UNIVERSITAT AUTÒNOMA DE BARCELONA

HERMENÈUTICA DEL CÀLCUL DIFERENCIAL A L'EUROPA DEL SEGLE XVIII: DE L'**ANALYSE DES INFINIMENT PETITS** ***DE L'HÔPITAL (1696) AL*** **TRAITÉ ÉLÉMENTAIRE DE CALCUL DIFFÉRENTIEL ET DE CALCUL INTÉGRAL** ***DE LACROIX (1802)***

Mónica Blanco Abellán

UNIVERSITAT AUTÒNOMA DE BARCELONA

Departament de Matemàtiques

*HERMENÈUTICA DEL CÀLCUL DIFERENCIAL A L'EUROPA DEL SEGLE XVIII: DE L'*ANALYSE DES INFINIMENT PETITS *DE L'HÔPITAL (1696) AL* TRAITÉ ÉLÉMENTAIRE DE CALCUL DIFFÉRENTIEL ET DE CALCUL INTÉGRAL *DE LACROIX (1802)*

Mónica Blanco Abellán

Memòria presentada per aspirar al grau de Doctor en Matemàtiques, dins del *Programa Interuniversitari de Doctorat d'Història de les Ciències* (UAB-UB), coordinat pel *CEHIC*.

Director: Dr. Josep Pla i Carrera (Universitat de Barcelona)

Tutor: Dr. Ferran Cedó Giné (Universitat Autònoma de Barcelona)

Barcelona, juliol 2004

Classificació *MSC2000*

00A35 Metodologia i didàctica de les matemàtiques.

01A50 Història de les matemàtiques i matemàtics. Segle XVIII.

Classificació *UNESCO*

5506 22 Història de la ciència

Vull expressar el meu profund agraïment al Dr. Josep Pla i Carrera, per haver-me motivat a realitzar aquesta tesi doctoral i per haver acceptat dirigir-la.

He d'agrair de manera especial al Dr. Gert Schubring per haver acceptat les meves estades a l'Institut für Didaktik der Mathematik de la Universitat de Bielefeld, que tan profitoses resultaren per al meu treball, i per totes les seves orientacions i aportacions.

Vull agrair a la Dra. Marta Ginovart Gisbert el seu recolzament, tant personal com acadèmic, des que vaig començar a treballar a l'Escola Superior d'Agricultura de Barcelona.

M'han estat molt útils els comentaris i consells del Dr. Xavier Roqué Rodríguez.

Pel que fa a l'estudi estadístic exposat en el capítol vuitè, vull agrair al Dr. Josep Maria Mateo Sanz i al Dr. Àlex Riba Civil les seves indicacions.

Finalment, vull donar les gràcies a tots aquells que han fet possible que arribés al final.

ÍNDEX

Annexos

ANTECEDENTS

Per a Kuhn "els llibres de text són vehicles pedagògics per a la perpetuació de la ciència normal" (KUHN (1962), p. 214 de la versió castellana). Els llibres de text exposen els resultats establerts després d'una revolució, atorgant maduresa a la ciència normal. Les diferències entre la ciència normal a la Gran Bretanya i la ciència normal al Continent queden paleses en els respectius llibres de text. Els llibres de text també són vehicles de transmissió del vocabulari i la sintaxi científica utilitzats en un moment donat. Els "paradigmes" de Kuhn i els llibres de text estan molt lligats, doncs al segle XIX els primers eren ensenyats a partir dels segons. Abans del XIX molts dels clàssics científics tenien una funció similar.

> … assoliments que alguna comunitat científica particular reconeix, durant un cert temps, com a fonament per a la pràctica posterior. En l'actualitat, aquests assoliments són relatats, encara que rarament en la seva forma original, pels **llibres de text científics**, tant elementals com avançats. Aquests llibres de text exposen el cos de la teoria acceptada, il·lustren moltes o totes les seves aplicacions adients, i comparen aquestes amb observacions i experiments de condició exemplar. Abans que aquests llibres es popularitzessin a principis del segle XIX (i fins i tot en temps més recents, en les ciències que han madurat darrerament), molts dels llibres clàssics famosos de ciència exercien una funció similar. La F*ísica* d'Aristòtil, l'*Almagest* de Ptolomeu, els *Principia* i l'*Òptica* de Newton, l'*Electricitat* de Franklin, la *Química* de Lavoisier, i la *Geologia* de Lyell – aquestes i moltes altres obres van servir implícitament, durant un temps, per definir els problemes i mètodes legítims d'un camp de la recerca durant generacions successives de científics. Estaven en condicions de fer-ho perquè compartien dues característiques essencials. El seu assoliment mancava suficientment de precedents com per poder atreure un grup durable de partidaris, allunyant-los dels aspectes competitius de l'activitat científica. Simultàniament, era prou incompleta com per deixar molts problemes per resoldre pel grup de científics, *els límits del qual havien estat definits novament*. A partir d'ara em referiré als assoliments que comparteixen ambdues característiques com a *paradigmes*. (KUHN (1962), pp. 33-34 de la versió castellana).

Però Gillies[1] creu que potser Kuhn exagera la diferència entre llibre de text i clàssic de la ciència i, en conseqüència, la diferència entre el que passa actualment i el que va passar abans del XIX. Dels clàssics que esmenta alguns, de fet, no eren utilitzats per ensenyar un paradigma, mentre que d'altres eren tan utilitzats que es poden considerar com a llibres de text. Gillies introdueix el "textbook criterion for paradigms" per substituir la diferència entre llibre de text i clàssic de la ciència. Si es vol identificar el paradigma d'un determinat grup de científics en un determinat període, Gillies suggereix examinar els llibres de text usats per ensenyar els principiants els coneixements necessaris per esdevenir un membre reconegut del grup. Els continguts dels llibres de text més o menys defineixen el paradigma acceptat pel grup.

Quant a la manera d'escriure, el treball d'investigació és diferent de l'elaboració de llibres de text. Aquests dos processos generen audiències diferents. D'una banda, els textos elementals van dirigits als destinataris d'una educació general. D'altra banda, els qui volen aprofundir els seus coneixements hauran de llegir els clàssics de la ciència.[2]

Segons Bensaude-Vincent:[3]

1) Els llibres de text donen una visió del coneixement de l'època, caracteritzant-lo com a disciplina acadèmica i, d'aquesta forma, considerant-lo com un mitjà de professionalització.
2) Els objectius de crear una nova ciència van molt lligats amb el seu ensenyament. Però resulta difícil confeccionar una tractat elemental exposant la revolució soferta pels conceptes. Bensaude-Vincent considera que l'experiència com a professor pot facilitar aquesta tasca.
3) A més a més, fóra bo adreçar-se a principiants donada la seva manca de prejudicis en contra de la nova ciència.

Com remarca Schubring[4], tampoc no s'ha d'oblidar que, des de finals del segle XVIII, els llibres de text depenen de restriccions imposades pel context institucional (programes oficials, decrets ministerials,...). El desenvolupament de la ciència depèn de

[1] Vegeu GILLIES (1992), p. 271.
[2] Vegeu SCHUBRING (1987), p. 43. Pel que fa a la relació entre la ciència i el públic a qui va dirigida, Rousseau senyala la dicotomia ciència-imaginació a ROUSSEAU (1990).
[3] Vegeu BENSAUDE-VINCENT (1990).
[4] Vegeu SCHUBRING (1987), p. 41.

la ràpida difusió de la informació científica arreu del món. La investigació no porta enlloc si es basa en coneixements obsolets i els científics haurien de dedicar una part del seu temps a la biblioteca per posar-se al corrent dels nous descobriments. Això implica que els científics han de confiar en el comerç bibliogràfic. En particular, són els editors de revistes qui els proveeixen dels materials bàsics sobre els resultats obtinguts per altres treballadors en camps similars de recerca. Si no s'aprecia allò que s'ha fet en el passat i allò que s'està fent en el moment present, és gairebé impossible fer plans de futur.[5] És el que Schubring anomena "procés d'elementarització"[6] o, dit d'una altra manera, l'anàlisi dels elements d'una disciplina, per transmetre el coneixement i facilitar-ne el seu ensenyament. Schubring proposa un esquema "tridimensional" per analitzar els llibres de text històrics:[7]

1) Analitzar els canvis observats en les diverses edicions d'un mateix llibre.
2) Trobar canvis corresponents a d'altres llibres d'un mateix autor, a partir de parts que tractin camps conceptuals relacionats.
3) Relacionar els canvis en els llibres de text amb canvis en el context: canvis en els programes, decrets ministerials, canvis epistemològics,...

En el mateix article Schubring també afirma que un possible patró per avaluar els efectes d'un determinat llibre de text és veure quin ha estat el seu impacte sobre les matemàtiques escolars, sobre el mètode, sobre la pràctica, sobre la seva utilització per part del professor... Un indicador de l'èxit del llibre són les traduccions que se n'han fet a d'altres idiomes. Aquest factor és més significatiu que el nombre d'edicions, ja que aquest pot venir condicionat per factors institucionals.[8] Schubring recolza l'anàlisi comparativa de llibres de text com a forma d'exploració de les diferències entre països a nivell d'estil, significat i epistemologia, donat que els llibres de text emergeixen d'un marc cultural matemàtic específic i d'un determinat sistema educacional.[9]

---

[5] Vegeu THORTON-TULLY (1971), p. 354.
[6] Vegeu SCHUBRING (1987), pp. 43 i 47.
[7] Vegeu SCHUBRING (1987), p. 45.
[8] Per exemple, a França els llibres de text eren prescrits centralment per una comissió, per garantir l'aplicació uniforme del mètode que es considerava millor. Vegeu SCHUBRING (1987), p. 42.
[9] Vegeu també SCHUBRING (1996), p. 363.

OBJECTIUS DEL TREBALL

El 1684 Gottfried W. Leibniz (1646-1716) publica l'article "Nova methodus pro maximis & minimis,..." a *Acta Eruditorum*, que representa la primera publicació oficial sobre càlcul. A l'article Leibniz definia les diferències i establia, sense demostració, les regles de diferenciació de les operacions elementals i les aplicava a problemes de tangents i punts crítics. Aquest text és curt, mal imprès i difícil d'entendre. Leibniz no publicà cap treball específic sobre la nova matèria i moltes de les seves descobertes les coneixem a través de la seva correspondència amb altres matemàtics, apart dels articles publicats a *Acta Eruditorum*. Entre 1669 i 1676 Isaac Newton (1643-1727) escrigué tractats de fluxions, no publicats fins el 1704. La base del mètode, doncs, es troba als seus *Principia* (1687), molts anys després del seu descobriment del càlcul. Tanmateix, es tracta també d'un text curt i difícil. John Craig (1663-1731) publicà dos treballs (1685, 1693) basats en el càlcul leibnizià. No serveixen com a introducció a la matèria, donada la seva dificultat a causa del seu llenguatge geomètric.[10] El 1696 L'Hôpital (1661-1704) publicà l'*Analyse des infiniment petits*, el primer tractat sistemàtic sobre càlcul diferencial, basat en les lliçons que Johann Bernoulli (1667-1748) oferí a L'Hôpital entre 1691 i 1692. L'*Analyse des infiniment petits* fou àmpliament llegit durant el segle XVIII. Al llarg del segle, però, d'altres llibres de text sobre càlcul aparegueren a Europa. L'objectiu d'aquesta tesi és analitzar el desenvolupament del càlcul a través d'aquests llibres als països següents: França, Alemanya, Itàlia i Gran Bretanya. Es duu a terme una revisió dels factors que impulsaren la seva lectura, com, per exemple, el públic a qui anaven dirigits (estudiants d'universitat o d'escola militar, principiants en general, etc), o si foren traduïts o no a d'altres llengües. S'avalua la influència de l'*Analyse* en aquests llibres. Així mateix s'analitza la forma i el contingut d'aquests llibres de text. Les principals diferències entre els textos analitzats són:

(i) la manera de presentar els fonaments del càlcul i el corpus teòric que inclouen;
(ii) el llenguatge utilitzat (geomètric o algèbric);
(iii) el tractament de les corbes algèbriques i transcendents, i els criteris d'elecció de coordenades;
(iv) els problemes i aplicacions que tracten, i el seu plantejament;
(v) els aspectes metodològics, com l'estructura, la intenció didàctica i la notació.

Així mateix, situant el meu treball dins del context històric del desenvolupament del càlcul diferencial/fluxional dins del context institucional de les matemàtiques durant aquest període, he analitzat el progrés del càlcul dins de cada país i he contrastat el seu desenvolupament entre els diferents països.

ESTRUCTURA DEL TREBALL

Inicio el meu treball (capítol 1) amb una breu exposició del context històric i institucional del desenvolupament del càlcul des de Leibniz fins a Lacroix, d'una banda, i del mètode fluxional, d'una altra banda.

El segon capítol és una revisió del treball de recerca *Anàlisi de la controvèrsia L'Hôpital-Bernoulli*, presentat per a l'obtenció del grau de Magister en Història de la Ciència (setembre 1999), part del qual posteriorment va aparèixer al número 1-2 (2001) de la revista *Cronos*.[11] De fet aquest treball previ m'ajudà a establir les directrius comparatives que he seguit en els capítols 3, 4, 5 i 6.

A la primera part dels capítols 3, 4, 5, i 6 presento les obres analitzades de França, Alemanya, Itàlia i Gran Bretanya, respectivament. A continuació analitzo i comparo els textos de cada país. Comento en primer lloc com exposen cadascun d'ells els fonaments del càlcul. També descric el corpus teòric comú (ordre superior, tangents, màxims i mínims, punts d'inflexió, osculacions,...). Després d'haver estudiat els fonaments i el corpus teòric, dedico un apartat al llenguatge emprat en cada cas (geomètric o algèbric). A continuació recullo les corbes tractades a cada text i l'elecció de les coordenades, dependent o independent del tipus de corba treballada. Finalment dedico un apartat a la classificació dels problemes i aplicacions de cada obra.

El capítol setè està íntegrament dedicat a l'*Institutiones calculi differentialis* (1755) de Leonhard Euler, donada la seva influència i la internacionalitat del seu autor.

---

[10] Vegeu BOYER (1946), p. 159.
[11] Vegeu BLANCO (1999) i (2001).

El capítol vuitè recull els aspectes més formals dels textos analitzats: la didàctica, l’estructura i la notació. En particular, aplico tècniques estadístiques multivariants per quantificar l’estructura dels diferents llibres mitjançant les freqüències d’ús de certs mots.

Finalment, el capítol novè sintetitza l’anàlisi comparativa del desenvolupament del càlcul a cadascun dels països estudiats i a continuació es recullen les conclusions i una breu descripció de les perspectives de treball futur.

1. INTRODUCCIÓ: CONTEXT HISTÒRIC I INSTITUCIONAL

1.1. EL CÀLCUL LEIBNIZIÀ: DE LEIBNIZ A LACROIX

El context geomètric del càlcul leibnizià[1]

El 1672 Leibniz conegué Huygens a París, qui l'instà a fer un estudi més profund de les matemàtiques. El 1673 Leibniz visità Londres, on va aprendre molt sobre sèries infinites i comprà una còpia de les *Lectiones geometricae* de Barrow. Un cop de tornada a París, es posà a estudiar Cavalieri, Torricelli, Gregory of St. Vincent, Roberval, Pascal, Descartes, Wren, James Gregory, Sluse, Hudde,… S'interessà principalment per la geometria, l'anàlisi combinatòria i l'aritmètica. Entre 1680 i 1690 Leibniz va introduir l'anàlisi infinitesimal en el marc de l'anàlisi cartesiana. L'objectiu de Leibniz era crear un mètode, és a dir, unes fórmules amb unes regles de càlcul, per trobar quadratures, tangents... L'objecte central era la corba. El concepte fonamental leibnizià era la quantitat *variable* geomètrica, com l'ordenada, l'abscissa, l'arc, el radi, la subtangent,...

Al segle XVII la corba implicava relacions entre variables geomètriques, que de vegades podien ser expressades mitjançant equacions, d'altres mitjançant circumloquis en prosa, basats en la construcció geomètrica (com és el cas de les corbes transcendents). La relació entre les variables no era funcional, en el sentit que no hi havia una variable que fes el paper de "variable independent" i una altra que fos funció d'aquesta. La corba no era un *graph* del tipus $x \to y(x)$, sinó que era la figura que inclou la relació entre x i y, que eren dues variables geomètriques. Dins d'aquest tractament algèbric, les equacions havien de conservar l'homogeneïtat dimensional. Una altra representació per a les corbes era la proporcionalitat (especialment en aquells casos en què l'equació presentava dificultats dimensionals). Les relacions entre variables infinitesimals es representava mitjançant equacions diferencials o mitjançant proporcions diferencials (especialment, en els problemes relacionats amb la física i, en particular, la mecànica, atès que aquesta: implica forces i canvis de moviment, per tant, els infinitesimals).

[1] Per a la descripció del càlcul segons Leibniz m'he basat principalment en LEIBNIZ (1684); BOYER (1949); HOFMANN (1972); BOS (1974) i (1993); MARTÍN-LORENZO (1994).

La definició de variable, diferència i diferencial[2]

Llegint el *Traité des sinus du quart de cercle* de Pascal, Leibniz observà la suma i la diferència en el triangle característic: mitjançant seqüències de variables d'un polígon finit, sumes relacionades amb quadratures, diferències amb tangents. Així se n'adona que les quadratures i les tangents són operacions recíproques. Quan el polígon té infinits costats, infinitament petits, entén la corba com un polígon infinitangular. La corba *és* el polígon. Lebiniz extrapola el cas infinit del cas finit, les *diferències* (fent servir l'operador Δ) passen a ser *diferencials*. *d* és l'operador que envia la variable finita *y* a la variable infinitament petita *dy* (diferencial). $\int$ és l'operador que correspon amb la suma en el cas finit (que simbolitza amb $\sum$)[3]. A partir de la seqüència de diferències, es poden tornar a estudiar les diferències. La variable "diferència" *és* la seqüència de tots els valors que recorre. *x*, *y*, ... són variables que recorren infinites seqüències de valors infinitament propers. *dx*, *dy*, ... són variables noves, anomenades diferencials, infinitament petites. L'ordre superior queda justificat de la manera següent: la seqüència diferencial corresponent a la seqüència de diferencials de primer ordre (no tindria sentit parlar de *ddx* si només es considerés un *dx*, però *dx* és una variable, que cobreix una seqüència ordenada).

La indeterminació dels diferencials: l'elecció de la "progressió de les variables"[4]

Els costats del polígon infinitangular no tenen perquè ser iguals. Això depèn de 1) la naturalesa de la corba, i 2) la progressió de les variables. No és acceptable fixar *dx* constant, va contra la llibertat i la generalitat del mètode de Leibniz. Els diferencials de primer ordre no depenen de la progressió, però els d'ordre superior sí. I existeixen proporcions diferencials amb diferencials de primer ordre que depenen de la progressió. En alguns problemes l'especificació de la variable amb diferencial constant és crucial.[5] Si s'escull la progressió de manera adient, es poden simplificar els càlculs, que és un dels avantatges de l'elecció de la progressió. Segons Johann Bernoulli, una fórmula és

---

[2] Vegeu BOS (1974).

[3] Primer Leibniz l'anomena "suma". Després, per suggeriment de Johann, serà "integral". En qualsevol cas, la "integral" de Johann és la inversa de la diferenciació, com Newton. La "suma" de Leibniz correpondria més aviat a l'actual "integral definida". Però tant Newton com Leibniz eran conscients dels dos punts de vista. Vegeu BOYER (1949), p. 206; BOS (1974), pp. 20-22 .

[4] Vegeu BOS (1974).

[5] Vegeu BOS (1974), p. 49.

incompleta quan *dx*, *dy*, ... es prenen com a constants (quan s'escull una progressió). Si no, s'anomena completa.

La indeterminació de la progressió i la llei d'homogeneïtat condicionaren l'elecció dels problemes i de les tècniques, com, per exemple, el càlcul del radi de curvatura (o com l'anomenaven ells, "radi del cercle osculador"). Johann Bernoulli, en la part analítica de la deducció, pren $ddx = 0$. El 1694 Jakob Bernoulli havia donat la fórmula en els casos *ds*, *dy*, *dx* constant, respectivament (també en el cas de coordenades polars). Cramer (l'editor de Jakob Bernoulli) en un reimpressió de Jakob presenta la prova geomètrica infinitesimal (en el cas de coordenades polars) i dóna una fórmula que verifiquen totes les progressions. La solució de Leibniz consisteix a eliminar els diferencials d'ordre superior de la fórmula del radi, de manera que sigui independent de la progressió de les variables. Per evitar la indeterminació, Leibniz introdueix els quocients diferencials com a variables noves.[6] Johann estudia les regles per passar de la fórmula en una progressió a la fórmula en una altra, la qual cosa implica la introducció de quocients/coeficients diferencials (Johann els introdueix però no els assigna un nom particular), transformant l'equació diferencial en una equació diferencial de primer ordre. Així doncs, la indeterminació es supera introduint el que ara anomenem quocients o coeficients diferencials.

La naturalesa dels infinitesimals: l'atac de Nieuwentijdt

En el seu article de 1684, després de donar les regles de càlcul, Leibniz menciona de manera casual que els diferencials es poden considerar proporcionals als increments o decrements momentanis de les variables, els infinitesimals. A continuació diu que traçar una tangent és traçar una recta que uneix dos punts de la corba, amb distància infinitament petita entre elles, o bé que és un costat del polígon infinitangular. Aquesta distància infinitament petita es pot expressar mitjançant un diferencial (*dv*) o bé mitjançant una relació amb aquest (per exemple, a partir de la tangent). Però Leibniz en general evita la definició i usa directament els diferencials com a infinitesimals. Justifica els diferents ordres d'infinit referint-se als infinits rangs del seu sistema filosòfic de mònades (idealisme metafísic).

Leibniz era conscient que s'havien de contestar dues qüestions: 1) l'existència "de fet" dels infinitesimals; 2) la validesa de les solucions de problemes resolts via les regles del càlcul. Pel que fa a la primera qüestió, Leibniz evita qualsevol mena de discussió sobre la naturalesa dels infinitesimals. Però Nieuwentijdt ataca la manca de claredat del treball de Newton i l'existència dels diferencials d'ordre superior de Leibniz, tot i admetre la validesa dels resultats (1694-95). Aleshores, el 1695, Leibniz respon que l'excés d'escrúpols no hauria de fer refusar els fruits de la seva invenció. Leibniz justifica el seu càlcul segons dues línies:

- El càlcul nou no és res més que un llenguatge abreujat per a les demostracions per exhaustió d'Arquimedes.
- La llei de continuïtat, que és la que justifica la transició de "ficcions" a "realitat". Considera primer *dx*, *dy* diferències finites. Fixa un segment finit, $(d)x$, i fixa també *x*, *y*. Defineix $(d)y$ mitjançant la proporcionalitat: $(d)y:(d)x = dy:dx$. En el cas que *dx* sigui zero, aleshores defineix $(d)y:(d)x = y:\sigma$, on σ representa la subtangent. Aquí no invoca la llei de continuïtat. La farà servir més tard, en pressuposar la *tangent*, la línia que uneix dos valors consecutius de la variables. Si $dx \neq 0$, la raó $(d)y:(d)x$ pot ser substituïda per $dy:dx$. L'argument es pot estendre al cas límit $dx = 0$ gràcies a la llei de continuïtat, perquè encara es pot entendre com una raó de quantitats finites. És a dir, primer considera les quantitats com a magnituds assignables finites i, després dels càlculs, les considera com inassignables infinitesimals.[7]

En canvi, en referència a la segona qüestió, usa l'èxit del mètode a l'hora de justificar el càlcul: l'aplicació de les regles adients dóna lloc a resultats correctes. Leibniz destaca la naturalesa algorísmica del nou mètode.

El debat Rolle-Varignon a l'Académie des Sciences[8]

El càlcul leibnizià va ser difós a través dels germans Bernoulli. En particular, va ser Johann qui el va introduir a França, en cercles relacionats amb Malebranche. Els primers textos sobre el nou càlcul van aparèixer gràcies a l'Académie Royale des

---

[6] Vegeu BOS (1974), pp. 41-42.
[7] En referència a la llei de continuïtat de Leibniz, vegeu BOYER (1949); BOS (1974).
[8] Vegeu BLAY (1986).

Sciences, a partir de 1693, en els *Registres des Procès-Verbaux des Séances de l'Académie royale des Sciences*, signats pel Marquès de L'Hôpital, Pierre de Varignon, Sauveur i de Lagny. El 1696 L'Hôpital publica l'*Analyse des infiniment petits*. La publicació del llibre de L'Hôpital provocà que el 17 de juliol de 1700 Michel Rolle comencés un debat sobre el càlcul diferencial, en el si de l'Académie.[9] Varignon va decidir defensar el nou càlcul contra l'atac de Rolle. La crítica de Michel Rolle es basà en dos punts:

- *La manca de rigor lògic dels conceptes i principis fonamentals:* La primera objecció de Rolle és l'existència dels infinits i infinitament petits de diferents ordres i, en conseqüència, dels diferencials d'ordre superior (com Nieuwentijdt). Varignon recorre a Euclides per justificar-ne la seva existència. La segona objecció de Rolle fa referència al fet que una quantitat més (o menys) el seu diferencial és igual a la quantitat. Finalment, Rolle planteja la qüestió de si els diferencials són zeros absoluts. Varignon es recolza en la teoria de primeres i últimes raons de Newton (els infinitesimals no són ni res ni alguna cosa, sinó "evanescents") i en la pràctica de Pascal, Roberval, Torricelli, LaHire, Huygens i Fermat (una quantitat pot ser considerada menyspreable, en relació amb una altra, per efectuar-ne aproximacions).

- *Els errors produïts pel nou càlcul:* En una segona memòria (27 novembre/1 desembre, 1700) Rolle afirma que amb el càlcul leibnizià s'obtenen resultats diferents dels obtinguts amb els mètodes clàssics, purament algèbrics, com el de Hudde. Recolza aquesta afirmació mitjançant tres exemples relatius a la determinació d'extrems de corbes particulars (tercera memòria, 12-16 març, 1701). Varignon respon mostrant que Rolle, de fet, ha aplicat malament tots dos mètodes. Amb el mètode dels infinitament petits es veu millor la forma de les corbes i es poden distingir els màxims i mínims dels punts d'intersecció. A més, Varignon creu que el fet que el mètode de Hudde no serveixi per estudiar les corbes mecàniques sense fer desaparèixer els radicals, ja és una bona raó per afirmar la fecunditat del mètode leibnizià.

[9] Abans, però, LaHire, l'*abbé* Bignon, el pare Gouye i l'*abbé* Gallois ja s'havien mostrat contraris al nou càlcul.

La polèmica prengué un caràcter més aviat personal (quarta i cinquena memòries, 1701). El 3 de setembre de 1701 es nomenà una comissió, formada pel pare Gouye, Cassini i LaHire, per acabar amb el debat. Després d'uns mesos de calma, el 13 d'abril de 1702 Rolle recomençà el debat en el *Journal des Sçavans* (dirigit pel pare Gouye). Saurin va substituir Varignon en la defensa del càlcul leibnizià. Els exemples van canviar però els principis d'argumentació es conservaren. Aquesta segona fase durà fins al 1705-1706.

El càlcul leibnizià al Continent[10]

Leibniz mantingué correspondència amb d'altres matemàtics, buscant les formes més adients de notació i representació per al seu càlcul. Els seus seguidors aviat foren capaços d'aportar contribucions pròpies, raó que impulsà el progrés del mètode leibnizià. El mètode de Newton no tingué seguidors de la talla dels del mètode de Leibniz, i la principal preocupació era interpretar i clarificar els diferents termes emprats per Newton. A través de *Journal des Sçavans* i d'*Acta Eruditorum* es creà una atmosfera d'entusiasme envers el càlcul diferencial, la qual cosa justifica la poca atenció que el Continent dedicà al càlcul de fluxions.[11] Els germans Johann i Jakob Bernoulli foren grans defensors del mètode leibnizià. De fet, gràcies a Johann, al seu deixeble el Marquès de L'Hôpital i a Pierre Varignon aquest mètode s'estengué a França. També els germans Bernoulli, junt amb Christian Wolff (1679-1754) popularitzaren el càlcul leibnizià a Alemanya. Un altre correspondent de Leibniz, Guido Grandi (1671-1742), el difongué a Itàlia.

Malgrat l'èxit d'aplicació, tant a problemes matemàtics com científics en general, quant a la base del nou càlcul continuava la manca de claredat i de consens. Un dels postulats de Johann Bernoulli, "una quantitat que augmenta o disminueix en una quantitat infinitament petita ni creix ni decreix" (BERNOULLI (1922), p. 3), fa fonamental l'omissió dels diferencials d'ordre superior. Leibniz va definir els seus diferencials com a "indefinidament o incomparablement petits", però en una carta a Leibniz (1698) Johann establí l'existència dels infinitesimals com a recíproc dels infinitament grans. Leibniz l'aconsellà parar compte, donat que els resultats per a les quantitats finites no

[10] Vegeu BOYER (1949).

necessàriament funcionen en el cas de les infinites. A més, infinit i infinitament petit poden ser no reals i, tanmateix, determinar relacions reals. Johann, però, va persistir en les seves idees sobre l'infinit i l'infinitament petit, idees que recorden els primers treballs de Wallis. Boyer[12] afirma que dels dos germans, Johann fou el que mostrà més originalitat i imaginació, mentre que Jakob tenia més poder crític. Johann expressava l'actitud positiva de Leibniz en relació als infinitesimals, Jakob va prendre el punt de vista més cautelós de Leibniz: els infinitesimals no són quantitats determinades, sinó "ficcions de l'esperit". Per a Christian Wolff, els infinitament petits o grans són impossibilitats o ficcions geomètriques adients, útils per fer descobertes. Els infinitament grans són quelcom que excedeix un nombre qualsevol; els infinitament petits realment no són quantitats, sinó una espècie de simbolisme imaginari (com per a Leibniz).

En canvi, a Itàlia, Guido Grandi defensava l'existència de l'infinit absolut i dels infinitesimals. Els infinitesimals de primer ordre són quantitats que guarden amb un magnitud finita de la mateixa classe una raó respectivament més gran i més petita que qualsevol nombre assignable. Els infinitesimals d'ordre superior es defineixen de manera similar, en termes dels d'ordre inferior. Les quantitats que difereixen en menys d'una magnitud assignable es poden considerar com a iguals. És una manera abreujada d'expressar els mètodes d'Euclides i Arquimedes respecte figures circumscrites.

A França l'encarregat de difondre el nou càlcul fou el Marquès de L'Hôpital, deixeble de Johann Bernoulli, que publicà l'*Analyse des infiniment petits* (1696). Un altre defensor del càlcul leibnizià fou Pierre Varignon que, com hem vist, intentà mostrar que els infinitesimals es podien reconciliar amb la geometria d'Euclides, durant el debat Rolle-Varignon. El 1727 es pot dir que la discussió en el si de l'Académie des Sciences havia acabat, que ja no hi havia dos grups i que havien guanyat els partidaris del nou càlcul. Un amic de Varignon, Bernard de Fontenelle (1657-1757) publicà *Élemens de la géométrie de l'infini*, que no presentava cap dubte respecte a la nova matèria. Fontenelle dugué a terme una dogmatització absoluta de l'infinit. L'infinit per a Fontenelle no era cap misteri. Es podia entendre com el darrer terme de la sèrie 0, 1, 2, 3, … i l'escrivia

---

[11] En general, poca atenció envers la ciència de Newton, i més a favor de la ciència de Descartes, fins que Voltaire popularitzà Newton al Continent.

[12] Vegeu BOYER (1949), p. 239.

amb el símbol ∞, com Wallis. Tanmateix el pas del finit a l'infinit no es podia concebre. També com feia Johann, justificà els diferents ordres d'infinitesimals com a recíproc de les potències infinites. Així *dy* era una magnitud d'ordre $\frac{1}{\infty}$, tot i definir-la en relació al triangle característic. John Wallis, Johann Bernoulli i Bernard de Fontenelle tractaren de deduir els infinitament petits de manera aritmètica, com a recíproc dels infinitament grans.

La manca de rigor matemàtic ve causada, doncs, per la manca de definicions convenients i per la tendència general de basar les matemàtiques sobre conceptes geomètrics. L'aritmètica encara no és prou abstracta i simbòlica com per assumir aquest paper. El nombre encara és interpretat mètricament, com una raó de magnituds geomètriques. Les fluxions i els diferencials eren vistos com a processos convenients a l'hora de resoldre problemes geomètrics, tot i expressar-se en termes algèbrics.

Euler: la funció i el coeficient diferencial[13]

Serà Leonhard Euler (1707-1783) qui donarà una base formal, no geomètrica, al càlcul, incorporant-lo a una teoria més general, la *teoria formal de funcions*. Euler és el primer en donar a la funció un rol central, i en proposar un estudi sistemàtic i una classificació de les funcions elementals, i dels seus diferencials i les seves integrals. La funció d'Euler és una expressió analítica, en termes de constants i de variables, que pot ser representada per símbols simples. La notació de Leibniz s'adaptarà bé a aquesta visió formal, la qual cosa farà que el càlcul leibnizià es desenvolupi durant el segle XVIII. Els seus infinitament petits o quantitats evanescents són senzillament *zeros* i el càlcul consisteix a operar amb zeros. Euler és contrari a l'existència dels infinitesimals com a constants, menors que qualsevol quantitat assignable. Com Jakob Bernoulli, Euler afirma que una quantitat menor que qualsevol altra quantitat ha de ser zero. Els diferencials d'ordre superior també són zeros. La raó entre zeros $\frac{0}{0}$ pot ser qualsevol raó finita $\frac{n}{1}$. De manera que el càlcul és la determinació de la raó dels increments

[13] Les fonts consultades per elaborar aquest apartat són BOYER (1949); BOS (1974); GRATTAN-GUINNESS (1990).

evanescents. Euler no justifica el pas de finit a infinitament petit, i segueix Taylor en el sentit de prendre els increments com a zeros. Quant a l'infinit, la posició d'Euler és similar a la de Wallis i a la de Fontenelle. La suma $1+2+3+...$ es pot fer sempre més gran que una quantitat finita qualsevol i es pot representar amb el símbol ∞. La seva visió formalista inaugura una tendència que alliberarà el càlcul de la geometria i que més endavant farà acceptable la interpretació aritmètica (via límits). El càlcul diferencial per a Euler és un cas particular del mètode de les diferències (primer finites, després infinitament petites). Però a diferència de Leibniz, les seqüències no vénen induïdes per un polígon infinitangular que s'identifica amb la corba, sinó per una funció, una variable dependent d'una altra independent. Aquí es comença a veure la transició d'una anàlisi geomètrica a una anàlisi de funcions i fórmules.

Degut a la indeterminació provocada pels diferencials d'ordre superior, aquests havien de ser eliminats de l'anàlisi. Els diferencials de primer ordre no depenen de la progressió, però els diferencials d'ordre superior sí. El "programa" d'Euler per eliminar-los es basa en el concepte de funció i de *coeficient diferencial*. Per tant, la indeterminació dels diferencials d'ordre superior serà la causa principal que, a la llarga, sorgeixi el concepte de derivada com a objecte principal del càlcul. A nivell computacional i conceptual, el coeficient diferencial funciona com la derivada, però encara no introdueix el concepte de límit en la seva definició. S'ha de trobar, doncs, la raó dels increments evanescents, d'una funció qualsevol respecte a la quantitat variable de la qual aquesta funció depèn. No es trauran conclusions de l'estudi dels increments per separat, sinó sempre de la seva raó. La *diferenciació* d'Euler és un operador que relaciona una funció amb un diferencial. El diferencial de segon ordre és diferencial del primer diferencial. El diferencial, doncs, es considera com una funció. A la conclusió a què arriba Euler és que s'ha d'idear un mètode que permeti eliminar els diferencials d'ordre superior de l'anàlisi, i aquest mètode involucra els coeficients diferencials:

1) Si un diferencial de primer ordre es pren constant, els d'ordre superior poden ser eliminats en ser expressats en termes de diferencials de primer ordre.
2) Si l'expressió és independent de la progressió, els diferencials d'ordre superior es cancel·len mútuament.
3) Si no s'especifica cap progressió de variables i les fórmules depenen de la progressió, els diferencials d'ordre superior són vagues i insignificants i, per tant, no acceptables en anàlisi.

Amb la introducció dels coeficients diferencials es redueixen els diferencials d'ordre superior a diferencials de primer ordre:

$$dy = pdx, dp = qdx, dq = rdx, ...$$

L'elecció d'una progressió de fet equival a l'elecció de variable independent en la teoria de funcions. Els termes $y, p, q, r, ...$ són funcions de la variable independent (x, en aquest cas). Després d'aplicar aquest mètode, en l'expressió dels diferencials d'ordre superior només apareixen potències d'un únic infinitesimal. Aquesta eliminació de diferencials d'ordre superior també afecta les equacions diferencials d'ordre superior, que poden ser transformades en equacions entre coeficients diferencials. Segons l'elecció de la progressió poden existir diverses equacions diferencials per a la mateixa relació entre x i y. Però fent servir coeficients diferencials, només apareix una equació. Euler es preguntà si, al revés, una única equació entre diferencials d'ordre superior podria implicar diverses relacions entre x i y, és a dir, diverses solucions. De manera semblant a com ja havia fet Johann Bernoulli, Euler estudià les regles de transformació per a diferents progressions, que aplicà després d'eliminar els diferencials d'ordre superior mitjançant coeficients diferencials. En conseqüència, també es va plantejar la pregunta de si existia una relació entre x i y que satisfés una equació diferencial, fos quina fos la progressió de variables escollida. Arribà a la conclusió que aquest fet només es donava en alguns casos especials, sota condicions específiques.

D'Alembert: la teoria de límits[14]

Mentre Euler treballava amb el concepte de funció i de coeficient diferencial, Jean le Rond D'Alembert (1717-1783) estava elaborant la seva *teoria de límits*, que seria la finalment acceptada. D'Alembert pensa en els "*infinitament* grans i petits" com en "*indefinidament* grans i petits". Boyer considera que probablement la seva teoria es basava en el *De quadratura curvarum* (1704) de Newton i en les *Institutions de géométrie* (1746) de De la Chapelle, que exposava idees relacionades amb Stevin, Gregory de Saint Vincent, … D'Alembert interpretava la "primera i última raó" de Newton com un *límit*. La definició de *límit* apareix en el seu article de l'*Encyclopédie* (1784):

> ...una quantitat és el límit d'una altra quantitat, quan la segona es pot apropar a la primera més que una quantitat donada, per molt petita que aquesta es pugui suposar, sense, tanmateix, que la quantitat que s'apropa, arribi mai a sobrepassar la quantitat a la qual s'aproxima; de manera que la diferència d'una quantitat d'aquesta mena al seu límit, és absolutament inassignable... (D'ALEMBERT (1765) IX, p. 542; i (1784) II, pp. 309-310)

Per a D'Alembert el límit representa la base del càlcul diferencial i del mètode de fluxions. S'arriba a les mateixes conclusions fent servir el càlcul diferencial, que combinant l'ús de límits amb el mètode d'exhaustió. La seva quantitat variable l'entén com Robins, no assolint mai el límit. De fet, una corba és el *límit* dels polígons inscrits i circumscrits. D'Alembert refusa la idea d'última raó (en el sentit de Newton[15] i de Leibniz). La metafísica del càlcul consisteix simplement a trobar els límits de la raó de diferències finites de dues variables, incloses en una equació. D'Alembert insisteix en el fet que es tracta del límit de la relació entre dues quantitats finites, i no de la fracció de quantitats infinitament petites. L'infinitesimal com a tal no existeix, només és un escurçament per evitar el circumloqui necessari per expressar el concepte de límit.[16] Tanmateix, com que aquesta teoria era ambigua i fosca a l'època, en els llibres de text sobre càlcul al Continent seguien apareixent les explicacions de Leibniz.[17] Però fins i tot els defensors de la teoria de D'Alembert no podien evitar utilitzar els infinitament petits i, fins i tot, confondre raó última amb raó de quantitats últimes.

Lagrange: la funció derivada[18]

Un altre intent de fonamentació lògica del càlcul va ser el dut a terme per Joseph Louis Lagrange (1736-1813). En els seus començaments, Lagrange era defensor de la teoria de la compensació d'errors. Però el 1797 publicà la *Théorie des fonctions analytiques*. La seva nova teoria es basava en el fet que tota funció era desenvolupable en sèrie de

---

[14] Les fonts en què m'he basat són D'ALEMBERT (1765) i (1784); BOYER (1949); SCHUBRING (2003).

[15] *Fluxió* és la velocitat amb què una quantitat és descrita. Newton estudia la relació entre velocitats. Però per a D'Alembert la velocitat (el moviment) és una idea estranya, no necessària. No sabem exactament què és la velocitat d'un cos en cada instant. Segons D'Alembert la relació entre *ds* i *dt* només queda clara en funció de límits.

[16] De manera anàloga l'infinitament gran no existeix com tal, s'ha d'interpretar en termes de límits. No hi ha necessitat de suposar l'existència de fet de l'infinit en geometria.

[17] Entre 1754 i 1784 al Continent apareixen 28 publicacions sobre el càlcul. D'aquestes, 15 fan servir la terminologia leibniziana; 6 utilitzen la teoria de límits; 4 estan escrites en termes del zeros d'Euler i 2 en termes de fluxions; i una correspon a Lagrange. Vegeu BOYER (1949), p. 250.

potències, que sempre es podia aplicar el teorema de Taylor. Els coeficients de la sèrie es corresponien amb allò que ell anomenà *funcions derivades*. Lagrange creia que la seva teoria era vàlida pel fet que no havia de recórrer ni als infinitesimals ni als límits per trobar aquestes funcions. Les funcions derivades només obeïen a operacions algèbriques. D'altra banda, com a punt de vista filosòfic la seva teoria va ser reconeguda, però no a nivell pràctic, on es continuaven aplicant els infinitesimals, donat que s'adaptaven millor a la naturalesa dels problemes proposats. Tot i així, de Lagrange s'adoptà el seu objecte principal, la funció derivada, i la seva notació (f'_x).

Donada la manca d'una teoria clara que justifiqués el càlcul, el 1784 l'Acadèmia de Berlín (de la qual Lagrange n'era president) va convocar un concurs per premiar la millor teoria. El guanyador va ser Simon L'Huilier (1750-1840), la memòria del qual (1786) es basava en la teoria dels límits de D'Alembert.[19] Entenia $\frac{dy}{dx}$ com el límit del quocient de les diferències, o quocient incremental, que havia de ser llegit com un símbol únic, tot i conservar aquesta notació. Inspirat per la llei de continuïtat de Leibniz, afirmava que si una quantitat variable a cada pas tenia una certa propietat, el seu límit també. La seva variable sempre era més gran o més petita que el seu límit, no podia oscil·lar. La seva memòria va tenir poc ressò. Va ser més llegida la memòria que havia presentat Lazare Carnot (1753-1823) al mateix concurs. En aquesta memòria, Carnot afirmava que tots els intents de fonamentació (límits, infinitesimals, sèries de potències) eren simplificacions del mètode d'exhaustió. Però feia bàsic el sistema infinitesimal i concloïa que es basava en la "compensació d'errors". El seu punt de vista era més algèbric que geomètric: els diferencials eren objectes obeint a determinades lleis, més que no pas increments geomètrics al llarg d'una recta. Altres intents per donar base lògica al càlcul (Condorcet, Arbogast, Servois...) es basaren en l'ús de sèries, sense tenir-ne en compte la convergència.

***Lacroix i el seu* Traité**[20]

Sylvester-François Lacroix (1765-1843) destacà com a autor de llibres de text. En el seu *Traité du calcul différentiel et du calcul intégrale* (1797-1800) Lacroix relaciona les

---

[18] Vegeu BOYER (1949); GRATTAN-GUINNESS (1980) i (1990).
[19] De fet, L'Huilier introduí la notació *lim*.

funcions derivades de Lagrange amb el coeficient diferencial d'Euler. Al mateix temps, identifica el coeficient diferencial amb el *límit* de la relació d'increments simultanis d'una funció i de la variable de la qual depèn, el límit entès en el sentit de D'Alembert. Lacroix no aportà res de substancialment nou a la qüestió dels fonaments del càlcul. Tanmateix la seva interpretació del coeficient diferencial en termes de límits va introduir una novetat. D'altra banda, Laplace lloà l'enciclopedisme de Lacroix, ja que creia que la metafísica del càlcul consistia precisament en el que tenien de comú totes les teories elaborades per fonamentar el càlcul. A través dels seus textos i d'altres semblants, es va anar popularitzant la doctrina dels límits. A més a més, gràcies a aquests textos la notació leibniziana i els límits van substituir les fluxions a Gran Bretanya. Així, el 1802 Lacroix publica *Traité élémentaire de calcul différentiel et de calcul intégral*, que serà traduït a l'anglès el 1816.

1.2. EL MÈTODE DE FLUXIONS[21]

El càlcul newtonià

Es pot dir que Sir Isaac Newton (1643-1727) tingué els mateixos antecedents matemàtics que Leibniz: Cavalieri, Gregory de Saint Vincent, Roberval, Pascal, Descartes, Sluse, Hudde... Newton rebé especial influència del seu mestre Isaac Barrow, pel que respecta als indivisibles i a les quantitats que flueixen, i també de John Wallis i de James Gregory, quant a l'ús de sèries. Entre 1660 i 1690 Newton desenvolupà el seu càlcul. De manera que les matemàtiques a Gran Bretanya durant el segle XVIII es centraren en el debat sobre la fonamentació del càlcul fluxional i les diferents interpretacions del treball matemàtic de Newton.

El 1669 Newton ja havia escrit *De analysi per aequationes numero terminorum infinitas*, que no es publicà fins el 1711. Representa el primer document sobre el seu càlcul. Aquí els elements bàsics són les quantitats infinitament petites que provenen de magnituds finites i que són com els diferencials de Leibniz. El moment és un increment

[20] Vegeu BOYER (1949); SCHUBRING (1987); GRATTAN-GUINNESS (1980) i (1990).
[21] Les fonts en què m'he basat per elaborar aquest segon punt del context històric són BOYER (1949); GUICCIARDINI (1989).

infinitesimal: de l’abscissa x passa a ser $x+o$, el moment d’una línia és un punt, el moment d’un àrea és una línia, ... Newton aplica el mètode directament i inversa, doncs relaciona el càlcul de l’àrea amb la raó de canvi de l’àrea. L’ús de sèries infinites fa que el càlcul sigui un algorisme universal.

El *Methodus fluxionum et serierum infinitarum* és del 1671. No publicat fins el 1736, és on apareixen la seva notació i conceptes característics. El moviment continu genera les quantitats variables o fluents. La seva raó de generació (o velocitat) són les fluxions. El problema fonamental consisteix a, donada la relació entre quantitats, trobar la relació de les seves fluxions, i viceversa. Els moments ($\dot{x}o$) són les components infinitament petites generades pel moviment (velocitat $\dot{x}$) en un interval de temps infinitament petit (o), tot i que ell formalment no considera el temps. Utilitzant el teorema del binomi, a la quantitat fluent quan x passa a ser $x+\dot{x}o$ se li resta la quantitat fluent en x, després el resultat de la resta es divideix per o i, finalment, com que o és infinitament petit, és zero comparat amb la resta.

El 1676 Newton va compondre *De quadratura curvarum*, que apareix publicat el 1704. Aquí les quantitats no esta formades per moments ni per parts infinitament petites, sinó que s’originen pel moviment continu. L’element bàsic és la *raó primera i última* (primera, o dels increments naixents; i última, o dels increments evanescents), que és el límit de la raó de fluxions (quan o s’apropa a zero). Es correspon amb l’estat final d’un procés cinemàtic.

Però la primera publicació del càlcul de Newton oficialment es troba als *Principia mathematica* (1687). L’enfocament del primer llibre és semblant al de *De quadratura curvarum*. Tanmateix, encara depèn dels infinitesimals i està escrit a l’antiga manera geomètrica sintètica, amb poques referències a les fluxions. El segon llibre exposa els fonaments d’aquest mètode general. Tot i que apareix l’ús de sèries i d’alguna manipulació algèbrica, no es presenta l’algoritme de les fluxions de manera adient i la naturalesa dels moments queda poc clara, una de les raons de la confusió posterior entre fluxions, infinitesimals, moments i diferencials leibnizians.

El primer període: difusió i desenvolupament (1700-35)

A començaments del segle XVIII els únics que podrien haver conegut el càlcul de Newton eren els seus correspondents: Collins, Oldenburg, Wallis, ... També circulaven algunes còpies manuscrites. Alguns dels primers en intentar sistematitzar la nova informació foren Cheyne (1703), Hayes (1704) i Ditton (1706). La controvèrsia sobre la prioritat en la invenció del càlcul[22] li donà popularitat i provocà la publicació dels treballs matemàtics de Newton. Tanmateix, els intents d'exposició del càlcul eren poc entenedors en general. Entre d'altres, els termes "fluxió", "moment", "diferencial" es confonien. A les universitats hi ha poc evidència que el càlcul fluxional hi fos ensenyat.

La recerca dels newtonians es centrava més en la geometria de corbes d'ordre superior i en les sèries que no pas en les fluxions, doncs es considerava que, amb Newton, el càlcul fluxional ja havia assolit la perfecció. En el segle XVIII el progrés de les matemàtiques i de la mecànica resulta de les crítiques i desenvolupament de les idees i problemes dels *Principia*. Brook Taylor (1685-1731) i James Stirling (1692-1770) feien recerca sobre interpolació i sèries, i consideraven el càlcul de fluxions com a cas límit del càlcul de diferències finites.

La controvèrsia sobre els fonaments (1734-42)

El 1734 George Berkeley (1685-1753) publica *The Analyst*, el seu atac al nou càlcul.[23] Berkeley no nega la utilitat del nou càlcul ni la validesa dels resultats obtinguts. Les crítiques de Berkeley són de caire ontològic i de caire lògic. En el primer cas, ataca els febles fonaments de la nova matèria (definicions poc satisfactòries de termes com les quantitats infinitament petites o els diferencials, la manca de realitat física de la velocitat, etc.). D'altra banda, Berkeley critica la "compensació d'errors" en les demostracions, que porta Newton a trobar resultats vàlids. La "compensació d'errors" consisteix a considerar primer que x té un increment i després, per arribar al resultat, a fer que l'increment s'esvaeixi.

---

[22] Per a la qüestió de la controvèrsia sobre la prioritat, vegeu NEWTON (1714-1715); HOFMANN (1972); GUICCIARDINI (1989).

[23] Per a la qüestió de l'atac de Berkeley m'he basat en BOYER (1949); BLAY (1986); GUICCIARDINI (1989).

Per defensar Newton davant de Berkeley, James Jurin publicà una sèrie de pamflets però els seus arguments eren febles. Més endavant entrà Benjamin Robins en la discussió i començà un debat entre Jurin i Robins a l'entorn del concepte de límit. Jurin considerava el límit d'un procés cinemàtic, que finalment era assolit. Robins treballava amb el mètode d'exhaustió i no amb un procés cinemàtic, i el límit no s'assolia mai.

A partir d'aquest debat, els matemàtics de la Gran Bretanya rellegeixen Newton. Colin Maclaurin (1698-1746) tingué un rol important a l'hora de consolidar el càlcul de fluxions. El seu *Treatise of Fluxions* (1742) és un intent de fonamentar el càlcul sobre la geometria cinemàtica. En particular defineix la fluxió com la *velocitat instantània*, mesurada no per l'espai descrit de fet, sinó pel que hauria descrit si el moviment hagués seguit de manera uniforme a partir d'aquest terme. Fa servir un concepte intuïtiu per donar base ontològica al càlcul. El primer llibre presenta el càlcul com una generalització del mètode d'Arquimedes. El segon llibre exposa el poder algorísmic del càlcul.

El període posterior a la controvèrsia

El debat Jurin-Robins provocà l'aparició de molts llibres de text sobre càlcul fluxional. De fet, gairebé tots els llibres de text publicats sobre el nou càlcul pertanyen a l'època 1736-1758: Hodgson (1736), Muller (1736), Newton (1736), Simpson (1737, 1750), Maclaurin (1742), Emerson (1743), Saunderson (1756)... Mentre que després de 1758 només es publiquen tres nous tractats fluxionals.[24]

En aquesta època es dóna forma a l'ensenyament i a la imatge del càlcul. Les matemàtiques de Newton són reinterpretades i sistematitzades. Sorgeix una escola fluxional que basa l'ensenyament sobre un conjunt homogeni de llibres de text. Guicciardini creu que aquests tractats no introdueixen el càlcul com una teoria sistemàtica o una disciplina purament matemàtica. A excepció del tractat de Maclaurin, els textos fluxionals d'aquest període exposaven com aplicar a la geometria i a la mecànica una sèrie de regles vistes en una primera part. Els llibres de text de càlcul fluxional eren analítics en el sentit que presentaven la potència algorísmica del càlcul

[24] Vegeu GUICCIARDINI (1989), p. 56.

però es fonamentava sobre conceptes cinemàtics.[25] S'amplia el ventall d'aplicacions del càlcul de fluxions a la mecànica i a l'astronomia física, inspirades per problemes que apareixen als *Principia*. En aquest sentit cal destacar els textos de Colin Maclaurin i Thomas Simpson. Al contrari del primer període, aquí els autors de llibres de text estan relacionats amb les universitats i les acadèmies militars (per exemle, Maclaurin amb la universitat d'Edimburg i Simpson amb l'acadèmia militar de Woolwich).[26]

A finals del segle XVIII i principis del XIX tenen lloc una sèrie d'intents per reformar el càlcul,[27] a partir de la incorporació de mètodes analítics i de la importació de treballs del Continent (especialment, de França). Per exemple, a les universitats d'Escòcia i a Cambridge hi ha un interès per l'àlgebra i per l'adopció del programa de Lagrange. Les acadèmies militars com Woolwich, amb la publicació de llibres de text i assaigs, van contribuir a millorar el coneixement de la ciència continental a Gran Bretanya.

1.3. EL CONTEXT INSTITUCIONAL

En aquesta secció reviso de manera breu i a grans trets el context institucional de l'ensenyament de les matemàtiques en el segle XVIII a França, Alemanya, Itàlia i Gran Bretanya.[28]

França

A la França pre-revolucionària, l'ensenyament universitari de les matemàtiques pràcticament es limitava als c*ollèges*, dirigits per ordes religioses, com la dels jesuïtes o la de l'Oratoire. En els *collèges* les matemàtiques tenien un rol més aviat marginal. D'altra banda, al voltant del 1750 s'establí una xarxa d'escoles d'enginyeria, de gran

---

[25] No obstant, vegeu l'apartat dedicat al grup dels *fluxionistes analítics*, com Thomas Simpson o John Landen, a GUICCIARDINI (1989), pp. 82-91. Aquest grup intentà importar els mètodes continentals i treballar fora del context geomètric-cinemàtic.

[26] Tot i que, segons Guicciardini, era poc probable que el càlcul fluxional fos ensenyat a les acadèmies militars i potser se les esmentava per donar prestigi als llibres publicats. D'altra banda, es produí un increment de les societats matemàtiques i una especialització científica-matemàtica a les *coffee-houses*. Vegeu GUICCIARDINI (1989), pp. 62-67.

[27] Vegeu GUICCIARDINI (1989), pp. 95-138.

[28] Per elaborar aquesta revisió m'he basat fonamentalment en BOTAZZINI (1994); GRATTAN-GUINNESS (1994*b*) i (1994*c*); SCHUBRING (1994), (1996) i (2002).

prestigi. Aquestes escoles podien ser militars, com la de Mézières, i civils, com l'École des Ponts et Chaussées.

Després de la Revolució, es fundà l'École Polytechnique (1794), que preparava els enginyers militars i civils i que dugué a terme la publicació de *livres élémentaires*. La publicació d'aquests llibres s'emmarca dins del projecte d'elementarització, que consistia a recollir, reestructurar i fer accessible tots els coneixements de totes les disciplines. El 1795 es fundà l'École Normale, que fou un centre de formació dels futurs professors d'escola, sense gaire èxit. Durant aquesta època es publicaren gran quantitat de llibres, uns adreçats als aspirants i estudiants de l'École Polytechnique i l'École Normale, i uns altres a un públic erudit en general.

A França destaca la visió físico-matemàtica de les matemàtiques, en detriment d'una teorització abstracta. Aquesta visió és palesa especialment en les escoles militars.

El sistema d'ensenyament francès presentava alguns elements negatius. D'una banda, el context institucional es caracteritzava per una excessiva centralització de la burocràcia. Per exemple, els llibres de text eren prescrits centralment per una comissió, per garantir l'aplicació uniforme del mètode que es considerava millor.[29] D'altra banda, hi havia la tendència de no llegir llibres de matemàtiques estrangers. De fet, fins a finals del segle XVIII no es varen traduir llibres del francès a l'alemany ni al revés. Després, principalment només aparegueren traduccions del francès a l'alemany, però no en l'altre sentit.

Alemanya

Al contrari que França, el sistema educacional alemany no era centralitzat. Cada regió es regia pel seu propi sistema educacional. A més, la vida científica es concentrà en les universitats. No hi havia un sistema d'escoles militars significant. El sistema educacional de Prússia, després de les reformes de 1806-1810, va constituir un model remarcable. Al sistema prussià, els professors universitaris de matemàtiques assumien un paper d'investigador, amb contribucions importants a problemes de fonamentació. Destacaren les universitats reformistes de Göttingen (1737) i de Halle (1694).

Les universitats estaven orientades cap a l'especialització i la recerca i defensaven una visió epistemològica de les matemàtiques. S'insistia en reflexions sobre els fonaments de la ciència. Així, es potenciava la recerca en matemàtiques pures (especialment en la branca d'àlgebra i anàlisi) i s'abandonà el camp de les aplicades. Aquest procés de rigorització es conegué com l'aritmetització de l'anàlisi. Aquest desenvolupament esdevingué gràcies a dos elements del context universitari. En primer lloc, les escoles (amb professors formats a la universitat, s'emmarcaven en un context cultural que valorava l'entrenament mental. Això explicaria la cerca de la claredat en els fonaments, l'ordre lògic i la puresa dels mètodes. En segon lloc, cal dir que les matemàtiques universitàries formaven part del context de les facultat de filosofia, que potenciava la independència de cada disciplina, en relació amb les altres.[30]

A la resta d'estats alemanys, el nivell de matemàtiques era elemental i enciclopèdic. Les matemàtiques es consideraven una disciplina auxiliar, amb tendència cap a una metodologia geomètrica.

Itàlia

A Itàlia, arran de la independència (1861-1866), es produeix un rebuig de la geometria de Legendre (que es considerava "barrejada" amb l'àlgebra i l'aritmètica), amb la consegüent adhesió a una geometria pura euclidiana. Aquesta adhesió era conseqüència de la influència del treball en matemàtiques de Galileu, encara dominant a finals del segle XVII. En primer lloc això és degut a factors polítics (de caire nacionalista) i en segon lloc, a un intent d'assolir una integració òptima de les matemàtiques en el marc de l'ensenyament dels valors clàssics.

La introducció del càlcul a les universitats italianes fou tardà. Tanmateix, el càlcul de Leibniz fou estudiat per individus i grups (com Jacopo Riccati i Giulio Fagnano). La revista *Giornale dei letterati in Italia*, amb les seves publicacions, ajudà a estendre els mètodes de Leibniz i Newton. En aquest sentit, les acadèmies i les societats eren més actives com a centres de recerca en matemàtiques que no pas les universitats. Les

---

[29] Vegeu SCHUBRING (1987), p. 42.
[30] Vegeu SCHUBRING (1996), p. 373.

escoles militars tenien també una millor educació matemàtica que les universitats (per exemple, Lagrange fou professor a la Reggie Scuole di Artiglieria de Torí).

A finals del segle XVIII, però, comencen a observar-se canvis. Les universitats de Pavia, Pisa i Modena milloren el seu nivell de matemàtiques, quan matemàtics prominents com Mascheroni, Paoli i Ruffini hi comencen a ensenyar.

Després de l'era napoleònica, es tornà a la divisió política prèvia. No obstant això, encara influència de la ciència francesa en la italiana. Molts dels millors estudiants italians marxaven a estudiar a l'École Polytechnique de París. Un altre cop Lagrange serveix per exemplificar aquest fet: originari d'Itàlia, Lagrange és una de les figures centrals de les matemàtiques franceses.

Gran Bretanya

El càlcul a Gran Bretanya es caracteritza per la seva adhesió a la notació i a l'esperit de Newton, amb la consegüent manca de traduccions de llibres de càlcul del Continent a l'anglès, i la inexistència de cap influència del Continent en general, durant el període analitzat.

L'ensenyament de les matemàtiques quedava exclòs de les escoles públiques. Només van ser-hi acceptades al voltant de 1830. Però hi dominava una adherència estricta a Euclides i les matemàtiques eren considerades només com una forma d'"entrenament mental", en la línia dels model clàssics.

En el context universitari, en general, tant la instrucció com la recerca no gaudien d'un bon nivell. A Cambridge, el sistema de selecció d'estudiant, els anomenats "Tripos", contenien qüestions matemàtiques. Aquestes, però, no reflectien un gran coneixement matemàtic. En aquesta època a Oxford la recerca en matemàtiques i el seu ensenyament caigueren en la mediocritat.[31]

Al voltant de la segona dècada del segle XVIII, sorgeix a Londres un tipus professors itinerants, els *philomaths*, que ensenyaven a les *coffe-houses*. Els seus assoliments eren modestos, tot i comptar amb gran nombre de publicacions. D'entre ells, destacà Thomas Simpson.[32]

En producció de matemàtics, Escòcia va ser més lenta que Anglaterra, amb algunes figures remarcables com John Napier, Colin Maclaurin o Robert Simson. Però el nivell d'instrucció a les universitats de St. Andrews, d'Aberdeen, d'Edimburg o de Glasgow no era superior al de les universitats angleses.

Finalment, a principis del segle XIX els matemàtics britànics començaren a entrar en contacte amb les matemàtiques continentals. Van aprendre el càlcul diferencial o la versió de caire algèbric de Lagrange, per després utilitzar-lo en aplicacions. Aparegueren nous llibres de text de matemàtiques pures i aplicades, i, per exemple, la Royal Society of Edinburgh (1783) publicà molts articles de recerca.

---

[31] Vegeu GRATTAN-GUINNESS (1994), p. 1485.
[32] Vegeu també GUICCIARDINI (1989), pp. 65-67.

2. ANÀLISI DE LA DISCUSSIÓ L'HÔPITAL-BERNOULLI

2.1. INTRODUCCIÓ[1]

Guillaume François Antoine de L'Hôpital[2] (1661-1704), Marquès de Sainte-Mesme, Comte d'Entremont, Senyor d'Ouques, de seguida fou atret pel nou càlcul de Leibniz. L'any 1688 L'Hôpital aconsegueix l'article de Leibniz de 1684. Sobre el mateix text pren notes per presentar amb detall i demostrar tota la teoria. Els seus amics (entre ells, Malebranche) l'insten a publicar-lo. Malebranche (que té el llibre sobre seccions còniques que ha escrit L'Hôpital) demana permís L'Hôpital per publicar-lo, adjuntant al final les seves notes sobre el càlcul diferencial. L'*abbé* Catelan, defensor de la continuació del mètode de Descartes, ataca el càlcul de Leibniz. L'Hôpital, en una carta al *Journal des Sçavans* (sota el pseudònim G***) acusa Catelan de cometre errors i de no entendre el càlcul de Leibniz. Comença una disputa entre ambdós. El 1691, el matemàtic i físic suís Johann Bernoulli (1667-1748) visita París. Malebranche li presenta el marquès de L'Hôpital. Per tal que Johann li ensenyi la nova matèria, el marqués el convida primer a la seva casa a París (de finals de 1691 a finals de juliol de 1692) i després a la seva propietat d'Ouques (d'agost a octubre de 1692). Així, durant alguns mesos, entre 1691 i 1692, Bernoulli ensenyà la nova matèria el marquès.

L'Hôpital entra a formar part de l'*élite* matemàtica i esdevé un gran exponent del càlcul a França, no només per la seva tasca científica, sinó també pel contacte que manté amb Leibniz, Bernoulli i Huygens. Serà membre de l'Académie des Sciences des de 1690 fins a la seva mort. Montucla i Bossut consideren que L'Hôpital fou un dels més grans geòmetres de l'època.[3] De fet, Montucla afirma que els únics coneixedors del nou càlcul al Continent eren Leibniz, Jakob i Johann Bernoulli, Varignon i el Marquès de L'Hôpital.

El tractat de L'Hôpital sobre seccions còniques, el *Traité des sections coniques*, no serà publicat fins el 1707, tres anys després de la mort de l'autor. En canvi, el 1696 es

[1] La introducció d'aquest capítol ha estat elaborada a partir de la informació recollida a: CANTOR (1880-1908) III, pp. 233-261; ENESTRÖM (1894); BOYER (1946); SPIESS (1955); COOLIDGE (1963) capítol 12; STRUIK (1963).

[2] El marquès normalment escrivia el seu nom Lhospital o LHospital. Els seus contemporanis l'escrivien L'Hospital, l'Hospital, l'Hôpital. Podem trobar el seu nom escrit L'Hospital. La família també l'escrivia Lhospital i, més endavant, L'Hôpital. Aquesta darrera forma serà la que utilizaré. Vegeu SPIESS (1955), p. 124, nota 2; COOLIDGE (1963), p. 147.

[3] Vegeu MONTUCLA (1758) II, p. 396; BOSSUT (1802) II, p. 156 de la traducció alemanya.

publica el seu tractat sobre càlcul diferencial, l'*Analyse des infiniment petits pour l'intelligence des lignes courbes*, que estarà de moda durant el segle XVIII. Tot i no discutir la naturalesa del càlcul, L'Hôpital donà una gran embranzida a la nova matèria, popularitzant-la tant mitjançant la seva influència al *Journal des Sçavans* com a través de les diverses edicions del seu llibre. Montucla i Bossut lloen el llibre de L'Hôpital, destacant que l'autor hagi contribuït a acabar amb el secretisme que envoltava el nou càlcul.[4] A París tornà a editar-se diversos cops al llarg del segle XVIII. També hi ha una edició a Avignon l'any 1768. Stone va traduir l'*Analyse* a l'anglès (1730). Per respecte a Newton, però, el va rescriure l'original en termes fluxionals, li afegí nou material i, a més, el va completar amb un apèndix sobre càlcul integral, que fou traduït al francès i publicat el 1735. L'*Analyse* també fou traduït al llatí a Viena (1764, 1790). A més se'n publicaren els comentaris següents:

- *Commentaire sur l'Analyse des infiniment petits* (París, 1721), de Jean Pierre Crousaz (1663-1750),
- *Éclaircissemens sur l'Analyse des infiniment petits* (París, 1725), de Pierre Varignon (1654-1722),
- *Analyse des infiniment petits, suivie d'un nouveau commentaire pour l'intelligence des endroits les plus difficiles de cet ouvrage* (Avignon, 1768), d'Aimé Henri Paulian (1722-1802), que apareix en una nova edició revisada i augmentada per Louis Lefèvre-Gineau (París, 1781).[5]

La publicació de l'*Analyse* és l'origen del debat Rolle-Varignon en el si de l'Académie des Sciences de París.[6]

El 1698 Johann Bernoulli escriu Leibniz queixant-se que el marquès ha plagiat les seves lliçons de càlcul. El 1704, després de la mort de L'Hôpital, Johann també escriu Brook Taylor, lamentant aquest fet. Aleshores es fa públic que la regla que apareix a l'article 163, secció IX, de l'*Analyse* (coneguda a partir de llavors com a "regla de L'Hôpital") en realitat l'ha descoberta ell. De fet, L'Hôpital en cap moment no afirmà que la regla

[4] Vegeu MONTUCLA (1758) II, p. 397; BOSSUT (1802) II, pp. 162-163 de la traducció alemanya.

[5] Paulian justifica la publicació del seu comentari, tot basant-se en els errors que apareixen en el comentari de Crousaz i en l'elevat nivell del de Varignon. Segons Paulian, Varignon només aclareix allò que ell mateix no ha entès, però els seus comentaris no serveixen per a un principiant. Per això Paulian es dirigeix als principiants (PAULIAN (1768), prefaci). Montucla considera que el comentari de Paulian només és bo per guiar principiants febles (MONTUCLA (1758) II, p. 398). De fet, a més de Montucla, només tinc constància d'una altra referència al comentari de Paulian per part de Cantor (CANTOR (1880-1908) IV, p. 26, nota 9).

[6] Vegeu l'apartat *El debat Rolle-Varignon a l'Académie des Sciences* al capítol 1.

fos seva. Però quan Saurin adjudicà l'autoria a Leibniz, Johann la reclamà com a pròpia. El 1742 Johann publica les seves lliçons sobre càlcul integral. En una nota afirma que el contingut de les seves lliçons de càlcul diferencial apareix a l'*Analyse* de L'Hôpital, el qual les prengué en prèstec. Però tant L'Hôpital com Malebranche (que els havia presentat) ja eren morts.

Durant molt de temps es tingueren dubtes de qui era realment l'autor del llibre. L'Hôpital, en el prefaci, deixa oberta la porta a les reivindicacions que vulguin fer Leibniz i els germans Bernoulli. El 1922 Paul Schafheitlin edità las *Lectiones de calculo differentialium* de Johann Bernoulli, és a dir, les lliçons de càlcul diferencial que oferí L'Hôpital entre 1691 i 1692. Comparant ambdós textos s'observen massa coincidències. La qüestió de l'origen de les fonts es resolgué quan, el 1955, Otto Spiess publicà la correspondència de Johann Bernoulli. Quan Bernoulli abandona París i torna a Basilea a finals de 1692, les lliçons continuen per correu. De fet, sembla que les suposades "contribucions originals" de L'Hôpital eren majoritàriament problemes en què havien treballat junts Johann Bernoulli i L'Hôpital. En una carta amb data el 17 de març de 1694 L'Hôpital ofereix Johann una renda anual de tres-centes lliures fins la seva mort, quantitat que tenia intenció d'augmentar.[7] A canvi, Johann havia de comunicar-li a ell, i només a ell, les seves descobertes. En particular, li prega que no els hi comuniqui a Varignon. Mentre duraren les classes a París, les lliçons de Johann eren copiades pel seu amic Stähelin. Més endavant, durant la seva estada a Oucques, Johann no compta amb l'ajut del seu amic i no fa còpia de les lliçons corresponents a aquesta estada. Stähelin lliura les seves còpies de les lliçons de Johann al pare Reyneau, qui les passa a Montmort. El pare Bizance també en tenia una còpia. Varignon volia aconseguir-ne una còpia. Aquesta és la raó per la qual en la seva carta a Johann, L'Hôpital li demana que, en particular, no comuniqui les seves descobertes a Varignon, que era un bon amic d'ambdós. No s'ha trobat la resposta de Johann a aquesta carta, però en una altra amb data el 22 de juliol del mateix any es dedueix que Bernoulli ha acceptat. En aquesta mateixa carta Johann exposa la "regla de L'Hôpital" (que L'Hôpital presenta a l'article 163, secció IX, de l'*Analyse* el 1696 amb formulació i exemples molt similars). Degut a la manca de tractats elementals, L'Hôpital expressa a Bernoulli en una carta[8] la intenció

[7] De fet, aquest any L'Hôpital intercedeix perquè Johann aconsegueixi un lloc de professor a la universitat de Groningen.

[8] Vegeu BERNOULLI (1955), carta nº 56 (agost, 1695).

de publicar un text sobre seccions còniques (encoratjat per Malebranche) per més endavant afegir-li un petit tractat sobre càlcul diferencial, on reconeixerà els mèrits de Johann. Vol que sigui la introducció de *De scientia infiniti*, tractat sobre el càlcul integral que Leibniz tenia intenció d'escriure.[9] A la seva resposta,[10] Johann agraeix L'Hôpital que vulgui adjuntar el seu càlcul logarítmic al seu text. L'Hôpital envia una còpia de l'*Analyse* a Johann el 1697, el qual agraeix que, al prefaci, es reconeguin les seves aportacions i promet tornar el compliment en la seva propera publicació. Bernoulli lloa la distribució sòlida de les proposicions i l'exposició intel·ligible de l'*Analyse*. Només li retreu que al prefaci L'Hôpital també reconegui les aportacions de Jakob Bernoulli, reconeixement exagerat, segons el parer de Johann.[11]

No tenint constància que existís cap altre estudi monogràfic dedicat a la comparació minuciosa i exhaustiva de l'*Analyse* de L'Hôpital i de les *Lectiones* de Johann Bernoulli, el Dr. Josep Pla de la Universidat de Barcelona em proposà analitzar i comparar el contingut i la forma d'ambós. Els resultats de l'estudi quedaren recollits en un treball de recerca (no publicat) i en un article publicat a la revista *Cronos*.[12]

L'*Analyse des infiniment petits pour l'intelligence des lignes courbes* consta de deu seccions, de les quals només les quatre primeres es corresponen amb les *Lectiones* de Bernoulli. Tanmateix, alguns problemes i resultats de les sis restants es poden trobar a la correspondència entre Johann i L'Hôpital.[13] La secció I dóna les definicions, els axiomes i les regles bàsiques de la diferenciació. La secció II aplica aquestes regles per calcular la tangent a una corba en un punt. La secció III tracta els màxims i mínims. La secció IV tracta els punts d'inflexió i les cúspides (o punts de retrocés). A la secció V s'analitzen les evolutes i evolvents i es defineix el "radi de curvatura d'una evoluta". És la secció més llarga. Les seccions VI i VII tracten les càustiques per reflexió i refracció.[14] La secció VIII

---

[9] Donat que Leibniz no es decidia a fer-ho, L'Hôpital suggerí Johann Bernoulli que publiqués un text sobre càlcul integral. Aquest no aparegué fins el 1742, inclós dins el segon volum de les seves obres completes. De fet, són les lliçons de càlcul integral que donà a L'Hôpital. Segons Montucla aquesta mancança fou coberta, en part, el 1707 pel *Traité de constructione aequationum differentialium primi gradus* de G. Manfredi. Vegeu MONTUCLA (1758), p. 398.

[10] Vegeu BERNOULLI (1955), carta nº 59 (gener, 1696).

[11] Vegeu BERNOULLI (1955), carta nº 71 (novembre, 1697).

[12] Vegeu BLANCO (1999) i (2001).

[13] Vegeu SPIESS (1955).

[14] L'estudi de les càustiques fou tòpic tradicional del càlcul de finals del XVII. Precisament foren L'Hôpital i Bernoulli, junt amb Tschirnhaus, els que desenvoluparen la teoria de les càustiques. Vegeu BOYER (1946), p. 165.

estudia el tema de les envolvents a una família de rectes. És aquí on introdueix el mètode de Leibniz de diferenciació respecte d'un paràmetre. La secció IX està dedicada a la resolució de diversos problemes, fent servir els mètodes precedents. De fet, tracta el que actualment es coneix com a indeterminacions. Conté la "regla de L'Hôpital". Finalment, a la secció X es compara l'elegància del nou càlcul amb els mètodes no tan àgils de Descartes i Hudde per trobar extrems.

A continuació exposo la comparació de les quatre primeres seccions de l'*Analyse* del Marquès de L'Hôpital amb les *Lectiones* de Johann Bernoulli. Així mateix analitzaré alguns resultats de l'*Analyse* que es troben a la correspondència entre ambdós. Les diferències més notables que he trobat entre els dos autors són (1) l'enfocament dels problemes, (2) l'elecció de coordenades, (3) el tractament de les corbes algèbriques i transcendents, (4) la intenció didàctica i (5) la notació. En general, la notació original ha estat transcrita en la seva forma actual per facilitar la lectura. Per designar l'arc, el triangle i l'angle he utilitzat els símbols arc( ), Δ, $\angle$, respectivament, mentre que Bernoulli i L'Hôpital els indiquen amb text, sense cap notació especial. A l'hora de treballar amb diferencials de segon ordre, he mantingut la notació utilitzada per ambdós autors, *ddy*.

2.2. SECCIÓ I: BASE DEL CÀLCUL DE DIFERÈNCIES

A la primera secció d'ambdós textos ja es detecten diferències quant a la intenció didáctica dels autors. Fet obvi, donat que les lliçons de Johann eren apunts per a classes particulars, mentre que el llibre de L'Hôpital anava dirigit a un públic més ampli. En el text de L'Hôpital apareixen més definicions i axiomes fonamentals que no pas en el de Johann. La sección I de l'*Analyse* s'obre amb les definicions següents (que no es troben en el text de Johann Bernoulli):

> Definició I: S'anomenen quantitats variables aquelles que augmenten o disminueixen contínuament; i al contrari quantitats constants aquelles que romanen sempre iguals mentre les altres canvien. Així en una paràbola les abscisses i les ordenades són quantitats variables, mentre que el paràmetre és una quantitat constant. (L'HÔPITAL (1696), p. 2)
> Definició II: La porció infinitament petita en què una quantitat variable augmenta o disminueix contínuament, s'anomena la diferència (…) (L'HÔPITAL (1696), p. 3)

A continuació, L'Hôpital enuncia els dos postulats següents, dels quals afirma que no necessiten demostració:

> 1. Es poden considerar iguals dues quantitats que difereixen en una quantitat infinitament petita. Dit d'una altra manera, si una quantitat l'augmentem o la disminuïm en una quantitat infinitament menor que ella, roman igual. Així, podrem prendre *AP* igual a *Ap*, *PM* igual a *pm*, l'espai *Apm* igual a l'espai *APM*, l'espai *MPpm* igual al rectangle *MPpR*, el sector *AMm* igual al triangle ΔAMS, etc.

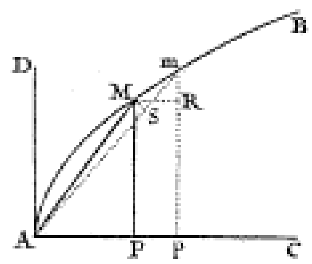


Figura 1

> 2. Una corba pot ser considerada com un polígon d'infinits costats. Els angles entre aquests costats donen la curvatura de la corba. Per tant, la porció de corba *Mm* infinitament petita es pot considerar per aquesta raó com un segment rectilini i, així, el triangle ΔmSM passa a ser rectilini. (L'HÔPITAL (1696), pp. 2-3)

Per exemple, la *regla de diferenciació del producte xy* és $ydx + xdy$, perquè pel primer postulat, $dxdy$ és infinitament petit respecte a ydx, xdy. Si ydx i $dxdy$ es divideixen per *dx*, donen *y* i *dy* respectivament. *dy* és infinitament menor que *y* (i, per tant, *dxdy* és infinitament menor que *ydx*).

A la introducció de les *Lectiones* de Johann Bernoulli trobem els tres postulats següents, dels quals només els dos primers apareixen a l'*Analyse* de L'Hôpital:

> 1. Una quantitat que és disminuïda o augmentada en una quantitat infinitament petita, no és ni disminuïda ni augmentada.
> 2. Cada línia corba està composada d'infinites línies rectes, infinitament petites.
> 3. Una figura que està continguda entre dues ordenades, la diferència de les abscisses i la part infinitament petita d'una corba qualsevol, és considerada com un paral·lelògram. (BERNOULLI (1922), p. 3)

El primer postulat de l'*Analyse* no apareix a l'article de Leibniz de 1684 però sí a les *Lectiones* de Johann Bernoulli, que de fet es basa en la idea de Newton que $x + o$ és igual a *x*. Al seu article Leibniz no fa referència a quantitats infinitament petites, però el grup de

Malebranche així ho va entendre i així ho propagà. El segon postulat de l'*Analyse* sí que apareix a l'article de Leibniz.[15]

Johann Bernoulli i L'Hôpital, abans d'atacar el problema de la tangent, justifiquen les regles bàsiques de diferenciació (suma, substracció, multiplicació, divisió, potenciació, radicació), mentre que Leibniz no ho fa al seu article de 1684.

2.3. SECCIÓ II: ÚS DEL CÀLCUL DE DIFERÈNCIES PER TROBAR LA TANGENT D'UNA CORBA[16]

L'Hôpital afirma que, si es prolonga un dels petits costats *Mm* del polígon que conforma una línia corba, aquest petit costat és la tangent de la corba en el punt *M* o *m*.[17] Bernoulli és del mateix parer: basant-se en el seu postulat segon, la tangent a la corba en un punt coincideix amb una porció infinitament petita de corba.[18] La determinació de la tangent: donada una corba, tal que la relació entre abscissa i ordenada vingui expressada mitjançant una equació. Es consideren dues ordenades infinitament properes, *MP* i *mp* (vegeu Figura 1). Sigui *MT* la tangent buscada, *T* el punt d'intersecció de la tangent amb el diàmetre. Sigui $AP = x, PM = y, Pp = MR = dx, Rm = dy$. Per la semblança dels triangles *mRM* i *MPT*: $mR(dy).RM(dx) :: MP(y).PT$. Així, la subtangent és $PT = \dfrac{ydx}{dy}$.

La diferència que considero més notable entre ambdós autors és l'elecció de les coordenades. En general, Bernoulli busca coordenades *x*, *y* ortogonals per poder aplicar directament la fórmula $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y}{s}$ (BERNOULLI (1922), p. 8), on *s* és la subtangent (encara que no sempre és així, com el cas de l'espiral, on utilitza coordenades polars). El seu mètode és sempre el mateix i no depèn de la naturalesa de la corba. Quan tracta amb corbes algèbriques, en prendre coordenades ortogonals l'equació és més clara i senzilla. En canvi, en el cas de corbes transcendents, l'expressió és bastant més fosca i el problema es complica.

[15] Vegeu SCHUBRING (2004), pp. 219-221.
[16] A l'Annex I es comparen i analitzen exemples comuns als dos autors.
[17] Vegeu L'HÔPITAL (1696), definició, p. 11.

Per la seva banda L'Hôpital busca altres tipus de relacions, segons les propietats de la corba estudiada. El fet d'ajustar-se a la naturalesa geomètrica de la corba li permet una millor elección de les coordenades. D'aquesta forma l'equació de les corbes transcendents esdevé més clara i senzilla que la de les algèbriques.[19]

L'Hôpital i Bernoulli també difereixen en l'enfocament dels problemes. A diferència del seu mestre, L'Hôpital dóna una sèrie de proposicions generals que aplica posteriorment a alguns casos particulars.[20] Quan és possible, L'Hôpital presenta diverses maneres de resoldre el mateix problema, una de les quals normalment coincideix amb la resolució de Bernoulli.

Donat que l'Annex I recull exemples comuns als dos autors, que ja havien aparegut a BLANCO (1999) i (2001), a continuació comentaré el cas de la tangent a la corba logarítmica, que no apareix als citats treballs. Coolidge afirma que sobta el fet que a l'*Analyse* no aparegui explícitament la diferenciació del logaritme, tot i que el Marquès coneixia el valor de $\int \frac{dx}{x}$.[21] Però, de fet, sí que apareix la diferenciació del logaritme a l'*Analyse*. Fins i tot L'Hôpital suggerí Bernoulli de confeccionar un apèndix sobre la diferenciació del logaritme, que no es dugué a terme.[22] A la secció sobre càlcul de tangents, L'Hôpital demostra la proposició (general) següent:

> <u>Proposició XII</u>: Siguin dues línies qualssevol, *BN*, *FQ* que tenen per eixos les rectes *BC*, *ED* que es tallen en angles rectes en el punt *A*; sigui una línia corba *LM* tal que havent traçat des d'un qualsevol dels seus punts *M* les rectes *MGQ*, *MPN* paral·leles a *AB*, *AE*; la relació dels espais *EGQF* (el punt *E* és un punt fix donat sobre la recta *AE* i la línia *EF* és paral·lela a *AC*), *APND*, i les rectes *AP*, *PM*, *PN*, *GQ*, sigui expressada per una equació qualsevol. Es tracta de traçar des d'un punt donat *M* sobre la corba *LM*, la tangent *MT*. (L'HÔPITAL (1696), p. 34)

---

[18] Vegeu BERNOULLI (1922), p. 8.

[19] Leibniz recomanava seleccionar la transformació més adient al problema, de manera que la nova ordenada fos expressable com a funció racional de la nova abscissa. Vegeu HOFMANN (1972), p. 235. Newton i Pascal també escollien les seves coordenades depenent de la naturalesa de la corba. Vegeu NEWTON (1671), problema IV, pp. 49-62 de la traducció francesa; COOLIDGE (1963), p. 154. Per comparar els tractaments diferents de L'Hôpital i Bernoulli, vegeu lel càlcul de la tangent a la cicloide i a la cissoide a l'Annex I.

[20] Vegeu com a exemple la comparació del càlcul de la tangent a la cicloide a l'Annex I.

[21] Vegeu COOLIDGE (1963), p. 154.

[22] Vegeu BOYER (1946); BERNOULLI (1955), carta nº 59 (gener, 1696).

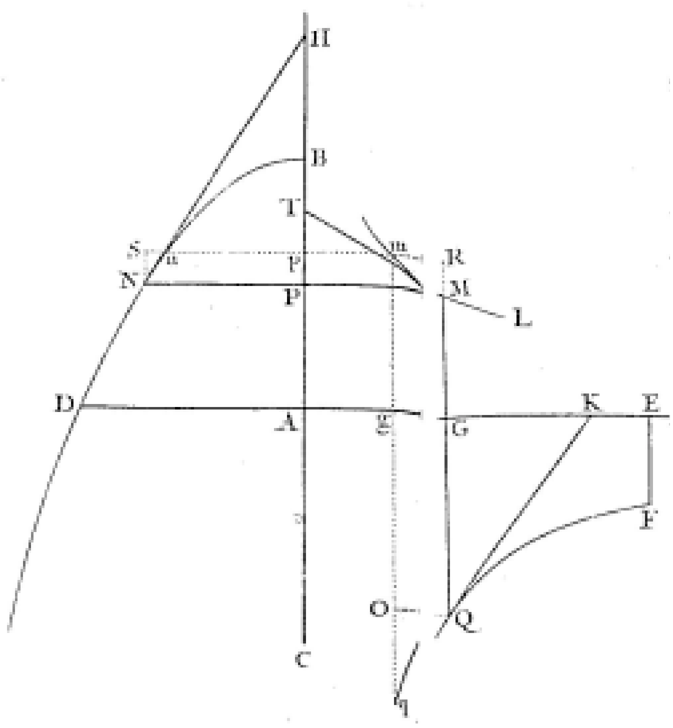


Figura 2

L'exemple II presenta el cas particular en què l'espai *EGQF* sigui igual a l'espai *APND*, obtenint aleshores una corba la subtangent de la qual és constant. En aquest cas, diu L'Hôpital, la corba s'anomena logarítmica. En el problema V de les *Lectiones*, Bernoulli vol trobar la corba tal que la seva subtangent és constant. Considera x, y coordenades ortogonals, i subtangent a constant. Fent servir la fórmula de la subtangent resulta $\frac{dy}{dx} = \frac{y}{a}$, d'on dedueix que la corba buscada és tal que $\frac{dx}{a}$ i $\frac{dy}{y}$ es mantenen constants, és a dir, es tracta de la corba logarítmica, on les abscisses segueixen una sèrie aritmètica i les ordenades formen una sèrie geomètrica. En aquest cas, tot i tractar-se d'una corba transcendent, el plantejament de Bernoulli és més clar i senzill que el de L'Hôpital. Bernoulli només fa servir dues variables i la fórmula $\frac{dy}{dx} = \frac{y}{\text{subtangent}}$. Donada la naturalesa de la corba, aquest tractament resulta més natural. En canvi, L'Hôpital necessita sis variables i un primer resultat general per a qualsevol relació entre corbes auxiliars. En el cas particular de la corba logarítmica, la relació entre les corbes auxiliars està donada.[23]

[23] De fet, és el problema de Debaune, que ja resol Leibniz el 1684.

2.4. SECCIÓ III: ESTUDI DE MÀXIMS I MÍNIMS

Bernoulli comença l'estudi de màxims i mínims amb el problema XII. Un màxim (mínim) és un punt on la corba és còncava (convexa) respecte l'eix. En aquest punt (màxim o mínim) la tangent és paral·lela a l'eix. Dit d'una altra forma, *y* és infinitament petita respecte *s*. Per tant, utilizant la fórmula $\frac{dy}{dx}=\frac{y}{s}$, podem concloure que dy=0.

La secció III de l'*Analyse* està dedicada al problema de buscar l'ordenada més gran o més petita, es a dir, al problema de trobar els màxims i mínims. L'estudi de L'Hôpital es basa en el realitzat per Leibniz,[24] però de manera més general. Considerant que l'abscissa creix contínuament, si l'ordenada també creix fins un cert punt a partir del qual comença a decrèixer (o viceversa), la diferència de l'ordenada passarà de positiva a negativa (o al revés). En conseqüència, haurà de ser zero o infinita en algun moment. Igualant la diferència primera a zero (cas que aquesta disminueixi) i després a infinit (cas que augmenti) trobarem l'ordenada màxima o mínima. Quan la diferència és zero la tangent en el màxim (o mínim) és paral·lela a l'eix de les abscisses i la subtangent, per tant, és infinita. En canvi, si la diferència és infinita, la tangent es confon amb l'ordenada corresponent al màxim (o mínim).

Després de les definicions, ambdós autors presenten una sèrie d'exemples on pressuposen que allò que es busca és un màxim o un mínim, sense donar cap indicació sobre com esbrinar si és tracta d'un tipus o de l'altre. Generalment, la naturalesa dels extrems és clara a partir de les condicions del problema. Molts dels exemples i figures són idèntics.[25] L'estudi de L'Hôpital és més complet que el de Bernoulli (per exemple, Bernoulli no estudia el cas de la diferència infinita).[26]

---

[24] Vegeu LEIBNIZ (1684).

[25] A l'Annex II es comparen i analitzen exemples comuns als dos autors.

[26] Malgrat això, l'abril de 1694 Bernoulli escriu a L'Hôpital que no sempre es compleix $dy=0$ quan hi ha un extrem. Està pensant en les corbes "bicòrnies", aquelles amb punt de retrocés. Les tangents en aquests punts no són paral·leles sinó perpendiculars a l'eix de les abscisses, és a dir, $dy=\infty$. Vegeu BERNOULLI (1955), carta nº 22 (abril, 1694).

2.5. SECCIÓ IV: ESTUDI DE PUNTS D'INFLEXIÓ[27]

El problema XXI de les *Lectiones* recull l'estudi de Johann Bernoulli dels punts d'inflexió. Defineix punt d'inflexió com "aquell que separa les dues curvatures, quan la corba passa de còncava a convexa, o viceversa" (BERNOULLI (1922), p. 23). Aquest punt està al final de la primera curvatura i al començament de la darrera. Bernoulli presenta tres mètodes per trobar els punts d'inflexió.

<u>PRIMUS MODUS</u>

Les tangents creixen fins el punt d'inflexió i quan canvia la curvatura comencen a decrèixer. Bernoulli diu que la tangent en el punt d'inflexió és "remotíssima" (BERNOULLI (1922), p. 24), d'on dedueix que la diferència entre la subtangent (t)[28] i l'abscissa (x) ha de ser màxima. És a dir:

$$x - t = m,$$
$$dx - dt = 0,$$
$$dx = dt.$$

<u>METHODUS SECUNDUS</u>

Considerant dx constant, en el punt d'inflexió la corba no és ni convexa ni còncava. Aquí serà una porció de recta infinitament petita, d'on es dedueix que dy serà constant. La qual cosa implica que $d(dy)$ (és a dir, ddy) és zero. Bernoulli observa que això funciona tant en el cas de corbes mecàniques com geomètriques.

<u>MODUS TERTIUS</u>

Suposem la corba formada per infinites rectes infinitament petites *ab*, *bc*, *cd*... La tangent en el punt *d* és *dc*, que passa per *m*.

---

[27] A l'Annex III es comparen i analitzen exemples comuns als dos autors.

[28] Notem que, en aquest capítol, Bernoulli utiliza una *t* per indicar la subtangent i no *s*, com havia fet fins aquest moment. Leibniz també farà servir *t* al seu article de l'*Acta Eruditorum*. Vegeu LEIBNIZ (1684).

Figura 3

Si la corba exterior és convexa, la tangent *de* és exterior i l'angle $\angle ldm$ és infinitament petit.[29] Si la corba exterior és còncava, la tangent serà interior. Les tangents en punts infinitament propers al punt d'inflexió no són ni exteriors ni interiors. Es poden igualar, obtenint així el punt buscat. Per tant, en el punt d'inflexió la tangent coincideix amb la tangent en un punt infinitament proper.

Sigui la corba *ABC* amb punt d'inflexió en *B*. Des del punt *F* tracem les rectes *FB* i *Fb*, on l'angle $\angle bFB$ és infinitament petit. Tracem *FD* i *Fd* perpendiculars a *FB* i a *Fb* respectivament. La tangent *BdD* en *B* és la mateixa que la tangent en *b*. Siguin arc(*Be*) i arc(*gd*) dos arcs de centre *F*.

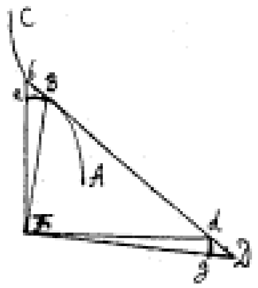


Figura 4

$$FD = Fd = t,\ gD = dt,$$

$$FB = Fb = z,\ be = dz,$$

$$\mathrm{arc}(Be) = dy.$$

[29] Per a Fermat un punt d'inflexió es aquell tal que la tangent amb l'eix d'abscises forma un angle mínim. Vegeu FERMAT (1894), p. 146.

Els sectors *Fgd* i *BeF* són semblants donat que l'angle $\angle BFe$ és igual l'angle $\angle gFd$. Així: $\frac{FB}{Fd} = \frac{Be}{gd}$, que implica $gd = \frac{tdy}{z}$. ΔbeB i ΔgdD també són semblants (donat que *D*, *d*, *B*, *b* es troben sobre la mateixa tangent). Conseqüentment:

$$\frac{be}{Be} = \frac{gd}{gD},$$

$$\frac{dz}{dy} = \frac{\frac{tdy}{z}}{dt}.$$

Utilizant la fórmula de la subtangent, $\frac{dz}{dy} = \frac{z}{t}$, resulta:

$$\frac{tdy^2}{z} = dzdt = \frac{dy^3}{dz},$$

$$dy^3 = dz^2 dt.$$

BdD és la tangent en *B*, que també ho és en *b*.

L'Hôpital comença la secció IV definint les diferències d'ordre superior (cosa que no fa Bernoulli):

> Definició I: La porció infinitamente petita en què creix o decreix la diferència d'una variable és la diferència de la diferència (o diferència segona). Anàlogament es pot definir la diferència tercera, etc. (L'HÔPITAL (1696), p. 55)

Aquesta definició coincideix amb la que ja havia donat Leibniz (tot i que de forma no massa clara) en el seu article d'*Acta eruditorum* "Nova methodus pro maximis & minimis,..." de 1684.[30] La diferència segona és infinitament petita respecte *dy*. L'Hôpital especifica que *dd*, *ddd*,... serveix per indicar l'ordre de la diferència i que dx^2, dx^3, ddx^2,... indica la potència de la diferència. Calcula les diferències segones tant per al cas d'ordenades paral·leles com per al cas d'ordenades des d'un punt. Quant a l'elecció de la progressió, en els corol·laris I i II de la secció IV L'Hôpital observa que, per calcular la diferència segona, una de les diferències *dx*, *dy* o *du* ha de ser constant. A la

[30] Aquesta manca de claredat a les definicions de les diferències d'ordre superior no donà precisament coherència al simbolisme de les diferències. La crítica de Nieuwentijdt (1695-96) es basà en aquesta qüestió. Vegeu l'apartat *La naturalesa dels infinitesimals: l'atac de Nieuwentijdt* al capítol 1.

proposició I d'aquesta secció estudia un exemple, primer considerant *dx* constant i després *dy* constant.

A continuació, L'Hôpital defineix punt d'inflexió:

> <u>Definició II</u>: Quan una corba *AFK* és còncava i convexa respecte una recta *AB* o un punt fix *B*, el punt *F* que separa la part còncava de la convexa i que és al final d'una i al principi de l'altra s'anomena d'inflexió, si la corba a partir d'aquest punt segueix el seu camí del mateix costat, i de retrocés, si retrocedeix fins l'origen. (L'HÔPITAL (1696), p. 59)

A la proposició II (secció IV) L'Hôpital planteja el problema de, donada una corba, trobar els seus punts d'inflexió i de retrocés.

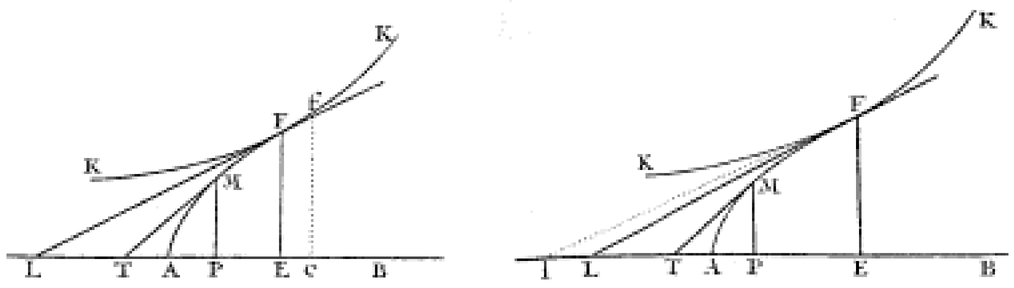


Figura 5

1) Punt d'inflexió: Si *AP* creix contínuament, aleshores *AT* va creixent fins al punt d'inflexió, a partir del qual comença a decrèixer. I *AT* serà màxim (*AL*) quan *P* caigui sobre *E*.
2) Punt de retrocés: Si *AT* creix contínuament, llavors *AP* també creix fins que *T* esdevé *L*, on comença a decrèixer. *AP* serà un màxim (*AE*) quan *T* caigui sobre *L*.

En general, si $AE = x$ i $EF = y$, es tracta de maximitzar $AL = \frac{ydx}{dy} - x$ (que és l'expressió que utilitza Bernoulli al seu primer mètode). Diferencia aquesta expressió:

$$\frac{dy^2\, dx\text{-}ydxddy}{dy^2} - dx.$$

Dividint per *dx* (constant) i igualant a zero o a infinit obté:

$$\frac{dy^2 - yddy}{dy^2} - 1 = \frac{-yddy}{dy^2} = 0 \text{ o } \infty,$$

d'on L'Hôpital dedueix que als punts d'inflexió i de retrocés es verifica $ddy = 0$ o $ddy = \infty$, proposició que no és recíproca. En una carta a Johann Bernoulli,[31] L'Hôpital afirma que hi ha corbes que no canvien la seva curvatura i que, tanmateix, verifiquen *ddy*=0. La definició de L'Hôpital de punt d'inflexió coincideix amb la que dóna Bernoulli. Aquest, però, no considera el cas dels punts de retrocés a les seves *Lectiones*, tot i que sí que ho fa a la carta que envia L'Hôpital el 22 de abril de 1694.[32]

L'Hôpital exposa un segon mètode que coincideix amb el segon de Bernoulli. Considerant *dx* constant, si *y* augmenta aleshores *ddy* passa de positiva a negativa en canviar la curvatura (és a dir, en el punt d'inflexió o de retrocés). Per tant, *ddy* ha de valer zero o infinit.[33]

Finalment, amb un corol·lari[34] L'Hôpital descriu un tercer mètode que coincideix amb el tercer mètode de Johann Bernoulli (vegeu Figura 5):

- Quan $ddy = 0$: Si prenem dues tangents infinitament properes *FL*, *fL*, han de coincidir en el punt d'inflexió o de retrocés, *F*.
- Quan $ddy = \infty$: Podem traçar per *F* (punt d'inflexió o de retrocés) dues tangents *FL*, *Fl* amb angle entre elles infinitament petit.

L'Hôpital també estudia el cas en què les ordenades parteixen d'un mateix punt, cas que no apareix a les *Lectiones*.[35]

---

[31] Vegeu BERNOULLI (1955), carta nº 21 (abril, 1694).
[32] Vegeu BERNOULLI (1955), carta nº 22 (abril, 1694).
[33] Vegeu L'HÔPITAL (1696), p. 61.
[34] Vegeu L'HÔPITAL (1696), p. 63.
[35] A la carta que Bernoulli envia L'Hôpital el 12 de gener de 1695 li mostra com trobar les diferències segones en el cas d'ordenades des d'un punt, procediment idèntic al que apareix al corol·lari de la pàgina 57 de l'*Analyse* de L'Hôpital. La idea d'ordenades des d'un punt sembla haver estat suggerida per L'Hôpital en la carta anterior. Vegeu BERNOULLI (1955), carta nº 36 (gener, 1695).

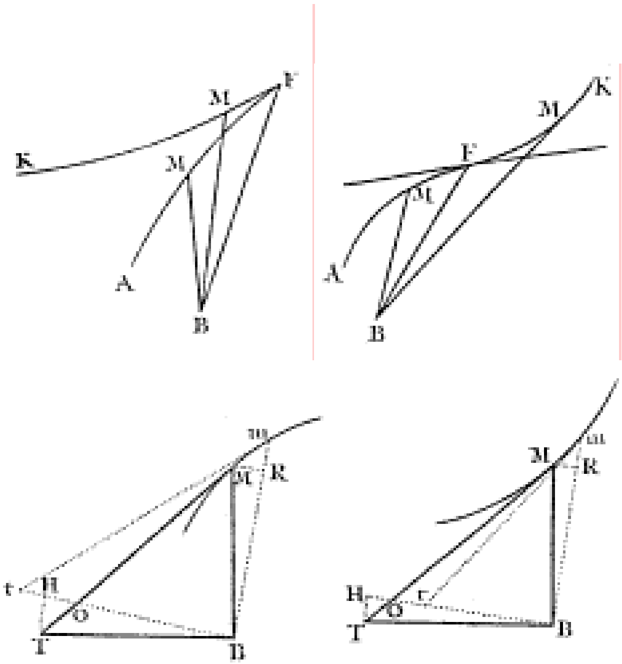


Figura 6

Sigui *AFK* una corba, les ordenades de la qual des de *B* són *BM*, *BF*,.... Sigui *MT* la tangent corresponent a l’ordenada *BM*, i sigui *BT* perpendicular a *BM*. Prenem *m* infinitament proper a *M* amb ordenada *Bm* i tangent *mt*, essent *Bt* perpendicular a *Bm*. La intersecció entre *Bt* i *MT* és el punt *O*. Suposant que l’ordenada augmenta (quan *BM* passa a ser *Bm*), aleshores *Bt* és més gran que *BO* a la part còncava i menor que *BO* a la part convexa. Així, en el punt d’inflexió (o de retrocés) *F*, *Ot* passa de positiva a negativa. Així, *Ot* és zero en el punt *F*. Tracem des de *B* els arcs arc(*MR*), arc(*TH*). De manera que es formen els triangles semblants ΔmRM, ΔMBT i ΔTHO, i els sectors semblants *BMR* i *BTH*. Sigui $BM = y$, $mR = dy$, $MR = dx$. De les semblances de triangles i sectors obtenim la següent cadena de proporcions:

$$\frac{mR}{RM} = \frac{BM}{BT} = \frac{MR}{TH} = \frac{TH}{HO},$$

$$\frac{mR}{RM} = \frac{BM}{BT} \Rightarrow BT = \frac{ydx}{dy},$$

$$\frac{BM}{BT} = \frac{MR}{TH} \Rightarrow TH = \frac{dx^2}{dy},$$

$$\frac{MR}{TH} = \frac{TH}{HO} \Rightarrow HO = \frac{dx^3}{dy^2}.$$

Suposem *dx* constant. La diferència de *BT* és:

$$Bt\text{-}BT=Ht=\frac{dxdy^2\text{-}ydxddy}{dy^2}.$$

Per tant:

$$OH+Ht=Ot=\frac{dx^3+dxdy^2\text{-}ydxddy}{dy^2}.$$

Multiplicant per dy^2 i dividint per dx resulta $dx^2+dy^2\text{-}yddy=0 \text{ o } \infty$, d'on s'obtenen els punts d'inflexió i de retrocés.

L'Hôpital presenta una altra forma de resoldre el problema.[36]

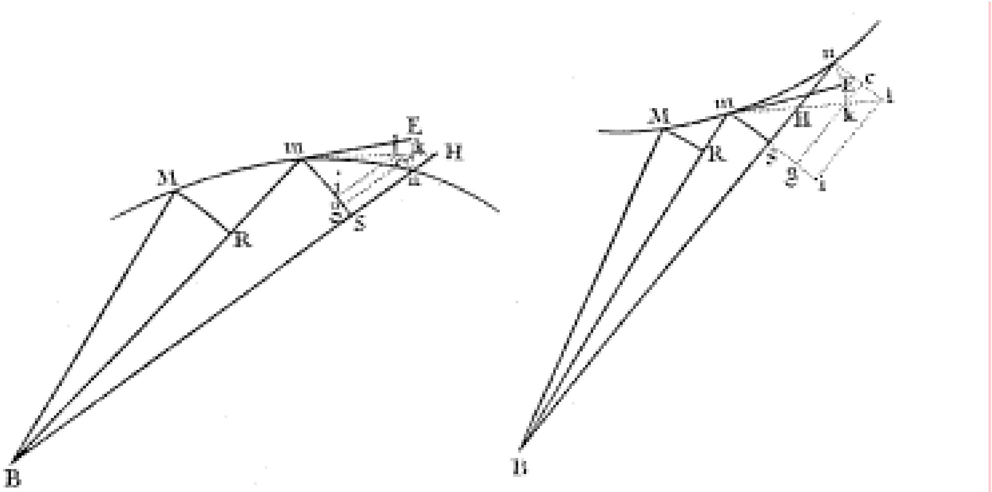


Figura 7

A la part còncava l'angle $\angle BmE$ és major que $\angle Bmn$. En canvi, a la part convexa passa al revés. La diferència entre els dos angles és l'angle $\angle Emn$, que és la mesura de l'arc(En), que passarà de positiu a negatiu en el punt F. Suposem dx constant. Els triangles ΔHmS i ΔHnk són semblants. A més, si Bm creix llavors Rm decreix. D'on resulta:

$$\frac{Hm}{mS}=\frac{Hn}{nk},$$

$$\frac{du}{dx}=\frac{-ddy}{nk}\Rightarrow nk=-\frac{dxddy}{du}.$$

Com que els sectors BmS i mEk són semblants:

[36] Vegeu L'HÔPITAL (1696), p. 62.

$$\frac{Bm}{mS} = \frac{mE}{Ek},$$

$$\frac{y}{dx} = \frac{du}{Ek} \Rightarrow Ek = \frac{dxdu}{y},$$

$$Ek + kn = \text{arc}(En) = \frac{dxdu^2 \text{-} ydxddy}{ydu}.$$

Multiplicant per *ydu* i dividint per *dx*:

$$du^2 \text{-} yddy = dx^2 + dy^2 \text{-} yddy,$$

que en el punt *F* passa de positiu a negatiu. L'expressió anterior ha de ser nul·la o infinita. Si *y* tendeix a infinit (que seria el cas d'ordenades paral·leles) dx^2 i dy^2 són zero respecte *yddy,* i *ddy* ha de ser zero o infinit.

