

ADVERTIMENT. La consulta d'aquesta tesi queda condicionada a l'acceptació de les següents condicions d'ús: La difusió d'aquesta tesi per mitjà del servei TDX (www.tesisenxarxa.net) ha estat autoritzada pels titulars dels drets de propietat intel·lectual únicament per a usos privats emmarcats en activitats d'investigació i docència. No s'autoritza la seva reproducció amb finalitats de lucre ni la seva difusió i posada a disposició des d'un lloc aliè al servei TDX. No s'autoritza la presentació del seu contingut en una finestra o marc aliè a TDX (framing). Aquesta reserva de drets afecta tant al resum de presentació de la tesi com als seus continguts. En la utilització o cita de parts de la tesi és obligat indicar el nom de la persona autora.

ADVERTENCIA. La consulta de esta tesis queda condicionada a la aceptación de las siguientes condiciones de uso: La difusión de esta tesis por medio del servicio TDR (www.tesisenred.net) ha sido autorizada por los titulares de los derechos de propiedad intelectual únicamente para usos privados enmarcados en actividades de investigación y docencia. No se autoriza su reproducción con finalidades de lucro ni su difusión y puesta a disposición desde un sitio ajeno al servicio TDR. No se autoriza la presentación de su contenido en una ventana o marco ajeno a TDR (framing). Esta reserva de derechos afecta tanto al resumen de presentación de la tesis como a sus contenidos. En la utilización o cita de partes de la tesis es obligado indicar el nombre de la persona autora.

WARNING. On having consulted this thesis you're accepting the following use conditions: Spreading this thesis by the TDX (www.tesisenxarxa.net) service has been authorized by the titular of the intellectual property rights only for private uses placed in investigation and teaching activities. Reproduction with lucrative aims is not authorized neither its spreading and availability from a site foreign to the TDX service. Introducing its content in a window or frame foreign to the TDX service is not authorized (framing). This rights affect to the presentation summary of the thesis as well as to its contents. In the using or citation of parts of the thesis it's obliged to indicate the name of the author

Propagació d'informació en grafs i digrafs que modelen xarxes d'interconnexió simètriques

Tesi Doctoral Presentada per
Margarida Mitjana i Riera

Director de la Tesi
Francesc de P. Comellas i Padró

Universitat
Politécnica
de
Catalunya

Departament
de Matemàtica
Aplicada I

Índex

Introducció	ii
1 Teoria de grafs	5
1.1 Definicions i propietats bàsiques	5
1.2 Els problemes (Δ, D) i (Δ, n)	7
1.3 Automorfismes de digrafs	8
1.4 Els digrafs de Cayley	8
1.5 Algunes famílies de digrafs	9
1.5.1 El cicle C_n i el torus $MT_{n,k}$	10
1.5.2 El digraf de de Bruijn $B(d, D)$	10
1.5.3 El digraf de Kautz $K(d, D)$	10
1.5.4 El graf n -estrella	11
1.5.5 L'hipercub	12
1.5.6 El digraf papallona	13
2 El digraf de prefix-cicle $\Gamma_\Delta(D)$	15
2.1 Definició. Propietats.	15
2.2 Cicles curts	18
2.3 La distància i el camí més curt a $\Gamma_\Delta(D)$	19
2.4 Vèrtexs a distància k	21
2.5 Els polinomis distància	25
2.6 Estructura jeràrquica	27
3 Cicles a $\Gamma_\Delta(D)$	31
3.1 El digraf $\Gamma_\Delta(D)$ és quasi pancíclic.	32
3.1.1 Cicles llargs	33
3.2 Descomposició en cicles disjunts	40
3.2.1 Descomposició en cicles curts.	40
3.2.2 Descomposició en cicles llargs.	43
3.3 Recobriment dels vèrtexs de $\Gamma_\Delta(D)$	49

4	Difusió en el dígraf de prefix-cicle	55
4.1	Els models de comunicació	55
4.2	La disseminació d'informació	56
4.3	La difusió	57
4.4	La difusió en el dígraf de prefix-cicle	59
4.5	La raó d'aproximació de l'algorisme de difusió	63
5	L'espectre del dígraf de prefix-cicle	65
5.1	Introducció	65
5.1.1	Definició i resultats coneguts	65
5.2	Equació matricial per a $\Gamma_{\Delta}(D)$	68
5.2.1	Cas $\Gamma_{\Delta}(3)$	69
5.2.2	Cas $\Gamma_{\Delta}(D)$	70
	Conclusions	74
	Apèndix A	78
	Apèndix B	91
	Llista de Figures	112
	Bibliografia	113
	Índex temàtic	118

Introducció

La rapidesa i la qualitat de la comunicació en sistemes distribuïts i paral·lels ha millorat significativament en els darrers anys gràcies a l'ús de noves tecnologies i de protocols de comunicació més eficients. Degut també a que la velocitat dels processadors i el volum de dades a tractar, ha crescut de forma notable, l'ús eficient d'aquestes xarxes de processadors depèn encara més de l'existència de bons algorismes de comunicació.

En la comunicació estructurada o col·lectiva, l'esquema de comunicació és donat d'entrada, i el problema consisteix en la distribució, acumulació o intercanvi de dades i la sincronització dels processos, de forma eficient, durant moments específics de l'execució del corresponent protocol. Un exemple n'és el *broadcasting* o difusió d'informació a partir d'un node origen a tots els altres nodes de la xarxa considerada. La topologia de la xarxa condiona en gran manera l'eficàcia del procés.

Si considerem connexions “punt a punt” entre els processadors, la xarxa es pot modelar amb un graf. Els processadors, o nodes, de la xarxa corresponen als vèrtexs del graf i les branques representen les connexions o enllaços. Per a xarxes unidireccionals i en el context de la teoria de grafs en què es desenvolupa aquesta tesi, parlarem de grafs dirigits o digrafs.

A més de l'existència d'esquemes de comunicació eficients, també hi ha altres característiques que determinen que un graf, o digraf, sigui un bon model de xarxa d'interconnexió. Per a assegurar l'adequabilitat de la xarxa i degut a restriccions tècniques, cada processador ha d'estar connectat a d'altres processadors (pocs) –grau–, però d'altra banda s'ha de garantir l'existència d'un camí que connecti qualssevol parell de processadors. És de desitjar que la distància entre dos processadors sigui el més petita possible –diàmetre– i que el nombre de processadors sigui gran –ordre–. Per tant, el graf ha de tenir un nombre elevat de vèrtexs. D'aquesta forma s'estableix una relació entre els paràmetres grau, diàmetre i ordre del graf.

Una altra característica a tenir en compte en un graf que modela una xarxa d'interconnexió, és la simetria perquè simplifica l'estudi de les propietats que té el graf. En particular, per exemple, si un graf és simètric, és

possible implantar el mateix esquema de comunicació a tots els nodes de la xarxa modelada pel graf.

L'objectiu d'aquesta tesi, és aprofundir en l'estudi d'una certa família de digrafs, els digraf de prefix-cicle, donant nous detalls sobre la seva estructura, noves maneres d'enfocar el seu estudi i dissenyant bons esquemes de comunicació. Es completa d'aquesta forma l'estudi iniciat per d'altres autors i se'n reforça el seu interès com a bon model de xarxa d'interconnexió.

Els conceptes principals de teoria de grafs que s'utilitzaran en aquesta memòria, es defineixen en el capítol 1.

El capítol 2 està dedicat bàsicament a la definició dels digrafs de prefix-cicle, així com a l'anàlisi d'algunes de les propietats que fan que aquesta família de digrafs mostri bones qualitats com a model de xarxa d'interconnexió. Algunes de les propietats que aquí s'obtenen seran essencials per a desenvolupar els procediments i la teoria que es presenten en els capítols posteriors.

Una qualitat interessant en una xarxa d'interconnexió és la possibilitat que té de ser descomposada en conjunts de nodes connectats de forma que sigui factible la distribució de tasques diferents dins de la mateixa xarxa. En termes del digraf associat, aquest problema es converteix en conèixer-ne l'existència de cicles en el digraf i en trobar una descomposició del digraf en cicles i camins vèrtex-disjunts.

El capítol 3, es refereix a la descomposició en cicles del digraf de prefix-cicle. En primer lloc es demostra que un resultat que era conegut per a d'altres famílies de digrafs com ara els de Kautz, també es verifica aquí: el digraf de prefix-cicle conté cicles de qualsevol longitud, excepte en el cas que la longitud sigui l'ordre del digraf menys u . És a dir, el digraf és quasi pancíclic.

En la segona part d'aquest capítol, es descomposa el digraf en cicles de la mateixa longitud o en conjunts de camins vèrtexs-disjunts però de longituds diferents. Alguns dels resultats del capítol van estar presentats a la 16 British Combinatorial Conference (Londres, 1997) i I Jornadas de Matemàtica Discreta y Algorítmica (Barcelona, 1998) i es poden trobar respectivament a [15], [16] i [14].

Una manera d'obtenir bons algorismes de comunicació en un graf del qual es volen mostrar els avantatges que té com a model de xarxa d'interconnexió, és conèixer i utilitzar els camins que existeixen entre parells de vèrtexs i al mateix temps tenir informació de l'existència o possible descomposició del digraf en camins disjunts. En aquest sentit el coneixement profund de l'estructura dels digraf de prefix-cicle obtingut en aquest capítol serà d'utilitat en el disseny d'un esquema de difusió.

En el capítol 4 es presenta un algorisme de comunicació, en concret un

algorisme de difusió per al dígraf de prefix-cicle. La fita superior per al temps de difusió millora alguns dels resultats coneguts per a grafs de de Bruijn i de Kautz i resulta ser òptima per a valors petits del grau. Els resultats d'aquest capítol es van presentar a 15 British Combinatorial Conference (Stirling, 1995) i foren publicats a [13].

El darrer capítol d'aquesta memòria es dedica a l'estudi matricial dels dígrafs de prefix-cicle. A partir de l'obtenció d'una certa equació matricial que compleix la matriu d'ajacència del dígraf, s'obtenen els valors propis del dígraf el nombre dels quals només depèn del diàmetre. D'aquesta forma es calcula l'espectre del dígraf sense treballar directament amb la matriu d'adjacència que és, en general, de dimensió elevada. Aquest resultat recent obre una nova línia en l'estudi dels dígrafs de prefix-cicle.

La part final de la memòria és fruit de la col·laboració amb Pierre Fraignaud i Johanne Cohen del LRI (Orsay, Paris) i amb Lali Barrière de la UPC. Els dos treballs resultants han estat presentats i publicats recentment a [3] i [23]. Tot i fer referència també a problemes de comunicació en grafs, per mantenir la unitat de la memòria en l'estudi dels dígrafs de prefix-cicle, s'inclouen al final en forma d'apèndixs.

Aquesta tesi ha estat realitzada dins les activitats del grup de recerca de Teoria de Grafs del Departament de Matemàtica Aplicada i Telemàtica de la UPC i ha comptat amb el suport de diferents projectes, beques i ajuts per part de la Unió Europea, CICYT, el Comissionat per a Universitats i Recerca i la UPC, que m'han permès fer diverses estades de recerca i assistir a reunions i congressos on els contactes i les discussions de treball amb tantes persones ha contribuït a l'avenc en aquest estudi.

Voldria acabar aquesta introducció expressant el meu reconeixement i gratitud, al director d'aquesta tesi Francesc Comellas. Sobre tot per la seva capacitat d'engrescar-se, i encomanar-me l'interès en una gran varietat de temes, en especial els que han estat els fonaments d'aquest treball. Les suggerències i intuïcions del Francesc han originat bona part d'aquesta memòria.

Als meus companys del Departament de Matemàtica Aplicada I, secció EUPB, els agraeixo els seu suport i col·laboració sincera.

També vull fer esment del suport que he tingut de les persones del grup de Teoria de Grafs, i de com és d'important l'existència del Seminari "Teoria de Grafs i Aplicacions", sobretot per als qui, com jo, venim d'altres departaments.

Margarida Mitjana i Riera
desembre de 1998

Capítol 1

Teoria de grafs

En aquest capítol es defineixen la majoria dels conceptes de la teoria de grafs que es faran servir en els capítols posteriors. Les definicions i d'altres resultats que aquí no s'han inclòs es poden trobar a [10] i a [28].

1.1 Definicions i propietats bàsiques

Un *graf* G , és un parell $G = (V, E)$, on $V = V(G)$ és un conjunt finit i $E = E(G)$ és un conjunt de parelles d'elements de V . Els elements de V s'anomenen *vèrtexs* i els elements d' E *branques* o *arestes*.

Anàlogament, un *graf dirigit* o *graf orientat* o *digraf* $\Gamma = (V, A)$ està format per un conjunt finit V de vèrtexs i un conjunt $A \subset V \times V$ de parelles ordenats de vèrtexs anomenats *arcs*. El vèrtexs d'un graf o d'un digraf, es representen per punts i les branques o els arcs, per línies que uneixen els vèrtexs que les formen. Si el graf és dirigit, s'ha d'indicar la direcció dels arcs.

Si \mathbf{x} i \mathbf{y} són dos vèrtexs d'un digraf Γ considerarem que només hi pot haver un arc (\mathbf{x}, \mathbf{y}) del vèrtex \mathbf{x} al \mathbf{y} . Un arc que uneix un vèrtex amb ell mateix és un *llaç*. I el conjunt format per dos arcs de la forma (\mathbf{x}, \mathbf{y}) i (\mathbf{y}, \mathbf{x}) és un *digon*. En cas de permetre arcs múltiples llavors es parla d'un *multidigraf*.

En aquest treball considerarem principalment digrafs simples, és a dir, sense llaços ni arcs múltiples. Les definicions que hi ha a continuació, es donen per a grafs orientats, malgrat que la majoria són vàlides també per a grafs.

Ordre i grau

L'*ordre* d'un digraf $\Gamma = (V, A)$ és el nombre de vèrtexs, $|V|$, i el nombre d'arcs, $|A|$, la seva *mida*. Si \mathbf{x} i \mathbf{y} són vèrtexs d'un digraf Γ i $e = (\mathbf{x}, \mathbf{y})$ és un arc, direm que \mathbf{x} és *adjacent cap a* \mathbf{y} i que \mathbf{y} és *adjacent des de* \mathbf{x} .

El conjunt de vèrtexs que són adjacents cap a \mathbf{x} , el denotarem per $\Gamma^-(\mathbf{x})$ i els seu cardinal és el grau d'entrada $d^-(\mathbf{x}) = |\Gamma^-(\mathbf{x})|$. Anàlogament $\Gamma^+(\mathbf{x})$ representa el conjunt de vèrtexs adjacents des de \mathbf{x} i $d^+(\mathbf{x}) = |\Gamma^+(\mathbf{x})|$ és el seu grau de sortida. El *grau màxim de sortida*, Δ^+ , d'un digraf Γ , és el màxim dels graus de sortida de tots els vèrtexs de Γ , anàlogament es defineixen el *grau màxim d'entrada*, Δ^- , el *grau mínim de sortida*, δ^+ , i el *grau mínim d'entrada*, δ^- .

Un digraf Γ , és Δ -regular si per a tot vèrtex $\mathbf{x} \in V(\Gamma)$, es compleix que

$$d^+(\mathbf{x}) = d^-(\mathbf{x}) = \Delta$$

Camins, recorreguts i cicles

Considerem dos vèrtexs \mathbf{x} i \mathbf{y} d'un digraf Γ . Un *recorregut* de longitud m de \mathbf{x} a \mathbf{y} és una successió

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_m = \mathbf{y}$$

de vèrtexs de Γ tal que $(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_{i+1})$ és un arc de Γ .

Un recorregut en el qual $\mathbf{x}_i \neq \mathbf{x}_j$ per a tot $i \neq j$ s'anomena *camí*. Un *cicle* és un recorregut que té tots els vèrtexs diferents, excepte el primer i l'últim que coincideixen. Es defineix la *longitud* m d'un recorregut, camí o cicle, com el nombre d'arcs que el componen. Per exemple, un dígon és un cicle de longitud 2.

Dos camins són *vèrtex-disjunts* si no tenen cap vèrtex en comú, i es diu que són *arc-disjunts* si no tenen cap arc en comú. És clar que si dos camins són vèrtexs-disjunts també són arc-disjunts.

Un digraf Γ és *k-assolible*, si per a qualssevol parell de vèrtexs $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in G$ existeix un recorregut de longitud exactament igual a k .

Diem que el digraf Γ és *fortament connex*, si per a cada parell \mathbf{x} i \mathbf{y} de vèrtexs de Γ , existeix un camí de \mathbf{x} a \mathbf{y} .

Digrafes eulerians i hamiltonians

Un digraf Γ diem que és *eulerià* si existeix un recorregut tancat que passa per tots els arcs de Γ exactament una vegada. A un recorregut que compleixi aquestes condicions se'n diu un *recorregut eulerià*. És un resultat clàssic de

teoria de grafs la caracterització dels digrafs eulerians: El digraf Γ és eulerià, si i només si per a cada vèrtex, el grau d'entrada coincideix amb el de sortida.

Un digraf Γ diem que és *hamiltonià* si existeix un camí tancat que passa per tots els vèrtexs de Γ una única vegada. A un camí que compleixi aquestes condicions se'n diu un *cicle hamiltonià*.

Distància i diàmetre

La *distància* entre els vèrtexs \mathbf{x} i \mathbf{y} d'un digraf Γ és la longitud del més curt de tots els possibles camins de \mathbf{x} a \mathbf{y} . El *diàmetre* $D(\Gamma)$ d'un digraf Γ és la màxima de les distàncies entre dos vèrtexs qualssevol del digraf

$$D(\Gamma) = \max_{\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \Gamma} d(\mathbf{x}, \mathbf{y})$$

1.2 Els problemes (Δ, D) i (Δ, n)

El problema (Δ, D) consisteix en optimitzar l'ordre del digraf per a un grau i diàmetre donats, mentre que el problema (Δ, n) consisteix en optimitzar el diàmetre, fixats el grau i l'ordre. Tots dos problemes han estat tractats abastament tant per grafs com per digrafs, vegeu per exemple els treballs de Bermond et al., i Fiol et al. a [4] i [22].

El problema (Δ, D) per a digrafs, consisteix en trobar digrafs amb grau màxim de sortida Δ i diàmetre D fixats, de forma que el nombre de vèrtexs sigui el més gran possible. Es defineix un digraf (Δ, D) com el digraf que té grau màxim de sortida Δ , diàmetre D i nombre de vèrtexs màxim.

L'ordre, n , d'un digraf (Δ, D) és menor o igual a la suma de vèrtexs que estan a distància $1, 2, \dots, D$:

$$n \leq 1 + \Delta + \dots + \Delta^D = M(\Delta, D) = \begin{cases} D + 1 & \text{si } \Delta = 1 \\ (\Delta^{D+1} - 1)/(\Delta - 1) & \text{si } \Delta > 1 \end{cases} \quad (1.1)$$

Des de qualsevol vèrtex d'un digraf (Δ, D) es pot arribar, com a molt, a Δ^m vèrtexs amb m passes. Per tant el nombre màxim de vèrtexs als quals es pot arribar amb un camí de llargada D és

$$\sum_{m=0}^D \Delta^m = M(\Delta, D)$$

El valor $M(\Delta, D)$ es coneix amb el nom de *fita de Moore*. En conseqüència un digraf (Δ, D) tindrà ordre menor o igual que la fita de Moore. A un digraf

amb ordre $M(\Delta, D)$ se'n diu *digraf de Moore*. Aquesta fita només s'assoleix en els casos trivials $\Delta = 1$, que correspon al cicle d'ordre $D + 1$, i $D = 1$ el digraf complet $K_{\Delta+1}$. El problema de trobar digrafs (Δ, D) consisteix en trobar digrafs l'ordre dels quals sigui el més proper possible a la fita de Moore.

1.3 Automorfismes de digrafs

Donats dos digrafs $\Gamma = (V, E)$ i $\Gamma' = (V', E')$, una aplicació $f: V \rightarrow V'$ és un *morfisme de digrafs* si conserva les adjacències, és a dir

$$(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in E \implies (f(\mathbf{x}), f(\mathbf{y})) \in E'$$

Un *automorfisme* del digraf Γ és una aplicació $f: V \rightarrow V$ tal que (\mathbf{x}, \mathbf{y}) és un arc de Γ , si i només si $(f(\mathbf{x}), f(\mathbf{y}))$ és un arc de Γ .

El conjunt d'automorfismes d'un digraf Γ d'ordre n amb la composició és un grup que és isomorf a un subgrup del grup simètric de grau n , \mathcal{S}_n , i s'escriu $Aut(\Gamma)$. Per exemple, és fàcil provar que, per al graf complet, $Aut(K_n) \simeq \mathcal{S}_n$.

Es diu que $Aut(\Gamma)$ *actua transitivament* sobre $V(\Gamma)$ si per a cada parell de vèrtexs $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V(\Gamma)$, existeix $f \in Aut(\Gamma)$ tal que $f(\mathbf{x}) = \mathbf{y}$.

Un digraf $\Gamma = (V, E)$ és *arc transitiu*, o *vèrtex simètric* com es defineix a [9], si el seu grup d'automorfismes, $Aut(\Gamma)$, actua transitivament sobre el conjunt dels arcs, és a dir, si \mathbf{x} és adjacent cap a \mathbf{y} i \mathbf{u} és adjacent cap a \mathbf{v} , existeix un automorfisme $g \in Aut(\Gamma)$ tal que $g(\mathbf{x}) = \mathbf{u}$ i $g(\mathbf{y}) = \mathbf{v}$.

Un digraf $\Gamma = (V, E)$ és *vèrtex transitiu* si el seu grup d'automorfismes, $Aut(\Gamma)$, actua transitivament sobre el conjunt dels vèrtexs $Aut(\Gamma)$. Des d'un punt de vista menys formal, aquest fet es pot interpretar com que el digraf es veu de la mateixa manera independentment del vèrtex des del qual es miri.

De les definicions es conclou que tot digraf vèrtex simètric és vèrtex-transitiu.

1.4 Els digrafs de Cayley

Donat un grup finit G i un subconjunt S de G de cardinal d , el *digraf de Cayley*, que s'escriu $\mathcal{Cay}(G, S)$, té per vèrtexs els elements de G i (\mathbf{x}, \mathbf{y}) és un arc si i només si existeix $s \in S$ tal que $\mathbf{y} = s\mathbf{x}$. És clar que $\mathcal{Cay}(G, S)$ és d -regular i si $e \notin S$ és un digraf sense llaços, on e és la unitat del grup G . El digraf $\mathcal{Cay}(G, S)$ és fortament connex si S és un subconjunt generador de G .

Donat un grup finit G i un subgrup H de G , les *classes laterals per l'esquerra* de H en G són els subconjunts de la forma gH definits per

$$gH = \{gh : h \in H\}$$

S'escriu $(G/H)_l$ el conjunt de les classes laterals per l'esquerra de H en G .

El *digraf quocient per l'esquerra del digraf de Cayley* (Cayley coset digraph) de G respecte el subgrup H i un subconjunt de generadors $S \subseteq G \setminus H$, que s'escriu $\Gamma = \text{Cay}(G, H, S)$, és el digraf que té per conjunt de vèrtexs $(G/H)_l$, les classes laterals per l'esquerra de G mòdul H i (g_1H, g_2H) és un arc si i només si, existeix $s \in S$ tal que $g_1hs = g_2h'$ amb $h, h' \in H$. Aquest digraf es pot pensar que s'obté a partir d'un digraf de Cayley identificant els vèrtexs d'una mateixa classe lateral i eliminant els arcs múltiples. Γ és un digraf de Cayley si i només si $H = \{e\}$, on $\{e\}$ és la unitat del grup G .

De forma equivalent, es poden definir els digraf quocient de classes laterals per la dreta o *digraf quocient de Schreier* però en contra del que passa pels digrafs quocient del digraf de Cayley, els digraf quocient de Schreier poden no ser vèrtex transitius.

Els digrafs quocient per l'esquerra del digraf de Cayley són $|S|$ -regulars, connexos i vèrtexs simètrics. És més, el teorema de representació de Sabidussi a [39], assegura que un (di)graf és vèrtex transitiu si i només si és un (di)graf quocient d'un (di)graf de Cayley. En el següent paràgraf es descriu breument la demostració.

Considerem Γ un digraf vèrtex transitiu i $\gamma \in V(\Gamma)$, G el grup d'automorfismes de Γ , H el subgrup de G estabilitzador de γ (automorfismes de Γ que deixen γ fix), i D el conjunt d'automorfismes de Γ que envien γ en un dels seus vèrtexs adjacents. Llavors Γ i $\text{Cay}(G, H, D)$ són digrafs isomorfs. Per a demostrar-ho cal considerar l'isomorfisme que a cada vèrtex $\mathbf{x} \in \Gamma$ li fa correspondre $\{g \in G \mid g(\gamma) = \mathbf{x}\}$ que és una classe lateral per l'esquerra mòdul H .

Hi ha molta més informació sobre grafs i digrafs de Cayley al llibre [27] i en especial al capítol *Cayley graphs and interconnection networks* escrit per M.C. Heydemann.

1.5 Algunes famílies de digrafs

En aquesta secció es defineixen i dibuixen alguns dels digrafs que es faran servir en aquest treball.

1.5.1 El cicle C_n i el torus $MT_{n,k}$

El cicle C_n , és un graf de Cayley, amb n vèrtexs grau 2 i diàmetre $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$. El torus multidimensional $MT_{n,k}$, és el producte cartesià de n cicles de longitud k , $MT_{n,k}$ té k^n vèrtexs i grau $2n$. El seu diàmetre és $n \lfloor \frac{k}{2} \rfloor$

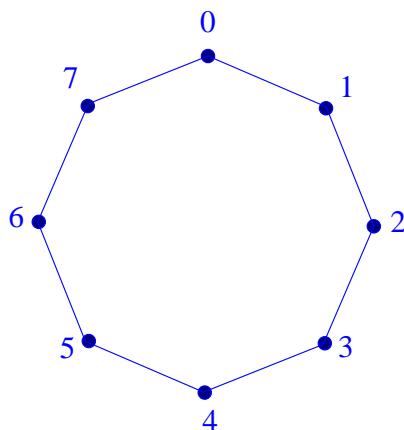


Figura 1.1: El cicle C_8

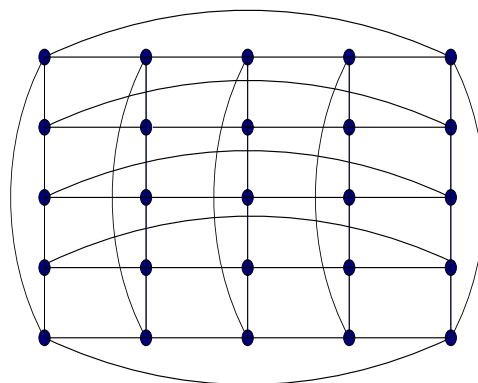


Figura 1.2: El torus $MT_{2,5}$

En l'estudi de (di)grafs que puguin modelar xarxes d'interconnexió, són d'interès els digrfs de de Bruijn i Kautz perquè són regulars, amb grau d petit, i diàmetre que és de l'ordre de $\log_d N$, on N és l'ordre del digraf. Tots dos digrfs poden definir-se de diverses maneres, però admenten una definició a partir d'un alfabet que és la que s'utilitzarà.

1.5.2 El digraf de de Bruijn $B(d, D)$

El digraf de de Bruijn, $B(d, D)$, $d \geq 2$, és d -regular, té diàmetre D i ordre d^D . Els vèrtexs de $B(d, D)$, són les seqüències de llargada D , sobre un alfabet de d símbols. Així un vèrtex és de la forma $\mathbf{x} = x_1x_2 \dots x_D$ amb $x_i \in \{0, 1, \dots, d-1\}$ per a cada $i = 1 \dots D$. Els vèrtexs adjacents des de \mathbf{x} són de la forma $x_1x_2 \dots x_D\lambda$ amb $\lambda \in \{0, 1, \dots, d-1\}$. El grau, tant d'entrada com de sortida, de $B(d, D)$ és d i l'ordre és $N = d^D$. Notem que aquest digraf té exactament d llaços. Tants com vèrtexs de la forma $aa \dots a$ on a és qualsevol lletra de l'alfabet.

1.5.3 El digraf de Kautz $K(d, D)$

El digraf de Kautz, $K(d, D)$, és el graf orientat que té per vèrtexs les seqüències de llargada D , sobre un alfabet de $d+1$ símbols amb la condició

que dues lletres consecutives han de ser diferents. Un vèrtex és de la forma $\mathbf{x} = x_1x_2\dots x_D$ amb $x_i \neq x_{i+1}$ per a cada $i = 1 \dots D - 1$. Els arcs es defineixen igual que pel digraf de de Bruijn: el vèrtex $\mathbf{x} = x_1x_2\dots x_D$ és adjacent cap a $x_2\dots x_D\lambda$, on λ és qualsevol símbol de l'alfabet diferent de x_D . El grau del digraf de Kautz $K(d, D)$, és igual a d i el nombre de vèrtexs és $N = d^D + d^{D-1}$. El diàmetre, com en el cas del digraf de de Bruijn és D . En el cas que el diàmetre sigui 2, el digraf de Kautz és vèrtex simètric.

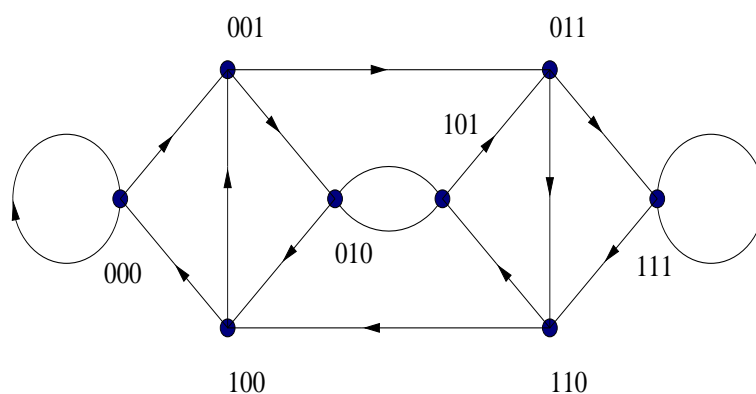
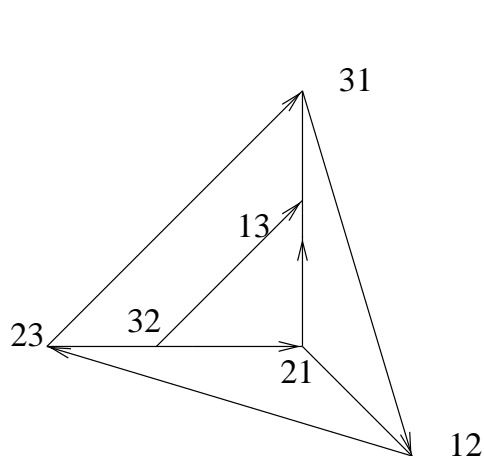
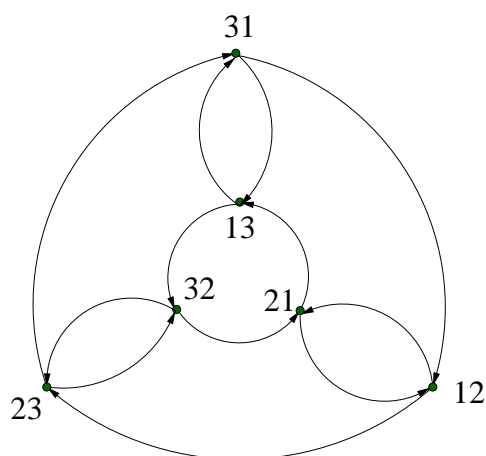


Figura 1.3: El digraf de de Bruijn B(2,3)

Figura 1.4: El digraf $K(2,2)$ Figura 1.5: Un altre $K(2,2)$

1.5.4 El graf n -estrella

És un graf de Cayley que va ser proposat per Akers i Krishnamurthy a [1] per a modelar xarxes d'interconnexió degut a les propietats que té. Cada vèrtex de S_n s'etiqueta amb una permutació de n -símbols diferents, per tant hi ha $n!$ vèrtexs i les adjacències s'estableixen entre dos vèrtexs que tenen

els símbols primer i i -èsim permutats. Per tant el grau és $n - 1$. En la Figura 1.6 hi ha una representació de S_4 .

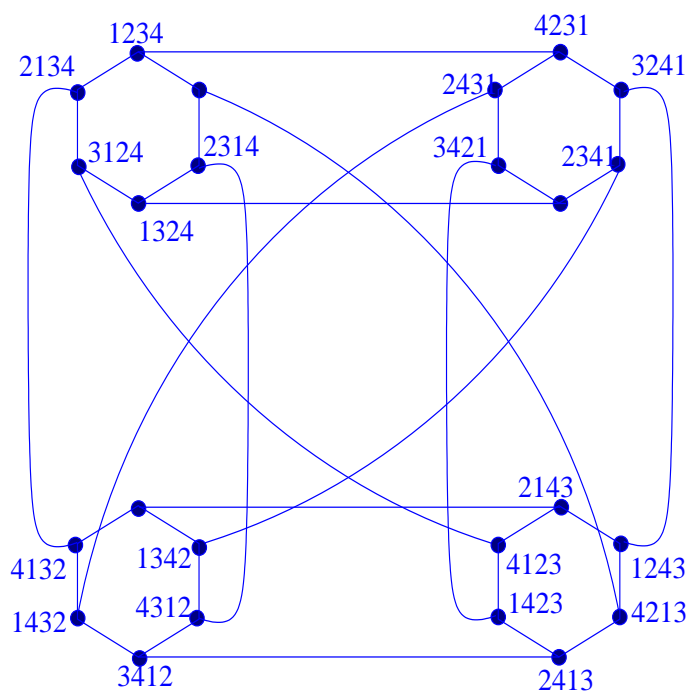
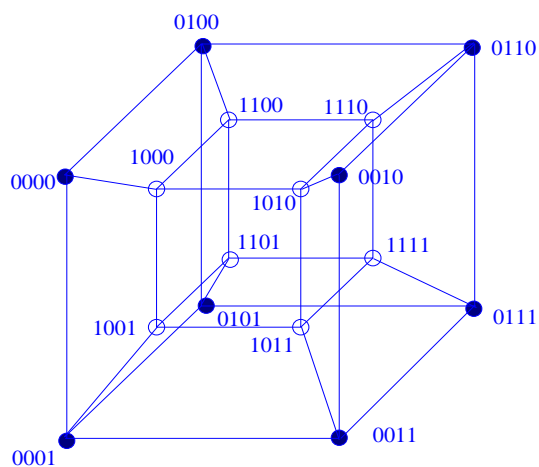


Figura 1.6: El digraf 4-estrella S_4

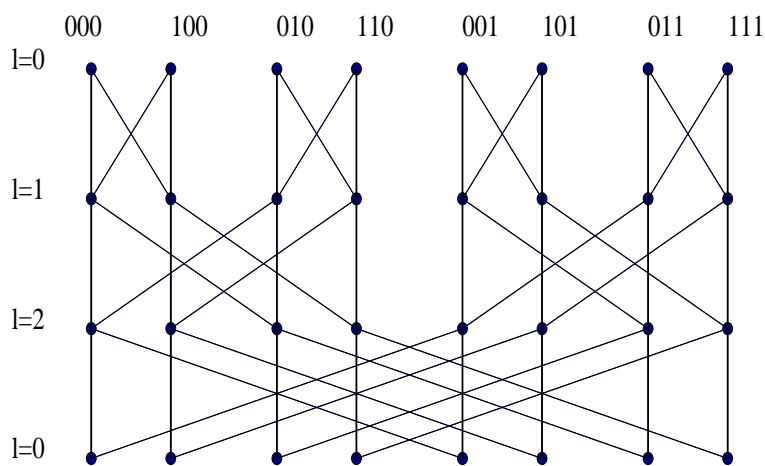
1.5.5 L'hipercub

L'hipercub de dimensió n , $H(n)$, és el graf amb conjunt de vèrtexs $V(H(n)) = \{x_1x_2 \dots x_n \mid x_i \in \{0, 1\}\}$ i dos vèrtexs $\mathbf{x} = x_1x_2 \dots x_n$ i $\mathbf{y} = y_1y_2 \dots y_n$ són adjacents si els símbols x_i i y_i coincideixen sempre, excepte en un cas. L'hipercub $H(n)$ és un graf de Cayley del grup de permutacions amb generadors les transposicions $(2i - 1, 2i)$, $1 \leq i \leq n$ definides sobre $X = \{1, \dots, 2n\}$. Per tant cada vèrtex $x_1 \dots x_n$ amb $x_i \in \{0, 1\}$ es pot expressar com la permutació $(a_1, a_2, \dots, a_{2n})$, on $(a_{2i-1}, a_{2i}) = (2i-1, 2i)$ si $x_i = 0$ i $(a_{2i-1}, a_{2i}) = (2i, 2i-1)$ si $x_i = 1$. L'ordre del graf $H(n)$ és 2^n i el seu diàmetre és n . El graf és regular de grau n .

