



**Universitat  
Autònoma  
de Barcelona**

# Conjuntos focales en variedades de Riemann de curvatura acotada

**Carlos Arturo Escudero Salcedo**

Memòria presentada per a aspirar  
al grau de Doctor en Matemàtiques

Departament de Matemàtiques  
Universitat Autònoma de Barcelona  
08193 Bellaterra, Barcelona

**Director: Dr. Agustí Reventós**

Bellaterra, Juliol de 2006.

# Conjuntos focales en variedades de Riemann de curvatura acotada

Carlos Arturo Escudero Salcedo

Departament de Matemàtiques  
Universitat Autònoma de Barcelona  
E-mail: [carlose@mat.uab.es](mailto:carlose@mat.uab.es)

El Dr. Agustí Reventós CERTIFICA  
que la present memòria ha estat realitzada  
per Carlos Arturo Escudero Salcedo sota la seva supervisió i constitueix  
la seva Tesi per a aspirar al grau de Doctor en Matemàtiques  
per la Universitat Autònoma de Barcelona.

Dr. Agustí Reventós  
Departament de Matemàtiques  
Universitat Autònoma de Barcelona

*A mis padres Luis y Carmen  
y a mi compañera Luz Marina*

# Agradecimientos

Quiero expresar mi más sincero agradecimiento al profesor Agustí Reventós Tarrida, sin sus orientaciones no se habría podido terminar este trabajo.

También quiero agradecer a los profesores Eduardo Gallego y Gil Solanes por sus sugerencias acertadas en el desarrollo de este trabajo.

Gracias a Carlos Rodriguez y a su maravillosa familia, nunca olvidaré mi primer día en Barcelona, creo que sin su apoyo moral no hubiera llegado este día.

Un lugar destacado en este apartado de agradecimientos queda para mi familia, en donde mis padres Luis y Carmen, junto con mis hermanos y mi querida y amada Luz Marina han sido la luz para caminar en esos momentos difíciles de mi vida.

En términos institucionales quiero agradecer:

- A la Universidad Tecnológica de Pereira, Colombia.
- A la Facultad de Ciencias Básicas de la UTP.
- Al Departamento de Matemáticas de la UTP.
- Al Departamento de Matemàtiques de la Universitat Autònoma de Barcelona.
- A la Agència de Gestió d'Adjunts Universitaris i de Recerca, - AGAUR - Generalitat de Catalunya.

Por último quiero agradecer a todos mis amigos del doctorado de matemáticas de la Universidad Autónoma de Barcelona por compartir conmigo todos estos días.

# Introducción

En la literatura existen numerosas e importantes desigualdades geométricas, muchas de ellas son consecuencia de resultados potentes del análisis. Una buena referencia para este tema es [BZ83].

En el marco de la geometría riemanniana, y más concretamente en el estudio de las subvariedades, nos interesamos en fórmulas que relacionan entre sí los diversos invariantes geométricos, tanto intrínsecos de la subvariedad como extrínsecos. En dimensiones bajas dichos invariantes son la longitud, el área, el volumen, las curvaturas principales, la curvatura media etc.

En general aparecen las integrales de las funciones simétricas elementales de curvatura, pero esta memoria está restringida a dimensión 2 y 3.

Es bien sabido, a partir del estudio de tubos en  $\mathbb{R}^3$ , que la curvatura de la superficie inicial afecta el volumen del tubo que sobre ella se construye. Por tanto es natural encontrar fórmulas que relacionen volumen y curvatura. Entre ellas destacamos la desigualdad que motivó el presente trabajo y que se conoce como la desigualdad de Heinzte y Karcher, que dice:

**Teorema 0.1** *Sea  $N$  una superficie encajada compacta en  $\mathbb{R}^3$ , que acota un dominio  $\Omega$  de volumen  $V$ . Si la curvatura media  $H$  de  $N$  es positiva en todo punto, entonces,*

$$\int_N \frac{1}{H} dA \geq 3V. \quad (1)$$

*La igualdad se da si y sólo si  $N$  es una esfera.*

Existen muchas pruebas de dicha desigualdad, pero creemos que la demostración más geométrica es la que da Ros en [Ros88] y es la que nos llevó, hace unos años al profesor Rodriguez y a mí, a pensar en una desigualdad

análoga a la de Heintze y Karcher en dimensión dos. Para ello sería necesario cambiar la curvatura media  $H$  de la superficie por la curvatura  $k$  de una curva y el volumen del dominio encerrado por el área encerrada por la curva. Concretamente, en el trabajo con Rodriguez, [Esc96], demostramos:

**Teorema 0.2** *Si  $N = \partial\Omega$  es la frontera de un dominio convexo compacto  $\Omega$  en  $\mathbb{R}^2$  de área  $F$ , con curvatura  $k$  positiva en todo punto, entonces*

$$\int_N \frac{1}{k(s)} ds \geq 2F, \quad (2)$$

donde  $ds$  significa la medida de longitud de arco en  $N$ . La igualdad se da si sólo si  $N$  es una circunferencia.

En [Esc96] hay dos pruebas de este resultado, a saber, la primera usando aproximación por polígonos y la segunda basada en ideas de Osserman, [Oss90].

Uno de los resultados principales obtenidos en la presente memoria y que se encuentra en el capítulo 3, consistió en dar una prueba más corta del teorema 0.2, la cual tiene la ventaja de que nos da la interpretación geométrica de la diferencia

$$2F - \int_N \frac{1}{k(s)} ds.$$

Concretamente probamos que

**Teorema 0.3** *La integral de los radios de curvatura  $\rho(s)$  de una curva plana convexa  $N$  es dos veces el área del dominio acotado por ella menos el área (algebraica) del dominio acotado por su evoluta. Es decir*

$$\int_N \rho(s) ds = 2(F - F_e). \quad (3)$$

Equivalentemente,

$$\int_N \frac{\rho(s)}{2} ds = (F - F_e), \quad (4)$$

donde  $\rho(s) = \frac{1}{k(s)}$  el radio de curvatura de  $N$  en el punto de parámetro  $s$ . Este resultado se encuentra en el artículo **An interesting property of the evolute**, [RE] aceptado para publicación en la revista, *The American Mathematical Monthly*.

Este resultado sugiere una pregunta, pensamos que muy interesante y que puede formularse análogamente en muchas desigualdades geométricas. Concretamente, ¿qué interpretación geométrica tiene el “defecto” de la desigualdad de Heintze y Karcher? Es decir se puede transformar la desigualdad de Heintze y Karcher en una igualdad de tipo

$$\int_N \frac{1}{3H} dA = V + V_e,$$

siendo  $V_e$  un cierto volumen de evoluta? De momento no damos respuesta a esta pregunta.

Una primera pregunta que surge de manera muy natural a la vista del teorema 0.3 es si podemos decir algo parecido para curvas sobre una esfera. Por ejemplo, Alvarez en [Alv99] demostró que

$$\frac{1}{4} \int_{\mathbb{S}^2} \eta_\gamma(x) \omega = \int_\gamma \sqrt{1 + k_g^2(s)} ds,$$

donde  $\eta_\gamma(x)$  denota el número de grandes círculos en la esfera que pasan por un punto  $x \in \mathbb{S}^2$  y son normales a una curva  $\gamma$  inmersa en la esfera,  $k_g(s)$  la curvatura geodésica de  $\gamma$  en el punto de parámetro  $s$ , y  $\omega$  es el elemento de área de la esfera. Es pues, una fórmula que involucra la curvatura de una curva con cierta medida geométrica.

Puesto que la esfera es una variedad riemanniana de curvatura constante, surge de manera natural la cuestión de generalizar el teorema 0.3 a una variedad riemanniana de curvatura constante  $c$ , positiva o negativa.

Una primera generalización naif de 0.3 sería buscar una estimación para la integral del radio de curvatura de una curva cerrada en una variedad

riemanniana de curvatura constante  $c$ . Pero la primera dificultad que aparece es precisamente que no está claro a priori que significa “el radio de curvatura” en dicha variedad. Por ejemplo, la clásica definición de radio de curvatura como radio del círculo osculador tiene problemas, pues el círculo osculador se define como la posición límite de los círculos que pasan por tres puntos “consecutivos” de una curva, y es sabido que en el plano hiperbólico ( $c < 0$ ) tal círculo podría no existir.

La relación entre curvatura y radio en  $\mathbb{R}^2$  ( $\rho = 1/k$ ) se transforma en la relación  $k = \cot_c(\rho)$  (mirar página 19) en curvatura constante  $c$ . Estas relaciones nos permiten demostrar el siguiente teorema.

**Teorema 0.4** *Sea  $\Omega$  un dominio regular convexo en  $\mathbb{X}_c^2$ , si  $c \geq 0$ , o fuertemente  $h$ -convexo si  $c < 0$ , con frontera  $N = \partial\Omega$ . Entonces*

$$\int_N \tan_c\left(\frac{\rho(s)}{2}\right) ds = F - F_e, \quad (5)$$

donde  $ds$  significa la medida de longitud de arco en  $N$ ,  $F$  es el área de  $\Omega$  y  $F_e$  el área (algebraica) del conjunto focal  $F(N)$  de  $N$ .

Las nociones de convexidad usadas arriba se definen en el capítulo 4 y la definición de la tangente generalizada,  $\tan_c$ , se encuentra en la página 18.

La fórmula (5) es la generalización de la fórmula (4) a variedades de curvatura constante  $c$ , ya que  $\tan_c(\rho(s)) = \rho(s)$  cuando  $c = 0$ .

La notación  $\mathbb{X}_c^2$  que aparece en el teorema indica una variedad riemanniana 2-dimensional, completa, simplemente conexa y de curvatura constante  $c$ . Dicha variedad es isométrica a:

- La esfera  $\mathbb{S}^2$ , si  $c > 0$ , es decir,

$$\mathbb{X}_c^2 = \mathbb{S}^2\left(\frac{1}{\sqrt{c}}\right) = \left\{ (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = \frac{1}{c} \right\},$$

-El plano hiperbólico, si  $c < 0$ , es decir,

$$\mathbb{X}_c^2 = \mathbb{H}^2\left(\frac{1}{\sqrt{-c}}\right) = \left\{ (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^{2,1} : -x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = \frac{1}{c}, \quad x_1 \geq \frac{1}{\sqrt{-c}} \right\},$$

donde  $\mathbb{R}^{2,1}$  es el espacio de Lorentz (ver, por ejemplo, [Rat94]).

-El plano euclidiano  $\mathbb{R}^2$ , si  $c = 0$ .

De la igualdad (5) se puede deducir una desigualdad que generalizará la fórmula (2) en una variedad riemanniana de curvatura constante (ver corolario 4.20 página 58).

**Corolario 0.5** *Sea  $\Omega$  un dominio regular convexo en  $\mathbb{X}_c^2$ , si  $c \geq 0$ , o fuertemente  $h$ -convexo si  $c < 0$ , con frontera  $N = \partial\Omega$ . Entonces*

$$\int_N \tan_c\left(\frac{\rho(s)}{2}\right) ds \geq F. \quad (6)$$

*La igualdad se obtiene si y solo si  $N$  es una circunferencia.*

Cuando  $c = 0$  tenemos que la fórmula (6) coincide con la fórmula (2). Observemos también que, en particular, y para toda  $c$  acabamos de demostrar que  $F_e \leq 0$ .

Para  $c = 0$ , la desigualdad  $F_e \leq 0$  la demostramos utilizando la fórmula de Wirtinger (mirar página 38), pero esta técnica no servía para probar  $F_e \leq 0$  en curvatura constante  $c \neq 0$ . La relación entre la fórmula de Wirtinger y el área de la evoluta de una curva convexa, se obtiene para  $c = 0$  usando la función soporte del convexo. Aunque en curvatura constante  $c \neq 0$  existen también funciones soporte asociadas a convexos, su expresión es más complicada y por esta razón es difícil aplicar (al menos directamente) la desigualdad de Wirtinger.

El estudio que hemos hecho para el caso  $c = 0$  ha dado lugar a la siguiente interpretación geométrica de la desigualdad de Wirtinger.

**Interpretación geométrica de la desigualdad de Wirtinger.** *Todo punto de un convexo  $\Omega$  es alcanzado por alguna de las normales a la frontera  $\partial\Omega$  de  $\Omega$ , en un punto  $x \in \partial\Omega$ , de longitud más corta que el radio de curvatura  $\rho(x)$  de dicha frontera en el punto  $x$ .*

En  $\mathbb{X}_c^2$  la relación entre la curvatura  $k(s)$  y el radio de curvatura  $\rho(s)$  viene dada por  $k(s) = \cot_c(\rho(s))$ , luego  $1/k(s) = \tan_c(\rho(s))$ . Por tanto nos pareció interesante tener una estimación de

$$\int_N \tan_c \rho(s) ds,$$

y obtuvimos el siguiente resultado

**Teorema 0.6** *Sea  $\Omega$  un conjunto fuertemente convexo en  $\mathbb{X}_c^2$ , si  $c \geq 0$ , o fuertemente  $h$ -convexo si  $c < 0$ , con frontera regular diferenciable  $N = \partial\Omega$ . Entonces*

$$\int_N \tan_c \rho(s) ds \geq F \frac{4\pi - cF}{2\pi - cF}. \quad (7)$$

*La igualdad se da si y sólo si  $N$  es un círculo.*

Observemos que

$$1 < \frac{4\pi - cF}{2\pi - cF} \leq 2,$$

por consiguiente la fórmula (7) mejora la acotación de la fórmula

$$\int_N \tan_c \rho(s) ds > F,$$

que se deduce de la fórmula (6). Por otra parte observemos también que para el caso  $c = 0$ , tenemos que la fórmula (7) implica el teorema 0.2.

Es curioso observar que, puesto que la longitud y el área de un disco de radio  $\rho$  en  $\mathbb{X}_c^2$  está dada por

$$\begin{aligned} A(\rho) &= \frac{2\pi}{c}(1 - \operatorname{cn}_c(\rho)) \\ L(\rho) &= 2\pi \operatorname{sn}_c(\rho) \end{aligned}$$

se cumple que  $\tan_c(\rho) = \frac{A(\rho)}{L(\rho)}$  (mirar página 59), por lo tanto la fórmula (6) se puede leer como

$$\int_N \frac{A(\rho(s))}{L(\rho(s))} ds \geq F \quad (8)$$

La relación entre la curvatura  $k$  y el radio de curvatura  $\rho$  por la  $\cot_c$  en  $\mathbb{X}_c^2$  sugiere de manera natural la pregunta de qué relación hay entre la curvatura  $k$  y el radio de curvatura  $\rho$  (convenientemente definidos) en una variedad de Riemann de curvatura arbitraria.

Este estudio se puede encontrar por ejemplo en [BZ83] donde se relaciona el radio de curvatura con el “tiempo” que tarda en anularse un cierto campo de Jacobi.

La fórmula explícita  $k = k(\rho)$  que aparece en curvatura constante no aparece explícitamente en curvatura arbitraria, pero la teoría de comparación y los campos de Jacobi nos dan herramientas suficientes para poder estudiar los teoremas anteriores en variedades con alguna restricción sobre la curvatura, como por ejemplo curvatura acotada por abajo.

En el capítulo 5 generalizamos la fórmula (8) a conjuntos convexos de una variedad riemanniana de dimensión  $n$  ( $n = 2, 3$ ), completa y de curvatura acotada por abajo, es decir:

Para  $n = 2$  tenemos

**Teorema 0.7** *Sea  $M$  una variedad riemanniana, completa y con curvatura acotada  $K \geq c$ . Sea  $\Omega$  un dominio fuertemente convexo si  $c \geq 0$  y fuertemente  $h_c$ -convexo si  $c < 0$ , con frontera diferenciable  $N$ . Entonces*

$$\int_N \tan_c\left(\frac{\rho_k(x)}{2}\right) dx \geq F,$$

donde  $F$  es el área de  $\Omega$  y  $\rho_k$  es el radio del círculo en el espacio de curvatura constante  $\mathbb{X}_c^2$ , que tiene curvatura  $k$ . (Diremos que  $\rho_k$  es el radio de curvatura comparativo).

Para  $n = 3$  tenemos

**Teorema 0.8** *Sea  $M$  una variedad riemanniana, completa y con curvatura acotada  $K \geq c$ . Sea  $\Omega$  un dominio fuertemente convexo si  $c \geq 0$ , y fuertemente  $h_c$ -convexo si  $c < 0$ , con frontera diferenciable  $N$ . Entonces*

$$\int_N \frac{V(\rho_H(x))}{A(\rho_H(x))} dx \geq V(\Omega),$$

donde  $V(\Omega)$  es el volumen de  $\Omega$ ,  $V(\rho_H(x))$  y  $A(\rho_H(x))$  son el volumen y el área de la esfera de radio  $\rho_H(x)$  (radio de curvatura media comparativo), en el espacio de curvatura constante  $\mathbb{X}_c^3$ .

En los teoremas 0.2 y 0.4, se tiene una interpretación geométrica que involucra la evoluta de una curva  $\alpha$  dada, por esta razón nos vimos atraídos a estudiar las evolutas de las curvas en los espacio de curvatura constante, obteniendo una noción de evoluta.

Primero determinamos la evoluta de una curva  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{X}_c^2$  parametrizada por la longitud del arco, usando la definición clásica de punto focal (mirar por ejemplo [BZ83] página 234). Es decir, diremos que un punto  $\gamma(t)$  ( $t > 0$ ) de una geodésica  $\gamma$ , tal que  $\gamma'(0) = n(s)$  ( $n(s)$  el vector normal unitario de  $\alpha$ ), es un punto focal respecto a  $\alpha$  si existe un campo de Jacobi a lo largo de  $\gamma$  tal que  $Y(0) = \alpha'(s)$  y  $Y(t) = 0$ . Con la anterior definición de punto focal, obtuvimos la siguiente curva en  $\mathbb{X}_c^2$  que representa la evoluta de  $\alpha$

$$\xi_\alpha(s) = \frac{1}{\sqrt{k_g^2(s) + c}}(k_g(s)\alpha(s) + n(s)).$$

Esta noción de evoluta la corroboramos en el siguiente teorema, en el sentido de ver que esta definición coincide con la definición clásica de evoluta como la envolvente de las normales.

**Teorema 0.9** Sean  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{X}_c^2$  una curva diferenciable parametrizada por la longitud de arco  $s$  y  $\gamma_s(t) = \text{cn}_c(t)\alpha(s) + \text{sn}_c(t)n(s)$  la familia de geodésicas ortogonales a  $\alpha$ . Entonces la envolvente de la familia  $\gamma_s(t)$  es

$$\xi_\alpha(s) = \frac{1}{\sqrt{k_g^2(s) + c}}(k_g(s)\alpha(s) + n(s)).$$

Por último damos una tercera definición equivalente de evoluta usando las singularidades de la función distancia en  $\mathbb{X}_c^2$ .

La memoria está organizada de la siguiente manera:

En el capítulo 1 estudiaremos con detalle la desigualdad de Heintze y Karcher, y su análogo en  $\mathbb{R}^2$ .

También estudiaremos algunos resultados de la teoría de singularidades de curvas, que serán necesarios para demostrar algunos resultados sobre evolutas en  $\mathbb{X}_c^2$ .

En el capítulo 2 definiremos la noción de evoluta de una curva  $\alpha$  definida en el  $\mathbb{X}_c^2$ , luego con técnicas diferentes probaremos que nuestra noción de evoluta coincide.

Por último en este capítulo estudiaremos el círculo osculador de una curva  $\alpha$ , como el círculo que tiene contacto de orden 3 con  $\alpha$  en dicho punto.

En el capítulo 3 daremos una prueba más corta de la fórmula (2), es decir probaremos que

$$\int_N \frac{1}{k(s)} ds = 2(F - F_e),$$

donde  $F_e$  ( $\leq 0$ ) es el área (algebraica) del dominio acotada por la evoluta de  $N$ .

Este será nuestro primer resultado original. Como dije anteriormente este resultado se encuentra en el artículo **An interesting property of the evolute**, aceptado para publicación en la revista, *The American Mathematical Monthly*. Por lo tanto en este capítulo estudiaremos con detalle dicho artículo.

En el capítulo 4 generalizamos el teorema 0.2 a conjuntos convexos de una variedad riemanniana 2-dimensional con curvatura constante  $c$ , obteniendo el resultado que se estableció en el teorema 0.4, el cual coincide, para  $c = 0$ , con el teorema 0.3.

En el capítulo 5 generalizamos nuestros resultados obtenidos en curvatura constante a una variedad riemanniana completa con curvatura acotada por abajo. Además obtuvimos en curvatura acotada por abajo el análogo 3-dimensional de la fórmula (8) que se estableció en [GRST05].



# Índice general

Agradecimientos	VII
Introducción	IX
<b>1. Conceptos básicos</b>	<b>1</b>
1.1. Desigualdad de Heintze y Karcher . . . . .	1
1.2. Desigualdad de Heintze y Karcher en $\mathbb{R}^2$ . . . . .	5
1.3. Orden de contacto . . . . .	8
1.4. Envolvente . . . . .	10
<b>2. Conjuntos focales</b>	<b>17</b>
2.1. Conjuntos focales y campos de Jacobi . . . . .	17
2.1.1. Ecuación explícita de la evoluta . . . . .	21
2.2. Fibrado normal de una curva . . . . .	22
2.3. Frenet-Serret en $\mathbb{S}^2(\frac{1}{\sqrt{c}})$ y $\mathbb{H}^2(\frac{1}{\sqrt{c}})$ . . . . .	24
2.4. Singularidades de la función distancia . . . . .	27
2.5. Círculo osculador en curvatura constante . . . . .	31
<b>3. Integral del radio de curvatura</b>	<b>35</b>
3.1. Preliminares . . . . .	36
3.1.1. Envolvente de una familia de rectas . . . . .	36
3.1.2. Relación de Parseval y desigualdad de Wirtinger . . . . .	38
3.1.3. Hedgehogs . . . . .	39
3.2. Resultado en $\mathbb{R}^2$ . . . . .	41
<b>4. Integral de funciones focales</b>	<b>45</b>
4.1. Preliminares . . . . .	46
4.1.1. Convexidad y curvatura en $\mathbb{S}^2(\frac{1}{\sqrt{c}})$ y $\mathbb{H}^2(\frac{1}{\sqrt{c}})$ . . . . .	46

4.1.2. Winding number en $\mathbb{S}^2(\frac{1}{\sqrt{c}})$ y $\mathbb{H}^2(\frac{1}{\sqrt{c}})$ . . . . .	48
4.2. Resultado en $\mathbb{S}^2(\frac{1}{\sqrt{c}})$ y $\mathbb{H}^2(\frac{1}{\sqrt{c}})$ . . . . .	50
4.3. La Integral de la tangente de $\tan_c(\rho)$ . . . . .	60
<b>5. Curvatura Acotada</b>	<b>63</b>
5.1. Teoremas de comparación . . . . .	64
5.1.1. Jacobiano de la aplicación exponencial . . . . .	66
5.1.2. Detalles técnicos . . . . .	69
5.2. Curvatura Acotada en dimensión 2 . . . . .	73
5.3. Curvatura Acotada en dimensión 3 . . . . .	75

# Capítulo 1

## Conceptos básicos

En este capítulo recogemos algunos resultados conocidos que, bien desde el punto de vista técnico o desde el punto de vista motivador, serán necesarios en nuestro trabajo.

Primero estudiaremos la desigualdad de Heintze y Karcher y su análogo en  $\mathbb{R}^2$ , ya que dicha desigualdad motivó el estudio que presentaremos en el capítulo 3.

