Aproximación en diferentes normas por módulos racionales en compactos del plano complejo

Juan José Carmona Doménech

APROXIMACION EN DIFERENTES NORMAS POR MODULOS RACIONALES EN COMPACTOS DEL PLANO COMPLEJO

JUAN JOSE CARMONA DOMENECH

Memoria presentada por Juan José Carmona Doménech para optar al grado de Doctor en Matemáticas por la Universidad de Barcelona.

Barcelona, 16 Junio 1982

UNIVERSIDAD DE BARCELONA

Leida esta Memoria el día 23 de Septiembre de 1982 en la Facultad de Matemáticas, ante el siguiente Tribunal:

PRESIDENTE

VOCALES

fué calificada de Sobresaliente cum laude

Juan Verdera Melenchón:

Adjunto interino de Análisis IV de la Facultad de Matemáticas de la Universidad Central de Barcelona, certifica:

Que esta memoria ha sido realizada, bajo su dirección, en el Departamento de Teoría de Funciones de dicha Facultad por Juan José Carmona Doménech, y constituye su Tesis para optar al grado de Doctor en Matemáticas.

Barcelona, 16 Junio 1982

J. Verdera

Juan Verdera

Agradecimientos

En primer lugar quiero agradecer sinceramente al Prof. Joan Verdera la dedicación, la ayuda prestada y el tiempo empleado en la elaboración de esta memoria. Esta difícilmente hubiera podido realizarse sin su colaboración.

También quiero dar las gracias a todos los profesores de Teoría de Funciones de la Universidad Autónoma, por permitirme explicar una parte de esta memoria (aportándome sugerencias interesantes) y por asesorarme en las cuestiones que he necesitado. Al Prof. J. Bruna quiero agradecerle, además, el interés prestado y la difusión que ha dado a una parte de esta Tesis.

Agradezco al Dr. Cascante la lectura crítica de algún resultado de esta memoria. Al Prof. L.I. Hedberg, de la Universidad de Estocolmo, quiero agradecerle las sugerencias aportadas para el capítulo 3. Finalmente al Prof. J. L. Wang, de la Universidad de Alabama, le doy las gracias por haberme enviado todos los pre-prints que le he solicitado.

A las personas que más quiero y debo:

Tere Cervelló,

mis padres.

I N D I C E

INTRODUCCION

La aproximación por funciones holomorfas de una variable compleja, en diferentes normas, es un tema central del análisis complejo clásico.Sin embargo, sólo recientemente se han obtenido soluciones completas de dichos problemas.Para mejor comprensión del origen y del carácter de los problemas tratados en esta memoria haremos un breve repaso histórico del problema de la aproximación racional.

El primer resultado a citar, relativo a la aproximación uniforme, es el que hoy se conoce como Teorema de Runge (1885),y que establece que toda función holomorfa en un entorno de un compacto K puede aproximarse uniformemente sobre K por funciones racionales con polos fuera de K. Hay que esperar a 1927 (Walsh) para disponer de un teorema de aproximación uniforme más sutil: toda función,continua en la adherencia de un dominio de Jordan y analítica en el interior, se aproxima uniformemente por polinomios.Posteriormente la escuela rusa aporta dos nuevos resultados:

Lavrentiev (1937): Toda función continua en un compacto,con interior vacío y cuyo complementario es conexo,es aproximable uniformemente por polinomios.

Keldyš (1945): Si G es un abierto tal que $\mathbb{C} - \bar{G}$ es conexo, entonces toda función continua en $\bar{G}$ y analítica en G se aproxima uniformemente en $\bar{G}$ por polinomios.

Los dos enunciados precedentes son casos particulares del importante Teorema de Mergelyan (1952) que establece que una condición necesaria y suficiente para que toda función continua en un compacto K y holomorfa en el interior sea uniformemente aproximable por polinomios es que $\mathbb{C}$-K sea conexo.

Llegados a este punto era natural plantear el problema de la aproximación racional (uniforme) en los siguientes términos. Sea K un compacto del plano, A(K) es el espacio de funciones continuas en K y holomorfas en el interior y R(K) la adherencia uniforme en C(K) del espacio $R_o(K)$ de funciones racionales con polos fuera de K. Problema: dar condiciones necesarias y suficientes sobre K para que A(K) = R(K).

En realidad, Mergelyan dio una condición suficiente de carácter topológico para la validez de la aproximación racional: si $\mathbb{C}$ - K tiene un número finito de componentes conexas, entonces R(K) = A(K). Otra condición de caracter métrico había sido dada por Hartogs y Rosenthal en 1931: si K tiene medida de Lebesgue (en el plano) nula, entonces C(K) = R(K).

El primer resultado definitivo, para compactos sin interior, caracterizando la validez de R(K) = C(K) (en términos de capacidad analítica), fue demostrado por Vituskin (1959).

La solución completa del caso general, que requiere la noción de capacidad analítica continua, es debida también a Vituskin (1966). Las nuevas y complejas técnicas introducidas por este autor han sido ampliamente utilizadas para tratar otros problemas de aproximación.

Hagamos notar que la aproximación en L^p también había atraido la atención. En efecto, incluso antes del Teorema de Walsh, Carleman (1923) había demostrado que toda función de $L^p(\Omega)$, Ω un domi nio de Jordan, holomorfa en Ω , puede aproximarse en $\| \ \|_p$ por polinomios. Este resultado fue extendido a dominios de Caratheo dory por Markuševič y Farrell.

El problema de la aproximación racional en $\| \ \|_p$ puede enunciarse de la siguiente forma. Si K es un compacto se define $L^p_a(K) = L^p(K) \cap H(\overset{\circ}{K})$ y $R^p(K)$ como la adherencia en $L^p(K)$ de $R_o(K)$. Se trata de caracterizar aquellos compactos para los cuales $R^p(K) = L^p_a(K)$.Después de varias contribuciones parciales de Sinanjan (1964) y Havin(1968), Hedberg (1972) dió soluciones completas al problema utilizando ciertas capacidades, dependientes de p, íntimamente relacionadas con propiedades de los espacios de Sobolev.

Melnikov (1969) y O'Farrell (1975) estudiaron el problema de la aproximación racional en normas de Lipschitz,cuya solución definitiva debida a O'Farrell (1977) utiliza las técnicas de Vituskin y se expresa en términos de medidas de Haussdorf,es decir, de nociones métricas.

Precisamente O'Farrell introdujo (1975), en relación con el problema citado anteriormente,los módulos racionales que se obtienen tomando adherencia uniforme en C(K) del espacio $R_o(K) + \bar{z}R_o(K)+\ldots+\bar{z}^n R_o(K)$ (n fijo).El estudio sistemático de estos módulos fue iniciado por Wang(véase [43],[44],[45]de la bibliografía). En 1980 Trent y Wang probaron el siguiente espectacular resultado: si $\overset{\circ}{K} = \emptyset$ el módulo $R_o(K) + \bar{z}R_o(K)$ es uniformemente denso en C(K). Este teorema está fuertemente en contraste con la situación que se presenta en aproximación racional, puesto que hay ejemplos de compactos sin interior para los cuales $R(K) \neq C(K)$.

El primer problema que se plantea en esta memoria es el de averiguar qué tipo de funciones pueden reemplazar a $\bar{z}$ en el Teorema de Trent y Wang. En el capítulo 1 (1.5.1.) presentamos una solución razonablemente completa de este problema. Concretamente, si K es un compacto sin interior, g una función de clase C^2 en un entorno de K y $Z=\{z\in K/\ \bar{\partial}g(z)=0\}$, entonces se verifica que $R_0(K)+R_0(K)g$ es uniformemente denso en $C(K)$ sí y sólo sí $R(Z)=C(Z)$.

Es natural plantearse la posibilidad de dar una versión del teorema precedente para compactos arbitrarios, es decir, con interior.

Aquí se presentan dos líneas bien diferenciadas. La primera es considerar una función g arbitraria (siempre suficientemente regular) e identificar la mayor cantidad posible de funciones que pertenezcan a la adherencia uniforme $R_g(K)$ de $R_0(K)+R_0(K)g$ en $C(K)$. En esta dirección, demostramos en el capítulo 2 (2.2.1.) que si $f\in C^2(K)$, f es holomorfa en un entorno de $Z=\{z\in K/\bar{\partial}g(z)=0\}$ y $\bar{\partial}\left(\frac{\bar{\partial}f}{\partial g}\right)=0$ en $\overset{\circ}{K}-Z$, entonces $f\in R_g(K)$. También, si D es el disco unidad abierto, identificamos $R_{\bar{z}^n}(\bar{D})$ como el espacio de funciones continuas en $\bar{D}$ que admiten en D una expresión del tipo $h+\bar{z}^n k$ con h,k holomorfas en D. No parece natural esperar resultados de tipo general sin alguna limitación sobre g.

La segunda línea consiste en considerar el caso en que $g(z)=\bar{z}$ y plantear un problema de aproximación uniforme para el operador $\bar{\partial}^2$. Dado un compacto K definamos $A_{\bar{z}}(K)=\{f\in C(K)/\ \bar{\partial}^2 f=0 \text{ en } \overset{\circ}{K}\}$, donde $\bar{\partial}^2$ es en el sentido de las distribuciones. Evidentemente $R_{\bar{z}}(K)\subset A_{\bar{z}}(K)$, y el problema es determinar aquellos compactos K paralos cuales $A_{\bar{z}}(K)=R_{\bar{z}}(K)$. En el capítulo 2 (2.3.4) se presenta un teorema de Mergelyan para $\bar{\partial}^2$: si $\mathbb{C}-K$ tiene un número finito de componentes conexas, entonces $R_{\bar{z}}(K)=A_{\bar{z}}(K)$. En realidad la hipótesis puede rebajarse a que los diámetros de las componentes conexas de $\mathbb{C}-\overset{\circ}{K}$ estén acotados inferiormente por un número $\delta>0$.De esta forma en el caso $\overset{\circ}{K}=\emptyset$, recuperamos el Teorema de Trent-Wang.

En el capítulo 3 se estudia la adherencia $R_g^p(K)$ de $R_o(K)+gR_o(K)$ en $L^p(K)$. Por ejemplo, se prueba un teorema de aproximación en $|| \ ||_p$ en K que engloba la versión en norma p del teorema 1.5.1. presentado en el capítulo 1.Otro resultado a destacar es el siguiente. Si $f\varepsilon L^p(K)$, $1<p<2$, f es holomorfa en un entorno de Z y $\bar\partial(\frac{\bar\partial f}{\bar\partial g})=0$ en $\overset{\circ}{K}-Z$, entonces $f\varepsilon R_g^p(K)$. En el caso $2<p<\infty$, relacionamos nuestro problema de aproximación con uno de estabilidad en espacios de Sobolev. También caracterizamos $R^p_{\bar z^n}(\bar D)$ como las funciones de $L^p(\bar D)$ que en D admiten una expresión del tipo $h+\bar z^n k$, con $h,k\varepsilon H(D)$.

En el capítulo 4 se estudia,en primer lugar, la aproximación en la norma de $Lip(\alpha,K)$ $(0<\alpha<1)$,por funciones de $R_o(K)+gR_o(K)$, en el caso $\overset{\circ}{K}=\emptyset$.Demostramos que si $R(K)=C(K)$, entonces $lip(\alpha,K)$ es la adherencia (en norma $Lip(\alpha,K)$)de $R_o(K)+gR_o(K)$ sí y sólo sí $lip(\alpha,Z)$ es la adherencia de $R_o(Z)$. Un ejemplo muy reciente de Wang, demuestra que alguna hipótesis es necesaria sobre K. A continuación se prueba que, sin más hipótesis sobre K que la de no tener interior, $R_o(K)+gR_o(K)+g^2R_o(K)$ es denso en $lip(\alpha,K)$ sí y sólo sí $R_o(Z)$ es denso en $lip(\alpha,Z)$.Concluimos el capítulo con el siguiente resultado de aproximación en norma C^1. Si K es un compacto cuya frontera tiene área nula y $\bar\partial g(z)\neq 0$, $z\varepsilon K$, entonces para una función $f\varepsilon C^2(K)$ son equivalentes:

a) f es límite, en norma $C^2(K)$, de funciones de $R_o(K)+gR_o(K)$

b) $f\varepsilon R(K)+gR(K)$.

Finalmente, en el capítulo 5, estudiamos el problema de la lo calización de la aproximación uniforme y de la aproximación en $\| \ \|_p$.Concretamente probamos que $R_g^p(K)$ y $R_g(K)$ son módulos locales siempre que Z sea un conjunto finito.A modo de conclusión de la memoria, se incluye en este capítulo, una lista de problemas abiertos.

La estructura de la memoria es la siguiente: cada capítulo ha sido dividido en parágrafos. Las referencias a resultados de la memoria se hacen mediante tres dígitos.El primero indica el capítulo, el segundo el parágrafo y el tercero el resultado concreto. Las referencias a trabajos citados en la bibliografía se hacen mediante un número encerrado entre corchetes.A fin de clarificar el contenido de cada capítulo, hemos incluido un "abstract" al principio del mismo. El símbolo //. indicará el fin de las demostraciones.

Cuando estabamos mecanografiando esta memoria hemos recibido una copia de un trabajo de Trent y Wang en el que se presenta una demostración, menos ilustrativa que la nuestra, del teorema 1.5.1. y un caso particular del teorema 5.1.3.

C A P I T U L O 0

NOTACIONES Y RESULTADOS PREVIOS

En este capítulo se da un resumen de algunos de los resultados y definiciones en que se basa la memoria. Haremos uso en ésta, sin ulterior referencia, a cuestiones de topología, teoría de la medida, funciones analíticas y análisis en general. Se ha creido conveniente hacer una breve alusión a resultados previos, algunos de ellos bien conocidos, directamente vinculados con el contenido de esta memoria. Las demostraciones y una mayor información sobre ellos puede encontrarse en la bibliografia que se cita específicamente.

0.1. APROXIMACION.

Denotaremos por $\mathbb{C}$ el plano complejo y por dm la medida de Lebesgue en $\mathbb{C}$. Si E es un conjunto medible de $\mathbb{C}$ y $1 \leq p \leq \infty$, $L^p(E)$ y $L^p_{loc}(E)$ denotarán los usuales espacios de funciones p-sumables (o localmente p-sumables) dotados de la norma usual $\| \ \|_p$. Todas las medidas se supondrán complejas, de Borel, regulares y a soporte compacto en $\mathbb{C}$. El espacio de dichas medidas sobre un conjunto medible X se denotará por M(X).

0.1.1. Lema. ([5]). La función $\frac{1}{z}$ pertenece a $L^p_{loc}(\mathbb{C})$ para $1 \leq p < 2$. Si E es un conjunto dm-medible se verifica:

$$\int_E \frac{1}{|z-w|}\, dm(z) \leq 2\sqrt{\pi m(E)}\,, \qquad w\in\mathbb{C}.$$

0.1.2. Definición. ([5]). Si μ es una medida, se define el potencial Newtoniano de μ como:

$$\tilde{\mu}(w) = \int \frac{1}{|z-w|}\, d\mu(z) \quad , \qquad w\in\mathbb{C}.$$

y la transformada de Cauchy de μ como:

$$\hat{\mu}(w) = \int \frac{1}{z-w}\, d\mu(z) \quad , \qquad w\in\mathbb{C}.$$

0.1.3. Proposición. ([18],[5]). La transformada de Cauchy de μ $\tilde{\mu}$ es absolutamente convergente para casi todo punto $w\in\mathbb{C}$ (así como $\tilde{\mu}$) y se cumplen:

a) $\hat{\mu}\in L^p_{loc}(\mathbb{C})$, $\tilde{\mu}\in L^p_{loc}(\mathbb{C})$ para $1\leq p<2$,

b) $\hat{\mu}$ es analítica fuera del sop μ,

c) $\hat{\mu}(\infty) = 0$,

d) $\hat{\mu}'(\infty) = \lim_{z\to\infty} z\hat{\mu}(z) = -\int d\mu.$

Escribiremos:

$$\bar{\partial} f = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x} + i\frac{\partial f}{\partial y}\right) , \quad \partial f = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x} - i\frac{\partial f}{\partial y}\right) .$$

Si U es un abierto de R^n utilizaremos las siguientes notaciones:

$C^k(U)$, $1\leq k\leq\infty$: funciones de clase C^k en U.

$D^k(U)$, $1\leq k<\infty$: funciones de clase $C^k(U)$ con soporte compacto.

$D(U)$: funciones que son de clase C^∞ con soporte compacto incluido en U.

Los usuales espacios de distribuciones en U (respectivamente distribuciones a soporte compacto) se denotaran por D(U)' (resp. $C^{\infty}(U)'$).Si $U=\mathbb{C}$ suprimiremos en general la escritura de $\mathbb{C}$.

Si X es un espacio topológico compacto,C(X) denotará el espacio de funciones continuas dotado de la norma uniforme,escrita $\|\ \|_{\infty}$ (ó $\|\ \|_X$ si hay ambiguedad).

<u>0.1.4.Proposición.</u> Fórmula generalizada de Cauchy.(Fórmula de Pompeiu)([5] ,[40]). Sea G un abierto acotado con ∂G de clase C^1 a trozos y $f\varepsilon C^1(U)$, donde U es un entorno de $\bar{G}$. Entonces para todo $w\varepsilon G$:

$$f(w) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial G} \frac{f(z)}{z-w}\,dz - \frac{1}{\pi}\int_G \frac{\bar{\partial} f(z)}{z-w}\,dm(z).$$

<u>0.1.5.Corolario.</u>([5]). Sea $f\varepsilon D^1$. Entonces para todo $w\varepsilon\mathbb{C}$:

$$f(w) = -\frac{1}{\pi}\int \frac{\bar{\partial} f(z)}{z-w}\,dm(z).$$

Escribamos S^2 para denotar el compactificado de Alexandrow de $\mathbb{C}$, $\mathbb{C}\cup\{\infty\} = S^2$.

<u>0.1.6.Lema.</u>([5]) Sea X un compacto, $g\varepsilon L^p(X)$ $p>2$.Sea

$$\hat{g}(w) = \int_X \frac{g(z)}{z-w}\,dm(z) , \qquad w\varepsilon\mathbb{C}.$$

Entonces $\hat{g}$ es holomorfa en S^2-X, continua en S^2y $g(\infty)=0$.

<u>0.1.7.Lema.</u>([5])Seaμ una medida sobre $\mathbb{C}$ con soporte compacto

y U un abierto de $\mathbb{C}$. Si $\hat{\mu}=0$ c.p.t. en U entonces $|\mu|(U)=0$.

Si X es un compacto de $\mathbb{C}$, $R_o(X)$ es el espacio de las funciones racionales con polos fuera de X y R(X) es la adherencia uniforme de $R_o(X)$ en C(X). A(X) son las funciones holomorfas en $\mathring{X}$ y continuas en X. El conjunto de medidas ortogonales a un subespacio S se denotará por $S^{\perp}$.

<u>0.1.8.Lema.</u>([5]). Sea X un compacto y $\mu\in M(X)$. Se verifica $\mu\in R(X)^{\perp}$ sí y sólo sí $\hat{\mu}=0$ en $\mathbb{C}-X$.

Sea E un conjunto arbitrario de $\mathbb{C}$ y $0<\alpha\leq 1$. Escribiremos:

$$\mathrm{Lip}(\alpha,E)=\{f\in C(E)/ \sup_{x\neq y}\frac{|f(x)-f(y)|}{|x-y|^{\alpha}}=\|f\|_{\alpha}<+\infty\}.$$

$$\mathrm{lip}(\alpha,E)=\{f\in \mathrm{Lip}(\alpha,E)/ \lim_{r\to 0}\sup_{|x-y|<r}\frac{|f(x)-f(y)|}{|x-y|^{\alpha}}=0\},$$

ambos espacios dotados de la norma $\|f\|_{\mathrm{Lip}_\alpha}=\|f\|_{\infty}+\|f\|_{\alpha}$, para la cual son espacios de Banach.

<u>0.1.9.Teorema.</u>(Browder [5] ,O'Farrell [30]).Sea X un compacto de $\mathbb{C}$,U un abierto que contiene a X, $f\in C^1(U)$ y $\bar{\partial}f=0$ en X. Entonces f pertenece a la clausura de $R_o(X)$ en $\mathrm{Lip}(\alpha,X)$ para todo $0<\alpha<1$,(en particular $f|_X\in R(X)$).

<u>0.1.10.Teorema.</u>(Runge [3] ,[49]). Si f es holomorfa en un entorno de X, entonces f es límite uniforme de funciones racionales con polos fuera de X.

0.1.11.Teorema.(Hartogs-Rosenthal [5], [49]).Si X es un compacto de medida de Lebesgue (en $\mathbb{C}$) cero, entonces $R(X)=C(X)$.

0.1.12.Teorema.(O'Farrell [27], [29]).Si X es un compacto con medida cero, entonces la adherencia de $R_0(X)$ en norma $\mathrm{Lip}(\alpha,X)$ es $\mathrm{lip}(\alpha,X)$ $(0<\alpha<1)$.

0.1.13.Teorema de Mergelyan.([26],[36],[40]).Si X es un compacto con un número finito de componentes complementarias, entonces $R(X)=A(X)$.

La versión de este teorema en el caso $\mathring{X}=\emptyset$ se conoce como teorema de Lavrentiev.

0.1.14.Teorema.(Alexander [40]). Sea (X_n) una sucesión de compactos de $\mathbb{C}$ tales que $R(X_n)=C(X_n)$ y sea $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} X_n$. Entonces $R(X)=C(X)$.

0.1.15.Definición de capacidad analítica.([16],[49]).Sea K un compacto.Escribamos $\Omega(K)$ para denotar la componente no acotada de S^2-K. La capacidad analítica de K es:

$$\gamma(K) = \sup |f'(\infty)|$$

donde el supremo está tomado sobre todas las funciones f que satisfacen:

a) f analítica en $\Omega(K)$.

b) $||f||_\infty \leq 1$.

c) $f(\infty)=0$.

Si S es un subconjunto arbitrario de $\mathbb{C}$, definimos

$$\gamma(S) = \sup_{K\subset S} \gamma(K) \qquad , K \quad \text{compacto.}$$

0.1.16.Proposición.([16]).Si K es un compacto y conexo de $\mathbb{C}$, entonces:

$$\gamma(K) \leqslant \operatorname{diam}(K) \leqslant 4\gamma(K).$$

0.1.17.Definición de capacidad analítica continua.([16],[18],[49]). Sea S un subconjunto de $\mathbb{C}$. La capacidad analítica continua de S es:

$$\alpha(S) = \sup |f'(\infty)|$$

donde el supremo está tomado sobre las funciones f que satisfacen:

a) $f \in C(S^2)$ y analítica fuera de un subconjunto compacto de S.

b) $f(\infty) = 0$.

c) $||f||_{\infty} \leqslant 1$.

Si U es un abierto de $\mathbb{C}$ escribiremos H(U) para denotar el espacio de funciones holomorfas en U y A(U) el espaciones holomrfas en U y continuas en $\overline{U}$.

0.1.18.Teorema.([18]).Si E es un cerrado relativo de un abierto U con $\alpha(E)=0$, entonces toda $f \in A(U - E)$ tiene una extensión a A(U).

0.1.19.Contenido de Haussdorff.([18],[29]).Una función de medida es una función $h \geqslant 0$, creciente, definida en R^+ con $h(0)=0$. Escribamos,para $E \subset \mathbb{C}$,

$$M^h(E) = \inf \sum_j h(d(S_j))$$

donde S_j son bolas abiertas que recubren E, y que $d(S_j)$ denota el diámetro de S_j.Si $h(t) = t^{\alpha} (\alpha>0)$ escribiremos M^{α} en vez de M^h.

Si E es un subconjunto contenido en una curva rectificable,M^1

es equivalente a la longitud.

0.1.20.Teorema de Vituskin. ([3],[16],[49]).Las siguientes condiciones son equivalentes, si K es un compacto de $\mathbb{C}$:

a) $R(K) = C(K)$

b) $\gamma(D-K)=\gamma(D)$, para todo abierto acotado D

c) $\lim\sup_{r\to 0} \frac{\gamma(D(a,r)-K)}{r} > 0$ c.p.t. $a\in K$

d) $\gamma(D(a,r)-K) = r = \gamma(D(a,r))$ $a\in\mathbb{C}$, $r>0$.

El teorema general de Vituskin, puede verse en las mismas referencias.

0.1.21.Teorema. (O'Farrell [29]).Son equivalentes, para cada compacto K y $0<\alpha<1$, las siguientes afirmaciones:

a) $\overline{R_o(K)}^{\alpha} = \mathrm{lip}(\alpha,K)$

b) Existe $c>0$ tal que $M^{1+\alpha}(D-K)\geq cr^{1+\alpha}$ para todo disco abierto D de radio r.

$\overline{R_o(K)}^{\alpha}$ designa la adherencia en norma $\mathrm{Lip}(\alpha,K)$ de $R_o(K)$.

0.1.22.Proposición. ([18]).Si E es reunión numerable de conjuntos de longitud finita, entonces $\alpha(E)=0$.

Para $1\leq p<\infty$ $R^p(X)$ denotará la adherencia en $L^p(X)$ de $R_o(X)$ y $L^p_a(X)$ las funciones de $L^p(X)$ que son analíticas en $\mathring{X}$.

0.1.23.Proposición. ([19],[38]). Si X es un compacto de $\mathbb{C}$ y $1\leq p<2$, entonces $R^p(X) = L^p_a(X)$.

Los artículos de Hedberg [20],[21],[23] dan condiciones necesarias y suficientes para que $R^p(X) = L^p_a(X)$.

0.1.24.Definición. ([27]).Si T es una distribución a soporte compacto en $\mathbb{C}$, se define la transformada de Cauchy $\hat{T}$ de T como la distribución que cumple:

$$\hat{T}(\psi) = -T(\hat{\psi}) \quad \text{para } \psi\in D(\mathbb{C}).$$

0.1.25.Lema.([27]).En las hipótesis de la definición precedente, se verifica:

a) $\bar{\partial}\hat{\psi} = -\pi\psi = \widehat{\bar{\partial}\psi}$ para $\psi\in D(\mathbb{C})$

b) $\bar{\partial}\hat{T} = -\pi T = \widehat{\bar{\partial}T}$ para $T\in C^{\infty'}$

c) La aplicación $\hat{}: C^{\infty'} \longrightarrow D'$ es lineal, continua, inyectiva y con imagen densa.

Para mayor información sobre lo anterior, pueden consultarse los libros básicos [3], [5], [16], [18], [40] y [49] y los artículos [19], [20], [21], [23], [27], [28], [31], [32], [38].

Si X es un compacto de $\mathbb{C}$, denotaremos siempre por g una función de clase C^2 en un entorno de X, fijada de una vez por todas, y que intervendrá en todos los problemas de aproximación estudiados en la presente memoria. Por $R_g(X)$ denotaremos la adherencia uniforme de $R_o(X) + gR_o(X)$ en $C(X)$. Si $1\leqslant p<\infty$ $R_g^p(X)$ denotará la adherencia de $R_o(X) + gR_o(X)$ en $L^p(X)$. Si U es un abierto, $R_g(U)$ designa el conjunto de funciones de la forma $h+kg$ con $h,k\in H(U)$.

Concluimos este parágrafo con un teorema de extensión, del tipo de Whitney para funciones lipschitzianas.

0.1.26. Teorema. ([39]).Sea F un subconjunto cerrado de R^n. Existe una aplicación E lineal y continua de $\mathrm{Lip}(\alpha,F) \longrightarrow \mathrm{Lip}(\alpha,R^n)$ $(0<\alpha<1)$. Si $\alpha<1$ entonces $E(\mathrm{lip}(\alpha,F)) \subset \mathrm{lip}(\alpha,R^n)$.

La demostración de la primera afirmación puede verse en Stein[39] , pág 174.Respecto a la segunda afirmación, no está explicitada en el texto pero se obtiene modificando la demostración del mismo del siguiente modo.

Sea $\omega(f,\delta)=\sup_{|x-y|\leqslant\delta}|f(x)-f(y)|\leqslant M\delta^{\alpha}$ el módulo de continuidad de f.Sea $\tilde{\omega}(f,\delta)$ la envoltura cóncava de ω. Resulta que $\tilde{\omega}$ es cóncava, creciente, $\tilde{\omega}(0)=0$ y continua en $[0,\infty[$ .Si $\omega(f,\delta)=o(\delta^{\alpha})$, entonces $\tilde{\omega}(f,\delta)=o(\delta^{\alpha})$.Veamos que si $\omega(f,\delta)=o(\delta^{\alpha})$, entonces $\omega(E(f),\delta)=o(\delta^{\alpha})$. Hay que tener en cuenta la desigualdad:

$$\left|\frac{\partial}{\partial x_j}E(f)(x)\right|\leqslant c\,\frac{\tilde{\omega}(f,d(x,F))}{d(x,F)} \qquad \text{si } x\notin F.$$

Par acotar $|E(f)(x)-E(f)(y)|$ si $x\notin F$ e $y\in F$ se procede igual que en [39].Si $x\notin F$, $y\notin F$ y $|x-y|<d(x,F)$ entonces:

$$|E(f)(x)-E(f)(y)|\leqslant|x-y|\,c\,\frac{\tilde{\omega}(f,\ d(x,F)}{d(x,F)}\leqslant c\tilde{\omega}(f,|x-y|).$$

La última desigualdad es consecuencia de ser $\tilde{\omega}(\delta)/\delta$ creciente.

<u>0.2. OPERADORES,ESPACIOS DE SOBOLEV E INTEGRALES SINGULARES.</u>

<u>0.2.1.Definiciones.</u>([15]).Sean X,Y dos abiertos de R^n.El transpuesto de un operador lineal continuo $A:D(Y)\to D(X)'$ es el operador lineal ${}^tA$ de $D(X)$ en $D(Y)'$ definido por:

$$\langle {}^tA\rho,\psi\rangle=\langle\rho,A\psi\rangle.$$

El adjunto del mismo operador se define como:

$$\langle \overset{*}{A}\rho,\overline{\psi}\rangle=\langle\rho,\overline{A\psi}\rangle. \qquad \text{para} \quad \rho\in D(X)\ ,\ \psi\in D(Y).$$

Escribiremos $D^{\alpha}=\dfrac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1}\cdots\partial x_n^{\alpha_n}}$ $\quad \alpha=(\alpha_1,\ldots\alpha_n)\in N\times N\ldots\times N.$

Si $f: R^n \longrightarrow R^n$, Df es la diferencial de f.

Si $A=\sum_{|\alpha|\leqslant m} a_\alpha(x)D^\alpha$ entonces ${}^tA = \sum_{|\alpha|\leqslant m} (-1)^{|\alpha|} D^\alpha(a_\alpha(x).)$ y

$A^* = \Sigma D^\alpha(\overline{a_\alpha(x)}.)$.

El símbolo (o polinomio característico) de $\sum_{|\alpha|\leqslant m} a_\alpha(x)D^\alpha$ es

$$P_m(x,\xi)=\sum_{|\alpha|=m} a_\alpha(x)\xi^\alpha \quad ,\xi=(\xi_1,\ldots\xi_n)\varepsilon R^n,\ x\varepsilon Y$$

Un operador diferencial $\Sigma\, a_\alpha(x)D^\alpha$ en un abierto Y es elíptico si $P_m(x,\xi) \neq 0$ para todo $x\varepsilon Y$ y todo $\xi\varepsilon R^n-\{0\}$.

Si P(x,D) es un operador diferencial sobre Y,una solución fundamental bi-rregular([32]) es una función $E\varepsilon L^1_{loc}(YxY)$ tal que E $C^\infty(YxY)-\Delta)$ y tal que:

$$P(x,D)\ E(x,y) = \delta_y \qquad {}^tP(y,D)E(x,y) = \delta_x .$$

<u>0.2.2.Lema de Weyl.</u> ([15]). Si $u\varepsilon L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ y $\Delta u=0$ (en particular si $\bar{\partial}u=0$) en U, entonces $u\varepsilon C^\infty(U)$ y u es harmónica en U (es analítica si $\bar{\partial}u=0$).

<u>0.2.3.Definición.</u> ([1]).Sea U un abierto de R^n, $m\varepsilon N$ y $1\leqslant p<\infty$. El p-espacio de Sobolev de orden m es:

$$W^p_m\ (U) =\{ f\varepsilon L^p(U)/\ D^\alpha f\varepsilon L^p(U),0\leqslant|\alpha|\leqslant m\}$$

Es un espacio de Banach con la norma:

$$||u||^p_{m,p} = \sum_{0\leqslant|\alpha|\leqslant m} ||D^\alpha u||^p_p$$

Escribiremos $\mathring{W}^p_m(U)$ para indicar la adherencia de D(U) en $W^p_m(U)$.

<u>0.2.4.Teorema.</u> ([1]). $W^p_m(\mathbb{R}^n) = \mathring{W}^p_m(\mathbb{R}^n)$. Para todo abierto $U\subset R^n$ se

verifica que el conjunto $\{u\varepsilon C^m(U)/||u||_{m,p}<\infty\}$ es denso en $W_m^p(U)$.

0.2.5.Teorema. ([8],[22],[32]). Sea X un compacto de R^n y $p>n$. Si $f=0$ en R^n-X y $f\varepsilon W_m^p(R^n)$ entonces $f\varepsilon \mathring{W}_m^p(\mathring{X})$.

0.2.6.Definición. ([9],[39]), Un núcleo de Calderon-Zymund es una función del tipo:

$$k(x) = \frac{\Omega(x)}{|x|^n} \qquad x\varepsilon R^n$$

donde Ωverifica:

a) $\Omega(\rho x) = \Omega(x) \qquad \rho>0$

b) $\int_{S^{n-1}} \Omega(x)d\sigma = 0$, donde S^{n-1} es la esfera unidad de R^n y $d\sigma$ es la medida euclideana en S^{n-1}.

c) Si $\omega(\Omega,\delta) = \sup_{\substack{|x-x'|\leqslant\delta \\ |x|=|x'|=1}} |\Omega(x)-\Omega(x')|$ entonces $\int_0^1 \frac{\omega(\delta)}{\delta}d\delta<\infty$.

0.2.7. Teorema. ([9],[39]). Sea k un núcleo de Calderon-Zymund. Para $1<p<\infty$ y $f\varepsilon L^p(R^n)$ sea

$$T_\varepsilon(f)(x) = \int_{|x-y|\geqslant\varepsilon} k(x-y)f(y)dm(y)$$

Se verifica:

a) Existe una constante A_p (independiente de f y ε) tal que

$$||T_\varepsilon(f)||_p \leqslant A_p||f||_p$$

b) $\lim_{\varepsilon\to 0} T_\varepsilon(f) = T(f)$ existe en L^p y verifica:

$$||T(f)||_p \leqslant A_p||f||_p.$$

0.2.8.Teorema. ([9],[39]).Sea k un núcleo de Calderon Zymund. Para $f\varepsilon L^p(R^n)$ ($1<p<\infty$).Consideremos:

$$T_\varepsilon(f)(x) = \int_{|x-y|\geq\varepsilon} k(x-y)f(y)dm(y) \qquad \varepsilon>0$$

(la integral converge absolutamente para todo x).Se cumple:

a) $\lim_{\varepsilon\to 0} T_\varepsilon(f)(x)$ existe c.p.t. $x\varepsilon R^n$.

b) Sea $T^*(f)(x)= \sup_{\varepsilon>0} |T_\varepsilon(f)(x)|$.Si $f\varepsilon L^p(R^n)$ con $1<p<+\infty$,entonces $||T(f)||_p \leqslant A_p||f||_p$.

0.2.9.Definición. ([9],[40]).Sea $f\varepsilon L^1(\mathbb{C})$ con soporte compacto.El potencial logarítmico de f es la función:

$$u(x,y) = \int f(x-s,y-t)\log\frac{1}{s^2+t^2}\,ds\,dt. \qquad (1)$$

0.2.10.Teorema. ([9]).Supongamos $f\varepsilon L\log^+L$ (es decir $|f|\log^+|f|\varepsilon L^1(\mathbb{C})$)y con soporte compacto.Entonces:

a)La integral en (1) converge absolutamente y representa a una función continua.

b)Casi por todas las líneas paralelas a los ejes coordenados, u(x,y) es C^1 y las integrales:

$$-\int f(x-s,y-t)\frac{s}{s^2+t^2}dm(s,t),$$

$$-\int f(x-s,y-t)\frac{t}{s^2+t^2}dm(s,t)$$

obtenidas por derivación formal de la integral en (1), convergen y representan $\frac{\partial}{\partial x}u(x,y)=u_x(x,y)$ y $\frac{\partial}{\partial y}u(x,y)=u_y(x,y)$ respectivamente.

c)Para casi toda línea paralela a los ejes coordenados, las derivadas u_x , u_y son absolutamente continuas.En particular u_{xx}, u_{yy},u_{xy},u_{yx} existen casi por todo.Están dadas (casi por todo) por las fórmulas:

$$u_{xx}(x,y) = -\pi f(x,y) + \int f(x-s,y-t)\frac{s^2-t^2}{(s^2+t^2)^2}dm(s,t)$$

$$u_{yy}(x,y) = -\pi f(x,y) + \int f(x-s,\ y-t)\frac{s^2-t^2}{(s^2+t^2)^2}\,dm(s,t)$$

$$u_{xy}(x,y) = u_{yx}(x,y) = \int f(x-s,y-t)\frac{2st}{(s^2+t^2)^2}\,dm(s,t).$$

En particular $u_{xx} + u_{yy} = -2\pi f$ c.p.t.

<u>0.2.11.Definición.</u>([37]).Se $E\subset R^2$, $(x_0,y_o)\varepsilon R^2$.Diremos que (x_o,y_o) es un punto de densidad lineal en la dirección de las abscisas si:

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{m_1\ (\ E\cap]x_o-\varepsilon,x_o-\varepsilon[\ x\{y_o\})}{2\varepsilon} = 1$$

donde m_1 es la medida de Lebesgue en la recta.Análogamente se definiria para el eje de ordenadas.

