1} + h_p^{t_2}} \quad p = 1 \dots n \quad (4.5)$$

on $h_p^{t_j}$ estan definits com

$$h_p^{t_j} = \begin{cases} 0 & \text{si } p = \frac{t\xi}{t_j} \quad t \in \mathbb{Z} \\ \frac{1}{t_j \sum_{l=1}^{\xi} \frac{\sin^2(\frac{\pi l p t_j}{\xi}}{\sin^2(\frac{\pi p t_j}{\xi})}} & \text{altrament} \end{cases} \quad (4.6)$$

La propagació del soroll σ en les funcions diferències a través del mètode de reconstrucció ve descrit per la següent relació [Mor03]

$$\sigma_r^2 = \delta_2^2 \sigma^2 \quad (4.7)$$

on δ_2^2 és l'indicador de la propagació per a dos desplaçaments i ve descrit per

$$\delta_2^2 = \frac{1}{\xi^2} \sum_{k=1}^{\xi} \frac{1}{h_k^{t_1} + h_k^{t_2}} \quad (4.8)$$

Anem a comprovar experimentalment com afecta el soroll σ de les mesures. Es farà un anàlisi de la desviació estàndard σ_r del soroll en les reconstruccions en funció de la desviació estàndard del soroll σ en les mesures de les SUTs. L'experiment consisteix que per a cada σ , es farà la reconstrucció de 10000 SUTs, utilitzant la combinació de desplaçaments de l'esquema de la figura 3.13 i els pesos de l'equació 4.8. De tots els sorolls σ_r de les reconstruccions es fa la mitja obtenint $\bar{\sigma}_r$ per a cada valor de soroll en les mesures $\sigma \in [0, 1/2]$ mm. La figura 4.3 mostra els diferents resultats per a diferents combinacions de desplaçaments t_1, t_2 i dominis ξ .

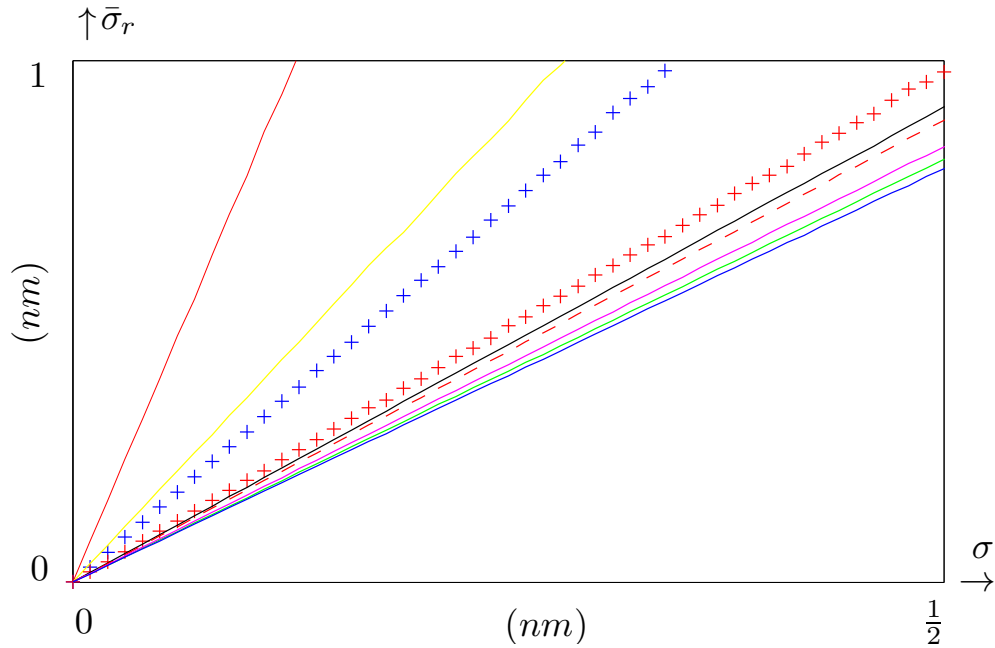


Figura 4.3: Mitja de la desviació estàndard del soroll en les reconstruccions σ_r en 10000 reconstruccions en funció de la desviació estàndard σ del soroll en les mesures, amb diferents combinacions de desplaçaments i dominis. En vermell $t_1 = 2 \text{ mm}$, $t_2 = 411 \text{ mm}$ i $\xi = 822 \text{ mm}$, en groc $t_1 = 2 \text{ mm}$, $t_2 = 81 \text{ mm}$ i $\xi = 162 \text{ mm}$, en creus blau $t_1 = 3 \text{ mm}$, $t_2 = 5 \text{ mm}$ i $\xi = 600 \text{ mm}$, en creus vermell $t_1 = 3 \text{ mm}$, $t_2 = 5 \text{ mm}$ i $\xi = 210 \text{ mm}$, en negre $t_1 = 19 \text{ mm}$, $t_2 = 51 \text{ mm}$ i $\xi = 1938 \text{ mm}$, en discontinu vermell $t_1 = 31 \text{ mm}$, $t_2 = 40 \text{ mm}$ i $\xi = 1240 \text{ mm}$, en lila $t_1 = 19 \text{ mm}$, $t_2 = 28 \text{ mm}$ i $\xi = 532 \text{ mm}$, en verd $t_1 = 17 \text{ mm}$, $t_2 = 20 \text{ mm}$ i $\xi = 340 \text{ mm}$, en blau $t_1 = 15 \text{ mm}$, $t_2 = 16 \text{ mm}$ i $\xi = 240 \text{ mm}$.

Es pot veure que clarament els pitjors resultats, marcats amb vermell continu i groc, representen els desplaçaments més allunyats entre ells de tots els casos, amb $t_1 = 2 \text{ mm}$, $t_2 = 411 \text{ mm}$ i $\xi = 822 \text{ mm}$, en vermell, i $t_1 = 2 \text{ mm}$, $t_2 = 81 \text{ mm}$ i $\xi = 162 \text{ mm}$, en groc. Per tant una primera conclusió de la figura 4.3 és que el soroll afecta més a les reconstruccions si els desplaçaments estan allunyats entre sí. Els següents pitjors resultats, marcats amb creus, es produeixen amb uns altres dels casos extrems, quan els desplaçaments són els més petits de tots, $t_1 = 3 \text{ mm}$ i $t_2 = 5 \text{ mm}$, en vermell $\xi = 210 \text{ mm}$ i en blau $\xi = 600 \text{ mm}$. Per tant una segona conclusió és que desplaçaments petits propaguen més el soroll de les mesures a les reconstruccions. La resta de combinacions produeixen resultats similars, sempre $\bar{\sigma}_r < 1 \text{ nm}$. El millor resultat es produeix amb la combinació $t_1 = 15 \text{ mm}$, $t_2 = 16 \text{ mm}$ i $\xi = 240 \text{ mm}$ marcada en blau continu.

Per tal de veure com és la dispersió dels resultats mostrats a les figura 4.3, a la figura 4.4 es mostra la desviació estàndard dels resultats de la figura 4.3. El primer a destacar és la diferència entre les pitjors quatre combinacions de desplaçaments i dominis, i la resta. Confirmant els mals resultats de la figura 4.3 quan els desplaçaments són els més allunyats entre ells, en vermell i en groc, i quan són els més petits (en relació al domini ξ). Les altres combinacions mostren una desviació estàndard $\sigma \bar{\sigma}_r < 0.1 \text{ nm}$. Les menors dispersions, marcades en vermell discontinu i negre, corresponen a les combinacions on els dominis són els més grans de tots els casos, $\xi = 1240 \text{ mm}$ i $\xi = 1938 \text{ mm}$, respectivament.

Per tant una conclusió és que, tot i que en la mitja del soroll en la reconstrucció de la figura 4.3, la magnitud del domini no és d'importància sí que ho és en la dispersió: quan més gran és el domini ξ menor és la dispersió del soroll en les reconstruccions. El millor resultat de la figura 4.3, marcat en blau continu, presenta una dispersió més elevada que la resta de combinacions, però dins del rang $\bar{\sigma}_r < 0.1 \text{ nm}$.

Les conclusions finals a partir de tots els resultats de les figures 4.3 i 4.4 és que les combinacions de desplaçaments i dominis que menys propaguen el soroll de les mesures σ al soroll de

les reconstruccions σ_r són aquells desplaçaments relativament similars entre ells i en proporció d'entremig (en comparació a altres possibles combinacions) al domini ξ . També s'ha de tenir en compte que com major és el domini ξ , mantenint la proporció entre els desplaçaments i el domini, menys dispersió hi ha entre reconstruccions.

A partir d'ara en el lateral shearing seqüencial, per tal de minimitzar la propagació de l'error en les mesures, es faran servir desplaçaments que compleixin aquestes característiques.

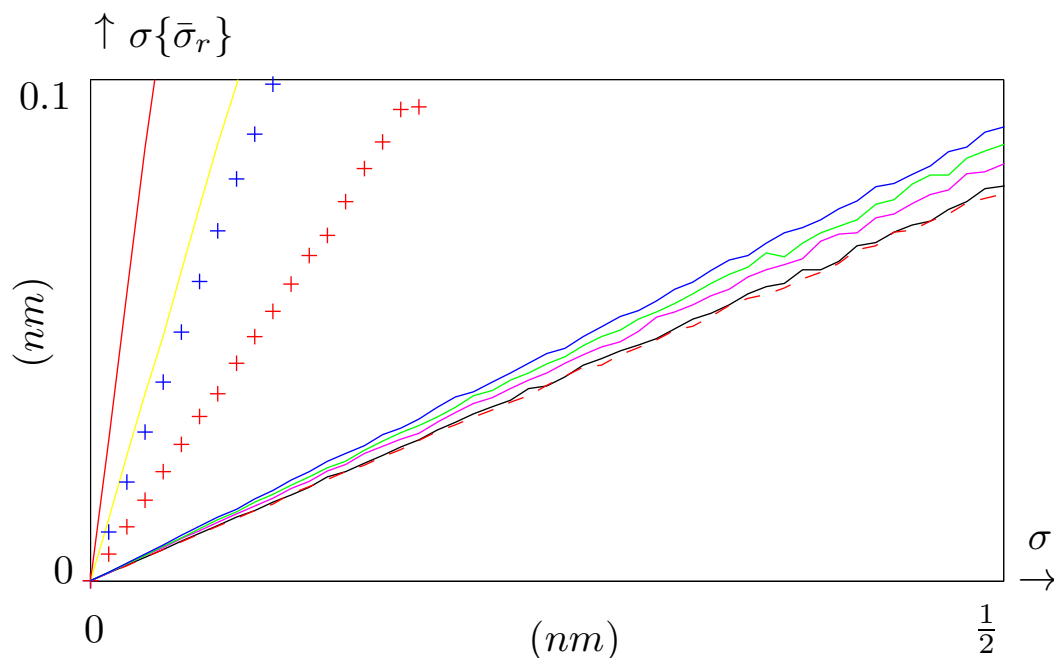


Figura 4.4: Desviació estàndard dels resultats de la figura 4.3, $\sigma\{\bar{\sigma}_r\}$. En vermell $t_1 = 2\text{ mm}$, $t_2 = 411\text{ mm}$ i $\xi = 822\text{ mm}$, en groc $t_1 = 2\text{ mm}$, $t_2 = 81\text{ mm}$ i $\xi = 162\text{ mm}$, en creus blau $t_1 = 3\text{ mm}$, $t_2 = 5\text{ mm}$ i $\xi = 600\text{ mm}$, en creus vermell $t_1 = 3\text{ mm}$, $t_2 = 5\text{ mm}$ i $\xi = 210\text{ mm}$, en negre $t_1 = 19$, $t_2 = 51\text{ mm}$ i $\xi = 1938\text{ mm}$, en discontinu vermell $t_1 = 31\text{ mm}$, $t_2 = 40\text{ mm}$ i $\xi = 1240\text{ mm}$, en lila $t_1 = 19\text{ mm}$, $t_2 = 28\text{ mm}$ i $\xi = 532\text{ mm}$, en verd $t_1 = 17\text{ mm}$, $t_2 = 20\text{ mm}$ i $\xi = 340\text{ mm}$, en blau $t_1 = 15\text{ mm}$, $t_2 = 16\text{ mm}$ i $\xi = 240\text{ mm}$.

4.2 Error de posicionament

El mètode del lateral shearing seqüencial es desenvolupa per tal d'eliminar la influència de la superfície de referència. En el mètode es necessita desplaçar la SUT, tal com s'ha vist en els capítols anteriors. Aquest desplaçament de la SUT es fa a través d'una taula lineal. Les imprecisions de la taula lineal en el desplaçament són les que marquen el límit de precisió del mètode del lateral shearing seqüencial. Es per això necessari diferents anàlisis d'aquestes imprecisions, així com algorismes per tal de controlar i millorar la precisió de desplaçament [VNC09a, VNC09b, VNC11]. Hi ha dos tipus d'error de la taula lineal: de posicionament i de guiatge. Els errors de guiatge es veuran en el capítol 5.

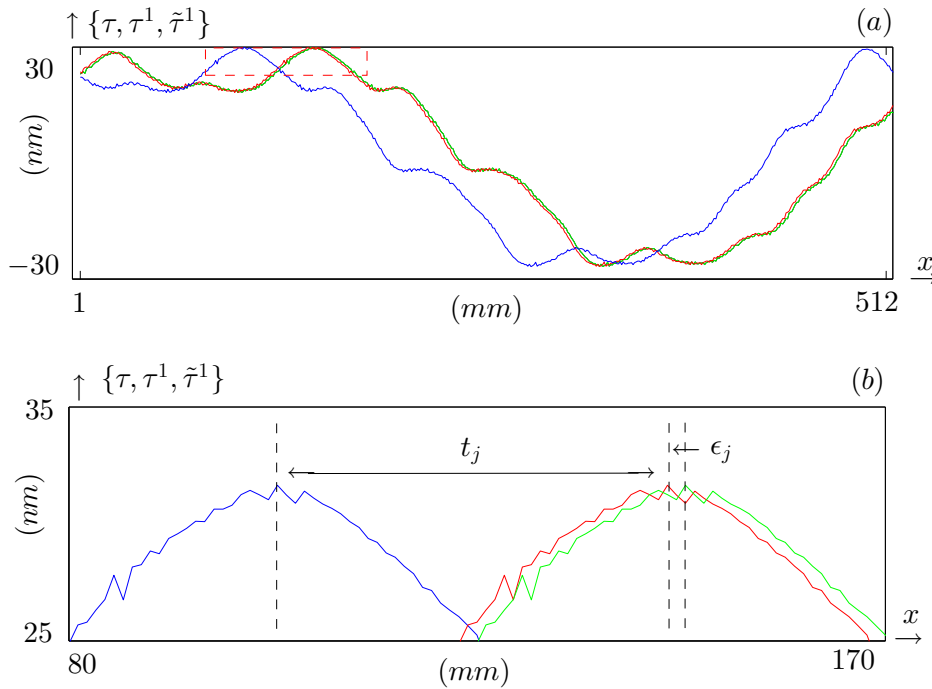


Figura 4.5: Error de posicionament en el desplaçament de la SUT. (a) Mesura inicial de l'interferòmetre τ , en blau, segona mesura ideal τ^1 al suposar que es desplaça t_1 la taula lineal, en vermell, i segona mesura real τ^1 degut a l'error de posicionament ϵ_j de la taula lineal. (b) El mateix que (a), reduït a l'interval $x \in [80, 170]$ mm i l'eix $y \in [25, 35]$ mm.

L error de posicionament es produeix quan es desplaça la taula lineal per obtenir la segona i tercera mesures τ_k^j de l'equació 3.7. I es produeix perquè en comptes de desplaçar t_1 i t_2 , tal com se li ordena que es desplaci, es desplaça una distància lleugerament diferent,

$$t_j = t_j + \epsilon_j = t_{j+\epsilon_j} \quad (4.9)$$

on ϵ_j és l'error de posicionament. Per tant, les mesures donades per l'interferòmetre de l'equació 3.7 en realitat i degut a l'error de posicionament són

$$\tau_k^j = \phi_{k-t_j+\epsilon_j} - \gamma_k \quad k = 1 \dots n \quad j = 1, 2 \quad (4.10)$$

i la funció diferències de l'equació 3.8 com

$$\tau_k^j = \phi_k - \phi_{k-t_j+\epsilon_j} \quad k = 1 \dots n \quad j = 1, 2 \quad (4.11)$$

La figura 4.5 mostra l'error de posicionament en el desplaçament de la SUT. En blau a la figura 4.5 (a) es mostra la mesura inicial τ donada per l'interferòmetre. Per a obtenir la segona mesura, s'aplica un desplaçament a la taula lineal de t_1 , obtenint idealment la segona mesura τ^1 , mostrada en vermell. El que succeeix és que degut a l'error de posicionament de l'equació 4.10, en comptes de tenir el perfil en vermell, es té el perfil en verd, que varia ϵ_j respecte el t_1 ordenat. Per mostrar en detall l'error de posicionament la figura 4.5 (b) és el mateix que la figura 4.5 (a), reduint el rang de l'eix x [80 170] mm i l'eix y [25 35] mm. Es pot veure com τ^1 i τ^1 són iguals, diferint l'error de posicionament ϵ_j en el seu domini.

Observem que es suposa que l'error de posicionament no és constant i que depèn de cada desplaçament, per això se li assigna el subíndex j . Normalment l'error de posicionament ϵ està en l'ordre del sub-píxel i tant pot ser positiu com negatiu, és a dir, passar-se o no arribar al desplaçament t_j ordenat. Per l'estudi d'aquesta secció es suposarà que l'error de posicio-

nament segueix un esquema similar al de la figura 4.6.

La figura 4.6 mostra el desplaçament t_j real marcat en blau en funció del desplaçament t_j ordenat marcat en vermell continu. Les línies vermelles discontinues marquen la magnitud de la mida del píxel Δx , que recordem és de 1 mm . Que l'error de posicionament estigui dins de les línies discontinues vermelles ens indica que l'error és sub-píxel. L'error de posicionament ϵ_j és la distància entre les creus blaves i la línia vermella contínua. Es pot observar que l'error de posicionament no és acumulatiu, és a dir, no com més gran és el desplaçament més gran és l'error de posicionament.

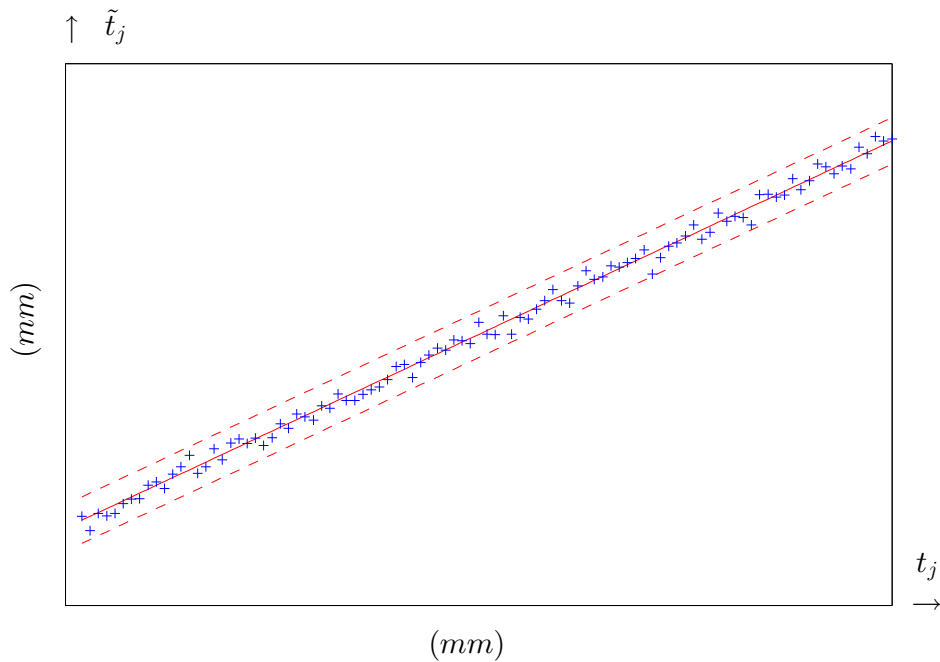


Figura 4.6: Esquema de l'error de posicionament $\epsilon_j = t_j - \tilde{t}_j$ en funció del desplaçament \tilde{t}_j ordenat i t_j real. En vermell continu el suposat desplaçament perfecte $t_j = \tilde{t}_j$. En blau \tilde{t}_j el desplaçament real fet amb una ordre de \tilde{t}_j . La diferència entre \tilde{t}_j i t_j és l'error de posicionament $\epsilon_j = t_j - \tilde{t}_j$. En vermell discontinu, $t_j \pm \Delta x$, on $\Delta x = 1 \text{ mm}$ és la mida del píxel.

Tal com s ha vist en el capítol anterior amb la figura 3.17, les reconstruccions més acurades han vingut al utilitzar l extensió natural i l esquema de la figura 3.13. Anem a analitzar com afecta l error de posicionament a la regió estesa al usar l extensió natural. A partir de l equació 2.34, la funció diferències esteses utilitzant l extensió natural és

$$j_k = \begin{cases} -\sum_{l=1}^{\frac{\xi}{t_j}} j_{k-lt_j} = -\sum_{l=1}^{\frac{\xi}{t_j}} j_{k-lt_j+\epsilon_j} & k \quad -t_j \quad 0 \\ j_k = j_{k+\epsilon_j} & k \quad 1 \quad \xi \end{cases} \quad (4.12)$$

on es pot veure que en la regió estesa $k \quad -t_j \quad 0$ els errors de posicionament s acumulen en el sumatori mentre que la regió original és igual que la mostrada en l equació 4.11. A les figures 4.11 i 4.12 es veuran errors de la reconstrucció afectades per l error de posicionament i usant l extensió natural.

Un cop analitzat com afecta l error de posicionament en el domini espacial, anem a veure experimentalment com afecta en el domini de Fourier. L error de posicionament a les funcions diferències de l equació 4.11 es transmet al domini de Fourier passant de l equació 3.12 a

$$\Omega_p^j = \sum_{k=1}^n (1 - e^{-i2\pi \frac{p(t_j+\epsilon_j)}{n}})^{k-1} \phi_k \quad (4.13)$$

on ϕ_k és la transformada de Fourier discreta de ϕ_k .

Com que no se sap l error de posicionament ϵ_j comès en cada desplaçament, es treballa Ω_p^j amb el terme $1 - e^{-i2\pi \frac{pt_j}{n}}$ igual que a l equació 3.12, en comptes de amb $1 - e^{-i2\pi \frac{p(t_j+\epsilon_j)}{n}}$, que seria el que correspondria per tal de seguir sense error,

$$\Omega_p^j = \sum_{k=1}^n (1 - e^{-i2\pi \frac{pt_j}{n}})^{k-1} \phi_k \quad (4.14)$$

on \mathcal{T}_p^j és la funció de transferència de l'equació 3.13. A partir d'aquí i substituint s'obté que u_k és

$$u_k^j = \frac{j}{p} \left(1 - e^{-i2\pi \frac{p(t_j + \epsilon_j)}{n}}\right) \mathcal{T}_p^j = \frac{j}{p} \frac{1 - e^{-i2\pi \frac{p(t_j + \epsilon_j)}{n}}}{1 - e^{-i2\pi \frac{pt_j}{n}}} \quad p \mid n \quad j \mid n \quad (4.15)$$

Per tant, apareix una nova funció f_p^j

$$f_p^j = \begin{cases} 0 & \text{si } \frac{2pt_j}{n} \in \mathbb{Z} \\ (1 - e^{-i2\pi \frac{p(t_j + \epsilon_j)}{n}}) (1 - e^{-i2\pi \frac{pt_j}{n}})^{-1} & \text{altrament} \end{cases} \quad (4.16)$$

que multiplica a u_k^j , donant $u_k^j = f_p^j u_k^j$.

Tot el que difereixen u_k^j i u_k^j és un error que en fer la transformada inversa \mathcal{F}^{-1} s'afegeix a la reconstrucció ϕ^{*j}

$$\phi_k^{*j} = \phi_k + e_k + e_k^j \quad j \mid n \quad k \mid n \quad (4.17)$$

on e_k és l'error de reconstrucció de l'equació 3.21 del propi mètode sense error de posicionament i e_k^j és l'error introduït per l'error de posicionament.

Aquest error de reconstrucció e_k^j ve degut a l'error de posicionament i ve determinat per $f_{u_k^j}^j$. Anem a analitzar com afecta l'error de posicionament a $f_{u_k^j}^j$. La figura 4.7 mostra la part real de $f_{u_k^j}^j$ amb dos desplaçaments $t_1 = 8 \text{ mm}$ en vermell i $t_2 = 16 \text{ mm}$ en blau. L'error de posicionament és $\epsilon_j = 0.1 \text{ mm}$ i el domini $\xi = 512 \text{ mm}$. Com es pot veure, segueix un patró periòdic amb modulacions que es correspon amb el desplaçament. En el cas de $t_1 = 8 \text{ mm}$ hi ha 8 períodes mentre que amb $t_2 = 16 \text{ mm}$ n hi ha 16. Per tant, la freqüència de $f_{u_k^j}^2$ amb $t_2 = 2t_1$ és el doble que la de $f_{u_k^j}^1$. A la figura està marcada en verd discontinu

la constant 1, que correspondria a $f_{u_k}^j$ si no hi hagués error de posicionament. Tot el que es separa $f_{u_k}^j$ d aquesta línia és error en la u_k que posteriorment, al fer la transformada inversa, afegirà l error e_k^j en la reconstrucció ϕ_k^{*j} de l equació 4.17. Es pot veure com amb freqüències altes $f_{u_k}^j$ augmenta, doncs per les freqüències baixes un desplaçament petit quasi no afecta, però per les freqüències altes canvia molt.

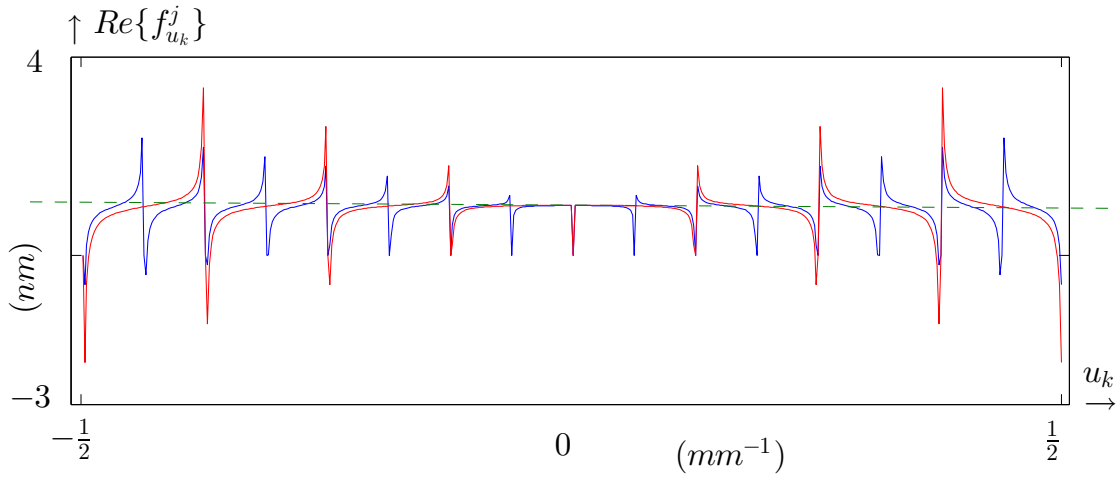


Figura 4.7: Part real de $f_{u_k}^j$ degut a l error de posicionament $\epsilon_j = 0.1 \text{ mm}$, la mida del píxel $\Delta x = 1 \text{ mm}$, domini $\xi = 512 \text{ mm}$, amb dos desplaçaments $t_1 = 8$, en vermell i $t_2 = 16 \text{ mm}$, en blau. La línia discontinua verda és la constant 1, valor que correspondria a $f_{u_k}^j$ si no hi hagués error de posicionament.

En la figura 4.7 s ha vist $f_{u_k}^1$ en funció d un error de posicionament $\epsilon_1 = 0.1 \text{ mm}$. És a dir, la taula lineal es desplaça $t_1 + \epsilon_1$ on $\epsilon_1 > 0$. La diferència a $f_{u_k}^j$ en funció de si la taula lineal sobrepassa el desplaçament ordenat o no hi arriba, és a dir, en funció de si $\epsilon_1 > 0$ o $\epsilon_1 < 0$, es veu a la figura 4.8. La figura 4.8 mostra la part real de $f_{u_k}^1$ amb uns errors de posicionament $\epsilon_1 = 0.1 \text{ mm}$, en vermell, i $\epsilon_1 = -0.1 \text{ mm}$, en blau. Desplaçament $t_1 = 8$, mida del píxel $\Delta x = 1$ i domini $\xi = 512 \text{ mm}$. Observem que $f_{u_k}^1$ en vermell de la figura 4.8 és igual a $f_{u_k}^1$ en vermell de la figura 4.7 doncs són el mateix i les dues $f_{u_k}^1$ de la figura 4.8 són simètriques. Per tant, un canvi de signe de ϵ_j correspon a una simetria respecte de la constant 1.

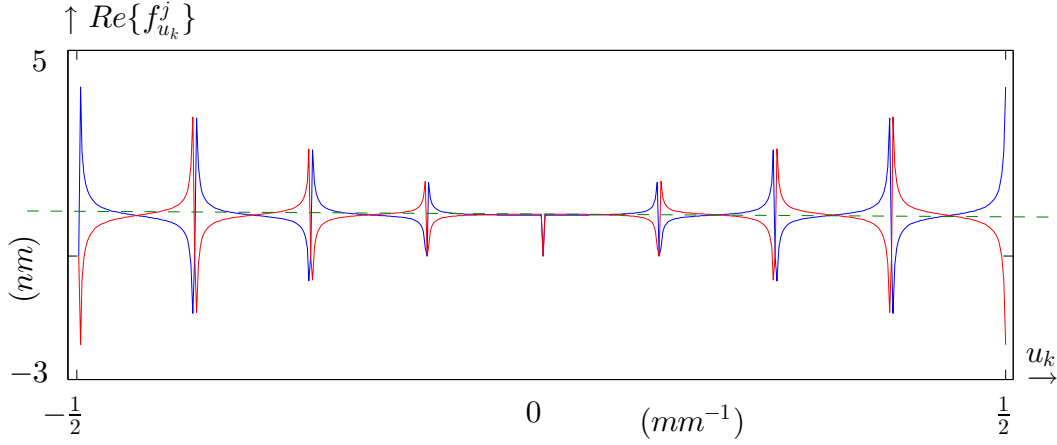


Figura 4.8: Part real de $f_{u_k}^j$ deguts als errors de posicionament $\epsilon_1 = 0.1 \text{ mm}$, en vermell, i $\epsilon_1 = -0.1 \text{ mm}$, en blau. Desplaçament $t_1 = 8$, mida del píxel $\Delta x = 1 \text{ mm}$ i domini $\xi = 512 \text{ mm}$. La línia discontinua verda és la constant 1, valor que correspondria a $f_{u_k}^j$ si no hi hagués error de posicionament.

Un cop vist com el desplaçament afecta a $f_{u_k}^j$, anem a veure com afecta la magnitud de l'error de posicionament. En la figura 4.7 s'ha vist $f_{u_k}^j$ amb un error de posicionament $\epsilon_j = 0.1 \text{ mm}$. Ara es procedirà a canviar la magnitud de ϵ_j .

La figura 4.9 mostra la part real de $f_{u_k}^1$ amb un desplaçament $t_1 = 8$, mida del píxel $\Delta x = 1 \text{ mm}$ i un domini $\xi = 512 \text{ mm}$. En blau es mostra $f_{u_k}^1$ quan l'error de posicionament $\epsilon_1 = 0.1 \text{ mm}$, un 10% de la mida del píxel. Observem que el traç en blau de la figura 4.9 i el traç en vermell de la figura 4.7 és el mateix. El traç en vermell de la figura 4.9 correspon a $f_{u_k}^1$ amb el mateix desplaçament $t_1 = 8 \text{ mm}$, però amb un error de posicionament $\epsilon_1 = 0.9 \text{ mm}$, un 90% la mida del píxel.

En ambdós casos s'està en un error de posicionament per sota del píxel, regió en vermell discontinua a la figura 4.6. Es pot observar com la magnitud de $f_{u_k}^1$ es separa $\pm 12 \text{ nm}$ de la constant 1, marcada en verd discontinu, quan l'error de posicionament és $\epsilon_1 = 0.9 \text{ mm}$, mentre que es manté en el rang $\pm 4 \text{ nm}$ quan l'error de posicionament és 0.1 mm . Per tant, $f_{u_k}^j$

augmenta a mesura que augmenta l'error de posicionament ϵ_1 i, conseqüentment, augmenta l'error en la reconstrucció a ϕ^{*j} degut a l'error de posicionament.

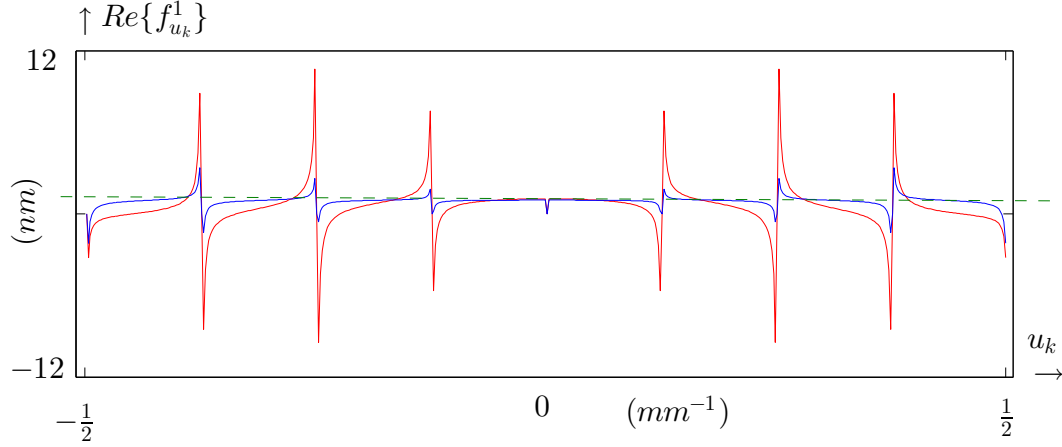


Figura 4.9: Part real de $f_{u_k}^1$ amb dos errors de posicionament $\epsilon_1 = 0.1 \text{ mm}$, en blau i $\epsilon_2 = 0.9 \text{ mm}$, en vermell. Mida del píxel $\Delta x = 1$, domini $\xi = 512 \text{ mm}$ i desplaçament $t_1 = 8 \text{ mm}$. La línia discontinua verda és la constant 1, valor que correspondria a $f_{u_k}^1$ si no hi hagués error de posicionament.

Com afecta $f_{u_k}^j$ a la funció prèvia u_k de l'equació 4.15, i les diferències entre u_k i u_k , u_k amb error de posicionament, és el que es veurà a continuació. La figura 4.10 (a) mostra la part real de u_k , és a dir sense error de posicionament, amb un domini $\xi = 512 \text{ mm}$, un desplaçament $t_k = 16 \text{ mm}$ i mida del píxel $\Delta x = 1 \text{ mm}$. La figura 4.10 (b) mostra la part real de u_k amb les mateixes condicions que a la figura 4.10 (a), afegint un error de posicionament $\epsilon_1 = 0.9 \text{ mm}$ un 90% la mida del píxel a les mesures.

Tal com es pot veure, les formes d'una i altra són similars, és a dir, tenen els mateixos creixements i decreixements a les freqüències centrals arribant a valors més petits fora de l'entorn de freqüències $u_k \in [-\frac{1}{20}, \frac{1}{20}]$. La figura 4.10 (c) mostra les diferències entre la part real de u_k i la part real de u_k , és a dir, entre les figures 4.10 (a) i 4.10 (b). Les majors diferències estan a les freqüències baixes, ja que la funció té valors majors per aquestes freqüències baixes, i molt

petits per a freqüències baixes, així que tot i que es multipliquen per una funció error major, segueixen sent més baixes. Les diferències entre una i altra estan en l'entorn $[-400 \ 200]$ nm .

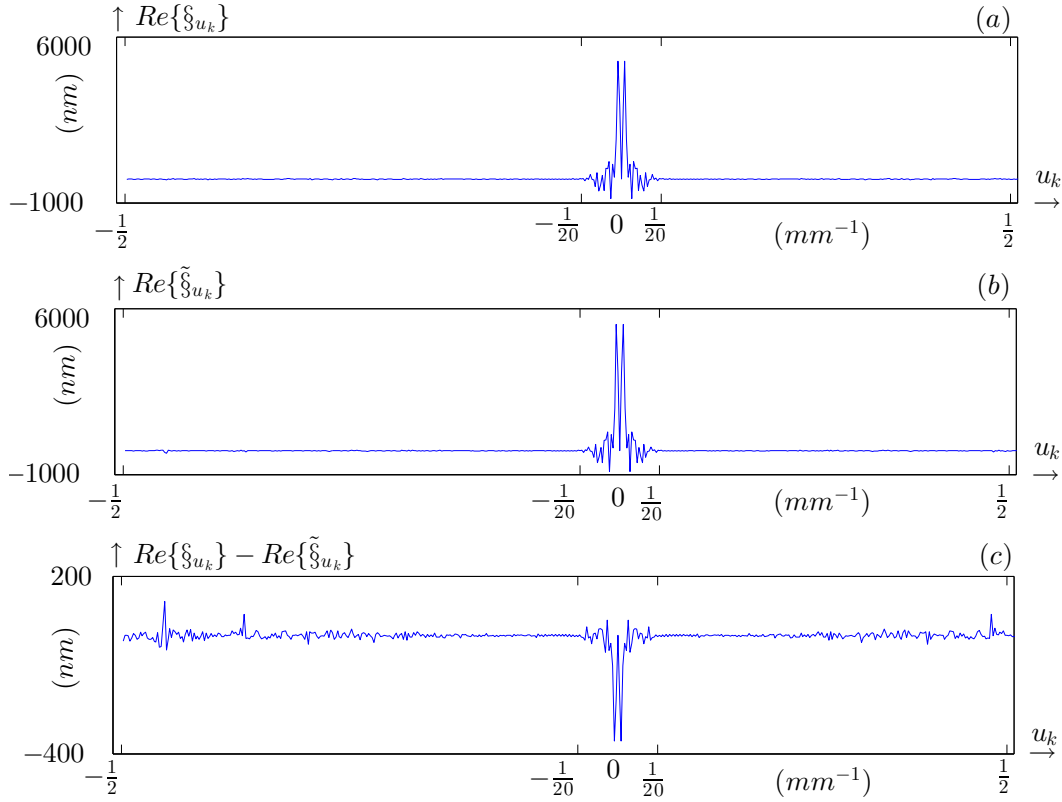


Figura 4.10: (a) Part real de u_k de l'equació 4.15 amb un domini $\xi = 512$ mm , un desplaçament $t_k = 16$ mm i un tamany del píxel $\Delta x = 1$ mm , (b) Mateixa situació que en (a), però amb un error de posicionament $\epsilon_1 = 0.9$ mm a les mesures, (c) Diferències entre u_k d (a) i u_k de (b).