Figura 1.7: L'hipercub $H(4)$

1.5.6 El digraf papallona

El digraf *papallona* $WDB(d, n)$ (Wrapped Directed Butterfly) és d -regular, amb diàmetre $2n - 1$. El seu conjunt de vèrtexs està format pels parells (x, l) , on $x \in \mathbb{Z}_d^n$ i $0 \leq l < n$. El vèrtex $(x_0 x_1 \dots x_{n-1}, l)$ és adjacent cap als vèrtexs de la forma $(x_0 \dots x_{l-1} \alpha x_{l+1} \dots x_{n-1}, l + 1 \pmod n)$ amb $\alpha \in \mathbb{Z}_d$.

Figura 1.8: El digraf papallona $WBD(2,3)$

Capítol 2

El dígraf de prefix–cicle $\Gamma_{\Delta}(D)$

En la cerca de grafs dirigits grans per a un grau i diàmetre fixos, el teorema de Sabidussi [39], que ha estat enunciat al capítol 1, proporciona un instrument adequat per al tractament d'aquest problema, en el cas de dígrafs que siguin vèrtexs simètrics.

És fent servir aquest resultat que Faber i Moore a [19] van definir els dígrafs de prefix–cicle com a classes laterals del dígraf quocient per l'esquerra d'un dígraf de Cayley. Però quasi al mateix temps Comellas i Fiol a [12] i, tal com Faber, Moore i Chen van publicar a [20], van trobar que els dígrafs de prefix–cicle admeten una formulació com a grafs sobre un alfabet, simil·larment en els casos de grafs i dígrafs més estudiats, per exemple l'hipercub $H(n)$, o els dígrafs de de Bruijn o de Kautz. Aquesta forma de descriure els dígrafs afavoreix bàsicament la notació i també, l'estudi de propietats.

A continuació es donen les dues possibles definicions per als dígrafs de prefix–cicle.

2.1 Definició. Propietats.

En primer lloc es defineix el dígraf de prefix–cicle que escriurem $\Gamma_{\Delta}(D)$, com a classes laterals per l'esquerra de dígrafs de Cayley.

Definició 1 *El dígraf de prefix–cicle, que s'escriu $\Gamma_{\Delta}(D)$, és el dígraf de classes laterals per l'esquerra del grup $\mathcal{S}_{\Delta+1}$ respecte el subgrup $\mathcal{F}_{\mathcal{D}}$ i un subconjunt de generadors C*

$$\Gamma_{\Delta}(D) = \text{Cay}(\mathcal{S}_{\Delta+1}, \mathcal{F}_{\mathcal{D}}, C)$$

on

$\mathcal{S}_{\Delta+1}$ és el grup simètric de $\Delta + 1$ elements.

\mathcal{F}_D , amb $2 \leq D \leq \Delta$, és el subgrup que consta de les permutacions de $\mathcal{S}_{\Delta+1}$ que deixen fix els últims D elements, és a dir $\pi(i) = i$ per a $\Delta + 1 - D \leq i \leq \Delta + 1$. Clarament \mathcal{F}_D és isomorf al grup simètric $\mathcal{S}_{\Delta+1-D}$.

Finalment, si considerem c_k la permutació cíclica de $\mathcal{S}_{\Delta+1}$,

$$c_k = (\Delta + 1 - k \quad \Delta + 1 - (k - 1) \cdots \quad \Delta + 1)$$

i $C = \{c_1, \dots, c_\Delta\}$, llavors C és un sistema de generadors.

De la definició es conclou que ha de ser $\Delta \geq D$ i aplicant el teorema de Sabidussi, s'obté que el digraf de prefix-cicle és **connex**, **sense llaços**, **vèrtex simètric** i $|C|$ -**regular**, per tant el digraf té **grau** Δ . El nombre de classes laterals per l'esquerra és

$$N = \frac{(\Delta + 1)!}{(\Delta + 1 - D)!} = (\Delta + 1)_D$$

que és l'**ordre** del digraf.

El graf dirigit $\Gamma_\Delta(D)$ ($\Delta \geq D$) o digraf de prefix-cicle, $\Gamma_\Delta(D)$, es pot definir també com a un digraf sobre un alfabet.

Definició 2 Donat l'alfabet $S = \{1, 2, \dots, \Delta + 1\}$, el digraf de prefix-cicle té per vèrtexs les seqüències o paraules de la forma $x_1 x_2 \dots x_D$ on cada x_i és un element de l'alfabet S , i x_1, x_2, \dots, x_D són símbols diferents. Les adjacències es defineixen de la forma següent,

$$x_1 x_2 \cdots x_D \rightarrow \begin{cases} x_2 x_3 x_4 \cdots x_D x_{D+1}, & x_{D+1} \neq x_1, x_2, \dots, x_D & (s) \\ x_2 x_3 x_4 \cdots x_D x_1, & & (r_1) \\ x_1 x_2 \cdots x_{k-1} x_{k+1} \cdots x_D x_k, & 2 \leq k \leq D - 1 & (r_k) \end{cases}$$

Al primer tipus d'adjacència que consisteix en suprimir el primer símbol, x_1 , de la paraula i afegir-ne un de nou, x_{D+1} , en la darrera posició, se'n diu *shift* (s). Les adjacències de tipus *rotació* r_k s'obtenen en fer saltar el símbol en la posició k , x_k , a l'última posició de la paraula, amb $k = 1, 2, \dots, D - 1$.

Les adjacències són permutacions cícliques, i shifts, de sufixos de la paraula i el prefix és fix. És per això que diem que són digrafs de prefix-cicle.

La definició dels digrafs de prefix-cicle com a digraf sobre un alfabet és la que es farà servir en aquest treball.

Com a conseqüència d'aquesta definició s'obté que D , el nombre de símbols que formen la seqüència de cada vèrtex, ha de ser menor o igual que Δ .

L'ordre de $\Gamma_\Delta(D)$, $\Delta \geq D$ és el nombre de D -permutacions sobre $[\Delta + 1]$ que és $(\Delta + 1)_D = (\Delta + 1)\Delta \dots (\Delta - D + 2)$.

D'acord amb la definició, s'obtenen les propietats del dígraf que s'han enunciat anteriorment. El **diàmetre** del dígraf de prefix-cicle $\Gamma_\Delta(D)$ és D perquè com a molt calen D passos per a obtenir $\mathbf{y} = y_1 \dots y_D$ a partir de $\mathbf{x} = x_1 \dots x_D$.

Els dígrafs $\Gamma_\Delta(D)$, $\Delta \geq D$ i algunes famílies de dígrafs amb ells relacionades, omplen una part important de la taula (Δ, D) per a dígrafs vèrtexs simètrics, és a dir, els dígrafs d'ordre més gran per a un grau, Δ i diàmetre, D , fixats¹.

És també a partir de la definició que es comprova que en el cas de diàmetre 2, el dígraf de prefix-cicle coincideix amb el dígraf de Kautz. Per tant, els gràfics de Figura 1.4 i Figura 1.5 són representacions del dígraf de prefix-cicle de diàmetre 2.

A continuació s'enuncien algunes propietats dels dígrafs de prefix-cicle obtingudes pels autors que es citen.

En el treball citat anteriorment de Comellas i Fiol, [12], es prova que dígraf de prefix-cicle és D -assolible, i per tant entre dos vèrtexs qualssevol sempre existeix un recorregut de longitud D . La connectivitat dels dígrafs de prefix-cicle és Δ , segons que estableix Knill a [35]. Així segons el teorema de Menger, hi ha Δ camins vèrtexs-disjunts entre dos vèrtexs qualssevol \mathbf{x} i $\mathbf{y} \in \Gamma_\Delta(D)$. A [11], Chen et al. donen una construcció explícita dels esmentats camins i demostren que llur longitud és, com a molt, $D+2$. Aquest paràmetre es coneix amb el nom de *diàmetre estès* o "*wide diameter*" i és un mesura de la fiabilitat que té una xarxa modelada en aquest cas pel dígraf de prefix-cicle.

El dígraf $\Gamma_3(3)$ és representat a la Figura 2.1. Els arcs corresponents a adjacències de tipus shift, no s'han dibuixat per a obtenir un representació més clara.

¹Una taula del més grans dígrafs vèrtexs simètrics actualitzada permanentment es pot trobar a

http://www.mat.upc.es/grup_de_grafs/table_vsd.html

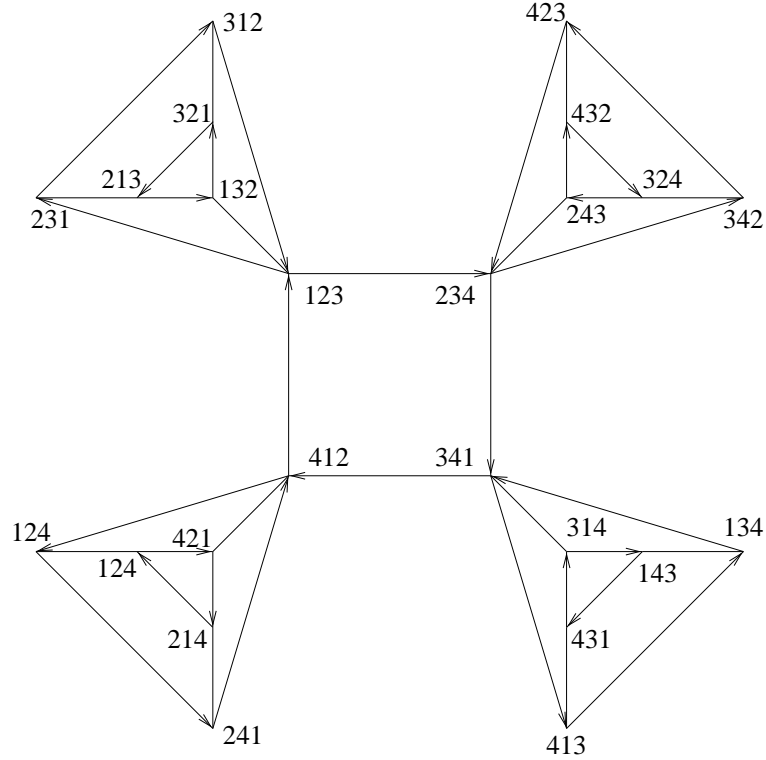


Figura 2.1: El digraf de prefix-cicle $\Gamma_3(3)$ sense les adjacències de tipus shift

2.2 Cicles curts

Cada vèrtex \mathbf{x} de $\Gamma_\Delta(D)$, $\Delta \geq D$, pertany a un cicle C_k , de longitud k , amb $2 \leq k \leq D + 1$. A més els cicles C_k són vèrtexs disjunts, excepte per \mathbf{x} .

Teorema 1 Considerem $\Gamma_\Delta(D)$, $\Delta \geq D$ el digraf de prefix-cicle de grau Δ i diàmetre D , i $\mathbf{x} = x_1 \dots x_D$ un vèrtex a $\Gamma_\Delta(D)$. Llavors \mathbf{x} pertany a una família de cicles $C_k(\mathbf{x})$ on k és la longitud del cicle, $2 \leq k \leq D + 1$, i

$$\bigcap_{k=2}^{D+1} C_k(\mathbf{x}) = \{\mathbf{x}\}.$$

Demostració. Els cicles $C_k(\mathbf{x})$, per a $2 \leq k \leq D$, s'obtenen aplicant k vegades l'adjacència de tipus rotació $r_{D-(k-1)}$ d'acord amb la definició donada a la secció 2.1, s'obté:

$$C_k(\mathbf{x}) :$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{x} = & x_1x_2 \dots x_D \rightarrow x_1 \dots x_{D-k} \mid x_{D-(k-2)} \dots x_D x_{D-(k-1)} \\
& \rightarrow x_1 \dots x_{D-k} \mid x_{D-(k-3)} \dots x_D x_{D-(k-1)} x_{D-(k-2)} \rightarrow \dots \\
& \rightarrow x_1 \dots x_{D-k} \mid x_D x_{D-(k-1)} \dots x_{D-1} \rightarrow \\
& \rightarrow x_1 \dots x_{D-k} \mid x_{D-(k-1)} \dots x_D = \mathbf{x}
\end{aligned}$$

cada cicle té longitud exactament k , $2 \leq k \leq D$. Els vèrtexs a $C_k(\mathbf{x})$ s'obtenen rotant el símbol en la posició $D - (k - 1)$ al final de la paraula, és a dir, aplicant k vegades la rotació $r_{D-(k-1)}$. Per tant, tots els vèrtexs de $C_k(\mathbf{x})$ tenen en comú els primers $D - k$ símbols. Això fa que els cicles de diferent longitud només poden tenir en comú el vèrtex \mathbf{x} .

Els cicles de longitud $D + 1$, $C_{D+1}(\mathbf{x})$ s'obtenen aplicant $D + 1$ vegades adjacències de tipus *shift* de forma que primer s'introdueix un nou símbol, y , i després es van afegint x_1, x_2, \dots, x_D per retrobar \mathbf{x} després de $D + 1$ passos.

$$\begin{aligned}
C_{D+1}(\mathbf{x}) : \mathbf{x} = & x_1x_2 \dots x_D \rightarrow x_2 \dots x_D y \rightarrow \\
& \rightarrow x_3 \dots x_D y x_1 \rightarrow \dots \rightarrow y x_1 \dots x_{D-1} \rightarrow x_1 \dots x_D = \mathbf{x}
\end{aligned} \quad (2.1)$$

on $y \in \{1, 2, \dots, \Delta + 1\}$ i $y \neq x_1, x_2, \dots, x_D$.

Els cicles de longitud $D + 1$ obtinguts d'aquesta forma en direm *cicles shift*. Notem que per a cada \mathbf{x} , existeixen $\Delta + 1 - D$ cicles shift diferents, tants com símbols no iguals a x_1, x_2, \dots, x_D . De la manera com s'han definit els cicles $C_{D+1}(\mathbf{x})$, es dedueix que no tenen cap vèrtex en comú i tampoc en tenen amb els cicles $C_k(\mathbf{x})$, obtinguts a partir de les adjacències de tipus rotació, llevat de \mathbf{x} .

□

És important observar que en el cicle que té longitud igual al diàmetre, C_D , totes les adjacències són de tipus r_1 .

2.3 La distància i el camí més curt a $\Gamma_{\Delta}(D)$

Tot i que a [20] es dona una forma de calcular la distància entre dos vèrtexs $\mathbf{x} = x_1x_2 \dots x_D$ i $\mathbf{y} = y_1y_2 \dots y_D$ de $\Gamma_{\Delta}(D)$, $\Delta \geq D$, el següent procediment la simplifica notablement.

$$\left. \begin{aligned}
(dis.1) \quad & y_1 \text{ és a } \mathbf{x}, \text{ posem } x_j = y_1 \\
(dis.2) \quad & x_j \dots x_D \text{ són tots a } \mathbf{y} \\
(dis.3) \quad & y_1 \dots y_{D-k} \text{ és una subseqüència de } \mathbf{x} \\
& \text{i } y_1 \dots y_{D-k} y_{D-k+1} \text{ no ho és}
\end{aligned} \right\} \Rightarrow d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = k \quad (2.2)$$

En aquesta situació, només queden per col·locar adequadament k símbols, perquè els $D - k$ primers ja estan bé.

En canvi, si

$$\left. \begin{array}{l} y_1 \text{ no és a } \mathbf{x} \\ \text{o} \\ y_1 \text{ és a } \mathbf{x}, x_j = y_1, \text{ però existeix} \\ x_r \text{ amb } j < r \text{ que no és a } \mathbf{y} \end{array} \right\} \Rightarrow d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = D \quad (2.3)$$

Es pot observar que el digraf de prefix-cicle no és simètric, és a dir, $d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \neq d(\mathbf{y}, \mathbf{x})$ per a qualssevol $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \Gamma_\Delta(D)$, excepte si \mathbf{x} i \mathbf{y} són vèrtexs d'un dígon.

A partir d'aquest algorisme per a trobar la distància entre dos vèrtexs qualssevol del digraf de prefix-cicle, es dedueix que si dos vèrtexs \mathbf{x} i \mathbf{y} , estan a distància k , els vèrtexs adjacents des de \mathbf{x} estan tots a distància com a mínim k de \mathbf{y} excepte un, que és a distància $k-1$ de \mathbf{y} . Notarem \mathbf{x}_i el vèrtex adjacent des de \mathbf{x} aplicant la rotació r_i , $1 \leq i < D$, o shift si $D \leq i \leq \Delta$, per a $\mathbf{x}, \mathbf{x}_i \in \Gamma_\Delta(D)$.

Proposició 1 *Donats els vèrtexs $\mathbf{x} = x_1x_2\dots x_D$ and $\mathbf{y} = y_1y_2\dots y_D$ del digraf $\Gamma_\Delta(D)$, $\Delta \geq D$, tals que $d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = k$, $k < D$, llavors $d(\mathbf{x}_i, \mathbf{y}) \geq d(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ excepte per a un únic vèrtex \mathbf{x}_i pel qual és $d(\mathbf{x}_i, \mathbf{y}) = d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) - 1$.*

Demostració. S'utilitzarà la notació $\mathbf{x} = x_1x_2\dots x_D$ per a expressar els símbols del vèrtex \mathbf{x} , però $(\mathbf{x})_j$ es farà servir per a indicar el símbol que ocupa la posició j en el vèrtex \mathbf{x} quan la notació anterior pugui confondre.

Com que $d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = k$, es fa servir el procediment per a calcular la distància entre dos vèrtexs donat a l'expressió (2.2). Suposem doncs que $x_j = y_1$, que els símbols $x_j \dots x_D$ són a \mathbf{y} i que $y_1 \dots y_{D-k}$ és una subseqüència de \mathbf{x} i $y_1 \dots y_{D-k}y_{D-k+1}$ no ho és.

En considerar els vèrtexs (\mathbf{x}_i) adjacents des del vèrtex \mathbf{x} , el símbol y_1 que ocupava la posició j en \mathbf{x} , està en alguna de les següents situacions:

- . No hi és: correspon al cas en què $j = 1$ i que el vèrtex \mathbf{x}_i s'obtingui aplicant una adjacència tipus shift al vèrtex \mathbf{x} . Llavors és $d(\mathbf{x}_i, \mathbf{y}) = D > k$.
- . Ocupa l'última posició, $y_1 = (\mathbf{x}_i)_D$, llavors és $d(\mathbf{x}_i, \mathbf{y}) = D - 1 \geq k$.
- . Ocupa la posició $j - 1$ ó j , $y_1 = (\mathbf{x}_i)_{j-1}$ ó $y_1 = (\mathbf{x}_i)_j$. En cadascun d'aquests casos pot passar només una de les situacions que es descriuen a continuació.

- No tots els símbols $(\mathbf{x}_i)_{j-1} \dots (\mathbf{x}_i)_D$ són a \mathbf{y} , llavors $d(\mathbf{x}_i, \mathbf{y}) = D > k$. Id. per j .
- Els $D - (k+l)$, $l = 0, \dots, D-1-k$, primers símbols de $y_1 \dots y_{D-k}$ són subseqüència de \mathbf{x}_i . Llavors $d(\mathbf{x}_i, \mathbf{y}) = k + l \geq k$.
- Els símbols de $y_1 \dots y_{D-k} y_{D-(k-1)}$ són subseqüència de \mathbf{x}_i . Llavors $d(\mathbf{x}_i, \mathbf{y}) = k - 1$. Notem que per construcció, aquesta situació es dona per a un únic vèrtex \mathbf{x}_i

□

En el següent resultat es demostra que el camí més curt entre dos vèrtexs d'un digraf de prefix-cicle, és únic.

Proposició 2 *Donats els vèrtexs \mathbf{x} i $\mathbf{y} \in \Gamma_\Delta(D)$, tals que $d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = k$, $k \leq D$, existeix un únic camí de longitud k .*

Demostració. És conseqüència d'aplicar k vegades la proposició 1, ja que donats \mathbf{x}, \mathbf{y} només existeix un únic vèrtex \mathbf{x}_i adjacent des de \mathbf{x} pel qual és $d(\mathbf{x}_i, \mathbf{y}) = k - 1$.

□

2.4 Vèrtexs a distància k

L'objectiu d'aquesta secció és calcular la distància mitjana entre dos vèrtexs qualssevol del digraf. La distància mitjana, d_m , és un factor tant o més important que el diàmetre, a l'hora de decidir sobre la bondat del digraf com a model de xarxa d'interconnexió.

Fixat un vèrtex al digraf de prefix-cicle, es vol estudiar quants vèrtexs hi ha a distància exactament k , on $k \leq D$. Sense pèrdua de generalitat es pot suposar que el vèrtex fixat és la identitat $I = 123..D$, ja que el digraf és vèrtex simètric.

Primer es demostra que si \mathbf{x} està a distància k de I , llavors hi ha $k - 1$ vèrtexs adjacents des de \mathbf{x} que estan a distància com a molt k del vèrtex I .

Proposició 3 *Considerem $\mathbf{x} = x_1 x_2 \dots x_{D-k} x_{D-(k-1)} \dots x_D$ un vèrtex a $\Gamma_\Delta(D)$, $\Delta \geq D$, amb $d(I, \mathbf{x}) = k$, $0 < k \leq D$. Llavors els vèrtexs*

$$\begin{aligned}
 & x_1 \dots x_{D-k} x_{D-(k-2)} \dots x_D x_{D-(k-1)} \\
 & x_1 \dots x_{D-k} x_{D-(k-1)} x_{D-(k-3)} \dots x_D x_{D-(k-2)} \\
 & \dots \\
 & x_1 \dots x_{D-k} x_{D-(k-1)} \dots x_D x_{D-1}
 \end{aligned}$$

són adjacents des de \mathbf{x} i disten del vèrtex identitat com a molt k unitats.

Demostració. Com que $d(I, \mathbf{x}) = k$ del procediment per a calcular la distància entre dos vèrtexs d'un digraf de prefix-cicle, definit a (2.2) sabem que:

$$x_1 \text{ és a } I, x_1 = i.$$

$$i..D \text{ és a } \mathbf{x}.$$

$$x_1x_2..x_{D-k} \text{ és una subseqüència de } I \text{ i } x_1x_2..x_{D-k}x_{D-(k-1)} \text{ no ho és.}$$

En escriure els vèrtexs adjacents des de $\mathbf{x} = x_1x_2..x_D$ tenim que $x_1x_2..x_{D-k}$ és encara prefix en alguns dels veïns de \mathbf{x} . En la següent taula, per a cada vèrtex adjacent des de \mathbf{x} es dona la distància a I .

$$\begin{array}{lll} \mathbf{x}_1 & = x_2..x_{D-k} | x_{D-(k-1)}..x_D x_1 & d(\mathbf{x}_1, I) = k + 1 \\ \dots & & \\ \mathbf{x}_{D-k} & = x_1x_2..x_{D-(k+1)} | x_{D-(k-1)}..x_D x_{D-k} & d(\mathbf{x}_{D-k}, I) = k + 1 \\ \mathbf{x}_{D-(k-1)} & = x_1x_2..x_{D-k} | x_{D-(k-2)}..x_D x_{D-(k-1)} & d(\mathbf{x}_{D-(k-1)}, I) \leq k \\ \dots & & \\ \mathbf{x}_{D-1} & = x_1x_2..x_{D-k} | x_{D-(k-1)}..x_D x_{D-1} & d(\mathbf{x}_{D-1}, I) \leq k \\ \dots & & \end{array}$$

Per tant, cada vèrtex \mathbf{x} , que és a distància k de I , contribueix amb $k - 1$ vèrtexs adjacents que estan a distància com a molt k de I . □

Ara ja es poden calcular el nombre de vèrtexs que estan a distància k de I , amb $k \leq D$.

Teorema 2 *Considerem el digraf de prefix-cicle $\Gamma_\Delta(D)$, $\Delta \geq D$. Si d_k , és el nombre de vèrtexs de $\Gamma_\Delta(D)$ que estan a distància k de I . Llavors:*

$$d_{k+1} = \Delta d_k - d_0 - d_1 - \dots - d_{k-1} - (k-1)d_k \quad (2.4)$$

on $1 \leq k < D$ i $d_0 = 1, d_1 = \Delta$.

Demostració. Com que el digraf no té autollaços i cada vèrtex en té Δ d'adjacents, és clar que $d_0 = 1, d_1 = \Delta$. Per a calcular el nombre de vèrtexs a distància $k + 1$, es trobaran els vèrtexs adjacents a cada vèrtex que estigui a distància k de I . En principi hi ha Δd_k vèrtexs adjacents, als quals s'ha de restar els que estiguin a distància k o menys.

Fent servir el teorema 1 tenim:

Com que I és en un cicle de longitud $k + 1$, $C_{k+1}(I)$, I torna a aparèixer com a vèrtex a distància $k + 1$, és a dir I és $(k + 1)$ -assolible. Cal restar d_0 .

Cada vèrtex \mathbf{x} , a distància 1 de I , pertany a un cicle de longitud k , per tant, \mathbf{x} és $(k + 1)$ -assolible. Cal restar d_1 .

...

Cada vèrtex a distància $k - 1$ és en un cicle de longitud 2 i per tant és $(k + 1)$ -assolible. Cal restar d_{k-1} .

Finalment per acabar de justificar la relació donada a (2.4), cal recordar la Proposició 3 segons la qual, cada vèrtex a distància k de la identitat, té exactament $k - 1$ vèrtexs adjacents a distància estrictament menor que $k + 1$ de la identitat. Obtenim

$$d_{k+1} = \Delta d_k - d_0 - d_1 - \dots - d_{k-1} - (k - 1)d_k.$$

□

En el següent corollari es calcula explícitament el valor de d_k .

Corollari 1 *Donat el digraf de prefix-cicle $\Gamma_\Delta(D)$, el nombre de vèrtexs a distància k del vèrtex identitat d_k , és*

$$d_k = (\Delta + 1)\Delta(\Delta - 1)\dots(\Delta - k + 3)(\Delta - k + 1) \quad (2.5)$$

per a $k \geq 2$ i $d_0 = 1, d_1 = \Delta$.

Demostració. L'expressió (2.5) es compleix per a $k = 2$, perquè si considerem els vèrtexs adjacents als vèrtexs que estaven a distància 1 del vèrtex identitat, n'obtenim Δd_1 dels quals només el propi vèrtex identitat és 2-assolible perquè és l'únic vèrtex que és en un digon, i per tant és

$$d_2 = \Delta d_1 - d_0 = \Delta^2 - 1 = (\Delta + 1)(\Delta - 1).$$

Suposem que (2.5), també es verifica per a k , és a dir

$$d_k = (\Delta + 1)\Delta(\Delta - 1)\dots(\Delta - k + 3)(\Delta - k + 1).$$

A més de (2.4), obtenim

$$d_0 + d_1 + \dots + d_{k-2} = (\Delta - k + 2)d_{k-1} - d_k$$

Es vol demostrar que l'equació (2.5) es compleix per $k + 1$.

Fem servir la fórmula (2.4) per $k + 1$

$$\begin{aligned}
d_{k+1} &= (\Delta - k + 1)d_k - (d_0 + d_1 + \cdots + d_{k-2}) - d_{k-1} = \\
&= (\Delta - k + 1)d_k - (\Delta - k + 2)d_{k-1} + d_k - d_{k-1} = \\
&= (\Delta - k + 2)d_k - (\Delta - k + 3)d_{k-1} = \\
&= (\Delta - k + 2)(\Delta + 1)\Delta(\Delta - 1) \cdots (\Delta - k + 3)(\Delta - k + 1) - \\
&\quad - (\Delta - k + 3)(\Delta + 1)\Delta(\Delta - 1) \cdots (\Delta - k + 4)(\Delta - k + 2) = \\
&= (\Delta + 1)\Delta(\Delta - 1) \cdots (\Delta - k + 2)(\Delta - k).
\end{aligned}$$

□

Corollari 2 *Pel digraf de prefix-cicle $\Gamma_\Delta(D)$ la distància mitjana és:*

$$d_m = D - \frac{1}{(\Delta + 1)_D} \sum_{k=0}^{D-1} (\Delta + 1)_k. \quad (2.6)$$

Demostració.

$$\begin{aligned}
d_m &= \frac{1}{(\Delta + 1)_D} \sum_{k=0}^{D-1} k d_k = \\
&= \frac{1}{(\Delta + 1)_D} [\Delta + 2(\Delta + 1)(\Delta - 1) + \cdots + \\
&\quad + \cdots + D(\Delta + 1)\Delta \cdots (\Delta - D + 3)(\Delta - D + 1)] = \\
&= \frac{1}{(\Delta + 1)_D} [((\Delta + 1)_1 - (\Delta + 1)_0) + 2((\Delta + 1)_2 - (\Delta + 1)_1) + \cdots] = \\
&= \frac{1}{(\Delta + 1)_D} [D(\Delta + 1)_D - 1 - \sum_{k=1}^{D-1} (\Delta + 1)_k] = \\
&= D - \frac{1}{(\Delta + 1)_D} \sum_{k=0}^{D-1} (\Delta + 1)_k.
\end{aligned}$$

□

Finalment, es comprova que la suma dels vèrtexs a cada nivell dona l'ordre del digraf.

Corollari 3 *En les hipòtesis anteriors:*

$$\sum_{k=0}^D d_k = (\Delta + 1)\Delta \cdots (\Delta - D + 2) = \frac{(\Delta + 1)!}{(\Delta - D + 1)!} = (\Delta + 1)_D \quad (2.7)$$

per a $\Delta \geq D$.

2.5 Els polinomis distància

Els resultats obtinguts en la secció anterior permeten definir una família de polinomis $(P_k(x))_{k=0\dots D} \in \mathbb{R}_D[x]$ associada al digraf de prefix-cicle $\Gamma_\Delta(D)$.

Definició 3 Donat el digraf de prefix-cicle $\Gamma_\Delta(D)$, $\Delta \geq D$, es defineix la família de polinomis distància

$$P_k(x) = (x+1)x(x-1)\dots(x-k+3)(x-k+1) \quad (2.8)$$

per a $k = 2, \dots, D$ amb $P_0(x) = 1$, $P_1(x) = x$.

Observació 1 El polinomi $P_k(x)$, per a $x = \Delta$, pren valor igual al nombre de vèrtexs del digraf $\Gamma_\Delta(D)$, que estan a distància exactament k d'un vèrtex fixat, tal com s'ha provat al Corollari 1.

Observació 2 La família de polinomis $(P_k(x))_{k=0\dots D}$ és una base de l'espai vectorial dels polinomis de grau menor o igual que D a coeficients reals $\mathbb{R}_D[x]$.

En general s'escriurà un polinomi distància amb la notació

$$P_k(x) = x^k + p_{k-1}^k x^{k-1} + p_{k-2}^k x^{k-2} + \dots + p_1^k x + p_0^k$$

Exemple Alguns polinomis distància

$$P_0(x) = 1; P_1(x) = x; P_2(x) = x^2 - 1$$

$$P_3(x) = x^3 - x^2 - 2x$$

$$P_4(x) = x^4 - 3x^3 - x^2 + 3x$$

$$P_5(x) = x^5 - 6x^4 + 7x^3 + 6x^2 - 8x$$

i els coeficients p_i^j corresponents

$$p_0^0 = 1; p_0^1 = 0, p_1^1 = 1; p_0^2 = -1, p_1^2 = 0, p_2^2 = 0;$$

$$p_0^3 = 0, p_1^3 = -2, p_2^3 = -1, p_3^3 = 1;$$

$$p_0^4 = 0, p_1^4 = 3, p_2^4 = -1, p_3^4 = -3, p_4^4 = 1;$$

$$p_0^5 = 0, p_1^5 = -8, p_2^5 = 6, p_3^5 = 7, p_4^5 = -6, p_5^5 = 1$$

Notem que $p_0^k = 0$ si $k > 2$, que $p_k^k = 1$ per a qualsevol k i, finalment, que $p_i^j = 0$ si $i > j$.

Si el digraf de prefix-cicle $\Gamma_\Delta(D)$, $\Delta \geq D$, fos un digraf de Moore, el nombre de vèrtexs que hi hauria a distància k d'un vèrtex qualsevol seria Δ^k . Per a obtenir els vèrtexs que en realitat hi ha a distància k , s'ha de restar a Δ^k els vèrtexs que són k -assolibles però que estan a distància menor que k i, per tant,

$$d_k = \Delta^k - q_{k-1}^k d_{k-1} - q_{k-2}^k d_{k-2} \dots - q_1^k d_1 - q_0^k d_0$$

on q_i^j és el nombre de recorreguts de longitud j des d'un vèrtex fix fins a un altre que n'està a distància i en el cas $i < j$, $q_i^j = 1$ si $i = j$ i $q_i^j = 0$ en la resta de casos.

Considerem ara una segona família de polinomis, els *polinomis recorregut* que es defineix a partir dels polinomis distància.

Definició 4 Donat el digraf de prefix-cicle $\Gamma_\Delta(D)$, $\Delta \geq D$, es defineix la família de polinomis recorregut

$$Q_k(x) = x^k - q_{k-1}^k P_{k-1}(x) - q_{k-2}^k P_{k-2}(x) \cdots - q_1^k P_1(x) - q_0^k P_0(x) \quad (2.9)$$

per a $k = 2 \dots D$ amb $Q_0(x) = 1$, $Q_1(x) = x$

Observació 3 En el polinomi recorregut $Q_j(x)$, el coeficient q_i^j és el nombre de recorreguts de longitud j que hi ha entre vèrtexs a distància i .

De la definició es conclou que per a $x = \Delta$, $P_k(\Delta) = Q_k(\Delta)$ i que els polinomis $(Q_k(x))_{k=0 \dots D}$ formen també una base de l'espai vectorial dels polinomis de grau menor o igual que D a coeficients reals $\mathbb{R}_D[x]$.

Per a calcular els coeficients q_i^j , i per tant conèixer el nombre de recorreguts que existeixen entre vèrtexs que estan a una certa distància, cal expressar el polinomi que dóna el nombre de vèrtexs a distància fix, en la base dels polinomis recorregut. La matriu del canvi de base és

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & p_1^{D-1} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & p_2^{D-1} & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & p_{D-2}^{D-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Fent la inversa, es pot obtenir l'expressió del polinomi distància escrit en la base dels polinomis recorregut, i per tant, conèixer el nombre de recorreguts entre vèrtexs que estan a una distància fix .

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & \dots & -q_0^{k-1} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & -q_1^{k-1} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & -q_2^{k-1} & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -q_{k-2}^{k-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_0^k \\ p_1^k \\ p_2^k \\ \vdots \\ p_{k-2}^k \\ p_{k-1}^k \\ p_k^k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q_0^k \\ q_1^k \\ q_2^k \\ \vdots \\ q_{k-2}^k \\ q_{k-1}^k \\ q_k^k \end{pmatrix}$$

Exemple Alguns polinomis distància i recorregut

$$P_0(x) = Q_0(x) = 1 \text{ i } P_1(x) = Q_1(x) = x$$

$$P_2(x) = Q_2(x) = x^2 - 1$$

k	$P(x)$	$Q(x)$
3	$x^3 - x^2 - 2x$	$x^3 - P_2(x) - 2P_1(x) - P_0(x)$
4	$x^4 - 3x^3 - x^2 + 3x$	$x^4 - 3P_3(x) - 4P_2(x) - 3P_1(x) - 4P_0(x)$
5	$x^5 - 6x^4 + 7x^3 + 6x^2 - 8x$	$x^5 - 6P_4(x) - 11P_3(x) -$ $-11P_2(x) - 12P_1(x) - 11P_0(x)$

2.6 Estructura jeràrquica

Una certa estructura repetitiva o recursiva, que mostren els digrafs de prefix-cicle serà rellevant en l'estudi de les propietats d'aquests digrafs. Aquesta recursivitat és conseqüència de l'existència d'una ordenació en els generadors del digraf quocient del digraf de Cayley que defineix el digrafs de prefix-cicle. En general, un conjunt S de generadors d'un grup \mathcal{G} és diu que és *jeràrquic*, si existeix una ordenació dels elements de S , suposem $S = \{s_1, s_2, \dots, s_d\}$ tal que, per a cada $i = 1, \dots, d-1$ el grup \mathcal{G}_i generat per $\{s_1, \dots, s_i\}$ és un subgrup propi, és a dir estrictament diferent, del grup \mathcal{G}_{i+1} generat per $\{s_1, \dots, s_{i+1}\}$.

Definició 5 *Un digraf quocient d'un digraf de Cayley $\Gamma = \text{Cay}(G, H, S)$ és un digraf jeràrquic o quasi-minimal si, i només si, existeix una ordenació dels elements de S , $\{s_1, s_2, \dots, s_k\}$ tal que per a cada $i = 1, 2, \dots, k-1$, el grup $\langle H, s_1, s_2, \dots, s_i \rangle$ és un subgrup propi de $\langle H, s_1, s_2, \dots, s_i, s_{i+1} \rangle$.*

Des d'un punt de vista menys formal, un digraf presenta una estructura jeràrquica si es pot descomposar en una col·lecció de subdigrafs isomorfs entre si. I cada subdigraf és un digraf més petit però de la mateixa família del digraf original. Per exemple el digraf n -estrella, $S(n)$ definit al capítol 1, pàgina 11, té estructura jeràrquica.

