Capítulo 5

Cálculo de curvas hiperelípticas modulares nuevas

En el capítulo 3 se demostró que hay un número finito de curvas hiperelípticas modulares nuevas. En el capítulo 4 se determinó que el número total de estas curvas para el caso en el cual tienen género 2, es de 213. Además, se calcularon ecuaciones para cada una de ellas. Para encontrar todas estas curvas tuvimos que calcular un conjunto de candidatos entre los cuales se encontraban aquéllas y el proceso de cálculo de estos candidatos se realizó en varios ordenadores que estuvieron funcionando ininterrumpidamente para tal efecto durante varios meses. Aunque en teoría el cálculo del resto de curvas hiperelípticas modulares nuevas es posible de realizar, en la práctica, usando algoritmos del mismo tipo, esto llevaría varios años de cálculo con los ordenadores actuales. Debido a este motivo, hemos optado por calcular todas las curvas hiperelípticas modulares nuevas hasta un cierto nivel.

Este capítulo se divide en las siguientes secciones:

1. La proposición 3.5 nos proporciona un criterio que nos permite reconocer si una variedad abeliana A cociente de $J_1(N)$ corresponde a una curva hiperelíptica modular nueva. En esta sección, mostramos resultados adicionales relativos a los coeficientes de las q-expansiones de las formas nuevas asociadas a A y del nivel N, los cuales nos permitirán reducir el

tiempo de cálculo para determinar todas las curvas hiperelípticas modulares nuevas para un nivel dado.

2. Exponemos un proceso general, similar al caso de género 2, para calcular las curvas hiperelípticas modulares nuevas de género 3 cuando la jacobiana es $\mathbb{Q}$-simple.

3. Mostramos el algoritmo que hemos implementado en MAGMA, que es la aplicación directa de los resultados de la primera sección.

4. Utilizando el algoritmo de la sección anterior, hemos calculado todas las curvas modulares hasta un determinado nivel. Aquí expondremos las conclusiones a las que hemos llegado tras haber analizado los resultado obtenidos en este cálculo.

5.1 Criterios de determinación

En primer lugar presentamos el criterio de comprobación que utilizaremos para realizar los cálculos de este capítulo. Éste es la adaptación de la proposición 3.6 al caso que nos ocupa.

Criterio 5.1. *Sean $f_1, \dots, f_m \in S_2(N)$ formas nuevas tales que el espacio vectorial complejo $\bigoplus_{i=1}^m S_2(A_{f_i})$ tiene dimensión $g > 2$. Sea $\{h_1, \dots, h_g\}$ la base de $\bigoplus_{i=1}^m S_2(A_{f_i})$ como en la Proposición 3.5 y pongamos*

$$x = \frac{h_{g-1}}{h_g} \qquad e \qquad y = \frac{q\,dx/dq}{h_g}.$$

Si existe un polinomio $F(x) \in \mathbb{Q}[X]$ de grado $2g+2$ ó $2g+1$ sin raíces repetidas tal que

$$y^2 - F(x) = O(q^{c_N}) \quad con \quad c_N = 2\,\mathrm{grado}(F)(g_1 - 1) + 1\,,$$

donde g_1 es el género de $X_1(N)$, entonces $C : y^2 = F(x)$ es una curva hiperelíptica modular nueva de género g tal que

$$J(C) \overset{\mathbb{Q}}{\sim} A_{f_1} \times \cdots \times A_{f_m}.$$

Observación 5.1. Si $J(C) \stackrel{\mathbb{Q}}{\sim} A_f$ para alguna forma nueva $f \in S_2(N,\varepsilon)$, entonces podemos reemplazar g_1 por $g_{\varepsilon,N}$, el género de $X(N,\varepsilon)$. Además, si $\varepsilon = 1$ entonces para cada involución de Atkin-Lehner W_M se tiene la siguiente igualdad

$$W_M{}^\sigma f = \epsilon(M)^\sigma f \quad \text{para } \sigma \in \mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q}),$$

donde $\epsilon(M) \in \{-1,1\}$. Consideramos el grupo

$$B'(N) = \{W_M \in B(N) : \epsilon(M) = 1\},$$

donde $B(N)$ es el grupo de involuciones de Atkin-Lehner. Entonces la curva C puede ser recubierta desde la curva modular $X_0'(N) = X_0(N)/B'(N)$ y podemos reemplazar g_1 por g', donde g' denota el género de $X_0'(N)$. Nótese que $B'(N) = B(N)$ ó $B(N)/B'(N) \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ y $B'(N) = \{\mathrm{id}\}$ si y sólo si N es la potencia de un primo y $\epsilon(N) = -1$.

La proposición siguiente mejora el resultado de la parte (iii) del lema 3.4 cuando $i\infty$ se proyecta en un punto de Weierstrass.

Proposición 5.1. *Sea (C,π) una curva hiperelíptica modular nueva de nivel N de género g tal que $\pi(i\infty) \in \mathrm{Wei}(C)$. Si $J(C) \stackrel{\mathbb{Q}}{\sim} \prod_{i=1}^m A_{f_i}$, donde cada $f_i = \sum_{n\geq 1} a_n^{(i)} q^n \in S_2(N,\varepsilon_i)$ es una forma nueva normalizada, entonces $a_{2n}^{(i)} = 0$ para todo $n \geq 1$, $i = 1,\ldots,m$. En particular, $4|N$.*

Demostración: El caso $g = 2$ ha sido demostrado en el capítulo 4 (ver proposiciones 4.2 y 4.10). Por lo tanto, sólo nos queda probarlo para $g > 2$. Diferenciaremos dos casos, dependiendo de si $J(C)$ es un $\mathbb{Q}$-factor de $J_0(N)$ o no, o lo que es lo mismo, si todos los caracteres son triviales o no.

En primer lugar, lo demostraremos para el caso en el cual la jacobiana de C no es un $\mathbb{Q}$-factor de $J_0(N)$. En esta situación vimos en el teorema 3.10 que $g = 3$ y que $J(C) \stackrel{\mathbb{Q}}{\sim} A_{f_1} \times A_{f_2}$, donde $\dim A_{f_1} = 1, \dim A_{f_2} = 2$ y existe una curva modular nueva C' de género 2 tal que $J(C') \stackrel{\mathbb{Q}}{\sim} A_{f_2}$. Probamos en la proposición 4.2 que entonces $a_{2n}^{(2)} = 0$ para todo $n \geq 1$ y que $4|N$; por lo tanto, como f_1 tiene carácter trivial, obtenemos que $a_{2n}^{(1)} = 0$. Así completamos la demostración.

Ahora, supongamos que $J(C)$ es un $\mathbb{Q}$-factor de $J_0(N)$. Denotemos por

$$K_i = K_{f_i}\,, \qquad m_i = [K_i : \mathbb{Q}]\,, \qquad i = 1,\ldots m.$$

Para $i = 1, \ldots, m$, sean $\sigma_j^{(i)} : K_i \hookrightarrow \mathbb{R}$, $j = 1, \ldots, m_i$ las $\mathbb{Q}$-inmersiones de K_i en $\mathbb{R}$ y definamos $f_i^{(j)} = {}^{\sigma_j^{(i)}} f_i$ y $a_n^{(i,j)} = {}^{\sigma_j^{(i)}} a_n^{(i)}$ para $j = 1, \ldots, m_i$.

Sea $\mathbb{E} = K_1 \times \cdots \times K_m$. Se denotará por $\widehat{a} = (a^{(1)}, \ldots, a^{(m)})$ a un elemento de $\mathbb{E}$, donde $a^{(i)} \in K_i$ para $i = 1, \ldots m$. El producto natural

$$\widehat{a} \cdot \widehat{b} = (a^{(1)} \cdot b^{(1)}, \ldots, a^{(m)} \cdot b^{(m)})$$

y la inclusión natural

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{Q} & \hookrightarrow & \mathbb{E} \\ c & \mapsto & (c, \overset{m}{\ldots}, c)\,, \end{array}$$

proporcionan a $\mathbb{E}$ una estructura de $\mathbb{Q}$-álgebra de dimensión g sobre $\mathbb{Q}$. Consideremos las aplicaciones siguientes

$$\mathrm{Tr} : \mathbb{E} \to \mathbb{Q}, \qquad \mathrm{Tr}(\widehat{a}) = \sum_{i=1}^{m} \mathrm{Tr}_{K_i/\mathbb{Q}}(a^{(i)})$$

y

$$\langle\ ,\ \rangle : \mathbb{E} \times \mathbb{E} \to \mathbb{Q}, \qquad \langle \widehat{a}, \widehat{b} \rangle = \mathrm{Tr}(\widehat{a} \cdot \widehat{b}).$$

La aplicación Tr es $\mathbb{Q}$-lineal y $\langle\ ,\ \rangle$ es bilineal y no degenerada.

Para un entero $n \geq 1$ denotamos por $\widehat{a}_n = (a_n^{(1)}, \ldots, a_n^{(m)}) \in \mathbb{E}$. Por construcción se tienen las siguientes leyes de recurrencia:

(i) $\widehat{a}_{m\,n} = \widehat{a}_m \cdot \widehat{a}_n$ si $(m, n) = 1$.

(ii) $\widehat{a}_{p^k} = \widehat{a}_{p^{k-1}}\, \widehat{a}_p - p\, \widehat{\varepsilon}(p) \widehat{a}_{p^{k-2}}$ para todo primo p.

donde $\widehat{\varepsilon}(p) = (\varepsilon_1(p), \ldots, \varepsilon_m(p))$.

Se tienen las siguientes propiedades:

(1) $\varepsilon_i = 1$ para $i = 1, \ldots, m$.

(2) $\det(a_{2n-1}^{(i,j)}) \neq 0$ para $1 \leq n \leq g$, $1 \leq i \leq m$, $1 \leq j \leq m_i$.

(3) Existe una única base formada por $h_1, \ldots, h_g$ con q-expansiones racionales tales que para $j = 1, \ldots, g$,

$$h_j = q^{2j-1} + \sum_{n=j}^{g-1} c_{j,2n}\, q^{2n} + \sum_{2g \leq n} c_{j,n}\, q^n\,.$$

De (2) obtenemos que $\{\widehat{a}_{2j-1} \,:\, 1 \leq j \leq g\}$ es una $\mathbb{Q}$-base de $\mathbb{E}$. Sea $\{\widehat{\alpha}_1, \ldots, \widehat{\alpha}_g\}$ la base de $\mathbb{E}$ tal que para todo $i, j = 1, \ldots, g$ se tenga

$$\mathrm{Tr}(\widehat{\alpha}_i \cdot \widehat{a}_{2j-1}) = \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq j, \\ 1 & \text{si } i = j. \end{cases} \tag{5.1}$$

Entonces se cumple

$$h_j = \sum_{n,m} \alpha_j^{(n,m)} f_n^{(m)} = \sum_{n \geq 0} \mathrm{Tr}(\widehat{\alpha}_j \cdot \widehat{a}_n) q^n,$$

donde $\alpha_j^{(n,m)} = {}^{\sigma_n^{(m)}}\alpha_j^{(n)}$. Como $\mathrm{Tr}(\widehat{\alpha}_j \cdot \widehat{a}_{2n}) = 0$ cuando $n < j \leq g$, obtenemos

$$\widehat{a}_{2j} \in \bigoplus_{1 \leq n \leq j} \mathbb{Q}\,\widehat{a}_{2n-1}.$$

En particular, $\widehat{a}_2 \in \mathbb{Q}$, es decir, $a_2 = a_2^{(j)} \in \mathbb{Q}$ para todo j. Por lo tanto, $\widehat{a}_{2^n} \in \mathbb{Q}$ y $a_{2^n} = a_{2^n}^{(j)} \in \mathbb{Q}$ para todo j.

Ahora, probaremos que

$$c_{g,2g} = c_{g,2g+2} = c_{g-1,2g-2} = c_{g-1,2g} = 0.$$

Obsérvese que $c_{i,j} = \mathrm{Tr}(\widehat{\alpha}_i \cdot \widehat{a}_j)$. Ahora, usando (5.1) y las leyes de recurrencia antes descritas para $\widehat{a}_n$, obtenemos

	g impar	g par
$c_{g,2g}$	0	0
$c_{g,2g+2}$	0	0
$c_{g-1,2g-2}$	0	0
$c_{g-1,2g}$	β	0

donde

$$\beta = \begin{cases} a_2 & \text{si } g = 3, \\ 0 & \text{si } g \neq 3. \end{cases}$$

Ahora, probaremos que $\beta = 0$ cuando $g = 3$. En efecto, si $g = 3$ tenemos

$$\begin{aligned} h_2 &= q^3 + a_2\, q^6 + a\, q^7 + O(q^9), \\ h_3 &= q^5 + b\, q^7 + O(q^9), \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} x &= \frac{h_2}{h_3} = \frac{1}{q^2} - b + a_2\, q + O(q^2), \\ y &= -\frac{q\,dx/dq}{h_3} = \frac{1}{q^7} - \frac{b}{q^5} - \frac{a_2}{2q^4}\, q + O(q^{-3}). \end{aligned}$$

Igualando coeficientes de x e y obtenemos

$$y^2 - (x^7 + 5b\,x^6) = -8a_2\, q^{-11} + O(q^{-10}).$$

Por lo tanto, $a_2 = 0$. Así, para $g > 2$ se tiene

$$x = \frac{h_{g-1}}{h_g} = q^{-2} + c_0 + O(q^2),$$

y la base formada por $h'_{g-i} = x^i\, h_g$, $0 \leq i \leq g-1$, cumple

$$h'_i = q^{2i-1} + c'_{i,2i+1}\, q^{2i+1} + \sum_{2i+3 \leq j} c'_{i,j}\, q^j.$$

Esta última condición implica que $a_2^{(i)} = a_4^{(i)} = 0$ para todo i y, a su vez, que $2|N$. Por lo tanto, $a_{2n}^{(i)} = 0$ para todo entero $n \geq 1$, $1 \leq i \leq m$. Como f_i es un forma nueva de nivel N y carácter trivial, se tiene $4|N$. □

Como consecuencia de este resultado, del lema 3.4 y del teorema 3.10, obtenemos las condiciones necesarias que se presentan en la siguiente proposición.

Proposición 5.2. *Sea (C, π) una curva hiperelíptica modular nueva de nivel N y de género $g > 2$ tal que $J(C)$ es un $\mathbb{Q}$-factor de $J_0(N)$. Pongamos $P = \pi(i\infty) \in C$. Entonces $g \leq 10$ y además*

(i) Si $J(C)$ es $\mathbb{Q}$-simple y

- *$P \notin \mathrm{Wei}(C)$, entonces ningún primo $p \leq g$ divide a N.*
- *$P \in \mathrm{Wei}(C)$, entonces $4|N$ y ningún primo impar $p \leq 2g-1$ divide a N.*

(ii) Si $J(C)$ no es $\mathbb{Q}$-simple y

- *$P \notin \mathrm{Wei}(C)$, entonces para todo primo $p \leq g$ se tiene que $p^2 \nmid N$; si, además, $p|N$ entonces $g = 3$.*

– $P \in \mathrm{Wei}(C)$, *entonces* $4|N$ *y para todo primo impar* $p \leq 2g-1$ *se tiene que* $p^2 \not| N$*; si, además,* $p|N$ *entonces* $g = 3$.

Para un nivel fijado N, podemos calcular todas las curvas hiperelípticas modulares nuevas correspondientes a este nivel. En concreto, el criterio 5.1 nos permite comprobar la modularidad de una curva hiperelíptica, mientras que la proposición 5.2 nos permite hacer una búsqueda más selectiva y, en consecuencia, con menos gasto de tiempo. Con estos resultados implementaremos un programa en Magma, que será mostrado en la sección 5.3, para hacer efectivo este cálculo. Así, calcularemos todas las curvas hiperelípticas modulares nuevas de nivel $N \leq 3000$ con jacobiana $\mathbb{Q}$-simple y de nivel $N \leq 2000$ con jacobiana no $\mathbb{Q}$-simple. No obstante, antes de proceder a dicho cálculo, expondremos el proceso que seguiríamos para calcular todas las curvas hiperelípticas modulares nuevas.

5.2 Procedimiento general de determinación

Siguiendo un razonamiento similar al mostrado en el capítulo 4 para género 2, podríamos calcular todas las ecuaciones, niveles y formas nuevas cuando el género es mayor que 2. Sin embargo, el gran número de posibilidades para los coeficientes de las q-expansiones de las formas nuevas nos impide, en la práctica, realizar estos cálculos.

Ahora nos restringiremos al caso de género 3 y jacobiana $\mathbb{Q}$-simple. Para este caso se tiene que los únicos subcuerpos de K_f son $\mathbb{Q}$ y K_f. Así, sabemos que:

$$K_f = \begin{cases} \mathbb{Q}(a_2) = \mathbb{Q}(a_3) & \text{si } P \notin \mathrm{Wei}(C), \\ \mathbb{Q}(a_3) = \mathbb{Q}(a_5) & \text{si } P \in \mathrm{Wei}(C). \end{cases}$$

A continuación, mostramos como calculamos las curvas en el caso más sencillo, esto es, cuando $P \notin \mathrm{Wei}(C)$ o, equivalentemente, $a_2 \neq 0$:

1. Determinamos todos los posibles polinomios $H_2(x) = \prod_{i=1}^{3}(X - {}^{\sigma_i}a_2)$ como en la demostración del teorema 3.8. Es decir, todos los polinomios mónicos de grado 3 con coeficientes enteros que son irreducibles sobre $\mathbb{Q}$ y tales que todas sus raíces son reales y con valor absoluto menor o igual que $2\sqrt{2}$. En total, hay 80 posibilidades para H_2.

2. Para cada polinomio H_2, fijamos $a_2 \in \overline{\mathbb{Q}}$ tal que $H_2(a_2) = 0$. Entonces para cada primo impar $p \leq M = 16$ consideramos sólo los valores de $\varepsilon(p)$ y a_p tales que $\varepsilon(p) \in \{0, 1\}$ y a_p es un entero algebraico en $\mathbb{Q}(a_2)$ con $|a_p| \leq 2\sqrt{p}$. En el caso particular en que $p = 3$, impondremos además que $\mathbb{Q}(a_3) = \mathbb{Q}(a_2)$ y $\varepsilon(3) = 1$.