<u>0.2.12.Teorema.</u>([37]).Si E es un subconjunto medible de R^2,casi todos (dm) sus puntos son de densidad lineal en las direcciones de los ejes coordenados.

CAPITULO 1

APROXIMACION UNIFORME EN COMPACTOS CON INTERIOR VACIO

En este capítulo se introducen los recursos necesarios para estudiar la aproximación uniforme por funciones del módulo $R_o(X)$ + $gR_o(X)$. Entre estos destacan las fórmulas integrales 1.2.1. y 1.2.3., que son de gran importancia en la presente memoria, y las transformadas de medidas 1.1.1. Para sistematizar adecuadamente la exposición hemos invertido el orden de presentación. El resultado principal es el teorema 1.5.1. que resuelve completamente este problema de aproximación en el caso $\overset{\circ}{X} = \emptyset$.

1.1. TRANSFORMADAS GENERALIZADAS

Denotaremos por g una función, fijada de una vez por todas, a valores complejos y de clase $C^1(\mathbb{C})$.

Sea k la siguiente función de $\mathbb{C} \times \mathbb{C}$ en $\mathbb{C}$:

$$\text{si } z = w \text{ entonces } k(z,w) = o$$

$$\text{si } z \neq w \text{ entonces } k(z,w) = \frac{g(z) - g(w)}{z - w}$$

Obviamente k depende de g, aunque esta dependencia no se explicite en la notación. Posteriormente, en relación con otras nociones dependientes de g, seguiremos el mismo procedimiento.

La función k es de Borel en $\mathbb{C} \times \mathbb{C}$. En efecto, k restringida a $\mathbb{C} \times \mathbb{C}$ menos la diagonal y k restringida a la diagonal son funciones continuas y, por tanto borelianas, por lo cual se deduce que k es boreliana y, por consiguiente, para cada $w \in \mathbb{C}$ $k(.,w)$ es de Borel.

Definiremos primero la transformada, relativa a g, de una medida de Borel, regular y a soporte compacto en $\mathbb{C}$. Posteriormente extenderemos la definición para una distribución a soporte compacto en $\mathbb{C}$. Seguiremos este orden para mayor claridad.

<u>1.1.1. Definición</u>. Sea μ una medida en $\mathbb{C}$, de Borel, regular y con soporte compacto. La transformada de μ relativa a g es la función:

$$w\varepsilon\mathbb{C} \longrightarrow \check{\mu}(w) = \int k(z,w)\, d\mu(z).$$

Tal definición es correcta como prueba el siguiente lema:

<u>1.1.2. Lema</u>. $\check{\mu}$ está definida en todo punto de $\mathbb{C}$, es una función continua salvo, quizá, en el conjunto numerable $L = \{w\varepsilon\mathbb{C}/ \ |\mu|\{w\}>o\}$ y es localmente integrable respecto de la medida de Lebesgue m en $\mathbb{C}$.

Demostración. Sea $w_o\varepsilon\mathbb{C}$. El conjunto S de puntos de la forma $tz + (1-t)w_o$ con $t\varepsilon[o,1]$ y $z\varepsilon$ sopμ es compacto, por tanto Dg está acotada en S. Por el teorema del valor medio:

$$\left| \frac{g(z) - g(w_o)}{z - w_o} \right| \leq \sup_{x\varepsilon[z,w_o]} \| Dg(x) \| \leq \| Dg \|_S$$

por consiguiente $k(.,w_o)$ está acotada sobre sopμ, luego es integrable.

Sea $L = \{w\varepsilon\mathbb{C}/ \ |\mu| \{w\}>o\}$. Este conjunto es a lo sumo numerable pues es reunión numerable de los conjuntos finitos $\{w\varepsilon\mathbb{C}/ \ |\mu|\{w\}> >\frac{1}{n}\}$. Sea $w_o\notin L$ y (w_n) una sucesión convergente hacia w_o. Si $z\neq w_o$ se tiene $z \neq w_n$ para n suficientemente grande, por tanto:

$$\lim_n \frac{g(z) - g(w_n)}{z - w_n} = \frac{g(z) - g(w_o)}{z - w_o}$$

es decir $k(z,w_n) \underset{n}{\rightarrow} k(z,w_o)$ salvo, quizá, en $z = w_o$. Como $|\mu|\{w_o\} = 0$, obtenemos $k(., w_n) \rightarrow k(.,w_o)$ $[c.p.t.\mu]$. Esta convergencia es dominada en sop μ, pues el conjunto T de los puntos $tz + (1-t)w_n$ con $n\varepsilon N$, $z\varepsilon$ sop μ, $t\varepsilon [0,1]$ es relativamente compacto, luego:

$$|k(z, w_n)| \leq \| D_g \|_T$$

Aplicando el teorema de la convergencia dominada, se deduce la continuidad.

Para probar la tercera afirmación observemos que

$$\check{\mu}(w) = \int \frac{g(z)}{z-w} d\mu(z) - g(w) \int \frac{1}{z-w} d\mu(z) \qquad [c.p.t.\mu],$$

de donde

$$|\check{\mu}(w)| \leq \|g\|_X \tilde{\mu}(w) + |g(w)|\tilde{\mu}(w) \qquad [c.p.t.\mu]$$

siendo X = sop μ y $\tilde{\mu}$ el potencial Newtoniano de μ, que es localmente (dm) integrable (véase 0.1.3.). //.

Es interesante hacer notar las mejores propiedades de $\check{\mu}$ respecto a $\hat{\mu}$. Por ejemplo $\hat{\mu}$ es continua sólo fuera del soporte de μ (0.1.3.), mientras que $\check{\mu}$ es continua salvo en un conjunto numerable; $\check{\mu}\varepsilon L^\infty(\mathbb{C})$ si sop g es compacto, mientras que $\hat{\mu}\varepsilon L^p{}_{loc}(\mathbb{C})$, $1 \leq p < 2$ (0.1.3).

1.1.3. Observación. ¿Qué tipo de discontinuidad presenta $\check{\mu}$ en los puntos de L? Si $w_o\varepsilon L$, se obtiene:

Existe $\lim_{w \rightarrow w_o} \check{\mu}(w)$ sí y sólo sí g es holomorfa en w_o. En tal caso se tiene:

$$\lim_{w \to w_o} \check{\mu}(w) = \int_{\mathbb{C}-\{w_o\}} k(z,w_o)d\mu(z) + g'(w_o)\mu\{w_o\}.$$

Así pues, en los puntos en los que g es holomorfa, $\check{\mu}$ presenta discontinuidades evitables.

Demostración. Sea $w_o \varepsilon L$, y (w_n) sucesión convergente hacia w_o, podemos suponer $w_n \neq w_o$ para todo $n\varepsilon N$. Por el lema 1.1.2 $k(z,w_n) \to k(z,w_o)$ dominadamente cuando $z\varepsilon$ sop $\mu - \{w_o\}$. Por tanto

$$\lim \int_{\mathbb{C}-\{w_o\}} \frac{g(z) - g(w_n)}{z - w_n} d\mu(z) = \int_{\mathbb{C}-\{w_o\}} \frac{g(z) - g(w_o)}{z - w_o} d\mu(z) = \mu(w_o)$$

como

$$\check{\mu}(w_n) = \int k(z,w_n)d\mu(z) = \frac{g(w_o) - g(w_n)}{w_o - w_n} .\mu\{w_o\} +$$

$$+ \int_{\mathbb{C}-\{w_o\}} k(z,w_n)d\mu(z) \qquad (1)$$

se deduce que existe $\lim_n \mu(w_n)$ sí y sólo si existe $\lim_n k(w_o,w_n)$. $\mu\{w_o\}$, es decir, sí y sólo sí existe $\lim_n \frac{g(w_o) - g(w_n)}{w_o - w_n}$. Ya que (w_n) es una sucesión arbitraria con límite w_o, queda probado el enunciado. La igualdad se deduce tomando límites en (1). //.

En el caso particular de tener X compacto y $h\varepsilon L^1(X)$ la transformada de hdm se denotará por $\check{h}$, la cual en virtud del lema será siempre continua.

Para definir la transformada, relativa a g, de una distribución necesitamos el siguiente lema. Supondremos que $g\varepsilon D(\mathbb{C})$.

1.1.4. Lema. Si $h\varepsilon D(\mathbb{C})$ entonces $h\varepsilon C^{\infty}(\mathbb{C})$. La aplicación $\Psi\varepsilon D(\mathbb{C}) \longrightarrow \check{\Psi}\varepsilon C^{\infty}(\mathbb{C})$ es continua, cuando $D(\mathbb{C})$ y $C^{\infty}(\mathbb{C})$ están dotados de las topologías usuales.

Demostración. Respecto a la primera afirmación hay que observar que $\check{h}(w) = \int \frac{g(z) - g(w)}{z - w} h(z)dm(z) = (hg)\hat{}(w) - g(w)\hat{h}(w)$ y que el resultado análogo para la transformada de Cauchy es conocido (véase 0.1.2 5). Para la segunda afirmación es suficiente ver que para cada compacto K de $\mathbb{C}$ la aplicación $\Psi \rightarrow \check{\Psi}$ es continua sobre $D_K(\mathbb{C})$. Sea L un compacto de $\mathbb{C}$, $\alpha\varepsilon N$, $r = (n_1, n_2)\ \varepsilon N \times N$. Tenemos que acotar

$$P_{L,\alpha}(\check{\Psi}) = \sup_{\substack{|r| \leq \alpha \\ w\varepsilon L}} |D^r \check{\Psi}(w)|.$$

Es fácil ver que se puede aplicar el teorema de derivación bajo el signo integral en:

$$\check{\Psi}(w) = \int \frac{g(u + w) - g(w)}{u} \Psi(u + w)\, dm(u)$$

debido a que $\frac{1}{u}$ es localmente integrable (0.1.1.). Por consiguiente, teniendo en cuenta la fórmula de derivación de Leibniz, se tiene:

$$D^r \check{\Psi}(w) = \int \frac{\partial^{n_1+n_2}}{\partial_x^{n_1} \partial_y^{n_2}} \left(\frac{g(u+x+iy) - g(x+iy)}{u} \cdot \Psi(u+x+iy)\right) dm(u)$$

$$= \sum_{s\leq r} \frac{r!}{s!(r-s)!} \int D^{r-s} \left(\frac{g(u+w) - g(u)}{u} \right) D_w^s \Psi(u+w) dm(u)$$

para $w = x + iy\varepsilon\ \mathbb{C}$, y de aquí

$$|D^r \check{\Psi}(w)| \leq \sup_{\substack{|s| \leq r \\ u\varepsilon (\text{sop } \Psi) - L}} |D^s \Psi(u)| . M_r$$

por consiguiente

$$P_{L,\alpha}(\check{\Psi}) \leq M_\alpha \sup_{\substack{|s| \leq \alpha \\ u\varepsilon k-L}} |D^s \Psi(u)|$$

donde M_r designa una constante, $M_\alpha = \sup_{|r| \leq \alpha} M_r$ y $K - L$ denota la diferencia vectorial de K con L, que es un compacto. //.

<u>1.1.5. Definición.</u> Sea T una distribución a soporte compacto, la transformada de T relativa g, es la distribución:

$$\check{T}(\Psi) = T(\check{\Psi}), \qquad \Psi\varepsilon D(\mathbb{C})$$

En virtud del lema anterior $\check{T}\varepsilon D(\mathbb{C})'$.

<u>1.1.6. Observación</u>. Si μ es una medida soporte compacto en $\mathbb{C}$, las dos posibles definiciones de transformada coinciden.

En efecto, consideremos μ como una distribución, entonces

$$\check{\mu}(\Psi) = \mu(\check{\Psi}) = \int \check{\Psi}(w)\, d\mu(w) =$$

$$= \int \left(\frac{g(z) - g(w)}{z - w} \Psi(z) dm(z) \right) d\mu(w) \qquad \text{para } \Psi\varepsilon D(\mathbb{C}).$$

Por el teorema del valor medio

$$\left| \frac{g(z) - g(w)}{z - w} \Psi(z) \right| = 0 \quad (1)$$

cuando $z\varepsilon$ sop Ψ y $w\varepsilon$ sop μ. Por tanto podemos aplicar el teorema de Fubini, y resulta:

$$\int \Psi(z) \left(\int \frac{g(z) - g(w)}{z - w} d\mu(w) \right) dm(z) = \int \Psi(z)\check{\mu}(z) dm(z).$$

1.2. FORMULAS INTEGRALES

1.2.1. Proposición. Sea G un abierto acotado de $\mathbb{C}$ con frontera de clase C^1 a trozos. Sea U un abierto que contiene a $\overline{G}$ y f, $g\varepsilon C^2(U)$. Escribamos $S = \{w\varepsilon U \,/\, \bar{\partial}g(w) = 0\}$. Además se supone que $\overline{G}\cap S \subset \overset{\circ}{\overbrace{\{w\varepsilon U | \bar{\partial}f(w) = 0\}}}$. Entonces se verifica, para cada $w\varepsilon G$:

$$f(w) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial G} \frac{f(z)}{z-w} dz - \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial G} \frac{\bar{\partial}f}{\bar{\partial}g}(z) \frac{g(z) - g(w)}{z - w} dz +$$

$$+ \frac{1}{\pi} \int_G \bar{\partial}\left(\frac{\bar{\partial}f}{\partial g}\right)(z) \frac{g(z) - g(w)}{z - w} dm(z)$$

Observaciones. Por hipótesis, en un entorno de $\overline{G}\cap S$ la función f es holomorfa. A los símbolos $\frac{\bar{\partial}f}{\bar{\partial}g}$ y $\bar{\partial}\left(\frac{\bar{\partial}f}{\bar{\partial}g}\right)$ se les atribuye el valor cero en los puntos de $\overline{G}\cap S$. Las funciones así denotadas son de clase C^1 (ó C) en un entorno de $\overline{G}$.

Esta fórmula integral tiene la propiedad de reproducir los valores de una función f a partir de cualquier g con tal que $\bar{\partial}g \neq 0$ en todo punto. En particular si tomamos como g una función holomorfa en $\overline{G}$, esta fórmula se reduce a la de Cauchy.

Como fórmulas conocidas análogas a ésta podemos citar la fórmula generalizada de Cauchy, también llamada fórmula de Pompeiu (0.1.4.) y la de Poisson - Jenssen [40].

Demostración. Fijemos un punto $w\varepsilon G$ y elijamos un $\varepsilon > 0$ tal que el disco cerrado $D_\varepsilon = D(w,\varepsilon)$ esté contenido en G. Escribamos $G\varepsilon = G-D_\varepsilon$. $G\varepsilon$ es un abierto acotado con borde de clase C^1 a trozos. Dotemos a ∂G_ε de la orientación inducida por la usual de G_ε.

Consideraremos la siguiente forma diferencial en G_ε:

$$\Omega(z) = \frac{\bar\partial f}{\bar\partial g}(z)\,\frac{g(z) - g(w)}{z - w}\,dz$$

Recordemos que el símbolo $\frac{\bar\partial f}{\bar\partial g}$ está definido así: si $w \in S$ $\frac{\bar\partial f}{\bar\partial g}(w) = 0$ y si $w \in U-S$ entonces $\bar\partial g(w) \neq 0$ y $\frac{\bar\partial f}{\bar\partial g}$ es el cociente usual. Esta función es de clase C^1 en un entorno de $\bar G$ y verifica $\frac{\bar\partial f}{\bar\partial g} \cdot \bar\partial g = \bar\partial f$ en dicho entorno. Ω es de clase C^1 en un entorno de $\bar G_\varepsilon$. Por el teorema de Stokes:

$$\int_{G_\varepsilon} d\Omega = \int_{\partial G_\varepsilon} \Omega \qquad (1)$$

Calculando:

$$\int_{G_\varepsilon} d\Omega = \int_{G_\varepsilon} \bar\partial\left(\frac{\bar\partial f}{\bar\partial g}(z)\,\frac{g(z) - g(w)}{z - w}\right) d\bar z \wedge dz =$$

$$= \int_{G_\varepsilon} \bar\partial\left(\frac{\bar\partial f}{\bar\partial g}\right)(z)\,\frac{g(z) - g(w)}{z - w}\,d\bar z \wedge dz + \int_{G_\varepsilon} \frac{\bar\partial f}{\bar\partial g}(z)\,\frac{\bar\partial g(z)}{z-w}\,d\bar z \wedge dz$$

$$= 2i \int_{G_\varepsilon} \bar\partial\left(\frac{\bar\partial f}{\bar\partial g}\right)(z)\,\frac{g(z) - g(w)}{z - w}\,dm(z) +$$

$$+ 2i \int_{G_\varepsilon} \frac{\bar\partial f(z)}{z-w}\,dm(z) \qquad (2)$$

Por otra parte:

$$\int_{\partial G_\varepsilon} \Omega = \int_{\partial G} \frac{\bar\partial f}{\bar\partial g}(z)\frac{g(z)-g(w)}{z-w}\,dz - \int_{\partial D_\varepsilon} \frac{\bar\partial f}{\bar\partial g}(z)\frac{g(z)-g(w)}{z-w}\,dz. \quad (3)$$

Ahora bien, para $z\varepsilon\partial D_\varepsilon$, una aplicación del teorema del valor medio nos da:

$$\left|\frac{\bar\partial f}{\bar\partial g}(z)\ \frac{g(z)-g(w)}{z-w}\right| \le \left\|\frac{\bar\partial f}{\bar\partial g}\right\|_G \cdot \| D_g \|_G = 0(1)$$

Si $z\varepsilon G$:

$$\left|\bar\partial\left(\frac{\bar\partial f}{\bar\partial g}\right)(z)\frac{g(z)-g(w)}{z-w}\right| \le 2\left\|\bar\partial\left(\frac{\bar\partial f}{\bar\partial g}\right)\right\|_G \cdot \|g\|_G\ \frac{1}{|z-w|}$$

$$\left|\ \bar\partial f\ (z)\ \frac{1}{z-w}\ \right| \le \|\bar\partial f\|_G \cdot \frac{1}{|z-w|}$$

Los segundos miembros de las dos últimas desigualdades son funciones de $L^1(\bar G)$ puesto que la función (de z) $\frac{1}{|z-w|}$ es localmente integrable (0.1.1.)

Hagamos tender ε a cero. En ambos sumandos de (2) la convergencia es dominada, y la última integral de (3) está acotada por $2\pi\varepsilon.0(1)$. Por (1) resultará:

$$2i\int_G \bar\partial\left(\frac{\bar\partial f}{\bar\partial g}\right)(z)\frac{g(z)-g(w)}{z-w}\,dm(z) + 2\,i\int_G \frac{\bar\partial f(z)}{z-w}\,dm(z) =$$

$$= \int_{\partial G} \frac{\bar\partial f}{\bar\partial g}(z)\ \frac{g(z)-g(w)}{z-w}\,dz.$$

Teniendo en cuenta la fórmula generalizada de Cauchy (0.1.4.):

$$2i \int_G \frac{\bar{\partial} f(z)}{z-w}\, dm(z) = 2\pi i\, f(w) + \int_{\partial G} \frac{f(z)}{z-w}\, dz$$

resulta lo pedido. //.

Nota. La condición técnica impuesta en la proposición anterior para la validez de la fórmula, es decir que f sea holomorfa en un entorno de $\bar{G}\cap S$, es casi lo mínimo que se debe exigir para que tenga sentido $\frac{\bar{\partial} f}{\bar{\partial} g}$. Si se repasa la demostración veremos que continuaría siendo válida si impusiéramos:

a) Existe un entorno V de $\bar{G}$ tal que $\bar{\partial} f(z) = 0$, para cada $z \varepsilon S\cap V$.

b) Para todo $w\ \varepsilon\ \partial(S\cap V)$

$$\lim_{z\to w} \bar{\partial}\left(\frac{\bar{\partial} f}{\bar{\partial} g}\right)(z) = 0$$

donde el límite se toma en V-S.

De estas condiciones deduciríamos que $\frac{\bar{\partial} f}{\bar{\partial} g}$ sería de la clase C^1 en un entorno de $\bar{G}$, sin embargo en lo sucesivo no impondremos estas condiciones.

<u>1.2.2. Corolario.</u> Sea $g\varepsilon C^2(\mathbb{C})$ y $f\varepsilon D^2(\mathbb{C})$. Denotemos por S el conjunto $\{w\varepsilon\mathbb{C}/\bar{\partial} g(w) = 0\}$. Supongamos que $S\subset\overset{\circ}{\overline{\{w\varepsilon\mathbb{C}/\bar{\partial} f(w) = 0\}}}$, entonces se verifica para todo $w\varepsilon\mathbb{C}$:

$$f(w) = \frac{1}{\pi} \int \bar{\partial}\left(\frac{\bar{\partial} f}{\bar{\partial} g}\right)(z)\, \frac{g(z) - g(w)}{z - w}\, dm(z) \qquad (4)$$

Demostración. Sea $w\varepsilon\mathbb{C}$, como sop f es compacto podemos elegir un disco de radio suficientemente grande que contenga a w y a sop f. Apliquemos la fórmula 1.2.1. tomando como abierto G dicho disco. Es evidente que se cumplen todas las hipótesis de 1.2.1. Como f se anula en el borde del disco, las dos primeras integrales de 1.2.1. desaparecen, y el resultado es (4). //.

En el paragrafo siguiente daremos una interpretación en el lenguaje de las distribuciones de (4).

1.2.3. Proposición. Sea μ una medida a soporte compacto en $\mathbb{C}$, sean f, g y S en las mismas condiciones que el corolario precedente. Se verifica:

$$\int f d\mu = \frac{1}{\pi}\int \partial\left(\frac{\bar\partial f}{\bar\partial g}\right)\check{\mu} dm$$

donde $\check{\mu}$ designa la transformada de μ introducida anteriormente, relativa a g.

Demostración. Sea $w \in$ sop μ, entonces por el corolario 1.2.2.

$$f(w) = \frac{1}{\pi}\int \partial\left(\frac{\bar\partial f}{\bar\partial g}\right)(z)\frac{g(z)-g(w)}{z-w}\, dm(z) = \frac{1}{\pi}\int \partial\left(\frac{\bar\partial f}{\bar\partial g}\right)k(\cdot,w)\, dm$$

Cuando $w \in$ sopμ y $z \in$ sop f se tiene, en virtud del teorema del valor medio:

$$\left|\partial\left(\frac{\bar\partial f}{\bar\partial g}\right)(z)\ k(z,w)\right| \leq \left\|\partial\left(\frac{\bar\partial f}{\bar\partial g}\right)\right\|_\infty \cdot \|Dg\|_{\text{sop } f \cup \text{sop}\mu} = 0(1)$$

Por tanto es legítimo aplicar el teorema de Fubini, y resulta:

$$\int f d\mu = \int_X \left(\frac{1}{\pi}\int_{\text{sop } f} \bar{\partial}\left(\frac{\bar{\partial} f}{\bar{\partial} g}\right)(z)\, k(z,w)\, dm(z)\right) d\mu(w) =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{\text{sop } f} \bar{\partial}\left(\frac{\bar{\partial} f}{\bar{\partial} g}\right)(z) \left(\int_X k(z,w)\, d\mu(w)\right) dm(z) = \frac{1}{\pi}\int \bar{\partial}\left(\frac{\bar{\partial} f}{\bar{\partial} g}\right)\check{\mu}\, dm. \qquad //.$$

<u>1.2.4. Observación</u>. Hasta ahora siempre hemos tenido definida la función g en todo $\mathbb{C}$, pero a veces sólo estará definida en un entorno abierto U de X. En este caso también es posible definir la transformada $\check{\mu}$, relativa a g, de una medida μ sobre X, aunque sólo sea tomando valores sobre U, del siguiente modo:

$$\check{\mu}(w) = \int \frac{g(z) - g(w)}{z - w}\, d\mu(z) \qquad , \ w \in U$$

Para ver que esta función está definida en todo punto se procede así: sea $\varepsilon > 0$ tal que el disco cerrado $D(w,\varepsilon) \subset U$. Se tendrán las acotaciones:

si $|z - w| \leq \varepsilon$ y $z \in X$ entonces $\left|\dfrac{g(z) - g(w)}{z - w}\right| \leq \| Dg \|_{D(w,\varepsilon)}$

si $|z - w| > \varepsilon$ y $z \in X$ entonces $\left|\dfrac{g(z) - g(w)}{z - w}\right| \leq (\| g \|_X + |g(w)|)\dfrac{1}{\varepsilon}$

Por ambos casos llegamos a la conclusión que la función $k(\cdot,w)$ está acotada en X, por tanto $\check{\mu}$ existe en todo punto $w \in U$. Por comodidad, en las demostraciones supondremos g definida en todo $\mathbb{C}$. Una construcción efectiva de dicha extensión puede efectuarse así. Sea U_1 un abierto tal que:

$$X \subset U_1 \subset \bar{U}_1 \subset U$$

y $h \in C^\infty(\mathbb{C})$ que valga 1 en un entorno de $\bar{U}_1$ y sop $h \subset U$. Como extensión se puede tomar gh. Observemos que se verifica que $\check{\mu}_{gh}(w) =$

$\check{\mu}(w)$ para $w\varepsilon U$. De esta misma construcción deducimos que $\check{\mu}$ es continua en U salvo un conjunto numerable.

1.2.5. Corolario. Sea X un compacto de $\mathbb{C}$, U un entorno de X abierto, $\mu\varepsilon M(X)$ y $g\ \varepsilon\ C^2(U)$. Escribamos $S = \{w\varepsilon U\ /\ \bar{\partial}g(w) = 0\}$. Supóngase que existe un entorno de $X, U_1 \subset \bar{U}_1 \subset U$ tal para casi todo (dm) $w\varepsilon\ U_1 - S$ se tenga $\check{\mu}(w) = 0$, entonces μ está concentrada en $Z = X \cap S$.

Demostración. Por la observación anterior supondremos g definida en todo $\mathbb{C}$. Sea K un compacto de $U_1 - S$ y $f\,\varepsilon\,D^2(\mathbb{C})$ con sop f disjunto con S e incluido en U_1. El conjunto S se habrá modificado fuera de $U-\bar{U}_1$ al hacer la extensión de g, a pesar de ello se verifica

$$S \subset \overbrace{\{ w\varepsilon\ \mathbb{C}\ \mid\ f(w)\ = 0\}}^{o}$$

por tanto es factible aplicar 1.2.3., resultando.

$$\int_K f d\mu = \frac{1}{\pi}\int \bar{\partial}\left(\frac{\bar{\partial}f}{\bar{\partial}g}\right)\check{\mu}dm = \frac{1}{\pi}\int_{U_1-S} \bar{\partial}\left(\frac{\bar{\partial}f}{\bar{\partial}g}\right)\check{\mu}dm = 0$$

por la hipótesis.

Sea ahora $f\varepsilon L^1(k,\mu)$. Consideremos una sucesión regularizante $(\rho_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ ([1]). Escribamos $f_\varepsilon = f * \rho_\varepsilon$, donde f se supone extendida por cero a todo $\mathbb{C}$. Como sop $f \subset K$ y sop $f_\varepsilon \subset$ sop f + sop $\rho_\varepsilon \subset K+ \tilde{D}(o,\varepsilon)$, a partir de un ε_0 se tendrá sop $f_\varepsilon \cap S = \phi$, para $\varepsilon<\varepsilon_0$. Al ser $f_\varepsilon\varepsilon\ C^\infty(\mathbb{C})$ podemos aplicar lo precedente para deducir $\int f_\varepsilon d\mu = 0$. Pero $f_\varepsilon \to f$ en $L^1(K,\mu)$, por tanto:

$$\int_K f d\mu = 0$$

Es decir $|\mu|\ (K) = 0$ y, por la regularidad de μ se sigue $\mu = 0$ en $\mathbb{C} - S$. //.

Aunque hubiéramos supuesto $\check{\mu} = o$ [c.p.t.dm] en U_1 en 1.2.5. no se puede deducir que $\mu = 0$ en X.

1.3. EL OPERADOR $\bar{\partial}(\bar{\partial}/\bar{\partial}g)$

Supondremos en este parágrafo que U es un abierto de $\mathbb{C}$ y $g\epsilon C^{\infty}(U)$ Denotaremos por S el subconjunto cerrado de U$\{w\epsilon$ U/ $\bar{\partial}g(w)=0\}$.

1.3.1. Definición. Consideremos el espacio de distribuciones sobre Ω= U-S. Denotaremos por $\mathbb{D}_g$ al operador diferencial de 2º orden a coeficientes no constantes (en general) $\bar{\partial}(\frac{\bar{\partial}}{\bar{\partial}g}) = \bar{\partial}(\frac{1}{\bar{\partial}g})\bar{\partial} + \frac{1}{\bar{\partial}g} . \bar{\partial}^2 : D(\Omega)' \to D(\Omega)'$.

La interpretación de las fórmulas integrales 1.2. en el marco de los operadores lineales se puede sintetizar en la siguiente: (repásese 0.2. para las definiciones).

1.3.2. Proposición. $\mathbb{D}_g$ es un operador elíptico en Ω, que coincide con su transpuesto, para el cual la distribución $\frac{1}{\pi}\, k\epsilon L^1_{loc}(\Omega x\Omega)$ (definida en 1.1.) es una solución fundamental bi-regular en Ω .

Demostración. Un cálculo elemental demuestra que:

$$\mathbb{D}_g = \frac{1}{2}\,\bar{\partial}(\frac{\bar{\partial}}{\bar{\partial}g})\,(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}) + \frac{1}{4}\,\frac{1}{\bar{\partial}g}\,(\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2}{\partial y^2} + 2i\,\frac{\partial^2}{\partial x\partial y})$$

Por tanto el polinomio característico de $\mathbb{D}_g$ es:

$$p(z,y) = \frac{1}{4}\,\frac{1}{\bar{\partial}g(z)}\,(y_1^2 - y_2^2 + 2\,i\,y_1y_2)$$

$$\text{con } z\epsilon\Omega, \quad y = y_1 + i\,y_2 \;\epsilon\; \mathbb{C}$$

Luego $p(z,y) = 0$ sí y sólo sí $y_1 = y_2 = 0$

Observemos que $k(z,y) = \frac{g(z) - g(y)}{z - y}$ es C^∞ fuera de la diagonal de $\Omega \times \Omega$. Para probar que $\frac{1}{\pi}$ k es una solución fundamental bi-regular es suficiente mostrar:

a) $\mathbb{D}_g(x)\frac{1}{\pi}k\ (x,y) = \delta y$ b) ${}^t\mathbb{D}_g(y)\frac{1}{\pi}k\ (x,y) = \delta x$

Demostremos a). Si $\Psi \varepsilon D(\Omega)$ entonces:

$$\mathbb{D}_g(x)\frac{1}{\pi}\ k\ (x,y)(\Psi) = \frac{1}{\pi}k\ (x,y)\ (\mathbb{D}_g(\Psi)) = \frac{1}{\pi}\int k(x,y)\mathbb{D}_g(\Psi)(x)\,dm(x)$$

$= \delta_y(\Psi)$ (por 1.2.2.)

b) Veamos que ${}^t\mathbb{D}_g = D_g$. Escribamos $g_1 = \bar{\partial}(\frac{1}{\bar{\partial}g})$ y $g_2 = \frac{1}{\bar{\partial}g}$. Entonces $\mathbb{D}_g = g_1\ \bar{\partial} + g_2\ \bar{\partial}$, y por lo tanto:

$$
\begin{aligned}
{}^t\mathbb{D}_g &= -\ \bar{\partial}(g_1 .) + \bar{\partial}^2(g_2 .) = -\bar{\partial}g_1\ . - g_1\bar{\partial} + \\
& 2\ \bar{\partial}g_2 .\bar{\partial} + \bar{\partial}^2\ g_2 . + g_2\ \bar{\partial}^2 = -\ \bar{\partial}g_1 . - g_1\bar{\partial} + \\
& 2g_1\bar{\partial} + \bar{\partial}g_1\ . + g_2\bar{\partial}^2 = g_1\bar{\partial} + g_2\bar{\partial}^2
\end{aligned}
$$

Como k es simétrica, se cumple b). //.

Este operador en general no es autoadjunto, por tanto no serán aplicables los resultados de aproximación uniforme de F.E. Browder [6] y [7]. En cambio serán aplicables los obtenidos en aproximación en norma p por Polking [32] y Hedberg [20],[21],[22] y [23]. Estas cuestiones se tratarán en el capítulo 3. En el caso que $g(z) = \bar{z}$ el operador $\bar{\partial}(\frac{\bar{\partial}}{\bar{\partial}g}) = \bar{\partial}^2$ es debido a A. Bitsadze [15, pág 283] como ejemplo de operador no fuertemente elíptico [15].

Veamos ahora un resultado en el que se resumen las propiedades de la derivación de la transformada, relativa a g, de una distribución.

<u>1.3.3. Proposición.</u> Sean $g \varepsilon C^\infty(\mathbb{C})$ y $\Psi \varepsilon D(\mathbb{C})$. Se cumple:

a) $\bar\partial\check\Psi = -\bar\partial g \,.\, \hat\Psi$

b) $(-\bar\partial\Psi)^{\vee} = ((\bar\partial g)\ \Psi)^{\wedge}$.

c) $\partial\check\Psi = -\partial g \,.\, \hat\Psi + \int \frac{g(z)-g(w)}{(z-w)^2} f(z)\,dm(z)$

Si se supone que $T \varepsilon D'$ entonces se verifica:

a') $\bar\partial\check T = -\bar\partial g.\ \hat T$

b') $(-\bar\partial T)^{\vee} = (\bar\partial g.\ T)^{\wedge}$

Como siempre $\hat\Psi$ denota la transformada de Cauchy de Ψ .

Demostración. Utilizaremos la conocida identidad $\bar\partial\hat\Psi = -\pi\Psi$ (0.1.25).. Se tiene:

$\check\Psi = g.\hat\Psi - g.\hat\Psi$, por lo tanto $\bar\partial\check\Psi = -\pi g\Psi - \bar\partial g\hat\Psi + g\pi\Psi = -\bar\partial g\hat\Psi$.

Para demostrar b) aplicaremos el teorema de Stokes. Sea $w\varepsilon\mathbb{C}$. Elijamos un $R > 0$ tal que el disco abierto de centro w y radio R contenga a sop Ψ. Consideremos el abierto $G_\varepsilon = B_R(w) - \bar B_\varepsilon(w)$, para ε positivo y menor que R, y la forma diferencial:

$$\Omega(z) = \frac{g(z) - g(w)}{z - w}\ \Psi(z)\,dz$$

Aplicando el teorema de Stokes se obtiene:

$$\int_{G_\varepsilon} d\Omega = 2i\int_{|z-w|\geq\varepsilon} \frac{\bar\partial g(z)}{z-w}\Psi(z)\ dm(z) + 2i\int_{|z-w|\geq\varepsilon}\frac{g(z)-g(w)}{z-w}\bar\partial\Psi(z)\ dm(z)$$

$$= \int_{C(w,\varepsilon)} \frac{g(z)-g(w)}{z-w}\Psi(z)\ dz.$$

Esta última integral es $O(\varepsilon)$ pues si $\varepsilon < 1$

$$\left|\frac{g(z)-g(w)}{z-w}\Psi(z)\right| \leq \|Dg\|_{B_1(w)}\|\Psi\|_\infty .$$

Como $\frac{1}{|z-w|}$ es integrable en $B_R(w)$ es lícito tomar límites, cuando $\varepsilon \to o$, resultando $(\bar{\partial} g\, \Psi)^{\wedge} = -(\bar{\partial}\Psi)^{\vee}$.

Demostremos ahora c). Efectuando el cambio de variable $u = z-w$ se tiene:

$$\check{\Psi}(w) = \int \frac{g(z) - g(w)}{z - w}\, \Psi(z)\, dm(z) = \int \frac{1}{u}\left[(g(u+w) - g(w))\Psi(u+w)\right] dm(u)$$

Como la función $(g(u+.) - g)\Psi(u+.)$ es de clase C^1 y a soporte compacto, es posible aplicar el teorema de derivación bajo el signo integral, obteniendo:

$$\partial\check{\Psi}(w) = \int \frac{\partial g(z) - \partial g(w)}{z - w}\, \Psi(z)\, dm(z) + \int \frac{g(z) - g(w)}{z - w}\, \partial\Psi(z)\, dm(z) =$$

$$= -\partial g(w)\, \hat{\Psi}(w) + \int \frac{\partial g(z)}{z-w}\, \Psi(z)\, dm(z) + \int \frac{g(z) - g(w)}{z - w}\, \partial\Psi(z)\, dm(z).$$

Calculemos las dos últimas integrales de la igualdad anterior mediante el teorema de Stokes. Sea $w \in \mathbb{C}$. Consideremos el mismo abierto G_ε que en b) y la forma diferencial:

$$\Omega(z) = \frac{g(z) - g(w)}{z-w}\, \Psi(z)\, d\bar{z}$$

Calculando resulta:

$$\int_{G_\varepsilon} \frac{\partial g(z)}{z-w}\, \Psi(z)\, dm(z) + \int_{G_\varepsilon} \frac{g(z) - g(w)}{z - w}\, \partial\Psi(z)\, dm(z) -$$

$$\int_{G_\varepsilon} \frac{g(z) - g(w)}{(z-w)^2}\, \Psi(z)\, dm(z) = -\frac{1}{2i} \int_{C(w,\varepsilon)} \frac{g(z) - g(w)}{z-w}\, \Psi(z)\, d\bar{z}$$

La tres primeras integrales son del tipo $O\left(\frac{1}{|z-w|}\right)$. La última es $O(\varepsilon)$. Es lícito tomar límites cuando $\varepsilon \to o$, obteniéndose:

$$\int \frac{\partial g(z)}{z-w}\, \Psi(z)\, dm(z) + \int \frac{g(z) - g(w)}{z-w}\, \partial\Psi(z)\, dm(z) =$$

$$= \int \frac{g(z) - g(w)}{(z-w)^2}\, \Psi(z)\, dm(z)$$

de donde se sigue c).

Veamos ahora a'). Si $\Psi\varepsilon D(\mathbb{C})$ entonces $\overline{\partial}\check{T}\ (\Psi) = -\check{T}(\overline{\partial}\Psi) =$
$-T((\overline{\partial}\Psi)^{\vee}) = T(\ \overline{\partial}g\ \hat{\Psi}\ ) = \overline{\partial}g\hat{T}(\Psi)$.

