Universitat Autònoma de Barcelona

Departament d'Informàtica
Unitat de Combinatòria i
de Comunicació Digital

MÈTODES HEURíSTICS PER AL PROBLEMA D'STEINER EN GRAFS

MEMÒRIA PRESENTADA PER EN
PERE GUITART I COLOM PER OPTAR AL GRAU DE
DOCTOR ENGINYER EN INFORMÀTICA

Director de la Tesi :
DR. JOSEP M. BASART I MUÑOZ
Bellaterra, setembre 1999

Capítol 6

Conclusions

Amb l'objectiu d'aconseguir resultats de qualitat, els mètodes competitius per al PSG són cada vegada més sofisticats: combinen diversos algorismes, generen un nombre relativament alt de solucions candidates, utilitzen rutines per a reduir la mida dels grafs, incorporen tècniques de programació lineal, inclouen estratègies d'heurística moderna, ... Tots aquests elements han de ser combinats de manera que la complexitat final del mètode no representi cap impediment per a la seva utilització en la pràctica. L'algorisme heurístic de base és, en darrer terme, l'encarregat de generar les solucions candidates i, per tant, juga un paper decisiu en els resultats finals dels mètodes competitius. Els algorismes d'aproximació, pel fet d'assegurar una fita superior de l'error màxim que té la solució que retornen, resulten ideals com a algorismes de base. No obstant això, la seva complexitat limita l'elecció (amb diverses variants) a tres algorismes d'aproximació: l'heurística del graf distància (DNH), l'heurística del camí més curt (SPH) i l'heurística de Zelikovsky (ZH).

La part central d'aquesta tesi pot dividir-se en dues parts. La primera, formada pels capítols 3 i 4, està dedicada al disseny i la implementació de mètodes heurístics per al PSG que puguin competir experimentalment amb els millors mètodes que hi ha en l'actualitat. En ací, hem proposat dos nous mètodes competitius, el GBA i el GBGA. La segona part, corresponent al capítol 5, té com a objectiu l'estudi i la millora de dos dels algorismes d'aproximació clàssics per al PSG: la DNH i la SPH.

El GBA i el GBGA

Fent servir les instàncies de prova més àmpliament utilitzades, els dos mètodes competitius que hem proposat han complert amb escreix les expectatives de rendiment inicials que ens havíem marcat, superar els resultats obtinguts per l'algorisme genètic d'Esbensen (EGA), i s'han situant al capdavant dels mètodes competitius, tant en qualitat com en temps d'execució. La complexitat de tots dos algorismes és $O(|V|(|A| + |V| \log |V| + |S||V|))$ quan es consideren $O(|V|)$ execucions de la SPH com a algorisme de base, i inclou el càlcul dels camins de cost mínim entre cada parella de vèrtexs. L'interès d'aquests algorismes, però, va més enllà dels resultats que aconsegueixen, ja que introdueixen elements diversos que poden ser interessants per al desenvolupament de nous mètodes, o que poden beneficiar a alguns dels que han estat proposats. Anem a comentar-ne els més destacats.

El GBA [45] és un representant de l'*estratègia iterativa recurrent*, que hem proposat en aquesta memòria, per a la construcció de mètodes d'execució múltiple per al PSG. En els mètodes basats en aquesta estratègia, el conjunt de vèrtexs de l'arbre resultant d'una iteració de l'algorisme és utilitzat com a conjunt de terminals per a la següent iteració. En la nostra opinió, aquesta estratègia és un nou pas en l'evolució dels mètodes heurístics per al PSG. Primer, algorismes d'un pas, després, mètodes d'execució múltiple basats en una estratègia repetitiva i, més endavant, mètodes basats en una estratègia iterativa *greedy*. En comparació amb l'estratègia repetitiva, en l'estratègia iterativa recurrent s'explora un espai de solucions de més qualitat i, per tant, quan es genera el mateix nombre d'arbres[1], és de preveure que s'obtinguin millors resultats. D'altra banda, el nombre d'arbres que calen en l'estratègia iterativa recurrent tendeix a ser sensiblement inferior al de l'estratègia iterativa *greedy*. Tot i això, les dues estratègies iteratives es complementen, i poden ser combinades en funció de l'algorisme de base utilitzat.