Totes aquestes diferències de u_k en relació a si no hi hagués error de posicionament afecta a les reconstruccions. A continuació es veuran algunes reconstruccions ϕ^* en funció de les magnituds dels errors de posició ϵ_j i dels desplaçaments t_j .

Per mostrar com afecta l'error de posicionament en la reconstrucció, inicialment s'agafa una SUT concreta i la seva reconstrucció amb error de posicionament a les mesures. La

figura 4.11 mostra una SUT $\phi(x)$ a mesurar, en vermell, i la reconstrucció ϕ^* usant el lateral shearing sequencial, amb un error de posicionament $\epsilon_1 = 0.9$, un desplaçament $t_1 = 16$ mm i un domini de la mesura de $\xi = 512$ mm. La mida del píxel és $\Delta x = 1$ mm. S ha fet servir l'extensió natural, per això la reconstrucció final ϕ^* està en el domini $x \in [-16, 512]$ mm.

Com es pot veure, cada 16 mm es té un pic en la reconstrucció on s'allunya de la SUT, per després tornar a la posició anterior. La freqüència dels pics està relacionada directament amb la magnitud del desplaçament t_1 . També es pot veure com en la regió estesa $x \in [-16, 0]$ mm, l'error en la reconstrucció és del mateix ordre que en la regió inicial de la mesura $x \in [0, 512]$ mm. Per tant, l'error de posicionament acumulat en aquesta regió degut a l'extensió natural i mostrat en l'equació 4.12 no afecta de manera rellevant a la reconstrucció. També es pot veure com tota la reconstrucció és més sorollosa, té més irregularitats que la SUT inicial. S ha de tenir en compte que en aquest cas l'error de posicionament és $\epsilon_1 = 0.9$ mm, un 90% la mida del píxel, és a dir, s'està en els límits de la figura 4.6.

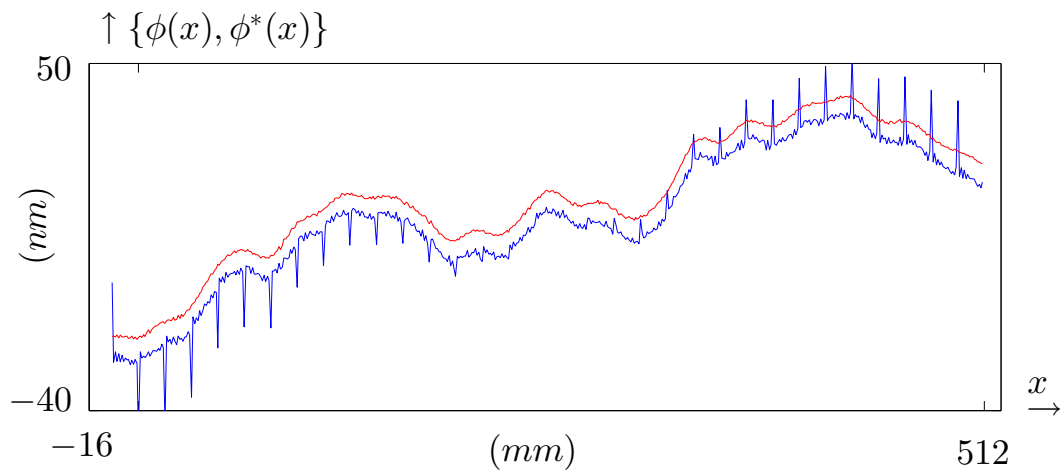


Figura 4.11: Error de posicionament ϵ_j . Una SUT $\phi(x)$ a mesurar, en vermell, i la reconstrucció ϕ^* usant el lateral shearing sequencial amb extensió natural, amb un error de posicionament $\epsilon_1 = 0.9$ mm, mida del píxel $\Delta x = 1$ mm, desplaçament $t_1 = 16$ mm i un domini de la mesura de $\xi = 512$ mm.

La figura 4.12 mostra els errors en la reconstrucció de la mateixa SUT, en funció del desplaçament t_j de les mesures. Es mostra els errors de reconstrucció $e_k + e_k^j$ de l'equació 4.17 quan hi ha un error de posicionament $\epsilon_j = 0.9 \text{ mm}$ en les mesures, domini de $\xi = 512$, mida del píxel $\Delta x = 1 \text{ mm}$, amb uns desplaçaments (a) $t_1 = 16 \text{ mm}$ i (b) $t_2 = 32 \text{ mm}$.

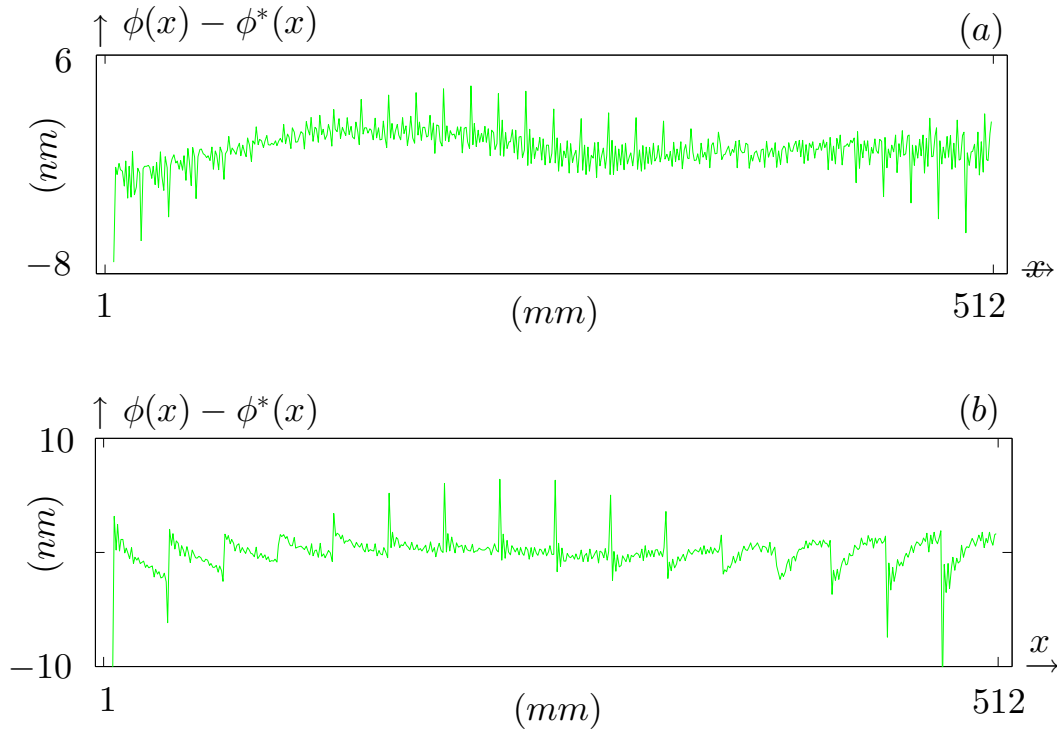


Figura 4.12: Error de reconstrucció $e_k^j = \phi_k - \phi_k^*$ de l'equació 4.17 amb un error de posicionament $\epsilon_j = 0.9 \text{ mm}$, domini de $\xi = 512$, mida del píxel $\Delta x = 1$, sense extensió natural, amb uns desplaçaments (a) $t_1 = 16 \text{ mm}$ i (b) $t_2 = 32 \text{ mm}$.

En aquest cas la reconstrucció s'ha fet sense extensió natural, però tal com hem vist a la figura 4.11 els errors serien anàlegs utilitzant l'extensió natural. Observem que a la figura 4.12 (a), amb un desplaçament $t_1 = 16 \text{ mm}$, hi ha pics d'error cada 16 mm , mentre que amb a la figura 4.12 (b), amb un desplaçament $t_2 = 32 \text{ mm}$, els pics estan cada 32 mm . Es confirma que els pics de l'error en la reconstrucció tenen una relació 1 : 1 amb la mida del desplaçament.

Es pot veure com davant d'un mateix error de posicionament $\epsilon_j = 0.9 \text{ mm}$, els errors són més grans a la figura 4.12 (b) que a la figura 4.12 (a). Per tant, pot semblar que com més gran és el desplaçament, més afecta l'error de posicionament. Això no és del tot cert, doncs el que succeeix és que com que en aquest exemple s'està treballant sense extensió natural, i tal com hem vist a la figura 3.9, els errors de vora amb desplaçaments grans són majors. Això fa que amb la comparació de la figura 4.12 no es pugui saber com afecta l'error de posicionament en funció de la mida del desplaçament. Per l'equació 4.12, que analitza l'error de posicionament, com més petit és el desplaçament, més afecta l'error de posicionament, doncs el sumatori és més gran. A les figures 4.13 i 4.14 es veuran altres exemples sense errors de vora que donaran una visió més realista de la influència de l'error de posicionament.

La reconstrucció de la SUT, utilitzant dos desplaçaments, extensió natural i l'esquema de la figura 3.13, es pot expressar com

$$\phi_k^{*c} = \phi_k + e_k^c + e_k^c \quad k = 1 \quad \xi \quad (4.18)$$

on e_k^c és l'error del propi mètode quan no hi ha error de posicionament i e_k^c és l'error introduït en la reconstrucció quan hi ha error de posicionament a les mesures. Com que prèviament amb la figura 3.17 s'ha vist que l'error e_k^c és un error numèric de l'ordre de 10^{-13} nm , tot l'error en la reconstrucció provindrà de e_k^c degut a l'error de posicionament.

Per tal de mostrar com és e^c es fa un estudi estadístic. La figura 4.13 mostra aquest estudi, on l'eix x és l'error de posicionament $0 < \epsilon_c < 1$ afegit als dos desplaçaments i l'eix y està relacionat amb $e^c = \phi - \phi^{*c}$ de l'equació 4.18. Per a cada valor de l'error de posicionament ϵ_c de l'eix x , s'agafen 10000 SUTs, afegint a cada una d'elles el mateix error de posicionament ϵ_c corresponent.

Es fan les reconstruccions i es tenen $e^{c^1} = e^{c^{10000}}$ on cada e^{c^M} $M = 1 \dots 10000$, prové de l'error en la reconstrucció descrit en l'equació 4.18 i ve determinat per la següent equació

$$e^{c^M} = \mathcal{P} e_k^{c^M} - \mathcal{V} e_k^{c^M} \quad k = 1 \dots \xi \quad M = 1 \dots 10000 \quad (4.19)$$

on $\mathcal{P} e_k^{c^M}$ és el valor pic i correspon al màxim de $e_k^{c^M}$ $k = 1 \dots \xi$, mentre que $\mathcal{V} e_k^{c^M}$ és el valor vall i correspon al mínim de $e_k^{c^M}$ $k = 1 \dots \xi$. L'error e^{c^M} determina la màxima alçada de l'error per a cada una de les 10000 superfícies a reconstruir.

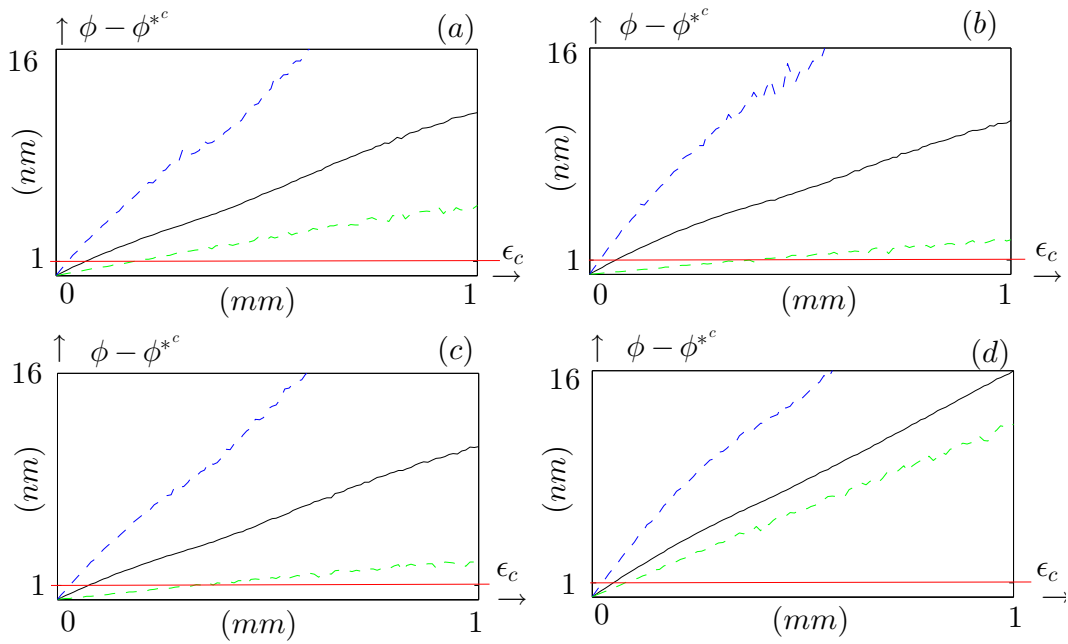


Figura 4.13: Error $e^c = \phi - \phi^{*c}$ a partir dels errors de posicionament $0 < \epsilon_c < 1$. En negre continu la mitja dels e^c , en discontinu blau el màxim dels e^c i en discontinu verd el mínim dels e^c . La línia vermella continua mostra el límit per al qual l'error e^c està per sobre del nanòmetre. Es mostren els mateixos resultats per a diferents combinacions de desplaçaments i dominis, (a) $t_1 = 11 \text{ mm}$, $t_2 = 13 \text{ mm}$ i $\xi = 572 \text{ mm}$, (b) $t_1 = 3 \text{ mm}$, $t_2 = 44 \text{ mm}$ i $\xi = 528 \text{ mm}$, (c) $t_1 = 19 \text{ mm}$, $t_2 = 28 \text{ mm}$ i $\xi = 532 \text{ mm}$ i (d) $t_1 = 3 \text{ mm}$, $t_2 = 5 \text{ mm}$ i $\xi = 600 \text{ mm}$. La mida del píxel és $\Delta x = 1 \text{ mm}$.

A partir dels e^{c^1} i $e^{c^{10000}}$ es mostren diferents resultats. En negre continu es marca la mitja dels e^{c^1} i $e^{c^{10000}}$, en discontinu blau el màxim dels e^{c^1} i $e^{c^{10000}}$. El límit que dóna la línia discontinua blava està relacionat amb la precisió garantida, és a dir, que de 10000 SUTs es pot garantir que l'error de reconstrucció estarà per sota de la línia discontinua blava. En discontinu verd es mostra el mínim dels e^{c^1} i $e^{c^{10000}}$. La línia vermella continua mostra el límit per al qual l'error e^c està per sobre del nanòmetre. La figura 4.13 mostra els resultats explicats per a 4 combinacions de desplaçaments i dominis, (a) $t_1 = 11 \text{ mm}$, $t_2 = 13 \text{ mm}$ i $\xi = 572 \text{ mm}$, (b) $t_1 = 3 \text{ mm}$, $t_2 = 44 \text{ mm}$ i $\xi = 528 \text{ mm}$, (c) $t_1 = 19 \text{ mm}$, $t_2 = 28 \text{ mm}$ i $\xi = 532 \text{ mm}$ i (d) $t_1 = 3 \text{ mm}$, $t_2 = 5 \text{ mm}$ i $\xi = 600 \text{ mm}$.

Tal com es pot veure, en (a) els desplaçaments són similars i relativament petits, $t_1 = 11 \text{ mm}$, $t_2 = 13 \text{ mm}$, en (b) són molt diferents entre ells, $t_1 = 3 \text{ mm}$, $t_2 = 44 \text{ mm}$, en (c) són relativament similars i relativament grans, $t_1 = 19 \text{ mm}$, $t_2 = 28 \text{ mm}$, i en (d) són similars i molt petits, $t_1 = 3 \text{ mm}$, $t_2 = 5 \text{ mm}$. Per tant, es tenen 4 combinacions de desplaçaments diferents entre ells per veure com afecta l'error de posicionament i, en funció dels resultats, triar-ne d'un tipus o un altre per a futures reconstruccions.

El que es pot veure inicialment és que els perfils dels resultats són similars en tots els casos, és a dir, no hi ha cap combinació que sigui extremadament pitjor que les altres. En relació a les mitges de la figura 4.13 marcades en negre continu, es pot veure que segueix un creixent lineal en tots els casos, on l'error mitjà en les reconstruccions és sempre més gran que 1 nm quan l'error de posicionament $\epsilon_c > 0.08 \text{ mm}$. En (a) quan $\epsilon_c > 0.07 \text{ mm}$, en (b) quan $\epsilon_c > 0.06 \text{ mm}$, (c) quan $\epsilon_c > 0.08 \text{ mm}$ i en (d) quan $\epsilon_c > 0.05 \text{ mm}$. Per tant, en relació a quan de ràpid s'acosta l'error de reconstrucció a 1 nm , és millor evitar desplaçaments molt petits. Seguint amb la informació de la mitja, si s'ajusten les línies negres contínues a una recta per mínims quadrats, les pendents d'aquestes rectes són (a) 11.6, (b) 10.3, (c) 10.9 i (d) 15.4. Per tant els millors resultats es tenen amb (b) $t_1 = 3 \text{ mm}$, $t_2 = 44 \text{ mm}$, quan els desplaçaments són molt diferents entre ells. Els pitjors resultats altra vegada a (d), quan són desplaçaments molt petits.

Si s'analitza el valor garantit, marcat amb la línia discontinua blava, i es fa una aproximació per la recta que millor s'ajusta per mínims quadrats, els millors resultats s'obtenen a (a) i (c), mentre que (b) i (d) queden allunyats dels anteriors. També es pot veure i és el que fa que finalment la mitja sigui la millor que les reconstruccions més acurades es tenen amb (b). Per tant, l'anàlisi del valor garantit i el valor més proper ens indica que amb els desplaçaments més allunyats entre ells és on hi ha una major variabilitat, obtenint els millors i pitjors resultats de les combinacions.

Si s'hagués de fer un balanç entre els resultats mostrats a la figura 4.13, els pitjors resultats s'obtenen amb desplaçaments molt petits com els de (d), i les reconstruccions més acurades amb els desplaçaments de (b) i de (c), tenint una variabilitat més gran en el cas de desplaçaments molt allunyats entre sí de (b). Un cop mostrat els errors en la reconstrucció en el rang amb d'error de posicionament $< 0 < \epsilon_c < 1 \text{ mm}$. Per tal de poder analitzar amb més detall el rang d'errors de posicionament de les taules lineals d'alta precisió es farà a continuació el mateix anàlisi que en la figura 4.13, però en l'interval $< 0 < \epsilon_c < 0.1 \text{ mm}$.

La figura 4.14 mostra el mateix anàlisi que en la figura 4.13 amb un error de posicionament $< 0 < \epsilon_c < 0.1$. La tendència mostrada a la figura 4.13 es segueix mantenint en el rang de posicionament més petit. Els millors resultats en relació a la mitja (en negre) provenen de les figures 4.13 (b) i (c), amb desplaçaments allunyats (més en (b) que en (c)) entre sí. Fent l'ajustament per mínims quadrats, els pendents de les rectes que millor s'ajusten a les mitges són (a) 13.7, (b) 15.5, (c) 13.2 i (d) 19.3. Per tant els millors resultats provenen dels desplaçaments més compensats, és a dir, diferents entre sí però no tant com els de la figura (b). Els pitjors resultats provenen de dos desplaçaments petits i similars de la figura (d).

Analitzant el millor resultat (en verd) de les 10000 reconstruccions per a cada error de posicionament, les reconstruccions més acurades clarament són a càrrec de la parella de desplaçaments $t_1 = 19 \text{ mm}$, $t_2 = 28 \text{ mm}$ de la figura (c). En canvi, analitzant els màxims errors

(en verd) de totes les reconstruccions, la combinació de (b) obté els errors més grans, junt amb (d). Els millors resultats provenen de (c). Per tant, la variabilitat de (b) és molt gran, obtenint els millors i els pitjors resultats. Es suposa que això és degut a la diferència de magnituds entre els dos desplaçaments.

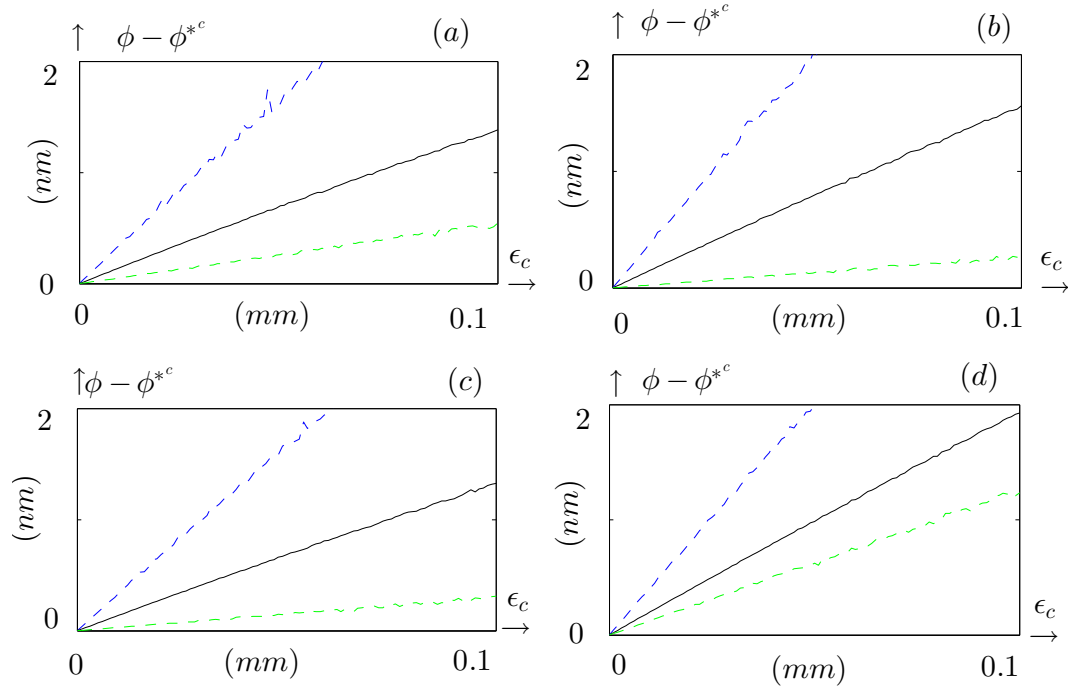


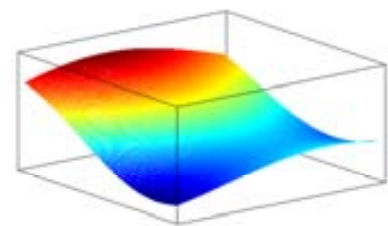
Figura 4.14: Error $e^c = \phi - \phi^{*c}$ a partir dels errors de posicionament $0 < \epsilon_c < 0.1$ mm. En negre continu la mitja dels e^c , en discontinu blau el màxim dels e^c i en discontinu verd el mínim dels e^c . Es mostren els mateixos resultats per a diferents combinacions de desplaçaments i dominis, (a) $t_1 = 11$ mm, $t_2 = 13$ mm i $\xi = 572$ mm, (b) $t_1 = 3$ mm, $t_2 = 44$ mm i $\xi = 528$ mm, (c) $t_1 = 19$ mm, $t_2 = 28$ mm i $\xi = 532$ mm, i (d) $t_1 = 3$ mm, $t_2 = 5$ mm i $\xi = 600$ mm. El tamany del píxel és $\Delta x = 1$ mm.

A partir dels resultats fins ara, el millor és fer servir una combinació de desplaçaments que difereixin alguns píxels entre ells, el màxim de grans possibles com els que es tenen a (c), doncs s'obtenen els millors resultats. Tal com s'ha dit, el lateral shearing sequencial desplaça la SUT mitjançant una taula lineal. Aquesta taula lineal té uns errors de desplaçament com són el de posicionament i els de guiatge. Els errors de guiatge (pitch, roll i yaw) es veuran en detall com afecta i com es poden minimitzar a la secció 5.

CAPÍTOL 5

ERRORS DE GUIATGE

Fins ara per facilitar i per comprendre millor el procés s ha treballat en un domini unidimensional, però l interferòmetre té l avantatge a diferència del perfilòmetre de treballar bidimensionalment. És per això que en aquest capítol es farà un anàlisi bidimensional del lateral shearing sequencial, per després analitzar els errors de guiatge i els nous mètodes que aquí es proposen per tal d estimar-los i veure com són els resultats de reconstrucció de superfícies amb el lateral shearing sequencial amb l estimació de pitch i roll propostes.



Les superfícies de la figura 5.1 són alguns exemples de SUTs a mesurar per l'interferòmetre. El pla (x, y) segueix en el rang dels 512 píxels per 512 píxels i l'eix z està en l'ordre del nanòmetre. Com que ara s'està en un domini bidimensional, $(\Delta x, \Delta y)$ és la distància de mostreig. En tots els casos a partir d'aquí la mida del píxel és 1 mm , és a dir $\Delta x = \Delta y = 1 \text{ mm}$, així que en els dominis x i y s'utilitzarà indistintament la magnitud per a referir-se tan a píxels com a mm .

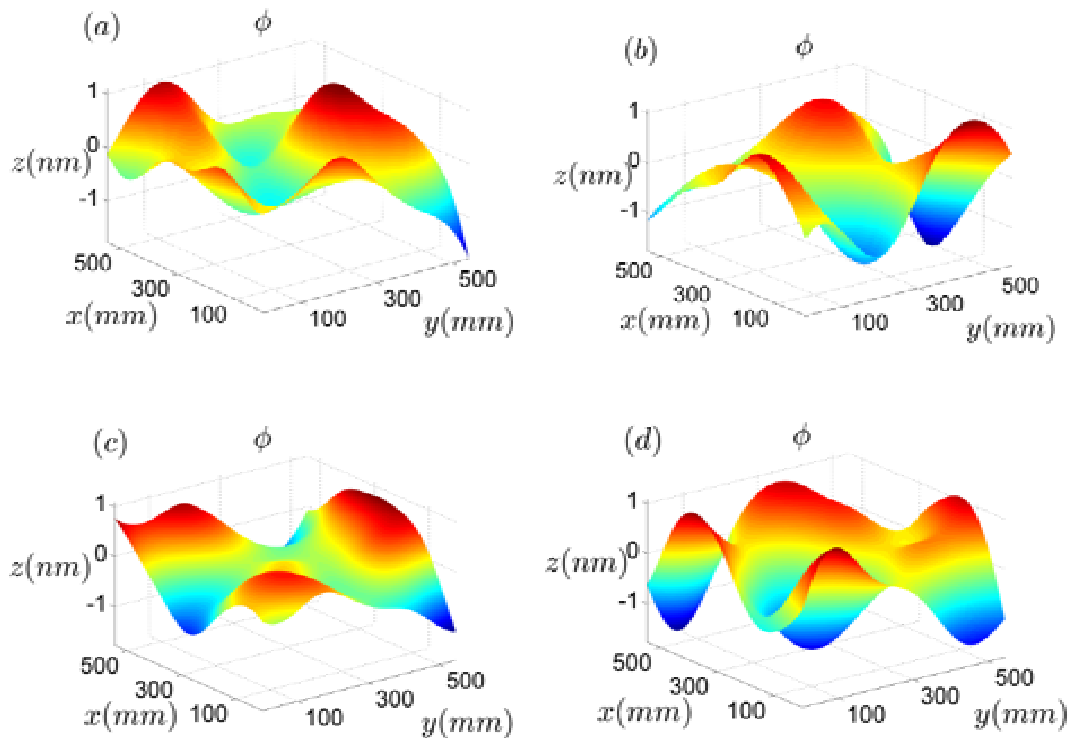


Figura 5.1: Exemples de SUTs a mesurar en domini bidimensional.

A partir de l'equació 3.1 el domini de la mesura de l'interferòmetre es determina per

$$\begin{aligned} x_m &= x_1 + (m - 1) \Delta x \quad m = 1 \dots M \\ y_n &= y_1 + (n - 1) \Delta y \quad n = 1 \dots N \end{aligned} \quad (5.1)$$

on x_1 i y_1 són un origen arbitrari. La longitud en x i y del domini queda determinat per M i N , és a dir, $x_M - x_1 = \xi_x$ i $y_N - y_1 = \xi_y$.

Les mesures donades per l'interferòmetre amb els desplaçaments en x i y , seguint l'esquema de la figura 2.2, venen donades per

$$\begin{aligned} \tau_{m,n}^0 &= \phi_{m,n} - \gamma_{m,n} \quad m = 1 \dots M \quad n = 1 \dots N \\ \tau_{m,n}^j &= \phi_{m-t_j,n} - \gamma_{m,n} \quad m = 1 \dots M \quad n = 1 \dots N \quad j = 1, 2 \\ \tau_{m,n}^j &= \phi_{m,n-t_j} - \gamma_{m,n} \quad m = 1 \dots M \quad n = 1 \dots N \quad j = 3, 4 \end{aligned} \quad (5.2)$$

Notar que amb $j = 1, 2$ els desplaçaments són en l'eix x i amb $j = 3, 4$ són en l'eix y . Les funcions diferències es fan a partir de les combinacions d'informació $\tau^0 \tau^1$, $\tau^0 \tau^2$, $\tau^0 \tau^3$ i $\tau^0 \tau^4$,

$$\begin{aligned} \tau_{m,n}^j &= \phi_{m,n} - \phi_{m-t_j,n} \quad m = 1 \dots M \quad n = 1 \dots N \quad j = 1, 2 \\ \tau_{m,n}^j &= \phi_{m,n} - \phi_{m,n-t_j} \quad m = 1 \dots M \quad n = 1 \dots N \quad j = 3, 4 \end{aligned} \quad (5.3)$$

En l'espai de Fourier, el domini de freqüències (u, v) , u_1, \dots, u_M i v_1, \dots, v_N estan dins dels intervals $[\frac{-1}{2\Delta x}, \frac{1}{2\Delta x})$ i $[\frac{-1}{2\Delta y}, \frac{1}{2\Delta y})$, respectivament. Explícitament es defineixen de manera anàloga que a l'equació 3.9,

$$\begin{aligned} u_p &= u_1 + (p-1)\Delta u & p &= 1, \dots, M \\ v_q &= v_1 + (q-1)\Delta v & q &= 1, \dots, N \end{aligned} \quad (5.4)$$

on $\Delta u = \frac{1}{(M+1)\Delta x}$ i $\Delta v = \frac{1}{(N+1)\Delta y}$.

La TFD bidimensional de $\phi_{m,n}$ està definida per

$$\Omega_{p,q} = \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N \phi_{m,n} e^{-i2\pi \frac{pm}{M}} e^{-i2\pi \frac{qn}{N}} \quad p=1, \dots, M \quad q=1, \dots, N \quad (5.5)$$

La TFD de la funció diferències $\phi_{m,n}^j$ queda expressada explícitament per

$$\Omega_{p,q}^j = \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N \phi_{m,n}^j e^{-i2\pi \frac{pm}{M}} e^{-i2\pi \frac{qn}{N}} \quad p=1, \dots, M \quad q=1, \dots, N \quad j=1, 2, \dots, J \quad (5.6)$$

Que és equivalent a

$$\Omega_{p,q}^j = \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N [\phi_{m,n} - \phi_{m-t_j,n}] e^{-i2\pi \frac{pm}{M}} e^{-i2\pi \frac{qn}{N}} \quad p=1, \dots, M \quad q=1, \dots, N \quad j=1, 2, 3, 4 \quad (5.7)$$

El teorema del translació de l'equació 2.11 també és cert en domini discret, conservant la relació lineal entre la TFD d'una funció i ella mateixa desplaçada,

$$\begin{aligned}\Omega_{p,q}^j &= p,q(1 - e^{-i2\pi\frac{p}{M}t_j}) & p & 1 & M & q & 1 & N & j & 1 & 2 & (5.8) \\ \Omega_{p,q}^j &= p,q(1 - e^{-i2\pi\frac{q}{N}t_j}) & p & 1 & M & q & 1 & N & j & 3 & 4\end{aligned}$$

i d aquí s ailla p,q ,

$${}^j_{p,q} = \Omega_{p,q}^j \mathcal{T}_{p,q}^j \quad \text{on} \quad \mathcal{T}_{p,q}^j = \frac{1}{1 - e^{-i2\pi\frac{p}{M}t_j}} \quad p \quad 1 \quad N \quad q \quad 1 \quad M \quad j \quad 1 \quad 2 \quad (5.9)$$

$${}^j_{p,q} = \Omega_{p,q}^j \mathcal{T}_{p,q}^j \quad \text{on} \quad \mathcal{T}_{p,q}^j = \frac{1}{1 - e^{-i2\pi\frac{q}{N}t_j}} \quad p \quad 1 \quad N \quad q \quad 1 \quad M \quad j \quad 3 \quad 4 \quad (5.10)$$

on \mathcal{T}^j són les funcions de transferència bidimensionals. Degut a les singularitats que es tenen les funcions de transferència queden re-definides com

$$\mathcal{T}_{p,q}^{*j} = \begin{cases} \mathcal{T}_{p,q}^j & p = r \frac{M}{t_j} & r & \mathbb{Z} & j & 1 & 2 & p & 1 & M & q & 1 & N \\ 0 & p = r \frac{M}{t_j} & r & \mathbb{Z} & j & 1 & 2 & p & 1 & M & q & 1 & N \end{cases} \quad (5.11)$$

$$\mathcal{T}_{p,q}^{*j} = \begin{cases} \mathcal{T}_{p,q}^j & q = r \frac{N}{t_j} & r & \mathbb{Z} & j & 3 & 4 & p & 1 & M & q & 1 & N \\ 0 & q = r \frac{N}{t_j} & r & \mathbb{Z} & j & 3 & 4 & p & 1 & M & q & 1 & N \end{cases} \quad (5.12)$$

També es pot tenir un control similar al de l'equació 3.16 per tal de tractar correctament valors propers a la singularitat de les funcions de transferència, $p \approx r \frac{M}{t_j}$, $j = 1, 2$ i $q \approx r \frac{N}{t_j}$, $j = 3, 4$.

Aplicant la transformada de Fourier inversa discreta a p, q de l'equació 5.9, s'obté la reconstrucció bidimensional de la SUT utilitzant el lateral shearing sequencial,

$$\phi_{m,n}^* = \mathcal{F}^{-1}_{p,q} \quad m = 1 \dots M \quad n = 1 \dots N \quad (5.13)$$

Les diferències entre ϕ^* i ϕ depèn de si s'utilitza l'extensió natural, si es fa amb un únic desplaçament o amb dues i quin tipus de desplaçaments són. Tots els exemples i característiques vistes en una dimensió són anàlegs i vàlids en el domini bidimensional. Les millors reconstruccions, tal com s'ha mostrat a la figura 3.16, es produeixen quan els desplaçaments són co-primers, divisors del domini i utilitzant l'extensió natural.

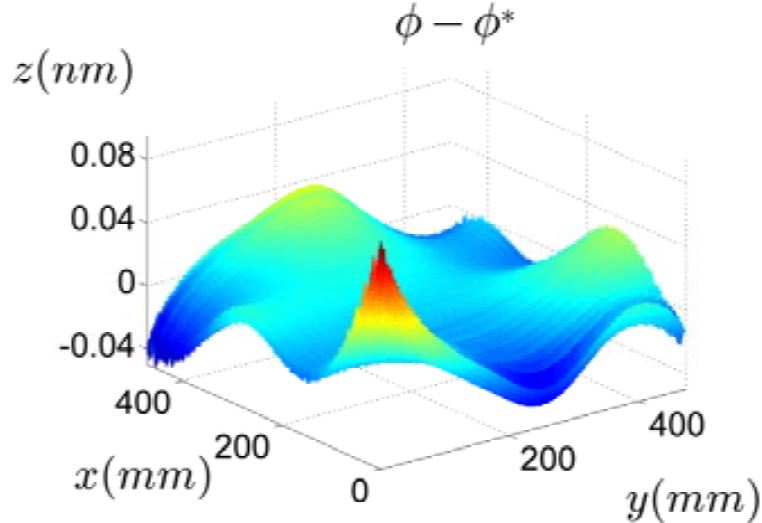


Figura 5.2: Error de reconstrucció, $\phi^* - \phi$, utilitzant uns desplaçaments $t_1 = t_3 = 11$, $t_2 = t_4 = 17$, $M = N = 546$ mm. Els desplaçaments no són divisors del domini.

La figura 5.2 mostra errors de reconstrucció fent servir dos desplaçaments i extensió na-

tural. En aquest cas els desplaçaments $t_1 = t_3 = 11$ i $t_2 = t_4 = 17$ no són divisores del domini $M = N = 546 \text{ mm}$. Per això apareixen errors de vora, tal com s'havia vist en la figura 3.15. En aquest cas els errors de vora no són tan reconeixibles com en la figura 3.15 ja que provenen tant de l'eix x com de l'eix y .

En la figura 5.3 s'ha utilitzat desplaçaments $t_1 = t_3 = 7$, $t_2 = t_4 = 13$ que sí que són divisores del domini $M = N = 546 \text{ mm}$. En aquest cas l'extensió natural es pot fer correctament i s'eliminen singularitats de la funció de transferència i errors de vora arribant a un error numèric al voltant de 10^{-14} nm .

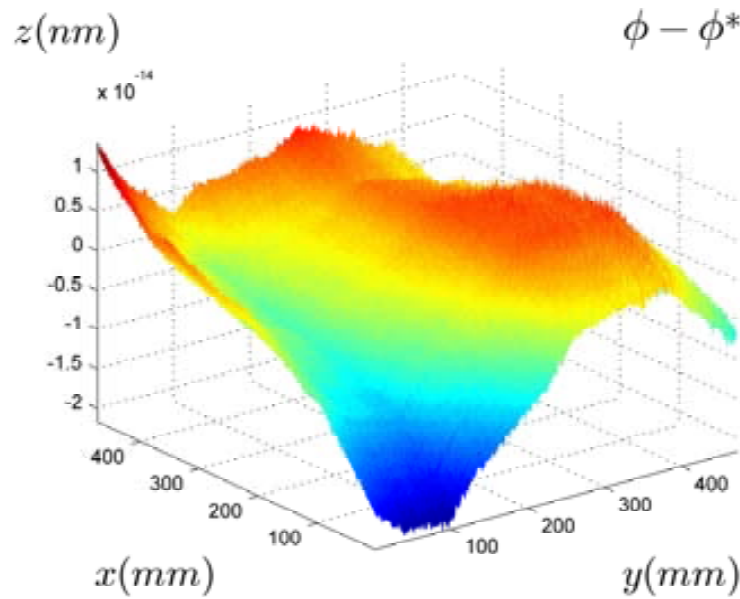


Figura 5.3: Error de reconstrucció, $\phi^* - \phi$, utilitzant uns desplaçaments $t_1 = t_3 = 7$, $t_2 = t_4 = 13$, $M = N = 546 \text{ mm}$. Els desplaçaments són divisores del domini.

5.1 Errors de guiatge

Els errors de guiatge són els errors propis de la taula lineal al desplaçar-se. A la secció 4.2 s ha analitzat l error de posicionament, i en aquesta secció s analitzaran els errors de guiatge pitch, roll i yaw , com afecten en les mesures i en les reconstruccions. A la figura 2.1 es mostren els errors de pitch i de roll, que seran els analitzats i treballats en aquest capítol, ja que es proposa un mètode per tal de fer una estimació de pitch i roll per tal de poder-los minimitzar abans de fer el lateral shearing seqüencial [VNC09b, VNC11].

