Singularitats evitables per a funcions quasiregulars del pla

Albert Clop

Tesi Doctoral

Memòria presentada per aspirar al grau de doctor en Matemàtiques

CERTIFIQUEM que aquesta memòria ha estat realitzada per Albert Clop, sota la direcció dels Drs. Joan Mateu Bennassar i Joan Orobitg Huguet.

Bellaterra, octubre del 2006.

Joan Mateu Bennassar

Joan Orobitg Huguet

Introducció

Un compacte del pla E es diu *evitable per a les funcions analítiques i acotades* si per a tot obert $\Omega \supset E$, tota funció acotada $f : \Omega \to \mathbb{C}$ holomorfa a $\Omega \setminus E$ admet una extensió holomorfa a tot Ω. Equivalentment, només cal preocupar-se del cas $\Omega = \mathbb{C}$. El *problema de Painlevé* consisteix en caracteritzar aquests conjunts en termes mètrics i geomètrics.

La *capacitat analítica* d'un compacte E, introduïda per Ahlfors [3], es defineix per

$$\gamma(E) = \sup \left\{ |f'(\infty)|; f \in H(\mathbb{C} \setminus E), \|f\|_\infty \leq 1, f(\infty) = 0 \right\}.$$

Aquesta funció de conjunt s'anul·la només sobre els conjunts evitables. Dos excel·lents monogràfics sobre γ són el d'H. Pajot [43] i el de J. Verdera [55]. Per començar, $\mathcal{H}^1(E) = 0$ implica $\gamma(E) = 0$, mentre que si $\dim(E) > 1$ llavors $\gamma(E) > 0$. Per tant, 1 és la dimensió *crítica* del problema de Painlevé.

Si substituïm L^∞ per altres classes de funcions, com ara BMO o Lip_α amb $0 < \alpha \leq 1$, aleshores podem obtenir algunes variants molt més senzilles d'aquest problema. Més concretament,

- Kaufman [31] va provar que E és evitable per a les funcions analítiques i de BMO si i només si $\mathcal{M}^1(E) = 0$.
- Dolženko [16] va demostrar que E és evitable per a les funcions analítiques i de Lip_α si i només si $\mathcal{M}^{1+\alpha}(E) = 0$.
- Com a conseqüència d'un treball de Verdera [54], es dedueix que E és evitable per a les funcions analítiques i de VMO si i només si $\mathcal{M}^1_*(E) = 0$.

Com és ben sabut, la diferència principal entre aquestes variants i el problema clàssic de Painlevé és que ara els conjunts evitables estan caracteritzats per un contingut de Hausdorff o, en alguns casos, per altres funcions de conjunt no tant complicades com la capacitat analítica.

L'objectiu d'aquesta tesi és estudiar els conjunts evitables per a les funcions quasiregulars del pla. Donat un domini $\Omega \subset \mathbb{C}$, una funció $f : \Omega \to \mathbb{C}$ es diu que és *μ-quasiregular* a Ω si f pertany a l'espai de Sobolev $W^{1,2}_{loc}(\Omega)$ i les seves derivades satisfan, en quasi tot punt, l'anomenada *equació de Beltrami*,

$$\overline{\partial} f = \mu \, \partial f$$

per alguna funció mesurable μ, el coeficient de Beltrami, tal que $\|\mu\|_\infty = \frac{K-1}{K+1} < 1$. Si només ens fixem en el valor de K, l'equació anterior és equivalent a la *desigualtat de distorsió*,

$$|Df(z)|^2 \leq K \, J(z, f) \quad \text{quasi per a tot } z \in \Omega,$$

on $|Df(z)|$ és la norma (com a operador) de la matriu jacobiana de f en el punt z, i $J(z, f)$ n'és el determinant. Parlem llavors de funcions K-quasiregulars. Les funcions quasiregulars bijectives s'anomenen quasiconformes. Si $K = 1$ (i.e. si $\mu = 0$) aleshores recuperem, respectivament, les classes de funcions analítiques i aplicacions conformes a Ω. Per diverses raons, aquesta és una de les maneres més convenients d'estendre la noció d'analicitat. Notem que la desigualtat de distorsió té un anàleg evident a $\mathbb{R}^n$. El nostre interès, però, prové també del fet que aquestes funcions són (com a mínim en el pla) *solucions* d'un model més o menys general d'equació el·líptica de primer ordre. Com a referències introductòries a aquesta classe de funcions, esmentem els llibres d'Ahlfors [2], Lehto i Virtanen [37], Reshetnyak [48] o Rickman [49]

En aquesta memòria, considerem el problema de Painlevé, així com algunes variants, en el context quasiregular. Més concretament, direm que un compacte E és *evitable per a les funcions K-quasiregulars i acotades* si per a tot obert $\Omega \supset E$, tota funció acotada $f : \Omega \to \mathbb{C}$, K-quasiregular a $\Omega \setminus E$, admet una extensió K-quasiregular a tot Ω.

També té sentit reemplaçar L^∞ per d'altres classes, com ara BMO, VMO o Lip_α. Fins i tot podem parlar de conjunts evitables per a les funcions μ-quasiregulars, quan ens interessem més pel mateix coeficient de Beltrami μ que no pas per K. En tots els casos, com en el de la situació analítica, només cal entendre el cas $\Omega = \mathbb{C}$.

Es pot deduir de Uy [53] que si E té àrea positiva, aleshores E no és evitable ni per $K = 1$. Recíprocament, donat un compacte E amb $|E| = 0$ i una funció f quasiregular a $\mathbb{C} \setminus E$, per tal que f admeti una extensió quasiregular a tot el pla, només caldrà que ens assegurem que f té una extensió de classe $W^{1,2}$ a un entorn de E. Efectivament, una f com aquesta satisfà una equació de Beltrami (o una desigualtat de distorsió) quasi per tot arreu. Només falta, doncs, que comprovem la integrabilitat de les seves derivades distribucionals. En altres paraules, estem encarant una versió simplificada d'un problema d'evitabilitat en espais de Sobolev.

El Capítol 2 l'hem dedicat a les funcions K-quasiregulars i acotades (o BMO). En general, el Teorema de factorització de Stoilow (vegeu per exemple [37]) assegura que si f és K-quasiregular a $\mathbb{C} \setminus E$, llavors $f = h \circ \phi$, on $\phi : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ és K-quasiconforme i h és holomorfa a $\mathbb{C} \setminus \phi(E)$. Més encara, de fet f i ϕ tenen el mateix coeficient de Beltrami. Noteu també que f és acotada si i només si h ho és, i Reimann [46] demostra que una co-

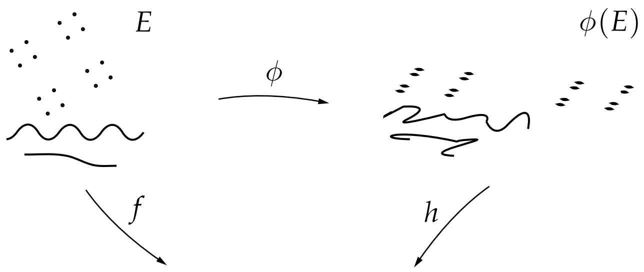


Figura 1

sa semblant passa amb BMO. Per tant, estendre f K-quasiregularment és equivalent a estendre h analíticament. En el cas acotat haurem de comprovar sota quines condicions és cert que

$$\gamma(\phi(E)) = 0$$

per a tota ϕ K-quasiconforme. Al mateix temps, per al problema BMO caldrà demanar la condició $\mathcal{H}^1(\phi(E)) = 0$. Sigui com sigui, és precisament aquí on apareix el problema de distorsió. Per exemple, hom primer pensa en la fórmula de distorsió de dimensió d'Astala [4], que diu que si $\dim(E) = t$, aleshores

$$\dim(\phi(E)) \leq t' = \frac{2K \dim(E)}{2 + (K-1) \dim(E)}$$

per a tota aplicació K-quasiconforme ϕ. Usant aquesta desigualtat, a [4] es demostra que una condició suficient per a $\mathcal{H}^1(\phi(E)) = 0$ (i per tant també per a $\gamma(\phi(E)) = 0$) és $t < \frac{2}{K+1}$, o equivalentment, $t' < 1$. A [4] també es prova que per a tot $t > \frac{2}{K+1}$ existeixen conjunts E i aplicacions K-quasiconformes ϕ tals que $\dim(E) = t$ i $\dim(\phi(E)) > 1$. Per això, el nombre $\frac{2}{K+1}$ és crític per a aquests problemes d'evitabilitat K-quasiregular.
El pas següent a l'estudi dimensional és conèixer la distorsió K-quasiconforme de les mesures de Hausdorff. Per exemple, és ben sabut (vegeu e.g. [2, p.33]) que

$$|E| = 0 \;\;\Rightarrow\;\; |\phi(E)| = 0.$$

En aquesta direcció, donem una demostració del resultat següent.

Teorema 1 ([5]).
Sigui E un compacte, i sigui ϕ una aplicació K-quasiconforme. Aleshores,

$$\mathcal{H}^{\frac{2}{K+1}}(E) = 0 \;\;\Rightarrow\;\; \mathcal{H}^1(\phi(E)) = 0.$$

Així, tenim *continuïtat absoluta* de $\phi^*\mathcal{H}^{t'}$ respecte de $\mathcal{H}^t$, tant per $t' = 1$ com per $t' = 2$, és a dir, $t = \frac{2}{K+1}$ i $t = 2$. Per $t \in (0,2)$ qualsevol, no podem demostrar la continuïtat absoluta de $\phi^*\mathcal{H}^{t'}$ respecte de $\mathcal{H}^t$. Si més no, per $t > \frac{2}{K+1}$ obtenim un resultat més feble relacionat amb les capacitats de Bessel.

Podem deduir, del teorema anterior i de la invariància BMO, que si $\mathcal{H}^{\frac{2}{K+1}}(E) = 0$ llavors E és evitable per a les funcions K-quasiregulars i de BMO. Inesperadament, en el cas del problema L^∞ hem pogut anar més lluny.

Teorema 2 ([5]).
Sigui $K > 1$. Sigui E un compacte tal que $\mathcal{H}^{\frac{2}{K+1}}(E)$ és σ-finita. Llavors, E és evitable per a les funcions K-quasiregulars i acotades.

En la prova d'aquest teorema usem diverses eines típiques del món quasiconforme, així com també el resultat d'integrabilitat òptima obtingut per Astala i Nesi [10]. També apareix el fet que el contingut inferior de Hausdoff 1-dimensional es comporta precisament com la capacitat analítica VMO [54]. Existeix, a més, un difícil teorema a [5], segons el qual si ψ és una aplicació K-quasiconforme i E és un subconjunt qualsevol d'un conjunt rectificable, aleshores

$$\dim(\psi(E)) > \frac{2}{K+1}.$$

És a dir, aquests subconjunts E no poden assolir la màxima distorsió. Aquest fet i els treballs sobre la capacitat analítica de G. David [15] i X. Tolsa [51] serveixen per completar la prova.

Un altre cop d'ull a la Figura 1 permet veure que la construcció de conjunts no evitables per a les funcions K-quasiregulars i acotades (o BMO) és equivalent a determinats exemples de distorsió K-quasiconforme extremal. En aquest sentit, hem trobat conjunts E i aplicacions K-quasiconformes ϕ per als quals $\dim(E) = \frac{2}{K+1}$ i $\gamma(\phi(E)) > 0$.

Teorema 3 ([5]).
Sigui $K > 1$. Existeixen compactes E de dimensió $\frac{2}{K+1}$, no evitables per a les funcions K-quasiregulars i acotades.

La nostra construcció dóna exemples de compactes E de dimensió t i funcions ϕ K-quasiconformes, tals que $0 < \mathcal{H}^{t'}(\phi(E)) < \infty$. No obstant, no sabem si és possible trobar E i ϕ pels quals $0 < \mathcal{H}^{t}(E) < \infty$ i alhora $0 < \mathcal{H}^{t'}(\phi(E)) < \infty$.

Al Capítol 3, canviem lleugerament de situació, i estudiem el problema d'evitabilitat per funcions K-quasiregulars amb la condició Lip_α enlloc de la norma L^∞. Recordem que una funció f és de classe Lip_α si

$$|f(z) - f(w)| \leq C\,|z-w|^\alpha$$

sempre que $|z-w| < 1$. Tot i que tornem a passar per la factorització de Stoilow, hi ha algunes diferències respecte a la situació del Capítol 2. Com ja hem explicat, aquest darrer cas està estretament lligat a la manera com les aplicacions K-quasiconformes distorsionen els conjunts de dimensió $\frac{2}{K+1}$. Un bon coneixement d'aquesta distorsió és suficient per solucionar completament el problema d'evitabilitat, donat que tant BMO com L^∞ són espais de funcions K-quasiconformement invariants. Per contra, el Teorema de Mori [41] estableix que tota aplicació K-quasiconforme és de classe $\mathrm{Lip}_{\frac{1}{K}}$, i la funció $\phi(z) = z\,|z|^{\frac{1}{K}-1}$ mostra que aquest exponent és òptim. Deduïm llavors que, desafortunadament, l'espai Lip_α no és K-quasiconformement invariant. A causa d'aquesta mancança, les tècniques del Capítol 2 s'hauran de modificar.

El nostre primer resultat en el problema Lip_α és el següent.

Teorema 4.
Sigui $K > 1$ i $\alpha \in (0,1)$. Sigui E un compacte, i suposem que

$$\mathcal{H}^{\frac{2}{K+1}(1+\alpha K)}(E) = 0.$$

Aleshores, E és evitable per a les funcions K-quasiregulars α-Hölder contínues.

La demostració d'aquest resultat utilitza també tècniques estrictament planes. A grans trets, si $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ és una funció Lip_α a tot $\mathbb{C}$ i K-quasiregular a $\mathbb{C} \setminus E$, llavors el que demostrem és que $\overline{\partial}(f \circ \phi^{-1}) = 0$ en el sentit de les distribucions (ϕ és K-quasiconforme amb el mateix coeficient de Beltrami que f). Com a eines bàsiques, esmentem les propietats d'integrabilitat de les aplicacions K-quasiconformes, així com un resultat clàssic sobre particions de la unitat.

Per demostrar que l'índex $d = \frac{2}{K+1}(1+\alpha K)$ és òptim, la distorsió K-quasiconforme extremal no és suficient, a diferència del que passava en el problema L^∞. Altra vegada el problema principal és la no-invariància de la classe Lip_α per canvis de variable quasiconformes. De fet, un compacte de dimensió d podria tenir imatges K-quasiconformes amb dimensió per sobre del corresponent índex crític $1+\alpha$ del problema analític. La manera de superar aquests obstacles prové d'un exemple explícit de distorsió K-quasiconforme extremal.

Lema 5.
Siguin $t \in (0,2)$ i $K > 1$. Denotem $t' = \frac{2Kt}{2+(K-1)t}$. Existeixen un compacte E i una aplicació K-quasiconforme ϕ tals que:

(a) $\mathcal{H}^t(E)$ és positiva i σ-finita.

(b) $\dim(\phi(E)) = t'$.

(c) ϕ és Hölder contínua amb exponent $\frac{t}{t'} = \frac{1}{K} + \frac{K-1}{2K}t$.

Cal remarcar que en aquest Lema la distorsió extremal no és res de nou. La novetat rau en l'exponent de Hölder, estrictament superior al típic $\frac{1}{K}$ provinent del Teorema de Mori. Aquesta millora assegura que la pèrdua de regularitat en composar amb ϕ és menor que si composem amb una aplicació K-quasiconforme qualsevol. En conseqüència, un argument similar al d'Astala [4] per al cas L^∞ ens condueix al resultat següent:

Teorema 6.
Siguin $K > 1$ i $\alpha \in (0,1)$. Per tot $t > \frac{2}{K+1}(1+\alpha K)$, existeix un compacte E de dimensió t, no evitable per a les funcions K-quasiregulars α-Hölder contínues.

No sabem què els passa als conjunts de dimensió exactament $\frac{2}{K+1}(1+\alpha K)$ i mesura de Hausdorff positiva. Per tant, aquest és encara un problema obert.

D'entre les conseqüències del Lema, no només obtenim l'optimalitat de l'índex $\frac{2}{K+1}(1+\alpha K)$ per al problema Lip_α d'evitabilitat, sinó que hi ha d'altres aplicacions. Recentment, L. Kovalev [35] ha trobat aplicacions d'aquest exemple en el món de les anomenades *funcions de gradient K-quasiregular*. Més encara, aquestes tècniques també funcionen en el món de les *funcions de distorsió finita* (vegeu la Secció 3.4). En aquest cas, 2α és la corresponent dimensió crítica.

Quan hom tracta un problema d'evitabilitat, és usual intentar trobar resultats d'automillora. Filosòficament, aquest tipus de resultats és utilitzat per assegurar que solucions *febles* d'una determinada equació són en realitat solucions *fortes*. En particular, als Capítols 2 i 3, utilitzarem repetidament que les funcions K-quasiconformes tenen més regularitat de Sobolev que la inicial $W^{1,2}_{loc}$. En aquesta direcció, el Lema de Weyl és una eina interessant, però té una limitació inevitable: només serveix per a operadors a coeficients constants. Per això, l'equació de Beltrami sembla ser un mal model per a aquest tipus de resultats distribucionals. Més concretament, la raó és que si f és una funció aleshores la identitat

$$\langle \mu\, \partial f, \varphi \rangle = -\langle f, \partial(\mu\, \varphi) \rangle \tag{0.1}$$

no té sentit, llevat que tant μ com φ siguin funcions de la classe $\mathcal{D}$ (funcions $\mathcal{C}^\infty$ amb suport compacte). Si el que es vol és treballar amb coeficients de Beltrami més generals, és suficient demanar que ∂f actuï sobre una classe més gran de funcions test. De fet, la igualtat (0.1) resulta tenir sentit per a funcions f localment a L^2, coeficients μ de classe $W^{1,2}$, i funcions test φ també dins de $W^{1,2}$. Aquesta qüestió és estudiada al Capítol 4. Hem pogut demostrar, d'aquesta manera, el resultat següent, que pot ser interpretat com un Lema de Weyl en el context quasiconforme.

Teorema 7.
Sigui $f \in L^p_{loc}(\mathbb{C})$ per algun $p > 2$. Sigui μ un coeficient de Beltrami amb suport compacte, tal que $\mu \in W^{1,2}(\mathbb{C})$. Si

$$\langle \overline{\partial} f, \varphi \rangle = \langle \mu\, \partial f, \varphi \rangle$$

per a tota $\varphi \in \mathcal{D}$, aleshores $f \in W^{2,q}_{loc}(\mathbb{C})$ per a tot $q < 2$. En particular, f és μ-quasiregular.

Una de les eines necessàries en la demostració d'aquest fet és que aquests coeficients de Beltrami donen lloc a aplicacions μ-quasiconformes que no només pertanyen a la classe $W^{1,p}_{loc}(\mathbb{C})$ per a tot $p < \frac{2K}{K-1}$ (això passa per a tota μ acotada amb $\|\mu\|_\infty \leq \frac{K-1}{K+1}$) sinó que també pertanyen als espais de Sobolev de segon ordre $W^{2,q}_{loc}(\mathbb{C})$ per a tot $q < 2$. Sabem que aquesta regularitat és òptima.

Amb el resultat d'automillora conegut, podem tornar al problema d'evitabilitat. Així, es diu que un conjunt E és evitable per a funcions μ-quasiregulars i acotades si cada funció acotada $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, μ-quasiregular a $\mathbb{C} \setminus E$, és en realitat constant. Notem que les funcions analítiques no són μ-quasiregulars per a tota μ, mentre que sí que són K-quasiregulars per a tota K. Això significa que aquest és un problema que es refereix precisament a la regularitat de l'equació, més que al valor concret de K. D'entre les conseqüències de la variant del Lema de Weyl, trobem que els problemes d'evitabilitat BMO i VMO tenen, per als operadors $\overline{\partial}$ i $\overline{\partial} - \mu\,\partial$, la mateixa solució. En termes de distorsió, aquest fet implica que $\mathcal{M}^1(E) = 0$ si i només si $\mathcal{M}^1(\phi(E)) = 0$, i $\mathcal{M}^1_*(E) = 0$ si i només si $\mathcal{M}^1_*(\phi(E)) = 0$. En altres paraules, per a coeficients de Beltrami amb suport compacte i a $W^{1,2}(\mathbb{C})$, les corresponents aplicacions quasiconformes preserven els conjunts evitables per a les funcions analítiques de BMO (i VMO), tal i com fan les aplicacions bilipschitzianes.

Per descomptat, el següent pas natural és el problema L^∞, és a dir, caracteritzar els conjunts evitables per a les funcions μ-quasiregulars i acotades. Hom podria reformular el problema en termes de distorsió d'alguna funció de conjunt, tot preguntant-se quins són els compactes E per als quals les seves imatges μ-quasiconformes tenen sempre capacitat analítica nul·la. Aquesta lectura del problema ens porta directament a la invariància bilipschitz de la capacitat analítica de Tolsa [52]. Més precisament, donat un compacte E i un homeomorfisme f, és sabut que $\gamma(E)$ i $\gamma(f(E))$ són comparables si i només si f és bilipschitz. En conseqüència, tota imatge bilipschitz d'un conjunt evitable és també evitable. Un dels principals resultats del Capítol 4 és la demostració que les aplicacions μ-quasiconformes que s'hi tracten preserven els conjunts de capacitat analítica zero i longitud σ-finita.

Teorema 8.
Sigui $\mu \in W^{1,2}(\mathbb{C})$ un coeficient de Beltrami amb suport compacte, i sigui ϕ una aplicació μ-quasiconforme. Llavors, per a tot compacte E de longitud $\mathcal{H}^1(E)$ σ-finita,

$$\gamma(E) = 0 \;\;\Leftrightarrow\;\; \gamma(\phi(E)) = 0.$$

En la demostració és molt important el fet que les aplicacions μ-quasiconformes són diferenciables en tots els punts del pla, tret d'un conjunt de longitud zero (de fet de dimensió 0). El mateix passa amb les aplicacions inverses. Aquesta diferenciabilitat permet demostrar que conjunts rectificables tenen imatges també rectificables. Altre cop, la caracterització de G. David [15] fa la resta. Tot i que les aplicacions μ-quasiconformes amb $\mu \in W^{1,2}$ no són en general bilipschitz, es podria començar a pensar que potser no n'estan tan lluny.

Aquesta memòria està dividida en 4 capítols. Al Capítol 1 donem alguns aspectes preliminars. Els altres 3 capítols tracten diferents problemes d'evitabilitat per a funcions quasiregulars. Cadascun d'aquests capítols és independent dels altres.

Al Capítol 2 considerem qüestions sobre distorsió K-quasiconforme i conjunts evitables per a funcions K-quasiregulars i acotades. Es basa en l'article [5],

- K. ASTALA, A. CLOP, J. MATEU, J. OROBITG, I. URIARTE-TUERO, *Distortion of Hausdorff measures and improved Painlevé removability for quasiregular mappings*, sotmès.

Al Capítol 3 obtenim alguns resultats relacionats amb el problema de caracteritzar els conjunts evitables per a les funcions K-quasiregulars i α-Hölder contínues. Hi hem inclòs els resultats de [12] i [13]:

- A. CLOP, *Removable singularities for Hölder continuous quasiregular mappings in the plane*, apareixerà a Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A I Math.

- A. CLOP, *Nonremovable sets for Hölder continuous quasiregular mappings in the plane*, apareixerà a Michigan Math. J.

Finalment, el Capítol 4 inclou qüestions sobre evitabilitat per a funcions quasiregulars amb coeficient de Beltrami μ fixat dins de l'espai de Sobolev $W^{1,2}$. En altres paraules, la nostra atenció se centra en els conjunts evitables per a les solucions d'una determinada equació en derivades parcials. Hi donem els resultats del preprint [14]

- A. CLOP, J. MATEU, J. OROBITG, *Beltrami equations with coefficient in the Sobolev space $W^{1,2}$*, Preprint (2006).

He usat majoritàriament la notació que he anat trobant a les principals referències sobre aplicacions quasiconformes. De cara a donar consistència a la totalitat d'aquesta memòria, he fet alguns canvis respecte a les versions originals dels articles.

Agraïments

Em sento en deute amb tothom qui m'ha mostrat el seu suport durant els darrers anys. Per això, voldria expressar-los el meu agraïment.

A la Universitat Autònoma de Barcelona, pel suport tècnic que m'ha facilitat. A la Rosa Rodríguez, que ha fet tots els dibuixos d'aquesta memòria. Al Miquel Brustenga, gràcies al qual la meva estada a Finlàndia va ser informàticament més fàcil. A tot el personal del Departament de Matemàtiques de la U.A.B., on sempre he trobat un ambient acollidor i inspirador.

A K. Astala, D. Faraco, P. Koskela, I. Prause, I. Uriarte-Tuero, J. Verdera i X. Zhong, pel vostre temps i els vostres suggeriments.

A la meva gent.
Al Gerard, el Dani, el Juanje, el Ramón, el Geir Arne, la Mònica i la Isabel, perquè amb vosaltres he rigut molt, i perquè espero seguir-ho fent. A les *burbujitas*, Míriam, Marta, Elisenda, Joan, Estrella, Carme i Laura, amb qui he compartit penes i glòries. A l'Anna, la Neus, l'Agustí, el Pau, el Martí i la Nausica, perquè sempre hi sou quan us necessito. Als meus pares, que malgrat les circumstàncies han estat sempre al meu costat. Al Xavi.

Finalment, als meus directors, Joan Mateu i Joan Orobitg. A ells dedico aquesta tesi, per tantes hores de discussió, per *tanta* paciència. Ells han proposat els problemes que s'hi tracten. Les seves idees, els seus consells, el seu suport incondicional i el seu bon humor han estat fonamentals per a aquest treball, que altrament de ben segur no hauria arribat a bon port.

Índex

1 Preliminars

1.1 Espais de funcions

Si $\Omega \subset \mathbb{C}$ és un obert, denotem per $\mathcal{D}(\Omega)$ l'àlgebra de funcions $\varphi : \Omega \to \mathbb{C}$ de classe $\mathcal{C}^\infty$ amb suport compacte contingut a Ω. Per a aquestes funcions, i donat un parell $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2)$ d'enters no negatius, denotem

$$\partial^\alpha \varphi = \frac{\partial^{|\alpha|}\varphi}{\partial x^{\alpha_1} \partial y^{\alpha_2}}$$

on $|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2$. En particular, $\partial = \frac{1}{2}\left(\partial_x - i\partial_y\right)$ i $\overline{\partial} = \frac{1}{2}\left(\partial_x + i\partial_y\right)$. Amb $D\varphi(z)$ denotem la matriu jacobiana de φ al punt z, i $J(z, \varphi)$ n'és el determinant.
L'espai de totes les distribucions el denotarem per $\mathcal{D}'(\Omega)$. Diem que una distribució f s'anul·la en un obert Ω si $\langle f, \varphi \rangle = 0$ per a tota $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$. El següent resultat és conegut com a *Lema de Weyl*.

Teorema 1.1.
Sigui $f \in \mathcal{D}'(\Omega)$ tal que $\overline{\partial} f = 0$ sobre un domini $\Omega \subset \mathbb{C}$. Aleshores, existeix una funció holomorfa $h : \Omega \to \mathbb{C}$ tal que $f = h$.

Per a tot $p \in [1, \infty]$ i $k = 1, 2, \ldots$, l'espai de Sobolev $W^{k,p}(\Omega)$ és el conjunt de funcions $f \in L^p(\Omega)$ per a les quals totes les seves derivades distribucionals de fins a ordre k estan representades per funcions de classe $L^p(\Omega)$. La fórmula

$$\|f\|_{k,p} = \left(\sum_{|\alpha| \leq k} \|\partial^\alpha f\|_p \right)^{\frac{1}{p}}$$

defineix una norma completa a $W^{k,p}(\Omega)$, per a la qual $\mathcal{C}^\infty(\Omega)$ és dens. Per $W_0^{k,p}(\Omega)$ denotem l'adherència de $\mathcal{D}(\Omega)$ a $W^{k,p}(\Omega)$. En particular, $W^{k,p}(\mathbb{C}) = W_0^{k,p}(\mathbb{C})$. Amb $W_{loc}^{k,p}(\Omega)$ denotem l'espai de Sobolev local, és a dir, $f \in W_{loc}^{k,p}(\Omega)$ si i només si $f \in L_{loc}^p(\Omega)$ i $\partial^\alpha f \in L_{loc}^p(\Omega)$ sempre que $|\alpha| \leq k$. Direm que una successió $\{f_j\}_j$ convergeix a f en $W_{loc}^{k,p}(\Omega)$ si

$$\|\partial^\alpha f_j - \partial^\alpha f\|_{L^p(F)} \to 0$$

quan $j \to \infty$, per a tot compacte $F \subset \Omega$ i tot $|\alpha| \leq k$.

Diem que una funció $f \in L_{loc}^1(\Omega)$ té *oscil·lació mitjana acotada* a Ω, i escrivim $f \in BMO(\Omega)$, si per a tot disc $D \subset \Omega$ existeix una constant f_D tal que

$$\|f\|_* = \sup_{D \subset \Omega} \frac{1}{|D|} \int_D |f(z) - f_D| \, dA(z) < \infty$$

Diem que una funció $f \in BMO(\mathbb{C})$ té *oscil·lació mitjana nul·la* a $\mathbb{C}$, i escrivim $f \in VMO(\mathbb{C})$ si

$$\lim \frac{1}{|D|} \int_D |f - f_D| = 0$$

quan $|D| + \frac{1}{|D|} \to \infty$. Equivalentment, VMO també es pot introduir com a l'adherència a BMO de les funcions contínues amb suport compacte.

Donat $\alpha \in (0,1)$, l'espai de Hölder $\mathrm{Lip}_\alpha(\Omega)$ és la classe de funcions *localment Hölder contínues* d'exponent α al conjunt Ω, és a dir, $f \in \mathrm{Lip}_\alpha(\Omega)$ si la quantitat

$$\|f\|_\alpha = \sup_{|z-w|<1, z \neq w} \frac{|f(z) - f(w)|}{|z-w|^\alpha}$$

és finita. Es pot veure que si $\alpha \in (0,1)$ llavors $f \in \mathrm{Lip}_\alpha(\Omega)$ si i només si

$$\sup_{D \subset \Omega} \frac{1}{|D|^{1+\frac{\alpha}{2}}} \int_D |f(z) - f_D| \, dA(z) < \infty$$

De fet, per a tot $p \in [1, \infty)$, la quantitat

$$\sup_{D \subset \Omega} \left(\frac{1}{|D|^{1+\frac{\alpha p}{2}}} \int_D |f(z) - f_D|^p \, dA(z) \right)^{\frac{1}{p}}$$

és comparable a $\|f\|_*$ si $\alpha = 0$, i a $\|f\|_\alpha$ si $\alpha \in (0, 1)$.

El Teorema de la Immersió de Sobolev estableix relacions entre L^p, Lip_α, BMO i $W^{k,p}$.

Teorema 1.2.
Sigui $p \in [1, \infty)$, i sigui $\Omega \subset \mathbb{C}$ o bé un disc o bé tot el pla.

(a) Si $1 \leq p < 2$, llavors $W^{1,p}(\Omega) \subset L^q(\Omega)$, on $\frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{1}{2}$.

(b) Si $p = 2$, llavors $W^{1,p}(\Omega) \subset BMO(\Omega)$.

(c) Si $2 < p < \infty$, llavors $W^{1,p}(\Omega) \subset \mathrm{Lip}_{1-\frac{2}{p}}(\Omega)$.

Una *funció d'Orlicz* és una funció contínua $P : [0, \infty) \to [0, \infty)$, creixent, tal que $P(0) = 0$ i $\lim_{t \to \infty} P(t) = \infty$. L'*espai d'Orlicz* $L^P(\Omega)$ consisteix en totes les funcions $f : \Omega \to \mathbb{C}$ mesurables i tals que

$$\int_\Omega P(\lambda |f(z)|) \, dA(z) < \infty$$

per a alguna $\lambda > 0$. La quantitat

$$\|f\|_P = \inf \left\{ \frac{1}{\lambda} : \int_\Omega P(\lambda |f(z)|) \, dA(z) < P(1) \right\}$$

s'anomena *funcional de Luxemburg*. Si P és convexa llavors $\| \cdot \|_P$ defineix una norma completa a $L^P(\Omega)$. Com a exemples,

- $P(t) = e^{t^\alpha} - 1$. En aquest cas, denotem $L^P(\Omega) = Exp(\Omega)$.

- $P(t) = t^p \log^\alpha(e + t)$, $\alpha \geq 1 - p$. En aquest cas, denotem $L^P(\Omega) = L^p \log^\alpha L(\Omega)$.

Remarquem que si $\alpha > 0$ aleshores la norma de $L^p \log^\alpha L(\Omega)$ es pot aproximar sense passar pel funcional de Luxemburg, mitjançant la fórmula

$$\|f\|_{L^p \log^\alpha L} \simeq \left(\int_\Omega |f(z)|^p \, \log^\alpha \left(e + \frac{|f(z)|}{\|f\|_p} \right) dA(z) \right)^{\frac{1}{p}}$$

Dues funcions d'Orlicz P, Q són *mútuament conjugades* si existeix $C > 0$ tal que

$$\int_\Omega |f(z)| \, |g(z)| \, dA(z) \, \leq C \|f\|_{L^P(\Omega)} \, \|g\|_{L^Q(\Omega)}$$

per a tota $f \in L^P(\Omega)$ i $g \in L^Q(\Omega)$. Com a exemples de parelles conjugades, esmentem:

- $P(t) = t^p \log^\alpha (e + t)$ i $Q(t) = t^q \log^{-\alpha}(e + t)$, $q = \frac{p}{p-1}$, $1 < p < \infty$, $\alpha > 0$.
- $P(t) = t \, \log^\alpha (e + t)$ i $Q(t) = e^{t^{\frac{1}{\alpha}}} - 1$ si $\alpha > 0$;

Una explicació més detallada de les propietats dels espais d'Orlicz es pot trobar, per exemple, als llibres de Krasnosel'skiĭ i Rutickiĭ [36] o Rao i Ren [45].

