Contribucions a la teoria de l'aresta-acoloriment de grafs: snarks i multipols

Autor: Joan Vilaltella Castanyer

Institució: Universitat Politècnica de Catalunya

Director: Miquel Àngel Fiol Mora

Programa de doctorat: Matemàtica Aplicada

Unitat estructural: Departament de Matemàtica Aplicada 4

Barcelona, maig de 2015

Tesi presentada per obtenir el títol de Doctor per la Universitat Politècnica de Catalunya

Resum

Un Tait-acoloriment és una assignació de tres colors a les arestes d'un graf cúbic de manera que no es repeteixin colors en les arestes incidents a un mateix vèrtex. Un snark és un graf cúbic sense Tait-acoloriments. Els snarks tenen un paper rellevant en qüestions importants de teoria de grafs, però la seva caracterització és en general difícil. Aquest treball té una vessant pràctica, amb la descripció d'un algorisme heurístic de Tait-acoloriment que exhibeix un bon rendiment empíric, i una vessant teòrica, amb una anàlisi dels snarks basada en multipols, "peces" de grafs cúbics amb extrems lliures, i el concepte d'estat: la restricció d'un Tait-acoloriment als extrems lliures. En base al Lema de Paritat, es relaciona el Tait-acoloriment amb la factorització de nombres enters, i es demostra la irreductibilitat dels multipols que tenen arbres, boscos o cicles com a grafs subjacents.

Paraules clau: graf cúbic, snark, multipol, Tait-acoloriment, estat, Lema de Paritat, porta lògica, algorisme heurístic, factorització, irreductibilitat.

Abstract

A Tait-coloring is an assignment of three colors to the edges of a cubic graph that avoids the repetition of colors in the edges incident to a common vertex. A snark is a cubic graph with no Tait-coloring. Snarks play a relevant role in important graph theory problems, but their characterization is generally difficult. The present work has a practical side, with the description of a Tait-coloring heuristic algorithm that exhibits a good empirical performance, and a theoretical side, with an analysis of snarks based on multipoles, "pieces" of cubic graphs which have free ends, and the notion of state: the restriction of a Tait-coloring to the free ends. Starting from the Parity Lemma, a connection of Tait-coloring to integer factorization is shown, and the irreducibility of multipoles having trees, forests or cycles as their underlying graphs is proved.

Keywords: cubic graph, snark, multipole, Tait-coloring, state, Parity Lemma, logic gate, heuristic algorithm, factorization, irreducibility.

Continguts

Llista d'il·lustracions

Llista de símbols

$\emptyset$, conjunt buit, el conjunt que no conté cap element

$\cap$, intersecció de conjunts

$\cup$, unió de conjunts

$*$, color arbitrari d'una aresta, semiaresta o aresta lliure d'un multipol

a, b..., colors de les arestes, semiarestes o arestes lliures d'un multipol

α, β..., nombres reals

$Aut(G)$, grup d'automorfismes del graf G

B, valor booleà

c, aplicació que assigna colors als vèrtexs d'un graf

$c(m)$, nombre d'estats d'un m-pol cíclic

C_m, m-pol cíclic

C_i $(i = 1, 2, 3...)$, subconjunts del conjunt d'extrems lliures d'un multipol

$\mathrm{Col}(M)$, conjunt d'estats del multipol M

$|\mathrm{Col}(M)|$, nombre d'estats del multipol M

$Conf(v)$, conflictivitat del vèrtex v d'un graf

$Conf$, en la implementació de l'algorisme DVC, estructura de dades que assigna, a cada valor del nivell de conflictivitat, el conjunt de vèrtexs d'un graf amb aquell nivell de conflictivitat

$d(v)$, grau del vèrtex v d'un graf

δ, grau mínim d'un graf

Δ, grau màxim d'un graf

DVC, algorisme heurístic de Desplaçament de Vèrtexs Conflictius

$\partial(\epsilon_1, \epsilon_2)$, distància entre les semiarestes ϵ_1 i ϵ_2

ϵ o ϵ_i $(i = 1, 2, 3...)$, semiarestes o extrems lliures d'un multipol

e o e_i $(i = 1, 2, 3...)$, arestes d'un graf

$\boldsymbol{e}$, multipol format per una aresta lliure (2-pol irreductible)

$E(G)$, conjunt d'arestes del graf G

$E(M)$, conjunt d'arestes del multipol M

$\mathcal{E}(M)$, conjunt de semiarestes del multipol M

η o η_i $(i = 1, 2, 3...)$, semiarestes o extrems lliures d'un multipol

$f(m, n)$, nombre d'estats d'un m-pol forestal d'n vèrtexs

φ, aplicació entre conjunts de vèrtexs (per exemple un isomorfisme)

ϕ, aplicació que assigna colors a les arestes d'un graf o a les arestes, semiarestes i arestes lliures d'un multipol

$g(G)$, gènere del graf G (a vegades s'escriu simplement g)

G, G', grafs finits simples no dirigits i sense llaços

$G \cdot G'$, "dot product" d'Isaacs dels grafs G i G'

$G[S]$, subgraf del graf G induït pel conjunt de vèrtexs S

H, subgraf

l o l_i $(i = 1, 2, 3...)$ arestes lliures d'un multipol

L, en l'algorisme DVC, màxim nombre d'aresta-acoloriments inicials del graf

L, en la secció sobre multipols, porta lògica (per exemple NOT, OR o AND)

$L(M)$, conjunt d'arestes lliures del multipol M

m, nombre d'extrems lliures d'un multipol (m-pol)

M, M', multipols

M_m, m-pol color-complet d'ordre mínim

$M(m)$, conjunt de tots els m-pols

$M(m, n)$, conjunt de tots els m-pols d'n vèrtexs

μ, multipol

$\mu(m)$, mínim nombre possible d'estats d'un m-pol

n, nombre de vèrtexs d'un graf / quantitat de xifres binàries d'un número

$n(m)$, mínim nombre de vèrtexs d'un m-pol color-complet

N, N', submultipols

$\mathcal{NP}$, classe dels problemes tals que, donada una solució, aquesta es pot comprovar en temps polinòmic

$O(f)$, classe de funcions que, assimptòticament, no creixen més ràpidament que f

O_k, "odd graph" k-regular

p, permutació / nombre primer

P, ordre parcial

$\mathcal{P}$, classe dels problemes que es poden resoldre en temps polinòmic respecte a la mida de la descripció d'una instància del problema

π, partició

r, nombre de semiarestes seleccionades en un multipol per unir-les amb el mateix nombre de semiarestes d'un altre multipol

R, en l'algorisme DVC, màxim nombre d'intercanvis de Kempe consecutius sense disminució de la conflictivitat global del graf

$\rho(m)$, nombre d'estats d'un m-pol minimal

s o s_i $(i = 1, 2, 3...)$, estats d'un multipol

S o S_i $(i = 1, 2, 3...)$, conjunts d'estats de multipols

$Sim(3)$, grup simètric de 3 elements

$\mathcal{S}(m)$, conjunt d'm-pols irreductibles

$\Sigma(m)$, conjunt que inclou $\mathcal{S}(m)$

$s(m)$, conjunt inclòs en $\mathcal{S}(m)$

$\sigma(m)$, màxim nombre possible d'estats d'un m-pol (nombre d'estats d'un m-pol color-complet)

$t(m)$, nombre d'estats d'un m-pol arbori

T, multipol arbori

T_m, m-pol arbori

v o v_i $(i = 1, 2, 3...)$, vèrtexs d'un graf

(v) o $(v)_i$ $(i = 1, 2, 3)$, semiarestes incidents al vèrtex v

$\boldsymbol{v}$, multipol format per un vèrtex amb tres semiarestes (3-pol irreductible)

$v(m)$, màxim nombre de vèrtexs d'un m-pol irreductible

$V(G)$, conjunt de vèrtexs del graf G

$V(M)$, conjunt de vèrtexs del multipol M

x_i $(i = 1, 2, 3...)$, variables booleanes

$x, y...$, vèrtexs d'un graf

$X, Y...$, components connexes d'un multipol

$\chi(G)$, nombre cromàtic del graf G

$\chi'(G)$, índex cromàtic del graf G

ζ o ζ_i $(i = 1, 2, 3...)$, semiarestes o extrems lliures d'un multipol

Agraïments

La principal finalitat d'aquesta secció és expressar agraïment a les diverses persones que hi són esmentades. A vegades la inspiració que ens proporcionen els éssers humans que coneixem i amb els quals conversem pot ser molt subtil: és per això que algunes persones es poden sorprendre de veure el seu nom en aquests agraïments, però és cert que totes les que figuren aquí m'han inspirat, no sempre des del punt de vista acadèmic, encara que el simple fet d'esmentar-les no implica necessàriament que gaudeixi de la seva amistat ni de la seva aprovació. Tampoc implica el contrari. També hi ha altres persones que han contribuït a la meva vida d'alguna manera, però que no apareixen en aquest pròleg, ja que era absolutament impossible ser exhaustiu. En alguns casos, em reservo els agraïments i les dedicatòries per a obres futures o per a obres concurrents amb aquesta però d'altres gèneres.

Començo donant les gràcies a en Jordi Guàrdia, professor meu a la Universitat de Barcelona, qui em va fer saber que hi havia una vacant per fer classes a l'EPSC de Castelldefels, actualment l'EETAC. Això em va portar a parlar amb en Francesc Comellas, qui em va donar la idea d'aprofitar la circumstància per començar un doctorat i, a més, esdevindria el meu tutor orientador. Al mateix lloc vaig retrobar la Sonia Pérez, amb qui havíem estat companys de classe a la Universitat de Barcelona, i vaig conèixer les professores Margarida Espona, Anna Serra i Eulàlia Barrière, així com els professors José Luis Andrés Yebra, Oriol Serra i Francesc Antoni Muntaner Batlle. Tots ells m'han inspirat en algun moment o altre d'una manera o altra, per subtil o indirecta que fos. També vaig retrobar l'Eulàlia Tramuns, amb qui havíem coincidit a les molt interessants Jornades Aritmètiques (Barcelona 1995), on també era present en Jordi Guàrdia i on vam poder veure de prop reconeguts matemàtics catalans, alguns dels quals esmentaré més endavant, i de tot el món, entre els quals Barry Mazur, Noam Elkies, Jürgen Neukirch, i els autors de la Conjectura de Birch i Swinnerton-Dyer.