Analíticament, els errors de guiatge es poden descriure de la següent manera. Quan la taula lineal es desplaça en la direcció x , un error linear l^j degut al desplaçament t_j s afegeix a les mesures

$$l_{m,n}^j = a_j m \Delta x + b_j n \Delta y + c_j \quad (5.14)$$

on a_j és el terme relacionat amb el pitch, b_j amb el roll i c_j amb el offset, en funció del desplaçament t_j . Per tant, les mesures de l equació 5.2 queden modificades pels errors de guiatge

$$\begin{aligned} \tau_{m,n}^j &= \phi_{m-t_j,n} - \gamma_{m,n} + l_{m,n}^j & j & \quad 1 \ 2 \quad m \quad 1 \quad M \quad n \quad 1 \quad N & \quad (5.15) \\ \tau_{m,n}^j &= \phi_{m,n-t_j} - \gamma_{m,n} + l_{m,n}^j & j & \quad 3 \ 4 \quad m \quad 1 \quad M \quad n \quad 1 \quad N \end{aligned}$$

Aquests errors afecten també a les funcions diferències

$$\begin{aligned} \overset{j}{\delta}_{m,n} &= \phi_{m,n} - \phi_{m-t_j,n} - l_{m,n}^j & m & \quad 1 \quad M \quad n \quad 1 \quad N \quad j \quad 1 \ 2 & \quad (5.16) \\ \underset{j}{\delta}_{m,n} &= \phi_{m,n} - \phi_{m,n-t_j} - l_{m,n}^j & m & \quad 1 \quad M \quad n \quad 1 \quad N \quad j \quad 3 \ 4 \end{aligned}$$

La modificació, a partir d'aquestes equacions, es trobarà en tot el treball posterior dins l'espai de Fourier.

Cada un dels errors de guiatge de pitch, roll i yaw tenen una repercussió en les reconstruccions. En el cas del yaw, es suposarà en aquest treball que és suficientment petit com perquè no afecti, és a dir, la informació que capta cada sensor de l'interferòmetre és el mateix en totes les mesures. En els casos del pitch i del roll, la situació és diferent, tal com es veurà a continuació. En el cas de l'offset, l'error relacionat amb el terme c de l'equació 5.14, al ser una constant en les mesures correspon a un pla en la reconstrucció, degut a la naturalesa del mètode usant la transformada de Fourier. És per això que no afecta doncs no modifica la forma de la superfície reconstruïda. Per aquest motiu no és necessari una estimació de l'offset abans de fer el mètode del lateral shearing seqüencial.

5.1.1 Pitch

L'error de pitch és l'error relacionat amb el terme a_j de l'equació 5.14. Per tant en aquesta secció $l_{m,n}^j = a_j m \Delta x$. Les principals diferències en les reconstruccions respecte a unes mesures sense pitch venen mostrades a la figura 5.4. La primera de totes i més evident és la quadràtica que s'afegeix.

A la figura 5.4 es pot veure la comparativa. És la diferència entre la SUT mesurada i la SUT reconstruïda. En ambdós casos la SUT és la mateixa. En la figura 5.4 (a) s'ha afegit un pitch $a_j = 500$ en les mesures de l'equació 5.15 quan $j = 1, 2$. En la figura 5.4 (b) s'ha afegit el mateix pitch a l'equació 5.15 quan $j = 3, 4$. En ambdós casos l'error de reconstrucció és bàsicament un terme quadràtic. Això és degut a que al ser el pitch un pla error afegit a les mesures, i com que la transformada de Fourier és com una integral, el pla es converteix en terme quadràtic en la reconstrucció. Els errors de reconstrucció tenen direccions oposades un de l'altre, que depèn de la direcció de desplaçament de la mesura. En ambdós casos la magnitud de l'error està al voltant dels 6000 nm en total. En la figura 5.4 (c) s'ha afegit un pitch $a_j = 500$ a l'equació 5.14 quan $j = 1, 2, 3, 4$, és a dir, a totes les mesures. En aquest cas

es veu que el pitch afecta a les dues direccions, tenint una quadràtica que depèn del terme x i y .

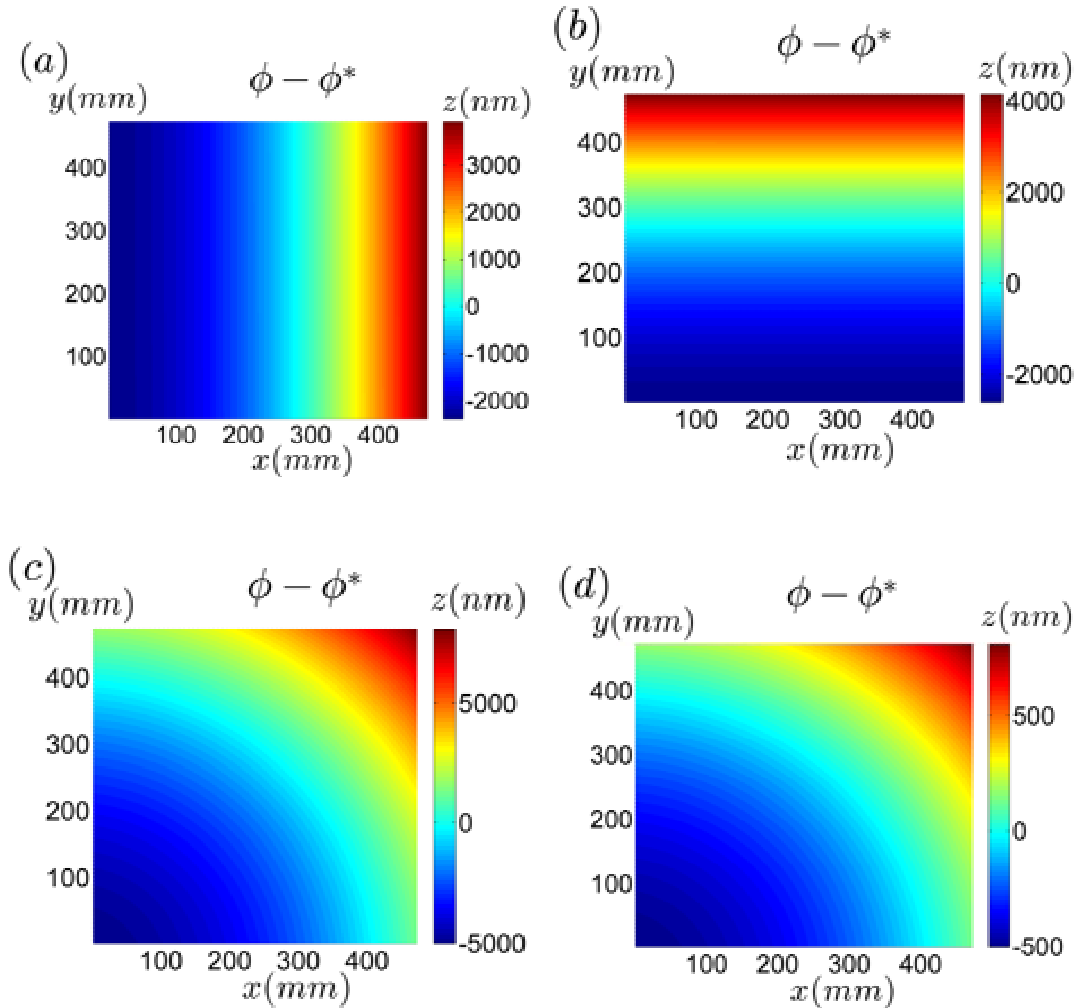


Figura 5.4: Errors de reconstrucció deguts a l'error de pitch en les mesures, (a) $a_j = 500$ en l'equació 5.15 quan $j = 1, 2$, (b) $a_j = 500$ en l'equació 5.15 quan $j = 3, 4$, (c) $a_j = 500$ en l'equació 5.15 quan $j = 1, 2, 3, 4$, (d) $a_j = 50$ en l'equació 5.15 quan $j = 1, 2, 3, 4$.

La comparativa de les figures 5.4 (c) i 5.4 (d) ens mostra la relació directa entre la magnitud de pitch introduït a les mesures i l'error quadràtic de la reconstrucció. En el cas de la figura 5.4 (d) s'ha afegit un pitch a les mesures de $a_j = 50$, un ordre de magnitud inferior del de la figura 5.4 (c). Error quadràtic de la figura 5.4 (d) és també un ordre de magnitud

inferior a la de la figura 5.4 (c).

Si es pren l'error de reconstrucció anàleg al de l'equació 3.21 es pot fer una aproximació per mínims quadrats de la quadràtica, e^q , que millor s'ajusta a l'error. El que hi queda després de treure la quadràtica s'expressa analíticament com

$$e_{m,n} = \phi_{m,n} - \phi_{m,n}^* - e_{m,n}^q \quad m = 1 \dots M \quad n = 1 \dots N \quad (5.17)$$

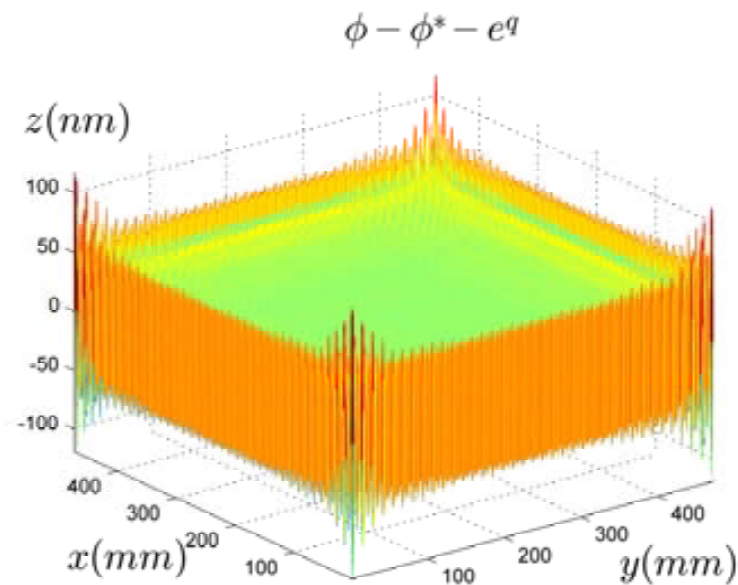


Figura 5.5: Error $e_{m,n}$ de l'equació 5.17 quan s'ha afegit un error de pitch a les mesures $a_j = 500$.

A la figura 5.5 es mostra l'error un cop es treu la quadràtica, quan s'ha afegit un error de pitch a les mesures. El que es pot veure és que no només s'afegeix un terme quadràtic a l'error de la reconstrucció, sinó que hi ha també errors de vora. Aquests errors són similars als que s'han vist a la figura 3.12, quan l'extensió natural no s'ha fet correctament.

Les figures 5.4 i 5.5 mostren que l'error de pitch modifica el perfil de la superfície a reconstruir afegint una quadràtica i afegeix també errors de vora degut a que no es fa correc-

tament l'extensió natural. És per això necessari un mètode per tal d'estimar l'error de pitch, minimitzar-lo i que no es depengui de la precisió de desplaçament de la taula lineal per a la precisió del mètode del lateral shearing sequencial. El mètode proposat per a l'estimació del pitch es veurà a la secció 5.2.

5.1.2 Roll

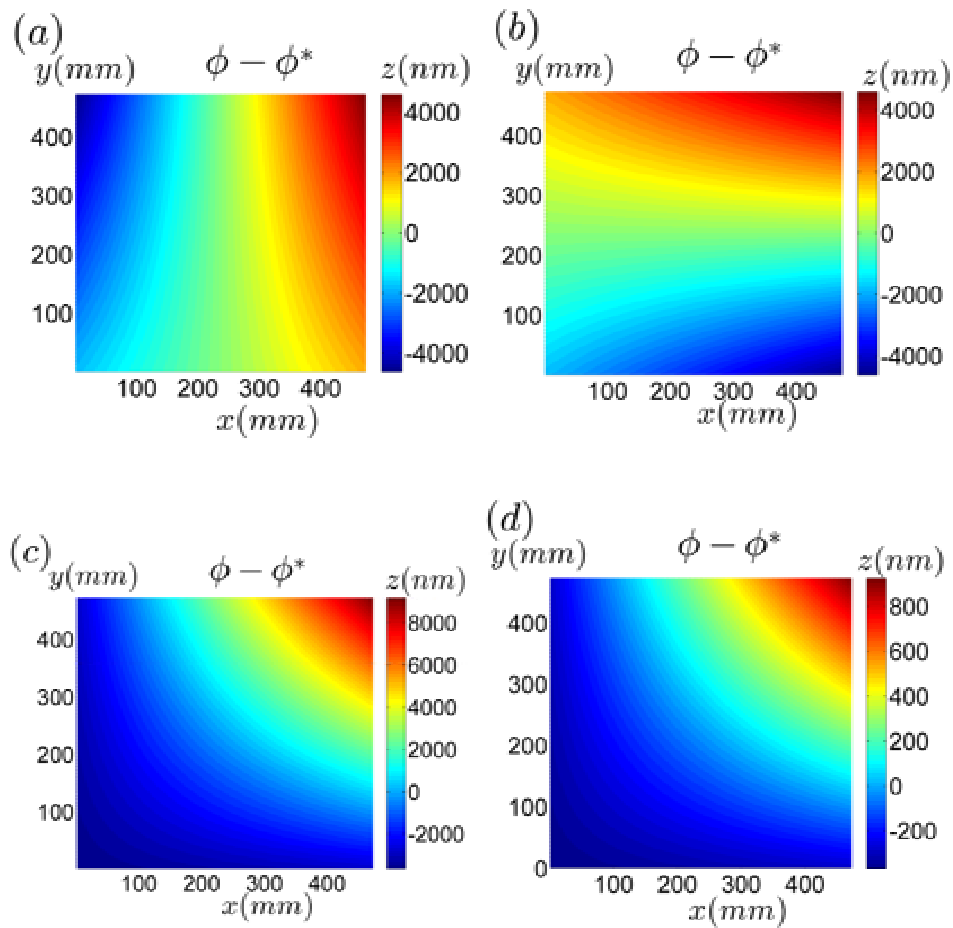


Figura 5.6: Errors de reconstrucció deguts a l'error de roll b_j de l'equació 5.15 en les mesures, (a) $b_j = 500$ quan $j = 1, 2$, (b) $b_j = 500$ quan $j = 3, 4$, (c) $b_j = 500$ quan $j = 1, 2, 3, 4$, (d) $b_j = 50$ quan $j = 1, 2, 3, 4$.

L'error de roll és l'error relacionat amb el terme b de l'equació 5.14, per tant $l_{m,n}^j = b_j n \Delta y$. Ja s'ha vist a la secció 5.1.1 que el pitch modifica la forma de la superfície reconstruïda afegint un terme quadràtic. En aquest cas s'introdueix també un terme quadràtic, una torsió.

La figura 5.6 mostra els errors de reconstrucció quan s'afegeix el roll $l_{m,n}^j = b_j n \Delta y$ a les mesures. A la figura 5.6 (a) el roll afegit és $b_j = 500$ en l'equació 5.15 quan $j = 1, 2$, és a dir, en la direcció de desplaçament x . Es pot veure que és una torsió en la superfície reconstruïda. El mateix succeeix, però en la direcció perpendicular, en la figura 5.6 (b), que s'ha afegit el mateix roll que en la figura 5.6 (a), però en la direcció de desplaçament y . Al igual que amb el pitch, la magnitud de l'error de reconstrucció del roll és directament proporcional al roll afegit a les mesures. En la comparativa entre les figures 5.6 (c) i 5.6 (d) es pot veure clarament.

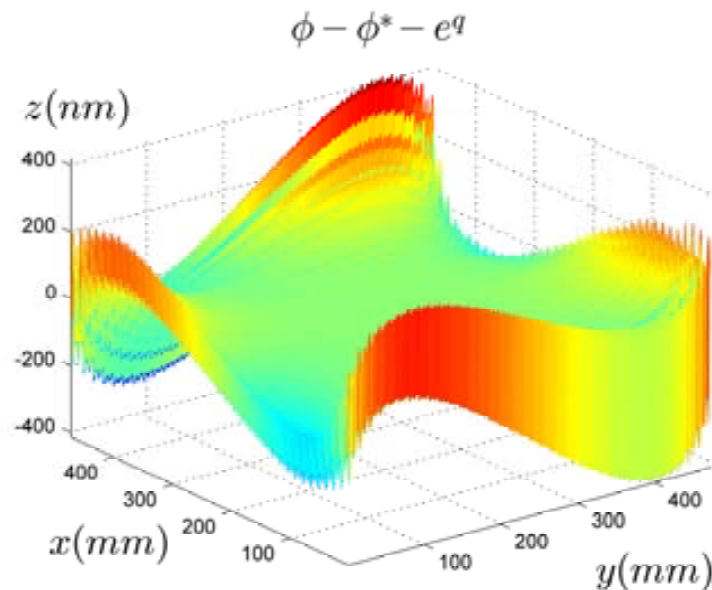


Figura 5.7: Error de l'equació 5.17 quan s'ha afegit un error de roll $b_j = 500$ als desplaçaments.

Els errors de reconstrucció quan s'hi ha afegit roll, com els de la figura 5.6, i se'ls hi ha tret la quadràtica de l'equació 5.17, són similars als de la figura 5.7. En aquest cas, el roll afegit a les mesures és $b_j = 500$. L'important és que fins i tot aproximant i traient la quadràtica que

millor s ajusta, apareix a sota un error de 800 nm peak to valley. La forma és similar a l error de la figura 5.5, en el sentit que també es tenen errors de vora. En aquest cas la magnitud de l error és més gran, doncs en ambdós casos s ha afegit un error $a_j = b_j = 500$, i en l error de la figura 5.5 es tenen 200 nm peak to valley i en el cas del roll de 800 nm . En la figura 5.7 hi ha moltes més irregularitats a la part central que en la figura 5.5.

Al igual que amb el pitch, el roll deforma el perfil de la superfície reconstruïda i és per tant necessària una estimació del roll abans d aplicar el lateral shearing sequencial.

5.2 Nou mètode per a l'estimació dels errors de guiatge

Tal com s ha vist de manera individual en les seccions anteriors 5.1.1 i 5.1.2, els errors de pitch i roll modifiquen la forma de la superfície reconstruïda. La figura 5.8 (a) mostra l error de reconstrucció $\phi - \phi^*$ quan s afegeixen alhora pitch i roll en els desplaçaments. En aquest cas s ha afegit errors de pitch i roll $a_j = 500$ i $b_j = 500$, respectivament. Es pot veure que l error de reconstrucció és un híbrid dels errors mostrats amb el pitch i roll per separat, doncs és bàsicament la forma de la figura 5.4, que és l error quan hi ha pitch, però amb la torsió de l error de roll de la figura 5.6.

La figura 5.8 (b) mostra l error de l equació 5.17, que és la figura 5.8 (a) sense l error de la quadràtica e^q que millor s ajusta per mínims quadrats. Es pot veure que a part de la quadràtica que és el que bàsicament s observa a la figura 5.8 (a), també s afegeixen errors de vora a la reconstrucció, degut a que no es fa correctament l extensió natural, i que és el que es veu a la figura 5.8 (b). Observar que la magnitud d aquest error, per sobre dels 200 nm està molt lluny de la precisió esperada amb el mètode del lateral shearing sequencial.

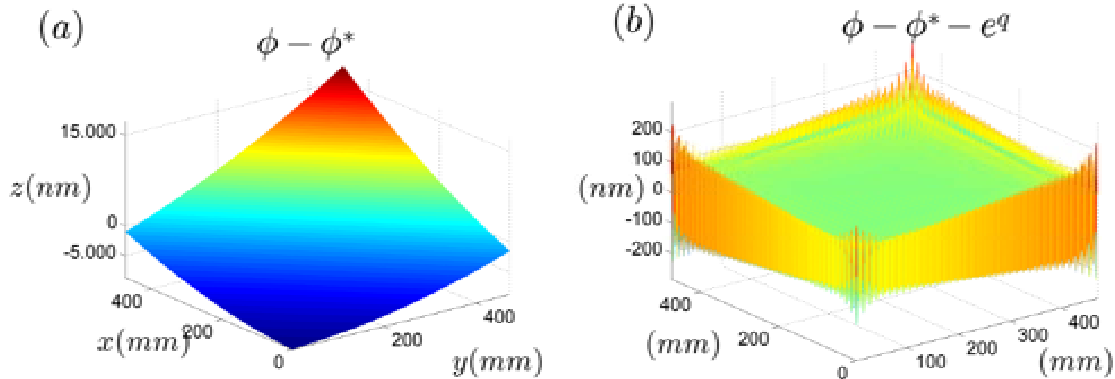


Figura 5.8: (a) Error de reconstrucció quan s'ha afegit un error de pitch i de roll a les mesures de $a_j = 500$ i $b_j = 500$, respectivament. (b) Error de reconstrucció de la figura 5.8 (a) eliminant la quadràtica q de l'equació 5.17.

La introducció de l'error quadràtic i els errors de vora fan que sigui necessària una estimació dels errors de pitch i de roll dels desplaçaments abans de fer la reconstrucció mitjançant el lateral shearing seqüencial. A continuació es proposen dos algorismes per tal d'estimar-los, utilitzant la sobre-informació que es tenen a partir de les cinc mesures de les SUT necessàries per a la reconstrucció.

5.2.1 Explicació del mètode

El mètode proposat per estimar els errors de pitch i de roll es basa en la sobre-informació que es té a partir de les cinc mesures donades per l'interferòmetre. Com que entre unes mesures i altres hi ha una regió de solapament, en aquesta regió les dades estan repetides. El mètode proposat treballa a partir de les funcions diferències j de l'equació 5.3. En aquesta part comú hi ha diferents errors de pitch i roll, un per a cada desplaçament, sense la influència de la superfície de referència. El mètode estima els errors de pitch i roll a_j , b_j corresponents a partir de cada una d'elles, és a dir, de cada j , $j = 1, 2, 3$ o 4 .

La figura 5.9, a partir de la figura 2.2, mostra l'esquema per a l'estimació de pitch i roll.

Es treballa amb la mesura inicial τ^0 de l'interferòmetre i amb una altra segona mesura, τ^1 o τ^2 . La primera mesura τ^0 no té error de pitch i roll, mentre que ja τ^1 té errors a_1 i b_1 ; i τ^2 té errors a_2 i b_2 . Observar que per a l'explicació s'utilitza el desplaçament en x quan $j = 1, 2$, però és anàleg amb el desplaçament en y quan $j = 3, 4$. El rectangle de la figura 5.9 mostra la regió total de la SUT que s'abarca amb dues mesures τ^0 i τ^j , $j = 1, 2$. Amb les fletxes de la part superior es marquen les dues sub-regions del rectangle que hi ha en cada una de les dues mesures. La part central marcada en blau està en les dues mesures, mentre que els extrems en groc només en una d'elles.

El mètode fa servir el fet de que si s'agafa una fila i -èsima de la funció diferències, i es sumen tots els termes d'aquesta fila de la funció diferències w^j , amb un desplaçament perfecte t_j sense errors de guiatge, es cancel·len molt termes doncs estan a les dues mesures,

$$\begin{array}{l}
 \text{I} \left[\begin{array}{l}
 i,1 = \cancel{\phi_{i,1}} - \phi_{i,1-t_j} \\
 i,2 = \cancel{\phi_{i,2}} - \phi_{i,2-t_j} \\
 \vdots \\
 i,t_j-1 = \cancel{\phi_{i,t_j-1}} - \phi_{i,-1} \\
 i,t_j = \cancel{\phi_{i,t_j}} - \phi_{i,0}
 \end{array} \right. \\
 \\
 \text{II} \left[\begin{array}{l}
 i,t_j+1 = \cancel{\phi_{i,t_j+1}} - \cancel{\phi_{i,1}} \\
 i,t_j+2 = \cancel{\phi_{i,t_j+2}} - \cancel{\phi_{i,2}} \\
 \vdots \\
 i,N-t_j-1 = \cancel{\phi_{i,N-t_j-1}} - \cancel{\phi_{i,N-2t_j-1}} \\
 i,N-t_j = \cancel{\phi_{i,N-t_j}} - \cancel{\phi_{i,N-2t_j}}
 \end{array} \right. \quad (5.18) \\
 \\
 \text{III} \left[\begin{array}{l}
 i,N-t_j+1 = \phi_{i,N-t_j+1} - \cancel{\phi_{i,N-2t_j+1}} \\
 i,N-t_j+2 = \phi_{i,N-t_j+2} - \cancel{\phi_{i,N-2t_j+2}} \\
 \vdots \\
 i,N-1 = \phi_{i,N-1} - \cancel{\phi_{i,N-t_j-1}} \\
 i,N = \phi_{i,N} - \cancel{\phi_{i,N-t_j}}
 \end{array} \right.
 \end{array}$$

La suma $\mathcal{L}^j(i)$ de tota la fila i -èssima es pot dividir en tres parts. La part I marcada en groc (esquerra) a la figura 5.9 de la que només queden els termes negatius, la part II marcada en blau a la figura 5.9 que es cancel·len tots els termes, i la part III marcada en groc (dreta) a la figura 5.9 de la que només queden els termes positius. De forma compacta es pot expressar de la següent manera

$$\mathcal{L}^j(i) = \sum_{n=1}^N w_{i,n} = \sum_{n=1}^N (\phi_{i,n} - \phi_{i-t_j,n}) = - \sum_{n=1-t_j}^0 \phi_{i,n} + \sum_{n=N-t_j+1}^N \phi_{i,n} \quad (5.19)$$

A la suma $\mathcal{L}^j(i)$ el desplaçament t_j és perfecte, és a dir, sense cap error de guiatge.

Amb els errors de pitch a_j , roll b_j i yaw c_j als desplaçaments, l'equació 5.19 queda de la següent manera

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^j(i) &= \mathcal{L}^j(i) - \sum_{n=1}^N (a_j n \Delta x + b_j i \Delta y + c_j) \\ &= \underbrace{\mathcal{L}^j(i)}_{\phi} - \underbrace{\frac{N(N+1)}{2} a_j \Delta x - N b_j i \Delta y - N c_j}_{a_j, b_j, c_j} \end{aligned} \quad (5.20)$$

on la magnitud de $\mathcal{L}^j(i)$ depèn de la superfície ϕ a mesurar i la magnitud de la resta de $\mathcal{L}^j(i)$ depèn dels errors de pitch, roll i yaw. Aquesta fórmula és la base de l'estimació de pitch i roll.

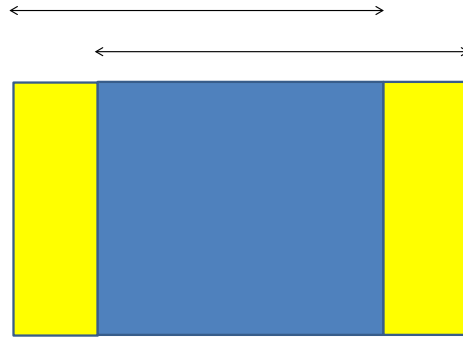


Figura 5.9: Esquema per a l'estimació de l'error de pitch i roll. El rectangle marca el domini total de la SUT en dues mesures de l'interferòmetre. A la part superior, les dues sub-regions de cada mesura. La part central blava és la regió de la SUT que està en les dues mesures. Les parts grogues dels extrems només en una de les dues.

5.2.2 Pitch

De l'equació 5.20 no és possible separar la influència del pitch dels altres errors de guiatge. Per aïllar-lo es divideix la suma de l'equació 5.20 en dues parts: els primers termes $j \in [1, N/2]$, i els últims $j \in [N/2 + 1, N]$. La suma dels $j \in [1, N/2]$ primers termes és

$$\sum_{n=1}^{N/2} m_{,n} = - \sum_{m=-t_j+1}^0 \phi_{m,n} + \sum_{n=N/2-t_j+1}^0 \phi_{m,n} - a_j \Delta x (1 + \dots + N/2) - b_j i \frac{N}{2} \Delta y - \frac{N}{2} c_j \quad (5.21)$$

Mentre que la suma dels $j \in [N/2 + 1, N]$ últims termes és

$$\sum_{n=N/2+1}^N m_{,n} = - \sum_{n=N/2-t_j+1}^{N/2+1} \phi_{m,n} + \sum_{n=N-t_j+1}^N \phi_{m,n} - a_j \Delta x \left(\frac{N}{2} + 1 + \dots + \frac{N}{2} + \frac{N}{2} \right) - b_j i \frac{N}{2} \Delta y - \frac{N}{2} c_j \quad (5.22)$$

Si es comparen els termes de les equacions 5.21 i 5.22 es pot veure que la majoria de termes

són iguals en ambdós sumatoris. Si es resten l'un amb l'altre, el resultat és

$$\sum_{n=1}^{N/2} m_{,n} - \sum_{n=N/2+1}^N m_{,n} = - \sum_{n=-t_j+1}^0 \phi_{m,n} + 2 \sum_{n=N/2-t_j+1}^0 \phi_{m,n} - \sum_{n=N-t_j+1}^N \phi_{m,n} + a_j \Delta x \frac{N^2}{4} \quad (5.23)$$

on els termes b_j i c_j queden cancel·lats.

La influència del pitch a_j a la fila i -èssima es pot estimar

$$a_j^i = 4 \frac{\sum_{n=1}^{N/2} m_{,n} - \sum_{n=N/2+1}^N m_{,n}}{N^2 \Delta x} = a_j + \delta_{a_j^i} \quad (5.24)$$

La diferència entre el pitch estimat a_j^i i el pitch real a_j és el donat per $\delta_{a_j^i}$,

$$\delta_{a_j^i} = 4 \frac{- \sum_{n=-t_j+1}^0 \phi_{m,n} + 2 \sum_{n=N/2-t_j+1}^{N/2+1} \phi_{m,n} - \sum_{n=N-t_j+1}^N \phi_{m,n}}{N^2 \Delta x} \quad (5.25)$$

Les regions que intervenen en l'error $\delta_{a_j^i}$ es mostren a la figura 5.10. Els quadres en vermell marquen les regions de les dues mesures que estan implicades en l'error de l'estimació del pitch de l'equació 5.25.

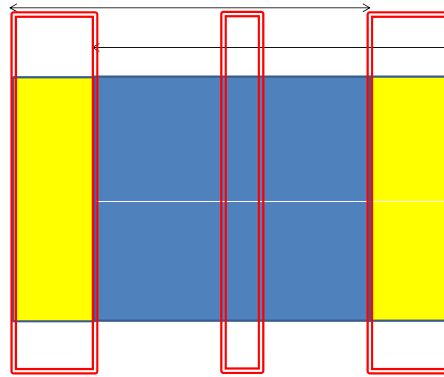


Figura 5.10: Esquema per a l'estimació de l'error de pitch mitjançant la fórmula de l'equació 5.24 i seguint l'esquema de la figura 5.9. Els quadres en vermell són les regions que produeixen l'error δ_{a_j} de l'equació 5.25.

Es important tenir en compte que seguint les proporcions de la figura 5.10 pot semblar que les regions implicades en l'error de l'estimació del pitch —les regions dins dels rectangles vermells— són grans en comparació a la resta. Això és perquè per claredat s'ha marcat en l'esquema de la figura 5.10 un desplaçament t_j significativament gran. La majoria de desplaçaments en les seccions anteriors són molt més petits, desplaçaments $t_j \in [3, 50]$ i domini total $N \in [512, 546]$, així que aquestes part són en veritat significativament més petites.

L'error en l'estimació del pitch no és directament proporcional al desplaçament, de fet, no ha d'estar relacionat amb la magnitud del desplaçament t_j . Això és degut a que els sumatoris de l'equació 5.25 tenen signes diferents. Es pot veure amb la figura 5.11, que mostra $\delta_{a_j}^i$ de l'equació 5.25 per a dues SUT diferents ϕ_1 (en continu) i ϕ_2 (en discontinu). Per a cada fila i -èssima $i \in [1, 462]$ es calcula $\delta_{a_j}^i$. En vermell amb un desplaçament $t_j = 7$, en blau $t_j = 11$ i en lila $t_j = 33$. En totes dues SUTs els errors segueixen una tendència similar en relació als diferents desplaçaments, amb petits canvis entre ells. Es pot veure com no hi ha relació entre la magnitud dels desplaçaments i la magnitud de l'error. En el cas de ϕ_1 , el desplaçament $t_j = 33$ és el que dona errors més grans, mentre que és amb $t_j = 7$ quan $\delta_{a_j}^i$ és més petit. En canvi a ϕ_2 és tot just el contrari.

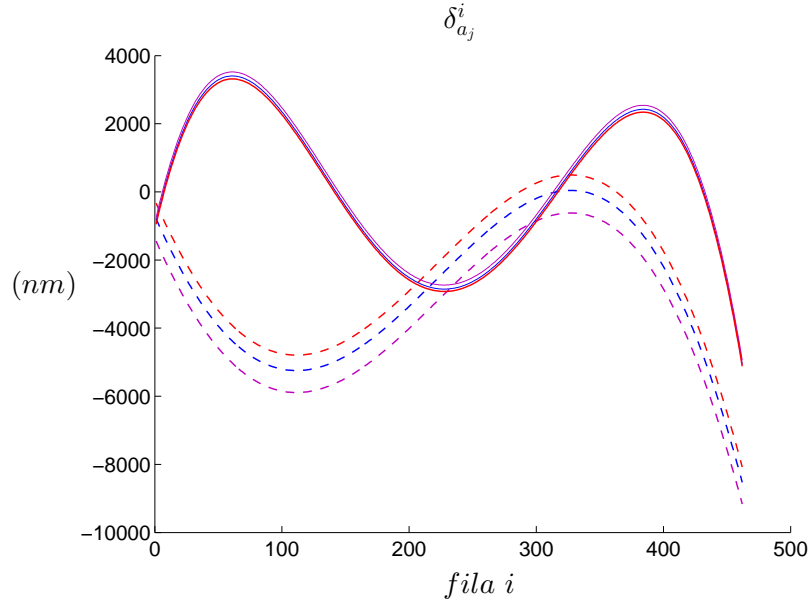


Figura 5.11: Error $\delta_{a_j}^i$ de l'equació 5.25 per a cada $i \in [1, 462]$. El grup de línies en continu són referents a una SUT ϕ_1 , mentre que les línies en discontinu són referents a una altra SUT ϕ_2 . Error $\delta_{a_j}^i$ calculat per a tres desplaçaments: $t_j = 7$ (en vermell), $t_j = 11$ (en blau) i $t_j = 33$ (en violeta).

A partir de la figura 5.11 també es pot veure que no es pot determinar prèviament quina serà la fila i -èsima que minimitza $\delta_{a_j}^i$. Amb el mètode explicat a l'equació 5.24 es pot tenir una estimació del pitch per a cada fila $i \in [1, M]$, donant M estimacions diferents de $\delta_{a_j}^i$, que depèn de cada fila de ϕ . Utilitzant aquesta redundància d'estimacions, per a calcular el pitch total per a un desplaçament t_j es fa la mitja de totes les files de la SUT,

$$a_j = \frac{\sum_{i=1}^M a_j^i}{M} \quad (5.26)$$

a partir dels a_j^i de l'equació 5.24.

A les seccions 5.2.2.1 i 5.2.2.2 es mostren resultats en l'estimació del pitch mitjançant el mètode descrit, a la secció 5.2.2.1 amb superfícies planes i a la secció 5.2.2.2 amb superfícies

que tenen terme quadràtic.

5.2.2.1 Superfícies planes

A continuació es comparen estimacions del pitch amb diferents desplaçaments t_j . Sempre en aquesta secció les superfícies a mesurar són planes. És a dir, si es fa una descomposició de la funció $\phi_{m,n}$ de l'equació 5.2,

$$\phi_{m,n} = \alpha x_{m,n}^2 + \beta y_{m,n}^2 + \lambda x_{m,n} y_{m,n} + \phi_{m,n}^r \quad (5.27)$$

on $\phi_{m,n}^r$ és la part de $\phi_{m,n}$ sense la quadràtica, els termes quadràtics α , β i λ de l'equació 5.27 són nuls. Les superfícies mostrades a la figura 5.1 són d'aquest tipus.

Per a fer una comparativa adequada, en comptes de fer servir l'error total $a_j - a_j$ es fa amb l'angle error de pitch, E_p^j , que és l'angle error en l'estimació del pitch a partir d'un desplaçament t_j ,

$$E_p^j = \arctan(a_j - a_j) \quad (5.28)$$

on la unitat de mesura de E_p^j són els radians.

La figura 5.12 mostra diferents resultats en l'estimació del pitch. Per a les tres figures (a), (b) i (c) es realitza el mateix procediment. Per a cada valor de l'eix x , corresponent a l'error de pitch $a_j \in [-500 \ 500] \text{ nrad}$, s'agafen 500 SUTs diferents — sempre amb el mateix pitch a_j corresponent al valor de l'eix x — es fan les estimacions del pitch a_j de l'equació 5.26 i es calculen els errors en l'estimació del pitch E_p^j de l'equació 5.28. Per a cada $a_j \in [-500 \ 500] \text{ nrad}$ es calcula la mitja (en blau) i la desviació estàndard σ (en lila) de les 500 estimacions de pitch i roll. La figura 5.12 (a) mostra l'error de pitch E_p^j amb un desplaçament $t_j = 3$ píxels, la figura 5.12 (b) amb un desplaçament $t_j = 13$ píxels i la figura 5.12 (c) amb un desplaçament

$t_j = 91$ píxels. El domini total és $M = 546$ mm, $N = 546$ mm píxels.

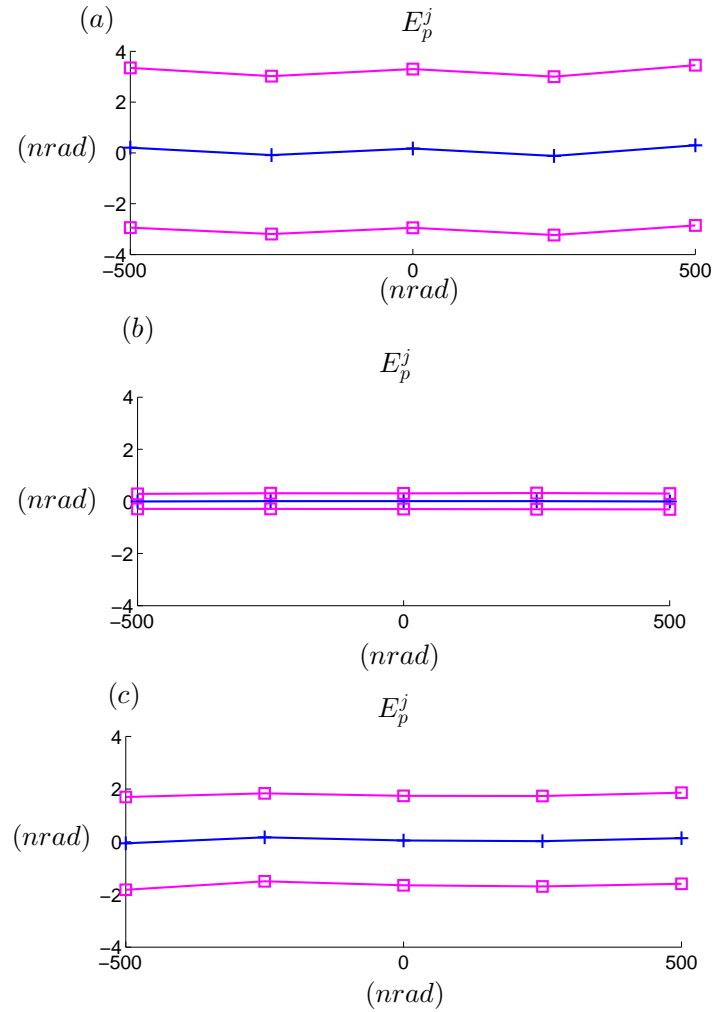


Figura 5.12: Error en l'estimació del pitch pel mètode explicat en aquesta secció. Mitja (en blau) i desviació estàndard (en lila) de l'error E_p^j de 500 SUTs, per a cada valor a_j $[-500 \ 500]$ nrad de l'eix x , amb diferents desplaçaments t_j , (a) $t_j = 3$ mm, (b) $t_j = 13$ mm i (c) $t_j = 91$ mm. Domini total $M = N = 546$ mm.