2.6. COMPARACIÓ D'ALGUNS RESULTATS DE L'*ANALYSE* AMB EL CONTINGUT D'ALGUNES DE LES CARTES ENTRE JOHANN BERNOULLI I EL MARQUÈS DE L'HÔPITAL

Hi ha alguns resultats de l'*Analyse* que trobem en certes cartes de la correspondència existent entre Johann Bernoulli i el Marquès de L'Hôpital dels anys 1692-1695.[37]

SECCIÓ II DE L'*ANALYSE*

<u>Proposició XI (art. 36)</u>

> Siguin dues línies qualssevol *APB*, *EQF*, de les quals es sap traçar les tangents *PG*, *QH*; i sigui una línia recta *PQ* sobre la qual es marca un punt *M*. Si es considera que els extrems *P*, *Q* d'aquesta recta llisquen al llarg de les línies *AB*, *EF*, és clar que el punt *M* descriurà en aquest moviment una línia corba *CD*. Es tracta de traçar des d'un punt donat *M* sobre aquesta corba la tangent *MT*. (L'HÔPITAL (1696), p. 33)

[37] Aquesta secció ha estat elaborada a partir de la correspondència entre Johann Bernoulli i L'Hôpital i de la introducció duta a terme per l'editor de la correspondència. Vegeu BERNOULLI (1955) i SPIESS (1955).

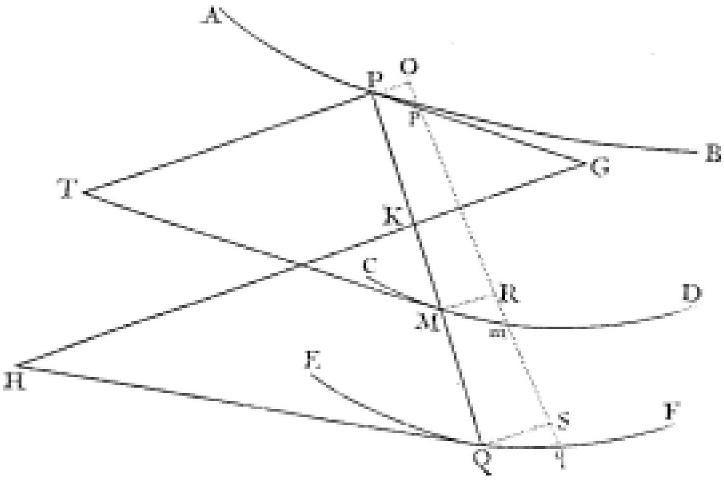


Figura 8

Aquest enunciat es correspon amb un problema que Johann resol en la carta nº 28 (juliol, 1694). L'única diferència que hi trobo entre ambdós és el segment que fan servir per trobar la tangent.

<u>Proposició XVI</u> (art. 45)

> Sigui *ABCD* una corda perfectament flexible, a la qual se li ajunten diferents pesos *A*, *B*, *C*, etc. Que entre ells tenen tals intervals *AB*, *BC*, etc. com es vulgui. Si s'arrossega aquesta corda sobre un pla horitzontal per l'extrem *D*, al llarg d'una corba donada *DP*; és clar que aquests pesos es disposaran de manera que faran tensar la corda, i que descriuran les corbes *AM*, *BN*, *CO*, etc. Es demana la manera de traçar les tangents, havent donat la posició de la corda *ABCD* amb la grandària dels pesos. (L'HÔPITAL (1696), p. 38)
> [*Vegeu Figura 9*]

Aquest enunciat es correspon amb el problema de les xalupes, que apareix resolt en la carta nº 28, de Johann a L'Hôpital (juliol, 1694). L'única diferència que he detectat és que, mentre Johann fa servir la proporció entre la suma dels pesos en *A* i en *B*, i el pes en *B*, L'Hôpital utilitza la proporció entre el pes en *A* i el pes en *B*. Els dos problemes anteriors estan relacionats. A la carta de Bernoulli l'ordre d'aparació és l'invers de l'emprat per L'Hôpital. Bernoulli parla primer del problema de les xalupes i després, en relació amb aquest, parla del segon. L'Hôpital al final de l'article 45 fa referència a la relació d'aquest problema amb el que ha aparegut en l'article 36.

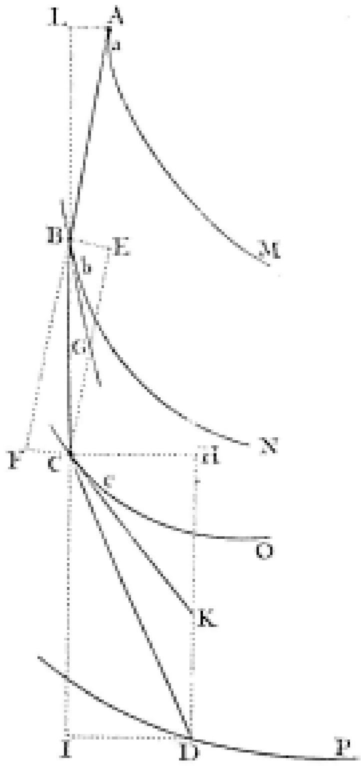


Figura 9

SECCIÓ III DE L'*ANALYSE*

Remarca (art. 47)

Aquesta remarca es correspon amb un comentari de Bernoulli en la carta nº 22 (abril, 1694). Es comenta l'estudi d'extrems quan la tangent és paral·lela a l'eix (aleshores, la diferència és nul·la) i quan la tangent és paral·lela a l'aplicada (aleshores, la diferència és infinita). En el segon cas, Bernoulli parla de corbes bicòrnies, amb punt de retrocés.

SECCIÓ IV DE L'*ANALYSE*

Corol·lari II (art. 64, punt segon)

Aquest corol·lari es correspon amb la carta nº 36, de Johann a L'Hôpital, (gener, 1695). Es parla de la construcció de d^2x, d^2y per a coordenades des d'un punt. En l'*Analyse* L'Hôpital distingeix els casos *dx* constant, *dy* constant, *du* (la diferència de l'arc de corba) constant. En canvi, Bernoulli no.

SECCIÓ V DE L'*ANALYSE*

Remarca (art. 79, segon cas)

Aquesta remarca apareix també a la carta nº 36, de Johann a L'Hôpital (gener, 1695). Tracta de la construcció del radi de l'evoluta en el cas d'ordenades des d'un punt fix. Johann considera que la solució proposada per L'Hôpital és molt simple i natural, però li envia la seva versió. Ambdós arriben al mateix resultat, llevat del signe (és el cas *du* constant de L'Hôpital):

- Per a L'Hôpital: $\dfrac{ydxdu}{dx^2 - yddy}$, on *u* és l'arc de corba.
- Per a Johann: $\dfrac{ydxds}{dx^2 \pm yddy}$, on *s* és l'arc de corba.

Johann afirma en la seva carta que per trobar el radi de l'evoluta es busca una equació *differentio-differentielle*, per construir la corba mitjançant la combinació d'altres dues. Es pot reduir aquesta equació *differentio-differentielle* de manera que contingui el radi de l'evoluta.

Remarca (art. 82)

S'hi discuteix la curvatura en punts d'inflexió. La remarca de *l'Analyse* es basa en la carta nº 22, de Johann a L'Hôpital (abril, 1694). Johann comenta que en el punt d'inflexió la segona diferència de *y* és zero o infinita. Però que això no és recíproc, doncs existeixen corbes tals que en un punt el radi és infinit o infinitament petit, sense que la curvatura canviï (com per exemple, el paraboloide $y = x^{5/2}$). Si es comença a desenrotllar la corba en el punt d'inflexió, on el radi de l'evoluta és infinit, es descriu una altra corba que també té un punt d'inflexió però amb radi infinitament petit. Si es torna a desenrotllar, en el punt d'inflexió el radi encara és més infinitament petit. Així, només existeix un gènere de corbes amb radi infinit en el punt d'inflexió.

Remarca (art. 109)

S'hi discuteix sobre les cúspides de segona espècie. En la carta nº 23, de L'Hôpital a Johann (abril, 1694), L'Hôpital comenta que, tot i que Johann pensa que en els punts d'inflexió sempre es verifica que el radi val zero, ell creu que també pot ser infinit (com en el cas de $y = x^{5/2}$) o finit[38] (o determinat). Així, si es desenrotlla una corba amb punt d'inflexió, començant per un punt que no sigui el punt d'inflexió, es forma una corba bicòrnia, amb un punt de retrocés i radi finit. Aquí Spiess comenta que, per primer cop, apareix el dibuix d'una cúspide, a partir del desenvolupament d'una corba amb punt d'inflexió. A la carta, L'Hôpital demana Johann que li indiqui com calcular aquest tipus de punts. A la carta nº 24 Johann exposa que, per trobar aquests punts, la raó de la diferència del radi de l'evoluta a la diferència de la corba, ha de ser infinitament gran o bé infinitament petita. Sembla que, gràcies a L'Hôpital, Johann se n'adona de l'existència d'aquest tipus de punt de retrocés, i és Johann qui els anomena *de retrocés de segona espècie*.[39]

SECCIÓ VI DE L'*ANALYSE*

De la secció dedicada a l'estudi de càustiques per reflexió, alguns articles de l'*Analyse* es basen en les lliçons de càlcul integral de Johann:[40]

Analyse	*Lliçons de càlcul integral*
Art. 119	Pàg. 471
Art. 120	Pàg. 470
Art. 122	Pàg. 479
Art. 127	Pàg. 481

Taula 1

SECCIÓ VII DE L'*ANALYSE*

De la secció dedicada a l'estudi de càustiques per refracció, alguns articles de l'*Analyse* es basen en les lliçons de càlcul integral de Johann:

[38] Entenc que aquí "finit" també implica "no nul".
[39] Vegeu BERNOULLI (1955), carta nº 24 (maig, 1694).
[40] El contingut de les dues taules que vénen a continuació, per a les seccions VI i VII, respectivament, es troben a SPIESS (1955).

Analyse	*Lliçons de càlcul integral*
Art. 132	Pàg. 548
Art. 141	Pàg. 556
Art. 145	Pàg. 557

Taula 2

SECCIÓ VIII DE L'*ANALYSE*

<u>Proposició I (art.146)</u>

> Sigui donada una línia qualsevol *AMB*, que té per eix la recta *AP*; siguin a més a més enteses una infinitat de paràboles *AMC*, *AmC*, que passen totes pel punt *A*, i que tenen per eixos les ordenades *PM*, *pm*. S'ha de trobar la línica corba que toca totes aquestes paràboles. (L'HÔPITAL (1696), p. 131)

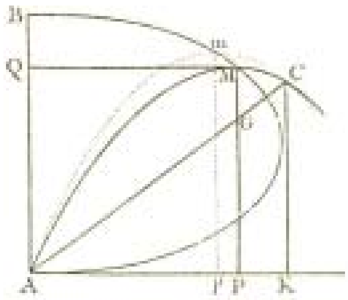


Figura 10

En la carta nº 6, de L'Hôpital a Johann (desembre, 1692), el marquès planteja Johann el següent problema: donada una el·lipse i una infinitat de paràboles que passen per un vèrtex de l'el·lipse, amb els vèrtexos sobre l'el·lipse, s'ha de trobar la corba que toca a totes les paràboles. També li planteja el problema en el cas d'altres corbes, en lloc d'el·lipse i paràboles. Johann li envia la solució (aquesta carta falta). L'Hôpital torna a escriure Johann (carta nº 7, gener, 1693), indicant-li un error de càlcul. L'article 146 de l'*Analyse* presenta el problema en general, per a una línia qualsevol i infinitat de paràboles. L'article 147 conté un exemple concret, amb el·lipse i paràboles.

<u>Proposició V (art. 158)</u>

> Dues línies qualssevol *AM*, *BN* donades amb una línia recta *MN* que es manté sempre igual; es suposa que els extrems *M*, *N* d'aquesta línia llisquen contínuament al llarg de dues altres, i es demana la corba que ella toca sempre en el seu moviment. (L'HÔPITAL (1696), p. 139)

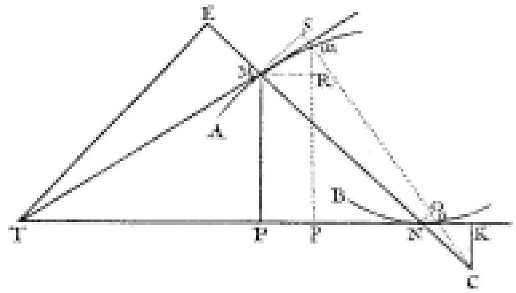


Figura 11

En la carta nº 7 (gener, 1693) L'Hôpital demana Johann quina és la corba tal que, donada una parábola, el segment de recta amb els dos extrems *A* i *C* sobre la parábola llisca per dins de la parábola, i *AC* és tangent a la corba buscada. Situació similar a la que després exposa a l'article 158. Per la carta nº 53, de L'Hôpital a Johann (juliol, 1695), sabem que L'Hôpital ha rebut la solució de Bernoulli del problema: buscar la corba que contínuament és tangent a la hipotenusa d'un angle recte en lliscar entre els seus costats. L'Hôpital diu que ell ho generalitza al cas d'un segment de recta *AC*, els extrems del qual llisquen sobre dues corbes. El marquès proposa Johann la solució però no la demostració, doncs considera que Johann la podrà trobar fàcilment. En la carta nº 55, de Johann a L'Hôpital (juliol, 1695), Johann escriu que la solució que li ha enviat L'Hôpital és correcta i que n'ha vist fàcilment la demostració.

<u>Proposició VI (art. 159)</u>

> Siguin donades tres línies qualssevol *L*, *M*, *N*; i siguin estesos de cadascun dels punts *L*, *l* de la línia *L* dues tangents *LM* i *LN*, *lm* i *ln*, a les dues corbes *M* i *N*, una a cadascuna. Es demana la quarta corba *C*, que té per tangents totes les rectes *MN*, *mn* quE uneixen els punts tocants de les corbes *M*, *N*. (L'HÔPITAL (1696), p. 141)

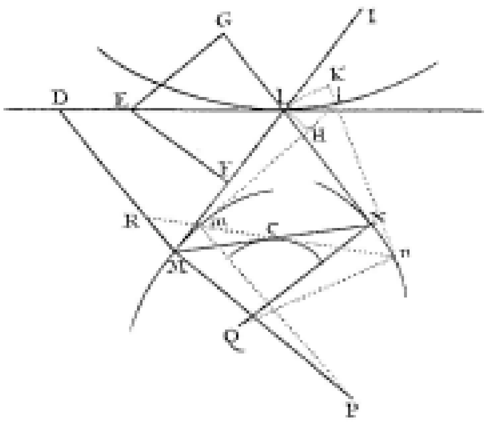


Figura 12

En la carta nº 7, de L'Hôpital a Johann (gener-febrer, 1693), L'Hôpital demana Johann la solució del problema següent: de tots els punts del cercle, *B*, *D*, es tracen les tangents a la paràbola *BA*, *BC*, *DE*, *DF* i s'ha de trobar la corba que toca totes les línies *AC*, *EF* que uneixen els punts de tangència, és a dir, l'envolvent d'un conjunt de cordes. No s'ha trobat la carta amb la solució de Johann. En l'article 139 L'Hôpital planteja aquest problema però en general. En els articles 160 i 161 aplica aquesta proposició al cas en què les línies *M* i *N* siguin circumferències i còniques, respectivament.

SECCIÓ IX DE L'*ANALYSE*

<u>Proposició I (art. 163)</u>

> Sigui una línia corba *AMD* ($AP = x$, $PM = y$, $AB = a$) tal que el valor de l'aplicada y estigui expressat per una fracció, de la qual el numerador i el denominador esdevenen cadascun zero quan $x = a$, és a dir quan el punt *P* cau sobre el punt donat *B*. Es demana quin ha de ser llavors el valor de l'aplicada *BD*. (L'HÔPITAL (1696), p. 145)

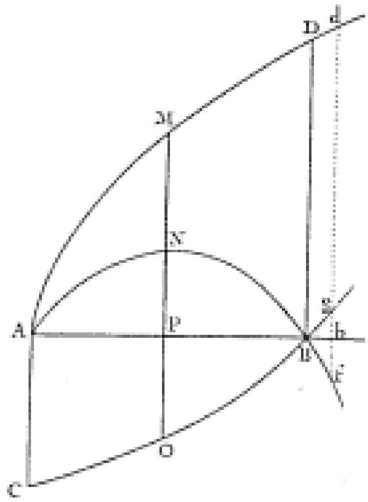


Figura 13

Aquest problema i la seva solució estan continguts en la carta nº 28, de Johann a L'Hôpital (juliol 1694). Sigui *AEC* una corba donada, $AD = x$, $DE = y$, *AB* constant, tal que *BC* és una fracció amb numerador i denominador nuls. Es tracta de buscar el valor de *BC*. Johann construeix sobre el mateix eix *adb*, dues corbes *aeb*, $\alpha\varepsilon b$, de naturalesa tal que, prenent abscisses iguals *AD*, *ad*, les ordenades *de* estan en raó del numerador de la fracció general que expressa *DE*. I les ordenades $d\varepsilon$ estan en raó del denominador de la fracció general. Johann diu que és clar que de dividit entre $d\varepsilon$ dóna el valor de *DE*.

S'ha de buscar el valor de de dividit entre $d\varepsilon$ quan $ab = AB$. Allà on de, $d\varepsilon$ s'anul·len les corbes aeb i $\alpha\varepsilon b$ es tallen en b. Només cal prendre les diferencials βc, $\beta\gamma$, el quocient de les quals donen el valor de BC. Això proporciona la següent regla general:

> Per tenir el valor de l'aplicada d'aquesta corba en aquest cas, s'ha de dividir la diferencial del numerador de la fracció general entre la diferencial del denominador, el quocient, després d'haver fet x igual a la posició de AB, serà el valor de BC. (BERNOULLI (1955), carta nº 28)

L'Hôpital escriu: $PM = \dfrac{AB \times PN}{PO}$, fracció general, que en BD dóna 0/0. Aleshores pren bd infinitament proper a BD, i es té $bd = \dfrac{AB \times bf}{bg}$, que no difereix de BD (aquí remet al postulat 1). Per tant, només és qüestió de buscar la raó de bg a bf. És a dir, el contingut de l'article 163 coincideix amb el contingut de la carta de Johann, però L'Hôpital s'estén una mica més en la justificació.[41] El primer exemple proposat per Johann apareix a l'article 164 de l'*Analyse*: s'ha de trobar el valor de $y = \dfrac{\sqrt{2a^3x - x^4} - a\sqrt[3]{aax}}{a - \sqrt[4]{ax^3}}$ en a. El segon exemple de Johann és molt semblant al que proposa L'Hôpital a l'article 165. Johann proposa trobar el valor de $y = \dfrac{a\sqrt{ax} - xx}{a - \sqrt{ax}}$ en a,[42] mentre que L'Hôpital proposa l'expressió $y = \dfrac{aa - ax}{a - \sqrt{ax}}$.

Lema I (art. 166)

> Sigui una línia corba qualsevol BCG, amb una línia recta AE que la toca en el punt B, i sobre la qual es marquen a discreció dos punts fixos A, E. Si es fa lliscar aquesta recta al voltant de la corba, de manera que la toqui contínuament; és clar que els punts fixos A, E descriuran en aquest moviment dues corbes AMD, ENH. Si ara es traça DL paral·lela a AB, i que en conseqüència fa amb DK (sobre la qual jo suposo la recta AE quan toca la corba BCG en G) l'angle KDL igual a l'angle AOD fet per les tangents en B, G; i que es descriu com es vulgui, del centre D l'arc KFL: Jo dic que $DK.KFL :: AEAMD \pm ENH$, a saber + quan el punt de tangència cau sempre entre els punts generadors, i – quan els deixa sempre del mateix costat. (L'HÔPITAL (1696), pp. 146-147)

[41] Vegeu L'HÔPITAL (1696), pp. 145-146.

[42] Johann comenta aquest problema es pot resoldre també per geometria, però de forma més difícil.

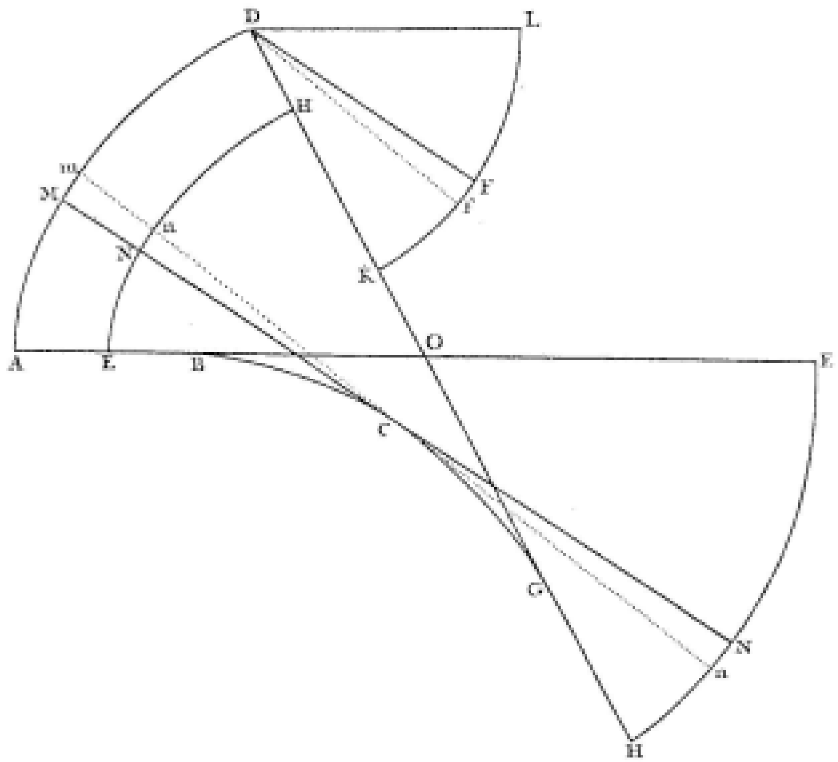


Figura 14

<u>Proposició II (art. 169)</u>

> Siguin dues corbes qualssevol *AEV*, *BCG*, amb una tercera *AMD* tal que havent descrit pel desenvolupament de la corba *BCG* una porció de corba *EM*, la relació de les porcions de corbes *AE*, *EM*, i dels radis de l'evoluta *EC*, *MG* sigui expressat per una equació donada qualsevol. Es proposa de traçar d'un punt donat *M* sobre la corba *AMD* la tangent *MT*. (L'HÔPITAL (1696), p. 148) [*Vegeu Figura 15*]

L'Hôpital demana Johann la solució del problema següent (carta nº 51, juny, 1695): donades les corbes *AEB*, *DC*; i la corba *AMG* (descrita lliurement pel desenvolupament de la corba *DC* l'arc *EM*) la relació dels arcs *AE*, *EM* i del radi *CE* ve expressada per una equació donada. S'ha de trobar la tangent *MT*. Johann li envia la solució (carta nº 52, juny, 1695), que és el lema de l'article 166, que L'Hôpital fa servir per demostrar l'article 169. Johann considera que aquest resultat, tot i ser bonic, és poc útil. Els corol·laris del lema de l'article 166 (articles 167 i 168) també es troben a la carta nº 52, de Johann a L'Hôpital (juny, 1695).

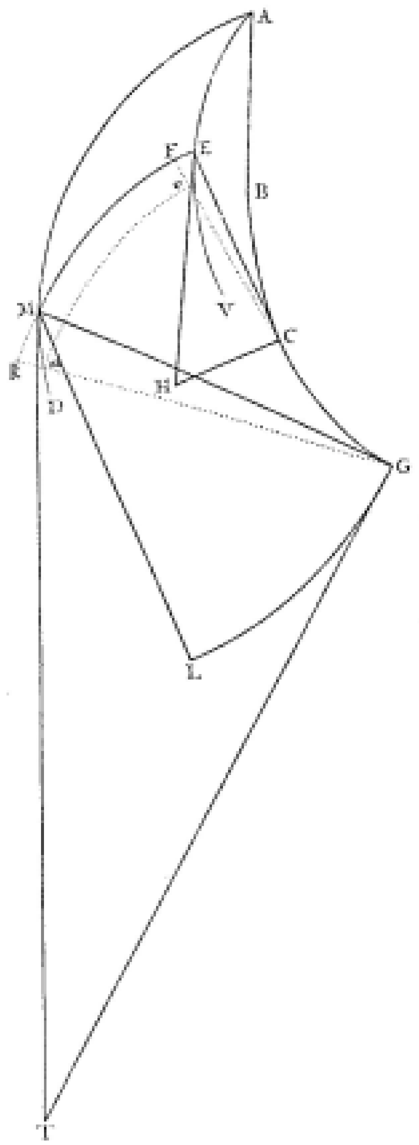


Figura 15

<u>Proposició III (art. 175)</u>

Sigui una semi-ruleta *AMD* descrita per la revolució del semi-cercle *BGN* al voltant d'un arc igual a *BGN* d'un altre cercle, de manera que les parts revolucionades *BG*, *BG* siguin sempre iguals entre elles; sigui el punt generador *M* pres sobre el diàmetre *BN* fora, dintre, o sobre la circumferència mòbil *BGN*. Es demana el punt *M* de la llargada més gran de la semi-ruleta respecte al seu eix *OA*. (L'HÔPITAL (1696), p. 151)

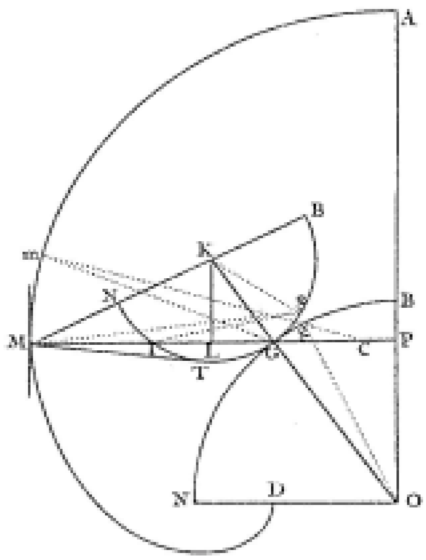


Figura 16*a*

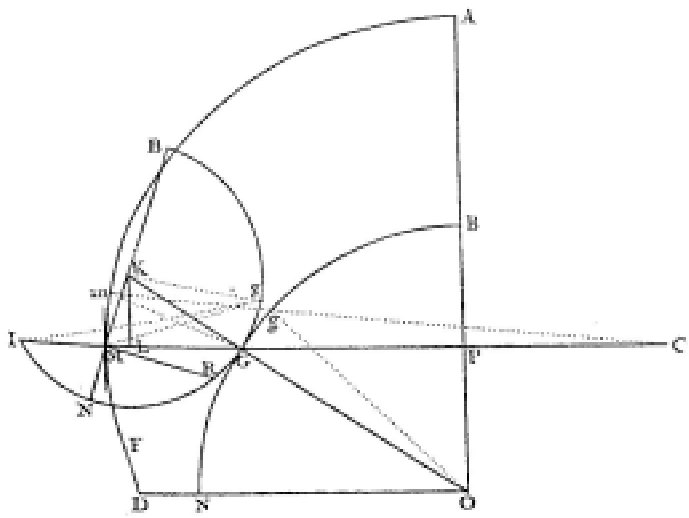


Figura 16*b*

Aquest problema es troba en les cartes 46 i 48, de Johann a L'Hôpital (març, 1695). En el cas del punt generador dintre de la circumferència mòbil, Johann busca també el punt d'inflexió. En canvi, L'Hôpital no. En la carta nº 48 Johann explica L'Hôpital que en la nº 46 li ha mostrat la forma més ràpida a partir de la generació de la corba, però a petició del marquès, en la nº 48 exposa l'equació de la cicloide amb coordenades. I d'aquesta segona forma (no geomètrica) pren $dy = 0$. Arriba a una igualtat algèbrica i troba el punt d'inflexió fent $ddy = 0$. Tanmateix, afirma que la seva primera solució és millor, ja que només es basa en simple analogia, sense càlculs.

A la carta nº 48 Johann escriu "(...) les solucions que s'obtenen de les equacions per a la relació de les coordenades de les corbes són generalment més prolixes que les altres que es troben per la generació mateixa de les corbes" (BERNOULLI (1955), p. 274) i "(...) és útil escollir la via més natural a l'hora de resoldre els problemes" (BERNOULLI (1955), p. 275). Això representa una diferència en el tractament de corbes algèbriques i transcendents respecte al de les *Lectiones*. En les lliçons de càlcul diferencial, Johann tracta la cicloide i la quadratriu amb coordenades ortogonals, mentre que L'Hôpital treballa aquestes corbes adaptant-se a la naturalesa de la corba (que és el que indica Johann en aquesta carta). Per tant, penso que L'Hôpital va modificar les *Lectiones* de Johann amb comentaris del propi Johann.

Proposició V (art. 182)

Es tracta de trobar la quadratura de la cicloide. La solució d'aquest problema apareix a la carta nº 50, de Johann a L'Hôpital (maig, 1695), i a les lliçons de càlcul integral.[43] La construcció de L'Hôpital canvia, però el plantejament bàsic és el mateix: treballar amb sectors infinitament petits de la cicloide. Mentre que Johann Bernoulli treballa amb els sectors amb vèrtex γ (sobre la corba generada):

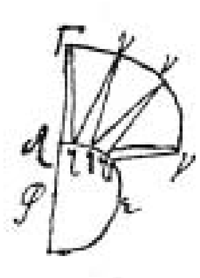


Figura 17

L'Hôpital considera el sector *OGg* de la Figura 16*a*.

Remarca (art. 186)

Aquí es tracta el cas d'una corba amb dues branques que es toquen entre sí (tot i que sembli que tingui un punt d'inflexió). Aquesta remarca es basa en l'exemple estudiat per Johann a la carta nº 50 (maig, 1695) i sorgeix arran de la corba de la força centrífuga

[43] A la pàgina 454, segons SPIESS (1955).

proposada per L'Hôpital a la carta nº 49 (abril, 1695). Segons Spiess, Johann no estudia l'aspecte de la corba en profunditat, per exemple ignora el cas d'un possible node.[44]

SECCIÓ X DE L'*ANALYSE*

<u>Remarca (art. 191)</u>

Aquesta remarca fa referència a les corbes amb punts de retrocés. En aquest cas, tant les paral·leles a l'eix d'abscisses com les paral·leles a l'eix d'aplicades troben la corba en dos punts. A un valor de *x* li corresponen dos valors de *y* (i viceversa). Per tant, es pot considerar *x* com a constant i *y* com a variable, quan es diferencia l'equació de la corba. Després d'haver diferenciat, tots els termes multiplicats per *dx*, d'una banda, i tots els termes multiplicats per *dy*, d'una altra, han de ser zero. Aquí *dx, dy* marquen les diferències de dues ordenades que parteixen del mateix punt i *no* la diferència de dues ordenades infinitament properes. Això apareix a la carta nº 25, de L'Hôpital a Johann (juny, 1694).

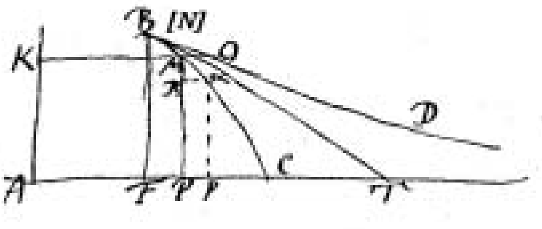


Figura 18

A la carta L'Hôpital tracta *MN* com a "diferencial", però a l'*Analyse* apareix com a "diferència". A la carta nº 26 (juny, 1694) Johann critica L'Hôpital perquè *MN*, *MO* són diferències finites i no diferencials. Per a Johann existeix diferència entre un infinitament petit i un diferencial: tot diferencial és infinitament petit però el recíproc no és cert. En el cas de les corbes amb punts de retrocés, tot i ser infinitament petits, *MN*, *NO* no s'inclouen en l'equació general dels diferencials de la corba. A la carta nº 25 (juny, 1694) L'Hôpital afirma que la raó *MN* a *MO* és com 0 sobre 0, i que aquesta raó pot ser qualsevol que es desitgi. Johann li contesta que ja li ha mostrat amb un exemple a la carta nº 28 (juliol, 1694) que 0 sobre 0 té un valor determinat.

---

[44] Vegeu BERNOULLI (1955), carta nº 50 (maig, 1695).

2.7. LA NOTACIÓ[45]

Al llarg dels dos textos es detecten diferències en la notació utilitzada. L'Hôpital nota les potències $\overline{}^{2}$, $\overline{}^{3}$, $\overline{}^{4}$,…[46] mentre que Bernoulli de vegades utilitza ☐, C, QQ per indicar potència quadrada, cúbica i quarta, respectivament.[47] Si s'han de multiplicar expressions llargues Bernoulli escriu *in*,[48] mentre que el seu alumne només nota ×.[49] Amb el símbol  Bernoulli indica el doble signe $\mp$, que sí que fa servir L'Hôpital.[50] Quant a les proporcions L'Hôpital utiliza *A.B*::*C.D*.[51] Bernoulli també, però no escriu les proporcions de forma tan clara. Per exemple, a la pàgina 26 de les *Lectiones* de Bernoulli trobem l'expressió:

$$dy = \frac{aabdx}{\overline{aa-2ax+xx}\sqrt{2ax-xx}} + \frac{adx-xdx}{\sqrt{2ax-xx}} \cdot dx :: y$$

$$(= \frac{\overline{a+b-x}}{a-x}\sqrt{2ax-xx}) \cdot t$$

per indicar que l'expressió $\frac{\overline{a+b-x}}{a-x}\sqrt{2ax-xx}$ (entre parèntesis) és igual a y, la diferència primera de la qual és $dy = \frac{aabdx}{\overline{aa-2ax+xx}\sqrt{2ax-xx}} + \frac{adx-xdx}{\sqrt{2ax-xx}}$, i que s'ha utilitzat la fórmula $\frac{dy}{dx} = \frac{y}{t}$ per trobar la subtangent t.

[45] Les referències històriques i els comentaris sobre les notacions utilitzades pels dos autors han estat extretes de CAJORI (1928-29).

[46] Descartes a la *Géométrie* (1637) ja utilitza aquesta notació (només per a enters positius), que és una intersecció entre la d'Hérigone i la de Hume. De fet, alternava aquesta notació amb la repetició de variables.

[47] El símbol ☐ fou utilitzat per Stampioen (1639) i els símbols C, QQ per Schott (1661).

[48] Utilitzat per Viète (1591).

[49] Aquest símbol apareix per primer cop a *Clavis mathematicae* (1631) d'Oughtred.

[50] El primer símbol fou utilitzat el 1649 (i fins el 1695) per van Schooten a les seves edicions de la geometria cartesiana. El segon símbol $\pm$ ja l'emprà Oughtred a *Clavis mathematicae* (1631).

[51] Aquesta notació apareix a *Clavis mathematicae* d'Oughtred el 1631.

3. FRANÇA

3.1. *ANALYSE DÉMONTRÉE* (1708) DE CHARLES RENÉ REYNEAU

El pare Charles René Reyneau[1] (1656-1728) va estudiar al Collège de l'Oratoire (Angers) i entrà a la Maison d'Institution de París el 1676. D'aquesta forma va establir contacte amb Nicolas Malebranche (1638-1715) i Jean Prestet (1648-1690). De fet, a partir de 1674 Malebranche era professor de matemàtiques al Collège de l'Oratoire. El 1679 Reyneau es traslla da al Collège de Toulon, on serà ordenat sacerdot el 1681. El 1682 substitueix Prestet com a professor de matemàtiques a la Universitat d'Angers. El 1705 deixa d'ensenyar, doncs s'està quedant sord. Torna a París i és aleshores que comença a escriure. El 1716 és nomenat soci lliure de l'Académie Royale des Sciences.

El 1698 Malebranche li va proposar escriure llibres de text que inclogueren totes les matemàtiques de finals del XVII. Donat que tenia certes dificultats per assimilar el càlcul diferencial i integral, treballà amb altres dos membres de l'Oratoire, Louis Byzance i Claude Jaquemet, millors matemàtics que ell. Reyneau es mostrà molt interessat en la controvèrsia Rolle-Varignon al voltant del càlcul diferencial i infinitesimal. El 1705 Reyneau entra en possessió dels papers de Louis Byzance, que inclouen una còpia de les *Lectiones* de Johann Bernoulli.[2] Alguns dels papers es perden quan els deixa a Pierre Rémond de Montmort (1678-1719), tot i que pot preservar els manuscrits del grup que envoltava Malebranche. El 1708 publicà l'*Analyse démontrée, ou la Méthode de résoudre les problèmes des mathématiques et d'apprendre facilement ces sciences*.[3] El 1714 publica un segon treball, *La science du calcul*, seguint les directrius de les matemàtiques de l'Oratoire, però que tingué menys èxit que el primer. També publicà un tractat sobre navegació, *Traité de la marine ou l'art de naviguer*. L'*Analyse démontrée* està constituïda per dos volums. El primer volum conté:

[1] Les fonts biogràfiques sobre Reyneau consultades són GILLISPIE (ed.) (1970) i O'CONNOR-ROBERTSON (1999).

[2] Copiades per Stähelin, amic de Johann. Vegeu SPIESS (1955).

[3] "... sabem que Malebranche encoratjà activament Reyneau perquè escrigués un text geomètric que remplacés un manuscrit no publicat d'un altre membre de l'Oratoire, Jean Prestet, perquè 'el del Pare Prestet és tan llarg i avorrit ....' L'*Analyse Démontrée* de Reyneau cobreix matemàtiques fonamentals així com també càlcul, d'aquí la seva descripció per part de Malebranche de que remplaçava el text geomètric de Prestet, que no tractava el càlcul..." (COSTA, 2001).

- Llibre I: *De l'anàlisi que ensenya a resoldre els problemes que es redueixen a equacions simples*.
- Llibre II: *Anàlisi composta, o anàlisi que ensenya a resoldre els problemes que es redueixen a equacions compostes*.
- Llibre III: *On s'explica la naturalesa de les equacions compostes, el nombre, i les qualitats de les seves arrels, i les seves transformacions*.
- Llibre IV: *On s'explica la resolució de les equacions en general, és a dir, de tots els graus, quan les seves arrels són commensurables*.
- Llibre V: *De la resolució d'equacions compostes en particular*.
- Llibre VI: *De l'aproximació de les arrels de les equacions numèriques*.
- Llibre VII: *De l'aproximació de les arrels de les equacions literals*.

El segon volum està constituït només pel llibre VIII, *Anàlisi composta o anàlisi que ensenya a resoldre els problemes que es redueixen a equacions compostes. On es fa veure l'ús de l'anàlisi en la geometria i en les ciències físico-matemàtiques*. La segona part d'aquest volum està dedicada als problemes geomètrics i físico-matemàtics que es poden resoldre mitjançant l'àlgebra, el càlcul diferencial i el càlcul integral. Serà aquesta part la que analitzaré:

- Primera Secció: *On s'explica el càlcul diferencial i els seus principis, així com els principis del càlcul integral*.
- Segona Secció: *Ús de l'anàlisi en la resolució de problemes de geometria composta, utilitzant el càlcul diferencial*.
- Tercera Secció: *On es descobreixen les fórmules dels principals problemes, la resolució dels quals comença pel càlcul diferencial i acaba pel càlcul integral*.
- Quarta Secció: *On s'explica la manera de trobar les sèries que són les integrals dels elements que es troben per les fórmules de la secció precedent*.

A més a més, el càlcul diferencial de les expressions logarítmiques i de les quantitats exponencials apareix a la tercera secció de la tercera part d'aquest segon volum.

A quin públic anava dirigit?

Malebranche proposà Reyneau l'elaboració de l'*Analyse démontrée* per ensenyar les noves matemàtiques de finals del segle XVII. El llibre està adreçat als principiants, perquè descobreixin les principals propietats de totes les corbes. Reyneau redueix a fórmules generals els problemes que ajuden a trobar-les.

Per què va tenir èxit?

Segons l'entrada del *Dictionary of Scientific Biographies* referent a Reyneau, aquest tenia gran habilitat pedagògica i els seus llibres de text impulsaren l'estudi de les matemàtiques a França a finals del XVII. La segona edició (1736-1738), augmentada amb comentaris de Varignon, és la que utilitzà D'Alembert per aprendre els fonaments de la nova matèria.

Va transcendir les fronteres de la seva terra?

Només tinc constància de les edicions franceses de l'*Analyse démontrée* (1708, 1736, 1738, 1739). Però per exemple Christian Wolff fa referència al llibre de Reyneau en el *Mathematisches Lexikon* (1716), fet aïllat de la comunicació entre França i Alemanya en aquest període.

Quina relació té amb l'Analyse?

Matemàtics com Varignon, L'Hôpital i Reynau formaren part del cercle que Malebranche creà a l'Oratoire. Una de les contribucions directes de Malebranche a les matemàtiques fou el seu paper editorial en la publicació de l'*Analyse*. D'altra banda, Reyneau recomana "l'excel·lent llibre de l'*Analyse des infiniment petits* del Marquès de L'Hôpital" (Reyneau, 1708, p. 171) per aquells que comencen a estudiar el càlcul.

3.2. *COURS DE MATHÉMATIQUES À L'USAGE DU CORPS DE L'ARTILLERIE* (1799-1800) D'ÉTIENNE BÉZOUT

Étienne Bézout[4] va néixer a Nemours (França) el 1730 i va morir a Basses-Loges (França) el 1783. El seu pare, magistrat a Nemours, volia que Étienne el succeís en l'ofici, però ell es va sentir atret per les matemàtiques, especialment a través de la lectura dels treballs d'Euler. Les seves consecucions ràpidament van ser reconegudes per l'Académie des Sciences, que el va nomenar *adjoint* l'any 1758, i *associé* i *pensionnarie* el 1768. El 1763 el Duc de Choiseul li ofereix una posició de professor i examinador en ciències matemàtiques per als futurs joves oficials navals, els *Gardes du Pavillon et de la Marine*. El 1768 desenvolupà tasques semblants per al *Corps d'Artillerie*.

La seva tasca com a docent va impedir que es dediqués més a la recerca. Es va limitar a la teoria de les equacions. Els seus dos primers articles (1758-1760) eren investigacions sobre integració, però el 1762 ja es dedicà completament a l'àlgebra. En la seva teoria sobre equacions algèbriques es veu la influència rebuda d'Euler. El seu treball influí en les investigacions en el camp de la teoria moderna de l'eliminació (Cauchy, Sylvester...). El 1762 publica "Sur plusieurs classes d'équations de tous les degrés qui admettent une solution algébrique" en *Mémoires de l'Académie royale des sciences*, on també publica "Sur le degré des équations résultantes de l'évanouissement des inconnues" (1764) i "Sur la résolution des équations de tous les degrés" (1765). El 1779 apareix la seva *Théorie générale des équations algébriques*. Entre el 1764 i el 1769 publica el *Cours de mathématiques à l'usage des Gardes du Pavillon et de la Marine*, en sis volums, que serà reimprès molts cops amb petites variacions en el títol, sovint traduït o revisat. Una d'aquestes reimpressions és el *Cours de mathématiques à l'usage du corps de l'artillerie* (1799-1800) que consta de quatre parts:

- La primera part conté l'aritmètica, la geometria i la trigonometria rectilínia.
- La segona part conté l'àlgebra i l'aplicació de l'àlgebra a la geometria.
- La tercera part conté els principis generals de la mecànica i l'hidrostàtica. Precedits dels principis del càlcul que serveix d'introducció a les ciències físico-matemàtiques.

- La quarta part conté l'aplicació dels principis generals de la mecànica per a diferents casos de moviment i equilibri.

La tercera part és la que he analitzat i comparat amb la resta de textos.

Per què va tenir èxit?

Tot i que de vegades se l'acusa de manca de rigor, els seus llibres podien ser entesos per aquells qui necessitaven fer servir les matemàtiques. És a dir, els seus llibres eren molt populars i emprats. L'orientació dels llibres per als seus estudiants és més aviat pràctica, i l'exposició clara, donat que el seu objectiu era ensenyar matemàtiques i mecànica elementals, necessàries per a la navegació i la balística. L'experiència d'instruir a no-matemàtics donà forma als seus treballs. Els seus textos foren molt utilitzats a França.

A quin públic anava dirigit?

Entre les seves publicacions s'inclouen les lliçons als seus estudiants. Li assignaren la funció d'elaborar un llibre de text especialment dissenyat per ensenyar matemàtiques als estudiants (de la marina, d'artilleria,...). El *Cours complet de mathématiques à l'usage de marine et de l'artillerie* fou durant molts d'anys el llibre que els estudiants candidats a entrar en l'École Polytechnique estudiaven.

Va transcendir les fronteres de la seva terra?

La claredat i orientació pràctica dels seus textos els feren atractius als Estats Units. Així a principis del segle XIX els seus textos van ser traduïts a l'anglès per al seu ús a les escoles nordamericanes. De fet, un dels traductors, John Farrar, les utilitzà per a les seves lliçons de càlcul a Harvard (*First Principles of the Differential and Integral Calculus, or the doctrine of fluxions, intended as an introduction to the physico-mathematical sciences, taken chiefly from the Mathematics of Bézout...* el 1824 i el1836). Aquestes traduccions van influir considerablement en la forma i contingut de l'educació matemàtica dels Estats Units en el segle XIX. També cal esmentar que els

---

[4] Les fonts biogràfiques sobre Bézout consultades són GILLISPIE (ed.) (1970) i O'CONNOR-ROBERTSON (1999).

Elementos de Matemáticas (1772) de Benito Bails (1730-1797) es basen en el curs de matemàtiques de Bézout.[5]

Quina relació té amb l'Analyse?

No he trobat cap comentari de Bézout en referència a l'obra de L'Hôpital. No obstant l'exposició dels principis del càlcul diferencial és anàloga a la de l'*Analyse* de L'Hôpital.

3.3. *LEÇONS SUR LE CALCUL DES FONCTIONS* (1800) DE JOSEPH LOUIS LAGRANGE

Joseph-Louis Lagrange[6] va néixer el 1736 a Torí i fou batejat amb el nom de Giuseppe Lodovico Lagrangia. El seu pare, Tresorer de l'Oficina de Treballs Públics i Fortificacions a Torí, volia que esdevingués advocat. Joseph-Louis acceptà i estudià al Col·legi de Torí. El seu interès per les matemàtiques començà en llegir una còpia del treball de Halley sobre l'aplicació de l'àlgebra a l'òptica (1693). Bàsicament va aprendre sol, sense l'ajuda de cap matemàtic remarcable. El 1754 publica el seu primer treball matemàtic, sota la forma d'una carta adreçada a Giulio Fagnano. En aquest article exposa una analogia entre el teorema del binomi i les derivades successives del producte de funcions. Abans de la publicació en italià, envià la traducció llatina a Euler (a Berlín). Un mes després de la publicació Lagrange va saber que els seus resultats ja havien aparegut en la correspondència entre Johann Bernoulli i Leibniz. Tanmateix, va començar a treballar sobre la tautocrona, sobre la qual va dur a terme importants descobertes amb què contribuí de forma substancial al càlcul de variacions. Lagrange envià els resultats sobre la tautocrona a Euler, que en quedà impressionat.

El 1755 Lagrange esdevé professor de matemàtiques a la Reial Escola d'Artilleria de Torí. Per recomanació d'Euler, Maupertuis li ofereix una plaça a Prússia, que Lagrange refusa. Euler també el proposà com a membre de l'Acadèmia de Berlín, essent elegit el

[5] Vegeu CAPEL (1988).

[6] A més de GILLISPIE (ed.) (1970) i O'CONNOR-ROBERTSON (1999), per completar la informació biogràfica sobre Lagrange també he consultat BORGATO-PEPE (1987).

1756. L'any següent Lagrange va ser un dels membres fundadors de la societat científica de Torí, que esdevindria l'Acadèmia Reial de Ciències de Torí. Un dels principals papers de la societat fou la publicació de la revista científica *Miscellanea Philosophico-Mathematica Societatis Privatae Taurinensis*, de la qual el primer volum aparegué el 1759, que contenia tres memòries de Lagrange (sobre màxims i mínims, sobre la integració d'una equació diferencial amb diferències finites i sobre la corda vibrant). Lagrange escriu en italià (perquè així ho exigeix el reglament de l'Escola) els *Principj di Analisi sublime* (1759),[7] que és un tractat sobre càlcul diferencial i integral per l'ús de l'estudiant.

Lagrange participà en els concursos proposats per l'Acadèmia de Ciències de París el 1764 i el 1766. D'Alembert, que havia visitat l'Acadèmia de Berlín i era amic de Frederic II de Prússia, aconseguí l'oferta d'una plaça a l'Acadèmia de Berlín per a Lagrange, el qual la refusà un altre cop. El 1766, com a conseqüència de la tornada d'Euler a Sant Petersburg, li van tornar a oferir la plaça a Berlín i, finalment, Lagrange acceptà ser el Director de Matemàtiques de l'Acadèmia de Ciències de Berlín, on romandrà durant 20 anys. El seu treball a Berlín cobria molts tòpics: astronomia, mecànica, dinàmica, probabilitat, els fonaments del càlcul, …

El 1787 Lagrange deixa Berlín i esdevé membre de l'Acadèmia de Ciències de París, oferta que incloïa una clàusula que especificava que Lagrange no havia d'impartir classes. El 1788 publica la *Mécanique analytique*, que havia escrit a Berlín, i que tingué l'aprovació de la comissió de l'Acadèmia (Laplace, Cousin, Legendre i Condorcet). Aquesta obra recollia tot el que s'havia fet en el camp de la mecànica des de Newton i és remarcable per l'ús de la teoria de les equacions diferencials. Lagrange fou membre de la comissió de pesos i mesures el 1790, que treballà en el sistema mètric decimal. En començar el Terror (1793) l'Acadèmia de Ciències, entre altres societats, fou suprimida. Tanmateix, a la comissió de pesos i mesures se li permeté de continuar. Lagrange sobrevisqué també al Terror. El 1794 fou inaugurada l'École Polytechnique, de la qual Lagrange fou el primer professor d'anàlisi. També donà cursos sobre matemàtiques elementals a l'École Normale (fundada el 1795). Lagrange publicà dos volums amb les seves lliçons sobre càlcul. El primer, la *Théorie des fonctions analytiques* (1797), fou la

[7] Analitzat en el capítol corresponent a Itàlia.

primera teoria de funcions de variable real, on s'exposen els principis del càlcul diferencial, lliures dels infinitesimals, límits, fluxions… i reduïts a l'anàlisi algèbrica de les quantitats finites.[8] El segon volum apareix el 1800 amb el títol *Leçons sur le calcul des fonctions* i conté les vint-i-dues lliçons següents:

- Lliçó primera: *Sobre l'objecte del càlcul de funcions i sobre les funcions en general*.
- Lliçó segona: *Sobre el desenvolupament d'una funció d'una variable, quan s'atribueix un creixement a aquesta variable. Llei general d'aquest desenvolupament. Origen de les funcions derivades. Ordres diferents d'aquestes funcions. Llur notació.*
- Lliçó tercera: *Funcions derivades de les potències. Desenvolupament d'una potència qualsevol d'un binomi*.
- Lliçó quarta: *Funcions derivades de les quantitats exponencials i logarítmiques. Desenvolupament d'aquestes quantitats en sèries.*
- Lliçó cinquena: *Funcions derivades dels sinus i cosinus d'angles, i dels angles expressats pels sinus i cosinus. Desenvolupament d'aquestes quantitats en sèries*.
- Lliçó sisena: *Funcions derivades de les quantitats compostes de diferents funcions d'una mateixa variable o dependents d'aquestes funcions per equacions donades*.
- Lliçó setena: *Sobre la manera de relacions les funcions derivades amb diferents variables*.
- Lliçó vuitena: *Del desenvolupament de les funcions quan es dóna a la variable un valor determinat. Anàlisi d'aquests casos. Dels valors de les fraccions, el numerador i el denominador de les quals s'anul·len alhora*.
- Lliçó novena: *De la manera de tenir els límits del desenvolupament d'una funció, quan només es té en compte un nombre determinat de termes. Casos en què els principis del càlcul diferencial fallen. Teorema fonamental. Límits de diverses sèries. Manera rigorosa d'introduir les funcions derivades en la teoria de corbes i en la dels moviments variats*.
- Lliçó desena: *De les equacions derivades i del seu ús per a la transformació de les funcions. Anàlisi de les seccions angulars*.
- Lliçó onzena: *Continuació de l'anàlisi de les seccions angulars, on es demostren les fórmules generals donades en la lliçó precedent*.

[8] ..."i crec haver desenvolupat la veritable metafísica dels seus principis [del càlcul diferencial i integral], tant com és possible" (citat per BORGATO-PEPE, 1987, p. 27).

- Lliçó dotzena: *Teoria general de les equacions derivades i de les constants arbitràries*.
- Lliçó tretzena: *Teoria dels multiplicadors de les equacions derivades*.
- Lliçó catorzena: *Dels valors singulars que satisfan les equacions derivades, i que no estan compreses dins les equacions primitives. Teoria de les equacions primitives singulars*.
- Lliçó quinzena: *Com l'equació primitiva singular resulta de l'equació derivada*.
- Lliçó setzena: *Equacions derivades que tenen equacions primitives singulars donades. Anàlisi d'una classe d'equacions de tots els ordres, que tenen sempre necessàriament equacions primitives singulars*.
- Lliçó dissetena: *Sobre diferents problemes relatius a la teoria de les equacions primitives singulars*.
- Lliçó divuitena: *Digressió sobre les equacions a diferències finites, sobre el pas d'aquestes diferències als diferencials i sobre la invenció del càlcul diferencial*.
- Lliçó dinovena: *De les funcions de dues o diverses variables; de llurs funcions derivades. Notació i formació d'aquestes funcions*.
- Lliçó vintena: *Equacions derivades de diverses variables. Teoria d'aquestes equacions. Mètodes generals per torbar les equacions primitives de les equacions de primer ordre de diverses variables*.
- Lliçó vint-i-unena: *De les equacions de condició per les quals es pot reconèixer si una funció d'un ordre qualsevol de diverses variables és una funció derivada exacta. Analogia d'aquestes equacions amb aquelles del problema dels isoperimètrics. Història d'aquest problema. Mètode de les variacions*.
- Lliçó vint-i-dosena: *Mètode de les variacions, deduït de la consideració de les funcions*.

La primera part de la *Théorie des fonctions analytiques*[9] es titula "Exposició de la teoria, amb els seus principals usos en l'anàlisi", que coincideix pràcticament amb les *Leçons*.[10]

[9] En el prefaci de la *Théorie* Lagrange diu que la segona edició (1813) és més correcta que la primera, està millor ordenada, dividida per capítols, donat que la primera edició l'anava component a mesura que imprimia. Hi ha alguna diferència quants als capítols XIV (de la segona part) i V (de la tercera part).

[10] Una de les diferències principals entre les *Leçons* i la primera part de la *Théorie* és que a les *Leçons* parla del mètode de variacions, però a la *Théorie* no. Una altra diferència és que la *Théorie* conté més sobre equacions diferencials que les *Leçons*.

Per què va tenir èxit?

Com a filosofia, com a intent rigorós de fonamentació, la teoria de Lagrange va ser lloada. Però a la pràctica no, cas similar al de Maclaurin. Els infinitesimals seguien essent utilitzats donat que s'adaptaven millor a la naturalesa dels problemes.[11] Entre els seus (pocs) defensors es troben Louis Arbogast (1759-1803) i August Crelle (1780-1855), que va preparar les traduccions a l'alemany dels llibres de Lagrange sobre la matèria[12]. Es van fer diverses edicions en francès de les *Leçons* (1800, 1804, 1806, 1866).

A quin públic anava dirigit?

Leçons sur le calcul des fonctions recull les lliçons que va donar als alumnes de l'École Normale i més endavant les reimprimeix per a l'ús dels seus alumnes de l'École Polytechnique. En el prefaci de la *Théorie* Lagrange comenta que les *Leçons* serveixen de comentari i continuació de la primera part de la *Théorie*. L'objectiu de l'obra és "donar la teoria de funcions, considerades com primitives i derivades, resoldre a partir d'aquesta teoria els principals problemes de l'Anàlisi, la Geometria i la Mecànica, que s'han fet dependre del Càlcul Diferencial i donar així a la solució d'aquests problemes tot el rigor de les demostracions dels antics". En les obres completes de Lagrange, tant les *Leçons* com la *Théorie* estan recollides dins de la secció d'Obres Didàctiques.

Va transcendir les fronteres de la seva terra?

Les *Leçons* foren traduïdes a l'anglès (1806) i a l'alemany (1823).[13] En general, les traduccions del francès a l'alemany esdevingueren més freqüents a partir del 1790, però en l'altre sentit no.[14]

---

[11] Segons de Prony com a filosofia, com a intent rigorós de fonamentació del càlcul, l'enfocament de Lagrange tingué èxit, però a nivell pràctic no (com a instrument d'exploració en qüestions d'astronomia, marina, geodèsia, enginyeria...). I lloa els avantatges pràctics dels infinitament petits. Vegeu GRATTAN-GUINNES (1990), p. 133).

[12] Vegeu GRATTAN-GUINNESS (1970), pp. 14-15, nota 37.

[13] La *Théorie* fou traduïda a l'alemany (1798-99, 1813, 1823) i al portuguès (1798). A més, el 1799 a Postdam es publcia *Anfangsgründe der Differential-Rechnung: Nach Lagrange's Théorie des Fonctions Analytiques*, de J. P. Von Rohde. Woodhouse possiblement escrigué alguns *reviews* sobre les matemàtiques continentals a *Monthly review*. En particular, Grattan-Guinness sospita que fou ell qui escrigué sobre *Théorie* de Lagrange el 1799. Vegeu GRATTAN-GUINNESS (1990), pp. 264-266).

[14] Vegeu SCHUBRING (1996), p. 367.

Quina relació té amb l'Analyse?

En la seva joventut Lagrange havia llegit l'*Analyse* i en fa referència als seus *Principj*.[15]

3.4. *TRAITÉ ÉLÉMENTAIRE DE CALCUL DIFFÉRENTIEL ET DE CALCUL INTÉGRAL* (1802) DE SYLVESTRE FRANÇOIS LACROIX

Sylvestre François Lacroix[16] (1765-1843) va ser un destacat autor de llibres de text matemàtics. El seu nom també va lligat al del seu tutor i amic, Gaspard Monge (1746-1818) i a la geometria analítica. Els seus llibres de text van influir de forma important durant uns cinquanta anys (de 1795 a 1845). Va tractar totes les branques de les matemàtiques escolars i tots els graus d'escola, des de la secundària fins a l'educació superior. La seva obra va ser la que millor contribuí a la constitució de les matemàtiques escolars a França. Lacroix es va comprometre a integrar les matemàtiques dins l'educació general. En general, s'inspirava en l'obra d'altres matemàtics. Per exemple, el seu tractat de geometria descriptiva es basa en el curs de geometria descriptiva de Monge, al qual ajudà a l'École Normale. El seu tractat sobre aritmètica es basa en bona part en el treball de Biot.[17] Lacroix reconeix que el seu tractat sobre àlgebra l'ha completat amb notes i addicions de l'àlgebra de Clairaut i també en part es basa en el treball de Bézout.

L'objectiu principal de Lacroix va ser donar una visió universal i coherent de les matemàtiques, des de l'educació secundària fins a la superior, justament quan s'estableix per primer cop un sistema d'educació general i públic (primer a França i, més endavant, a Prússia). El cos del coneixement matemàtic estava mal organitzat i dispers. Lacroix s'imposà la tasca de reestructurar-lo. Lacroix publica el monumental *Traité du calcul différentiel et du calcul intégral*, primer tractat general sobre teoria i

[15] Vegeu el capítol *Itàlia*.

[16] Les fonts biogràfiques consultades en aquest cas són GILLISPIE (ed.) (1970), SCHUBRING (1987) i O'CONNOR-ROBERTSON (1999).

[17] Vegeu SCHUBRING (1987), p. 45.

aplicacions del càlcul infinitesimal després de l'*Introductio in Analysin Infinitorum* d'Euler (1748). És una obra clara, documentada i actualitzada sobre l'anàlisi matemàtica. El *Traité de calcul différentiel et de calcul intégral* recull els resultats originals de diversos investigadors (Euler, Lagrange, Laplace, Monge, Legendre, Poisson, Gauss, Cauchy...), apareguts de forma dispersa en publicacions de diverses acadèmies europees. El 1797 n'apareix el primer volum, dedicat al càlcul diferencial. El 1798, el segon, que tracta el càlcul integral. Finalment, el 1800, n'apareix el tercer, que és un apèndix sobre càlcul de diferències i sèries. Hi va haver una segona edició en tres volums el 1810, 1814 i 1819, respectivament.

Més endavant, el 1802, Lacroix publica el *Traité élémentaire de calcul différentiel et de calcul intégral*. A diferència del *Traité de calcul différentiel et de calcul intégral*, és un tractat elemental (o manual) sobre càlcul diferencial i integral, dirigit als seus alumnes de l'École Polytechnique. La part del *Traité élémentaire de calcul différentiel et de calcul intégral* dedicada al càlcul diferencial consta de les següents seccions:

- *Nocions preliminars i principis de la diferenciació de les funcions d'una sola variable*.
- *De les diferenciacions successives*.
- *De la diferenciació de funcions transcendents*.
- *De la diferenciació d'equacions qualssevol amb dues variables*.
- *Recerca dels màxims i mínims de les funcions d'una sola variable*.
- *Dels valors que prenen en alguns casos els coeficients diferencials, i de les expressions que esdevenen 0/0*.
- *Aplicació del càlcul diferencial a la teoria de corbes*.
- *Recerca dels punts singulars de les corbes*.
- *Exemple de l'anàlisi d'una corba*.
- *De les corbes osculadores*.
- *De les corbes transcendents*.
- *Del canvi de la variable independent, o com canvia la diferencial que s'ha pres per constant, en un altra que no l'és*.
- *De la diferenciació de les funcions de dues o d'un nombre més gran de variables*.
- *Recerca dels màxims i dels mínims de les funcions de dues variables*.
- *Nocions generals sobre l'aplicació del càlcul diferencial a la teoria de les corbes de doble curvatura i de les superfícies corbes*.

- En un apèndix parla de diferències i sèries.

Amb el *Traité élémentaire de calcul différentiel et de calcul intégral* Lacroix no només sintetitza els resultats originals d'altres investigadors, sinó que també els estructura i "elementaritza". Amb aquest darrer mot, Schubring designa l'anàlisi dels elements del càlcul, com a camp conceptual, presentant-lo de forma ordenada i ben definida a partir d'elements bàsics.[18] Tot i que el seu treball conté poc material realment innovador i original, Lacroix jugà un paper molt important a l'hora de difondre les noves teories matemàtiques degut a la seva claredat i sentit pedagògic.

Tot mirant l'índex s'observen diferències entre el *Traité* i el *Traité élémentaire*: el *Traité* presenta un capítol d'introducció, on s'exposen les nocions generals sobre funcions i sèries (diferències i sèries en un apèndix del *Traité élémentaire*). A més a més, el capítol tercer està dedicat a les equacions algèbriques i el quart a la teoria de les línies corbes. En aquest darrer capítol primer exposa una visió general de les línies corbes i després parla de la l'aplicació del càlcul diferencial a la teoria de corbes (mentre que en el *Traité élémentaire* només n'apareix l'aplicació).

Per què va tenir èxit?

Lacroix va ser un reconegut autor de llibres de text del XIX. A més a més del *Traité élémentaire de calcul différentiel et de calcul intégral*[19] també publicà, entre d'altres, *Traité élémentaire d'arithmétique* (1797), *Traité élémentaire de trigonométrie rectiligne et sphérique et d'application de l'algèbre à la géométrie* (1798), *Élémens de géométrie* (1799) i *Complément des élémens d'algèbre* (1800). Bensaude-Vincent es qüestiona si l'experiència com a professor pot facilitar la tasca d'elaboració de tractats elementals.[20] En Lacroix conflueix la seva experiència docent amb una extensa producció de llibres de text. Va ser professor de matemàtiques a l'École de Gardes de la Marine de Rochefort, al Lycée de París, a l'École Militaire de París, a l'École Royale d'Artillerie de Besançon, a l'École Centrale des Quatre Nations de París, a l'École Polytechnique...

---

[18] Vegeu SCHUBRING (1987), p. 43.
[19] D'aquesta obra apareix la novena edició francesa el 1881.
[20] Vegeu BENSAUDE-VINCENT (1990), p. 438.

D'altra banda va formar part del tribunal en el concurs convocat el 1794 per escollir el millor llibre de text de cada assignatura. Es considerava que la prescripció de llibres de text per part del govern central asseguraria "la lleialtat al caràcter republicà i l'aplicació uniforme del 'bon mètode'" (SCHUBRING (1987), p. 42). L'any següent el propi Lacroix s'hi va presentar i la seva obra fou seleccionada. Segons Grattan-Guinness[21] el nivell dels llibres de Lacroix estava per sota del nivell de penetració d'Euler i Lagrange. Però tingueren èxit perquè presentaven un compendi de les tècniques establertes en l'època ("enciclopedisme"). Grattan-Guinness opina que les tradicions del 1800 es mantingueren, enriquiren i estengueren, més que no pas canviar de forma substancial. Per això, la segona edició del *Traité* de Lacroix és ampliada amb la teoria de Lagrange.[22] De fet, Lacroix fou l'únic autor francès, gairebé totes les obres del qual foren traduïdes a l'alemany.[23]

A quin públic anava dirigit?

Els textos que Lacroix publicà estaven relacionats amb els diferents ensenyaments que impartí. En particular, a l'École Polytechnique Lacroix va utilitzar el seu *Traité élémentaire de calcul différentiel et de calcul intégral*. Durant més de mig segle, amb els seus textos va contribuir a la formació dels matemàtics del XIX.[24]

Va transcendir les fronteres de la seva terra?

Per renovar l'esperit científic anglès, una de les primeres accions de l'escola formada per Babbage, Peacock i Herschel va ser traduir el *Traité élémentaire de calcul différentiel et de calcul intégral* de Lacroix a l'anglès (*An elementary treatise on the differential and integral calculus*, 1816). El 1831 va ser traduït a l'alemany (*Handbuch der Differential-und Integral-Rechnung*, traducció de Baumann, de la quarta edició). El *Traité du calcul différentiel et du calcul intégral* també es va traduir a l'alemany

---

[21] Vegeu GRATTAN-GUINNESS (1997*a*), p. 30.
[22] Vegeu GRATTAN-GUINNESS (1997*a*), p. 267.
[23] Vegeu SCHUBRING (1996), p.367.
[24] En el capítol primer de la part del *Traité* dedicada al càlcul diferencial, Lacroix considera que és difícil explicar la naturalesa d'aquesta matèria als principiants. Però Lacroix creu que es pot començar un tractat amb definicions, donant nom a les coses, designades clarament en termes coneguts.

(*Lehrbegriff des Differential und Integralcalculs*, traducció de P. Grüson de la primera edició, 1799).

Quina relació té amb l'Analyse?

Lacroix cita l'*Analyse* de L'Hôpital com a referència en el capítol "Exposició analítica dels principis del Càlcul Diferencial" del *Traité du calcul différentiel et du calcul intégral*.

3.5. ANÀLISI COMPARATIVA DELS TEXTOS

3.5.1. COM EXPOSA ELS FONAMENTS DEL CÀLCUL?

Reyneau: Reyneau defensava el càlcul leibnizià. Hem de tenir en compte que Leibniz transmeté moltes de les idees del seu càlcul a Malebranche, que ajudà a propagar-les. I Reyneau pertany al cercle de Malebranche. El seu llibre es publica després del debat Rolle-Varignon (però abans de l'atac de Berkeley, 1734). Reyneau sembla defensar el càlcul contra les dues crítiques bàsiques de Rolle: la manca de rigor lògic dels conceptes i principis fonamentals, i els resultats erronis als quals porta el càlcul. En el prefaci de l'*Analyse démontrée* (punt 500), Reyneau justifica l'existència dels infinitament petits, tot basant-se en què els Grecs també els utilitzaven. Dues quantitats es poden considerar iguals quan la seva diferència és menor que qualsevol quantitat finita i determinada, per petita que sigui. El cercle es pot considerar com un polígon d'infinits costats infinitament petits. Reyneau fa referència al Llibre XII d'Euclides. Afirma que, mentre que els Grecs feien servir les demostracions per reducció a l'absurd, el càlcul (diferencial i integral) permet resoldre de manera curta i fàcil la major part dels problemes de difícil resolució mitjançant la geometria composta (ordinària). També parla de composició de moviments generadors, en termes de velocitats. Reyneau afirma que el principi del càlcul diferencial serveix per demostrar sense càlculs algunes proposicions de la geometria composta. La quarta observació de la primera secció parla de l'exactitud de les demostracions, de la certesa de les resolucions trobades mitjançant el càlcul diferencial i integral. Una de les crítiques de Rolle va ser que el càlcul diferencial portava a resultats erronis quan es comparaven amb els resultats obtinguts a partir d'altres mètodes. Reyneau afirma que el càlcul té la mateixa exactitud geomètrica que l'antiga geometria, doncs els antics utilitzaven els infinitament petits a l'hora de demostrar un resultat, que s'anul·laven al final de la demostració.[25]

Per trobar la *regla de diferenciació del producte*, elimina *dxdy* per ser una quantitat infinitament petita respecte $xdy + ydx$. L'eliminació de *dxdy* la *justifica* com havia fet Newton. Substitueix *x*, *y* primer $x - \frac{1}{2}dx, y - \frac{1}{2}dy$, i després per $x + \frac{1}{2}dx, y + \frac{1}{2}dy$, respectivament. Les dues expressions resultants es resten, donant lloc a $xdy + ydx$. D'aquesta forma Newton pensava que evitava els infinitament petits. Aquesta "compensació d'errors" va ser una de les crítiques de Berkeley al mètode de Newton. Als elements dx, dy també se li poden aplicar les regles algèbriques. Només elimina quantitats com $dxdy, dx^2, \ldots$ quan les compara amb *dx*, per exemple.

Bézout: El càlcul diferencial estudia les variacions que pateixen les quantitats per arribar a un estat de grandesa o un altre. Mitjançant el càlcul diferencial arriba als mateixos resultats que, per exemple, amb l'Àlgebra, però de forma més expeditiva. Aquest fet l'utilitza per justificar perquè s'eliminen quantitats de segon ordre respecte les de primer (veure exemple, punt 30). Una quantitat és infinita o infinitament petita respecte una altra, quan no és possible assignar cap quantitat prou gran o prou petita per explicar la raó d'aquestes dues, és a dir, el nombre de vegades que una conté l'altra. No hi ha cap quantitat tan petita o tan gran respecte d'una altra, que no es pugui concebre una tercera infinitament més petita o més gran. Per exemple, si *x* és infinit respecte *a* (encara que no es pugui assignar la raó que hi ha entre ells), es pot concebre una tercera quantitat que, respecte *x*, sigui com *x* respecte *a*. Dit d'una altra manera, la quarta proporcional de $a : x :: x :;$ (que és infinitament més gran que *x*, ja que conté *a*).[26] Al revés, la quarta proporcional de $x : a :: a :;$ és infinitament més petita que *a*, doncs està continguda en *a*. El producte de dues quantitats infinites o infinitament petites de primer ordre és infinitament més gran o més petit que cadascun dels dos factors. Per exemple, si *x* és infinit significa que conté una infinitat de cops la unitat, i *xy* conté una infinitat de cops

[25] Vegeu REYNEAU (1708), p. 165.
[26] Aquí la quantitat buscada ve indicada pel punt i coma.

y. És a dir: $xy : y :: x : 1$. L'ordre d'infinit/infinitament petit ve marcat pel nombre de factors infinits continguts en el producte, en la potència... Si x és infinit respecte a, aleshores a infinitament petit respecte x. Bézout diu que això en càlcul s'expressa rebutjant dins l'expressió algèbrica on es troben aquestes quantitats totes les potències de x inferiors a la més alta i tots els termes sense x ($\frac{a}{x}$ pot ser eliminat, doncs està per sota de qualsevol quantitat).[27]

La *regla de diferenciació del producte*: el terme $dydx$ s'ha d'ometre perquè és infinitament petit de segon ordre i, per tant, infinitament petit respecte *xdy* i respecte *ydx*, que són infinitament petits de primer ordre.

Lagrange: En la introducció de les *Leçons* Lagrange comenta que, allò que comunament es coneix com a càlcul "infinitesimal" o "transcendent", en realitat és *càlcul de funcions*. El seu objecte és el mateix que el del càlcul diferencial, però a més serveix per relacionar-lo amb l'àlgebra. Exposa les dificultats dels enfocaments d'altres estudiosos de la matèria: Leibniz i els infinitament petits; Euler i els "zeros" (cas 0/0); Maclaurin i D'Alembert i els límits quan les diferències s'anul·len (cas 0/0 també; a més a més, després d'assolir el 0 aquests límits podrien seguir decreixent i convertir-se en negatius; critica la idea de tangent com a límit de secants, que recolzava D'Alembert, perquè què impedeix la secant, un cop assolida la posició de la tangent, no seguir endavant?); fluxions (la determinació analítica de velocitats també depèn de la consideració de quantitats "evanescents"). Tots aquests enfocaments són, però, diferents maneres de considerar el mateix mètode, bons per la seva generalitat i simplicitat, però mancats de l'evidència i el rigor de les antigues desmotracions. La solució que proposa Lagrange són les *funcions derivades*, aparentment deslligada dels infinitesimals, límits, és un objecte que obeeix determinades lleis algèbriques; Lagrange es basa en el concepte de funció i de desenvolupament en sèrie de Taylor d'una funció.

---

[27] Per corroborar que aquest fet porta a resultats congruents, considera la progressió $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \ldots$, que es veu que va cap a 1. Segons el fet que exposa Bézout, quan x se'n va a l'infinit, la fracció $\frac{x}{x+1}$ és

Lacroix: Segons Lacroix (punt 60) l'origen del càlcul diferencial és la geometria, tot i que després aquesta nova matèria hagi estat presentada des de diferents punts de vista. Tanmateix, afirma que, sigui quin sigui l'origen del càlcul diferencial, aquest sempre descansa sobre un fet analític preexistent a tota hipòtesi. Aquest fet és que totes les funcions admeten un límit de la raó dels seus creixements amb els de la variable de la qual depenen. Diu que "el càlcul diferencial és la recerca del *límit* de la raó d'increments simultanis d'una funció i de la variable de la qual depèn" (Lagrange, 1802, punt 5). Així com l'objecte de l'àlgebra és una quantitat considerada en ella mateixa, l'objecte de l'anàlisi és una quantitat que passa per diversos estats. Aquests estats són observables a partir de les funcions. Lacroix defineix el coeficient diferencial i l'identifica amb el límit de la raó.[28] Amb notes a peu de pàgina justifica el càlcul leibnizià en termes de límits.[29]

Corba com a polígon

A partir de polígons inscrits i circumscrits amb costats que disminueixen infinitament, Reyneau identifica el cercle amb un polígon d'infinits costats, infinitament petits. De fet, si *u* és un arc de corba, *du* és un línia recta infinitament petita que coincideix amb la corba i amb la tangent a la corba. Bézout també defineix la tangent a partir de la representació de la línia corba com un polígon d'infinits costats infinitament petits (punt 30).[30] En canvi, Lacroix comenta que es pot entendre la corba com el límit de tots els polígons inscrits, és a dir, com un polígon d'infinits costats.[31] En una nota afegeix que aquest, aproximadament, és el punt de vista de Leibniz. Però que la diferència radica en què, mentre per a Lacroix el límit dels polígons és la corba, per a Leibniz el límit és un polígon d'infinits costats infinitament petits.[32] De fet, en els punts 84 i 85, demostra que

---

igual a $\frac{x}{x}$, és a dir, igual a 1.

[28] Vegeu LACROIX (1802), punt 4.

[29] Vegeu, per exemple, LACROIX (1802), punts 7 i 63. Al *Traité* Lacroix també presenta l'origen analític que Lagrange ha donat al càlcul diferencial, independent dels infinitesimals. Vegeu LACROIX (1797-1800), punt 8. Quant a l'infinit i l'infinitament petit, Lacroix diu que una quantitat gran pot ser superada tants cops com es vulgui (*idea d'infinit*). Una quantitat petita mai no és tan petita que no es pugui trobar una altra encara més petita (*idea de quantitat infinitament petita*).

[30] Lagrange, a la *Théorie*, defineix la tangent des de diversos punts de vista. Un dels quals presenta la tangent com la prolongació dels costats infinitament petits de la corba, considerada com a polígon d'infinits costats.

[31] De fet, al *Traité* Lacroix presenta la tangent com a prolongació d'un d'aquests costats.

[32] Vegeu LACROIX (1802), p. 78, en nota a peu de pàgina. A partir del punt 285 del *Traité* Lacroix explica els mateixos resultats obtinguts abans, considerant ara la corba com el límit del polígon.

un arc petit de corba es pot identificar amb la seva corda (és a dir, que la raó de l'arc amb la corda té límit 1) i d'aquesta manera, troba la diferencial de l'arc.

Variable

Reyneau: Defineix *variable* com aquella quantitat que augmenta o disminueix insensiblement en la formació de línies i figures. I *constant* com la línia que ni augmenta ni disminueix, que resta igual mentre les altres canvien. Distingeix entre "una quantitat variable composada només de *x*,... i suposada igual a *y*" i "equació d'una corba", és a dir, entre equació explícita i equació implícita, respectivament.

Bézout: Parla de *quantitats variables*, que es consideren com creixents per graus infinitament petits. Per contra, una *constant* és aquella quantitat que conserva sempre el mateix valor.

Lagrange: Parla de "funció d'una o més *quantitats* (o *variables*)" però no la defineix explícitament.

Lacroix: Segons Lacroix una *variable* és una quantitat que canvia o que pot canviar. En canvi si la quantitat conserva sempre el mateix valor s'anomena *constant*.

Funció

Lagrange: Tant en les *Leçons* com a la *Théorie*, Lagrange defineix una *funció* d'una o més variables com tota expressió de càlcul en la qual totes les quantitats entraran d'una forma qualsevol, barrejades o no amb d'altres quantitats considerades com posseïdores de valors donats i invariables, mentre que les quantitats de la funció estan obligades a poder assolir tots els valors possibles.[33] La seva definició coincideix amb la que dóna Euler a l'*Introductio in analysin infinitorum*.[34] La forma que adopta Lagrange per a les seves funcions és el desenvolupament en sèrie de Taylor. També dóna uns quants exemples de com escriure *x* com a funció de *y*, si *y* és funció de *x*. Nota les funcions $f(x), F(x), f(x,y)$...

[33] LAGRANGE (1800), pp. 10-11.

Lacroix: En el *Traité élémentaire* comenta com el canvi (increment/decrement) sofert per una quantitat (o quantitats) queda reflectit en quantitats dependents d'aquesta. En el punt 2 explica que per expressar que una quantitat depèn d'una o de diverses quantitats (bé per qualsevol operació, bé per relacions impossibles d'assignar algèbricament), l'existència de les quals ve donada per certes condicions, es diu que la primera és *funció* de les altres.[35] Diferencia entre funció donada de forma implícita i funció donada de forma explícita. No cal tenir equació per definir una relació implícita entre quantitats. Per exemple, el sinus és una funció implícita de l'arc, tot i que no hi hagi equació algèbrica que els relacioni (això també ho expressa en el primer punt del *Traité élémentaire*). També exposa el cas en què, donada $y = y(x)$, tant x com y s'expressen en funció d'una tercera variable, z (el diferencial d'aquesta darrera variable es pren constant a l'hora de fer derivacions successives).

Diferència

Reyneau: Després de la *segona suposició* (punt 514), defineix la *diferència* (d) com l'augment o decrement infinitament petit que experimenta una variable. La diferència és infinitament petita respecte la quantitat finita de la qual prové.

Bézout: Per conèixer el valor dels creixements de les quantitats variables, s'ha de determinar el valor de la quantitat en un instant qualsevol, i el valor d'aquesta mateixa quantitat en l'instant que segueix immediatament. La diferència dels dos valors és el creixement o disminució que pateix la quantitat. S'anomena *diferència* o *diferencial* de la quantitat. És infinitament petita i es nota dx.

Lacroix: Defineix *diferència* com $f(x+h) - f(x)$.

---

[34] Vegeu el capítol dedicat a Euler.

[35] A la introducció del *Traité* defineix *funció* com una quantitat, el valor de la qual depèn d'una o més quantitats (conegudes o desconegudes), i a través d'operacions es passa d'aquestes últimes a la primera. Vegeu LACROIX (1797-1800), p. 2.

Diferencial

Lacroix: La diferencial és el primer terme de la diferència, i avisa que no s'han de confondre els conceptes de *diferència* i de *diferencial*.

Límit

Lagrange: Tot i no defensar la teoria dels límits, Lagrange defineix tangent com la secant, els dos punts de tall de la qual amb la corba es reuneixen en un de sol. O de corbes asimptòtiques, que es van apropant contínuament, a mesura que *x* tendeix a infinit, sense arribar a tocar-se mai.

Lacroix: Explícitament Lacroix no defineix el límit al *Traité élémentaire*. Sí que ho fa, però, al *Traité,* on considera que el límit (o frontera) no pot ser assolit per la quantitat , que s'apropa tant com es vulgui. Així doncs Lacroix considera el límit en el sentit de D'Alembert.[36]

Teorema de Taylor

Lagrange: en la segona lliçó de les *Leçons* parla del desenvolupament en sèrie d'una funció d'una variable, quan s'atribueix un creixement a aquesta variable (però no esmenta "Taylor").[37] Sigui $f(x)$ una funció de *x*. Si en lloc de *x* escrivim $x+i$ (*i* una quantitat indeterminada qualsevol) i calculem $f(x+i)$, per la teoria de sèries obtenim:

$$f(x)+ip+i^2q+i^3r+\ldots,$$

on *p, q, r,* .... són noves funcions de *x, derivades* de la funció primitiva $f(x)$. La forma de *p, q, r,* ... només depèn de $f(x)$. Suposem que *x* passa a ser $x+o$, on *o* és una quantitat indeterminada i independent de *i*. La funció $f(x+i)$ esdevé $f(x+i+o)$. Substituint *i* al desenvolupament en sèrie de $f(x+i)$ per $i+o$ s'obté el desenvolupament en sèrie de potències de $i+o$:

$$\begin{aligned} &f(x)+(i+o)p+(i+o)^2q+(i+o)^3r+(i+o)^4s\ldots= \\ &=f(x)+ip+i^2q+i^3r+i^4s+\ldots+op+2ioq+3i^2or+4i^3os+\ldots \quad \text{(I)} \end{aligned}$$

---

[36] En parlar de límit remet las seus *Élémens d'Algèbre*. Vegeu LACROIX (1802), punt 4.
[37] Vegeu LAGRANGE (1800), pp. 15-17.

A continuació, a la mateixa sèrie fa la substitució de $x+o$ en lloc de *x*. Aleshores la funció esdevé $f(x)+op+...$ Si *p, q, r*,... passen a ser:

$$p+ip'+...,q+iq'+...,r+ir'+...$$

quan en lloc de *x* tenim $x+i$. En desenvolupar *p, q, r*,... segons potències de *i* es té, canviant *i* per *o*, per las desenvolupaments de les mateixes funcions després de la substitució de $x+o$ en lloc de *x*:

$$p+op'+...,q+oq'+...,r+or'+...$$

Així la sèrie $f(x)+ip+i^2q+...$ esdevé:

$$f(x)+ip+i^2q+i^3r+...+op+iop'+i^2oq'+i^3or'+...,$$

expressió que ha de coincidir amb l'expressió (I), amb independència dels valors de *i* i de *o*. Llavors:

$$2q=p',3r=q',4s=r',...,$$

d'on es dedueix:

$$q=\frac{1}{2}p',r=\frac{1}{3}q',s=\frac{1}{4}r',...,$$

on *p* és $f'(x)$, derivada de la funció $f(x)$, p' és $f''(x)$, la derivada de la derivada, o derivada de segon ordre, etc. D'aquesta forma justifica que la fórmula del desenvolupament de $f(x+i)$ és:

$$f(x+i)=f(x)+if'(x)+\frac{i^2}{2}f''(x)+\frac{i^3}{2\cdot 3}f'''(x)+...$$

Demostra perquè els exponents de les potències de *i* només són enters i no fraccionaris (p. 14): la presència d'exponents fraccionaris implicaria que $f(x)$ tindria diversos valors que, combinats amb els de la potència fraccionària, farien que $f(x+i)$ tingués més valors que $f(x)$, la qual cosa seria absurda. També demostra perquè els exponents de les potències de *i* no poden ser negatius (p. 15): si n'hi hagués, quan *i* fos zero llavors $f(x+i)$, és a dir, $f(x)$ seria infinit, la qual cosa només es pot donar per valors particulars de *x*, i no per a tots els valors possibles de *x*. Es preocupa per la convergència de la sèrie, tot i que de vegades no gaire correctament.[38] A la novena lliçó avalua l'error comès en tallar la sèrie a partir d'un determinat terme; avalua els límits entre els que es troba l'error comès, però no en dóna la fórmula. Si *p, q* són els valors de $x+i$ que fan

[38] Per a Lagrange, totes les funcions eren desenvolupables en sèrie de potències. Vegeu l'apartat dedicat a Lagrange dins del capítol *Introducció: context històric i institucional* del present treball.

mínima i màxima la derivada $f^{\mu}(x+i)$ (sempre i quan ni $f^{\mu}(p)$ ni $f^{\mu}(q)$ siguin infinit), aleshores la quantitat $f(x+i)$ es troba entre

$$f(x)+if'(x)+\frac{i^2}{2}f''(x)+\ldots+\frac{i^{\mu}}{2\cdot 3\cdot \ldots \cdot \mu}f^{\mu}(p) \text{ i}$$

$$f(x)+if'(x)+\frac{i^2}{2}f''(x)+\ldots+\frac{i^{\mu}}{2\cdot 3\cdot \ldots \cdot \mu}f^{\mu}(q).$$

Lacroix: A partir de les diferències successives dedueix el desenvolupament en sèrie de potències d'una funció, que diu que es coneix com a *teorema de Taylor* (punts 20-21 del *Traité élémentaire*): per justificar-ho estudia el desenvolupament de la funció en $x+h$, primer considerant *x* constant, *h* variable, després al revés (aprofitant que ja ha vist com diferenciar potències).[39] En el punt 62 aprofita la fórmula de Taylor per donar l'expressió dels costats del polígon que equival a la corba (*aproximació lineal*).

Funció derivada[40]

Lagrange: Els coeficients obtinguts en desenvolupar en sèrie una funció són les *funcions derivades* de la funció (primitiva). Lagrange fa referència a la "primera solució" de Newton.[41] A la sisena *leçon* presenta les funcions derivades de les quantitats compostes de funcions d'una mateixa variable, o dependents d'aquestes funcions a través d'equacions donades. Si *p* és funció de *x* i $y=f(p)$, aleshores $y'=p'f'(p)$ (és a dir, treballa amb la regla de la cadena). La *leçon* setena tracta el cas de *y* funció de *x*, on *x* és funció de *t*, i com s'expressa *y* en funció de *t*, i la derivada de *y* respecte *t* és $\frac{y'}{x'}$. Si volem trobar la derivada respecte *x* només cal substituir en aquesta fórmula $x'=1$.

[39] En el *Traité*, per obtenir el teorema de Taylor utilitza el mateix raonament que Lagrange: desenvolupa $f(x+k+k')$, primer en potències de k', després en potències de $(k+k')$. A partir del desenvolupament no sempre es troba el valor de la funció. S'ha de tenir en compte la *convergència* (segons D'Alembert). Grattan-Guinness comenta que en els llibres de Lacroix ja es comença a formular la convergència/divergència de sèries i a parar atenció a la suma terme a terme, així com en les *Lectures Notes* de Fourier i en els quaderns de Gauss. Vegeu GRATTAN-GUINNESS (1997*a*), p. 71. Al *Traité* Lacroix enuncia el teorema de Taylor per a funcions de dues variables. Vegeu LACROIX (1797-1800), punts 33 i 34.

[40] Al *Traité* Lacroix explica que s'ha de parar especial atenció als coeficients que acompanyen les potències de la sèrie (que són les funcions $f'(x), f''(x), \ldots$), però no parla de funcions derivades.

Coeficient diferencial

Lacroix: En el punt 5 del *Traité élémentaire* Lacroix afirma: “el límit de la raó dels creixements, o *coeficient diferencial*, s’obté dividint la diferencial de la funció per la de la variable; i recíprocament s’obtindrà la diferencial multiplicant el límit de la raó dels creixements, o coeficient diferencial, per la diferencial de la variable”. En una nota explica que és sobre aquest principi que Leibniz fundà el càlcul diferencial, considerant les diferencials com a diferències infinitament petites. Comenta que hi ha casos en què és més fàcil trobar el coeficient diferencial que la diferencial. Una forma fàcil de trobar el coeficient diferencial és substituir $x+dx$ en lloc de x i desenvolupant la funció en sèrie de potències.[42]

Ordre superior

Reyneau: Tracta les diferències d’ordre superior, no tractades pels antics geòmetres (punts 543-547). Reyneau justifica aquesta mancança dient que en els problemes plantejats no eren necessàries. Com que una quantitat és divisible fins a l’infinit, primer es pot considerar una progressió geomètrica $∺ a, b, c, e...$, on a és una quantitat finita, b

---

[41] Si x, y fossin funció d’una tercera variable, llavors en lloc de y' s’hauria d’escriure $\frac{y'}{x'}$ (qüestió vista al punt 50, de la primera part de la *Théorie*, i també en les *Leçons*).

[42] En el *Traité* (punt 92) demostra la identitat del coeficient diferencial amb el límit de la raó. Sigui $u = u(x)$ funció de x. Quan x passa a ser $x+h$, la funció esdevé $u + \underbrace{ph + qh^2 + rh^3 + ...}_{k}$. Aleshores $\frac{k}{h} = p + qh + rh^2 + ...$ Quan k i h desapareixen, el segon membre de l’equació no desapareix, és igual a p. El terme p (que és el primer coeficient diferencial) és el límit de $\frac{k}{h}$. Aquest terme és una nova funció, que esdevé $p + \underbrace{p'h + q'h^2 + ...}_{k'}$ quan x passa a ser $x+h$. Llavors $\frac{k'}{h} = p' + q'h + ...$ Quan h, k' desapareixen, el segon membre de l’expressió no, i és igual a p'. El terme p' (segon coeficient diferencial) és el límit de $\frac{k'}{h}$. I així successivament. En el punt 96 adverteix que, tot i que $\frac{0}{0}$ és una indeterminació, això no vol dir que la raó $\frac{k}{h}$ ho sigui (quan h i k s’anul·len). El que passa és que el límit d’una raó no s’ha d’entendre com a raó de límits, sinó com un quantitat que es pot fer tan petita com es vulgui. Dóna les fórmules de transformació per trobar el coeficient diferencial de $x = x(y)$ si es coneix el coeficient diferencial de $y = y(x)$.

és la diferència primera (infinitament petita respecte *a*), *c* és la diferència segona, respecte la primera diferència *b* (infinitament petita respecte *b*),… De forma que la raó dels dos primers termes *a*, *b* regna a tota la progressió. Es té una progressió de diferències primeres, segones, etc. en desenvolupar la potència del binomi $\overline{x+dx}^{n} = x^{n} + nx^{n-1}dx + \frac{n\times n-1}{1\times 2}x^{n-2}dx^{2} + \ldots$, on x^{n} és una quantitat finita, dx correspon a la diferència primera, dx^{2} correspon a la diferència segona, etc. En geometria també es pot generar una progressió geomètrica d'aquest estil.

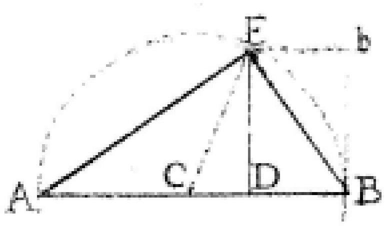


Figura 1

Sigui *ED* l'ordenada d'una circumferència, tan petita que és una diferència a punt d'anul·lar-se i propera al diàmetre *AB*. *AD* és a la diferència primera *ED*, com *ED* és a *DB*, que en conseqüència és infinitament petit respecte *ED*. Si es considera *ED* el diàmetre d'un cercle, es pot concebre diferència tercera,…. També justifica la possibilitat de formar diferències segones, terceres,… atenent a la generació de línies i figures pel moviment.

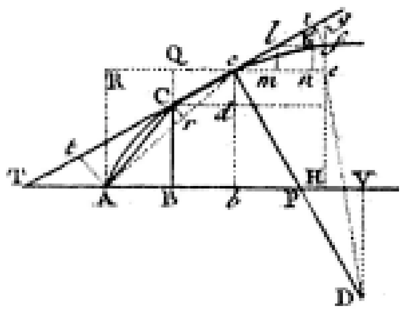


Figura 2

Si l'ordenada *BC* es mou paral·lelament a l'eix *AB*, i *C* es mou al llarg de *BC*, aleshores *C* descriu una corba *AC*. Defineix les diferències segones a partir de la consideració de les parts de corba infinitament petites descrites pel punt *C* en dos instants consecutius. Mentre que el moviment de *BC* sobre *AB* és uniforme (que equival a dir *dx* constant), el del punt *C* en allunyar-se de l'eix *AB* és contínuament accelerat o retardat. Si ens fixem en un tercer instant, podem definir la diferència tercera,… Les expressions del tipus *ddx*, $dxdy$, dx^2 , ... són diferències de segon gènere; $d^3x, dx^3, ...$ són de tercer gènere, etc.

Elecció de la progressió: En treballar amb diverses variables que augmenten o disminueixen a l'hora, normalment es considera una d'elles amb creixement o decreixement (diferència constant), doncs hi ha casos on els càlculs resulten més fàcils segons quina diferència es prengui com a constant (per exemple, fórmula del radi de curvatura).

Bézout: Del punt 18 al 21 parla de les diferències d'ordre superior. Es considera la variable augmentant per graus desiguals, la diferència dels quals és infinitament petita respecte als propis creixements (que és la *diferència segona*, *ddx*, infinitament petita respecte *dx*). Els termes ddx i dx^2 són infinitament petits de segon ordre, però no són iguals. Per determinar les diferències segones, el que és natural és considerar la quantitat variable en tres estats consecutius, infinitament propers. S'ha de prendre la diferència del segon amb el primer, i la del tercer amb el segon. Aleshores, s'ha de prendre la diferència d'aquestes dues diferències. En una nota (pàgina 19) parla d'una dificultat que es presenta en estudiar ordre superior. Quan es determinen les diferències primeres, es rebutgen les quantitats infinitament petites de segon ordre. Però les diferències segones també són infinitament petites de segon ordre. Es pot témer que el que s'ha rebutjat abans no deixi defectuoses les segones diferències? La resposta de Bézout és negativa, perquè els infinitament petits que s'han eliminat, en diferenciar-los, només poden donar infinitament petits de tercer ordre, que s'han d'eliminar respecte la diferència segona (que és un infinitament petit de segon ordre).

Elecció de la progressió: Bézout comenta que en el càlcul on entren diverses variables, es pot suposar constant la diferència primera d'una d'elles (suposició permesa, donat que sempre es pot prendre una de les diferències primeres com a terme fix, respecte les altres). Aquesta suposició simplifica els càlculs, ja que si *dx* és constant, aleshores $ddx = 0$. Per al càlcul de diferències successives, si una de les diferències primeres s'ha pres constant, s'ha de considerar constant a tota la resta de diferenciacions.

Lagrange: Les derivades d'ordre superior són els diferents coeficients del desenvolupament en sèrie de potències de la funció. Les derivades d'ordre superior tornen a ser funcions. Per trobar-les, el més simple és derivar successivament f', en això “consisteix l’essència i l’algoritme fonamental del càlcul de funcions derivades”.[43] f' és la derivada de *f*, f'' és la derivada de f', etc. Però hi ha casos on la consideració immediata de termes successius de la sèrie fa més fàcil i directe trobar les derivades successives (sempre i quan el desenvolupament en sèrie no es compliqui massa). A la tercer *leçon* parla de la relació entre els coeficients del desenvolupament de la potència del binomi i les derivades d’una potència. De fet, amb a la plana 25 demostra la fórmula del binomi.

Lacroix: Dels punts 17 a 22 tracta les *diferenciacions successives*. El coeficient diferencial és una nova funció de *x*, de la qual es pot tornar a estudiar el seu coeficient diferencial. És a dir, si $p = \frac{du}{dx}$ (considerant primer *dx* constant) aleshores $q = \frac{dp}{dx}$, que és el coeficient de *p*, o coeficient de segon ordre de *u*. Com que $d(du) = ddu = d^2u$ i $du = pdx$, llavors $d^2u = dpdx = qdx^2$ i, en conseqüència: $q = \frac{d^2u}{dx^2}$. Més endavant (punt 116), donades *x*, *y* tals que $y = y(x)$, pren un tercera variable *z*, de manera que $x = x(z)$, $y = y(z)$. Així podrà expressar els coeficients diferencials sense haver de considerar *dx* constant, és a dir, fent variar tant *dx* com *dy*.[44] A partir de la diferenciació successiva justifica el desenvolupament en sèrie d’una funció. Els diferents ordres d’infinitament petits de Leibniz els justifica sota la idea de límit (nota del punt 63 del *Traité élémentaire*).[45] Al punt 20 del *Traité élémentaire* també comenta la relació entre els coeficients de la potència del binomi i el desenvolupament en sèrie de potències d’una funció.

---

[43] Vegeu LAGRANGE (1800), p. 55.

[44] Vegeu l’apartat *Del canvi de la variable independent, o com canvia la diferencial que s’ha pres per constant, en un altra que no l’és* a LACROIX (1802), pp. 143-151.

[45] En el *Traité* (punt 10) exposa amb més detall l’obtenció de la diferenciació successiva, mitjançant l’estudi de les diferències de *f*, de f', de f'', etc. (*dx* constant). Observa que l’exponent del primer terme del desenvolupament de l’ordenada i de les diferències, coincideix amb l’ordre de la diferencial. A la pràctica, per trobar f', f'',... no cal desenvolupar *f* completament, només fins al segon terme (corresponent a f'). Aleshores, com que f' també és una funció, si la desenvolupem fins al segon terme trobem f'', etc. Quant a l’elecció de la progressió, fent referència a Leibniz, Lacroix parla del problema de la indeterminació del diferencial d’ordre superior degut a la progressió escollida. Lacroix posa com exemple què passaria si en lloc de *dx* constant es considerés el triangle característic com equilàter.

Diverses variables

Bézout: Exposa com trobar màxims i mínims en el cas de diverses quantitats variables (com, per exemple, als punts 51 i 52)

Lagrange: A la lliçó dinovena tracta funcions de diverses variables independents. Les funcions presenten diferents funcions derivades, relatives a les diferents variables independents. Aquestes derivades es generen a partir del desenvolupament de la funció primitiva, donant a cada variable un creixement particular.[46] Primer treballa amb funcions de dues variables independents, $f(x,y)$. Quan *x* i *y* s'incrementen en *i* i en *o* respectivament, desenvolupem $f(x+i, y+o)$ en funció de $i, o, i^2, io, o^2, i^3, \ldots$, amb diferents funcions derivades, unes relatives a *x*, d'altres a *y*, d'altres en part relatives a *x* i en part relatives a *y*. Primer considerem només *x* com a variable (*y* constant) i desenvolupem $f(x+i, y)$, com si es tractés d'una funció d'una única variable, *x*. A continuació, en lloc de *y* considerem $y+o$ (és a dir, ara *y* com a variable i *x* constant) i obtenim el desenvolupament de $f(x+i, y+o)$. S'obté el mateix resultat si primer agafem *y* com a variable i després *x*, és a dir, per a Lagrange les derivades creuades són sempre iguals, no té en compte les condicions del teorema de Schwarz . La notació que fa servir: $f'{}_,$, $f''{}_,$... respecte *x*; $f_,{}'$, $f_,{}''$... respecte *y*. En general, els apòstrofs abans de la coma indiquen derivació respecte *x* i els de després, derivació respecte *y*. Opina que aquesta notació és millor que la que apareix a la *Théorie*: traços superiors per indicar les derivades respecte *x* (f'), traços inferiors per indicar les derivades respecte *y* ($f_,$). I les operacions indicades abans i després de la coma són absolutament independents entre elles, porten al mateix resultat, sigui quin sigui l'ordre a l'hora de derivar respecte *x* i *y*.

Lacroix: Exposa i justifica la diferenciació parcial d'ordre superior igual que Lagrange. També com Lagrange, com que el procés és anàleg prenent primer *x* com a constant i fent variar la *y*, arriba a la conclusió de que $\frac{d^2u}{dydx} = \frac{d^2u}{dxdy}, \frac{d^3u}{dydx^2} = \frac{d^3u}{dx^2dy}, \ldots$ Per tant, tampoc no té en compte les condicions del teorema de Schwarz. La diferencial d'una

[46] Lagrange pensa que si els inventors del càlcul diferencial haguessin tractat les funcions derivades, no hauria passat mig segle entre el descobriment del càlcul diferencial i el de les diferències parcials. Vegeu LAGRANGE (1800), p. 299.

funció de diverses variables, a partir del desenvolupament en sèrie de $f(x+h, y+k) - f(x,y)$, és $df(x,y) = du = \frac{du}{dx}dx + \frac{du}{dy}dy$. A partir d'aquí es poden treure els diferents coeficients. Avisa que no s'ha de confondre $\frac{du}{dx}$, el coeficient diferencial de $u = u(x)$, amb $\frac{du}{dx}, \frac{du}{dy}$, les parcials de $u = u(x,y)$. Parla de les diferents notacions al respecte (Euler, Fontaine,...). També treballa amb el cas d'equacions implícites.

Diferenciació/ Integració

Reyneau, Bézout, Lagrange i Lacroix consideren el càlcul integral com el camí invers del càlcul diferencial. Reyneau remarca (punt 546) que, si la quantitat finita és constant, no hi ha diferència. Per aquesta raó, per tornar a la integral d'una diferència, s'ha d'afegir una constant. Lagrange observa que la funció derivada d'una funció primitiva és única. Al revés, però, no hi ha unicitat: donada una funció derivada, pot correspondre a diverses funcions primitives, que difereixin en una constant. Lacroix fa la mateixa observació. Reyneau parla de sèries en relació a la integració aproximada.

Derivació implícita

Lagrange i Lacroix mostren com trobar la funció derivada o el coeficient diferencial, respectivament, en el cas en què la relació entre variables vingui donada per una expressió implícita. A la plana 53 de les *Leçons* de Lagrange, apareix l'expressió $F(y,x) = 0$, on $y = z(x)$. Lagrange deriva l'equació: $y'F'(y) + F'(x) = 0$, i d'aquí obté $y' = -\frac{F'(x)}{F'(y)}$. En el punt 38 del *Traité élémentaire* Lacroix presenta les equacions $V = 0$ amb dues variables *x*, *y*. Considera, per exemple, *y* com a funció de *x*. Fent servir la diferencial de l'equació i que $dy = pdx$, troba el valor de *p*.

Tangents

Reyneau

Definició: Sigui *Cc* part infinitament petita de corba *ACc*, que també és part infinitament petita de la tangent a la corba en *C*. (pàg. 172).

Determinació de la tangent

Per justificar la fórmula de la subtangent es basa en la semblança del triangle característic (a partir de dues ordenades infinitament petites) i el triangle de costats l'ordenada, la subtangent i la tangent. Calcula els segments associats a la tangent, la subtangent, la normal, la subnormal.... En el punt 554 presenta algunes aplicacions del càlcul de tangents: 1) com que la tangent és una porció de corba infinitament petita, l'angle entre dues tangents infinitament properes és igual a l'angle format per les corresponents porcions infinitament petites de la corba; 2) a partir de les tangents en tots els punts es pot estudiar la concavitat/convexitat; 3) si la tangent és paral·lela a les ordenades, aleshores la diferència de *x* és nul·la, i si, en canvi, la tangent és paral·lela a les abscisses, la diferència de *x* és infinita; 4) la relació entre tangents i extrems.

Bézout

Definició: En el punt 30 considera la tangent com la prolongació d'un dels infinits costats infinitament petits de la corba (com a polígon).

Determinació de la tangent

Arriba a la fórmula de la subtangent també basant-se en la semblança del triangle característic (infinitament petit) i el triangle finit format per l'ordenada, la subtangent i la tangent. Comenta que $\frac{dx}{dy}$ s'obté de l'equació de la corba (on entren *x*, *y* i quantitats constants). Considera també el cas en què quan *x* augmenta, *y* disminueix. Aleshores, la tangent en lloc de caure del costat de l'origen de les abscisses, respecte l'ordenada, cau del costat oposat. Així es pot prendre la mateixa fórmula per a la subtangent, i tenir en compte que si és negativa indica que s'ha de portar el seu valor del costat oposat de l'origen. En el punt 32 diu que $\frac{dx}{dy}$ expressa la tangent de l'angle que la corba forma en cada punt amb l'ordenada. I que $\frac{dy}{dx}$ representa la tangent de l'angle que forma la corba amb l'eix de les abscisses. Ho justifica a partir de triangles rectangles, prenent radi igual 1 a les taules [trigonomètriques].

Lagrange

Definició: La tangent és una recta que presenta un punt comú amb la corba, de manera que no existeix cap altra recta pel mateix punt entre la corba i la recta donada.[47]

Determinació de la tangent

A la novena *leçon* estudia què passa quan el desenvolupament en sèrie d'una funció es talla a partir d'un determinat terme.[48] En particular, sigui $f(x+i) = f(x) + if'(x) + \frac{i^2}{2} f''(x) + ...$ i prenem l'equació de la recta de pendent $f'(x)$, $z = f(x) + if'(x)$. Els dos primers termes del desenvolupament de la funció coincideixen amb els dos termes de la recta. Aquesta és la raó per la qual no passa cap més recta entre la corba i la tangent. La subtangent *t* verifica que $\frac{y}{t} = f'(x)$.[49]

[47] En la *Théorie* Lagrange també exposa la definició de tangent des dels dos punts de vista següents: 1) Segons els antics geòmetres, la tangent és la recta que té únic punt comú amb una corba, de manera que entre la recta i la corba no es pot traçar cap altra recta per aquest punt. 2) Des que les corbes són estudiades analíticament, la tangent es pot entendre com una secant, els dos punts d'intersecció de la qual es reuneixen en un de sol. O bé, la tangent és la prolongació dels costats infinitament petits de la corba, considerada com a polígon d'infinits costats. També es pot considerar la tangent com a direcció del moviment composat, generador de la corba.

[48] El títol de la novena *leçon* entre altres temes inclou "manera rigorosa d'introduir les funcions derivades en la teoria de corbes". És en aquesta lliçó precisament on parla de la tangent i del cercle osculador.

[49] En el primer capítol de la *Théorie* exposa la "teoria de les tangents i dels contactes de diferents ordres, segons els principis de la geometria antiga". Siguin dues corbes amb un punt en comú. La distància entre les corbes és més petita si la primera derivada coincideix. De forma que cap altra corba no pot passar entre les dues corbes inicials, llevat que la seva primera derivada també coincideixi. La diferència entre les dues corbes inicials és més petita encara si les segones derivades coincideixen, i així es pot generalitzar aquest resultat per a ordres superiors. Aquesta és la idea que s'ha de tenir sobre els diferents graus d'aproximació de corbes, comunament anomenats de "contacte", "osculació", ... En el segon capítol tracta la tangent. Pren una corba $y = f(x)$ i una recta $q = F(p) = a + bp$ que tenen un punt en comú i la primera derivada coincideix. D'aquí obté l'equació de la recta tangent: $q = (f(x) - xf'(x)) + f'(x)p$. Demostra que entre aquesta recta i la corba no pot passar cap altra recta pel punt comú. El terme *b* és la tangent de l'angle que forma la recta amb l'eix. L'expressió $-\frac{a}{b}$ és l'abscissa corresponent al punt on la recta talla l'eix. Així, $x + \frac{a}{b} = \frac{y}{y'}$ és l'equació de la subtangent. De manera anàloga troba les equacions de la normal i la subnormal. En particular, demostra que si y' és la tangent de l'angle format per la tangent i l'eix, aleshores $-\frac{1}{y'}$ és la tangent de l'angle de la seva perpendicular.

