Sobre anells tals que els seus mòduls finitament generats fidels són generadors

Dolors Herbera i Espinal

Memòria presentada per optar al grau de doctora en ciències

CERTIFICO que aquesta memòria ha estat realitzada per Dolors Herbera i Espinal, sota la direcció del Dr Pere Menal i Brufal fins el dia del seu traspàs el passat 4 d'Abril.

Bellaterra Novembre de 1991

Dr. Jaume Moncasi i Solsona

Introducció

Si R és un anell, un R-mòdul per la dreta M es diu que és generador si qualsevol R-mòdul per la dreta és imatge homomòrfica d'una suma directa de còpies de M. La nociò de mòdul generador va ser introduïda l'any 1958 per Morita a [59] i juga un paper preeminent en tota la seva teoria de dualitat.

Un mòdul generador és fidel però no tot mòdul fidel és generador (Morita anomena als mòduls generador mòduls completament fidels). Motivat per aquest fet l'any 1966 Azumaya a [4] inicia l'estudi dels anells tals que tot mòdul per la dreta fidel és generador.

L'estudi dels anells i àlgebres de Frobenius i quasi-Frobenius té el seu origen en la teoria de respresentació de k-àlgebres finitament generades. Nakayama l'any 1939 va introduir els anells quasi-Frobenius (QF) a [60] i [61], com els anells artinians R que satisfan

$$r_R(l_R(I)) = I \qquad \text{i} \qquad l_R(r_R(J)),$$

per tot ideal per la dreta I i tot ideal per l'esquerra J. Exemples d'anells QF són els anells artinians semisimples i les àlgebres de grup de grups finits.

La teoria desenvolupada per Nakayama de les K-àlgebres QF en els articles abans esmentats, demostra que aquestes tenen molt bones propietats dins de la teoria de representació d'àlgebres. La definició intrínseca dels anells QF permet demostrar algunes d'aquestes propietats de manera abstracta pels anells. Sembla ser que el primer que va observar aquesta propietat del doble anul.lador va se Hall [42], per anells artinians semisimples. El lector pot consultar el llibre de Curtis i Reiner [20, pàg. 393 i 413] per tenir una informació complerta del tema.

L'any 1940 a [5], Baer introduèix els mòduls injectius i l'any 1951 Ikeda a [46], caracteritza els anells QF de Nakayama com els anells artinians autoinjectius[1].

Resultats de l'any 1946 de Nesbitt i Thrall, cf. [62], mostran que els anells QF són exemples d'anells tals que tots els seus mòduls finitament generats fidels són generadors i per tant són exemples dels anells introduïts per Azumaya que esmentàvem abans. Aquest fet motiva que posteriorment s'hagi anomenat a aquest anell pseudo-Frobenius (PF).

El primer exemple d'un anell PF que no és QF és degut a Osofsky i apareix en l'article de l'any 1966 [63]. Els resultats dels articles d'Azumaya i Osofsky ja esmentats, i els de Utumi [78], permeten donar una caracterització dels anells PF per la dreta, com anells autoinjectius per la dreta amb sòcol per la dreta essencial. Malgrat aquesta caracterització, saber si un anell PF per un costat

[1] La caracterització de Ikeda és la que farem servir a la memòria com a definició d'anell QF

ho era també per l'altre va ser qüestió oberta durant un llarg temps. Dischinger i Müller l'any 1986, a [24] donan el primer exemple d'un anell PF per la dreta que no ho és per l'esquerra. Queda oberta però la qüestió de saber quan lluny està un anell PF o en general un anell autoinjectiu de ser QF. El lector pot consultar els survey de Faith [32] per obtenir una informació detallada sobre aquesta qüestió i els resultats més importants fins ara obtinguts.

L'any 1967 Endo, cf. [], considera anells tals que tots els seus mòduls per la dreta finitament generats fidels són generadors. Més tard l'any 1969 a [], Tachikawa prova que un anell perfecte per l'esquerra que satisfà aquesta propietat és PF per la dreta. Hi han despres més treballs que de manera implícita o explícita treballan amb anells que satisfan aquesta propietat, però és Faith qui els hi dóna identitat pròpia i els anomena anells "finitely pseudo-Frobenius" (FPF). Ademés dels anells PF, són exemples d'anells FPF els productes arbitraris d'anells commutatius d'aquest tipus, anells commutatius injectius els dominis de Prüfer entre altres. Un teorema de Faith demostra que els anells FPF semiprimers commutatius són precisament els anells semihereditaris amb clàssic de quocients injectiu.

El contingut de la memòries es situa dins del contexte dels anells FPF i ha sigut motivat per diversos problemes dins de l'entorn d'aquesta àrea.

Una part del primer capítol està dedicat a l'estudi dels anells FPF semiprimers. Dins s'aquesta línes apart dels resultats recollits a [33], cal esmentar els articles de Burgess i Kobayashi, referències [11] i [52] respectivament. Burgess demostra que els anells FPF per la dreta semiprimers tenen clàssic de quocients per l'esquerra injectiu, aquest resultat serveix a Kobayashi per donar una caracterització dels anells FPF per la dreta semiprimers en termes de propietats de l'anell i del seu maximal de quocients. Aquesta caracterització ens servirà per mostrar que els anells FPF semiprimers en general no tenen perqué ser semihereditaris, la qual cosa dóna resposta negativa a una pregunta de Faith i Page, cf. [33, Question 11].

Tant Burgess com Kobayashi inicían un estudi "local" dels anells FPF per la dreta semiprimers, mitjançant l'àlgebra de Boole associada a l'anell. En el primer capítol estudiarem aquest problema i veurem que malgrat que els anells FPF semiprimers tenen una gran quantitat d'idempotents centrals les stalks de Pierce d'anells FPF no tenen perqué ser FPF, contestem així també negativament una pregunta de Burgess, cf. [11, pàg 1731].

Si R és un anell PF i G un grup finit aleshores RG també és PF. Un resultat de Faith demostra que si R és un anell commutatiu injectiu (en particular FPF) i G un grup finit aleshores RG és FPF. També en el primer capítol veurem que aquest resultat s'esten a anells FPF commutatius i a un grup finit G amb ordre invertible dins de l'anell. Val a dir que despres Kitamura a [51], dóna una nova demostració del nostre resultat que l'unifica amb resultats de Page sobre àlgebres d'Azumaya FPF.

El segón capítol el dediquem a l'estudi de subanells de Galois i centres d'anells FPF. A[33] Faith i Page prguntatn si el centre d'un anells FPF és necessàriament FPF. Una resposta negativa a aquesta pregunta està implícita a [], on ???? construeixen exemples anells QF tals que el centre no ho és. Seguint les idees d'aquest article donem exemples que demostran que l'anell fix d'un anell FPF no té perque heretar aquesta propietat. Un resultat positiu en aquesta direcció és que si R és un anell FPF commutatiu reduït i G un subgrup finit dels automorfismes de R aleshores l'anells fix és també FPF. Els nostres exemples ilustran i limitan el camp a possibles generalitzacions d'aquest resultat.

Per anells FPF semiprimers, fent ús de métodes deguts a Bergman i Cohn, cf [, Section 6.2] o [7], podem demostrar que tot domini commutatiu íntegrament tancat es pot posar com a centre d'un domini de Bezout FPF. En general demostrarem que el centre d'un anell FPF semiprimer és íntegrament tancat dins del seu maximal de quocients, per tant els nostres resultats caracteritzan els centres d'anells FPF primers.

A [6], Bergman esten les construccions que ja hem esmentat de [7] a anells semiprimers, conseguint d'aquesta manera caracteritzar els centres d'anells hereditaris i semihereditaris. Això ens va fer pensar que fàcilment podriem estendre les nostres construccions d'anells FPF primers amb centres prefixats a anells semiprimers, i així podriem caracteritzar els centres dels anells FPF semiprimers com els anells commutatiu reduïts integrament tancats al seu maximal de quocients. Un resultat positiu en aquesta direcció és comprovar que la definició de Bergman dóna a [6] d'una valoració sobre un anell commutatiu, ens permet veure fàcilment els anells commutatiu reduïts integrament tancats dins del seu maximal de quocients com intersecció d'anells de valoració del maximal de quocients. Però la construcció d'anells FPF semiprimers implica la construcció d'anells amb clàssic de quocients injectiu i els métodes de Bergman i Cohn estan basats en construir l'anell de Kronecker a partir de les valoracions que determinan l'anell commutatiu C inicial. Això implica adjuntar a C una colla d'indeterminades i en el nostre cas ho hem de fer de manera que aconseguim un anell amb clàssic de quocients injectiu. En general s'ens planteja la qüestió de com, donat un anell comutatiu C, podem construir un anell R tal que $C[x] \subseteq R$ i l'anell clàssic de quocients de R sigui injectiu. Trobar una resposta a aquesta qüestió ha sigut una de les motivacions principals al llarg de la resta de la memòria.

Pillay, cf. [69], va provar que l'anell clàssic de quocients per l'esquerra d'un anell R és QF si i només si l'anell de polinomis $R[x]$ també té classic de quocients QF si i només si per qualsevol conjunt X l'anell clàssic de quocient de $R[X]$ és QF. En el tercer capítol de la memòria veurem que en molts casos a l'imposar condicions d'injectivitat sobre $Q^l_{cl}(R[X])$, ja implica que aquest anell té que ser artinià. Els nostres resultats en aquest sentit són plenament satisfactoris en el cas de un conjunt infinit X. Podem demostrar en aquest cas que que el fet de que $Q^l_{cl}(R[X])$ sigui injectiu per la dreta o per l'esquerra és equivalent a que R tingui clàssic de quocients per l'esquerra QF. Si suposem que X és un conjunt no buit arbitrari, per arribar a la mateixa conclusió tenim que suposar que $Q^l_{cl}(R[X])$ és autoinjectiu pels dos costats. En la mateixa línea també provarem que $Q^l_{cl}(R[X])$ és injectiu com a $R[X]$-mòdul per la dreta si i només si R té classic de quocients pels dos costats i aquest és QF. Aquests resultats ens permeten caracteritzar els anells diferents de zero, commutatius o semiprimers, tals que l'anell de polinomis és FPF com els anells artinians semisimples.

Una pregunta implícita en aquesta mena de resultats és saber si l'existencia de l'anell clàssic de quocients de R implica l'existencia de l'anell clàssic de quocients de l'anell de polinomis. No coneixem cap resultat que confirmi, ni que desmenteixi aquest fet de manera general. Tampoc és clar que l'existencia del clàssic de quocients de l'anell de polinomis impliqui l'existencia del clàssic de quocients de R.

Els resultats que hem esmentat de Small, Shock i Pillay, que dónen resposta afirmativa a aquestes qüestions en alguns casos, són resultats obtinguts a partir de l'estructura de l'anell i de l'anell de polinomis. En aquesta línea provarem que si $R[x]$ té clàssic de quocients per l'esquerra semilocal i és satisfà que $J(Q^l_{cl}(R[x])) \cap R[x] = I[x]$, per un cert ideal I de R, aleshores el clàssic de quocients per l'esquerra de R existeix i és semilocal. De fet aquest resultat és una fàcil generalització de les tècniques de Small per ordres en anells artinians semisimples, que gràcies a la condició que imposem sobre el radical de Jacobson estenen a anells semilocals.

Ès un resultat d'Amitsur ben conegut , cf. [1], que el radical de Jacobson de l'anell de polinomis és de la forma $N[x]$ on N és un nilideal de R. Provarem que aquesta situació, en molts casos, s'esten a l'anell clàssic de quocients de l'anell de polinomis.Veurem que si R és un anell commutatiu o $2^{-1} \in Q^l_{cl}(R[x])$ o $Z(R)$ conté una arrell senar de l'unitat, aleshores $J(Q^l_{cl}(R[x])) \cap R[x] = I[x]$. Per tant en aquests casos és cert el resultat d'ordres en anells semilocals del paràgraf anterior.

Els resultats de Capítol 3, sobre la injectivitat del clàssic de quocients de l'anell de polinomis, i les seves demostracions ens van fer pensar que els anells de sèries formals, sota condicions no tan restricictives com les que surten amb l'anell de polinomis, si prodrien tenir clàssic de quocients injectiu. En un principi pensàvem que pot ser si R era un anell amb clàssic de quocients injectiu aleshores $R[[x]]$també. Amb una certa sorpresa vam descobrir que això només era veritat a mitges. En el quart capítol explicarem aquests fets. Veurem que si R és un anell commutatiu, regular i autoinjectiu aleshores $R[\![x]\!]$ té classic de quocients injectiu, però també veurem exemples fàcils d'anells commutatius de Baer amb clàssic de quocients injectiu, tals que l'anell de sèries formals no és injectiu. De fet en aquest cas l'únic que podem provar és una condició de $\aleph_0$-injectivitat. No en tenim prou amb considerar sèries de longitud numerable per obtenir anells amb clàssic de quocients injectiu. Haurem de pensar en sèries formals de longitud més llarga, amb sèries de longitud tant o més llarga que la dimensió de Goldie de l'anell.

Anells de sèries formals amb longitud prefixada van ser considerats per Malcev i Neumann, cf. [67, pàg. ???], per posar àlgebres de grup sobre grups ordenats dins de cossos. També Kaplansky va construir exemples d'un cert tipus d'anells basant-se en aquests mètodes, cf. []. Exemples de Lévy de dominis de Bezout tals que els seus quocients són injectius, cf. [54], són anells de sèries formals amb longitud prefixada però més llarga del numerable.

Aquests treballs ens serveixen de model per construir anells de sèries prou llargues, perquè quan considerem aquestes sèries sobre un anell de Baer commutatiu, puguem provar que tenen clàssic de quocients injectiu. A partir d'aquest resultat és fàcil veure que el maximal de quocients de l'anell de polinomis sobre un anell de Baer commutatiu, es pot veure com el clàssic de quocients d'un subanell adequat d'aquests anells de sèries formals.

En el capítol quart també veurem algunes construccions d'anells FPF a partir d'anells de sèries formals. Aquestes construccions, juntament amb els resultats d'injectivitat haurien de ser l'ingredient principal en el problema de construir anells FPF semiprimers amb centre prefixat. Per poder realitzar aquesta construcció ens quedarà però una qüestió important per resoldre, com estendre les valoracions a aquests anells de sèries formals?.

Les tècniques que fem servir per treballar amb anells de sèries formals estan basades en un article de Brewer, Rutter i Watkins [10], els resultats del qual estan recollits al llibre de Brewer [9]. En l'article abans esmentat s'obté una caracterització dels anells de sèries formals (de longitud numerable) sobre anells commutatius, que són anells de Bezout o semihereditaris. En el capítol cinqué de la memòria estendrem aquests resultats a anells no necessàriament commutatius.

Si R és un anell commutatiu aleshores $R[x]$ és un anell semihereditari o Bezout si i només si R és regular. Per anells de séries formals la situació és una mica més complicada, $R[\![x]\!]$ és un anell de Bezout si i només si R és regular $\aleph_0$-injectiu i $R[\![x]\!]$ és semihereditari si i només si R és regular $\aleph_0$-injectiu i $\aleph_0$-continu. Per anells no necessàriament commutatius la situació és bastant més complicada. No és cert en general que l'anell de polinomis sobre un anell regular sigui un anell de Bezout o un anell semihereditari. De fet no és coneguda una caracterització dels anells tals que els anells de polinomis són anells de Bezout o anells semihereditaris. Es poden trobar resultats en aquesta direcció en treballs de Goursoud [], Menal [58], Moncasi i Goodearl [] i Dicks i Schofield [22].

En el capítol cinqué demostrarem que els anells de sèries formals sobre anells regulars $\aleph_0$-injectius per l'esquerra són anells de Bezout per la dreta. Aquest resultat contrasta amb la situació per l'anell de polinomis, ja que en aquest cas s'esten, al menys parcialment, el resultat del cas commutatiu. A l'intentar buscar un recíproc s'ha de tenir en compte que un anell R no commutatiu pot satisfer que $R \oplus R \cong R$, aleshores és clar que tant l'anell de polinomis com l'anell de sèries són anells de Bezout, sense cap necessitat de que l'anell compleixi alguna altra hipòtesi adicional, com ser regular o $\aleph_0$-injectiu. Aquest fet fa que per estudiar els anells de polinomis o de sèries formals que són Bezout calgui imposar alguna condició de finitut sobre l'anell, anàlogament a com fa Menal a [58] la condició de finitut que imposarem serà que l'anell sigui directament finit. Sota aquesta hipótesi podrem provar que si l'anell de sèries formals és un anell de Bezout per la dreta aleshores R és un anell regular, però no podrem provar que R sigui $\aleph_0$-injectiu més que afegint una hipótesi adicional relacionada amb les projeccions d'ideals contablement generats, hipótesi que es satisfà automàticament en anells regulars commutatius.

Amb aquests resultats ataquem el problema dels anells de sèries semihereditaris, i en aquest cas també podem provar que els anells de sèries formals sobre anells regulars $\aleph_0$-injectius per l'esquerra i $\aleph_0$-complets també per l'esquerra són semihereditaris per la dreta. Tornem a trobar doncs una altra vegada que els resultats del cas commutatiu s'estenen parcialment. Les dificultats ens apareisen a l'intentar provar un recíproc, en aquest sentit veurem que sobre un anell directament finit els anells de sèries formals són semihereditaris (pels dos costats) si i només si l'anell és regular $\aleph_0$-injectiu i $\aleph_0$-complet.

Acabem el cinqué capítol demostrant que els idempotents de l'anell de sèries formals són conjugats d'idempotents de l'anell. Aquest resultat és bastant sorprenent perqué si hom pensa amb els idempotents de l'anell de polinomis la situació és caótica. Però cal fer un parell de reflexions, la primera és que en un anell de sèries formals hi han moltes unitats i la segona és que els problemes que plantegem, en general implican la resolució de sistemes d'equacions sobre l'anell de coeficients. En el cas de polinomis aquestes solucions han de ser polinomis, és a dir han de ser sumes finites la qual cosa implica no sols trobar la solucició si no també trobar un cert n del grau de la solució, en realitat el que hom té no és un sol sistema si no un sistema per cada grau posssible de la solució i d'aquesta família de sistemes s'ha de decidir quin o quins són resolubles. En anells de sèries formals no apareix aquesta dificultat deguda al grau, es clar que es paga el preu d'estar treballant sempre amb sistemes infinits.

Finalment ens resta dir que els resultats dels capítols 1 i 2 de la memòria estan recollits a [44]. Els resultats de les seccions 1,3 i 4 del capítol tercer són part d'un treball fet conjuntament amb P. Pillay i es poden trobar a [45].

Agraïments

Per un moment vull deixar el tò seriòs i impersonal propi de les matemàtiques, per mostrar el meu agraïment a tanta gent que m'ha ajudat a que aquesta memòria arrives al seu final. En primer lloc a en Pere Menal, que no tan sols va exercir de director de tesi i va saber obrirme-me camins en el mon de les matemàtiques, si no que va ser també un bon amic, que va saber donar-me coratge i ànims en els moments difícils. També agraeixo a en Jaume Moncasi tota la dedicació, l'esforç i els suggeriments que ha fet per ajudar-me a acabar la memòria.

Vull agraïr molt especialment a Carl Faith l'interés demostrat pel meu treball i el proporcionar-me l'oportunitat de poder treballar conjuntament amb Poobhalan Pillay.

Gràcies també a tot l'equip de teoria d'anells de la Universitat Autónoma pel companyerisme i la paciència demostrada. També a tots els companys del departament que han sapigut donar-me coratge en els moments més tristos, i molt especialment a en Josep Maria Burgués per proporcionar-me el llibre de Brewer d'anells de sèries formals.

Notació i abreviacions

Sigui R un anell amb unitat, M un R mòdul per la dreta N un submòdul de M i G un grup.

$Q^r_{cl}(R)$	Anell clàssic de quocients de R per la dreta.
$Q^l_{cl}(R)$	Anell clàssic de quocients de R per l'esquerra.
$Q_{cl}(R)$	Anell clàssic de quocients de R pels dos costats.
$Q^r_{max}(R)$	Anell maximal de quocients de R per la dreta.
$Q^l_{max}(R)$	Anell maximal de quocients de R per l'esquerra.
$Q_{max}(R)$	Anell maximal de quocients R pels dos costats.
$M_n(R)$	Anell de les matrius $n \times n$ sobre R.
$mod - R$	Categoria dels R-mòduls per la dreta.
RG	Anell de grup.
$R * G$	Producte creuat.
$R[x]$	Anell de polinomis sobre la indeterminada x a coeficients a
$R[X]$	Anell de polinomis sobre el conjunt X a coeficients a R.
$R[\![x]\!]$	Anell de sèries formals en la indeterminada x a coeficients a
$R[\![x;\alpha]\!]$	Anell de sèries formals skew.
$J(R)$	Radical de Jacobson de l'anell R.
$Sing(M)$	Submòdul singular de M.
$Soc(M)$	Sòcol de M.
M^*	Homomorfismes de M a R.
$\mathrm{tr}(M)$	Ideal traça de M.
$Z(R)$	Centre de l'anell R.
$N \leq_e M)$	N és un submòdul essencial de M.
FPF	Finitely pseudo-Frobenius.
PF	Pseudo-Frobenius.
QF	Quasi-Frobenius.
M^I	Producte cartesià de M I vegades.
$M^{(I)}$	Suma directa de M I vegades.
$r_R(S)$	$\{r \in R \mid Sr = 0\}$.
$l_R(S)$	$\{r \in R \mid rS = 0\}$.
$(M : N)$	$\{r \in R \mid Mr \subseteq N\}$.
$\mathbb{N}$	Els naturals.
$\mathbb{Z}$	Els enters.
$\mathbb{Q}$	Els racionals.

Capítol 1.

Anells FPF

1.1. Mòduls generadors.

En aquesta secció introduïm el concepte de mòdul generador i algunes propietats bàsiques. Els resultats que presentem són ben coneguts i és poden trobar recollits als primers capítols de [33] o [34].

En aquest treball els anells que considerem són associatius i amb unitat. Si R és un anell, denotarem per mod-R la categoria de tots els R-mòduls per la dreta. Si M i N són dos R-mòduls per la dreta, direm que M *genera* N si N és imatge homomòrfica d'una suma directa de còpies de M. Direm que M és *generador de la categoria* mod-R o bé simplement *generador*, si M genera tots els R-mòduls dreta. Un exemple obvi de generador és el mateix anell R. Es clar que si M és un generador una condició necessària i suficient per a que N ho sigui és que N generi M.

Si denotem per M^* el mòdul dual de M, és a dir

$$M^* = \mathrm{Hom_R}(M, R)$$

podem considerar l'ideal $\mathrm{tr}_R(M)$ de R, anomenat *traça de* M:

$$\mathrm{tr}_R(M) = \sum_{f \in M^*} f(M)\,.$$

Per les remarques anteriors M és generador si i només i $\mathrm{tr}_R(M) = R$.

Resumim aquests fets en la següent Proposició:

PROPOSICIÓ 1.1. *Sigui R un anell i M un R-mòdul per la dreta. Aleshores les següents afirmacions són equivalents:*

(1) *M és un generador*
(2) *Existeix un R-mòdul dreta $\mathbf{X}$ i un enter $n \geq 1$ tal que $M^n \cong R \oplus \mathbf{X}$*
(3) $R = \mathrm{tr}_R(M)$
(4) *Existeixen $f_1, f_2, \ldots, f_n \in M^*$ i $m_1, m_2, \ldots, m_n \in M$ tals que*

$$\sum_{i=1}^{n} f_i(m_i) = 1.$$

∎

Si M és un R-mòdul per la dreta (esquerra) i S un subconjunt de M, denotarem l'*anul.lador* per la dreta (esquerra) de S com $r_R(S)$ ($l_R(S)$). Direm que M és *fidel* per la dreta (esquerra) si $r_R(M) = 0$ ($l_R(M) = 0$). Cal observar que si M és un generador aleshores en particular M ha de ser fidel.

Sigui M un R-mòdul per la dreta, considerem l'anell $H = \mathrm{End}(M_R)$. Aleshores M es pot veure com un H-mòdul per l'esquerra. Tenim definida de manera natural l'aplicació

$$\begin{array}{rccc} \rho\colon & R & \longrightarrow & \mathrm{End}({}_HM) \\ & r & \longmapsto & \hat{r} \end{array}$$

on $(m)\hat{r} = m \cdot r$ per qualsevol element m de M.

TEOREMA 1.2 (MORITA). *Sigui R un anell i M un R-mòdul per la dreta. Aleshores M és generador si i només si satisfà les dues condicions següents:*

(1) *M és projectiu finitament generat com a H-mòdul per l'esquerra.*
(2) *ρ és isomorfisme d'anells.*

DEMOSTRACIÓ: Suposem que M és generador. Aleshores per l'apartat (2) de la Proposició 1.1 $M^n \cong R \oplus N$, per tant

$$\mathrm{Hom}(M_R^n, M_R) \cong \mathrm{Hom}(R, M) \oplus \mathrm{Hom}(R, N)$$

i tenim

$$H^n = {}_HM \oplus {}_HN\,,$$

podem concloure doncs que M és finitament generat i projectiu com a H-mòdul esquerra.

Si M és generador aleshores és fidel i per tant ρ és injectiva. Per l'apartat (4) de la Proposició 1.1

$$\sum_{i=1}^{n} f_i(m_i) = 1$$

per certs $m_1, \ldots, m_n \in M$, $f_1, \ldots, f_n \in M^*$, aleshores si $m \in M$ tenim

$$m = \sum_{i=1}^{n} m f_i(m_i)\,.$$

Per qualsevol i, m_i és un element de H, en conseqüència si $f \in \mathrm{End}({}_HM)$.

$$f(m) = \sum_{i=1}^{n} m f_i \cdot f(m_i) = m \sum_{i=1}^{n} f_i(f(m_i)) = mr$$

on $r = \sum_{i=1}^{n} f_i(f(m_i)) \in R$. Per tant ρ és també exhaustiva.

Suposem ara que M satisfà (i) i (ii). Per (i) tenim que existeix un enter n tal que $H^n = {}_HM \oplus {}_HN$, per tant

$$\mathrm{Hom}({}_HH^n, {}_HM) = \mathrm{Hom}({}_HM, {}_HM) \oplus \mathrm{Hom}({}_HN, {}_HM)$$

Si apliquem (ii) obtenim la descomposició de R-mòduls per la dreta:

$$M^n \cong R \oplus \mathrm{Hom}({}_HN, {}_HM)$$

i per l'apartat (2) de la Proposició 1.1 podem concloure que M és generador. ∎

LEMA 1.3. *Sigui R un anell commutatiu i M un R-mòdul fidel finitament generat. Si I és un ideal de R tal que $MI = M$ aleshores $I = R$.*

DEMOSTRACIÓ: Siguin $m_1, \dots, m_n$ els generadors de M. Si $MI = M$ tenim que existeix un element $A \in M_n(I)$ tal que

$$(1_n - A)\begin{pmatrix} m_1 \\ \vdots \\ m_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

on 1_n denota la matriu identitat $n \times n$.

Multiplicant per la matriu adjunta de $1_n - A$, obtenim que per qualsevol i, $i = 1, \dots, n$, $\det(1_n - A)m_i = 0$, on $\det(1_n - A)$ denota el determinant de la matriu $1_n - A$. Com que M és fidel $\det(1_n - A) = 0$, però $\det(I - A) = 1 - r$ per un cert $r \in I$, per tant $I = R$. ∎

COROL.LARI 1.4. *Sigui R un anell commutatiu i N un R-mòdul fidel finitament generat. Aleshores N genera els mòduls simples.*

DEMOSTRACIÓ: Sigui M un ideal maximal de R. Pel Lema 1.3 el R/M-mòdul M/MN és diferent de zero. Per tant N/MN genera R/M i aleshores N genera R/M. ∎

COROL.LARI 1.5 (TEOREMA D'AZUMAYA). *Sigui R un anell commutatiu i P un mòdul projectiu fidel finitament generat. Aleshores P és un generador.*

DEMOSTRACIÓ: Si P és un mòdul projectiu és clar $P\mathrm{tr}_R(P) = P$. Pel Lema 1.3 $\mathrm{tr}_R(P) = R$ i per tant per la Proposició 1.1 P és generador. ∎

És ben conegut que el Teorema d'Azumaya no s'esten a anells no commutatius. Per exemple, si K és un cos, podem considerar la K-àlgebra $R = K\langle x, e | e^2 = e\rangle$.

Aleshores és clar que $P = eR$ és un mòdul projectiu finitament generat fidel però $\mathrm{tr}_R(R) = ReR \neq R$.

En el capítol 2 veurem la conclusió del Teorema d'Azumaya és certa quan considerem ideals projectius generats per elements centrals.

Si R és un anell i I és un ideal bilàter de R, anomenem π a la projecció natural:

$$\pi: R \longrightarrow R/I$$

LEMA 1.6. *Sigui R un anell. Si P és un mòdul projectiu per la dreta i I un ideal bilàter contingut a $r_R(P)$. Aleshores $\mathrm{tr}_{R/I}(P) = \pi(\mathrm{tr}_R(P))$.*

DEMOSTRACIÓ: És clar que $\pi(\mathrm{tr}_R(P)) \subseteq \mathrm{tr}_{R/I}(P)$. Suposem que tenim

$$f: P \to R/I.$$

Aleshores com que P és projectiu existeix $\hat{f}: P \to R$, tal que $\pi \circ \hat{f} = f$. Per tant $\mathrm{tr}_{R/I}(P) \subseteq \pi(\mathrm{tr}_R(P))$, tal com volíem veure. ∎

En general per un anell commutatiu R tenim que la traça d'un mòdul projectiu finitament generat és un sumand directe de R.

COROL.LARI 1.7. *Sigui R un anell commutatiu i P un mòdul projectiu finitament generat. Aleshores $R = \mathrm{tr}_R(P) \oplus r(P)$.*

DEMOSTRACIÓ: Pel Teorema d'Azumaya (Corol.lari 1.5), tenim que

$$\mathrm{tr}_{R/r(P)}(P) = R/r(P).$$

Per tant pel Lema 1.6 $R = \mathrm{tr}_R(P) + r(P)$. Això implica que $\mathrm{tr}_R(P) \cap r(P) = \mathrm{tr}_R(P) \cdot r(P) = 0$ i per tant $R = \mathrm{tr}_R(P) \oplus r(P)$. ∎

El Teorema d'Azumaya té un recíproc parcial, en el sentit que si R és un anell commutatiu aleshores els ideals finitament generats que són generadors són també projectius. Enunciarem aquest resultat en un contexte una mica més general per un anell R no necessàriament commutatiu i ideals generats per elements del centre de R.

PROPOSICIÓ 1.8. *Sigui R un anell i I un ideal finitament generat per elements del centre de R. Si I és generador com a R-mòdul dreta aleshores és projectiu com a R-mòdul dreta.*

DEMOSTRACIÓ: Pel la Proposició 1.1 i per estar I generat per elements centrals $r_1, \ldots, r_n$, existeixen elements $f_1, \ldots, f_n \in I^*$ tals que $f_1(x_1)+\ldots+f_n(x_n) = 1$. Aleshores per qualsevol $r \in I$, $r = r_1 f_1(r)+\ldots+r_n f_n(r)$. Per tant I és projectiu per la dreta. ∎

En el capítol 2 veurem que de fet aquest resultat també és cert sense tenir que suposar I finitament generat.

1.2. Mòduls generadors i cancel.lació de potències.

Sigui R un anell i M un R-mòdul per la dreta. Es diu que M *cancel.la de les sumes directes* si per a tots R-mòduls per la dreta A i B tals que $M \oplus A \cong M \oplus B$ aleshores $A \cong B$. Es diu que M satisfà cancel.lació de potències si $M \oplus A \cong M \oplus B$ implica $A^n \cong B^n$, per algun enter $n \geq 1$.

Goordearl a [39] va provar que si R és un anell commutatiu i M, A, B són R-mòduls projectius finitament generats, aleshores $M \oplus A \cong M \oplus B$ implica $A^n \cong B^n$ per algun enter $n \geq 1$. En aquesta secció donarem una demostració inèdita d'aquest resultat deguda a P. Menal que simplifica considerablement la de Goordearl.

La connexió entre la propietat de cancel.lació de potències i els mòduls generadors ve donada a través del següent lema que és una adaptació de P. Menal d'un argument degut a Blackadard [8].

LEMA 1.9 (BLACKADARD-MENAL). *Sigui R un anell, M un R-mòdul per la dreta projectiu $f \cdot g$. Siguin A i B mòduls per la dreta generadors de mod-R, tals que $M \oplus A \cong M \oplus B$, aleshores existeix un enter $n \geq 1$ tal que $A^n \cong B^n$.*

DEMOSTRACIÓ: Per ser A generador, sabem que existeix un morfisme exhaustiu $f \colon A^n \to M$, per un cert enter $n \geq 1$. Donat que M és projectiu, existeix un mòdul per la dreta X tal que $A^n \cong M \oplus X$. Si fem el mateix argument amb B tenim que existeix un enter $n \geq 1$ tal que:

$$A^n \cong M \oplus X \qquad \text{i} \qquad B^n \cong M \oplus Y$$

per un certs mòduls per la dreta X e Y. Per tant

$$A^n \oplus B \cong M \oplus X \oplus B \cong M \oplus X \oplus A \cong A^{n+1}$$

i de la mateixa manera $A \oplus B^n \cong B^{n+1}$. Podem concloure doncs que $A^{2n} \cong A^n \oplus B^n \cong B^{2n}$, tal com volíem veure. ∎

TEOREMA 1.10 (GOORDEARL [39]). *Sigui R un anell commutatiu i M, A, B R-mòduls projectius finitament generats, tals que $M \oplus A \cong M \oplus B$. Aleshores existeix un enter $n \geq 1$ tal que $A^n \cong B^n$.*

DEMOSTRACIÓ (P. MENAL): Suposem primer que A és un mòdul finitament generat projectiu tal que $M \oplus A \cong M$. Anem a veure que aleshores $A = 0$, i.e. M és directament finit. Si sumen un mòdul adequat, de fet tenim $R^n \oplus A \cong R^n$. Sigui φ l'isomorfisme de R^n a $R^n \oplus A$. Aleshores considerem

$$R^n \xrightarrow{\varphi} R^n \oplus A \xrightarrow{\pi} R^n$$

on π és la projecció natural. Aleshores $\pi \circ \varphi$ és un endomorfisme de R^n exhaustiu, com que R és commutatiu també és injectiu. Per tant $A = 0$.

Suposem que A i B són mòduls finitament generats projectius tals que $M \oplus A \cong M \oplus B$. Pel Corol.lari 1.7 existeixen dos idempotents de R, e i f tals que $r_R(A) = eR$ i $r_R(B) = fR$. Aleshores tenim:

$$\begin{aligned} (1-e)(1-f)M \oplus (1-e)(1-f)A &\cong (1-e)(1-f)M \oplus (1-e)(1-f)B \\ (1-e)fM \oplus (1-e)fA &\cong (1-e)fM \\ e(1-f)M &\cong e(1-f)M \oplus e(1-f)B \end{aligned}$$

pel que hem demostrat abans $(1-e)fA = 0$ i $e(1-f)B = 0$. Si considerem l'anell $(1-e)(1-f)R$ i apliquem el Teorema d'Azumaya, podem suposar sense perdre generalitat que A i B són generadors tals que $M \oplus A \cong M \oplus B$, aplicant ara el Lema 1.9, tenim que existeix un enter $n \geq 1$ tal que $A^n \cong B^n$. ∎

A partir de la demostració del Teorema i Lema anteriors, obtenim una cota superior del n tal que $A^n \cong B^n$. Si A és un mòdul generador, generat per r elements, M és projectiu i està generat per s elements, com que R és un anell commutatiu, per la Proposició 1.1 tenim:

$$A^{r \cdot s} \cong M \oplus X\,.$$

Per tant en la situació $M \oplus A \cong M \oplus B$, si r_1 és el número de generadors de A, r_2 el número de generadors de B i s el número de generadors de M. Agafem $r = \max(r_1, r_2)$ i tenim que

$$A^{2r \cdot s} \cong B^{2r \cdot s}.$$

1.3. Anells introduïts mitjançant la noció de mòdul generador.

Un anell R és diu que és *Pseudo-Frobenius* per la dreta (*PF* per la dreta) si tot R-mòdul per la dreta fidel és generador de la categoria mod-R. De manera similar es defineixen els anells PF per l'esquerra. Direm que un anell és PF si ho és pels costats.

Sigui M un R-mòdul per la dreta, aleshores es defineix el *sòcol de* M, que denotarem $(\mathrm{Soc}(M))$, com la suma de tots els submòduls simples de M. En el cas de l'anell R podem considerar un sòcol per la dreta i un per l'esquerra que denotarem com $\mathrm{Soc}_r(R)$ i $\mathrm{Soc}_l(R)$ respectivament.

Si M és un R-mòdul per la dreta, direm que un submòdul N és *essencial* dins de M i escriurem $N \leq {}_eM$, si tot submòdul diferent de zero de M té intersecció diferent de zero amb N.

Sigui R un anell i $J(R)$ el seu *radical de Jacobson*. R es diu que és *semiperfecte* si $R/J(R)$ és artinià semisimple i els idempotents pugen mòdul $J(R)$.

Els anells PF per la dreta es podem caracteritzar en termes de l'anell de la següent manera.