Fins i tot breus converses poden ser molt inspiradores, especialment si els teus interlocutors són matemàtics com Omer Giménez i Marc Noy, a qui agraeixo particularment que cridés la meva atenció sobre l'excel·lent llibre de Dominic Welsh *Complexity: Knots, Colouring and Counting.*

La caminada aleatòria que em va portar a conèixer el meu director de tesi va passar per una companya de carrera, la meva bona amiga Roser Peramiquel, qui em va presentar en Joan Gimbert, de la Universitat de Lleida. Al seu torn, en Joan Gimbert em va presentar en Miquel Àngel Fiol, amb qui ens vam entendre de seguida: ja havia trobat un director per a la meva tesi. Ell em va donar motius per aventurar-me en la pacífica i incruenta "caça d'snarks".

Fent classes a Castelldefels i al Campus Nord, i també per la vinculació amb el Departament de Matemàtica Aplicada 4 com a doctorand, he tingut ocasió de conèixer diverses persones que m'han ajudat o inspirat, i que esmento sense seguir cap ordre en especial: Ernest Garriga, Josep Fàbrega, Francesc Aguiló, Xavier Muñoz, Jaume Martí-Farré, Mercè Mora, Anna de Mier, Anna Lladó, Paz Morillo, Alícia Miralles, Cristina Dalfó, Susanna-Clara López, Clemens Huemer, Miquel Rius, Javier Ozón, Pep Burillo, Jorge Jiménez i José Gómez. No vull oblidar Nacho López, Josep Conde i Josep Maria Miret, de la Universitat de Lleida. Durant els cursos de postgrau i altres activitats acadèmiques com diversos seminaris i jornades, he pogut escoltar molts matemàtics de tot el món, entre els quals destaco Jaroslav Nesetril, Jan Kratochvil, els ja esmentats Oriol Serra i Marc Noy, Juraj Hromkovic, Jozef Siran, Edy Tri Baskoro, Rinovia

Simanjuntak, Maria Zdimalova, Christophe Ritzenthaler i el meu company de carrera Joaquim Puig, que va resoldre el Problema dels Deu Martinis sense embriagar-se. Celebro que la meva adscripció a la Universitat Politècnica de Catalunya m'hagi donat l'oportunitat de conèixer altres estudiants, alguns d'ells ja doctorats, que també m'han inspirat d'una manera o altra, com ara Marc Càmara, Aida Abiad, Guillem Perarnau, Victor Diego i Elisabet Burjons.

Al Departament, o en l'àmbit més ampli de la Universitat Politècnica de Catalunya, m'he retrobat amb persones que coneixia d'abans: l'Àngela Aragón i en Víctor Rotger els vaig conèixer quan estàvem fent la carrera de matemàtiques. Que jo recordi, en Víctor és l'única persona que he tingut de company de classe (a la carrera) i de professor (en un curs de 3r cicle). A més, em va facilitar software matemàtic molt útil. En Jordi Quer i la Montserrat Maureso els vaig conèixer a les ja esmentades Jornades Aritmètiques de 1995. També han estat presències inspiradores.

No és la primera vegada que les irrepetibles Jornades Aritmètiques de 1995 apareixen en aquests agraïments, i això indica que ja ha arribat el moment de donar també les gràcies a la professora Pilar Bayer de la Universitat de Barcelona, que va impulsar i encapçalar la celebració de les 19JA95 i em va oferir la possibilitat de participar-hi. Això em va donar l'oportunitat de conèixer diversos teòrics dels nombres: a més dels ja esmentats Jordi Quer i Montserrat Maureso, també vaig poder entrar en contacte amb Enric Nart, Joan-Carles Lario, Anna Rio, Montserrat Alsina, Xavier Xarles i Griselda Pascual. Altres participants de les 19JA95 ja els coneixia d'abans com a professors de matemàtiques de la Universitat de Barcelona, com per exemple el ja esmentat Jordi Guàrdia, i també Montserrat Vela, Àngela Arenas, Núria Vila, Teresa Crespo i Artur Travessa. També voldria tenir un pensament per altres professors de la Universitat de Barcelona: Antoni Benseny i Pere Mumbrú van començar a posar-me sobre la pista de la teoria de grafs; Josep Pla i Josep Maria Font em van acostar a la lògica matemàtica; Francisco Guillén i Maria Alberich em van explicar teoria de nusos; Joan Elias i Ferran Serrano, així com els professors Gerald Welters i Joan Carles Naranjo, van ser molt pacients amb mi i les meves dificultats algebraiques; Vicenç Navarro ensenyava topologia encara que, per peculiaritats d'un horari una mica intempestiu, fos l'hora de dinar; de Joaquim Font vaig aprendre càlcul numèric i mecànica celeste; de Marta Sanz vaig aprendre probabilitats i estadística; el ja esmentat Antoni Benseny impartia una interessant assignatura sobre software gràfic; i l'Anton Aubanell explicava didàctica de les matemàtiques d'una manera realment didàctica.

Després de la carrera de matemàtiques vaig fer uns cursos de postgrau en l'àmbit de la intel·ligència artificial, on vaig rebre coneixements de Glyn Morrill, Horacio Rodríguez, Ramon López de Mántaras, Josep Maria Sopena i Núria Piera. El professor Sopena em va donar l'oportunitat de treballar una temporada en l'àmbit de la neurocomputació, i la professora Piera em va facilitar l'ocasió de comprovar que la disciplina del raonament qualitatiu podia ser divertida. Per a aquesta assignatura vaig dur a terme un petit projecte relacionat amb el moviment de robots, motiu pel qual vaig demanar consell al professor Josep Amat (amb qui anys més tard vam descobrir que som parents de lluny) i vaig rebre la molt amable col·laboració de Rita Planas. Després vaig poder convalidar l'assignatura de Raonament Qualitatiu per aconseguir crèdits de 3r cicle, gràcies a la paciència de Carme Capdevila i l'ajuda de les professores Mónica Sánchez i Maria Teresa Martínez-Seara. Els meus dubtes burocràtics respecte als papers del doctorat sempre han estat diligentment resolts per Carme Capdevila i Raquel Caparrós. En el front administratiu, també he tingut el fiable suport de la Magda Mestres, la Marta Herranz i la Mariví Ordóñez del Departament de Matemàtica Aplicada 4, i anteriorment de la predecessora de la Mariví, la Mónica Garizuain. En el front tècnic informàtic en Juan Paz i l'Armando Martín han resolt, sempre ràpidament, tots els problemes que se m'han presentat a l'hora de fer servir els ordinadors, i m'han facilitat molt l'accés als recursos informàtics.

Algunes de les persones esmentades ja no estan entre nosaltres. Amb el transcurs dels anys, hem hagut de lamentar la desaparició de Núria Piera, Jürgen Neukirch, Ferran Serrano, Griselda Pascual (qui va traduir al català les *Disquisicions Aritmètiques* de Gauss), Pere Mumbrú, Joaquim Font, Joan Gimbert i José Gómez. Encara que hi ha formes de dol que es reserven només per al traspàs dels familiars més pròxims, pot arribar a ser veritablement difícil acceptar l'absència d'amics, companys i mestres quan, d'alguna manera, ja donàvem per suposada la seva presència.

Dedicatòries

Dedico aquest humil treball a persones modestes i bones. Als amics absents l'artista Bernat Sanjuan (1915-1979) i la seva muller Conxita Guinovart (1916-2009), i als amics presents Jordi Balcells i Maria Teresa Fontanet; a les amigues mallorquines d'en Bernat i la Conxita: la Joana Vives, la Paquita Seguí i la Maria Coll; al cosí de la Conxita, el neuròleg Josep Guinovart Galiana; també a la Maria Ibarz, al conserge José Blanco, i a la infermera Amèlia de Gispert. Agraeixo a aquestes persones el seu auxili i el seu suport: entre totes em van ajudar a tenir cura de la Conxita durant els anys 2007, 2008 i 2009.

A més, vull donar les gràcies especialment a la Doctora en Medicina Carme Pallarès per la seva ajuda en els moments difícils. Per aquest mateix motiu, la dedicatòria també inclou la Doctora Mercè Soler Sindreu i el meu metge de capçalera, el Doctor Tous.

Pròleg

Quan vam començar a treballar junts, en Miquel Àngel Fiol em va posar en contacte amb dues idees molt atractives que són el punt de partida d'aquest treball: *l'aresta-acoloriment basat en el desplaçament de vèrtexs conflictius*, que ens permet anar allà on cap algorisme de retroseguiment no ha arribat mai abans, i *la interpretació dels grafs cúbics com a circuits lògics*, que indica com construir una infinitat d'snarks i al mateix temps permet entendre perquè la seva caracterització és tan difícil. La confluència d'aquestes dues idees té un potencial que tot just estem començant a explorar, encara que cadascuna per separat ja és prou interessant.

El desplaçament de vèrtexs conflictius parteix d'un plantejament, basat en la intuïció, que es pot precisar prou per convertir-lo en un algorisme heurístic amb components aleatoris. Aquest algorisme permet aresta-acolorir, en un temps raonable i sense necessitat de fer servir cap superordinador, grafs que convencionalment se solen considerar "grans", és a dir de milions de vèrtexs i arestes. Amb una mida com aquesta, el nombre de possibilitats que hauria d'explorar un algorisme de retroseguiment seria com a mínim astronòmic i, en tot cas, impracticable. En canvi, el desplaçament de vèrtexs conflictius, si es porta a la pràctica amb els criteris adequats, té una remarcable eficiència empírica.

La interpretació booleana dels grafs cúbics, és a dir la seva correspondència amb circuits lògics, no només permet construir famílies infinites d'snarks, generalizant construccions anteriors, sinó que fins i tot, com que relaciona el Tait-acoloriment de grafs cúbics amb el problema de la satisfactibilitat (el cèlebre problema SAT), porta implícit el resultat de Holyer sobre l'$\mathcal{NP}$-completesa de l'aresta-acoloriment de grafs en el cas general. Fins i tot en el cas dels grafs cúbics la determinació de l'índex cromàtic és un problema $\mathcal{NP}$-complet (això és justament el que va demostrar Holyer), la qual cosa no resulta estranya si pensem en alguns dels problemes que es poden expressar en termes de circuits lògics i en la naturalesa d'aquests problemes. Per exemple, si poguéssim resoldre eficientment qualsevol circuit booleà podríem factoritzar nombres enters també eficientment, i resulta que hi ha una gran quantitat d'aplicacions criptogràfiques (i de diners) que basen la seva seguretat en la suposada dificultat de factoritzar nombres enters relativament grans. Aquests nombres, a dia d'avui, els considerem llargs en xifres, però tenen factors prou petits per ser multiplicats gairebé instantàniament en un telèfon mòbil, per exemple.

