L'objectiu d'aquesta tesi és establir el marc matemàtic adequat per a l'estabilitat lineal de l'equació d'Einstein $G = \chi T$, i una vegada aconseguit això, trobar aquelles condicions perquè es doni aquest tipus d'estabilitat quan es considera un model de Robertson-Walker per a l'univers.

El concepte d'estabilitat lineal sorgeix en preguntar-se si realment les solucions d'una equació linealitzada serveixen per aproximar les solucions de la corresponent equació no lineal. En el cas de l'equació d'Einstein en el buit $G(g) = 0$ aquesta qüestió dóna lloc a la definició *clàssica* d'estabilitat, basada en la noció de tangència: donats dos espais de Banach X i Y i una aplicació diferencial $f : X \to Y$ entre ells, una equació del tipus $f(x) = y_0$ per a un y_0 arbitrari però fix es diu que és linealment estable en una solució x_0 si per a tota direcció h que satisfà $D_{x_0} f(h) = 0$ existeix una corba $x(\lambda)$ de solucions exactes que és tangent a h en x_0.

D'acord amb el punt de vista d'Einstein en el seu article *Sobre les ones gravitatòries* (1918), l'estabilitat lineal de $G = \chi T$ ha de garantir que un procediment com el següent sigui correcte: interpreteu l'univers com un model de R-W (g_0, T_0), ambdós relacionats per $G(g_0) = \chi T_0$; aleshores, donada una pertorbació δT de T_0 i amb la finalitat de trobar la corresponent pertorbació δg de g_0 que compleix $G(g_0 + \delta g) = \chi(T_0 + \delta T)$, considerem $D_{g_0} G(\delta g) = \chi \delta T$. Cal adonar-se'n de la petita diferència entre els dos casos: mentre el cas del buit obeeix l'esquema $f(x) = 0$, i.e., cerquem solucions de $f(x) = 0$ properes a la solució x_0 de la *mateixa* equació, en el cas de la matèria , *donat qualsevol q proper a zero*, ens interessem per aquelles solucions de $f(x) = y_0 + q$ que són a prop del punt x_0 que satisfà $f(x_0) = y_0$.

En conseqüència és necessària una definició d'estabilitat lineal adaptada a aquesta nova situació. En poques paraules, tot el que s'exigeix és que les solucions de l'equació no lineal i les de l'equació linealitzada, per a un q donat, puguin ser parametritzades pel mateix espai vectorial (posem $\psi_q(z)$ i $\varphi_q(z)$, amb $\psi_0(0) = \varphi_0(0) = x_0$), de forma que l'error $E_q(z) = \varphi_q(z) - \psi_q(z)$ comès en considerar una o l'altra està controlat per la condició $\lim_{(z,q)\to(0,0)} \frac{E_q(z)}{\sqrt{\|z\|^2+\|q\|^2}} = 0$. Tot i que la idea de tangència ha passat a ocupar un segon pla, aquesta definició més laxa ha d'implicar l'antiga quan $q = 0$ (per a una versió més detallada, mireu el capítol 3). La primera no és més que una petita modificació de l'última; de fet, la condició necessària és la mateixa per a ambdues: l'aplicació diferencial en x_0 ha de ser exhaustiva i el seu nucli ha de tenir un suplementari topològic.

Malgrat tot, aquesta nova definició no es pot aplicar directament a l'equació d'Einstein escrita en la forma $G = \chi T$ perquè la condició de conservació de l'energia $\mathrm{div}_g T = 0$ lliga les primeres deformacions de g i de T. És per tant necessari trobar un nou marc on les variables que representen a la geometria i a l'energia o matèria siguin independents. Aquesta representació ve donada per un problema de Cauchy ben posat perquè si aquest és el cas a cada pertorbació de les dades inicials de Cauchy correspon una pertorbació de la solució i per tant l'estabilitat per linealització de les quatre equacions de lligam per a les dades de Cauchy és equivalent a la del sistema format per les equacions $G = \chi T$ i $\mathrm{div}_g T = 0$. El capítol 1 està íntegrament dedicat al problema de Cauchy per a l'equació d'Einstein amb matèria. Es demostra que quan les equacions $G = \chi T$ i $\mathrm{div}_g T = 0$ estan desacoblades i les equacions de la matèria $\mathrm{div}_g T = 0$ poden ser escrites en forma de sistema hiperbòlic quasilineal i simètric sense característiques, el problema de Cauchy associat al sistema $G = \chi T$ i $\mathrm{div}_g T = 0$ està ben posat. Per exemple, això s'esdevé per a un medi holònom i en particular per a un fluid perfecte.