TEOREMA 1.11. *[30, 24.32 pàg.213] Sigui R un anell. Aleshores les següents afirmacions són equivalents.*

(1) *R és PF per la dreta.*
(2) *R és semiperfecte, autoinjectiu per la dreta i $\mathrm{Soc}_r(R)$ és essencial a R.* ∎

En particular tenim que un anell commutatiu R és PF si i només si és un producte finit d'anells locals autoinjectius R_i tals que cadascun satisfà

$$\mathrm{Soc}(R_i) \leq_e R_i \quad \text{i} \quad \mathrm{Soc}(R_i)^2 = 0\,.$$

Un altre tipus d'exemple d'anells PF són els anells quasi-Frobenius. Recordem que un anell és *quasi-Frobenius* (QF), si és artinià i autoinjectiu. Cal remarcar que QF és una propietat simètrica, de fet un anell artinià (per la dreta o per l'esquerra) i autoinjectiu (per la dreta o per l'esquerra) és QF.

Condicions de cadena més restrigindes que la de artinià també impliquen que un anell autoinjectiu sigui QF.

Un anell R és diu que satisfà *condició de cadena ascendent per anul.ladors per la dreta* si per qualsevol família numerable de subconjunts de R, $\{S_i\}_{i=0}^{\infty}$ tal que $r_R(S_i) \subseteq r_R(S_{i+1})$, existeix n tal que $r_R(S_n) = r_R(S_{n+k})$ per qualsevol $k > 0$. Similarment es defineix la condició de cadena ascendent per anul.ladors per l'esquerra.

TEOREMA 1.12. Faith, [77,Theorem XIV.3.5] *Sigui R un anell autoinjectiu per la dreta o per l'esquerra. Si R satisfà a més condició de cadena ascendent per anul.ladors per la dreta o per l'esquerra aleshores R és QF.* ∎

Altres tipus de condicions de cadena també impliquen que un anell autoinjectiu sigui QF. En el trebal de P. Ara i J.K. Park [3] i les seves referències es poden trobar resultats d'aquest estil.

Hem comentat ja que a través de la caracterització del Teorema 1.11 es pot veure que tot anell QF és PF pels dos costats. De fet el primer exemple d'un anell PF que no és QF és degut a Osofsky, cf. [63]. L'exemple d'Osofsky es pot emmarcar dins del següent esquema de construcció d'anells.

Sigui R un anell i M un bimòdul sobre R. Aleshores s'anomena *extensió trivial de R per M*, $E(R,M)$, a l'anell format per parelles (r,m), $r \in R$ i $m \in M$. On la suma està definida component a component i el producte

$$(r_1, m_1)(r_2, m_2) = (r_1r_2, r_1m_2 + m_1r_2)\,.$$

L'anell $E(R,M)$ es pot veure com l'anell de les matrius 2×2 de la forma $\begin{pmatrix} r & m \\ 0 & r \end{pmatrix}$ on $r \in R$ i $m \in M$. S'identifica R amb un subanell de $E(R,M)$ via la inclusió $r \to \begin{pmatrix} r & 0 \\ 0 & r \end{pmatrix}$ i el bimòdul M via $m \to \begin{pmatrix} 0 & m \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

TEOREMA 1.13. (Faith [27]) *Sigui R un anell local i sigui $M \neq 0$ un R bimòdul. Aleshores $E(R,M)$ és PF per la dreta si i només si*

(1) *M_R és l'envolcall injectiva de l'únic R-mòdul dreta simple.*
(2) $R \cong \operatorname{End} M_R$. ∎

L'exemple d'Osofsky [63], s'obtè agafant $R = \mathbb{Z}_p$ (els enters p-àdics) i $M = \mathbb{Z}(p^\infty)$, on $\mathbb{Z}_p$ actua sobre $\mathbb{Z}(p^\infty)$ de la manera natural. És conseqüència del teorema anterior que $E(R,M)$ és PF i en canvi no és QF.

Altres exemples d'anells PF que no són QF són deguts a Levy [54]. De fet els exemples de Levy eren per construir anells de Bezout no noetherians tals que els seus quocients són anells autoinjectius. Faith va fer notar a [27] que alguns d'aquests quocients són PF però no QF.

A [24] Dischinger i Müller donan el primer exemple d'un anell PF per l'esquerra que no ho és per la dreta. Aquest exemple també està basat en la tècnica de construir anells PF mitjançant extensions trivials.

Seguint a Carl Faith, cf. [34] ó [33], definim dins d'aquest context els anells FPF (*finitely pseudo-Frobenius*) per la dreta com els anell tals que tot mòdul finitament generat fidel és generador de la categoria mod-R. De manera similar és defineix FPF per l'esquerra. Direm que un anell és FPF si ho és per la dreta i per l'esquerra.

Exemples d'anells FPF per la dreta, són els anells PF per la dreta i els anells QF. Però els anells FPF formen una classe més amplia que els PF, tal com prova el següent resultat.

TEOREMA 1.14. ([34, Theorem 2.2]) *Si R és un anell commutatiu autoinjectiu aleshores R és FPF.*

DEMOSTRACIÓ: Sigui $M = \sum_{i=1}^{n} m_i R$ un R-mòdul finitament generat fidel. Podem definir l'aplicació,

$$\begin{array}{rccc} f\colon & R & \longrightarrow & M^n \\ & r & \longmapsto & (m_1, m_2, \ldots, m_n)^r \end{array}$$

f és un R-monomorfisme i com que R és injectiu tenim que $M^n = R \oplus X$ i per la Proposició 1.1, M és generador. ∎

Carl Faith va caracteritzar els anells FPF commutatius de la següent manera:

TEOREMA 1.15. (Faith, [34, pàg. 26]) *Si R és un anell commutatiu, R és FPF si i només satisfà:*

(1) *Els ideals finitament generats fidels són projectius.*
(2) *L'anell clàssic de quocients de R és autoinjectiu.* ∎

Un anell R es diu que és *semihereditari* per la dreta si tot submòdul finitament generat d'un mòdul per la dreta projectiu és projectiu, o equivalentment si tot ideal per la dreta finitament generat és projectiu. De manera anàloga es defineix semihereditari per l'esquerra. Direm que un anell és semihereditari si és semihereditari pels dos costats.

Recordem que un anell R es diu *semiprimer* si l'únic ideal de quadrat nul és el zero.

A partir del Teorema 1.15 és clar que els anells commutatius FPF semiprimers són precisament els anells semihereditaris amb clàssic de quocients injectiu.

1.4. Caracterització dels anells FPF semiprimers.

Seguint a Chatters i Hajarnavis [14] direm que un anell R és *acotat* per la dreta si tot ideal per la dreta essencial de R conté un ideal (bilàter), que és essencial com a ideal per la dreta. Volem remarcar que el terme acotat per la dreta també es fa servir al llibre de Faith i Page, [33], però amb un significat una mica diferent.

Si R és un anell denotarem per $Q^r_{max}(R)$ *l'anell maximal de quocients* per la dreta de R i per $Q^l_{max}(R)$ l'anell maximal de quocients per l'esquerra. Si aquests dos anells coincideixen aleshores seguirem la notació $Q_{max}(R)$. Per $Q^r_{cl}(R)$ denotarem *l'anell clàssic de quocient* per la dreta de R i per $Q^l_{cl}(R)$ l'anell clàssic de quocients per l'esquerra. Si el clàssic pels dos costats existeix aleshores el denoterem com $Q_{cl}(R)$. Per $\mathrm{Sing}(M)$ volem dir el *submòdul singular* del R-mòdul per la dreta M. En el cas d'un anell R denotarem per $\mathrm{Sing}_r(R)$ ($\mathrm{Sing}_l(R)$) el submòdul singular per la dreta (esquerra) de R.

Si R és un anell semiprimer FPF per la dreta, aleshores un teorema de Page [33,Theorem 3.12] diu:

(A) *$Q^r_{max}(R)$ és regular i llis com R-modul dreta i l'aplicació*

$$f\colon Q^r_{max}(R)\otimes_R Q^r_{max}(R)\longrightarrow Q^r_{max}(R)$$

definida com $f(r\otimes s)=rs$ és un isomorfisme d'anells.

Per [35, Theorem 5.17] (A) implica:

(A') *Tot R-mòdul dreta finitaments generat es pot incloure en un R-mòdul dreta lliure.*

La següent propietat d'un anell FPF per la dreta semiprimer és també ben coneguda:

(B) *R és acotat per la dreta*(cf. [11, Proposition 2.2], [48,Proposition 1]).

En general si R és un anell no singular per la dreta, per [52, Lemma 2], (B) implica:

(B') *Un R-mòdul per la dreta M és fidel si i només si $M/\mathrm{Sing}(M)$ és fidel.*

De la definició d'anell FPF per la dreta tenim:

(C) *Tot ideal dreta finitament generat fidel de R és un generador de* mod-R .

Primer donarem una caracterització dels anells FPF semiprimers, aquest resultat és degut a S. Kobayashi. La nostra prova és potser més simple que l'original.

TEOREMA 1.16. (Kobayashi, [52, Theorem 1]) *Sigui R un anell semiprimer. Aleshores R és FPF per la dreta si i només si R satisfà les condicions (A), (B) i (C).*

DEMOSTRACIÓ: Pel que hem dit anteriorment n'hi ha prou amb demostrar que si R és un anell semiprimer què satisfà (A),(B) i (C) aleshores R és FPF per la dreta.

Suposem que M és un R-mòdul per la dreta fidel i finitament generat. Com que $Q^r_{max}(R)$ és regular, R és no singular per la dreta i aplicant (B') podem suposar sense perdre generalitat que M és no singular. Aleshores per (A') existeix un R-monomorfisme $(\varphi_1, ..., \varphi_n): M \longrightarrow \bigoplus_1^n R$. Aquest indueix un epimorfisme $M^n \longrightarrow \bigoplus_{i=1}^n \varphi_i(M)$. Com que M és fidel, també ho és $\bigoplus_{i=1}^n \varphi_i(M)$. Per tant $\sum_{i=1}^n \varphi_i(M) \subseteq R$ és fidel. Ara per (C) $\sum_{i=1}^n \varphi_i(M)$ és un generador. Com que hi ha un epimorfisme $M^n \longrightarrow \sum_{i=1}^n \varphi_i(M)$ podem concloure que M és un generador. ∎

Gràcies a aquesta caracterització podem obtenir informació dels anells entre un anell FPF semiprimer R i $Q^r_{max}(R)$.

En general és una pregunta oberta si el maximal de quocients d'un anell FPF semiprimer coincideix amb el clàssic de quocients, cf. [33, Question 6]. Burgess va donar resposta afismativa a aquesta pregunta en el cas dels anells FPF per la dreta semiprimers.

TEOREMA 1.17. [11, Theorem 1.3] *Sigui R un anell FPF per la dreta semiprimer. Aleshores $Q^l_{cl}(R)$ existeix i coincidèix amb $Q^r_{max}(R)$.* ∎

LEMA 1.18. *Sigui R un anell semiprimer i siguin a i b elements de $Q^r_{max}(R)$. Si $aRb = 0$ aleshores $aQ^r_{max}(R)b = bQ^r_{max}(R)a = 0$.*

DEMOSTRACIÓ: N'hi ha prou amb provar que $bQ^r_{max}(R)a = 0$. Considerem l'ideal dreta de R, $I = bQ^r_{max}(R)aR \cap R$. Aleshores

$$I^2 \subseteq Q^r_{max}(R)aRbQ^r_{max}(R) = 0.$$

Per ser R semiprimer $I = 0$ i com que $R \leq_e Q^r_{max}(R)$ obtenim que

$$bQ^r_{max}(R)a = 0.$$

∎

LEMA 1.19. *Sigui R un anell semiprimer. Si R satisfà la condició (C) i té anell clàssic de quocients $Q_{cl}(R)$, aleshores tot anell S entre R i $Q_{cl}(R)$ satisfà (C).*

DEMOSTRACIÓ: Sigui I un ideal per la dreta fidel i finitament generat de S. Podem escollir un no divisor de zero b a R tal que $bI = \sum_{i=1}^m r_i S$ per $r_i \in R$ adequats. Si definim $J = \sum_{i=1}^m r_i R$, aleshores és clar que $JS \cong I$ com a S−mòdul dreta. Per tant aplicant el Lema 1.18 J és R− fidel. Per (C) existeix $n \geq 1$ i un R− epimorfisme $\varphi: J^n \longrightarrow R$. Com que $Q_{cl}(R)$ és R−llis per l'esquerra $J \otimes_R Q_{cl}(R) \cong JQ_{cl}(R)$. Per tant φ indueix un $Q_{cl}(R)$− epimorfisme $\bar{\varphi}: (JQ_{cl}(R))^n \longrightarrow Q_{cl}(R)$. Obviament $\bar{\varphi}(J^n) = R$ i per tant $\bar{\varphi}((JS)^n) = S$. Tenim doncs que $I \cong JS$ genera mod−S. Per tant S satisfà (C). ∎

COROLLARI 1.20. *Sigui R un anell semiprimer, d'Ore per la dreta i FPF per la dreta. Si S és un anell acotat per la dreta entre R i $Q^r_{max}(R)$ aleshores S és FPF per la dreta.*

DEMOSTRACIÓ: Pel Teorema 1.17 $Q^r_{max}(R)$ és l'anell clàssic de quocients de R. Ara si combinem el Teorema 1.16 i el Lema 1.19 obtenim el resultat que volem. ∎

És una pregunta oberta si els anells FPF per la dreta semiprimers són també FPF per l'esquerra, cf. [33, Question 5]. Una resposta a aquesta pregunta en el cas no necessàriament semiprimer està implicita en l'exemple de Dischinger i Muller, cf [24] d'un anell PF per un costat que no ho és per l'altre.

Un exemple pel cas semiprimer podria passar per trobar un anell FPF per la dreta que no fós acotat per l'esquerra. Si pensem en dominis de Bezout la propietat de ser acotat és equivalent a ser FPF tal com prova el següent resultat, ara immediat a partit de Teorema 1.16.

TEOREMA 1.21. [33, Theorem 4.13] *Un domini de Bezout és FPF per la dreta si i només si és acotat per la dreta.* ∎

Lenagan va provar a [53] que un anell Noetherià primer semihereditari és o bé acotat pels dos costats o bé primitiu pels dos costat. En particular tenim que no és possible trobar un domini d'ideals principals acotat per un costat i per l'altre no. Jategaonkar a [47] dóna un exemple d'un domini d'ideals principals per la dreta que és acotat per la dreta i no per l'esquerra. Aquest exemple però, no és FPF per la dreta perque no té classic de quocients per l'esquerra, fet que contradiu el Teorema 1.17.

Per altra banda Cohn a [18] estudia els dominis de Bezout que són principals per un costat. Dels seus resultats es despren que aquests anells també són o bé acotats pels dos costats o be primitius pels dos costats. Queda però pendent la pregunta de si en un domini de Bezout també es torna a repetir la mateixa situació o bé pot ser que sigui només acotat per un costat.

1.5. Els anells FPF semiprimers en general no són semihereditaris.

Hem vist a la Secció 3 que els anells FPF semiprimers commutatius eren semihereditaris. Aquesta era una qüestió oberta en el cas no commutatiu, cf. [33, Question 11]. En aquesta secció la respondrem negativament donant un exemple d'un anell FPF semiprimer que no és semihereditari. El següent resultat serà l'ingredient més important per obtenir un tal contraexemple.

PROPOSICIÓ 1.22. *Sigui T un subanell d'un anell S i sigui R el subanell de $\prod_{\mathbb{N}} S$ de les successions (x_n) tal que $x_n \in T$ per tot $n \in \mathbb{N}$ llevat d'un nombre finit. En aquesta situació tenim:*

(i) *Si R és semihereditari aleshores també ho és T.*
(ii) *Suposem que T satisfà:*
(1) $S = Q_{max}(T) = Q_{cl}(T)$ i S és regular autoinjectiu amb índex de nilpotència acotat.
(2) Existeix una funció $f\colon \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$, tal que per tot ideal per la dreta fidel I de T generat per m elements, T és sumand directe de $I^{f(m)}$.
Aleshores R és FPF per la dreta.

DEMOSTRACIÓ: (i) Suposem que R és semihereditari per la dreta. Per l'equivalència de categories estàndard entre mod-T i mod-$M_n(T)$, per veure que T és semihereditari per la dreta, n'hi ha prou amb provar que qualsevol element $a \in T$ té l'anul.lador per la dreta generat per un idempotent de T. Com que R és semihereditari per la dreta $r_R((a)) = (e_n)R$ on $e_n^2 = e_n \in S$ per $n \geq 1$. Per definició de R, existeix $r \geq 1$ amb $e_r \in T$. Aleshores és clar que $r_T(a) = e_rT$.

(ii) Per (1) S és regular. Per tant R és semiprimer. Si demostrem que R satisfà (A), (B) i (C) del Teorema 1.16, ja tindrem el resultat que volem. Observem que (1) implica que $Q(R) = Q_{cl}(R) = \prod_{\mathbb{N}} S$ i com que $R \hookrightarrow Q_{cl}(R)$ és clarament un epimorfisme llis, (A) es compleix.

Per provar (B) considerem I un ideal per la dreta essencial de R. Escrivim per cada $n \geq 1$, $e_n = (0, \cdots, {}^{(n}1, 0, \cdots) \in R$. Aleshores e_nI és un ideal dreta essencial de $e_nR \cong S$. Com que S és regular autoinjectiu amb índex de nilpotència acotat, existeix un ideal bilàter J_n de e_nR contingut a e_nI el qual és essencial com a ideal dreta, cf. [37, Lemma 6.20]. Posem $J = \bigoplus_{n\geq 1} J_n$. Es clar que J és un ideal contingut a I i essencial com a ideal dreta.

De (2) és clar que $\prod_{\mathbb{N}} T$ és un anell que satisfà (C). Aplicant el Lema 1.19 podem concloure R satisfa (C). Això completa la prova de la proposició. ∎

Sigui k un cos de caractrística zero. Aleshores $A_n(k)$ denota la n-èssima *àlgebra de Weyl* és a dir, la k-àlgebra amb $2n$ generadors $x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n$ i relacions

$$x_iy_j - y_jx_i = \delta_{ij},$$

on δ_{ij} denota la delta de Kronecker, i

$$x_ix_j - x_jx_i = y_iy_j - y_jy_i = 0.$$

Es pot fer una descripció alternativa de $A_n(k)$ en termes de polinomis skew iterats. Si diem $R = k[x_1, \ldots, x_n]$, i considerem la successió d'anells

$$R_0 = R, \quad R_{i+1} = R_i \left[y_{i+1}; \frac{\partial}{\partial x_{i+1}} \right].$$

Aleshores $A_n(k) \cong R_n$.

Els següents fets sobre l'algebra de Weyl són ben coneguts, el lector pot consultar [57] per trobar la seva demostració.

TEOREMA 1.23.

(1) *$A_n(k)$ és un domini d'integritat Noetherià simple.*
(2) *La dimensió global per la dreta i la dimensió de Krull de $A_n(k)$ és n.*

∎

Direm que un anell R és *reduït* si no conté elements nilpotents.

EXEMPLE 1.24. *Existeix un anell reduït FPF que no és semihereditari.*

DEMOSTRACIÓ: Escollim T un domini noetherià simple amb dimensiò de Krull finita n i no semihereditari (per exemple, $A_n(K)$ l'àlgebra de Weyl d'ordre $n > 1$ sobre un cos K de característica 0). Per un teorema de Stafford [75, Theorem 4.3] tot ideal dreta I de T diferent de zero compleix que I^{n+2} conté un sumand directe isomorf a T. Sigui S el cos de fraccions de T i definim R com a la Proposició 1.22. Clarament T satisfà (1),(2) de la part (ii) de la proposició, per tant R és FPF per la dreta. Per la part (i) de la mateixa proposició, R no és semihereditari. ∎

1.6. L'àlgebra dels idempotents centrals d'un anell *FPF* semiprimer.

Per un anell R, sigui $B(R)$ el conjunt dels idempotents centrals de R. És ben conegut que $B(R)$ té estructura d'àlgebra de Boole amb les operacions

$$e \vee f = e + f - ef$$

$$e \wedge f = ef$$

on e i f denotan dos elements de $B(R)$.

Sigui M un R-mòdul per la dreta i N un submòdul de M. Si S és un subconjunt de M definim el *transportador* de S a N com $(N : S) = \{r \in R \mid Sr \subseteq N\}$.

PROPOSICIÓ 1.25. *Sigui Q un anell i R un subanell tal que:*

(1) *$i \colon R \hookrightarrow Q$ és un epimorfisme d'anells i Q_R és llis.*
(2) *Tot ideal dreta de R finitament generat i fidel és generador.*

Aleshores $B(Q) = B(R)$.

DEMOSTRACIÓ: Sigui $e \in B(Q)$. Per la caracterització de [77, Theorem XI.2.1] dels epimorfismes llisos, existeixen elements $r_1, \ldots, r_n$ de $(R : e)$ i $q_1, \ldots, q_n \in Q$ tals que $\sum_{i=1}^{n} q_i r_i = 1$. Igualment podem trobar elements $r'_1, \ldots, r'_n$ de $(R : (1-e))$ i $q'_1, \ldots, q'_n \in Q$ tals que $\sum_{i=1}^{n} q'_i r'_i = 1$.

Tindrem doncs que $\sum_{i=1}^{n} q_i e r_i + \sum_{i=1}^{n} q'_i (1-e) r'_i = 1$. Si considerem l'ideal dreta de R, $I = \sum_{i=1}^{n} e r_i R + \sum_{i=1}^{n} (1-e) r'_i R$ és fidel i finitament generat, per tant generador. Si $f \in I^*$, fent servir l'isomorfisme

$$Hom_Q(I \otimes_R Q, Q) \cong Hom_R(I, Q)$$

tenim que $ef(s \otimes 1) = f(s \otimes e) = f(es \otimes 1)$. Pert tant

$$eR = e\mathrm{tr}_R(I) = \mathrm{tr}_R(eI) \subseteq R$$

podem concloure doncs que $e \in R$. Això demostra que $B(Q) \subseteq B(R)$, però com que $R \hookrightarrow Q$ és un epimorfisme d'anells el centre de R està dins del centre de Q i per tant $B(R) = B(Q)$. ∎

LEMA 1.26. (Contingut a [33, Theorem 3.3(demostració)]) *Sigui R un anell semiprimer tal que el seu maximal de quocients per la dreta $Q^r_{max}(R)$, és un anell regular i tal que $B(R) = B(Q^r_{max}(R))$.*

(1) *Aleshores si I és un ideal de R, $r_R(I)$ està generat per un idempotent central.*
(2) *Si a més R satisfà que els ideals per la dreta fidels finitament generats són generadors, aleshores per tot ideal per la dreta I finitament generat de R tenim que $\mathrm{tr}_R(I) \oplus r_R(I) = R$.*

DEMOSTRACIÓ: Com que $Q^r_{max}(R)$ és un anell regular R és no singular, i per tant $Q^r_{max}(R)$ és regular i autoinjectiu. Sigui I un ideal de R, per la remarca anterior, $IQ^r_{max}(R) \leq_e (1-e)Q^r_{max}(R)$ per algun idempotent e de Q. Això implica que $eR(1-e) = 0$. Pel Lema 1.18 e és central dins de $Q^r_{max}(R)$, per hipòtesi $e \in R$. Per tant $eR \subseteq r_R(I)$. Altra vegada pel Lema 1.18 tenim que $IQ^r_{max}(R) r_R(I) = 0$, per tant $r_R(I) = r_{Q^r_{max}(R)}(IQ^r_{max}(R)) \cap R$. Com que $Q^r_{max}(R)$ és no singular

$$r_{Q^r_{max}(R)}(IQ^r_{max}(R)) = r_{Q^r_{max}(R)}((1-e)Q^r_{max}(R)) = eQ^r_{max}(R),$$

per tant tenim $r_R(I) = eQ^r_{max}(R) \cap R = eR$.

Per provar la part (2) considrem I un ideal finitament generat de R, aleshores per l'apartat anterior, $r_R(I) = eR$ per un cert e de $B(R)$. L'ideal $I + eR$ és generador, per la Proposició 1.1, $\mathrm{tr}_R(I + eR) = R$, en conseqüència

$$\mathrm{tr}_R(I) = \mathrm{tr}_R((1-e)I) = (1-e)R,$$

tal com volíem veure. ∎

Les conclusions dels resultats anteriors d'aquesta secció, pel Teorema 1.16, són certes per anells FPF semiprimers i de fet en aquest cas ja són ben coneguts, cf.[33, Proposition 2.2]. Però les demostracions que hem donat són diferents de les que allà apareixen.

Per cada $x \in \mathrm{Spec}B(R)$, es a dir per cada ideal maximal x de l'àlgebra de Boole $B(R)$, $R_x = R/xR$ es diu una *stalk* of R. Si donem a $\mathrm{Spec}B(R)$ la topología de Zariski i definim l'aplicació

$$f\colon \bigcup_{x\in\mathrm{Spec}(B(R))} R_x \longrightarrow \mathrm{Spec}(B(R))$$

definida per $f(r_x) = x$, per $r_x \in R_x$. Si considerem sobre

$$\bigcup_{x\in\mathrm{Spec}(B(R))} R_x$$

la topología més grollera que que fa de f un homeomorfisme local tenim un feix d'anells, anomenat *Feix de Pierce.*

Si R és un anell semiprimer i sota certes condicions que asseguran l'existencia de suficients idempotents centrals, R és isomorf a l'anell de les seccions globals del feix, és a dir a l'anell de funcions contínues de $\mathrm{Spec}(B(R))$ a $\bigcup_{x\in\mathrm{Spec}(B(R))} R_x$. El lector pot consultar [68] o [12] per completar la informació sobre els feixos de Pierce.

En general els feixos de Pierce poden ser una eina útil per passar informació sobre les stalks de l'anell al propi anell i al revés. És ben conegut que per un anell semihereditari commutatiu R les stalks R_x són dominis de Prüfer , és a dir dominis semihereditaris. Per tant les stalks d'anells FPF semiprimers commutatius són de fet, FPF. El següent exemple demostra que això no és cert en el cas no commutatiu, malgrat que els resultats anteriors demostraven que els anells FPF semiprimers tenen una gran quantitat d'idempotents centrals. Aquest exemple contesta negativament la pregunta de Burgess [11, pàg. 1731], sobre si les stalks d'anells FPF semiprimers tenen que ser o no FPF.

EXEMPLE 1.27. *Existeix un anell FPF reduït amb una stalk que no és FPF.*

DEMOSTRACIÓ: Sigui T un domini d'Ore simple (que no sigui un cos) i que satisfà (2) de la Proposició 1.22 (ii). Sigui S el cos de fraccions de T. Definim R com a la Proposició 1.22, per tant R és FPF. Sigui $x \in \mathrm{Spec}B(R)$ tal que $\bigoplus_{n\geq 1} S \subseteq xR$. Afirmem que R_x no és acotat i aleshores pel Teorema 1.16 (B) R_x no pot ser FPF. Tenim que

$$R_x \cong (\prod_{\mathbb{N}} T)/x(\prod_{\mathbb{N}} T) = (\prod_{\mathbb{N}} T)_x.$$

Per tant sense perdre generalitat podem suposar que $R = \prod_{\mathbb{N}} T$. Escollim $y_n \in T - \{0\}$ tal que $y_n T \neq T$ per tot $n \geq 1$. Posem $y = (y_n) \in R$ i considerem $\overline{y} = y + xR \in R_x$. Clarament $\overline{y} \neq 0$. Per altra banda R_x és un domini d'Ore per tant tot ideal diferent de zero és essencial. Ara provarem que $\overline{y}R_x$ no conté ideals diferents de zero. Suposem que $a = (a_n) \in R$ és tal que $RaR \subseteq yR + xR$. Hem de veure que $a \in xR$. Com que $y_n T$ no conté ideals diferents de zero podem triar $t_n \in T$ tal que $t_n a_n \notin y_n T$ sempre que $a_n \neq 0$. Sigui $t = (t_n) \in R$. Per hipòtesi $ta \in yR + eR$ per algún $e = (e_n) \in x$. Si $e_n = 0$ aleshores $t_n a_n \in y_n T$ implica $a_n = 0$. Per tant $ea = a$ i aleshores $a \in xR$. ∎

Observem que si T és semihereditari (per exemple, $T = A_1(k)$ on k és un cos de característica 0) l'anell R que obtenim a l'Exemple 1.27 és també semihereditari.

Totes les propietats que sabem de $B(R)$, quan R és un anell FPF semiprimer, hem vist a la Proposició 1.25 i al Lema 1.26 que són conseqüència de les propietats (A) i (C) del Teorema 1.16. Són de fet aquestes les propietats que hereta R_x, tal com prova Burgess a [11, Lemma 1.1 i Lemma 1.2]. La propietat que no hereta R_x en general és la de ser acotat per la dreta, tal com hem vist a l'Exemple 1.27.

Quan suposem que R és un anell semiprimer FPF per la dreta que satisfà una identitat polinòmica, podem obtenir el següent resultat sobre $Q^r_{max}(R)$ fent servir una tècnica similar a la de les stalks.

PROPOSICIÓ 1.28. *Sigui R un anell semiprimer, FPF per la dreta i satisfent una identitat polinòmica. Aleshores $Q = Q^r_{max}(R) = R_\Sigma$ on Σ és el conjunt de no divisors de zero del centre Z de R.*

DEMOSTRACIÓ: Sigui $x \in \Sigma$. Aleshores $r_R(x)$ és un ideal bilàter de R. Com que $r_Z(x) = r_R(x) \cap Z = 0$ se seguéix del Teorema de Rowen per anells que satisfan una identitat polinómica, cf.[15, pàg. 464] que $r_R(x) = 0$. Per tant x és un no divisor de zero de R. Per tant Σ és un conjunt d'Ore i tenim que $R \subseteq R_\Sigma \subseteq Q^r_{max}(R)$. Es pot veure fàcilment que una localització central d'un anell FPF és també FPF, per tant R_Σ és FPF per la dreta. Ara sigui $b^{-1}a$ un element del centre $Z(R_\Sigma)$ de R_Σ. Clarament $b^{-1}a$ és un element del centre de Q i per tant $r_Q(Rb^{-1}a) = r_Q(Ra) = eQ$ on e és un idempotent central de Q i per tant està a Z, . Tenim doncs que $r_R(a + e) = 0$, com que $a + e \in Z$, tenim que $(a + e)\mu = 1$ amb $\mu \in Z(R_\Sigma)$. D'això $a = (a + e)\mu a = a\mu a$ i per tant $b^{-1}a = b^{-1}a(\mu b)b^{-1}a$. Això prova que $Z(R_\Sigma)$ és un anell regular. Si substituïm R per R_Σ podem suposar sense perdre generalitat que Z és regular i aleshores hem de provar que $R = Q$.

Per cada $x \in \mathrm{Spec}B(R)$ considerem $R_x = (R + xQ)/xQ$ i $Q_x = Q/xQ$. Afirmem que el centre de R_x is regular. En efecte , sigui $\alpha \in R$ tal que $\overline{\alpha} \in Z(R_x)$. Per [36,Theorem 3.6] existeix $\beta \in Z(Q)$ tal que $\beta - \alpha \in xQ$. Escollim $e \in x$ tal que $(1-e)\alpha = (1-e)\beta$. Aleshores $(1-e)\alpha \in Z$ i $\overline{\alpha} = \overline{(1-e)\alpha}$. Per tant $Z(R_x)$ és un factor de Z el qual és regular i per tant també ho és $Z(R_x)$. Com que R_x és un anell primer [11,Lemma 1.1] que satisfà una identitat polinòmica podem concloure aplicant el Teorema de Posner [15, Theorem 12.6.8] que R_x és artinià simple. Per la condició (A) del Teorema 1.16 es segueix fàcilment que la inclusió $R_x \hookrightarrow Q_x$ és un epimorfisme d'anells per tant $R_x = Q_x$. Per tant hem provat que $R + xQ = Q$ per tot $x \in \mathrm{Spec}B(R)$. Això implica $R = Q$. ∎

El resultat anterior és una extensió d'un resultat de Burgess [11, Proposition 1.9], que veu aquest resultat en el cas en que R és FPF semiprimer i és un mòdul finitament generat sobre el seu centre.

Volem remarcar, que en general no és cert que un anell semiprimer que satisfà una identitat polinómica tingui clàssic de quocients ni que aquest sigui R_Σ on Σ és el conjunt de no divisors de zero del centre, cf.[70, Example 5.7].

1.7. Anells de grup *FPF*.

En aquesta secció provarem que si R és un anell commutatiu i G un grup finit tal que l'ordre de G és invertible a R, aleshores R és FPF si i només si l'anell de grup RG també ho és. Val a dir que aquest resultat va ser publicat per D. Herbera i P. Menal a [44] i despres ha aparegut una nova demostració de Y. Kitamura a [51].

La idea de la demostració de Kitamura és la següent, si R és un anell commutatiu i G un grup finit amb l'ordre invertible dins de R, és ben conegut que RG és una algebra d'Azumaya. Si denotem per $Z(RG)$ el centre de RG, tenim la següent situació,

$$R \subseteq Z(RG) \subseteq RG.$$

Aleshores, aplicant un resultat de S. Page [65] RG és FPF si i només si $Z(RG)$ també ho és (de fet Page demostra que una àlgebra d'Azumaya és FPF si i només si el seu centre és FPF). Kitamura demostra que si R és FPF, aleshores $Z(RG)$ també és FPF i pot concloure finalment que RG és FPF. Cal remarcar que Kitamura també dóna una nova demostració del resultat que hem esmentat abans de S. Page.

Carl Faith prova a [33, Theorem 5.23A] que si R és un anell commutatiu autoinjectiu i G és un grup finit aleshores RG és un anell injectiu FPF. La demostració que donarem en el cas d'un anell commutatiu i un grup d'ordre invertible en el grup fa ús, de manera essencial, del resultat de Faith i del fet de que en una àlgebra d'Azumaya els mòduls projectius finitament generats fidels són generadors. Aquesta demostració és més o menys la mateixa que vam publicar a [44].

LEMA 1.29. [51, Proposition 2, Corollary 4] *Sigui R un anell aleshores:*

(1) *Si G és un grup tal que RG és FPF per la dreta, aleshores R és també FPF per la dreta.*
(2) *Si l'anell de polinomis sobre un conjunt X, $R[X]$ és FPF per la dreta aleshore R també és FPF per la dreta.* ∎

Recordem que si M és un R-mòdul per la dreta i N és un submòdul de M, és diu que N és *racional* dins de M ($N \leq_r M$) si per qualsevol R-mòdul L tal que $N \leq L \leq M$ és compleix que $Hom_R(L/N, M) = 0$.

LEMA 1.30. *Sigui R un anell tal que els seus ideals per la dreta finitament generats fidels són projectius. Si M és un submòdul racional finitament generat de R^n (per algun n) aleshores M és R-projectiu.*

DEMOSTRACIÓ: Farem la demostració per inducció sobre n, el cas $n = 0$ és obvi. Sigui $e_1, \cdots, e_n$ la base canònica de R^n. Com que M és un submòdul racional de R^n existeix un ideal per la dreta racional i en particular fidel I, tal que $e_1 I \subseteq M$. Sigui $\pi\colon M \longrightarrow R$ la projecció sobre la primera coordenada. Com que $I \subseteq \pi(M)$, $\pi(M)$ és un ideal per la dreta de R finitament generat i fidel. Per hipòtesi $\pi(M)$ és projectiu, per tant $M \cong Ker\,\pi \oplus \pi(M)$. Ara $Ker\,\pi$ és un submòdul racional finitament generat de $e_2R \oplus \cdots \oplus e_nR \cong R^{n-1}$ que per hipòtesi d'inducció és projectiu. En conseqüència M és també projectiu. ∎

Podem ara provar el nostre resultat per anells de grup FPF.

TEOREMA 1.31. *Sigui R un anell commutatiu i sigui G un grup finit tal que el seu ordre és invertible a R. Aleshores R és FPF si i només si RG ho és.*

DEMOSTRACIÓ: Pel Lema 1.29 tenim que si RG és FPF aleshores també ho és R.

Suposem doncs que R és FPF. Sigui M un RG-mòdul per la dreta finitament generat i fidel, i $R(M)$ el seu submòdul racional, és a dir el conjunt dels elements de M anul.lats per un ideal racional de R. Si $a \in RG$ és tal que $Ma \subseteq R(M)$ aleshores existeix un ideal per la dreta racional I de RG tal que $MaI = 0$ (perquè, per ser R commutatiu, Ma és un R-mòdul finitament generat). Com que M és fidel $aI = 0$ i per tant $a = 0$. Per tant $\overline{M} = M/R(M)$ és un RG-mòdul fidel i finitament generat. Si substituïm M per $\overline{M}$ podem suposar sense perdre generalitat que $R(M) = 0$. Però aleshores $E_r(M)$, l'envolcall racional de M, és un QG- mòdul per la dreta, on Q denota l'anell maximal de quocients de R. Per tant $MQ \subseteq E_r(M)$ és un QG-mòdul fidel i fintament generat. Com que Q és injectiu i FPF, QG és FPF per [33, 5.23A]. Per tant podem suposar que tenim un QG-epimorfisme $f\colon MQ \longrightarrow QG$. Això implica $f(M)Q = QG$. Pel Teorema 1.15, Q és l'anell classic de quocients de R per tant hi ha un ideal I per la dreta de RG, fidel i finitament generat, isomorf a $f(M)$ i $IQ = QG$. Ara I és un R-submòdul racional de $RG \cong R^{|G|}$ per tant, pel Lema 1.30, I és R-projectiu. Com que $|G|^{-1} \in R$ aleshores I és RG-projectiu cf. [21, Lemma 3] i per ser RG una àlgebra d'Azumaya és un generador. Com que I és imatge homomòrfica de M podem concloure que M és un generador de mod-RG. ∎

En el capítol 3 caracteritzarem també els anells de grup FPF sobre grups abelians lliures.

Sigui R un anell i G un subgrup dels automorfismes de R, definim el *producte creuat* de R i G, que denotarem per $R * G$, com la R-àlgebra formada pels elements $a = \sum_{g\in G} g r_g$ on r_g és un element de R que és zero gairebé per tot $g \in G$. Si $r \in R$ i $g \in G$ definim el producte d'aquests dos elements com $rg = gr^g$ on $r^g = g(r)$.