La *Transformada de Beurling* és l'operador definit sobre funcions prou bones per

$$Bf(z) = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{-1}{\pi} \int_{|z-w| \geq \varepsilon} \frac{f(w)}{(w-z)^2} \, dA(w) \tag{1.1}$$

Equivalentment, B es pot definir per

$$\widehat{(Bf)}(\xi) = m(\xi) \, \widehat{f}(\xi)$$

amb $m(\xi) = \dfrac{\xi^2}{|\xi|^2}$. Es tracta d'un operador de Calderón-Zygmund, demanera que B és acotat a $L^p(\mathbb{C})$ per a tot $p \in (1, \infty)$, i per a $p = 1$ satisfà una estimació feble. Si $f \in W^{1,p}(\mathbb{C})$, $p > 1$, llavors

$$B(\overline{\partial} f) = \partial f$$

donat que per Plancherel es té

$$\langle B(\overline{\partial} f), g \rangle = \int \frac{\omega^2}{|\omega|^2} \, c \, \overline{\omega} \, \widehat{f}(\omega) \, \widehat{g}(\omega) \, dA(\omega) = c \int \omega \widehat{f}(\omega) \, \widehat{g}(\omega) \, dA(\omega) = \langle \partial f, g \rangle$$

La Transformada de Beurling es pot veure com la derivada de la *Transformada de Cauchy*, definida sobre funcions prou bones per

$$Cf(z) = -\frac{1}{\pi}\int \frac{f(w)}{w-z}\,dA(w) \tag{1.2}$$

Si $f \in L^p(\mathbb{C})$ per algun $p > 1$ llavors $Cf \in W^{1,p}(\mathbb{C})$ i

$$\begin{aligned} \partial(Cf) &= Bf \\ \overline{\partial}(Cf) &= f \end{aligned}$$

Es pot normalitzar aquest operador de manera que la funció imatge deixi fix l'origen. En tal cas, definim (com a Ahlfors [2, p.85])

$$\tilde{C}f(z) = -\frac{1}{\pi}\int f(w)\left(\frac{1}{w-z} - \frac{1}{w}\right) dA(w) \tag{1.3}$$

En realitat, si f és prou bona, $\tilde{C}f(z) = Cf(z) - Cf(0)$. Per això, per a tot $p \in (1,\infty)$, si $f \in L^p(\mathbb{C})$ llavors $\tilde{C}f \in \mathbb{C} + W^{1,p}(\mathbb{C})$. En qualsevol cas, si $p > 2$ aleshores

$$\frac{|Cf(z) - Cf(w)|}{|z-w|^{1-\frac{2}{p}}} = \frac{|\tilde{C}f(z) - \tilde{C}f(w)|}{|z-w|^{1-\frac{2}{p}}} \leq C_p \|f\|_p$$

1.2 Mesures i continguts de Hausdorff

S'anomena *funció de mesura* a tota funció $h : [0,\infty) \to [0,\infty)$ no decreixent, tal que $\lim_{t\to\infty} h(t) = 0$. Donada una funció de mesura h, per a tot $\delta \in (0,\infty]$ denotem

$$\mathcal{H}^h_\delta(F) = \inf\left\{\sum_{j=1}^{\infty} h(\mathrm{diam}(D_j))\right\}$$

on l'ínfim recorre tots els recobriments numerables de F, $F \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} D_j$, per discos D_j de diàmetre $\mathrm{diam}(D_j) \leq \delta$. Si $\delta = \infty$, denotem $\mathcal{M}^h(F) = \mathcal{H}^h_\infty(F)$. És fàcil veure que $\mathcal{H}^h_\delta$ defineix una funció de conjunt monòtona i subadditiva, tal que $\mathcal{H}^h_\delta(F) \leq \mathcal{H}^h_\epsilon(F)$ si

$0 < \epsilon \le \delta$. El límit
$$\mathcal{H}^h(F) = \lim_{\delta\to 0} \mathcal{H}^h_\delta(F)$$
defineix una mesura Borel regular (vegeu per exemple Mattila [39]), tal que
$$\mathcal{H}^h(F) = 0 \qquad \iff \qquad \mathcal{H}^h_\delta(F) = 0$$
per a tot $\delta \in (0,\infty]$. En el cas particular $h(t) = t^d$, $d > 0$, aleshores escrivim $\mathcal{M}^h(F) = \mathcal{M}^d(F)$ i $\mathcal{H}^h(F) = \mathcal{H}^d(F)$, i els anomenem *contingut de Hausdorff d-dimensional* i *mesura de Hausdorff d-dimensional* de F, respectivament. Podem associar a cada conjunt F un nombre real, definit per
$$\dim(F) = \inf\{d > 0 : \mathcal{M}^d(F) = 0\} = \sup\{d > 0 : \mathcal{M}^d(F) > 0\}$$
al qual anomenem *dimensió de Hausdorff* (o simplement *dimensió*) de F.

El següent resultat, conegut com a *Lema de Frostman* (vegeu e.g. [39, p.112]), caracteritza els compactes amb contingut de Hausdorff d-dimensional positiu.

Teorema 1.3.
Sigui E un conjunt compacte, i $d \in (0,2]$. Aleshores, $\mathcal{M}^d(E) > 0$ si i només si existeix una mesura positiva de Radon ν, suportada sobre E, tal que $\nu(D(z,r)) \le C\, r^d$ per a tot $z \in E$ i tot $r > 0$. Més encara, ν es pot escollir de manera que $\nu(F) \gtrsim \mathcal{M}^d(F)$.

El *contingut inferior de Hausdorff d-dimensional* de F és
$$\mathcal{M}^d_*(F) = \sup_{h\in\mathcal{F}_d} \mathcal{M}^h(F)$$
on $\mathcal{F} = \mathcal{F}_d$ és el conjunt de totes les funcions de mesura $h(t) = t^d\, \varepsilon(t)$, $0 \le \varepsilon(t) \le 1$, tals que $\lim_{t\to 0} \varepsilon(t) = 0$. En general, $\mathcal{M}^d_*(F) \le \mathcal{M}^d(F)$, però podria passar que $\mathcal{M}^d_*(F) = 0 < \mathcal{M}^d(F)$. Per exemple, si F és el segment $[0,1]$ al pla, llavors $\mathcal{M}^1_*(F) = 0$ però $\mathcal{M}^1(F) = 1$. Per a un disc D, $\mathcal{M}^d_*(D) = \mathcal{M}^d(D)$, i per a un obert U, $\mathcal{M}^d_*(U) \simeq \mathcal{M}^d(U)$. El següent és un antic resultat degut a Sion i Sjerve [50].

Teorema 1.4.
Sigui $E \subset \mathbb{C}$ un compacte, i sigui $d \in (0,2]$. Aleshores, $\mathcal{M}_*^d(E) = 0$ si i només si $\mathcal{H}^d(E)$ és σ-finita.

Diem que $\Gamma \subset \mathbb{C}$ és una *corba rectificable* si $\Gamma = f(I)$ per a alguna funció lipschitziana $f : I \to \mathbb{C}$ d'un intèrval obert $I \subset \mathbb{R}$. Un conjunt $E \subset \mathbb{C}$ es diu *rectificable* si existeixen subconjunts $I_j \subset \mathbb{R}$ i funcions de Lipschitz $f_j : I_j \to \mathbb{C}$ tals que el conjunt

$$E \setminus \bigcup_{j=1}^{\infty} f_j(I_j)$$

té longitud zero. Un conjunt $E \subset \mathbb{C}$ es diu *purament no rectificable* si

$$\mathcal{H}^1(E \cap \Gamma) = 0$$

per a tota corba rectificable $\Gamma \subset \mathbb{C}$. És ben sabut que els conjunts rectificables tenen sempre longitud σ-finita. Són estables per unions numerables, i tots els seus subconjunts són també rectificables. El següent és un resultat ben conegut de Besicovitch (e.g. [39, p.205]).

Teorema 1.5.
Si $A \subset \mathbb{C}$ té longitud finita, llavors A admet una descomposició

$$A = R \cup P \cup Z$$

on R és rectificable, P és purament no rectificable, i $\mathcal{H}^1(Z) = 0$.

1.3 El problema de Painlevé

Un conjunt E es diu *evitable* per a funcions analítiques acotades si per a tot obert $\Omega \supset E$, tota funció $f \in L^\infty(\Omega)$ holomorfa a $\Omega \setminus E$ admet una extensió holomorfa a tot Ω. En aquesta definició, hom pot restringir-se al cas $\Omega = \mathbb{C}$. El *problema de Painlevé* consisteix a donar caracteritzacions mètriques i geomètriques per als conjunts evitables. En relació amb aquest problema apareix una important funció de conjunt, anomenada *capacitat analítica*, introduïda per Ahlfors a [3] i definida per

$$\gamma(E) = \sup \left\{ |f'(\infty)|; f \in H(\mathbb{C} \setminus E), \|f\|_\infty \leq 1, f(\infty) = 0 \right\} \tag{1.4}$$

Aquí $H(\Omega)$ és l'espai de funcions analítiques a l'obert Ω, $f(\infty) = \lim_{|z|\to\infty} f(z)$ i $f'(\infty) = \lim_{|z|\to\infty} z\,(f(z) - f(\infty))$. Notem que per mitjà del Teorema de Stokes es pot veure que si $f \in H(\mathbb{C} \setminus E)$ aleshores

$$|f'(\infty)| = |\langle \overline{\partial} f, 1 \rangle|$$

A la pràctica, $\gamma(E) = 0$ si i només si E és evitable per a funcions analítiques acotades. Hi ha un resultat clàssic de Painlevé que diu que $\gamma(E) \lesssim \mathcal{H}^1(E)$. D'altra banda, no és difícil veure que $\dim(E) > 1$ implica $\gamma(E) > 0$. Per tant, només els conjunts E amb $\dim(E) = 1$ són interessants.

El proper resultat estableix la solució del problema de Painlevé per a conjunts amb longitud finita. Va ser provat per G. David [15].

Teorema 1.6.
Sigui E un compacte tal que $\mathcal{H}^1(E) < \infty$. Llavors,

$$\gamma(E) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad E \text{ és purament no rectificable}$$

Com a conseqüència dels resultats de Tolsa [51], l'anterior teorema és també cert si E té longitud σ-finita. Pel que fa a conjunts no evitables de dimensió 1, disposem de la següent condició suficient, deguda a P. Mattila [40].

Teorema 1.7.
Sigui h una funció de mesura, i sigui E un compacte tal que $\mathcal{H}^h(E) > 0$. Si

$$\int_0^1 \frac{h(t)^2}{t^3} dt < \infty$$

aleshores $\gamma(E) > 0$.

La solució completa del problema de Painlevé apareix finalment a un article de Tolsa [51], en termes de la curvatura de Menger. Un altre resultat principal d'aquest paper és l'anomenada *semiadditivitat de la capacitat analítica*.

Teorema 1.8.
Existeix una constant absoluta $C > 0$ tal que

$$\gamma\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} E_j\right) \leq C \sum_{j=1}^{\infty} \gamma(E_j)$$

per a tota família de conjunts E_j.

Recordem que una funció $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ es diu que és *bilipschitz* si existeix una constant C tal que

$$\frac{1}{C}|z-w| \leq |f(z) - f(w)| \leq C|z-w|$$

El proper resultat de X. Tolsa [52] relaciona aquestes funcions amb la capacitat analítica.

Teorema 1.9.
Sigui $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ una funció bilipschitz. Aleshores, per a tot compacte $E \subset \mathbb{C}$,

$$\gamma(\phi(E)) \simeq \gamma(E).$$

1.4 Aplicacions quasiconformes

Sigui $K \geq 1$. Un homeomorfisme $\phi : \Omega \to \Omega'$ entre dominis planars $\Omega, \Omega' \subset \mathbb{C}$ es diu *K-quasiconforme* si viu a $W^{1,2}_{loc}(\Omega)$ i satisfà

$$\max_{\alpha} |\partial_\alpha \phi(z)| \leq K \min_{\alpha} |\partial_\alpha \phi(z)| \tag{1.5}$$

a quasi tot punt $z \in \Omega$. Aquesta desigualtat és equivalent a la *desigualtat de distorsió*,

$$|Df(z)|^2 \leq K\, J(z, f). \tag{1.6}$$

D'aquesta desigualtat, es pot deduir que a escales petites

$$\max_{|z-z_0|=r} |\phi(z) - \phi(z_0)| \leq C \min_{|z-z_0|=r} |\phi(z) - \phi(z_0)|, \tag{1.7}$$

per a una constant C que només depèn de K. De fet, els homeomorfismes que satisfan (1.7) són K-quasiconformes per alguna K. Sovint, la següent definició equivalent, donada en termes d'equacions en derivades parcials, serà més convenient. S'anomena *coeficient de Beltrami* a tota funció mesurable $\mu \in L^\infty(\Omega)$ tal que $\|\mu\|_\infty < 1$. Una aplicació *μ-quasiconforme* és qualsevol homeomorfisme $\phi : \Omega \to \phi(\Omega)$ de classe $W^{1,2}_{loc}(\Omega)$ que resol l'*equació de Beltrami*,

$$\overline{\partial}\phi = \mu\, \partial\phi. \tag{1.8}$$

Des d'aquest punt de vista, ϕ és K-quasiconforme si i només si és μ-quasiconforme per alguna μ tal que $\|\mu\|_\infty \leq \frac{K-1}{K+1}$. Per *quasiconforme* entenem K-quasiconforme per alguna $K \geq 1$. Esmentem alguns exemples:

- Les aplicacions conformes són 1-quasiconformes.
- Si $1 \leq K \leq K'$, llavors tota aplicació K-quasiconforme és també K'-quasiconforme.
- El *radial stretching*, $\phi(z) = z\,|z|^{\frac{1}{K}-1}$, amb coeficient de Beltrami $\mu(z) = -\frac{K-1}{K+1}\,\frac{z}{\bar{z}}$.
- $\phi(z) = z\,(1 - \log|z|)$, amb $\mu(z) = \frac{z}{\bar{z}}\,\frac{1}{1-2\log|z|}$.

D'entre els exemples anteriors, remarquem que el radial stretching és extremal per algunes de les propietats típiques de regularitat K-quasiconforme. Finalment, el proper exemple mostra un conegut mètode explícit per resoldre l'equació de Beltrami, sota la hipòtesi adicional que μ té suport compacte (vegeu Ahlfors [2, p.90]).

Exemple 1.10.
Provarem que si μ té suport compacte, llavors existeix una única aplicació μ-quasiconforme ϕ tal que

$$\phi(z) - z = O(1/|z|) \tag{1.9}$$

quan $|z| \to \infty$. Per construir-la, primer notem que $\|\mu B\|_{L^2(\mathbb{C})\to L^2(\mathbb{C})} \leq \|\mu\|_\infty < 1$. D'aquí, la *fòrmula*

$$Tg = \sum_{n=o}^{\infty} (\mu B)^n (g) = g + \mu B(g) + \mu B(\mu B(g)) + \ldots$$

defineix un operador lineal acotat $T : L^2(\mathbb{C}) \to L^2(\mathbb{C})$, *tal que*

$$(I - \mu B)(Tg) = T(I - \mu B)(g) = g,$$

és a dir, $T = (I - \mu B)^{-1}$. *En realitat, això passa també a* $L^p(\mathbb{C})$ *per a certs valors* $p > 2$, *ja que* $\|B\|_{L^p(\mathbb{C}) \to L^p(\mathbb{C})}$ *és una funció contínua de p [37, p.214]. Denotem* $h = T\mu$ *(llavors* $h = \mu Bh + \mu$*), i definim*

$$\phi(z) = z + Ch(z).$$

Clarament, $\phi \in W^{1,p}_{loc}(\mathbb{C})$, $\partial\phi = 1 + Bh$ *i* $\overline{\partial}\phi = h$. *Així,* ϕ *és una solució de l'equació de Beltrami* $\overline{\partial}\phi = \mu\,\partial\phi$, *de classe* $W^{1,p}_{loc}(\mathbb{C})$. *Un argument d'aproximació [2] mostra que en realitat* ϕ *és globalment injectiva. D'altra banda, resultats clàssics de topologia mostren que* ϕ *és exhaustiva. Finalment, com que* μ *té suport compacte, h també, de manera que és clar que* $|Ch(z)|$ *decreix a l'infinit com* $\frac{1}{|z|}$.
En aquesta construcció, la normalització escollida pot ser diferent. Per exemple, existeix una única aplicació μ*-quasiconforme* $\tilde{\phi}$ *tal que*

$$\tilde{\phi}(0) = 0 \qquad \text{i alhora} \qquad \tilde{\phi}(z) - (z + a) \in W^{1,p}(\mathbb{C}) \tag{1.10}$$

per alguna constant $a \in \mathbb{C}$ *i algun* $p > 2$. *Això es pot fer fàcilment afegint una constant,*

$$\tilde{\phi}(z) = z + \tilde{C}h(z) = \phi(z) - \phi(0).$$

Notem que les normalitzacions (1.9) i (1.10) difereixen només en una aplicació lineal, és a dir, $\tilde{\phi} \circ \phi^{-1}(z) = z - a$. *Si* μ *té suport compacte, anomenararem tant a* ϕ *com a* $\tilde{\phi}$ *solució principal de l'equació de Beltrami* $\overline{\partial}\phi = \mu\,\partial\phi$, *i especificarem la normalització (1.9) o (1.10) quan sigui estrictament necessari.*

Per a μ general, tenim el proper resultat, vàlid no només sobre $\mathbb{C}$ sinó també a qualsevol domini simplement connex (vegeu Lehto i Virtanen [37]).

Teorema 1.11.
Sigui μ un coeficient de Beltrami. Existeix una aplicació μ-quasiconforme $\phi : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$. A més si $\phi_1, \phi_2 : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ són μ-quasiconformes, llavors $\phi_1 \circ \phi_2^{-1}$ és conforme.

Estem interessats no només en homeomorfismes, sinó també en solucions més generals. Així, diem que una funció $f : \Omega \to \mathbb{C}$ és *K-quasiregular* en un obert $\Omega \subset \mathbb{C}$ si $f \in W^{1,2}_{loc}(\Omega)$ i satisfà (1.6). Per descomptat, hom pot parlar de funcions *μ-quasiregulars*, quan sigui necessària una referència al coeficient de Beltrami. Com abans, *quasiregular* significa K-quasiregular per alguna $K \geq 1$. És clar que si $\mu = 0$ (i.e. si $K = 1$) hom recupera la classe de funcions analítiques. Per a μ general, les funcions μ-quasiconformes caracteritzen les restants solucions a $W^{1,2}_{loc}$. Aquest fet és conegut amb el nom de *factorització de Stoilow*.

Teorema 1.12.
Sigui μ un coeficient de Beltrami. Sigui ϕ una aplicació μ-quasiconforme.

(a) Si h és holomorfa, llavors $f = h \circ \phi$ és μ-quasiregular.

(b) Si f és μ-quasiregular, llavors $h = f \circ \phi^{-1}$ és holomorfa.

D'aquí que tota funció K-quasiregular f pot ser escrita com un canvi de variable K-quasiconforme ϕ d'una funció analítica h. A més, tant f com ϕ tenen el mateix coeficient de Beltrami. Per tant, totes les propietats de regularitat de les funcions K-quasiregulars es deriven de la seva component K-quasiconforme.

Les aplicacions quasiconformes compten amb fortes propietats de *normalitat* (una excel·lent explicació es pot trobar al llibre de Lehto i Virtanen [37]). Per retenir una idea, assumim que $\mathcal{F}$ és una família arbitrària d'aplicacions K-quasiconformes $\phi : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, normalitzades d'alguna manera. Usualment, és suficient imposar la condició (1.9) o bé (1.10) a totes les funcions ϕ de la família $\mathcal{F}$. D'altres possibilitats passen per forçar $\operatorname{diam}(\phi(\mathbb{D})) = 1$, o fins i tot demanar a tota $\phi \in \mathcal{F}$ que fixi 3 punts a $\mathbb{S}^2$. Suposem, per exemple, que ens trobem en aquest cas, i tota aplicació de $\mathcal{F}$ deixa fixos 0, 1 i ∞. Aleshores, una de les següents propietats implica les altres dues:

- $\mathcal{F}$ és una família equicontínua sobre cada compacte.
- $\mathcal{F}$ és una família compacta, si la restringim a conjunts compactes del pla..
- $\mathcal{F}$és una família Hölder contínua, si la restringim a conjunts compactes del pla.

Aquestes propietats sempre es compleixen, com a conseqüència del següent resultat de Mori [41]. L'optimalitat de l'exponent prové del radial stretching.

Teorema 1.13.
Sigui $\phi : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ una aplicació K-quasiconforme normalitzada. Llavors,

$$|\phi(z) - \phi(w)| \leq C\,|z - w|^{\frac{1}{K}}$$

on C només depèn de K.

Un *K-quasidisc* (resp. un *K-quasicercle*) és la imatge del disc unitat $\mathbb{D}$ (resp. el cercle unitat $\partial\mathbb{D}$) per mitjà d'una aplicació K-quasiconforme $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$. És conseqüència de (1.7) que per a tot disc D i tota aplicació K-quasiconforme ϕ,

$$\operatorname{diam}(\phi(D)) \simeq |\phi(D)|^{\frac{1}{2}}$$

amb constants que poden dependre de la normalització. El que això diu és que els quasidiscos tanquen una àrea comparable al quadrat del seu diàmetre. Per tant, per a tot disc D, el Teorema de Mori diu que

$$|\phi(D)| \leq C\,|D|^{\frac{1}{K}}$$

i és natural preguntar-se si això passa per una classe més gran de conjunts. Després de molts anys, això va ser demostrat per K. Astala [4]. El principal resultat en aquest article és conegut com a Teorema de Distorsió d'Àrea .

Teorema 1.14.
Sigui ϕ una aplicació K-quasiconforme normalitzada, en un domini $\Omega \subset \mathbb{C}$. Per a tot conjunt mesurable $E \subset \Omega$

$$|\phi(E)| \leq C\,|E|^{\frac{1}{K}}.$$

En el transcurs d'aquesta memòria entendrem la rellevància d'aquest fet. Per començar, observem que si ϕ és qualsevol homeomorfisme amb jacobià localment integrable, aleshores més integrabilitat de $J(\cdot,\phi)$ és equivalent a una mena de fórmula de distorsió d'àrea. Més precisament, $J(\cdot,\phi) \in L^{\frac{1}{1-\alpha},\infty}_{loc}$ per algun $\alpha \in (0,1)$ si i només si

$$|\phi(E)| \leq C\,|E|^{\alpha}$$

per a tot conjunt mesurable E. Ara bé, si a més assumim que ϕ és K-quasiconforme, llavors això és equivalent a dir $D\phi \in L^{\frac{2}{1-\alpha},\infty}_{loc}$. Per tant, podem deduir la integrabilitat òptima per a funcions K-quasiregulars.

Teorema 1.15.
Sigui $\phi : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ una aplicació K-quasiconforme. Aleshores, $D\phi \in L^{\frac{2K}{K-1},\infty}_{loc}$.

Altre cop, el radial stretching mostra que l' índex $\frac{2K}{K-1}$ és òptim. En particular tota funció K-quasiregular té també aquesta regularitat. D'altra banda, es pot dir quelcom millor sota certes hipòtesis de conformalitat. Més precisament, la integrabilitat òptima pot ser assolida en el sentit fort en segons quins casos. El proper resultat és degut a K. Astala i V. Nesi [10].

Teorema 1.16.
Sigui $\phi : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ una aplicació K-quasiconforme, conforme a $\mathbb{C} \setminus \mathbb{D}$, i normalitzada amb la condició $\phi(z) - z = O(\frac{1}{|z|})$ quan $|z| \to \infty$. Suposem que $E \subset \mathbb{D}$ és tal que $\overline{\partial}\phi = 0$ quasi per a tot punt de E. Aleshores,

$$\int_E J(z,\phi)^p \, dA(z) \leq 1$$

a on $p = \frac{K}{K-1}$.

Notem que la normalització (1.9) no és pas l'única permesa, sempre i quan el jacobià no varïi massa. Per exemple, sota la normalització (1.10) el resultat també és cert.

Diem que $f : \Omega \to \mathbb{C}$ és *feblement K-quasiregular* si i només si $f \in W^{1,p}_{loc}(\Omega)$ per algun $p > 1$, i f satisfà (1.6). El següent resultat és una versió dualitzada del Teorema 1.15.

Teorema 1.17.
Sigui $f \in W^{1,p}_{loc}(\Omega)$ una funció feblement K-quasiregular. Si $p > \frac{2K}{K+1}$, llavors f és K-quasiregular.

A la pràctica, els Teoremes 1.15 i 1.17 estan estretament relacionats al problema de trobar l'intèrval de reals p tals que els operadors de Beltrami

$$I - \mu B : L^p(\mathbb{C}) \to L^p(\mathbb{C})$$

són invertibles sempre que $\|\mu\|_\infty \leq \frac{K-1}{K+1}$. K. Astala, T. Iwaniec i E. Saksman [8] demostren que aquest intèrval és precisament $(\frac{2K}{K+1}, \frac{2K}{K-1})$. Una mica més tard, S. Petermichl i A. Volberg [44] proven que hom té injectivitat fins i tot quan $p = \frac{2K}{K+1}$. Com a conseqüència, les funcions feblement K-quasiregulars de classe $W^{1,\frac{2K}{K+1}}_{loc}$ són K-quasiregulars.

Una altra important implicació del Teorema de Distorsió d'Àrea és l'anomenat Teorema de Distorsió de Dimensió, també degut a K. Astala [4].

Teorema 1.18.
Sigui ϕ una aplicació K-quasiconforme en un domini Ω. Llavors,

$$\dim(\phi(E)) \leq \frac{2K \dim(E)}{2 + (K-1)\dim(E)} \tag{1.11}$$

per a tot compacte $E \subset \Omega$.

Observem que si ϕ és K-quasiconforme, llavors també ϕ^{-1} ho és, i per tant la desigualtat esdevé bilateral,

$$\frac{1}{K}\left(\frac{1}{\dim(E)} - \frac{1}{2}\right) \leq \frac{1}{\dim(\phi(E))} - \frac{1}{2} \leq K\left(\frac{1}{\dim(E)} - \frac{1}{2}\right) \tag{1.12}$$

L'optimalitat d'aquestes cotes queda reflectida en el següent resultat de K. Astala [4].

Teorema 1.19.

Donats $t \in (0,2)$ i $K \geq 1$, existeix una aplicació K-quasiconforme $\phi : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ i un compacte E de dimensió t, tals que

$$\dim(\phi(E)) = \frac{2Kt}{2 + (K-1)t}$$

2 Singularitats evitables de funcions quasiregulars i acotades

2.1 Introducció

Diem que un compacte E és *evitable per les funcions K-quasiregulars acotades*, o simplement *K-evitable*, si per a tot obert $\Omega \supset E$, tota funció acotada $f : \Omega \to \mathbb{C}$, K-quasiregular a $\Omega \setminus E$, admet una extensió K-quasiregular a tot Ω. En aquesta definició, com en el cas analític, podem reemplaçar $L^\infty(\Omega)$ per $BMO(\Omega)$. En aquest capítol volem donar condicions suficients, en termes mètrics i geomètrics, sobre els conjunts K-evitables. Igualment, volem exemples no trivials de conjunts no K-evitables.

El Teorema de factorització de Stoilow converteix les funcions quasiregulars i acotades (o BMO) en funcions analítiques i acotades (o BMO). Per tant, un compacte és evitable per al problema K-quasiregular si i només si totes les seves imatges K-quasiconformes són evitables per al corresponent problema analític. Aquest fet ens condueix directament a l'article d'Astala sobre distorsió quasiconforme [4]. En particular, les aplicacions K-quasiconformes envien compactes E de dimensió t a compactes $\phi(E)$ de dimensió

$$\dim(\phi(E)) \leq \frac{2Kt}{2+(K-1)t}.$$

La primera qüestió que estudiem en aquest capítol és si aquesta estimació pot ser traslladada al nivell de mesures de Hausdorff. En altres paraules, si ϕ és una aplicació K-quasiconforme del pla, $0 < t < 2$ i $t' = \frac{2Kt}{2+(K-1)t}$, si és cert que

$$\mathcal{H}^t(E) = 0 \;\Rightarrow\; \mathcal{H}^{t'}(\phi(E)) = 0, \tag{2.1}$$

és a dir, $\phi^*\mathcal{H}^{t'} \ll \mathcal{H}^t$. Resultats clàssics d'Ahlfors [2] i Mori [41] asseguren que això és cert si $t = 0$ o $t = 2$. Un primer resultat principal en aquest capítol el trobarem al Teorema 2.3, on demostrem la implicació (2.1) per a $t = \frac{2}{K+1}$, i.e. quan la imatge té dimensió com a molt $t' = 1$.

Teorema.
Sigui ϕ una aplicació K-quasiconforme del pla, i sigui E un compacte. Aleshores,

$$\mathcal{M}^1(\phi(E)) \leq C \left(\mathcal{M}^{\frac{2}{K+1}}(E)\right)^{\frac{K+1}{2K}}. \tag{2.2}$$

Com a conseqüència,

$$\mathcal{H}^{\frac{2}{K+1}}(E) = 0 \;\Rightarrow\; \mathcal{H}^1(\phi(E)) = 0.$$

Un punt clau en la demostració d'aquest fet és que podem demostrar que si h és una aplicació quasiconforme del pla, *conforme sobre* $\mathbb{C} \setminus E$, i normalitzada a l'infinit, la desigualtat (2.2) millora sensiblement. Essencialment, aquestes aplicacions h preserven el contingut de Hausdorff 1-dimensional,

$$\mathcal{M}^1(h(E)) \leq C_K\, \mathcal{M}^1(E) \tag{2.3}$$

on C_K depèn només de K. A [4], Astala demostra la mateixa desigualtat per a l'àrea. De fet, com veurem més endavant, un equivalent de (2.3) per al contingut de Hausdorff t-dimensional $\mathcal{M}^t$ és la única cosa que falta per tenir $\phi^*\mathcal{H}^{t'} \ll \mathcal{H}^t$ per a t general. En la direcció de demostrar (2.1) conjecturem que en realitat

$$\mathcal{M}^t(h(E)) \leq C\, \mathcal{M}^t(E), \qquad 0 < t \leq 2$$

per a tot $E \subset \mathbb{C}$ compacte i h normalitzada, conforme a $\mathbb{C} \setminus E$ i amb una extensió K-quasiconforme a tot el pla. A la Secció 2 donem una explicació més detallada.

El motiu pel qual el nostre mètode funciona en el cas especial de dimensió $t = 1$ és que el contingut $\mathcal{M}^1$ és equivalent a la capacitat analítica BMO [54]. Per a exponents $1 < t < 2$, podem interpolar, però els resultats obtinguts acaben referint-se a capacitats de Riesz. Més concretament, provem que

$$C_{\alpha,t}(h(E)) \leq C\, C_{\alpha,t}(E)$$

per a tot $t \in (1,2)$, i on $\alpha = \frac{2}{t} - 1$. Això té conseqüències en la direcció de la conjectura, però no són suficients per a demostrar (2.1) quan $1 < t' < 2$.

Tornant al problema d'evitabilitat, Iwaniec i Martin havien conjecturat [29] que, a $\mathbb{R}^n$ amb $n \geq 2$, els conjunts amb mesura de Hausdorff $\mathcal{H}^{\frac{n}{K+1}}(E) = 0$ són evitables per a les funcions K-quasiregulars acotades. A l'article [6] es demostra aquest fet, en el cas $n = 2$. En aquest treball demostrem que, sorprenentment, per a $K > 1$ es pot millorar la conjectura.

Teorema.
Sigui $K > 1$ i suposem que E és un compacte amb

$$\mathcal{H}^{\frac{2}{K+1}}(E) \ \ \sigma - \mathit{finita}.$$

Aleshores E és evitable per a les funcions K-quasiregulars acotades.

El teorema és fals si $K = 1$, com ho demostra el segment unitat $E = [0,1]$. Notem que, per [4], per a tot $t > \frac{2}{K+1}$ existeixen conjunts no K-evitables amb $\dim(E) = t$. Podem millorar també aquesta direcció.

Teorema.
Donat $K > 1$, existeixen compactes E de dimensió $\frac{2}{K+1}$, no evitables per a les funcions K-quasiregulars acotades.

Via la factorització de Stoilow, tots aquests resultats estan estretament lligats. De fet, un primer pas consisteix en veure que per a tota aplicació K-quasiconforme ϕ es té

$$\mathcal{H}^{\frac{2}{K+1}}(E) \ \ \sigma\text{-finita} \ \ \Rightarrow \ \ \mathcal{H}^1(\phi(E)) \ \ \sigma\text{-finita}.$$

Ara bé, aquesta conclusió no serà suficient, donat que existeixen conjunts rectificables de longitud finita, com ara $E = [0,1]$, amb capacitat analítica positiva. Per tant, caldrà estudiar com es transformen els conjunts rectificables a través d'aplicacions K-quasiconformes. La resposta correcta a aquesta qüestió ve donada al Teorema 2.16. Essencialment,

$$F \quad \text{rectificable} \quad \Rightarrow \quad \dim(\phi(F)) > \frac{2}{K+1}$$

per a tota ϕ K-quasiconforme.

El capítol està estructurat com segueix. A la Secció 2 estudiem la distorsió quasiconforme del contingut de Hausdorff, entre d'altres funcions de conjunt. A la Secció 3 apliquem aquests resultats a problemes d'evitabilitat per a funcions quasiregulars i acotades (o de BMO). Finalment, la Secció 4 es dedica exclusivament a la construcció de conjunts no evitables.

2.2 Continuïtat absoluta

Anomenem aplicació K-quasiconforme *principal* a tota aplicació K-quasiconforme, conforme fora d'un compacte, i normalitzada per (1.9), és a dir, $\phi(z) - z = O\left(\frac{1}{|z|}\right)$ quan $|z| \to \infty$.

A l'article [4] de K. Astala, es demostra que per a tota aplicació K-quasiconforme $\phi : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$,

$$|\phi(E)| \leq C\,|E|^{1/K} \tag{2.4}$$

on C és una constant que depèn de K i de la normalització. Una dilatació permet doncs suposar que

$$\operatorname{diam}(\phi(E)) = \operatorname{diam}(E) \leq 1 \tag{2.5}$$

i llavors $C = C(K)$ depèn només de K. Per a demostrar (2.4), Astala primer es redueix al cas en què E és una unió finita de discos. Després, l'aplicació ϕ es representa per $\phi = h \circ \phi_1$, on totes dues $h, \phi_1 : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ són K-quasiconformes, ϕ_1 és conforme a E i h és conforme a $\mathbb{C}\setminus F$, on $F=\phi_1(E)$. Llavors sóbté la conclusió desitjada per a ϕ_1,

$$|\phi_1(E)|\leq C\,|E|^{\frac{1}{K}}$$

després d'incloure ϕ_1 en una família analítica d'aplicacions quasiconformes. Més tard, hom prova a [4, p. 50] que sota la hipòtesi adicional de que h és conforme fora de F, tenim

$$|h(F)|\leq C\,|F|, \tag{2.6}$$

on la constant C encara depèn només de K.