También estudiaremos algunos resultados de la teoría de singularidades de curvas, que serán necesarios para demostrar algunos resultados más adelante.

### 1.1. Desigualdad de Heintze y Karcher

En esta sección suponemos que  $N$  es una superficie encajada compacta en  $\mathbb{R}^3$ , que acota un dominio  $\Omega$ , con curvatura media  $H$  positiva en todo punto de  $N$ ,  $L_{n(x)}$  la línea en dirección del normal interior  $n(x)$  de  $N$  en el punto  $x$  y  $B_q(r)$  la bola abierta de centro en  $q$  y radio  $r$ , donde  $q \in L_{n(x)}$ .

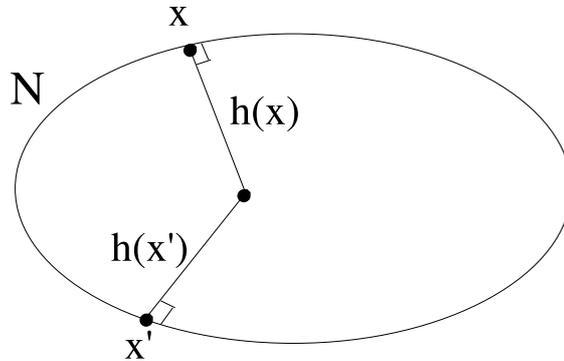
Empecemos enunciando la siguiente definición.

**Definición 1.1** *Definimos la función  $h : N \rightarrow \mathbb{R}$  así:*

$$h(x) = \sup \{ t = d(x, q); q \in L_{n(x)}, d(x, N) = d(x, q) \},$$

donde  $d(x, q)$  denota la distancia de  $x$  a  $q$  y  $d(x, N)$  la distancia mínima de  $x$  a  $N$ .

La figura siguiente nos ayudará a entender mejor esta definición.



De la definición de  $h(x)$  se sigue que los segmentos abiertos

$$\{x + tn(x); 0 < t < h(x)\},$$

no se interceptan.

**Lema 1.2** Si  $k_1(x)$  y  $k_2(x)$  son las curvaturas normales para cualquier  $x$  en  $N$ , entonces

$$\frac{1}{h(x)} \geq \max \{k_1(x), k_2(x)\}$$

**Demostración:** Si  $q$  está en el dominio acotado por  $N$  a una distancia  $h(x)$  de  $x$  a lo largo de la normal interior en  $x$ , entonces  $B_q(h(x))$  no puede contener ningún punto de  $N$ , ya que si existiera un punto  $x'$  en  $N$ , entonces su distancia a  $q$  sería menor que  $h(x)$ , y esto contradice la definición de  $h(x)$ . Como la superficie  $N$  está por encima de la esfera  $S_q(h(x))$  y tanto la superficie como la esfera son tangentes en  $x$ , las curvaturas normales de  $N$  en  $x$  son acotadas superiormente por la curvatura normal de la esfera que es  $1/h(x)$ .  $\square$

Si denotamos por  $\rho_i(x) = 1/k_i(x)$  los radios de curvatura ( $i=1,2$ ), observamos que

$$h(x) \leq \rho_i(x), \quad \text{para } i = 1, 2.$$

**Lema 1.3** *Sea  $V'$  el volumen del dominio  $\Omega'$  obtenido al poner en cada punto  $x$  de  $N$  un segmento de su normal interior de longitud  $h(x)$ . Entonces*

$$V' = \int_N \left( \int_0^{h(x)} |(1 - k_1(x)t)(1 - k_2(x)t)| dt \right) dx$$

donde  $k_1(x)$  y  $k_2(x)$  son las curvaturas principales de  $N$  en el punto  $x$  y  $dx$  es el elemento de área de  $N$ .

**Demostración:** Supongamos que  $N$  está localmente parametrizada por

$$x : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow N,$$

donde  $U$  es un abierto de  $\mathbb{R}^2$  y  $x = x(u_1, u_2)$ . Suponemos que  $u_1 = \text{constante}$  y  $u_2 = \text{constante}$  son direcciones principales de curvatura.

En cada punto de  $N$  tenemos un vector normal unitario interior  $n(u_1, u_2)$  y parametrizamos el dominio  $\Omega'$  por:

$$y(u_1, u_2, u_3) = x(u_1, u_2) + u_3 n(u_1, u_2) \quad (u_1, u_2) \in U, \quad 0 < u_3 < h(u_1, u_2),$$

La definición de  $h(x)$  nos garantiza que la correspondencia

$$(u_1, u_2, u_3) \rightarrow (y_1, y_2, y_3),$$

es uno a uno, por lo tanto el volumen de  $\Omega'$  viene dado por:

$$V' = \int_{\Omega'} dV' = \int \int_U \left( \int_0^{h(u_1, u_2)} \left| \frac{\partial(y_1, y_2, y_3)}{\partial(u_1, u_2, u_3)} \right| du_3 \right) du_1 du_2.$$

Para evaluar la integral notemos que como  $u_1$  y  $u_2$  son direcciones principales de curvatura, entonces podemos aplicar las ecuaciones de Olinde Rodriguez y tenemos que:

$$\frac{\partial y}{\partial u_1} = \frac{\partial x}{\partial u_1} + u_3 \frac{\partial n}{\partial u_1} = (1 - k_1 u_3) \frac{\partial x}{\partial u_1},$$

$$\frac{\partial y}{\partial u_2} = \frac{\partial x}{\partial u_2} + u_3 \frac{\partial n}{\partial u_2} = (1 - k_2 u_3) \frac{\partial x}{\partial u_2}, \quad \frac{\partial y}{\partial u_3} = n;$$

Por tanto

$$\frac{\partial y}{\partial u_1} \wedge \frac{\partial y}{\partial u_2} = (1 - k_1 u_3)(1 - k_2 u_3) \frac{\partial x}{\partial u_1} \wedge \frac{\partial x}{\partial u_2}$$

luego

$$\left| \frac{\partial(y_1, y_2, y_3)}{\partial(u_1, u_2, u_3)} \right| = \left| \left( \frac{\partial y}{\partial u_1} \wedge \frac{\partial y}{\partial u_2} \right) \frac{\partial y}{\partial u_3} \right| = \left| (1 - k_1 u_3)(1 - k_2 u_3) \right| \left| \frac{\partial x}{\partial u_1} \wedge \frac{\partial x}{\partial u_2} \right|.$$

Con lo anterior tenemos que:

$$V = \int_N \left( \int_0^{h(u_1, u_2)} |(1 - k_1 u_3)(1 - k_2 u_3)| du_3 \right) dA,$$

donde  $k_i = k_i(u_1, u_2)$  y  $dA = \left| \frac{\partial x}{\partial u_1} \wedge \frac{\partial x}{\partial u_2} \right| du_1 du_2$ .  $\square$

**Corolario 1.4** Si  $V(\Omega)$  es el volumen del dominio  $\Omega$ , entonces

$$V(\Omega) = \int_N \left( \int_0^{h(x)} |(1 - k_1(x)t)(1 - k_2(x)t)| dt \right) dA,$$

donde  $k_1(x)$  y  $k_2(x)$  son las curvaturas principales de  $N$  y  $dA$  es el elemento de área de  $N$ .

**Demostración:** Basta probar que  $\Omega' = \Omega$ . Es claro que  $\Omega' \subset \Omega$ . Supongamos  $q$  en  $\Omega$  y sea  $x$  el punto en  $N$  donde se alcanza la distancia  $d$  de  $q$  a  $N$ . Por la definición de  $h$ ,  $d \leq h(x)$ , y por consiguiente  $q$  está en  $\Omega'$ . Luego  $\Omega' = \Omega$  y por tanto

$$V(\Omega) = V' = \int_N \left( \int_0^{h(x)} |(1 - k_1(x)t)(1 - k_2(x)t)| dt \right) dA. \quad \square$$

**Teorema 1.5** Sea  $N$  una superficie encajada compacta en  $\mathbb{R}^3$ , que acota un dominio  $\Omega$  de volumen  $V$ . Si la curvatura media  $H$  de  $N$  es positiva en todo punto, entonces,

$$\int_N \frac{1}{H} dA \geq 3V. \quad (1.1)$$

La igualdad se da si y sólo si  $N$  es una esfera.

La prueba que damos de este teorema es original de Ros, usando ideas de [Ros88], [Rei77] y [Hei89].

**Demostración:** Por el lema 1.2 tenemos que las funciones  $(1 - k_1(x)t)$  y  $(1 - k_2(x)t)$  son no-negativas para  $0 \leq t \leq h(x)$ . Podemos pues aplicar la desigualdad de la media geométrica y la media aritmética y tenemos que:

$$(1 - k_1(x)t)(1 - k_2(x)t) \leq (1 - H(x)t)^2. \quad (1.2)$$

Por consiguiente, por el corolario 1.4 y ya que  $h(x) \leq 1/H(x)$  (otra vez por el lema 1.2), tenemos:

$$\begin{aligned} V &= \int_N \left( \int_0^{h(x)} (1 - k_1(x)t)(1 - k_2(x)t) dt \right) dA \\ &\leq \int_N \left( \int_0^{1/H} (1 - Ht)^2 dt \right) dA = \int_N \frac{1}{3H} dA. \end{aligned}$$

Si se da la igualdad en (1.1), entonces obtenemos la igualdad en (1.2), por lo tanto  $k_1(x) = k_2(x)$ , es decir todos los puntos son umbílicos, lo cual sólo ocurre en el caso de la esfera.  $\square$

Existe una versión del teorema 1.5 en variedades riemannianas de curvatura constante (mirar [GRST05]).

## 1.2. Desigualdad de Heintze y Karcher en $\mathbb{R}^2$

El capítulo 3 de esta memoria es inspirado en la desigualdad de Heintze y Karcher en dimensión dos. Concretamente se consigue transformar la desigualdad de Heintze y Karcher en el plano en una igualdad. Ello motivó el

querer hacer un estudio análogo para el caso de curvatura constante, lo cual se consigue en el capítulo 4. Por esta razón daremos ahora la versión del teorema 1.5 en el plano, tal como fue formulado y demostrado en [Esc96].

En el capítulo 3, precisamente en el corolario 3.8 (página 44), damos una demostración del teorema 1.6 más corta.

**Teorema 1.6** *Si  $N = \partial\Omega$  es la frontera de un dominio convexo compacto  $\Omega$  en  $\mathbb{R}^2$  de área  $F$ , con curvatura  $k$  positiva en todo punto, entonces*

$$\int_N \frac{1}{k(s)} ds \geq 2F, \quad (1.3)$$

donde  $ds$  significa la medida de longitud de arco en  $N$ . La igualdad se da si y sólo si  $N$  es una circunferencia.

**Demostración:** Es análoga a la demostración de teorema 1.5. Se define la función  $h : N \rightarrow \mathbb{R}$  como en la definición 1.1 y se prueba como en el lema 1.2 que

$$\frac{1}{h(x)} \geq k(x), \quad \forall x \in N,$$

donde  $k(x)$  es la curvatura de  $N$  en el punto  $x$ . Equivalentemente se tiene que  $h(x) \leq \rho(x)$ , donde  $\rho(x)$  es el radio de curvatura.

Similarmente como en el corolario 1.4 se tiene que  $\Omega' = \Omega$ , ( $\Omega'$  es el dominio obtenido al poner en cada punto  $x$  de  $N$  un segmento de su normal interior de longitud  $h(x)$ ), por lo tanto el área  $\Omega'$  sera igual al área de  $\Omega$ .

Calculemos el área de  $\Omega'$ .

Supongamos que  $N$  esta parametrizada por la curva  $\alpha(s) = (x_1(s), x_2(s))$  donde  $s$  es el parámetro arco y  $s \in (0, l)$ . Entonces  $\Omega'$  queda parametrizado así:

$$y(s, t) = \alpha(s) + tn(s) \quad \text{donde} \quad 0 \leq t \leq h(\alpha(s)),$$

luego el área  $F$  de  $\Omega'$  es dada por:

$$F = \int_0^l \left( \int_0^{h(\alpha(s))} |y_s \wedge y_t| dt \right) ds,$$

donde  $|y_s \wedge y_t|$  es el jacobiano de  $y$ .

La definición de  $h(x)$  nos garantiza, cuando  $0 < t < h(x)$ , que la correspondencia  $(s, t) \rightarrow (y_1, y_2)$  es uno a uno.

Denotaremos  $k(s) = k(\alpha(s))$  y  $h(s) = h(\alpha(s))$ . Usando las fórmulas de Frenet-Serret tenemos:

$$\begin{aligned} |y_s \wedge y_t| &= |(\alpha'(s) + tn'(s)) \wedge n(s)| \\ &= |1 - tk|, \end{aligned}$$

como  $1/h(s) \geq k(s)$  entonces

$$\begin{aligned} F &= \int_0^l \left( \int_0^{h(s)} |y_s \wedge y_t| dt \right) ds = \int_0^l \left( \int_0^{h(s)} (1 - tk(s)) dt \right) ds \\ &= \int_0^l \left( h(s) - \frac{h^2(s)}{2} k(s) \right) ds \\ &\leq \int_0^l \frac{1}{2k(s)} ds, \end{aligned}$$

la última desigualdad se obtiene por ser  $t - \frac{t^2}{2} \leq \frac{1}{2}$ ,  $\forall t \in \mathbb{R}$ .

Es obvio que si  $N$  es una circunferencia se obtiene la igualdad en la fórmula (1.3). Recíprocamente supongamos que se da la igualdad en la fórmula (1.3), entonces

$$\int_0^l \left( h(s) - \frac{h^2(s)}{2} k(s) \right) ds = \int_0^l \frac{1}{2k(s)} ds, \quad (1.4)$$

luego

$$\int_0^l -\frac{1}{2k(s)} (1 - h(s)k(s))^2 ds = 0,$$

luego  $h(s) = 1/k(s)$  para todo  $s$ . En [Esc96] (página 8) se demostró que esta condición implica que  $N$  es una circunferencia.  $\square$

### 1.3. Orden de contacto

En las siguientes secciones exponemos algunos resultados de la teoría de singularidades, que servirán de referencia en el capítulo 2, para el estudio de las propiedades de las evolutas en una variedad riemanniana de dimensión 2 de curvatura constante. El lector interesado en más detalles de esta teoría puede mirar por ejemplo [BG92]. Aunque utilizaremos estos resultados sólo para  $n = 2$  y  $n = 3$ , los exponemos en general ya que implica la misma dificultad.

En esta sección exponemos la definición clásica de orden de contacto de una curva  $\alpha(s)$ , y algunas consecuencias de dicha definición en una curva plana.

**Definición 1.7** Sea  $F : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $U$  un abierto de  $\mathbb{R}^n$ , una función diferenciable. Diremos que  $x \in \mathbb{R}^n$  es un punto regular de  $F$ , si  $DF(x) \neq 0$ . Un valor regular de una función  $F$  es un punto  $c \in \mathbb{R}$  tal que todo  $x$  del  $F$  con  $F(x) = c$  es un punto regular.

**Definición 1.8** Sean  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^n$  una curva regular parametrizada por la longitud de arco y  $0$  un valor regular de una función  $F$ . Diremos que  $\alpha$  y  $F^{-1}(0)$  tienen un punto de contacto de orden  $k$  en  $\alpha(s_0)$  si la función  $f$  definida por

$$f(s) = F(\alpha_1(s), \dots, \alpha_n(s)) = F(\alpha(s))$$

satisface  $f(s_0) = f'(s_0) = \dots = f^{k-1}(s_0) = 0$ ,  $f^k(s_0) \neq 0$ .

**Definición 1.9** Un vértice de una curva plana  $\alpha(s)$  es un punto  $\alpha(s_0)$  para el cual existe un círculo, cuyo contacto en dicho punto es de orden 4.

**Observación 1.10** Observemos que el círculo a que hace referencia la definición anterior se puede pensar como  $F^{-1}(0)$ , tomando  $F(x) = d^2(x, u) - r^2$ , donde  $d(x, u)$  es la distancia del punto  $x$  al punto  $u$ . Este punto  $u$  es el centro y  $r$  el radio. Por lo tanto,  $\alpha$  tiene un vértice en  $\alpha(s_0)$  si y sólo si,

$$f^{(i)}(s_0) = 0, i = 1, \dots, 3, f^4(s_0) \neq 0,$$

donde  $f(s) = F(\alpha(s))$ .

**Comentario 1.11** Sean  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$  una curva parametrizada por la longitud del arco,  $T(s)$  el vector tangente unitario de  $\alpha(s)$ ,  $n(s)$  el vector normal unitario de  $\alpha(s)$  (podemos elegir  $n(s)$  tal que la base  $\{T(s), n(s)\}$  sea positiva),  $k(s)$  la curvatura de  $\alpha(s)$  y  $u \in \mathbb{R}^2$ . Consideremos la función distancia al cuadrado

$$f(s) = \langle \alpha(s) - u, \alpha(s) - u \rangle.$$

Usando las fórmulas de Frenet-Serret tenemos lo siguiente:

$$f'(s) = 2\langle \alpha(s) - u, T(s) \rangle.$$

$$f''(s) = 2 + 2\langle \alpha(s) - u, k(s)n(s) \rangle$$

$$f'''(s) = 2\langle \alpha(s) - u, k'(s)n(s) \rangle - 2\langle \alpha(s) - u, k^2(s)T(s) \rangle.$$

$$\begin{aligned} f^{(4)}(s) &= -2\langle \alpha'(s), k'(s)n(s) \rangle + 2\langle \alpha(s) - u, k''(s)n(s) + k'(s)n'(s) \rangle \\ &\quad + 2\langle \alpha(s) - u, k^2(s)T(s) \rangle - 2\langle \alpha(s) - u, 2k(s)k'(s)T(s) + k^2n'(s) \rangle \\ &= 2\langle -\frac{1}{k(s)}n(s), k''(s)n(s) \rangle - 2k^2(s) - 2\langle -\frac{1}{k(s)}n(s), k^3(s)n(s) \rangle \\ &= \frac{-2k''(s)}{k(s)}. \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$f'(s) = 0 \text{ si sólo si } \alpha(s) - u = \lambda(s)n(s) \text{ para } \lambda(s) \in \mathbb{R}.$$

$$f'(s) = f''(s) = 0 \text{ si sólo si } u = \alpha(s) + \frac{1}{k(s)}n(s) \text{ con } k(s) \neq 0.$$

$$f'(s) = f''(s) = f'''(s) = 0 \text{ si sólo si } u = \alpha(s) + \frac{1}{k(s)}n(s), k(s) \neq 0, \text{ y } k'(s) = 0.$$

Podemos hacer varias deducciones de lo anterior.

i) Si  $k(s) \neq 0$ , entonces existe un círculo que tiene al menos un punto de contacto de orden 3 con  $\alpha(s)$ ; este círculo es llamado **círculo osculador** en  $\alpha(s)$ ; su centro  $\alpha(s) + \frac{1}{k(s)}n(s)$  es llamado **centro de curvatura o punto focal** en  $\alpha(s)$  y su radio  $\rho(s) = \frac{1}{k(s)}$  es llamado **radio de curvatura**.

ii) Una condición necesaria y suficiente para que el punto  $\alpha(s)$  sea un vértice, es que  $k(s) \neq 0$  y  $k'(s) = 0$ .

iii) Un vértice ocurre precisamente en un máximo o un mínimo de la curvatura, ya que  $f^4(s) = -2\frac{k''(s)}{k(s)}$ .

**Observación 1.12** Se puede demostrar que determinar el círculo osculador como la posición límite de los círculos que pasan por  $\alpha(s)$ ,  $\alpha(s+h_1)$  y  $\alpha(s+h_2)$  cuando  $h_1, h_2 \rightarrow 0$ , es equivalente a que exista un círculo que tiene un punto de contacto de orden 3 con  $\alpha(s)$ .

Cuando queremos generalizar este concepto al plano hiperbólico tenemos la dificultad que 3 puntos no determinan en general un círculo.

## 1.4. Envolvente

En esta sección estudiaremos una técnica para determinar la envolvente de una familia de curvas. En particular la aplicaremos cuando la familia de curvas son rectas normales a una curva plana  $\alpha$ . Esta técnica será usada en el capítulo 2 para determinar la envolvente (evoluta) de una familia de geodésicas normales a una curva  $\alpha$  definida en un variedad riemanniana de curvatura constante.

Sea  $F : D \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  una función diferenciable en un dominio abierto  $D$  de  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ . Denotaremos las coordenadas de este dominio por  $(s, x_1, \dots, x_n)$  y consideraremos  $F_s(x) = F(s, x)$  una familia de funciones de parámetro  $s$ , donde  $x = (x_1, \dots, x_n)$ .

Supongamos que para cada  $s$ , 0 es un valor de regular de  $F_s$  (es decir,  $F_s(x) = 0$  y  $\frac{\partial F_s}{\partial x_i}(s, x) \neq 0$  para algún  $i$ ). Por lo tanto  $M_s = F_s^{-1}(0)$  es

una subvariedad de dimensión  $n - 1$  en  $\mathbb{R}^n$  (por ejemplo para  $n = 2$  es una curva y para  $n = 3$  es una superficie).

Es obvio que si  $0$  es un valor regular de  $F_s$ , para todo  $s$ , entonces  $0$  es un valor regular de  $F$ . Por lo tanto  $F^{-1}(0)$  es una subvariedad de  $\mathbb{R}^{n+1}$ .

Para  $n = 2$  es una superficie, que se obtiene al separar cada curva  $M_s$  del plano y moverla a un nivel  $s$  en la tercera dimensión, ya que

$$F^{-1}(0) = \{(s, x_1, x_2); F(s, x_1, x_2) = 0\},$$

$$M_{s_0} = F_{s_0}^{-1}(0) = \{(x_1, x_2); F(s_0, x_1, x_2) = 0\},$$

y

$$\widetilde{M}_{s_0} = \{(s_0, x_1, x_2); F(s_0, x_1, x_2) = 0\},$$

por lo tanto  $M_{s_0}$  es una curva en el plano  $s = 0$ ,  $\widetilde{M}_{s_0}$  es una curva en el plano  $s = s_0$  y podemos pensar la superficie  $F^{-1}(0)$  como la unión de las curvas  $\widetilde{M}_{s_0}$ .

Notemos que si  $v_p$  es un vector que pertenece al espacio tangente de  $F^{-1}(0)$  en el punto  $p = (s, x)$ , entonces

$$\langle \nabla F(p), v_p \rangle = 0,$$

donde  $\nabla F(p)$  es el gradiente de  $F$  en el punto  $p$ .

Este espacio tangente es “vertical”, es decir paralelo al eje  $s$ , si y sólo si,  $\frac{\partial F}{\partial s}(s, x) = 0$ .

En general tenemos la siguiente definición de envolvente.

**Definición 1.13** *Dados  $F$  y  $M_s$  como antes, definimos la envolvente  $\xi_F$  de la familia  $\{M_s\}_{s \in \mathbb{R}}$ , como el conjunto:*

$$\xi_F = \left\{ x \in \mathbb{R}^n; x \in M_s, \frac{\partial F}{\partial s}(s, x) = 0 \right\}.$$

**Teorema 1.14** *Si  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$  es una curva regular, que es la envolvente de una familia de curvas  $M_s = F_s^{-1}(0)$ , entonces en el punto donde  $\alpha(s) \in M_s$ , las dos curvas son tangentes.*

**Demostración.** Denotemos  $\alpha(s) = (x_1(s), x_2(s))$ . Como  $\alpha(s)$  satisface  $F(s, \alpha(s)) = 0$ ; entonces al derivar a ambos lados la anterior expresión con respecto a  $s$  tenemos que:

$$\frac{\partial F}{\partial s}(s, x_1(s), x_2(s)) + \frac{\partial F}{\partial x_1}(s, x_1(s), x_2(s))x_1'(s) + \frac{\partial F}{\partial x_2}(s, x_1(s), x_2(s))x_2'(s) = 0$$

pero  $\frac{\partial F}{\partial s}(s, \alpha(s)) = 0$ ; por lo tanto  $\langle \nabla F(s, \alpha(s)), \alpha'(s) \rangle = 0$ .  $\square$

En particular cuando  $M_s$  son rectas tenemos el siguiente corolario del teorema anterior.