A aquest plantejament se li pot donar la volta, i com que la impossibilitat de factoritzar els nombres primers es pot traduir en la impossibilitat de satisfer un circuit booleà, els nombres primers es poden fer servir per construir grafs cúbics que no es poden aresta-acolorir amb tres colors, és a dir snarks. De cop i volta, l'existència d'una infinitat d'snarks sembla gairebé òbvia. En canvi, es va trigar molt de temps a descriure les primeres famílies infinites d'snarks. Això demostra el poder que poden tenir algunes idees relativament senzilles.

Un altre aspecte de la teoria dels snarks potser menys vistós però prou motivador és l'estudi de la funció $v(m)$, que dóna la màxima mida d'un multipol irreductible d'm extrems lliures. Només es coneix bé per $m \leq 5$ i n'hi ha una fita inferior específica pel cas $m = 6$. Un dels objectius principals d'aquest treball ha estat aprofundir en la mesura del possible en el coneixement de $v(m)$, i si bé no hem aconseguit encara calcular exactament $v(6)$, sí que hem pogut obtenir els primers resultats de naturalesa general, és a dir per a qualsevol valor de m, sobre els m-pols irreductibles i la funció $v(m)$.

1 Introducció i perspectiva general

"Els problemes que valen un atac es fan valdre amb un contraatac."

Piet Hein

Els problemes d'acoloriment es troben entre els més antics i profunds de la teoria de grafs. La qüestió de si és possible colorejar les regions d'un mapa amb només quatre colors de manera que regions adjacents tinguin colors diferents, plantejada a finals del segle XIX [34, 35], va representar un poderós estímul i les investigacions que ha propiciat són nombroses, ramificades i fructíferes. Aquella pregunta inicial encara té conseqüències per la recerca en l'àmbit de la combinatòria, la topologia i altres disciplines matemàtiques. També té repercussions en la tecnologia, perquè hi ha problemes d'acoloriment que tenen rellevància pràctica. Recíprocament, la tecnologia ha repercutit en aquesta línia de recerca perquè, a dia d'avui, les úniques demostracions conegudes del Teorema dels Quatre Colors necessiten processos de comprovació exhaustiva que només són viables per mitjans informàtics.

Normalment entenem per un mapa una subdivisió del pla o de la superfície d'una esfera en diverses regions que poden representar zones amb alguna característica en comú o a les quals volem assignar una identitat pròpia. Si l'esfera és la Terra, un mapa pot reflectir règims polítics, dominis lingüístics, paràmetres geològics o altres propietats. Sol ser el cas (en els mapes terrestres òbviament, però també en els estudis matemàtics) que les regions es puguin delimitar mitjançant línies suaus (corbes diferenciables) i que el seu nombre sigui finit. De fet, un mapa sobre l'esfera es pot convertir en un mapa sobre el pla, i viceversa, per mitjà d'una projecció estereogràfica, de manera que un i altre cas s'estudien indistintament.

A un mapa se li pot fer correspondre un graf assignant un vèrtex a cada regió, i unint dos vèrtexs mitjançant una aresta si les dues regions corresponents són adjacents en el mapa. Si dues regions només tenen un punt en comú, no se les considera adjacents. D'aquesta manera, s'obté un graf planar, és a dir, un graf que es pot dibuixar (tècnicament, immergir) en el pla de manera que les úniques interseccions entre arestes siguin precisament les que tenen lloc en els vèrtexs. De nou per mitjà d'una projecció estereogràfica, un graf planar es pot immergir en la superfície d'una esfera, que és una superfície de gènere 0. Per això també es pot dir que un graf planar és un graf de gènere 0, mentre que un graf immergible en la superfície d'un tor però no d'una esfera té genere 1, i en general un graf immergible en una superfície de gènere g però no en una de gènere $g-1$ és un graf de gènere g. Aquests grafs podrien correspondre també a mapes dibuixats sobre aquestes superfícies, i es podrien obtenir a partir d'ells segons el mateix procediment descrit en el cas planar.

El graf planar que s'obté a partir d'un mapa de la manera descrita, s'anomena el *graf dual planar* del mapa, i de fet el mapa original també el podem entendre com un graf on les arestes són les línies frontereres i els vèrtexs són els punts d'intersecció entre fronteres. Llevat de detalls tècnics, la iteració de l'operació de dualitat dóna com a resultat el graf, és a dir, el mapa original. Veiem que hi ha una correspondència entre regions i vèrtexs, per una banda, i entre fronteres i arestes, per l'altra. El problema d'acolorir el mapa es converteix en un problema equivalent: assignar colors als vèrtexs d'un graf planar de manera que vèrtexs adjacents (units per una aresta) tinguin colors diferents, una condició que donarem per sobreentesa a partir d'ara. D'una assignació de colors als vèrtexs d'un graf que compleixi aquesta condició en direm un *vèrtex-acoloriment*. El problema de trobar un vèrtex-acoloriment es pot formular per a un graf qualsevol, independentment del seu gènere. El mínim nombre de colors necessari per acolorir els vèrtexs d'un graf G s'anomena el *nombre cromàtic* de G, $\chi(G)$, i la seva relació amb el gènere està ben estudiada [30].

El Teorema dels Quatre Colors afirma que si G és un graf planar, aleshores $\chi(G) \leq 4$. És a dir, quatre colors sempre són suficients per acolorir un mapa.

Tait [34, 35] va demostrar que aquesta qüestió es podia formular en termes d'acoloriments de les arestes de grafs cúbics immersos en el pla, i que el Teorema dels Quatre Colors (en temps de Tait encara una conjectura) equival a afirmar que si un graf cúbic és planar aleshores les seves arestes es poden *3-aresta-acolorir* o *Tait-acolorir*, és a dir, es poden acolorir amb tres colors sota la condició que les tres arestes que conflueixin en un mateix vèrtex tinguin colors diferents, condició que també donarem per suposada a partir d'ara. Hi ha grafs planars on això és fals per motius tècnics trivials, i aquests casos no es consideren. Per evitar aquesta mena de casos trivials, suposarem que els grafs cúbics considerats no tenen ponts: un pont és una aresta que no es pot eliminar sense augmentar el nombre de components connexes del graf.

Segons el Teorema de Vizing [36], les arestes d'un graf de grau màxim Δ es poden acolorir amb Δ colors com a mínim (això és obvi) i $\Delta + 1$ colors com a màxim. Per tant, l'índex cromàtic d'un graf cúbic és 3 o 4.

Un graf cúbic d'índex cromàtic 4 s'anomena un *snark* (a proposta de Martin Gardner en un cèlebre article [15], fent referència a un poema humorístic de Lewis Carroll [5]) i un hipotètic snark planar s'anomena *boojum* (seguint també la proposta de Martin Gardner) . El Teorema dels Quatre Colors afirma que, llevat de casos trivials, no existeixen snarks planars o boojums. No es coneix cap demostració d'aquest fet que no requereixi una comprovació per mitjans informàtics.

En principi, el resultat de Vizing és un èxit, perquè restringeix molt el conjunt de valors possibles de l'índex cromàtic d'un graf cúbic: només queden dos valors disponibles, 3 i 4. Tanmateix, Holyer va demostrar [18] que determinar el valor exacte en el cas general és un problema d'una categoria àmpliament considerada com a difícil: la classe dels problemes $\mathcal{NP}$-complets. Per tant, fent la suposició habitual que els problemes $\mathcal{NP}$-complets no pertanyen a la classe $\mathcal{P}$, és a dir que no es poden resoldre en temps polinòmic, la determinació de l'índex cromàtic d'un graf cúbic seria un problema intractable en el cas general.

Si restringim els grafs cúbics considerats a la classe dels grafs cúbics planars, aleshores el problema queda resolt pel Teorema dels Quatre Colors: en aquest cas, sabem directament (o "en temps constant") que l'índex cromàtic és 3.

Durant molt de temps, es van conèixer molt pocs grafs cúbics que tinguessin índex cromàtic 4 per motius no trivials. El primer snark conegut va ser el graf de Petersen [28]. Després se'n van descobrir uns pocs més (D. Blanuša [3], B. Descartes [1] [7], G. Szekeres [33]), però fins a la dècada de 1970 no es van trobar les primeres famílies infinites d'snarks (Adelson-Velski i Titov [1], Isaacs [20], Loupekine [21], Goldberg [16], Grinberg [17][2]). A partir d'aquí, es van

[1] Blanche Descartes: en realitat, un pseudònim de William Tutte.

[2] Grinberg va comunicar públicament els seus resultats però no els va arribar a publicar en premsa.

observar certes regularitats (reals o aparents) i es van començar a demostrar resultats i a formular conjectures. Jaeger i Swart [22] van formular-ne dues, una de les quals va ser desmentida per M. Kochol [24]. L'altra continua oberta. La Conjectura 1 de Jaeger i Swart afirmava que tots els snarks tenen "girth", la mida del cicle mínim, inferior o igual a 6. Tanmateix, Kochol va construir famílies infinites d'snarks amb "girth" arbitràriament gran. L'aresta-connectivitat cíclica d'un graf és la mínima quantitat d'arestes que es poden eliminar de tal manera que el graf quedi desconnectat i amb dos cicles separats, és a dir en components connexes diferents. La Conjectura 2 de Jaeger i Swart, encara oberta, afirma que l'aresta-connectivitat cíclica d'un snark és com a màxim 6. Així, doncs, segons aquesta conjectura, si en un graf cúbic cal eliminar 7 o més arestes per desconnectar-lo separant cicles, aleshores aquest graf té índex cromàtic 3. Si fos cert, aquest enunciat implicaria una restricció bastant gran a l'estructura dels snarks.

Els snarks apareixen en alguns problemes oberts importants de la teoria de grafs. Segons la Conjectura del Recobriment Doble per Cicles, plantejada independentment per Szekeres [33] i Seymour [31] a la dècada de 1970, tot graf sense ponts té una família de cicles tal que tota aresta pertany exactament a dos dels cicles. Qualsevol contraexemple minimal d'aquesta conjectura ha de ser un snark. En el cas de qualsevol altre graf, es poden fer una sèrie d'operacions de transformació que sempre acaben conduint a un snark o una col·lecció d'snarks, els quals constitueixen, doncs, els únics casos difícils de la conjectura. Si aquesta qüestió es resolgués pels snarks, quedaria resolta per qualsevol graf.