Análogamente se demostraría b'). //.

Observemos que, si suponemos que $\overline{\partial}g(z) \neq o$ para todo z, los resultados a) y a') pueden ser escritos como:

$$\overline{\partial}\left(\frac{\overline{\partial}\check{\Psi}}{\overline{\partial}g}\right) = \pi\Psi \qquad \text{y} \qquad \overline{\partial}\left(\frac{\overline{\partial}\check{T}}{\overline{\partial}g}\right) = \pi T.$$

Contrariamente a lo que sucede con la transformada de Cauchy $\hat{}: C^{\infty}{}' \to D'$ que es inyectiva (0.1.25), no siempre pasa lo mismo para $^{\vee}$. Sólo es posible deducir que si $\check{T} = 0$ entonces sop $T \subset S = \{w\varepsilon\mathbb{C}/\overline{\partial}g(w) = o\}$. En efecto, supongamos $\check{T} = 0$. Si $\Psi\varepsilon D(\mathbb{C})$ verifica sop $\Psi\cap S = \phi$, entonces:

$$T(\Psi) = T\left(\ \overline{\partial}\left(\frac{\overline{\partial}\Psi}{\overline{\partial}g}\right)^{\vee}\right) = \check{T}\left(\ \overline{\partial}\left(\frac{\overline{\partial}\Psi}{\overline{\partial}g}\right)\right) = o.$$

pues $\overline{\partial}\left(\frac{\overline{\partial}\Psi}{\overline{\partial}g}\right)^{\vee} = \Psi$ en virtud de 1.2.2. Por tanto $^{\vee}$ será inyectiva cuando $S = \phi$.

1.4.- MEDIDAS ORTOGONALES A R_g (X).

Recordemos que Rg (X) denota la adherencia uniforme de $R_o(X) + g\ R_o(X)$. Observemos que $R_g(X)$ es un $R_o(X)$ -módulo, pero en general no es un álgebra uniforme (ya se caracterizará en el capítulo 2 cuando $R_g(X)$ es un álgebra). Por tanto, no será posible aplicar técnicas de álgebras uniformes en algunas cuestiones. En este parágrafo veremos dos caracterizaciones de las medidas ortogonales a Rg(X).

1.4.1. Proposición. Sea X un compacto, g una función de clase C^2 definida en un entorno U de X y $\mu\varepsilon M(X)$. S denotará el conjunto $\{w\varepsilon U/\bar{\partial}g(w) = o\}$.

Se verifica:

a) Si $\mu\varepsilon Rg(X)^{\perp}$ entonces para todo $w\notin X$ $\check{\mu}(w) = o$.

b) Si $\overline{(S-X)}\cap X = \emptyset$ y si para casi todo w, perteneciente a un entorno de X pero no a X, se verifica $\check{\mu}(w)=0$, entonces $\mu\varepsilon R_g(X)^{\perp}$.

Demostración. Por la observación 1.2.4. supondremos g definida en todo $\mathbb{C}$. La afirmación a) es evidente, pues si $w\notin X$ la función $\frac{g(z)}{z-w} - g(w)\frac{1}{z-w}$ (como función de z) pertenece a $R_{\sigma}(X) + g\,R_o(X)$. Demostremos ahora b). Sea $\mu\varepsilon M(X)$ tal que para un entorno U_1 de X se tenga $\check{\mu}(w) = o$, $w\varepsilon U_1-X$ c.p.t. dm. Sea $h\varepsilon R_o(X)$. La hipótesis sobre S-X nos permite elegir un entorno W de x tal que $W\subset\bar{W}\subset U_1$, $W\cap(S-X) = \phi$ y W no contiene polos de h. Sea $\Phi\,\varepsilon\,C^{\infty}(\mathbb{C})$ una función que valga 1 en un entorno de X y sop $\Phi\subset W$. Entonces:

$$\int hd\mu = \int h\Phi\, d\mu = \int \mathbb{D}_g(h\Phi)\check{\mu}\, dm \qquad (1)$$

La última igualdad en (1) se obtiene aplicando la fórmula integral de 1.2.3., lo cual queda justificado pues $h\Phi\varepsilon D(\mathbb{C})$ es holomorfa en un entorno de X (y, por tanto, de $S\cap X$) y en un entorno de S-X. Por consiguiente (1) resulta ser igual a:

$$\int_{U_1}\mathbb{D}_g\,(h\Phi)\,\check{\mu}dm = \int_X \mathbb{D}_g(h\Phi)\check{\mu}dm = \int_X \mathbb{D}_g h.\check{\mu}dm = 0.$$

Es decir $\mu\varepsilon R(X)^{\perp}$. Se tiene:

$0 = \check{\mu}(w) = \widehat{g\mu}(w) - g(w).\,\hat{\mu}(w)$, $w\varepsilon$ W-X, c.p.t. dm.

La función $\widehat{g\mu}$ es holomorfa en $\mathbb{C}$ - X y se anula en W-X, por tanto se anula en todo $\mathbb{C}$-X. Esto último se deduce observando que toda componente de $\mathbb{C}$-X corta a una componente de W-X. Por consiguiente $g\mu\varepsilon R(X)^{\perp}$ (por 0.1.8.). Como fácilmente se comprueba:

$\mu\varepsilon\, R_g(X)^{\perp}$ sí y sólo sí $\mu\varepsilon\, R(X)^{\perp}$ y $g\mu\varepsilon\, R(X)^{\perp}$, con lo cual la demostración está completa. //.

1.4.2. Observación. En b) se ha de imponer alguna condición sobre el comportamiento de S-X, como muestra el siguiente ejemplo. Sea $X = \{z\varepsilon\mathbb{C} \;/\; \frac{1}{2} \leq |z| \leq 1\}$ y $g(z) = z$. Entonces $R_z(X) = R(X) = A(X)$. Consideremos la siguiente forma lineal sobre $C(X)$:

$$f\varepsilon\, C(X) \to \int_{C(0,1)} f(z)\,dz$$

Por el teorema de Riesz existe $\mu\varepsilon M(X)$ tal que para toda $f\varepsilon C(X)$

$$\int_X f d\mu = \int_{C(0,1)} f(z)\,dz$$

μ está concentrada en $C(0,1)$, por tanto si $w\varepsilon\mathbb{C}$ y $|w| \neq 1$ se tiene:

$$\frac{z-w}{z-w} = 1 \;[\text{c.p.t.}d\mu\;(z)]$$

Por consiguiente $\check{\mu}(w) = 0$, es decir $\check{\mu}= 0$ [c.p.t.dm] y en cambio $\mu\notin R\;(X)^{\perp}$ ya que $\int_X \frac{1}{z}\,d\mu = 2\pi i \neq o$ y $\frac{1}{z}\varepsilon A(X)$.

Veamos ahora una caracterización de $R_g(X)^{\perp}$ análoga a la de $R(X)^{\perp}$

1.4.3. Proposición. Sea X un compacto del plano complejo y $\mu\varepsilon M(X)$. Para que $\mu\varepsilon\, R_g(X)^{\perp}$ es necesario y suficiente que existan puntos $z_n\varepsilon X$, medidas m_n sobre X representativas para $R(X)$ de z_n, y funciones $h_n\varepsilon\; L^1(X, m_n)$ (con $n\varepsilon\,\mathbb{N}$) tales que $h_n\, m_n\, \varepsilon\, R(X)^{\perp}$, $gh_n m_n\, \varepsilon\, R(X)^{\perp}$ y $\mu = \sum h_j\, m_j$ en $M(X)$.

Demostración. El mismo esquema de la demostración del resultado análogo para $R(X)$, [16, pág. 45], funcionará en nuestro caso. Hay que tener en cuenta que si $z\varepsilon X$, $\mu\varepsilon\, R_g(X)^{\perp}$ y $\mu = \mu_a +$

μ_s es la descomposición de Lebesgue de μ respecto a M_z (conjunto de medidas representativas para z, respecto al álgebra R(X)), entonces $g\mu = g\,\mu_a + g\,\mu_s$ es la descomposición de Lebesgue de $g\mu$ respecto a M_z, debido a la unicidad de dicha descomposición. Como $g\mu\varepsilon\, R(X)^{\perp}$ el teorema abstracto de F. y M. Riesz [16, pág. 44] asegura que $g\,\mu_a\,\varepsilon\, R(X)^{\perp}$ y $g\,\mu_s\,\varepsilon\, R(X)^{\perp}$. Utilizando la anterior observación en cada etapa del proceso recurrente clásico se puede concluir la demostración teniendo en cuenta el teorema de Wilken [16, pág. 47] y la caracterización del espectro de R(X) [16, pág. 27]. //.

<u>1.4.4. Proposición</u>. Sea X un compacto del plano complejo, U un abierto que contiene a X y $g\varepsilon\, C^2(U)$. Escribamos $Z = \{\, w\,\varepsilon\, X \mid \bar{\partial}g(w) = 0\}$. Entonces una medida μ sobre X es ortogonal a $R_g(X)$ sí y sólo sí μ está concentrada en $\overline{\mathring{X}} \cup Z$ y μ es ortogonal a $R_g\,(\overline{\mathring{X}} \cup Z)$.

Demostración. $\Rightarrow$)Si $X = \overline{\mathring{X}} \cup Z$ no hay nada que demostrar. Supongamos $X \neq \overline{\mathring{X}}\cup Z$.Sea $\mu\varepsilon R_g(X)^{\perp}$, K un compacto incluido en $X-\overline{\mathring{X}}\cup Z$ y $f\,\varepsilon C(K)$. Hemos de probar que $\int_K f\, d\mu = 0$. Sea $(\rho_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ una aproximación de la identidad. Denotemos por f una extensión continua , a todo $\mathbb{C}$, de f, La función g la consideraremos también extendida a todo $\mathbb{C}$ en virtud de la observación 1.2.4. Para ε suficientemente pequeño el soporte de $f_\varepsilon = f * \rho_\varepsilon$ no corta a $\overline{\mathring{X}} \cup Z$ y f_ε es infinitamente diferenciable, por tanto se puede aplicar la proposición 1.2.3.

$$\int f_\varepsilon \; d\mu = \frac{1}{\pi} \int \bar{\partial}\left(\frac{\bar{\partial} f_\varepsilon}{\bar{\partial} g}\right) \check{\mu} dm \qquad (2)$$

Pero $\mu\varepsilon\, R_g(X)^{\perp}$ y, por el lema 1.1.2., es continua salvo en un conjunto numerable, de ello se deduce que $\check{\mu} = 0$ [c.p.t. dm] en $\mathbb{C} - \mathring{X}$ (ya que $\check{\mu} = o$ en $\mathbb{C} - X$). De esto se infiere que (2) es igual a:

$$\frac{1}{\pi}\int_{\text{sop } f_\varepsilon} \partial\left(\frac{\bar\partial f_\varepsilon}{\bar\partial g}\right)\check{\mu}\, dm = o, \text{ pues sop } f_\varepsilon \subset \mathbb{C} - \dot{X}$$

Como $f_\varepsilon \to f$ uniformemente en K, obtenemos $\int_K f d\mu = o$, es decir $|\mu|(K) = 0$, por tanto μ está concentrada en $\bar{\mathring{X}} \cup Z$.

Para ver que μ es ortogonal a $R_g(\bar{\mathring{X}} \cup Z)$ basta ver que las funciones racionales con polos fuera de $\bar{\mathring{X}} \cup Z$ se aproximan uniformemente en $\bar{\mathring{X}} \cup Z$ por funciones racionales con polos no pertenecientes a X. De ello se deducirá la aproximación uniforme en $\bar{\mathring{X}} \cup Z$ de las funciones de $R_g(\bar{\mathring{X}} \cup Z)$ por funciones de $R_o(X)+g\ R_o(X)$. Sea R una función racional con polos $a_1, \ldots, a_r$ no pertenecientes a $\bar{\mathring{X}} \cup Z$. Podemos escribir R de la forma:

$$R(z) = \frac{P(z)}{(z-a_1)^{n_1}\ldots(z-a_r)^{n_r}},$$ donde P es un polinomio y $n_i \varepsilon N$.

Se considera un $\alpha > o$ suficientemente pequeño tal que las bolas centradas en a_i y de radio α sean disjuntas entre sí y no corten a $\bar{\mathring{X}} \cup Z$. Consideremos la función definida en:

$$(\bar{\mathring{X}} \cup Z) \times \{z \mid |z-a_1| \leq \alpha\} \times \ldots \times \{z \mid |z-a_r| \leq \alpha\}$$

mediante la fórmula:

$$Q(z, z_1, z_2, \ldots z_r) = \frac{P(z)}{(z-z_1)^{n_1}\ldots(z-z_r)^{n_r}}$$

La función Q es uniformemente continua. Dado $\varepsilon > o$ podemos elegir $a'_1, \ldots, a'_r$ puntos de $\mathbb{C}$ tales que $|a'_i - a_i| \leq \alpha$, pero con $a'_i \notin X$ (esto siempre será posible pues el interior de $X - \bar{\mathring{X}} \cup Z$ es vacío, y no puede contener ninguna bola) verificando, además, que

$$|Q(z, a_1, a_2, \ldots, a_r) - Q(z, a'_1, a'_2 \ldots a'_r)| < \varepsilon \quad \text{con } z \varepsilon \bar{\mathring{X}} \cup Z.$$

La función racional con polos fuera de X $R'(z) = Q(z, a'_1, \ldots a'_r)$ aproxima a R uniformemente en $\bar{\mathring{X}} \cup Z$.

⇐) El recíproco es inmediato, pues sólo hay que tener en cuenta que $R_g(X)|_{\mathring{X} \cup Z} \subset R_g(\bar{\mathring{X}} \cup Z)$.

1.5. APROXIMACION UNIFORME EN EL CASO $\mathring{X} = \emptyset$

El teorema central de este capítulo es el siguiente:

1.5.1. Teorema. Sea X un compacto del plano complejo con $\mathring{X} = \emptyset$ y sea g una función de clase C^2 en un entorno de X. Denotemos por Z el conjunto $\{w \in X / \bar{\partial} g(w) = o\}$. Entonces se verifica:

$$R_g(X) = C(X) \text{ sí y sólo sí } R(Z) = C(Z).$$

Demostración. El contenido de los apartados anteriores hace la demostración sencilla.

⇐) Aplicaremos el esquema general de aproximación por dualidad [3]. Por el teorema de Hahn-Banach es suficiente demostrar que la única forma lineal sobre C(X) que anula $R_g(X)$ es la idénticamente nula. Por el teorema de representación de Riesz es suficiente considerar medidas (de Borel, regulares) sobre X. En definitiva hemos de suponer que μ es una medida ortogonal a $R_g(X)$ y probar que es cero. Si $\mu \in R_g(X)^{\perp}$, por la proposición 1.4.4., μ está concentrada en $\bar{\mathring{X}} \cup Z = Z$ y es ortogonal a $R(Z) = C(Z)$, es decir a cero.

⇒) Supongamos que $R_g(X) = C(X)$. Sea $f \in C(Z)$. Por el teorema de extensión de Tietze-Uryshom existe $\tilde{f} \in C(X)$ tal que $\tilde{f}|_Z = f$. Por hipótesis, existen funciones h_n, $k_n \in R_o(X)$ tales que $\tilde{f} = \lim (h_n + g\, k_n)$ uniformemente en X, y por tanto uniformemente en Z. Pero $h_n|_Z \in R(Z)$ y como $\bar{\partial}\, g = o$ en Z se tiene que $g|_Z \in R(Z)$ (0.1.9).

De donde, ya que $R(Z)$ es un álgebra, se deduce que $f = \tilde{f}_{|Z} \varepsilon R(Z)$. //.

El interés del teorema precedente reside en que reduce la aproximación uniforme por funciones de $R_g(X)$ a un problema de aproximación sobre un subconjunto Z de X. El problema de la aproximación racional ha sido muy estudiado, desde diferentes puntos de vista. Se conocen varias condiciones necesarias y suficientes para que $R(Z) = C(Z)$, en particular citamos los teoremas de Vituskin (veáse 0.1.20, [3], [16] y [49]). En el caso que $g \varepsilon R(X)$ entonces $R_g(X) = R(X)$ y el teorema anterior asegura la siguiente equivalencia:

a) $R(X) = C(X)$

b) Existe una función g de clase C^2 en un entorno de X, $g_{|X} \varepsilon R(X)$ y $R(Z) = C(Z)$.

Veamos ahora algunos corolarios.

<u>1.5.2. Corolario</u>. Si h es una función analítica en un entorno abierto de X y no constante en ninguna componente de dicho entorno (en particular si h es entera y no constante) entonces $R_o(X) + R_o(X)\,\bar{h}$ es uniformemente denso en $C(X)$ si $\mathring{X} = \emptyset$.

Demostración. Basta tener en cuenta que $\bar{\partial}\bar{h} = \overline{\partial h}$ (el guión sobre una función denota la función conjugada) y ∂h es analítica, no constante, y por tanto sus ceros en X forman un conjunto finito, en el cual vale la aproximación racional. //.

El caso en que $h(z) = z$, fue recientemente demostrado por T. Trent y Wang [41].

1.5.3. Corolario. (Caracterización de Vituskin). En la hipótesis de 1.5.1., las siguientes afirmaciones son equivalentes:

a) $R_g\ (X) = C(X)$

b) $\gamma(G-Z) = \gamma(G)$ para todo abierto acotado G.

c) $\gamma(B_\varepsilon(z)-Z) = \varepsilon$ para todo $\varepsilon > 0$ y todo $z \in \mathbb{C}$.

Demostración. Basta tener en cuenta el teorema 1.5.1. y el teorema de Vituskin 0.1.20. //.

1.5.4. Corolario. Si $m(Z) = 0$ entonces $R_o(X) + g\ R_o(X)$ es denso en $C(X)$.

Demostración. Hay que tener en cuenta el teorema de Hartogs-Rosenthal 0.1.11. //.

1.5.5. Corolario. Supongamos que X sea un compacto de $\mathbb{C}$, $g \in C^2_R(U)$ donde U es un entorno de X. Escribamos $Z = \{w \in X \mid \bar{\partial} g(w) = 0\}$ y supongamos que $R(Z) = C(Z)$. Entonces toda función contínua y real sobre X se aproxima uniformemente sobre X por funciones del tipo $h + g\,k$ donde h y k son funciones harmónicas en un entorno de X.

Demostración. Se aplica el teorema 1.5.1. para aproximar f por funciones del tipo $h + g\,k$, $h, k \in R_o(X)$. Como f es real, f se aproxima por funciones del tipo $\mathrm{Re}\, h + g\, \mathrm{Re}\, k$, y $\mathrm{Re}\, h$, $\mathrm{Re}\, k$ son harmónicas en un entorno de X. //.

Observemos el contraste de este teorema con el de aproximación harmónica, por ejemplo: toda función contínua sobre X, $\overset{\circ}{X} = \emptyset$ se aproxima uniformemente por funciones $h + xk$, con h y k harmónicas, en contraste con el teorema de Walsh-Lebesgue [5, pág. 191].

Veamos ahora un teorema del tipo de Alexander 0.1.14.

<u>1.5.6. Proposición</u>. Supongamos que para cada $n \in N$ X_n es un compacto de $\mathbb{C}$ con $\mathring{X}_n = \emptyset$. Sea $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} X_n$ que suponemos compacto. Si $g \in C^2(U)$ con U abierto que contiene a X, se verifica: para todo $n \in N$ $R_g(X_n) = C(X_n)$ sí y sólo sí $R_g(X) = C(X)$.

Demostración. $\Rightarrow$) Supongamos que para todo $n \in N$ $R_g(X_n) = C(X_n)$. Por el teorema 1.5.1. $R(Z_n) = C(Z_n)$ donde $Z_n = \{ w \in X_n \mid \bar{\partial} g(w) = 0\}$. Por el teorema de Baire $\mathring{X} = \emptyset$. Pero $Z = \bigcup_{n=1}^{\infty} Z_n$ y por el teorema de Alexandre $R(Z) = C(Z)$, de donde $R_g(X) = C(X)$.

$\Leftarrow$) Sea $f \in C(X_n)$, y $\tilde{f} \in C(X)$ tal que $\tilde{f}_{|X_n} = f$ (obtenida por el teorema de Tietze-Uryshon). $\tilde{f}$ se aproxima por funciones $h+gk$, y por tanto f se aproxima por funciones del tipo $h_{|X_n} + g_{|X_n} \cdot k_{|X_n} \in R_g(X_n)$. //.

C A P I T U L O 2

APROXIMACION UNIFORME EN COMPACTOS ARBITRARIOS DEL PLANO COMPLEJO.

En este capítulo se estudian algunas condiciones de pertenencia a R_g (X). En este aspecto los resultados más interesantes son 2.1.1 y 2.2.1. No se ha logrado dar una caracterización completa de $R_g(X)$, válida para toda g y para todo X. El resultado central es el teorema 2.3.4. análogo al de aproximación uniforme por polinomios de Mergelyan 0.1.13. Este teorema caracteriza $R_{\bar{z}}(X)$ para amplias clases de compactos. El capítulo acaba con una generalización, de algunos resultados, aplicable a los módulos $R_o(X) + R_o(X)\bar{z} + \dots + R_o(X)\bar{z}^n$ estudiados por O'Farrell [31] y Wang [41], [43], [44] y [45].

2.1. CONDICIONES NECESARIAS DE PERTENENCIA A $R_g(X)$

En este capítulo X denotará un compacto de $\mathbb{C}$, U un entorno abierto de X, g una función de clase, C^2 en U y $Z = \{w \in X / \bar{\partial} g(w) = o\}$. En primer lugar damos una caracterización de $R_g(X)$, en un caso particular, que es deducible de la proposición 1.4.4.

2.1.1. Proposición. Sean X, g y Z en las hipótesis anteriores. Se verifica $R_g(X) = \{f \in C(X)/f_{|Z} \in R(Z)\}$ si y sólo si $\overset{\circ}{\widehat{X - Z}} = \emptyset$.

Demostración. Supongamos en primer lugar que $\overset{\circ}{\widehat{X - Z}} = \emptyset$. Es fácil ver que esta condición equivale a que $\dot{\overline{X}} \subset Z$. Si $f \in R_g(X)$ ya se demostró en 1.5.1. que $f \in C(X)$ y $f_{|Z} \in R(Z)$. Sea $f \in C(X)$ tal que

$f_{|Z} \varepsilon R(Z)$ y $\mu \varepsilon R_g(X)^{\perp}$; se ha de probar que $\int_X f\, d\mu = 0$. Por la proposición 1.4.4. μ está concentrada en $\overline{\mathring{X}} \cup Z = Z$ y es ortogonal a $R(Z)$. De donde

$$\int_X f\, d\mu = \int_Z f_{|Z} d\mu = 0$$

pues $f_{|Z} \varepsilon R(Z)$ y $\mu \varepsilon R(Z)^{\perp}$.

Supongamos que $\widehat{X - Z}^{\circ} \neq \emptyset$. Sea w un punto de $\widehat{X - Z}^{\circ}$, y $\varepsilon > 0$ tal $D(w,\varepsilon) \subset X$ y $D(w,\varepsilon) \cap Z = \emptyset$. Se elige una función $f \varepsilon D(\mathbb{C})$ que valga 1 en $\bar{D}(w,\frac{\varepsilon}{2})$ y sop $f \subset D(w,\varepsilon)$. En un entorno de Z, f es holomorfa, por tanto tiene sentido considerar la medida sobre X.

$$\mu = \mathfrak{F}\left(\frac{\bar{\partial} f}{\partial g}\right) dm_{|X}$$

Esta medida está concentrada en $\bar{D}(w,\varepsilon)$. El corolario 1.2.2 muestra que $\check{\mu} = \pi f \neq o$. Es decir $\mu \neq o$ y $\check{\mu}$ se anula fuera de $\bar{D}(w,\varepsilon)$, por tanto es ortogonal a $R_g(\bar{D}(w,\varepsilon))$ (es posible aplicar b) de la proposición 1.4.1 con $X = \bar{D}(w,\varepsilon)$). Evidentemente μ es ortogonal a $R_g(X)$. En cambio como $\mu \neq o$ existe $g \varepsilon C^{\infty}(\mathbb{C})$ con sop $g \cap Z = \emptyset$ y tal que $\int_X g\, d\mu \neq o$. La función g pertenece a $\{h \varepsilon C(X) \mid h_{|Z} \varepsilon R(Z)\}$, por tanto este último espacio es distinto de $R_g(X)$. //.

<u>2.1.2. Corolario.</u> Bajo las mismas hipótesis de la proposición anterior se verifica $Rg(X) = C(X)$ si y sólo si $\widehat{X - Z}^{\circ} = \emptyset$ y $R(Z) = C(Z)$.

Demostración $\Leftarrow$) Es consecuencia inmediata de 2.1.1.

$\Rightarrow$) Si $R_g(X) = C(X)$, se obtiene $R(Z) = C(Z)$ del mismo modo que en la demostración del teorema 1.5.1. La igualdad $\widehat{X - Z}^{\circ} = \emptyset$ es consecuencia de 2.1.1. //.

<u>2.1.3. Corolario.</u> Supongamos que $\widehat{X - Z}^{\circ} = \emptyset$. Se verifica que

el álgebra cerrada generada por $R_o(X)$ y g es $R_g(X)$.

Demostración. Sea A el álgebra cerrada generada por $R_o(X)$ y g. Evidentemente $A \supset R_g(X)$. Recordando que $g_{|Z} \in R(Z)$ y aplicando 2.1.1 obtenemos $A \subset \{f \in C(X) \mid f_{|Z} \in R(Z)\} = R_g(X)$, luego $A = R_g(X)$. //.

Es interesante observar la relación del corolario 2.1.3. con otro problema estudiado por varios autores, por ejemplo Werner [47], [48] y Preeskenis [33], [34] y [35]. Dichos autores estudian qué condiciones hay que imponer a una función $g \in C(D)$ (D el disco unidad cerrado) para que la subálgebra cerrada generada por z y g sea $C(D)$. Notemos el gran parecido formal de la proposición 2.1.1 con el teorema de Wermer [48, pág.9]. Sin embargo parece que no hay relación entre ambos. Si situamos este problema en otro compacto de $\mathbb{C}$, vemos que los dos últimos corolarios proporcionan una solución en el caso $\overset{\circ}{\widehat{X - Z}} = \emptyset$. Observemos que al cambiar el disco D por un compacto cualquiera, hemos de reemplazar el álgebra generada por z y g por la generada por $R(X)$ y g.

Veamos una aplicación de estos resultados a un problema clásico de aproximación ¿cuándo $R(X)$ es maximal en $C(\partial X)$? Véase [16, pág.37] para una definición de subálgebras maximales.

<u>2.1.4. Proposición</u> En un compacto X con interior vacío o bien $R(X) = C(X)$ o bien $R(X)$ no es maximal en $C(X)$.

Demostración. Sea U el conjunto de los puntos de X que tienen un entorno cerrado V con $R(V) = C(V)$. Entonces, $K = X-U$ es un compacto que, como veremos, no es numerable. Como U puede expresarse como reunión numerable de compactos en los que vale la aproximación racional (esto último es consecuencia del teorema de Bishop de localización de $R(X)$ [49]), si K fuera numerable, X también podría escribirse como unión numerable de compactos en los que valdría la aproximación racional. Por el teorema de Alexander (0.1.14.) tendríamos $R(X) = C(X)$, en contra de la hipótesis. Sean $x_1, x_2 \in K, x_1 \neq x_2$ y consideramos entornos (en X) compactos y disjuntos K_1, K_2 de x_1 y x_2. Entonces $R(K_i) \neq C(K_i), i = 1,2$. Sea $f \in C^{\infty}(\mathbb{C})$ tal que $f^{-1}(o) = K_1$, $f=1$ en un entorno abierto (en $\mathbb{C}$) de K_2. Sea $g \in C^{\infty}(\mathbb{C})$ con $\bar{\partial} g = f$. Veamos que $g \notin R(X)$. En efecto, como $g = \bar{z} + h$, en un entorno de K_2, con h holomorfa en ese entorno, y ya que $\bar{z} \notin R(K_2)$ (Stone-Weierstrass) entonces $g \notin R(K_2)$. El álgebra cerrada generada por $R(X)$ y g es $\{f \in C(X) / f|_{Z_n} \in R(Z_n)\}$. Luego esta álgebra no es $C(X)$, porque $R(Z_n) \neq C(Z_n)$, y contiene estrictamente a $R(X)$. //.

En la sección 1.3 se introdujo el operador $\bar{\partial}(\frac{\bar{\partial}}{\bar{\partial} g})$, suponiendo g de clase C^{∞}. Observemos que es posible definir, cuando g es sólo de clase C^2, $\bar{\partial}(\frac{\bar{\partial}}{\bar{\partial} g})$ como un operador que actúa sobre distribuciones de orden 2. Hecha esta observación podemos enunciar el siguiente resultado:

2.1.5. Proposición. Consideramos X, g y Z en las condiciones habituales. Si $f \in R_g(X)$, entonces se cumple:

a) Existen funciones h,k holomorfas en $\mathring{X} - Z$ tales que $f = h + gk$ (por tanto $f \in C^2(\mathring{X} - Z)$ y $\bar{\partial}(\frac{\bar{\partial} f}{\bar{\partial} g}) = o$ en $\mathring{X} - Z$).

b) $f|_Z \in R(Z)$.

Demostración. a) Sea $f_o = h_o + g k_o \in R_o(X) + R_o(X) g$. Derivando se obtiene $f_o = k_o \bar{\partial} g$, por tanto $\bar{\partial}(\frac{\bar{\partial} f_o}{\bar{\partial} g}) = o$ en $\mathring{X} - Z$. Si $f \in R_g(X)$ entonces existen $f_n \in R_o(X) + R_o(X) g$ que convergen uniformemente sobre X hacia f. La convergencia uniforme implica la convergencia débil * en el espacio de distribuciones de orden 2 sobre $\mathring{X} - Z$. Por tanto:

$\bar{\partial}(\frac{\bar{\partial} f_n}{\bar{\partial} g})$ converge hacia $\bar{\partial}(\frac{\bar{\partial} f}{\bar{\partial} g})$ en $\overset{\circ}{X} - Z$.

Pero $\bar{\partial}(\frac{\bar{\partial} f_n}{\bar{\partial} g}) = o$, de donde $\bar{\partial}(\frac{\bar{\partial} f}{\bar{\partial} g}) = o$ en $\overset{\circ}{X} - Z$. Ahora, el lema de Weyl 0.2.2 asegura que $h = \frac{\bar{\partial} f}{\bar{\partial} g}$ es una función holomorfa en $\overset{\circ}{X} - Z$. De las igualdades $\bar{\partial} f = h\bar{\partial} g = \bar{\partial}(hg)$, deducimos $\bar{\partial}(f - hg) = o$ en $\overset{\circ}{X} - Z$. Recurriendo de nuevo al lema de Weyl obtenemos que $k = f - hg$ es una función holomorfa en $\overset{\circ}{X} - Z$, concluyendo así la demostración de a).

Para deducir b) sólo hay que tener en cuenta la inclusión $R_o(X) + R_o(X)g|_Z \subset R(Z)$. //.

No es posible obtener condiciones necesarias más finas en función de los operadores $\bar{\partial}$ y $\mathbb{D}_g$. En efecto si $g \in R(X)$, entonces $R_g(X) = R(X)$ y ya es sabido que no es posible caracterizar $R(X)$ en función de $\bar{\partial}$.

<u>2.1.6. Observación.</u> La descomposición en $\overset{\circ}{X} - Z$, de una función f de $R_g(X)$ en la forma $h + gk$ (h, k holomorfas en $\overset{\circ}{X} - Z$), es única. En efecto $k = \frac{\bar{\partial} f}{\bar{\partial} g}$ en $\overset{\circ}{X} - Z$ y $h = f - \frac{\bar{\partial} f}{\bar{\partial} g}.g$.

<u>2.1.7. Proposición</u>. Sean X, g y Z en las condiciones usuales. Entonces $R_g(X)$ es un álgebra uniforme sí y sólo sí $\overbrace{X - Z}^{\circ} = \emptyset$.

Demostración. <=) Si $\overbrace{X - Z}^{\circ} = \emptyset$, la proposición 2.1.1. muestra que $R_g(X) = \{f \in C(X)/f|_Z \in R(Z)\}$. Como $R(Z)$ es un álgebra uniforme, es fácil ver que también $R_g(X)$ es un álgebra uniforme.

=>) Supongamos que $R_g(X)$ es un álgebra y $\overbrace{X - Z}^{\circ} \neq \emptyset$. Se tiene $\overbrace{X - Z}^{\circ} = \overset{\circ}{X} - Z \neq \emptyset$. Ya que, por hipótesis, $g^2 \in R_g(X)$ obtenemos, en virtud de 2.1.5.,

$g^2 = h + gk$ en $\overset{\circ}{X} - Z$, con h,k holomorfas en $\overset{\circ}{X} - Z$.

Aplicando el operador $\bar{\partial}$ se tiene $2\, g\, \bar{\partial} g = \bar{\partial} g \cdot k$, de donde $g = \frac{k}{2}$ en $\overset{\circ}{X} - Z$, que no es posible porque k es holomorfa en $\overset{\circ}{X} - Z$, y g no. //.

Para el caso en que $R_g(X)$ sea un álgebra, en vista de la caracterización de la misma, dada en 2.2.1., resulta la siguiente proposición:

<u>2.1.8. Proposición</u>. Supongamos que $R_g(X)$ es un álgebra uniforme. Entonces:

a) El espectro de ideales maximales de $R_g(X)$ es identificable a X.

b) El conjunto de puntos pico de $R_g(X)$ es el conjunto de puntos pico de R(Z) unión X-Z.

c) La frontera de Shilov de $R_g(X)$ es $X - \overset{\circ}{Z}$.

Para una definición de estos conceptos, véase [16]. La demostración, que omitimos, utiliza sólo argumentos habituales en la teoría de álgebras uniformes.

<u>2.2. CONDICIONES SUFICIENTES DE PERTENENCIA A $R_g(X)$.</u>

En primer lugar veremos un recíproco parcial de la proposición 2.1.3.

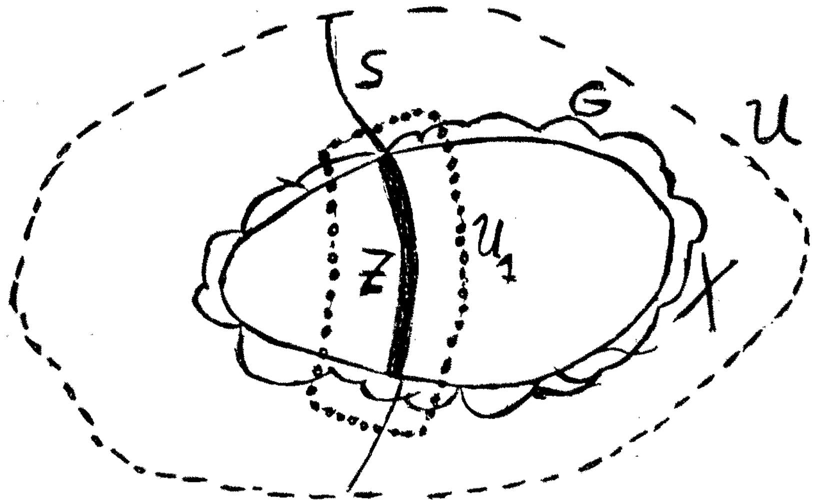
<u>2.2.1. Teorema.</u> Sean X, g y Z en las condiciones usuales. Supongamos que f es una función de clase C^2 en un entorno de X y que se cumplen:

a) Para todo $w \in \overset{\circ}{X} - Z$ se tiene $\bar{\partial}\left(\frac{\bar{\partial} f}{\bar{\partial} g}\right)(w) = 0$.

b) f es holomorfa en un entorno de Z.

Entonces $f \in R_g(X)$

Demostración. Supondremos que g está extendida a todo $\mathbb{C}$ (en virtud de la observación 1.2.4.) Sea U el abierto en el cual f está definida y $U_1 \subset U$ el abierto en el cual f es holomorfa. Sea $S = \{w \in U | \bar{\partial} g(w) = 0\}$, $S - U_1$ es un cerrado de U que no corta a X. Elijamos un número positivo ε estrictamente menor que las distancias entre $S-U_1$ y X, entre X y $\mathbb{C}-U$, y entre Z y $\mathbb{C}-U_1$. Véase el gráfico para mayor claridad:



Consideremos puntos $x_1, x_2. \; x_n$, tales que:

$$G = D(x_1,\varepsilon) \cup \ldots \cup D(x_n,\varepsilon) \supset X.$$

G es un abierto acotado de $\mathbb{C}$ con ∂G de clase C^1 a trozos y además, $\{w \in \bar{G} | \bar{\partial} g(w) = 0\} \subset U_1$ y $\bar{G} \subset U$ por la elección de ε. Es posible aplicar ahora la proposición 1.2.1 para obtener, para cada $w \in X$ la igualdad:

$$f(w) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial G} \frac{f(z)}{z-w}\,dz - \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial G} \frac{\bar{\partial} f}{\bar{\partial} g}(z)\,\frac{g(z)-g(w)}{z-w}\,dz +$$

$$+\frac{1}{\pi}\int_G \mathbb{D}_g f(z)\frac{g(z)-g(w)}{z-w}\,dm(z). \tag{1}$$

Sea μ una medida ortogonal a $R_g(X)$. Integrando en (1) se obtiene:

$$\int f d\mu = \frac{1}{2\pi i}\int_X\left(\int_{\partial G}\frac{f(z)}{z-w}\,dz\right)d\mu(w) - \frac{1}{2\pi i}\int_X\int_{\partial G}\frac{\bar\partial f}{\bar\partial g}(z)\frac{g(z)-g(w)}{z-w}dz)\,d\mu(w)$$

$$+\frac{1}{\pi}\int_X\left(\int_G \mathbb{D}_g(f)(z)\frac{g(z)-g(w)}{z-w}\,dm(z)\right)d\mu(w) \tag{2}$$

Teniendo en cuenta las desigualdades:

$$z\in\partial G,\ w\in X \quad \left|\frac{f(z)}{z-w}\right| \leq \frac{1}{d(X,\partial G)}\,\|f\|_X$$

$$z\in\partial G,\ w\in X \quad \left|\frac{\bar\partial f}{\bar\partial g}(z)\,\frac{g(z)-g(w)}{z-w}\right| \leq \left\|\frac{\bar\partial f}{\bar\partial g}\right\|_X\cdot\|Dg\|_{\bar G}$$

$$z\in\partial G,\ w\in X \quad \left|\mathbb{D}_g(f)(z)\ \frac{g(z)-g(w)}{z-w}\right| \leq \|\mathbb{D}_g f(z)\|_X\,\|Dg\|_{\bar G}$$

podemos aplicar el teorema de Fubini en (2), resultando:

$$\int f d\mu = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial G} f(z)\,\hat\mu(z)\,dm(z) - \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial G}\frac{\bar\partial f}{\bar\partial g}(z)\,\mu(z)\,dz +$$

$$+\frac{1}{\pi}\int_G(\mathbb{D}_g f).\ \check\mu\,dm.$$

Pero $\hat\mu = 0$, $\check\mu = 0$ en ∂G por ser μ ortogonal a $R_g(X)$, y en particular a $R(X)$. Por lo tanto:

$$\int_X f d\mu = \frac{1}{\pi}\int_X \mathbb{D}_g f\ \check\mu\,dm.$$

Como $\check{\mu}$ es continua salvo en un conjunto numerable (por el lema 1.1.2) $\check{\mu} = 0$ [c.p.t. dm.] en $\mathbb{C} - \overset{\circ}{X}$. Así que, el dominio de integration en la última integral puede reducirse a $\overset{\circ}{X}$, donde $\bar{\partial}(\frac{\bar{\partial}f}{\bar{\partial}g}) = 0$ por hipótesis. De donde $\int f d\mu = 0$, es decir $f \varepsilon R_g(X)$. //.