En el cas del digraf de prefix-cicle es compleix:

Proposició 4 *El digraf de prefix-cicle, $\Gamma_\Delta(D)$, $\Delta \geq D$, es descomposa en $\binom{\Delta+1}{D}$ subdigrafs isomorfs a $\Gamma_{D-1}(D-1)$.*

Demostració. Denotem per Γ_D el subdigraf de $\Gamma_\Delta(D)$ format pels vèrtexs que són permutació dels D símbols, $\{x_1, x_2, \dots, x_D\}$, i les adjacències de tipus

rotació entre ells. Aquest subdigraf Γ_D és isomorf a $\Gamma_{D-1}(D-1)$ mitjançant l'aplicació següent:

$$f: \begin{array}{ccc} \Gamma_D & \longrightarrow & \Gamma_{D-1}(D-1) \\ x_1x_2 \dots x_D & \longrightarrow & x_2 \dots x_D \end{array}$$

que és un isomorfisme. Comprovem que les adjacències es conserven. En efecte, si $2 \leq k < D$, les adjacències de tipus (r_k) a Γ_D , es transformen en adjacències (r_{k-1}) a $\Gamma_{D-1}(D-1)$.

$$\begin{array}{ccc} x_1x_2 \dots x_D & \xrightarrow{f} & x_2 \dots x_D \\ \downarrow r_k & & \downarrow r_{k-1} \\ x_1 \dots x_{k-1}x_{k+1} \dots x_Dx_k & \xrightarrow{f} & x_2 \dots x_{k-1}x_{k+1} \dots x_Dx_k \end{array}$$

En el cas que $k = 1$ l'adjacència r_1 a Γ_D es transforma per l'isomorfisme f en una adjacència tipus shift a $\Gamma_{D-1}(D-1)$.

Com que hi ha $\binom{\Delta+1}{D}$ possibles eleccions de subdigras Γ_D , obtenim el resultat enunciat.

□

A la Figura 2.2 es representen els diferents subdigras Γ_3 del digraf $\Gamma_4(3)$ i el digraf de prefix-cicle $\Gamma_2(2)$, al qual és isomorf cada Γ_3 . En particular, el digraf $\Gamma_2(2)$ amb els vèrtexs etiquetats amb els símbols $\{1, 2, 5\}$ és l'isomorf al subdigraf Γ_3 que conté les permutacions de 1, 2 i 5.

A la Figura 2.3 es representa de forma esquemàtica l'estructura jeràrquica de $\Gamma_4(4)$. El digraf $\Gamma_4(4)$ consta de 5 subdigras Γ_4 isomorfs a $\Gamma_3(3)$ (quadrats), cadascun dels quals conté a la vegada de 4 subdigras isomorfs a $\Gamma_2(2)$ (triangles).

A la Figura 2.1 es pot observar que el digraf $\Gamma_3(3)$ conté $\binom{4}{3} = 4$ subdigras isomorfs a $\Gamma_2(2)$.

Finalment, és important notar que entre els vèrtexs d'un mateix subdigraf, les adjacències són del tipus rotació, mentre que les adjacències shift connecten dos subdigras els vèrtexs dels quals difereixen en només un símbol.

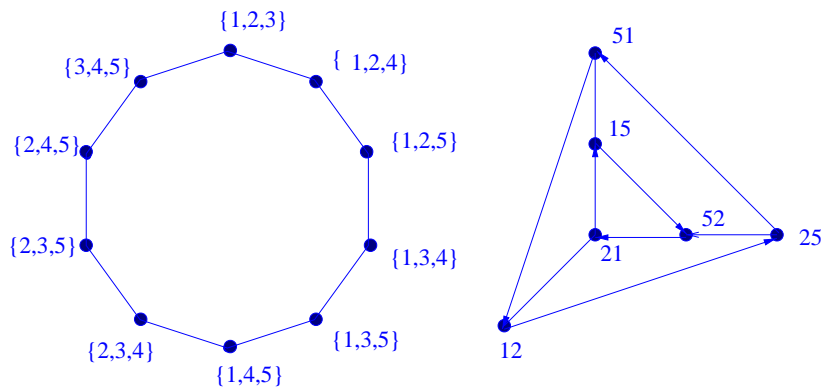


Figura 2.2: $\Gamma_4(3)$ està format per 10 subdigràfs cadascun isomorfs a $\Gamma_2(2)$.

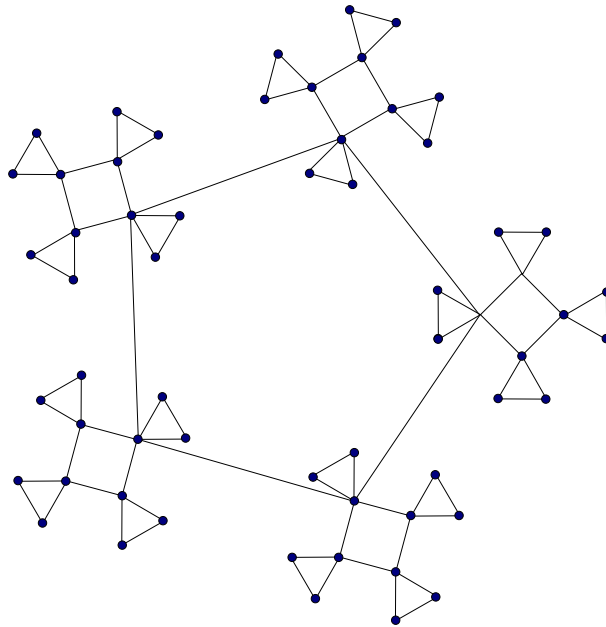


Figura 2.3: Esquema de l'estructura jeràrquica de $\Gamma_4(4)$

Capítol 3

Cicles a $\Gamma_{\Delta}(D)$

En aquest capítol s'aprofundeix en el coneixement de l'estructura cíclica dels digrafs de prefix-cicle que s'utilitzarà en el disseny d'un algorisme de comunicació. D'una banda es demostra que en els digrafs de prefix-cicle existeixen cicles de qualsevol longitud N , des de $N = 2$ fins a $N = |\Gamma_{\Delta}(D)|$, excepte pel cas que $N = |\Gamma_{\Delta}(D)| - 1$. Un segon resultat referent a l'estructura cíclica, és el que s'obté a la secció 3.2 i que mostra que el digraf de prefix-cicle es pot descomposar en cicles vèrtex-disjunts. Finalment, es dona una descomposició del digraf de prefix-cicle en camins també vèrtex-disjunts, i de longituds diferents. En aquesta situació el digraf modelaria una xarxa en la qual seria possible la distribució de diferents tasques entre grups d'usuaris amb diferent nombre d'individus.

Un resultat que dona informació sobre l'existència de cicles de longitud igual a l'ordre del digraf, és l'obtingut per Jiang i Ruskey a [33] en provar que el digraf de prefix-cicle és hamiltonià. Aquest resultat està enunciat en el lema 1, mentre que el lema 2 estableix l'existència d'un cicle amb $D!$ vèrtexs que té totes les adjacències r_1 . Tots dos lemes són en el mateix treball [33] i seran utilitzats en aquest capítol.

Lema 1 *Donat el digraf $\Gamma_{\Delta}(D)$, $D \geq 2$, existeix un camí hamiltonià des del vèrtex $12 \dots D$ fins al vèrtex $x_1 x_2 \dots x_D$ si, i només si, $x_1 = D$.*

Lema 2 *Donat el digraf $\Gamma_D(D)$, $D \geq 3$, existeix un camí de $D!$ vèrtexs que consisteixen en totes les permutacions de $\{x_1, \dots, x_D\}$, a més aquest camí conté D adjacències de tipus r_1 i en cadascuna el primer símbol del primer vèrtex (o l'últim del segon) és diferent.*

Observació 4 *En conseqüència, a $\Gamma_{\Delta}(D)$ es pot trobar un cicle que té per vèrtexs totes les permutacions de D símbols diferents i que és isomorf al cicle hamiltonià del dígraf $\Gamma_{D-1}(D-1)$.*

Exemple El següent exemple il·lustra el lema 2. Al dígraf $\Gamma_3(3)$, hi ha un camí els vèrtexs del qual contenen totes les permutacions de $\{1, 2, 3\}$. Aquest camí és isomorf al camí hamiltonià d'un dels subdígrafs $\Gamma_2(2)$ en què es pot descomposar $\Gamma_3(3)$. Notem que les adjacències de tipus r_1 ¹ tenen el primer símbol –escrit entre parèntesi sobre el símbol de l'adjacència r_1 – igual a 3, 2, i 1 respectivament.

$$312 \rightarrow 321 \xrightarrow{(3)} 213 \xrightarrow{(2)} 132 \rightarrow 123 \xrightarrow{(1)} 231.$$

Observem que, efectivament, el cicle anterior és isomorf al cicle hamiltonià de $\Gamma_2(2)$:

$$12 \rightarrow 21 \rightarrow 13 \rightarrow 32 \rightarrow 23 \rightarrow 31.$$

‡

3.1 El dígraf $\Gamma_{\Delta}(D)$ és quasi pancíclic.

Fent ús d'una demostració constructiva, es demostrarà que és possible trobar cicles de qualsevol longitud, excepte en el cas $N = |\Gamma_{\Delta}(D)| - 1$. Vegeu [15].

Definició 6 *Un graf o un dígraf Γ d'ordre $p \geq 3$ és pancíclic si Γ conté cicles de longitud l amb $2 \leq l \leq p$.*

En el cas que el graf o dígraf Γ , contingui cicles de longitud l amb $2 \leq l \leq p$ i $l \neq p - 1$, diem que és quasi pancíclic.

És clar que un (di)graf pancíclic és hamiltonià ja que, en particular, conté un cicle de longitud igual a l'ordre del dígraf.

Estudis referents a la panciclicitat dels dígrafs de Bruijn $B(d, D)$ i Kautz $K(d, D)$ es poden trobar a [40] i [41]. En aquests treballs s'utilitzen tècniques relacionades amb el dígraf línia per a provar que els dígrafs de Bruijn són pancíclics mentre que els de Kautz $K(d, D)$ tenen cicles de qualsevol longitud excepte $d^D + d^{D-1} - 1$ (l'ordre menys u), és a dir, són quasi pancíclics.

En l'estudi de l'estructura cíclica dels dígraf de prefix-cicle, a la secció 2.2, s'ha explicat amb detall l'obtenció de cicles que anomenàvem curts i que comprenen des dels que tenen longitud 2, digons, fins als cicles de longitud $D + 1$, els cicles de shift. Demostrem ara l'existència de cicles de longitud superior.

¹a partir d'ara notarem amb \Rightarrow les adjacències de tipus r_1

3.1.1 Cicles llargs

Entendrem per cicles llargs a $\Gamma_{\Delta}(D)$, els cicles que tenen longitud des de $D + 2$ fins a l'ordre del digraf. Com que la demostració de l'existència de cicles llargs es farà per inducció, començarem estudiant amb detall els casos pels quals el diàmetre del digraf és $D = 2$ i $D = 3$.

En principi, es consideren els digrafs que tenen el grau i el diàmetre iguals, $\Delta = D$ i finalment s'estudia el cas $\Delta > D$. Com que el digraf $\Gamma_{\Delta}(D)$ és vèrtex simètric, sense pèrdua de generalitat, es pot suposar que el vèrtex del qual es busquen cicles és $\mathbf{I} = 12 \dots D$.

$\Gamma_2(2)$

Els cicles llargs que contenen $\mathbf{I} = 12$, es calculen a mà i són:

$$\begin{aligned} C_4 & 12 \rightarrow 21 \rightarrow 13 \rightarrow 31. \\ C_6 & 12 \rightarrow 21 \rightarrow 13 \rightarrow 32 \rightarrow 23 \rightarrow 31. \end{aligned}$$

Es comprova també manualment que el cicle C_5 no existeix.

Abans de començar l'estudi del cas $\Gamma_3(3)$ cal tenir en compte el següent resultat que mostra com substituir una adjacència d'un tipus particular per camins de diferent longitud. En conseqüència, si tenim un cicle que conté adjacències d'aquest tipus, es podran aconseguir cicles més llargs simplement per substitució de l'adjacència adequada.

Lema 3 *L'arc $xyz \Rightarrow yzx$ que correspon a una adjacència de tipus r_1 en el digraf $\Gamma_{\Delta}(3)$, es pot substituir per un camí de 3, 4 o 6 vèrtexs que contenen els símbols $\{y, z, t\}$ amb $t \neq x$. Per tant tots aquests vèrtexs pertanyen a exactament un dels subdigrafs de $\Gamma_{\Delta}(3)$ isomorf a $\Gamma_2(2)$.*

Exemple L'arc $123 \Rightarrow 231$ es pot substituir per camins de longitud 3, 4 o 6 amb els símbols $\{2, 3, 4\}$:

$$123 \Rightarrow 231 : \quad 123 \left\{ \begin{array}{cccccc} 234 & 342 & 423 & & & \\ 234 & 243 & 432 & 423 & & \\ 234 & 243 & 432 & 324 & 342 & 423 \end{array} \right\} 231.$$

†

En la Figura 3.1 es pot observar que els nous vèrtexs pertanyen a un mateix subdigraf de $\Gamma_{\Delta}(3)$, isomorf a $\Gamma_2(2)$.

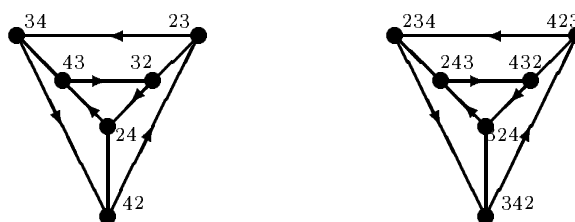


Figura 3.1: El digraf $\Gamma_2(2)$ i un subdigraf de $\Gamma_\Delta(3)$ isomorf a $\Gamma_2(2)$.

$\Gamma_3(3)$

La construcció dels diferents cicles llargs a $\Gamma_3(3)$ es farà en alguns casos a mà, però en la majoria es seguirà un procediment que posteriorment serà generalitzat per al digraf $\Gamma_\Delta(D)$, $\Delta \geq D$.

- Cicles de longitud 5. Un cicle de longitud 5 ha de tenir vèrtexs en subdigras diferents perquè no existeixen cicles d'aquesta longitud en un subdigraf isomorf a $\Gamma_2(2)$. A continuació es mostren alguns possibles cicles de longitud 5. Cal observar que en tots hi ha sempre una adjacència de tipus r_1 :

$$\begin{aligned} 123 &\rightarrow 234 \Rightarrow 342 \rightarrow 421 \rightarrow 412. \\ 123 &\rightarrow 234 \rightarrow 341 \Rightarrow 413 \rightarrow 132. \\ 123 &\Rightarrow 231 \rightarrow 314 \rightarrow 341 \rightarrow 412. \end{aligned}$$

- Cicles de longitud 6. Només cal escollir un cicle que sigui isomorf al cicle hamiltonià d'un dels subdigras isomorfs a $\Gamma_2(2)$.
- Cicles de longitud 7. Es poden construir a partir d'un triangle, C_3 , per a això caldrà substituir una de les adjacències de tipus r_1 , totes ho són, per un camí de quatre vèrtexs. Per exemple de

$$C_3 : 123 \Rightarrow 231 \Rightarrow 312.$$

s'obté

$$123 \rightarrow \mathbf{234} \rightarrow \mathbf{243} \Rightarrow \mathbf{432} \rightarrow \mathbf{423} \rightarrow 231 \Rightarrow 312.$$

Els vèrtexs del camí que s'ha afegit han estat escrits en negreta.

- Cicles de longitud 8. Com que en els cicles de longitud 5 hi ha sempre una adjacència de tipus r_1 , podem substituir-la per un camí de tres vèrtexs:

$$123 \rightarrow 234 \rightarrow \mathbf{341} \Rightarrow \mathbf{413} \Rightarrow \mathbf{134} \rightarrow 342 \rightarrow 421 \rightarrow 412.$$

- Cicles de longitud 11. A partir d'un cicle de longitud 3, C_3 , es substitueixen dues adjacències r_1 per camins amb quatre vèrtexs.

- Cicles de longitud k ($k \neq 5, 7, 8, 11$). S'escriu $k = 6(1 + q) + r$ amb $0 \leq q \leq 3$ i $0 \leq r < 6$. Es considera un cicle de longitud 6, isomorf a un cicle hamiltonià en un dels subdigrafs isomorfs a $\Gamma_2(2)$. Aquest cicle té tres arcs del tipus r_1 que poden ser substituïts per camins de tres, quatre o sis vèrtexs, llavors:
 - Si $r = 0, 3, 4$, es substitueixen q adjacències r_1 per q camins hamiltonians a $\Gamma_2(2)$, i una adjacència per un camí amb r vèrtexs. Notem que sempre és $q < 3$, i per tant queden resolts els casos $k = 9, 10, 12, 15, 16, 18, 21, 22$.
 - Si $r = 1, 2$, és $1 \leq q < 3$. Es substitueixen $q-1$ adjacències r_1 amb camins hamiltonians corresponents a subdigrafs isomorfs a $\Gamma_2(2)$, i es fan servir les adjacències r_1 que encara no han estat utilitzades per a completar els $6 + r$ vèrtexs que queden. Es resolen els casos $k = 13, 14, 19, 20$.
 - Si $r = 5$ és $1 \leq q < 3$. Es substitueixen $q - 1$ adjacències r_1 per camins hamiltonians també de $\Gamma_2(2)$. Es necessiten tres adjacències per a completar els 11 vèrtexs que queden amb dos camins de longitud quatre i un de longitud tres.

Aquest procés només és possible quan $q \neq 2$ i, en conseqüència, $k \neq 23$. Queda resolt el cas $k = 17$ i provat que no existeix un cicle de longitud 23 que és l'ordre del digraf menys u.

El procediment que s'ha fet servir per a obtenir els diferents cicles està esquematitzat en la Figura 3.2

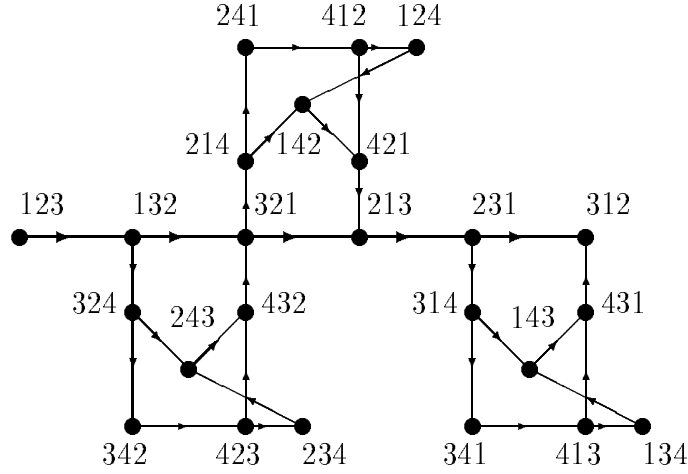
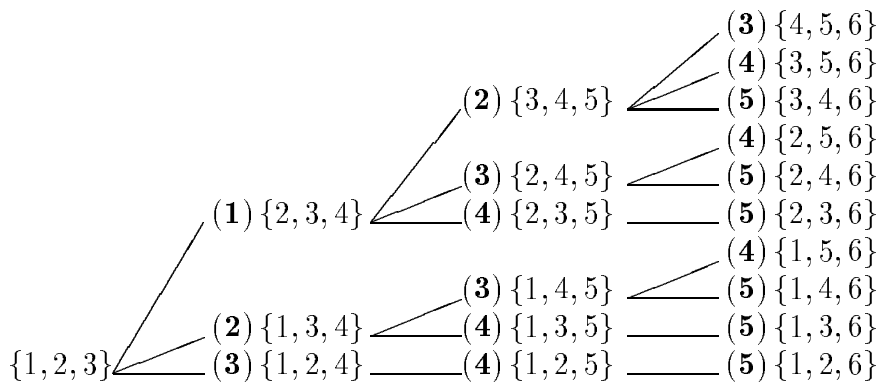


Figura 3.2: Un cicle de longitud 6 isomorf al cicle hamiltonià de $\Gamma_2(2)$ i la substitució de cada arc r_1 per camins de tres, quatre o sis vèrtexs.

Per a construir els cicles llargs a $\Gamma_\Delta(3)$ es seguirà un procés semblant i l'únic que cal establir és l'ordre que es seguirà per a substituir cada arc r_1 . Aquest ordre ve donat per l'arbre de substitucions, \mathcal{T}_s del qual la Figura 3.3 n'és un exemple. En aquesta figura, els símbols escrits entre parèntesi i negreta, representen el símbol substituït en cada cas.

Definició 7 L'arbre de substitucions, \mathcal{T}_s del digraf de prefix-cicle $\Gamma_\Delta(D)$, $\Delta \geq D$, té arrel el vèrtex identitat, grau màxim el diàmetre D , i profunditat $\Delta + 1 - D$. En cada nivell s'introdueix un símbol nou per substitució de cadascun dels símbols de tots els vèrtexs del nivell anterior.

Cal observar que les branques d'aquest arbre no corresponen a adjacències del digraf $\Gamma_\Delta(D)$. Cada element de l'arbre s'identifica amb el conjunt de vèrtexs en el digraf de prefix-cicle que tenen aquests símbols. En realitat cada element de l'arbre de substitucions representa el subdigraf isomorf a $\Gamma_{\Delta-1}(\Delta - 1)$. L'arrel de l'arbre de substitucions està formada pels símbols del vèrtex identitat $I = 12 \dots D$. En el primer nivell es substitueixen respectivament els símbols $1, 2, \dots, D$ per $D + 1$. En el segon nivell, es substitueix cada símbol dels vèrtexs del primer nivell per $D + 2$ i així successivament. En finalitzar el procés s'obté un arbre de profunditat $\Delta + 1 - D$, grau màxim D i en cada nivell s'introdueix un símbol nou. Notem que cada element de l'arbre de substitucions \mathcal{T}_s , difereix del seu "fill" o del seu "pare" en un únic símbol.

Figura 3.3: L'arbre de substitucions \mathcal{T}_s de $\Gamma_5(3)$ $\Gamma_\Delta(3)$, $\Delta > 3$

Recordem que $\Gamma_\Delta(3)$ consta de $\binom{\Delta+1}{3}$ subdigrafs isomorfs a $\Gamma_2(2)$ i que l'ordre del digraf és $|\Gamma_\Delta(3)| = (\Delta + 1)_3 = 6 \binom{\Delta+1}{3} = |\Gamma_2(2)| \binom{\Delta+1}{3}$. Si s'observa com es substitueix cada arc r_1 a la Figura 3.2 veiem que els tres arcs r_1 , es substitueixen per camins amb vèrtexs que contenen els símbols $\{2, 3, 4\}$, $\{1, 2, 4\}$ i $\{1, 3, 4\}$ respectivament, que corresponen als vèrtexs del primer nivell de l'arbre de substitucions, \mathcal{T}_s de la Figura 3.3.

Cal obtenir doncs, cicles de longitud k , $k \geq 23$ a $\Gamma_\Delta(3)$. Comencem per la construcció del cicle de 23 vèrtexs que no existia en el cas del digraf $\Gamma_3(3)$.

Es parteix de la construcció obtinguda en el cas anterior: el cicle isomorf al cicle hamiltonià de $\Gamma_2(2)$ que té símbols $\{1, 2, 3\}$ i en el qual s'han substituït una de les adjacències r_1 per un camí de sis vèrtexs amb símbols $\{2, 3, 4\}$, aquest camí a la vegada conté tres adjacències r_1 , una d'aquestes adjacències més les dues que quedaven en el cicle hamiltonià de partida, es substitueixen per camins de 4, 4 i 3 vèrtexs respectivament. Aquests nous camins tindran vèrtexs amb els símbols $\{2, 4, 5\}$, $\{1, 2, 4\}$ i $\{1, 3, 4\}$. En definitiva, s'ha obtingut un cicle de 23 vèrtexs.

Per a obtenir cicles de longitud superior es parteix també del cicle isomorf al cicle hamiltonià de $\Gamma_2(2)$ amb vèrtexs de símbols $\{1, 2, 3\}$. Es substitueixen els tres arcs r_1 per camins de longitud 3, 4 o 6 amb vèrtexs que contenen els símbols $\{2, 3, 4\}$, $\{1, 2, 4\}$ i $\{1, 3, 4\}$. A continuació els tres arcs r_1 del camí que conté vèrtexs amb símbols $\{2, 3, 4\}$ es substitueixen per camins amb vèrtexs que fan servir $\{2, 4, 5\}$, $\{2, 3, 5\}$ i $\{3, 4, 5\}$ respectivament. Dos

arcs r_1 del camí amb $\{1, 2, 4\}$ es substitueixen per camins amb vèrtexs de símbols $\{1, 2, 5\}$ $\{1, 4, 5\}$ respectivament, \dots . El grau de sortida de V , un “vèrtex” de l’arbre de substitucions \mathcal{T}_s , indica el nombre d’arcs r_1 que cal substituir en el camí que conté vèrtexs amb els símbols de V . La Figura 3.4 esquematitza aquest procés.

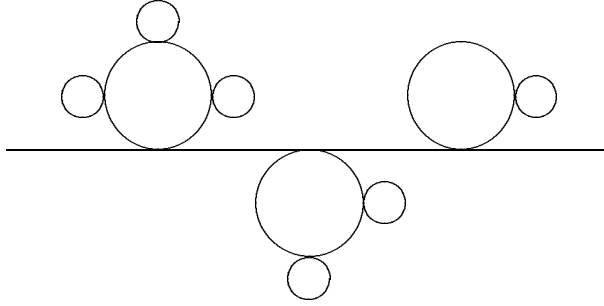


Figura 3.4: Substitució de les adjacències r_1

Notem que a $\Gamma_\Delta(3)$, hi ha $\binom{\Delta+1}{3} - 1$ adjacències r_1 que poden ser substituïdes per vèrtexs amb símbols diferents. En general per a obtenir un cicle de longitud k a $\Gamma_\Delta(3)$, es parteix del que, a partir d’ara, diem *cicle base* de $\Gamma_3(3)$. El cicle base de $\Gamma_3(3)$ és un cicle que conté totes les permutacions dels símbols $\{1, 2, 3\}$, que és l’arrel de l’arbre de substitucions, i que és isomorf al cicle hamiltonià de $\Gamma_2(2)$. El procediment que cal seguir a continuació és escriure

$$k = 6(1 + q) + r, \text{ amb } q \leq \binom{\Delta+1}{3} - 1, \text{ i, } r < 6$$

i distingir els següents casos:

- Cas $r = 0, 3, 4$. A partir del cicle base, es substitueixen q adjacències r_1 i un dels arcs r_1 que encara queden es substitueix per un camí amb r vèrtexs.
- Cas $r = 1, 2$. Notem que en aquest cas és $q < \binom{\Delta+1}{3} - 1$. Ara es substitueixen $q - 1$ arcs r_1 del cicle base i es substitueixen dos dels arcs r_1 que encara queden per dos camins de longitud total $6 + r$.
- Cas $r = 5$. Es substitueixen també $q - 1$ arcs r_1 del cicle base i es substitueixen tres arcs r_1 per camins de 4, 4 i 3 vèrtexs. Aquesta substitució és possible sempre, excepte quan $(\binom{\Delta+1}{3} - 1) - (q - 1) = 2$, això és quan $k = 6\binom{\Delta+1}{3} - 1 = |\Gamma_\Delta(3)| - 1$.

Els camins es van substituïnt d'acord amb l'ordenació que dona l'arbre de substitucions \mathcal{T}_s . El següent enunciat demostra, per als digrafs de prefix-cicle, l'existència de cicles de qualsevol longitud, excepte l'ordre menys u.

Teorema 3 *Per a $\Delta \geq D$, el digraf $\Gamma_\Delta(D)$ és quasi pancíclíc.*

Demostració. El teorema 1 assegura l'existència de cicles a $\Gamma_\Delta(D)$, de longitud 2 fins a $D + 1$. Per a demostrar que existeixen cicles llargs es fa servir inducció sobre D . Ja s'ha comprovat anteriorment que l'enunciat del teorema és cert per a $D = 3$, i suposem que també ho és per $\Gamma_\Delta(D - 1)$. Cal provar doncs, que existeixen camins de longitud k , amb $k = |\Gamma_\Delta(D - 1)| - 1$ o $|\Gamma_\Delta(D - 1)| < k \leq |\Gamma_\Delta(D)| - 2$. Com que el digraf $\Gamma_\Delta(D)$ és hamiltonià, el cas $k = |\Gamma_\Delta(D)|$ està resolt. Sense pèrdua de generalitat, perquè el digraf és vèrtex simètric, es farà referència al vèrtex identitat: $I = 12 \dots D$.

- Cas $k = |\Gamma_{D-1}(D - 1)| - 1$. El camí

$$12 \dots D \rightarrow 23 \dots D(D + 1) \Rightarrow 3 \dots D(D + 1)2 \rightarrow$$

$$4 \dots D(D + 1)21 \rightarrow 4 \dots D(D + 1)12 \rightarrow \dots \rightarrow (D + 1)12 \dots (D - 1).$$

té $D + 2$ vèrtexs i una adjacència de tipus r_1 que pot ser substituïda per un camí amb $|\Gamma_{D-1}(D - 1)| - D - 3$ vèrtexs i que contingui els símbols $\{1, 3, \dots, D, (D + 1)\}$, per obtenir un camí amb $|\Gamma_{D-1}(D - 1)| - 1$ vèrtexs.

- Cas $|\Gamma_{D-1}(D - 1)| < k \leq |\Gamma_\Delta(D)|$ and $k \neq |\Gamma_\Delta(D)| - 1$. Es parteix del cicle base de $\Gamma_D(D)$ que és isomorf al camí hamiltonià del subdigraf $\Gamma_{D-1}(D - 1)$:

$$12 \dots D \rightarrow \dots \rightarrow D1 \dots (D - 1). \quad (3.1)$$

El lema 2 assegura que el camí (3.1) té D adjacències r_1 que poden ser substituïdes per camins de longitud $3, 4, \dots, |\Gamma_\Delta(D - 1)| - 2$, i $|\Gamma_\Delta(D - 1)|$, seguint l'esquema donat pel corresponent arbre de substitució, \mathcal{T}_s . En total hi ha $\binom{\Delta+1}{D} - 1$ adjacències r_1 per substituir. A més $|\Gamma_\Delta(D)| = |\Gamma_{D-1}(D - 1)| \binom{\Delta+1}{D}$. Per a obtenir un cicle de longitud k , es fa la divisió entera:

$$k = |\Gamma_{D-1}(D - 1)|(q + 1) + r$$

amb $q \leq \binom{\Delta+1}{D} - 1$, i $r < |\Gamma_{D-1}(D - 1)|$, i es consideren els següents casos:

- Cas $r = 0, D, D + 1, \dots, |\Gamma_{D-1}(D-1)| - 2$. Es substitueixen q adjacències r_1 en el cicle base, per q camins hamiltonians en subdigrafs isomorfs a $\Gamma_{D-1}(D-1)$, i una adjacència r_1 , de les que encara no han estat utilitzades, es a substitueix amb els r vèrtexs que falten.
- Cas $r = 1, 2, \dots, D - 1$. En aquest cas $q < \binom{\Delta+1}{D} - 1$. Es substitueixen $q - 1$ adjacències r_1 per camins hamiltonians en $q - 1$ subdigrafs diferents de $\Gamma_{D-1}(D-1)$ i dues adjacències r_1 es substitueixen per $|\Gamma_{D-1}(D-1)| + r$ vèrtexs. Aquesta substitució es pot efectuar sempre perquè $|\Gamma_{D-1}(D-1)| + r = a + b$ amb $D < a, b < |\Gamma_{D-1}(D-1)| - 1$ i sempre hi ha, com a mínim dos arcs per a substituir: $\binom{\Delta+1}{D} - 1 - (q - 1) \geq 2$.
- Cas $r = |\Gamma_{D-1}(D-1)| - 1$. Es substitueixen $q - 1$ adjacències r_1 per camins hamiltonians. Encara cal afegir $2|\Gamma_{D-1}(D-1)| - 1$ vèrtexs. S'han de fer servir tres adjacències r_1 , per a assegurar que cada adjacència es pot substituir per menys de $|\Gamma_{D-1}(D-1)| - 1$ vèrtexs. Aquest procés es pot realitzar sempre que $\binom{\Delta+1}{D} - 1 - (q - 1) \geq 3$. Quan $\binom{\Delta+1}{D} - 1 - (q - 1) = 2$ llavors, $q = \binom{\Delta+1}{D} - 2$ i no es pot obtenir un cicle de longitud igual a

$$k = |\Gamma_{D-1}(D-1)| \binom{\Delta+1}{D} - 1 = |\Gamma_{\Delta}(D)| - 1.$$

□

3.2 Descomposició en cicles disjunts

Per a demostrar que el digraf de prefix-cicle es pot descomposar en cicles vèrtexs-disjunts de la mateixa longitud, es farà servir l'estructura recursiva dels digrafs de prefix-cicle (secció 2.6). Distingirem també entre cicles curts, longitud $k \leq D + 1$, i cicles llargs i els casos $\Delta = D$ i $\Delta > D$. Vegeu [16].

3.2.1 Descomposició en cicles curts.

Considerem primer el cas en el qual es descomposa el digraf en cicles de longitud $k \leq D + 1$. En els lemes 4 i 5 estudiem la descomposició del digraf de prefix-cicle de diàmetre $D = 3$ que s'utilitzarà en la demostració per inducció del cas general.

$\Gamma_3(3)$

Lema 4 $\Gamma_3(3)$ es pot descomposar en unió disjunta de $\frac{24}{k}$ cicles de longitud k amb $2 \leq k \leq 4$.

Demostració. Recordem que $\Gamma_3(3)$ consta de 4 subdígrafs cadascun dels quals és isomorf a $\Gamma_2(2)$.

- $k = 2$: $\Gamma_3(3)$ descomposa en unió disjunta de 12 dígons de la forma:

$$\begin{array}{lll} 123 \rightarrow 132, & 213 \rightarrow 231, & 312 \rightarrow 321; \\ 124 \rightarrow 142, & 214 \rightarrow 241, & 412 \rightarrow 421; \\ 134 \rightarrow 143, & 314 \rightarrow 341, & 413 \rightarrow 431; \\ 234 \rightarrow 243, & 324 \rightarrow 342, & 423 \rightarrow 432. \end{array}$$

- $k = 3$: En aquest cas cal notar que en cada subdígraf del tipus $\Gamma_2(2)$, hi ha dos triangles de la forma:

$$\begin{array}{ll} 123 \Rightarrow 231 \Rightarrow 312, & 132 \Rightarrow 321 \Rightarrow 213; \\ 234 \Rightarrow 342 \Rightarrow 423, & 243 \Rightarrow 432 \Rightarrow 324; \\ 341 \Rightarrow 413 \Rightarrow 134, & 314 \Rightarrow 143 \Rightarrow 431; \\ 412 \Rightarrow 124 \Rightarrow 241, & 421 \Rightarrow 214 \Rightarrow 142. \end{array}$$

- $k = 4$: S'aplica a cadascun dels sis vèrtexs d'un dels subdígrafs isomorfs a $\Gamma_2(2)$, adjacències tipus shift per a obtenir la descomposició de $\Gamma_3(3)$ en sis cicles de longitud 4.

$$\begin{array}{ll} 123 \rightarrow 234 \rightarrow 341 \rightarrow 412, & 132 \rightarrow 324 \rightarrow 241 \rightarrow 413; \\ 213 \rightarrow 134 \rightarrow 342 \rightarrow 421, & 231 \rightarrow 314 \rightarrow 142 \rightarrow 423; \\ 312 \rightarrow 124 \rightarrow 243 \rightarrow 431, & 321 \rightarrow 214 \rightarrow 143 \rightarrow 432. \end{array}$$

□

 $\Gamma_\Delta(3)$

Lema 5 $\Gamma_\Delta(3)$ es pot descomposar en unió disjunta de $\frac{(\Delta+1)\Delta(\Delta-1)}{k}$ cicles de longitud k amb $2 \leq k < 4$.

Demostració. Recordem que $\Gamma_\Delta(3)$ es pot descomposar en $\binom{\Delta+1}{3}$ subdígrafs isomorfs a $\Gamma_2(2)$. La descomposició en cicles disjunts de longituds 2 i 3, s'obté utilitzant el mateix raonament que en el cas anterior, és a dir comptant el nombre de dígons o de triangles a cada còpia. Per a $k = 4$, no sempre és possible. Per exemple si $\Delta = 10$, llavors $|\Gamma_\Delta(3)| = 11 \cdot 10 \cdot 9$ que no és divisible per 4.

□

$\Gamma_D(D)$

Passem ja a una primera generalització amb l'estudi de la descomposició en cicles de $\Gamma_D(D)$.

Lema 6 *El dígraf $\Gamma_D(D)$ es pot descomposar en unió disjunta de $\frac{(D+1)!}{k}$ cicles de longitud k amb $2 \leq k \leq D+1$.*

Demostració.

La demostració es fa per inducció sobre el diàmetre. Sabem que el lema es compleix per a $D = 3$, suposem que $\Gamma_{D-1}(D-1)$ es pot descomposar en unió disjunta de $\frac{D!}{k}$ cicles de longitud k amb $2 \leq k \leq D$.

Com que $\Gamma_D(D)$ consta de $D+1$ subdígrafs isomorfs a $\Gamma_{D-1}(D-1)$, resulta que $\Gamma_D(D)$ es pot descomposar en unió disjunta de $(D+1)\frac{D!}{k} = \frac{(D+1)!}{k}$ cicles de longitud k , per $2 \leq k < D$. Per a descomposar $\Gamma_D(D)$ en cicles de longitud $D+1$ es fa de la forma següent: a cadascun dels $D!$ vèrtexs d'un dels subdígrafs isomorfs a $\Gamma_{D-1}(D-1)$ se li aplica successivament $D+1$ adjacències tipus shift de la mateixa forma que al teorema 1, expressió (2.1), i s'obtenen així $D!$ cicles de longitud $D+1$.