**Corolario 1.15** *La envolvente de una familia de rectas es una curva tal que la tangente en cada uno de sus puntos es una recta de la familia dada.*

La técnica que exponemos en la demostración del siguiente teorema, para determinar la envolvente de una familia de curvas, es la que usaremos en el capítulo 2 para determinar la envolvente de una familia de geodésicas normales a una curva dada.

**Teorema 1.16** *Sea  $F : D \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  ( $F = F(s, x_1, x_2)$ ) una función diferenciable en un dominio abierto  $D$  de  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^2$  tal que 0 es un valor regular de la función  $F_s(x_1, x_2)$  y de la función  $F(s, x_1, x_2)$ . Sea  $\pi : F^{-1}(0) \rightarrow \mathbb{R}^2$  la proyección definida por  $\pi(s, x_1, x_2) = (x_1, x_2)$ . Entonces el conjunto de los valores críticos de la proyección es la envolvente de la familia de curvas  $M_s = F_s^{-1}(0)$ .*

**Demostración:** Denotemos

$$\Sigma = F^{-1}(0) = \{(s, x_1, x_2); F(s, x_1, x_2) = 0\},$$

y parametricemos  $\Sigma$  localmente por

$$X(s, u) = (s, x_1(s, u), x_2(s, u)),$$

donde  $(s, u) \in I \times J \subset \mathbb{R}^2$ .

Luego

$$X_s = \frac{\partial X}{\partial s} = \left(1, \frac{\partial x_1}{\partial s}, \frac{\partial x_2}{\partial s}\right) \quad y \quad X_u = \frac{\partial X}{\partial u} = \left(0, \frac{\partial x_1}{\partial u}, \frac{\partial x_2}{\partial u}\right),$$

es una base del plano tangente  $T_p \Sigma$ , donde  $p = (s, x_1, x_2) \in \Sigma$ .

Como la proyección es líneal en la variable que proyectamos entonces

i)  $d\pi_p(X_s) = 0$  si y sólo si  $\frac{\partial x_1}{\partial s} = 0$  y  $\frac{\partial x_2}{\partial s} = 0$ ,

ii)  $d\pi_p(X_u) = 0$  si y sólo si  $\frac{\partial x_1}{\partial u} = 0$  y  $\frac{\partial x_2}{\partial u} = 0$ ,

pero  $X_u \neq 0$ , luego los puntos críticos de  $\pi$  satisfacen que  $X_s(p) = (1, 0, 0)$ . Como  $X_s(p) \in T_p \Sigma$ , entonces

$$\langle \nabla F(p), (1, 0, 0) \rangle = \frac{\partial F}{\partial s}(p) = 0.$$

Por tanto, la proyección de los puntos  $p \in \Sigma = F^{-1}(0)$  tales que  $\frac{\partial F}{\partial s}(p) = 0$  es el conjunto

$$\left\{ x \in \mathbb{R}^2; x \in M_s, \frac{\partial F}{\partial s}(s, x) = 0 \right\}$$

el cual coincide con la envolvente  $\xi_F$  de la familia de curvas  $M_s = F_s^{-1}(0)$ .  $\square$

Estudiemos el siguiente ejemplo para ilustrar lo que se dijo anteriormente.

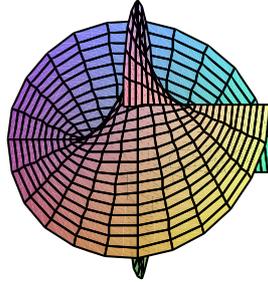


figura 2

**Ejemplo 1.17 (Evoluta de la elipse)** Sean  $\alpha(s) = (2 \cos(s), \frac{1}{2} \sin(s))$  ( $s \in (0, 2\pi)$ ) la parametrización de una elipse y  $\beta_s(t) = \alpha(s) + tn(s)$  la familia de rectas ortogonales en cada punto de  $\alpha$ , donde  $n(s)$  es el vector normal a  $\alpha(s)$ . Entonces  $\beta_s(t)$  viene dada por

$$\beta_s(t) = (2 \cos(s) + \frac{1}{2}t \cos(s), \frac{1}{2} \sin(s) + 2t \sin(s)), \quad t \in \mathbb{R}$$

En la figura 2 se muestra la superficie

$$\Sigma = \left\{ (s, 2 \cos(s) + \frac{1}{2}t \cos(s), \frac{1}{2} \sin(s) + 2t \sin(s)); s \in (0, 2\pi), t \in \mathbb{R} \right\}$$

que es generada al separar del plano cada recta ortogonal a la elipse y levantarla a un nivel  $s$  en la tercera dimensión.

En la Figura 2 si miramos desde arriba, vemos el contorno de una curva en la superficie generada por el levantamiento de las rectas ortogonales, esta curva proyectada al plano que tiene al eje  $s$  como eje normal, es la envolvente de la familia de rectas ortogonales a  $\alpha$ , es decir la evoluta de dicha elipse.

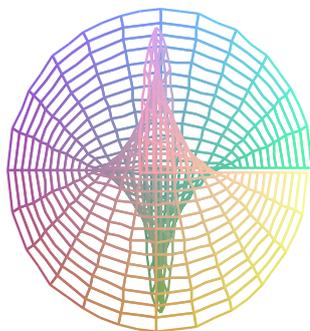


figura 3

Pensemos que dicha superficie esta hecha de un material translúcido, entonces desde arriba observamos con más claridad el contorno de la evoluta de la elipse (figura 3).

**Teorema 1.18** Sea  $\alpha : I \longrightarrow \mathbb{R}^2$  una curva plana parametrizada por la longitud del arco. Entonces la envolvente de la familia de normales a  $\alpha$ , es el lugar geométrico de los puntos focales de la curva.

**Demostración:** La ecuación de la línea normal a  $\alpha$  y que pasa por  $\alpha(s)$  es:

$$\langle (u - \alpha(s)), \alpha'(s) \rangle = 0,$$

donde  $u$  es un punto de  $\mathbb{R}^2$  que está en la línea normal. Luego la familia de líneas normales a la curva  $\alpha$  la podemos expresar por la siguiente ecuación:

$$F(s, u) = \langle (u - \alpha(s)), \alpha'(s) \rangle = 0. \quad (1.5)$$

Ahora aplicamos la definición de envolvente para la función  $F$ .

Para ello calculemos  $\frac{\partial F}{\partial s}$  y usemos las fórmulas de Frenet-Serret.

$$\begin{aligned}\frac{\partial F}{\partial s}(s, u) &= \langle (u - \alpha(s)), \alpha''(s) \rangle - \langle \alpha'(s), \alpha'(s) \rangle \\ &= \langle (u - \alpha(s)), k(s)n(s) \rangle - 1 = 0.\end{aligned}$$

Pero por (1.5) tenemos que  $(u - \alpha(s)) = \lambda(s)n(s)$  para algún  $\lambda(s) \in \mathbb{R}$ . Por tanto

$$u = \alpha(s) + \frac{1}{k(s)}n(s). \quad \square$$

**Definición 1.19** *La curva  $\xi_\alpha$  de los puntos focales de una curva regular plana  $\alpha$  la llamaremos la **evoluta** de  $\alpha$ .*

Llamaremos al conjunto

$$\{(s, \alpha(s) + tn(s)); (s, t) \in I \times \mathbb{R}\},$$

el **fibrado normal de la curva  $\alpha$** .

En este trabajo estamos interesados en estudiar las envolventes de las líneas normales a una curva en los espacios de curvatura constante de dimensión 2. Por tanto en el siguiente capítulo abordaremos este tema usando las técnicas aquí introducidas.

## Capítulo 2

# Conjuntos focales en curvatura constante

En este capítulo definiremos la noción de evoluta de una curva  $\alpha$  definida en la esfera  $\mathbb{S}^2(\frac{1}{\sqrt{c}})$  de radio  $\frac{1}{\sqrt{c}}$ , para  $c > 0$ .

De la misma manera definiremos la noción de evoluta de una curva  $\alpha$  en el plano hiperbólico  $\mathbb{H}^2(\frac{1}{\sqrt{c}})$  o esfera de radio imaginario  $1/\sqrt{c}$ , para  $c < 0$ .

Para verificar que nuestra noción de evoluta de una curva  $\alpha$  definida en  $\mathbb{S}^2(\frac{1}{\sqrt{c}})$  o en  $\mathbb{H}^2(\frac{1}{\sqrt{c}})$  es adecuada, la determinaremos de dos maneras y comprobaremos que coinciden; primero como la envolvente de una familia de geodésicas normales a  $\alpha$ , y segundo usando las singularidades de la función distancia de  $\mathbb{S}^2(\frac{1}{\sqrt{c}})$  o de  $\mathbb{H}^2(\frac{1}{\sqrt{c}})$ . En la segunda usaremos la técnica expuesta en [IPST04].

Por último estudiaremos el círculo osculador de una curva  $\alpha$ , como la curva que tiene contacto de orden 3 en algún punto de  $\alpha$ .

### 2.1. Conjuntos focales y campos de Jacobi

En esta sección describiremos explícitamente una familia de geodésicas normales a una curva  $\alpha$  definida en una variedad riemanniana de curvatura constante de dimensión 2 y luego determinaremos su envolvente.

Antes de entrar en detalles importantes en esta sección, es recomendable precisar algunas notaciones y por tanto recordar algunas definiciones clásicas de geometría riemanniana.

Denotaremos por  $\mathbb{X}_c^2$  una variedad riemanniana, conexa, simplemente conexa y completa 2-dimensional de curvatura constante  $c$ . Es sabido que si  $c > 0$ , entonces  $\mathbb{X}_c^2$  es isométrica a la esfera  $\mathbb{S}_c^2$  de radio  $\frac{1}{\sqrt{c}}$ :

$$\mathbb{X}_c^2 = \mathbb{S}^2\left(\frac{1}{\sqrt{c}}\right) = \left\{ (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = \frac{1}{c} \right\}$$

Si  $c < 0$ , entonces  $\mathbb{X}_c^2$  es isométrica al plano hiperbólico:

$$\mathbb{X}_c^2 = \mathbb{H}^2\left(\frac{1}{\sqrt{-c}}\right) = \left\{ (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^{2,1} : -x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = \frac{1}{c}, \quad x_1 \geq \frac{1}{\sqrt{-c}} \right\},$$

donde  $\mathbb{R}^{2,1}$  es el espacio de Lorentz (ver, por ejemplo, [Rat94]). En ambos casos se induce la métrica a partir de la métrica del ambiente. En esta sección usaremos directamente estos modelos.

Por último si  $c = 0$ ,  $\mathbb{X}_c^2$  es isométrico al plano euclidiano  $\mathbb{R}^2$ .

En esta sección tendrán más relevancia los espacios  $\mathbb{X}_c^2$  para  $c > 0$  y  $c < 0$ .

Utilizaremos la siguiente notación para las funciones trigonométricas generalizadas:

$$\text{sn}_c(t) := \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{-c}} \sinh(\sqrt{-ct}), & c < 0 \\ t, & c = 0 \\ \frac{1}{\sqrt{c}} \sin(\sqrt{ct}), & c > 0 \end{cases} \quad (2.1)$$

y

$$\text{cn}_c(t) := \begin{cases} \cosh(\sqrt{-ct}), & c < 0 \\ 1, & c = 0 \\ \cos(\sqrt{ct}), & c > 0. \end{cases} \quad (2.2)$$

Observe que  $c \text{sn}_c^2(t) + \text{cn}_c^2(t) = 1$ ,  $\text{cn}'(t) = -c \text{sn}_c(t)$  y  $\text{sn}'_c(t) = \text{cn}_c(t)$ .

**Definición 2.1** *El radio de curvatura de una curva  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{X}_c^2$  diferenciable con parametro arco  $s$ , es la función  $\rho : I \rightarrow \mathbb{X}_c^2$  definida por la siguiente relación:*

$$k_g(s) = \cot_c(\rho(s))$$

donde  $k_g$  es la curvatura geodésica de  $\alpha$ .

**Observación 2.2** Notemos que la definición anterior para  $c < 0$  sólo tiene sentido cuando  $\cot_c(\rho(s)) > \sqrt{-c}$  (ya que  $|\cot_c(x)| > \sqrt{-c}$ ,  $\forall x \in \mathbb{R}$ ). Por lo tanto restringiremos nuestra definición en el caso  $c < 0$  para curvas con  $k_g(s) > \sqrt{-c}$ .

Recordemos finalmente que si  $x = (x_1, x_2, x_3)$ ,  $y = (y_1, y_2, y_3)$  son vectores de  $\mathbb{R}^3$ , entonces el producto interno de Lorentz se define como el número real

$$\langle x, y \rangle_L = -x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3.$$

El espacio vectorial  $\mathbb{R}^3$  junto con el producto interno de Lorentz es llamado el espacio de Lorentz 2-dimensional, y se denota por  $\mathbb{R}^{2,1}$ .

**Observación 2.3** Si  $\gamma : J \rightarrow \mathbb{X}_c^2$  es una geodésica en  $\mathbb{X}_c^2$  parametrizada por la longitud de arco  $t$  y  $\gamma(0) = x$ ,  $\gamma'(0) = v$ , entonces  $\gamma$  se puede expresar en términos de las funciones  $\text{cn}_c$  y  $\text{sn}_c$  ([Rat94]) así:

$$\gamma(t) = \text{cn}_c(t)x + \text{sn}_c(t)v, \tag{2.3}$$

Si denotamos  $\langle, \rangle_c$  el producto interno de Lorentz  $\langle, \rangle_L$  si  $c < 0$  y el producto escalar euclidiano  $\langle, \rangle$  si  $c > 0$ , entonces observamos que

$$\begin{aligned} \langle \gamma(t), \gamma(t) \rangle_c &= \langle \text{cn}_c(t)x + \text{sn}_c(t)v, \text{cn}_c(t)x + \text{sn}_c(t)v \rangle_c \\ &= \frac{1}{c} \text{cn}_c^2(t) + \text{sn}_c(t) = \frac{1}{c}, \end{aligned}$$

es decir, que realmente la geodésica (2.3) se encuentra en  $\mathbb{X}_c^2$ ,

Ahora, si  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{X}_c^2$  es una curva regular, parametrizada por la longitud de arco  $s$ , definimos la variación de  $\gamma$  respecto a la curva  $\alpha$  por la familia de curvas definidas así:

$$\gamma_s(t) = \text{cn}_c(t)\alpha(s) + \text{sn}_c(t)n(s),$$

donde  $n(s)$  es el vector normal unitario a  $\alpha(s)$ .

Observemos que, para cada  $s_0$  fijo,  $\gamma_{s_0}(t)$  es una geodésica normal a  $\alpha(s)$  en el punto  $\alpha(s_0)$ . Probemos que el campo variacional

$$Y(t) = \frac{\partial \gamma}{\partial s}(t, s_0)$$

a lo largo de  $\gamma$  es un campo de Jacobi.

Usando Frenet-Serret (mirar teorema 2.10, pag 26) tenemos que:

$$\begin{aligned} Y(t) &= \text{cn}_c(t)\gamma'(s) - \text{sn}_c(t)n'(s) \\ &= \text{cn}_c(t)T(s) - \text{sn}_c(t)k(s)T(s) \\ &= (\text{cn}_c(t) - k(s)\text{sn}_c(t))T(s) \end{aligned}$$

Sabemos que para una variedad riemanniana con curvatura seccional constante  $c$  el tensor de curvatura  $R$  viene dado por la fórmula (mirar, por ejemplo, [Lee97] página 148):

$$R(X, Y)Z = c(\langle Y, Z \rangle X - \langle X, Z \rangle Y).$$

Observemos que  $Y''(t) = -cY(t)$ :

$$\begin{aligned} Y''(t) &= \frac{D}{dt} \left( \frac{D}{dt}(Y(t)) \right) \\ &= \frac{D}{dt} \left( \frac{D}{dt}(\text{cn}_c(t) - k(s)\text{sn}_c(t))T(s) \right) \\ &= \frac{D}{dt} \left( (-c\text{sn}_c(t) + k(s)\text{cn}_c(t))T(s) + (\text{cn}_c(t) - k(s)\text{sn}_c(t))T(s) \right) \frac{D}{dt}(T(s)) \\ &= \frac{D}{dt} ((-c\text{sn}_c(t) + k(s)\text{cn}_c(t))T(s)) \\ &= (-c\text{cn}_c(t) - ck(s)\text{sn}_c(t)) + \frac{D}{dt}(T(s)) \\ &= -cY(t), \end{aligned}$$

donde  $\frac{D}{dt} = \nabla_{\gamma'}$  es la derivada covariante de  $\mathbb{X}_c^2$  respecto a  $\gamma'$ .

Entonces  $Y(t)$  satisfice la ecuación de Jacobi; en efecto, por ser  $\langle Y, \gamma' \rangle_c = 0$ , tenemos que

$$Y'' + R(Y, \gamma')\gamma' = Y'' + cY = 0,$$

Por lo tanto  $Y(t) = (cn_c(t) - k(s)\text{sn}_c(t))T(s)$  es un campo de Jacobi a lo largo de la geodésica  $\gamma(t)$  ortogonal a la curva  $\alpha(s)$ .

**Definición 2.4** Sean  $\alpha$ ,  $\gamma$  y  $Y$  como antes. Diremos que  $\gamma(t)$  es un **punto focal** respecto a la curva  $\alpha$  si  $Y(t) = 0$ . Esto es equivalente a que

$$k_g(s) = \cot_c(t(s)).$$

Al conjunto de los puntos focales le llamaremos **conjunto focal**.

Notemos que sólo existen puntos focales cuando  $k_g(s) > \sqrt{-c}$  coincidiendo que ya habíamos impuesto en la observación 2.2

**Observación 2.5** Sea  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{X}_c^2$  una curva regular, parametrizada por la longitud del arco. Observemos que el conjunto focal  $F(\alpha(I))$  de  $\alpha$  es el conjunto,

$$F(\alpha(I)) = \left\{ \exp_{\alpha(s)}(\rho(s)n(s)) : s \in I \right\},$$

donde  $n(s)$  es el vector normal unitario interior a  $\alpha$  en  $s$ , y  $\rho(s)$  es el radio de curvatura.

Recordemos que  $y = \exp_x(tv)$ , con  $|v| = 1$ , significa que  $y = \sigma(t)$ , donde  $\sigma(u)$  es la única geodésica tal que  $\sigma(0) = x$  y  $\sigma'(0) = v$ .

### 2.1.1. Ecuación explícita de la evoluta en curvatura constante

En esta subsección daremos de forma explícita la ecuación de la evoluta de una curva  $\alpha$  definida en  $\mathbb{X}_c^2$ . Empecemos con la siguiente definición

**Definición 2.6** Sea  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{X}_c^2$  una curva diferenciable parametrizada por la longitud de arco  $s$ . Llamaremos al conjunto focal  $F(\alpha(I))$  **la evoluta** de  $\alpha$ .

**Observación 2.7** Notemos que si  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{X}_c^2$  es una curva diferenciable parametrizada por la longitud de arco  $s$ , entonces la evoluta de  $\alpha$  es una curva en  $\mathbb{X}_c^2$  que viene dada por:

$$\xi_\alpha(s) = \frac{1}{\sqrt{k_g^2(s) + c}}(k_g(s)\alpha(s) + n(s)). \quad (2.4)$$

En efecto, todo punto  $y \in F(\alpha(I))$  se puede expresar como:

$$y = \exp_{\alpha(s)}(\rho n(s)) = \operatorname{cn}_c(\rho(s))\alpha(s) + \operatorname{sn}_c(\rho(s))n(s).$$

Como  $k_g(s) = \cot_c(\rho(s))$ , tenemos

$$\begin{aligned} y &= \operatorname{cn}_c(\rho(s))\alpha(s) + \operatorname{sn}_c(\rho(s))n(s) \\ &= \operatorname{sn}_c(\rho(s))\left(\cot_c(\rho(s))\alpha(s) + n(s)\right) \\ &= \frac{1}{\operatorname{csc}_c(\rho(s))}\left(k_g(s)\alpha(s) + n(s)\right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{\cot_c^2(\rho(s)) + c}}\left(k_g(s)\alpha(s) + n(s)\right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{k_g^2(s) + c}}\left(k_g(s)\alpha(s) + n(s)\right), \end{aligned}$$

lo que prueba la igualdad (2.4).

## 2.2. Fibrado normal de una curva en curvatura constante

En esta sección haremos la primera comprobación de nuestra noción de evoluta de una curva  $\alpha$  en  $\mathbb{X}_c^2$  comprobando que

$$\xi_\alpha(s) = \frac{1}{\sqrt{k_g^2(s) + c}}(k_g(s)\alpha(s) + n(s))$$

coincide con la envolvente de una familia de geodésicas ortogonales a dicha curva.

**Definición 2.8** Sean  $\alpha : I \longrightarrow \mathbb{X}_c^2$  una curva diferenciable parametrizada por la longitud de arco  $s$  y  $\gamma_s(t) = \text{cn}_c(t)\alpha(s) + \text{sn}_c(t)n(s)$  la familia de geodésicas ortogonales a  $\alpha$ . Llamaremos al conjunto

$$\{(s, \text{cn}_c(t)\alpha(s) + \text{sn}_c(t)n(s)); s \in I, t \in \mathbb{R}\},$$

el **fibrado normal de  $\alpha$** .

**Teorema 2.9** Sean  $\alpha : I \longrightarrow \mathbb{X}_c^2$  una curva diferenciable parametrizada por la longitud de arco  $s$  y  $\gamma_s(t) = \text{cn}_c(t)\alpha(s) + \text{sn}_c(t)n(s)$  la familia de geodésicas ortogonales a  $\alpha$ . Entonces la envolvente de la familia  $\gamma_s(t)$  es

$$\xi_\alpha(s) = \frac{1}{\sqrt{k_g^2(s) + c}}(k_g(s)\alpha(s) + n(s)).$$

**Demostración:** Usaremos la técnica expuesta en el teorema 1.16 página 12 para determinar la envolvente de la familia  $\gamma_s(t)$ .

Denotemos el fibrado normal de  $\alpha$  así:

$$\Sigma = \{(s, \text{cn}_c(t)\alpha(s) + \text{sn}_c(t)n(s)) : s \in I, t \in \mathbb{R}\}.$$

el conjunto  $\Sigma$  es una superficie y la podemos parametrizar localmente por:

$$X(s, t) = (s, \text{cn}_c(t)\alpha(s) + \text{sn}_c(t)n(s)),$$

donde  $(s, t) \in I \times J \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ , ( $I$  y  $J$  intervalos abiertos).

Calculemos los valores críticos de la proyección  $\pi : \Sigma \longrightarrow \mathbb{X}_c^2$ .

Una base del plano tangente  $T_p \Sigma$  de  $\Sigma$  en  $p$  es  $\{X_s, X_t\}$ , donde

$$X_s = dX_q(e_1) = \left(1, (\text{cn}_c(t) - k_g(s) \text{sn}_c(t))T(s)\right)$$

$$X_t = dX_q(e_2) = \left(0, -c \text{sn}_c(t)\alpha(s) + \text{cn}_c(t)n(s)\right)$$

$e_1 = (1, 0)$ ,  $e_2 = (0, 1)$  y  $p = X(q)$ .