La funció *reordenar*, que reetiqueta els vèrtexs del graf de forma aleatòria, és una de les propostes que creiem més interessants del GBA. La seva inclusió en l'algorisme

[1] Per a generar el mateix nombre d'arbres, inclosos els arbres intermedis de cada iteració, es pot considerar que el mètode basat en una estratègia iterativa recurrent també s'executa de manera repetitiva.

pretenia disminuir les dependències entre els vèrtexs per tal d'evitar caure en solucions marginals i, alhora, aconseguir que els resultats tinguessin una major vigència per a instàncies de prova isomorfes. Superant els límits per als quals va ser concebuda, hem pogut comprovar com aquesta funció contribueix per si sola a millorar els resultats de l'algorisme, la qual cosa fa que resulti interessant per a molts altres mètodes.

La funció *eGrau2*, que elimina al final de cada iteració els no-terminals de grau dos de l'arbre, resulta principalment interessant per a augmentar la velocitat de l'algorisme i, al mateix temps, reduir l'espai de solucions. A més a més, possibilita la substitució d'un camí per una aresta, la qual cosa acostuma a millorar els resultats, tal i com es pot veure en l'algorisme que proposen Duin i Voβ [28].

La funció *sacsejar*, que incorpora i elimina alguns vèrtexs d'Steiner de manera aleatòria, mostra la importància que té el fet que tots els vèrtexs siguin tinguts en compte per l'algorisme. Tot i que podria ser elaborada d'una manera més selectiva, resulta especialment indicada per tal d'augmentar la capacitat de l'algorisme per a explorar noves solucions.

Finalment, la inclusió d'una estratègia que dóna prioritat als camins que tenen vèrtexs intermedis, destaca la importància que aquests vèrtexs tenen en el resultat final, tal i com es posa també de manifest en el capítol 5. Tot i que l'estratègia és molt simple i, per tant, susceptible de ser millorada, la seva influència positiva en el resultats podria ser aprofitada per la major part de les heurístiques de camí.

Tenint en compte l'evolució del GBGA [43, 44, 46], l'aspecte que creiem més remarcable d'aquest algorisme genètic és la seva interpretació com a *heurística de recombinació de vèrtexs*, ja que aquesta possibilita la presa de decisions a l'hora d'introduir nous elements en l'algorisme.

Enllaçant amb els objectius que ens havíem marcat, a partir de l'estratègia de recombinació de vèrtexs és possible, entre d'altres aspectes: justificar el contrast entre el rendiment de l'algorisme genètic de Kapsalis i Rayward-Smith i el d'Esbensen, interpretar la millora que representen els tres operadors genètics del GBGA —*aSteiner, eCorbates i eGrau2*— respecte al *filtre* de l'EGA, destacar la importància que té l'elecció del descodificador, interpretar el paper de la mutació i la forma en què ha de ser aplicada, decidir la manera més indicada de recombinar les cadenes, escollir els mecanismes de selecció i d'encreuament de manera correcta i justificar la utilitat de la reordenació de vèrtexs. En definitiva, contràriament al que succeeix en la majoria d'AG, l'estratègia de recombinació de vèrtexs permet prendre decisions sobre la conveniència d'introduir modificacions en l'algorisme sense la necessitat de realitzar experiments.

Tenint en compte la forma en la qual el GBGA ha estat presentat en el capítol 3, podria donar la sensació de que s'intenta emmascarar que el GBGA és un AG. Res més lluny de la nostra intenció. Quan ens referim a justificar el comportament del GBGA per al PSG de manera similar a la que s'utilitza per a justificar la majoria de mètodes heurístics, ens estem marcant principalment dos objectius. En primer lloc, presentar el GBGA d'una manera que sigui també acceptable per a aquells investigadors que no veuen fonamentada l'aplicació d'estratègies evolutives a problemes de combinatòria, la qual visió, en termes generals, compartim. És per això que les decisions que es prenen en el GBGA estan basades en les operacions elementals que realitza aquest algorisme, intentant evitar les argumentacions genèriques que s'acostuma a utilitzar en els AG. En segon lloc, exposar quina és la nostra visió dels algorismes genètics: són algorismes d'exploració que generen solucions candidates a base de recombinar parts de solucions existents. Tot i la simplicitat d'aquesta definició, permet excloure d'estudi molts aspectes que, en la nostra opinió, no contribueixen massa al progrés de l'àrea: aplicar els AG a tota mena de problemes d'una manera arbitrària, intentar determinar si un encreuament, un mètode de selecció, o una codificació binària és millor en general que un altre, utilitzar codificacions que no tenen relació amb la solució, etc. Fent una traducció lliure del títol de l'article de Wolpert i Macready [94] diríem que "no hi ha duros a quatre pessetes", tal i com es desprèn, també, de l'interessant article de Culberson [22].