Els errors de la figura 5.12 són constants. Això indica que l'error en l'estimació del pitch E_p^j de l'equació 5.28 no depèn de l'error de pitch a_j afegit inicialment als desplaçaments. Aquest resultat constant com a resultat de la independència entre el pitch dels desplaçaments i l'error de pitch en l'estimació, permet treballar en un rang d'error en les reconstruccions usant el lateral shearing sequencial després de l'estimació del pitch que no depèn de la precisió de la taula lineal a l'hora de fer el desplaçament.

Com es pot veure en la comparativa de la figura 5.12, l'error en l'estimació del pitch E_p^j , i en correspondència a l'error teòric δ_{a_j} de l'equació 5.25, sí que depèn del desplaçament t_j efectuat. En tots els casos la mitja és pràcticament nul·la, $\bar{E}_p^j \approx 0$, que ens mostra que el mètode no té biaix, però la desviació estàndard varia en cada cas, des de $\sigma = 0.3 \text{ nrad}$ a $\sigma = 1.6 \text{ nrad}$ i $\sigma = 3.0 \text{ nrad}$. El pitjor resultat és amb el desplaçament més petit, i analitzant δ_{a_j} de l'equació 5.25 sembla que pot venir pel fet que al ser els sumatoris de molt pocs termes, de $N/2 - t_1 + 1$ fins a $N/2$, no hi ha suficients valors com per tal de contrarestar els uns amb els altres.

De la situació explicada per a la figura 5.12, la figura 5.13 mostra el pitjor resultat de les 500 estimacions per a cada valor de pitch a_j de l'eix de les x , $\max(E_p^j)$. En vermell s'ha marcat $\max(E_p^j)$ quan $t_j = 3$, en lila quan $t_j = 13$ i en blau quan $t_j = 91$. El valor $\max(E_p^j)$ permet donar un valor garantia de les estimacions de pitch per a cada desplaçament t_j . Per tant, a partir de la figura 5.13 es pot garantir una estimació del pitch menor de 6.07 nrad per al desplaçament $t_j = 91$, menor que 5.61 nrad per $t_j = 3$ i menor que 1.02 nrad per al desplaçament $t_j = 13$, en tot el rang de pitch $a_j \in [-500, 500] \text{ nrad}$ de la taula lineal.

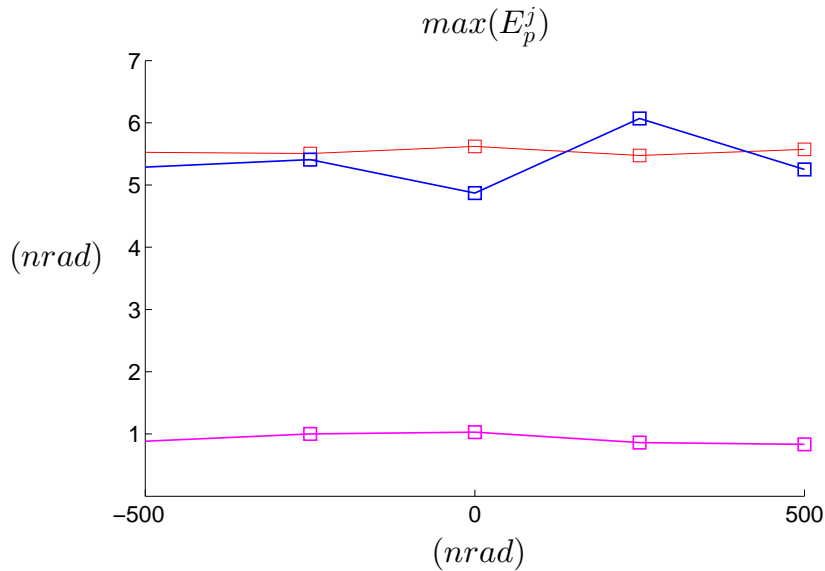


Figura 5.13: Màxim error de les 500 estimacions del pitch que s'han fet per a la figura 5.12, per a cada un dels valors de pitch a_j de l'eix x . Desplaçament $t_j = 3$ en vermell, $t_j = 13$ en lila, i $t_j = 91$ en blau.

Un cop vist resultats amb només un desplaçament per tal de poder focalitzar millor en el propi mètode, es veuran alguns resultats de l'estimació del pitch amb els quatre desplaçaments que es necessiten en l'equació 5.2 per a la reconstrucció de la superfície a mesurar utilitzant el mètode del lateral shearing sequencial. Per a comprovar el mètode s'ha fet el mateix experiment que en la figura 5.12, però amb diferents combinacions de desplaçaments. En aquests casos en que hi ha dos desplaçaments, i per facilitar, els errors en l'estimació de pitch i roll es mostren mitjançant la mitja entre ells, és a dir, quan es calcula l'error en l'estimació del pitch en la combinació de desplaçaments t_1 i t_2 , s'està calculant l'error mitjà en l'estimació del pitch entre aquests dos desplaçaments. El mateix succeeix amb el roll. En el cas en que hi ha quatre desplaçaments, també es fa la mitja per als errors en l'estimació de pitch i roll amb els quatre desplaçaments. Aquest tractament dels resultats es fa de la mateixa manera al llarg de tota la secció 5.

La figura 5.14 mostra diferents errors en l'estimació del pitch amb diferents casos, dominis

M i N , i desplaçaments t_1 , t_2 , t_3 i t_4 . En la figura 5.14 (a) $M = N = 546 \text{ mm}$, $t_1 = t_3 = 3$, $t_2 = t_4 = 13$. Aquest és el cas amb el domini més gran, en relació als desplaçaments. A la figura 5.14 (b) $M = N = 462 \text{ mm}$, i els desplaçaments són els més separats entre ells, $t_1 = t_3 = 2$ i $t_2 = t_4 = 33$. A la figura 5.14 (c) $M = N = 182 \text{ mm}$ i $t_1 = t_3 = 2$, $t_2 = t_4 = 7$, mentre que a la figura 5.14 (d) $M = N = 330 \text{ mm}$ i desplaçaments són molt propers, $t_1 = t_3 = 11$ i $t_2 = t_4 = 15$.

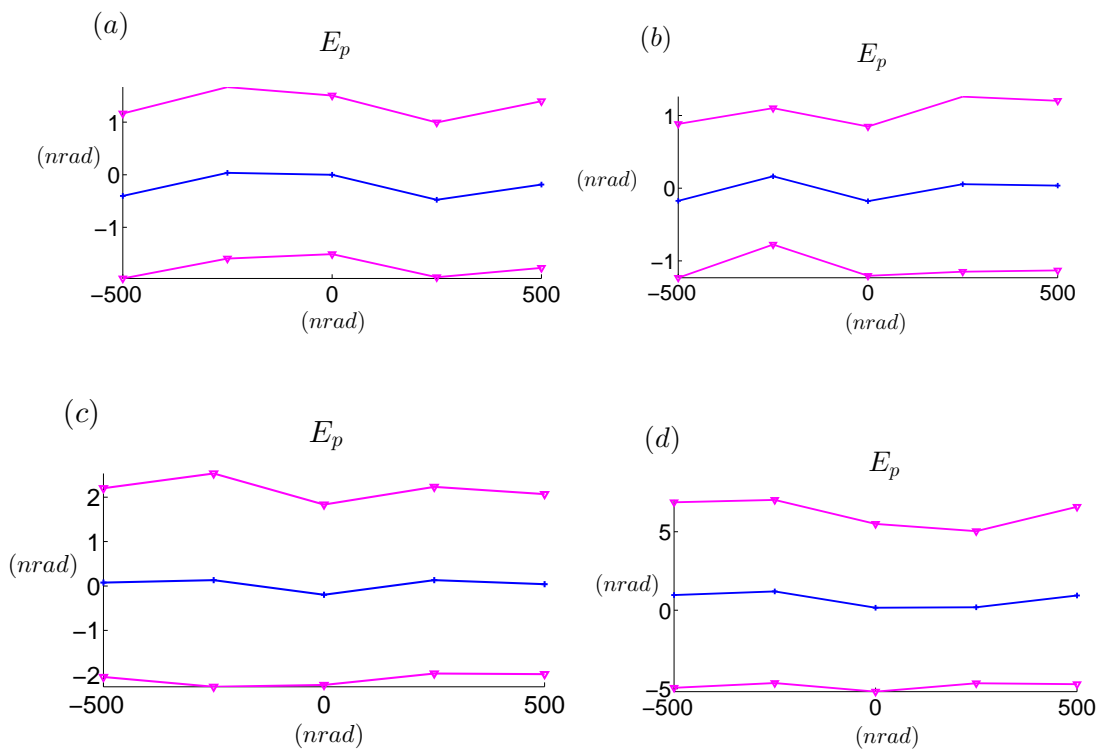


Figura 5.14: Error en l'estimació del pitch en funció del pitch afegit a les mesures, amb diferents dominis M , N , i desplaçaments t_1 , t_2 , t_3 , t_4 , (a) $M = N = 546 \text{ mm}$, i $t_1 = t_3 = 3$ i $t_2 = t_4 = 13$, (b) $M = N = 462 \text{ mm}$, i $t_1 = t_3 = 2$ i $t_2 = t_4 = 33$, (c) $M = N = 182 \text{ mm}$ i $t_1 = t_3 = 2$ i $t_2 = t_4 = 7$. (d) $M = N = 330 \text{ mm}$ i $t_1 = t_3 = 11$ i $t_2 = t_4 = 15$.

Es confirma la tendència constant dels errors, amb independència del pitch afegit als desplaçaments. Els pitjors resultats es donen amb els desplaçaments $t_1 = t_3 = 11$ i $t_2 = t_4 = 15$. No vol dir que desplaçaments propers impliqui pitjors resultats, el que sí que és de suposar és

que això és degut a la proximitat entre els desplaçaments, és a dir, si els desplaçaments són propers, els errors en l'estimació del pitch també ho són en ambdós casos, i això fa que sigui difícil contrarestar o compensar els errors d'un desplaçament amb els errors de l'altre. Els millors resultats provenen dels desplaçaments més allunyats entre ells, $t_1 = t_3 = 3$ i $t_2 = t_4 = 13$, $t_1 = t_3 = 2$ i $t_2 = t_4 = 33$. També són els casos en que el domini és el més gran. Si s'analitza la fórmula de l'error de l'equació 5.25, i tal com ja s'ha dit en anterioritat, dominis M i N grans ajuden a minimitzar l'error en l'estimació del pitch.

Dels resultats de la figura 5.14 es dedueix que per a la minimització de l'error en l'estimació del pitch és millor dominis M i N grans, i desplaçaments $t_1 = t_3$ i $t_2 = t_4$ relativament diferents entre ells. Recordar que aquests resultats són en la mesura de superfícies planes. A continuació es veurà com són els resultats en l'estimació del pitch per a superfícies que tenen terme quadràtic. I a la secció 5.3 es veurà com afecten aquests errors en la reconstrucció total de la superfície usant el lateral shearing sequencial.

5.2.2.2 Superfícies quadràtiques

En aquesta secció s'analitza com són els resultats de l'estimació del pitch quan els termes α , β i λ de l'equació 5.27 no són nuls. Quan les superfícies no tenen quadràtica s'ha vist com l'error en l'estimació del pitch és constant i està sempre en tots els exemples per sota dels 10 nrad . Això es veurà com canvia quan les superfícies a mesurar tenen termes quadràtics.

A la figura 5.15 es mostra l'error en l'estimació del pitch en funció dels termes quadràtics α , β i λ de l'equació 5.27. Sempre s'afegeix un pitch constant a les mesures $a_j = 500 \text{ nrad}$, que és el màxim que s'ha afegit per a l'anàlisi de la secció anterior. Per a cada valor de l'eix x , les superfícies ϕ a mesurar de l'equació 5.2 tenen els termes quadràtics α , β i λ igual a aquest valor. Per exemple, quan $x = 0.00005$, vol dir que els termes quadràtics $\alpha = \beta = \lambda = 0.00005 \text{ m}^{-1}$ de les superfícies a mesurar. Per a cada valor de l'eix x es calcula l'error en l'estimació del pitch per a 500 superfícies i es fa la mitja (en blau), i la desviació estàndard (en lila).

Observar que com que els valors de la mitja són molt grans, la desviació estàndard no es veu.

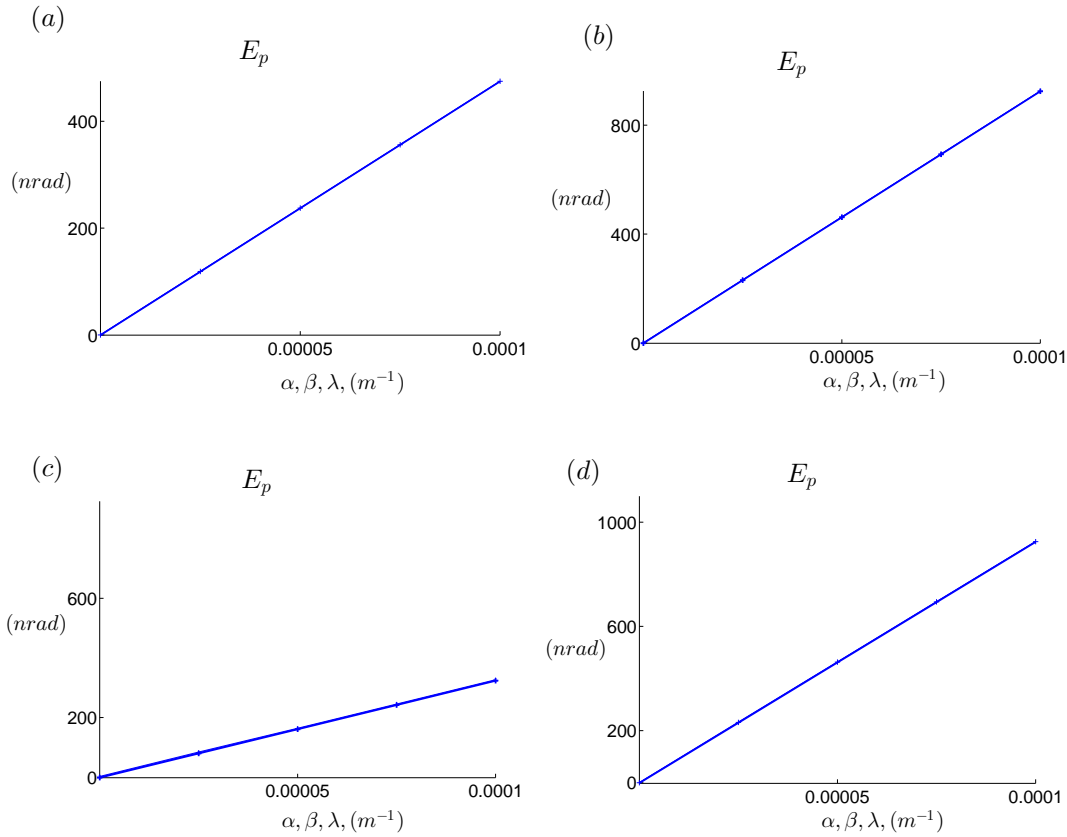


Figura 5.15: Error en l'estimació del pitch, seguint la secció 5.1.1, en funció dels termes quadràtics α , β i λ de l'equació 5.27 de les superfícies a mesurar, amb diferents dominis M i N , i desplaçaments t_1 i t_2 , (a) $M = N = 546 \text{ mm}$, i $t_1 = t_3 = 3$, $t_2 = t_4 = 13$, (b) $M = N = 462 \text{ mm}$, i $t_1 = t_3 = 2$, $t_2 = t_4 = 33$, (c) $M = N = 182 \text{ mm}$ i $t_1 = t_3 = 2$, $t_2 = t_4 = 7$. (d) $M = N = 330 \text{ mm}$ i $t_1 = t_3 = 11$, $t_2 = t_4 = 15$. En tots els casos l'error de pitch és $a_j = 500 \text{ nrad}$.

S ha repetit l'experiment amb diferents dominis M , N i diferents parelles de desplaçaments t_1 i t_2 , t_3 t_4 . Els casos a analitzar són els mateixos que a la figura 5.14. A la figura 5.15 (a) el domini és $M = N = 546$ mm, i els desplaçaments són $t_1 = t_3 = 3$ i $t_2 = t_4 = 13$, a la figura 5.15 (b) el domini és $M = N = 462$ mm, i els desplaçaments són $t_1 = t_3 = 2$ i $t_2 = t_4 = 33$, a la figura 5.15 (c) el domini és $M = N = 182$ mm i desplaçaments $t_1 = t_3 = 2$ i $t_2 = t_4 = 7$, i a la figura 5.15 (d) el domini és $M = N = 330$ mm, i els desplaçaments són $t_1 = t_3 = 11$ i $t_2 = t_4 = 15$. El rang dels termes quadràtics va desde $\alpha = \beta = \lambda = 0$ fins a $\alpha = \beta = \lambda = 0.0001$ m^{-1} .

El primer que es pot observar clarament és que l'error en l'estimació del pitch depèn de manera lineal dels termes quadràtics α , β i λ de les superfícies a mesurar. També observar, comparant amb la figura 5.12, que els errors en l'estimació del pitch quan les superfícies a mesurar tenen termes quadràtics, són clarament pitjors, obtenint resultats que, com es veurà més endavant a la secció 5.3, no són suficients per a la precisió del lateral shearing sequencial que es vol assolir.

A partir de la figura 5.15 es pot veure que l'estimació del pitch depèn dels termes quadràtics de les superfícies a mesurar, no essent capaç el mètode de distingir entre els termes quadràtics i l'error del pitch en els desplaçaments. És per això que serà necessari afegir informació addicional de la quadràtica, tal com es farà al capítol 6, per a tenir una acurada reconstrucció de superfícies usant el lateral shearing sequencial.

5.2.3 Roll

Igual que passava per al pitch, de l'equació 5.20 no és possible directament separar la influència del roll dels altres errors de guiatge. Però si s'agafen dues files qualsevol, $\mathcal{L}^j(i)$ i $\mathcal{L}^j(i+k)$, la influència del pitch i del yaw és el mateix en ambdues,

$$\begin{aligned}\mathcal{L}^j(i) &= \mathcal{L}^j(i) - \overbrace{\frac{N(N+1)}{2}a_j\Delta x}^{a_j} - Nb_ji\Delta y - \overbrace{Nc_j}^{c_j} \\ \mathcal{L}^j(i+k) &= \mathcal{L}^j(i+k) - \underbrace{\frac{N(N+1)}{2}a_j\Delta x}_{a_j} - Nb_j(i+k)\Delta y - \underbrace{Nc_j}_{c_j}\end{aligned}\quad (5.29)$$

Per tant, mitjançant la diferència entre una i altra fila s'elimina la influència de pitch i yaw,

$$\mathcal{L}^j(i) - \mathcal{L}^j(i+k) = \mathcal{L}^j(i) - \mathcal{L}^j(i+k) + kNb_j^i\Delta y \quad (5.30)$$

D'on es pot aïllar el roll,

$$b_j = \frac{\mathcal{L}^j(i) - \mathcal{L}^j(i+k)}{kN\Delta y} \quad (5.31)$$

La diferència entre el roll real b_j i l'estimat b_j^i ve determinat per la diferència entre els valors de la mesura ϕ per les dues files i i $i+k$,

$$b_j^i = b_j + \delta_{b_j^i} \quad \text{on} \quad \delta_{b_j^i} = \frac{\mathcal{L}^j(i) - \mathcal{L}^j(i+k)}{kN\Delta y} \quad (5.32)$$

La determinació de k és important, doncs a partir de l'equació 5.32 es pot veure que té influència en el numerador i en el denominador. En el numerador perquè files i i $i+k$ properes tenen els valors de la SUT més correlatius i, per tant, més petit és $\mathcal{L}(i) - \mathcal{L}(i+k)$. En el denominador perquè com més gran és k , més gran és $kN\Delta y$.

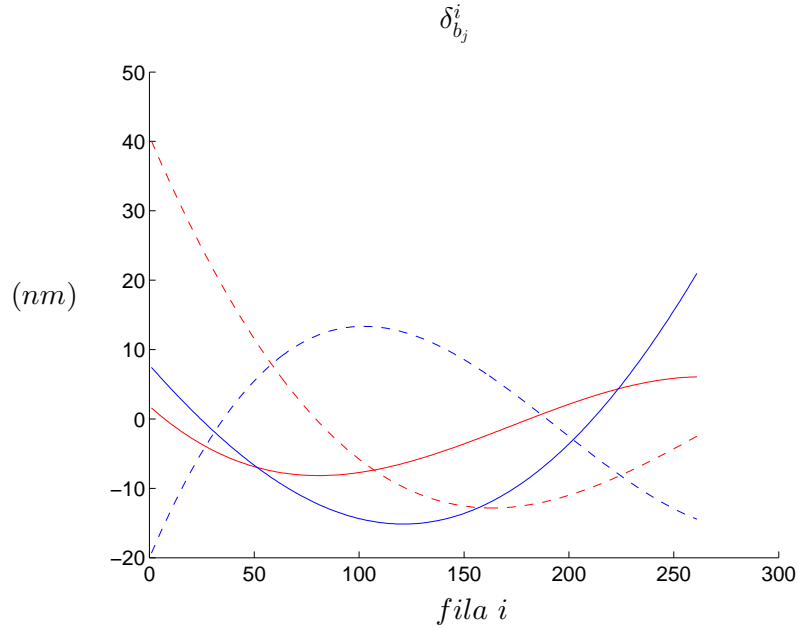


Figura 5.16: Error $\delta_{b_j}^i$ de l'equació 5.32. S'ha calculat $\delta_{b_j}^i$ en funció de la fila i -èsima per a dos SUTs diferents (en blau i en vermell). Per a cada SUT s'ha calculat $\delta_{b_j}^i$ per a cada fila $i \in [1, 262]$, amb $k = 5$ i $k = 200$. Les línies discontinues corresponen a $k = 5$ i les línies contínues a $k = 200$.

El que es veu a la figura 5.16 és que no és possible saber quin és el k que minimitza l'error en l'estimació de roll per a cada SUT concreta. En la figura 5.16 es representa l'error $\delta_{b_j}^i$ de l'equació 5.32 en funció de la fila i -èsima de la SUT. S'ha calculat $\delta_{b_j}^i$ per a dos SUTs diferents (en blau i en vermell). Per a cada SUT s'ha calculat $\delta_{b_j}^i$ per a cada fila $i \in [1, M-k]$, que en aquest cas és $i \in [1, 262]$, amb $k = 5$ i $k = 200$. Les línies discontinues corresponen a $k = 5$ i les línies contínues a $k = 200$. S'ha de tenir en compte que aquesta figura només es pot calcular si es coneix prèviament la SUT, fet que no passa en un cas realista, doncs

és just el que es vol mesurar.

El primer que es pot veure és que les quatre línies segueixen trajectòries diferents, arribant cada una a $\delta_{b_j}^i = 0$ en files i -èssimes diferents. També es pot veure que no hi ha relació entre $\delta_{b_j}^i$ i la SUT a mesurar, doncs tant les línies blaves com les vermelles segueixen trajectòries diferents entre elles, tot i ser de la mateixa SUT. També es pot veure que no hi ha relació entre $\delta_{b_j}^i$ i la k utilitzada, influint en cada cas de manera diferent al numerador i denominador de l'equació 5.32.

Tot aquesta informació de la figura 5.16 indica que no és possible determinar una k que sigui millor per a l'estimació del roll doncs en cada SUT és diferent el valor de k que minimitza l'error. Degut a aquesta incertesa, en el mètode per a l'estimació del roll, es proposa fer la mitja de tots els b_j^i de totes les files i -èssimes, a partir de l'equació 5.31,

$$b_j = \frac{\sum_{i=1}^{M-k} b_j^i}{M-k} \quad (5.33)$$

D'aquesta manera, per a cada desplaçament t_j de la superfície a mesurar es té un roll estimat b_j .

5.2.3.1 Superfícies planes

A continuació es comparen resultats de les estimacions del roll amb diferents desplaçaments t_j i dimensions totals N . Sempre en aquesta secció les superfícies a mesurar són planes, és a dir, els termes quadràtics α , β i λ de l'equació 5.27 són nuls.

Igual que en el cas del pitch, per a comparar estimacions del roll, en comptes de fer-ho a partir de l'error total $b_j - b_j$ es compara amb l'angle error de roll, E_r^j , que és l'angle error

en l'estimació del roll a partir d'un desplaçament t_j ,

$$E_r^j = \arctan(b_j - b_j) \quad (5.34)$$

on la unitat de mesura de E_r^j són els radians.

La figura 5.17 mostra diferents resultats en l'estimació del roll. S'ha fet el mateix procediment que amb la figura 5.12. Per a cada valor de l'eix x , corresponent a l'error de roll $b_j \in [-500 \ 500] \text{ nrad}$, s'agafen 500 SUTs diferents — sempre amb el mateix roll b_j corresponent al valor de l'eix x — es fan les estimacions del roll b_j de l'equació 5.33 i es calculen els errors en l'estimació del roll E_r^j de l'equació 5.34. Per a cada $b_j \in [-500 \ 500] \text{ nrad}$ es calcula la mitja (en blau) i la desviació estàndard σ (en lila). La figura 5.17 (a) mostra E_r^j amb un desplaçament $t_j = 3$ píxels, la figura 5.12 (b) amb un desplaçament $t_j = 13$ píxels i la figura 5.12 (c) és un desplaçament $t_j = 91$ píxels. El domini total és $M = 546 \text{ mm}$, $N = 546 \text{ mm}$.

Com els errors en l'estimació del pitch de la figura 5.12, els errors de la figura 5.17 són també constants. Per tant, l'error en l'estimació del roll E_r^j de l'equació 5.34 no depèn de l'error de roll b_j afegit inicialment a les SUTs. Al igual que succeeix amb el pitch, aquest resultat permet treballar en un rang d'error en les reconstruccions amb independència a la precisió de la taula lineal a l'hora de fer el desplaçament.

Es pot veure que en els tres desplaçaments la mitja és pràcticament nul·la, $\bar{E}_r^j \approx 0$, indicant que és un mètode que no té biaix. Els millors resultats es produeixen amb el desplaçament més petit $t_j = 3$, quan la desviació estàndard σ és de 0.09 nrad . Amb el desplaçament $t_j = 13$ es té una desviació estàndard σ de 0.41 nrad i els pitjors resultats es produeixen amb el desplaçament més gran $t_j = 91$, amb una desviació estàndard σ de 1.96 nrad . Així que en el cas de l'estimació del roll, a mesura que es fa gran la magnitud del desplaçament es fa gran l'error E_r^j .

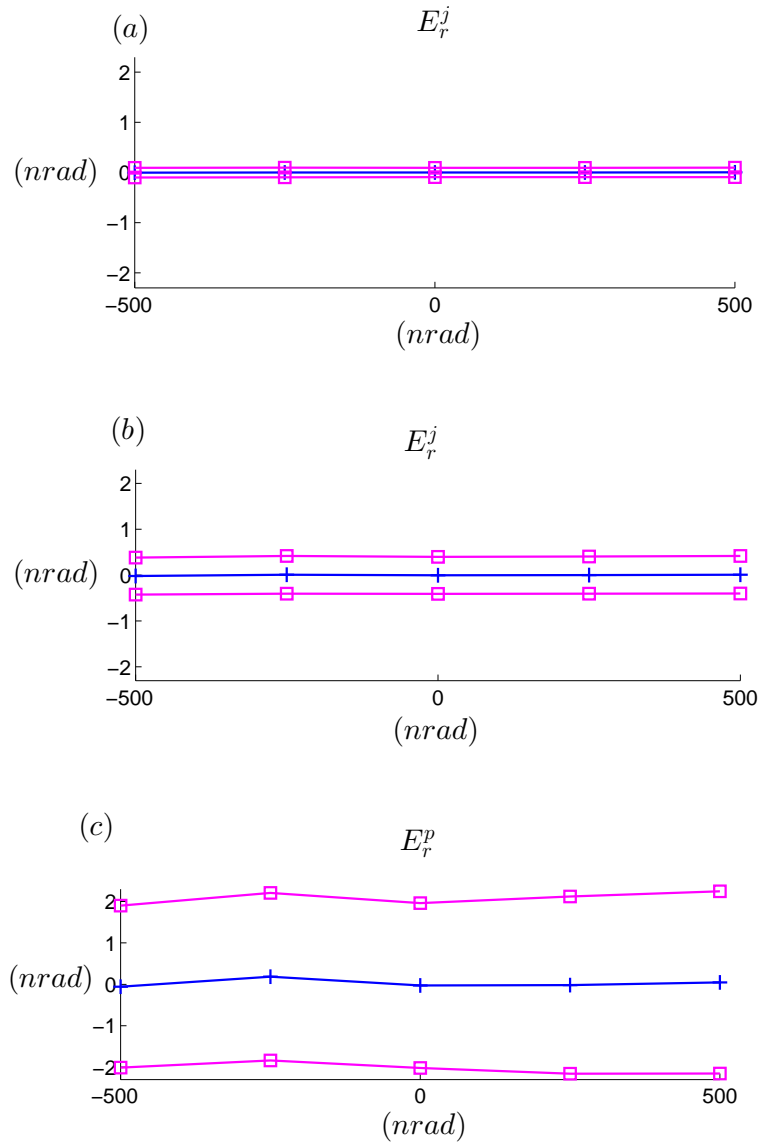


Figura 5.17: Error en l'estimació del roll. Mitja (en blau) i desviació estàndard (en lila) de l'error E_r^j de 500 SUTs, per a cada valor $b_j \in [-500, 500] nrad$ de l'eix x , amb diferents desplaçaments t_j , (a) $t_j = 3$ píxels, (b) $t_j = 13$ píxels i (c) $t_j = 91$ píxels. Domini total $M = 546 mm$, $N = 546 mm$.

En tots els casos, $\sigma < 1.96 nrad$, el que ens demostra que en un rang de desplaçaments entre els 3 i els 91 píxels, l'error en l'estimació del roll tindrà una desviació estàndard menor

de 1.96 nrad , independentment de la precisió de la taula lineal al fer el desplaçament, estant per sota del 0.09 nrad i 0.41 nrad amb desplaçaments $t_j = 3$ i $t_j = 13$ respectivament.

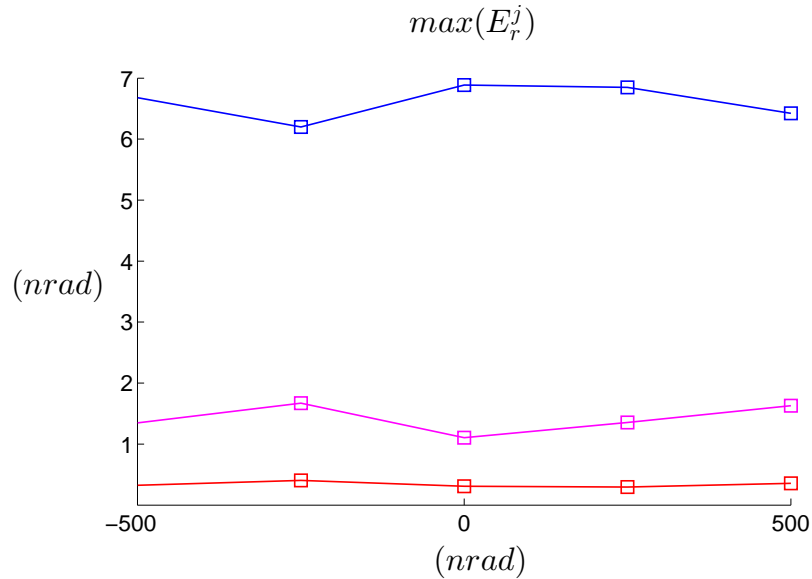


Figura 5.18: Màxim error de les 500 estimacions del roll que s'han fet per a la figura 5.17, per a cada un dels valors de roll b_j de l'eix x . Desplaçament $t_j = 3$ en vermell, $t_j = 13$ en lila, i $t_j = 91$ en blau.

Al igual que s'ha fet en l'estimació del pitch, la figura 5.18 mostra el pitjor resultat de les 500 estimacions per a cada valor de roll b_j de l'eix de les x , $\max(E_r^j)$. En vermell s'ha marcat $\max(E_r^j)$ quan $t_j = 3$, en lila quan $t_j = 13$ i en blau quan $t_j = 91$. El valor $\max(E_r^j)$ permet donar un valor garantia de les estimacions de roll per a cada desplaçament t_j . A partir de la figura 5.18 es pot garantir una estimació del roll menor de 6.88 nrad per al desplaçament $t_j = 91$, menor que 1.67 nrad per $t_j = 13$ i menor que 0.41 nrad per al desplaçament $t_j = 3$, en tot el rang de roll $b_j \in [-500 \text{ } 500] \text{ nrad}$ de la taula lineal.

Comparant els resultats de l'estimació de pitch de les figures 5.12 i 5.13 amb els de l'estimació del roll de les figures 5.17 i 5.18, en tendència general s'obtenen millors resultats en l'estimació del roll que en l'estimació del pitch, arribant amb el desplaçament $t_j = 3$ píxels a

un valor garantit per sota del nanoradiant.

Un cop vist resultats amb només un desplaçament, per tal de poder focalitzar millor en el propi mètode, es veuran alguns resultats de l'estimació del roll amb els quatre desplaçaments de l'equació 5.2 que es necessiten per a fer la reconstrucció de la superfície a mesurar utilitzant el mètode del lateral shearing seqüencial.

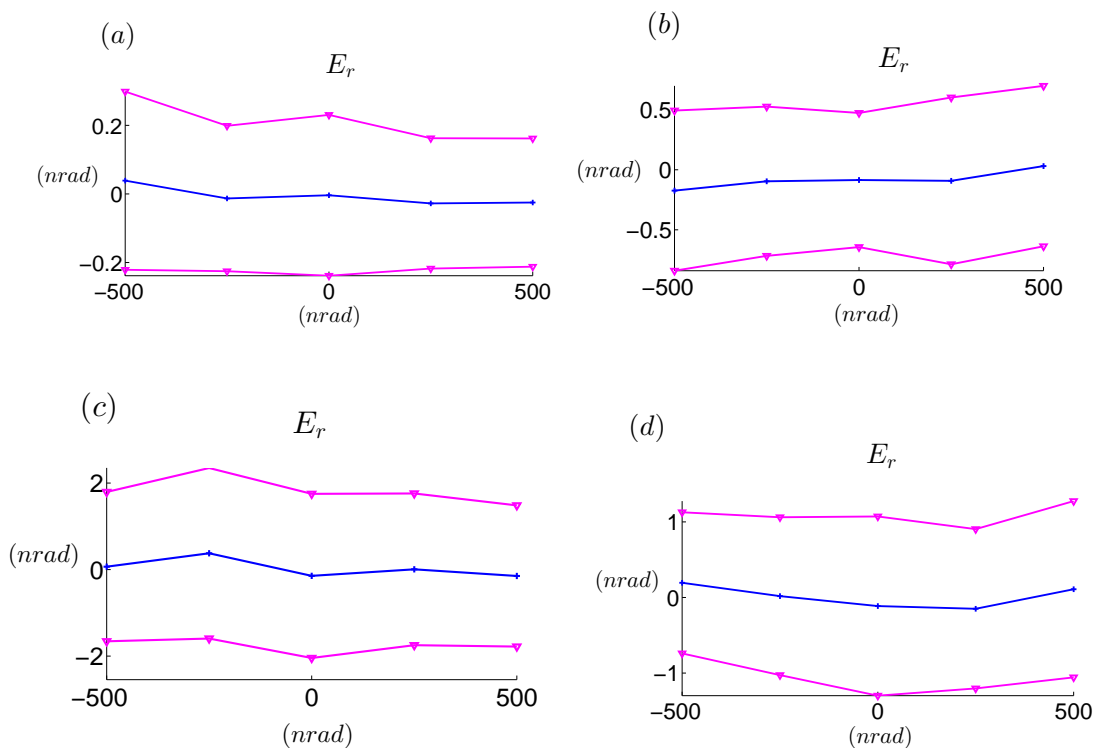


Figura 5.19: Error en l'estimació del roll en funció del roll afegit a les mesures, amb diferents dominis M i N , i desplaçaments t_1 i t_2 , t_3 , t_4 , (a) $M = N = 546$ mm, i $t_1 = t_3 = 3$, $t_2 = t_4 = 13$, (b) $M = N = 462$ mm, i $t_1 = t_3 = 2$, $t_2 = t_4 = 33$, (c) $M = N = 182$ mm i $t_1 = t_3 = 2$, $t_2 = t_4 = 7$, (d) $M = N = 330$ mm i $t_1 = t_3 = 11$, $t_2 = t_4 = 15$.

La figura 5.19 mostra errors en l'estimació del roll en diferents dominis i desplaçaments. Les combinacions de dominis i desplaçaments són les mateixes que en la figura 5.15. Igual que s'havia vist amb anterioritat a la figura 5.17, l'error en l'estimació del roll no té biaix,

doncs la mitja dels errors, marcada en blau a la figura, estan al voltant del 0. Comparant els resultats de les diferents combinacions es veu clarament la relació que hi ha entre la magnitud del domini M i N i la magnitud de l'error en l'estimació de roll. Els pitjors resultats es veuen a la figura 5.19 (c), on el domini $M = N = 182 \text{ mm}$ és el més petit de tots els casos. El segon pitjor resultat es veu a la figura 5.19 (d), amb el segon domini més petit, $M = N = 330 \text{ mm}$. El millor resultat, amb una desviació estàndard de 0.2 nrad , figura 5.19 (a) amb uns desplaçaments $t_1 = 3$ i $t_2 = 13$, té el domini $M = N = 546 \text{ mm}$ més gran de tots els casos.

Així que en l'estimació del roll, el terme N del domini, tal com es pot veure amb l'equació 5.32, és molt important, minimitzant l'error en l'estimació a mesura que el domini és més gran. S'ha de tenir en compte que aquests resultats vists fins ara són amb SUT planes. Igual que s'ha vist amb el pitch, el mètode de l'estimació del roll es veurà afectat quan les superfícies tenen terme quadràtic.