Como  $\pi$  es una función líneal en la “variable que proyectamos”, entonces

$$d\pi_p(X_s) = (\text{cn}_c(t) - k_g(s) \text{sn}_c(t))T(s)$$

y

$$d\pi_p(X_t) = -c \text{sn}_c(t)\alpha(s) + \text{cn}_c(t)n(s).$$

Luego,

$$d\pi_p(X_s) = 0 \text{ si sólo si, } k_g(s) = \cot_c(t(s)); \text{ es decir que } t(s) = \rho(s)$$

y  $d\pi_p(X_t) \neq 0$  para todo  $(s, t) \in I \times \mathbb{R}$ .

Por lo tanto el conjunto de los valores críticos de la proyección  $\pi : \Sigma \longrightarrow \mathbb{X}_c^2$  es el conjunto de los puntos  $y = \text{cn}_c(t)\alpha(s) + \text{sn}_c(t)n(s)$  tales que  $k_g(s) = \cot_c(t(s))$ , es decir el conjunto focal de  $\alpha$ . Por tanto

$$\xi_\alpha(s) = \frac{1}{\sqrt{k_g^2(s) + c}}(k_g(s)\alpha(s) + n(s)). \quad \square$$

### 2.3. Frenet-Serret en $\mathbb{S}^2(\frac{1}{\sqrt{c}})$ y $\mathbb{H}^2(\frac{1}{\sqrt{c}})$

En esta sección determinaremos las fórmulas de Frenet-Serret para una curva  $\alpha$  en  $\mathbb{X}_c^2$ , para  $c > 0$  y  $c < 0$ . Más adelante serán la herramienta básica para probar algunos resultados relativos a conjuntos focales en  $\mathbb{H}^2(\frac{1}{\sqrt{c}})$  y  $\mathbb{S}^2(\frac{1}{\sqrt{c}})$ .

Antes de entrar en detalles fijemos algunas notaciones de geometría hiperbólica y esférica.

Recordemos que el producto interno de Lorentz restringido al plano tangente  $T_x\mathbb{H}^2$ , para cualquier  $x \in \mathbb{H}^2$ , está definido positivamente, [Rat94].

Si  $x, y \in \mathbb{X}_c^2$ , entonces  $x \wedge_c y$  representa el productos cruz euclidiano si  $c \geq 0$ , y el producto cruz de Lorentz si  $c < 0$ .

Recordemos el producto cruz de Lorentz, para  $x = (x_1, x_2, x_3)$  y  $y = (y_1, y_2, y_3)$  en  $\mathbb{H}^2$

$$x \wedge_c y = \begin{vmatrix} -e_1 & e_2 & e_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{vmatrix} = (-(x_2y_3 - x_3y_2), x_3y_1 - x_1y_3, x_1y_2 - x_2y_1)$$

donde  $\{e_1, e_2, e_3\}$  es una base Lorentz ortonormal en  $\mathbb{R}^{2,1}$ .

Sea  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{X}_c^2$ ,  $\alpha(s) = (x_1(s), x_2(s), x_3(s))$  una curva regular en  $\mathbb{X}_c^2$  parametrizada por la longitud de arco.

Denotaremos  $\alpha'(s) = T(s)$ . Es claro que  $\langle T(s), \alpha(s) \rangle_c = 0$ .

Denotaremos  $n(s) = \sqrt{|c|}(\alpha(s) \wedge_c T(s))$ .

Observemos que:

$$\begin{aligned} \langle n(s), n(s) \rangle_c &= \langle \sqrt{|c|}(\alpha(s) \wedge_c T(s)), \sqrt{|c|}(\alpha(s) \wedge_c T(s)) \rangle_c \\ &= |c| \langle \alpha(s) \wedge_c T(s), \alpha(s) \wedge_c T(s) \rangle_c \\ &= \frac{c}{|c|} (|c|) \begin{vmatrix} \langle \alpha(s), \alpha(s) \rangle_c & \langle T(s), \alpha(s) \rangle_c \\ \langle \alpha(s), T(s) \rangle_c & \langle T(s), T(s) \rangle_c \end{vmatrix} \\ &= c \begin{vmatrix} \frac{1}{c} & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \\ &= 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \alpha(s) \wedge_c n(s) &= \alpha(s) \wedge_c \sqrt{|c|}(\alpha(s) \wedge_c T(s)) \\ &= \frac{c}{|c|} (\sqrt{|c|}) (\langle \alpha(s), T(s) \rangle_c \alpha(s) - \langle \alpha(s), \alpha(s) \rangle_c T(s)) \\ &= -\frac{1}{\sqrt{|c|}} T(s) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} T(s) \wedge_c n(s) &= T(s) \wedge_c \sqrt{|c|}(\alpha(s) \wedge_c T(s)) \\ &= \frac{c}{|c|} (\sqrt{|c|}) (\langle T(s), T(s) \rangle_c \alpha(s) - \langle \alpha(s), T(s) \rangle_c T(s)) \\ &= \frac{c}{\sqrt{|c|}} \alpha(s) \end{aligned}$$

Por tanto tenemos una referencia  $\{\alpha(s), T(s), n(s)\}$  ortogonal a lo largo de una curva  $\alpha$ . Ahora es natural pensar en obtener formulas de tipo Frenet-Serret para una curva en  $\mathbb{S}^2(\frac{1}{\sqrt{c}})$  y  $\mathbb{H}^2(\frac{1}{\sqrt{c}})$ ; el siguiente resultado, nos resuelve esta inquietud.

**Teorema 2.10** Sean  $\alpha : I \longrightarrow \mathbb{X}_c^2$  una curva regular en  $\mathbb{X}_c^2$  parametrizada por longitud de arco y  $\{\alpha(s), T(s), n(s)\}$  una referencia ortogonal ( $c < 0$  es Lorentz ortogonal) a lo largo de  $\alpha$ . Entonces.

$$\begin{aligned}\alpha'(s) &= T(s), \\ T'(s) &= -c\alpha(s) + k_g(s)n(s), \\ n'(s) &= -k_g(s)T(s),\end{aligned}$$

donde  $k_g(s)$  es la curvatura geodésica de la curva  $\alpha$  en  $\mathbb{X}_c^2$ , la cual es dada por  $k_g(s) = \langle n(s), T'(s) \rangle_c$

**Demostración:** Por definición tenemos que  $\alpha'(s) = T(s)$ . Como

$$\langle T(s), T(s) \rangle = 1,$$

tenemos que  $\langle T'(s), T(s) \rangle_c = 0$ ; por lo tanto existen números reales  $\lambda$  y  $\mu$  tal que  $T'(s) = \lambda\alpha(s) + \mu n(s)$ .

Por otro lado, como  $\langle \alpha(s), T(s) \rangle = 0$ , entonces  $\langle \alpha(s), T'(s) \rangle = -1$ ; por lo tanto  $\lambda = -c$ .

Por otro lado,

$$\mu = \mu \langle n(s), n(s) \rangle_c = \langle n(s), T'(s) \rangle_c = k_g(s).$$

Por lo tanto  $T'(s) = -c\alpha(s) + k_g(s)n(s)$ .

Ahora  $n(s) = \sqrt{|c|}(\alpha(s) \wedge_c T(s))$  entonces:

$$\begin{aligned}n'(s) &= \sqrt{|c|}(\alpha(s) \wedge_c T'(s)) \\ &= \sqrt{|c|}(\alpha(s) \wedge_c (-c\alpha(s) + k_g(s)n(s))) \\ &= -k_g(s)T(s). \quad \square\end{aligned}$$

**Observación 2.11** Observemos que cuando  $c = 0$  tenemos las fórmulas de Frenet-Serret clásicas para una curva plana en el espacio, es decir:

$$\begin{aligned} T'(s) &= k(s)n(s), \\ n'(s) &= -k(s)T(s). \end{aligned}$$

## 2.4. Singularidades de la función distancia sobre curvas en $\mathbb{S}^2(\frac{1}{\sqrt{c}})$ y $\mathbb{H}^2(\frac{1}{\sqrt{c}})$

En el capítulo anterior determinamos los puntos focales de una curva  $\alpha$  definida en  $\mathbb{R}^2$  a partir de las singularidades de la función distancia al cuadrado, ya que dichos puntos eran los centros de los círculos osculadores, los cuales tenían por lo menos orden de contacto 3 con la curva  $\alpha$ . En esta sección usaremos la misma técnica para determinar los puntos focales de una curva  $\alpha$  definida en  $\mathbb{X}_c^2$  y así comprobaremos por segunda vez que nuestra noción de evoluta es adecuada, es decir coincide con la determinada por la técnica antes dicha.

Cabe destacar en esta sección el hallazgo de un círculo osculador para una curva  $\alpha$  en  $\mathbb{X}_c^2$  como la curva que tiene por lo menos orden de contacto 3 con  $\alpha$ . Es sabido que en el caso hiperbólico tres puntos no determinan en general un círculo.

Sean  $x$  y  $y$  dos puntos en  $\mathbb{X}_c^2$ . Definimos la distancia entre  $x$  y  $y$  en  $\mathbb{X}_c^2$  como el número real  $d_c(x, y)$  tal que

$$\text{cn}_c(d_c(x, y)) = c\langle x, y \rangle_c,$$

Definamos la función  $D : I \times \mathbb{X}_c^2 \rightarrow \mathbb{R}$  como  $D(s, y) = d_c(\alpha(s), y)$ , donde  $\alpha$  es una curva regular en  $\mathbb{X}_c^2$ , parametrizada por la longitud del arco. Denotaremos  $(D_y)(s) = D(s, y)$ .

**Teorema 2.12** Sean  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{X}_c^2$  una curva regular parametrizada por la longitud de arco  $s$  y  $D(s, y) = d_c(\alpha(s), y)$  la función distancia como antes. Entonces para todo  $(s, y) \in I \times \mathbb{X}_c^2$  tenemos:

i)  $(D_y)'(s) = 0$  si y sólo si,  $y$  es generado por los vectores  $\alpha(s)$  y  $n(s)$

ii)  $(D_y)'(s) = (D_y)''(s) = 0$  si y sólo si,  $y = \pm \frac{1}{\sqrt{k_g^2(s)+c}}(k_g(s)\alpha(s) + n(s))$

iii)  $(D_y)'(s) = (D_y)''(s) = (D_y)^{(3)}(s) = 0$  si y sólo si,  
 $y = \pm \frac{1}{\sqrt{k_g^2(s)+c}}(k_g(s)\alpha(s) + n(s)), \quad k_g'(s) = 0$

iv)  $(D_y)'(s) = (D_y)''(s) = (D_y)^{(3)}(s) = (D_y)^{(4)}(s) = 0$  si y sólo si,  
 $y = \pm \frac{1}{\sqrt{k_g^2(s)+c}}(k_g(s)\alpha(s) + n(s)), \quad k_g'(s) = k_g''(s) = 0$

**Demostración:**

i)  $\Rightarrow$ ) Supongamos que  $(D_y)'(s) = 0$ . Como  $\text{cn}_c(D_y(s)) = c\langle \alpha(s), y \rangle_c$  entonces  $-c \text{sn}_c(D_y(s))D_y'(s) = c\langle \alpha'(s), y \rangle_c$ . Por lo tanto  $\langle \alpha'(s), y \rangle_c = \langle T(s), y \rangle_c = 0$ , luego el vector  $y$  es generado por los vectores  $n(s)$  y  $\alpha(s)$ .

$\Leftarrow$ ) Supongamos que el vector  $y$  es generado por los vectores  $n(s)$  y  $\alpha(s)$  entonces  $0 = c\langle \alpha'(s), y \rangle_c = -c \text{sn}_c(D_y(s))D_y'(s)$ . Por lo tanto  $(D_y)'(s) = 0$ .

ii)  $\Rightarrow$ ) Supongamos que  $(D_y)'(s) = (D_y)''(s) = 0$ , entonces  $-c \text{cn}_c(D_y(s))(D_y'(s))^2 - c \text{sn}_c(D_y(s))(D_y''(s)) = c\langle \alpha''(s), y \rangle = 0$ . Por i) tenemos que existen números reales  $\lambda$  y  $\mu$  tal que  $y = \lambda\alpha(s) + \mu n(s)$ . Por las fórmulas de Frenet Serret se tiene que:

$$\alpha''(s) = T'(s) = -c\alpha(s) + k_g n(s),$$

luego

$$\langle \alpha''(s), y \rangle_c = \langle -c\alpha(s) + k_g n(s), \lambda\alpha(s) + \mu n(s) \rangle_c = -\lambda + k_g \mu = 0.$$

Como  $\langle y, y \rangle = 1/c$  entonces  $\mu = \pm 1/\sqrt{k_g^2(s) + c}$ .

Por lo tanto

$$y = \pm \frac{1}{\sqrt{k_g^2(s) + c}} (k_g(s)\alpha(s) + n(s)).$$

$\Leftrightarrow$ ) Supongamos que  $y = \pm \frac{1}{\sqrt{k_g^2(s)+c}} (k_g(s)\alpha(s) + n(s))$ , entonces usando Frenet Serret se tiene:

$$c\langle T'(s), y \rangle_c = c\langle \alpha''(s), y \rangle_c = 0,$$

pero

$$c\langle \alpha''(s), y \rangle_c = -c \operatorname{cn}_c(D_y(s))(D'_y(s))^2 - c \operatorname{sn}_c(D_y(s))(D''_y(s)),$$

luego  $D'_y(s) = D''_y(s) = 0$ .

iii)  $\Rightarrow$ ) Supongamos  $(D_y)'(s) = (D_y)''(s) = (D_y)^{(3)}(s) = 0$ , entonces

$$c^2 \operatorname{sn}_c(D_y(s))(D'_y(s))^3 - 3c \operatorname{cn}_c(D_y(s))D'_y(s)(D''_y(s)) - c \operatorname{sn}_c(D_y(s))D_y^{(3)}(s) = c\langle \alpha^{(3)}(s), y \rangle_c = 0.$$

Usando Frenet- Serret se tiene que

$$\langle \alpha^{(3)}(s), y \rangle_c = \langle -(c + k_g^2)T, y \rangle_c = 0 \quad y \quad k'_g(s) = 0$$

Por lo tanto

$$y = \pm \frac{1}{\sqrt{k_g^2(s) + c}} (k_g(s)\alpha(s) + n(s)).$$

Para demostrar el recíproco se argumenta de la misma manera como en i) y ii).

iv)  $\Rightarrow$ ) Supongamos que  $(D_y)'(s) = (D_y)''(s) = (D_y)^{(3)}(s) = (D_y)^{(4)}(s) = 0$  por un cálculo directo de  $(D_y)^{(4)}(s)$  tenemos que  $\langle \alpha^{(4)}(s), y \rangle_c = 0$ . Usando Frenet-Serret tenemos que

$$c\langle \alpha^{(4)}(s), y \rangle_c = c\langle -(c + k_g^2)(-c\alpha(s) + k_g N), y \rangle_c = 0 \quad y \quad k'_g(s) = k''_g(s) = 0$$

Por lo tanto

$$y = \pm \frac{1}{\sqrt{k_g^2(s) + c}} (k_g(s)\alpha(s) + n(s)).$$

Para demostrar el recíproco se argumenta de la misma manera como en i) y ii).  $\square$

**Observación 2.13** Notemos que tomando  $y$  con signo positivo, es decir

$$y = \frac{1}{\sqrt{k_g^2(s) + c}} (k_g(s)\alpha(s) + n(s)),$$

vemos que coincide con nuestra noción de evoluta expuesta en la sección anterior (Observación 2.7).

Tomemos los siguientes círculos en  $\mathbb{X}_c^2$ , un paralelo en  $\mathbb{S}^2(\frac{1}{\sqrt{c}})$  y de forma similar un paralelo en el hiperboloide  $\mathbb{H}^2(\frac{1}{\sqrt{c}})$ , esperamos que tengan como evoluta un punto en  $\mathbb{X}_c^2$ .

**Ejemplo 2.14** Sea  $\alpha(s) = (\frac{1}{\sqrt{|c|}} \text{cn}_c(t), \text{sn}_c(t) \cos(\theta(s)), \text{sn}_c(t) \sin(\theta(s)))$ , una curva en  $\mathbb{X}_c^2$  parametrizada por la longitud del arco; donde  $t$  es fijo y

$$\theta(s) = \frac{s}{\text{sn}_c(t)}.$$

Calculemos la evoluta de  $\alpha$ .

Como  $n(s) = \sqrt{|c|}(\alpha(s) \wedge_c T(s))$ , entonces

$$\begin{aligned} n(s) &= \sqrt{|c|} \begin{vmatrix} \frac{c}{|c|} e_1 & e_2 & e_3 \\ \frac{1}{\sqrt{|c|}} \text{cn}_c(t) & \text{sn}_c(t) \cos(\theta(s)) & \text{sn}_c(t) \sin(\theta(s)) \\ 0 & -\sin(\theta(s)) & \cos(\theta(s)) \end{vmatrix} \\ &= \left( \frac{c}{\sqrt{|c|}} \text{sn}_c(t), -\text{cn}_c(t) \cos(\theta(s)), -\text{cn}_c(t) \sin(\theta(s)) \right). \end{aligned}$$

Por otro lado tenemos:

$$k_g(s) = \cot_c(t) \text{ y } \frac{1}{\sqrt{k_g^2(s) + c}} = \text{sn}_c(t).$$

Por lo tanto la evoluta de  $\alpha$  es:

$$\begin{aligned}
\xi_\alpha(s) &= \frac{1}{\sqrt{k_g^2(s) + c}}(k_g(s)\alpha(s) + n(s)) \\
&= cn_c(t)\alpha(s) + sn_c(t)n(s) \\
&= \left(\frac{1}{\sqrt{|c|}} cn_c^2(t), cn_c(t) sn_c(t) \cos(\theta(s)), cn_c(t) sn_c(t) \sin(\theta(s))\right) \\
&+ \left(\frac{c}{\sqrt{|c|}} sn_c^2(t), -cn_c(t) sn_c(t) \cos(\theta(s)), -cn_c(t) sn_c(t) \sin(\theta(s))\right) \\
&= \left(\frac{1}{\sqrt{|c|}} cn_c^2(t) + \frac{c}{\sqrt{|c|}} sn_c^2(t), 0, 0\right) \\
&= \left(\frac{1}{\sqrt{|c|}}, 0, 0\right).
\end{aligned}$$

## 2.5. Círculo osculador en curvatura constante

Vamos a estudiar algunas propiedades geométricas de la evoluta  $\xi_\alpha$  de una curva  $\alpha$  en  $\mathbb{X}_c^2$ , principalmente lo referente al círculo osculador, es decir, el círculo con centro en  $\xi_\alpha$  y radio  $r = \rho(s)$  como el círculo que tiene contacto de orden 3 con la curva  $\alpha$ .

Sean  $r \in \mathbb{R}$  y  $y_0 \in \mathbb{X}_c^2$ . Al círculo de  $\mathbb{X}_c^2$  de centro en  $y_0$  y radio  $r$  lo denotaremos por

$$C(y_0, r) = \{y \in \mathbb{X}_c^2 : d_c(y_0, y) = r\}.$$

**Teorema 2.15** *Sea  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{X}_c^2$  una curva parametrizada por la longitud de arco  $s$ . Entonces  $k'_g \equiv 0$  si sólo si,  $y(s) = \frac{1}{\sqrt{k_g^2(s) + c}}(k_g(s)\alpha(s) + n(s))$  es constante.*

**Demostración:**

$$\begin{aligned} y'(s) &= -(k_g^2 + c)^{-\frac{3}{2}} k_g(s) k'_g(s) (k_g(s) \alpha(s) + n(s)) \\ &+ (k_g^2(s) + 1)^{-\frac{1}{2}} (k'_g(s) \alpha(s) + k_g(s) \alpha'(s) + n'(s)) \\ &= \frac{k'_g(s) c}{(k_g^2(s) + c)^{\frac{3}{2}}} \alpha(s) - \frac{k_g(s) k'_g(s)}{(k_g^2(s) + c)^{\frac{3}{2}}} n(s), \end{aligned}$$

Por lo tanto  $y'(s) = 0$  si sólo si  $k'_g(s) = 0$  para todo  $s \in I$ .  $\square$

**Observación 2.16** Si  $k'_g \equiv 0$  entonces  $k_g(s)$  es constante para todo  $s \in I$ , luego

$$d_c(\xi_\alpha(s), \alpha(s)) = \text{cn}_c^{-1}\left(\frac{k_g(s)}{\sqrt{k_g^2(s) + c}}\right),$$

es constante para todo  $s \in I$ ; por lo tanto  $\alpha$  es un arco de círculo en  $\mathbb{X}_c^2$ , cuyo centro es su evoluta  $\xi_\alpha(s)$  y su radio es  $r = \text{cn}_c^{-1}\left(\frac{k_g(s)}{\sqrt{k_g^2(s) + c}}\right)$ . Si  $\alpha$  es un círculo de centro en un punto cualquiera de  $\mathbb{X}_c^2$  y radio  $r$ , entonces  $k_g(s) = \cot_c(r)$  para todo  $s \in I$ , luego  $k'_g \equiv 0$  para todo  $s \in I$ ; por lo tanto la evoluta  $\xi_\alpha$  es un punto.

**Teorema 2.17** Sean  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{X}_c^2$  una curva parametrizada por longitud de arco, y para un  $s_0 \in I$  tal que  $k_g(s_0) > \sqrt{-c}$  si  $c < 0$ , consideremos  $C(y_0, r)$ , donde  $y_0 = \xi_\alpha(s_0)$  y  $r_0 = \text{cn}_c^{-1}\left(\frac{k_g(s_0)}{\sqrt{k_g^2(s_0) + c}}\right)$ . Entonces  $\alpha$  y  $C(y_0, r_0)$  tiene contacto por lo menos de orden 3 en  $\alpha(s_0)$

**Demostración:** Si fijamos  $y_0$ , por definición tenemos que

$$C(y_0, r_0) = (d_c)^{-1}(r_0),$$

donde  $d_c$  es la función distancia a  $y_0$  en  $\mathbb{X}_c^2$ . Por el teorema 2.12 se tiene que  $\alpha$  y  $C^1(y_0, r_0)$  tienen por lo menos contacto de orden 3 en  $\alpha(s_0)$ .  $\square$

**Corolario 2.18** El círculo osculador  $C(y_0, r_0)$  y la curva  $\alpha$  tiene contacto de orden 3 en  $\alpha(s_0)$  (resp. punto de contacto de orden 4 o superior) si y sólo si  $k'_g(s_0) \neq 0$ , (resp.  $k'_g(s_0) = 0$ ).

Por lo anterior se dice que  $y_0$  es el centro de curvatura geodésica, que  $r_0$  es el radio de curvatura geodésica y que  $C(y_0, r_0)$  es el círculo osculador.

Vemos que el círculo osculador de una curva  $\alpha$  en  $\mathbb{X}_c^2$ , ( $c \neq 0$ ), tiene las mismas propiedades respecto a la teoría de contacto, que el círculo osculador clásico de una curva en  $\mathbb{R}^2$ . Por ejemplo, podemos decir que un punto  $\alpha(s_0)$  es un vértice de la curva  $\alpha$  si existe un círculo en  $\mathbb{X}_c^2$ , cuyo contacto en dicho punto es de orden 4.