Podem concloure, per tant, que el GBGA reflecteix la manera tal i com entenem els algorismes genètics, la qual creiem que podria ser aplicada a altres problemes.

La SPH i la DNH

El resultat més important d'aquesta part és, sens dubte, la nova implementació de la SPH que en redueix la complexitat en passar d'$O(|S|(|A| + |V| \log |V|))$ fins a $O((1 + min\{n_{cam}, \frac{|S'|}{|S|}\})(|A| + |V| \log |V|))$, on $n_{cam} < |S|$ és el nombre de camins amb vèrtexs intermedis que són seleccionats per l'algorisme i $|S'| \leq |V| - |S|$ és el nombre de vèrtexs no-terminals en la solució [47]. En tots aquells casos en què $|S'|$ no és moltes vegades superior a $|S|$, la complexitat de l'algorisme esdevé $O(|A| + |V| \log |V|)$, és a dir, la mateixa que la de la DNH, que és l'algorisme d'aproximació amb menor complexitat.

Hem proposat un nou algorisme, *quasi-SPH*, que té exactament la mateixa complexitat que la DNH i un comportament semblant al de la SPH. Aquest algorisme és més senzill d'implementar, i pot ser d'utilitat en aquells casos en què la SPH pot arribar a ser $O(\sqrt{|V|}(|A| + |V| \log |V|))$, és a dir, quan $|S|^2 \approx |V| - |S| \approx |S'|$.

Hem introduït dues noves variants de la SPH [48], l'ISPH i la GSPH, amb l'objectiu de millorar-ne el rendiment. D'una banda, l'ISPH garanteix una solució amb cost no inferior al de l'ASPH, la qual és una implementació alternativa de la SPH. De l'altra, la GSPH retorna un arbre que és generador de cost mínim tant en el graf G, com en el seu graf distància. Aquest fet resulta especialment interessant atès que permet reduir l'espai de solucions en els mètodes d'execució múltiple. Tenint en compte que les diferències entre la GSPH i l'ISPH són similars a les que hi ha entre la SPH i la DNH, es pot preveure que el GSPH obtindrà un millor rendiment que l'ISPH. La complexitat de tots dos algorismes és similar a la nova complexitat de la SPH.

Finalment, després de presentar la SPH i la DNH com a representants dels tres grans grups d'algorismes heurístics per al PSG, hem comparat els dos algorismes en funció de les tres estratègies, proposant per a totes elles arguments en favor de la superioritat de la SPH, la qual cosa coincideix amb les conclusions derivades dels resultats experimentals que produeixen. A partir d'aquesta anàlisi, hem pogut observar la poca atenció que presten tots dos algorismes a aspectes d'importància decisiva per al seu rendiment, i que podrien ser considerats per tal d'introduir millores en futures versions.

Comparant la SPH amb la DNH podem concloure que, tot i que tenen FRA i complexitat similars, la primera s'ha mostrat superior tant des del punt de vista estratègic, com des del punt de vista de la qualitat dels resultats que genera. Per tant, la SPH resulta més indicada que la DNH per tal de ser usada com a algorisme de base en mètodes competitius [2, 30, 31, 90]. D'altra banda, utilitzant la nova implementació de la SPH és podria millorar el temps d'execució dels mètodes basats en aquest algorisme [72, 67, 93, 44, 45]. La millora és especialment important en aquells mètodes que no poden calcular els camins un únic cop a priori [72, 67] (veure l'apartat 2.5.5) i, tot i que no representa una millora significativa en els altres, possibilita evitar la dependència de l'ordre dels vèrtexs en el càlcul dels camins (veure l'apartat 3.3.1). Finalment, la substitució de la SPH per l'ISPH o la GSPH podria millorar novament els resultats que obtenen tots els mètodes competitius que hem esmentat.

Comparant la SPH amb el ZH, si bé aquest darrer tendeix a produir millors resultats experimentals [28], les característiques de l'algorisme el fan menys interessant com a algorisme de base d'una estratègia iterativa recurrent. Amb la implementació de la SPH que hem proposat, la complexitat d'aquest algorisme torna a ser sensiblement inferior a la del ZH. Seria interessant poder comparar els resultats d'aquest algorisme amb els de les noves variants de la SPH. Per tant, es podrien proposar mètodes que, de manera similar a la que proposen Duin i Voß, combinin execucions múltiples de la SPH amb alguna execució del ZH o d'alguna de les seves variants.