En la recerca de propietats de continuïtat absoluta de mesures de Hausdorff a través d'aplicacions quasiconformes, aquest tipus de descomposicions sembla inevitable, i ens porta a buscar anàlegs de (2.6) per a les mesures o els continguts de Hausdorff. Aquí establim el resultat per dimensió 1.

Lema 2.1.
Suposem que $E\subset\mathbb{C}$ és un compacte, i sigui $\phi:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ una aplicació K-quasiconforme principal, tal que ϕ és conforme a $\mathbb{C}\setminus E$. Aleshores,

$$\mathcal{M}^1(\phi(E))\simeq\mathcal{M}^1(E),$$

amb constants que només depenen de K.

Per a la demostració, necessitem alguns resultats previs. Es diu que un conjunt E és *evitable per a les funcions analítiques i de BMO* si per a tot obert $\Omega\supset E$, tota funció $f\in BMO(\Omega)$, analítica a $\Omega\setminus E$, estén analíticament a tot Ω. Aquests conjunts van ser caracteritzats per Kaufman [31] amb la condició $\mathcal{M}^1(E)=0$.
La *capacitat analítica BMO* es defineix per

$$\gamma_0(E)=\sup|f'(\infty)|$$

on el suprem recorre funcions de $BMO(\mathbb{C})$, analítiques a $\mathbb{C}\setminus E$, tals que $\|f\|_*\leq 1$. Verdera [54] demostra la següent estimació.

Lema 2.2.
Per a tot compacte $E \subset \mathbb{C}$,

$$\mathcal{M}^1(E) \simeq \gamma_0(E).$$

Recordem ara un resultat de Reimann [46], segons el qual l'espai de funcions d'oscil·lació mitjana acotada, BMO, és invariant per canvis de variable quasiconformes. Més precisament, si ϕ és K-quasiconforme i $f \in BMO(\mathbb{C})$, llavors $f \circ \phi \in BMO(\mathbb{C})$ amb

$$\|f \circ \phi\|_* \leq C(K)\, \|f\|_*.$$

Demostració del Lema 2.1. Degut al Lema 2.2, serà suficient demostrar que

$$\gamma_0(\phi(E)) \simeq \gamma_0(E)$$

Sigui f una funció admissible per a $\gamma_0(E)$. Llavors, $f \in BMO(\mathbb{C})$ és analítica a $\mathbb{C} \setminus E$ amb $\|f\|_* \leq 1$, i $f(\infty) = 0$. La funció $g = f \circ \phi^{-1}$ és llavors també de classe $BMO(\mathbb{C})$, amb $\|g\|_* \leq C(K)$. A més a més, com que ϕ és conforme a $\mathbb{C} \setminus E$, g és holomorfa a $\mathbb{C} \setminus \phi(E)$. Per tant, $\frac{1}{C(K)}\, g$ és admissible per a $\gamma_0(\phi(E))$. La normalització sobre ϕ assegura que $g(\infty) = 0$ i

$$|g'(\infty)| = \lim_{|z|\to\infty} |z\, g(z)| = \lim_{|w|\to\infty} |\phi(w)\, f(w)| = |f'(\infty)|.$$

Així, $\gamma_0(E) \leq C(K)\, \gamma_0(\phi(E))$. L'altra desigualtat es dedueix per simetria. ∎

Aquest lema és un primer pas en la demostració de la continuïtat absoluta.

Teorema 2.3.
Sigui E un compacte i $\phi : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ K-quasiconforme, normalitzada per (2.5). Aleshores,

$$\mathcal{M}^1(\phi(E)) \leq C \left(\mathcal{M}^{\frac{2}{K+1}}(E)\right)^{\frac{K+1}{2K}}$$

on C depèn només de K. En particular, si $\mathcal{H}^{\frac{2}{K+1}}(E) = 0$ llavors $\mathcal{H}^1(\phi(E)) = 0$.

Demostració. No és restrictiu suposar que $E \subset \mathbb{D}$. També podem assumir que ϕ és una aplicació K-quasiconforme principal, conforme fora de $\mathbb{D}$. Donat $\varepsilon > 0$, existeix un recobriment finit de E per discos $D_j = D(z_j, r_j)$, $j = 1, \dots, n$ tals que

$$\sum_{j=1}^{n} \operatorname{diam}(D_j)^{\frac{2}{K+1}} \leq \mathcal{M}^{\frac{2}{K+1}}(E) + \varepsilon.$$

Denotem per $\Omega = \cup_{j=1}^{n} D_j$. Com a [4], utilitzem una descomposició $\phi = h \circ \phi_1$, on totes dues ϕ_1 i h són aplicacions K-quasiconformes principals, ϕ_1 és conforme a $\Omega \cup (\mathbb{C} \setminus \mathbb{D})$ i h és conforme fora de $\phi_1(\overline{\Omega})$.

Pel Lema 2.1, veiem que

$$\mathcal{M}^1(\phi(E)) \leq \mathcal{M}^1(\phi(\Omega)) = \mathcal{M}^1(h \circ \phi_1(\Omega)) \leq C\, \mathcal{M}^1(\phi_1(\Omega)).$$

Així, el problema es redueix a donar estimacions de $\mathcal{M}^1(\phi_1(\Omega))$. Per a fer-ho, recordem que els K-quasidiscos tenen àrea comparable al quadrat del seu diàmetre,

$$\operatorname{diam}(\phi_1(D_j)) \simeq |\phi_1(D_j)|^{1/2} = \left(\int_{D_j} J(z, \phi_1)\, dA(z) \right)^{\frac{1}{2}}$$

amb constants depenents només de K. Usant la desigualtat de Hölder dues vegades, amb $p > 1$ prou petit,

$$\sum_{j=1}^{n} \operatorname{diam}(\phi_1(D_j)) \leq C(K) \left(\sum_{j=1}^{n} \int_{D_j} J(z, \phi_1)^p dA(z) \right)^{\frac{1}{2p}} \left(\sum_{j=1}^{n} |D_j|^{\frac{p-1}{2p-1}} \right)^{1-\frac{1}{2p}}.$$

Ara ens trobem en la situació especial de [10, Lema 5.2]. Com que ϕ_1 és conforme al subconjunt Ω, podem prendre $p = \frac{K}{K-1}$ per obtenir

$$\sum_{j=1}^{n} \int_{D_j} J(z, \phi_1)^p dA(z) \simeq \int_{\Omega} J(z, \phi_1)^p dA(z) \leq 1.$$

Amb aquesta el·lecció de p s'obté $\frac{p-1}{2p-1} = \frac{1}{K+1}$. En conseqüència,

$$\sum_{j=1}^{n} \operatorname{diam}(\phi_1(D_j)) \leq C(K) \left(\sum_{j=1}^{n} \operatorname{diam}(D_j)^{\frac{2}{K+1}} \right)^{\frac{K+1}{2K}} \leq C(K) \left(\mathcal{M}^{\frac{2}{K+1}}(E) + \varepsilon \right)^{\frac{K+1}{2K}}. \quad (2.7)$$

Però $\cup_j \phi_1(D_j)$ és un recobriment de $\phi_1(\Omega)$, de manera que el que en realitat tenim és

$$\mathcal{M}^1(\phi(E)) \leq C\mathcal{M}^1(\phi_1(\Omega)) \leq C(K) \left(\mathcal{M}^{\frac{2}{K+1}}(E) + \varepsilon \right)^{\frac{K+1}{2K}}$$

i això acaba la demostració. ■

En aquest punt cal destacar que, en general, $J(\cdot, \phi) \in L^p_{loc}$ només quan $p < \frac{K}{K-1}$. La integrabilitat al límit ($p = \frac{K}{K-1}$), que només és certa sota la hipòtesi extra de que $\phi_{|\Omega}$ és conforme, és demostrada a [10, Lema 5.2]. Aquest fenomen és crucial per al nostre argument, doncs estem estudiant mesures de Hausdorff més que no pas dimensions. En realitat, el mateix argument demostra que la desigualtat (2.7) també és certa en una situació més general. Efectivament, i sempre sota la hipòtesi de conformalitat de ϕ_1 sobre $\cup_{j=1}^n D_j$, tenim per a tot $t \in [0, 2]$

$$\left(\sum_{j=1}^{n} \operatorname{diam}(\phi_1(D_j))^d \right)^{\frac{1}{d}} \leq C(K) \left(\sum_{j=1}^{n} \operatorname{diam}(D_j)^t \right)^{\frac{1}{t}\frac{1}{K}} \quad (2.8)$$

on $d = \frac{2Kt}{2+(K-1)t}$. D'altra banda, un altre punt clau a la demostració és que

$$\mathcal{M}^1(h(E)) \leq C\, \mathcal{M}^1(E)$$

sempre que h sigui K-quasiconforme al pla i conforme fora de E. Creiem que un anàleg per a aquesta equivalència és crucial per entendre la distorsió quasiconforme de mesures de Hausdorff.

Problema 2.4.

Suposem que $d \in (0, 2]$. Aleshores per a tot compacte $E \subset \mathbb{C}$ i tota aplicació K-quasiconforme *h, conforme a $\mathbb{C} \setminus E$, es té*

$$\mathcal{M}^d(h(E)) \simeq \mathcal{M}^d(E) \tag{2.9}$$

amb constants que depenen només de K i d.

Ja sabem que (2.9) és certa si $d = 1$ o $d = 2$. Una resposta afirmativa per a d general, combinada amb la integrabilitat òptima per arribar a (2.8), donaria la continuïtat absoluta de $\phi^*\mathcal{H}^d$ amb respecte $\mathcal{H}^t$, on $d = \frac{2Kt}{2+(K-1)t}$, $0 \leq t \leq 2$ i $K \geq 1$. Per tant, (2.9) tindria conseqüències importants en la teoria de les aplicacions quasiconformes.

La resposta afirmativa per a $d = 1$ estava basada en el Lema 2.2, així com també en la invariància quasiconforme de BMO. Malgrat això, aquesta no és la única classe quasiconformement invariant. En realitat, com veurem, la invariància de VMO té també conseqüències interessants. A continuació exposem la primera.

Teorema 2.5.
Sigui $E \subset \mathbb{C}$ un compacte, i sigui $\phi : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ una aplicació K-quasiconforme. Si $\mathcal{H}^{\frac{2}{K+1}}(E)$ és finita (o fins i tot σ-finita), llavors $\mathcal{H}^1(\phi(E))$ és σ-finita.

Degut al Teorema 1.4, aquest resultat pot expressar-se equivalentment en termes del contingut inferior de Hausdorff.

Teorema 2.6.
Sigui $E \subset \mathbb{C}$ un compacte, i sigui $\phi : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ una aplicació K-quasiconforme. Si $\mathcal{M}_*^{\frac{2}{K+1}}(E) = 0$, aleshores $\mathcal{M}_*^1(\phi(E)) = 0$.

Es diu que un conjunt E és *evitable per a les funcions analítiques i de VMO* si per a tot obert $\Omega \supset E$, tota funció $f \in VMO(\Omega)$, analítica a $\Omega \setminus E$, estén analíticament a tot Ω. Aquests conjunts van ser caracteritzats per Verdera [54] amb la condició $\mathcal{M}_*^1(E) = 0$. La *capacitat analítica VMO* es defineix per

$$\gamma_*(E) = \sup |f'(\infty)|$$

on el suprem recorre funcions de $VMO(\mathbb{C})$, analítiques a $\mathbb{C} \setminus E$, tals que $\|f\|_* \leq 1$.

Verdera [54] va provar que aquesta capacitat és comparable al contingut inferior de Hausdorff 1-dimensional.

Lema 2.7.
Per a tot compacte $E \subset \mathbb{C}$,

$$\mathcal{M}^1(E)_* \simeq \gamma_*(E).$$

D'altra banda, notem que VMO és quasiconformement invariant, com BMO. Això es deu al fet que hom pot veure VMO com a l'adherència a BMO de les funcions contínues amb suport compacte. En conseqüència, podem demostrar el següent lema auxiliar.

Lema 2.8.
Sigui E un compacte. Per a tota aplicació K-quasiconforme principal $\phi : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, conforme a $\mathbb{C} \setminus E$, tenim

$$\mathcal{M}^1_*(\phi(E)) \simeq \mathcal{M}^1_*(E).$$

Demostració. Altre cop, com al Lema 2.1, usarem l'equivalència del Lema 2.7 entre γ_* i $\mathcal{M}^1_*$. Sigui f una funció admissible per a $\gamma_*(\phi(E))$. Llavors, $f \in VMO$ és analítica a $\mathbb{C} \setminus \phi(E)$, $\|f\|_* \leq 1$ i $f(\infty) = 0$. La funció $g = f \circ \phi$ és també de classe VMO. Però ara g és analítica a $\mathbb{C} \setminus E$, $\|g\|_* \leq C(K)$ i $|g'(\infty)| = |f'(\infty)|$ donat que ϕ és principal. Per tant, $\frac{1}{C(K)}\, g$ és admissible per a $\gamma_*(E)$ i per això $\gamma_*(\phi(E)) \leq C(K)\, \gamma_*(E)$. ∎

Demostració del Teorema 2.6. Naturalment, l'argument és similar al del Teorema 2.3. Sense pèrdua de generalitat, podem assumir que $E \subset \mathbb{D}$ i que ϕ és principal. Com que $\mathcal{H}^{\frac{2}{K+1}}(E)$ és finit, per a cada δ existeix una família de discos D_i tals que $E \subset \cup_i D_i$, $\sum_i \operatorname{diam}(D_i)^{\frac{2}{K+1}} \leq \mathcal{H}^{\frac{2}{K+1}}(E) + 1$ i $\operatorname{diam}(D_i) < \delta$. Sigui $\Omega = \cup_i D_i$. Altre cop, tenim una descomposició $\phi = \phi_2 \circ \phi_1$, on totes dues ϕ_1 i ϕ_2 són aplicacions K-quasiconformes principals, ϕ_1 és conforme a $(\mathbb{C} \setminus \overline{\mathbb{D}}) \cup \Omega$, i ϕ_2 és conforme fora de $\phi_1(\overline{\Omega})$. Primerament,

$$\mathcal{M}^1_*(\phi(E)) \leq \mathcal{M}^1_*(\phi(\overline{\Omega})).$$

Pel Lema 2.7, el contingut inferior equival a la capacitat analítica VMO,

$$\mathcal{M}^1_*(\phi(\overline{\Omega})) \leq C\, \gamma_*(\phi(\overline{\Omega})).$$

Ara, com que ϕ_2 és conforme fora de $\phi_1(\overline{\Omega})$, pel Lema 2.8 tenim

$$\gamma_*(\phi_2 \circ \phi_1(\overline{\Omega})) \simeq \gamma_*(\phi_1(\overline{\Omega})).$$

Altre cop, pel Lema 2.7,

$$\gamma_*(\phi_1(\overline{\Omega})) \leq C\,\mathcal{M}^1_*(\phi_1(\overline{\Omega})).$$

Ara només falta controlar $\mathcal{M}^1_*(\phi_1(\overline{\Omega}))$. Per a fer-ho, prendrem $h \in \mathcal{F}$, $h(t) = t\,\varepsilon(t)$, i argumentarem com al Teorema 2.3. Com que les aplicacions K-quasiconformes són Hölder contínues d'exponent $1/K$,

$$\begin{aligned}
\mathcal{M}^h(\phi_1(\overline{\Omega})) \leq\ & \sum_j \operatorname{diam}(\phi_1(D_j))\varepsilon(\operatorname{diam}(\phi_1(D_j))) \ \leq\ \varepsilon(C_K\,\delta^{1/K}) \sum_j \operatorname{diam}(\phi_1(D_j)) \\
& \leq \varepsilon(C_K\,\delta^{1/K}) \sum_j \left(\int_{D_j} J(z,\phi_1)^{\frac{K}{K-1}}\, dm(z) \right)^{\frac{K-1}{2K}} |D_j|^{1/2K} \\
& \leq \varepsilon(C_K\,\delta^{1/K})\, C_K \left(\sum_j \operatorname{diam}(D_j)^{\frac{2}{K+1}} \right)^{\frac{K+1}{2K}} \leq \varepsilon(C_K\,\delta^{1/K})\, C_K \left(\mathcal{H}^{\frac{2}{K+1}}(E) + 1 \right)^{\frac{K+1}{2K}}.
\end{aligned}$$

Prenguem $\delta \to 0$ per tal d'obtenir $\mathcal{M}^h(\phi(E)) = 0$. Això acaba la prova, donat que el mateix argument val per a tota $h \in \mathcal{F}$. ■

Hom podria pensar en estendre els resultats anteriors des de l'índex crític $\frac{2}{K+1}$ a d'altres índexos, utilitzant d'altres capacitats que es comportin com un contingut de Hausdorff. Per exemple, O'Farrell [42] va introduir la *capacitat analítica* Lip_α, i va provar que

$$\mathcal{M}^{1+\alpha}(E) \simeq \gamma_\alpha(E)$$

per a tot $\alpha \in (0,1)$. Desafortunadament, Lip_α no és una classe quasiconformement invariant. Per això, necessitem altres mètodes. Els espais de Sobolev homogenis són útils en aquest sentit, bàsicament perquè $\dot{W}^{1,2}(\mathbb{C})$ sí que és invariant per canvis de variable quasiconformes. Recordem que si $0 < \alpha < 2$ i $p > 1$, l'espai de Sobolev homogeni

$\dot{W}^{\alpha,p}(\mathbb{C})$ es defineix com l'espai de potencials de Riesz

$$f = I_\alpha * g$$

on $g \in L^p(\mathbb{C})$ i $I_\alpha(z) = \frac{1}{|z|^{2-\alpha}}$. La norma $\|f\|_{\dot{W}^{\alpha,p}(\mathbb{C})} = \|g\|_p$. Quan $\alpha = 1$, $\dot{W}^{1,p}(\mathbb{C})$ coincideix amb l'espai de funcions f per a les quals les derivades distribucionals de primer ordre són funcions de $L^p(\mathbb{C})$. Sigui $f \in \dot{W}^{1,2}(\mathbb{C})$ i sigui ϕ una aplicació K-quasiconforme de $\mathbb{C}$. Si definim $g = f \circ \phi$ llavors tenim que

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{C}} |Dg(z)|^2 dA(z) &= \int_{\mathbb{C}} |Df(\phi(z))|^2 \, |D\phi(z)|^2 \, dA(z) \\ &\leq K \int_{\mathbb{C}} |Df(\phi(z))|^2 \, J(z,\phi) \, dA(z) \\ &= K \int_{\mathbb{C}} |Df(w)|^2 \, dA(w)\end{aligned}$$

de manera que $g \in \dot{W}^{1,2}(\mathbb{C})$. En altres paraules, cada aplicació K-quasiconforme ϕ indueix un operador lineal acotat

$$T : \dot{W}^{1,2}(\mathbb{C}) \to \dot{W}^{1,2}(\mathbb{C}), \qquad T(f) = f \circ \phi \tag{2.10}$$

amb norma depenent només de K. Com hem dit abans, aquest operador T també és acotat a $BMO(\mathbb{C})$ ([46]). Més encara, Reimann i Rychener [47, p.103] demostren que $\dot{W}^{\frac{2}{q},q}(\mathbb{C})$, $q > 2$, pot ser representat com a espai d'interpolació complexa entre $BMO(\mathbb{C})$ i $\dot{W}^{1,2}(\mathbb{C})$. Deduïm, per tant, que T és acotat a $\dot{W}^{\frac{2}{q},q}(\mathbb{C}), q > 2$. Més precisament, existeix una constant $C = C(K,q)$ tal que

$$\|f \circ \phi\|_{\dot{W}^{\frac{2}{q},q}(\mathbb{C})} \leq C \|f\|_{\dot{W}^{\frac{2}{q},q}(\mathbb{C})} \tag{2.11}$$

per a tota aplicació K-quasiconforme ϕ sobre $\mathbb{C}$. Aquests espais invariants ens faciliten noves capacitats invariants. Recordem (e.g. [1, pp.34 and 46]) que per a tot parell $\alpha > 0$, $p > 1$ amb $0 < \alpha p < 2$, la capacitat de Riesz d'un compacte E es defineix per

$$\dot{C}_{\alpha,p}(E) = \sup\{\mu(E)^p\}$$

on el suprem recorre totes les mesures positives μ suportades a E, tals que $\|I_\alpha * \mu\|_q \leq 1$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Obtenim una capacitat equivalent si enlloc de mesures positives μ considerem distribucions T suportades a E, $\|I_\alpha * T\|_q \leq 1$, i prenem el suprem de $|\langle T, 1\rangle|^p$.

Per a veure la connexió amb l'equació (2.11) considerem les funcions de conjunt

$$\gamma_{1-\alpha,q}(E) = \sup\{|f'(\infty)|; f \in H(\mathbb{C} \setminus E), \|f\|_{\dot{W}^{1-\alpha,q}} \leq 1, f(\infty) = 0\}.$$

Observem altre cop que $|f'(\infty)| = |\langle \overline{\partial} f, 1\rangle|$ on aquesta acció s'ha d'entendre en el sentit de les distribucions. Amb aquesta terminologia, tenim un anàleg per als Lemes 2.2 i 2.7.

Lema 2.9.
Suposem que E és un compacte del pla. Aleshores, per a tot $p \in (1,2)$,

$$\dot{C}_{\alpha,p}(E) \simeq \gamma_{1-\alpha,q}(E),$$

on $\alpha = \frac{2}{p} - 1$ i $q = \frac{p}{p-1}$.

Demostració. Per un costat, prenguem una mesura admissible μ per a $\dot{C}_{\alpha,p}$. Llavors, $I_\alpha * \mu$ és a L^q amb norma com a molt 1. Definim $f = \frac{1}{z} * \mu$. Clarament, f és analítica fora de E, $f(\infty) = 0$ i $|f'(\infty)| = \mu(E)$. A més a més, a grans trets,

$$\widehat{f}(\xi) \simeq \frac{1}{\xi}\widehat{\mu}(\xi) = \frac{\overline{\xi}}{|\xi|}\frac{1}{|\xi|}\widehat{\mu}(\xi) = \widehat{R}\,\widehat{I_1}\,\widehat{\mu}$$

i conseqüentment

$$f = \frac{1}{z} * \mu = R(I_1 * \mu) = I_{1-\alpha} * R(I_\alpha * \mu)$$

on R és un operador de Calderón-Zygmund i $\|f\|_{\dot{W}^{1-\alpha,q}} = \|R(I_\alpha * \mu)\|_q \lesssim \|I_\alpha * \mu\|_q$.

Per a l'altra desigualtat, sigui $f = I_{1-\alpha} * g$ una funció admissible per a $\gamma_{1-\alpha,q}$. Tenim que $T = \overline{\partial} f$ és una distribució admissible per a $\dot{C}_{\alpha,p}$ ja que

$$I_\alpha * T = R^t(g)$$

on R^t és el transposat de R. Per tant, $\dot{C}_{\alpha,p}(E)^{1/p} \geq |\langle T, 1\rangle| = |f'(\infty)|$. ∎

Obtenim, d'aquí, nous invariants basats en capacitats de Riesz.

Teorema 2.10.
Sigui $\phi : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ una aplicació K-quasiconforme principal, conforme a $\mathbb{C} \setminus E$. Siguin $1 < p < 2$ i $\alpha = \frac{2}{p} - 1$. Aleshores

$$\dot{C}_{\alpha,p}(\phi(E)) \simeq \dot{C}_{\alpha,p}(E),$$

amb constants depenents només de K i p.

Demostració. Pel lema anterior, només cal veure que $\gamma_{1-\alpha,q}(\phi(E)) \leq \gamma_{1-\alpha,q}(E)$.

Sigui f una funció admissible per $\gamma_{1-\alpha,q}(\phi(E))$. Això significa que f és analítica a $\mathbb{C} \setminus \phi(E)$, $f(\infty) = 0$ i $\|f\|_{\dot{W}^{1-\alpha,q}} \leq 1$. Podem considerar $g = f \circ \phi$. Clarament, g és analítica fora de E, i $g(\infty) = 0$. Per a $\alpha = \frac{2}{p} - 1$ tenim $1 - \alpha = \frac{2}{q}$. Així, degut a (2.11),

$$\|g\|_{\dot{W}^{1-\alpha,q}} \leq C_K \|f\|_{\dot{W}^{1-\alpha,q}} \leq C_K$$

de manera que $\frac{1}{C_K} g$ és admissible per a $\gamma_{1-\alpha,q}(E)$. Així, com que ϕ és principal,

$$\gamma_{1-\alpha,q}(E) \geq \frac{1}{C_K} |f'(\infty)|$$

i ara només cal prendre suprem en f. ∎

El teorema anterior té implicacions directes en termes de continuïtat absoluta de mesures de Hausdorff, però desafortunadament aquestes són lleugerament més febles del que desitjariem. De fet, hi ha compactes F amb $C_{\alpha,p}(F) = 0$ i $\mathcal{H}^h(F) > 0$ per a alguna funció de mesura $h(t) = t^p\, \varepsilon(t)$ [1]. Per això, el Teorema 2.10 no ajuda per al Problema 2.4. Ens hem de conformar amb la següent formulació.

Donat $1 < d < 2$ considerem funcions de mesura $h(t) = t^d\, \varepsilon(t)$ amb

$$\int_0 \varepsilon(t)^{\frac{1}{d-1}} \frac{dt}{t} < \infty. \tag{2.12}$$

Exemples típics són $h(t) = t^d |\log t|^{-s}$ or $h(t) = t^d |\log t|^{1-p} \log^{-s}(|\log t|)$ amb $s > d-1$.

Corol·lari 2.11.
Sigui E un compacte del pla, i $\phi : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ una aplicació K-quasiconforme principal, conforme fora de E. Sigui $1 < d < 2$. Aleshores,

$$\mathcal{M}^h(\phi(E)) \leq C\, \mathcal{M}^d(E)$$

per a tota funció de mesura $h(t) = t^d\, \varepsilon(t)$ tal que (2.12). A més, si $\mathcal{H}^d(E) < \infty$ llavors $\mathcal{H}^h(\phi(E)) = 0$ per a aquestes h.

Demostració. Per [1, Theorem 5.1.13], donada una funció de mesura h que satisfaci (2.12) existeix una constant $C = C(h)$ tal que

$$\mathcal{M}^h(\phi(E)) \leq C\, C_{\alpha,d}(\phi(E)), \qquad \alpha = \frac{2}{d} - 1.$$

Pel Teorema 2.10, $C_{\alpha,d}(\phi(E)) \leq C\, C_{\alpha,d}(E)$ i usant altre cop [1, Theorem 5.1.9] tenim, finalment, $C_{\alpha,d}(E) \leq \mathcal{M}^d(E)$. ∎

Argumentant ara com als Teoremes 2.3 i 2.6, arribem a la següent conclusió.

Corol·lari 2.12.
Sigui E un compacte del pla, i sigui $\phi : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ una aplicació K-quasiconforme. Siguin $t \in (\frac{2}{K+1}, 2)$ i $d = \frac{2Kt}{2+(K-1)t}$. Aleshores,

$$\mathcal{M}^h(\phi(E)) \leq C\, \left(\mathcal{M}^t(E)\right)^{\frac{1}{Kt}}$$

per a tota funció de mesura h que satisfaci (2.12).

Notem que si $\frac{2}{K+1} < t < 2$ aleshores $1 < d < 2$.

2.3 Teoremes de Painlevé millorats

Un conjunt E es diu que és *evitable per a funcions K-quasiregulars i acotades (resp. BMO)* si tota aplicació K-quasiregular a $\mathbb{C} \setminus E$ que és de $L^\infty(\mathbb{C})$ (resp. $BMO(\mathbb{C})$) admet una extensió K-quasiregular a tot $\mathbb{C}$.
Òbviament, si $K = 1$, en ambdues situacions recuperem el problema original de Painlevé (vegeu la Secció 1.3). A més, per mitjà de la factorització de Stoilow, es pot representar qualsevol funció K-quasiregular acotada com a composició d'una funció analítica acotada amb una aplicació K-quasiconforme, i quelcom semblant passa amb BMO donat que, com L^∞, és un espai quasiconformement invariant.
Així, quan ens preguntem si un conjunt E és evitable, només cal analitzar com podem distorsionar-lo per mitjà d'aplicacions quasiconformes, i llavors aplicar els resultats ja coneguts del cas analític. Amb aquest esquema bàsic, hom prova a [4, Corol·lari 1.5] que tot conjunt de dimensió menor que $\frac{2}{K+1}$ és evitable per a les funcions K-quasiregulars acotades (i també per a les de BMO). El motiu és que les fórmules precises sobre distorsió de dimensió asseguren que totes les imatges quasiconformes d'aquests conjunts tindran dimensió estrictament menor que 1.

Iwaniec i Martin [29] van conjecturar que els conjunts de mesura de Hausdorff $\frac{2}{K+1}$-dimensional nul·la són evitables per a les funcions K-quasiregulars acotades, i de fet es va trobar una resposta afirmativa a aquesta qüestió a [6]. En realitat fou aquest argument el que va inspirar el Teorema 2.3. Usant els resultats de la Secció 2.2 podem demostrar que els conjunts de mesura de Hausdorff $\frac{2}{K+1}$-dimensional nul·la són evitables per a les funcions K-quasiregulars i BMO.

Corol·lari 2.13.
Sigui E un compacte del pla. Suposem que $\mathcal{H}^{\frac{2}{K+1}}(E) = 0$. Llavors, E és evitable per a les funcions K-quasiregulars i BMO.

Demostració. Sigui $f \in BMO(\mathbb{C})$ una funció K-quasiregular a $\mathbb{C} \setminus E$. Denotem per μ el seu coeficient de Beltrami, i sigui ϕ la solució principal de $\overline{\partial}\phi = \mu\,\partial\phi$. Aleshores, $F = f \circ \phi^{-1}$ és holomorfa a $\mathbb{C} \setminus \phi(E)$ i $F \in BMO(\mathbb{C})$. D'altra banda, com a conseqüència del Teorema 2.3, $\mathcal{H}^1(\phi(E)) = 0$. Per tant, $\phi(E)$ és evitable per a les funcions analítiques i BMO i, en particular, F admet una extensió entera. Per això, $f = F \circ \phi$ estén quasiregularment a tot el pla. ■

Creiem que el Corol·lari 2.13 és òptim, en el sentit que esperem una resposta afirmativa per a la següent qüestió.

Problema 2.14.
Per a cada $K \geq 1$, existeix un compacte E amb $0 < \mathcal{H}^{\frac{2}{K+1}}(E) < \infty$, tal que E no és evitable per a les funcions K-quasiregulars i de BMO.

Notem que per [4, Corol·lari 1.5], donat $t > \frac{2}{K+1}$ existeix un compacte E de dimensió t, no evitable per a les funcions K-quasiregulars acotades (i per tant, tampoc per a BMO).

Tornant al problema L^∞, observem que el Teorema 2.3 prova la conjectura d'Iwaniec i Martin, sobre que els conjunts E amb $\mathcal{H}^{\frac{2}{K+1}}(E) = 0$ són evitables per a les funcions K-quasiregulars acotades. Això és així perquè aquests conjunts satisfan $\mathcal{H}^1(\phi(E)) = 0$ per a tota aplicació K-quasiconforme ϕ i, per tant, $\gamma(\phi(E)) = 0$. De fet, la capacitat analítica és quelcom més petit que la longitud, de manera que amb el Teorema 2.5 podem provar d'anar més enllà. Per concretar una mica més, si un conjunt té mesura de Hausdorff $\frac{2}{K+1}$-dimensional finita (o fins i tot σ-finita), aleshores totes les seves imatges K-quasiconformes tenen com a molt lontigud σ-finita. Així, aquestes imatges encara podrien ser evitables per a les funcions analítiques i acotades, sempre i quan no continguessin cap subconjunt rectificable de longitud positiva. El següent resultat, que es pot trobar a [5], dóna les eines correctes en aquesta direcció.

Teorema 2.15.
Suposem que $\phi : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ és una aplicació K-quasiconforme. Sigui $E \subset \partial\mathbb{D}$ tal que $\dim(E) = 1$. Aleshores, es té la desigualtat estricta

$$\dim(\phi(E)) > \frac{2}{K+1}.$$

Com a conseqüència directa, s'obté la següent versió, que serveix per a tot conjunt rectificable.

Corol·lari 2.16.
Sigui E un conjunt rectificable, i sigui $\phi : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ una aplicació K-quasiconforme. Aleshores, existeix un subconjunt $E_0 \subset E$ de longitud zero, tal que

$$\dim \phi(E \setminus E_0) > \frac{2}{K+1}.$$

A la pràctica, les demostracions d'aquests resultats donen més del que hi és establert. En realitat, existeixen constants $c_1, c_2 > 0$ tals que si $E \subset \partial\mathbb{D}$ aleshores

$$\dim(E) \geq 1 - c_1\, \varepsilon^2 \quad \Rightarrow \quad \dim(\phi(E)) \geq 1 - c_2\, \varepsilon^2 \tag{2.13}$$

per a tota aplicació $(1+\varepsilon)$-quasiconforme ϕ, i $\varepsilon > 0$ prou petit.

Obtenim ara la següent versió *millorada* del Teorema de Painlevé per a funcions quasiregulars.

Teorema 2.17.
Sigui E un compacte del pla, i sigui $K > 1$. Suposem que $\mathcal{H}^{\frac{2}{K+1}}(E)$ és σ-finita. Llavors E és evitable per a les funcions K-quasiregulars acotades.

Demostració. Sigui $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ una funció acotada, i suposem que f és K-quasiregular a $\mathbb{C} \setminus E$. Sigui $\mu = \frac{\overline{\partial} f}{\partial f}$ el coeficient de Beltrami de f, i sigui ϕ una solució principal de $\overline{\partial}\phi = \mu\, \partial\phi$. Llavors, $F = f \circ \phi^{-1}$ és una funció acotada, analítica a $\mathbb{C} \setminus \phi(E)$. Si veiem que F és constant, hem acabat. Per tant, hem de veure que $\phi(E)$ té capacitat analítica 0. Pel Teorema 2.5, $\phi(E)$ té longitud σ-finita, és a dir, $\phi(E) = \cup_n F_n$ on $\mathcal{H}^1(F_n) < \infty$ per a tot n. Del Teorema de Besicovitch (Teorema 1.5), cada F_n descomposa com a

$$F_n = R_n \cup U_n \cup B_n$$

on R_n és un conjunt rectificable, U_n és purament no rectificable, i B_n és un conjunt de longitud zero. Degut a la semiadditivitat de la capacitat analítica [51],

$$\gamma(F_n) \leq C\,(\gamma(R_n) + \gamma(U_n) + \gamma(B_n)).$$

Ara, $\gamma(B_n) \leq \mathcal{H}^1(B_n) = 0$ i $\gamma(U_n) = 0$ donat que els conjunts purament no rectificable de longitud finita tenen capacitat analítica zero [15]. D'altra banda, R_n és un conjunt rectificable, imatge K-quasiconforme d'un conjunt de dimensió com a molt $\frac{2}{K+1}$. Així, degut al Teorema 2.15 i al Corol·lari 2.16, aplicats a ϕ^{-1}, necessàriament $\mathcal{H}^1(R_n) = 0$. Deduïm llavors que $\gamma(F_n) = 0$ per a tot n. Altre cop per la semiadditivitat de la capacitat analítica tenim que $\gamma(\phi(E)) = 0$. ■

Com hem dit abans, el teorema anterior no és cert si $K = 1$. Qualsevol conjunt rectificable de longitud positiva, com ara $E = [0, 1]$, serveix de contraexemple. A la prova, és fonamental el millor comportament dels conjunts rectificables a efectes de distorsió quasiconforme. Un argument similar al de la prova del Teorema 2.15 pot ser utilitzat per al proper resultat d'expansió (és interessant comparar-lo amb el resultat de compressió de l'equació (2.13)).