Lacroix

Definició: La tangent és el límit de les rectes que toquen la corba en dos punts.

Determinació de la tangent

En la secció del *Traité élémentaire* dedicada a l'aplicació del càlcul diferencial a la teoria de corbes Lacroix afirma que "les consideracions geomètriques proven de forma evident que la relació dels creixements d'una funció i de la seva variable és en general susceptible de límits" (LACROIX (1802), p.76). La raó de l'ordenada de la corba amb la seva subtangent correspon al coeficient diferencial de la funció. A partir de triangles semblants, considerant dues ordenades, una de les quals s'apropa sense fi a l'altra, obté la subtangent. També dóna la fórmula de la subnormal i de la normal. Lacroix troba més còmode i elegant tractar amb les equacions de la tangent i la normal, trobades com fa Lagrange igualant l'ordenada en un punt i el primer coeficient en el desenvolupament en sèrie d'una corba i d'una recta (punt 67). Identifica el coeficient diferencial amb la tangent de l'angle. Si $\frac{dy}{dx} = \infty$, l'ordenada és tangent, això respon a un límit de la corba en el sentit de les abscisses (tret del cas de punt d'inflexió). Si $\frac{dy}{dx} = 0$, la tangent és paral·lela a l'eix d'abscisses.[50] Entre d'altres aplicacions del càlcul de tangents, resol el problema de traçar la tangent a una corba per un punt determinat (punt 68 del *Traité élémentaire*, punt 242 del *Traité*); traçar la tangent a una corba que sigui paral·lela a una recta donada (punt 69); traçar la tangent, donat el coeficient diferencial (punt 243 del *Traité*); ... [51]

[50] El cas $\frac{dy}{dx} = \frac{0}{0}$ correspon a diverses tangents per un punt. Vegeu LACROIX (1797-1800), p. 164.

[51] A l'apartat *Teoria de les línies corbes*, dins del capítol quart del *Traité*, Lacroix (com Lagrange) demostra que, entre la corba i la seva tangent en punt, no pot passar cap altra recta per aquest punt.

Asímptotes[52]

El punt 71 del *Traité élémentaire* (i punt 247 del *Traité*) tracta les asímptotes, com a cas extrem de tangent: el punt de contacte s'allunya infinitament. En el punt 72 dedueix les asímptotes horitzontals i verticals fent $y = 0$ i $x = 0$, respectivament, en l'equació de la tangent.

Extrems

Reyneau

Definició: Punts 555-559 treballa amb màxims i mínims. En la part còncava de la corba, si les ordenades *y* primer augmenten, arriben a la *y* més gran, i després, disminueixen. En la part convexa, les ordenades *y* disminueixen fins a la *y* més petita i després, augmenten. Aquesta definició és vàlida tant per a *y*, com per a *x*.

Caracterització dels candidats i justificació

A continuació estudia les fórmules per trobar els màxims i mínims de la corba (tant per a *x*, com per a *y*):

- per a *x*: $\frac{dy}{dx} = \frac{0}{dx}$, és a dir, *dy* infinitament petit respecte *dx*,
- per a *y*: $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{0}$, és a dir, *dy* infinit respecte *dx*.

O simplement, $dy = 0$ i $dy = \infty$. Aquest fet està justificat perquè en aquests punts la tangent és paral·lela als eixos.

Naturalesa dels extrems

Aleshores, per distingir si és un màxim o un mínim, estudia el creixement/decreixement de la subtangent. En la remarca II (punt 554, dins l'apartat d'ús de les tangents)

---

[52] Al capítol segon de la segona part de *Théorie*, Lagrange defineix *asímptota*. Sigui $y = f(x)$, el desenvolupament de $f\left(\frac{1}{i}\right)$ és $Ai^{\lambda} + Bi^{\lambda+\mu} + Ci^{\lambda+\mu+\nu} + \ldots$ Sigui una altra funció, $y = F(x)$, també es desenvolupa $F\left(\frac{1}{i}\right)$. Si els primers termes de $f\left(\frac{1}{i}\right)$ i $F\left(\frac{1}{i}\right)$ coincideixen, es pot prendre *i* prou petit de manera que cap altra corba passi entre *f* i *F*, en $x = \frac{1}{i}$. Al llarg del seu text es troba aquesta expressió diversos cops, tot i indicar en el títol de la seva obra que la teoria exposada està "lliure de la consideració dels infinitament petits o de quantitats evanescents". La corba $y = Ax^{-\lambda}$, o $y = Ax^{-\lambda} + Bx^{-\lambda-\mu}$, etc. s'anirà apropant contínuament a l'altra corba a mesura que *x* tendeix a infinit, sense arribar a tocar-la mai, de forma que arribarà un terme en què cap altra corba d'ordre més alt passarà entre aquestes dues corbes. La segona corba és asímptota de la primera.

Reyneau recomana estudiar les subtangents en dos o tres punts propers. Si creixen positivament, aleshores la corba és còncava. Si creixen negativament, la corba és convexa. Si una sèrie de subtangents primer és positiva i després passa a ser negativa, hi ha un punt on la subtangent esdevindrà zero o infinit. Zero, quan primer decreixen i després creixen (per exemple, cas del punt d'intersecció de l'el·lipse amb l'eix horitzontal). Infinit, quan primer creixen i després decreixen (per exemple, cas del punt d'intersecció de l'el·lipse amb l'eix vertical). Poden haver-hi diversos màxims i mínims. Observa que si en un punt $dx = dy = 0$ o si $\frac{dy}{dx}$ és una quantitat finita, la corba en aquest punt no presenta ni màxim ni mínim.

Bézout

Definició: Els punts del 33 fins al 54 estan dedicats a les "Aplicacions als límits de les línies corbes, i en general, als límits de les quantitats, i a les qüestions de màxims i mínims". Utilitza la figura d'un cercle per definir els *límits* de les abscisses i les ordenades. Els *límits* de les abscisses són els punts entre els quals, per a cada abscissa, corresponen valors reals per a les ordenades. Fora d'aquests límits, no hi ha cap més punt de la corba. De la mateixa forma, es poden definir els *límits* de les ordenades. No pot haver-hi cap ordenada més gran que el límit superior ni més petita que el límit inferior, i en aquests casos la tangent és paral·lela a les abscisses. Per a valors més petits que el límit inferior o més grans que el superior, les abscisses són imaginàries. Bézout parla de l'ordenada més gran (*màxim*) de la part còncava, i l'ordenada més petita (*mínim*) de la part convexa. Les ordenades corresponents a la intersecció del cercle amb el seu eix horitzontal són les ordenades més petites de la part còncava i, alhora, les més grans de la part convexa. Així doncs, es donen tres tipus de *punt*: 1) quan l'ordenada primer creix i després decreix (*màxim*); 2) quan l'ordenada primer decreix i després creix (*mínim*); 3) quan l'ordenada és la més gran de la part convexa, i la més petita de la part còncava.[53]

Caracterització dels candidats i justificació

Per saber quan la tangent d'una corba és paral·lela a les ordenades s'ha d'estudiar quan $\frac{dx}{dy}$ és 0, o, equivalentment, quan dx és 0. Per saber quan la tangent és paral·lela a les abscisses, s'ha d'estudiar quan $\frac{dy}{dx}$ és 0 (o bé, quan *dy* és 0). Es diferencia l'equació, es troba $\frac{dx}{dy}$ i es fa zero numerador i denominador. Aquest mètode serveix per: determinar límits d'abscisses i ordenades; determinar en quins casos la tangent és paral·lela a les abscisses i en quins a les ordenades; determinar les ordenades i abscisses més grans i més petites. Discuteix i descarta solucions no admissibles, segons si donen un valor imaginari o valors que no corresponen a la qüestió actual, sinó a una qüestió on algunes de les condicions són contràries.

Naturalesa dels extrems

En el punt 41 explica que si *a* és el valor de *x* corresponent al màxim o al mínim, s'ha de substituir en la quantitat proposada $a+q, a, a-q$. Si els dos resultats extrems són reals i menors que el del mig, aleshores es té un màxim. Si els dos resultats extrems són reals i majors que el del mig, es té un mínim. Si dels dos resultats extrems, un és imaginari i l'altre real, la quantitat és a l'hora màxim i mínim.

En el cas de diverses quantitats, el més simple és fer variar al mateix temps el més petit nombre possible de quantitats (per exemple, considerar primer només *x* com a variable i trobar els extrems; sobre aquests, considerar *y* com a variable i trobar els extrems...) (punt 51). O bé (punt 52) es poden fer variar al mateix temps totes les quantitats variables, ajuntar tots els termes que estan multiplicats per la diferencial d'una mateixa variable, igualar la seva suma a zero i després igualar a zero el que acompanya a cada diferencial (és a dir, que la suma de termes que multipliquen cada diferencial ha de ser zero, que és la manera en què el diferencial total serà zero). Si les condicions de la qüestió vénen expressades per diverses equacions, abans d'aplicar la regla a l'equació diferencial que ha de determinar màxims i mínims, de les equacions diferenciades s'han d'obtenir valors de diferencials de tantes variables com d'equacions hi ha (apart de l'equació que ha de determinar els extrems), introduir-les dins de la mateixa equació i aplicar la regla com si només hi hagués una equació. En el punt 54 afirma que, en general, es poden prendre com a constants aquelles parts que es desitgin, sempre i quan aquestes noves condicions auxiliars no superin el nombre de variables (especialment important quan es treballa amb radicals).

[53] Reyneau pren l'el·lipse per il·lustrar l'apartat de màxims i mínims. Vegeu REYNEAU (1708), p. 175.

Lagrange

Definició: En les *Leçons*, mitjançant sèries, i per a valors finits de *f*(*x*), demostra que si la derivada és positiva, la funció és creixent, i si la derivada és negativa, la funció és decreixent. Però a les *Leçons* no fa l'estudi dels extrems d'una funció.[54]

---

[54] Lagrange dedica el capítol cinquè de la segona part de la *Théorie* als màxims i mínims de les funcions d'una variable, qüestió independent de la consideració de les tangents però relacionada amb ella. Troba el valor de la variable que fa que el valor de la funció sigui el més gran o el més petit, a nivell geomètric i a nivell algèbric.

A nivell geomètric:

Observa que per aquest valor, la tangent és paral·lela a l'eix de les abscisses. Si la corba és convexa respecte l'eix aleshores la corba presenta un mínim. Si la corba és còncava, presenta un màxim. La tangent és paral·lela a l'eix de les abscisses si $y'=0$. Si es substitueix $y'=0$ a les equacions del centre del cercle osculador s'obté: $a = x, b = y + \frac{1}{y''}$ (vegeu l'apartat *Corbes osculadores* del present capítol). Si $y''>0$ el centre cau més enllà de la corba, la corba és convexa, i, per tant, en aquest punt presenta un mínim. Si $y''<0$ el centre cau del costat de l'eix, la corba és còncava i, per tant, presenta un màxim.

A nivell algèbric:

L'estudi dels màxims i mínims es pot deduir directament de l'anàlisi de funcions, sense la consideració auxiliar de les corbes. La condició perquè f presenti un màxim en x és $f(x+i) < f(x)$ o bé $f(x+i) - f(x) < 0$, amb i positiu o negatiu, tan petit com es vulgui. Anàlogament la condició de mínim és $f(x+i) > f(x)$ o bé $f(x+i) - f(x) > 0$. Desenvolupa en sèrie $f(x+i)$ i s'atura al terme d'ordre 2: $f(x+i) = f(x) + if'(x) + \frac{i^2}{2} f''(x+j)$, on $0 < j < i$. Aleshores en el màxim es verifica: $if'(x) + \frac{i^2}{2} f''(x+j) < 0$ i en el mínim $if'(x) + \frac{i^2}{2} f''(x+j) > 0$. Es pot prendre *i* tan petit que faci que el valor absolut de $if'(x)$ sigui més gran que $\frac{i^2}{2} f''(x+j)$. De manera que per a *i* prou petit el signe de $if'(x) + \frac{i^2}{2} f''(x+j)$ és el mateix que el de $if'(x)$, que canvia de signe segons el terme *i*. Així, resulta impossible tenir un màxim o un mínim, llevat que $f'(x) = 0$. Si a continuació es talla el desenvolupament pel terme d'ordre 3: $f(x+i) = f(x) + if'(x) + \frac{i^2}{2} f''(x) + \frac{i^3}{2{\cdot}3} f'''(x+j)$, com que $f'(x) = 0$, si $\frac{i^2}{2} f''(x) + \frac{i^3}{2{\cdot}3} f'''(x+j) > 0$ la funció presenta un mínim, i si $\frac{i^2}{2} f''(x) + \frac{i^3}{2{\cdot}3} f'''(x+j) < 0$ la funció té un màxim. Si s'agafa *i* tan petit que faci que el valor absolut de $\frac{i^2}{2} f''(x)$ sigui més gran que el de $\frac{i^3}{2{\cdot}3} f'''(x+j)$, aleshores la quantitat $\frac{i^2}{2} f''(x) + \frac{i^3}{2{\cdot}3} f'''(x+j)$ serà positiva o negativa, en funció del signe de $\frac{i^2}{2} f''(x)$, és a dir, segons el signe de $f''(x)$. Així, si $f''(x) > 0$ la funció presenta un mínim i si $f''(x) < 0$ la funció presenta un màxim. Si a continuació es considera el desenvolupament fins a ordre 4, aplicant el mateix raonament, si també $f''(x) = 0$, per trobar màxims o mínims s'ha de verificar que $f'''(x) = 0$, i si $f^{\prime v}(x) > 0$ es tracta d'un mínim i si $f^{\prime v}(x) < 0$ es tracta d'un màxim. Els capítols VIII a XI de la *Théorie* estan dedicats a la teoria de superfícies corbes. En el capítol XI de la *Théorie* Lagrange mostra com trobar-ne els màxims i mínims.

Lacroix

Definició: En un punt la funció presenta un *màxim* si l'ordenada corresponent és major que les ordenades en els punts immediatament anteriors i posteriors. De forma anàloga, en un punt la funció presenta un *mínim* si l'ordenada corresponent és menor que les ordenades en els punts immediatament anteriors i posteriors.[55] Expressa la idea del que avui anomenem "extrems locals", definició d'extrem en funció dels valors que el precedeixen i segueixen *immediatament*, ja que hi ha funcions amb valors més grans que el corresponent al màxim o més petits que el corresponent al mínim. També parla de funcions sempre creixents o sempre decreixents.

Caracterització i justificació

A partir del teorema de Taylor (aplicat a $x-h$ i a $x+h$) dedueix que en un extrem el coeficient diferencial de primer ordre s'anul·la, és a dir, $\frac{dy}{dx}=0$. La condició $\frac{dy}{dx}=0$ és necessària però no suficient. Si, per exemple, els coeficients de primer i de segon ordre s'anul·len però el de tercer no ho fa, aleshores no podem parlar ni de màxim ni de mínim. En general, per tenir un màxim o un mínim, el primer coeficient diferencial que no s'anul·la ha de ser d'ordre parell. Un dels exemples que fa servir és amb equació implícita.

Naturalesa dels extrems

A partir del teorema de Taylor veu que el signe del coeficient diferencial de segon ordre $\frac{d^2y}{dx^2}$ indica la naturalesa de l'extrem. En el cas de funcions de dues variables (punt 133 del *Traité élémentaire*), si una es considera com a constant i s'anul·la el coeficient diferencial relatiu a la variable a la qual s'atribueix els canvis de la funció, es troben els màxims i mínims relatius a aquesta variable. D'aquests màxims i mínims relatius existeix necessàriament un nombre limitat de valors més grans o més petits que la resta. Aquests s'anomenen absoluts i es poden obtenir en eliminar *x* de l'equació $\frac{du}{dx}=0$. Aleshores queda una funció de *y*, que designem amb *v*, i fem $\frac{dv}{dy}=0$. També es pot arribar als màxims i mínims substituint $\frac{du}{dx}=0$ a l'equació $\frac{d(u)}{dy}=\frac{du}{dx}\frac{dx}{dy}+\frac{du}{dy}=0$, de

[55] En el *Traité* Lacroix defineix un màxim quan els valors de la funció abans del màxim creixen i després decreixen. De forma anàloga, els valors de la funció abans del mínim decreixen i després creixen.

manera que s'obté l'equació $\frac{du}{dy}=0$. Per especificar la naturalesa dels extrems i a partir del teorema de Taylor, dóna un mètode que equival a l'estudi del signe de la hessiana (punt 134 del *Traité élémentaire*), anàleg al que presenta Lagrange al capítol cinquè de la segona part de la *Théorie*:[56] si el desenvolupament és $A+Bh+Ck+\frac{1}{1\cdot 2}\left\{Dh^2+2Ehk+Fk^2\right\}+etc$ (on *A*, *B*, *C*, *D*, *E*, *F*, ... són respectivament $u,\frac{du}{dx},\frac{du}{dy},\frac{d^2u}{dx^2},\frac{d^2u}{dxdy},\frac{d^2u}{dy^2},...$), aleshores *B* i *C* han de ser nuls en el cas de tenir màxim o mínim. Aleshores per assegurar l'existència de màxim o mínim $Dh^2+2Ehk+Fk^2$ només pot tenir arrels imaginàries, per no canviar el seu signe. Per exemple, considerant el valor de *h*, s'ha de verificar $FD>E^2$. Donat que en aquest cas $Dh^2+2Ehk+Fk^2$ no canvia de signe i es redueix a Dh^2 quan $k=0$, es tindrà un màxim si *D* és negativa i un mínim si *D* és positiva.

Punts d'inflexió i de retrocés. Altres punts singulars

Reyneau

Definició: (Punts 560-567) Existeixen corbes que primer són còncaves i després convexes. El punt o la part infinitament petita que separa la part còncava de la convexa (que és comú a ambdues) s'anomena *punt d'inflexió*, si la corba va sempre del mateix costat, i *punt de retrocés*, quan la corba retrocedeix el seu camí.

Caracterització i justificació

Si *dx* constant, *dy* disminueix en la part còncava i augmenta en la convexa, o viceversa. Si les *dy* (o, millor, línies finites amb les mateixes raons que les *dy*) funcionen com a ordenades, es té una nova corba, amb un màxim o un mínim en el punt d'inflexió o de retrocés. Aquest raonament coincideix amb el segon mètode de Johann Bernoulli i de L'Hôpital. D'aquí es dedueix que $ddy=0$ o bé $ddy=\infty$. No indica com deduir si es tracta de punt d'inflexió o bé de retrocés. Reyneau comenta que el càlcul es simplificaria si l'equació vingués donada de forma explícita però que no ho fa d'aquesta forma per mostrar el principiant com tractar l'equació sense aïllar primer les *y*. Amb les fórmules donades un es pot fer una idea de la naturalesa de la corba, traçar-la de forma

[56] Vegeu nota 54.

aproximada i resoldre la major part de problemes físico-matemàtics. Arriba a la mateixa fórmula en el cas de coordenades des d'un punt *B*. Considera els arcs que mesuren els angles formats per les tangents de dos punts infinitament propers. Són positius en una de les parts i negatius en l'altra, per tant, en el punt d'inflexió o de retrocés han de ser zero o infinit. Si *y* representa ordenada des de *B*, *du* la diferència de l'arc de corba, *dx* la porció infinitament petita de l'arc de cercle traçat des de *B* amb radi *y* (*dx* i *du* constants), l'expressió dels arcs és $\frac{dudxdy + yduddx}{ydy}$ en la part còncava, $\frac{-dudxdy - yduddx}{ydy}$ en la part convexa, d'on dedueix que en el punt d'inflexió o de retrocés $dxdy + yddx$ és o zero o infinit. En el punt 581 Reyneau caracteritza els punts d'inflexió i de retrocés a partir dels radis de l'evoluta: els radis són positius a la part còncava i negatius a la part convexa. Per tant, en el punt d'inflexió o de retrocés, el radi de l'evoluta és zero o infinit.

Lacroix

Definició: Abans del punt d'inflexió la corba és còncava i després convexa, o viceversa.

Caracterització i justificació

En general, hi ha punt d'inflexió si el primer coeficient diferencial que no s'anul·la és d'ordre senar. La corba és *convexa* si *y* i $\frac{d^2y}{dx^2}$ mateix signe; la corba és *còncava* si *y* i $\frac{d^2y}{dx^2}$ signes diferents. Per tant, el signe de $\frac{d^2y}{dx^2}$ indica la concavitat/convexitat de la corba i un canvi de signe d'aquest coeficient diferencial implica l'existència d'un punt d'inflexió.[57] Una quantitat entera que canvia de signe ha de passar en algun moment pel zero. Una quantitat fraccionària que canvia de signe ha de ser en algun moment infinita. Així, en el punt d'inflexió $\frac{d^2y}{dx^2}$ és zero o infinit.

Altres punts singulars

Lacroix defineix un *punt singular* de la corba com aquell que presenta alguna característica remarcable. N'hi ha de diverses espècies, segons la forma que prengui el coeficient diferencial en el punt. El punt 78 tracta la intersecció i reunió de branques. És a dir, els *punts múltiples*, on, per a una mateixa abscissa, l'ordenada presenta diverses diferencials. En cadascun d'aquests punts la corba té diverses tangents (que poden coincidir). Un tipus particular de punt múltiple és el *punt de retrocés*, on la corba presenta una única tangent (doble). Els punts de retrocés es classifiquen en: 1) de primera espècie, si la convexitat de les dues branques és oposada, i 2) de segona espècie, si les dues branques tenen concavitat del mateix costat.[58] La regla general és que, si a partir d'un determinat ordre el coeficient diferencial és 0, infinit o 0/0, això indica l'existència d'un punt singular. Per determinar-ne la seva espècie, s'ha de veure si les branques s'estenen més enllà del punt o no, i quina és la seva posició respecte l'eix d'abscisses (abans i després del punt). Es pot donar el cas de punts aïllats que tenen el caràcter de punts múltiples. Són els *punts conjugats*. El que els diferencia dels múltiples és que $\frac{dy}{dx}$ pren valors imaginaris. També poden existir alguns punts singulars invisibles, que resulten d'un nombre parell d'inflexions que es reuneixen en un sol punt. L'estudi de les branques de la corba està relacionat amb l'estudi de les arrels de l'equació. Del punt 88 al 93 analitza la corba $y^4 - 96a^2y^2 + 100a^2x^2 - x^4 = 0$: màxims i mínims en *y*, màxims i mínims en *x*, punts múltiples, branques infinites i punts d'inflexió (exemple que apareix tant al *Traité* com al *Traité élémentaire*).

Ni Bézout ni Lagrange no tracten punts d'inflexió.

Indeterminacions

Reyneau

En el punt 553 Reyneau estudia el cas $\frac{dx}{dy} = \frac{0}{0}$. Per resoldre aquesta situació, s'han de calcular les diferències de *dx* i *dy*, i el seu quocient és igual a $\frac{dx}{dy}$. Tanmateix, Reyneau no fa referència ni a L'Hôpital ni a Johann Bernoulli.

Lagrange

A la vuitena *leçon* parla de valors particulars que poden prendre determinades funcions:

[57] També caracteritza concavitat/convexitat segons la posició de la tangent respecte de la corba.

- Quan $\dfrac{1}{f(x)} = 0$, vol dir que la funció té potències de *i* negatives. Quan $f(x)$ conté

un radical que s'anul·la si $x = a$, significa que la funció presenta potències de *i* positives i fraccionàries.

- $\dfrac{0}{0}$ (p. 78): sigui $y = \dfrac{f(x)}{F(x)}$ tal que, quan $x = a$, es verifica $f(a) = F(a) = 0$.

Lagrange deriva l'expressió equivalent $f(x) = yF(x)$: $y'F(x) + yF'(x) = f'(x)$. Llavors, quan $x = a$, el terme $y'F(x)$ desapareix i queda $y = \dfrac{f'(x)}{F'(x)}$. Cas que numerador i denominador tinguin arrels múltiples comunes, és a dir, continguin el factor $(x-a)^m$ (relació derivades successives i arrels múltiples). Si *m* és enter positiu, es simplifiquen els factors comuns. Si *m* és fraccionari o negatiu, aleshores es desenvolupa en sèrie $f(a+i)$ i $F(a+i)$, s'ordenen les sèries en ordre ascendent, es divideix per *i*, i, finalment, es fa $i = 0$.

- $\dfrac{\infty}{\infty}$ (p. 80): sigui $y = \dfrac{f(x)}{F(x)}$ tal que, quan $x = a$, es verifica $f(a) = F(a) = \infty$.

Desenvolupa en sèrie $f(a+i)$ i $F(a+i)$, divideix numerador i denominador per la potència més baixa de *i* i després fa $i = 0$.

Lacroix

- $\dfrac{0}{0}$ (punts 52 a 59): sigui $\dfrac{P(x-a)^m}{Q(x-a)^n}$, on *P* i *Q* són funcions de *x* independents del

factor $x - a$. Simplificant els factors comuns (mitjançant diferenciacions successives) obté el següent resultat general quan $x = a$:

  - si $m > n$, aleshores l'expressió val zero,
  - si $m = n$, aleshores l'expressió té un valor finit,
  - si $m < n$, aleshores l'expressió és infinita.

Aquesta regla, però, no serveix quan l'expressió racional que esdevé 0/0 presenta exponent fraccionari. Resol aquest cas com Lagrange. Així conclou que la regla general consisteix en buscar el primer terme de cadascuna de les sèries ascendents que expressen el desenvolupament del numerador i del denominador, quan $x = a + h$,

[58] En el *Traité* observa que el caràcter del punt de retrocés de primera espècie es manifesta ja en el segon terme del desenvolupament. Mentre que el caràcter del de segona espècie, ho fa més enllà del

simplificar la fracció formada pels primers termes i després fer $h = 0$. Segons Lacroix, de vegades és més ràpid utilitzar aquesta regla que no pas l'anterior (en els casos que es puguin fer servir ambdues).

- $\frac{X}{X'} = \frac{\infty}{\infty}$ (punt 57): fent la transformació $\frac{\frac{1}{X'}}{\frac{1}{X}}$ es redueix a l'expressió $\frac{0}{0}$.
- $P{\cdot}Q = 0{\cdot}\infty$ (punt 57): fent $Q = \frac{1}{R}$ l'expressió esdevé $P{\cdot}Q = \frac{P}{R} = \frac{0}{0}$.[59]

Corbes osculadores

Reyneau

En el punt 504, Reyneau suposa la corba envoltada per un fil, el qual es comença a desenrotllar a partir d'un punt *D*.[60] Aquest punt, a mesura que el fil es desenrotlla, descriu una nova corba. La primera corba és l'*evoluta* de la segona. El *radi de l'evoluta* és cada part de fil separada de la corba. Els radis de l'evoluta són perpendiculars a la corba de la qual ella és evoluta. En el punt 507 havia vist que un petit arc de corba era igual a un petit arc de cercle i, per tant, igual a una petita part de tangent. El radi és perpendicular a l'arc de cercle i, en conseqüència, a la tangent. Els radis de l'evoluta són tangents a l'evoluta. De forma que cada radi és exactament la part de la tangent des del punt de contacte de l'evoluta corresponent a aquest radi, fins al punt de la corba a la qual el radi és perpendicular. De la qual cosa es dedueix que, quan es té una corba i es volen trobar els punts que formen l'evoluta, només cal trobar la fórmula general del radi de l'evoluta. Considerant el cas de coordenades ortogonals com un cas particular de coordenades des d'un punt, pren dues línies perpendiculars, a dos punts molt propers. Aquestes dues perpendiculars es tallen en un punt, amb el qual ja es pot calcular el radi. Treballa amb semblança de sectors petits (o triangles): 1) $\frac{ydy\sqrt{dx^2+dy^2}}{dxdy+yddx}$, 2)

segon terme.

[59] A més dels casos anteriors, en el *Traité*, Lacroix també tracta el cas en què $P - Q = \infty - \infty$ i veu que operant l'expressió $P - Q$ es pot arribar a una expressió del tipus $\frac{0}{0}$.

[60] La definició d'evoluta a partir del desenvolupament del fil és de Huygens. La trobem a totes les obres estudiades, tret de *An Institution of Fluxions* de Ditton, el *Treatise of Fluxions* de Maclaurin i les *Leçons* de Lagrange. De fet, cap d'aquestes tres obres presenta l'estudi de càlcul d'evolutes.

$\dfrac{ydx\sqrt{dx^2+dy^2}}{dx^2-yddy}$, quan $du=\sqrt{dx^2+dy^2}$ és constant, segons que l'arc sigui convex o còncau. També dóna la fórmula per als casos *dx* constant i *dy* constant. Es pot rectificar l'evoluta d'una corba geomètrica, ja que existeix una recta d'igual longitud que l'evoluta i cadascuna de les seves parts.

Bézout

Si sobre cada punt d'una línia corba es tracen les perpendiculars, les interseccions consecutives formen una línia corba que s'anomena *evoluta*. Si es considera l'evoluta envoltada per un fil que la toca en el seu origen i es desenvolupa, s'obté la corba inicial (punts 55-58).

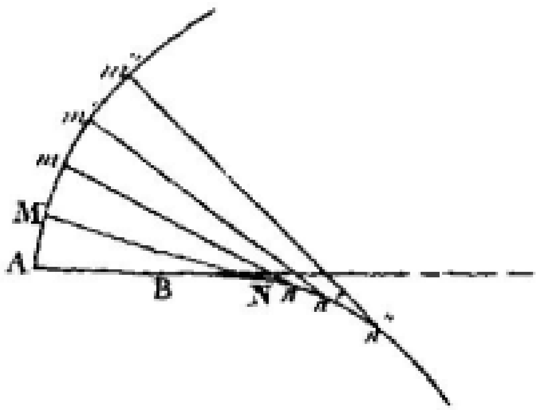


Figura 3

En el desenvolupament de *Nn*, es considera *Nn* com una petita línia recta, el fil *MNn* descriu al voltant del punt *n* com a centre l'arc *Mm*, al qual li és necessàriament perpendicular, perquè el radi és perpendicular a la circumferència. Es determinarà el *radi de l'evoluta Mn* per la concurrència de dues perpendiculars infinitament properes *MN* i *mn*. S'imaginen dos arcs consecutius *Mm*, *mm*' infinitament petits i infinitament poc diferents, que es consideraran com dues línies rectes. *MN* és perpendicular a *Mm* en el punt *M*; *mN* és perpendicular a *mm*' en el punt *m*. Considerant el triangle *NMm*, rectangle en *M*, es verifica: $1:\sin MNm::mN$ o $MN:Mm$. Com que l'angle *MNm* és infinitament petit, es pot identificar amb el seu sinus:

$$1:MNm::mN \text{ o } MN:Mm \rightarrow MN=\frac{Mm}{MNm}.$$

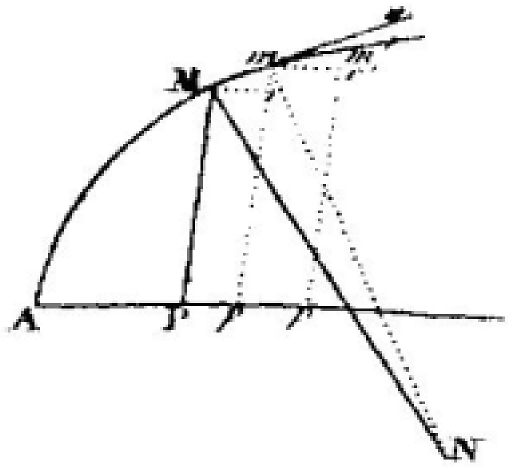


Figura 4

Si es prolonga *Mm*, l’angle *umm*’ és *MNm*, doncs aquests dos angles són complementaris del mateix angle *MmN* (*NMm* i *Nmm*’ són rectes). Així $MN = \frac{Mm}{umm'}$.
Els angles *umr*’ i *mMr* són iguals. L’angle *umm*’ és la diferencial de l’angle *rMm* (negativa, quan corba còncava, positiva, quan corba convexa). Per tant: $MN = \frac{Mm}{\mp d(rMm)}$. La tangent de *rMm* és $\frac{dy}{dx}$, i el cosinus és $\frac{dx}{ds}$ (*ds* és l’arc *Mm* o $\sqrt{(dx^2+dy^2)}$, doncs *rMm* és triangle rectangle). En el punt 24 ja havia vist que si z és un angle qualsevol: $dz = (\cos.z)^2 d(\text{tang}.z)$. Aleshores:

$$d(rMm) = \frac{dx^2}{ds^2} d\left(\frac{dy}{dx}\right)$$

d’on arriba a:

$$MN = \frac{ds}{\mp \frac{dx^2}{ds^2} d\left(\frac{dy}{dx}\right)} = \frac{ds^3}{\mp dx^2 d\left(\frac{dy}{dx}\right)},$$

que és la fórmula dels radis de l’evoluta, quan les ordenades són paral·leles.

Els radis de l’evoluta serveixen per mesurar la *curvatura* d’una corba en cada punt: en el desenvolupament de l’element *Nn* de la corba *BN* el fil traça el petit arc *mm*’, que té la mateixa curvatura que el cercle de radi *mn*. Així, quan es té l’expressió del radi de l’evoluta, per a cada punt es té el radi del cercle de mateixa curvatura que la corba.

Finalment comenta que, com que el radi *MN* és igual a la longitud de l'arc *BN* més el segment *AB*, la corba *BN* és rectificable.

Lagrange

A la novena lliçó de les *Leçons* (p. 103), estudia què passa quan el desenvolupament en sèrie d'una funció es talla a partir d'un determinat terme. En particular, sigui $f(x+i) = f(x) + if'(x) + \frac{i^2}{2} f''(x) + ...$, aplica aproximació quadràtica, és a dir, aproxima la funció mitjançant la paràbola (*osculatriu)* $z = f(x) + if'(x) + \frac{i^2}{2} f''(x)$. En el cas en què la corba proposada sigui una circumferència, es pot calcular el *radi de curvatura* $r = -\frac{(1+y'^2)^{3/2}}{y''}$ i el centre (*a*,*b*): $a = x - \frac{y'(1+y'^2)}{y''}$, $b = y + \frac{(1+y'^2)}{y''}$ (p. 103).[61]

[61] Al punt 8 de la *Théorie* compara una corba i un cercle que tenen un punt de contacte. Sigui la circumferència $(p-a)^2 + (q-b)^2 = c^2$, si imposem que tingui un punt comú amb la corba $y = f(x)$ i que les derivades primeres de la corba i de la circumferència coincideixin, aleshores es pot escriure *a*, *b* en funció de *x*, *y*, *y'* i *c* (per a tot *c*). Aquesta circumferència és tal que entre ella i la corba no hi ha cap altre arc amb mateix radi. Aquesta circumferència és tangent a la corba. Donat que aquesta conclusió és per a tot *c*, ajuntant les equacions de *a* i de *b* s'elimina *c* i queda l'equació de la recta que és lloc dels centres de totes les circumferències que poden ser tangents a la corba: $b = y + \frac{x-a}{y'}$, que coincideix amb la normal a la corba. A continuació fa el mateix en el cas en què a més del punt i de la primera derivada en comú, la corba i el cercle també coincideixin en la segona derivada. Aleshores el *centre* té equacions: $a = x - \frac{y'(1+y'^2)}{y''}$, $b = y + \frac{1+y'^2}{y''}$ i el *radi de curvatura* és $c = \frac{(1+y'^2)^{3/2}}{y''}$. Aquest cercle té la mateixa propietat que la tangent respecte a les rectes. S'anomena *cercle osculador* (o cercle de curvatura), ja que mesura la curvatura. En el punt 10 exposa la teoria general. Si *x*, *y* són les coordenades de la corba proposada i *p*, *q* les de la corba amb què anem a fer la comparació, d'equació $F(p,q,a,b,c,...) = 0$. Sigui (x,y) el punt comú, per tant $F(x,y,a,b,c,...) = 0$. Si només hi ha dos paràmetres, *a*, *b*, aleshores: $F(x,y,a,b) = 0$ i $F(x,y,a,b)' = 0$, la corba $F(p,q,a,b) = 0$ és tangent a la corba proposada en el punt comú, el contacte s'anomena de *primer ordre*. Si treballem amb una corba de tres paràmetres *a*, *b*, *c*: $F(x,y,a,b,c) = 0$, $F(x,y,a,b,c)' = 0$ i $F(x,y,a,b,c)'' = 0$, llavors $F(p,q,a,b,c) = 0$ és la *corba osculadora* i el contacte s'anomena de *segon ordre*. Els paràmetres *a*, *b*, *c*, ... són els elements del contacte. Si *m* és l'ordre de contacte llavors hi ha $m+1$ elements de contacte. Aquests contactes tenen la següent propietat analítica: si hi ha un contacte d'ordre *m*, aleshores les funcions derivades fins a ordre *m* coincideixen. I també tenen la propietat geomètrica següent: entre les dues corbes no passa cap altra corba pel mateix punt comú. Al final del capítol quart exposa un exemple relacionat amb la "teoria analítica de les *evolutes*": donada una família tri-paramètrica de corbes de contacte, amb paràmetres verificant una determinada propietat, només funció d'aquests paràmetres, s'ha de trobar l'equació diferencial associada i, després, la funció primitiva. Fa referència a Huygens.

Lacroix

En el *Traité élémentaire* Lacroix afirma que la tangent és el límit de les rectes que tallen una corba en dos punts. Per analogia ens podem preguntar quin és el límit de les línies d'una espècie que tallen la corba proposada en un nombre donat de punts. Així, tres punts determinen un cercle. El *cercle osculador* és el cercle tal que els tres punts coincideixen, és a dir, és el límit de tots els altres cercles. Com Lagrange, remarca que no passa cap altre cercle entre la corba i el cercle osculador. Defineix *evoluta* com el límit de les interseccions de les normals de la corba, agafades de dos en dos; lloc dels centres dels cercles osculadors de la corba donada (*evolvent*), els radis dels cercles osculadors tangents a l'evoluta i prenen la mateixa direcció que prendria un fil al voltant de l'evoluta, que s'anés desenrotllant. En el punt de contacte de la corba amb el cercle, la corba i el cercle tenen iguals el valor de l'ordenada i dels coeficients diferencials de primer i segon ordre. Com fa Lagrange a la *Théorie*,[62] mostra com es pot arribar a l'expressió del radi i del centre de cercle a partir del sistema format en diferenciar dos cops consecutius l'equació del cercle, obtenint tres equacions amb tres incògnites (l'abscissa i l'ordenada del centre del cercle, i el radi). Hi ha contacte de primer ordre si en el punt comú els coeficients diferencials de primer ordre coincideixen; contacte de segon ordre si en el punt comú els coeficients diferencials de primer i segon ordre coincideixen, etc. Quant més alt sigui l'ordre del contacte, més properes es trobaran les corbes. Entre dues corbes que tenen un contacte, no hi ha cap altra corba amb un contacte d'ordre inferior. El nombre màxim de termes iguals que pot tenir la "corba tangent" amb la corba proposada (contacte que ve donat pel nombre de constants que té l'equació de la primera corba) s'anomena *osculació*. La tangent és una corba osculadora de primer ordre. El cercle osculador pot tenir o bé un contacte de primer ordre o bé un de segon ordre. Com que dos és el màxim, aquesta serà l'osculació, i distingirà el cercle osculador de la resta dels cercles tangents.[63]

[62] Vegeu nota 61.

[63] En el punt 258 del *Traité* exposa la teoria de les osculacions de les corbes. Prenent el punt de contacte com a origen del sistema (com també fa Lagrange), siguin $k = ph + qh^2 + rh^3 + \dots$, $k' = ph$ (l'ordenada de la tangent), $k'' = ph + qh^2$ (l'ordenada d'una corba parabòlica), $k''' = ph + qh^2 + rh^3$, ... Donat que les diferències $k - k', k - k'', k - k''',\dots$ cada cop són més petites, k'' es troba entre la tangent i la corba; k''' es troba entre k'' i la corba, etc. Els ordres de contacte són igual al nombre de termes de $k^{(n)}$. Per exemple, entre la paràbola k'' (contacte de segon ordre) i la corba, no passa cap altra corba de segon ordre per aquest punt. La tangent a la corba que és lloc dels centres d'osculació (*evoluta*) és normal a la corba. Quan l'evoluta té un punt d'inflexió la corba té un punt de retrocés de segona espècie (Lacroix diu que això ja era conegut per L'Hôpital i defensat per D'Alembert i Euler). En el punt 283 exposa com es fa servir el *mètode dels límits* en l'estudi de les línies de contacte. Considera el cas particular de dues

3.5.2. EL LLENGUATGE QUE UTILITZA, ÉS GEOMÈTRIC O ALGÈBRIC?

Reyneau: En una primera part (fonaments, suposicions, definicions) el llenguatge que utilitza Reyneau és geomètric. Considera el moviment com a generador de línies rectes, corbes, angles, figures... (*primera suposició*, punt 513). Qualsevol porció de temps finita està dividida en infinits instants infinitament petits, i se'n necessita una infinitat per formar una part finita de temps (*segona suposició*, punt 514). Tracta problemes físico-matemàtics basats en el moviment i en les figures, a partir d'instants infinitament petits. Però a continuació diu que treballarà de forma algèbrica, doncs és més útil per resoldre els problemes tractats. Al quart corol·lari (secció I) mostra com diferenciar sèries, la qual cosa li servirà més endavant per al càlcul integral. En la secció IV utilitza sèries infinites per trobar les integrals que, amb les regles del càlcul integral, no tenen resultat finit i exacte (és a dir, integració aproximada). Sembla no respectar estrictament l'homogeneïtat dimensional: $fx^m + gy^n + hx^r y^s + a = 0$ (punt 552), $\left.\begin{array}{l} ma + mbx^n + mcx^{2n} + mex^{3n} + \&c \\ pnbx^n + 2pncx^{2n} + 3pnex^{3n} + \&c \end{array}\right\} dx...$ (punt 536).

Bézout: Gairebé tots els exemples proposats en la secció de tangents i de màxims i mínims són geomètrics. A més, el seu text presenta figures (adjuntes, al final). Però també parla de reduir una expressió a sèrie per facilitar l'estudi d'una expressió més complexa que contingui la primera (i aquí fa referència al seu tractat d'àlgebra). En el punt 30 resol un exemple amb càlcul diferencial i recorda que obté el mateix resultat en el seu tractat d'àlgebra. Però que, utilitzant el càlcul diferencial, la resolució és més expeditiva.

---

corbes que es tallen en tres punts. Troba el desenvolupament en sèrie en cadascun dels punts (tres sèries, per tant). Simplifica les equacions. Finalment, els tres punts coincideixen quan *h* es fa més i més petita (és a dir, $h \cong 0$). Així, els coeficients diferencials de primer i segon ordre coincidiran (com ja havia vist en el punt 258). També obté l'equació de la tangent com a límit de les secants. Mostra una manera més "elegant i rica" de presentar la teoria dels cercles d'osculació (punt 289): el centre de curvatura es pot considerar com la intersecció de dues normals molt properes. El cercle osculador és el límit de tots els que, passant per un punt donat de la corba, tenen dues interseccions més amb la corba. Quan *n* punts d'intersecció entre dues corbes es reuneixen en un de sol, a simple vista sembla que aquest cas no es diferencia del cas en què *m* punts d'intersecció coincideixen. Però la llei de continuïtat (anàlisi) ens assegura que en la coincidència dels punts es mantenen les característiques que tenia la corba quan els punts eren diferents.

Lagrange: El llenguatge de les *Leçons* és algèbric ("analític"). L'objecte del càlcul de funcions és el mateix que el del càlcul diferencial però a més a més serveix per relacionar el càlcul diferencial amb l'àlgebra. L'àlgebra (funcions resultants d'operacions aritmètiques) es pot considerar com a ciència de les funcions resultants del desenvolupament en sèrie. Les seves "funcions derivades" són objectes que obeeixen determinades lleis (algèbriques).[64] De fet, no apareixen figures a la seva obra.

Lacroix: La motivació original del càlcul diferencial és geomètrica; Lacroix parla del moviment continu generador de corbes. Tot i això, el seu llenguatge és bàsicament algèbric, doncs treballa amb funcions, utilitza el desenvolupament en sèrie de Taylor, parla de "pas al límit" (en el sentit de D'Alembert) ...

3.5.3. ELECCIÓ DE COORDENADES I TRACTAMENT DE LES CORBES ALGÈBRIQUES I TRANSCENDENTS

Reyneau: Pierre de Bérulle, fundador de l'Oratoire, era amic de Descartes. Quan Malebranche entrà a l'Oratoire, la filosofia ensenyada es basava de forma important en la cartesiana. Això portà a Malebranche a estudiar les matemàtiques i la física de Descartes. Per fer l'estudi de tangents, màxims i mínims, i punts d'inflexió i retrocés, Reyneau pràcticament es limita a les corbes algèbriques[65] (per exemple, a partir de l'equació general d'una corba algèbrica, $fx^m + gy^n + hx^r y^s + a = 0$, troba la subtangent de totes les corbes algèbriques). Les corbes transcendents que apareixen en el llibre de Reyneau són la cicloide, les expressions logarítmiques i les quantitats exponencials. Per trobar la tangent a la cicloide Reyneau utilitza directament la corda paral·lela, com Fermat (corol·lari de L'Hôpital i Johann Bernoulli).[66] Però la justificació és com la de Descartes.[67] Quant a la corba logarítmica, exposa la seva generació i propietats i com

[64] En el primer punt del primer capítol de la *Théorie* comenta que les operacions de l'àlgebra són suficients per resoldre els problemes de la teoria de corbes, ja que les corbes no són res més que les relacions de línies traçades d'una manera determinada i que acaben en les corbes (*ordenades*). Però la determinació de les tangents, radis de curvatura, àrees, etc. depèn essencialment d'operacions relatives a les funcions. Sovint presenta els dos punts de vista, geomètric i algèbric (tangents, màxims i mínims,...).

[65] Ell les anomena "corbes geomètriques". Vegeu REYNEAU (1708), punt 552.

[66] Vegeu FERMAT (1894), pp. 144-145.

[67] Vegeu l'apartat dedicat a la tangent a la cicloide de l'annex I.

trobar les diferències, a partir del seu desenvolupament en sèrie. Aleshores, mitjançant *derivació logarítmica* i sèries, troba les diferències de la corba exponencial. Calcula les subtangents d'ambdues corbes. Reyneau comenta que les fórmules donades serveixen per a qualsevol angle entre coordenades, tot i que normalment considera coordenades ortogonals. Els punts d'inflexió i de retrocés també els calcula com un cas de coordenades des d'un punt. En particular, si la y tendeix a infinit, dedueix les fórmules del cas d'ordenades paral·leles.

Bézout: En els punts 8, 9, 10 mostra les regles de diferenciació per a la suma, resta, producte i potència (amb exponent positiu o negatiu, enter o fraccionari),[68] necessàries per diferenciar tota *quantitat algèbrica*. En el punt 36 afirma que es pot considerar una quantitat expressada algèbricament com l'ordenada d'una línia corba. Del punt 22 al 25 presenta la diferenciació del sinus i del cosinus; en els punts 26 i 27 mostra la del logaritme, i en el 28 la de l'exponencial. La fórmula per diferenciar el sinus/cosinus la dedueix de la fórmula del sinus/cosinus d'una suma, suposant radi 1, i tenint en compte que el sinus d'un arc infinitament petit és ell mateix, i que el cosinus no difereix del radi (aquí fa referència a les planes 286 i 287 de la seva *Géométrie*, respectivament). En el punt 24 exposa la diferenciació de la tangent d'un angle, i en el 25 la de la cotangent. En el punt 26 defineix el logaritme en termes de progressions aritmètiques i geomètriques (aquí fa referència a la plana 200 de la seva *Arithmétique*) i en dedueix la diferenciació.[69] Troba la diferencial de l'exponencial mitjançant *derivació logarítmica* (punt 28). Calcula les tangents a l'el·lipse, paràboles ($yy = px, y^{m+n} = a^m x^n$), logaritme, circumferència i hipèrboles ($xy = aa, y^m = a^{m+n} x^{-n}$). Calcula el radi de

---

[68] La del quocient la dedueix de la del producte, considerant $\frac{x}{y} = xy^{-1}$

[69] Sigui $a, a' = ra, ..., y, y' = ry$ progressió geomètrica de raó r. Sigui $b, b', ..., x, x'$ progressió aritmètica, de manera que b és el logaritme de a, b' el de a', x el de y, i x' el de y'. D'una banda $\frac{y'}{y} = \frac{a'}{a}$, d'altra $y' = y + z$. D'aquestes dues fórmules resulta l'expressió $\frac{az}{y} = a' - a$. A partir de $x' - x = b' - b$ i de la relació entre les dues progressions ($a' - a : b' - b :: 1 : m$, on m és el mòdul) s'obté $\frac{maz}{y} = x' - x$. Si y, y' són infinitament propers, i x, x' també, aleshores $\frac{mady}{y} = dx$, fórmula de la qual Bézout afirma que té sentit, tot i ser m finit i dx, i dy infinitament petits, donat que dues quantitats infinitament petites es poden contenir l'una a l'altra tants cops com dues quantitats finites. Finalment considera el sistema de logaritmes més còmode ($a = m = 1$), de manera que $\frac{dy}{y} = dx$.

l'evoluta del cercle i de la paràbola. Quant a les coordenades, x, y no tenen per què ser perpendiculars entre elles, però aquesta suposició implica simplicitat.

Lagrange: Troba les derivades de qualsevol funció mitjançant el seu desenvolupament en sèrie de potències. Mostra les funcions derivades d'una potència x^m (tercera *leçon*); d'una funció exponencial a^x (quarta *leçon*); del sinus, del cosinus i dels angles expressats pel sinus i el cosinus (cinquena *leçon*). Troba el desenvolupament en sèrie de $\log(x+i)$ (a partir de l'exponencial i de la relació $f(x) = \log x \Rightarrow x = a^{f(x)}$), que és tant més convergent quant més petit sigui i respecte x (quarta *leçon*). No especifica tipus de coordenades, només comenta: "si x, y són les coordenades de la corba proposada...".

Lacroix: Si la dependència entre variables es basa en operacions algèbriques, es té una *funció algèbrica*. Comenta que són les funcions que apareixen en els seus *Élémens d'Algèbre* (1811). Si, al contrari, la relació ve donada a través de condicions no algèbriques, es té una *funció transcendent*. Les relacions que caracteritzen una corba poden venir expressades per equacions algèbriques o bé a través d'equacions diferencials (punt 282 del *Traité*). La diferenciació d'ambdós tipus de funcions es basa en el desenvolupament en sèries de potències.[70] Les regles per diferenciar la suma, la resta, el producte, el quocient, les arrels i les potències (d'exponent qualsevol) són suficients per diferenciar les funcions algèbriques. Quant a la diferenciació de funcions transcendents:

- *Exponencial* (punts 23-25 del *Traité élémentaire*), a partir del desenvolupament en sèrie de potències.
- *Logarítmica*: A partir de l'exponencial (punts 26-27 del *Traité élémentaire*). Justifica perquè no existeix el desenvolupament en sèrie de $\ln x$ però sí el de $\ln(x+1)$ (punt 28). Quant a la convergència, ens remet al seu *Complément des élémens d'Algèbre* (punt 29). Considerar logaritmes facilita la diferenciació de fórmules exponencials complicades. En el punt 101 del *Traité élémentaire* dóna la fórmula dels segments associats a la tangent, primer respecte l'eix de les abscisses (aleshores són transcendents) i després respecte l'eix de les ordenades (d'aquesta forma són algèbrics). Obté l'equació diferencial de l'evoluta, que és transcendent.

[70] En el capítol introductori del *Traité*, *Nocions generals sobre funcions i sèries*, Lacroix observa que el nombre de termes algèbrics del desenvolupament de les funcions transcendents és il·limitat.

- *Circulars* i les respectives inverses (punts 32-37 del *Traité élémentaire*): Desenvolupa en sèrie de potències aquelles que no són massa complicades, com el sinus o el cosinus.
- *Cicloide* (punts 102-103 del *Traité élémentaire*):[71] Dóna la seva equació diferencial, agafant coordenades x, y rectangulars. Però, mentre que les de Bernoulli es referien al cercle generador, les de Lacroix es refereixen a la pròpia cicloide.
- *Espirals* (punt 104 del *Traité élémentaire*; 275 del *Traité*): Defineix les seves equacions mitjançant coordenades polars. Per construir l'evoluta, treballant amb coordenades polars, diu que és més elegant trobar el centre del cercle osculador i la normal. En lloc de calcular directament les expressions dels segments associats a la tangent en polars, al punt 108 justifica perquè creu més útil aplicar el canvi d'ortogonals a polars en les expressions generals (donades en ortogonals).

En general treballa amb coordenades rectangulars, però afirma que tot el que ha escrit es podria generalitzar per a coordenades formant un angle qualsevol entre elles (punt 70 del *Traité élémentaire*).

3.5.4. PROBLEMES I APLICACIONS

Reyneau: Les seccions II i III estan dedicades a la resolució dels dos tipus de problemes físico-matemàtics, respectivament. La secció II tracta aquells problemes en la resolució completa dels quals només es fa servir el càlcul diferencial (càlcul de tangents, subtangents, màxims i mínims, punts d'inflexió i de retrocés, evolutes,...). Per exemple, en el punt 503 exposa el cas del pèndol com a aplicació de la tangent a la cicloide. La secció III tracta aquells problemes, la resolució dels quals comença amb càlcul diferencial i acaba amb càlcul integral (rectificació, quadratures, centres de gravetat,...). En la secció IV estudia les sèries que són les integrals dels elements trobats en la secció anterior. La tercera part està dedicada al càlcul integral.

Bézout: Bézout afirma que el càlcul diferencial és molt útil per a les ciències físico-matemàtiques (principalment, la mecànica, on es veuen les raons entre les variacions

---

[71] En el punt 271 del *Traité* pren r com el radi del cercle generador i t com l'arc de cercle entre el punt de la cicloide i el punt de contacte del cercle amb el terra (és a dir, de fet empra coordenades polars). Aleshores dóna l'equació de la cicloide en coordenades ortogonals: $x' = t - r\sin\frac{t}{r}$, $y' = r - r\cos\frac{t}{r}$. Eliminant t obté una equació diferencial en termes de x' i y'.

creixents/decreixents de les quantitats en cada instant). De fet, el tercer tom de la seva obra està dedicat la mecànica i l'hidrostàtica, "precedides pels principis del càlcul que serveix d'introducció a les ciències físico-matemàtiques".[72] A partir del punt 30 dóna exemples d'ús de les regles exposades anteriorment, i l'avantatge que representa el càlcul diferencial sobre l'àlgebra ordinària. Aquestes regles les aplica a qüestions de geometria i càlcul. En el punt 32, proposa trobar on una corba (o la tangent) forma amb l'ordenada un angle determinat. D'aquesta situació pot sortir una equació amb valors (solució) imaginaris o bé absurds. Gairebé tots els exemples proposats en l'apartat d'extrems són de caire geomètric: trobar d'entre totes les línies que es poden traçar per un punt *D* donat, amb un angle conegut, aquella que forma amb els costats de l'angle, el triangle més petit possible (punt 44); trobar d'entre tots els paral·lelepípedes amb la mateixa superfície i la mateixa alçada el que té major capacitat (punts 45 i 46); de tots els cilindres rectes, amb la mateixa superfície, trobar el de major capacitat (punt 47); de tots els triangles amb el mateix perímetre i mateixa base, trobar el d'àrea màxima (punt 48); etc. En canvi també proposa, com Fermat, dividir un nombre *a* en dues parts, de forma que el seu producte sigui màxim (punts 38 i 39);[73] en general, dividir *a* en dues parts, de manera que el producte d'una potència d'una de les parts per potència de l'altra sigui màxima (punt 40). Estudia els extrems quan es treballa amb diverses variables. Les planes 65 a 180 contenen la part dedicada al càlcul integral, on es proposen problemes sobre quadratura i rectificació de corbes, i mesura de superfícies i volums.

Lagrange: Les funcions derivades es presenten de forma natural en Geometria (àrees, tangents, radis osculadors,...) i en Mecànica (velocitat, força, ...). A les *leçons* X a XVIII tracta *equacions diferencials*[74] i diferències parcials. En la *leçon* XIX dóna l'equació de condició perquè una fórmula pugui ser derivada exacta d'una funció de *x*, *y*, condició necessària per obtenir l'equació primitiva. En la *leçon* XX tracta les equacions derivades de diverses variables (que relacionen les diferències parcials, de les quals ja ha parlat en la lliçó anterior).[75]

---

[72] Vegeu BÉZOUT (1799-1800).

[73] Vegeu FERMAT (1894), p. 122.

[74] A la *Théorie* les anomena *equacions derivades*.

[75] El capítol tercer de la *Théorie* està dedicat, entre altres temes, a "problemes directes i inversos sobre contacte de corbes". Els problemes sobre tangents, radis de curvatura, etc. i, en general, sobre contacte de corbes, poden ser:

- *directes*, s'han de trobar alguns del elements del contacte d'un determinat ordre; aquest tipus de problema només depèn de l'anàlisi directa de les funcions i sempre són resolubles de forma analítica.

Lacroix: Considera la formació d'equacions diferencials. Donada una família de corbes troba l'equació diferencial associada, alliberant-la dels paràmetres (punts 43-45). Tracta el que coneixem com equacions diferencials exactes (punt 84 i següents). Presenta l'estudi de les corbes, a partir de la seva equació, com a aplicació del càlcul. Lacroix també presenta les nocions generals sobre l'aplicació del càlcul diferencial a la teoria de corbes a curvatura doble i superfícies corbes (pla osculador, pla normal, pla tangent).[76]

- *inversos*, suposant que existeix una relació entre alguns d'aquests elements i x, y, y', y'',... (és a dir, donada l'equació derivada d'un determinat ordre), buscar l'equació primitiva per tenir l'equació de la corba en x, y; es tracta de l'anàlisi inversa de funcions, és més difícil que la directa però hi ha casos en què la resolució sí és immediata, degut a consideracions particulars, com la relació només entre els elements de contacte, i no amb x, y.

[76] El capítol X de la *Théorie* de Lagrange està dedicat en part a la teoria de superfícies corbes.

4. ALEMANYA

4.1. *ELEMENTA ANALYSEOS* (1713-1715) DE CHRISTIAN WOLFF

Christian Wolff (1679-1754) va néixer a Breslau. Era fill d'un assaonador. Va estudiar matemàtiques i física a la Universitat de Jena. El 1703 va esdevenir *Privatdozent* de la Universitat de Leipzig, on donà classes fins el 1706, any en què fou requerit per la Universitat de Halle com a professor de matemàtiques i filosofia natural. Tenia relació amb Leibniz, amb qui mantingué correspondència. De fet, la filosofia wolffiana és una modificació de la leibniziana. En principi, a Halle Wolff ensenyava matemàtiques, però en marxar un dels seus col·legues va afegir física a la seva tasca docent, i totes les disciplines filosòfiques. El seu sistema determinista li generà enemics a la universitat, donat que Halle era el centre del Pietisme. El rei Frederic Guillem I, en assabentar-se'n, el va destituir del seu càrrec a la universitat i el va expulsar del territori prussià. Wolff es dirigí a Marburg (Saxònia), on la universitat ja li havia ofert un lloc abans d'aquesta crisi. Allà el van rebre amb distinció i les circumstàncies de la seva expulsió van dirigir l'atenció universal cap a la seva filosofia.

El 1740, a la mort de Frederic Guillem I, puja al tron Frederic el Gran, qui torna a oferir Wolff un lloc a la universitat de Halle. La filosofia de Wolff tingué un renom gairebé indiscutible, fins que va ser substituïda per la revolució kantiana. Es pot dir que el sistema de Wolff és una adaptació del de Leibniz, després d'haver sistematitzat i dogmatitzat el pensament leibnizià. Cal remarcar el seu caràcter global, que abasta tots els camps del coneixement humà, la seva insistència en una exposició metòdica i clara, i la seva confiança en el poder de la raó per reduir totes les matèries a aquesta forma. Publicà obres sobre lògica, ontologia, cosmologia, psicologia racional i teologia natural.[1] En general, les obres que publicà durant la seva estada a Halle van ser escrites en alemany, mentre que les que escrigué a Marburg eren majoritàriament en llatí. Cal afegir que Wolff va ser pràcticament el creador del llenguatge filosòfic alemany.

El 1710 publica els *Anfangsgründe aller mathematischen Wissenschaften*. La versió llatina d'aquesta obra són els *Elementa Matheseos Universae* (1713-15), als quals pertanyen els *Elementa Analyseos*, que contenen els *Elementa Analyseos Infinitorum*

---

[1] Les fonts biogràfiques consultades són GILLISPIE (ed.) (1970) i WALES-SANGER (eds.) (2001).

tradit, que constitueixen el text que he analitzat. En particular he analitzat les seccions següents:

- Secció I: *Del càlcul diferencial*, que inclou un capítol sobre la naturalesa del càlcul diferencial (capítol I), un dedicat a les tangents (capítol II) i un dedicat al mètode de màxims i mínims (capítol III).
- Secció IV: *Del càlcul differentio-differential*, amb el capítol I que tracta sobre la naturalesa del càlcul *differentio-differential* (és a dir, l'ordre superior), el capítol II dedicat als punts d'inflexió i el capítol III dedicat al radi de curvatura i l'evoluta.

Per què va tenir èxit?

Buchdahl destaca el caràcter popularitzador de l'obra de Wolff.[2] Entre el 1713 i el 1741 es feren diverses edicions de la versió llatina i també alguna de la versió alemanya.

A quin públic anava dirigit?

Com ja s'ha vist més amunt, la intenció essencial de Wolff era popularitzar tot els camps del coneixement humà, exposant-los de manera clara i metòdica, prenent com a model el mètode matemàtic.

Va transcendir les fronteres de la seva terra?

El text analitzat és la versió llatina dels *Anfangsgründe aller mathematischen Wissenschaften* (1710). Després d'haver consultat a BAUTZ (2004) em consta que hi ha traduccions franceses de l'obra de Wolff (1747, 1757). Fins i tot la part dels *Elementa* dedicada a l'àlgebra fou traduïda a l'anglès (1739, 1765).

Quina relació té amb l'Analyse?

Wolff fa referència a l'*Analyse* en el seu *Mathematisches Lexicon* (1716). Per exemple, quan defineix el punt d'inflexió.

[2] Vegeu GILLISPIE (ed.) (1970), vol. 14, pp. 482-484.

4.2. *ANFANGSGRÜNDE DER ANALYSIS DES UNENDLICHEN* (1760) D'ABRAHAM GOTTHELF KÄSTNER

Abraham Gotthelf Kästner[3] va néixer a Leipzig el 1719. El seu pare, professor d'universitat i doctor en dret, va ser el seu primer professor. Estudià a Leipzig. Més endavant fou notari (1733) i *Baccalaureus* (1735). El 1737 fou examinat com a *Candidatus Juris* de la facultat de dret. El 1739 esdevingué *Magister* de la facultat de filosofia, on impartí classes de filosofia i matemàtiques. El 1746 obtingué la plaça de professor extraordinari de matemàtiques a Leipzig i el 1756 la de professor ordinari de matemàtiques i física a Göttingen (fou el successor de Johann Andreas Segner, que al seu torn fou successor de Christian Wolff). Fou nomenat membre ordinari de la Societat Científica de Göttingen. El 1765 obtingué el caràcter de "cortesà" de Gran Bretanya i de Braunschweig-Lüneburg. Morí el 1800.

Va publicar diverses obres de matemàtiques sobre resolució d'equacions, resolució d'equacions diferencials, projecció, perspectiva, òptica, gnomònica, astronomia, geografia matemàtica i història de les matemàtiques (en llatí). A més, va publicar un tractat sobre seccions còniques (1759) i un altre sobre geometria, amb aplicacions (1790) i la seva col·lecció de *principis*: de l'aritmètica, de la geometria, de la trigonometria plana i esfèrica i de la perspectiva (1758); de la matemàtica aplicada (1759); de l'anàlisi de les quantitats finites (1760); de l'anàlisi dels infinits (1760); de la mecànica superior (1765); de la hidrodinàmica (1769).

L'obra que he estudiat és la segona edició (1770) de l'*Anfangsgründe der Analysis des Unendlichen*. La primera part conté els punts següents, relacionats amb el càlcul diferencial:

- *Motius de la teoria dels infinits*.
- *Motius del càlcul diferencial*.
- *Conceptes del càlcul de fluxions*.

[3] La font biogràfica consultada és FABIAN-GORZNY (eds.) (1982-).

- *Prova general del teorema del binomi*.
- *Fórmula per a la potència d'una sèrie infinita*.
- *Les tangents*.
- *Les normals*.
- *Traçar les tangents que passen per l'ordenada d'un punt*.
- *Asímptotes*.
- *Diferencials superiors*.
- *Comparació dels coeficients binomials amb els coeficients de les diferencials*.
- *Expressió d'un terme indeterminat d'una sèrie a través de les seves diferencials superiors*.
- *Dels màxims i mínims*.

A continuació ve un seguit d'apartats sobre la teoria de les equacions. Després de la part on s'exposen els principis del càlcul integral, trobem una secció dedicada a aplicacions del càlcul dels infinits a les línies corbes (quadratura, rectificació, curvatura, punts de retrocés i d'inflexió, etc.) i una secció dedicada a l'aplicació del càlcul integral al càlcul de cossos rodons i les seves superfícies.

Per què va tenir èxit?

Durant la major part de la seva vida Kästner fou professor de matemàtiques. Segons el parer de Bensaude-Vincent,[4] aquest fet que podria explicar la gran quantitat d'obres sobre matemàtiques (tractats i principis) que Kästner publicà. De l'obra analitzada he trobat tres edicions en alemany (1760, 1770, 1799).

A quin públic anava dirigit?

El seu llibre està dedicat als estudiants de matemàtiques, en general, i als seus alumnes, en particular. En el prefaci diu que els estudiants de matemàtiques han de respectar les quantitats infinitament grosses i petites, les línies corbes, etc. com la doctrina més elevada. En la segona edició diu que gràcies a l'ús que ha fet de la primera edició del seu llibre als seus cursos ha pogut detectar errates, que ha esmenat en la segona.

[4] Vegeu BENSAUDE-VINCENT (1990), p. 438.

Va transcendir les fronteres de la seva terra?

Als catàlegs consultats[5] no he trobat cap traducció de l'obra estudiada, només exemplars en alemany a la British Library de Londres i a diverses biblioteques d'Alemanya. He trobat altres obres de Kästner, tampoc no traduïdes, a les biblioteques nacionals d'Espanya i de França, com els *Anfangsgründe der Arithmetik, Geometrie, Trigonometrie und Perspective*.

Quina relació té amb l'Analyse?

En l'apartat de punts de retrocés (de primera i segona espècie) esmenta L'Hôpital.[6] I en parlar de curvatura fa referència a les *Lectiones* de Johann Bernoulli.[7]

4.3. *ANFANGSGRÜNDE DER ANALYSIS DES UNENDLICHEN* (1770) DE GEORG FRIEDRICH TEMPELHOFF

Georg Friedrich Tempelhoff[8] va néixer a Trampe (Mittemark) el 1738. El seu pare, fill d'eclesiàstic luterà, tenia al seu càrrec terres del Príncep August de Prússia. Els seus primers estudis els dugué a terme a l'escola del seu poble. Els continuà al col·legi de Frankfurt am Oder i a la seva universitat. Els seus pares volien que es dediqués a la jurisprudència. Tanmateix, Frederic II, havent incorporat al seu exèrcit les tropes saxones fetes presoneres a Pirna el 1756, va posar al comandament oficials i suboficials escollits entres els seus súbdits.

Donat que Tempelhoff mostrava interès per les matemàtiques i que volia ingressar a l'exèrcit, va començar la seva carrera militar. És presentat al Duc de Bronswick, que el recomana a Frederic II i el promociona dins del cos d'artilleria. Continua els seus estudis de matemàtiques. El 1768 tradueix i comenta les *Instructions de physique et de*

[5] *Berkeley Digital Library SunSITE*, *Bibliotecas universitarias y de investigación españolas*, *Catálogo Colectivo del Patrimonio Bibliográfico Español* i *Karlsruher Virtueller Katalog*.

[6] Vegeu KÄSTNER (1760), p. 165.

[7] Vegeu KÄSTNER (1760), p. 493.

mathématiques del cavaller Papacin d'Antoni, per a ús dels cadets d'artilleria (els seus alumnes). El 1769 dels primers volums de la societat privada de Torí (que després esdevindrà acadèmia real) n'extreu una memòria del Comte de Saluce sobre la força elàstica de la pólvora. Inventà un nou tipus de granada. El 1790 fou instructor de matemàtiques del Príncep Reial de Prússia. Des de 1791 dirigeix l'Acadèmia d'Artilleria de Berlín. També fou membre de l'Acadèmia de Ciències de Berlín. Entre d'altres publicà les següents obres: *Anfangsgründe der Analysis endlicher Grössen* (1769), *Anfangsgründe der Analysis des Unendlichen* (1770) i *Geometrie für Soldaten* (1790), i també obres sobre astronomia i una introducció a l'àlgebra. També aplicà el càlcul als instruments musicals.

La primera part de l'*Anfangsgründe der Analysis de Unendlichen* està dedicada al Càlcul Diferencial:

- 1ª Secció: *De les línies de segon ordre o de les seccions còniques*.
- 2ª Secció: *De la paràbola*.
- 3ª Secció: *De l'el·lipse*.
- 4ª Secció: *De la hipèrbola*.
- 5ª Secció: *De les quantitats infinites i infinitament petites*.
- 6ª Secció: *Del diferencial de les equacions*.
- 7ª Secció: *Mètode per trobar les tangents de les corbes*.
- 8ª Secció: *De l'ús del Càlcul Diferencial per solucionar problemes diferents*.
- 9ª Secció: *Més exposició sobre el mètode de les tangents*.
- 10ª Secció: *Del diferencial de figures corbes planes i dels arcs de les corbes*.
- 11ª Secció: *Dels diferencials de les equacions diferencial, o dels diferencials superiors*.
- 12ª Secció: *De l'ús del Càlcul Diferencial per trobar els diferencials complets de funcions donades*.
- 13ª Secció: *De la suma de sèries*.
- 14ª Secció: *De la curvatura de línies corbes*.
- 15ª Secció: *Mètode per trobar les ordenades màximes i mínimes de les línies corbes*.

[8] La font biogràfica consultada és FABIAN-GORZNY (eds.) (1982-).

Per què va tenir èxit?

Només he trobat exemplars de la primera edició (1770) del text de Tempelhoff. De fet, a la fitxa corresponent del llibre als catàlegs de la British Library i de la biblioteca del University College de Londres, hi diu que no va tornar a ser publicat.

A quin públic anava dirigit?

Aquesta obra s'adreça als cadets de la Reial Artilleria Prussiana, on Tempelhoff impartia classes.

Va transcendir les fronteres de la seva terra?

Després d'haver consultat diversos catàlegs col·lectius,[9] a Gran Bretanya, a França, a Itàlia i a Espanya només he trobat la versió alemanya del text de Tempelhoff a la British Library i a la biblioteca del University College de Londres, i cap traducció.

Quina relació té amb l'Analyse?

No he trobat cap referència sobre l'*Analyse* de L'Hôpital per part de Tempelhoff.

4.4. *ANFANGSGRÜNDE DER MATHEMATISCHEN ANALYSIS UND HÖHERN GEOMETRIE* (1786) DE WENCESLAU J. G. KARSTEN

Wenceslau Johann Gustav Karsten[10] va néixer a Neubrandenburg el 1732, en el si d'una família d'apotecaris de Güstrow. Degut a un incendi el 1737 Wenceslau ha de marxar cap a Güstrow, on rebé classes privades de matemàtiques. Estudià Teologia a Rostock (1750-1752) i filosofia, teologia i matemàtiques a Jena (1752-1754). A la universitat de Rostock fa de substitut del professor de matemàtiques Petrus Becker i del *Privatdozent Magister* Franz U. T. Äpinus. Serà promogut a *Magister* el 1755, així com *Privatdozent*

[9] *Berkeley Digital Library SunSITE*, *Bibliotecas universitarias y de investigación españolas*, *Catálogo Colectivo del Patrimonio Bibliográfico Español* i *Karlsruher Virtueller Katalog*.

[10] Les fonts biogràfiques consultades són FABIAN-GORZNY (eds.) (1982-) i ENGEL (2000).

per a les classes de les disciplines filosòfiques. Fou Äpinus qui posà Karsten en contacte amb Leonhard Euler. El 1758 esdevingué professor de lògica a la universitat de Rostock. Tensions entre la ciutat de Rostock i el Duc de Mecklenburg-Schwerin feren que la universitat es dividís. L'any 1760 el Duc fundà la universitat de Bützow, on Karsten treballà com a professor de matemàtiques. Degut al començament de la Guerra dels Set Anys cap de les dues universitats es pogué desenvolupar, així que el 1789 les dues parts es tornaren a ajuntar. El 1765 Karsten refusà una plaça a l'Acadèmia de San Petersburg i el 1778 acceptà la plaça de professor de matemàtiques i teoria natural a la universitat de Halle, com a successor de Johann Andreas Segner, on romangué fins la seva mort, el 1787. De fet, sembla ser que quan Lagrange deixà la seva plaça a l'Acadèmia de Berlín, volien que Karsten el substituís, però no fou possible donat que Karsten morí gairebé quan Lagrange marxà de Berlín. Entre les obres matemàtiques que Karsten publicà s'inclouen *Elementa matheseos universalis* (1756), *Lehrbegriff der gesamten Mathematik* (1767-1777) i *Mathematische Abhandlungen* (1786), al qual pertany l'obra analitzada en aquest capítol. L'*Anfangsgründe* de Karsten conté els capítols següents:

- Capítol I: *De la geometria indeterminada*.
- Capítol II: *Principis del càlcul diferencial amb algunes aplicacions*.
- Capítol III: *Principis del càlcul integral*.
- Capítol IV: *Mètode general de les tangents i els estudis que d'ell depenen*.
- Capítol V: *De les propietats notables de les còniques*.
- Capítol VI: *Teoria general de les línies d'ordre tercer i superior*.
- Capítol VII: *De les línies transcendents*.
- Capítol VIII: *De les superfícies corbes i de les línies de doble curvatura*.
- Capítol IX: *Solució d'equacions superiors determinades amb variació sobre la divisió de l'angle*.
- Capítol X: *Ús de les sèries per resoldre problemes matemàtics*.

Per què va tenir èxit?

Moritz Cantor en la seva història de la matemàtica parla del *Lehrbegriff der gesamten Mathematik* de Karsten. La seva carrera està dedicada a l'ensenyament de les matemàtiques, una de les raons que cita Bensaude-Vincent com a requisit per confeccionar llibres de text satisfactoris.[11]

A quin públic anava dirigit?

Essent professor a les universitats de Rostock i de Halle, és molt probable que els seus llibres s'adrecessin als seus estudiants.

Va transcendir les fronteres de la seva terra?

Als catàlegs consultats[12] només he trobat la versió alemanya (dues edicions) i cap traducció.

Quina relació té amb l'Analyse?

En el punt 266 tracta el problema de $\frac{0}{0}$. Fa referència a Johann Bernoulli, que fou el primer en saber que aquí el càlcul diferencial podia ser molt avantatjós; a L'Hôpital i a la seva obra *Analyse des infiniment petits*; i a les *Institutiones calculi differentialis* d'Euler.

4.5. ANÀLISI COMPARATIVA DELS TEXTOS

4.5.1. COM EXPOSA ELS FONAMENTS DEL CÀLCUL?

Wolff: El *càlcul diferencial* és el mètode de les quantitats diferencials, és a dir, les que creixen en quantitats infinitament petites (definició 1). Un *infinitèsim* o quantitat infinitament petita és una partícula exigua, menor que qualsevol quantitat donada (definició 2). L'infinitèsim es pot negligir, i, en fer-ho, l'error comès és zero (corol·lari 1). Dues quantitats que es diferencien en un infinitèsim són iguals (corol·lari 2). Com

[11] Vegeu BENSAUDE-VINCENT (1990), p. 438.

[12] *Berkeley Digital Library SunSITE*, *Bibliotecas universitarias y de investigación españolas*, *Catálogo Colectivo del Patrimonio Bibliográfico Español* i *Karlsruher Virtueller Katalog*.

feia Leibniz, parla dels infinitèsims com d'entitats reals. En el *Mathematisches Lexicon* Wolff comenta que es pot parlar de *diferències infinitament petites* (com el cas de Leibniz), de *fluxions* (com els anglesos), d'*infintèsims* (com Nieuwentijdt), *infiniment petits* o quantitats diferencials (com els francesos). Per justificar la fórmula de la diferència del producte, considera que el producte *xy* representa un rectangle. Un costat creix i passa a ser $x + dx$, i l'altre passa a ser $y + dy$. Així la diferencial del producte és la diferència entre els dos rectangles: $ydx + xdy + dxdy$. La diferencial del rectangle ydx, si dx es considera constant, és $dxdy$. La del rectangle xdy, prenent ara dy constant, també. El rectangle $dxdy$ és nul respecte ydx i xdy.

Kästner: El primer apartat de la seva obra es titula *Motius de la doctrina dels infinits*. Una quantitat *creix infinitament* quan sempre pot ser més gran que tota quantitat finita donada. Una quantitat pot créixer sense fi, indefinidament (en el sentit de D'Alembert) sense esdevenir infinit (com la suma dels primers termes d'una sèrie algèbrica, com un límit que no pot ser mai assolit). Realment no es pot dir que una quantitat sigui *infinitament gran*. La quantitat, en créixer, s'apropa més i més al límit, de manera que es pot prendre el límit en lloc de la quantitat. Una quantitat *decreix indefinidament* (*infinitament*) o desapareix quan és més petita que qualsevol quantitat donada. També es diu que és *infinitament petita*. Si *u* és una quantitat infinitament gran aleshores $x = \frac{1}{u}$ és una quantitat infinitament petita, parer anàleg al de Johann Bernoulli. Dir que una quantitat és infinitament gran d'ordre *k* és equivalent dir que aquesta quantitat és infinitament petita d'ordre $-k$. Si *y* és infinitament petita d'ordre 1, llavors y^2 és infinitament petita d'ordre 2, perquè y^2 disminueix més ràpidament que *y* i desapareix en comparar-la amb *y*.

Per trobar la diferenciació del producte $xy = Z$ farà servir l'expressió equivalent $4Z = (x + y)^2 - (x - y)^2$ i la diferenciació de la potència:

> <u>Justificació diferenciació de la potència</u>: En el punt 17 troba la diferenciació de la potència, amb qualsevol exponent, fins i tot, imaginari, perquè per al càlcul amb imaginaris no hi ha regles diferents de les del càlcul amb no imaginaris (punt 30). Sigui $Z = z^n$. En lloc de Z escrivim $Z + E$ i en lloc de *z*, $z + e$. Desenvolupa el binomi $Z + E = (z + e)^n$ i obté l'expressió de $E : e$. En rigor $E : e$ és el límit de $n.z^{n-1} : 1$, quan *e* es fa infinitament petit. Però com que aquestes

dues proporcions poden estar tan properes com es vulgui, no hi ha diferència entre elles i es pot dir que són iguals: $E : e = nz^{n-1} : 1 \Rightarrow E = nez^{n-1} \Rightarrow dZ = nz^{n-1}dz$.

Observa que el terme $dxdy$ desapareix en comparar-lo amb dx i dy .

Tempelhoff: Al començament de la cinquena secció, *De les quantitats infinites i infinitament petites*, defineix *quantitat infinita* com aquella quantitat més gran que qualsevol quantitat finita, per molt gran que sigui. Una *quantitat infinitament petita* és una quantitat menor que qualsevol quantitat finita, per petita que sigui (punt 213). Una quantitat infinita és a una finita, com una finita és a una infinitament petita. El punt 220 conté el següent teorema: "La proporció d'una quantitat infinita sobre una quantitat finita és la proporció 1:0 o bé igual a la proporció d'una quantitat finita sobre 0." La demostració del teorema es basa en què la proporció de la quantitat infinita *X* sobre la finita *A* és igual a la proporció de la tangent d'un arc sobre el seu radi, considerant el cas en què l'angle sigui recte (punt 211). La proporció $1:0$ també serveix per a una quantitat finita sobre una quantitat infinitament petita. No ens hem de preguntar què és una quantitat, sinó quina proporció té amb una altra. Si $I^2 : I = 1:0$ aleshores $\frac{1}{I} : \frac{1}{I^2} = 1:0$, … (punt 234), raonament anàleg al de Johann Bernoulli. En els punts 243, 244 i 248 justifica perquè la suma dels infinitament petits d'ordres 2, 3, 4, … desapareix davant l'infinitament petit d'ordre 1. Busca la suma d'una progressió geomètrica donada. Sigui la progressió *A*, *B*, *C*, ..., *T*, *U* tal que $A:B = B:C = ... = T:U = a:b$ ... Per Euclides s'obté la igualtat: $(A+...+T):(B+...+U) = a:b$, si la suma és *S* llavors $(S-U):(S-A) = a:b$ i per tant, $S = \dfrac{bU - Aa}{b-a}$. Quan $a:b = 0:1$, i $A = \alpha\infty^{-m}$, $B = \beta\infty^{-(m-1)}$, ..., $U = \eta\infty^{-1}$, aleshores:

$$\left.\begin{array}{l} \alpha\infty^{-m} : \beta\infty^{-(m-1)} = 0:1 \\ \beta\infty^{-(m-1)} : \gamma\infty^{-(m-2)} = 0:1 \\ \dots \\ \xi\infty^{-2} : \eta\infty^{-1} = 0:1 \end{array}\right\} \Rightarrow S = \eta\infty^{-1},$$

que equival a $\eta\infty^{-1} : \alpha\infty^{-m} + \beta\infty^{-(m-1)} + ... + \xi\infty^{-2} = 1:0$. És a dir, la suma dels termes infinitament petits d'ordres des de $-m$ a -2 desapareix respecte el terme infinitament petit d'ordre -1. De manera anàloga veu en el punt 245 que la suma dels termes infinits d'ordres $m-1, m-2,...$ desapareix respecte al terme d'ordre *m*. És a dir, si $a:b=1:\infty$ aleshores $S=\infty^m$. Al final de la secció afirma que els antics geòmetres (com Arquimedes) usaren els *límits de les proporcions* amb èxit. Així ho fa també Colin Maclaurin a la introducció del *Treatise of Fluxions*. Amb els geòmetres moderns avança aquesta teoria, i fa referència al mètode dels indivisibles (relacionat amb els infinitament petits). Tempelhoff considera el *moviment* com a generador dels diferencials. De fet, els canvis soferts per una funció gràcies al moviment originà el càlcul infinitesimal de Newton.[13]

En el punt 322 mostra com trobar el diferencial d'una equació algèbrica. En particular, els diferencials de producte, de quocient i de potència els troba mitjançant el diferencial del logaritme (punt 320). Per exemple, s'ha de trobar *du*, on $u = axy + b$:

$$\begin{aligned}
&w = u - b \\
&lw = l(u-b) = la + lx + ly \\
&dlw = dla + dlx + dly \\
&\frac{dw}{w} = \frac{dx}{x} + \frac{dy}{y} \\
&dw = \frac{wdx}{x} + \frac{wdy}{y} \\
&du = \frac{(u\text{-}b)dx}{x} + \frac{(u-b)dy}{y} \\
&du = aydx + axdy
\end{aligned}$$

Karsten: La raó $\frac{dy}{dx}$ és variable i s'ha de considerar el límit al qual s'aproxima, que s'anomena "raó diferencial" de la funció *y*. No es demana què ocorre amb la raó quan numerador i denominador són zero o infinitament grans a l'hora, donat que el darrer valor de la raó és una quantitat determinada en tots els casos.

Si es vol trobar el límit de $\frac{dz}{dx}$, on $z = xy$ i *y* és funció de *x*, Karsten procedeix de la manera següent. Si *x* creix en *dx*, aleshores $z + dz = (x+dx)(y+dy) = xy + xdy + ydx + dxdy$. Donat que *y* és funció de *x*:

[13] Vegeu TEMPELHOFF (1770), punt 268.

$dy = pdx$. Així $z + dz = xy + (px + y)dx + pdx^2$ i, en conseqüència, $dz = (px + y)dx + pdx^2$. El límit de $\frac{dz}{dx}$, que és $px + y$, llavors $dz = xpdx + ydx$, o bé: $dz = xdy + ydx$. També justifica aquest resultat a partir de la regla de diferenciació de funció de dues variables (punt 60).

Corba com a polígon

Atès que la corda i l'arc s'apropen indefinidament, Kästner identifica la corda amb l'arc i diu la corba està formada per línies rectes infinitament petites que funcionen com a *elements*. Quan un punt s'apropa indefinidament a un altre, l'angle format per la corda i la tangent esdevé infinitament petit, de manera que en el punt l'arc, la corda i la tangent s'apropen a un estat en què els tres coincideixen. Així, l'element de l'arc també pot ser considerat com element de la tangent.

Variable

En el punt 7 Wolff diu que les variables contínuament creixen o decreixen, mentre que les constants no pateixen cap canvi. Kästner, Tempelhoff i Karsten parlen de variables però no les defineixen explícitament

Funció

Kästner: Si *Z* és *funció* de *z*, aleshores quan *z* es transforma en $z + e$, *Z* passa a ser $Z + E$. Quan estudia els extrems, Kästner distingeix una funció uniforme d'una altra que no ho és.[14]

Tempelhoff: *F* és *funció* de *X*, *Y*, *Z*,… variables. Si *X*, *Y*, *Z*,… disminueixen/augmenten en quantitats finites donades *x*, *y*, *z*,…, estudia com afecten aquests canvis a *F*. La funció *F* pot ser algèbrica o transcendent, cada cas ha de ser estudiat en particular. Si *F* és algèbrica pot ser racional o irracional, entera o fraccionària; l'expressió de *F* és una combinació de productes de *X*, *Y*, *Z*,… En el punt 257 dóna la fórmula general d'una

[14] Aquesta classificació apareix a EULER (1748), punt 10 del capítol primer del llibre primer.

funció algèbrica. Si *F* és funció de *X*, *Y*, *Z*,... que passa a ser *F'* quan *X* passa a ser $X+x$, Y passa a ser $Y+y$,... aleshores $F' = F + PX + Qx^2 + Rx^3 + ... + P'y + Q'xy + R'x^2y + ... + P''z + ...$, on P, P', Q', etc. són funcions de *X*, *Y*, *Z*,... Si *F* és transcendent, prenent per exemple $U = \sin X, T = \mathrm{tang} Y, W = \log Z,...$ llavors *F* adquireix l'aspecte d'una funció algèbrica.

Karsten: *y* funció de *x*, que creix *dy* quan *x* creix *dx*. En el punt 45 defineix *funció algèbrica* com aquella funció *y* de *x*, on es pot trobar *y* a partir de *x* i de constants només fent servir les quatre operacions comunes, potències i arrels, no apareixent cap altra operació. Les funcions que exigeixen operacions transcendents són *funcions transcendents*, com un nombre i el seu logaritme, línies trigonomètriques i el seu arc, que no es poden expressar mitjançant equacions algèbriques usuals.[15]

Diferència

Kästner: *Z*, $Z+E$ són dos valors consecutius de la funció. *E* és la seva *diferència*.

Tempelhoff: Quan *X*, *Y*, *Z*,… passen a ser $X+x$, $Y+y$, $Z+z$,… *F* passa a ser F' i aleshores $F'-F$ s'anomena *diferència*. Aquesta diferència és finita doncs *x*, *y*, *z*,… són finites.

Karsten: La *diferència* en què una quantitat variable creix o decreix, s'indica amb una *d* al davant de la variable.

Diferencial

Wolff: diferència infinitament petita entre dues quantitats variables. Per notar-la s'utilitza *d* com a prefix. Si *dx* és positiva significa que *x* creix contínuament. Si, al contrari, *dx* és negativa, vol dir que *x* decreix contínuament.

Kästner: Quan *e* disminueix indefinidament, *E* també. Quan *e*, *E* són infinitament petits, s'anomenen *diferencials* de *z* i *Z*. Quan *e* decreix indefinidament, el límit al qual la

[15] Aquesta classificació la introdueix Euler al punt 7 d'EULER (1748).

proporció $E:e$ s'apropa indefinidament s'anomena *proporció dels diferencials* de *Z* i *z*. Aquesta proporció és finita, tot i que al començament *e* és finita i després disminueix fins a esdevenir zero. Diu que per a Euler *e és* zero. Es nota $E = dZ, e = dz$, on *d* no és un factor. Trobar la proporció dels diferencials s'anomena *diferenciar Z*. Donada una equació finita entre *Z* i *z*, trobar l'*equació diferencial* entre *Z* i *z* és trobar l'equació entre els seus diferencials.

Tempelhoff: Quan *x*, *y*, *z*,… es fan infinitament petites, els termes d'ordre superior desapareixen i només queden els termes en *x*, *y*, *z*,…, i la diferència passa a anomenar-se *diferencial,* la quantitat en què una variable creix o decreix. La quantitat en què una equació creix o decreix s'anomena e*quació diferencial*. La quantitat en què una funció creix o decreix és el *diferencial de la funció*. Dóna exemples de diferencials: d'un triangle (punt 265); d'un paral·lelogram (punt 266); d'un arc de corba, d'ordenada, d'abscissa, de regió (punt 267).

Karsten: Quan es busca el límit de $\frac{dy}{dx}$, no importa el valor de les diferències *dx*, *dy*, no tenen un valor determinat, s'anomenen *diferencial* de *x* i de *y*. Es poden prendre com a zero, perquè per calcular el límit de $\frac{dy}{dx}$ s'ha de prendre $dx = 0$.

Fluxions i fluents

Wolff: La diferencial d'una quantitat és el mateix que la *fluxió* de Newton, la velocitat instantània amb què una quantitat creix. Però, segons Wolff, la notació de Leibniz és més còmoda que la de Newton (especialment, a l'hora de trobar la diferencial d'una diferencial).[16]

Kästner: Un punt descriu la recta *AC* i es calcula el principi del seu moviment des del punt *A*. La *velocitat* que té *C* en cada posició s'anomena *fluxió* de *AC*, on *AC* és el *fluent*. La velocitat amb què una quantitat varia és la fluxió. Justifica que la proporció de fluxions coincideix amb la proporció de diferencials. dZ, dz no són els creixements/decreixements reals de *Z* i *z*, sinó els creixements/decreixements que sofririen en un instant, si al principi d'aquest instant continuessin amb velocitat uniforme. Mostra la notació de les fluxions. El segon diferencial *ddy* és la velocitat amb què la velocitat en y varia (prenent la velocitat en x uniforme). Comenta la controvèrsia Leibniz-Newton.

Tempelhoff: Els canvis soferts per una funció a partir del moviment originaren el càlcul infinitesimal descobert per Newton. La *velocitat* de les *quantitats fluents* s'anomena *quantitat fluxió*. Per exemple, la fluxió d'una línia és la velocitat del punt que la genera. Les "fluxions dels anglesos" no són el mateix que els diferencials però es comporten d'igual forma. Tanmateix la notació del càlcul diferencial és més còmoda. Els fonaments del càlcul de fluxions segons el mètode dels atnics es troba al *Treatise of fluxions* de Colin Maclaurin.

Límit

Kästner: Al punt 7 Kästner defineix el *límit* com el valor al qual s'apropa indefinidament una quantitat, de manera que la diferència entre ells és més petita que qualsevol quantitat.

Tempelhoff: Parla de "límits de proporcions", que ja havien fet serivr els antics geòmetres i Colin Maclaurin. Per exemple, en la fórmula diferencial del sinus diu "a mesura que b s'apropa a B la proporció $Bb : bF$ s'apropa a $Bf : fF$ i n'esdevé igual quan b és B. $Bf : fF$ és el *límit* al qual la proporció $Bb : bF$ s'apropa, quan l'arc *Bb* es fa infinitament petit".[17]

Karsten: La raó entre dues quantitats variables pot ser variable o constant. Per exemple, si $y = ax, z = bx$, les raons $y : z, y : x, z : x$ són constants. Però si $y = ax + c, z = bx$, la raó $y : z = \frac{a}{b} + \frac{c}{bx}$ és variable i mai no assolirà el límit $\frac{a}{b}$, fent x tan gran com es vulgui.[18] En general, Karsten treballa amb desigualtats per arribar al límit.

[16] Vegeu WOLFF (1713-1715), p. 546.
[17] Vegeu TEMPELHOFF (1770), punt 332.
[18] És a dir, Karsten considera el límit en el sentit de D'Alembert.

Teorema de Taylor

Tempelhoff: La secció dotzena es titula *De l'ús del càlcul diferencial, per trobar el diferencial complet de funcions donades* i tracta de la relació entre el desenvolupament en sèrie d'una funció i dels diferencials d'ordre superior, tant per a funcions algèbriques com transcendents. Sigui *U* una expressió de *x*, algèbrica o transcendent. Quan *dx* és constant i finita, l'expressió del diferencial complet és:

$$\Delta U = \frac{dU}{1\cdot dx}\Delta x + \frac{d^2U}{1\cdot 2\cdot dx^2}\Delta x^2 + \frac{d^3U}{1\cdot 2\cdot 3\cdot dx^3}\Delta x^3 + \ldots \text{ (punt 567).}$$

En el punt 572 fa referència a la convergència de les sèries, segons el valor de Δx.

Karsten: En el punt 40, si y^N és el valor de *y* quan *x* passa a ser $x + ndx$, aleshores:

$$y^N = y + \frac{n}{1}dy + \frac{n.n-1}{1.2}d^2y + \frac{n.n-1.n-2}{1.2.3}d^3y + \ldots + \frac{n.n-1.n-2\ldots n-(n-1)}{1.2.3\ldots n}d^ny$$

Per tant:

$$y^N = y + \frac{ndx}{1}\cdot\frac{dy}{dx} + \frac{n.n-1.dx^2}{1.2}\cdot\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{n.n-1.n-2.dx^3}{1.2.3}\cdot\frac{d^3y}{dx^3} + \ldots$$

En el punt 42, prenent *dx* tant petit com es vulgui, sigui $b = ndx$. Aleshores la funció *y* en $x+b$ passa a ser $y+\beta$, on $\beta = \frac{b.dy}{1.dx} + \frac{b^2.d^2y}{1.2.dx^2} + \frac{b^3.d^3y}{1.2.3.dx^3} + \ldots = p.b + S$, *b* es pot prendre tan petit que la suma *S* sigui més petita que el primer terme $p.b$. En el punt 113, donada una funció *z* de dues variables *x*, *y*, troba el valor de *dz* a través de l'expressió de la *sèrie completa*, $dz = \overset{y}{d}z + \overset{x}{d}z + \overset{yx}{dd}z$.

Coeficient diferencial

Kästner: Al punt 13 Kästner basa el càlcul diferencial en el límit al qual tendeix la raó dels diferencials de l'ordenada i de l'abscissa. De fet, Kästner defineix l'ordre superior en relació a aquesta raó.[19]

[19] Boyer, però, diu que Kästner no entén que la *raó última* no és la raó de quantitats últimes. Vegeu BOYER (1949), p. 251.

Tempelhoff: En treballar amb ordre superior, per exemple, Tempelhoff usa els "límits de les proporcions".

Karsten: S'ha de buscar el límit de la raó $\frac{dy}{dx}$, que és la *raó diferencial*. Aquest límit, o darrer valor, no s'assoleix mai. Sigui $\frac{dy}{dx} = p$, aleshores el diferencial de y es pot escriure $dy = pdx$, que és una *equació diferencial* entre x, y.

Ordre superior

Wolff: En el punt 293 defineix el càlcul *differentio-differentialis* com el mètode de les quantitats diferencials tornades a diferenciar. Es noten $ddx, dddx,...$ o bé $d^2x, d^3x,...$ *Diferencial de primer grau* és infinitèsim d'una quantitat ordinària (dx). *Diferencial de segon grau* és infinitèsim de quantitat diferencial de primer grau ($ddx, dx^2, dxdy$), etc. En el punt 297 exposa les regles per diferenciar diferencials, que són les mateixes que per a les quantitats ordinàries. Així, Wolff conclou que el càlcul *differentio-differentialis* no és diferent del càlcul diferencial.
Elecció de la progressió: En el punt 300 comenta que en circumstàncies especials, les quantitats diferencials es consideren o bé variables, o bé constants. En els problemes de càlcul de punts de flexió contrària i de radi osculador generalment pren dx constant.

Kästner: Els punts 120 a 143 estan dedicats als diferencials superiors. Sigui la corba *KLM* (que anomena *línia principal*). Divideix les abscisses en parts iguals $NO = OP = e$. *Lk*, *Ml* són les diferències de les ordenades. Com a exercici proposa dibuixar la corba $x\lambda\mu$, les ordenades de la qual (per a les mateixes abscisses) es comporten com les diferències de la corba *KLM*, és a dir, verifiquen la propietat: $O\lambda : P\mu = Lk : Ml$.

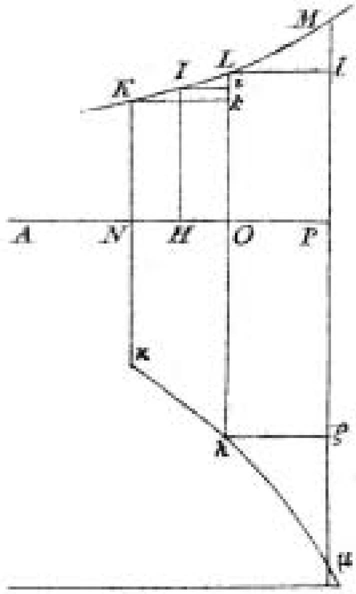


Figura 1

La solució que Kästner proposa és $O\lambda = \frac{a \cdot Lk}{e}, P\mu = \frac{a \cdot Ml}{e}$, essent a una distància arbitrària. Quan *NO* (*e*) decreix infinitament *Lk* desapareix. Per tant, *Lk* ha de tenir una expressió tal que desaparegui quan ho faci *e*: $Lk = P \cdot e$, on *P* és una funció de *x*, *y*. Així, quan *e* esdevé infinitament petit *P* passa a ser *p*: $\frac{Lk}{e} = \frac{dy}{dx} = p$. Es pot trobar l'expressió de la corba $x\lambda\mu$ depenent només de l'abscissa i no de *e* prenent $z = ap$. De l'equació de la corba *KLM*, de la relació entre *x*, *y* i *p*, i de $z = ap$ s'aconsegueix una equació per a la corba $x\lambda\mu$ en funció de *x* i de *z*. $x\lambda\mu$ és *línia diferencial*. De forma anàloga, quan e decreix indefinidament la diferència entre les diferències de les ordenades desapareix, obtenint d'aquesta forma la segona diferència de les ordenades (o *differentiodifferential* de *y*). Considerant successivament *KLM* com la primera, la segona, la tercera, ... línia diferencial, es poden trobar totes les línies diferencials d'una línia principal. El diferencial d'ordre *n* és $d^n y$. En canvi, la línia diferencial d'ordre *n* és $\frac{a^n d^n y}{dx^n}$.

En el punt 46 (dins de la secció *Prova general del teorema del binomi a partir del càlcul diferencial*) Kästner proposa com a exercici trobar una fórmula per expressar la potència d'una "arrel amb dues parts" (és a dir, d'un binomi), amb exponent positiu o negatiu, enter o fraccionari, i, fins i tot, imaginari, mitjançant una sèrie infinita. La solució buscada ha de verificar:

$$(1+y)^m = 1 + Ay + By^2 + Cy^3 + ... = w,$$

que funciona bé per a qualsevol *y*, en particular quan $y = 0$ és clar que dóna 1. Diferenciant tots els membres d'aquesta expressió, s'obtenen els coeficients de la fórmula buscada. Més endavant, apareix la secció titulada *Expressió d'un terme indeterminat d'una sèrie mitjançant els diferencials superiors* (punts 144-151). Calcula els coeficients que resulten de diferenciar diversos cops l'expressió $\omega = x^m$ (amb *dx* constant) i els relaciona amb els coeficients del binomi $\omega + e = (x + c)^m$. Fa referència al comentari de Colson sobre el *Methodus Fluxionum* de Newton; a l'obra de Johann Bernoulli; a l'obra de Jakob Bernoulli (que ho relaciona amb la combinatòria, però aquí només amb exponent enter positiu); a l'*Institutiones calculi differentialis* d'Euler; a l'obra de Clairaut i de Segner,...
Elecció de la progressió: En el punt 142 comenta que no cal prendre *e*, o *dx*, constant, i dóna la fórmula en aquest cas. Però observa que els diferencials superiors no tenen un valor determinat si no es pren el primer diferencial d'una quantitat com a constant. En aquest sentit, recomana llegir l'*Institutiones calculi differentialis* d'Euler.

Tempelhoff: La secció onzena es titula *Dels diferencials de les equacions diferencials, o dels diferencials superiors*. Defineix els diferencials superiors de manera anàloga a Kästner, però en lloc de parlar de les diferències, pren les tangents.
- *Cas equació explícita*: En el punt 495 presenta la corba $\alpha\beta$, amb equació $y = X$, on *X* és una funció de la variable *x*.

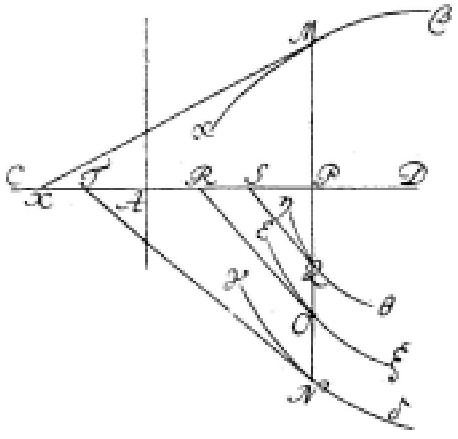


Figura 2

Les coordenades $x = AP, y = PM$ formen un angle recte. La recta *MX* és la tangent a la corba pel punt *M*. Considera la corba $\gamma\delta$, l'aplicada de la qual, *PN*, és la tangent de l'angle format per la tangent *MX* i l'eix d'abscisses. Sigui *NT* la tangent a aquesta corba pel punt *N*. Considera la corba $\varepsilon\xi$ tal que l'aplicada *PO* és la tangent de l'angle format per la tangent *NT* i l'eix d'abscisses. I així successivament. S'ha de buscar les tangents dels angles o, dit d'una altra forma, s'ha de trobar l'equació de les corbes $\gamma\delta, \varepsilon\xi,..$ La solució l'exposa en el punt 496. En el punt 363 ha vist que $\frac{dy}{dx}$, és una funció de *x*, *P*. Sigui *p* la tangent de l'angle format per *MX* i l'eix d'abscisses: $p = \frac{dy}{dx} = P$. Ara prenem $p = PN$, ordenada de la corba $\gamma\delta$. Aquesta corba queda expressada a través de l'equació $p = P$. Sigui *q* la tangent de l'angle format per *NT* i l'eix d'abscisses. $q = \frac{dp}{dx} = Q$ serà l'equació que expressa la corba $\varepsilon\xi$. I així successivament. Observa que es pot considerar dy com a variable i dx com a constant. Aleshores:

$$dy = Pdx \Rightarrow p = P = \frac{dy}{dx}$$

$$d.dy = dP.dx = Qdx^2 \Rightarrow q = Q = \frac{d.dy}{dx^2}$$

$$d.d.dy = dQ.dx^2 = Rdx^3 \Rightarrow r = R = \frac{d.d.dy}{dx^3}$$

$$...$$

$d.dy = d^2 y$ és el segon diferencial de *y*; $d.d.dy = d^3 y$ és el tercer diferencial de *y*;...
És més còmode determinar els valors *q*, *r*, ... considerant $y = P$ com a nova corba $\alpha\beta$.

- *Cas equació implícita*: Ara la corba $\alpha\beta$ ve donada per l'equació $X = 0$, on *X* és funció de *x*, *y*. Aleshores $Pdx + Qdy = 0 \Rightarrow p = \frac{dy}{dx} = -\frac{P}{Q}$, que és una funció de *x*, *y*. De l'expressió:

$$q = \frac{dp}{dx} = \frac{d\left(-\frac{P}{Q}\right)}{dx}$$

es dedueix que $d\left(-\frac{P}{Q}\right) = P'dx + Q'dy$, i per tant:

$$\frac{dp}{dx} = P' + \frac{Q'dy}{dx} = \frac{P'Q - Q'P}{Q}.$$

Aquí també està suposant *dx* constant. En conseqüència, $d.dy = d\left(-\frac{P}{Q}\right)dx = \ldots$ També dóna l'expressió de *p* i de *dp* en el cas en què *X* sigui és una funció de *t* i *x*, i *Y* sigui una funció de *x* i *y* (és a dir, presenta la fórmula de la regla de la cadena).

Elecció de la progressió: Els punts 551 a 557 mostra com varien les fórmules quan un dels diferencials ($dx, dy, \ldots$) és considerat constant, i quina és la fórmula general, on cap diferencial no es considera constant. En el punt 536 afirma que els diferencials d'ordre superior no signifiquen res determinat fins que un dels diferencials primers és constant (*dt* = constant).

Karsten: En el punt 36 construeix la primera sèrie diferencial de *y* (funció de *x*) per a $x + dx, x + 2dx, x + 3dx, \ldots$ Obté una nova sèrie de la qual torna a calcular la sèrie diferencial, que serà la segona sèrie diferencial. I així successivament. En el punt 37 diu: sigui *y* funció de *x*: $dy = Pdx + Qdx^2 + Rdx^3 + Sdx^4 + \ldots$,[20] aleshores prenent *dx* constant: $d^2y = dPdx + dQdx^2 + dRdx^3 + \ldots$, on $dP = pdx + qdx^2 + rdx^3 + \ldots$, $dQ = Fdx + Gdx^2 + Hdx^3 + \ldots$, $dR = Kdx + Ldx^2 + Mdx^3 + \ldots$, ... Llavors:

$$\begin{aligned} d^2y = {} & pdx^2 + qdx^3 + rdx^4 + sdx^5 + \ldots \\ & + Fdx^3 + Gdx^4 + Hdx^5 + \ldots \\ & + Kdx^4 + Ldx^5 + \ldots \\ & \ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

Considerant $Z = q + F$, $Y = r + G + K$, $X = s + H + L$, ... aleshores resulta: $d^2y = pdx^2 + Zdx^3 + Ydx^4 + \ldots$, on $\frac{dy}{dx} = P, \frac{dP}{dx} = p$ i $p = \frac{d^2y}{dx^2}$. $d^2y = pdx^2$ és el *segon diferencial de y* (primer membre de la segona sèrie diferencial). Per trobar el segon diferencial a partir de $dy = Pdx$, es pren *dx* constant i es calcula $d.Pdx$, que és $d^2y = dP.dx = pdx^2$ i així successivament. En el punt 28 demostra per inducció el

[20] Des del punt 27 està tractant amb funcions enteres. Mostra com trobar la diferència d'una potència a partir del desenvolupament del binomi. I a continuació, la d'una suma de funcions enteres.

desenvolupament del binomi per a una potència d'exponent enter. Més endavant demostra el desenvolupament per a qualsevol exponent. En el punt 41, relaciona els coeficients del desenvolupament de la potència $(x+dx)^n$ amb els diferencialsr d'ordre superior.

Elecció de la progressió: Generalment considera *dx* constant. Però al final de la secció II planteja la solució, si *dx* és variable. Per exemple:

$$
\begin{aligned}
&z = x^n \\
&dz = nx^{n-1}dx \\
&ddz = nx^{n-1}ddx + n.(n-1)x^{n-2}dx^2 \\
&......
\end{aligned}
$$

De les fórmules generals es dedueixen les fórmules quan *dx* ésconstant (fent $ddx = 0, d^3x = 0,...)$. En el punt 107 calcula el radi de curvatura, primer quan *dx* és variable, i després dedueix la fórmula per a *dx* constant.