6.1 Futures línies de recerca

La present memòria reflecteix una mica l'evolució que la nostra tasca investigadora ha anat tenint al llarg dels anys: començant per la construcció de mètodes competitius per al PSG, en concret, pel GBGA, i acabant per l'estudi i la millora de la SPH i de la DNH. És per això que, tal i com s'ha pogut apreciar, els resultats que s'obtenen en el capítol 5 permeten millorar els resultats que hem presentat en els capítols 3 i 4. Aquesta situació ha endarrerit algunes de les millores evidents que podien ser introduïdes tant en el GBA com en el GBGA, i que no es portaran a terme fins que la part referent a l'algorisme de base que podríem introduir en aquests algorismes estigui del tot completada. La relació de treballs possibles que presentem a continuació està ordenada en funció de la prioritat decreixent que els hi donem:

- Incorporar al GSPH i a l'ISPH la possibilitat de substituir una aresta per un camí en el qual tots els no-terminals tinguin grau dos, de manera semblant a la que proposen Duin i Voß [28]. Veure si és possible introduir aquestes modificacions mantenint la complexitat de la nova implementació que ha estat proposada per l'algorisme.

- Afegir al GSPH i a l'ISPH mecanismes que permetin incorporar vèrtexs de guany que no són vèrtexs intermedis de camins mantenint, si és possible, la complexitat de l'algorisme. No queda clar si aquest procés ha de formar part de l'algorisme de base, estar integrat de manera externa en el mètode d'execució múltiple, o en tots dos algorismes simultàniament. El mètode resultant podria ser una combinació híbrida entre el ZH i la SPH.

- Afegir al GBGA un mecanisme de mutació més selectiu per tal d'incorporar nous vèrtexs. Dissenyar un mecanisme d'encreuament que mantingui les associacions de vèrtexs que estan produint millores dels resultats. No sembla difícil identificar aquests conjunts, els quals formen el que s'anomena *full Steiner trees* (subarbres en els quals tots els vèrtexs fulla són terminals). Fóra bo substituir l'algorisme de base per l'algorisme que ha estat dissenyat en els apartats anteriors, adaptar convenientment els operadors genètics i fer proves emprant diversos tipus de grafs.

- Afegir al GBA un mecanisme més selectiu que el de la funció *sacsejar* per tal d'incorporar nous vèrtexs. Substituir l'algorisme de base per l'algorisme que ha estat dissenyat en els apartats anteriors i analitzar els resultats en diversos tipus de grafs.

- Dissenyar un *hill-climbing* que redueixi la complexitat a base d'intentar optimitzar els *full Steiner trees* de l'arbre.

- Establir criteris per a la construcció i l'elecció dels camins que permetessin millorar el rendiment de les heurístiques de camí per al PSG.

- Intentar demostrar que la FRA del mètode *greedy* de Minoux és igual a la de l'algorisme de Zelikovsky.
- Incorporar algun mecanisme que permeti donar fites dinàmiques de l'error màxim comès. Per exemple, es podria utilitzar un mètode basat en el *branch and cut*.
- Aplicar els coneixements obtinguts a altres versions dels problema d'Steiner, o a altres problemes de combinatòria.

Bibliografia

[1] M. J. Alexander, J. P. Cohoon, J. L. Ganley and G. Robins, *An Architecture-Independent Approach to FPGA Routing Based on Multi-Weighted Graphs*, Proc. of The European Design Automation Conference, pp. 259–264, 1994.

[2] M. J. Alexander and G. Robins, *New Performance-Driven FPGA Routing Algorithms*, IEEE Transactions on Computer Aided Design of VLSI, Vol. 15, Iss. 12, pp. 1505-1517, 1996.

[3] D. Applegate, R. E. Bixby, V. Chvátal and W Cook, *Finding Cuts in the TSP*, Technical Report 95-05, DIMACS, 1995.

[4] S. Arora, *Polynomial time approximation schemes for Euclidean TSP and other geometric problems*, Proceedings 37th Annual Symposium on Foundations of Computer Science, pp. 2-11, 1996.

[5] S. Arora and C. Lund, *Hardness of approximations*, Approximation Algorithms for NP-hard Problems, PWS Publishing Company, pp. 399-446, 1997.

[6] S. Arora, *The Approximability of NP-hard Problems*, Survey based on a plenary lecture at ACM STOC'98.