Una manera d'estudiar els aresta-acoloriments consisteix en tallar els grafs, tallant les seves arestes, per separar-los en components anomenades *multipols*. En aquest enfocament, utilitzat sovint en la literatura tècnica sobre snarks, les arestes no són eliminades sinó tallades per la meitat: cada aresta dóna lloc a una semiaresta amb un extrem lliure. Un multipol, per tant, conté arestes i semiarestes. Un multipol pot estar format per diverses components connexes. Per raonar amb la màxima generalitat, convé introduir també el concepte d'aresta lliure: una aresta que té tots dos extrems lliures. Això vol dir que també considerarem multipols que contenen arestes lliures. Fins i tot, un multipol pot estar format exclusivament per arestes lliures, cadascuna de les quals constituiria per ella mateixa una component connexa. Si un multipol té m extrems lliures, direm que és un m-pol. En alguns casos, quan el context permeti evitar confusions, també considerarem els dos extrems lliures d'una aresta lliure com si fossin semiarestes (com si dues semiarestes poguessin formar una aresta lliure).

Els conceptes d'aresta-acoloriment i d'índex cromàtic es poden aplicar perfectament als multipols, ja que podem assignar colors a les arestes, les semiarestes, i les arestes lliures, conservant la restricció que en un mateix vèrtex no conflueixin colors repetits. També podem mantenir el concepte de grau d'un vèrtex, només que ara aquest grau és la suma del nombre d'arestes i del nombre de semiarestes incidents al vèrtex. Si un multipol prové d'un graf cúbic, tots els seus vèrtexs tindran grau 3. Si no indiquem el contrari, donarem per suposat que un multipol cúbic es pot Tait-acolorir.

Si un multipol té índex cromàtic 3 i el Tait-acolorim, les seves semiarestes i arestes lliures rebran una assignació de colors que, considerada de manera conjunta, no pot ser arbitrària. El conjunt de colors assignats als extrems lliures té necessàriament certes restriccions que poden dependre de l'estructura particular del multipol o fins i tot de consideracions generals com el Lema de Paritat.

Segons el Lema de Paritat, per tot Tait-acoloriment d'un multipol, el nombre d'extrems lliures d'un mateix color té la mateixa paritat que el nombre total d'extrems lliures. A més, aquesta paritat coincideix amb la del nombre de vèrtexs del multipol. El Lema de Paritat és una restricció molt general i important del comportament dels multipols. Per això, és molt utilitzat en la literatura sobre grafs cúbics. Permet obtenir fàcilment algunes conclusions sobre els snarks, i també eliminar casos trivials. A continuació en veiem alguns exemples.

Si un multipol té un sol extrem lliure, no pot complir de cap manera el Lema de Paritat: el nombre total d'extrems lliures és 1, mentre que el nombre d'extrems de color $a/b/c$ és $1/0/0$ o $0/1/0$ o $0/0/1$. Com que la paritat de 0 i d'1 són diferents, el Lema de Paritat no es pot complir. Per tant, un 1-pol no es pot Tait-acolorir: això implica que un graf cúbic amb un pont té automàticament índex cromàtic 4. És un snark trivial.

Si tenim un 2-pol Tait-acolorit, és fàcil veure que el Lema de Paritat implica que els seus dos extrems lliures han de tenir el mateix color. Si els colors fossin, per exemple, a i b, tindríem un extrem lliure de color a, un extrem lliure de color b, i cap de color c. La combinació de colors seria doncs $1/1/0$, que no compleix el Lema de Paritat. En canvi, si tots dos extrems lliures són del mateix color, per exemple a, la combinació de colors és $2/0/0$, i aquesta sí que compleix el Lema de Paritat. Per tant, un 2-pol Tait-acolorible es comporta com una aresta lliure. En un snark, és substituïble per ella sense que el graf perdi la característica de ser un snark.

En el cas d'un 3-pol, l'única combinació de colors dels extrems lliures que compleix el Lema de Paritat és $1/1/1$. Per tant, un 3-pol Tait-acolorible es comporta com un sol vèrtex amb tres semiarestes. En un snark, és substituïble per ell sense que el graf deixi de ser un snark.

Així, doncs, un snark que contingui 3-pols més grans que un vèrtex o 2-pols més grans que una aresta lliure es pot considerar trivial. En particular, un snark amb triangles és trivial. Això vol dir que un snark no trivial no pot tenir "girth"3.

El cas dels 4-pols és una mica més complicat. En aquest cas, les combinacions de colors compatibles amb el Lema de Paritat són $4/0/0$ i $2/2/0$. En els extrems lliures d'un 4-pol, mai no apareixen tots tres colors possibles. Totes les assignacions de colors permeses pel Lema de Paritat són monocromàtiques o bicromàtiques, mai tricromàtriques.

Abans de continuar amb l'anàlisi d'aquest cas, convé introduir nous conceptes. Donat un Tait-acoloriment d'un multipol, el conjunt ordenat dels colors assignats als extrems lliures l'anomenarem *estat del multipol*. És un conjunt ordenat perquè suposarem que els extrems lliures estan identificats d'alguna manera que permet ordenar-los. La identificació pot ser arbitrària o venir donada, per exemple, per una immersió en el pla (en aquest cas prendríem l'ordre cíclic al voltant del multipol). Un multipol té una sèrie d'estats possibles segons els possibles Tait-acoloriments del multipol sencer. Considerarem equivalents els estats relacionats per una simple permutació dels colors. Un estat és admissible si és compatible amb el Lema de Paritat. El conjunt d'estats ve donat pel conjunt dels Tait-acoloriments possibles del multipol (pot ser que diversos Tait-acoloriments donin lloc al mateix estat, o a estats equivalents). Direm que un conjunt d'estats és factible si existeix algun multipol amb aquell conjunt d'estats. En aquest cas diem que el multipol realitza aquell conjunt d'estats. Per tal que un conjunt d'estats sigui factible, no n'hi ha prou que tots els seus estats siguin admissibles. Per exemple, en el conjunt $\{abcaa, abcbb\}$ tots els estats són admissibles, però aquest conjunt d'estats no és factible perquè només conté dos estats, i un 5-pol no pot tenir menys de tres estats. El multipol il·lustrat a la

Fig. 1 té el mínim nombre de vèrtexs possible i també el mínim nombre d'estats possible en el cas d'un 5-pol (vegeu el capítol 4, seccions 4.5 i 4.6). El seu conjunt d'estats és: $\{abcaa, abcbb, abccc\}$.

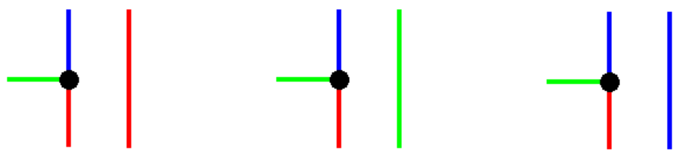


Figura 1: Un 5-pol amb el mínim nombre d'estats possible (3)

Direm que un multipol és complet si té tots els estats compatibles amb el Lema de Paritat. No és gaire difícil veure que existeixen m-pols complets per qualsevol valor de $m \geq 2$. També es poden donar fites lineals, inferior i superior, expressades en termes d'm, al mínim ordre possible d'un m-pol complet.

Direm que dos multipols són equivalents si tenen el mateix conjunt d'estats, i direm que un multipol M_1 es pot reduir a un altre multipol M_2 si M_2 té menys vèrtexs que M_1 i el conjunt d'estats de M_2 és un subconjunt no buit del conjunt d'estats de M_1. En aquest cas direm que M_2 és una reducció de M_1. En un graf cúbic qualsevol, es pot substituir un multipol per un altre d'equivalent sense que canviï l'índex cromàtic del graf. En un snark, es pot substituir un multipol per una reducció seva sense que el graf perdi la característica de ser un snark. Si un multipol no té cap reducció, direm que és irreductible. Abans hem vist que una aresta lliure és l'únic 2-pol irreductible, i que un vèrtex amb tres semiarestes és l'únic 3-pol irreductible.

Els únics 4-pols irreductibles són el format per dues arestes lliures i el format per dos vèrtexs units entre ells i amb dues semiarestes cadascun. És fàcil demostrar aquest resultat. Implica que un snark amb 4-pols de més de 2 vèrtexs és trivial i, en particular, que un snark amb 4-cicles és trivial. Així, doncs, un snark no trivial ha de tenir com a mínim "girth"5. El graf de Petersen n'és un exemple.

Veiem, doncs, que el coneixement dels m-pols irreductibles per determinats valors d'm permet obtenir conclusions sobre l'estructura dels snarks. Anomenem $\mathcal{S}(m)$ el conjunt d'm-pols irreductibles, i $v(m)$ el màxim nombre de vèrtexs d'un m-pol irreductible, és a dir, l'ordre del multipol més gran de $\mathcal{S}(m)$. Ja hem vist els casos corresponents a $m \leq 4$. $\mathcal{S}(5)$ i $v(5)$ són coneguts [4]. En canvi, de moment només tenim un coneixement parcial sobre $\mathcal{S}(m)$ per $m \geq 6$, i de $v(m)$ només tenim fites inferiors [23, 12]. Una fita superior de $v(m)$ podria ser una bona manera de restringir l'estructura dels snarks. Si la Conjectura 2 de Jaeger i Swart és certa, d'alguna manera el cas $m = 6$ seria l'últim cas important [23], ja que l'existència d'un tall de 7 arestes que separés cicles implicaria que el graf no pot ser un snark, de manera que l'estudi dels 7-pols perdria interès en relació a l'estructura dels snarks. Si la Conjectura és falsa, aleshores $v(m)$ continuaria essent interessant per a valors d'm més grans que 6, fins a la màxima aresta-connectivitat cíclica possible d'un snark, suposant que aquest valor màxim existeixi.

2 Què és un snark?

2.1 Definicions bàsiques

Un *graf finit*[3] $G = (V, E)$ és un parell ordenat de conjunts finits: el conjunt V, que es pot entendre com un conjunt de nombres naturals consecutius $\{1, 2, 3, ..., n\}$, i el conjunt E, format per parells no ordenats d'elements de V.