Diverses variables

Kästner: En els punts 477-486 tracta els diferencials de funcions de dues variables i en els punts 487-493 els diferencials de funcions de 3 variables (independents entre sí). Sigui *V* funció de *x*, *y*. Diferenciant primer respecte *x* i després respecte *y* demostra que dóna el mateix resultat que diferenciant primer respecte *y* i després respecte *x*. A continuació, com que $dV = Pdx + Qdy$ llavors $P = \left(\frac{dV}{dx}\right), Q = \left(\frac{dV}{dy}\right)$ i, pel resultat anterior: $\left(\frac{dP}{dy}\right) = \left(\frac{dQ}{dx}\right)$. Si aquesta igualtat no es verifica significa que la quantitat diferencial no prové de la diferenciació de la funció en *x*, *y*. De forma anàloga, si *V* és funció de *x*, *y*, *z*, aleshores $dV = Pdx + Qdy + Rdz$ i també demostra la igualtat de les segones diferencials "creuades":

$$\left(\frac{dP}{dy}\right) = \left(\frac{dQ}{dx}\right); \left(\frac{dP}{dz}\right) = \left(\frac{dR}{dx}\right); \left(\frac{dQ}{dz}\right) = \left(\frac{dR}{dy}\right),$$

així com les terceres diferencials. Aplica aquest resultat a l'estudi d'equacions diferencials (punts 494 a 504).

Tempelhoff: Si U és una funció de diverses variables x, y, z, considerant primer x com a variable (i la resta com a constants), $dU = Pdx$, on P és una funció de x, y, z. Considerant a continuació y com a variable (i la resta com a constants), $dU = Qdy$; etc. Ara, considerant totes les variables, quan x passa a ser $x+dx$, quan y passa a ser $y+dy$, quan z passa a ser $z+dz$,... llavors U passa a ser $U' = U + Pdx + Qdy + P'dxdy + ...$ El terme $P'dxdy$ desapareix perquè és d'ordre més petit que dx, dy, dz. Així, $U' = U + Pdx + Qdy + Rdz$ i el diferencial de U és $U' - U = Pdx + Qdy + Rdz$.

Karsten: El diferencial d'una funció de dues variables té dues parts (punt 60). La funció es diferencia respecte cadascuna de les variables (una considerada com a variable, l'altra com a constant). Sigui z funció de x, y. Quan només canvia x (i esdevé $x+dx$) z esdevé $z+\overset{x}{d}z$. A continuació, es substitueix y per $y+dy$ i z esdevé $z+\overset{y}{d}z+\overset{x}{d}z+\overset{yx}{dd}z$. Així $dz = \overset{y}{d}z+\overset{x}{d}z+\overset{yx}{dd}z$ i $\frac{dz}{dx} = \frac{\overset{y}{d}z}{dx}+\frac{\overset{x}{d}z}{dx}+\frac{\overset{yx}{dd}z}{dx}$. Com que $\frac{\overset{x}{d}z}{dx}$ té un valor indeterminat, que depèn de x, y, $\frac{\overset{yx}{dd}z}{dx}$ és de la forma pdy, que desapareix quan dx, dy desapareixen, obtenint finalment que $dz = \overset{y}{d}z+\overset{x}{d}z$. Segons aquesta regla també es pot diferenciar el producte xy, el quocient $\frac{x}{y}$, l'exponencial y^x i equacions implícites.

Diferenciació/Integració

Wolff: La secció II està dedicada al càlcul integral, que és el mètode per sumar quantitats diferencials, és a dir, per buscar la quantitat de qui prové una quantitat diferencial.

Kästner: Una secció del seu llibre està dedicada al càlcul integral i una altra a diverses de les seves aplicacions. En el punt 201 defineix el càlcul integral com la suma de quantitats diferencials, i també com l'operació inversa del càlcul diferencial.

Tempelhoff: En el punt 271 comenta que el problema de trobar la quantitat fluxió corresponent a una quantitat fluent és el mètode de fluxions directe. El problema de, donada una quantitat fluxió, trobar la quantitat fluent de la qual prové és el mètode de fluxions invers. Anàlogament, el problema de trobar el diferencial d'una variable és el càlcul diferencial. El problema invers és el càlcul integral.

Karsten: La secció III està dedicada als principis del càlcul integral. Quan a partir del límit de la raó $\frac{dy}{dx} = p$, es busca una equació entre x, y, s'anomena *integrar* l'equació diferencial.

Tangents

Wolff

Definició: El capítol II està dedicat a l'ús del càlcul diferencial per determinar la tangent d'una corba. Tanmateix, aquí no defineix tangent.

Determinació de la tangent

Defineix el *triangle característic d'una corba* com el format per dues ordenades infinitament properes i l'arc de corba infinitament petit corresponent (que no difereix de la recta tangent). Per semblança del triangle característic amb el triangle format per l'ordenada, la tangent i la subtangent, troba l'expressió general de la subtangent.

Asímptotes

Wolff defineix una *asímptota* com una recta que no concorre amb la corba en un interval infinit. És la tangent en un punt, amb abscissa infinita ("cas asimptòtic, $x = \infty$", pàg. 557). En el punt 46 mostra com trobar l'asímptota d'una corba algèbrica, mitjançant una cadena de semblances de triangles.

Kästner

Definició: A partir del punt 63 i fins al 103 es troba l'apartat *Determinació de les tangents de les línies corbes mitjançant el càlcul diferencial*. Donat *M* un punt sobre una corba, es consideren dues cordes per aquest punt, *LM* i *MN*. Quan l'angle entre aquestes dues cordes s'apropa indefinidament a dos angles rectes, *L* i *N* coincideixen, s'apropen indefinidament al punt *M*. L'arc *LMN* queda a un costat de la recta que toca l'arc en *M*. A través de *M* no es pot traçar cap altra recta sense tallar la corba, no es pot traçar cap altra recta per *M* entre la tangent i l'arc *MN* (ho demostra per reducció a l'absurd).

Determinació de la tangent

Donada una corba, si l'angle entre dues cordes *LM* i *MN* és menor que dos rectes l'arc és *còncau*. L'arc es troba entre la tangent i la regió respecte de la qual és còncau. Si l'angle entre les cordes és més gran que dos angles rectes, l'arc és *convex*. La tangent cau entre l'arc i la regió respecte de la qual l'arc és convex. Sigui una corba pels punts *M*, *N*, essent les seves abscisses *AP*, *AQ* i les seves ordenades *PM*, *QN*, respectivament.

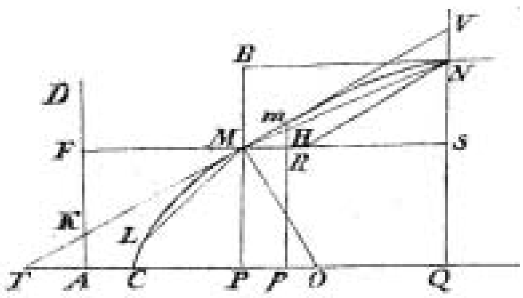


Figura 3

La diferència de les ordenades és *NS*. Sigui *MT* la tangent a la corba pel punt *M* i *V* el punt de tall de la tangent amb l'ordenada *NQ*. En el cas còncau, l'angle *MNS* és igual a l'angle *MVS* més l'angle *VMN*. En el cas convex, l'angle *MNS* és igual a l'angle *MVS* menys l'angle *VMN*. L'angle *MNS* s'apropa indefinidament a l'angle *MVS*. Es verifiquen les proporcions següents:

$$VS : MS = \sin VMS : \sin MVS$$
$$MS : NS = \sin MNS : \sin NMS$$

I combinant-les s'obté la relació:

$$VS : NS = \sin VMS . \sin MNS : \sin NMS . \sin MVS$$

$VS, \sin VMS . \sin MNS$ s'apropen infinitament; $NS, \sin NMS . \sin MVS$ també. $VS : SM$ s'aproxima indefinidament a $NS : SM$, donat que *VN* desapareix respecte *NS*. Si *PT* és la subtangent, en el punt 77 busca la proporció de l'ordenada sobre la subtangent, és a dir, $MP : PT$. Aquesta proporció és igual a $VS : SM$ i, per tant, s'apropa infinitament a $NS : SM$ (quan *N* s'aproxima a *M*), que és la proporció dels diferencials de l'ordenada i l'abscissa. Sigui $x = AP, y = PM$. Quan *MN* és element de la línia corba, llavors $dx = MS, dy = NS$. Aleshores $PT = \frac{ydx}{dy}$. El triangles *MNS* i *TMP* són semblants. Kästner comenta que el triangle *MNS* ja va ser determinat per Barrow i que Leibniz l'anomenà *triangle característic*. Quan N s'apropa indefinidament a M, NS és infinitament petit ($\frac{1}{\infty}$) i, com que VN és infinitament petit respecte NS, VN és infinitament petit de segon ordre ($\frac{1}{\infty^2}$). Si l'ordenada és positiva, quan creix, la subtangent és positiva i l'origen i el punt de tall de la tangent amb l'eix cauen del mateix costat de l'ordenada. En canvi, si l'ordenada decreix, aleshores la subtangent és negativa i l'origen i el punt de tall de la tangent amb l'eix cauen de costats diferents de l'ordenada. En el cas en què l'ordenada sigui negativa, quan creix la subtangent és negativa i quan decreix és positiva. Quan $\frac{dy}{dx} = 0$ la tangent és paral·lela a les abscisses. Quan $\frac{dy}{dx} = \infty$ la tangent és paral·lela a les ordenades. Defineix la *normal* i dóna la fórmula per a la *subnormal*.

Asímptotes

En un teorema (punt 108), Kästner defineix una *asímptota* com la tangent en un punt infinitament allunyat. La justificació és la següent: l'arc de corba sempre està a un costat de la tangent, i l'arc i la tangent tenen un punt en comú. L'asímptota per la seva banda no talla la corba, però la corba cau sobre un costat de l'asímptota. Els punts de l'asímptota s'apropen infinitament a la corba, de manera que es pot considerar un punt infinitament allunyat sobre l'arc de corba com si estigués també sobre l'asímptota. En alguns casos l'asímptota talla la corba en algun punt (punt 109). Aleshores hi ha una part on l'arc és còncau i una altra on és convex (punt d'inflexió). En el punt 113 dóna les fórmules següents per trobar les asímptotes, prenent x creixent infinitament:

1) $\frac{ydx}{dy} - x$, que és la distància de l'origen de coordenades al punt de tall de la tangent amb l'eix de les abscisses; quan aquesta expressió és infinita, l'asímptota és paral·lela a l'eix de les abscisses.

2) $y - \frac{xdy}{dx}$, que és la distància de la tangent a l'eix de les abscisses.

Aquestes expressions primer les tracta com a finites i després fa el pas a l'infinit. En el punt 116 afirma que, prenent les coordenades sobre les asímptotes, les equacions són més senzilles. Quan hi ha problemes, com per exemple que una coordenada sigui infinita i l'altra també o bé infinitament petita d'ordre diferent, aleshores recomana fer servir les sèries de Newton. En el punt 523 observa que quan existeix una asímptota la corba és convexa respecte l'asímptota.

Tempelhoff

Definició: La setena secció està dedicada al *Mètode per trobar les tangents de les línies corbes*. Sigui *AB* una recta per *A* tal que no hi ha cap altra recta per *A* entre *AB* i la corba, sense tallar la corba en un altre punt. Es diu que *AB* toca a la corba en el punt *A*, o bé que la línia *AB* és la *tangent* a la corba en *A*. Per tenir més clara la idea de tangent, a continuació considera la recta *AG*, que també talla la corba en un altre punt, *F*. Quant més petit sigui l'angle *GAB*, més prop estarà *F* de *A*. *F* s'apropa infinitament a *A*, l'angle *GAB* desapareix, la línia *AG* passa a ser *AB*. Així doncs, la tangent en el punt *A* és l'única recta que forma angle infinitament petit amb la corba. Anàlogament amb el tros *Ag*, a l'altre costat del punt *A*. La recta *AB*, que tocava el principi de l'arc de corba, *AC*, també en toca el final, *AD*.

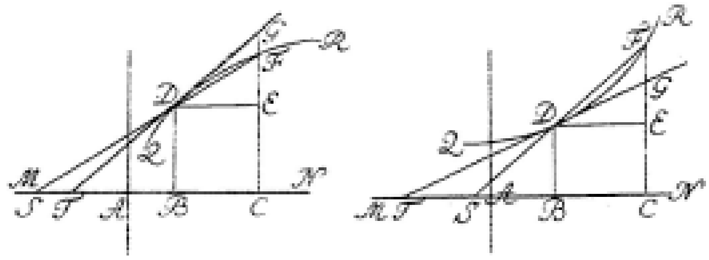


Figura 4

Determinació de la tangent

En el punt 357, Tempelhoff considera la tangent per un punt de la corba com una secant que, en girar a l'entorn del punt, l'altre punt de tall es va apropant al primer fins a coincidir. Es formen triangles semblants a partir de la secant i de les ordenades dels seus punts de talla amb la corba. Les diferències de l'abscissa i l'ordenada "desapareixen o esdevenen infinitament petits" quan el segon punt cau sobre el primer. En el punt 358, descriu com obtenir aquesta proporció a partir de l'equació de la corba. Sigui $U = 0$, on U és una funció de *x*, *y*. Les coordenades d'un dels punts de tall de la secant amb la corba són x, y i les de l'altre punt $x + \Delta x$, $y + \Delta y$, respectivament. Fent servir la forma general de les funcions algèbriques (punt 257):

$$0 = U + A\Delta x + A'\Delta x^2 + A''\Delta x^3 + ... + B\Delta y + B'\Delta y\Delta x + ... + C'\Delta y^2 + ...,$$

on $A, A', A'', B, B',...$ són funcions de *x*, *y*, i $U = 0$, donat que els dos punts pertanyen a la corba, s'arriba a la relació:

$$\Delta y : \Delta x = ... = y : p = A + A'\Delta x + A''\Delta x^2 + ... : -B - B'\Delta x - B''\Delta x^2 - ... - C'\Delta y - C''\Delta y \Delta x - ...$$

on *p* és la projecció de la secant sobre l'eix d'abscisses. Llavors $\Delta y = \frac{y\Delta x}{p}$ i:

$$y : p = A + A'\Delta x + ... : -B - B'\Delta x - B''\Delta x^2 - ... - C\frac{y\Delta x}{p} - C''\frac{y\Delta x^2}{p} - ... .$$

Prenent $\Delta x = 0$, el punt de tall de la secant sobre l'eix d'abscisses cau en el punt de tall de la tangent sobre l'eix d'abscisses i *p* esdevé $p = -\frac{By}{A}$. En el punt 363 presenta una manera més fàcil de trobar *A* i *B*. Si $\Delta x, \Delta y$ es fan infinitament petits, el diferencial de *U* és $A\Delta x + B\Delta y$, els altres termes desapareixen respecte $\Delta x, \Delta y$. Prenent $dx = \Delta x, dy = \Delta y$, ja podem conèixer *A* i *B* a través del diferencial de *U*. "Diferenciar" $U = 0$ no és res més que trobar la proporció entre l'ordenada i la subtangent: $dy : dx = y : p = -A : B$. També es pot determinar la tangent coneixent l'angle que forma aquesta amb l'eix de les ordenades, δ (punt 359) o l'angle de la tangent amb l'eix de les abscisses, φ (punt 360), per a qualsevol angle entre els eixos de coordenades, ε:

$$\tan\delta = \frac{B\sin\varepsilon}{B\cos\varepsilon - A}; \tan\varphi = \frac{A\sin\varepsilon}{A\cos\varepsilon - B}$$

Si $A = 0$ la tangent és paral·lela a l'eix de les abscisses. Si $B = 0$ la tangent és paral·lela a l'ordenada. Així, segons Tempelhoff, es pot obtenir la subtangent i la resta de línies mitjançant la tangent sense utilitzar la idea de quantitats infinitament petites: només cal determinar *A* i *B* a partir de la naturalesa de la corba. A la secció novena, *Més exposició sobre el mètode de les tangents*, estudia la determinació de la tangent en el cas de coordenades polars: buscar la tangent de l'angle format per la recta tangent amb el radi vector.

Karsten

Definició: En el punt 46, considera la recta secant a una corba. La tangent de l'angle que forma l'ordenada amb la secant (cas coordenades ortogonals) és $\frac{dx}{dy}$. Quan aquest angle disminueix (dx, dy disminueixen) la secant s'apropa a la tangent, fins que l'angle entre la secant i la tangent desapareix (dx, dy desapareixen).

Determinació de la tangent

La tangent de l'angle format per l'ordenada i la recta tangent és el límit de la raó $\frac{dx}{dy}$.

Quan $z = 0$ expressa la naturalesa d'una línia entre coordenades ortogonals *x*, *y* (és a dir, es tracta d'una equació implícita), aleshores l'expressió de la sèrie completa de *dz* és: $P + \frac{dx}{dy} p + Qdy + \pi dx + \frac{dx}{dy} qdx + ... = 0$ i la tangent és $\frac{dx}{dy} = -\frac{p}{P}$.[21] Troba la cotangent, la secant, el cosinus i el sinus. A partir d'aquestes raons, en el punt 47 calcula els segments normal, subnormal, tangent i subtangent.

Extrems

Wolff

Definició: El capítol III està dedicat al mètode de màxims i mínims. Si la "semiordenada" creix (o decreix) de forma contínua fins a un cert terme, després del qual decreix (o creix), aleshores el punt és un *màxim* (o un *mínim*).

Caracterització i justificació

El problema 13 exposa la determinació dels màxims i mínims d'una corba *algèbrica*. En el màxim o mínim, la tangent és paral·lela a l'eix d'abscisses, i la normal coincideix amb l'aplicada. Per tant, la subtangent és infinita ($ydx : dy = \infty$) i la subnormal és igual a zero ($ydy : dx = 0$). En conseqüència, de la primera expressió resulta $dx = \infty$ i de la segona $dy = 0$. No mostra com distingir si es tracta d'un màxim o d'un mínim. Com a cas particular, observa que també pot succeir que la subtangent sigui zero ($dx = 0$) i la subnormal infinita ($dy = \infty$). No especifica de quin tipus de punt es tracta, però en la figura corresponent es veu que és una cúspide.

Kästner

Definició: Els punts 152-162 estan dedicats a l'estudi dels màxims i mínims. Quan una funció de *x* fins a un determinat valor creix i després decreix, presenta un *màxim* en aquest punt. Si succeeix a la inversa, presenta un *mínim*. Un mínim negatiu és un màxim. Un màxim negatiu és un mínim. Només tracta amb funcions uniformes. En el cas de que per a una abscissa la funció tingués més d'un valor per a l'ordenada, podria ser que un valor fos un màxim o un mínim però els altres no.

Caracterització i justificació

En el punt 155 planteja el problema de trobar els màxims i mínims d'una funció *y* de *x*. En el desenvolupament en sèrie, en lloc de *x* es col·locarà $x+\alpha$ i $x-\alpha$. Si en *x* la funció presenta un màxim vol dir que la funció en $x+\alpha$ i $x-\alpha$ és menor que en *x*. Si en x la funció presenta un mínim vol dir que la funció en $x+\alpha$ i $x-\alpha$ és major que en *x*. Prenem α tan petit de manera que la suma del segon terme i dels termes posteriors sigui menor que el terme corresponent a $\frac{dy}{dx}$. Si $\frac{dy}{dx}$ és positiu o negatiu, la funció no presenta ni màxim ni mínim, perquè en aquest cas, la funció en $x+\alpha$ és més gran que y i en $x-\alpha$ és menor, o a la inversa. En canvi, si $\frac{dy}{dx}=0$ i $\frac{ddy}{dx^2}$ és finit,[22] llavors la funció té un màxim o un mínim. En el punt 161 exposa la relació entre els màxims i els mínims i el valor de la subtangent en aquests punts. Quan l'ordenada primer creix i després decreix (o viceversa) $\frac{dy}{dx}$ passa de positiu a negatiu (o viceversa), llavors en algun punt $\frac{dy}{dx}$ ha de ser zero o infinit. Per tant, en un màxim/mínim la tangent és paral·lela a l'eix d'abscisses o a l'eix d'ordenades. Si la subtangent $\frac{ydx}{dy}$ és infinita aleshores $\frac{dy}{dx}=0$; si la subtangent $\frac{ydx}{dy}$ és zero aleshores $\frac{dy}{dx}=\infty$.

Naturalesa dels extrems

Si $\frac{dy}{dx}=0$ i $ddy<0$, *y* presenta un màxim; si $\frac{dy}{dx}=0$ i $ddy>0$, *y* presenta un mínim. Si $\frac{ddy}{dx^2}=0$, no es pot decidir res al respecte. Sigui $p=\frac{ddy}{dx^2}$, $q=\frac{d^3y}{dx^3}$, $r=\frac{d^4y}{dx^4}$, ... si $p=0$ i $q\neq 0$, la funció no presenta ni màxim ni mínim (depèn del signe de α); però si $q=0$ i $r>0$ la funció té un mínim, i si $q=0$ i $r<0$ la funció té un màxim. En

[21] Vegeu KARSTEN (1786), punt 113.
[22] En aquest cas es pot entendre que l'expressió "finit" indica també que no és nul.

general, essent $\chi = \dfrac{d^{2n}y}{dx^{2n}}, \lambda = \dfrac{d^{2n+1}y}{dx^{2n+1}}$, si tots els termes anteriors són nuls i χ és finit, la funció presenta un màxim o un mínim segons el signe de χ. Però si $\chi = 0$ i λ és finit, llavors la funció no presenta ni màxim ni mínim.

Tempelhoff

Definició: La secció quinzena exposa el *Mètode per trobar les ordenades màximes i mínimes de les línies corbes*.[23] De la teoria de màxims i mínims surt la teoria de les línies corbes, ja que una funció d'una variable (algèbrica o transcendent) ve donada per una equació implícita que, en relacionar abscissa-ordenada, pot ser representada mitjançant una corba.[24] Sigui *y* una funció de *x*, *u*, *z*, ... tal que, quan *x*, *u*, *z*, ... són iguals a *a*, *b*, *c*, ..., *y* és més gran (més petit) que les ordenades quan *x*, *u*, *z*, ... són $a \mp \alpha, b \mp \beta, c \mp \gamma, ...$ Diem que *y* és una ordenada *màxima* (*mínima*). Aquestes ordenades màximes o mínimes no necessàriament són les màximes i mínimes de totes les possibles ordenades, només cal que ho siguin en un determinat entorn.

Caracterització i justificació

Primer s'han de buscar els punts on la tangent sigui paral·lela o perpendicular a l'eix de les abscisses. Ha vist en els punts 374 i 375 que si la tangent en un punt és paral·lela a l'eix de les abscisses, es verifica $\dfrac{dy}{dx} = 0$. En el punt 760 fa l'observació següent: si $\dfrac{dx}{dy} = 0$ ens trobem amb una cúspide. Per tant, per trobar màxims i mínims s'han d'estudiar les solucions de $\dfrac{dy}{dx} = 0$ i de $\dfrac{dx}{dy} = 0$.

Naturalesa dels extrems

Quan la tangent sigui paral·lela, si l'arc és còncau respecte l'eix de les abscisses, aleshores es té un màxim. Si l'arc és convex, aleshores ens trobem amb un mínim. Per tant, s'han de buscar els punts tals que l'arc sigui còncau o convex. Quan la tangent sigui perpendicular, si l'arc és convex respecte l'eix de les abscisses, la funció presenta

[23] "De totes les investigacions tant en Geometria com en d'altres parts de les matemàtiques i les ciències naturals (...) no n'hi ha cap de tan agradable i entretinguda com buscar la quantitat màxima o mínima (...) Des que el càlcul diferencial fou descobert existeix un mètode general per trobar màxims i mínims" (TEMPELHOFF (1770), punt 705).

[24] Només estudia el cas de funcions uniformes. Si es conegués un mètode general per solucionar les equacions de tots els graus, aleshores sí es podrien determinar els màxims i els mínims en qualsevol cas.

una cúspide en aquest punt, que és un màxim. Si l'arc és còncau, la funció presenta una cúspide en aquest punt, que correspon a un mínim. Així doncs, s'han de buscar els punts tals que l'arc sigui còncau o convex. Sigui *QR* una corba d'equació $y = X$, *X* funció de *x* (vegeu Figura 4). S'ha de determinar com està situat l'arc *QDR* respecte la tangent *TD*. Sigui $x = AB, y = DB, \Delta x = DE, \Delta y = EF$. Prolongant *EF* talla *TD* en el punt *G*. Quan $FE > EG$, aleshores *F* està per sobre de *DG*. Quan $FE < EG$, llavors *F* es troba per sota de *DG*. Com que *TD* és la tangent és verifica: $EG = \frac{dy}{dx} \cdot \Delta x$. Per tant: $u = FG = FE - EG = \Delta y - \frac{dy}{dx}\Delta x$. Si $u > 0$, *F* està per sobre. Si $u < 0$, *F* està per sota. Prenent Δx tant petit com es vulgui, l'arc *QDR* estarà per sobre de *DG* si $u > 0$ i per sota de *DG* si $u < 0$. Utilitzant el desenvolupament del diferencial complet,[25] la longitud de *FG* queda determinada per:

$$\Delta y = u + \frac{dy}{dx}\Delta x = \frac{dy}{dx}\Delta x + \frac{d^2 y}{1 \cdot 2 dx^2}\Delta x^2 + \frac{d^3 y}{1 \cdot 2 \cdot 3 dx^3}\Delta x^3 + \ldots$$

i, per tant:

$$u = \frac{d^2 y}{1 \cdot 2 dx^2}\Delta x^2 + \frac{d^3 y}{1 \cdot 2 \cdot 3 dx^3}\Delta x^3 + \ldots$$

Les quantitats $\frac{d^2 y}{dx^2}$ (funcions de *x*) són finites fins al moment en què Δx desapareix. Aleshores: $u = \frac{d^2 y}{1 \cdot 2 dx^2}\Delta x^2$. Quan $\frac{d^2 y}{1 \cdot 2 dx^2} > 0$, aleshores $u > 0$ i l'arc estarà per sobre de la tangent i la corba presenta un mínim. Quan $\frac{d^2 y}{1 \cdot 2 dx^2} < 0$, aleshores $u < 0$ i l'arc estarà per sota de la tangent i la corba presenta un màxim. Ambdues situacions són vàlides tant per a Δx positiu com negatiu. Si $\frac{d^2 y}{1 \cdot 2 dx^2} = 0$ s'ha d'analitzar com es comporta $\frac{d^3 y}{1 \cdot 2 \cdot 3 dx^3}$: si és positiu aleshores $u = \frac{d^3 y}{1 \cdot 2 \cdot 3 dx^3}\Delta x^3$ és positiu, si Δx és positiu, i és negatiu, quan Δx és negatiu. Així doncs, ens trobem amb un *punt d'inflexió*, donat que l'arc *DF* es troba per sobre de la tangent, però l'arc *DQ* per sota. Si $\frac{d^3 y}{1 \cdot 2 \cdot 3 dx^3} = 0$,

[25] Vegeu TEMPELHOFF (1770), punt 567.

haurem d'analitzar com es comporta $\frac{d^4y}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4dx^4}$: si és positiu aleshores $u = \frac{d^4y}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4dx^4}\Delta x^4 > 0$, tant per a Δx positiu com negatiu, i l'arc es troba per sobre de la tangent. Si és negatiu llavors $u < 0$, tant per a Δx positiu com negatiu, i l'arc es troba per sota de la tangent. Si és 0, ens trobem amb un punt d'inflexió. En general, si $\frac{d^{2n}y}{dx^{2n}} = 0$ la funció presenta un punt d'inflexió. Tempelhoff observa que no és fàcil decidir si un punt presenta un màxim o un mínim, un punt d'inflexió o una cúspide. Per assegurar-se de com es comporta l'arc en aquests casos, recomana fer un canvi de coordenades: prenent el punt solució com a origen i traçant una recta paral·lela a l'eix d'abscisses, sota la nova equació desapareix la dificultat.[26]

Karsten

Definició: Quan per a x el valor corresponent de y és major o menor que els immediatament anteriors ($x-b$) o posteriors ($x+b$) es té un *màxim* o un *mínim*. Karsten distingeix entre màxims/mínims *absoluts* i *relatius* (punt 43).

---

[26] Tempelhoff també exposa el càlcul de màxims i mímins d'una funció *U* de *x*, *y*, *u*, *z*, ... S'ha de determinar els seu màxim o mínim. Prenem primer *x* com a variable i suposem coneguts els valors *y*, *u*, z,... del màxim o mínim. Si considerem *U* una funció de *x* aleshores per trobar els seus extrems hem de trobar les solucions de l'equació $\frac{dU}{dx} = P = 0$ (equació en *x*, *y*, *u*, *z*, ...). Repeteix el procés amb la resta de variables. En general, per trobar els màxims i mínims de la funció *U* s'ha de resoldre el sistema $P = 0, Q = 0, R = 0, \ldots$, on $dU = Pdx + Qdy + Rdu + \ldots$ Per saber si la solució d'aquest sistema correspon a un màxim o a un mínim, considera una altra variable, *t*, de la qual depenen *x*, *y*, *u*, *z*, ... (punt 394), de manera que: $\Delta U = \frac{dU}{dt}\Delta t + \frac{d^2U}{1\cdot 2dt^2}\Delta t^2 + \ldots + \frac{d^nU\Delta t^n}{1\cdot 2\cdot 3\cdot \ldots \cdot ndt^n}$, *U* tindrà un màxim/mínim quan $\frac{dU}{dt} = 0$. Prenent Δt tan petit com es vulgui, en comparació amb $\frac{d^2U}{1\cdot 2dt^2}\Delta t^2$ la resta de termes desapareix. Si $\frac{d^2U}{1\cdot 2dt^2} < 0$ la funció presenta un màxim; si $\frac{d^2U}{1\cdot 2dt^2} > 0$ la funció presenta un mínim (i estén per al cas de diferencials d'ordre parell). En el cas particular en què *U* sigui una funció de *x*, *y*, on *x*, *y*, són funcions de *t*, aleshores: $\frac{d^2U}{1\cdot 2dt^2}\Delta t^2 = P'\Delta x^2 + Q'\Delta x\Delta y + R'\Delta y^2 = P'(\Delta x + \frac{1}{2}\cdot\frac{Q'\Delta y}{P'})^2 + (R' - \frac{Q'^2}{P'})\Delta y^2$. L'expressió $\frac{d^2U}{1\cdot 2dt^2}\Delta t^2$ serà positiva quan P' sigui positiva, i $R' - \frac{Q'^2}{P'}$ sigui positiva o nul·la. Fent un estudi anàleg obté la condició de màxim. Parla dels valors particulars de P', Q', R' en què la funció no presenta ni màxim ni mínim. Quan $P' = Q' = R' = 0$, aleshores s'han de mirar el termes següents del desenvolupament de ΔU. Fa referència a l'article de Lagrange "Recherches sur la Methode de maximis&minimis" publicat a *Miscellania Societatis Taurinesis*.

Caracterització i justificació

En $x+b$, *y* passa a ser $y+\beta$, on:

$$\beta = \frac{b.dy}{1.dx} + \frac{b^2.d^2y}{1.2.dx^2} + \frac{b^3.d^3y}{1.2.3.dx^3} + ... = p.b + S \text{ (punt 42).}$$

Si *y* presenta un *màxim* es verifica: $y > y + pb + S, y > y - pb + S$. Per a un *mínim*: $y < y + pb + S, y < y - pb + S$. Aquestes condicions no són suficients si *p* no és zero.

Naturalesa dels extrems

Si $p = 0$, aleshores $\beta = b(qb + S)$. Quan $q \neq 0$, $y > y - qbb + bS$, quan *q* negatiu (per a $x - b$ i per a $x + b$); $y < y + qbb + bS$, quan *q* positiu (per a $x - b$ i per a $x + b$). Si $q = 0$ s'ha de mirar el següent coeficient: $r = \dfrac{d^3y}{1.2.3dx^3}$. Si $r \neq 0$ es té un màxim o un mínim. Si $r = 0$, s'ha de mirar $s = \dfrac{d^4y}{1.2.3.4dx^4}$, etc. Per tant, per trobar els màxims i mínims d'una funció *y* de *x* s'han de calcular les arrels de $\dfrac{dy}{dx}$. Si en avaluar $\dfrac{d^2y}{dx^2}$ en les arrels de $\dfrac{dy}{dx}$ dóna positiu o negatiu, es té un mínim o un màxim, respectivament. Si dóna zero, es busquen les arrels de $\dfrac{d^3y}{dx^3}$ i s'avalua el signe de $\dfrac{d^4y}{dx^4}$ en elles, etc.

Punts d'inflexió i de retrocés. Altres punts singulars

Wolff

Definició: En el punt 301 (capítol II de la secció IV) defineix *punt de flexió contrària* com el punt allà on la corba "flexiona" en parts contràries (convexa a un costat, còncava a l'altre). Un *punt de regressió* és aquell en què la corba retorna al vèrtex.

Caracterització i justificació

Considera la tangent en un punt d'una corba, i tres ordenades infinitament properes (prenent *dx* constant). Si en la segona abscissa la diferència de l'ordenada de la tangent és més gran que l'ordenada, aleshores la corba és còncava (*dy* decreix contínuament). Si, en canvi, és menor, aleshores la corba és convexa (*dy* creix contínuament). Així doncs, en el punt de flexió contrària *dy* presenta un mínim (si la corba primer és còncava i després convexa) o un màxim (si primer és convexa i després còncava.

Prenent *dx* constant, resulta que $ddy = 0$ o $ddy = \infty$ en el punt de flexió contrària. En el punt 303 afegeix que es pot deduir la concavitat/convexitat de la corba a partir de la raó $dy : dx$. Per exemple, en el cas de la paràbola $ax = y^2$, obté $dy : dx = a : 2\sqrt{ax}$. Com que *dx* és constant, si *x* creix, *dy* decreix. Aleshores es pot concloure que la paràbola és sempre còncava, sense punts de flexió contrària.

Kästner

Definició: A un costat del *punt d'inflexió* la corba és còncava i a l'altre és convexa.

Caracterització i justificació

Kästner defineix *angle de curvatura* (punt 511). Siguin *M*, *N* dos punts sobre una corba, les tangents respectives *MT*, *ND* es tallen en un tercer punt, *H*.

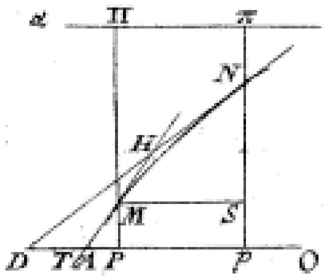


Figura 5

Quan *M* i *N* s'apropen indefinidament, l'angle agut format per les dues tangents, *THD*, s'anomena *angle de curvatura*. Es pot imaginar aquest angle com l'angle que formen dos elements consecutius d'una línia corba, donat que si *M* i *N* s'apropen indefinidament, es poden prendre tan propers que l'arc no presenti cap punt d'inflexió (tret que *M* o *N* siguin punts d'inflexió). En el punt 518 dóna la fórmula de l'angle de curvatura. En el cas de coordenades paral·leles, l'angle de curvatura quan *M* i *N* s'apropen infinitament és el diferencial de l'angle format per la tangent *MT* i l'eix d'abscisses. Atès que $THD = OTH - ODH$ i que en el punt 299 ha demostrat l'expressió per al diferencial de l'arc, aleshores: $\frac{dyddx - dxddy}{ds^2} = -\frac{dp}{1+pp}$, on $p = \frac{dy}{dx}$ i *s* és l'arc. Si *dp* és negatiu la línia és còncava; si *dp* és positiu la línia és convexa. En un segon apartat del punt 518 arriba al mateix resultat, en el cas de coordenades des d'un punt. En general, si *ddy* és negativa, la línia és còncava. Si *ddy* és positiva, la línia és convexa (punt 522). En el punts 532-537 caracteritza els punts d'inflexió. Sigui *H* el punt de tall de dues tangents de la part còncava, per exemple. Quan els punts s'apropen més i més a la part convexa i el punt *H* cau de l'altre costat de la corda, aleshores o bé s'allunya de la corda, amb distància infinita (l'angle de curvatura creix fins a esdevenir dos rectes), o bé cada cop es troba més a prop de la corda i l'angle de curvatura cada cop més petit, fins que desapareix en comparació amb qualsevol altre angle finit. Per tant, en el punt d'inflexió es verifica: $\frac{dp}{dx} = 0$ o $p = \infty$. En el cas de coordenades paral·leles, si $\frac{dp}{dx} = 0$, prenent dx constant (i igual a 1), *p* presenta un màxim o un mínim. Aleshores, si $dy = 0$ i $ddy = 0$, *y* no presenta ni màxim ni mínim, sinó un punt d'inflexió. Si $d^3y = 0$ però $d^4y \neq 0$, *y* no presenta punt d'inflexió, sinó màxim o mínim. Si $d^4y = 0$ però $d^5y \neq 0$, la diferencial presenta màxim o mínim, per tant la corba principal tindrà punt d'inflexió, i no màxim ni mínim. Llavors, si $dy = 0$, la línia principal presenta punt d'inflexió o màxim/mínim segons el nombre de la següent diferencial de *y* que s'anul·li (senar o parell). Fa referència al *Treatise of Fluxions* de Maclaurin. D'altra banda, si l'abscissa creix fins a un punt però després decreix, aquest punt s'anomena *punt de retrocés*. Les tangents en *M* i en *N* esdevenen una única tangent. Aquest punt és com el límit d'ambdós arcs. Si en un punt hi ha dues o més tangents, els arcs es corresponen a branques diferents. En el punt 516 classifica els punts de retrocés en:

- *De primera espècie*: un arc cau per sota de la tangent en un punt de l'arc. I l'altre arc cau per sobre de la tangent en un punt d'aquest arc. Ambdós arcs són entre ells convexos.
- *De segona espècie*: els dos arcs cauen per sota de les corresponents tangents. I en una observació fa referència a que L'Hôpital va ser el primer a descobrir aquest segon tipus de punt de retrocés.

L'angle de curvatura és infinitament petit de primer ordre. En el punt 520 exposa com trobar els punts de retrocés: quan *M* i *N* s'apropen infinitament i coincideixen en *E*, l'expressió de l'angle de curvatura ha de ser igual a zero i, per tant, es donen les mateixes condicions que el punt d'inflexió. Per assegurar que existeix un punt de retrocés s'ha d'estudiar la corba en l'abscissa corresponent.

Tempelhoff

Definició: A la setena secció ha definit què és un *arc còncau*. L'arc a un costat d'un punt *A* és còncau quan totes les cordes d'aquest costat des de *A* cauen del mateix costat de l'arc. En canvi quan les cordes primer cauen d'un costat però després de l'altre, l'arc no és còncau. A un costat del *punt d'inflexió* l'arc és còncau, a l'altre costat és convex

Caracterització i justificació

Dels punts d'inflexió parla en la secció quinzena, dedicada a màxims i mínims. Per trobar màxims i mínims s'han d'estudiar les solucions de $\frac{dy}{dx}=0$ i de $\frac{dx}{dy}=0$. Però les solucions d'aquestes equacions no donen sempre un màxim o un mínim. Encara que la tangent en un punt sigui paral·lela a l'eix de les abscisses no es pot concloure immediatament que en aquest punt trobem un màxim o un mínim; per exemple, ens podem trobar amb un punt d'inflexió o amb una cúspide. Anàlogament, encara que la tangent en un punt caigui sobre l'ordenada no podem assegurar l'existència d'un màxim o d'un mínim. Ens podríem trobar amb un punt d'inflexió. Per la caracterització i justificació, veure l'apartat *Extrems*.

Altres punts singulars

A la setena secció Tempelhoff parla dels punts múltiples. Quan a la fórmula:

$$y : p = A + A'\Delta x + \ldots : -B - B'\Delta x - B''\Delta x^2 - \ldots - C\frac{y\Delta x}{p} - C''\frac{y\Delta x^2}{p} - \ldots \quad (*)$$

(vista més amunt), es té $A = B = 0$, aleshores:

$$y : p = A'\Delta x + A''\Delta x^2 \ldots : -B'\Delta x - B''\Delta x^2 - \ldots - C\frac{y\Delta x}{p} - C''\frac{y\Delta x^2}{p} - \ldots =$$
$$= A' + A''\Delta x \ldots : -B' - B''\Delta x - \ldots - C\frac{y}{p} - C''\frac{y\Delta x}{p} - \ldots$$

Si ara $\Delta x = 0$, es té la igualtat de proporcions: $y : p = A' : -B' - C'\frac{y}{p}$, d'on resulta l'equació $Ap^2 + B'yp + C'y^2 = 0$. Aquesta equació té dues arrels:

- reals: en el punt *D* existeixen dues tangents, la corba presenta un nus (passen dos arcs per *D*), el punt *D* s'anomena *punt doble*.
- imaginàries: pel punt *D* no passa cap tangent.

Si a la mateixa fórmula (*) es té $A = B = A' = B' = 0$, aleshores en resulta l'equació de tercer grau $A''p^3 + B''yp^2 + C''y^2p + D''y^3 = 0$, les arrels de la qual poden ser:

- tres arrels reals: en el punt *D* existeixen tres tangents, passen tres arcs per *D*, el punt *D* s'anomena *punt triple*.
- una arrel real, dues imaginàries: pel punt *D* només passa una tangent, *D* és un punt simple.

En general, un *punt múltiple* és aquell on es tallen diversos arcs o pel qual passen diverses tangents. Però Tempelhoff no considera els punts múltiples massa rellevants i per saber-ne més recomana el lector llegir l'*Analyse de lignes courbes algébriques* de Cramer i les *Mémoires de l'Académie des Sciences de Paris*.

Karsten

Definició: Quan en un punt s'ajunten dos arcs, un còncau i un altre convex, amb tangent comuna en aquest punt, amb direccions oposades en el punt, es té un *punt d'inflexió*. Si els dos arcs tornen en la mateixa direcció (direcció de la tangent comuna) es té un *punt de regressió* (que és una cúspide, en la qual els dos arcs són tangents entre ells). Aquestes dues definicions es troben en el punt 118.

Caracterització i justificació

En el punt 117 considera l'expressió del valor complet de *dy* $dy = Pdx + Qdx^2 + Rdx^3 + \ldots$, corresponent a un valor qualsevol de *dx*. El terme $Q = \dfrac{ddy}{2dx^2}$ és negatiu a la part *còncava* de la corba i positiu a la part *convexa*. Ho demostra de la següent manera:

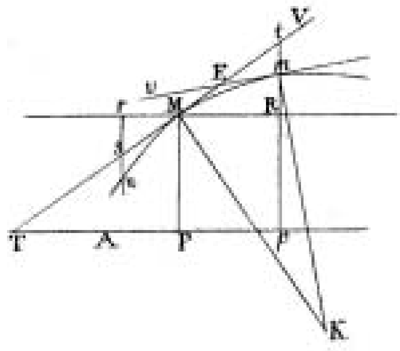


Figura 6

Donat un punt *M* sobre la corba, trasllada l'origen a *M*. Sigui *m* un altre punt sobre la corba, *MR* la seva abscissa des de *M*. Sigui *MT* la tangent a la corba en el punt *M* i *t* el punt de tall d'aquesta recta amb l'ordenada *Rm*. Si l'arc *Mm* és còncau:

$dy = Rm = Rt - tm = Pdx - tm$. Com que $dy = Pdx + Qdx^2 + Rdx^3 + ...$, la suma de tots els termes (llevat el primer) ha de ser negativa. Prenent *dx* tan petit com es vulgui, de manera que la suma dels termes que segueixen a Qdx^2 siguin menors que aquest terme, es conclou que $Q = \frac{ddy}{2dx^2}$ ha de ser negatiu. De manera anàloga raona en el cas d'arc convex. En el punt 119 demostra que en el punt d'inflexió, l'angle entre la recta tangent i l'ordenada és màxim.

Altres punts singulars

En el punt 113, a partir de l'expressió de la sèrie completa de *dz*, essent $z = 0$ l'equació d'una línia entre coordenades ortogonals *x*, *y*,

$$P + \frac{dx}{dy} p + Qdy + \pi dx + \frac{dx}{dy} qdx + ... = 0,$$

Karsten descriu la relació entre els coeficients d'aquesta sèrie i les branques de la línia corba. La tangent de l'angle entre l'ordenada i la recta tangent és el límit $\frac{dx}{dy} = -\frac{p}{P}$. Si $P = 0$, la tangent és paral·lela a l'eix d'abscisses. Si $p = 0$, la tangent cau sobre l'ordenada. Si *P* i *p* són tots dos nuls, per trobar el límit de $\frac{dx}{dy}$, s'ha de resoldre l'equació $\frac{dx^2}{dy^2} q + \frac{dx}{dy} \pi + Q = 0$. En aquest cas, la tangent de l'angle format entre l'ordenada i la tangent pren valor doble, que significa que dues branques de la corba es tallen en el punt. Les arrels també podrien ser imaginàries. Si q, π, Q són nuls a l'hora, la tangent es dedueix d'una equació de tercer ordre: $\frac{dx^3}{dy^3} r + \frac{dx^2}{dy^2} \pi' + \chi \frac{dx}{dy} + R = 0$. Si les tres arrels són reals, passen tres branques a través del punt; també pot haver només una arrel real. Els punts 115-116 estan dedicats a les "parts associades" en què una corba està dividida. Pot succeir que entre dues abscisses l'ordenada prengui valors imaginaris. O que a una mateixa abscissa li corresponguin diverses ordenades reals. Pot ser que entre dues abscisses, amb una ordenada real cadascuna, a la resta d'abscisses li corresponen dues ordenades i es té un "oval associat". Si per a una abscissa es tenen dues ordenades reals iguals i per a abscisses més grans es troben valors d'ordenada imaginaris, aleshores es té un "punt associat". Si fins a una abscissa determinada, a totes les abscisses els corresponen dos valors reals d'ordenada, si aquesta abscissa té únic valor d'ordenada, si fins a una altra abscissa es tornen a tenir dues ordenades i si en aquesta darrera abscissa es té única ordenada. Es tracta d'un *nus*. En el nus, dues tangents diferents, una per a cada branca. Si fins a una abscissa determinada a les abscisses els corresponen dues ordenades, si a aquesta abscissa li correspon única ordenada i si a partir d'aquesta abscissa les ordenades són imaginàries. Es tracta d'una *cúspide*. En aquest cas, $\frac{dx}{dy}$ té dos valors reals. Hi ha dues branques diferents que coincideixen en la cúspide. Els punts on dues branques o més es tallen, o coincideixen en un punt, s'anomenen *punts múltiples*. Una recta que passa per un punt múltiple talla la corba en tants punts com branques es troben en el punt.

Indeterminacions

Kästner: Els punts 372-384 tracten *Dels valors de funcions, que en determinats llocs esdevenen indeterminats*. Si quan $x = a$, resulta que $P = Q = 0$, s'ha de buscar el valor de $\frac{P}{Q}$ en aquest punt. En lloc de x posem $a + e$ i considerem els primers termes del desenvolupament de P i Q: $P = fe + Fee, Q = ge + Gee$. Si e decreix infinitament: $\frac{P}{Q} = \frac{f + Fe}{g + Ge}$, és a dir, $\frac{P}{Q}$ passa a ser $\frac{f}{g}$ quan $x = a$. De fet, quan en lloc de x posem $x + e$, si e esdevé infinitament petita, $f = \frac{dP}{dx}, g = \frac{dQ}{dx}$. De manera que el valor de $\frac{P}{Q}$ quan $x = a$ és igual al valor de $\frac{dP}{dQ}$ quan $x = a$. Diu que aquesta regla fou trobada per Johann Bernoulli, i no esmenta L'Hôpital. També fa referència a les *Institutiones calculi differentialis* d'Euler.

Karsten: Els punts 265 i 266 formen part de la secció titulada *Ús de les sèries per solucionar problemes matemàtics*. Sigui $y = \frac{V}{W}$ funció fraccionària que depèn de *x*, tal que numerador i denominador s'anul·len a l'hora quan $x = a$. Per trobar el valor de *y* en aquest punt, s'ha de prendre $z = x - a$, és a dir, $x = a + z$, *y* també serà funció de *z*, *V* i *W* s'anul·len a l'hora quan *z* és zero.

$$V = Pz + Qz^2 + Rz^3 + Sz^4 + ...$$
$$W = pz + qz^2 + rz^3 + sz^4 + ...$$

$$y = \frac{P + Qz + Rz^2 + Sz^3 + ...}{p + qz + rz^2 + sz^3 + ...}$$

Aleshores, quan $z = 0$, o $x = a$, y val $\frac{P}{p}$. Es pot donar el cas que P, p també s'anul·lin a l'hora. Llavors: $y = \frac{Q}{q}$. Si resulta que Q, q també s'anul·len, $y = \frac{R}{r}$, etc. A continuació busca qui són P, p, Q, q, ... En lloc de x escriu $x + z$. V passa a ser $V + \frac{dV}{dx}z + \frac{ddV}{2dx^2}z^2 + \frac{d^3V}{2{\cdot}3dx^3}z^3 + ...$ i W esdevé $W + \frac{dW}{dx}z + \frac{ddW}{2dx^2}z^2 + \frac{d^3W}{2{\cdot}3dx^3}z^3 + ...$

A $a + z$ es té $y = \left(\frac{dV}{dx} + \frac{ddV}{2dx^2}z + \frac{d^3V}{2{\cdot}3dx^3}z^2 + ...\right) : \left(\frac{dW}{dx} + \frac{ddW}{2dx^2}z + \frac{d^3W}{2{\cdot}3dx^3}z^2 + ...\right)$.

Comparant aquesta expressió amb $y = \frac{P + Qz + Rz^2 + Sz^3 + ...}{p + qz + rz^2 + sz^3 + ...}$, resulta que $\frac{P}{p} = \frac{dV}{dW}, \frac{Q}{q} = \frac{ddV}{ddW}, \frac{R}{r} = \frac{d^3V}{d^3W}, ...$ El valor de y quan $x = a$ és $y = \frac{dV}{dW}$. Si aquesta fracció torna a donar $\frac{0}{0}$, llavors $y = \frac{ddV}{ddW}$, i així successivament, fins arribar a una fracció amb numerador i denominador no nuls a l'hora.

Kästner i Karsten també tracten les següents indeterminacions, que es poden reduir a $\frac{0}{0}$:

- $\frac{\infty}{\infty}$: si quan $x = a$ el numerador i el denominador de la funció fraccionària $y = \frac{V}{W}$ són els dos infinits, es fa la següent transformació: $y = \frac{V}{W} = \frac{1:W}{1:V}$.
- $0 \cdot \infty$: sigui la funció $y = V{\cdot}X$ tal que, quan $x = a$, $V = 0$ i $X = \infty$. S'aplica la transformació $X = \frac{1}{W}$.
- $\infty - \infty$: sigui $y = V - W$, on V i W són infinites quan $x = a$. Cas que V i W siguin funcions fraccionàries, amb denominador nul quan $x = a$, es calcula el comú

denominador i es passa a una única fracció. Per al cas de logaritme i d'altres funcions transcendents, aquesta indeterminació es resol mitjançant sèries, prenent $x = a + z$.

A més a més, Kästner tracta la següent indeterminació (punt 471). En determinats casos per conèixer el valor real del diferencial de *y* funció de *x*, s'ha d'expressar el *diferencial complet* de *y*: $dy = pdx + \frac{1}{2}qdx^2 + \frac{1}{6}rdx^3 + \ldots.$, on $dy = pdx, dp = qdx, dq = rdx,\ldots$ Per les regles usuals de diferenciació $\frac{dy}{dx}$ es transforma en *p*, els altres termes desapareixen quan *dx* desapareix. Però si per a un valor particular de *x p* fos zero, aleshores s'observa la resta del diferencial: $dy = \frac{1}{2}qdx^2 + \frac{1}{6}rdx^3 + \ldots$[27]

Corbes osculadores

Wolff: El capítol III es titula *De l'ús del càlcul differentio-differentialis en la investigació de les evolutes de corbes i radi osculador*. Si es considera la corba envoltada per un fil (l'*evoluta*) i es desenrotlla, l'extrem del fil descriu una corba. La porció de fil desenrotllat és el *radi de l'evoluta*, *de curvatura* o *osculador*. El cercle de radi el radi de l'evoluta i centre el punt on el fil comença a desenrotllar és el *cercle osculador*. En el punt 315 defineix l'evoluta com el lloc geomètric dels centres de tots els cercles osculadors de la corba que l'evoluta descriu. En el 317: un arc-element de la corba és arc del cercle osculador; així, el radi de l'evoluta és perpendicular a la corba. I en el 318: el radi de l'evoluta és tangent a l'evoluta. A partir d'ordenades infinitament properes i semblança de triangles, i prenent *dx* constant, en el punt 320 determina el radi osculador, per al cas d'ordenades perpendiculars a l'eix: $(dx^2 + dy^2)\sqrt{(dx^2 + dy^2)} : -dxddy$. També justifica aquesta fórmula a partir de la subnormal i de triangles rectangles. Els punts 321 i 322 tracten de com trobar l'equació de l'evoluta d'una corba algèbrica.

Kästner: A partir del punt 538 i fins al 562 parla del cercle de curvatura i de qüestions relacionades amb ell. Donats dos punts *M*, *N* sobre la corba, es consideren les cordes $NV = MN$ i *K* el centre del cercle que passa per *M*, *N*, *V*.

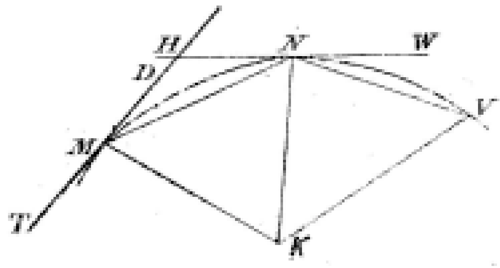


Figura 7

Quan *M* i *V* s'apropen infinitament a *N*, el cercle esdevé el *cercle de curvatura* i el seu radi és el *radi de curvatura*. A continuació demostra que l'angle de curvatura és igual a l'angle format pels radis des de *M* i des de *N* (x). Per trobar la fórmula del radi de curvatura fa referència al seu tractat sobre trigonometria; quan *M* i *N* s'apropen infinitament, *MN* esdevé *ds*:

$$z = MK = \frac{\frac{1}{2}MN}{sin\frac{1}{2}x} = \frac{ds}{\text{angle de curvatura}},$$

d'on resulta:

- *Cas ordenades paral·leles*: $z = \frac{ds^3}{dyddx - dxddy}$, on $ds = dx\sqrt{(1+pp)}$, que estudia en els casos en què *dx* i *ds* són constants, respectivament.

- *Cas ordenades des d'un punt*: $z = \frac{rds^3}{dxds^2 + du^2dx + ududdx - udxddu}$, que estudia en els casos en què *du*, *dx* i *ds* són constants, respectivament.

La corba és còncava o convexa, segons que el radi de curvatura sigui positiu o negatiu. El centre cau sobre la part còncava de la corba, de manera que quan una corba té costat còncau i costat convex, els radis de curvatura són oposats. En el punt 544 veu que l'angle format per la tangent en un punt i el radi és recte, de manera que la tangent també és tangent del cercle. Aquests dos arcs (de corba i de circumferència) s'apropen l'un a l'altre infinitament. No hi ha cap altre arc de cercle passant per *M* o *N* entre el cercle de curvatura i la corba. En aquest sentit, el cercle de curvatura funciona com la tangent. L'angle de curvatura del cercle i de la corba és el mateix, quan les tangents respectives són comunes. Suposem que *MN* decreix fins esdevenir un cercle. Donats dos

---

[27] Aquesta indeterminació també apareix a BOS (1974), p. 28.

cercles de radis *C*, *c* i amb longitud d'arc *V*, *v*. L'angle de les tangents d'ambdós cercles es comporta com $\frac{V}{C} : \frac{v}{c}$. Quan l'angle es transforma en l'angle de curvatura, l'angle de curvatura per a les dues línies corbes es comporta en sentit invers als radis de curvatura (és a dir, quan el radi creix la curvatura disminueix). En el punt 548 prova que, per trobar el centre de curvatura, s'ha de buscar el punt d'intersecció de la perpendicular a la tangent per *M* i línia que talla la corda *MN* per la meitat. Les diferencials del radi de curvatura en dos punts de la corba, comparats, ens fan veure com canvia la curvatura (punts 560-562). Respecte a la curvatura esmenta, entre d'altres, el *Methodus Fluxionum* de Newton, les *Lectiones* de Johann Bernoulli i el *Treatise of Fluxions* de Maclaurin. A continuació defineix l'*evoluta*. Suposem un fil flexible col·locat al llarg d'una corba, sense punts d'inflexió ni de retrocés. Desenrotllant el fil, l'extrem de la qual descriu una corba anomenada l'*evolvent* de la primera corba, que és l'*evoluta*. L'evoluta és el lloc geomètric dels centres de curvatura de la corba evolvent. En el punt 567 mostra com trobar l'equació de l'evoluta, a partir de l'equació de l'evolvent. I el problema invers en el punt 575. L'angle entre dues normals de l'evolvent és igual a l'angle entre les normals dels punts corresponents de l'evoluta, és a dir, els arcs d'una corba i els corresponents de l'evoluta tenen la mateixa amplitud. En el punt 569: la diferencial de l'arc d'una corba és al seu radi de curvatura com la diferencial de l'arc de l'evoluta és al seu radi de curvatura. Kästner fa notar la relació entre quadratures, rectificació i evolució. Per veure altres exemples cita les *Lectiones* de Johann Bernoulli.

Tempelhoff: La secció catorzena s'anomena *De la curvatura de les línies corbes*. En el punt 654 considera diferents arcs de corba amb una tangent comuna. Aquests arcs són tangents entre si. Aquests arcs verifiquen que, a més curvatura, el radi és més petit. Tracem la perpendicular a la tangent pel punt de tangència. Considerem les circumferències amb centre sobre aquesta perpendicular, que seran tangents als arcs de corba en el punt de tangència. Quan entre una circumferència i un arc de corba no es pot traçar cap altra circumferència, és a dir, quan la resta de circumferències queda entre la corba i la tangent o bé per sota de la circumferència, aleshores es diu que la circumferència i la corba tenen la mateixa *curvatura*. El centre d'aquesta circumferència és el *centre de curvatura*, el seu radi és el *radi de curvatura* i la circumferència s'anomena *cercle de curvatura* o *cercle osculador*, que és únic (ho demostra en el punt 659). Quan dues corbes es toquen i entre elles no hi ha cap circumferència aleshores tenen la mateixa curvatura. Un arc és més o menys corbat segons estigui menys o més allunyat del cercle de curvatura (a l'igual que la distància de la tangent a la corba varia). En el punt 664 dóna la fórmula del radi de curvatura, que varia segons s'agafi com a constant un diferencial o un altre. Sigui ξ l'angle format per les coordenades *x*, *y* de la corba *AMH*.

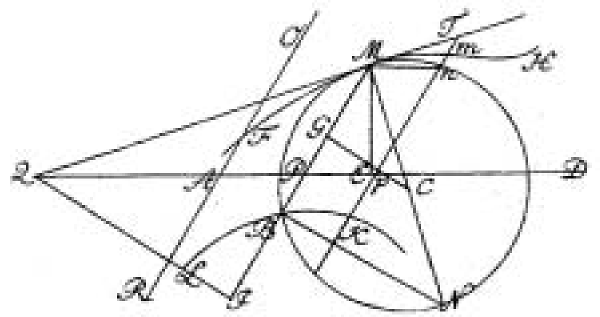


Figura 8

En el punt anterior ha demostrat que, donada la corba *LBK* verificant la proporció $Tm : MT = MT : TK$, aleshores la corda *MB* pertany al cercle osculador de la corba *AMH*. Pren el punt mig de la corda *MB*, *G*. Traça *MN* perpendicular a la tangent *QT* i *CG* per pendicular a *MB*. *MN* i *CG* es tallen en *C*, que és el centre del cercle de curvatura. Per tant, *MC* és *R*, el radi de curvatura. Si *dx* és constant, l'expressió del radi és: $R = -\dfrac{\sqrt{(dx^2 + 2dxdy\cos\xi + dy^2)^3}}{dxddy\sin\xi}$. Després dóna la fórmula en el cas general, amb *dx* no constant: $R = \dfrac{\sqrt{(dx^2 + 2dxdy\cos\xi + dy^2)^3}}{(dyddx - dxddy)\sin\xi}$. Com a cas particular estudia la fórmula quan l'angle entre coordenades és de 90º, considerant primer *dx* constant i després l'element de l'arc constant. En el punt 676 dóna la fórmula en el cas de coordenades polars. Els punts 672 a 675 exposa la relació entre el radi de curvatura i la convexitat o concavitat de la corba. Considerem el segment $\Delta y - \dfrac{dy}{dx}\Delta x = \dfrac{d^2 y \Delta x^2}{1{\cdot}2dx^2} + \textit{termes que desapareixen quan } \Delta x \textit{ molt petit}$. Si la corba és còncava respecte l'eix de les abscisses, la corba es troba per sota de la tangent; el segment $\Delta y - \dfrac{dy}{dx}\Delta x$ és negatiu, si $\dfrac{d^2 y}{dx^2}$ és negatiu i, per tant, el radi de curvatura és positiu. De forma anàloga, si la corba és convexa el radi de curvatura és positiu. A continuació defineix l'*evoluta*. El desenvolupament del fil que l'envolta genera una corba. Demostra que si es descriu una circumferència de radi el segment de fil desenrotllat, aquesta circumferència té la mateixa curvatura que la corba que descriu el fil en ser desenrotllat. En el punt 686 proposa com a exercici buscar l'equació de la corba, el desenvolupament de la qual genera una corba donada.

Karsten: La secció IV es titula *Mètode general de les tangents i altres estudis dependents d'ell*. Donada una corba i dos punts sobre ella, defineix *amplitud* d'un arc com l'angle entre les normals pels dos punts, és a dir, l'angle entre les respectives tangents. A major amplitud, major *curvatura* de l'arc de corba. En el cas particular de la circumferència, en tots els punts de la seva perifèria té la mateixa curvatura. Donada una sèrie de circumferències amb centre sobre una recta i tangent comuna en un punt, a mesura que els radis creixen, els arcs s'apropen a la recta tangent, n'és el límit. Es pot considerar la tangent com un arc de cercle que ja no es pot corbar més. A menor radi, major curvatura. A major curvatura, arc convex. A menor curvatura, arc còncau. En el punt 106 defineix el *cercle de curvatura*: aquella circumferència amb tangent comuna per un punt d'una corba, tal que la "desviació" de la circumferència respecte la direcció de la tangent és la mateixa que la de la corba respecte la direcció de la tangent. És a dir, circumferència i corba tenen la mateixa curvatura. El punt de tall de les dues normals a la corba en dos punts (putn 105) és el *centre de curvatura*. Defineix el *radi de curvatura* com $r = \frac{ds}{d\varphi}$, on *s* és l'arc i φ l'angle entre l'ordenada i la tangent. Aquí fa referència a la seva *Geometria*. En el punt 107 dóna la fórmula del radi de curvatura, en el cas de coordenades ortogonals *x*, *y*. Partint de la definició de radi, $r = \frac{ds}{d\varphi}$, on $\varphi = A\text{tang}\frac{dx}{dy}$, calcula $d\varphi = d.\frac{dx}{dy} : \left(1 + \frac{dx^2}{dy^2}\right) = \frac{dyddx - dxddy}{ds^2}$. Així: $r = \frac{ds^3}{dyddx - dxddy}$, on *dx* és variable (després també mostra la fórmula en el cas particular en què *dx* sigui constant). En el punt 110 defineix *evoluta*, a partir del fil que l'envolta. En el punt 111 defineix l'evoluta com a lloc dels centres de curvatura d'una corba i en dóna la seva equació: $\begin{cases} t = x + r\cos\varphi \\ u = r\sin\varphi - y \end{cases}$, on *t* i *u* són abscissa i ordenada de l'evoluta, respectivament; *x*, *y* són abscissa i ordenada (ortogonals) de la corba, respectivament; *r* és el radi i φ l'angle entre l'ordenada *y* i la tangent. Si el radi de curvatura d'una línia s'expressa mitjançant una funció algèbrica aleshores la seva evoluta és algèbricament rectificable. En el punt 119 dedueix que el radi de curvatura, *r*, és positiu quan *ddy* és negatiu (l'arc és còncau respecte l'eix, i el radi cau del mateix costat), i que *r* és negatiu quan *ddy* és positiu (l'arc aleshores és convex respecte l'eix, i el radi cau del costat oposat).

4.5.2. EL LLENGUATGE QUE UTILITZA, ÉS GEOMÈTRIC O ALGÈBRIC?

Wolff: Tot i que la secció V tracta l'*aritmètica de l'infinit* i la defineix com el mètode de sumar sèries numèriques d'infinits termes, el llenguatge emprat per Wolff en les seccions analitzades del seu text és geomètric (vegeu, per exemple, l'apartat de *Problemes i aplicacions*). Wolff adjunta les figures al final de la seva obra. Molt sovint fa referència a la seva *Geometria*.

Kästner: El llenguatge emprat per Kästner és algèbric en el sentit que treballa amb funcions, defineix el límit, utiliza el desenvolupament en sèrie i el límit de la raó dels diferencials, i està al cas de la convergència de sèries.[28] La corba, però, *és* un polígon d'infinits costats. Algunes de les seves demostracions tenen base geomètrica (vegeu, per exemple, l'apartat d'*Ordre superior*). Apareixen figures en el seu text, adjuntes al final.

Tempelhoff: Tempelhoff fa servir funcions, desenvolupament en sèrie, el teorema de Taylor, i parla del límit de proporcions. Podem dir que el seu enfocament és algèbric. Tanmateix, Tempelhoff considera el moviment com a origen dels diferencials (vegeu l'apartat *Diferencial*). A més, la base d'algunes de les seves demostracions és geomètrica (vegeue, per exemple, l'apartat d'*Ordre superior*). La seva obra també conté figures adjuntes al final.

Karsten: El més algèbric dels autors alemanys estudiats és Karsten. Per exemple la justificació de l'ordre superior es basa en sèries, i no en geometria. També apareixen

[28] En el punt 220 troba el desenvolupament en sèrie del logaritme d'un nombre entre 1 i 2 fent servir la integració: $y = 1 + u \Rightarrow dy = du \Rightarrow dx = a \cdot \frac{du}{1+u}$ (on *x* és el logaritme de *y*). Dividint la darrera expressió obté: $dx = a \cdot (du - udu + u^2 du - u^3 du ...)$, que en integrar resulta: $x = a \cdot (u - \frac{1}{2}u^2 + \frac{1}{3}u^3 - ...)$. A continuació presenta *u* com a sèrie de *x*. Busca sèries que s'apropin més ràpidament a un valor donat.

figures en la seva obra, però no són tan necessàries per al seguiment de la teoria com en el cas del altres tres autors. Karsten treballa amb funcions, usa el desenvolupament en sèrie, el teorema de Taylor i la raó diferencial, i defineix el límit. Karsten no considera el moviment per definir corbes com la cicloide, la quadratriu o l'espiral.

4.5.3. ELECCIÓ DE COORDENADES I TRACTAMENT DE LES CORBES ALGÈBRIQUES I TRANSCENDENTS

Wolff: Els problemes 4 i 5 estan dedicats al càlcul de la subtangent i de la subnormal de qualsevol *corba algèbrica*, respectivament. En els corol·laris següents treballa amb corbes algèbriques particulars però en el corol·lari 12 (punt 32) proposa trobar la subtangent de tota corba algèbrica, essent l'expressió general $ay^m + bx^n + cy^r x^s + f = 0$. Quant a la cissoide de Diocles[29] (punt 31) pren coordenades ortogonals, com Johann Bernoulli (problema 8 de les *Lectiones*). Una altra corba algèbrica de la qual troba la subtangent i la subnormal és la concoide (punt 49). Pren coordenades ortogonals, l'abscissa des del punt màxim de la corba, mentre que L'Hôpital pren l'abscissa des de l'eix horitzontal (punt 71 de l'*Analyse*, primera forma de calcular punts d'inflexió). Wolff presenta una segona forma de calcular la subtangent a la concoide, que coincideix amb la primera forma exposada per L'Hôpital (punt 25 de l'*Analyse*). També calcula els seus punts de flexió contrària, prenent coordenades des d'un punt, com fa L'Hôpital (punt 71 de l'*Analyse*, segona forma de calcular punts d'inflexió). Els problemes 131 a 134 presenta exemples de càlcul de punts de flexió contrària de corbes algèbriques. En particular, en el problema 131 treballa amb la corba $axx = (xx + aa)y$, com L'Hôpital (punt 68 de l'*Analyse*) i en el problema 134 amb la corba $y - a = (x - a)^{3:5}$, com L'Hôpital (punt 69 de l'*Analyse*). Del mètode per calcular màxims i mínims només presenta aplicacions geomètriques i amb corbes algèbriques (fent servir coordenades ortogonals).

Quant a les corbes *transcendents*, Wolff treballa amb la cicloide, la quadratriu, les espirals i la "logística" (corba logarítmica). En calcular la subtangent de la cicloide (punt 52) fa servir coordenades com L'Hôpital, amb l'abscissa sobre el cercle generador (punt 17 de l'*Analyse*). En canvi, per als punts de flexió contrària (punt 304) utilitza coordenades ortogonals, com L'Hôpital (punt 70 de l'*Analyse*). Amb aquestes mateixes coordenades en el punt 328, per trobar el radi osculador de la cicloide dóna la seva equació: $y = \sqrt{(x - xx)} + \int \frac{dx}{2\sqrt{(x - xx)}}$, com Leibniz, mentre que L'Hôpital dóna la relació diferencial de la cicloide (punt 93 de l'*Analyse*). El camí seguit per Wolff a l'hora de construir l'evoluta de la cicloide coincideix amb la segona part del punt 93 de l' *Analyse* de L'Hôpital. Per calcular la subtangent de l'espiral d'Arquimedes (punt 50) treballa amb les mateixes coordenades que L'Hôpital (punt 23 de l'*Analyse*). De l'espiral parabòlica calcula els punts d'inflexió (punt 312) amb coordenades des d'un punt, igual que en el punt 73 de l'*Analyse* de L'Hôpital, tot i que Wolff fa servir la distància del cercle a l'espiral, i L'Hôpital la distància del centre a l'espiral. Les coordenades que empra en calcular la subtangent a la quadratriu (punt 55) coincideixen amb les de L'Hôpital (punt 30 de l'*Analyse*), la x i la y intercanviades. Finalment, les coordenades emprades per trobar la subtangent de la corba "logística" (punts 54) són ortogonals i coincideixen amb les de Johann Bernoulli (problema 5 de les *Lectiones*). Però mentre que el problema que planteja Bernoulli és trobar la corba tal que la subtangent sempre sigui igual, Wolff proposa trobar la subtangent de la corba tal que les abscisses estan en progressió aritmètica i les ordenades en progressió geomètrica. I veu que la subtangent ha de ser sempre igual (teorema). En calcula el radi osculador en el punt 332. En general, Wolff fa servir coordenades ortogonals per a corbes algèbriques, i coordenades segons la naturalesa de la corba en el cas de les transcendents. Per a la determinació de punts de flexió contrària especifica que treballa amb *ordenades paral·leles* (en el problema 129) i amb *coordenades des d'un punt* (en el problema 135), exactament com fa L'Hôpital en el punt 66 de l'*Analyse*.

Kästner: Per exemplificar el càlcul de la tangent empra corbes algèbriques (paràbola, el·lipse, hipèrbola, "petxina" d'equació $(b + x)\sqrt{(aa - xx)} = yx$) i transcendents (cicloide, espiral). Exemples de màxims i mínims només amb algèbriques. Un dels exemples (punt 157) també apareixia a Fermat, a L'Hôpital i a Johann Bernoulli: donada una línia a, dividir-la en dues parts $x, a - x$, de manera que el rectangle sigui màxim o mínim. Kästner presenta la diferenciació del logaritme dins de la part

[29] De la cissoide dóna directament l'equació, i fa referència al punt 548 de la primera part.

corresponent al càlcul integral. Atès que la subtangent del logaritme és constant: $\frac{ydx}{dy} = a \Rightarrow \frac{x}{a} = \int \frac{dy}{y}$, aquesta integral no es pot resoldre mitjançant potències. Com que $y = c^x$ i $lc = 1$ d'aquí obté $x = ly$. Així obté que diferencial del logaritme de y en el sistema a és $\frac{dy}{y}$. Troba la diferenciació d'una quantitat exponencial a partir de la del logaritme. Quant a l'elecció de coordenades, en general escull coordenades ortogonals per a les corbes algèbriques, i coordenades segons naturalesa corba en el cas transcendent, com la cicloide i l'espiral. La propietat de la cicloide s'ha d'expressar mitjançant una equació diferencial, ja que no és una línia algèbrica. Per a l'espiral escull coordenades polars.

Tempelhoff: En el punt 322 mostra com trobar el diferencial d'una equació algèbrica. En particular, els diferencials de producte, de quocient i de potència els troba mitjançant el diferencial del logaritme. El diferencial de funcions exponencials també el troba a partir de logaritmes (punts 326-328). Els diferencials del logaritme (punts 275-320) i de les funcions trigonomètriques (punts 332-349) els dedueix a partir de les proporcions entre segments que defineixen aquestes funcions. En el cas del logaritme i de l'exponencial es sobreentén que considera coordenades cartesianes. En el cas de les funcions trigonomètriques considera l'arc com a variable independent. La justifiació del diferencial del logaritme és molt semblant a la que apareix al punt 26 de BÉZOUT (1799-1800).[30] Quant al diferencial del sinus, en el punt 332 proposa comparar el diferencial d'un arc de cercle amb el seu sinus.

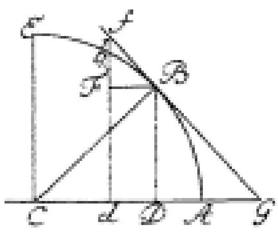


Figura 9

Siguin $\varphi = \text{arc}AB$, $\sin\varphi = BD$, $\cos\varphi = CD$ i $r = CA = BC$. Sigui b un altre punt sobre l'arc, bd paral·lel a BD. bF és la diferència entre BD i bd. El punt de tall de bd amb la tangent pel punt B és f. Mentre la quantitat Bb és finita, la proporció $Bb : bF$ és diferent de la proporció $Bf : fF$. Però a mesura que b s'apropa a B la proporció $Bb : bF$ s'apropa a $Bf : fF$ i n'esdevé igual quan *b* és *B*. $Bf : fF$ és el límit al qual la proporció $Bb : bF$ s'apropa, quan l'arc *Bb* es fa infinitament petit. Per semblança de triangles es verifica $Bf : fF = ... = BC : CD$. Per tant, $BC : CD$ és el límit de $Bb : bF$. Aquestes dues proporcions coincideixen quan *Bb* i *bF* es fan infinitament petits, esdevenint $d\varphi$ i $d.\sin\varphi$, respectivament. Aleshores, $d\varphi : d.\sin\varphi = r : \cos\varphi$.

Més endavant, a la secció vuitena, *De l'ús del càlcul diferencial per solucionar diferents problemes*, defineix aquestes funcions transcendents mitjançant el seu desenvolupament en sèrie de potències. Per tant, el tractament de les corbes algèbriques i transcendents no difereix. Tanmateix, en la secció on estudia la determinació de les tangents, els exemples són només algèbrics (còniques; funció polinòmica de grau *n*; trobar la tangent d'una corba, l'equació de la qual sigui una expressió algèbrica, fent servir la relació d'aquesta corba amb d'altres d'auxiliars). Estudia l'equació de la cicloide segons diferents parells de coordenades (tot i que sempre ortogonals: per exemple, les projeccions ortogonals del punt de la cicloide sobre els eixos). Els eixos de coordenades poden formar entre ells qualsevol angle, les fórmules serveixen per a qualsevol angle. Com a cas particular pren l'angle entre els eixos igual a un recte. Per exemple, dóna la fórmula del radi de curvatura (punt 664) i la de la tangent (punts 359-360) per a qualsevol angle entre les coordenades. També fa servir coordenades polars (per exemple, punt 676).

Karsten: En el punt 49 dóna fórmules de transformació de coordenades obliqües a ortogonals (abscisses sobre mateix eix), en funció de l'angle per l'ordenada obliqua i l'eix de les abscisses. A partir del desenvolupament de la potència del binomi, en el punt 56 troba el diferencial del logaritme:

$$y = lx \Rightarrow x = 1 + y + \frac{y^2}{2} + \frac{y^3}{2.3} + ... \Rightarrow dx = dy + ydy + \frac{y^2dy}{2} + \frac{y^3dy}{2.3} + ...$$

Aleshores:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{1 + y + \frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}y^3 + ..} = \frac{1}{x} \Rightarrow dy = \frac{dx}{x}.$$

[30] Vegeu la nota 69 al capítol 3.

Troba la diferencial d'una *quantitat exponencial* (potència amb exponent variable) mitjançant derivació logarítmica. En el punt 182 parla de les *línies trigonomètriques*, que no tenen una relació amb el seu arc que es pugui expressar mitjançant una equació algèbrica. Fa servir les línies trigonomètriques quan exposa el mètode de les tangents i de les corbes osculadores. En el punt 105 mostra com trobar l'amplitud de l'arc entre dos punts sobre una corba, en el cas de coordenades ortogonals. En el punt 107 troba el radi de curvatura en el cas de coordenades ortogonals; en el 108, el troba en funció d'un angle variable i de la distància del vèrtex de l'angle a la corba (és a dir, en polars). La secció V està dedicada a les còniques i la VI a les línies de tercer ordre (i superior): cissoide, concoide. La secció VII tracta les línies transcendents: quadratriu, espiral d'Arquimedes, espiral logarítmica, cicloide, epicicloide, hipocicloide... Les corbes següents no les defineix a partir del moviment i acaba expressant-les en coordenades ortogonals:

- *Cissoide* (punts 156-157): Defineix la cissoide a partir de coordenades ortogonals, que coincideixen amb l'abscissa i l'ordenada de la cissoide, com Bernoulli.[31] Però, mentre que Bernoulli arriba a l'equació de la corba a partir de proporcions, Karsten ho fa a partir de l'angle format entre el diàmetre i la corda de la cissoide. L'equació resultant és: $2ryy = x(xx + yy)$. Determina la seva cúspide en *A*.

- *Concoide* (punts 158 a 161): Les coordenades escollides per Karsten són ortogonals, a partir de la projecció ortogonal d'un punt de la concoide sobre l'eix de les ordenades, mentre que Bernoulli i L'Hôpital treballen amb coordenades des d'un punt.[32] L'equació que obté Karsten és: $yy = \dfrac{b^2x^2}{(a-x)^2} - x^2$. A continuació, aplica un canvi de coordenades (ortogonals), a partir de la projecció ortogonal del punt de la concoide sobre l'eix de les abscisses. En el punt 161 troba els punts d'inflexió de la concoide.

- *Quadratriu* (punt 180): Per *D* i *E* es descriuen dos arcs iguals. El radi *BC* quedarà dividit en parts iguals per *P* i *F*. Aleshores *M* i *G* descriuen la quadratriu. Primer fa servir coordenades polars, amb $r = CB$ i γ l'angle *ACD*. Si *z* és *CM* aleshores:

[31] Vegeu l'Annex I.
[32] Vegeu l'Annex I.

$z = \dfrac{r\gamma}{\frac{1}{2}\pi \sin \gamma}$. En aquest cas, Johann Bernoulli treballa amb coordenades ortogonals i L'Hôpital amb el segment *BP* i l'arc *BD*.[33]

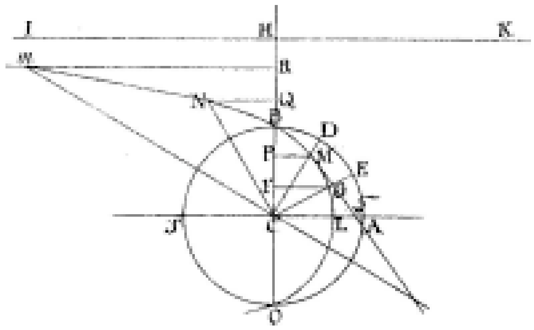


Figura 10

Després passa a ortogonals: $x = CP = z\sin\gamma, y = PM$ de manera que $y = x\cot\dfrac{\frac{1}{2}\pi x}{r}$.

- *Espiral d'Arquimedes* (punt 183): Karsten defineix l'espiral sense parlar de moviment. Primer dóna l'equació en coordenades polars, tenint en compte la propietat de l'espiral. El radi de la circumferència, *r*, és al radi vector, *z*, com 360º (o 2π) és a l'angle format entre el radi de la circumferència i el radi vector, γ. Així, l'equació de l'espiral és $z = \dfrac{\gamma}{2\pi} r$. Les coordenades escollides coincideixen amb les de Johann Bernoulli i L'Hôpital.[34] A continuació considera un altre parell de coordenades: *y* és el radi de la circumferència menys el radi vector, i *x* és l'arc de circumferència corresponent. En aquestes coordenades l'equació esdevé $y = \dfrac{r(p-x)}{p}$, on $p = 2\pi r$. Finalment, prenent les projeccions ortogonals *x*, *y* d'un punt de l'espiral sobre l'eix d'abscisses i l'eix d'ordenades, respectivament, l'equació esdevé $\sqrt{(xx+yy)} = \dfrac{1}{2\pi} r \cdot Arc.\sin\dfrac{y}{\sqrt{(xx+yy)}}$, de la qual no es pot aïllar *y*. En el punt 184 tracta l'espiral hiperbòlica i en els punts 187 i 188 l'espiral logarítmica.

- *Cicloide* (punts 189 a 194): En aquest cas, Karsten escull les mateixes coordenades ortogonals que Bernoulli, però intercanviant *x*, *y*. L'equació que obté per a la cicloide és

[33] Vegeu l'Annex I.
[34] Vegeu l'Annex I.

$y=\sqrt{(2ax-xx)}+a\cdot A\sin\frac{\sqrt{(2ax-xx)}}{a}$. En els punts 195 a 200 parla d'epicloide i hipocicloide.

4.5.4. PROBLEMES I APLICACIONS

Wolff: Les aplicacions que presenta el text de Wolff estan dedicades a l'estudi de les corbes i a alguns problemes geomètrics. Estudia tangents (i segments associats), màxims i mínims, punts de flexió contrària, radi osculador i evoluta. Il·lustra l'apartat del mètode de màxims i mínims amb problemes geomètrics: donada una corba algèbrica i un punt, trobar la recta mínima que uneix el punt a la corba; donat un segment *AB*, quin és el punt *D* que fa que el rectangle *AD·DB* sigui màxim?; donada una recta, quina és la hipotenusa de manera que el triangle rectangle sigui màxim?; de tots els cons d'igual volum, quin té mínima superfície?;...

Kästner: L'obra de Kästner presenta aplicacions del càlcul dels infinits a les *línies corbes* (quadratura i rectificació, curvatura, punts d'inflexió, etc).; aplicacions del càlcul integral al càlcul de *cossos rodons* i les seves *superfícies*; ús del càlcul integral a les *matemàtiques aplicades* (teoria de Kepler dels planetes, àrea de l'el·lipse, centres de gravetat, etc). Treballa també amb problemes d'equacions diferencials (per exemple, punts 494 a 504). Del punt 163 fins al 197 tracta de les arrels d'equacions i de la seva relació amb els màxims i mínims. En el punt 163 enuncia i demostra un teorema que es correspon amb el *teorema de Bolzano*. Kästner discuteix sobre les arrels de les equacions principals i de les equacions diferencials, d'arrels imaginàries, dels signes de les arrels no imaginàries, aplicacions de tota aquesta teoria, de les arrels múltiples, de com trobar el nombre d'arrels positives i negatives a partir del canvi de signe dels coeficients... Finalment parla *Dels límits de les arrels*, on estudia com es comporta la línia principal i les seves diferencials a la dreta i a l'esquerra. En els punts 477-486 i 487-493 tracta els diferencials de funcions de dues i tres variables, respectivament.

Tempelhoff: Tempelhoff aplicaca el càlcul diferencial a la geometria i a la teoria de corbes (la naturalesa de les quals ve donada per una equació). A la vuitena secció parla de problemes diferents: trobar el logaritme de $1+x$; trobar l'expressió en sèrie infinita de e^x; trobar el logaritme de $1+\alpha x+\beta x^2+\gamma x^3+etc.$; trobar sèrie per a $e^{1+\alpha x+\beta x^2+\gamma x^3+etc.}$; donat un arc de cercle, trobar el sinus i el cosinus; donat el sinus, trobar l'arc;... Trobem problemes sobre càlcul de quadratures i rectificacions a la desena secció. A la quinzena secció exposa problemes geomètrics sobre màxims i mínims (dels paral·lelepípedes amb un volum i un costat donats, quin té àrea mínima; dels cilindres amb un volum donat, quin té àrea mínima,...). Tempelhoff treballa amb funcions de diverses variables i, fins i tot, mostra com trobar els seus màxims i mínims.

Karsten: En els punts 50-53 i 201-203, entre d'altres, Karsten planteja i resol problemes d'equacions diferencials. En el punt 114 exposa un examen general de la figura d'una línia corba (punts de tall amb els eixos, branques infinites, tangents, curvatura, quadratura i rectificació, punts múltiples...). La secció V parla de propietats curioses de les còniques, la VI de línies de tercer ordre (i superior), i la VII de línies transcendents. Alguns dels problemes plantejats són mixtos, es solucionen a partir de càlcul diferencial i càlcul integral (càlcul d'un interior, quadratura i rectificació, àrea d'una superfície corba, línia tractrix, catenària, trobar l'equació d'una corba, sabent que la subtangent és a la tangent com la suma del quadrat de l'aplicada i una superfície constant donada és a una altra superfície constant donada, ... Com Kästner i Tempelhoff, Karsten també estudia funcions de diverses variables i, en particular, dóna el seu desenvolupament en sèrie de Taylor.

5. ITÀLIA

5.1. *INSTITUZIONI ANALITICHE* (1748) DE MARIA GAETANA AGNESI

Maria Gaetana Agnesi[1] (1718-1799) és la primera dona del món occidental que es pot considerar matemàtica. El seu nom, però, més aviat s'associa amb la versiera o "corba d'Agnesi".[2] El seu pare era un noble dedicat al comerç que va encoratjar la seva filla gran perquè s'interessés per les ciències. A tal efecte li proporcionà professors-tutors i va fer de casa seva un "saló cultural", on ella defensava diverses tesis. Els tòpics de les reunions eren la lògica, l'ontologia, la mecànica, la hidromecànica, l'elasticitat, la gravitació universal, la química, la botànica, la zoologia i la mineralogia, entre d'altres. Aquestes trobades culturals tenien molta importància doncs al segle XVIII el coneixement encara no s'havia "professionalitzat". Als catorze anys, Maria Gaetana resolia problemes de geometria analítica i de balística. Als disset va escriure un comentari crític del *Traité des sections coniques* de L'Hôpital. Un visitant va dir d'ella que era un "diccionari caminant" (TRUESDELL (1989), p. 116). El 1738 publicà les *Propositiones philosophicae*, recull d'algunes de les tesis defensades per ella en les reunions.

Després d'aquesta publicació vol entrar en un convent però el seu pare la convenç perquè no ho faci. Tot i això, ella abandona la vida social i es dedica exclusivament primer a l'estudi de les matemàtiques i després a l'acció social i als estudis religiosos. El 1748 publica les *Instituzioni analitiche ad uso della gioventú italiana*.[3] Pel que fa al càlcul diferencial segueix les directrius de Leibniz.[4] El llibre d'Agnesi és el primer successor important de l'*Analyse* de L'Hôpital.[5] Va ser membre de l'Acadèmia de Ciències de Bolonya. El 1750 el Papa Benedicte XIV, director de l'Acadèmia de Bolonya, la nomena lectora honorària d'anàlisi a la Universitat de Bologna , però Agnesi no anà a Bolonya. A partir de 1752 es retira de la vida científica per tenir cura i

---

[1] Les fonts biogràfiques que he consultat són GILLISPIE (ed.) (1970); TRUESDELL (1989); KATZ (1993), pp. 511-512.

[2] Aquesta corba ja havia estat estudiada per Pierre de Fermat i Guido Grandi. De fet, el 1718 Grandi l'anomenà "la versiera" (corda al voltant d'una vela). En la traducció que farà Colson de les *Instituzioni* el 1801 confon aquest mot amb "l'aversiera", que significa "bruixa", d'aquí el nom amb què es coneix també aquesta corba, "bruixa d'Agnesi". Vegeu TRUESDELL (1989), p. 113.

[3] *Instituzioni* significa "principis elementals per a l'ensenyament de". Vegeu TRUESDELL (1989), p. 124.

[4] Tanmateix, quant a filosofia era seguidora de Newton. Vegeu TRUESDELL (1989), p. 118.

[5] Vegeu BOYER (1946), p. 167.

educar els seus germans i dirigir un alberg per a malalts i indigents. Les *Instituzioni* consten de quatre volums:

El primer volum tracta l'anàlisi de les quantitats finites. Inclou la resolució d'equacions i problemes diversos, la construcció de *locus* i el càlcul de màxims, mínims, tangents, punts d'inflexió i retrocés fent servir l'àlgebra cartesiana

El volum que analitzo és el segon, *Del Càlcul Diferencial*, que conté els capítols següents:
- Capítol I: *De les diferencials d'ordre divers i del propi càlcul*.
- Capítol II: *Del mètode de les tangents*.
- Capítol III: *Del mètode dels màxims i mínims*.
- Capítol IV: *Dels punts d'inflexió i de retrocés*.
- Capítol V: *De l'evoluta i el radi osculador*.

El volum tercer està dedicat al càlcul integral. Presenta les regles d'integració de fórmules finites algèbriques, la integració mitjançant sèries i problemes com la rectificació d'una corba o la quadratura d'un espai. Finalment, el quart volum, *Del mètode invers de les tangents*, versa sobre la teoria i resolució d'equacions diferencials.

Per què va tenir èxit?

Truesdell[6] dubta que l'estudi de les matemàtiques a Itàlia necessités d'un nou llibre de text. A més a més, no s'ha d'oblidar que aquell mateix any apareix l'*Introductio* d'Euler, llibre molt superior al d'Agnesi. Les *Instituzioni* és un llibre ordenat i clar però poc original. També es pot dir que és obsolet en el sentit que no estudia les darreres descobertes, sinó que ordena i dóna regles pràctiques del que ja es coneixia. El pare Ramiro Rampinelli (1697-1759), monjo benedictí, que havia estat professor de matemàtiques a Roma i Bolonya, va arribar a Milà i començà a visitar la casa dels Agnesi. Amb l'ajuda de Rampinelli, Agnesi va llegir l'*Analyse démontrée* de Reyneau (1708). Ell l'encoratjà perquè escrivís les *Instituzioni* i la posà en contacte amb Jacopo

[6] Vegeu TRUESDELL (1989), p. 135.

Riccati (1676-1754), amb qui mantingué correspondència.[7] Jacopo Riccati anava revisant les *Instituzioni* a mesura que Agnesi anava escrivint. El llibre no inclou problemes complicats, no escriu res que ella mateixa no hagi pogut comprovar. Ni tan sols, no inclou mecànica, tan relacionada amb el càlcul. No exposa conceptes nous, només regles pràctiques.

D'on prové, doncs, el seu renom? El talent de les dones s'exagerava degut a la indulgència general envers el sexe femení. La dona dedicada a les ciències era considerava com un "panda" (TRUESDELL (1989), p. 122), un ésser rar. Els llibres d'història de les matemàtiques generalment esmenten Agnesi com a referència històrica i només comenten la "corba d'Agnesi". Montucla (1725-1799) és un dels pocs historiadors reconeguts que parlen d'Agnesi. En *Histoire des Mathématiques* (1758) afirma que els lectors quedaran sorpresos en comprovar com una persona del sexe femení (i, per tant, poc habituada a les ciències) pot assolir uns coneixements tan profunds d'anàlisi.[8] Així doncs, l'apunt que en fa Montucla és històric, més que matemàticament remarcable. També segons Truesdell, es pot atribuir a la seva condició de dona el fet que l'ajudés Ricatti. D'altra banda, Lagrange en els seus *Principj* recomana estudiar el llibre d'Agnesi abans d'atacar matèries superiors.[9]

A quin públic anava dirigit?

Agnesi va escriure les *Instituzioni* en el dialecte toscà per ajudar als joves italians. Però era de difícil accés, doncs la impressió fou privada. Per supervisar personalment la producció i disseny del llibre, Agnesi va fer portar la premsa a casa del seu pare per treballar-hi. A més a més, i segons Truesdell,[10] els únics que no sabien llatí i que haguessin pogut aprofitar-se del llibre eren els enginyers. Però Agnesi no mostra aplicacions (per exemple, mecàniques) del càlcul, que seria el que més hauria interessat els enginyers.

---

[7] En el prefaci de les *Instituzioni*, Agnesi reconeix l'ajuda rebuda per part del pare Ramiro Rampinell i de Jacopo Riccati.

[8] Vegeu MONTUCLA (1758), pp. 155-156.

[9] Vegeu LAGRANGE (1759), p. 154.

[10] Vegeu TRUESDELL (1989), p. 135.

Va transcendir les fronteres de la seva terra?

El 1775 es va traduir al francès el segon volum de les *Instituzioni* per recomanació de l'Académie Royale des Sciences de París en el seu informe de 1749. La primera edició del llibre d'Agnesi contenia molt poca trigonometria i els treballs d'Euler i dels Bernoulli sobre sèries infinites feien necessari afegir-hi les fórmules trigonomètriques estàndard. El 1801 John Colson (1680-1760) el va traduir a l'anglès.

Quina relació té amb l'Analyse?

Maria Agnesi va escriure un comentari sobre el tractat de còniques de L'Hôpital. També va llegir l'*Analyse démontrée* de Reyneau. Les *Instituzioni* presenta molts punts comuns amb l'*Analyse*.

5.2. *PRINCIPJ DI ANALISI SUBLIME* (1759) DE GIUSEPPE LUIGI LAGRANGE

De 1755 a 1766 Lagrange[11] treballà a la Reggie Scuole di Artiglieria de Torí. El 1759 confecciona els *Principj di analisi sublime*, tractat sobre càlcul diferencial i integral per a l'ús de l'estudiant, escrit en italià perquè així ho exigeix el reglament de l'escola. La primera part d'aquest text presenta la teoria algèbrica de les corbes. És un tractat analític de seccions còniques i corbes algèbriques en general. La segona part tracta el càlcul diferencial i l'integral. Quant al càlcul diferencial primer presenta el càlcul algèbric de les diferències finites. Després el càlcul diferencial, pròpiament dit. I, finalment, el càlcul de tangents, d'extrems, de punts d'inflexió del radi osculador.

A quin públic anava dirigit?

A la primera plana dels *Principj* es pot llegir que l'obra està dedicada als estudiants de la Reggie Scuole di Artiglieria de Torí.

[11] Vegeu la biografia de Lagrange al capítol 3. Per a l'etapa italiana de Lagrange m'he basat principalment en BORGATO-PEPE (1987).

Per què va tenir èxit?

Es tracta d'un text no difós, recentment trobat a l'arxiu de Torí i publicat per BORGATO-PEPE (1987). Romangué en mans privades fins fa poc. No se li donà la importància que mereixia. Sembla que ni tan sols els seus millors biògrafs (com Gino Loria, George Sarton o Filippo Burzio) no veieren aquest manuscrit. Aquest manuscrit és important per estudiar el càlcul infinitesimal a la Itàlia del segle XVIII. A més a més, representa una etapa important en el procés de sistematització de Lagrange sobre els fonaments de l'anàlisi, que assolirà el seu cim amb la *Théorie des fonctions analytiques* (1797).

Va transcendir les fronteres de la seva terra?

El text de Lagrange no transcendí les fronteres italianes, doncs es tracta d'un material inèdit, no difós fins al 1987 per Borgato i Pepe.

Quina relació té amb l'Analyse?

A la plana 154 Lagrange cita l'obra de L'Hôpital com a referència bibliogràfica.

5.3. *INSTITUTIONES ANALYTICAE* (1765-67) DE VINCENZO RICCATI I GIROLAMO SALADINI I *COMPENDIO D'ANALISI* (1775) DE GIROLAMO SALADINI

Vincenzo Riccati (1707-1775)[12] fou el segon fill de Jacopo Riccati. Va rebre la seva primera educació a casa i per part dels jesuïtes. Ingressà a l'orde jesuïta el 1726 i hi ensenyà literatura al Col·legi jesuïta de Piacenza el 1728. El 1729 es traslladà a Padua, després a Parma el 1734, estudià teologia a Roma durant un temps, i més tard tornà a Bolonya el 1739 on ensenyà matemàtiques al Col·legi de San Francesco Saverio durant

[12] Les fonts biogràfiques en què m'he basat són GILLISPIE (ed.) (1970); MACDONNELL (1997); O'CONNOR-ROBERTSON (1999).

trenta anys.[13] Quan el Papa Clement XIV suprimeix la Companyia de Jesús el 1773, Riccati se'n torna a casa seva a Treviso, on morirà el 1775. Vincenzo Riccati va continuar el treball del seu pare en integració i equacions diferencials. Estava ben capacitat per a l'enginyeria hidràulica i dugué a terme projectes de control d'inundacions que van salvar les regions de Bolonya i Venècia. Vincenzo estava ben format en l'anàlisi matemàtica anterior a Euler. Rep influència de Johann Bernoulli, quant a la rectificació de corbes, i de Jakob Hermann, en relació a les equacions còniques en coordenades cartesianes. També s'interessà per les integrals el·líptiques, com a introducció a la teoria de les funcions el·líptiques. Vincenzo Riccati, junt amb Girolamo Saladini, treballaren en alguns problemes geomètrics, com la *rosa de quatre fulles* introduïda per Guido Grandi, el problema del mirall circular d'Ibn al-Haytham,[14] el lloc dels punt que divideixen les tangents d'una *tractrix* en una determinada raó, etc.

Entre les obres d'anàlisi, àlgebra, mecànica i física es troba l'*Opusculorum ad res physicas et mathematicas pertinentium* (1757-1762), on introdueix l'ús de les funcions hiperbòliques per obtenir les arrels de certs tipus d'equacions algèbriques (en particular, cúbiques). Vincenzo trobà les fórmules estàndard per a l'addició de les funcions hiperbòliques, les seves derivades i la seva relació amb la funció exponencial. Generalment Lambert és citat com el primer en introduir les funcions hiperbòliques però no ho va fer de fet fins el 1770, mentre que el treball de Vincenzo Riccati i Girolamo Saladini fou publicat entre 1757 i 1767.[15] Precisament una de les obres que he analitzat són les *Institutiones analyticae* (1765-67), que Riccati escrigué en col·laboració amb Girolamo Saladini. Aquí s'utilitza per primer cop el terme *línies trigonomètriques* per indicar les funcions circulars.

Girolamo Saladini (1731-1813)[16] fou alumne de Riccati a Bolonya. Va ser professor d'anàlisi i membre de l'Institut de la Ciència de Bolonya, i mestre de la Reial Acadèmia de Cadets de Sa Majestat Siciliana, on utilitzà la seva obra. Publicà les *Institutiones analyticae* recollides per ell i Vincenzo Riccati en italià, *Compendio d'analisi* (1775),

---

[13] Així consta a GILLISPIE (ed.) (1970) i a O'CONNOR-ROBERTSON (1999). Però a BAGNI (1997) el nom del col·legi al qual es fa referència és Santa Lucia.

[14] Huygens n'havia trobat una bona solució, que Vincenzo Riccati i Girolamo Saladini simplificaren i milloraren. Vegeu O'CONNOR-ROBERTSON (1999).

[15] Hairer i Wanner indiquen que a l'obra de D. de Foncenex, *Reflexions sur les quantités imaginaires* (1759), ja apareixen les funcions hiperbòliques. Vegeu HAIRER-WANNER (1996), p. 56.

obra que també he analitzat, junt amb la versió original llatina. De fet, els dos llibres presenten molts exemples i figures comunes.[17]

El contingut general dels tres llibres de les dues obres és el mateix:
- Llibre primer: *De les quantitats infinitèsimes, de la quadratura, i rectificació de les corbes, i de la integració de les fórmules diferencials d'una sola variable*.
- Llibre segon: *Del mètode directe i invers de les tangents, i de la integració de les equacions diferencials de primer grau*. En el segon llibre de les *Institutiones analyticae*, en lloc de les equacions diferencials de primer grau, parla d'equacions separables.
- Llibre tercer: *Del càlcul i de l'ús dels diferencials de qualsevol ordre*.

Per què va tenir èxit?

Les *Institutiones analyticae* es pot considerar com el primer tractat extensiu sobre càlcul integral, anterior a les *Institutiones calculi integralis* d'Euler.[18] Segons Truesdell és el primer llibre de text italià que prové de cercles universitaris.[19] Bagni comenta la ràpida difusió de l'obra, així com la seva notorietat. Esmenta diverses revistes científiques que registren la publicació de les *Institutiones analyticae*, entre d'altres el *Journal des Sçavans* i el *Nuovo Giornale de'Letterati d'Italia*.[20]

A quin públic anava dirigit?

Tant Riccati com Saladini estaven relacionats amb el món de l'ensenyament, on utilitzaven les seves obres.

---

[16] He trobat molt poques referències biogràfiques de Girolamo Saladini i a la majoria el més destacable és la seva col·laboració amb Vincenzo Riccati.

[17] L'anàlisi que he fet correspon bàsicament al *Compendio d'analisi* però també faig referència a punts de les *Institutiones Analyticae* que m'han semblat interessants. Per distingir les dues obres, em referiré a les *Institutiones Analyticae* com RICCATI-SALADINI (1765-1767), i al *Compendio d'analisi* com SALADINI (1775).

[18] Vegeu GILLISPIE (ed.) (1970) XI, pp. 401-402.; MACDONNELL (1997).

[19] Vegeu TRUESDELL (1989), nota 51.

[20] Vegeu BAGNI (1997), p. 37.

Va transcendir les fronteres de la seva terra?

La versió italiana de Saladini podria estar relacionada amb el moviment de formació de la conciència nacional i el període napoleònic, quan es crea l'Institut Nacional, entre els trenta primers membres de la qual figurava Saladini. Apart de la versió llatina i de la italiana, no he trobat cap altra traducció. Tanmateix, la seva publicació quedà registrada al *Journal des Sçavans*.[21]

Quina relació té amb l'Analyse?

En el prefaci de les *Institutiones analyticae* (pp. xii-xiii) es parla del notable llibre del Marquès de L'Hôpital sobre càlcul diferencial.

5.4. ANÀLISI COMPARATIVA DELS TEXTOS

5.4.1. COM EXPOSA ELS FONAMENTS DEL CÀLCUL?

Agnesi: Afirma que les diferències no són vanes imaginacions i remet al Mètode dels Antics per poder-ho demostrar. Demostra alguns resultats mitjançant el mètode d'exhaustió (per exemple, el primer teorema).[22] Si una quantitat esdevé més petita que qualsevol altra, aleshores és un infinitèsim (fa referència a la quantitat inassignable que fa que dues quantitats finites donades siguin incommensurables, punt 4). Tracta els diferents ordres d'infinitèsims de forma geomètrica (punts 6 a 24). Per justificar la *regla de diferenciació del producte*: la diferència del producte xy és $ydx + xdy + dxdy$. $dxdy$ és una quantitat infinitament menor que qualsevol de les altres dues quantitats, que són el rectangle d'una quantitat finita per una infinitèsima. $dxdy$ és un rectangle de dues quantitats infinitèsimes, que és infinitament menor i, per tant, es pot "eliminar".

Lagrange: Lagrange es basa en la raó última i primera de les diferències. El càlcul diferencial es basa en la raó entre diferències que s'esvaeixen, és a dir, en la raó 0:0 (doncs es fa servir en el càlcul de tangents i les expressions són més senzilles que

[21] Vegeu BAGNI (1997), p. 37.

només fent servir diferències). Per trobar aquesta relació primer es treballa amb diferències reals i finites, i després extrapola al cas en què les diferències són nul·les.. El càlcul infinitesimal resol el problema de fonaments amb els "infinitesimals" (punt 38): amb dues suposicions falses (les quantitats infinitesimals primer no són zero, després sí), es corregeixen mútuament els errors comesos i donen un resultat correcte. És a dir, defensa de la compensació d'errors, posició que més endavant abandonarà. En el punt 39 diu que la teoria del càlcul infinitesimal es pot deduir de les següents reflexions:

1) Quan es multiplica una quantitat finita per zero el resultat és zero. Per tant, quan es multiplica una quantitat finita per una quantitat infinitament petita el resultat és una quantitat infinitèsima. Així, si X és quantitat finita i dx una diferència infinitament petita, aleshores Xdx (que és la quarta proporcional a la unitat, a X i a dx) també és infinitament petita, homogènia amb dx.
2) Si dx és infinitament petita respecte una quantitat finita, llavors dx^2 és infinitament petita respecte dx, donat que dx^2 és la tercera proporcional a la unitat i a dx, és a dir, dx^2 és a dx com dx és a 1. dx és infinitèsim de primer ordre, dx^2 és infinitèsim de segon ordre, ... Per la mateixa raó, Xdx^2 és de segon ordre. Els infinitèsims són de mateix ordre quan guarden proporció finita.
3) dx, dy són diferències infinitesimals de primer ordre, aleshores $dxdy$ és infinitèsim de segon ordre, doncs $dxdy$ és la quarta proporcional a la unitat, a dx i a dy. La proporció de $dxdy$ a un infinitèsim de primer ordre és igual a la proporció d'un infinitèsim de primer ordre a una quantitat finita. Quant a la diferenciació del producte xy, considera primer la diferència finita del producte xy: $(x+dx)dy+ydx$. Aleshores, el diferencial de xy és $xdy+ydx$.

Saladini: el capítol primer del llibre primer es titula *Idea de la quantitat infinitèsima*, que és la quantitat menor que una quantitat qualsevol donada, a la qual recorrien els Antics, quan volien comparar les figures rectilínies amb les curvilínies. La diferència entre l'espai parabòlic i triangle inscrit són dos espais parabòlics. A cadascun d'ells s'inscriu un triangle, més gran que la meitat de l'espai parabòlic corresponent. Sobre la diferència entre els nous triangles i els espais parabòlics s'aplica novament el procés, indefinidament. L'espai parabòlic inicial és més gran que els dos següents, que són més grans que els quatre següents, que són més grans que els vuit següents, etc. La

[22] Vegeu AGNESI (1748), pp. 438-439.

diferència entre l'espai parabòlic i la suma dels triangles disminueix contínuament (sense límit) a mesura que es van construint nous triangles inscrits. La suma total dels triangles inscrits, si el nombre de triangles és infinit, dóna la quadratura del segment parabòlic (en el límit són iguals). Si no fos així, la diferència entre la suma dels triangles inscrits i el segment parabòlic no disminuiria contínuament sense límit, contràriament al que s'havia demostrat. Mostra com calcular la suma total dels triangles.[23] Com els antics, si la diferència entre dues quantitats disminueix sense límit, o si es fa menor que qualsevol quantitat donada, directament es conclou que les dues quantitats en el límit són perfectament iguals (doncs si en el límit no fossin iguals, la seva diferència seria determinada i no menor que qualsevol quantitat donada, contràriament al que s'havia suposat). Diu Saladini que els matemàtics moderns anomenen aquestes quantitats menors que qualsevol donada: "quantitats infinitèsimes, diferències infinitèsimes, diferencials, fluxions, quantitats naixents/evanescents, elements...".[24] En el punt IV del cap. 1, llibre primer, Saladini justifica els diferents ordres de les quantitats infinitèsimes.