## Capítulo 3

# Integral del radio de curvatura en $\mathbb{R}^2$

En el capítulo 1 vimos (página 6) el análogo en dimensión 2 de la desigualdad de Heintze y Karcher, es decir:

Si  $N = \partial\Omega$  es la frontera de un dominio convexo compacto  $\Omega$  en  $\mathbb{R}^2$  de área  $F$ , con curvatura  $k$  positiva en todo punto, entonces

$$\int_N \frac{1}{k(s)} ds \geq 2F, \quad (3.1)$$

donde  $ds$  significa la medida de longitud de arco en  $N$ . La igualdad se obtiene si  $N$  es una circunferencia.

En este capítulo daremos una prueba más corta de la fórmula (3.1) la cual tiene una ventaja, nos da la interpretación geométrica de la diferencia:

$$2F - \int_N \frac{1}{k(s)} ds,$$

concretamente probaremos que:

$$\int_N \frac{1}{k(s)} ds = 2(F - F_e),$$

donde  $F_e$  ( $\leq 0$ ) es el área (algebraica) del dominio acotada por la evoluta de  $N$ .

Este será nuestro primer resultado original. Este resultado se encuentra en el artículo **An interesting property of the evolute**, aceptado para publicación en la revista, *The American Mathematical Monthly*. Por lo tanto en este capítulo estudiaremos con detalle dicho artículo.

## 3.1. Preliminares

En esta sección estudiaremos brevemente ciertos resultados de geometría y análisis que son indispensables para demostrar el resultado principal de este capítulo.

### 3.1.1. Envolverte de una familia de rectas

Haremos una exposición igual a la que se da en [San76], para determinar una parametrización de la envolvente de una familia de rectas.

Una línea recta  $G$  en el plano está determinada por el ángulo  $\phi$  formado por la dirección perpendicular a  $G$  con una dirección fija y su distancia  $p = p(\phi)$  a un origen.

La ecuación de esta recta será entonces

$$x \cos \phi + y \sin \phi - p = 0. \quad (3.2)$$

La ecuación (3.2), cuando  $p = p(\phi)$  variando  $\phi$ , es la ecuación de una familia de rectas. Si suponemos que  $p = p(\phi)$  es diferenciable, entonces según la definición 1.13 (página 11), tenemos que la envolvente de la familia de rectas se obtiene de (3.2) y de su derivada:

$$-x \sin \phi + y \cos \phi - p' = 0, \quad p' = dp/d\phi \quad (3.3)$$

Por lo tanto de (3.2) y (3.3) tenemos una parametrización de la envolvente de la familia de rectas dada por la ecuación (3.2) cuando hacemos variar  $\phi$ :

$$\begin{aligned} x &= p \cos \phi - p' \sin \phi, \\ y &= p \sin \phi + p' \cos \phi. \end{aligned} \quad (3.4)$$

Si la envolvente de esta familia de rectas es la frontera  $\partial\Omega$  de un conjunto convexo  $\Omega$  y el origen es un punto interior de  $\Omega$ , entonces  $p = p(\phi)$  es llamada **la función soporte** de  $\Omega$  o la función soporte de la curva convexa  $\partial\Omega$ .

Se deduce de (3.4) que

$$dx = -(p + p'') \sin \phi d\phi, \quad dy = (p + p'') \cos \phi d\phi,$$

y por lo tanto la diferencial de arco de la envolvente es:

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2} = |p + p''| d\phi. \quad (3.5)$$

Se deduce de (3.5) que el radio de curvatura está dado por

$$\rho = ds/d\phi = |p + p''|. \quad (3.6)$$

Recordemos que una condición necesaria y suficiente para que una función periódica  $p = p(\phi)$  sea la función soporte de un conjunto convexo es que:

$$p + p'' > 0. \quad (3.7)$$

Ya que  $p'(\phi)$  es periódica, se deduce de (3.7) y (3.5) que la longitud de una curva convexa que tiene función soporte  $p$  de clase  $C^2$  está dada por:

$$L = \int_0^{2\pi} p d\phi$$

El área del conjunto convexo  $\Omega$  en término de la función soporte está dada por:

$$F = \frac{1}{2} \int_{\partial\Omega} p ds = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} p(p + p'') d\phi, \quad (3.8)$$

o, equivalentemente, por

$$dF = \frac{1}{2} p ds = \frac{1}{2} p \rho d\phi.$$

### 3.1.2. Relación de Parseval y desigualdad de Wirtinger

Recordemos brevemente la relación de Parseval y la desigualdad de Wirtinger para una función  $f$  periódica (periodo  $2\pi$ ) y de clase  $C^2$ . El lector interesado en más detalles de estos resultados de análisis, puede mirar por ejemplo [Tal93] página 81 o [Hop83] página 52 o [Nil81] páginas 175 y 211.

Si  $f$  es una función periódica, de período  $2\pi$  y de clase  $C^2$ , entonces la serie de Fourier generada por  $f$  en su forma compleja, se escribe así:

$$f(x) \sim \sum_{-\infty}^{\infty} c_n e^{inx},$$

donde

$$c_n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) e^{int} dt.$$

Una de las propiedades que tienen los coeficientes de la serie de Fourier es la clásica relación de Parseval que en nuestro caso, para la función  $f$  es:

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(t)|^2 dt = \sum_{-\infty}^{\infty} |c_n|^2.$$

La relación de Parseval implica la desigualdad de Wirtinger, que enunciamos en el siguiente lema:

**Lema 3.1** *Sea  $f$  una función periódica de clase  $C^2$ , y período igual a  $2\pi$ . Entonces*

$$\int_0^{2\pi} |f'|^2 d\phi \leq \int_0^{2\pi} |f''|^2 d\phi. \quad (3.9)$$

La igualdad se da, si y sólo si,  $f(\phi) = a \cos \phi + b \sin \phi + c$ , para algunas constantes  $a, b$  y  $c$ .

**Demostración:** Si la serie de Fourier de  $f$  es:

$$f(x) \sim \sum_{-\infty}^{\infty} c_n e^{inx},$$

entonces las series de Fourier de  $f'$  y  $f''$  está dada por:

$$f'(x) \sim \sum_{-\infty}^{\infty} i n c_n e^{inx}, \quad f''(x) \sim \sum_{-\infty}^{\infty} (in)^2 c_n e^{inx}.$$

Por la relación de Parseval tenemos que:

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f'(t)|^2 dt = \sum_{-\infty}^{\infty} n^2 |c_n|^2.$$

y

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f''(t)|^2 dt = \sum_{-\infty}^{\infty} n^4 |c_n|^2.$$

Por lo tanto

$$\int_0^{2\pi} |f'|^2 d\phi \leq \int_0^{2\pi} |f''|^2 d\phi.$$

Supongamos la igualdad en la fórmula (3.9), entonces nuevamente por la relación de Parseval, los coeficientes  $c_n$  son iguales a cero, para todo  $n = \pm 2, \pm 3, \pm 4, \dots$ , por lo tanto  $f(\phi) = a \cos \phi + b \sin \phi + c$ , para algunas constantes  $a, b$  y  $c$ .

Ahora si  $f(\phi) = a \cos \phi + b \sin \phi + c$ , es claro que se obtiene la igualdad en (3.9)  $\square$

### 3.1.3. Hedgehogs

Recordaremos brevemente lo que es un hedgehog (*erizo*). El lector interesado en más detalles puede mirar por ejemplo [MM96]

**Definición 3.2** Si  $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  es una función de clase  $C^1$  de período  $2\pi$ , entonces el hedgehog  $\alpha_h$  determinado por  $h$  está definido por:

$$\alpha_h(\phi) = (h(\phi) \cos \phi - h'(\phi) \sin \phi, h(\phi) \sin \phi + h'(\phi) \cos \phi).$$

**Observación 3.3** Notemos que el hedgehog determinado por  $h$  es la envolvente de la familia de rectas dada por:

$$x \cos \phi + y \sin \phi = h(\phi).$$

También notamos que la función  $h$  de un hedgehog, es una generalización de la función soporte de un conjunto convexo.

**Ejemplo 3.4** Si  $h(\phi) = \cos(25\phi)$ , entonces su hedgehog correspondiente tendrá la siguiente gráfica:

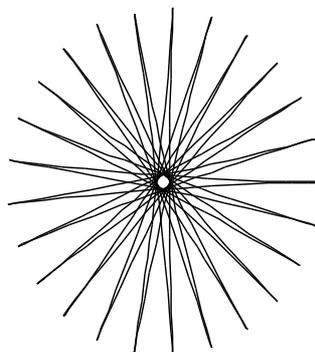


figura 5

El área (algebraica) de un hedgehog está dada por:

$$F_h = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} h(h + h'') d\phi = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (h^2 - h'^2) d\phi.$$

**Observación 3.5** La cantidad  $F_h$  puede ser positiva, negativa o cero. Si  $h$  es la función soporte de un conjunto convexo, entonces  $F_h$  es el área euclídea del conjunto convexo, mirar fórmula (3.8), y en particular esta área es positiva

Veremos que en el caso, cuando  $h$  es la función que determina un hedgehog que es la evoluta de  $\partial\Omega$ , donde  $\Omega$  es un conjunto convexo, entonces  $F_h \leq 0$ .

## 3.2. Resultado en $\mathbb{R}^2$

En esta sección exponemos nuestro primer resultado original; pero cabe anotar que también en esta sección describiremos de una forma elegante y sencilla una parametrización de la evoluta de una curva convexa.

Sea  $N$  una curva cerrada. Supongamos que  $N$  es la frontera de un conjunto convexo  $\Omega$ , y el origen de coordenadas está en el interior de  $\Omega$ .

Supongamos que la función soporte  $p = p(\phi)$  de  $\Omega$  es de clase  $C^3$  y de período  $2\pi$ .

Una parametrización  $\alpha_p(\phi) = (x(\phi), y(\phi))$  de  $N$  puede ser dada por:

$$x(\phi) = p(\phi) \cos \phi - p'(\phi) \sin \phi, \quad y(\phi) = p(\phi) \sin \phi + p'(\phi) \cos \phi.$$

Con esta parametrización la evoluta  $\tilde{\alpha}$  de  $\alpha_p$  está dada por:

$$\tilde{\alpha}(\phi) = \alpha_p(\phi) + \rho(\phi) \frac{(-y'(\phi), x'(\phi))}{((x'(\phi))^2 + (y'(\phi))^2)^{\frac{1}{2}}},$$

donde  $\rho(\phi)$  es el radio de curvatura de  $\alpha_p(\phi)$ .

Por las fórmulas (3.5) y (3.6) tenemos que

$$\tilde{\alpha}(\phi) = \alpha_p(\phi) + (-y'(\phi), x'(\phi)).$$

Equivalentemente,  $\tilde{\alpha}(\phi) = (\tilde{x}(\phi), \tilde{y}(\phi))$ , con

$$\begin{aligned} \tilde{x}(\phi) &= x(\phi) - y'(\phi) = -p'(\phi) \sin \phi - p''(\phi) \cos \phi \\ \tilde{y}(\phi) &= y(\phi) + x'(\phi) = p'(\phi) \cos \phi - p''(\phi) \sin \phi \end{aligned}$$

Las anteriores ecuaciones representan una parametrización de la evoluta de la curva  $N$  por la función  $p$  del convexo  $\Omega$ . Observemos que dicha parametrización no es complicada.

**Observación 3.6** Notemos lo siguiente:

Sea  $H(\phi) = -p'(\phi + \frac{\pi}{2})$ . Entonces  $H(\phi)$  es una función de clase  $C^2$  y de período  $2\pi$  y el hedgehog definido por  $H(\phi)$  es:

$$\begin{aligned}\alpha_H(\phi) &= (H(\phi) \cos \phi - H'(\phi) \sin \phi, H(\phi) \sin \phi + H'(\phi) \cos \phi) \\ &= (-p'(\phi + \frac{\pi}{2}) \cos \phi + p''(\phi + \frac{\pi}{2}) \sin \phi, -p'(\phi + \frac{\pi}{2}) \sin \phi - p''(\phi + \frac{\pi}{2}) \cos \phi).\end{aligned}$$

En particular

$$\begin{aligned}\alpha_H(\phi - \frac{\pi}{2}) &= (-p'(\phi) \sin \phi - p''(\phi) \cos \phi, p'(\phi) \cos \phi - p''(\phi) \sin \phi) \\ &= (\tilde{x}(\phi), \tilde{y}(\phi)) = \tilde{\alpha}(\phi).\end{aligned}$$

Es decir, la evoluta  $\tilde{\alpha}$  es el hedgehog  $\alpha_H$ .

Por lo tanto el área (algebraica)  $F_e$  de la evoluta de una curva convexa, con función soporte  $p = p(\phi)$  es igual al área (algebraica) de  $F_H$  del hedgehog determinado por la función  $H(\phi) = -p'(\phi + \frac{\pi}{2})$ .

Es decir,

$$\begin{aligned}F_e &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} H(H + H'') d\phi \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} p'(p' + p''') d\phi.\end{aligned}$$

**Teorema 3.7** *La integral de los radios de curvatura  $\rho(s)$  de una curva plana  $N$  convexa es dos veces el área del dominio acotado por ella menos el área (algebraica) del dominio acotado por su evoluta. Es decir*

$$\int_N \rho ds = 2(F - F_e). \quad (3.10)$$

**Demostración:** El área  $F_e$  de la evoluta es:

$$F_e = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} p'(p' + p''')d\phi$$

Pero integrando por partes tenemos:

$$\int_0^{2\pi} (p''p) d\phi = - \int_0^{2\pi} (p')^2 d\phi,$$

y

$$\int_0^{2\pi} (p'p''') d\phi = - \int_0^{2\pi} (p'')^2 d\phi.$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned} F_e &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} ((p')^2 - (p'')^2) d\phi & (3.11) \\ &= -\frac{1}{2} \int_0^{2\pi} p''(p + p'') d\phi \\ &= -\frac{1}{2} \int_N p'' ds \end{aligned}$$

ya que  $ds = (p + p'')d\phi$ .

Concluimos que,

$$2F_e = - \int_N p'' ds = - \int_N (\rho - p) ds = 2F - \int_N \rho ds.$$

o

$$\int_N \rho ds = 2(F - F_e) \quad \square$$

**Corolario 3.8** *Sea  $N = \partial\Omega$  una curva de clase  $C^2$  la cual es la frontera de un conjunto convexo  $\Omega$  en el plano. Entonces*

$$\int_N \rho ds \geq 2F, \quad (3.12)$$

**Demostración:** La desigualdad en (3.12) es una consecuencia del teorema anterior y del hecho que  $F_e \leq 0$ ; pero aplicando el lema 3.1 y la fórmula (3.11) se tiene que  $F_e \leq 0$ .

Ahora si tenemos la igualdad en (3.12), entonces  $F_e = 0$  y por lo tanto tenemos la igualdad en la fórmula de Wirtinger. Es decir,  $p(\phi) = a \cos \phi + b \sin \phi + c$ . Pero esto implica que  $N$  es una circunferencia de centro en  $(a, b)$  y radio  $|c|$ , ya que  $p(\phi)$  es la función soporte de la circunferencia de centro  $(a, b)$  y radio  $|c|$   $\square$

**Observación 3.9 (ver observación 4.22 pag 59)** En el capítulo 4 generalizamos el teorema 3.7 a espacios de curvatura constante  $c$ . Cuando  $c = 0$  obtenemos la igualdad (3.10), y sin usar Wirtinger demostramos la desigualdad (3.12), lo cual implica que  $F_e \leq 0$ . Con lo anterior obtuvimos otra prueba de la desigualdad de Wirtinger y además una interpretación geométrica de dicha desigualdad.

# Capítulo 4

## Integral de funciones focales

En el capítulo anterior demostramos que la integral de los radios de curvatura de una curva plana convexa es dos veces el área del dominio acotado por ella menos el área (algebraica) de el dominio acotado por su evoluta. Es decir

$$\int_N \rho ds = 2(F - F_e). \quad (4.1)$$

En este capítulo generalizamos (4.1) a conjuntos convexos de una variedad riemanniana  $\mathbb{X}_c^2$  de dimensión 2, completa, simplemente conexa y de curvatura constante  $c$ . Es decir, la esfera  $\mathbb{S}_c^2$  de radio  $\frac{1}{\sqrt{c}}$  para  $c > 0$ , o el plano hiperbólico  $\mathbb{H}_c^2$  para  $c < 0$  (la esfera imaginaria de radio  $Ri = \frac{1}{\sqrt{c}}$ ).

Usando técnicas como en [GRST05], obtenemos el siguiente resultado el cual coincide, para  $c = 0$ , con la fórmula (4.1).

**Teorema 4.1** *Sea  $\Omega$  un dominio regular convexo en  $\mathbb{X}_c^2$ , si  $c \geq 0$ , o fuertemente  $h$ -convexo si  $c < 0$ , con frontera  $N = \partial\Omega$ . Entonces*

$$\int_N \tan_c\left(\frac{\rho(s)}{2}\right) ds = F - F_e,$$

donde  $s$  la longitud del arco de  $N$ ,  $F$  es el área de  $\Omega$  y  $F_e$  el área (algebraica) del conjunto focal  $F(N)$  de  $N$ .

Las nociones de convexidad usadas arriba son definidas en la primera sección de este capítulo y la función *tangente generalizada* se define por  $\tan_c = \text{sn}_c / \text{cn}_c$  (ver (2.1) y (2.2)).

Ya que el trabajo en general tiene un interés en el estudio del conjunto focal de una curva  $\alpha$  en  $\mathbb{X}_c^2$ , y dicho conjunto es determinado por el radio de curvatura de la curva  $\alpha$ , entonces el título del capítulo, integral de funciones focales, hace referencia a las integrales que envuelven funciones de radio de curvatura.

## 4.1. Preliminares

### 4.1.1. Convexidad y curvatura en $\mathbb{S}^2(\frac{1}{\sqrt{c}})$ y $\mathbb{H}^2(\frac{1}{\sqrt{c}})$

Para fijar ideas recordaremos brevemente las nociones de convexidad y curvatura en  $\mathbb{X}_c^2$ .

**Definición 4.2** *Diremos que un dominio  $\Omega \subset \mathbb{X}_c^2$  es regular si su frontera admite una parametrización regular. Es decir, existe una aplicación inyectiva diferenciable  $\alpha : S^1(L) \rightarrow N = \partial\Omega$  con  $|\alpha'(s)| = 1$ , donde  $L$  es una constante,  $S^1(L)$  es el círculo euclidiano de radio  $L/2\pi$  y  $s$  es el parámetro arco de este círculo.*

Notemos que  $L$  es el perímetro de  $\partial\Omega$ . Usaremos  $s$  como la longitud del arco de  $\partial\Omega$  (una vez tenemos fijada una parametrización  $\alpha$ ).

$n(s) = \sqrt{|c|}(\alpha(s) \wedge_c \alpha'(s))$  es interior a  $\partial\Omega$ . Escogeremos la orientación de  $\alpha(s)$  de forma que  $n(s)$  sea interior a  $\Omega$ .

**Definición 4.3** *Un dominio regular  $\Omega \subset \mathbb{X}_c^2$  se dice convexo (resp. fuertemente convexo) si la curvatura geodésica en todo punto de  $N = \partial\Omega$  es no-negativa (resp. positiva).*

El signo de la curvatura lo definimos por la condición

$$\nabla_T T = k n,$$

donde  $\nabla$  es la derivada covariante de  $\mathbb{X}_c^2$ , donde  $n$  es el campo vectorial normal unitario interior a  $N$ , y  $T = \alpha'$  donde  $\alpha : S^1(L) \rightarrow \mathbb{X}_c^2$  es una parametrización regular de  $N$ .

Si  $c > 0$  y  $\Omega$  es convexo se deduce que  $\Omega$  está contenido en media esfera  $\mathbb{S}^2(\frac{1}{\sqrt{c}})$ .

Si  $c < 0$  necesitamos una noción más fuerte de convexidad.

**Definición 4.4** Un dominio regular  $\Omega \subset \mathbb{H}^2(\frac{1}{\sqrt{c}})$  con frontera  $N = \partial\Omega$  se dice *h-convexo* (resp. *fuertemente h-convexo*) si la curvatura en todo punto de  $N$  es mayor o igual que  $\sqrt{-c}$  (resp. mayor que  $\sqrt{-c}$ ).

Ya que la curvatura  $k$  de la frontera de un disco de radio  $r$  en  $\mathbb{H}^2(\frac{1}{\sqrt{c}})$  es dada por

$$k = \sqrt{-c} \coth(\sqrt{-c}r),$$

y  $\coth(t) > 1, \forall t > 0$ , entonces el disco es fuertemente *h-convexo*.

**Observación 4.5** Notemos que la noción de convexidad aquí dada es equivalente a la noción usual de convexidad geodésica. En algunas ocasiones un conjunto *h-convexo* es llamado horocíclicamente convexo, porque en este caso los horociclos que unen puntos en  $\Omega$  están contenidos en  $\Omega$ .

Para  $N = \partial\Omega$  borde de un dominio convexo (y *h-convexo* cuando  $c < 0$ ), el radio de curvatura  $\rho(s)$  está definido (a través de  $\cot_c(\rho(s)) = k(s)$ , mirar definición 2.1) para todo punto.

Usaremos con frecuencia las fórmulas (2.1) y (2.2) de las funciones generalizadas  $\text{sn}_c$  y  $\text{cn}_c$  página 18.

Usaremos que el área y el perímetro de un disco de radio  $t$  en  $\mathbb{X}_c^2$  son dados respectivamente por

$$\begin{aligned} A(t) &= \frac{2\pi}{c}(1 - \text{cn}_c(t)), \\ L(t) &= 2\pi \text{sn}_c(t). \end{aligned} \tag{4.2}$$

Similarmente como en la definición 2.5 página 21 tenemos una definición del conjunto focal de la frontera de un dominio regular.

**Definición 4.6** Sea  $N$  la frontera de un dominio regular  $\Omega \subset X_c^2$ . Entonces el conjunto focal  $F(N)$  de  $N$  es el conjunto

$$F(N) = \{\exp_x(\rho(x)n(x)); x \in N\} \subset X_c^2,$$

donde  $n(x)$  es el vector normal interior a  $N$  en el punto  $x \in N$ .

**Observación 4.7** El conjunto focal de  $N$  también es llamado la evoluta de  $N$ . Recordemos del capítulo 2 que  $F(N)$  es el lugar de los centros de los círculos osculadores de  $N$  y que es diferenciable excepto en los centros de los círculos con contacto mayor que 3 (ver corolario 2.18 y la demostración del teorema 2.15). Además, del corolario 1.15 sabemos que la geodésica normales a  $N$  son tangentes a  $F(N)$ . En efecto,  $F(N)$  es el conjunto de valores críticos de  $\phi(x, t) = \exp_x(tn(x))$ , para  $x \in N$  y  $t \in \mathbb{R}$ .

#### 4.1.2. Winding number en $\mathbb{S}^2(\frac{1}{\sqrt{c}})$ y $\mathbb{H}^2(\frac{1}{\sqrt{c}})$

**Definición 4.8** El winding number  $\text{wind}(\alpha, y)$  (el número de vueltas) de una curva  $\alpha : S^1(L) \rightarrow X_c^2$  con respecto a un punto  $y \in X_c^2 \setminus \alpha(S^1(L))$  es el grado de la aplicación  $\varphi : S^1(L) \rightarrow T_y X_c^2$  definida por la condición  $\|\varphi(s)\| = 1$  y

$$\exp_y \lambda(s)\varphi(s) = \alpha(s),$$

para alguna función  $\lambda = \lambda(s)$ .

Es decir, que a cada punto  $\alpha(s)$  le asociamos el único vector tangente unitario en  $y$  el cual es tangente a la única geodésica que une  $y$  con  $\alpha(s)$ . Diremos que  $\varphi$  es la *aplicación winding* respecto a  $y$  asociada a  $\alpha$ .