Combinando el teorema anterior y la proposición 2.1.5. se tiene:

<u>2.2.2. Corolario</u>. Sean X y g en las condiciones usuales. Supongamos que $Z = \emptyset$, y sea f una función de clase C^2 en un entorno de X. Entonces se cumple:

$$f \varepsilon R_g(X) \text{ sí y sólo sí } \bar{\partial}(\frac{\bar{\partial}f}{\bar{\partial}g}) = 0 \text{ en } \overset{\circ}{X}.$$

El teorema 2.2.1. es análogo al resultado de aproximación racional (0.1.9). Sin embargo aquí sólo se exige anulación del operador aplicado a la función en $\overset{\circ}{X}$ y no en todo X.

La hipótesis b) de 2.2.1. no puede ser relajada a $f|_Z \varepsilon R(Z)$ como muestra el ejemplo 2.2.8. Podríamos también debilitar esta hipótesis imponiendo condiciones del tipo de la nota que sigue a 1.2.1.

El método natural para obtener una mejora substancial del teorema 2.2.1. (suponiendo, por ejemplo, sólo $f \varepsilon C(X)$ es aproximar la función f por funciones de clase C^2. Pero como en las fórmulas integrales de 1.2. aparece el operador $\bar{\partial}(\frac{\bar{\partial}}{\bar{\partial}g})$, resulta ser difícil el paso final de tomar límites, que sólo se ha sabido precisar en el caso $g(z) = \bar{z}$ (véase sección 2.3.).

Veamos un caso en que sí se puede reemplazar b) por $f|_Z \varepsilon R(Z)$.

<u>2.2.3. Proposición</u>. Sean S, g y Z en las condiciones usuales. Sea f de clase C^2 en un entorno de X y supongamos que $Z \cap (\overline{X-Z}) = \emptyset$.

Se verifica que $f\varepsilon\, R_g(X)$ sí y sólo sí.

a) Para todo $w\varepsilon\, \overset{\circ}{X} - Z$ $\quad \bar{\partial}(\frac{\bar{\partial} f}{\bar{\partial} g})(w) = 0$.

b) $f_{|Z}\, \varepsilon R(Z)$.

Demostración. Dado $\varepsilon > o$ consideremos $h\varepsilon\, R_o(Z)$ tal que $\| h-f \|_Z < \varepsilon$. Definamos una función k del siguiente modo:

para $x\varepsilon\, Z$, $k(x) = h(x)$,

para $x\varepsilon\, \overline{X-Z}$, $k(x) = f(x)$.

k es holomorfa en un entorno de Z y es continua en X. Como k cumple las hipótesis del teorema 2.2.1., obtenemos $k\varepsilon\, R_g(X)$. Ya que $\| k-f \|_X < \varepsilon$ y ε es arbitrario, $f\varepsilon\, R_g(X)$ //.

En los resultados siguientes se supone X es un compacto de $\mathbb{C}$, U un entorno abierto de X, $g\varepsilon\, C^2(U)$ y que $\bar{\partial} g(z) \neq 0$ $(z\, \varepsilon\, U)$. Escribiremos $R_g(U)$ para denotar el conjunto de funciones $h + gk$ con h y k holomorfas en U.

Consideremos el problema de recuperar los valores de una función $f\varepsilon\, R_g(X)$ a partir de sus valores en ∂X. Veamos que esto no es posible (se sobreentiende que $\overset{\circ}{X} \neq \emptyset$).

<u>2.2.4. Proposición.</u> Sean U y g como antes, sea $f\varepsilon R_g(U)$ y sean $\Gamma_1, \Gamma_2, \ldots \Gamma_n$ un número finito de curvas tales que para cada $z \notin U$ se tenga $\sum n(z, \Gamma_i) = 0$. Entonces si $w\varepsilon\, U$ y $\sum n(w, \Gamma_i) = 1$, se tiene:

$$f(w) = \sum_j \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_j} \frac{f(z)}{z-w}\, dz - \sum_j \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_j} \frac{\bar{\partial} f}{\bar{\partial} g}(z) \frac{g(z)-g(w)}{z-w}\, dz .$$

Demostración. La fórmula es una consecuencia de la demostración de la proposición 1.2.1., pues la hipótesis sobre los índices permite aplicar el teorema de Stokes. El tercer término de 1.2.1. no aparece porque $\bar{\partial}(\frac{\bar{\partial} f}{\bar{\partial} g}) = 0$ en U. //.

Si este resultado lo aplicamos a un disco $\bar{D} \subset U$ con borde Γ se tiene para $f \in R_g(U)$:

$$f(w) = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{f(z)}{z-w}\,dz - \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{\bar{\partial} f}{\bar{\partial} g}(z)\frac{g(z)-g(w)}{z-w}\,dz, \quad w\in D$$

La última integral pierde sentido cuando se pasa al límite uniforme, y esto hace imposible recuperar los valores de f a partir de los valores frontera, como demuestra el siguiente ejemplo:

<u>2.2.5. Ejemplo.</u> Consideremos $X = \bar{D}(0,1)$. Las funciones $|z|^2 = z\cdot\bar{z}$ y 1 pertenecen a $R_{\bar{z}}(X)$ y coinciden en ∂X, pero son diferentes.

Veamos una caracterización de las funciones de $R_g(U)$ análoga al teorema de Morera [41].

<u>2.2.6. Proposición.</u> Sea U un abierto de $\mathbb{C}$, g una función de clase C^2 en U tal que para todo $z\in U$ $\bar{\partial} g(z) \neq 0$ y f una función de clase C^1 en U. Son equivalentes:

a) $f\in R_g(U)$.

b) Si T es el borde de un triángulo incluido en U se tiene:

$$\int_T f(z)dz = \int_T \frac{\bar{\partial} f}{\bar{\partial} g}(z) f(z) dz.$$

Demostración. Es inmediato que a)$\Rightarrow$ b) puesto que $f = h + \frac{\bar{\partial} f}{\bar{\partial} g}\, g$ con h holomorfa en U. Si se verifica b), en virtud del teorema de Morera, se tiene que:

$$h = f - \frac{\bar{\partial} f}{\bar{\partial} g}\, g \qquad (3)$$

es holomorfa en U. Sea V el abierto $\{z \in U | g(z) \neq 0\}$. Despejando en (3) se obtiene que en V:

$$\bar{\partial} f = \bar{\partial} g\, (f - h)\, \frac{1}{g}$$

Por tanto $f \in C^2(V)$. Ahora es posible derivar en (3) para obtener $\bar{\partial} f = \partial(\frac{\bar{\partial} f}{\bar{\partial} g}) g + \bar{\partial} f$, es decir $\bar{\partial}(\frac{\bar{\partial} f}{\bar{\partial} g}) = 0$ en V. luego existen h_1, k_1 funciones holomorfas en V con $f = h_1 + g\, k_1$, y en virtud de 2.1.6. $h_1 = h$ y $k_1 = \frac{\bar{\partial} f}{\bar{\partial} g}$ en V. Así que h_1 tiene una extensión holomorfa a todo U, mientras que k_1 tiene sólo una extensión continua a U. Sea $E = \{x \in U | g(x) = 0\}$ y escribamos $g = u + iv$. Si $z \in E$, como $\bar{\partial} g\,(z) \neq o$, o bien $\bar{\partial} u\,(z) \neq 0$ ó $\bar{\partial} v(z) \neq 0$, es decir $\nabla u(z) \neq 0$ ó $\nabla v(z) \neq 0$. Teniendo en cuenta el teorema de la función implícita deducimos que E está localmente contenido en una curva de clase C^2. Es conocido que en tales condiciones la capacidad analítica continua de E es cero (0.1.22), de donde resulta que k_1 tiene una extensión holomorfa a todo U (0.1.18.). Finalmente tenemos $f = h + gk_1$ con h, k_1 holomorfas en U. //.

Veamos ahora un caso particular en el que se ha podido caracterizar $R_g(X)$.

<u>2.2.7. Proposición.</u> Sea X un compacto convexo de $\mathbb{C}$ y supongamos que $0 \in \overset{o}{X}$. Entonces $R_{\bar{z}^n}(X)$ (para $n \geq 1$) está formado por aquellas funciones f, continuas sobre X, tales que existen h, k holomorfas en $\overset{o}{X}$ con $f = h + \bar{z}^n k$.

Demostración. Observemos que en este caso $Z = \{o\}$. Si $f \in R_{\bar{z}^n}(X)$ entonces, en virtud de la proposición 2.1.3. existen funciones h, k holomorfas en $\overset{o}{X} - \{o\}$ tales que $f = h + \bar{z}^n k$. Veamos que h y k tienen una singularidad evitable (este hecho no puede deducirse de la continuidad de f). Sean:

$$h(z) = \sum_j a_j z^j \quad , k(z) = \sum_j b_j z^j$$

los desarrollos en serie de Laurent de h,k en 0. Por hipótesis $\mathbb{C}-X$ es conexo, por tanto toda función racional con polos en $\mathbb{C}-X$ se aproxima, uniformemente sobre X, en virtud del teorema de Runge, por funciones polinómicas. Como $f \in R_g(X)$ deducimos que existen polinomios P_n, Q_n tales que $P_j + \bar{z}^n Q_j \xrightarrow{j} f$ uniformemente en X. Sea $r_o > o$ tal que $D(o,r_o) \subset X$ y consideremos los coeficientes de Fourier de $f(r.)$ para $r < r_o$. La convergencia uniforme en X implica la convergencia de coeficientes de Fourier. Toda función del tipo $P + \bar{z}^n Q$ (P, Q polinomios) tiene coeficientes de Fourier de orden $<-n$ nulos, por tanto el m-ésimo coeficiente de Fourier de $f(r.)$ es nulo para $m < -n$. Calculemos ahora los coeficientes de Fourier de $h + \bar{z}^n k = f$.

$$\hat{f}(r.)(m) = \frac{1}{2\pi} \int_o^{2\pi} (h(re^{it}) + r^n e^{-int} k(re^{it}))\, e^{-imt}\, dt =$$

$$= \sum_j a_j r^j \frac{1}{2\pi} \int_o^{2\pi} e^{i(j-m)t}\, dt + \sum_j b_j r^{j+n} \frac{1}{2\pi} \int_o^{2\pi} e^{i(j-n-m)t}\, dt =$$

$$= a_m r^m + b_{n+m} r^{2n+m} \quad \text{para } m \in \mathbb{Z}$$

De donde $a_m + b_{n+m} r^{2n} = 0$ si $m < -n$.

Pero esto vale para todo $r < r_o$, deduciéndose que $a_m = 0$ para $m < -n$, y por tanto $b_{n+m} r^n = 0$. Es decir $b_{n+m} = 0$ para $n + m < 0$. Por consiguiente k es holomorfa en 0 y $h = f - \bar{z}^n k$ está acotada en un entorno de cero, por tanto tiene una singularidad evitable.

Recíprocamente, supongamos que $f = h + \bar{z}^n k$ con h,k holomorfas en $\overset{o}{X}$ y que f es continua en X. Sea (r_m) una sucesión de números reales con límite 1 y tales que $0 < r_m < 1$. Consideremos la función $f(r_m\cdot)$ definida en $\frac{1}{r_m} X$, que es un entorno de X (por ser X convexo). Como f es uniformemente continua en X se tiene que $f(r_m\cdot) \overset{m}{\rightarrow} f$ uniformemente en X. Ya que cada función $f(r_m\cdot)$ tiene una expresión del tipo $h(r_m\cdot) + \bar{z}^n r_m^n k(r_m\cdot)$ con $h(r_m\cdot)$ y $k(r_m\cdot)$ holomorfas en un entorno de X, el teorema de Runge nos asegura que $f(r_m\cdot) \in R(X) + R(X)\bar{z}^n$, y por consiguiente que $f \in R_g(X)$. //.

La proposición anterior proporciona ejemplos que demuestran que la condición b) del teorema 2.2.1. no puede ser rebajada a $f_{|Z} \in R(Z)$.

<u>2.2.8. Ejemplo.</u> Sea $X = \bar{D}(0,1)$ y $g(z) = \bar{z}^4$. La función $f(z) = \bar{z}^4 \cdot \frac{1}{z}$ verifica en $X-\{o\}$ $\bar{\partial}(\frac{\bar{\partial} f}{\bar{\partial} g}) = o$, $f \in C^2(X)$ y evidentemente $f_{|\{o\}} \in R(\{o\}) = \mathbb{C}$. En cambio $f \notin R_g(X)$. Pues por la proposición 2.2.7. existirían funciones holomorfas h,k en $\overset{o}{X}$ tales que $f = h + \bar{z}^4 k$. Por la unicidad de dicha descomposición (2.1.6) se tendría $k(z) = \frac{1}{z}$ para $z \neq o$, pero esto es absurdo.

Si $f \in R_g(X)$ y $Z = \emptyset$ existen funciones h,k holomorfas en $\overset{o}{X}$ con $f = h + g\,k$. No es verdad que h ó k se extiendan con continuidad a la frontera, ni siquiera que h ó k sean acotadas.

<u>2.2.9. Ejemplo</u>. Sea $X = \bar{D}(0,1)$ y $g(z)=\bar{z}$. La serie $h(z) = (1-z)^{\frac{1}{2}} = \sum_{n=1}^{\infty} \binom{\frac{1}{2}}{n} z^n$ converge absolutamente y uniformemente en X, por tanto $h \in A(X)$. Consideremos la función $f(z) = (\bar{z} - 1)\frac{1}{h(z)}$. En $\overset{o}{X}$ se tiene $\bar{\partial}^2 f = 0$. Además $|f(z)| = \left|\frac{z-1}{h(z)}\right| = |h(z)| \rightarrow o$ cuando

$z \to 1$. Por tanto $f \in C(X)$, y aplicando la proposición 2.2.7. se tiene $f \in R_{\bar{z}}(X)$ y en cambio $\frac{1}{h(z)}$ no está acotada en $\overset{o}{X}$.

2.3. APROXIMACION UNIFORME PARA EL OPERADOR $\bar{\partial}^2$ ($g(z) = \bar{z}$).

En la teoría de aproximación racional se demuestra que es posible recuperar la medida de un punto a través de transformada de Cauchy de dicha medida [5, pág. 157]. Veamos que sucede algo parecido con la transformada 1.1.1. asociada a $g(z) = \bar{z}$.

2.3.1. Proposición. Sea μ una medida en $\mathbb{C}$ a soporte compacto y sea $\check{\mu}$ la transformada de μ respecto a $\bar{z}$ (véase 1.1.1.). Se verifica para todo $a \in \mathbb{C}$:

$$\mu\{a\} = \lim_n \frac{n^2}{\pi} \int_{D(a,\frac{1}{n})} \frac{w-a}{\bar{w}-\bar{a}} \check{\mu}(w)\, dm(w).$$

Demostración. Fijemos el punto $a \in \mathbb{C}$ y definamos la siguiente función:

$$z \in \mathbb{C} \to F_n(z) = \frac{n^2}{\pi} \int_{D(a,\frac{1}{n})} \frac{w-a}{\bar{w}-\bar{a}} \cdot \frac{\bar{w}-\bar{z}}{w-z}\, dm\,(w) \qquad (1)$$

La función a integrar es acotada, definida casi por todo y medible, por tanto F_n está bien definida en todo punto. Se cumple $F_n(a) = 1$ para todo $n \in N$. Si $z \neq a$ calcularemos la integral en (1) por medio de un cambio de variable y una reducción a una integral curvilínea. A partir de un cierto $n_o \in N$ se tendrá $|z-a| > \frac{1}{n}$ para $n \geq n_o$. Efectuando el cambio de variable $w = a + r\,e^{it}$, si $n \geq n_o$:

$$F_n(z) = \frac{n^2}{\pi} \int_o^{2\pi} \int_o^{\frac{1}{n}} \frac{re^{it}}{re^{-it}} \frac{\bar{a}-\bar{z} + re^{-it}}{a-z + re^{it}}\, rd\,r\,dO =$$

$$= \frac{n^2}{\pi} \int_0^{\frac{1}{n}} rdr \frac{1}{i} \int_0^{2\pi} e^{it} \frac{\bar{a}-\bar{z} + re^{-it}}{a-z + re^{it}} i e^{it} dt =$$

$$= \frac{n^2}{\pi} \int_0^{\frac{1}{n}} rdr \frac{1}{i} \int_\gamma \frac{(\overline{a-z})\ u + r}{(a-z) + ru} du$$

Donde γ designan el camino $\gamma(t) = e^{it}$ con $t\varepsilon[0,2\pi]$. Para $n \geq n_o$ se tiene $|ru| \leq r \leq \frac{1}{n} < |z-a|$, por tanto la función $f(u) = \frac{(\overline{a-z})\ u + r}{a-z + ru}$ es holomorfa en $|u| \leq 1$ y por consiguiente su integral curvilínea es cero, de donde se deduce: $\lim_n F_n(z) = 0$ para $z \neq a$. Se ha demostrado que $F_n \underset{n}{\to} 1_{\{a\}}$, puntualmente en $\mathbb{C}$. Además:

$$|F_n(z)| \leq \frac{n^2}{\pi} \int_{D(a,\frac{1}{n})} \left|\frac{w-a}{\bar{w}-\bar{a}}\right| \left|\frac{\bar{w}-\bar{z}}{w-z}\right| dm(w) = 1,\ n\varepsilon N$$

Ya que la convergencia es dominada, es lícito conmutar la integración con el límite:

$$\mu\{a\} = \int 1_{\{a\}} d\mu = \int \lim F_n\ d\mu = \lim_n \int F_n(z)\ d\mu(z) =$$

$$= \lim_n \int \frac{n^2}{\pi} \left(\int_{D(a,\frac{1}{n})} \frac{w-a}{\bar{w}-\bar{a}} \cdot \frac{\bar{w}-\bar{z}}{w-z}\ dm(w) \right) d\mu(z) = \qquad (2)$$

Se puede aplicar el teorema de Fubini ya que si $z\varepsilon$ sop μ y $w \varepsilon D(a,\frac{1}{n})$ se tiene:

$$\left| \frac{n^2}{\pi} \cdot \frac{w-a}{\bar{w}-\bar{a}} \cdot \frac{\bar{w} - \bar{z}}{w - z} \right| \leq \frac{n^2}{\pi}$$

Por tanto:

$$(2) = \lim_n \frac{n^2}{\pi} \int_{D(a,\frac{1}{n})} \frac{w-a}{\bar{w}-\bar{a}} \overset{\vee}{\mu}(w)\, dm(w). \qquad //.$$

Es posible dar fórmulas, que reproduzcan $\mu\{a\}$ a partir de la transformada $\overset{\vee}{\mu}$ asociada a g, del tipo anterior en el caso que g sea una función de clase C^1 que cumpla determinadas restricciones. Sin embargo no nos entretendremos en explicitarlas, y pasamos a demostrar un lema que es el recurso principal para la demostración del teorema más importante de este capítulo.

Este lema es un análogo de un resultado debido a Mergelyan [26], [25] y [36], fundamental en la demostración original de su teorema de aproximación uniforme por funciones racionales.

2.3.2. Lema. Sea D un disco de radio $r > o$, E un subconjunto de D compacto y conexo, con diámetro mayor o igual que r y tal que $\Omega = S^2 - E$ sea conexo. Para cada $u \varepsilon \mathbb{C}$ existe una función $Q(u,.) \varepsilon R_{\bar{z}}(\Omega)$ que cumple, para $z \varepsilon \Omega$ y $u \varepsilon D$:

(A) $|Q(u,z)| \leq M$

(B) $\left|Q(u,z) - \dfrac{\bar{z}-\bar{u}}{z-u}\right| \leq \dfrac{M\, r^3}{|z-u|^3}$, $z \neq u$.

Donde M designa una constante universal.

Demostración. En la demostración irán apareciendo distintas constantes universales que, sin embargo, designaremos con la misma letra "C".

Como las hipótesis y la tesis del lema son invariantes por translación podemos suponer sin pérdida de generalidad que D está centrado en cero. Sea f_1 una representación conforme de Ω en

D(o,1), dada por el teorema de Riemann, $f_1(\infty) = 0$. Como E es compacto y conexo, se tiene que $\gamma(E) \leq \delta(E) \leq 4\gamma(E)$ (0.1.16.). Por tanto, escribiendo $a = f_1'(\infty)$, obtenemos $|a| = \gamma(E) \geq \frac{\delta(E)}{4} \geq \frac{r}{4}$. La función $f = \frac{f_1}{a} : \Omega \to D(o, \frac{1}{|a|})$ es holomorfa y verifica:

$$f(\infty) = 0, \; f'(\infty) = 1 \text{ y } |f| \leq \frac{4}{r} \tag{3}$$

Sea Γ la circunferencia de centro O y de radio r (que no corta a E) y definamos:

$$b = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma zf(z)dz \qquad b' = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma z^2 f(z)dz.$$

Fijemos $u \in D$. Como f es holomorfa en el punto del infinito podemos desarrollar f, f^2, f^3 en el entorno de dicho punto formado por los $z \in \mathbb{C}$ tales que $|z-u| > 2r$:

$$f(z) = \frac{1}{z-u} + \frac{\lambda_2(u)}{(z-u)} + \frac{\lambda_3(u)}{(z-n)^3} + \dots$$

$$f^2(z) = \frac{1}{(z-u)^2} + \frac{2\lambda_2(u)}{(z-u)^3} + \dots$$

$$f^3(z) = \frac{1}{(z-u)^3} + \frac{3\lambda_2(u)}{(z-u)^4} + \dots \tag{4}$$

Los términos que han sido substituidos por puntos son de orden ≥ 4. Las funciones λ_2, λ_3 pueden ser calculadas mediante una integral curvilínea extendida a una circunferencia Γ_o centrada en cero, de radio suficientemente grande y orientada positivamente.

$$\lambda_2(u) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_o}(z-u)f(z)dz, \; \lambda_3(u) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_o}(z-u)^2 f(z)dz.$$

Recordando que $\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_o} f(z)dz = f'(\infty) = 1$, un cálculo sencillo prueba que:

$$\lambda_2(u) = b-u \qquad , \; \lambda_3(u) = b' - 2ub + u^2$$

Definamos la siguiente función, para $u \in \mathbb{C}$ y $z \in \Omega$:

$$H(u,z) = f(z) + (u-b)f^2(z) - (b'+2ub - 2b^2 - u^2)f^3(z) \qquad (5)$$

La función deseada es $Q(u,z) = (\bar{z}-\bar{u})H(u,z)$. Evidentemente $H(u,\cdot) \in H(\Omega)$ y, por tanto, $Q(u,) \in R_{\bar{z}}(\Omega)$.

Teniendo en cuenta que Γ tiene longitud $2\pi r$, se obtiene la siguiente acotación de b y b':

$$|b| \leq \frac{1}{2\pi}\int |z|\,|g(z)|\,|dz| \leq \frac{1}{2\pi}\, r.\frac{4}{r}\, 2\pi r = 4r$$

$$|b'| \leq \frac{1}{2\pi}\int |z|^2|g(z)|\,|dz| \leq \frac{1}{2\pi}\, r^2.\frac{4}{r}\, 2\pi r = 4\, r^2 \qquad (6)$$

Acotemos ahora $H(u, z)$ para $|u| < r$, utilizando (3), (5) y (6):

$$|H(u,z)| \leq \frac{4}{r} + (|u|+|b|)\frac{16}{r^2} + (|b'|+2|u|\,|b| + 2|b|^2+|u|^2|\,\frac{64}{r^3} \leq$$

$$\leq \frac{4}{r} + (r+4r)\,\frac{16}{r^2} + (4r^2 + 8r^2 + 32r^2 + r^2)\,\frac{64}{r^3} \leq$$

$$\leq \frac{C}{r}. \qquad (7)$$

Ahora podemos comprobar que Q cumple (A). Si $u \in D$ y $|\bar{z}-u| \leq 2r$ entonces $|Q(u,z)| = |H(u,z)|.|z-u| \leq C$ en virtud de (7). Fijado $u \in D$ se tiene:

$$|H(u,z)| \leq \frac{C}{|z-u|} \quad \text{para } |z-u| \leq 2r,\ z \neq u \qquad (8)$$

La función $|Q(u,z)| = |H(u,z)(z-u)|$ es subharmónica en $|z-u| > 2r$ (incluido el punto del infinito). En virtud del principio del máximo para funciones subharmónicas la desigualdad (8) vale en todo $z \in D$, de donde $|Q(u,z)| \leq C$, que es (A). Pasemos, ahora, a probar (B). Un cálculo, que omitimos, teniendo en cuenta (4) y (5), demuestra que para $z \in \Omega$ y $u \in D$ se tiene:

$$\left|H(u,z) - \frac{1}{z-u}\right| = \frac{1}{|z-u|^4}\,|h(z)|,$$

donde h es una función holomorfa en $|z-u| > 2r$ (incluido el punto del infinito). Si $z \in \Omega$ y $|z-u| \leq 2r$ se tiene, en virtud de (7).

$$|h(z)| = |z-u|^4 \left| H(u,z) - \frac{1}{z-u} \right| \leq 16\ r^4 \frac{C}{r} + 16\ r^3 \leq$$

$$\leq C\ r^3.$$

Por el principio del módulo máximo esta desigualdad vale para todo $z \in \Omega$. Por tanto para $z \in \Omega$ y $u \in D$

$$\left| H(u,z) - \frac{1}{z-u} \right| \leq \frac{C\ r^3}{|z-u|^4} \qquad z \neq u$$

y por consiguiente:

$$\left| Q(u,z) - \frac{\bar{z}-\bar{u}}{z-u} \right| = |z-u| \left| H(u,z) - \frac{1}{z-u} \right| \leq \frac{C\ r^3}{|z-u|^3}, \quad z \neq u$$

lo cual prueba (B). //.

Observemos que el lema anterior mejora las conclusiones del lema de Mergelyan a cambio de perder la holomorfia de $Q(u,.)$, y que en la demostración se introduce la novedad de tener en cuenta el tercer coeficiente del desarrollo de f en el ∞ . Necesitaremos el siguiente resultado que ha sido demostrado por Weinstock [46] y O'Farrell [28], y qué será mejorado en el capítulo 5.

<u>2.3.3. Lema</u>. Sea X un compacto de $\mathbb{C}$. Si $f \in C(X)$ y para todo $x \in X$ existe un entorno cerrado (en X) U_x de x tal que $f|_{U_x} \in R_{\bar{z}}(U_x)$ entonces $f \in R_{\bar{z}}(X)$. En particular $R_{\bar{z}}(X)$ es un $R(X)$-módulo local.

Ahora estamos en condiciones de demostrar el teorema central de este capítulo.

2.3.4. Teorema. Sea X un compacto de $\mathbb{C}$ tal que los diámetros de las componentes conexas de $\mathbb{C} - \dot{X}$ estén acotados inferiormente por un número $\delta > o$. Entonces $R_{\bar{z}}(X) = \{f \in C(X) \,|\, \bar{\partial}^2 f = o \text{ en } \overset{\circ}{X}\}$.

Demostración. Denotaremos por $A_{\bar{z}}(X)$ el conjunto $\{f \in C(X) \mid \bar{\partial}^2 f = o \text{ en } \overset{\circ}{X}\}$. En virtud de 2.1.3. se tiene $R_{\bar{z}}(X) \subset A_{\bar{z}}(X)$. Para probar el recíproco, aplicaremos el teorema 2.2.1. a las funciones regularizadas de f y pasaremos al límite teniendo en cuenta el lema 2.3.2. La demostración consta de tres partes.

a) Supongamos que $\mathbb{C}$-X tiene un número finito de componentes. Sea $f \in A_{\bar{z}}(X)$, que por el teorema de Tietze-Uryshon consideraremos extendida a todo $\mathbb{C}$. Sea $\rho \in D(\mathbb{C})$, sop $\rho \subset D(o,1)$ y $\int \rho \, dm = 1$. Si escribimos $\rho_\varepsilon(x) = \frac{1}{\varepsilon^2} \rho\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)$, entonces (ρ_ε) es una aproximación de la identidad. Veamos que se cumple lo siguiente:

$$\int \rho_\varepsilon \, dm = 1 \qquad (9)$$

$$\int \bar{\partial}^2 \rho_\varepsilon \, dm = 0 \qquad (10)$$

$$\int |\bar{\partial}^2 \rho_\varepsilon| \, dm \leq \frac{C}{\varepsilon^2} \qquad (11)$$

(9) Es una consecuencia de ser (ρ_ε) una aproximación de la identidad. Para (10) basta tener en cuenta el teorema de Stokes y que ρ_ε tiene soporte compacto. Para demostrar (11) hagamos un cálculo:

$$\int |\bar{\partial}^2 \rho_\varepsilon| \, dm = \int \frac{1}{\varepsilon^4} \left|\bar{\partial}^2 \rho\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\right| dm(x) = \int \frac{1}{\varepsilon^2} |\bar{\partial}^2 \rho(u)| \, dm(u)$$

$$= \frac{1}{\varepsilon^2} C \qquad \text{(Se ha hecho el cambio de variable } u = \tfrac{x}{\varepsilon}\text{)}.$$

Dada $\mu \in R_{\bar{z}}(X)^{\perp}$ se ha de probar que $\int f \, d\mu = 0$. Escribamos $f_\varepsilon = f * \rho_\varepsilon \in C^\infty(\mathbb{C})$.

En virtud de 1.2.3.:

$$\int f_\varepsilon \, d\mu = \frac{1}{\pi} \int \bar\partial^2 f_\varepsilon \check{\mu} dm. \tag{12}$$

Como $f_\varepsilon \overset{\varepsilon}{\to} f$ uniformemente en X, se tiene $\int f_\varepsilon \, d\mu \to \int f d\mu$. En definitiva hay que probar que $\lim\limits_{\varepsilon\to o} \frac{1}{\pi} \int \bar\partial^2 f_\varepsilon \check{\mu} = 0$. Para $x \in \dot{X}$,

$$f_\varepsilon(x) = \int f(x-t) \, \rho_\varepsilon \, (t) dm(t), \tag{13}$$

de donde si $d(x, \mathbb{C}-X) \geq \varepsilon$, por conocidas propiedades de la convolución podemos derivar en (13), resultando:

$$\bar\partial^2 f_\varepsilon \, (x) = \int \bar\partial^2 f(x-t) \, \rho_\varepsilon(t) \, dm(t) = 0,$$

pues si $d(x, \mathbb{C}-X) \geq \varepsilon$ y $|t| < \varepsilon$ se tiene que $x-t \in \overset{o}{X}$ y, por hipótesis, $\bar\partial^2 f(x-t) = 0$. De aquí que la integral del segundo miembro de (12) esté reducida a $X_\varepsilon = \{x \in x | \, d(x, \mathbb{C}-X) < \varepsilon\}$. Acotemos ahora $\bar\partial^2 f_\varepsilon$:

$$\bar\partial^2 f_\varepsilon \, (x) = \int f(x-t) \, \bar\partial^{-2} \rho_\varepsilon \, (t) dm(t) = \int (f(x-t) - f(x) \, \bar\partial^2 \rho_\varepsilon(t) dm(t),$$

en virtud de (10).

Designando por $\omega(f,\varepsilon)$ la oscilación de f, obtenemos:

$$|\bar\partial^2 f_\varepsilon \, (x)| \leq \omega \, (f,\varepsilon) \int |\bar\partial^2 \rho_\varepsilon \, (t)| dm(t) \leq C \, \frac{\omega(f,\varepsilon)}{\varepsilon^2},$$

de donde:

$$\left|\frac{1}{\pi} \int_{X_\varepsilon} \bar\partial^2 f_\varepsilon \, \check{\mu} \, dm \right| \leq C \, \frac{\omega(f,\varepsilon)}{\varepsilon^2} \int_{X_\varepsilon} |\check{\mu}| dm. \tag{14}$$

Ya que $\mathbb{C}-X$ tiene un número finito de componentes, para ε suficientemente pequeño podemos elegir un recubrimiento de X_ε por un número finito de discos de radio 2ε cuyos centros no estén en X. Sean $D_1 \ldots, D_n$, dichos discos. Eligiendo un punto fijo en cada componente de $\mathbb{C}$-X y uniendo estos puntos con los centros de D_i mediante curvas, se deduce que cada disco contiene un subconjunto compacto y conexo $E_i \subset D_i$, tal que $E_i \subset \mathbb{C}-X$ y $\delta(E_i) \geq \varepsilon$. Aplicando el lema 2.3.2. deducimos que existen funciones $Q_j(u,\cdot)$ de $R_{\bar{z}}(S^2-E_j)$ y, por tanto, en virtud de 2.2.1 de $R_{\bar{z}}(X)$, cumpliendo:

$$|Q_j(u,z)| \leq C. \tag{15}$$

$$\left|Q_j(u,z) - \frac{\bar{z}-\bar{u}}{z-u}\right| \leq \frac{C\,\varepsilon^3}{|z-u|^3} \qquad z \in S^2-E_j, u \in D_j: \tag{16}$$

Si definimos $L_1 = D_1 \cap X_\varepsilon$, y $L_j = D_j \cap X_\varepsilon - (L_1 \cup - \cup L_{j-1})$ para $1 < j \leq n$, se verifica que $X_\varepsilon = L_1 \cup \ldots \cup L_n$, siendo dicha unión disjunta. Para cada $u \in X_\varepsilon$ existe un único j tal que $u \in L_j$ y entonces:

$$\check{\mu}(u) = \int_X \left(Q_j(u,z) - \frac{\bar{z}-\bar{u}}{z-u}\right) d\mu(z), \quad |\check{\mu}(u)| \leq \int \left|Q_j(u,z) - \frac{\bar{z}-\bar{u}}{z-u}\right| d|\mu|(z).$$

La segunda integral de (14) se acota como sigue:

$$C\,\frac{\omega(f,\varepsilon)}{\varepsilon^2} \sum_j \int_{L_j} |\check{\mu}(u)|\,dm(u) \leq C\,\frac{\omega(f,\varepsilon)}{\varepsilon^2} \sum_j \int_{L_j} \int_X \left|Q_j(u,z) - \right.$$

$$\left. - \frac{\bar{z}-\bar{u}}{z-u}\right|\,d|\mu|(z)\;dm(u) \leq C\,\frac{\omega(f,\varepsilon)}{\varepsilon^2} \int_X d|\mu|(z) \sum_j \int_{L_j} \left|Q_j(u-z) - \frac{\bar{z}-\bar{u}}{z-u}\right| dm(u) \tag{17}$$

Fijado $z \in X$ se tiene:

$$\sum_j \int_{L_j} \left|Q_j(u,z) - \frac{\bar{z}-\bar{u}}{z-u}\right| dm(u) = \sum_j \int_{L_j \cap D_{2\varepsilon}(z)} \left|Q_j(u,z) - \frac{\bar{z}-\bar{u}}{z-u}\right| dm(u) +$$

$$+ \sum_j \int_{L_j \cap (\mathbb{C}-D_{2\varepsilon}(z))} \left| Q_j(u,z) - \frac{\bar z - \bar u}{z-u} \right| dm(u)$$

Acotemos la primera integral por (15) y la segunda por (16).

$$\leq \sum_j \int_{L_j \cap D_{2\varepsilon}(z)} (C+1)\, dm(u) + \sum_j \int_{L_j \cap (\mathbb{C}-D_{2\varepsilon}(z))} \frac{C\,\varepsilon^3}{|z-u|^3}\, dm(u) \leq$$

$$\leq C\,\varepsilon^2 + C \int_{2\varepsilon}^{+\infty} \int_0^{2\pi} \rho \frac{\varepsilon^3}{\rho^3}\, d\rho\, d\theta =$$

$$= C\,\varepsilon^2 + C\,\varepsilon^3 \left[-\frac{1}{\rho} \right]_{2\varepsilon}^{+\infty} = C\,\varepsilon^2 .$$

combinando (14), (17) y la acotación precedente, obtenemos:

$$\left| \frac{1}{\pi} \int \bar\partial^2 f_\varepsilon \,.\, \check\mu \, dm \right| \leq C \frac{\omega(f,\varepsilon)}{\varepsilon^2} |\mu|(X).\varepsilon^2 = O(\omega(f,\varepsilon))$$

Es decir $\lim_{\varepsilon} \frac{1}{\pi} \int \bar\partial^2 f_\varepsilon \check\mu \, dm = 0$. Por tanto $\int f \, d\mu = 0$, y así $f \in R_{\bar z}(X)$.

b) Supongamos que $\mathbb{C} - \bar{\mathring{X}}$ tenga un número finito de componentes conexas. Sea $f \in A_{\bar z}(X)$ y $\mu \in R_{\bar z}(X)^{\perp}$. Por la proposición 1.4.4. μ está concentrada en $\bar{\mathring{X}}$ y $\mu \in R_{\bar z}(\bar{\mathring{X}})^{\perp}$. Pero $f \in A_{\bar z}(\bar{\mathring{X}})$ pues $\mathring{\bar{\mathring{X}}} \subset \mathring{X}$. Para el compacto $\bar{\mathring{X}}$ es posible aplicar a); por consiguiente $f|_{\bar{\mathring{X}}} \in R_{\bar z}(\bar{\mathring{X}})$. De donde:

$$\int_X f \, d\mu = \int_{\bar{\mathring{X}}} f \, d\mu = 0$$

c) Supongamos que existe un $\delta > 0$ tal que el diámetro de las componentes de $\mathbb{C} - \bar{\mathring{X}}$ está acotado inferiormente por δ. Entonces, para cada $x \in X$ existe un entorno cerrado U_x de x (en X) tal que $\mathbb{C} - U_x$ es conexo. Por el apartado a) se tiene $R_{\bar z}(U_x) = A_{\bar z}(U_x)$. Si $f \in A_{\bar z}(X)$ entondes $f|_{U_x} \in A_{\bar z}(U_x) = R_{\bar z}(U_x)$. Por tanto, aplicando el lema 2.3.3. se deduce que $f \in A_{\bar z}(X)$. Hacemos notar que este tipo de razonamiento es usual en la teoría de aproximación racional.