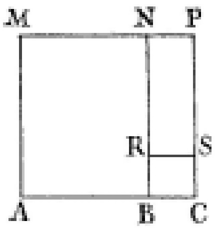


Figura 1

Donats els rectangles *AP*, *AN*, si *BC* és la diferència infinitèsima de les rectes *AC* i *AB*, el rectangle *BP* és infinitèsim respecte *AP*, *AN*. *CS* és diferència infinitèsima de *CP* i *SP*. El petit rectangle *BS* és infinitèsim respecte els rectangles *BP*, *RP*. Atès que el rectangle *BP* ja és infinitèsim, *BS* és infinitèsim d'un infinitèsim. *BP* infinitèsim de primer ordre, *BS* infinitèsim de segon ordre.[25] Saladini fa servir aquest fet per justificar la *regla de diferenciació del producte* (punt 1, capítol III, llibre primer):

[23] A RICCATI-SALADINI (1765-1767) també s'estudia la quadratura de la paràbola a partir de triangles inscrits (punts 2-5, capítol primer, llibre primer). En els punts 6 i 7 els autors parlen d'Arquimedes i de rectangles inscrits/circumscrits, la suma dels quals la relacionen amb l'àrea sota la corba.

[24] A més a més, en el capítol primer, llibre primer, de RICCATI-SALADINI (1765-1767), es fa referència al mètode de reducció a l'absurd i s'afirma que amb el mètode dels infinitèsims les demostracions són breus i elegants.

[25] Aquest exemple també apareix en els punts 24-26, capítol segon, llibre primer, de RICCATI-SALADINI (1765-1767). Les quantitats infinitèsimes de segon ordre funcionen com la tercera proporcional: si a és una quantitat finita, i AD és un infinitèsim de primer ordre, si DL verifica la proporció $a : AD :: AD : DL$, aleshores DL és un infinitèsim de segon ordre

$D(ax+xx)=adx+2xdx+dx^2$, quan *dx* és finita. Però quan és infinitèsima dx^2 o *dx.dx* s'esvaeix respecte $adx+2xdx$.[26]

Corba com a polígon

Agnesi: En el punt 3 Agnesi raona perquè una porció infinitèsima de corba es pot identificar amb la corda corresponent. Seguint el mateix tipus de raonament, en el punt 30 veu que una porció infinitament petita de la tangent es confon amb la corba i amb la corda.

Saladini: Siguin un polígon inscrit i un altre de circumscrit a una corba donada. Si els costats inscrits i circumscrits disminueixen, i el seu nombre augmenta, la diferència entre la corba i els polígons disminueix, es fa menor que qualsevol quantitat donada. Així la corba està composta d'infinits costats rectilinis, igual al perímetre de la figura inscrita i de la circumscrita. La corba es pot confondre amb els polígons inscrit i circumscrit.[27]

Variable

Agnesi: Al primer capítol defineix *quantitat variable* com aquella que és capaç d'augmentar, i de decréixer. A aquesta quantitat també es refereix com a *fluent*. En canvi, una quantitat és *constant* quan ni creix, ni decreix, sinó que és determinada i invariable (com el paràmetre, l'eix, el diàmetre...).

Lagrange: Una *quantitat variable* és aquella que es suposa que pot canviar de valor, quantitat indeterminada capaç d'infinites determinacions particulars. Una *quantitat constant* és aquella que sempre té el mateix valor mentre les variables canvien, és una quantitat veritablement determinada. El nombre mínim de variables d'una equació és dos. A la segona part diu que totes les variables creixen, o disminueixen contínuament, o primer creixen i després disminueixen, o viceversa. En canvi, la quantitat constant es manté igual, durant la mutació de les altres quantitats.

[26] El punt 3 del capítol tercer, llibre primer, de RICCATI-SALADINI (1765-1767), afegeix que dx^2 té respecte *2xdx* una raó menor que qualsevol donada ($dx:2x$).
[27] Vegeu RICCATI-SALADINI (1765-1767), punts 13-15, capítol quinzè, llibre tercer.

Saladini: Es defineix una *variable* com aquella quantitat subjecta a canvis, mentre que una *constant* es aquella quantitat no subjecta a canvis.

Diferència

Agnesi: Defineix la *diferència* com la porció infinitèsima en què una variable creix o decreix. Agnesi confon fluxió amb diferència, confusió freqüent en aquest període. Fent referència a la definició de diferència afirma que quantitats que es diferencien en una quantitat infinitament petita (diferència inassignable, és a dir, més petita que qualsevol quantitat donada) es poden considerar com iguals. La característica amb la qual s'expressa la diferència és la lletra *d*. La primera diferència no té una proporció assignable a una quantitat finita. La segona diferència (o fluxió de segon ordre) no té proporció assignable a la primera diferència. Per aquesta raó, dues quantitats infinitèsimes de primer ordre que es diferencien d'una diferència segona poden ser considerades com iguals.

Lagrange: Per a Lagrange, una *diferència finita* és la quantitat indeterminada en què una variable creix, o disminueix, i es nota amb una *d*. Una diferència negativa indica que, mentre una variable creix, l'altra disminueix. Si *F* és una funció algèbrica de *x*, *y*, *z*, la seva diferència finita s'expressa així: $F(x+dx, y+dy, z+dz) - F(x, y, z)$. Quan la diferència finita esdevé zero, Lagrange l'anomena *diferència*, o *diferencial*.

Saladini: La *diferència* d'una quantitat indica la porció per la qual la quantitat creix o decreix. δ indica diferència finita. Les diferències infinitèsimes s'indiquen amb *d*, i amb *D* per al cas de fórmules complexes (vegeu *Diferencial*). Tornem a trobar la confusió entre fluxions i diferències. En algunes fórmules Saladini considera *dx* fluent, en d'altres diu que no pren cap fluxió constant.[28]

[28] Vegeu SALADINI (1775), pp. 235, 243-245.

Diferencial

Lagrange: *Diferencial* és l'altre nom amb què Lagrange designa una diferència que és igual a zero, per distingir-la de la diferència finita.

Saladini: El *diferencial* d'una fórmula (complexa) s'obté en restar la fórmula en x a la fórmula en $x+dx$, eliminant els termes que s'esvaeixen respecte els altres quan es treballa amb diferències infinitèsimes.

Funció

Lagrange: Una *funció* (d'una o diverses quantitats variables) és una expressió algèbrica comunament composada per aquestes variables i per les constants que es vulgui.[29] Aquest concepte de funció deriva del que apareix a *Introductio in analysin infinitorum* d'Euler.[30] Segons Borgato i Pepe (1987), tot i que en la seva definició de funció apareix "expressió algèbrica", Lagrange buscava ja un adjectiu per a les funcions sobre les quals es podia aplicar l'anàlisi ("analítiques").

Saladini: Saladini no defineix explícitament el concepte de *funció*, sinó que directament escriu: "sigui φ una *funció* qualsevol de x, y, z ...".[31]

Límit

Lagrange: Lagrange parla del límit de la raó de diferències (o raó última), de la tangent com a límit de secants,[32] ...

Teorema de Taylor

Saladini: En el capítol quinzè del llibre tercer de RICCATI-SALADINI (1765-1767), es demostra la igualtat següent:

---

[29] Vegeu LAGRANGE (1759), punt 3 de la primera part.

[30] Vegeu EULER (1748), punt 4, capítol I, llibre primer.

[31] A RICCATI-SALADINI (1765-1767), capítol quinzè, llibre tercer, s'especifica que $F.x$ és una *funció* d'abscissa x.

[32] Vegeu LAGRANGE (1759), punt 22.

$$F.\overline{x+dx} = Fx + Sddx.F'.\overline{x+dx},$$

on F és una funció de x, F' "prové de diferenciar $F.\overline{x+dx}$ sota la hipòtesi x constant, i dx fluent"[33] i S és el símbol de la integració. A continuació s'aprofita aquest resultat per demostrar la fórmula:

$$F.\overline{x+dx} = Fx + dx.F'x + \frac{dx^2.F''x}{2} + \frac{dx^3.F'''x}{2.3} + \frac{dx^4.F^{iv}x}{2.3.4}\ \&c.$$

$dx.F'x$, que és un infinitèsim de primer ordre, representa la línia entre l'ordenada i la tangent; $\frac{dx^2.F''x}{2}$ representa la línia entre la tangent i la corba, etc. La fórmula obtinguda serà utilitzada en la discussió sobre punts singulars. De fet el aquest capítol està dedicat al seu estudi.

Coeficient diferencial

Lagrange: Lagrange destaca la *raó última (i primera) de les diferències* (punt 17 de la segona part). Busca el límit de la raó de les diferències, quan aquestes disminueixen contínuament. També és la raó primera, doncs és el límit del qual es parteix. Aleshores, les diferències són considerades com a naixents, augmentant contínuament. Aquesta raó és finita, tot i que les diferències de les variables realment s'anul·lin, i depèn de les pròpies variables. El càlcul d'aquesta raó és la part principal i més important del càlcul diferencial.

Ordre superior

Agnesi: En els punts 4 i 5 (primer capítol) defineix les diferències d'ordre superior. Relaciona línies incommensurables amb infinitèsims de primer ordre; quadrats incommensurables amb infinitèsims del segon ordre... La diferència primera no té proporció assignable amb quantitat finita. La diferència segona no té proporció assignable amb la diferència primera i és infinitament menor que aquesta. De forma que dues quantitats infinitèsimes de primer ordre, que es diferencien en un diferència segona, es

[33] A RICCATI-SALADINI (1765-1767), p. 702, punt 1 .Per exemple, a la mateixa plana, en el punt 3, si la funció F és x^m, llavors F' és $m.\overline{x+dx}^{m-1}$, F'' és $m.\overline{m-1}.\overline{x+dx}^{m-2}$, etc.

poden assumir com iguals. Dóna diversos exemples geomètrics on va trobant les diferències segones, terceres, etc.

Elecció de la progressió: Com ja havien indicat Johann Bernoulli i el marquès de L'Hôpital, a l'hora de calcular la diferència segona, per exemple, és recomanable considerar constant la diferència primera d'alguna de les variables, la qual cosa simplifica i abreuja els càlculs. Però reconeix que, per a més generalitat, seria millor no fer cap suposició d'aquest tipus.[34] Agnesi resol el mateix problema de diverses maneres, fent constant la diferència primera de cadascuna de les variables i també en el cas general, sense considerar constant cap d'aquestes diferències primeres.

Lagrange: Si *x*, *y* estan relacionades segons una equació, diferenciant s'obté l'equació diferencial $Pdx + Qdy = 0$, on *P*, *Q* són funcions de *x*, *y*. Sigui $dy : dx = z : 1$, de manera que $dy = zdx$. Es considera *z* com una nova variable i es diferencia l'equació $P + Qz = 0$. S'obté una nova equació diferencial $dP + zdQ + Qdz = 0$ que es pot rescriure de la forma $Mdx + Ndy + Qdz = 0$ (I). Per calcular *dz* cal considerar *dx*, *dy* com a noves variables per diferenciar $\frac{dy}{dx}$. Prenent *dx* constant, $dz = \frac{ddy}{dx}$, on *ddy* és la diferència de dos valors consecutius de *dy*. I l'equació (I) esdevé $dP + \frac{dQdy}{dx} + \frac{Qddy}{dx} = 0$, que multiplicant-la per *dx* resulta $dPdx + dQdy + Qddy = 0$. Adverteix del següent problema de notació: d^2y no és el mateix que dy^2. D'altra banda, justifica la *diferència d'una potència*, $dx^m = (x + dx)^m - x^m$, a partir del desenvolupament del binomi. Considera el resultat $a^m - b^m = (a - b)(a^{m-1} + a^{m-2}b + ... + b^{m-1})$, on substitueix $a = x + dx, b = x, dx = a - b$.

Elecció de la progressió: Lagrange diu que és permès de considerar un dels diferencials constant.

Saladini: El llibre tercer està dedicat al càlcul i ús dels diferencials de qualsevol ordre. En el capítol primer parla de la manera de trobar les diferències i els diferencials de qualsevol ordre de les fórmules, que són funció d'un nombre qualsevol de variables. Sigui φ una funció qualsevol de *x*, *y*, *z*. Si en lloc de *x* es col·loca x', en lloc de *y*, y', i

[34] Si apareix *ddy* en el denominador la hipòtesi *dy* constant "repugna" Agnesi. Vegeu AGNESI (1748), p. 469.

en lloc de *z*, z' φ esdevé φ' (sigui quin sigui l'ordre de les substitucions). $\delta x, \delta y, \delta z, \delta\varphi$ són les quantitats en les que canvien x, y, z, φ respectivament (variacions finites o infinitèsimes; d'aquestes darreres en parlarà especialment). $\delta x|\varphi$ representa allò que esdevé φ quan en lloc de *x* es col·loca δx, $\delta x\delta y|\varphi$ representa allò que esdevé φ quan en lloc de *y* es col·loca δy, i en lloc de *x* es col·loca δx, etc. Sigui la successió $\varphi, \varphi', \varphi'',...$ a partir de la qual s'obtenen les successions següents:

$$\varphi'-\varphi = \delta\varphi,\ \varphi''-\varphi' = \delta\varphi',\ \varphi'''-\varphi'' = \delta\varphi'',...,\ \delta\varphi'-\delta\varphi = \delta^2\varphi,$$

$$\delta\varphi''-\delta\varphi' = \delta^2\varphi',...,\ \delta^2\varphi'-\delta^2\varphi = \delta^3\varphi,...$$

Substituint convenientment:

$$\delta\varphi = \varphi'-\varphi,...,\ \delta^2\varphi = \delta\varphi'-\delta\varphi = \varphi''-2\varphi'+\varphi,\ \delta^2\varphi' = \delta\varphi''-\delta\varphi' = \varphi'''-2\varphi''+\varphi',...,$$

$$\delta^3\varphi = \delta^2\varphi'-\delta^2\varphi = \varphi'''-3\varphi''+3\varphi'-\varphi,...$$

i, finalment:

$$\delta^n\varphi = \varphi^n - n\varphi^{n-1} + \frac{n.\overline{n-1}}{2}\varphi^{n-2} - \frac{n.\overline{n-1}.\overline{n-2}}{2\cdot 3}\varphi^{n-3} + ...$$

fins arribar a φ sense cap potència.[35] A continuació estudia el cas de diferències infinitèsimes $dx, dy, dz,...$ Ajuntant els termes que no contenen cap diferencial, els termes amb diferencial de primera dimensió, els termes amb diferencial de segona dimensió, etc. s'obté l'expressió de φ', que és el valor obtingut en substitiur a φ x, y, z per $x+dx, y+dy, z+dz,...$:

$$\varphi' = \varphi + d\varphi + \frac{d^2\varphi}{2} + \frac{d^3\varphi}{2\cdot 3} + \frac{d^4\varphi}{2\cdot 3\cdot 4} + ...$$

De manera anàloga arriba a l'expressió de φ'' i de la resta. Saladini també troba el diferencial de la potència d'exponent natural mitjançant fórmula del binomi de Newton. A RICCATI-SALADINI (1765-1767) es relacionen els coeficients obitnugts en fer diferències successives amb els del binomi.

---

[35] És la mateixa idea que es presenta al capítol primer, llibre tercer, de RICCATI-SALADINI (1765-1767): donada la sèrie $x, x', x'', x''',...$ es pot obtenir les diferències primeres infinitèsimes: $x'-x, x''-x', x'''-x'',...$, que nota *dx*. A continuació obté la diferència entre $x'-x$ i $x''-x'$: $x''-2x'+x$; entre $x''-x'$ i $x'''-x''$: $x'''-2x''+x'$, etc. que són les diferències infinitèsimes segones i es nota $ddx = d^2x$. De manera anàloga construeix les diferències terceres. Si *dx* es suposa constant, aleshores $d^2x = 0$ i els elements d'ordre superior són zero. Si *dx* es suposa variable, aleshores d^2x al seu torn pot ser constant o variable, i així successivament.

Elecció de la progressió: En el capítol II del llibre tercer, *De les fórmules diferencials significants i de les fórmules absurdes*, Saladini estudia la problemàtica de les equacions diferencials, la solució de les quals poden canviar si es consideren les diferències constants o variables. Les fórmules *significants* són aquelles on hi ha una relació estable entre els diferencials superiors. Per exemple, $\frac{dx^2}{ddx}$ (amb *dx*, *ddx* arbitraris) no té significat. S'ha de fixar el seu significat, suposant constant una funció de *x*, *y* i el seu primer diferencial, o bé una sola variable i el seu diferencial. Qualsevol equació significant es pot expressar de manera que no apareguin els diferencials: $pdx = dy, dpdx = qdx^2 = d^2y, dqdx^2 = rdx^3 = d^3y...$ (amb *dx* constant).[36] Donada una equació entre $x, y, p, q, r...$ es tracta de trobar una funció de *x*, *y* que la satisfaci. D'altra banda, parla de les fórmules diferencials *absurdes*, que són aquelles que no poden néixer mai de la diferenciació de cap fórmula finita, no es donen les condicions perquè les fórmules diferencials puguin ser integrades. Les relacions dels diferencials superiors seran diverses i canviaran en canviar la constant. I sota la suposició de "cap constant" serà vaga i indeterminada, llevat d'alguns casos particulars. És a dir, d'una fórmula diferencial amb *du* constant es pot retornar a l'equació sense cap constant, la forma de la fórmula, però, canvia segons la constant. Aleshores, si prenent *dx* constant la fórmula es redueix a funcions de $x, y, p, q, r...$ però prenent *dx* fluent la fórmula és molt diferent, estem davant d'un cas de fórmula absurda. si en prendre una constant qualsevol s'obté sempre la mateixa relació entre *x*, *y* la fórmula és real. Si en canviar la constant canvia la relació entre *x*, *y* aleshores la fórmula és absurda (punt 7, capítol II, llibre tercer). A partir del punt 8 parla d'equacions de condició per poder integrar fórmules.[37]

[36] Podeu trobar una anàlisi detallada de la problemàtica de l'elecció de la progressió i la reducció dels diferencials d'ordre superior a diferencials de primer ordre en el cas de Leibniz i Euler a BOS (1974), pp. 35-53; 66-77.

[37] A RICCATI-SALADINI (1765-1767) trobem exemples, prenent diferents diferencials constants (*dx*, *dy*, *ydx*...). Al capítol segon, llibre tercer, donades fórmules diferencials, es consideren *dx*, *dy*, *ddx*, *ds*, $xdy + ydx$ ... constants i aleshores s'integren les fórmules. Al punt 10 d'aquest mateix capítol, donada una fórmula diferencial amb *dx* constant, els autors intenten muntar una fórmula sense cap condició de diferencial constant.

Funcions de diverses variables

Lagrange: En el punt 7 de la segona part Lagrange expressa la diferència d'una funció algèbrica de variables *x*, *y*, *z*, $F\cdot(x\cdot y\cdot z\cdot)$, quan les variables creixen les quantitats *dx*, *dy*, *dz*. La funció esdevé $F\cdot(x+dx\cdot y+dy\cdot z+dz)$ i aleshores la diferència és:

$$F\cdot(x+dx\cdot y+dy\cdot z+dz)-F\cdot(x\cdot y\cdot z),$$

que ve expressada en termes de les diferències de les seves variables.

Saladini: Si φ és una funció entera i racional de x, y, z amb totes les variables de dimensió 1, té la següent expressió:

$\varphi = Axyz + Bxy + Cxz + Dyz + Ex + Fy + Gz + K = 0$, on *A*, *B*, *C*,.. són constants.

Si primer *x* passa a ser $x+\delta x$, després es substitueix *y* per $y+\delta y$ i, finalment, *z* per $z+\delta z$, aleshores φ esdevé:

$$\begin{aligned}&\varphi+\delta x|\varphi+\delta y\delta x|\varphi+\delta z\delta y\delta x|\varphi\\ &\quad+\delta y|\varphi+\delta z\delta x|\varphi \qquad .\\ &\quad+\delta z|\varphi+\delta z\delta y|\varphi\end{aligned}$$

A partir de la diferència finita i posant successivament *dx*, *dy*, *dz* obté la mateixa teoria per al cas de diferències infinitèsimes. Les operacions en aquest darrer cas són més fàcils i breus, donat que es poden ometre els termes en els quals la suma dels exponents dels diferencials és major respecte els que són menors. Per aquesta raó:

$$d\varphi = Mdx + Ndy + Pdz\,\&c$$

Si *dx*, *dy*, *dz*, són constants aleshores:

$$\begin{aligned}dd\varphi &= Mdx^2 + M''dxdy + M'''dxdz + ... + N'dy^2 + \\ &+ N''dydx + N'''dydz + ... + P'dz^2 + P''dzdx + P'''dzdy + ...\end{aligned}$$

Però també considera el cas en què *dx*, *dy*, *dz* siguin variables. Un diferencial d'ordre més alt s'aconsegueix diferenciant el diferencial de l'ordre immediatament menor. $\left(\frac{d\varphi}{dx}\right)dx$ indica que φ ha estat diferenciada suposant només *x* com a fluent, mentre que $\left(\frac{d\varphi}{dx}\right)$ indica que ha estat diferenciada prenent només *x* com a fluent i després dividint per *dx*.[38]

[38] Vegeu SALADINI (1775), punt 11, capítol I, llibre tercer.

Diferenciació/Integració

Agnesi: El tercer llibre de les *Instituzioni* està dedicat al càlcul integral. Agnesi defineix la integració com l'operació inversa de la diferenciació. La integral d'una expressió també l'anomena suma i àrea.

Lagrange: Defineix el càlcul diferencial com aquell que, a partir de les quantitats, obté propietats de les seves diferències. I el càlcul integral és aquell que, a partir de les propietats de les diferències, obté la quantitat de la qual procedeixen.

Saladini: Al capítol III del llibre primer, Saladini afirma que diferenciar una fórmula és trobar la variació que pateix, si la quantitat de qualsevol dels seus elements ha estat alterada. Es nota amb una *d* davant de la quantitat Integrar una fórmula diferencial és trobar la fórmula, la qual si es diferencia retorna el diferencial donat, procés invers de la diferenciació. S'indica amb una *S* davant de la fórmula diferencial ("suma").[39]

Tangents

Agnesi
Definició: No defineix explícitament què és la tangent a una corba, sinó que diu directament "sigui la tangent a la corba en un punt".
Determinació de la tangent
En el segon capítol (*Del mètode de la tangent*), a partir de la generació de les corbes que utilitza d'exemple, explica com s'obté l'equació resultant.

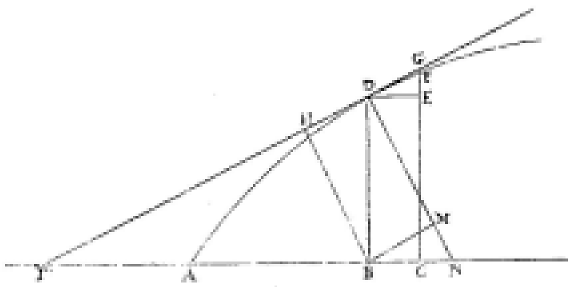


Figura 2

[39]) *Diferenciar* és com dividir una quantitat en els seus elements; mentre que *integrar* és sumar aquests elements, operació inversa de la diferenciació. Vegeu RICCATI-SALADINI (1765-1767), capítol tercer, llibre primer.

Sigui *BD* i *CF* dues ordenades infinitament properes, la diferència entre elles és *EF*. Sigui *DT* la tangent de la corba *ADF* en el punt *D*. L'ordenada *CF* talla la tangent en el punt *G*. Pels teoremes i corol·laris vistos abans *GF* és infinitèsim respecte *EF*, i la diferència entre *DF* i *DG* és infinitèsim respecte l'arc *DF*. Així $EF = EG$ i l'arc de corba *DF* és igual a la porció de tangent *DG*. D'aquesta forma, i mitjançant semblança de triangles, arriba a la fórmula de la subtangent $BT = \frac{ydx}{dy}$. En confondre's la tangent amb la corba i amb la corda, es pot considerar la corba com un polígon d'infinits costats infinitament petits. Però a l'hora de calcular les diferències segones, no hem de confondre *G* amb *F*. Troba també les fórmules per a línies anàlogues a la subtangent: la tangent, la subnormal i la normal. A partir dels triangles semblants *GED* i *DBT* calcula l'angle que forma la tangent amb l'eix d'abscisses.

Asímptotes

Agnesi afirma que amb aquest mètode de tangents també es pot saber si la corba té asímptotes i, en cas afirmatiu, com calcular-les. Només es fixa en el cas de les obliqües, doncs les asímptotes horitzontals i verticals ja les ha calculades en el capítol V del llibre primer.

Lagrange

Definició: A la primera part, una tangent és un cas particular d'intersecció entre cònica i recta (els dos punts d'intersecció són iguals). A la segona part, sigui *DF* una recta secant a una corba.

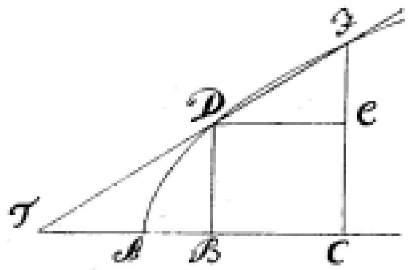


Figura 3

BC és la diferència finita de l'abscissa, *EF* és la diferència finita de l'aplicada. Per semblança de triangles es pot trobar el segment *TB*. Si *BC* tendeix contínuament a 0, és a dir, si *C* s'apropa contínuament a *B*, aleshores *F* passa a ser *D* (*FE* també tendeix contínuament a 0) i la secant passa a ser *tangent*. La tangent en cada punt de la corba determina l'últim límit de totes les secants, de manera que no pot passar cap altra recta pel punt de contacte que no talli per un altre punt. La secant depèn de la relació de les diferències *DE* i *FE*, així la tangent també.

Determinació de la tangent

Donada l'equació de la corba primer treballa amb diferències finites (cas recta secant). Mitjançant triangles semblants arriba a la fórmula $\frac{ydx}{dy}$. Fórmula que aplica quan la diferència de les abscisses s'apropa contínuament a 0, és a dir, quan la secant s'apropa a la tangent (els dos punts de tall de la recta amb la corba es transformen en un de sol). A partir de la subtangent es pot trobar la longitud de la tangent, així com també la de la normal i de la subnormal. La subtangent és infinita quan la tangent és paral·lela a l'eix d'abscisses. La subtangent és nul·la quan la tangent és paral·lela a l'eix de les ordenades.

Asímptotes

Sigui una corba amb branques infinites. Si el punt de contacte de la tangent se'n va a l'infinit, aleshores la corba té una *asímptota*. La seva equació s'obté fent infinita l'abscissa, o l'ordenada, o ambdues, en l'equació de la tangent.

Saladini

Definició: Saladini no defineix explícitament la tangent.

Determinació de la tangent

El primer capítol del llibre segon està dedicat al mètode per determinar les tangents d'una corba donada.[40]

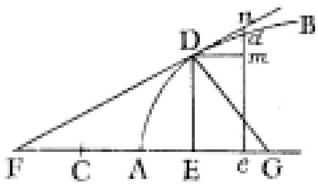


Figura 4

Sigui la corba *ADB*, pel punt *D* de la qual s'ha de traçar la tangent *DF*. L'equació de la corba ve donada en coordenades ortogonals $x = CE, y = DE$. Es suposa ja traçada la tangent *DF*. Es pren ordenada *ed* infinitament propera a *DE*, que toca la tangent en *n*.

[40] El seu procediment coincideix amb el que s'exposa a RICCATI-SALADINI (1765-1767), capítol primer, llibre segon.

Sigui *Dm* paral.lela a *Ee*. Les dues línies infinitèsimes *md*, *mn* es diferencien en *dn*, que és infinitèsima respecte les primeres. L'angle format per la tangent i la corda *Dd* és infinitèsim per la naturalesa de la corba. Els altres angles del triangle *nDd* són finits.[41] En el triangle *nDd* la distància de la corba a la tangent *nd* és infinitèsima respecte *Dd* (pel que s'ha vist en el capítol II del llibre primer). Però *Dd* té el mateix ordre que *md* i *mn*. Així *nd* és infinitèsima respecte *md* i *mn*, aquestes línies es poden considerar iguals. De la semblança dels triangles *nDm* i *DFE* resulta la proporció: $nm : Dm :: DE : FE$, que en termes analítics és $dy : dx :: y : Fe$. Així la subtangent és $FE = \frac{ydx}{dy}$.[42] A les dues obres es dóna l'expressió de la normal i de la subnormal. A més a més, tots dos expressen la tangent (i la normal) en funció de l'element de la corba *ds*. Per trobar la tangent i les línies que d'ella depenen només cal diferenciar l'equació de de la corba (en coordenades ortogonals), determinant d'aquesta manera la proporció dels elements *ds*, *dx*, *dy*. Substituint aquesta proporció en la fórmula s'obté el valor de les línies demanades en termes finits.

Asímptotes

Saladini tracta les asímptotes en el capítol III del llibre segon.[43] Una *asímptota* és una línia recta a la qual s'apropa contínuament una línia corba sense arribar-la a trobar mai. La distància asímptota-corba disminueix més enllà de qualsevol límit, i serà zero quan tant la recta com la corba hagin recorregut un espai infinit. Així també es pot interpretar l'asímptota com la recta tangent a la corba en un punt infinitament remot. Però això no vol dir que totes les tangents en un punt infinitament remot siguin asímptotes. Es necessiten algunes condicions:

- Per a tenir una asímptota paral·lela a les abscisses,cal que es verifiqui: $dx : dy :: 1 : 0$.
- Per a tenir una asímptota paral·lela a les ordenades cal que es verifiqui: $dx : dy :: 0 : 1$.
- Si $\pm x$ és infinita i $dx : dy$ finita, l'angle que forma la tangent en un punt infinitament llunyà amb la línia de les abscisses és determinat. Aleshores la

[41] Tret d'alguns punts particulars, que Saladini diu que veurà en el capítol segon, *De les ordenades màximes i mínimes de la corba.*

[42] Riccati justifica que les *raons últimes* dels triangles amb hipotenusa sobre la tangent i sobre la corda són iguals, i per semblança de triangles arriba a l'expressió de la subtangent

[43] Com RICCATI-SALADINI (1765-1767), punts 21-22, capítol segon, llibre segon.

distància des de l'origen de les abscisses fins a la secció amb la tangent ($\frac{ydx}{y} - x$) és finita o zero.

Extrems

Agnesi

Definició: El tercer capítol es titula *Del mètode de màxims i mínims*. Si la corba presenta un *màxim* l'ordenada creix fins a un punt, a partir del qual decreix. Si la corba té un *mínim* l'ordenada decreix fins a un punt, a partir del qual creix.

Caracterització i justificació

En ambdós casos, la subtangent va creixent fins esdevenir infinita en el punt màxim o mínim. Així dedueix que en el màxim o mínim es verifica $dy = 0$, respecte *dx* (punt 72). En el cas en què la corba presenti una cúspide (ella ho assenyala fent referència a figures), la subtangent anirà decreixent a mesura que ens apropem al punt màxim o mínim, on esdevindrà zero. Per tant, $dx = 0$, respecte *dy*, o, equivalentment, $dy = \infty$. Com a conclusió assenyala que per trobar màxims i mínims s'ha d'estudiar $dy = 0$ i $dy = \infty$. Si ni $dy = 0$ ni $dy = \infty$ donen valors reals s'haurà de concloure que la corba no té ni màxims ni mínims (punt 73). Quan *dy* és zero, llavors *y* funciona com a ordenada. En canvi, quan *dy* és infinit, *dx* és zero i aleshores *x* funciona com a ordenada.

Naturalesa dels extrems

En els exemples proposats per Bernoulli i L'Hòpital els autors ja suposaven la naturalesa dels extrems. Un aspecte positiu del text d'Agnesi és que indica com es pot decidir de quin tipus d'extrem es tracta. Si no veiem com va la corba, podem procedir de la següent manera: a l'abscissa en l'equació li afegim un valor un mica més gran, o una mica més petit, del que correspon a l'extrem, aleshores si el valor de l'ordenada és més gran es tracta d'un mínim; i si és més petit, d'un màxim. Quan $dy = 0$ i $dy = \infty$ donen la mateixa ordenada (o abscissa), ens trobem amb un cas d'intersecció de branques (0/0). Aleshores s'han d'estudiar els màxims i mínims de cada branca.

Lagrange

Definició: Quan y deixa de créixer per començar a decréixer, i viceversa, en el primer cas la corba presenta un *màxim* (la major ordenada dels punts del seu entorn) i en el segon cas un *mínim* (la menor ordenada dels punts del seu entorn).

Caracterització i justificació

Donat que $\frac{ydx}{dy} = 0 \text{ o } \infty$ llavors $\frac{dy}{dx} = 0 \text{ o } \infty$, que és la regla general per trobar màxims i mínims. En el punt 29 comenta els signes de la subtangent. Suposant x creixent, la subtangent és positiva si y creix, i és negativa si y decreix. El signe de la subtangent és manté constant si y sempre creixent o sempre decreixent. Però si y primer creix i després decreix (o al revés) aleshores la subtangent pateix un canvi de signe. Per tant, en algun moment haurà de ser infinita o zero.

Naturalesa dels extrems

Lagrange relaciona la naturalesa dels extrems amb els canvis de concavitat-convexitat. Vegeu l'apartat *Punts d'inflexió i de retrocés. Altres punts singulars*.

Saladini

Definició: Als capítols II i III del llibre segon Saladini tracta els màxims i mínims.[44] Si creix l'abscissa, decreix l'ordenada corresponent fins a B i a partir d'aquí també creix l'ordenada. En B acaben els decreixements de les ordenades i comencen els increments. L'ordenada sobre B és *mínima*.

Caracterització i justificació

Mentre l'ordenada decreix contínuament, la tangent de la corba segueix la línia de les abscisses, cap a la part oposada. Anàlogament quan l'ordenada creix contínuament. Així en B la tangent no cau ni cap a un costat ni cap a l'altre. Aquí la tangent és paral·lela a la línia de les abscisses, que en el càlcul s'expressa $dy = 0$. Si la línia d'abscisses es troba per sobre de la corba, es té una ordenada *màxima*, on també la tangent és paral·lela a la línia d'abscisses i $dy = 0$.

Naturalesa dels extrems

La proposició inversa no és vàlida: si dues branques de corba tenen enmig la tangent i corren en parts oposades o de la mateixa part, la tangent és paral·lela a les abscisses, $dy = 0$ però aquí no hi ha ni un màxim ni un mínim. Per assegurar-se que és un màxim

[44] Com RICCATI-SALADINI (1765-1767), capítol segon, llibre segon.

o un mínim s'ha de substituir el valor *x* trobat en resoldre $dy = 0$, en l'equació de la corba i determinar el valor de *y*. Després s'ha d'augmentar i disminuir el valor de l'abscissa en *dx* i trobar els valors corresponents de les ordenades. Si en ambdós casos els valors creixen, es té un mínim. Si en els dos casos els valors decreixen, es té un màxim. Si en un cas augmenta i en l'altre disminueix, aleshores no es tracta ni d'un màxim ni d'un mínim. També es pot tenir un màxim o un mínim quan la tangent és paral·lela a la línia de les ordenades. Aleshores, $dx = 0$. Però no sempre que es verifiqui aquesta equació hi haurà un màxim o un mínim.

Punts d'inflexió i de retrocés. Altres punts singulars

Agnesi

Definició: El quart capítol està dedicat als *punts de flexió contrària* i *de regressió* (és a dir, d'inflexió i de retrocés, respectivament).[45] Si la corba primer és convexa i després còncava (o viceversa), la diferència de l'ordenada creix fins al punt d'inflexió o regressió, a partir del qual comença a decréixer (o al revés).

Caracterització i justificació

1^er^ mètode: Quan l'abscissa creix, si *dy* decreix fins al punt d'inflexió o de retrocés, a partir del qual creix (o, el que és el mateix, si la corba primer és còncava i després convexa), *dy* ha de ser mínim. Per tant, *ddy* serà zero o infinit. Si, al contrari, primer la corba és convexa i després passa a ser còncava, aleshores *dy* ha de ser màxim i *ddy* serà zero o infinit, com abans.

2^on^ mètode: Com L'Hôpital i Bernoulli, en el cas en què la corba primer sigui còncava i després convexa, *ddy* passa de negatiu a positiu i, per tant, haurà de passar per zero o per infinit. En el cas convexa-còncava es procedeix de forma anàloga.

3^er^ mètode: També com L'Hôpital i Bernoulli, fent màxima la diferència entre la subtangent i l'abscissa, $\frac{ydx}{dy} - x$ (cas en què la corba primer sigui còncava) o $x - \frac{ydx}{dy}$ (cas en què la corba primer sigui convexa), arriba a la conclusió que *ddy* ha de ser zero o infinit.

Si fent aquests càlculs s'arriba a una *y* imaginària o a una contradicció, es pot afirmar que la corba no tindrà punts d'inflexió ni de retrocés. Cas que s'hagin de resoldre

[45] Al capítol VI del llibre primer, Agnesi tracta el càlcul d'extrems, tangents, punts d'inflexió i de retrocés utilitzant l'àlgebra cartesiana.

equacions cúbiques, fa substitucions parabòliques i troba els punts d'intersecció de la paràbola i de la hipèrbola que resulta de la substitució.[46] Agnesi calcula els possibles candidats a punt d'inflexió i de retrocés fent *ddy* zero i infinit. Per saber de quin tipus de punt es tracta, es basa en la naturalesa de la corba. Cas que "es vegi" que la corba no pot tenir ni punts d'inflexió ni de retrocés, discuteix què se'n pot deduir de les tangents.[47] En el punt 132, en el capítol dedicat al radi osculador parla de punts de *retrocés* (la corba retorna cap al seu origen): si es desenvolupa una corba amb punt d'inflexió, una de les dues parts a cada costat del punt d'inflexió genera una corba que presenta un retrocés de primera d'espècie; l'altra part genera una corba amb retrocés de segona espècie.

Lagrange

Definició: El punt allà on la corba passa de còncava a convexa (o viceversa) s'anomena *punt d'inflexió* (o de reflexió, o de flexió contrària).

Caracterització i justificació

L'estudi dels punts d'inflexió es troben en l'apartat 49, on es parla del radi osculador. Quan la corba passa de còncava a convexa (o al revés), el radi osculador passa de positiu a negatiu (o viceversa) i d^2y passa de negatiu a positiu (o al revés). Aleshores en el punt d'inflexió d^2y és zero o infinit. Lagrange afirma que aquesta teoria és de gran importància a l'hora de decidir la naturalesa de l'extrem (i fa referència al *Treatise of Fluxions* de Maclaurin, que tracta els signes de la segona fluxió en el desenvolupament de Taylor).

Altres punts singulars

En la primera part parla de punts múltiples en relació a l'ordre de la corba i al nombre de punts d'intersecció de la corba amb una recta. Però diu que el càlcul diferencial facilita i fa més clar l'estudi dels punts múltiples.

---

[46] Per exemple, quan vol resoldre l'equació $z^3 - \frac{3b^2z}{2} \mp \frac{ab^2}{2} = 0$ agafa la paràbola $z^2 = \frac{bp}{2}$, la substitueix en l'equació donada, obté la hipèrbola $pz - 3bz = \pm ab$ i, aleshores, busca els punts d'intersecció entre la paràbola i la hipèrbola. És un mètode força corrent, com podem veure a les obres de Descartes i de Fermat.

[47] Veure, a tall d'exemple, el punt 101, on Agnesi calcula els punts d'inflexió i de retrocés dels tres tipus de cicloide. En aquests casos les tangents són paral·leles a l'eix de les abscisses o de les ordenades.

Saladini

Saladini tracta els *punts singulars* en el capítol X del llibre tercer. En el punt 1 es pregunta què passa quan $\frac{dx}{dy}=\frac{0}{0}$.[48] Donada una corba (amb un punt *B* pel qual passen dues branques), si sobre les abscisses es fa un canvi infinitèsim, es veu que neixen dues ordenades per a la mateixa abscissa, que es diferencien en una quantitat infinitèsima. Si el canvi infinitèsim es produeix sobre l'ordenada, ocorre de forma anàloga per a l'abscissa. En el punt *B* els valors d'ordenada i abscissa són dobles. Si per aquest punt passen tres branques, l'ordenada en *B* tindrà tres valors iguals corresponents a la mateixa abscissa. I l'abscissa en *B* tindrà tres valors iguals per a la mateixa ordenada. I anàlogament per a qualsevol nombre de branques. En general,

$$\overline{x-a}^{m}A+\overline{x-a}^{m-1}\overline{y-b}B+\overline{x-a}^{m-2}\overline{y-b}^{2}C+...+\overline{y-b}^{m}A'=0\,,$$

si $x=a$ aleshores $y=b$ (*m* cops); si $y=b$ aleshores $x=a$ (*m* cops). Si aquesta equació es diferencia menys de *m* cops tots els termes dels diferencials estan multiplicats per $x-a$ i $y-b$. Però quan $x=a$, aleshores $y=b$ i tots els termes dels diferencials s'esvaeixen. Així, la relació $dx:dy$ en el punt on la corba es talla és $\frac{0}{0}$, mentre l'equació es diferencia menys de *m* cops. $\frac{0}{0}$ denota un punt de la corba en el qual les branques de la corba intersequen, tantes branques com unitats contingui *m*. Un punt amb aquestes característiques s'anomena *múltiple*. Per buscar els punts múltiples i la seva multiplicitat, si $\varphi=0$ és l'equació de la corba, aleshores: $d\varphi=Mdx+Ndy=0$. Els valors *x*, *y* que es troben en resoldre les equacions $M=0, N=0$ i que verifiquen l'equació $\varphi=0$ són els punts múltiples. En cas contrari, no hi ha punt múltiple. En el punt 5, cap. 10, llibre tercer, tracta els *punts conjugats*. Comenta que es podria creure que hi ha tantes branques visibles com multiplicitat del punt múltiple. Tanmateix no és així, doncs poden existir branques imaginàries. Un punt d'aquesta mena queda "aïllat" de la resta, tot i pertànyer a la corba. En el punt següent parla dels *punts de flexió contrària*, que són aquells on la corba passa de còncava a convexa, o viceversa. En un punt de flexió contrària la tangent és comuna a l'arc còncau i a l'arc convex. La intersecció de l'ordenada entre la corba i la tangent de l'arc còncau és negativa, i la de l'arc convex és positiva. El pas de positiu a negatiu només es pot donar quan la

[48] D'aquest fet ja s'havia ocupat en general el capítol II, llibre segon, de SALADINI (1775).

intersecció passa pel zero o per l'infinit. Analíticament, quan $ddy = 0$ o $ddy = \infty$ (que equival a $ddx = 0$). Cas en què hi hagi un nombre parell de flexions contràries infinitament properes la flexió contrària és invisible. En canvi, si n'hi ha un nombre senar, aleshores la flexió contrària és visible. En el punt 7 comenta que quan la tangent de la flexió contrària és paral·lela a les abscisses, o a les ordenades, es verifica $dx = 0$ o $dy = 0$, de la qual cosa no s'ha d'inferir que existeixi un màxim o un mínim. En el cas de flexió visible no hi ha ni màxim ni mínim, en el cas de flexió invisible sí. Sigui $y = \varphi$ una funció de *x*:

$$dy = d\varphi + \frac{dd\varphi}{2} + \frac{ddd\varphi}{2.3} \,\&\, c\,.$$

Si $d\varphi = 0$:

- Si $d^2\varphi$ s'anul·la però $d^3\varphi$ no, aleshores no hi ha ni màxim ni mínim, perquè hi ha flexió contrària visible (nombre parell de termes que s'anul·len).
- Si $d^2\varphi$ i $d^3\varphi$ s'anul·len però $d^4\varphi$ no, aleshores hi ha un màxim o un mínim, perquè la flexió contrària és invisible (nombre senar de termes que s'anul·len).

En el punt 8 del mateix capítol parla de les *cúspides*. Els accidents fins ara considerats per separat, poden aparèixer junts en el mateix punt, aleshores es poden fer deduccions, per la qual cosa Saladini troba superflu donar-ne més detalls al respecte. En aquest capítol dedicat als punts múltiples fa referència a Cramer i a les seves *Instituzioni Analitiche*.[49]

[49] En el punt 27 del capítol segon, llibre segon, de RICCATI-SALADINI (1765-1767), es defineix un *punt de flexió contrària* com aquell en el qual la tangent és normal a l'ordenada, i a un costat l'ordenada creix i a l'altre decreix. D'altra banda, en el punt 6 del cap. 15, llibre tercer, es discuteixen els *punts singulars*. Sigui *F* una funció de *x*. Si $\overset{''}{F}.x$ és finita, aleshores la línia entre la tangent i la corba és un infinitèsim de segon ordre, la curvatura és del gènere circular i aleshores no hi ha punt singular. En canvi, si $\overset{''}{F}.x = 0$, la porció entre la tangent i la corba és d'ordre superior a 2, la curvatura no és de gènere circular i hi existeix un punt singular. Si $\overset{''}{F}.x = \infty$, la porció entre la tangent i la corba no és un infinitèsim de segon ordre i aleshores hi ha un punt singular. Per tant, si $\overset{''}{F}.x = 0$ o $\overset{''}{F}.x = \infty$, existeix un punt singular, en el qual la curvatura no és de gènere circular. Com que $y = Fx$, $dy = D.Fx = dx\,\overset{'}{F}.x$ llavors $D.\overset{'}{F}.x = dx\,\overset{''}{F}.x \ldots$ Si *dx* és constant aleshores: $D.dx.\overset{'}{F}\,x = dx^2.\overset{''}{F}.x = ddy$. Per un procediment anàleg arriba a les expressions següents: $d^3y = dx^3.\overset{'''}{F}.x$, $d^4y = dx^4.\overset{iv}{F}.x$, ... Comparant amb la sèrie que ha descrit abans, $F.\overline{x+dx} = Fx + dx.\overset{'}{F}\,x + \frac{dx^2.\overset{''}{F}x}{2} + \frac{dx^3.\overset{'''}{F}x}{2.3} + \frac{dx^4.\overset{iv}{F}x}{2.3.4} \,\&\, c$, els coeficients són:

Indeterminacions

Agnesi: En els punts 68 i 69 Agnesi estudia què passa quan la subtangent és 0/0. Afirma que aquest cas correspon a punts d'intersecció de les branques de la corba, i es tracta de trobar la tangent en el punt d'intersecció. Així, treballa en el punt on concorren les diferents branques i relaciona aquest fet amb la multiplicitat de les arrels. En el punt 71 estudia què passa quan una expressió racional en un punt determinat dóna 0/0. El numerador i el denominador s'han de considerar com a dues corbes amb arrel comuna i s'ha de veure què passa en punts infinitament propers al punt en qüestió. La relació del numerador al denominador en un punt és igual a la mateixa relació en un punt infinitament proper, és a dir, és igual a la relació de la diferència del numerador a la diferència del denominador.

Lagrange: Quan en una expressió, en substituir per un valor de x s'obté $\frac{0}{0}$, si és possible s'ha de simplificar l'expressió. Per exemple, l'expressió $\frac{a^2-x^2}{a-x}$ passa a ser $a+x$; l'expressió $\frac{b^2-bx}{b-\sqrt{bx}}$ es pot simplificar multiplicant el numerador i el denominador per $b+\sqrt{bx}$, etc. Però el mètode general per resoldre les indeterminacions $\frac{0}{0}$ el proporciona el càlcul diferencial: si $\frac{X}{Y}$ dóna $\frac{0}{0}$ quan $x=a$, el seu valor ha de ser l'última raó d'aquesta quantitat, abans d'anul·lar-se. Per tant, avaluant l'expressió a $a+dx$, el numerador passa a ser $X+dX$ i el denominador $Y+dY$. Així, quan $x=a$ l'expressió esdevé $\frac{dX}{dY}$. En el punt 36 diu que aquest resultat

---

$y, dy, \frac{ddy}{2}, \frac{d^3y}{2.3}, \frac{d^4y}{2.3.4}, \ldots$ Si el segon terme (*dy*) és zero o infinit la tangent és paral·lela a les abscisses o a les ordenades. Si el tercer terme ($\frac{ddy}{2}$) és zero o infinit, és a dir, si $ddy=0$ o ∞, aleshores hi ha un punt singular. A continuació són caracteritzats els punts de *flexió contrària*. Suposant *dx* constant i $ddy=0$ o ∞, en aquests punts la corba canvia de convexa a còncava, o viceversa. També es parla de flexions visibles i invisibles. En els exemples proposats (punts 9-10, capítol quinzè, llibre tercer) donada l'equació de la corba i fent $ddy=0$ o $ddy=\infty$ es troben les flexions contràries. Estudiant la proporció $dx:dy$ es té l'angle que forma la tangent en el punt de flexió amb l'ordenada (que és com el cosinus és al sinus).

és molt útil per a l'estudi de tangents, doncs sovint, en buscar la subtangent o la subnormal s'obtenen expressions del tipus $\frac{0}{0}$.

Saladini: En el punt 7 del capítol II del llibre segon, Saladini mostra com treballar amb l'expressió $\frac{0}{0}$. Per exemple, per conèixer el valor de la fracció:

$$\frac{x^4 + ax^3 - 9a^2x^2 + 11a^3x - 4a^4}{x^4 - ax^3 - 3a^2x^2 + 5a^3x - 2a^4}$$

quan $x = a$, substitueix $x = a + dx$ al numerador i denominador.[50] En el cas de trobar-se amb expressions radicals, també s'ha de substituir $x = a + dx$ i, fent servir sèries i eliminant les potències de *dx*, s'arriba al valor de la fracció quan $x = a$. Si els termes afectats de *dx* s'anul·len, s'han de considerar els termes amb dx^2. Si apareixen quantitats imaginàries, s'ha de substituir *x* per $a - dx$.

Corbes osculadores

Agnesi: El capítol V està dedicat primer a les evolutes i a continuació als radis osculadors. Suposem una corba envoltada per un fil. El fil es va desenrotllant de manera que queda tangent a la corda, i l'extrem del fil dibuixa una nova corba. La primera corba és l'*evoluta* de la segona. La segona corba és la "generadora del naixement" de la primera. Els segments de fil tangents a l'evoluta són els *radis osculadors*. Per trobar els radis s'han de prendre dues perpendiculars a la segona corba, infinitament propers entre si, i el punt d'intersecció determinarà la longitud del radi. En el punt 109, en dóna la fórmula general, sense suposar constant cap *fluxió primera*. Sobre la corba pren dos arcs infinitèsims i una perpendicular a cadascun d'ells, que es tallen en un punt. A partir de triangles i sectors semblants arriba a la fórmula del radi osculador:

---

[50] A RICCATI-SALADINI (1765-1767), capítol tercer, llibre segon, trobem el mateix exemple però l'expressió primer es divideix per $x - a$. El primer punt presenta el procediment general: per conèixer el valor de l'expressió $\frac{0}{0}$, cal dividir numerador i denominador per $x - a$. En el punt 4 del mateix capítol també es proposa estudiar el numerador i el denominador prop de $x = a$, és a dir, substituint per $a \pm dx$. En el punt 9 els autors comenten que la regla de diferenciar numerador i denominador per obtenir el valor de la fracció fou enunciada per Johann Bernoulli. En el cas de diverses branques, s'ha d'estudiar el valor de $\frac{dy}{dx}$ en el punt d'intersecció, on hi ha tants valors com tangents en el punt (punts 14-18).

$$\frac{\overline{dx^2 + dy^2}^{3/2}}{dyddx - dxddy}.$$

Finalment, en dóna la fórmula quan *dx, dy* i *ds* són constants. En el punt 111 calcula la *sub-osculatriu* (o *co-radi*), que és el segment que resulta de traçar una perpendicular a l'ordenada (prolongada) des de l'extrem del radi osculador (en el punt 118 dóna la fórmula general, sense prendre cap diferència constant). Justifica la unicitat de l'evoluta, en tenir una única expressió per al radi osculador i per al co-radi. Si el radi (o el co-radi) és positiu, la corba és còncava respecte l'eix o el focus. Altrament, la corba és convexa. Per tant, en un punt d'inflexió el co-radi passa de positiu a negatiu, i dos radis osculadors infinitament propers passen de ser convergents a ser divergents, quan els radis primer o bé són paral·lels, o bé són nuls (punt 121). L'evoluta d'una corba algèbrica és una corba algèbrica i, a més a més, és rectificable.

Lagrange: En la primera part (*De la teoria algèbrica de les corbes*) tracta la intersecció de dues corbes de segon grau, que donarà una equació de quart grau. En particular, estudia la intersecció d'una circumferència amb una cònica. Si dues interseccions són iguals aleshores la circumferència és tangent. Si tres interseccions són iguals, a més de ser tangents, la circumferència té la mateixa curvatura que la corba i s'anomena *cercle osculador*. En el punt 46 (de la segona part, *Del càlcul diferencial*) construeix el cercle osculador. Considera els tres punts de la intersecció de la corba amb una circumferència. A partir de semblança de triangles troba el radi de la circumferència que passa per aquests tres punts i, finalment, fa que els tres punts coincideixin, doncs aleshores la circumferència és tangent a la corba. D'aquesta manera obté l'expressió del *radi del cercle osculador*:

$$\frac{(dx^2 + dy^2)\sqrt{dx^2 + dy^2}}{-dxd^2y} \text{ (prenent } dx \text{ constant).}$$

Comenta que aquest radi és molt important en Mecànica i que serveix de mesura de la curvatura d'una corba. En el punt 48 parla de l'*evoluta*. Donada una corba, els centres dels cercles osculadors de tots els punts formen una nova corba (*evoluta*), de manera que els radis osculadors li són tangents. Si aquesta nova corba es suposa circumdada per un fil que es va desenrotllant, l'extremitat del fil descriu la corba original. En cada pas el tros de fil correspon al radi osculador en el punt. Degut a la relació entre l'evoluta i el radi osculador, sovint el radi del cercle osculador s'anomena radi de l'evoluta. Defineix concavitat/convexitat en termes del cercle osculador. Quan el radi és positiu (és a dir, quan $d^2y < 0$), el radi cau de la part de l'eix i la corba és còncava. Quan el radi és negatiu (és a dir, quan $d^2y > 0$), el radi no cau de la part de l'eix i la corba és convexa.

Saladini: Saladini dedica el capítol VIII del llibre tercer primer als radis d'osculació i després a les evolutes. Sigui *AB* tangent comuna a dues corbes *AM*, *AN* en el punt *A*. Sigui *AB* un infinitèsim i *MN* la diferència entre les ordenades *BM* i *BN*, infinitèsim respecte les ordenades. La diferència de la curvatura dels arcs *AM* i *AN* és un infinitèsim. Per la doctrina dels infinitèsims les dues curvatures es confonen.[51] Qualsevol equació que expressi la relació de les coordenades *AB* (infinitèsim), *BM* es redueix a $x = y^n$, *n* qualsevol nombre enter o fraccionari. Qualsevol porció infinitament petita d'una corba esdevé el vèrtex d'una paràbola qualsevol d'equació general $x = y^n$. A *x* infinitèsima li correspon *y* infinitèsima d'ordre divers en les paràboles de grau divers. El vèrtex de paràboles de graus diversos tindrà curvatura diferent. Tot això es pot entendre en relació a les porcions infinitèsimes de les corbes, doncs es redueixen al vèrtex de paràboles (d'Apol·loni), tret d'alguns punts singulars on la corba queda subjecta a canvis extraordinaris. Demostra que, com que el vèrtex de qualsevol paràbola d'Apol·loni es redueix a curvatura circular, aleshores es confon amb la del cercle. La porció infinitèsima de la corba es confon amb cercle, que s'anomena *cercle osculador* i el seu radi és el *radi osculador*.

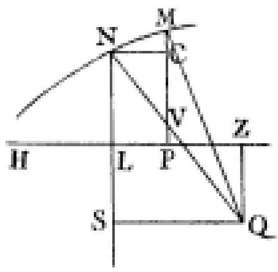


Figura 5

Per *M* i *N* es tracen dos arcs infinitèsims. Siguin *NQ*, *MQ* dues normals a la corba. Amb centre *Q* i radi l'interval *QM*, o *QN*, es descriu el cercle osculador de l'arc *MN* (justificació: *Instituzioni* i geometria dels infinitèsims, tret de punts singulars, con el vèrtex d'una paràbola no d'Apol·loni, on el cercle no és osculador). *NS*, *SQ* són els

[51] És el mateix plantejament que RICCATI-SALADINI (1765-1767), capítol onzè, llibre tercer.

coradis. Els punts *Q*, centres dels cercles osculadors de la corba, es troben sobre una línia, l'*evoluta*. A la inversa, la corba a la qual pertanyen els radis és la *corba generada* (idea del fil al voltant de l'evoluta). La porció de fil desenrotllada és tangent a l'evoluta. En el punt 4 Saladini descriu el mètode expeditiu per trobar l'expressió analítica dels radis d'osculació.[52] Siguin els angles *LNQ* (φ), *PMQ* (φ'), $x = HL$, $y = LN$, $dx = NC$, $dy = CM$, $ds = NM$ i el radi $R = NQ$.[53] Sigui *LN* paral·lela a *PM*. L'angle *LNQ* és igual a l'angle *NVM* que és igual a l'angle *VMQ* més un angle *Q*. Analíticament, $\varphi - \varphi' = Q = -d\varphi$. Així:

$$-d\varphi : r :: ds : R \to R = -\frac{rds}{d\varphi},$$

$$\frac{d\varphi}{r} = \frac{dS\varphi}{C\varphi} \to R = -\frac{dsC\varphi}{dS\varphi}$$ [54]

Donat que *LNC*, *QNM* són angles rectes, llavors els angles *MNC* i *LNV* són iguals a φ:

$$\left.\begin{array}{l} r : C\varphi :: ds : dx \\ r : S\varphi :: ds : dy \end{array}\right\} \to R = -dx : d\,\frac{dy}{ds}$$

Diferenciant, suposant *dx* constant:

$$R = \frac{-ds^3}{dxddy}.$$

Per semblança de triangles Saladini troba l'expressió del *co-radi NS*:

$$NS = \frac{Rdx}{ds} = -\frac{ds^2}{ddy}.$$

En el punt 6, donat el radi osculador d'una corba amb equació en *x*, *y*, explica com trobar l'equació de l'evoluta.[55] Siguin ara les coordenades de l'evoluta $p = HZ = x + LZ, q = QZ = SN - y$, on *LZ*, *SN* vénen donades en funció de *x*, *y*. D'entre aquestes dues equacions i l'equació en *x*, *y* es pot obtenir una equació en *p*, *q*.

---

[52] A RICCATI-SALADINI (1765-1767), punt 15, capítol tercer, llibre tercer es desenvolupa la construcció per calcular el radi osculador sense quantitats diferencials segones. Es procedeix de manera anàloga en el punt 19, capítol onzè, llibre tercer, de la mateixa obra, per trobar el radi osculador en el cas de coordenades referides a un focus.

[53] A RICCATI-SALADINI (1765-1767) no es fa servir sinus/cosinus, sinó semblança de triangles. I es tracten les fórmules en general, sense la suposició *dx* constant

[54] Aquí *S* i *C* indiquen sinus i cosinus, respectivament. No s'indica explícitament qui és *r*, però es pot deduir que representa el radi del cercle respecte el que es pren sinus i cosinus.

[55] A RICCATI-SALADINI (1765-1767), punt 16, capítol quinzè, llibre tercer, també es dedueix la fórmula del radi osculador a partir de la consideració de la corba com a polígon.

5.4.2. EL LLENGUATGE QUE UTILITZA, ÉS GEOMÈTRIC O ALGÈBRIC?

Agnesi: El llenguatge de la primera part del capítol primer és geomètric. Treballa amb exemples geomètrics. Parla de moviment continu com a generador de les corbes. Diu que el Càlcul es recolza geomètricament en el Mètode dels Antics de polígons inscrits i circumscrits. En els problemes sobre extrems, per saber de quin tipus es tracta, si és possible es fixa en el diagrama de la corba corresponent; si no, avalua la corba una mica abans (o una mica després) del punt en qüestió. En general, dóna l'equació de la corba estudiada, sobre la qual aplica la diferenciació d'ordre corresponent (segons del tipus de problema que es tracti). Per resoldre les cúbiques que apareixen en tractar interseccions de branques, fa servir el mètode cartesià. Les quantitats infinitament petites es troben a d'altres camps de la geometria. Per exemple, en les quantitats incommensurables. Empra sèries, però bàsicament en l'àmbit del càlcul integral. Per exemple, en el capítol quart del tercer llibre integra fórmules que contenen expressions exponencials a partir del desenvolupament en sèrie del logaritme (pp. 831-836).

Lagrange: El llenguatge emprat per Lagrange és més algèbric, en el sentit que treballa amb funcions i destaca el paper de la primera i última raó de les diferències. Tanmateix, encara presenta aspectes relacionats amb la geometria. Així, una *corba* és el lloc geomètric de l'equació que relaciona x, y. Lagrange identifica una equació (anàlisi) amb una corba (teoria de les línies corbes), de manera que la propietat de la croba es pot deduir de la seva equació. Distingeix entre línies regulars (els punts de les quals vénen determinats per una llei constant) i irregulars (els punts de les quals són punts a l'atzar). Les línies irregulars no són objecte de la geometria. En canvi, el treball del geòmetra consisteix a, donada una corba, buscar la llei constant que la determina. A la primera part mostra la interpretació i construcció geomètrica de les equacions, de les interseccions d'una corba amb una recta, de dues corbes de segon grau, d'interseccions múltiples, de la quantitat i posició de les rectes i els cercles tangents, ...

Saladini: El capítol segon del llibre primer està dedicat als coneixements elementals de la geometria dels infinitèsims. Parla de proporcions entre elements, de quartes proporcionals… Les proposicions tracten de la relació d'arcs de cercle infinitèsims, angles, cordes, infinitèsims sobre triangles,… Saladini afirma que la geometria dels infinitèsims dóna mètodes elegants per determinar les tangents (punt 9, capítol I, llibre segon)[56] i per resoldre les qüestions de màxims i mínims (punt 8, capítol II, llibre segon), especialment els casos on l'anàlisi és difícil de manipular. Per exemple, donada una corba, s'hi ha d'inscriure un paral·lelogram màxim; el problema es resol amb proporcions a partir de la consideració de dos rectangles infinitament propers. També presenta problemes sobre triangles, paral·lelograms inscrits en hipèrbola, ...[57] Riccati i Saladini consideren que la corba es genera a partir del moviment continu d'un punt, que segueix la tangent. La corba és el resultat del moviment compost per l'ordenada i la tangent (un punt de la corba porta velocitat constant com si s'estigués movent sobre la tangent, la velocitat en la direcció de l'ordenada). Tanmateix, Riccati i Saladini treballen amb funcions, fan servir integració mitjançant sèries convergents, doncs les divergenst són inútils, discuteixen els punts singulars a partir del teorema de Taylor. Així doncs, el seu llenguatge en part també és algèbric.

5.4.3. ELECCIÓ DE COORDENADES I TRACTAMENT DE LES CORBES ALGÈBRIQUES I TRANSCENDENTS

Agnesi: Per il·lustrar el tema de diferències segones Agnesi fa servir exemples de coordenades des d'un punt. En particular, també considera coordenades des d'un punt en el cas de càlcul del radi osculador (punt 115). Tot i que en les seves figures les coordenades són ortogonals, Agnesi diu que les ordenades poden formar qualsevol angle amb les abscisses.[58] Sigui quin sigui l'angle entre les coordenades, sempre es pot aplicar la fórmula de la subtangent $\frac{ydx}{dy}$. Agnesi defineix les corbes transcendents com aquelles no expressables mitjançant una equació algèbrica, però dependents de la rectificació d'altres corbes no rectificables. A l'obra d'Agnesi apareixen les còniques, la cicloide, la concoide, la cissoide, la quadratriu, les espirals (d'Arquimedes, logarítmica), les quantitats exponencials i les logarítmiques. Les coordenades que fa servir per trobar la subtangent de les espirals, la concoide, la cissoide i la quadratriu són com les

[56] Després de trobar la tangent, donada l'equació de la corba, a partir de les propietats de la corba (amb proporcions, semblances de triangles, etc.) es calcula la subtangent. Vegeu RICCATI-SALADINI (1765-1767), capítol quart, llibre segon.

[57] A RICCATI-SALADINI (1765-1767), punts 13-15, capítol cinquè, llibre segon, es fa referència a Pappos. En alguns casos primer es resol el problema de forma geomètrica i després via diferències.

[58] Vegeu AGNESI (1748), p. 447 i el punt 110, dedicat a les evolutes.

escollides per L'Hôpital.[59] En el cas de la cicloide en dóna una resolució fent servir les mateixes coordenades que L'Hôpital i una altra utilitzant les coordenades ortogonals de Johann Bernoulli. En el punt 85 Agnesi calcula els extrems de la concoide (els tres casos), exemple que no surt en l'*Analyse* de L'Hôpital. En el punt 86 tracta els extrems de la semicicloide, com també fa L'Hôpital. Però mentre que Agnesi considera $dz = 0$ i $dz = \infty$, L'Hôpital només té present el cas $dz = 0$.[60] Agnesi també considera el cas de coordenades des d'un punt com, per exemple, en el punt 103, en cercar els punts d'inflexió i de retrocés de la concoide. Calcula els punts d'inflexió i de retrocés dels tres tipus de cicloide i concoide, de la *versiera* i de la paràbola cúbica. El capítol quart del tercer llibre es titula *Del càlcul de les quantitats logarítmiques i exponencials*. D'una banda, a partir de la diferència de la quantitat logarítmica defineix la diferència de la quantitat exponencial. D'altra banda, calcula la integral de la quantitat exponencial a partir del desenvolupament en sèrie de la logarítmica.

Lagrange: Generalment utilitza coordenades ortogonals. Lagrange aplica canvis de sistemes de coordenades. Només tracta amb corbes algèbriques, no amb transcendents: les còniques, la concoide, i equacions algèbriques en general. En general, la diferència de qualsevol funció *algèbrica* es pot expressar com $Pdx + Qdy + Rdz + \ldots$, on *P*, *Q*, *R*,... són funcions de les variables i de les diferències.

Saladini: Les fórmules de la tangent, etc. no només són vàlides per a corbes algèbriques, sinó també per a transcendents, per a les quals es tenen equacions diferencials de primer "grau", ja que mitjançant la seva equació es pot tenir en termes finits el valor de $\frac{dx}{dy}$. Per exemple, la *corba logarítmica*, l'equació diferencial de la qual, $dx = \frac{cdy}{y}$, dóna la subtangent, $c = \frac{ydx}{dy}$. Riccati tracta la diferenciació-integració en el cas de funcions hiperbòliques i circulars. Per exemple, troba la subtangent als *sinus* i *cosinus hiperbòlics* (punt 11, capítol I, llibre segon). Les corbes que apareixen en ambdues obres són les espirals (d'Arquimedes, logarítmica i hiperbòlica), la cicloide,

[59] Vegeu l'annex I.
[60] Vegeu L'HÔPITAL (1696), p. 43-44.

l'epicicloide, la concoide de Nicomedes,...[61] Els exemples de màxims i mínims i coincideixen i són a partir d'equacions algèbriques. Generalment Riccati i Saladini fan servir coordenades ortogonals. Per exemple, en el cas de la cicloide, prenen x sobre diàmetre del cercle generador (que és $2a$) i y igual al segment des del cercle fins la cicloide. Però també expressen la subtangent en el cas en què l'angle entre les coordenades no sigui recte.[62] En ocasions utilitzen coordenades des d'un punt, per exemple, en el cas de l'espiral d'Arquimedes (definida a partir del moviment d'un punt que es mou sobre un radi, i el radi gira descrivint la perifèria d'un cercle).[63] Caracteritzen els màxims i mínims i el cercle d'osculació, tant per al cas de coordenades ortogonals, com per al de coordenades des d'un focus. Fins i tot, donen la fórmula del radi osculador en el cas de coordenades formant qualsevol angle (indicant-ne el sinus i el cosinus).

5.4.4. PROBLEMES I APLICACIONS

Agnesi: Generalment proposa problemes de caire geomètric (vegeu, per exemple, els problemes de màxims i mínims, punts 87-93).[64] Agnesi, com feia L'Hôpital, dóna una proposició general que després aplica a diversos casos particulars. Els casos particulars corresponents a una sèrie de situacions geomètriques generals coincideixen bàsicament amb els presentats a l'*Analyse* (la cicloide, l'espiral d'Arquimedes, l'espiral logarítmica, la concoide, la companya del paraboloide de Descartes, la cissoide, la quadratriu). Agnesi dóna l'expressió analítica (equació) de la corba i, a partir d'allí, deriva i discuteix els casos possibles. En el punt 74 Agnesi afirma que el mètode de màxims i mínims també s'aplica per resoldre altres qüestions (geomètriques), com ara: (1) trobar d'entre els paral·lelepípedes amb un determinat volum aquell amb superfície mínima (punt 91) o bé, (2) trobar d'entre tots els cons inscrits en una esfera aquell amb màxima superfície convexa (punt 92). Aquests problemes apareixien en el text de L'Hôpital. Els

---

[61] Vegeu RICCATI-SALADINI (1765-1767), capítol quart, llibre segon; SALADINI (1775), capítol I, llibre segon.

[62] Vegeu RICCATI-SALADINI (1765-1767), punt 12, capítol primer, llibre segon; SALADINI (1775), punt 7, capítol I, llibre segon.

[63] Vegeu RICCATI-SALADINI (1765-1767), punt 14, capítol primer, llibre segon; SALADINI (1775), punt 8, capítol I, llibre segon.

[64] El primer volum està dedicat a problemes de llocs geomètrics, sòlids, i càlcul de tangents, extrems, etc. mitjançant l'àlgebra.

dos darrers volums de l'obra d'Agnesi contenen la integració d'equacions o fórmules diferencials i problemes sobre quadratures i rectificacions de corbes.

Lagrange: L'obra de Lagrange està dedicada principalment a la teoria algèbrica de les corbes. De problemes físics només he trobat el de determinar la posició que prendrà de forma natural un cos que penja d'una politja, en funció del seu pes.[65] Bàsicament encara es tracta de l'àlgebra "al servei" de la geometria. Lagrange també parla d'equacions diferencials. Els problemes (geomètrics) de màxims i mínims són molt semblants als que apareixen al llibre d'Agnesi. A partir d'un plantejament geomètric troba una *equació diferencial* que mostra la relació entre les diferències de x, y. A aquesta equació diferencial li correspon una *equació integral*: aplicant diferències a l'equació integral s'obté la diferencial. Els exemples (en especial, els de màxims i mínims) són més aviat geomètrics: donada una el·lipse, quin és el rectangle inscrit més gran?, de tots els paral·lepípeds de volum donat, quin és el de mínima superfície?, etc.

Saladini: Una part del llibre primer està dedicada a la quadratura i rectificació de corbes i a la integració de fórmules diferencials d'una sola variable. En el punt 3 del capítol III, Saladini divideix els problemes proposats als analistes en dos grups: 1) donada una fórmula qualsevol, trobar el seu diferencial; 2) donada una fórmula diferencial trobar el seu integral. Els problemes del primer tipus tenen resolució més universal que no pas els del segon. El llibre segon es titula *Del mètode directe i invers de les tangents i de les integracions de les equacions diferencials de primer grau*. Els capítols I-VII del llibre tercer estan relacionats amb les equacions diferencials. En particular, en el punt 12 del primer capítol, donada una equació amb dues constants, Saladini la diferencia i troba una equació diferencial on manca una de les constants present a l'equació donada. Si torna a diferenciar obté una equació diferencial de segon ordre,[66] on manquen les dues constants. D'aquesta manera també es pot fer desaparèixer una variable, un radical, una quantitat transcendent, etc. A més de les aplicacions ja vistes en relació a la corba, el llibre tercer també conté l'estudi de les càustiques per reflexió i refracció (capítol IX), el

[65] Vegeu LAGRANGE (1759), p. 15. Per a la solució proposada per L'Hôpital i Johann Bernoulli, vegeu l'annex II.

[66] Saladini diu "segon grau". Vegeu SALADINI (1775), punt 12, capítol I, llibre tercer.

càlcul de variacions (capítols XI i XII), les trajectòries (capítol XIII), els diferencials parcials (capítol XIV) i la integració de fórmules amb diferències finites (capítol XV).[67]

[67] A RICCATI-SALADINI (1765-1767) trobem les mateixes aplicacions. A més, en el capítol novè del llibre primer, dedicat al càlcul logarítmic i exponencial, he trobat alguns problemes curiosos. Per exemple, el punt 22 es proposa un problema aritmètic relacionat amb mesures de vi, que es resol a partir de logaritmes. Aquest problema coincideix amb el punt 166 del llibre tercer d'AGNESI (1748). El punt 23 presenta un problema sobre creixement poblacional amb una determinada raó, resolt també a partir de logaritmes.

6. GRAN BRETANYA

6.1. *AN INSTITUTION OF FLUXIONS* (1706) DE HUMPHRY DITTON

Humphry Ditton[1] (1675-1715) rebé educació privada, donada la seva extraordinària capacitat. Contra el seu desig, però per complaure el seu pare, esdevingué sacerdot. En part per motius de salut, en part degut a la mort del seu pare, Ditton abandonà el sacerdoci i es dedicà a les matemàtiques. De seguida va rebre el reconeixement dels científics de l'època, entre ells, Newton. Aquest darrer el va recomanar per a la plaça de professor de matemàtiques al Christ's Hospital de Londres. El 1706 va publicar *An Institution of Fluxions*. Aquest mateix any publicà un tractat sobre les lleis de la natura i del moviment, recomanat per Wolfius per ajudar a entendre l'obra de Galileu, Huygens i Newton. El 1709 Ditton publicà un llibre sobre àlgebra i el 1712 un tractat sobre perspectiva. També escrigué articles per a *Philosophical Transactions* (entre d'altres, "On the Tangents of Curves, deduced immediately from the Theory of Maxima and Minima", "On Spherical Catoptrics", ...). Fou el primer que va intentar explicar la capilaritat en termes matemàtics. Inventà un mètode per trobar la longitud, que en l'època no fou acceptat, tot i que comptava amb el recolzament de Newton i Leibniz.

An Institution of Fluxions consta de nou seccions:

- Secció I: *De la naturalesa de les fluxions*.
- Secció II: *De la relació i proporció de les fluxions*.
- Secció III: *De la notació de les fluxions*.
- Secció IV: *De les operacions amb fluxions*.
- Secció V: *De les fluxions segones*.
- Secció VI: *De les fluxions de logaritmes i quantitats exponencials*.
- Secció VII: *Del mètode invers, o de com trobar les quantitats fluents de les fluxions proposades*.
- Les dues darreres seccions no porten títol. Presenten problemes diversos.

[1] Les fonts biogràfiques consultades són BILLIE (1984) i WILKINS (2001).

Per què va tenir èxit?

W. W. Rouse Ball en *A Short Account of the History of Mathematics* diu que *An Institution of Fluxions* de Ditton i un llibre similar de William Jones (1675-1749), publicat el 1711, van jugar a Anglaterra el mateix paper que l'*Analyse* de L'Hôpital a França.[2] *An Institution of Fluxions* de Ditton es tornà a publicar el 1726. A les tres primeres dècades del segle hi havia un mercat molt limitat per als tractats de càlcul de fluxions, clarament degut a la publicació dels papers de Newton.

A quin públic anava dirigit?

Al prefaci Ditton afirma que ha escrit *An Institution of Fluxions* per ajudar l'estudiant que no domina aquesta matèria tan útil. En particular la secció novena presenta una sèrie de problemes adreçats al geòmetra jove.[3] Considera que hi havia necessitat d'un llibre així, per donar fonaments als principiants.

Va transcendir les fronteres de la seva terra?

No he trobat documentació sobre a quins idiomes es traduí *An Institution of Fluxions* ni si es va arribar a traduir.

Quina relació té amb l'Analyse?

No he trobat documentació que, d'alguna manera, relacioni Ditton amb l'*Analyse* de L'Hôpital.

6.2. *A TREATISE OF FLUXIONS* (1742) DE COLIN MACLAURIN

Colin Maclaurin[4] (1698–1746) començà a estudiar a la Universitat de Glasgow quan tenia nou anys. Allí, sota la influència del professor de matemàtiques Robert Simson

---

[2] Vegeu WILKINS (2001).
[3] Vegeu DITTON (1706), prefaci i p. 162.

(1687-1768) entrà en contacte amb Euclides i la geometria grega. Un cop graduat, va ser professor de matemàtiques a la Universitat d'Aberdeen i a la d'Edimburg, on destacà per les seves qualitats docents. Els seus llibres sobre àlgebra i fluxions van ser modèlics, mostrant la matèria des del rudiments fins a les darreres novetats i incloent-hi moltes aplicacions: *Geometrica Organica* (1720), *A Treatise of Fluxions* (1742), *Treatise on Algebra* (1748), *Account of Sir Isaac Newton's discoveries* (incomplet però publicat el 1750). Colin Maclaurin, juntament amb David Gregory (1659-1708) i Roger Cotes (1682-1716), va ser un gran defensor de les idees matemàtiques i físiques de Newton. Per això intentà fer un estudi crític i entenedor de les idees newtonianes. Durant una visita a Londres, Maclaurin conegué Newton. Fins i tot, Maclaurin fou escollit Fellow de la Royal Society i va ser Newton qui el recomanà com a professor de matemàtiques a la Universitat d'Edimburg, on dedicava algunes classes a l'ensenyament de les fluxions. Maclaurin visqué durant la Il·lustració escocesa, la qual cosa facilità la seva projecció internacional. Estava en contacte amb els matemàtics francesos, rebé dos premis de l'Académie des Sciences de Paris (el segon dels quals compartí amb Leonhard Euler i Daniel Bernoulli), fundà el que després de la seva mort esdevindria la Royal Society d'Edimburg, ... Per tant, no és estrany que els seus textos fossin esperats i llegits en el Continent. El 1720 publicà *Geometria Organica* (una descripció de les línies corbes a partir del moviment continu). El 1742 apareix el *Treatise of Fluxions*, el 1748 el *Treatise on Algebra* i el 1750 *Account of Sir Isaac Newton's Discoveries* (incomplet). També publicà diversos articles a *Philosophical Transactions*.

El *Treatise of Fluxions* fou escrit per defensar el càlcul de Newton contra l'atac de Berkeley. De fet, Maclaurin admetia que l'exposició de Newton era massa concisa i poc entenedora. Aquest tractat consta de dos llibres. El primer llibre (articles 1-698), *The Elements of the Method of Fluxions, Demonstrated after the Manner of the Ancient Geometricians*, utilitza els mètodes geomètrics dels Antics i el mètode d'exhaustió d'Arquimedes per donar fonament rigorós al càlcul newtonià. En canvi, el segon llibre (articles 699-937), *On the Computations in the Method of Fluxions*, presenta el càlcul newtonià des d'un punt de vista algèbric (algorismes, notació simbòlica, aplicacions), més en la línia duta a terme en el Continent. La visió històrica estàndard considera que

---

[4] Les fonts biogràfiques consultades són TURNBULL (1947), BILLIE (1984), GIORELLO (1992), GRABINER (1997) i O'CONNOR-ROBETSON (1999).

el treball de Maclaurin va ser lloable però de poca influència.[5] Grabiner, però, en destaca el seu doble caràcter, el seu rol de pont entre la física de Newton i el simbolisme algèbric del Continent, de reconciliador entre el nou i el vell.[6] Així, segons Giorello, el caràcter revolucionari de Maclaurin prové de combinar noves aplicacions amb el rigor dels antics.[7] El segon llibre és el que comentaré amb més detall. Conté els capítols següents:

- Capítol I: *De les fluxions de quantitats considerades abstractament com representades pels caràcters generals de l'Àlgebra*.
- Capítol II: *De la notació de les fluxions, de les regles del mètode directe, de les regles fonamentals del mètode invers, de les sèries infinites,...*
- Capítol III: *De l'analogia entre sectors el·líptics i hiperbòlics, de la resolució de trinomis en divisors quadràtics,...*
- Capítol IV: *De l'àrea quan l'ordenada ve expressada per fluents, de l'àrea quan l'ordenada i la base vénen expressades per fluents,...*
- Capítol V: *De les regles generals per a la resolució de problemes per computació, amb exemples*.

Grabiner descriu les tècniques de Maclaurin com una combinació de l'àlgebra de desigualtats i de sèries de potències (de fet, reducció a l'absurd). Grabiner també en destaca alguns exemples que apareixen al tractat de Maclaurin: atracció d'esferoides; la fórmula de sumació d'Euler-Maclaurin; integrals el·líptiques.[8]

Per què va tenir èxit?

Maclaurin va pertànyer a la Il·lustració escocesa. Això afavorí la seva influència sobre el Continent i motivà els seus contactes internacionals. El *Treatise of Fluxions* jugà un paper de pont entre el mètode dels grecs i el càlcul newtonià. Degut a la quantitat d'aplicacions que hi apareixen, el *Treatise* de Maclaurin representa una innovació. La major part del capítol cinquè del llibre segon (*De les regles generals per a la resolució*

[5] Vegeu GRABINER (1997), p. 394; O'CONNOR-ROBERTSON (1999).
[6] Vegeu GRABINER (1997), p. 394.
[7] Vegeu GIORELLO (1992), p. 156.
[8] Vegeu GRABINER (1997), p. 398.

de problemes) està dedicada a les aplicacions del càlcul. A més del centre de curvatura i càustiques, tracta les forces centrípetes, trajectòries descrites per forces, moviments en determinats medis, gravitació, molins de vent, vibració d'acords musicals, navegació, etc.

A quin públic anava dirigit?

El motiu original de l'elaboració del *Treatise* va ser la defensa del càlcul de Newton enfront de l'atac de Berkeley. També fou un intent de fer-lo més entenedor. Maclaurin interpreta les fonts del model (en aquest cas, Newton) en resultar originàriament ambigües.[9]

Va transcendir les fronteres de la seva terra?

El pare jesuïta Pézénas va traduir diversos treballs anglesos al francès. El 1749 tradueix *A Treatise of Fluxions* de Maclaurin al francès, traducció que sembla ser que utilitzà Lagrange.[10] El 1765 n'apareix una altra traducció (parcial) al francès. El text de Maclaurin fou molt lloat per Lacroix pel seu doble caràcter geomètric-analític, així com també per Euler, Clairaut, D'Alembert, Lagrange... Quant als autors alemanys, Kästner i Tempelhoff esmenten el tractat de Maclaurin en les seves obre, en parlar dels punts d'inflexió i la curvatura, i els límits de les proporcions, respectivament. Maclaurin era un membre respectat de la xarxa internacional de matemàtics. El seu tractat era esperat, va ser llegit i, en particular, va ser llegit pels grans del Continent.

Quina relació té amb l'Analyse?

Diverses vegades Maclaurin fa referència a l'*Analyse des infiniment petits* de L'Hôpital. Per exemple, en l'article 268 esmenta la classificació dels punts de retrocés que fa l'autor de l'*Analyse des infiniment petits*.[11] Més endavant, en l'article 864 també el menciona a propòsit de l'expressió 0/0.

[9] Vegeu GIORELLO (1992), p. 140.
[10] Vegeu GRABINER (1997), p. 395.
[11] Vegeu MACLAURIN (1742), article 268.

6.3. *THE DOCTRINE AND APPLICATION OF FLUXIONS* (1750) DE THOMAS SIMPSON

Thomas Simpson[12] (1710-1761) és recordat especialment per les seves aportacions a la interpolació i a la integració numèrica. Va començar treballant com a teixidor, com el seu pare. Posteriorment, per influència d'un endeví, s'interessà per l'aritmètica, l'àlgebra i la geometria dels almanacs, i esdevingué l'oracle de Bossworth. El 1736 es traslla a Londres. Fou el més distingit membre d'un grup de conferenciants itinerants que ensenyava a les *coffee-houses* de Londres. Amb els seus coneixements d'àlgebra i geometria va ser capaç de començar a llegir el *Ladies' Diary*. De fet, les seves primeres contribucions matemàtiques van ser publicades en aquest diari, del qual esdevingué editor el 1754. Degut a la seva posició, mantingué una extensa correspondència amb d'altres matemàtics de l'època i va entrar en coneixement del mètode de fluxions.

A través de Jones, el 1743 obté plaça de professor de matemàtiques a la Royal Military Academy de Woolwich. El 1745 fou escollit Fellow de la Royal Society. El 1737 va publicar *A New Treatise of Fluxions*. El 1750 publica *The Doctrine And Application Of Fluxions*, que és més complet i entenedor que l'anterior. A més, els temes principals són tractats de forma diferent. Entre d'altres també publicà els següents llibres: *The Nature and Laws of Chance* (1740), *Treatise of Algebra* (1745), *Elements of Geometry* (1747), *Trigonometry* (1748), *Miscellaneous Tracts* (1757). En general, Simpson fou un gran defensor del mètode analític d'investigació.[13] Tot i que Simpson en el seu tractat accepta el fonament cinemàtic de Maclaurin, no té intenció de confinar-se al limitat camp de les matemàtiques geomètricament interpretades. Entre 1755 i 1758 Simpson publica articles sobre sèries i problemes "isoperimètrics" a *Philosophical Transactions*. Simpson tracta les sèries com a expressions algèbriques, independentment de la seva interpretació numèrica. En el prefaci de *Miscellaneous Tracts* afirma que allà on sigui possible i preferible, utilitzarà la geometria per demostrar un resultat. Sinó, farà servir

[12] Les fonts biogràfiques que he consultat són GILLISPIE (1970), BILLIE (1984) i O'CONNOR-ROBERTSON (1999).

[13] GUICCIARDINI (1989), pp. 83-84.

l'àlgebra, per ser el mètode més directe i extensiu, i millor adaptat a les especulacions tractades.[14] *The Doctrine And Application of Fluxions* consta de dues parts:

PART I:
- Secció I: *De la naturalesa, i investigació, de les fluxions*.
- Secció II: *De l'aplicació de les fluxions a la solució dels problemes de màxims i mínims*.
- Secció III: *De l'ús de les fluxions per traçar tangents a corbes*.
- Secció IV: *De l'ús de les fluxions per determinar punts de "retrogressió" o d'inflexió de les corbes*.
- Secció V: *De l'ús de fluxions per determinar radis de curvatura i evolutes de corbes*.

PART II:
- Secció VI: *Integració*.
- Secció VII: *Fluxions per trobar àrees de corbes*.
- Secció VIII: *Rectificació de corbes*.
- Secció IX: *Investigar els continguts dels sòlids*.
- Secció X: *Trobar les superfícies de cossos sòlids*.
- Secció XI: *Centres de gravetat, percussió i oscil·lació*.
- Secció XII: *Determinació del moviment de cossos afectats per forces centrípetes*.

Segons Guicciardini, el tractat de Simpson és el més avançat dels que van aparèixer en el període 1736-1758.[15] La primera part cobreix les matèries usuals dels altres tractats i pot ser considerada en ella mateixa com un tractat elemental: fonaments, notació, regles de diferenciació i integració amb sèries de potències i aplicacions a la geometria i la mecànica. La segona part és més avançada: integrals de Cotes, atracció d'esferoides... Només analitzaré les quatre primeres seccions de la PART I.

✓ *Per què va tenir èxit?*

Simpson va tenir bastant d'èxit com a professor de matemàtiques (especialment a Woolwich). També tenia una certa posició dins de les matemàtiques de la Gran Bretanya: va ser Fellow de la Royal Society, i a partir del 1754 fou l'editor del *Ladies'*

[14] Vegeu SIMPSON (1757), prefaci.

Diary, la qual cosa va ampliar la seva correspondència amb altres matemàtics. A més de *The Doctrine And Application Of Fluxions*, va publicar els següents llibres de text: *Algebra*, *Geometry* i *Trigonometry*. Tots tres van esdevenir *best-sellers*, tant degut a la posició que ocupava Simpson com per les matèries tractades. Arran de la publicació de *A New Treatise of Fluxions* el 1737 Robert Heath el va acusar de plagi. És probable que aquest fet també ajudés a fer publicitat del llibre de Simpson. L'obra de Simpson s'editià diversos cops (1776, 1805, 1823).

A quin públic anava dirigit?

En el prefaci del tractat, Simpson afirma que, en confeccionar-lo, "la facilitat i benefici del jove principiant han estat particularment consultades" (SIMPSON (1750), p. 4 del prefaci).

Va transcendir les fronteres de la seva terra?

El pare jesuïta Tomàs Cerdà escrigué el *Tratado de las Fluxiones* que, segons Don Eulogio Hernández Alonso, sembla ser una traducció de *The Doctrine and Applications of Fluxions* de Thomas Simpson.[16] En general els llibres de text de Simpson tingueren molt d'èxit a Gran Bretanya i al Continent. Es van editar diversos cops en anglès. També en van aparèixer diverses edicions americanes, franceses i alemanyes.

Quina relació té amb l'Analyse?

L'*Analyse* va ser el primer llibre sobre el càlcul que llegí Simpson. La qual cosa indica que era conscient de la importància dels matemàtics del Continent.

[15] Vegeu GUICCIARDINI (1989), p. 58.
[16] Vegeu CUESTA (1976-1983), p. 250.

6.4. ANÀLISI COMPARATIVA DELS TEXTOS

6.4.1. COM EXPOSA ELS FONAMENTS DEL CÀLCUL?

Ditton: Ditton creu que el Mètode de Fluxions és més clar i convincent que el Càlcul Diferencial. Tot i que els resultats pràctics d'ambdós mètodes són els mateixos, critica els infinitament petits, ja que en no parlar en termes de velocitat, aquestes quantitats són infinitament divisibles. Per això diu que les fluxions són gairebé com els increments de les quantitats fluents i parla de relacions de proporcionalitat entre fluxions en lloc d'igualtats. Dóna importància a la raó primera dels increments en el primer moment de la seva generació. El càlcul de fluxions es basa a trobar la relació entre les velocitats dels moviments generadors. En la primera secció analitza com es generen les línies, les superfícies i els sòlids mitjançant el *moviment*: quantitats considerades com a descrites per moviment continu (d'un punt, una línia i una superfície respectivament), i no com la suma total d'un nombre infinit de petits elements constituents. Un punt es pot considerar com a resultat de la composició de dos moviments. En la secció quarta dedueix a partir dels moments o increments ($o\dot{x}$ és una magnitud multiplicada per velocitat) les fluxions de les operacions fonamentals. En lloc de *x* col·loca $x + o\dot{x}$, si la quantitat creix, i $x - o\dot{x}$, si la quantitat decreix; a l'expressió resultant li resta l'expressió en *x*, divideix per la magnitud o i finalment fa que o sigui zero. Com afirma Ditton en la portada de la seva obra, la seva exposició dels fonaments es basa en el *De quadratura* de Newton.[17]

Maclaurin: En el primer llibre, recorre als mètodes geomètrics dels Grecs, al mètode d'exhaustió d'Arquimedes i al moviment (geometria cinemàtica) per donar base rigorosa al càlcul de Newton, evitant els indivisibles i els infinitament petits. El temps i l'espai són concebuts de manera clara, intuïtiva. La velocitat uniforme es defineix a partir de l'espai descrit en un determinat temps. Atès que el moviment és susceptible de variacions, la velocitat creix o decreix. La velocitat en qualsevol terme temporal és mesurada per l'espai que descriuria en un temps donat, si el moviment continués uniformement a partir d'aquest terme (concepte de velocitat instantània, que ataca

Berkeley). La idea de fluxió, segons Maclaurin, sembla aplicable de forma immediata sobre magnituds geomètriques, més que sobre quantitats expressades de forma algèbrica. En el segon, en canvi, aprofita el poder algorísmic del mètode de fluxions per resoldre problemes i defensa la utilització dels símbols per promoure la claredat i la concisió. Tanmateix, al text de Maclaurin també trobem la confusió entre fluxions i diferencials: al capítol sobre la notació, Maclaurin afirma que $\dot{x}$ (notació newtoniana) i *dx* (notació leibniziana) representen la fluxió de *x*.[18] En general, justifica les fórmules per a les fluxions mitjançant el mètode d'exhaustió. En aquest sentit exposo com justifica Maclaurin la fórmula de la fluxió del producte: al punt 707 demostra que la fluxió de *AA* és 2*Aa* (on *a* és la fluxió de *A*). La successió de valors de *A* és: $A-a, A, A+a$, etc. Per tant, la successió de valors de *AA* és: $AA-2Aa+aa, AA, AA+2Aa+aa$, etc. Fent servir un resultat anterior (punt 704) veu que la fluxió de *AA* no pot ser més gran que $2Aa+aa$ ni més petita que $2Aa-aa$. Per exhaustió acaba demostrant que ha de ser igual a $2Aa$. Al punt següent demostra que la fluxió del binomi $\overline{A+B}^2$ (que, desenvolupat, és igual a $AA+2AB+BB$) és $2\times\overline{A+B}\times\overline{a+b}$ o $2Aa+2Bb+2Ba+2Ab$. Com que ja ha justificat la fórmula de la fluxió de la suma i de *AA*, la fluxió de $AA+BB$ és $2Aa+2Bb$. Així la fluxió de $2AB$ és $2Ba+2Ab$ i, en conseqüència, la de *AB* és $Ba+Ab$. No obstant això, a partir del segon capítol del llibre segon farà servir l'algorisme computacional (regles per trobar les fórmules de fluxions amb notació algèbrica).

Simpson: Dóna els principis bàsics, però no els demostra. L'interessa més exemplificar la seva utilitat amb aplicacions. Per demostrar la fórmula de la fluxió del producte *xy*, considera el rectangle generat pel *moviment* de dues rectes perpendiculars, *x* (sobre l'eix horitzontal), *y* (sobre l'eix vertical). Considera el camí que segueix el punt d'intersecció d'aquestes dues rectes, *H*.

---

[17] A més de la portada, Ditton també fa referència al *De Quadratura* de Newton a la p. 13.
[18] Vegeu MACLAURIN (1742), p. 592.

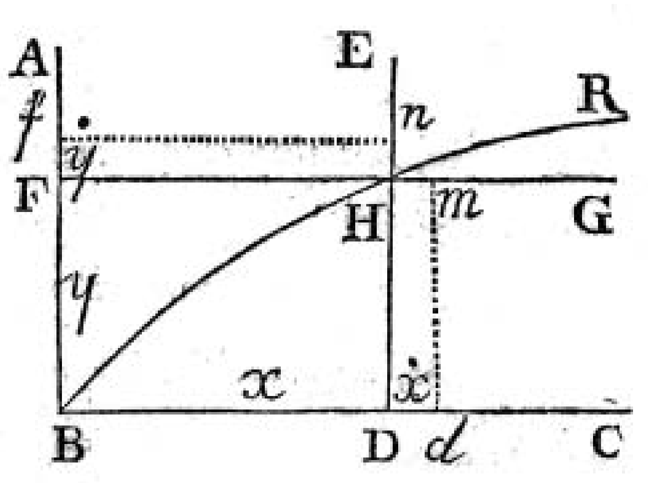


Figura 1

La fluxió de l'àrea *BDH* és el rectangle *Dm*, és a dir, $y\dot{x}$. La fluxió de l'àrea *BFH* és el rectangle *Fn*, és a dir, $x\dot{y}$. Així doncs, la fluxió del rectangle $xy = DF = BDH + BFH$ és la suma de les fluxions dels rectangles *BDH* i *BFH*. També demostra aquesta fórmula per un altre camí, prenent el quadrat de $z = x + y$ i considerant $xy = \frac{1}{2}z^2 - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}y^2$, les fluxions de les potències ja les ha calculat abans.

Fluent

Ditton: Les *línies fluents* són aquelles que estan en continu flux i canvi, creixent o bé decreixent.

Maclaurin: Al primer llibre Maclaurin considera magnituds geomètriques, concebudes de forma natural a partir del moviment (línies generades pel moviment d'un punt, superfícies generades pel moviment d'una línia, etc., prenent el flux del temps com a constant).

Simpson: Considera totes les magnituds com a generades pel moviment continu d'algun dels seus extrems.

Fluxió

Ditton: Ditton defineix *fluxió* com la velocitat dels increments dels fluents, considerats no com a generats de fet, sinó com a *nascentia* (començant a ser generats, primer moment de la seva generació). Existeix una gran diferència entre aquests increments i els increments finits (o reals, o generats de fet). Les fluxions estan en la mateixa proporció que la raó primera dels increments *nascentia* (o raó última dels increments *evanescentia*). Les fluxions no són els increments dels fluents, però les fluxions són proporcionals als increments, quan es consideren partícules de temps extremadament petites i acceleració nul·la. La secció segona tracta de la relació i la proporció entre fluxions. Ditton diu que una fluxió no "és igual a..." de forma absoluta, sinó que s'ha de tractar en termes de proporcions ("és com..."). La secció vuitena està dedicada precisament a problemes sobre *raons* entre fluents i fluxions. Si la quantitat x experimenta un increment o, l'expressió $o\dot{x}$ és el *moment* de x. Quan només hi ha una variable, x, passa a ser $x+o$. Però quan hi ha més variables, com que no creixen al mateix temps, l'increment depèn de la variable i la quantitat fluent x esdevé en el moment següent $x+o\dot{x}$. És necessària una expressió de l'increment en un mateix moment, pròpia de cada fluent, doncs o no pot representar tots els increments (de diferents magnituds) que experimenten els fluents.

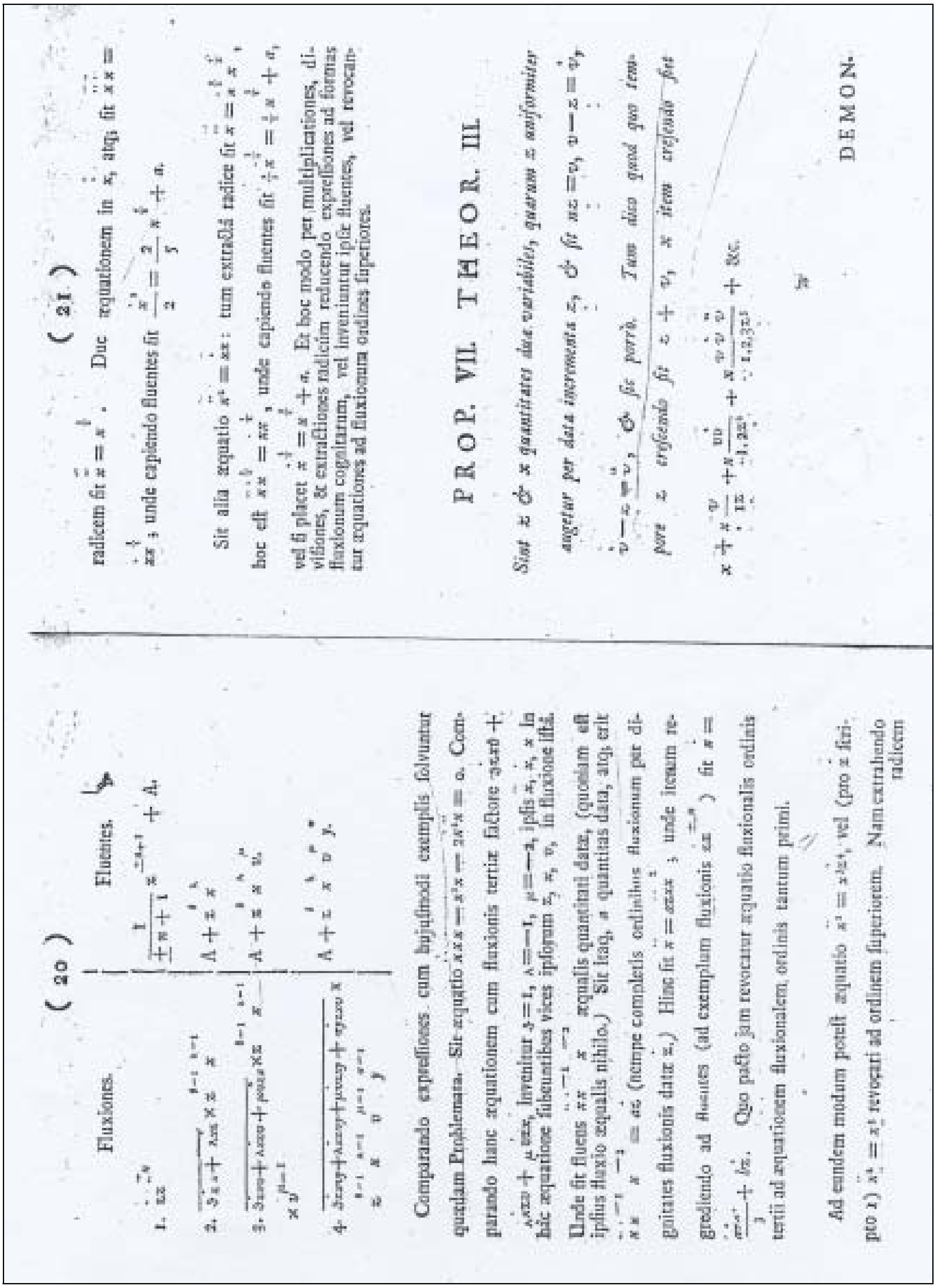
Maclaurin: El punt 11 del llibre primer parla de *fluxió* com la velocitat amb què una quantitat flueix en qualsevol moment de la seva generació, mesurada per l'increment o decrement que generaria en un moment donat pel moviment si continués de manera uniforme a partir d'aquest terme sense acceleració ni retardació. Al punt 701 (llibre segon) defineix les fluxions de quantitats com les mesures de les seves respectives raons d'increment o decrement, mentre varien (o flueixen) al mateix temps.

Simpson: *Fluxió* és la magnitud en què una quantitat fluent seria incrementada de forma uniforme en una porció de temps donada, amb la velocitat generadora en la posició proposada, o instant (si a partir d'aquí continués de forma invariable). És a dir, considera la fluxió com la velocitat instantània (com Maclaurin). Estudia la fluxió de x^n, primer si el moviment és uniforme, i després si el moviment és uniformement accelerat o retardat.

Teorema de Taylor

El 1715 Brook Taylor (1685-1731) publica *Methodus Incrementorum Directa & Inversa*. Al prefaci fa referència al *Methodus fluxionum* de Newton, a Cavalieri i a Wallis, i parla del moviment perpetu i del mètode d’exhaustió. També hi afirma que la raó dels increments “naixents” és igual a la raó de les velocitats de les magnituds que descriuen. A la primera part del *Methodus Incrementorum*, Taylor considera el pas de diferències o increments finits a fluxions. Per calcular les fluxions de fórmules pren els increments evanescents o naixents com a *zeros*, com més tard farà Euler al Continent. Taylor entén les fluxions com a raons primeres (o naixents) i últimes (o evanescents). Farà servir sèries per a la resolució d’equacions integrals i equacions fluxionals. De fet, a la proposició setena demostra la fórmula del desenvolupament en sèrie que porta el seu nom. En aquesta part fa referència al *De quadratura* de Newton. A la segona part, Taylor mostra l’aplicació del mètode a problemes matemàtics i físics: interpolació; fluxions de figures geomètriques; tangents; radis de curvatura; quadratures; àrees màximes; cordes vibrants; centres d’oscil·lació, densitat de l’atmosfera, refracció de la llum, etc.

Atès que el *Methodus Incrementorum* principalment es dedica a la resolució d’equacions integrals i fluxionals mitjançant sèries, i que els problemes que hi apareixen es resolen en la seva majoria mitjançant el mètode invers (de fet, només hi apareix un punt on Taylor tracta les tangents i un punt on tracta el radi de curvatura, i manca, per exemple, l’estudi de màxims i mínims), no l’he inclòs en la meva tesi. Tanmateix, el teorema de Taylor és una part fonamental de la descripció i comparació del corpus teòric dels textos analitzats. La seva utilització o no per part dels autors, l’he presa com un dels indicadors per decidir si el llenguatge emprat era més aviat algèbric o geomètric. Per aquesta raó, m’ha semblat adient dedicar aquestes línies a l’obra de Taylor en el capítol dedicat a Gran Bretanya i reproduir la proposició VII, on Taylor enuncia i demostra el teorema que porta el seu nom.



(20)

Fluxiones.	Fluentes.
1. [illegible]	$\frac{1}{\pm n+1} z^{\pm n+1} + A$.
2. [illegible]	$A + z x$
3. [illegible]	$A + z x v$.
4. [illegible]	$A + z x v y$.

Comparando expressiones cum hujusmodi exemplis solvuntur quædam Problemata. Sit æquatio $x x x - x^2 x - 2x^2 x = 0$. Comparando hanc æquationem cum fluxionis tertiæ factore [illegible] + [illegible], invenitur $3=1$, $\lambda=-1$, $\mu=-2$, ipsis x, x, x in hâc æquatione subeuntibus vices ipsorum z, x, v, in fluxione istâ. Unde fit fluens [illegible] æqualis quantitati datæ, (quoniam est ipsius fluxio æqualis nihilo.) Sit itaq; a quantitas data, atq; erit [illegible] $= az$ (nempe completis ordinibus fluxionum per dignitates fluxionis datæ z.) Hinc fit $x = azxx$; unde iterum regrediendo ad fluentes (ad exemplum fluxionis [illegible]) fit $x = \frac{az^3}{3} + bz$. Quo pacto jam revocatur æquatio fluxionalis ordinis tertii ad æquationem fluxionalem ordinis tantum primi.

Ad eundem modum potest æquatio $x^2 = x^3 z^2$, vel (pro z scripto 1) $x^2 = x^3$ revocari ad ordinem superiorem. Nam extrahendo radicem

(21)

radicem fit $x = x^{\frac{3}{2}}$. Duc æquationem in x, atq; fit $x x = x x^{\frac{3}{2}}$; unde capiendo fluentes fit $\frac{x^2}{2} = \frac{2}{5} x^{\frac{5}{2}} + a$.

Sit alia æquatio $x^2 = x x$: tum extractâ radice fit $x = x^{\frac{1}{2}} x^{\frac{1}{2}}$, hoc est $x x^{-\frac{1}{2}} = x x^{\frac{1}{2}}$, unde capiendo fluentes fit $\frac{2}{1} x^{\frac{1}{2}} = \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} + a$, vel si placet $x^{\frac{1}{2}} = x^{\frac{3}{2}} + a$. Et hoc modo per multiplicationes, divisiones, & extractiones radicûm reducendo expressiones ad formas fluxionum cognitarum, vel inveniuntur ipsæ fluentes, vel revocantur æquationes ad fluxionum ordines superiores.