□

Exemple

Per a descomposar $\Gamma_4(4)$ en cicles de longitud 5, es considera un dels subdígrafs isomorfs a $\Gamma_3(3)$, per exemple el que utilitza els símbols $\{1, 2, 3, 4\}$, i per a cadascun dels seus $24 = 4!$ vèrtexs es construeix el cicle de tipus shift:

$$\begin{array}{cccccc} 1234 & \rightarrow & 2345 & \rightarrow & 3451 & \rightarrow & 4512 & \rightarrow & 5123. \\ 1243 & \rightarrow & 2435 & \rightarrow & 4351 & \rightarrow & 3512 & \rightarrow & 5124. \\ & & \vdots & & & & & & \\ 4321 & \rightarrow & 3215 & \rightarrow & 2154 & \rightarrow & 1543 & \rightarrow & 5432. \end{array}$$

‡

 $\Gamma_\Delta(D)$

En canvi, en estudiar el cas $\Delta > D$, només es pot assegurar la descomposició del dígraf en cicles disjunts de longituds $k = 2, \dots, D$.

Lema 7 *El dígraf $\Gamma_\Delta(D)$, amb $\Delta > D$, es pot descomposar en unió disjunta de $\frac{(\Delta+1)_D}{k}$ cicles de longitud k amb $2 \leq k \leq D$.*

Demostració. Cal tenir en compte que $\Gamma_{\Delta}(D)$ es pot descomposar en $\binom{\Delta+1}{D}$ subdígrafs isomorfs a $\Gamma_{D-1}(D-1)$. Com que $\Gamma_{D-1}(D-1)$ es pot descomposar en $\frac{D!}{k}$ cicles disjunts, on $2 \leq k \leq D$, resulta que $\Gamma_{\Delta}(D)$ es pot descomposar en $\binom{\Delta+1}{D} \frac{D!}{k}$ cicles disjunts de longitud k amb $2 \leq k \leq D$. \square

3.2.2 Descomposició en cicles llargs.

L'objectiu és estudiar en quins casos és possible descomposar $\Gamma_{\Delta}(D)$ en unió disjunta de cicles de longitud k , ara per $k > D + 1$. Un cop més s'estudia detalladament el cas corresponent a $D = 3$

$\Gamma_3(3)$ es pot descomposar com a unió disjunta de:

- quatre cicles de longitud 6.

Només cal considerar els cicles isomorfs a cicles hamiltonians en cadascun dels quatre subdígrafs isomorfs a $\Gamma_2(2)$.

$$\begin{aligned} C_6^1 &: 123 \rightarrow 132 \Rightarrow 321 \Rightarrow 213 \rightarrow 231 \Rightarrow 312. \\ C_6^2 &: 234 \rightarrow 243 \Rightarrow 432 \Rightarrow 324 \rightarrow 342 \Rightarrow 423. \\ C_6^3 &: 341 \rightarrow 314 \Rightarrow 143 \Rightarrow 431 \rightarrow 413 \Rightarrow 134. \\ C_6^4 &: 412 \rightarrow 421 \Rightarrow 214 \Rightarrow 142 \rightarrow 124 \Rightarrow 241. \end{aligned}$$

- tres cicles de longitud 8.

Es connecten cicles de longitud 4, dos a dos.

$$\begin{aligned} C_8^1 &: 123 \rightarrow 234 \rightarrow 341 \Rightarrow 413 \rightarrow 132 \rightarrow 324 \rightarrow 241 \rightarrow 412. \\ C_8^2 &: 231 \rightarrow 314 \rightarrow 142 \Rightarrow 421 \rightarrow 213 \rightarrow 134 \rightarrow 342 \rightarrow 423. \\ C_8^3 &: 312 \rightarrow 124 \rightarrow 243 \Rightarrow 432 \Rightarrow 321 \rightarrow 214 \rightarrow 143 \rightarrow 431. \end{aligned}$$

- dos cicles de longitud 12.

Es connecten dos a dos els cicles de longitud 6 obtinguts anteriorment.

$$\begin{aligned} C_{12}^1 &: 123 \rightarrow 132 \rightarrow 324 \rightarrow 342 \Rightarrow 423 \Rightarrow 234 \rightarrow \\ &\rightarrow 243 \Rightarrow 432 \rightarrow 321 \Rightarrow 213 \rightarrow 231 \Rightarrow 312. \\ C_{12}^2 &: 214 \rightarrow 241 \rightarrow 413 \rightarrow 431 \Rightarrow 314 \Rightarrow 143 \rightarrow \\ &\rightarrow 134 \Rightarrow 341 \rightarrow 412 \Rightarrow 124 \rightarrow 142 \Rightarrow 421. \end{aligned}$$

Per a demostrar que és possible descomposar $\Gamma_D(D)$ en unió disjunta de cicles de totes les mides possibles es distingiran dos casos segons que la longitud, k , dels cicles contingui el factor $D + 1$ o no. En el cas que $D + 1$ no sigui factor de k , es farà servir l'estructura jeràrquica de dígraf, mentre que si $k = (D + 1)q$, es connectaran adequadament q cicles de longitud $D + 1$ del tipus obtingut a l'expressió (2.1) al teorema 1.

Teorema 4 $\Gamma_D(D)$ es pot descomposar en unió disjunta de $\frac{(D+1)!}{k}$ cicles de longitud k , on k divideix a $(D+1)!$.

Demostració. Ja hem comprovat que per a $D = 3$, el digraf de prefix-cicle $\Gamma_3(3)$ es pot descomposar com a unió disjunta de cicles de longitud $k = 2, 3, 4$ –cicles curts– i $k = 6, 8, 12, 24$ –cicles llargs– que són tots els divisors de $|\Gamma_3(3)| = 3!$. Suposem que $\Gamma_{D-1}(D-1)$ es pot descomposar en unió disjunta de $\frac{D!}{k}$ cicles de longitud k , on k divideix $D!$. Llavors com que $\Gamma_D(D)$ es pot descomposar en $D+1$ subdigrads isomorfs a $\Gamma_{D-1}(D-1)$, resulta que $\Gamma_D(D)$ pot descomposar-se en $(D+1)\frac{D!}{k} = \frac{(D+1)!}{k}$ cicles de longitud k , on k divideix $D!$. Falta estudiar què passa quan $k = (D+1)q$, $q|D!$. Per a això és necessari el següent lema que mostra la forma de connectar cicles de tipus shift per a obtenir cicles de longitud superior.

Lema 8 Per a cada cicle curt $C_{r!}$, amb $r! = D - r + 1$, en el digraf de prefix-cicle $\Gamma_D(D)$, existeix un cicle de longitud $k = (D+1)r!$.

Demostració. Considerem els vèrtexs del cicle curt $C_{r!}$, amb $r! = D - r + 1$ i $2 \leq r! \leq D$:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_1 = x_1 \dots x_{r-1} | x_r \dots x_D &\rightarrow \mathbf{x}_2 = x_1 \dots x_{r-1} | x_{r+1} \dots x_D x_r \rightarrow \dots \\ \dots &\rightarrow \mathbf{x}_{r!} = x_1 \dots x_{r-1} | x_D x_r x_{r+1} \dots x_{D-1} \end{aligned}$$

on $1 \leq r < D$. Per a cadascun d'aquests vèrtexs, que pertanyen a un mateix subdigraf isomorf a $\Gamma_{D-1}(D-1)$, construïm cada cicle shift com els obtinguts al teorema 1, expressió (2.1). Llavors és possible connectar els $r!$ cicles tipus shift i obtenir doncs un cicle de longitud $(D+1)r!$.

Denotem \mathbf{x}_i^j , amb $1 \leq i \leq r!$ i $1 \leq j \leq D+1$ el vèrtex que s'obté a l'aplicar l'adjacència de tipus shift $j-1$ vegades al vèrtex \mathbf{x}_i del cicle $C_{r!}$. És fàcil comprovar que el vèrtex \mathbf{x}_i^{r+1} és adjacent cap a \mathbf{x}_{i-1}^{r+2} per a $1 < i \leq r!$, mentre que \mathbf{x}_1^{r+1} és adjacent cap a $\mathbf{x}_{r!}^{r+2}$ ($r+2$ mòdul $D+1$). Notem que el fet que les adjacències es produeixin entre vèrtexs consecutius assegura que es puguin connectar correctament els $r!$ cicles de longitud $D+1$. □

Lema 9 Per a cada cicle C_q , amb $q|D!$, en el digraf de prefix-cicle $\Gamma_D(D)$ existeix un cicle de longitud $k = (D+1)q$.

Demostració. Com que un cicle de longitud q , $q|D!$, es pot obtenir connectant cicles curts es pot aplicar el lema 8 per a obtenir cicles de longitud $k = (D+1)q$.

□

Finalment es pot doncs, acabar de demostrar el teorema 4. Com que per hipòtesi d'inducció, cada digraf $\Gamma_{D-1}(D-1)$ es pot descomposar en unió disjunta de cicles de longitud qualsevol divisor de $D!$ i com que els cicles de tipus shift corresponents a vèrtexs diferents són disjunts es conclou que el digraf de prefix-cicle $\Gamma_D(D)$ es pot descomposar en unió disjunta de cicles de longitud $(D+1)k$, on k divideix $D!$, és a dir, cicles de longitud un divisor de $(D+1)!$.

□

Exemple $\Gamma_4(4)$ es pot descomposar en unió disjunta de $\frac{5!}{k}$ cicles de longitud k , per a

- $k = 2, 3, 4, 5$ cicles curts
- $k = 6, 8, 12, 24$ descomposant cada $\Gamma_3(3)$ en cicles d'aquesta longitud.
- $k = 2(D+1) = 10$ connectant dos a dos cicles shift de longitud 5. Els dos cicles shift es construeixen a partir d'un cicle de longitud 2, $1234 \rightarrow 1243$.

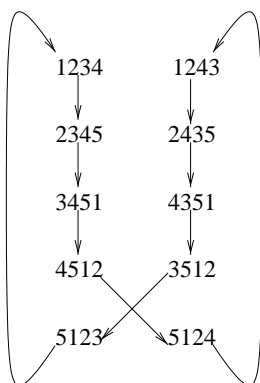


Figura 3.5: Un dels dotze cicles de 10 vèrtexs

- $k = 3(D+1) = 15$ connectant tres cicles shift de longitud 5. Els tres cicles shift es construeixen a partir dels cicle de longitud 3, per exemple: $1234 \rightarrow 1342 \rightarrow 1423$.

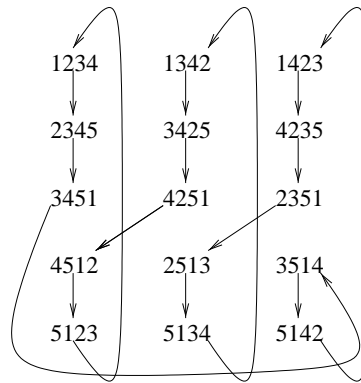


Figura 3.6: Un dels vuit cicles de 15 vèrtexs

- $k = 4(D + 1) = 20$ connectant quatre cicles shift de longitud 5. Els quatre cicles shift es construeixen a partir dels cicles de longitud 4, per exemple: $1234 \rightarrow 2341 \rightarrow 3412 \rightarrow 4123$.

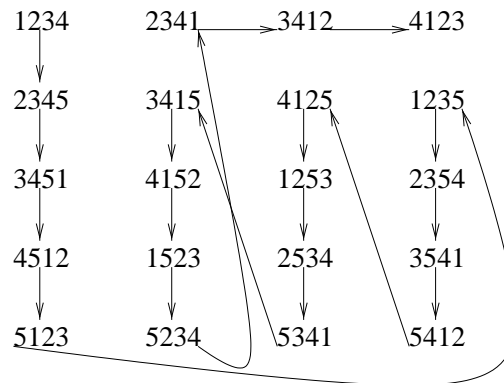


Figura 3.7: Un dels sis cicles de 20 vèrtexs

- $k = 6(D + 1) = 30$ a partir d'un cicle de longitud 6 a $\Gamma_3(3)$, s'obté el corresponent cicle isomorf a $\Gamma_4(4)$, per a cada vèrtex s'escriu el cicle de shift. A la Figura 3.8 el cicle de $\Gamma_3(3)$ apareix encerclat i seguint les direccions dels arcs s'obté el cicle de longitud 30 a $\Gamma_4(4)$.

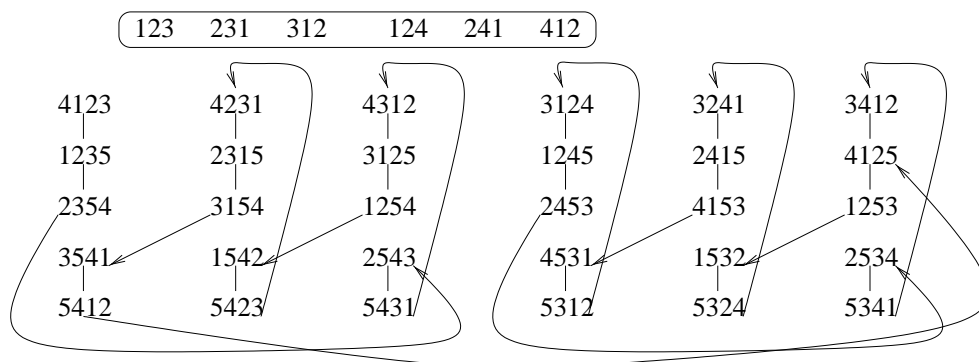


Figura 3.8: Un dels quatre cicles de 30 vèrtexs

- $k = 8(D + 1) = 40$

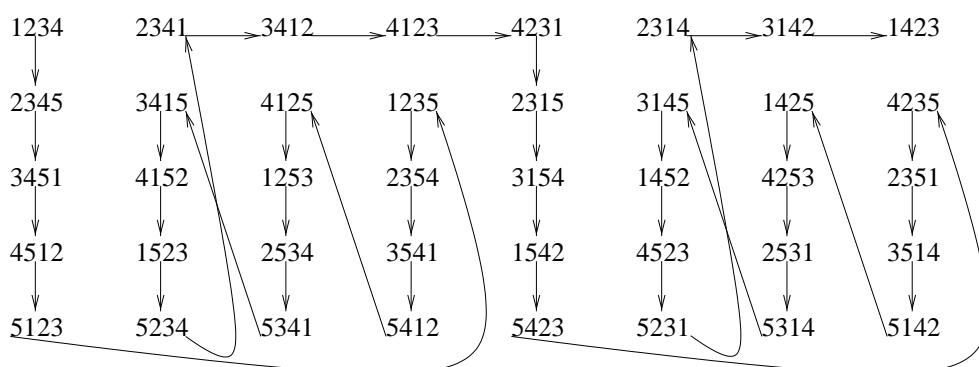


Figura 3.9: Un dels tres cicles de 40 vèrtexs

- $k = 12(D + 1) = 60$ es connecten dos a dos els cicles de longitud 30.
- $k = 24(D + 1) = 120$ que correspon al cicle hamiltonià de $\Gamma_4(4)$.

Estudiem ara la descomposició de $\Gamma_\Delta(D)$ amb $\Delta > D$ en cicles vèrtexs-disjunts. En el teorema 5, es dona la descomposició del digraf en cicles que tenen longitud qualsevol divisor de $D!$. I en el teorema 6 es prova la descomposició en cicles de longitud $kD!$ on k és qualsevol divisor de $\binom{\Delta+1}{D}$. En aquest segon cas es tornarà a utilitzar l'arbre de substitucions definit a la pàgina 36.

Teorema 5 *El digraf $\Gamma_\Delta(D)$ es pot descomposar en unió disjunta de $\frac{(\Delta + 1)_D}{k}$ cicles de longitud k sempre que k divideixi a $D!$.*

Demostració. Com que $\Gamma_\Delta(D)$ es pot descomposar en $\binom{\Delta+1}{D}$ subdígrafs isomorfs a $\Gamma_{D-1}(D-1)$ i cadascun d'ells es descomposa en la unió de $\frac{D!}{k}$ cicles vèrtexs disjunts de longitud k , on k divideix $D!$, resulta

$$\binom{\Delta+1}{D} \frac{D!}{k} = \frac{(\Delta+1)}{(\Delta+1-D)!} \frac{D!}{k} = \frac{(\Delta+1)_D}{k}$$

□

Ara volem demostrar que en el dígraf $\Gamma_\Delta(D)$, dos cicles qualssevol de longitud $D!$, isomorfs a cicles hamiltonians del subdígraf $\Gamma_{D-1}(D-1)$, es poden connectar per a obtenir un nou cicle de longitud el doble. L'única condició és que els dos cicles tinguin els mateixos símbols excepte un.

Lema 10 *Considerem els vèrtexs $\mathbf{x} = x_1x_2 \dots x_{D-1}x_D$ i $\mathbf{x}' = x_2 \dots x_{D-1}x_Dy$ del dígraf $\Gamma_\Delta(D)$ i $x_1 \neq y$. Llavors existeix un cicle de longitud $2D!$ els vèrtexs del qual són totes les permutacions dels símbols $x_1, x_2, \dots, x_{D-1}, x_D$ i x_2, x_3, \dots, x_D, y*

Demostració. Sabem que existeix un cicle, C_1 de longitud $D!$ a $\Gamma_\Delta(D)$ que és isomorf a un cicle hamiltonià de $\Gamma_{D-1}(D-1)$. Aquest cicle conté totes les permutacions dels símbols x_1, x_2, \dots, x_{D-1} i a més conté D adjacències de tipus r_1 . Una d'aquestes adjacències té el primer símbol igual a x_1 . Aquesta adjacència pot ser substituïda pel cicle també de longitud $D!$, C_2 que comença amb el vèrtex $z_2 \dots z_Dy$ i acaba a $yz_2 \dots z_D$:

$$\begin{array}{ccccccc} \dots & \rightarrow & x_1z_2 \dots z_D & \Rightarrow & z_2 \dots z_Dx_1 & \rightarrow & \dots & (C_1) \\ & & \downarrow & & \uparrow & & & \\ & & z_2 \dots z_Dy & \dots & yz_2 \dots z_D & & & (C_2) \end{array}$$

amb $z_2 \dots z_D \in \{x_2, \dots, x_D\}$. Hem obtingut un cicle de longitud $2D!$ connectant dos cicles adequadament.

□

El resultat obtingut en descomposar $\Gamma_\Delta(D)$ en cicles disjunts de longitud més gran que $D!$ s'enuncia en el següent teorema.

Teorema 6 *El dígraf de prefix-cicle $\Gamma_\Delta(D)$, $\Delta > D$, es pot descomposar en la unió de cicles vèrtex-disjunts de longitud $kD!$ on k és qualsevol divisor de $\binom{\Delta+1}{D}$.*

Demostració. Només cal descriure com escollir un conjunt de k , amb $k | \binom{\Delta+1}{D}$, vèrtexs d'entre els $\binom{\Delta+1}{D}$, i llavors aplicar el lema 10. Aquest procés és equivalent a escollir conjunts de k vèrtexs en l'arbre de substitució \mathcal{T}_s corresponent al dígraf $\Gamma_\Delta(D)$, de forma que dos vèrtexs difereixin en un símbol. Aquest procés es pot realitzar sempre, només cal observar que a \mathcal{T}_s :

- vèrtexs amb el mateix pare difereixen en un símbol,
- tots els vèrtexs d'un mateix nivell poden ordenar-se de forma que vèrtexs consecutius difereixin en un símbol,
- un vèrtex i els seus “fills” difereixen també en un símbol.

□

3.3 Recobriment dels vèrtexs de $\Gamma_{\Delta}(D)$

Una qualitat que pot mostrar una xarxa d'interconnexió és la possibilitat de ser descomposada en conjunts de nodes connectats de forma que sigui possible la distribució dins de la mateixa xarxa, de tasques de diferent grandària. En termes del digraf que modela una xarxa d'interconnexió aquest problema es converteix en trobar una descomposició del digraf en camins vèrtex-disjunts que segurament seran de diferents llargades. És a dir, trobar un recobriment del digraf. Vegeu [14].

Per a obtenir la descomposició del digraf $\Gamma_{\Delta}(D)$, $\Delta \geq D$, en camins vèrtexs disjunts es farà servir l'arbre de shift \mathbb{T} , que tornarà a ser d'utilitat en el capítol 4, on s'estudien problemes de disseminació de la informació en els digrafs de prefix-cicle.

L'arbre \mathbb{T} és una forma ordenada d'escollir un representant de cadascun dels subdigrafs isomorfs a $\Gamma_{D-1}(D-1)$ en què es pot descompondre $\Gamma_{\Delta}(D)$. En primer lloc es defineix l'arbre \mathbb{T} . A continuació s'obtenen camins disjunts en l'arbre i, finalment, fent ús de la recursivitat dels digrafs de prefix-cicle, s'obté la descomposició en camins el nombre de vèrtexs dels quals és múltiple de $|\Gamma_{D-1}(D-1)| = D!$.

L'arbre de shift es defineix de forma constructiva en el següent lema.

Lema 11 *Donat el digraf de prefix-cicle $\Gamma_{\Delta}(D)$ amb $\Delta \geq D$, i un vèrtex qualsevol \mathbf{x} , existeix un arbre \mathbb{T} de profunditat D , grau màxim $\Delta + 1 - D$, $\binom{\Delta+1}{D}$ vèrtexs i d'arrel \mathbf{x} i de forma que totes les adjacències són de tipus shift.*

Demostració. Sense pèrdua de generalitat, escollim $\mathbf{x} = 12 \cdots D$ com a arrel de l'arbre \mathbb{T} . Les adjacències que s'utilitzen per a construir l'arbre són de tipus shift i el procés es descriu per a cada nivell de profunditat de l'arbre:

Nivell 1: \mathbf{x} és adjacent als $\Delta + 1 - D$ vèrtexs $\mathbf{x}_{s_1}^1 = 23 \cdots Ds_1$, $D + 1 \leq s_1 \leq \Delta + 1$. El superíndex de $\mathbf{x}_{s_1}^1$ correspon al nivell i el subíndex és l'últim símbol del vèrtex.

Nivell 2: Els vèrtexs d'aquest nivell s'escriuen $\mathbf{x}_{s_1 s_2}^2 = 3 \cdots D s_1 s_2$. Són adjacents des de $\mathbf{x}_{s_1}^1$ i s_2 és 1 o és un símbol de $\{D+1, \dots, \Delta, \Delta+1\} \setminus \{s_1\}$ tal que $s_2 > s_1$. En aquest nivell hi ha:

$\Delta + 1 - D$ vèrtexs acabats en 1.

$\binom{\Delta+1-D}{2}$ acabats en símbols de $\{D+1, \dots, \Delta, \Delta+1\}$.

El nombre total és $\binom{\Delta+1-D}{1} + \binom{\Delta+1-D}{2} = \binom{\Delta+2-D}{2}$.

Dos vèrtexs qualssevol d'aquest nivell difereixen en un símbol.

Nivell 3: Els vèrtexs $\mathbf{x}_{s_1 s_2 s_3}^3 = 4 \dots D s_1 s_2 s_3$ són adjacents des de $\mathbf{x}_{s_1 s_2}^2$. L'adjacència de tipus shift, consisteix en afegir s_3 , que és igual a 2 o a un símbol de $\{D+1, \dots, \Delta, \Delta+1\} \setminus \{s_1, s_2\}$ de forma que $s_1 < s_2 < s_3$ o $s_1 < s_3$ si $s_2 = 1$. Hi ha:

$\binom{\Delta+2-D}{2}$ vèrtexs amb $s_3 = 2$.

$\binom{\Delta+1-D}{2}$ vèrtexs amb $s_2 = 1$ i $s_1 < s_3$.

$\binom{\Delta+1-D}{3}$ vèrtexs amb $s_1 < s_2 < s_3$:

El total de vèrtexs en aquest nivell és $\binom{\Delta+2-D}{2} + \binom{\Delta+1-D}{2} + \binom{\Delta+1-D}{3} = \binom{\Delta+3-D}{3}$.

Nivell k: Els vèrtexs són de la forma $\mathbf{x}_{s_1 s_2 \dots s_k}^k = (k+1) \cdots D s_1 s_2 \cdots s_k$ i són adjacents des de vèrtexs del nivell $k-1$, $\mathbf{x}_{s_1 s_2 \dots s_{k-1}}^{k-1}$ amb s_k igual a $k-1$ o bé $s_1 < s_2 < \dots < s_{k-1} < s_k$ excepte per aquells $s_j = j-1$, $j = 2 \dots k-1$. Hi ha :

$\binom{\Delta+(k-1)-D}{k-1}$ vèrtexs amb $s_k = k-1$.

$\binom{\Delta+1-D}{k}$ vèrtexs amb $D+1 \leq s_1 < \dots < s_k \leq \Delta+1$.

$\binom{\Delta+1-D}{k-1}$ vèrtexs amb $D+1 \leq s_1 < \dots < s_{i-1} < s_{i+1} < \dots < s_k \leq \Delta+1$ i $s_i = i-1$.

$\binom{\Delta+1-D}{k-2}$ vèrtexs amb $D+1 \leq s_1 < \dots < s_{i-1} < s_{i+1} \dots s_{j-1} < s_{j+1} < \dots < s_k \leq \Delta+1$ i $s_i = i-1$, $s_j = j-1$.

...

$\binom{\Delta+1-D}{1}$ vèrtexs amb $s_i = i-1$ per a $i = 2 \dots k$.

El total de vèrtexs al nivell k és:

$$\binom{\Delta+(k-1)-D}{k-1} + \sum_{j=1}^{k-1} \binom{\Delta+1-D}{j} = \binom{\Delta+k-D}{k}$$

El procés acaba al nivell D , en el qual hi ha $\binom{\Delta}{D}$ vèrtexs, el nombre total de vèrtexs a \mathbb{T} és $\sum_{k=0}^D \binom{\Delta+k-D}{k} = \binom{\Delta+1}{D}$.

Com que per construcció, a \mathbb{T} no hi ha dos vèrtexs amb els mateixos símbols tenim un representant de cada possible conjunt de D símbols escollit d'un alfabet de $\Delta + 1$ elements.

Ja que $|\Gamma_{\Delta}(D)| = \binom{\Delta+1}{D} |\Gamma_{D-1}(D-1)|$, en l'arbre \mathbb{T} hi ha un representant de cadascun dels $\binom{\Delta+1}{D}$ subdigràfs isomorfs a $\Gamma_{D-1}(D-1)$. \square

Un exemple és a la Figura 3.10.

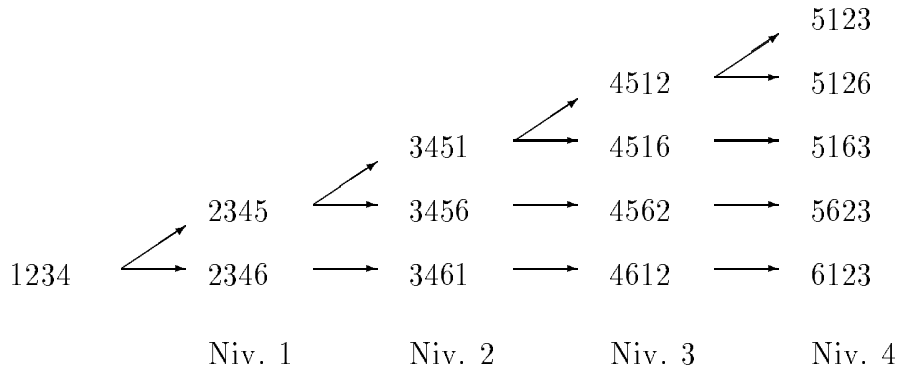


Figura 3.10: L'arbre de shift per a $\Gamma_5(4)$

A partir de l'estructura que s'ha trobat, és possible definir uns camins en l'arbre \mathbb{T} , que són vèrtexs disjunts.

L'arbre \mathbb{T} definit anteriorment conté els camins vèrtexs disjunts següents:

- 1 camí de $D + 1$ vèrtexs.

Es comença pel nivell 0, el camí, que en realitat és un cicle, és de la forma:

$$12 \dots D \rightarrow 2 \dots Da_1 \rightarrow \dots \rightarrow a_1 12 \dots (D-1).$$

on $a_1 = D + 1$.

- $\Delta - D$ camins de D vèrtexs.

Es comença pel nivell 1, es fan servir tots els vèrtexs d'aquest nivell excepte el que s'ha utilitzat anteriorment. Els camins són de la forma:

$$2 \dots Da_1 \rightarrow 3 \dots Da_1 1 \rightarrow 4 \dots Da_1 12 \rightarrow \dots \rightarrow a_1 12 \dots (D-1).$$

on $a_1 \in \{D + 2, \dots, \Delta + 1\}$.

Per a comptar quants n'hi ha, es fan servir els càlculs del lema 11

$$\binom{\Delta + 1 - D}{1} - 1 = \binom{\Delta - D}{1}$$

En general, per a $k = 0 \dots D - 1$ s'obté:

$$- \binom{\Delta - D + k}{k+1} \text{ camins de } D - k \text{ vèrtexs.}$$

Es comença pel nivell $k + 1$ de l'arbre T , i es fan servir tots els vèrtexs d'aquest nivell excepte els que s'han utilitzat anteriorment. Els camins són de la forma:

$$\begin{aligned} (k + 2) \dots D a_1 \dots a_{k+1} &\rightarrow (k + 3) \dots D a_1 \dots a_{k+1} (k + 1) \rightarrow \\ &\rightarrow \dots D a_1 \dots a_{k+1} (k + 1) (k + 3) \rightarrow \dots \\ &\dots \rightarrow a_1 \dots a_{k+1} (k + 1) \dots (D - 1). \end{aligned}$$

on $a_1 \in \{D + 1, \dots, \Delta + 1\}$, $a_2, \dots, a_{k+1} \in \{D + 2, \dots, \Delta + 1\}$ i $a_1 < a_2, < \dots < a_{k+1}$.

Comptem quants n'hi ha:

$$\binom{\Delta - D + k + 1}{k + 1} - \sum_{j=0}^{k-1} \binom{\Delta - D + j}{j + 1} - 1 = \binom{\Delta - D + k}{k + 1}.$$

Observem que en qualsevol camí dels obtinguts anteriorment, dos vèrtexs adjacents tenen $D - 1$ símbols comuns.

Un cop més es fa servir l'estructura recursiva dels digrafs de prefix-cicle i l'existència de cicles hamiltonians.

En primer lloc, es consideraran cicles a $\Gamma_\Delta(D)$ que siguin isomorfs al cicle hamiltonià de $\Gamma_{D-1}(D - 1)$, és a dir els cicles que contenen totes les permutacions de D símbols diferents. Es demostrarà que dos cicles d'aquest tipus els símbols dels quals difereixin en un únic element, es poden connectar adequadament i obtenir un cicle de longitud el doble. Finalment es conclou la descomposició en camins vèrtexs-disjunts de diferents longituds del digraf de prefix-cicle.

Lema 12 *Siguin donats els vèrtexs $\mathbf{x} = x_1 x_2 \dots x_D$ i $\mathbf{x}' = x_2 x_3 \dots x_D y$ de $\Gamma_\Delta(D)$, $\Delta \geq D$, que tenen $D - 1$ símbols comuns. Aleshores existeix un cicle de longitud $2D!$ que conté tots els vèrtexs que són permutació dels símbols $\{x_1, x_2, \dots, x_{D-1}, x_D\}$ i $\{x_2, x_3, \dots, x_{D-1}, x_D\}$.*

Demostració. Es construeix el cicle isomorf al cicle hamiltonià del digraf $\Gamma_{D-1}(D-1)$ per al primer dels vèrtexs \mathbf{x} , és a dir un cicle que conté tots els vèrtexs amb símbols $\{x_1, x_2, \dots, x_{D-1}, x_D\}$. Sabem que aquest cicle conté D adjacències de tipus r_1 , lema 2, en particular n'hi ha una que és:

$$x_1 z_2 \dots z_{D-1} z_D \Rightarrow z_2 z_3 \dots z_D x_1$$

on $z_2, \dots, z_D \in \{x_2, \dots, x_{D-1}, x_D\}$.

L'adjacència r_1 es pot substituir pel cicle que conté totes les permutacions dels símbols $\{x_2, \dots, x_{D-1}, x_D, y\}$ i que comença en el vèrtex $z_2 \dots z_D y$ i acaba en $yz_2 \dots z_D$. D'aquesta manera s'obté un cicle de $2D!$ vèrtexs. \square

Teorema 7 *El digraf de prefix-cicle $\Gamma_{\Delta}(D)$, $\Delta \geq D$, es pot descomposar en la unió vèrtex disjunta de camins de diferents longituds distribuïts de la forma següent:*

$$\begin{array}{ll} 1 & \text{camí de } (D+1)D! = (D+1)! \text{ vèrtexs} \\ \binom{\Delta-D+k}{k+1} & \text{camins de } (D-k)D! \text{ vèrtexs} \end{array}$$

amb $k = 0, \dots, D-1$.

Demostració. La demostració és conseqüència de l'existència dels camins en l'arbre, \mathbb{T} , i de la possibilitat de connectar diferents cicles hamiltonians a $\Gamma_{D-1}(D-1)$, corresponents a vèrtexs que difereixen en un únic símbol, tal com s'ha provat al lema 12. \square

Exemple Recobriment dels vèrtexs de $\Gamma_6(4)$

Els camins que s'obtenen de l'arbre de shift, vegeu Figura 3.10, són:

- El camí de 5 vèrtexs: $1234 \rightarrow 2345 \rightarrow 3451 \rightarrow 4512 \rightarrow 5123$.

- Camins de 4 vèrtexs:

$$\begin{array}{l} 2346 \rightarrow 3461 \rightarrow 4612 \rightarrow 6123. \\ 2347 \rightarrow 3471 \rightarrow 4712 \rightarrow 7123. \end{array}$$

- Camins de 3 vèrtexs:

$$\begin{array}{l} 3456 \rightarrow 4562 \rightarrow 5623. \\ 3457 \rightarrow 4572 \rightarrow 5723. \\ 3467 \rightarrow 4672 \rightarrow 6723. \end{array}$$

- Camins de 2 vèrtexs:

$$\begin{array}{l} 4516 \rightarrow 5163. \quad ; \quad 4517 \rightarrow 5173. \\ 4567 \rightarrow 5673. \quad ; \quad 4617 \rightarrow 6173. \end{array}$$

- Camins de 1 vèrtex:

5126 ; 5127 ; 5167 ; 5627 ; 6127

I per tant $\Gamma_6(4)$ es pot descomposar en la unió dels següents camins:

Arbre \bar{T}		$\Gamma_{\Delta}(D)$
nombre de camins	nombre de vèrtexs	total
1	5	$5 \cdot 4! = 120$
2	4	$2 \cdot 4 \cdot 4! = 192$
3	3	$3 \cdot 3 \cdot 4! = 216$
4	2	$4 \cdot 2 \cdot 4! = 192$
5	1	$5 \cdot 4! = 120$

‡

Les següents taules sintetitzen els resultats obtinguts en aquest capítol. Pel que fa a la descomposició en cicles disjunts

Descomposició en cicles de longitud k

$\Delta = D$	$\Delta > D$
$2 \leq k \leq D + 1$ lema 6	$2 \leq k \leq D$ lema 7
$k (D + 1)!$ teorema 4	$k D!$ (teorema 5) $k = K \cdot D!$ on $K \binom{\Delta+1}{D}$ (teorema 6)

I referent a la descomposició en camins de diferents longituds

Descomposició en camins

nombre de vèrtexs	$(D + 1)!$	$(D - k)D!$, on $k = 0, \dots, D - 1$
nombre de camins	1	$\binom{\Delta - D + k}{k+1}$ (teorema 7)

Capítol 4

Difusió en el digraf de prefix–cicle

L'eficàcia de la comunicació entre els diferents processadors és un element crucial en el temps d'execució d'algorismes. En aquest sentit el resultat obtingut per Comellas i Fiol a [12] prova que entre dos vèrtexs de $\Gamma_{\Delta}(D)$ existeix un recorregut de longitud igual al diàmetre D , és a dir, el digraf de prefix–cicle és D –assolible. Des del punt de vista de la comunicació, la interpretació és que una comunicació entre dos processadors qualssevol, es pot realitzar en temps igual al diàmetre.

En aquest capítol es dóna una descripció dels problemes de comunicació que s'estudien més endavant pel digraf de prefix–cicle. Vegeu [13].

4.1 Els models de comunicació

El model que es fa servir suposa un comportament *sincrònic* de la xarxa. Això vol dir que l'algorisme de comunicació ve donat per una seqüència de passos anomenats *etapes* que s'executen simultàniament. El suposar que la xarxa és sincrònica, és habitual en la bibliografia, i afavoreix l'anàlisi teòrica dels problemes considerats. L'estudi d'altres tipus de xarxes, com ara xarxes asíncrones (ATM), òptiques, etc., no és objecte d'aquest treball.

El mode de comunicació especifica què és el que pot passar en cada etapa de la comunicació, és a dir, de quina manera els arcs o branques, es poden fer servir en cada pas. En primer lloc el mode de comunicació es pot classificar segons la forma que tenen de comunicar-se dos vèrtexs.