[7] T. Back, U. Hammel and H. P. Schwefel, *Evolutionary Computation: Comments on the History and Current State*, IEEE Transactions On Evolutionary Computation, Vol. 1, Iss. 1, pp. 3-17, 1997.

[8] S. BALUJA, *Genetic Algorithms and Explicit Search Statistics*, Advances in Neural Information Processing Systems 9, MIT Press, Cambridge, pp. 319-325, 1997.

[9] J. M. BASART, *Els Arbres de Steiner: obtenció i propietats*, Tesi Doctoral, Universitat Autònoma de Barcelona, 1988.

[10] J. E. BEASLEY, *OR-Library: distributing test problems by electronic mail*, J. Opl. Res. Soc., Vol. 41, pp. 1069-1072, 1990.

[11] J. E. BEASLEY AND F. GOFFINET, *A Delaunay triangulation-based heuristic for the Euclidean Steiner problem*, Networks, Vol. 24, Iss. 4, pp. 215-24, 1994.

[12] P. BERMAN AND R. RAMAIYER, *Improved approximation algorithms for the Steiner tree problem*, Journal of Algorithms, Vol. 17, pp. 381-408, 1994.

[13] P. BERMAN, U. FÖβMEIER, M. KARPINSKI, M. KAUFMANN I A. ZELIKOVSKY, *Approaching the 5/4-Approximations for Rectilinear Steiner Trees*, LNCS 855, Springer Verlag, pp. 60-71, 1994.

[14] M. BERN AND P. PLASSMANN, *The Steiner Problem with edge lengths 1 and 2*, Information Processing Letters, Vol. 32, pp. 171-176, 1989.

[15] M. BERN AND D. EPPSTEIN, *Approximation Algorithms for Geometric Problems*, Approximation Algorithms for NP-hard Problems, PWS Publishing Company, pp. 296-345, 1997.

[16] A. BORCHERS AND D.-Z. DU, *The k-Steiner Ratio in Graphs*, SIAM J. on Computing, Vol. 26, pp. 857-869, 1997.

[17] D. CHERITON AND R. E. TARJAN, *Finding minimum spanning trees*, SIAM J. Comput., Vol. 5, pp. 724-742, 1976.

[18] S. CHOPRA, E. R. GORRES AND M. R. RAO, *Solving the Steiner Tree Problem on a Graph using Branch and Cut*, ORSA. J. Comput, Vol. 4, pp. 320-335, 1992.

[19] E.-A. CHOUKHMANE, *Une heuristique pour le probleme de l'arbre de Steiner*, RAIRO Rech. Opér., Vol. 12, pp. 207-212, 1978.

[20] D. CIESLIK, *Steiner Minimal Trees*, Kluwer Academic Publishers, 1998.

[21] R. COURANT AND H. ROBBINS, *What is Mathematics?*, Oxfrod Univ. Press, New York, 1941.

[22] J. C. CULBERSON, *On the Futility of Blind Search*, Technical Report TR-96-18, University of Alberta, 1996.

[23] E. W. DIJKSTRA, *A note on two problems in connection with graphs*, Numer. Math. Vol. 1, Iss. 4, pp. 269-271, 1959.

[24] K. A. DOWSLAND, *Hill-climbing, Simulated Annealing and the Steiner Problem in Graphs*, Eng. Opt., Vol. 17, pp. 91-107, 1991.

[25] D.-Z. DU, Y. J. ZHANG AND Q. FENG *On better heuristic for the Euclidean Steiner minimum trees*, Proc. of the 32-nd Ann. Symp. on Foundations of Computer Science, pp. 431-439, 1991.

[26] D.-Z. DU AND F. K. HWANG, *A proof of Gilbert and Pollak's conjecture on the Steiner ratio*, Algorithmica, Vol. 7, pp. 1-29, 1992.

[27] D.-Z. DU, F. K. HWANG AND G. XUE, *Interconnecting Highways*, SIAM J. Discrete Math., Vol. 12, Iss. 2, pp. 252-261, 1999.

[28] C. DUIN AND S. VOSS, *Efficient path and vertex exchanges in Steiner tree algorithms*, Networks, Vol. 29, 89-105, 1997.

[29] H. ESBENSEN AND P. MAZUMDER, *A Genetic Algorithm for the Steiner Problem in Graphs*, Proc. of the European Design and Test Conference, pp. 402-406, 1994.