El pròxim exemple demostra que el teorema anterior no és cert per productes creuats.

EXEMPLE 1.32. *Existeix un domini commutatiu FPF R tal que $2^{-1} \in R$, i un automorfisme de R, g d'ordre 2 tal que $R* < g >$ no és FPF.*

DEMOSTRACIÓ: Sigui $R = k[t]$, l'anell de polinomis sobre un cos k de característica diferent de 2 i sigui g l'automorfisme de k-àlgebres que envia t a $-t$. Sigui $S = R * < g >$ i considerem l'ideal $I = (1+g)S$. Observem que $I = \frac{1}{2}(1+g)S$ i que $\frac{1}{2}(1+g)$ és un idempotent de S, aleshores $r_R(I) \subseteq (1-g)S$. Per altra banda per a tot $p_1(t)$ i $p_2(t)$ de $k[t]$,

$$(1+g)(p_1(t) + gp_2(t)) = (1+g)p(t)$$
$$(1-g)(p_1(t) + gp_2(t)) = (1-g)p(t)$$

on $p(t) = p_1(t) + p_2(t)$. En conseqüència $I = (1+g)k[t]$ i $(1-g)S = (1-g)k[t]$.

$$(1+g)p(t)(1-g)q(t) = (p(t) - p(-t))q(t) + g(p(-t) + p(t))q(t)$$

per tant $r_R(I) = 0$.

Anem a veure que I no és generador. Com que $\frac{1}{2}(1+g)$ és idempotent, $\mathrm{tr}_S(I) = S(1+g)S = S(1+g)k[t]$. Si I fós generador tindríem per la Proposició 1.1, $\mathrm{tr}_S(I) = S$ i llavors $(1-g)S(1+g)k[t] = (1-g)S = (1-g)k[t]$. Però és fàcil veure que $(1-g)S(1+g)k[t] \subseteq (1-g)tk[t]$, per tant I no és generador. ∎

Capítol 2.

Subanells de Galois i centres d'anells FPF

2.1. Subanells de Galois i centres d'anells FPF.

Sigui R un anell FPF per la dreta amb centre Z. En aquesta secció ens preocuparem dels següents problemes:

(a) És Z FPF?[33, Question 3].
(b) Si G és un grup finit d'automorfismes de R, és aleshores el subanell de Galois R^G FPF per la dreta? [33, Question 14].

Una resposta negativa per les qüestions (a) i (b) per anells FPF no semiprimers es pot trobar de manera implícita a [66]. Primer donarem uns quants exemples, inspirats en [66], que provaran que el centre d'un anell PF pot ser reduït però pot no ser FPF.

EXEMPLE 2.1. *(i) Existeix un anell PF commutatiu R amb* $2^{-1} \in R$ *i un grup* G *d'ordre 2 actuant sobre* R *tal que* R^G *es reduït però no* FPF.
(ii)Existeix un anell PF tal que el seu centre és reduït però no és FPF.

DEMOSTRACIÓ: (i) Sigui A un anell noetherià commutatiu i complet tal que $2^{-1} \in A$. Si $E(M)$ és l'envolcall injectiva de l'únic A-mòdul simple M, aleshores per [72, Corollary 2 pàg. 143] $End_A(E(M)) \cong A$. Si considerem l'anell $R = E(A, E(M))$, l'extensió trivial de A per E, és un anell PF, cf. Teorema 1.13. Sigui $g\colon R \longrightarrow R$ l'aplicació definida per $(a, e) \mapsto (a, -e)$. Com que $2^{-1} \in A$ podem veure que g és un automorfisme d'ordre 2. Si G és el grup generat per g, aleshores és clar que $R^G \cong A$. Si escollim A que no sigui hereditari (e.g. $A = \mathbb{Q}[\![x, y]\!]$) aleshores aplicant [28, page 168] A i per tant R^G no són FPF. (ii) Amb la mateixa notació que a (i), considerem S el producte creuat $R * G$. Del teorema de Louden ([55], [33 ,Corollary 5.22]) se segueix que S és PF. El centre de S és $R^G \cong A$. Llavors si A és un domini no hereditari, el centre de S és un anell reduït que no és FPF. ∎

Per anells commutatius reduïts tenim el següent resultat

TEOREMA 2.2. *Sigui* R *un anell* FPF *reduït commutatiu. Si* G *és un subgrup finit del grup d'automorfismes de* R, *aleshores* R^G *és* FPF.

DEMOSTRACIÓ: Pel Teorema 1.15 n'hi ha prou en demostrar que l'anell clàssic de quocients de R^G és autoinjectiu i que tot ideal fidel finitament generat de R^G és un generador de la categoría mod-R^G.

PAS 1. *$Q_{cl}(R^G) = Q_{cl}(R)^G$ i és autoinjectiu.*

Com que $Q_{cl}(R)$ és un anell commutatiu regular autoinjectiu, també ho és $Q_{cl}(R)^G$ (Theorem 3.5 a [64], on està atribuït a Diop [23]). Clarament $R^G \subseteq Q_{cl}(R)^G$. Veurem que $Q_{cl}(R^G) = Q_{cl}(R)^G$. Per això, sigui $ab^{-1} \in Q_{cl}(R)^G$ on $a, b \in R$ i b és un no divisor de zero de R, $a_1 = (ab^{-1})\prod_{g\in G} b^g \in R^G$ i com que $b_1 = \prod_{g \in G} b^g$ és un no divisor de zero de R^G podem veure que $ab^{-1} = a_1 b_1^{-1}$. Com que $Q_{cl}(R)^G \subseteq Q_{cl}(R^G)$ i a més $Q_{cl}(R)^G$ és el seu propi clàssic de quocients, tenim que $Q_{cl}(R)^G = Q_{cl}(R^G)$.

PAS 2. (Contingut essencialment a [79, pàg. 283]) *Tot ideal finitament generat fidel de R^G és un generador de mod-R^G.*

Sigui I un ideal fidel finitament generat de R^G. Clarament $IQ_{cl}(R^G)$ és un ideal fidel finitament generat de $Q_{cl}(R^G)$. Com que $Q_{cl}(R^G)$ és regular autoinjectiu i I és fidel, tenim que $IQ_{cl}(R^G) = Q_{cl}(R^G)$. Pel pas 1, $Q_{cl}(R^G) = Q_{cl}(R)^G \subseteq Q_{cl}(R)$. Aleshores $IQ_{cl}(R) = Q_{cl}(R)$. Per tant tenim que IR és un ideal finitament generat fidel de R. Com que R és FPF existeix un epimorfisme $\varphi\colon (IR)^n \longrightarrow R$ de R-mòduls per algun $n \geq 1$. Ara $Q_{cl}(R)$ és autoinjectiu, per tant φ és de la forma $\varphi(x_1, \cdots, x_n) = \sum_{i=1}^n q_i x_i$ on $q_i \in Q_{cl}(R)$ i $q_i I \subseteq R$ per tot $i = 1, \cdots, n$ i com que φ és exhaustiva podem trobar els q_i tals que $\sum_{i=1}^n q_i \alpha_i = 1$ per $\alpha_i \in I$ adequats. Per tant podem escriure $\prod_{g\in G}(\sum_{i=1}^n q_i^g \alpha_i) = 1$ la qual és una relació de la forma

$$\sum_{i=1}^{r} P_i(q_j^g)\alpha_{i_1} \cdots \alpha_{i_m} = 1$$

on m és l'ordre de G, les α pertanyen a I i les P_i són polinomis en q_j^g invariants per l'acció de G. Posem $p_i = P_i \alpha_{i_1} \cdots \alpha_{i_{m-1}}$ per $i = 1, \cdots, r$. Aleshores $p_i \in Q_{cl}(R^G)$ i com que $q_i I \subseteq R$ obtenim que $p_i I \subseteq R \cap Q_{cl}(R^G) = R^G$ per $i = 1, \cdots, r$. També $\sum_{i=1}^r p_i \beta_i = 1$ per algún $\beta_i \in I$. Això ens permet definir un R^G-epimorfisme $I^r \longrightarrow R^G$ com $(s_1, \cdots, s_r) \mapsto \sum_{i=1}^r p_i s_i$. Per tant I és un generador, tal com volíem veure. ∎

L'exemple 1.1 (i) demostra que per un anell commutatiu R no és certa en general la conclusió del Teorema 1.2, de fet aquest teorema falla fins i tot per anells que són Morita equivalents a anells commutatius reduïts, tal com veurem en el següent resultat.

PROPOSICIÓ 2.3. *Per qualsevol anell R en el qual 2 no és invertible, existeix un subgrup G del grup d'automorfismes de $M_3(R)$ d'ordre 4 tal que $M_3(R)^G$ no és mai ni semihereditari per la dreta ni FPF per la dreta.*

DEMOSTRACIÓ: Sigui G el subgrup de $GL_3(R)$ generat per

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Tenim que G actua per conjugació sobre $M_3(R)$ i uns quants càlculs demostren que

$$M_3(R)^G = \{ \begin{pmatrix} x & 0 & 0 \\ y & x-2y & 0 \\ z & 0 & x-2z \end{pmatrix} ; x, y, z \in R\}.$$

Escrivim S per $M_3(R)^G$ i considerem

$$\alpha_1 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \alpha_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \alpha_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Aleshores $M = \alpha_1 S + \alpha_2 S + \alpha_3 S \subseteq M_3(R)$ és un S-mòdul fidel finitament generat. Suposem que $f\colon M \longrightarrow S$ és un S- homomorfisme. S'observa que

$$f(\alpha_1)\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 0, f(\alpha_2)\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix} = 0,$$

$$f(\alpha_3)\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 0.$$

D'aquestes relacions es pot obtenir fàcilment que

$$f(\alpha_i) = \begin{pmatrix} a_i & 0 & 0 \\ & * & \end{pmatrix} \qquad i = 1, 2, 3$$

on $a_i \in 2R$. Si S és un anell FPF per la dreta, aleshores $\sum_{f \in M^*} f(M) = S$ la qual cosa implica que $2R = R$. Si S és semihereditari, aleshores l'anul.lador per la dreta de α_1 ha d'estar generat per un idempotent. Si fem càlculs veurem que això passa si i només si $2R = R$. ∎

Finalment demostrarem que el Teorema 1.2 no es pot estendre de manera obvia a anells FPF semiprimers, fins i tot suposant que $|G|^{-1} \in R$.

EXEMPLE 2.4. *Existeix un anell FPF semiprimer R i un subgrup finit G del grup d'automorfismes de R tal que $|G|^{-1} \in R$ però R^G no és FPF.*

DEMOSTRACIÓ: Sigui K un cos de característica $\neq 2$ i sigui $A = K[t]$ l'anell de polinomis. Sigui $R = M_2(A)$ i definim $g: R \longrightarrow R$ com

$$\begin{pmatrix} p_1(t) & p_2(t) \\ p_3(t) & p_4(t) \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} p_1(-t) & -p_2(-t) \\ -p_3(-t) & p_4(-t) \end{pmatrix}.$$

Es pot veure fàcilment que g és un automorfisme d'anells d'ordre 2. Si G és el grup generat per g, aleshores és inmediat veure que

$$R^G = \begin{pmatrix} K[t^2] & tK[t^2] \\ tK[t^2] & K[t^2] \end{pmatrix}.$$

Sigui $e = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in R^G$. Aleshores l'ideal per la dreta $I = eR^G$ és fidel, mentres que $R^G I R^G \neq R^G$. Per tant I no és un generador i podem concloure que R^G no és FPF. ∎

2.2. Generadors i ideals generats per elements centrals.

Sigui R un anell i M un R-mòdul per la dreta, aleshores podem considerar el morfisme d'anells

$$\begin{array}{rccc} \phi: & Z(R) & \longrightarrow & Z(End_R M) \\ & a & \mapsto & a^d \end{array}$$

on a^d és l'endomorfisme de M, tal que per qualsevol $m \in M$, $a^d(m) = ma$.

TEOREMA 2.5. [33, Theorem 1.1D] *Sigui R un anell i M un R-mòdul per la dreta generador de la categoria mod-R. Aleshores ϕ és isomorfisme d'anells.*

DEMOSTRACIÓ: Si M és generador aleshores en particular és un mòdul fidel, i per tant ϕ és injectiva. Sols cal veure doncs que ϕ és exhaustiva, és a dir que qualsevol endomorfisme del centre ve donat per multiplicació per un element del centre de R.

Per ser M generador, existeixen $f_1, \ldots, f_n$ elements de M^* i $m_1, \ldots, m_n$ elements de M tals que $f_1(m_1) + \cdots + f_n(m_n) = 1$. Sigui f un element de $Z(End_R M)$, per a cada $m \in M$ i per a cada i considerem el següent endomorfisme

$$M \xrightarrow{f} M \xrightarrow{f_i} R \xrightarrow{\alpha_m} M$$

on $\alpha_m(r) = mr$, per qualsevol element $r \in R$. Com que f és un element del centre de l'anell d'endomorfismes de M, tenim que $(\alpha_m f_i)f = f(\alpha_m f_i)$ i per tant $m(f_i f(m_i)) = f(m) f_i(m_i)$ per qualsevol i. Si sumem aquestes expressions en i tenim que

$$m \Sigma_{i=1}^n f_i f(m_i) = f(m)$$

si diem $r = \Sigma_{i=1}^{n} f_i f(m_i)$, obtenim que per qualsevol element $m \in M$, $f(m) = mr$. Com que M és fidel r ha de ser un element central, i per tant podem concloure que ϕ és exhaustiva i isomorfisme d'anells. ∎

LEMA 2.6. [7, Lemma 5.1] *Sigui R un anell i I un ideal del centre de R. Si IR és un ideal finitament generat fidel i projectiu com a R-mòdul per la dreta aleshores IR és generador de la categoria mod-R.*

DEMOSTRACIÓ: Si IR és un ideal finitament generat podem suposar que els generadors són $x_1, \ldots, x_n$, elements del centre de R. Si IR és projectiu aleshores existeixen $f_1, \ldots, f_n$ elements de I^*, tals que per qualsevol element $x \in IR$

$$x = x_1 f_1(x) + \ldots x_n f_n(x)$$

com que els elements x_i són centrals tenim que $x = \Sigma_{i=1}^{n} f_i(x_i)x$ per qualsevol element x de IR, la qual cosa implica que $(1 - \sum_{i=1}^{n} f_i(x_i))IR = 0$. Com que IR és fidel $\sum_{i=1}^{n} f_i(x_i) = 1$ i per tant IR és generador. ∎

PROPOSICIÓ 2.7. *Sigui I un ideal del centre de R. Suposem que IR és un generador de mod-R, aleshores IR és finitament generat i projectiu pels dos costats.*

DEMOSTRACIÓ: Com que IR és generador com a R-mòdul per la dreta, IR és projectiu i finitament generat com a S-mòdul per l'esquerra, on $S = End_R(IR_R)$, cf. Teorema 1.2. Com que a més és un ideal bilàter i fidel, l'aplicació

$$\begin{array}{rccc} \phi\colon & R & \longrightarrow & S \\ & a & \longmapsto & a^e \end{array}$$

on $a^e(x) = ax$ per qualsevol element x de IR, és una inclusió d'anells.

Per altra banda com que pel Teorema 2.5 $\phi(Z(R)) = Z(S)$, ${}_SIR$ el podem veure com un ideal de S generat per elements centrals de S, aquest ideal es veu fàcilment que a més és fidel. Tindrem doncs les següents inclusions

$$IR \subseteq R \subseteq S \subseteq End_S({}_SIR)$$

Per ser IR generador l'aplicació

$$\begin{array}{rccc} \varphi\colon & R & \longrightarrow & \mathrm{End}_S({}_SIR) \\ & a & \longmapsto & a^d \end{array}$$

on $a^d(x) = xa$ per qualsevol element x de IR, és un isomorfisme d'anells.

Podem provar ara que ϕ és exaustiva ja que per qualsevol $s \in S$, $\varphi^{-1}(s)$ és l'antiimatge que busquem. Per tant R i S són anells isomorfs i l'estructura de ${}_SIR$ és la de ${}_RIR$ donada a través de ϕ. Ara IR és un ideal finitament generat, generador per la dreta i projectiu per l'esquerra, aplicant la Proposició 1.8 podem concloure que és projectiu pels dos costats i aplicant el Lema anterior que és generador pels dos costats. ∎

2.3. Anells íntegrament tancats al maximal de quocients.

Siguin R i S anells commutatius tals que $R \subseteq S$, direm que un element $s \in S$ és *íntegre* sobre R si el R-mòdul $R[s]$ és finitament generat. Direm que R és *íntegrament tancat* dins de S si qualsevol element de S íntegre sobre R, és també de R.

En la propera secció veurem que els anells que poden aparèixer com a centres d'anells FPF semiprimers satisfan que són íntegrament tancats al seu maximal de quocients. En aquesta secció volem descriure aquests anells en termes d'anells de valoració. Hi ha molts treballs on s'estenen a anells commutatius les nocions clàssiques de domini de valoració i domini íntegrament tancat. Nosaltres agafarem l'enfoc de Bergman a [6], que sembla ser és també el de Marot a [56]. Bergman a la secció 6 del seu article treballa amb anells commutatius íntegrament tancats al clàssic de quocients i tals que els ideals principals són projectius. Aquesta secció és una fàcil extensió dels resultats de Bergman al cas d'anells semiprimers commutatius i íntegrament tancats al maximal de quocients.

Un anell R (no necessàriament commutatiu), es diu que és de *Baer* si l'anul.lador per la dreta de qualsevol subconjunt de R está generat per un idempotent de R. Cal remarcar que aquesta condiciò sobre els anul.ladors és simètrica. Per qualsevol subconjunt $C \subseteq R$,

$$l_R(C) = l_R r_R l_R(C).$$

LLavors si els anul.ladors per la dreta estan generats per idempotents, els anul.ladors per l'esquerra també.

Si R és un anell commutatiu íntegrament tancat al seu maximal de quocients $Q_{max}(R)$, és clar que $B(R) = B(Q_{max}(R))$. Si R és a més semiprimer, donat que $Q_{max}(R)$ és un anell regular autoinjectiu, tenim que tot ideal anul.lador de R està generat per un idempotent de R. En particular tenim que R és un anell de Baer.

En general és cert també que per un anell de Baer semiprimer $B(R) = B(Q^r_{max}(R)) = B(Q^l_{max}(R))$, tal com prova la següent proposició.

PROPOSICIÓ 2.8. *Sigui R un anell semiprimer, tal que per tot ideal per la dreta principal I de R $r_R(I) = eR$, on $e^2 = e \in R$. Si S és un anell tal que $R_R \leq_e S_R$ aleshores $B(R) = B(S)$.*

DEMOSTRACIÓ: En un anell semrprimer R, un idempotent és central si i només si $eR(1-e) = 0$. Fent la mateixa demostració que al Lema 1.18, podem concloure que $B(R) \subseteq B(S)$. Ens falta veure que $B(S) \subseteq B(R)$.

Sigui $e \in B(S)$, aleshores existeix $x \in R$ tal que $0 \neq ex \in R$. Sigui $I = xR$, per hipòtesi tenim que $r_R(eI) = fR$ on f és un idempotent de R. Per ser fR un ideal bilàter $(1-f)Rf \subseteq fR$. Per tant $(1-f)Rf = 0$ i f és central a R. Llavors $ReI \oplus fR \leq_e R_R$ i en conseqüència $SeIS \oplus fS \leq_e S_S$. En particular $fS \leq_e (1-e)S_S$. Podem concloure doncs que $f(1-e) = f$ i també que $f(1-e) = (1-e)$. Per tant $1-e = f \in R$ i aleshores tenim que $e \in R$, tal com volíem veure. ∎

Si R és un anell commutatiu semiprimer, de la proposició anterior i dels comentaris que la precedeixen, tenim que $B(R) = B(Q_{max}(R))$ si i només si R és de Baer. Per caracteritzar els anells semiprimers íntegrament tancats al seu maximal de quocients ho farem en termes d'anells de Baer.

Seguint a Bergman [6, pàg. 225], si R és un anell commutatiu i G un grup abelià totalment ordenat, fem $G \cup \{+\infty\}$ un semigrup totalment ordenat de la manera òbvia i definim una *valoració* de R sobre G com un morfisme v del semigrup multiplicatiu R dins de $G \cup \{+\infty\}$, que satisfà $v(0) = +\infty$ i $v(r+s) \geq min(v(r), v(s))$.
Si v és una valoració es clar que $v^{-1}(+\infty)$ és un ideal primer P de R. Si P és un ideal primer de R una valoració sobre R/P indueix una valoració sobre R tal que $P \subseteq v^{-1}(+\infty)$. Si P_1 i P_2 són ideals primers de R tals que $P_1 \subseteq P_2$, les valoracions sobre R/P_2 indueixen valoracions sobre R/P_1.

Si R és un anell regular commutatiu aleshores els ideals primers són maximals i són de la forma xR on $x \in \mathrm{Spec}B(R)$. Per tant en aquest cas les valoracions provenen de valoracions sobre els cossos $R_x = R/xR$.

Si R és un anell amb una valoració v, direm *anell de valoració R_v* al conjunt dels elements $r \in R$ tals que $v(r) \geq 0$.

PROPOSICIÓ 2.9. *Sigui R un anell de Baer commutatiu. Aleshores les següents afirmacions són equivalents,*

(1) *R és íntegrament tancat dins de $Q_{max}(R)$.*
(2) *Per qualsevol $x \in \mathrm{Spec}B(R)$, $R_x = R/xR$ és íntegrament tancat a $Q_x = Q_{max}(R)/xQ_{max}(R)$.*
(3) *R és la intersecció d'anells de valoració d'una família de valoracions definides sobre $Q_{max}(R)$.*

DEMOSTRACIÓ: Es fa igual que [6, Proposition 6.1]. ∎

Si R és un anell commutatiu de Baer íntegrament tancat al maximal de quocients aleshores també és íntegrament tancat dins del seu clàssic de quocients. Llavors per qualsevol $x \in \mathrm{Spec}B(R)$ tenim,

$$R/xR \subseteq Q_{cl}(R)/xQ_{cl}(R) \subseteq Q_{max}(R)/xQ_{max}(R).$$

Per ser R de Baer $Q_{cl}(R)$ i $Q_{max}(R)$ són anells regulars i per tant les seves stalks són cossos. La relació entre aquestes en el cas íntegrament tancat queda explicada pel següent lema.

LEMA 2.10. *Sigui R un anell de Baer. Aleshores R és íntegrament tancat dins del seu maximal de quocients si i només si es satisfan les següents condicions per cada $x \in \mathrm{Spec}B(R)$,*

(1) *R/xR és íntegrament tancat dins de $Q_{cl}(R)/xQ_{cl}(R)$.*
(2) *L'extensió de cossos $Q_{cl}(R)/xQ_{cl}(R) \subseteq Q_{max}(R)/xQ_{max}(R)$ és transcendent o $Q_{cl}(R)/xQ_{cl}(x)R = Q_{max}(R)/xQ_{max}(R)$.*

DEMOSTRACIÓ: És obvia, l'únic que cal observar és que si $s \in Q_{max}(R)$ satisfà un polinomi a coeficients a $Q_{cl}(R)$,

$$a_0b^{-1} + a_1b^{-1}s + \cdots + a_{n-1}b^{-1}s^{n-1} + s^n = 0.$$

Aleshores bs en satisfà un a coeficients a R. Per tant si R és íntegrament tancat dins de $Q_{max}(R)$ aleshores $bs \in R$, com que b és un no divisor de zero de R tenim que $s \in Q_{cl}(R)$. ∎

El següent exemple il.lustra aquest Lema i prova que un anell R íntegrament tancat en el seu maximal de quocients, pot tenir stalks amb les dues situacions de (2). Sigui R un domini commutatiu, que no sigui un cos, íntegrament tancat al seu clàssic de quocients K. Sigui T un conjunt no buit i considerem els anells de polinomis $R[T]$ i $K[T]$. Sigui S el subanell de $R[T]^{\mathbb{N}}$, format per les successions (a_n) en les quals per gairebé tot $n \in \mathbb{N}$ $a_n \in R$. Aleshores $Q_{cl}(S)$ és el subanell de $K(T)^{\mathbb{N}}$ format per les successions (b_n) en que gairebé per tot $n \in \mathbb{N}$ $b_n \in K$. El maximal de quocients de S és $K(T)^{\mathbb{N}}$. És clar que S és íntegrament tancat dins de $Q_{max}(S)$.

$B(S)$ té ideals maximals de dos tipus. Ideals maximals no essencials x_n generats per un idempotent del tipus $e_n = (e_{in})$, on $e_{in} = 1$ si $i \neq n$ i $e_{nn} = 0$. En aquest cas les stalks són de la forma,

$$S/x_nS \cong R[T] \qquad Q_{cl}(S)/x_nQ_{cl}(S) \cong K(T) \qquad Q_{max}(S)/x_nQ_{max}(S) \cong K(T).$$

L'altre tipus d'ideals maximals són els essencials i que contenen tots la suma directa, aleshores les stalks són

$$S/xS \cong R^{\mathbb{N}}/xR^{\mathbb{N}} \qquad Q_{cl}(S)/x_nQ_{cl}(S) \cong K^{\mathbb{N}}/xK^{\mathbb{N}}$$
$$Q_{max}(S)/x_nQ_{max}(S) \cong K(T)^{\mathbb{N}}/xK(T)^{\mathbb{N}}.$$

2.4. Centres d'anells FPF semiprimers.

Volem saber ara com és el centre Z d'un anell FPF per la dreta semiprimer. En general Z no té perquè ser FPF. El següent resultat explica quan passa això.

PROPOSICIÓ 2.11. *Sigui R un anell semiprimer FPF per la dreta amb centre Z. Aleshores les següents afirmacions són equivalents*

(i) *Z és FPF*
(ii) *Tot Z-submòdul de R finitament generat que conté Z és projectiu.*

DEMOSTRACIÓ: $(i) \Longrightarrow (ii)$. Sigui I un ideal de Z. Com que R és semiprimer, se segueix del Lema 1.26 que $r_R(IR) = eR$ per un cert idempotent central e de R. Això prova que si I és essencial a Z aleshores IR és també essencial com a ideal dreta a R. Com a conseqüència tenim que el Z-submòdul singular de R està contigut dins de l'ideal singular dreta de R. Com que R és no singular per la dreta podem concloure que R és no singular com a Z-mòdul. Tenim doncs aplicant (A') del Teorema 1.16, que tot mòdul M de la forma de (ii) s'inclou en un Z-mòdul lliure i com que Z és semihereditari, cf. Teorema 1.15, aleshores M és projectiu.

$(ii) \Longrightarrow (i)$. Sigui M un Z-mòdul finitament generat i fidel. Per veure que M genera mod-Z podem suposar que $Z \hookrightarrow M$, ja que Z és commutatiu. Per (ii) R és un Z-mòdul llis i per tant l'aplicació induïda per la inclusió $Z \hookrightarrow M$

$$R = Z \otimes_Z R \longrightarrow M \otimes_Z R$$

és injectiva. Per tant $M \otimes_Z R$ és un R-mòdul finitament generat fidel. Com que R és FPF per la dreta, $M \otimes_Z R$ és un generador de mod-R. Substituint M per una potència M^n si és necessari, podem suposar que hi ha un R-epimorfisme $f: M \otimes_Z R \longrightarrow R$. Sigui $m = \sum_{i=1}^{k} m_i \otimes r_i \in M \otimes_Z R$ tal que $f(m) = 1$. Posem $P = \sum_{i=1}^{k} Zr_i$. Aleshores la imatge de la composició $M \otimes_Z P \longrightarrow M \otimes_Z R \longrightarrow R$ és un Z-submódul N de R finitament generat que conté Z. Per hipòtesi N és projectiu per tant si apliquem el teorema d'Azumaya Corol.lari 1. N és un generador. Per tant $M \otimes_Z P$ i com a conseqüència M són generadors. ∎

El nostre proper resultat és una extensiò de [31, Proposition 2.7, pàg. 78].

PROPOSICIÓ 2.12. *Sigui R un anell semiprimer FPF per la dreta. Aleshores el centre de R és íntegrament tancat en el seu anell maximal de quocients.*

DEMOSTRACIÓ: Sigui Q l'anell maximal de quocients de R. Pel Lema 1.26 el centre de R, Z i el de Q, $Z(Q)$, contenen els mateixos idempotents. Com que $Z(Q)$ és regular, això implica que $Z \subseteq Z(Q)$ és una extensió no singular i, com que $Z(Q)$ és també auto-injectiu, $Z(Q)$ conté un subanell isomorf a l'anell maximal de quocients de Z. Per tant hem de provar només que Z és íntegrament tancat dins de $Z(Q)$. Per fer això, considerem $q \in Z(Q)$ un element enter sobre Z. Aleshores $M = R[q]$ és un R-mòdul fidel finitament generat i per tant un generador. Llavors pel Teorema 2.5 el centre de $End_R(M)$ és canònicament isomorf a Z. Com que $R \subseteq M \subseteq Q$ podem veure que tot R-endomorfisme de M ve donat per multiplicació a l'esquerra per algun element de Q, per tant multiplicació a l'esquerra per q ha de ser un endomorfisme central de M. En conseqüència $q \in Z$. ∎

Recordem que un domini commutatiu C es diu un *domini de Krull* si existeix una família V de valoracions del cos de fraccions de C, K sobre els enters tals que

(1) per qualsevol element diferent de zero $a \in C$, $v(a) \geq 0$ per tota $v \in V$ amb igualtat per gairebé tota $v \in V$.
(2) $C = \cap_{v \in V} K_v$, on K_v és l'anell de valoració de v.

Si amb aquesta mateixa definició considerem R un anell de Baer i el seu clàssic de quocients, obtenim el que Bergman anomena un anell $\aleph_0$ *Krull* de Baer, cf. [6, pàg. 227].

Si apliquem ara la proposició anterior, la Proposició 2.7 i el resultat de Bergman [6, Theorem 9.2] obtenim el següent corol.lari

COROL.LARI 2.13. *Sigui R un anell FPF per la dreta semiprimer, tal que els ideals generats per elements centrals són finitament generats. Aleshores el centre de R és un anell $\aleph_0$ Krull de Baer.* ∎

2.5. Anells *FPF* primers amb centres prefixats.

És ben conegut que el centre d'un domini d'ideals principals és un domini de Krull [17, Theorem 1.9] i recíprocament, tot domini de Krull pot aparèixer com a centre d'un domini d'ideals principals. Aquests resultats són deguts a Bergman i Cohn , que també provaren que tot domini commutatiu íntegrament tancat és el centre d'un domini de Bezout [17, Theorem 2.7]. Els anells que ells construeixen no són acotats i per tant no són FPF. Malgrat tot, veurem que modificant la seva construcció una mica podem aconseguir que els dominis a més de ser de Bezout siguin FPF.

Pel Teorema 1.21 un domini de Bezout és *FPF* si i només si és acotat. Gràcies a aquest resultat podem reconèixer a [25], [19, Section 3] i [76, Lemma 4.3] entre altres, alguns exemples interessants d'anells FPF que són dominis d'ideals principals.

També és interessant remarcar que Cohn i Schofield han construït un domini d'ideals principals que és FPF amb centre un cos F i tal que el centre de seu cos de fraccions és més gran que F, [19, Section 3]. Això prova que l'anell maximal de quocients del centre d'un anell FPF semiprimer R no té perquè coincidir amb el centre de $Q^r_{max}(Q)$.

Recordem breument la construcció de Bergman i Cohn de dominis d'ideals principals amb centres prefixats.

Sigui C un domini de Krull i K el seu cos de fraccions. Formem l'anell de polinomis $K[T] = K[\ldots, t_{-1}, t_0, t_1, \ldots]$. Sigui V la familia de valoracions satisfent (i) i (ii) de la definició de domini de Krull. Cada $v \in V$ es pot estendre a $K[T]$ definint $v(\Sigma a_{i_1 \ldots i_s} t_{i_1}^{\alpha_{i_1}} \ldots t_{i_s}^{\alpha_{i_s}}) = \min\{v(a_{i_1 \ldots i_s})\}$ que és una valoració sobre $K[T]$ que s'esten al cos de fraccions $K(T)$. Definim ara $A = \cap_{v \in V} K(T)_v$, com que C és un domini de Krull, se segueix que A és un domini d'ideals principals (cf. [17, pàg. 308] per completar els detalls). Considerem l'automorfisme de K-algebres $\alpha\colon K[T] \longrightarrow K[T]$ tal que $t_n \mapsto t_{n+1}$, $n \in Z$. Com que $v(p) = v(p^\alpha)$ per qualsevol $p \in K[T]$, α indueix un automorfisme de K-àlgebres sobre A d'ordre infinit. Considerem l'anell $R = A((x, \alpha))$ de series de Laurent skew, és a dir els elements de R són de la forma $s = \Sigma_{i=-\infty}^{\infty} x^i a_i$ on $a_i \in A$ i $a_i = 0$ per $i \leq k$ per un k depenent de s, amb la relació $ax = xa^\alpha$ per a tot $a \in A$. Per [17, Proposition 2.3] R és un domini d'ideals principals amb centre C.

Ara definirem un anell que és un localitzat de R que serà acotat i amb centre C.

Cal observar que els ideals de A són α invariants, ja que per tot $a \in A$, $aA = a^\alpha A$. Considerem el conjunt

$$\Sigma = \{ \sum_{i=-\infty}^{\infty} x^i a_i \in R \mid \sum_{i=-\infty}^{\infty} a_i A = A\}.$$

Afirmem que Σ és un conjunt d'Ore. Primer provarem que Σ és multiplicativament tancat. Siguin s i s' elements de Σ i sigui $ss' = \Sigma_{i=-\infty}^{\infty} x^i a_i$. Si $\Sigma_{i=-\infty}^{\infty} a_i$ està estrictament contingut dins de A, aleshores escollim un ideal maximal M de A que contingui l'ideal generat pels coeficients. Com que M és α invariant podem considerar l'anell de series formals $A/M((x, \alpha))$ que és un domini quocient de R. Clarament s i s' són diferents de zero en aquest quocient, però el seu producte és zero, això contradiu el fet de que $A/M((x, \alpha))$ sigui un domini. Per tant Σ és multiplicativament tancat. De fet, podem associar a cada $s \in R$ el seu contingut $c(s)$ que definim com el màxim comú divisor a A dels coeficients de s i aleshores tenim que $c(s)c(s') = c(ss')$ per tot s i s' elements de R. Per veure que Σ és un conjunt d'Ore només queda per veure que per qualsevol element $r \in R$ i $s \in \Sigma$

tenim que $r\Sigma \cap sR \neq \emptyset$. Com que R és un domini d'Ore existeixen r_1, $r_2 \in R$ tals que $rr_1 = sr_2 \neq 0$. Aleshores $c(r)c(r_1) = c(r_2)$ i com que per cada $i = 1, 2$ tenim $r_i = s_i c(r_i)$ on $s_i \in \Sigma$, tindrem finalment que $rs_1 = ss_2c(r)$ tal com volíem veure.

Considerem ara doncs l'anell $S = R_\Sigma$. Clarament S és un domini d'ideals principals que es pot mirar com un subanell de $K((x, \alpha))$, on K és el cos de fraccions de A. Com que α té ordre infinit el centre de $K((x, \alpha))$ és l'anell K^α. Per tant el centre Z de S és $S \cap K^\alpha$. Sigui $ab^{-1} \in S \cap K^\alpha$ on a, $b \in A$. Com que $ab^{-1} \in S$ podem escriure $b^{-1}a = rs^{-1}$ on $r \in R$ i $s \in \Sigma$. Per tant $as = br$ i com a conseqüència $ac(s) = bc(r)$. D'aquí podem veure que $b^{-1}a \in A$. Per tant $Z = A \cap K^\alpha = A^\alpha = C$.

Finalment provarem que S és acotat. De fet veurem que tot ideal dreta o esquerra diferent de zero conté un element central diferent de zero. Sigui $r \in R$, tenim que $r = sc(r) = c(r)s'$ per s, $s' \in \Sigma$ adequats. Per tant tot ideal per la dreta (o per l'esquerra) es pot generar per un element de A. Si tenim ara un element $a \in A$, aquest serà de la forma $a = p(T)/q(T)$, si agafem un coeficient diferent de zero c de $p(T)$, aleshores $v(c/p(T)) \geq 0$ per qualsevol $v \in V$ i per tant $c/p(T) \in A$. Com que c és un element central de S hem provat que aS conté un element del centre diferent de zero.

Amb tot això hem demostrat el resultat següent que és un recíproc al Corol.lari 2.13 per anells primers.

PROPOSICIÓ 2.14. *Tot domini de Krull es pot posar com a centre d'un domini d'ideals principals acotat, per tant d'un domini d'ideals principals FPF.*

El següent resultat és una conseqüència de la manera de procedir anterior.

PROPOSICIÓ 2.15. *Els centres dels dominis d'ideals principals tals que tot ideal dreta està generat per un element central són els dominis de factorització única.*

DEMOSTRACIÓ: Sigui R un domini d'ideals principals en que tot ideal dreta està generat per un element central i sigui C el centre de R. Per [17, Theorem 1.5] tot element diferent de zero $a \in C$ te una descomposició com a producte de I-àtoms (i.e. àtoms dins del monoid dels elements $b \neq 0$ tal que Rb=bR). Per hipótesi tot I-àtom és un àtom que està associat a un àtom central. Per tant a descompon com a producte d'àtoms de C. A més una tal descomposició és única. Per tant C és un domini de factorització única.