- *mode estàndard*. Aquest mode és també conegut amb els noms de *1-port* o *store-and-forward* i és el més estudiat. En una etapa, cada vèrtex pot enviar o rebre un i només un missatge al mateix temps

amb les següents restriccions: Enviar un missatge des d'un vèrtex a un altre— se'n diu una *crida*— pren una unitat de temps, independentment de la seva longitud. Un vèrtex només pot comunicar-se amb un vèrtex adjacent. Un vèrtex pot participar en, com a molt, una crida per unitat de temps.

- *modes dels camins vèrtex/branca disjunts* que generalitza el mode estàndard i segons el qual un vèrtex pot enviar un missatge a un altre vèrtex a través d'un camí de longitud arbitrària. L'única restricció és que els camins que es fan servir en una etapa siguin vèrtex/branca disjunts respectivament. En aquest cas s'ha d'especificar com els vèrtexs interns participen en la comunicació i si els vèrtexs dels extrems poden ser vèrtexs interns d'un altre camí. Aquest tipus de models va ser primer introduït per Farley a [21] i posteriorment per Klasing et al. a [34, 31, 32] amb algunes modificacions sobre les hipòtesis inicials de Farley. És utilitzant aquest model que hem presentat una comunicació al *Workshop on Communication* de MFCS'98, treball publicat recentment a [3]. També amb aquest model hem realitzat el treball "Scheduling calls for multicasting in tree-networks", [23] que ha estat acceptat per ser presentat a SODA'99 (ACM-SIAM Symposium on Discrete Algorithms). Aquests dos treballs s'inclouen com a apèndix al final d'aquesta tesi.

En segon lloc, el mode de comunicació ha d'especificar com s'intercanvia la informació entre dos vèrtexs x i y .

- En el model *telègraf* o *half-duplex* o *one-way*, en cada etapa un vèrtex és l'emissor del missatge i l'altre és el receptor. És a dir, la informació segueix un únic sentit.
- En el model *telèfon* o *two-way mode*, o *full-duplex*, cada vèrtex actua simultàniament com a receptor i com a emissor, de forma que en una comunicació els dos vèrtexs bescanvien la informació.

En aquest treball ens restringim al model estàndard.

4.2 La disseminació d'informació

Els problemes de disseminació d'informació són bàsicament de tres tipus: la difusió o broadcasting, l'acumulació i el gossiping i es defineixen a continuació per a un graf $\Gamma = (V, E)$.

- La *difusió* o *broadcasting* és el procés pel qual el vèrtex $\mathbf{v} \in V$ ha d'enviar la informació que té, que en direm $I(\mathbf{v})$, a la resta de vèrtexs del (di)graf (*one to all*). El vèrtex des del qual s'inicia l'algorisme se'n diu *originador*. Es defineix $b(G, \mathbf{v})$ com el mínim nombre d'etapes per a finalitzar l'algorisme de difusió, amb \mathbf{v} el vèrtex originador. L'expressió $b(G)$ indica el màxim valor de $b(G, \mathbf{v})$ per a $\mathbf{v} \in G$:

$$b(G) = \max_{\mathbf{v} \in G} b(G, \mathbf{v}).$$

- En l'*acumulació*, cada vèrtex $\mathbf{v} \in V$ coneix una part d'informació, $I(\mathbf{v})$, que és independent de totes les altres i que ha de ser enviada a un vèrtex concret, $\mathbf{v}_0 \in V$, el vèrtex *acumulador*, del (di)graf (*all to one*). Al conjunt $I(G) = \{I(\mathbf{v}) | \mathbf{v} \in V\}$, que és la unió de tots els missatges coneguts per cadascun dels vèrtexs constitueix el que se'n diu el *missatge acumulatiu* del graf. El problema és trobar una estratègia de comunicació que permeti que el vèrtex \mathbf{v}_0 aprengui el missatge acumulatiu. Es pot concloure que els processos de difusió i acumulació són equivalents i que per tant, es compleix

$$a(G) = b(G).$$

- El *gossiping* consisteix en trobar una estratègia de forma que cada vèrtex conegui el missatge acumulatiu del graf (*all to all*).

Notem que pels processos de difusió i acumulació, no és rellevant que el mode de comunicació sigui telèfon o telègraf, perquè qualsevol algorisme de difusió (acumulació) que es doni segons el model telèfon, es pot transformar en un algorisme que realitzi el mateix procés, però en mode telègraf. En canvi, pel problema del gossiping sí que cal tenir en compte que el model sigui telèfon o telègraf.

Aquests tres processos són parts importants en moltes implementacions paral·leles d'aplicacions com ara simulació numèrica, processament d'imatges o sincronització. És per tant fonamental, que la xarxa permeti realitzar aquests processos de forma eficient. Altres tipus de problemes en disseminació d'informació i bons resums sobre aquest tema, es poden trobar a [24] i [38].

4.3 La difusió

En el disseny d'un algorisme de comunicació, l'objectiu principal és aconseguir que el temps d'execució sigui mínim. Una *etapa* és el conjunt de totes

les crides que es fan simultàniament en una unitat de temps. La *complexitat* d'un algorisme de comunicació es mesura amb el nombre d'etapes que es necessiten per a completar el procés per a un (di)graf $\Gamma = (V, E)$ i per a un vèrtex $\mathbf{u} \in V(\Gamma)$. Anàlogament es defineixen el temps d'acumulació, $a(\Gamma, \mathbf{u})$, i el de gossiping, $g(\Gamma, \mathbf{u})$, es sol escriure $g_1(\Gamma, \mathbf{u})$ o $g_2(\Gamma, \mathbf{u})$ segons que es faci servir el model telègraf o telèfon respectivament.

Durant el procés de difusió, si a cada etapa cadascun dels vèrtexs que coneixen la informació la pot transmetre a un vèrtex que no la coneix, el nombre de vèrtexs informats es duplica ja que, d'acord amb el model que estem utilitzant aquí, cada vèrtex pot informar només un dels seus veïns.

És per això que s'obté una primera fita inferior, general per a qualsevol (di)graf que enunciem en la proposició següent:

Proposició 5 *Considerem el graf, orientat o no, $\Gamma = (V, E)$ d'ordre N . Llavors, es compleix que*

$$g(\Gamma) \geq \lceil \log_2 N \rceil.$$

Un (di)graf en el qual s'assoleixi la fita de la proposició 5 es diu que és un *(di)graf de broadcast*. L'exemple més senzill n'és el graf complet K_n . Bermond et al. a [5] i [6] donen grafs, el temps de broadcast dels quals és pròxim a aquesta fita inferior. Pel cas de digrafs de broadcast, hi ha els treballs de Liestman i Peters a [37].

No hi ha una tècnica general per a calcular el temps mínim de difusió en cada digraf. Per a la majoria dels grafs i digrafs utilitzats com a models de xarxes d'interconnexió –el torus, l'hipercub, els digrafs de de Bruijn i de Kautz, el digraf Papallona o el graf estrella– el temps de difusió és conegut, i es pot trobar a [24] i [30].

A continuació es citen alguns d'aquests resultats que es compararan amb el temps de difusió que s'obtindrà pels digrafs de prefix-cicle.

A [7] Bermond i Peyrat van trobar una fita superior per al temps de difusió en el digraf de de Bruijn i de Kautz.

Proposició 6 *Per al digraf de de Bruijn $B(\Delta, D)$ amb $\Delta \geq 2$ i $D \geq 2$, es compleix:*

$$b(B(\Delta, D)) \leq \frac{(\Delta + 1)(D + 1)}{2}.$$

$$b(K(\Delta, D)) \leq \frac{(\Delta + 3)(D + 1)}{2}.$$

Aquesta fita superior va ser millorada per Heydemann, Opatrny i Sotteau a [29] per a valors de Δ grans. La tècnica que van fer servir consistia en trobar un arbre p -ari recobridor del digraf i de diàmetre $D \lceil \log_p D \rceil$ on D és

el diàmetre del digraf. D'aquesta forma s'obté us fita superior pel temps de difusió tan pel digraf de de Bruijn com pel de Kautz.

Proposició 7 *Donats els digrafs de de Bruijn $B(\Delta, D)$ i Kautz $K(\Delta, D)$ amb $\Delta \geq 2$ i $D \geq 2$, es compleix:*

$$b(B(\Delta, D)) \leq \min\{2D \lceil \log_2 \Delta \rceil, 3D \lceil \log_3 \Delta \rceil\}$$

$$b(K(\Delta, D)) \leq \min\{2D \lceil \log_2 \Delta \rceil, 3D \lceil \log_3 \Delta \rceil\}$$

En definitiva pel digraf de Kautz, s'obté

Proposició 8 *Donat el digraf de Kautz $K(\Delta, D)$ de diàmetre D i grau Δ , es compleix*

$$\begin{aligned} b(K(2, D)) &\leq 2D, \\ b(K(3, D)) &\leq 3D, \\ b(K(\Delta, D)) &\leq \begin{cases} \frac{(\Delta+3)(D+1)}{2}, & \text{if } 4 \leq \Delta \leq 12, d \neq 9 \\ \min\{2D \lceil \log_2 \Delta \rceil, 3D \lceil \log_3 \Delta \rceil\}, & \text{if } d = 9 \text{ or } d \geq 13. \end{cases} \end{aligned}$$

4.4 La difusió en el digraf de prefix-cicle

Fent ús de l'estructura recursiva o jeràrquica d'alguns grafs concrets, com el graf n -estrella o el graf Pancake, Berthomé et al. a [8], donen un algorisme de difusió. I a [26], GowriSankaran en dona també un per grafs de Cayley amb estructura recursiva. L'algorisme de difusió que s'ha dissenyat, i que ha estat publicat a [13], fa servir la descomposició de $\Gamma_\Delta(D)$ en subdigrafs que s'ha obtingut a la secció 2.6.

La primera fase de l'algorisme distribueix el missatge des del vèrtex originador a $\binom{\Delta+1}{D} - 1$ altres vèrtexs, cadascun dels quals és un representant d'un subdigraf de $\Gamma_\Delta(D)$ que és isomorf a $\Gamma_{D-1}(D-1)$. En la segona fase, el missatge es difón dins de cada subdigraf. Les dues fases de l'algorisme s'executen simultàniament.

S'estudien per separat els casos $\Delta = D$ i $\Delta > D$.

Escriurem $\beta(\Gamma_\Delta(D))$ per a indicar el nombre d'etapes necessàries per a completar l'algorisme de difusió que aquí es proposa. Es compleix doncs que $b(\Gamma_\Delta(D)) \leq \beta(\Gamma_\Delta(D))$.

Teorema 8 *El temps de broadcast del digraf de prefix-cicle, $\Gamma_D(D)$ compleix*

$$b(\Gamma_D(D)) \leq \frac{(D+1)D}{2}. \quad (4.1)$$

Demostració. La demostració es fa per inducció sobre el diàmetre D .

Per a $D = 2$, vegeu la Figura 1.4, suposem que el vèrtex originador és 12 que coneix la informació en l'instant inicial, $t = 0$.

Per a $t = 1$, el vèrtex 12 informa a 23.

En $t = 2$, el vèrtex 12 informa a 21 i 23 a 31. Finalment, en $t = 2$ el vèrtex 23 informa a 32 i el 31 a 13. Per tant,

$$\beta(\Gamma_2(2)) = 3.$$

Suposem que $\beta(\Gamma_{D-1}(D-1)) = \frac{D(D-1)}{2}$ i volem demostrar que es satisfà l'expressió (4.1).

Sense pèrdua de generalitat podem prendre que el vèrtex originador sigui la identitat $I = 1 \dots D$. A causa de l'estructura jerèrquica del digraf de prefix-cicle, secció 2.6, sabem que el digraf $\Gamma_D(D)$ consta de $D+1$ subdigras, disjunts, cadascun dels quals és isomorf a $\Gamma_{D-1}(D-1)$.

Considerem el següent cicle de longitud $D+1$

$$1 \dots D \rightarrow 2 \dots D(D+1) \rightarrow \dots \rightarrow (D+1)12 \dots (D-1). \quad (4.2)$$

Dos vèrtexs qualssevol d'aquest cicle difereixen en un símbol i, per tant, cada un pot ser considerat com a representant de cada subdigraf isomorf a $\Gamma_{D-1}(D-1)$.

La difusió de la informació es fa segons l'algorisme:

-
1. El vèrtex originador envia el missatge a través del cicle C_{D+1} (4.2).
 2. Cada vèrtex del cicle difón la informació en el subdigraf isomorf a $\Gamma_{D-1}(D-1)$ del qual és representant.
-

El temps de difusió serà

$$b(\Gamma_D(D)) \leq b(C_{D+1}) + \beta(\Gamma_{D-1}(D-1)).$$

Tenint en compte que $b(C_{D+1}) = D$, resolent la recurrència, s'obté

$$b(C_{D+1}) + \beta(\Gamma_{D-1}(D-1)) = D + (D-1) + \dots + 3 + 3 =$$

$$= \frac{D+3}{2}(D-2) + 3 = \frac{(D+1)D}{2}.$$

□

Teorema 9 *El temps de broadcast del digraf de prefix-cicle, $\Gamma_\Delta(D)$ amb $\Delta \geq D$, compleix*

$$b(\Gamma_\Delta(D)) \leq \Delta + \frac{1}{2}D(D-1). \quad (4.3)$$

Demostració. Es comença el procés de difusió fent servir l'arbre de shift \mathbb{T} que s'ha obtingut en el lema 11, pàgina 49. El vèrtex originador és l'arrel de l'arbre \mathbb{T} i envia el missatge als vèrtexs adjacents seguint ordre lexicogràfic. Qualsevol vèrtex a \mathbb{T} procedeix de la mateixa manera, com es pot veure a la Figura 4.1, on els números escrits en negreta indiquen el temps en el que es rep el missatge. Es pot comprovar fàcilment que el temps necessari per a enviar el missatge des de l'arrel a tots els vèrtexs de l'arbre és Δ .

Des de cada vèrtex x de l'arbre \mathbb{T} , el missatge es difón al subdigraf isomorf a $\Gamma_{D-1}(D-1)$ que té el vèrtex x com a representant.

Per a enviar el missatge als diferents vèrtexs del subdigraf es repeteix el procés anterior tenint en compte que l'arbre de shift és ara un camí. Es repeteix recursivament l'esquema per cada nou vèrtex que s'assoleix.

Denotem per $\beta(\Gamma_k(k))$, el temps de difusió en el digraf $\Gamma_k(k)$ fent servir l'algorisme descrit. Com que en el procés primer es fa servir un camí P_k , de longitud k , tenim l'expressió següent:

$$\beta(\Gamma_k(k)) = b(P_k) + \beta(\Gamma_{k-1}(k-1)).$$

amb $k \geq 3$

Fent servir aquesta relació recursiva i el fet que $b(P_k) = k$ i $\beta(\Gamma_2(2)) = b(K(2,2)) = 3$, obtenim:

$$\begin{aligned} \beta(\Gamma_k(k)) &= b(P_k) + b(P_{k-1}) + \cdots + b(P_3) + \beta(\Gamma_2(2)). = \\ &= k + (k-1) + (k-2) + \cdots + 3 + 3 = \frac{1}{2}k(k+1). \end{aligned}$$

Combinant aquests resultats, obtenim que el temps de difusió del digraf de prefix-cicle és:

$$b(\Gamma_\Delta(D)) \leq b(\mathbb{T}) + \beta(\Gamma_\Delta(D)) = \Delta + \frac{1}{2}D(D-1).$$

□

Exemple Un esquema de l'algorisme de difusió en el digraf de prefix-cicle $\Gamma_5(4)$. El números entre parèntesi i negreta indiquen el temps en que el vèrtex corresponent rep el missatge.

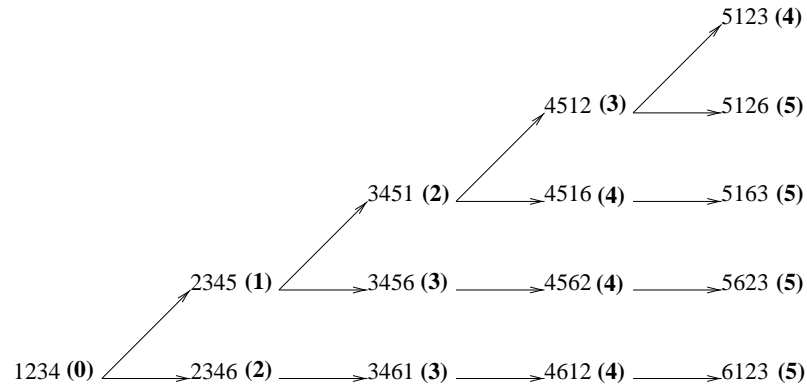


Figura 4.1: Difusió a l'arbre de shift de $\Gamma_5(4)$.

Quan un vèrtex de l'arbre rep el missatge el difon seguint el mateix procés però ara a $\Gamma_3(3)$, per exemple, el vèrtex 5126 rep el missatge en temps $t = 5$ i llavors:

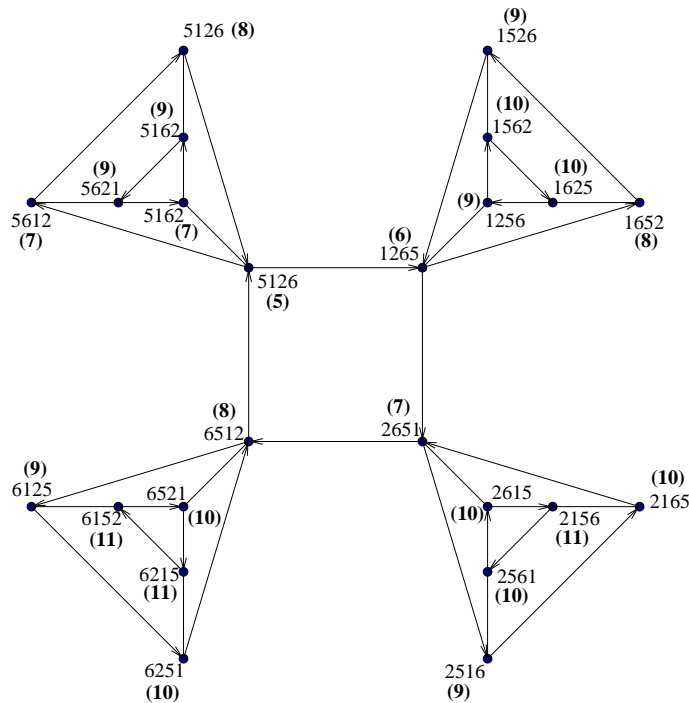


Figura 4.2: Difusió a un subdigraf de $\Gamma_5(4)$ isomorf a $\Gamma_3(3)$.

En la taula següent es compara els temps de difusió dels dígrafs de prefix-cicle i dels de Bruijn.

Δ	$\Gamma_{\Delta}(3)$		$B(\Delta, 3)$	
	$ V $	$\beta(\Gamma_{\Delta}(3))$	$ V $	$\beta'(B(\Delta, 3))$
3	24	6	27	8
4	60	7	64	10
5	120	8	125	12
6	210	9	216	14
7	336	10	343	16
8	504	11	512	18
9	720	12	729	20
10	990	13	1000	22

Taula 4.1: Valors del temps de difusió del dígraf de prefix-cicle, $\beta(\Gamma_{\Delta}(3))$, i del dígraf de de Bruijn de diàmetre tres, $\beta'(B(\Delta, 3))$, per a valors petits del grau.

Per $D = 2$ i valors petits del grau, el teorema 9 millora aquests resultats i dona una nova fita superior $\beta(K(\Delta, 2)) = \Delta + 1$ pel temps de difusió en el dígraf de Kautz $K(\Delta, 2)$. El temps de difusió és òptim per a valors petits del grau ($\Delta < 6$).

4.5 La raó d'aproximació de l'algorisme de difusió

En aquesta secció es defineix i calcula un paràmetre que mesura la “bondat” d'un algorisme de difusió. Aquest paràmetre és *la raó d'aproximació* de l'algorisme.

Per tal d'estimar l'eficiència d'un algorisme es dona l'ordre de magnitud del nombre d'operacions $f(n)$, que efectua l'algorisme. Es defineix:

Definició 8 *Considerem una funció f de \mathbb{N} en \mathbb{N} . Diem que $f(N)$ és $O(g(N))$ si existeix una constant positiva k tal que $f(N) \leq kg(N)$ per a tot $N \in \mathbb{N}$ (excepte potser en un nombre finit d'excepcions).*

En els treballs de Kortsarz i Peleg [36], i Bar-Noy et al. a [2], s'estudien esquemes aproximats per a la difusió, és a dir algorismes que no donen una solució exacta, però que d'altra banda, no és molt lluny de l'òptima.

Més formalment, diem que un esquema, \mathcal{A} , de difusió en una família de grafs, \mathcal{F} , és k -aproximat, si per a cada $\Gamma \in \mathcal{F}$ i cada vèrtex $\mathbf{x} \in V(\Gamma)$,

$$b(v, G, \mathcal{A}) \leq kb(\mathbf{x}, \Gamma).$$

I diem que un esquema \mathcal{S} té una raó d'aproximació (k, k') si

$$b(v, G, \mathcal{S}) \leq kb(\mathbf{x}, \Gamma) + k'.$$

Una raó és k -additiva si és una raó d'aproximació $(O(1), k)$.

En el treball de Kortsarz i Peleg, [36], es dona un algorisme d'aproximació per grafs de N vèrtexs i la raó d'aproximació és $O(\sqrt{N})$ -additiva.

Més recentment Bar-Noy et al. a [2] han millorat aquest resultat dissenyant un algorisme per a grafs de N vèrtexs, que millora la raó d'aproximació en un factor $O\left(\frac{\log N}{\log \log N}\right)$.

Analitzem el cas $\Delta = D$ per a comprovar el comportament de l'algorisme de difusió per al digraf de prefix-cicle que s'ha donat al teorema 8.

Suposem $\Delta = D$.

$$N = (D + 1)! \simeq D^D \implies \log N \simeq D \log D \implies D \simeq \frac{\log N}{\log \log N}.$$

D'altra banda, recordem que la fita inferior per al temps de difusió d'un graf d'ordre N és $\log N$ i, per tant, el quocient entre la fita superior calculada al teorema 8 i la fita inferior dona la raó d'aproximació:

$$k = \frac{D + \frac{D(D+1)}{2}}{\log N} \simeq \frac{D}{\log D} \simeq \frac{\log N}{(\log \log N)^2}$$

S'observa que l'algorisme proposat en aquesta tesi, té un comportament clarament millor que l'algorisme de difusió genèric obtingut a [2]. És complex, doncs, que l'algorisme per al temps de difusió en el digraf de prefix-cicle és millor que el que hi havia per a un graf en general.

Capítol 5

L'espectre del dígraf de prefix-cicle

Aquest darrer capítol presenta l'estudi de l'espectre del dígraf de prefix-cicle. Aquest estudi es farà a partir de l'obtenció d'equacions matricials simples que es compleixen per a aquests dígrafs i que permetran conèixer encara més la seva estructura.

5.1 Introducció

5.1.1 Definició i resultats coneguts

Definició 9 *La matriu d'adjacència d'un graf o un dígraf, Γ d'ordre n , és $A = A(\Gamma)$ una matriu quadrada d'ordre n sobre el cos complex \mathbb{C} , tal que si $A = (a_{ij})$, és*

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } \mathbf{v}_i \text{ és adjacent cap a } \mathbf{v}_j \\ 0 & \text{altrament} \end{cases}$$

D'aquesta definició es dedueix que $A(\Gamma)$ és una matriu real, que és simètrica en el cas que Γ sigui un graf. Si Γ és un dígraf, llavors $A(\Gamma)$ en general no és simètrica i per tant els valors propis no tenen perquè ser reals.

Com que es treballa bàsicament amb dígrafs, d'ara endavant es donaran els resultats i les definicions per a dígrafs, malgrat que en molts casos, enunciats equivalents són vàlids també per a grafs. Les definicions i els resultats que, en aquesta secció es donen com a previs, es poden trobar bàsicament als llibres de Biggs, [9] i Cvetković et al. [17, 18].

Si considerem els valors propis de la matriu d'adjacència juntament amb la seves multiplicitats, obtenim l'espectre del (di)graf.

Definició 10 *L'espectre del digraf Γ és el conjunt dels valors propis de la matriu d'adjacència de Γ , $A(\Gamma)$, juntament amb les seves multiplicitats. Si els valors propis diferents d' $A(\Gamma)$ són: $\lambda_0 > \lambda_1 > \dots > \lambda_{s-1}$ i les seves multiplicitats $m(\lambda_0), m(\lambda_1), \dots, m(\lambda_{s-1})$, s'escriu:*

$$\text{Spec}(\Gamma) = \left(\begin{array}{cccc} \lambda_0 & \lambda_1 & \dots & \lambda_{s-1} \\ m(\lambda_0) & m(\lambda_1) & \dots & m(\lambda_{s-1}) \end{array} \right)$$

Per abús de llenguatge es parla dels valors propis del digraf, en lloc dels valors propis de la matriu d'adjacència del digraf i del polinomi característic $P_\Gamma(\lambda)$ del digraf, les arrels del qual són els valors propis del digraf i que compleix:

$$P_\Gamma(\lambda) = |A - \lambda I| = (\lambda - \lambda_0)^{m(\lambda_0)} (\lambda - \lambda_1)^{m(\lambda_1)} \dots (\lambda - \lambda_{s-1})^{m(\lambda_{s-1})}$$

Per a un digraf no connex es compleix que el seu espectre és la unió dels espectres de les seves components. A partir d'ara es suposarà que el digraf és connex perquè si no ho és es treballa amb cadascuna de les components.

Els següents lemes es poden deduir de la definició de la matriu d'adjacència A .

Com que el digrafs que estem considerant són sense autollaços, els elements de la diagonal principal són nuls i per tant, la traça de la matriu A és nul·la. Com a conseqüència s'obté:

Lema 13 *La suma dels valors propis del digraf Γ és zero.*

Lema 14 *El nombre de recorreguts de longitud k entre els vèrtexs \mathbf{x}_i i \mathbf{x}_j del digraf Γ és el coeficient (i, j) de la matriu A^k .*

La suma dels quadrats dels valors propis és igual a dues vegades el nombre de dígons, la suma dels cubs dels valors propis és igual a tres vegades el nombre de triangles dirigits, i així successivament.

El teorema de Perron–Frobenius per a digrafs és el següent.

Lema 15 ([9], Prop.3.1) *Si un digraf Γ d'ordre n és regular de grau Δ , llavors es compleix:*

- Δ és un valor propi de Γ .
- Si Γ és fortament connex, la multiplicitat de Δ és 1.
- Per a qualsevol altre valor propi λ de Γ , es compleix $|\lambda| \leq \Delta$.
- Un vector propi corresponent a $\lambda = \Delta$ és $\mathbf{j}_n^t = (1, 1, \dots, 1)$.

Lema 16 ([17], **Teorema 3.13**) *Donat un dígraf, Γ , amb n vèrtexs i diàmetre D , l'espectre de Γ té com a mínim $D + 1$ i com a màxim n valors propis diferents.*

Si A és la matriu d'adjacència del dígraf Γ , llavors el conjunt dels polinomis en A a coeficients complexos té una estructura d'àlgebra amb coeficients a \mathbb{C} , amb les operacions usuals definides sobre matrius. Aquesta àlgebra té dimensió finita com a espai vectorial complex.

Definició 11 *L'àlgebra d'adjacència d'un dígraf Γ és l'àlgebra dels polinomis de la matriu d'adjacència $A = A(\Gamma)$. La notarem $\mathcal{A}(\Gamma)$.*

A partir del lema 16 es conclou que la dimensió de $\mathcal{A}(\Gamma)$ és més gran o igual a $D + 1$, on D és el diàmetre del dígraf.

L'àlgebra d'adjacència d'un dígraf fortament connex i regular compleix una propietat que és rellevant en aquest treball. Si A és la matriu d'adjacència del dígraf, i \mathbf{J} és la matriu quadrada d'ordre l'ordre del dígraf i amb tots els coeficients iguals a $+1$, llavors $A\mathbf{J} = \mathbf{J}A = \Delta\mathbf{J}$. A partir d'aquesta observació es demostra el següent resultat de Hoffman i McAndrew (1967).

Teorema 10 ([17], **Teorema 3.7**) *Considerem un dígraf Γ d'ordre n i amb matriu d'adjacència A , llavors*

i) Existeix un polinomi $P(x)$ tal que

$$P(A) = \mathbf{J} \tag{5.1}$$

si, i només si, Γ és fortament connex i regular.

ii) L'únic polinomi $P(x)$ de grau mínim que compleix l'equació (5.1) és el polinomi

$$P(x) = \frac{nS(x)}{S(\Delta)} \tag{5.2}$$

on Δ és el grau del dígraf i $(x - \Delta)S(x)$ és el polinomi mínim de A .

El polinomi mínim $M(x)$ és el polinomi mònic de grau mínim tal que $M(A) = 0$ i és de la forma

$$M(x) = \prod_{i=0}^{s-1} (x - \lambda_i)^{r_i}$$

on $r_i \leq m_i$ i m_i és la multiplicitat del valor propi λ_i .

Si la matriu A diagonalitza, llavors el polinomi mínim és

$$M(x) = \prod_{i=0}^{s-1} (x - \lambda_i)$$

on λ_i , $i = 0 \dots, s - 1$ són els valors propis diferents de A .

El polinomi $P(x)$, l'existència del qual ve donada pel teorema 10, es coneix amb el nom de polinomi de Hoffman.

5.2 Equació matricial per a $\Gamma_{\Delta}(D)$

En alguns casos, la matriu d'adjacència A d'un digraf Γ , satisfà una equació matricial del tipus $P(A) = J$. Per exemple, és el cas de

. Digraf de Moore (si existís, hauria de complir)

$$I + A + A^2 + \dots + A^k = J$$

. de Bruijn $B(\Delta, D)$.

$$A^D = J$$

. Kautz $K(\Delta, D)$.

$$A^D + A^{D-1} = J$$

L'estudi d'aquest tipus d'equacions matricials ha permès a J. Gimbert, [25], demostrar la no existència d'altres digrafs quasi- Moore ¹ de diàmetre 2 que no siguin els digrafs de Kautz. El plantejament d'una equació similar per al cas dels digrafs de prefix-cicle pot facilitar l'obtenció de digrafs quasi-Moore per a altres valors del diàmetre.

En aquesta secció, a partir del coneixement de l'estructura cíclica dels digrafs de prefix-cicle, es demostra que la matriu d'adjacència dels digrafs satisfà l'equació matricial

$$(A + I)A(A - I) \dots (A - (D - 2)I) = J.$$

Com que la demostració es farà per inducció sobre el diàmetre, estudiem en detall el cas $D = 3$.

¹digrafs que tenen ordre pròxim a la fita de Moore

5.2.1 Cas $\Gamma_\Delta(3)$

Donats dos vèrtexs \mathbf{x} i \mathbf{y} del dígraf $\Gamma_\Delta(3)$, podem conèixer el nombre de recorreguts d'una longitud fixada l , que coincideix amb el coeficient a_{ij} de la posició (i, j) de la potència l de la matriu d'adjacència del dígraf. Cal tenir en compte que el camí més curt entre dos vèrtexs és únic. Per tant si la distància entre els vèrtexs \mathbf{x} i \mathbf{y} és d , tots els coeficients a_{ij}^k , amb $k < d$ seran nuls i $a_{ij}^d = 1$. El següent quadre es pot obtenir pràcticament per inspecció.

$d(\mathbf{x}, \mathbf{y})$	a_{ij}	a_{ij}^2	a_{ij}^3
0	0	1	1
1	1	0	2
2	0	1	1
3	0	0	1

Aleshores assagem una equació matricial que sigui de la forma

$$m_1^3 A + m_2^3 A^2 + m_3^3 A^3 = J.$$

Si existeixen els coeficients m_1^3, m_2^3, m_3^3 hauran de complir

$$m_1^3 a_{ij} + m_2^3 a_{ij}^2 + m_3^3 a_{ij}^3 = 1.$$

Segons que els vèrtexs corresponents a la posició i, j estiguin a distància 0, 1, 2, o 3 s'obté el sistema:

$$\left. \begin{array}{l} \text{Si } d(x, y) = 0 \\ \text{Si } d(x, y) = 1 \\ \text{Si } d(x, y) = 2 \\ \text{Si } d(x, y) = 3 \end{array} \right\} \begin{array}{l} m_2^3 + m_3^3 = 1 \\ m_1^3 + 2m_3^3 = 1 \\ m_2^3 + m_3^3 = 1 \\ + m_3^3 = 1 \end{array} \quad (5.3)$$

Resolent el sistema (5.3), resulta $m_3^3 = 1$, $m_2^3 = 0$ i $m_1^3 = -1$. Es compleix l'equació matricial

$$A^3 - A = J$$

que factoritza de la forma

$$(A + I)A(A - I) = J. \quad (5.4)$$

Resulta doncs que el dígraf de prefix-cicle $\Gamma_\Delta(3)$ té polinomi de Hoffman, donat pel teorema 10

$$P(x) = (x + 1)x(x - 1).$$

En conseqüència, s'obté que

Proposició 9 *El digraf $\Gamma_\Delta(3)$ compleix:*

- i) La matriu d'adjacència de $\Gamma_\Delta(3)$ diagonalitza, independentment de Δ .*
- ii) Els valors propis diferents del digraf, són*

$$\lambda_0 = \Delta, \lambda_1 = 1, \lambda_2 = 0, \text{ i } \lambda_3 = -1.$$

- iii) Les multiplicitats dels valors propis són*

$$m_0 = 1, m_1 = \frac{1}{2}\Delta(\Delta + 1)(\Delta - 2), m_2 = (\Delta - 1)(\Delta + 1), m_3 = \frac{1}{2}\Delta^2(\Delta - 1).$$

Demostració. Les dues primeres afirmacions són conseqüència dels càlculs previs a l'enunciat de la proposició i per a calcular les multiplicitats dels valors propis es resol el sistema d'equacions que s'obté aplicant els lemes 13 i 14. □

5.2.2 Cas $\Gamma_\Delta(D)$

L'objectiu és ara trobar una equació matricial per a la matriu d'adjacència del digraf de prefix-cicle, $\Gamma_\Delta(D)$, $\Delta \geq D$ en el cas general, és a dir per a qualsevol diàmetre D , $D > 3$.

A partir del resultat obtingut al capítol 2, que donava el nombre de vèrtexs a distància k d'un vèrtex donat, es calcularà el nombre de vegades que un vèrtex a distància d és k -assolible, $k > d$, això és calcular el nombre de recorreguts de longitud k entre vèrtexs que estan a distància d . Aquest càlcul permet doncs, conèixer el nombre de recorreguts, $-q_d^k$, entre dos vèrtexs qualssevol i per tant conèixer els coeficients de les successives potències de la matriu d'adjacència del digraf.

Si estem buscant una equació matricial de la forma

$$r_D^D A^D + r_{D-1}^D A^{D-1} + \cdots + r_1^D A = J \quad (5.5)$$

es complirà

$$r_D^D a_{ij}^D + r_{D-1}^D a_{ij}^{D-1} + \cdots + r_1^D a_{ij} = 1$$

on a_{ij}^k és el coeficient en la posició (i, j) de la matriu A^k , $k = 1, \dots, D$, que coincideix amb el nombre de recorreguts de longitud k des del vèrtex \mathbf{x}_i fins a \mathbf{x}_j . Es verifica:

$$a_{ij}^k = -q_d^k$$

amb d la distància entre els vèrtexs \mathbf{x}_i i \mathbf{x}_j . És clar que $q_d^k = 0$ si $d > k$.

Com que $q_0^d = q_2^d$, només cal plantejar el sistema lineal d'equacions per als valors de la distància, $d = 1, \dots, D$,

$$\begin{pmatrix} 1 & -q_1^2 & -q_1^3 & \dots & -q_1^{D-1} & -q_1^D \\ 0 & 1 & -q_2^3 & \dots & -q_2^{D-1} & -q_2^D \\ 0 & 0 & 1 & \dots & -q_3^{D-1} & -q_3^D \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & -q_{D-1}^D \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_1^D \\ r_2^D \\ r_3^D \\ \vdots \\ r_{D-1}^D \\ r_D^D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Calculant la inversa de la matriu dels coeficients del sistema anterior, i tenint en compte els resultats obtinguts a la secció 2.5, s'obté

$$\begin{pmatrix} 1 & p_1^2 & p_1^3 & \dots & p_1^{D-1} & p_1^D \\ 0 & 1 & p_2^3 & \dots & p_2^{D-1} & p_2^D \\ 0 & 0 & 1 & \dots & p_3^{D-1} & p_3^D \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & p_{D-1}^D \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_1^D \\ r_2^D \\ r_3^D \\ \vdots \\ r_{D-1}^D \\ r_D^D \end{pmatrix}, \quad (5.6)$$

que clarament permet calcular els coeficients de l'equació matricial (5.5). Falta demostrar que l'equació es pot descomposar en producte de factors simples. Aquest resultat es demostrarà utilitzant inducció sobre el diàmetre.

Teorema 11 *Si A és la matriu d'adjacència del digraf de prefix-cicle $\Gamma_\Delta(D)$, $\Delta \geq D$, es compleix*

$$(A + I)A(A - I) \dots (A - (D - 2)I) = J. \quad (5.7)$$

Demostració. La demostració es fa per inducció sobre el diàmetre.