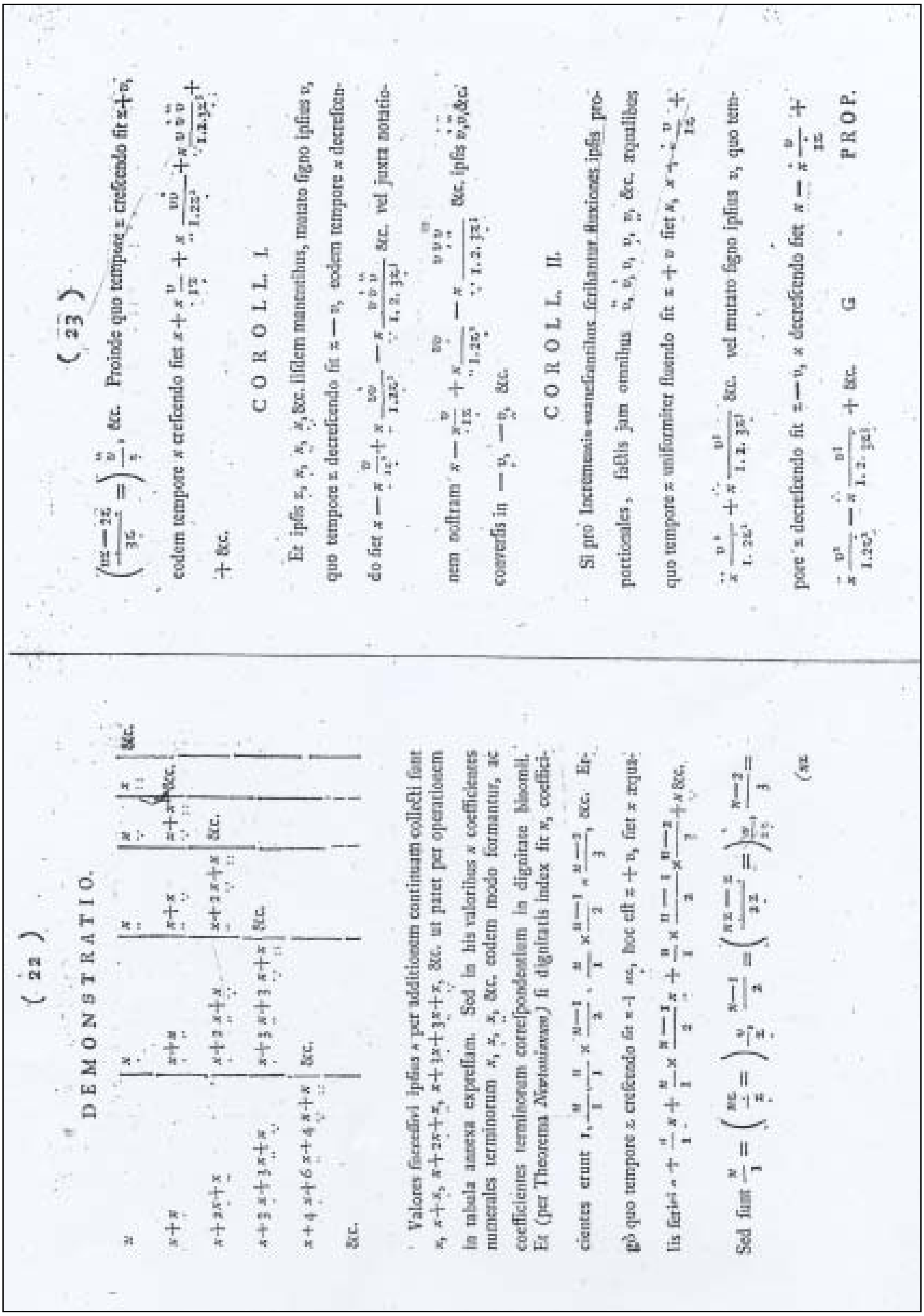
PROP. VII. THEOR. III.

Sint z & x quantitates duæ variabiles, quarum z uniformiter augetur per data incrementa z, & sit nz = v, v − z = v, v − z = v, & sic porrò. Tum dico quod quo tempore z crescendo fit z + v, x item crescendo fiet

$$x + x\frac{v}{1z} + x\frac{vv}{1.2z^2} + x\frac{vvv}{1.2.3z^3} + \&c.$$

DEMON.

Reproducció de la proposició VII del *Methodus Incrementorum Directa et Inversa* (1)



Reproducció de la proposició VII del *Methodus Incrementorum Directa et Inversa* (2)

De les obres britàniques que he analitzat, dues són posteriors al *Methodus Incrementorum*: *A Treatise of Fluxions* de Maclaurin i *The Doctrine and Application of Fluxions* de Simpson. Tanmateix, en la seva obra Simpson no fa servir el teorema de Taylor. En canvi, Maclaurin el demostra i, més endavant, l'aplica en la discussió dels extrems.

Maclaurin: El punt 751 conté el teorema de Taylor i la seva demostració. Sigui y una quantitat qualsevol que pot ser expressada per una sèrie de la forma $A+Bz+Cz^2+Dz^3+\text{etc.}$, on A, B, C, etc. són coeficients constants. Si E és el valor de y quan z s'anul·la i els valors respectius de les fluxions d'ordre superior són $\dot{E}, \ddot{E}, \dddot{E}$, etc. (suposant que z flueix de manera uniforme), aleshores:

$$y = E + \frac{\dot{E}z}{\dot{z}} + \frac{\ddot{E}z^2}{1\times 2\dot{z}^2} + \frac{\dddot{E}z^3}{1\times 2\times 3\dot{z}^3} + \frac{\ddddot{E}z^4}{1\times 2\times 3\times 4\dot{z}^4} + \text{etc.}$$

Maclaurin justifica aquesta fórmula de la maner següent. Atès que $y = A+Bz+Cz^2+Dz^3+\text{etc.}$, quan $z=0$ llavors $A=y$. Però suposant que E és igual a y, es té que $A=E$. Prenent les fluxions i dividint per $\dot{z}$ aleshores:

$$\frac{\dot{y}}{\dot{z}} = B + 2Cz + 3Dz^2 + \text{etc.}$$

Quan $z=0$ s'obté l'expressió del coeficient B: $B = \frac{\dot{y}}{\dot{z}} = \frac{\dot{E}}{\dot{z}}$. Prenent les fluxions novament i dividint per $\dot{z}$ aleshores:

$$\frac{\ddot{y}}{\dot{z}^2} = 2C + 6Dz + \text{etc.}$$

Fent $z=0$ i substituint $\ddot{y}$ per $\ddot{E}$ es té l'expressió del coeficient C: $C = \frac{\ddot{E}}{2\dot{z}^2}$.

D'aquesta forma es van obtenint els coeficients del desenvolupament en sèrie de la quantitat y. Maclaurin afirma que aquesta proposició es pot deduir a partir del teorema del binomi.

Ordre superior

Ditton: El càlcul de les segones fluxions el trobem en la secció cinquena. $o\ddot{z}$ és el moment del fluent $\dot{z}$ (escoli I, secció cinquena). En treballar amb fluxions d'ordre superior Ditton recomana que algun dels fluents flueixi de manera uniforme, és a dir, que la seva primera fluxió sigui constant. De fet, a l'article cinquè de la secció cinquena ell diu que sigui "unitat", perquè els increments són iguals. Ditton defensa l'*homogeneïtat*, de manera que s'ha de completar l'expressió fluxional (mitjançant fluxió de fluent uniforme) per tal que tots els termes tinguin el mateix ordre. A l'hora d'escollir quina és la variable que flueix uniformement, és millor prendre aquella que faci desaparèixer més termes quan la magnitud o s'anul·la. Relaciona les fluxions segones, terceres, ... amb els termes del desenvolupament del binomi.[19]

Maclaurin: Quant a les fluxions d'ordre superior Maclaurin recomana que una de les quantitats variables flueixi de forma uniforme, és a dir, que la seva fluxió sigui constant. També dóna regles per calcular fluxions d'ordre superior sense haver de recórrer al càlcul de les precedents. Per exemple, la fluxió d'ordre m de x^n és $n \times \overline{n-1} \times \overline{n-2} \times \overline{n-3} \times \text{etc.} \times \dot{x}^m x^{n-m}$ (punt 733). Al punt 734 exposa alguns resultats (teoremes) que ajuden a trobar les fluxions d'ordre superior sense haver de trobar-ne les anteriors. Per exemple, les fluxions de *xy* en relació amb les potències del binomi $1+1$. És a dir, relaciona les fluxions d'ordre superior amb els coeficients del binomi.

Simpson: Defineix les fluxions d'ordre més alt: "les mesures de les velocitats per a les quals les seves respectives quantitats fluents, les fluxions d'ordre precedent, són generades" (punt 18). En dóna exemples primer, prenent la fluxió de *x* com a constant i després, com a variable. Però comenta que a l'hora de resoldre problemes és convenient considerar la fluxió de *x* constant tant per evitar problemes com per estandarditzar la situació (Secció I).

[19] Vegeu l'article VIII de la secció cinquena de DITTON (1706).

Diverses variables

Ditton: A la secció quarta proposa trobar les fluxions de l'equació $x^3 - xyy + aaz - b^3 = 0$:

- en *x*: $3x^2 \dot{x} - \dot{x} yy$,
- en *y*: $-2xy \dot{y}$,
- en *z*: $aa \dot{z}$.

Simpson: En el punt 45 Simpson determina els màxims i els mínims d'expressions amb dues o més quantitats indeterminades, independents entre sí, fent fluir aquestes quantitats una a una, mentre les altres es suposen invariables. L'exemple que proposa és trobar els valors de *x*, *y*, *z* que facin màxima l'expressió $\overline{b^3 - x^3} \times \overline{x^2 z - z^3} \times \overline{xy - y^2}$. Primer fa fluir la quantitat *y*, mentre que la resta queda invariable, i igualant l'expressió resultant a zero. Després procedeix de manera anàloga, fent variar ara la quantitat *z*. D'aquesta manera obté una equació només en termes de *x*. Segons Simpson, la justificació d'aquest procediment és òbvia. Si la fluxió de l'expressió donada no s'igualés a zero, quan una de les quantitats es considera variable, l'expressió podria ser major, sense alterar els valors de la resta de quantitats, considerades constant. I no s'obté el major valor possible, tret de quan la fluxió s'anul·la. En el punt 27 Simpson proposa trobar el màxim d'una expressió en dues variables, *x*, *y*, que verifiquen una condició particular. Substitueix la condició en l'expressió i així passa a tenir un problema de càlcul del màxim per a una expressió amb un sola variable.

Mètode directe i invers

Ditton: La secció setena correspon a l'estudi del mètode invers de les fluxions (o càlcul del fluent d'una fluxió proposada). En la secció VIII justifica algunes propietats (referents a proporcions) de les fluxions mitjançant el mètode invers.

Maclaurin: En el punt 735 defineix el mètode invers de fluxions: trobar el fluent quan la fluxió ve donada. Parla de la constant d'integració. Dels punts 736 a 744 presenta exemples del que ara anomenaríem integrals semi-immediates. Si un fluent no es pot representar de forma acurada en termes algèbrics, s'expressa a partir d'una sèrie convergent (punt 745) o partir del teorema del binomi de Newton (punt 748) o de Taylor (punt 751). Els capítols III i IV estan dedicats a trobar fluents i aquí Maclaurin identifica una àrea amb un fluent.

Simpson: La secció sisena està dedicada al mètode invers. I la setena tracta les fluxions per trobar les àrees de corbes.

Tangents[20]

Ditton

Definició: La tangent és la secant quan els dos punts de tall de la recta amb la corba coincideixen.

Determinació de la tangent

La secció II es titula *De la relació i proporció de les fluxions*. Les fluxions són "proporcionals a", o en la raó primera dels increments, generats en un instant de temps. Però també hi ha rectes de longitud finita a les quals les fluxions també poden ser proporcionals. En l'article IV d'aquesta secció, suposant que l'ordenada es mou de manera uniforme, troba les següents relacions:

1) La fluxió de l'ordenada és a la fluxió de l'abscissa com l'ordenada és a la subtangent.
2) La fluxió de la corba és a la fluxió de l'ordenada com la tangent és a l'ordenada.
3) La fluxió de la corba és a la fluxió de l'abscissa com la tangent és a la subtangent.

Aquestes proporcions les justifica a partir de raons últimes obtingudes mitjançant el triangle *evanescent*, que primer tracta com un cas de triangle finit, al qual aplica després el moviment uniforme.

Maclaurin

Definició: En el capítol VII del llibre I (De les tangents de les línies corbes) defineix concavitat d'un arc de corba: un arc de corba té la seva concavitat girada en un sentit

[20] Al *Methodus Incrementorum* Taylor treballa amb el triangle *nascentia*, que té la hipotenusa sobre la tangent a la corba, i els catets sobre els increments de l'abscissa i l'ordenada, i que és semblant al

quan les línies rectes que uneixen dos punts qualssevol de la corba (és a dir, les cordes) estan totes sobre un mateix costat de la corba, o mentre algunes cauen sobre la corba mateixa, cap cau del costat oposat. La tangent és una recta que toca un arc de corba de tal manera que no pot ser dibuixada cap altra recta pel punt de contacte entre la tangent i l'arc de corba, o dins l'angle de contacte format per la tangent i l'arc. La tangent i la corda corresponent es troben en costats diferents de l'arc, i quan l'arc té la seva concavitat girada en un sentit, la tangent en el punt està sobre el costat convex.

Determinació de la tangent

El capítol cinquè del segon llibre es titula *De les regles generals per a la resolució de problemes* i comença calculant la subtangent d'una corba mitjançant la fórmula $PT = \frac{y\dot{x}}{\dot{y}}$. La justificació de la fórmula de la subtangent, a partir del mètode d'exhaustió i del moviment, es troba al capítol setè del primer llibre (articles 188, 189, segons el tipus de moviment generador). Distingeix els casos:

- Si $\dot{x} = 0$ respecte $\dot{y}$, aleshores $PT = 0$ i la tangent coincideix amb l'eix d'ordenades.
- Si $\dot{y} = 0$ respecte $\dot{x}$, aleshores la tangent és paral·lela a la base.

Si la corba és z la seva tangent ve donada per l'expressió:

$$MT = \frac{y\dot{z}}{\dot{y}} = \frac{y\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}}{\dot{y}}.$$

També dóna la fórmula per trobar la subnormal: $PN = \frac{y\dot{y}}{\dot{x}}$.

Asímptotes

El capítol X del llibre I es titula *De les asímptotes de línies corbes, les àrees limitades per elles i les corbes, els sòlids generats per aquestes àrees, de les línies espirals, i dels límits de les sumes de les progressions*. En el punt 286 defineix l'*asímptota d'una branca d'una corba* com la línia recta que no es troba mai amb la corba, però tal que corba i la recta s'apropen contínuament, de manera que la distància entre elles es pot fer tan petita com es vulgui. Es diu que la branca de corba que així s'apropa a l'asímptota

---

triangle amb la hipotenusa sobre la tangent, i els catets sobre l'abscissa i l'ordenada. Vegeu TAYLOR és de tipus hiperbòlic. Si la branca d'una corba s'apropa d'aquesta manera a una paràbola (asímptota parabòlica), la branca és de tipus parabòlic (de tants tipus com ordres de paràboles). En el llibre II tornen a aparèixer les asímptotes en relació, per exemple, amb les càustiques.

Simpson

Definició: La secció III està dedicada a la utilització de les fluxions per traçar tangents a corbes. La tangent és la trajectòria que seguiria el punt si continués amb moviment uniforme (estudia els tres casos: moviment uniforme, moviment uniformement accelerat i moviment uniformement retardat). En el punt 50 també escriu l'expressió "recta que toca la circumferència".

Determinació de la tangent

Simpson considera una ordenada que es mou de manera uniforme sobre l'eix de les abscisses. El moviment d'un punt es pot descompondre en dos: la velocitat amb la qual es mou l'ordenada (fluxió de l'abscissa) i la velocitat amb la qual es mou el punt sobre aquesta ordenada (fluxió de l'ordenada). Mitjançant la semblança dels triangles (finits) que resulta de la descomposició del moviment i considerant després que el punt es mou sobre la recta tangent, en lloc de la línia corba (quan el moviment del punt sobre l'ordenada és uniforme), aleshores obté l'expressió de la subtangent, $\frac{y\dot{x}}{\dot{y}}$.

Extrems

Ditton: En el problema XIV (secció IX) s'ha de trobar la corba de més ràpid descens. És a dir, el temps de descens ha de ser mínim, per tant, "segons el mètode directe", la seva fluxió s'ha d'anul·lar. Però Ditton no fa estudi general de màxims i mínims (ni definicions, ni caracterització, ni determinació de la naturalesa dels extrems).

Maclaurin

Definició: En el punt 239 del llibre I (capítol IX) explica que si una quantitat variable és tal que creix contínuament sense fi o decreix fins a esdevenir zero, no se li poden assignar ni màxims ni mínims. En canvi, si existeix un límit que l'increment o el

(1715), pp. 60-61.

decrement de la variable no pot traspassar, o bé, quan la variable primer creix fins a un punt i després decreix (o al revés), aleshores la magnitud en aquest terme és considerada *màxima* (o *mínima*), sense parar compte de les variacions sofertes en altres parts del temps. Quan la corba continua immediatament als dos costats de l'ordenada, es té un màxim o mínim de primera espècie (punt 240). Però si la corba és reflectida en l'ordenada i ambdues branques de la corba es troben sobre el mateix costat de l'ordenada, aleshores es pot parlar de màxim o mínim de segona espècie (punt 240). En el punt 858 defineix un *mínim* com l'ordenada que és menor que les ordenades d'abans i de després. De manera anàloga, l'ordenada en el *màxim* és més gran que les ordenades d'abans i de després.

Caracterització i justificació

En general, els candidats a màxims i mínims es troben quan les fluxions d'ordre senar són nul·les. Altrament, si les que s'anul·len són d'ordre parell, no hi ha ni màxim ni mínim. Donada l'equació $\dot{y} = 0$, si totes les seves arrels *x* són diferents (arrels simples) aquestes són candidats a màxim o mínim. En canvi si l'arrel és doble (multiplicitat parell), no és ni un màxim ni un mínim. Si multiplicitat senar, només un màxim o un mínim. En el punt 862 tracta un cas amb *x* imaginàries. Si quan $\dot{y} = 0$ també es verifica que la segona fluxió és infinita respecte a $\dot{x}$ (suposada constant), no es pot concloure que es tingui un màxim o un mínim sense cap més estudi. Doncs es pot donar el cas de punt d'inflexió o de cúspide. Es poden trobar els candidats a extrem fent nul o infinit el coeficient $\frac{\dot{y}}{\dot{x}}$. Però Maclaurin remarca que hi ha moltes excepcions a aquesta regla general (punts d'inflexió, cúspides,...) i que és millor comparar els signes de la fluxió de *y* a ambdós costats de l'ordenada.

Naturalesa dels extrems

En particular, mitjançant la sèrie de Taylor, justifica perquè si la segona fluxió és positiva es té un mínim i si és negativa un màxim (quan fa fluxions successives pren la primera fluxió de *x* constant). En general, es té un mínim quan la primera fluxió d'ordre parell que no s'anul·la és positiva, i un màxim quan és negativa. Però si les que s'anul·len són d'ordre parell, no hi ha ni màxim ni mínim.

Simpson

Definició: Si una quantitat creix (o decreix) fins a una posició i després decreix (o creix), la determinació d'aquesta posició és un problema de màxims i mínims (secció II).

Caracterització i justificació

Indica que els candidats es troben igualant a zero la fluxió, ja que la distància entre un punt amb moviment uniforme i un amb moviment accelerat (o retardat) primer creix i després decreix (màxim) o al revés (mínim). A continuació dóna 21 exemples (la majoria, de caire geomètric). Entre d'altres, presenta el primer exemple proposat per Fermat al seu mètode per trobar màxims i mínims, utilitzat també per L'Hôpital i Bernoulli. Es tracta de dividir un segment en dues parts de forma que el seu producte sigui màxim.[21] En un escoli resumeix dient que els candidats a màxim i mínim són les arrels de l'equació resultant d'anul·lar la fluxió. També tracta el que ara anomenem extrems absoluts i relatius. Simpson contempla el cas en què, tenint dos mínims, un d'ells doni un valor més petit que l'altre. Avalua l'equació en els límits prescrits pel problema i compara amb el valor de la quantitat en la posició que anul·la la fluxió. Si l'equació resultant de fer zero la fluxió no té arrels, la quantitat creix o decreix contínuament sense admetre ni màxims ni mínims. Fins i tot l'equació pot tenir arrels i, tanmateix, no existir-ne extrems. En aquest cas la fluxió té el mateix signe abans i després del candidat a extrem. Algèbricament vol dir que l'equació admet un nombre parell d'arrels iguals. Amb una remarca assenyala la relació entre la multiplicitat de les arrels de l'equació i l'ordre de la fluxió (nombre d'arrels menys 1 indica els ordres successius de fluxions que s'anul·len).

Naturalesa dels extrems

Per distingir la naturalesa de l'extrem, s'ha de veure quin signe té la fluxió abans d'esdevenir zero. Si el signe és positiu tenim un màxim. Si és negatiu, un mínim. Perquè quan una quantitat creix la fluxió és positiva, i quan decreix, la fluxió és negativa.

[21] Vegeu FERMAT (1894), p. 122.

Punts d'inflexió i de retrocés. Altres punts singulars

Ditton: En la secció IX, en exposar els usos i aplicacions del mètode directe de fluxions, diu que es poden calcular els punts d'inflexió i de retrocés, però no en presenta cap estudi general (ni definicions, ni caracterització).

Maclaurin

Definició: En el punt 182 (capítol VII) quan els dos arcs de corba a ambdós costats d'un punt es troben sobre costats diferents de la tangent, el punt s'anomena *punt de flexió contrària* (és a dir, d'inflexió). En els punts 866 i 867 (ara, doncs, en el llibre II) estudia aquests punts, des de la vessant algorísmica (algèbrica) del càlcul de fluxions.

Caracterització i justificació

Generalment aquests punts es determinen resolent $\ddot{y} = 0$ o ∞, tot i que aquesta regla presenta excepcions. L'ordenada passa per un punt de flexió contrària quan, essent contínua la corba a ambdós costats de l'ordenada, $\dot{y}$ és màxima o mínima, la qual cosa no és sempre certa quan $\ddot{y} = 0$ o ∞. Si $\ddot{y} = 0$ i $\dddot{y}$ real i finita,[22] aleshores es té un punt de flexió contrària. Ho justifica a partir del desenvolupament en sèrie i tenint en compte que els arcs de corba a ambdós costats del punt han de trobar-se en costats diferents de la tangent. Però si $\dddot{y}$ és zero i $\ddddot{y}$ real i finita, aleshores no hi ha punt de flexió contrària. En general, si $\ddot{y}$, $\dddot{y}$, $\ddddot{y}$, etc. s'anul·len, si el nombre d'aquestes fluxions és senar i la fluxió d'ordre següent és real i finita llavors es té un punt de flexió contrària. Però si el nombre de fluxions que s'anul·len és parell, en aquest cas no podem assegurar que hi hagi punt de flexió contrària, llevat que formi una doble flexió infinitament petita en el punt. Comparant el signe de $\ddot{y}$ a ambdós costats del punt, si els signes són diferents, aleshores es té un punt de flexió contrària. En el punt 182 Maclaurin defineix un *punt doble* com la intersecció de dos arcs que tenen tangents diferents en aquest punt o que es troben sobre costats oposats de la mateixa tangent. En el punt 868 tracta les *cúspides* (o *punts de reflexió*). Se'n distingeixen dos tipus (i aquí fa referència al punt 268). El primer tipus es dóna quan la corba fa una reflexió des de l'ordenada, que és el tipus més

[22] S'entén que, quan un valor és real i finit, és, a més, no nul.

simple de cúspide. Es forma quan $\ddot{y}$ és infinita. Quan la primera fluxió de *y* és infinita respecte la primera fluxió de *x*, a vegades es té una cúspide del segon tipus. I si $\ddot{y}$ o $\dddot{y}$ són reals i finites, sempre es forma una cúspide del segon tipus.

Simpson

Definició: La determinació dels punts d'inflexió apareix a la secció IV. Quan una corba és, per una part, còncava, i per altra, convexa, el punt límit de les dues parts és un *punt de retrogressió*, o de *flexió contrària*.

Caracterització i justificació

Quan la velocitat del punt que descriu la corba decreix, la corba és còncava. Quan la velocitat creix, la corba és convexa. Per tant la velocitat en el punt d'inflexió en aquest cas és mínima, és a dir, $\dot{y}$ ha de ser mínima. Quan la velocitat primer creix i després decreix, significa que $\dot{y}$ ha de ser màxima. Per tant, el punt d'inflexió es troba igualant a zero la segona fluxió, $\ddot{y}$. Simpson presenta dos casos:

- $\ddot{y} = 0$ quan *x* flueix uniformement (és a dir, quan $\dot{x}$ és constant),
- $\ddot{x} = 0$ quan *y* flueix uniformement (és a dir, quan $\dot{y}$ és constant).

Quan dóna l'equació de la corba troba la segona fluxió explícitament, implícitament o d'ambdues formes. També tracta la concavitat, convexitat i punts d'inflexió en relació a la multiplicitat de les arrels. En l'article 66 s'han de buscar els punts d'inflexió de la concoide (de paràmetres *a* i *b*). S'obté una equació que és més simple en el cas que els paràmetres siguin iguals. Aquest és el cas que Simpson desenvolupa fins al final. Però no resol el cas general. En l'article 67 Simpson diu que per saber si la corba és còncava o convexa s'han d'estudiar les arrels de l'equació $\ddot{y} = 0$. Si entre dues arrels consecutives la segona fluxió és positiva indica que la corba és convexa, i si és negativa, que la corba és còncava. També observa que hi ha casos en què, tot i verificar-se $\ddot{y} = 0$, no es detecta cap canvi de signe. És el cas d'arrels múltiples. Aleshores, no hi ha punt d'inflexió, donat que la corba presenta la mateixa curvatura a ambdós costats.

Indeterminacions

Maclaurin: Estudia el cas en què $\frac{P}{Q}=\frac{0}{0}$. Aleshores s'ha de calcular $\frac{\dot{P}}{\dot{Q}}$, doncs, quan P i Q decreixen fins a anul·lar-se, la raó última de $\frac{P}{Q}$ és precisament $\frac{\dot{P}}{\dot{Q}}$. Dels tres autors britànics analitzats Maclaurin és l'únic que presenta l'estudi d'aquesta indeterminació.

Corbes osculadores[23]

Ditton

Igual com passa amb els punts d'inflexió, Ditton inclou les evolutes entre els problemes que es poden resoldre amb càlcul de fluxions però no en presenta cap estudi general ni cap exemple.

Maclaurin

El capítol XI del llibre I està dedicat a la curvatura de les línies, la seva variació i els diferents tipus de contacte, entre altres coses. Arcs de cercles iguals, quan s'aplica un sobre l'altre, coincideixen. En canvi, això no passa amb arcs de cercles diferents. Si aquests arcs es toquen, l'arc del cercle més gran té menor curvatura respecte la tangent comuna que el del cercle més petit, i passa entre la tangent i l'arc del cercle menor. Com que un cercle donat té curvatura uniforme, es pot anar variant la curvatura fent créixer o decréixer el diàmetre. Per això, la curvatura del cercle serveix per mesurar la curvatura d'altres línies. Només hi ha una recta que pugui ser la tangent d'un arc de corba en un mateix punt, però hi ha un nombre indefinit de cercles que toquen la corba en aquest punt, amb contacte de diversos graus. El *cercle de curvatura* és aquell que té la mateixa curvatura que la corba en un punt, és a dir, de manera que cap altre cercle pel punt de contacte no es pot traçar entre la corba i el cercle de curvatura. El seu centre és el *centre de curvatura* i el seu semi-diàmetre és el *radi de curvatura*. Així com la posició de la tangent va variant al llarg d'una corba qualsevol (llevat del cas de la lineal), la curvatura

[23] Al *Methodus Incrementorum* Taylor considera tres punts sobre una corba i el cercle que passa per aquests tres punts. Quan els tres coincideixen, els arcs de corba corresponents s'esvaeixen, i aleshores el cercle coincideix amb la corba. Vegeu TAYLOR (1715), pp. 61-64.

va variant al llarg d'una corba qualsevol (llevat del cas del cercle). Quan dues corbes es toquen de manera que cap cercle pot passar entre elles, tenen la mateixa curvatura, ja que el cercle que toca a una d'elles tan "íntimament" que cap altre cercle no pot passar entre ells, també tocarà l'altra corba de la mateixa forma. Nombre indefinit de graus de contacte, més o menys íntim. En el punt 870 dóna la fórmula del *radi de curvatura*:

$$\frac{\dot{s}^3}{\dot{x}\ddot{y}},$$

on s és l'arc. Aquesta fórmula la justifica a l'article 382 (és a dir, al llibre I) mitjançant el mètode d'exhaustió, la semblança de triangles i la relació entre la curvatura i la paràbola. Si R és el radi de curvatura la *variació de la curvatura* (segons explicació de Newton) és com $\frac{\dot{R}}{\dot{s}}$.

Simpson

La secció V es titula *Ús de les fluxions per determinar els radis de curvatura i evolutes de corbes*. En primer lloc (punt 68) defineix l'*evoluta*: si suposem un fil tot al llarg d'aquesta corba, i el desenrotllem, descriu una nova corba. Dibuixa un semicercle amb mateix radi que la nova corba, de manera que tindran mateix grau de curvatura. La curvatura de dues corbes és igual quan les seves fluxions primera i segona coincideixen (prenent la fluxió de l'abscissa constant). El radi d'aquest cercle és el *radi de curvatura* i calcula la seva expressió

$$\frac{\left(\dot{y}^2+\dot{x}^2\right)^{3/2}}{-\dot{x}\ddot{y}}.$$

Demostra primer aquesta fórmula a partir de la semblança del triangle evanescent i del triangle rectangle amb hipotenusa igual al radi de curvatura. A continuació presenta una segona manera de justificar aquesta fórmula, a partir de la semblança de triangles, considerant dos radis perpendiculars a la corba, indefinidament propers l'un de l'altre. Si el valor de la fluxió de l'ordenada del cercle canvia de positiu a negatiu, el radi de curvatura després de ser infinit, cau a l'altre costat de la tangent, i el punt corresponent (quan aquesta fluxió és zero) serà un punt de flexió contrària (punt d'inflexió). Així, en una corba amb ordenades referides al centre del cercle, el punt d'inflexió es pot trobar anul·lant la fluxió de l'ordenada del cercle (cas no contemplat en la secció IV, dedicada a l'estudi dels punts d'inflexió).

6.4.2. EL LLENGUATGE QUE UTILITZA, ÉS GEOMÈTRIC O ALGÈBRIC?

Ditton: El llenguatge emprat per Ditton és generalment geomètric. Les quantitats no estan formades per parts molt petites sinó que vénen descrites per un moviment continu ininterromput, que és el resultat d'un flux regular. En general, qualsevol corba es pot generar a partir del moviment composat d'un punt. A més, les dues darreres seccions són una sèrie de problemes adreçats al "geòmetra jove". Tanmateix, quan exposa la fluxió de les quantitats logarítmiques ho fa a partir de les propietats del desenvolupament en sèrie.

Maclaurin: L'objectiu del primer llibre és fonamentar de manera sòlida el càlcul newtonià. Té un caràcter marcadament geomètric. La geometria és considerada font d'inspiració i rigor. Les magnituds estan generades per un flux o moviment. Guicciardini parla d'"axiomatització cinemàtica" del càlcul.[24] El caràcter del segon llibre és més algèbric. Està escrit en el llenguatge de les sèries, del simbolisme algèbric, dels algorismes... Tanmateix, en començar el llibre II diu que la idea de fluxió és més aplicable a magnituds geomètriques (naturalment concebudes per moviment) que a quantitats abstractes (expressades de forma algèbrica). Però que s'aconsegueixen millores en estendre al mètode computacional (algèbric), tot i que de vegades pot semblar complicat. Dóna mètodes per expressar fluents que no es poden representar de forma acurada en termes algèbrics: teorema del binomi de Newton (punts 748-750); teorema de Taylor (punts 751-754).[25]

Simpson: El llenguatge emprat en la primera part és geomètric (les magnituds vénen generades per moviment continu). No fa servir sèries. No obstant això, apareixen comentaris de caire algèbric com, per exemple, que quantitats de diferent classe no es poden comparar des del punt de vista geomètric però sí té sentit la comparació des del

---

[24] Vegeu GUICCIARDINI (1989), p. 59.

[25] Al punt 750 fa referència al *Commercium Epistolicum* i al *De Quadratura* de Newton. I al punt 751 esmenta al *Methodus Incrementorum* de Taylor.

punt de vista algèbric. També ens trobem amb casos com el problema de l'article 33 sobre màxims i mínims, on dóna la versió geomètrica i, a continuació, l'algèbrica. En aquest cas, però, considera que, amb fluxions, la resolució és més curta i expeditiva. A la secció I, com que compara x i x quadrat, en una nota comenta que tracta aquestes expressions des del punt de vista algèbric, no geomètric, per evitar el problema d'homogeneïtat. En general, tot i acceptar els fonaments cinemàtics de Maclaurin, no hi està d'acord amb la utilització excessiva de la geometria.[26]

6.4.3. ELECCIÓ DE COORDENADES I TRACTAMENT DE LES CORBES ALGÈBRIQUES I TRANSCENDENTS

Ditton: Ditton generalment treballa amb coordenades ortogonals, per a línies corbes genèriques. En l'article V (secció I) classifica les corbes segons si les ordenades són paral·leles o si parteixen d'un punt (com en el cas de l'espiral). Ambdós tipus de corbes es generen i descriuen a partir de composició de moviment.[27] No fa l'estudi de tangents, extrems i punts d'inflexió de cap corba. Apareix la cicloide (en coordenades ortogonals) en la darrera secció com a solució del problema de la corba de més ràpid descens. En l'article IV de la secció IV, Ditton afirma que qualsevol quantitat proposada es pot reduir a suma, resta, multiplicació, divisió, potència, arrel o combinació de tot això. La secció sisena està dedicada a les fluxions dels logaritmes i quantitats exponencials. Troba la fluxió del logaritme de $1+x$ a partir del seu desenvolupament en sèrie. Quant a la fluxió de quantitats exponencials, com a^x, z^y, z^{y^x}, utilitza la derivació logarítmica.

Maclaurin: Generalment Maclaurin treballa amb coordenades ortogonals, tot i no explicitar-ho.[28] Però també trobem el cas de coordenades des d'un punt. Per exemple, en calcular la tangent i la normal (punt 857) o bé els punts d'inflexió (punt 869), treballa amb el radi (des del centre fins a la corba) i l'arc de corba descrit amb aquest radi. En el primer llibre tracta el logaritme, l'exponencial, la cicloide,... des d'un punt de vista geomètric, a partir de la definició. En el segon llibre, per a demostracions fa servir

[26] Vegeu l'estudi sobre Simpson com un dels "analistes" fluxionals a GUICCIARDINI (1989), pp. 83-84.
[27] Vegeu DITTON (1706), p. 7.
[28] Vegeu, per exemple, el punt 870 de MACLAURIN (1742).

sèries. Com a casos particulars, més aviat utilitza corbes algèbriques, com per exemple $y = a^2 x - x^3$ (article 861). En l'article 717 i següents, trobem el càlcul de fluxions de les funcions logarítmiques. En aquest cinquè capítol no apareixen la cicloide, la quadratriu, la concoide, la cissoide ni l'espiral. Desenvolupament en sèrie del logaritme i del cosinus a partir del teorema de Taylor. Fent servir derivació logarítmica troba la fluxió de la funció exponencial.

Simpson: En la secció I, Simpson afirma que, a partir de les fluxions de quantitats algèbriques, es poden explicar tota la resta, de qualsevol tipus.[29] A més de corbes algèbriques (cercle, paràboles, el·lipses, hipèrboles, cissoide i concoide), al seu llibre apareixen trigonomètriques (sinus i cosinus),[30] cicloide i espirals (logarítmica i d'Arquimedes). En la secció sobre el traçat de tangents és on s'observa millor l'elecció de coordenades. Simpson sempre fa servir coordenades ortogonals per a les corbes algèbriques. L'article 56 està dedicat a la cissoide. No diu qui són *x*, *y* (no hi ha dibuix) però l'equació que en resulta prové de fer servir coordenades ortogonals. Quant a la concoide (punt 57) Simpson utilitza també les ortogonals, mentre que Bernoulli i L'Hôpital havien emprat coordenades des d'un punt. També amb ortogonals estudia el cas de corbes d'ordenades paral·leles. Per a la cicloide (punt 58) escull les abscisses sobre l'arc de la circumferència generadora, com feia L'Hôpital. I així l'equació que en resulta és senzilla. Per a les espirals logarítmica i d'Arquimedes (punts 59-61) fa servir l'arc i el radi. En general, dóna les equacions de les corbes. Tanmateix, en el cas de l'espiral d'Arquimedes, no en dóna l'equació sinó que, directament, a partir de les seves propietats, troba les equacions de la tangent i de la subtangent. Per al càlcul dels punts d'inflexió només en dóna exemples de corbes algèbriques. Generalment en justifica l'equació de les corbes que utilitza com a exemples: circumferència, paràbola, el·lipse, concoide, cicloide, espiral logarítmica.... De la hipèrbola i la cissoide, però, n'escriu directament l'equació. En general, a partir de les propietats de la corba en dóna l'equació. Però en el punt 59 proposa determinar les dimensions del menor triangle isòsceles que pot circumscriure un cercle donat i aleshores no treballa amb equació, sinó amb proporcions a partir de les propietats de la situació geomètrica.

[29] Vegeu SIMPSON (1750), p. 3.

[30] De fet, a la seva obra *Trigonometry* (1748) Simpson introdueix les abreviatures que actualment s'utilitzen per a les funcions trigonomètriques. Vegeu WILKINS (2001).

6.4.4. PROBLEMES I APLICACIONS

Ditton: Pel que fa referència a tangents, extrems i punts d'inflexió no enuncia cap regla general i només trobem alguna aplicació com a part dels problemes de la darrera secció. En la secció IX fa un esquema dels usos i aplicacions del mètode directe (tangents, màxims i mínims, punts d'inflexió i retrocés, evolutes, càustiques) i del mètode invers (rectificació, quadratures, superfícies, volum de sòlids, centres de gravetat, centres d'oscil·lació). Tot seguit presenta una sèrie de problemes, generalment geomètrics, on s'ha d'utilitzar ambdós mètodes. Per exemple: (1) quina és la proporció de les fluxions dels costats d'un triangle; (2) quina és la proporció de les fluxions d'un parell d'angles assignats a un cercle; (3) quina és la corba de mínim descens (problema XIV); (4) com rectificar la corba isòcrona (problema VIII); (5) quins són els focus de vidres òptics (problema XV); etc. Fa referència a problemes estudiats per Torricelli i Galileu. En relació al problema XV, sobre vidres òptics, enuncia el següent lema: la raó última entre l'increment del raig incident i el decrement del raig refractat és sempre la proporció del sinus de l'angle d'incidència al sinus de l'angle refractat. La demostració d'aquest resultat (que és la llei de Snell) és molt semblant a la que apareix a l'*Analyse* de L'Hôpital, partint de dos punts infinitament propers i de triangles semblants.[31] Al corol·lari que segueix enuncia el mateix resultat però tractant les raons últimes d'increment i decrement com a les fluxions respectives del raig d'incidència i del raig de refracció.

Maclaurin: Maclaurin obté fórmules generals que aplica a diversos casos particulars. Maclaurin presenta el càlcul de tangents, màxims i mínims, punts d'inflexió, curvatura... Dels autors estudiats és l'únic, junt amb L'Hôpital i Saladini, que tracta les *càustiques*. Les definicions de càustica per reflexió i per refracció apareixen al capítol XI del llibre I. En el llibre II relaciona, mitjançant fluxions, el radi d'incidència i el radi de reflexió (punt 872) i els cosinus dels angles d'incidència i de refracció (punt 873). A la segona part del capítol V del llibre II, trobem una àmplia varietat de problemes de tipus físico-matemàtic, on farà servir el mètode directe i el mètode invers: forces centrípetes, construcció de trajectòries, computació del temps de descens al llarg d'una corba,

[31] Vegeu L'HÔPITAL (1696), exemple IX, p. 47.

computació de moviments en un medi, determinació de la catenària, mesura d'àrees, sòlids i superfícies, centres de gravetat i d'oscil·lació, etc.

Simpson: Simpson també enuncia lleis universals que aplica a molts casos particulars. En general aplica el mètode de fluxions a la teoria de corbes (tangents, màxims i mínims...). La secció cinquena tracta el radi de curvatura i les evolutes. A la secció vuitena Simpson treballa la rectificació de corbes. Les seccions novena i desena estan dedicades als cossos sòlids. La secció onzena tracta els centres de gravetat, i la percussió i oscil·lació dels cossos. Finalment, a la secció dotzena treballa qüestions sobre les forces centrípetes. Simpson també exposa exemples d'optimització d'expressions amb diverses variables i d'optimització amb restriccions.

7. UN PUNT SINGULAR: *INSTITUTIONES CALCULI DIFFERENTIALIS* (1755) DE LEONHARD EULER

7.1. *INSTITUTIONES CALCULI DIFFERENTIALIS* (1755) DE LEONHARD EULER

Leonhard Euler[1] va néixer a Basilea el 1707 i morí a Sant Petersburg el 1783. Era fill de Paul Euler, pastor luterà que estava relacionat amb la família Bernoulli. Paul Euler havia assistit a les classes de Jakob Bernoulli i, de fet, havia viscut a casa seva, amb en Johann Bernoulli, mentre estudiaven. Així, va ser ell qui ensenyà el seu fill les matemàtiques elementals. Aviat Leonhard mostrà interès per les matemàtiques, tot i que el seu pare volia que estudiés Teologia. Entrà a la universitat el 1720. El 1723 assolí el màster de filosofia, després d'haver comparat i contrastat les idees filosòfiques de Descartes i Newton.

Començà els seus estudis de teologia la tardor de 1723, estudis que no el motivaven com ho feien les matemàtiques. Johann Bernoulli va descobrir el seu potencial per a les matemàtiques en unes tutories privades A través de Johann, Leonhard aconseguí que el seu pare canviés de parer i el deixés estudiar matemàtiques. Completà els seus estudis a la universitat de Basilea el 1726. Havia estudiat moltes obres, recomanades per Johann: Varignon, Descartes, Newton, Galileu, van Schooten, Jakob Bernoulli, Taylor, Wallis i Hermann. El 1726 Euler publicà un article sobre les corbes isòcrones en un medi resistent. El 1727 en publicà un sobre trajectòries recíproques, i un altre sobre la millor manera de disposar els pals d'un vaixell, que envià al concurs de l'Acadèmia de París, obtenint el segon premi.

El 1726 van oferir Euler una plaça a Sant Petersburg, quan Nikolas II Bernoulli morí; havia d'ensenyar les aplicacions de les matemàtiques i les mecàniques a la fisiologia. Ingressà a l'Acadèmia de Ciències de Sant Petersburg dos anys després de ser fundada per Caterina I, muller de Pere el Gran. Gràcies a Daniel Bernoulli i a Jakob Hermann, Euler obtingué una plaça a la divisió físico-matemàtica de l'Acadèmia, en lloc de la de fisiologia. Euler treballà com a lloctinent mèdic a l'armada russa des de 1727 fins a 1730, quan obtingué la plaça de professor de física a l'acadèmia, esdevenint membre amb dedicació completa. En aquest període, a més de les obres matemàtiques, dugué a terme projectes estatals sobre cartografia, educació, magnetisme, màquines, motors, construcció de vaixells. Degut a la severitat del clima, el 1735 perd completament la visió d'un ull.

Augmenta la reputació d'Euler en guanyar el Gran Premi de l'Acadèmia de París el 1738 i 1740. Això fa que rebi una oferta per part de Frederic el Gran per treballar a Berlín. Donat que en aquell moment Rússia tenia problemes polítics, Euler decideix acceptar l'oferta i marxar cap a Berlín el 1741, esdevenint director de matemàtiques de l'Acadèmia de Ciències de Berlín, el president de la qual era Maupertuis. Aquí també s'ocuparà d'altres tasques, apart de les matemàtiques: supervisió de l'observatori i el jardins botànics, selecció de personal, comptabilitat, cartografia, funcionament del sistema hidràulic,... Durant els 25 anys que passa a Berlín, Euler escriu al voltant de 380 articles i llibres sobre càlcul de variacions, càlcul d'òrbites planetàries, artilleria, balística, anàlisi, astronomia, navegació, càlcul diferencial...

El 1766 Euler torna a Sant Petersburg, on morirà el 1783. Molt aviat esdevé gairebé cec. El 1771 la seva casa és destruïda per un incendi però Euler aconsegueix salvar els seus manuscrits. El 1771 perd totalment la visió però degut a la seva memòria i a l'ajuda dels seus fills i de dos membres de l'Acadèmia produirà gairebé la meitat de tota la seva obra. Creà gran part de l'anàlisi i revisà gairebé totes les branques de les matemàtiques pures conegudes llavors, completant-les, afegint-hi demostracions i donant-li una forma consistent: teoria de nombres, anàlisi infinitesimal (incloent equacions diferencials i càlcul de variacions), mecànica racional, ...

Són importants les seves aportacions a la notació matemàtica: $f(x)$ per indicar funció de x; e per a la base del logaritme neperià; i per a la unitat imaginària;... Algunes de les seves obres són: *Mechanica* (1736-37); *Methodus inveniendi lineas curvas...* (1744); *Introductio in analysin infinitorum* (1748); *Institutiones calculi differentialis* (1755); *Theoria motus corporum solidorum* (1765); *Institutiones calculi integralis* (1768-70); *Lettres à une Princesse d'Allemagne* (1768-72); *Einleitung zur Algebra* (1770), ...

El 1748 publica a Berlín l'*Introductio in analysin infinitorum*, una exposició de l'anàlisi algèbrica, com a estudi de funcions. Aquesta obra basa el càlcul en la teoria de funcions

[1] Les fonts biogràfiques que han estat consultades són O'CONNOR-ROBERTSON (1999);

elementals, en lloc de les corbes geomètriques. La primera part conté el que es troba en els llibres de text moderns sobre àlgebra, teoria d'equacions i trigonometria. En la part d'àlgebra destaca l'expansió de funcions en sèrie i la sumació d'una sèrie donada (tenint en compte la convergència). Quant a la trigonometria, Euler és el primer en tractar el sinus, el cosinus, ... com a funcions, i no com a cordes. Considera la trigonometria com una branca de l'anàlisi, i no un apèndix de l'astronomia o la geometria. La segona part està dedicada a la geometria analítica. Comença per dividir les corbes en algèbriques i transcendents i estableix una sèrie de proposicions per a corbes algèbriques, que aplicarà a la resolució d'equacions. També estudia superfícies (equació, transformació de coordenades en l'espai, curvatura).

El 1755 apareix *Institutiones calculi differentialis*. Segons Grattan-Guinness les *Institutiones* ensenyen els principies elementals del càlcul diferencial, incloent una revisió bàsica del concepte de Leibniz, que esdevindria estàndard.[2] En la primera part enuncia les regles per diferenciar funcions d'una o més variables, així com per trobar els diferencials d'ordre superior. En la segona part, presenta les aplicacions del càlcul (anàlisi de quantitats finites, sèries, màxims i mínims); a l'àlgebra (solució d'equacions, suma de sèries, màxims/mínims, estudi d'indeterminacions); i a la geometria (tangents, curvatura). La versió que analitzat és la traducció alemanya de Johann Andreas C. Michelsen, *Vollständige Anleitung zur Differential-Rechnung* (1790-1793). Els continguts de l'obra es distribueixen en nou capítols a la primera part i divuit a la segona:

PRIMERA PART

- Capítol primer: *De les diferències*.
- Capítol segon: *De la utilitat de les diferències en la teoria de les sèries*.
- Capítol tercer: *Dels infinits i dels infinitament petits*.
- Capítol quart: *De la naturalesa dels diferencials de tots els ordres*.
- Capítol cinquè: *De la diferenciació de funcions algèbriques d'una variable*.
- Capítol sisè: *De la diferenciació de funcions transcendents*.
- Capítol setè: *De la diferenciació de funcions de dues o més variables*.
- Capítol vuitè: *De la diferenciació de les fórmules diferencials*.

MARTÍNEZ (2000); WILKINS (2001).

[2] Vegeu GRATTAN-GUINNESS (1997*a*), pp. 305-306.

- Capítol novè: *De les equacions diferencials*.

SEGONA PART

- Capítol primer: *De la transformació de les sèries*.
- Capítol segon: *De la invenció de sèries sumables*.
- Capítol tercer: *De la invenció de les diferències*.
- Capítol quart: *De la transformació de les funcions en sèries*.
- Capítol cinquè: *De la invenció de la suma de la sèrie a partir del terme general*.
- Capítol sisè: *De la sumació de les progressions a través de sèries infinites*.
- Capítol setè*: Continuació de la sumació de les progressions a través de sèries infinites*.
- Capítol vuitè: *De l'ús i utilitat del càlcul diferencial en la formació de sèries*.
- Capítol novè: *De la utilitat del càlcul diferencial en la resolució d'equacions*.
- Capítol desè: *Dels valors màxims i mínims de les quantitats variables*.
- Capítol onzè: *Dels màxims i mínims de funcions multiformes i de funcions de més variables*.
- Capítol dotzè: *De l'ús dels diferencials en l'estudi de les arrels reals de les equacions*.
- Capítol tretzè: *De la característica de les arrels imaginàries*.
- Capítol catorzè: *De la diferenciació per a casos particulars*.
- Capítol quinzè: *Dels valors de les funcions que en casos determinats es mostren indeterminats*.
- Capítol setzè: *De la diferenciació de funcions inexplicables*.
- Capítol dissetè: *De la interpolació de sèries*.
- Capítol divuitè: *De l'ús del càlcul diferencial en la resolució de les fraccions*.

Donada la "internacionalitat" d'Euler i la seva transcendència en el desenvolupament del càlcul, vaig decidir fer un capítol especial que inclogués només Euler i quedés lliure de les fronteres geogràfiques. Aquest capítol no pretén ser una anàlisi exhaustiva de la notable i extensa obra d'Euler. Donada la naturalesa del meu treball, m'he centrat només en el seu tractat sobre càlcul diferencial, completant algunes qüestions amb l'estudi de l'*Introductio in analysin infinitorum* quan ha calgut.[3]

[3] He fet servir la versió anglesa de J. D. Blanton, *Introduction to Analysis of the Infinite*, 1988.

Del prefaci de les *Institutiones calculi differentialis* es dedueix que el llibre va dedicat als que s'inicien en el càlcul. Diu que és difícil explicar el càlcul diferencial i l'anàlisi dels infinits a algú que no té cap coneixement de la matèria. Al contrari que les altres ciències, no és suficient donar-ne l'explicació, per entendre bé el càlcul diferencial cal conèixer-ne tots els seus motius. D'altra banda, en el prefaci de l'*Introductio in analysin infinitorum* Euler diu que la dificultat que tenen els estudiants que volen estudiar anàlisi és que saben poca àlgebra ordinària, la qual cosa fa que adquireixin idees estranyes sobre l'infinit. Tot i que no en cal un coneixement exhaustiu, alguns tòpics, omesos o tractats amb poca cura en textos ordinaris d'àlgebra, són necessaris. La intenció de l'*Introductio* és esmenar aquest defecte, apropar el lector a l'infinit de manera gradual i imperceptible. L'opinió del traductor a l'anglès de l'*Introductio* és que aquesta obra prepara per a l'estudi posterior del càlcul.

De les *Institutiones* es feren diverses edicions en llatí (1755, 1787, 1913). Consultant els catàlegs de biblioteques[4] de Gran Bretanya, França, Itàlia i Alemanya es troben traduccions de les *Institutiones* a l'alemany (1790-1793, 1798) i a l'anglès (2000).

7.2. COM EXPOSA ELS FONAMENTS DEL CÀLCUL?

El primer objecte d'estudi són les variables, que porta a parlar de la dependència entre variables i, per tant, de les funcions. Els canvis que pateixen les funcions i, en particular, les proporcions d'aquests canvis, són l'objecte final del càlcul diferencial. El capítol tercer està dedicat als infinits i als infinitament petits. Una quantitat tan gran com es vulgui, que creix sense fi, a la qual sempre se li pot afegir un creixement, és una quantitat que *creix infinitament*. No hi ha cap límit que no pugui superar. No pot ser indicada a través de cap nombre determinat. És com la matèria, que sempre pot dividir-se sense fi, sense arribar a una part indivisible. Per tant, Euler es reconeix contrari a l'existència d'àtoms i de mònades. Tot i que es negui l'existència del nombre infinit en el món, no es pot negar en matemàtiques: per exemple, la suma $1+2+3+...$ no és finita. L'infinit el simbolitza mitjançant ∞.

La teoria dels infinits és més clara a partir de la discussió dels infinitament petits. Una quantitat pot decréixer fins a desaparèixer, fins a esdevenir 0. Una quantitat d'aquest tipus s'anomena *infinitament petita*, és una quantitat evanescent i, en conseqüència, és *zero*. És una quantitat més petita que qualsevol quantitat donada. Entre dos zeros no hi ha cap diferència, si els comparem aritmèticament. En canvi, si es fa la comparació a nivell geomètric, aleshores dos zeros no són sempre iguals (per exemple: com que $n \cdot 0 = 0$ llavors $n : 1 = 0 : 0$, n i 1 no són iguals, no es pot canviar una per l'altra). El càlcul diferencial s'ocupa de calcular les proporcions geomètriques de dues quantitats infinitament petites. Donat que una quantitat infinitament petita és zero, si a una quantitat finita se li afegeix o se li treu una quantitat infinitament petita, aquesta quantitat ni creix ni decreix, tant a nivell aritmètic com geomètric. Les quantitats infinitament petites desapareixen respecte les finites. Euler afirma que aquest resultat és vàlid a nivell geomètric, de l'estil dels escrits dels Antics. Si $dx = 0, dx^2 = 0, dx^3 = 0$, etc. aleshores dx^2 desapareix respecte dx, doncs $dx \pm dx^2$ i dx guarden proporció d'igualtat. Per exemple, a nivell geomètric es pot considerar la proporció $dx \pm dx^2 : dx = 1 \pm dx = 1$. El terme dx és un infinitament petit de primer ordre; el terme dx^2 és un infinitament petit de segon ordre, etc. Aquest és el raonament que aplica en justificar el *diferencial del producte* de dues funcions.

A partir de la idea dels infinitament petits (z) és més fàcil determinar la naturalesa dels infinitament grans ($\frac{1}{z}$). Els ordres dels infinitament petits indueixen els ordres dels infinitament grans. Johann Bernoulli havia definit els ordres dels infinitament grans i petits de la mateixa manera.

Variable

En l'*Introductio in analysin infinitorum* defineix una c*onstant* com una quantitat determinada que sempre té el mateix valor. En canvi, una *variable* és una quantitat no determinada (o universal) que pot prendre qualsevol valor (qualsevol nombre de qualsevol tipus). En les *Institutiones calculi differentialis* diu que les variables admeten

[4] *Berkeley Digital Library SunSITE*, *Bibliotecas universitarias y de investigación españolas*, *Catálogo Colectivo del Patrimonio Bibliográfico Español* i *Karlsruher Virtueller Katalog*.

tot grau de creixement/decreixement. La diferència entre ambdós tipus de quantitats no es troba en la naturalesa de les coses, sinó en les condicions de l'exercici en què apareixen. Euler va fer estàndard la notació *a*, *b*, *c*,... per a constants i *x*, *y*, *z* per a variables.

Funció

L'estudi de les variables porta a parlar de dependència d'una variable respecte les altres. La variable, el canvi de la qual s'observa com l'efecte del canvi d'una altra variable, de la qual depèn, és una *funció* d'aquesta altra variable. Aquesta definició comprèn totes les formes en què una variable pot ser determinada a través de l'altra: si *x* és una variable, totes les quantitats que depenen de *x*, o que queden determinades a través d'ella s'anomenen *funcions de x*. A l'*Introductio* defineix una *funció d'una quantitat variable* com una expressió analítica composada en qualsevol forma per la variable i diverses constants.[5]

Diferència

El primer capítol de les *Institutiones calculi differentialis* està dedicat a les diferències finites. Prenent com a primer terme *x* genera una progressió aritmètica amb diferència *w*. Podria prendre qualsevol altre tipus de progressió però prefereix l'aritmètica perquè és més fàcil treballar amb ella i la progressió, d'aquesta manera, conté tots els valors reals. Si *y* és una funció de *x*, l'avalua en els punts generats aritmèticament a partir de *x*. S'obté una nova sèrie de valors: $y, y^{I}, y^{II}, y^{III},...$. La sèrie de les diferències és $\Delta y = y^{I} - y, \Delta y^{I} = y^{II} - y^{I},...$ Si es calculen les diferències d'un terme d'aquest nova sèrie amb el següent s'obté la sèrie de les diferències de les diferències (o segones diferències): $\Delta\Delta y = \Delta y^{I} - \Delta y,...$, i així es van generant les sèries de les diferències terceres, quartes, etc. Mostra la relació entre els coeficients de les diferències d'ordre superior i els del *binomi*. Per trobar les diferències de funcions transcendents (logaritme,

[5] Vegeu EULER (1748), punt 4, llibre primer. A més, en el punt 8, llibre primer, introdueix la classificació de funcions uniformes i multiformes, i funcions explícites i implícites. Ja distingeix el que avui anomenem funció diferenciable i funció contínua però no diferenciable. Vegeu EULER (1748), punt 9, llibre II; GRATTAN-GUINNESS, (1970), pp. 6-7.

exponencial i trigonomètriques) recorre al desenvolupament en sèrie de les mateixes, que diu que ja s'ha vist en la seva obra *Introductio in analysin infinitorum*.

Diferencial

Euler tracta els increments evanescents (les diferències infinitament petites) com a *zeros*, representats en el càlcul diferencial per *dx*, i que s'anomenen *diferencials de x*.[6] Utilitza *d* en lloc de Δ. *d* no indica una quantitat, només és un signe, per expressar el diferencial. Avisa que dy no és un producte de dues quantitats i que d^2 no és una potència de *d*, sinó el diferencial segon. S'ha d'evitar usar la lletra *d* per designar quantitats. Quan *x* passa a ser $x+w$, l'increment de *y* és $\Delta y = Pw + Qw^2 + ...$ (*P*, *Q*, .. funcions de *x*). Quan *w* s'anul·la, aleshores $dy = Pdx$. El primer diferencial coincideix amb el primer terme de la diferència. És a dir, de la diferència es pot treure el primer diferencial però al revés no, són necessaris els diferencials de tots els ordres. Considerar els increments evanescents com a quantitats infinitament petites, que decreixen infinitament però que no s'anul·len és un error. Error que ha estat utilitzat per culpar l'anàlisi dels infinits de no tractar amb quantitats reals sinó "aproximadament reals". L'anàlisi dels infinits és un cas particular de la teoria de les diferències. Segons Euler, els anglesos anomenen *fluxions (*i també *increments* i *velocitat*) les diferències infinitament petites de quantitats variables o *fluents*. Observa que la notació anglesa no és tan còmoda com les expressions llatines.

Teorema de Taylor

Els vuits primers capítols de la segona part tracten les sèries. Primer parla de la transformació de les sèries i de les sèries sumables. Més endavant tracta la transformació de funcions en sèries. Es pot aprofitar l'expressió de les diferències per trobar el valor de tota la funció, utilitzant les sèries. En el capítol tercer de la segona part (punt 48), sigui *y* funció (algèbrica o transcendent) de *x*, si quan *x* passa a ser $x+w$, *y* esdevé *z*, aleshores:

$$z = y + \frac{wdy}{dx} + \frac{w^2 ddy}{1\cdot 2dx^2} + \frac{w^3 d^3 y}{1\cdot 2\cdot 3dx^3} + \dots,$$

amb *dx* constant.[7] Quan *w* és molt petit, la convergència de la sèrie és forta, de manera que amb un nombre no molt gran de termes el valor de obtingut és molt proper a *z*. Per mostrar la utilitat d'aquesta fórmula, l'aplica a $y = x^n$, tot obtenint el mateix resultat que Newton. Exposa exemples d'aproximació del valor d'una funció a partir d'aquesta fórmula. El capítol cinquè es titula *De la invenció de la suma de la sèrie a partir del terme general*. A continuació tracta la sumació de les progressions a través de sèries infinites. Parla de l'ús i utilitat del càlcul diferencial en la formació de les sèries. Finalment, en el capítol dissetè estudia la interpolació de sèries.

Coeficient diferencial

La dependència entre variables indueix a estudiar com el canvi experimentat per *x* afecta la funció. L'*increment evanescent* de tota funció de *x* té una proporció certa i determinada amb l'increment evanescent de *x*, donada a través de quantitats finites. Per reconèixer fàcilment aquestes proporcions s'han utilitzat signes per indicar els increments evanescents: "diferencials", "infinitament petits",.... La proporció s'apropa a un límit donat, que només s'assoleix quan l'increment de la variable és zero (última proporció). Per tant, el límit segons Euler és assolible, no com el límit de D'Alemebert. Atès que $dy = Pdx$, tot i que dx, dy siguin quantitats infinitament petites (o zeros), tenen una proporció finita: $dy : dx = P : 1$. L'objectiu veritable del càlcul diferencial és determinar la proporció $dy : dx$, i no el càlcul de diferencials. I donat que aquesta proporció implica quantitats finites, Euler afirma que l'objecte del càlcul diferencial són quantitats finites.

Ordre superior

S'ha de considerar la proporció entre dos increments evanescents com una funció i buscar la proporció de l'increment d'aquesta funció respecte l'increment de la variable. La segona diferència de *y* és $Pw^2 + Qw^3 + ...$[8] Quan $w = dx$ esdevé infinitament petit els termes $Qw^3,...$ desapareixen. El segon diferencial de *y* és $ddy = Pdx^2$. Tot i que *ddy*

---

[6] Euler parla de "diferencial leibnizià". Vegeu EULER (1755), punt 114.
[7] Aquesta és la fórmula del desenvolupament de Taylor, però Euler no el menciona.
[8] Observem que fa servir la mateixa lletra, *P*, per al primer i segon diferencials.

és zero, la proporció de ddy respecte dx^2 és finita i val $P:1$. Si $dy = pdx$ i $dp = qdx$, aleshores $ddy = qdx^2$. És a dir, el segon diferencial és el diferencial del primer diferencial. dx, dy; dx^2, ddy; dx^3, d^3y ... són parelles de quantitats homogènies, doncs entre elles guarden una proporció finita. $dx^2, dx^3, ..., ddy, d^3y...$ desapareixen respecte dx, dy; $dx^3, dx^4, ..., d^3y, d^4y...$ desapareixen respecte dx^2, ddy; etc. Quan no existeix proporció finita entre quantitats, és a dir, quan dues quantitats no són homogènies, una quantitat és infinitament més gran que l'altra.

Elecció de la progressió: Pren *x* amb *dx* constant, per la mateixa raó que en el cas de les diferències prenia la sèrie de *x* en progressió aritmètica. Si no es pren per a *x* una progressió aritmètica, els diferencials presenten una altra forma. Per exemple, en els punts 129-130 tracta la variable *x* com si depengués d'una tercera variable i s'observessin els canvis en *x* en funció dels canvis en la tercer variable. Euler regularitzà el problema de la indeterminació per a diferencials d'ordre superior amb el "coeficient diferencial", que preservava les dimensions i la integració conservava el seu caràcter de procés invers.[9]

Funcions de diverses variables

Treballa amb funcions de dues i de tres variables. Vegem el cas de dues variables (justifica de manera anàloga el cas de tres variables). Sigui *V* una funció de *x, y* variables independents. Considerant *y* constant i diferenciant s'obté: pdx. Considerant *x* constant i diferenciant s'obté qdy. Finalment, considerant *x, y* com a variables, el diferencial de *V* té la forma $pdx + qdy$, on *p*, *q* són funcions de *x, y*. Aquestes funcions *p, q* també depenen de *V*, així que, d'alguna manera, també depenen una de l'altra. No totes les fórmules diferencials de la forma $Pdx + Qdy$ (on *P*, *Q* formades arbitràriament) poden ser diferencials d'alguna funció *V* de *x, y*. A continuació demostra que la relació que han de verificar *P*, *Q* perquè $Pdx + Qdy$ sigui el diferencial d'una funció de dues variables és $\left(\frac{dP}{dy}\right) = \left(\frac{dQ}{dx}\right)$. Generalitza per a diverses variables.

[9] Vegeu BOS (1974), pp. 68-72.

Diferenciació/Integració

Els punts 24-36 de les *Institutiones* tracten sobre el *mètode invers*, que consisteix a trobar una funció, donada la diferència. La funció buscada s'anomena *suma*, per oposició a la diferència. Es simbolitza amb el signe $\sum$, i es verifica que si $z = \Delta y$, aleshores $y = \sum z$. Quan la diferència no es pot expressar mitjançant potències de *x*, la suma és més difícil o impossible. Així, és molt útil conèixer les diferències de tantes funcions com sigui possible, per després aplicar la suma. El diferencial és una part infinitament petita d'una quantitat, que representa el tot; per això, trobar aquesta quantitat és trobar la *integral*. Amb la diferenciació augmenta l'ordre d'infinitament petit. Amb la integració disminueix aquest ordre, fins a esdevenir una quantitat finita i a partir d'aquí augmenta l'ordre d'infinitament gran.

Tangents

En les *Institutiones calculi differentialis* Euler no exposa el càlcul de tangents. Tanmateix el capítol XIII del llibre segon de l'*Introductio in analysin infinitorum* es titula *Sobre la disposició de les corbes* i comença parlant de rectes o corbes simples que coincideixen amb la figura donada (limitada en una regió) almenys en una porció.

Definició: La tangent a una corba és una recta que, almenys en el punt de tangència, coincideix amb la corba, és a dir, té dos punts en comú amb la corba. Coneixent la tangent, podem conèixer la *direcció* que pren la corba en un punt. Es pot considerar la corba com el camí que segueix un punt amb un canvi de direcció continu. Un punt de la corba es mourà en la direcció de la tangent per aquest punt. Si la direcció no canvia, la corba és la recta (tangent). Si la direcció canvia, el moviment descriu una corba.

Determinació de la tangent

Considerem l'equació de la corba en *x*, *y*. Siguin $p = AP, q = PM$ les coordenades del punt de tangència *M*.

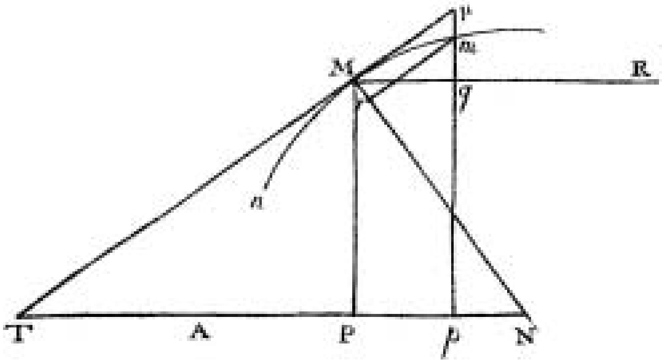


Figura 1

En substituir p i q en l'equació, tots els termes es cancel·len. Per descobrir doncs la naturalesa d'aquesta porció de corba, Euler proposa fer un canvi d'eix i d'origen. Agafa com a nou eix una recta paral·lela a l'eix inicial, que passa pel punt *M*, que farà de nou origen. Sigui *m* un altre punt de la corba, l'abscissa del qual en el nou sistema és $t = Mq$ i l'ordenada corresponent $u = qm$. De manera que les coordenades del punt *m* en el sistema inicial són: $Ap = p + t, pm = q + u$, que satisfan l'equació. Fent la substitució, tots els termes que no contenen ni *t* ni *u* es cancel·len entre si i el que queda és una equació en *t* i *u* (coordenades respecte el nou sistema): $At + Bu + Ct^2 + Dtu + Eu^2 + Ft^3 + ... = 0$. Si $Mq = t = 0$ aleshores $qm = u = 0$, i *m* coincideix amb *M*. Es vol estudiar la corba prop de *M*, és a dir, es prenen valors de *t* molt petits, de manera que *u* també sigui molt petit. Si *t*, *u* tan petits com sigui possible, $t^2, tu, u^2, t^3, t^2u, tu^2, u^3,...$ són més petits encara i per aquesta raó es poden ometre tots els termes, llevat de $At + Bu$. L'equació $At + Bu = 0$ representa una recta passant per *M*. Quan *m* sigui *M*, la recta coincidirà amb la corba. Aquesta recta és la tangent a la corba pel punt *M*. Si μ és el punt de tall de la recta *pm* amb la tangent, i *T* el de la tangent amb l'eix *AP*, per semblança de triangles s'obté la relació:

$$At + Bu = 0 \Rightarrow \frac{u}{t} = -\frac{A}{B} = \frac{q\mu}{Mq} = \frac{MP}{PT}$$

i, en conseqüència, $PT = -\frac{Bq}{A}$ (on $q = PM$), que és la *subtangent*. $-\frac{A}{B}$ és la tangent de l'angle que forma la recta tangent amb l'eix. Si les coordenades són obliqües, amb l'angle format entre la recta tangent i l'eix, i la raó dels costats *Mq* i $q\mu$, per trigonometria, es pot trobar la tangent de l'angle. Si $A = 0$ l'angle desapareix, la tangent és paral·lela a l'eix *AP*. Si $B = 0$ la tangent és paral·lela a l'eix *PM*, l'ordenada és tangent a la corba en el punt *M*. Per conèixer el camí de la corba hem de saber la posició de la tangent en cada punt, que és fàcil a partir de l'equació donada (si és no-irracional i no conté fraccions). Ara bé, si l'equació és irracional o presenta fraccions, es segueix el mateix mètode però utilitzant el càlcul diferencial. De forma anàloga troba la *normal* i la *subnormal* de la corba en el punt *M*.

Asímptotes

També des d'un enfocament algèbric, el capítol VII del llibre segon de l'*Introductio* està dedicat a branques infinites, quan x, o y, o ambdues, són infinites. Si la corba no presenta branques infinites, aleshores està continguda en una regió limitada. Els factors lineals s'identifiquen amb l'equació d'una recta que, quan s'estén fins a l'infinit, finalment coincideix amb la corba. Aquesta recta s'anomena *asímptota*. Euler discuteix l'existència de branques infinites i d'asímptotes segons el nombre i naturalesa dels factors lineals de l'equació de la corba. Si el membre més alt de l'equació d'una corba no té cap factor lineal real, la corba corresponent no presenta cap branca infinita. La corba té dues branques que van a l'infinit i cada branca s'apropa a la mateixa línia recta (asímptota), si el membre més alt té exactament un factor lineal real. Si en conté dos, de diferents, la corba presenta dues asímptotes diferents, amb quatre branques que van a l'infinit i que finalment coincideixen amb la línia recta. Si en conté dos, d'iguals, la corba presenta dues branques que tendeixen a infinit i les seves asímptotes no són rectes, sinó paràboles. Si en conté tres, i els tres són diferents, aleshores la corba té sis branques, que convergeixen en tres asímptotes. Si dos dels factors són iguals, el tercer factor, que és diferent, es correspon amb una asímptota. També parla de corbes asimptòtiques (capítol VIII).

Extrems

El capítol desè de la segona part de les *Institutiones* està dedicat a l'estudi de les quantitats màximes i mínimes per a funcions uniformes. En el capítol següent treballa amb funcions multiformes i de diverses variables.

Definició: Sigui y una funció de x. Quan la funció és tal que ininterrompudament creix o decreix amb x, la funció no té ni màxim ni mínim. Si la funció no es comporta així, ha d'existir un valor que sigui major o menor que els que l'envolten. y té un *màxim* quan $x = f$, si quan x és menor o major els valors de y són menors que el corresponent a

$x = f$. *y* té un *mínim* quan $x = f$, si quan *x* és menor o major els valors de *y* són majors que el corresponent a $x = f$. És a dir, *y* assoleix un màxim o un mínim quan *y*, per als valors propers a $x = f$, és major o menor (*idea d'extrems absoluts i relatius*).

Caracterització dels candidats i justificació

Sigui *y* una funció (uniforme) de *x*. Avalua la sèrie:

$$z = y + \frac{wdy}{dx} + \frac{w^2 ddy}{1 \cdot 2dx^2} + \frac{w^3 d^3 y}{1 \cdot 2 \cdot 3dx^3} + ...$$

en $x - \alpha$ i $x + \alpha$. En $x - \alpha$ val:

$$y - \frac{\alpha dy}{dx} + \frac{\alpha^2 ddy}{2dx^2} + ...$$

I en $x + \alpha$ val:

$$y + \frac{\alpha dy}{dx} + \frac{\alpha^2 ddy}{2dx^2} + ...$$

Si *y* és un màxim, *y* ha de ser més gran que aquestes dues sèries. Si és un mínim, ha de ser més petit que aquestes dues sèries. Per tant, considerant α prou petit, s'ha de verificar $\frac{\alpha dy}{dx} = 0$. Així, per trobar els màxims i mínims primer s'han d'estudiar les arrels de $\frac{dy}{dx} = 0$. Però això no implica que hi hagi un màxim o un mínim. En el cas d'una funció multiforme, a cada valor de *x* li corresponen tantes branques com valors reals de *y* corresponen a *x*. Per tant, hi haurà tantes sèries per a una mateixa *x* com valors de *y*. S'han d'estudiar els màxims i mínims de cada sèrie per separat, com si cada sèrie fos una funció uniforme.

Naturalesa dels extrems

Sigui *f* una solució de $\frac{dy}{dx} = 0$, i sigui *F* el valor de la funció quan $x = f$. S'ha d'avaluar la sèrie corresponent a la funció en $f - \alpha$ i $f + \alpha$. Prenent α molt petita, si $\frac{ddy}{dx^2} > 0$ els dos valors són més grans que *F*. Per tant, en $x = f$ la funció presenta un mínim. Al revés, si $\frac{ddy}{dx^2} < 0$ la funció presenta un màxim en $x = f$. Però si $\frac{ddy}{dx^2} = 0$, s'ha d'estudiar el valor de $\frac{d^3 y}{dx^3}$. Si $\frac{d^3 y}{dx^3}$ no s'anul·la, la funció no presenta ni màxim ni mínim. Però si s'anul·la, si $\frac{d^4y}{dx^4}$ és positiu la funció presenta un mínim, si és negatiu la funció té un màxim. I així successivament. També estudia els casos d'arrels múltiples de $\frac{dy}{dx}=0$, i la relació del nombre de màxims i mínims segons el nombre d'arrels múltiples. Si y és una funció de x donada a partir d'una equació, si diferenciem aquesta equació resulta $Pdx+Qdy=0$. Per trobar màxims i mínims s'han de buscar les arrels de $\frac{dy}{dx}=0$, és a dir, de $\frac{P}{Q}=0$. Per tant, s'ha d'estudiar quan $P=0$ i quan $Q=\infty$ (aquest segon cas no es pot donar quan l'equació entre x, y és entera racional, perquè sinó x o y o ambdues serien infinites). Si $P=0$, per saber si es té un màxim o un mínim, s'estudia $\frac{ddy}{dx^2}$. Diferenciem $Pdx+Qdy=0$:

$$\left.\begin{aligned} dP &= Rdx+Sdy \\ dQ &= Tdx+Vdy \end{aligned}\right\} \Rightarrow Rdx^2+Sdxdy+Tdxdy+Vdy^2+Qddy=0\,.$$

Si $\frac{dy}{dx}=0$, llavors:

$$R+\frac{Qddy}{dx^2}=0 \Rightarrow \frac{ddy}{dx^2}=-\frac{R}{Q}\,.$$

Si $\frac{R}{Q}>0$ la funció presenta un màxim. Si $\frac{R}{Q}<0$ la funció presenta un mínim. En el cas de U, funció de x, y, es té $dU=Pdx+Qdy$. Suposant y constant i x variable, s'ha d'igualar el seu diferencial a 0 ($P=0$). I al revés, prenent y variable i x constant, s'ha d'igualar el seu diferencial a 0 ($Q=0$). Aleshores Euler afirma que si $\frac{dP}{dx}, \frac{dQ}{dy}$ són tots dos negatius, la funció presenta un màxim. I que si tots dos són positius, la funció té un mínim.[10]

[10] En el capítol XI de la *Théorie* Lagrange mostra com trobar els màxims i mínims de superfícies corbes. Sigui z funció de *x*, *y*. S'han de buscar els punts allà on el pla tangent sigui paral·lel al pla *xy*. En el punt 39 havia demostrat que la tangent de l'angle inclinació del pla sobre el pla de coordenades és l'arrel quadrada de la suma dels quadrats de les derivades relatives a x i a y: $\text{tang}\,\alpha=\sqrt{z'^2+z,^2}$, on z' representa la derivada respecte x, i $z,$ la derivada respecte y. El pla serà paral·lel quan la tangent de l'angle d'inclinació sigui 0, fet que només es dóna quan $z'=0$ i $z,=0$ (condició necessària). També es pot deduir aquesta condició considerant y com a variable (x constant) i després x com a variable (y constant), és a dir, com si en cada cas es tractés de funcions d'una variable. Si primer considerem y com a variable, la condició necessària per tenir un màxim o un mínim és que $z,=0$. Si $z,,<0$ es té un màxim,

Corbes osculadores

El capítol XIV del llibre segon de l'*Introductio* estudia la curvatura d'una corba, però a les a les *Institutiones* no. Igual que passava amb les rectes tangents, estudia corbes que en algun lloc coincideixen amb la corba donada (en aquest cas, una paràbola), almenys en una porció. Són les *corbes osculadores*. Seguint en el mateix raonament de les rectes tangents, després del canvi de sistema arriba a l'equació:

$$At + Bu + Ct^2 + Dtu + Eu^2 + Ft^3 + \ldots = 0 .$$

Prenent la tangent i la normal en el punt *M* com a eixos, les coordenades en el nou sistema són $r = Mr, s = rm$ (vegeu Figura 1). Llavors:

$$t = \frac{-Ar + Bs}{(A^2 + B^2)^{1/2}}, u = \frac{-As - Br}{(A^2 + B^2)^{1/2}}, r = \frac{-At - Bu}{(A^2 + B^2)^{1/2}}, s = \frac{Bt - Au}{(A^2 + B^2)^{1/2}}$$

Per facilitar els càlculs pren $-At - Bu = Ct^2 + Dtu + Eu^2$, hi substitueix la *t* i la *u* obtingudes i, donat que *r* és infinitament més petita que *s*,[11] i obté:

$$s^2 = \frac{(A^2 + B^2)r\sqrt{A^2 + B^2}}{A^2E - ABD + B^2C},$$

que és l'expressió de la *corba osculadora* en el punt *M*. Així el petit arc de corba *Mm* coincideix amb el vèrtex de la paràbola construïda sobre l'eix de la normal, amb *latus rectum*, o paràmetre, igual a:

---

si $z,, > 0$ es té un mínim. Es substitueixen els valors obtinguts de l'equació $z, = 0$ en la funció *z* que, d'aquesta forma, esdevé funció d'una variable (*x*). Ara, però, *y* és funció de *x*, relacionades mitjançant l'equació $z, = 0$. Llavors, la derivada primera de z respecte *x* no és simplement z', sinó $z' + y'z,$. Donat que $z, = 0$, i com que la derivada primera ha de ser zero, resulta que $z' = 0$. La segona derivada serà $z'' + 2y'z', + y'^2 z,, + y''z,$ (*). Si és menor que zero la funció presenta un màxim, si és major que zero aleshores la funció té un mínim. Però com que *y* queda determinada per $z, = 0$, derivant aquesta equació respecte *x*, *y'* quedarà determinada: $y' = -\frac{z',}{z,,}$. Substituint *y'* en l'equació (*) s'obté que per al màxim s'ha de verificar: $z'' - \frac{z',^2}{z,,} < 0$ i per al mínim $z'' - \frac{z',^2}{z,,} > 0$. Com que en el màxim es té que $z,, < 0$ i en el mínim $z,, > 0$, en conseqüència en qualsevol cas $z''z,, - z',^2 > 0$. En conclusió, els valors de *x*, *y* de les equacions $z' = 0$ i $z, = 0$ donen màxim i mínim segons si $z,, < 0$ o $z,, > 0$, sempre i quan $z''z,, - z',^2 > 0$ (dit d'un altra forma, *z''* i *z,,* han de tenir el mateix signe). Si, per contra, $z''z,, - z',^2 = 0$ o $z''z,, - z',^2 < 0$ la funció no presenta ni màxim ni mínim (tret que les derivades terceres siguin zero i s'estudiïn les quartes, etc). Lagrange adverteix que el mètode d'Euler no és correcte per determinar l'existència de màxims i mínims (segons Euler és suficient que $z,, < 0$ i $z'' < 0$ per afirmar que la funció presenta un màxim, i $z,, > 0$ i $z'' > 0$ per afirmar que la funció presenta un mínim).

[11] Atès que $-At - Bu = Ct^2 + Dtu + Eu^2 + Ft^3 + \ldots$

$$\frac{(A^2+B^2)\sqrt{A^2+B^2}}{A^2E-ABD+B^2C}.$$

La curvatura de la corba en el punt *M* és igual a la curvatura d'aquesta paràbola en el seu vèrtex. Donat que el cercle és la corba, la curvatura de la qual és més coneguda (és la mateixa en cada punt, inversament proporcional al radi), és més convenient per definir la curvatura d'una corba. Aleshores vol definir un cercle amb la mateixa curvatura que la parábola osculadora. S'anomenarà *cercle osculador*. Es busca la parábola osculadora d'un cercle i es pren el cercle com a corba osculadora, en lloc de la parábola. L'expressió del radi del cercle osculador (*radi osculador* o *radi de curvatura*) és:

$$\frac{(A^2+B^2)\sqrt{A^2+B^2}}{2(A^2E-ABD+B^2C)}.$$

El doble signe de l'arrel porta a ambigüitat. Per evitar-la s'ha d'estudiar la posició de la tangent. Combinant la distància tangent-corba (que és un interval minúscul) amb l'equació $At+Bu+Ct^2+Dtu+Eu^2=0$, discuteix en quin costat de l'eix es troba la corba (respecte la tangent) i la posició del centre osculador respecte la normal. Coneixent el radi del cercle osculador en cada punt de la corba, la naturalesa de la corba és fàcilment observable. Si la corba està dividida en arcs minúsculs, cadascuna d'aquestes partícules de corba es pot considerar com un arc del cercle amb radi el radi osculador. La tangent i el cercle osculador en diversos punts proporcionen un coneixement acurat de la corba.

Punts d'inflexió. Altres punts singulars

La consideració de punts d'inflexió i d'altres punts singulars només apareix a l'*Introductio,* amb un enfocament algèbric, després de les corbes osculadores. Forma part del capítol XIV, llibre II. Aquests punts no els tracta a les *Institutiones*.

Definició: Si la curvatura és contínua, el radi de curvatura és finit. Però si la curvatura no és contínua, presenta canvis sobtats (la corba passa de còncava a convexa, o al revés). Quan la curvatura queda destruïda i dues parts de la corba no estan d'acord, la corba té un *punt d'inflexió* (o de flexió contrària).

Caracterització i justificació

Si $B^2C - ABD + A^2E = 0$ el radi de curvatura és infinit (el cercle osculador passa a ser una recta). Substituint les expressions:

$$t = \frac{-Ar + Bs}{(A^2 + B^2)^{1/2}}, u = \frac{-As - Br}{(A^2 + B^2)^{1/2}}$$

en l'equació $Ft^3 + Gt^2u + Htu^2 + Iu^3 = 0$ resulta:

$$r\sqrt{A^2 + B^2} = \alpha s^2 + \beta s^3 + \gamma s^4 + \delta s^5 + ...$$

En general, es donen tres tipus de fenòmens:

1. Curvatura contínua: la corba no presenta ni punt d'inflexió ni cúspide (radi osculador generalment finit).[12]
2. *Punt d'inflexió*: quan radi osculador infinit o infinitament petit, aleshores $\alpha r^m = s^n$, *m*, *n* senars i *n* més gran que *m*, que Euler anomena branques d'ordre *m*.
3. *Cúspide*: radi osculador infinit o infinitament petit: dues branques convexes entre si, mútuament tangents, $\alpha r^m = s^n$, *m* parell, *n* senar. Cas particular: cúspide on ambdues branques preserven la seva convexitat. Són les cúspides de segona espècie segons L'Hôpital. Però no és un quart fenomen, el que passa és que la corba no està completa. La descripció mecànica de les cúspides de segona espècie no dóna tota la corba compresa en l'equació, només una part.

Fins aquí el punt és simple. Però si $A = B = 0$ apareixen diferents branques amb intersecció entre si. És qüestió d'estudiar la curvatura de cada branca per separat. En general en un *punt múltiple* és com si una recta tallés la corba en diversos punts. La naturalesa del punt múltiple està lligada a la transició dels complexos als reals, i les formes són *punts conjugats*, *nodes*, *cúspides* o combinacions d'aquests. Si en l'equació:

$$At + Bu + Ct^2 + Dtu + Eu^2 + Ft^3 + ... = 0$$

A i *B* s'anul·len simultàniament, aleshores s'ha de considerar l'equació:

$$Ct^2 + Dtu + Eu^2 = 0$$

(els termes següents desapareixen quan *t*, *u* són infinitament petits). En funció del discriminant d'aquesta equació, la corba té un punt doble i es poden donar tres situacions: un punt conjugat, o bé dues branques que es tallen en un node, o bé dues branques mútuament tangents. Si $A = B = C = D = E = 0$, s'estudia l'equació:

---

[12] Tot i que també estudia casos on el radi és infinit o infinitament petit i la curvatura no canvia, per exemple, quan *m* senar, *n* parell i $n > m$.

$$Ft^3 + Gt^2u + Htu^2 + Iu^3 = 0\,.$$

Si aquesta equació presenta només un factor lineal real (i els altres dos són complexos, donant lloc a un oval), la corba presenta una única tangent. Si els tres factors són reals, la corba presenta tres branques que tenen intersecció en un punt o són mútuament tangents en aquest punt, segons les arrels siguin iguals o no. És el cas d'un punt triple.

Indeterminacions

- En el capítol catorzè de la segona part parla de la diferenciació per a casos particulars. Atès que:

$$dy = pdx + \frac{1}{2}qdx^2 + \frac{1}{6}rdx^3 + ...,$$

si pdx no s'anul·la aleshores $dy = pdx$; si pdx s'anul·la, aleshores $dy = \frac{1}{2}qdx^2$. Si q s'anul·la llavors $dy = \frac{1}{6}rdx^3$, i així successivament. En referir-se a la discussió de Jakob Bernoulli en connexió amb el fet que el zero no té ordre d'infinit fixat, Bos afirma que aquest fet "viola la condició de regularitat que els diferencials de primer ordre han de ser tots del mateix ordre d'infinit" (BOS (1974), p. 28).

- $\frac{0}{0}$ (punts 355-357): Quan per a $x = a$ resulta que $\frac{P}{Q} = \frac{0}{0}$, l'expressió pot ser tant una quantitat finita com una quantitat infinitament gran o petita. Per conèixer el valor real de $\frac{P}{Q}$, s'ha d'estudiar $\frac{P}{Q}$ en $a + dx$ (que és com dir $x = a$, doncs $dx = 0$). $\frac{P}{Q}$ passa a ser $\frac{P + dP}{Q + dQ}$, que quan $x = a$ és $\frac{dP}{dQ}$. Aquesta expressió ja no pot ser indeterminada, dP, dQ no s'anul·len (veure punt anterior, on es parla del diferencial complet). Així, si $dP = Rdx^m$ i $dQ = Sdx^n$:

$$\frac{P}{Q} = \begin{cases} \frac{R}{S} \text{ si } m = n \\ 0 \text{ si } m > n \\ \infty \text{ si } m < n \end{cases}$$

La resolució d'aquest problema és útil de cara a la suma de sèries.

- $\frac{\infty}{\infty}$ (punt 362): si $\frac{P}{Q}=\frac{\infty}{\infty}$, llavors $\frac{P}{Q}=\frac{1:Q}{1:P}=\frac{0}{0}$.
- $0\cdot\infty$ (punt 363): si $P\cdot Q=0\cdot\infty$, prenent $Q=\frac{1}{R}$, aleshores $P\cdot Q=\frac{P}{R}=\frac{0}{0}$.
- $\infty-\infty$ (punt 364): si $P-Q=\infty-\infty$, aleshores

$$e^{P-Q}=\frac{e^{-Q}}{e^{-P}}=\frac{0}{0}.$$

En el cas en què *P*, *Q* siguin algèbriques, si són infinites, només pot ser que siguin fraccions, el denominador de les quals s'anul·la quan $x=a$. Si *P*, *Q* són transcendents, les avaluem en $a+w$, amb *w* infinitament petit: $P=\frac{A}{w}+B, Q=\frac{A}{w}+C$, de manera que $P-Q=B-C$, que és una diferència finita. La resolució d'aquest tipus d'indeterminació és útil de cara a la suma de sèries.

- El capítol setzè (segona part) està dedicat a la diferenciació de *funcions inexplicables*. Una funció inexplicable és una expressió que no està determinada, ni a través de les arrels d'una equació, ni és algèbrica, ni és transcendent. Per exemple, la funció que a *x* li fa correspondre $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+...+\frac{1}{x}$.

7.3. EL LLENGUATGE QUE UTILITZA, ÉS GEOMÈTRIC O ALGÈBRIC?

El llenguatge emprat per Euler és algèbric en el sentit que treballa amb funcions, de les quals calcula el límit de la proporció dels increments evanescents (és a dir, el "coeficient diferencial"). Les sèries tenen un paper principal en la seva obra. De fet, els vuit primers capítols de la segona part estan dedicats a l'estudi de les sèries. En particular, aplica el teorema de Taylor a la discussió d'extrems i a l'aproximació dels valors d'una funció (on ressalta la importància de la convergència de la sèrie). Així, el seu llibre no presenta cap figura. Tot i que els primers principis del càlcul diferencial es prengueren de la geometria, Euler no parla de l'ús del càlcul diferencial en la geometria, doncs considera que ja n'hi ha prou treballs.[13]

7.4. ELECCIÓ DE COORDENADES I TRACTAMENT DE LES CORBES ALGÈBRIQUES I TRANSCENDENTS

Euler introdueix la classificació de les funcions en algèbriques i transcendents a l'*Introductio*.[14] Les funcions es poden distingir segons el mètode utilitzat en combinar la variables i les constants. Les *funcions algèbriques* es formen a partir d'operacions algèbriques, mentre que les *transcendents* ho fan mitjançant operacions transcendents que afecten la variable. Les funcions algèbriques es divideixen en irracionals (quan la variable està afectada per radicals, de forma implícita o explícita) i no irracionals[15] (que no contenen cap irracionalitat, i que es poden dividir en racionals i polinòmiques). La corba associada a una funció algèbrica s'anomena geomètrica. No hi ha cap diferència, en el tractament de les algèbriques i de les transcendents. Les algèbriques són combinacions de potències i les transcendents es poden desenvolupar en sèrie de potències. En general no fa menció a les coordenades, tret d'algun canvi que efectua per transformar i simplificar l'equació.[16] A les *Institutiones* dóna exemples de diferenciació d'expressions únicament algèbriques; d'expressions únicament transcendents; i d'expressions que contenen quantitats algèbriques i transcendents. Coneixent el diferencial de la potència es poden diferenciar totes les funcions algèbriques (capítol cinquè). En el capítol sisè mostra com diferenciar les funcions transcendents (logarítmica, exponencial, trigonomètriques). Obté el diferencial de la funció logarítmica a partir del seu desenvolupament en sèrie. El diferencial de la funció exponencial es pot trobar bé a través de la diferenciació del logaritme, bé a partir del desenvolupament en sèrie de potències de la funció exponencial. Euler també proposa un tercer camí per obtenir el diferencial de la funció $y = p^q$

---

[13] En el prefaci de l'*Introductio in analysin infinitorum* Euler comenta que moltes qüestions seran resoltes en termes algèbrics, però amb l'ajuda de l'anàlisi, deixant palesa la relació entre els dos mètodes. El primer llibre exposa l'anàlisi pura; inclou l'estudi de funcions i de sèries infinites. En el segon llibre mostra allò que s'ha de saber de geometria, doncs generalment l'anàlisi s'aplica a la geometria.

[14] Vegeu EULER (1748), punts 8-9, capítol primer, llibre primer.

[15] El traductor de la versió anglesa adverteix que això és nomenclatura moderna i que, de fet, Euler les classifica en funcions irracionals i racionals.

[16] En l'*Introductio* sí que comenta que les ordenades poden ser ortogonals o obliqües. Vegeu EULER (1748), punt 11, capítol primer, llibre segon.

(aprofitant que ja ha calculat anteriorment el diferencial de l'exponencial amb base *e*):

$$y = p^q = e^{qlp} \Rightarrow dy = e^{qlp}(dqlp + \frac{qdp}{p}).$$

Per diferenciar l'arcsinus de *x*, diferencia la seva fórmula equivalent, vista a l'*Introductio*:

$$y = A.\sin x = \frac{1}{\sqrt{-1}} l(\sqrt{1-xx}) + x\sqrt{-1}).$$[17]

Una altra forma: si $y = A.\sin x$ llavors $x = \sin y$ i $x + dx = \sin(y + dy) = \sin y.\cos dy + \cos y.\sin dy$. Com que el sinus de *dy* (una quantitat evanescent) és *dy* i el cosinus de *dy* és 1 (demostrat en l'*Introductio* a partir del desenvolupament en sèrie):

$$x + dx = \sin y + \cos y.dy = x + \sqrt{(1-xx)}.dy,$$

i d'aquí ja resulta la fórmula del diferencial de l'arcsinus de l'arc.[18] A continuació, estudia el diferencial de l'arccosinus de l'arc: sigui $y = A.\cos x$, on *x* és el cosinus i, per tant, $\sqrt{(1-xx)}$ el sinus. D'aquest forma:

$$y = A.\cos x = A.\sin\sqrt{(1-xx)},$$

i ja es pot trobar el seu diferencial. En dóna una altra forma: si $y = A.\cos x$ i $z = A.\sin x$, es verifica $y + z = 90^{\circ}$, d'on es dedueix $dy = -dz$.[19] En el cas de $y = A.\tan gx$, si la tangent és *x* el sinus és $\frac{x}{\sqrt{(1+xx)}}$. Així:

$$y = A.\tan gx = A.\sin\frac{x}{\sqrt{(1+xx)}},$$

i d'aquí ja es pot calcular el diferencial de l'arctangent de l'arc.[20] Procedeix de manera anàloga amb la resta de funcions de l'arc. També presenta el diferencial del sinus i del cosinus, tenint en compte que el cosinus d'una quantitat evanescent és 1 i el sinus és la mateixa quantitat. Pel que fa a la tangent:

$$y = \mathrm{tang}x \Rightarrow y + dy = \mathrm{tang}(x + dx) = \frac{\mathrm{tang}x + \mathrm{tang}dx}{1 - \mathrm{tang}x.\mathrm{tang}dx}.$$

Obté la fórmula del seu diferencial tenint en compte que la tangent de la quantitat evanescent *dx* es pot prendre com *dx*. També es poden trobar aquestes fórmules fent servir

[17] Vegeu EULER (1755), punt 194, primera part.
[18] Vegeu EULER (1755), punt 195, primera part.
[19] Vegeu EULER (1755), punt 196, primera part.
[20] Vegeu EULER (1755), punt 197, primera part.

els diferencials de les funcions de l'arc. A partir de les fórmules trobades treballa amb la resta de funcions trigonomètriques. Els diferencials de les línies trigonomètriques es poden expressar en funció del sinus i del cosinus. En general, a l'hora de diferenciar, considera una funció constituïda per parts i busca el diferencial de cada part, com si la part fos una variable i la resta, constant. Tots els diferencials s'ajunten en una suma al final. Euler no considera el càlcul exponencial com una altra part del càlcul diferencial. Així, en les regles de diferenciació i d'integració presenta tant les funcions algèbriques com les transcendents.

7.5. PROBLEMES I APLICACIONS

La segona part de les *Institutiones* mostra algunes aplicacions del càlcul, com el cas de màxims i mínims (fins i tot, per a funcions de diverses variables). No inclou, però, el càlcul de tangents, ni de punts d'inflexió, ni de radi d'osculació, que trobem a l'*Introductio*, mitjançant la utilització de sèries. També presenta aplicacions del càlcul a l'àlgebra. En particular, el capítol nou de la segona part es titula *De la utilitat del càlcul diferencial en la resolució d'equacions*. Euler aproxima les arrels d'equacions mitjançant el desenvolupament de Taylor, aproximacions que són més ràpides com més termes de la sèrie s'agafin. També aplica les sèries per estudiar les arrels múltiples. Per exemple, una arrel triple verifica:

$$y = 0, \frac{dy}{dx} = 0, \frac{ddy}{dx^2} = 0 .$$

Aquest capítol també inclou l'estudi de les equacions diferencials. Els capítols dotzè i tretzè parlen de les arrels reals i imaginàries de les equacions, respectivament.

8. ASPECTES METODOLÒGICS: INTENCIÓ DIDÀCTICA, ESTRUCTURA I NOTACIÓ

8.1. LA INTENCIÓ DIDÀCTICA

Després de fer la presentació de cada obra al començament dels capítols 3, 4, 5, i 6, s'observa que les obres analitzades s'adrecen a públics diferents. En alguns casos el públic són els estudiants i futurs estudiants de les universitats. En altres casos, les obres estan dirigides als estudiants d'escoles militars. Finalment, hi ha obres adreçades a principiants, en general, i a erudits, sense un lligam directe amb els cercles universitaris o militars. Aquest tercer tipus d'obres, no tan homogeni com els altres dos, el designaré amb l'etiqueta de "tractats erudits".

A continuació faré una breu revisió dels aspectes didàctics dels textos estudiats, segons aquesta classificació.

8.1.1. OBRES PER ALS ESTUDIANTS D'UNIVERSITATS

Wolff: Wolff desenvolupà la seva tasca docent a les universitats de Leipzig i Halle. Però va ser un popularitzador de tots els camps del coneixement humà. El text de Wolff s'estructura en capítols amb títols, i cada capítol es divideix en apartats numerats. Wolff encapçala els apartats amb paraules com *definició, corol·lari, problema* i *resolució*. Generalment enuncia un problema, proposa la resolució (de vegades, amb diversos casos, com el problema 1) i, a continuació, exposa la seva demostració. A més, en dóna molts corol·laris, que exposen exemples de càlcul. En el cas de la subtangent a la concoide, fins i tot presenta dos camins per resoldre el problema. El text dels escolis, els termes nous i els autors a qui fa referència els escriu amb cursiva (vegeu, per exemple, els punts 6 i 9). En els punts 5 i 6, en parlar de la naturalesa del càlcul diferencial, fa referència a Euclides, Arquimedes, Leibniz i Newton. Parla de Huygens i Leibniz en el capítol de corbes osculadores. Al final del llibre adjunta les figures necessàries per poder seguir el text.

Kästner: Kästner fou professor de matemàtiques a les universitats de Leipzig i de Göttingen. La primera part de l'*Anfangsgründe der Analysis des Unendlichen* conté el càlcul diferencial. No obstant, En un apartat de la seva obra exposa els "Conceptes del

Càlcul de Fluxions" (punts 31-45). Al principi de cada punt especifica si el que ve a continuació és una *explicació*, un *exercici*, una *solució*, un *resum*, un *exemple*, una *observació*, una *indicació*, un *teorema* o una *demostració*. Al final d'alguns apartats amb diversos casos, presenta una taula-resum (vegeu, per exemple, el punt 521). Fa referència a altres textos, com el comentari de Colson sobre el *Methodus Fluxionum* de Newton; les obres de Jakob i de Johann Bernoulli; el *Treatise of Fluxions* de Colin Maclaurin; les *Institutiones calculi differentialis* d'Euler; les obres de Clairaut, de Segner, de Cramer i de Maupertuis. També presenta les figures al final.

Karsten: Karsten fou professor de matemàtiques a les universitats de Rostock i de Halle. Els punts (numerats) no van encapçalats amb paraules com *teorema*, però després de l'enunciat (que està escrit amb lletra diferent) indica si es tracta d'una *solució*, d'una *demostració* o d'un *corol·lari*. Al final de la secció II exposa una sèrie d'observacions generals respecte el càlcul diferencial, on presenta maneres de simplificar els càlculs. Entre d'altres troba la diferencial de funcions compostes.[1] Comenta que totes les funcions algèbriques i transcendents es poden diferenciar fàcilment amb les regles vistes, i que només s'ha de practicar per adquirir habilitat. En la darrera observació dóna una taula amb les diferencials successives del sinus i del cosinus. Les figures que calen per poder entendre el text apareixen al final del llibre.

Lagrange (1800): A les *Leçons sur le calcul des fonctions* Lagrange recull les lliçons que impartí als alumnes de l'École Normale i més endavant les reimprimeix per a l'ús dels seus alumnes de l'École Polytechnique. Lagrange no empra paraules com *teorema*, *definició*, *proposició*,... en començar un punt. Tanmateix els temes queden ben diferenciats en capítols, amb títols explicatius. A la *Théorie des fonctions analytiques*, al contrari que a les *Leçons*, sí numera els diferents apartats. A la pàgina 50 de les *Leçons* presenta una taula amb les fórmules de les funcions derivades, de les funcions compostes. Lagrange proposa una sèrie d'exemples de derivació tant amb funcions donades de forma explícita (p. 52) com amb expressions implícites (p. 53). Atès que el

[1] Per exemple, en la pàgina 84, per diferenciar $y = \dfrac{x}{x+\sqrt{(1+xx)}}$ primer proposa multiplicar el numerador i el denominador per $\sqrt{(1+xx)}-x$ i, a continuació, fer el canvi $z = 1+xx$. També proposa altres maneres de resoldre el problema: prenent $z = xx + x^4$ o bé prenent $z = x+\sqrt{(1+xx)}$.

tractament no és geomètric, no apareixen figures. També proposa exemples d'aplicació de la mecànica (moviment uniforme, moviment uniformement accelerat,...). Tant en la *Théorie* com en les *Leçons,* apareixen referències a Viète, Wallis, Descartes, Fermat, Newton, Leibniz, Jakob i Johann Bernoulli, L'Hôpital, Taylor, Euler (*Introductio*), D'Alembert, Moivre Monge (*Application de l'Analyse à la Géométrie*)... Lagrnage menciona també el *Journal de l'École Polytechnique*, *Philosophical Transactions*, les actes de Leipzig, la *Nova Acta* (de l'acadèmia de Sant Petersburg) i les memòries de les acadèmies de París, Berlín i Torí.[2]

Lacroix: Els textos que Lacroix publicà estaven relacionats amb la seva tasca docent. En particular, a l'École Polytechnique Lacroix va utilitzar el seu *Traité élémentaire de calcul différentiel et de calcul intégral*. El 1805 Lacroix publica *Essais sur l'enseignement*, on queden paleses "la seva aguda penetració psicològica, rica erudició, ment liberal i ampli concepte de l'educació".[3] El títol complet del seu tractat és prova del seu interès per la pedagogia i la didàctica: *Traité élémentaire de calcul différentiel et de calcul intégral: précédé de réflexions sur la manière d'enseigner les mathématiques, et d'apprécier dans les examens le savoir de ceux qui les ont étudiées*.[4] El *Traité élémentaire* està constituït per seccions amb títols que n'expliquen el contingut.[5] Els resultats importants i els termes tècnics (màxim, mínim, límit, etc.) els escriu en cursiva. Lacroix numera els apartats. Al llarg del treball es troben diverses anotacions històriques. Per exemple, en el punt 126 parla de les notacions emprades per Euler i per Fontaine, tot donant la seva opinió al respecte. I en el punt 135 comenta les condicions

---

[2] En la *Théorie des fonctions analytiques*, Lagrange presenta la definició de tangent, el càlcul de màxims i mínims, els contactes entre corbes... segons el punt de vista geomètric i segons el punt de vista analític. Crec que dóna els dos punts de vista per recolzar que la seva teoria és vàlida, des del punt de vista geomètric, que és l'estàndard de rigor. Va comparant els resultats que obté amb els obtinguts via càlcul diferencial (per exemple, segon capítol de la segona part). Com a punt negatiu, a nivell didàctic, assenyalaria la manca d'exemples de càlcul de la tangent, la subtangent, etc. i de càlcul de màxims i mínims. En el primer cas, Lagrange justifica aquesta manca dient que l'únic que s'ha de fer és posar $\frac{dy}{dx}$ en el lloc de y'. En el segon, perquè coincideix amb l'estudi que fa el càlcul diferencial. Vegeu, per exemple, LAGRANGE (1797), pp. 33, 78, 83, 111.

[3] Vegeu GILLISPIE (ed.) (1970).

[4] Les reflexions sobre la manera d'ensenyar matemàtiques només apareixen en el títol de la primera edició. Més endavant, en ser completades, seran publicades de forma separada.

[5] El *Traité du calcul différentiel et du calcul intégral* està dividit en capítols, amb títols. Lacroix proposa un esquema per a l'estudi del càlcul diferencial: 1) mostrar les idees preliminars que donen lloc al càlcul diferencial (primer capítol); 2) la seva relació amb el desenvolupament de funcions (segon capítol). En el punt 27 presenta una taula amb totes les permutacions possibles dels coeficients diferencials d'ordres superiors.

donades per Euler i Lagrange per conèixer la naturalesa d'un extrem d'una funció de diverses variables, també amb una visió crítica. De fet, és remarcable el seu sentit històric en tots els seus escrits. Va escriure per a la *Biographie universelle* de Michaud. També va participar en l'edició de l'*Histoire des mathématiques* de Montucla. Lacroix va escriure el 1801 "Essai pour l'histoire des mathématiques pendant les dernières annés du 18ème et le premier du 19ème", possiblement en relació amb el seu treball per a la història de Montucla. En el *Traité élémentaire* fa referència a altres llibres seus i a resultats tractats en punts anteriors. Així mateix, il·lustra el text amb notes explicatives a peu de pàgina. Resol exemples de les regles donades. De vegades, només proposa l'exemple i en dóna el resultat. Dóna algunes regles pràctiques. Per exemple, com trobar directament la diferencial de l'arrel quadrada d'una funció sense haver d'usar les potències. A partir del punt 60 del *Traité élémentaire* és quan comença a referir-se a figures, però no n'hi ha tantes com en el cas de L'Hôpital.

8.1.2. OBRES PER ALS ESTUDIANTS D'ESCOLES MILITARS

Simpson: Simspon dedica *The Doctrine And Application Of Fluxions* als principiants en general. No obstant això, considero la seva obra dins d'aquest grup, atès que Simpson fou professor de matemàtiques a l'acadèmia militar de Woolwich. Per encapçalar cada apartat fa servir paraules com *proposició, regla, corol·lari, lema, escoli, exemple, il·lustració*... En el prefaci Simpson escriu que carregar el principiant amb moltes regles i preceptes abans d'utilitzar-les i aplicar-les pot desencoratjar-lo. Per això, un cop donats els principis fonamentals, exemplifica la seva utilitat amb qüestions entretingudes. A nivell pedagògic cal remarcar que:

1. Utilitza notes a peu amb indicacions.
2. S'adreça al lector per avisar-li que vagi amb compte, li dóna consells...
3. Les figures estan inserides en el text, i no al final del llibre.
4. Dóna aclariments entre parèntesis de què és el que està aplicant (semblança de triangles, hipòtesi, trigonometria plana...).

La seva obra conté moltes aplicacions físiques i geomètriques: vaixells que s'apropen al màxim sense arribar a xocar, paràbola màxima que talla un con determinat... En el punt 26, per facilitar el càlcul de la fluxió, aconsella prendre una part, un múltiple o una potència, perquè si la quantitat és màxima o mínima, qualsevol part, múltiple o potència també ho serà. Quan ha de trobar el màxim o mínim d'una funció amb una determinada restricció, a vegades resol el problema per dos camins diferents (vegeu, per exemple, l'article 27):

1. Aïllant *y* de la restricció i substituint a la funció que es vol optimitzar, obté una funció d'una variable, la fluxió de la qual s'ha d'igualar a zero.
2. "Derivant implícitament" la funció que es vol optimitzar i la restricció obté un sistema de dues equacions.

Lagrange (1759): Lagrange adreça els seus *Principj* als estudiants de la Reggie Scuole di Artiglieria de Torí. Lagrange no utilitza paraules com *teorema*, *definició*, *proposició*,... per encapçalar els punts (numerats). Els temes no queden clarament separats. Generalment, primer presenta uns quants casos particulars, a continuació enuncia la regla general i finalment proposa alguns exemples d'aplicació d'aquesta regla. En la segona part de l'obra, fins al punt 20 parla dels principis generals i, a partir d'aquí, mostra aplicacions. Per a quantitats compostes, fa substitucions de variables fins a arribar a una operació bàsica. Per ampliar coneixements sobre la teoria general de les corbes fa referència a Euler, Cramer, du Gua i Clairaut. Pel que fa al tema de màxims i mínims recomana llegir L'Hôpital, Agnesi, Fontenelle i, per veure'n més aplicacions, el segon volum del llibre de Maclaurin. En els *Principj* les figures apareixen inserides en el text, i no al final del llibre.