3. Tomamos
$$f = q + \sum_{n=2}^{M} a_n\, q^n + O(q^{M+1})$$
y
$$h = \sum_{i=1}^{3} {}^{\sigma_i} f = 3\, q + \sum_{n=2}^{M} \mathrm{Tr}_{K_f/\mathbb{Q}}(a_n)\, q^n + O(q^{M+1})\,.$$

4. Calculamos
$$\begin{aligned} h|T_2 &= \mathrm{Tr}_{K_f/\mathbb{Q}}(a_2)\, q + \sum_{n=2}^{M} \mathrm{Tr}_{K_f/\mathbb{Q}}(a_2 a_n)\, q^n + O(q^{M+1})\,, \\ h|T_2^2 &= \mathrm{Tr}_{K_f/\mathbb{Q}}(a_2^2)\, q + \sum_{n=2}^{M} \mathrm{Tr}_{K_f/\mathbb{Q}}(a_2^2 a_n)\, q^n + O(q^{M+1})\,. \end{aligned}$$
Así, el conjunto $\{h, h|T_2, h|T_2^2\}$ es una base de $S_2(A_f)$ con q-expansión racional, ya que $\mathbb{Q} \otimes \mathrm{End}_{\mathbb{Q}}(A_f) = \mathbb{Q}(T_2)$ y $h \neq 0$. Como consecuencia, calculamos la base $\{h_1, h_2, h_3\}$ como en la proposición 3.5 y, también, las funciones
$$x = \frac{h_2}{h_3} \quad \text{e} \quad y = \frac{q dx/dq}{h_3}.$$

5. Calculamos un polinomio $F \in \mathbb{Q}[X]$ de grado 8 tal que $y^2 - F(x) = O(q)$. Requeriremos que F no tenga raíces múltiples y además
$$x\,\frac{dx}{y}\,,\; x^2\,\frac{dx}{y} \in \langle h_1, h_2, h_3\rangle.$$

6. Cuando las curvas candidatas se han obtenido, debemos calcular el conductor geométrico de la jacobiana de cada una de ellas, y quedarnos sólo con aquellas tales que el correspondiente conductor sea el cubo de un entero. Para cada una de estas curvas, buscamos una forma nueva en $S_2(N)$, donde N^3 es el conductor, cuyas correspondientes funciones x e y satisfagan la ecuación $y^2 = F(x)$. Para la comprobación de este último paso utilizamos el criterio 5.1.

Tras calcular todas las posibilidades, hemos obtenido sólo dos curvas, denotadas por C_{41A} y C_{95A}, que aparecen en la tabla 6.6.

Cuando $a_2 = 0$, el número de posibilidades que debemos tener en cuenta crece considerablemente, ya que el número de valores para a_3 incrementa notablemente el número de posibles cuerpos K_f. Además, en este caso es necesario conocer cada a_p con $p \leq 19$ para poder determinar la relación $y^2 = F(x)$.

Debido a que este proceso es extremedamente costoso en tiempo, hemos decidido calcular todas las curvas hiperelípticas modulares nuevas hasta un cierto nivel. Para ello hemos implementado en Magma un programa que reconoce si un $\mathbb{Q}$-factor de $J_1(N)$ es $\mathbb{Q}$-isógeno a la jacobiana de una curva hiperelíptica modular nueva de nivel N. Los detalles del programa aparecen en la siguiente sección.

5.3 Determinación efectiva con Magma

Usando el paquete de Símbolos Modulares de W. A. Stein, hemos implementado un programa en Magma que detecta si un $\mathbb{Q}$-factor de $J_1(N)$ tiene asociada una curva hiperelíptica modular nueva de nivel N y calcula una ecuación de dicha curva. Esta función está basada en los resultados expuestos en la primera sección de este capítulo.

```
intrinsic CurvaHiperelipticaModular(F::SeqEnum) -> RngUPolElt
{Curva hiperelíptica modular asociada a un Q-factor B de J_1(N),
 si existe, donde F son las q-expansiones de los elementos de
una base racional de H^0(B,Omega^1)q/dq}

g:=#F;
Mg:=MatrixAlgebra(Rationals(),g);
Q<q>:=LaurentSeriesRing(RationalField());
QQ<x>:=PolynomialRing(RationalField());
MQg:=MatrixAlgebra(Q,g);
MQg1:=KMatrixSpace(Q,g,1);

mF:=Mg![Coefficient(F[j],i) : i in [1..g] , j in [1..g]];
L,P,Q:=SmithForm(mF);
FF:=(MQg!P)*(MQg1!F);

v:=[Valuation(FF[i][1]):i in [1..g]];
```

```
if v eq [i : i in [1..g]] then
  h1:=FF[g-1][1];
  h2:=FF[g][1];
  X:=h1/h2;  X:=(X-Coefficient(X,0))/Coefficient(X,Valuation(X));
  Y:=q*Derivative(X)/h2;  Y:=Y/Coefficient(Y,Valuation(Y));
  Mpar:=KMatrixSpace(RationalField(),1,2*g+2);
  a:=Mpar![0: i in [0..2*g+1]];
  for i in [0..2*g+1] do
    a[1][2*g+2-i]:=Coefficient(Y^2-(X^(2*g+2)+&+[a[1][i+1]*X^i:
                              i in [0..2*g+1]]),i-(2*g+1));
  end for;
  Res:=Y^2-(X^(2*g+2)+&+[a[1][i+1]*X^i: i in [0..2*g+1]]);
  P:=x^(2*g+2)+&+[a[1][i+1]*x^i: i in [0..2*g+1]];
else
  mF:=Mg![Coefficient(F[j],2*i-1) : i in [1..g] , j in [1..g]];
  L,P,Q:=SmithForm(mF);
  FF:=(MQg!P)*(MQg1!F);
  v:=[Valuation(FF[i][1]):i in [1..g]];
  if v eq [2*i-1 : i in [1..g]] then
    h1:=FF[g-1][1];
    h2:=FF[g][1];
    X:=h1/h2;  X:=(X-Coefficient(X,0))/Coefficient(X,Valuation(X));
    Y:=q*Derivative(X)/h2;  Y:=Y/Coefficient(Y,Valuation(Y));
    Mimpar:=KMatrixSpace(RationalField(),1,2*g+1);
    a:=Mimpar![0: i in [0..2*g]];
    for i in [0..2*g] do
      a[1][2*g+1-i]:=Coefficient(Y^2-(X^(2*g+1)+&+[a[1][i+1]*X^i:
                                  i in [0..2*g]]),2*(i-2*g));
    end for;
    Res:=Y^2-(X^(2*g+1)+&+[a[1][i+1]*X^i: i in [0..2*g]]);
    P:=x^(2*g+1)+&+[a[1][i+1]*x^i: i in [0..2*g]];
  else
    return "ERROR 1: No hay curva hipereliptica modular";
  end if;
end if;
if IsWeaklyZero(Res) then
  return P;
else
  return "ERROR 2: No hay curva hipereliptica modular";
end if;
end intrinsic;
```

Ahora, describimos el uso de la función `CurvaHiperelipticaModular`. Sea B un $\mathbb{Q}$-factor de $J_1(N)$ de dimensión g, entonces $H^0(B,\Omega^1)$ tiene una base formada por g formas diferenciales regulares asociadas a formas parabólicas $h_1,\ldots,h_g \in S_2(N)$ cuyas q-expansiones tienen coeficientes racionales. La entrada del programa es un vector con las q-expansiones de estas g formas parabólicas hasta el coeficiente de grado igual a una determinada cota. Obsérvese que si B es nueva de nivel N, esta cota es c_N (ver criterio 5.1). La salida del programa será la ecuación de la curva hiperelíptica modular nueva de nivel N y género g asociada a B, si existe. En caso contrario, la salida dará un error.

Ejemplo 5.1. Cálculo de una ecuación para $X_0(23)$:

```
> N:=23;M:=ModularSymbols(N,2,+1); M;
Full Modular symbols space of level 23, weight 2, and dimension 3
> S:=CuspidalSubspace(M); S;
Modular symbols space of level 23, weight 2, and dimension 2
> g0:=DimensionCuspFormsGamma0(N,2);
> cota:=4*(Dimension(S)+1)*(g0-1)+1;
> F:=qIntegralBasis(S,cota); F;
[
 q^2-2*q^3-q^4+2*q^5+q^6+2*q^7-2*q^8-2*q^10-2*q^11+q^12+O(q^13),
 q-q^3-q^4-2*q^6+2*q^7-q^8+2*q^9+2*q^10-4*q^11+3*q^12+O(q^13)
]
> CurvaHiperelipticaModular(F);
x^6 - 8*x^5 + 2*x^4 + 2*x^3 - 11*x^2 + 10*x - 7
```

Ejemplo 5.2. Vamos a estudiar si los $\mathbb{Q}$-factores de $J_0(63)^{\text{new}}$ corresponden a curvas hiperelípticas modulares nuevas. Primero, calculamos la descomposición de $J_0(63)^{\text{new}}$ sobre $\mathbb{Q}$:

$$J_0(63)^{\text{new}} \stackrel{\mathbb{Q}}{\sim} E_{63A} \times A_{63B},$$

donde A_{63B} tiene dimensión 2 y E_{63A} es una curva elíptica. La salida del programa es la siguiente

```
>  N:=63;M:=ModularSymbols(N,2,+1);
>  S:=CuspidalSubspace(M); NewS:=NewSubspace(S);
>  New:=NewformDecomposition(NewS);New; // Decomposition of J_0(N)^new
[
    Modular symbols space of level 63, weight 2, and dimension 1,
    Modular symbols space of level 63, weight 2, and dimension 2
]
```

```
> g0:=DimensionCuspFormsGamma0(N,2);
> cota:=4*(2+1)*(g0-1)+1;
> F:=qIntegralBasis(New[2],cota);
> CurvaHiperelipticaModular(F);
x^6 - 26*x^3 - 27
```

Por lo tanto, con la notación da la tabla 6.2, se tiene que $A_{63B} \stackrel{\mathbb{Q}}{\sim} J(C_{63B})$.

5.4 Evidencias numéricas

Utilizando el programa `CurvaHiperelipticaModular`, hemos intentado calcular todas las curvas hiperelípticas modulares nuevas con género mayor que 2. En primer lugar, hemos obtenido todas estas curvas en el caso en el cual sus jacobianas no son $\mathbb{Q}$-factores de $J_0(N)$ ($g = 3$). Después, calculamos todas aquéllas tales que sus jacobianas son $\mathbb{Q}$-factores de $J_0(N)$, para $N \leq 3000$ si las jacobianas son $\mathbb{Q}$-simples y para $N \leq 2000$ en el caso en el cual las jacobianas no son $\mathbb{Q}$-simples. Las ecuaciones hiperelípticas de todas estas curvas aparecen en el capítulo 6.

Los siguientes resultados muestran cuantitativamente el número de curvas hiperelípticas nuevas que hemos calculado:

Teorema 4.1. $\#\mathcal{MC}_2^{\mathrm{new}} = 213$.

Teorema 5.3. $\#\{C \in \mathcal{MC}^{\mathrm{new}}(2) : \ J(C)$ *no es un cociente de* $J_0(N)\} = 36$.

Teorema 5.4. $288 \leq \#\mathcal{MC}^{\mathrm{new}}(2) < \infty$.

Es decir, hemos determinado todas las curvas hiperelípticas modulares nuevas de género 2 y todas las que sus jacobianas no aparecen como un $\mathbb{Q}$-factor de $J_0(N)$. El tercer de los resultados muestra que al menos hay 288 curvas hiperelípticas modulares nuevas. Mostraremos algunas evidencias que nos permitirán conjeturar que éstas son todas la curvas del conjunto $\mathcal{MC}^{\mathrm{new}}(2)$.

Primero mostramos, para cada género menor o igual que 10, el cardinal de curvas obtenidas con jacobianas $\mathbb{Q}$-simples y niveles $N \leq 3000$, que comparamos con el cardinal de tales curvas de género 2 cuyas jacobianas son $\mathbb{Q}$-factores de $J_0(N)$.

2	3	4	5	6	7	8	9	10
114	14	13	3	0	0	0	0	0

Obsérvese que para el caso de género 2 sólo hay seis curvas de niveles mayores que 3000, concretamente de niveles $3159, 4160, 7280, 7424$ y 7664. El nivel más alto para el caso de género mayor a 2 es 1664 y no aparece ninguna curva de género mayor que 5. Todo esto nos permite pensar que éstas son todas las curvas hiperelípticas modulares nuevas con jacobianas $\mathbb{Q}$-simples y $\mathbb{Q}$-factores de $J_0(N)$.

La siguiente tabla es análoga a la anterior para el caso de jacobianas no $\mathbb{Q}$-simples y niveles $N \leq 2000$.

2	3	4	5	6	7	8	9	10
62	32	5	0	1	0	0	0	0

Sólo hay dos curvas modulares nuevas de género 2 con jacobianas no $\mathbb{Q}$-simples y niveles mayores que 2000, concretamente de nivel 2208. Para el caso en que existe una curva con jacobiana no $\mathbb{Q}$-simple y género mayor que 2, el nivel más alto encontrado es 944 y sólo aparece una curva con género mayor que 5, que es la curva $X_0(71)$ que tiene género 6. Estos hechos nos permiten pensar que éstas son todas las curvas hiperelípticas modulares nuevas con jacobianas no $\mathbb{Q}$-simples y $\mathbb{Q}$-factores de $J_0(N)$.

Frente a estas evidencias, nos parece bastante razonable hacer la siguiente conjetura.

Conjetura 5.1. *El conjunto $\mathcal{MC}^{\text{new}}(2)$ está formado por las curvas de las tablas del capítulo 6. En particular, $\#\mathcal{MC}^{\text{new}}(2) = 288$.*

Finalmente, notamos que todos los niveles de las curva hiperelípticas modulares nuevas de género 2 tienen como máximo tres divisores primos impares distintos, mientras que si el género es mayor que 2 como máximo hay dos. Además, en este último caso, el único nivel tal que el cuadrado de un primo impar divide a éste es $N = 734$.

Capítulo 6

Tablas de curvas hiperelípticas modulares nuevas

En este capítulo presentamos las ecuaciones de las curvas hiperelípticas modulares nuevas calculadas en esta tesis.

La sección 6.2 está dedicada a mostrar todas estas curvas para el caso de género 2. El método para calcularlas ha sido descrito en el capítulo 4. Para el caso en el cual la jacobiana es $\mathbb{Q}$-simple y no $\overline{\mathbb{Q}}$-simple, hemos calculado también ecuaciones de $\mathbb{Q}$-curvas cocientes, que presentamos en la tabla 6.4.

En la sección 6.3.1 mostramos las únicas siete curvas de esta clase que tienen género mayor que 2 y tales que sus jacobianas no son $\mathbb{Q}$-factores de $J_0(N)$. Así, hemos calculado todas las curvas hiperelípticas modulares nuevas tales que sus jacobianas no son $\mathbb{Q}$-factores de $J_0(N)$.

Por último, en la sección 6.3.2 aparecen todas las curvas hiperelípticas modulares nuevas de género mayor que 2 cuyas jacobianas son $\mathbb{Q}$-factores de $J_0(N)$ hasta un determinado nivel N. En concreto hasta $N = 3000$ si la jacobiana es $\mathbb{Q}$-simple y hasta $N = 2000$ si no lo es.

En orden a especificar la clase de $\mathbb{Q}$-isogenia de las jacobianas de las curvas presentadas, introducimos previamente una sección destinada a etiquetar las formas nuevas.

6.1 Etiquetación de formas nuevas

Vamos a mostrar un método para clasificar las clases de conjugación de Galois de formas nuevas. Para ello, primero identificaremos los caracteres de Dirichlet y después etiquetaremos las formas nuevas para un nivel y un carácter fijados.

6.1.1 Carácteres de Dirichlet

En este apartado explicamos como describiremos los caracteres de Dirichlet módulo N, de manera que éstos queden determinados.

Definición 6.1. Sea N un entero positivo. Un *carácter de Dirichlet módulo* N es un homomorfismo de grupos multiplicativos

$$\varepsilon\,:\,(\mathbb{Z}/N\,\mathbb{Z})^*\to\mathbb{C}^*.$$

El *conductor de* ε, que denotaremos por $\mathfrak{f}_\varepsilon$, es el mínimo divisor $M\mid N$ para el cual ε factoriza a través de la proyección natural $(\mathbb{Z}/N\,\mathbb{Z})^*\to(\mathbb{Z}/M\,\mathbb{Z})^*$. Denotaremos, asimismo, por $\operatorname{ord}\varepsilon$ al *orden de* ε, es decir, al mínino entero positivo n tal que $\varepsilon^n=1$.

Si la factorización de N en potencias de primos es de la forma

$$N=\prod_{i=1}^{n}p_i^{e_i}\qquad\text{con } p_i<p_{i+1}\text{ y } e_i>0,$$

se tiene la siguiente descomposición

$$(\mathbb{Z}/N\,\mathbb{Z})^*\cong\prod_{i=1}^{n}(\mathbb{Z}/p_i^{e_i}\,\mathbb{Z})^*.$$

Por lo tanto, podemos definir caracteres de Dirichlet módulo potencias de primos de la forma $\varepsilon_{p_i}\,:\,(\mathbb{Z}/p_i^{e_i}\,\mathbb{Z})^*\to\mathbb{C}^*$, de modo que

$$\varepsilon=\prod_{i=1}^{n}\varepsilon_{p_i}.$$

Así, es suficiente determinar los caracteres de Dirichlet módulo potencias de primos. Para éstos, utilizaremos el siguiente resultado.

Lema 6.1. *Sea p un primo y e un entero positivo, entonces:*

(i) *Si $p \neq 2$, $(\mathbb{Z}/p^e\,\mathbb{Z})^* \cong \mathbb{Z}/p^{e-1}(p-1)\,\mathbb{Z}$.*

(ii) $(\mathbb{Z}/2\,\mathbb{Z})^* \cong \{1\}$.

(iii) *Si $e > 1$, $(\mathbb{Z}/2^e\,\mathbb{Z})^* \cong Z/2\,\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2^{e-2}\,\mathbb{Z}$ y cada factor está generado por -1 y 5 respectivamente.*

Así, para dar un carácter de Dirichlet módulo la potencia de un primo p, es suficiente con dar la imagen de un generador explícito de $(\mathbb{Z}/p^e\,\mathbb{Z})^*$, salvo en el caso en el cual $p = 2$ y $e > 2$, en el que habrá que dar la imagen de los dos generadores de $(\mathbb{Z}/2^e\,\mathbb{Z})^*$.

Ahora, si G es un grupo cíclico finitamente generado por g y $\chi : G \to \mathbb{C}^*$ es un homomorfismo de orden n, entonces χ queda determinado por $\chi(g)$. Concretamente, si elegimos $\zeta_n = e^{2\pi i/n}$, se tiene $\chi(g) = \zeta_n^{a_\chi}$ para $a_\chi \in \{0, \ldots, n-1\}$. Denotaremos a χ por $\{a_\chi\}$.

Así, si p es un primo tal que $G = (\mathbb{Z}/p^e\,\mathbb{Z})^*$ es cíclico, tomaremos como g al menor entero positivo que genera G y si $\varepsilon_p : G \to \mathbb{C}^*$ es un carácter de Dirichlet, denotaremos por a_p a a_{ε_p}. El único caso en el cual el grupo $G = (\mathbb{Z}/p^e\,\mathbb{Z})^*$ no es cíclico sucede cuando $p = 2$ y $e > 2$. En este caso, si $\varepsilon_2 : G \to \mathbb{C}^*$ es un carácter de Dirichlet se tiene que $\varepsilon_2 = \chi_2\chi_2'$ donde $\chi_2 : Z/2\,\mathbb{Z} \to \mathbb{C}^*$ y $\chi_2' : \mathbb{Z}/2^{e-2}\,\mathbb{Z} \to \mathbb{C}^*$, entonces tomaremos como generadores de $Z/2\,\mathbb{Z}$ (resp. $\mathbb{Z}/2^{e-2}\,\mathbb{Z}$) a -1 (resp. 5). Al carácter ε_2 lo denotaremos por $a_2 = \{a_{\chi_2}, a_{\chi_2'}\}$.