Ja ha estat provat en aquesta mateixa secció que el digraf de prefix-cicle de diàmetre $D = 3$ compleix l'equació (5.4), que és la corresponent a (5.7) per diàmetre 3.

Suposem que pel cas del digraf de prefix-cicle de diàmetre $D - 1$ es compleix

$$A^{D-1} + r_{D-2}^{D-1}A^{D-2} + \dots + r_1^{D-1}A = J$$

i que els coeficients r_i^{D-1} , $i = 1, \dots, D - 2$, de la igualtat anterior, satisfan el sistema

$$\left. \begin{array}{cccccc} 1 + & p_1^2 & + p_1^3 & + \dots & + p_1^{D-1} & = r_1^{D-1} \\ & 1 & + p_2^3 & + \dots & + p_2^{D-1} & = r_2^{D-1} \\ & & & & \vdots & \vdots \\ & & & & 1 & + p_{D-2}^{D-1} & = r_{D-2}^{D-1} \\ & & & & & 1 & = r_{D-1}^{D-1} \end{array} \right\}$$

d'acord amb el que s'ha obtingut a l'expressió (5.6).

Cal demostrar que la matriu d'adjacència del digraf de prefix-cicle de diàmetre D satisfà l'equació (5.7).

Si la matriu d'adjacència de $\Gamma_\Delta(D)$ verifica una equació matricial del tipus (5.7), es complirà

$$\begin{pmatrix} 1 & -q_1^2 & -q_1^3 & \dots & -q_1^{D-1} & -q_1^D \\ 0 & 1 & -q_2^3 & \dots & -q_2^{D-1} & -q_2^D \\ 0 & 0 & 1 & \dots & -q_3^{D-1} & -q_3^D \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & -q_{D-1}^D \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_1^D \\ r_2^D \\ r_3^D \\ \vdots \\ r_{D-1}^D \\ r_D^D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Resolent el sistema:

$$\begin{pmatrix} 1 & p_1^2 & p_1^3 & \dots & p_1^{D-1} & p_1^D \\ 0 & 1 & p_2^3 & \dots & p_2^{D-1} & p_2^D \\ 0 & 0 & 1 & \dots & p_3^{D-1} & p_3^D \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & p_{D-1}^D \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_1^D \\ r_2^D \\ r_3^D \\ \vdots \\ r_{D-1}^D \\ r_D^D \end{pmatrix}$$

però, per hipòtesi d'inducció, es verifica

$$\left. \begin{array}{ccc} r_1^{D-1} & + p_1^D & = r_1^D \\ r_2^{D-1} & + p_2^D & = r_2^D \\ & \vdots & \vdots \\ 1 & + p_{D-1}^D & = r_{D-1}^D \\ & 1 & = r_D^D \end{array} \right\} \quad (5.8)$$

Substituint els coeficients calculats a (5.8) en l'expressió

$$\begin{aligned}
& x^D + r_{D-1}^D x^{D-1} + r_{D-2}^D x^{D-2} + \cdots + r_1^D x = \\
= & x^D + (1 + p_{D-1}^D) x^{D-1} + \cdots + (r_1^{D-1} + p_1^D) x = \\
= & x^D + p_{D-1}^D x^{D-1} + \cdots + p_1^D x + \\
& + x^{D-1} + r_{D-2}^{D-1} x^{D-2} + \cdots + r_1^{D-1} x = \\
= & (x+1)x(x-1)\cdots(x-(D-3))(x-(D-1)) + \\
& + (x+1)x(x-1)\cdots(x-(D-3)) = \\
= & (x+1)x(x-1)\cdots(x-(D-3))(x-(D-2))
\end{aligned}$$

s'obté el resultat

$$(A+I)A(A-I)\cdots(A-(D-3)I)(A-(D-2)I) = J.$$

□

Teorema 12 *Pel digraf $\Gamma_\Delta(D)$, $\Delta \geq D$, es compleix:*

- i) *La matriu d'adjacència diagonalitza, independentment de Δ .*
- ii) *Els valors propis diferents del digraf, són*

$$\lambda_0 = \Delta, \lambda_1 = D-2, \cdots, \lambda_{D-1} = 0, \text{ i } \lambda_D = -1.$$

En aquesta secció hem demostrat que la matriu d'adjacència d'un digraf de prefix-cicle, és sempre diagonalitzable i que els valors propis del digraf són reals. De l'observació de l'equació matricial (5.7), es poden concloure els següents fets:

Els valors propis de $\Gamma_\Delta(D)$ depenen estrictament del diàmetre del digraf i no de l'ordre ni del grau.

Dos digrafs de prefix-cicle amb el mateix diàmetre tenen els mateixos valors propis, llevat de Δ .

Els digrafs $\Gamma_\Delta(D)$ i $\Gamma_\Delta(D+1)$ tenen els mateixos valors propis, excepte $\lambda = D-1$ que ho és de $\Gamma_\Delta(D+1)$ i no de $\Gamma_\Delta(D)$.

A més el nombre de valors propis diferents és mínim, lema 16.

Conclusions

En aquest treball hem estudiat en profunditat diferents aspectes dels digrafs de prefix–cicle que han estat proposats com a model de xarxa d’interconnexió.

Degut a què els digrafs de prefix–cicle ocupen moltes de les posicions de la taula del problema (Δ, D) per a digrafs vèrtex–simètrics, es va decidir analitzar aquesta família des d’altres punts de vista. Aquest estudi s’ha dirigit bàsicament, a trobar noves propietats dels digrafs de prefix–cicle, a provar la seva descomposició en cicles i a definir un algorisme eficient de comunicació.

Les conclusions i possibles línies de recerca que s’obren a partir d’aquesta memòria, es presenten diferenciant cadascuna de les parts d’aquesta tesi.

El digraf de prefix–cicle

A més de la definició i de propietats dels digraf de prefix–cicle que ja havien estat enunciades per altres autors, [19], [12], [20], es dóna una nova manera de calcular la distància entre dos vèrtexs qualssevol del digraf. A partir d’aquest procediment, es calculen el nombre de vèrtexs que hi ha a una certa distància d’un vèrtex donat, en funció del nombre de vèrtexs que hi havia a distàncies menors. Es defineixen els polinomis distància i recorregut, i s’estudia la relació que hi ha entre aquestes dues famílies de polinomis.

Cicles

L’estudi de l’existència de cicles i la descomposició del digraf en cicles i camins, és el que ha aportat un major coneixement de l’estructura del digraf de prefix–cicle. S’ha pogut demostrar que, de la mateixa manera que es compleix per als digrafs de Kautz, els digrafs de prefix–cicle són quasi pancíclics. S’aporta un nou mètode per a demostrar-ho que és completament diferent a l’utilitzat per als digrafs de Kautz.

L'altre aportació que aquest capítol fa al coneixement de l'estructura dels dígrafs de prefix-cicle és la descomposició del dígrafs en cicles de la mateixa longitud. Aquestes longituds són, essencialment, divisors de l'ordre del dígraf. Es dona també una descomposició del dígraf en camins vèrtexs-disjunts, que permetria, en el cas d'una xarxa modelada pel dígraf, la distribució de tasques diferents entre grups d'usuaris diferents en nombre.

Els resultats que es presenten en aquest capítol han estat determinants per a la continuació del treball, tant en la línia de definir un algorisme eficient de difusió en el capítol 4, com en l'obtenció de l'equació matricial que es demostra al capítol 5.

Seria de desitjar encara, obtenir algun altre tipus de descomposició de la família de dígrafs, com ara: quina relació hi ha entre $\Gamma_{\Delta}(D)$ i $\Gamma_{\Delta}(D + 1)$, amb $\Delta > D$?. Aquesta pregunta encara no ha pogut ser resolta. Creiem que una resposta a aquesta qüestió podria portar a obtenir nous, i potser millors, algorismes de comunicació.

La difusió

En el capítol referent a l'algorisme de difusió en el dígraf de prefix-cicle, es presenta un procediment per a difondre un missatge des d'un vèrtex qual-sevol, que millora resultats previs per a altres dígrafs coneguts i que és òptim per a valors petits del grau.

De l'anàlisi de l'algorisme, s'observa que, en casos molt puntuals, si alguns vèrtexs que en un moment donat no transmeten informació, ho poguessin fer, es podria millorar lleugerament la fita donada. Amb tot creiem que, molt possiblement, l'algorisme que es proposa en aquest capítol, pot ser l'òptim per a aquesta família de dígrafs.

Un tema relacionat amb la propagació d'informació en els dígrafs de prefix-cicle, és el gossiping. Aquest problema ha estat només definit en el capítol 4, però no ha estat estudiat a fons per als dígrafs de prefix-cicle. En el disseny d'algorismes de gossiping apareixen dificultats diferents de les que s'han resolt pel problema de la difusió. En la nostra recerca, hem considerat aquest problema sense arribar, però a resultats millors que els coneguts per altres famílies de dígrafs com són els de de Bruijn o de Kautz, que ja s'han fet servir de referència a l'hora de comparar l'algorisme de difusió. Queda per tant oberta una possible línia de recerca que es podria relacionar amb la qüestió plantejada al final de l'apartat anterior.

S'han estudiat altres models de comunicació, en particular el model línia, per al problema de gossiping en anells cordals i de multicast en arbres dirigits. En ambdós casos es donen algorismes eficients. El problema de la difusió,

sota el model línia, és òptim per a la difusió en dígrafs hamiltonians, en particular pels dígrafs de prefix-cicle.

L'espectre

Finalment, en el darrer capítol de la memòria, es fa ús del coneixement que es té de l'estructura del dígraf de prefix-cicle, per a demostrar que la matriu d'adjacència del dígraf de prefix-cicle compleix una equació matricial en paral·lelisme amb les equacions satisfetes per la matriu d'adjacència d'alguns dígrafs estudiats per altres autors. Aquest darrer resultat, permet calcular l'espectre del dígraf de prefix-cicle, comprovar que els valors propis només depenen del diàmetre del dígraf i no del grau.

És encara un tema de treball les conseqüències que es poden desprendre de la relació entre l'espectre dels dígrafs i certs paràmetres relacionats amb la distància entre vèrtexs com l'excentricitat, el radi, el diàmetre, ... amb l'objectiu de poder solucionar altres problemes relacionats amb la propagació d'informació.

Apèndix A

Gossiping in chordal ring graphs under the line model

En aquest apèndix s'inclou el treball realitzat en col·laboració amb L. Barrière de la UPC i amb Johanne Cohen del Laboratoire de Recherche en Informatique (LRI), a la Universitat de Paris Sud (Orsay, Paris). L'article *Gossiping in chordal ring graphs under the line model* va ser acceptat per a ser presentat en forma de comunicació a Mathematical Foundations on Computer Science–Whorkshop on Communications (MFCS'98) a Brno (Txèquia, agost 1998).

Fent servir el model línia, que ja ha estat definit al capítol 4, pàgina 55, es descriu un algorisme de difusió per a una família de grafs vèrtexs simètrics, els anells cordals, que és òptim per a una part dels grafs estudiats.

Gossiping in Chordal Rings under the Line Model

Lali Barrière

Dept. Mat. Aplicada i Telemàtica
Univ. Politècnica de Catalunya
c/J. Girona 1–3, 08034 Barcelona (Spain)

Johanne Cohen*

LRI, Univ. Paris-Sud
91405 Orsay cedex (France)

Margarida Mitjana[†]

Dept. Matemàtica Aplicada I
Univ. Politècnica de Catalunya
c/G. Marañón 44–50, 08028 Barcelona (Spain)

Abstract

This paper is devoted to the gossip (or all-to-all) problem in the chordal ring under the one-port *line model*. The line model assumes long distance calls between non neighboring processors. In this sense, the line model is strongly related to circuit-switched networks, wormhole routing, optical networks supporting wavelength division multiplexing, ATM switching, and networks supporting connected mode routing protocols.

Since the chordal rings are competitors of networks as meshes or tori because of their short diameter and bounded degree, it is of interest to ask whether they can support intensive communications (typically all-to-all) as efficiently as these networks. We propose polynomial algorithms to derive optimal or near optimal gossip protocols in the chordal ring.

1 Introduction

In the study of the properties of interconnection networks, the problem of dissemination of information is an important and a very active research area [12, 26]. Indeed, the ability of an interconnection network to effectively disseminate the information among its processors (e.g., accumulation, broadcast or gossip) is a “pertinent” measure to determine the best communication structures for parallel and/or distributed computers. Assume that every node of a network holds a piece of information. Broadcast is the information dissemination problem that consists, for one node of a network, of sending its piece of information to all the other nodes. The accumulation problem can be considered as the reverse of broadcast problem. In the accumulation problem, every vertex has to send its piece of information to one specific vertex of the network. Finally, gossiping is a simultaneous broadcast from every node of the network. Due to their complexity, these three communication primitives are often provided at the software level. Most of the communication libraries available on parallel systems (as MPI [24]) provide access to such communication procedures. More generally, these three communication patterns are fundamental primitives used in many algorithms for the programming, and for the control

*Additional support by the DRET of the DGA.

[†]Partial support by UPC-PR-9704.

of parallel and distributed systems. For example, they are used for barrier synchronization or cache coherence [28], for parallel search algorithms [7], and for linear algebra algorithms [8].

In [10], Farley introduced the model called *Line Model* which satisfies the following: **(i)** a *call* involves exactly two nodes (these two nodes can be at distance more than 1), **(ii)** any two paths corresponding to simultaneous calls must be edge-disjoint. Furthermore, Farley assumed that nodes satisfy the *1-port hypothesis*, that is: **(iii)** a node can take part in one call at a time. The *vertex-disjoint paths mode* can be defined analogously to the line model by replacing hypothesis (ii) by the following **(iv)** any two paths corresponding to simultaneous calls must be vertex-disjoint. The calls are subject to different possible constraints: when two nodes are involved in the same call, they can either exchange all the informations they are aware of (*full-duplex* or *2-way mode*) or alternatively, the information can only flow in one direction (*half-duplex* or *1-way mode*).

A *round* is the set of all calls carried out simultaneously. The complexity of our communication protocols will be measured by the number of communication rounds required to complete these protocols. For a given graph $G = (V, E)$, and for any arbitrary node u in G , we denote by $b(G, u)$ (resp. $a(G, u)$) the minimum number of rounds for broadcasting from the source node u (resp. for accumulation) in the graph G . Similarly, the gossip time of G , denoted by $g(G)$, is the minimum number of rounds necessary to perform a gossip in G .

In [10], Farley proved that, in the *1-port model*, broadcast from any node in any n -node network can be performed in $\lceil \log_2 n \rceil$ rounds. His proof makes use of routing along the edge of a spanning tree of the network. However, the gossip problem is still open for arbitrary networks, that is, the complexity of gossiping in the *1-port line model* in arbitrary networks is not known. Hromkovič et al. [17] gave a lower bound for the gossip problem, and some results have been derived for tree-networks [9] and for planar graphs [16].

Chordal ring networks were introduced in [6]. They form a family of generalized loop networks [3]. The *chordal ring* of N vertices and chord c , denoted by $\mathbf{C}(N, c)$, is the graph with vertices labeled in \mathbb{Z}_N , and adjacencies given by $i \sim i \pm 1, i \sim i + c$ for every even vertex i . The structure of these graphs has been extensively studied. For example, Arden and Lee [1] studied the problem of the maximization of the number of nodes for a given diameter, and Yebra et al. [29] found a relationship between a certain type of plane tessellation and the chordal ring. Moreover, due to their simple structure, and their short diameter, chordal ring graphs are attractive topologies for interconnection networks. Chordal rings can support compact [25] and fault-tolerance [2] routing functions. Finally, Comellas and Hell [5] presented an optimal solution for the broadcast problem in chordal rings under the telephone model.

As [5], this paper is devoted to the study of communication problems in chordal rings. In particular, our aim is to find an algorithm for the gossip problem in the full-duplex edge-disjoint paths mode since the model is appropriate to networks supporting long distance calls such as wormhole or circuit-switched routing. The next section describes the method to find the gossip time in the chordal ring. Section 3 deals with some properties of the chordal ring and, finally, in Section 4 gossiping algorithms are described in order to give the upper bound of the gossip time in chordal rings.

2 Basic concepts

An interconnection network is modeled by a connected undirected graph $G = (V, E)$, where the vertices in V correspond to the processors, and the edges in E represent the communication links of the network. Our gossip algorithms are based on the so-called 3-phase gossip method [15]. For that purpose, the Section 3 gives a decomposition of the chordal ring into disjoint cycles.

This decomposition is the base of all our gossip protocols of Section 4. In the full-duplex line model, Farley has shown the following:

Lemma 1 (Farley [10]) *Let G be a graph of n nodes. In the 2-way mode line model,*

$$b(G) = a(G) = \lceil \log_2 n \rceil.$$

Moreover, Hromkovič et al. [17] gave a lower bound for the gossip problem:

Lemma 2 (Hromkovič et al. [17]) *Let G be a graph of N nodes and of edge-bisection width B . In the 2-way mode line model*

$$g(G) \geq 2\lceil \log_2 N \rceil - \log_2 B - \log_2 \log_2 N - 2.$$

In order to get upper bounds, we use the "three-phase algorithm" method as in [15]. The three-phase algorithm is composed of an accumulation phase, a gossiping phase, and a broadcasting phase.

Algorithm 1 Three-phase gossip algorithm

- 1 Divide G into r connected components containing exactly one accumulation node each. These components are called *accumulation components*. $A(G)$ is the set of accumulation nodes.
/* Accumulation phase */
 - 2 Each vertex $u \in A(G)$ accumulates the information from the nodes of its component.
/* Gossip phase */
 - 3 Perform a gossip among the set $A(G)$ of accumulation nodes.
/* Broadcast phase */
 - 4 Every node in $A(G)$ broadcasts information in its components.
-

To obtain an effective algorithm, we will look for a set of accumulation nodes such that the gossip phase can be performed as quickly as gossiping in a complete graph, and such that the size of the accumulation components is sufficiently small in order to minimize the time for the first and third phases. Moreover, these accumulation components should be connected so that the optimal $\lceil \log_2 N \rceil$ -round accumulation and broadcast algorithms described in [10] (see Lemma 1) can be independently applied in all the components. For the gossip phase, our algorithms will be based on the two following algorithms 2 and 3. K_N stands for the complete graph of N nodes.

Algorithm 2 Gossiping in a K_N , N even

- 1 **For** $j:=1$ **to** $\lceil \log_2 N \rceil$ **do**
 - 2 **For** each vertex i , i even, **do in parallel**
 - 3 exchange information between node i and node $i + 2^j - 1 \pmod{N}$;
-

Algorithm 3 Gossiping in a K_N , N odd

- 1 $m := \lfloor N/2 \rfloor$;
- 2 **For** each node i , $0 < i < N/2$, **do in parallel**
- 3 exchange information between node i and node $i + m$;
- 4 **if** m is odd **then** $n' = m + 1$ **else** $n' = m + 2$;
- 5 Gossip in the complete graph of vertices $\{0, \dots, n'\}$;

6 **For** each node i , $i < N/2$, **do in parallel**
7 exchange information between node i and node $i + m$;

In the three-phase gossip algorithm, a call between vertices i and j is replaced by a call between the accumulation node of the i th component and the accumulation node of the j th component. For a given call between the accumulation node x_i of the i th component and the accumulation node x_j of the j th component, that is for a given path \mathcal{P} between x_i and x_j , the *length* of the call is defined as the number of components traversed by \mathcal{P} plus one.

Let s be the maximum size of the components, then the accumulation and broadcast phases are done in $\lceil \log_2 s \rceil$ rounds each. Moreover, if r is the number of components, the gossiping phase needs $\lceil \log_2 r \rceil$ to be completed. Thus, we can conclude that the three-phase gossip algorithm needs $2\lceil \log_2 s \rceil + \lceil \log_2 r \rceil$ rounds to perform.

In order to apply this algorithm to the chordal ring graphs, we will present some properties of this family of graphs.

3 Definition of the chordal rings

Definition 1 Let N be an even integer and c an odd integer between 1 and $N/2$. The chordal ring graph of order N and chord c , $\mathbf{C}(N, c)$, is the graph of order N , with vertices labeled in \mathbb{Z}_N , and adjacencies given by $i \sim i \pm 1$, $i \sim i + c$ for every even vertex i .

Chordal ring graphs are connected and 3-regular. They are bipartite, with partition sets $V_0 = \{0, 2, 4, \dots, N - 2\}$ and $V_1 = \{1, 3, 5, \dots, N - 1\}$.

For any two vertices x, y , we define $\alpha_{x,y} : \mathbb{Z}_N \rightarrow \mathbb{Z}_N$ as follows:

If $x - y \equiv 0 \pmod{2}$ then $\alpha_{x,y}(i) = y - x + i$, otherwise $\alpha_{x,y}(i) = y + x - i$.

In both cases, $\alpha_{x,y}$ is an automorphism and it verifies $\alpha_{x,y}(x) = y$. So, $\mathbf{C}(N, c)$ is vertex-transitive. For more details on these graphs, see [2].

In this section we present upper bounds for the edge bisection width of a chordal ring $C(N, c)$. The *edge bisection width*, B , is the minimum number of edges which separate the graph into two sets of vertices of the same cardinality.

Lemma 3 Let $\mathbf{C}(N, c)$ be the chordal ring of order N and chord c . Let B be the edge bisection width of $\mathbf{C}(N, c)$, then $B \leq c + 2$.

Proof.

First, we observe that the natural order for integer numbers gives a natural partition of the vertices, so we have an immediate bound for B :

$$\mathbb{Z}_N = [0, N/2 - 1] \cup [N/2, N - 1] \text{ where } [a, b] = \{a, a + 1, \dots, b\}.$$

Let $A = \{(i, j) \in E \mid i \in [0, N/2 - 1], j \in [N/2, N - 1]\}$ be the set of edges between $[0, N/2 - 1]$ and $[N/2, N - 1]$. Clearly, from the definition of the edge bisection width, we have that the number of edges of A is an upper bound for B .

For $N/2$ even we have

$$\begin{aligned} A &= \{(1, N - c + 1), (3, N - c + 3), \dots, (c - 2, N - 2)\} \cup \\ &\cup \{(N/2 - c + 1, N/2 + 1), (N/2 - c + 3, N/2 + 3), \dots, (N/2 - 2, N/2 + c - 2)\} \cup \\ &\cup \{(0, N - 1), (N/2 - 1, N/2)\}. \end{aligned}$$

Thus $|A| = (c - 1)/2 + (c - 1)/2 + 2 = c + 1 \geq B$.

For $N/2$ odd, we apply the same argument as previously and we get $|A| = c + 2 \geq B$.

□

From Lemmas 3 and 2, we can deduce a lower bound of the gossip time in chordal rings $\mathbf{C}(N, c)$.

Lemma 4 *Let $\mathbf{C}(N, c)$ be a chordal ring of order N and chord c . In the 2-way mode line model*

$$g(G) \geq 2\lceil \log_2 N \rceil - \log_2(c+2) - \log_2 \log_2 N - 2.$$

3.1 Decomposition of the chordal rings into cycles

Let us introduce a decomposition of the chordal ring $\mathbf{C}(N, c)$ of order N and chord c that will be particularly helpful for the design of our gossip algorithm. We can distinguish in $\mathbf{C}(N, c)$ a set of $a = \lfloor \frac{N}{c+1} \rfloor$ disjoint $(c+1)$ -cycles, C_0, \dots, C_{a-1} :

$$C_i = \{i(c+1), i(c+1)+1, \dots, i(c+1)+c\}.$$

If $N = a(c+1) + b$ with $0 \leq b \leq c-1$ even, then the chordal ring $\mathbf{C}(N, c)$ consists of a cycles of length $c+1$, labeled from 0 to $a-1$, and a path of b vertices, with some additional edges joining these subgraphs.

Given a cycle C_i , a vertex is said to be the j th vertex of cycle C_i , $j = 0, \dots, c$, if its label is equal to $i(c+1) + j$. Note that the vertex 0 of C_i is adjacent to vertex 1 and c of C_i . Moreover, for each i , $0 \leq i < \lfloor \frac{N}{c+1} \rfloor - 1$, cycles C_i and C_{i+1} share $(c+1)/2$ edges. Among these edges, $(c-1)/2$ edges are of type $[x, x+c]$ and one edge is of type $[x, x+1]$. In other words, for any even value j , the j th vertex in C_i is adjacent to the $j-1$ st vertex in C_{i+1} by a chordal edge. See the decomposition of $\mathbf{C}(64, 7)$ in Fig. 1.

4 Gossip Algorithm for the chordal ring $\mathbf{C}(N, c)$

In this section, we describe a polynomial time algorithm to compute an optimal communication scheme for gossiping in any chordal ring $\mathbf{C}(N, c)$. We consider two cases: $N = a(c+1)$ and $N = a(c+1)+b$ where $2 \leq b \leq c-1$. For these two cases, we split the graph into a certain number of cumulative components, and we choose the accumulation node in each component. Finally, we set the paths corresponding to calls such that the gossip phase between the accumulation nodes performs almost as quickly as gossiping in the complete graph.

By convention, the integers r and s represent respectively the number of components, and their maximum size.

4.1 Case $N = a(c+1)$

Since the graph is composed of a cycles of $c+1$ vertices (see Section 3.1), the components are naturally defined by groups of the cycles C_0, \dots, C_{a-1} . Actually, there are two types of decomposition according to the parameter a :

- If $a < c+1$, then there are a components ($r = a$): each component is a cycle of $c+1$ vertices ($s = c+1$).
- If $a \geq c+1$, then there are $c-1$ components ($r = c-1$). More precisely, assuming that $a = \alpha(c-1) + \beta$ with $0 \leq \beta < c-1$, β of these components are the union of $\alpha+1$ consecutive cycles of $c+1$ vertices, and the $c-1-\beta$ remaining components are the union of α consecutive cycles of $c+1$ vertices ($s \leq (c+1)(\alpha+1)$. In fact $s = \alpha(c+1)$ if $\beta = 0$ and $s = (c+1)(\alpha+1)$ otherwise).

We label the components between 0 and $r-1$. In the k th component, the cycles are labeled between 1 and Γ , where Γ is the number of cycles in the component k . We denote by (k, i, j)

the vertex j of the i th cycle in the k th component. The k th component has $(k, 1, R = c - 1)$ as accumulation node.

Since each component is connected, the accumulation phase and the broadcast phase can be performed using the algorithm in [10]. Now, we focus on the gossip phase, and we are interested in a path $\mathcal{P}_{i \rightarrow i+\ell \pmod{r}}$ corresponding to a call between the two accumulation nodes of component i and $i + \ell \pmod{r}$, $i = 0, \dots, r - 1$ and $\ell = 1, \dots, R/2$.

For $\ell \leq \frac{c-1}{2}$ we define $\mathcal{P}_{i \rightarrow i+\ell}$ as a union of paths denoted by $P(i, 0), P(i, 1), \dots, P(i, \ell)$ such that $P(i, k)$ is as follows (let $R = c - 1$):

1. if $0 \leq k \leq \ell - 1$, then we consider two cases:
 - if the component $i + k$ is composed of one cycle of $c + 1$ vertices, then the path $P(i, k)$ is $\{(i + k, 1, R - 2k), (i + k + 1, 1, R - 2k - 1), (i + k + 1, 1, R - 2k - 2)\}$
 - if the component $i + k$ is composed of Γ cycles of $c + 1$ vertices, then the path $P(i, k)$ is $\{(i + k, \gamma, R - 2k), (i + k, \gamma + 1, R - 2k - 1), (i + k, \gamma + 1, R - 2k) \mid \gamma = 1, \dots, \Gamma - 1\} \cup \{(i + k, \Gamma, R - 2k), (i + k + 1, 1, R - 2k - 1), (i + k + 1, 1, R - 2k - 2)\}$.
2. if $k = \ell$, then the path $P(i, \ell)$ is a path of component $i + \ell$, from vertex $(i + \ell, 1, R - 2\ell)$ to $(i + \ell, 1, R)$ passing through vertex $(i + \ell, 1, 0)$.

Note that the condition $2\ell \leq c - 1$ assures that these paths are well defined.

At each round of the gossip phase, the exchange of information can be performed by using the paths defined above:

1. If the number of components is odd, $r = 2r' + 1$, and we are in first or last round. Nodes i and $i + r'$, $1 \leq i \leq r'$, exchange their information by using paths $\mathcal{P}_{i \rightarrow i+r' \pmod{r}}$, with $r' \leq \frac{c-1}{2}$.
2. If the number of components is odd, $r = 2r' + 1$ but we are neither in the first nor in the last round, we merge the components $n', \dots, r - 1$ into a single n' -component, with $n' = r'$ if r' is odd and $n' = r' + 1$ if r' is even. After this merging, the number of components is even, and we proceed as in the next case.
3. If the number of components is even, for some j the accumulation nodes of i and $i + 2^j - 1 \pmod{r}$ components exchange their information for all i even. If $2^j - 1 \pmod{r} \leq \frac{c-1}{2}$ the paths corresponding to this round are $\mathcal{P}_{i \rightarrow i+\ell \pmod{r}}$ with $\ell = 2^j - 1$, for all i even. When $2^j - 1 \pmod{r} > \frac{c-1}{2}$ the paths corresponding to this round are $\mathcal{P}_{i \rightarrow i+\ell \pmod{r}}$ with $\ell = r - (2^j - 1 \pmod{r}) \leq \frac{c-1}{2}$, for all i odd.

Let us prove that, at each round, the calls are pairwise edge-disjoint.

Lemma 5 *Let be $\ell \leq \frac{c-1}{2}$. For all $i < j$ and $i + \ell \pmod{r} \neq j$, the paths $\mathcal{P}_{i \rightarrow i+\ell}$ and $\mathcal{P}_{j \rightarrow j+\ell}$ are pairwise edge-disjoint.*

Proof. Assume w.l.g. that $i = 0$. If $j < k < \ell$, the paths $\mathcal{P}_{0 \rightarrow \ell}$ and $\mathcal{P}_{j \rightarrow j+\ell}$ cross the k -th component. We need only to prove that vertices of the k -th component belonging to the path $\mathcal{P}_{0 \rightarrow \ell}$ are different to vertices of the k -th component belonging to the path $\mathcal{P}_{j \rightarrow j+\ell}$.

The third component of the vertex coordinates in $P(0, k)$ is $R - 2k$ or $R - 2k - 1$, while the third component of the vertex coordinates in $P(j, k - j)$ is $R - 2k - 2j$ or $R - 2k - 2j - 1$. Thus, the assertion holds. \square

In Fig. 1 there is an example of the paths $\mathcal{P}_{i \rightarrow i+3}$ corresponding to the round $t = 2$, in the chordal ring $\mathbf{C}(64, 7)$. Since in the decomposition of this graph all the groups have only one cycle, the vertex j in cycle i is labeled by $(i, 1, j)$.

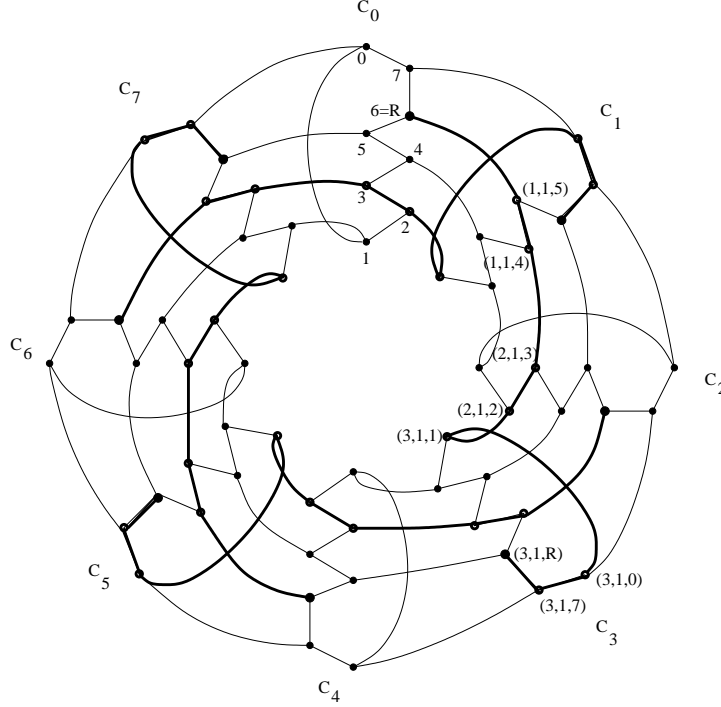


Figure 1: The chordal ring $\mathbf{C}(64, 7)$.

Therefore, we conclude that the decomposition in cycles as defined in Section 3.1 allows a gossip among accumulation nodes that performs as quickly as gossiping in the complete graph.

4.2 The upper bound in case $N = a(c + 1)$

Since the gossip algorithm performs in $2\lceil \log_2 s \rceil + \lceil \log_2 r \rceil = 2\lceil \log_2 N \rceil - \lceil \log_2 r \rceil + O(1)$, the calculation of the number of rounds gives:

- $a \geq c + 1$, then $r = c - 1$ and $s = (a + 1)(c + 1)$.

$$g(\mathbf{C}(N, c)) \leq 2\lceil \log_2 N \rceil - \lceil \log_2 c \rceil + O(1)$$

- $a < c + 1$, then $r = a$ and $s = c + 1$.

$$g(\mathbf{C}(N, c)) \leq 2\lceil \log_2 N \rceil - \lceil \log_2 a \rceil + O(1)$$

4.3 The general case: $N = a(c + 1) + b$, $0 < b < c$.

Note that, since N and $c + 1$ are even, b is necessarily even. We consider two cases: $a \geq b/2$ and $a < b/2$.

4.3.1 Case 1. $a \geq b/2$

A graph of type \mathcal{A} is a subgraph of the chordal ring that contains $c + 3$ consecutive vertices on the ring, two chordal edges of type $[x, x + c]$, and $c + 2$ edges of type $[x, x + 1]$. If i is the smallest label of nodes of a subgraph H of type \mathcal{A} , then the vertex of label $i + j$ is called the j th vertex of H (the vertex 0 of H is incident to vertices 1 and c in H).

There are two types of decomposition, according to the parameter a . In both cases, we split the graph in $a - b/2$ cycles of $c + 1$ vertices and in $b/2$ graphs of type \mathcal{A} .

- If $a < c + 1$, then there are a components. If $0 \leq i \leq b/2 - 1$, then the component i is a subgraph of type \mathcal{A} , A_i , and if $b/2 \leq i \leq a - 1$, then the component i is a cycle of length $c + 1$, C_i . The graph is the union of consecutive subgraphs

$$A_0, A_1, \dots, A_{b/2-1}, C_{b/2}, \dots, C_{a-1}$$

And for any i , $0 \leq i \leq a - 1$, the subgraph of index i of this sequence is connected to the subgraphs of index $i - 1$ and $i + 1$, modulo a , by $(c + 1)/2$ edges.

- If $a \geq c + 1$, then we define $c - 1$ components, each of them containing at most one subgraph of type \mathcal{A} and possibly many cycles, as follows. Assuming that $a = \alpha(c - 1) + \beta$, with $0 \leq \beta < c - 1$, then the first β components are constituted by $\alpha + 1$ consecutive subgraphs, and the $c - 1 - \beta$ remaining components are constituted by α consecutive subgraphs. Moreover, only the first subgraph in the first $b/2$ components is a subgraph of type \mathcal{A} .

More precisely, the component i , $0 \leq i \leq b/2 - 1$, is the union of consecutive subgraphs $A_i, C_{i,1}, \dots, C_{i,\Gamma_i}$, and the component i , $b/2 \leq i < c - 1$, is the union of consecutive cycles of length $c + 1$, $C_{i,0}, C_{i,1}, \dots, C_{i,\Gamma_i}$, where A_i is a subgraph of type \mathcal{A} , $C_{i,j}$ is a cycle of length $c + 1$, and the value of Γ_i is α if $i \leq \beta - 1$, and $\alpha - 1$ otherwise.

The graph can be described by the following sequence:

$$\underbrace{A_0, C_{0,1}, \dots, C_{0,\Gamma_0}}_{\text{component 0}} \underbrace{A_1, C_{1,1}, \dots, C_{1,\Gamma_1}, \dots}_{\text{component 1}} \dots \underbrace{A_{b/2-1}, C_{b/2-1,1}, \dots, C_{b/2-1,\Gamma_{b/2-1}}}_{\text{component } b/2-1},$$

$$\underbrace{C_{b/2,0}, C_{b/2,1}, \dots, C_{b/2,\Gamma_{b/2}}}_{\text{component } b/2}, \dots, \underbrace{C_{c-2,0}, C_{c-2,1}, \dots, C_{c-2,\Gamma_{c-2}}}_{\text{component } c-2},$$

In each component, the subgraph of type \mathcal{A} is labeled 1, and the remaining cycles are labeled 2, 3, ...

The component k has $(k, 1, c - 1)$ as its accumulation node if component k does not contain a subgraph of type \mathcal{A} , and $(k, 1, c + 1)$ otherwise. We set $R = c - 1$.

The accumulation phase and the broadcast phase can be performed using the algorithm in [10] since each component is connected. Now, we focus on the gossip phase, and we are interested in the call $\mathcal{P}'_{i \rightarrow i+\ell}$ between the two accumulation nodes of the component i and the component $i + \ell$.