Recíprocament, sigui C un domini de factorització única. Si agafem V la família de valoracions associades als àtoms de C, aleshores C és un domini de Krull. Si fem R_Σ com a la prova de la proposició anterior, aleshores l'anell R_Σ té les propietats que volem. Ja sabem que R_Σ és un domini d'ideals principals amb centre C, només falta provar que tot ideal dreta pot ser generat per elements centrals. Quan C és un domini de Krull arbitrari ja hem vist que tot ideal dreta de R_Σ pot ser generat per un element de A. Ara en el nostre cas A està format pels elements $f/g \in K(T)$ tals que $c(g)$ divideix $c(f)$. Per tant tot element $a \in A$ es pot escriure de la forma $a = cf/g$ on $c \in C$ i $c(f) = c(g)$. Com que f/g és una unitat de A tenim que $aA = cA$. I això completa la prova. ∎

Seguint les mateixes idees podem provar un recíproc a la Proposició 2.12 en el cas d'anells primers.

TEOREMA 2.16. *Si C és un domini commutatiu íntegrament tancat, aleshores existeix un domini de Bezout acotat (per tant FPF) tal que el seu centre és C.*

DEMOSTRACIÓ: Per [17, Proposition 2.5] $C = A^\alpha$ on α és un automorfisme d'ordre infinit d'un domini de Bezout commutatiu A. A es pot descriure de la següent manera: sigui V el conjunt de totes les valoracions sobre k (el cos de fraccions de C) tal que $v(c) \geq 0$ per cada $c \in C$. Aleshores A està format pels elements $f/g \in k(T)$ tals que $v(f) \geq v(g)$ per totes les valoracions v de V on T és com abans, el conjunt d'indeterminades $\cdots t_{-1}, t_0, t_1, \cdots$ i α envia t_n a t_{n+1} per tot $n \in \mathbf{Z}$. Com a la prova de la proposició anterior cal observar que $I \cap C \neq 0$ per tot ideal I diferent de zero de A. Considerem l'anell de les sèries formals skew $K[\![x, \alpha]\!]$, on K és el cos de fraccions de A, i formem l'anell $R = A + xK[\![x, \alpha]\!]$. Provarem que R té les propietats que volem. Fent servir que α té ordre infinit es pot veure fàcilment que el centre de R és C. Si $0 \neq r \in R$ aleshores $r = x^n(c_0 + xc_1 + \cdots)$ per algún $n \geq 0$ i $0 \neq c_0 \in K$. Per tant tot ideal principal de R es pot generar per un element de la forma $x^n c_0$. Suposem ara que tenim dos ideals $I = x^n c_0 R$ i $I' = x^m c_0' R$. Si $n < m$ aleshores $I' \subset I$ i si $n = m$ tenim que $I + I' = x^n b^{-1}(a_0 R + a_0' R)$ on $a_0, a_0' \in A$ i $b^{-1}a_0 = c_0, b^{-1}a_0' = c_0'$. Com que A és un domini de Bezout existeix $d \in A$ tal que $a_0 A + a_0' A = dA$. Ara és clar que $I + I' = x^n b^{-1} dR$. Per tant R és un domini de Bezout. Per provar que R és acotat per la dreta, sigui $x^n c_0 R$ un ideal per la dreta diferent de zero de R . Sabem que tot ideal diferent de zero de A conté un element del centre diferent de zero, per tant $x^n c_0 R \supseteq x^n c R$ on $0 \neq c \in C$. Ara $x^n c R$ és un ideal diferent de zero, per tant ja hem acabat la demostració. ∎

Capítol 3.

Anells de polinomis amb clàssic de quocients injectiu

3.1. Condició de cadena ascendent per anul.ladors.

Denotarem per $R[X]$ l'anell de polinomis sobre un conjunt arbitrari d'indeterminades X i per $R[x]$ l'anell de polinomis sobre una única indeterminada x. Si X és un conjunt no buit, $p(X) \in R[X]$ i $x \in X$ per x-deg$(p(X))$ volem dir el grau de $p(X)$ mirat com un element de $S[X]$ on $S = R[X \setminus \{x\}]$.

En aquesta secció veurem que en alguns casos imposar condicions d'injectivitat sobre l'anell clàssic de quocients de l'anell de polinomis $R[X]$, on X és un conjunt no buit, implica que R satisfà condició de cadena ascendent per anul.ladors. Aquesta mena de resultats ens permeten concloure en alguns casos, fent servir el Teorema 1.12 degut a Carl Faith, que R té clàssic de quocients QF. El següent resultat de Pillay prova que la propietat de tenir clàssic de quocients QF és heretada per l'anell de polinomis.

TEOREMA 3.1. (P. Pillay [69, Theorem 4.5]) *Sigui R un anell, aleshores $Q^l_{cl}(R)$ existeix i és QF si i només si per qualsevol conjunt X, $Q^l_{cl}(R[X])$ existeix i és QF.* ∎

Tant el resultat de Faith com el de Pillay seran resultats clau al llarg de tot el capítol i els citarem constantment.

Volem remarcar que l'existència del clàssic de quocients de l'anell no sabem si implica l'existència del clàssic de quocients de l'anell de polinomis. Resultats com l'anterior de Pillay, demostren que això és cert en alguns casos, però sempre estan basats en altres propietats de la estructura de R a més de la de tenir clàssic de quocients. En la secció 2 comentarem més extensament aquest problema i el que nosaltres sabem sobre ell.

PROPOSICIÓ 3.2. *Sigui R un anell tal que per un conjunt no buit X, $Q = Q^l_{cl}(R[X])$ existeix i és un anell autoinjectiu per la dreta. Aleshores R satisfà la condiciò de cadena ascendent per anul.ladors per la dreta de subconjunts de R.*

DEMOSTRACIÓ: Suposem que per $n = 0, 1, \dots$ i $S_n \subseteq R$, els ideals per la dreta $I_n = r_R(S_n)$ formen una cadena estrictament ascendent. Aleshores la cadena d'ideals per l'esquerra

$$l_R(I_0) \supset l_R(I_1) \supset \cdots \supset l_R(I_n) \supset \dots$$

és també estricta, ja que en un altre cas $l_R(I_n) = l_R(I_{n+1})$ implicaria

$$I_n = r_R(l_R(I_n)) = r_R(l_R(I_{n+1})) = I_{n+1}$$

Aleshores per cada $n \geq 1$ podem escollir $b_n \in l_R(I_{n-1}) \setminus l_R(I_n)$. Fixem un element $x \in X$ i considerem els polinomis definits inductivament per

$$s_0 = 1$$
$$s_n(x) = s_{n-1}(x) + b_n x^{n^2}.$$

Sigui I l'ideal dreta de Q, $I = \bigcup_{n\geq 0} r_Q(l_R(I_n))$. Podem definir un morfisme $f\colon I \to Q$ de la següent manera, $f(q) = s_n(x)q$ per $q \in r_Q(l_R(I_n))$. És fàcil veure que f està ben definit, ja que si $q \in r_Q(l_R(I_{n-1}))$ aleshores $b_n q = 0$. Com que Q és autoinjectiu per la dreta, existeix un element $q(X)^{-1}p(X) \in Q$ tal que $f(q) = q(X)^{-1}p(X)q$.

Per cada n existeix $c_n \in R \cap r_Q(l_R(I_n))$ tal que $b_n c_n \neq 0$ i $l_R(I_n)c_n = 0$, ja que si no $r_R(b_n) \subseteq r_R(l_R(I_n)) = I_n$ i això implicaria que $Rb_n \subseteq l_R(r_R(b_n)) \subseteq l_R(I_n)$ la qual cosa contradiria l'elecció de b_n.

Agafem $N > \max(x\text{-deg}(p(X)), x\text{-deg}(q(X)), 1)$. Aleshores per $n \geq N$ tenim

$$q(X)s_n(x)c_n = p(X)c_n \neq 0.$$

Ara x-deg$(s_n(x)c_n) = n^2$, com que $q(X)$ és un no divisor de zero de $R[X]$ i x-deg$(q(X)s_{n-1}(x)c_n) < n^2$ aleshores x-*deg*$(q(X)s_n(x)c_n) \geq n^2$. Per altra banda x-deg$(p(X)c_n) < N \leq n$. Això contradiu l'existència d'una cadena estrictament ascendent infinita d'anul.ladors. ∎

Ara provarem que tenim una situació similar quan $Q^r_{cl}(R[X])$ és autoinjectiu per la dreta, però en aquest cas haurem de suposar que X és un conjunt infinit.

PROPOSICIÓ 3.3. *Sigui R un anell tal que per un conjunt infinit X, $Q = Q^r_{cl}(R[X])$ existeix i és autoinjectiu per la dreta. Aleshores R satisfà la condició de cadena ascendent per anul.ladors de subconjunts de R.*

DEMOSTRACIÓ: Sigui Y un subconjunt de X infinit numerable, $Y = \{y_1, y_2, \dots\}$. Definim I_n, I, b_n i c_n com a la Proposició 3.2. Considerem el morfisme $f\colon I \to Q$ definit com $f(q) = s_n(Y)q$ si $q \in r_Q(l_R(I_n))$, amb $s_n(Y) = 1 + b_1 y_1 + \cdots + b_n y_n$.

Com que Q és autoinjectiu per la dreta, existeix un element $p(X)q(X)^{-1} \in Q$ tal que $p(X)q(X)^{-1}q = f(q)$. Per tant $p(X)q(X)^{-1}c_n = s_n(Y)c_n$.

Com que només hi ha un nombre finit de monomis amb coeficient diferent de zero a $p(X)$ i $q(X)$, podem doncs escollir n tal que y_n-deg$(p(X)) = y_n$-deg$(q(X)) = 0$. Considerem l'anell $S = R[X \setminus \{y_n\}]$. Per ser X infinit, $S \cong$

$R[X]$. Per tant S satisfà la condiciò d'Ore per la dreta. Tenim doncs que existeixen $r(X)$ i $s(X)$, aquest no divisor de zero, ambdos amb grau en y_n zero, tals que $c_n s(X) = q(X)r(X)$. Per tant $p(X)q(X)^{-1}c_n = p(X)r(X)s(X)^{-1} = s_n(Y)c_n$ i aleshores $p(X)r(X) = s_n(Y)c_n s(X)$. Però y_n-deg$(p(X)r(X)) = 0$ i y_n-deg$(s_n(Y)c_n s(X)) = 1$. Això dóna una contradicció amb l'existència d'una cadena estrictament ascendent infinita d'anul.ladors. ∎

COROL.LARI 3.4. *Sigui R un anell tal que $Q^l_{cl}(R)$ existeix i és autoinjectiu per la dreta i tal que per un conjunt no buit X, $Q^l_{cl}(R[X])$ existeix i és també autoinjectiu per la dreta. Aleshores per qualsevol conjunt Y, $Q^l_{cl}(R[Y])$ existeix i és QF.*

DEMOSTRACIÓ: Aplicant els resultats de Pillay, Teorema 3.1, n'hi ha prou en demostrar que $Q^l_{cl}(R)$ és QF. Com que $Q^l_{cl}(R[X]) \cong Q^l_{cl}(Q^l_{cl}(R)[X])$ aleshores aplicant la Proposició 3.2 $Q^l_{cl}(R)$ satisfà la condiciò de cadena ascendent per anul.ladors dreta i per hipòtesi és un anell autoinjectiu per la dreta. Si apliquem el Teorema 1.12 tenim que $Q^l_{cl}(R)$ és un anell QF tal com voliem. ∎

COROL.LARI 3.5. *Sigu R un anell regular tal que per un conjunt no buit X, $Q^l_{cl}(R[X])$ existeix i és autoinjectiu per la dreta. Aleshores R és artinià semisimple.*

DEMOSTRACIÓ: Aplicant la Proposició 3.2 tenim que R ha de ser un anell regular que satisfà la condiciò de cadena ascendent per anul.ladors dreta, aleshores per [37, Proposition 2.13 (a)] i [37, Corollary 2.16] R és artinià semisimple. ∎

COROL.LARI 3.6. *Sigui R un anell, aleshores les següents afirmacions són equivalents*

(a) *Existeix un conjunt infinit X, tal que $Q^l_{cl}(R[X])$ existeix i és autoinjectiu per la dreta.*
(b) *Existeix un conjunt Y tal que $Q^l_{cl}(R[Y])$ existeix i és QF.*
(c) *Per qualsevol conjunt X, $Q^l_{cl}(R[X])$ existeix i és QF.*
(d) *Existeix un conjunt infinit X, tal que $Q^l_{cl}(R[X])$ existeix i és autoinjectiu per l'esquerra.*

DEMOSTRACIÓ: $(a) \Rightarrow (b)$ Suposem que $Q^l_{cl}(R[X])$ és autoinjectiu per la dreta. Escollim un element $x \in X$ i considerem $Y = X \setminus \{x\}$. Com que $R[X] \cong R[Y]$ aleshores $Q^l_{cl}(R[Y])$ existeix i és autoinjectiu per la dreta, pel Corol.lari 3.4 $Q^l_{cl}(R[Y])$ és QF.

$(b) \Rightarrow (a)$, $(b) \Leftrightarrow (c)$ i $(c) \Rightarrow (d)$ són conseqüència del Teorema 3.1. Per acabar la demostració és suficient provar que $(d) \Rightarrow (b)$. Suposem que $Q^l_{cl}(R[X])$

existeix i és autoinjectiu per l'esquerra. Com que X és infinit $X = Y \cup Z$, on Y té la mateixa cardinalitat que X, Z és infinit i $Y \cap Z = \emptyset$. Com que $R[X] \cong R[Y]$ aleshores $Q^l_{cl}(R[Y])$ existeix i és autoinjectiu per l'esquerra, però

$$Q^l_{cl}(R[X]) \cong Q^l_{cl}(Q^l_{cl}(R[Y])[Z]),$$

aleshores per l'enunciat simètric de la Proposició 3.3, $Q^l_{cl}(R[Y])$ satisfà a més condició de cadena ascendent per anul.ladors esquerra. Per tant pel Teorema 1.12 $Q^l_{cl}(R[Y])$ és QF. ∎

J. W. Kerr a [49] dóna un exemple d'un anell commutatiu de Goldie tal que els polinomis no satisfan la condició de cadena ascendent per anul.ladors. Camilo i Guralnick van provar a [13] que si R és una k-àlgebra, amb k un cos no numerable, que satisfà condició de cadena ascendent per anul.ladors dreta aleshores per qualsevol conjunt X $R[X]$ també satisfà condició de cadena ascendent per anul.ladors per la dreta.

3.2. L'anell clàssic de quocients de R.

Motivats pels resultats de la secció anterior, en aquesta secció estudiarem quan l'existència del clàssic de quocients de l'anell de polinomis implica l'existència del clàssic de quocients de R, i quan les condicions d'injectivitat sobre el clàssic dels polinomis són heretades pel clàssic de R. Tots els nostres resultats estàn basats en el següent lema.

LEMA 3.7. *Sigui R un anell tal que $Q^l_{cl}(R[X])$ existeix. Suposem que per qualsevol no divisor de zero $r(X) \in R[X]$, existeix $q(X)$ tal que $q(X)r(X)$ té un coeficient no divisor de zero, aleshores $Q^l_{cl}(R)$ existeix.*

Si a més $Q^l_{cl}(R[X])$ és injectiu com a $R[X]$-mòdul dreta o bé és autoinjectiu per l'esquerra, aleshores $Q^l_{cl}(R)$ és també injectiu com a R-mòdul dreta o autoinjectiu per l'esquerra.

DEMOSTRACIÓ: Per la primera part sols cal provar que R satisfà la condició d'Ore per l'esquerra. Sigui $a \neq 0$ un element de R i b un no divisor de zero. Com que $R[X]$ satisfà la condició d'Ore, tenim polinomis $r(X)$ i $s(X)$, amb $r(X)$ no divisor de zero, tals que $r(X)a = s(X)b$. Ara per hipòtesi tenim que existeix $q(X)$ tal que $q(X)r(X)$ té un coeficient no divisor de zero r. LLavors la igualtat $q(X)r(X)a = q(X)s(X)b$ ens dóna que $ra = sb$, per un cert $s \in R$. Per tant R té clàssic de quocients per l'esquerra.

Suposem que $Q^l_{cl}(R[x])$ és injectiu com a $R[X]$-mòdul per la dreta. Sigui I un ideal per la dreta de R i $f\colon I \longrightarrow Q^l_{cl}(R)$ un morfisme de R-mòduls dreta. Aleshores f es pot estendre a un morfisme de $R[X]$-mòduls per la dreta,

$f\colon IR[X] \longrightarrow Q^l_{cl}(R[X])$, per tant f ve donada per multiplicació a l'esquerra per un element $r(X)^{-1}s(X) \in Q^l_{cl}(R[X])$. Aleshores per qualsevol $a \in I$ tenim que $s(X)a = r(X)f(a)$. Si $q(X)r(X)$ té un coeficient no divisor de zero r, tenim que $sa = rf(a)$, per un coeficient s de $q(X)s(X)$ adequat. Per tant, per qualsevol $a \in I$, $f(a) = r^{-1}sa$.

Si $Q^l_{cl}(R[x])$ és autoinjectiu per l'esquerra, aleshores

$$Q^l_{cl}(R[X]) \cong E({}_{R[X]}R[X]) \cong Q^l_{max}(R[X]).$$

Volem provar que $Q^l_{cl}(R)$ hereta aquesta propietat, n'hi ha prou en veure que per qualsevol $r \in E({}_RR) \subsetneq E({}_{R[X]}R[X])$, $(R : r)$ contè un element no divisor de zero. Però $(R : r)[X] = (R[X] : r)$, per tant hi ha un polinomi no divisor de zero $r(x) \in (R[x] : r)$ i per hipòtesi existeix $q(x)$ tal que $q(x)r(x)$ té un coeficient no divisor de zero. Per tant $(R : r)$ conté un no divisor de zero. ∎

LEMA 3.8. *Sigui R un anell tal que $Q^l_{cl}(R)$ existeix. Si $I \lhd Q^l_{cl}(R)$ aleshores $Q^l_{cl}(R)/I$ és un localitzat per l'esquerra de $R/(I \cap R)$.*

DEMOSTRACIÓ: Sigui $\Sigma = \{\overline{a} \in R/(I \cap R) \mid a \text{ és un no divisor de zero de } R\}$. És clar que Σ és un subconjunt multiplicativament tancat de $R/(I \cap R)$ format per no divisors de zero. Suposem que $a \in (I \cap R)$, aleshores si $sa = br$ on r és un no divisor de zero de R, tenim que $b \in (I \cap R)$. Aplicant [71, Proposition 3.2.34] podem concloure que Σ satisfà la condició d'Ore per l'esquerra i tenim que $R_\Sigma = Q^l_{cl}(R)/I$. ∎

Si $R/J(R)$ és artinià semisimple aleshores R és diu que és un anell *semilocal*, si a més, $J(R)$ és T-nilpotent per la dreta (esquerra) aleshores R és *perfecte* dreta (esquerra). Si R és semilocal i $J(R)$ és nilpotent aleshores R és diu que és *semiprimari*. És ben conegut que els anells semilocals que són autoinjectius per la dreta o per l'esquerra són semiperfectes [77, Proposition XIV.1.6].

Small a [74], va provar que R és un ordre per l'esquerra en un anell artinià semisimple si i només si $R[x]$ és també un ordre esquerra en un anell artinià semisimple. Per fer això va caracteritzar els no divisors de zero de $R[x]$ de la següent manera:

LEMA 3.9. (Small, [74, Lemma 2])*Sigui R un anell, si $R[x]$ és un ordre esquerra en un anell artinià semisimple, aleshores per qualsevol polinomi no divisor de zero $r(x)$ existeix $q(x)$ tal que $q(x)r(x)$ té el coeficient de grau màxim no divisor de zero.* ∎

Després Pillay a [69, Theorem 2.1] va provar que R és un ordre per l'esquerra en un anell artinià semisimple si i només si $R[X]$ ho és, on ara X és un conjunt arbitrari. Les tècniques de Pillay són les mateixes que les de Small i també passen per la mateixa caracterització dels no divisors de zero de $R[X]$, on ara el coeficient de grau màxim està definit donant un bon ordre a X i l'ordre lexicogràfic als monomis en X.

Suposem que $R[X]$ té clàssic de quocients per l'esquerra Q semilocal i a més tenim $J(Q) \cap R[X] = I[X]$ per un cert ideal I de R, aplicant el Lema 3.8 tenim que $R[X]/I[X]$ és un ordre per l'esquerra en un anell artinià semisimple i per [69, Theorem 2.1] R/I també és un ordre en un anell artinià semisimple. Com a conseqüència veiem que per $R[X]/I[X]$ val la caracteritzaciò de Small pels no divisors de zero, però si $r(x)$ és un no divisor de zero de $R[X]$ la seva classe tambè és un no divisor de zero de $R[X]/I[X]$. Per tant en aquest cas podem deduir que existeix un polinomi $q(X)$ de $R[X]$ tal que $q(X)r(X)$ té un coeficient no divisor de zero. Si apliquem ara el Lema 3.7 podem concloure que existeix el clàssic per l'esquerra de R i estem en condicions d'aplicar el següent resultat de Robson,

TEOREMA 3.10. (Robson, [71, pàg. 368]) *Sigui R un anell. R és un ordre per l'esquerra en un anell semilocal si i només si existeix un ideal I de R que satisfà les següents condicions,*

(1) *R/I és un ordre per l'esquerra en un anell artinià semisimple.*
(2) *a no és divisor de zero a R si i només si la classe $a + I$ no és divisor de zero a R/I.*
(3) *Si $a \in I$ i b és un no divisor de zero, aleshores existeixen $a' \in I$ i b' no divisor de zero tals que $a'b = b'a$.* ∎

Ara observem que si R és un ordre per l'esquerra en un anell semilocal i $Q^l_{cl}(R)$ existeix, aleshores aquest també és semilocal. Llavors del teorema anterior podem concloure que en el nostre cas R té clàssic de quocients per l'esquerra semilocal.

Per tant hem demostrat el següent,

PROPOSICIÓ 3.11. *Sigui R un anell tal que $Q^l_{cl}(R[X])$ existeix i*

$$J(Q^l_{cl}(R[X])) \cap R[X] = I[X]$$

per un cert ideal bilàter I de R. Aleshores

(i) *Si $Q^l_{cl}(R[X])$ és semilocal, aleshores $Q^l_{cl}(R)$ existeix i és semilocal.*
(ii) *Si $Q^l_{cl}(R[X])$ és perfecte per la dreta o per l'esquerra, aleshores $Q^l_{cl}(R)$ és també perfecte per la dreta o per l'esquerra.*

(iii) *Si* $Q^l_{cl}(R[X])$ *és semiprimari, aleshores* $Q^l_{cl}(R)$ *és semiprimari.*
(iv) *Si* $Q^l_{cl}(R[X])$ *és semiperfecte i autoinjectiu per l'esquerra o injectiu com* $R[X]$*-mòdul dreta, aleshores* $Q^l_{cl}(R)$ *és també semiperfecte i autoinjectiu per l'esquerra o injectiu com a* R*-mòdul dreta.* ∎

A la vista d'aquest resultat considerem interessant saber quan

$$J(Q^l_{cl}(R[X])) \cap R[X]$$

és de la forma $I[X]$ per un cert ideal I de R. Per simplicitat, treballarem en aquest problema només sobre $R[x]$, encara que els resultats admeten una fàcil generalització a un conjunt arbitrari de variables X.

LEMA 3.12. *Sigui* R *un anell tal que* $Q^l_{cl}(R[x])$ *existeix. Aleshores les següents afirmacions són equivalents:*

(i) $J(Q^l_{cl}(R[x])) \cap R[x] = I[x]$ *per un cert ideal* I *de* R.
(ii) *Si* $p(x) \in J(Q^l_{cl}(R[x])) \cap R[x]$, *aleshores* $p(x^2) \in J(Q^l_{cl}(R[x])) \cap R[x]$.
(iii) *Si* $p(x) \in J(Q^l_{cl}(R[x])) \cap R[x]$, *aleshores existeix* $k > 1$ *tal que*

$$p(x^k) \in J(Q^l_{cl}(R[x])) \cap R[x].$$

DEMOSTRACIÓ: Només cal provar que $(iii) \Rightarrow (i)$. Sigui $p(x) = a_0 + \cdots + a_n x^n$ un polinomi de $J(Q^l_{cl}(R[x])) \cap R[x]$. Podem suposar que a_0 i a_n són diferents de zero. Per hipòtesi sabem que existeixen $k_1, \ldots, k_n$ tals que $p(x^{k_1}), \ldots, p(x^{k_1 \cdots k_n})$ són elements de $J(Q^l_{cl}(R[x])) \cap R[x]$. Considerem ara la matriu

$$M = \begin{pmatrix} 1 & x & \ldots & x^n \\ 1 & x^{k_1} & \ldots & x^{nk_1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x^{k_1 \cdots k_n} & \ldots & x^{nk_1 \cdots k_n} \end{pmatrix} \in M_{n+1}(Q^l_{cl}(R[x]))$$

tenim que $M \begin{pmatrix} a_0 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \in {}^n J(Q^l_{cl}(R[x]))$. Com que M és una matriu invertible podem concloure que $a_0, \ldots, a_n$ són elements de $J(Q^l_{cl}(R[x])) \cap R$. ∎

PROPOSICIÓ 3.13. *Sigui* R *un anell commutatiu. Aleshores* $J(Q_{cl}(R[x])) \cap R[x] = I[x]$ *per un cert ideal* I *de* R.

DEMOSTRACIÓ: Aplicarem el Lema anterior veient que si $p(x)$ és un element de $J(Q_{cl}(R[x]))$, aleshores $p(x^2)$ tambè ho és. Sols cal veure que $1 - p(x^2)\frac{r(x)}{s'(x)}$ és invertible a $Q_{cl}(R[x])$. Sense perdre generalitat podem suposar que $s'(x) = s(x^2)$ per $s(x) \in R[x]$ no divisor de zero, ja que sino considerem $\frac{r(x)s'(-x)}{s'(x)s'(-x)}$. Hem de veure doncs que $s(x^2) - p(x^2)r(x)$ és un no divisor de zero de $R[x]$. Cal observar que per l'isomorfisme que hi ha entre $R[x]$ i $R[x^2]$ sabem que $1 - p(x^2)t$ és invertible a $Q_{cl}(R[x^2])$ per qualsevol element t de $Q_{cl}(R[x^2])$.

Suposem que $(s(x^2) - p(x^2)r(x))q(x) = 0$. Podem escriure $r(x) = r_1(x^2) + xr_2(x^2)$ i $q(x) = q_1(x^2) + xq_2(x^2)$, tenim doncs que

$$(s(x^2) - p(x^2)r_1(x^2))q_1(x^2) - x^2p(x^2)r_2(x^2)q_2(x^2) = 0$$
$$(s(x^2) - p(x^2)r_1(x^2))q_2(x^2) - p(x^2)r_2(x^2)q_1(x^2) = 0.$$

Però $u = s(x^2) - p(x^2)r_1(x^2)$ és un no divisor de zero de $R[x^2]$, per tant de la primera igualtat tenim $q_1(x^2) = u^{-1}x^2p(x^2)r_2(x^2)q_2(x^2)$. Si substituïm a la segona igualtat obtenim que

$$uq_2(x^2) - p(x^2)r_2(x^2)u^{-1}x^2p(x^2)r_2(x^2)q_2(x^2) = (u - p(x^2)r_2(x^2)u^{-1}x^2p(x^2)r_2(x^2))q_2(x^2) = vq_2(x^2) = 0,$$

però v també és un element regular de $R[x^2]$, per tant $q_2(x^2) = 0$ i com que $s(x^2) - p(x^2)r(x)$ és un element regular de $R[x^2]$ en conseqüència també $q_1(x^2) = 0$. ∎

Tenim doncs el següent resultat per anells commutatius.

TEOREMA 3.14. *Sigui R un anell commutatiu. Aleshores*

(i) *Si $Q_{cl}(R[x])$ és semilocal aleshores $Q_{cl}(R)$ és semilocal.*
(ii) *$Q_{cl}(R[x])$ és perfecte si i només si $Q_{cl}(R)$ és també perfecte.*
(iii) *$Q_{cl}(R[x])$ és semiprimari si i només si $Q_{cl}(R)$ és semiprimari.*

DEMOSTRACIÓ: Per les dues proposicions anteriors tenim ja demostrat (i) i la part "només si "de (ii). Sols falta veure que si $Q_{cl}(R)$ és semilocal i el seu radical de Jacobson és nilpotent o T-nilpotent, aleshores aquestes propietats són heretades pel clàssic de quocients de l'anell de polinomis. Podem suposar sense perdre generalitat que $R = Q_{cl}(R)$, si $J(R)$ és nilideal aleshores és clar que $R[x]$ i $J(R)[x]$ satisfan les condicions del Teorema 3.10, per tant $R[x]$ és un ordre en un anell semilocal, per ser $J(R)$ un nilideal tenim per [1] que $J(R[x]) = J(R)[x]$, per tant $R[x]$ és un ordre en un anell semilocal tal que el seu radical satisfà les mateixes condicions de T-nilpotència i nilpotència que $J(R)$.

Per anells no necessàriament commutatius podem obtenir un resultat anàleg, però hem de menester que 2 sigui invertible a $Q^l_{cl}(R[x])$.

LEMA 3.15. *Sigui R un anell tal que $Q^l_{cl}(R[x])$ existeix i $2^{-1} \in Q^l_{cl}(R[x])$. Aleshores $J(Q^l_{cl}(R[x])) \cap R[x] = I[X]$ per un cert ideal bilàter I de R.*

DEMOSTRACIÓ: Sigui $f(x)$ un polinomi de $J(Q^l_{cl}(R[x])) \cap R[x]$, suposem que $f(x)$ no és de $(J(Q^l_{cl}(R[x])) \cap R)[x]$ i que és de grau mínim entre els que satisfan aquesta condició. Aleshores

$$f(x) = f_1(x^2) + xf_2(x^2) \in J(Q^l_{cl}(R[x]))$$

$$f(-x) = f_1(x^2) - xf_2(x^2) \in J(Q^l_{cl}(R[x]))$$

per tant $f(x) + f(-x) = 2f_1(x^2)$ i tenim doncs que $f_1(x) \in J(Q^l_{cl}(R[x]))$. Si per altra banda considerem $f(x) - f(-x) = 2f_2(x^2)$, tenim que $f_2(x) \in J(Q^l_{cl}(R[x]))$. Com que o bé $f_1(x)$ o bé $f_2(x)$ és diferent de zero i els dos són polinomis de grau més petit que el de $f(x)$, per la minimalitat del grau de $f(x)$, són polinomis de $(J(Q^l_{cl}(R[x])) \cap R)[x]$. Però els coeficients de $f(x)$ són els de $f_1(x)$ i els de $f_2(x)$, per tant $f(x)$ també és un polinomi de $(J(Q^l_{cl}(R[x])) \cap R)[x]$, la qual cosa contradiu la tria de $f(x)$. ∎

TEOREMA 3.16. *Sigui R un anell tal que $Q^l_{cl}(R[x])$ existeix i $2^{-1} \in Q^l_{cl}(R[x])$. Aleshores*

(i) *Si $Q^l_{cl}(R[x])$ és semilocal, aleshores $Q^l_{cl}(R)$ existeix i és semilocal.*
(ii) *Si $Q^l_{cl}(R[x])$ és perfecte per la dreta o per l'esquerra, aleshores $Q^l_{cl}(R)$ és també perfecte per la dreta o per l'esquerra.*
(iii) *Si $Q^l_{cl}(R[x])$ és semiprimari, aleshores $Q^l_{cl}(R)$ és semiprimari.* ∎

Observem que el Lema 3.15 i per tant el Teorema 3.16 es poden demostrar amb arguments semblants quan R és un anell tal que $Q^l_{cl}(R)$ existeix i R conté una arrel senar de la unitat al seu centre.

Cal remarcar que la condició de que 2 sigui invertible a $Q^l_{cl}(R[x])$ o que hi hagi una arrel senar de la unitat, només sembla una manera de garantir que hi ha prous automorfismes de $Q^l_{cl}(R[x])$ i de fet nosaltres pensem que aquest resultat és cert sense cap hipòtesi adicional. És interessant en aquest context fer referència de l'article d'Amitsur [1], on demostra que $J(R[x]) = I[x]$ per un cert nilideal I de R, de fet la nostra tècnica està inspirada en la d'Amitsur. També és molt interessant una demostració de Bergman del mateix fet, que es pot trobar a [71, pàg 195]. La demostració de Bergman simplifica considerablement la de Amitsur, i pot ser que aporti noves idees al nostre problema sobre el radical de Jacobson del clàssic d'un anell de polinomis.

Una altra qüestió interessant és saber si l'existència del clàssic de quocients de R (per algún costat) implica l'existència del clàssic de quocients de l'anell de polinomis. D'aquest tipus de resultat només en coneixem com els que ja hem citat abans de Small i Pillay, [74] i [69], que és basen molt en l'estructura de R i la del seu anell clàssic de quocients. Ambdos autors demostren explícitament que l'anell de polinomis satisfà la condició d'Ore. Tampoc ens consta que a la literatura hi hagi exemples d'anells que tinguin clàssic de quocients i el seu anell de polinomis no.

Creiem que gran part de la dificultat del problema està en la falta d'una bona caracterització dels no divisors de zero de l'anell de polinomis. Ja hem comentat que quan R és un ordre per l'esquerra en un anell artinià semisimple, els no divisors de zero és poden caracteritzar com els polinomis $p(x)$ pels quals existeix un altre polinomi $q(x)$ tal que el terme de grau màxim de $p(x)q(x)$ no és divisor de zero. Si R és un anell commutatiu és ben conegut que $p(x)$ és un no divisor de zero si i només si els seus coeficients generen un ideal fidel de R (Lema de McCoy). També és ben conegut que aquest resultat no s'esten al cas no commutatiu. Per exemple, per qualsevol anell R diferent de zero podem considerar el polinomi de $M_2(R)$

$$p(x) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} x^2$$

aleshores és clar que els coeficients de $p(x)$ generen tot $M_2(R)$, però

$$p(x) \left(\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ a & 0 \end{pmatrix} x \right) = 0$$

per qualsevol element a de R.

També volem fer notar que p(x) és un divisor de zero amb un coeficient no divisor de zero. Això pot il.lustrar el fet de que en el Lema 3.7, no pensem que els polinomis que surten amb un coeficient no divisor de zero hagin de ser no divisors de zero a $R[x]$.

La nostra opinió és que l'existència del clàssic de quocients de l'anell no implica l'existència del clàssic de quocients de l'anell de polinomis. Per això ens basem en el següent fet, sigui R_i, $i \in I$, una família infinita d'anells d'Ore per la dreta. Considerem $R = \prod_{i \in I} R_i$, és clar que R és també d'Ore per la dreta, però per a que $R[x]$ sigui d'Ore per la dreta s'ha de complir que per qualsevol $R_i[x]$ les solucions de l'equació d'Ore no tan sols han d'existir, sino que a més s'han de poder triar amb grau acotat, ja que en cas contrari $R[x]$ no té clàssic de quocients per la dreta. Això ens fa pensar que en general el fet de que R sigui d'Ore per un costat no implica que $R[x]$ ho sigui.

Finalment només comentar que del problema invers, és a dir quan l'existència del clàssic de quocients de l'anell de polinomis implica l'existència de l'anell clàssic de quocients de R, només sabem resultats "estructurals", com els ja esmentats de [74] o els d'aquesta mateixa secció.

Si R és un anell autoinjectiu per l'esquerra aleshores és ben conegut que $\mathrm{Sing}_l(R) = J(R)$, cf.[77, Corollary XIV.1.3]. En el següent resultat veurem que és més fàcil demostrar bones propietats de la intersecció de $\mathrm{Sing}_l(Q^l_{cl}(R[x]))$ amb $R[x]$ que per $J(Q^l_{cl}(R[x]))$.

LEMA 3.17. *Sigui R un anell. Aleshores*

(i) [73] $\mathrm{Sing}_l(R[x]) = \mathrm{Sing}_l(R)[x]$.
(ii) *Si* $Q^l_{cl}(R[x])$ *existeix, aleshores* $\mathrm{Sing}_l(Q^l_{cl}(R[x])) \cap R[x] = \mathrm{Sing}_l(R)[x]$.