En definitiva, si ε es un carácter de Dirichlet módulo N tal que la descomposición en factores primos de N es de la forma $\prod_{i=1}^n p_i^{e_i}$, denotaremos al carácter ε por $\{a_{p_1}, \ldots, a_{p_n}\}_N$, donde a_{p_i} es como antes.

Cuando previamente se haya dado el nivel del carácter suprimiremos el subíndice que denota dicho nivel.

Esta representación determina de forma unívoca los caracteres de Dirichlet. El siguiente ejemplo ilustra esta notación.

Ejemplo 6.1. Los caracteres $\varepsilon = \{2, 4\}_{225}$ y $\chi = \{4, 4\}_{225}$ son caracteres de Dirichlet módulo $225 = 3^2 5^2$ pares de orden 15 y conductor 225. Además, se tiene que $\operatorname{ord}\varepsilon_3 = \operatorname{ord}\chi_3 = 3$, $\operatorname{ord}\varepsilon_5 = \operatorname{ord}\chi_5 = 5$ y los caracteres ε, χ no son conjugados de Galois.

6.1.2 Formas nuevas

A continuación, vamos a ordenar y etiquetar las clases de conjugación de Galois de las formas nuevas; para ello, utilizaremos el método introducido por J. Cremona en [Cre97] para formas nuevas asociadas a curvas elípticas definidas sobre $\mathbb{Q}$ y extendido para formas nuevas en general por W. A. Stein en [Ste00]. Nos limitaremos al caso de peso 2 e introduciremos una nueva etiquetación para el caso de carácter no trivial.

Para el caso de formas nuevas con q-expansión racional, seguiremos la notación clásica de J. Cremona. Para el resto de los casos, la forma en que vamos a ordenar las clases de conjugación de Galois de las formas nuevas de nivel N y carácter ε es la siguiente:

1. Ordenamos de menor a mayor dimensión las variedades abelianas modulares asociadas.
2. Para el caso de carácter trivial: agrupamos las formas en clases tales que dos formas están en la misma clase si tienen los mismos autovalores para todas las involuciones de Atkin-Lehner. Si $p_1 \leq \cdots \leq p_k$ son los primos que dividen a N, ordenamos estas clases lexicográficamente considerando que el autovalor $+1$ precede al -1.
3. En cada una de estas clases (si el carácter no es trivial tenemos una única clase) ordenamos por el valor absoluto de la traza (desde el cuerpo de números asociado a cada una de las q-expansiones) de los autovalores de los operadores de Hecke T_p, $p \nmid N$, comenzando por el menor primo que no divide al nivel. En el caso en que dos valores coincidan para un mismo primo, precede el que tiene traza positiva, y si ambas son positivas pasamos al siguiente primo que no divide al nivel.

Por lo tanto, tenemos un orden en el conjunto de clases de conjugación de Galois de las formas nuevas de nivel N y carácter ε. A cada clase se le asigna una letra del conjunto

$$A, B, C, \ldots, Z, AA, BB, \ldots, ZZ, AAA, BBB, \ldots.$$

dependiendo del lugar que ocupe en el proceso anterior.

El formato de las etiquetas es el siguiente:

$$N[\text{Clase de conjugación de Galois}]_{\varepsilon}\,,$$

donde la clase de conjugación de Galois es una letra del anterior conjunto. Para el caso en que el carácter es trivial omitiremos el subíndice ε.

Ahora, como a cada clase de conjugación de Galois de formas nuevas de nivel N le corresponde una clase de $\mathbb{Q}$-isogenia de variedades abelianas modulares de nivel N, también tenemos ordenadas y etiquetadas las clases de $\mathbb{Q}$-isogenia de estas variedades. Así, si por ejemplo $f \in S_2(N,\varepsilon)$ es una forma nueva con etiqueta NA_ε, a f la denotaremos por f_{NA_ε} y a la variedad abeliana A_f por A_{NA_ε}. En el caso en el cual A_f es una curva elíptica, denotaremos por E_{NA} a esta variedad y, como hemos dicho anteriormente, seguiremos la clasificación de J. Cremona.

El cuerpo de coeficientes de una forma nueva será denotado por una letra K y el polinomio mínimo de un generador de K por una letra P, ambas con el subíndice correspondiente a la etiqueta de la clase de conjugación de Galois de esta forma nueva.

Observación 6.1. Obsérvese que esta notación también coincide con la de J. Cremona para el caso de curvas elípticas definidas sobre $\mathbb{Q}$, salvo para los niveles que van del 56 al 450 en donde hay casos en los que difiere.

El ejemplo siguiente ilustra esta notación.

Ejemplo 6.2. Sea ε un carácter de Dirichlet de orden 6 módulo 13, es decir, $\varepsilon = \{2\}$. Se tiene que en $S_2(13,\varepsilon)^{\mathrm{new}}$ sólo hay una clase de conjugación de Galois de formas nuevas; por lo tanto, a esta única clase la denotaremos por $f_{13A_{\{2\}}}$, a su variedad abeliana modular asociada por $A_{13A_{\{2\}}}$ y al cuerpo de coeficientes de su q-expansión por $K_{13A_{\{2\}}}$. Obsérvese que $S_2(13,\varepsilon) = S_2(13)$, por lo tanto, $J_1(13) \overset{\mathbb{Q}}{\sim} A_{13A_{\{2\}}}$.

6.2 Género 2

En esta sección presentaremos en primer lugar las ecuaciones hiperelípticas de todas las curvas modulares nuevas de género 2. Para el caso de jacobiana $\mathbb{Q}$-simple, también mostraremos el cuerpo de coeficientes de la q-expansión de la forma nueva correspondiente, es decir, la $\mathbb{Q}$-álgebra de $\mathbb{Q}$-endomorfismos de la jacobiana de la curva. Por último, para el caso de jacobiana $\mathbb{Q}$-simple y no $\overline{\mathbb{Q}}$-simple, mostraremos ecuaciones de $\mathbb{Q}$-curvas cocientes. Si la jacobiana no es $\mathbb{Q}$-simple, daremos las clases de $\mathbb{Q}$-isogenia de las dos curvas elípticas cociente.

6.2.1 Tablas de curvas modulares nuevas de género 2

Mostraremos tres tablas con las ecuaciones hiperelípticas de todas las curvas modulares nuevas de género 2. En la primera de ellas aparecerán aquéllas que tienen jacobiana $\overline{\mathbb{Q}}$-simple, en la segunda las que tienen jacobiana $\mathbb{Q}$-simple pero no $\overline{\mathbb{Q}}$-simple, y en la tercera aquéllas que tienen jacobiana no $\mathbb{Q}$-simple.

A cada curva la denotaremos por la clase de $\mathbb{Q}$-isogenia de su jacobiana. Esto es, si la curva es modular nueva de nivel N y su jacobiana es $\mathbb{Q}$-simple, entonces su jacobiana será $\mathbb{Q}$-isógena a alguna variedad abeliana modular. Si por ejemplo la clase de $\mathbb{Q}$-isogenia de esta variedad es NA_ε, entonces denotaremos por C_{NA_ε} a esta curva. Si la jacobiana de la curva no es $\mathbb{Q}$-simple, denotaremos a la curva por $C_N^{A,B}$, donde NA y NB son las clases de $\mathbb{Q}$-isogenia de las curvas elípticas cociente. Estas clases de $\mathbb{Q}$-isogenia han sido calculadas utilizando las tablas de Cremona, tanto las que aparecen en [Cre97] como las que se pueden obtener electrónicamente vía web [Cre] o mediante Magma [BCP97].

Para el caso en el que la $\mathbb{Q}$-álgebra de $\mathbb{Q}$-endomorfismos de la jacobiana de algunas de las curvas es $\mathbb{Q}(\sqrt{d})$, con $d \equiv 1 \pmod 4$, hemos realizado un cambio de variables para obtener un modelo sobre $\mathbb{Z}$. En este caso, hemos tomado $h_1 - h_2$ y $-2h_2$ en lugar de h_1, h_2 para calcular x e y.

De las 149 curvas que tienen jacobiana $\mathbb{Q}$-simple hemos obtenido 99 clases de $\overline{\mathbb{Q}}$-isomorfismo. Para el caso no $\mathbb{Q}$-simple, de 64 hemos obtenido 43.

Tabla 6.1: Jacobiana $\overline{\mathbb{Q}}$-simple

C	$: y^2 = F(x)$
C_{23A}	$: y^2 = x^6 - 8x^5 + 2x^4 + 2x^3 - 11x^2 + 10x - 7$
C_{29A}	$: y^2 = x^6 + 2x^5 - 17x^4 - 66x^3 - 83x^2 - 32x - 4$
C_{31A}	$: y^2 = x^6 - 14x^5 + 61x^4 - 106x^3 + 66x^2 - 8x - 3$
C_{35B}	$: y^2 = x^6 - 4x^5 + 2x^4 - 32x^3 - 27x^2 - 64x - 76$
C_{39B}	$: y^2 = x^6 + 6x^5 - 5x^4 - 66x^3 - 59x^2 - 12x$
C_{67B}	$: y^2 = x^6 + 2x^5 + x^4 - 2x^3 + 2x^2 - 4x + 1$
C_{68A}	$: y^2 = x^5 - 11x^4 + 7x^3 + 7x^2 - 12x + 8$
C_{73B}	$: y^2 = x^6 + 2x^5 + x^4 + 6x^3 + 2x^2 - 4x + 1$
C_{85B}	$: y^2 = x^6 + 2x^5 + 7x^4 + 6x^3 + 13x^2 - 8x + 4$

C	$: y^2 = F(x)$
C_{87A}	$: y^2 = x^6 - 6x^5 + 13x^4 - 18x^3 + 10x^2 - 3$
C_{88B}	$: y^2 = x^5 - 8x^4 - 4x^3 + 36x^2 - 32x$
C_{93A}	$: y^2 = x^6 + 6x^5 + 5x^4 - 6x^3 + 2x^2 + 1$
C_{103A}	$: y^2 = x^6 + 6x^5 + 5x^4 + 2x^3 + 2x^2 + 1$
C_{104B}	$: y^2 = x^5 - 8x^4 + x^3 + 30x^2 - 20x + 8$
C_{107A}	$: y^2 = x^6 - 4x^5 + 10x^4 - 18x^3 + 17x^2 - 10x + 1$
C_{115B}	$: y^2 = x^6 + 6x^5 + 5x^4 + 10x^3 + 2x^2 + 1$
C_{125A}	$: y^2 = x^6 - 4x^5 + 10x^4 - 10x^3 + 5x^2 + 2x - 3$
C_{133A}	$: y^2 = x^6 + 10x^5 + 17x^4 + 14x^3 + 10x^2 + 4x + 1$
C_{135D}	$: y^2 = x^6 - 6x^5 + 21x^4 - 54x^3 + 90x^2 - 108x + 45$
C_{136C}	$: y^2 = x^5 - 19x^3 - 14x^2 + 28x - 8$
C_{147D}	$: y^2 = x^6 + 6x^5 + 11x^4 + 6x^3 + 5x^2 + 4$
C_{161B}	$: y^2 = x^6 + 2x^4 - 6x^3 + 17x^2 - 18x + 5$
C_{165A}	$: y^2 = x^6 + 6x^5 + 11x^4 + 14x^3 + 5x^2 - 12x$
C_{167A}	$: y^2 = x^6 - 4x^5 + 2x^4 - 2x^3 - 3x^2 + 2x - 3$
C_{175E}	$: y^2 = x^6 + 2x^5 - 3x^4 + 6x^3 - 14x^2 + 8x - 3$
C_{176D}	$: y^2 = x^5 + 3x^4 - 26x^3 + 14x^2 + x + 7$
C_{177A}	$: y^2 = x^6 + 2x^4 - 6x^3 + 5x^2 - 6x + 1$
C_{184E}	$: y^2 = x^5 - 14x^3 - 7x^2 + 19x - 7$
C_{188A}	$: y^2 = x^5 - 5x^4 + 5x^3 - 15x^2 + 6x - 11$
C_{188B}	$: y^2 = x^5 - x^4 + x^3 + x^2 - 2x + 1$
C_{191A}	$: y^2 = x^6 + 2x^4 + 2x^3 + 5x^2 - 6x + 1$
C_{205D}	$: y^2 = x^6 + 2x^4 + 10x^3 + 5x^2 - 6x + 1$
C_{207B}	$: y^2 = x^6 + 6x^5 + 3x^4 - 26x^3 - 27x^2 - 12x$
C_{208E}	$: y^2 = x^5 + 3x^4 - 21x^3 + 5x^2 + 16x - 12$
C_{209B}	$: y^2 = x^6 - 4x^5 + 8x^4 - 8x^3 + 8x^2 + 4x + 4$
C_{213B}	$: y^2 = x^6 + 2x^4 + 2x^3 - 7x^2 + 6x - 3$
C_{221C}	$: y^2 = x^6 + 4x^5 + 2x^4 + 6x^3 + x^2 - 2x + 1$
C_{224C}	$: y^2 = x^5 + 3x^4 - 16x^3 - 20x^2 + 64x - 32$
C_{224D}	$: y^2 = x^5 - 13x^4 + 48x^3 - 36x^2 - 32x + 32$

C	$: y^2 = F(x)$
C_{261A}	$: y^2 = x^6 - 6x^4 + 10x^3 + 21x^2 - 30x + 9$
C_{272E}	$: y^2 = x^5 - 10x^4 + 21x^3 + 48x^2 - 176x + 128$
C_{272F}	$: y^2 = x^5 + 11x^4 + 7x^3 - 7x^2 - 12x - 8$
C_{275C}	$: y^2 = x^6 - 4x^5 + 2x^4 - 22x^3 - 15x^2 - 30x - 35$
C_{280D}	$: y^2 = x^5 - 5x^4 + 3x^3 + 9x^2 - 20x$
C_{287A}	$: y^2 = x^6 - 4x^5 + 2x^4 + 6x^3 - 15x^2 + 14x - 7$
C_{297E}	$: y^2 = x^6 + 6x^5 + 3x^4 - 36x^3 - 69x^2 - 54x - 15$
C_{299A}	$: y^2 = x^6 - 10x^5 + 41x^4 - 78x^3 + 66x^2 - 28x + 5$
C_{315C}	$: y^2 = x^6 + 6x^5 + 3x^4 - 18x^3 - 27x^2 - 24x - 4$
C_{351A}	$: y^2 = x^6 - 6x^4 + 18x^3 + 9x^2 - 18x + 5$
C_{357E}	$: y^2 = x^6 + 8x^4 - 8x^3 + 20x^2 - 12x + 12$
C_{368H}	$: y^2 = x^5 - 5x^4 - 4x^3 + 39x^2 - 32x + 8$
C_{376A}	$: y^2 = x^5 - 6x^4 + 11x^3 - 4x^2 - 2x + 1$
C_{376B}	$: y^2 = x^5 - x^3 + 2x^2 - 2x + 1$
C_{380D}	$: y^2 = x^5 - 5x^4 + 3x^3 + 7x^2 - 3x + 2$
C_{416C}	$: y^2 = x^5 - 3x^4 + 7x^3 - x^2 - 8x + 20$
C_{416E}	$: y^2 = x^5 - 2x^4 + 5x^3 - 12x^2 + 4x - 16$
C_{440E}	$: y^2 = x^5 - 5x^4 + 12x^3 - 27x^2 + 25x - 30$
C_{440G}	$: y^2 = x^5 - 2x^3 - 7x^2 - 8x + 8$
C_{448I}	$: y^2 = x^5 - 3x^4 + 12x^3 - 8x^2 - 20x + 4$
C_{448J}	$: y^2 = x^5 - 7x^4 + 28x^3 - 72x^2 + 76x - 12$
C_{476B}	$: y^2 = x^5 - 3x^4 + 5x^3 - x^2 - 2x + 1$
C_{476D}	$: y^2 = x^5 - 2x^4 + 3x^3 - 6x^2 - 7$
C_{525E}	$: y^2 = x^6 + 2x^4 - 10x^3 - 7x^2 - 30x + 9$
C_{560H}	$: y^2 = x^5 - 7x^3 + 2x^2 - 8x + 12$
C_{621D}	$: y^2 = x^6 - 6x^5 + 21x^4 - 42x^3 + 42x^2 - 24x + 5$
C_{640I}	$: y^2 = x^5 + 2x^3 + 4x^2 - 8x + 16$
C_{640L}	$: y^2 = x^5 - 10x^4 + 42x^3 - 96x^2 + 112x - 64$
C_{645G}	$: y^2 = x^6 + 8x^4 + 20x^2 + 12x + 4$
C_{704M}	$: y^2 = x^5 - 3x^4 + 12x^3 - 10x^2 + 7x + 9$

C	: $y^2 = F(x)$
C_{704N}	: $y^2 = x^5 - 2x^4 + 10x^3 - 18x^2 + 16x - 16$
C_{752B}	: $y^2 = x^5 - 5x^4 + 9x^3 - 9x^2 + 4x - 1$
C_{752C}	: $y^2 = x^5 + x^4 - 3x^3 - 3x^2 + 4x - 1$
C_{752E}	: $y^2 = x^5 - 4x^4 + 7x^3 - 8x^2 + 4x - 1$
C_{752F}	: $y^2 = x^5 - 5x^3 + 20x^2 - 24x + 19$
C_{783A}	: $y^2 = x^6 - 6x^4 + 10x^3 - 15x^2 + 6x - 3$
C_{880K}	: $y^2 = x^5 + 2x^3 + 11x^2 - 8x + 24$
C_{880M}	: $y^2 = x^5 - 5x^4 + 8x^3 + 3x^2 - 23x + 8$
C_{952B}	: $y^2 = x^5 - 8x^4 + 27x^3 - 30x^2 + 18x - 7$
C_{1053F}	: $y^2 = x^6 - 6x^4 + 18x^3 - 27x^2 + 18x - 7$
C_{1120R}	: $y^2 = x^5 - 5x^4 + 17x^3 - 15x^2 - 14x$
C_{1120S}	: $y^2 = x^5 + 5x^4 + 17x^3 + 15x^2 - 14x$
C_{1280C}	: $y^2 = x^5 + 5x^4 + 22x^3 + 14x^2 - 3x + 1$
C_{1280L}	: $y^2 = x^5 - 5x^4 + 22x^3 - 14x^2 - 3x - 1$
C_{1520M}	: $y^2 = x^5 + 5x^4 + 3x^3 - 7x^2 - 3x - 2$
C_{1792K}	: $y^2 = x^5 + 3x^4 - 2x^3 - 2x^2 + 10x - 6$
C_{1792L}	: $y^2 = x^5 - 3x^4 - 2x^3 + 2x^2 + 10x + 6$
C_{1820B}	: $y^2 = x^5 + 7x^3 - 16x^2 + 12x + 1$
C_{1904G}	: $y^2 = x^5 + 3x^4 + 5x^3 - 13x^2 + 12x - 1$
C_{1904I}	: $y^2 = x^5 + 2x^4 + 3x^3 + 6x^2 + 7$
C_{1904K}	: $y^2 = x^5 - 2x^4 + 3x^3 - 6x^2 + 4x - 1$
C_{1916A}	: $y^2 = x^5 + 3x^4 - 7x^3 + 5x^2 - 2x + 1$
C_{2240DD}	: $y^2 = x^5 + 5x^4 + 17x^3 + 33x^2 + 40x + 30$
C_{2240EE}	: $y^2 = x^5 - 5x^4 + 17x^3 - 33x^2 + 40x - 30$
C_{3159G}	: $y^2 = x^6 - 6x^5 + 21x^4 - 26x^3 + 18x^2 - 3$
C_{7280BB}	: $y^2 = x^5 - 5x^4 + 17x^3 - 15x^2 + 6x - 5$
C_{7664A}	: $y^2 = x^5 - 3x^4 - 7x^3 - 5x^2 - 2x - 1$