Corol·lari 2.18.
Existeixen constants $c_1, c_2 > 0$ tals que si $\phi : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ és K-quasiconforme, llavors

$$\dim(E) \leq 1 - c_1\,\varepsilon^2 \quad \Rightarrow \quad \dim(\phi(E)) < 1 - c_2\,\varepsilon^2$$

sempre que $K = 1 + \varepsilon$, $E \subset \partial\mathbb{D}$ i $\varepsilon > 0$ sigui prou petit.

Aquest corol·lari ens condueix a conjunts evitables amb dimensió de Hausdorff estrictament per sobre de $\frac{2}{K+1}$.

Corol·lari 2.19.
Existeix una constant $c \geq 1$ tal que si $E \subset \partial\mathbb{D}$ és compacte i

$$\dim(E) \leq 1 - c\,\left(\frac{K-1}{K+1}\right)^2$$

llavors E és evitable per les funcions K-quasiregulars i acotades, $K = 1 + \varepsilon$, per a tot $\epsilon > 0$ prou petit.

Demostració. És conseqüència del Corol·lari 2.18. Si $\varepsilon > 0$ és prou petit i $K = 1 + \varepsilon$, llavors les imatges K-quasiconformes de E sempre tindran dimensió menor que 1, de manera que $\gamma(\phi(E)) = 0$ per a tota aplicació K-quasiconforme ϕ. ■

2.4 Distorsió extremal i conjunts no evitables

La discussió de la Secció 2.3 sobre conjunts evitables per a funcions K-quasiregulars i acotades encara manté obert el cas en què $\dim(E) = \frac{2}{K+1}$ i $\mathcal{H}^{\frac{2}{K+1}}(E)$ no és σ-finita. En vista del Teorema 2.17 hom podria pensar que, potser, qualsevol conjunt en la dimensió crítica és evitable per a les funcions K-quasiregulars i acotades. En aquesta secció demostrem que els nostres resultats són òptims en un sentit prou restrictiu. Més concretament, demostrem una mena de resultat anàleg al Teorema 1.7, de P. Mattila, per al cas K-quasiregular.

Teorema 2.20.
Sigui $K \geq 1$. Sigui $h(t) = t\,\varepsilon(t)$ tal que:

- *ε és contínua, no decreixent, $\varepsilon(0) = 0$ i $\varepsilon(t) = 1$ per a tot $t \geq 1$.*
- $\displaystyle\lim_{t\to 0} \frac{t^\delta}{\varepsilon(t)} = 0$ *per a tot $\delta > 0$.*

Existeixen un compacte $E \subset \mathbb{D}$, una funció de mesura $g(s) = s^{\frac{2}{K+1}}\,\eta(s)$, i una aplicació K-quasiconforme ϕ, tals que:

- $\mathcal{H}^h(\phi(E)) \simeq 1$.
- $\mathcal{H}^g(E) \simeq 1$.
- *η és tal que $\lim_{s\to 0} \eta(s) = 0$, i $\displaystyle\lim_{s\to 0} \frac{s^\delta}{\eta(s)} = 0$ per a tot $\delta > 0$. Com a conseqüència, $\dim(E) = \frac{2}{K+1}$.*
- $\displaystyle\int_0^1 \frac{\varepsilon(t)^2}{t}dt \geq \frac{1}{K}\int_0^1 \frac{\eta(s)^{1+\frac{1}{K}}}{s}ds$ *sempre que això tingui sentit.*

Demostració. Construirem l'aplicació ϕ com a límit d'una successió ϕ_N d'aplicacions K-quasiconformes, i E serà un conjunt tipus Cantor. La idea fonamental consisteix en canviar, a cada generació N, el nombre de fills m_N de cada pare, així com també la seva mida. Per a fer-ho, seran necessàries una successió m_N que creixerà ràpidament cap a ∞, i dues successions $\sigma_N, R_N \in (0,1)$ que aniran molt ràpidament cap a 0.

Pas 1. Considerem m_1 discos disjunts de radi R_1, centrats a z_i^1, $i = 1, ..., m_1$, uniformement distribuïts dins de $\mathbb{D}$, tals que

$$c_1 = m_1 R_1^2 > \frac{1}{2}$$

La funció $f(t) = m_1 h(tR_1)$ és contínua respecte de t, i $f(0) = 0$. A més, per a tot $t > 0$

$$f(t) = m_1 t R_1 \varepsilon(tR_1) = t c_1^{1/2} m_1^{1/2} \varepsilon(t c_1^{1/2} m_1^{-1/2}) = \frac{\varepsilon(t c_1^{1/2} m_1^{-1/2})}{t c_1^{1/2} m_1^{-1/2}} t^2 c_1$$

de manera que

$$\lim_{m_1 \to \infty} f(t) = \infty.$$

Per tant, per tot $t < 1$ podem escollir m_1 prou gran per tal que l'equació $m_1 h(\sigma_1 R_1) = 1$ tingui una única solució $\sigma_1 \in (0, t)$. En aquesta situació, un càlcul mostra que

$$m_1 (\sigma_1^K R_1)^{\frac{2}{K+1}} \varepsilon(\sigma_1 R_1)^{\frac{2K}{K+1}} (c_1)^{\frac{K-1}{K+1}} = 1.$$

Denotem $r_1 = R_1$, i per a cada $i = 1, \ldots, m_1$, sigui $\varphi_i^1(z) = z_i^1 + \sigma_1^K R_1 z$, i

$$D_i = \frac{1}{\sigma_1^K} \varphi_i^1(\mathbb{D}) = D(z_i, r_1),$$
$$D_i' = \varphi_i^1(\mathbb{D}) = D(z_i, \sigma_1^K r_1).$$

Notem que D_i i D_i' són discos concèntrics. Definim

$$g_1(z) = \begin{cases} \sigma_1^{1-K}(z - z_i) + z_i & z \in D_i' \\ \left|\frac{z - z_i}{r_1}\right|^{\frac{1}{K} - 1} (z - z_i) + z_i & z \in D_i \setminus D_i' \\ z & \text{altrament.} \end{cases}$$

Aquesta aplicació és K-quasiconforme, conforme fora de $\bigcup_{i=1}^{m_1} (D_i \setminus D_i')$, envia D_i sobre sí mateix, i D_i' sobre $D_i'' = D(z_i^1, \sigma_1 r_1)$, mentre que la resta del pla queda fixa. Definim llavors $\phi_1 = g_1$.

Pas 2. Ja hem fixat m_1, R_1, σ_1 i c_1. Considerem ara m_2 discos disjunts de radi R_2, centrats a z_j^2, $j = 1, \ldots, m_2$, uniformement distribuïts dins de $\mathbb{D}$, tals que

$$c_2 = m_2\, R_2^2 > \frac{1}{2}$$

i repetim el procediment. Com que $f(t) = m_1 m_2 h(tR_1 R_2)$ és contínua en t, $f(0) = 0$ i

$$\lim_{m_2 \to \infty} f(t) = \infty$$

per tot $t > 0$, podem escollir m_2 prou gran per tal que l'equació $m_1 m_2 h(\sigma_1 \sigma_2 R_1 R_2) = 1$ tingui una única solució $\sigma_2 \in (0, 1)$ tan petita com vulguem. Aleshores,

$$m_1 m_2\, (\sigma_1^K \sigma_2^K R_1 R_2)^{\frac{2}{K+1}}\, \varepsilon(\sigma_1 \sigma_2 R_1 R_2)^{\frac{2K}{K+1}}\, (c_1 c_2)^{\frac{K-1}{K+1}} = 1.$$

Denotem $r_2 = R_2\, \sigma_1 r_1$ i $\varphi_j^2(z) = z_j^2 + \sigma_2^K R_2\, z$, i definim els discos auxiliars

$$\begin{aligned} D_{ij} &= \phi_1 \left(\frac{1}{\sigma_2^K}\, \varphi_j^1 \circ \varphi_i^2(\mathbb{D}) \right) = D(z_{ij}, r_2), \\ D_{ij}' &= \phi_1 \left(\varphi_j^1 \circ \varphi_i^2(\mathbb{D}) \right) = D'(z_{ij}, \sigma_2^K r_2), \end{aligned}$$

per $i = 1, \ldots, m_1$ i $j = 1, \ldots, m_2$. Notem altre cop que D_{ij} i D_{ij}' són concèntrics. Sigui

$$g_2(z) = \begin{cases} \sigma_2^{1-K}(z - z_{ij}) + z_{ij} & z \in D_{ij}' \\ \left| \frac{z - z_{ij}}{r_2} \right|^{\frac{1}{K} - 1} (z - z_{ij}) + z_{ij} & z \in D_{ij} \setminus D_{ij}' \\ z & \text{altrament.} \end{cases}$$

Clarament, g_2 és K-quasiconforme, conforme fora de $\bigcup_{i,j}(D_{ij} \setminus D_{ij}')$, envia D_{ij} sobre sí mateix, i D_{ij}' sobre $D_{ij}'' = D(z_{ij}, \sigma_2 r_2)$, mentre la resta del pla es manté fixa. Definim $\phi_2 = g_2 \circ \phi_1$.

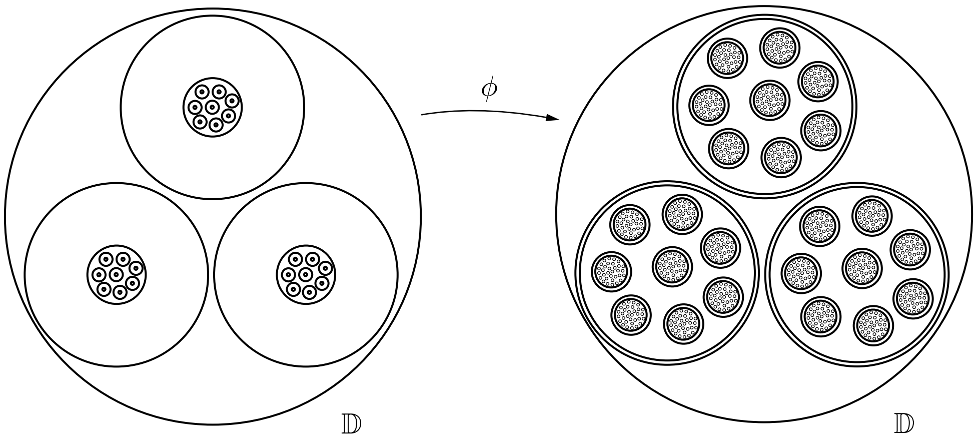


Figura 2.1

Pas N. Prenem m_N discos disjunts, uniformement distribuïts, de radi R_N, que com a mínim donin la meitat de l'àrea de $\mathbb{D}$,

$$c_N = m_N\, R_N^2 > \frac{1}{2}$$

Com que la funció contínua $f(t) = m_1 \ldots m_N\, h(tR_1 \ldots R_N)$ satisfà $f(0) = 0$ i

$$\lim_{m_N \to \infty} f(t) = \infty$$

per a tot $t > 0$, hom pot triar m_N prou gran com per què l'equació $m_1 \ldots m_N\, h(\sigma_1 \ldots \sigma_N\, R_1 \ldots R_N) = 1$ tingui una única solució σ_N tant petita com vulguem. Remarquem que hom pot triar $\lim_{N \to \infty} \sigma_N = 0$. Per a aquests valors,

$$m_1 \ldots m_N\, (\sigma_1^K \ldots \sigma_N^K R_1 \ldots R_N)^{\frac{2}{K+1}}\, \varepsilon(\sigma_1 \ldots \sigma_N R_1 \ldots R_N)^{\frac{2K}{K+1}} (c_1 \ldots c_N)^{\frac{K-1}{K+1}} = 1.$$

Denotem $\varphi_j^N(z) = z_j^N + \sigma_N^K R_N\, z$ i $r_N = R_N\, \sigma_{N-1} r_{N-1}$. Definim, per a tot multiíndex $J = (j_1, ..., j_N)$, $1 \le j_k \le m_k$, $k = 1, ..., N$,

$$D_J = \phi_{N-1}\left(\frac{1}{\sigma_N^K}\varphi_{j_1}^1 \circ \cdots \circ \varphi_{j_N}^N(\mathbb{D})\right) = D(z_J, r_N),$$
$$D'_J = \phi_{N-1}\left(\varphi_{j_1}^1 \circ \cdots \circ \varphi_{j_N}^N(\mathbb{D})\right) = D'(z_J, \sigma_N^K r_N).$$

Com abans, D_J i D'_J són concèntrics. Sigui

$$g_N(z) = \begin{cases} \sigma_N^{1-K}(z - z_J) + z_J & z \in D'_J \\ \left|\frac{z-z_J}{r_N}\right|^{\frac{1}{K}-1}(z - z_J) + z_J & z \in D_J \setminus D'_J \\ z & \text{altrament.} \end{cases}$$

Clarament, g_N és K-quasiconforme, conforme fora de $\bigcup_{J=(j_1,\dots,j_N)}(D_J \setminus D'_J)$, envia D_J sobre sí mateix, i D'_J a $D''_J = D(z_J, \sigma_N r_N)$, mentre que la resta del pla no es mou. Sigui $\phi_N = g_N \circ \phi_{N-1}$.

Com que cada ϕ_N és K-quasiconforme, i totes coincideixen fora de $\mathbb{D}$, existeix una aplicació K-quasiconforme límit ϕ,

$$\phi = \lim_{N\to\infty} \phi_N$$

amb convergència en $W^{1,p}_{loc}(\mathbb{C})$ per tot $p < \frac{2K}{K-1}$. D'altra banda, ϕ envia el compacte

$$E = \bigcap_{N=1}^{\infty} \left(\bigcup_{j_1,\dots,j_N} \varphi^1_{j_1} \circ \cdots \circ \varphi^N_{j_N}(\overline{\mathbb{D}}) \right)$$

al compacte

$$\phi(E) = \bigcap_{N=1}^{\infty} \left(\bigcup_{j_1,\dots,j_N} \psi^1_{j_1} \circ \cdots \circ \psi^N_{j_N}(\overline{\mathbb{D}}) \right)$$

on $\psi^i_j(z) = z^i_j + \sigma_i R_i$, $j = 1, ..., m_i$, $i = 1, ..., N$.

Per acabar la demostració, denotem

$$s_N = (\sigma_1^K R_1) \dots (\sigma_N^K R_N),$$

$$t_N = (\sigma_1 R_1) \dots (\sigma_N R_N).$$

Notem que els paràmetres R_N, m_N, σ_N han estat escollits per tal que

$$m_1 \dots m_N \, h(t_N) = 1, \qquad m_1 \dots m_N \, s_N^{\frac{2}{K+1}} \, \varepsilon(t_N)^{\frac{2K}{K+1}} (c_1 \dots c_N)^{\frac{K-1}{K+1}} = 1.$$

Sigui $g(s) = s^{\frac{2}{K+1}} \, \eta(s)$, amb η definida per

$$\eta(s) = \varepsilon(t_N)^{\frac{2K}{K+1}} (c_1 \dots c_N)^{\frac{K-1}{K+1}}$$

per a tot $s \in [s_N, s_{N-1})$.

Clam 1. $\mathcal{H}^h(\phi(E)) \simeq 1$.
Comencem per fixar $\delta > 0$ molt petit. El recobriment $(\psi^1_{j_1} \circ \cdots \circ \psi^N_{j_N}(\mathbb{D}))_{j_1,\dots,j_N}$ és admissible en el moment de calcular $\mathcal{H}^h_\delta(\phi(E))$, si $\operatorname{diam}(\psi^1_{j_1} \circ \cdots \circ \psi^N_{j_N}(\mathbb{D})) \leq \delta$. Per tant,

$$\mathcal{H}^h_\delta(\phi(E)) \leq \sum_{j_1,\dots,j_N} h(\operatorname{diam}(\psi^1_{j_1} \circ \cdots \circ \varphi^N_{j_N}(\mathbb{D}))) = m_1 \dots m_N \, h(t_N) = 1$$

degut a com hem triat σ_N. Per a l'altra desigualtat, prenguem un recobriment finit $(U_j)_j$ de $\phi(E)$ per discos de diàmetre $\operatorname{diam}(U_j) \leq \delta$. Ara sigui

$$\delta_0 = \inf_j (\operatorname{diam}(U_j)) > 0.$$

Denotem per N_0 el mínim enter tal que $t_{N_0} \leq \delta_0$. Per construcció, la família $(\psi^1_{j_1} \circ \cdots \circ \psi^{N_0}_{j_{N_0}}(\mathbb{D}))_{j_1,\dots,j_{N_0}}$ és un recobriment de $\phi(E)$ amb la $\mathcal{M}^h$-*packing condition*, de manera que

$$\sum_j h(\operatorname{diam}(U_j)) \geq C \sum_{j_1,\dots,j_{N_0}} h(\operatorname{diam}(\varphi^{N_0}_{j_{N_0}} \circ \cdots \circ \varphi^1_{j_1}(\mathbb{D}))) = C.$$

Així, $\mathcal{H}^h_\delta(\phi(E)) \geq C$ i fent $\delta \to 0$ obtenim $C \leq \mathcal{H}^h(\phi(E)) \leq 1$.

Clam 2. $\mathcal{H}^g(E) \simeq 1$.
La prova és completament anàloga.

Clam 3. Hom pot triar σ_j de manera que $\lim\limits_{N\to\infty} \dfrac{s_N^\delta}{\eta(s_N)} = 0$ per tot $\delta > 0$.

Per a provar-ho, fixem $\delta > 0$. Notem primer que

$$\frac{s_N^\delta}{\eta(s_N)} = \frac{s_N^\delta}{\varepsilon(t_N)^{\frac{2K}{K+1}}(c_1\dots c_N)^{\frac{K-1}{K+1}}} = \left(\frac{t_N^{\delta\frac{K+1}{2K}}}{\varepsilon(t_N)}\right)^{\frac{2K}{K+1}}\left(\frac{(\sigma_1\dots\sigma_N)^\delta}{(c_1\dots c_N)^{\frac{1}{K+1}}}\right)^{K-1}.$$

Ara, com que $\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{t^\delta}{\varepsilon(t)} = 0$ per a tot $\delta > 0$, serà suficient trobar N prou gran tal que

$$(\sigma_1\dots\sigma_N)^\delta < (c_1\dots c_N)^{\frac{1}{K+1}}.$$

Ara bé, si $\delta > 0$ és fixat, llavors

$$\sigma_j^\delta < \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{K+1}}$$

per tot $j > N = N(\delta, K)$.

Clam 4. $\displaystyle\int_0^1 \frac{\varepsilon(t)^2}{t}dt \geq \frac{1}{K}\int_0^1 \frac{\eta(s)^{1+\frac{1}{K}}}{s}ds.$

De la definició de η, i com que $c_1\dots c_N < 1$, tenim

$$\int_{t_N}^{t_{N-1}} \frac{\varepsilon(t)^2}{t}dt \geq \varepsilon(t_N)^2\log\frac{t_{N-1}}{t_N} > \eta(s_N)^{1+\frac{1}{K}}\left(\log\frac{s_{N-1}}{s_N} - (K-1)\log\frac{1}{\sigma_N}\right).$$

Ara observem que

$$\log\frac{1}{\sigma_N} = \frac{1}{K}\log\frac{1}{\sigma_N^K} \leq \frac{1}{K}\log\frac{s_{N-1}}{s_N}.$$

Per tant,

$$\int_{t_N}^{t_{N-1}} \frac{\varepsilon(t)^2}{t}dt \geq \frac{1}{K}\int_{s_N}^{s_{N-1}} \frac{\eta(s)^{1+\frac{1}{K}}}{s}ds$$

i això acaba la prova. ∎

Voldriem remarcar en aquest punt que la construcció també funciona si comencem amb la funció de mesura $h(t) = t$. En aquest cas, obtenim un compacte E, una aplicació K-

quasiconforme ϕ i una funció de mesura $g(s) = s^{\frac{2}{K+1}}\,\eta(s)$ per als quals

$$\lim_{s\to 0}\eta(s) = 0 \quad \text{and} \quad \lim_{s\to 0}\frac{s^{\delta}}{\eta(s)} = 0 \ \forall\delta > 0$$

i tals que $\mathcal{H}^g(E) \simeq 1$ i $\mathcal{H}^1(\phi(E)) \simeq 1$. Altre cop, E té dimensió $\frac{2}{K+1}$, també amb mesura no σ-finita, però ara $\phi(E)$ té longitud positiva i finita.

Corol·lari 2.21.
Existeix un compacte E, tal que

- *E és no evitable per a les funcions K-quasiregulars i acotades.*
- *$\mathcal{H}^g(E) \simeq 1$, on $g(s) = s^{\frac{2}{K+1}}\,\eta(s)$ és tal que*

$$\lim_{s\to 0}\eta(s) = 0 \quad \textit{and} \quad \lim_{s\to 0}\frac{s^{\delta}}{\eta(s)} = 0 \ \forall\delta > 0.$$

En particular, E té dimensió de Hausdorff $\frac{2}{K+1}$.

Demostració. Sigui $h(t) = t\,\varepsilon(t)$ una funció de mesura en la situació del teorema anterior, tal que

$$\int_0^1 \frac{h(t)^2}{t^3}dt < \infty$$

Construim un compacte E de dimensió $\frac{2}{K+1}$, i una aplicació K-quasiconforme ϕ tal que $\mathcal{H}^h(\phi(E)) \simeq 1$. Per [40], $\phi(E)$ té capacitat analítica positiva, de manera que existeix una funció f acotada, analítica fora de $\phi(E)$, i no constant. Aleshores la composició $g = f\circ\phi$ és K-quasiregular fora de E, acotada a tot $\mathbb{C}$, i no admet extensions quasiregulars a $\mathbb{C}$. Així, E és no evitable per a les funcions K-quasiregulars i acotades. ■

Cal notar, en aquest punt, que el conjunt E no evitable que hem construït suporta una mesura ν de creixement g (de fet podem prendre $\nu = \mathcal{H}^g$), és a dir, $\nu(D(z,r)) \leq g(r)$, i tal que

$$\int_0^1 \left(\frac{g(s)}{s^{2-\alpha p}}\right)^{\frac{1}{p-1}}\frac{ds}{s} = \int_0^1 \frac{\eta(s)^{1+\frac{1}{K}}}{s}ds < \infty$$

a on $\alpha = \frac{2K}{2K+1}$ i $p = \frac{2K+1}{K+1}$. Deduïm llavors de [1, Th. 5.1.13] una estimació de la capacitat de Riesz $C_{\alpha,p}$ del nostre conjunt E,

$$C_{\alpha,p}(E) > 0$$

Ara bé, $K > 1$ implica $p > \frac{3}{2}$ de manera que

$$0 < C_{\alpha,p}(E) \leq C_{\frac{2}{3}(2-\frac{2}{K+1}),\frac{3}{2}}(E) \simeq \gamma_{\frac{2}{K+1}}(E) \lesssim \mathcal{M}^{\frac{2}{K+1}}(E)$$

En aquesta expressió, l'equivalència $C_{\frac{2}{3}(2-\frac{2}{K+1}),\frac{3}{2}}(E) \simeq \gamma_{\frac{2}{K+1}}(E)$ prové d'un resultat de J. Mateu, L. Prat i J. Verdera [38]. Recordem que per a tot $\beta \in (0, 2]$, γ_β és la capacitat de Riesz signada, associada als nuclis de Riesz signats $\frac{z}{|z|^{1+\beta}}$. Hom demostra a [38] que si $\beta \in (0, 1)$ aleshores

$$\gamma_\beta(F) \simeq C_{\frac{2}{3}(2-\beta),\frac{3}{2}}(F)$$

En particular, si $\mathcal{H}^\beta(F) < \infty$ aleshores $\gamma_\beta(F) = 0$. Notem que quan $\beta = \frac{2}{K+1}$, si $\mathcal{H}^\beta(F) < \infty$ aleshores F és evitable per a les funcions K-quasiregulars i acotades. A més a més, si $\beta = 1$ aleshores obtenim la capacitat γ_1, i es dedueix del treball de X. Tolsa [51] que aquesta γ_1 es comporta precisament com la capacitat analítica,

$$\gamma_1(E) \simeq \gamma(E)$$

Això ens motiva a plantejar el següent problema.

Problema 2.22.
Sigui E un compacte. Assumim que $\gamma_{\frac{2}{K+1}}(E) = 0$. Aleshores, E és evitable per a les funcions K-quasiregulars i acotades, és a dir, $\gamma(\phi(E)) = 0$ per a tota aplicació K-quasiconforme ϕ.

Si això fos cert, donaria interessants relacions entre el món quasiconforme i la teoria del potencial dels nuclis de Riesz signats.

3 Singularitats evitables de funcions quasiregulars i Hölder contínues

3.1 Introducció

Sigui $\alpha \in (0,1)$. Recordem que una funció $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ és localment Hölder contínua amb exponent α, és a dir, $f \in \mathrm{Lip}_\alpha(\mathbb{C})$, si

$$|f(z) - f(w)| \leq C\,|z-w|^\alpha \tag{3.1}$$

sempre que $z, w \in \mathbb{C}$ satisfacin $|z-w| < 1$.

Diem que un compacte E és *evitable per a les funcions K-quasiregulars i α-Hölder contínues* si tota funció Lip_α $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, K-quasiregular a $\mathbb{C} \setminus E$, és en realitat K-quasiregular a tot el pla. En aquest capítol, estudiem condicions que fan que un compacte $E \subset \mathbb{C}$ sigui evitable (o no evitable) per a les funcions K-quasiregulars de classe Lip_α.

En relació amb aquest tema, hi ha alguns resultats previs. Per exemple, P. Koskela i O. Martio [33] van provar que si $d = \frac{1}{K}\left(1 + \frac{\alpha}{K}\right)$, llavors tot compacte amb mesura de Hausdorff d-dimensional nul·la és evitable. De fet, els autors donen també algunes condicions suficients d'evitabilitat a $\mathbb{R}^n$. En particular, demostren que si $\mathcal{H}^d(E) = 0$ amb $d = \min\{1, n\alpha\}$, llavors E és evitable per les funcions K-quasiregulars i α-Hölder contínues de $\mathbb{R}^n$. Des d'un altre punt de vista, mentre estudien equacions quasilineals el·líptiques de segon ordre, T. Kilpeläinen i X. Zhong [32] mostren que $\mathcal{H}^{\alpha(n-1)}(E) = 0$ és suficient. En aquest capítol millorem aquests resultats i obtenim al Teorema 3.2 la següent condició suficient.

Teorema.
Siguin $K \geq 1$ i $\alpha \in (0,1)$, i sigui E un compacte. Si $d = \frac{2}{K+1}(1+\alpha K)$ i

$$\mathcal{H}^d(E) = 0,$$

aleshores E és evitable per a les funcions K-quasiregulars i α-Hölder contínues.

Aquest índex d ens va ser suggerit per K. Astala. Les nostres tècniques no funcionen a $\mathbb{R}^n$, donat que no hi ha factorització si $n > 2$. Malgrat això, aquest resultat pot ser reescrit en la classe de funcions de distorsió finita al pla. Recordem que $f : \Omega \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ és una *funció de distorsió finita* si $f \in W^{1,1}_{loc}(\Omega)$, $J(\cdot, f) \in L^1_{loc}(\Omega)$ i

$$|Df(z)|^2 \leq K(z)\, J(z,f)$$

a quasi tot $z \in \Omega$. Aquí $K : \Omega \to [1, \infty]$ és una funció mesurable, finita a quasi tot punt $z \in \Omega$. Equivalentment, $|\mu(z)| < 1$ per a quasi tot $z \in \Omega$. Si $K \in L^\infty$, obtenim la classe de funcions de distorsió acotada (és a dir, quasiregulars). Darrerament hi ha hagut grans progressos en aquest camp. En particular, els conjunts per a funcions acotades de distorsió finita de $\mathbb{R}^n$ han estat estudiats (vegeu, per exemple, [7], [18], [27] or [30]). En general, hipòtesis més o menys febles sobre K són suficients per estendre propietats típicament quasiregulars a aquesta classe, com ara que es tracta de funcions contínues, discretes i obertes. A més, al pla tenim resultats d'existència de solucions normalitzades (com el Teorema 1.11) o de factorització (com el Teorema 1.12). Tot i que la regularitat natural per a aquestes funcions es troba a l'espai d'Orlicz-Sobolev $W^{1,P}_{loc}(\mathbb{C})$, $P(t) = \frac{t^2}{\log(e+t)}$ (que és més gran que l'usual $W^{1,2}_{loc}(\mathbb{C})$), podem estudiar el problema d'evitabilitat per a funcions Lip_α de distorsió finita, el qual acabarà essent un cas límit del problema quasiregular.
Per trobar resultats en la direcció contrària, recordem de [16] que tot compacte E amb $\mathcal{H}^{1+\alpha}(E) > 0$ no és evitable per a les funcions analítiques i α-Hölder contínues i, en conseqüència, tampoc per les K-quasiregulars. Per això, el nostre interès es centra en els conjunts de dimensió entre $d = 2\frac{1+\alpha K}{1+K}$ i $1+\alpha$. Demostrem al Corol·lari 3.6 que l'índex d és òptim en el següent sentit.

Teorema.
Donats $\alpha \in (0,1)$ i $K \geq 1$, per a tot $t > d$ existeix un compacte E de dimensió t, i una funció $f \in \mathrm{Lip}_\alpha(\mathbb{C})$ que és K-quasiregular a $\mathbb{C} \setminus E$, i no admet cap extensió K-quasiregular a tot $\mathbb{C}$.

En altres paraules, donat qualsevol real $t > d = 2\frac{1+\alpha K}{1+K}$, construirem un compacte E de dimensió t, no evitable per a les funcions K-quasiregulars i α-Hölder contínues.

El nostre procediment comença amb un compacte E de dimensió t i una aplicació K-quasiconforme ϕ tal que $\dim(\phi(E)) = t' = \frac{2Kt}{2+(K-1)t}$ (notem que $t' > 1$). Llavors, veurem que existeixen funcions de classe $\mathrm{Lip}_\beta(\mathbb{C})$ per algun $\beta > 0$, analítiques fora de $\phi(E)$, que alhora indueixen (per composició) funcions K-quasiregulars sobre $\mathbb{C} \setminus E$ amb un exponent de Hölder-continuïtat determinat. Aquesta construcció trobarà dos obstacles. Primer, la distorsió extremal dels conjunts de dimensió $2\frac{1+\alpha K}{1+K}$ a través d'aplicacions K-quasiconformes no és exactament $1+\alpha$, la dimensió crítica en el problema analític (i en canvi sí que era així quan $\alpha = 0$, i.e. en el problema d'evitabilitat K-quasiregular i BMO). Segon, la composició de funcions β-Hölder contínues amb aplicacions K-quasiconformes és de classe $\mathrm{Lip}_{\beta/K}(\mathbb{C})$ i no millor en general, de manera que hi ha una pèrdua de regularitat que podria ser crítica. Per tal d'evitar aquests problemes, construirem l'aplicació ϕ explícitament, cosa que ens permetrà demostrar al Corol·lari 3.5 que la nostra aplicació ϕ té un exponent Hölder donat per

$$\frac{t}{t'} = \frac{1}{K} + \frac{K-1}{2K}t$$

que és més gran que l'usual $\frac{1}{K}$ provinent del Teorema de Mori (Teorema 1.13). Aquesta idea ens va ser suggerida per X. Zhong. Observem que si $\dim(E) = t$ i $\dim(\phi(E)) = t'$ aleshores és natural esperar que ϕ serà de classe $\mathrm{Lip}_{t/t'}$. Aquesta regularitat serà suficient per als nostres objectius.

Aquest capítol està estructurat com segueix. A la Secció 3.2 demostrem una condició suficient d'evitabilitat. A la Secció 3.3, construïm conjunts no evitables per mitjà d'exemples de distorsió quasiconforme extremal. Per acabar, a la Secció 3.4 introduïm les funcions de distorsió finita, i estudiem el problema d'evitabilitat Lip_α que se'n deriva.

3.2 Condicions suficients d'evitabilitat Lip_α

En aquesta secció, si μ té suport compacte, entendrem per *solució principal* l'única aplicació μ-quasiconforme ϕ normalitzada com a (1.10), és a dir, tal que $\phi(0) = 0$ i $\phi(z) - z \in \mathbb{C} + W^{1,p}(\mathbb{C})$. Comencem amb un resultat auxiliar sobre compacitat.