DEMOSTRACIÓ: (i) És clar que $\mathrm{Sing}_l(R)[x] \subseteq \mathrm{Sing}_l(R[x])$, perque si $p(x) \in \mathrm{Sing}_l(R)[x]$ aleshores $l_R(p(x))[x] \leq_e R[x]$.
Suposem que $p(x) \in \mathrm{Sing}_l(R[x])$, provarem que $p(x) \in \mathrm{Sing}_l(R)[x]$ per inducció sobre el grau de $p(x)$. Si $\deg(p(x)) = 0$ aleshores és clar que $p(x) \in \mathrm{Sing}_l(R)$, suposem que $p(x) = p_0 + \cdots + p_n x^n$ té grau $n > 0$. Per qualsevol $a \in R$ existeix un polinomi diferent de zero $q(x) \in (R[x]a \cap l_{R[x]}(p(x)))$, aleshores el coeficient de grau més gran de $q(x)$ serà un element de $Ra \cap l_R(p_n)$, per tant $l_R(p_n) \leq_e R$. Considerem ara $p_1(x) = p(x) - p_n x^n$, $p_1(x) \in \mathrm{Sing}_l(R[x])$ que té grau més petit que n, per tant per hipòtesi d'inducció $p_1(x)$ és un element de $\mathrm{Sing}_l(R)[x]$ i per tant també ho és $p(x)$.
(ii) Observem en primer lloc que

$$\mathrm{Sing}_l(Q^l_{cl}(R[x]) \cap R[x] = \mathrm{Sing}_l(R[x]).$$

Suposem ara que $a \in (\mathrm{Sing}_l(Q^l_{cl}(R[x])) \cap R)$. Aleshores per qualsevol $0 \neq r \in R$, $l_{Q^l_{cl}(R[x])}(a) \cap Q^l_{cl}(R[x])r \neq 0$, per tant existeix $p(x)r \neq 0$ tal que $p(x)ra = 0$. Tenim doncs que $l_R(a) \cap Rr \neq 0$. Suposem ara que $a \in \mathrm{Sing}_l(R)$, aleshores per qualsevol $q(x)^{-1}p(x) \in Q^l_{cl}(R[x])$. Fent inducció sobre el grau de $p(x)$, amb arguments semblants als utilitzats a (i), es té $l_{R[x]}(a) \cap R[x]q(x)q(x)^{-1}p(x) \neq 0$ i per tant $\mathrm{Sing}_l(Q^l_{cl}(R[x])) \cap R = \mathrm{Sing}_l(R)$. Llavors (ii) segueix de (i). ∎

Tenim doncs com a conseqüència d'aquest Lema, de la Proposició 3.11, del Lema 3.7 i del resultat [77, Corollary XIV.1.3] que esmentàvem abans,

PROPOSICIÓ 3.18. *Sigui R un anell tal que* $Q^l_{cl}(R[x])$ *existeix i és semiperfecte autoinjectiu per l'esquerra. Aleshores* $Q^l_{cl}(R)$ *existeix i és semiperfecte i autoinjectiu per l'esquerra.* ∎

3.3. Dimensió de Goldie finita.

Tornem ara als anells de polinomis amb clàssic de quocients injectiu. En aquesta secció provarem que per un conjunt no buit X, $Q^l_{cl}(R[X])$ és autoinjectiu per la dreta i per l'esquerra si i només si R és un ordre en un anell QF, i que si $Q^l_{cl}(R[X])$ és injectiu com a $R[X]$-mòdul dreta aleshores R té clàssic de quocients pels dos costats i aquest ha de ser QF, cf. Teorema 3.19 i 3.23 respectivament. Aquests resultats estan en la línea del Corol.lari 3.6, d'on suprimim la condició de que X sigui infinit però exigim condicions d'injectivitat més fortes sobre $Q^l_{cl}(R[X])$.

Recordem que un anell és diu que té *dimensió de Goldie finita* per l'esquerra si no conté sumes directes infinites d'ideals esquerra independents diferents de zero. Similarment és defineix dimensió de Goldie finita per la dreta. Direm que R té dimensió de Goldie finita si té dimensió de Goldie finita pels dos costats. R és diu que és un *anell de Goldie* per la dreta, si té dimensió de Goldie per la dreta finita i satisfà condició de cadena ascendent per anul.ladors per la dreta. De manera similar es defineixen els anells de Goldie per l'esquerra. R és un anell de Goldie quan ho és per la dreta i per l'esquerra.

El títol de la secció, és degut a que en les demostracions que s'hi fan sempre es demostra, a partir de les condicions d'injectivitat de l'anell clàssic de quocients de l'anell de polinomis, que l'anell té dimensió de Goldie finita per un costat. Observi's que provar aquest fet sempre ens és útil. Si $Q^l_{cl}(R[X])$ és autoinjectiu per l'esquerra i R té dimensió de Goldie finita per la dreta, aleshores podem concloure per la Proposició 3.2 que R és un anell de Goldie per l'esquerra. Si $Q^l_{cl}(R[X])$ és autoinjectiu per la dreta i R té dimensió de Goldie finita per la dreta, llavors per la Proposició 3.18 podem concloure que R té clàssic de quocients per l'esquerra semiperfecte i autoinjectiu per l'esquerra.

És ben conegut que els anells de Goldie per la dreta semiprimers són precisament els ordres dreta en anells artinians semisimples, cf. [14, Theorem 1.27], per demostrar això és fa servir que en un anell de Goldie per la dreta semiprimer un ideal és essencial si i només si conté un element regular, cf.[14, Theorem 1.10]. També és ben conegut que si un anell és de Goldie per la dreta aleshores $N(R)$, el *nilradical* de R, és nilpotent, cf. [14, Theorem 1.35]. En aquesta secció farem ús constant d'aquests dos resultats.

TEOREMA 3.19. *Sigui R un anell. Aleshores les següents afirmacions són equivalents:*

(i) *Hi ha un conjunt no buit X tal que $Q^l_{cl}(R[X])$ existeix i és autoinjectiu per la dreta i per l'esquerra.*

(ii) *Hi ha un conjunt* Y *tal que* $Q^l_{cl}(R[Y])$ *existeix i és un anell* QF.
(iii) *Per qualsevol conjunt* X, $Q^l_{cl}(R[X])$ *existeix i és un anell* QF.

DEMOSTRACIÓ: $(i) \Rightarrow (ii)$ Haurem demostrat el que volem si veiem que $Q^l_{cl}(R[x])$ autoinjectiu pels dos costats implica que $Q^l_{cl}(R)$ existeix i és QF, perquè aleshores escollint un element $x \in X$ i considerant $Y = X \setminus \{x\}$ podem concloure que $Q^l_{cl}(R[Y])$ existeix i és QF.

Suposem que R és un anell no singular per l'esquerra i que $Q^l_{cl}(R[x])$ existeix i és autoinjectiu pels dos costats. Aleshores

$$Q^l_{cl}(R[x]) \cong Q^l_{max}(R[x]) \cong Q^l_{max}((Q^l_{max}(R))[x]) \cong Q^l_{cl}((Q^l_{max}(R))[x]).$$

Per ser R no singular per l'esquerra $Q^l_{max}(R)$ és un anell regular autoinjectiu per l'esquerra. Pel Corol.lari 3.5 $Q^l_{max}(R)$ ha de ser artinià semisimple. Aleshores per [74] $Q^l_{cl}(R[x])$ és també artinià semisimple, aplicant altra vegada els resultats de [74] podem concloure que $Q^l_{cl}(R)$ existeix i que és artinià semisimple.

Suposem ara que R és un anell qualsevol tal que $Q^l_{cl}(R[x])$ existeix i és autoinjectiu pels dos costats. És ben conegut que $Q^l_{cl}(R[x])/J(Q^l_{cl}(R[x]))$ és un anell regular autoinjectiu pels dos costats i que $J(Q^l_{cl}(R[x])) = \mathrm{Sing}_l(Q^l_{cl}(R[x]))$,cf. [77, Corollary XIV.1.3]. Pel Lema 3.8 tenim que $Q^l_{cl}(R[x])/J(Q^l_{cl}(R[x]))$ és un localitzat per l'esquerra de $(R/\mathrm{Sing}_l(R))[x]$, però com que un anell regular autoinjectiu és directament finit, cf. [37, Theorem 9.29], tenim que

$$Q^l_{cl}(R[x])/J(Q^l_{cl}(R[x])) \cong Q^l_{cl}((R/\mathrm{Sing}_l(R))[x])$$

$R/\mathrm{Sing}_l(R)$ és un anell no singular per l'esquerra, pel cas no singular i l'isomorfisme anterior tenim que $R/\mathrm{Sing}_l(R)$ i $(R/\mathrm{Sing}_l(R))[x]$ tenen clàssic de quocients per l'esquerra artinià semisimple. Per tant $Q^l_{cl}(R[x])$ és un anell semiperfecte autoinjectiu pels dos costats. Per tant per la Proposició 3.18 $Q^l_{cl}(R)$ existeix i és un anell semiperfecte autoinjectiu per l'esquerra, aleshores pel Corol.lari 3.4 podem concloure que $Q^l_{cl}(R[Y])$ és un anell QF per tot conjunt Y.

$(ii) \Rightarrow (iii)$ és clar a partir del Corol.lari 3.6. ∎

Volem remarcar que per treballar aquest cas hem fet servir que $Q^l_{cl}(R[x])$ és autoinjectiu pels dos costats en només dos cops, un per aplicar el Corol.lari 3.5 en el cas no singular per l'esquerra i l'altre per concloure que $Q^l_{cl}(R[x])/J(Q^l_{cl}(R[x]))$ és directament finit. Creiem que com a mínim el cas no singular per l'esquerra s'ha de poder demostrar suposant només que $Q^l_{cl}(R[x])$ és autoinjectiu per l'esquerra. Si es demostrés això aleshores es podria concloure per la Proposició 3.18 que R té clàssic de quocients per l'esquerra semiperfecte i autoinjectiu per l'esquerra.

El següent resultat pot aclarir quina és la situació, si s'intenta demostrar directament que R té dimensió de Goldie finita per l'esquerra quan $Q^l_{cl}(R[x])$ és autoinjectiu per l'esquerra.

LEMA 3.20. *Sigui R un anell tal que $Q^l_{cl}(R[x])$ existeix i és autoinjectiu per l'esquerra. Aleshores les següents afirmacions són equivalents,*

(1) *R té dimensió de Goldie finita per l'esquerra.*
(2) *Siguin $p(x)$ i $q(x)$ elements qualssevol de $R[x]$, amb $q(x)$ un no divisor de zero. Aleshores existeix n tal que per qualsevol $m > n$, $l_R(p(x) - x^m q(x)) = 0$.*
(3) *Siguin $p(x)$ i $q(x)$ elements qualssevol de $R[x]$, amb $q(x)$ un no divisor de zero. Aleshores existeix n tal que $l_R(p(x) - x^n q(x)) = 0$.*

DEMOSTRACIÓ: Si $p(x)$ i $q(x)$ són com a l'enunciat de (2), aleshores si considerem $I_0 = l_R(p(x))$ i per $n \geq 1$ $I_n = l_R(p(x) - x^n q(x))$ són ideals per l'esquerra independents. Demostrarem això per inducció sobre n. És clar que $I_0 \cap I_1 = 0$, suposem que tenim

$$p_0(x) + \cdots + p_n(x) = p_{n+1}(x)$$

on $p_i(x) \in I_i$ i $p_{n+1}(x) \in I_{n+1}$. Si multipliquem aquesta igualtat per la dreta per $p(x) - x^{n+1}q(x)$ obtenim

$$-x^{n+1}p_0(x)q(x) + (x - x^{n+1})p_1(x)q(x) + \cdots + (x^n - x^{n+1})p_n(x)q(x) = 0$$

per ser $q(x)$ un no divisor de zero tenim que

$$-x^{n+1}p_0(x) + (x - x^{n+1})p_1(x) + \cdots + (x^n - x^{n+1})p_n(x) = 0$$

i ara per hipòtesi d'inducció $p_i(x)$ i per tant també $p_{n+1}(x)$ són zero.

Per veure (1) $\Rightarrow$ (2) cal fer servir que R té dimensió de Goldie finita per l'esquerra si i només si $R[x]$ també té dimensió de Goldie finita per l'esquerra, aquest és un resultat degut a Shock [73]. Per tant si R té dimensió de Goldie finita existeix n tal que per qualsevol $m > 0$, $I_m = 0$.

És clar que (2) $\Rightarrow$ (3). Per veure que (3) $\Rightarrow$ (2) considerem una successió J_n, $n \geq 0$, d'ideals de R per l'esquerra independents i diferents de zero. Aleshores $I_n = Q^l_{cl}(R[x])J_n$ és també una successió d'ideals per l'esquerra independents de $Q^l_{cl}(R[x])$. Considerem el morfisme $f\colon \oplus_{n\geq 0} I_n \longrightarrow Q^l_{cl}(R[x])$, definit com $f(r) = x^n r$ per tot $r \in I_n$. Per ser $Q^l_{cl}(R[x])$ autoinjectiu per l'esquerra tenim que existeix un element $q(x)^{-1}p(x)$ tal que f ve donada per multiplicació a la dreta per aquest element. En particular tenim que per qualsevol $r \in I_n$, r diferent de zero, $rq(x)^{-1}p(x) = x^n r$. Com que $R[x]$ és d'Ore per l'esquerra tenim que existeixen un no divisor de zero $q'(x)$ i un element s diferent de zero, ambdos de $R[x]$, tals que $q'(x)r = sq(x)$. LLavors $q'(x)^{-1}sp(x) = x^n r$ i $s(p(x) - x^n q(x)) = 0$. Però això contradiu (3), per tant no pot existir a R una successió infinita d'ideals independents diferents de zero. ∎

Seguint amb la mateixa notació que a la demostració de (3) $\Rightarrow$ (2) del resultat anterior, cal observar que trobem un element s de $l_{R[x]}(p(x)-x^n q(x))$ mitjantçant les solucions de l'equació d'Ore $q'(x)r = sq(x)$. Per fer la demostració podem suposar de fet que r és un element de J_n, i aleshores arribem a veure que s és de $l_{R[x]}(p(x) - x^n q(x))$. Això lliga amb la qüestió que plantejavem a la secció anterior sobre si es pot trobar una cota pel grau de les solucions de l'equació d'Ore en funció del grau dels termes implicats. En aquest cas r es pot triar de grau zero i $q(x)$ és un polinomi fixat, qué es pot dir del grau de s?. Si es pogués trobar una cota podríem concloure que si $Q^l_{cl}(R[x])$ és autoinjectiu per l'esquerra aleshores R té dimensió de Goldie finita, perque s no pot ser de $l_{R[x]}(p(x) - x^n q(x))$, ja que al anar augmentant n arribaríem a una contradicció degut a que $q(x)$ és un no divisor de zero.

LEMA 3.21. *Si R és un anell amb dimensió de Goldie finita per la dreta, aleshores $R_R \leq_e Q^l_{cl}(R)$.*

DEMOSTRACIÓ: Hem de veure que per qualsevol element $r^{-1}s \in Q^l_{cl}(R)$ es compleix que $r^{-1}sR \cap R \neq 0$. Això passa si i només si $sR \cap rR \neq 0$ per qualsevol $s \in R$ i per qualsevol no divisor de zero r de R. Si $sR \cap rR = 0$, aleshores els ideals $I_n = r^n sR$, formen una família d'ideals dreta independents, en conseqüència existeix n tal que $I_m = 0$ per qualsevol $m > n$. Per ser r un element regular, tenim que $s = 0$. Podem concloure doncs que $R \leq_e Q^l_{cl}(R)$. ∎

PROPOSICIÓ 3.22. *Sigui R un anell amb dimensió de Goldie finita per la dreta, tal que $Q^l_{cl}(R)$ esixteix i és un anell QF que és injectiu com a R-mòdul per la dreta. Aleshores $Q^r_{cl}(R)$ existeix.*

DEMOSTRACIÓ: Com que R té dimensió de Goldie per la dreta finita, pel Lema 3.21 $R_R \leq_e Q^l_{cl}(R)$ i per ser $Q^l_{cl}(R)$ QF, $E(R_R) \cong Q^l_{cl}(R)$. Volem provar que $E(R_R) \cong Q^r_{max}(R)$. Considerem

$$H = \mathrm{End}_R(E(R_R)) \cong \mathrm{End}_{Q^l_{cl}(R)}(Q^l_{cl}(R)) \cong Q^l_{cl}(R).$$

Ara l'anell maximal de quocients per la dreta de R és l'anell d'endomorfismes de l'envolcall injectiva vista com a H-mòdul per l'esquerra i per tant en el nostre cas isomorf a $Q^l_{cl}(R)$. En particular el maximal de quocients és injectiu i isomorf a $E(R_R)$, tal com volíem veure.

$$\mathrm{Sing}_r(Q^l_{cl}(R)) = J(Q^l_{cl}(R)) = N(Q^l_{cl}(R))$$

i

$$J(Q^l_{cl}(R)) \cap R = N(R)$$

on $N(Q^l_{cl}(R))$ i $N(R)$ denoten el nilideal maximal de $Q^l_{cl}(R)$ i R respectivament, cf. [77, Corollary XV.3.2]. Si apliquem ara un resultat de Tachikawa, cf. [77, Proposition XV.3.3] podem concloure que $Q^l_{cl}(R)$ és també un ordre per la dreta. ∎

Demostrarem tot seguit que si $Q^l_{cl}(R[X])$ és injectiu con a $R[X]$-mòdul per la dreta, aleshores no tan sols aquest ha de ser QF sino que a més el clàssic de quocients per la dreta també existeix. Si comparem aquest resultat amb el Corol.lari 3.6 i el Teorema 3.19, la demostració de que el clàssic de quocients per la dreta existeix és una novetat. Amb les hipòtesis dels resultats esmentats això no és cert. Per exemple si agafem R, un domini d'Ore per l'esquerra i no per la dreta, llavors per qualsevol conjunt X, existeix $Q^l_{cl}(R[X])$ i és un anell de divisió per tant QF. Però no existeix el clàssic per la dreta de $R[X]$.

TEOREMA 3.23. *Sigui R un anell, aleshores les següents afirmacions són equivalents,*

(i) *Hi ha un conjunt no buit X tal que $Q^l_{cl}(R[X])$ existeix i és injectiu com a $R[X]$-mòdul per la dreta.*
(ii) *Hi ha un conjunt Y tal que $R[Y]$ té clàssic de quocients pels dos costats i aquest és un anell QF.*
(iii) *Per qualsevol conjunt X, $R[X]$ té clàssic de quocients pels dos costats i aquest és un anell QF.*

DEMOSTRACIÓ: $(i) \Rightarrow (ii)$ Sols cal demostrar que si $Q^l_{cl}(R[x])$ existeix i és injectiu com a $R[x]$-mòdul per la dreta aleshores R té clàssic de quocients pels dos costats i aquest és QF, ja que per un conjunt qualsevol X és suficient agafar un element $x \in X$ i fer $Y = X \setminus \{x\}$, .

Suposem que $I_1, I_2, \ldots, I_n, \ldots$ és una successió d'ideals per la dreta de R independents, aleshores $I_1R[x], I_2R[x], \ldots$ és una successió d'ideals per la dreta de $R[x]$ independents. Podem definir un morfisme

$$f\colon \oplus_{n=1}^{\infty} I_nR[x] \longrightarrow R[x]$$

tal que si $p(x) \in I_nR[x]$ aleshores $f(p(x)) = x^n p(x)$. Com que $Q^l_{cl}(R[x])$ és $R[x]$ injectu per la dreta, f ve donada per multiplicació per l'esquerra per algún element $q(x)^{-1}p(x) \in Q^l_{cl}(R[x])$. Per tant tenim que per qualsevol n, $p(x)I_n = q(x)x^nI_n$. Però si agafem $n > \deg(p(x))$ això implica que $I_n = 0$. Per tant R no conté sumes directes infinites d'ideals per la dreta. Si R té dimensió de Goldie per la dreta finita aleshores per un resultat de Shock [73] $R[x]$ també té dimensió de Goldie finita per la dreta. Per tant pel Lema 3.21, $R[x] \leq_e Q^l_{cl}(R[x])$ com a $R[x]$ mòduls dreta i aleshores $Q^l_{cl}(R[x]) \cong E(R[x]_{R[x]})$ és un anell semiperfecte

[77, Proposition XIV.1.7]. Per la Proposició 3.2 tenim que R satisfà condiciò de cadena ascendent per anul.ladors dreta, com que a més té dimensió de Goldie finita tenim per [14, Theorem 1.35] que el nilradical de R, $N(R)$ és nilpotent. Per tant $J(R[x]) = N(R)[x]$ és nilpotent, cf.[1]. Com que $R[x]$ té clàssic de quocients per l'esquerra semilocal, podem concloure per [71, Exercise 6, pàg. 444] que de fet aquest clàssic és semiprimari i que $J(Q^l_{cl}(R[x])) \cap R[x] = N(R)[x]$. Per la Proposició 3.8 i el Lema 3.7, tenim que $Q^l_{cl}(R)$ existeix, és semiprimari i injectiu com a R-mòdul per la dreta. Ara aplicant el Corol.lari 3.4 $Q^l_{cl}(R)$ és QF.

Si apliquem ara la Proposició 3.22 obtenim que R té clàssic de quocients pels dos costats i que aquest és un anell QF.

$(ii) \Rightarrow (iii)$ És clar a partir del Teorema 3.1. ∎

3.4. Aplicacions.

Tots els nostres resultats és poden reescriure en termes de l'anell de grup RG sobre un grup abelià lliure, ja que si G té una base X aleshores RG és pot veure com una localització central de $R[X]$, cf.[69].

COROL.LARI 3.24. *Sigui R un anell, aleshores les següents afirmacions són equivalents*

(i) *Hi ha un grup abelià lliure $G \neq 0$, tal que $Q^l_{cl}(RG)$ existeix i és autoinjectiu per la dreta i per l'esquerra.*
(ii) *Hi ha un grup abelià lliure F tal que $Q^l_{cl}(RF)$ existeix i és un anell QF.*
(iii) *Per qualsevol grup abelià lliure G, $Q^l_{cl}(RG)$ existeix i és un anell QF.*
(iv) *Existeix un grup abelià lliure G amb base infinita tal que $Q^l_{cl}(RG)$ és autoinjectiu per l'esquera.*
(v) *Existeix un grup abelià lliure G amb base infinita tal que $Q^l_{cl}(RG)$ és autoinjectiu per la dreta.*

Cal observar que si $Q^l_{cl}(R[X])$ és injectiu com a mòdul dreta sobre un localitzat central de $R[X]$ aleshores també és injectiu com a $R[X]$-mòdul dreta.

COROL.LARI 3.25. *Sigui R un anell aleshores les següents afirmacions són equivalents,*

(i) *Hi ha un grup abelià lliure $G \neq 0$ tal que $Q^l_{cl}(RG)$ és injectiu com a RG-mòdul dreta.*
(ii) *Hi ha un grup abelià lliure F tal que RF té clàssic de quocients pels dos costats i aquest és QF.*
(iii) *Per qualsevol grup abelià lliure G, RG té clàssic de quocients per les dues bandes i aquest és QF.*

La nostra recerca sobre anells de polinomis amb clàssic de quocients injectiu va ser motivada per una pregunta de Carl Faith, sobre quan un anell de polinomis podia ser FPF. En general és una pregunta oberta si els anells FPF per la dreta tenen clàssic de quocients per algun costat i si aquest és a més injectiu [33, Question 6]. Ja hem vist que això és cert en el cas commutatiu i en el semiprimer, cf. Teorema 1.15 i el Teorema 1.17. Els nostres resultats anteriors ens serviran per caracteritzar quan $R[X]$ és FPF, amb R commutatiu o semiprimer. També amb les mateixes tècniques podrem caracteritzar quan RG és FPF, on G és un grup abelià lliure i R és o commutatiu o semiprimer.

LEMA 3.26. *Sigui R un anell. Si per qualsevol $a \in R$, l'ideal dreta $aR[x]+xR[x]$ genera la categoria dels $R[x]$ mòduls dreta aleshores*

(i) *El centre de R és un anell regular.*
(ii) *Si a és un no divisor de zero per l'esquerra de R, aleshores $RaR = R$.*

DEMOSTRACIÓ: (i) Sigui a un element central de R. Com que l'ideal $I = aR[x]+xR[x]$ és un generador i està generat per elements centrals per la proposició 1.8 és projectiu. Per tant existeixen f_1, f_2 elements de $\mathrm{Hom}_{R[x]}(I, R[x])$ tals que per qualsevol $b \in I$, $b = af_1(b) + xf_2(b)$. En particular per ax tenim $ax = af_1(x)a+x^2 f_2(a)$, igualant els coeficients de grau 1 d'aquesta igualtat tenim que $ara = a$ per un cert element $r \in R$. Si agafem $z = rar$ és clar que $aza = a$, es pot provar que a més z és central, cf.[37, Theorem 1.14 (demostració)].

(ii) Suposem ara que a és un no divisor de zero per l'esquerra de R. Considerem l'ideal $I = aR[x] + xR[x]$. Tenim que per qualsevol $f \in \mathrm{Hom}_{R[x]}(I, R[x])$, $f(a)x = f(x)a$. Com que a és un no divisor de zero per l'esquerra el coeficient de grau zero de $f(x)$ és zero. Com que I és un generador existeixen $f_1, \ldots, f_n$ i $g_1, \ldots, g_n$ elements de $\mathrm{Hom}_{R[x]}(I, R[x])$ tals que

$$f_1(a)p_1 + \cdots + f_n(a)p_n + g_1(x)q_1 + \cdots + g_n(x)q_n = 1$$

per uns certs elements $p_1, \ldots, p_n$ i $q_1, \ldots, q_n$ de $R[x]$. Per les remarques anteriors tenim que

$$f_1(x)ap_1 + \cdots + f_{n-1}(x)ap_{n-1} = x - x^2 q(x)$$

per un cert $q(x) \in R[x]$. Per tant el coeficient de grau 1 d'aquesta igualtat ens està dient que $RaR = R$. ∎

COROL.LARI 3.27. *Sigui R un anell diferent de zero tal que és o commutatiu o no singular per la dreta i X un conjunt no buit. Aleshores una condició necessària i suficient per a que $R[X]$ sigui FPF per la dreta és que $X = \{x\}$ i R sigui artinià semisimple.*

DEMOSTRACIÓ: Suposem que $R[X]$ és FPF per la dreta, pel Lema 1.29 sabem que R és FPF per la dreta. Escollim $x \in X$ i considerem $(R[X \setminus \{x\}])[x]$. Pel lema 3.4 el centre de $R[X \setminus \{x\}]$ és un anell regular. Per tant $X = \{x\}$.

Suposem que R és commutatiu, com que el clàssic de quocients de $R[x]$ és autoinjectiu, cf Teorema 1.15, pel Corol.lari 3.5 R és un producte finit de cossos.

Si R és no singular per la dreta aleshores és semiprimer, si fem servir la caracterització dels FPF per la dreta semiprimers del Teorema 1.16 i el Teorema 3.23 podem concloure que R és un ordre per la dreta i per l'esquerra en un anell artinià semisimple. Per tant R és un anell FPF per la dreta que és de Goldie per la dreta i per l'esquerra. Per veure que R és el seu propi clàssic de quocients provarem que per qualsevol no divisor de zero $a \in R$, $aR = R$. Sabem que R és acotat per la dreta per tant $aR \leq_e R$ conté un ideal bilàter J que és essencial com a ideal dreta, per tant J conté un no divisor de zero b, cf. [14, Theorem 1.10], i pel Lema 3.26 $R = RbR \leq_e aR$. Per tant $aR = R$ tal com volíem veure.

Si R és artinià semisimple aleshores $R[x]$ és FPF, [33, Proposition 4.13]. ∎

Donarem ara un resultat anàleg al Lema 3.26 que ens portarà a les mateixes conclusions per anells de grup FPF on el grup és un grup abelià lliure.

LEMA 3.28. *Sigui R un anell, $\mathbb{Z}$ el grup dels enters generat per un element x. Si per qualsevol element $a \in R$, l'ideal dreta $aR\mathbb{Z} + (1-x)R\mathbb{Z}$ genera la categoria dels $R\mathbb{Z}$ mòduls dreta aleshores*

(i) *El centre de R és un anell regular.*

(ii) *Si a és un no divisor de zero per l'esquerra de R, aleshores $RaR = R$.*

DEMOSTRACIÓ: (*i*) Sigui a un element central de R. Com que l'ideal $I = aR\mathbb{Z} + (1-x)R\mathbb{Z}$ és projectiu, com al Lema 3.26 tenim que

$$a(1-x) = af_1(1-x)a + (1-x)^2 f_2(1-x)$$

per uns certs f_1, f_2 elements de $\mathrm{Hom}_{R\mathbb{Z}}(I, R\mathbb{Z})$. Existeix un n tal que

$$a(1-x)x^n = af_1(1-x)ax^n + (1-x)^2 f_2(1-x)x^n \in R[x],$$

però els elements $(1-x), (1-x)^2, \ldots, (1-x)^n, \ldots$ formen una base de $R[x]$,com a R-mòdul lliure. Igualant els coeficients en $(1-x)$ de l'equació anterior, podem concloure que existeix un $r \in R$ tal que $ara = a$. Com al Lema 3.26 tenim doncs que el centre de R és regular.

(*ii*) Suposem ara que a és un no divisor de zero per l'esquerra de R. Considerem l'ideal $I = aR\mathbb{Z} + (1-x)R\mathbb{Z}$. Ara la prova va com al Lema 3.26, sols cal observar que per qualsevol $f \in \mathrm{Hom}_{R\mathbb{Z}}(I, R\mathbb{Z})$ tenim que $f(a)(1-x) = f(1-x)a$. Per tant com que a és un no divisor de zero per l'esquerra $f(1-x)$ és un element de l'ideal d'augmentació de $R\mathbb{Z}$. ∎

COROL.LARI 3.29. *Sigui R un anell diferent de zero, tal que és o commutatiu o no singular per la dreta i G un grup abelià lliure diferent de zero. Aleshores RG és FPF per la dreta si i només si $G \cong \mathbb{Z}$ i R és artinià semisimple.*

DEMOSTRACIÓ: Per veure que és una condició necessària ho podem fer com al Corol.lari 3.27.

Per demostrar que és suficient és pot veure com a conseqüència del Corol.lari 3.27 i de que un localitzat central de un FPF continua sent FPF. ∎

Capítol 4.

Anells de sèries formals amb clàssic de quocients injectiu

4.1. Divisors de zero en l'anell de sèries formals.

En l'anell de polinomis sobre un anell commutatiu, els elements que no són divisors de zero estan ben caracteritzats pel Lema de McCoy, com els polinomis tals que els seus coeficients generen un ideal fidel. Aquest resultat no s'esten a l'anell de sèries formals sobre un anell commutatiu, tal com prova el següent exemple.

EXEMPLE 4.1. [9, Example 1 pàg.6] *Existeix un anell commutatiu R tal que $R[\![x]\!]$ conté un polinomi mònic de grau 1 que és un divisor de zero a $R[\![x]\!]$.*

DEMOSTRACIÓ: Sigui K un cos commutatiu, considerem l'anell

$$K[y, \{z_i\}_{i=0}^{\infty}],$$

sigui I l'ideal generat per yz_0 i els elements $\{z_i + yz_{i+1}\}_{i=0}^{\infty}$. Definim $R = K[y, \{z_i\}_{i=0}^{\infty}]/I$, sigui $a_0 = y$ i $b_i = z_i$ aleshores és clar que $(a_0 + x)(\Sigma_{i=0}^{\infty} b_i x^i) = 0$ a $R[\![x]\!]$. ∎

Existeixen resultats anàlegs al lema de Mc Coy per anells de sèries, en els casos en que R és un anell commutatiu semiprimer o noetherià cf.[9]. Tot seguit demostrarem aquest resultat en el cas semiprimer i el farem servir al llarg del capítol sense referència explícita.

PROPOSICIÓ 4.2. [9, Theorem 8] *Sigui R un anell commutatiu sense elements nilpotents. Si a i b són elements de $R[\![x]\!]$ tals que $ab = 0$, aleshores qualsevol coeficient de b anul.la a.*

DEMOSTRACIÓ: Sigui P un ideal primer de R, aleshores $P[\![x]\!]$ és un ideal primer de $R[\![x]\!]$. Tenim doncs que o bé a és de $P[\![x]\!]$ o bé b és de $P[\![x]\!]$. En particular si a_i és un coeficient arbitrari de a i b_j és un coeficient arbitrari de b, tenim que $a_i b_j \in P$. Sigui I l'ideal generat pels coeficients de a i J l'ideal generat pels coeficients de b. Tenim que $IJ \in P$ per qualsevol ideal primer P de R però com que R no té elements nilpotents $IJ = 0$. ∎

Sigui R un anell commutatiu i $Q_{cl}(R)$ el seu clàssic de quocients. Hom podria esperar que $Q_{cl}(R[\![x]\!]) = Q_{cl}(Q_{cl}(R)[\![x]\!])$, la situaciò però no és així, en general no és cert que $Q_{cl}(R)[\![x]\!] \subseteq Q_{cl}(R[\![x]\!])$. El següent resultat il.lustra aquest fet.

TEOREMA 4.3. [9, Theorem 30 pag. 42] *Sigui R un domini d'integritat commutatiu i sigui a un element diferent de zero de R. Si $\cap_{n=1}^{\infty} a^n R = 0$, aleshores el clàssic de quocients de $R[\![\frac{x}{a}]\!]$ té grau de transcendència infinit sobre $Q_{cl}(R[\![x]\!])$.* ∎

4.2. Anells $\aleph_0$-injectius i $\aleph_0$-algebraicament compactes.

Per un *sistema numerable d'equacions lineals S* per la dreta sobre un anell R volem dir un sistema del tipus $AX = B$, ón A és una matriu $\aleph_0 \times \aleph_0$ amb les components de R i en la qual les files tenen totes les components zero llevat d'un nombre finit, X és una columna amb un conjunt numerable d'incògnites $x_0, x_1, \dots, x_n, \dots$, i B és també una columna amb un numerable d'elements de R. Un sistema numerable d'equacions lineals per la dreta S direm que és *finitament resoluble* a R si qualsevol subsistema finit de S té solució a R. Un anell R és diu que és $\aleph_0$-*algebraicament compacte* per la dreta si tot sistema numerable d'equacions lineals per per la dreta de R que és finitament resoluble és resoluble. De manera anàloga es defineix $\aleph_0$-algebraicament compacte per l'esquerra. Direm que R és $\aleph_0$-algebraicament compacte si ho és pels dos costats, c.f.[9] per aquestes definicions.

Un anell R és diu que és $\aleph_0$-*injectiu* per l'esquerra si satisfà el criteri de Baer per ideals per l'esquerra de R comptablement generats. Anàlogament definirem $\aleph_0$-injectiu per la dreta. Direm que R és $\aleph_0$-injectiu si és $\aleph_0$-injectiu pels dos costats. Quan l'anell R és regular, la condició de ser $\aleph_0$-algebraicament compacte per la dreta és equivalent a $\aleph_0$-injectiu per l'esquerra, tal com provarem en el següent resultat. Val a dir que la demostració que donem d'aquest fet és gairebé la mateixa que la que aparèix a [9, Theorem 42] pel cas en que R és un anell regular commutatiu.

PROPOSICIÓ 4.4. (Essencialment a [9, Theorem 42]) *Sigui R un anell regular. Aleshores R és $\aleph_0$-injectiu per l'esquerra si i només si R és $\aleph_0$-algebraicament compacte per la dreta.*

DEMOSTRACIÓ: Si R és un anell regular que és $\aleph_0$-algebraicament compacte per la dreta aleshores és clar que és també $\aleph_0$-injectiu per l'esquerra. Demostrar que R satisfà el criteri de Baer per ideals esquerra comptablement generats, és equivalent a resoldre un sistema numerable d'equacions lineals per la dreta. Aquest sistema en el cas d'un anell regular sempre és finitament resoluble. Per tant R és $\aleph_0$-injectiu per l'esquerra.

Suposem doncs que R és un anell regular $\aleph_0$-injectiu per l'esquerra. Considerem el sistema numerable

$$L_n = \sum_{i=1}^{\infty} a_{ni} x_i = b_i \text{ per } n \geq 1$$

tal que cada subsistema finit té solució. Per cada subsistema les solucions s'obtenen sumant les solucions del sistema homogeni a una solució particular. Com que R és un anell regular les solucions d'un sistema d'equacions lineal finit homogeni per la dreta són un R-mòdul per la dreta finitament generat, c.f.[37, Lemma 2.1]. Si considerem el subsistema $L_1, \ldots, L_n$, tenim en particular que les solucions de la primera coordenada x_1 del sistema homogeni formen un ideal pricipal de R de la forma $(1-e_n)R$ on e_n és un idempotent de R. Si tornem ara al sistema inicial, tenim que per cada subsistema finit $L_1, \ldots, L_n$, les solucions de x_1 són de la forma $e_n\alpha_n + (1-e_n)R$, on $e_n\alpha_n$ és una solució particular i $(1-e_i)(1-e_j) = 1-e_j$ per $i \leq j$. Sigui $I = \cup_{n\geq 1} Re_n$, i considerem el morfisme de R-mòduls per l'esquerra $f\colon I \longrightarrow R$ tal que $f(e_n) = e_n\alpha_n$. Per la definició de $e_n\alpha_n$ i perquè $Re_i \subseteq Re_n$ per $i \leq n$, és fàcil veure que f està ben definida. Per ser R $\aleph_0$-injectiu per l'esquerra, existeix $\alpha \in R$ tal que $f(e_n) = e_n\alpha$. Per tant $x_1 = \alpha$ és solució de qualsevol subsistema finit del nostre sistema.

Fem ara inducció, suposem que hem trobat $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ elements de R que es poden agafar com les n primeres solucions de qualsevol subsistema finit. Considerem el sistema

$$\sum_{i=n+1}^{\infty} a_{li}x_i = b_i - \sum_{i=1}^{n} a_{li}\alpha_i \qquad \text{per } l \geq 1.$$

Si apliquem ara l'argument anterior obtenim un element $\alpha_{n+1} \in R$ tal que $\alpha_1, \ldots, \alpha_{n+1}$ és poden agafar com les $n+1$ primeres solucions de qualsevol subsistema finit.

Si agafem $\alpha_1, \ldots, \alpha_{n+1}, \ldots$ és clar que són solució de tot el sistema. Per tant R és $\aleph_0$-algebraicament compacte per la dreta. ∎

La següent proposició dóna una manera de construir anells $\aleph_0$-algebraicament compacte. Aquest resultat va sorgir d'una conversa amb P. Ara on em va fer notar una remarca de Handelman [43, pàg. 237], en la que diu que un resultat anàleg a aquest és ben conegut en el context de grups abelians.

PROPOSICIÓ 4.5. *Sigui S un anell i $R = S^{\mathbb{N}}/S^{(\mathbb{N})}$. Aleshores R és $\aleph_0$-algebraicament compacte.*

DEMOSTRACIÓ: Sols cal demostrar que R és $\aleph_0$-algebraicament compacte per la dreta, ja que aleshores per simetría tindrem que R és $\aleph_0$-algebraicament compacte. Sigui $\pi\colon S^{\mathbb{N}} \longrightarrow R$ la projecció canónica. Considerem un sistema numerable d'equacions lineals a R $\overline{A}X = \overline{B}$, que sigui finitament resoluble. Si el sistema és finit no hi ha res a demostrar, suposem doncs que hi ha infinites equacions.