2.4. APROXIMACION UNIFORME POR FUNCIONES DEL $R_o(X)$-MODULO $R_o(X) + R_o(X)\bar{z} + \ldots + R_o(X)\bar{z}^n$ $(n>1)$.

2.4.1. Proposición. Sea $f \in D(\mathbb{C})$ y $n \geq 1$. Se verifica para cada $w \in \mathbb{C}$:

$$f(w) = \frac{(-1)^{n+1}}{n!\ \pi} \int \bar{\partial}^{n+1} f(z) \frac{(\bar{z}-\bar{w})^n}{z-w} dm(z).$$

Demostración. Observemos que la fórmula anterior significa, en el lenguaje de distribuciones, que la función $\frac{1}{n!\pi}\cdot\frac{\bar{z}^n}{z}$ es una solución fundamental para el operador $\bar{\partial}^{n+1}$. Para demostrar esta última afirmación se procederá por inducción sobre n. Para n=1 hay que demostrar que $\bar{\partial}^2(\frac{\bar{z}}{z}) = \pi\delta_o$, lo cual es exactamente 1.2.2. para $g(z) = \bar{z}$.

Como que:

$$\bar{\partial}^{n+1}(\frac{\bar{z}^n}{z}) = \bar{\partial}^n(n\ \frac{\bar{z}^{n-1}}{z} + \bar{z}^n.\delta_0) = n\ \bar{\partial}^n\ (\frac{\bar{z}^{n-1}}{z})$$

la hipótesis de inducción concluye la demostración. //.

Observemos que, siendo el operador $\bar{\partial}^{n+1}$ de orden n+1, la fórmula anterior continua siendo válida para $f \in D^{n+1}(\mathbb{C})$. Notemos que podría ser demostrada una fórmula del tipo 1.2.1., que no incluimos pues no será necesaria.

Definamos la siguiente función de Borel:

si $z \neq w$ entonces $K_n(z,w) = \frac{(\bar{z}-\bar{w})^n}{z-w}$

si $z = w$ entonces $K_n(z,w) = 0$

Si μ es una medida de Borel regular y con soporte compacto, escribamos:

$$\check{\mu}_n(w) = K_n(z,w)\ d\mu(z).$$

<u>2.4.2. Lema</u>. Para todo $w \in \mathbb{C}$ la función $K_n(\cdot,w)$ es acotada sobre compactos (lo que justifica la definición de $\check{\mu}_n$). Si $n > 2$ la función $\check{\mu}_n$ es continua en $\mathbb{C}$.

Demostración. Es evidente que vale la desigualdad.

$$|K_n(z,w)| \leq |z-w|^{n-1} \qquad (1)$$

Por tanto, fijado $w \in \mathbb{C}$, $K_n(,w)$ es acotada sobre compactos. Veamos que $\check{\mu}$ (omitiremos el subíndice) es continua en todo $\mathbb{C}$ si $n \geq 2$. Sea $w_o \in \mathbb{C}$ y (w_n) una sucesión convergente hacia w_o. Si $z \neq w_o$, para p suficientemente grande se cumple $z \neq w_p$ y por tanto:

$$\frac{(\bar{z}-\bar{w}_p)^n}{z - w_p} \to \frac{(\bar{z}-\bar{w}_o)^n}{z-w_o} \quad \text{cuando } p \to \infty .$$

Si $z = w_o$ se tiene $|K_n(w_o,w_p)| \leq |w_o-w_p|^{n-1}$, de donde, si $n \geq 2$ $\lim_p K_n(w_o,w_p) = 0 = K_n(w_o,w_o)$. Hemos demostrado que $K_n(z,w_p) \xrightarrow{p} K_n(z,w_o)$, $z \in \mathbb{C}$. Esta convergencia es dominada en sop μ, pues (1) demuestra que, para $p \in N$, $z \in$ sop μ

$$|K_n(z,w_p)| \leq c,$$

donde c es una constante independiente de z y de p. Aplicando el teorema de la convergencia dominada se deduce la continuidad. //.

<u>2.4.3. Proposición</u>. Sea $f \in D^{n+1}(\mathbb{C})$ y μ una medida a soporte compacto en $\mathbb{C}$. Se verifica:

$$\int f\, d\mu = \frac{(-1)^{n+1}}{n!\ \pi} \int \bar{\partial}^{n+1} f(z)\ \check{\mu}(z)\ dm(z).$$

Demostración. Hay que aplicar la proposición 2.4.1. y el teorema de Fubini. La demostración es análoga a 1.2.3. y omitimos los detalles. //.

Escribiremos $R(X)\bar{P}_n$ para denotar la adherencia uniforme del $R_o(X)$-módulo $R_o(X)\bar{P}_n = R_o(X) + R_o(X)\bar{z} + \ldots + R_o(X)\bar{z}^n$. La importancia de la transformada introducida en 2.4.2. para el estudio de $R(X)\bar{P}_n$ es debida al siguiente hecho:

2.4.4. Lema. Sea X un compacto y μ una medida sobre X. Se verifica que μ es ortogonal a $R(X)\ \bar{P}_n$ sí y sólo sí para todo $w \notin X$ se tiene $\check{\mu}\ (w) = 0$.

Demostración. Si $w \notin X$ entonces $K_n(\cdot, w) \in R_o(X)\bar{P}_n$; por tanto si $\mu \in R(X)\bar{P}_n^{\perp}$ se tiene $\check{\mu}(w) = 0$. Supongamos que pasa todo $w \notin X$ se tenga $\check{\mu}(w) = 0$. Sea $f \in R_o(X)\ \bar{P}_n$ y Ψ una función de clase C^{∞}, con soporte incluido en el abierto en el cual f es C^{∞} y que valga 1 en un entorno de X. En virtud de 2.4.3. se tiene:

$$\int f d\mu = \int_{\mathbb{C}} \Psi f d\mu = \frac{(-1)^{n+1}}{n!\ \ \pi} \int \bar{\partial}^{n+1}(\Psi f)\ \check{\mu} dm =$$

$$= \frac{(-1)^{n+1}}{n!\ \ \pi} \int_X \bar{\partial}^{n+1} f\ \check{\mu} dm = 0.$$

La última igualdad es consecuencia de que si $f \in R_o(X)\bar{P}_n$ entonces $\bar{\partial}^{n+1} f = 0$ en un entorno de X. //.

2.4.5. Lema. Sea X un compacto y μ una medida sobre X. Se verifica que μ es ortogonal a $R(X)\bar{P}_n$ sí y sólo sí μ está concentrada en $\overset{\circ}{X}$ y μ es ortogonal a $R(\overset{\circ}{X})\bar{P}_n$.

Demostración. Si μ es ortogonal a $R(X)\bar{P}_n$ entonces μ es ortogonal a $R_{\bar{z}}(X)$ y, por tanto, está concentrada en $\mathring{X}$ por 1.4.4. Si $f \in R_o(\mathring{X})\bar{P}_n$ un razonamiento análogo al de la proposición 1.4.4. aplicado a cada componente racional de f, prueba que $\int f\, d\mu = 0$. El recíproco es inmediato. //.

2.4.6. Lema. Si X es un compacto de $\mathbb{C}$ y $f \in R(X)\bar{P}_n$ entonces $\bar{\partial}^{n+1} f = 0$ en $\mathring{X}$ y, por tanto, existen funciones $h_o, h_1, \ldots, h_n$ holomorfas en $\mathring{X}$ tales que $f = h_o + h_1\bar{z} + \ldots + h_n\bar{z}^n$ en $\mathring{X}$.

Demostración. Si $f \in R_o(X)\bar{P}_n$ se tiene $\bar{\partial}^{n+1} f = 0$. Si $f_m \to f$ uniformemente en X, entonces $\bar{\partial}^{n+1} f_m \underset{m}{\to} \bar{\partial}^{n+1} f$ débilmente en $\mathring{X}$ (como distribuciones), de donde $\bar{\partial}^{n+1} f = o$ si $f \in R(X)\bar{P}n$. Probemos por inducción sobre n, que si $\bar{\partial}^{n+1} f = 0$ en $\mathring{X}$, existen funciones holomorfas en $\mathring{X}$ $h_o, h_1, \ldots, h_n$ tales que $f = h_o + h_1\bar{z} + \ldots + h_n\bar{z}^n$. El caso n = 1 es el apartado a) de la proposición 2.1.5. Supongamos que vale el resultado para n = k, y veámoslo para n = k+1:

$$0 = \bar{\partial}^{k+2} f = \bar{\partial}^{k+1} (\bar{\partial} f)$$

Por hipótesis de inducción, existen $h_1, \ldots, h_{k+1}$ holomorfas en X tales que $\bar{\partial} f = h_1 + h_2\bar{z} + \ldots + h_{k+1}\bar{z}^k$, es decir:

$\bar{\partial}(f - h_1\bar{z} - h_2 \cdot \frac{\bar{z}^2}{2} - \ldots - \frac{h_{k+1}}{k} \cdot \bar{z}^{k+1}) = 0$. En virtud del lema de Weil, deducimos que $f - h_1\bar{z} - h_2 \cdot \frac{\bar{z}^2}{2} - \ldots - \frac{h_{k+1}}{k} \cdot \bar{z}^{k+1}$ es una función holomorfa en $\mathring{X}$.

2.4.7. Proposición. Sea X un compacto de $\mathbb{C}$ y f una función de clase C^{n+1} en un entorno de X, $n \geq 1$. Se verifica: $f \in R(X)\bar{P}n$ sí y sólo sí $\bar{\partial}^{n+1} f = 0$ en $\mathring{X}$.

Demostración. $\Rightarrow$) ya se ha visto en el lema 2.4.6.

$\Leftarrow$) Sea $f \in C^{n+1}$ en un entorno de X y supongamos que $\bar{\partial}^{n+1} f = 0$ en $\mathring{X}$. Sea μ una medida ortogonal a $R(X)\bar{P}n$. Elijamos una función Ψ de clase C^∞, con sop incluido en el abierto en el cual f es

C^{n+1} y que valga 1 en un entorno de X. Se tiene, por 2.4.3. y 2.4.4.

$$\int f d\mu = \int f \Psi \, d\mu = \frac{(-1)^{n+1}}{n! \quad \pi} \int \bar{\partial}^{n+1}(f\Psi) \, \check{\mu} dm =$$

$$= \frac{(-1)^{n+1}}{n! \quad \pi} \int_{\overset{\circ}{X}} \bar{\partial}^{n+1} f \, \check{\mu} dm = 0$$

La integración se ha podido reducir a $\overset{\circ}{X}$ pues $\check{\mu}$ es continua en todo punto de $\mathbb{C}$ (si $n \geq 2$). Por tanto $f \in R(X)\bar{P}_n$. //.

Observemos que aquí, contrariamente a lo que sucedía a 2.2.1, no ha sido necesaria una fórmula del tipo 1.2. puesto que no se presentan las dificultades originadas por la consideración del conjunto Z.

Los resultados que siguen representan una versión del teorema de Mergelyan para los operadores $\bar{\partial}^{n+1}$. Omitiremos algunos detalles en las demostraciones porque son análogas a 2.3.2. y 2.3.3. Es interesante notar la dependencia en n de las desigualdades más notables (A) y (B) de 2.4.8.

2.4.8. Lema. Sea D un disco de radio $r > o$, E un sub-conjunto de D, compacto, conexo y con diámetro mayor o igual que r, tal que $\Omega = S^2 - E$ sea conexo. Para cada $u \in \mathbb{C}$ existe una función $T(u,\cdot) \in H(\Omega)\bar{P}n$, y existe una constante M (que depende de n) tal que para $u \in D$ y $z \in \Omega$:

(A) $|T(u,z)| \leq M \, |z-u|^{n-1}$

(B) $\left|T(u,z) - \dfrac{(\bar{z}-\bar{u})^n}{z-u}\right| \leq M \dfrac{r^{n+2}}{|z-u|^3}$, $z \neq u$

Demostración. Sea f la función holomorfa del lema 2.3.2. Se definen:

$$b_j = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma} z^j\, f(z)\, d\, z \qquad 1 \leq j \leq n+1$$

donde Γ es la circunferencia, orientada positivamente, de centro O y de radio r. Sea $u \in D$. Escribamos el desarrollo de f en el entorno del infinito formado por los $z \in \mathbb{C}$ tales que $|z-u| > 2r$:

$$f(z) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\lambda_j(u)}{(z-u)^j}$$

Para cada j se obtiene que:

$$\lambda_j(u) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_o} (z-u)^{j-1}\, f(z)\, dz, \qquad (2)$$

siendo Γ_o una circunferencia centrado en cero, de radio suficientemente grande y orientada positivamente. De la definición de b_j y de (3) de 2.3.2. deducimos:

$$|b_j| \leq \frac{1}{2\pi}\, |z|^j\, \frac{4}{r}\, 2\pi r = 4r^j \qquad 1 \leq j \leq n+1$$

Desarrollando en (2) por la fórmula del binomio obtenemos la siguiente expresión para λ_j

$$\lambda_j(u) = \sum_{k=o}^{j-1} (-1)^{j-1-k} \binom{j-1}{k} b_k u^{j-1-k}$$

Pueden encontrarse polinomios $P_j(u,b_1,\ldots b_j)$ tales que:

a) Si $H(u,z) = f(z) + \sum_{j=1}^{n+1} P_j(u,b_1,..,b_j) f^{j+1}(z)$

entonces se cumple:

$$\left|H(u,z) - \frac{1}{z-u}\right| = \frac{1}{|z-u|^{n+3}}|h(z)|, \qquad z \neq u$$

con h holomorfa en el ∞.

b) P_j es de grado j en la variable u.

c) Los P_j cumplen la siguiente condición de homogeneidad:

si $P_j = \sum C_\alpha\, b_1^{\alpha_1} \cdot b_2^{\alpha_2} \cdot \ldots \cdot b_j^{\alpha_j} \cdot u^{\alpha_{j+1}}$

entonces: $\alpha_1 + 2\alpha_2 + \ldots + j\,\alpha_j + \alpha_{j+1} = j$

Teniendo en cuenta la condición c), las acotaciones de los b^j y mayorando de forma análoga a (7) de 2.3.2. se obtiene:

$$|H(u,z)| \leq \frac{C}{r}, \quad \text{para } |u| < r \quad y \quad z \in \Omega$$

Definiendo $T(u,z) = (\bar{z}-\bar{u})^n H(u,z)$ puede comprobarse que valen A) y B).

2.4.9. Lema. Si X es un compacto de $\mathbb{C}$, entonces el módulo $R(X)\bar{P}_n$ es local.

Demostración. La demostración es la misma que la de 2.3.3. y figura en los artículos allí citados.

2.4.10. Teorema. Sea X un compacto de $\mathbb{C}$ tal que los diámetros de las componentes conexas de $\mathbb{C}-\overline{\overset{\circ}{X}}$ estén acotados inferiormente por un número $\delta > 0$. Entonces se verifica $R(X)\bar{P}_n = \{ f \in C(X) \mid \bar{\partial}^{n+1} f = 0\}$ en $\overset{\circ}{X}$.

Demostración. Procederemos, como en la demostración de 2.3.4, distinguiendo tres casos. Sin embargo, sólo presentamos los detalles del primero, es decir, del caso en que $\mathbb{C} - X$ tiene un número finito de componentes. Los otros dos casos son análogos a los correspondientes de 2.3.4.

Sea (ρ_ε) una aproximación de la identidad como en la demostración de 2.3.4. Se cumple:

$$\int \rho_\varepsilon \; dm = 1$$

$$\int \bar{\partial}^{n+1} \rho_\varepsilon \; dm = 0$$

$$\int |\bar{\partial}^{n+1}\rho_\varepsilon| \, dm \leq \frac{C}{\varepsilon^{n+1}}$$

Sea $f \in C(X)$ tal que $\bar{\partial}^{n+1} f = 0$ en $\overset{o}{X}$ y sea $\mu \in R(X)\bar{P}_n^{\perp}$. Escribamos $f_\varepsilon = f * \rho_\varepsilon$. En virtud de 2.4.3. se tiene:

$$\int f_\varepsilon \, d\mu = \frac{(-1)^{n+1}}{n! \quad \pi} \int \bar{\partial}^{n+1} f_\varepsilon . \check{\mu} \, dm = \frac{(-1)^{n+1}}{n! \quad \pi} \int_{X_\varepsilon} \bar{\partial}^{n+1} f_\varepsilon . \check{\mu} \, dm.$$

donde $X_\varepsilon = \{x \in X / \ d(x, \mathbb{C}-X) < \varepsilon\}$.

Como en 2.3.4. obtenemos:

$$\left| \frac{(-1)^{n+1}}{n! \quad \pi} \int_{X_\varepsilon} \bar{\partial}^{n+1} f_\varepsilon . \check{\mu} \, dm \right| \leq C \, \frac{\omega(f,\varepsilon)}{\varepsilon^{n+1}} \int_{X_\varepsilon} |\check{\mu}| dm.$$

Utilizando el lema 2.4.8 del mismo modo que en 2.3.4. se obtiene:

$$\int_{X_\varepsilon} |\check{\mu}| \, dm = \int_{X_\varepsilon} |\check{\mu}(u)| dm(u) \leq \sum_j \int_{L_j} \int_X \left| Q_j(u,z) - \frac{(\bar{z}-\bar{u})^n}{z-u} \right| d|\mu|(z) dm(u) \leq$$

$$\leq \int_X d|\mu|(z) \sum_j \int_{L_j \cap D_{2\varepsilon}(z)} \left| Q_j(u,z) - \frac{(\bar{z}-\bar{u})^n}{z-u} \right| dm(u) +$$

$$\int_X d|\mu|(z) \sum_j \int_{L_j \cap (\mathbb{C} - D_{2\varepsilon}(z))} \left| Q_j(u,z) - \frac{(\bar{z}-\bar{u})^n}{z-u} \right| dm(u)$$

$$\sum_j \int_X d|\mu|(z) \int_{L_j \cap D_{2\varepsilon}(z)} (M+1) |z-u|^{n-1} \, dm(u) +$$

$$\sum_j \int_X d|\mu|(z) \int_{L_j \cap (\mathbb{C} - D_{2\varepsilon}(z))} C \frac{\varepsilon^{n+2}}{|z-u|^3} \, dm(u) \leq$$

$$C\, \varepsilon^{n+1} .$$

De donde se deduce:

$$\left| \frac{(-1)^{n+1}}{n! \quad \pi} \int \bar{\partial}^{n+1} f_\varepsilon \, \check{\mu} \, dm \right| \leq \frac{C}{\varepsilon^{n+1}} \, \omega \, (f,\varepsilon)\varepsilon^{n+1} = 0(\omega(f,\varepsilon)). \; //.$$

Observemos que 2.4.10 proporciona una mejor caracterización de $R(X)\bar{P}_n$ que la dada por Wang en [45] que afirma:

$R_o(X)\bar{P}_n$ tiene la misma adherencia uniforme que $R(X)\hat{} + L_a^P(X)\hat{}_2 + \ldots + L_a^P(X)\hat{}_m$.

Para el significado de esta última expresión, y para la demostración de este hecho, véase [45].

CAPITULO 3

APROXIMACION EN MEDIA DE ORDEN P

En este capítulo se estudia la aproximación en norma p , $1 \leq p < \infty$ por funciones de $R_o(X) + R_o(X)g$. Utilizando técnicas de integrales singulares se establecen las proposiciones 3.1.1. y 3.1.2.; ésta última mejora los resultados 1.3.3. El teorema 3.1.6. caracteriza campletamente la adherencia en $L^p(\partial X)$ de la restricción a ∂X de $R_o(X) + R_o(X)g$, y en particular, resuelve satisfactoriamente el caso $\overset{\circ}{X} = \emptyset$. En el caso $Z = \{x \in X | \bar{\partial} g(x) = 0\} = \emptyset$ el problema de aproximación que tratamos puede ser englobado en la teoría de aproximación en L^p por soluciones de operadores elípticos, tema que ha sido estudiado por varios autores [22], [23], [32], alguno de cuyos resultados aplicaremos a nuestro caso particular. Los teoremas 3.2.4 y 3.2.5. proporcionan condiciones para la validez de la aproximación en norma p.

3.1. APROXIMACION EN MEDIA DE ORDEN P EN LA FRONTERA.

La primera parte del apartado c) de la proposición 3.1.1. fue establecida por Brennan [4] utilizando que $\bar{\partial}\hat{f} = -\pi f$ en el sentido de las distribuciones y aplicando el teorema de Schwartz. Aquí se presenta una demostración directa, que involucra el cálculo de todas las derivadas. Recordemos que $\hat{f}$ designa la transformada de Cauchy de f, W_m^p los espacios de Sobolev y $\check{f}$ la transformada introducida en 1.1.

3.1.1. Proposición. Supongamos que $f \in L \log^+ L$ (en particular si $f \in L^p(\mathbb{C})$, $p > 1$) y que su soporte es compacto. Entonces casi por todo $x \in R$, y casi por todo $y \in R$ las funciones $\hat{f}(x,.)$ y $\hat{f}(.,y)$ son absolutamente continuas. En particular estas funciones son diferenciables c.p.t. en R y, a demás, cumplen:

a) $\dfrac{\partial \hat{f}}{\partial x}(w) = -\pi f(w) + \displaystyle\int f(z)\frac{1}{(z-w)^2}\, dm(z)$ c.p.t. $w \in \mathbb{C}$

b) $\dfrac{\partial \hat{f}}{\partial g}(w) = i\pi f(w) + i \displaystyle\int f(z)\frac{1}{(z-w)^2}\, dm(z)$ c.p.t. $w \in \mathbb{C}$

c) $\bar{\partial}\hat{f} = -\pi f$, $\partial\hat{f}(w) = \displaystyle\int f(z)\frac{1}{(z-w)^2}\, dm(z)$ c.p.t. $w \in \mathbb{C}$

d) Si $f \in L^p_{loc}(\mathbb{C})$ $(p > 1)$ entonces $\hat{f} \in W_1{}^p$.

Demostración. Observemos que las integrales de los miembros de la derecha son integrales singulares pues $\frac{1}{z^2}$ no es localmente integrable, pero $k(z) = \frac{1}{z^2} = \frac{\bar{z}^2}{|z|^4} = \frac{e^{-2i\tau}}{|z|^2}$, por tanto $k(z)$ es un núcleo de Calderon-Zygmund (0.2.6). Definamos:

$$u(x,y) = -\int f(x-s,y-t)\frac{s}{s^2+t^2}\, dm(s,t)$$

$$v(x,y) = -\int f(x-s,y-t)\frac{t}{s^2+t^2}\, dm(s,t)$$

Calculemos, en función de u y v, $\hat{f}(w)$, $w = x+iy$:

$$\hat{f}(w) = \int f(z)\frac{1}{z-w}\, dm(z) = \int f(z)\frac{\operatorname{Re} z - x}{|z-w|^2}\, dm(z) +$$

$$+ i\int f(z)\frac{y-\operatorname{Im} z}{|z-w|^2}\, dm(z) = \int f(s,t)\frac{s-x}{(x-s)^2+(y-t)^2}\, dsdt +$$

$$+ \int f(s,t) \frac{y-t}{(x-s)^2+(y-t)^2} ds\, dt = u(w) - iv(w)$$

En virtud de un teorema de Calderon-Zygmund (0.2.10) resulta que $u(x,\cdot)$ y $v(x,\cdot)$ son absolutamente continuas, por tanto también lo es $\hat{f}(x,\cdot)$. De donde deducimos que $\hat{f}(x,\cdot)$ es diferenciable casi por todo en R. Un argumento análogo se aplica a $\hat{f}(\cdot,y)$. Pasemos a la demostración de a). Sea $x \in R$ tal que $\hat{f}(x,\cdot)$ sea absolutamente continua. Para casi todo $y \in R (w = x+iy)$ se tiene:

$$\frac{\partial \hat{f}}{\partial x}(w) = \frac{\partial}{\partial x} u(w) - i \frac{\partial}{\partial x} v(w) = -\pi f(w) + \int f(x-s,y-t) \frac{s^2-t^2}{(s^2+t^2)^2} dsdt$$

$$- i \int f(x-s,y-t) \frac{2st}{(s^2+t^2)^2} dsdt = -\pi f(w) + \int f(z) \frac{Re((\bar{z}-\bar{w})^2)}{|z-w|^4} dm(z)$$

$$+ i \int f(z) \frac{Im((\bar{z}-\bar{w})^2)}{|z-w|^4} dm(z) = -\pi f(w) + \int f(z) \frac{1}{(z-w)^2} dm(z)$$

Ahora teniendo en cuenta el teorema de Fubini deducimos que existe un conjunto de medida nula en $\mathbb{C}$ en el complementario del cual vale la fórmula a). La demostración de b) es idéntica. c) es consecuencia de a) y b). Demostremos d). Si $f \in L^p$ la integral singular $\int f(z) \frac{1}{(z-w)^2} dm(z)$ pertenece a L^p en virtud de 0.2.7. Por a) y b) se deduce que $\frac{\partial \hat{f}}{\partial x}$ existe c.p.t. en $\mathbb{C}$ y $\frac{\partial \hat{f}}{\partial s} \in L^p$, (lo mismo con $\frac{\partial \hat{f}}{\partial y}$), de donde $f \in W_1^p$ //.

<u>3.1.2. Proposición</u>. Supongamos que $f \in L \log^+ L$ (en particular si $f \in L^p$ con $p > 1$), que su soporte es compacto y que $g \in D^2(\mathbb{C})$. Se verifica que casi por todo $x \in R$ y casi por todo $y \in R$ las funciones $f(x,\cdot)$ y $f(\cdot,y)$ son absolutamente continuas. En particular son funciones diferenciables c.p.t. en R que cumplen:

a) $\dfrac{\partial \check{f}}{\partial x}(w) = -\dfrac{\partial g}{\partial x}(w).\hat{f}(w) + \displaystyle\int \frac{g(z)-g(w)}{(z-w)^2} f(z)dm(z)$, c.p.t. $w \in \mathbb{C}$

b) $\dfrac{\partial \check{f}}{\partial y}(w) = -\dfrac{\partial g}{\partial y}(w).\hat{f}(w) + i\displaystyle\int \frac{g(z)-g(w)}{(z-w)^2} f(z)dm(z)$, c.p.t. $w \in \mathbb{C}$

c) $\bar{\partial}\check{f} = -\bar{\partial}g.\hat{f}$ $\quad, \partial\check{f} = -\partial g.\hat{f} + \displaystyle\int \frac{g(z)-g(w)}{(z-w)^2} f(z)dm(z)$, c.p.t. $w \in \mathbb{C}$

d) Si $g \in D$ y $U = \{z \in \mathbb{C} | \bar{\partial}g(z) \neq o\}$ entonces $\check{f} \in W_2^p(U)$, si $f \in L^p(\mathbb{C})$ y $p > 1$.

Demostración. De la igualdad $\check{f} = \widehat{gf} - g\hat{f}$ c.p.t. en $\mathbb{C}$, teniendo en cuenta 3.1.1., se deduce lo referente a la continuidad absoluta. Derivando la expresión anterior para $\check{f}$.

$$\frac{\partial \check{f}}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \widehat{g.f} - \frac{\partial g}{\partial x} . \hat{f} - g.\frac{\partial \hat{f}}{\partial x} \qquad \text{c.p.t.} \quad w \in \mathbb{C}$$

Teniendo en cuenta a) de 3.1.1. obtenemos:

$$\frac{\partial \check{f}}{\partial x}(w) = -\pi g f(w) + \int (gf)(z)\frac{1}{(z-w)^2} dm(z) - \frac{\partial g}{\partial x}\hat{f}(w) + \pi g f(w)$$

$$- g(w)\int f(z) \frac{1}{(z-w)^2} dm(z) = -\frac{\partial g}{\partial x}(w)\ \hat{f}(w) + \int \frac{g(z)-g(w)}{(z-w)^2} f(z)dm(z)$$

Observemos que la integral que aparece en a) es una integral de Lebesgue, ya que:

$$\left|\frac{g(z)-g(w)}{(z-w)^2} f(z)\right| \leq \frac{1}{|z-w|} \|Dg\|_{\mathbb{C}} |f(z)|$$

y c.p.t. $w \in \mathbb{C}$ $\dfrac{f(z)}{z-w}$ es integrable sobre compactos (0.1.1.). La demostración de b) es idéntica a la expuesta y c) se deduce de a) y b). Para demostrar d) hay que tener en cuenta que $\bar{\partial}\cdot(\frac{\bar{\partial}}{\bar{\partial}g})$ es un operador elíptico por 1.3.2. y aplicar los teoremas de regularidad para los operadores elípticos [15], [32]. //.

3.1.3. Observación. La condición de no anulación de $\bar{\partial}g$, y el suponer $g \in D$ parecen ser superfluos en d). Debe poder demostrarse que valen las siguientes igualdades:

$$\text{a)}\quad \frac{\partial}{\partial x}\left(\int \frac{g(z)-g(w)}{(z-w)^2}\, f(z)\, dm(z)\right) = -\partial g\pi f - \frac{\partial g}{\partial x}\cdot\int \frac{f(z)}{(z-w)^2}\, dm(z)$$

$$+\ 2\int \frac{g(z)-g(w)}{(z-w)^3}\, f(z)\, dm\ (z).$$

$$\text{b)}\quad \frac{\partial}{\partial y}\left(\int \frac{g(z)-g(w)}{(z-w)^2}\, f(z)\, dm(z)\right) = \partial g.\pi i\ f - \frac{\partial g}{\partial y}\int \frac{f(z)}{(z-w)^2}\, dm(z)$$

$$+\ 2i\int \frac{g(z)-g(w)}{(z-w)^3}\, f(z)\, dm(z).$$

La integral $\int \frac{g(z)-g(w)}{(z-w)^3}\, f(z)\, dm(z)$ es una integral singular, cuyas propiedades esenciales fueron enunciadas por A.P. Calderon [10] y demostradas por C. Calderón [11]. La demostración de a) y b) podría basarse en un método análogo al del teorema 3 de [9].

Un caso particular del siguiente resultado fue establecido por Hedberg en [20]. Es una generalización de un hecho bien conocido (0.1.7.).

3.1.4. Corolario. Sea E un subconjunto medible de $\mathbb{C}$, sea $h \in L^p(E)$ con $p > 1$ y supongamos que $\hat{h} = o$ c.p.t. en E. Entonces $h = o$ c.p.t. en E.

Demostración. Escribiendo E como reunión disjunta y numerable de conjuntos medibles y acotados, podemos suponer que E es acotado y de medida finita y positiva. Recordemos que para cualquier conjunto medible casi todos sus puntos son de densidad lineal (0.2.12) respecto a los ejes coordenados. Sea $F = \{ z \varepsilon E / \hat{h}(z)=0\}$ y $(x_o,y_o) \varepsilon F$ en el cual $\hat{h}$ sea derivable parcialmente (en el sentido usual), y tal que (x_o,y_o) sea un punto de densidad lineal de F respecto a los ejes coordenados. Como

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{m_1 (F \cap]x_o-\varepsilon, x_o + \varepsilon[\times \{ y_o\})}{2\varepsilon} = 1,$$

existe una sucesión (x_n) de términos distintos de x_o, tal que para todo $n \varepsilon N$ $(x_n, y_o) \varepsilon F$. Entonces

$$\frac{\partial \hat{h}}{\partial x}(x_o,y_o) = \lim_n \frac{\hat{h}(x_n,y_o) - \hat{h}(x_o,y_o)}{x_n-x_o} = 0$$

Análogamente se razonaría para $\frac{\partial \hat{h}}{\partial y}(x_o,y_o)$. Como $-\pi h \doteq \bar{\partial}\hat{h}$, se tiene $h(x_o,y_o) = 0$. Es decir $h = 0$ c.p.t. en F y, por tanto $h = 0$ c.p.t. en E. //.

Apliquemos este resultado para obtener una mejora parcial de 1.2.5.

<u>3.1.5. Corolario</u>. Sea E un conjunto cerrado de $\mathbb{C}$, U un entorno abierto de E, $g \varepsilon C^2(U)$ y $h \varepsilon L^p(E)$ con $p > 1$. Escribamos $S = \{z \varepsilon U/\bar{\partial}g(z) = 0\}$. Supongamos que $\check{h} = 0$ c.p.t. en E-S, entonces $h = 0$ c.p.t. en E-S.

Demostración. Escribiendo E como reunión numerable de compactos, podemos suponer que E es compacto. En virtud de 3.1.2. se tiene $\bar{\partial}\check{h} = -\bar{\partial}g\ \hat{h}$ c.p.t. en E. Por tanto $\hat{h}= 0$ c.p.t. en E-S. Aplicando el corolario 3.1.4. deducimos h=0 c.p.t. en E-S //.

Sea X un compacto de $\mathbb{C}$, $g \in C^2(U)$ donde U es un entorno abierto de X y denotemos por $R_g{}^p(X)$ la adherencia en norma p ($1 \leq p<\infty$) de las funciones $R_o(X) + R_o(X)g$. La adherencia en norma p de $R_o(X) + R_o(X)g|_{\partial X}$ será denotada $(R_g(X)|_{\partial X})^p$.

<u>3.1.6. Teorema</u>. Sean X y g en las condiciones usuales y escribamos $Z = \{x \in X|\bar{\partial}g(x) = 0\}$. Se verifica, para $1 \leq p < \infty$, que:

$$(R_g(X)|_{\partial X})^p=\{f\in L^p(\partial X)\,|\,f|_{\partial X\cap Z}\in (R_g(X)|_{\partial X\cap Z})^p\}.$$

Demostración. Sea $f \in (R_g(X)|_{\partial X})^p$, entonces existen h_n, $k_n \in R_o(X)$ tales que $f = \lim_n h_n + g\ k_n$ en $L^p(\partial X)$; por tanto $f \in L^p(\partial X)$ y $f|_{\partial X\cap Z}\in(R_g(X)|_{\partial X\cap Z})^p$ Sea $h \in L^q(\partial X)$, con $1< q \leq \infty$ el exponente conjugado de p, ortogonal a $R_g(X)|_{\partial X}$, es decir, para $f \in R_o(X) + R_o(X)g$ se tiene

$$\int_X f\ h\ d\ m = 0$$

En virtud de 1.1.2. la función $\check{h}$ es continua en $\mathbb{C}$, y por 1.4.1. nula en $\mathbb{C}$-X, por tanto es nula en $\mathbb{C}-\mathring{X}$. Se ha de probar que h es ortogonal a $\{f\in L^p(\partial X)\ |\ f|_{\partial X\cap Z}\in(R_g(X)|_{\partial X\cap Z})^p\}$. Teniendo en cuenta 3.1.5. con $E = \partial X$, deducimos que $h = 0$ c.p.t. en $\partial X-Z$, por tanto h está concentrada en $\partial X\cap Z$. Si $\partial X\cap Z = \emptyset$ la conclusión es obvia. Supongamos que $\partial X\cap Z \neq \emptyset$ y sea $f \in L^p(\partial X)$, $f = \lim_n (h_n+gk_n)$ en $L^p(\partial X\cap Z)$ con $h_n,k_n \in R_o(X)$. Entonces obtenemos:

$$\int_{\partial X} f.hdm = \int_{\partial X\cap Z} f.hdm = \lim_n \int_{\partial X\cap Z} (h_n+g\ k_n)\ hdm =$$

$$= \lim_n \int_X (h_n + g\, k_n)\, h dm = 0. \qquad //.$$

Evidentemente este teorema sólo tiene interés si $m(\partial X) > 0$. Un teorema de Hedberg [20] afirma que las funciones racionales con polos fuera de E son densas en $L^p(\partial E)$ si $1 \leq p < 2$. Así que el resultado precedente aporta nueva información sólo cuando $2 \leq p < \infty$. Además, señalemos que Wang había demostrado la densidad de $R_{\bar z}(X)|_{\partial X}$ en $L^p(\partial X)$ en [43]. Sin embargo dicho autor utiliza la transformada de Cauchy iterada, y no la transformada de h relativa a g.

<u>3.1.7. Corolario</u>. Sean X, g y Z como en el teorema anterior. Entonces, para $1 \leq p < \infty$

$$(R_g(X)|_{\partial X})^p = L^p(\partial X) \text{ sí y sólo sí } (R_g(X)|_{\partial X \cap Z})^p = L^p(\partial X \cap Z)$$

Demostración. Es inmediata a partir de 3.1.6. //.