Els grafs finits solen representar-se identificant els elements de V amb punts anomenats *vèrtexs* o *nodes* i els elements d'E amb segments de línies rectes o corbes, de manera que cada segment uneixi els dos vèrtexs del parell corresponent. Els elements d'E s'anomenen *arestes*, i a vegades també *branques* (o *línies*) . Si l'aresta e és el parell $\{u, v\}$, diem que u i v són vèrtexs *adjacents* (o *"veïns"*) , i que e és *incident* a u i a v . Si dues arestes comparteixen un vèrtex, també direm que són *adjacents*. El nombre de vèrtexs d'un graf és el seu *ordre* i el nombre d'arestes d'un graf és la seva *mida*.

Amb la definició que hem donat del concepte de graf finit, entre dos vèrtexs qualssevol pot haver-hi com a màxim una aresta: com que E és un conjunt de parells no ordenats, la duplicació d'un element com $\{1, 2\}$ no és admesa (per això caldria utilitzar el concepte de multiconjunt, el qual permetria definir un *multigraf* o graf amb arestes múltiples). Els grafs amb la propietat que les arestes no poden estar multiplicades s'anomenen *grafs simples*. Com que ens cenyirem a la definició donada, donarem per suposat que tots els grafs són simples.

A més, com que els elements d'E són parells no ordenats, en cap cas una aresta unirà un vèrtex amb ell mateix, ja que això s'hauria de representar com $\{1, 1\}$ (multiconjunt de dos elements), $(1, 1)$ (parell ordenat) o $\{1\}$ (conjunt d'un sol element). Una aresta que uneix un vèrtex amb si mateix s'anomena *llaç*, i els grafs que admeten llaços s'anomenen *pseudografs*. Novament, com que ens cenyirem a la definició donada, no considerarem aquesta mena de grafs, i només admetrem grafs simples sense llaços.

Finalment, com que els elements d'E són parells no ordenats, no es pot atribuir un ordre als seus dos elements, és a dir, les arestes no tindran una direcció. Els grafs amb aquesta propietat s'anomenen grafs no dirigits, en oposició als *grafs dirigits* o *digrafs* que tenen arestes dirigides o *arcs*.

En resum, com a conseqüència de la definició que hem adoptat, suposarem (sense indicar-ho explícitament cada vegada) que tots els grafs considerats són grafs finits, no dirigits, simples i sense llaços.

Quan es representa un graf visualment en un paper, una pissarra o una pantalla, s'accepta que les arestes puguin tenir interseccions que no siguin vèrtexs: s'anomenen *encreuaments* i es representen de tal manera que no es puguin confondre amb els vèrtexs. A vegades es demana que no hi hagi encreuaments: en aquest cas, diem que la representació del graf és plana. No tots els grafs admeten una representació plana (o "immersió en el pla") sense encreuaments: els que l'admeten s'anomenen *grafs planars*.

[3]La finalitat d'aquesta secció és principalment aclarir la terminologia. És probable que el lector avesat a la teoria de grafs vulgui passar directament a la següent secció.

La identificació de V amb $\{1, 2, 3, ..., n\}$ no és arbitrària, ja que un conjunt finit d'n elements és isomorf (com a conjunt) al conjunt format pels primers n nombres naturals. Aquests nombres es poden utilitzar com a etiquetes per distingir els vèrtexs. En aquest cas tindríem un graf etiquetat. No sempre estem interessats en el fet que els vèrtexs siguin distingibles més enllà de la particularitat que els pugui donar la seva ubicació en el graf o, per expressar-ho de manera més precisa, les seves relacions d'adjacència amb la resta de vèrtexs.

Diem que dos grafs són *isomorfs* si les etiquetes dels seus vèrtexs es poden reordenar (permutar) de manera que els conjunts d'arestes respectius es puguin posar en correspondència. Més precisament, els grafs G i G' són isomorfs si existeix una aplicació bijectiva $\varphi : G \to G'$ tal que u és adjacent a v si i només si $\varphi(u)$ és adjacent a $\varphi(v)$. Això estableix una relació d'equivalència, i les classes d'equivalència es poden identificar amb els grafs no etiquetats.

Si tenim un isomorfisme d'un graf amb si mateix, parlem d'un *automorfisme*. Els automorfismes d'un graf G formen un grup, el *grup d'automorfismes del graf* o $Aut(G)$. Un graf és vèrtex-transitiu si dos vèrtexs qualssevol es poden intercanviar per mitjà d'un automorfisme. Això vol dir que tots els vèrtexs són iguals pel que fa a la seva relació amb la resta de vèrtexs: és a dir, les relacions d'adjacència no permeten distingir-los, i caldria introduir etiquetes per poder-los identificar.

Un *subgraf* H del graf G és un graf H tal que el seu conjunt de vèrtexs és un subconjunt del conjunt de vèrtexs de G, i el seu conjunt d'arestes un subconjunt del conjunt d'arestes de G. Si es selecciona un subconjunt S del conjunt de vèrtexs de G, i s'agafa com a conjunt d'arestes totes les de G que tenen tots dos extrems en S, del graf resultant en diem el *subgraf induït* per S, i sol representar-se com $G[S]$.

El nombre de veïns d'un vèrtex donat v, o equivalentment el nombre d'arestes que hi són incidents, s'anomena el *grau* de v, i s'escriu $d(v)$. El grau mínim entre tots els vèrtexs d'un graf s'indica per mitjà de δ i el grau màxim per mitjà de Δ. Si el grau mínim i el grau màxim són iguals o, dit d'una altra manera, si tots els vèrtexs del graf tenen el mateix grau, aleshores aquest grau comú l'anomenarem *valència* i el representarem per d. En aquest cas direm que el graf és regular, o d-regular si volem especificar la valència. Un *graf cúbic* és un graf 3-regular.

Si es pot arribar de qualsevol vèrtex del graf a qualsevol altre encadenant adjacències, diem que el graf és *connex*. D'un encadenament d'adjacències en diem un *camí*. Un graf finit sempre es pot descompondre en un nombre finit de parts cadascuna de les quals és connexa. En diem *components connexes*. Un *pont* és una aresta l'eliminació de la qual desconnecta el graf, suposant que fos connex, o en general n'augmenta el nombre de components connexes. En un graf connex, un *tall per arestes* ("cutset" en anglès) és un conjunt d'arestes l'eliminació de les quals desconnecta el graf. L'*aresta-connectivitat* és el mínim nombre d'arestes d'un tall per arestes, és a dir, el mínim nombre d'arestes l'eliminació de les quals permet desconnectar el graf. Si un graf no és connex, la seva aresta-connectivitat és 0. Si és connex i té un pont, la seva aresta-connectivitat és 1.

Un graf o un subgraf 2-regular connex s'anomena *cicle* . Un graf sense cicles (o *acíclic*) s'anomena *bosc* i, si és connex, diem que és un *arbre*. El *"girth"* o *cintura* d'un graf és el nombre de vèrtexs del cicle més petit entre tots els que el graf conté.

L'*aresta-connectivitat cíclica* és el mínim nombre d'arestes que cal eliminar per desconnectar un graf de manera que dos cicles quedin separats entre ells, o sigui, en components connexes diferents. És un concepte que apareix sovint en la literatura tècnica sobre snarks.

Un *acoloriment arbitrari* dels vèrtexs d'un graf és una aplicació $c : V \to N$ del conjunt de vèrtexs al conjunt dels nombres naturals que assigna a cada vèrtex un nombre, interpretable com el codi d'un determinat color. Aquí fem servir el terme "arbitrari" per indicar que l'aplicació c no ha de complir cap condició en especial. En canvi, anomenarem *acoloriment correcte* o, simplement, *acoloriment* (sense adjectius) una aplicació $c : V \to N$ que assigni colors diferents a vèrtexs adjacents, és a dir, tal que compleixi la condició que si $\{u, v\}$ pertany a E, aleshores $c(u)$ sigui diferent de $c(v)$. Un *acoloriment òptim* permet aconseguir-ho amb el mínim nombre possible de colors.

El *nombre cromàtic* del graf G és el mínim nombre de colors necessari per acolorir-lo, i es representa com $\chi(G)$. En un acoloriment òptim de G es necessiten $\chi(G)$ colors.

Un acoloriment arbitrari de les arestes d'un graf, o *aresta-acoloriment arbitrari*, és una aplicació $\phi : E \to N$ del conjunt d'arestes al conjunt dels nombres naturals que assigna a cada aresta un nombre, interpretable també com el codi d'un color. En canvi, un *aresta-acoloriment* ha de complir la condició que dues arestes incidents al mateix vèrtex siguin de diferent color, o sigui: $|e \cap f| = 1 \Rightarrow \phi(e) \neq \phi(f)$. Un *aresta-acoloriment òptim* permet aconseguir-ho amb el mínim nombre possible de colors .

L'*índex cromàtic* del graf G és el mínim nombre de colors necessari per aresta-acolorir-lo, i es representa com $\chi'(G)$. En un aresta-acoloriment òptim de G es necessiten $\chi'(G)$ colors.

El Teorema dels Quatre Colors afirma que si G és planar, aleshores $\chi(G) = 4$. Una formulació equivalent afirma que (descartant casos trivials com els grafs amb ponts) si G és un graf cúbic planar, aleshores $\chi'(G) = 3$. L'equivalència entre aquestes dues formulacions va ser demostrada per Tait [34, 35] en un intent d'aclarir si es complia la que aleshores era la Conjectura dels Quatre Colors.

Segons el Teorema de Vizing [36], si un graf té grau màxim Δ, aleshores el seu índex cromàtic és o bé Δ o bé $\Delta + 1$. Per tant, un graf cúbic sempre es pot aresta-acolorir amb 3 o 4 colors.

2.2 Snarks "trivials" i "no trivials"

En principi, un *snark* és un graf cúbic d'índex cromàtic 4. Tanmateix, hi ha grafs cúbics que tenen índex cromàtic 4 per motius que podem considerar trivials. Sense entrar en què significa realment "trivial", i per raons que veurem més endavant, definirem un *snark* com un graf cúbic sense ponts, amb "girth"com a mínim 5 i aresta-connectivitat cíclica com a mínim 4.

El Teorema dels Quatre Colors afirma, doncs, que no existeixen snarks planars.

Vegem perquè cal "complicar" el concepte de no trivialitat dels snarks més enllà de la primera definició.

Com demostrarem més endavant, utilitzant el Lema de Paritat, és immediat veure que qualsevol graf amb un pont ha de tenir índex cromàtic 4. A més, els grafs cúbics amb ponts són molt fàcils de construir. Per tant els considerem casos trivials.