Lema 3.1.
Suposem que μ_n, μ són coeficients de Beltrami, tots amb suport compacte inclòs a $\mathbb{D}$, tals que $\|\mu_n\|_\infty, \|\mu\|_\infty \leq \frac{K-1}{K+1}$. Siguin $\phi_n, \phi : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, respectivament, les solucions principals a les corresponents equacions de Beltrami. Si $\mu_n \to \mu$ quasi per tot arreu, aleshores:

(a) $\lim_{n\to\infty} J(\cdot, \phi_n) = J(\cdot, \phi)$, *amb convergència en L^p_{loc}, per tot $p \in (1, \frac{K}{K-1})$.*

(b) $\lim_{n\to\infty} \phi_n = \phi$ *uniformement sobre compactes.*

(c) $\lim_{n\to\infty} \phi_n^{-1} = \phi^{-1}$ *uniformement sobre compactes.*

Demostració. Donat que μ_n, μ tenen suport compacte a $\mathbb{D}$, podem procedir com a l'Exemple 1.10 per representar ϕ i ϕ_n com $\phi_n(z) = z + \tilde{C}h_n(z)$, $\phi(z) = z + \tilde{C}h(z)$. Aquí $h_n, h \in L^{2p}(\mathbb{C})$ venen definides, respectivament, per $h_n = (I - \mu_n B)^{-1}(\mu_n)$ i $h = (I - \mu B)^{-1}(\mu)$, $\tilde{C}g(z) = Cg(z) - Cg(0)$ és la variant de la transformada de Cauchy definida a (1.3), i p és un nombre qualsevol dins de l'intèrval $(1, \frac{K}{K-1})$. Un càlcul mostra que

$$(I - \mu_n B)(h - h_n) = (\mu - \mu_n)\,(1 + Bh)$$

Astala, Iwaniec i Saksman [8, Teorema 1] proven que $I - \mu_n B$ és un isomorfisme bilipschitz de $L^{2p}(\mathbb{C})$, amb constant depenent només de $\|\mu_n\|_\infty \leq \frac{K-1}{K+1}$ i p. Per tant,

$$\|h - h_n\|_{2p} \leq \|(I - \mu_n B)^{-1}\|_{2p}\, \|(\mu - \mu_n)\,(1 + Bh)\|_{2p} \leq C_K\, \|(\mu - \mu_n)\,(1 + Bh)\|_{2p}.$$

i així $\lim_n \|h_n - h\|_{2p} = 0$, ja que $h \in L^{2p}(\mathbb{C})$ i μ_n, μ tenen suport uniformement acotat. Deduïm llavors que $D\phi_n$ convergeix en $L^{2p}_{loc}(\mathbb{C})$ a $D\phi$, de manera que $J(\cdot, \phi_n)$ convergeix en $L^p_{loc}(\mathbb{C})$ a $J(\cdot, \phi)$. A més a més [2, p. 86], existeix una constant C_p tal que

$$|\tilde{C}f(z) - \tilde{C}f(w)| \leq C_p\, \|f\|_{2p}\, |z - w|^{1 - \frac{1}{p}}$$

per a tot parell de punts $z, w \in \mathbb{C}$. També tenim $\tilde{C}f(0) = 0$ per a tota $f \in L^{2p}(\mathbb{C})$. Per això,

$$|\phi(z) - \phi_n(z)| = |\tilde{C}(h - h_n)(z)| \leq C_p \, \|h - h_n\|_{2p} \, |z|^{1-\frac{1}{p}}$$

i $\phi_n \to \phi$ uniformement sobre compactes. Finalment, notem que les aplicacions $\psi_n = \frac{\phi_n^{-1}}{\phi_n^{-1}(1)}$ formen una família normal, donat que totes elles són K-quasiconformes i, a més, fixen 0, 1 i ∞. En conseqüència, són uniformement $\frac{1}{K}$-Hölder contínues sobre compactes. Així, si $\phi(w) = z$,

$$\begin{aligned} |\phi^{-1}(z) - \phi_n^{-1}(z)| &= |\phi^{-1}\phi(w) - \phi_n^{-1}\phi(w)| = |\phi_n^{-1}\phi_n(w) - \phi_n^{-1}\phi(w)| \\ &= |\phi_n^{-1}(1)| \, |\psi_n(\phi_n(w)) - \psi_n(\phi(w))| \leq C_K \, |\phi_n^{-1}(1)| \, |\phi_n(w) - \phi(w)|^{\frac{1}{K}}. \end{aligned}$$

En particular, per a $z = 1$ tenim

$$\left| \frac{\phi^{-1}(1)}{\phi_n^{-1}(1)} - 1 \right| \leq C_K \, |\phi_n(w) - \phi(w)|^{\frac{1}{K}} \to 0.$$

Com que $\phi_n(0) = 0$ per tot n, necessàriament $\lim_n \phi_n^{-1}(1) = \phi^{-1}(1)$. En conseqüència, ϕ_n^{-1} convergeix localment uniformement a ϕ^{-1}. ∎

Teorema 3.2.
Siguin $E \subset \mathbb{C}$ un compacte, $\alpha \in (0,1)$ i $K \geq 1$. Denotem $d = \frac{2}{K+1}(1 + \alpha K)$. Si

$$\mathcal{H}^d(E) = 0,$$

aleshores E és evitable per les funcions K-quasiregulars de classe Lip_α.

Demostració. Assumim que $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ és una funció $\mathrm{Lip}_\alpha(\mathbb{C})$, K-quasiregular a $\mathbb{C} \setminus E$. Veurem que f és K-quasiregular a tot $\mathbb{C}$.
Sigui $\mu = \frac{\bar\partial f}{\partial f}$ el coeficient de Beltrami de f. Òbviament, no és restrictiu suposar que $E \subset \mathbb{D}$ i que μ té suport compacte dins de $\mathbb{D}$. Sigui ϕ la solució principal de $\bar\partial\phi = \mu\, \partial\phi$. Aleshores la funció $F = f \circ \phi^{-1}$ és analítica a $\mathbb{C} \setminus \phi(E)$ i Hölder contínua a $\mathbb{C}$, amb exponent α/K. En particular, $\bar\partial F$ defineix una distribució de suport compacte inclòs a $\phi(E)$. Per explicar això, primer notem que com que F és contínua, és també una funció de $L^2_{loc}(\mathbb{C})$, i per tant les seves derivades distribucionals actuen contínuament a $W^{1,2}$.

Pel Lema de Weyl, és suficient demostrar que $\overline{\partial} F = 0$.

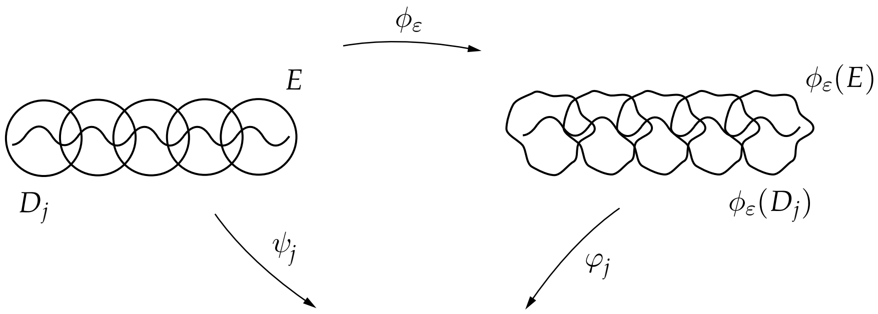
Per a cada $\varepsilon > 0$ podem considerar una família finita de discos $D_j = D(z_j, r_j)$ tals que $\Omega_\varepsilon = \bigcup_j D_j$ recobreix E i

$$\sum_{j=1}^{n} \operatorname{diam}(D_j)^d \leq \varepsilon.$$

Definim $\mu_\varepsilon = \mu\, \chi_{\mathbb{C}\setminus\Omega_\varepsilon}$. Si ϕ_ε és la solució principal a $\overline{\partial}\phi_\varepsilon = \mu_\varepsilon\, \partial\phi_\varepsilon$, llavors pel Lema 3.1 les funcions $F_\varepsilon = f \circ \phi_\varepsilon^{-1}$ convergeixen localment uniformement a F a mesura que $\varepsilon \to 0$, ja que $f \in \operatorname{Lip}_\alpha(\mathbb{C})$. Així, per a tota funció test $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{C})$,

$$\langle \overline{\partial} F, \varphi \rangle = \langle \overline{\partial}(F - F_\varepsilon), \varphi \rangle + \langle \overline{\partial} F_\varepsilon, \varphi \rangle = -\langle (F - F_\varepsilon), \overline{\partial}\varphi \rangle - \langle \overline{\partial} F_\varepsilon, \varphi \rangle.$$

El primer terme convergeix a 0 si $\varepsilon \to 0$. Per tant, només ens preocuparem del segon. Considerem una partició de la unitat ψ_j subordinada al recobriment D_j, és a dir, cada ψ_j és una funció de classe $\mathcal{C}^\infty$ amb suport compacte dins de $2D_j$, $|D\psi_j| \leq \frac{C}{\operatorname{diam}(D_j)}$, i $\sum_{j=1}^n \psi_j = 1$ sobre Ω_ε. Ara definim $\varphi_j = \psi_j \circ \phi_\varepsilon^{-1}$. Aleshores, cada φ_j és de classe $W^{1,2}(\mathbb{C})$, té suport compacte dins de $\phi_\varepsilon(2D_j)$, i $\sum_{j=1}^n \varphi_j = 1$ sobre $\phi_\varepsilon(\Omega_\varepsilon)$. Per a qualsse-



vol constants c_j, tenim

$$\begin{aligned} \langle \overline{\partial} F_\varepsilon, \varphi \rangle &= \langle \overline{\partial} F_\varepsilon, \varphi \sum_{j=1}^{n} \varphi_j \rangle = \sum_{j=1}^{n} \langle \overline{\partial} F_\varepsilon, \varphi\, \varphi_j \rangle = \sum_{j=1}^{n} \langle \overline{\partial}(F_\varepsilon - c_j), \varphi\, \varphi_j \rangle \\ &= -\sum_{j=1}^{n} \langle (F_\varepsilon - c_j), \overline{\partial}\varphi\, \varphi_j \rangle - \sum_{j=1}^{n} \langle (F_\varepsilon - c_j), \varphi\, \overline{\partial}\varphi_j \rangle = I + II \end{aligned} \tag{3.2}$$

i només cal acotar I i II independentment. Notem, però, que ara tots dos termes poden ésser escrits com a integrals. Després d'un canvi de variable, per a I obtenim

$$\begin{aligned}\left|\sum_{j=1}^{n}\langle (F_\varepsilon - c_j), \overline{\partial}\varphi\,\varphi_j\rangle\right| &\le \sum_{j=1}^{n}\int_{\phi_\varepsilon(2D_j)} |F_\varepsilon(z)-c_j|\,|\overline{\partial}\varphi(z)|\,|\varphi_j(z)|\,dA(z)\\ &\le \|D\varphi\|_\infty \sum_{j=1}^{n}\int_{2D_j} |f(w)-c_j|\,J(w,\phi_\varepsilon)dA(w).\end{aligned}$$

Observem [4] que per tot $p \in (1, \frac{K}{K-1})$, $J(\cdot,\phi_\varepsilon) \in L^p_{loc}(\mathbb{C})$. Això, i el fet que $f \in \mathrm{Lip}_\alpha$, ens permeten arribar a

$$\begin{aligned}|I| &\le C\,\|D\varphi\|_\infty \sum_{j=1}^{n}\left(\int_{2D_j} J(w,\phi_\varepsilon)^p dA(w)\right)^{1/p} \mathrm{diam}(2D_j)^{\alpha+2/q}\\ &\le C\,\|D\varphi\|_\infty \left(\sum_{j=1}^{n}\int_{2D_j} J(w,\phi_\varepsilon)^p dA(w)\right)^{1/p}\left(\sum_{j=1}^{n}\mathrm{diam}(2D_j)^{q\alpha+2}\right)^{1/q},\end{aligned}$$

on $q=\frac{p}{p-1}$. Però totes dues sumes convergeixen a 0 si $\varepsilon \to 0$, de manera que $I \to 0$. Per què fa al terme II de (3.2),

$$\begin{aligned}\left|\sum_{j=1}^{n}\langle (F_\varepsilon - c_j), \varphi\,\overline{\partial}\varphi_j\rangle\right| &\le \sum_{j=1}^{n}\int_{\phi_\varepsilon(2D_j)} |F_\varepsilon(z)-c_j|\,|\varphi(z)|\,|\overline{\partial}\varphi_j(z)|\,dA(z)\\ &\le \|\varphi\|_\infty \sum_{j=1}^{n}\int_{2D_j} |f(w)-c_j|\,|\overline{\partial}\varphi_j(\phi_\varepsilon(w))|\,J(w,\phi_\varepsilon)dA(w).\end{aligned}$$

Ara, ϕ_ε^{-1} és també K-quasiconforme. Per la regla de la cadena,

$$|D\varphi_j(\phi_\varepsilon)| \le |D\psi_j|\,|D\phi_\varepsilon^{-1}(\phi_\varepsilon)| \le \frac{|D\psi_j|}{J(\cdot,\phi_\varepsilon)^{\frac{1}{2}}}.$$

Ajuntant això amb la condició Lip_α per a f i el decreixement de $D\psi_j$, tenim

$$|II| \lesssim \|\varphi\|_\infty \sum_{j=1}^{n}\left(\int_{2D_j} J(w,\phi_\varepsilon)^{\frac{1}{2}}\,dA(w)\right)\,\mathrm{diam}(2D_j)^{\alpha-1}.$$

Recordem que $J(\cdot,\phi_\varepsilon)^{\frac{1}{2}}$ defineix una mesura doblant, amb constants que depenen només de K, de manera que

$$|II| \lesssim \|\varphi\|_\infty \sum_{j=1}^{n} \left(\int_{D_j} J(w, \phi_\varepsilon)^{\frac{1}{2}}\, dA(w) \right) \operatorname{diam}(2D_j)^{\alpha-1}.$$

D'altra banda, dins de la unió $\Omega_\varepsilon = \cup_j D_j$ l'aplicació ϕ_ε és conforme, per la qual cosa $J(\cdot, \phi_\varepsilon)$ hi assoleix la integrabilitat òptima $\frac{K}{K-1}$, com al Teorema 1.16, i

$$\int_{\Omega_\varepsilon} J(w, \phi_\varepsilon)^{\frac{K}{K-1}}\, dA(w) \leq 1.$$

Així, com abans, usem la desigualtat de Hölder dues vegades i obtenim

$$\begin{aligned} |II| &\lesssim \|\varphi\|_\infty \sum_{j=1}^{n} \left(\int_{D_j} J(w, \phi_\varepsilon)^{\frac{K}{K-1}}\, dA(w) \right)^{\frac{K-1}{2K}} \operatorname{diam}(D_j)^{\alpha+\frac{1}{K}} \\ &\leq \|\varphi\|_\infty \left(\sum_{j=1}^{n} \int_{D_j} J(w, \phi_\varepsilon)^{\frac{K}{K-1}}\, dA(w) \right)^{\frac{K-1}{2K}} \left(\sum_{j=1}^{n} \operatorname{diam}(D_j)^{\frac{2(1+\alpha K)}{K+1}} \right)^{\frac{K+1}{2K}}. \end{aligned}$$

Aquí, la integral és uniformement acotada, mentre que la suma està acotada per ε, degut a com haviem escollit el recobriment. ■

Volem destacar que que la integrabilitat òptima per a aplicacions K-quasiconformes d'Astala i Nesi [10] és precisament el que permet saltar de conjunts amb dimensió estrictament menor que d a conjunts amb mesura de Hausdorff d-dimensional zero. D'altra banda, observem que el Teorema 3.2 pot establir-se en un sentit més general, en termes del mòdul de continuïtat de f. Suposem que f és K-quasiregular a $\mathbb{C} \setminus E$ i, enlloc de (3.1), suposem que

$$|f(z) - f(w)| \leq \omega(|z - w|)$$

per a tot $z, w \in \mathbb{C}$ amb $|z - w| < 1$, on $\omega(r) = \omega_f(r)$ és qualsevol funció contínua, no decreixent, acotada, $\omega : [0, 1) \to [0, \infty)$ tal que $\omega(0) = 0$. Si $\mathcal{H}^h(E) = 0$ per a $h(t) = t^{\frac{2}{K+1}}\, \omega(2t)^{\frac{2K}{K+1}}$, aleshores f és K-quasiregular a tot el pla. Com a casos particulars, $\omega(r) = C\, r^\alpha$ dóna el teorema anterior, mentre que si $f \in \mathrm{lip}_\alpha(\mathbb{C})$, és a dir, si $\frac{\omega_f(r)}{r^\alpha} \to 0$ quan $r \to 0$, aleshores $\mathcal{M}^d_*(E) = 0$ és suficient ($\mathcal{M}^d_*$ denota el contingut inferior de

Hausdoff d-dimensional). Si $\omega(t) = \left(\log \frac{1}{t}\right)^{-\alpha}$, $\alpha > 0$, aleshores el resultat d'evitabilitat obtingut té una lectura en termes de distorsió: $\mathcal{H}^g(\phi(E)) = 0$, on $g(t) = t\,\left(\log \frac{1}{t}\right)^{-\alpha}$. El nostre argument també mostra que si $\mathcal{M}_*^{\frac{2}{K+1}}(E) = 0$ llavors E és evitable per les funcions K-quasiregulars i contínues.

Els resultats del Capítol 2 ens motiven a plantejar el següent problema.

Problema 3.3.
Sigui $d = 2\frac{1+\alpha K}{1+K}$, $K > 1$. És cert que si E és un compacte tal que $\mathcal{H}^d(E)$ és σ-finita, aleshores E és evitable per a les funcions K-quasiregulars i α-Hölder contínues ?

3.3 Distorsió extremal i conjunts no evitables

Un dels resultats principals d'Astala a [4] és l'optimalitat de la fórmula de distorsió de dimensió (1.12). Per tal d'assolir-hi la igualtat, l'autor va *moure analíticament* un conjunt tipus Cantor F fixat. Aquest fenomen es coneix amb el nom de *moviment holomorf* (en anglès, *holomorphic motion*) sobre F (vegeu per exemple [9] per tenir una ràpida introducció als moviments holomorfs). Un interessant teorema d'extensió, conegut com al λ-Lema, va permetre estendre aquest moviment quasiconformement de F a tot el pla $\mathbb{C}$. Aquest procediment evita la majoria de dificultats tècniques, i dóna el resultat desitjat d'una manera sorprenentment directa. Però nosaltres necessitem, per una banda, distorsió extremal de dimensió, i per l'altra, un exponent Hölder més gran del que és usual. Per a assolir aquestes dues fites, caldrà que construim ϕ explícitament. Siguin, doncs, $t \in (0,2)$ i $K \geq 1$ nombres fixats, i denotem $t' = \frac{2Kt}{2+(K-1)t}$. Com a [4], primer donarem una aplicació K-quasiconforme ϕ que envia un conjunt de Cantor regular E, de dimensió t, a un altre conjunt de Cantor regular $\phi(E)$, per al qual $\dim(\phi(E))$ és tant proper a t' com vulguem. Després, també com a [4], aglutinarem convenientment una quantitat numerable d'aplicacions d'aquesta mena.

Proposició 3.4.
Donats $t \in (0,2)$, $K \geq 1$ i $\varepsilon > 0$, existeix un compacte $E \subset \mathbb{D}$ i una aplicació K-quasiconforme $\phi : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, amb les següents propietats:

(a) ϕ *és la identitat sobre* $\mathbb{C} \setminus \mathbb{D}$.

(b) *E és un conjunt de Cantor regular, construït amb* $m = m(\varepsilon)$ *afinitats del pla.*

(c) $\dim(\phi(E)) \geq t' - \varepsilon$.

(d) $J(\cdot, \phi) \in L^p_{loc}(\mathbb{C})$ *si i només si* $p \leq \frac{K}{K-1}$.

(e) $|\phi(z) - \phi(w)| \leq C\, m^{\frac{1}{t} - \frac{1}{t'}}\, |z - w|^{\frac{t}{t'}}$ *sempre que* $|z - w| < 1$.

Demostració. Tot resseguint l'esquema d'Astala, Iwaniec, Koskela i Martin [7], obtindrem ϕ com a límit d'una successió d'aplicacions K-quasiconformes

$$\phi = \lim_{N \to \infty} \phi_N$$

mentre que E serà un conjunt de Cantor regular. Cada aplicació ϕ_N actuarà només sobre les primeres N generacions en la construcció de E. Certes funcions radials, com

$$f(z) = z|z|^{\frac{1}{K} - 1}$$

són extremals per diverses propietats típiques del món quasiconforme. És natural, doncs, construir ϕ_N utilitzant translacions i dilatacions de f. Ara bé, la nostra aplicació ϕ hauria de gaudir d'un exponent Hölder millor que $\frac{1}{K}$ (i en realitat aquesta és la millor classe que conté f), de manera que haurem de substituir f per una aplicació lineal en un entorn de la singularitat. Aquest canvi no afectarà l'índex d'integrabilitat, i al mateix temps ens portarà una sensible millora en l'exponent Hölder.

Prenguem $m \geq 100$, i considerem m discos disjunts dins de $\mathbb{D}$, $D(z_i, r)$, uniformement distribuïts, tots amb el mateix radi $r = r(m)$. Si m és prou gran, sempre podem assumir que $c_m = mr^2 \geq \frac{1}{2}$. Donat un real qualsevol $\sigma \in (0, 1)$, que determinarem més endavant, podem considerar m afinitats

$$\varphi_i(z) = z_i + \sigma r\, z, \quad z \in \mathbb{D}$$

i denotar, per a cada $i = 1, \dots, m$,

$$D_i = \frac{1}{\sigma}\,\varphi_i(\mathbb{D}) = D(z_i, r_1),$$
$$D_i' = \varphi_i(\mathbb{D}) = D(z_i, \sigma r_1),$$

a on hem denotat $r_1 = r$. Definim

$$g_1(z) = \begin{cases} \sigma^{\frac{1}{K}-1}(z-z_i)+z_i & z \in D_i' \\ \left|\frac{z-z_i}{r_1}\right|^{\frac{1}{K}-1}(z-z_i)+z_i & z \in D_i \setminus D_i' \\ z & \text{altrament.} \end{cases}$$

Es pot veure fàcilment que g_1 defineix una aplicació K-quasiconforme, conforme per tot arreu tret dels anells $D_i \setminus D_i'$. A més, si denotem

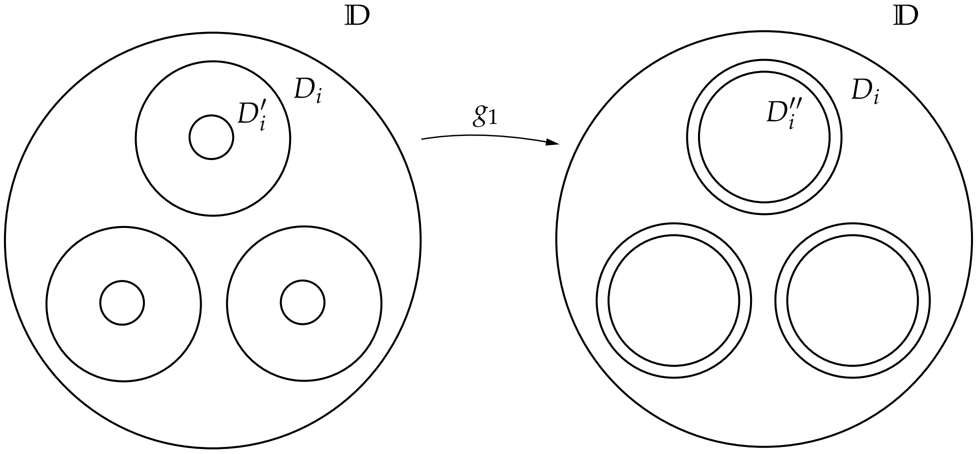


Figura 3.1

$$\psi_i(z) = z_i + \sigma^{\frac{1}{K}} r\, z, \quad z \in \mathbb{D}$$

llavors g_1 envia cada D_i a sí mateix, mentre que D_i' va a $D_i'' = \psi_i(\mathbb{D})$, com mostra la Figura 3.1. Denotem $\phi_1 = g_1$.

Al segon pas, repetim el procediment anterior dintre de cada D_i'', i deixem la resta fixa. Això és, definirem g_2 en el conjunt imatge de ϕ_1, i llavors definirem ϕ_2 com a

$$\phi_2 = g_2 \circ \phi_1.$$

Més explícitament,

$$\begin{aligned} D_{ij} &= \frac{1}{\sigma}\phi_1\left(\varphi_{ij}(\mathbb{D})\right) = D(z_{ij}, r_2), \\ D'_{ij} &= \phi_1\left(\varphi_{ij}(\mathbb{D})\right) = D(z_{ij}, \sigma r_2), \end{aligned}$$

on un càlcul mostra que $r_2 = \sigma^{\frac{1}{K}} r\, r_1$. Ara definim

$$g_2(z) = \begin{cases} \sigma^{\frac{1}{K}-1}(z - z_{ij}) + z_{ij} & z \in D'_{ij} \\ \left|\frac{z-z_{ij}}{r_2}\right|^{\frac{1}{K}-1}(z - z_{ij}) + z_{ij} & z \in D_{ij} \setminus D'_{ij} \\ z & \text{altrament.} \end{cases}$$

Per construcció, g_2 és K-quasiconforme a $\mathbb{C}$, conforme fora d'una unió de m^2 anells, i envia D'_{ij} a $D''_{ij} = \psi_{ij}(\mathbb{D})$, mentre que cada punt fora de D_{ij} queda fix g_2, com mostra la Figura 3.2. Així, la composició $\phi_2 = g_2 \circ \phi_1$ (vegeu Figura 3.3) és encara K-quasiconforme,

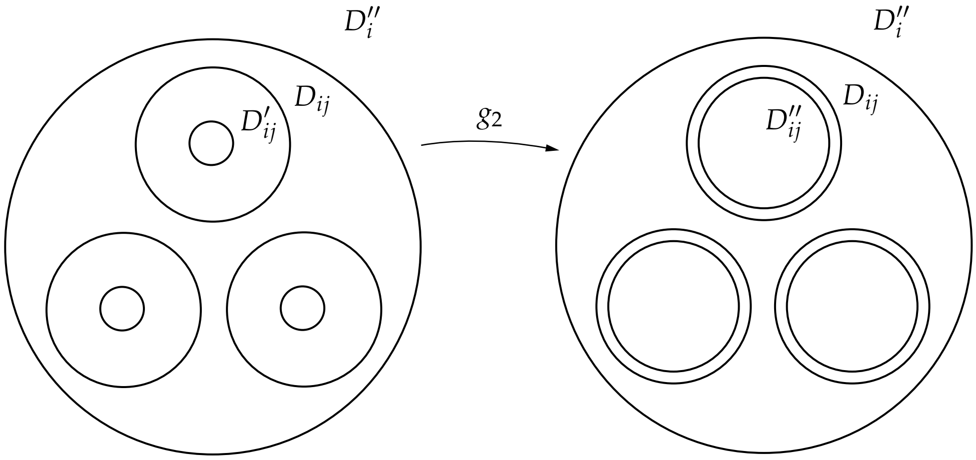


Figura 3.2

coincideix amb la identitat fora de $\mathbb{D}$, i

$$\phi_2(\varphi_{ij}(\mathbb{D})) = \psi_{ij}(\mathbb{D})$$

per a tot $i, j = 1, \ldots, m$. Després de $N-1$ passos, definirem g_N sobre el conjunt imatge

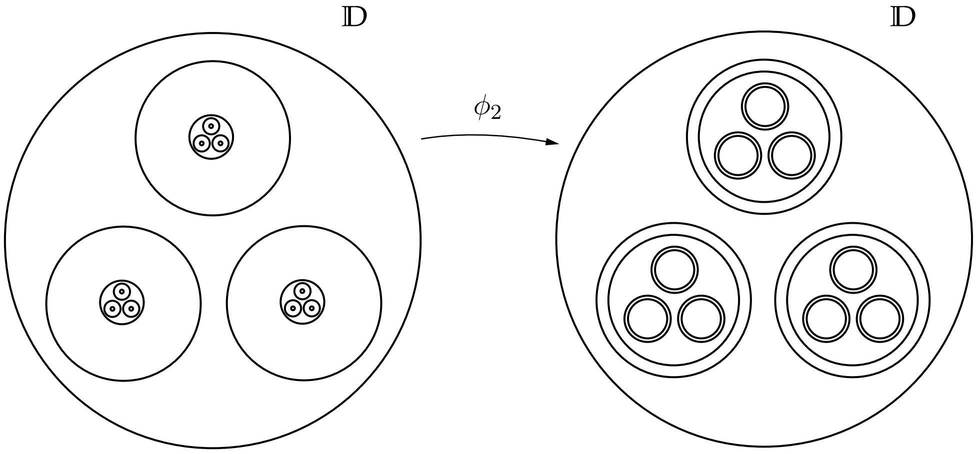


Figura 3.3

de ϕ_{N-1}. Per a cada multiíndex $J = (j_1, ..., j_N)$ de longitud $\ell(J) = N$ denotem

$$\begin{aligned} D_J &= \frac{1}{\sigma}\,\phi_{N-1}\left(\varphi_J(\mathbb{D})\right) = D(z_J, r_N), \\ D'_J &= \phi_{N-1}\left(\varphi_J(\mathbb{D})\right) = D(z_J, \sigma r_N), \end{aligned}$$

on ara $r_N = \sigma^{\frac{1}{K}} r\, r_{N-1}$. L'aplicació

$$g_N(z) = \begin{cases} \sigma^{\frac{1}{K}-1}(z - z_J) + z_J & z \in D'_J \\ \left|\frac{z-z_J}{r_N}\right|^{\frac{1}{K}-1}(z - z_J) + z_J & z \in D_J \setminus D'_J \\ z & \text{altrament} \end{cases}$$

és K-quasiconforme sobre el pla, conforme fora d'una unió de m^N anells. A més, $g_N(D_J) = D_J$ i $g_N(D'_J) = D''_J$, on $D''_J = \psi_J(\mathbb{D})$. Com a conseqüència, $\phi_N = g_N \circ \phi_{N-1}$ és també K-quasiconforme i

$$\phi_N(\varphi_J(\mathbb{D})) = \psi_J(\mathbb{D}).$$

Amb aquest procediment, és clar que la successió ϕ_N és uniformement convergent sobre compactes a un homeomorfisme ϕ. Aquesta ϕ és K-quasiconforme, doncs és límit d'una família normal d'aplicacions K-quasiconformes (vegeu la Secció 1.4). Per construcció,

ϕ envia el conjunt de Cantor regular donat per

$$E = \bigcap_{N=1}^{\infty} \left(\bigcup_{\ell(J)=N} \varphi_J(\mathbb{D}) \right)$$

a

$$\phi(E) = \bigcap_{N=1}^{\infty} \left(\bigcup_{\ell(J)=N} \psi_J(\mathbb{D}) \right)$$

que òbviament és també un conjunt de Cantor regular. Si ara escollim σ tal que

$$m(\sigma r)^t = 1$$

obtenim directament, per un costat, que $0 < \mathcal{H}^t(E) < \infty$, i per l'altre,

$$\frac{1}{\dim(\phi(E))} = \frac{1}{t'} + \frac{K-1}{2K} \frac{\log \frac{1}{mr^2}}{\log m}.$$

Com que $c_m \geq \frac{1}{2}$ per a tot m, sempre podem demanar que

$$\dim(\phi(E)) \geq t' - \varepsilon$$

augmentant m si és necessari.

Tot seguit, hem d'estudiar la regularitat de ϕ. Per a fer-ho, afegim notació addicional. Posem $G^0 = \mathbb{D}$, i aleshores P_J^N i G_J^N són, respectivament, els discos protectors i generadors de generació N, és a dir, per a cada cadena $J = (j_1, ..., j_N)$,

$$P_J^N = \frac{1}{\sigma}\, \varphi_J(\mathbb{D})$$
$$G_J^N = \varphi_J(\mathbb{D}).$$

Amb aquesta notació, $D_J = \phi_{N-1}(P_J^N)$, $D'_J = \phi_{N-1}(G_J^N)$ i $D''_J = \phi_N(G_J^N)$.

Prenguem un p qualsevol, tal que $J(\cdot, \phi) \in L^p_{loc}(\mathbb{C})$. Evidentment, podem assumir $p \geq 1$.

Llavors, es pot descomposar la integral de $J(\cdot,\phi)^p$ sobre el disc $\mathbb{D}$ de la següent manera:

$$\int_{\mathbb{D}} J(z,\phi)^p dA(z) = \int_{\mathbb{D}\setminus\cup_i P_i^1} J(z,\phi)^p dA(z) + \sum_{i=1}^{m} \int_{P_i^1\setminus G_i^1} J(z,\phi)^p dA(z) + \sum_{i=1}^{m} \int_{G_i^1} J(z,\phi)^p dA(z)$$

i com que $\phi = \phi_1$ sobre $\mathbb{C} \setminus \cup_i G_i^1$,

$$\int_{\mathbb{D}} J(z,\phi)^p dA(z) = \int_{\mathbb{D}\setminus\cup_i P_i^1} J(z,\phi_1)^p dA(z) + m \int_{P^1\setminus G^1} J(z,\phi_1)^p dA(z) + m \int_{G^1} J(z,\phi)^p dA(z)$$

on P^1 i G^1 denoten, respectivament, qualsevol dels discos protectors i generadors de primera generació. Tot seguit, podem repetir aquests càlculs a la darrera integral, i amb un argument recursiu arribem a

$$\int_{\mathbb{D}} J(z,\phi)^p dA(z) = \sum_{N=0}^{\infty} m^N \int_{G^N\setminus\cup_i P_i^{N+1}} J(z,\phi_{N+1})^p dA(z) + \sum_{N=1}^{\infty} m^N \int_{P^N\setminus G^N} J(z,\phi_N)^p dA(z)$$

on, com abans, P^N i G^N denoten qualsevol disc protector o generador, de generació N. Podem comptar, separadament, les integrals que aquí apareixen. Per un costat, si $J = (j_1, ..., j_N)$,

$$\begin{aligned}
\int_{G_J^N\setminus\cup_i P_{(Ji)}^{N+1}} J(z,\phi_{N+1})^p dA(z) &= \int_{G_J^N\setminus\cup_i P_{(Ji)}^{N+1}} J(\phi_N(z), g_{N+1})^p \, J(z,\phi_N)^p dA(z) \\
&= \int_{D_J''\setminus\cup_i D_{(Ji)}} J(w, g_{N+1})^p \, J(\phi_N^{-1}(w), \phi_N)^{p-1} dA(w) \\
&= \left(\sigma^{\frac{1}{K}-1}\right)^{2N(p-1)} \int_{D_J''\setminus\cup_i D_{(Ji)}} J(w, g_{N+1})^p dA(w) \\
&= \left(\sigma^{\frac{1}{K}-1}\right)^{2N(p-1)} \int_{D_J''\setminus\cup_i D_{(Ji)}} 1 \, dA(w) \\
&= \left(\sigma^{\frac{1}{K}-1}\right)^{2N(p-1)} |D_J'' \setminus \cup_i D_{(Ji)}| \\
&= r^{2N} \sigma^{N\gamma} \, \pi(1 - c_m),
\end{aligned}$$

on $\gamma = 2p\left(\frac{1}{K} - 1\right) + 2$. Per l'altre,

$$\begin{aligned}
\int_{P_J^N \setminus G_J^N} J(z,\phi_N)^p dA(z) &= \int_{P_J^N \setminus G_J^N} J(\phi_{N-1}(z), g_N)^p\, J(z,\phi_{N-1})^p dA(z) \\
&= \int_{D_J \setminus D_J'} J(w, g_N)^p\, J(\phi_{N-1}^{-1}(w), \phi_{N-1})^{p-1} dA(w) \\
&= \left(\sigma^{\frac{1}{K}-1}\right)^{2(N-1)(p-1)} \int_{D_J \setminus D_J'} J(w, g_N)^p dA(w) \\
&= r^{2N}\, \sigma^{(N-1)\gamma}\, \frac{2\pi}{K^p} \left|\frac{1-\sigma^\gamma}{\gamma}\right|
\end{aligned}$$

sota la hipòtesi addicional $p \neq \frac{K}{K-1}$. Si $p = \frac{K}{K-1}$, aleshores

$$\int_{P_J^N \setminus G_J^N} J(z,\phi_N)^{\frac{K}{K-1}} dA(z) = r^{2N}\, \frac{2\pi}{K^{\frac{K}{K-1}}}\, \log\frac{1}{\sigma}.$$

Així, si $p < \frac{K}{K-1}$ obtenim

$$\int_{\mathbb{D}} J(z,\phi)^p dA(z) = \left(\pi(1-c_m) + c_m\, \frac{2\pi}{K^p} \left|\frac{1-\sigma^\gamma}{\gamma}\right|\right) \sum_{N=0}^{\infty} (c_m\, \sigma^\gamma)^N .$$

Com que p és tal que $J(\cdot,\phi) \in L^p_{loc}(\mathbb{C})$, necessàriament $\sigma^\gamma < \frac{1}{c_m}$, i si m és prou gran, això és equivalent a demanar $\gamma > 0$, i.e. $p < \frac{K}{K-1}$. Al punt crític $p = \frac{K}{K-1}$, s'obté

$$\int_{\mathbb{D}} J(z,\phi)^{\frac{K}{K-1}} dA(z) = \left(\pi(1-c_m) + c_m\, \frac{2\pi}{K^{\frac{K}{K-1}}}\, \log\frac{1}{\sigma}\right) \sum_{N=0}^{\infty} (c_m)^N$$

que sempre és convergent, indepentdentment de m. Això mostra que podem escollir m prou gran de manera que $J(\cdot,\phi) \in L^p_{loc}(\mathbb{D})$ si i només si $p \leq \frac{K}{K-1}$.