<u>3.1.8. Corolario.</u> Sean X, g y Z como en 3.1.6. Supongamos que además $\overset{\circ}{X} = \emptyset$. Entonces, para $1 \leq p < \infty$

$$R_g^p(X) = L^p(X) \text{ sí y sólo sí } R^p(Z) = L^p(Z).$$

Demostración. Ya que, ahora $X = \partial X$, aplicando 3.1.7 se tiene $R_g^p(X) = L^p(\partial X)$ sí y sólo si $(R_g(X)|_Z)^p = L^p(Z)$. Hemos de probar que $(R_g(X)|_Z)^p = R^p(Z)$. La inclusión $(R_g(X)|_Z)^p \subset R^p(Z)$ se sigue de que $g|_Z \in R^p(Z)$, lo que se deduce de $\bar\partial g = 0$ en Z (0.1.9). Como $\overset{\circ}{X} = \emptyset$, el mismo método de demostración que 1.4.4. prueba que $R_o(Z) \subset \overline{R_o(X)|_Z}$ (adherencia uniforme), y por tanto $R_o(Z) \subset (R_g(X)|_Z)^p$, de donde $R^p(Z) \subset (R_g(X)|_Z)^p$. //.

Sinanjan demostró [38] que si X es un compacto sin interior y $1 \le p < 2$ entonces $R^p(X) = L^p(X)$. Aplicando 3.1.8. deducimos que $R^p_g(X) = L^p(X)$ si $1 \le p < 2$ y $\overset{\circ}{X} = \emptyset$. Sin embargo una aplicación directa del teorema citado ya proporciona la conclusión más fuerte que $R^p(X) = L^p(X)$, para $1 \le p < 2$ y $\overset{\circ}{X} = \emptyset$.

Para $2 \le p < \infty$ Sinanjan [38], Havin [19] y Hedberg [20],[21] han dado condiciones necesarias y suficientes para que $R^p(Z)=L^p(Z)$, con Z compacto (con o sin interior), en términos de distintas capacidades dependientes de p.

Señalemos ahora una condición cómoda que permite asegurar que $(R_g(X)_{|\partial X})^p = L^p(\partial X)$.

3.1.9. Proposición. Sean X, g y Z en las condiciones habituales. Supongamos que $\mathbb{C}-\partial X\cap Z$ sea conexo. Entonces para $1 \le p < \infty$ se tiene $(R_g(X)_{|\partial X}) = L^p(\partial X)$.

Demostración. Por 3.1.7. es suficiente probar que $(R_g(X)_{|\partial X\cap Z})^p = L^p(\partial X\cap Z)$. Demostremos que $R^p(\partial X\cap Z) \subset (R_g(X)_{|\partial X\cap Z})^p$. Ello es debido al hecho que, por el teorema de Runge toda función de $R_o(\partial X\cap Z)$ se aproxima uniformemente sobre $\partial X\cap Z$ por polinomios. Ahora el teorema de Lavrentiev permite afirmar que $R^p(\partial X\cap Z) = L^p(\partial X\cap Z)$, lo que concluye la demostración.

3.2. APROXIMACION EN MEDIA DE ORDEN p EN COMPACTOS CON INTERIOR.

Veremos en primer lugar condiciones necesarias de pertenencia a $R^p_g(X)$. El siguiente resultado es análogo a 2.1.5.

3.2.1. Proposición. Consideremos X, g y Z en las condiciones habituales. Si $1 \le p < \infty$ y $f \in R^p_g(X)$, entonces se cumple :

a) Existen funciones h,k holomorfas en $\overset{\circ}{X}-Z$ tales que

$f = h + gk$ (por tanto $f \in C^2(\overset{\circ}{X} - Z)$ y $\bar{\partial}(\frac{\bar{\partial} f}{\bar{\partial} g}) = 0$ en $\overset{\circ}{X}-Z$).

b) $f_{|Z} \in R^p(Z)$.

Demostración. El argumento es semejante al de 2.1.5. Sólo hay que tener en cuenta que si $f_n \in R_o(X) + R_o(X)g$ y $f_n \to f$ en $L^p(X)$, entonces $\bar{\partial}(\frac{\bar{\partial} f_n}{\bar{\partial} g})$ converge débilmente en $\overset{\circ}{X}-Z$ hacia $\bar{\partial}(\frac{\bar{\partial} f}{\bar{\partial} g})$ (en el sentido de las distribuciones).

La parte b) es consecuencia de que $g_{|Z} \in R(Z) \subset R^p(Z)$. //.

En el caso en que $Z = \emptyset$ escribiremos $L^p_g(X) = \{f \in L^p(X) \mid \bar{\partial}(\frac{\bar{\partial} f}{\bar{\partial} g}) = 0$ en $\overset{\circ}{X}\}$. A la vista de 3.2.1. es natural preguntarse cuando $R^p_g(X) = L^p_g(X)$. Este problema será analizado en esta sección. Veamos previamente un resultado que reduce este problema de aproximación a uno de aproximación en $\overset{\circ}{X}$ (la definición de $L^p_g(\overset{\circ}{X})$ es la obvia).

<u>3.2.2. Proposición.</u> Sea X un compacto de $\mathbb{C}$, g una función de clase C^2 en un entorno de X, tal que $\bar{\partial} g(z) \neq 0$ para $z \in X$ y $1 \leq p < \infty$. Entonces se tiene $R^p_g(X) = L^p_g(X)$ sí y sólo sí $R^p_g(\bar{\overset{\circ}{X}})_{|\overset{\circ}{X}} = L^p_g(\overset{\circ}{X})$.

Demostración. Supongamos que $R^p_g(X) = L^p_g(X)$. Sea $f \in L^p_g(\overset{\circ}{X})$ y consideremos la función $\tilde{f}$ obtenida extendiendo f por cero a todo X. Entonces $\tilde{f} \in R^p_g(X)$ y, a fortiori, $\tilde{f}_{|\overset{\circ}{X}} = f \in R^p_g(\bar{\overset{\circ}{X}})$. Supongamos que $R^p_g(\bar{\overset{\circ}{X}})_{|\overset{\circ}{X}} = L^p_g(\overset{\circ}{X})$ y $f \in L^p_g(X)$. Procediendo por dualidad, teniendo en cuenta el teorema de Hahn-Banach, hemos de probar que si $h \in L^q(X)$, q el exponente conjugado de p, es ortogonal a $R_o(X) + R_o(X)g$ entonces $\int_{\overset{\circ}{X}} f\, h\, dm = 0$. En virtud de 1.4.1 $\check{h} = 0$ en $\mathbb{C}-X$, y por continuidad, en $\mathbb{C}-\overset{\circ}{X}$. Una demostración análoga a 1.4.4. prueba que cualquier función de $R_o(\bar{\overset{\circ}{X}}) + R_o(\bar{\overset{\circ}{X}})g$ se aproxima en $L^p(\bar{\overset{\circ}{X}})$ por funciones de $R_o(X) + R_o(X)g$. De aquí se deduce que h es ortogonal a $R^p_g(\overset{o}{X})$. Como $f \in L^p_g(X)$, entonces $f \in L^p_g(\overset{o}{X})$ y, por tanto, $f \in R^p_g(\overset{o}{X})$ de donde

$$\int_X f\, h \;=\; \int_{\overset{o}{X}} f.h.\, dm = 0 \qquad //.$$

La idea de demostración de 3.2.4. está inspirada en un artículo de Bagby [2], en el cual se presenta un argumento parecido parecido para funciones racionales. Previamente necesitamos un lema sencillo.

<u>3.2.3. Lema</u>. Sea U un abierto de $\mathbb{C}$, Z un subconjunto cerrado contenido en U y $h \in W^p_m(U-Z)$ $1 \leq p < \infty$, $m \in N$. Si γ es una función de clase C^m en U, $\gamma = 0$ en un entorno de Z y con derivados de orden $\leq m$ acotadas en U, entonces $\gamma\, h \in W^p_m(U)$.

Demostración. Sea $\tilde{h}$ la función localmente integrable definida en U asignando a los puntos de Z el valor o y en U-Z el valor h. En virtud de la fórmula de Leibniz de derivación de distribuciones, se tiene:

$$D^{\alpha}(\gamma\tilde{h}) = \sum_{|\beta| \leq |\alpha|} \binom{\alpha}{\beta} (D^{\beta}\gamma)\,(D^{\alpha-\beta}\tilde{h}), \quad |\alpha| \leq m$$

Es fácil comprobar que $(D^{\beta}\gamma)\, D^{\alpha-\beta}\tilde{h}$ coincide c.p.t. con la función que vale 0 en Z y en U-Z vale $(D^{\beta}\gamma)(D^{\alpha-\beta}h)$. Además

$$\| (D^{\beta}\gamma)\, D^{\alpha-\beta}\tilde{h} \|_{L^p(U)} \leq M\, \| D^{\alpha-\beta} h \|_{L^p(U-Z)}$$

De donde $\gamma\tilde{h} = \gamma h \in W^p_m(U)$ //.

<u>3.2.4. Teorema.</u> Sean X, g y Z en las condiciones habitua-

les. Supongamos que $1 < p < 2$ y que $f \in L^p(X)$ cumpla

a) $\bar{\partial}(\frac{\bar{\partial} f}{\bar{\partial} g}) = 0$ en $\overset{\circ}{X}-Z$

b) f es holomorfa en un entorno de Z.

Entonces $f \in R_g^p(X)$.

Demostración. Sea q tal que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, así que $2 < q < \infty$. Si $h \in L^q(X)$ y es ortogonal a $R_o(X) + R_o(X)g$ se ha de probar que $\int_X f.h.dm = 0$. Obviamente h es ortogonal a $R_o(X)$, y $\hat{h}$ es contínua en $\mathbb{C}$ (0.1.6.), por tanto $\hat{h} = 0$ en $\mathbb{C}-\overset{\circ}{X}$, de donde h = 0 c.p.t. en $\mathbb{C}-\overset{\circ}{X}$ por 3.1.4. Sea U un entorno de Z en el que f sea holomorfa y escribamos $\overset{\circ}{X} = \omega \cup \Omega$ donde:

ω es la reunión de las componentes conexas de $\overset{\circ}{X}$ que no cortan a U y

Ω es la reunión de aquellas que cortan a U.

Tenemos $\bar{\omega} \cap U = \emptyset$. Veamos que la función f es holomorfa en Ω. Sea G una componente de $\overset{\circ}{X}$ que corta a U. Tendremos:

$f = k_1 + gk_2$ en G-Z, con k_1, k_2 holomorfas en G-Z.

Como f es holomorfa en $G \cap U$, deducimos:

$$0 = \bar{\partial} f = k_2 \, \bar{\partial} g \quad \text{en } (G \cap U)-Z \tag{1}$$

Caso 1: $(G \cap U) - Z \neq \emptyset$. De (1) se infiere que $k_2=0$ en $(G \cap U)-Z$. Si vemos que toda componente de G - Z corta a U deduciremos que $k_2 = 0$ en G - Z, es decir que f es holomorfa en G. Sea W una componente de G - Z y supongamos que $W \cap U = \emptyset$, entonces $\partial W \cap Z \subset \bar{W} \cap U = \emptyset$. Como W es una componente de G - Z obtenemos que $\partial W \subset \partial G$ y de aquí:

$$\bar{W} \cap G = (\partial W \cap G) \cup (W \cap G) = W \cap G = W,$$

es decir, W = G (G es conexo), lo que lleva a la contradicción

$\emptyset = W \cap U = G \cap U \neq \emptyset$.

Caso 2: $(G \cap U) - Z = \emptyset$. En esta situación $G \cap U \subset Z$, luego

$$G \cap U \subset Z \cap G \subset U \cap G \ ,$$

de donde $\emptyset = G \cap U = Z \cap G$ es un abierto y cerrado de G. Por consiguiente $G = G \cap U \subset U$ y f es holomorfa en G. Así queda probado que f es holomofa en Ω. Escribamos:

$$\int_X f\,h\,dm = \int_{\overset{o}{X}} f\,h\,dm = \int_\omega f\,h\,dm + \int_\Omega f\,h\,dm \qquad (2)$$

Ahora bien, como $q > 2$ y $\hat{h} = 0$ en $\mathbb{C}-X$, tenemos que $\hat{h} \in \overset{o}{W}_1{}^q(\overset{o}{X})$ (o.2.5.). Por tanto existen funciones $\Psi_n \in D(\overset{o}{X})$, tales que $\bar{\partial}\Psi_n \to \bar{\partial}\hat{h}$ en $L^q(\overset{o}{X})$, luego en $L^q(\Omega)$. Teniendo en cuenta que f es holomorfa en Ω y $\bar{\partial}\hat{h} = -\pi h$ c.p.t.:

$$\int_\Omega f\,h\,dm = -\frac{1}{\pi}\int_\Omega f\,\bar{\partial}\hat{h}\,dm = \lim_n -\frac{1}{\pi}\int_\Omega f\,\bar{\partial}\Psi_n\,dm =$$

$$= \lim_n \left(-\frac{1}{\pi}\int_\Omega \bar{\partial}(f\Psi_n)\,dm - \frac{1}{\pi}\int_\Omega (\bar{\partial}f)\,.\,\Psi_n\,dm\right) =$$

$$= \lim_n -\frac{1}{\pi}\int \bar{\partial}(f\,\Psi_n)\,dm.$$

Para cada $n \in N$, $K_n = \operatorname{sop} \Psi_n \cap \Omega$ es compacto. Aplicando el teorema de Stokes a un recinto cuyo borde sea una poligonal en Ω que rodea a K_n, deducimos que $\int_\Omega fh\,dm = 0$

Ahora hemos de demostrar que $\int_\omega f\,h\,dm = 0$. Elijamos una función $\Psi \in C^\infty(\mathbb{C})$ que valga 0 en un entorno V de Z, $V \subset \bar{V} \subset U$ y 1 en un entorno de $\mathbb{C}- U$ En virtud de 3.2.3. y 3.1.2. $\check{h}\,\Psi$ pertenece a $W_2^q(\mathbb{C})$. Además $h\Psi = o$ en $(\mathbb{C}-X) \cup \bar{V}$, por tanto $\check{h}\Psi \in \overset{o}{W}_2{}^q(\widehat{\overset{o}{X}-\bar{V}})$. Así deducimos la existencia de funciones $\Psi_n \in D(\mathbb{C})$ con $\operatorname{sop} \Psi_n \subset \widehat{\overset{o}{X}-V}$ y $\Psi_n \to \check{h}\,\Psi$ en $W_2{}^q(\mathbb{C})$. A fortiori se tendrá $\bar{\partial}\left(\frac{\bar{\partial}\Psi_n}{\bar{\partial}\,g}\right) \to \bar{\partial}\left(\frac{\bar{\partial}\check{h}\Psi}{\bar{\partial}g}\right) =$ $= \pi h\Psi = \pi h$ en $L^q(\omega)$, pues $Z \cap \bar{\omega} = \emptyset$. Ahora:

$$\int_\omega f\ h \ = \ \frac{1}{\pi}\int_\omega f.\ \partial\Big(\frac{\bar\partial \check{h}\Psi}{\bar\partial g}\Big) \ =$$

$$= \lim_n \frac{1}{\pi}\int f.\ \bar\partial\Big(\frac{\bar\partial\Psi n}{\bar\partial g}\Big) = \lim_n \frac{1}{\pi}\int_\omega \bar\partial f.\ \frac{\bar\partial\Psi n}{\bar\partial g} \tag{3}$$

Ahora bien, en ω f es $h+gk$ con h,k holomorfas en ω, de donde $\bar\partial f = k\bar\partial g$, por tanto en (3) se tendrá:

$$= \lim_n \frac{1}{\pi}\int_\omega \bar\partial g\ k\ \frac{\bar\partial\Psi n}{\bar\partial g} = \lim_n \frac{1}{\pi}\int_\omega k\ \ \bar\partial\Psi_n \ = 0$$

Esta última igualdad se razonaría de modo análogo al detallado anteriormente para Ω. De todo lo anterior se concluye que $\int_X f\ h\ dm = 0$, o sea, $f \in R_g^p(X)$. //.

Tampoco aquí, la condición b) puede ser reemplazada por $f_{|Z} \in R^p(Z)$, como se verá en el ejemplo 3.2.12.

Escribiremos $(W_m^q)_X = \{f \in W_m^q\ (\mathbb{C})\ |f=0 \text{ en } \mathbb{C}-X\}$ si X es compacto, $1 \leq q < \infty$ y $m \in N$.

<u>3.2.5. Proposición</u>. (Polking). Sea X un compacto de $\mathbb{C}$, g una función de clase C^2 en un entorno abierto U de X tal que para todo $x \in X$ $\bar\partial g(x) \neq 0$. Entonces si $1 < p < \infty$ y q es el exponente conjugado de p, se tiene $R_g^p(X) = L_g^p(X)$ sí y sólo sí $(\mathring{W}_2^q)_X = \mathring{W}_2^q(X)$.

Demostración. Supongamos que $(\mathring{W}_2^q)_X = \mathring{W}_2^q(X)$. En este caso el operador $\bar\partial\big(\frac{\bar\partial}{\bar\partial g}\big)$ está definido en un entorno U de X, y la demostración de 3.2.4. puede ser reproducida pues el hecho esencial usado era que $(\mathring{W}_2^q)_X = \mathring{W}_2{}^q(X)$.

Supongamos que vale la aproximación $R_g{}^p(X) = L_g{}^p(X)$. Veamos que el operador $\bar\partial\big(\frac{\bar\partial}{\bar\partial g}\big)$ proporciona una aplicación bicontinua entre $(W_2{}^q)_X$ y $(R_o(X) + g\ R_o(X))^\perp$:

$$\mathbb{D}_g = \bar{\partial}\left(\frac{\bar{\partial}}{\bar{\partial} g}\right) : (W_2^q)_X \longrightarrow (R_o(X) + g\, R_o(X))^{\perp} \subset L^q(X)$$

Si $h \in (W_2^q)_X$ entonces $\bar{\partial}\left(\frac{\bar{\partial} h}{\bar{\partial} g}\right) \in (R_o(X) + g\, R_o(X))^{\perp}$.

En efecto se ha de probar que:

$$\int_X \mathbb{D}_g\, h.f\, dm = 0, \text{ para } f \in R_o(X) + R_o(X)g$$

Elijamos una función $\Psi \in C^{\infty}$ que valga 1 en un entorno de X y cero fuera de U. Tendremos:

$$\int_X \mathbb{D}_g\, h.f = \int_{\mathbb{C}} (\mathbb{D}_g\, h)\ (\Psi f) = \int_{\mathbb{C}} h.\, \mathbb{D}_g(\Psi f) = \int_X h\, \mathbb{D}_g(f) = 0$$

Veamos que $\mathbb{D}_g$ es exhaustiva. Si $h \in (R_o(X) + R_o(X)g)^{\perp}$ entonces $\check{h} = 0$ en $\mathbb{C}-X$ y $\check{h} \in W_2^q(U)$; por tanto $\check{h} \in (W_2^q)_X$ y $\mathbb{D}_g \check{h} = h$. La aplicación $\mathbb{D}_g$ es continua por la definición de norma en el espacio W_2^q, y es inyectiva por 1.3.2. (observemos que su inversa es $h \longrightarrow \check{h}$). La continuidad de la inversa es consecuencia del teorema de la aplicación abierta. Ahora, se probará la densidad de $D(\mathring{X})$ en $(W_2^q)_X$ demostrando la densidad de $\mathbb{D}_g(D(\mathring{X}))$ en $(R_o(X) + R_o(X)g)^{\perp}$. Procederemos por dualidad. Sea $f \in L^p(X)$, tal que para toda $\Psi \in D(\mathring{X})$ se tenga:

$$\int_X (\mathbb{D}_g \Psi).\, f\, dm = 0$$

Entonces $\mathbb{D}_g\, f = 0$ en $\mathring{X}$, por tanto $f \in L_g^p(X) = R_g^p(X)$, de donde, si $k \in (R_o(X) + R_o(X)g)^{\perp} = R_g^p(X)$ tenemos $\int k\, f\, dm = 0$ //.

Este resultado fue demostrado por Polking en [32], para una clase de operadores elípticos que incluye, por 1.3.2. a $\mathbb{D}_g$. Aquí se ha incluido una demostración para mayor completitud de la exposición. El problema de aproximación queda reducido a un problema de estabilidad en espacios de Sobolev. Veamos el estado actual de dicho problema.

3.2.6. Definición. Sean $m \in N$, $1 < q < \infty$ y K un compacto de R^d. K es (m,q) estable sí y sólo sí $(W_m)^q_K = \overset{o}{W}_m{}^q(\overset{o}{K})$.

No son conocidas condiciones necesarias y suficientes para la (m,q) estabilidad, salvo para el caso $m = 1$ [32].

Actualmente se conocen sólo condiciones suficientes de estabilidad que enunciamos a continuación. Necesitamos previamente varias definiciones.

3.2.7. Definición. Sea $s \in R$. El núcleo de Bessel de orden s es la función G cuya transformada de Fourier es $\hat{G}_s(x) = (1+|x|^2)^{-s/2}$.

Es más cómodo definir el núcleo de Bessel a través de su transformada de Fourier que directamente. Para un estudio de las propiedades de G_s véase Stein [39]. Es interesante resaltar la relación de los núcleos de Bessel con los espacios de Sobolev, establecida por Calderón (véase la demostración en [39]):
"$f \in W_m{}^p$, $1 < p < \infty$ sí y sólo sí $f = G_m * g$ con $g \in L^p$. Además existe $A > o$ tal que $A^{-1} \| g \|_p \leq \| f \|_{m,p} \leq A \| g \|_p$.

3.2.8. Definición. Para cada conjunto $E \subset R^d$ la (s,q)-capacidad es:

$$C_{s,q}(E) = \inf \{ \| g \|_q^q \mid g \geq o,\ G_s * g \geq 1 \text{ en } E \}.$$

Esta capacidad, que ha sido bien estudiada por varios autores [23], [32], tiene buenas propiedades, es subaditiva, es continua por la derecha y todo boreliano es capacitable.

Una propiedad se dice que vale (s,q) c.p.t. si es válida salvo para un conjunto que tenga (s,q) capacidad cero.

3.2.9. Proposición. Un compacto $X \subset \mathbb{C}$ es $(2, q)$ estable si verifica alguna de las siguientes condiciones:

a) $q > 2$

b) $1 < q \leq 2$ y $\liminf_{\delta} \dfrac{C_{1,q}(B_{\delta}(x)-X)}{\delta^{2-q}.(\log \frac{1}{\delta})^{\frac{1-q}{2}}} > 0$

$(2,1)$ c.p.t. $x \in \partial X$.

c) $1 < q \leq 2$ y $\sum_{n=1}^{\infty} \left[2^{n(2-q)} C_{1,q}(B_{2^{-n}}(x)-X)\right]^{\frac{1}{q-1}} = +\infty$

$(2,1)$ c.p.t. $x \in \partial X$.

La condición a) fue establecida simultaneamente por Burenkov [8], Hedberg [22] y Polking [32], b) y c) fueron establecidas por Hedberg en [22] y [23]. Estas condiciones no son necesarias. En el caso $\overset{\circ}{X} = \emptyset$ hay condiciones necesarias y suficientes establecidas por Polking en [32]. Existen compactos que no son $(2,2)$ estables (véase Hedberg [23], teorema 3.14), para estos compactos no vale la aproximación $R^2_g(X) = L_g^2(X)$, siendo $g \in C^2$ con $\bar{\partial} g(z) \neq 0$ para $z \in X$.

Si no se supone que $Z = \emptyset$, el problema de determinar $R_g^p(X)$ parece ser difícil (véase 3.2.11). Veamos dos casos particulares de tal problema.

3.2.10. Proposición. Sean $1 < p,q < \infty$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, y sea X un compacto de $\mathbb{C}$ $(2,q)$ estable. Sea $g \in C^2$ en un entorno de X y supongamos que $\overline{(X-Z)} \cap Z = \emptyset$. Entonces se verifica:

$$R_g^p(X) = \{f \in L^p(X) \mid \bar{\partial}(\frac{\bar{\partial} f}{\bar{\partial} g}) = 0 \text{ en } \overset{\circ}{\overline{X-Z}} \text{ y } f|_Z \in R^p(Z)\} \quad (4)$$

Demostración. Por las hipótesis sobre Z es fácil comprobar que $X = \overline{X-Z} \cup Z$ y $\overset{\circ}{X} = \overset{\circ}{\overline{X-Z}} \cup \overset{\circ}{Z}$ (ambas uniones disjuntas). Veamos que $\overset{\circ}{\overline{X-Z}}$ es (2,q) estable. Si $h \in W_2^q$ y $h = 0$ en $\mathbb{C}-(\overline{X-Z})$, entonces $h = 0$ en $\mathbb{C}-X$, por tanto, existen funciones $\Psi_n \in D(\overset{\circ}{X})$ con $\Psi_n \to h$ en W_2^q. Consideremos una función $\Psi \in D(\mathbb{C})$ que valga 1 en un entorno de $\overline{X-Z}$ y 0 en un entorno de Z. Se tendrá $\Psi_m \Psi \in D(\overline{X-Z})$ y $\Psi_n \Psi \to h\Psi = h$ en W_2^q. Esto último es consecuencia de lo siguiente: la aplicación $\ell \in \{u \in C^\infty \mid \|u\|_{2,q} < \infty\} \to \Psi \ell \in \{u \in C^\infty / \|u\|_{2,q} < \infty\}$ es continua para la norma $\| \ \|_{2,q}$ (en virtud de la fórmula de Leibniz), y $\{u \in C^\infty \mid \|u\|_{2,q} < \infty\}$ es denso en W_2^q(0.2.4.) Observemos que toda función perteneciente al segundo miembro de (4) puede ser aproximada en $L^p(X)$ por funciones que verifican $\bar{\partial}(\frac{\bar{\partial} f}{\bar{\partial} g}) = 0$ en $\overset{\circ}{\overline{X-Z}}$ y son holomorfas en un entorno de Z. Ahora se aplica un argumento idéntico al del teorema 3.2.4. para deducir el resultado.

//.

Veamos ahora otro caso particular análogo a 2.2.7. pero de demostración más sútil.

3.2.11. Proposición. Sea X un compuesto convexo de $\mathbb{C}$ con $0 \in \overset{\circ}{X}$. Supongamos que $1 \leq p < \infty$ y $n \in \mathbb{N}$. Entonces $R^p_{\bar{z}^n}(X)$ está formado por aquellas funciones de $L^p(X)$ tales que existan h,k holomorfas en $\overset{\circ}{X}$ con $f = h + \bar{z}^n k$ c.p.t.(dm).

Demostración. Utilizaremos las notaciones de 2.2.7. Si $f \in R^p_{\bar{z}^n}(X)$ entonces existen polinomios P_j, Q_j tales que $P_j + \bar{z}^n Q_j \to f$ en $L^p(X)$. Calculemos los coeficientes de Fourier de

$(P_j + \bar{z}^n Q_j)(r.)$ para $r<r_o$, donde r_o es tal que $\bar{D}(0,r_o) \subset \overset{\circ}{X}$:

$$\widehat{(P_j + \bar{z}^n Q_j)(r.)}(m) = 0 \text{ si } m < -n \tag{5}$$

$$\widehat{(P_j + \bar{z}^n Q_j)(r.)}(m) = \frac{1}{2\pi}\int_o^{2\pi} r^n e^{-int} Q_j(re^{it})e^{-imt}dt =$$

$$= r^{2n+m} b_{n+m}^{(j)} \quad \text{si } -n \leq m < o \text{ y si } Q_j = \sum_k b_k^{(j)} z^k \tag{6}$$

Ahora bien si $m \in Z$, aplicando la desigualdad de Hölder:

$$|\hat{f}(r.)(m) - \widehat{(P_j + \bar{z}^n Q_j)(r.)}(m)| \leq \frac{1}{2\pi}\int_o^{2\pi} |(f(re^{it}) - (P_j+\bar{z}^n Q_j)(re^{it}))e^{-imt}|dt$$

$$\leq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(re^{it}) - (P_j+\bar{z}^n Q_j)(re^{it})|^p dt \tag{7}$$

Multiplicando por r, e integrando en (7) obtenemos:

$$\int_o^{r_o} |\hat{f}(r.)(m) - \widehat{(P_j+\bar{z}^n Q_j)(r.)}(m)|rdr \leq \int_X |f(z) - (P_j+z^{-n}Q_j)(z)|^p dm(z)$$

De donde se deduce:

$$\lim_{j\to+\infty} \int_o^{r_o} |\hat{f}(r.)(m) - \widehat{(P_j+\bar{z}^n Q_j)(r.)}(m)|rdr = 0 \tag{8}$$

uniformemente respecto a m.

En virtud de 3.2.1. existen funciones h,k holomorfas en $\overset{\circ}{X} - \{o\}$ y $f = h + \bar{z}^n k$. Consideremos los desarrollos en serie de Laurent de h y k en 0:

$$h(z) = \sum_j a_j z^j \ , \quad k(z) = \sum_j b_j z^j$$

Como en la demostración de 2.2.7. se tiene, para $m \in \mathbb{Z}$

$$\hat{f}(r.)(m) = a_m r^m + b_{n+m} r^{2n+m}$$

Si $m < -n$, por (5) y (8) se tendrá:

$$\int_0^{r_o} | a_m r^m + b_{n+m} r^{2n+m} | rdr = 0$$

Por tanto $a_m = 0$ y $b_{n+m} = 0$ $(m < -n)$. De donde se deduce que k tiene una singularidad evitable en 0. Si $-n \leq m < o$ por (6) y (8) obtenemos:

$$\lim_j \int_0^{r_o} |a_m r^m + (b_{n+m} - b_{n+m}^{(j)}) r^{2n+m} | rdr = 0.$$

Ya que una parcial del integrando en la relación precedente converge puntualmente a 0 c.p.t., podemos suponer:

$$\lim_j a_m r^{m+1} + (b_{n+m} - b_{n+m}^{(j)}) r^{2n+m+1} = 0, \quad \text{c.p.t.} \quad r \in [o, r_o]$$

de donde $\lim_{j\to\infty} a_m + (b_{n+m} - b_{n+m}^{(j)}) r^{2n} = 0$, c.p.t. $r \in [o, r_o]$

Por tanto existe $\lim_{j\to\infty} b_{n+m}^{(j)} = B_{n+m}$ y así:

$$a_m + (b_{n+m} - B_{n+m}) r^{2n} = 0, \quad \text{c.p.t.} \quad r \in [o, r_o]$$

De esta última igualdad se deduce $a_m = 0$ para $-n \leq m < o$, con lo que también h tiene una singularidad evitable en 0.

Recíprocamente, supongamos que $f = h + \bar{z}^n k$ con h,k holomorfas en $\overset{o}{X}$ y $f \in L^p(X)$. Sea (r_m) una sucesión de números reales con límite 1 y tal que $o < r_m < 1$. Consideremos la función $f(r_m\cdot)$ definida en un entorno $\frac{1}{r_m} X$ de X. Veamos que $f(r_m\cdot) \to f$ en $L^p(X)$. Se tiene $f(r_m x) \to f(x)$ en todo punto $x \in X$ y además:

$$\| f(r_m\cdot)\|_p^p = \int_X |f(r_m z)|^p \, dm(z) = \frac{1}{r_m^2}\int_{r_m X} |f(u)|^p \, dm(u) =$$

$$= \frac{1}{r_m^2}\int_X 1_{r_m X} |f(u)|^p \, dm(u) \xrightarrow{m\to\infty} \int_X |f(u)|^p \, dm(u) = \| f\|_p^p .$$

Hemos tenido en cuenta el teorema de la convergencia dominada. Así pues $f(r_m\cdot) \longrightarrow f$ en $L^p(X)$ [36 , pág. 76]. Pero cada $f(r_m\cdot) \in R^p_{\bar{z}^n}(X)$ por el mismo argumento que en 2.2.7. Así deducimos que $f \in R_{\bar{z}^n}^p(X)$. //.

Esta proposición proporciona ejemplos que demuestran que la condición b) de 3.2.1. no puede ser rebajada a $f_{|Z} \in R^p(Z)$.

<u>3.2.12. Ejemplo</u>. Sean $X = \overline{D(o,1)}$ y $g(z) = \bar{z}^2$. La función $f(z) = \bar{z}^2 \frac{1}{z}$ verifica en $X - \{o\}$ la ecuación $\bar{\partial}(\frac{\bar{\partial} f}{\bar{\partial} g}) = 0$; además $f \in L^p(X)$ y $f_{|\{o\}} \in R^p\{o\} = \mathbb{C}$ y, en cambio, $f \notin R_{\bar{z}^2}(X)$ por 3.2.11.

CAPITULO 4

APROXIMACION EN NORMA Lipα Y EN NORMA C^1 EN COMPACTOS CON INTERIOR VACIO

Comenzamos este capítulo estudiando la aproximación en norma Lip α (o $< \alpha <$ 1) por funciones del modulo $R_o(X) + R_o(X)g$. El teorema 4.1.5. caracteriza completamente la validez de tal aproximación con la hipótesis adicional $R(X) = C(X)$. Para obtener un resultante general de aproximación para $\overset{o}{X} = \emptyset$ ha sido necesario considerar el módulo $R_o(X) + g\ R_o(X) + g^2\ R_o(X)$ como muestra el teorema 4.3.3. (éste constituye el principal resultado de este capítulo). Este capítulo concluye con un teorema del tipo de Hartogs-Rosenthal, en norma C^1, para el módulo $R_o(X) + R_o(X)g$.

4.1. APROXIMACION EN Lip α POR FUNCIONES DE $R_o(X) + R_o(X)g$.

En esta sección utilizaremos, como recurso básico, la transformada de Cauchy de una distribución, siguiendo a O'Farrell [27]. Consideraremos sobre un compacto X de $\mathbb{C}$ los espacios lip(α, X) y Lip(α, X) para o $< \alpha <$ 1 dotados de la norma usual para la cual son espacios de Banach (o.1.8). Como siempre g será una función de clase C^2 en un entorno de X. Si T es una distribución de orden 2 con soporte incluido en X, entonces tiene sentido $T(f)$ para $f \in R_o(X) + R_o(X)g$. Al efecto de aplicar una tal distribución a una función f de $R_o(X) + R_o(X)g$ supondremos que f ha sido extendida a una función de $D^2(\mathbb{C})$, que designaremos con el mismo símbolo. Si T es una distribución a soporte compacto compacto, recordemos que $\hat{T}$ designa la transformada de Cauchy de T. (0.1.24) y $\check{T}$ la transformada introducida en 1.1.

4.1.1. Lema. Sean X y g en las condiciones anteriores, y sea T una distribución de orden 2 con soporte incluido en X. Se verifica: T es ortogonal a $R_o(X) + R_o(X)g$ sí y sólo sí sop $\hat{T} \subset X$ y $\bar{\partial}\,\check{T}$ es ortogonal a $R_o(X)$.

Demostración. $\Rightarrow$) Supongamos que T es ortogonal a $R_o(X) + R_o(X)g$. Si $\psi \in D^2(\mathbb{C})$ y sop $\psi \cap X = \emptyset$, entonces

$$\hat{\psi}(w) = \int \frac{\psi(z)}{z-w}\, dm(z) \text{ es holomorfa en un entorno de } X,$$

por tanto $\hat{T}(\psi) = -T(\hat{\psi}) = 0$, de donde sop $\hat{T} \subset X$. Sea $h \in R_o(X)$. Recordemos que $\bar{\partial}T = -\bar{\partial}g.\hat{T}$ por 1.3.3. Entonces:

$$((\bar{\partial}g)\hat{T})(h) = \hat{T}((\bar{\partial}g).h) = -T(\widehat{\bar{\partial}g.h})$$

Ahora, $\bar{\partial}((\bar{\partial}g.h)^{\wedge}) = -\pi\bar{\partial}g.h = -\pi\bar{\partial}(hg)$ en un entorno de X, por tanto $(\bar{\partial}g.h)^{\wedge} = k+hg\pi$ en dicho entorno, de modo que $T((\bar{\partial}g.h)^{\wedge}) = 0$.

$\Leftarrow$) Recíprocamente, sea T con sop $\hat{T} \subset X$ y $-\bar{\partial}g.\hat{T}$ ortogonal a $R_o(X)$. Se tendrá, para $f = h+gk \in R_o(X)+R_o(X)g$

$$T(f) = -\frac{1}{\pi}\,\bar{\partial}\,\hat{T}\,(f) = \frac{1}{\pi}\,\hat{T}\,(\bar{\partial}f) =$$

$$= \frac{1}{\pi}\,\hat{T}\,(\bar{\partial}g.k) = \frac{1}{\pi}\,(\bar{\partial}g.\hat{T})(k) = 0$$

La hipótesis sop $\hat{T} \subset X$ es necesaria para que tengan sentido algunas de las igualdades anteriores. //.

El lema siguiente es bien conocido. Sin embargo como no tenemos ninguna referencia bibliográfica, incluimos una demostración. O'Farrell en [31] demuestra un resultado de este tipo para el ope rador de Vituskin. Alguna idea de la demostración es debida a Dolzenko [14].