També veurem que una component 2-aresta-connexa (el que més endavant anomenarem *2-pol*), és a dir, una part del graf que es pugui separar de la resta tallant 2 arestes, es pot substituir (suposant que sigui Tait-acolorible) per una sola aresta sense modificar l'índex cromàtic del graf. Per tant, els grafs cúbics amb aresta-connectivitat 2 també els donarem per trivials. És important la suposició que l'esmentada component es pot aresta-acolorir amb només 3 colors. En cas contrari, a partir d'aquesta component 2-aresta-connexa podríem obtenir un snark més petit que el graf sencer (per exemple, podríem unir les dues semiarestes) i hauríem aconseguit reduir un snark a un altre de més petit. El tipus d'anàlisi que ens interessa és estudiar com es combinen components Tait-acoloribles de tal manera que el graf resultant sigui un snark.

Continuant en la mateixa línia d'argumentació, un triangle o, en general, una component 3-aresta-connexa i Tait-acolorible es pot substituir per un vèrtex (cosa que demostrarem més endavant utilitzant el Lema de Paritat i el concepte de *3-pol*). Un graf cúbic amb triangles, o en general amb components 3-aresta-connexes més grans que un vèrtex, també serà trivial als efectes que ens interessen.

Els raonaments es tornen més complicats en arribar a les components 4-aresta-connexes, però de moment podem anticipar que un graf cúbic amb 4-cicles (quadrats) també és trivial, i és per això que exigirem als snarks que tinguin "girth"com a mínim 5.

L'snark no trivial més petit és el graf de Petersen, que té justament "girth"5. A més, la seva aresta-connectivitat cíclica també és 5. La Fig. 2 il·lustra un intent fallit de construir el graf de Petersen a partir de cicles Tait-acolorits.

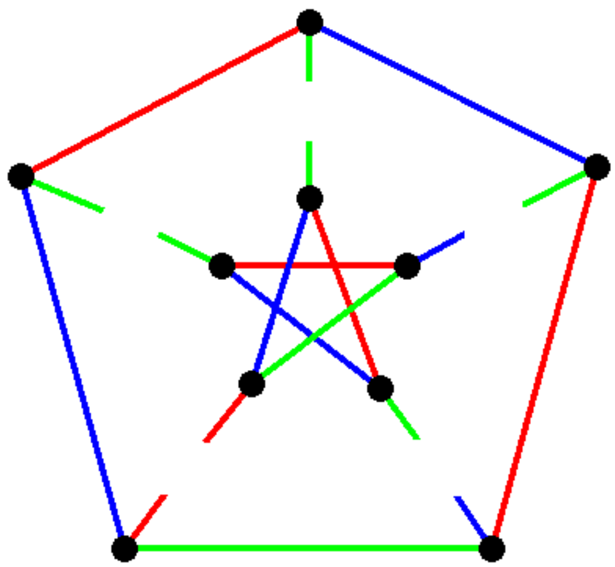


Figura 2: Tait-acoloriment frustrat per la unió de semiarestes en el graf de Petersen

Tallant 5 arestes adequadament triades, el graf de Petersen es pot descompondre en dos cicles de 5 vèrtexs cadascun i que per separat són Tait-acoloribles. Hi ha moltes maneres de tornar a unir aquests dos cicles de manera que s'obtingui un graf cúbic d'índex cromàtic 3. La propietat que té el graf de Petersen de ser un snark depèn de la manera particular en què els dos cicles estan units, i també dels conjunts de colors disponibles per a les arestes d'unió des del punt de vista de cada cicle. Si els dos conjunts són incompatibles, tenim un snark.

2.3 Perspectiva històrica

2.3.1 Del graf de Petersen a les primeres famílies infinites

El graf de Petersen no és només el més petit dels snarks: també és el primer que es va conèixer [28]. I va ser l'únic snark conegut durant bastant de temps, fins a nous descobriments (poc després de la Segona Guerra Mundial) per part de D. Blanuša [3] i W. Tutte [7] (sota el pseudònim de Blanche Descartes) i més endavant per part de G. Szekeres [33]. Tanmateix, en aquests casos es tractava d'exemples aïllats. No va ser fins a la dècada de 1970 que es van descriure les primeres famílies infinites d'snarks, per exemple en els treballs d'Adelson-Velski i Titov [1], Isaacs [20], Loupekine [21], Goldberg [16] i Grinberg. Els treballs de Grinberg amb els snarks no es van publicar en premsa, però ja eren presents en els seus quaderns l'any 1974 [17].

2.3.2 Ampliació de les famílies infinites

Una vegada demostrat que el nombre d'snarks no era finit, es van anar trobant noves famílies i generalitzacions de les famílies conegudes. Per exemple, Fiol [9, 10] va descriure un enfocament, basat en valors booleans i circuits lògics, que permet construir una infinitat d'snarks, generalitzant diverses construccions anteriors. Kochol [24] va demostrar que es podia construir una família infinita d'snarks amb "girth"arbitràriament gran, amb la qual cosa va desmentir la Conjectura 1 de Jaeger i Swart [22], segons la qual el màxim "girth"d'un snark seria 6. En la Conjectura 2 de Jaeger i Swart [22] se substitueix el "girth"per l'aresta-connectivitat cíclica, suposant també que la màxima és 6 per qualsevol snark. Aquesta conjectura continua oberta. El mateix Kochol comenta en l'article [24] que els seus contraexemples de la Conjectura 1 tenen aresta-connectivitat cíclica 5, i per tant no contradiuen la Conjectura 2. També es coneixen grafs de "girth"6 i aresta-connectivitat cíclica 6, com per exemple la família dels *snarks florals* ("flower snarks") [17], amb l'excepció del més petit de la família, que té aresta-connectivitat cíclica 5. Kochol [25], utilitzant la tècnica que ell va anomenar "superposició", va descriure una altra construcció d'snarks amb aresta-connectivitat cíclica 6 i "girth"6. En aquesta altra família d'snarks, el més petit té 118 vèrtexs. Sembla difícil trobar snarks d'aresta-connectivitat cíclica i "girth"6 que siguin més petits que els descrits per Kochol i diferents dels snarks florals.

2.4 Operacions amb snarks

2.4.1 El "dot product" d'Isaacs

Per poder descriure famílies infinites d'snarks, Isaacs [20] va definir un producte de grafs que permet obtenir snarks a partir d'snarks. El va anomenar *"dot product"* (literalment "producte de punt", pel punt que s'utilitza com a símbol de l'operació). Aplicant reiteradament aquest producte, es poden construir snarks cada vegada més grans, donant lloc a famílies infinites.

El "dot product" es defineix de la següent manera: donats dos snarks S i S', d'un d'ells (per exemple S) s'eliminen dos vèrtexs adjacents u i v, de manera que desapareixen l'aresta que els uneix i les altres quatre arestes incidents a u i v. Això fa que quatre vèrtexs de S passin a tenir grau dos: suposem que són els vèrtexs w, x, y i z (podem suposar que w, x eren els veïns d'u, i y, z els veïns de v). En canvi, de T s'eliminen dues arestes no adjacents $e = w'x'$ i $f = y'z'$. De nou quatre vèrtexs passen a tenir grau 2: suposem que són w', x', y' i z' tal com ja hem indicat en la descripció de les arestes e i f. El "dot product" de S i S', representat per $S \cdot S'$, s'obté fent la unió disjunta dels dos grafs i afegint-hi les arestes ww', xx', yy' i zz'.

Isaacs va demostrar que si S i S' són snarks, aleshores $S \cdot S'$ també ho és. Qualsevol graf cúbic té un nombre de vèrtexs més gran o igual que quatre (el més petit és el graf complet de quatre vèrtexs, o K_4) i, de fet, qualsevol snark té com a mínim 10 vèrtexs, ja que el més petit és el graf de Petersen. És segur, doncs, que $|S| > 2$ i $|S'| > 2$, de manera que $|S \cdot S'| = |S| + |S'| - 2$ serà amb tota seguretat més gran que $|S|$ i també més gran que $|S'|$. Així, amb tota seguretat haurem construït un snark més gran que els que teníem anteriorment.

Ja només falta iterar el "dot product" per obtenir snarks arbitràriament grans. Existeixen, doncs, famílies infinites d'snarks.

2.4.2 Descomposició, reducció i superposició d'snarks

El "dot product" es pot invertir per obtenir dos grafs cúbics a partir d'un altre (no necessàriament snarks). Es tracta, doncs, d'una *descomposició* d'un graf cúbic en dos de més petits.

En el cas d'una *reducció* s'obté un snark a partir d'un altre de més gran. Segons l'operació de reducció que s'utilitzi, es tindrà un o altre concepte d'*irreductibilitat*. Una possibilitat és utilitzar la descomposició inversa del "dot product". Suposem que les components són S i S'. Si una de les components, per exemple S', no és un snark, podem ignorar-la, i considerar l'altra component S, suposant que aquesta sigui un snark, com una reducció de l'snark original. Si no es pot reduir un snark sense que baixi el seu índex cromàtic, diem que és *irreductible*.

A [27], Nedela i Škoviera defineixen un altre concepte d'irreductibilitat d'un snark, i demostren que és equivalent al fet que tot tall per arestes no trivial, és a dir, que no consisteixi en les tres arestes incidents a un vèrtex, el separi en components Tait-acoloribles.

La *superposició* és la tècnica de construcció utilitzada per M. Kochol [24] per descriure famílies d'snarks de "girth"arbitràriament gran, amb la qual cosa va poder demostrar que la Conjectura 1 de Jaeger i Swart és falsa. La superposició consisteix en substituir les arestes d'un graf G per un cert tipus de subgrafs, que Kochol anomena *super-arestes*, i els vèrtexs per un altre tipus de subgrafs, els *super-vèrtexs*, de manera que els super-vèrtexs i les super-arestes es puguin connectar de manera semblant a com s'uneixen els vèrtexs i les arestes en el graf G o *graf subjacent*. Tal com indica Kochol en el seu article, amb altres tècniques conegudes prèviament es podrien haver construït grafs de "girth"superior a 6, però no s'havia aconseguit, la qual cosa suggereix que la tècnica de la superposició era l'ingredient necessari per clarificar l'assumpte i fer avançar el coneixement dels snarks més enllà dels límits aparentment marcats per la Conjectura 1 de Jaeger i Swart.