As in the previous case, for $\ell \leq \frac{c-1}{2}$ we define $\mathcal{P}'_{i \rightarrow i+\ell}$ as the union of paths denoted by $P'(i, 0), P'(i, 1), \dots, P'(i, \ell)$ such that $P'(i, k)$, $0 \leq k \leq \ell$, is as follows:

1. if the $i + k + 1$ component does not contain a graph of type \mathcal{A} or $k = \ell$, then $P'(i, k) = P(i, k)$ ¹;

¹defined in Section 4.1

2. if $k \neq \ell$ and the component $i + k + 1$ contains a graph of type \mathcal{A} , then we consider four cases:

- if the component $i + k$ contains only one graph of type \mathcal{A} , then the path $P'(i, k)$ is $\{(i + k, 1, R - 2k + 2), (i + k + 1, 1, R - 2k - 1), (i + k + 1, 1, R - 2k)\}$
- if the component $i + k$ contains only a cycle of $c + 1$ vertices, then the path $P'(i, k)$ is $\{(i + k, 1, R - 2k), (i + k + 1, 1, R - 2k - 1), (i + k + 1, 1, R - 2k)\}$
- if the component $i + k$ is composed of one graph of type \mathcal{A} and $\Gamma - 1$ cycles of $c + 1$ vertices, then the path $P'(i, k)$ is $\{(i + k, 1, R - 2k + 2), (i + k, 2, R - 2k - 1), (i + k, 2, R - 2k)\} \cup \{(i + k, \gamma, R - 2k), (i + k, \gamma + 1, R - 2k - 1), (i + k, \gamma + 1, R - 2k) \mid \gamma = 2, \dots, \Gamma - 1\} \cup \{(i + k, \Gamma, R - 2k), (i + k + 1, 1, R - 2k - 1), (i + k + 1, 1, R - 2k - 2)\}$.
- if the component $i + k$ is composed of Γ cycles of $c + 1$ vertices, then the path $P'(i, k)$ is $\{(i + k, \gamma, R - 2k), (i + k, \gamma + 1, R - 2k - 1), (i + k, \gamma + 1, R - 2k) \mid \gamma = 1, \dots, \Gamma - 1\} \cup \{(i + k, \Gamma, R - 2k), (i + k + 1, 1, R - 2k - 1), (i + k + 1, 1, R - 2k - 2)\}$.

It is easy to see that at each round of the gossip phase, the exchange of information can be performed by using the paths defined above. And the next lemma holds.

Lemma 6 *Let be $\ell \leq \frac{c-1}{2}$. For all $i < j$ and $i + \ell \pmod{r} \neq j$, the paths $\mathcal{P}'_{i \rightarrow i+\ell}$ and $\mathcal{P}'_{j \rightarrow j+\ell}$ are pairwise edge-disjoint.*

The proof is analogous to the proof of Lemma 5.

4.3.2 Case 2. $a < b/2$

Since $b < c + 1$, it implies that $a < (c + 1)/2$. By using the cycle decomposition, we split the graph into $r = a + 1$ components. The components $1 \dots a$ contain one $c + 1$ -cycle and the component 0 is a path of b vertices. The vertex j of the b -path in component 0 has label $(0, 1, j)$ and the vertices in the other components are labeled as in Section 4.1. We take $(k, 1, R = b - 2)$, $k = 0 \dots a$, as accumulation vertices (in Section 4.1, $R = c - 1$). Let us notice that there are $b/2 + 1$ edges connecting component $r - 1$ with component 0.

This decomposition allows us to define an algorithm as in Section 4.1.

4.4 The upper bound in case $N = a(c + 1) + b$

Since the gossip algorithm performs in $2\lceil \log_2 s \rceil + \lceil \log_2 r \rceil$, the calculation of the number of rounds gives:

- $a \geq b/2$:

$$a \geq c + 1, \text{ then } r = c - 1 \text{ and } s = (\alpha + 1)(c + 3).$$

$$g(\mathbf{C}(N, c)) \leq 2\lceil \log_2 N \rceil - \lceil \log_2 c \rceil + O(1)$$

$$a < c + 1, \text{ then } r = a \text{ and } s = c + 3.$$

$$g(\mathbf{C}(N, c)) \leq 2\lceil \log_2 N \rceil - \lceil \log_2 a \rceil + O(1)$$

- $a < b/2 < (c + 1)/2$, then $r = \lfloor a/2 \rfloor + 1$ and $s = 2(c + 1)$:

$$g(\mathbf{C}(N, c)) \leq 2\lceil \log_2 N \rceil - \lceil \log_2 a \rceil + O(1)$$

5 Conclusion

We have decomposed the chordal ring $\mathbf{C}(\mathbf{N}, \mathbf{c})$ into r components of size s in order to apply the three-phase algorithm. This enables us to give an upper bound for the gossiping time under the full-duplex line model:

$$g(\mathbf{C}(N, c)) \leq 2\lceil \log_2 s \rceil + \lceil \log_2 r \rceil$$

According to the different values of c and $N = a(c + 1) + b$ we can reduce the results into the following two cases:

- $a \geq c + 1$

$$g(\mathbf{C}(N, c)) \leq 2\lceil \log_2 N \rceil - \lceil \log_2 c \rceil + O(1)$$

- $a < c + 1$

$$g(\mathbf{C}(N, c)) \leq 2\lceil \log_2 N \rceil - \lceil \log_2 a \rceil + O(1)$$

From Lemma 4 we can conclude that in the first of the above cases our bound is optimal. In the second one, we expect that a better approximation of the edge-bisection width could prove the optimality of this algorithm.

References

- [1] B.W. Arden and H. Lee. Analysis of chordal ring network. *IEEE Trans. Comput.*, C-30(4):291–295, April 1981.
- [2] L. Barrière, J. Fàbrega, E. Simó, and Zaragoza. Fault-tolerant routings in chordal ring networks. Submitted to *Networks*, 1997.
- [3] J.-C. Bermond, F. Comellas, and D. F. Hsu. Distributed loop computer networks: A survey. *J. Parallel Distributed Comput.*, 24:2–10, 1995.
- [4] N.K. Cheung and al. Special issue on dense WDM networks. *IEEE Journal Selected Areas in Communications*, 8, 1990.
- [5] F. Comellas and P. Hell. Broadcasting in chordal rings. IWIN'97, Praga, 1997.
- [6] H.S.M. Coxeter. Self dual configurations and regular graphs. *Bull. Amer. Math. Soc.*, pages 413–455, 1950.
- [7] R.F. DeMara and D.I. Moldovan. Performance indices for parallel marker-propagation. In *Proceedings of the International Conference on Parallel Processing*, pages 658–659, 1991.
- [8] J.J. Dongarra and D.W. Walker. Software libraries for linear algebra computation on high performances computers. *SIAM review*, 37:151–180, 1995.
- [9] C. Laforest. Gossip in trees under line-communication mode. In *Euro-Par'96 Parallel Processing*, number 1123 in Lecture Notes in Computer Science, pages 371–373. Springer, August 1997.
- [10] A.M. Farley. Minimum time line broadcast networks. *Networks*, 10:59–70, 1980.

- [11] M. A. Fiol, J.L.A. Yebra, I. Alegre, and M. Valero. A discrete optimization problem in local networks and data alignment. *IEEE Trans. Comput.*, C-36(6):702–713, 1987.
- [12] P. Fraigniaud and E. Lazard. Methods and problems of communication in usual networks. *Discrete Appl. Math.*, 53(1):79–133, 1994.
- [13] S.M. Hedetniemi, S.T. Hedetniemi, and A. Liestman. A survey of gossiping and broadcasting in communication networks. *Networks*, 18:319–349, 1986.
- [14] J. Hromkovič, R. Klasing, B. Monien, and R. Peine. Dissemination of information in interconnection networks (broadcasting and gossiping). In D.Z. Du and F. Hsu, editors, *Combinatorial Network Theory*, pages 125–212, 1995.
- [15] J. Hromkovič, R. Klasing, and E.A. Stöhr. Dissemination of information in vertex-disjoint paths mode. *Computers and Artificial Intelligence*, 15(4):295–318, 1996.
- [16] J. Hromkovič, R. Klasing, E.A. Stöhr, and H. Wagener. Gossiping in vertex-disjoint paths mode in d -dimensional grids and planar graphs. *Information and Computation*, 123(1):17–28, 1995.
- [17] J. Hromkovič, R. Klasing, W. Unger, and H. Wagener. Optimal algorithms for broadcast and gossip in the edge-disjoint path modes. 4th Scandinavian Workshop on Algorithm Theory (SWAT'94), *Lecture Notes in Computer Science* 824: 219–230, 1994.
- [18] X. D. Hu and F. K. Hwang. Reliabilities of chordal rings. *Networks*, 22:487–501, 1992.
- [19] F.K. Hwang and P.E. Wright. Survival reliability of some double-loop networks and chordal rings. *IEEE Trans. Comput.*, 44(12):1468–1471, 1995.
- [20] R. Klasing. *On the complexity of broadcast and gossip in different communication modes*. PhD thesis, University of Paderborn. Germany., 1996.
- [21] P. Morillo. *Grafos y digrafos asociados con teselaciones como modelos para redes de interconexión*. PhD thesis, Universitat Politècnica de Catalunya, Barcelona, Spain, 1987.
- [22] P. Morillo, F. Comellas, and M. A. Fiol. Metric problems in triple loop graphs and digraphs associated to an hexagonal tessellation of the plane. Technical Report 05-0286, Departament de Matemàtica Aplicada i Telemàtica, UPC, June 1986.
- [23] P. Morillo, F. Comellas, and M. A. Fiol. The optimization of chordal ring networks. In W. Xiuying Q. Yasheng, editor, *Communication Technology*, pages 295–299. World Scientific Singapore, Proc. Int. Conf. on Communication Technology ICCF87, China 1987.
- [24] P. Pacheco. *Parallel programming with MPI*. Morgan Kaufmann, 1995.
- [25] D. Krizanc and F. Luccio. Boolean routing on chordal rings. In *Proceedings of the colloquium on Structural Information and Communication Complexity*, 1995.
- [26] J. de Rumeur. *Communications dans les réseaux de processeurs*. Masson, 1994.
- [27] C.K. Wong and D. Coppersmith. A combinatorial problem related to multimode memory organizations. *J. Assoc. Comp. Mach.*, 21:392–402, 1974.

- [28] H. Xu, P. McKinley, and L. Ni. Efficient implementation of barrier synchronization in wormhole-routed hypercube multicomputers. *Journal of Parallel and Distributed Computing*, 16:172–184, 1992.
- [29] J.L.A. Yebra, M.A. Fiol, P. Morillo, and I. Alegre. The diameter of undirected graphs associated to plane tessellations. *Ars Combin.*, 20B:159–171, 1985.

Appendix B

Schedulling calls for multicasting in tree-networks

En aquest segon apèndix s'adjunta el treball realitzat amb Pierre Fraignaud i Johanne Cohen del Laboratoire de Recherche en Informatique (LRI), a la Universitat de Paris Sud, (Orsay, Paris). Aquest treball ha estat acceptat per a ser presentat a SODA'99 (ACM-SIAM Symposium on Discrete Algorithms) el gener de 1999, [23].

Un dels problemes de la propagació d'informació, consisteix en enviar un missatge des d'un usuari a d'altres de la xarxa. D'aquesta operació, en general, se'n diu *multicast*. La difusió, n'és un aspecte particular en el cas que el missatge hagi de ser transmès a tots els altres usuaris de la xarxa.

Una organització adequada de les files i columnes d'una certa matriu booleana es pot relacionar amb la solució d'un problema de multicast. És a dir, a partir d'una matriu M , d'ordre $p \times q$, se n'ha de trobar una altra M^* , que satisfà certes propietats. A partir d'aquest resultat i com a aplicació, es dóna un algorisme que calcula un procediment de multicast òptim per al cas d'arbres dirigits, els arcs del qual estan orientats des de l'arrel cap a les fulles.

Scheduling calls for multicasting in tree-networks

Johanne Cohen*

Pierre Fraigniaud^{†‡}

Margarida Mitjana[§]

Abstract

In this paper, we show that the multicast problem in trees can be expressed in term of arranging rows and columns of boolean matrices. Given a $p \times q$ matrix M with 0-1 entries, the *shadow* of M is defined as a boolean vector x of q entries such that $x_i = 0$ if and only if there is no 1-entry in the i th column of M , and $x_i = 1$ otherwise. (The shadow x can also be seen as the binary expression of the integer $x = \sum_{i=1}^q x_i 2^{q-i}$. Similarly, every row of M can be seen as the binary expression of an integer.) According to this formalism, the key for solving a multicast problem in trees is shown to be the following. Given a $p \times q$ matrix M with 0-1 entries, finding a matrix M^* such that:

1. M^* has at most one 1-entry per column;
2. every row r of M^* (viewed as the binary expression of an integer) is larger than the corresponding row r of M , $1 \leq r \leq p$; and
3. the shadow of M^* (viewed as an integer) is minimum.

We show that there is an $O(q(p+q))$ algorithm that finds M^* for any $p \times q$ boolean matrix M .

The application of this result is the following: Given a directed tree T whose arcs are oriented from the root toward the leaves, and a subset of nodes D , there exists a polynomial-time algorithm that computes an optimal multicast protocol from the root to all nodes of D . According to usual communications systems, the resulting communication protocol can be set on top of either 1-port or all-port send- and receive-instructions, with edge-disjoint long-distance calls. Such protocols can in turn find applications in the management of large multi-point applications (e.g., video server, data-bases, etc.) in which a specific node broadcasts information to a large number of users connected by a tree-network (e.g., Core-Based Tree).

Keywords: information dissemination, multi-point applications, group communications, broadcasting, multicasting.

*Laboratoire de Recherche en Informatique, Bât. 490, Univ. Paris-Sud, 91405 Orsay cedex, France. Additional support by the DRET of the DGA.

[†]Laboratoire de Recherche en Informatique, Bât. 490, Univ. Paris-Sud, 91405 Orsay cedex, France. Additional support by the CNRS

[‡]Correspondence author. Email: Pierre.Fraigniaud@lri.fr.

[§]Dept. Matematica i Telematica, Universitat Politcnica de Catalunya, 08034 Barcelona, Spain.

1 Introduction

1.1 Motivations

Recent advances in telecommunication systems enhanced standard point-to-point communication protocols to multi-point protocols. These latter protocols are of particular interest for group applications. Those groups involve more than two users (some may even involve thousands of users) sharing a common application, as video-conferences, distributed data-bases, media-spaces, games, etc. Several protocols have been proposed to handle and to control a large group of users. We refer to [7, 21] for surveys on multi-point applications and protocols. Solutions differ according to the type of traffic that is induced by the shared application, and according to the quality of service required by the users. Multi-point architectures are often based on tree-networks [26], either a single tree connecting all the users (*e.g.*, Core-Based Tree [1]), or several trees (*e.g.*, PIM [6]). The traffic between the users is then routed along the edges of the tree(s).

One of the major communication problem related to multi-point applications consists to broadcast a message from one user to all the users of the application. This operation is called *broadcast* at the application level, though it is actually a *multicast* at the network level. The repetition of point-to-point connections between the source and the several destinations would significantly increase the traffic in the network, and it makes this solution not applicable in practice [7]. Thence, the source must require the help of other nodes to relay messages. A broadcast message will then reach the destinations after having been relayed by several intermediate nodes (each intermediate node may possibly get one copy of the message if it belongs to the group). In order to preserve the broadcast application from transmission errors, and to bound the interval between successive receptions of consecutive packets, the number of hops between the source and each destination must be as small as possible. The aim of this paper is to provide a polynomial algorithm which returns, for any tree T , and for any source $u \in V(T)$, a multicast protocol from u to an arbitrary subset of nodes of T that minimizes the number of hops.

We consider multicasting from the root to a set of destination nodes of a directed tree T whose arcs are oriented from the root toward the leaves. When the set of destination nodes is the set of all nodes, this problem correspond to the broadcast problem. We focus our work on oriented trees because, although a bidirectional channel can be reserved between members of a group to facilitate bidirectional exchanges, it happens frequently that the bandwidth reserved in each direction differs from each other as the application is often not symmetric. For instance, consider members connected to a video server: the main point is to insure a fast broadcast of the multi-media traffic *from* the server, and thus the bandwidth of the connections from or toward the server may differ of a few order of magnitude.

1.2 Models

We will consider both 1-port and all-port models. In the 1-port model, we assume that, at any given time, each node of the tree can *call* at most one other node of the tree. In the all-port model, a node can call many other nodes simultaneously. Moreover, according to modern communication facilities (*e.g.*, circuit-switched, wormhole, WDM, or, in some sense, ATM), long-distance calls are allowed, in the sense that the receiver of a call is not necessarily a neighboring node of the initiator of the call, and a message crossing a node can cut-through the node if required. As a restriction though, we want the calls performed at the same time to not share any edge. This latter restriction

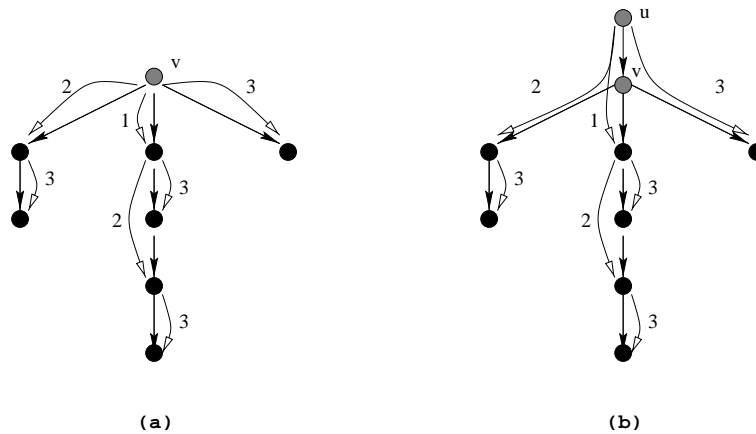


Figure 1: A broadcast in the 1-port model (a), and a multicast in the all-port model (b). Destination nodes are colored in black.

is set to avoid contention on the links. In particular, it means that, in the all-port model, a node x cannot initiate more than $\deg^+(x)$ calls, where $\deg^+(x)$ is the out-degree of node x . For instance, on Figure 1(b), the source node u cannot inform more than one other node at a time.

The set of all calls performed at the same time is called a *round*. For instance, on Figure 1(a), the first round is composed of one call, the second round is composed of two calls, and the third round is composed of four calls. We will express the cost of our broadcast protocols in terms of number of rounds. (That is we will be interested in minimizing the latency of the protocol rather than its throughput. Note that the pipeline technique may then be applied to our protocols in order to decrease the throughput for broadcasting long messages [10].) The aim of this paper is to show that there exist polynomial-time algorithms that computes the multicast time of any directed tree T under both 1-port and all-port edge-disjoint models. Comparing the two protocols on Figure 1(a) and (b) makes clear that these two constraints give rise to similar types of problems. Actually, it will be shown that the multicast problem can be solved by using a reduction to a problem on boolean matrices.

1.3 Previous works.

A huge literature has been devoted to group-communication problems under different hypotheses [7, 10, 13, 14, 21]. The related decision problems are often NP-complete for general networks [20, 25], and this gave rise to several approximation algorithms [2, 18, 23] and heuristics [11, 24]. Tree-networks deserved a specific interest in this context. Proskurowski [22] has shown that computing the broadcast time of a tree is polynomial in the 1-port model when only neighbor-to-neighbor calls are allowed. Still in this model, Slater, Cockayne and Hedetniemi [25] have derived a polynomial algorithm to find center nodes of undirected trees, that is nodes having minimal broadcast time among the nodes of the considered tree. Farley and Proskurowski [9] have studied the broadcasting problem in undirected trees when, at the beginning of the process, more than one node know the information to broadcast, whereas Harutyunyan and Labahn independently showed that, for any n , there exists an undirected tree-network whose broadcast time from any source is at most roughly $1.44 \lceil \log_2 n \rceil$ [12, 19].

When long-distance calls are allowed, Cohen [4] has shown that there exists a polynomial-time algorithm to compute an optimal broadcast protocol in directed trees under the all-port edge-disjoint model. However, although this algorithm can be extended to the multicast problem in which the set of destinations is a subset of the nodes of the tree, it yields an inefficient protocol. In the 1-port edge-disjoint model, Farley [8] has shown that every *undirected* n -node network has a broadcast time of $\lceil \log_2 n \rceil$ (see also [17]). This result has been extended in [5] to the case in which the routes are chosen according to a shortest path routing function. However, the results of [5, 8] do not hold in directed networks: take as a counter example the digraph in which a node u has a unique outgoing arc to a node v which has in turn $n - 2$ outgoing arcs to $n - 2$ vertices w_1, \dots, w_{n-2} , each connected by an outgoing arc to node u . Actually, broadcasting in a directed network gives rise to an NP-complete decision problem in the 1-port edge-disjoint model.

Note that some authors have also considered the vertex-disjoint constraint. In this context, the broadcasting problem was studied for specific architectures [15, 16], and approximation algorithms have been derived [18]. Actually, vertex-disjoint hypotheses also yield complex problems, and the broadcast problem is still open for trees (see [3] for a first attempt in this direction).

1.4 Our results.

First, we will show that the broadcast problem in directed trees under the 1-port edge-disjoint model gives rise to the following matrix problem (Lemma 2 in Section 2). Given a $p \times q$ matrix M with p rows, q columns, and 0-1 entries, the *shadow* of M is defined as a 1-dimensional boolean vector x of q entries such that $x_i = 0$ if and only if there is no 1-entry in the i th column of M , and $x_i = 1$ otherwise. According to this formalism, the key for solving a multicast problem in directed trees is shown to be the following.

Minimal contention-free matrix problem. Given a $p \times q$ matrix M with 0-1 entries, finding a matrix M^* such that¹:

1. M^* has at most one 1-entry per column;
2. every row r of M^* (viewed as the binary expression of an integer) is larger than the corresponding row r of M , $1 \leq r \leq q$; and
3. the shadow of M^* (viewed as an integer) is minimum.

Such matrix M^* is called a *minimal contention-free version* of M . Note that the minimal contention-free version of a matrix is not necessarily unique, even up to a permutation of the rows. On the other hand, the shadow of a minimal contention-free version of a matrix is unique.

As an example, let us consider Figure 1(a). The corresponding matrix is

$$M = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

¹Since the shadow can also be seen as the binary expression of an integer, and since, similarly, every row of M can be seen as the binary expression of an integer, the comparison of shadows and rows must be understood as comparing the corresponding integers.

as there are respectively 2, 4, and 1 nodes in the three branches (this correspondence will be formally established in Section 2). Since M has a single 1-entry per column, a minimal contention-free version of M is M itself, and the shadow is $7 = (111)_2$. Now, assume that the rightmost branch of the tree of Figure 1(a) contains three nodes instead of only one. Then the corresponding matrix is

$$M = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad (1)$$

and the reader can check that a minimal contention-free version of M is

$$M^* = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (2)$$

M^* has a shadow equal to $14 = (1110)_2$. We will show that the matrix M^* determines a broadcast protocol from the root according to the 1-entries of the matrix. For instance, at round 1, v calls the second (middle) branch; at round 2, v calls the third (rightmost) branch; and, at round 3, v calls the first (leftmost) branch. At round 4, v is idle. We will show that there is an $O(q(p+q))$ -time algorithm that computes a minimal contention-free version of M , for any $p \times q$ boolean matrix M (Theorem 1 in Section 3).

Using the previous result, we will show that multicasting from the root of an arbitrary directed tree under the several models considered before can be solved in polynomial time (Section 4).

2 Broadcast problems and contention-free boolean matrices

In this section, we consider the 1-port edge-disjoint model only. A broadcast protocol \mathcal{B} can be described by the list of all calls performed by \mathcal{B} . The construction of our broadcast algorithms for trees is based on the so-called *shadow* of a broadcast protocol. Let $T = (V, E)$ be any oriented tree, and let \mathcal{B} be a broadcast protocol in T performing in r rounds.

Definition. The *shadow* of \mathcal{B} on an arc $e \in E$ is the r -dimensional vector (x_1, \dots, x_r) , $x_i \in \{0, 1\}$, such that $x_i = 1$ if and only if there is a call passing through e at round i . The *restriction* of \mathcal{B} on a vertex $u \in V$ with d outgoing links e_1, \dots, e_d is the $d \times r$ matrix with entries in $\{0, 1\}$ such that there is a 1 at entry i, j if and only if u gives a call through link e_i at round j of \mathcal{B} . The *shadow* of \mathcal{B} on $u \in V$ is then the r -dimensional vector (x_1, \dots, x_r) such that $x_i = 1$ if and only if there is a 1-entry in column i of the restriction of \mathcal{B} on u , and 0 otherwise.

The shadow of a broadcast protocol \mathcal{B} on an arc e (resp. on a vertex u) is denoted by $\text{shad}(\mathcal{B}, e)$ (resp. $\text{shad}(\mathcal{B}, u)$). As shadows can be seen as binary representations of integers, we denote by $\text{bin}(\mathcal{B}, e)$ (resp. $\text{bin}(\mathcal{B}, u)$) the integer whose binary representation is $\text{shad}(\mathcal{B}, e)$ (resp. $\text{shad}(\mathcal{B}, u)$). Let \mathcal{B} be a broadcast protocol in T performing in r rounds. For any vertex u , and for any link e , we have $\text{bin}(\mathcal{B}, u) \leq 2^r - 1$, and $\text{bin}(\mathcal{B}, e) \leq 2^r - 1$. The previous inequalities suggest the following definition.

Definition. Let $T = (V, E)$ be any directed tree, and let \mathcal{B} be a broadcast protocol from the root in T . Let $u \in V$, and $e \in E$. \mathcal{B} is said *lexicographically optimal* in u (resp. in e) if $\text{bin}(\mathcal{B}, u) \leq \text{bin}(\mathcal{B}', u)$ (resp. $\text{bin}(\mathcal{B}, e) \leq \text{bin}(\mathcal{B}', e)$) for any broadcast protocol \mathcal{B}' in T .

2.1 Broadcasting in a path

Let P_n be the path of n nodes, and let u be one extremity of the path. An optimal broadcast protocol \mathcal{B} from u performs in $d = \lceil \log_2 n \rceil$ rounds as follows. Let us label the nodes consecutively from 0 to $n - 1$, starting at u labeled 0. If $n = 2^d$ then u calls node $n/2$ at the first round, and we are left with two simultaneous broadcasts from the extremity of a path of length 2^{d-1} . The algorithm is then defined by induction. Note that, in the case $n = 2^d$, the source u needs to call at every round so that the broadcast can complete in $\lceil \log_2 n \rceil$ rounds. In the general case, let us decompose $n - 1$ in base 2, that is $n - 1 = \sum_{i=0}^{d-1} x_i 2^i$. The $\lceil \log_2 n \rceil$ -rounds algorithm \mathcal{B} performs as follows. Node u gives a call at round j , $j = 1, \dots, d$, if and only if $x_{d-j} = 1$. Moreover, if u does give a call at round j , then it calls node v_j labeled $n - 1 - \sum_{i=d-j}^{d-1} x_i 2^i$. Upon reception of a call from u at round j , node v_j starts a broadcast to the sub-path of P_n composed of nodes lying between node v_j and node v_k where $k = n - 2 - \sum_{i=d-j-1}^{d-1} x_i 2^i$. This sub-path is of size 2^{d-j} .

Lemma 1 \mathcal{B} is lexicographically optimal in u .

Proof. When an internal node receives a call at round j , $j = 1, \dots, d$, it can inform at most $2^{d-j} - 1$ other nodes during the $d - j$ remaining rounds. Thus, any broadcast algorithm \mathcal{B}' from u satisfies $\sum_{i=1}^d \text{shad}(\mathcal{B}', u)_i 2^{d-i} \geq n - 1$. Since, by definition, $\sum_{i=1}^d \text{shad}(\mathcal{B}, u)_i 2^{d-i} = n - 1$, we get $\text{bin}(\mathcal{B}, u) \leq \text{bin}(\mathcal{B}', u)$. ■

2.2 Broadcasting in a star

Let T be a star of p branches rooted at u , and let n_i be the number of nodes of the i th branch, $i = 1, \dots, p$. T has $n = \sum_{i=1}^p n_i + 1$ nodes in total. Assume w.l.g. that $n_1 \geq n_2 \geq \dots \geq n_p$. We denote by v_i the neighbor of u in the i th branch, and $e_i = (u, v_i)$, $i = 1, \dots, p$. Let $q = \lceil \log_2(n_1 + 1) \rceil$. A broadcast from u to T takes at least q rounds.

Let \mathcal{B}_i be the lexicographically optimal broadcast protocol from u to the i th branch, $i = 1, \dots, p$, as defined in Section 2.1. Let M be the $p \times q$ matrix whose i th row is $\text{shad}(\mathcal{B}_i, e_i)$. As it is defined, M is a “merging” of shadows, but it cannot be directly recognized as the restriction of a 1-port broadcast protocol from u to T since there might be contentions between the several shadows. For instance, if T is a star of two branches of one node each, then $\text{shad}(\mathcal{B}_1, e_1) = \text{shad}(\mathcal{B}_2, e_2) = [1]$, and $M = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ is not a restriction in u of a broadcast protocol since u would then have to call two nodes simultaneously, which is in contradiction with the 1-port hypothesis. However, M can be transformed in

$$M^* = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

which is the restriction of the broadcast protocol from u in T which performs as follows: at the first round u calls the node of the first branch, and, at the second round, u calls the node of the second branch. A similar example has been considered before when matrix M of Equation 1 was transformed into the matrix M^* of Equation 2.

Lemma 2 Let T be a star of p branches of length at most $2^q - 1$ nodes each. Let M be the $p \times q$ matrix whose p rows are the p shadows $\text{shad}(\mathcal{B}_i, e_i)$ of p broadcast algorithms from u to the p branches of T . Assume that all \mathcal{B}_i 's are lexicographically optimal in u . Then any contention-free

version M^* of M determines a broadcast protocol \mathcal{B} from u . Moreover, if M^* is minimal, then \mathcal{B} is lexicographically optimal in u , and conversely.

Proof. Let M^* be a contention-free version of M . To show that M^* is the restriction of a broadcast protocol \mathcal{B} from u , we give a broadcast protocol from u as a function of the structure of M^* . For every r , $1 \leq r \leq p$, the r th row of M^* is larger than the corresponding row in M . Therefore, consider a particular row L^* of M^* , and let L be the corresponding row in M . Assume both rows correspond to the r th branch of the star. If $L^* = L$ then L^* is indeed the shadow of a broadcast protocol in the r th branch. Thus assume that $L \neq L^*$, and let i be the leftmost bit position for which L and L^* differ. Note that, in this case, $L_i^* = 1$ and $L_i = 0$ because $L_i^* \geq L_i$. L^* defines a broadcast protocol in the r th branch of the star as follows. From round 1 to round $i - 1$, do as in the original broadcast protocol L . At round i , u calls its neighbor v_r in the r th branch. During the remaining rounds, u does not call the r th branch anymore. However, v_r simulates the calls of u according to L . That is, if u calls w at round $j > i$ in L , then v_r calls node w at round j . Therefore, L^* is the shadow of a broadcast protocol in the r th branch of the star. M^* has at most one 1-entry per column, thus \mathcal{B} satisfies the 1-port model. Also, if the shadow of M^* is minimum, then \mathcal{B} is lexicographically optimal.

Let M^* be the restriction in u of a broadcast protocol \mathcal{B} from u . Assume that \mathcal{B} is lexicographically optimal in u . To satisfy the 1-port model, there is at most one 1-entry in each column of M^* . Moreover, from Lemma 1, since M^* allows to broadcast in each branch, the r th row of M^* is larger than the r th row of M . Indeed, each row of M is the shadow of a lexicographically optimal broadcast protocol from u . Finally, since \mathcal{B} is lexicographically optimal in u , the shadow of M^* is minimum. Therefore, M^* is a minimal contention-free version of M . ■

According to the previous lemma, the key to find an optimal broadcast protocol in a star is to solve the minimal contention-free matrix problem as stated in Section 1.4. Actually, we will see in Section 4 that solving the minimal contention-free matrix problem is also the key to solve the broadcast and multicast problems in any arbitrary directed tree. Therefore, the next section is entirely devoted to solving the minimal contention-free matrix problem.

3 A polynomial algorithm for the minimal contention-free boolean matrix problem

Let M be a $p \times q$ boolean matrix. Our algorithm will transform M in a $p \times q^*$ minimal contention-free version of M denoted by M^* . The total number of columns of any minimal contention-free version of M is denoted by $\mathcal{C}(M)$. $\mathcal{C}(M)$ and M^* will be computed by a sequence of elementary operations of two types: *insertion* of a zero-column at position 0, and *shifting* of an existing zero-column from position $t - 1$ to position t (columns are labeled from left to right). The shift operation has an important consequence on the 1-entries of the matrix. When a zero-column is shifted one position to the right, from position $t - 1$ to position t , that is when the two columns $t - 1$ and t are exchanged, the entries of the matrix are modified according to the following rule:

Rule 1. for every i , $1 \leq i \leq p$, if there is a 1-entry originally at position t of row i , then, after the exchange, all 1-entries of row i at position $> t$ are switched to 0.

This rule comes from the simple fact that, for any k , $2^{k+1} > \sum_{i=0}^k a_i 2^i$ for any $a_i \in \{0, 1\}$, $i = 0, \dots, k$. Therefore, any row modified according to rule 1 is larger than the original row,

whatever are the entries of the row left to position t .

Using rule 1, our algorithm is formally described in Algorithm 1, and an example is provided on Figure 2. Informally, Algorithm 1 performs as follows. The q columns of M are considered from left to right. Problems occur when there are two or more 1-entries in the current column (Instruction 6). On Figure 2(a), this occurs at column 4 since there is a single 1-entry in each of the three leftmost columns of M . Algorithm 1 then tries to increase the number of zero-columns by shifting existing zero-columns from their current position to the left of the current column, and applying rule 1 (Instruction 13). Possibly, one zero-column is inserted at position 0 (Instruction 18). The goal is to obtain enough zero-columns on the left of the current column to spread out the contending 1's over these zero-columns. On Figure 2(a), there is no zero-column at that time of the algorithm, and thus a zero-column is inserted at position 0, as shown on Figure 2(b). Then the two first columns are exchanged. This exchange has a major consequence: according to rule 1, all 1-entries, but the leading 1, of the first row are switched to 0. This creates a new zero-column, and one of the two contending 1's of column 4 vanishes (see Figure 2(c)). The algorithm then considers position 5 (now the 6th column from the left). Four 1-entries are contending at position 5 of the matrix. The rightmost zero-column is then shifted to the right. It is worth to notice that it is always the rightmost zero-column not next to the current column that is considered. Choosing this column instead of any zero-column has a tremendous effect of the shadow of the resulting matrix. The effect of this shift in the example is to delete one contending 1-entry (see Figure 2(d)). The zero-column is then shifted once more to the right. Again, it deletes one contending 1-entry (see Figure 2(e)). Once there are enough zero-columns to solve all conflicts between 1-entries in the current column, the contending 1's are spread out over these columns. Note that if after all possible shifting, there is still not enough zero-columns to absorb the contending 1's, then some zero-columns are inserted again (Instruction 23). In our example, there are one zero-column and two contending 1's, so there is no need to insert new zero-column (see Figure 2(e)). Now, the choice of the unique 1-entry of column 5 which is *not* moved to a zero-column matters. Algorithm 1 keeps in place the 1-entry which corresponds to the row with the minimum lexicographic order, starting from the current column (Instruction 25). In our example, it means that the 1-entry of row 5 will be left in place, while the 1-entry of row 4 will be moved to the zero-column. Indeed, from the current position, row 4 is 110 whereas row 5 is 100. After that, we are left with the matrix on Figure 2(f) in which the last 1-entry of row 4 has been switched to 0. The effect of the choice of the smallest row is to postpone other conflicts with this row as far as possible. In the example, it transforms the penultimate column into a zero-column. Therefore, the conflict appearing at position 7 can be easily solved. We claim that the resulting matrix is a minimal contention-free version of the original matrix. Its shadow is $(10111111)_2$.