Observemos que  $\text{wind}(\alpha, y)$  es igual al número de intersecciones algebraica de  $\alpha(S^1(L))$  con un rayo geodésico arbitrario que sale de  $y$ , ( mirar por ejemplo [GP74]).

**Observación 4.9** Notemos que  $\varphi$  la podemos pensar de  $S^1(L)$  en  $S^1$ . Notemos que si movemos  $y$  a lo largo de cualquier arco que no corte  $\alpha(S^1(L))$  el winding number no cambia. Por lo tanto, el winding number de  $\alpha$  respecto a  $y$  permanece constante en cualquier componente conexa de  $X_c^2 \setminus \alpha(S)$ . Mirar [DC76] página 392.

**Definición 4.10** Sea  $N$  la frontera del dominio regular  $\Omega \subset \mathbb{X}_c^2$  y  $y \notin N$ . Definimos

$$\text{wind}(N, y) = \text{wind}(\alpha, y),$$

donde  $\alpha$  es una parametrización regular de  $N$  tal que la base  $\{\alpha', n\}$  es positiva.

Definimos el winding number del conjunto focal por:

$$\text{wind}(F(N), y) = \text{wind}(\tilde{\alpha}, y),$$

donde

$$\tilde{\alpha} = \exp_{\alpha(s)}(\rho(\alpha(s))n(\alpha(s)))$$

es la parametrización de  $F(N)$  inducida por la parametrización  $\alpha$  de  $N$ .

Una vez que tengamos la parametrización  $\alpha$ , escribiremos  $\rho(s)$  y  $n(s)$  en vez de  $\rho(\alpha(s))$  y  $n(\alpha(s))$ .

**Definición 4.11** Sea  $F(N)$  el conjunto focal de  $N$ . Definimos el área algebraica de  $F(N)$  como

$$F_e = \int_{\mathbb{X}_c^2} \text{wind}(F(N), y) dy.$$

Según la definición anterior, el área encerrada por  $F(N)$  es contada con signo y multiplicidad.

**Observación 4.12** Sean  $\alpha$  la parametrización de la frontera de un dominio regular,  $\varphi$  la aplicación winding con respecto a  $y$  asociada a  $\alpha$  y  $\psi = \varphi \circ \alpha^{-1}$ . Como  $\text{deg}\psi = \text{deg}\varphi$  y por el teorema del grado

$$\int_N \psi^* dO_1 = \text{deg}\psi \int_{S^1} dO_1$$

tenemos que

$$\text{wind}(N, y) = \frac{1}{2\pi} \int_N \psi^* dO_1.$$

## 4.2. Resultado en $\mathbb{S}^2(\frac{1}{\sqrt{c}})$ y $\mathbb{H}^2(\frac{1}{\sqrt{c}})$

Sea  $N$  la frontera de un dominio regular  $\Omega \subset X_c^2$ , con parametrización regular  $\alpha : S^1(L) \rightarrow N$ . Consideremos el conjunto

$$N_\rho = \cup_{x \in N} (\{x\} \times [0, \rho(x)]) \subset N \times \mathbb{R},$$

y la aplicación  $\phi : N_\rho \rightarrow X_c^2$  definida por

$$\phi(x, t) = \exp_x(tn(x)).$$

Notemos que  $\phi$  es un difeomorfismo local no inyectivo (posiblemente).

Diremos que  $\phi : N_\rho \rightarrow X_c^2$  es la aplicación focal de  $N$ .

**Lema 4.13** *Sea  $N$  la frontera de un dominio regular  $\Omega \subset \mathbb{X}_c^2$ , y sea  $\phi : N_\rho \rightarrow \mathbb{X}_c^2$  la aplicación focal de  $N$ . Entonces,*

$$\phi^* dy = (\text{cn}_c(t) - k(s) \text{sn}_c(t)) ds \wedge dt,$$

donde  $dy$  denota el elemento de área  $X_c^2$ ,  $s$  es la longitud del arco de  $N$ , y  $k(s)$  es la curvatura de  $N$  en el punto de parámetro  $s$ .

**Demostración:** Recordemos:

-Si  $c > 0$ , entonces  $\mathbb{X}_c^2 = \mathbb{S}^2(\frac{1}{\sqrt{c}})$ .

-Si  $c < 0$ , entonces  $\mathbb{X}_c^2 = \mathbb{H}^2(\frac{1}{\sqrt{c}})$ .

Usando los modelos antes dicho, la aplicación focal  $\phi : N_\rho \rightarrow \mathbb{X}_c^2$  en coordenadas es (mirar por ejemplo [Rat94]):

$$\phi(s, t) = \text{cn}_c(t)\alpha(s) + \text{sn}_c(t)n(s), \quad \forall c \in \mathbb{R}$$

donde  $\alpha : S^1(L) \rightarrow \mathbb{X}_c^2$  es una parametrización regular de  $N$ .

De otra manera, como  $dy$  es una 2-forma en  $\mathbb{X}_c^2$ , entonces existe una función  $p = p(s, t)$  tal que  $\phi^* dy = p(s, t) ds \wedge dt$ .

Calculemos  $p(s, t)$ . Recordemos

$$\begin{aligned}\nabla_T T &= k n \\ \nabla_T n &= -kT.\end{aligned}$$

Tenemos

$$\begin{aligned}p(s, t) &= \phi^* dy \left( \frac{\partial}{\partial s}, \frac{\partial}{\partial t} \right) \\ &= dy \left( \phi_* \left( \frac{\partial}{\partial s} \right), \phi_* \left( \frac{\partial}{\partial t} \right) \right) \\ &= dy \left( (cn(t) - k(s) \operatorname{sn}_c(t))\alpha'(s), -c \operatorname{sn}_c(t)\alpha(s) + cn(t)n(s) \right).\end{aligned}$$

Sea  $\eta$  el elemento de volumen de  $\mathbb{R}^3$ , si  $c > 0$  (resp. de  $\mathbb{R}^{2,1}$ , si  $c < 0$ ). Entonces  $dy$  es la contracción de  $\eta$  con respecto al campo vectorial normal a  $S^2(\frac{1}{\sqrt{c}})$  (resp.  $\mathbb{H}^2(\frac{1}{\sqrt{c}})$ ). Pero, en ambos casos, el vector normal a  $X_c^2$  en el punto  $\phi(s, t)$  es el vector  $\phi(s, t)$ . Por lo tanto,

$$dy_{\phi(s,t)} = \sqrt{|c|} i_{\phi(s,t)} \eta.$$

En particular, tenemos que

$$\eta(\alpha, \alpha', n) = \frac{1}{\sqrt{|c|}}.$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned}p(s, t) &= \eta \left( (cn_c(t) - k(s) \operatorname{sn}_c(t))\alpha'(s), -c \operatorname{sn}_c(t)\alpha(s), \operatorname{sn}_c(t)n(s) \right) \\ &+ \eta \left( (cn_c(t) - k(s) \operatorname{sn}_c(t))\alpha'(s), cn_c(t)n(s), cn_c(t)\alpha(s) \right) \\ &= (cn_c(t) - k(s) \operatorname{sn}_c(t))(cn_c^2(t) + c \operatorname{sn}_c^2(t)) \\ &= (cn_c(t) - k(s) \operatorname{sn}_c(t)).\end{aligned}$$

Finalmente, si  $c = 0$ , tenemos

$$\begin{aligned}p(s, t) &= dy(\alpha'(s) + tn'(s), n(s)) \\ &= dy(\alpha'(s) - tk(s)n, n) = 1 - k(s)t.\end{aligned}$$

Esto prueba el lema.  $\square$

**Observación 4.14** Observemos que  $p(s, t) = \text{cn}_c(t) - k(s) \text{sn}_c(t) \geq 0$  si y sólo si  $\cot_c \rho(s) = k(s) \leq \cot_c(t)$ , es decir, si sólo si  $t \leq \rho(s)$ . Esta es la situación en la hipótesis del lema 4.13.

**Definición 4.15** Sean  $\Omega$  un dominio regular convexo en  $X_c^2$  con frontera  $N = \partial\Omega$ ,  $y \in X_c^2$ , y  $h_y : N \rightarrow \mathbb{R}$  es la función distancia con respecto a  $y$ , es decir  $h_y(x) = d(x, y)$ .

Diremos que  $x \in N$  es un punto crítico de  $h_y$  si la geodésica normal  $\exp_x(tn(x))$  a  $N$  en  $x$  pasa por  $y$ .

Sea  $x \in N$  un punto crítico  $h_y$ . Diremos que  $x$  es un punto  $\rho$ -crítico de  $h_y$  si  $d(x, y) \leq \rho(x)$ , donde  $\rho(x)$  es el radio de curvatura de  $N$  en  $x$ .

Notemos que si  $x$  es un  $\rho$ -crítico de  $h_y$  entonces

$$y = \exp_x(tn(x)), \text{ con } 0 \leq t \leq \rho(x).$$

**Teorema 4.16** Sea  $\Omega$  un dominio regular fuertemente convexo en  $\mathbb{X}_c^2$  si  $c \geq 0$ , o fuertemente  $h$ -convexo si  $c < 0$ , con frontera  $N = \partial\Omega$ . Entonces

$$\int_{\mathbb{X}_c^2} \nu_\rho(y) dy = \int_N \tan_c\left(\frac{\rho(s)}{2}\right) ds,$$

donde  $\nu_\rho(y)$  denota el número de puntos  $\rho$ -críticos de la función distancia  $h_y$ ,  $s$  es la longitud del arco de  $N$ , y  $\rho(s)$  es el radio de curvatura de  $N$  en el punto de parámetro  $s$ .

**Demostración:** Aplicando la fórmula de co-área a la aplicación focal  $\phi$  tenemos

$$\int_{\phi(N_\rho)} \#(\phi^{-1}(y)) dy = \int_{N_\rho} |\phi^* dy|.$$

Por la construcción de  $\phi$ , cada punto  $y \in \phi(N_\rho)$  vía la imagen inversa de  $\phi$  es exactamente  $\nu_\rho(y)$ . Por otro lado  $\#(\phi^{-1}(y)) = 0$  para  $y \notin \phi(N_\rho)$ , luego tenemos

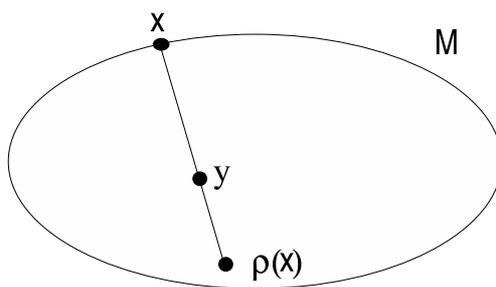
$$\int_{\mathbb{X}_c^2} \nu_\rho(y) dy = \int_{N_\rho} |\phi^* dy|. \quad (4.3)$$

Por la observación 4.14 tenemos  $|\phi^* dy| = \phi^* dy$ , y por tanto

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{X}_c^2} \nu_\rho(y) dy &= \int_{N_\rho} \phi^* dy \\
&= \int_N \int_0^{\rho(s)} p(s, t) dt ds \\
&= \int_N \int_0^{\rho(s)} (\text{cn}_c(t) - k(s) \text{sn}_c(t)) dt ds \\
&= -\frac{1}{c} \int_N (-c \text{sn}_c(\rho(s)) + k(s)(1 - \text{cn}_c(\rho(s)))) ds \\
&= -\frac{1}{c} \int_{\partial\Omega} (-c \text{sn}_c(\rho) + \cot_c(\rho)(1 - \text{cn}_c(\rho))) ds \\
&= -\frac{1}{c} \int_N \frac{\text{cn}_c(\rho) - 1}{\text{sn}_c(\rho)} ds \\
&= \int_{\partial\Omega} \tan_c \frac{\rho(s)}{2} ds. \quad \square
\end{aligned}$$

**Lema 4.17** Sea  $\Omega$  un dominio regular fuertemente convexo en  $\mathbb{X}_c^2$ , si  $c \geq 0$ , o fuertemente  $h$ -convexo si  $c < 0$ , con frontera  $N = \partial\Omega$ . Sean  $y \in \Omega$  y  $x \in N$  un mínimo de la función  $h_y$ . Entonces  $x$  es un punto  $\rho$ -crítico de  $h_y$ .

**Demostración:** Sea  $\alpha : S^1(L) \rightarrow N$  la parametrización regular de la frontera  $N = \partial\Omega$ , por la longitud de arco  $s$ . Sea  $f : S^1(L) \rightarrow \mathbb{R}$  la función definida por  $f(s) = h_y(\alpha(s))$ .



Primero supongamos que  $c = 0$ . Entonces

$$f(s) = \sqrt{\langle y - \alpha(s), y - \alpha(s) \rangle}.$$

De esta manera

$$\begin{aligned} f'(s) &= \frac{\langle -\alpha'(s), y - \alpha(s) \rangle}{f(s)}, \\ f''(s) &= \frac{f(s)(1 + \langle -\alpha''(s), y - \alpha(s) \rangle) - f'(s)(\langle -\alpha'(s), y - \alpha(s) \rangle)}{f^2(s)}. \end{aligned}$$

Si  $x = \alpha(s_0)$  es un mínimo, tenemos que  $f'(s_0) = 0$ , y  $f''(s_0) > 0$ . Es decir,

$$1 + \langle -k(s_0)n(s_0), y - \alpha(s_0) \rangle > 0.$$

Como  $y$  es un mínimo entonces existe un  $t_0 \in S^1(L)$  tal que

$$y = \alpha(s_0) + t_0 n(s_0).$$

Por lo tanto,

$$1 - \langle k(s_0)n(s_0), t_0 n(s_0) \rangle = 1 - k(s_0)t_0 > 0.$$

Por consiguiente

$$t_0 < \rho(s_0),$$

ya que,  $d(x, y) = t_0$ , el lema está probado para  $c = 0$ .

Ahora supongamos que  $c \neq 0$ . Entonces

$$\text{cn}_c(f(s)) = c \langle y, \alpha(s) \rangle_c, \tag{4.4}$$

el término de la derecha de la igualdad es el producto escalar euclidiano si  $c > 0$ , y el producto escalar de lorentziano, si  $c < 0$ .

Notemos que esta igualdad es obvia sobre la esfera de radio  $R = \frac{1}{\sqrt{c}}$ , y por analogía sobre la esfera de radio  $Ri$  (Mirar, por ejemplo [Rat94] página 64).

Derivando la ecuación (4.4) tenemos

$$-\text{sn}_c(f(s))f'(s) = \langle y, \alpha'(s) \rangle_c,$$

y diferenciando otra vez,

$$- \operatorname{cn}_c(f(s))(f'(s))^2 - \operatorname{sn}_c(f(s))f''(s) = \langle y, \alpha''(s) \rangle_c.$$

Si  $x = \alpha(s_0)$  es un mínimo, tenemos que  $f'(s_0) = 0$ , y  $f''(s_0) > 0$ . Es decir,

$$\langle y, \alpha''(s_0) \rangle_c = - \operatorname{sn}_c(f(s_0))f''(s_0) < 0.$$

Como  $y$  es un mínimo entonces existe un  $t_0 \in S^1(L)$  tal que  $y = \operatorname{cn}_c(t_0)\alpha(s_0) + \operatorname{sn}_c(t_0)n(s_0)$ .

Por las ecuaciones de Frenet-Serret página 26 tenemos que:

$$\alpha''(s) = k(s)n(s) - c\alpha(s),$$

donde  $k(s)$  es la curvatura geodésica de  $\alpha$ .

Por lo tanto

$$\begin{aligned} \langle y, \alpha''(s) \rangle &= \langle \operatorname{cn}_c(t_0)\alpha(s_0) + \operatorname{sn}_c(t_0)n(s_0), k(s_0)n(s_0) - c\alpha(s_0) \rangle \\ &= - \operatorname{cn}_c(t_0) + k(s_0) \operatorname{sn}_c(t_0) < 0. \end{aligned}$$

Por consiguiente

$$t_0 < \rho(s_0).$$

Ya que,  $d(x, y) = t_0$ , esto prueba el lema.  $\square$

**Lema 4.18** *Sea  $\Omega$  un dominio regular convexo en  $\mathbb{X}_c^2$ , si  $c \geq 0$ , o fuertemente  $h$ -convexo si  $c < 0$ , con frontera  $N = \partial\Omega$ . Entonces*

$$\nu_\rho(y) = (\operatorname{wind}(N, y) - \operatorname{wind}(F(N), y)), \quad \text{para } y \notin N \cup F(N).$$

**Demostración:** Sea  $\phi : N_\rho \longrightarrow \mathbb{X}_c^2$  la aplicación focal de  $N$  es decir:

$$\phi(x, t) = \exp_x(tn(x)).$$

Siguiendo a [Whi70], consideremos

$$I = \{n \in N_\rho : y = \phi(n)\} = \phi^{-1}(y),$$

para un punto generico fijo  $y \in \mathbb{X}_c^2 \setminus (N \cup F(N))$  (con el objetivo de asegurarnos que  $I$  sea finito), y definimos

$$e : N_\rho - I \longrightarrow T_y^1 \mathbb{X}_c^2$$

por la condición  $\|e(n)\| = 1$  y  $\exp_y \lambda(n)e(n) = \phi(n)$ , para alguna función  $\lambda(n)$ .

Sea

$$I_\epsilon = \cup_{i \in I} C_i,$$

donde los  $C_i$  son pequeños discos alrededor de los puntos  $i \in I$ .

Aplicando el teorema de Stoke a la variedad pinchada tenemos:

$$0 = \int_{N_\rho - I_\epsilon} e^* d(d0_1) = \int_{\partial(N_\rho - I_\epsilon)} e^* d0_1.$$

Notemos que  $\partial(N_\rho - I_\epsilon) = N \cup N_e \cup_{i \in I} \partial(C_i)$ , donde  $N_e = \{(x, \rho(x)); x \in N\}$ .

Notemos que  $\phi(N_e) = F(N)$ .

Como  $e$  es un difeomorfismo local que preserva la orientación, la integral  $\int_{\partial(C_i)} e^* d0_1$  es igual a  $2\pi$ .

Por lo tanto tomando en cuenta la orientación inducida por la frontera, tenemos:

$$\int_N e_{|N}^* d0_1 - \int_{N_e} e_{|N_e}^* d0_1 - 2\pi \#(I) = 0,$$

pero  $\#I = \nu_\rho(y)$ , luego

$$\frac{1}{2\pi} \int_N e_{|N}^* d0_1 - \frac{1}{2\pi} \int_{N_e} e_{|N_e}^* d0_1 = \nu_\rho(y). \quad (4.5)$$

Fijemos ahora una parametrización  $\alpha : S^1(L) \longrightarrow N$ .

Es claro que  $e_{|N} \circ \alpha$  es la aplicación winding con respecto a  $y$  asociada a  $\alpha$ . Por la observación 4.12 tenemos:

$$\text{wind}(N, y) = \frac{1}{2\pi} \int_N e_{|N}^* dO_1.$$

Analogamente,  $\tilde{\varphi} = e_{|N} \circ j$ , donde  $j : S^1(L) \rightarrow N_\rho$  es la aplicación  $j(s) = (s, \rho(s))$ , es la aplicación winding respecto a  $y$  asociada a  $\tilde{\alpha}$ , la parametrización de  $F(N)$  inducida por la parametrización de  $N$ .

Notemos que  $j(S^1(L)) = N_e$ .

Así

$$\text{wind}(F(N), y) = \text{wind}(\tilde{\alpha}, y) = \text{deg } e_{|N_e} = \frac{1}{2\pi} \int_{N_e} e_{|N_e}^* dO_1.$$

Por lo tanto la ecuación (4.5) se convierte en:

$$\nu_\rho(y) = (\text{wind}(N, y) - \text{wind}(F(N), y)),$$

para todo  $y \in \mathbb{X}_c^2 \setminus (N \cup F(N))$ .

Como  $N \cup F(N)$  tiene medida cero en  $\mathbb{X}_c^2$  entonces el lema está probado.  $\square$

**Teorema 4.19** *Sea  $\Omega$  un dominio regular convexo en  $\mathbb{X}_c^2$ , si  $c \geq 0$ , o fuertemente  $h$ -convexo si  $c < 0$ , con frontera  $N = \partial\Omega$ . Entonces*

$$\int_N \tan_c\left(\frac{\rho(s)}{2}\right) ds = F - F_e,$$

donde  $s$  la longitud del arco de  $N$ ,  $F$  es el área de  $\Omega$  y  $F_e$  el área (algebraica) del conjunto focal  $F(N)$  de  $N$ .

**Demostración:** Del teorema 4.16 y el lema 4.18 tenemos que

$$\int_N \tan\left(\frac{\rho(s)}{2}\right) ds = \int_Y (\text{wind}(N, y) - \text{wind}(F_\rho(N), y)) dy.$$

Pero  $\text{wind}(N, y) = 1$  si  $y \in \Omega$ , y  $\text{wind}(N, y) = 0$  si  $y \notin \Omega$ . Así

$$\int_{\mathbb{X}_c^2} \text{wind}(F(N), y) dy = \int_\Omega dy = F.$$

El área (algebraica) de  $F(N)$  es por definición la integral sobre  $\mathbb{X}_c^2$  del winding number de  $F(N)$  con respecto para todo  $y \in \mathbb{X}_c^2$ . (Es decir, el área algebraica es el área encerrada por  $F(N)$  contada con signo y multiplicidad). Así el teorema queda probado.  $\square$

Obtenemos una generalización del Corolario 3.8 que se encuentra en la página 44.

**Corolario 4.20** *Sea  $\Omega$  un dominio regular convexo en  $\mathbb{X}_c^2$ , si  $c \geq 0$ , o fuertemente  $h$ -convexo si  $c < 0$ , con frontera  $N = \partial\Omega$ . Entonces*

$$\int_N \tan_c\left(\frac{\rho(s)}{2}\right) ds \geq F. \quad (4.6)$$

*La igualdad se obtiene si y sólo si  $N$  es una circunferencia.*

**Demostración:** La desigualdad (4.6) es una consecuencia inmediata del siguiente hecho,  $\nu_\rho(y) \geq \text{wind}(N, y)$ , lo cual es evidente ( si  $y \notin \Omega$ ,  $\text{wind}(N, y) = 0$  y si  $y \in \Omega$ ,  $\nu_\rho(y) \geq 1$ ). Notemos que esto prueba también que  $\text{wind}(F(N), y) \leq 0$ , y  $F_e \leq 0$ .

Probemos la igualdad, supongamos que  $N$  es una circunferencia en  $\mathbb{X}_c^2$ , entonces  $F(N)$  es un punto (el centro) de  $X_c^2$  luego  $F_e = 0$ , por lo tanto aplicando el teorema 4.19 obtenemos la igualdad en (4.6).