5.2.3.2 Superfícies quadràtiques

En aquesta secció s'analitza com són els resultats de l'estimació del roll quan els termes α , β i λ de l'equació 5.27 no són nuls. Igual que amb l'estimació del pitch, quan les superfícies no tenen quadràtica s'ha vist com l'error en l'estimació del pitch és constant, independentment de l'error de pitch afegit en els desplaçaments.

I igual també que en l'estimació del pitch, quan les SUTs tenen terme quadràtic, els resultats de les estimacions empitjoren. A la figura 5.20 es mostra l'error en l'estimació del roll en funció dels termes α , β i λ de l'equació 5.27. Per a cada valor de l'eix x , les superfícies a mesurar tenen els termes quadràtics α , β i λ iguals a aquest valor. Per exemple, quan $x = 0.00005$, vol dir que els termes quadràtics $\alpha = \beta = \lambda = 0.00005 \text{ m}^{-1}$ de les superfícies a mesurar. Els termes de l'eix x van des de $\alpha = \beta = \lambda = 0$, és a dir, sense terme quadràtic, fins a $\alpha = \beta = \lambda = 0.0001 \text{ m}^{-1}$. Per a cada valor de l'eix x es calcula l'error en l'estimació del roll per a 500 superfícies i es fa la mitja (en blau), i la desviació estàndard (en lila). Sempre s'afegeix un roll constant en els desplaçaments $b_j = 500 \text{ nrad}$. S'ha repetit l'experiment amb

diferents dominis M , N i diferents parelles de desplaçaments $t_1 = t_3$ i $t_2 = t_4$, seguint les mateixes combinacions que en les anteriors figures. Observar que com els valors de la mitja són molt grans, la desviació estàndard no s'aprecia en la majoria dels casos.

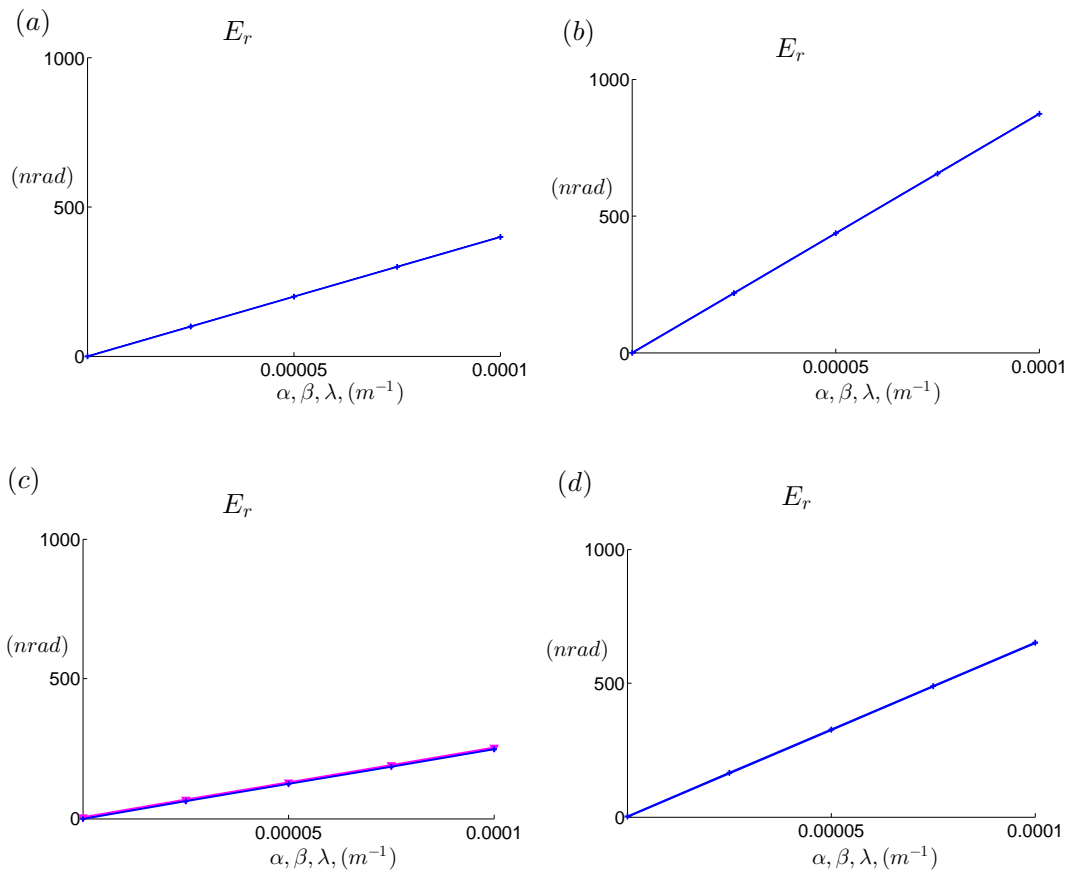


Figura 5.20: Error en l'estimació del roll, seguint la secció 5.1.2, en funció dels termes quadràtics α , β i λ de l'equació 5.27 de les superfícies a mesurar, amb diferents dominis M i N , i desplaçaments t_1 i t_2 , t_3 , t_4 , (a) $M = N = 546 mm$, i $t_1 = t_3 = 3$, $t_2 = t_4 = 13$, (b) $M = N = 462 mm$, i $t_1 = t_3 = 2$, $t_2 = t_4 = 33$, (c) $M = N = 182 mm$ i $t_1 = t_3 = 2$, $t_2 = t_4 = 7$. (d) $M = N = 330 mm$ i $t_1 = t_3 = 11$, $t_2 = t_4 = 15$. En tots els casos l'error de roll és $b_j = 500 nrad$.

Els resultats són similars als de l'estimació del pitch de la figura 5.15, és a dir, també es

pot observar que l'error en l'estimació del roll depèn de manera lineal dels termes quadràtics α , β i λ de l'equació 5.27 de les superfícies a mesurar. I igual que amb el pitch, i comparant amb la figura 5.17, quan les superfícies a mesurar tenen termes quadràtics, els resultats són clarament pitjors. Com es veurà més endavant a la secció 5.3 amb les reconstruccions de superfícies amb aquests resultats d'estimació de roll, la precisió del mètode en superfícies que tenen terme quadràtic no és suficient. És per això que és necessari, igual que s'ha vist en l'estimació del pitch, afegir informació addicional de la quadràtica, tal com es farà al capítol 6, per a tenir una acurada reconstrucció de superfícies usant el lateral shearing sequencial.

5.3 Resultats de reconstruccions

Un cop s'ha vist el mètode per a l'estimació del pitch i del roll, així com alguns resultats de les estimacions, es veuran resultats de reconstruccions de SUTs mitjançant el lateral shearing sequencial amb les estimacions de pitch i roll explicades i mostrades en el capítol 5. Igual que s'ha fet per a l'anàlisi del mètode d'estimació de pitch i roll, es divideix l'anàlisi en dos tipus de superfícies a mesurar, en funció de si tenen terme quadràtic o no.

5.3.1 Superfícies planes

A continuació es comparen resultats de reconstrucció de superfícies a partir del lateral shearing sequencial i amb l'estimació de pitch i roll, amb diferents desplaçaments t_j i dimensions totals M i N . En aquesta secció 5.3.1 les superfícies a mesurar sempre són planes, és a dir, els termes quadràtics α , β i λ de l'equació 5.27 són nuls.

Tal com s'ha vist en la figura 5.8 i en el posterior anàlisi, els errors de pitch i roll afegeixen dos tipus d'error en les reconstruccions: un error quadràtic (figura 5.8 (a)) i uns errors de vora degut a les imprecisions en l'extensió natural (figura 5.8 (b)).

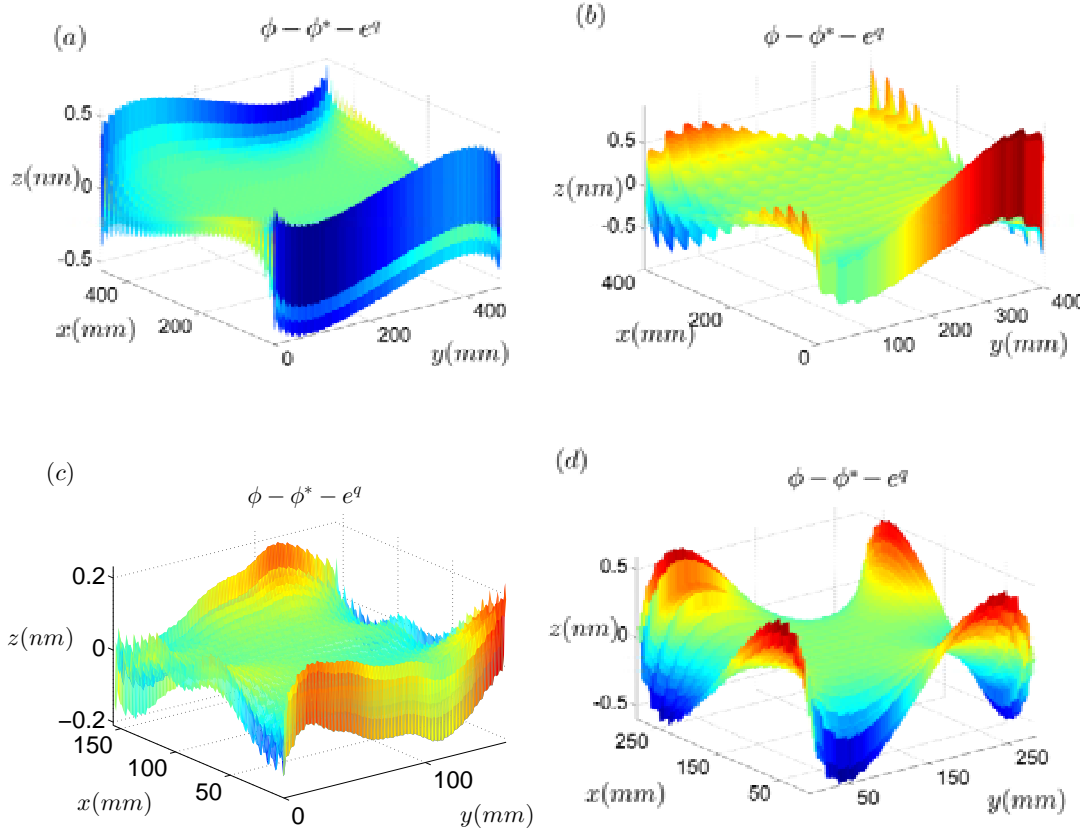


Figura 5.21: Error de reconstrucció $\phi - \phi^* - e^q$, usant el lateral shearing seqüencial i l'estimació de pitch i roll, per a diferents dominis i desplaçaments, amb diferents dominis M i N , i desplaçaments t_1 i t_2 , t_3 , t_4 , (a) $M = N = 546 \text{ mm}$, i $t_1 = t_3 = 3$, $t_2 = t_4 = 13$, (b) $M = N = 462 \text{ mm}$, i $t_1 = t_3 = 2$, $t_2 = t_4 = 33$, (c) $M = N = 182 \text{ mm}$ i $t_1 = t_3 = 2$, $t_2 = t_4 = 7$. (d) $M = N = 330 \text{ mm}$ i $t_1 = t_3 = 11$, $t_2 = t_4 = 15$. En tots els casos els errors de pitch i de roll són $a_j = b_j = 500 \text{ nrad}$.

La figura 5.21 mostra diferents exemples d'errors de reconstrucció de superfícies, eliminant al final el terme quadràtic que millor s'ajusta seguint l'equació 5.17, és a dir, resultats anàlegs als de la figura 5.8 (b). En el desplaçament de les mesures s'ha afegit un error de pitch $a_j = 500 \text{ nrad}$ i de roll $b_j = 500 \text{ nrad}$. En cada figura, les combinacions dels dominis i desplaçaments t_1 i t_2 són diferents entre elles, seguint els mateixos que en les anteriors figures, en la figura 5.21 (a) el domini és $M = N = 546 \text{ mm}$, i els desplaçaments són $t_1 = 3$ i $t_2 = 13$,

a la figura 5.21 (b) el domini és $M = N = 462 \text{ mm}$, i desplaçaments $t_1 = 2$ i $t_2 = 33$, en la figura 5.21 (c) el domini $M = N = 182 \text{ mm}$ i desplaçaments $t_1 = 2$ i $t_2 = 7$; i en la figura 5.21 (d) el domini $M = N = 330 \text{ mm}$ i desplaçaments $t_1 = 11$ i $t_2 = 15$. En tots els casos els errors de pitch i roll són $a_j = b_j = 500 \text{ nrad}$.

Comparant els resultats, es poden veure diferents formes d'error. Totes elles, però, provenen de la mateixa font d'errors, que és l'error en l'estimació del pitch i el roll, que afecta a l'extensió natural i aquesta no acaba de fer correctament la periodització de la superfície a mesurar tal com és necessari, produint els errors de vora. Tots els exemples de la figura 5.21 són errors de vora, que varien de magnitud i lleugerament de forma en funció dels dos desplaçaments t_1 i t_2 . En quant a la magnitud dels resultats, es pot veure que tots els errors estan al voltant del nanòmetre peak to valley.

La figura 5.21 són exemples d'errors de reconstrucció, però per tal de fer un anàlisi més acurat, la figura 5.22 mostra el peak to valley de l'error en la reconstrucció en funció de l'error de pitch i roll en els desplaçaments amb molts més casos analitzats. Per a cada valor de l'eix x , s'ha afegit el mateix pitch i roll en els desplaçaments. Per exemple, si $x = 500 \text{ nrad}$ aleshores s'ha afegit un pitch $a_j = 500 \text{ nrad}$ i un roll $b_j = 500 \text{ nrad}$. Per a cada valor de x s'han fet 500 reconstruccions, sempre amb superfícies diferents i sempre afegint l'error de pitch i roll corresponent. De totes les reconstruccions s'ha calculat el peak to valley i s'ha calculat la mitja (en blau) i la desviació estàndard (en lila), que són les que es mostren a la figura 5.22. Les combinacions de dimensions M i N i desplaçaments t_1 i t_2 són les mateixes que en les figures anteriors.

Com és de suposar, degut a que l'error de pitch i de roll es manté constant tal com s'ha vist en les figures 5.14 i 5.19, el peak to valley de l'error en la reconstrucció $\phi - \phi^* - e^g$ també es manté constant i independent a l'error de pitch a_j i roll b_j afegit en els desplaçaments.

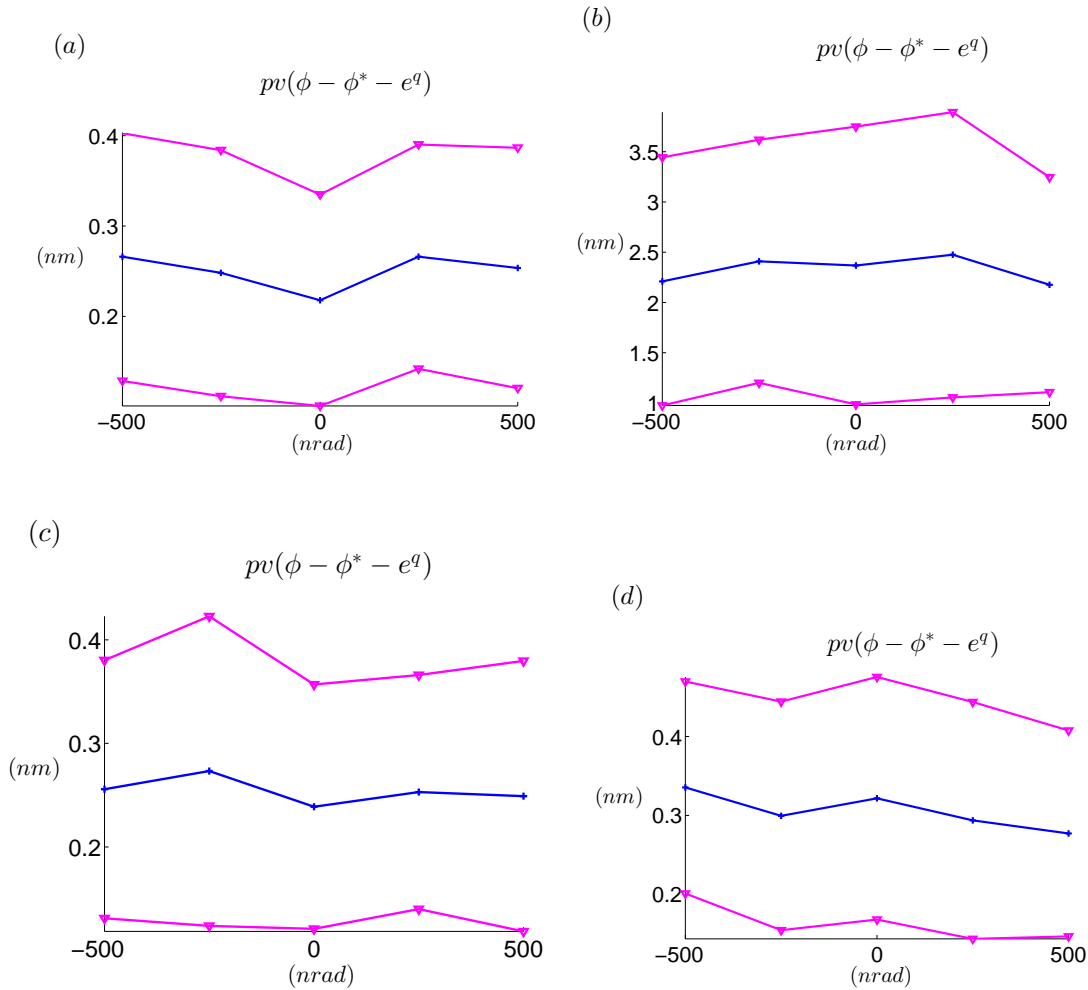


Figura 5.22: Mitja del peak to valley de l'error de reconstrucció $\phi - \phi^* - e^q$ usant el mètode del lateral shearing seqüencial, amb estimacions de pitch i roll entremig, en funció de l'error de pitch i roll inicial afegit als desplaçaments, amb diferents dominis M i N , i desplaçaments t_1 i t_2 , t_3 , t_4 , (a) $M = N = 546$ mm, i $t_1 = t_3 = 3$, $t_2 = t_4 = 13$, (b) $M = N = 462$ mm, i $t_1 = 2$, $t_3 = 33$, (c) $M = N = 182$ mm i $t_1 = t_3 = 2$, $t_2 = t_4 = 7$, (d) $M = N = 330$ mm i $t_1 = t_3 = 11$, $t_2 = t_4 = 15$.

Aquesta figura demostra el fet, tal com s'ha dit intuït anteriorment, de que la precisió de la reconstrucció d'una superfície amb el lateral shearing seqüencial, no depèn de l'error de pitch i roll introduïts per la taula lineal, degut a l'estimació de pitch i roll que es fa en

etapes d'entremig del mètode. Les magnituds dels errors varien lleugerament en funció de les combinacions de desplaçaments i dominis, obtenint similars resultats en les figures 5.22 (a), (c) i (d). L'explicació als pitjors resultats que es tenen en el cas de la figura 5.22 (b), on la mitja no està centrada sinó al voltant dels 2.3 nm , és degut a les combinacions de dominis i desplaçaments, en que unes combinacions són més sensibles que altres als errors de pitch i roll quan es fa l'extensió natural, afegint més errors de vora.

En tots els casos, però, es pot afirmar que mitjançant el mètode del lateral shearing seqüencial, en superfícies planes i amb les estimacions de pitch i roll intermitges, s'aconsegueix una precisió constant independent dels errors de pitch i roll deguts a la taula lineal.

5.3.2 Superfícies amb quadràtica

En la secció anterior s'han comparat resultats de reconstrucció de superfícies planes. A continuació es comparen resultats també de reconstrucció de superfícies a partir del lateral shearing seqüencial i amb l'estimació de pitch i roll, però les superfícies a mesurar no són planes sinó que els termes quadràtics α , β i λ de l'equació 5.27 no són nuls.

Els termes quadràtics influeixen en l'estimació del pitch i roll que, alhora, afecta a l'extensió natural. La figura 5.23 mostra errors de reconstrucció $\phi - \phi^* - e^q$ amb diferents combinacions de desplaçaments i dominis. En tots els casos el perfil d'error és el mateix, canviant el període de l'eix y , entre els $[-2 \ 2] \text{ nm}$ d'error en el cas de la figura 5.23 (c) fins als $[-100 \ 100] \text{ nm}$ d'error en la figura 5.23 (b). En tots els casos l'error de pitch i roll afegit és de $a_j = 500 \text{ nrad}$ i $b_j = 500 \text{ nrad}$, respectivament, i les superfícies a mesurar tenen com a termes de la quadràtica de l'equació 5.27, $\alpha = 0.00005 \text{ m}^{-1}$, $\beta = 0.00005 \text{ m}^{-1}$ i $\lambda = 0.00005 \text{ m}^{-1}$. Com es pot veure, el peak to valley en tots els casos és més gran que en els exemples de la figura 5.21.

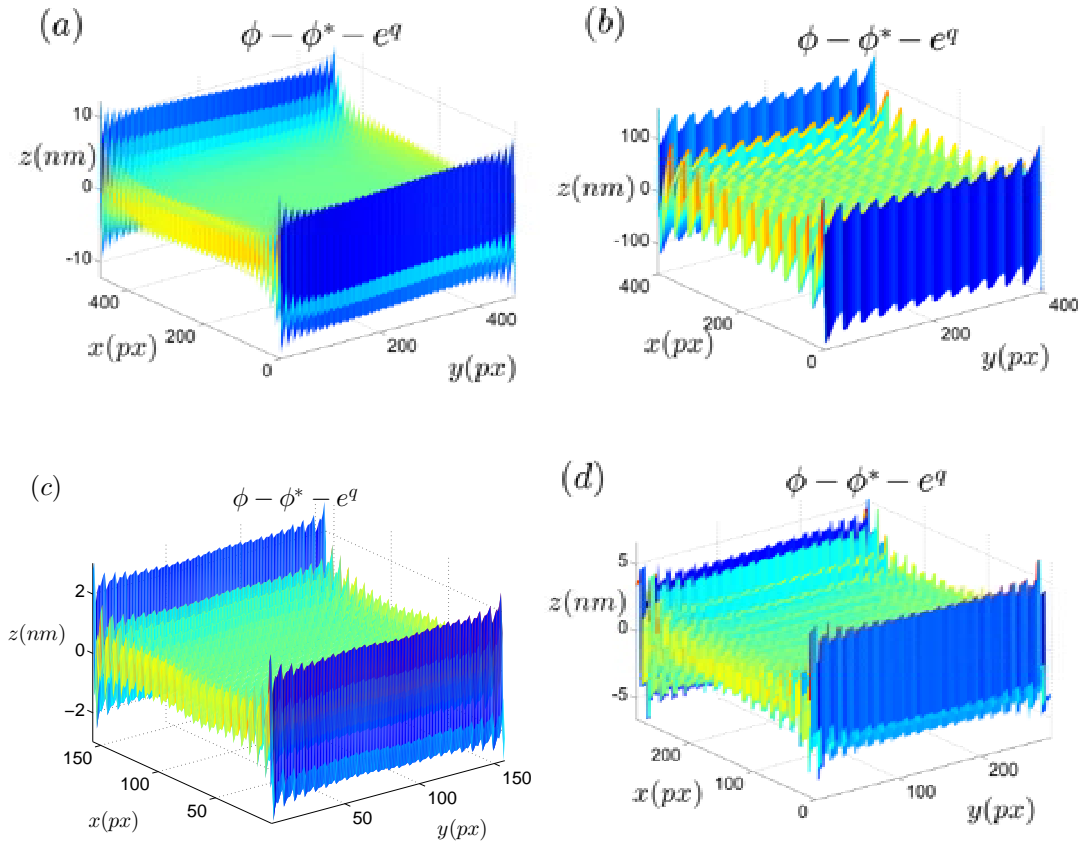


Figura 5.23: Exemples d error de reconstrucció $\phi - \phi^* - e^q$, usant el lateral shearing seqüencial i l estimació de pitch i roll de les seccions 5.1.1 i 5.1.2, seguint l equació 5.17, amb diferents dominis M i N , i desplaçaments t_1 i t_2, t_3, t_4 , (a) $M = N = 546 \text{ mm}$, i $t_1 = t_3 = 3 \text{ mm}$, $t_2 = t_4 = 13 \text{ mm}$, (b) $M = N = 462 \text{ mm}$, i $t_1 = t_3 = 2 \text{ mm}$, $t_2 = t_4 = 33 \text{ mm}$, (c) $M = N = 182 \text{ mm}$ i $t_1 = t_3 = 2 \text{ mm}$, $t_2 = t_4 = 7 \text{ mm}$, (d) $M = N = 330 \text{ mm}$ i $t_1 = t_4 = 11 \text{ mm}$, $t_2 = t_4 = 15 \text{ mm}$. En tots els casos l error de pitch i roll afegit és de $a_j = 500 \text{ nrad}$ i $b_j = 500 \text{ nrad}$.

Un anàlisi més general de com són les reconstruccions de superfícies que tenen termes quadràtics es pot veure a la figura 5.24, que mostra el peak to valley de l error en les reconstruccions usant el lateral shearing seqüencial en funció dels termes quadràtics de les superfícies a mesurar. En aquests casos s afegeix un error als desplaçaments de pitch i un roll constants de $a_j = 500 \text{ nrad}$ i $b_j = 500 \text{ nrad}$, respectivament. Per a cada valor de l eix x , les superfícies

ϕ a mesurar tenen els termes quadràtics α , β i λ igual a aquest valor. Per exemple, quan $x = 0.00005$, vol dir que els termes quadràtics $\alpha = \beta = \lambda = 0.00005 \text{ m}^{-1}$ de les superfícies a mesurar. Per a cada valor de l'eix x es calcula l'error en l'estimació del pitch per a 500 superfícies i es fa la mitja (en blau), i la desviació estàndard (en lila).

S'ha repetit l'experiment amb diferents dominis M , N i diferents parelles de desplaçaments t_1 i t_2 . En tots els casos, la dependència del peak to valley de l'error és lineal en relació als termes quadràtics de les superfícies a mesurar, és a dir, des de l'inici quan $\alpha = \beta = \lambda = 0$, l'error de reconstrucció augmenta de forma lineal a mesura que augmenten els termes quadràtics, arribant la mitja del peak to valley de l'error a valors d'entre 2 i 200 nm quan $\alpha = \beta = \lambda = 0.0001 \text{ m}^{-1}$.

Els resultats de la figura 5.24 confirmen el que s'havia vist ja en els anàlisis del pitch i del roll, i és que aquests errors de pitch i roll en les estimacions fa que les reconstruccions, quan les superfícies a mesurar tenen terme quadràtic, no tinguin la precisió que s'espera del mètode del lateral shearing sequencial.

Aquest error en l'estimació del pitch i del roll, també tal com s'ha dit, prové del fet que el mètode no és capaç de distingir entre els termes quadràtics i els errors de pitch i de roll. És per això necessari, en el cas de que les superfícies tinguin quadràtica, afegir algo de la informació d'aquesta quadràtica a les mesures, per tal que la reconstrucció usant el lateral shearing sequencial tingui la precisió adequada.

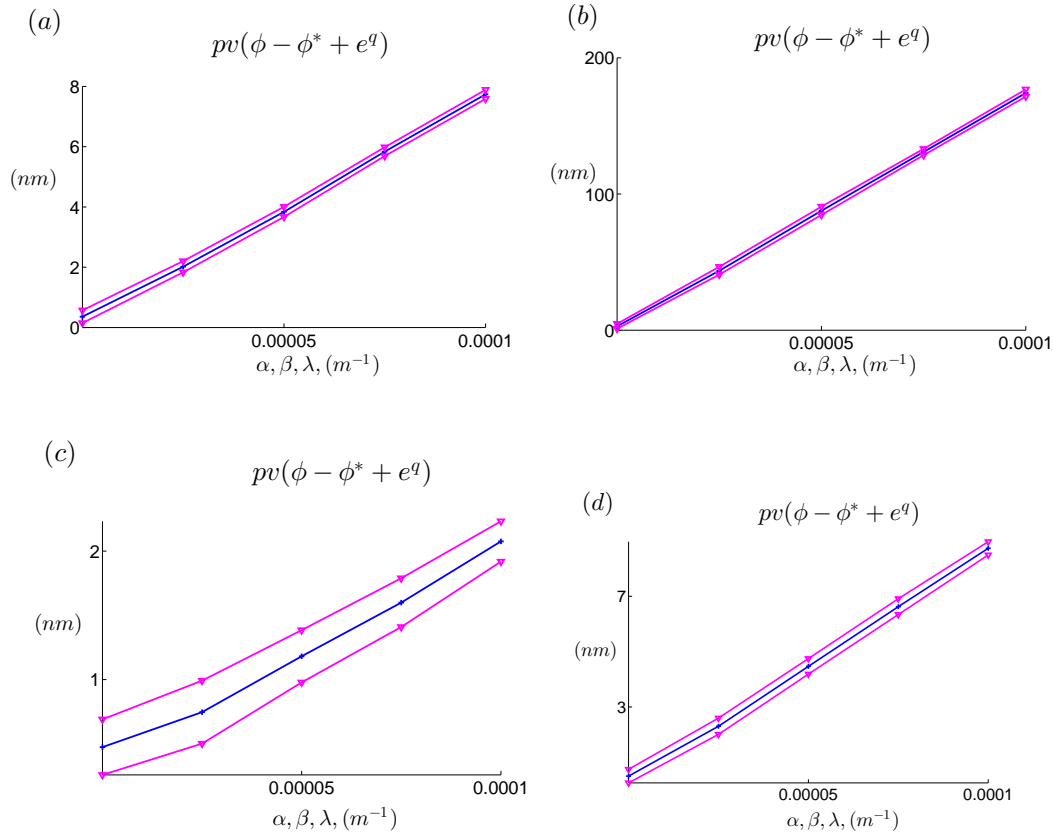
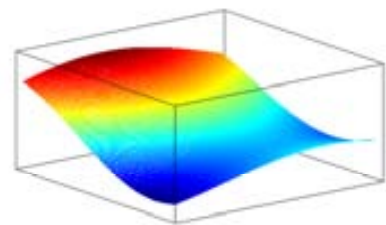


Figura 5.24: Peak to valley de l'error de reconstrucció, $\phi - \phi^* - e^q$, usant el lateral shearing sequencial i l'estimació de pitch i roll de les seccions 5.1.1 i 5.1.2, en funció dels termes quadràtics α , β i λ de l'equació 5.27 de la superfície a mesurar, amb diferents dominis M i N , i desplaçaments t_1 i t_2 , t_3 , t_4 , (a) $M = N = 546$ mm, i $t_1 = t_3 = 3$ mm, $t_2 = t_4 = 13$ mm, (b) $M = N = 462$ mm, i $t_1 = t_3 = 2$ mm, $t_2 = t_4 = 33$ mm, (c) $M = N = 182$ mm i $t_1 = t_3 = 2$ mm, $t_2 = t_4 = 7$ mm, (d) $M = N = 330$ mm i $t_1 = t_3 = 11$ mm, $t_2 = t_4 = 15$ mm. En tots els casos s'ha afegit un error de pitch i roll als desplaçaments $a_j = 500$ nrad i $b_j = 500$ nrad, respectivament.

CAPÍTOL 6

INFORMACIÓ DE LA QUADRÀTICA 3-flat test

En aquest capítol es veuran els resultats del nou mètode proposat de 3-flat test per a l'estimació de la quadràtica de la superfície de referència així com els resultats en la reconstrucció de superfícies usant el lateral shearing seqüencial quan s'introdueix aquesta informació de la quadràtica a les mesures.



6.1 Eliminació de la quadràtica

Tal com s'ha vist amb les figures 5.23 i 5.24, es necessita informació addicional dels termes quadràtics de les superfícies per a una reconstrucció acurada usant el lateral shearing seqüencial.

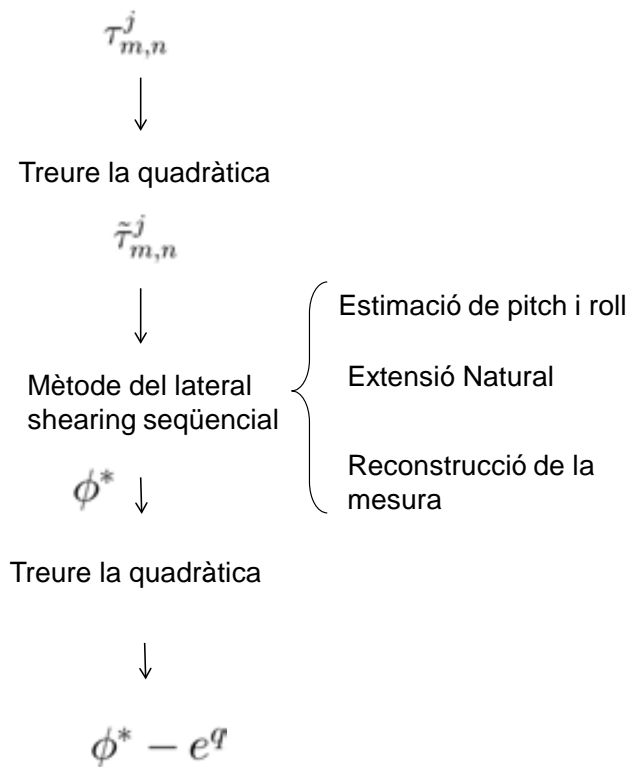


Figura 6.1: Esquema del mètode de reconstrucció amb el lateral shearing seqüencial eliminant la quadràtica a l'inici i al final del procés.

Un primer mètode consisteix en eliminar la quadràtica a l'inici i al final del procés del lateral shearing seqüencial. Aquest mètode es fa per veure que la part sense la quadràtica es reconstrueix bé. El mètode de l'eliminació de la quadràtica segueix l'esquema de la figura 6.1. Inicialment es tenen les mesures $\tau_{m,n}^j$ donades per l'interferòmetre. Es calculen les quadràtiques que millor s'ajusten per mínims quadrats a cada una de les mesures i es treuen, obtenint d'aquesta manera $\tau_{m,n}^j$,

$$\tau_{m,n}^j = \tau_{m,n}^j - \alpha_j^\tau x_{m,n}^2 - \beta_j^\tau y_{m,n}^2 - \lambda_j^\tau x_{m,n} y_{m,n}$$

$m \quad 1 \quad M \quad n \quad 1 \quad N \quad j \quad 0 \quad 1 \quad 2 \quad 3 \quad 4$ (6.1)

A partir d'aquestes noves mesures sense la quadràtica, es fa el mètode del lateral shearing seqüencial explicat en la secció 5, inclosa també l'estimació de pitch i roll i l'extensió natural. D'aquesta manera s'obté la SUT reconstruïda ϕ^* . Qualsevol terme quadràtic que tingui ϕ^* està relacionat amb l'error en l'estimació de pitch i roll, doncs les mesures inicials τ no tenen quadràtica. Així que es torna a treure la quadràtica que millor s'ajusti per mínims quadrats, e^q , obtenint d'aquesta manera $\phi^* - e^q$.

Per tal de poder comprovar que efectivament el mètode reconstrueix bé, i com que s'està treballant amb simulacions, es pot agafar directament la SUT, estimar la quadràtica per mínims quadrats i eliminar-la,

$$\phi_{m,n} = \phi_{m,n} - \alpha_j^\phi x_{m,n}^2 - \beta_j^\phi y_{m,n}^2 - \lambda_j^\phi x_{m,n} y_{m,n}$$

$m \quad 1 \quad M \quad n \quad 1 \quad N \quad j \quad 0 \quad 1 \quad 2 \quad 3 \quad 4$ (6.2)

La diferència entre ϕ i $\phi^* - e^q$ és la que ens dóna la precisió del mètode del lateral shearing seqüencial sense la part quadràtica. La informació de la quadràtica s'afegirà més endavant. Primer es comprovarà que el mètode fent el procés descrit en la figura 6.1 funciona.

Per tal de veure la precisió del mètode eliminant abans i després del procés la quadràtica, la figura 6.2 mostra l'error en la reconstrucció de la superfície seguint els passos de la figura 6.1. Es mostra la mitja (en blau) i la desviació estàndard (en lila) del peak to valley de l'error en la reconstrucció — la diferència entre ϕ i $\phi^* - e^q$ — de 500 SUTs, en funció dels termes quadràtics α , β i λ de l'equació 5.27 d'aquestes SUTs. En tots els casos s'ha afegit un error de pitch i roll als desplaçaments $a_j = 500 \text{ nrad}$ i $b_j = 500 \text{ nrad}$, respectivament. Les combinacions de domini M i N i desplaçaments t_1 , t_2 , t_3 , t_4 són iguals als de les figures 5.24. En aquest capítol, per qüestions de comprensió i degut a que sempre el desplaçament $t_1 = t_3$ i el desplaçament $t_2 = t_4$, quan en descripcions de procediments o resultats es digui t_1 també s'estarà referint a t_3 , i quan es digui t_2 també s'estarà dient t_4 .

Si es comparen resultats quan a l'inici no s'elimina la quadràtica — figura 5.24 — i quan s'elimina — figura 6.2 —, la primera gran diferència és que en aquest segon cas l'error es manté constant, independentment dels termes quadràtics α , β i λ . De fet els resultats estan més propers als mostrats a la figura 5.22, on les superfícies a mesurar són planes, i és que el fet d'eliminar la quadràtica a l'inici neutralitza els errors d'estimació de pitch i roll i, per tant, els errors posteriors de vora.

Els resultats entre les figures 6.2 i 5.22, es veu que són molt similars en quan a forma i magnitud cas per cas, estant la desviació estàndard i la mitja per sota del nanòmetre, excepte en el cas (b). En el cas de la figura 6.2 (b), tal com s'ha comentat també en anterioritat, es suposa que el biaix que es té i la desviació estàndard més alta en comparació a la resta, és degut a la diferència que hi ha de magnitud entre els dos desplaçaments $t_1 = 2 \text{ mm}$ i $t_2 = 33 \text{ mm}$, que afecta més a l'extensió natural. Més concretament, el que succeeix és que tal com es pot veure en l'equació 2.34, la funció diferències estesa mitjançant l'extensió natural té tants valors estesos com la magnitud del desplaçament. Per tant, com més gran és el desplaçament, més valors s'introdueixen en l'extensió i més afecten els errors de les estimacions de pitch i roll.