Tempelhoff: L'*Anfangsgründe der Analysis de Unendlichen* de Tempelhoff s'adreça als cadets de la Reial Artilleria Prussiana. La primera part està dedicada al càlcul diferencial, però també presenta el càlcul de fluxions (punts 268-271). Encapçala els punts amb paraules com *complement*, *exercici*, *solució*, *explicació*, *teorema*, *prova*, *observació* o *preparació*. Generalment proposa un exercici, la seva solució i, a continuació, tota una sèrie de complements i exemples. Presenta les figures al final del llibre. Tot i que, en l'estructura i l'enfocament, la seva obra s'assembla a la de Kästner, Tempelhoff proposa més exemples. En el punt 344 presenta una taula-resum dels diferencials de les funcions del cercle, doncs són molt utilitzades a càlcul integral. Fa referència a altres textos sobre càlcul: *Treatise of Fluxions* de Maclaurin; *Analysi Infinitorum* d'Euler; *Analyse de lignes courbes algebriques* de Cramer; *Mémoires de l'Académie des Sciences de Paris*; "Recherches sur la Methode de maximis et minimis" de Lagrange (a *Miscellania Societatis Taurinesis*).

Bézout: Les seves obres estaven adreçades als oficials navals i al cos d'artilleria. Fins i tot, el *Cours complet de mathématiques à l'usage de marine et de l'artillerie* fou molt utilitzat també pels candidats a estudiants de l'École Polytechnique. Segons Grabiner,[6] Bézout comença amb geometria, abans que amb àlgebra, perquè els estudiants encara no estan prou familiaritzats amb el raonament matemàtic com per entendre demostracions algèbriques, però sí que poden apreciar les geomètriques. No fa servir paraules com *axioma*, *teorema*, *escoli*, etc. per encapçalar cada punt, doncs diu que són paraules que fan por.[7] A continuació d'una explicació, dóna exemples amb lletra més petita (vegeu, per exemple, BÉZOUT (1799-1800), punts 4-5). Les regles i els mots nous els remarca emprant la cursiva (vegeu, per exemple, BÉZOUT (1799-1800), pp. 12-13). Dóna algunes recomanacions, com per exemple, escriure xdy, amb *dy* en darrera posició per no confondre. Enuncia una regla, a continuació en dóna exemples i finalment justifica la regla (vegeu, per exemple, BÉZOUT (1799-1800), pp. 12-13), i de vegades, recapitula què s'ha fet en aquest punt. Al final del punt 31 deixa el cas de les hipèrboles generals com a exemple perquè el lector el faci i ell només en dóna la solució. En el punt 12 diu que "no cal carregar la memòria" amb la regla específica de diferenciació de $\frac{x}{y}$, sinó que només cal tractar-la com un producte (xy^{-1}). Sovint fa referència als seus tractats sobre àlgebra, geometria i aritmètica.

8.1.3. TRACTATS ERUDITS

Ditton: *An Institution of Fluxions* és una exposició general del mètode fluxional, basat en el *De quadratura* de Newton. No fa un estudi detallat de càlcul de màxims i mínims, ni de punts d'inflexió, ni del cercle i el radi d'osculació. Però la seva obra conté diverses aplicacions. Ditton adreçà *Institution of Fluxions* a aquells que volien dominar aquesta

[6] Vegeu O'CONNOR-ROBERTSON (1999).
[7] Vegeu O'CONNOR-ROBERTSON (1999).

nova matèria. En el prefaci fa aclariments sobre resultats que exposa més endavant.[8] En general, encapçala els apartats amb la paraula *article*. En alguns apartats fa servir *corol·lari*, *teorema*, *lema*, *escoli*, *exemple* i *problema* en començar un article. Les figures que il·lustren un resultat hi apareixen adjuntes. Dedica un capítol a la notació. En alguns articles exposa les conclusions o resum del que s'ha vist en els articles anteriors (per exemple, article X, secció I). En la secció novena fa un quadre resum indicant perquè serveixen els mètodes de fluxions directe i invers. Però només exposa alguns exercicis que no pertanyen a cap dels de la classificació, ni es pot dir que siguin enterament del mètode directe o de l'invers. Sorprèn que en un text de càlcul diferencial per a principiants no apareguin les regles generals del càlcul de tangents, extrems i punts d'inflexió, tot i que en algun pas dels problemes en faci servir alguna.[9] A més a més, a les planes 172 i 173 comenta que podria proposar molts altres problemes al lector però que aleshores s'estendria més enllà del seu propòsit. Així que pensa que el millor és donar unes quantes pistes i que el lector segueixi l'estudi pel seu compte. En les regles per trobar fluxions, primer exposa la justificació, després enuncia la regla general i en proposa exemples.

Reyneau: Reyneau pertanyia a l'orde de l'Oratoire i estava en contacte amb Malebranche. De fet, va ser Malebranche qui el va empènyer a escriure l'*Analyse démontrée*. Els apartats de la seva obra porten títols explicatius: "Utilitats d'aquests càlculs", "Explicació del càlcul diferencial",… A més, encapçala els punts amb paraules com *corol·lari*, *observació*, *exemple*, etc. Reyneau segueix el següent esquema a l'hora de resoldre un problema: 1) explica de paraula què farà i dóna noms a les variables; 2) presenta les fórmules generals; 3) utilitza aquestes fórmules en exemples concrets; 4) dóna un seguit d'observacions pertinents. Treballa diversos exemples amb la cicloide per demostrar que amb el nou càlcul s'arriba de forma més ràpida al mateix resultat que amb la geometria ordinària. Al final de cada resultat general, exposa una sèrie d'observacions al respecte. Les figures van adjuntes al final de l'obra.

[8] A nivell didàctic, potser fóra millor que, en el moment en què exposés el resultat, fes els aclariments pertinents.

[9] Per exemple, a la pàgina 220 diu que una determinada quantitat ha de ser mínima i que, en conseqüència, la seva fluxió s'ha d'anul·lar, però abans no ha donat la regla general per al càlcul d'extrems.

Maclaurin: La motivació principal de Maclaurin en escriure el seu tractat de fluxions va ser defensar el mètode fluxional davant de l'atac de Berkeley i fer-lo més entenedor. En la introducció fa un resum històric del càlcul i recomana llegir els dos primers capítols del segon llibre abans que els cinc darrers del primer llibre. Només encapçala cinc o sis punts amb la paraula *proposició*, per a la resta de punts no fa servir mots d'encapçalament. Sempre dóna molts exemples, que abasten tots els casos possibles. Dedica un capítol a la notació de les fluxions. Entre altres coses comenta que Newton, de vegades, escriu els fluents amb majúscules i les fluxions corresponents amb minúscules. Però Maclaurin troba més adient l'altra notació, amb punts sobre les lletres. També comenta la notació emprada per Leibniz (*d*). Diversos cops fa referència a altres autors, tant newtonians, com leibnizians (Johann Bernoulli, Stirling, l'*Analyse des infiniment petits* de L'Hôpital, ...). Per exemple, en el punt 752 presenta un teorema referent al càlcul de fluents, que diu que no és molt diferent del resultat presentat per Bernoulli en *Acta Eruditorum* el 1694. En el capítol V, *De les regles generals per a la resolució de problemes per computació, amb exemples,* presenta el càlcul de tangents, màxims i mínims, punts d'inflexió, corbes osculadores i càustiques, però sense distingir cada tema amb un títol explicatiu. Després de l'estudi d'una determinada situació, fa un apartat resumint i donant una regla general, recordant que poden haver-hi excepcions i, en aquest cas, buscant un camí alternatiu.

Agnesi: L'obra d'Agnesi s'adreça als principiants italians, en general. Es dedica més a exemples i regles pràctiques que no pas a teoria. Des del començament il·lustra els problemes amb figures, adjuntes al final de l'obra. Mitjançant escolis i advertències va donant pistes o regles pràctiques útils. A l'hora d'enunciar regles, primer les dedueix a partir d'exemples. Després, enuncia la regla general. Finalment, exposa exemples per confirmar la regla. Per exemple, per a les regles de diferenciació de les potències: primer per al cas de potències naturals (que diferencia com un producte), després per al cas de potències enteres negatives (que diferencia com una fracció) i per als casos d'exponent fraccionari positiu ($\sqrt[n]{x^m} = x^{m/n} = z \to x^m = z^n$ i resol com el primer cas) i negatiu ($x^{-m/n} = \frac{1}{\sqrt[n]{x^m}}$). Dóna la regla general per derivar potències. Però no utilitza les progressions aritmètiques ni geomètriques, com Bernoulli o L'Hôpital. També estudia el cas on la base no és x (sense esmentar-la, fa servir la regla de la cadena: troba la diferència de $\sqrt{ax + xx + \sqrt[4]{a^4 - x^4}}$). En la secció dedicada al càlcul de tangents, mira de donar diversos camins per resoldre un mateix problema. Per exemple, en el cas de la cissoide i la quadratriu.[10] També exposa diverses maneres de trobar la longitud del radi osculador. Tanmateix, quan vol trobar la tangent a la concoide (punt 58) no deixa prou clares les semblances de triangles. En la secció sobre màxims i mínims, dels punts 75 a 86 dóna exemples de càlcul de màxims i mínims de corbes donades. I dels punts 87 a 93 en presenta aplicacions a problemes geomètrics i físics.

Euler: En el prefaci Euler fa un resum general de tot el que s'estudia en el seu llibre, i el perquè. Al principi de cada capítol fa un resum del que aplicarà a continuació, si ja s'ha vist en capítols anteriors. No encapçala els punts amb paraules com *definició* o *teorema*, només apareix la paraula *exemple*. Els apartats són numerats. Al llarg de les *Insitutiones* trobem diverses taules que resumeixen el que s'acaba d'estudiar. Per exemple, el punt 7 del primer capítol (relació entre *x*, *y*, Δy ,...); el punt 14 del primer capítol (coeficients de les diferències d'ordres superiors); en el punt 133 (perquè sigui més clara la forma dels diferencials i la manera de trobar-los); en el punt 237 (taula amb els diferencials de diversos ordres de funció de diverses variables). En el punt 138 comenta les paraules més utilitzades en el càlcul diferencial: "diferencial", "diferenciar", "una quantitat és diferenciada", "diferenciació". Avisa que no s'ha de confondre dx^2 amb el diferencial de x^2. Fa referència a la seva obra *Introductio*, així com a Johann Bernoulli i el seu mètode per diferenciar i integrar quantitats exponencials. Per familiaritzar-se amb les regles de la diferenciació (per poder utilitzar-les en la geometria superior i en el càlcul integral) recomana practicar amb molts exemples (no només els principiants), i no preocupar-se de la naturalesa i propietats dels diferencials. Euler dóna molts exemples, que van augmentant de dificultat progressivament.

Saladini: La tasca docent de Vincenzo Riccati es desenvolupà en l'àmbit jesuïta. Girolamo Saladini fou professor de matemàtiques de l'Institut de la Ciència de Bolonya i a la Reial Acadèmia de Cadets de Sa Majestat Siciliana. Malgrat que Truesdell es

---

[10] La primera forma de trobar la tangent a la cissoide (punt 62) coincideix amb la primera de L'Hôpital; la segona (punt 63) és igual que la segona de L'Hôpital (que coincidia a l'hora amb la de Bernoulli) i considera que aquesta és millor. Quant a la quadratriu (punt 65), dóna una forma curta, que coincideix amb la de L'Hôpital.

refereix a les *Institutiones analyticae* com el primer llibre de text italià que prové de cercles universitaris,[11] incloc l'obra de Riccati i Saladini en el grup dels tractats erudits, donada l'heterogeneïtat dels àmbits en què els autors empraren les seves obres.[12] Saladini utilitza cursiva per a les definicions. Per diferenciar les fórmules complicades i evitar càlculs llargs, especialment si contenen radicals, ambdós autors fan servir les substitucions oportunes. Saladini remarca que, a l'hora de fer substitucions per trobar integrals, no hi ha regles generals, sinó que és qüestió de pràctica.[13] A l'hora de resoldre un problema, Saladini descriu de manera ordenada els casos.[14] Saladini fa referència a altres textos, com per exemple, les *Instituzioni Analitiche* de Cramer. A RICCATI-SALADINI (1765-1767), punt 10, capítol primer, llibre tercer, trobem una taula que recull els resultats segons si cap diferencial és constant, o *dx*, *dy*, *ydx* ... constant, per a la diferenciació d'ordre primer, segon, tercer,... Com a punt no massa positiu a nivell didàctic, esmento l'exemple de RICCATI-SALADINI (1765-1767), punt 9, capítol 15, llibre tercer, on donada l'equació de la corba $y = \frac{a\sqrt{aa - xx}}{x}$, fent $ddy = 0$, es conclou que la corba presenta una flexió contrària, sense cap més estudi auxiliar.

8.2. L'ESTRUCTURA: ANÀLISI ESTADÍSTICA DE LES FREQÜÈNCIES D'ÚS DE CERTS MOTS

Per quantificar (i comparar) d'alguna manera l'estructura de les obres analitzades he considerat l'estadística textual. L'estadística textual comprèn diverses tècniques estadístiques, les quals, a partir de les freqüències de certs mots, ajuden a establir associacions i a analitzar i comparar textos.[15] En particular, Riba i Ginebra apliquen l'estadística textual per contrastar les parts del *Tirant lo Blanc* que, suposadament, pertanyen a autors diferents.[16]

---

[11] Vegeu TRUESDELL (1989), nota 51.
[12] Vegeu SALADINI (1775), punt 4, capítol tercer, llibre primer; punt 6, capítol segon, llibre segon.
[13] Vegeu SALADINI (1775), punt 8, capítol tercer, llibre primer.
[14] Vegeu el segon exemple a SALADINI (1775), punt 6, capítol segon, llibre segon.
[15] Vegeu GREENACRE (1993); LEBART-SALEM (1994).
[16] Vegeu RIBA-GINEBRA (2000) i (2003).

Seguint una aproximació similar, he fet el recompte dels mots amb què alguns autors encapçalen els apartats i els he classificat en les set categories següents:[17]

- *Corol·lari*.
- *Exemple*.
- *Problema*.
- *Teorema*, que inclou proposicions, teoremes, postulats i lemes.
- *Figura*.
- *Remarca*, que inclou remarques, observacions i escolis.
- *Altres*, que inclou regles, definicions, solucions, demostracions, suposicions, hipòtesis, construccions, preparacions, indicacions.

Per veure si hi ha algun tipus d'associació entre els textos tractats i la freqüència d'ús d'alguns mots he aplicat dues tècniques d'anàlisi multivariant, amb el suport informàtic del paquet estadístic MINITAB: l'anàlisi simple de correspondències i l'anàlisi de conglomerats jeràrquics.

8.2.1. ANÀLISI DE CORRESPONDÈNCIES

L'anàlisi de correspondències és una tècnica exploratòria de dades utilitzada per transformar la informació numèrica en forma gràfica. Es tracta de distribuir punts fila i punts columna d'una taula de contingència sobre un mapa que, en el nostre cas, té dimensió dos. Els eixos principals troben orientació òptima a cada núvol de punts i les contribucions ens indiquen quins punts juguen el paper més important, o han estat els més influents a l'hora de determinar l'orientació. La qualitat dóna idea de quins punts estan millor explicats a partir dels eixos o del subespai format pels eixos principals. Les contribucions faciliten la interpretació dels eixos, la qualitat facilita la interpretació de la posició de cada perfil (que, en aquest cas, és la proporció d'aparicions d'un "mot" determinat en un "autor" determinat). El concepte d'inèrcia va associat al valor khi-

[17] L'annex IV recull les definicions d'aquests mots, segons el diccionari normatiu de l'Institut d'Estudis Catalans.

quadrat de la taula de contingència, que controla quina variació existeix dintre de la taula, és a dir, quines són les distàncies màximes.

En la taula de contingència confeccionada a tal efecte, les columnes corresponen als “autors” i les files als “mots”. No he inclòs ni Lagrange ni Euler, atès que aquests autors no encapçalen els apartats amb els mots enumerats més amunt. Em refereixo a RICCATI-SALADINI (1765-1767) amb el nom de “Riccati”, i a SALADINI (1775) amb el nom de “Saladini”.

	lhopital	reyneau	lacroix	bezout	agnesi	saladini	riccati
corol·lari	65	6	0	0	14	0	15
exemple	72	2	1	0	38	0	57
problema	46	2	0	0	6	0	48
teorema	8	0	0	0	8	10	27
figura	156	68	36	11	96	50	190
remarca	18	13	0	1	3	0	15
altres	22	7	0	0	0	0	1
Total	387	98	37	12	165	60	353

	wolff	kaestner	tempelhoff	karsten	ditton	maclaurin	simpson
corol·lari	64	248	287	298	31	0	3
exemple	0	105	48	3	3	0	49
problema	43	137	70	0	13	0	0
teorema	3	26	22	0	5	6	3
figura	38	41	146	77	23	55	50
remarca	10	76	59	2	11	0	1
altres	31	174	130	101	0	0	3
Total	189	807	762	481	86	61	109

	Total
corol·lari	1031
exemple	378
problema	365
teorema	118
figura	1037
remarca	209
altres	469
Total	3607

Taula 1. Taula de contingència de les freqüències dels mots

El valor de la khi-quadrat obtingut de la taula de contingència és 1904,124 (els graus de llibertat són 78). Això vol dir que el test és significatiu, és a dir, que l’associació entre columnes i files és significativa. En algun lloc de la taula de contingència, doncs, hi ha diferències significatives entre els perfils.

Vegem tot seguit la taula de les inèrcies relatives i la taula de l’anàlisi de la contingència:

	lhopital	reyneau	lacroix	bezout	agnesi	saladini	riccati
corol·lari	0,010	0,009	0,006	0,002	0,012	0,009	0,038
exemple	0,013	0,003	0,001	0,001	0,013	0,003	0,006
problema	0,001	0,003	0,002	0,001	0,004	0,003	0,002
teorema	0,001	0,002	0,001	0,000	0,001	0,017	0,011
figura	0,009	0,030	0,032	0,009	0,026	0,033	0,041
remarca	0,000	0,005	0,001	0,000	0,002	0,002	0,001
altres	0,008	0,001	0,003	0,001	0,011	0,004	0,023
Total	0,042	0,053	0,045	0,013	0,069	0,071	0,122

	wolff	kaestner	tempelhoff	karsten	ditton	maclaurin	simpson
corol·lari	0,001	0,001	0,012	**0,098**	0,001	0,009	0,013
exemple	0,010	0,003	0,007	0,023	0,002	0,003	0,065
problema	0,016	0,020	0,000	0,026	0,001	0,003	0,006
teorema	0,001	0,000	0,000	0,008	0,001	0,004	0,000
figura	0,003	0,083	0,013	0,014	0,000	0,042	0,006
remarca	0,000	0,010	0,003	0,013	0,004	0,002	0,002
altres	0,001	0,024	0,005	0,012	0,006	0,004	0,005
Total	0,031	0,139	0,039	0,195	0,015	0,068	0,097

	Total
corol·lari	0,221
exemple	0,154
problema	0,087
teorema	0,047
figura	0,339
remarca	0,044
altres	0,108
Total	1,000

Taula 2. Taula de les inèrcies relatives

Axis	Inertia	Proportion	Cumulative	Histogram
1	0,3360	0,6364	0,6364	******************************
2	0,1053	0,1995	**0,8360**	*********
3	0,0525	0,0995	0,9355	****
4	0,0157	0,0297	0,9652	*
5	0,0109	0,0207	0,9859	
6	0,0075	0,0141	1,0000	
Total	0,527			

Taula 3. Taula de l'anàlisi de contingència

Les dues primeres components configuren el pla factorial escollit, que explica el 83,60% de la inèrcia (en negreta, a la Taula 3). La inèrcia total representa la variació existent a la taula. Per tant, la informació posicional (és a dir, la representació de les distàncies) entre els perfils "autors", és força acurada. La major contribució a la inèrcia correspon a Karsten, amb 0,098 (en negreta, a la Taula 2).

Per dur a terme la representació gràfica de l'anàlisi de correspondències, he fet servir un mapa asimètric, on els vèrtexs són les set categories de "mots" (files), que fan de sistema de referència (en coordenades estàndard o normalitzades). He fet servir el mapa asimètric perquè, quant més a prop es trobi un perfil respecte un vèrtex, més alt és el seu perfil respecte a aquesta categoria. En canvi, amb el mapa simètric la proximitat d'un punt columna a un punt fila no implica associació de les dades, sinó que és la superposició de dos mapes separats. Les coordenades dels "autors" (columnes) són principals, referides als eixos principals. Amb la contribució es detecten els punts que més han contribuït a la formació d'un eix. La contribució quantifica el grau d'"atracció magnètica" envers cadascun dels eixos. Es veuen els punts que han jugat un paper important a l'hora de determinar l'orientació principal dels eixos, els punts més influents a l'hora de determinar aquesta orientació.

Row Contributions

					Component 1			Component 2		
ID	Name	Qual	Mass	Inert	Coord	Corr	Contr	Coord	Corr	Contr
1	corol·lari	0,958	0,286	0,221	0,579	0,823	**0,286**	-0,235	0,135	**0,149**
2	exemple	0,699	0,105	0,154	-0,404	0,211	0,051	0,614	0,488	**0,375**
3	problema	0,588	0,101	0,087	0,150	0,050	0,007	0,494	0,539	**0,235**
4	teorema	0,353	0,033	0,047	-0,503	0,335	0,025	0,117	0,018	0,004
5	figura	0,994	0,287	0,339	-0,744	0,891	**0,474**	-0,253	0,103	**0,175**
6	remarca	0,354	0,058	0,044	0,183	0,082	0,006	0,332	0,272	0,061
7	altres	0,893	0,130	0,108	0,627	0,892	**0,152**	0,019	0,001	0,000

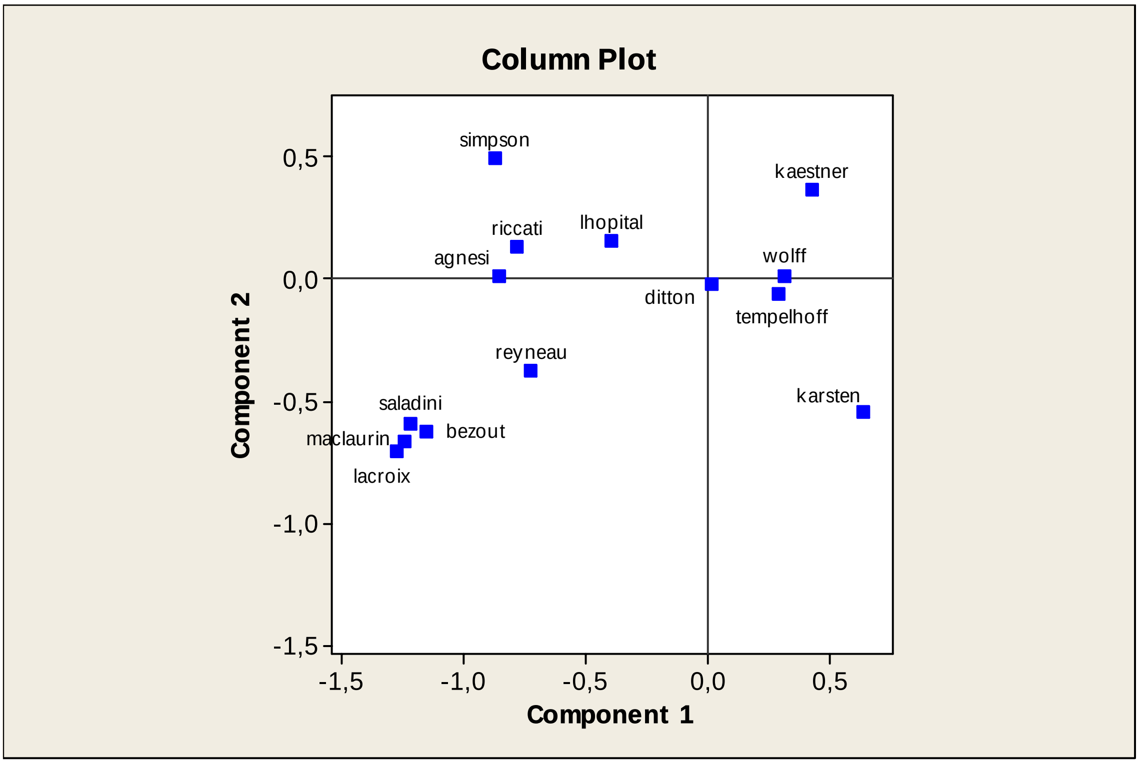
Taula 4. Taula de contribucions per fila ("mots")

Column Contributions

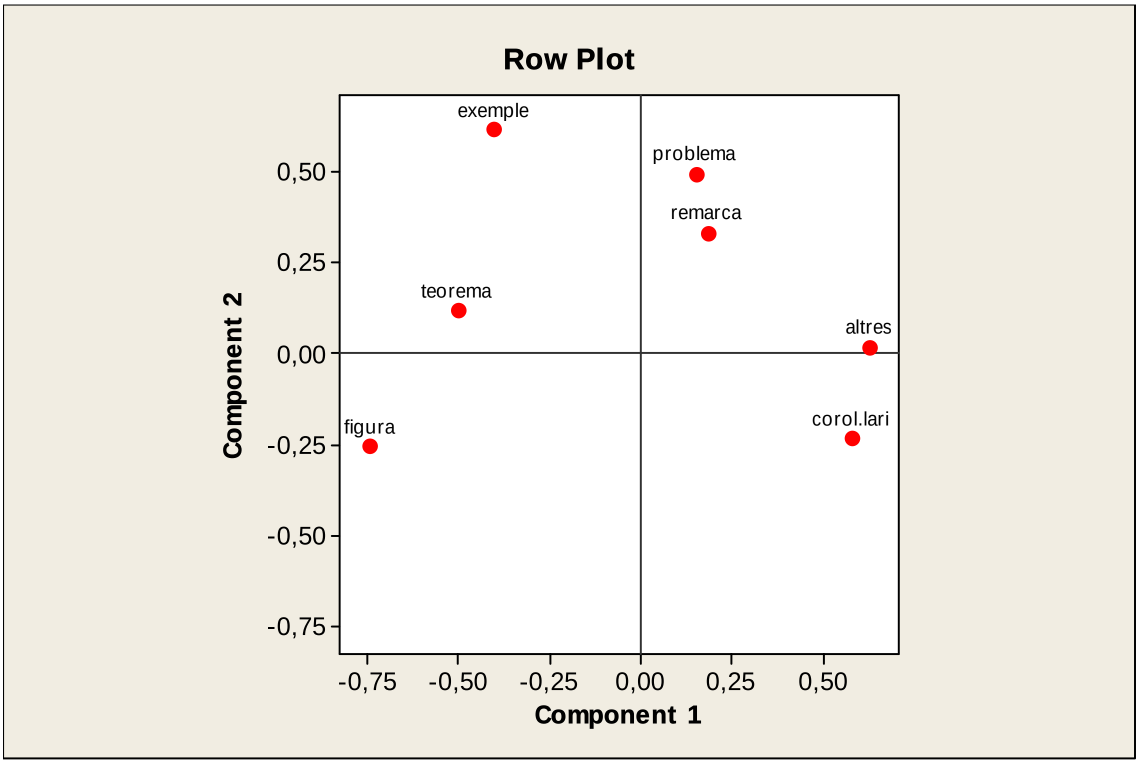
					Component 1			Component 2		
ID	Name	Qual	Mass	Inert	Coord	Corr	Contr	Coord	Corr	Contr
1	lhopital	0,846	0,107	0,042	-0,391	0,730	0,049	0,155	0,115	0,025
2	reyneau	0,635	0,027	0,053	-0,720	0,499	0,042	-0,377	0,137	0,037
3	lacroix	0,918	0,010	0,045	-1,269	0,700	0,049	-0,709	0,218	0,049
4	bezout	0,843	0,003	0,013	-1,151	0,649	0,013	-0,631	0,195	0,013
5	agnesi	0,904	0,046	0,069	-0,850	0,904	0,098	0,012	0,000	0,000
6	saladini	0,806	0,017	0,071	-1,215	0,652	0,073	-0,591	0,154	0,055
7	riccati	0,946	0,098	0,122	-0,776	0,919	0,175	0,133	0,027	0,016
8	wolff	0,323	0,052	0,031	0,319	0,323	0,016	0,014	0,001	0,000
9	kaestner	0,966	0,224	0,139	0,430	0,563	0,123	0,364	0,403	0,281
10	tempelhoff	0,923	0,211	0,039	0,294	0,882	0,054	-0,063	0,041	0,008
11	karsten	0,911	0,133	0,195	0,638	0,527	0,161	-0,544	0,384	0,375
12	ditton	0,003	0,024	0,015	0,022	0,001	0,000	-0,021	0,001	0,000
13	maclaurin	0,939	0,017	0,068	-1,243	0,728	0,078	-0,669	0,211	0,072
14	simpson	0,587	0,030	0,097	-0,867	0,443	0,068	0,494	0,144	0,070

Taula 5. Taula de contribucions per columna ("autors")

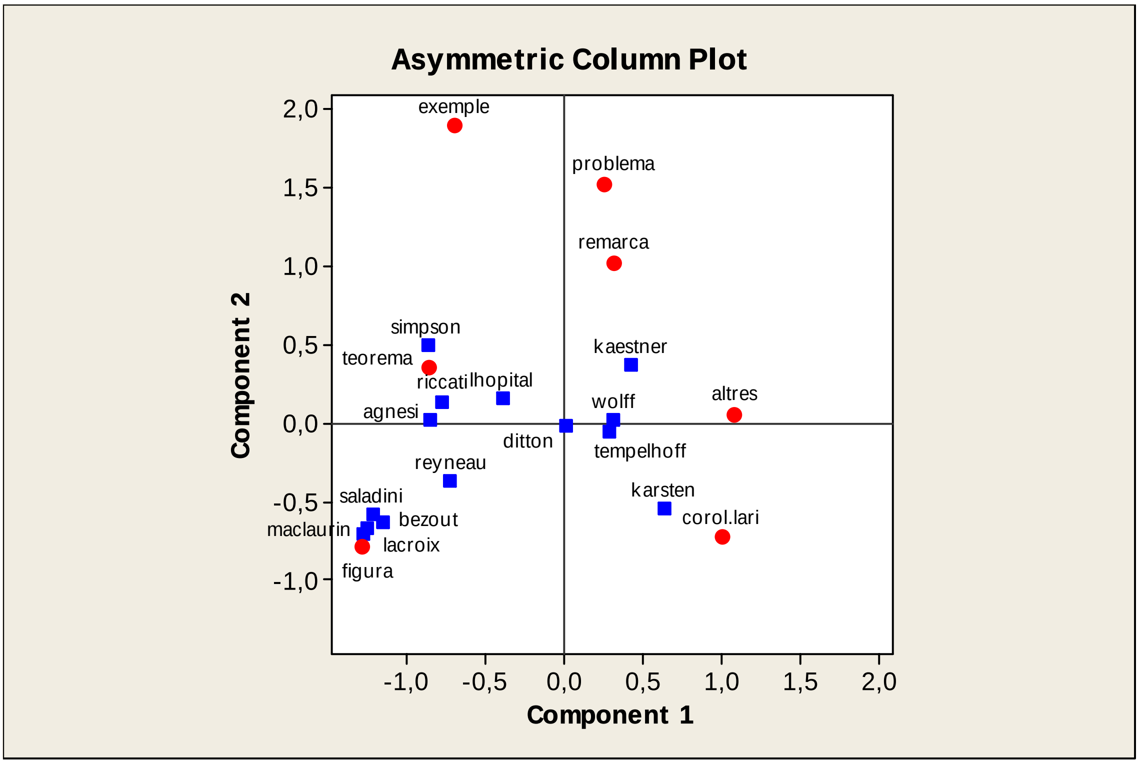
En negreta he assenyalat les contribucions més significatives de "mots" a cada dimensió. Les associacions que es poden establir es poden apreciar a les gràfiques següents:



Gràfica 1. Gràfica corresponent al mapa de les columnes ("autors")



Gràfica 2. Gràfica corresponent al mapa de les files ("mots")

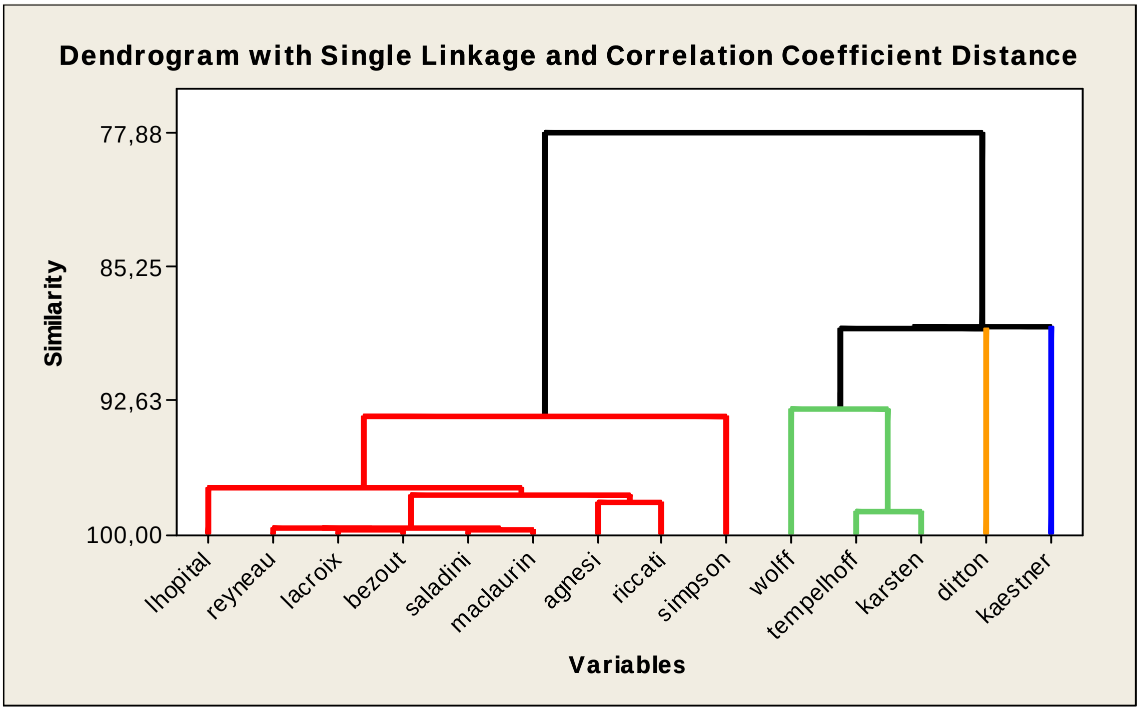


Gràfica 3. Mapa conjunt de files ("mots") i columnes ("autors")

Sobre l'eix horitzontal de la Gràfica 2, el contrast més gran es troba entre el mot *figura*, a l'esquerra (amb una contribució del 47,4%) i, a la dreta, el mot *corol·lari* (amb una contribució del 28,6%) i *altres* mots (amb una contribució del 15,2%). Sobre l'eix vertical de la Gràfica 2, el contrast més gran es dóna entre els mots *exemple* (contribució: 37,5%) i *problema* (contribució: 23,5%), a la part superior, i els mots *figura* (contribució: 17,5%) i *corol·lari* (contribució: 14,9%), a la part inferior. El grup dels autors alemanys es troba a la dreta de la Gràfica 1. La resta, a l'esquerra. S'observa que gairebé tots els punts tenen una bona representació segons aquest mapa (qualitat alta), tret de Ditton (qualitat: 0,003) i Wolff (qualitat: 0,323). Aquests dos casos tenen una representació poc acurada segons el mapa (s'hauria de controlar una tercera dimensió). Al llarg de l'eix horitzontal de la Gràfica 3, el grup d'"autors" de la dreta es troba associat al mot *corol·lari* i a *altres* mots, i el de l'esquerra s'associa amb el mot *figura*. Respecte l'eix vertical de la mateixa gràfica, el contrast més alt es detecta entre Karsten i Kästner, a la dreta (Karsten més associat al mot *corol·lari*, Kästner més associat als mots *exemple* i *problema*). El grup format per Karsten (qualitat: 0,911), Kästner (qualitat: 0,966), Tempelhoff (qualitat: 0,923) queda ben representat sobre el mapa. A l'esquerra, el grup integrat per Saladini (qualitat: 0,806), Bézout (qualitat: 0,843), Maclaurin (qualitat: 0,939) i Lacroix (qualitat: 0,918) també es pot interpretar com una bona representació. Reyneau presenta tendència cap a aquest grup però amb una qualitat més baixa (qualitat: 0,635). Aquest grup està més associat al mot *figura*. La resta presenta una freqüència més alta del mot *exemple*. També detectem un altre grup, ben representat: l'associació L'Hôpital (qualitat: 0,846), Agnesi (qualitat: 0,904) i Riccati (qualitat: 0,946).

8.2.2. ANÀLISI DE CONGLOMERATS JERÀRQUICS

L'anàlisi de conglomerats jeràrquics pot corroborar la distribució gràfica de les dades obtinguda a partir de l'anàlisi de correspondències. L'anàlisi de conglomerats jeràrquics consisteix a agrupar un conjunt de *n* individus (o perfils, en aquest cas) en *k* classes homogènies, i diferents entre sí. És a dir, es busca l'estructura més simple possible que representi agrupacions homogènies. S'identifica quin parell de files/columnes es pot reunir en una sola categoria, amb la mínima reducció de l'estadístic khi-quadrat. El procés dóna lloc a conglomerats distribuïts de forma jeràrquica. Després de normalitzar les variables, el dendrograma corresponent, utilitzant unió de mitjanes (entre grups) és:



Gràfica 4. Dendrograma

Pel que fa a les freqüències d'ús dels mots especificats en començar aquesta secció, aquí es veu clarament que hi ha dos grans conglomerats ben diferenciats, classificació que corrobora l'anàlisi de correspondències anterior:

1. El grup format per L'Hôpital, Reyneau, Lacroix, Bézout, Saladini, Maclaurin, Agnesi, Riccati i Simpson. És el grup de l'esquerra del mapa d'anàlisi de correspondències. Dins d'aquest grup s'observa el subgrup integrat per Reyneau, Lacroix, Bézout, Saladini i Maclaurin. D'altra banda, les obres d'Agnesi i de Riccati són molt properes.
2. El grup format per Wolff, Tempelhoff, Karsten, Ditton i Kästner, és a dir, el grup de la dreta del mapa d'anàlisi de correspondències. Aquesta associació es pot interpretar a partir del fet que tots els elements del grup, tret de Ditton, pertanyen a Alemanya. És a dir, es podria concloure que l'estructura de les obres dels autors alemanys és similar, entenent "estructura" en termes de les freqüències d'ús dels mots que encapçalen els apartats.

8.3. LA NOTACIÓ EMPRADA

Per a totes les referències històriques utilitzades en elaborar l'apartat sobre la notació emprada pels diferents autors, m'he basat en el desenvolupament històric de les notacions matemàtiques dut a terme per CAJORI (1928-1929).

8.3.1. FRANÇA

Reyneau, Bézout i Lagrange indiquen que utilitzen les darreres lletres de l'alfabet per a les variables i les primeres lletres per a les constants.

Per al producte Reyneau utilitza el símbol $\times$.[18] Bézout a la pàgina 14 escriu $m\cdot\frac{m-1}{2}\cdot x^{m-2}$; a la pàgina 13 escriu xy, $(x+dx)\times(y+dy)$ però també

[18] Aquest símbol el fa servir per primer cop Oughtred al *Clavis mathematicae* (1631).

$(x+dx)(y+dy)(z+dz)$. Lagrange i Lacroix també fan servir a vegades $\cdot$ o $\times$, i a vegades cap símbol. Reyneau i Bézout de vegades escriuen xx, d'altres x^2. Bézout fins i tot, empra ambdues notacions en la mateixa pàgina.[19] En canvi, Lagrange i Lacroix ja escriuen sempre x^2.[20]

Reyneau indica les progressions geomètriques de la següent forma: $∺ a, b, c, \&c.$ Les proporcions les escriu $AE.EB :: EB.ED$.[21] Bézout utiltiza $a : x :: x : b$. Lacroix escriu la progressió geomètrica de la forma següent: $∺ 1 : x : x^2 : x^3 : ...$[22]

Reyneau utilitza el vincle $\overline{}$ com a símbol d'agregació. Quan ha de tornar a referir-se a una expressió llarga, Reyneau escriu una lletra majúscula al davant, que l'identifica. Posteriorment, per referir-se a l'expressió només li cal la lletra corresponent. Bézout i Lagrange usen parèntesis, i claudàtors, quan ja hi ha parèntesis. Els símbols d'agregació que fa servir Lacroix són els parèntesis i les claus.[23]

Reyneau escriu l'arrel d'un monomi amb el símbol √, i la d'una expressió polinòmica amb aquest símbol amb vincle: $\sqrt{}$. En canvi, Bézout escriu $\surd(xx-bb)$. I usa una notació semblant per al cas arrel d'ordre *n*. Lagrange sempre fa servir el símbol $\sqrt{}$. Lacroix fa servir ambdós, √ i $\sqrt{}$.[24]

[19] Vegeu, per exemple, BÉZOUT (1799-1800), p. 31.

[20] Descartes preferia escriure *aa* en lloc de a^2. Van Schooten en principi també, però a l'edició llatina de la *Géométrie* de Descartes fa servir a^2. Huygens, Wallis, Newton i Euler, entre d'altres, es decantaven per la notació *aa*. Leibniz, Pascal i Gregory, en canvi, preferien a^2.

[21] La notació $A : B :: C : D$ la va introduir Wing a Gran Bretanya l'any 1651, tot i que l'alternava amb la que apareixia al *Clavis mathematicae* d'Oughtred ($AE.EB :: EB.ED$). Més endavant, serà la notació que utilitzarà Leibniz. Gran Bretanya i els Estats Units notaran les proporciones d'aquesta manera fins a començaments del segle XX, fins i tot hi ha països que encara fan servir aquesta notació.

[22] Aquesta notació ja apareix a l'*Algebra* de Maclaurin (1748).

[23] Van Schooten en l'edició de l'obra de Viète (1646) treu els parèntesis i usa els vincles. Leibniz utilitza vincles de forma ocasional fins al 1708, normalment fa servir parèntesis. Johann Bernoulli també fa servir vincles en les *Lectiones*. El vincle serà d'ús regular a Gran Bretanya i França durant el segle XVIII.

[24] El símbol √ s'introdueix a França cap al 1551. Descartes (1637) uneix aquest símbol amb un vincle donant lloc al símbol $\sqrt{}$. Leibniz no hi estava a favor, creia que era més fàcil escriure √. En general, a França i Gran Bretanya s'usava $\sqrt{}$ mentre que a Alemanya i Suïssa s'utilitzava √.

Reyneau indica el logaritme de $1+x$ de la següent manera: $l.1+x$; i la seva diferència: $d.l.1+x=\frac{dx}{1+x}$. Però si es tracta del logaritme de *x*, aleshores escriu: $dlx=\frac{dx}{x}$, sense els punts. Bézout també escriu *l*. Lagrange: log*x*; *l* per al logaritme natural (o hiperbòlic de Neper). Lacroix també nota el logaritme amb *l*.[25] Lacroix nota el logaritme neperià amb el símbol l' i especifica que el mòdul *le* és el nombre que, multiplicat pel logaritme neperià, ens torna el logaritme en una altra base.

Quant a les funcions trigonomètriques, Bézout fa servir $\int in.z$, $co\int.z$, $\tan g.z$. Lagrange: sin, cos, anglesin, anglecos, tang, arctang. Lacroix: sin, cos, tang, cot, sec, cosec. En el punt 124 del *Traité élémentaire* amb l'expressió $u=\mathrm{Arc}\left(\mathrm{tang}=\frac{x}{y}\right)$ representa l'arc de cercle de radi 1 i tangent $\frac{x}{y}$; i en una nota a la pàgina 129: $x=\mathrm{arc}\left(\sin=\frac{1}{a}\sqrt{2ay-y^2}\right)$.

Quant a les diferències d'ordre superior Reyneau generalment escriu ddx per a ordre dos i $d^n x$ per a ordre més gran que dos. En alguna ocasió Reyneau escriu $dx\times x^{m-1}$, que és una notació confusa. Per exemple, en el punt 536, en trobar la diferència de l'expressió $x^m\times\overline{a+bx^n+cx^{2n}+ex^{3n}\ \&c}^{\,p}$:

$$\left.\begin{array}{r} ma+mbx^n+\quad mcx^{2n}+\quad mex^{3n}+\&c \\ pnbx^n+2pncx^{2n}+3pnex^{3n}+\&c \end{array}\right\} dx\times x^{m-1}k^{p-1}.$$

De forma anàloga, en els punts 537-538.

Bézout, per a quantitats variables compostes, utilitza: $d(x^2)$, $d(5x^3+3x^2)$, $d([x^2-a^2])$. ddx, $dddx$ o d^3x,... però en canvi $(dx)^2$ o dx^2. Tot i recomanar escriure xdy per no confondre, a la pàgina 31 trobem $d(c^x)=dxc^x$.

Lagrange nota les derivades: $f'(x)$, $f''(x)$, $f'''(x)$, etc. La seva notació per a les derivades parcials a les *Leçons* és $f'_{,}$, $f_{,}'$ (els apòstrofs abans de la coma indiquen derivació respecte *x* i els de després, derivació respecte *y*). Si $f(p,q,r)$ amb la notació $f'(r)$ s'indica la funció derivada respecte *r*.[26]

Lacroix empra la notació $d.uv, d(uv)$; però quan treballa amb desenvolupaments en sèrie fa servir $\{\ \}$.[27] Observa que no s'ha de confondre d^2u amb $(du)^2$ (que equival a du^2) ni amb $d.u^2$ (la diferència de u^2). Per simplificar notació: $u' = \frac{du}{dx}$. Lacroix escriu $f'(t) = \frac{df(t)}{dt}$, la notació del membre esquerre la trobem a la *Théorie des fonctions analytiques* (1797) de Lagrange; el membre dret és notació d'Euler. Aquesta expressió dóna més importància a la derivada que no pas a la diferencial, evitant els infinitesimals. En el punt 126 del *Traité élémentaire,* si $u = f(t,x,y,z)$, a l'hora d'indicar el seu coeficient diferencial, Lacroix considera que la notació $\frac{du}{dx}$ (de Fontaine) és la més simple i expressiva de les expressions proposades. Euler, en canvi, nota el coeficient diferencial $\left(\frac{du}{dx}\right)$ per no confondre amb el quocient de la diferencial *du* entre la diferencial *dx*, l'expressió del qual és $\frac{du}{dx}$. Aquesta darrera expressió és poc freqüent. Fontaine la nota $\frac{1}{dx}du$ i Lacroix proposa $\frac{d(u)}{dx}$. La idea de Lacroix és que el símbol més simplificat correspongui al cas més freqüent.

Reyneau i Lacroix ordenen en columna els termes de mateix ordre de diverses sèries.[28]

---

[25] Com apareix a l'*Acta Eruditorum* el 1703 o com fan servir Christian Wolff (1713), Johann Bernoulli (1730) o Leonhard Euler (1728, 1748). Leibniz indica el logaritme natural amb *l*.

[26] En canvi a la *Théorie*, amb traços superiors indica les derivades respecte *x* (f'), i amb traços inferiors indica les derivades respecte *y* ($f_{,}$).

[27] Euler també fa servir $d.uv$ per indicar la diferencial de *uv*.

[28] Viète i Descartes ja feien servir aquesta notació per indicar suma de coeficients o factors en una columna, ordenats per termes amb mateix grau.

8.3.2. ALEMANYA

Per a la suma Wolff fa servir una creu com la de l'expressió següent:

$$d\,(x + y - a) = dx + dy.$$

Tempelhoff de vegades també utilitza aquest símbol.

Els quatre autors alemanys estudiats de vegades escriuen x^2, d'altres xx. Wolff, amb les expressions algèbriques, generalment no utilitza cap símbol per indicar el producte. Quan fa servir segments, però, l'indica amb un punt: $PC.PT$. Kästner també fa servir un punt: $n.(n-1).n-2$. De vegades no usa cap signe per indicar el producte. Tempelhoff presenta dues notacions per al producte: $EK.EH, DG \times GE$. Karsten fa servir un punt: $n.n-1$.

Wolff indica el quocient amb : o bé amb la línia fraccionària. Fins i tot combina les dues notacions en un mateix problema. Per exemple en el punt 306 apareix l'expressió $\dfrac{b^3dx}{b^2y-y^3}$, però també l'expressió $b^3dx:(b^2y-y^3)$. La notació utilitzada per Kästner i Karsten són els dos punts i la línia fraccionària, que també combinen en unamateixa pàgina. Fins i tot Kästner fa servir ambdues notacions en una mateixa expressió: $\dfrac{dxddy-dyddx}{dx^2.(1+dy^2:dx^2)}$ (p. 464). Tempelhoff generalment fa servir la línia fraccionària.

Quant a la proporció, en els textos de Wolff, Kästner i Tempelhoff trobem la notació $PC:PB = AB:PT$. Karsten, en canvi, generalment utilitza $\dfrac{y}{z}$.

Com a símbols d'agragació Wolff, Kästner, Karsten i Tempelhoff empren els parèntesis. Wolff a més empra bràquets (interiors) quan ja ha fet ús dels parèntesis.

Per a les arrels Wolff i Kästner escriuen: $\surd$, $\surd$ ( ), $\sqrt[\nu]{x^\mu}$. En el darrer cas, Kästner també escriu amb exponent fraccionari. En els textos de Karsten i Tempelhoff trobem: $\surd$, $\surd$ ( ).

Per al logaritme Wolff fa servir *l*. Kästner utilitza *l* i log per al logaritme natural, i *L* per al logaritme en base *b*. Tempelhoff empra log. En el text de Karsten trobem *l* per al logaritme natural; log. ( ) i de vegades: log nat., l.art., l.nat.

Quant a les funcions trigonomètriques, els símbols emprats per Kästner són: sin, cos, tang, tg, cot, sec, Arc.sin, Asin, Acos,... En aquest cas, Tempelhoff utilitza de vegades notacions diferents per a les mateixes funcions: ſin, Sin., Coſ., coſec., Cot., Tang., Tg., Arc.Sin, Arc.Cos, Arc.Tang. I en l'obra de Karsten he trobat les expressions: Arc.*Mm*, chord.*Mm*.

Wolff fa servir una *d* seguida de parèntesis per indicar la diferenciació d'una expressió composta (vegeu, per exemple, punt 13). En canvi, en el punt 15 escriu $d\sqrt[\nu]{x^{\mu}}$. Quant a la diferenciació successiva: $ddx, dddx,...$ o bé $d^2x, d^3x,...$ Kästner col·loca les expressions que vol diferenciar entre parèntesis, després de la *d* Tempelhoff indica el diferencial d'expressions compostes amb les següents expressions: $d.x^2$ (que no s'ha de confondre amb $(dx)^2$, que representa el quadrat del diferencial), $d.x^2y$, $d(x^2)$, $d(x^2y)$, $d.\overline{a+bx^2}$, $d.(a+bx^2)^3 \ldots$ Karsten fa servir punts després de la *d*, per evitar confusions o en el cas del producte de diverses quantitats o d'una expressió fraccionària. Així, escriu $d.x^n$ per no confondre amb la potència de *dx*. Per a la diferenciació parcial de funcions de diverses variables utilitza: $\overset{x}{dz}, \overset{yx}{ddz},...$

Amb □$PC.PT$ Wolff indica un rectangle; ΔMmR indica un triangle; amb una S invertida indica la semblança de triangles. L'infinit el nota ∞, com Kästner. Wolff separa les equacions mitjançant línies (vegeu, per exemple, punt 307). Però això podria portar a confusió entre les línies de separació i les fraccionàries. En el punt 73, Kästner fa servir sinus en la determinació de les tangents i escriu: sin*VMS*. Karsten ordena les expressions segons grau per columna (vegeu, per exemple, p. 250).

8.3.3. ITÀLIA

Agnesi fa servir el símbol × per al producte. Saladini i Riccati fan servir × i ·. Lagrange a vegades indica la multiplicació mitjançant ×, d'altres sense cap signe. Agnesi escriu *xx* en lloc de x^2. A SALADINI (1775), la subtangent de l'espiral d'Arquimedes s'escriu $\frac{yy}{b}$. En canvi a RICCATI-SALADINI (1765-1767) trobem $\frac{y^2}{b}$; tanmateix, més endavant, escriu com a SALADINI (1775): $\sqrt{bb+yy}$. A SALADINI (1775), punt 3, capítol segon, llibre segon, apareix l'expressió $\frac{adx}{xx}$ mentre que a RICCATI-SALADINI (1765-1767), punt 7, capítol segon, llibre segon, la mateixa expressió apareix escrita amb la potència quadràtica: $\frac{adx}{x^2}$. Lagrange ja fa servir x^2.

Saladini nota el quocient a vegades $\frac{A}{B}$, a vegades $A:B$.

La notació d'Agnesi per als triangles semblants és: $AE, EB :: EB, ED$.[29] En el punt 117 apareix: $y, t :: \frac{ydy}{dt}$. La variant per a les proporcions que fan servir Riccati i Saladini és: $DEF : ADC :: 1 : 4$.. La notació que empra Lagrange en aquest cas és $RP : RM = MB : BC$.

Com a símbol d'agregació, Agnesi, Lagrange, Saladini i Riccatti utilitzen el vincle, $\overline{m+n}$.

Amb √ indica que fa servir una arrel (d'ordre *n*), seguit de l'expressió que es vol radicalitzar.[30] Saladini utilitza $\sqrt{}$ i Lagrange també.

Saladini i Riccati noten el logaritme *lx*.

[29] Aquesta és una modificació de la notació que feia servir Oughtred: $AE.EB :: EB.ED$ al *Clavis mathematicae* (1631).

[30] Aquest símbol s'introdueix a Itàlia cap al 1608.

A RICCATI-SALADINI (1765-1767) les funcions circulars es noten: *Cc*, *Sc* i les hiperbòliques: *Sh*, *Ch*. A SALADINI (1775) també trobem el cosinus i el sinus circulars simbolitzats amb una *C* i una *S*, respectivament.

Agnesi nota les diferències segones *ddx* o bé d^2x, i avisa que no s'ha de confondre amb dx^2. Lagrange, amb $d.yz$, indica la diferència de yz. Riccati i Saladini fan servir *D* per a la diferenciació de quantitats complexes i *S* per a la integració. La notació de Saladini per als "diferències parcials" és: $\delta x|\varphi, \delta x \delta y|\varphi,...$

Agnesi, Lagrange, Riccati i Saladini ordenen les equacions algèbriques per columna, segons el grau.

Saladini fa servir el símbol ∞.[31]

Agnesi i Lagrange especifiquen que les darrers lletres de l'alfabet serveixen per simbolitzar les variables i que les primeres són per a les constants.

8.3.4. GRAN BRETANYA

Ditton escriu *aa*. En canvi, quan defineix les potències i les seves fluxions utilitza y^1, y^2, y^3, ... Maclaurin de vegades fa servir $a^2, x^2,...$, d'altres, però, utilitza $aa, xx,...$ Simpson també: per exemple, a l'article 44 trobem $\overline{xx+yy}|^3$ però, en treure l'arrel cúbica, escriu x^2+y^2. Potser és degut a que si fes servir $\overline{x^2+y^2}|^3$ necessitaria tres línies tipogràfiques. Per al producte Ditton i Simpson usen $\times$.

Per indicar la proporció Ditton fa servir la notació $A:B::C:D$, que diu que implica $A-:B=C-:D$.[32] Maclaurin i Simpson també fan servir: $A:B::C:D$. Ditton a

[31] Vegeu SALADINI (1775), p. 168.

vegades també utilitza la notació $\frac{A}{B}=\frac{C}{D}$.[33] Finalment, Ditton sovint escriu les proporcions amb paraules.

Com a símbol d'agregació Ditton i Maclaurin empren el vincle: $\overline{x+o}^{\,n}$. En el cas de Maclaurin també apareixen expressions com $\overline{e+fx^{n}}\big|^{l}$ (p. 603, cap. II), notació que també empra Taylor al *Methodus Incrementorum*. Simpson utilitza dos tipus de signes d'agregació:

1. Quan hi ha factors amb potències no lineals fa servir $\overline{\quad}\big|$.[34]
2. Quan hi ha factors lineals utilitza el vincle $\overline{\quad\quad}$.

Per indicar les arrels Ditton fa servir √ quan es tracta d'una variable i $\sqrt{}$ quan es tracta d'una expressió més llarga. Maclaurin escriu $\sqrt[3]{27}$, $\sqrt{aa-yy}$. Simpson també empra el símbol $\sqrt{}$. Per indicar les potències segones, terceres, etc. d'arrels Ditton fa servir la notació d'exponents fraccionaris perquè considera que és més neta, clara i significant.

Quant a la notació dels logaritmes Ditton utilitza una variació de la notació de Newton: $l:\overline{x+a}^{\,m}$ indica el logaritme de la potència *m*-èsima de $x+a$. Per indicar el logaritme de *y* de vegades Maclaurin ho fa amb paraules, de vegades fa servir la notació $\log.y$.[35]

El cosinus de vegades Simpson l'escriu com *co-sine of*, de vegades l'escriu $Co-\int$.[36]

La tercera secció del llibre de Ditton es titula *De la notació de les fluxions*. Com Newton, utilitza els punts per indicar fluxions: $\dot{x},\ddot{x},\dddot{x},\ddddot{x},\ldots$[37] Ditton indica la primera

---

[32] Aquesta notació sembla una deformació del símbol de la divisió ÷, que va ser introduït per Rahn el 1659 en el *Teutsche Algebra*. Aquest símbol fou acceptat per Wallis i d'altres escriptors anglesos gràcies a la traducció anglesa que va fer John Pell d'aquesta àlgebra (1668).

[33] En una publicació del 1710 Leibniz fa servir aquesta notació, que alterna amb els dos punts.

[34] Aquest símbol apareix en una carta de Newton a Oldenburg, l'any 1676.

[35] Aquesta notació ja l'havien utilitzada Kepler (1624), Briggs (1631), Oughtred (1647),... Oughtred, en realitat, escrivia Log. *y*.

[36] Aquesta darrera notació és molt semblant a la que feia servir Euler a l'*Introductio*, $co\int$.

[37] Aquesta notació va aparèixer impresa per primer cop en l'*Algebra* de Wallis, l'any 1693.

fluxió d'una fracció amb un punt sobre la línia de divisió (– · –), la segona fluxió amb dos punts sobre la línia de divisió (– ·· –),... Les fluxions de les arrels les indica amb un, dos, tres,... punts sobre el vincle adjunt a l'arrel, segons es tracti de la primera, la segona, la tercera,... fluxió respectivament ($\sqrt{\dot{\ }}$, $\sqrt{\ddot{\ }}$, ...).[38]

L'expressió $l : \overline{x+a}^m$ amb un punt a sobre i un altre a sota del vincle representa per a Ditton la seva primera fluxió. En canvi, amb $l\overline{x+a}^m$ indica el logaritme de $\overline{x+a}^m$ i la seva primera fluxió amb el símbol ÷ sobre l'expressió $\overline{x+a}^m$. D'altra banda, així com $\dot{x}$ és la fluxió de *x*, *x* és la fluxió de $\overset{/}{x}$, $\overset{/}{x}$ és la fluxió de $\overset{//}{x}$, etc. I segueix la mateixa idea per a les fraccions i les arrels. Aquesta notació de fluents la feia servir Newton.

La primera part del títol del segon capítol, segon llibre, de Maclaurin és *De la notació de les fluxions*. Comença dient que Newton en els *Principia* notava amb una lletra majúscula la quantitat fluent i amb la corresponent minúscula la fluxió. Però, posteriorment, per evitar confusions de caire algèbric i confusions a l'hora de tractar les fluxions d'ordre superior, Newton farà servir *x*, *y*, *z*, ... per als fluents, $\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, \ddot{x}, \dddot{x}, \ldots$ per a les corresponents fluxions i *a*, *b*, *c*, ... per a les constants. Aquesta serà la notació que farà servir Maclaurin. També comenta quina és la notació utilitzada per Leibniz. Simpson per indicar "la fluxió de $\frac{x}{y}$", "la fluxió de x^n", "la fluxió de x^2y^2" ho fa amb paraules (vegeu, per exemple, els articles16 i 17).

A l'article 54 del llibre de Simpson trobem el signe $\therefore$, que és el símbol que Rahn, a *Teutsche Algebra* (1659), utilitza per indicar la "implicació". Al segle XVIII aquest símbol estava especialment lligat al producte de mitjanes i extrems d'una proporció.

[38] Aquesta notació també apareix al *Methodus Incrementorum* de Taylor. En canvi, a l'*Algebra* de Wallis la fluxió primera de la fracció s'indica amb un punt a sobre i un altre a sota de la línia divisòria (÷) i el mateix per al vincle de l'arrel, per indicar la seva primera fluxió. S'ha de dir, però, que aquesta notació no tingué gaire èxit degut a inconvenients d'ordre tipogràfic.

8.3.5. EULER

El producte l'indica amb · o sense cap símbol. La potència quadràtica de vegades l'escriu *xx*, de vegades x^2.

En alguns casos, la divisió la indica mitjançant la línia de fracció, en altres casos ho fa amb dos punts, i hi ha ocasions on fa servir ambdues notacions. Per exemple:

$$\frac{1 : lx}{1 : x^n}$$

(aquí podria ser per estalviar una línia tipogràfica), o bé:

$$dx \pm dx^2 : dx = \frac{dx \pm dx^2}{dx} = \ldots .$$

Com a símbol d'agregació empra els parèntesis. Quant a les arrels, fa servir $\sqrt{x}$ i $\sqrt[\nu]{x^\mu}$, que també escriu com $x^{\frac{\mu}{\nu}}$. El logaritme hiperbòlic el nota *lx* i les funcions trigonomètriques: $\sin x, \cos x, \mathrm{tang} x, \sec x, \mathrm{cosec} x$.[39]

Per evitar confusions s'ha d'escriure *ydx* en lloc de *dxy*. L'expressió $d(xx+yy)^2$ representa el quadrat de $d(xx+yy)$, mentre que $d.(xx+yy)^2$ és el diferencial de $(xx+yy)^2$. La notació $d.$ equival a $d(\ )$. Mentre que el símbol de la integral afecta tota l'expressió que segueix. La diferència finita la nota amb el símbol Δ, mentre que per a la diferència infinitament petita fa servir una *d*. Els diferencials d'ordres superiors els nota amb $dd.$, $d.^3$, ... Σ indica suma finita, i *S*, integració.

[39] A l'*Introductio* he trobat les funcions trigonomètriques escrites de la següent forma: $\int in.z, co\int .z,$ etc.

9. DISCUSSIÓ GENERAL I CONCLUSIONS

9.1. DISCUSSIÓ GENERAL

9.1.1. FRANÇA

COM EXPOSEN ELS FONAMENTS?

Reyneau pertanyia a l'orde de l'Oratoire i, de fet, L'Hôpital estava relacionat amb aquest grup. Bézout va desenvolupar la seva tasca en l'àmbit de les *écoles militaires*, àmbit en el qual també es mogué Lagrange a Itàlia. Lagrange i Lacroix foren professors a l'*École Polytechnique* i impulsaren la publicació de *livres élémentaires*, entre els quals es troben els seus tractats elementals sobre càlcul analitzats en aquesta tesi.

L'element bàsic en L'Hôpital, Reyneau i Bézout és la *diferència* (quantitat infinitament petita en què una quantitat variable creix o decreix). El text de L'Hôpital no presenta un intent de fonamentació rigorosa del càlcul diferencial, sinó que mostra com, amb ell, es poden solucionar de manera satisfactòria problemes del segle XVII lligats a la geometria. En canvi, Reyneau, possiblement com a conseqüència del debat Rolle-Varignon (1700-1701), intenta justificar l'existència dels infinitament petits, basant-se en la geometria grega i en el moviment com a generador de corbes. Per a L'Hôpital, Reyneau i Bézout, seguint la geometria grega, una corba *és* un polígon d'infinits costats infinitament petits. Quant a l'eliminació de $dxdy$ en la fórmula de la diferenciació del producte L'Hôpital afirma que això és possible perquè és infinitament més petit que les diferències de primer ordre (i es basa en el postulat 1). Reyneau justifica l'eliminació de $dxdy$ mitjançant compensació d'errors (abans de la crítica de Berkeley). Bézout justifica aquest fet perquè s'obtenen els mateixos resultats que amb l'àlgebra i mostra els diferents ordres via proporcions.

Els elements bàsics de Lagrange, són les *funcions derivades*, els coeficients obtinguts en desenvolupar en sèrie de potències una funció, sempre possible segons admet Lagrange. L'objecte central per a Lacroix és el *coeficient diferencial*, el *límit* (entès en el sentit de D'Alembert) de la raó dels increments simultanis d'una funció i de la variable de la qual depèn. Lacroix entén la corba com el límit de tots els polígons inscrits i circumscrits a la corba.

Funció

El *Cours de mathématiques à l'usage du corps de l'artilerie* de Bézout és una de les diverses reedicions del seu *Cours de mathématiques à l'usage des Gardes du Pavillon et de la Marine* (1764-1769). Tot i que la publicació d'aquesta primera versió és posterior a 1748, en què apareix l'*Introductio in Analysin Infinitorum* d'Euler, Bézout no parla de funcions i el seu tractament del càlcul és molt semblant al de L'Hôpital i Reyneau. De fet, el llibre de Bézout estava adreçat als estudiants de les escoles militars, on el que primava era l'aplicació pràctica i no un aprofundiment teòric de la matèria.[1]

Lagrange i Lacroix treballen amb funcions. Per a Lagrange funció és "tota expressió de càlcul en la qual totes les quantitats entraran d'una forma qualsevol, barrejades o no amb d'altres quantitats considerades com posseïdores de valors donats i invariables, mentre que les quantitat de la funció estan obligades a poder assolir tots els valors possibles" (LAGRANGE (1800), pp.10-11). Per a Lacroix una funció és una quantitat que "depèn d'una o de diverses quantitats bé a través de qualsevol operació, bé per relacions impossibles d'assignar algèbricament" (LACROIX (1802), punt 2). Lacroix defineix la *diferència* com l'increment funcional $f(x+h)-f(x)$ i el *diferencial* com el primer terme de la diferència.

Teorema de Taylor

Per a Lagrange els seus coeficients del desenvolupament en sèrie de potències d'una funció són les funcions derivades. Per la seva banda Lacroix, a partir de les diferències successives, dedueix el desenvolupament en sèrie de potències, conegut com teorema de Taylor.

Ordre superior

Quant a l'ordre superior, L'Hôpital, Reyneau i Bézout parlen de diferència de la diferència. Reyneau justifica l'existència de diferències d'ordre superior mitjançant

[1] Vegeu SCHUBRING (2004), pp. 252-254.

progressions geomètriques i moviment. Bézout troba les diferències d'ordre superior considerant tres estats consecutius infinitament propers. La segona diferència és la diferència de les dues diferències primeres. Quant a la indeterminació de la progressió, L'Hôpital i Reyneau consideren casos on una diferència és constant (per simplificar el problema) i casos on cap diferència no és constant (defensant així la generalitat del nou càlcul). Quant a Bézout és millor suposar constant una de les diferències primeres per simplificar els càlculs.

Donat que en Lagrange les derivades d'ordre superior són els coeficients del desenvolupament en sèrie de potències, i que en Lacroix el coeficient diferencial és una funció, de la qual es pot trobar el seu coeficient diferencial, en ambdós casos l'ordre superior queda justificat. Lacroix considera *dx* constant, mentre que Lagrange no explicita res al respecte. Lagrange i Lacroix, igual que Reyneau, relacionen el desenvolupament del binomi amb l'ordre superior.

Tangent

Per a L'Hôpital, Reyneau i Bézout la *tangent* és la prolongació d'un costat del polígon-corba. Es calcula a partir del triangle característic. Lagrange intenta allunyar-se de tota justificació geomètrica i troba la tangent calculant el desenvolupament en sèrie de potències de la funció, fins a primer grau. De fet, el càlcul de la tangent apareix a la lliçó on estudia què passa quan el desenvolupament es talla per un determinat terme. Per a Lacroix la tangent és el límit de les rectes secants, que es pot calcular a partir del coeficient diferencial. Tanmateix, ho justifica a partir de semblances de triangles, prenent dues ordenades que s'apropen "sense fi".

Extrems

Mentre que L'Hôpital no dóna criteris per distingir si els extrems són màxims o mínims, Reyneau estudia el creixement/decreixement de la subtangent i Bézout estudia la quantitat abans i després del punt on es troba l'extrem. Lacroix estudia el signe del segon coeficient del desenvolupament en sèrie de Taylor (coeficient diferencial de segon ordre). En el text de Lagrange no apareix l'estudi d'extrems, possiblement perquè estan relacionats amb la geometria de la corba i Lagrange volia presentar la seva teoria des d'un punt de vista totalment algèbric. De fet, en el llibre de Lagrange no apareix tampoc l'estudi de punts singulars.

Punts d'inflexió i altres punts singulars

L'Hôpital presenta tres mètodes per fonamentar el càlcul dels punts d'inflexió: 1) la distància subtangent-abscissa és màxima; 2) el canvi de signe de la segona diferència degut al canvi de concavitat; 3) a partir de dues tangents infinitament properes. Per a Reyneau en un punt d'inflexió la diferència assoleix un màxim o un mínim i així justifica que la segona diferència es faci nul·la quan es produeix un canvi de concavitat. Lacroix es basa en el canvi de signe del segon coeficient diferencial degut al canvi de concavitat-convexitat. Lacroix parla de punts singulars/múltiples des de la vessant de la geometria algèbrica, com a intersecció de branques. Ni Bézout ni Lagrange fan estudi de punts d'inflexió. Podria ser que Bézout no ho trobés imprescindible per a la formació dels enginyers. En el cas de Lagrange potser la raó és el seu desig d'allunyar-se de la geometria.

Indeterminacions

Quant a la indeterminació $\frac{0}{0}$, Reyneau, com L'Hôpital, la resol fent el quocient de les diferències. Per la seva banda, Lacroix i Lagrange la resolen prenent els primers termes del desenvolupament en sèrie del numerador i del denominador; a partir d'aquesta indeterminació estudien d'altres indeterminacions.

Corbes osculadores

L'Hôpital, Reyneau i Bézout primer defineixen l'evoluta i, a partir d'ella, el radi osculador (a partir de la intersecció de dues perpendiculars infinitament properes i de semblança de sectors triangulars). Reyneau exposa la relació entre el radi osculador i la concavitat-convexitat d'una corba. Lagrange estudia primer les osculacions a partir del tall del desenvolupament en sèrie, i després defineix l'evoluta. Sobta el fet que Lagrange treballi les corbes osculadores, quan ha evitat tota qüestió aparentment de caire geomètric. Lacroix entén el cercle osculador a partir del límit de les línies que es tallen en 3 punts per estudiar les osculacions (també a partir de Taylor, com Lagrange) i després parla de l'evoluta.

EL LLENGUATGE QUE UTILITZEN, ÉS GEOMÈTRIC O ALGÈBRIC?

La referència de L'Hôpital, Reyneau i Bézout és la geometria. Fins i tot Reyneau parla del moviment com a generador de les corbes. Tanmateix, Reynau i Bézout fan servir sèries com a eina auxiliar a l'hora d'integrar. El llenguatge de les *Leçons* de Lagrange és algèbric ("analític"). Les funcions derivades són objectes que obeeixen determinades lleis algèbriques. L'objectiu de Lagrange és tractar amb objectes algèbrics i evitar d'aquesta manera el problema de la fonamentació del càlcul diferencial. Quant a Lacroix, la motivació original del càlcul diferencial és geomètrica; Lacroix també parla del moviment continu generador de corbes. No obstant, el seu enfocament és bàsicament algèbric, doncs utilitza funcions, coeficient diferencial, sèries de Taylor, límit ...

ELECCIÓ DE COORDENADES I TRACTAMENT DE LES CORBES ALGÈBRIQUES I TRANSCENDENTS

	CORBES	COORDENADES
L'HÔPITAL	Tracta corbes de la geometria clàssica, com la concoide, la cissoide, la quadratriu i l' espiral. També tracta amb la cicloide i la corba logarítmica (que defineix a partir de la propietat de subtangent constant), que comencen a fer-se usuals al segle XVII.	Segons naturalesa de la corba (adient per a les transcendents), procediment usual del segle XVII.
REYNEAU	Tracta amb algèbriques en general i amb la cicloide (de manera semblant a com ho havien fet L'Hôpital i Johann Bernoulli). A partir de la corba logarítmica (les diferències de la qual troba mitjançant el seu desenvolupament en sèrie) dedueix les diferències de la corba exponencial.	Generalment coordenades ortogonals (però també per a qualsevol angle). Coordenades des d'un punt.
BÉZOUT	Treballa amb algèbriques en general i amb la logarítmica (la seva diferència a partir de la seva generació), de la qual dedueix l'exponencial i la seva diferència. A partir del sinus/cosinus d'una suma, troba les diferències del sinus i del cosinus.	Generalment coordenades ortogonals per simplicitat.

LAGRANGE	Tracta amb funcions desenvolupables en sèrie de potències: algèbriques, sinus, cosinus, exponencial (de la qual dedueix la logarítmica).	No especifica coordenades ("si *x*, *y* són les coordenades de la corba proposada...").
LACROIX	Parla de funcions algèbriques i transcendents. Desenvolupables en sèrie de potències: algèbriques, circulars, exponencial (de la qual dedueix la logarítmica); o via equacions diferencials (cicloide, espirals).	Generalment coordenades ortogonals. Canvi de ortogonals a polars.

PROBLEMES I APLICACIONS

L'HÔPITAL	Tangents, màxims i mínims, punts d'inflexió i retrocés, evolutes, càustiques... problemes usuals del segle XVII. Enuncia proposicions sobre corbes amb una característica general, que després sol aplicar a diversos casos particulars.
REYNEAU	Problemes de geometria composta. Problemes físico-matemàtics: 1) resolució via càlcul diferencial (tangents, màxims i mínims, punts d'inflexió, evolutes); 2) resolució començant pel càlcul diferencial i acabant pel càlcul integral (rectificació, quadratures, centres de gravetat).
BÉZOUT	Tangents, extrems. Problemes físico-matemàtics (principalment, de Mecànica) i geomètrics, per mostrar els avantatges del càlcul diferencial sobre l'àlgebra ordinària.
LAGRANGE[2]	Teoria de corbes (tangents, corbes osculadores). Equacions diferencials. Derivades parcials. Moviments variats.
LACROIX	Teoria de corbes (tangents, extrems, punts d'inflexió, corbes osculadores). Teoria de corbes de doble curvatura i de les superfícies corbes. Derivades parcials. Equacions diferencials.

9.1.2. ALEMANYA

COM EXPOSEN ELS FONAMENTS?

Wolff fou professor de matemàtiques a la universitat de Halle. Kästner fou el successor de Segner com a professor de matemàtiques a la universitat de Göttingen quan aquest substituí Wolff a Halle. I Karsten succeí Segner a la universitat de Halle. Tempelhoff està relacionat amb l'artilleria, prussiana també, tot i que no hi havia un sistema d'escoles militars significants.

[2] A la segona part de la *Théorie* Lagrange tracta problemes sobre extrems, mesura d'àrees, rectificació de corbes, mesura de volums i teoria de superfícies corbes. La tercera part està dedicada a problemes de mecànica, com a aplicació de la teoria de funcions.

Wolff, seguidor de Leibniz, defineix el càlcul diferencial com el mètode de les *quantitats diferencials* (que creixen en quantitats infinitament petites, o infinitèsims, que són negligibles). Kästner, Tempelhoff i Karsten passen de *diferències* finites a *diferencials* infinitament petits (com Leibniz i Euler). Kästner considera la corba com a formada per línies rectes infinitament petites que funcionen com a *elements*. Per a Kästner una quantitat creix o decreix indefinidament (en el sentit de D'Alembert). Si una quantitat és infinitament gran la seva inversa és infinitament petita (raonament anàleg al de Johann Bernoulli, i que també adopta Tempelhoff). L'exposició de Tempelhoff en general és semblant a la de Kästner, basada en Euler. Tanmateix Tempelhoff considera el moviment com a origen dels diferencials. Tempelhoff parla del *límit de proporcions*, que ja havien utilitzat els antics geòmetres. Per a Kästner i Karsten és bàsic el *límit de la raó diferencial*, tot i que Kästner sembla entendre'l com "proporció de diferencials". El plantejament i, fins i tot, la notació de Lacroix i Karsten són semblants. Wolff confon les diferències infinitament petites amb les fluxions (velocitats instantànies). En canvi Kästner justifica que la proporció de fluxions coincideix amb la proporció de diferencials. I per a Tempelhoff les fluxions no són el mateix que els diferencials però es comporten de forma anàloga.

Pel que fa a l'eliminació de $dxdy$ (considerat com un rectangle) en la fórmula de la diferenciació del producte Wolff afirma que l'error comès és negligible, ja que és infinitament més petit que les diferències de primer ordre ydx i xdy. Kästner justifica l'eliminació en fer límits (en fer les diferències infinitament petites). Tempelhoff troba la fórmula per a la diferència del producte aplicant logaritmes. I Karsten es basa en el límit de la raó de les diferències.

Funció

Kästner treballa amb funcions. De fet la seva exposició té molt en comú amb la d'Euler. Tempelhoff i Kästner parlen dels canvis que pateix la funció quan la variable de la qual depèn canvia. Karsten defineix *funció algèbrica* com aquella tal que es pot trobar y a partir de x i de constants només fent servir les quatre operacions comunes, potències i arrels, no apareixent cap altra operació. I les *funcions transcendents* són aquelles que exigeixen operacions transcendents (com logaritme, línies trigonomètriques...).

Teorema de Taylor

Tempelhoff i Karsten tracten la relació entre el desenvolupament en sèrie d'una funció i els diferencials d'ordre superior.

Ordre superior

Wolff afirma que les diferències d'ordre superior segueixen les mateixes regles que per al càlcul diferencial, i que el diferencial de segon grau és un infinitèsim d'una quantitat diferencial de primer grau. Quant a la indeterminació de la progressió, Wolff parla de "circumstàncies especials" en què les quantitats diferencials es prenen com a constants. Per tant entenc que en "circumstàncies generals" defensa la indeterminació de la progressió.

Kästner i Tempelhoff justifiquen l'ordre superior mitjançant una corba, les ordenades de la qual són les diferències de les ordenades d'una corba inicial. Donada la primera sèrie diferencial, Karsten la considera com una nova sèrie de la qual torna a calcular la sèrie diferencial. Kästner diu que no cal prendre *dx* constant però que els diferencials superiors no tenen un valor determinat si no és així. Kästner, Tempelhoff i Karsten mostren les fórmules segons es consideri *dx* constant o variable. Kästner i Karsten parlen de la relació que hi ha entre el desenvolupament del binomi i l'ordre superior.

Tangent

Wolff identifica un arc de corba infinitament petit amb la recta tangent i treballa amb el triangle característic. Per reducció a l'absurd Kästner veu que cap altra recta amb un punt en comú amb la corba passarà entre la tangent i la corba. I també fa servir el triangle característic i semblança de triangles, a partir del teorema del sinus. Per a Tempelhoff i Karsten, la tangent i secant estan relacionades. Tempelhoff hi treballa amb el límit de la proporció dels increments (a partir del desenvolupament en sèrie), Karsten amb el límit de la raó diferencial.

Extrems

Wolff no dóna criteris per distingir si els extrems són màxims o mínims. Kästner, Tempelhoff i Karsten estudien el signe del segon coeficient del desenvolupament en sèrie de Taylor (coeficient diferencial de segon ordre). Kästner i Karsten estudien el valor de la funció abans i després del punt. Per la seva banda, Tempelhoff controla la distància tangent-corba.

Punts d'inflexió i altres punts singulars

Wolff tracta els punts d'inflexió i de retrocés estudiant la distància entre la tangent i l'ordenada de la corba. Kästner estudia el canvi de concavitat-convexitat a partir de l'angle de curvatura i d'aquí arriba a la discussió del signe dels diferencials d'ordre superior. Tempelhoff i Karsten fan la discussió dels signes partint del desenvolupament en sèrie de la distància tangent-corba. Tempelhoff i Karsten parlen de punts singulars/ múltiples des de la vessant de la geometria algèbrica, com a intersecció de branques.

Indeterminacions

Kästner i Karsten resolen la indeterminació 0/0 prenent els primers termes del desenvolupament en sèrie de numerador i denominador. De fet Kästner menciona Johann Bernoulli en relació a la resolució d'aquesta indeterminació. A partir d'aquesta indeterminació tots dos estudien d'altres indeterminacions.

Corbes osculadores

Wolff en primer lloc defineix l'evoluta i, a partir d'ella, el radi osculador (a partir de la intersecció de dues perpendiculars infinitament properes i semblança de triangles). Kästner (amb suport trigonomètric) i Karsten dedueixen la fórmula del radi de curvatura a partir de la relació entre l'arc i l'angle de curvatura, quan dos punts s'apropen infinitament. L'angle de curvatura és l'angle format pels radis des dels extrems de l'arc. Tempelhoff troba el radi de curvatura a partir del desenvolupament en sèrie de la distància tangent-corba. Kästner, Tempelhoff i Karsten d'antuvi tracten el cercle d'osculació i després l'evoluta. Tots tres relacionen el radi osculador amb la concavitat-convexitat de la corba.

EL LLENGUATGE QUE UTILITZEN, ÉS GEOMÈTRIC O ALGÈBRIC?

L'enfocament de Wolff és geomètric. El plantejament de Kästner (similar al d'Euler) és més algèbric, en el sentit que fa servir funcions, desenvolupament en sèrie (fins i tot, està atent a la convergència) i límit de la raó diferencial. Tanmateix identifica corba amb polígon d'infinits costats infinitament petits i l'ordre superior el fonamenta sobre base geomètrica. El plantejament de Tempelhoff és molt semblant al de Kästner. Tempelhoff, a més, treballa amb el desenvolupament en sèrie de Taylor. S'ha de fer notar, però, que parla de moviment com a generador dels diferencials. El més algèbric dels autors alemanys estudiats és Karsten. Treballa amb funcions, límit, desenvolupament en sèrie de Taylor... A més, no utilitza el moviment per definir corbes com la cicloide o l'espiral. Kästner, Tempelhoff i Karsten utilitzen les sèries per determinar extrems, punts d'inflexió, curvatura, ... i no només com a eina per al càlcul integral.

ELECCIÓ DE COORDENADES I TRACTAMENT DE LES CORBES ALGÈBRIQUES I TRANSCENDENTS

	CORBES	COORDENADES
WOLFF	Tracta corbes de la geometria clàssica, com la concoide, la cissoide, la quadratriu i l' espiral. També tracta amb la cicloide i la corba logarítmica (que defineix a partir de la propietat de subtangent constant), que comencen a fer-se usuals al segle XVII.	En general, transcendents segons naturalesa de la corba, i algèbriques amb ortogonals.
KÄSTNER	Tracta amb algèbriques en general (còniques en particular), amb l'espiral i amb la cicloide.	Algèbriques amb ortogonals; transcendents (cicloide i espiral) segons la naturalesa de la corba.

TEMPELHOFF	Treballa amb algèbriques en general (còniques en particular). La logarítmica (la seva diferència a partir de la seva generació), de la qual dedueix l'exponencial i la seva diferència. Funcions trigonomètriques	Generalment ortogonals; les trigonomètriques, arc com a variable independent.
KARSTEN	Tracta corbes de la geometria clàssica, com còniques, la cissoide, la concoide, la quadratriu i les espirals. També treballa amb la cicloide, les línies trigonomètriques i la corba logarítmica, de la qual dedueix l'exponencial (mitjançant desenvolupament en sèrie). No defineix cissoide, concoide, quadratriu, espiral d'Arquimedes ni cicloide en termes de moviment.	Cissoide, concoide i cicloide amb coordenades ortogonals. Quadratriu i espiral amb coordenades polars, que després transforma en ortogonals.

PROBLEMES I APLICACIONS

WOLFF	Teoria de corbes i problemes geomètrics (tangents, extrems, punts d'inflexió, radi osculador, evoluta), semblant a L'Hôpital, problemes usuals del segle XVII.
KÄSTNER	Tangents, extrems, quadratura, rectificació, curvatura, punts d'inflexió; aplicacions de càlcul integral als cossos rodons i superfícies. Matemàtiques aplicades (teoria de Kepler dels planetes, àrea de l'el·lipse, centres de gravetat...) Teoria d'equacions. Equacions diferencials. Diferenciació parcial.
TEMPELHOFF	Aplicacions a geometria i teoria de corbes (tangents, extrems, punts d'inflexió, curvatura…). Problemes de sèries i de funcions trigonomètriques. Diferenciació parcial.
KARSTEN	Teoria de corbes (tangents, curvatura, quadratura, rectificació, punts múltiples...). Problemes mixtos càlcul diferencial-càlcul integral (quadratura, rectificació, àrea, superfície corba...). Diferenciació parcial.

9.1.3. ITÀLIA

COM EXPOSEN ELS FONAMENTS?

En certa manera la defensa d'una geometria pura, independent del àlgebra, pròpia de les matemàtiques italianes d'aquest període, s'observa en l'exposició dels fonaments del càlcul diferencial, per part d'Agnesi i de Saladini-Riccati. Agnesi defensa l'existència d'infinitèsims com a entitats reals. Es recolza en el mètode dels antics; de fet alguns resultats els demostra mitjançant l'exhaustió. I parla del moviment com a generador de corbes. Agnesi justifica l'eliminació de *dxdy* de la fórmula de diferenciació del producte basant-se en que és un rectangle de dues quantitats infinitèsimes, que és infinitament menor (de manera semblant a com ho justifica Wolff). Saladini i Riccati també defensen els infinitèsims en el sentit dels antics. Agnesi, Saladini i Riccati consideren la corba com a polígon d'infinits costats infinitament petits.

El text de Lagrange es troba cronològicament entre el d'Agnesi i el de Saladini-Riccati. Tanmateix, el seu enfocament es basa en Euler. Agnesi es basa en la *diferència*, que és una porció infinitèsima i que coincideix amb la fluxió. Lagrange i Saladini consideren *diferències* finites que passen a ser *diferencials*, en disminuir contínuament (segons Lagrange), en esdevenir diferències infinitèsimes (segons Saladini). Lagrange basa el càlcul diferencial en la *raó última de les diferències*, que és el límit de la raó de les diferències, quan aquestes disminueixen contínuament (o la raó primera de les diferències naixents, que augmenten contínuament). Agnesi i Saladini confonen quantitats o diferències infinitèsimes amb fluxions.

Pel que fa a la diferenciació del producte en el text de Lagrange, si dx, dy són infinitèsims de primer ordre, $dxdy$ és infinitèsim de segon ordre, doncs és la quarta proporcional a la unitat, a dx i a dy. Així $dxdy$ s'esvaeix respecte $xdy + ydx$. I pel que fa a Saladini, aquest sosté que el producte de diferències, quan aquestes passen a ser infinitèsimes, s'esvaeix respecte la resta de la fórmula. De fet la seva justificació de perquè els infinitèsims de segon ordre s'esvaeixen respecte els de primer ordre és similar a la d'Agnesi, mitjançant la consideració de rectangles.

Funció

Lagrange defineix *funció* d'una o diverses quantitats variables com una expressió algèbrica composada per aquestes variables i per constants. Saladini-Riccati fan servir funcions però no les defineixen explícitament.

Teorema de Taylor

A RICCATI-SALADINI (1765-1767) s'aplica la fórmula del desenvolupament de Taylor en la discussió de punts singulars. La demostració combina el càlcul diferencial amb el càlcul integral, resultant un xic confusa.

Ordre superior

En el cas d'Agnesi els infinitèsims de primer ordre són com línies incommensurables, els infinitèsims de segon ordre són com quadrats incommensurables, ... La diferència primera no té proporció assignable amb una quantitat finita, la diferència segona no té proporció assignable amb la diferència primera i és infinitament menor que aquesta. Per simplificació és recomanable considerar constant la diferència primera d'una de les variables, però per generalitat defensa la indeterminació de la progressió.

Donada la proporció dels diferencials de y i de x d'una equació, Lagrange la considera igual a la proporció d'una variable z sobre 1 i aleshores pot obtenir una expressió de dz. És a dir, calcula el coeficient diferencial del coeficient diferencial. Lagrange comenta que és permès de considerar un dels diferencials constants.

Quant a Saladini, per parlar d'ordre superior comença parlant de diferenciació parcial. Considera les diferències finites d'ordre superior a partir de successions de diferències. Quant a la indeterminació de la progressió, en alguns casos pren dx constant i en d'altres no pren cap diferència constant. Lagrange i Riccati-Saladini relacionen el desenvolupament del binomi amb la diferenciació successiva.

Tangent

Agnesi demostra la fórmula de la subtangent a partir de semblança de triangles amb el triangle característic. De fet justifica que, donada la tangent per un punt, prenent un altre infinitament proper, la distància de la corba a la tangent per aquesta segona ordenada és infinitèsim respecte la diferència de les ordenades. És el mateix raonament que empra Saladini. En canvi, Lagrange veu la tangent com el límit de les secants. Per trobar la fórmula, primer treballa amb la secant, amb diferències finites, i després fa que la diferència de les abscisses s'apropi contínuament a 0.

Extrems

Agnesi dedueix el procés per trobar els extrems ($dy = 0 \text{ o } \infty$) a partir dels canvis en la subtangent i per decidir-ne la naturalesa cal avaluar la corba una mica abans i una mica després del punt en qüestió. Lagrange també es basa en els canvis de la subtangent per deduir que en el possible extrem es verifica $\frac{dy}{dx} = 0 \text{ o } \infty$. Però, a diferència d'Agnesi, per decidir sobre la naturalesa de l'extrem afirma que s'ha d'estudiar el signe de la segona diferència. De fet fa aquest comentari dins l'apartat sobre l'estudi dels punts d'inflexió. Per la seva banda Saladini justifica que per trobar els possibles extrems s'hagi de verificar $dy = 0$ tenint en compte la posició relativa de la tangent en un extrem respecte l'eix d'abscisses. Quant a la naturalesa dels extrems, s'ha d'avaluar el valor de les ordenades abans i després del punt en qüestió.

Punts d'inflexió i altres punts singulars

Agnesi justifica que en el punt d'inflexió es verifica que la segona diferència és nul·la o infinita de tres maneres diferents: 1) el canvi de la concavitat/convexitat abans i després del punt d'inflexió implica un canvi de signe de la segona diferència; 2) en el punt d'inflexió la primera diferència presenta un extrem; 3) en el punt d'inflexió és màxima la diferència entre la subtangent i l'abscissa. Agnesi relaciona els punts de retrocés amb el radi osculador. Lagrange arriba a veure que en el punt d'inflexió la segona diferència és nul·la o infinita a partir del canvi de signe del radi osculador. Lagrange, a més, defineix els punts múltiples en funció dels punts de tall entre la corba i una recta. Pel que fa a Saladini en el punt d'intersecció la distància corba-tangent és negativa, si l'arc és còncau, i positiva, si l'arc és convex; d'on dedueix que en el punt d'inflexió la segona diferència ha de ser nul·la o infinita. Relaciona el cas $\frac{dx}{dy} = \frac{0}{0}$ amb l'existència de punts múltiples, en el sentit d'intersecció de branques.

Indeterminacions

Quan apareix la indeterminació 0/0, Agnesi, Lagrange i Saladini calculen el valor de l'expressió estudiant la raó entre la diferència del numerador i la diferència del denominador. Riccati fa referència a Johann Bernoulli en tractar aquesta indeterminació.

Corbes osculadores

Agnesi primer defineix l'evoluta i després el radi osculador. La fórmula de la longitud del radi la justifica a partir de les perpendiculars a dos arcs infinitèsims, que es tallen en un punt, i de la semblança dels corresponents triangles i sectors. Defineix el co-radi. Parla de la relació del càlcul de punts d'inflexió i concavitat/convexitat amb el radi osculador. En canvi Lagrange i Saladini primer defineixen radi d'osculació i després evoluta. Lagrange considera les interseccions d'una cònica i una circumferència. Quan aquestes coincideixen en un punt la circumferència és el cercle osculador. Lagrange també relaciona el signe del radi osculador amb la concavitat/convexitat. Pel que fa a Saladini troba la fórmula del radi partint de dues normals a la corba, per a dos arcs infinitèsims, i de proporcions trigonomètriques (considerant qualsevol angle entre les coordenades). En canvi, Ricatti considera semblança de triangles. Com Agnesi, Saladini també defineix el co-radi i troba la seva expressió mitjançant semblança de triangles.

EL LLENGUATGE QUE UTILITZEN, ÉS GEOMÈTRIC O ALGÈBRIC?

Agnesi es basa en la geometria dels Antics i parla del moviment com a generador de corbes. De fet fa alguna demostració per exhaustió i considera la corba com un polígon d'infinits costats infinitament petits. Utilitza el mètode cartesià en problemes d'intersecció de branques. Lagrange parla de funcions en el sentit d'Euler, del límit de la raó de diferències... Es pot dir que és més algèbric, però interpreta i construeix de forma geomètrica les equacions, les interseccions entre corbes. En aquest sentit, podem dir que encara utilitza l'àlgebra com a eina per a la geometria. Finalment Saladini-Riccati exposen la geometria dels infinitèsims. Treballen amb proporcions derivades de les propietats de la corba per trobar, per exemple, la tangent. Predomina la corba sobre la seva equació. Riccati considera el moviment composat com a generador de la corba. Tot i utilitzar sèries, només ho fan en el context del càlcul integral, igual que Agnesi.

ELECCIÓ DE COORDENADES I TRACTAMENT DE LES CORBES ALGÈBRIQUES I TRANSCENDENTS

	CORBES	COORDENADES
AGNESI	Tracta corbes clàssiques, com les espirals, la concoide, la cissoide, la quadratriu i les còniques. Però també treballa amb la cicloide, la "versiera", el logaritme i l'exponencial.	L'elecció de coordenades és anàloga a la de L'Hôpital. En el cas de coordenades ortogonals, comenta que de fet les ordenades poden formar qualsevol angle amb les abscisses.
LAGRANGE	Només tracta amb corbes algèbriques en general i còniques i concoide, en particular.	Generalment treballa amb coordenades ortogonals. Aplica canvis de sistema de coordenades.
SALADINI	Tracta corbes clàssiques com les espirals i la concoide. També la cicloide, la corba logarítmica i les funcions hiperbòliques i circulars. I algèbriques en general. Les corbes transcendents tenen equacions diferencials de primer grau.	Generalment treballa amb coordenades ortogonals però també contempla qualsevol altre angle entre ordenades i abscisses. També fa servir coordenades des d'un punt.

PROBLEMES I APLICACIONS

AGNESI	Tangents, extrems, punts d'inflexió i retrocés, evolutes… Problemes de caire geomètric. L'enfocament dels problemes és similar al de L'Hôpital: Agnesi dóna una proposició sobre corbes en general, que després aplica a un cas particular.
LAGRANGE	Teoria algèbrica de corbes. Equacions diferencials, a partir de plantejament geomètric. Problemes geomètrics de màxims i mínims, molt semblants a Agnesi.
SALADINI	Tangent, extrems, punts d'inflexió, osculacions... Mètode directe i invers de les tangents. Equacions diferencials. Diferenciació parcial. Càustiques.[3]

[3] RICCATI-SALADINI (1765-1767), a més, té seccions dedicades al càlcul logarítmic i exponencial, a trajectòries i a càlcul variacional.

9.1.4. GRAN BRETANYA

COM EXPOSEN ELS FONAMENTS?

Ditton defensa el càlcul de fluxions enfront el càlcul diferencial donat que el segon no parla de velocitat i, així, els infinitament petits són infinitament divisibles. Defineix *fluxió* com la velocitat dels increments dels fluents, considerats com a naixents, en el primer moment de la seva generació. En lloc d'igualtat entre fluxions s'ha de parlar de proporcions o raons (*raó primera* entre els increments naixents o *última* entre els decrements). Ditton considera el moviment continu i composat com a generador de corbes, superfícies i sòlids. Defineix el *moment* d'un fluent com magnitud multiplicada per la velocitat, l'increment que sofreix el fluent. Fa referència al *De Quadratura* de Newton. De fet, quan Ditton publica el seu text només havien estat publicats els *Principia* i el *De Quadratura*. Mentre que, quan Maclaurin i Simpson publiquen els seus tractats de fluxions, totes les obres de Newton sobre el seu càlcul ja havien estat publicades.

En el primer llibre Maclaurin justifica el càlcul de Newton a partir de la geometria grega i el moviment (com a generador de magnituds geomètriques). De fet, utilitza el mètode d'exhaustió per trobar les fórmules fluxionals. La *fluxió* mesura la raó de l'increment d'una quantitat respecte el temps i coincideix amb la *velocitat instantània*, velocitat mesurada en qualsevol instant per l'espai que descriuria en un temps donat, si el moviment continués de manera uniforme a partir d'aquest instant. El segon llibre mostra el poder algorísmic i simbòlic del càlcul de fluxions. Cal remarcar, però, que Maclaurin confon fluxions i diferencials, confusió habitual en aquest període.

En el cas de Simpson el que més l'interessa és mostrar les múltiples aplicacions del nou càlcul. També apareix el moviment continu com a generador de les magnituds i defineix la fluxió com Maclaurin, com la velocitat instantània. La fórmula de la fluxió del producte la dedueix considerant el rectangle generat pel moviment de dues rectes perpendiculars i també a partir de l'expressió del producte en termes de potències, de les quals ja ha donat la fórmula de la fluxió.

Tots tres autors entenen el mètode invers precisament com l'operació inversa del mètode directe per trobar fluxions. Tanmateix, Maclaurin i Simpson també el relacionen amb el càlcul d'àrees.

Teorema de Taylor

Segons Maclaurin, els fluents "no algèbrics" es poden representar en termes algèbrics gràcies al teorema del binomi de Newton i al *teorema de Taylor*.

Ordre superior

Ditton considera $o\ddot{z}$ com el moment del fluent $\dot{z}$. Segons Ditton s'ha de respectar l'homogeneïtat també en el cas de les expressions fluxionals (tots els termes han de tenir el mateix ordre). Maclaurin i Simpson també consideren una fluxió determinada com un nou fluent, del qual calculen la fluxió. Ditton, com també fa Maclaurin, relaciona els coeficients del desenvolupament del binomi amb les fluxions d'ordre superior. Tots tres autors recomanen prendre algun dels fluents amb primera fluxió constant. Simpson proposa exemples considerant algun fluent amb primera fluxió constant i exemples considerant totes les primeres fluxions variables. Tanmateix recomana com a més convenient el primer cas per estandarditzar la situació.

Tangents

Per a Ditton la tangent és la secant quan els dos punts de tall amb la corba coincideixen en un de sol. A partir del triangle evanescent (generat pel moviment uniforme de l'ordenada), arriba a la fórmula de la subtangent. Per a Maclaurin la tangent és la recta que toca un arc de corba de tal forma que no passa cap altra recta pel punt de contacte entre la tangent i l'arc de corba. Justifica la fórmula de la subtangent al primer llibre, via el mètode d'exhaustió i el moviment. Finalment Simpson considera la tangent com la trajectòria que seguiria un punt si continués amb moviment uniforme. Mitjançant la descomposició del moviment generador en dues components i el triangle evanescent arriba a la fórmula de la subtangent.

Extrems

Ditton no exposa estudi general de màxims i mínims. Maclaurin obté els candidats a extrem resolent l'equació de la primera fluxió igual a 0 i relaciona la multiplicitat de les arrels de l'equació amb l'existència de màxims i mínims. A partir de la fórmula de Taylor justifica que el signe de la primera fluxió no nul·la d'ordre parell serveix per conèixer la naturalesa de l'extrem. En general, es té un mínim quan la primera fluxió d'ordre parell no nul·la és positiva, i un màxim quan és negativa. Però si la primera fluxió que no s'anul·la és d'ordre senar, aleshores no hi ha ni màxim ni mínim. Simpson justifica que els candidats a extrem s'obtenen en anul·lar la primera fluxió en termes de velocitat i moviment: la distància entre un punt amb moviment uniforme i un punt amb moviment accelerat primer creix i després decreix o bé a l'inrevés. També relaciona els extrems amb la multiplicitat de les arrels de la primera fluxió igualada a zero i l'ordre de les fluxions successives que s'anul·len. Quant a la naturalesa dels extrems, estudia el signe de la fluxió abans d'esdevenir zero (a ambdós costats del punt en qüestió).

Punts d'inflexió i altres punts singulars

Ditton tampoc no fa un estudi general dels punts d'inflexió ni de punts singulars. Maclaurin caracteritza els *punts de flexió contrària* de la forma següent: si el nombre de fluxions $\ddot{y}, \dddot{y}, ...$ que s'anul·len és senar i la d'ordre següent és real i finita (entenent finita com diferent de 0) aleshores la corba presenta un punt de flexió contrària. Però si el nombre de fluxions que s'anul·len és parell no podem assegurar que hi hagi punt de flexió contrària. Si a ambdós costats del punt els signes de la segona fluxió són diferents aleshores la corba presenta un punt de flexió contrària. Per a Maclaurin un punt doble és la intersecció de dos arcs amb tangents diferents, o sobre costats oposats de la tangent. També parla de cúspides de primer i segon tipus. Per la seva banda Simpson defineix els punts de flexió contrària a partir de moviment i velocitat. De manera que, com que si la velocitat decreix la corba és còncava i si la velocitat creix la corba és convexa, en el punt de flexió contrària la primera fluxió ha de ser mínima (o màxima, en el cas invers). També relaciona punts de flexió contrària i concavitat/convexitat amb la multiplicitat de les arrels.

Indeterminacions

Només Maclaurin tracta la indeterminació 0/0. Per resoldre-la calcula el quocient de la fluxió del numerador i la fluxió del denominador, perquè és la “raó última” del quocient inicial, quan numerador i denominador decreixen fins a anul·lar-se.

Corbes osculadores

Ditton, igual que amb els extrems i els punts d’inflexió, esmenta les corbes osculadores com a aplicació però no en presenta estudi general. Maclaurin defineix el cercle osculador com aquell que té la mateixa curvatura que la corba en un punt, i cap altre cercle pel punt de contacte no passa entre la corba i el cercle de curvatura. A partir de proporcions entre àrees i la relació entre la curvatura i la paràbola defineix el radi de curvatura. Maclaurin no parla d’evoluta però sí de variació de la curvatura (segons Newton). Simpson primer defineix evoluta i després passa a definir el radi de curvatura. La fórmula del radi de curvatura la dedueix per semblança entre el triangle característic i el triangle rectangle amb hipotenusa sobre el radi de curvatura. Simpson relaciona el radi de curvatura amb els punts d’inflexió.

EL LLENGUATGE QUE UTILITZEN, ÉS GEOMÈTRIC O ALGÈBRIC?

L’enfocament de Ditton és geomètric, ja que considera el moviment continu i composat com a generador de les corbes. Tanmateix, fa servir el desenvolupament en sèrie (en particular, en l’apartat de quantitats logarítmiques). El primer llibre de Maclaurin és marcadament geomètric, es basa en la geometria grega per defensar la validesa del càlcul fluxional, demostra fórmules amb el mètode d’exhaustió i considera les corbes generades a partir del moviment. En canvi el segon llibre presenta el simbolisme algèbric i els algorismes del càlcul fluxional. Utilitza el teorema del binomi de Newton i el teorema de Taylor. Tanmateix Maclaurin opina que les fluxions són més aplicables a magnituds geomètriques que no pas a quantitats expressades de forma algèbrica, tot i reconèixer les millores obtingudes amb el mètode computacional. La fonamentació de la primera part del llibre de Simpson és geomètrica, fins i tot parla de moviment generador. No utilitza sèries. D’alguns problemes presenta la versió geomètrica i la versió algèbrica. Tot i acceptar la fonamentació cinemàtica de Maclaurin, Simpson no està d'acord amb l'ús excessiu de la geometria. De fet, Guicciardini l'inclou dins dels grup dels analistes fluxionals.[4]

ELECCIÓ DE COORDENADES I TRACTAMENT DE LES CORBES ALGÈBRIQUES I TRANSCENDENTS

	CORBES	COORDENADES
DITTON	Línies corbes genèriques, espiral, cicloide. A partir del seu desenvolupament en sèrie estudia el logaritme, del qual dedueix l'exponencial.	Per a les línies genèriques i la cicloide fa servir coordenades ortogonals. Per a l'espiral utilitza ordenades des d'un punt.
MACLAURIN	Tracta línies corbes algèbriques, en general. Al primer llibre tracta el logaritme, l'exponencial, la cicloide, la quadratriu, la concoide, la cissoide, l'espiral... de forma geomètrica, a partir de les seves definicions, mentre que al segon llibre ho fa a partir de sèries. Defineix la fluxió de l'exponencial a partir de la del logaritme. També tracta la fluxió del cosinus (mitjançant el teorema de Taylor).	En general, i sense explicitar-ho, fa servir coordenades ortogonals. En alguns casos també fa servir ordenades des d'un punt.
SIMPSON	A partir de les fluxions de les línies corbes algèbriques tota la resta són explicables. D'algèbriques treballa amb còniques, cissoide i concoide. També tracta les trigonomètriques, la cicloide, les espirals (logarítmica i d'Arquimedes). Ocasionalment no treballa amb l'equació de la corba sinó amb proporcions geomètriques, a partir de les propietats (com, per exemple, en el cas de l'espiral d'Arquimedes).	Utilitza coordenades ortogonals per a les algèbriques (cissoide, concoide...). El plantejament en el cas de la cicloide coincideix amb el de L'Hôpital, és a dir, abscisses preses sobre l'arc de circumferència generadora. Per a l'espiral escull l'arc i el radi.

[4] Vegeu GUICCIARDINI (1989), pp. 82-85.

PROBLEMES I APLICACIONS

DITTON	Ditton no exposa estudi general ni de tangents, ni d'extrems, ni de punts d'inflexió. Només en presenta algun exemple d'aplicació al final del tractat. Part del tractat està dedicat a problemes geomètrics i físics, on s'han d'utilitzar els dos mètodes (directe i invers). Presenta exemples d'equacions dependents de diversos fluents, on s'han de trobar les fluxions "parcials" de l'equació.
MACLAURIN	Exposa la teoria de corbes (tangents, extrems, punts d'inflexió, corbes osculadores...). Tracta les càustiques per reflexió i refracció.
SIMPSON	Exposa la teoria de corbes (tangents, extrems, punts d'inflexió, corbes osculadores...). Presenta exemples d'equacions dependents de diversos fluents, on s'han de trobar les fluxions "parcials" de l'equació, i optimització amb restriccions. Presenta gran quantitat i varietat d'aplicacions, problemes físics en la seva majoria: rectificació de corbes, cossos sòlids, centres de gravetat, percussió i oscil·lació dels cossos, forces centrípetes...

9.1.5. TAULES CRONOLÒGIQUES

Per tenir una visió global de la discussió general he confeccionat amb EXCEL les taules següents on, cronològicament (i incorporant Euler), he recollit com s'exposen en les obres analitzades:

- Els fonaments del càlcul diferencial/fluxional (Taules 1.1, 1.2 i 1.3).
- El càlcul de tangents (Taula 2).
- El càlcul d'extrems i de la indeterminació 0/0 (Taula 3).
- El càlcul de punts d'inflexió (Taula 4).
- El tractament de les corbes osculadores i de la curvatura en general (Taula 5).
- L'elecció de les coordenades i el tractament de les corbes algèbriques i transcendents (Taula 6).
- Els problemes i aplicacions tractats (Taula 7).

Els autors estan agrupats per colors, segons les analogies detectades entre ells.

