Localization: On Division Rings and Tilting Modules

Let G be a locally indicable group, k a division ring, and kG a crossed product group ring. In [Hug70], Ian Hughes proved that, up to kG-isomorphism, at most one division ring of fractions of kG satisfies a certain independence condition, now called Hughes freeness. This result was applied by others in work on division rings of fractions of group rings of free groups. The proof provided by Hughes is extremely condensed and difficult to follow. We introduce concepts that illuminate Hughes' arguments, and we simplify the proof of the theorem.

A group G is Hughes-free embeddable if for every division ring k, then every crossed product group ring kG has a Hughes-free division ring of fractions. With the tools developed to prove the foregoing result, we prove [Hug72], that is, the extension of Hughes-free embeddable groups is a Hughes-free embeddable group.

In [Lew74] and [LL78] it is proved that the universal division ring of fractions of a crossed product group ring of a a free group G over the division ring k is the division ring of fractions of kG inside any of its Mal'cev-Neumann series ring. A simpler proof of this fact was given by [Reu99] in a less general situation. We extend Reutenauer's proof to show the result by J. Lewin and T. Lewin in its full generality.

Let R be a ring with a division ring of fractions D. The inversion height of D is the number of nested inversions needed to express the elements of D from elements of R. Let X be a set of at least two elements and k a field. We show that the so-called JF-embeddings of the free algebra $k\langle X\rangle$ in division rings D have inversion height at most two, and give examples of inversion height one and two for any X and k. We use these embeddings to obtain embeddings of the free group algebra in a division ring of inversion height one and two.

It was conjectured in [Neu49] that if G is a free group on a set X of at least two elements and k is a field, then the embedding of the group ring $k[G]$ inside the Mal'cev-Neumann series ring is infinite. In [Reu96] this conjecture is proved for X an infinite set. We prove that this conjecture also holds for X a finite set of at least two elements by reducing the problem to the situation proved in [Reu96].

We show that if $f\colon R \to S$ is an injective ring epimorphism such that $\mathrm{Tor}_1^R(S,S) = 0$ and the projective dimension of S as a right R-module is lesser or equal than one, then the right R-module $S \oplus S/R$ is a tilting right R-module. We then study the case where f is a universal localization in the sense of [Sch85]. Using results from [CB91], we give applications to tame hereditary algebras and hereditary noetherian prime rings. In particular, we show that every tilting module over a Dedekind domain or over a classical maximal order arises in this way.

Localization: On Division Rings and Tilting Modules

Sea G un grupo localmente indicable, k un anillo de división, y kG un producto cruzado. En [Hug70], Ian Hughes probó que, salvo isomorfismo de kG-anillos, hay a lo sumo un anillo de división de fracciones de kG que satisface una cierta condición de independencia lineal ahora llamada Hughes-freeness. Este resultado fue aplicado por otros autores en su trabajo sobre anillos de división de fracciones de anillos de grupo de grupos libres. La prueba original de Hughes es extremadamente condensada y difícil de seguir. Introducimos conceptos que aclaran los argumentos de Hughes y simplificamos la prueba del teorema.

Un grupo G es Hughes-free embeddable si para cualquier anillo de división k, entonces cualquier producto cruzado kG tiene un anillo de división de fracciones Hughes-free. Con la teoría desarrollada para demostrar el resultado anterior probamos [Hug72], es decir, que la extensión de grupos Hughes-free embeddable es un grupo Hughes-free embeddable.

En [Lew74] y [LL78] se probó que el anillo universal de fracciones de un producto cruzado de un grupo libre G sobre un anillo de división k es el anillo de división de fracciones de kG en cualquiera de sus anillos de series de Mal'cev-Neumann. Una prueba más sencilla de este hecho en una situación menos general fue dada en [Reu99]. Extendemos la prueba de Reutenauer para mostrar el resultado de J. Lewin y T. Lewin en toda su generalidad.

Sea R un anillo con un anillo de división de fracciones D. La altura de inversión de D es el número de inversiones consecutivas necesario para expresar los elementos de D a partir de los elementos de R. Sea X un conjunto de al menos dos elementos y k un cuerpo. Mostramos que las JF-inclusiones del álgebra libre $k\langle X\rangle$ en anillos de división D tienen altura de inversión a lo sumo dos. Además damos ejemplos de altura de inversión una y dos para cualesquiera X y k. Usamos estas inclusiones para obtener inclusiones del álgebra de grupo en un anillo de división de alturas de división una y dos.

En [Neu49] se conjeturó que si G es el grupo libre sobre un conjunto X de al menos dos elementos y k es un cuerpo, entonces la inclusión del anillo de grupo $k[G]$ en su anillo de series de Mal'cev-Neumann es infinita. En [Reu96] esta conjetura fue probada cuando X es un conjunto infinito. Probamos que esta conjetura es también cierta cuando X es un conjunto finito de al menos dos elementos reduciendo el problema a la situación probada en [Reu96].

Probamos que si $f\colon R \to S$ es un epimorfismo de anillos inyectivo tal que $\operatorname{Tor}_1^R(S,S)=0$ y la dimensión proyectiva de S como R-módulo por la derecha es menor o igual que uno, entonces el R-módulo por la derecha $S \oplus S/R$ es un R-módulo tilting. Continuamos estudiando el caso en que f es una localizacin universal en el sentido de [Sch85]. Usando resultados de [CB91], damos aplicaciones de esto en los contextos de álgebras tame hereditarias y anillos primos noetherianos. En particular mostramos que todo módulo tilting sobre un dominio de Dedekind o sobre un orden maximal clásico se construye de esta forma.

References

[CB91] W. W. Crawley-Boevey, *Regular modules for tame hereditary algebras*, Proc. London Math. Soc. (3) **62** (1991), no. 3, 490–508.

[Hug70] Ian Hughes, *Division rings of fractions for group rings*, Comm. Pure Appl. Math. **23** (1970), 181–188.

[Hug72] ———, *Division rings of fractions for group rings. II*, Comm. Pure Appl. Math. **25** (1972), 127–131.

[Lew74] Jacques Lewin, *Fields of fractions for group algebras of free groups*, Trans. Amer. Math. Soc. **192** (1974), 339–346.

[LL78] Jacques Lewin and Tekla Lewin, *An embedding of the group algebra of a torsion-free one-relator group in a field*, J. Algebra **52** (1978), no. 1, 39–74.

[Neu49] B. H. Neumann, *On ordered division rings*, Trans. Amer. Math. Soc. **66** (1949), 202–252.

[Reu96] C. Reutenauer, *Inversion height in free fields*, Selecta Math. (N.S.) **2** (1996), no. 1, 93–109.

[Reu99] Christophe Reutenauer, *Malcev-Neumann series and the free field*, Exposition. Math. **17** (1999), no. 5, 469–478.

[Sch85] A. H. Schofield, *Representation of rings over skew fields*, London Mathematical Society Lecture Note Series, vol. 92, Cambridge University Press, Cambridge, 1985.