Per hipòtesi per cada $n > 0$ existeix una successió d'elements $(\overline{y}_i^n)$, on $\overline{y}_i^n \in R$, que són solució de les n primeres equacions. Fixem matrius A, B i y_i^n amb coeficients a $S^{\mathbb{N}}$, tals que $\pi(A) = \overline{A}$, $\pi(B) = \overline{B}$ i $\pi(y_i^n) = \overline{y}_i^n$. Si considerem ara els subsistemes de les n primeres equacions del sistema $AX = B$ de $S^{\mathbb{N}}$, per la definició de R existeix $k_n \in \mathbb{N}$, tal que per cada i les components de y_i^n que estan en una posició més avançada que k_n són solució del sistema component a component. Podem suposar que $1 < k_1 < k_2 < \cdots < k_n < \ldots$. Construïm inductivament els següents elements $y_i \in S^{\mathbb{N}}$, per cada y_i les components des de 1 fins a $k_1 - 1$ són zero, si $n \geq 1$ les components des de k_n fins a $k_{n+1} - 1$, són les components de y_i^n que estan en aquesta posició. Si considerem $\overline{y}_i = \pi(y_i)$, és clar per construcció que la successió $(\overline{y}_i)$ és solució del sistema $\overline{A}X = \overline{B}$. Hem demostrat doncs que R és $\aleph_0$-algebraicament compacte per la dreta. ∎

Cal observar que en la proposició anterior si per exemple agafem S un domini commutatiu que no sigui un cos, R és un anell $\aleph_0$-algebraicament compacte que no és $\aleph_0$-injectiu. En particular tenim que la Proposició 4.4 no és certa per anells no regulars. El problema està en que els sistemes que s'han de resoldre per provar que R és $\aleph_0$-injectiu en general no són finitament resolubles.

Si R és un anell regular el conjunt dels ideals per la dreta principals és un reticle, que denotarem per $L(R_R)$. R és diu que és $\aleph_0$-complet superiorment (inferiorment) si tot subconjunt numerable de $L(R_R)$ té un suprem (ínfim) a $L(R_R)$ i és diu que és $\aleph_0$-*complet* si és complet superiorment i inferiorment. En un anell regular R $\aleph_0$-complet, el suprem i el ínfim d'una família numerable de $\{e_i R\} \subseteq L(R_R)$ venen donats per

$$\bigvee e_i R = r_R l_R(\{e_i R\}) \quad \text{i} \quad \bigwedge e_i R = r_R(\{e_i R\}).$$

Si un anell regular $\aleph_0$-complet superiorment satifà

$$A \wedge (\vee B_i) = \vee (A \wedge B_i)$$

per qualsevol $A \in L(R_R)$ i tota família numerable ascendent $\{B_i\}$ de $L(R_R)$, es diu que és $\aleph_0$-*continu per la dreta* . La condició de ser $\aleph_0$-continu per la dreta és equivalent a que tota família numerable $\{e_i R\}$ de $L(R_R)$ sigui essencial al seu suprem. Similarment es defineixen els anell $\aleph_0$-complet i $\aleph_0$-continu per l'esquerra. Direm que un anell regular és $\aleph_0$-complet o $\aleph_0$-continu si ho és pels dos costats.

Per un anell commutatiu R una condició necessària i suficient per a que $R[x]$ sigui de Bezout és que l'anell R sigui regular, aquesta condició és també necessària i suficient per a que l'anell $R[x]$ sigui semihereditari. Si considerem el mateix problema per l'anell $R[\![x]\!]$ on R és un anell commutatiu, també tenim que l'anell R ha de ser regular però per a que $R[\![x]\!]$ sigui de Bezout haurem de menester que R sigui $\aleph_0$-injectiu. Per caracteritzar els anells de sèries formals que són semihereditaris necessitem que R sigui regular $\aleph_0$-injectiu i $\aleph_0$-complet. Els següents resultats expliquen aquests fets.

TEOREMA 4.6. [9, Theorem 42] *Sigui R un anell commutatiu, aleshores les següents afirmacions són equivalents.*

(1) *R és un anell regular $\aleph_0$-algebraicament compacte.*
(2) *R és un anell regular $\aleph_0$-injectiu.*
(3) *$R[\![x]\!]$ és un anell de Bezout.*
(4) *La dimensió global feble de $R[\![x]\!]$ és 1.* ∎

TEOREMA 4.7. [9, Theorem 43] *Sigui R un anell commutatiu, aleshores les següents afirmacions són equivalents.*

(1) *R és un anell regular $\aleph_0$-injectiu i $\aleph_0$-complet.*
(2) *$R[\![x]\!]$ és un anell de Bezout en el qual els ideals principals són projectius.*
(3) *$R[\![x]\!]$ és semihereditari.* ∎

En el capítol cinqué generalitzarem aquests resultats al cas no commutatiu. Volem donar però la demostració d'un fet que està implícit en la demostració del Teorema 4.6 i que utilitzarem després molt freqüentment, de tota manera remarquem que ho farem en un context una mica més general que el de [9].

Sigui R un anell i α un automorfisme de R. Aleshores podem considerar l'anell de sèries formals skew $R[\![x,\alpha]\!]$ que té per elements $\sum_{n=0}^{\infty} x^n a_n$, l'operació aditiva és la suma component a component. El producte és el producte de convolució habitual seguint la regla $ax = x\alpha(a) = xa^{\alpha}$. En general suposarem que R és un anell commutatiu i α un automorfisme de R que deixa fixes els idempotents centrals.

LEMA 4.8. *Sigui R un anell regular commutatiu $\aleph_0$-injectu i α un automorfisme que deixa fixes els idempotents. Tot element $a(x)$ de $R[\![x,\alpha]\!]$ s'escriu de la forma $a(x) = e(x)u(x) = u'(x)e(x)$, on $e(x) = \Sigma_{n=0}^{\infty} x^n e_n$ per certs e_n idempotents ortogonals de R i on $u(x)$ i $u'(x)$ són unitats de $R[\![x,\alpha]\!]$.*

DEMOSTRACIÓ: Sigui $a(x)$ un element de $R[\![x,\alpha]\!]$, $a(x) = x^i(\sum_{n=0}^{\infty} x^n a_n)$. Si a_0 és una unitat de R aleshores l'enunciat del lema és trivial, ja que per obtenir la descomposició que busquem posem $e(x) = x^i$ i $u(x) = \sum_{n=0}^{\infty} x^n a_n$. Podem suposar doncs que a_0 no és una unitat.

Per ser R un anell regular commutatiu per cada a_n existeix una unitat r_n de R tal que $a_n r_n a_n = a_n$, per tant $a_n r_n = f_n = f_n^2$. Definim ara els e_n inductivament, posem $e_0 = f_0$ i $e_n = (1 - (\sum_{i=0}^{n-1} e_i))f_n$.

Hem de veure que existeix una sèrie $u(x)$ tal que $a(x) = e(x)u(x)$. Si desenvolupem aquesta igualtat i igualem els coeficients del mateix grau obtenim que hem de resoldre un sistema numerable S d'equacions lineals sobre R. Aquest sistema per la Proposició 4.4 és resoluble si i només si és finitament resoluble. Per veure això, donat que la família e_n està formada per idempotents ortogonals, és suficient demostrar que $a(x) = (e_0 + (1-e_0)a(x))r(x)$ per un cert $r(x)$ de $R[\![x,\alpha]\!]$. Podem escriure $a(x) = e_0 a(x) + (1 - e_0)a(x)$ on $e_0 a(x)$ és una unitat de $e_0 R e_0[\![x,\alpha]\!]$, existeix una unitat $r(x)$ de $R[\![x,\alpha]\!]$ tal que $a(x) = e_0 r(x) + (1 - e_0)a(x)r(x)$. Podem concloure doncs que existeix $u(x) \in R[\![x]\!]$ tal que $a(x) = e(x)u(x)$.

Per acabar la demostració hem de veure que podem triar $u(x)$ invertible o equivalentment que el terme de grau zero u_0, de $u(x)$ es pot triar de tal manera que sigui un element invertible de R. Fent el mateix raonament que en el paràgraf anterior es pot veure que existeix $v(x) \in R[\![x,\alpha]\!]$ tal que $a(x)v(x) = e(x)$, tenim doncs que $e(x)(1 - u(x)v(x)) = 0$. Sigui r un element de R tal que $u_0 r u_0 = u_0$ i sigui $f = u_0 r$. Per qualsevol n, $e_n e(x)(1 - u(x)v(x))(1 - f) = e_n(1 - f) = 0$, per tant $e(x)(1 - f) = 0$ i $u(x) + (1 - f)$ és la unitat que buscavem.

Per veure la descomposició $a(x) = u'(x)e(x)$, podem procedir igual que abans. Cal utilitzar que els idempotents queden fixes per α i que

$$a(x) = x^i(\sum_{n=0}^{\infty} x^n a_n) = (\sum_{n=0}^{\infty} a^{\alpha^{i+n}} x^n)x^i.$$

∎

Estem ara en condicions de donar una caracterització dels elements regulars de $R[\![x,\alpha]\!]$.

LEMA 4.9. *Sigui R un anell regular commutatiu $\aleph_0$-injectiu i α un automorfisme de R que deixa fixes els idempotents de R. Un element $a(x) \in R[\![x,\alpha]\!]$ és regular si i només si l'ideal que generen a R els seus coeficients és fidel.*

DEMOSTRACIÓ: Si $a(x)$ no és divisor de zero de $R[\![x,\alpha]\!]$ és clar que l'ideal de R generat pels seus coeficients és fidel.

Sigui $a(x) = \sum_{n=0}^{\infty} x^n a_n$ tal que $r_R I = 0$ on $I = \Sigma_{i=0}^{\infty} a_i R$. Suposem que existeix $b(x) \in R[\![x,\alpha]\!]$ tal que $a(x)b(x) = 0$. Pel Lema 4.8 sabem que $a(x) = u(x)e(x)$ i $b(x) = f(x)v(x)$ on $u(x)$ i $v(x)$ són unitats. Per tant $e(x)f(x) = 0$, d'on $e_n f_m = 0$ per qualssevol n i m. Com que $I = \oplus_{n\geq 0} e_n R$, I és un ideal fidel i podem concloure que $f(x) = b(x) = 0$. Això demostra que $a(x)$ és un no divisor de zero per la dreta, per veure que no és divisor de zero per l'esquerra podem fer un raonament anàleg. ∎

LEMA 4.10. *Sigui R un anell regular commutatiu $\aleph_0$-injectiu i α un automorfisme de R que deixa fixes els idempotents. Aleshores $R[\![x,\alpha]\!]$ és un anell d'Ore pels dos costats.*

DEMOSTRACIÓ: Siguin $r(x)$ i $a(x)$ elements de $R[\![x,\alpha]\!]$, suposem que $r(x)$ és un no divisor de zero. Pel Lema 4.8 tenim que $r(x) = e(x)u(x)$ i $a(x) = f(x)v(x)$ on $u(x)$ i $v(x)$ són unitats i on $e(x)$ i $f(x)$ commuten entre sí. Tindrem doncs que $a(x)v(x)^{-1}e(x) = f(x)e(x) = r(x)u(x)^{-1}f(x)$, per altra banda és clar que $r(x)$ és un no divisor de zero si i només si $e(x)$ ho és, per tant podem concloure que $R[\![x,\alpha]\!]$ satisfà la condició d'Ore per la dreta. Per veure que també la satifà per l'esquerra es pot fer un raonament anàleg. ∎

4.3. Anells de sèries formals amb clàssic de quocients regular.

El següent lema ben conegut caracteritza els anells commutatius amb clàssic de quocients regular.

LEMA 4.11. *Sigui R un anell commutatiu, aleshores $Q_{cl}(R)$ és regular si i només si per qualsevol element a de R existeix un element $b \in r_R(a)$ tal que $a+b$ no és divisor de zero.*

DEMOSTRACIÓ: Suposem que R té clàssic de quocients regular, aleshores R no té elements nilpotents i per tant és un anell semiprimer. Sigui a un element de R, per hipòtesi sabem que existeix cd^{-1} tal que $acd^{-1}a = a$, per tant $(ac-d)a = 0$. Sigui $b = ac - d$, llavors $a + b$ no és divisor de zero ja que si $(a + b)s = 0$ aleshores $sa = -sb \in aR \cap r_R(a)$, i per ser R semiprimer $sa = -sb = 0$. Però $sb = s(ac - d) = -sd = 0$, com que d no és un divisor de zero $s = 0$.

Suposem ara que per qualsevol element a de R existeix $b \in r_R(a)$ tal que $a+b$ no és divisor de zero. Tenim aleshores que $(a + b)(a + b)^{-1}a = a^2(a + b)^{-1} = a$, per tant $Q_{cl}(R)$ és un anell regular. ∎

Sigui R un anell commutatiu direm que un ideal I de R és *essencialment comptablement generat* si existeix un ideal J, $J \leq_e I$, tal que J és comptablement generat.

LEMA 4.12. *Sigui R un anell commutatiu, aleshores $Q_{cl}(R[\![x]\!])$ és regular si i només si R és semiprimer i tot ideal comptablement generat de R té anul.lador essencialment comptablement generat.*

DEMOSTRACIÓ: Suposem que $Q_{cl}(R[\![x]\!])$ és regular, com a conseqüència R i $R[\![x]\!]$ són semiprimers. Sigui (a_i) un ideal comptablement generat de R, considerem la sèrie

$$a(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

com que $Q_{cl}(R[\![x]\!])$ és regular, pel lema anterior sabem que existeix $b(x) \in r_{R[\![x]\!]}(a(x))$ tal que $a(x)+b(x)$ no és un divisor de zero. Sigui $b(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ per la Proposició 4.2 $b_n \in r_R(\{a_n\})$, per tant tenim que $(a_n) \oplus (b_n) \leq_e R$ i com que per altra banda $(a_n) \oplus r_R(a_n) \leq_e R$ concloem que $(b_n) \leq_e r_R(\{a_n\})$.

Suposem ara que R és un anell semiprimer que satisfà que l'anul.lador d'un ideal comptablement generat és essencialment comptablement generat. Sigui $a(x) \in R[\![x]\!]$, considerem l'ideal I generat pels coeficients de $a(x)$, a_i. Sabem que existeix un conjunt numerable de b_i tal que $(b_i) \leq_e r_R(\{a_i\})$, sigui $b(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$, aleshores com que R és un anell semiprimer $a(x) + b(x)$ no és un divisor de zero de $R[\![x]\!]$. Per tant pel lema anterior podem concloure que $Q_{cl}(R[\![x]\!])$ és un anell regular. ∎

En particular obtenim el següent corol.lari.

COROL.LARI 4.13. *Sigui R un anell regular commutatiu. Aleshores $Q_{cl}(R[\![x]\!])$ és regular si i només si $Q_{cl}(B(R)[\![x]\!])$ ho és.* ∎

Donarem ara un exemple per veure que la condició de que els anul.ladors d'ideals comptablement generats siguin essencialment comptablement generats no implica que els anul.ladors d'ideals comptablement generats siguin comptablement generats.

LEMA 4.14. *Sigui K un cos commutatiu i $R = K^{\mathbb{N}}$, sigui M un ideal maximal de R que contè $K^{(\mathbb{N})}$ la suma directa numerable de K, aleshores M no és comptablement generat.*

DEMOSTRACIÓ: Considerem $B(R)$ l'algebra de Boole de R. $B(R)$ el podem identificar amb el conjunt de totes les parts de $\mathbb{N}$, via l'aplicació que fa correspondre a cada idempotent el seu suport, és a dir el conjunt de les seves components diferents de zero. Aleshores per a cada $A \subseteq \mathbb{N}$ i ideal maximal M tenim que M conté un idempotent amb suport A o amb suport $\mathbb{N} \setminus A$.

Sigui ara M un ideal maximal de R que conté la suma directa. Primer veurem que no pot ser finitament generat. Suposem que $f_1, \ldots, f_n$ són idempotents ortogonals generadors de M. Sigui A_i el suport de f_i, si considerem $A = A_1 \cup \cdots \cup A_n$, tenim que A no pot ser tot $\mathbb{N}$ ja que si no l'ideal seria tot R, per altra banda el suport de qualsevol idempotent de M ha d'estar contingut dins de A però això és impossible si M conté la suma directa. Suposem que M és comptablement generat i que $M = \Sigma_{i=1}^{\infty} f_i R$, per uns certs idempotents ortogonals f_i diferents de zero. Per cada f_i sigui A_i el seu suport, considerem $A = \cup_{i=1}^{\infty} A_{2i}$. A no pot ser el suport de cap idempotent de M, ja que aquest s'hauria d'escriure com a combinació lineal finita de f_i, però pel mateix motiu $\mathbb{N} \setminus A$ tampoc pot ser el suport de cap element de M. Això contradiu el fet de que M pugui ser comptablement generat. ∎

EXEMPLE 4.15. *Existeix un anell regular commutatiu R tal que els anul.ladors d'ideals comptablement generats són essencialment comptablement generats però no són tots comptablement generats.*

DEMOSTRACIÓ: Sigui K un cos commutatiu i sigui $S = K^{\mathbb{N}}$ el producte de K un numerable de vegades. Definim dins de S els idempotents e_n com els que tenen un 1 a la component n-èssima i zero a totes les demés. Si considerem l'anell $\Pi_{n=1}^{\infty} e_{2n} S$, podem considerar dins d'aquest anell un ideal maximal M que contingui la suma directa de e_{2i}, hem provat abans que M no pot ser comptablement generat dins de $\Pi_{i=1}^{\infty} e_{2i} S$. Observem que com a ideal de S, M tampoc és comptablement generat.

Definim ara R com un subanell de S de la següent manera, $R = K^{(\mathbb{N})} + M + K$, on K el pensem dins de S com les successions constants. Cal observar que $\oplus_{n=1}^{\infty} e_n R \leq_e R$, d'aquí podem concloure que tot ideal és essencialment comptablement generat. Sigui $I = \oplus_{n=1}^{\infty} e_{2n-1} R$, aleshores $r_R(I) = M$ que no és comptablement generat. ∎

4.4. Injectivitat del clàssic de quocients de l'anell de series formals.

En el capítol anterior hem vist que la condició d'injectivitat sobre el clàssic de l'anell de polinomis $R[x]$, implica condicions molt restrictives per l'anell R. En aquesta secció veurem que la situació és una mica millor en el cas de l'anell de sèries formals sobre un anell commutatiu semiprimer.

TEOREMA 4.16. *Sigui R un anell commutatiu regular autoinjectiu i α un automorfisme de R que deixa fixes els idempotents de R. Aleshores $R[\![x,\alpha]\!]$ té clàssic de quocients pels dos costats i aquest és regular autoinjectiu.*

DEMOSTRACIÓ: Pel Lema 4.10 l'anell $R[\![x,\alpha]\!]$ satisfà la condició d'Ore pels dos costats, per tant té clàssic de quocients pels dos costats. La demostració de que aquest clàssic és injectiu la farem en varios passos.

PAS 1. *$Q_{cl}(R[\![x,\alpha]\!])$ és un anell regular. A més per qualsevol $a(x) \in R[\![x,\alpha]\!]$ podem triar $u \in Q_{cl}(R[\![x,\alpha]\!])$ tal que $a(x)ua(x) = a(x)$ i $a(x)u = ua(x)$ és un element de $B(R)$.*

Sigui $a(x)$ un elements de $R[\![x,\alpha]\!]$. Si $a(x)$ és un no divisor de zero aleshores el resultat és clar. Suposem doncs que $a(x) = \sum_{n=0}^{\infty} x^n a_n$ és un divisor de zero, com que R és regular autoinjectiu $r_R(a_0,\dots,a_n,\dots) = eR$ per un cert idempotent $e \in B(R)$. Pel Lema 4.9 $v = a(x) + e$ és un no divisor de zero de $R[\![x,\alpha]\!]$. Tenim aleshores que $(a(x)+e)v^{-1}a(x) = a(x) = a(x)v^{-1}a(x)$, per tant $Q_{cl}(R[\![x,\alpha]\!])$ és regular.

Sigui $u = v^{-1}$, aleshores tenim

$$(1-e)(a(x)+e)u = 1-e = (1-e)a(x)u = a(x)u$$

i

$$u(a(x)+e)(1-e) = 1-e = ua(x)(1-e) = ua(x)$$

per tant $a(x)u = ua(x) \in B(R)$, tal com volíem veure.

PAS 2. *$Q_{cl}(R[\![x,\alpha]\!])$ és autoinjectiu per les dues bandes.*

Observem primer que pel Pas 1 R i $Q_{cl}(R[\![x,\alpha]\!])$ tenen els mateixos idempotents, en particular els idempotents de $Q_{cl}(R[\![x,\alpha]\!])$ són centrals. Per [37, Corollary 3.9], en aquesta situació, si demostrem que $Q_{cl}(R[\![x,\alpha]\!])$ és autoinjectiu per la dreta també ho serà per l'esquerra. Hem de veure doncs que $Q_{cl}(R[\![x,\alpha]\!])$ satisfà el criteri de Baer per ideals dreta.

Pel pas anterior podem suposar que tot ideal dreta I de $Q_{cl}(R[\![x,\alpha]\!])$ està generat per idempotents $\{f_j\}_{j\in J}$ de $B(R)$, per tant tenim que tot ideal és bilàter. Considerem l'ideal de R, $\Sigma_{j\in J} f_j R$ per ser R regular autoinjectiu, aplicant [37, Lemma 9.7], aquest ideal contè una família maximal d'idempotents ortogonals $\{e_i\}_{i\in I}$ tal que $\oplus_{i\in I} e_i R \leq_e \Sigma_{j\in J} f_j R$. Com que I està generat per idempotents centrals, $\oplus_{i\in I} e_i Q_{cl}(R[\![x,\alpha]\!]) \leq_e I$. Com a conseqüència per demostrar que $Q_{cl}(R[\![x,\alpha]\!])$ satisfà el criteri de Baer per la dreta podem suposar sense perdre generalitat que I està generat per una família $\{e_i\}_{i\in I}$ d'idempotents ortogonals de $B(R)$.

Per altra banda sempre podem suposar que l'ideal $I \leq_e Q_{cl}(R[\![x,\alpha]\!])$, si no com que R és regular autoinjectiu $r_R(e_{i_{i\in I}}) = eR$ per un cert idempotent $e \in R$, per tant

$$I' = \oplus_{i\in I} e_i Q_{cl}(R[\![x,\alpha]\!]) \oplus eQ_{cl}(R[\![x,\alpha]\!]) \leq_e Q_{cl}(R[\![x,\alpha]\!]).$$

Si tenim un morfisme $f\colon I \longrightarrow Q_{cl}(R[\![x,\alpha]\!])$ el podem estendre a un morfisme sobre I', definint per exemple $f(e) = e$.

Sigui $f\colon I \longrightarrow Q_{cl}(R[\![x,\alpha]\!])$ un morfisme de $Q_{cl}(R[\![x,\alpha]\!])$-mòduls dreta, aleshores per cada $i \in I$ $f(e_i) = e_i s_i(x) r_i(x)^{-1}$ on $r_i(x)$ i $s_i(x)$ són elements de $R[\![x,\alpha]\!]$. Siguin

$$f_1\colon I \longrightarrow Q_{cl}(R[\![x,\alpha]\!])$$

i

$$f_2 \colon I \longrightarrow Q_{cl}(R[\![x,\alpha]\!])$$

morfismes de $Q_{cl}(R[\![x,\alpha]\!])$-mòduls dreta definits de la següent manera, $f_1(e_i) = e_i s_i(x)$ i $f_2(e_i) = e_i r_i(x)^{-1}$. Aleshores és clar que f és el producte de f_1 i f_2 i que per veure que f ve donada per multiplicació a l'esquerra per un element de $Q_{cl}(R[\![x,\alpha]\!])$, n'hi ha prou en veure que que això passa per f_1 i f_2. Com que $I \leq_e Q_{cl}(R[\![x,\alpha]\!])$ i f_2 és injectiu per veure que aquest ve donat per multiplicació a l'esquerra per un element de $Q_{cl}(R[\![x,\alpha]\!])$ n'hi ha prou en veure-ho per un morfisme definit com $f(e_i) = e_i r_i(x)$. Podem suposar doncs sense perdre generalitat que el morfisme $f \colon I \longrightarrow Q_{cl}(R[\![x,\alpha]\!])$ està definit com $f(e_i) = e_i s_i(x)$. Hem de veure que un tal morfisme ve donat per multiplicació a l'esquerra per un element de $Q_{cl}(R[\![x,\alpha]\!])$.

Sigui $s_i(x) = \sum_{j=0}^{\infty} x^j s_j^i$. Considerem els morfismes de R-mòduls dreta

$$f_j \colon \oplus_{i\in I} e_i R \longrightarrow R,$$

que per cada j estan definits per $f_j(e_i) = e_i s_j^i$ per qualsevol $i \in I$. Com que R és autoinjectiu existeix un element $s_j \in R$, tal que $f_j(e_i) = s_j e_i$. Sigui $s(x) = \Sigma_{j=0}^{\infty} x^j s_j$, aleshores és clar que per qualsevol $i \in I$, $f(e_i) = s(x)e_i$ tal com volíem veure. Per tant queda demostrat que $Q_{cl}(R[\![x,\alpha]\!])$ és autoinjectiu per la dreta. ∎

TEOREMA 4.17. *Sigui R un anell commutatiu tal que $Q_{cl}(R)$ és regular $\aleph_0$-injectiu i $\aleph_0$-complet, suposem que $B(R) = B(Q_{cl}(R))$ i que α és un automorfisme de R que deixa fixes els idempotents. Aleshores $Q_{cl}(R[\![x,\alpha]\!])$ és regular $\aleph_0$-injectiu i $\aleph_0$-complet.*

DEMOSTRACIÓ: Pel Lema 4.10 l'anell $R[\![x,\alpha]\!]$ té classic de quocients pels dos costats. Com que $Q_{cl}(R)$ és $\aleph_0$-complet tenim que l'anul.lador d'una família numerable d'elements de R està generat per un idempotent, per tant pel Lema 4.9 si $a(x) \in R[\![x,\alpha]\!]$ existeix un idempotent e de R tal que $a(x)+e$ no és divisor de zero. Això ens permet concloure, igual que al Pas 1 del Teorema 4.16 que $Q_{cl}(R[\![x,\alpha]\!])$ és un anell regular i que tot ideal es pot generar per idempotents de R. D'això és clar que $Q_{cl}(R[\![x,\alpha]\!])$ és un anell $\aleph_0$-complet.

Si I és un ideal comptablement generat de $Q_{cl}(R[\![x,\alpha]\!])$, per les remarques anteriors, podem suposar que està generat per una família numerable d'idempotents que per [37, Proposició 2.14] és poden agafar ortogonals. Per demostrar que R satisfà el criteri de Baer per ideals comptablement generats, com que l'anul.lador d'una família numerable d'elements de R està generat per un idempotent sempre podem suposar que l'ideal és fidel.

Sigui I un ideal fidel de $Q_{cl}(R[\![x,\alpha]\!])$ generat per una família numerable $\{e_i\}_{i=0}^{\infty}$ d'idempotents ortogonals. Considerem un morfisme de $Q_{cl}(R[\![x,\alpha]\!])$ mòduls dreta $f\colon I \longrightarrow Q_{cl}(R[\![x,\alpha]\!])$, hem de veure que f ve donat per multiplicació a l'esquerra per un element de $Q_{cl}(R[\![x,\alpha]\!])$. Com al Teorema 4.16 n'hi ha prou en demostrar-ho quan f és de la forma $f(e_i) = e_i s_i(x)$, per elements $s_i(x) \in R[\![x,\alpha]\!]$. Ara procedint igual que en el Teorema esmentat i fent us de que $Q_{cl}(R)$ és $\aleph_0$-injectiu, és fàcil veure que f ve donada per multiplicació a l'esquerra per un element $s(x)$ de $Q_{cl}(R)[\![x,\alpha]\!]$. Però aquest element és també de $Q_{cl}(R[\![x,\alpha]\!])$, ja que $r(x) = \sum_{n=0}^{\infty} x^n e_n$ no és divisor de zero a $R[\![x,\alpha]\!]$ i $s(x)r(x) \in R[\![x,\alpha]\!]$. Per tant $Q_{cl}(R[\![x,\alpha]\!])$ és $\aleph_0$-injectiu. ∎

En particular tenim que si R té clàssic de quocients regular autoinjectiu i $B(R) = B(Q_{cl}(R))$ aleshores $Q_{cl}(R[\![x]\!])$ és $\aleph_0$-injectiu. Aquest resultat no es pot millorar, tal com prova el següent exemple.

EXEMPLE 4.18. *Existeix un anell commutatiu R tal que $Q_{cl}(R)$ és un anell regular autoinjectiu, però $Q_{cl}(R[\![x]\!])$ és regular $\aleph_0$-injectiu i no autoinjectiu.*

DEMOSTRACIÓ: Sigui $\aleph$ un cardinal més gran que $\aleph_0$, I un conjunt de cardinalitat $\aleph$. Considerem l'anell R format per les successions $(a_i)_{i\in I}$ de números racionals amb $a_i \in \mathbb{Z}$ llevat pot ser d'un nombre finit.

És clar que l'anell clàssic de quocients de R és $\mathbb{Q}^I$, per tant R té clàssic de quocients regular injectiu. També és clar que tots els idempotents del clàssic de R estan dins de l'anell R. Tenim doncs que pel teorema anterior $Q_{cl}(R[\![x]\!])$ és $\aleph_0$-injectiu. Per altra banda és clar que $R[\![x]\!] \leq_e Q_{cl}(R)[\![x]\!]$ i com que pel Teorema 4.16 $Q_{cl}(Q_{cl}(R)[\![x]\!])$ és injectiu, el maximal de quocients de $R[\![x]\!]$ és $Q_{cl}(Q_{cl}(R)[\![x]\!])$. Anem a veure que aquest anell no coincideix amb el clàssic de quocients de $R[\![x]\!]$. Siguin $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ una successió d'elements diferents de zero de $\mathbb{Z}$ tals que $\cap_{n\geq 0} a_n\mathbb{Z} = 0$. Per $n \geq 0$ definim un element q_n de $\mathbb{Q}^I$, com l'element tal que cada component val $\frac{1}{\prod_{j=0}^{n} a_j}$. Considerem ara l'element de $Q_{cl}(Q_{cl}(R)[\![x]\!])$, $q(x) = \sum_{n=0}^{\infty} q_n x^n$. Aquest element no és de $Q_{cl}(R[\![x]\!])$, ja que si ho fos existiria un no divisor de zero $b(x) \in R[\![x]\!]$ tal que $b(x)q(x) \in R[\![x]\!]$. És fàcil veure ara que no existeix un tal element $b(x)$. Per tant podem concloure que $Q_{cl}(R[\![x]\!])$ no és injectiu. ∎

4.5. Construcció d'anells FPF amb anells de sèries formals.

En aquesta secció caracteritzarem els anells de series formals sobre anells commutatius que són FPF. També donarem una construcció d'un subanell de les sèries formals que és FPF.

LEMA 4.19. *Sigui $R \subseteq S$ una extensió d'anells commutatius tal que $B(R) = B(S)$ i S és regular. Aleshores si I és un ideal de R generat per idempotents existeix un ideal J de R generat per idempotents ortogonals tal que $J \leq_e I$.*

DEMOSTRACIÓ: Sigui I un ideal de R generat per idempotents. Primer veurem que existeixen famílies d'idempotents ortogonals maximals dins de I. Sigui $F_0 \subseteq F_1 \subseteq \dots$ una cadena de famílies d'idempotents ortogonals dins de I. Aleshores $\cup F_i$ és clarament una família d'idempotents ortogonals dins de I. Per tant aplicant el Lema de Zorn podem concloure que existeixen famílies maximals d'idempotents ortogonals dins de I.

Sigui $\{f_k\}_{k \in K}$ una d'aquestes famílies maximals d'idempotents ortogonals. Volem veure ara que $\oplus_{k \in K} f_k R \leq_e I$. Suposem que existeix un element $r \in I$ tal que $rR \cap (\oplus_{k \in K} f_k R) = 0$. Com que S és un anell regular existeix un idempotent e tal que $rS = eS$, de tal manera que $\{f_i, e\}$ és una família d'idempotents ortogonals dins de S. Tenim que $e = rs \in R$ i com que r és un element de l'ideal I que està generat per idempotents, $r = e_1 r_1 + \cdots + e_n r_n$ on e_i són idempotents de I, al ser només un nombre finit podem suposar a més que són ortogonals. Tenim doncs

$$e = (e_1 + \cdots + e_n)(e_1 r_1 + \cdots + e_n r_n)s$$

podem ara concloure que e és un element de I, pero això ara contradiu la maximalitat de la família $\{f_k\}_{k \in K}$. Per tant $\oplus_{k \in K} f_k R \leq_e I$ tal com volíem veure. ∎

PROPOSICIÓ 4.20. *Sigui R un anell commutatiu. Si X és un conjunt no buit $R[\![X]\!]$ és FPF si i només si $X = \{x\}$ i R és un anell regular autoinjectiu.*

DEMOSTRACIÓ: Suposem que $R[\![X]\!]$ és FPF. Escollim un element $x \in X$, pel Lema 1.8 per qualsevol $a \in R[\![X \setminus \{x\}]\!]$ l'ideal $I = aR[\![X]\!] + xR[\![X]\!]$ és projectiu, fent un raonament anàleg al Lema 3.26 podem veure que $R[\![X \setminus \{x\}]\!]$ és regular. En conseqüència $X = \{x\}$ i R és un anell regular. Com que $R[\![x]\!]$ és ara un anell commutatiu FPF semiprimer, pel Teorema 1.15 tenim que és semihereditari. Si apliquem el Teorema 4.7 obtenim que R és un anell regular $\aleph_0$-injectiu i $\aleph_0$-complet. Demostrarem ara que de fet R és autoinjectiu.

Sigui I un ideal de R, com que R és un anell regular I està generat per idempotents. Com que $R[\![x]\!]$ és FPF i semiprimer, $B(Q_{cl}(R[\![x]\!])) = B(R[\![x]\!]) = B(R)$ aplicant el Lema 4.19 podem concloure que I conté un ideal essencial generat per idempotents ortogonals. Per demostrar que R és injectiu podem doncs considerar sense perdre generalitat que I és un ideal generat per idempotents ortogonals $\{e_k\}_{k \in K}$. Com que $r_{IQ_{cl}(R[\![x]\!])} = eQ_{cl}(R[\![x]\!])$ considerant l'ideal $I \oplus eR$ podem suposar a més que l'ideal és essencial a R.

Sigui $f: I \longrightarrow R$ un morfisme de R-mòduls tal que per qualsevol $k \in K$, $f(e_k) = e_k a_k$, $a_k \in R$. Aquest morfisme és pot estendre a $f: IR[\![x]\!] \longrightarrow R[\![x]\!]$, com que $Q_{cl}(R[\![x]\!])$ és autoinjectiu i per tant injectiu com a $R[\![x]\!]$-mòdul, tenim que existeix un element $\frac{s(x)}{r(x)} \in Q_{cl}(R[\![x]\!])$ tal que per qualsevol $k \in K$ $f(e_k) = \frac{s(x)}{r(x)} e_k$. Pel Lema 4.8 podem suposar que $r(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n x^n$, on els elements f_n són idempotents ortogonals. Com que $r(x)$ ha de ser un no divisor de zero, pel Lema 4.9 $\oplus_{n=1}^{\infty} f_n R \leq_e R$. Sigui $s(x) = \sum_{n=0}^{\infty} s_n x^n$, aleshores per qualsevol n i per qualsevol k tenim

$$s_n e_k = f_n e_k a_k = f_n f(f_n e_k)$$

Per cada $n \geq 0$ considerem, $I_n = \oplus_{k\in K} f_n e_k R \leq I$, $I_n \leq_e f_n R$ i sobre I_n, f ve donat per multiplicació per s_n. Sigui $J = \oplus_{n=0}^{\infty} f_n R$, definim un morfisme $g: J \longrightarrow R$ tal que $g(f_n) = s_n f_n$ com que R és $\aleph_0$-injectiu i J és comptablement generat existeix un element $s \in R$ tal que $g(f_n) = s f_n$. Però els morfismes f i g coincideixen sobre $I \cap J \leq_e I$ per tant f també ve donat per multiplicació per s. Per tant R és autoinjectiu tal com volíem veure.

Suposem ara que R és un anell regular autoinjectiu, volem veure que $R[\![x]\!]$ és FPF. Com que pel Teorema 4.7 $R[\![x]\!]$ és un anell de de Bezout i semihereditari, pel Teorema 4.16 té clàssic de quocients injectiu. Aleshores pel Teorema 1.15 podem concloure que $R[\![x]\!]$ és FPF. ∎

PROPOSICIÓ 4.21. *Sigui A un anell commutatiu de Bezout amb clàssic de quocients regular injectiu, tal que $B(A) = B(Q_{cl}(A))$. Sigui α un automorfisme de A que deixa fixes els idempotents. Aleshores l'anell $R = A + xQ_{cl}(A[\![x,\alpha]\!])$ és un anell de Bezout FPF.*

DEMOSTRACIÓ: Com que R és un anell semiprimer, per veure que és FPF n'hi ha prou en comprovar que satisfà les condicions (A), (B) i (C) del Teorema 1.16. Es clar que $Q_{cl}(R)$ existeix i és $Q_{cl}(Q_{cl}(A)[\![x,\alpha]\!])$. També és clar que R és un anell acotat, perquè pel Lema 4.8 per qualsevol element $a \in R$ existeix una unitat $u(x) \in Q_{cl}(A)[\![x,\alpha]\!]$, tal que $axu(x) = e(x)$, $e(x) = \sum_{n=0}^{\infty} x^n e_n$ amb $\{e_n\}$ una família d'idempotents ortogonals de A. Si veiem que R és de Bezout pels dos costats, aleshores també és clar que els ideals, per la dreta o per l'esquerra, finitament generats fidels són generadors.