Tabla 6.2: Jacobiana $\mathbb{Q}$-simple y no $\overline{\mathbb{Q}}$-simple

C	$: y^2 = F(x)$
$C_{13A_{\{2\}}}$	$: y^2 = x^6 + 4x^5 + 6x^4 + 2x^3 + x^2 + 2x + 1$
$C_{16A_{\{\{0,1\}\}}}$	$: y^2 = x^6 + 2x^5 - x^4 - x^2 - 2x + 1$
$C_{18A_{\{0,2\}}}$	$: y^2 = x^6 + 2x^5 + 5x^4 + 10x^3 + 10x^2 + 4x + 1$
$C_{28A_{\{0,2\}}}$	$: y^2 = x^5 - 4x^4 - 13x^3 - 9x^2 - x$
$C_{40A_{\{\{0,0\},2\}}}$	$: y^2 = x^5 - 3x^4 - 12x^2 - 16x$
$C_{45A_{\{0,2\}}}$	$: y^2 = x^6 + 22x^3 + 125$
$C_{48A_{\{\{1,0\},1\}}}$	$: y^2 = x^5 - 5x^4 + 20x^2 - 16x$
$C_{52A_{\{0,2\}}}$	$: y^2 = x^5 - 5x^3 - 5x^2 - x$
C_{63B}	$: y^2 = x^6 - 26x^3 - 27$
$C_{64A_{\{\{0,8\}\}}}$	$: y^2 = x^5 - 16x$
$C_{64A_{\{\{0,4\}\}}}$	$: y^2 = x^5 - 2x^4 - 2x^2 - x$
$C_{80A_{\{\{0,0\},2\}}}$	$: y^2 = x^5 + 3x^4 + 12x^2 - 16x$
C_{81A}	$: y^2 = x^6 - 18x^3 - 27$
$C_{100A_{\{0,10\}}}$	$: y^2 = x^5 + 5x^3 + 5x - 11$
$C_{112A_{\{\{1,0\},1\}}}$	$: y^2 = x^5 + 3x^4 + x^3 - 2x^2 - x$
$C_{112B_{\{\{1,0\},1\}}}$	$: y^2 = x^5 - 3x^4 + x^3 + 2x^2 - x$
$C_{112A_{\{\{0,0\},2\}}}$	$: y^2 = x^5 + 4x^4 - 13x^3 + 9x^2 - x$
C_{117B}	$: y^2 = x^6 - 10x^3 - 27$
$C_{128B_{\{\{0,16\}\}}}$	$: y^2 = x^5 + 64x$
$C_{148A_{\{0,6\}}}$	$: y^2 = x^5 + 8x^4 + 11x^3 + 3x^2 - x$
C_{160C}	$: y^2 = x^5 - 12x^3 - 64x$
$C_{160A_{\{\{1,0\},1\}}}$	$: y^2 = x^5 - 11x^4 - 11x^2 - x$
$C_{160B_{\{\{1,0\},1\}}}$	$: y^2 = x^5 + x^4 + x^2 - x$
$C_{160C_{\{\{1,0\},1\}}}$	$: y^2 = x^5 + 11x^4 + 11x^2 - x$
$C_{160D_{\{\{1,0\},1\}}}$	$: y^2 = x^5 - x^4 - x^2 - x$
C_{189E}	$: y^2 = x^6 - 2x^3 - 27$
$C_{192A_{\{\{1,0\},1\}}}$	$: y^2 = x^5 - 5x^4 + 20x^3 - 40x^2 + 44x - 20$
$C_{208A_{\{\{0,0\},2\}}}$	$: y^2 = x^5 - 5x^3 + 5x^2 - x$

C	$: y^2 = F(x)$
C_{243C}	$: y^2 = x^6 + 6x^3 - 27$
C_{256E}	$: y^2 = x^5 - 64x$
C_{320G}	$: y^2 = x^5 + 12x^3 - 64x$
$C_{400A_{\{\{0,0\},10\}}}$	$: y^2 = x^5 + 5x^3 + 5x + 11$
C_{512B}	$: y^2 = x^5 + 4x^3 - 4x$
C_{512E}	$: y^2 = x^5 - 4x^3 - 4x$
C_{544G}	$: y^2 = x^5 - x^3 - 4x$
$C_{592A_{\{\{0,0\},6\}}}$	$: y^2 = x^5 - 8x^4 + 11x^3 - 3x^2 - x$
$C_{768A_{\{\{1,0\},1\}}}$	$: y^2 = x^5 + x^4 + 2x^3 - 2x^2 - 2x + 2$
$C_{768C_{\{\{1,0\},1\}}}$	$: y^2 = x^5 - x^4 + 2x^3 + 2x^2 - 2x - 2$
$C_{928A_{\{\{1,0\},7\}}}$	$: y^2 = x^5 - 5x^4 - 5x^2 - x$
$C_{928B_{\{\{1,0\},7\}}}$	$: y^2 = x^5 + 5x^4 + 5x^2 - x$
C_{1088Q}	$: y^2 = x^5 + x^3 - 4x$
C_{1280A}	$: y^2 = x^5 + 2x^3 - 4x$
C_{1280D}	$: y^2 = x^5 - 2x^3 - 4x$
C_{1280E}	$: y^2 = x^5 + 8x^3 - 4x$
C_{1280I}	$: y^2 = x^5 - 8x^3 - 4x$
C_{1280J}	$: y^2 = x^5 + 22x^3 - 4x$
C_{1280N}	$: y^2 = x^5 - 22x^3 - 4x$
C_{1312C}	$: y^2 = x^5 - 5x^3 - 4x$
C_{2080J}	$: y^2 = x^5 + 7x^3 - 4x$
C_{2624M}	$: y^2 = x^5 + 5x^3 - 4x$
C_{4160II}	$: y^2 = x^5 - 7x^3 - 4x$
C_{7424A}	$: y^2 = x^5 - 10x^3 - 4x$
C_{7424B}	$: y^2 = x^5 + 10x^3 - 4x$

Tabla 6.3: Jacobiana no $\mathbb{Q}$-simple

C : $y^2 = F(x)$
$C_{26}^{A,B}$: $y^2 = x^6 + 4x^5 - 12x^4 - 114x^3 - 308x^2 - 384x - 191$
$C_{37}^{A,B}$: $y^2 = x^6 - 4x^5 - 40x^4 + 348x^3 - 1072x^2 + 1532x - 860$
$C_{50}^{A,B}$: $y^2 = x^6 + 2x^5 - 5x^4 - 30x^3 - 55x^2 - 48x - 16$
$C_{54}^{A,B}$: $y^2 = x^6 - 34x^3 + 1$
$C_{56}^{A,B}$: $y^2 = x^5 + 6x^4 - 45x^3 - 490x^2 - 1503x - 1564$
$C_{58}^{A,B}$: $y^2 = x^6 - 2x^5 + 11x^4 - 22x^3 + 21x^2 - 12x + 4$
$C_{66}^{A,B}$: $y^2 = x^6 + 2x^5 - 5x^4 - 22x^3 - 31x^2 - 24x - 8$
$C_{80}^{A,B}$: $y^2 = x^5 + 2x^4 - 26x^3 - 132x^2 - 231x - 142$
$C_{84}^{A,B}$: $y^2 = x^5 + 4x^4 - 25x^3 - 172x^2 - 339x - 222$
$C_{90}^{A,B}$: $y^2 = x^6 - 18x^3 + 1$
$C_{91}^{A,B}$: $y^2 = x^6 + 2x^5 - x^4 - 8x^3 - x^2 + 2x + 1$
$C_{96}^{A,B}$: $y^2 = x^5 - 34x^3 + x$
$C_{112}^{A,C}$: $y^2 = x^5 - 2x^4 + 10x^3 - 16x^2 + 21x - 14$
$C_{112}^{A,B}$: $y^2 = x^5 - 6x^4 - 45x^3 + 490x^2 - 1503x + 1564$
$C_{128}^{B,D}$: $y^2 = x^5 - 24x^3 + 16x$
$C_{128}^{A,C}$: $y^2 = x^5 + 24x^3 + 16x$
$C_{138}^{A,C}$: $y^2 = x^6 + 8x^4 + 6x^3 + 8x^2 + 1$
$C_{142}^{B,D}$: $y^2 = x^6 - 2x^5 - 5x^4 + 18x^3 - 19x^2 + 12x - 4$
$C_{160}^{A,B}$: $y^2 = x^5 + 12x^3 + 16x$
$C_{162}^{A,D}$: $y^2 = x^6 + 14x^3 + 1$
$C_{162}^{B,C}$: $y^2 = x^6 - 10x^3 + 1$
$C_{184}^{C,D}$: $y^2 = x^5 - 10x^3 - 15x^2 - 9x - 7$
$C_{189}^{A,C}$: $y^2 = x^6 - 12x^4 + 36x^3 - 48x^2 + 36x - 12$
$C_{189}^{A,B}$: $y^2 = x^6 - 12x^4 + 12x^3 + 24x^2 - 36x + 12$
$C_{192}^{C,D}$: $y^2 = x^5 - 14x^3 + x$
$C_{192}^{B,D}$: $y^2 = x^5 + 4x^4 - 6x^3 - 58x^2 - 111x - 70$

C	: $y^2 = F(x)$
$C_{192}^{A,C}$	: $y^2 = x^5 - 4x^4 - 6x^3 + 58x^2 - 111x + 70$
$C_{192}^{A,B}$	: $y^2 = x^5 + 34x^3 + x$
$C_{200}^{C,E}$	: $y^2 = x^5 - 10x^3 - 15x^2 + 8$
$C_{240}^{C,D}$	: $y^2 = x^5 - 2x^4 + 6x^3 - 13x^2 + 12x - 4$
$C_{256}^{A,D}$	: $y^2 = x^5 + 16x$
$C_{264}^{A,B}$	: $y^2 = x^5 + 2x^4 - 6x^3 - 23x^2 - 24x - 8$
$C_{312}^{B,C}$	: $y^2 = x^5 - 2x^4 - x^3 + 8x^2 - 9x + 3$
$C_{320}^{A,C}$	: $y^2 = x^5 - 2x^4 - 2x^3 - 2x^2 + x$
$C_{320}^{D,E}$	: $y^2 = x^5 - 12x^3 + 16x$
$C_{320}^{B,F}$	: $y^2 = x^5 + 2x^4 - 2x^3 + 2x^2 + x$
$C_{336}^{A,F}$	: $y^2 = x^5 - 4x^4 - 25x^3 + 172x^2 - 339x + 222$
$C_{368}^{A,G}$	: $y^2 = x^5 - 10x^3 + 15x^2 - 9x + 7$
$C_{384}^{A,D}$	: $y^2 = x^5 + 10x^3 + x$
$C_{384}^{B,C}$	: $y^2 = x^5 - 10x^3 + x$
$C_{400}^{B,E}$	: $y^2 = x^5 - 25x^2 + 20x - 4$
$C_{400}^{A,H}$	: $y^2 = x^5 - 10x^3 + 15x^2 - 8$
$C_{405}^{A,F}$	: $y^2 = x^6 - 12x^4 + 28x^3 - 24x^2 + 12x - 4$
$C_{405}^{B,F}$	: $y^2 = x^6 - 12x^4 + 20x^3 - 12x + 4$
$C_{448}^{A,D}$	: $y^2 = x^5 - 2x^4 + 10x^3 - 2x^2 + x$
$C_{448}^{B,G}$	: $y^2 = x^5 + 2x^4 + 10x^3 + 2x^2 + x$
$C_{480}^{B,C}$	: $y^2 = x^5 + 2x^4 - 4x^3 - 17x^2 - 18x - 6$
$C_{480}^{B,G}$	: $y^2 = x^5 - 7x^3 + x$
$C_{480}^{A,G}$	: $y^2 = x^5 - 2x^4 - 4x^3 + 17x^2 - 18x + 6$
$C_{528}^{A,D}$	: $y^2 = x^5 - 2x^4 - 6x^3 + 23x^2 - 24x + 8$
$C_{544}^{B,C}$	: $y^2 = x^5 - 9x^3 + 16x$
$C_{624}^{C,D}$	: $y^2 = x^5 + 2x^4 - x^3 - 8x^2 - 9x - 3$
$C_{672}^{A,G}$	: $y^2 = x^5 + 5x^3 + x$

C	$: y^2 = F(x)$
$C_{760}^{A,E}$	$: y^2 = x^5 + 3x^3 + 14x^2 + 15x + 5$
$C_{768}^{D,F}$	$: y^2 = x^5 - 4x^3 + x$
$C_{768}^{B,H}$	$: y^2 = x^5 + 4x^3 + x$
$C_{960}^{A,F}$	$: y^2 = x^5 + 7x^3 + x$
$C_{1088}^{L,N}$	$: y^2 = x^5 + 9x^3 + 16x$
$C_{1344}^{C,F}$	$: y^2 = x^5 - 5x^3 + x$
$C_{1520}^{B,D}$	$: y^2 = x^5 + 3x^3 - 14x^2 + 15x - 5$
$C_{1664}^{F,G}$	$: y^2 = x^5 - 2x^4 + x^3 + 2x - 4$
$C_{1664}^{O,S}$	$: y^2 = x^5 + 2x^4 + x^3 + 2x + 4$
$C_{2208}^{A,E}$	$: y^2 = x^5 + 2x^4 + 8x^3 + 19x^2 + 18x + 6$
$C_{2208}^{G,I}$	$: y^2 = x^5 - 2x^4 + 8x^3 - 19x^2 + 18x - 6$

$\mathbb{Q}$-álgebra de $\mathbb{Q}$-endomorfismos

En este apartado mostraremos la $\mathbb{Q}$-álgebra de $\mathbb{Q}$-endomorfismos de la jacobiana de cada una de las curvas modulares nuevas de género 2 que tienen jacobiana $\mathbb{Q}$-simple, es decir, el cuerpo de coeficientes de la q-expansión de la forma nueva correspondiente.

$K_{13A_{\{2\}}}$	$=\mathbb{Q}(\sqrt{-3})$	$K_{16A_{\{\{0,1\}\}}}$	$=\mathbb{Q}(i)$	$K_{18A_{\{0,2\}}}$	$=\mathbb{Q}(\sqrt{-3})$
K_{23A}	$=\mathbb{Q}(\sqrt{5})$	$K_{28A_{\{0,2\}}}$	$=\mathbb{Q}(\sqrt{-3})$	K_{29A}	$=\mathbb{Q}(\sqrt{2})$
K_{31A}	$=\mathbb{Q}(\sqrt{5})$	K_{35B}	$=\mathbb{Q}(\sqrt{17})$	K_{39B}	$=\mathbb{Q}(\sqrt{2})$
$K_{40A_{\{\{0,0\},2\}}}$	$=\mathbb{Q}(i)$	$K_{45A_{\{\{0,2\}\}}}$	$=\mathbb{Q}(\sqrt{-5})$	$K_{48A_{\{\{1,0\},1\}}}$	$=\mathbb{Q}(\sqrt{-3})$
$K_{52A_{\{0,2\}}}$	$=\mathbb{Q}(\sqrt{-3})$	K_{63B}	$=\mathbb{Q}(\sqrt{3})$	$K_{64A_{\{\{0,8\}\}}}$	$=\mathbb{Q}(i)$
$K_{64A_{\{\{0,4\}\}}}$	$=\mathbb{Q}(i)$	K_{67B}	$=\mathbb{Q}(\sqrt{5})$	K_{68A}	$=\mathbb{Q}(\sqrt{3})$
K_{73B}	$=\mathbb{Q}(\sqrt{5})$	$K_{80A_{\{\{0,0\},2\}}}$	$=\mathbb{Q}(i)$	K_{81A}	$=\mathbb{Q}(\sqrt{3})$
K_{85B}	$=\mathbb{Q}(\sqrt{2})$	K_{87A}	$=\mathbb{Q}(\sqrt{5})$	K_{88B}	$=\mathbb{Q}(\sqrt{17})$
K_{93A}	$=\mathbb{Q}(\sqrt{5})$	$K_{100A_{\{0,10\}}}$	$=\mathbb{Q}(i)$	K_{103A}	$=\mathbb{Q}(\sqrt{5})$
K_{104B}	$=\mathbb{Q}(\sqrt{17})$	K_{107A}	$=\mathbb{Q}(\sqrt{5})$	$K_{112A_{\{\{1,0\},1\}}}$	$=\mathbb{Q}(\sqrt{-3})$
$K_{112B_{\{\{1,0\},1\}}}$	$=\mathbb{Q}(\sqrt{-3})$	$K_{112A_{\{\{0,0\},2\}}}$	$=\mathbb{Q}(\sqrt{-3})$	K_{115B}	$=\mathbb{Q}(\sqrt{5})$
K_{117B}	$=\mathbb{Q}(\sqrt{3})$	K_{125A}	$=\mathbb{Q}(\sqrt{5})$	$K_{128B_{\{\{0,16\}\}}}$	$=\mathbb{Q}(\sqrt{-2})$
K_{133A}	$=\mathbb{Q}(\sqrt{5})$	K_{135D}	$=\mathbb{Q}(\sqrt{13})$	K_{136C}	$=\mathbb{Q}(\sqrt{5})$
K_{147D}	$=\mathbb{Q}(\sqrt{2})$	$K_{148A_{\{0,6\}}}$	$=\mathbb{Q}(\sqrt{-3})$	K_{160C}	$=\mathbb{Q}(\sqrt{2})$
$K_{160A_{\{\{1,0\},1\}}}$	$=\mathbb{Q}(i)$	$K_{160B_{\{\{1,0\},1\}}}$	$=\mathbb{Q}(i)$	$K_{160C_{\{\{1,0\},1\}}}$	$=\mathbb{Q}(i)$