Remark. Note that it is not difficult to approximate $\mathcal{C}(M)$ up to an additive factor of 1. Indeed, let M_0 be the matrix obtained from M by switching all 1-entries, but the leading 1-entry of each row, to zero. The reader can check that computing $\mathcal{C}(M_0)$ and M_0^* is easy. For instance, on the example of Figure 2, $\mathcal{C}(M_0) = 6$, and M_0^* is the identity matrix. Moreover, we have $\mathcal{C}(M_0) \leq \mathcal{C}(M) \leq \mathcal{C}(M_0) + 1$. Indeed, eventually, we have to solve all contentions induced by leading 1's, that is $\mathcal{C}(M) \geq \mathcal{C}(M_0)$. Now, let M_1 be the $p \times (q+1)$ matrix obtained from M_0 by adding one zero-column at position $q+1$. All rows of M_1 are larger than the corresponding rows of M , therefore a minimal contention-free version of M_1 will give a contention-free version of M . Therefore, $\mathcal{C}(M) \leq \mathcal{C}(M_1) = \mathcal{C}(M_0) + 1$. Unfortunately, approximating $\mathcal{C}(M)$ up to an additive factor of 1 is not enough to provide a good approximation algorithm for the broadcast time of a tree. Indeed, we will see in Section 4 that one

Algorithm 1

```
1  For  $i:=1$  to  $q$  do
   /* We sparse the columns from column 1 to column  $q$  */
2     $\mathcal{C}_i :=$  current column;
3    if  $\mathcal{C}_i$  is a zero-column then
4       $Z := Z \cup \{\mathcal{C}_i\}$ ;
   /*  $Z$  currently denotes the set of zero-columns left to the current column */
5    else
6      if there is more than a single 1-entry in  $\mathcal{C}_i$  then
7         $nb_1 :=$  # 1's in  $\mathcal{C}_i$ ;
8         $W :=$  set of consecutive zero-columns immediately to the left of  $\mathcal{C}_i$ ;
9        not_yet_inserted := true;
10       While  $nb_1 - 1 > |W|$  and ( $Z \neq W$  or not_yet_inserted) do
   /* while there is still not enough zero-column immediately to the left of  $\mathcal{C}_i$ , */
   /* but still some zero-columns that can be pushed immediately to the left of  $\mathcal{C}_i$  */
11          $Z' := Z \setminus W$ ;
12          $c :=$  rightmost zero-column in  $Z'$ ;
13         Shift  $c$  one column to the right, and apply rule 1;
14          $Z :=$  set of zero-columns left to  $\mathcal{C}_i$ ;
15          $W :=$  set of consecutive zero-columns immediately to the left of  $\mathcal{C}_i$ ;
16          $nb_1 :=$  # 1's in  $\mathcal{C}_i$ ;
17         if  $nb_1 - 1 > |W|$  and  $W = Z$  and not_yet_inserted then
   /* One needs to insert a zero-column */
18           Insert a zero-column at position 0;
19           not_yet_inserted := false;
20            $Z :=$  set of zero-columns left to  $\mathcal{C}_i$ ;
21         EndIf
22       EndWhile
   /* Now, either there is enough zero-columns to solve all contentions, */
   /* or all zero-columns are immediately to the left of  $\mathcal{C}_i$  */
23       if  $nb_1 - 1 > |W|$  then insert  $nb_1 - |W| - 1$  zero-columns left to  $\mathcal{C}_i$ ;
   /* The  $nb_1$  1's will be spread out over the zero-columns of  $W$  */
24       Truncate each row with a 1 in  $\mathcal{C}_i$  in order to keep only entries to the right of  $\mathcal{C}_i$ ;
25        $\ell :=$  index of the row of minimum lexicographic order among the truncated rows;
26        $W' := nb_1 - 1$  rightmost columns of  $W$ 
27       Spread out the  $nb_1$  1's of  $\mathcal{C}_i$  over  $W'$ ; the 1-entry of row  $\ell$  stays in  $\mathcal{C}_i$ ;
28        $Z :=$  set of zero-columns left to the current column;
29     EndIf
30   EndIf
31 EndFor
```

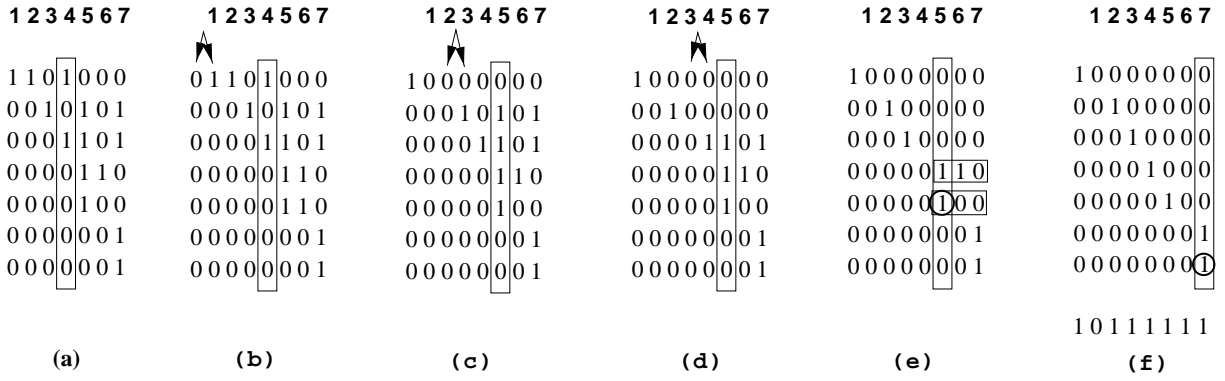


Figure 2: An example of the execution of Algorithm 1.

often need to solve the minimal contention-free matrix problem at all levels of the tree, and thus one would cumulate the error at each level.

Theorem 1 *Algorithm 1 is an $O(q(p+q))$ -time algorithm that computes a minimal contention-free version of any $p \times q$ boolean matrix.*

Lemma 3 *Algorithm 1 is an $O(q(p+q))$ -time algorithm.*

Proof. First, let us show that Algorithm 1 performs in $O(q(q+p))$ steps. The *for*-loop is executed q times, but the part “else” (Instruction 5) is not performed more than p times because there are p rows, and solving a contention between 1-entries creates at least one row whose all entries are 0 after the current position. Let i be an index of the *for*-loop for which there is a contention. From what was said before, there are at most p such indices. Let k_i be the number of contending 1-entries: $\sum_i k_i \leq 2(p-1)$. All instructions before the *while*-loop do not require more than $O(p+q)$ time units. The *while*-loop is executed at most $q k_i$ times because each execution of the loop corresponds to a right-shift of a zero-column, and one cannot move a zero-column to the right more than q times, this for each of the k_i 1-entries. Actually, one can slightly modify the algorithm so that there are no more than q right-shifts in total, for all conflicts. Indeed, when shifting the zero-columns to the right, one can jump columns that were already exchanged with a zero-column since rule 1 was already applied. Altogether, rule 1 cannot be applied more than q times. Application of rule 1 has a cost of $O(q)$ since at most one row is updated after a right-shift. All other instructions inside the *while*-loop have a cost of $O(p+q)$. Instruction 25 has a cost of $O(q k_i)$, same as Instruction 27. Therefore, in total, the complexity is $O(q(q+p) + \sum_i q k_i)$ that is $O(q(q+p))$. ■

The fact that Algorithm 1 computes a minimal contention-free version of any $p \times q$ boolean matrix M is based on the following lemmas.

Lemma 4 *If every rows A_i and B_i of two matrices A and B satisfy $A_i \leq B_i$, then $\text{shad}(A^*) \leq \text{shad}(B^*)$.*

Proof. Straightforward. ■

Notation. Given two matrices A and B of the same number of rows p , and of respectively q and q' columns, AB denotes the $p \times (q + q')$ matrix obtained by putting A and B next to each other.

Lemma 5 $\text{shad}((AB)^*) \leq \text{shad}\left(\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}^*\right)$.

Proof. Let

$$\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}^* = \begin{pmatrix} X & 0 \\ Y & Z \end{pmatrix}.$$

For any row i , we have $X_i \geq A_i$. Also, for any row j , we have $Y_j Z_j \geq B_j$. $X' = X + Y$ has at most one 1-entry per column, that is $X'Z$ has at most one 1-entry per column. Moreover, $X'Z$ satisfies that, for any row i , $(X'Z)_i \geq (AB)_i$. Since $\text{shad}(X'Z) = \text{shad}\left(\begin{pmatrix} X & 0 \\ Y & Z \end{pmatrix}\right)$, the lemma holds. ■

Note that the inequality in Lemma 5 can be strict. For instance

$$\text{shad}\left(\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^*\right) = 101$$

whereas

$$\text{shad}\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^*\right) = 111.$$

Lemma 6 If $(AB)^* = AB'$ where B' has the same number of columns as B , then $\text{shad}((AB)^*) = \text{shad}\left(\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}^*\right)$.

Proof. By lemma 5, we just have to show that $\text{shad}((AB)^*) \geq \text{shad}\left(\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}^*\right)$. Let

$$C = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} \text{ and } C' = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B' \end{pmatrix}.$$

We have, for any row i , $C'_i \geq C_i$, and there is at most one 1-entry per column of C' . Since $\text{shad}(C') = \text{shad}((AB)^*)$, the lemma holds. ■

Lemma 7 Let X, X', Y, Y' be 1-dimensional vectors, and let A and A' be multi-dimensional matrices. Let

$$M = \begin{pmatrix} X' & 0 & 1 & X \\ Y' & 0 & 1 & Y \\ A' & 0 & 0 & A \end{pmatrix}, \quad M_X = \begin{pmatrix} X' & 0 & 1 & X \\ Y' & 1 & 0 & 0 \\ A' & 0 & 0 & A \end{pmatrix} \text{ and } M_Y = \begin{pmatrix} X' & 1 & 0 & 0 \\ Y' & 0 & 1 & Y \\ A' & 0 & 0 & A \end{pmatrix}$$

where there is at most one 1-entry per column in $\begin{pmatrix} X' \\ Y' \\ A' \end{pmatrix}$. Then

$$\text{shad}(M^*) = \min(\text{shad}(M_X^*), \text{shad}(M_Y^*)).$$

Proof. From Lemma 4, $\text{shad}(M^*) \leq \min(\text{shad}(M_X^*), \text{shad}(M_Y^*))$. The equality holds because at least one 1-entry in the block $\begin{pmatrix} X' & 0 & 1 \\ Y' & 0 & 1 \end{pmatrix}$ must be moved to the left. ■

Lemma 8 *With the same notations as in lemma 7, if $Y \leq X$ then $\text{shad}(M_Y^*) \leq \text{shad}(M_X^*)$.*

Proof. Assume for the purpose of contradiction that $\text{shad}(M_Y^*) > \text{shad}(M_X^*) = \text{shad}(M^*)$. We get

$$M_X^* = \begin{pmatrix} X' & 0 & 1 & X'' \\ Z & z & 0 & 0 \\ B' & b & 0 & B \end{pmatrix}$$

where $Zx \geq Y'1$, $(B'b0B)_i \geq (A'00A)_i$ for every row i of these matrices, and $X'' \geq X$. The first row of M_X^* is necessarily of the form $X'01X''$ because if this row is $\geq X'100$, then $\text{shad}(M_Y^*) \leq \text{shad}(M_X^*)$.

By Lemma 6, we get

$$\text{shad}(M_X^*) = \text{shad}\left(\begin{pmatrix} X' & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & X' \\ Y' & 1 & 0 & 0 \\ A' & 0 & 0 & A \end{pmatrix}^*\right) \quad (3)$$

On the other hand, by Lemma 5, $\text{shad}(M_Y^*) > \text{shad}(M_X^*)$ implies that

$$\text{shad}(M_X^*) < \text{shad}\left(\begin{pmatrix} X' & 1 & 0 & 0 \\ Y' & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & Y \\ A' & 0 & 0 & A \end{pmatrix}^*\right)$$

That is, by Lemma 4,

$$\text{shad}(M_X^*) < \text{shad}\left(\begin{pmatrix} X' & 1 & 0 & 0 \\ Y' & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & X \\ A' & 0 & 0 & A \end{pmatrix}^*\right) \quad (4)$$

Equations 3 and 4 give

$$\text{shad}\left(\begin{pmatrix} X' & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & X' \\ Y' & 1 & 0 & 0 \\ A' & 0 & 0 & A \end{pmatrix}^*\right) = \text{shad}\left(\begin{pmatrix} X' & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & X'' \\ Z & z & 0 & 0 \\ B' & b & 0 & B \end{pmatrix}\right) < \text{shad}\left(\begin{pmatrix} X' & 1 & 0 & 0 \\ Y' & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & X \\ A' & 0 & 0 & A \end{pmatrix}^*\right)$$

Assume $b = 0$ and $z = 0$. Thus $Z > Y'$, and therefore $B'_i > A'_i$ for at least one row of A' and B' . Let us consider the row i such that $B'_i > A'_i$ and such that the rightmost bit position for which there is a 1-entry in B'_i is minimum. Let k and k' be the rightmost bit positions for which there is a 1-entry in Z and B'_i respectively. If $k > k'$ then replacing the row $(B'000)_i$ by $(A'100)_i$ would decrease the shadow. If $k < k'$ then replacing the $Z000$ by $Y'100$ would also decrease the shadow. Therefore $z \neq 0$. However, $z = 1$ implies that the matrix

$$\begin{pmatrix} X' & 1 & 0 & 0 \\ Z & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & X'' \\ B' & 0 & 0 & B \end{pmatrix}$$

is a contention-free version of

$$\begin{pmatrix} X' & 1 & 0 & 0 \\ Y' & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & X \\ A' & 0 & 0 & A \end{pmatrix}$$

yielding a contradiction. Thus $b = 1$, but then the same argument as for $z = 1$ yields another contradiction. Therefore $\text{shad}(M_Y^*) \leq \text{shad}(M_X^*)$. \blacksquare

Lemma 9 *Let $M = AxByC$ where A is a matrix with at most one 1-entry per column, x is a zero-column, B is a matrix with exactly one 1-entry per column, y is a column with two contending 1-entries, and C is an unspecified boolean matrix. Let M' be the matrix resulting from M after an exchange between x and the first column of B . We have $\text{shad}(M^*) = \text{shad}(M'^*)$.*

Proof. We already know that $\text{shad}(M^*) \leq \text{shad}(M'^*)$. The proof of the other inequality is by induction on the number of columns q of B . Assume $q = 1$, that is

$$M = \begin{pmatrix} A_1 & 0 & 1 & 0 & C_1 \\ A_2 & 0 & 0 & 1 & C_2 \\ A_3 & 0 & 0 & 1 & C_3 \\ A_4 & 0 & 0 & 0 & C_4 \end{pmatrix}.$$

Let

$$M^* = \begin{pmatrix} A'_1 & a_1 & a_2 & a_3 & C'_1 \\ A'_2 & b_1 & b_2 & b_3 & C'_2 \\ A'_3 & c_1 & c_2 & c_3 & C'_3 \\ A'_4 & d_1 & d_2 & d_3 & C'_4 \end{pmatrix}$$

with $A'_1 a_1 a_2 a_3 \geq A_1 0 1 0$, $A'_2 b_1 b_2 b_3 \geq A_2 0 0 1$, and $A'_3 c_1 c_2 c_3 \geq A_3 0 0 1$. If $a_1 a_2 a_3 \geq 100$, then, by Lemma 4, $\text{shad}(M^*) = \text{shad}(M'^*)$. If $0 1 0 \leq a_1 a_2 a_3 < 100$, then we can assume w.l.g. that $b_1 b_2 b_3 \geq 100$. Actually, we can assume that

$$M^* = \begin{pmatrix} A'_1 & 0 & 1 & 0 & C'_1 \\ A'_2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ A'_3 & 0 & 0 & 1 & C'_3 \\ A'_4 & d_1 & d_2 & d_3 & C'_4 \end{pmatrix}.$$

Let

$$M'' = \begin{pmatrix} A'_1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ A'_2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ A'_3 & 0 & 0 & 1 & C'_3 \\ A'_4 & d_1 & d_2 & d_3 & C'_4 \end{pmatrix}.$$

We have $\text{shad}(M''^*) \leq \text{shad}(M^*)$. Now,

$$M' = \begin{pmatrix} A'_1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ A'_2 & 0 & 0 & 1 & C'_2 \\ A'_3 & 0 & 0 & 1 & C'_3 \\ A'_4 & d_1 & d_2 & d_3 & C'_4 \end{pmatrix},$$

and we get $\text{shad}(M'^*) \leq \text{shad}(M''^*) \leq \text{shad}(M^*)$, that is the lemma holds for $q = 1$.

Assume the lemma holds for every q , $1 \leq q < q_0$, and let us show that it holds for q_0 . A 1-entry in AxB must be moved to the left. For any move of a 1-entry in A , one can find a move of a 1-entry in B that preserves the shadow. Therefore, one can assume that it is a 1-entry in B that is moved to the left. Moreover, we can assume that this 1-entry, denoted by $\mathbf{1}$, is moved in xB .

- If $\mathbf{1}$ is moved in B at least one column to the right of the first column of B , then one can apply the induction hypothesis, that is exchanging the first column of B with x , and then putting back $\mathbf{1}$ to its original position, without changing the shadow.
- If $\mathbf{1}$ is moved to the first column of B , then we apply Lemma 7, and then putting back $\mathbf{1}$ to its original position. The result of these operations is just as exchanging x with the first column of B . The shadow is preserved.
- If $\mathbf{1}$ is moved in x , then we can exchange $\mathbf{1}$ with the 1-entry on the first column of B , and then put back $\mathbf{1}$ to its original position, without changing the shadow.

Thus the result hold for q_0 too. ■

We have now enough material to prove Theorem 1.

Proof of Theorem 1. Algorithm 1 constructs a finite sequence of matrices $M_0 = M, M_1, \dots, M_k$, such that M_i is obtained from M_{i-1} either by shifting a zero-column to the right, or by distributing 1-entries over zero-columns. Lemmas 8 and 9 (generalized to an arbitrary number of contending 1-entries) insure that $\text{shad}(M_i^*) = \text{shad}(M_{i-1}^*)$, that is $\text{shad}(M^*) = \text{shad}(M_k^*)$. Since M_k is a contention-free version of M , we get that $\text{shad}(M^*) = \text{shad}(M_k)$. ■

4 Application to the broadcasting problem in tree-networks

4.1 All-port model

As an example of application of Theorem 1 to the multicast problem in trees, let us consider the following problem. We are given a directed tree whose arcs are oriented from the root u toward the leaves, and a set D of nodes of the tree. We want to compute the minimum number of rounds that are required to multicast an information from u to all nodes in D . We are considering the all-port edge-disjoint communication model. In this context, Cohen [4] has shown that there exists a polynomial-time algorithm that computes an optimal broadcast protocol from u to all nodes of T . To directly extend this algorithm to the multicast problem, we would make use of intermediate nodes that are not destination nodes, and this is not desirable in general. Combining Theorem 1 and the protocol in [4] allows to overcome that problem.

Corollary 1 *There exists a polynomial-time algorithm that computes an optimal multicast protocol from any source u to any destination set D in any directed tree under the all-port edge-disjoint model, and such that only the source and the destination nodes participate to the protocol.*

Sketch of the proof. The algorithm in [4] proceeds bottom-up from the leaves to the source. Each node x has a list of calls stating when and to whom x gives a call in its subtree, and when and by who x is informed. This list is constructed from the lists of all the children of x in the tree.

When the multicast problem is considered, the algorithm fails in the following case: assume a node $x \in D$ has one of its children y not in D , and that y has k children z_1, \dots, z_k in D . The algorithm in [4] requires the help of $y \notin D$. If we do not want y to be involved in the protocol, then x can be required to successively call z_1, z_2 up to z_k . More importantly, x cannot give a call simultaneously in the subtrees of the z_i 's, whereas y is able to do so in the all-port model. Therefore, giving the set of calls of y , one must schedule these calls so that x can simulate the behavior of y . One can represent the set of calls from y to the subtrees of the z_i 's by a matrix M such that $M_{i,j} = 1$ if and only if y gives a call to the subtree of z_i at round j . Theorem 1 gives a polynomial-time algorithm to schedule optimally these calls. Note that since this procedure must be applied at all the levels of the tree, one does not only need to compute a contention-free version of M with the minimum number of columns (i.e., number of rounds), but one also need to minimize the shadow. ■

4.2 1-port model

We are currently working on an extension of Theorem 1 to make use of this result in the 1-port model. Again, the idea is to construct the protocol bottom-up from the leaves to the root. To make clear why Theorem 1 needs to be slightly adapted, let us consider the simple case of a *fork*, that is a particular type of directed tree in which the root u has a single child v which is the root of a star of p branches. Let X_i be the shadow on v of an optimal broadcasting algorithm applied to the i th branch, $i = 1, \dots, p$, and let M be the $p \times q$ array whose i th row is X_i .

A non necessarily optimal broadcast protocol in the 1-port edge-disjoint model consists in two phases: first u informs v , then v informs the p branches according to a minimal contention-free version of M . This protocol may be suboptimal because it can be more efficient to have both u and v informing the p branches (in the 1-port edge-disjoint model, u and v can call two distinct branches simultaneously). So the question is when to inform v ? Before v is informed, u only can inform the branches, and there is a contention in M when there is more than a single 1-entry on a column. After v has been informed, there is a contention in M when there is more than *two* 1-entries in a column. For instance, consider the following fork: u is connected to v , and v has two branches, composed of two nodes w_1, w_2 , and four nodes w'_1, w'_2, w'_3, w'_4 , respectively. One can broadcast from u in three rounds in this fork under the 1-port edge-disjoint model: (1) u calls w'_1 , (2) u calls w_1 , and w'_1 calls w'_3 , and (3) u calls v , w'_1 calls w'_2 , w'_3 calls w'_4 , and w_1 calls w_2 . If u calls v before the third round, then one more round is required.

The adaptation of Algorithm 1 to this situation is very specific to the multicast problem. This is why we do not provide more details about it in this paper.

References

- [1] T. BALLARDIE, P. FRANCIS, AND J. CROWCROFT, *Core based tree (CBT): an architecture for scalable inter-domain multicast routing*, in proceedings of SIGCOMM, ACM press, 1993, pp. 85–95.
- [2] A. BAR-NOY, S. GUHA, J. NAOR, AND B. SCHIEBER, *Multicasting in heterogeneous networks*, in ACM Symposium on Theory of Computing (STOC), ACM press, 1998.

- [3] B. BIRCHLER, A. ESFAHANIAN, AND E. TORNG, *Information dissemination in restricted routing networks*, in proceedings of the International Symposium on Combinatorics and Applications, 1996, pp. 33–44.
- [4] J. COHEN, *Broadcasting, multicasting and gossiping in trees under the all-port line model*, in 10th ACM Symposium on Parallel Algorithms and Architectures (SPAA), ACM press, 1998, pp. 164–171.
- [5] J. COHEN, P. FRAIGNIAUD, J.-C. KONIG, AND A. RASPAUD, *Optimized broadcasting and multicasting protocols in cut-through routed networks*, IEEE Transaction on Parallel and Distributed Systems, (to appear). (See also IPPS '97.).
- [6] S. DEERING, D. ESTRIN, D. FARINACCI, V. JACOBSON, C.-G. LIU, AND L. WEI, *An architecture for wide-area multicast routing*, in SIGCOMM, ACM press, 1994, pp. 126–135.
- [7] C. DIOT, W. DABBOUS, AND J. CROWCROFT, *Multipoint communication: a survey of protocols, functions, and mechanisms*, IEEE journal on selected areas in communications, 15 (1997), pp. 277–290.
- [8] A. FARLEY, *Minimum-time line broadcast networks*, Networks, 10 (1980), pp. 59–70.
- [9] A. FARLEY AND A. PROSKUROWSKI, *Broadcasting in trees with multiple originators*, SIAM Journal Alg. Disc. Meth., 2 (1981), pp. 381–386.
- [10] P. FRAIGNIAUD AND E. LAZARD, *Methods and Problems of Communication in Usual Networks*, Discrete Applied Mathematics, 53 (1994), pp. 79–133.
- [11] P. FRAIGNIAUD AND S. VIAL, *Approximation algorithms for broadcasting and gossiping*, Journal of Parallel and Distributed Computing, 43 (1997), pp. 47–55.
- [12] H. HARUTYUNYAN. Doctoral Thesis (in Russian), Armenia.
- [13] S. HEDETNIEMI, S. HEDETNIEMI, AND A. LIESTMAN, *A survey of gossiping and broadcasting in communication networks*, Networks, 18 (1986), pp. 319–349.
- [14] J. HROMKOVIĆ, R. KLASING, B. MONIEN, AND R. PEINE, *Dissemination of information in interconnection networks (broadcasting and gossiping)*, in Combinatorial Network Theory, D.-Z. Du and D. F. Hsu, eds., Kluwer Academic, 1995, pp. 125–212.
- [15] J. HROMKOVIĆ, R. KLASING, AND E. STOHR, *Dissemination of information in vertex-disjoint paths mode*, Computer and Artificial Intelligence, 15 (1996), pp. 295–318.
- [16] J. HROMKOVIĆ, R. KLASING, E. STOHR, AND W. H., *Gossiping in vertex-disjoint paths mode in d-dimensional grids and planar graphs*, Information and Computation, 123 (1995), pp. 17–28.
- [17] J. HROMKOVIĆ, R. KLASING, W. UNGER, AND H. WAGENER, *Optimal algorithms for broadcast and gossip in the edge-disjoint path modes*, Information and Computation, 133 (1997), pp. 1–33.
- [18] G. KORTSARZ AND D. PELEG, *Approximation algorithms for minimum time broadcast*, in Proceedings of the Israel Symposium on Theory of Computer Science, no. 601 in Lecture Notes in Computer Science, Springer-Verlag, 1992.

- [19] R. LABAHN, *Extremal broadcasting problems*, Discrete Applied Mathematics, 23 (1989), pp. 139–155.
- [20] M. MIDDENDORF, *Minimum broadcast time is NP-complete for 3-regular planar graphs and deadline 2*, Information Processing Letters, 46 (1993), pp. 281–287.
- [21] W. MOSTAFA AND M. SINGHAL, *A taxonomy of multicast protocols for internet applications*, Computer communications, 20 (1998), pp. 1448–1457.
- [22] A. PROSKUROWSKI, *Minimum broadcast trees*, IEEE Transactions on Computers, c-30 (1981), pp. 363–366.
- [23] R. RAVI, *Rapid rumor ramification: approximating the minimum broadcast time*, in 35-th Symposium on Foundations of Computer Science, IEEE Computer Society Press, 1994, pp. 202–213.
- [24] P. SCHEUERMANN AND G. WU, *Heuristic algorithms for broadcasting in point-to-point computer networks*, IEEE Transactions on Computers, C-33 (1984), pp. 804–811.
- [25] P. SLATER, E. COCKAYNE, AND S. HEDETNIEMI, *Information dissemination in trees*, SIAM Journal on Computing, 10 (1981), pp. 692–701.
- [26] P. WINTER, *Steiner problem in networks: a survey*, IEEE Networks, 17 (1987), pp. 129–167.

Índex de figures

1.1	El cicle C_8	10
1.2	El torus $MT_{2,5}$	10
1.3	El dígraf de de Bruijn $B(2,3)$	11
1.4	El dígraf $K(2,2)$	11
1.5	Un altre $K(2,2)$	11
1.6	El dígraf 4-estrella S_4	12
1.7	L'hipercub $H(4)$	13
1.8	El dígraf papallona $WBD(2,3)$	13
2.1	El dígraf de prefix-cicle $\Gamma_3(3)$ sense les adjacències de tipus shift	18
2.2	$\Gamma_4(3)$ està format per 10 subdígrafs cadascun isomorf a $\Gamma_2(2)$.	29
2.3	Esquema de l'estructura jeràrquica de $\Gamma_4(4)$	29
3.1	El dígraf $\Gamma_2(2)$ i un subdígraf de $\Gamma_\Delta(3)$ isomorf a $\Gamma_2(2)$	34
3.2	Un cicle de longitud 6 isomorf al cicle hamiltonià de $\Gamma_2(2)$ i la substitució de cada arc r_1 per camins de tres, quatre o sis vèrtexs.	36
3.3	L'arbre de substitucions \mathcal{T}_s de $\Gamma_5(3)$	37
3.4	Substitució de les adjacències r_1	38
3.5	Un dels dotze cicles de 10 vèrtexs	45
3.6	Un dels vuit cicles de 15 vèrtexs	46
3.7	Un dels sis cicles de 20 vèrtexs	46
3.8	Un dels quatre cicles de 30 vèrtexs	47
3.9	Un dels tres cicles de 40 vèrtexs	47
3.10	L'arbre de shift per a $\Gamma_5(4)$	51
4.1	Difusió a l'arbre de shift de $\Gamma_5(4)$	62
4.2	Difusió a un subdígraf de $\Gamma_5(4)$ isomorf a $\Gamma_3(3)$	62

Bibliografia

- [1] S.B. Akers and B. Krishnamurthy. A group-theoretic model for symmetric interconnection networks. *IEEE Trans. Comput.*, 38(4):555–565, 1989.
- [2] A. Bar-Noy, S. Guha, J. Naor, and B. Schieber. Multicasting in heterogeneous networks. In ACM press, editor, *ACM Symposium on Theory of Computing (STOC)*, 1998.
- [3] L. Barrière, J. Cohen, and M. Mitjana. Gossiping in chordal rings under the line model. In J. Hromkovič and W. Unger, editors, *Proceedings of the MFCS'98 Workshop on Communication*. Fac. of Informatics of Masaryk Univ., Brno, Czech Republic, 1998.
- [4] J.-C. Bermond, C. Delorme, and J.-J. Quisquater. Strategies for interconnection networks:some methods from graph theory. *J.Parallel Distrib. Comput.*, I(3):433–449, 1986.
- [5] J.C. Bermond, P. Hell, A.L. Liestman, and J.G. Peters. Broadcasting in bounded degree graphs. *SIAM J. Discrete Math.*, 5(1):10–24, 1992.
- [6] J.C. Bermond, P. Hell, A.L. Liestman, and J.G. Peters. Sparse broadcast graphs. *Discrete Appl. Math.*, 36:97–130, 1992.
- [7] J.C. Bermond and C. Peyrat. Broadcasting in de Bruijn networks. *Proceedings of the 19th Southeastern Conference on Combinatorics, Graph Theory and Computing, Congressus Numerantium*, I(66):283–292, 1988.
- [8] P. Berthomé, A. Ferreira, and S. Perennes. Optimal information dissemination in Star and Pancake networks. In *Proceedings of the Fifth IEEE Symposium on Parallel and Distributed Systems*, pages 720–724. IEEE, 1993.
- [9] N. Biggs. *Algebraic graph theory*, volume 67 of *Cambridge Tracts in Mathematics*. Cambridge University Press, Cambridge, 1974.

-
- [10] G. Chartrand and L. Lesniak. *Graphs & Digraphs (Third Edition)*. Chapman & Hall, 1996.
- [11] W.Y.C. Chen, V. Faber, and E. Knill. Restricted routing and wide diameter of the cycle prefix network. Technical Report LACES-94C-94-5, Los Alamos National Laboratory. Los Alamos. New Mexico., september 1994.
- [12] F. Comellas and M.A. Fiol. Vertex symmetric digraphs with small diameter. *Discrete Appl. Math.*, 1(58):1–11, 1995.
- [13] F. Comellas and M. Mitjana. Broadcasting in cycle prefix digraphs. *Discrete Appl. Math.*, 83(1–3):31–39, 1998.
- [14] F. Comellas and M. Mitjana. Covering the vertices of a cycle prefix digraph. In O. Serra, editor, *I Jornades de Matemàtica Discreta i Algorísmica*, pages 20–23, Barcelona, març 1998.
- [15] F. Comellas and M. Mitjana. Cycles in the cycle prefix digraph. Submitted, 1998.
- [16] F. Comellas and M. Mitjana. Decomposing the cycle prefix digraph into cycles and paths. Submitted, 1998.
- [17] D. Cvetković, M. Doob, and H. Sachs. *Spectra of graphs*, volume 87 of *Pure and Applied Mathematics*. Academic Press, New York, 1978.
- [18] D. Cvetković, P. Rowlinson, and S. Simić. *Eigenspaces of graphs*, volume 66 of *Encyclopedia of Mathematics and its Applications*. Cambridge University Press, Cambridge, 1997.
- [19] V. Faber and J.W. Moore. High-degree low-diameter interconnection networks with vertex symmetry: directed case. Technical Report LA-UR-88-1051, Los Alamos National Laboratory. Los Alamos. New Mexico., 1988.
- [20] V. Faber, J.W. Moore, and W.Y.C. Chen. Cycle prefix digraphs for symmetric interconnection networks. *Networks*, 1(23):641–649, 1993.
- [21] A.M. Farley. Minimum time line broadcast networks. *Networks*, 10:59–70, 1980.
- [22] M.A. Fiol and J.L.A. Yebra. Dense bipartite digraphs. *J. Graph Theory*, 14(6):687–700, 1990.

-
- [23] P. Fraigniaud, J. Cohen, and M. Mitjana. Scheduling calls for multicasting in tree-networks. accepted to be published in the proceedings of SODA'99, January, 1999.
- [24] P. Fraigniaud and E. Lazard. Methods and problems of communication in usual networks. *Discrete Appl. Math.*, 53(1):79–133, 1994.
- [25] J. Gimbert. On digraphs with unique walks of closed lengths between vertices. submitted to Australa. J. Combinatorics , 1998.
- [26] C. GowriSankaran. Broadcasting on recursively decomposable Cayley graphs. *Discrete Appl. Math.*, 53(1):171–182, 1994.
- [27] G. Hahn and G. Sabidussi, editors. *Graph Symmetry Algebraic Methods and Applications*, volume 497 of *NATO ASI*. Univ.de Montréal. Canada, Kluwer Ac. Publishers, 1996.
- [28] F. Harary. *Graph Theory*. Addison–Wesley, 1972.
- [29] M.C. Heydemann, J. Opatrny, and D. Sotteau. Broadcasting and spanning trees in de Bruijn and Kautz networks. *Discrete Appl. Math.*, 1(27-28):297–317, 1992.
- [30] J. Hromkovič, R. Klasing, B. Monien, and R. Peine. Dissemination of information in interconnection networks (broadcasting and gossiping). In D.Z. Du and F. Hsu, editors, *Combinatorial Network Theory*, pages 125–212, 1995.
- [31] J. Hromkovič, R. Klasing, and E.A. Stöhr. Dissemination of information in vertex-disjoint paths mode. *Computers and Artificial Intelligence*, 15(4):295–318, 1996.
- [32] J. Hromkovič, R. Klasing, E.A. Stöhr, and H. Wagener. Gossiping in vertex-disjoint paths mode in d -dimensional grids and planar graphs. *Information and Computation*, 123(1):17–28, 1995.
- [33] M. Jiang and K. Ruskey. Determining the Hamilton-connectedness of certain vertex transitive graphs. *Discrete Math.*, 133(1–3):159–170, 1994.
- [34] R. Klasing. *On the complexity of broadcast and gossip in different communication modes*. PhD thesis, University of Paderborn. Germany., 1996.

-
- [35] E. Knill. Notes on the connectivity of Cayley coset digraphs. Technical Report LAUR-94-3719 05C-94-30, Los Alamos National Laboratory. Los Alamos. New Mexico., 1993.
- [36] G. Kortsarz and D. Peleg. Approximation algorithms for minimum time broadcast. Technical Report CS92-29, The Weizmann Institute of Science, Dept of Computer Science. Rehovot Israel., 1992.
- [37] A.L. Liestman and J.G. Peters. Minimum broadcast digraphs. *Discrete Appl. Math.*, 37/38:401–419, 1992.
- [38] J. de Rumeur. *Communications dans les réseaux de processeurs*. Masson, 1994.
- [39] G. Sabidussi. Vertex transitive graphs. *Monatsh. Math.*, I(68):426–438, 1964.
- [40] J. Villar. Kautz S-ary closed sequences. In *Proceedings of the international conference on incidence geometries and combinatorial structures. 2nd Vol.*, pages 459–469. Combinatorics'88, 1991.
- [41] J. Villar. *Contribución a la Teora de Redes con Enlaces Bidireccionales Derivadas de los Digrafos Línea*. PhD thesis, Univ. Politècnica de Catalunya, 1994.

Índex alfabètic

- àlgebra d'adjacència, 67
- acumulació, 57
- arbre de substitucions, 36
- arc, 5
- aresta, 5
- assolible, 55
- automorfisme de digrafs, 8
- branca, 5
- broadcasting, 57
- camí, 6
- camins
 - arc-disjunts, 6
 - vèrtex-disjunts, 6
- camí
 - eulerià, 6
 - longitud d'un, 6
- cicle, 6
 - base, 38
 - hamiltonià, 7
 - longitud d'un, 6
- classe lateral per l'esquerra, 9
- crida, 56
- diàmetre, 7
- difusió, 57
- digon, 5
- digraf, 5
 - arc transitiu, 8
 - de Cayley, 8
 - de Moore, 8
 - de prefix-cicle, 15, 16
 - eulerià, 6
 - hamiltonià, 7
 - mida d'un, 6
 - papallona $WDB(d, n)$, 13
 - quocient de Schreier, 9
 - quocient del dig. de Cayley, 9
 - regular, 6
 - vèrtex simètric, 8
 - vèrtex transitiu, 8
- distància, 7
- espectre d'un
 - digraf, 66
- fita de Moore, 7
- fortament connex
 - digraf, 6
- gossiping, 57
- graf, 5
 - hipercub, 12
 - ordre d'un , 6
- hamiltonià, 31
- k-assolible, 6
- llaç, 5
- matriu d'adjacència
 - d'un digraf, 65
- missatge acumulatiu, 57
- mode
 - 1-port, 55
 - estàndard, 55

- línia, 56
- store-and-forward, 55
- model
 - full-duplex, 56
 - half-duplex, 56
 - one-way, 56
 - telèfon, 56
 - telègraf, 56
 - two-way, 56
- morfisme de digrafs, 8
- multidigraf, 5

- pancíclic, 32
- polinomi
 - característic, 66
 - de Hoffman, 68
 - distància, 25
 - recorregut, 26

- quasi pancíclic, 32

- raó d'aproximació, 63
- recorregut, 6
 - longitud d'un, 6

- vèrtex, 5
 - adjacent, 6
 - grau d'un, 6