No és difícil comprovar que R és un anell de Bezout fent us de que A ho és i la descomposició dels elements de $Q_{cl}(A)[\![x,\alpha]\!]$ del Lema 4.8. ∎

4.6. Anells de sèries formals de longitud arbitrària.

En l'Exemple 4.18 hem vist que si un anell commutatiu té anell clàssic de quocients injectiu, aleshores l'anell de sèries formals no hereta en general aquesta propietat. Veient la demostració del Teorema 4.17 sembla que el principal problema està en que les sèries no són prou 'llargues', nomes tenen longitud numerable. En aquesta secció veurem que almenys per anells de Baer commutatius aquest és efectivament el problema. Donarem una construcció d'anells de sèries de longitud arbitrària però prefixada i veurem que si un anell commutatiu de Baer R té clàssic injectiu i les sumes directes d'ideals de R tenen com a molt cardinalitat $\aleph$, aleshores les sèries formals de longitud més gran o igual que $\aleph$ sobre R també tenen clàssic de quocients injectiu.

En la literatura ja és troben anells de sèries formals de longitud arbitrària prefixada, potser la primera construcció d'aquests anells és deguda a Malcev i Neumann, que els fan servir per posar algebres associatives lliures dins de cossos, el lector pot consultar [67, pàg. 601] o també a [16, pàg. 276]. Passarem a descriure breument la construcció, els detalls que falten es poden trobar a les referències anteriors.

Sigui G un grup commutatiu ordenat tal que el seu con positiu $P = \{g \in G| \mid g > 0\}$, és ben ordenat. Sigui R un anell, considerem el conjunt S de les aplicacions,

$$P \cup \{0\} \longrightarrow R.$$

Aleshores tot element de S es pot escriure formalment com

$$\Sigma_{g \in P \cup \{0\}} a_g x^g$$

Podem dotar a S d'una estructura d'anell definint la suma component a component i agafant com a producte el producte de convolució. És a dir si a i b són elements de S,

$$a = \sum_{g \in P \cup \{0\}} a_g x^g$$

$$b = \sum_{g \in P \cup \{0\}} b_g x^g$$

aleshores

$$ab = c = \sum_{g \in P \cup \{0\}} c_g x^g$$

on

$$c_g = \sum_{g' + g'' = g} a_{g'} b_{g''}$$

aquest producte està ben definit per que P és un conjunt ben ordenat, cf.[67,pàg 598 Lemma 2.9].

Per tant S és un anell que denotarem com $R[\![P]\!]$.

Anàlogament com hem fet al Lema 4.2, es pot provar també en aquest cas un resultat similar.

LEMA 4.22. *Sigui R un anell commutatiu semiprimer, a i b dos elements de $R[\![P]\!]$. Aleshores $ab = 0$ si i només sí tots els coeficients de a són anul.lats per tots els coeficients de b.* ∎

Una conseqüència directa d'això és el següent Lema.

LEMA 4.23. *Sigui R un anell de Baer commutatiu, aleshores l'anell clàssic de quocients de $R[\![P]\!]$ és regular i tot ideal d'aquest clàssic es pot generar per idempotents de R.*

DEMOSTRACIÓ: Sigui a un element de $R[\![P]\!]$, aleshores pel Lema anterior i com que l'anell R és de Baer l'anul.lador de a a $R[\![P]\!]$ és generat per un idempotent e de R, per tant l'element $a+e$ no és divisor de zero dins de $R[\![P]\!]$, pel Lema 4.11 podem concloure que $R[\![P^{(I)}]\!]$ té clàssic de quocients regular. Per altra banda $(1-e)(a+e)(a+e)^{-1} = 1-e = (1-e)a(a+e)^{-1}$ per tant tot ideal del clàssic de $R[\![P]\!]$ el podem generar amb idempotents de R. ∎

Seguint amb la notació introduïda en aquesta secció podem enunciar,

TEOREMA 4.24. *Sigui R un anell commutatiu de Baer i sigui $\aleph$ un cardinal més gran que el cardinal de la suma directa més llarga dins de R, sigui P de cardinalitat igual a $\aleph$. Aleshores $R[\![P]\!]$ té clàssic de quocients injectiu.*

DEMOSTRACIÓ: Sigui J un ideal del clàssic de quocients de $R[\![P]\!]$, pel Lema anterior podem suposar que J està generat per idempotents de R. Com que R és de Baer podem suposar a més que aquest ideal és essencial a $Q_{cl}(R[\![P]\!])$. Pel Lema 4.19 J conté un ideal essencial generat per una família d'idempotents ortogonals. Per demostrar la injectivitat podem suposar sense perdre generalitat que J és un ideal essencial a $Q_{cl}(R[\![P]\!])$ generat per una família d'idempotents ortogonals $e_{k k \in K}$. Sigui

$$f\colon J \longrightarrow R[\![P]\!]$$

un morfisme de $R[\![P]\!]$-mòduls, tal que per qualsevol $k \in K$ $f(e_k) = e_k a_k$ on $a_k \in R[\![P]\!]$. Si considerem el sistema d'equacions $be_k = e_k a_k$, aquest té solució per $b \in Q_{cl}(Q_{max}(R)[\![P]\!])$, si trobem un no divisor de zero c de $R[\![P]\!]$ tal que $bc \in R[\![P]\!]$, podrem concloure que b és també un element del clàssic de $R[\![P]\!]$.

Per hipòtesi existeix una aplicació injectiva $j\colon K \longrightarrow P$, sigui $c = \Sigma e_k x^{j(k)}$, pel lema 4.22 c no és divisor de zero de $R[\![P]\!]$ i bc és un element de $R[\![P]\!]$. Per tant podem dir que l'anell clàssic de $R[\![P]\!]$ és injectiu com a $R[\![P]\!]$-mòdul i en conseqüència és autoinjectiu. ∎

Sigui R un anell que satisfà les hipòtesis del teorema anterior i S el subanell de $R[\![P]\!]$, format pels elements amb trasportador essencial a $R[x]$. Aleshores és fàcil veure que S té clàssic de quocients injectiu i que $R[x] \leq_e Q_{cl}(S)$. Per tant, seguint aquesta notació, tenim el següent corol.lari,

COROL.LARI 4.25. *$Q_{cl}(S)$ és el maximal de quocients de $R[x]$.* ∎

Capítol 5.

Anells de sèries formals que són anells de Bezout o semihereditaris

5.1. Anells de sèries formals sobre anells regulars $\aleph_0$-injectius.

A [10] Brewer, Rutter i Watkins varen provar que si R és un anell commutatiu regular, aleshores $R[\![x]\!]$ és un anell de Bezout si i només si R és $\aleph_0$-injectiu. La demostració d'aquest resultat també es pot trobar a [9, pàg. 54].

En aquesta secció donarem una extensió parcial d'aquest resultat al cas no commutatiu. De fet demostrarem que si R és un anell regular $\aleph_0$-injectiu per l'esquerra aleshores $R[\![x]\!]$ és un anell de Bezout per la dreta. La demostració en el cas commutatiu utilitza que si R és un anell regular $\aleph_0$-injectiu i $a(x)$ és un element de $R[\![x]\!]$ aleshores l'ideal $a(x)R[\![x]\!]$ es pot generar per un element $s(x)$ tal que els seus coeficients formen una família d'idempotents ortogonals, cf. Lema 4.8. Per R no commutatiu el que farem serà també trobar generadors especials pels ideals principals.

Sigui:

$$E = \{e(x) \in R[\![x]\!] \mid e(x) = e + \sum_{n=1}^{\infty}(1-e)a_n e x^u, \text{on} \quad e = e^2 \in R,\ a_n \in R\ n = 1, 2, \dots\}$$

Volem remarcar els següents fets sobre E.

LEMA 5.1.

(1) *E és un conjunt d'idempotents de $R[\![x]\!]$.*
(2) *Si $e(x) \in E$ i $s(x) = \sum_{n=0}^{\infty} s_n x^n \in R[\![x]\!]$, aleshores $e(x)s(x) = 0$ si i només si $es_n = 0$, per tot $n = 0, 1, \dots$*

DEMOSTRACIÓ: Per demostrar (1) i (2) sols cal observar que

$$e(x) = e + \sum_{n=1}^{\infty}(1-e)a_n e x^n = \left(1 + \sum_{n=1}^{\infty}(1-e)a_n e x^n\right) e \left(1 - \sum_{n=1}^{\infty}(1-e)a_n e x^n\right)$$
$$= ueu^{-1} = ue. \blacksquare$$

LEMA 5.2. *Sigui R un anell regular i $a(x)$ un element de $R[\![x]\!]$. Aleshores $a(x)R[\![x]\!] = e(x)R[\![x]\!] + xa'(x)R[\![x]\!]$, on:*
(i) $e(x) \in E$
(ii) $e(x)a'(x) = 0$
(iii) $l_R(a(x)) \subseteq l_R(e(x))$ i $l_R(a(x)) \subseteq l_R(a'(x))$.

DEMOSTRACIÓ: Si $a(x)$ té terme de grau zero igual a zero, aleshores el lema és trivial. Suposem doncs que

$$a(x) = a_0 + x\bar{a}(x)$$

on $a_0 \neq 0$ i $\bar{a}(x) \in R[\![x]\!]$.

Com que R és regular existeix un element $t \in R$ tal que $a_0 t a_0 = a_0$. Per tant $a_0 t = e$ i $t a_0 = f$ són dos idempotents de R. Tenim aleshores que

$$\begin{aligned} a(x)R[\![x]\!] &= a(x)fR[\![x]\!] + a(x)(1-f)R[\![x]\!] = \\ &= a(x)fR[\![x]\!] + x\bar{a}(x)(1-f)R[\![x]\!] \end{aligned}$$

Per altra banda:

$$\begin{aligned} a(x)fR[\![x]\!] &= (ea(x)f + (1-e)\bar{a}(x)fx)\, R[\![x]\!] = \\ &= (ea(x)f + (1-e)\bar{a}(x)fx)\, teR[\![x]\!] \end{aligned}$$

Però $ea_0fte = e$, per tant $ea(x)fte$ és una unitat de $eR[\![x]\!]e$, diem-li $eu(x)^{-1}e$. Aleshores l'element $eu(x)e + (1-e)$ és una unitat de $R[\![x]\!]$. Per tant podem concloure que

$$a(x)fR[\![x]\!] = e(x)R[\![x]\!]$$

on

$$e(x) = e + \sum_{n=1}^{\infty}(1-e)b_n ex^n = (ea(x)f + (1-e)a(x)f)\, te\,(eu(x)e + (1-e)) \quad (*)$$

per tant tenim que $e(x) \in E$.

L'ideal inicial el podrem descompondre com,

$$\begin{aligned} a(x)R[\![x]\!] &= e(x)R[\![x]\!] + x\bar{a}(x)(1-f)R[\![x]\!] = \\ &= e(x)R[\![x]\!] + x(1-e(x))\bar{a}(x)(1-f)R[\![x]\!] \end{aligned}$$

Si agafem $a'(x) = (1-e(x))\bar{a}(x)(1-f)$ ja tenim la descomposició que voliem.

És obvi que aquesta descomposició satisfà les propietats (i) i (ii) que demanavem. Per concloure la demostració n'hi ha prou en demostrar que $l_R(a(x)) \subseteq l_R(e(x))$. Si $r \in l_R(a(x))$ aleshores $re = 0$ i per tant $r(1-e) = r$. A la vista de la definició $(*)$ de $e(x)$ és clar que $re(x) = 0$. ∎

LEMA 5.3. *Sigui R un anell regular i $a(x) \in R[\![x]\!]$. Aleshores per tot $n \geq 0$*

$$a(x)R[\![x]\!] = \left(\sum_{i=0}^{n} e_i(x)x^i\right) R[\![x]\!] + a'(x)x^{n+1}R[\![x]\!]$$

on

(i)Per tot $0 \leq i \leq n$, $e_i(x) \in E$.
(ii) $e_i(x)e_j(x) = 0$ per qualssevol $n \geq j > i \geq 0$
(iii) Per tot $0 \leq i \leq n$, $e_i(x)a'(x) = 0$.

DEMOSTRACIÓ: Farem la demostració per inducció sobre n. En el lema anterior hem demostrat el cas $n = 0$. Suposem doncs que $n \geq 1$, i que ho tenim demostrat fins $n - 1$. Aleshores tenim

$$a(x)R[\![x]\!] = \left(\sum_{i=0}^{n-1} e_i(x)x^i\right) R[\![x]\!] + \bar{a}(x)x^n R[\![x]\!]$$

i aquesta descomposició satisfà les condicions (i), (ii) i (iii). Si apliquem el lema anterior a $\bar{a}(x)$ tenim:

$$\bar{a}(x)x^n R[\![x]\!] = e_n(x)x^n R[\![x]\!] + a'(x)x^{n+1}R[\![x]\!]$$

amb $e_n(x) \in E$, $e_n(x) \cdot a'(x) = 0$ i $l_R(\bar{a}(x)) = l_R(e_n(x)) \cap l_R(\bar{a}(x))$. Com que $e_i(x)\bar{a}(x) = 0$ per $0 \leq i \leq n-1$, pel lema 5.1 (2) això passa si i només si $e_i\bar{a}(x) = 0$ on $e_i = e_i^2 \in R$ és el terme de grau zero de $e_i(x)$. Per tant $e_i(x)e_n(x) = 0$ i $e_i(x)a'(x) = 0$. ∎

PROPOSICIÓ 5.4. *Sigui R un anell regular $\aleph_0$-injectiu per l'esquerra i $a(x) \in R[\![x]\!]$. Aleshores per tot $n \geq 0$, existeixen $e_n(x) \in E$ tals que*

$$a(x)R[\![x]\!] = \left(\sum_{n=0}^{\infty} e_n(x)x^n\right) R[\![x]\!]$$

amb

(1) $e_n(x)e_m(x) = 0$ per $n < m$.
(2) $e_n(x)x^n \in a(x)R[\![x]\!]$.

DEMOSTRACIÓ: Agafem com $e_n(x)$ els idempotents donats pel lema anterior. Aleshores és clar que compleixen que $e_n(x)e_m(x) = 0$ si $n < m$. Falta veure que $a(x)R[\![x]\!] = \left(\sum_{n=0}^{\infty} e_n(x)x^n\right) R[\![x]\!]$.

Però demostrar aquesta igualtat equival a solucionar sistemes numerables d'equacions lineals sobre R que, pel lema anterior són finitament resolubles. Com que R és $\aleph_0$-injectiu per l'esquerra és $\aleph_0$-algebraicament compacte per la dreta (Proposició 4.4), per tant els sistemes tenen solució.

El fet que $a_n(x)x^n \in a(x)R[\![x]\!]$, també es conseqüència del Lema 5.3. ∎

COROL.LARI 5.5. *Si R és un anell regular $\aleph_0$-injectiu aleshores*

$$a(x)R[\![x]\!] = u(\sum_{n=0}^{\infty} e_n x^n)R[\![x]\!]$$

on:

(1) u *és una unitat de* $R[\![x]\!]$,
(2) $e_n = e_n^2 \in R$
(3) $e_n \cdot e_m = 0$ *si* $n < m$.

DEMOSTRACIÓ: Per la proposició anterior sabem que

$$a(x)R[\![x]\!] = \left(\sum_{n=0}^{\infty} e_n(x)x^n\right) R[\![x]\!]$$

on $e_n(x) \in E$ i $e_n(x)e_m(x) = 0$ si $n < m$. Per cada $n > 0$ sigui e_n el terme de grau zero de $e_n(x)$. Com que $e_n(x)e_m(x) = 0$ si $n < m$ tenim que $\sum_{n=0}^{\infty} e_n R = \oplus_{n=0}^{\infty} e_n R$. Per cada n, $e_n(x) = e_n + \sum_{i=1}^{\infty}(1-e_n)a_i^n e_n x^i$. Considerem la família d'aplicacions

$$\begin{array}{rccc} f_i\colon & \oplus_{n=0}^{\infty} e_n R & \longrightarrow & R \\ & e_n & \longmapsto & (1-e_n)a_i^n e_n \end{array}$$

Per ser R $\aleph_0$-injectiu, existeixen elements b_i tals que $f_i(e_n) = b_i e_n = (1-e_n)a_i^n e_n$. Sigui

$$u = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} b_n x^n\,,$$

aleshores $u(\sum_{n=0}^{\infty} e_n x^n) = \sum_{n=0}^{\infty} e_n(x)x^n$, tal com volíem veure. ∎

TEOREMA 5.6. *Sigui R un anell regular $\aleph_0$-injectiu per l'esquerra. Aleshores $R[\![x]\!]$ és un anell de Bezout per la dreta.*

DEMOSTRACIÓ: Siguin $a(x)$ i $b(x)$ dos elements de $R[\![x]\!]$, volem veure que l'ideal dreta $a(x)R[\![x]\!] + b(x)R[\![x]\!]$ és principal. Pel Lema 5.2

$$\bar{a}(x)R[\![x]\!] = e_0(x)R[\![x]\!] + x\bar{a}(x)R[\![x]\!]$$

amb $e_0(x) \in E$ i $e_0(x)\bar{a}(x) = 0$. Ara $b(x) = e_0(x)b(x) + (1 - e_0(x))b(x)$ com que $e_0(x)b(x) \in a(x)R[\![x]\!]$, podem suposar que $e_0(x)b(x) = 0$. Però $e_0(x) = e_0 + \sum_{i=1}^{\infty}(1-e_0)a_i^0 e_0 x^i$, per tant $e_0(x)b(x) = 0$ si i només si $e_0 b(x) = 0$. Una altra vegada pel Lema 5.2, tenim que

$$b(x)R[\![x]\!] = \bar{f}_0(x)R[\![x]\!] + x\bar{b}(x)R[\![x]\!]$$

on $\bar{f}_0(x) \in E$, $\bar{f}_0\bar{b}(x) = 0$ i $e_0(x)\bar{f}_0(x) = e_0(x)\bar{b}(x) = 0$. Sigui $f_0(x) = \bar{f}_0(x)(1 - e_0(x))$, és clar que $f_0(x)R[\![x]\!] = \bar{f}_0(x)R[\![x]\!]$ i que $e_0(x)f_0(x) = f_0(x)e_0(x) = 0$. Definim $a'(x) = (1 - f_0(x))\bar{a}(x)$ i $b'(x) = (1 - f_0(x))\bar{a}(x)$. Aleshores tenim

$$a(x)R[\![x]\!] + b(x)R[\![x]\!] = (e_0(x) + f_0(x))\,R[\![x]\!] + a'(x)R[\![x]\!] + b'(x)R[\![x]\!]$$

amb

$$e_0(x)\cdot f_0(x) = f_0(x)e_0(x) = 0 \text{ i } (e_0(x) + f_0(x))\,a'(x) = (e_0(x) + f_0(x))\,b'(x) = 0.$$

Per la definició de $f_0(x)$, si $e_0(x)c(x) = 0$ aleshores $f_0(x)c(x) = 0$ si i només si $\bar{f}_0(x)c(x) = 0$. Com que tant $e_0(x)$ com $\bar{f}_0(x)$ són elements de E això ens permet traduir la condició de que $c(x)$ sigui anul.lat per $e_0(x)$ i $f_0(x)$ en termes de $l_R(c(x))$. Per la construcció dels elements $e_0(x)$, $f_0(x)$ $a'(x)$ i $b'(x)$ i el Lema 5.2 tenim que

$$l_R(a(x)) \cap l_R(b(x)) \subseteq l_R\,(e_0(x) + f_0(x)) \cap l_R(a'(x)) \cap l_R(b'(x))$$

Aquests fets ens deixen en condicions d'aplicar el Lema 5.2 tantes vegades com vulguem. Per tant, tal com hem fet al Lema 5.3, tindrem que per qualsevol $n \geq 0$ l'ideal el podem descompondre en:

$$a(x)R[\![x]\!]+b(x)R[\![x]\!] = \sum_{i=0}^{\infty} (e_i(x) + f_i(x))\,x^i R[\![x]\!]+x^{n+1}\,(a'(x)R[\![x]\!] + b'(x)R[\![x]\!])$$

on

(1) $e_i(x) \in E$ i $e_j(x)e_i(x) = 0$ per $j < i$
(2) $e_i(x)f_j(x) = f_j(x)e_i(x) = 0$ per qualsevol i, j
(3) $f_j(x)f_i(x) = 0$ per $j < i$
(4) $(e_i(x) + f_i(x))a'(x) = (e_i(x) + f_i(x))b'(x) = 0$ per qualsevol $i \leq n$.

Cal observar que el procés de trobar nous idempotents $e_n(x) + f_n(x)$, es fa només a través dels termes residuals $a'(x)R[\![x]\!]$ i $b'(x)R[\![x]\!]$. Per tant els idempotents que ja tinguem determinats no canvien a l'aplicar el procés a termes de grau més gran. Podem doncs considerar l'element

$$d(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (e_n(x) + f_n(x))\,x^n.$$

Llavors és clar que $a(x)R[\![x]\!]+b(x)R[\![x]\!] = d(x)R[\![x]\!]$, ja que això equival a resoldre uns sistemes numerables d'equacions lineals per la dreta que tal com acabem de demostrar, són finitament resolubles. Com que R és $\aleph_0$-injectiu per l'esquerra podem concloure per la Proposició 4. 4 que són resolubles. ∎

Sigui $R \subset S$ una extensió d'anells. Es diu que R és *idealment tancat* dins de S per la dreta, si per qualsevol ideal per la dreta I de R es satisfà que $IS \cap R = I$.

Els anells regulars $\aleph_0$-injectiu per l'esquerra tenen una caracterització en termes d'anells de sèries formals i del concepte d'idealment tancat, tal com prova el següent resultat. Cal remarcar que aquest resultat és, una vegada més, una extensió de resultats que es donen en el cas commutatiu a [10].

PROPOSICIÓ 5.7. *Sigui R un anell regular. Aleshores les següents afirmacions són equivalents:*

(1) *R és $\aleph_0$-injectiu per l'esquerra*
(2) *Si $R \subset S$ és una extensió d'anells, aleshores $R[\![x]\!]$ és idealment tancat per la dreta dins de $S[\![x]\!]$.*
(3) *$R[\![x]\!]$ és idealment tancat per la dreta dins de $Q^l_{max}(R)[\![x]\!]$.*

Abans de demostrar la proposició veurem un parell de lemes molt fàcils i ben coneguts.

LEMA 5.8. *Sigui $R \subset S$ una extensió d'anells i suposem que R és un anell regular. Sigui $A \in M_{n\times m}(R)$ i $B \in M_{n\times 1}(R)$, aleshores si el sistema d'equacions $A\mathbb{X} = B$ té solució a S també en té a R.*

DEMOSTRACIÓ: Sense perdre generalitat podem suposar que A és una matriu de $M_n(R)$. Com que les matrius sobre un anell regular són també regulars, cf. [37, Theorem 1.7] existeix $C \in M_n(R)$ tal que $ACA = A$. Per tant el sistema té solució a R si i només si $CA\mathbb{X} = CB$ té solució. Però $CACA\mathbb{X} = CA\mathbb{X} = CB$ per tant si $\mathbb{X}$ és una solució dins de S, $CA\mathbb{X}$ és una solució dins de R. ∎

LEMA 5.9. *Sigui R un anell regular i I un ideal comptablement generat per R. Aleshores $I = \oplus_{i=0}^{\infty} e_n R$ on $\{e_n\}$ formen una família d'idempotents ortogonals de R.*

DEMOSTRACIÓ: Veure [37, Proposition 2.14].

DEMOSTRACIÓ PROPOSICIÓ: (1) $\Rightarrow$ (2) Sigui I un ideal de $R[\![x]\!]$, aleshores és sempre cert que $IS[\![x]\!] \cap R[\![x]\!] \supseteq I$. Suposem doncs que $a(x) \in IS[\![x]\!] \cap R[\![x]\!]$. Com que $R[\![x]\!]$ és un anell de Bezout (Teorema 5.6) tenim que existeix $b(x) \in I$ i $s(x) \in S[\![x]\!]$ tals que $b(x)s(x) = a(x)$. Igualant els coeficients dels dos costats de la igualtat obtenim un sistema d'equacions numerable a coeficients a R que té solució dins de S. Pel lema 5.8 tenim que el sistema és finitament resoluble dins de R. Com que R és $\aleph_0$-injectiu per l'esquerra el sistema és resoluble dins de R (Proposició 4.4). Per tant $a(x) \in I$.

(3) $\Rightarrow$ (1) Sigui I un ideal per l'esquerra comptablement generat de R. Podem suposar pel lema 5.9 que $I = \oplus_{n=0}^{\infty} e_n R$ on $\{e_n\}$ és una família d'idempotents ortogonals. Sigui $f\colon I \to R$ un morfisme de R-mòduls esquerra. Considerem l'ideal $(\sum_{n=0}^{\infty} e_n x^n)R[\![x]\!]$. Com que $R[\![x]\!]$ és idealment tancat per la dreta dins de $Q_{max}^{l}(R)[\![x]\!]$, existeix $a(x) \in R[\![x]\!]$ tal que $(\sum_{n=0}^{\infty} e_n x^n)a(x) = \sum_{i=0}^{\infty} f(e_i)x^i$. Sigui a_0 el terme de grau zero de $a(x)$, com que els e_i's són idempotents ortogonals tenim que per qualsevol n, $e_n a_0 = f(e_n)$. En conseqüència f ve donada per multiplicació a la dreta per a_0 per tant, R és $\aleph_0$-injectiu per l'esquerra. ∎

5.2. Anells de sèries formals que són anells de Bezout.

Aquesta secció està dedicada a considerar quan és cert el recíproc del Teorema 5.6. En general és fals, perquè si R és un anell que satisfà $R \oplus R \cong R$ com a R-mòdul dreta, aleshores al fer producte tensorial per l'anell $R[\![x]\!]$ obtenim $R[\![x]\!] \oplus R[\![x]\!] \cong R[\![x]\!]$, en particular tenim que $R[\![x]\!]$ és de Bezout per la dreta sense que R sigui ni regular ni $\aleph_0$-injectiu. Per a evitar aquesta situació hem d'imposar alguna condició sobre R.

Direm que un anell R és *directament finit* si per qualssevol elements a i b de R tals que $ab = 1$ aleshores $ba = 1$.

Que un anell R sigui directament finit és equivalent a que R no sigui isomorf a un sumand directe propi d'ell mateix.

PROPOSICIÓ 5.10. *Sigui R un anell directament finit tal que $R[\![x]\!]$ és de Bezout per la dreta. Aleshores l'anell de sèries de Laurent $R((x))$, és també directament finit.*

DEMOSTRACIÓ: Per veure que $R((x))$ és directament finit demostrarem fent inducció sobre n que si $a(x)$ i $b(x)$ són dos elements de $R[\![x]\!]$ tals que $a(x)b(x) = x^n$ aleshores també $b(x)a(x) = x^n$. Observi's que això és suficient per a demostrar la Proposició.

El cas $n = 0$ és clar ja que si $a(x)b(x) = 1$, els termes de grau zero de $a(x)$ i $b(x)$, a_0 i b_0 respectivament, satisfan $a_0 b_0 = 1$. Com que l'anell és directament finit també tindrem que $b_0 a_0 = 1$ i per tant $b(x)a(x) = 1$.

Suposem doncs que $n > 0$ i que ho hem demostrat fins $n-1$. Tenim ara que $a(x)b(x) = x^n$, on

$$a(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \qquad \text{i} \qquad b(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$$

Podem suposar que els termes de grau zero a_0 i b_0, són diferents de zero ja que si no ens podríem reduir a un cas anterior de la inducció. Per la relació $a(x)b(x) = x^n$ tenim que

$$\sum_{i=0}^{n} a_i b_{n-i} = 1 \tag{5.1}$$

Considerem l'ideal $b(x)R[\![x]\!] + x^n R[\![x]\!]$. Per ser $R[\![x]\!]$ de Bezout per la dreta existeixen $\alpha(x), \beta(x), d(x), b'(x)$ i $a'(x)$ elements de $R[\![x]\!]$ tals que

$$b(x)\alpha(x) + x^n\beta(x) = d(x) \tag{5.2}$$

$$d(x)b'(x) = b(x) \tag{5.3}$$

$$d(x)a'(x) = x^n \tag{5.4}$$

Si multipliquem (5.2) a l'esquerra per $a(x)$ obtenim $x^n\alpha(x) + a(x)x^n\beta(x) = a(x)d(x)$ per tant si $d(x) = \sum_{n=0}^{\infty} d_n x^n$, tenim la relació

$$(a_0, \dots, a_{n-1}) \begin{pmatrix} d_0 & \dots & d_{n-1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & d_0 \end{pmatrix} = (0, \dots, 0) \tag{5.5}$$

Per altra banda si $b'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b'_n x^n$, tenim per la identitat (5.3)

$$\begin{pmatrix} d_0 & \dots & d_n \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & d_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b'_n \\ \vdots \\ b'_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_n \\ \vdots \\ b_0 \end{pmatrix}$$

Si substituïm aquesta identitat dins de (5.1) obtenim

$$(a_0, \dots, a_n) \begin{pmatrix} d_0 & \dots & d_n \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & d_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b'_n \\ \vdots \\ b'_0 \end{pmatrix} = 1$$

si ara apliquem (5.5) tenim que

$$(a_0, \dots, a_n) \begin{pmatrix} d_n b_0 \\ \vdots \\ d_0 b_0 \end{pmatrix} = 1,$$

per tant existeix $c \in R$ tal que $cb'_0 = 1$. Com que R és directament finit podem concloure que b'_0 i per tant $b'(x)$ són invertibles. Aplicant ara les igualtats (5.3) i (5.4) tenim que $b(x)(b'(x))^{-1}a'(x) = d(x)a'(x) = x^n$, i per tant $b(x)a(x) = x^n$, tal com volíem veure. ∎

LEMA 5.11. *Sigui R un anell directament finit tal que $R[\![x]\!]$ és de Bezout per la dreta. Aleshores R és un anell regular.*

DEMOSTRACIÓ: Sigui a un element de R i considerem l'ideal dreta de $R[\![x]\!]$ generat per a i x. Per ser $R[\![x]\!]$ de Bezout per la dreta existeixen $\alpha(x)$, $\beta(x)$, $d(x)$, $a'(x)$ i $s(x)$ elements de $R[\![x]\!]$ tals que

$$a\alpha(x) + x\beta(x) = d(x) \tag{5.6}$$

$$d(x)a'(x) = a \tag{5.7}$$

$$d(x)s(x) = x \tag{5.8}$$

De la igualtat (5.8) i aplicant la proposició anterior podem concloure que $d(x)$ és un no divisor de zero. De les igualtats (5.7) i (5.8) obtenim que $d(x)(a'(x)x - s(x)a) = 0$, per tant $a'(x)x = s(x)a$. Deduïm doncs que $a'(x) \in R[\![x]\!]a$ i en particular que $a'_0 \in Ra$.

Del terme de grau zero de la igualtat (5.6) obtenim que $d_0 \in aR$. Finalment del terme de grau zero de la igualtat (5.7) tenim que $a = d_0a'_0 \in aRa$. Per tant podem concloure que R és regular. ∎

El nostre desig seria demostrar ara que si R és directament finit i $R[\![x]\!]$ és un anell de Bezout per la dreta aleshores R a més de ser regular és $\aleph_0$-injectiu per l'esquerra. No sabem si aquest resultat és cert en general, i ens haurem de conformar amb donar resultats parcials en aquesta direcció.

Si R és un anell regular i I és un ideal per l'esquerra de R comptablement generat, és ben conegut que $I = \oplus_{n=0}^{\infty} Re_n$ on $\{e_n\}$ és una família d'idempotents ortogonals de R, cf. Lema 5.9. Sigui $f\colon I \to R$ un morfisme de R-mòduls per l'esquerra i considerem les sèries

$$e(x) = \sum_{n=0}^{\infty} e_n x^n \qquad \text{i} \qquad f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f(e_n)x^n$$

Si suposem que $R[\![x]\!]$ és de Bezout per la dreta, tenim que existeixen α, β, a i b elements de $R[\![x]\!]$ tals que

$$e(x)\alpha + f(x)\beta = d(x)$$
$$d(x)a = e(x)$$
$$d(x)b = f(x)\,.$$

Fent servir la ortogonalitat dels e_n, és fàcil veure que podem suposar que α, β, a i b són elements de R.

Considerem l'ideal per l'esquerra de R, $J = \sum_{n=0}^{\infty} R(e_n\alpha + f(e_n)\beta)$ i el morfisme de R-mòduls esquerra

$$\begin{array}{rccc} g\colon & I & \longrightarrow & J \\ & e_n & \longmapsto & e_n\alpha + f(e_n)\beta \end{array}.$$

Aleshores és clar que g és bijectiu i que l'invers de g ve donat per multiplicació a la dreta per a. Si g també vingués donat per multiplicació a la dreta per un cert element r, tindríem que

$$e(x)rb = f(x)$$

i l'anell seria $\aleph_0$-injectiu per l'esquerra. Hem vist doncs el següent fet.

LEMA 5.12. *Sigui R un anell regular tal que $R[\![x]\!]$ és un anell de Bezout per la dreta. Aleshores R és $\aleph_0$-injectiu si i només si per qualsevol parella d'ideals esquerra comptablement generats I, J i un isomorfisme $f\colon I \longrightarrow J$ de R-mòduls esquerra que ve donat per multiplicació per un element de R, aleshores l'invers també ve donat per multiplicació per un element de R.* ∎

LEMA 5.13. (P. Ara) *Sigui R un anell regular ${}_RI$, ${}_RJ$ dos ideals per l'esquerra de R i $f\colon I \longrightarrow J$ un morfisme bijectiu que ve donat per multiplicació a l'esquerra per un element a.*

(1) *Si l'invers de f ve donat també per multiplicació a l'esquerra per un element de R, aleshores existeix ${}_RK$ ideal principal de R tal que $I \subset K$ i $l_R(x) \cap K = 0$.*
(2) *Si R és directament finit i existeix ${}_RK$ principal tal que $I \subset K$ i $l_R(a) \cap K = 0$, aleshores l'invers de f ve donat per multiplicació a l'esquerra per un element de R.*

DEMOSTRACIÓ: (1) Suposem que existeix un element b de R tal que $xab = x$ per tot $x \in I$. Agafem $K = \big(l_R(ab - (ab)^2\big)\, ab$ que és un ideal principal esquerra.

Aleshores $I \subset K$, ja que si $x \in I$ tenim $x = xab$ i per tant $x(ab - (ab)^2) = 0$, d'aquí que $x \in K$. També es compleix que $l(a) \cap K = 0$, ja que si $t \in K \cap l(a)$ aleshores $t = sab$ amb $s \in l(ab - (ab)^2)$. Tenim $0 = ta = saba$ i per tant $0 = s(ab)^2 = s(ab) = t$.

(2) Sigui f un idempotent tal que $K = Rf$ i $l(a) \subset R(1-f)$, aleshores $Rf \cong Rfa$. Sigui $g = g^2$ tal que $Rfa = Rg$, sigui $c \in Rg$ tal que $cfa = g$ i $h = acg$. Observem que $h = h^2$ i que $Rh \cong Rf$. Com que $Rh \subseteq Rf$ i R és directament finit aleshores $Rh = Rf$. Per tant $f = fh = facf$. Sigui $b = cf$. Tenim ara que per qualsevol $x \in I$ $x = xf = xfab$. Per tant $xab = x$ per qualsevol $x \in I$.

Si $y \in Ia$ aleshores $y \in Rfa = Rg$ i per tant $yba = ycfa = yg = y$. Podem concloure doncs que b és l'element que buscàvem. ∎

Podem ara enunciar un recíproc parcial al Teorema 5.6.

PROPOSICIÓ 5.14. *Sigui R un anell directament finit. Aleshores les següents afirmacions són equivalents*

(1) *R és un anell regular $\aleph_0$-injectiu per l'esquerra.*
(2) *(i) $R[\![x]\!]$ és un anell de Bezout per la dreta.*
  (ii) Si I és un ideal esquerra de R comptablement generat i $e = e^2 \in R$ és tal que $I \cap Re = 0$. Aleshores la projecció natural

$$p: I \oplus Re \longrightarrow Re$$

ve donada per multiplicació a la dreta per un element de R.

DEMOSTRACIÓ: Sols ens falta demostrar que (2) $\Rightarrow$ (1). Sabem que R ha de ser regular pel lema 5.11. Si I és un ideal esquerra comptablement generat tal que multiplicació a la dreta per un element $a \in R$ és injectiva, aleshores $I \cap l(a) = 0$. Però $l(a) = Re$ per un cert $e = e^2 \in R$. Aleshores per hipòtesi existeix $c \in R$ tal que $Ic = 0$ i $ec = e$. Sigui $K = R(1 - ce)$, aleshores és clar que $I \subset K$.

Sigui $r(1 - ce) \in K \cap Re$, aleshores $0 = r(1 - ce)a = ra$ per tant $r(1 - ce) = re(1 - ce) = 0$. Ara podem concloure doncs aplicant els lemes 5.11, 5.12 i 5.13 que R és $\aleph_0$-injectiu per l'esquerra. ∎

No sabem si la condició (ii) es pot treure de l'enunciat de la proposició. Si R és un anell regular commutatiu aleshores aquesta condició es satisfà automàticament (sense que l'anell R sigui $\aleph_0$-injectiu). No és així per un anell regular directament finit no commutatiu, tal com il.lustrarem amb un exemple tot seguit.