Supongamos la igualdad en (4.6), entonces por el teorema 4.19 se tiene

$$\int_Y \text{wind}(F(N), y) dy = 0.$$

Como  $\text{wind}(F(N), y) \leq 0$ , entonces  $\text{wind}(F(N), y) = 0$  casi siempre. Supongamos que  $F(N)$  no es punto en  $\mathbb{X}_c^2$ , entonces construimos localmente en  $y \in F(N)$  una bola pequeña la cual está separada por  $F(N)$  en dos componentes conexas. Entonces winding number restringida a la bola cambia de valor, y esto sería una contradicción, por lo tanto  $F(N)$  es un punto, y por consiguiente  $N$  es una circunferencia.  $\square$

**Observación 4.21** Observemos que, como

$$\frac{(1 - cn(\rho))}{c \operatorname{sn}_c(\rho)} = \frac{A(\rho)}{L(\rho)},$$

donde  $A(\rho)$  y  $L(\rho)$  son respectivamente el área y la longitud del disco de radio  $\rho$  en  $\mathbb{X}_c^2$ , entonces hemos probado que

$$\int_N \frac{A(\rho(s))}{L(\rho(s))} ds \geq F \quad (4.7)$$

**Observación 4.22** Si  $c = 0$  tenemos:

$$\int_N \rho(s) ds \geq 2F.$$

Esto, junto con el teorema 4.19 para  $c = 0$  nos da que  $F_e \leq 0$ , lo cual también es una consecuencia de la desigualdad de Wirtinger. En efecto; recordemos dicha desigualdad (lema 3.1): Si  $f$  es una función periódica de clase  $C^2$ , y periodo igual a  $2\pi$ . Entonces

$$\int_0^{2\pi} |f'|^2 d\phi \leq \int_0^{2\pi} |f''|^2 d\phi. \quad (4.8)$$

La igualdad se da, si sólo si,  $f(\phi) = a \cos \phi + b \sin \phi + c$ , para algunas constantes  $a, b$  y  $c$ .

Sabemos que (mirar [RE])

$$F_e = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} ((p')^2 - (p'')^2) d\phi,$$

donde  $p(\phi)$  es la función soporte de un conjunto convexo, por tanto (4.8) implica  $F_e \leq 0$ .

Recíprocamente,  $F_e \leq 0$  para un convexo arbitrario implica (4.8). En efecto, dada una función  $f$  como antes, consideramos  $p = f + c$ ,  $c$  una constante, de tal manera que  $p + p'' > 0$ . Ahora aplicamos  $F_e \leq 0$  para un conjunto convexo con función soporte  $p$ .

De esta manera nosotros tenemos una interpretación geométrica de la desigualdad de Wirtinger:

**Todo punto de un convexo  $\Omega$  es alcanzado por alguna de las normales a la frontera  $\partial\Omega$  de  $\Omega$ , en un punto  $x \in \partial\Omega$ , de longitud más corta que el radio de curvatura  $\rho(x)$  de dicha frontera en el punto  $x$**

### 4.3. La Integral de la tangente de $\tan_c(\rho)$

En esta sección daremos una estimación para la integral de la tangente generalizada de la función  $\rho$  definida en la frontera de un dominio regular en  $\mathbb{X}_c^2$ .

Notemos que para el caso  $c = 0$  tenemos que:

$$\int_N \frac{\rho(s)}{2} ds = F - F_e,$$

la cual es la fórmula (3.10) que se encuentra en la página 42. Esta fórmula puede escribirse como:

$$\frac{1}{2} \int_N \frac{1}{k(s)} ds = F - F_e.$$

Pero en  $\mathbb{X}_c^2$ , la relación entre la curvatura  $k(s)$  y el radio de curvatura  $\rho(s)$  es dada por  $k(s) = \cot_c \rho(s)$ . Por lo tanto nos parece interesante obtener una estimación para

$$\int_N \tan_c \rho(s) ds.$$

Para hallar dicha estimación recordemos los siguientes resultados:

i) El teorema de Gauss Bonnet en  $\mathbb{X}_c^2$  (mirar [San76], página 303), que aplicado a nuestro caso será:

$$\int_N k ds + cF = 2\pi,$$

donde  $N$  es la frontera de un dominio regular fuertemente convexo  $\Omega$  en  $\mathbb{X}_c^2$ , si  $c \geq 0$ , o fuertemente h-convexo si  $c < 0$ ,  $k$  la curvatura geodésica de  $N$  y  $F$  el área de  $\Omega$ .

ii) El teorema de la desigualdad isoperimétrica (mirar por ejemplo [San76], página 324) que aplicado a nuestro caso será:

$$L^2 + cF^2 - 4\pi F \geq 0,$$

donde  $L$  es la longitud de  $N$ .

Por último.

La desigualdad de Hölder (mirar por ejemplo [Nil81], página 153), que aplicado a nuestro caso será:

Si las funciones  $u, v : N \rightarrow \mathbb{R}$  cumplen que

$$\int_N |u|^2 ds < \infty \quad y \quad \int_N |v|^2 ds < \infty,$$

entonces

$$\int_N |uv| ds \leq \left( \int_N |u|^2 ds \right)^{\frac{1}{2}} \left( \int_N |v|^2 ds \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Entonces aplicando los resultados anteriores tenemos:

$$\begin{aligned} 4\pi F - cF^2 \leq L^2 &= \left( \int_N \sqrt{\cot_c(\rho(s))} \sqrt{\tan_c(\rho(s))} ds \right)^2 \\ &\leq \int_N \cot_c(\rho(s)) ds \int_N \tan_c(\rho(s)) ds \\ &= \int_N k(s) ds \int_N \tan_c(\rho(s)) ds \\ &= (2\pi - cF) \int_N \tan_c(\rho(s)) ds. \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\int_N \tan_c \rho(s) ds \geq F \frac{4\pi - cF}{2\pi - cF}. \quad (4.9)$$

La igualdad en (4.9) implica que  $L^2 + cF^2 - 4\pi F = 0$ , por tanto  $N$  es un círculo en  $\mathbb{X}_c^2$ . Con un cálculo directo usando las fórmulas 4.2 que se encuentran en la página 47 se verifica que si  $N$  es un círculo en  $\mathbb{X}_c^2$ , entonces tenemos la igualdad en (4.9).

Entonces hemos demostrado el siguiente resultado.

**Teorema 4.23** *Sea  $\Omega$  un conjunto fuertemente convexo en  $\mathbb{X}_c^2$ , si  $c \geq 0$ , o fuertemente  $h$ -convexo si  $c < 0$ , con frontera regular diferenciable  $N = \partial\Omega$ . Entonces*

$$\int_N \tan_c \rho(s) ds \geq F \frac{4\pi - cF}{2\pi - cF}.$$

*La igualdad se da si y sólo si  $N$  es un círculo.*

**Observación 4.24** *Observemos que*

$$1 < \frac{4\pi - cF}{2\pi - cF} \leq 2,$$

*por consiguiente (4.9) mejora la acotación de la fórmula*

$$\int_N \tan_c \rho(s) ds > F,$$

*además para el caso  $c = 0$  tenemos otra prueba más corta del teorema 1.6, usando (4.9).*

# Capítulo 5

## Curvatura Acotada

En el capítulo 4, corolario 4.20 que se encuentra en la página 58, damos una cota del área de un convexo  $\Omega$  de  $\mathbb{X}_c^2$  por la integral de una función del radio de curvatura de  $\partial\Omega = N$ .

Vemos también que dicha integral es igual a la integral de la función que asigna a cada punto  $x \in N$  el cociente entre el área y la longitud del disco de  $\mathbb{X}_c^2$  de radio igual al radio de curvatura  $\rho(x)$ . Fórmula (4.7) página 59.

En este capítulo generalizamos las anteriores fórmulas a conjuntos convexos de una variedad riemanniana de dimensión 2, completa y de curvatura no constante pero acotada por abajo (ver fórmula del teorema 5.19 página 74).

El análogo 3-dimensional de la fórmula 4.7 se estableció en [GRST05], donde se demuestra que:

Si  $\Omega$  es un conjunto en  $\mathbb{X}_c^3$  fuertemente convexo (fuertemente *h-convexo*,  $c < 0$ ) con frontera regular  $\partial\Omega = N$  y volumen  $V$ , entonces

$$V \leq \int_N \frac{V(\rho_H(x))}{A(\rho_H(x))} dx, \quad (5.1)$$

donde  $V(\rho_H(x))$  y  $A(\rho_H(x))$  son el volumen y el área de la esfera de radio igual al radio de curvatura media  $\rho_H(x)$  de  $N$  en  $x$ . La igualdad se da si  $N$  es una esfera.

Para  $c = 0$ , la fórmula 5.1 se convierte en

$$3V \leq \int_N \frac{1}{H} dx,$$

que es la desigualdad de Heintze y Karcher.

En este capítulo también generalizamos dicha fórmula, a conjuntos convexos en una variedad riemanniana completa y con curvatura acotada por abajo.

Empecemos recordando algunos teoremas de comparación

## 5.1. Teoremas de comparación

En esta sección daremos un compendio de algunos resultados de la teoría de comparación de campos jacobianos que utilizaremos más adelante. El lector interesado en más detalle puede mirar por ejemplo [BZ83] página 232. Empecemos recordando algunas definiciones.

Sean  $M$  una variedad riemanniana de dimensión  $m \geq 2$  y  $N$  una subvariedad de  $M$  diferenciable de dimensión  $n$  ( $m > n > 0$ ). Sean  $T_x M$ ,  $T_x N$  los espacios tangentes en el punto  $x$ ;  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  denota el producto escalar en  $T_x M$ .

Si  $Y$  es un campo vectorial dado sobre  $M$  en una vecindad del punto  $x \in M$ , mientras que  $X \in T_x M$ , entonces  $\nabla_X Y$  denota, como es usual, la derivada covariante. La proyección ortogonal del vector  $X \in T_x M$  en  $T_x N$ ,  $x \in N$ , es denotada por  $X^T$ .

Sea  $\nu_x(N)$  el complemento ortogonal de  $T_x N$  en  $T_x M$ , donde  $x \in N$ . Entonces definimos **la segunda forma fundamental** de la subvariedad  $N$  en el punto  $x$  como la aplicación  $B : T_x N \times T_x N \rightarrow \nu_x(N)$  definida así:

$$B(X, Y) = \nabla_X Y - (\nabla_X Y)^T.$$

Para  $z \in \nu_x(N)$  ponemos

$$B_z(X, Y) = \langle B(X, Y), z \rangle = \langle \nabla_X Y, z \rangle,$$

siendo  $B$  y  $B_z$  formas bilineales simétricas;  $B$  es una forma con valores en  $\nu_x(N)$  y  $B_z$  es una forma escalar.

Usando la forma bilineal simétrica  $B_z$  podemos construir de manera única una transformación lineal  $h_z : T_x N \rightarrow T_x N$  tal que

$$\langle -h_z(X), Y \rangle = B_z(X, Y).$$

Un campo vectorial  $Y$  a lo largo de una geodésica normal  $\gamma$  (es decir una geodésica la cual el parámetro  $t$  es la longitud) se dice **campo de Jacobi** si

$$Y''(t) + R(Y(t), \gamma')\gamma' = 0,$$

donde  $Y(t) \in T_{\gamma(t)}M$ ,  $R$  es la transformación de curvatura,  $\gamma' = d\gamma/dt$ ,  $Y' = \nabla_{\gamma'}Y$  y  $Y'' = \nabla_{\gamma'}\nabla_{\gamma'}Y$ . Suponemos hasta que no se diga lo contrario, que todo campo de Jacobi es normal, es decir satisface  $\langle Y, \gamma' \rangle = 0$ . Para tales campos, tenemos que  $\langle Y', \gamma' \rangle = 0$ .

**Observación 5.1** Si  $\gamma(t, s)$ ,  $-\varepsilon \leq s \leq \varepsilon$  es una variación diferenciable de la geodésica  $\gamma(t, 0)$  de modo que todas las  $\gamma(t, s)$  son geodésica, entonces el campo variacional  $Y = \partial\gamma/\partial s$  es un campo de Jacobi. Y todo campo de Jacobi puede ser obtenido de esta manera.

**Definición 5.2** Sea  $\gamma : I \longrightarrow M$  una geodésica normal, tal que  $\gamma(0) = x \in N$  y  $\gamma'(0) \in (T_x N)^\perp$  ( $(T_x N)^\perp$  es el ortogonal a  $T_x N$ ). El campo de Jacobi  $Y(t)$  a lo largo de  $\gamma$  se dice *N-jacobiano* si cumple las siguientes condiciones:

- i)  $Y(0) \in T_x N$
- ii)  $(h_{\gamma'}(Y) - Y') \in (T_x N)^\perp$ .

**Observación 5.3** Notemos que si  $N$  es una hipersuperficie (*que es caso que nos interesa en este trabajo*), entonces cualquier campo N-jacobiano satisface que  $h_{\gamma'}(Y(0)) = Y'(0)$ . En efecto, por ser  $h_{\gamma'}(Y(0)) - Y'(0)$  ortogonal a  $T_x N$ , tenemos que  $h_{\gamma'}(Y(0)) - Y'(0) = \lambda\gamma'(0)$ . Por tanto

$$\lambda = \langle \lambda\gamma'(0), \gamma'(0) \rangle = \langle h_{\gamma'}(Y(0)) - Y'(0), \gamma'(0) \rangle = 0,$$

ya que  $\langle Y'(0), \gamma'(0) \rangle = 0$ .

En los espacios de curvatura constante se tiene la fortuna de tener de manera explícita los campos de Jacobi a lo largo de una geodésica  $\gamma$  y también los puntos focales de una subvariedad a lo largo de  $\gamma$  (página 20).

**Definición 5.4** Sean  $\gamma$  y  $N$  como antes. Diremos que  $\gamma(t)$  para  $t > 0$  es un punto focal respecto a  $N$  a lo largo de  $\gamma$ , si existe un campo de  $N$ -jacobiano  $Y$  a lo largo de  $\gamma$  no idénticamente cero tal que  $Y(t) = 0$ .

**Observación 5.5** Los puntos focales los podemos caracterizar por medio de la aplicación exponencial  $\exp_N$  de la siguiente forma. Supongamos que  $\gamma_0(t) = (\gamma(0), t\gamma'(0)) \in \nu(N)$ , donde  $\nu(N)$  es el espacio total del fibrado normal de  $N$  en  $M$ . Entonces  $\gamma(t) = \exp_N \gamma_0(t)$  es un punto focal de  $N$  a lo largo de  $\gamma$  si el rango de  $d\exp_N$  en el punto  $\gamma_0(t)$  es no maximal.

En la siguiente subsección estudiaremos el jacobiano de la aplicación exponencial en el punto  $(x, tn(x))$ .

### 5.1.1. Jacobiano de la aplicación exponencial respecto a una hipersuperficie

En esta subsección determinaremos con detalle el jacobiano de la aplicación exponencial restringida al fibrado normal de una hipersuperficie  $N$ , es decir,  $\exp_N : \nu(N) \rightarrow M$ , además enunciaremos el primer teorema de comparación de jacobianos en este trabajo. De ahora en adelante hasta que no se diga lo contrario  $N$  será de codimensión 1.

Podemos introducir canónicamente una métrica en  $\nu(N)$ . A saber, supongamos que  $y = (x, v) \in \nu(N)$ , mientras que  $w$  es un vector en  $T_y(\nu(N))$ , es decir, es el vector tangente  $\eta'(0)$  de cierta curva  $\eta : t \rightarrow (x(t), v(t))$  con origen en  $y = \eta(0)$ . La relación

$$|w| = \left| \frac{D_x(0)}{dt} \right|^2 + \left| \frac{D_v(0)}{dt} \right|^2,$$

determina una métrica en  $\nu(N)$ . Entonces para cualquier  $x \in N$ , la aplicación

$$d\exp_N : T_{(x,0)}\nu(N) \rightarrow T_x M$$

es una isometría. Por lo tanto podemos identificar los espacios  $T_{(x,0)}\nu(N)$  y  $T_x M$ ; el último contiene canónicamente a  $T_x N$ .

Sea  $\gamma : [0, s] \rightarrow M$  la geodésica normal, con parámetro  $t$  tal que  $x = \gamma(0) \in N$ , y  $\gamma'(0) = n(x)$  ( $n(x)$  vector normal unitario interior de  $N$  en el punto  $x$ ). Consideremos en  $T_x M = T_{(x,0)}\nu(N)$  la línea recta  $t \rightarrow t\gamma'(0)$  y a lo largo de ella un campo vectorial  $Y(t) = u + tv$  donde  $u, v$  son vectores ortogonales,  $u, v \in T_x N$ , que se mueven paralelamente sobre esta línea recta.

La aplicación  $d\exp_N$  envía el campo  $Y$  a un campo  $N$ -jacobiano normal  $Y$  a lo largo de  $\gamma$ , y todos los campos  $N$ -jacobiano normales a lo largo de  $\gamma$  se obtienen de esta manera.

Elijamos  $m - 1$  campos  $X_i = u_i + tv_i$  linealmente independientes. Supongamos que  $Y_i = d\exp_N X_i$ . Entonces el Jacobiano  $J(t)$  de la aplicación  $\exp_N$  en el punto  $(x, t\gamma'(0))$  es igual a:

$$J(t) = \frac{|Y_1(t) \wedge \dots \wedge Y_{m-1}(t)|}{|X_1(t) \wedge \dots \wedge X_{m-1}(t)|}, \quad (5.2)$$

**Observación 5.6** Los campos vectoriales  $X_i$  anteriores, generan un espacio vectorial  $\mathfrak{R}$  de dimensión  $m - 1$ . Si fijamos una base ortonormal en  $\mathfrak{R}$ , entonces cualquier transformación lineal no degenerada definida en  $\mathfrak{R}$  se puede identificar con una matriz constante no-degenerada  $A$ . Podemos identificar la transformación lineal  $d\exp_N$  en el punto  $(x, t\gamma'(0))$  con una matriz  $A$  constante no degenerada, de manera que  $Y_i = AX_i$ . Entonces tenemos

$$|Y_1(t) \wedge \dots \wedge Y_{m-1}(t)| = |AX_1(t) \wedge \dots \wedge AX_{m-1}(t)| = |\det A| |X_1(t) \wedge \dots \wedge X_{m-1}(t)|.$$

Luego el jacobiano  $J(t)$  de  $d\exp_N$  en el punto  $(x, t\gamma'(0))$  coincide con el  $|\det A|$ .

Sabemos que en un espacios  $M$  de curvatura constante  $c$  el jacobiano de la aplicación  $\exp_N$  en el punto  $(x, t\gamma'(0))$  está dado por:

$$J_c(t) = \prod_{i=1}^n [\operatorname{cn}_c(t) - k_i \operatorname{sn}_c(t)], \quad (5.3)$$

donde  $k_i$  son las curvaturas principales de la hipersuperficie  $N$  en el punto  $x$ , con respecto a  $\gamma'(0)$ . Puesto que  $k_i = k_i(x)$  escribiremos 5.3 como

$$J_c(t, x) = \prod_{i=1}^n [\operatorname{cn}_c(t) - k_i(x) \operatorname{sn}_c(t)]. \quad (5.4)$$

**Observación 5.7** Supongamos que tenemos una variedad riemanniana  $M$  de dimensión 3),  $N$  una superficie de  $M$  y  $\gamma : [0, s] \rightarrow M$  la geodésica normal. Supongamos que  $\widetilde{M} = \mathbb{X}_c^3$  (espacio de curvatura constante  $c$  de dimensión 3,  $\widetilde{N}$  cualquier superficie de  $\widetilde{M}$  y  $\widetilde{\gamma} : [0, s] \rightarrow \widetilde{M}$  la geodésica normal tal que  $\widetilde{\gamma}(0) = \widetilde{x} \in \widetilde{N}$  y  $\widetilde{\gamma}'(0)$  ortogonal a  $\widetilde{N}$ . Supongamos además que las curvaturas principales de  $\widetilde{N}$  en el punto  $\widetilde{\gamma}(0)$  respecto  $\widetilde{\gamma}'(0)$  coinciden con las curvaturas principales  $k_i(x)$  de la superficie  $N$  en el punto  $\gamma(0) = x$  respecto a  $\gamma'(0)$ .

El par  $\widetilde{N}$  y  $\widetilde{\gamma}$  existen realmente. En efecto:

Si  $c = 0$ ,  $\widetilde{M} = \mathbb{R}^3$  entonces podemos tomar la superficie  $\widetilde{N}$  dada por

$$\widetilde{N} = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = \frac{1}{2}(k_1x^2 + k_2y^2) \right\},$$

es claro que la curvaturas principales de  $\widetilde{N}$  en  $(0, 0)$  son  $k_1$  y  $k_2$ .

Para el caso  $c \neq 0$ , tomamos coordenadas normales geodésicas en un punto  $q \in \mathbb{X}_c^3$ , es decir fijamos una base ortonormal  $\{e_1, e_2, e_3\}$  en  $T_q\mathbb{X}_c^3$ , entonces para cualquier  $p$  en una vecindad normal de  $q$ , decimos que  $p$  tiene coordenadas  $xyz$  o que  $p = (x, y, z)$  si

$$p = \exp_q(xe_1 + ye_2 + ze_3),$$

Podemos determinar entonces  $\widetilde{N}$  de la siguiente manera:

$$\widetilde{N} = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{X}_c^3 : z = \frac{1}{2}(k_1x^2 + k_2y^2) \right\},$$

Un cálculo demuestra que las curvaturas principales de  $\widetilde{N}$  en  $(0, 0)$  son  $k_1$  y  $k_2$ .

De hecho es fácil ver que en estas coordenadas la segunda forma fundamental de la superficie  $(x, y, z(x, y))$ , en el punto  $q$  está dada por

$$II(q) = \begin{pmatrix} z_{xx} & z_{xy} \\ z_{yx} & z_{yy} \end{pmatrix}.$$

Por lo tanto, en nuestro caso

$$II(q) = \begin{pmatrix} k_1 & 0 \\ 0 & k_2 \end{pmatrix}.$$

Ahora exponemos el resultado mas utilizado en este capítulo.

**Teorema 5.8 ([BZ83], pag 246)** Sean  $M$  una variedad riemanniana de dimensión 3,  $N$  una superficie de  $M$  y  $\gamma : [0, s] \rightarrow M$  la geodésica normal. Sean  $\tilde{M} = \mathbb{X}_c^3$ ,  $\tilde{N}$  cualquier superficie de  $\tilde{M}$  y  $\tilde{\gamma} : [0, s] \rightarrow \tilde{M}$  la geodésica normal tal que  $\tilde{\gamma}(0) = \tilde{x} \in \tilde{N}$  y  $\tilde{\gamma}'(0)$  ortogonal a  $\tilde{N}$ . Supongamos además que las curvaturas principales de  $\tilde{N}$  en el punto  $\tilde{\gamma}(0)$  respecto  $\tilde{\gamma}'$  coinciden con las curvaturas principales  $k_i(x)$  de la superficie  $N$  respecto a  $\gamma'$ . Supongamos que  $K_\sigma(t) \geq c$  donde  $K_\sigma(t)$  es la curvatura seccional de  $M$  en el punto  $\gamma(t)$  en la dirección 2-dimensional  $\sigma$  que contiene  $\gamma'$  y  $N$  no tiene puntos focales a lo largo de  $\gamma$ . Entonces

$$J(t, x) \leq J_c(t, x),$$

donde  $J_c(t, x) = [\text{cn}_c(t) - k_1(x) \text{sn}_c(t)] [\text{cn}_c(t) - k_2(x) \text{sn}_c(t)]$ .

Es justamente para poder aplicar este teorema que hemos restringido nuestra atención a variedades de curvatura acotada por abajo.

### 5.1.2. Detalles técnicos

En el capítulo anterior definíamos el conjunto

$$N_\rho = \bigcup_{x \in N} (\{x\} \times [0, \rho(x)]), \quad (5.5)$$

donde  $N$  es la frontera de un conjunto convexo  $\Omega$  en  $\mathbb{X}_c^2$ . También definiamos la aplicación  $\phi : N_\rho \rightarrow \mathbb{X}_c^2$  como  $\phi(x, t) = \exp_x tn(x)$ .

En esta subsección definiremos de la misma manera el conjunto  $N_\rho$ , pero en una variedad  $M$  de dimensio 2 o 3 con curvatura no constante acotada por abajo, y demostraremos que

$$\Omega \subset \phi(N_\rho)$$

Para esto se requiere enunciar y demostrar unos lemas de tipo técnico.