Finalment, només falta veure que ϕ és Hölder contínua t'exponent t/t'. Per mitjà de la desigualtat de Poincaré, i junt amb la quasiconformalitat de ϕ, és suficient [22, p.64] veure que per a tot disc D

$$\int_D J(z,\phi)\, dA(z) \leq C\, \mathrm{diam}(D)^{2t/t'}.$$

Sigui, doncs, D un disc fixat, i sigui N tal que $(\sigma r)^N \leq \frac{1}{2}\operatorname{diam}(D) < (\sigma r)^{N-1}$. Tenim

$$\int_D J(z,\phi)\,dA(z) \leq \int_{D\setminus\cup G_J^N} J(z,\phi)\,dA(z) + \int_{\cup G_J^N} J(z,\phi)\,dA(z)$$

on la unió $\cup G_J^N$ recorre tots els discos G_J^N tals que $G_J^N \cap D \neq \emptyset$. Sobre $D \setminus \cup G_J^N$, fàcilment obtenim

$$J(\cdot,\phi) = J(\cdot,\phi_N) \leq \frac{1}{K}\left(\sigma^{\frac{1}{K}-1}\right)^{2N}.$$

Per tant

$$\begin{aligned}\int_{D\setminus\cup G_J^N} J(z,\phi)\,dA(z) &\leq \frac{1}{K}\left(\sigma^{\frac{1}{K}-1}\right)^{2N}\pi\left(\frac{1}{2}\operatorname{diam}(D)\right)^2\\ &\leq \frac{\pi}{K}\left(c_m^{\frac{K-1}{2K}}\right)^{2N} m^{2(\frac{1}{t}-\frac{1}{t'})}\left(\frac{1}{2}\operatorname{diam}(D)\right)^{2\frac{t}{t'}}.\end{aligned}$$

D'altra banda, com que $\phi(G_J^N) = \phi_N(G_J^N)$ són discos de radi $\left(\sigma^{\frac{1}{K}}r\right)^N$,

$$\begin{aligned}\int_{\cup_J G_J^N} J(z,\phi)\,dA(z) &= \sum_J |\phi(G_J^N)| = \sum_J |\phi_N(G_J^N)| = \sum_J \pi\left(\sigma^{\frac{1}{K}}r\right)^{2N}\\ &= \pi\left(c_m^{\frac{K-1}{2K}}\right)^{2N}\left(\frac{1}{2}\operatorname{diam}(D)\right)^{t/t'}\sum_J\left(\frac{(\sigma r)^N}{\frac{1}{2}\operatorname{diam}(D)}\right)^{2t/t'}\end{aligned}$$

i només faltarà acotar $\sum_J\left(\frac{(\sigma r)^N}{\frac{1}{2}\operatorname{diam}(D)}\right)^{2t/t'}$. En realitat, això és equivalent a trobar una constant C tal que

$$\sum_{G_J^N\cap D\neq\emptyset}\operatorname{diam}(G_J^N)^{2t/t'} \leq C\,\operatorname{diam}(D)^{2t/t'}.$$

Però els discos G_J^N provenen d'una construcció autosemblant, expressament escollida per a donar lloc a un conjunt de Cantor regular de dimensió t. En particular, podem escollir els discos uniformement distribuits per tal que l'anomenada *t-dimensional packing condition* es satisfaci, és a dir,

$$\sum_{G_J^N\cap D\neq\emptyset}\operatorname{diam}(G_J^N)^{t} \leq C\,\operatorname{diam}(D)^{t}.$$

per a tot disc D. És fàcil demostrar que aquest condició implica la s-dimensional, sempre que $s > t$ (en particular, per a $s = \frac{2t}{t'}$). Per això la constant C existeix i és independent de m. Així, finalment, obtenim

$$\int_D J(z,\phi)\, dA(z) \leq C\, m^{\frac{1}{t}-\frac{1}{t'}} \left(c_m^{\frac{K-1}{2K}}\right)^{2N} \left(\frac{1}{2}\operatorname{diam}(D)\right)^{2t/t'}$$

i la demostració acaba aquí. ∎

Corol·lari 3.5.
Siguin $K \geq 1$ i $t \in (0,2)$, i denotem $t' = \frac{2Kt}{2+(K-1)t}$. Existeix un compacte E, de dimensió t, i una aplicació K-quasiconforme $\phi : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, tal que:

(a) $\mathcal{H}^t(E)$ *és σ-finita.*

(b) $\dim(\phi(E)) = t'$.

(c) $|\phi(z) - \phi(w)| \leq C\,|z-w|^{\frac{t}{t'}}$ *sempre que* $|z-w| < 1$.

Demostració. Donats $\varepsilon > 0$, $K \geq 1$ i $t \in (0,2)$, siguin $\phi : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ i E com a la Proposició 3.4. Per a cada $r > 0$ fixat, l'aplicació

$$\psi_r(z) = r\,\phi(z/r)$$

i el conjunt $E_r = rE$ exhibeixen les mateixes propietats que ϕ i E, ja que ni la K-quasiconformalitat ni la dimensió de Hausdorff es veuen afectades per una dilatació. Ara bé, quan comptem la nova constant $\operatorname{Lip}_{t/t'}$, si $|z-w| < r$ llavors

$$|\psi_r(z) - \psi_r(w)| = r\,|\phi(z/r) - \phi(w/r)| \leq C\, m^{\frac{1}{t}-\frac{1}{t'}}\, r^{1-\frac{t}{t'}}\, |z-w|^{\frac{t}{t'}}.$$

Així, com a [4], siguin $D_j = D(z_j, r_j)$ discos disjunts inclosos a $\mathbb{D}$, i sigui ε_j una successió de positius, $\varepsilon_j \to 0$ si $j \to \infty$. Per a cada j, siguin ϕ_j i E_j com a la Proposició 3.4, de manera que $\dim(\phi_j(E_j)) \geq t' - \varepsilon_j$. En particular, cada E_j és un conjunt de Cantor regular, construït amb m_j afinitats. Denotem llavors $\psi_j(z) = r_j\,\phi_j(\frac{z-z_j}{r_j})$ i $F_j = z_j + r_j\,E_j$, i definim

$$\psi(z) = \begin{cases} \psi_j(z) & z \in D_j \\ z & \text{altrament.} \end{cases}$$

Per construcció, ψ és una aplicació K-quasiconforme. Envia el conjunt $F = \cup_j F_j$ al conjunt $\psi(F) = \cup_j \psi_j(F_j)$. A més, $\mathcal{H}^t(F)$ és σ-finita, mentre que

$$\dim(\phi(F)) = \sup_j \dim(\psi_j(F_j)) = t'.$$

Finalment, assumim que z viu dintre d'algun D_k fixat, i que $w \in \mathbb{D} \setminus \cup_j D_j$. Aleshores, considerem el segment L comprès entre z i w, i denotem $\{z_k\} = L \cap \partial D_k$. Tant z_k com w són punts fixos per a ψ, per la qual cosa

$$\begin{aligned} |\psi(z) - \psi(w)| &\leq |\psi(z) - \psi(z_k)| + |\psi(z_k) - \psi(w)| \\ &\leq C\, m_k^{\frac{1}{t} - \frac{1}{t'}}\, r_k^{1 - \frac{t}{t'}}\, |z - z_k|^{\frac{t}{t'}} + |z_k - w|. \end{aligned}$$

Podem escollir els discos D_j de manera que els radis r_j satisfacin la condició

$$m_k^{\frac{1}{t} - \frac{1}{t'}}\, r_k^{1 - \frac{t}{t'}} < 1$$

o, equivalentment, $m_j\, r_j^t < 1$. Sota aquesta restricció, finalment,

$$|\psi(z) - \psi(w)| \leq (C+1)\, |z - w|^{\frac{t}{t'}}$$

sempre que $|z - w| < 1$, i per tant $\psi \in \mathrm{Lip}_{t/t'}(\mathbb{C})$. ■

Tot i que el conjunt del Corol·lari 3.5 és més crític que el que hem construït a la Proposició 3.4, en el sentit que el primer dóna precisament distorsió extremal, tots dos conjunts condueixen a la mateixa conseqüència en termes de conjunts no evitables per a funcions quasiregulars i Hölder contínues.

Corol·lari 3.6.
Siguin $K \geq 1$ i $\alpha \in (0,1)$. Per a tot $t > 2\frac{1+\alpha K}{1+K}$ existeix un compacte E amb $0 < \mathcal{H}^t(E) < \infty$, no evitable per a les funcions K-quasiregulars de classe Lip_α.

Demostració. Siguin E i ϕ tals que $\dim \phi(E) \geq t' - \varepsilon > 1$ per algun ε prou petit. Aleshores, pel Lema de Frostman, existeix una mesura de Radon μ suportada a $\phi(E)$, amb creixement $t' - 2\varepsilon$. La seva transformada de Cauchy $g = \frac{1}{z} * \mu$ defineix una funció holomorfa a $\mathbb{C} \setminus \phi(E)$, no entera, amb una extensió Hölder contínua a tot el pla, d'exponent $t' - 2\varepsilon - 1$. Sigui

$$f = g \circ \phi.$$

Clarament f és K-quasiregular a $\mathbb{C} \setminus E$ i no admet cap extensió K-quasiregular a tot $\mathbb{C}$. Si fos així, aleshores g estendria analíticament, cosa que és impossible. A més, f és Hölder contínua d'exponent

$$(t' - 2\varepsilon - 1)\frac{t}{t'} = t - (2\varepsilon + 1)\frac{t}{t'}.$$

Així, només cal que $\varepsilon > 0$ sigui suficientment petit com per què

$$t - (2\varepsilon + 1)\frac{t}{t'} \geq \alpha$$

però aquesta desigualtat és equivalent a

$$\left(t - 2\frac{1 + \alpha K}{1 + K}\right) \geq \varepsilon \, \frac{2}{K+1} \, (2 + (K-1)t)$$

cosa que acaba la demostració. ■

En aquest punt, cal dir que per sobre de l'índex crític $2\frac{1+\alpha K}{1+K}$ hom pot trobar també conjunts evitables. Per exemple, degut a un resultat no publicat de S. Smirnov, sabem que si $E = \partial\mathbb{D}$ i ϕ és K-quasiconforme llavors

$$\dim(\phi(E)) \leq 1 + \left(\frac{K-1}{K+1}\right)^2$$

cosa que és millor que la cota habitual de distorsió de dimensió (1.12). Per això, si escollim $K \geq 1$ prou petit, llavors existeixen reals α que satisfan

$$K\left(\frac{K-1}{K+1}\right)^2 < \alpha < \frac{K-1}{2K}.$$

Per a aquests α, el conjunt $E = \partial\mathbb{D}$ és evitable per a les funcions K-quasiregulars de Lip_α, mentre que

$$2\frac{1+\alpha K}{1+K} < \dim(E).$$

Aquest fet suggereix que entre $2\frac{1+\alpha K}{1+K}$ i $1+\alpha$ tot és possible.

Problema 3.7.
Sigui $d = 2\frac{1+\alpha K}{1+K}$. Existeix algun compacte E de dimensió d, no evitable per a les funcions K-quasiregulars i α-Hölder contínues ?

Problema 3.8.
Existeix algun nombre real $d_0 = d_0(\alpha, K)$, $2\frac{1+\alpha K}{1+K} < d_0 < 1+\alpha$, tal que tot compacte E de dimensió $\dim(E) > d_0$ és no evitable per a les funcions K-quasiregulars α-Hölder contínues i, alhora, per a tot $t \in (2\frac{1+\alpha K}{1+K}, d_0)$ existeixin conjunts evitables i no evitables de dimensió t?

3.4 Resultats d'evitabilitat per a funcions de distorsió finita

Recordem que si $\Omega \subset \mathbb{C}$ és un domini, anomenem *funció de distorsió finita* a Ω a tota funció $f : \Omega \to \mathbb{C}$ de classe $W^{1,1}_{loc}(\Omega)$ amb jacobià localment integrable $J(\cdot, f) \in L^1_{loc}(\mathbb{C})$, i tal que existeix una funció mesurable $K_f : \Omega \to [1, \infty]$, finita quasi per tot punt, anomenada la *funció de distorsió* de f, per a la qual

$$|Df(z)|^2 \leq K_f(z)\, J(z, f)$$

quasi per tot $z \in \Omega$. Equivalentment, f satisfà una equació de Beltrami

$$\overline{\partial} f = \mu\, \partial f$$

amb coeficient μ tal que $|\mu(z)| < 1$ quasi per tot $z \in \Omega$. Per exemple, si $K_f \in L^\infty$ (és a dir, si $\|\mu\|_\infty < 1$), i $\|K_f\|_\infty = K$, llavors recuperem la classe de funcions K-quasiregulars. Ara bé, hipòtesis més febles sobre K_f també donen interessants classes de funcions. Com a primer cas particular, direm que una funció de distorsió finita té *distorsió expo-*

nencialment integrable si

$$\exp\left(K_f\right) \in L^p_{loc}(\mathbb{C})$$

per algun $p > 0$. En segon lloc, una funció de distorsió finita té *distorsió subexponencialment integrable* si

$$\exp\left(\frac{K_f}{1+\log K_f}\right) \in L^p_{loc}(\mathbb{C})$$

per algun $p > 0$. Una excel·lent referència introductòria a les funcions de distorsió finita es pot trobar al llibre de T. Iwaniec i G. Martin [30].

El problema d'evitabilitat també té sentit en aquestes classes de funcions. De fet, els conjunts evitables per a les funcions acotades de distorsió finita ja han estat estudiats (vegeu per exemple [7], [18], [26], [27] o [34]). Fins i tot es pot veure que els nostres arguments a la demostració del Teorema 3.2 serveixen igualment en el terreny de les funcions de distorsió finita. Per a fer-ho, primer hem de veure sota quines condicions algunes propietats bàsiques (com ara existència, unicitat o factorització de les solucions d'una determinada equació de Beltrami degenerada) són certes en aquest ambient més general. Els espais més naturals per a aquest tipus de resultats són els espais d'Orlicz-Sobolev $W^{1,P}_{loc}(\mathbb{C})$. Recordem que $f \in W^{1,P}(\Omega)$ si i només si tant f com les seves derivades distribucionals de primer ordre Df viuen a l'espai d'Orlicz usual $L^P(\Omega)$. En la majoria dels casos, treballarem amb funcions d'Orlicz $P = P(t)$ per a les quals

$$t \mapsto P(t^{5/8}) \text{ és una funció convexa} \tag{3.3}$$

i tals que

$$\int_1^\infty \frac{P(t)}{t^3}dt = \infty \tag{3.4}$$

Exemples de funcions d'Orlicz amb aquestes propietats són $P(t) = t^2$, que dóna $L^P = L^2$, així com també $P(t) = t^2 \log(e+t)$, per a la qual localment es satisfà $L^q \subset L^P \subset L^2$ per a tot $q > 2$. A més, sota aquestes hipòtesis podem trobar també espais més febles que L^2. Per exemple, $P(t) = \frac{t^2}{\log(e+t)}$ i $P(t) = \frac{t^2}{\log(e+t)\log\log(3+t)}$ són tals que $L^2 \subset L^P \subset L^q$ per a tot $q < 2$.

El proper exemple és d'un interès especial, ja que mostra que totes dues condicions (3.3) i (3.4) són, d'alguna manera, necessàries i suficients per al desenvolupament d'una teoria prou rica de funcions de distorsió finita.

Exemple 3.9.
Sigui f definida per $f(z) = z + \frac{z}{|z|}$ si $z \neq 0$, $f(0) = 0$. Aleshores, $f \in W^{1,1}_{loc}(\mathbb{C})$ amb

$$|Df(z)| = |\partial f(z)| + |\overline{\partial} f(z)| = 1 + \frac{1}{|z|}$$

El determinant jacobià $J(z,f) = \det(Df(z))$ es pot comptar explícitament

$$J(z,f) = |\partial f(z)|^2 - |\overline{\partial} f(z)|^2 = 1 + \frac{1}{|z|}$$

i clarament $J(\cdot, f) \in L^1_{loc}(\mathbb{C})$. Per tant, f satisfà una desigualtat de distorsió,

$$|Df(z)|^2 = K(z)\, J(z,f)$$

amb funció de distorsió $K(z) = 1 + \frac{1}{|z|}$. Tenim, llavors, que f és una funció de distorsió finita. Ara bé, $f \in W^{1,p}_{loc}(\mathbb{C})$ per a tot $p < 2$, però no per a $p = 2$. Més precisament,

$$f \in W^{1,P}_{loc}(\mathbb{C}) \Longleftrightarrow \int_1^\infty \frac{P(t)}{t^3} dt < \infty$$

Això significa que si P no satisfà la condició (3.4), llavors existeixen funcions de distorsió finita $f \in W^{1,P}_{loc}(\mathbb{C})$ que no són ni contínues.

Per explicar en poques paraules aquesta situació, hauriem de parlar sobre el que s'anomena jacobià distribucional [30, p.140]. Donada una aplicació $f = (f_1, f_2) : \Omega \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ de classe $W^{1,\frac{4}{3}}_{loc}(\Omega)$, se li pot associar una distribució $\mathcal{J}f$ definida per

$$\langle \mathcal{J}f, \varphi \rangle = -\int f_1\, d\varphi \wedge df_2$$

sobre funcions test $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$. Direm que f és una funció que preserva la orientació si $\mathcal{J}f$ és una distribució positiva. Resulta que si f preserva la orientació i és de classe $W^{1,P}$ per alguna P

que satisfaci (3.3) i (3.4), llavors

$$\langle \mathcal{J} f, \varphi \rangle = \int J(z,f)\, \varphi(z)\, dA(z),$$

és a dir, $\mathcal{J} f$ *coincideix amb el jacobià puntual* $J(z,f) = \det(Df(z))$*. Ara, només remarquem que per a la nostra aplicació* f *es té*

$$\langle \mathcal{J} f, \varphi \rangle = \int J(z,f)\, \varphi(z)\, dA(z) + \pi\, \varphi(0)$$

de manera que (3.4) és necessària per tal que $J(\cdot, f) = \mathcal{J} f$*.*

Una formulació precisa del que volem dir en l'exemple anterior es pot trobar a [30, Section 7.5]. Ho hem resumit al següent teorema. D'ara en endavant, totes les funcions d'Orlicz que apareguin compliran les condicions (3.3) and (3.4).

Teorema 3.10.
Suposem que $f : \Omega \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ *és de classe* $W^{1,P}_{loc}(\Omega)$*.*

- *Si* f *preserva la orientació, llavors* f *té jacobià localment integrable i* $J(\cdot, f) = \mathcal{J} f$*.*
- *Si* f *és una funció de distorsió finita, llavors* f *és contínua.*

El proper resultat (vegeu e.g. [30, Theorem 11.5.1]) estableix la factorització de Stoilow de les solucions de classe $W^{1,P}_{loc}$ de qualsevol equació de Beltrami amb coeficient tal que $|\mu| < 1$ quasi per tot arreu.

Teorema 3.11.
Sigui μ *suportada a* $\mathbb{D}$*, tal que* $|\mu(z)| < 1$ *per a quasi tot* $z \in \mathbb{D}$*. Si l'equació* $\overline{\partial}\phi = \mu\, \partial\phi$ *admet una solució* ϕ *homeomòrfica, de classe* $W^{1,P}_{loc}(\Omega)$*, aleshores qualsevol altra solució* f *de la mateixa classe* $W^{1,P}_{loc}(\Omega)$ *factoritza com* $f = h \circ \phi$ *amb* h *holomorfa sobre* $\phi(\Omega)$*.*

De fet, és precisament ara, quan busquem solucions homeomòrfiques a $W^{1,P}$, el moment en què cal demanar alguna condició d'integrabilitat a μ. Suposem, doncs, que $\mu : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ és una funció mesurable suportada a $\mathbb{D}$, tal que $|\mu(z)| < 1$ quasi per tot punt. Sigui $K(z) = \frac{1+|\mu(z)|}{1-|\mu(z)|}$. El següent resultat general d'existència es pot trobar a [30, Theorem 11.8.3].

Teorema 3.12.
Si $\exp(K) \in L^p_{loc}(\mathbb{D})$ *per algun* $p > 0$*, llavors l'equació*

$$\overline{\partial}\phi = \mu\, \partial\phi$$

admet una única solució homeomòrfica ϕ *tal que* $\phi(z) - z \in W^{1,P}(\mathbb{C})$*, amb* $P(t) = \frac{t^2}{\log(e+t)}$.

Els dos resultats anteriors asseguren que funcions de distorsió exponencialment integrable viuen, com a mínim, a $W^{1,P}_{loc}$ amb $P(t) = \frac{t^2}{\log(e+t)}$. Malgrat això, com en el cas quasiregular, hi ha una millora de regularitat donada en termes de les propietats de la funció de distorsió. Les cotes precises per a aquesta automillora venen donades al proper teorema, degut a D. Faraco, P. Koskela i X. Zhong [18].

Teorema 3.13.
Existeix una constant $c_0 > 0$ *amb la següent propietat. Assumim que* $f : \Omega \to \mathbb{C}$ *és una funció de distorsió finita, amb funció de distorsió* K *tal que*

$$\exp(K) \in L^p_{loc}(\Omega)$$

per algun $p > 0$*. Aleshores,* $f \in W^{1,P}_{loc}(\Omega)$ *amb* $P(t) = t^2 \log^{c_0 p - 1}(e + t)$.

En particular, funcions de distorsió exponencialment integrable tenen derivades localment a L^2, sempre que la seva funció de distorsió K satisfaci $\exp(K) \in L^p_{loc}$ per a p prou gran (és a dir, $p > \frac{1}{c_0}$). Més en general, amb distorsió subexponencialment integrable és sabut [30, p.267] que la corresponent equació de Beltrami té una única solució homeomòrfica ϕ tal que $\phi(z) - z \in W^{1,P}(\mathbb{C})$ amb $P(t) = \frac{t^2}{\log(e+t)\log\log(3+t)}$.

Teorema 3.14.
Sigui $\alpha \in (0, 1)$*. Sigui* $E \subset \mathbb{D}$ *un compacte. Suposem que* $f \in \mathrm{Lip}_\alpha(\mathbb{C})$ *és una funció de distorsió finita a* $\mathbb{C} \setminus E$*. Si la funció de distorsió* $K = K_f$ *és subexponencialment integrable, i* $\dim(E) < 2\alpha$*, llavors* f *és una funció de distorsió finita a tot* $\mathbb{C}$.

Demostració. Sota les condicions del teorema, existeix una solució homeomòrfica ϕ a la corresponent equació de Beltrami, amb $\phi \in W^{1,q}_{loc}(\mathbb{C})$ per a tot $q < 2$. Per tant, $F =$

$f \circ \phi^{-1}$ és analítica a $\mathbb{C} \setminus E$. Provarem que

$$\langle \overline{\partial} F, \varphi \rangle = 0$$

sempre que $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{C})$. Sigui $d \in (\dim(E), 2\alpha)$. Per a cada $\varepsilon > 0$ podem considerar una família finita de discos $D_j = D(z_j, r_j)$ tals que $\Omega = \bigcup_j D_j$ recobreix E i

$$\sum_{j=1}^{n} \operatorname{diam}(D_j)^d \leq \varepsilon.$$

Com a la demostració del Teorema 3.2, sigui ψ_j una partició de la unitat subordinada al recobriment D_j, és a dir, cada ψ_j és una funció de classe $\mathcal{C}^\infty$ amb suport compacte inclòs a $2D_j$, $|D\psi_j| \leq \frac{C}{\operatorname{diam}(D_j)}$, i $\sum_{j=1}^n \psi_j = 1$ sobre Ω. Definim $\varphi_j = \psi_j \circ \phi^{-1}$. S. Hencl i P. Koskela [24, Theorem 1.1] demostren que si g és un homeomorfisme de classe $W^{1,1}_{loc}(\mathbb{C})$ que preserva la orientació, aleshores $g^{-1} \in W^{1,1}_{loc}(\mathbb{C})$ i

$$\int_{g(D)} |Dg^{-1}(y)| dA(y) \leq \int_D |Dg(x)| dA(x)$$

per a tot obert acotat $D \subset \mathbb{C}$. A més, [24, Theorem 1.3] si g és de distorsió finita a D, llavors $g^{-1} \in W^{1,2}_{loc}(g(D))$ i g^{-1} també és de distorsió finita. Com a conseqüència, φ_j són de classe $W^{1,2}(\mathbb{C})$, tenen suport compacte dins de $\phi(2D_j)$, i $\sum_{j=1}^n \varphi_j = 1$ sobre $\phi(\Omega)$. Per a qualssevol constants c_j i tota funció test φ,

$$\langle \overline{\partial} F, \varphi \rangle = -\sum_{j=1}^{n} \langle (F - c_j), \overline{\partial} \varphi \, \varphi_j \rangle - \sum_{j=1}^{n} \langle (F - c_j), \varphi \, \overline{\partial} \varphi_j \rangle = I + II \tag{3.5}$$

i ara només cal acotar els dos termes independentment. Per la suma I, després d'un canvi de variable, la condició $\operatorname{Lip}_\alpha$ per a f i la condició de doblament del jacobià $J(\cdot, \phi)$, tenim

$$\begin{aligned}
\left| \sum_{j=1}^{n} \langle (F - c_j), \overline{\partial} \varphi \, \varphi_j \rangle \right| &\lesssim \|D\varphi\|_\infty \sum_{j=1}^{n} \left(\int_{2D_j} J(w, \phi) dA(w) \right) \operatorname{diam}(2D_j)^\alpha \\
&\lesssim \|D\varphi\|_\infty \sum_{j=1}^{n} \left(\int_{D_j} J(w, \phi) dA(w) \right) \operatorname{diam}(D_j)^\alpha.
\end{aligned}$$

Per tant,

$$\begin{aligned}|I| &\leq |D\varphi\|_\infty \left(\sum_{j=1}^n \left(\int_{D_j} J(w,\phi)dA(w)\right)^{\frac{2}{2-\alpha}}\right)^{\frac{2-\alpha}{2}} \left(\sum_{j=1}^n \operatorname{diam}(D_j)^2\right)^{\alpha/2} \\ &\leq \|D\varphi\|_\infty \left(\sum_{j=1}^n \int_{D_j} J(w,\phi)dA(w)\right) \left(\sum_{j=1}^n \operatorname{diam}(D_j)^2\right)^{\alpha/2}\end{aligned}$$

i clarament tots dos factors convergeixen a 0 si $\varepsilon \to 0$. Pel què fa a II, com que φ_j són de classe $W^{1,2}(\mathbb{C})$, té sentit usar la regla de la cadena i obtenir

$$|D\varphi_j(z)| \leq |D\psi_j(\phi^{-1}(z)|\,|D\phi^{-1}(z)|.$$

En conseqüència,

$$\begin{aligned}\left|\sum_{j=1}^n \langle (F-c_j), \varphi\,\overline{\partial}\varphi_j\rangle\right| &\leq \|\varphi\|_\infty \sum_{j=1}^n \int_{\phi(2D_j)} |F(z)-c_j|\,|D\psi_j(\phi^{-1}(z))|\,|D\phi^{-1}(z)|dA(z) \\ &\leq \|\varphi\|_\infty \sum_{j=1}^n \int_{2D_j} |f(w)-c_j|\,|D\psi_j(w)|\,|D\phi^{-1}(\phi(w))|\,J(w,\phi)\,dA(w) \\ &\lesssim \|\varphi\|_\infty \sum_{j=1}^n \left(\int_{2D_j} |D\phi^{-1}(\phi(w))|\,J(w,\phi)\,dA(w)\right) \operatorname{diam}(2D_j)^{\alpha-1}.\end{aligned}$$

Ara, després d'un canvi de variable, tornem a utilitzar [24, Theorem 1.1] per obtenir

$$\begin{aligned}\int_{2D_j} |D\phi^{-1}(\phi(w))|\,J(w,\phi)\,dA(w) &= \int_{\phi(2D_j)} |D\phi^{-1}(z)|\,dA(z) \leq \int_{2D_j} |D\phi(w)|\,dA(w) \\ &\lesssim \int_{D_j} |D\phi(w)|\,dA(w) \leq \left(\int_{D_j} |D\phi(w)|^p\,dA(w)\right)^{\frac{1}{p}} |D_j|^{\frac{1}{q}},\end{aligned}$$

on p, q és qualsevol parell dual, $1 < p < 2$. Obtenim la següent estimació per a II,

$$|II| \leq \|\varphi\|_\infty \left(\sum_{j=1}^n \int_{D_j} |D\phi(w)|^p\,dA(w)\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{j=1}^n \operatorname{diam}(D_j)^{q(\alpha-1)+2}\right)^{\frac{1}{q}}.$$

Ara, sigui $p \in (1,2)$ tal que $q(\alpha-1)+2=d$. Les dues sumes convergeixen a 0 si $\varepsilon \to 0$. ■

Una lleugera modificació de l'argument serveix per a provar el següent resultat.

Teorema 3.15.
Sigui $\alpha \in (0,1)$, i sigui $E \subset \mathbb{D}$ un compacte, tal que $\mathcal{H}^{2\alpha}(E)$ és finita. Si la funció de distorsió K admet una solució homeomòrfica a $W^{1,2}_{loc}(\mathbb{C})$, llavors E és evitable per a les funcions de distorsió finita K, α-Hölder contínues.

Entre les funcions de distorsió K que es troben en les hipòtesis del teorema anterior, tenim aquelles que satisfan

$$\exp(K) \in L^p_{loc}(\mathbb{C})$$

per algun $p > \frac{1}{c_0}$. Aquí c_0 és la constant del Teorema 3.13. A més, per a aquestes funcions de distorsió, $D\phi \in L^P_{loc}(\mathbb{C})$ amb $P(t) = t^2 \log^{c_0 p-1}(e+t)$. Malgrat això, $W^{1,P}_{loc}(\mathbb{C})$ és millor (més petit) que $W^{1,2}_{loc}(\mathbb{C})$, sempre que $p > \frac{1}{c_0}$. Per això, una funció de conjunt millor que $\mathcal{H}^{2\alpha}$ pot ser obtinguda per a aquesta classe. A la pràctica, $L^2\log^s L$ admet una desigualtat de Hölder quan actua contra $\frac{L^2}{\log^s L}$, és a dir,

$$\|gh\|_{L^1} \leq C\,\|g\|_{L^2\log^s L}\,\|h\|_{\frac{L^2}{\log^s L}}$$

Si ara $h = \chi_D$ és la funció característica d'un disc D, aleshores $\|h\|_{\frac{L^2}{\log^s L}}$ pot calcular-se explícitament, com a mínim per a valors petits de $|D|$, i llavors

$$\int_D |g|\,dA \lesssim \left(\int_D |g|^2 \log^s\left(e+\frac{|g|}{|g|_D}\right) dA\right)^{\frac{1}{2}} \frac{|D|^{\frac{1}{2}}}{\log^{\frac{s}{2}}\frac{1}{|D|}}$$

per a tot $s>0$. A més a més, si D_j és una família quasidisjunta de discos, un argument semblant al de [7, Lema 5.1] mostra que

$$\sum_j \int_{D_j} |g|^2 \log^s\left(e+\frac{|g|}{|g|_{D_j}}\right) dA \leq C_s \int_{\cup_j D_j} |g|^2 \log^s\left(e+\frac{|g|}{|g|_{\cup_j D_j}}\right)$$

sempre que g és una funció no negativa per a la qual

$$\frac{1}{|D|}\int g^2\,dA \simeq \left(\frac{1}{|D|}\int g\,dA\right)^{\frac{1}{2}}$$

per a tot disc D. En realitat, així és si $g = |D\phi|$, de manera que podem procedir com a la demostració anterior, i si prenem $s = c_0 p - 1$ aleshores obtenim

$$\begin{aligned}
II &\leq C\,\|\varphi\|_\infty \sum_{j=1}^{n}\left(\int_{2D_j}|D\phi(z)|\,dA(z)\right)\,\mathrm{diam}(2D_j)^{\alpha-1}\\
&\leq C\,\|\varphi\|_\infty \sum_{j=1}^{n}\left(\int_{2D_j}|D\phi(z)|^2\,\log^s\left(e+\frac{|D\phi(z)|}{|D\phi(z)|_{2D_j}}\right)dA(z)\right)^{1/2}\frac{\mathrm{diam}(2D_j)^{\alpha}}{\log^{\frac{s}{2}}\left(\frac{1}{\mathrm{diam}(2D_j)}\right)}\\
&\lesssim C\,\|\varphi\|_\infty \left(\int_{\cup_j 2D_j}|D\phi(z)|^2\,\log^s\left(e+\frac{|D\phi(z)|}{|D\phi(z)|_{\cup_j 2D_j}}\right)dA(z)\right)^{\frac{1}{2}}\left(\sum_{j=1}^{n}h(\mathrm{diam}(2D_j))\right)^{\frac{1}{2}}
\end{aligned}$$

on $h(r) = \frac{r^{2\alpha}}{\log^s\frac{1}{r}}$. En altres paraules, $\mathcal{H}^h(E)$ finita és una condició suficient per tal que E sigui evitable per a les funcions Lip_α amb distorsió finita i funció de distorsió K tal que $\exp(K) \in L^p$ per algun $p > \frac{1}{c_0}$.