3 Aresta-acoloriment de grafs cúbics des d'un punt de vista pràctic

3.1 Algorismes d'aresta-acoloriment

Hi ha molts algorismes per aresta-acolorir grafs, i en particular grafs cúbics. Segons el Teorema de Vizing [36], si Δ és el grau màxim del graf, aleshores es pot aresta-acolorir de manera òptima amb Δ o $\Delta + 1$ colors, però com que Holyer [18] va demostrar que distingir entre aquestes dues possibilitats és un problema $\mathcal{NP}$-complet, l'eficiència teòrica de qualsevol algorisme general d'aresta-acoloriment no pot ser gaire alta, almenys si fem les suposicions habituals respecte a la qüestió $\mathcal{P}$ vs. $\mathcal{NP}$. Com que la demostració de Holyer es basa justament en els grafs cúbics, fins i tot en aquest cas un algorisme exacte de Tait-acoloriment en temps polinòmic podria ser, i molt probablement és, impossible.

Tanmateix, des d'un punt de vista pràctic l'aresta-acoloriment no té perquè ser tan difícil[4]. El concepte de dificultat d'un problema $\mathcal{NP}$-complet es refereix a la (molt probable) impossibilitat de trobar un algorisme exacte general el cost en temps del qual creixi polinòmicament en funció de la llargada de la descripció de les instàncies del problema. No té sentit aplicar aquesta noció de dificultat a una sola instància concreta, o fins i tot a un conjunt finit d'instàncies, ja que no es limita "a priori" el procés per mitjà del qual s'elabora un algorisme: això vol dir que si tenim una instància particular d'un problema, per exemple un únic graf cúbic concret que ens interessa aresta-acolorir, una vegada haguem trobat un aresta-acoloriment (per molt costós que pugui ser aquest procés en temps i en esforç) tindrem un algorisme "trivial" per aresta-acolorir el graf, un algorisme molt eficient basat en la descripció explícita de l'aresta-acoloriment que ja hem descobert. El mateix procediment es pot aplicar a qualsevol conjunt finit de grafs que volguéssim aresta-acolorir: obtenir l'algorisme podria ser un procés molt llarg i difícil, però una vegada obtingut resultaria molt eficient (com que només es tractaria d'assignar colors, prèviament obtinguts, a les arestes d'una llista, el temps d'execució de l'algorisme seria lineal respecte al nombre d'arestes). Per matisar la qüestió $\mathcal{P}$ vs. $\mathcal{NP}$ (amb referències a la *complexitat en el cas mitjà* introduïda per Leonid Levin) vegeu els Cinc Móns d'Impagliazzo [19].

En resum, encara que no ens garanteixi aconseguir-ho, la teoria no ens prohibeix aspirar a resoldre d'una manera raonablement eficient qualsevol problema particular d'aresta-acoloriment de grafs de mida moderada que se'ns pugui presentar com a problema pràctic. Fins i tot encara que ens trobem davant d'instàncies concretes molt grans, cada cas específic pot tenir la seva vulnerabilitat, alguna mena de "flanc feble" que ens permeti arribar a la solució. D'alguna manera, la suposició habitual segons la qual $\mathcal{P}$ és diferent de $\mathcal{NP}$ ens diu que el "flanc feble" no pot ser sempre el mateix per tots els problemes $\mathcal{NP}$-complets. Si $\mathcal{P}$ i $\mathcal{NP}$ fossin iguals, aquesta vulnerabilitat comuna existiria en forma d'un algorisme general en temps polinòmic.

També cal tenir en compte que algunes subclasses infinites de grafs sí que poden tenir un algorisme general eficient i exacte, tal com veurem en les seccions que vénen a continuació.

[4] Segons un resultat de Robinson i Wormald [29], gairebé tots els grafs cúbics són hamiltonians i per tant gairebé tots els grafs cúbics són Tait-acoloribles (n'hi ha prou d'assignar dos colors en alternança a les arestes d'un circuit hamiltonià i el tercer color a la resta d'arestes). No obstant, saber que un graf és Tait-acolorible amb una alta probabilitat és molt diferent de trobar-ne un Tait-acoloriment explícit.

3.2 Algorismes exactes en el cas general (no polinòmics si $\mathcal{P} \neq \mathcal{NP}$)

Elaborar un algorisme que permeti trobar un aresta-acoloriment d'un graf, o fins i tot que permeti trobar el conjunt de tots els aresta-acoloriments d'un graf, no és difícil si acceptem que pugui ser bastant lent en el cas general. Tal com s'ha indicat en l'apartat anterior, probablement no tindrem més remei que acceptar aquesta limitació.

Un enfocament "ingenu" pot ser perfectament acceptable en el cas de grafs petits. Si volem que el nostre algorisme sigui exacte, determinista i aplicable de manera general, en augmentar la mida del graf inevitablement toparem amb les limitacions tèoriques abans esmentades, per molt sofisticat que sigui l'algorisme, o per molt eficient que sigui la seva implementació.

3.3 Algorismes exactes en casos no completament generals

El Teorema dels Quatre Colors ens assegura que tots els grafs planars són 4-vèrtex-acoloribles i, en virtut de l'equivalència demostrada per Tait, que els grafs cúbics planars són Tait-acoloribles llevat d'excepcions trivials com els grafs amb ponts. Com que la identificació dels casos trivials es pot fer en temps polinòmic, la determinació de l'índex cromàtic d'un graf cúbic planar sí que es pot fer de manera eficient. Tenim, doncs, un exemple d'una classe infinita de grafs cúbics, la dels grafs cúbics planars, que admet un algorisme general eficient per determinar l'índex cromàtic. Podríem dir que, en aquest cas, el "flanc feble" és la planaritat, encara que aquest "flanc feble" va resistir durant molt de temps fins que Appel i Haken van aconseguir demostrar el Teorema dels Quatre Colors, i encara amb l'ajuda de mitjans informàtics.

Hi ha una subclasse infinita dels grafs cúbics planars que admet un algorisme de Tait-acoloriment particularment senzill, l'algorisme de Ringel [30]. Aquesta classe està formada pels grafs cúbics planars les cares planes dels quals estan delimitades per un nombre d'arestes que és múltiple de 3. L'algorisme de Ringel funciona de la següent manera per grafs cúbics, planars i connexos que tinguin l'esmentada propietat (si no són connexos, n'hi ha prou de repetir el procediment amb cada component connexa):

1. S'escull un vèrtex arbitrari v.

2. S'acoloreixen les arestes incidents a v amb els colors a, b i c, començant per una aresta arbitrària i avançant en sentit horari.

3. Sempre respectant el sentit horari, i considerant que els colors tenen l'ordre cíclic a, b, c, a, b, c, a... es continua amb les arestes adjacents a les arestes ja acolorides. El punt 3 es repeteix fins que es completa l'aresta-acoloriment.

Com que cada cara del graf planar està delimitada per un nombre d'arestes que és múltiple de 3, és fàcil veure que en el procés d'assignació de colors no toparem amb cap inconsistència.

3.4 Algorismes aproximats en el cas general

Un algorisme aproximat és el que ens dóna una aproximació a la solució buscada, segons algun criteri de proximitat. Per exemple, si acceptem un error d'una unitat en el nombre de colors d'un aresta-acoloriment òptim, aleshores en el cas d'un graf de grau màxim Δ ens podem conformar amb $\Delta + 1$ colors i el problema queda resolt, ja que en aquest cas la demostració del Teorema de Vizing [36] proporciona un algorisme per $(\Delta + 1)$-aresta-acolorir el graf en temps polinòmic.

També es pot entendre per algorisme aproximat un algorisme que troba solucions exactes amb una certa probabilitat d'error, o un algorisme del qual no es pot garantir que trobarà una solució però que, en cas d'èxit, en troba una d'exacta. Si el percentatge d'èxits és prou elevat, l'algorisme pot resultar útil a la pràctica. A la secció següent en veurem un exemple.

Alguns algorismes incorporen un cert grau d'aleatorietat, la qual, a l'hora d'implementar els algorismes informàticament, es tradueix de fet en pseudo-aleatorietat, ja que els ordinadors (tal com els coneixem actualment) no produeixen autèntica aleatorietat sinó que utilitzen internament generadors de números pseudo-aleatoris basats en procediments matemàtics. L'aleatorietat pot ser útil per evitar alguns bloqueigs o ineficiències en els quals poden caure els algorismes deterministes. Per exemple, és possible que una cerca exhaustiva, habitualment ineficient, sigui innecessària en alguns casos, i que n'hi hagi prou amb una elecció aleatòria o amb unes quantes eleccions aleatòries successives.

3.5 Algorisme heurístic de desplaçament de vèrtexs conflictius I: descripció

3.5.1 Algorismes heurístics

Diem que un algorisme és *heurístic* quan es basa en consideracions generals i intuïtives sobre la manera de resoldre un problema, encara que no es demostri rigorosament que el procediment condueix a la solució correcta. Pot passar que en alguns casos un algorisme obtingut per mitjans heurístics també sigui exacte en realitat, però normalment els algorismes heurístics s'utilitzen quan els procediments exactes resulten massa costosos. Per tot això, és necessari avaluar de manera empírica el rendiment d'un algorisme heurístic.

Com hem vist en el primer apartat d'aquest capítol, la suposada intractabilitat teòrica d'alguns problemes no necessàriament s'ha de reflectir en la impossibilitat pràctica de resoldre'n instàncies concretes. Això s'anomena "ruptura de la intractabilitat". No estem obligats a utilitzar només algorismes que siguin exactes i generals. Podem renunciar a l'exactitud (o a *demostrar* l'exactitud), podem renunciar a la generalitat (per exemple, restringint el problema), o podem renunciar a totes dues coses.

L'algorisme d'aresta-acoloriment que proposem a continuació és general perquè és aplicable a qualsevol graf, però no és exacte perquè en alguns casos pot fallar i perquè té un component aleatori. Es basa en una idea intuïtiva [11] per eliminar successivament els colors incorrectes d'un aresta-acoloriment arbitrari donat. Per tant, és un algorisme heurístic. A continuació en descriurem dues versions i després n'avaluarem empíricament l'eficiència per veure si, en efecte, aconseguim la "ruptura de la intractabilitat".

L'algorisme s'anomena *Desplaçament de vèrtexs conflictius* o, per abreujar, DVC. En primer lloc en descriurem la versió per grafs cúbics. Abans, però, definim alguns conceptes.