[30] H. ESBENSEN, *Computing Near-Optimal Solutions to the Steiner Problem in a Graph Using a Genetic Algorithm*, Networks, Vol. 26, pp. 173-185, 1995.

[31] H. ESBENSEN, *Finding (Near-)Optimal Steiner Trees in Large Graphs*, Proc. of the Sixth International Conference on Genetic Algorithms, pp. 485-491, 1995.

[32] H. ESBENSEN AND R. DRECHSLER, *Winter School in Evolutionary Algorithms*, Technical University of Denmark, Lyngby, Denmark, 1998.

[33] R. W. FLOYD, *Algorithm 97: Shortest Path*, Commun. ACM, Vol. 5, pp. 345, 1962.

[34] U. FÖßMEIER, M. KARPINSKI AND A. ZELIKOVSKY, *Faster Approximation Algorithms for the Rectilinear Steiner Tree Problem*, LNCS 762, Springer Verlag, pp. 533-542, 1993.

[35] U. FÖßMEIER AND M. KAUFMANN, *Solving Rectilinear Steiner Tree Problems Exactly in Theory and Practice*, Proc. 5th European Symposium on Algorithms (ESA'97), LNCS 1284, pp. 171-185, Springer-Verlag, 1997.

[36] M. L. FREDMAN AND R. E. TARJAN, *Fibonacci Heaps and their uses in Improved Network Optimization Algorithms*, J. Assoc. Comput. Mach., Vol. 36, pp. 596-615, 1987.

[37] J. L. GANLEY, http://ganley.org/steiner/index.html.

[38] J. L. GANLEY, *Computing optimal rectilinear steiner trees: A survey and experimental evaluation*, Discrete Applied Mathematics, Vol. 90. pp. 161-171, 1999.

[39] R. L. GAREY, M. R. GRAHAM AND D. S. JOHNSON, *The complexity of computing Steiner minimal trees*, SIAM J. Appl. Math., Vol. 32, pp. 835-859, 1977.

[40] M. R. GAREY AND D. S. JOHNSON, *The Rectilinear Steiner Problem is NP-Complete*, SIAM J. Appl. Math., Vol 32. pp. 826-834, 1977.

[41] E. N. GILBERT AND H. O. POLLAK, *Steiner minimal trees*, SIAM J. Appl. Math., Vol. 16, pp. 1-29, 1968.

[42] D. E. GOLDBERG, *Genetic Algorithms in Search, Optimization & Machine Learning*, Addison-Wesley, Massachusetts, USA, 1989.

[43] P. GUITART AND J. M. BASART, *A new Genetic Algorithm for the Steiner Problem in Graphs*, Proc. I Jornades de Matemàtica Discreta i Algorísmica, Centre de Publicacions Campus Nord, pp. 42-43, 1998.

[44] P. GUITART AND J. M. BASART, *A Genetic Algorithm Approach for the Steiner Problem in Graphs*, EUFIT '98 Proc. of the Sixth European Congress on Intelligent Techniques and Soft Computing, Vol. 1, pp. 508-512, 1998.

[45] P. GUITART AND J. M. BASART *A High Performance Approximate Algorithm for the Steiner Problem in Graphs*, LNCS 1518, Springer-Verlag, pp. 280-293, 1998.

[46] P. GUITART AND J. M. BASART, *Genetic Algorithms are Competitive for the Steiner Problem in Graphs*, enviat a SIAM Journal on Computing.

[47] P. GUITART, *A Faster Shortest Path Heuristic for the Steiner Problem in Graphs*, enviat a Information Processing Letters.

[48] P. GUITART, *Improving the Shortest Path Heuristic for the Steiner Problem in Graphs*, enviat a Algorithmica.

[49] S. L. HAKIMI, *Steiner's problem in graphs and its implications*, Networks, Vol. 1, pp. 113-133, 1971.

[50] M. HANAN, *On Steiner's problem with rectilinear distance*, J. SIAM Appl. Math., Vol. 14, pp. 255-265, 1966.

[51] D. S. HOCHBAUM, *Approximation Algorithms for NP-hard Problems*, PWS Publishing Company, 1997.

[52] J. H. HOLLAND, *Adaption in Natural and Artificial Systems*, University of Michigan Press. Ann Arbor, MI, 1975.

[53] J. N. HOOKER, *Testing Heuristics: We Have It All Wrong*, Journal of Heuristics, Vol. 1, pp. 33-42, 1995.