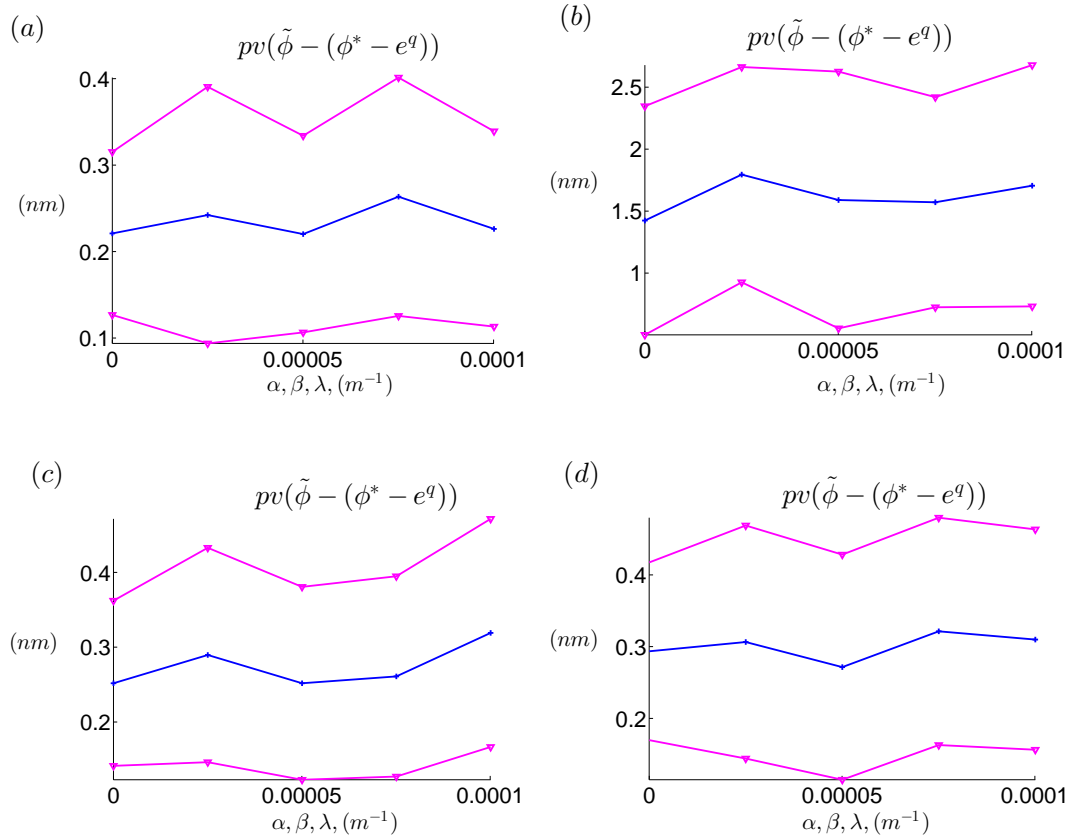


Figura 6.2: Peak to valley de l'error de reconstrucció, $\phi - (\phi^* - e^q)$, usant el lateral shearing seqüencial i l'estimació de pitch i roll de les seccions 5.1.1 i 5.1.2, en funció dels termes quadràtics α , β i λ de l'equació 5.27 de la superfície a mesurar, amb diferents dominis M i N , i desplaçaments t_1 i t_2 , (a) $M = N = 546 \text{ mm}$, i $t_1 = 3$, $t_2 = 13$, (b) $M = N = 462 \text{ mm}$, i $t_1 = 2$, $t_2 = 33$, (c) $M = N = 182 \text{ mm}$ i $t_1 = 2$, $t_2 = 7$. (d) $M = N = 330 \text{ mm}$ i $t_1 = 11$, $t_2 = 15$. En tots els casos s'ha afegit un error de pitch i roll als desplaçaments $a_j = 500 \text{ nrad}$ i $b_j = 500 \text{ nrad}$, respectivament.

Tal com s'ha vist amb la figura 6.2 si es fa un tractament previ de la quadràtica abans de fer la reconstrucció amb el lateral shearing seqüencial es tenen reconstruccions més acurades i sense la influència dels termes quadràtics de la superfície a mesurar. El que succeeix quan s'ha eliminat els termes quadràtics de les mesures és que al final de la reconstrucció no es té cap informació de la quadràtica de la SUT.

Per tal d'afegir la informació de la quadràtica de la SUT, una possible manera és a partir de la quadràtica de la superfície de referència. És a dir, saber la quadràtica de la SUT a partir de l'estimació de la quadràtica de la superfície de referència. Per mínims quadrats es calcula la quadràtica de les mesures τ^j , τ^q , que són els termes α^τ , β^τ i λ^τ de l'equació 6.1. La quadràtica de les mesures té influència de la quadràtica de la SUT i de la quadràtica de la superfície de referència. Per tant, si es coneix la quadràtica de la referència també se sap la quadràtica de la SUT, ϕ^q .

Un cop es té la quadràtica de la SUT, es segueix l'esquema de la figura 6.1, afegint la quadràtica de la SUT al final de tot del procés. Explicat pas a pas, s'elimina la quadràtica de les mesures $\tau_{m,n}^j$, es fa el procés del lateral shearing seqüencial explicat a la secció 5, per així tenir ϕ^* . La quadràtica que tingui ϕ^* és deguda a l'error en l'estimació de pitch i roll, així que s'elimina la quadràtica que millor s'ajusti per mínims quadrats, e^q , obtenint d'aquesta manera $\phi^* - e^q$. Per finalitzar, a $\phi^* - e^q$ se li afegeix la quadràtica de la SUT que coneixem a partir de la de la superfície de referència, $\phi^* - e^q + \phi^q$. La diferència entre ϕ i $\phi^* - e^q + \phi^q$ és el que dona la precisió del mètode. Com que hem vist que el mètode de la figura 6.1 donava la precisió esperada, només falta un mètode per a l'estimació de la quadràtica de la SUT per tal d'afegir-la al final del procés.

A la ϕ i $\phi^* - e^q + \phi^q$ seguint secció 6.2 es fa un anàlisi i es proposa un nou mètode per tal d'estimar la quadràtica de la superfície de referència, mitjançant el mètode del 3-flat test. A continuació es veurà en detall el procés i resultats.

6.2 3-flat test

Tal com s'ha vist en la secció 5.3, és necessari introduir alguna informació addicional a les mesures inicials donades per l'interferòmetre per tal de que la reconstrucció mitjançant el lateral shearing seqüencial tingui la precisió adequada. I tal com s'ha dit també, una possibilitat és

la d introduir informació de la superfície de referència. Un possible mètode per tal d introduir aquesta informació de la quadràtica és mitjançant el nou mètode de 3-flat test proposat en aquesta secció.

En l interferòmetre es fa una comparativa de superfícies per parelles segons l equació 5.2. El mètode del 3-flat test fa servir aquesta comparació entre dues superfícies per tal de mesurar-les. És a dir, si es tenen tres superfícies A , B i C , amb una sèrie de comparacions i combinacions entre elles, es pot arribar a extreure informació de la forma, bàsicament usant la simetria que hi ha en les superfícies [AW93]. Hi ha nombroses variants del mètode del 3-flat test, arribant a una precisió en l ordre del nanòmetre [Kuc01, Gri07, YMM⁺13].

En el nostre cas només necessitem la informació de la quadràtica de la superfície de referència, així que proposem un nou mètode.

6.2.1 Nou mètode per a l'estimació de la quadràtica

Una superfície qualsevol es pot descompondre en una part simètrica i una part anti-simètrica. La part simètrica té unes característiques, analitzades a través de la paritat més endavant, que fan que es pugui extreure informació de la superfície a partir de les relacions de simetria.

En aquesta secció 6.2.1 es proposa un nou mètode del 3-flat test, mitjançant la combinació de 4 mesures donades per l interferòmetre i usant 3 superfícies, per tal d obtenir la quadràtica d una d elles. D aquestes superfícies, per al mètode del lateral shearing sequencial, només és necessari la part quadràtica de la superfície d una de les superfícies, que serà la superfície de referència utilitzada en l equació 5.2. Amb aquest nou mètode del 3-flat test, de les 3 superfícies mesurades A , B i C , només explicitem les equacions de la part quadràtica de la superfície C , que és la que actuarà com a superfície de referència.

El nou mètode proposat en aquesta secció per a l estimació de la quadràtica de la superfície de referència utilitzant els principis del 3-flat test amb quatre mesures donades per

l'interferòmetre, M^1 , M^2 , M^3 i M^4 . Les combinacions de les superfícies es mostren a la figura 6.3. Les coordenades x , y i z senyalen les coordenades del detector de l'interferòmetre. Les tres superfícies, A en blau, B en vermell i C en verd, es col·loquen segons la figura 6.3. S'ha de tenir en compte que en aquesta secció les superfícies, per simplicitat, són quadrades amb el mateix domini M i N , doncs durant el procés es gira una de les superfícies 90 graus. En el cas que no ho fossin, es restringirien les mesures a seccions quadrades, per tal de poder fer 3-flat test descrit en aquesta secció de manera correcta.

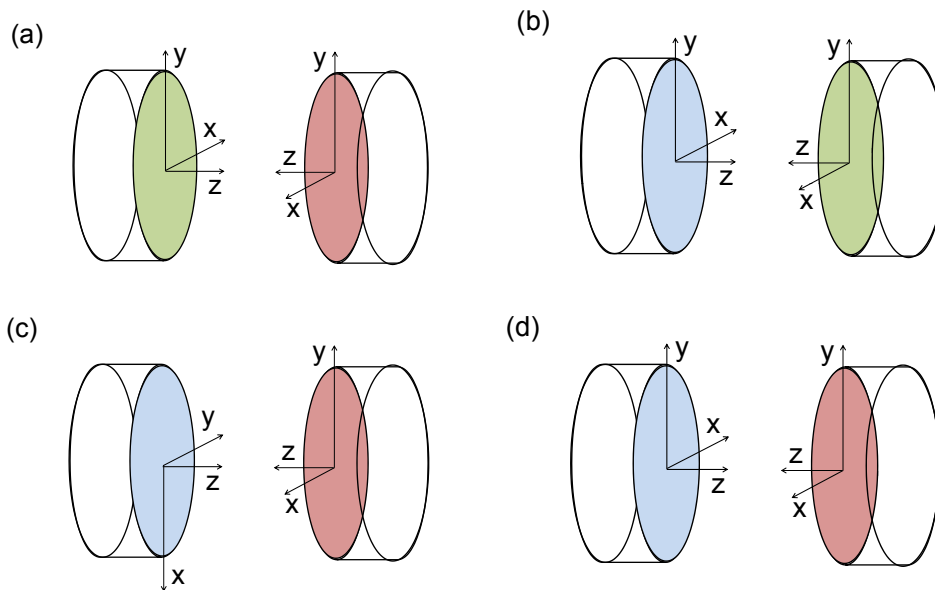


Figura 6.3: Esquema per al 3-flat test amb tres superfícies, A (blau), B (vermell) i C (verd). Les coordenades x , y i z senyalen les coordenades del detector de l'interferòmetre. (a) Superfície B (posició frontal) i superfície C (posició darrera), (b) Superfície A (frontal) i superfície B (darrera), (c) Superfície A rotada 90° (frontal) i superfície C (darrera), (d) Superfície A (frontal) i superfície C (darrera).

La figura 6.3 (a) és la combinació de la superfície B (posició frontal) i la superfície C (posició darrera). Amb aquesta posició es té la primera mesura M^1 de l'interferòmetre. A la figura 6.3 (b) es té la combinació de la superfície A (frontal) i la superfície B (darrera), que

ens donen la segona mesura M^2 de l'interferòmetre. La figura 6.3 (c) es mostra les superfícies utilitzades en la tercera mesura M^3 , que són la superfície A rotada 90° (frontal) i la superfície C (darrera). A la figura 6.3 (d) es mostra la última mesura M^4 donada per l'interferòmetre i que està mesurant les superfícies A (frontal) i C (darrera).

Analíticament correspon a la següent equació,

$$\begin{aligned}
 M^1 &= B + C^X \\
 M^2 &= A + B^X \\
 M^3 &= A^{90} + C^X \\
 M^4 &= A + C^X
 \end{aligned} \tag{6.3}$$

Si es suposa que les superfícies A , B i C es poden descriure a partir de les funcions f_A , f_B i f_C de la següent manera,

$$\begin{aligned}
 A_{m,n} &= f^A(x_m \ y_n) & m &= 1 & M &= n &= 1 & N \\
 B_{m,n} &= f^B(x_m \ y_n) & m &= 1 & M &= n &= 1 & N \\
 C_{m,n} &= f^C(x_m \ y_n) & m &= 1 & M &= n &= 1 & N
 \end{aligned} \tag{6.4}$$

aleshores el superíndex X en la superfície C de l'equació 6.3 equival a

$$C_{m,n}^X = f^C(-x_m \ y_n) = f_{-m,n}^C \quad m = 1 \quad M = n = 1 \quad N \tag{6.5}$$

És a dir, quan la superfície C està a la posició del darrera (vermella de la figura 6.3) es fa el següent canvi,

$$f^C(x_m \ y_n) \quad f^C(-x_m \ y_n) \quad m = 1 \quad M = n = 1 \quad N \tag{6.6}$$

Tanmateix, el superíndex 90 de la superfície A de l'equació 6.3 equival a

$$A_{m,n}^{90} = f^A(y_n - x_m) = f_{n,-m}^A \quad m = 1 \dots M \quad n = 1 \dots N \quad (6.7)$$

és a dir, la superfície A girada 90° de l'equació 6.3 analíticament es descriu com

$$f^A(x_m, y_n) = f^A(y_n - x_m) \quad m = 1 \dots M \quad n = 1 \dots N \quad (6.8)$$

Per una banda, i tal com s'ha vist en l'equació 6.2 i es mostra amb més detall en la figura 6.4, una superfície qualsevol C es pot descompondre en dues parts: la part quadràtica i la resta. Per exemple, a les figures 5.5 o 5.7 s'ha eliminat la quadràtica que millor s'ajusta per mínims quadrats, deixant la resta. Analíticament aquesta separació de termes ve donat per la següent expressió,

$$C_{m,n} = C_{m,n}^q + C_{m,n}^r = \overbrace{\alpha x_{m,n}^2 + \beta y_{m,n}^2 + \lambda x_{m,n} y_{m,n}}^{C_{m,n}^q} + C_{m,n}^r \quad \alpha, \beta, \lambda \in \mathbb{R} \quad (6.9)$$

Per l'altre, una superfície es pot classificar segons la seva paritat, en parell, imparell o no tenir paritat. De l'equació 6.9, els termes C^q i C^r es poden descompondre segons la seva paritat en

$$C = C^q + C^r = \overbrace{C_{oo}^q + C_{ee}^q + C_{oe}^q + C_{eo}^q}^{C^q} + \overbrace{C_{oo}^r + C_{ee}^r + C_{oe}^r + C_{eo}^r}^{C^r} \quad (6.10)$$

on el sub-índex eo vol dir que la funció és parell-imparell¹, oe és imparell-parell, oo és imparell-imparell i ee és parell-parell,

¹Notació a partir dels termes en anglès *odd* (imparell) i *even* (parell).

$$ee \left\{ \begin{array}{llllll} y_n & f(x_m, y_n) = f(-x_m, y_n) & n & 1 & N & m & 1 & N \\ x_m & f(x_m, y_n) = f(x_m, -y_n) & n & 1 & N & m & 1 & N \end{array} \right. \quad (6.11)$$

$$oo \left\{ \begin{array}{llllll} y_n & f(-x_m, y_n) = -f(x_m, y_n) & n & 1 & N & m & 1 & N \\ x_m & f(x_m, -y_n) = -f(x_m, y_n) & n & 1 & N & m & 1 & N \end{array} \right. \quad (6.12)$$

$$eo \left\{ \begin{array}{llllll} y_n & f(x_m, y_n) = f(-x_m, y_n) & n & 1 & N & m & 1 & N \\ x_m & f(x_m, -y_n) = -f(x_m, -y_n) & n & 1 & N & m & 1 & N \end{array} \right. \quad (6.13)$$

$$oe \left\{ \begin{array}{llllll} y_n & f(-x_m, y_n) = -f(x_m, y_n) & n & 1 & N & m & 1 & N \\ x_m & f(x_m, y_n) = f(x_m, -y_n) & n & 1 & N & m & 1 & N \end{array} \right. \quad (6.14)$$

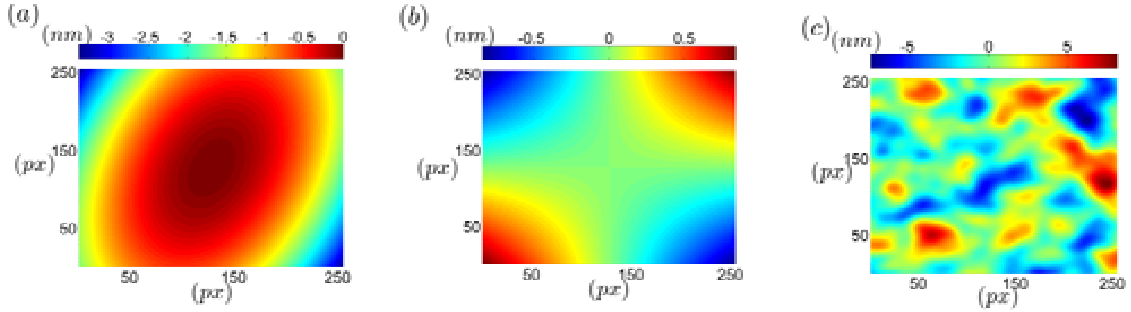


Figura 6.4: Descomposició d una superfície en els termes de la seva part quadràtica $C^q = \alpha x^2 + \beta y^2 + \lambda xy$, (a) $\alpha x^2 + \beta y^2$, (b) λxy . (c) Resta de la superfície, C^r de l equació 6.9.

La part quadràtica $C^q = \alpha x^2 + \beta y^2 + \lambda xy$ es pot descompondre en la funció $C_{ee}^q = \alpha x^2 + \beta y^2$, doncs satisfà que $y f(x) = f(-x)$ i $x f(y) = f(-y)$, i en la funció $C_{oo}^q = \lambda xy$, doncs satisfà que $y f(-x) = -f(x)$ i $x f(-y) = -f(y)$. Per tant, com que ja hem descompost tot C^q en els termes parell-parell (ee) i senar-senar (oo), no es tenen termes parell-imparell ($C_{eo}^q = 0$)

ni imparell-parell ($C_{oe}^q = 0$). De la resta de termes C^r no es pot dir res concret.

Per tant, a partir de les equacions 6.9 i 6.10, es pot descriure una superfície C com

$$C = \underbrace{\alpha x^2 + \beta y^2}_{C_{ee}^q} + \underbrace{\lambda xy}_{C_{oo}^q} + C_{oo}^r + C_{ee}^r + C_{oe}^r + C_{eo}^r \quad \alpha \quad \beta \quad \lambda \quad \mathbb{R} \quad (6.15)$$

A partir de la descripció de la superfície C de l'equació 6.15, es pot també descriure la resta de superfícies A , B i C de les mesures de l'equació 6.3. Per exemple, la posició de darrera C^X de la superfície C de l'equació 6.3 i la figura 6.3 es descriu com

$$\begin{aligned} C^X &= C_{ee} - C_{oo} - C_{oe} + C_{eo} \\ &= C_{ee}^q - C_{oo}^q + C_{ee}^r - C_{oo}^r - C_{oe} + C_{eo} \end{aligned} \quad (6.16)$$

De forma anàloga amb les superfícies A i B . I la superfície A de l'equació 6.3 i la figura 6.3 girada 90° es descriu com

$$A^{90} = A_{ee}^{q90} - A_{oo}^q + A_{oo}^{r90} + A_{ee}^{r90} + A_{eo}^{r90} + A_{oe}^{r90} \quad (6.17)$$

De forma anàloga també amb les superfícies B i C .

A partir d'ara ens centrarem només en el terme quadràtic, doncs és la informació que ens interessa per aplicar el mètode del lateral shearing sequencial. També s'ha vist per l'equació 6.15, que el terme quadràtic només descompon en relació a paritat amb parell-parell (oo) i senar-senar (ee). Primer es treballarà per aïllar els termes parell-parell, i més endavant (equacions 6.22–6.26), els termes senar-senar.

Substituint les superfícies A , B i C per la seva descomposició segons la paritat de les equacions 6.15, 6.16 i 6.17, i la seva posició o rotació, es tornen a reescriure la part quadràtica dels termes parell-parell de les mesures M^1 , M^2 , M^3 i M^4 de l'equació 6.3,

$$\begin{aligned}
M_{ee}^{1q} &= B_{ee}^q + C_{ee}^q \\
M_{ee}^{2q} &= A_{ee}^q + B_{ee}^q \\
M_{ee}^{3q} &= A_{ee}^{90q} + C_{ee}^q \\
M_{ee}^{4q} &= A_{ee}^q + C_{ee}^q
\end{aligned} \tag{6.18}$$

Observar que el subíndex q es refereix a la part quadràtica de la mesura o superfície, i el superíndex 90 es refereix a la superfície girada 90° .

Aleshores, el sistema d'equacions de l'equació 6.18, en forma matricial, queda de la següent manera

$$\begin{pmatrix} M_{ee}^{1q} \\ M_{ee}^{2q} \\ M_{ee}^{3q} \\ M_{ee}^{4q} \end{pmatrix} = \overbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}^{\mathbb{A}} \begin{pmatrix} A_{ee} \\ A_{ee}^{90} \\ B_{ee} \\ C_{ee} \end{pmatrix} \tag{6.19}$$

Com que $\det(\mathbb{A}) = 2$, la matriu és invertible i es pot resoldre el sistema d'equacions,

$$\begin{pmatrix} A_{ee} \\ A_{ee}^{90} \\ B_{ee} \\ C_{ee} \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \overbrace{\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}}^{\mathbb{A}^{-1}} \begin{pmatrix} M_{ee}^{1q} \\ M_{ee}^{2q} \\ M_{ee}^{3q} \\ M_{ee}^{4q} \end{pmatrix} \tag{6.20}$$

Resolent el sistema d'equacions, ens podem quedar només amb el terme quadràtic

$$C_{ee}^q = \frac{1}{2}(M_{ee}^{1q} - M_{ee}^{2q} + M_{ee}^{4q}) \quad (6.21)$$

Mitjançant aquesta combinació de mesures, s'ha pogut aïllar el terme parell-parell de la part quadràtica de la superfície C . De manera anàloga es pot aïllar la part senar-senar de la superfície C .

Igual que en l'equació 6.18, es pot substituir les superfícies A , B i C per la seva descomposició segons la paritat de les equacions 6.15, 6.16 i 6.17, i la seva posició o rotació. Es torna a reescriure la part quadràtica dels termes senar-senar de totes les mesures M^1 , M^2 , M^3 i M^4 de l'equació 6.3,

$$\begin{aligned} M_{oo}^{1q} &= B_{oo} - C_{oo} \\ M_{oo}^{2q} &= A_{oo} - B_{oo} \\ M_{oo}^{3q} &= A_{oo}^{90} - C_{oo} \\ M_{oo}^{4q} &= A_{oo} - C_{oo} \end{aligned} \quad (6.22)$$

El sistema d'equacions de l'equació 6.22, en forma matricial, queda de la següent manera

$$\begin{pmatrix} M_{oo}^{1q} \\ M_{oo}^{2q} \\ M_{oo}^{3q} \\ M_{oo}^{4q} \end{pmatrix} = \overbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}}^{\mathbb{B}} \begin{pmatrix} A_{oo} \\ A_{oo}^{90} \\ B_{oo} \\ C_{oo} \end{pmatrix} \quad (6.23)$$

En aquest cas, $\det(\mathbb{B}) = 0$ i per tant no es pot aïllar el terme imparell-imparell, però si es restringeix la relació només a la part quadràtica, aleshores es pot establir una relació entre A

i A° , reduint el número d incògnites,

$$\begin{pmatrix} M_{oo}^{1q} \\ M_{oo}^{2q} \\ M_{oo}^{90q} \\ M_{oo}^{4q} \end{pmatrix} = \overbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}}^{\mathbb{D}} \begin{pmatrix} A_{oo}^q \\ B_{oo}^q \\ C_{oo}^q \end{pmatrix} \quad (6.24)$$

D aquest sistema d equacions, es pot calcular la pseudo-inversa de \mathbb{D} , quedant

$$\begin{pmatrix} A_{oo}^q \\ B_{oo}^q \\ C_{oo}^q \end{pmatrix} = \frac{1}{6} \overbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 & 2 \\ 3 & -3 & -3 & 0 \\ -1 & -1 & -3 & -2 \end{pmatrix}}^{\mathbb{D}^+} \begin{pmatrix} M_{oo}^{1q} \\ M_{oo}^{2q} \\ M_{oo}^{90q} \\ M_{oo}^{4q} \end{pmatrix} \quad (6.25)$$

Resolent el sistema d equacions, es té el terme imparell-imparell (oo) de la part quadràtica de la superfície C ,

$$C_{oo}^q = \frac{-1}{6} (M_{oo}^{1q} + M_{oo}^{2q} + 3M_{oo}^{90q} + 2M_{oo}^{4q}) \quad (6.26)$$

De les equacions 6.21 i 6.26 es tenen els termes parell-parell (ee) i senar-senar (ee) del terme quadràtic, és a dir, tal com s ha vist en l equació 6.10, tot el terme quadràtic de la superfície C a partir de les mesures M^1 , M^2 , M^3 i M^4 de l equació 6.3 i figura 6.3. Per tant, el terme quadràtica C^q de la superfície C es pot reescriure com una combinació de les mesures de la següent manera,

$$C^q = C_{ee}^q + C_{oo}^q = \frac{1}{2} (M_{ee}^{1q} - M_{ee}^{2q} + M_{ee}^{4q}) + \frac{-1}{6} (M_{oo}^{1q} + M_{oo}^{2q} + 3M_{oo}^{90q} + 2M_{oo}^{4q}) \quad (6.27)$$

Aleshores, a partir de l'equació 6.15, es pot estimar per mínims quadrats els termes α , β i λ de les mesures,

$$\begin{aligned}
M_{m,n}^{1q} &= \overbrace{\alpha_1 x_{m,n}^2 + \beta_1 y_{m,n}^2}^{M_{ee}^{1q}} + \overbrace{\lambda_1 x_{m,n} y_{m,n}}^{M_{oo}^{1q}} & \alpha_1 \quad \beta_1 \quad \lambda_1 & \quad \mathbb{R} \quad m \quad 1 \quad M \quad n \quad 1 \quad N \\
M_{m,n}^{2q} &= \overbrace{\alpha_2 x_{m,n}^2 + \beta_2 y_{m,n}^2}^{M_{ee}^{2q}} + \overbrace{\lambda_2 x_{m,n} y_{m,n}}^{M_{oo}^{2q}} & \alpha_2 \quad \beta_2 \quad \lambda_2 & \quad \mathbb{R} \quad m \quad 1 \quad M \quad n \quad 1 \quad N \\
M_{m,n}^{3q} &= \overbrace{\alpha_3 x_{m,n}^2 + \beta_3 y_{m,n}^2}^{M_{ee}^{3q}} + \overbrace{\lambda_3 x_{m,n} y_{m,n}}^{M_{oo}^{3q}=M_{oo}^{90q}} & \alpha_3 \quad \beta_3 \quad \lambda_3 & \quad \mathbb{R} \quad m \quad 1 \quad M \quad n \quad 1 \quad N \\
M_{m,n}^{4q} &= \overbrace{\alpha_4 x_{m,n}^2 + \beta_4 y_{m,n}^2}^{M_{ee}^{4q}} + \overbrace{\lambda_4 x_{m,n} y_{m,n}}^{M_{oo}^{4q}} & \alpha_4 \quad \beta_4 \quad \lambda_4 & \quad \mathbb{R} \quad m \quad 1 \quad M \quad n \quad 1 \quad N
\end{aligned} \tag{6.28}$$

Per tant, substituint els termes de l'equació 6.28 a l'equació 6.27, es pot tenir el terme quadràtic C^q de la superfície C amb el mètode nou proposat en aquesta secció i utilitzant el principi del 3-flat test,

$$\begin{aligned}
C_{m,n}^q &= \frac{1}{2}(\alpha_1 - \alpha_2 + \alpha_4)x_{m,n}^2 + \frac{1}{2}(\beta_1 - \beta_2 + \beta_4)y_{m,n}^2 \\
&\quad - \frac{1}{6}(\lambda_1 + \lambda_2 + 3\lambda_3 + 2\lambda_4)x_{m,n}y_{m,n} & m \quad 1 \quad M \quad n \quad 1 \quad N & \tag{6.29}
\end{aligned}$$

6.2.1.1 Resultats de l'estimació de la quadràtica de la superfície C

A la secció anterior s'ha descrit el mètode mitjançant el qual es pot determinar la informació quadràtica de la superfície C de la figura 6.3,

$$C = C^q + C^r = \overbrace{\alpha x^2 + \beta y^2 + \lambda xy}^{\hat{C}^q} + C^r \quad \alpha \quad \beta \quad \lambda \quad \mathbb{R} \tag{6.30}$$

on α , β i λ són els termes quadràtics estimats mitjançant el mètode del 3-flat test proposat.

La diferència entre la part quadràtica real C^q de l'equació 6.9 i la part quadràtica estimada C^q de l'equació 6.30 és la que determina la precisió del mètode proposat. La limitació de precisió ve determinada per les imprecisions en el posicionament de les superfícies segons la configuració de la figura 6.3. Si es manté estàtica la superfície C en les configuracions de les figures 6.3 (a), (c) i (d), els errors provenen del posicionament de les superfícies A i B .

La figura 6.5 (a) mostra esquemàticament els errors de posicionament de la superfície A , en respecte dels eixos x i y , dx_A i dy_A , respectivament, mentre que la figura 6.5 (b) mostra esquemàticament els errors de posicionament de la superfície B , en respecte dels eixos x i y , dx_B i dy_B , respectivament.

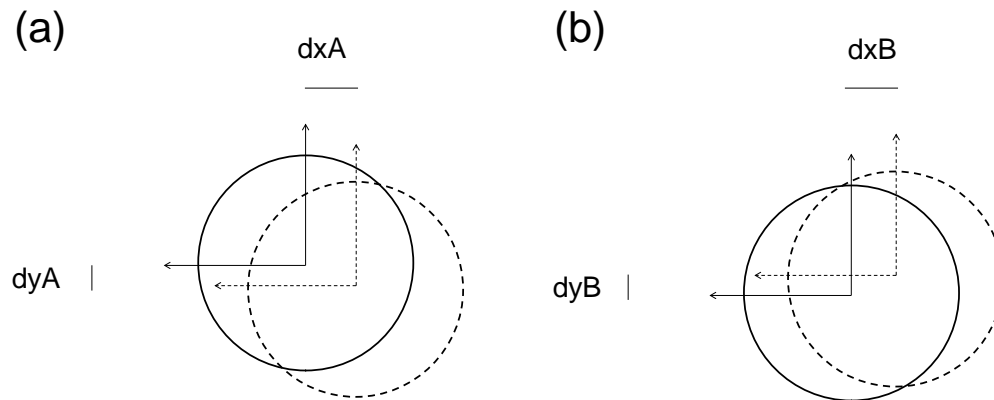


Figura 6.5: Esquema dels errors de posicionament de les superfícies A i B en les configuracions necessàries de la figura 6.3. (a) Errors de posicionament en l'eix x i y , dx_A i dy_A respectivament, de la superfície A , (b) Errors de posicionament en l'eix x i y , dx_B i dy_B respectivament, de la superfície B .

La magnitud dels errors dx_A , dy_A , dx_B i dy_B de la figura 6.5 són els que determinen la magnitud de l'error $C^q - \hat{C}^q$ en l'estimació dels termes quadràtics de la superfície C mitjançant el mètode del 3-flat test proposat. La figura 6.6 mostra alguns resultats d'aquests errors. La figura 6.6 mostra el peak to valley de l'error $C^q - \hat{C}^q$ de 1000 superfícies C diferents. En cada cas, s'ha afegit uns errors de posicionament de les superfícies A i B : dx_A , dy_A , dx_B i dy_B .

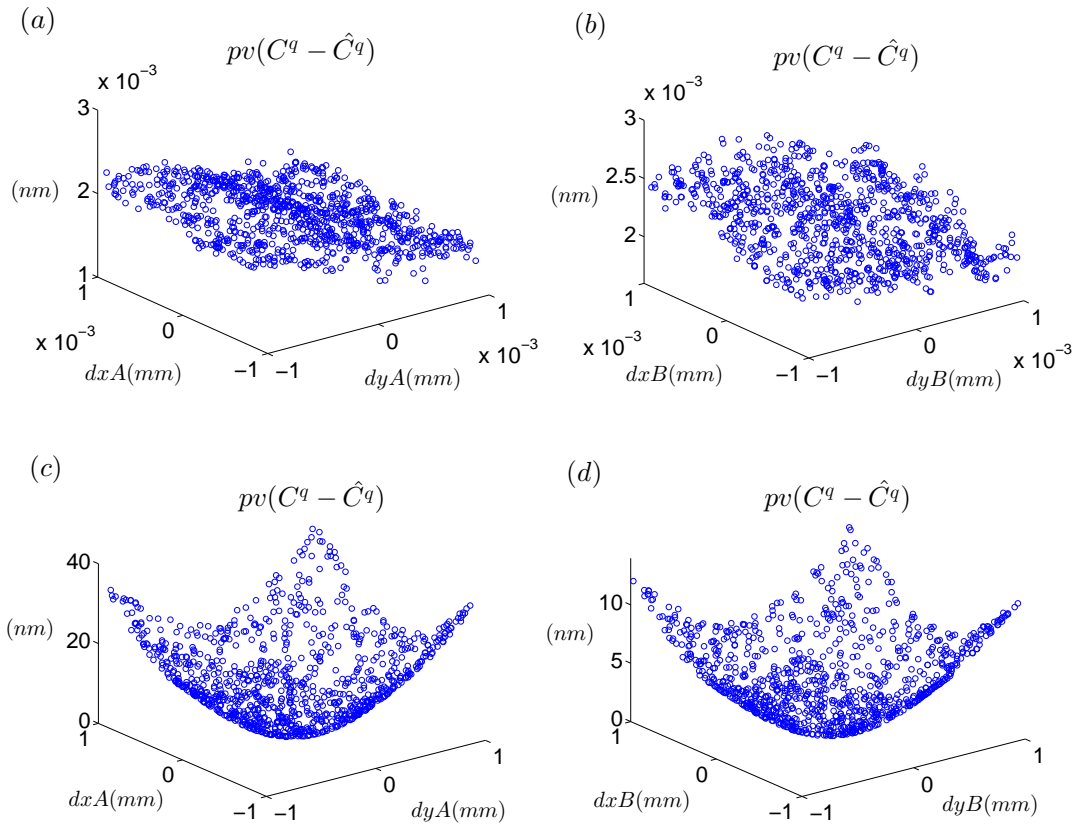


Figura 6.6: Peak to valley de l'error en l'estimació dels termes quadràtics de la superfície C , $C^q - \hat{C}^q$, en funció dels errors de posicionament en les configuracions de les superfícies A i B , dx_A , dy_A , dx_B i dy_B en l'esquema de la figura 6.5. En cada cas repetit l'experiment amb 1000 estimacions diferents, (a) $dx_A = [0 \ 001 \ 0 \ 001]mm$, $dy_A = [-0 \ 001 \ 0 \ 001]mm$, $dx_B = dy_B = 0$, (b) $dx_A = dy_A = 0$, $dx_B = [-0 \ 001 \ 0 \ 001]mm$, $dy_B = [-0 \ 001 \ 0 \ 001]mm$, (c) $dx_A = [-1 \ 1]mm$, $dy_A = [-1 \ 1]mm$, $dx_B = dy_B = 0$, (d) $dx_A = dy_A = 0$, $dx_B = [-1 \ 1]mm$, $dy_B = [-1 \ 1]mm$.

En la figura 6.6 (a) els errors són $dx_A = [-0.001 \ 0.001]mm$, $dy_A = [-0.001 \ 0.001]mm$, i dx_B i dy_B nuls. En la figura 6.6 (b) s'inverteixen els errors de posicionament de les superfícies A i B , obtenint resultats similars. Aquestes dues figures validen el mètode proposat, és a dir, demostren que quan els errors de posicionament són molt petits, tant de la superfície A com de la superfície B , en ambdós eixos x i y , els errors en l'estimació dels termes quadràtics mitjançant el mètode del 3-flat test proposat en la secció 6.2.1 també ho són.

En les figures 6.6 (c) i (d), els errors de posicionament de les superfícies A i B són ordres de magnitud més grans que en els anteriors casos, anant entre $[-1 \ 1] \ mm$. Els errors en l'estimació també són ordres de magnitud més grans, entre $[0 \ 40] \ nm$ en el cas en que l'error de posicionament és en la superfície A (figura 6.6 (c)), i entre $[0 \ 15] \ nm$ en el cas en que l'error en la superfície B (figura 6.6 (d)). Aquestes dues últimes figures mostren que el mètode és més sensible als errors de posicionament de la superfície A , i també que els errors del propi mètode fan una quadràtica com es pot veure en les formes de les figures 6.6 (c) i (d), mentre que en cas de les figures 6.6 (a) i (b), els errors són tan petits que segueixen més una distribució aleatòria que quadràtica.

Fins ara s'ha vist com és la influència dels errors de posicionament de manera conjunta, és a dir, errors en ambdós eixos x i y alhora. A la figura 6.7 es mostra la influència dels errors de posicionament per separat, afegint en cada cas només un d'ells. La figura 6.7 representa la mitjana (en blau) i desviació estàndard (en lila) del peak to valley de l'error en l'estimació dels termes quadràtics C , $C^q - C^q$, en funció dels errors de posicionament en les configuracions de les superfícies A i B , dx_A , dy_A , dx_B i dy_B en l'esquema de la figura 6.5. Per a cada valor de l'eix x , x_i , s'ha repetit l'experiment amb 1000 superfícies diferents, on l'error de posicionament corresponent és aleatori seguint una distribució uniforme entre $[-x_i \ x_i] \ mm$, mentre que la resta es mantenen a 0.

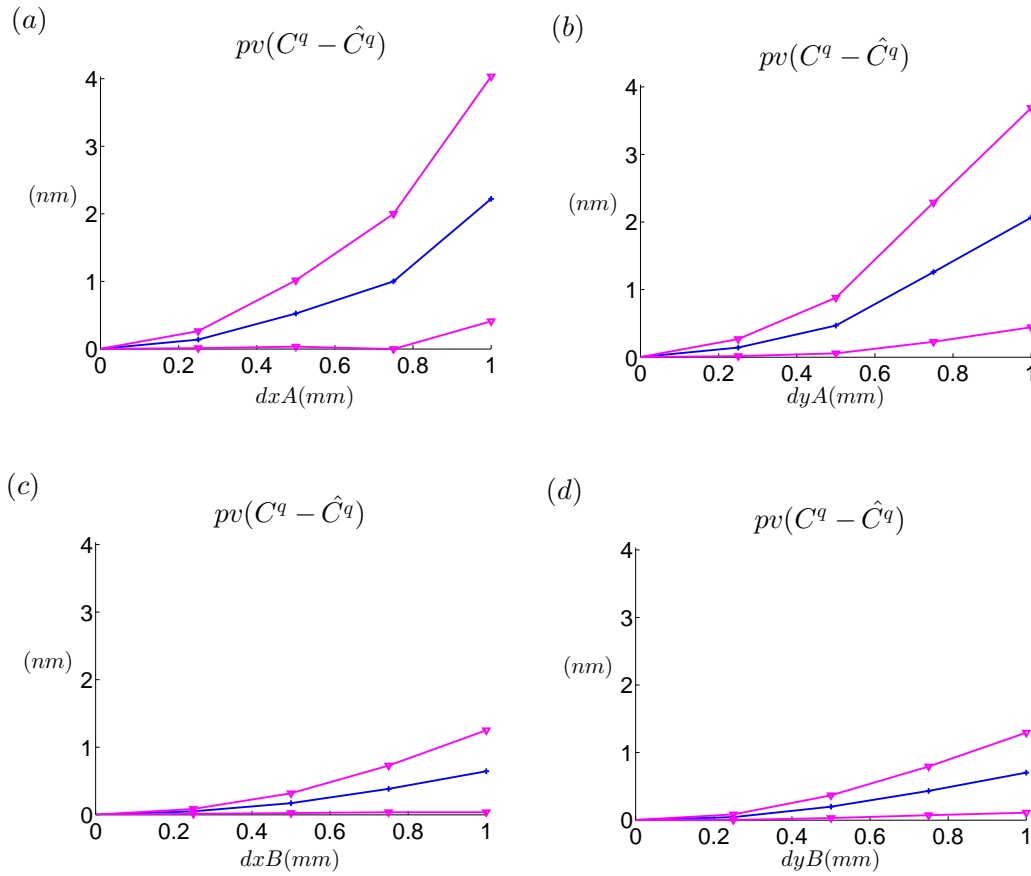


Figura 6.7: Mitja (en blau) i desviació estàndard (en lila) del peak to valley de l'error en l'estimació dels termes quadràtics C , $C^q - \hat{C}^q$, en funció dels errors de posicionament en les configuracions de les superfícies A i B , dx_A , dy_A , dx_B i dy_B en l'esquema de la figura 6.5. Per a cada valor de l'eix x , x_i , s'ha repetit l'experiment amb 1000 superfícies diferents, els errors de posicionament segueixen una distribució uniforme entre $[-x_i \ x_i]$ mm. (a) $dx_A \in [-1 \ 1]$ mm, $dy_A = dx_B = dy_B = 0$, (b) $dy_A \in [-1 \ 1]$ mm, $dx_A = dx_B = dy_B = 0$, (c) $dx_B \in [-1 \ 1]$ mm, $dx_A = dy_A = dy_B = 0$, (d) $dy_B \in [-1 \ 1]$ mm, $dx_A = dy_A = dx_B = 0$.