Taula 1.1. Fonaments

	Moviment	Exhaustió	Velocitat instantània	Diferències (infinitèsimes, infinitament petites, *zeros*)	Diferències (indefinidament petites)	Extrapolació finit a infinitament petit	Fluxió	Moment
1696 L'HÔPITAL				X				
1706 DITTON	X						X	X
1708 REYNEAU	X			X				
1713-15 WOLFF				X				
1742 MACLAURIN	X	X	X				X	
1748 AGNESI	X	X		X				
1750 SIMPSON	X		X				X	
1755 EULER				X		X		
1759 LAGRANGE				X		X		
1760 KÄSTNER					X	X		
1770 TEMPELHOFF	X			X		X		
1775 SALADINI	X			X		X		
1786 KARSTEN						X		
1799-1800 BÉZOUT				X				
1800 LAGRANGE								
1802 LACROIX								

Taula 1.2. Fonaments

	Corba=polígon	Funció	Funció derivada	Límit	Coeficient diferencial/Raó primera i última/...	Teorema Taylor	Sèries per al càlcul integral
1696 L'HÔPITAL	X						
1706 DITTON					X		
1708 REYNEAU	X						X
1713-15 WOLFF							
1742 MACLAURIN						X	
1748 AGNESI	X						X
1750 SIMPSON							
1755 EULER		X		X	X	X	X
1759 LAGRANGE		X		X	X		
1760 KÄSTNER	X	X		X	X		
1770 TEMPELHOFF		X		X	X	X	
1775 SALADINI	X						X
1786 KARSTEN		X		X	X	X	
1799-1800 BÉZOUT	X						X
1800 LAGRANGE		X	X			X	
1802 LACROIX		X		X	X	X	

Taula 1.3. Fonaments: Ordre superior

	Diferència de diferència/Fluxió de fluxió/Coef. difer. de coef. difer./...	Comparació d'infinitèsims	Taylor	Corba on les ordenades són les diferències de corba original	Indeterminació progressió
1696 L'HÔPITAL	X				X
1706 DITTON	X				
1708 REYNEAU	X				X
1713-15 WOLFF	X	X			X
1742 MACLAURIN	X				
1748 AGNESI		X			X
1750 SIMPSON	X				
1755 EULER	X				
1759 LAGRANGE	X				
1760 KÄSTNER				X	X
1770 TEMPELHOFF				X	X
1775 SALADINI	X				X
1786 KARSTEN	X				X
1799-1800 BÉZOUT	X				
1800 LAGRANGE			X		
1802 LACROIX	X				

Taula 2. Tangents

	Prolongació del costat del polígon/ Arc de corba infinitament petit	Teorema Taylor (fins a grau 1)	Límit de secants, a partir del coeficient diferencial	Exhaustió i moviment	Descomposició del moviment; triangle evanescent
1696 L'HÔPITAL	X				
1706 DITTON					X
1708 REYNEAU	X				
1713-15 WOLFF	X				
1742 MACLAURIN				X	
1748 AGNESI	X				
1750 SIMPSON					X
1755 EULER		X (1748)			X (1748)
1759 LAGRANGE			X		
1760 KÄSTNER	X				
1770 TEMPELHOFF			X		
1775 SALADINI	X				
1786 KARSTEN			X		
1799-1800 BÉZOUT	X				
1800 LAGRANGE		X			
1802 LACROIX			X		

Taula 3. Extrems i indeterminació 0/0

	EXTREMS				INDETERMINACIÓ 0/0	
	Creixement/ decreixement de la subtangent	Quantitat avaluada abans i després	Signe segona diferència	Signe segon coeficient Taylor	Quocient de diferències/fluxions	Primer terme desenvolupament Taylor del numerador i del denominador
1696 L'HÔPITAL					X	
1706 DITTON						
1708 REYNEAU	X				X	
1713-15 WOLFF						
1742 MACLAURIN				X	X	
1748 AGNESI		X			X	
1750 SIMPSON		X				
1755 EULER				X	X	
1759 LAGRANGE			X		X	
1760 KÄSTNER				X		X
1770 TEMPELHOFF				X		
1775 SALADINI		X			X	
1786 KARSTEN				X		X
1799-1800 BÉZOUT		X				
1800 LAGRANGE				X		X
1802 LACROIX				X		X

Taula 4. Punts d'inflexió

	Canvi de signe segon ordre en canviar la curvatura	Distància tangent-ordenada/Distància subtangent-abscissa	Màxim-mínim de primera diferència o fluxió	Taylor aplicat a distància tangent-corba	Radi osculador	Angle de curvatura
1696 L'HÔPITAL	X	X				
1706 DITTON						
1708 REYNEAU			X			
1713-15 WOLFF		X				
1742 MACLAURIN	X					
1748 AGNESI	X	X	X			
1750 SIMPSON			X			
1755 EULER					X (1748)	
1759 LAGRANGE					X	
1760 KÄSTNER						X
1770 TEMPELHOFF				X		
1775 SALADINI		X				
1786 KARSTEN				X		
1799-1800 BÉZOUT						
1800 LAGRANGE						
1802 LACROIX	X					

Taula 5. Corbes osculadores

	1. Evoluta, 2. Radi osculador	1. Radi osculador, 2. Evoluta	Intersecció de normals infinitament properes	Teorema Taylor	Desenvolupament distància tangent-corba	Límit de la intersecció de línies corbes	Exhaustió	Angle de curvatura
1696 L'HÔPITAL	X		X					
1706 DITTON								
1708 REYNEAU	X		X					
1713-15 WOLFF	X		X					
1742 MACLAURIN		No evoluta					X	
1748 AGNESI	X		X					
1750 SIMPSON	X		X					
1755 EULER				X (1748)	X (1748)			
1759 LAGRANGE		X				X		
1760 KÄSTNER		X						X
1770 TEMPELHOFF		X			X			
1775 SALADINI		X	X					
1786 KARSTEN		X						X
1799-1800 BÉZOUT	X		X					
1800 LAGRANGE		X		X				
1802 LACROIX		X				X		

Taula 6. Elecció de coordenades i tractament de les corbes algèbriques i transcendents

	CORBES						COORDENADES	
	Geometria clàssica	Algèbriques generals	Cicloide	Logarítmica	Exponencial	Trigonomètriques	Segons naturalesa corba	Generalment ortogonals
1696 L'HÔPITAL	X		X	X			X	
1706 DITTON	Espirals		X	X	X			X
1708 REYNEAU		X	X	X	X			X
1713-15 WOLFF	X		X	X			X	
1742 MACLAURIN	X	X	X	X	X	X		X
1748 AGNESI	X		X	X	X		X	
1750 SIMPSON	X		X			X	X	
1755 EULER		X		X	X	X		X (1748)
1759 LAGRANGE	X	X						X
1760 KÄSTNER	Espirals	X	X				X	
1770 TEMPELHOFF		X		X	X	X		X
1775 SALADINI	X		X	X		Circulars/hiperbòlique		X
1786 KARSTEN	X		X	X	X	X		X
1799-1800 BÉZOUT		X		X	X	X		X
1800 LAGRANGE		X		X	X	X		
1802 LACROIX	Espirals	X	X	X	X	X		X

Taula 7. Problemes i aplicacions

	Teoria de corbes (resolució només amb CD)	Càustiques	Resolució amb CD i CI (rectificació, quadratura, centres de gravetat...) *	Equacions diferencials	Parcials
1696 L'HÔPITAL	X	X			
1706 DITTON			X		X
1708 REYNEAU	X		X		
1713-15 WOLFF	X		X		
1742 MACLAURIN	X	X	X		
1748 AGNESI	X		X	X	
1750 SIMPSON	X		X		X
1755 EULER	Només extrems			X	X
1759 LAGRANGE	X		X	X	
1760 KÄSTNER	X		X	X	X
1770 TEMPELHOFF	X		X		X
1775 SALADINI	X	X	X	X	X
1786 KARSTEN	X		X		X
1799-1800 BÉZOUT	No inflexió		X		X
1800 LAGRANGE	No extrems ni inflexió			X	X
1802 LACROIX	X		X	X	X

* De fet, els autors assenyalats en aquesta columna són aquells que inclouen el càlcul integral en la seva obra.

9.2. CONCLUSIONS

No he trobat cap estudi similar i, en aquest sentit, la tesi doctoral realitzada representa un enfocament innovador en l'àmbit de l'hermenèutica del càlcul. En particular, no hi ha cap anàlisi detallada de textos de càlcul alemanys ni de la seva comparació amb altres textos contemporanis. De la comparació entre països se'n treuen les següents conclusions:

1. *Influència de Leibniz: L'Hôpital-Wolff-Bézout; Reyneau-Agnesi-Saladini*

Aquest grup de sis autors fonamenten el càlcul diferencial en les diferències infinitament petites. Fins i tot Saladini extrapola del cas finit a l'infinitament petit, com Leibniz. Cal esmentar, però, que Agnesi i Reyneau consideren les corbes generades a partir del moviment i a RICCATI-SALADINI (1765-1767) apareix aquesta idea també. Tot el grup tracta una corba com un polígon d'infinits costats infinitament petits i, en general, defensen la indeterminació de l'elecció de la progressió com un fet que recolza la generalitat del càlcul. L'Hôpital, Wolff i Agnesi encara escullen les coordenades segons la naturalesa de la corba tractada. Mentre que Reyneau, Bézout i Saladini tendeixen a considerar coordenades ortogonals. Tots els autors d'aquest grup, tret de Saladini, primer estudien l'evoluta i després el radi de curvatura, fet que es dóna en els textos estudiats anteriors a 1759. Reyneau i Agnesi empren sèries només en l'àmbit del càlcul integral, com també fan Bézout i Saladini. Wolff inclou un capítol dedicat al càlcul integral, al qual considera com la suma d'elements infinitament petits. El tractament de tangents, extrems i osculació és anàleg en els sis autors. Tots ells estudien les corbes clàssiques, la cicloide i la corba logarítmica. Apart d'aquestes, en els textos de Reyneau, Agnesi i Bézout també apareix la corba exponencial i en el text de Saladini amb freqüència es treballa amb les línies trigonomètriques.

2. *Influència d'Euler a Lagrange (1759), Kästner i Tempelhoff*

Lagrange, Kästner i Tempelhoff fan extrapolació de diferències finites a infinitament petites, com fa Euler i com ja havia considerat Leibniz. Per a Lagrange i Euler, les diferències són *zeros*. Quant a Kästner, tot i considerar les diferències com a indefinidament petites, treballa de fet amb zeros i fins i tot fa servir la mateixa notació que Euler. Kästner i Tempelhoff no defineixen explícitament el concepte de *funció* però sí donen la classificació uniformes-multiformes; algèbriques–transcendents, com Euler. Lagrange defineix *funció* de forma anàloga a com ho havia fet Euler a l'*Inroductio*. Els quatre autors no defineixen el *límit* però comencen a parlar del "límit de la raó dels increments". De fet tant Euler com Lagrange utilitzen aquest concepte per fonamentar l'ordre superior, mentre que Kästner i Tempelhoff encara consideren la indeterminació de l'elecció de la progressió i fonamenten l'ordre superior de manera geomètrica, considerant una corba, les ordenades de la qual són les diferències de la corba inicial. Euler, Kästner i Tempelhoff utilitzen la fórmula del desenvolupament de Taylor per decidir la naturalesa dels extrems, Lagrange es fixa en el signe de la segona diferència. Kästner encara contempla l'elecció de les coordenades segons la naturalesa de la corba, mentre que Euler, Lagrange i Tempelhoff generalment prenen coordenades ortogonals. De fet Kästner i Lagrange encara tracten corbes clàssiques, com les espirals i la cicloide, corbes que ja no apareixen als textos d'Euler i de Tempelhoff.

3. *Analogies Karsten-Lacroix*

Karsten fa extrapolació de diferències finites a diferències infinitament petites, com Leibniz i Euler. En canvi, per a Lacroix la diferència fa referència al cas finit, i la diferencial és el primer terme del desenvolupament en sèrie de la funció. Tanmateix, ambdós autors presenten molts punts en comú i un progrés respecte el càlcul d'Euler, en el sentit que defineixen i fan bàsic el concepte de límit de la raó dels increments (coeficient diferencial per a Lacroix), entenent el límit segons D'Alembert. Karsten i Lacroix defineixen funció com ho havia fet Euler a les *Institutiones calculi differentialis*, utilitzen la fórmula de Taylor per decidir qüestions sobre la naturalesa dels extrems, punts d'inflexió, ... L'ordre superior queda justificat en considerar el coeficient diferencial com una nova funció, de la qual es pot tornar a calcular el coeficient diferencial. Tant Karsten com Lacroix fan servir les corbes clàssiques, la logarítmica, l'exponencial i les trigonomètriques (Karsten també treballa amb la cicloide). I en general consideren coordenades ortogonals. El cas de Karsten és remarcable doncs per a algunes corbes sí té en compte la seva naturalesa a l'hora d'escollir les coordenades però finalment efectua un canvi a coordenades ortogonals.

4. *Desenvolupament del mètode fluxional*

Ditton, Maclaurin i Simpson es basen en el moviment com a generador dels fluents i fan servir les fluxions. Ara bé, Ditton fa referència als moments i a la raó primera i última (és a dir, parla de les raons entre fluxions) mentre que Maclaurin defineix la fluxió com a velocitat instantània, concepte que també adoptarà Simpson. Maclaurin és l'únic dels tres autors que utilitza la fórmula de Taylor per estudiar trets de la corba. El llibre de Ditton no presenta estudi de la teoria de corbes, només en presenta les regles més bàsiques i alguna aplicació. El llibre de Maclaurin destaca pel seu intent de fonamentació rigorosa del mètode fluxional, demostrant per exhaustió la validesa de les fórmules però també cal recordar que la segona part del segon llibre conté aplicacions de caire físico-matemàtic, camp en què el llibre de Simpson és remarcable. Així mateix es confirma la confusió entre fluxions-diferències habitual en aquest període en els textos de Wolff, Agnesi, Saladini i, fins i tot, Euler i Maclaurin. Els textos francesos analitzats no parlen de fluxions.

5. *El càlcul diferencial/fluxional a les escoles militars*

El nivell del text de Bézout és elemental, en no considerar imprescindible per formar un enginyer aspectes com la fonamentació rigorosa. El seu enfocament és anàleg al de L'Hôpital, Wolff, Reyneau i Agnesi. Tanmateix, la seva exposició es troba al volum dedicat a la Mecànica i l'Hidrostàtica, on serà molt útil la teoria de càlcul diferencial i integral. Simpson també està relacionat amb l'àmbit militar, no s'atura en discussió sobre fonaments però presenta un ampli ventall d'aplicacions. En canvi, el nivell de les obres de Lagrange (1759) i de Tempelhoff (ambdós adreçats als alumnes d'escoles d'artilleria) és superior al de Bézout. Per exemple, Tempelhoff dóna més importància als fonaments i inclou diferenciació parcial. I Lagrange es basa en Euler, és a dir, incorpora en el seu llibre un enfocament innovador en aquells moments.

6. *Evolució cronològica de les corbes emprades i de l'elecció de coordenades*

L'estudi de les corbes clàssiques i de la cicloide és habitual fins el 1750. Després d'aquesta data, però, també les trobem en els textos de Kästner, Saladini, Karsten i Lacroix. A partir de 1755 serà usual el tractament de les corbes algèbriques generals. La corba logarítmica es troba gairebé en tots els llibres analitzats, però la corba exponencial apareix amb menys freqüència. Finalment abans de 1770, dels autors estudiats només Maclaurin, Simpson i Euler treballen amb funcions trigonomètriques. Quant a l'elecció de les coordenades, fins el 1750 és força usual escollir-les segons la naturalesa de la corba, mentre que posteriorment hi ha una tendència general a prendre coordenades ortogonals, arribant a l'extrem de ni tan sols explicitar-les, com és el cas de Lagrange.

7. *Evolució cronològica dels problemes i aplicacions*

En general, el càlcul diferencial/fluxional és aplicat per tots els autors a l'estudi general de corbes, tret d'Euler (a les *Institutiones calculi differentialis* només s'aplica als extrems) i Lagrange (les *Leçons sur le calcul des fonctions* no contenen estudi ni d'extrems ni de punts d'inflexió). De tots els autors analitzats només L'Hôpital, Maclaurin i Saladini–Riccati exposen la teoria de les càustiques. Els problemes on s'empra tant el càlcul diferencial com l'integral són relativament usuals al llarg de tot el període. Tanmateix, a partir de 1748 en els llibres analitzats s'observa una major presència d'equacions diferencials.

Finalment, quant a la (manca de) comunicació entre França i Alemanya a la que Schubring fa referència en el seu article,[5] Wolff esmenta els llibres de Reyneau i de L'Hôpital. Kästner i Karsten també es refereixen a l'*Analyse* de L'Hôpital. I les *Leçons* de Lagrange i el *Traité élémentaire* de Lacroix foren traduïts a l'alemany, tot i que ben entrat el segle XIX (1823 i 1831, respectivament). En canvi, apart de les versions franceses del text de Wolff (1747,1757), no tinc constància de cap traducció, ni francesa ni a d'altres llengües, dels autors alemanys estudiats, tret de Wolff. D'altra banda, i en relació a la transmissió dels textos de la Gran Bretanya al Continent, a més de les conegudes traduccions i mencions del *Treatise* de Maclaurin, cal dir que en els seus llibres Kästner i Tempelhoff també en fan referència.

[5] SCHUBRING (1996).

9.3. PERSPECTIVES DE TREBALL FUTUR

1. Anàlisi i comparació dels diferents comentaris sobre l'*Analyse* de L'Hôpital (Crousaz, Varignon, Paulian).
2. Aprofundiment en la relació-separació entre àlgebra i geometria a través dels textos de càlcul estudiats.
3. Comparació de l'exposició de la teoria de càustiques per part de Tschirnhaus, L'Hôpital, Johann Bernoulli, Maclaurin, Saladini i Riccati.
4. Anàlisi i comparació de la teoria d'equacions diferencials que apareix en els textos estudiats.

ANNEXOS

ANNEX I: ÚS DEL CÀLCUL DE DIFERÈNCIES PER TROBAR LA TANGENT D’UNA CORBA

TANGENT A LA CICLOIDE

SEGONS BERNOULLI

Bernoulli estudia aquesta qüestió en el problema VI (*Lectiones*, p. 12). Sigui EM paral·lel a AC.

$$x = BF,$$

$$y = EF = BM,$$

$$f = EH = \text{arc}(HB).$$

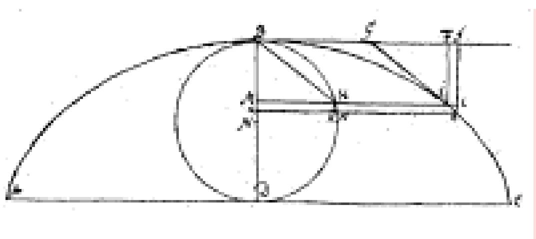


Figura 1

Aplicant la propietat de la cicloide, resulta:

$$x = EH + HM = f + \sqrt{2ay - y^2}\,,$$

$$dx = df + \frac{2ady - 2ydy}{2\sqrt{2ay - y^2}}.$$

Atès que df és HN i ΔHKN és un triangle rectangle (el postulat 2 diu que una corba es pot considerar com un polígon d’infinits costats):

SEGONS L’HÔPITAL

<u>Proposició II</u>: (*Analyse*, p. 16)

Si prenem l’abscissa com l’arc(AP) sobre una corba[1] de la qual sabem traçar la tangent PT, hem de buscar la tangent MT de la corba AM.

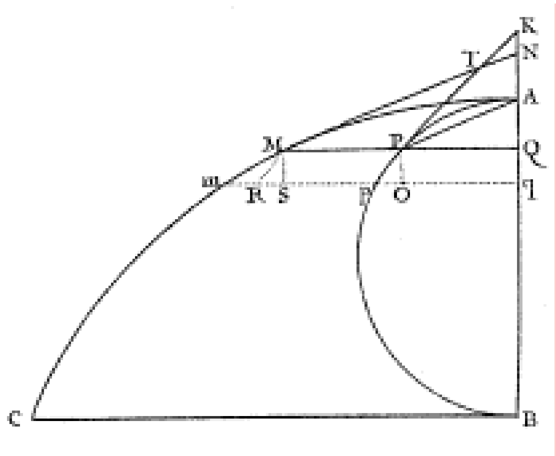


Figura 2

Sigui MP l’ordenada i MT la tangent buscada. Prenem mp infinitament proper a MP i MR paral·lel a PT.

$$x = \text{arc}(AP),\ dx = \text{arc}(Pp) = MR,$$

$$y = PM,\ dy = Rm.$$

Els triangles ΔmRM i ΔMPT són semblants. Per tant:

[1] Això també ho fa Pascal, el qual, a les perpendiculars traçades des de la corba, les anomena “sinus a la base”. Vegeu COOLIDGE (1963), p. 96.

$$HN=\sqrt{HK^2+KN^2}=\frac{ady}{\sqrt{2ay-y^2}},$$

$$dx=\frac{2ady-ydy}{\sqrt{2ay-y^2}}.$$

Utilitzant la relació:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{y}{s}$$

arriba a l'expressió:

$$s=\frac{2ay-y^2}{\sqrt{2ay-y^2}}=\sqrt{2ay-y^2}=HM\ .$$

Així doncs, la subtangent és un segment de longitud igual a la de *HM*. Si portem aquesta distància sobre *FB*, obtenim *FG*. Finalment, unint *E* amb *G* ja obtenim la tangent a la cicloide pel punt *E*.

Bernoulli acaba el problema afirmant que la corda *BH* és paral·lela a la tangent pel punt *E*.

$$\frac{dy}{dx}=\frac{MP}{PT},$$

$$PT=\frac{ydx}{dy}.$$

A continuació aplica aquest resultat al cas particular de la cicloide.[2]

Exemple II: (*Analyse*, p. 17)

Donada la corba tal que x i y verifiquen la següent relació:

$$x=\frac{ay}{b},$$

diferenciem i apliquem la proposició general:

$$dx=\frac{ady}{b},$$

$$PT=\frac{ay}{b}=x.$$

En el cas particular en què *APB* sigui un semicercle i *MP* perpendicular a *AB*, *AMC* és una semicicloide.

Corol·lari: (*Analyse*, p. 17)

L'Hôpital demostra que la corda *AP* és paral·lela a la tangent pel punt *M* de la cicloide.

Amb les coordenades escollides per Bernoulli, l'equació de la cicloide no queda tan clara i senzilla com amb les coordenades utilitzades per L'Hôpital. En aquest cas, ls coordenades considerades per L'Hôpital s'apropen més a les de Roberval;[3] representen el moviment sobre el cercle generador i el de la translació horitzontal, respectivament. D'aquesta manera, l'equació de la corba és molt més senzilla. Així, L'Hôpital només

[2] Aquí, la figura del cas particular serveix per il·lustrar el cas general.
[3] Vegeu BARON (1969), pp. 175-176; WALKER (1986), pp. 129-130.

necessita un parell de triangles semblants, mentre que Bernoulli ha de fer més operacions. Fermat, en estudiar el problema de la tangent a la cicloide, també utilitza el segment *EM*, com Bernoulli.[4] De fet, el mètode de Fermat es correspon amb el corol·lari de Bernoulli i de L'Hôpital: la corda és paral·lela a la tangent. L'Hôpital comença el problema demostrant una proposició de caràcter general. No obstant això, a més de la cicloide, L'Hôpital només aplica aquesta proposició general al càlcul de la tangent a la corba $\frac{y^2}{x}=\frac{x\sqrt{a^2+y^2}}{a}$ en un punt donat.

TANGENT A LA CONCOIDE

SEGONS BERNOULLI

Bernoulli dedica el problema VII (*Lectiones*, p. 12) a trobar la tangent a la concoide de Nicomedes, encara que només estudia la branca superior. Seguint la construcció de Nicomedes:

$$a = GL,$$
$$b = CF = AD,$$
$$x = GD,$$
$$dx = DE = AB.$$

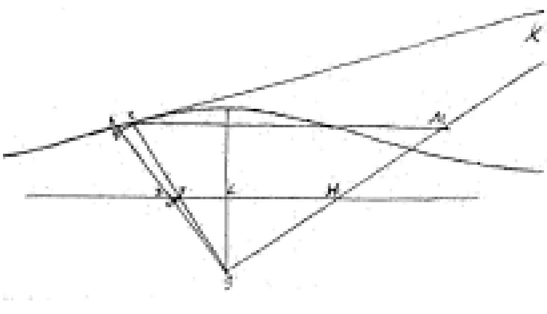


Figura 3

SEGONS L'HÔPITAL

1ª forma:

Proposició VI: (*Analyse*, p. 21)

Sigui *APB* una corba de la qual sabem traçar la tangent *PH*; *F* un punt fix exterior a la corba; i una altra corba *CMD* tal que per a qualsevol recta *FPM*, la relació entre *FP* i *FM* ve donada per una equació. S'ha de buscar la tangent *MT* pel punt *M*.

Sigui *FHT* perpendicular a *FM*.

$$s = FH,\ x = FP,\ dx = Op,$$
$$y = FM,\ dy = mR.$$

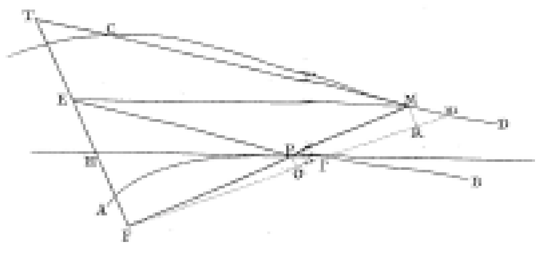


Figura 4

[4] Vegeu FERMAT (1894), III, pp. 144-145; MAHONEY (1973), p. 212.

Fent servir semblança de triangles:

. ΔDEF i ΔDLG:

$$\frac{DL}{LG}=\frac{DE}{EF} \Rightarrow EF=\frac{adx}{\sqrt{x^2-a^2}}.$$

. ΔBGC i ΔEGF:

$$\frac{GF}{GC}=\frac{EF}{BC} \Rightarrow BC=\frac{axdx+abdx}{x\sqrt{x^2-a^2}}.$$

. ΔABC i ΔAGK:

$$\frac{AB}{BC}=\frac{AG}{GK} \Rightarrow GK=\frac{ax^2+2abx+ab^2}{x\sqrt{x^2-a^2}}.$$

I, atès que *GK* s'ha d'agafar perpendicular a *GC* (encara que ell no ho diu), *GK* és la subtangent. Unint *K* amb *C* ja tindrem la tangent. Demostra com, a partir d'aquí, es pot trobar de forma ràpida la tangent (cosa que també es pot veure a l'estudi de L'Hôpital).

Observacions: $b+x$ correspon a la y de L'Hôpital. Bernoulli no descriu la seva construcció: no "avisa" que *GK* ha de ser perpendicular a *AG*. En aquest sentit ja es pot afirmar que el text de L'Hôpital és més didàctic.

Fent servir els següents parells de triangles semblants:

. ΔPOp i ΔHFP,

. ΔMRm i ΔTFM,

obté:

$$\frac{PF}{FH}=\frac{pO}{OP} \Rightarrow OP=\frac{sdx}{x},$$

$$\frac{FP}{FM}=\frac{OP}{RM} \Rightarrow RM=\frac{sydx}{x^2},$$

$$\frac{mR}{RM}=\frac{FM}{FT} \Rightarrow FT=\frac{sy^2dx}{x^2dy}.$$

A partir de l'equació es pot posar *dy* en funció de *dx* i ja es té la subtangent.

Després d'enunciar la proposició general, l'aplica al cas particular de la concoide.

Exemple: (*Analyse*, p. 22)

Sigui ara *APB* una recta (*PH*). La relació entre *FP* i *FM* ve donada per:

$$y-x=a.$$

La corba *CMD* serà la concoide de Nicomedes, amb asímptota *OH* i pol *F*.

$$dy=dx,$$

$$FT=\frac{sy^2}{x^2}.$$

Es pot deduir una forma abreujada de trobar la tangent: si tracem *ME* paral·lela a *PH* i *MT* paral·lela a *PE*, *MT* és la tangent buscada.

Efectivament:

$$\frac{FP}{FH} = \frac{FM}{FE} \Rightarrow FE = \frac{sy}{x},$$
$$\frac{FP}{FE} = \frac{FM}{FT} \Rightarrow FT = \frac{sy^2}{x^2}.$$

2ª forma:

Proposició VII: (*Analyse*, p. 22)

Sigui *ARM* una corba, amb tangent *MH* al punt *M* i de diàmetre *EPAHT*. *F* un punt fix exterior, del qual surt una recta *FPSM* que talla el diàmetre en *P* i la corba en *M*. La recta *FPM* gira al voltant de *F*, fent moure el pla *PAM* paral·lelament a si mateix al llarg de la recta *ET*, de forma que *PA* sempre és igual. La intersecció contínua de *FM* i *AM* descriu la corba *CMD*. S'ha de buscar la tangent *MT*.

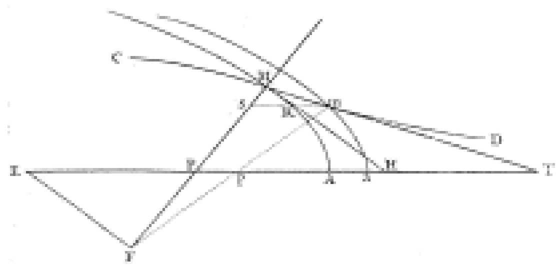


Figura 5

Sigui *pam* un pla infinitament proper al pla *PAM*. Tracem *mRS* paral·lela a *AP*.

$$Pp = Aa = Rm \Rightarrow RS = Sm - Pp,$$
$$FP = Fp = x,\ FM = Fm = y,$$
$$PH = s,\ MH = t,\ Pp = dz.$$

Considerem els següents parells de triangles semblants:

. ΔFPp i ΔFSm,

. ΔMPH i ΔMSR,

. ΔMHT i ΔMRm.

Per tant, tenim la sèrie de proporcions:

$$\frac{Fp}{Fm}=\frac{Pp}{Sm}\Rightarrow Sm=\frac{ydz}{x}\Rightarrow RS=\frac{ydz-xdz}{x},$$

$$\frac{PH}{HM}=\frac{SR}{RM}\Rightarrow RM=\frac{tydz-txdz}{sx},$$

$$\frac{MR}{Rm}=\frac{MH}{HT}\Rightarrow HT=\frac{sx}{y-x}.$$

I d'aquesta manera podem obtenir *MT*. De tot això L'Hôpital dedueix que, si tracem *FE* paral·lela a *MH* i prenem *HT* igual a *PE*, aleshores *MT* serà la tangent buscada:

Sabem que $HT=\dfrac{PH\cdot FP}{MP}$. Si *FE* és paral·lela a *MH*, com que el triangle ΔPFE és semblant al triangle ΔMPH, llavors: $\dfrac{PE}{PH}=\dfrac{FP}{PM}$, d'on deduïm que:

$$PE=\frac{PF\cdot PH}{MP}=HT.$$

Aquesta proposició general és interessant ja que aquí sí que l'aplica a diversos casos particulars:

. Si *AM* és una recta, *CMD* és hipèrbola (amb asímptota *ET*).

. Si *AM* és un cercle de centre *P*, *CMD* és la concoide de Nicomedes (amb asímptota *ET* i pol *F*).

. Si *AM* és una paràbola, *CMD* és la companya del paraboloide de Descartes.

En aquest cas, el primer mètode emprat per L'Hôpital és equivalent a l'utilitzat per Bernoulli. Només cal comprovar que la cadena de proporcions a partir dels triangles semblants coincideix en els dos casos. A més a més, l'elecció de les coordenades és la mateixa. Ambdós treballen amb coordenades des d'un punt. Però el segon camí utilitzat pel marquès és interessant doncs aplica el mètode general a diverses corbes. A nivell didàctic, cal remarcar que L'Hôpital presenta dues formes de resoldre el problema.

TANGENT A LA CISSOIDE

SEGONS BERNOULLI

En el problema VIII (*Lectiones*, p. 13) Bernoulli defineix la corba com ho havien fet els grecs: l'arc *BD* ha de ser igual l'arc *BE*.

$$AF=FC=a,$$
$$AG=x,\ GH=y,$$
$$FG=a-x=FK.$$

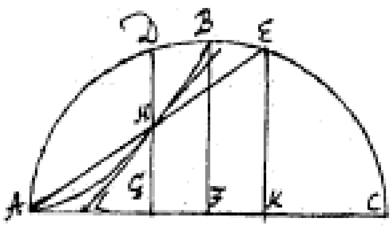


Figura 6

Sigui *H* un punt de la cissoide. Per definició de la corba:

$$GD=KE=\sqrt{2ax-x^2}\ .$$

Llavors:

$$\frac{AK}{KE}=\frac{AG}{GH}\ .$$

És a dir:

SEGONS L'HÔPITAL

<u>Proposició VIII</u>: (*Analyse*, p. 23)

Donats la corba *AN* de diàmetre *AP*, un punt exterior fix *F*, una altra corba *CMD* i la recta *FMPN*, i donada l'equació que relaciona *FN*, *FP* i *FM*, s'ha de trobar la tangent *MT*.

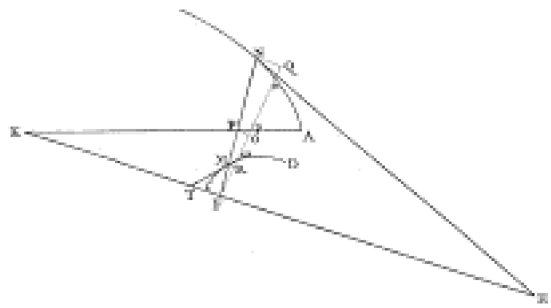


Figura 7

Pel punt *F* es traça la perpendicular *HK* a *FN*. Prenent centre *F* i radis *FN*, *FP* i *FM* s'obtenen els petits arcs arc(*NQ*), arc(*PO*) i arc(*MR*), respectivament. L'angle entre *FN* i *Fn* és infinitament petit.

$$s = FK,\quad t = FH,$$
$$x = FP,\quad dx = pO,$$
$$y = FM,\quad dy = Rm,$$
$$z = FN,\quad -dz = nQ.$$

Considera els següents triangles semblants:

$$\frac{2a\text{-}x}{\sqrt{2ax\text{-}x^2}}=\frac{x}{y}$$

Simplificando:

$$\frac{\sqrt{2a\text{-}x}}{\sqrt{x}}=\frac{x}{y},$$

$$\frac{2a - x}{x}=\frac{x^2}{y^2}.$$

Operant arriba a l'expressió:

$$x^3=2ay^2 - xy^2.$$

Diferenciant ambdós costats:

$$3x^2dx = 4aydy - 2xydy - y^2dx,$$

$$\frac{3x^2+y^2}{4ay\text{-}2xy}=\frac{dy}{dx}=\frac{y}{s}.$$

I ara ja pot trobar la subtangent:

$$s = GL=...=\frac{2ax\text{-}x^2}{3a\text{-}x}.$$

. ΔPFK i ΔpOP,

. ΔFMR, ΔFPO i ΔFNQ,

. ΔHFN i ΔNQn,

. ΔmRM i ΔMFT.

Llavors:

$$\frac{x}{s}=\frac{dx}{OP}\Rightarrow OP=\frac{sdx}{x},$$

$$\frac{x}{y}=\frac{OP}{MR}\Rightarrow MR=\frac{sydx}{x^2},$$

$$\frac{x}{z}=\frac{OP}{NQ}\Rightarrow NQ=\frac{szdx}{x^2},$$

$$\frac{t}{z}=\frac{NQ}{Qn}\Rightarrow Qn=\frac{sz^2dx}{tx^2},$$

$$\frac{dy}{RM}=\frac{y}{FT}\Rightarrow FT=\frac{sy^2dx}{x^2dy}.$$

Diferenciant l'equació es pot escriure dy en funció de dx i de dz. Usant la relació:

$$dz=-\frac{sz^2dx}{tx^2},$$

dx desapareix de FT (expressió afectada de signe negatiu, ja que si x creix, z disminueix).

S'obté el mateix resultat si AP és una corba.

Exemple: (*Analyse*, p. 24)

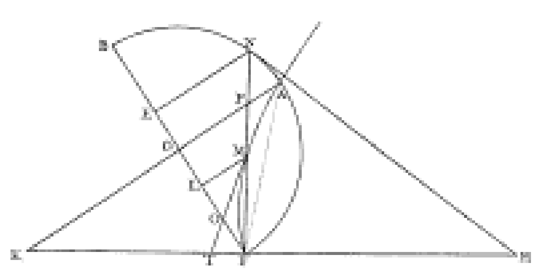


Figura 8

1ª forma: Sigui *AN* el cercle de centre *G* que passa per *F*, i *FB* perpendicular al diàmetre *AP*. I sigui *PM* sempre igual a *PN*. La corba resultant és una cissoide. L'equació que relaciona *FN*, *FM* i *FP* és:

$$z + y = 2x.$$

Diferenciant:

$$dy = 2dx - dz = \frac{2tx^2\,dx + sz^2\,dx}{tx^2}.$$

Per tant:

$$FT = \frac{sty^2}{2tx^2 + sz^2}.$$

2ª forma: Igual que Bernoulli.

Bernoulli, amb coordenades ortogonals (aprofitant la naturalesa de la corba) i amb un parell de triangles semblants, resol el problema. En canvi, L'Hôpital necessita quatre parells de triangles semblants. En el pas final, la subtangent queda expressada en funció de x, y, z, s, t, mentre que en el problema de Bernoulli queda només en funció de x. En el cas de Bernoulli la manipulació de la corba és més còmoda, atès que la seva equació només és funció de x i y. L'Hôpital torna a demostrar primer una proposició general, que després aplica únicament al cas particular de la cissoide.

TANGENT A LA QUADRATRIU

SEGONS BERNOULLI

En el problema IX (*Lectiones*, p. 14) Bernoulli caracteritza aquesta corba de la forma següent:

SEGONS L'HÔPITAL

Proposició IX: (*Analyse*, p. 25)
Donades les corbes *ANB* i *CPD*; la recta *FKT*; *A*, *C*, *F* punts fixos. Sigui *EMG* una corba tal que, per a qualsevol recta *FMN*,

$$\frac{AD}{AE} = \frac{AB}{AC}.$$

Siguin:

$$a = AC,\, b = AB,$$

$$x = AH,\, f = \mathrm{arc}(AD),$$

$$HC = a - x.$$

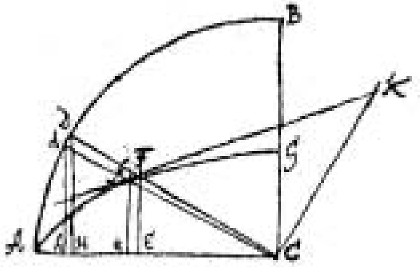


Figura 9

Donat que D pertany al quart de cercle:

$$DH = \sqrt{2ax - x^2},$$

$$AE = \frac{af}{b} \Rightarrow EC = a - \frac{af}{b}.$$

ΔDHC i ΔFEC són triangles semblants. Per tant:

$$\frac{HC}{HD} = \frac{EC}{EF} \Rightarrow EF = \frac{(ab-af)\sqrt{2ax-x^2}}{ab-bx}.$$

Considerant un triangle infinitament petit:

$$df = \frac{adx}{\sqrt{2ax-x^2}},$$

llavors:

$$d(AE) = \frac{a}{b}df = \frac{a^2\,dx}{b\sqrt{2ax-x^2}}.$$

Un cop ha diferenciat EF, aplica la fórmula habitual:

MP és paral·lel a FK. La relació de l'arc(AN) amb l'arc(CP) ve donada per l'equació. Busquem la tangent MT, amb M punt sobre EG.

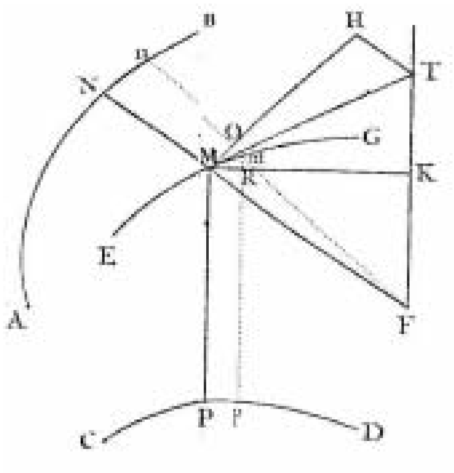


Figura 10

Sigui TH paral·lel a FM i les rectes MRK i MOH paral·leles a les tangents en P i en N, respectivament. Sigui $FmOn$ infinitament proper a FMN, amb mRp paral·lel a MP.

$$s = FM,\, t = FN,\, u = MK,$$

$$x = \mathrm{arc}(CP),\, dx = \mathrm{arc}(Pp) = MR,$$

$$y = \mathrm{arc}(AN),\, dy = \mathrm{arc}(Nn).$$

Els parells de triangles següents són semblants:

. ΔFNn i ΔFMO,

. ΔMOm i ΔMHT,

. ΔMRm i ΔMKT,

d'on surt:

$$MH = \frac{sudy}{tdx}.$$ [5]

Posant dy en funció de dx a partir de

[5] Aquest segment MH es correspon amb l'arc(MD) que utilitza Fermat. Vegeu FERMAT (1894), III, pp. 145-146.

$$\frac{d(EF)}{d(AE)} = \frac{EF}{s},$$

i obté la subtangent *s*.

A partir d'aquí Bernoulli dóna una forma abreujada de calcular la tangent: prenent *CK* perpendicular a *DC*; considerant els triangles semblants ΔDHC i ΔFEC i els sectors semblants *DdC* i *EfC*; i diferenciant *FC* arriba a:

$$\frac{d(FC)}{b - f} = \frac{FC}{CK} .$$

Això, però, ho escriu, no fa servir aquesta notació. Finalment, tenint *CK* es pot traçar la tangent *FK*.

Al problema X (*Lectiones*, p. 15) Bernoulli segueix estudiant aquesta corba. Busca *G*, punt d'intersecció de la quadratriu *AG* i el radi perpendicular *CB*. Agafa un punt *D* tal que *DB* sigui infinitament petit. Per això i per la definició de la quadratriu:

$$\frac{AB}{AC} = \frac{AD}{AE} = \frac{DB}{EC} = \frac{DB}{FG} = \frac{CB}{CG} = \frac{AC}{CG}.$$

Així, *CG* és la 3ª proporcional al quart de cercle *AB* i al radi *AC*.

l'equació, desapareixeran les *dx*.

Així, si tracem recta paral·lela a *FM* pel punt *H*, tallarà *FK* en el punt *T*, obtenint per tant la tangent *MT*.

<u>Exemple</u>: (*Analyse*, p. 26)

Sigui *ANB* un quart de cercle amb centre *F* (fix) i *CPD* el radi *APF* perpendicular a *FKGQTB*.

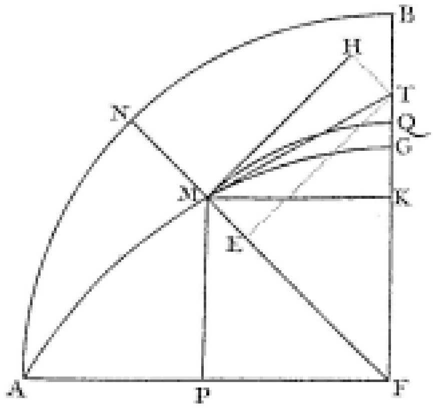


Figura 11

$a = AF$, $b = ANB$,

$x = AP$, $y = \text{arc}(AN)$,

$u = FP = MK = a - x$,

$t = FN = a$.

L'equació de la quadratriu és:

$$\frac{y}{x} = \frac{b}{a},$$

per tant:

$$MH = \frac{sudy}{tdx} = \frac{asdy\text{-}sxdy}{adx} = \frac{bs\text{-}ys}{a}.$$

Com fa Bernoulli, L'Hôpital també dóna la forma curta de trobar la tangent *MT*, prenent

[6] Aquest arc(*MQ*) també l'utilitza Fermat per calcular la tangent a la quadratriu. Vegeu FERMAT (1894), III, pp. 145-146.

MH=arc(*MQ*) i perpendicular a *FM*, i *HT* paral·lel a *FM*. En efecte, *FNB* i *FMQ* són sectors semblants, així:

$$\frac{FN}{FM} = \frac{\mathrm{arc}(NB)}{\mathrm{arc}(MQ)},$$

$$\mathrm{arc}(MQ) = \frac{bs - ys}{a} = MH.$$

com volia demostrar.[6]

El corol·lari que L'Hôpital dóna a continuació és el problema X de Bernoulli.

Ambdós autors treballen amb els mateixos elements (tot i que Bernoulli fa servir coordenades ortogonals i L'Hôpital, polars[7]):

Bernoulli	*L'Hôpital*
$a = AC$	$a = AF = FN = t$
$b = AB$	$b = ANB$
AE	$x = AP$
$f = \mathrm{arc}(AD)$	$y = \mathrm{arc}(AN)$
EC	$u = FP = MK = a - x$
FC	$s = FM$

A diferència de Bernoulli, L'Hôpital no troba la subtangent directament, sinó un segment *MH* en funció de *x*, *y*, *s*, *t*, *u* tal que, traçant una determinada paral·lela per *H*, resulta la tangent buscada. A continuació ho aplica a una corba concreta, la quadratriu. Les variables *x*, *y* són els elements característics de la corba, que podem identificar amb els seus moviments generadors. En canvi, Bernoulli torna a treballar amb coordenades ortogonals per poder aplicar la fórmula:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{s}.$$

[7] De fet, la relació entre l'angle recorregut, α, el radi vector, $r = r(\alpha)$, i les coordenades *x*, *y* de L'Hôpital és la següent: $y = a \cdot \alpha$, $a - x = r\cos\alpha$.

Bernoulli treballa amb triangles semblants mentre que L'Hôpital ho fa amb sectors semblants. Els corol·laris i conseqüències que se'n deriven en els dos casos són els mateixos.

TANGENT A L'ESPIRAL

SEGONS BERNOULLI

El problema XI (*Lectiones*, p. 15) està dedicat al cas de l'espiral d'Arquimedes. Sigui a el radi AC, b la longitud de la perifèria $DDCD$ i $x = AF$.

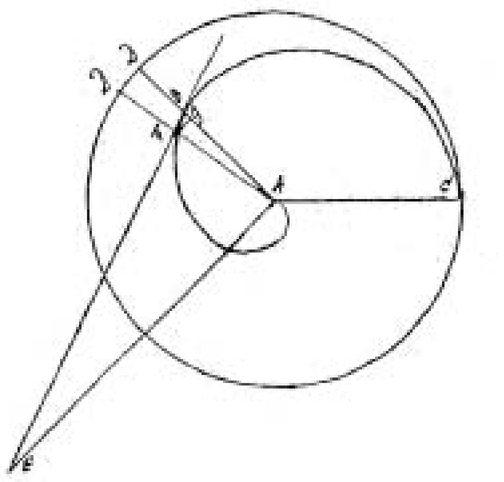


Figura 12

Sigui AE perpendicular a AB. Per definició de l'espiral:

$$\frac{a}{b} = \frac{AB}{\operatorname{arc}(CKD)}.$$ [8]

Això ho escriu, no fa servir aquesta notació.

SEGONS L'HÔPITAL

<u>Proposició V</u>: (*Analyse*, p. 19)

Sigui APB una corba, amb A fix, de la qual sabem trobar la tangent PH. Sigui F un altre punt fix i CMD una altra corba tal que, agafant una recta FMP, la relació entre FM i AP ve donada per una equació. S'ha de trobar la tangent MT des de M.

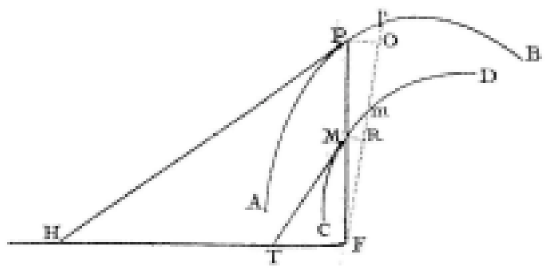


Figura 13

Tracem sobre FP la perpendicular FH. Prenem la recta $FRmOp$ que forma un angle amb FP infinitament petit. Amb centre F descrivim els arcs arc(PO) i arc(MR).

$$s = HF,\ t = PH,$$

$$x = \operatorname{arc}(AP),\ dx = \operatorname{arc}(Pp),$$

$$y = FM,\ dy = mR,$$

[8] Ell no ho diu però es pot sobreentendre que aquest arc funciona com la coordenada *y*.
[9] Ho he interpretat com a semblança de triangles.

Aleshores, aïllant l'arc CKD i diferenciant-lo:

$$d[\mathrm{arc}(CKD)] = DD = (b/a)dx,$$

i així tenim que:

$$\frac{AD}{AF}=\frac{DD}{FG} \Rightarrow \frac{AD}{x}=\frac{DD}{FG} \Rightarrow FG=\frac{bxdx}{a^2}.$$[9]

Llavors:

$$\frac{BG}{FG}=\frac{AB}{AE}, \text{ és a dir : } \frac{dx}{\frac{bxdx}{a^2}}=\frac{x}{AE}.$$

I així ja obté la subtangent, AE.

La idea torna a ser aplicar la fórmula:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{y}{s},$$

però, en aquest cas, usant coordenades polars.

$$z = FP.$$

Considerem els següents parells de triangles semblants:

. ΔPOp i ΔPFH,

. ΔmRM i ΔMFT,

. ΔFPO i ΔFMR.

Aleshores:

$$\frac{PH}{HF}=\frac{Pp}{PO} \Rightarrow PO=\frac{sdx}{t},$$
$$\frac{FP}{FM}=\frac{PO}{MR} \Rightarrow MR=\frac{ysdx}{tz},$$
$$\frac{mR}{RM}=\frac{FM}{FT} \Rightarrow FT=\frac{sy^2dx}{tzdy}.$$

Aplica aquesta proposició general al següent cas particular:

<u>Exemple</u>: (*Analyse*, p. 20)

Si prenem APB un cercle de centre F, PH serà paral·lel i igual a FH, és a dir, $t = s$. En aquest cas, la corba CMD és l'espiral d'Arquimedes.[10]

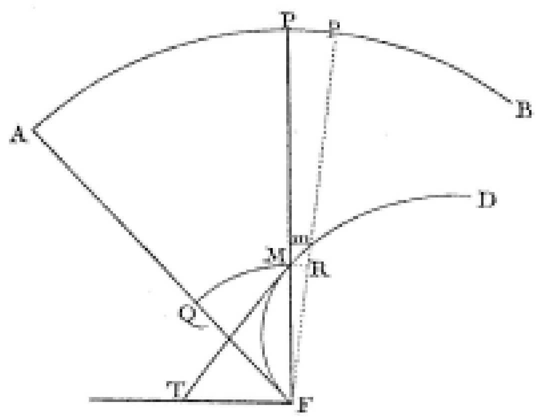


Figura 14

[10] Newton, en el seu *Methodus fluxionum* (Problema IV, setena manera), estudia el cas de les espirals i ja fa servir aquestes coordenades, que no són altra cosa que les coordenades polars.

Així doncs:

x = arc(AP), $y = FM$, $z = FP = a$.

Fent servir la proposició general:

$$FT = \frac{y^2 dx}{ady}.$$

Si b és la longitud de la circumferència (o una porció), per definició d'espiral:

$$\frac{b}{x} = \frac{a}{y}$$

(que seria la relació entre FM i AP).

Diferenciant:

$$FT = \frac{xy}{a},$$

que és el resultat que obté Bernoulli (tenint en compte les diferents notacions). A continuació, descriu una forma ràpida de trobar aquesta tangent:

Si tracem l'arc de cercle arc(MQ) de centre F i radi FM, que acaba en Q pel radi FA que uneix els dos punts fixos A i F. Si prenem FT igual a l'arc(MQ), la recta MT serà la tangent en M. Efectivament: FPA i FMQ són sectors semblants, per tant:

$$\frac{FP}{FM} = \frac{AP}{\text{arc}(MQ)} \Rightarrow \text{arc}(MQ) = \frac{yx}{a} = FT$$

Aquest cas és força interessant doncs l'aplica a d'altres corbes, tot i que també són espirals. Agafa en general:

$$\frac{b}{x} = \frac{a^m}{y^m},$$

on m és racional. La corba FMD és una espiral a l'infinit. Diferenciant, obtenim:

$$ydx = \frac{mby^m dy}{a^m} = mxdy$$

i, per tant, FT queda de la següent forma:

$$\frac{y^2 dx}{ady} = \frac{mxy}{a} = m \cdot \text{arc}(MQ)\,.$$

Ambdós usen, com a variables, l'arc i el radi, és a dir, fan servir coordenades polars (igual que Newton). En aquest cas, L'Hôpital sí aplica la proposició general a diversos exemples particulars.[11] A més a més, explica una forma ràpida de trobar la tangent, cosa que no fa Bernoulli.

[11] Newton, al Problema IV, setena manera, del seu *Methodus fluxionum*, després d'exposar el cas general l'aplica a espirals on la relació entre la x i la y ve donada per una equació. Per exemple:

. $y = \frac{ax}{b}$, que és l'espiral d'Arquimedes

. $x^3 - ax^2 + axy - y^3 = 0$

. $x^2 = by$

ANNEX II: ESTUDI DE MÀXIMS I MÍNIMS

QUIN CAMÍ HA DE SEGUIR UN VIATGER PER RECÓRRER UN ESPAI EN EL MENOR TEMPS POSSIBLE?

SEGONS BERNOULLI

Problema XVI: (*Lectiones*, p. 17)

Un viatger ha d'anar del punt *A* al punt *E* emprant el mínim temps possible. Primer ha de travessar el camp *AFDB* i després el *DBGE*. En el primer camp recorre un espai *b* en un temps *a*. I en el segon, un espai *c* en un temps *a*. Quina via haurà de seguir per anar del punt *A* al punt *E* en el menor temps possible?

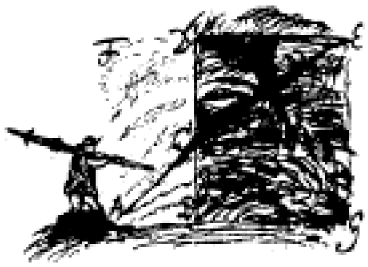


Figura 1

$$AB = m,\ ED = n,$$

$$BC = x,\ BD = e,$$

$$DC = e - x,$$

$$AC = \sqrt{m^2 + x^2},$$

$$CE=\sqrt{e^2 - 2ex + x^2 + n^2}.$$

Sense indicar que utilitza la velocitat en el camp *ABC*, obté:

SEGONS L'HÔPITAL

Exemple XI: (*Analyse*, p. 49)

Un viatger surt del punt *C* per anar al punt *F*. Ha de travessar dos camps separats per la recta *AEB*. En el camp del costat de *C*, recorre un espai *a* en un temps *c*. En el camp del costat del punt *F*, recorre un espai *b* en un temps *c*. Quin ha de ser el punt *E* de *AEB* per poder anar del punt *C* al punt *F* en el mínim temps possible?

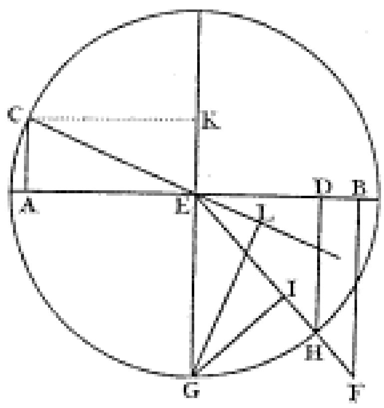


Figura 2

$$CE = u,$$

$$EF = z.$$

Igual que Bernoulli:

$$\frac{a}{u} = \frac{c}{\text{temps}}.$$

Llavors el temps que triga a anar del

$$\frac{b}{a}=\frac{\sqrt{m^2+x^2}}{\text{temps}},$$

així, el temps per anar del punt A al C és:

$$\frac{a\sqrt{m^2+x^2}}{b}.$$

Anàlogament, fent servir la velocitat en el camp CDE:

$$\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{e^2\text{-}2ex+x^2+n^2}}{\text{tiempo}},$$

amb la qual cosa el temps que triga a anar del punt C al punt E és:

$$\frac{a\sqrt{e^2-2ex+x^2+n^2}}{c}.$$

El temps total, que és allò que es vol minimitzar, és:

$$\frac{a\sqrt{m^2+x^2}}{b}+\frac{a\sqrt{e^2-2ex+x^2+n^2}}{c} \quad . \ (1)$$

Diferenciant aquesta expressió i igualant-la a zero, el problema es redueix a resoldre l'equació següent:

$$(b^2-c^2)\,x^4+(2c^2e-2b^2e)\,x^3+$$
$$+(b^2m^2+b^2e^2-c^2e^2-c^2n^2)x^2-$$
$$-2b^2em^2x+b^2e^2m^2=0 \ . \ (2)$$

punt C al punt E és:

$$\frac{cu}{a}.$$

Anàlogament:

$$\frac{b}{z}=\frac{c}{\text{temps}}.$$

Per tant, el temps que tarda en anar del punt E al punt F és: $\frac{cz}{b}$. Aleshores, s'ha de minimitzar el temps total:

$$\frac{cu}{a}+\frac{cz}{b}.$$

Ara utilitza el resultat següent:

<u>Exemple IX</u>: (*Analyse*, p. 47)

Sigui AEB una corba plana amb dos punts fixos, C i F. Des d'un punt P qualsevol d'aquesta corba tracem les rectes CP (u) i PF (z). Considerem una quantitat composta per u, z, i per altres rectes a, b, c,... Es demana quina és la posició de les rectes CE i EF de manera que la quantitat sigui màxima o mínima.

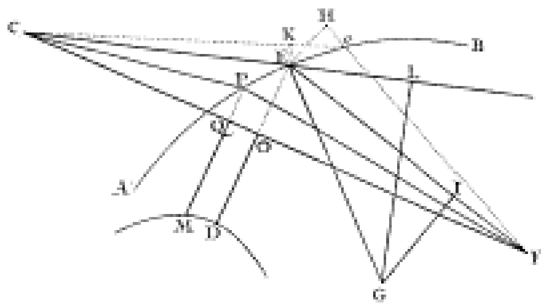


Figura 3

Siguin CE i EF les rectes amb la posició desitjada. Unim C amb F. Construïm una nova corba DM tal que, si tracem la recta PQM perpendicular a CF, l'ordenada QM sigui igual a la quantitat donada. Quan P passa a ser E, QM és OD, que serà màxima o mínima. Per tant, hem de diferenciar i igualar a zero o a infinit. Tracem EG perpendicular a AEB i des d'un punt G qualsevol GL, GI perpendiculars a CE i a EF, respectivament. Sigui e un punt infinitament proper a E i des d'aquest punt dibuixem les rectes CKe i FeH. Prenent aquestes rectes com a radis i els punts C, F com a centres, dibuixem els petits arcs EK i EH. Es pot comprovar que els parells de triangles rectangles següents són semblants:

. ΔELG i ΔEke,

. ΔEIG i ΔEhe.

Aleshores:

$$\frac{GL}{GI} = \frac{Ke}{He} = \frac{du}{-dz} = \frac{\sin(\angle GEC)}{\sin(\angle GEF)}$$

(dz és negatiu respecte du perquè quan u creix, z decreix). Prenent EG perpendicular a AB i aplicant el resultat anterior s'obté:

$$\frac{\sin(\angle GEC)}{\sin(\angle GEF)} = \frac{GL}{GI} = \frac{a}{b}\ . \quad \text{(I)}$$

Sigui CGH la circumferència de centre E i radi EC. Primer tracem AC, HD i BF perpendiculars a AB; i després, GL i GI perpendiculars a CE i a EF, respectivament.

Emprant (I) i els parells de triangles semblants següents:

. ΔGEL i ΔECA,

. ΔGEI i ΔEHD,

s'obtenen les igualtats $GL=AE$ i $GI=ED$.

Prenent $x = AE$:

$$ED = \frac{bx}{a}.$$

Sigui:

$AB=f$, $AC=g$, $BF=h$.

Atès que ΔEBF i ΔEDH són semblants:

$$\frac{EB}{BF} = \frac{f-x}{h} = \frac{ED}{DH} \Rightarrow DH = \frac{hbx}{af-ax}.$$

ΔEDH i ΔEAC són triangles rectangles, les hipotenuses dels quals, EH i EC, són iguals:

$$ED^2 + DH^2 = EA^2 + AC^2.$$

És a dir:

$$\frac{b^2x^2}{a^2} + \frac{h^2b^2x^2}{(af-ax)^2} = x^2 + g^2.$$

Això es redueix a estudiar l'equació següent:

$$\begin{aligned}&(a^2-b^2)\,x^4 + (2b^2f - 2a^2f)\,x^3 + \\ &+ (a^2f^2 + a^2g^2 - b^2f^2 - b^2h^2)x^2 - \\ &- 2a^2fg^2x + a^2f^2g^2 = 0, \quad \text{(II)}\end{aligned}$$

la solució de la qual ens indica el punt E buscat.

L'Hôpital a continuació també resol aquest problema tal como ho havia fet Bernoulli, variant només la notació.

Bernoulli diferencia i iguala a zero. Per la seva banda, L'Hôpital aplica l'exemple IX (*Analyse*, p. 47), obtenint l'equació (II), que coincideix amb l'equació (2) de Bernoulli. Després exposa una altra forma de resoldre el problema, que coincideix amb la del seu mestre. En l'artículo de 1684 publicat a *Acta Eruditorum*, Leibniz havia analitzat aquest problema considerant dos medis de diferent densitat, separats per una recta, mentre que Bernoulli considerava diferents velocitats segons el medi. Leibniz arribava a la mateixa expressió (1) de Bernoulli (tret de la notació), que diferenciava i igualava a zero, sense donar l'equació (2). Leibniz aplicava tot això a l'Òptica. Si considerem el cas de la refracció, la distància del punt A al punt C és la mateixa que la del punt C al punt E. Aleshores, la densitat del segon medi és a la del primer com BC és a CE, és a dir, com el sinus de l'angle d'incidència és al sinus de l'angle de refracció. L'Hôpital resol el problema traçant una circumferència de centre E, que passi per C (igual que Fermat i Descartes).[1] El camí total, CEF, el descompon en CEH (H sobre la circumferència) i en HF. Llavors aplica la llei de la refracció al camí seguit fins al punt H. De fet, el resultat de l'exemple IX (*Analyse*, p. 47) és conegut com la llei de Snell, que Descartes demostrà en *La Dioptrique*.

EL PROBLEMA DE LA POLITJA

SEGONS BERNOULLI

Problema XIX: (*Lectiones*, p. 19)
Sigui A un pes que penja del fil AC, essent C fix. Aquest fil passa per la politja mòbil E, que està agafada a B (fix). Suposem que ni el fil ni la politja no tenen pes. Quina serà la distància màxima de A a l'horitzontal BC?

SEGONS L'HÔPITAL

Exemple XII: (*Analyse*, p. 51)
Sigui F una politja que penja lliurement de la corda CF amb un pes D suspès de la corda DFB que passa per damunt de la politja F i està agafada en B. Suposem C i B sobre la mateixa horitzontal. Ni la politja ni la corda no tenen pes. En quin punt el pes D o la politja F s'aturen?

[1] Vegeu FERMAT (1894), pp. 149-156; DESCARTES (1897-1913).

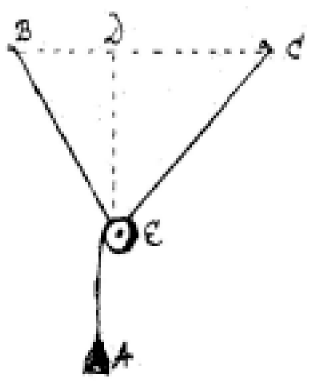


Figura 4

Busquem *D* sobre *BC* tal que *AD* sigui màxima.

$$AC = a,\ BC = b,$$
$$BE = c,\ DE = x,$$
$$BD = \sqrt{c^2 - x^2},$$
$$DC = b - \sqrt{c^2 - x^2}.$$

Així:

$$CE = \sqrt{b^2 + c^2 - 2b\sqrt{c^2 - x^2}},$$
$$AE = a - \sqrt{b^2 + c^2 - 2b\sqrt{c^2 - x^2}},$$
$$AD = x + a - \sqrt{b^2 + c^2 - 2b\sqrt{c^2 - x^2}}.$$

que és l'expressió que hem de fer màxima. Diferenciant-la i igualant-la a zero obtenim:

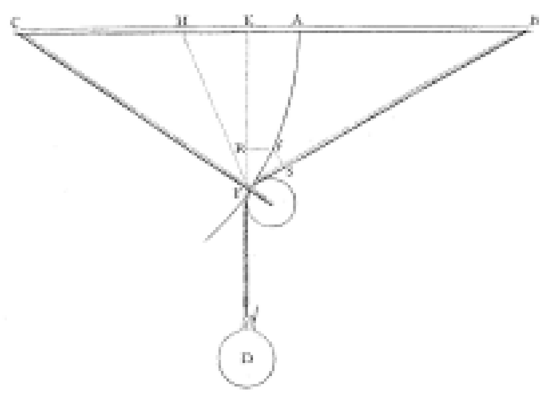


Figura 5

Segons el Principi de la Mecànica, *D* descendirà el màxim possible per sota de *CB*. Per tant, *DFE* ha de ser màxima.

$$CF = a,\ DFB = b,$$
$$CB = c,\ CE = x,$$
$$EF = \sqrt{a^2 - x^2},$$
$$FB = \sqrt{(c-x)^2 + a^2 - x^2} = \sqrt{a^2 + c^2 - 2cx},$$
$$DFE = b - \sqrt{a^2 + c^2 - 2cx} + \sqrt{a^2 - x^2}.$$

que és l'expressió que volem fer màxima. Diferenciant-la i igualant-la a zero obtenim:

$$\frac{cdx}{\sqrt{a^2 + c^2 - 2cx}} - \frac{xdx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = 0,$$
$$2cx^3 - 2c^2x^2 - a^2x^2 + a^2c^2 = 0.$$

Dividint per $x - c$:

$$2c^2 - a^2x - a^2c = 0.$$

Una de les arrels donarà una $x = CE$ tal que *ED* (perpendicular) passa per la politja i el pes quan estan en repòs.

D'una altra forma:

$$\sqrt{b^2+c^2-2b\sqrt{c^2-x^2}}=\frac{bx}{\sqrt{c^2-x^2}},$$

$$b^2+c^2-2b\sqrt{c^2-x^2}=\frac{b^2x^2}{c^2-x^2},$$

$$b^2+c^2-\frac{b^2x^2}{c^2-x^2}=2b\sqrt{c^2-x^2},$$

$$\frac{b^2c^2-b^2x^2+c^4-c^2x^2-b^2x^2}{c^2-x^2}=$$

$$=\frac{b^2c^2+c^4-c^2x^2-2b^2x^2}{c^2-x^2}.$$

Finalment, el problema es redueix a resoldre la següent equació:

$$4b^2x^6+(4b^4+c^4-8b^2c^2)x^4+$$
$$+(6b^2c^4-2c^6-4b^4c^2)x^2+$$
$$+b^4+c^8-2b^2c^6=0.$$

També considera una altra forma de fer-ho, que és anàloga al primer mètode de L'Hôpital i d'on surt una equació més senzilla (degut a l'elecció de coordenades).

$$EF=y,$$
$$BF=z.$$

El que volem fer màxim és: $b-z+y$. Per tant, $dz = dy$.

La politja descriu la circumferència de centre C i radi FA. Agafem f infinitament proper a F; sigui fR paral·lel a CB, i fS perpendicular a FB. Així,

$$FR=dy,$$
$$FS=dz,$$

(és a dir, $FR = FS$).

Els triangles rectangles ΔFRf i ΔFSf són iguals i semblants, la qual cosa implica que l'angle $\angle RFf$ és igual a l'angle $\angle SFf$.

Així doncs, F està situat de tal manera sobre la circumferència FA que l'angle format per EF i la tangent en F és igual a l'angle format per FB i la tangent en F. És a dir:

$$\angle BFC = \angle DFC.$$

Per tant, si dibuixem FH tal que:

$$\angle FHC = \angle CFB = \angle CFD,$$

aleshores els triangles ΔCBF i ΔCFH seran semblants; els triangles rectangles ΔECF i ΔEFH seran semblants i:

$$CH=\frac{a^2}{c},$$

$$\frac{HE}{EF}=\frac{x-\frac{a^2}{c}}{y}=\frac{EF}{EC}.$$

D'on podem concloure (aprofitant que el punt es troba sobre la circumferència) que:

$$x^2 - \frac{a^2 x}{c} = y^2 = a^2 - x^2 .$$

Ara només cal resoldre aquesta equació.

El primer camí seguit per L'Hôpital coincideix amb el segon de Bernoulli, on les coordenades han estat escollides de manera que l'equació resultant és més senzilla de resoldre que en el primer cas. Es tracta d'igualar a zero la diferència de la quantitat que es vol fer màxima. A continuació L'Hôpital resol el problema de la manera següent: considera la circumferència descrita per la corda *CF* i treballa amb elements infinitament propers. Aquest camí és, si més no, força original.

ANNEX III: ESTUDI DE PUNTS D'INFLEXIÓ

PUNTS D'INFLEXIÓ DE LA CONCOIDE DE NICOMEDES[1]

SEGONS BERNOULLI

Bernoulli resol aquest problema segons els tres mètodes (*Lectiones*, p. 29).

Segons el primer mètode:

$$AE = BG = a,\ EF = b,$$

$$AD = x,\ BD = y,$$

$$DE = a - x\ .$$

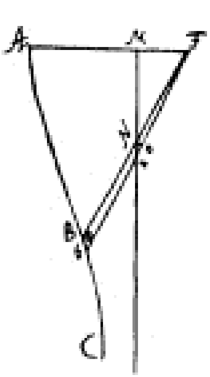


Figura 1

Aleshores:

$$\frac{DE}{EF} = \frac{BG}{GF},$$

$$GF = \frac{ab}{a - x},$$

$$GE = \frac{\sqrt{2ab^2x - b^2x^2}}{a - x}\ .$$

Per semblança de triangles:

$$\frac{GF}{GE} = \frac{BF}{BD},$$

SEGONS L'HÔPITAL

Exemple IV: (*Analyse*, p. 65)

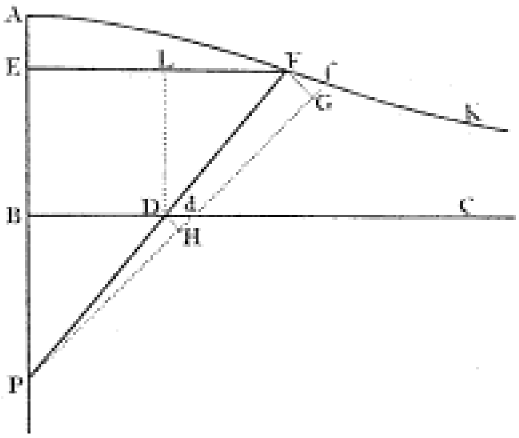


Figura 2

S'ha de buscar el punt d'inflexió de la concoide *AFK* de pol *P* i asímptota *BC*. La propietat que caracteritza aquesta corba és que tota recta *PF* (amb *F* un punt de la concoide) talla l'asímptota en un punt *D* tal que *FD* és constant. Sigui *PA* perpendicular a *BC*, i *FE* paral·lela a *BC*.

$$AB = FD = a,\ BP = b,$$

$$BE = x,\ EF = y.$$

Traçant *DL* paral·lela a *AB*, resulta que ΔDLF i ΔPEF són semblants. Per tant:

---

[1] Un altre exemple comú és el de l'espiral parabòlica. Bernoulli fa servir el seu primer mètode, mentre que L'Hôpital utilitza la primera forma de trobar els punts d'inflexió en el cas d'ordenades des d'un punt.

és a dir:

$$\frac{ab}{a\text{-}x}=\frac{\sqrt{2ab^2x\text{-}b^2x^2}}{a\text{-}x},$$

$$a\sqrt{2ax\text{-}x^2}=\frac{a^2+ab\text{-}ax}{a\text{-}x}y.$$

Per tant:

$$y=\frac{b}{a\text{-}x}\sqrt{2ax\text{-}x^2}+\sqrt{2ax\text{-}x^2}.$$

Diferenciant:

$$dy=\frac{a^2bdx}{(a^2\text{-}2ax+x^2)\sqrt{2ax\text{-}x^2}}+$$

$$+\frac{adx\text{-}xdx}{\sqrt{2ax\text{-}x^2}}.$$

Atès que $\frac{dy}{dx}=\frac{y}{t}$, llavors:

$$t=\frac{(ab\text{-}bx+a^2\text{-}2ax+x^2)(2ax\text{-}x^2)}{a^2b+(a\text{-}x)^3}$$

(aquí Bernoulli en lloc del superíndex 3 per al cub utilitza una C davant del factor $(a-x)$).

Aplicant el canvi $a-x=z$:

$$t=\frac{(bz+z^2)(a^2\text{-}z^2)}{a^2b+z^3}=$$

$$=\frac{a^2bz+a^2z^2\text{-}bz^3\text{-}z^4}{a^2b+z^3}.$$

L'expressió $t-x=t-a+z$ és la que s'ha de maximitzar. Així doncs, es diferencia i s'iguala a zero. Després, multiplicant per $(a^2b+z^3)^2$ i dividint per a^2bdz+a^2zdz, la solució serà arrel de l'equació:

$$\frac{DL}{LF}=\frac{PE}{EF},$$

$$EF=y=\frac{(b+x)\sqrt{a^2\text{-}x^2}}{x}.$$

la diferència de la qual és:

$$dy=\frac{x^3dx+a^2bdx}{x^2\sqrt{a^2\text{-}x^2}}.$$

Si diferenciem aquesta quantitat i la igualem a zero, la solució del problema és una de les arrels de l'equació:

$$x^3+3bx^2\text{-}2a^2b=0.$$

Observem que ha emprat el seu segon mètode.

També resol aquest problema com un caso d'ordenades que parteixen d'un punt, utilitzant l'equació:

$$yddy=dx^2+dy^2 \text{ , (III)}$$

prenent dx constant. Considerem les rectes PF com a ordenades partint del pol P. Tracem els arcs arc(FG) i arc(DH) amb centre P. Sigui Pf una ordenada que forma amb PF un angle infinitament petit, $\angle FPf$.

$AB = a$, $BP = b$, $PF = y$,

$PD = z$, $dz = dH$, $dx = FG$.

Atès que els punts de la concoide verifiquen la condició:

$$y=z+a,$$

aleshores:

$$dy=dz.$$

$$2a^2b\text{-}3bz^2\text{-}z^3{=}0\,.$$

Segons el segon mètode:

Obté *dy* com abans i torna a diferenciar, igualant *ddy* a zero i aplicant el canvi $z = a - x$. La solució és arrel de l'equació:

$$z^3{+}3bz^2\text{-}2a^2b{=}0\,.$$

D'aquesta forma el problema es resol més ràpidament.

Segons el tercer mètode:

Si *A* és el vèrtex, *F* el centre i *MN* l'asímptota, quin és el punt d'inflexió *B*?

La intersecció de *FB* amb l'asímptota és el punt *N*.

$NB = AM = a$, $FM = b$, $Be = dy$,

$FB = Fb = z$, $be = no = dz$.

Sigui *NO* paral·lela a *Be*.

$$FN = z - a\,,$$

$$NM{=}\sqrt{z^2\text{-}2az{+}a^2\text{-}b^2}\,.$$

ΔNMF i ΔNon són semblants. Per tant:

$$\frac{NM}{MF} = \frac{no}{oN}\,,$$

$$No{=}\frac{bdz}{\sqrt{z^2\text{-}2az{+}a^2\text{-}b^2}}\,,$$

$$\frac{FN}{FB} = \frac{No}{Be}\,,$$

$$Be{=}\frac{bzdz}{(z\text{-}a)\sqrt{z^2\text{-}2az{+}a^2\text{-}b^2}}{=}dy\,,$$

$$\frac{be}{Be} = \frac{bF}{t}\,,$$

ΔDBP és un triangle rectangle. Per tant:

$$DB{=}\sqrt{z^2\text{-}b^2}\,.$$

Tenim els parells de triangles semblants següents:

. ΔDBP i ΔdHD,

. ΔPDH i ΔPFG,

d'on resulta:

$$\frac{DB}{BP}{=}\frac{dH}{HD} \Rightarrow HD{=}\frac{bdz}{\sqrt{z^2\text{-}b^2}}\,,$$

$$\frac{PD}{PF}{=}\frac{HD}{FG} \Rightarrow dz{=}dy{=}\frac{zdx\sqrt{z^2\text{-}b^2}}{bz{+}ab}\,.$$

A continuació diferenciem (prenent *dx* constant i substituint *dz* pel seu valor en funció de *y*):

$$ddy{=}\ldots{=}\frac{(bz^4{+}2abz^3\text{-}ab^3z)\,dx^2}{(bz{+}ab)^3}\,.$$

Llavors, si substituïm en la fórmula (III) els valors de *y*, *dy* i *ddy*, resulta l'equació:

$$\frac{(z^4{+}2az^3\text{-}ab^2z)\,dx^2}{(bz{+}ab)^2}{=}$$

$${=}\frac{(z^4{+}2ab^2z{+}a^2b^2)\,dx^2}{(bz{+}ab)^2}.$$

Operant, s'arriba a l'equació:

$$2z^3\text{-}3b^2z\text{-}ab^2{=}0\,.$$

Una de les arrels (*z*) d'aquesta equació, més *a*, donarà *PF*.

$$t = \frac{bz^2}{(z\text{-}a)\sqrt{z^2 - 2az + a^2 - b^2}} \, .$$

Si z creix, llavors t decreix. Així, dt queda afectada per un signe negatiu. Utilitzant el resultat vist en el tercer mètode:

$$dy^3 = dz^2\, dt \, ,$$

resulta l'equació:

$$2az^3 - 6a^2z^2 + 6a^3z - 3ab^2z -$$
$$- 2a^4 + 2a^2b^2 = 0,$$

d'on s'obté la solució buscada.

Cal remarcar les diverses maneres que ambdós utilitzen per resoldre aquest exemple comú. Mentre Bernoulli estudia el problema aplicant els seus tres mètodes, L'Hôpital, a més d'emprar el seu segon mètode, resol el problema com un cas d'ordenades des d'un punt.

ANNEX IV: DEFINICIONS DEL DICCIONARI DE L'INSTITUT D'ESTUDIS CATALANS

Corol·lari: Conseqüència més o menys immediata d'una proposició demostrada.

Escoli: Remarca adjuntada a una demostració, a un teorema.

Exemple: Fet que se cita com a suport d'una asserció.

Figura: Dibuix que il·lustra el text d'un llibre.

Lema: Proposició preliminar que serveix per a la demostració d'una altra proposició.

Observació (remarca): Advertiment motivat per alguna cosa observada.

Postulat: Proposició que sense ésser evident s'admet com a certa sense demostrar-la.

Problema: Qüestió, dificultat a resoldre, a aclarir.

Proposició: Enunciat d'un fet a demostrar.

Teorema: Proposició que afirma una veritat demostrable a partir d'uns certs axiomes.

Altres:

Construcció: Art o tècnica de construir. *Construcció geomètrica*: Construcció que hom traça per demostrar un teorema, resoldre un problema.

Definició: Introducció d'un nou concepte que fa referència a conceptes anteriors ja definits.

Demostració: Raonament amb què es demostra o fa evident quelcom.

Hipòtesi: Veure *suposició*.

Indicació: Acció d'indicar; l'efecte. Allò que serveix per indicar.

Preparació: Acció de preparar o de preparar-se; la cosa preparada.

Regla: Allò que ha de dirigir la conducta dels homes, en l'estudi d'una ciència, en la pràctica d'un art, en l'execució d'alguna cosa.

Solució: Acció de resoldre un problema, una qüestió, etc.; allò que resol un problema, una qüestió, etc. En matemàtiques, qualsevol de les quantitats que satisfan les condicions d'un problema, d'una equació.

Suposició: Acció de suposar, hipòtesi; proposició que expressa allò que hom suposa.

BIBLIOGRAFIA

ADAM, Charles-TANNERY, Paul (eds.) (1897-1913) *Œuvres de Descartes*, 12 volums i un suplement. L. Cerf, París (reeditat per Librairie Philosophique J. Vrin, París, 1982).

AGNESI, Maria Gaetana (1748) *Instituzioni analitiche ad uso della gioventu italiana*. Milà (reeditat en microforma per Readex Microprint, Nova York, 1977).

BAGNI, Giorgio T. (1997) "La didattica dell'Analisi matematica nel Settecento: le *Institutiones Analyticae* di V. Riccati e G. Saladini", *Periodico di Matematiche*, VII, 4, 37-51 [en línia]. http://www.syllogismos.it/history/Riccati-Saladini.pdf [Consulta: 22 juny, 2004].

BARON, Margaret E. (1969) *The Origins of the Infinitesimal Calculus*. General Publishing Co., Canadà (reeditat per Dover, Nova York, 1987).

BARROW, Isaac (1670) *Lectiones geometricae*. Londres (traducció anglesa de J. M. Child, *The Geometrical Lectures of Isaac Barrow*, The Open Court Publishing Co., Chicago i Londres, 1916).

BAUTZ, Traugott (ed.) (2004) *Wolff, Christian* a *Biographisch-Bibliographisches Kirchenlexikon* [en línia]. http://www.bautz.de/bbkl/w/wolff_c.shtml. [Consulta: 1 març, 2004].

BENSAUDE-VINCENT, Bernardette (1990) "A view of the chemical revolution through contemporary textbooks: Lavoisier, Fourcroy, Chaptal", *British Journal for the History of Science*, 23, pp. 435-460.

Berkeley Digital Library SunSITE [en línia]. http://sunsite.Berkeley.EDU/Libweb [Consulta: 20 setembre, 2002].

BERNOULLI, Johann (1922) *Lectiones de calculo differentialium (1691-92)*. Ed. P. Schafheitlin, Basilea (versió alemanya *Die Differentialrechnung von Johann Bernoulli aus dem Jahre 1691/92*. Leipzig, 1924).

_ (1955) *Der Briefwechsel von Johann Bernoulli* (*Correspondència de Johann Bernoulli*), vol. I. Editat per O. Spiess, Birkhäuser, Basilea.

BÉZOUT, Étienne (1799) *Cours de mathématiques à l'usage du Corps de l'Artillerie*, t. III. París.

Bibliotecas universitarias y de investigación españolas [en línia]. http://www.csic.es/cbic/webuni.htm [Consulta: 20 setembre, 2002].

BILLIE, Laureen (ed.) (1984) *British Biographical Archive*. Editat en fitxes per Saur, Londres.

BLANCO, Mónica (1999) *Anàlisi de la controvèrsia L'Hôpital–Bernoulli*. Treball de recerca elaborat per a l'obtenció del títol de magíster en Història de la Ciència (Universitat Autònoma de Barcelona), dirigit pel Dr. Josep Pla i Carrera (Universitat de Barcelona) *(no publicat)*.

_ (2001) "Análisis de la discusión L'Hôpital–Bernoulli", *Cronos*, vol. 4 (1-2), pp. 81-113.

BLAY, Michel (1986) "Deux moments de la critiques du calcul infinitésimal: Michel Rolle et George Berkeley", *Revue d'histoire des sciences*, 39, pp. 223-253.

BORGATO, Maria Teresa-PEPE, Luigi (1987) "Lagrange a Torino (1750-1759) e le sue lezioni inedite nelle Reale Scuole di Artiglieria", *Bollettino di Storia delle Scienze Matematiche*, II.

BOS, Henk (1974) "Differentials, Higher-Order Differentials and the Derivative in the Leibnizian Calculus", *Archive for the History of Exact Sciences*, 14, pp. 1-90.

_ (1993) "The Fundamental Concepts of the Leibnizian Calculus", *Lectures in the History of Mathematics*, American Mathematical Society, pp. 83-99.

BOSSUT, Charles (1802) *Essai sur l'histoire générale des mathématiques*. Chez Louis, Paris, 2 volums (traducció alemanya de Reiner, *Versuch einer allgemeinen Geschichte der Mathematik*. Hamburg, 1804).

BOTAZZINI, Umberto (1994) *The Italian states*. Vegeu GRATTAN-GUINNESS, I. (ed.) (1994*a*), vol. 2, part 11, pp. 1495-1504.

BOURBAKI, Nicolas (1969) *Éléments d'histoire des mathématiques*. Hermann, Éditeurs des Sciences et des Arts, París (traducció castellana de Jesús Hernández, *Elementos de historia de las matemáticas*, Alianza Universidad, Madrid, 1972).

BOYER, Carl B. (1946) "The First Calculus Textbooks", *The Mathematics Teacher*, 34, abril, pp. 159-167.

_ (1949) *The History of the Calculus and its Conceptual Development*, Dover Publications, Nova York.

_ (1951) "The Foremost Textbook of Modern Times (Euler's *Introductio in analysin infinitorum*)", *American Mathematical Monthly*, 58, pp. 223-226.

_ (1968) *A History of Mathematics*, John Wiley & Sons, Nova York (traducció castellana de Mariano Martínez Pérez, *Historia de la matemática*, Alianza Editorial, Madrid, 1986).

BROCKLISS, Lawrence B. (1987) *French Higher Education in the Seventeenth and Eighteenth Centuries*. Clarendon Press, Oxford.

CAJORI, Florian (1928-1929) *A History of Mathematical Notations*. Open Court Pub. Co., Chicago, 2 volums (reeditat en un sol volum per Dover, Nova York, 1993).

_ (1960) *A History of Mathematics*. MacMillan, Nova York

CANTOR, Moritz (1880-1908) *Vorlesungen über Geschichte der Mathematik*, 4 volums. Leipzig.

CAPEL, Horacio (1988) *De Palas a Minerva: la formación científica y la estructura institucional de los ingenieros militares en el siglo XVIII*. Serval, Barcelona; CSIC, Madrid.

Catálogo Colectivo del Patrimonio Bibliográfico Español [en línia]. http://www.mcu.es/ccpb/index.html [Consulta: 20 setembre, 2002].

COBOS, José M.-FERNÁNDEZ-DAZA, Carmen (1997) *El cálculo infinitesimal en los ilustrados españoles: Francisco de Villalpando y Juan Justo García*. Servicio de publicaciones de la Universidad de Extremadura, Cáceres.

COLLETTE, Jean-Paul (1979) *Histoire de mathématiques*. Éditions du Renouveau Pédagogique, Montreal (traducció castellana en dos volums d'Alfonso Casal, *Historia de las matemáticas*, Siglo XXI de España Editores, Madrid, 1993).

COOLIDGE, Julian Lowell (1963) *The Mathematics of Great Amateurs*. Dover, Nova York.

COSTA, Shelley (2001, 19 gener) *[HM] Varignon/Reyneau* [en línia]. Llista de distribució: historia-matematica@chasque.apc.org. Web amb arxiu de missatges: http://mathforum.org/epigone/historia_matematica/shimpgrarsmun [Consulta: 1 març, 2004].

CROUSAZ, Jean Pierre (1721) *Commentaire sur l'Analyse des infiniment petits*. París

CUESTA, Norberto (1976-1983) *Historia de la invención del análisis infinitesimal y de su introducción en España*. Ediciones Universidad de Salamanca, Salamanca.

D'ALEMBERT, Jean le Rond-DIDEROT, Denis (1765) Entrada "Límit", *Encyclopédie ou dictionnaire raisonné des sicences, des arts et des métiers*. París. Volum IX, p. 542.

D'ALEMBERT, Jean le Rond (1784) Entrada "Límit", *Encyclopédie méthodique. Mathématiques*. París. Volum II, pp. 309-310.

DESCARTES, René (1637) *La Géométrie*. Leiden (reeditat per Éditions de l'AEFPPI, Nantes, 1984), llibre segon (traducció catalana, amb introducció i notes, de Josep Pla i Pelegrí Viader (1999) *La Geometria*. Barcelona, Clàssics de la Ciència, 1, Institut d'Estudis Catalans/Editorial Pòrtic/Eumo Editorial).

_ (1897-1913) *La Dioptrique*, discurs II. Vegeu ADAM, C.-TANNERY, P. (1897-1913), vol. VI, pp. 93-105.

Diccionari de l'Institut d'Estudis Catalans (Diec) [en línia]. http://pdl.iec.es/entrada/diec.asp [Consulta: 24 juliol 2003].

DITTON, Humphry (1706) *An Institution of Fluxions*. Londres (reeditat en microforma per Readex Microprint, Nova York, 1969).

DOU, Albert (1993) *Leonhard Euler. Método de máximos y mínimos*. Publicacions de la Universitat Autònoma de Barcelona i Edicions de la Universitat Politècnica de Catalunya, Barcelona.

ÉCOLE, Jean et al. (eds.) (1962-) *Gesammelte Werke. Christian Wolff*. Sèrie alemanya en 24 volums; sèrie llatina en 38 volums. Olms, Hildesheim.

EDWARDS, Charles Henry, Jr. (1979) *The Historical Development of the Calculus*. Springer-Verlag, Nova York.

ENESTRÖM, Gustaf (1894) "Sur la part de Jean Bernoulli dans la publication de l'«Analyse des infiniment petits»", *Bibliotheca Mathematica*, 3 (nova sèrie 8).

ENGEL, W. (2000) *Wenceslaus Johann Gustav Karsten* a *Uni Halle, FB Math./Inf., History* [en línia]. http://www.mathematik.uni-halle.de/history/karsten/ [Consulta: 1 març, 2004].

EULER, Leonhard (1748) *Introductio in analysin infinitorum*. Berlín (versió anglesa de J. D. Blanton, *Introduction to Analysis of the Infinite*, Springer-Verlag, Nova York, 1988; versió castellana de José Luis Arantegui Tamayo, amb notes d'Antonio J. Durán Guardeño, *Introducción al análisis de los infinitos,* SAEM "Thales" y Real Sociedad Matemática Española, Sevilla, 2000).

_ (1755) *Institutiones calculi differentialis*. Berlín (versió alemanya anotada de Johann Andreas C. Michelsen, *Vollständige Anleitung zur Differential-Rechnung*, Lagarde und Friedrich, Berlín, 1790-1793).

EVES, Howard (1981) *Great Moments in Mathematics (after 1650)*. The Dolciani Mathematical Expositions, 7, The Mathematical Associations of America.

_ (1992) *An Introduction to the History of Mathematics*. The Saunders Series, Estats Units.

FABIAN, Bernhard-GORZNY, Willi (eds.) (1982-) *Deutsches Biographisches Archiv*. Editat en fitxes per Saur, Munich.

FAUVEL, John-GRAY, Jeremy (eds.) (1987) *The History of Mathematics: a Reader*. MacMillan Press associada amb The Open University, Londres.

FERMAT, Pierre de (1894) Vegeu TANNERY, P.-HENRY, C., vol. III, pp.121-163.

FONTENELLE, Bernard le Bouyer de (1704) *Histoires et mémoires* de l'Académie des Sciences de París.

GILLIES, Donald (1992) “The Fregean Revolution in Logic”, en Gillies, D. (ed.), *Revolutions in Mathematics*. Oxford University Press, Oxford, pp. 265-305.

GILLISPIE, Charles C. (ed.) (1970) *Dictionary of Scientific Biography (DSB).* Charles Scribner’s Sons, Nova York (reeditat, en vuit volums, el 1981).

GINEBRA, Josep-CABOS, Susana (1998) “Anàlisi estadística de l’estil literari. Aproximació a l’autoria del *Tirant lo Blanc*”, *Afers*, 29.

GIORELLO, Giulio (1992) “The ‘fine structrure’ of mathematical revolutions: metaphysics, legitimacy, and rigour. The case of the calculus form Newton to Berkeley and Maclaurin”, en Gillies, D. (ed.), *Revolutions in Mathematics*. Oxford University Press, Oxford, pp. 134-168.

GONZÁLEZ URBANEJA, Pedro M. (1992) *Las raíces del cálculo infinitesimal en el siglo XVII*. Alianza Editorial, Madrid.

GOW, James (1968) *A Short History of Greek Mathematics*. Chelsea Publishing Company, Nova York.

GRABINER, Judith V. (1996) “The Calculus as Algebra, the Calculus as Geometry: Lagrange, Maclaurin, and their Legacy”, en Calinger, R. (ed.), *Vita Mathematica. Historical Research and Integration with Teaching*, The Mathematical Association of America, Estats Units, pp. 131-143.

_ (1997) “Was Newton’s calculus a dead end? The continental influence of Maclaurin’s treatise of fluxions”, *American Mathematical Monthly*, 104 (5), pp.393-410.

GRATTAN-GUINNESS, Ivor (1970) *The Development of the Foundations of Mathematical Analysis from Euler to Riemann.* The Colonial Press, Massachussets

__ (1980) *From the Calculus to Set Theory, 1630-1910. An Introductory History*. Duckworth, Londres (traducció castellana de Mariano Martínez Pérez, *Del cálculo a la teoría de conjuntos, 1630-1910. Una introducción histórica*. Alianza Editorial, Madrid, 1984).

_ (1990) *Convolutions in French Mathematics*, 3 volums. Birkhäuser, Basilea.

_ (ed.) (1994*a*) *Companion Encyclopedia of the History and Philosophy of the Mathematical Sciences*, 3 volums. Rontledge, Londres.

_ (1994*b*) *France*. Vegeu GRATTAN-GUINNESS, I. (ed.) (1994*a*), vol. 2, part 11, pp. 1430-1441.

_ (1994*c*) *The British Isles*. Vegeu GRATTAN-GUINNESS, I. (ed.) (1994*a*), vol. 2, part 11, pp. 1484-1494.

_ (1997*a*) *The Fontana History of the Mathematical Sciences*. Harper Collins, Londres.

_ (1997*b*) “What was and what should be the Calculus”, en Grattan-Guinness, I. (ed.) “History in mathematics education”, *Cahiers d’histoire et de philosophie des sciences*, 21, pp. 116-135.

GRAY, Jeremy (ed.) (1987) "The Development of the Calculus", *The Seventeenth and Eighteenth Centuries*, The Open University Mathematics/Arts, bloc 3.

GRAY, Shirley B. (2001) *Maria Gaetana Agnesi* [en línia]. http://curriculum.calstatela.edu/faculty/sgray/Agnesi/index.html. [Consulta:10 setembre 2001].

GREENACRE, Michael J. (1993) *Correspondence Analysis in Practice*. Academic Press, Londres.

GUICCIARDINI, Niccolò (1989) *The Development of Newtonian Calculus in Britain 1700-1800*. Cambridge University Press, Cambridge.

HAIRER, Ernst-WANNER, Gerhard (1996) *Analysis by Its History*. Springer, Nova York.

HEATH, Thomas L. (1971) *A History of Greek Mathematics*. General Publishing Company, Canadà (reeditat, en dos volums, per Dover, Nova York, 1981).

HOFMANN, Joseph E. (1972) *Leibniz in Paris (1672-1678). His Growth to Mathematical Maturity*. Cambridge Universtiy Press, Cambridge.

HOWSON, A. Geoffrey (1982) *A History of Mathematics Education in England*. Cambridge University Press, Cambridge.

Karlsruher Virtueller Katalog, Universität Karlsruhe [en línia]. http://www.ubka.uni-karlsruhe.de/kvk.html [Consulta: 15 abril, 2004]

KARSTEN, Wenceslau J. G. (1786) *Anfangsgründe der mathematischen Analysis und höhern Geometrie*. Halle.

KÄSTNER, Abraham Gotthelf (1760) *Anfangsgründe der Analysis des Unendlichen*. Göttingen (segona edició, 1770).

KATZ, Victor J. (1993) *A History of Mathematics (an Introduction)*. Harper Collins, Nova York, pp. 482-486; 506-519.

KLINE, Morris (1972) *Mathematical Thought from Ancient to Modern Times*. Oxford University Press, Oxford (traducció castellana, en tres volums, de Mariano Martínez, Juan Tarrés i Alfonso Casal, sota la direcció de Jesús Hernández, *El* *pensamiento matemático de la Antigüedad a nuestros días*, Alianza Editorial, Madrid, 1992).

KNORR, Wilbur R. (1986) *The Ancient Tradition of Geometric Problems*. Dover, Nova York.

KUHN, Thomas S. (1962) *The Structure of Scientific Revolutions*. University of Chicago Press (traducció castellana d'Agustín Contín, *La estrucutra de las revoluciones científicas*, Fondo de Cultura Económica, Madrid, 1971).

LACROIX, Sylvestre François (1797-1800) *Traité du Calcul différentiel et du Calcul intégral*. París (traducció a l'alemany de la segona edició per part de P. Grüson, *Lehrbegriff des Differential und Integralscalculs*, 1799).

_ (1802) *Traité élémentaire de Calcul différentiel et de Calcul intégral*. Imprès per Crapelet–Duprat, París.

LAGRANGE, Joseph Louis (1759) *Principj Analisi Sublime*. Torí. Vegeu BORGATO, M. T.-PEPE, L. (1987).

_ (1797) *Théorie des fonctions analytiques*. París. Vegeu SERRET, J. A. (1867-1892), volum IX.

_ (1800) *Leçons sur le calcul des fonctions*. París. Vegeu SERRET, J. A. (1867-1892), volum X.

LEBART, Ludovic-SALEM, André (1994) *Statistique textuelle*. Dunod, París.

LEIBNIZ, Gottfried Wilhelm (1684) "Nova methodus pro maximis & minimis,...", *Acta Eruditorum*. Vegeu MARTÍN, T.-LORENZO, J. (1994).

L'HÔPITAL, Guillaume François A. (1696) *Analyse des infiniment petits pour l'intelligence des lignes courbes*. París (reimpressió feta per ACL- Éditions, París, 1988).

LICK, Dale (1969, maig) "The Remarkable Bernoulli Family", *The Mathematics Teacher*, 62, pp. 401-409.

MACDONNELL, Joseph (1997) *Vincent Riccati, S. J.* [en línia]. http://www.faculty.fairfield.edu/jmac/sj/scientists/riccati.htm [Consulta: 1 març, 2004].

MACLAURIN, Colin (1742) *A Treatise of Fluxions*. Imprès per T. W. i T. Ruddimans, Edimburg, 2 volums (reeditat en microforma per Readex Microprint, Nova York, 1970).

MAHONEY, Michael S. (1973) *The Mathematical Career of Pierre de Fermat*. Princeton University Press, Princeton.

MANCOSU, Paolo (1996) *Philosophy of Mathematics and Mathematical Practice in the Seventeenth Century*. Oxford University Press, Nova York.

MARTÍN, Teresa-LORENZO, Javier de (1994) *Análisis infinitesimal*. Tecnos, Madrid.

MARTÍNEZ, Mariano (2000) "La vida y obra de Euler". Vegeu EULER (1748), versió castellana, pp. xxv-xl.

MONTUCLA, Jean E. (1758) *Histoire des mathématiques*, 4 volums. Chez H. Agasse, París (reeditat per Librairie Scientifique et Tecnique Albert Blanchard, París, 1968).

NEWTON, Isaac (1671) *Methodus fluxionum et serierum infinitarum*. (No publicat en llatí fins al 1779; traducció francesa de Buffon, *La Méthode des fluxions et des suites infinies*, chez Beburé, París, 1740; reeditat per Librairie Scientifique Albert Blanchard, París, 1966).

_ (1714- 1715) "An Account of the Book entituled *Commercium Epistolicum Collinii et aliorum, De Analysi promota*", *Philosophical Transaction of the Royal Society of London*, 342, pp. 173-224. Vegeu WILKINS, D. (ed.) (2002).

O'CONNOR, John J.-ROBERTSON, Edmund F. (1999) *The Mactutor History of Mathematics Archive*, University of St. Andrews [en línia]. http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/BiogIndex.html [Consulta: 19 juliol 2001].

PANZA, Marco (1990) "La forma della quantità: analisi algebrica e analisi superiore: il problema dell'unità della matematica nel secolo dell'illuminismo", *Cahiers d'histoire & de philosophie des sciences*, Société Française d'Histoire des Sciences et des Techniques, París.

PAULIAN, Aimé Henri (1768) *Analyse des infiniment petits, suivie d'un nouveau commentaire pour l'intelligence des endroits les plus difficiles de cet ouvrage*. Avignon (edició revisada i augmentada per Louis Lefèvre-Gineau, París, 1781).

PLA, Josep (1998) "Arquimedes i Descartes; el mètode com un canvi de llenguatge", *Butlletí de la Societat Catalana de Matemàtiques*, vol. XIII, 2, pp. 35-84.

REYNEAU, Charles René (1708), *Analyse démontrée, ou la methode de resoudre les problemes des mathematiques et d'apprendre facilement ces sciences*, 2 volums. París.

RIBA, Àlex-GINEBRA, Josep (2000) "Diversity and Homogeneity of style in Tirant lo Blanc", *Actes del XXV Congreso Nacional de Estadística e Investigación Operativa*. Vigo.

_ (2003) “Homogeneidad de estilo en el *Tirant lo Blanc*”, *Actes del 27 Congreso Nacional de Estadística e Investigación Operativa*. Lleida.

RICCATI, Vincenzo-SALADINI, Girolamo (1765-67) *Institutiones Analyticae*. Stamperia di Tommaso d’Aquino, Bolonya.

RICHARDS, Joan L. (1991) “Rigor and Clarity: Foundations of Mathematic in France and England, 1800-1840)”, *Science in Context*, 4, 2, pp. 297-319

ROUSSEAU, G. S. (1990) “Los libros científicos y sus lectores en el siglo XVII”, en Ordóñez, J.-Elena, A. *La ciencia y su público*. Estudios sobre la ciencia, CSIC, Madrid, pp. 147-224.

SALADINI, Girolamo (1775) *Compendio d’Analisi*. Stamperia di Tommaso d’Aquino, Bolonya.

SCHAFHEITLIN, Paul (ed.) (1922) Vegeu BERNOULLI, Johann (1922).

SCHUBRING, Gert (1987) “On the Methodology of Analysing Historical Textbooks: Lacroix as Textbook Author”, *For the Learning of Mathematics*, 7, 3, pp. 41-51 (traducció castellana de Rodrigo Cambray Núñez, revisada per Alejandro Garciadiego, “Sobre la metodología de análisis de libros de texto históricos: Lacroix como autor de libros de texto”, *Mathesis*, 8 (3), 1992, pp. 273-298).

_ (1994) *Germany to 1933*. Vegeu GRATTAN-GUINNESS, I. (ed.) (1994*a*), vol. 2, part 11, pp. 1442-1456.

_ (1996) “Changing cultural and epistemological views on mathematics and different institutional contexts in nineteenth-century Europe”, a Goldstein, et al. (eds.), *Mathematical Europe. Myth, History, Identity*. Éditions de la Maison des sciences de l’homme, París, pp. 363-388.

_ (1997) *Analysis of Historical Textbooks in Mathematics (Lecture Notes)*. Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro (segona edició revisada, 1999).

_ (2002) "Mathematics between Propaedeutics and Professional Use: A Comparison of institutional developments", *Enciclopedia Italiana*, vol. VI. Istituto dell'Enciclopedia Italiana, Roma, pp. 366-380.

_ (2003) *A algebrização do conceito do limite no século XVIII*. Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro. Departamento de Matemática, prepublic. Mat. 10/2003, Rio de Janeiro.

_ (2004) *Conflicts between Generalization, Rigor, and Intuition*. Springer, Nova York *(en premsa)*.

SERRET, Joseph A. (ed.) (1867-1892) *Œuvres de Lagrange*, 14 volums. Gauthier-Villars et Fils, París.

SIERKSMA, Gerard-SIERKSMA, Wybe (1999) "The Great Leap to the Infinitely Small. Johann Bernoulli: Mathematician and Philosopher", *Annals of Science*, 56, pp. 433-449.

SIMPSON, Thomas (1750) *The Doctrine and Application of Fluxions*. Imprès per J. Nourse, Londres (reeditat en microfilm per la Universitat de Salamanca, 1994).

_ (1757) *Miscellaneous Tracts on some curious and very interesting subjects in Mechanics, Physical-Astronomy, and Speculative Mathematics*. Imprès per J. Nourse, Londres.

SMITH, David E. (1958) *History of Mathematics*. Dover, Nova York.

_ (1959) *A Source Book in Mathematics*. Dover, Nova York.

SOLAECHE, María Cristina (1993) "La controversia L'Hôpital-Bernoulli", *Divulgaciones Matemáticas*, 1 (1), pp. 99-104.

SPIESS, Otto (1955) *Einleitung*. Vegeu BERNOULLI, Johann (1955), pp. 123-157.

STRUIK, Dirk J. (1963, abril) "The Origin of L'Hôpital's Rule", *The Mathematics Teacher*, 55, 257-260.

_ (1986) *A Source Book in Mathematics, 1200-1800*. Princeton University Press, Princeton.

TANNERY, Paul-HENRY, Charles (eds.) (1894) *Œuvres de Fermat*, 4 volums. Gauthier-Villars et Fils, París,

TATON, René (1951) *L'œuvre scientifique de Monge*. Presses Universitaires de France, París.

TAYLOR, Brook (1715) *Methodus directa et inversa*. Londres.

TEMPELHOFF, Georg Friedrich (1770) *Anfangsgründe der Analysis des Unendlichen*. Berlín.

THORTON, John L.-TULLY, R. I. J. (1971) *Scientific Books, Libraries and Collectors: a Study of Bibliography and the Book Trade in Relation to Science*. The Library Association. Londres.

TRUESDELL, Clifford. (1989) "Maria Gaetana Agnesi", *Archive for History of the Exact Sciences*, 40, pp. 113-142.

TURNBULL, Henry W. (1947) "Colin Maclaurin", *American Mathematical Monthly*, 54, pp. 318- 322.

VARIGNON, Pierre (1725) *Éclaircissemens sur l'Analyse des infiniment petits*. Paris. Vegeu L'HÔPITAL, G. F. (1696).

WALES, Jimmy-SANGER, Larry (eds.) (2001) *Christian Wolff (philosopher) - Wikipedia, the free encyclopedia* [en línia]. http://en.wikipedia.org/wiki/Christian_Wolff_(philosopher) [Consulta: 1 març, 2004]

WALKER, Evelyn (1986) *A Study of the Traité des Indivisibles of Roberval*. Columbia University Press, Nova York.

WHITESIDE, Derek T. (1960-1962) "Patterns of Mathematical Thought in the Later 17th Century", X, *Archive for History of Exact Sciences*, 1.

WILKINS, David R. (2001) *Mathematicians of the Seventeenth and Eighteenth Centuries* [en línia]. Adaptació i conversió al format HTML de *A Short Account of the History of Matematics* de W. W. Rouse Ball (1908, 4ª edició). http://www.maths.tcd.ie/pub/HistMath/People/RballHist.html [Consulta: 19 juliol 2001].

_ (ed.) (2002) "An Account of the Book entituled *Commercium Epistolicum Collinii et aliorum, De Analysi promota*" d'Isaac Newton [en línia]. Editat en format PDF i PostScript. http://www.maths.tcd.ie/pub/HistMath/People/Newton/CommerciumAccount/ [Consulta: 3 maig 2004]

WOLFF, Christian (1713-1715) *Elementa Analyseos Infinitorum tradit* (a *Elementa Matheseos Universae*). Halle. Vegeu ÉCOLE, J. et al. (eds.), volum 29 de la sèrie llatina.

_ (1716) *Mathematisches Lexicon*. Vegeu ÉCOLE, J. et al. (eds.), volum 11 de la sèrie alemanya.

WUSSING, Hans-ARNOLD, Wolfgang (1979) *Biographien bedeutender Mathematiker*. Volk und Wissen Volkseigener Verlag, Berlín (traducció castellana de Mariano Hormigón, *Biografías de grandes matemáticos*, Prensas Universitarias de Zaragoza, Zaragoza, 1989).