[54] S. HOUGARDY AND H. J. PRÖMEL, *A 1.589 Approximation Algorithms for the Steiner Problem in Graphs*, Proceedings of the Tenth Annual ACM-SIAM Symposium on Discrete Algorithms, pp. 448-453, 1999.

[55] F. K. HWANG, *On Steiner Minimal Trees with Rectilinear Distance*, SIAM J. Appl. Math., Vol. 30, pp. 104-114, 1976.

[56] F. K. HWANG, *An $\mathcal{O}(n \log n)$ algorithm for rectilinear minimum spanning trees*, J. ACM., Vol. 26, pp. 177-182, 1979.

[57] F. K. HWANG, D. S. RICHARDS AND P. WINTER, *The Steiner Tree Problem*, Annals of Discrete Mathematics, Vol. 53, North-Holland, Amsterdam, The Netherlands, 1992.

[58] *Imperial College Management School Welcome to OR-Library*, http://mscmga.ms.ic.ac.uk/info.html.

[59] A. IWAINSKY, E. CANUTO, O. TARASZOW AND A. VILLA, *Network Decomposition for the Optimization of Connection Structures*, Networks, Vol. 16, pp. 205-235, 1986.

[60] V. JARNÍK AND O. KÖSSLER, *O minimálních grafech obsahujících n danych bodu*, Ĉas. Pêstování Mat., Vol. 63, pp. 223-235, 1934.

[61] A. B. KAHNG AND G. ROBINS, *A New Class of Iterative Steiner Tree Heuristics with Good Performance*, IEEE Trans. Computer-Aided Design, Vol. 11, pp. 893-902, 1992.

[62] A. B. KAHNG AND G. ROBINS, *On Optimal Interconnections for VLSI*, Kluwer, Boston, MA, 1995.

[63] A. KAPSALIS AND G. D. RAYWARD-SMITH, *Solving the graphical Steiner tree problem using genetic algorithms*, Journal of the Operational Research Society, Vol. 44, Iss. 4, pp. 397-406, 1993.

[64] R. M. KARP, *Reducibility among combinatorial problems*, Complexity of Computer Computations, Plenum Press, New York, pp. 85-103, 1972.

[65] M. KARPINSKI AND A. Z. ZELIKOVSKY, *New Approximation Algorithms for the Steiner Tree Problems*, Journal of Combinatorial Optimization, Vol. 1, pp. 1-19, 1997.

[66] T. KOCH, Comunicació personal.

[67] T. KOCH AND A. MARTIN, *Solving Steiner Tree Problems in Graphs to Optimality*, Networks, Vol. 32, pp. 207-232, 1998.

[68] L. KOU, G. MARKOWSKY AND L. BERMAN, *A Fast Algorithm for Steiner Trees*, Acta Informatica, Vol. 15, pp. 141-145, 1981.

[69] J. B. KRUSKAL, *On the shortest spanning tree of a graph and the travelling salesman problem*, Proc. Am. Math. Soc., Vol. 7, pp. 48-50, 1956.

[70] T. LENGAUER, *Combinatorial Algorithms for Integrated Circuits Layout*, John Wiley & Sons, Chichester, England, 1990.

[71] A. Y. LEVIN, *Algorithm for shortest connection of a group of graph vertices*, Sov. Math. Dokl., Vol. 12, pp. 1477-1481, 1971.

[72] A. LUCENA AND J. E. BEASLEY, *A Branch and Cut Algorithm for the Steiner Problem in Graphs*, Networks, Vol. 31, pp. 39-59, 1998.

[73] K. MEHLHORN, *A Faster Approximation Algorithm for the Steiner Problem in Graphs*, Information Processing Letters, Vol. 27, pp. 125-128, 1988.

[74] M. MINOUX, *Efficient Greedy Heuristics for Steiner Tree Problems Using Reoptimization and Supermodularity*, INFOR, Vol. 28, Iss. 3, pp. 221-233, 1990.

[75] I. H. OSMAN AND J. P. KELLY, *Meta-Heuristics: An Overview*, Metaheuristics: Theory & Applications, Kluwer Academic Publishers, pp. 1-21, 1996.

[76] C. H. PAPADIMITRIOU AND M. YANNAKAKIS, *Optimization, Approximation and Complexity Classes*, J. Comput. System Sciences 43, pp. 425-440, 1991.

[77] C. H. PAPADIMITRIOU, *Computational Complexity*, Addison-Wesley, 1994.

[78] J. PLESNÍK, *A Bound for the Steiner Tree Problem in Graphs*, Math. Slovaca, Vol. 31, pp. 155-163, 1981.