Com es pot veure observant la figura 6.7, i com també s'havia pogut veure amb el núvol de punts de la figura 6.6, els errors de posicionament de la superfície A afecten més que els de la superfície B , doncs amb els mateixos errors de posicionament (sempre error uniforme entre $[-1 \ 1]$ mm) en el cas de l'error en la superfície A (figures 6.7 (a) i (b)), el peak to valley té

mitja al voltant de 2 nm , mentre que amb la superfície B (figures 6.7 (c) i (d)) està al voltant de 0.5 nm . Igual amb la desviació estàndard. Un altre aspecte important que es pot veure de la figura 6.7 és que la influència dels errors dx_A i dy_A són similars, i el mateix amb els de la superfície B , dx_B i dy_B .

Un cop s'ha vist a la figura 6.7 com afecten els errors dx_A , dx_B , dy_A i dy_B per separat per tal de poder incidir en l'efecte de cadascú d'ells a continuació es veurà quina és la precisió en l'estimació dels termes quadràtics de la superfície C mitjançant el mètode del 3-flat test quan tots els errors de posicionament dx_A , dx_B , dy_A i dy_B de les superfícies A i B actuen alhora.

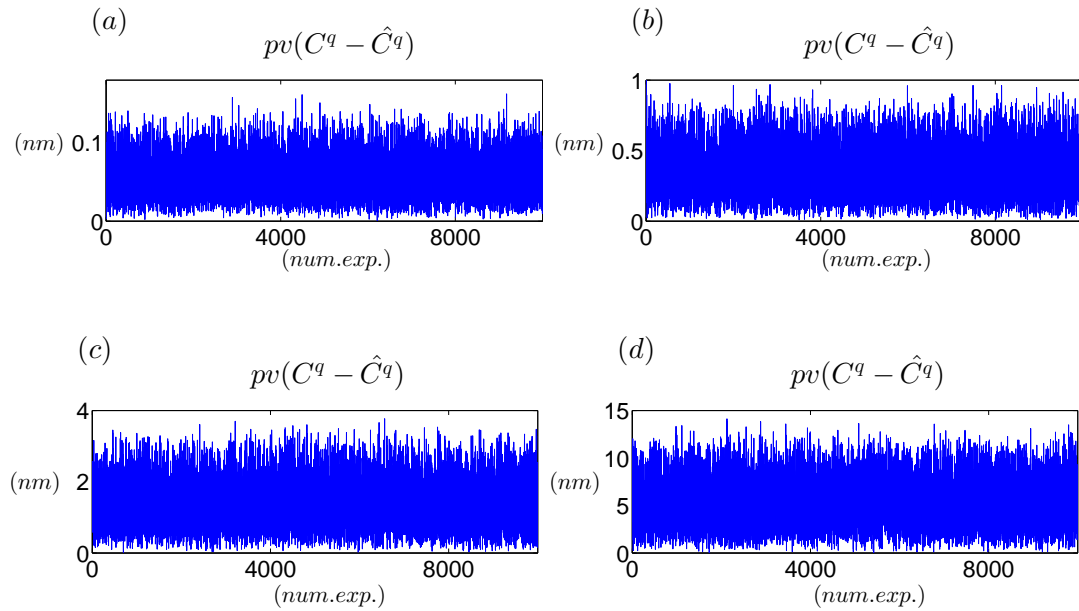


Figura 6.8: Peak to valley de l'error en l'estimació dels termes quadràtics C , $C^q - \hat{C}^q$, en funció dels errors de posicionament en les configuracions de les superfícies en l'esquema de la figura 6.5. S'ha repetit l'estimació per a 10000 superfícies diferents. En cada cas, s'ha afegit uns errors de posicionament aleatoris dx_A , dy_A , dx_B , dy_B seguint distribucions uniformes concretes. (a) entre $[-0.1 \ 0 \ 1] \text{ mm}$, (b) entre $[-0.25 \ 0 \ 0.25] \text{ mm}$, (c) entre $[-0.5 \ 0 \ 0.5] \text{ mm}$, (d) entre $[-1 \ 1] \text{ mm}$. En tots els casos el domini és $M = 250 \text{ mm}$ i $N = 250 \text{ mm}$.

La figura 6.8 mostra el peak to valley de l'error en l'estimació dels termes quadràtics C , $C^q - C^a$, en funció dels errors de posicionament en les configuracions de les superfícies A i B , dx_A , dy_A , dx_B i dy_B en l'esquema de la figura 6.5. S'ha repetit l'estimació per a 10000 superfícies diferents i es mostren tots els peak to valley dels errors. En tots els casos el domini és $M = 250 \text{ mm}$ i $N = 250 \text{ mm}$. En cada cas, s'ha afegit errors de posicionament dx_A , dy_A , dx_B i dy_B aleatoris seguint distribucions uniformes concretes, que es van incrementant.

La figura 6.8 (a) mostra el peak to valley dels errors de reconstrucció amb el menor dels errors de posicionament dx_A , dy_A , dx_B , dy_B , que segueixen una distribució uniforme entre $[-0.1 \ 0 \ 1] \text{ mm}$. En aquest cas es tenen els millors resultats amb una mitja d'error de 0.056 nm i desviació estandar $\sigma = 0.027$. En figura 6.8 (b), amb uns errors dx_A , dy_A , dx_B , dy_B aleatoris amb distribució uniforme entre $[-0.25 \ 0 \ 0.25] \text{ mm}$, la mitja del peak to valley dels errors $C^q - C^a$ és 0.35 nm i la desviació estandar $\sigma = 0.18$. Quan s'incrementen els errors de posicionament, com ens els casos de les figures 6.8 (c) i 6.8 (d), entre $[-0.5 \ 0 \ 0.5] \text{ mm}$ i $[-1 \ 1] \text{ mm}$, respectivament, la mitja dels errors són 1.39 nm i 5.37 nm , i les desviacions estàndards $\sigma = 0.69$ i $\sigma = 2.60$, respectivament.

Un cop s'han vist els resultats de les estimacions dels termes quadràtics d'una superfície C a partir del nou mètode del 3-flat test proposat, a continuació es veuran resultats de reconstruccions usant el lateral shearing sequencial, afegint aquesta informació de la quadràtica essent la superfície C la superfície de referència de les mesures inicials i veient com afecten els errors en l'estimació de la quadràtica mitjançant el 3-flat test a les reconstruccions de les superfícies mitjançant el lateral shearing sequencial.

6.3 Lateral Shearing Sequential + 3-flat test

A la secció 5.3.2 s ha vist que per a una acurada reconstrucció de superfícies a partir del lateral shearing sequencial és necessària la inclusió d informació dels termes quadràtics de l equació 6.29 en les mesures inicials. És per això que en la secció 6.2.1 es proposa un nou mètode de 3-flat test per a l estimació dels termes quadràtics de la superfície C a partir de les configuracions del sistema mostrades a la figura 6.3. En la secció 6.2.1.1 s ha vist la precisió alhora d estimar els termes quadràtics mitjançant el mètode proposat.

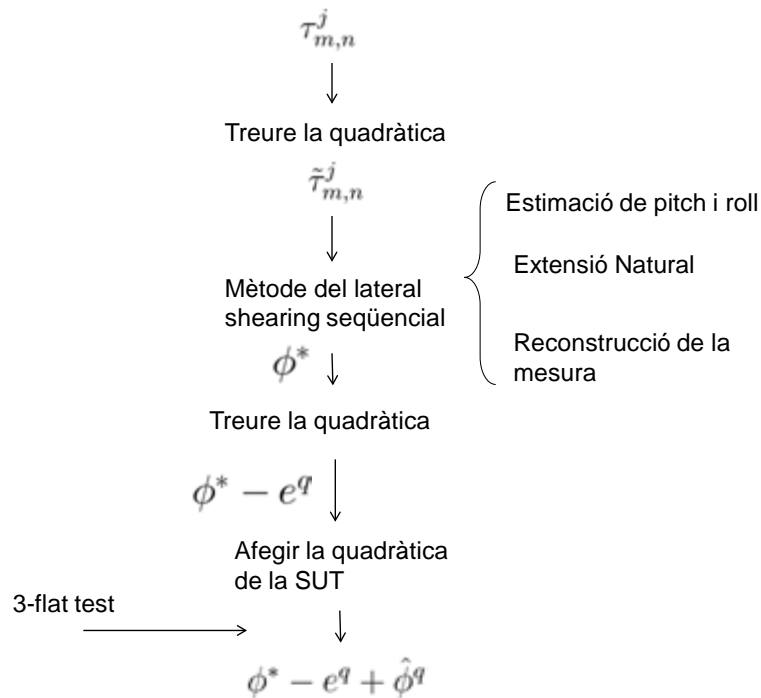


Figura 6.9: Esquema del mètode de reconstrucció amb el lateral shearing sequencial amb la combinació del 3-flat test per a l estimació de la quadràtica de la SUT.

En aquesta secció 6.3 es fa una combinació del mètode del lateral shearing sequencial amb el mètode del 3-flat test, descrit a la figura 6.9. De les mesures inicials τ^j donades per l interferòmetre es pot estimar mitjançant els mínims quadrats la quadràtica que millor s ajusta, τ^q , en relació amb als termes α_j^T , β_j^T i λ_j^T de l equació 6.1. Com que amb el mètode

del 3-flat test proposat sabem la quadràtica de la superfície de referència, $\gamma_{m,n}^q$, es pot saber la quadràtica de la SUT, $\phi_{m,n}^q$,

$$\phi_{m,n}^q = \tau_{m,n}^q - \gamma_{m,n}^q \quad m = 1 \dots M \quad n = 1 \dots N \quad (6.31)$$

De les mesures inicials de l'interferòmetre de l'equació 5.2, es resta la quadràtica,

$$\tau_{m,n}^j = \tau_{m,n}^j - \tau_{m,n}^{q,j} \quad m = 1 \dots M \quad n = 1 \dots N \quad j = 0, 1, 2, 3, 4 \quad (6.32)$$

on el superíndex q indica el terme quadràtic.

A partir de les mesures τ^j sense els termes quadràtics corresponents, es procedeix a seguir tot el procés descrit en la figura 6.9. Amb aquesta informació de la quadràtica, es tenen reconstruccions més acurades de les SUTs mitjançant el lateral shearing sequencial, com es veurà a continuació.

L'error en l'estimació de la quadràtica de la superfície de referència ξ^q amb el 3-flat test es pot escriure com,

$$\xi_{m,n}^q = \alpha_\xi x_{m,n}^2 + \beta_\xi y_{m,n}^2 + \lambda_\xi x_{m,n} y_{m,n} \quad m = 1 \dots M \quad n = 1 \dots N \quad (6.33)$$

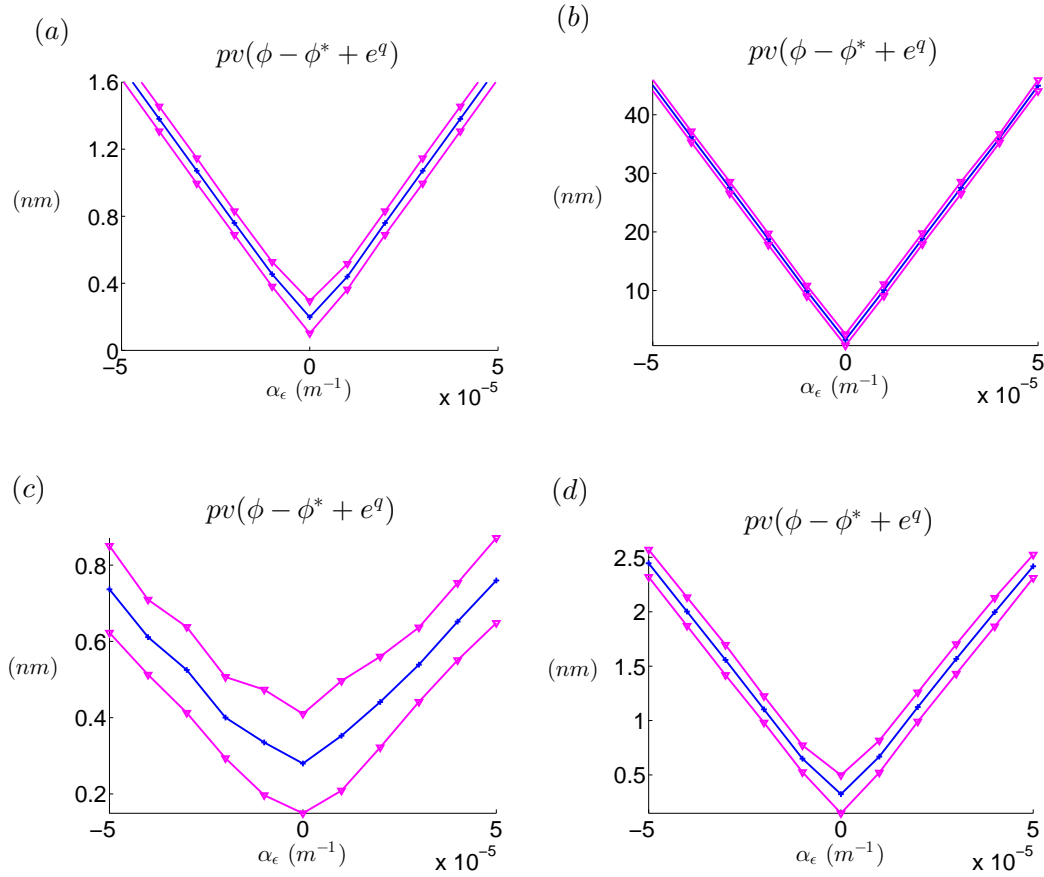


Figura 6.10: Peak to valley de l'error de reconstrucció, $\phi - \phi^* - e^q$, usant el lateral shearing sequencial i amb l'estimació dels termes quadràtics de la superfície de referència, en funció de l'error α_ξ de l'equació 6.33. Per a cada valor d' α_ξ es repeteix l'experiment 1000 vegades, afegint en cada cas el valor α_ξ corresponent, i es calcula la mitja (en blau) i la desviació estàndard (en lila) dels errors en la reconstrucció. En cada cas es calcula per a diferents dominis M i N , i desplaçaments t_1 i t_2 , (a) $M = N = 546 \text{ mm}$, i $t_1 = 3$, $t_2 = 13$, (b) $M = N = 462 \text{ mm}$, i $t_1 = 2$, $t_2 = 33$, (c) $M = N = 182 \text{ mm}$ i $t_1 = 2$, $t_2 = 7$, (d) $M = N = 330 \text{ mm}$ i $t_1 = 11$, $t_2 = 15$. En tots els casos s'ha afegit un error de pitch i roll als desplaçaments $a_j = 500 \text{ nrad}$ i $b_j = 500 \text{ nrad}$, respectivament.

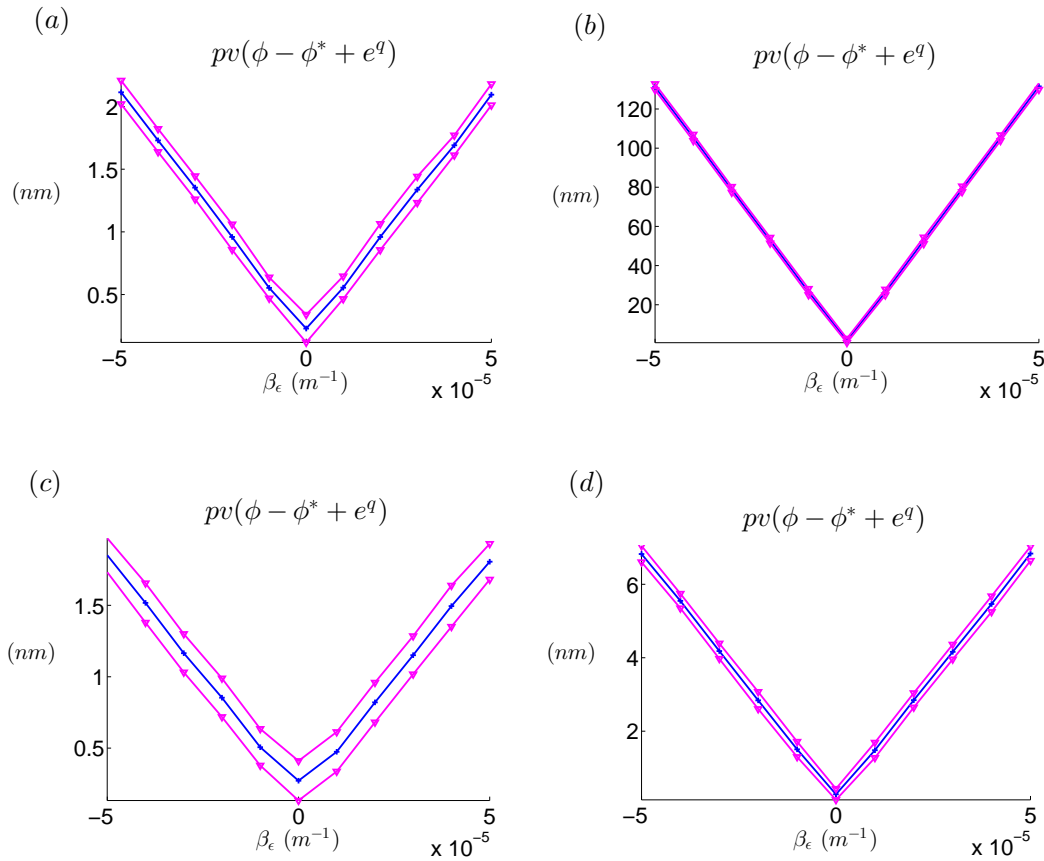


Figura 6.11: Peak to valley de l'error de reconstrucció, $\phi - \phi^* - e^q$, usant el lateral shearing sequencial i amb l'estimació dels termes quadràtics de la superfície de referència, en funció de l'error β_ξ de l'equació 6.33. Per a cada valor de β_ξ es repeteix l'experiment 1000 vegades, afegint en cada cas el valor β_ξ corresponent, i es calcula la mitja (en blau) i la desviació estandard (en lila) dels errors en la reconstrucció. En cada cas es calcula per a diferents dominis M i N , i desplaçaments t_1 i t_2 , (a) $M = N = 546 \text{ mm}$, i $t_1 = 3 \text{ mm}$, $t_2 = 13 \text{ mm}$, (b) $M = N = 462 \text{ mm}$, i $t_1 = 2 \text{ mm}$, $t_2 = 33 \text{ mm}$, (c) $M = N = 182 \text{ mm}$ i $t_1 = 2 \text{ mm}$, $t_2 = 7 \text{ mm}$, (d) $M = N = 330 \text{ mm}$ i $t_1 = 11 \text{ mm}$, $t_2 = 15 \text{ mm}$. En tots els casos s'ha afegit un error de pitch i roll als desplaçaments $a_j = 500 \text{ nrad}$ i $b_j = 500 \text{ nrad}$, respectivament.

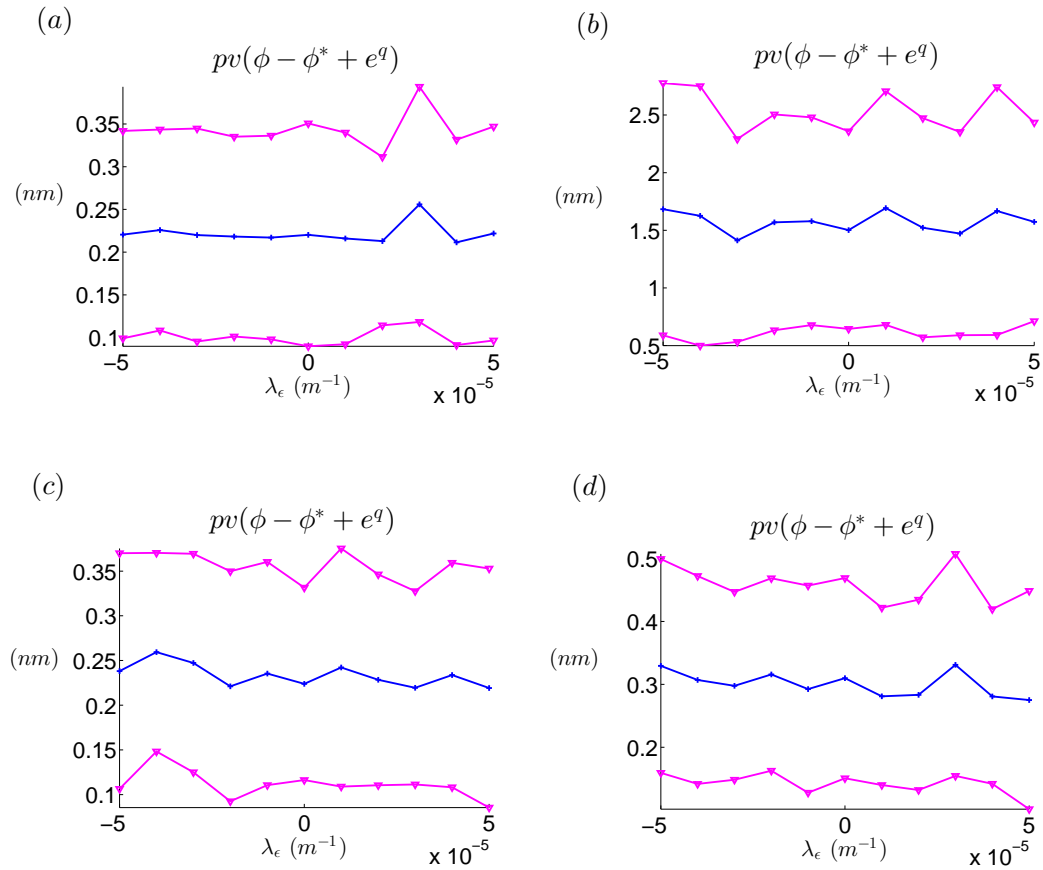


Figura 6.12: Peak to valley de l'error de reconstrucció, $\phi - \phi^* - e^q$, usant el lateral shearing sequencial i amb l'estimació dels termes quadràtics de la superfície de referència, en funció de l'error λ_ϵ de l'equació 6.33. Per a cada valor de λ_ϵ es repeteix l'experiment 1000 vegades, afegint en cada cas el valor λ_ϵ corresponent, i es calcula la mitja (en blau) i la desviació estàndard (en lila) dels errors en la reconstrucció. En cada cas es calcula per a diferents dominis M i N , i desplaçaments t_1 i t_2 , (a) $M = N = 546$ mm, i $t_1 = 3$ mm, $t_2 = 13$ mm, (b) $M = N = 462$ mm, i $t_1 = 2$ mm, $t_2 = 33$ mm, (c) $M = N = 182$ mm i $t_1 = 2$ mm, $t_2 = 7$ mm, (d) $M = N = 330$ mm i $t_1 = 11$ mm, $t_2 = 15$ mm. En tots els casos s'ha afegit un error de pitch i roll als desplaçaments $a_j = 500$ nrad i $b_j = 500$ nrad, respectivament.

A les figures 6.10, 6.11 i 6.12 es veu com són les reconstruccions de superfícies utilitzant el lateral shearing sequencial quan s'afegeix la informació de la quadràtica de la superfície de referència a les mesures, en funció dels errors α_ξ , β_ξ i λ_ξ de l'equació 6.33.

Les figures 6.10, 6.11 i 6.12 permeten analitzar la influència per separat d'aquests errors en l'estimació dels termes quadràtics mitjançant el 3-flat test. Les figures mostren els resultats de les reconstruccions usant el lateral shearing sequencial, en funció dels errors α_ξ , β_ξ i λ_ξ en l'estimació de la quadràtica de la superfície de referència. Per a cada valor de l'eix x es repeteix l'experiment 1000 vegades. En cada cas, s'afegeix un error en l'estimació de la quadràtica de la superfície de referència igual a aquest valor. Es calcula la mitja (en blau) i la desviació estandard (en lila) dels errors en la reconstruccions. En tots els casos, els errors α_ξ , β_ξ i λ_ξ estan en l'interval $[-0.00005, 0.00005] m^{-1}$. Les figures permeten veure la influència dels errors α_ξ , β_ξ i λ_ξ amb diferents combinacions de desplaçaments i dominis. Aquestes combinacions són les mateixes que en les figures anteriors de la secció 5.3.

El primer que es pot veure, comparant els resultats en global de les figures 6.10, 6.11 i 6.12, és la diferència important entre els errors de les subfigures (b) en la relació a la resta. Les reconstruccions de les figures 6.10 (b), 6.11 (b) i 6.12 (b) són molt menys acurades que amb les altres combinacions. Aquests mals resultats amb els desplaçaments $t_1 = 2$ i $t_2 = 33$ i domini $M = N = 462 mm$ es produeixen en general quan els desplaçaments o un d'ells és gran, això és, més gran de $15 mm$. Tal com es veurà més endavant a les figures 6.13 i 6.16, quan s'analitzin més combinacions de desplaçaments, sempre que hi ha un desplaçament gran la precisió de les reconstruccions és menor. De fet, també s'ha vist a la figura 6.2 i sobretot a la figura 5.24 en el capítol anterior, també amb aquests desplaçaments. Aquests mals resultats són deguts, tal com s'ha dit, a que en aquests casos, l'extensió natural és més sensible que en la resta, perioditzant pitjor la SUT amb les mateixes magnituds d'errors.

Un cop vist la influència dels desplaçaments grans, el més important d'observar és la diferent influència que tenen els errors α_ξ , β_ξ i λ_ξ . Els errors peak to valley més grans provenen

de la figura 6.11, que és quan hi ha l'error β_ξ . En aquest cas, els millors resultats són amb els desplaçaments $t_1 = 2$ i $t_2 = 7$, mostrades a la figura 6.11 (b). Tot i que s'ha de tenir en compte que en aquest cas el domini és menor, i per tant l'error peak to valley de la quadràtica també serà menor, com més endavant es veurà, els desplaçaments petits són els que més acurades reconstruccions de superfícies fan mitjançant el lateral shearing sequencial. En els altres casos (a part de la ja comentada prèviament figura 6.11 (b)) els errors estan al voltant dels 6 nm peak to valley de mitja.

L'error α_ξ , mostrat en la figura 6.10, té una influència similar però menor que l'error β_ξ mostrat a la figura 6.11. Aquesta asimetria és deguda al propi mètode d'estimació de pitch i roll. Tal com sabem, l'estimació per un i altre error és diferent, i tal com es veu a la figura 6.10 i 6.11, afecta més en les estimacions de pitch i roll l'error α_ξ que l'error β_ξ , afegint més errors de vora en aquest segon cas. És important observar també que la influència de l'error λ_ξ en les reconstruccions és totalment nula. És a dir, tal com es pot veure a la figura 6.12, els errors de les reconstruccions són constants independentment de la magnitud de l'error λ_ξ . També important el fet que les figures siguin simètriques en relació a l'eix x , és a dir, no influeix si l'error α_ξ , β_ξ i λ_ξ són positius o negatius, sinó només la magnitud.

Un cop s'ha vist la influència dels errors α_ξ , β_ξ i λ_ξ de l'estimació dels termes quadràtics mitjançant el 3-flat test en les reconstruccions mitjançant el lateral shearing sequencial, i un cop s'ha vist també la influència dels errors de posicionament en l'estimació de la quadràtica en el 3-flat test, el següent pas és unir aquests dos conceptes per tal de tenir la relació directa entre els errors de posicionament en l'estimació dels termes quadràtics de la superfície de referència del 3-flat test i els errors en la reconstrucció de superfícies mitjançant el lateral shearing sequencial.

Les figures 6.13 6.16 mostren el peak to valley de l'error $\phi - \phi^* - e^q$ en la reconstrucció de superfícies amb el lateral shearing sequencial en funció dels errors de posicionament dx_A , dy_A , dx_B i dy_B de la figura 6.5. En cada figura només hi ha un error de posicionament. A la

figura 6.13 l'error de posicionament és dx_A , seguint una distribució uniforme entre $[-0.5 \ 0.5]$ mm. A la figura 6.14 l'error de posicionament és dy_A , seguint una distribució uniforme entre $[-0.5 \ 0.5]$ mm. A la figura 6.15 l'error de posicionament és dx_B seguint una distribució uniforme entre $[-0.5 \ 0.5]$ mm. A la figura 6.16 l'error de posicionament és dy_B , seguint una distribució uniforme entre $[-0.5 \ 0.5]$ mm. Els altres errors de posicionament es mantenen nuls en cada cas els corresponents. En cada figura hi ha les mateixes combinacions de dominis i desplaçaments per a poder fer la comparació. En tots els casos s'ha afegit un error de pitch i roll als desplaçaments $a_j = 500 \text{ nrad}$ i $b_j = 500 \text{ nrad}$, respectivament. En tots els casos els termes quadràtics α , β i λ de l'equació 5.27 de la superfície a mesurar s'afegeixen de forma aleatòria seguint una distribució uniforme entre $[-0.0001 \ 0.0001] \text{ m}^{-1}$, que són els que s'havien afegit per a la figura 6.2. En tots els casos s'ha afegit un soroll blanc gaussià de 0.5 nm de desviació estàndard.

En cada cas concret de les figures marcades des de la (a) fins a la (i) és un experiment que mostra 100 peaks to valley de reconstruccions de SUTs, en funció de l'error de posicionament determinat en cada cas. El valor màxim de totes les 100 reconstruccions és el valor garantit.

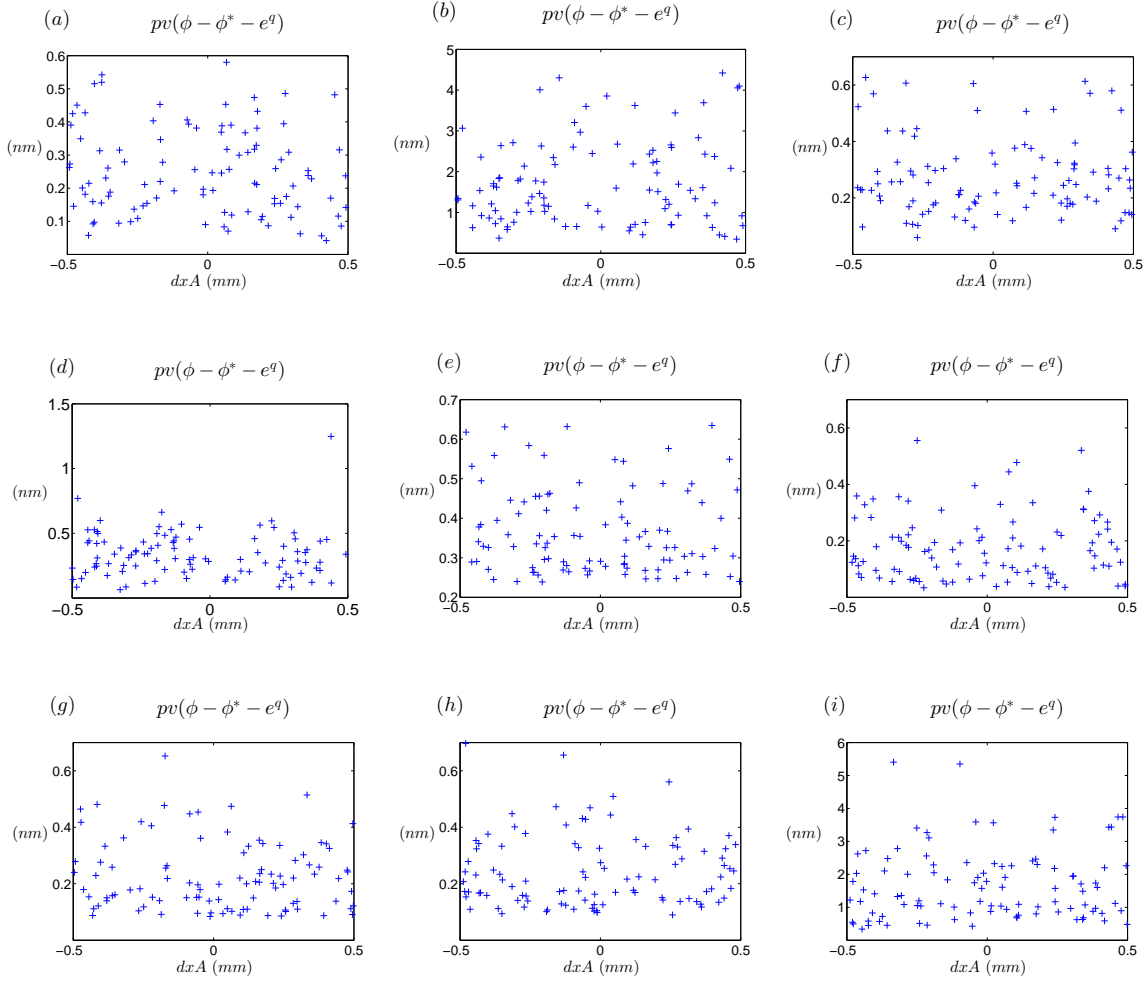


Figura 6.13: Peak to valley de l'error de reconstrucció, $\phi - \phi^* - e^q$, usant el lateral shearing sequencial i l'estimació de pitch i roll de les seccions 5.1.1 i 5.1.2, en funció dels errors de posicionament amb el 3-flat test. (a) El domini és $M = 546 \text{ mm}$ i $N = 546 \text{ mm}$, i els desplaçaments són $t_1 = 3 \text{ mm}$ i $t_2 = 13 \text{ mm}$, (b) $M = N = 462 \text{ mm}$ i $t_1 = 2 \text{ mm}$, $t_2 = 33 \text{ mm}$, (c) $M = N = 182 \text{ mm}$ i $t_1 = 2 \text{ mm}$, $t_2 = 7 \text{ mm}$. (d) $M = N = 330 \text{ mm}$ i $t_1 = 11 \text{ mm}$, $t_2 = 15 \text{ mm}$, (e) $M = N = 462 \text{ mm}$ i $t_1 = 2 \text{ mm}$, $t_2 = 7 \text{ mm}$, (f) $M = N = 630 \text{ mm}$ i $t_1 = 5 \text{ mm}$, $t_2 = 7 \text{ mm}$, (g) $M = N = 630 \text{ mm}$ i $t_1 = 2 \text{ mm}$, $t_2 = 7 \text{ mm}$, (h) $M = N = 630 \text{ mm}$ i $t_1 = 7 \text{ mm}$, $t_2 = 9 \text{ mm}$ i (i) $M = N = 630 \text{ mm}$ i $t_1 = 5 \text{ mm}$, $t_2 = 63 \text{ mm}$.

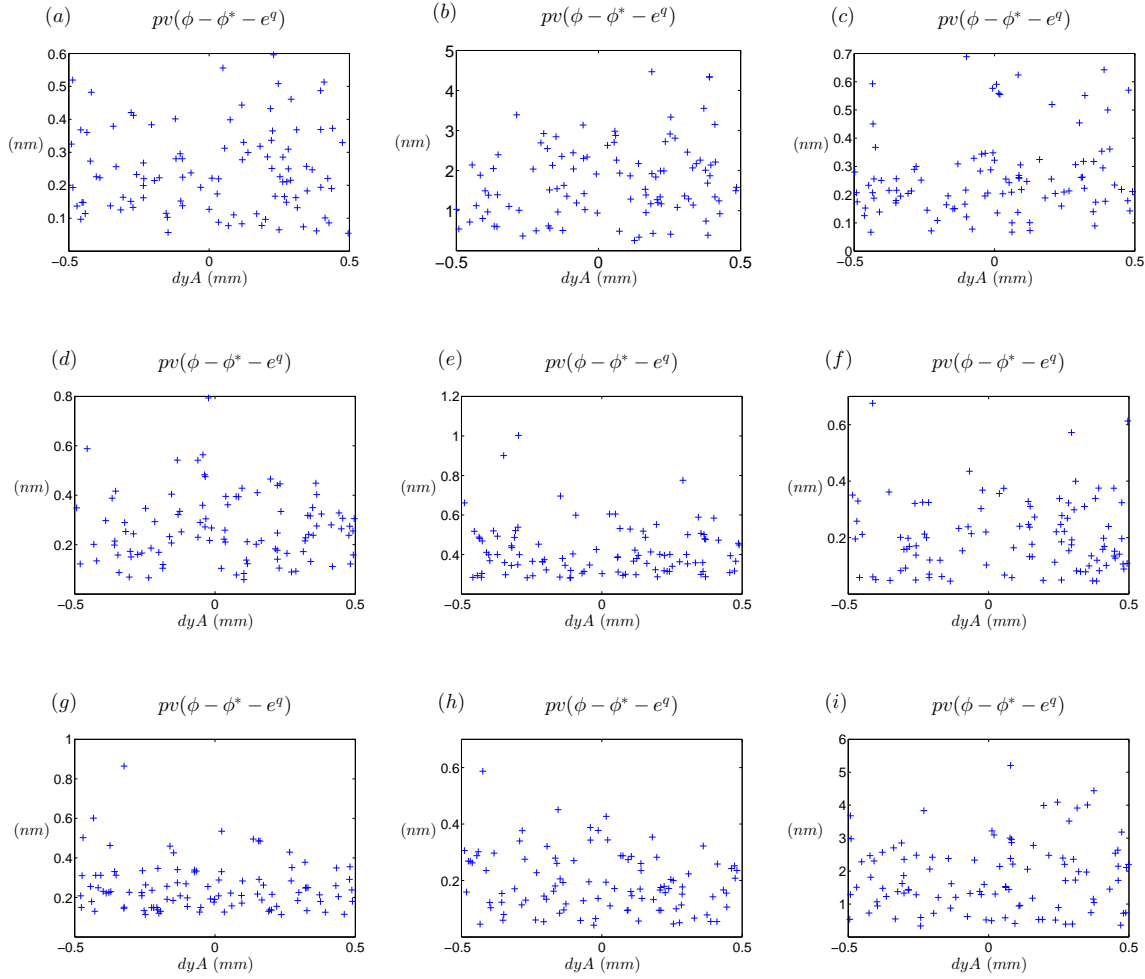


Figura 6.14: Peak to valley de l'error de reconstrucció, $\phi - \phi^* - e^q$, usant el lateral shearing seqüencial i l'estimació de pitch i roll de les seccions 5.1.1 i 5.1.2, en funció dels errors de posicionament amb el 3-flat test. (a) El domini és $M = 546 \text{ mm}$ i $N = 546 \text{ mm}$, i els desplaçaments són $t_1 = 3 \text{ mm}$ i $t_2 = 13 \text{ mm}$, (b) $M = N = 462 \text{ mm}$ i $t_1 = 2 \text{ mm}$, $t_2 = 33 \text{ mm}$, (c) $M = N = 182 \text{ mm}$ i $t_1 = 2 \text{ mm}$, $t_2 = 7 \text{ mm}$. (d) $M = N = 330 \text{ mm}$ i $t_1 = 11 \text{ mm}$, $t_2 = 15 \text{ mm}$, (e) $M = N = 462 \text{ mm}$ i $t_1 = 2 \text{ mm}$, $t_2 = 7 \text{ mm}$, (f) $M = N = 630 \text{ mm}$ i $t_1 = 5 \text{ mm}$, $t_2 = 7 \text{ mm}$, (g) $M = N = 630 \text{ mm}$ i $t_1 = 2 \text{ mm}$, $t_2 = 7 \text{ mm}$, (h) $M = N = 630 \text{ mm}$ i $t_1 = 7 \text{ mm}$, $t_2 = 9 \text{ mm}$ i (i) $M = N = 630 \text{ mm}$ i $t_1 = 5 \text{ mm}$, $t_2 = 63 \text{ mm}$.