$K_{160D_{\{\{1,0\},1\}}}$	$=\mathbb{Q}(i)$
K_{167A}	$=\mathbb{Q}(\sqrt{5})$
K_{177A}	$=\mathbb{Q}(\sqrt{5})$
K_{188B}	$=\mathbb{Q}(\sqrt{5})$
$K_{192A_{\{\{1,0\},1\}}}$	$=\mathbb{Q}(\sqrt{-3})$
K_{208E}	$=\mathbb{Q}(\sqrt{17})$
K_{213B}	$=\mathbb{Q}(\sqrt{5})$
K_{224D}	$=\mathbb{Q}(\sqrt{5})$
K_{261A}	$=\mathbb{Q}(\sqrt{5})$
K_{275C}	$=\mathbb{Q}(\sqrt{13})$
K_{297E}	$=\mathbb{Q}(\sqrt{3})$
K_{320G}	$=\mathbb{Q}(\sqrt{2})$
K_{368H}	$=\mathbb{Q}(\sqrt{17})$
K_{380D}	$=\mathbb{Q}(\sqrt{3})$
K_{416E}	$=\mathbb{Q}(\sqrt{17})$
K_{448I}	$=\mathbb{Q}(\sqrt{5})$
K_{476D}	$=\mathbb{Q}(\sqrt{13})$
K_{525E}	$=\mathbb{Q}(\sqrt{13})$
$K_{592A_{\{\{0,0\},6\}}}$	$=\mathbb{Q}(\sqrt{-3})$
K_{640L}	$=\mathbb{Q}(\sqrt{5})$
K_{704N}	$=\mathbb{Q}(\sqrt{17})$
K_{752E}	$=\mathbb{Q}(\sqrt{5})$
$K_{768B_{\{\{1,0\},1\}}}$	$=\mathbb{Q}(\sqrt{-2})$
K_{880M}	$=\mathbb{Q}(\sqrt{17})$
K_{952B}	$=\mathbb{Q}(\sqrt{13})$
K_{1120R}	$=\mathbb{Q}(\sqrt{17})$
K_{1280C}	$=\mathbb{Q}(\sqrt{3})$
K_{1280I}	$=\mathbb{Q}(\sqrt{2})$
K_{1280N}	$=\mathbb{Q}(\sqrt{2})$
K_{1792K}	$=\mathbb{Q}(\sqrt{5})$
K_{1904G}	$=\mathbb{Q}(\sqrt{13})$
K_{1916A}	$=\mathbb{Q}(\sqrt{5})$
K_{2240EE}	$=\mathbb{Q}(\sqrt{17})$
K_{4160II}	$=\mathbb{Q}(\sqrt{2})$
K_{7424B}	$=\mathbb{Q}(\sqrt{2})$

K_{161B}	$=\mathbb{Q}(\sqrt{5})$
K_{175E}	$=\mathbb{Q}(\sqrt{5})$
K_{184E}	$=\mathbb{Q}(\sqrt{17})$
K_{189E}	$=\mathbb{Q}(\sqrt{3})$
K_{205D}	$=\mathbb{Q}(\sqrt{5})$
$K_{208A_{\{\{0,0\},2\}}}$	$=\mathbb{Q}(\sqrt{-3})$
K_{221C}	$=\mathbb{Q}(\sqrt{5})$
K_{243C}	$=\mathbb{Q}(\sqrt{3})$
K_{272E}	$=\mathbb{Q}(\sqrt{5})$
K_{280D}	$=\mathbb{Q}(\sqrt{17})$
K_{299A}	$=\mathbb{Q}(\sqrt{5})$
K_{351A}	$=\mathbb{Q}(\sqrt{5})$
K_{376A}	$=\mathbb{Q}(\sqrt{5})$
$K_{400A_{\{\{0,0\},10\}}}$	$=\mathbb{Q}(i)$
K_{440E}	$=\mathbb{Q}(\sqrt{17})$
K_{448J}	$=\mathbb{Q}(\sqrt{5})$
K_{512B}	$=\mathbb{Q}(\sqrt{2})$
K_{544G}	$=\mathbb{Q}(\sqrt{2})$
K_{621D}	$=\mathbb{Q}(\sqrt{5})$
K_{645G}	$=\mathbb{Q}(\sqrt{2})$
K_{752B}	$=\mathbb{Q}(\sqrt{5})$
K_{752F}	$=\mathbb{Q}(\sqrt{13})$
K_{783A}	$=\mathbb{Q}(\sqrt{5})$
$K_{928A_{\{\{1,0\},7\}}}$	$=\mathbb{Q}(i)$
K_{1053F}	$=\mathbb{Q}(\sqrt{5})$
K_{1120S}	$=\mathbb{Q}(\sqrt{17})$
K_{1280D}	$=\mathbb{Q}(\sqrt{2})$
K_{1280J}	$=\mathbb{Q}(\sqrt{2})$
K_{1312C}	$=\mathbb{Q}(\sqrt{2})$
K_{1792L}	$=\mathbb{Q}(\sqrt{5})$
K_{1904I}	$=\mathbb{Q}(\sqrt{13})$
K_{2080J}	$=\mathbb{Q}(\sqrt{2})$
K_{2624M}	$=\mathbb{Q}(\sqrt{2})$
K_{7280BB}	$=\mathbb{Q}(\sqrt{13})$
K_{7664A}	$=\mathbb{Q}(\sqrt{5})$

K_{165A}	$=\mathbb{Q}(\sqrt{2})$
K_{176D}	$=\mathbb{Q}(\sqrt{17})$
K_{188A}	$=\mathbb{Q}(\sqrt{13})$
K_{191A}	$=\mathbb{Q}(\sqrt{5})$
K_{207B}	$=\mathbb{Q}(\sqrt{2})$
K_{209B}	$=\mathbb{Q}(\sqrt{2})$
K_{224C}	$=\mathbb{Q}(\sqrt{5})$
K_{256E}	$=\mathbb{Q}(\sqrt{2})$
K_{272F}	$=\mathbb{Q}(\sqrt{3})$
K_{287A}	$=\mathbb{Q}(\sqrt{5})$
K_{315C}	$=\mathbb{Q}(\sqrt{2})$
K_{357E}	$=\mathbb{Q}(\sqrt{2})$
K_{376B}	$=\mathbb{Q}(\sqrt{5})$
K_{416C}	$=\mathbb{Q}(\sqrt{17})$
K_{440G}	$=\mathbb{Q}(\sqrt{17})$
K_{476B}	$=\mathbb{Q}(\sqrt{5})$
K_{512E}	$=\mathbb{Q}(\sqrt{2})$
K_{560H}	$=\mathbb{Q}(\sqrt{17})$
K_{640I}	$=\mathbb{Q}(\sqrt{5})$
K_{704M}	$=\mathbb{Q}(\sqrt{17})$
K_{752C}	$=\mathbb{Q}(\sqrt{5})$
$K_{768A_{\{\{1,0\},1\}}}$	$=\mathbb{Q}(\sqrt{-2})$
K_{880K}	$=\mathbb{Q}(\sqrt{17})$
$K_{928B_{\{\{1,0\},7\}}}$	$=\mathbb{Q}(i)$
K_{1088Q}	$=\mathbb{Q}(\sqrt{2})$
K_{1280A}	$=\mathbb{Q}(\sqrt{2})$
K_{1280E}	$=\mathbb{Q}(\sqrt{2})$
K_{1280L}	$=\mathbb{Q}(\sqrt{3})$
K_{1520M}	$=\mathbb{Q}(\sqrt{3})$
K_{1820B}	$=\mathbb{Q}(\sqrt{13})$
K_{1904K}	$=\mathbb{Q}(\sqrt{5})$
K_{2240DD}	$=\mathbb{Q}(\sqrt{17})$
K_{3159G}	$=\mathbb{Q}(\sqrt{5})$
K_{7424A}	$=\mathbb{Q}(\sqrt{2})$

6.2.2 Ejemplos de $\mathbb{Q}$-curvas modulares

Vimos en el capítulo 4 que todas las curvas modulares nuevas de género 2 con jacobiana $\mathbb{Q}$-simple y no $\overline{\mathbb{Q}}$-simple tienen involuciones no hiperelípticas. Los cocientes de estas curvas por involuciones no hiperelípticas son curvas elípticas modulares sobre el cuerpo de números donde está definida la involución. Para cada una de estas curvas hemos calculado, utilizando el lema 2.2 de [CGLR99], una ecuación de Weierstras de la forma $y^2 = x^3+Ax+B$. Por lo tanto, estamos calculando ecuaciones de $\mathbb{Q}$-curvas modulares.

La siguiente tabla muestra una ecuación de Weierstrass para cada una de estas $\mathbb{Q}$-curvas cocientes. La notación de las $\mathbb{Q}$-curvas es similar a la de las correspondientes curvas de género 2. Para cada una de ellas, se denota por L al mínimo cuerpo donde la jacobiana de la curva hiperelíptica descompone completamente; dicho cuerpo es el cuerpo de definición de las involuciones no hiperelípticas. Las ecuaciones que se presentan están definidas sobre el mínimo subcuerpo de L de manera que el morfismo de la correspondiente curva hiperelíptica a la $\mathbb{Q}$-curva está definido sobre L.

Tabla 6.4: Ejemplos de $\mathbb{Q}$-curvas cocientes modulares

E	$: \ y^2 = G(x)$
$E_{13A_{\{2\}}}$	$: \ y^2 = x^3 + 2808(13+27\sqrt{13})\,x + 44972928,$ $L = \mathbb{Q}(\sqrt{13}, t)$, con $t^3+t^2-4t+1=0$.
$E_{16A_{\{\{0,1\}\}}}$	$: \ y^2 = x^3 + 54(21t^3+33t^2-142t-229)x$ $-54(1183t^3+1532t^2-8080t-10456),$ $L = \mathbb{Q}(t)$, con $t^4-8t^2+8=0$.
$E_{18A_{\{0,2\}}}$	$: \ y^2 = x^3 - 75\,x + 262,$ $L = \mathbb{Q}(t)$, con $t^3-3t-1=0$.
$E_{28A_{\{0,2\}}}$	$: \ y^2 = x^3 - 9261x - 64827,$ $L = \mathbb{Q}(t)$, con $t^3-8t^2+5t+1=0$.
$E_{40A_{\{\{0,0\},2\}}}$	$: \ y^2 = x^3 - 27(3+\sqrt{5})x + 27(5+2\sqrt{5}),$ $L = \mathbb{Q}(\sqrt{5})$.
$E_{45A_{\{0,2\}}}$	$: \ y^2 = x^3 + 3(-125+44\sqrt{5})x - 154(-21+10\sqrt{5}),$ $L = \mathbb{Q}(\sqrt{5})$.
$E_{48A_{\{\{1,0\},1\}}}$	$: \ y^2 = x^3 + 45(-7+4\sqrt{3})x + 66(-45+26\sqrt{3}),$ $L = \mathbb{Q}(\sqrt{3})$.
$E_{52A_{\{0,2\}}}$	$: \ y^2 = x^3 - 1755(65+18\sqrt{13})x + 4563(3115+864\sqrt{13}),$ $L = \mathbb{Q}(\sqrt{13}, t)$, con $t^3-4t^2+t+1=0$.
E_{63B}	$: \ y^2 = x^3 - 3(45+52\sqrt{-3})x + 2(41-546\sqrt{-3}),$ $L = \mathbb{Q}(\sqrt{-3})$.

E	$: \ y^2 \ = \ G(x)$
$E_{64A_{\{\{0,8\}\}}}$	$: \ y^2 = x^3 - 135(3+2\sqrt{2})x - 378(10+7\sqrt{2})$, $L = \mathbb{Q}(\sqrt{2})$.
$E_{64A_{\{\{0,4\}\}}}$	$: \ y^2 = x^3 + 54(2t^3 - 12t^2 + 6t + 5)x$ $-54(41t^3 - 92t^2 - 148t + 216)$, $L = \mathbb{Q}(t)$, con $t^4 - 8t^2 + 8 = 0$.
$E_{80A_{\{\{0,0\},2\}}}$	$: \ y^2 = x^3 - 27(3+\sqrt{5})x - 27(5+2\sqrt{5})$, $L = \mathbb{Q}(\sqrt{5})$.
E_{81A}	$: \ y^2 = x^3 - 3(5+4\sqrt{-3})x + 2(5+14\sqrt{-3})$, $L = \mathbb{Q}(\sqrt{-3})$.
$E_{100A_{\{0,10\}}}$	$: \ y^2 = x^3 - 270(3+\sqrt{5})x - 1485(5+2\sqrt{5})$, $L = \mathbb{Q}(\sqrt{5})$.
$E_{112A_{\{\{1,0\},1\}}}$	$: \ y^2 = x^3 - 756(49+18\sqrt{7})x + 10584(356+135\sqrt{7})$, $L = \mathbb{Q}(\sqrt{7}, t)$, con $t^3 - t^2 - 2t + 1 = 0$.
$E_{112B_{\{\{1,0\},1\}}}$	$: \ y^2 = x^3 - 189(175+66\sqrt{7})x + 1323(2381+900\sqrt{7})$, $L = \mathbb{Q}(\sqrt{7}, t)$, con $t^3 - t^2 - 2t + 1 = 0$.
$E_{112A_{\{\{0,0\},2\}}}$	$: \ y^2 = x^3 - 564921x + 163428867$, $L = \mathbb{Q}(t)$, con $t^3 + 5t^2 - 8t + 1 = 0$.
E_{117B}	$: \ y^2 = x^3 - 15(9+4\sqrt{-3})x - 2(247+210\sqrt{-3})$, $L = \mathbb{Q}(\sqrt{-3})$.
$E_{128B_{\{\{0,16\}\}}}$	$: \ y^2 = x^3 - 135x + 378\sqrt{2}$, $L = \mathbb{Q}(\sqrt{2})$.
$E_{148A_{\{0,6\}}}$	$: \ y^2 = x^3 - 999(2701+282\sqrt{37})x + 406593(4394+720\sqrt{37})$, $L = \mathbb{Q}(\sqrt{37}, t)$ con $t^3 + 4t^2 - 7t + 1 = 0$.
E_{160C}	$: \ y^2 = x^3 + 27(9+20i)x - 108(55+i)$, $L = \mathbb{Q}(i)$
$E_{160A_{\{\{1,0\},1\}}}$	$: \ y^2 = x^3 + 1976535(2t^3 - 129t^2 + 6t + 122)x$ $+8696754(42857t^3 - 1810625t^2 - 39250t + 1821375)$, $L = \mathbb{Q}(t)$, con $t^4 - 125t^2 + 125 = 0$
$E_{160B_{\{\{1,0\},1\}}}$	$: \ y^2 = x^3 + 135(2t^3 - 9t^2 + 6t + 2)x$ $+270(103t^3 - 175t^2 - 230t + 345)$, $L = \mathbb{Q}(t)$, con $t^4 - 5t^2 + 5 = 0$.

E	$: y^2 = G(x)$
$E_{160C_{\{\{1,0\},1\}}}$	$: y^2 = x^3 + 1976535(2t^3 - 129t^2 + 6t + 122)x$ $-8696754(42857t^3 - 1810625t^2 - 39250t + 1821375)$, $L = \mathbb{Q}(t)$, con $t^4 - 125t^2 + 125 = 0$.
$E_{160D_{\{\{1,0\},1\}}}$	$: y^2 = x^3 + 135(2t^3 - 9t^2 + 6t + 2)x$ $-270(103t^3 - 175t^2 - 230t + 345)$, $L = \mathbb{Q}(t)$, con $t^4 - 5t^2 + 5 = 0$.
E_{189E}	$: y^2 = x^3 - 3(45 + 4\sqrt{3})x - 2(295 + 42\sqrt{3})$, $L = \mathbb{Q}(\sqrt{3})$.
$E_{192A_{\{\{1,0\},1\}}}$	$: y^2 = x^3 + 180x + 528\sqrt{-3}$, $L = \mathbb{Q}(\sqrt{-3})$.
$E_{208A_{\{\{0,0\},2\}}}$	$: y^2 = x^3 - 14040(13 + 3\sqrt{13})x + 292032(125 + 36\sqrt{13})$, $L = \mathbb{Q}(\sqrt{13}, t)$, con $t^3 + t^2 - 4t + 1 = 0$.
E_{243C}	$: y^2 = x^3 + 9(-15 + 4\sqrt{3})x + 18(-31 + 14\sqrt{3})$, $L = \mathbb{Q}(\sqrt{3})$.
E_{256E}	$: y^2 = x^3 + 540ix - 3024(1 + i)$, $L = \mathbb{Q}(i)$.
E_{320G}	$: y^2 = x^3 + 27(-9 + 20i)x - 108(1 + 55i)$, $L = \mathbb{Q}(i)$.
$E_{400A_{\{\{0,0\},10\}}}$	$: y^2 = x^3 - 270(3 + \sqrt{5})x + 1485(5 + 2\sqrt{5})$, $L = \mathbb{Q}(\sqrt{5})$.
E_{512B}	$: y^2 = x^3 + 27(-3 + 5i)x - 108(-1 + 8i)$, $L = \mathbb{Q}(i)$.
E_{512E}	$: y^2 = x^3 + 27(3 + 5i)x + 108(-8 + i)$, $L = \mathbb{Q}(i)$.
E_{544G}	$: y^2 = x^3 + 108(3 + 20i)x - 864(37 + 19i)$, $L = \mathbb{Q}(i)$.
$E_{592A_{\{\{0,0\},6\}}}$	$: y^2 = x^3 - 7992(185 + 27\sqrt{37})x - 26021952$, $L = \mathbb{Q}(\sqrt{37}, t)$, con $t^3 - 7t^2 + 4t + 1 = 0$.
$E_{768A_{\{\{1,0\},1\}}}$	$: y^2 = x^3 - 6(11 + 4\sqrt{3})x + 8(11 + 3\sqrt{3})$, $L = \mathbb{Q}(\sqrt{3})$.
$E_{768C_{\{\{1,0\},1\}}}$	$: y^2 = x^3 - 6(11 + 4\sqrt{3})x - 8(11 + 3\sqrt{3})$, $L = \mathbb{Q}(\sqrt{3})$.