[79] J. PLESNÍK, *Worst-case Relative Performances of Heuristics for the Steiner Problem in Graphs*, Acta Math. Univ. Comenianae, Vol. 60, pp. 269-284, 1991.

[80] W. H. PRESS, S. A. TEUKOLSKY, W. T. VETTERLING AND B. P. FLANNERY, *Numerical Recipes in C. The Art of Scientific Computing*, Cambridge University Press, 1992.

[81] R. C. PRIM *Shortest connection networks and some generalizations*, Bell System Tech. J., Vol. 36, pp. 1389-1401, 1957.

[82] H. J. PRÖMEL AND A. STEGER, *RNC-Approximation Algorithms for the Steiner Problem*, Proceedings 14th Annual Symposium on Theoretical Aspects of Computer Science, pp. 559-570, 1997.

[83] V. J. RAYWARD-SMITH AND A. CLARE, *The Computation of nearly Minimal Steiner Trees in graphs*, Int. J. Math. Educ. Sci. Technol. Vol. 14, pp. 15-23, 1983.

[84] V. J. RAYWARD-SMITH AND A. CLARE, *On finding Steiner Vertices*, Networks, Vol. 16, pp. 283-294, 1986.

[85] C. R. REEVES, *Modern Heuristic Techniques for Combinatorial Problems*, Advanced Topics in Computer Science Series, Blackwell Scientific Publications, 1993.

[86] *The Vehicle Routing Problem*, http://www.geocities.com/ResearchTriangle/7279/vrp.html.

[87] P. M. Spira and A. Pan, *On Finding and Updating Spanning Trees and Shortest Paths*, SIAM Journal on Computing, Vol. 4, Iss. 4, pp. 575-580, 1975.

[88] H. Takahashi and A. Matsuyama, *An approximate solution for the Steiner problem in graphs*, Math. Jap., Vol. 24, pp. 573-577, 1980.

[89] S. Voβ, *Steiner's problem in graphs: heuristic methods*, Discrete Applied Mathematics, Vol. 40, pp. 45-72, 1992.

[90] S. Voβ and K. Gutenschwager, *A Chunking Based Genetic Algorithm for the Steiner Tree Problem in Graphs*, DIMACS Series in Discrete Mathematics and Theoretical Computer Science, Vol. 40, pp. 335-355, 1997.

[91] D. M. Warme, *A New Exact Algorithm for Rectilinear Steiner Trees*, International Symposium on Mathematical Programming, Lausanne, Switzerland, August 1997.

[92] B. M. Waxman and M. Imase, *Worst-case Performance of Rayward-Smith's Steiner Tree heuristics*, Inf. Process. Lett., Vol. 29, pp. 283-287, 1988.

[93] P. Winter and J. M. Smith, *Path-Distance Heuristics for the Steiner Problem in Undirected Networks*, Algorithmica, Vol. 7, pp. 309-327, 1992.

[94] D. H. Wolpert and W. G. Macready, *No Free Lunch Theorems for Optimization*, IEEE Transactions On Evolutionary Computation, Vol. 1, Iss. 1, pp. 67-82, 1997.

[95] M. Zachariasen and P. Winter, *Concatenation-Based Greedy Heuristics for the Euclidean Steiner Tree Problem*, to appear in Algorithmica.

[96] A. Z. Zelikovsky, *An 11/8-approximation Algorithm for the Steiner Problem on Networks with Rectilinear Distance*, Coo. Math. Soc. J. Bolyai, Vol. 60, pp. 733-745, 1992.

[97] A. Z. ZELIKOVSKY, *An 11/6-Approximation Algorithm for the Network Steiner Problem*, Algorithmica, Vol. 9, pp. 463-470, 1993.

[98] A. Z. ZELIKOVSKY, *A faster approximation algorithm for the Steiner problem in graphs*, Information Processing Letters, Vol. 46, pp. 79-83, 1993.

[99] A. Z. ZELIKOVSKY, *Better approximation bounds for the network and euclidean Steiner tree problems*, Tech. Rep. CS-96-06, University of Virginia, Charlottesville, VA, 1996.

Signat: Pere Guitart i Colom
Bellaterra, setembre 1999

Aquesta memòria ha estat escrita amb $\LaTeX\,2_\varepsilon$[2] per l'autor.

[2] $\LaTeX\,2_\varepsilon$ es una extensió de $\LaTeX$, una col·lecció de macros escrites en $\TeX$.