**Definición 5.9** *Sea  $M$  una variedad riemanniana de dimensión  $m \geq 2$  con curvatura seccional acotada  $K \geq c$  ( $c > 0$ ). Sea  $\Omega$  un dominio con frontera  $N$ . Diremos que  $\Omega$  es fuertemente convexo si las curvaturas principales en cada punto de  $N$  son positivas.*

Si  $c < 0$  tenemos

**Definición 5.10** *Sea  $M$  una variedad riemanniana de dimensión  $m \geq 2$  con curvatura seccional acotada  $K \geq c$ . Sea  $\Omega$  un dominio con frontera  $N$ . Diremos que  $\Omega$  es fuertemente  $h_c$ -convexo si las curvaturas principales en cada punto de  $N$  son mayores que  $\sqrt{-c}$ .*

La definición 5.10 puede ser ambigua en el siguiente sentido. Si  $c_1 < c_2 < 0$  es claro que si  $K \geq c_2$  entonces  $K \geq c_1$ . Por consiguiente ser fuertemente  $h_{c_1}$ -convexo implica ser fuertemente  $h_{c_2}$ -convexo, pero es más restrictivo. Por lo tanto conviene pensar en tomar  $c = \inf K$ , es decir, el ínfimo de las curvaturas seccionales en cada punto  $x \in M$  respecto a cada 2-planos de  $T_x M$ .

No obstante si esta cota no se conoce explícitamente, pero se puede asegurar que  $K \geq c$  entonces la definición 5.10 se aplica remarcando que el convexo depende de  $N$  y de  $c$ .

Veremos a continuación que una hipersuperficie  $N$  que encierra un dominio fuertemente convexo (fuertemente  $h_c$ -convexo si  $c < 0$ ) siempre tendrá puntos focales.

Presentaremos el siguiente resultado en dimensión tres, pero en dimensión dos se demuestra de manera similar.

**Lema 5.11** *Sea  $M$  una variedad riemanniana de dimensión 3 con curvatura acotada  $K \geq c$ . Sea  $\Omega$  un dominio fuertemente convexo, (fuertemente  $h_c$ -convexo si  $c < 0$ ) con frontera  $N$ . Entonces existe un  $\rho(x)$  finito tal que  $J(\rho, x) = 0$  y  $J(t, x) \neq 0$  para todo  $t \in [0, \rho)$ .*

**Demostración:** Supongamos que  $N$  no tiene puntos focales a lo largo de  $\gamma$  en el punto  $x$ . Consideremos  $k_i(x)$  las curvaturas principales de  $N$  en el punto  $x$  respecto a  $\gamma'(0)$ . Entonces por el teorema 5.8 tenemos que

$$J(t, x) \leq J_c(t, x),$$

donde  $J_c(t, x) = (\operatorname{cn}_c(t) - k_1(x) \operatorname{sn}_c(t))(\operatorname{cn}_c(t) - k_2(x) \operatorname{sn}_c(t))$  y  $J(t, x)$  como en (5.4) página 68.

Observemos que:

En el caso  $c \geq 0$ , tenemos que para todo  $k_i(x)$ , existe  $\rho_i \in \mathbb{R}$  tal que  $\cot_c(\rho_i) = k_i(x)$ .

En el caso  $c < 0$ , como  $\Omega$  es fuertemente  $h_c$ -convexo ( $k_i(x) > \sqrt{-c}$ ), entonces para todo  $k_i(x)$ , existe un  $\rho_i \in \mathbb{R}$  tal que  $\cot_c(\rho_i) = k_i(x)$ .

Luego  $J(\rho_i, x) \leq J_c(\rho_i, x) = 0$  para  $i = 1, 2$ .

Por consiguiente  $J(\rho_i, x) = 0$ . Entonces  $\gamma(\rho_i)$  es un punto focal de  $N$  y esto sería una contradicción. Luego existe al menos un  $\rho$  tal que  $J(\rho, x) = 0$ . Si existe más de un  $\rho \in \mathbb{R}$  tal que  $J(\rho, x) = 0$ , entonces tomaremos el más pequeño (el ínfimo), por tanto para este  $\rho$ ,  $J(t, x) \neq 0$  si  $t < \rho$ .  $\square$

De la misma manera como se hizo en el capítulo 1, definimos en curvatura acotada la función  $h(x)$  (mirar definición 1.1 página 1).

**Definición 5.12** Sea  $M$  una variedad riemanniana con curvatura seccional acotada por abajo de dimensión  $m \geq 2$  y  $N$  una hipersuperficie que es la frontera de un conjunto convexo  $\Omega$ . Entonces definimos la función  $h : N \rightarrow \mathbb{R}$  de la siguiente manera

$$h(x) = \sup \{t = d(x, q); q \in L_{n(x)}, d(x, N) = d(x, q)\},$$

donde  $d(x, q)$  denota la distancia de  $x$  a  $q$  y  $d(x, N)$  la distancia mínima de  $x$  a  $N$ .

**Definición 5.13** Sea  $M$  una variedad riemanniana con curvatura seccional acotada por abajo de dimensión  $m \geq 2$  y  $N$  una hipersuperficie que es la frontera de un conjunto convexo  $\Omega$ . Entonces definimos la función  $\rho_c : N \rightarrow \mathbb{R}$  de la siguiente manera

$$\rho_c(x) = \inf \{t > 0; J(t, x) = 0, \}$$

donde  $J$  es el jacobiano de la aplicación exponencial en el punto  $(x, tn(x))$ .

Llamaremos a  $\rho_c$  la distancia focal minimal.

El siguiente lema lo podemos interpretar de la siguiente forma. Si seguimos por la línea normal de  $N$  en el punto  $x$  hasta que deje de ser distancia mínima con respecto a  $N$ , entonces dicha distancia es más pequeña que la distancia focal con respecto a  $N$ .

**Lema 5.14** *[[Gra90], pág 159] Para todo  $x \in N$ , tenemos que*

$$h(x) \leq \rho_c(x).$$

Presentaremos los siguientes resultados en dimensión tres, pero en dimensión dos son similares.

**Teorema 5.15** *Sean  $M$  una variedad riemanniana de dimensión 3 con curvatura acotada  $K \geq c$ ,  $\Omega \subset M$  un conjunto fuertemente convexo si  $c \geq 0$  y fuertemente  $h_c$ -convexo si  $c < 0$ , y  $N$  la frontera de  $\Omega$ . Sea  $\phi : N_h \rightarrow M$  la aplicación definida por  $\phi(x, t) = \exp_x tn(x)$ . Entonces*

$$\Omega = \phi(N_h),$$

donde el conjunto  $N_h$  se define de la misma manera como en (5.5) página 69.

**Demostración** Es evidente por la definición de  $h(x)$  que  $\phi(N_h) \subset \Omega$ . Sea  $y \in \Omega$  y  $d = d(y, M)$  ( $d$  existe ya que  $\Omega$  es compacto). Entonces la bola geodésica abierta  $B_y(d)$  de centro en  $y$  y radio  $d$  no contiene puntos sobre  $N$ , pero al menos existe un punto  $x \in N$  en la frontera de  $B_y(d)$  tal que  $d = d(x, y) = d(x, N)$ . Por la definición de  $h$  se tiene que  $d \leq h(x)$ , por lo tanto

$$y \in \phi(N_h). \quad \square$$

Como  $h(x) \leq \rho_c(x)$  para todo  $x \in N$  (lema 5.14) entonces tenemos el siguiente corolario del teorema anterior.

**Corolario 5.16** Sean  $M$  una variedad riemanniana de dimensión 3 con curvatura seccional acotada  $K \geq c$ ,  $\Omega \subset M$  un conjunto fuertemente convexo si  $c \geq 0$  y fuertemente  $h_c$ -convexo si  $c < 0$ , y  $N$  la frontera de  $\Omega$ . Sea  $\phi : N_{\rho_c} \rightarrow M$  la aplicación definida por  $\phi(x, t) = \exp_x tn(x)$ . Entonces

$$\Omega \subset \phi(N_{\rho_c}).$$

## 5.2. Curvatura Acotada en dimensión 2

En esta sección enunciaremos el teorema que generaliza el resultado 4.20 que se encuentra en la página 58 y por tanto la generalización de

$$\int_N \frac{A(\rho(s))}{L(\rho(s))} ds \geq F, \quad (5.6)$$

a conjuntos convexos  $\Omega$  de una variedad riemanniana  $M$  de dimensión 2 con curvatura acotada por abajo.

Empecemos con la siguiente definición.

**Definición 5.17** Llamaremos al número real  $\rho_{k_i}$  el **radio de curvatura comparativo**, con respecto a la curvatura principal  $k_i$  de  $N$  en el punto  $x$ , si cumple que  $\cot_c(\rho_{k_i}(x)) = k_i(x)$ .

Notemos que en el caso de dimensión 2, sólo tenemos un radio comparativo  $\rho_k(x)$ . Notemos también que fijada  $x$   $k(x)$  es la curvatura del círculo de radio  $\rho_k(x)$  el espacio de curvatura constante  $\mathbb{X}_c^2$ .

**Lema 5.18** Sea  $M$  una variedad riemanniana de dimensión 2 completa y con curvatura acotada  $K \geq c$ . Sea  $\Omega$  un dominio fuertemente convexo si  $c \geq 0$ , y fuertemente  $h_c$ -convexo si  $c < 0$ , con frontera diferenciable  $N$ . Entonces

$$\rho_c(x) \leq \rho_k(x), \quad x \in N$$

donde  $\rho_k$  es el radio comparativo con respecto a la curvatura  $k(x)$  de  $N$ .

**Demostración:** Supongamos que  $\rho_c > \rho_k$ , entonces aplicando el teorema 5.8 tenemos

$$J(\rho_k, x) \leq J_c(\rho_k, x) = 0,$$

luego  $J(\rho_k, x) = 0$ , esto es una contradicción ya que  $J(t, x) \neq 0$  para todo  $t \in [0, \rho_c)$ . Por tanto  $\rho_c \leq \rho_k$ .  $\square$

Con los resultados anteriores estamos listos para demostrar nuestro el resultado principal de este capítulo en dimensión dos.

**Teorema 5.19** *Sea  $M$  una variedad riemanniana, completa y con curvatura acotada  $K \geq c$ . Sea  $\Omega$  un dominio fuertemente convexo si  $c \geq 0$  y fuertemente  $h_c$ -convexo si  $c < 0$ , con frontera diferenciable  $N$ . Entonces*

$$\int_N \tan_c\left(\frac{\rho_k(x)}{2}\right) dx \geq F,$$

donde  $F$  es el área de  $\Omega$  y  $\rho_k(x)$  radio de curvatura comparativo.

**Demostración:** Por el corolario 5.16, por la fórmula de co-área, y ya que  $|\phi^* dy| = J(t, x) dx dt$  para todo  $(t, x) \in N_{\rho_c}$ , donde  $\rho_c$  existe por el lema 5.11 y es el mínimo tal que  $J(\rho_c, x) = 0$ , entonces tenemos

$$\begin{aligned} F = \int_{\Omega} dy &\leq \int_{\phi(N_{\rho_c})} dy \leq \int_{\phi(N_{\rho_c})} \#\phi^{-1}(y) dy \\ &= \int_{N_{\rho_c}} |\phi^* dy| \\ &= \int_N \left( \int_0^{\rho_c(x)} J(t, x) dt \right) dx \end{aligned}$$

Por el teorema 5.8 y el lema 5.18 ( $\rho_c \leq \rho_k$ ), tenemos que

$$\begin{aligned}
F &\leq \int_N \left( \int_0^{\rho_c(x)} J(t, x) dt \right) dx \\
&\leq \int_N \left( \int_0^{\rho_c(x)} J_c(t, x) dt \right) dx \\
&= \int_N \left( \int_0^{\rho_c(x)} (\operatorname{cn}_c(t) - k(x) \operatorname{sn}_c(t)) dt \right) dx \\
&\leq \int_N \left( \int_0^{\rho_k(x)} (\operatorname{cn}_c(t) - k(x) \operatorname{sn}_c(t)) dt \right) dx \\
&= -\frac{1}{c} \int_N (-c \operatorname{sn}_c(\rho_k(x)) + k(x)(1 - \operatorname{cn}_c(\rho_k(x)))) dx \\
&= -\frac{1}{c} \int_N (-c \operatorname{sn}_c(\rho_k(x)) + \cot_c(\rho_k(x))(1 - \operatorname{cn}_c(\rho_k(x)))) dx \\
&= -\frac{1}{c} \int_N \frac{\operatorname{cn}_c(\rho_k(x)) - 1}{\operatorname{sn}_c(\rho_k(x))} dx \\
&= \int_N \tan_c\left(\frac{\rho_k(x)}{2}\right) dx. \quad \square
\end{aligned}$$

**Observación 5.20** Observemos que: Como

$$\frac{(1 - \operatorname{cn}(\rho_k(x)))}{c \operatorname{sn}_c(\rho_k(x))} = \frac{A(\rho_k(x))}{L(\rho_k(x))},$$

donde  $A(\rho_k(x))$  y  $L(\rho_k(x))$  son respectivamente el área y la longitud del círculo de radio  $\rho_k(x)$  en  $\mathbb{X}_c^2$ , entonces hemos probado que

$$\int_N \frac{A(\rho_k(x))}{L(\rho_k(x))} ds \geq F. \quad (5.7)$$

### 5.3. Curvatura Acotada en dimensión 3

En esta sección generalizamos el teorema que se encuentra en [GRST05](curvatura constante) y que involucra la desigualdad

$$V(\Omega) \leq \int_N \frac{V(\rho_H(x))}{A(\rho_H(x))} dx,$$

a conjuntos convexos en una variedad riemanniana de dimensión 3 completa y con curvatura acotada por abajo.

Empecemos con la siguiente definición

**Definición 5.21** *Llamaremos al número real  $\rho_H$  el radio de curvatura media comparativo, con respecto a la curvatura media  $H$  de  $N$  en el punto  $x$ , si cumple que  $\cot_c(\rho_H(x)) = H(x)$ .*

**Observación 5.22** Si  $k_1(x) \leq k_2(x)$  entonces  $\rho_{k_2}(x) \leq \rho_{k_1}(x)$  (ya que  $\cot_c(t)$  es una función decreciente). Además se cumple que  $\rho_{k_2}(x) \leq \rho_H(x)$  (radio de curvatura media comparativo).

Suponemos de ahora en adelante que  $k_1(x) \leq k_2(x)$ .

**Lema 5.23** *Sea  $M$  una variedad riemanniana de dimensión 3 completa y con curvatura seccional acotada  $K \geq c$ . Sea  $\Omega$  un dominio fuertemente convexo si  $c \geq 0$ , y fuertemente  $h_c$  - convexo si  $c < 0$ , con frontera diferenciable  $N$ . Entonces*

$$\rho_c(x) \leq \rho_{k_2}(x), \quad \forall x \in N,$$

donde  $\rho_c(x)$  es la distancia focal minimal y  $\rho_{k_2}(x)$  es el radio comparativo tal que  $\rho_{k_2}(x) \leq \rho_{k_1}(x)$ .

**Demostración:** Supongamos que  $\rho_c > \rho_{k_2}$ , entonces aplicando el teorema 5.8 tenemos

$$J(\rho_{k_2}, x) \leq J_c(\rho_{k_2}, x) = 0,$$

luego  $J(\rho_{k_2}, x) = 0$ , esto es una contradicción ya que  $J(t, x) \neq 0$  para todo  $t \in [0, \rho_c)$ . Por tanto  $\rho_c \leq \rho_{k_2}$ .  $\square$

Con los resultados anteriores estamos listos para demostrar el segundo resultado principal de este capítulo, es decir la desigualdad de Heintze-Karcher en una variedad riemanniana de Curvatura acotada.

**Teorema 5.24** *Sea  $M$  una variedad riemanniana, completa y con curvatura acotada  $K \geq c$ . Sea  $\Omega$  un dominio fuertemente convexo si  $c \geq 0$ , y fuertemente  $h_c$ -convexo si  $c < 0$ , con frontera diferenciable  $N$ . Entonces*

$$\int_N \frac{V(\rho_H(x))}{A(\rho_H(x))} dx \geq V(\Omega),$$

donde  $V(\Omega)$  es el volumen de  $\Omega$ ,  $V(\rho_H(x))$  y  $A(\rho_H(x))$  son el volumen y el área de la esfera de radio  $\rho_H(x)$  en el punto  $x$  de  $N$  (radio de curvatura media comparativo) en el espacio de curvatura constante  $\mathbb{X}_c^3$ .

**Demostración:** Por el lema 5.16, por la fórmula de co-área, y ya que  $|\phi^* dy| = J(t, x) dx dt$  para todo  $(t, x) \in N_{\rho_c}$ , donde  $\rho_c$  existe por el Lema 5.11, y es el mínimo tal que  $J(t, x) = 0$ , entonces tenemos

$$\begin{aligned} V(\Omega) &= \int_{\Omega} dy \leq \int_{\phi(N_{\rho_c})} dy \leq \int_{\phi(N_{\rho_c})} \#\phi^{-1}(y) dy \\ &= \int_{N_{\rho_c}} |\phi^* dy| \\ &= \int_N \left( \int_0^{\rho_c(x)} J(t, x) dt \right) dx \end{aligned}$$

Por el corolario 5.8 y lema 5.23 ( $\rho_c \leq \rho_{k_2}$ ), entonces tenemos que

$$\begin{aligned} V(\Omega) &\leq \int_N \left( \int_0^{\rho_c(x)} J(t, x) dt \right) dx \\ &\leq \int_N \left( \int_0^{\rho_c(x)} J_c(t, x) dt \right) dx \\ &= \int_N \left( \int_0^{\rho_c(x)} (\text{cn}_c(t) - k_1(x) \text{sn}_c(t))(\text{cn}_c(t) - k_2(x) \text{sn}_c(t)) dt \right) dx \\ &\leq \int_N \left( \int_0^{\rho_{k_2}(x)} (\text{cn}_c(t) - k_1(x) \text{sn}_c(t))(\text{cn}_c(t) - k_2(x) \text{sn}_c(t)) dt \right) dx \end{aligned}$$

Ahora usando la media geométrica y la media aritmética ( $uv \leq \frac{u+v}{2}$ , donde  $u, v$  son reales no-negativos) y ya que  $\rho_{k_2} \leq \rho_H$  tenemos

$$\begin{aligned}
V(\Omega) &\leq \int_N \left( \int_0^{\rho_{k_2}(x)} (\operatorname{cn}_c(t) - k_1(x) \operatorname{sn}_c(t)) (\operatorname{cn}_c(t) - k_2(x) \operatorname{sn}_c(t)) dt \right) dx \\
&\leq \int_N \left( \int_0^{\rho_{k_2}(x)} (\operatorname{cn}_c(t) - H \operatorname{sn}_c(t))^2 dt \right) dx \\
&\leq \int_N \left( \int_0^{\rho_H(x)} (\operatorname{cn}_c(t) - H \operatorname{sn}_c(t))^2 dt \right) dx
\end{aligned}$$

Pero la integral

$$\int_0^{\rho_H(x)} (\operatorname{cn}_c(t) - H \operatorname{sn}_c(t))^2 dt$$

es una función que sólo depende del valor de  $\rho_H(x)$ . Notemos que para el caso de la esfera  $S$  de radio  $r$  en curvatura constante  $c$ , el volumen lo podemos determinar como

$$V(r) = \int_S \left( \int_0^r (\operatorname{cn}_c(t) - H \operatorname{sn}_c(t))^2 dt \right) dS_x = A(r) \int_0^r (\operatorname{cn}_c(t) - \operatorname{cot}_c(r) \operatorname{sn}_c(t))^2 dt,$$

donde  $A(r)$  es el área de la esfera.

Por consiguiente

$$\begin{aligned}
V(\Omega) &\leq \int_N \left( \int_0^{\rho_H(x)} (\operatorname{cn}_c(t) - H \operatorname{sn}_c(t))^2 dt \right) dx \\
&= \int_N \left( \int_0^{\rho_H(x)} (\operatorname{cn}_c(t) - \operatorname{cot}_c(\rho_H(x)) \operatorname{sn}_c(t))^2 dt \right) dx \\
&= \int_N \frac{V(\rho_H(x))}{A(\rho_H(x))} dx. \quad \square
\end{aligned}$$

# Bibliografía

- [Alv99] Paiva Alvarez, *Contact topology, taut immersions, and Hilbert's fourth problem*, Amer. Math.Soc.Transl **190** (1999), 1–21.
- [BG92] S Bruce and D. Giblin, *Curves and singularities (second edition)*, Cambridge University Press, 1992.
- [BZ83] Yu. Burago and V. Zalgaller, *Geometric Inequalities*, Springer-Verlag, 1983.
- [DC76] M. Do Carmo, *Differential Geometry of Curves and Surface*, Prentice Hall, 1976.
- [Esc96] Carlos A Escudero, *Curvatura en un poligono y teorema de Ros para curvas planas*, Universidad del Valle, Colombia (1996), Tesis.
- [GP74] V. Guillemin and A. Pollack, *Diferential Topology*, Prentice Hall, 1974.
- [Gra90] A. Gray, *Tubes*, Addison-Wesley Publishing Company, 1990.
- [GRST05] E Gallego, A Reventos, G Solanes, and E. Teufel, *Width of convex bodies in spaces of constant curvature*, Preprint 34 Departament de matemàtiques, UAB (2005), 1–15.
- [Hei89] Karcher Heintze, *Riemannian comparison constructions*, Global Differential Geometry, MAA Studies in Math **27** (1989), 170–22.
- [Hop83] H. Hopf, *Differential Geometry in the Large*, Springer-Verlag, 1983, Lecture Notes in Mathematics, Vol. 1000.

- [IPST04] S Izumiya, D Pei, T Sano, and E. Torbi, *Evolutes of Hyperbolic Planes Curves*, Acta Mathematica Sinica, English Series (2004), 543–550.
- [Lee97] J. Lee, *Riemannian Manifolds*, Springer, 1997.
- [MM96] Yves Martinez-Maure, *Hedgehogs and area of order 2*, Arch. Math. **67** (1996), 156–163.
- [Nil81] S.M. Nikolsky, *A Course of Mathematical Analysis*, vol. 2, Mir, 1981.
- [Oss90] Robert Osserman, *Curvature in the Eighties*, The American Mathematical Monthly **97**, No. 8 (1990), 731–756.
- [Rat94] Jhon G. Ratcliffe, *Foundations of Hyperbolic Manifolds*, Springer Verlag, New York, 1994.
- [RE] Agustí Reventós and Carlos A. Escudero, *An interesting property of the evolute*, Accepted for publication, The American Mathematical Monthly.
- [Rei77] R Reilly, *Applications of the Hessian operator in a Riemannian manifold*, Indiana Univ. Math. J. **26** (1977), 459–472.
- [Ros88] A. Ros, *Compact hypersurfaces with constant scalar curvature and congruence theorem*, J. of Diff. Geom. **27** (1988), 215–220.
- [San76] L. A. Santaló, *Integral Geometry and Geometric Probability*, Addison-Wesley, 1976, Encyclopedia of mathematics and its applications, Vol. 1.
- [Tal93] G Talenti, *The Standard Isoperimetric Theorem*, vol. A, North Holland, 1993, In *Handbook of Convex Geometry*. Edited by Gruber, P. M. and Wills, J. M.
- [Whi70] James H White, *Some differential invariants of submanifolds of euclidean space*, J. Differential Geometry (1970), 207–223.