En la direcció contrària, podem trobar fàcilment conjunts no evitables usant els resultats que sabem del cas quasiregular.

Corol·lari 3.16.
Sigui $\alpha \in (0,1)$. Per a tot $t > 2\alpha$ existeix un compacte E de dimensió t i una funció $f \in \mathrm{Lip}_\alpha(\mathbb{C})$, de distorsió finita a $\mathbb{C}\setminus E$ i amb funció de distorsió exponencialment integrable, i que no admet cap extensió de distorsió finita a tot $\mathbb{C}$.

Demostració. Si $t > 2\alpha$, aleshores existeix $K \geq 1$ tal que $t > 2\frac{1+\alpha K}{1+K}$. Pel Corol·lari 3.6 podem trobar un conjunt E de dimensió t, i una funció $\mathrm{Lip}_\alpha(\mathbb{C})$ f, K-quasiregular a $\mathbb{C}\setminus E$ i no a tot $\mathbb{C}$. Naturalment, f és una funció de distorsió finita a $\mathbb{C}\setminus E$, amb distorsió K_f essencialment acotada per K i, per tant, exponencialment integrable. Si f admetés alguna extensió de distorsió finita a tot $\mathbb{C}$, en particular tindriem $Jf \in L^1_{loc}(\mathbb{C})$. Però llavors f estendria K-quasiregularment. ■

4 Equacions de Beltrami amb coeficient a l'espai de Sobolev $W^{1,2}$

4.1 Introducció

Diem que un compacte E és *evitable per a les funcions μ-quasiregulars acotades* si tota funció acotada f, μ-quasiregular a $\mathbb{C} \setminus E$, és en realitat constant. Naturalment, això també té sentit si reemplacem L^∞ per BMO, VMO o Lip_α. En aquest capítol, volem caracteritzar mètricament i geomètricament aquests conjunts.

Com ja sabem, la manera com les aplicacions μ-quasiconformes distorsionen els conjunts està relacionada a alguns problemes d'evitabilitat. Per tant primer necessitem alguna informació sobre distorsió μ-quasiconforme. Per descomptat, tenim les cotes sobre distorsió de dimensió d'Astala [4], que també serveixen per a aplicacions K-quasiconformes,

$$\dim(\phi(E)) \leq \frac{2K \dim(E)}{2 + (K-1)\dim(E)}.$$

Amb tot, aquestes cotes depenen només de la norma L^∞ de μ, i no reflecteixen cap regularitat ni del coeficient Beltrami, ni del mateix homeomorfisme ϕ. Per exemple, si el coeficient de Beltrami μ és de classe VMO, aleshores totes les aplicacions μ-quasiconformes ϕ tenen derivades distribucionals a L^p_{loc} per tot $p \in (1, \infty)$ (vegeu per exemple [8], [25] o [23]). D'aquí, $\phi \in \mathrm{Lip}_\alpha$ per tot $\alpha \in (0,1)$, i com a conseqüència,

$$\dim(\phi(E)) \leq \dim(E)$$

que és clarament una cota més precisa. De fet, per a aquests coeficients μ en realitat tenim $\dim(\phi(E)) = \dim(E)$.

Per diverses raons, la hipòtesi $\mu \in VMO$ no és suficient per als nostres objectius. Per entendre això, recordem primer que si $\mu = 0$ llavors tenim el Lema de Weyl (Teorema 1.1), que assegura que si f és una distribució tal que

$$\langle \overline{\partial} f, \varphi \rangle = 0$$

per a tota funció test $\varphi \in \mathcal{D}$, aleshores f coincideix quasi per tot arreu amb una funció analítica. En altres paraules, solucions *distribucionals* de l'equació de Cauchy-Riemann són en realitat solucions *fortes*. Si intentem traslladar aquest tipus de resultats a l'equació de Beltrami, primer cal definir la distribució $(\overline{\partial} - \mu\,\partial)f = \overline{\partial} f - \mu\,\partial f$. En general, aquesta expressió pot no tenir sentit, donat que les funcions acotades no sempre són multiplicadors de $\mathcal{D}'$. Ara bé, si el multiplicador és una mica *regular* i el domini de la distribució no es redueix a $\mathcal{D}$, aleshores alguna cosa podem dir. En concret, definim

$$\langle (\overline{\partial} - \mu\,\partial)f, \varphi \rangle = -\langle f, \overline{\partial}\varphi \rangle + \langle f, \partial\mu\,\varphi \rangle + \langle f, \mu\,\partial\varphi \rangle$$

quan tots els termes tinguin sentit. Per exemple, aquest és el cas si $f \in L^p_{loc}$ i $\mu \in W^{1,q}_{loc}$, $pq = p + q$. Anomenem a $\overline{\partial} f - \mu\,\partial f$ *derivada distribucional de Beltrami* de f, i diem que una funció $f \in L^p$ és *distribucionalment μ-quasiregular* precisament quan $(\overline{\partial} - \mu\,\partial)f = 0$ en el sentit de les distribucions. Naturalment, a priori aquestes funcions f podrien no ser quasiregulars, donat que no és clar si l'equació distribucional implica $f \in W^{1,2}_{loc}$. És natural, doncs, preguntar quan això és cert. Al Teorema 4.5, provem que si μ és de classe $W^{1,2}$ aleshores les solucions distribucionals són solucions fortes.

Teorema.
Sigui $f \in L^p_{loc}(\Omega)$ per algun $p > 2$. Suposem que

$$\langle (\overline{\partial} - \mu\,\partial)f, \varphi \rangle = 0$$

per a tot $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$. Aleshores, $f \in W^{1,2}_{loc}(\Omega)$.

Cal remarcar que aquesta automillora de regularitat és fins i tot més forta, degut al teorema de factorització de funcions μ-quasiregulars, així com també a les propietats d'integrabilitat de la solució principal d'una equació de Beltrami amb coeficient *regular*. Més precisament, si $\mu \in W^{1,2}$ té suport compacte, es pot veure que totes les funcions μ-quasiconformes són de classe $W^{2,q}_{loc}$ per a tot $q < 2$. Per tant, tota solució distribucional $L^{2+\varepsilon}_{loc}$ de la corresponent equació de Beltrami és, en realitat, de classe $W^{2,q}_{loc}$ per tot $q < 2$. Sabem, a més, que aquesta regularitat és òptima.

Hom pot utilitzar aquesta automillora per donar resultats d'evitabilitat i estudiar problemes de distorsió μ-quasiconforme quan $\mu \in W^{1,2}$. Les conclusions a què hem arribat ens encoratgen a pensar que l'equació de Beltrami amb coeficient a $W^{1,2}$ no és tant lluny de l'equació de Cauchy-Riemann. Per exemple, demostrem que si E és compacte, llavors E és evitable per a les funcions μ-quasiregulars i de BMO si i només si $\mathcal{H}^1(E) = 0$. Precisament això és el que passa també quan $\mu = 0$ [31]. Més encara, E és evitable per a les funcions μ-quasiregulars i de VMO si i només si $\mathcal{H}^1(E)$ és σ-finita, altre cop com en el cas analític [54]. Tots dos resultats es poden establir en termes de distorsió μ-quasiconforme. En aquest sentit, obtenim que $\mathcal{H}^1(E) = 0$ si i només si $\mathcal{H}^1(\phi(E)) = 0$, i $\mathcal{H}^1(E)$ és σ-finita si i només si $\mathcal{H}^1(\phi(E))$ també ho és.

La distorsió μ-quasiconforme de la capacitat analítica és quelcom més difícil, donat que l'estructura rectificable dels conjunts juga un paper important. Al Lema 4.14 veurem que si $\mu \in W^{1,2}$ té suport compacte, llavors ϕ envia conjunts rectificables a conjunts rectificables. Així, conjunts purament no rectificables van a purament no rectificables. Amb això i el Teorema de David [15] obtenim el següent resultat.

Teorema.
Sigui $\mu \in W^{1,2}$ un coeficient de Beltrami de suport compacte, i sigui ϕ μ-quasiconforme. Si E té longitud σ-finita,

$$\gamma(E) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \gamma(\phi(E)) = 0.$$

En particular, existeixen aplicacions μ-quasiconformes ϕ, no necessàriament bilipschitz, que preserven els conjunts de capacitat analítica zero amb longitud σ-finita.

Aquest capítol està estructurat així. A la Secció 2 estudiem la regularitat de les funcions μ-quasiregulars. A la Secció 3 considerem l'equació de Beltrami a nivell distribucional. A la Secció 4, estudiem els problemes d'evitabilitat BMO, VMO i Lip_α, i deduïm teoremes de distorsió per a $\mathcal{H}^1$. A la Secció 5 estudiem la distorsió μ-quasiconforme de conjunts rectificables, i el problema d'evitabilitat L^∞.

4.2 Regularitat de les aplicacions μ-quasiconformes

És ben sabut (vegeu per exemple [11]) que tota funció K-quasiregular f exhibeix més regularitat que la usual $W^{1,2}_{loc}$ exigida a la definició. Més precisament, $Df \in L^{\frac{2K}{K-1},\infty}$ [4], i aquest exponent és òptim. Si a més de K, ens fixem en la regularitat del coeficient de Beltrami, això es pot millorar. Un bon exemple d'això són els coeficients de Beltrami de classe Lip_α. En aquest cas, la solució principal ϕ (i per tant tota funció μ-quasiregular) té derivades de primer ordre també de classe Lip_α. En particular, és localment bilipschitz. Un altra situació es dóna quan $\mu \in VMO$ [25], en què ϕ té derivades de primer ordre a $L^p_{loc}(\mathbb{C})$ per a tot $p \in (1,\infty)$. Quelcom més precís es pot dir si assumim regularitat de Sobolev per al coeficient de Beltrami.

Proposició 4.1.
Sigui $\mu \in W^{1,2}$ un coeficient de Beltrami amb suport compacte, i sigui ϕ μ-quasiconforme. Aleshores $\phi \in W^{2,q}_{loc}(\mathbb{C})$ per a tot $q < 2$.

Demostració. No és restrictiu suposar que μ té suport dins de $\mathbb{D}$. Seguim les idees de Faraco i Zhong [19]. Sigui $\psi \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{C})$, $0 \leq \psi \leq 1$, suportada a $\mathbb{D}$, i siguin

$$\mu_n(z) = \int n^2\, \psi(nw)\, \mu(z-w)\, dA(w)$$

Aleshores μ_n és de classe $\mathcal{C}^\infty$, té suport compacte dins de $2\mathbb{D}$, $\|\mu_n\|_\infty \leq \|\mu\|_\infty$ i $\mu_n \to \mu$ a $W^{1,2}(\mathbb{C})$ quan $n \to \infty$. Com al Lema 3.1, les corresponents solucions principals ϕ_n i ϕ poden representar-se com a $\phi(z) = z + \tilde{C}h(z)$ i $\phi_n(z) = z + \tilde{C}h_n(z)$, a on h, h_n estan definides, respectivament, per $h = \mu Bh + \mu$ i $h_n = \mu_n Bh_n + \mu_n$.

Notem primer que $\mu_n, \mu \in VMO$. Així, els operadors $I - \mu_n B$ i $I - \mu B$ són invertibles a $L^p(\mathbb{C})$ per a tot $p \in (1, \infty)$ (vegeu Iwaniec [25]). Ara bé, el conjunt d'operadors acotats $L^p(\mathbb{C}) \to L^p(\mathbb{C})$ defineix una àlgebra de Banach, dins de la qual els operadors invertibles són un obert i, a més, la inversió és contínua. Així, i donat que

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} \|(I - \mu_n B) - (I - \mu B)\|_{L^p \to L^p} &= \lim_{n\to\infty} \|(\mu_n - \mu)B\|_{L^p\to L^p} \\ &\leq \|B\|_{L^p\to L^p} \lim_{n\to\infty} \|\mu_n - \mu\|_p = 0\end{aligned}$$

obtenim

$$\lim_{n\to\infty} \|(I - \mu_n B)^{-1}\|_{L^p\to L^p} = \|(I - \mu B)^{-1}\|_{L^p\to L^p}.$$

Com a conseqüència, $h_n \to h$ a $L^p(\mathbb{C})$, per a tot $p \in (1, \infty)$ i per tant, $\phi_n \to \phi$ a $W^{1,p}_{loc}(\mathbb{C})$ per a tot $p \in (1, \infty)$. D'altra banda, cada ϕ_n és un difeomorfisme $\mathcal{C}^\infty$, conforme fora de $2\mathbb{D}$. Si derivem l'equació $\overline{\partial}\phi_n = \mu_n\, \partial\phi_n$, obtenim

$$(\overline{\partial} - \mu_n\, \partial)(\partial\phi_n) = \partial\mu_n\, \partial\phi_n.$$

Però $B(\overline{\partial}\varphi) = \partial\varphi$ si φ és prou regular, de manera que

$$(I - \mu_n B)(\overline{\partial}\partial\phi_n) = \partial\mu_n\, \partial\phi_n$$

Fixem $q \in (1, 2)$ qualsevol. Com que μ_n té suport compacte, el producte $\partial\mu_n\, \partial\phi_n$ és una funció de $L^q(\mathbb{C})$ de manera que $\overline{\partial}\partial\phi_n = (I - \mu_n B)^{-1}(\partial\mu_n\, \partial\phi_n)$. Conseqüentment,

$$\|\overline{\partial}\partial\phi_n\|_q \leq \|(I - \mu_n B)^{-1}\|_{L^q\to L^q}\, \|\partial\mu_n\, \partial\phi_n\|_q.$$

Si n és prou gran, aleshores $\|(I - \mu_n B)^{-1}\|_{L^q\to L^q} \leq 2\, \|(I - \mu B)^{-1}\|_{L^q\to L^q}$. Pel que fa a l'altre factor,

$$\left(\int_{2\mathbb{D}} |\partial\mu_n(z)\, \partial\phi_n(z)|^q\, dA(z)\right)^{\frac{1}{q}} \leq \left(\int_{2\mathbb{D}} |\partial\mu(z)|^2 dA(z)\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{2\mathbb{D}} |\partial\phi_n(z)|^{\frac{2q}{2-q}}\right)^{\frac{2-q}{2q}}$$

De la convergència en $L^{\frac{2q}{2-q}}_{loc}(\mathbb{C})$ de $\partial\phi_n$ obtenim que $(\overline{\partial}\partial\phi_n)_n$ és uniformement acotada a

L^q, per a tot $q \in (1,2)$. Prenent una parcial, si és necessari, deduïm que ϕ_n convergeix en $W^{2,q}_{loc}(\mathbb{C})$ per a tot $1 < q < 2$ i, òbviament, el límit és ϕ. Així, $\Delta\phi = c\,\overline{\partial}\partial\phi \in L^q(\mathbb{C})$ i per això $\phi \in W^{2,q}_{loc}(\mathbb{C})$. ■

Filosòficament, donat un coeficient de Beltrami $\mu \in W^{1,2}$ amb suport compacte, aleshores hom pot derivar directament l'equació de Beltrami, en el sentit de les distribucions,

$$\overline{\partial}(\partial\phi) - \mu\,\partial(\partial\phi) = \partial\mu\,\partial\phi$$

Ara podriem tenir la temptació de reescriure aquesta igualtat com

$$(I - \mu B)(\overline{\partial}\partial\phi) = \partial\mu\,\partial\phi$$

i fer servir la invertibilitat de l'operador $I - \mu B$ per arribar a la conclusió desitjada. Desafortunadament, a priori no sabem si $B(\overline{\partial}\partial\phi) = \partial\partial\phi$. No està clar ni tan sols que $\overline{\partial}\partial\phi$ sigui una funció. Per aquest motiu, ens veiem obligats a regularitzar l'equació.

L'optimalitat del resultat anterior es pot establir com a conseqüència del següent exemple.

Exemple 4.2.
La funció

$$\phi(z) = z\,(1 - \log|z|)$$

és μ-quasiconforme a un entorn de l'origen, amb coeficient de Beltrami

$$\mu(z) = \frac{z}{\overline{z}}\,\frac{1}{2\log|z| - 1}$$

En particular, tenim $\mu \in W^{1,2}$ en un entorn de l'origen i per tant $\phi \in W^{2,q}_{loc}$ per a tot $q < 2$. En canvi, $|D^2\phi(z)| \simeq \frac{1}{|z|}$ per la qual cosa $\phi \notin W^{2,2}_{loc}$.

Per a estudiar resultats de distorsió, necessitem conèixer la regularitat de la inversa d'una aplicació μ-quasinconforme.

Proposició 4.3.
Sigui $\mu \in W^{1,2}$ un coeficient de Beltrami amb suport compacte, i ϕ una aplicació μ-quasiconforme. Aleshores, ϕ^{-1} és $\tilde{\mu}$-quasiconforme, amb

$$\tilde{\mu}(\phi(z)) = -\mu(z)\,\frac{\partial\phi}{\overline{\partial\phi}}(z)$$

En particular, $\mu \in W^{1,2}$, $\|\tilde{\mu}\|_\infty = \|\mu\|_\infty$ i $\|D\tilde{\mu}\|_2 \leq C_K\,\|D\mu\|_2$.

Demostració. Un càlcul directe demostra que

$$\tilde{\mu}(z) = \frac{\overline{\partial}\phi^{-1}(z)}{\partial\phi^{-1}(z)} = -\left(\mu\,\frac{\partial\phi}{\overline{\partial\phi}}\right)(\phi^{-1}(z))$$

D'altra banda, si $\mu \in W^{1,2}$ llavors es pot escriure $\partial\phi = e^{\lambda}$, a on $\lambda = \log(\partial\phi)$ és tal que $\overline{\partial}\lambda = (I-\mu B)^{-1}(\partial\mu)$. En particular, $D\lambda \in L^2(\mathbb{C})$ i $\|D\lambda\|_2 \leq \frac{2\|\partial\mu\|_2}{1-\|\mu\|_\infty}$. Així, en termes de λ, $\tilde{\mu}\circ\phi = -\mu\, e^{2i\,\mathrm{Im}(\lambda)}$. Si ara derivem, obtenim

$$|D(\tilde{\mu}\circ\phi)| \leq |D\mu| + 2\,|\mu|\,|D(\mathrm{Im}(\lambda))|.$$

d'on $\|D(\tilde{\mu}\circ\phi)\|_2 \leq C\,\frac{\|D\mu\|_2}{1-\|\mu\|_\infty}$. Finalment, com que l'espai de Sobolev homogeni $\dot{W}^{1,2}(\mathbb{C})$ és quasiconformement invariant (vegeu equació (2.10)), tenim que $\|D\tilde{\mu}\|_2 \leq C_K\,\|D\mu\|_2$. ∎

Com a conseqüència, per a coeficients de Beltrami $\mu \in W^{1,2}$ amb suport compacte, tant ϕ com ϕ^{-1} són funcions de classe $W^{2,q}_{loc}$ per tot $q < 2$ i, per tant, $\phi, \phi^{-1} \in \mathrm{Lip}_\alpha$ per a tot $\alpha \in (0,1)$ (observem que això ja era cert sota la hipòtesi menys restrictiva $\mu \in VMO$). En conseqüència,

$$\dim(\phi(E)) = \dim(E) \tag{4.1}$$

Si combinem aquesta identitat amb la factorització de Stoilow, obtenim que els conjunts E de dimensió $\dim(E) < 1$ són evitables per a les funcions μ-quasiregulars i acotades (o de BMO). Efectivament, això es deu a l'equació (4.1) i a la invariància quasiconforme dels espais L^∞ i BMO. Més encara, si $f \in \mathrm{Lip}_\alpha$ per a cert $\alpha \in (0,1)$, tot i que en general és fals que $f \circ \phi \in \mathrm{Lip}_\alpha$, sí que podem dir que $f \circ \phi \in \mathrm{Lip}\,\beta$ per a tot $\beta < \alpha$. Per això, els conjunts de dimensió $\dim(E) < 1 + \alpha$ són evitables per a les funcions μ-quasiregulars i de Lip_α. Recordem que per a μ qualsevol tal que $\|\mu\|_\infty \leq \frac{K-1}{K+1}$, la dimensió crítica del problema d'evitabilitat per a funcions μ-quasiregulars i acotades (o BMO) és $\frac{2}{K+1}$ ([4], [5]), mentre que en el problema Lip_α és $\frac{2}{K+1}(1 + \alpha K)$ [13]. El que estem dient és que, en alguns problemes d'evitabilitat, l'equació $\overline{\partial} f - \mu\, \partial f = 0$ ($\mu \in W^{1,2}$ amb suport compacte) té la mateixa dimensió crítica que l'equació de Cauchy-Riemann $\overline{\partial} f = 0$. D'altra banda, ens podem preguntar si la identitat (4.1) es traslladа al nivell de mesures de Hausdorff. Aquesta qüestió serà tractada a les Seccions 4.4 i 4.5.

4.3 L'equació de Beltrami distribucional

Un fet important a la teoria de les aplicacions quasiconformes és l'automillora de regularitat. És sabut que les funcions feblement K-quasiregulars de classe $W^{1,\frac{2K}{K+1}}_{loc}$ són en realitat K-quasiregulars. Aquesta millora és fins i tot més evident si $K = 1$, donat que en aquest cas no és necessària cap mena de regularitat Sobolev com a punt de partida. El clàssic Lema de Weyl (Lema 1.1) estableix que si f és una distribució tal que

$$\langle \overline{\partial} f, \varphi \rangle = 0$$

per a tota funció test $\varphi \in \mathcal{D}$, aleshores f coincideix quasi per tot arreu amb una funció holomorfa. El nostre proper objectiu consisteix en deduir una extensió d'aquest resultat per a l'operador de Beltrami, amb alguna hipòtesi de regularitat sobre el seu coeficient.

Suposem que μ és un coeficient de Beltrami de suport compacte, tal que $\mu \in W^{1,2}$. Sigui $f \in L^p_{loc}$ per algun $p \in (2, \infty)$. Podem definir un funcional lineal

$$\langle \overline{\partial} f - \mu\, \partial f, \varphi \rangle = -\langle f, (\overline{\partial} - \partial \mu) \varphi \rangle = -\langle f, \overline{\partial} \varphi \rangle + \langle f, \partial(\mu\, \varphi) \rangle$$

per a tota funció $\varphi \in \mathcal{D}$. Clarament, $\overline{\partial} f - \mu\, \partial f$ defineix una distribució, que anomenarem la *derivada distribucional de Beltrami* de f.

Una funció $f \in L^p_{loc}$ és *distribucionalment μ-quasiregular* si la seva derivada distribucional de Beltrami és la distribució 0, és a dir, per a tota funció test $\varphi \in \mathcal{D}$,

$$\langle \bar{\partial} f - \mu\, \partial f, \varphi \rangle = 0.$$

Tot seguit, provem que φ es pot prendre dins d'una classe més gran.

Lema 4.4.
Siguin $p > 2$, $f \in L^p_{loc}$ i $q = \frac{p}{p-1}$, i sigui $\mu \in W^{1,2}$ un coeficient de Beltrami amb suport compacte. Si

$$\langle \bar{\partial} f - \mu\, \partial f, \varphi \rangle = 0 \tag{4.2}$$

per a tota $\varphi \in \mathcal{D}$, llavors (4.2) també és cert per a tota $\varphi \in W^{1,q}_0$.

Demostració. Si $\mu \in W^{1,2}$ té suport compacte, i $f \in L^p_{loc}$ per algun $p > 2$, aleshores la distribució $\bar{\partial} f - \mu\, \partial f$ actua contínuament a $W^{1,q}_0$, donat que

$$\begin{aligned}
|\langle \bar{\partial} f - \mu\, \partial f, \varphi \rangle| &\leq |\langle f, \bar{\partial}\varphi \rangle| + |\langle f, \partial(\mu\, \varphi) \rangle| \\
&\leq \int |f|\, |\bar{\partial}\varphi| + \int |f|\, |\partial\mu|\, |\varphi| + \int |f|\, |\mu|\, |\partial\varphi| \\
&\leq \|f\|_p\, \|\bar{\partial}\varphi\|_q + \|f\|_p\, \|\partial\mu\|_2\, \|\varphi\|_{\frac{2q}{2-q}} + \|f\|_p\, \|\mu\|_\infty\, \|\partial\varphi\|_q
\end{aligned}$$

Per això, si $\bar{\partial} f - \mu\, \partial f$ s'anul·la sobre $\mathcal{D}$, també s'anul·larà sobre $W^{1,q}_0$. ■

El resultat següent és una versió del Lema de Weyl referida a la derivada de Beltrami.

Teorema 4.5.
Sigui $f \in L^p_{loc}$ per algun $p > 2$. Sigui $\mu \in W^{1,2}$ un coeficient de Beltrami de suport compacte, i suposem que

$$\langle \bar{\partial} f - \mu\, \partial f, \psi \rangle = 0$$

per a tota $\psi \in \mathcal{D}$. Aleshores, f és μ-quasiregular.

Demostració. Sigui ϕ una aplicació μ-quasiconforme, i definim $g = f \circ \phi^{-1}$. Com que $\phi \in W^{2,q}_{loc}$ per a tot $q < 2$, llavors $J(\cdot, \phi) \in L^q_{loc}$ per a tot $q \in (1, \infty)$ d'on $g \in L^{p-\varepsilon}_{loc}$ per a tot

$\varepsilon > 0$. Així $\overline{\partial} g$ defineix una distribució, i

$$\begin{aligned}\langle \overline{\partial} g, \varphi\rangle &= -\langle g, \overline{\partial}\varphi\rangle \\ &= -\int g(w)\,\overline{\partial}\varphi(w)\,dA(w) \\ &= -\int f(z)\,\overline{\partial}\varphi(\phi(z))\,J(z,\phi)\,dA(z) \\ &= -\int f(z)\,\big(\partial\phi(z)\,\overline{\partial}(\varphi\circ\phi)(z) - \overline{\partial}\phi(z)\,\partial(\varphi\circ\phi)(z)\big)\,dA(z)\end{aligned}$$

per a tota $\varphi \in \mathcal{D}$. D'una banda,

$$\begin{aligned}-\int f(z)\,\overline{\partial}\phi(z)\,\partial(\varphi\circ\phi)(z)dA(z) &= \langle \partial f, \overline{\partial}\phi\cdot\ \varphi\circ\phi\rangle + \int f(z)\,\partial\overline{\partial}\phi(z)\,\varphi\circ\phi(z)\,dA(z) \\ &= \langle \partial f, \mu\,\partial\phi\cdot\ \varphi\circ\phi\rangle + \int f(z)\,\partial\overline{\partial}\phi(z)\,\varphi\circ\phi(z)\,dA(z) \\ &= \langle \mu\partial f,\, \partial\phi\cdot\ \varphi\circ\phi\rangle + \int f(z)\,\partial\overline{\partial}\phi(z)\,\varphi\circ\phi(z)\,dA(z)\end{aligned}$$

i en aquesta expressió tot té sentit. De l'altra,

$$-\int f(z)\,\partial\phi(z)\,\overline{\partial}(\varphi\circ\phi)(z)\,dA(z) = \langle \overline{\partial} f, \partial\phi\cdot\varphi\circ\phi\rangle + \int f(z)\,\overline{\partial}\partial\phi(z)\,\varphi\circ\phi(z)\,dA(z)$$

i per tant

$$\langle \overline{\partial} g, \varphi\rangle = \langle (\overline{\partial} - \mu\,\partial) f, \varphi\circ\phi\ \cdot\partial\phi\rangle$$

Si $\varphi \in \mathcal{D}$ llavors $\varphi\circ\phi\cdot\partial\phi$ és de classe $W_0^{1,q}$ per a tot $q < 2$ i, en particular, per a $q = \frac{p}{p-1}$, sempre i quan $p > 2$. Per tant, i donat que $\overline{\partial} f - \mu\,\partial f$ actua contínuament a $W_0^{1,q}$, la banda dreta de la darrera igualtat és idènticament 0. Deduïm, llavors, que g és holomorfa, i com que $f = g\circ\phi$ aleshores f és μ-quasiregular. ■

Del teorema anterior, si f és una funció de classe L^p_{loc} per algun $p > 2$, amb derivada distribucional de Beltrami nul·la, aleshores $f \in W^{1,2}_{loc}$, donat que es tracta d'una funció μ-quasiregular. Però llavors f s'escriu com $f = h\circ\phi$ amb h analítica i ϕ μ-quasiconforme. Com a conseqüència, $f \in W^{2,q}_{loc}$ per a tot $q < 2$, i per tant en realitat no només guanyem un grau de regularitat, sinó que en guanyem 2.

4.4 Distorsió μ-quasiconforme de les mesures de Hausdorff

Sigui E un compacte, i sigui μ un coeficient de Beltrami amb suport compacte i de classe $W^{1,2}$. Si ϕ és μ-quasiconforme, aleshores ja sabem que $\dim(\phi(E)) = \dim(E)$. Ara bé, si $\dim(E) = 1$, no sabem com és $\mathcal{H}^1(\phi(E))$ amb respecte $\mathcal{H}^1(E)$, i ens podem preguntar el mateix amb qualsevol altra dimensió. En aquesta secció responem a aquesta qüestió si $\dim(E) = 1$, però d'una manera indirecta. Els nostres arguments passen per problemes d'evitabilitat per a funcions μ-quasiregulars. Per a resoldre'ls, el Lema de Weyl per a l'equació de Beltrami (Lema 4.5) jugarà un paper important.

Lema 4.6.
Sigui E un compacte, i sigui $\mu \in W^{1,2}$ un coeficient de Beltrami amb suport compacte dins de $\mathbb{D}$. Suposem que f és una funció μ-quasiregular a $\mathbb{C} \setminus E$, i $\varphi \in \mathcal{D}$.

(a) Si $f \in BMO(\mathbb{C})$, aleshores

$$|\langle \overline{\partial} f - \mu\, \partial f, \varphi \rangle| \leq C\ (1 + \|\mu\|_\infty + \|\partial\mu\|_2)\ (\|\varphi\|_\infty + \|D\varphi\|_\infty)\ \|f\|_*\, \mathcal{M}^1(E)$$

(b) Si $f \in VMO(\mathbb{C})$, aleshores

$$|\langle \overline{\partial} f - \mu\, \partial f, \varphi \rangle| \leq C\ (1 + \|\mu\|_\infty + \|\partial\mu\|_2)\ (\|\varphi\|_\infty + \|D\varphi\|_\infty)\ \|f\|_*\, \mathcal{M}^1_*(E)$$

(c) Si $f \in \mathrm{Lip}_\alpha(\mathbb{C})$, aleshores

$$|\langle \overline{\partial} f - \mu\, \partial f, \varphi \rangle| \leq C\ (1 + \|\mu\|_\infty + \|\partial\mu\|_2)\ (\|\varphi\|_\infty + \|D\varphi\|_\infty)\ \|f\|_\alpha\, \mathcal{M}^{1+\alpha}(E)$$

Demostració. Considerem la funció $\delta = \delta(t)$ definida per

$$\delta(t) = \sup_{\mathrm{diam}(D) \leq 2t} \left(\frac{1}{|D|} \int_D |f - f_D|^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

si $0 < t < 1$, i $\delta(t) = 1$ si $t \geq 1$. Per construcció, per a tot disc $D \subset \mathbb{C}$ tenim

$$\left(\frac{1}{|D|}\int_D |f - f_D|^2\right)^{\frac{1}{2}} \leq \delta\left(\frac{\operatorname{diam}(D)}{2}\right)$$

Considerem la funció de mesura $h(t) = t\,\delta(t)$, i sigui D_j un recobriment per discos de E, tal que

$$\sum_j h(\operatorname{diam}(D_j)) \leq \mathcal{M}^h(E) + \varepsilon$$

Sigui ψ_j una partició de la unitat subordinada al recobriment D_j. Cada ψ_j és una funció de classe $\mathcal{C}^\infty$, amb suport compacte inclòs a $2D_j$, $|D\psi_j(z)| \leq \frac{C}{\operatorname{diam}(2D_j)}$ i $\sum_j \psi_j = 1$ sobre $\cup_j D_j$. Per a tota funció test $\varphi \in \mathcal{D}$,

$$-\langle \overline{\partial} f - \mu\,\partial f, \varphi\rangle = \sum_{j=1}^{n} \langle f - c_j, \overline{\partial}(\varphi\,\psi_j)\rangle - \sum_{j=1}^{n} \langle f - c_j, \partial(\mu\,\varphi\,\psi_j)\rangle \tag{4.3}$$

on c_j són constants qualssevol. Tenim llavors que

$$\begin{aligned}
\left|\sum_{j=1}^{n} \langle f - c_j, \partial(\varphi\,\psi_j)\rangle\right| &\leq \sum_j \int_{2D_j} |f - c_j| \,\left(|\overline{\partial}\varphi|\,|\psi_j| + |\varphi|\,|\overline{\partial}\psi_j|\right) \\
&\lesssim \sum_j \left(\int_{2D_j} |f - c_j|^2\right)^{\frac{1}{2}} \left(\|\overline{\partial}\varphi\|_\infty \operatorname{diam}(2D_j) + C\|\varphi\|_\infty\right) \\
&\lesssim \sum_j h(\operatorname{diam}(D_j)) \,\left(\|\overline{\partial}\varphi\|_\infty \operatorname{diam}(2D_j) + C\|\varphi\|_\infty\right)
\end{aligned}$$

i aquesta suma pot ser acotada per $\left(\mathcal{M}^h(E) + \varepsilon\right)(\|\varphi\|_\infty + \|D\varphi\|_\infty)$. L'altra suma a (4.3) la dividim en dos termes,

$$\left|\sum_{j=1}^{n} \langle f - c_j, \partial(\mu\,\varphi\,\psi_j)\rangle\right| \leq \sum_j \int_{2D_j} |f - c_j|\,|\partial\mu|\,|\varphi\,\psi_j| + \sum_j \int_{2D_j} |f - c_j|\,|\mu|\,|\partial(\varphi\,\psi_j)|.$$

El segon terme pot ésser acotat com abans,

$$\sum_j \int_{2D_j} |f - c_j|\,|\mu|\,|\partial(\varphi\,\psi_j)| \lesssim \|\mu\|_\infty \left(\mathcal{M}^h(E) + \varepsilon\right)(\|\varphi\|_\infty + \|D\varphi\|_\infty)$$

Per al primer terme,

$$\begin{aligned}\sum_j \int_{2D_j} |f - c_j|\, |\partial\mu|\, |\varphi\, \psi_j| &\leq \sum_j \left(\int_{2D_j} |f - c_j|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{2D_j} |\partial\mu|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \|\varphi\|_\infty \\ &\leq \sum_j \delta(\mathrm{diam}(D_j))\, |2D_j|^{\frac{1}{2}} \left(\int_{\mathbb{D}} |\partial\mu|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \|\varphi\|_\infty \\ &\simeq \|\partial\mu\|_2\, \|\varphi\|_\infty \left(\mathcal{M}^h(E) + \varepsilon \right)\end{aligned}$$

i ara només cal distingir segons la regularitat de f. Si $f \in BMO(\mathbb{C})$ aleshores el millor que es pot dir és $\delta(t) \lesssim \|f\|_*$ per a tot $t > 0$, i per tant $\mathcal{M}^h(E) \leq \mathcal{M}^1(E)$. En segon lloc, si $f \in VMO(\mathbb{C})$ també es satisfà

$$\lim_{t \to 0} \frac{h(t)}{t} = \lim_{t \to 0} \delta(t) = 0$$

de manera que $\mathcal{M}^h(E) \leq \mathcal{M}^1_*(E)$. Finalment, si $f \in \mathrm{Lip}_\alpha$, llavors $\delta(t) \lesssim \|f\|_\alpha\, t^\alpha$, d'on $\mathcal{M}^h(E) \leq \mathcal{M}^{1+\alpha}(E)$. ■

El Lema 4.6 té conseqüències molt interessants, a efectes de distorsió. En primer lloc, demostrem que les aplicacions μ-quasiconformes preserven els conjunts de longitud 0.