En un model de Robertson-Walker $(V, \tilde{g}, T)$ l'espai-temps V és una varietat producte $M \times I$ on (M, g) és una varietat de Riemann de curvatura (seccional) constant i I un interval de $\mathbb{R}$, la mètrica és de la forma $\tilde{g} = -dt \otimes dt + \zeta^2(t) g,\ t \in I$, i T és un tensor d'impulsió-energia corresponent a un fluid perfecte $T = (\rho + p) u \otimes u + p\tilde{g}$, on la densitat ρ i la pressió p depenen només de t i estan relacionades per una equació d'estat (capítol 2). Els resultats d'aquesta tesi estan recollits en la següent taula:

varietat M	*curvatura*	*compacitat*	*estabilitat*
$\mathbb{R}^3$	0	no	sí
$\mathbb{H}^3$	-1	no	sí
$\mathbb{S}^3$	1	sí	no
$\mathbb{R}^3/\Gamma$	0	sí	no
$\mathbb{H}^3/\Gamma$	-1	sí	sí

Aquí Γ a X/Γ es refereix a un subgrup discret del grup d'isometries de X que actua de manera lliure i pròpiament discontínua. La demostració en el capítol 4 dels dos primers casos (els anomenats universos oberts) utilitza les mateixes tècniques usades per Y.Choquet-Bruhat, A.Fischer i J.Marsden per demostrar l'estabilitat lineal de l'equació d'Einstein en el buit en la mètrica η de Minkowski. Cal dir però, que en el cas hiperbòlic $\mathbb{H}^3$ ha estat necessari (appendix A) donar una demostració explícita del fet que per una banda les pertorbacions d'ordre zero de la laplaciana i d'una altra banda l'operador $\nabla^* L_X g$ són isomorfismes topològics, resultats que se sàpiga no existien en la literatura. El tercer cas (capítol 5) rau, com era de preveure, en el fet que la 3-esfera admet en cada punt una base de l'espai tangent formada per tres camps de Killing. Els últims dos casos (capítol 6), que no són simplement connexos, mostren que l'estabilitat per linealització no té res a veure amb la compacitat. La demostració de $\mathbb{R}^3/\Gamma$ és idèntica a la de $\mathbb{S}^3$, i el cas $\mathbb{H}^3/\Gamma$ es basa en un resultat de S.Bochner (1946) que assegura que tota varietat de Riemann compacta i amb el tensor de Ricci definit negatiu té un nombre finit d'isometries.

Briefly speaking, the aim of this thesis is to establish the precise mathematical framework in which linearization stability of Einstein equation $G = \chi T$ makes sense, and once this is achieved, to find conditions for this type of stability when a Robertson-Walker model for the universe is considered.

The concept of linearization stability arises when one wonders whether the solutions of a linearized equation do really approximate solutions of the corresponding true equation. In the case of the empty space Einstein equation $G(g) = 0$ this question gives rise to the *classical* definition of stability, based on the notion of tangency: given two Banach spaces X and Y and a differential map $f : X \to Y$ between them, then an equation of the type $f(x) = y_0$ for arbitrary but fix y_0 is said to be linearization stable at a solution x_0 if for every direction h satisfying $D_{x_0} f(h) = 0$ there exists a curve $x(\lambda)$ of exact solutions tangent to h at x_0.

Following Einstein's point of view in his paper *About gravitational waves* (1918), the linearization stability of $G = \chi T$ has to guarantee that a procedure like this is correct: interpret the universe as a R-W model (g_0, T_0), both related by $G(g_0) = \chi T_0$; then, given a perturbation δT of T_0 and in order to find the corresponding perturbation δg of g_0 satisfying $G(g_0+\delta g) = \chi(T_0+\delta T)$, we deal with $D_{g_0} G(\delta g) = \chi \delta T$. Notice the slight difference between the two cases: while the empty space case obeys the pattern $f(x) = 0$, i.e., we look for solutions of $f(x) = 0$ near to a solution x_0 of the *same* equation, in the matter case, *given any q close to zero*, we ask for those solutions of $f(x) = y_0 + q$ near to the point x_0 that satisfies $f(x_0) = y_0$.