4.1.2. Lema. Sean $o < \alpha < 1$ y $d > o$. Existe una constante K que depende sólo de α y d tal que para toda $\psi \in L^{\infty}(\mathbb{C})$ con $\delta(\text{sop}\,\psi) \leq d$ se tiene:

$$\|\hat{\psi}\|_{\text{lip}\,\alpha} \leq k \|\psi\|_{\infty}$$

Demostración. En primer lugar observemos que:

$$\|\hat{\psi}\|_{\infty} \leq 2\pi d \|\psi\|_{\infty} \tag{1}$$

En efecto $|\hat{\psi}(x)| = \left|\int_{\mathbb{C}} \frac{\psi(z)}{z-x}\, dm(z)\right| \leq \|\psi\|_{\infty} \int_{\text{sop}\,\psi} \frac{1}{|z-x|}\, dm(z)$

$\leq \|\psi\|_{\infty}\, 2\pi d$ esta última desigualdad es consecuencia de 0.1.1. y de $m(\text{sop}\,\psi) \leq \pi d^2$. Sean $x, y \in \mathbb{C}$ y sea $o < r = |x-y|$. Si $|x-y| \geq d$ entonces; teniendo en cuenta (1):

$$\frac{|\hat{\psi}(x) - \hat{\psi}(y)|}{|x-y|^{\alpha}} \leq \frac{2}{d^{\alpha}} \|\hat{\psi}\|_{\infty} \leq \frac{4\pi d}{d^{\alpha}} \|\psi\|_{\infty}$$

Supongamos ahora $r = |x-y| < d$. Tendremos:

$$|\hat{\psi}(x) - \hat{\psi}(y)| = \left|\int \psi(z) \frac{(x-y)}{(z-x)(z-y)}\, dm(z)\right| \leq$$

$$\leq r \|\psi\|_{\infty} \int_{\text{sop}\,\psi} \frac{1}{|z-x|\,|z-y|}\, dm(z) \tag{2}$$

La acotación deseada es no trivial sólo en el caso que $d(x, \text{sop}\,\psi) \leq d$ (ó $d(y, \text{sop}\,\psi) \leq d$). Definamos los siguientes conjuntos:

$A = \{z \in \text{sop}\,\psi \mid |z-x| \leq \frac{r}{2}\}$, (Si $z \in A$ entonces $|z-y| \geq \frac{r}{2}$) ,

$B = \{z \in \text{sop}\, \psi \mid |z-y| \leq \frac{r}{2}\}$, (si $z \in B$ entonces $|z-x| \geq \frac{r}{2}$)

$C = \{z \in \text{sop}\, \psi \mid |z-x| \geq |z-y| > \frac{r}{2}\}$, (si $z \in C$ entonces $|z-x|\,|z-y| \geq |z-y|^2|$)

$D = \{z \in \text{sop}\, \psi \mid |z-y| > |z-x| > \frac{r}{2}\}$, (si $z \in D$ entonces $|z-x|\,|z-y| > |z-x|^2$).

Acotando en (2) obtenemos:

$$(2) \leq r\|\psi\|_\infty \left| \frac{2}{r}\int_A \frac{1}{|z-x|}\, dm(z) + \frac{2}{r}\int_B \frac{1}{|z-y|}\, dm(z) + \right.$$

$$\left. \int_C \frac{1}{|z-y|^2}\, dm(z) + \int_D \frac{1}{|z-x|^2}\, dm(z) \right| \leq$$

$$\leq r\, \|\psi\|_\infty \left(\frac{8}{r}\sqrt{\pi^2 \cdot \frac{r^2}{4}} + 4\pi \int_{\frac{r}{2}}^{3d} \frac{1}{s}\, ds\right) =$$

$$= r\, \|\psi\|_\infty \,(4\pi + 4\pi \ln \frac{6d}{r})$$

Teniendo en cuenta que $\ln \frac{6d}{r} \leq \frac{C}{r^{1-\alpha}}$ $(r > o)$ siendo C una constante que depende de α y d, resulta:

$$|\hat{\psi}(x) - \hat{\psi}(y)| \leq 4\pi\, \|\psi\|_\infty\, r + C\|\psi\|_\infty\, r^\alpha \leq$$

$$\leq (4\pi\, d^{1-\alpha} + C)\, |x-y|^\alpha\, \|\psi\|_\infty$$

de donde se obtiene la conclusión. //.

<u>4.1.3. Lema.</u> La aplicación definida de $C^1(\mathbb{C})$ en lip (α, X) $(o < \alpha < 1)$ asignando a $\psi \in C^1(\mathbb{C})$ el elemento $\psi|_X$, es continua.

Demostración. Sólo hay que tener en cuenta la desigualdad siguiente obtenida por el teorema del valor medio:

$$\|\psi|_X\|_{\text{lip}\,\alpha} \leq \|\psi\|_X + \delta(X)^{1-\alpha}\, \|D\psi\|_X \qquad //.$$

Sea $\emptyset \in$ lip $(\alpha, X)'$, designaremos por $\emptyset_1$ la distribución de orden 1, con soporte incluido en X, definida por:

$$\phi_1(\psi) = \phi\,(\psi_{|X})\ \text{para}\ \psi \in C^1(\mathbb{C})$$

Esta definición es correcta por 4.1.3. Observemos que si $\phi_1 = o$ entonces $\phi = o$, debido a la densidad de $C^1(\mathbb{C})_{|X}$ en $\mathrm{lip}(\alpha,X)$; esto último es obtenido mediante un argumento standard de regularización.

<u>4.1.4. Lema</u>. Sea ϕ una forma lineal continua sobre $\mathrm{lip}(\alpha,X)$. Supongamos que sop $\hat{\phi}_1 \subset X$. Entonces existe $\mu \in M(X)$ tal que para todo $\psi \in C^1(\mathbb{C})$ se tiene:

$$\hat{\phi}_1\,(\psi) = \int_X \psi\, d\,\mu.$$

Demostración. Sea $\psi \in C^1(\mathbb{C})$ entonces, por 4.1.2.,

$$|\hat{\phi}_1(\psi)| = |\,\phi(\hat{\psi}_{|X})\,| \leq C\,(\alpha,d,\phi)\ \|\psi\|_\infty$$

Ahora sólo hay que tener en cuenta el teorema de representación de Riesz. Un argumento semejante al que será explicitado en 4.3.2. probaría que $\hat{\phi}_1$ es una medida absolutamente continua respecto a dm. //.

<u>4.1.5. Teorema</u>. Sea X un compacto de $\mathbb{C}$ tal que $R(X) = C(X)$. Sea g una función de clase C^2 en un entorno de X y escribamos $Z = \{x \in X \mid \bar{\partial}g(x) = 0\}$. Entonces si $o < \alpha < 1$:

$R_o(X) + R_o(X)g$ es denso en lip (α,X) sí y sólo si $R_o(Z)$ es denso en lip (α,Z).

Demostración. <=) Supongamos que $R_o(Z)$ es denso en lip (α,Z). Procederemos por dualidad y supondemos, como de costumbre, que g está extendida a todo $\mathbb{C}$. Consideremos una forma lineal continua ϕ sobre lip (α,X) ortogonal a $R_o(X)+R_o(X)g$. Entonces ϕ_1 será una distribución ortogonal a $R_o(X) + R_o(X)g$ y por consiguiente sop $\hat{\phi}_1 \subset X$. El lema 4.1.1. asegura que $\bar{\partial}g.\ \hat{\phi}_1$ es ortogonal a $R_o(X)$. Por 4.1.4. $\hat{\phi}_1$ es una medida y, a fortiori, $\bar{\partial}g.\hat{\phi}_1$ también. Ya que, por hipótesis $R(X) = C(X)$, deduciomos que $\bar{\partial}g\ \hat{\phi}_1 = o$ y de aquí $\hat{\phi}_1 = o$ en $\mathbb{C}-Z$, es decir sop $\hat{\phi}_1 \subset Z$, luego ϕ_1 es ortogonal a $R_o(Z)$. Para concluir que $\phi_1 = o$, en vista de la densidad de $R_o(Z)$ en lip (α,Z), es suficiente probar que:

$$|\phi_1(h)| \leq C \, \|h\|_{\text{lip}(\alpha,Z)}, \quad h \in C^1(\mathbb{C}),$$

donde $C > o$ no depende de h.

Necesitamos el siguiente hecho:

$$f \in \text{lip}(\alpha,Z) \text{ y } f = o \text{ en } Z \text{ entonces } \phi(f) = o$$

Lo anterior está claro si $f \in C^1(\mathbb{C})$ y $f = o$ en un entorno de Z, puesto que sop $\phi_1 \subset Z$. Para tratar el caso de una f arbitraria, razonaremos como sigue. Sea K un entorno (en $\mathbb{C}$) compacto de X y supongamos que f se ha extendido (por 0.1.26) a una función de lip $(\alpha,\mathbb{C})$ (en particular $f \in \text{lip}(\alpha,K)$). Aplicando resultados de Sherbert [50] existen $f_n \in \text{lip}(\alpha,K)$, $f_n = o$ en un entorno de Z tales que $f_n \to f$ en lip (α,K). Considerando convoluciones de las f_n con una unidad aproximada podemos suponer además que $f_n \in C^1(\mathbb{C})$, con lo cual $\phi(f) = \lim_n \phi(f_n|_X) = o$.

Denotemos por $E: \text{lip}(\alpha,Z) \longrightarrow \text{lip}(\alpha,X)$ el operador lineal continuo de extensión cuya existencia se discute en 0.1.26. Sea $h \in C^1(\mathbb{C})$. Entonces:

$$\phi_1(h) = \phi(h|_X) = \phi(E(h|_Z))$$

porque $h|_X$ y $E(h|_Z)$ son funciones que coinciden con $h|_Z$ en Z. De aquí:

$$|\phi_1(h)| \leq \|\phi\| \quad \|E\| \quad \|h\|_{lip(\alpha,Z)} = C \|h\|_{Lip(\alpha,Z)}$$

lo que concluye la primera parte de la demostración.

⟹) Recíprocamente, si $R_o(X) + g\, R_o(X)$ es denso en $lip(\alpha,X)$, teniendo en cuenta el teorema de extensión 0.1.26. y que $g_{|Z}$ es límite (en virtud de un teorema de O'Farrell (0.1.9)) en $lip(\alpha,Z)$, de funciones de $R_o(Z)$, resulta clara que $R_o(Z)$ es denso en $lip(\alpha,Z)$. //.

4.1.6. Corolario. Sean X, g y Z en las condiciones habituales y supóngase que $R(X) = C(X)$. Son equivalentes:

a) $R_o(X) + R_o(X)g$ es es denso en $lip(\alpha,Z)$.

b) Existe $c > o$ tal que $M^{1+\alpha}(D-Z) \geq cr^{1+\alpha}$ para todo disco abierto D de radio r.

Demostración. Hay que tener en cuenta el teorema de O'Farrell (0.1.21) y 4.1.5. //.

4.2. RESULTADOS PREVIOS PARA LA APROXIMACION EN NORMA LIPα POR FUNCIONES DEL MODULO $R_o(X) + R_o(X)g + R_o(X)g^2$.

4.2.1. Proposición. Sea G un abierto acotado de $\mathbb{C}$ con frontera de clase C^1 a trozos, U un abierto que contine a $\bar{G}$ y $f,g \in C^3(U)$. Supongamos que f es holomorfa en un entorno de $\{w \in \bar{G} / \bar{\partial} g(w) = o\}$. Entonces se verifica, para cada $w \in G$:

$$f(w) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial G} \frac{f(z)}{z-w}\,dz - \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial G} \frac{\bar{\partial} f}{\bar{\partial} g}(z)\frac{g(z)-g(w)}{z-w}\,dz +$$

$$+ \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial G} \frac{1}{\bar{\partial} g}\, \mathbb{D}_g(f)(z)\,\frac{(g(z)-g(w))^2}{z-w}\,dz -$$

$$-\frac{1}{2\pi}\int_G \mathbb{D}_g\left(\frac{\bar\partial f}{\bar\partial g}\right)(z)\frac{(g(z)-g(w))^2}{z-w}\,dm(z),$$

donde $\mathbb{D}_g$ designa, como siempre, el operador $\bar\partial\left(\frac{\bar\partial}{\bar\partial g}\right)$.

Demostración. Fijemos un punto $w \in G$ y elijamos $\varepsilon > o$ tal que el disco cerrado $D_\varepsilon = D(w,\varepsilon)$ esté contenido en G. Si $G_\varepsilon = G-D_\varepsilon$, resulta que G_ε es un abierto acotado, con borde de clase C^1 a trozos. Dotemos a ∂G_ε de la orientación inducida por la usual de G_ε. Consideremos la siguiente forma diferencial de clase C^1 en un entorno de $\bar G_\varepsilon$:

$$\Omega(z) = \frac{1}{\bar\partial g}\,\mathbb{D}_g\,(f)\,(z)\,\frac{(g(z)-g(w))^2}{z-w}\,dz.$$

Utilizamos el mismo convenio que en 1.2.1. respecto al símbolo $\frac{1}{\bar\partial g}\,\mathbb{D}_g\,(f)$. Se procede como en 1.2.1. aplicando el teorema de Stokes:

$$\int_{G_\varepsilon} d\Omega = \int_{\partial G_\varepsilon}\Omega \tag{1}$$

Calculando en (1) se obtiene:

$$\int_{G_\varepsilon}\mathbb{D}_g\left(\frac{\bar\partial f}{\bar\partial g}\right)(z)\,\frac{(g(z)-g(w))^2}{z-w}\,d\bar z\wedge dz\,+$$

$$2\int_{G_\varepsilon}\mathbb{D}_g(f)(z)\,\frac{g(z)-g(w)}{z-w}\,d\bar z\wedge dz=\int_{\partial G}\frac{1}{\bar\partial g}\mathbb{D}_g\,f(z)\frac{(g(z)-g(w))^2}{z-w}\,dz$$

$$-\int_{C(w,\varepsilon)}\frac{1}{\bar\partial g}\,\mathbb{D}_g\,f(z)\,\frac{(g(z)-g(w))^2}{z-w}\,dz \tag{2}$$

Razonando de modo idéntico a 1.2.1. obtenemos, haciendo tender ε a cero en (2):

$$\int_G \mathbb{D}_g\left(\frac{\bar\partial f}{\bar\partial g}\right)(z)\frac{(g(z)-g(w))^2}{z-w}dm(z)+2\int_G \mathbb{D}_g(f)(z)\frac{g(z)-g(w)}{z-w}\,dm(z) =$$

$$= \frac{1}{2i}\int_{\partial G}\frac{1}{\bar\partial g}\,\mathbb{D}_g\, f(z)\,\frac{(g(z)-g(w))^2}{z-w}\,dz \qquad (3)$$

Ahora sólo resta substituir la segunda integral de la derecha en (3) por su valor:

$$2\pi f(w) - \frac{1}{i}\int_{\partial G}\frac{f(z)}{z-w}\,dz + \frac{1}{i}\int_{\partial G}\frac{\bar\partial f}{\bar\partial g}(z)\frac{g(z)-g(w)}{z-w}\,dz$$

dado por la fórmula 1.2.1. //.

<u>4.2.2. Corolario.</u> Sean $g \in C^3(\mathbb{C})$ y $f \in D^3(\mathbb{C})$. Denotemos por S el conjunto $\{w \in \mathbb{C}/\ \bar\partial g(w) = o\}$. Supongamos que f es holomorfa en un entorno de S, entonces se verifica, para cada $w \in \mathbb{C}$:

$$f(w) = \frac{1}{2\pi}\int \mathbb{D}_g\left(\frac{\bar\partial f}{\bar\partial g}\right)(z)\,\frac{(g(z)-g(w))^2}{z-w}\,dm(z)$$

Demostración. Se procede del mismo modo que en 1.2.2., utilizando 4.2.1. //.

Las propiedades de $\mathbb{D}_g$ establecidas en 1.3. son válidas para el operador $\mathbb{D}_g(\frac{\bar\partial}{\bar\partial g})$. La interpretación del corolario precedente, en el lenguaje de las distribuciones, es la misma que en 1.3.1. No nos entretendremos en estudiar detalladamente el operador $\mathbb{D}_g(\frac{\bar\partial}{\bar\partial g})$.

Supongamos que $g \in C^1(\mathbb{C})$. Denotemos por ℓ (no por ℓ_g) la función boreliana de $\mathbb{C} \times \mathbb{C}$ en $\mathbb{C}$ definida por:

$$\ell(z,w) = k_g(z,w)\,\left(g(z)-g(w)\right) \qquad z,w \in \mathbb{C}$$

donde k_g es la función de 1.1.

En el siguiente lema resumimos las importantes propiedades de ℓ.

4.2.3. Lema. La función ℓ verifica:

a) ℓ es separadamente continua y localmente acotada en $\mathbb{C} \times \mathbb{C}$.

b) Para cada compacto $K \subset \mathbb{C}$, las funciones $\ell(z,.)$ $z \in K$ son uniformemente localmente lipschitzianas , es decir, para cada compacto L:

$$|\ell(z,x) - \ell(z,y)| \leq M(g,K,L)\,|x-y|, \qquad z \in K,\ x,y \in L.$$

Demostración. Ya que $\ell(z,w) = -\ell(w,z)$, basta demostrar la continuidad para $\ell(z,.)$. En todo punto $w \neq z$, $\ell(z,w) = \frac{\left(g(z)-g(w)\right)^2}{z-w}$ es continua. Si $z_n \to z$, se tiene:

$$|\ell(z,z_n)| = |k(z,z_n)|\,.\,|g(z)-g(z_n)| \leq M|z-z_n|$$

por tanto $\ell(z,)$ es continua en z. Para deducir la acotación local hay que observar que si H y K son compactos de $\mathbb{C}$ entonces,

$$|\ell(z,w)| \leq (\sup_{s \in [H,K]} \| D_g(s) \|)^2 . \sup_{\substack{s \in H \\ s \in K}} |t-s|$$

Demostremos ahora b). Sean L y K compactos de $\mathbb{C}$ (se pueden suponer convexos) y x e y dos puntos de L distintos. Hemos de acotar.

$$|\ell(z,x) - \ell(z,y)| \qquad \text{para } z \in K.$$

Distinguimos dos casos. i) si $z \notin [x,y]$ entonces la función $\ell(z,.)$ es de clase C^1 en un entorno de $[x,y]$. Calculemos las derivadas parciales de $\ell(z,.)$:

$$\bar{\partial}\ell(z,s) = -\frac{2\left(g(z)-g(s)\right)\bar{\partial}g(s)}{z-s}$$

$$\partial\ell(z,s) = \frac{\left(g(z)-g(s)\right)\left(g(z)-g(s)-2\partial g(s)\ (z-s)\right)}{(z-s)^2} \tag{4}$$

para $s \in [x,y] \subset L$.

Utilizemos el teorema del valor medio para acotar (4):

$$|\bar{\partial}\ell(z,s)| \leq 2 \sup_{s \in L} \| D_g(s)\| \cdot \|\bar{\partial}g\|_L$$

$$|\partial\ell(z,s)| \leq \sup_{s \in [H,L]} \| D_g(s)\| \cdot (\sup_{s \in [H,L]} \| D_g(s)\| + 2\|\partial g\|_L)$$

Por tanto

$$|\ell(z,x)-\ell(z,y)| \leq M(g,L,k)\,|x-y| \tag{5}$$

ii) Si $z \in [x,y]$, aproximamos z por puntos $z_n \notin [x,y]$. Apliquemos (6) a cada z_n, y tengamos en cuenta la continuidad parcial de ℓ, para deducir (5) para este z. //.

<u>4.2.4. Definición</u>. Sea $g \in C^1(\mathbb{C})$, $0 < \alpha < 1$. Sean μ,ν medidas de Borel regulares en $\mathbb{C}$ y en $\mathbb{C} \times \mathbb{C}$ respectivamente, y con soporte compacto. Definamos las siguientes transformadas, asociadas a g:

$$\hat{\mu}(w) = \int \ell(z,w)\ d\mu(z) \qquad , w \in \mathbb{C}$$

$$\hat{\hat{\nu}}_\alpha(w) = \int \frac{\ell(x,w)-\ell(y,w)}{|x-y|^\alpha}\, d\nu(x,y) \qquad , w \in \mathbb{C}$$

Ambas definiciones son correctas por el lema 4.2.3. las funciones $\hat{\mu}$ y $\hat{\hat{\nu}}_\alpha$ están definidas en todo punto de $\mathbb{C}$.

4.2.5. Lema. Supongamos ℓ, g, α, $\hat{\mu}$ y $\hat{\hat{\nu}}_\alpha$ en las condiciones de 4.2.4. Entonces $\hat{\mu}$ y $\hat{\hat{\nu}}_\alpha$ son continuas en $\mathbb{C}$.

Demostración. Sea $w_o \in \mathbb{C}$, y (w_n) una sucesión de puntos de $\mathbb{C}$ convergente hacia w_o. Por el apartado a) de 4.2.3. tendremos:

$$\ell(z, w_n) \to \ell(z,w_o) \text{ para todo } z \in \mathbb{C}$$

$$\text{y } \quad |\ell(z,w_n)| \leq M \text{ para } z \in \text{sop } \mu,\ n \in \mathbb{N}$$

Aplicando el teorema de la convergencia dominada se tendrá:

$$\hat{\mu}(w_n) \to \hat{\mu}(w_o).$$

Respecto a $\hat{\hat{\nu}}_\alpha$ tenemos:

$$\frac{\ell(x,w_n) - \ell(y,w_n)}{|x-y|^\alpha} \to \frac{\ell(x,w_o) - \ell(y,w_o)}{|x-y|^\alpha} \quad \text{para}$$

todo $x, y \in \mathbb{C}$ con $x \neq y$. Si $x = y$ ambas expresiones toman el valor 0.

De b) de 4.2.3. deducimos:

$$\frac{|\ell(x,w_n) - \ell(y,w_n)|}{|x-y|^\alpha} \leq M\,|x-y|^{1-\alpha} \qquad x,y \in \text{sop } \mu,\ n \in \mathbb{N}$$

Pero $M|x-y|^{1-\alpha} \in L^1_{loc}$ $(\mathbb{C} \times \mathbb{C}, \nu)$, por tanto es lícito aplicar el T.C.D. para deducir $\hat{\hat{\nu}}_\alpha(w_n) \to \hat{\hat{\nu}}_\alpha(w_o)$. //.

Será necesario definir la transformada $\hat{}$ para distribuciones. Para simplificar supondremos $g \in C^\infty(\mathbb{C})$.

4.2.6. Lema. Si $h \in D(\mathbb{C})$ entonces $\hat{h} \in C^\infty(\mathbb{C})$. La aplicación $h \in D(\mathbb{C}) \to \hat{h} \in C^\infty(\mathbb{C})$ es continua.

Demostración. Recordemos que si $h \in D(\mathbb{C})$, $\widehat{h}$ designa la transformada, relativa a g, definida en 4.2.4., de la medida hdm. Tengamos en cuenta la igualdad:

$$\widehat{h} = (hg)^{\vee} - g.\check{h}$$

Aplicando 1.1.4. deducimos que $\widehat{h} \in C^{\infty}(\mathbb{C})$. La continuidad se deduce de 1.1.5. y de la continuidad del producto por g. //.

<u>4.2.7. Definición</u>. Sea $g \in C^{\infty}(\mathbb{C})$ y T una distribución a soporte compacto en $\mathbb{C}$. La transformada de T (relativa a g) es la distribución:

$$\widehat{T}(\psi) = -T(\widehat{\psi}) \quad \text{para} \quad \psi \in D(\mathbb{C})$$

En virtud de 4.2.6. $\widehat{T}$ es una distribución. Necesitamos conocer el comportamiento de $\frown$ respecto a la derivación.

4.2.8. <u>Proposición</u>. Si $g \in C^{\infty}(\mathbb{C})$ y $h \in D(\mathbb{C})$ entonces:

a) $\bar{\partial}\widehat{h} = -2\,\bar{\partial}g.\check{h}$.

b) $-(\bar{\partial}h)^{\frown} = 2\,(\bar{\partial}g.h)^{\vee}$.

Si $T \in C^{\infty}(\mathbb{C})'$ entonces

a') $\bar{\partial}\widehat{T} = -2\,\bar{\partial}g.\check{T}$

b') $-(\bar{\partial}T)^{\frown} = 2\,(\bar{\partial}g.T)^{\vee}$.

Demostración. Tengamos en cuenta que:

$\widehat{h} = (hg)^{\vee} - g\,\check{h}$

Ahora bien, utilizando a) de 1.3.3., se tendrá:

$$\bar{\partial}\widehat{h} = -(\bar{\partial}g)(hg)^{\wedge} - \bar{\partial}g.\check{h} + g.\,\bar{\partial}g.\,\hat{h} =$$

$$= -\bar{\partial}g\left[(hg)^{\wedge} - g.\hat{h} + \check{h}\right] = -2\,\bar{\partial}g.\check{h}.$$

Para demostrar b) aplicaremos el teorema de Stokes. Sea $w \in \mathbb{C}$, elijamos un $R > o$ tal que sop $h \subset D_R(w)$ y sea ε, $o < \varepsilon < R$. Consideremos el abierto $G_\varepsilon = D_R(w) - \bar{D}_\varepsilon(w)$ y la forma diferencial:

$$\Omega(z) = \frac{(g(z) - g(w))^2}{z-w} \; h(z) \; dz.$$

En virtud del teorema de Stokes, se tendrá.

$$- \int_{\partial C(w,\varepsilon)} \frac{(g(z)-g(w))^2}{z-w} \; h(z) \; dz = \int_{G_\varepsilon} \frac{2 \; (g(z)-g(w))}{z-w} \; \bar{\partial} g(z) h(z) d\bar{z} \wedge dz$$

$$+ \int_{G_\varepsilon} \frac{(g(z)-g(w))^2}{z-w} \; \bar{\partial} h(z) \; d\bar{z} \wedge dz$$

Es fácil comprobar que los 3 integrandos son $O(1)$. Así que, haciendo $\varepsilon \to 0$ resulta:

$$- 2 \int \frac{(g(z) - g(w))}{z-w} \; \bar{\partial} g(z) h(z) \, dm(z) = \int \frac{(g(z) - g(w))^2}{z-w} \bar{\partial} h(z) \, dm(z)$$

que es precisamente b).

Para demostrar a') y b') basta aplicar b) y a). Omitimos la demostración, que es rutinaria. //.

4.3. DENSIDAD DE $R_o(X) + R_o(X)g + R_o(X)g^2$ EN $LIP(\alpha,X)$.

En primer lugar veremos una caracterización de dual de $lip(\alpha,X)$, $0 < \alpha < 1$. La idea original es de De Leew [24].

4.3.1. Proposición. Sea $\phi \in lip(\alpha,X)'$. Entonces existen dos medidas μ y ν de Borel regulares, respectivamente en X y en X x X y tales que para toda $f \in lip\,(\alpha, X)$ se tiene:

$$\phi\,(f) = \int_X f\,d\,\mu + \int_{X \times X} \frac{f(x) - f(y)}{|x - y|^\alpha}\,d\,\nu(x,y) \qquad (1)$$

Demostración. Precisemos que el valor que se atribuye al símbolo $\frac{f(x) - f(y)}{|x - y|^\alpha}$ para $x = y$ es 0. Consideremos el espacio compacto $M = X \cup (X \times X)$ dotado de la topología de la unión disjunta. Consideremos la siguiente aplicación lineal:

$$\begin{aligned} F : lip(\alpha,X) &\to C(M) \\ f &\to F(f) = \tilde{f} \end{aligned}$$

donde $\tilde{f}$ se define:

$$\begin{aligned} \tilde{f}(x) &= f\,(x) && , \text{ si } x \in X \\ \tilde{f}(x,y) &= \frac{f(x) - f(y)}{|x-y|^\alpha} && , \text{ si } (x,y) \in (X \times X) - \Delta \\ \tilde{f}(x,x) &= 0 && , \text{ si } x \in X \end{aligned}$$

Por el hecho de ser $f \in lip\,(\alpha,X)$ se deduce que $\tilde{f} \in C\,(M)$ y además $\|\tilde{f}\|_\infty = \|f\|_{lip\alpha}$. Por tanto F es una isometría. La forma lineal ϕ puede ser definida en $F(lip\,(\alpha, X))$ y ser extendida a todo $C(M)$ por el teorema de Hahn Banach. Aplicando el teorema de representación de Riesz deducimos que existe una medida de Borel regular ω sobre M tal que:

$$\phi(f) = \int_M \tilde{f}\,d\omega \qquad \text{si } f \in lip(\alpha,X) \qquad (2)$$

Si definimos $\mu = \omega_{|X}$ y $\nu = \omega_{|X \times X}$ deducimos (1) de (2).//.

Si $\phi \in lip(\alpha,X)'$ denotaremos por ϕ la distribución de orden 1 con soporte compacto definida en 4.1.3.

Veamos un resultado del tipo de 4.1.4.

4.3.2. Proposición. Sea ϕ una forma lineal continua sobre $\mathrm{lip}(\alpha,X)$. Entonces la transformada $\hat{\phi}_1$ de ϕ_1, relativa a g, es una medida absolutamente continua respecto de la medida de Lebesgue.

Demostración. En virtud 4.3.1. existen medidas μ,ν en X y en X x X que verifican (1). Si $\psi \in \mathbb{C}^1$ (C) entonces:

$$\hat{\phi}_1(\psi) = -\phi_1(\hat{\psi}) = -\phi(\hat{\psi}_{|X}) = \int_X \hat{\psi}\, d\mu +$$

$$+ \int_{X\times X} \frac{\hat{\psi}(x)-\hat{\psi}(y)}{|x-y|^{\alpha}}\, d\nu(x,y) = \int_X \Big(\int_{\mathrm{sop}\,\psi} \ell(z,w)\psi(z)\, dm(z)\Big) d\mu(w)$$

$$+ \int_{X\times X} \Big(\int_{\mathrm{sop}\,\psi} \frac{\ell(z,x)-\ell(z,y)}{|x-y|^{\alpha}}\, \psi(z)\, dm(z)\Big)\, d\nu(x,y) \qquad (3)$$

Tengamos en cuenta el lema 4.2.3. para observar que

$$|\ell(z,w)\,\psi(z)| \leq M\, \|\psi\|_{\infty},\ w \in X,\ z \in \mathrm{sop}\,\psi$$

y

$$\Big| \frac{\ell(z,x)-\ell(z,y)}{|x-y|^{\alpha}}\, \psi(z)\Big| \leq M|x-y|^{1-\alpha}\, \|\psi\|_{\infty},\ z\in \mathrm{sop}\,\psi, \qquad x,y \in X$$

Por tanto es lícito aplicar en (3) el teorema de Fubini para obtener:

$$\int \psi(z) \Big(\int \ell(z,w)\, d\mu(w)\Big)\, dm(z) + \int \psi(z) \Big(\int_{X\times X} \frac{\ell(z,x)-\ell(z,y)}{|x-y|^{\alpha}}\, d\nu(x,y) dm(z)$$

$$= -\int \psi(z)\, \big(\hat{\mu}(z) + \hat{\hat{\nu}}_{\alpha}(z)\big)\, dm(z).$$

luego $\hat{\phi}_1 = -(\hat{\mu} + \hat{\hat{\nu}}_{\alpha})dm$ //.

4.3.3. Teorema. Sea X un compacto de $\mathbb{C}$ con interior vacío, g una función de clase C^2 en un entorno de X y $Z = \{x\in X \mid \bar{\partial} g(x) = 0\}$.

Entonces se verifica si $0 < \alpha < 1$:

$R_o(X) + R_o(X)g + R_o(X)g^2$ es denso en lip (α,X) sí y sólo si $R_o(Z)$ es denso en lip (α,Z).

Demostración. Supongamos que $R_o(Z)$ es denso en lip (α,Z) y que $g \in C^2$ $(\mathbb{C})$. Sea ϕ una forma lineal continua sobre lip (α,X) que sea ortogonal a $R_o(X) + R_o(X)g + R_o(X)g^2$, y consideremos la distribución a soporte compacto ϕ_1. En virtud de 4.3.1. existen medidas μ y ν en X y en X x X respectivamente, que satisfacen

$$\widehat{\phi}_1 \ (\psi) = - \int \psi \ (\widehat{\mu} + \widehat{\widehat{\nu}}_\alpha) dm \ , \ \text{para } \psi \in C^1 \ (\mathbb{C}) \qquad (4)$$

Si $w \notin X$, entonces $\ell(z,w) = \dfrac{\left(g(z) - g(w)\right)^2}{z - w} \in R_o(X) + R_o(X)g + R_o(X)g^2$, por tanto

$$\phi_1 \ \left(\ell(\cdot,w)\right) = 0, \text{ para } w \notin X$$

Ahora,

$$\phi_1 \ \left(\ell(\cdot,w)\right) = \int \ell(\cdot,w)d\mu + \int \frac{\ell(x,w) - \ell(y,w)}{|x - y|^\alpha} d\nu(x,y) =$$

$$= - \left(\widehat{\mu}(w) + \widehat{\widehat{\nu}}_\alpha \ (w) \right) \ , \ w \notin X.$$

Por tanto $\widehat{\mu}(w) + \widehat{\widehat{\nu}}_\alpha(w) = 0$ para $w \notin X$ de donde sop $\widehat{\phi}_1 \subset X$. Además por 4.2.5. y por el hecho de ser $\overset{\circ}{X} = \phi$ se deduce que $\widehat{\mu} + \widehat{\widehat{\nu}}_\alpha = 0$ en todo $\mathbb{C}$. En (4) se tendrá $\widehat{\phi}_1(\psi) = 0$ para toda $\psi \in C^1(\mathbb{C})$, deduciéndose que $\widehat{\phi}_1 = 0$. Recordando a) de 4.2.8. se tiene:

$$\bar{\partial} \widehat{\phi}_1 = - 2 \bar{\partial}g.\check{\phi}_1$$

de donde $\bar{\partial} \left(\dfrac{\bar{\partial} \widehat{\phi}_1}{\bar{\partial}g} \right) = 2 \bar{\partial}g \hat{\phi}_1$. Como sop $\hat{\phi}_1 \subset X$ (ya que ϕ_1 es ortogonal a $R_o(X)$) se deduce que $\hat{\phi}_1 = 0$ en $\mathbb{C}$-Z. Ahora se concluye el razonamiento como en 4.1.5.

La implicación recíproca también es idéntica a la de 4.1.5.//.

Como corolario podemos enunciar, con el mismo comentario que 4.1.6.

4.3.4. Corolario. Sean X un compacto de C, g y Z en las condiciones habituales. Son equivalentes:

a) $R_o(X) + R_o(X)g + R_o(X)g^2$ es denso en lip (α, X)

b) Existe $C > 0$ y $M^{1+\alpha}(D-Z) \geqslant C\, r^{1+\alpha}$ para todo disco abierto D de radio r.

4.4. APROXIMACION EN NORMA DE CLASE C^1.

Sea X un compacto de $\mathbb{C}$. Denotaremos por $C^1(X)$ el espacio de restricciones a X de las funciones diferenciales con continuidad en un entorno de X. Dotaremos a este espacio (que no será completo) de la norma:

$$\| f \|_1 = \text{máx}\,\{\| f \|_\infty, \| \bar{\partial} f \|_\infty, \| \partial f \|_\infty\}$$

En esta sección aprovechamos las ideas, introducidas en 4.3., para demostrar un teorema del tipo de Hartogs-Rosenthal. Veamos primero una caracterización del dual de $C^1(X)$.

4.4.1. Proposición. Sea X un compacto de $\mathbb{C}$ y $\phi \in C^1(X)'$. Entonces existen tres medidas de Borel regulares en X, denotadas por μ_1, μ_2, μ_3 tales que para toda $f \in C^1(X)$.

$$\phi(f) = \int f\, d\mu_1 + \int \partial f\, d\mu_2 + \int \bar{\partial} f\, d\mu_3$$

Demostración. Escribamos $X_i = X \times \{i\}$, para $i = 1,2,3$. Dotemos a los espacios X_i de la topología producto. Sea $M = X_1 \cup X_2 \cup X_3$ dotado de la topología de la unión disjunta. Si $f \in C^1(X)$ definimos una función $\tilde{f}$ del siguiente modo:

$$\tilde{f}(x,1) = f(x)$$
$$\tilde{f}(x,2) = \partial f(x)$$
$$\tilde{f}(x,3) = \bar{\partial} f(x) \qquad \text{para} \qquad x \in X$$

Ya que $\tilde{f} \in C(M)$ y $\|\tilde{f}\|_\infty = \|f\|_1$, la aplicación $f \in C^1(X) \to \tilde{f} \in C(M)$ es una isometría lineal (no exhaustiva). Si ϕ es una forma lineal continua sobre $C^1(X)$ es factible definir un funcional $\tilde{\phi}$ sobre $C(M)$ tal que para toda $f \in C^1(X)$ se tenga $\tilde{\phi}(\tilde{f}) = \phi(f)$. Por el teorema de representación de Riesz, existe una medida μ sobre M tal que

$$\phi(f) = \int \tilde{f}\, d\mu = \int_{X_1} f\, d\mu + \int_{X_2} \partial f\, d\mu + \int_{X_3} \bar{\partial} f\, d\mu$$

para $f \in C^1(X)$.

Sea μ_i la medida sobre X transportada, mediante el homeomorfismo natural de X en X_i, de $\mu_{|X_i}$. Es evidente que las μ_i cumplen lo deseado. //.

Toda forma lineal y continua ϕ sobre $C^1(X)$ induce de modo natural una distribución de orden 1, a soporte compacto incluido en X, del mismo modo que en 4.1.3; tal distribución será denotado por ϕ_1. Si $g \in C^2(\mathbb{C})$ tiene sentido definir la transformada de ϕ_1 respecto a g como en 1.1.6; será denotada por ϕ_1. El resultado siguiente precisa la naturaleza de ϕ_1 como distribución.

<u>4.4.2. Proposición</u>. Sean $g \in C^2(\mathbb{C})$, X un compacto de $\mathbb{C}$ y $\phi \in C^1(X)'$. Entonces la transformada ϕ_1 es una medida absolutamente continua respecto a la medida de Lebesgue.