E	$: y^2 = G(x)$
$E_{928A_{\{\{1,0\},7\}}}$	$: y^2 = x^3 + 489375(2t^3 - 33t^2 + 6t + 26)x$ $+4893750(1577t^3 - 16385t^2 - 754t + 16095),$ $L = \mathbb{Q}(t)$, con $t^4 - 29t^2 + 29 = 0.$
$E_{928A_{\{\{1,0\},7\}}}$	$: y^2 = x^3 + 489375(2t^3 - 33t^2 + 6t + 26)x$ $-4893750(1577t^3 - 16385t^2 - 754t + 16095),$ $L = \mathbb{Q}(t)$, con $t^4 - 29t^2 + 29 = 0.$
E_{1088Q}	$: y^2 = x^3 + 108(-3 + 20i)x - 864(19 + 37i),$ $L = \mathbb{Q}(i).$
E_{1280A}	$: y^2 = x^3 + 216(-3 + 10i)x - 1728(5 + 23i),$ $L = \mathbb{Q}(i).$
E_{1280D}	$: y^2 = x^3 + 216(3 + 10i)x - 1728(23 + 5i),$ $L = \mathbb{Q}(i).$
E_{1280E}	$: y^2 = x^3 + 27(-6 + 5i)x - 54(-11 + 25i),$ $L = \mathbb{Q}(i).$
E_{1280I}	$: y^2 = x^3 + 27(6 + 5i)x + 54(-25 + 11i),$ $L = \mathbb{Q}(i).$
E_{1280J}	$: y^2 = x^3 + 216(-33 + 10i)x - 1728(-85 + 113i),$ $L = \mathbb{Q}(i).$
E_{1280N}	$: y^2 = x^3 + 216(33 + 10i)x + 1728(-113 + 85i),$ $L = \mathbb{Q}(i).$
E_{1312C}	$: y^2 = x^3 + 540(3 + 4i)x + 864(-73 + 17i),$ $L = \mathbb{Q}(i).$
E_{2080J}	$: y^2 = x^3 + 108(-21 + 20i)x - 6048(-5 + 13i),$ $L = \mathbb{Q}(i).$
E_{2624M}	$: y^2 = x^3 + 540(-3 + 4i)x - 864(-17 + 73i),$ $L = \mathbb{Q}(i).$
E_{4160II}	$: y^2 = x^3 + 108(21 + 20i)x + 6048(-13 + 5i),$ $L = \mathbb{Q}(i).$
E_{7424A}	$: y^2 = x^3 + 1080(3 + 2i)x + 1728(-59 + 31i),$ $L = \mathbb{Q}(i).$
E_{7424B}	$: y^2 = x^3 + 1080(-3 + 2i)x - 1728(-31 + 59i),$ $L = \mathbb{Q}(i).$

6.3 Género mayor que 2

Distinguiremos dos casos según que las curvas estén dominadas por la curva modular $X_0(N)$ o no.

6.3.1 Con jacobiana que no es $\mathbb{Q}$-factor de $J_0(N)$

Sea C una curva hiperelíptica modular nueva de nivel N de género $g > 2$ tal que $J(C)$ no es un $\mathbb{Q}$-factor de $J_0(N)$. En el teorema 3.9 se demostró que entonces existen dos curvas C' y C'' modulares nuevas de nivel N tales que

$$J(C)\stackrel{\mathbb{Q}}{\sim}J(C')\times J(C'').$$

Además, C' tiene género 2 y $J(C')\stackrel{\mathbb{Q}}{\sim}A_f$ tal que $f\in S_2(N,\varepsilon)$, con $\operatorname{ord}\varepsilon=2$ y $J(C'')$ es un $\mathbb{Q}$-factor de $J_0(N)$ con C'' de género 1 ó 3 (en este último caso C'' es hiperelíptica). Además, en el capítulo 4 se calcularon todas las curvas modulares nuevas de género 2, que aparecen en la sección 6.2. De todas estas curvas, sólo hay 11 posibilidades para C', como se puede ver en la tabla 6.2. De ellas conocemos los niveles y las formas nuevas. Por lo tanto, sólo nos queda calcular, para cada uno de los niveles, las curvas hiperelipticas modulares nuevas que cumplan las condiciones antes descritas. Para ello, hemos utilizado el programa `CurvaHiperelipticaModular` de MAGMA descrito en el capítulo 5. Todas estas curvas, que aparecen en la siguiente tabla, son de género 3 y, por lo tanto, sus jacobianas son el producto de una curva modular nueva de género 2 y de una curva elíptica del mismo nivel. La notación de las curvas es como las de género 2 correspondientes, junto con un superíndice que denota la clase de $\mathbb{Q}$-isogenia de la curva elíptica cociente definida sobre $\mathbb{Q}$.

Este cálculo se ha utilizado en la demostración del teorema 3.10.

Tabla 6.5: $J(C)$ no $\mathbb{Q}$-simple y no $\mathbb{Q}$-factor de $J_0(N)$

C	: $y^2 = F(x)$
$C^{A}_{40A_{\{\{0,0\},2\}}}$	: $y^2 = x(x+1)(x+2)(x^2-2x-4)(x^2+3x+1)$
$C^{A}_{48A_{\{\{1,0\},1\}}}$	: $y^2 = (x+1)(x^2-2x-2)(x^2+x+1)(x^2+2x+2)$
$C^{A}_{64A_{\{\{0,8\}\}}}$	: $y^2 = x(x-1)(x+1)(x^2-2\,x-1)(x^2+2\,x-1)$
$C^{A}_{80A_{\{\{0,0\},2\}}}$	: $y^2 = x(x-1)(x-2)(x^2-3x+1)(x^2+2x-4)$
$C^{B}_{80A_{\{\{0,0\},2\}}}$	: $y^2 = (x+1)(x^2-x-1)(x^4+4\,x^2+8\,x+4)$
$C^{B}_{128B_{\{\{0,16\}\}}}$	: $y^2 = (x-2)(x^2-2x-1)(x^4-6x^2-16x+41)$
$C^{D}_{128B_{\{\{0,16\}\}}}$	: $y^2 = (x+2)(x^2+2x-1)(x^4-6x^2+16x+41)$

Así, hemos calculado todas las curvas hiperelípticas modulares nuevas tales que sus jacobianas no son $\mathbb{Q}$-factores de $J_0(N)$. En la siguiente sección trataremos el único caso que nos queda, es decir, cuando las jacobianas sí son $\mathbb{Q}$-factores de $J_0(N)$. En este caso, no demostramos haber calculado todas las curvas, pero sí que intentaremos calcularlas todas.

6.3.2 Con jacobiana que es $\mathbb{Q}$-factor de $J_0(N)$

En la subsección anterior hemos tratado el caso de curvas hiperelípticas modulares nuevas de género mayor que 2 y tales que sus jacobianas no son $\mathbb{Q}$-factores de $J_0(N)$. En esta sección trataremos el caso en que sí lo son. Hemos calculado todas estas curvas de niveles $N \leq 3000$ en el caso de jacobianas $\mathbb{Q}$-simples y de niveles $N \leq 2000$ en el caso de jacobianas no $\mathbb{Q}$-simples.

Esto lo hemos realizado con el programa `CurvaHiperelipticaModular` y restringiéndonos a las condiciones, expuestas en la proposición 5.2, que se han de dar entre los niveles y el género. Las curvas modulares nuevas de género 2 aparecen en la primera sección de este capítulo. Aquí calcularemos las de género mayor que 2, además, se ha de tener en cuenta que el género es menor que 10, por el teorema 3.10.

Tras este cálculo, hemos encontrado 30 curvas hiperelípticas modulares nuevas de nivel $N \leq 3000$ y jacobiana $\mathbb{Q}$-simple y 38 de nivel $N \leq 2000$ y jacobiana no $\mathbb{Q}$-simple. Todas ellas son de género mayor que 2 y tales que sus jacobianas son $\mathbb{Q}$-factores de $J_0(N)$.

En las primeras tres tablas aparecen las curvas con jacobiana $\mathbb{Q}$-simple y en las tres siguientes las que tienen jacobiana no $\mathbb{Q}$-simple; todas ellas están agrupadas por el correspondiente género.

La notación de las curvas que hemos seguido es análoga a la expuesta para el caso de género 2. Es decir, a cada curva la denotaremos por la clase de $\mathbb{Q}$-isogenia de su jacobiana. Así, si la jacobiana de la curva es $\mathbb{Q}$-simple, pondremos un subíndice que denota la clase de $\mathbb{Q}$-isogenia de la variedad modular correspondiente. En el caso en que no es $\mathbb{Q}$-simple, pondremos un subíndice que denota el nivel de la curva y un superíndice que denota las letras de las clases de $\mathbb{Q}$-isogenia de la descomposición de la jacobiana de la curva en $\mathbb{Q}$-factores de $J_0(N)$.

Tabla 6.6: Jacobiana $\mathbb{Q}$-simple y $\mathbb{Q}$-factor de $J_0(N)$:
Género 3 ($N \leq 3000$)

C	$: y^2 = F(x)$
C_{41A}	$: y^2 = x^8 + 4x^7 - 8x^6 - 66x^5 - 120x^4 - 56x^3 + 53x^2 + 36x - 16$
C_{95A}	$: y^2 = (x^4 + x^3 - 6x^2 - 10x - 5)(x^4 + x^3 - 2x^2 + 2x - 1)$

C	$: y^2 = F(x)$
C_{152C}	$: y^2 = x(x^3 - 2x^2 - 7x - 8)(x^3 + 4x^2 + 4x + 4)$
C_{248E}	$: y^2 = (x^3 + x - 1)(x^4 - 2x^3 - 3x^2 - 4x + 4)$
C_{284A}	$: y^2 = x^7 - 7x^5 - 11x^4 + 5x^3 + 18x^2 + 4x - 11$
C_{284B}	$: y^2 = x^7 + 4x^6 + 5x^5 + x^4 - 3x^3 - 2x^2 + 1$
C_{304G}	$: y^2 = x(x^3 - 4x^2 + 4x - 4)(x^3 + 2x^2 - 7x + 8)$
C_{496J}	$: y^2 = (x^3 + x + 1)(x^4 + 2x^3 - 3x^2 + 4x + 4)$
C_{544I}	$: y^2 = (x - 1)(x^2 - x - 4)(x^4 - x^2 - 4)$
C_{544J}	$: y^2 = (x + 1)(x^2 + x - 4)(x^4 - x^2 - 4)$
C_{896I}	$: y^2 = (x - 2)(x^2 + 2x - 1)(x^4 - 2x^2 - 7)$
C_{896J}	$: y^2 = (x + 2)(x^2 - 2x - 1)(x^4 - 2x^2 - 7)$
C_{1136I}	$: y^2 = x^7 - 4x^6 + 5x^5 - x^4 - 3x^3 + 2x^2 - 1$
C_{1136J}	$: y^2 = x^7 - 7x^5 + 11x^4 + 5x^3 - 18x^2 + 4x + 11$

Tabla 6.7: Jacobiana $\mathbb{Q}$-simple y $\mathbb{Q}$-factor de $J_0(N)$:
Género 4 ($N \leq 3000$)

C	$: y^2 = F(x)$
C_{47A}	$: y^2 = (x^5 - 5x^3 - 20x^2 - 24x - 19)(x^5 + 4x^4 + 7x^3 + 8x^2 + 4x + 1)$
C_{119A}	$: y^2 = (x^5 - 2x^4 + 3x^3 - 6x^2 - 7)(x^5 + 2x^4 + 3x^3 + 6x^2 + 4x + 1)$
C_{164A}	$: y^2 = x(x^8 + 4x^7 - 8x^6 - 66x^5 - 120x^4 - 56x^3 + 53x^2 + 36x - 16)$
C_{376C}	$: y^2 = (x^4 - 2x^3 - 3x^2 + 4x - 4)(x^5 - x^3 + 2x^2 - 2x + 1)$
C_{376D}	$: y^2 = (x^4 - 2x^3 - 3x^2 + 4x - 4)(x^5 + 4x^4 + 3x^3 - 2x^2 + 2x + 5)$
C_{416F}	$: y^2 = x(x^2 + 4)(x^3 - 2x^2 + x - 4)(x^3 + 2x^2 + x + 4)$
C_{512G}	$: y^2 = x(x^4 - 4x^2 - 4)(x^4 + 4x^2 - 4)$
C_{656I}	$: y^2 = x(x^8 - 4x^7 - 8x^6 + 66x^5 - 120x^4 + 56x^3 + 53x^2 - 36x - 16)$
C_{752G}	$: y^2 = (x^4 + 2x^3 - 3x^2 - 4x - 4)(x^5 - x^3 - 2x^2 - 2x - 1)$
C_{752H}	$: y^2 = (x^4 + 2x^3 - 3x^2 - 4x - 4)(x^5 - 4x^4 + 3x^3 + 2x^2 + 2x - 5)$
C_{832P}	$: y^2 = x(x + 2)(x - 2)(x^6 + 2x^4 - 15x^2 + 16)$
C_{1216W}	$: y^2 = (x^3 - 2x + 2)(x^6 + 2x^4 - 7x^2 + 8)$
C_{1216X}	$: y^2 = (x^3 - 2x - 2)(x^6 + 2x^4 - 7x^2 + 8)$

Tabla 6.8: Jacobiana $\mathbb{Q}$-simple y $\mathbb{Q}$-factor de $J_0(N)$: Género 5 ($N \leq 3000$)

C	: $y^2 = F(x)$
C_{59A}	: $y^2 = (x^9+2\,x^8-4\,x^7-21\,x^6-44\,x^5-60\,x^4-61\,x^3-46\,x^2-24\,x-11)(x^3+2\,x^2+1)$
C_{1664Y}	: $y^2 = (x^2+2x+2)(x^3-x+2)(x^6+2x^4+x^2+4)$
C_{1664BB}	: $y^2 = (x^2-2x+2)(x^3-x-2)(x^6+2x^4+x^2+4)$

Tabla 6.9: Jacobiana no $\mathbb{Q}$-simple y $\mathbb{Q}$-factor de $J_0(N)$: Género 3 ($N \leq 2000$)

C	: $y^2 = F(x)$
$C_{35}^{A,B}$	: $y^2 = (x^2+3x+1)(x^6+x^5-10x^4-39x^3-62x^2-51x-19)$
$C_{39}^{A,B}$	: $y^2 = (x^4-3x^3-4x^2-2x-1)(x^4+5x^3+8x^2+6x+3)$
$C_{88}^{A,B}$	: $y^2 = (x-2)(x^3-2x^2+4x-4)(x^3+2x^2-4x+8)$
$C_{104}^{A,B}$	: $y^2 = (x+2)(x^6+4x^5-12x^4-114x^3-308x^2-384x-191)$
$C_{116}^{A,B,C}$	: $y^2 = (x+2)(x^6+2x^5-17x^4-66x^3-83x^2-32x-4)$
$C_{128}^{A,B,D}$	: $y^2 = (x-2)(x^2-2x+2)(x^4-12x^2+32x-28)$
$C_{128}^{B,C,D}$	: $y^2 = (x+2)(x^2+2x+2)(x^4-12x^2-32x-28)$
$C_{160}^{A,C}$	: $y^2 = (x-2)(x^2+2x-7)(x^4-4x^3+10x^2-20x+17)$
$C_{160}^{B,C}$	: $y^2 = (x+2)(x^2-2x-7)(x^4+4x^3+10x^2+20x+17)$
$C_{176}^{A,D}$	: $y^2 = (x+2)(x^3-2x^2-4x-8)(x^3+2x^2+4x+4)$
$C_{184}^{B,E}$	: $y^2 = (x-1)(x^3-2x^2+3x-1)(x^3+x^2-x+7)$
$C_{184}^{A,C,D}$	: $y^2 = (x-1)(x^6-x^5+4x^4-x^3+2x^2+2x+1)$
$C_{196}^{B,C}$	: $y^2 = (x^3+2x^2-x-1)(x^4-2x^3-9x^2+10x-3)$
$C_{208}^{B,E}$	: $y^2 = (x-2)(x^6-4x^5-12x^4+114x^3-308x^2+384x-191)$
$C_{224}^{A,D}$	: $y^2 = x(x-1)(x+1)(x^4-6x^2+16x-7)$
$C_{224}^{B,C}$	: $y^2 = x(x-1)(x+1)(x^4-6x^2-16x-7)$
$C_{248}^{B,D}$	: $y^2 = (x^3+4x^2+5x+3)(x^4-2x^3-3x^2-4x+4)$
$C_{256}^{B,E}$	: $y^2 = x(x^2+2)(x^4+12x^2+4)$
$C_{256}^{C,E}$	: $y^2 = x(x^2-4x+2)(x^2-2)(x^2+4x+2)$
$C_{280}^{A,D}$	: $y^2 = (x-1)(x^6-x^5+7x^3-16x^2+15x-5)$

C	$: y^2 = F(x)$
$C_{368}^{C,H}$	$: y^2 = (x+1)(x^3-x^2-x-7)(x^3+2x^2+3x+1)$
$C_{368}^{A,D,G}$	$: y^2 = (x+1)(x^6+x^5+4x^4+x^3+2x^2-2x+1)$
$C_{416}^{A,E}$	$: y^2 = x(x^6-2x^5-2x^4+2x^2-2x-1)$
$C_{416}^{B,C}$	$: y^2 = x(x^6+2x^5-2x^4+2x^2+2x-1)$
$C_{464}^{D,E,F}$	$: y^2 = (x-2)(x^6-2x^5-17x^4+66x^3-83x^2+32x-4)$
$C_{496}^{C,G}$	$: y^2 = (x^3-4x^2+5x-3)(x^4+2x^3-3x^2+4x+4)$
$C_{560}^{A,H}$	$: y^2 = (x+1)(x^6+x^5-7x^3-16x^2-15x-5)$
$C_{640}^{C,L}$	$: y^2 = x(x^2-2x-1)(x^4+2x^3-2x+1)$
$C_{640}^{G,I}$	$: y^2 = x(x^2+2x-1)(x^4-2x^3+2x+1)$
$C_{704}^{B,M}$	$: y^2 = x(x^3-4x+4)(x^3+2x^2-2)$
$C_{704}^{C,N}$	$: y^2 = x(x^3-2x^2+2)(x^3-4x-4)$
$C_{784}^{G,N}$	$: y^2 = (x^3-2x^2-x+1)(x^4+2x^3-9x^2-10x-3)$

Tabla 6.10: Jacobiana no $\mathbb{Q}$-simple y $\mathbb{Q}$-factor de $J_0(N)$: Género 4 ($N \leq 2000$)

C	$: y^2 = F(x)$
$C_{236}^{B,C}$	$: y^2 = x^9+2x^8-4x^7-21x^6-44x^5-60x^4-61x^3-46x^2-24x-11$
$C_{368}^{B,F,I}$	$: y^2 = (x^3-x^2-x-7)(x^6+x^5+4x^4+x^3+2x^2-2x+1)$
$C_{704}^{D,E,O}$	$: y^2 = (x^3-4x-4)(x^3-4x+4)(x^3+2x^2-2)$
$C_{704}^{F,I,P}$	$: y^2 = (x^3-2x^2+2)(x^3-4x-4)(x^3-4x+4)$
$C_{944}^{J,L}$	$: y^2 = x^9-2x^8-4x^7+21x^6-44x^5+60x^4-61x^3+46x^2-24x+11$

Tabla 6.11: Jacobiana no $\mathbb{Q}$-simple y $\mathbb{Q}$-factor de $J_0(N)$: Género 6 ($N \leq 2000$)

C	$: y^2 = F(x)$
$C_{71}^{A,B}$	$: y^2 = (x^7-7x^5-11x^4+5x^3+18x^2+4x-11)$ $(x^7+4x^6+5x^5+x^4-3x^3-2x^2+1)$

Cuerpos de coeficientes

En este apartado, para cada curva presentada en esta subsección, mostramos los cuerpos de coeficientes de las correspondientes formas nuevas. Para cada uno de estos cuerpos daremos el polinomio mínimo de un generador del cuerpo. En el caso de jacobiana no $\mathbb{Q}$-simple, daremos tantos polinomios como $\mathbb{Q}$-factores tenga la jacobiana.