Thus a definition of linearization stability adapted to this new situation is necessary. Shortly speaking, it is required that, for a given q, the solutions of the true equation and the solutions of the linearized one can be parametrized by the same vector space (say $\psi_q(z)$ and $\varphi_q(z)$, with $\psi_0(0) = \varphi_0(0) = x_0$), in such a way that the error $E_q(z) = \varphi_q(z) - \psi_q(z)$ done when considering one or the other is controlled by the condition $\lim_{(z,q)\to(0,0)} \frac{E_q(z)}{\sqrt{\|z\|^2+\|q\|^2}} = 0$. Although tangency no longer plays the principal role, this loose definition must imply the old one when $q = 0$ (for details, see chapter 3). The former is a slight modification of the latter; in fact, the sufficient condition is the same for both cases: the differential map at x_0 has to be surjective with splitting kernel.

However, this new definition can not be applied directly to the Einstein equation written as $G = \chi T$ because the energy condition $\mathrm{div}_g T = 0$ ties both the first deformations of g and T. One must therefore look for a background where the variables representing the geometry and the energy-matter are independent. This representation is given by a well-posed Cauchy problem because in this case to every perturbation of the Cauchy data corresponds a perturbation of the solution and linearization stability of the four constraint equations for the Cauchy data are equivalent to that of the system of the equations $G = \chi T$ and $\mathrm{div}_g T = 0$. Chapter 1 deals entirely with the Cauchy problem for the Einstein equation with matter. It is showed that when the equations $G = \chi T$ and $\mathrm{div}_g T = 0$ are uncoupled and the equations of matter $\mathrm{div}_g T = 0$ can be written as a quasi-linear symmetric hyperbolic system without any characteristic then the Cauchy problem associated with the system $G = \chi T$ and $\mathrm{div}_g T = 0$ is well-posed. For example, this is the case of holonomic media and in particular of perfect fluids.

In a Robertson-Walker model $(V, \tilde{g}, T)$ the space-time V is a product manifold $M \times I$ where (M, g) is a Riemannian manifold of constant (sectional) curvature and I an interval of $\mathbb{R}$, the metric is of the form $\tilde{g} = -dt \otimes dt + \zeta^2(t) g,\ t \in I$, and T is a perfect-fluid stress-energy tensor $T = (\rho + p) u \otimes u + p\tilde{g}$, the density ρ and the pressure p depending only on t and being related by an equation of state (see chapter 2). The results of this thesis are summarized as follows:

manifold M	*curvature*	*compactness*	*stability*
$\mathbb{R}^3$	0	no	yes
$\mathbb{H}^3$	-1	no	yes
$\mathbb{S}^3$	1	yes	no
$\mathbb{R}^3/\Gamma$	0	yes	no
$\mathbb{H}^3/\Gamma$	-1	yes	yes

Here Γ in X/Γ means a discrete subgroup of the group of isometries of X which acts in a free and properly discontinuous way. The proof in chapter 4 of the first two cases (the so-called open R-W universes) is based on the techniques used by Y.Choquet-Bruhat, A.Fischer and J.Marsden to show the linearization stability of the empty space Einstein equation at the Minkowski metric η. However, in the hyperbolic case $\mathbb{H}^3$, a explicit proof of the topological isomorphism character of zero order perturbations of the Laplacian and of the operator $\nabla^* L_X g$ has to be done (appendix A), since up to now such a result does not exist in the literature. The third case (chapter 5) relies, as one can expect, on the fact that the 3-sphere admits at each point a basis of the tangent space composed by three Killing vector fields. The latter two cases (chapter 6), which are not simply connected, show that linearization stability has nothing to do with compactness. The proof of $\mathbb{R}^3/\Gamma$ is identical to that of $\mathbb{S}^3$, and the case $\mathbb{H}^3/\Gamma$ is based on a result due to S.Bochner (1946) that asserts that every compact Riemannian manifold with negative Ricci tensor has a finite number of isometries.