Demostración. Sean μ_1, μ_2, μ_3 las medidas proporcionadas por 4.4.1. Entonces, para $f \in D^1(\mathbb{C})$:

$$\phi_1 \ (f) = \int f \, d\mu_1 + \int \partial f \, d\mu_2 + \int \bar{\partial} f \, d\mu_3$$

Calculemos $\check{\phi}_1(f)$ para $f \in D^1(\mathbb{C})$:

$$\check{\phi}_1 \ (f) = \phi_1(\check{f}) = \int \check{f} \, d\mu_1 + \int \partial \check{f} \, d\mu_2 + \int \bar{\partial} \check{f} \, d\mu_3 \qquad (1)$$

Tengamos en cuenta la proposición 1.3.3. para el cálculo de las derivadas de $\check{f}$. A partir de (1):

$$\check{\phi}_1(f) = \int \left(\int \frac{g(z) - g(w)}{z-w} f(z) \, dm(z) \right) d\mu_1 (w) -$$

$$- \int \partial g(w) \left(\int \frac{1}{z-w} f(z) \, dm(z) \right) d\mu_2 (w) +$$

$$+ \int \left(\int \frac{g(z) - g(w)}{(z-w)^2} f(z) \, dm(z) \right) d\mu_2 (w) -$$

$$- \int \bar{\partial} g(w) \left(\int \frac{1}{z-w} f(z) \, dm(z) \right) d\mu_3 (z) \qquad (2)$$

Para $z \in \sup f$ y $w \in X$ obtenemos, mediante el teorema del valor medio, las siguientes acotaciones:

$$\left| \frac{g(z) - g(w)}{z-w} f(z) \right| \leq \sup_{s \in [X, \text{ sop } f]} \| Dg(s) \| \cdot \| f \|_\infty$$

$$\left| \frac{g(z) - g(w)}{(z-w)^2} f(z) \right| \leq \sup_{s \in [X, \text{ sop } f]} \| Dg(s) \| \cdot \| f \|_\infty \frac{1}{|z-w|}$$

$$\left| \bar{\partial} g(w) \frac{1}{z-w} f(z) \right| \leq \| \bar{\partial} g . f \|_\infty \frac{1}{|z-w|}$$

Podemos aplicar ahora el teorema de Fubini en (2) para deducir:

$$\check{\phi}_1(f) = \int f\ (z)\ \check{\mu}_1(z)\ dm\ (z) + \int f\ (z)\ (\partial\ g.\mu_3)\hat{}(z)\ dm(z)$$

$$+ \int f(z)\ \check{\check{\mu}}_2(z)\ dm(z) + \int f\ (z)\ (\bar{\partial}\ g\ .\ \mu_3)\hat{}(z)\ dm(z) \qquad (3)$$

donde se ha escrito

$$\check{\check{\mu}}_2\ (z) = \int \frac{g(z) - g(w)}{(z - w)^2}\, d\mu_2\ (w) \quad , \qquad z \in \mathbb{C}$$

que es una función definida casi por todo y localmente integrable. Agrupando en (3) concluimos:

$$\check{\phi}_1\ (f) = \int f\ h\ dm \qquad , \qquad \text{para } f \in D^1\ (\mathbb{C})$$

siendo h la función localmente integrable:

$$h = \check{\mu}_1 + (\bar{\partial}\ g.\ \mu_2)\hat{} + \check{\check{\mu}}_2 + (\bar{\partial}\ g\ .\mu_3)\hat{}. \qquad //.$$

<u>4.4.3. Lema</u>. Sea X un compacto de $\mathbb{C}$, sea g una función de clase C^2 en un entorno de X y supongamos que para todo $z \in X$ $\bar{\partial}g\ (z) \neq 0$. Si $\phi \in C^1\ (X)'$ se verifica:

ϕ es ortogonal a $R_o(X) + R_o\ (X)\ g$ sí y sólo sí sop $\check{\phi}_1 \subset X$.

Demostración. Supondremos $g \in C^2\ (\mathbb{C})$. Sea $\phi \in C^2\ (X)'$ ortogonal a $R_o\ (X) + R_o(X)\ g$ y $\psi \in D^1\ (\mathbb{C})$ con sop $\psi \cap X = \phi$. Entonces:

$$\check{\phi}_1(\psi) = \phi_1(\check{\psi}) = \phi_1\ \left(\int_{\text{sop}\psi} \frac{g(z)}{z-w}\, \psi(z)dm(z) - g(w) \int_{\text{sop}\psi} \frac{\psi(z)}{z-w}\, dm(z)\right) = 0$$

Supongamos ahora que sop $\check{\phi}_1 \subset X$. En virtud de 1.3.3., en un entorno de X en el cual $\bar{\partial}g$ no se anule, se cumple: $\phi_1 = \bar{\partial}\left(\frac{\bar{\partial}\ \check{\phi}_1}{\bar{\partial}\ g}\right)$

Si $\psi \in R_o(X) + R_o\ (X)g$ se obtiene:

$$\phi\ (\psi) = \phi_1(\psi) = \bar{\partial}\left(\frac{\bar{\partial}\ \check{\phi}_1}{\bar{\partial}\ g}\right)(\psi) = \check{\phi}_1\ \left(\bar{\partial}\ \left(\frac{\bar{\partial}\ \psi}{\bar{\partial}\ g}\right)\right) = 0. \qquad //.$$

Del resultado precedente se deduce que si $\phi \in C^1(X)'$ es ortogonal a $R_o(X) + R_o(X)g$ entonces $h = \check{\mu}_1 + (\bar{\partial} g\, \mu_2)\hat{} + \check{\mu}_2 + (\bar{\partial} g\, \mu_3)\hat{}=0$ en $\mathbb{C} - X$ pues $\check{\phi}_1$ es la medida hdm.

4.4.4. Teorema. Sea X un compacto de $\mathbb{C}$ tal que $m(\partial X) = 0$. Sea g una función de clase C^2 en un entorno de X y supongamos que para todo $z \in X$ $\bar{\partial} g(z) \neq 0$. Si $f \in C^2(X)$ son equivalentes estas afirmaciones:

a) f es límite en $C^1(X)$ de funciones de $R_o(X) + R_o(X)g$.

b) $f_{|X} \in R(X) + R(X)g$.

Hacemos observar que, en general, $R(X) + R(X)g \subsetneq R_g(X)$ y que, por tanto, a)$\rightarrow$b) limita, en $R_g(X)$, la clase de funciones que pueden ser aproximadas en norma $C^1(X)$ por funciones de $R_o(X) + R_o(X)g$.

Demostración. a)$\rightarrow$b) Sean $f_n = h_n + gk_n$ funciones tales que $C^1 - \lim_n (h_n + gk_n) = f$. Entonces $\bar{\partial} g . k_n \longrightarrow \bar{\partial} f$ uniformemente en X. Como $\bar{\partial} g(z) \neq 0$ en X, deducimos que los $k_n \in R_o(X)$ constituyen una sucesión uniformemente convergente en X, de donde:

$$\bar{\partial} g\, k = \bar{\partial} f \quad \text{en } X$$

para una cierta función $k \in R(X)$. Ya que $h_n = f_n - gk_n$ converge uniformemente en X hacia $h = f - g\,k$, deducimos $f=h+gk \in R(X)+ R(X)g$. Notemos que han sido utilizadas las hipótesis $f \in C^2(X)$ y $m(\partial X) = 0$.

b $\Rightarrow$ a) Si $\phi \in C^1(X)'$ es ortogonal a $R_o(X) + R_o(X)g$, se ha de probar que $\phi(f) = \phi_1(f) = 0$. Teniendo en cuenta que sop $\phi_1 \subset X$ (por 4.4.3.), que $\check{\phi}_1$ es una medida absolutamente continua respecto a la de Lebesgue, y 1.3.3. deducimos:

$$\phi(f) = \phi_1(f) = \bar{\partial}\left(\frac{\bar{\partial}\, \check{\phi}_1}{\bar{\partial} g}\right)(f) = \check{\phi}_1\left(\bar{\partial}\left(\frac{\bar{\partial} f}{\bar{\partial} g}\right)\right) =$$

$$= \int_X \bar{\partial} \left(\frac{\bar{\partial} f}{\bar{\partial} g} \right) h \, dm = \int_{\mathring{X}} \bar{\partial} \left(\frac{\bar{\partial} f}{\bar{\partial} g} \right) h \, dm = 0,$$

ya que $\bar{\partial} \left(\frac{\bar{\partial} f}{\bar{\partial} g} \right) = 0$ en $\mathring{X}$ y $m(\partial X) = 0$. //.

4.4.5. Corolario. Sea X un compacto con $m(X) = 0$. Sea $g \in C^2$ en un entorno de X y supóngase que $\bar{\partial} g(z) \neq 0$, $z \in X$. Entonces toda función de clase C^2 en un entorno de X es límite en norma C^1 de funciones del módulo $R_0(X) + R_0(X)g$.

Demostración. Basta tener en cuenta que $R(X) + R(X)g = C(X)$ en virtud del teorema de Hartogs-Rosenthal 0.1.1.1. y aplicar b) => a) de 4.4.5. //.

Nos parece interesante hacer notar que se conoce muy poco sobre aproximación racional en norma $C^1(X)$. Esta aproximación está relacionada con la aproximación en Lip $(1,X)$, sobre la cual se puede afirmar lo mismo, salvo algún pequeño resultado de O'Farrell Una de las dificultades para proceder por dualidad, en el caso racional, es que no es conocido un teorema análogo a 4.4.2. para la transformada de Cauchy de ϕ_1. Ello es consecuencia de que en el caso racional aparece la integral singular $\frac{1}{(z-w)^2}$, mientras que en nuestro caso de singularidad más fuerte es del tipo $\frac{g(z) - g(w)}{(z-w)^2}$ o sea del tipo $\frac{1}{z-w}$. Actualmente hay varios autores estudiando problemas de aproximación racional en norma C^1, entre ellos, Wang, O'Farrell y J.M. Burgués.

CAPITULO 5

LOCALIZACION

Este capítulo consta de dos partes bien diferenciadas. Los resultados centrales 5.1.5., 5.1.3. de la primera parte muestran que $R_g(X)$ y $R_g^p(X)$ están definidos por condiciones locales si Z es finito. La demostración se basa en las propiedades de un operador de localización del tipo del de Vituskin. La segunda parte sirve como conclusión de la presente memoria; se presentan varias cuestiones abiertas y conjeturas relacionadas con los capítulos anteriores.

5.1. EL OPERADOR DE LOCALIZACION.

5.1.1. Definición. Sean $g \in C^2(\mathbb{C})$ y $f \in C(S^2)$. Escribamos $S=\{w \in \mathbb{C} / \bar{\partial} g(w)=0\}$. Sea $h \in D(\mathbb{C})$ holomorfa en un entorno de S. El operador de localización, relativo a g, se define:

$$F_h(w)=\frac{1}{\pi}\int (f(z)+f(w))\bar{\partial}\left(\frac{\bar{\partial}h}{\bar{\partial}g}\right)(z)\frac{g(z)-g(w)}{z-w}\,dm(z) +$$

$$+\frac{2}{\pi}\int f(z)\bar{\partial}h(z)\frac{1}{z-w}\,dm(z) \qquad ,\text{para } w\in\mathbb{C}.$$

En virtud de 1.2.2. y 0.1.5. F_h puede ser escrito también como:

$$F_h(w) = h(w)f(w) + \frac{1}{\pi}\int f(z)\bar{\partial}\left(\frac{\bar{\partial}h}{\bar{\partial}g}\right)(z)\frac{g(z)-g(w)}{z-w}\,dm(z) +$$

$$+ \frac{2}{\pi}\int f(z)\bar{\partial}h(z)\frac{1}{z-w}\,dm(z) = \frac{1}{\pi}\int \frac{f(z)-f(w)}{z-w}\,\bar{\partial}\left(\frac{\bar{\partial} h}{\bar{\partial} g}\right)(z)\,(g(z)-g(w))\,dm(z)$$

$$+ \frac{2}{\pi}\int \frac{f(z)-f(w)}{z-w}\,\bar{\partial}h(z)\,dm(z). \qquad (1)$$

Observemos que el último miembro constituye el operador de localización de Vituskin [17]. La importancia del operador introducido puede verse en la siguiente:

5.1.2.Proposición.Supongamos que g, f, S y h están en las condiciones de la definición anterior. Entonces se verifica:

a) F_h es continua en S^2 y $F_h(\infty)=0$.

b) Para todo compacto X incluido en $\mathbb{C}$-soph, se tiene que F_h pertenece a $R_g(X)$.

c) Si f se escribe de la forma $k_1 + k_2 g$ en un abierto U, con k_1 y k_2 holomorfas en U, entonces F_h puede ser escrita del mismo modo en U.

Demostración. a) Como F_h puede escribirse

$$F_h = hf + \frac{1}{\pi}\left(f.\bar{\partial}\left(\frac{\bar{\partial}h}{\bar{\partial}g}\right)g\right)^{\wedge} - g\left(\frac{1}{\pi}f\bar{\partial}\left(\frac{\bar{\partial}h}{\bar{\partial}g}\right)\right)^{\wedge} + \frac{2}{\pi}(f\,\bar{\partial}h)^{\wedge} ,$$

lo enunciado en a) se deduce de las correspondientes propiedades de la transformada de Cauchy (0.1.3.y 0.1.6.).

b) Si w no pertenece a sop h podemos escribir

$$F_h(w) = \frac{1}{\pi}\int f(z)\left(\bar{\partial}\left(\frac{\bar{\partial}h}{\bar{\partial}g}\right)(z)g(z) + 2\bar{\partial}h(z)\right)\frac{1}{z-w}\,dm(z) -$$

$$g(w)\frac{1}{\pi}\int f(z)\bar{\partial}\left(\frac{\bar{\partial}h}{\bar{\partial}g}\right)(z)\frac{1}{z-w}\,dm(z) = k_1(w) + k_2(w)g(w).$$

Como k_1 y k_2 son funciones holomorfas en $\mathbb{C}$-sop h y X está incluido en $\mathbb{C}$-sop h, resulta que $k_1, k_2 \varepsilon R_o(X)$ y, por consiguiente, $F_h \varepsilon\ R_g(X)$.

c) Sea U un abierto en el cual $f = k_1 + k_2 g$ con k_1, k_2 holomorfas en U. Utilizando la fórmula $\bar\partial \hat{\mu} = -\pi\mu$ (0.1.25) y la expresión primera de F_h en (1) se obtiene:

$$\bar\partial F_h = \bar\partial h.f + h.\bar\partial f - f\bar\partial(\frac{\bar\partial h}{\bar\partial g})g - \bar\partial g.\frac{1}{\pi}\int f.\bar\partial(\frac{\bar\partial h}{\bar\partial g})\frac{1}{z-w}\,dm$$

$$+gf\bar\partial(\frac{\bar\partial h}{\bar\partial g}) - 2f\bar\partial h = h\bar\partial f - f\bar\partial h\ -$$

$$-\bar\partial g.\frac{1}{\pi}\int f(z)\bar\partial(\frac{\bar\partial h}{\bar\partial g})(z)\frac{1}{z-w}\,dm(z) \qquad (2)$$

Teniendo en cuenta en (2) que $\bar\partial f = k_2\bar\partial g$ en U:

$$\bar\partial F_h = \bar\partial g\ \Big(k_2 h - f\frac{\bar\partial h}{\bar\partial g} - \frac{1}{\pi}\int f(z)\bar\partial(\frac{\bar\partial h}{\bar\partial g})(z)\frac{1}{z-w}dm(z)\Big) \quad (3)$$

siendo la igualdad válida sólo en U. Por las hipótesis sobre h,el símbolo $\frac{\bar\partial h}{\bar\partial g}$ tiene sentido y verifica $\frac{\bar\partial h}{\bar\partial g}.\bar\partial g = \bar\partial h$.

Denotemos por p la función encerrada entre paréntesis en (3). Veamos que p es holomorfa en U calculando $\bar\partial p$:

$$\bar\partial p = \bar\partial\Big(k_2 h - f\,\frac{\bar\partial h}{\bar\partial g} - \frac{1}{\pi}\int f.\bar\partial(\frac{\bar\partial h}{\bar\partial g}).\frac{1}{z-w}\,dm\Big) =$$

$$k_2\bar\partial h - \bar\partial f\,\frac{\bar\partial h}{\bar\partial g} - f\bar\partial(\frac{\bar\partial h}{\bar\partial g}) + f\bar\partial(\frac{\bar\partial h}{\bar\partial g}) = k_2\bar\partial h - k_2\bar\partial g\frac{\bar\partial h}{\bar\partial g} = 0.$$

De todo ello se deduce que $\bar\partial F_h = \bar\partial g.p$ en U, con p holomorfa, por consiguiente $F_h = h_1 + h_2 g$ en U siendo h_1, h_2 holomorfas en U.

//.

Es posible que el operador F_h sea el substituto del operador de localización de Vituskin en la teoría constructiva de aproximación por funciones de $R_o(X) + R_o(X)g$.

La demostración del siguiente teorema está inspirada en la demostración del teorema de Bishop, tal como se encuentra en Zaclman [49].

5.1.3. Teorema. Sea X un compacto de $\mathbb{C}$, g una función de clase C^2 en un entorno de X y supongamos que el conjunto $Z=\{w\varepsilon X/\bar\partial g(w)=0\}$ es finito. Si $f\varepsilon C(X)$ es tal que para todo $x\varepsilon X$ existe un disco cerrado D_x con $f|_{D_x}\varepsilon R_g(D_x\cap X)$ entonces $f\varepsilon R_g(X)$. En particular, bajo las hipótesis precedentes, $R_g(X)$ es un módulo local.

Demostración. Extendamos f a todo $\mathbb{C}$ por el teorema de Tietze-Uryshon y supongamos g de clase C^2 en todo $\mathbb{C}$ y con soporte compacto. Elijamos un recubrimiento de X por los interiores de discos cerrados $D_1, \ldots D_n$, de modo que cada punto de Z esté contenido en un único disco, y tal que $f|_{D_i}\varepsilon R_g(D_i\cap X)$. Elijamos una partición de la unidad subordinada a $\mathring{D}_1 \ldots \mathring{D}_n$ como en [36, pág. 41], es decir funciones ψ_j, tales que

$0\leqslant \psi_j\leqslant 1$, $\psi_j\varepsilon D(\mathbb{C})$, sop $\psi_j\subset \mathring{D}_j$, $\psi(z)=\sum\psi_j(z)=1$,

para z de un entorno V compacto de X, $V\subset\bigcup_{i=1}^{n}\mathring{D}_i$.

Fijemos $1\leqslant j\leqslant n$. Entonces o $D_j\cap Z=\emptyset$ o D_j contiene un único punto de Z. En el primer caso ψ_j es cero en un entorno de Z. En el segundo caso si $Z\cap D_j=\{z_j\}$ resulta que ψ_j vale 1 en un entorno de z_j y cero en un entorno de $Z-\{z_j\}$. En ambos casos ψ_j es holomorfa en un entorno de Z. Consideremos la función:

$$F_j(w)=f(w)\psi_j(w)+\frac{1}{\pi}\int f(z)\bar\partial\left(\frac{\bar\partial\psi_j}{\bar\partial g}\right)(z)\frac{g(z)-g(w)}{z-w}dm(z)+$$

$$\frac{2}{\pi}\int f(z)\bar{\partial}\psi_j(z)\frac{1}{z-w}\,dm(z) \qquad 1\leq j\leq n \qquad (4)$$

La función F_j está bien definida pues ψ_j es holomorfa en un entorno de Z. Sumando en (4) respecto a j

$$\Sigma F_j(w) = f(w)\psi(w) + \frac{1}{\pi}\int f(z)\bar{\partial}\left(\frac{\bar{\partial}\psi}{\bar{\partial}g}\right)(z)\frac{g(z)-g(w)}{z-w}\,dm(z)+$$

$$+\frac{2}{\pi}\int f(z)\bar{\partial}\psi(z)\frac{1}{z-w}\,dm(z)=f(w)\psi(w)+\alpha(w)+\beta(w) \qquad (5)$$

Como $\psi = 1$ en el entorno V de X, las integrales en (5) están extendidas a $\mathbb{C}$-V, por tanto α, $\beta\varepsilon R_g(X)$.

Así que es suficiente probar que $F_j\, \varepsilon R_g(X)$ para todo j. Fijemos j. Dado $\varepsilon>0$ existe, por hipótesis, $h_j'\varepsilon R_o(X\cap D_j)+R_o(X\cap D_j)g$, tal que $\|f-h_j'\|_{D_j\cap X}<\varepsilon$ .Sea V_j un entorno relativamente compacto de $D_j\cap X$, en cuya adherencia h_j' está definida y en el que todavia se cumpla $\|f-h_j'\|_{\overline{V}_j}<\varepsilon$.

Sea $g_j\varepsilon C(S^2)$ tal que $g_j= f-h_j'$ en V_j y $\|g_j\|_{S^2} = \|f-h_j'\|_{V_j}<\varepsilon$. Definamos $h_j=f-g_j\, \varepsilon\, C(S^2)$. Es claro que h_j coincide con h_j' en $\overline{V}_j$ y que $\|f-h_j\|_{S^2}<\varepsilon$.

Sea H_j la función :

$$H_j(w) = h_j(w)\psi_j(w) + \frac{1}{\pi}\int h_j(z)\bar{\partial}\left(\frac{\bar{\partial}\,\psi_j}{\bar{\partial}\,g}\right)(z)\frac{g(z)-g(w)}{z-w}\,dm(z)$$

$$+\frac{2}{\pi}\int h_j(z)\bar{\partial}\psi_j(z)\frac{1}{z-w}\,dm(z)\ , \qquad w\varepsilon\mathbb{C} \qquad (6)$$

Por las mismas consideraciones que en (4) las funciones H_j están bien definidas.

Por el apartado b) de 5.1.2. H_j es de la forma $H_j = \alpha_j + \beta_j g$ en $\mathbb{C}-D_j$ con α_j, β_j holomorfas. Por c) de la misma proposición $H_j = \alpha'_j + \beta'_j g \in H(V_j) + H(V_j)g$. Como $V_j \cap (\mathbb{C}-D_j) \neq \emptyset$, deducimos por 2.1.6. que H_j pertenece a $H(V_j \cup (\mathbb{C}-D_j)) + H(V_j \cup (\mathbb{C}-D_j))g$, pero $X \subset V_j \cup (\mathbb{C}-D_j)$, de donde, por el teorema de Runge, deducimos que $H_j \in R_g(X)$.

Teniendo en cuenta (4) y (6):

$$|H_j(w) - F_j(w)| \leqslant ||h_j - f|| + \frac{1}{\pi}\int |f(z)-h_j(z)|\,\bar\partial\left(\frac{\bar\partial\psi_j}{\bar\partial g}\chi\right)(z)\,\frac{g(z)-g(w)}{z-w}$$

$$+ \frac{2}{\pi}\int |f(z)-h_j(z)|\,|\bar\partial\psi_j(z)|\,\frac{1}{|z-w|} \leqslant$$

$$||h_j - f|| + ||f - h_j||\,\frac{1}{\pi}\int \left|\bar\partial\left(\chi\frac{\bar\partial\psi_j}{\bar\partial g}\right)(z)\right|\,\left|\frac{g(z)-g(w)}{z-w}\right| +$$

$$||f - h_j||\,\frac{2}{\pi}\int |\bar\partial\psi_j(z)|\,\frac{1}{|z-w|}\,dm(z) \leqslant ||h_j - f||\,(1+M) <$$

$$\leqslant (1+M)\varepsilon\ .$$

Donde M designa el máximo de los números:

$$\sum_j ||Dg||_\infty \frac{1}{\pi}\int \left|\bar\partial\left(\frac{\bar\partial\psi_j}{\bar\partial g}\right)\right| dm$$

$$\sup_{w\in\mathbb{C}} \sum_j \frac{2}{\pi}\int |\bar\partial\psi_j(z)|\,\frac{1}{|z-w|}\,dm(z)$$ //.

<u>5.1.4. Corolario.</u> Sea X un compacto de $\mathbb{C}$, h una función holomorfa en un entorno abierto U de X, no constante en ninguna componente de U. Entonces $R_{\bar h}(X)$ es un módulo local.

Demostración. Basta tener en cuenta que $\bar\partial \bar h = \overline{\partial h}$, y que, por tanto, Z es un conjunto finito y aplicar 5.1.3. . //.

El caso particular de 5.1.4. para $h(z)=z$ fue demostrado por O'Farrell [28] y Weinstoch [46].

Ahora aplicaremos las técnicas anteriores para obtener un teorema de localización para $R_g^p(X)$.

5.1.5. Teorema. Sea X un compacto de $\mathbb{C}$, g una función de clase C^2 en un entorno de X, y supongamos que $Z=\{w\varepsilon X/\bar{\partial}g(w)=0\}$ es un conjunto finito. Si $f\varepsilon L^p(X)$, $1\leq p<\infty$, y para todo $x\varepsilon X$ existe un disco cerrado D_x tal que $f_{|D_x}\varepsilon R_g^p(D_x\cap X)$ entonces $f\varepsilon R_g^p(X)$. En particular $R_g^p(X)$ es local.

Demostración. Observemos en primer lugar que el operador de 5.1.1. está definido en casi todo punto si suponemos que $f\varepsilon L^p(\mathbb{C})$. En efecto si $h\varepsilon D(\mathbb{C})$ entonces

$$f\ \bar{\partial}\left(\frac{\bar{\partial}h}{\bar{\partial}g}\right)\frac{g-g(w)}{z-w}\varepsilon\ L^1_{loc}\ ,\ \text{para todo } w\varepsilon\mathbb{C},$$

y además la convolución de $f\bar{\partial}h$ (εL^1_{loc}) con $\dfrac{1}{z}$ está definida en casi todo punto, por tanto en (1) los tres miembros tienen sentido para casi todo $w\varepsilon\mathbb{C}$.

Supondremos la función f extendida por cero a todo $\mathbb{C}$, sin cambio de notación, y lo mismo para g que supondremos en $D^2(\mathbb{C})$. Consideremos los mismos discos $D_1,\dots D_n$ y las mismas funciones $\psi_1,\dots\psi_n$ que en 5.1.3. . Definimos F_j como en (4), de manera que:

$$\Sigma F_j = f\psi + \alpha + \beta \quad \text{c.p.t.} \qquad (7).$$

Además $\alpha,\beta\varepsilon R_g^p(X)$. Es suficiente probar que $F_j\varepsilon R_g^p(X)$.

Sea $\varepsilon>0$ y fijemos j. Consideremos h_j' y V_j como en el teorema anterior. Ahora $||f-h_j'||_{L^p(\overline{V}_j)}<\varepsilon$. Definamos h_j como:

$$h_j = h_j' \text{ en } \overline{V}_j, \qquad h_j = f \text{ en } \mathbb{C} - \overline{V}_j.$$

Entonces h_j' pertenece a $L^p(\mathbb{C})$ y $||f-h_j||_{L^p(\mathbb{C})} < \varepsilon$ y h_j coincide en $\overline{V}_j$ con h_j'.

Si definimos H_j como 5.1.3. obtenemos que $H_j \in R_g^p(X)$. Teniendo en cuenta (4) y (6) podemos escribir $H_j - F_j$ como:

$$(h_j - f)\,\psi_j + [(f - h_j)\,A_1]\hat{\ } + g.\,[(f - h_j).A_2]\hat{\ } +$$

$$+ [(f - h_j)A_3]\hat{\ } ,$$

donde $A_1 = \frac{1}{\pi} \mathbb{D}_g\, \psi_j . g$

$A_2 = \frac{1}{\pi} \mathbb{D}_g\, \psi_j$

$A_3 = \frac{1}{\pi} \bar{\partial}\, \psi_j$ son funciones acotadas en $\mathbb{C}$.

Ya que la transformada de Cauchy es la convolución con la función localmente integrable $\frac{1}{z}$, si $\psi \in L^p(\mathbb{C})$ y sop ψ es compacto, entonces:

$$||\hat{\psi}||_{L^p(X)} \leqslant C\, ||\psi||_{L^p(\mathbb{C})}$$

donde C depende de sop ψ.

Aplicando esta observación obtenemos:

$$||H_j - F_j||_{L^p(X)} \leqslant C\, ||f - h_j||_{L^p(\mathbb{C})} \leqslant C\, \varepsilon. \qquad //.$$

Omitimos el enunciado de un corolario de este teorema, parecido a 5.1.4. pero en norma p.

5.2. CUESTIONES ABIERTAS.

<u>5.2.1. Problema.</u> Encontrar una demostración constructiva del teorema 1.5.1.

La demostración del mismo dada en la presente memoria es por dualidad, por tanto no es constructiva.

<u>5.2.2. Cuestión.</u> ¿ Qué puede afirmarse en el teorema 1.5.1. si suponemos g sólo continua en X?

Es posible demostrar que 1.5.1. continúa siendo válido suponiendo solo g de clase C^1 en un entorno de X. La demostración es diferente a la dada en el texto. En el caso de ser g solamente continua, la definición de Z pierde sentido, pero parece que todavia pueda decirse algo.

<u>5.2.3. Cuestión.</u> Supongamos X, g y Z= $\emptyset$ en las condiciones habituales de la memoria. ¿ Es verdad qué si $f\in C(X)$ entonces $f\in R_g(X)$ sí y sólo sí $\bar{\partial}(\frac{\bar{\partial} f}{\bar{\partial} g})=0$ en X?.

Si f es de clase C^2 en un entorno de X la cuestión anterior es precisamente el corolario 2.2.2.. Suponiendo f sólo continua, probablemente la respuesta no será afirmativa para todos los compactos, pero incluso creemos que es falsa para compactos sencillos (por ejemplo un disco) aunque no se ha logrado encontrar un contra-ejemplo.

<u>5.2.4. Cuestión.</u> Las funciones anuladas por los operadores $\bar{\partial}$, ∂, $\partial\bar{\partial}$ $\bar{\partial}\partial$, verifican la propiedad del valor medio. ¿ Verifican alguna propiedad de este tipo las funciones anuladas por $\bar{\partial}^2$?

El ejemplo 2.2.5. parece indicar que no, pero ¿a qué es debido esta diferencia de comportamiento respecto a los operadores anteriormente citados ?

5.2.5. Conjetura. Existe un compacto en $\mathbb{C}$ para el cual $R_{\bar{z}}(X) \neq A_{\bar{z}}(X)$.

Una solución positiva a esta conjetura reafirmaría que las hipótesis del teorema 2.3.4. no son supérfluas.

5.2.6. Conjetura. Si X es un compacto de $\mathbb{C}$ que verifica $R(\tilde{X})=A(\tilde{X})$ entonces $A_{\bar{z}}(X)=R_{\bar{z}}(X)$.

El teorema 2.3.4. es una aproximación a esta conjetura.

5.2.7. Problema. Caracterizar los compactos de $\mathbb{C}$ para los cuales $A_{\bar{z}}(X)=R_{\bar{z}}(X)$.

5.2.8. Problema. Demostrar las afirmaciones hechas en la observación 3.1.3.

La dificultad de reproducir una demostración del tipo del teorema 3 de [9] proviene de que $\dfrac{g(z) - g(w)}{(z - w)^2}$ no es un núcleo real.

5.2.9. Problema. Encontrar condiciones necesarias y suficientes sobre una función de clase C^1 en todo $\mathbb{C}$ para que sea aproximable en norma $C^1(X)$ por funciones racionales con polos fuera de un compacto X.

Véase el comentario posterior a 4.4.5.

B I B L I O G R A F I A

[1] R. A. ADAMS. "Sobolev Spaces".Academic Press. New York.San Francisco. London.1975.

[2] T. BAGBY. "Quasi Topologies and Rational Approximation".J. Funct. Anal. 10 (1972) p.p. 259-268.

[3] O. B. BEKKEN. "Uniform Algebras". Adder Distriktshogskole.1974.

[4] J. BRENNAN."Invariant Subspaces and Weighted Polynomial Approximation". Ark. Math. 11 (1973) p.p. 167-189.

[5] A. BROWDER."Introduction to function algebras".W. A. Benjamin. Inc. Amsterdam. New York . 1969.

[6] F. E. BROWDER."Approximation in uniform norm by solutions of elliptic differential equations". Bull. Amer. Math. Soc. 67 (1961) p.p.400-404.

[7] F.E. BROWDER."Approximation by solutions of partial differential equations". Amer. J. Math. 84, (1962) p.p.134-160.

[8] V. I. BURENKOV. "On approximation of functions in Sobolev Spaces by finite functions on an arbitrary open set". Soviet. Math. Dolk. 13 (1972) 1.

[9] A. P. CALDERON and ZYGMUND. "On the existence of certain sin-

gular integrals".Acta Math. 88 1-2 (1952) p.p.85-139.

[10] A.P.CALDERON."Conmutators of singular integral operator".Proc. Nat. Acad. Sci. 53, 5 , (1964) p.p. 1092-1099.

[11] C. P. CALDERON."On Conmutators of singular integrals".Math. Scand. LIII (1975) p.p. 139-174.

[12] J.J.CARMONA."On uniform approximation by rational modules." Actas VIII Jornadas Luso Espanholas Matematica, vol III.Coimbra. (1981) p.p. 69-73.

[13] J.J.CARMONA."A necessary and sufficient condition for uniform approximation by certain rational modules". Proc. Amer. Math. Soc. (en prensa) (1981).

[14] E.P. DOLŽENKO."On the removal of singularities of analytic functions".Amer. Math. Soc. Transl.(2) 97 (1970)p.p. 33-41.

[15] G.B. FOLLAND."Introduction to partial differential equations". Mathematical Notes. Princeton University Press.1976.

[16] T.W. GAMELIN."Uniform Algebras".Prentice Hall.Series in modern Analysis. 1969.

[17] J.GARNETT."Vitushkin's Localization Operator".Ind. Univ. Math. J. 20. 10 (1971) p.p.905-907.

[18] J.GARNETT."Analytic Capacity and Measure".Lecture Notes in

Mathematics.Springer.Verlag.Berlin.Heidelberg.1972.

[19] V.P.HAVIN."Approximation in the mean by analytic functions". Soviet.Math.Doke. 9,1, (1968)p.p. 245-248.

[20] L.I.HEDBERG."Approximation in the mean by analytic functions". Trans. Amer. Math. Soc. 163 (1972) p.p.157-171.

[21] L.I.HEDBERG."Non Linear Potentials and Approximation in the Mean by Analytic Functions".Math. Z. 129. (1972) p.p.299-319.

[22] L.I.HEDBERG."Approximation in the mean by solutions of elliptic equations".Duke Math.J. 40 (1973) p.p.9-16.

[23] L.I.HEDBERG."Spectral synthesis and stability in Sobolev Spaces".Euclidean harmonic analysis (Proc, Uni. of Maryland 1979). Lecture Notes in Math. 779, p.p.73-103.Springer-Verlag.1980.

[24] K. DE LEEUW."Banach Spaces of Lipschitz functions".Studia Math. XXI (1961) p.p.55-66.

[25] A. MARKUNSHEVICH.<u>"Teoría de las funciones analíticas"</u>.TomoII. Editorial Mir (Versión traducida).1970.

[26] S.N. MERGELELYAN."Uniform approximations to functions of a complex variable".Amer. Math.Soc.Transl. 101 (1954) p.p.294-391.

[27] A.G. O'FARRELL."Annihilators of Rational Modules".J.Funct.Anal. 19 (1975) p.p.373-389.

[28] A.G. O'FARRELL."Localness of Certain Banach Modules". Ind. Univ. Math. J. 24 12 (1975) p.p.1135-1141.

[29] A.G. O'FARRELL."Hausdorff content and rational approximation in fractional lipschitz norms".Trans. Amer. Math. Soc. 228 (1977) p.p. 187-206.

[30] A. G. O'FARRELL. "Rational Approximation in Lipschitz norms". Proc. R. I. A. 77 (1977) p.p. 113-115.

[31] A. G. O'FARRELL. "Estimates for capacities,and approximation in Lipschitz norms". Jour. fur Mathematik 311/312 (1978) p.p. 101-115.

[32] J.C. POLKING."Approximation in L^p by solutions of elliptic partial differential equations". Amer.Math. J. 94 (1972) p.p.1231-1244.

[33] K.J. PRESKENIS."Approximation on disks".Trans. Amer.Soc. 171 (1972) p.p.445-467.

[34] K. J. PRESKENIS."Another view of the Weierstrass theorem".Proc. Amer. Math. Soc. 54 (1976) p.p. 109-113.

[35] K.J. PRESKENIS."Approximation by polynomials in z and another function". Proc. Amer. Math. Soc. 68 1 (1978) p.p. 69-74.

[36] W. RUDIN."Real and Complex Analysis".Tata Mc-Graw Hill. Publishing Co. New Delhi. Second edition. 1978.

[37] S. SACKS."Theory of the Integral". Hafner Publishing Company. New York.II.1937.

[38] S.O. SINANJAN."Approximation by polynomials and Analytic functions in the areal mean." Amer. Math. Soc. Transl. (2) 74 (1968) p.p.91-124.

[39] E.M. STEIN."Singular Integrals and Differentiability Properties of Functions". Princeton University Press. 1970.

[40] E.L. STOUT."The Theory of uniform Algebras". Bogden. Quigley. Inc. Publishers. 1971.

[41] T. TRENT and WANG. "Uniform approximation by rational modules on nowhere dense sets".Proc. Amer. Math. Soc. 81 1 (1981)p.p. 62-64.

[42] VO. KHAC KHOAN."Distrbutions,analyse de Fourier Operateurs aux derivées partielles".Vuibert-Paris. 1972. (tomo1).

[43] J. WANG."Approximation by rational modules on nowhere dense sets".Pac. J. Math. 80 1 (1979) p.p. 293-295.

[44] J. WANG."Approximation by rational modules on boundary sets". Pac. J. Math. 92 1 (1981) p.p. 237-239.

[45] J.WANG."Rational Modules and Higher Order Cauchy Transforms". Pre-print. (1981).

[46] B. M. WEINSTOCK."Uniform approximation by solutions of elliptic equations".Proc.Amer. Math. Soc. 41 2 (1973) p.p.513-517.

[47] J. WERMER."Approximation on a Disk".Math. Annalen 155(1964) p.p. 331-333.

[48] J. WERMER."Polynomially convex disks".Math. Annalen. 158 (1965) p.p.6-10.

[49] L. ZACLMAN."Analytic Capacity and Rational Approximation".Lecture Notes in Mathematics.Springer-Verlag. 1968.

[50] D.R. SHERBERT."The structure od ideals and point derivations in Banach Algebras of Lipschitz functions".Trans.Amer. Math. Soc. 111 (1964) p.p. 240--272.

[51] T. TRENT and J. WANG. "The uniform closure of rational modules".Bull. London Math. Soc. 13 (sept. 1981), 415-420.

[52] J. WANG."Approximation by rational modules in Lip norms".Ill. J. of Math. (en prensa).