Corol·lari 4.7.
Sigui $E \subset \mathbb{C}$ un compacte. Sigui $\mu \in W^{1,2}$ un coeficient de Beltrami amb suport compacte, i ϕ una aplicació μ-quasiconforme. Aleshores,

$$\mathcal{H}^1(E) = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad \mathcal{H}^1(\phi(E)) = 0$$

Demostració. Per simetria, és suficient demostrar que $\mathcal{H}^1(E) = 0$ implica $\mathcal{H}^1(\phi(E)) = 0$. Suposem, doncs, que $\mathcal{H}^1(E) = 0$. Sigui $f \in BMO(\mathbb{C})$ una funció analítica a $\mathbb{C} \setminus \phi(E)$. Aleshores, $g = f \circ \phi$ també pertany a $BMO(\mathbb{C})$. Més encara, g és una funció μ-quasiregular a $\mathbb{C} \setminus E$ de manera que pel Lema 4.6, $\langle \overline{\partial} g - \mu\, \partial g, \varphi \rangle = 0$ per a tota $\varphi \in \mathcal{D}$. Conseqüentment, pel Lema 4.5, g és μ-quasiregular a tot $\mathbb{C}$ i, per tant, f estén analíticament a tot $\mathbb{C}$. El que això diu és que $\phi(E)$ és un conjunt evitable per a les funcions analítiques i de BMO. Però aquests conjunts estan caracteritzats [31] per la condició

$\mathcal{H}^1(\phi(E)) = 0$. ■

Una altra conseqü'encia és la solució completa del problema d'evitabilitat per a funcions μ-quasiregulars i de BMO. Recordem que un compacte E es diu *evitable per a les funcions μ-quasiregulars i de BMO* si tota funció $f \in BMO(\mathbb{C})$ μ-quasiregular a $\mathbb{C} \setminus E$ admet una extensió μ-quasiregular a tot $\mathbb{C}$.

Corol·lari 4.8.
Sigui $E \subset \mathbb{C}$ un compacte. Sigui $\mu \in W^{1,2}$ un coeficient de Beltrami amb suport compacte. Aleshores, E és evitable per a les funcions μ-quasiregulars i de BMO si i només si $\mathcal{H}^1(E) = 0$.

Demostració. Suposem primer que $\mathcal{H}^1(E) = 0$, i sigui $f \in BMO(\mathbb{C})$ μ-quasiregular a $\mathbb{C} \setminus E$. Aleshores, pel Lema 4.6, tenim que $\langle \overline{\partial} f - \mu, \partial f, \varphi \rangle = 0$ per a tota $\varphi \in \mathcal{D}$. Pel Lema 4.5, deduïm que f és μ-quasiregular. En conseqüència, E és evitable. Recíprocament, si $\mathcal{H}^1(E) > 0$, aleshores pel Corol·lari 4.7, $\mathcal{H}^1(\phi(E)) > 0$, de manera que $\phi(E)$ no és evitable per a les funcions analítiques i de BMO. Existeix, per tant, una funció h de $BMO(\mathbb{C})$, analítica a $\mathbb{C} \setminus \phi(E)$, no entera. Però aleshores $h \circ \phi$ pertany a $BMO(\mathbb{C})$, és μ-quasiregular a $\mathbb{C} \setminus E$, i no admet extensions μ-quasiregulars a tot $\mathbb{C}$. Conseqüentment, E és no evitable per a les funcions μ-quasiregulars i de BMO. ■

Una segona família de conseqüències del Lema 4.6 prové d'estudiar el cas VMO. Primer, demostrem que les aplicacions μ-quasiconformes preserven els conjunts de longitud σ-finita.

Corol·lari 4.9.
Sigui $\mu \in W^{1,2}$ un coeficient de Beltrami amb suport compacte, i ϕ una aplicació μ-quasiconforme. Per a tot compacte E,

$$\mathcal{H}^1(E) \text{ és } \sigma\text{-finita} \qquad \Leftrightarrow \qquad \mathcal{H}^1(\phi(E)) \text{ és } \sigma\text{-finita}$$

Demostració. Novament, només veurem que $\mathcal{M}^1_*(E) = 0$ implica $\mathcal{M}^1_*(\phi(E)) = 0$. Suposem, doncs, que $\mathcal{M}^1_*(E) = 0$, i sigui $f \in VMO(\mathbb{C})$ una funció analítica a $\mathbb{C} \setminus \phi(E)$. Si veiem que f estén analíticament a tot $\mathbb{C}$, aleshores $\phi(E)$ haurà de tenir longitud σ-finita, i haurem acabat. Per a fer-ho, observem primer que $g = f \circ \phi$ també pertany a $VMO(\mathbb{C})$.

Més encara, g és una funció μ-quasiregular a $\mathbb{C} \setminus E$, i com $\mathcal{M}^1_*(E) = 0$, pel Lema 4.6 tenim que $\overline{\partial} g - \mu\, \partial g = 0$ a $\mathcal{D}'$. Conseqüentment, pel Lema 4.5, g és μ-quasiregular a tot $\mathbb{C}$ i, per tant, f estén analíticament a tot $\mathbb{C}$. ■

Com en el cas BMO, el problema d'evitabilitat μ-quasiregular per a funcions de VMO també queda resolt. Un compacte E es diu *evitable per a les funcions μ-quasiregulars i de VMO* si tota funció $f \in VMO(\mathbb{C})$ μ-quasiregular a $\mathbb{C} \setminus E$ admet una extensió μ-quasiregular a tot $\mathbb{C}$.

Corol·lari 4.10.
Sigui $E \subset \mathbb{C}$ un compacte. Sigui $\mu \in W^{1,2}$ un coeficient de Beltrami amb suport compacte. Aleshores, E és evitable per a les funcions μ-quasiregulars i de VMO si i només si $\mathcal{H}^1(E)$ és σ-finita.

Demostració. Si $\mathcal{H}^1(E)$ és σ-finita, llavors $\mathcal{M}^1_*(E) = 0$, i pel Lema 4.6 tota funció $f \in VMO(\mathbb{C})$ μ-quasiregular a $\mathbb{C} \setminus E$ satisfà $\overline{\partial} f = \mu\, \partial f$ a $\mathcal{D}'$. Pel Lema 4.5, f estén μ-quasiregularment i, per tant, E és evitable.
Si $\mathcal{H}^1(E)$ no és σ-finita, acabem de veure que llavors tampoc $\mathcal{H}^1(\phi(E))$ és σ-finita. Existeix, així, una funció $h \in VMO(\mathbb{C})$ analítica a $\mathbb{C} \setminus \phi(E)$, no entera. Però aleshores $h \circ \phi$ és de VMO, és μ-quasiregular a $\mathbb{C} \setminus E$, i no estén μ-quasiregularment a tot $\mathbb{C}$. ■

La classe Lip_α té, en comparació amb BMO o VMO, el desavantatge de no ser quasiconformement invariant. Això ens privarà de llegir qualsevol resultat d'evitabilitat per a Lip_α en termes de distorsió de mesures de Hausdorff i, per tant, per a $\mathcal{H}^{1+\alpha}$ no podem obtenir resultats tant precisos com els Lemes 4.7 o 4.9. Queda oberta, doncs, la següent qüestió.

Problema 4.11.
Sigui $\mu \in W^{1,2}$ un coeficient de Beltrami amb suport compacte, i ϕ μ-quasiconforme. Aleshores,

$$\mathcal{H}^{1+\alpha}(E) = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad \mathcal{H}^{1+\alpha}(\phi(E)) = 0$$

D'altra banda, el Lema 4.5 sí que és útil en estudiar el problema d'evitabilitat Lip_α.

Recordem que un conjunt E es diu *evitable per a les funcions μ-quasiregulars i de* Lip_α si tota funció $f \in \mathrm{Lip}_\alpha(\mathbb{C})$, μ-quasiregular a $\mathbb{C} \setminus E$, estén μ-quasiregularment a tot $\mathbb{C}$.

Corol·lari 4.12.
Sigui E un compacte, i suposem que $\mathcal{H}^{1+\alpha}(E) = 0$. Aleshores, E és evitable per a les funcions μ-quasiregulars i de Lip_α.

Demostració. Altre cop, si $f \in \mathrm{Lip}_\alpha$ és μ-quasiregular fora de E, aleshores el Lema 4.6 implica que la seva derivada de Beltrami distribucional és idènticament nul·la. Pel Lema 4.5, obtenim que f és μ-quasiregular. ■

El resultat anterior és òptim, en el sentit que si $\mathcal{H}^{1+\alpha}(E) > 0$ aleshores existeix $\mu \in W^{1,2}$ amb suport compacte tal que E no és evitable per a les funcions μ-quasiregulars i de Lip_α (només cal prendre $\mu = 0$). En aquesta direcció, esperem una solució positiva per al següent problema.

Problema 4.13.
Sigui $\mu \in W^{1,2}$ un coeficient de Beltrami amb suport compacte. Sigui E un compacte, tal que $\mathcal{H}^{1+\alpha}(E) > 0$. Aleshores, existeix $f \in \mathrm{Lip}_\alpha(\mathbb{C})$, μ-quasiregular a $\mathbb{C} \setminus E$, i que no estén μ-quasiregularment a tot $\mathbb{C}$.

4.5 Distorsió μ-quasiconforme de la capacitat analítica

Si $\mu \in W^{1,2}(\mathbb{C})$ és un coeficient de Beltrami, amb suport compacte dins de $\mathbb{D}$, i $E \subset \mathbb{D}$ és un compacte, diem que E és *evitable per a les funcions μ-quasiregulars i acotades* si tota funció f, μ-quasiregular a $\mathbb{C} \setminus E$, és constant. Com en el problema *BMO* de la secció anterior, només els conjunts de dimensió 1 són interessants, degut a la factorització de Stoilow i al fet que les funcions μ-quasiconformes amb $\mu \in W^{1,2}$ no distorsionen la dimensió de Hausdorff.

Com deduïm del Corol·lari 4.7, si E és tal que $\mathcal{H}^1(E) = 0$ llavors també $\mathcal{H}^1(\phi(E)) = 0$ per a tota ϕ μ-quasiconforme. Per tant, també $\gamma(\phi(E)) = 0$. Això demostra que els conjunts de longitud zero són evitables per a les funcions μ-quasiregulars i acotades.

Ara el pas següent consisteix en entendre què els passa als conjunts de longitud positiva i finita. És ben sabut (Teorema 1.5) que aquests conjunts descomposen com a la unió d'un conjunt rectificable, un conjunt purament no rectificable, i un conjunt de longitud 0. Podem estudiar les tres components per separat.

Lema 4.14.
Sigui $\phi : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ un homeomorfisme, tal que $\phi, \phi^{-1} \in W^{2,1+\varepsilon}_{loc}(\mathbb{C})$ per algun $\varepsilon > 0$. Suposem també que $\mathcal{H}^1(E) = 0$ si i només si $\mathcal{H}^1(\phi(E)) = 0$. Aleshores

$$\Gamma \text{ rectificable} \qquad \Leftrightarrow \qquad \phi(\Gamma) \text{ rectificable}$$

Demostració. Com que Γ és un conjunt rectificable, existeix un conjunt Z de longitud 0 tal que

$$\Gamma \setminus Z = \bigcup_{i=1}^{\infty} \Gamma_i$$

on cada Γ_i és una corba $\mathcal{C}^1$ regular (i.e. amb vector tangent no-nul a cada punt). Així, no és restrictiu suposar que Γ és ella mateixa una corba $\mathcal{C}^1$ regular. En altres paraules, d'ara en endavant suposarem que $\Gamma = \{\alpha(t); t \in (0,1)\}$ per alguna funció de classe $\mathcal{C}^1$

$$\alpha : (0,1) \to \mathbb{C}$$

tal que $\alpha'(t) \neq 0$ per a tot $t \in (0,1)$.
Com que $\phi \in W^{2,1+\varepsilon}_{loc}$, tenim que ϕ és diferenciable en el sentit usual, $C_{1,1+\varepsilon}$-quasi per tot [17]. De fet, el mateix passa a ϕ^{-1}. El conjunt

$$B = \{z \in \Gamma : \phi \text{ és diferenciable a } z\}$$

és tal que $C_{1,1+\varepsilon}(\Gamma \setminus B) = 0$. En particular, $\mathcal{H}^1(\Gamma \setminus B) = 0$. A més, com que també $\phi^{-1} \in W^{2,1+\varepsilon}_{loc}$, podem aplicar al regla de la cadena, i de $\phi^{-1} \circ \phi(z) = z$ deduïm que

$$D\phi^{-1}(\phi(z)) = (D\phi(z))^{-1}$$

per a $C_{1,1+\varepsilon}$-quasi tot $z \in B$. Per això podem assumir que per a tot $z \in B$ tenim $J(z,\phi) \neq 0$. Notem que llavors $\mathcal{H}^1(\phi(\Gamma) \setminus \phi(B)) = 0$, i també que $\mathcal{H}^1(\phi(\Gamma))$ és σ-finita.
Fixem un punt $w_0 = \phi(z_0)$, imatge d'algun $z_0 \in B$, i escrivim $z_0 = \alpha(t_0)$ per algun $t_0 \in (0,1)$. Llavors, $\alpha'(t_0) = v \neq 0$. Demostrarem que

$$V = \langle D\phi(z_0) \cdot \alpha'(t_0) \rangle$$

és una direcció tangent a $\phi(\Gamma)$ en w_0. Com que aquest argument és vàlid $\mathcal{H}^1$-quasi per tot $w_0 \in \phi(\Gamma)$, obtindrem que $\phi(\Gamma)$ és rectificable [39, p. 214, Remark 15.22]. El que hem de demostrar, doncs, és que per tot $s \in (0,1)$, existeix $r > 0$ tal que

$$\phi(\Gamma) \cap D(w_0, r) \subset X(w_0, V, s)$$

Aquí $X(w_0, V, s)$ és el con de centre w_0, direcció V i amplitud s, és a dir,

$$X(w_0, V, s) = \{w \in \mathbb{C} : d(w - w_0, V) < s\,|w - w_0|\}.$$

Per la regla de la cadena, la funció $\tilde{\alpha} = \phi \circ \alpha$ és diferenciable a t_0 i $D\tilde{\alpha}(t_0) = D\phi(z_0) \cdot \alpha'(t_0)$. Com que α és regular, per a tot $r_1 > 0$ existeix $r_2 > 0$ tal que

$$|t - t_0| < r_1 \quad \Leftrightarrow \quad |\alpha(t) - z_0| < r_2.$$

Prenguem $z = \alpha(t)$. Aleshores $|t - t_0| < r_1$ si i només si $z \in \Gamma \cap D(z_0, r_2)$. Però si escollim r_1 prou petit,

$$\begin{aligned} d(\phi(z) - w_0, V) &= \inf_{\lambda \in \mathbb{R}} |\phi(z) - \phi(z_0) - D\phi(z_0) \cdot \alpha'(t_0)\,\lambda| \\ &\leq |\phi(z) - \phi(z_0) - D\phi(z_0) \cdot \alpha'(t_0)\,(t - t_0)| \\ &= \frac{|\tilde{\alpha}(t) - \tilde{\alpha}(t_0) - D\tilde{\alpha}(t_0)\,(t - t_0)|}{|t - t_0|} \, \frac{|t - t_0|}{|\tilde{\alpha}(t) - \tilde{\alpha}(t_0)|} \, |\tilde{\alpha}(t)) - \tilde{\alpha}(t_0))| \\ &\leq s\,|\tilde{\alpha}'(t_0)| \, \frac{1}{|\tilde{\alpha}'(t_0)|} \, |\phi(z) - \phi(z_0)|. \end{aligned}$$

Per això, donat $s > 0$ existeix $r_0 > 0$ (només cal prendre $r_0 = r_2$) tal que

$$\phi(\Gamma \cap D(z_0, r_0)) \subset X(w_0, V, s).$$

Notem també que ϕ és un homeomorfisme, per la qual cosa si r és prou petit, podem escollir r_0 tal que

$$\phi(\Gamma \setminus D(z_0, r_0)) \subset \mathbb{C} \setminus D(w_0, r).$$

Així doncs, donat $s > 0$ existeixen dos reals $r, r_0 > 0$ per als quals el conjunt

$$\phi(\Gamma) \cap D(w_0, r) = \phi(\Gamma \cap D(z_0, r_0)) \cap D(w_0, r)$$

té tots els seus punts dintre del con $X(w_0, V, s)$. En altres paraules, donat $s > 0$ existeix $r > 0$ tal que $\phi(\Gamma) \cap D(w_0, r) \subset X(w_0, V, s)$. ■

En aquest lema, la regularitat és necessària. Al següent exemple, degut a J. B. Garnett [21], construïm un homeomorfisme del pla que preserva els conjunts de longitud zero i, al mateix temps, envia un conjunt purament no rectificable a un conjunt rectificable.

Exemple 4.15.
Denotem per E el conjunt de Cantor-$\frac{1}{4}$ planar. Aquest conjunt s'obté com a intersecció d'una família decreixent de compactes E_N, cadascun dels quals és la unió de 4^N quadrats de costat $\frac{1}{4^N}$, i on cada quadrat pare té exactament 4 fills idèntics.

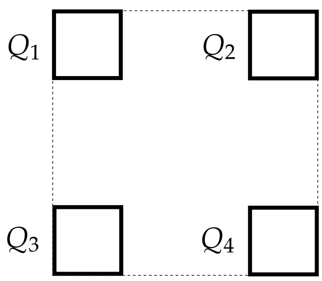


Figura 4.1

Al primer pas, el quadrat unitat té 4 fills Q_1, Q_2, Q_3 i Q_4, tal i com es veu a la Figura 4.1. Els *vèrtexs dels quadrats* Q_j *estan connectats per mitjà d'una família de rectes paral·leles, tal i com mostra la Figura 4.2. Del que es tracta és de desplaçar al llarg d'aquestes rectes els quadrats* Q_2

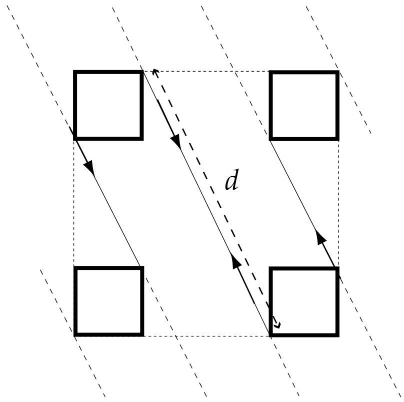


Figura 4.2

i Q_3*, tot deixant fixos els quadrats* Q_1 *i* Q_4*. Com que* ϕ_1 *és un homeomorfisme, no podem deixar els* 4 *quadrats alineats, però sí que podem apropar-los de manera que la suma de distàncies* d' *sigui tant petita com vulguem. El resultat és mostrat a la Figura 4.3.*

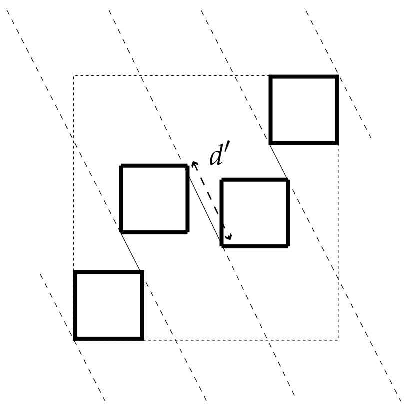


Figura 4.3

L'homeomorfisme ϕ *l'obtindrem com a límit uniforme* $\phi = \lim_{N\to\infty} \phi_N$*. Les successives aplicacions* ϕ_N *no són res més que còpies d'aquest procediment a tots i cadascun dels quadrats de les diferents generacions. L'única restricció que tenim és que la suma de distàncies* d' *de totes les generacions sigui molt petita. D'aquesta manera, és clar que* ϕ_N *convergeixen uniformement a* *un homeomorfisme del pla ϕ. Es pot demostrar que $\mathcal{H}^1(F) = 0$ si i només si $\mathcal{H}^1(\phi(F)) = 0$. D'altra banda, la imatge per ϕ del conjunt de Cantor planar E està inclosa en un conjunt compacte i connex, la longitud del qual és precisament la suma de les distàncies d' que apareixen a la figura, i que es pot escollir finita. És a dir, $\phi(E)$ és rectificable.*

Si $\mu \in W^{1,2}$ és un coeficient de Beltrami amb suport compacte, aleshores ja sabem que tota aplicació μ-quasiconforme pertany a l'espai de Sobolev local $W^{2,q}_{loc}(\mathbb{C})$ per a tot $q < 2$. Més encara, sabem que ϕ preserva els conjunts de longitud 0 (fins i tot preserven els de longitud σ-finita), i el mateix passa a ϕ^{-1}. Sota aquestes hipòtesis, podem aplicar a aquestes funcions el Lema 4.14.

Corol·lari 4.16.
Sigui $\mu \in W^{1,2}$ un coeficient de Beltrami amb suport compacte, i ϕ una aplicació μ-quasiconforme.

(a) Si E és un conjunt rectificable, llavors també $\phi(E)$ és rectificable.

(b) Si E és purament no rectificable, llavors també $\phi(E)$ és purament no rectificable.

Demostració. El primer punt prové del lema anterior. Per al segon, sigui Γ una corba rectificable. Aleshores,

$$\mathcal{H}^1(\phi(E) \cap \Gamma) = 0 \Leftrightarrow \mathcal{H}^1(E \cap \phi^{-1}(\Gamma)) = 0$$

però E és purament no rectificable, de manera que totes les corbes tallen E en un conjunt de longitud 0. De fet, aquesta propietat caracteritza els conjunts purament no rectificables. ∎

La distorsió μ-quasiconforme dels conjunts rectificables i els purament no rectificables és el darrer ingredient necessari per al següent resultat.

Teorema 4.17.
Sigui $\mu \in W^{1,2}$ amb suport compacte, i sigui ϕ una aplicació μ-quasiconforme. Sigui E tal que $\mathcal{H}^1(E)$ és σ-finita. Aleshores,

$$\gamma(E) = 0 \iff \gamma(\phi(E)) = 0$$

Demostració. Pels Corol·laris 4.7 i 4.9, si $\mathcal{H}^1(E)$ és positiva i σ-finita, llavors també $\mathcal{H}^1(\phi(E))$ ho és. Pel Teorema de Besicovitch (Teorema 1.5) podem trencar $\phi(E)$ en

$$\phi(E) = \bigcup_n R_n \cup N_n \cup Z_n$$

amb R_n rectificables, N_n purament no rectificables, i Z_n conjunts de longitud 0. Notem que $\gamma(N_n) = 0$ donat que els conjunts purament no rectificables de longitud finita són evitables per a les funcions analítiques i acotades [15], i també $\gamma(Z_n) = 0$ ja que $\mathcal{H}^1(Z_n) = 0$. Així, degut a la semiadditivitat de la capacitat analítica [51], obtenim

$$\gamma(\phi(E)) \leq C \sum_n \gamma(R_n)$$

Ara bé, cada R_n és un conjunt rectificable, de manera que també $\phi^{-1}(R_n)$ ho és. Com que E té longitud σ-finita, la condició $\gamma(E) = 0$ força que E no pugui contenir cap conjunt rectificable de longitud positiva, d'on necessàriament tenim $\mathcal{H}^1(\phi^{-1}(R_n)) = 0$ i llavors $\mathcal{H}^1(R_n) = 0$. Com a conseqüència, $\gamma(\phi(E)) = 0$. ■

El resultat anterior té caràcter exclusivament qualitatiu. No hem d'esperar, doncs, cap millora en sentit quantitatiu. De fet, a la invariància bilipschitz de la capacitat analítica de Tolsa [52], hom prova que un homeomorfisme del pla $\phi : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ satisfà $\gamma(\phi(E)) \simeq \gamma(E)$ per a tot compacte E, si i només si és bilipschitz, mentre que l'Exemple 4.2 demostra que existeixen aplicacions μ-quasiconformes ϕ en les hipòtesis del teorema anterior, i que no són de classe Lip_1. Si més no, ens podem plantejar el següent problema.

Problema 4.18.
Sigui μ un coeficient de Beltrami de suport compacte i classe $W^{1,2}$, i sigui ϕ una aplicació K-quasiconforme. Aleshores,

$$\gamma(E) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \gamma(\phi(E)) = 0$$

per a tot compacte E.

Bibliografia

[1] D. R. ADAMS, L. I. HEDBERG, *Function spaces and potential theory*, Grundl. Math. Wiss. 314, Springer-Verlag, Berlin (1996).

[2] L. V. AHLFORS, *Lectures on quasiconformal mappings*, Wadsworth & Brooks/Cole Advanced Books & Software, Monterey, CA (1987).

[3] L. V. AHLFORS, *Bounded analytic functions*, Duke Math. J. 14 (1947), 1–11.

[4] K. ASTALA, *Area distortion of quasiconformal mappings*, Acta Math. 173 (1994), 37–60.

[5] K. ASTALA, A. CLOP, J. MATEU, J. OROBITG, I. URIARTE-TUERO, *Distortion of Hausdorff measures and improved Painlevé removability for quasiregular mappings*, Sotmès.

[6] K. ASTALA, T. IWANIEC, G.MARTIN, *Elliptic partial differential equations and quasiconformal mappings in plane*. Manuscrit.

[7] K. ASTALA, T. IWANIEC, P. KOSKELA, G. MARTIN, *Mappings of BMO-bounded distortion*, Math. Ann. 317 (2000), no.4, 703–726.

[8] K. ASTALA, T. IWANIEC, E. SAKSMAN, *Beltrami operators in the plane*, Duke Math. J. 107 (2001), no.1, 27–56.

[9] K. ASTALA, G. MARTIN, *Holomorphic motions*, Papers on analysis, 27–40, Rep. Univ. Jyväskylä Dep. Math. Stat., 83, Univ. Jyväskylä, Jyväskylä, (2001).

[10] K. ASTALA, V. NESI, *Composites and quasiconformal mappings: new optimal bounds in two dimensions*, Calc. Var. Partial Differential Equations 18 (2003), no. 4, 335–355.

[11] B. BOJARSKI, T. IWANIEC, *Analytical foundations of the theory of quasiconformal mappings in* $\mathbb{R}^n$, Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A I Math. 8 (1983), no. 2, 257–324.

[12] A. CLOP, *Removable singularities for Hölder continuous quasiregular mappings in the plane*, Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A I Math. , per aparèixer.

[13] A. CLOP, *Nonremovable sets for Hölder continuous quasiregular mappings in the plane*, Michigan Math. J., per aparèixer.

[14] A. CLOP, J. MATEU, J. OROBITG, *Beltrami equations with coefficient in the Sobolev space* $W^{1,2}$, Preprint (2006).

[15] G. DAVID, *Unrectifiable* 1*-sets have vanishing analytic capacity*, Rev. Mat. Iberoamericana 14 (1998), no. 2, 369–479.

[16] E. P. DOLŽENKO, *The removability of singularities of analytic functions* (Russian), Uspehi Mat. Nauk 18 1963 no. 4 (112), 135–142.

[17] J. R. DORRONSORO, *On the differentiability of Lipschitz-Besov functions*, Trans. Amer. Math. Soc. 303 (1987), 229–240.

[18] D. FARACO, P. KOSKELA, X. ZHONG, *Mappings of Finite Distortion: the degree of regularity* Adv. Math. 190 (2005), no. 2, 300-318.

[19] D. FARACO, X. ZHONG, Manuscrit.

[20] J. B. GARNETT, *Analytic capacity and measure*, Lecture notes in Math. 297, Springer-Verlag, Berlin (1972).

[21] J. B. GARNETT, comunicació personal.

[22] M. GIAQUINTA, *Multiple integrals in the calculus of variations and nonlinear elliptic systems*, Annals of Mathematics Studies 105, Princeton University Press, Princeton (1983).

[23] V. GUTLYANSKIĬ, O. MARTIO, M. VUORINEN, *On Hölder continuity of quasiconformal maps with VMO dilatation*, Complex Var. Theory Appl. 47 (2002), no. 6, 495–505.

[24] S. HENCL, P. KOSKELA, *Regularity of the Inverse of planar Sobolev homeomorphism*, Arch. Ration. Mech. Anal. 180 (2006), no. 1, 75–95.

[25] T. IWANIEC, *L^p-theory of quasiregular mappings*, in *Quasiconformal space mappings*, 39–64, Lecture Notes in Math., 1508, Springer, Berlin (1992).

[26] T. IWANIEC, P. KOSKELA, G. MARTIN, *Mappings of BMO-distortion and Beltrami-type operators*, J. Anal. Math. 88 (2002), 337–381.

[27] T. IWANIEC, P. KOSKELA, G. MARTIN, C. SBORDONE, *Mappings of Finite Distortion: $L^n \log^\alpha L$-integrability*, J. London Math. Soc. (2) 67 (1) (2003), 123-136.

[28] T. IWANIEC, P. KOSKELA, J. ONNINEN, *Mappings of Finite Distortion: Compactness*, Ann. Acad. Sci. Fenn. Math. 27 (2002), 391-417.

[29] T. IWANIEC, G. MARTIN, *Quasiregular mappings in even dimensions*, Acta Math. 170 (1993), no. 1, 29–81.

[30] T. IWANIEC, G. MARTIN, *Geometric function theory and nonlinear analysis*, Oxford University Press, Oxford (2001).

[31] R. KAUFMAN, *Hausdorff measure, BMO, and analytic functions*, Pacific J. Math. 102 (1982), no. 2, 369–371.

[32] T. KILPELÄINEN, X. ZHONG, *Removable sets for continuous solutions of quasilinear elliptic equations*, Proc. Amer. Math. Soc. 130 6 (2002), 1681-1688.

[33] P. KOSKELA, O. MARTIO, *Removability theorems for quasiregular mappings*, Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A I Math. 15 (1990), 381-399.

[34] P. KOSKELA, K. RAJALA, *Mappings of finite distortion: removable singularities*, Israel J. Math. 136 (2003), 269–283.

[35] L. KOVALEV, comunicació personal.

[36] M. A. KRASNOSEL'SKIĬ, JA. B. RUTICKIĬ, *Convex functions and Orlicz spaces*, Hindustan Publishing Corporation, Delhi, India (1962).

[37] O. LEHTO, K. I. VIRTANEN, *Quasiconformal mappings in the plane*, Springer-Verlag, New York-Heidelberg (1973).

[38] J. MATEU, L. PRAT, J. VERDERA, *The capacity associated to signed Riesz kernels, and Wolff potentials*, J. Reine Angew. Math. 578 (2005), 201–223.

[39] P. MATTILA, *Geometry of sets and measures in euclidean spaces*, Cambridge University Press (1995).

[40] P. MATTILA, *On the analytic capacity and curvature of some Cantor sets with non σ-finite length*, Pub. Mat. 40 (1996), 195–204.

[41] A. MORI, *On an absolute constant in the theory of quasiconformal mappings*, J. Math. Soc. Japan, 8 (1956), 156–166.

[42] A. G. O'FARRELL, *Hausdorff content and rational approximation in fractional Lipschitz norms*, Trans. Amer. Math. Soc. 228 (1977), 187–206.

[43] H. PAJOT, *Analytic capacity, rectifiability, Menger curvature and the Cauchy integral*, Lecture Notes in Math., 1799, Springer-Verlag, Berlin (2002).

[44] S. PETERMICHL, A. VOLBERG, *Heating of the Ahlfors-Beurling operator: weakly quasiregular maps on the plane are quasiregular*, Duke Math. J. 102 (2002), 281–305.

[45] M. M. RAO, Z. D. REN, *Theory of Orlicz spaces*, Monographs and Textbooks in Pure and Applied Mathematics, 146. Marcel Dekker, Inc., New York (1991).

[46] H. M. REIMANN, *Functions of bounded mean oscillation and quasiconformal mappings*, Comment. Math. Helv. 49 (1974), 260–276.

[47] H. M. REIMANN, T. RYCHENER, *Funktionen beschränkter mittlerer oszillation*, Lecture Notes in Math., 487, Springer-Verlag, Berlin (1975).

[48] YU. G. RESHETNYAK, *Space mappings with bounded distortion*, Transl. Math. Monographs, 73, Amer. Math. Soc., Providence, RI, (1989).

[49] S. RICKMAN, *Quasiregular mappings*, Springer-Verlag, Berlin (1993).

[50] M. SION, D. SJERVE, *Approximation properties of measures generated by continuous set functions*, Mathematika 9 (1962), 145–156.

[51] X. TOLSA, *Painlevé's problem and the semiadditivity of analytic capacity*, Acta Math. 190 (2003), no. 1, 105–149.

[52] X. TOLSA, *Bilipschitz maps, analytic capacity, and the Cauchy integral*, Ann. of Math. 162 (2005), 1243–1304.

[53] NGUYEN XUAN UY, *Removable singularities of analytic functions satisfying a Lipschitz condition*, Ark. Mat. 17 (1979), no. 1, 19-27.

[54] J. VERDERA, *BMO rational approximation and one-dimensional Hausdorff content*, Trans. Amer. Math. Soc. 297 (1986), no. 1, 283–304.

[55] J. VERDERA, *Removability, capacity and approximation*, Complex potential theory (Montreal, PQ, 1993), 419–473, NATO Adv. Sci. Inst. Ser. C Math. Phys. Sci., 439, Kluwer Acad. Publ., Dordrecht (1994).

Index