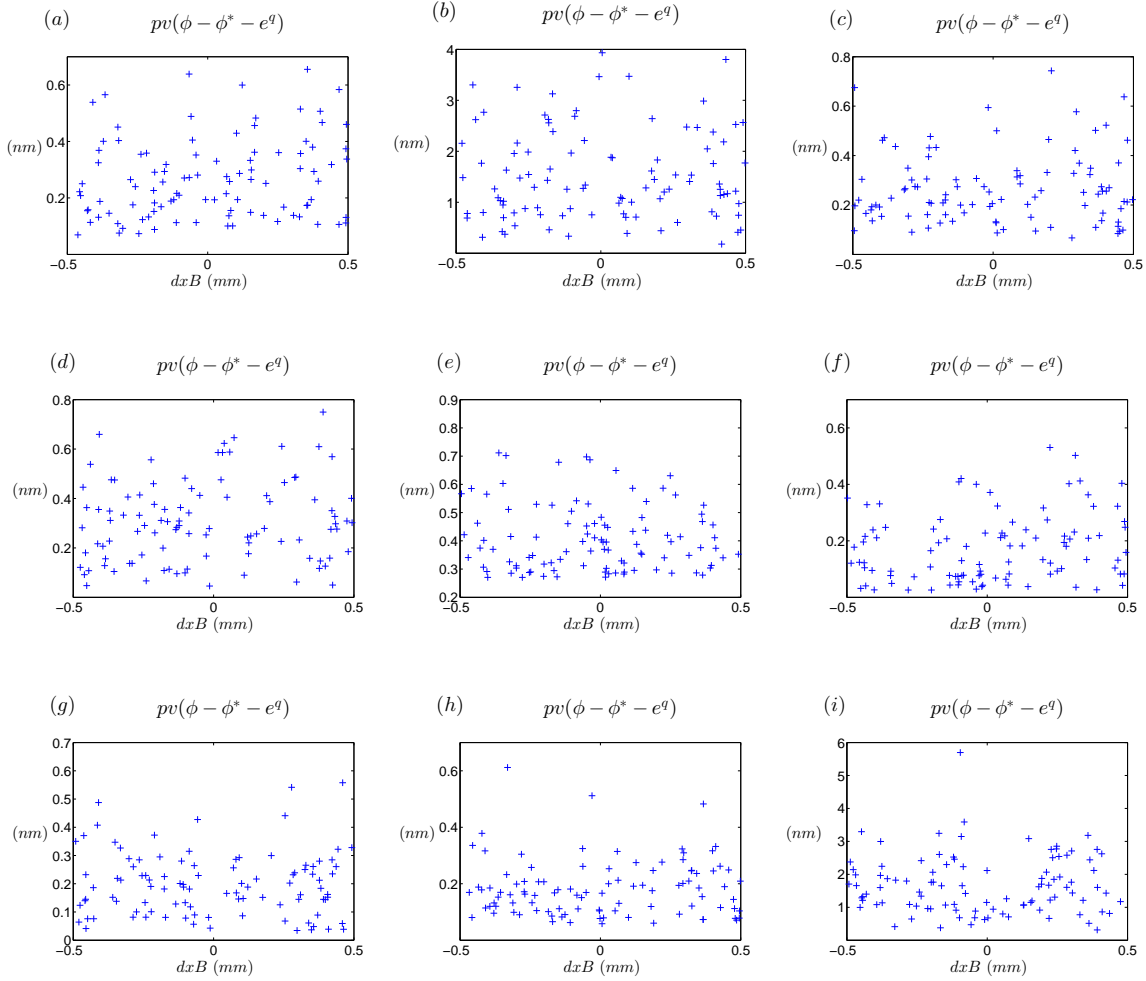


Figura 6.15: Peak to valley de l'error de reconstrucció, $\phi - \phi^* - e^q$, usant el lateral shearing sequencial i l'estimació de pitch i roll de les seccions 5.1.1 i 5.1.2, en funció dels errors de posicionament amb el 3-flat test. (a) El domini és $M = 546 \text{ mm}$ i $N = 546 \text{ mm}$, i els desplaçaments són $t_1 = 3 \text{ mm}$ i $t_2 = 13 \text{ mm}$, (b) $M = N = 462 \text{ mm}$ i $t_1 = 2 \text{ mm}$, $t_2 = 33 \text{ mm}$, (c) $M = N = 182 \text{ mm}$ i $t_1 = 2 \text{ mm}$, $t_2 = 7 \text{ mm}$. (d) $M = N = 330 \text{ mm}$ i $t_1 = 11 \text{ mm}$, $t_2 = 15 \text{ mm}$, (e) $M = N = 462 \text{ mm}$ i $t_1 = 2 \text{ mm}$, $t_2 = 7 \text{ mm}$, (f) $M = N = 630 \text{ mm}$ i $t_1 = 5 \text{ mm}$, $t_2 = 7 \text{ mm}$, (g) $M = N = 630 \text{ mm}$ i $t_1 = 2 \text{ mm}$, $t_2 = 7 \text{ mm}$, (h) $M = N = 630 \text{ mm}$ i $t_1 = 7 \text{ mm}$, $t_2 = 9 \text{ mm}$ i (i) $M = N = 630 \text{ mm}$ i $t_1 = 5 \text{ mm}$, $t_2 = 63 \text{ mm}$.

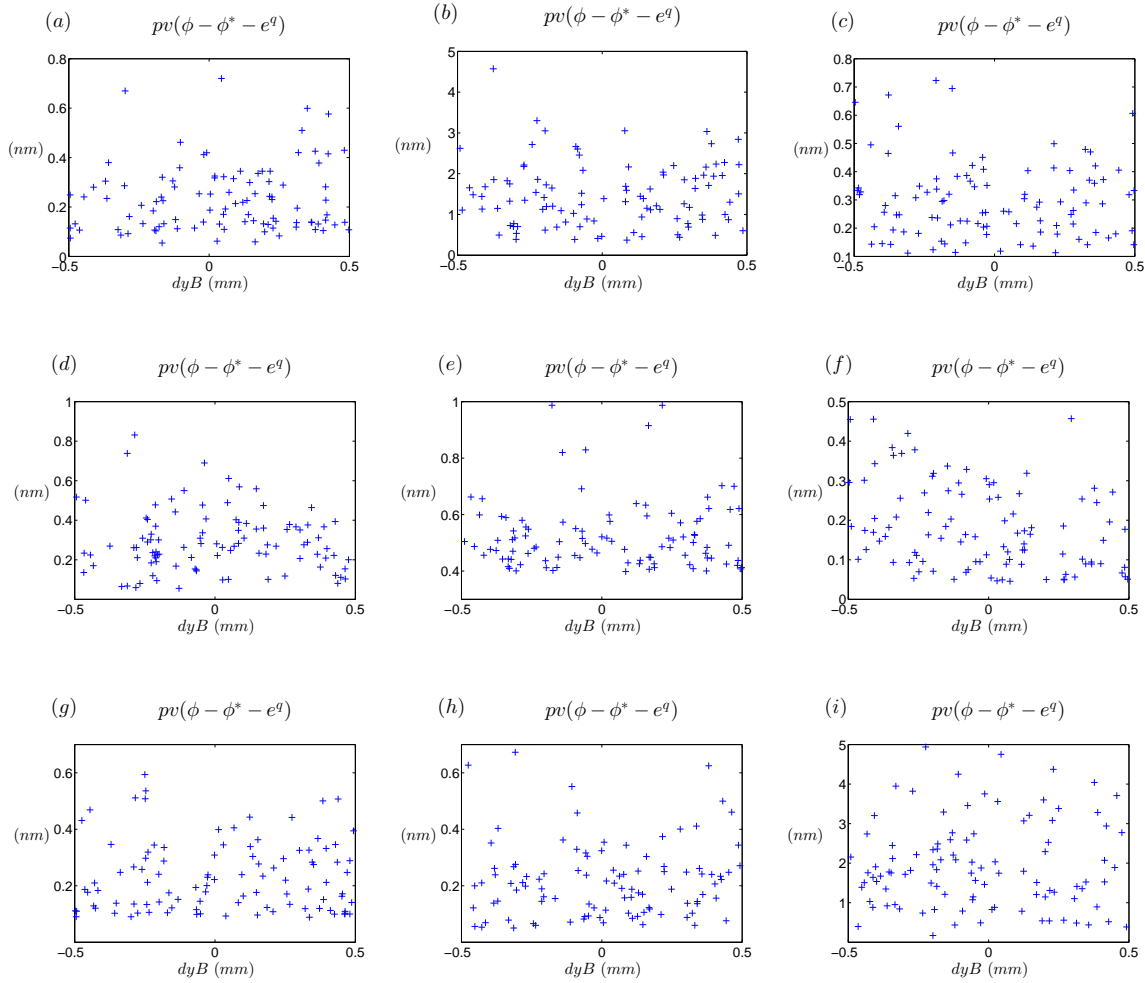


Figura 6.16: Peak to valley de l'error de reconstrucció, $\phi - \phi^* - e^q$, usant el lateral shearing sequencial i l'estimació de pitch i roll de les seccions 5.1.1 i 5.1.2, en funció dels errors de posicionament amb el 3-flat test. (a) El domini és $M = 546 \text{ mm}$ i $N = 546 \text{ mm}$, i els desplaçaments són $t_1 = 3 \text{ mm}$ i $t_2 = 13 \text{ mm}$, (b) $M = N = 462 \text{ mm}$ i $t_1 = 2 \text{ mm}$, $t_2 = 33 \text{ mm}$, (c) $M = N = 182 \text{ mm}$ i $t_1 = 2 \text{ mm}$, $t_2 = 7 \text{ mm}$. (d) $M = N = 330 \text{ mm}$ i $t_1 = 11 \text{ mm}$, $t_2 = 15 \text{ mm}$, (e) $M = N = 462 \text{ mm}$ i $t_1 = 2 \text{ mm}$, $t_2 = 7 \text{ mm}$, (f) $M = N = 630 \text{ mm}$ i $t_1 = 5 \text{ mm}$, $t_2 = 7 \text{ mm}$, (g) $M = N = 630 \text{ mm}$ i $t_1 = 2 \text{ mm}$, $t_2 = 7 \text{ mm}$, (h) $M = N = 630 \text{ mm}$ i $t_1 = 7 \text{ mm}$, $t_2 = 9 \text{ mm}$ i (i) $M = N = 630 \text{ mm}$ i $t_1 = 5 \text{ mm}$, $t_2 = 63 \text{ mm}$.

En la figura 6.13 es pot veure que, excepte els casos (b) i (i), el peak to valley dels errors de reconstrucció està per sota del nanòmetre. Els casos (b) i (i), tal com s ha dit altres vegades amb aquests tipus de desplaçaments, quan els desplaçaments són grans els errors de vora augmenten. De fet es pot veure mitjançant la comparació entre els casos (f) i (i), en que ambdós casos comparteixen el mateix domini i desplaçament t_1 , però en el cas (f) el segon desplaçament també és petit mentre que en (i) és $t_2 = 63$, que els errors més grans en les reconstruccions venen del fet que el segon desplaçament és gran. En tots els altres casos, amb diferents tipus de desplaçaments i dominis, el mètode és repetitiu i robust. Els casos (f), (g) i (h) tenen el mateix domini i desplaçaments similars i les reconstruccions també ho són.

Aquesta repetibilitat i robustesa del mètode és important perquè, dins del que es pot analitzar amb aquests casos concrets, el comportament del mètode amb de tots els sub-processos incorporats és conegut, tenint pitjors resultats amb desplaçaments grans i mantenint-se per sota del nanòmetre en totes les altres combinacions de dominis i desplaçaments.

Les reconstruccions de la figura 6.14 segueixen un comportament molt similar a les de la figura 6.13. Per tant, la influència dels errors de posicionament de la superfície A és similar tant si es produeixen en l eix x com en l eix y . Les figures 6.15 i 6.16 també tenen unes reconstruccions similars a les anteriors, per tant el mètode té les mateixes influències si els errors de posicionament són a la superfície A com a la superfície B.

De les figures 6.13 6.16 es treu la conclusió que el mètode es robust en tot tipus de desplaçaments i dominis, excepte amb desplaçaments grans, obtenint reconstruccions per sota del nanòmetre peak to valley quan els errors de posicionament estan entre $[-0.5 \ 0 \ 5] \text{ mm}$.

Un cop s ha analitzat la influència per separat de cada error de posicionament, a continuació i ja per finalitzar, es veuran reconstruccions amb els mateixos dominis i desplaçaments, però quan s afegeix alhora errors de posicionament aleatoris que segueixen una distribució uniforme entre $[-0.5 \ 0 \ 5] \text{ mm}$.

La figura 6.17 mostra els errors de reconstrucció per a 500 SUTs, seguint el mateix esquema que en les figures 6.13 6.16, però en aquest cas afegint tots els errors de posicionament alhora. En aquests casos, i per tal de poder mostrar la precisió del mètode gràficament, els errors en l'eix x de la figura A i B són el mateix, i igual succeeix en els errors en l'eix y de les superfícies A i B . Els errors de posicionament en els eixos x i y són aleatoris seguint una distribució uniforme entre $[-0.5 \ 0.5]$ mm .

El que es pot veure analitzant la figura 6.17 és que els resultats són molt similars als de les figures 6.13 6.16. Aquests resultats indiquen que el mètode segueix sent repetitiu, constant i robust quan els desplaçaments són petits. Aquesta figura ens demostra que el mètode del lateral shearing sequencial bidimensional proposat en aquesta tesi, juntament amb l'estimació de pitch i roll i amb la introducció de la quadràtica mitjançant el 3-flat test, aconsegueix reconstruccions de superfícies que estan al voltant del nanòmetre peak to valley.

Aquest nou mètode proposat és ràpid, doncs al ser les mesures donades per l'interferòmetre és més ràpid que els escanejors unidimensionals del LTP, per exemple, i té una precisió al voltant del nanòmetre peak to valley, sempre que els errors de posicionament estiguin entre $[-0.5 \ 0.5]$ mm , i independentment dels errors de pitch i roll en els desplaçaments.

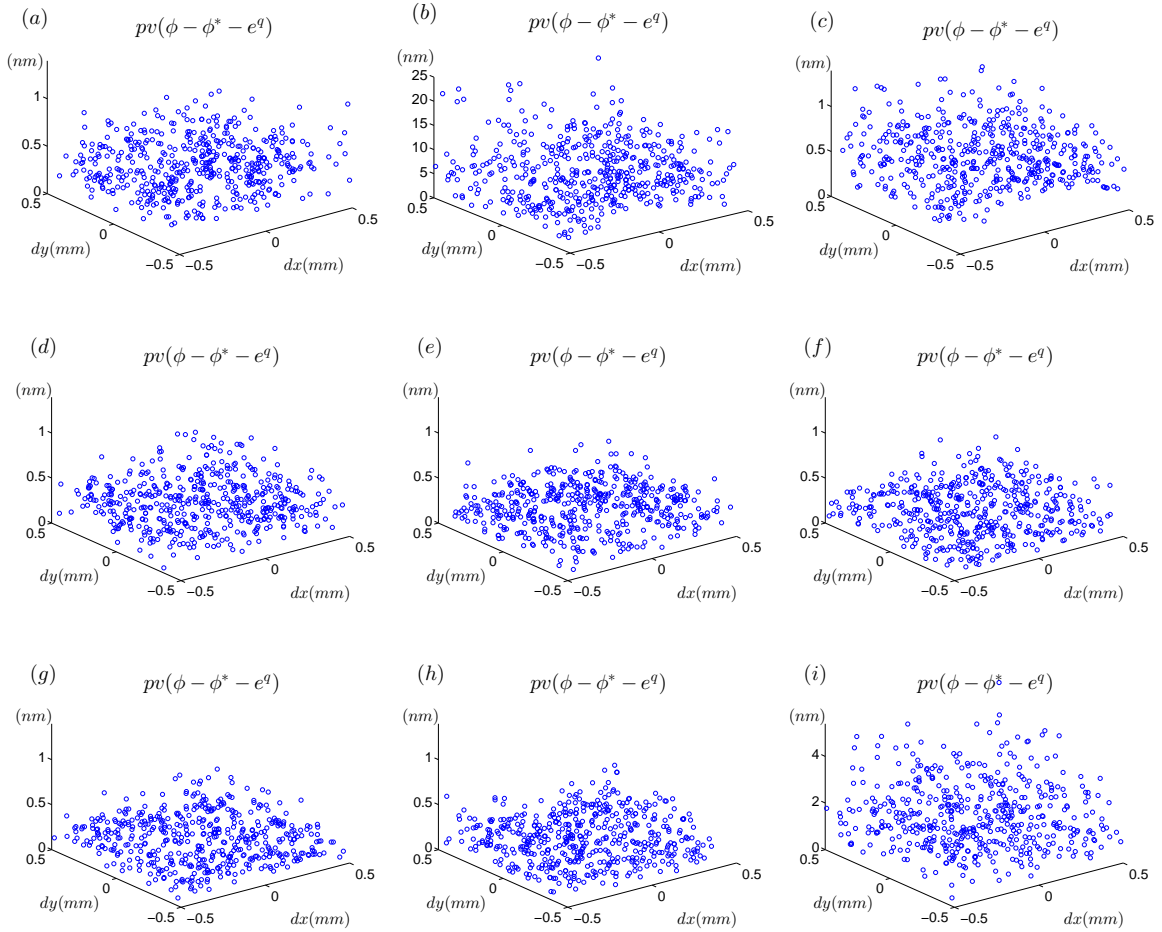
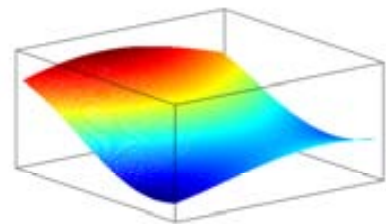


Figura 6.17: Peak to valley de l'error de reconstrucció, $\phi - \phi^* - e^q$, usant el lateral shearing sequencial i l'estimació de pitch i roll de les seccions 5.1.1 i 5.1.2, en funció dels errors de posicionament amb el 3-flat test. (a) El domini és $M = 546 \text{ mm}$ i $N = 546 \text{ mm}$, i els desplaçaments són $t_1 = 3 \text{ mm}$ i $t_2 = 13 \text{ mm}$, (b) $M = N = 462 \text{ mm}$ i $t_1 = 2 \text{ mm}$, $t_2 = 33 \text{ mm}$, (c) $M = N = 182 \text{ mm}$ i $t_1 = 2 \text{ mm}$, $t_2 = 7 \text{ mm}$. (d) $M = N = 330 \text{ mm}$ i $t_1 = 11 \text{ mm}$, $t_2 = 15 \text{ mm}$, (e) $M = N = 462 \text{ mm}$ i $t_1 = 2 \text{ mm}$, $t_2 = 7 \text{ mm}$, (f) $M = N = 630 \text{ mm}$ i $t_1 = 5 \text{ mm}$, $t_2 = 7 \text{ mm}$, (g) $M = N = 630 \text{ mm}$ i $t_1 = 2 \text{ mm}$, $t_2 = 7 \text{ mm}$, (h) $M = N = 630 \text{ mm}$ i $t_1 = 7 \text{ mm}$, $t_2 = 9 \text{ mm}$ i (i) $M = N = 630 \text{ mm}$ i $t_1 = 5 \text{ mm}$, $t_2 = 63 \text{ mm}$.

CAPÍTOL 7

DISCUSSIÓ I CONCLUSIONS



Aquesta tesi ha portat algunes contribucions científiques que bàsicament han estat recollides en alguns congressos i revistes internacionals del camp de la òptica [VNC09b, VNC09a, VNC11]. A continuació es farà una descripció de les principals conclusions a les que ha portat el present treball.

- Capítol 2

- Es presenta el motiu i l'objectiu del nou mètode proposat en aquesta tesi: el lateral shearing sequencial bidimensional. El lateral shearing sequencial bidimensional és un mètode que elimina la influència de la superfície de les mesures donades per l'interferòmetre .
- Es veu el setup que es necessita per a portar el mètode a la pràctica, així com es fa una primera descripció analítica en un domini unidimensional i infinit. En aquest cas, sense cap font d'error afegida i en un domini infinit i unidimensional, es fa una reconstrucció de la superfície mesurada per l'interferòmetre amb la màxima precisió (error numèric).
- Es veu també el mètode en un domini unidimensional i finit. En aquest cas, es necessiten una sèrie de modificacions en respecte del domini infinit i unidimensional per tal de que es compleixi el teorema de translació: es necessita que la funció sigui periòdica de període el domini de mesura de l'interferòmetre. Com que això no succeeix, s'incorpora el mètode de l'extensió natural, per tal de perioditzar les superfícies.

- Capítol 3

- Es descriu el mètode en domini bidimensional i discret, que és el que es tindrà realment amb les mesures donades per l'interferòmetre. Es fa un anàlisi de l'espai de Fourier i es veu com afecta i com és la relació entre el domini de les mesures i els desplaçaments de les superfícies.
- Amb un sol desplaçament apareix un error periòdic en les reconstruccions que depèn de la relació entre el domini de la mesura i el desplaçament. Aquest error és degut

a les singularitats de la funció de transferència. En funció de si el desplaçament és divisor del domini o no, la magnitud dels errors canvia. En el cas en que el desplaçament no és divisor del domini, l'error periòdic és constant en tota la reconstrucció, aconseguint un error de $\pm 2 \text{ nm}$ en el millor dels casos. En el cas en que el desplaçament és divisor del domini, l'error periòdic és creixent en els extrems. Aquest error és conegut com error de vora, i és degut a que s'està suposant que la SUT és periòdica quan no ho és. En el millor dels casos l'error és de $\pm 0.2 \text{ nm}$, però només amb desplaçaments molt petits.

- S'arriba a la conclusió que es necessita l'extensió natural, un mètode que "perioditza" la SUT. Amb l'extensió natural s'eliminen els errors de vora, aconseguint errors de reconstrucció $\pm 2 \text{ nm}$, però no s'eliminen els errors periòdics, produïts per les singularitats de la funció de transferència. Per eliminar l'error produït per les singularitats de la funció de transferència, es necessiten dos desplaçaments.
- S'analitzen diferents combinacions de dominis i desplaçaments, arribant al millor resultat quan es fa el lateral shearing sequencial amb dos desplaçaments co-primers i divisors del domini, amb l'extensió natural. En aquests casos s'arriba a un error de reconstrucció $\pm 10^{-14} \text{ nm}$. Aquest error és purament numèric.

- Capítol 4

- S'introdueix soroll a les mesures i es fa una propagació d'errors, és a dir, s'analitza com afecta el soroll de les mesures en les reconstruccions a partir de l'espai de Fourier i la funció de transferència. Es veu que varia la influència del soroll en funció de la magnitud dels desplaçaments i dominis de la mesura. S'arriba a la conclusió que el millor rang per minimitzar l'error de posició és que el domini de la mesura sigui menor de 300 mm , i el desplaçament entre 10 mm i 30 mm .
- S'introdueix els errors de posicionament en el desplaçament de la taula lineal. S'analitza com afecta en la funció de transferència i la magnitud de propagació d'errors. Es veuen diferents reconstruccions amb diferents desplaçaments i dominis en funció de la magnitud de l'error de posicionament. S'arriba a la conclusió que si

l'error de posicionament és més petit que 0.1 mm , l'error en la reconstrucció usant el lateral shearing sequencial és menor que 1 nm .

- Capítol 5

- S'introdueixen els errors de guiatge. Es fa un anàlisi de com afecten els errors de pitch i roll en les reconstruccions utilitzant el mètode del lateral shearing sequencial amb diferents dominis i desplaçaments, amb i sense extensió natural. En tots els casos s'afegeixen dos tipus d'error en la reconstrucció: un terme quadràtic i augment dels errors de vora. La magnitud d'aquests dos errors està molt per sobre de la precisió buscada. Quan hi ha error de pitch i roll en els desplaçaments de 500 nrad , l'error en la reconstrucció és de 1000 nm peak to valley. S'arriba a la conclusió que és necessari un mètode per a l'estimació del pitch i del roll.
- Es proposen dos mètodes nous per a l'estimació del pitch i el roll, basats en la sobre-informació que es té de les superfícies amb les mesures de l'interferòmetre necessàries per al mètode del lateral shearing sequencial. Es comprova la precisió dels nous mètodes d'estimació de pitch i roll. S'arriba a la conclusió que els mètodes funcionen de manera correcta per a superfícies planes, tenint una desviació estàndard de l'error entre 0.2 nrad i 3 nrad en l'estimació del pitch i entre 1 nrad i 5 nrad en l'estimació del roll, en tots els casos analitzats. També s'arriba a la conclusió que els mètodes no funcionen correctament quan les superfícies tenen termes quadràtics.
- Es comprova com són les reconstruccions usant el lateral shearing sequencial, amb els mètodes per a l'estimació de pitch i roll proposades. Es veu que l'error en la reconstrucció està per sota de 1 nm peak to valley en la majoria de casos en que les SUTs no tenen termes quadràtics, però augmentant de manera important amb la magnitud dels termes quadràtics de les SUTs. Per tant s'arriba a la conclusió que les reconstruccions tenen la precisió adequada per a superfícies planes, però no per a superfícies amb termes quadràtics.
- S'arriba a la conclusió que per a superfícies amb terme quadràtic és necessari fer

un tractament dels termes quadràtics de les mesures inicials donades per l'interferòmetre.

- Capítol 6

- Es comprova que fent un tractament previ dels termes quadràtics eliminant la quadràtica a l'inici i al final de les reconstruccions les reconstruccions són acurades i independents de la magnitud dels termes quadràtics de les mesures, tenint el peak to valley de l'error de les reconstruccions sense el terme quadràtic per sota de 1 *nm* en la majoria de combinacions de dominis i desplaçaments. En aquest cas no es té informació de la quadràtica de la SUT.
- Es proposa un nou mètode de 3-flat test per a l'estimació dels termes quadràtics de la superfície de referència. S'analitza detingudament el mètode i els resultats de les estimacions dels termes quadràtics en funció dels errors de posicionament de les superfícies necessàries per al mètode. Es veu com la mitja i la desviació estàndard de l'error del peak to valley de la reconstrucció de la quadràtica mitjançant el mètode és menor de 1 *nm* si els errors de posicionament són menors de 0.5 *mm*.
- Es proposa finalment una combinació del lateral shearing i l'estimació de la quadràtica mitjançant el 3-flat test, amb estimació de pitch i roll i extensió natural incloses. S'analitzen diferents combinacions de desplaçaments i dominis de mesura, arribant a una precisió al voltant de 1 *nm* peak to valley en la majoria de desplaçaments i dominis. Aquest rang dels errors ens permet tenir un mètode ràpid al utilitzar un interferòmetre en les mesures i amb una precisió al voltant de 1 *nm* peak to valley en un escenari realista.
- En les línies per continuar el treball, faltaria afegir alguns altres errors que es poden trobar en un laboratori, així com sobretot portar a la pràctica mitjançant mesures reals d'un mirall de sincrotró amb un interferòmetre el mètode del lateral shearing sequencial bidimensional proposat en aquesta tesi.

BIBLIOGRAFIA

- [ASS⁺10] SG Alcock, KJS Sawhney, S Scott, U Pedersen, R Walton, F Siewert, T Zeschke, F Senf, T Noll, and H Lammert. The diamond-nom: A non-contact profiler capable of characterizing optical figure error with sub-nanometre repeatability. *Nuclear Instruments and Methods in Physics Research Section A*, 616(2-3):224–228, 2010.
- [ASS⁺13] SG Alcock, JP Sutter, KJS Sawhney, DR Hall, K McAuley, and T Sorensen. Bimorph mirrors: The good, the bad, and the ugly. *Nuclear Instruments and Methods in Physics Research Section A*, 710:87–92, 2013.
- [AW93] C Ai and JC Wyant. Absolute testing of flats by using even and odd functions. *Applied Optics*, 32(25):4698–705, 1993.
- [BC08] J Bruna and J Cuff. *Anàlisi Complexa*. Manuals UAB, 2008.
- [BKM⁺06] JH Burge, LB Kot, HM Martin, C Zhao, and T Zobrist. Alternate surface measurements for gmt primary mirror segments. In *Proc. of SPIE*, pages 62732T–62732T–12, 2006.
- [CYMY02] J Campos, LP Yaroslavsky, A Moreno, and MJ Yzuel. Integration in the fourier domain for restoration of a function from its slope: Comparison of four methods. *Optics Letters*, 27:1986–1988, 2002.
- [EC96] P Ettl and K Creath. Comparison of phase-unwrapping algorithms by using gradient of first failure. *Applied Optics*, 35(25):5108–14, 1996.

- [Eva71] JD Evans. Method for approximating the radius of curvature of small concave spherical mirrors using a he-ne laser. *Applied Optics*, 10:995–996, 1971.
- [EW99a] C Elster and I Weingaertner. Exact wave-front reconstruction from two lateral shearing interferograms. *Journal of the Optical Society of America A*, 16(9):2281, 1999.
- [EW99b] C Elster and I Weingaertner. Solution to the shearing problem. *Applied Optics*, 38(23):5024–31, 1999.
- [EW02] C Elster and I Weingaertner. High-accuracy reconstruction of a function $f(x)$ when only $df(x)/dx$ or $d^2f(x)/dx^2$ is known at discrete measurement points. In *Proc. of SPIE*, volume 4782, pages 12–20, 2002.
- [FP73] H Flanders and JJ Price. *Elementary Functions and Analytic Geometry*. Academic Press, 1973.
- [Gec06] RD Geckeler. Error minimization in high-accuracy scanning deflectometry. In *Proc. of SPIE*, volume 6293, pages 62930O–62930O–12, 2006.
- [Gec07] RD Geckeler. Optimal use of pentaprisms in highly accurate deflectometric scanning. *Measurement Science and Technology*, 18(1):115–125, 2007.
- [GFE06] RD Geckeler, A Fricke, and C Elster. Calibration of angle encoders using transfer functions. *Measurement Science and Technology*, 17(10):2811–2818, 2006.
- [Goo05] JW Goodman. *Introduction to Fourier Optics*. Roberts & Co., 2005.
- [Gri06] U Griesmann. Three-flat test solutions based on simple mirror symmetry. *Applied Optics*, 45(23):5856–5865, 2006.
- [Gri07] U Griesmann. Three-flat tests including mounting-induced deformations. *Optical Engineering*, 46(9):093601, 2007.

- [GW02] RD Geckeler and I Weingaertner. Sub-nm topography measurement by deflectometry: flatness standard and wafer nanotopography. In *Proc. of SPIE*, volume 4779, pages 1–12, 2002.
- [GWJP01] RD Geckeler, I Weingaertner, A Just, and R Probst. Use and traceable calibration of autocollimators for ultra-precise measurement of slope and topography. In *Proc. of SPIE*, volume 4401, pages 184–195, 2001.
- [HR96] O Hignette and A Roiumeveaux. Status of the optical metrology at the esrf. In *Proc. of SPIE*, volume 2856, pages 314–322, 1996.
- [Kuc01] MF Kuchel. A new approach to solve the three flat problem. *Optik*, 9(9):381–391, 2001.
- [MAB⁺10] WR McKinney, M Anders, SK Barber, E Domning, Y Lou, GY Morrison, F Salmassi, B Smith, and V Yashchuk. Studies in optimal configuration of the ltp. In *Proc. of SPIE*, pages 780106–780106–12, 2010.
- [Mal07] D Malacara. *Optical Shop Testing*. John Wiley & Sons, Inc., Hoboken, NJ, USA, 2007.
- [MC07] A Moreno and J Campos. Revisión de diferentes técnicas de metrología óptica. *Optica Pura y Aplicada*, 40(3):267–280, 2007.
- [MC09] A Moreno and J Campos. Métodos de integración numérica aplicados en la caracterización de superficies mediante deflectometría óptica. *Optica Pura y Aplicada*, 42(2):115–124, 2009.
- [MCY05] A Moreno, J Campos, and LP Yaroslavsky. Frequency responses of five integration methods to obtain the profile from its slopes. *Optical Engineering*, 44(3):1–8, 2005.
- [Mor03] A Moreno. *Algoritmos para la obtención de una función a partir de sus diferencias*. Trabajo de Investigación de Tercer Ciclo de Doctorado, Universitat Autònoma de Barcelona, 2003.

- [Mor06] A Moreno. *Estudio de diferentes métodos de integración numérica. Aplicación en la caracterización de superficies mediante deflectometría óptica y un sensor de Shack-Hartmann*. PhD thesis, 2006.
- [MZB07] P Mallik, C Zhao, and J Burge. Measurement of a 2-meter flat using a pentaprism scanning system. *Optical Engineering*, 46(2):023602, 2007.
- [QJT95] S Qian, W Jark, and PZ Takacs. The penta-prism ltp: A long-trace-profiler with stationary optical head and moving penta prisma. *Review of Scientific Instruments*, 66(3):2562, 1995.
- [RHM05] A Rommeveaux, O Hignette, and C Morawe. Mirror metrology and bender characterization at esrf. In *Proc. of SPIE*, pages 167–74, 2005.
- [SAS10] KJS Sawhney, SG Alcock, and R Signorato. A novel adaptive bimorph focusing mirror and wavefront corrector with sub-nanometre dynamical figure control. In *Proc. of SPIE*, volume 7803, pages 780303–9, 2010.
- [SBB⁺12] F Siewert, J Buchheim, S Boutet, GJ Williams, A Paul, J Krzywinski, and R Signorato. Ultra-precise characterization of lcls hard x-ray focusing mirrors by high resolution slope measuring deflectometry. *Optics Express*, 20(4):4525–4536, 2012.
- [SLN⁺05] F Siewert, H Lammert, T Noll, T Schlegel, T Zeschke, T Hansel, A Nickel, A Schindler, B Grubert, and C Schlewitt. Advanced metrology, an essential support for the surface finishing of high performance x-ray optics. In *Proc. of SPIE*, volume 5921, pages 1–11, 2005.
- [SNS⁺04] F Siewert, T Noll, T Schlegel, T Zeschke, and H Lammert. The nanometer optical component measuring machine: a new sub-nm topography measuring device for x-ray optics at bessy. *AIP Conference Proceedings*, 705(1), 2004.
- [SSS⁺09] L Samoylova, H Sinn, F Siewert, H Mimura, K Yamauchi, and T Tschentscher. Requirements on hard x-ray grazing incidence optics for european xfel: analysis

- and simulation of wavefront transformations. In *Proc. of SPIE*, volume 7360, 2009.
- [SWE08] M Schulz, A Wiegmann, and C Elster. Optical flatness metrology: 40 years of progress. *Optica Pura y Aplicada*, 72(2003):325–331, 2008.
- [TQ89] PZ Takacs and S Qian. Us patent no. 488 469 7, 1989.
- [TQC87] PZ Takacs, S Qian, and J Colbert. Design of a long trace profiler. In *Proc. of SPIE*, volume 749, pages 59–64, 1987.
- [Vir93] M Virdee. *A new approach for establishing a reference plane for absolute measurement of shape and flatness with nanometre precision*. National Physical Laboratory, London, UK, 1993.
- [VM07] M Vannoni and G Molesini. Iterative algorithm for three flat test. *Optics Express*, 15(11):6809–6816, 2007.
- [VM08] M Vannoni and G Molesini. Absolute planarity with three-flat test: an iterative approach with zernike polynomials. *Optics Express*, 16(1):340–354, 2008.
- [VNC09a] J Vidal, J Nicolas, and J Campos. Analysis of the positioning error on lateral shearing surface reconstruction with a fizeau interferometer. In *Proc. of SPIE*, volume 7390, 2009.
- [VNC09b] J Vidal, J Nicolas, and J Campos. Methods to improve the accuracy of the surface reconstruction with a fizeau interferometer. In *Proc. of SPIE*, volume 7448, page 11, 2009.
- [VNC11] J Vidal, J Nicolas, and J Campos. New method to improve the accuracy in a sequential lateral shearing interferometer. *Optical Engineering*, 50(11), 2011.
- [WS99] I Weingaertner and M Schulz. Novel scanning technique for ultra-precise measurement of slope and topography of flats, aspheres and complex surfaces. In *Proc. of SPIE*, volume 3739, pages 274–282, 1999.

- [WSE99] I Weingaertner, M Schulz, and C Elster. Novel scanning technique for ultraprecise measurement of topography. In *Proc. of SPIE*, volume 3782, pages 306–317, 1999.
- [WWG⁺02] I Weingaertner, M Wurm, RD Geckeler, C Elster, M Schulz, E Dumitrescu, S Krey, and J Heinisch. Novel scheme for the ultraprecise and fast measurement of the nanotopography of large wafers. In *Proc. of SPIE*, volume 4779, pages 13–22, 2002.
- [YGS14] T Yandayan, RD Geckeler, and F Siewert. Pushing the limits: latest developments in angle metrology for the inspection of ultra-precise synchrotron optics. In *Proc. of SPIE*, volume 9206, pages 1–5, 2014.
- [YMC05] LP Yaroslavsky, A Moreno, and J Campos. Frequency responses and resolving power of numerical integration of sampled data. *Optics Express*, 13(8):2892–2905, 2005.
- [YMM⁺13] H Yumoto, S Matsuyama, H Mimura, K Yamauchi, and H Ohashi. Absolute calibration of optical flats using the three-flat test by considering the relative humidity change. *Nuclear Instruments and Methods in Physics Research Section A*, 710:2–6, 2013.
- [Zei13] Zeiss. Mirrors for synchrotron radiation technical information. Technical report, 2013.