$C_{35}^{A,B}$	$P_{35A} = t-1, \quad P_{35B} = t^2+t-4$
$C_{39}^{A,B}$	$P_{39A} = t-1, \quad P_{39B} = t^2+2\,t-1$
C_{41}^{A}	$P_{41A} = t^3+t^2-5\,t-1$
C_{47}^{A}	$P_{47A} = t^4-t^3-5\,t^2+5\,t-1$
C_{59}^{A}	$P_{59A} = t^5-9\,t^3+2\,t^2+16\,t-8$
$C_{71}^{A,B}$	$P_{71A} = t^3-5\,t+3, \quad P_{71B} = t^3+t^2-4\,t-3$
$C_{88}^{A,B}$	$P_{88A} = t-1, \quad P_{88B} = t^2-t-4$
C_{95}^{A}	$P_{95A} = t^3-t^2-3\,t+1$
$C_{104}^{A,B}$	$P_{104A} = t-1, \quad P_{104B} = t^2-t-4$
$C_{116}^{A,B,C}$	$P_{116A} = P_{116B} = P_{116C} = t-1$
C_{119}^{A}	$P_{119A} = t^4+t^3-5\,t^2-t+3$
$C_{128}^{A,B,D}$	$P_{128A} = P_{128B} = P_{128D} = t-1$
$C_{128}^{B,C,D}$	$P_{128B} = P_{128C} = P_{128D} = t-1$
C_{152}^{C}	$P_{152C} = t^3-t^2-10\,t+8$
$C_{160}^{A,C}$	$P_{160A} = t-1, \quad P_{160C} = t^2-8$
$C_{160}^{B,C}$	$P_{160B} = t-1, \quad P_{160C} = t^2-8$
C_{164}^{A}	$P_{164A} = t^4-2\,t^3-10\,t^2+22\,t-2$
$C_{176}^{A,D}$	$P_{176A} = t-1, \quad P_{176D} = t^2+t-4$
$C_{184}^{B,E}$	$P_{184B} = t-1, \quad P_{184E} = t^2+t-4$
$C_{184}^{A,C,D}$	$P_{184A} = P_{184C} = P_{184D} = t-1$
$C_{196}^{B,C}$	$P_{196B} = t-1, \quad P_{196C} = t^2-8$
$C_{208}^{B,E}$	$P_{208B} = t-1, \quad P_{208E} = t^2+t-4$
$C_{224}^{A,D}$	$P_{224A} = t-1, \quad P_{224D} = t^2-2\,t-4$
$C_{224}^{B,C}$	$P_{224B} = t-1, \quad P_{224C} = t^2+2\,t-4$
$C_{236}^{B,C}$	$P_{236B} = t-1, \quad P_{236C} = t^3-9\,t+1$
C_{248}^{E}	$P_{248E} = t^3-2\,t^2-6\,t+8$
$C_{248}^{B,D}$	$P_{248B} = t-1, \quad P_{248D} = t^2+2\,t-32$

$C_{256}^{B,E}$	$P_{256B} = t-1, \quad P_{256E} = t^2-8$
$C_{256}^{C,E}$	$P_{256C} = t-1, \quad P_{256E} = t^2-8$
$C_{280}^{A,D}$	$P_{280A} = t-1, \quad P_{280D} = t^2-t-4$
C_{284}^{A}	$P_{284A} = t^3-t^2-4\,t+1$
C_{284}^{B}	$P_{284B} = t^3+3\,t^2-3$
C_{304}^{G}	$P_{304G} = t^3+t^2-10\,t-8$
$C_{368}^{C,H}$	$P_{368C} = t-1, \quad P_{368H} = t^2-t-4$
$C_{368}^{A,D,G}$	$P_{368A} = P_{368D} = P_{368G} = t-1$
$C_{368}^{B,F,I}$	$P_{368B} = P_{368F} = t-1, \quad P_{368I} = t^2-5$
C_{376}^{C}	$P_{376C} = t^4-3\,t^3-5\,t^2+16\,t-8$
C_{376}^{D}	$P_{376D} = t^4+t^3-9\,t^2-4\,t+16$
C_{416}^{F}	$P_{416F} = t^4-13\,t^2+32$
$C_{416}^{A,E}$	$P_{416A} = t-1, \quad P_{416E} = t^2-t-4$
$C_{416}^{B,C}$	$P_{416B} = t-1, \quad P_{416C} = t^2+t-4$
$C_{464}^{D,E,F}$	$P_{464D} = P_{464E} = P_{464F} = t-1$
C_{496}^{J}	$P_{496J} = t^3+2\,t^2-6\,t-8$
$C_{496}^{C,G}$	$P_{496C} = t-1, \quad P_{496G} = t^2+7\,t+4$
C_{512}^{G}	$P_{512G} = t^4-108\,t^2+1764$
C_{544}^{I}	$P_{544I} = t^3-2\,t^2-4\,t+4$
C_{544}^{J}	$P_{544J} = t^3+2\,t^2-4\,t-4$
$C_{560}^{A,H}$	$P_{560A} = t-1, \quad P_{560H} = t^2+t-4$
$C_{640}^{C,L}$	$P_{640C} = t-1, \quad P_{640L} = t^2-2\,t-4$
$C_{640}^{G,I}$	$P_{640G} = t-1, \quad P_{640I} = t^2+2\,t-4$
C_{656}^{I}	$P_{656I} = t^4+2\,t^3-10\,t^2-22\,t-2$
$C_{704}^{B,M}$	$P_{704B} = t-1, \quad P_{704M} = t^2+t-4$
$C_{704}^{C,N}$	$P_{704C} = t-1, \quad P_{704N} = t^2-t-4$
$C_{704}^{D,E,0}$	$P_{704D} = P_{704E} = t-1, \quad P_{704O} = t^2+t-4$
$C_{704}^{F,I,P}$	$P_{704F} = P_{704I} = t-1, \quad P_{704P} = t^2-t-4$
C_{752}^{G}	$P_{752G} = t^4+3\,t^3-5\,t^2-16\,t-8$
C_{752}^{H}	$P_{752H} = t^4-t^3-9\,t^2+4\,t+16$
$C_{784}^{G,N}$	$P_{784G} = t-1, \quad P_{784N} = t^2-8$
C_{832}^{P}	$P_{832P} = t^4-13\,t^2+32$

C_{896}^{I}	$P_{896I} = t^3 + 2\,t^2 - 6\,t - 8$
C_{896}^{J}	$P_{896J} = t^3 - 2\,t^2 - 6\,t + 8$
$C_{944}^{J,L}$	$P_{944J} = t - 1, \qquad P_{944L} = t^3 - 9\,t - 1$
C_{1136}^{I}	$P_{1136I} = t^3 - 3\,t^2 + 3$
C_{1136}^{J}	$P_{1136J} = t^3 + t^2 - 4\,t - 1$
C_{1216}^{W}	$P_{1216W} = t^4 + 5\,t^3 - 139\,t^2 - 497\,t + 3742$
C_{1216}^{X}	$P_{1216X} = t^4 - 4\,t^3 - 59\,t^2 + 126\,t + 784$
C_{1664}^{Y}	$P_{1664Y} = t^5 + t^4 - 11\,t^3 - 11\,t^2 + 8\,t + 4$
C_{1664}^{BB}	$P_{1664BB} = t^5 - t^4 - 11\,t^3 + 11\,t^2 + 8\,t - 4$

Capítulo 7

Ejemplos de curvas modulares no nuevas

En este capítulo vamos a mostrar ejemplos de curvas hiperelípticas modulares no nuevas que han sido calculadas utilizando los resultados del capítulo anterior. La notación que se seguirá para denotar la clase de $\mathbb{Q}$-isogenia de variedades modulares es la introducida en la sección 6.1.

Utilizando las tablas del capítulo 6 hemos comprobado que para la mayoría de los casos en los que hay dos curvas en el mismo nivel es posible tomar la misma función modular x en ambas ecuaciones hiperelípticas. En concreto, esta situación se presenta para los siguientes niveles:

$$64, 184, 188, 224, 248, 284, 320, 368, 376, 416, 440, 448, 476, 496, 512, 544,$$
$$640, 704, 752, 768, 880, 896, 1088, 1136, 1216, 1280, 1664, 1792, 1904, 2204.$$

Por lo tanto, para esos valores de N tenemos

$$C_{N,1} : y_1^2 = F_1(x)\,, \quad C_{N,2} : y_2^2 = F_2(x)\,,$$

con $F_1(u), F_2(u) \in \mathbb{Q}[u]$ sin raíces múltiples. Se tiene $F_1(u)\,F_2(u) = Q(u)^2\,F(u)$, donde $Q(u)$, $F(u) \in \mathbb{Q}[u]$ y F no tiene raíces múltiples. Así obtenemos otra curva modular de nivel N que está dada por la ecuación afín

$$C_N : \left(\frac{y_1 y_2}{Q(x)}\right)^2 = F(x)\,.$$

Además, si el género de C_N es mayor que uno, entonces C_N es hiperelíptica. Nótese que esta misma construcción se puede utilizar de forma análoga con un número mayor de curvas.

7.1 Curvas primitivas no nuevas

La tabla siguiente muestra sólo las ecuaciones hiperelípticas de las curvas primitivas no nuevas que se han obtenido mediante el procedimiento descrito anteriormente. En ella, no se muestran los casos en los que la curva sea nueva o no primitiva. Este último caso se detallará en la subsección siguiente. La notación de estas curvas es la siguiente: el subíndice denota el nivel de la pareja de curvas del que proviene y el superíndice denota los géneros de estas dos curvas. Así, por ejemplo, la curva $C_{416}^{2,2}$ proviene de las dos únicas curvas modulares nuevas de género 2 de nivel 416.

Tabla 7.1: Curvas modulares primitivas no nuevas

C	$: y^2 = F(x)$
$C_{184}^{3,3}$	$: y^2 = (x^3-2x^2+3x-1)(x^3+x^2-x+7)(x^6-x^5+4x^4-x^3+2x^2+2x+1)$
$C_{320}^{2,2}$	$: y^2 = (x^4-2x^3-2x^2-2x+1)(x^4+2x^3-2x^2+2x+1)$
$C_{368}^{3,4}$	$: y^2 = (x+1)(x^3+2x^2+3x+1)(x^6+x^5+4x^4+x^3+2x^2-2x+1)$
$C_{376}^{2,4}$	$: y^2 = (x^4-2x^3-3x^2+4x-4)(x^5-x^3+2x^2-2x+1)(x^5+4x^4+3x^3-2x^2+2x+5)$
$C_{416}^{2,2}$	$: y^2 = (x^3-2x^2+x-4)(x^3+2x^2+x+4)$
$C_{416}^{3,3}$	$: y^2 = (x^6-2x^5-2x^4+2x^2-2x-1)(x^6+2x^5-2x^4+2x^2+2x-1)$
$C_{512}^{2,2}$	$: y^2 = (x^4-4x^2-4)(x^4+4x^2-4)$
$C_{544}^{2,2}$	$: y^2 = (x^2-x-4)(x^2+x-4)(x^4-x^2-4)$
$C_{544}^{3,3}$	$: y^2 = (x-1)(x+1)(x^2-x-4)(x^2+x-4)$
$C_{544}^{2,3,3}$	$: y^2 = x(x-1)(x+1)(x^2-x-4)(x^2+x-4)(x^4-x^2-4)$
$C_{544}^{2,2,3,3}$	$: y^2 = (x-1)(x+1)(x^4-x^2-4)$
$C_{640}^{2,2}$	$: y^2 = (x-2)(x+2)(x^2-2x+2)(x^2+2x+2)$
$C_{640}^{3,3}$	$: y^2 = (x^2-2x-1)(x^2+2x-1)(x^4-2x^3+2x+1)(x^4+2x^3-2x+1)$
$C_{704}^{2,2}$	$: y^2 = (x^3-2x^2+2x-2)(x^3+2x^2+2x+2)$
$C_{704}^{3,3}$	$: y^2 = (x^3-2x^2+2)(x^3-4x-4)(x^3-4x+4)(x^3+2x^2-2)$
$C_{704}^{4,4}$	$: y^2 = (x^3-2x^2+2)(x^3+2x^2-2)$
$C_{704}^{3,4,4}$	$: y^2 = x(x^3-4x+4)(x^3-2x^2+2)$
$C_{704}^{4,3,4}$	$: y^2 = x(x^3-4x-4)(x^3+2x^2-2)$
$C_{704}^{3,3,4,4}$	$: y^2 = (x^3-4x-4)(x^3-4x+4)$
$C_{768}^{2,2}$	$: y^2 = (x^4-4x^3+8x^2-12x+9)(x^4+4x^3+8x^2+12x+9)$

C	$: y^2 = F(x)$
$C_{768}^{'2,2}$	$: y^2 = (x^4 - 4x^2 + 1)(x^4 + 4x^2 + 1)$
$C_{896}^{3,3}$	$: y^2 = (x - 2)(x + 2)(x^2 - 2x - 1)(x^2 + 2x - 1)$
$C_{1088}^{2,2}$	$: y^2 = (x^4 + x^2 - 4)(x^4 + 9x^2 + 16)$
$C_{1216}^{4,4}$	$: y^2 = (x^3 - 2x - 2)(x^3 - 2x + 2)$
$C_{1280}^{2,2}$	$: y^2 = (x^4 - 2x^2 - 4)(x^4 + 2x^2 - 4)$
$C_{1664}^{5,5}$	$: y^2 = (x^2 - 2x + 2)(x^2 + 2x + 2)(x^3 - x - 2)(x^3 - x + 2)$
$C_{1664}^{5,2}$	$: y^2 = (x^6 + 2x^4 + x^2 + 4)$
$C_{1664}^{2,5}$	$: y^2 = (x^2 - 2x + 2)(x^2 + 2x + 2)(x^3 - x - 2)(x^3 - x + 2)$ $(x^6 + 2x^4 + x^2 + 4)$
$C_{1792}^{2,2}$	$: y^2 = (x - 2)(x + 2)(x^4 - 4x^3 + 4x^2 + 4x - 7)(x^4 + 4x^3 + 4x^2 - 4x - 7)$
$C_{2240}^{2,2}$	$: y^2 = (x^3 + 2x - 2)(x^3 + 2x + 2)$

La tabla siguiente muestra la descomposición, en clases de $\mathbb{Q}$-isogenia, de las jacobianas de las curvas de la tabla anterior. En ella, también aparece el polinomio mínimo de un generador del cuerpo de coeficientes de las q-expansiones correspondientes a cada factor de dimensión mayor que uno. Así, el nivel en el que dichas curvas son primitivas es el nivel mayor de las variedades modulares que aparecen en su descomposición. Por ejemplo, la curva $C_{376}^{2,4}$ es primitiva de nivel 94 ya que $J(C_{376}^{2,4}) \overset{\mathbb{Q}}{\sim} A_{47A} \times A_{94B}$.

C	Descomposición de $J(C)$	
$C_{184}^{3,3}$	$E_{46A} \times A_{23A}^2,$	$P_{23A} = t^2 - 5$
$C_{320}^{2,2}$	$E_{20A} \times E_{80A} \times E_{80B}$	
$C_{368}^{3,4}$	$A_{23A} \times E_{46A} \times E_{92B},$	$P_{23A} = t^2 - 5$
$C_{376}^{2,4}$	$A_{47A} \times A_{94B},$	$P_{47A} = t^4 - t^3 - 5t^2 + 5t - 1$ $P_{94B} = t^2 - 2$
$C_{416}^{2,2}$	$E_{26B} \times E_{104A}$	
$C_{416}^{3,3}$	$E_{26A} \times E_{26B} \times E_{104A} \times A_{104B},$	$P_{104B} = t^2 - 17$
$C_{512}^{2,2}$	$E_{32A} \times E_{128B} \times E_{128D}$	
$C_{544}^{2,2}$	$E_{17A} \times A_{136C},$	$P_{136C} = t^2 - 5$
$C_{544}^{3,3}$	$E_{34A} \times E_{136B}$	
$C_{544}^{2,3,3}$	$E_{32A} \times E_{544E} \times E_{544F} \times A_{544H}$	$P_{544H} = t^2 - 10$
$C_{544}^{2,2,3,3}$	$E_{17A} \times E_{136A}$	

C	Descomposición de $J(C)$	
$C_{640}^{2,2}$	$E_{20A} \times E_{160B}$	
$C_{640}^{3,3}$	$E_{20A} \times E_{40B} \times E_{160B} \times A_{160C}$,	$P_{160C} = t^2 - 2$
$C_{704}^{2,2}$	$E_{11A} \times E_{176A}$	
$C_{704}^{3,3}$	$E_{11A}^2 \times E_{176A} \times A_{176D}$,	$P_{176D} = t^2 - 17$
$C_{704}^{4,4}$	$E_{11A} \times E_{176C}$	
$C_{704}^{3,4,4}$	$E_{64A} \times E_{704J} \times E_{704L}$	
$C_{704}^{4,3,4}$	$E_{64A} \times E_{704G} \times E_{704H}$	
$C_{704}^{3,3,4,4}$	$E_{44A}^2 \times E_{176B}$	
$C_{768}^{2,2}$	$E_{48A} \times E_{64A}^2$	
$C_{768}^{\prime 2,2}$	$E_{48A} \times E_{192C} \times E_{192D}$	
$C_{896}^{3,3}$	$E_{14A} \times E_{224A}$	
$C_{1088}^{2,2}$	$E_{17A} \times E_{272E}$	
$C_{1216}^{4,4}$	$E_{19A} \times E_{304D}$	
$C_{1280}^{2,2}$	$E_{80A} \times E_{320D} \times E_{320E}$	
$C_{1664}^{5,5}$	$E_{26B} \times E_{52A} \times A_{416C}$,	$P_{416C} = t^2 - 17$
$C_{1664}^{5,2}$	$E_{26A} \times E_{416B}$	
$C_{1664}^{2,5}$	$E_{26A} \times A_{104B} \times A_{416F}$,	$P_{104B} = t^2 - 17$ $P_{416F} = t^4 - 13\,t^2 + 32$
$C_{1792}^{2,2}$	$E_{14A} \times E_{112B} \times A_{448I}$,	$P_{448I} = t^2 - 5$
$C_{2240}^{2,2}$	$E_{35A} \times E_{560A}$	

Observación 7.1. La curva $C_{1664}^{2,5}$ tiene género 7, que es el mayor género que conocemos para una curva hiperelíptica modular.

7.2 Curvas modulares no primitivas

En este apartado mostraremos ejemplos de curvas modulares no primitivas. Estas curvas han sido encontradas utilizando el método descrito al inicio de este capítulo. En particular, estudiaremos en detalle el caso de nivel $N = 376$.