Un anell R és diu que és *unit-regular* si per qualsevol element $r \in R$ existeix una unitat $u \in R$ tal que $rur = r$.

Un anell unit-regular és directament finit, ja que si $a, b \in R$ i $ab = 1$ aleshores en particular $l_R(c) = 0$. Si R és unit-regular sabem que existeix una unitat de R diem-li u tal que $aua = a$, per tant $(au - 1)a = 0$ i tenim que $au = 1$, podem concloure doncs que R és directament finit.

EXEMPLE: Existeix un anell R unit-regular tal que R conté un ideal esquerra comptablement generat I i un idempotent $e \in R$ tals que $I \cap Re = 0$ i la projecció

$$p: I \oplus Re \longrightarrow Re$$

no ve donada per multiplicació a la dreta per un element de R. A més R està contingut dins d'un anell S, tal que $S[\![x]\!]$ és de Bezout als dos costats i p tampoc ve donada per multiplicació a la dreta per un element de S.

DEMOSTRACIÓ: Sigui K un cos i V un K-espai vectorial de dimensió infinita numerable. Sigui $S = \mathrm{End}_K(V)$, considerem dins de S l'ideal $M = \{f \in S \mid \dim(\mathrm{Im}\, f) < \infty\}$. Sigui $R = K + M$, aleshores és fàcil veure que R és unit-regular.

Fixem $\{v_i\}$ una base de V com a K espai vectorial i w un element diferent de zero de V. Considerem l'aplicació $e\colon V \to V$ tal que $e(v_i) = w$, i les projeccions $e_i\colon V \to V$ tals que $e_i(v_j) = \delta_{ij}$. Sigui $I = \oplus Re_i$. Aleshores $I \cap Re = 0$ i la projecció

$$I \oplus Re \longrightarrow Re$$

no ve donada per multiplicació per la dreta, ja que si un element $s \in S$ compleix que $e_i s = 0$ aleshores $s = 0$. Finalment com que S satisfà que $S \oplus S \cong S$, $S[\![x]\!]$ és de Bezout per la dreta i per l'esquerra. ∎

Si R és un anell regular $\aleph_0$-continu per l'esquerra, aleshores la condició (2.ii) de la Proposició 5.14 també és satisfà automàticament, tenim doncs el següent corol.lari,

COROL.LARI 5.15. *Sigui R un anell regular $\aleph_0$-continu per l'esquerra. Aleshores les següents afirmacions són equivalents,*

(1) *R és un anell $\aleph_0$-injectiu per l'esquerra.*
(2) *$R[\![x]\!]$ és un anell de Bezout per la dreta.* ∎

5.3. Anells de sèries formals semihereditaris.

En aquesta secció aprofitarem la informació que tenim sobre els ideals d'un anell regular $\aleph_0$-injectiu per l'esquerra, per veure que si a més l'anell R és $\aleph_0$-complet també per l'esquerra aleshores $R[\![x]\!]$ és semihereditari per la dreta. Aquest resultat és anàleg al de [10] en el cas en que R és commutatiu, de fet en aquest cas Brewer, Rutter i Watkins varen provar que $R[\![x]\!]$ és semihereditari si i només si R és regular $\aleph_0$-injectiu i $\aleph_0$-complet, cf. Teorema 4.7.

LEMA 5.16. *Sigui R un anell tal que $R[\![x]\!]$ és semihereditari per la dreta. Aleshores R és un anell regular $\aleph_0$-complet per l'esquerra.*

DEMOSTRACIÓ: Sigui r un element diferent de zero de R, considerem l'ideal dreta de $R[\![x]\!]$, $I = rR[\![x]\!] + xR[\![x]\!]$. Com que I és projectiu existeixen $f_1, f_2 \in I^*$ tals que per qualsevol s de I, $s = rf_1(s) + xf_2(s)$. Per tant $rx = rf_1(x)r + x^2 f_2(r)$,

$f_1(x)r = f_1(r)x$ per tant aquesta sèrie no té terme de grau zero. Tenim doncs, del terme de grau 1 de la igualtat anterior, que $r \in rRr$ i per tant R és regular.

Sigui $\{e_n\}_{n=0}^{\infty}$ una família numerable d'idempotents ortogonals de R. Considerem $a(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$. Per ser $R[\![x]\!]$ semihereditari per la dreta $r_{R[\![x]\!]}(a(x)) = e(x)R[\![x]\!]$, on $e(x) = e(x)^2 \in R[\![x]\!]$. per tant el terme de grau zero de $e(x)$ és un idempotent $e \in R$ tal que $e_n e = 0$ per qualsevol $n \geq 0$, és a dir $r_R\left(\oplus_{n=0}^{\infty} Re_n\right) \supseteq eR$. Però si $r \in r_R\left(\oplus_{n=0}^{\infty} Re_n\right) \supseteq eR$ aleshores $e(x)s(x) = r$, per tant $r \in eR$. Tenim doncs que $(\oplus_{n=0}^{\infty} Re_n) \subseteq R(1-e)$. Anem a veure que $(1-e)$ és el suprem de $\{e_n\}_{n=0}^{\infty}$. Si $\oplus_{n=0}^{\infty} Re_n \subseteq Rf$, aleshores $(1-f) \in r_R\left(\oplus_{n=0}^{\infty} Re_n\right) = eR$ i en conseqüència $e(1-f) = (1-f)$ i $(1-e)f = (1-e)$ per tant $R(1-e) \subseteq Rf$. ∎

PROPOSICIÓ 5.17. *Sigui R un anell regular $\aleph_0$-injectiu per l'esquerra i $\aleph_0$-complet per l'esquerra. Aleshores $R[\![x]\!]$ és un anell de Bezout per la dreta i semihereditari per la dreta.*

DEMOSTRACIÓ: Pel Teorema 5.6 sabem ja que $R[\![x]\!]$ és un anell de Bezout per la dreta. A més si $I_{R[\![x]\!]}$ és un ideal principal per la Proposició 5.4

$$I = \left(\sum_{n=0}^{\infty} e_n(x)x^n\right) R[\![x]\!]$$

amb $e_n(x) = \left(1 + \sum_{n=1}^{\infty}(1-e_n)a_n e_n\right) e_n$ i $e_n = e_n^2 \in R$, per tant

$$r_{R[\![x]\!]}\left(\sum_{n=0}^{\infty} e_n(x)x^n\right) = r_{R[\![x]\!]}\left(\sum_{n=0}^{\infty} e_n x^n\right)$$

Per la mateixa proposició tenim que $e_n e_m = 0$ si $n < m$, llavors

$$r_{R[\![x]\!]}\left(\sum_{n=0}^{\infty} e_n x^n\right) = r_R\left(\{e_n\}_{n=0}^{\infty}\right) R[\![x]\!] = eR[\![x]\!],$$

on $e = e^2 \in R$. Per tant els ideals principals de $R[\![x]\!]$ són projectius. ∎

Pere Ara a [2, Lemma 2.1] va provar que un anell regular $\aleph_0$-injectiu per l'esquerra i $\aleph_0$-complet per l'esquerra també és $\aleph_0$-continu per l'esquerra. Si es pogués provar directament que $R[\![x]\!]$ semihereditari per la dreta implica que R és $\aleph_0$-continu per l'esquerra, aleshores pel Corol.lari 5.15 i el resultat de Pere Ara, tindríem el recíproc de la Proposició anterior en el cas en que R és un anell directament finit.

LEMA 5.18. *Sigui R un anell directament finit tal que $R[\![x]\!]$ és de Bezout pels dos costats i semihereditari per la dreta. Aleshores R és regular $\aleph_0$-continu per l'esquerra i $\aleph_0$-injectiu per l'esquerra.*

DEMOSTRACIÓ: Pel Lema 5.16 sabem que R és regular i $\aleph_0$-complet per l'esquerra. Cal demostrar que si ${}_RI$ és un ideal per l'esquerra comptablement generat, aleshores ${}_RI \leq {}_eRe$ per un cert $e = e^2 \in R$. Podem suposar que ${}_RI$ està generat per una família d'idempotents ortogonals $\{e_n\}_{n=0}^{\infty}$.

Sigui Re el suprem de $\oplus_{n=0}^{\infty} Re_n$, aleshores

$$e_n e e_n e = e e_n = e_n \quad \forall n \geq 0$$

i $(ee_n e)(ee_m e) = 0$ si $n \neq m$. Podem suposar doncs que $\{e_n\}_{n=0}^{\infty}$ és una família d'idempotents ortogonals de eRe. Per altra banda si demostrem que $\oplus_{n=0}^{\infty} eRee_n \leq {}_e eRe$ aleshores també tenim que $Re_n \leq {}_e Re$, perqué si $f = f^2 \in Re$ aleshores $fefe = fe = f$ i en particular ef és un element diferent de zero de eRe, per tant

$$0 \neq (eRe)ef\ f) \cap (\oplus_{n=0}^{\infty}(eRe)e_n) \subseteq Rf \cap (\oplus_{n=0}^{\infty} Re_n)\,.$$

Si $R[\![x]\!]$ és semihereditari i Bezout també ho és $eRe[\![x]\!]$, com que a més e és el suprem de $\{e_n\}$ sense perdre generalitat podem suposar que

$$r_R\left(\oplus_{n=0}^{\infty} Re_n\right) = 0$$

i volem veure que $\oplus_{n=0}^{\infty} Re_n \leq {}_e R$, és a dir podem suposar $e = 1$.

Sigui $e = e^2 \in R$ tal que $\left(\oplus_{n=0}^{\infty} Re_n\right) Re = 0$ i $a(x) = \sum_{n=0}^{\infty} e_n x^n$. Considerem l'ideal esquerra de $R[\![x]\!]$, $J = R[\![x]\!]a(x) + R[\![x]\!]e$. Per ser $R[\![x]\!]$ un anell de Bezout per l'esquerra, $J = R[\![x]\!]d(x)$ per un cert $d(x) \in R[\![x]\!]$. Per tant existeixen $\alpha, \beta, a', b' \in R[\![x]\!]$ tals que

$$\begin{aligned} \alpha a(x) + \beta e &= d(x) \\ a'd(x) &= a(x) \\ b'd(x) &= e\,. \end{aligned}$$

Però $R[\![x]\!]a(x) \cap R[\![x]\!]e = 0$, per tant

$$\begin{array}{ll} a'\alpha a(x) = a(x) & a'\beta e = 0 \\ b'\alpha a(x) = 0 & b'\beta e = e \end{array}$$

Per l'ortogonalitat de la família $\{e_n\}_{n=0}^{\infty}$, podem suposar que $\alpha, \beta, a', b' \in R$.

De les relacions anteriors tenim que

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} \alpha e_n R\right) \cap \beta e R = 0$$

Si considerem la sèrie $c(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha e_n x^n$, per ser $R[\![x]\!]$ un anell de Bezout per la dreta

$$c(x)R[\![x]\!] + \beta e R[\![x]\!] = d_1(x)R[\![x]\!]$$

per tant existeixen $\alpha_1(x)$, $\beta_1(x)$, $c'(x)$, $d'(x)$ elements de $R[\![x]\!]$ tals que

$$\begin{aligned} c(x)\alpha_1(x) + \beta e \beta_1(x) &= d_1(x) \\ d_1(x)c'(x) &= c(x) \\ d_1(x)d'(x) &= e \end{aligned}$$

Però $(c(x)R[\![x]\!]) \cap \beta e R[\![x]\!] = 0$, per tant

$$\begin{array}{rr} c(x)\alpha_1(x)c'(x) = c(x) & \beta e\beta_1(x)c'(x) = 0 \\ c(x)\alpha_1(x)d'(x) = 0 & \beta e\beta_1(x)d'(x) = \beta e \end{array}$$

d'aquestes igualtats es dedueix

$$a'c(x)\alpha_1(x)c'(x) = \left(\sum_{n=0}^{\infty} e_n x^n\right)\alpha_1(x)c'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} e_n x^n$$

com que $\sum_{n=0}^{\infty} e_n x^n$ no té anul.lador per la dreta, obtenim que $\alpha_1(x)c'(x) = 1$, i com que R és directament finit també tenim que $c'(x)\alpha_1(x) = 1$. Però $\beta e\beta_1(x)c'(x) = 0$ per tant $\beta e\beta_1(x) = 0$ i llavors

$$0 = b'\beta e\beta_1(x)d'(x) = e\,.$$

Tenim doncs que R és $\aleph_0$-continu per l'esquerra i per la Proposició 5.14 és també $\aleph_0$-injectiu per l'esquerra. ∎

Handelman va provar que un anell regular $\aleph_0$-continu és unit-regular, la demostració d'aquest fet va ser després simplificada per Goodearl a [38, Corollary 1.6]. En aquest mateix article, Goodearl prova que si R és un anell regular $\aleph_0$-continu per la dreta i $\aleph_0$-injectiu per l'esquerra aleshores R també $\aleph_0$-continu per la dreta i per tant també unit-regular.

TEOREMA 5.19. *Sigui R un anell. Aleshores les següents afirmacions són equivalents*

(1) *R és regular $\aleph_0$-injectiu (pels dos costats) i $\aleph_0$-complet per l'esquerra (o per la dreta).*
(2) *R és directament finit i $R[\![x]\!]$ és Bezout i semihereditari.*

DEMOSTRACIÓ: (1) $\Rightarrow$ (2) pel Teorema 5.6, sabem que $R[\![x]\!]$ és de Bezout pels dos costats, i per la Proposició 5.17 que és semihereditari per la dreta. Per [2, Lemma 2.1] R és $\aleph_0$-continu per l'esquerra, per tant per [37, Theorem 1.8] és també $\aleph_0$-continu per la dreta. Per tant per [38, Corollary 1.6] R és directament finit i per la Proposició 5.17 és semihereditari per l'esquerra.

(2) $\Rightarrow$ (1) És clar pel Lema 5.18. ∎

5.4. Idempotents de l'anell de sèries formals.

És molt fàcil veure que quan R és un anell commutatiu els idempotents de $R[\![x]\!]$ són precisament els idempotents de R. Veurem en aquesta secció que per un anell qualsevol R els idempotents de $R[\![x]\!]$ són conjugats dels idempotents de R.

Suposem doncs que $e(x) = e + \sum_{i=1}^{\infty} a_i x^i$, és un idempotent de R. És clar que e ha de ser un idempotent de R. Utilitzant que $e(x)^2 = e(x)$, és fàcil veure que els coeficients a_i han de satisfer les relacions que anomenarem (1):

$$1.1\begin{cases} ea_1e = 0 \\ (1-e)a_1(1-e) = 0 \end{cases}$$

$$1.2\begin{cases} ea_ne = -e(a_1e_{n-1} + \ldots + a_{n-1}a_1)e \quad n \geq 2 \\ (1-e)a_n(1-e) = (1-e)(a_1a_{n-1} + \ldots + a_{n-1}a_1)(1-e) \quad n \geq 2 \end{cases}$$

i les (2):

$$e(a_1a_{n-1} + \ldots + a_{n-1}a_1)(1-e) = 0 \quad n \geq 2$$
$$(1-e)(a_1a_{n-1} + \ldots + a_{n-1}a_1)e = 0 \quad n \geq 2$$

NOTACIÓ: Denotarem per v_{kn} a la fila $(a_k, \ldots, a_n)$ i per v^*_{kn} la columna $\begin{pmatrix} a_n \\ \vdots \\ a_k \end{pmatrix}$.

Denotarem per T_{kn} la matriu triangular inferior $\begin{pmatrix} a_k & \ldots & a_n \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ldots & a_k \end{pmatrix}$ que té com a fila r-éssima $(0 \ldots 0\ a_k\ a_{k+1} \ldots a_{n-r+1})$

LEMA 5.20. *Sigui R un anell, $e = e^2 \in R$ i $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ una successió d'elements de R que satisfà les relacions (1), aleshores també satisfà les relacions (2).*

DEMOSTRACIÓ: Només demostrarem que per $n \geq 2$ es satisfà que $e(a_1 a_{n-1} + \ldots + a_{n-1}a_1)(1-e) = 0$, ja que l'altra identitat es veu de manera anàloga. Farem les demostracions per inducció sobre n.

En el cas en que $n = 2$ tenim que

$$ea_1a_1(1-e) = ea_1ea_1(1-e) + ea_1(1-e)a_1(1-e) = 0\,.$$

Suposem doncs que $n > 2$ i que ho hem demostrat fins al cas $n-1$. Aleshores

$$\begin{aligned}e(a_1a_{n-1} + \ldots + a_{n-1}a_1)(1-e) &= ev_{1n-1}v_{1n-1}^*(1-e) = \\ &= ev_{1n-1}ev_{1n-1}^*(1-e) + ev_{1n-1}(1-e)v_{1n-1}^*(1-e)\end{aligned}$$

Si apliquem 1.1 aquesta última igualtat es transforma en:

$$ev_{2n-1}ev_{1n-2}^*(1-e) + ev_{1n-2}(1-e)v_{2n-1}^*(1-e)$$

Si apliquem 1.2 tenim que

$$\begin{aligned}ev_{2n-1}e &= e(a_2, \ldots, a_{n-1})e = \\ &= -e(a_1 \ldots a_{n-2})\begin{pmatrix} a_1 & \ldots & a_{n-2} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ldots & a_1 \end{pmatrix} e = -ev_{1n-2}T_{1n-2}e\end{aligned}$$

i anàlogament

$$(1-e)v_{2n-1}^*(1-e) = (1-e)T_{1n-2}v_{1n-2}^*(1-e)$$

Per tant

$$\begin{aligned}e(a_1a_{n-1} + \ldots + a_{n-1}a_1)(1-e) &= -ev_{1n-2}T_{1n-2}ev_{1n-2}^*(1-e) + \\ &\quad + ev_{1n-2}(1-e)T_{1n-2}v_{1n-2}^*(1-e) = \\ &= -ev_{1n-2}eT_{1n-2}ev_{1n-2}^*(1-e) + \\ &\quad + ev_{1n-2}(1-e)T_{1n-2}(1-e)v_{1n-2}^*(1-e)\end{aligned}$$

Per hipòtesi d'inducció tenim que

$$\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = eT_{1n-2}v_{1n-2}^*(1-e) = eT_{1n-2}ev_{1n-2}^*(1-e) + \\ + eT_{1n-2}(1-e)v_{1n-2}^*(1-e)$$

i també

$$(0 \ldots 0) = ev_{1n-2}T_{1n-2}(1-e) = ev_{1n-2}eT_{1n-2}(1-e) + ev_{1n-2}eT_{1n-2}(1-e)$$

Per tant $e(a_1a_{n-1} + \ldots + a_{n-1}a_1)(1-e) = ev_{1n-2}eT_{1n-2}(1-e)v_{1n-2}^*(1-e) - ev_{1n-2}eT_{1n-2}(1-e)v_{1n-2}^*(1-e) = 0$, tal com volíem veure. ∎

TEOREMA 5.21. *Sigui R un anell i $e(x)^2 = e(x)$ un idempotent de $R[\![x]\!]$. Aleshores existeix una unitat $u \in R[\![x]\!]$ i un idempotent $e \in R$ tals que $e(x) = u^{-1}eu$.*

DEMOSTRACIÓ: Sigui $e(x) = e + \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$. Definim:

$$u = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(-(1-e)a_n e + e a_n (1-e) - (1-e)a_n(1-e) + e b_n (1-e)\right) x^n$$

on $eb_n(1-e)$ està definit inductivament com:

$$eb_1(1-e) = 0$$

$$eb_n(1-e) = \sum_{i=1}^{n-1} e a_i (1-e) a_{n-i}(1-e) + \sum_{i=1}^{n-1} e b_i (1-e) a_{n-i}(1-e)$$

En la resta de la demostració també escriurem:

$$eb_n(1-e) = e v_{1n-1}(1-e) v^*_{1n-1}(1-e) + e\overline{b_n}(1-e)$$

on $e\overline{b_n}(1-e)$ denota el segon sumand de la definició de $eb_n(1-e)$.

Hem de veure que $ue(x) = eu$. Es clar que

$$eu = e + \sum_{n=1}^{\infty} \left(e a_n (1-e) + e b_n (1-e)\right) x^n$$

Calculem doncs $ue(x)$

Pas 1. $(1-e)ue(x)(1-e) = 0$

És fàcil comprovar que els termes de grau 1 i 2 de $(1-e)ue(x)(1-e)$ són zero.

El terme n-éssim de $(1-e)ue(x)(1-e)$ és:

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n-1} -(1-e)a_{n-i} e a_i (1-e) - \sum_{i=2}^{n-2} (1-e) a_{n-i}(1-e) a_i (1-e) + (1-e)a_n(1-e) = \\ = (1-e) v_{1n-1} e v^*_{1n-1}(1-e) - \\ - (1-e) v_{2n-2}(1-e) v_{2n-2}(1-e) + (1-e)a_n(1-e)\end{aligned}$$

Aplicant les relacions 1.1 i 1.2 tenim que

$$(1-e)a_n(1-e) = (1-e)v_{1n-1} e v^*_{1n-1}(1-e) + (1-e)v_{2n-2}(1-e)v^*_{2n-2}(1-e)$$

Per tant el terme de grau n de $(1-e)ue(x)(1-e)$ és zero.

Pas 2. $(1-e)ue(x)e = 0$

El terme n-èssim de $(1-e)ue(x)e$ és:

$$-\sum_{i=1}^{n-1}(1-e)a_{n-i}ea_ie - \sum_{i=1}^{n-1}(1-e)a_{n-i}(1-e)a_ie =$$
$$-(1-e)v_{1n-1}ev^*_{1n-1}e - (1-e)v_{1n-1}(1-e)v^*_{1n-1}e$$

Per les relacions (2) tenim que:

$$(1-e)v_{1n-1}(1-e)v^*_{1n-1}e = -(1-e)v_{1n-1}ev^*_{1n-1}e$$

Per tant aquests termes també són zero.

Pas 3. $eue(x)(1-e) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(ea_n(1-e) + eb_n(1-e)\right)x^n$.

El terme de grau n de $eue(x)(1-e)$ és:

$$\sum_{i=1}^{n-1} ea_{n-1}(1-e)a_i(1-e) + \sum_{i=1}^{n-1} eb_{n-i}(1-e)a_i(1-e) + ea_n(1-e)$$

i per tant per la definició de $eb_n(1-e)$ aquest terme és igual a $ea_n(1-e) + eb_n(1-e)$.

Pas 4. $eue(x)e = 0$.

Volem veure que per qualsevol $n > 0$ es satisfà

$$\sum_{i=1}^{n-1} eb_i(1-e)a_{n-i}e = \sum_{i=1}^{n-1} ea_iea_{n-i}e$$

És més o menys tediós comprovar que aquesta identitat es satisfà fins $n = 5$. Suposem que $n > 5$ i que ho hem demostrat fins $n-1$.

Per una banda tenim que

$$\sum_{i=1}^{n-1} ea_iea_{n-i}e = ev_{1n-1}ev^*_{1n-1}e = ev_{1n-3}T_{1n-3}eT_{1n-3}v^*_{1n-3}e =$$
$$\begin{aligned}
&= ev_{1n-3}eT_{1n-3}eT_{1n-3}ev^*_{1n-3}e+ \\
&\quad + ev_{1n-3}(1-e)T_{1n-3}eT_{1n-3}ev^*_{1n-3}e+ \\
&\quad + ev_{1n-3}eT_{1n-3}eT_{1n-3}(1-e)v^*_{1n-3}e+ \\
&\quad + ev_{1n-3}(1-e)T_{1n-3}eT_{1n-3}(1-e)v^*_{1n-3}e = \\
&= (a\cdot 1) + (a\cdot 2) + (a\cdot 3) + (a\cdot 4)\,.
\end{aligned}$$

on $(a\cdot 1)$, $(a\cdot 2)$, $(a\cdot 3)$ i $(a\cdot 4)$ denoten cadascun dels quatre sumands anteriors.

Els termes de b els podem desenvolupar:

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n-1} eb_i(1-e)a_{n-i}e = \sum_{i=3}^{n-1} eb_i(1-e)a_{n-i}e &= \\ &= ev_{1n-3}(1-e)T_{2n-2}(1-e)v^*_{1n-3}+ \\ &\quad + e(0,\overline{b}_4,\dots,\overline{b}_{n-1})(1-e)v^*_{1n-3}e = \\ &= ev_{1n-3}(1-e)T_{1n-3}T_{1n-3}(1-e)v^*_{1n-3}e+ \\ &\quad + e(\overline{b}_4,\dots,\overline{b}_{n-1})(1-e)v^*_{1n-3}e\,.\end{aligned}$$

Si apliquem ara les relacions (2) als termes $(a\cdot 4)+(a\cdot 3)$ tenim:

$$\begin{aligned}(a\cdot 4)+(a\cdot 3) &= (a\cdot 4)+ev_{1n-3}(1-e)T_{1n-3}(1-e)T_{1n-3}(1-e)v^*_{1n-3}e = \\ &= ev_{1n-3}(1-e)T_{1n-3}T_{1n-3}(1-e)v^*_{1n-3}e\end{aligned}$$

Terme que cancel.la amb el corresponent del desenvolupament de les b's.

Ara

$$\begin{aligned}e(\overline{b}_4,\dots,\overline{b}_{n-1})(1-e)v^*_{1n-3}e &= e(b_3,\dots,b_{n-2})(1-e)T_{1n-4}(1-e)v^*_{1n-4}e = \\ &= ev_{1n-4}(1-e)T_{2n-3}(1-e)T_{1n-4}(1-e)v^*_{1n-4}e+ \\ &\quad + e(0,\overline{b}_4,\dots,\overline{b}_{n-2})(1-e)T_{1n-4}(1-e)v^*_{1n-4}e = \\ &= (b\cdot 1)+(b\cdot 2)\end{aligned}$$

Si considerem el terme

$$\begin{aligned}(a\cdot 2) &= ev_{1n-3}(1-e)T_{1n-3}eT_{1n-3}ev^*_{1n-3}e = \\ &= ev_{1n-3}(1-e)T_{1n-3}(1-e)T_{1n-3}(1-e)v^*_{1n-3}e = \\ &= ev_{1n-4}(1-e)T_{2n-3}(1-e)T_{1n-4}(1-e)v^*_{1n-4}e\end{aligned}$$

veiem que cancel.la amb el terme $(b\cdot 1)$.

Tenim doncs:

$$(b\cdot 2) = e(\overline{b}_4,\dots,\overline{b}_{n-2})(1-e)T_{1n-5}(1-e)v^*_{1n-5}e$$

Si apliquem dues vegades les relacions (2) i la definició de $\overline{b}_i$ obtenim:

$$(b\cdot 2) = e(b_3,\dots,b_{n-3})(1-e)T_{1n-5}eT_{1n-5}ev^*_{1n-5}e\,.$$

Per hipòtesi d'inducció

$$e(b_3, \ldots, b_{n-3})(1-e)T_{1n-5}e = ev_{2n-4}eT_{2n-4}e\,.$$

Per tant

$$(b\cdot 2) = ev_{2n-4}eT_{2n-4}eT_{1n-5}eT_{1n-5}ev^*_{1n-5}e\,.$$

Si ara treballem amb el terme $(a\cdot 1)$ que és l'últim que ens queda per cancel.lar:

$$\begin{aligned}(a\cdot 1) &= ev_{1n-3}eT_{1n-3}eT_{1n-3}ev^*_{1n-3}e = \\ &= ev_{2n-4}eT_{2n-4}eT_{1n-5}ev^*_{1n-5}e = (b\cdot 2)\end{aligned}$$

i això acaba la demostració. ∎

REFERÈNCIES

1. S. A. Amitsur, *Radicals of Polynomial rings*, Can. J. Math. **8** (1956), 355-361.
2. P. Ara, *On $\aleph_0$-injective regular rings*, J. of Pure and Appl. Algebra **42** (1986), 109-115.
3. P. Ara and J.K. Park, *On continuous semiprimary rings*, Comm. in Algebra **19** (1991), 1945-1957.
4. G. Azumaya, *Completely faithful modules and self injective rings*, Nagoya Math. J. **27** (1966), 697-708.
5. R. Baer, *Abelian subgrups that are direct summands of every containing abelian group*, Bull. Amer. Math. Soc. **46** (1940), 800-806.
6. G.M. Bergman, *Hereditary commutative rings and centres of hereditary rings*, Proc. London Math. Soc. **(3)23** (1971), 214-236.
7. G.M. Bergman and P.M. Cohn, *The centres of 2-firs and Hereditary hereditary rings*, Proc. London Math. Soc. **(3)23** (1971), 83-89.
8. B. Blackadar, *Rational C^*-algebras and nonstable K-theory*, Rocky Mountain J. of Math. **20** (1990), 285-316.
9. J. W. Brewer, Lecture notes in Pure and Appl. Math. Vol.64,Dekker, New York (1981), "Power series rings over commutative rings,".
10. J. Brewer, E. Rutter and J. Watkins, *Coherence and weak global dimension of $R[\![x]\!]$ when R is von Neumann regular*, J. Algebra **46** (1977), 278-289.
11. W. D. Burgess, *On nonsingular right FPF rings*, Comm. Algebra **12** (1984), 1729-1750.
12. W. D, Burgess W. Stephenson, *Pierce sheaves of non-commutative rings*, Comm. in Algebra **4** (1976), 51-75.
13. V. Camillo and R. Guralnick, *Polynomial rings over Goldie rings are often Goldie*, Proc. American Math. Soc. **98** (1986), 567-568.
14. A. W. N. Chatters and C. R. Hajarnavis, Research Notes in Mathematics Vol.44,Pitman, London (1980), "Rings with Chain conditions,".
15. P. M. Cohn, John Wiley and Sons, New York (1977), "Algebra II,".
16. Reidel Pub. Company, Dordrecht (1981), "Universal Algebra,".
17. London Math. Society Monographs No 19, Academic Press (1985), "Free rings and their relations (second edition),".
18. *Right Principal Bezout domains*, J. London Math. Soc.(2) **35** (1987), 251-262.
19. P. M. Cohn and A. H. Schofield, *Two examples of principal ideal domains*, Bull. London Math. Soc. **17** (1985), 25-28.
20. C. Curtis and I. Reiner, Interscience (1962), "Representation Theory of finite groups and associative algebras,".
21. W. Dicks, *Hereditary group rings*, J. London Math. Soc. **(2)(20)** (1979), 27-38.
22. W. Dicks and A. H. Schofield, *On semihereditari rings*, Comm. in Algebra **16** (1988), 1243-1274.
23. R. Diop, Poitiers (1978), "Thèse de 3ème cycle,".
24. F. Dischinger W. Müller, *Left PF is not right PF*, Comm. in Algebra **14** (1986), 1223-1227.
25. V. Dlab and C. M. Ringel, *A class of bounded hereditary noetherian domains*, J. Algebra **92** (1985), 311-321.
26. C. Faith, *Rings with ascending chain conditions on annihilators*, Nagoya Math. J. **27** (1966).
27. *Self-injective rings*, Proc. Amer. Math. Soc. **77,2** (1979), 157-164.
28. *Injective quotient rings of commutative rings, in Module Theory*, Lect. Notes in Math., Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York **700** (1979).

29. Grundlehren der Math. Wiss., Bd 190, Springer-Verlag (1973, corrected Reprint 1981), "Algebra: Rings ,Modules and Categories I,".
30. Grundlehren der Math. Wiss., Bd. 191, Springer-Verlag (1976), "Algebra II: Ring Theory,".
31. Lecture notes in Pure and Appl. Math. Vol.72,Dekker, New York (1982), "Injective modules and injective quotient rings,".
32. *When self-injective rings are QF: a report on a problem*, preprint.
33. C. Faith and S. Page, London Math. Soc. Lect. Notes Ser. Vol 88, Cambridge Univ. Press, Cambridge (1984), "FPF Ring Theory, Faithful Modules Generators of mod-R,".
34. C. Faith and P. Pillay, Notas de Matemática, Vol 4. Universidad de Murcia (1990), "Classification of commutative FPF rings,".
35. K. R. Goodearl, Pure and Applied Math. Series vol 33, Marcel Dekker, New York (1976), "Ring Theory, Nonsingular rings and modules,".
36. *Centers of regular self-injective rings*, Pacific J. Math. **76** (1978), 381-389.
37. K. R. Goodearl, Pitman, London (1979), "Von Neumann Regular Rings,".
38. *Directly finite aleph-nought-continuous regular rings*, Pacific J. Math. **100** (1982), 105-122.
39. *Cancellation of low-rank vector bundles*, Pacific J. Math. **113** (1984), 289-302.
40. J. Goursaud et J. Valette, *Anneaux de Groupe Héréditaires et Semi-héréditaires*, Journal of Algebra **34** (1975), 205-212.
41. J. Goursaud et J. Pascaud, *Anneaux Semi-héréditaires*, C. R. Acad. Sc. Paris **284** (1977), 583-586.
42. M. Hall, *A type of algebraic closure*, Ann. of Math. **40** (1939), 360-369.
43. D. Handelman, *Homomorphisms of C^*-algebras to finite AW^*-algebras*, Michigan Math. Journal **28** (1981), 229-240.
44. D. Herbera and P. Menal, *On rings whose finitely generated faithful modules are generators*, Journal of Algebra **122** (1989), 425-438.
45. D. Herbera and P. Pillay, *Injective classical ring of quotients of the polynomial ring are quasi-Frobenius*, apareixerà a Journal of Pure and Appl. Algebra.
46. M. Ikeda, *A characterization of quasi-Frobenius rings* , Osaka Math. Journal **4** (1952), 203-209.
47. A. V. Jategaonkar, *A counter-example in Ring Theory and Homological Algebra*, Journal of Algebra **12** (1969), 418-440.
48. H. Kambara and S. Kobayashi, *On regular self-injective rings*, Osaka J. Math. **22** (1985), 71-79.
49. J. W. Kerr, *The polynomial ring over a Goldie ring need not be a Goldie ring*, Journal of Algebra **134** (1990), 344-352.
50. N. Kimura and Y.S. Sai, *On power cancellative archimedian semigrups*, Proc. Japan Acad. ser. A Math. Sci. **48** (1972), 553-554.
51. Y. Kitamura, *Inheritance of FPF rings*, Comm. in Algebra **19** (1991), 157-165.
52. S. Kobayashi, *On non-singular FPF-rings I*, Osaka J. Math. **22** (1985), 787-795.
53. T. H. Lenagan, *Bounded Hereditary Noetherian Prime Rings*, J. London Math. Soc.(2) **6** (1973), 241-246.
54. L. S. Levy, *Commutative rings whose homomorphic images are self-injective*, Pacific. J. Math. **18** (1966), 149-1563.
55. K. Louden, *Maximal quotient rings of ring extensions*, Pacific J. Math. **62** (1976), 489-496.
56. J. Marot, *Une generalization de la notion d'anneaux de valuation*, C. R. Acad. Sc. Paris **268** (1969), 1451-54.

57. J. C. McConnell and J. C. Robson, John Wiley and Sons (1987), "Noncommutative Noetherian rings,".
58. P. Menal, *Sobre anillos de polinomis que son anillos de Bezout*, Collectanea Mathematica **31** (1980), 230-241.
59. K. Morita, *Duality for modules and its applications to the theory of rings with minimum condition*, Sci. Rep. Tokyo Kyoku Daigaku **6** (1958), 451-469.
60. T. Nakayama, *On Frobeniusean algebrasI*, Ann. of Math. **40** (1939), 611-633.
61. T. Nakayama, *On Frobeniusean algebrasII*, Ann. of Math. **42** (1941), 1-21.
62. C. Nesbitt and R. Thrall, *Some ring theorems with applications to modular representations*, Ann. of Math. **47** (1946), 551-567.
63. B. Osofsky, *Erratum*, J. of Algebra **9** (1968), 120, p..
64. A. Page, *Actions de groupes*, Séminaire d'Algèbre Paul Dubreil, Proceedings, Paris 1977-78, Lect. Notes in Math. Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York (1979).
65. S. Page, *Azumaya Algebras and the Brauer group of FPF rings*, Comm. in Algebra **13** (1985), 329-336.
66. J. L. Pascaud and J. Valette, *Group actions on QF-rings*, Proc. Amer. Math. Soc. **76,1** (1979), 43-44.
67. D.S. Passman, Interscience, New York (1977), "The algebraic structure of group rings,".
68. R. S. Pierce, *Modules over commutative regular rings*, Memoirs of the American Math. Soc. **70** (1967).
69. P. Pillay, *Polynomial Rings over Non-commutative Rings*, Pub. Mat. UAB **2-3** (1984), 29-49.
70. L. H. Rowen, *On rings with central polynomials*, Journal of Algebra **31** (1974), 393-426.
71. Pure and Applied Mathematics vol. 127, Academic Press, London (1988), "Ring Theory, volume I,".
72. D. W. Sharpe and P. Vámos, Cambridge University Press (1972), "Injective Modules,".
73. R.C. Shock, *Polynomial Rings over Finite-dimensional Rings*, Pacific J. Math. **62** (1972), 251-257.
74. L. W. Small, *Orders in Artinian Rings, II*, Journal of Algebra **9** (1968), 266-273.
75. J. T. Stafford, *Stable structure of noncommutative noetherian rings*, J. Algebra **47** (1977), 244-267.
76. J. T. Stafford and R. B. Warfield Jr., *Constructions of hereditary noetherian rings and simple rings*, Proc. London Math. Soc. **(3)51** (1985), 1-20.
77. B. Stenstrom, Grund. der Math. Wiss. Vol 217, Springer-Verlag, New-York/ Berlin (1975), "Rings of Quotients,".
78. Y. Utumi, *Self-injective rings*, Journal of Algebra **6** (1967), 158-173.
79. O. Zariski and P. Samuel, Graduate texts in Math., no 28, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York (1958), "Commutative Algebra vol I,".