La parte nueva de la jacobiana de la curva modular $X_0(376)$ tiene la siguiente descomposición en clases de $\mathbb{Q}$-isogenia:

$$J_0(376)^{\text{new}} \overset{\mathbb{Q}}{\sim} A_{376A} \times A_{376B} \times A_{376C} \times A_{376D},$$

donde las variedades abelianas correspondientes a las clases de $\mathbb{Q}$-isogenia $376A$ y $376B$ tienen dimensión 2 y las correspondientes a $376C$ y $376D$ tienen dimensión 4. Como se puede ver en las tablas del capítulo 6, cada uno de estos $\mathbb{Q}$-factores corresponde a una curva hiperelíptica modular nueva. Las ecuaciones para cada una de ellas son:

$$\begin{array}{ll} C_{376A} : y_A^2 = F_A(x), & C_{376C} : y_C^2 = F_B(x)G(x), \\ C_{376B} : y_B^2 = F_B(x), & C_{376D} : y_D^2 = F_A(x)G(x), \end{array}$$

donde

$$\begin{array}{rcl} x & = & q^{-2} + q^2 + q^6 + q^8 + q^{10} + \dots\,, \\ F_A(x) & = & x^5 + 4x^4 + 3x^3 - 2x^2 + 2x + 5\,, \\ F_B(x) & = & x^5 - x^3 + 2x^2 - 2x + 1\,, \\ G(x) & = & x^4 - 2x^3 - 3x^2 + 4x - 4\,. \end{array}$$

Utilizando el método descrito en la sección anterior podemos construir dos nuevas curvas modulares:

$$\begin{array}{lll} C_{376}^{2,2} : Y^2 = & F_A(x)\,F_B(x)\,, & \text{donde } Y = y_A\,y_B\,, \\ C_{376}^{2,4} : Y^2 = & F_A(x)\,F_B(x)\,G(x)\,, & \text{donde } Y = y_A\,y_C = y_B\,y_D\,. \end{array}$$

Vamos a identificar el menor nivel en el que estas curvas son modulares.

Tomemos la forma propia $h(q) = f_{47A}(q) - 2f_{47A}(q^2) \in S_2(94,1)$, entonces aplicando el programa `CurvaHiperelipticaModular` a una base racional de $H^0(A_h, \Omega^1)q/dq$, comprobamos que A_h corresponde a una curva hiperelíptica modular de nivel 94. De hecho, esta curva es $C_{376}^{2,2}$. Por lo tanto, se tiene que la jacobiana de esta curva es $\mathbb{Q}$-isógena a $A_{47A} = J_0(47)$. Se puede comprobar que $C_{376}^{2,2}$ y $X_0(47)$ no son isomorfas y, en consecuencia, el mínimo nivel para el que $C_{376}^{2,2}$ es modular es 94, mientras que para su jacobiana es 47.

La curva $C_{376}^{2,4}$ aparece en las tablas de la sección anterior. Como allí se indica, $C_{376}^{2,4}$ es una curva hiperelíptica modular primitiva no nueva de nivel 94 y la descomposición de su jacobiana sobre $\mathbb{Q}$ es $J(C_{376}^{2,4}) \overset{\mathbb{Q}}{\sim} A_{47A} \times A_{94B}$. De hecho, se tiene que la curva está asociada al subespacio de $S_2(94)$ generado por la conjugadas de Galois de $f_{47A}(q) + 2f_{47A}(q^2)$ y f_{94B}.

La tabla siguiente muestra las ecuaciones hiperelípticas de todas las curvas modulares no primitivas que conocemos.

Tabla 7.3: Curvas modulares no primitivas

$C \quad : y^2 \;=\; F(x)$
$C_{184}^{2,2}$: $y^2 = (x^3 + 2x^2 - 3x + 1)(x^3 + 2x^2 + x + 1)$
$C_{248}^{2,3}$: $y^2 = (x^3 + x - 1)(x^3 + 4x^2 + 5x + 3)$
$C_{376}^{2,2}$: $y^2 = (x^5 - x^3 + 2x^2 - 2x + 1)(x^5 + 4x^4 + 3x^3 - 2x^2 + 2x + 5)$

C	$: y^2 = F(x)$
$C_{544}^{2,3}$:	$y^2 = x(x-1)(x^2+x-4)(x^4-x^2-4)$
$C_{704}^{3,4}$:	$y^2 = x(x^3-2x^2+2)(x^3-4x-4)(x^3+2x^2-2)$

La tabla siguiente muestra la base de formas parabólicas correspondientes a cada curva no primitiva y el nivel mínimo en el cual son modulares.

C	$\pi^*(H^0(C,\Omega^1))\frac{q}{dq}$	N
$C_{184}^{3,3}$	$\langle {}^\sigma f_{23A}(q) - 2\,{}^\sigma f_{23A}(q^2) \,:\, \sigma \in \mathrm{Gal}(K_{23A}/\mathbb{Q})\rangle$	46
$C_{248}^{2,3}$	$\langle {}^\sigma f_{31A}(q) - 2\,{}^\sigma f_{31A}(q^2) \,:\, \sigma \in \mathrm{Gal}(K_{31A}/\mathbb{Q})\rangle$	62
$C_{376}^{2,2}$	$\langle {}^\sigma f_{47A}(q) - 2\,{}^\sigma f_{47A}(q^2) \,:\, \sigma \in \mathrm{Gal}(K_{47A}/\mathbb{Q})\rangle$	94
$C_{544}^{2,3}$	$\langle f_{34A}(q) - 4f_{34A}(q^4)$, ${}^\sigma f_{68A}(q) - 2\,{}^\sigma f_{68A}(q^2) \,:\, \sigma \in \mathrm{Gal}(K_{68A}/\mathbb{Q})\rangle$	136
$C_{704}^{3,4}$	$\langle f_{44A}(q) + 4f_{44A}(q^4), f_{88A}(q) - 2f_{88A}(q^2)$, ${}^\sigma f_{88B}(q) + 2\,{}^\sigma f_{88B}(q^2) \,:\, \sigma \in \mathrm{Gal}(K_{88B}/\mathbb{Q})\rangle$	176

Por último, mostramos la descomposición, en clases de $\mathbb{Q}$-isogenia, de las jacobianas de las curvas no primitivas mostradas en este apartado. La notación es análoga a la correspondiente tabla para el caso de curvas primitivas no nuevas.

C	Descomposición de $J(C)$	
$C_{184}^{3,3}$	A_{23A},	$P_{23A} = t^2 - 5$
$C_{248}^{2,3}$	A_{31A},	$P_{31A} = t^2 - 5$
$C_{376}^{2,2}$	A_{47A},	$P_{47A} = t^4 - t^3 - 5t^2 + 5t - 1$
$C_{544}^{2,3}$	$E_{34A} \times A_{68A}$,	$P_{68A} = t^2 - 3$
$C_{704}^{3,4}$	$E_{44A} \times E_{88A} \times A_{88B}$,	$P_{88B} = t^2 - 17$

Obsérvese que los $\mathbb{Q}$-factores simples de dimensión mayor que uno de las jacobianas de las curvas hiperelípticas modulares no nuevas expuestas en este capítulo suelen corresponder a jacobianas de curvas hiperelípticas modulares nuevas. De hecho, este fenómeno sucede en todos los casos salvo para los $\mathbb{Q}$-factores A_{94B} y A_{544H}.

Bibliografía

[AL70] A. O. L. Atkin y J. Lehner. *Hecke operators on* $\Gamma_0(m)$. Math. Ann. **185**, 134–160 (1970).

[AL78] A. O. L. Atkin y W. C. W. Li. *Twists of newforms and pseudo-eigenvalues of W-operators*. Invent. Math. **48** (3), 221–243 (1978).

[BBCO] C. Batut, D. Bernardi, H. Cohen y M. Olivier. *PARI-GP, a computer system for number theory*. Versión 2.11 (`http://www.parigp-home.de`) .

[BCDT01] C. Breuil, B. Conrad, F. Diamond y R. Taylor. *On the modularity of elliptic curves over $\mathbb{Q}$: Wild 3-adic exercises*. J. Amer. Math. Soc. **14** (4), 843–939 (2001).

[BCP97] W. Bosma, J. Cannon y C. Playoust. *The Magma algebra system. I. The user language*. J. Symbolic Comput. **24** (3-4), 235–265 (1997). Computational algebra and number theory (London, 1993).

[BG97] P. Bayer y J. González. *On the Hasse-Witt invariants of modular curves*. Experiment. Math. **6** (1), 57–76 (1997).

[BGG93] E. Bujalance, J. M. Gamboa y G. Gromadzki. *The full automorphism groups of hyperelliptic Riemann surfaces*. Manuscripta Math. **79** (3-4), 267–282 (1993).

[Bol88] O. Bolza. *On binary sextics with linear transformations into themselves*. Amer. J. Math. (10), 47–70 (1888).

[Bru95] A. Brumer. *The rank of $J_0(N)$*. Astérisque (228), 3, 41–68 (1995). Columbia University Number Theory Seminar (New York, 1992).

[Car86] H. Carayol. *Sur les représentations l-adiques associées aux formes modulaires de Hilbert*. Ann. Sci. École Norm. Sup. (4) **19** (3), 409–468 (1986).

[Car97] G. Cardona. *Corbes hiperel.líptiques modulars i aplicacions a la criptografia*. Proyecto Fin de Carrera, Escola Tècnica Superior d'Enginyers de Telecomunicació de Barcelona. Universitat Politècnica de Catalunya (1997).

[CGLR99] G. Cardona, J. González, J. C. Lario y A. Rio. *On curves of genus* 2 *with Jacobian of* GL_2*-type*. Manuscripta Math. **98** (1), 37–54 (1999).

[CN99] G. Cardona y E. Nart. *Seminari de corbes de gènere* 2. Universitat Politécnica de Catalunya (1999).

[Cre] J. E. Cremona. *Elliptic Curve Data (Conductor up to 12000)*. Noviembre 2001, ⟨`http://www.maths.nott.ac.uk/personal/jec/ftp/data/`⟩ .

[Cre92] J. E. Cremona. *Abelian varieties with extra twist, cusp forms, and elliptic curves over imaginary quadratic fields*. J. London Math. Soc. (2) **45** (3), 404–416 (1992).

[Cre97] J. E. Cremona. *Algorithms for modular elliptic curves*. Cambridge University Press, Cambridge, segunda edición (1997).

[DDT94] H. Darmon, F. Diamond y R. Taylor. *Fermat's last theorem*. En *Current developments in mathematics, 1995 (Cambridge, MA)*, págs. 1–154. Internat. Press, Cambridge, MA (1994).

[Del71] P. Deligne. *Formes modulaires et représentations l-adic*. En *Sém. Bourbaki, 21e année, 1968/69, no.355*, págs. 139–172. Lecture Notes in Math., Vol. 179. Springer-Verlag, Berlin (1971).

[Del74] P. Deligne. *La conjecture de Weil. I*. Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math. (43), 273–307 (1974).

[DS74] P. Deligne y J.-P. Serre. *Formes modulaires de poids* 1. Ann. Sci. École Norm. Sup. (4) **7**, 507–530 (1975) (1974).

[Eic54] M. Eichler. *Quaternäre quadratische Formen und die Riemannsche Vermutung für die Kongruenzzetafunktion*. Arch. Math. **5**, 355–366 (1954).

[Elk90] N. D. Elkies. *The automorphism group of the modular curve* $X_0(63)$. Compositio Math. **74** (2), 203–208 (1990).

[FH99] M. Furumoto y Y. Hasegawa. *Hyperelliptic quotients of modular curves* $X_0(N)$. Tokyo J. Math. **22** (1), 105–125 (1999).

[FK80] H. M. Farkas y I. Kra. *Riemann surfaces*. Springer-Verlag, New York, primera edición (1980).

[GL01] J. González y J. C. Lario. $\mathbb{Q}$*-curves and their Manin ideals*. Amer. J. Math. **123** (3), 475–503 (2001).

[Gon91] J. González. *Equations of hyperelliptic modular curves*. Ann. Inst. Fourier (Grenoble) **41** (4), 779–795 (1991).

[Har77] R. Hartshorne. *Algebraic geometry*. Springer-Verlag, New York (1977). Graduate Texts in Mathematics, No. 52.

[Has95] Y. Hasegawa. *Table of quotient curves of modular curves $X_0(N)$ with genus* 2. Proc. Japan Acad. Ser. A Math. Sci. **71** (10), 235–239 (1995).

[Has97] Y. Hasegawa. *Hyperelliptic modular curves $X_0^*(N)$*. Acta Arith. **81** (4), 369–385 (1997).

[HH96] Y. Hasegawa y K. Hashimoto. *Hyperelliptic modular curves $X_0^*(N)$ with square-free levels*. Acta Arith. **77** (2), 179–193 (1996).

[HS00] M. Hindry y J. H. Silverman. *Diophantine geometry*. Springer-Verlag, New York (2000). An introduction.

[Igu59] J. Igusa. *Kroneckerian model of fields of elliptic modular functions*. Amer. J. Math. **81**, 561–577 (1959).

[Iha67] Y. Ihara. *Hecke Polynomials as congruence ζ functions in elliptic modular case*. Ann. of Math. (2) **85**, 267–295 (1967).

[IM91] N. Ishii y F. Momose. *Hyperelliptic modular curves*. Tsukuba J. Math. **15** (2), 413–423 (1991).

[KM88] M. A. Kenku y F. Momose. *Automorphism groups of the modular curves $X_0(N)$*. Compositio Math. **65** (1), 51–80 (1988).

[Lan73] R. P. Langlands. *Modular forms and ℓ-adic representations*. En *Modular functions of one variable, II (Proc. Internat. Summer School, Univ. Antwerp, Antwerp, 1972)*, págs. 361–500. Lecture Notes in Math., Vol. 349. Springer, Berlin (1973).

[Li75] W. C. W. Li. *Newforms and functional equations*. Math. Ann. **212**, 285–315 (1975).

[Liu] Q. Liu. *genus2reduction: Odd factor of the conductor of a genus* 2 *curve*. 1994, (`http://www.math.u-bordeaux.fr/ liu/G2R/`) .

[Liu94] Q. Liu. *Conducteur et discriminant minimal de courbes de genre* 2. Compositio Math. **94** (1), 51–79 (1994).

[Lor96] D. Lorenzini. *An invitation to arithmetic geometry*. American Mathematical Society, Providence, RI (1996).

[Mes81] J.-F. Mestre. *Corps euclidiens, unités exceptionnelles et courbes élliptiques*. J. Number Theory **13** (2), 123–137 (1981).

[Mil72] J. S. Milne. *On the arithmetic of abelian varieties*. Invent. Math. **17**, 177–190 (1972).

[Miy71] T. Miyake. *On automorphic forms on* GL_2 *and Hecke operators*. Ann. of Math. (2) **94**, 174–189 (1971).

[Mom81] F. Momose. *On the l-adic representations attached to modular forms*. J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sect. IA Math. **28** (1), 89–109 (1981).

[Mom01] F. Momose. *Comunicación privada* (2001).

[MY01] F. Momose y S. Yamada. *Automorphism groups of the modular curves $X_1(N)$*. a aparecer en Tokyo J. of Math. (2001).

[Ogg74] A. P. Ogg. *Hyperelliptic modular curves*. Bull. Soc. Math. France **102**, 449–462 (1974).

[Rei84] M. A. Reichert. *Détermination explicite des courbes elliptiques ayant un groupe de torsion non trivial sur des corps de nombres quadratiques sur $\mathbb{Q}$*. En *Seminar on number theory, 1983–1984 (Talence, 1983/1984)*, págs. Exp. No. 11, 33. Univ. Bordeaux I, Talence (1984).

[Rey89] E. Reyssat. *Quelques aspects des surfaces de Riemann*. Birkhäuser Boston Inc., Boston, MA (1989).

[Rib77] K. A. Ribet. *Galois representations attached to eigenforms with Nebentypus*. En *Modular functions of one variable, V (Proc. Second Internat. Conf., Univ. Bonn, Bonn, 1976)*, págs. 17–51. Lecture Notes in Math., Vol. 601. Springer, Berlin (1977).

[Rib80] K. A. Ribet. *Twists of modular forms and endomorphisms of abelian varieties*. Math. Ann. **253** (1), 43–62 (1980).

[Rib90] K. A. Ribet. *On modular representations of* $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ *arising from modular forms*. Invent. Math. **100** (2), 431–476 (1990).

[Rib92] K. A. Ribet. *Abelian varieties over $\mathbb{Q}$ and modular forms*. En *Algebra and topology 1992 (Taejŏn)*, págs. 53–79. Korea Adv. Inst. Sci. Tech., Taejŏn (1992).

[Roh97] D. E. Rohrlich. *Modular curves, Hecke correspondence, and L-functions*. En *Modular forms and Fermat's last theorem (Boston, MA, 1995)*, págs. 41–100. Springer, New York (1997).

[Sel51] E. S. Selmer. *The Diophantine equation $ax^3 + by^3 + cz^3 = 0$*. Acta Math. **85**, 203–362 (1 plate) (1951).

[Sel54] E. S. Selmer. *The diophantine equation $ax^3 + by^3 + cz^3 = 0$. Completion of the tables*. Acta Math. **92**, 191–197 (1954).

[Ser87] J.-P. Serre. *Sur les représentations modulaires de degré* 2 *de* $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$. Duke Math. J. **54** (1), 179–230 (1987).

[Shi58] G. Shimura. *Correspondances modulaires et les fonctions ζ de courbes algébriques*. J. Math. Soc. Japan **10**, 1–28 (1958).

[Shi71a] G. Shimura. *Introduction to the arithmetic theory of automorphic functions*. Publications of the Mathematical Society of Japan, No. 11. Iwanami Shoten, Publishers, Tokyo (1971). Kanô Memorial Lectures, No. 1.

[Shi71b] G. Shimura. *On elliptic curves with complex multiplication as factors of the Jacobians of modular function fields*. Nagoya Math. J. **43**, 199–208 (1971).

[Shi72] G. Shimura. *Class fields over real quadratic fields and Hecke operators*. Ann. of Math. (2) **95**, 130–190 (1972).

[Shi73] G. Shimura. *On the factors of the jacobian variety of a modular function field*. J. Math. Soc. Japan **25**, 523–544 (1973).

[ST61] G. Shimura y Y. Taniyama. *Complex multiplication of abelian varieties and its applications to number theory*. The Mathematical Society of Japan, Tokyo (1961).

[Ste] W. A. Stein. *HECKE: The Modular Forms Calculator (C++ version)*. 1999, (`http://modular.fas.harvard.edu/Tables/hecke-cpp.html`) .

[Ste00] W. A. Stein. *Explicit approaches to modular abelian varieties*. Tesis Doctoral, U. C. Berkeley (2000).

[Tan55] Y. Taniyama. *Some unsolved problems of mathematics*. Tokyo-Nikko conference on Number Theory (12) (1955).

[TW95] R. Taylor y A. Wiles. *Ring-theoretic properties of certain Hecke algebras*. Ann. of Math. (2) **141** (3), 553–572 (1995).

[Wei67] A. Weil. *Über die Bestimmung Dirichletscher Reihen durch Funktionalgleichungen*. Math. Ann. **168**, 149–156 (1967).

[Wil95] A. Wiles. *Modular elliptic curves and Fermat's last theorem*. Ann. of Math. (2) **141** (3), 443–551 (1995).