3.5.2 Vèrtexs conflictius i intercanvis de Kempe

Un *vèrtex conflictiu* és un vèrtex les arestes incidents del qual no estan correctament acolorides (com a mínim dues d'elles són del mateix color). El *nivell de conflictivitat* d'un vèrtex de grau Δ és Δ menys el nombre de colors de les seves arestes incidents. Aquesta és una manera de mesurar la repetició dels colors: la conflictivitat és 0 si no hi ha colors repetits, i és $\Delta - 1$ si totes les arestes són del mateix color. La *conflictivitat global* d'un graf és la suma dels nivells de conflictivitat de tots els seus vèrtexs: si el graf està correctament aresta-acolorit, la seva conflictivitat global és 0.

En un graf arbitràriament aresta-acolorit, una *cadena de Kempe* és un camí o un cicle en el qual es van alternant dos colors, diguem-ne a i b. Lògicament, si es tracta d'un cicle sense vèrtexs conflictius ha de tenir un nombre parell d'arestes, mentre que un cicle amb un nombre imparell d'arestes ha de tenir com a mínim un vèrtex conflictiu, diguem-ne w, on s'incompleixi l'alternança de colors: aquest és un cas especial (ja que acceptem l'incompliment de l'alternança de colors en un sol vèrtex, el vèrtex especial w) però l'hem de tenir en compte perquè després serà molt important. Un *intercanvi de Kempe* és l'intercanvi dels colors a i b al llarg d'una cadena de Kempe. Suposem ara que l'aresta-acoloriment del graf és correcte: si es fa un intercanvi de Kempe en un cicle parell, aleshores el graf resultant continua estant correctament aresta-acolorit; però si l'intercanvi es fa en un camí, aleshores apareixen conflictes en els vèrtexs que es troben als extrems del camí. Si l'aresta-acoloriment és arbitrari, un intercanvi de Kempe en un cicle parell no crea nous conflictes, mentre que un intercanvi de Kempe en un camí pot fer aparèixer o desaparèixer conflictes en els extrems del camí.

Què passa amb el cas especial d'un cicle imparell? En un graf correctament aresta-acolorit no podem tenir un cicle imparell on només intervinguin dos colors alternats: o bé hauríem d'introduir el tercer color c en el cicle, o bé hauríem de produir un conflicte en el vèrtex especial w (en tot cas, no es pot complir estrictament l'alternança al llarg de tot el cicle). En un graf aresta-acolorit arbitràriament, un intercanvi de Kempe en un cicle imparell, on suposem que l'alternança es compleix excepte en un únic vèrtex conflictiu w, dóna lloc a tres situacions:

1. El nivell de conflicte del vèrtex w passa d'1 a 2.

2. El nivell de conflicte del vèrtex w passa de 2 a 1.

3. El nivell de conflicte del vèrtex w es manté en el valor 1.

Per tant, un intercanvi de Kempe en un cicle imparell pot fer augmentar o disminuir en una unitat el nivell de conflictivitat de l'únic vèrtex conflictiu del cicle, o deixar-lo com estava.

3.5.3 Descripció detallada de l'algorisme *DVC*

El punt de partida de l'algorisme[5] és un graf cúbic amb les arestes acolorides de manera arbitrària, és a dir, no necessàriament correcta. De fet, partim d'un aresta-acoloriment generat de manera aleatòria [6] en el qual, molt probablement, hi haurà vèrtexs conflictius.

Escollim aleatòriament un vèrtex conflictiu qualsevol, diguem-ne v, i escollim també a l'atzar una de les seves arestes incidents de color repetit, per exemple e. Si el nivell de conflictivitat del vèrtex v és 1, el color correcte de l'aresta e (és a dir, el color que eliminaria el conflicte) queda determinat pels colors de les dues arestes restants. En canvi, si v té nivell de conflictivitat 2, hi ha dues possibles eleccions del color d'e que reduirien el nivell de conflictivitat a 1. En aquest cas escollim aleatòriament el color que li assignarem a e. Suposem que a és el color original d'e i b el nou color que li volem assignar.

Ara considerem la cadena de Kempe més llarga que parteixi de l'aresta e i que tingui els colors a i b, i fem un intercanvi de Kempe en aquesta cadena. Aquí admetem com a cadena de Kempe el cas especial d'un cicle imparell, suposant que el vèrtex conflictiu que trenca l'alternança sigui precisament v. En canvi, podem descartar la possibilitat que la cadena de Kempe sigui un cicle parell, ja que l'aresta e i l'aresta que torna a tancar el cicle haurien de ser de color diferent tant abans com després de l'intercanvi de colors: això vol dir que el punt de partida v no pot ser un vèrtex de nivell de conflictivitat 2 (ja que les tres arestes incidents a v serien del mateix color). De fet, tampoc no pot ser un vèrtex de nivell de conflictivitat 1. Per veure-ho, suposem (sense pèrdua de generalitat) que la combinació de colors en les arestes incidents a v és aac. Aleshores e serà una de les dues arestes de color a. Si li assignéssim c com a nou color, després de l'intercanvi al llarg del cicle parell la combinació de colors de les arestes incidents a v seria aca o caa, i v continuaria sent un vèrtex de nivell de conflictivitat 1. En realitat, com que volem disminuir el nivell de conflictivitat de v, l'algorisme ens dicta que a l'aresta e li assignem b com a nou color. El problema en aquest cas és que cap de les dues arestes restants no pot ser la que tanqui el cicle parell perquè cap d'elles no té el color b (de tal manera que després de l'intercanvi pugui tenir color a, respectant l'alternança i la paritat del cicle).

Per tant, la cadena és o bé un cicle imparell que connecta v amb ell mateix o bé un camí que connecta v amb un altre vèrtex, diguem-ne u. Observem també que si la cadena és un camí aleshores no s'aturarà mai en un vèrtex de conflictivitat 0, ja que en un vèrtex com aquest sempre es pot fer l'intercanvi dels colors a i b i continuar el camí cap al vèrtex següent. Per tant, el vèrtex u tindrà nivell de conflictivitat 1 o 2.

En realitzar l'intercanvi, aconseguirem fer disminuir la conflictivitat global del graf?

Per respondre aquesta pregunta, examinem dos casos:

1. La cadena de Kempe és un cicle imparell de v a v: tot depèn de si el nivell de conflictivitat de v augmenta, es queda igual o disminueix com a conseqüència de l'intercanvi. Si el seu nivell de conflictivitat era 2, segur que disminueix, ja que hi havia tres colors iguals i l'intercanvi fa que dues arestes (la de partida i la d'arribada) adquireixen un nou color comú, de manera que el nivell de conflictivitat passa a ser 1. Si el nivell de conflictivitat de v era

[5] A l'Apèndix B hi ha una descripció formal de l'algorisme *DVC* en pseudocodi.

[6] O *pseudo*aleatòria, per ser escrupolosos, ja que farem servir l'ordinador per portar l'algorisme a la pràctica.

1, només podria augmentar si haguéssim escollit malament el nou color per l'intercanvi: descartem aquesta possibilitat. Si havíem escollit bé el nou color de l'aresta de partida, aquest mateix color arriba a l'aresta d'arribada i el nivell de conflictivitat es manté en el valor 1 (els colors passen de la combinació *aac* a la combinació *bbc*). En resum, la conflictivitat global del graf disminueix en una unitat o manté el valor que tenia.

2. La cadena de Kempe és un camí de v a u: tot depèn de si el nivell de conflictivitat del vèrtex u augmenta, es queda igual o disminueix. És obvi que l'increment, tant si és positiu com negatiu, només pot ser d'una unitat, ja que només es modifica un color en el vèrtex d'arribada u. Si el seu nivell de conflictivitat era 2, segur que disminueix, ja que hi havia tres colors iguals i amb l'intercanvi apareix un nou color. Però si el nivell de conflictivitat era 1, qualsevol de les tres situacions següents és possible: el nivell de conflictivitat augmenta i passa a ser 2, es queda igual en el valor 1, o disminueix i passa a ser 0. Només la primera situació és desfavorable, ja que la conflictivitat global del graf no canvia (l'augment d'una unitat en la conflictivitat del vèrtex u compensa la disminució d'una unitat en la conflictivitat del vèrtex v). En els altres casos, la conflictivitat global del graf disminueix, de manera que haurem aconseguit acostar-nos una mica més a l'objectiu d'eliminar tots els conflictes.

Veiem que, una vegada realitzat l'intercanvi de Kempe, la conflictivitat global del graf haurà disminuït o, en el pitjor dels casos, s'haurà mantingut en el mateix valor que tenia.

Ara tornem a escollir un vèrtex conflictiu a l'atzar, i repetim la mateixa operació d'intercanvi de colors.

Tot això es va repetint fins que el nombre de vèrtexs conflictius es redueix a 0 o s'estabilitza. Si queda estable durant moltes iteracions, fins a un màxim R arbitrari, podem tornar a començar a partir d'un altre aresta-acoloriment aleatori. Podem establir un màxim també arbitrari de L aresta-acoloriments aleatoris inicials . Si després de tots aquests intents, no hem aconseguit anul·lar la conflictivitat global del graf, podem suposar raonablement que és un snark. Com que l'algorisme té un component aleatori, no en podem estar segurs, però aleshores podem intentar demostrar per mètodes exactes que aquell graf en concret és efectivament un snark. És a dir, podem fer servir el resultat de l'aplicació de l'algorisme per orientar les nostres hipòtesis.

En el cas de grafs de mida mitjana o gran, fins a desenes de milers de vèrtexs, l'aplicació pràctica de l'algorisme indica que es pot obtenir una bona eficiència empírica amb els valors $R = 50$ i $L = 50$ (respectivament, el màxim nombre d'intercanvis de Kempe consecutius sense disminució de la conflictivitat global del graf, i el màxim nombre d'aresta-acoloriments aleatoris inicials).

Fins i tot en el cas de grafs molt grans, fins a milions de vèrtexs, no sembla que faci falta modificar els valors dels paràmetres R i L per obtenir bons resultats a la pràctica.

3.5.4 Justificació de l'algorisme

Un avantatge de l'algorisme DVC és que no dóna falsos positius, ja que la manera que té l'algorisme de determinar que un graf cúbic és Tait-acolorible consisteix precisament en trobar un Tait-acoloriment explícit, el qual es pot comprovar.

En canvi sí que pot donar falsos negatius, ja que a causa del seu component aleatori és possible que l'algorisme no aconsegueixi trobar un Tait-acoloriment encara que n'existeixi algun. De tota manera, res no ens impedeix continuar aplicant l'algorisme amb nous aresta-acoloriments aleatoris inicials, la qual cosa equival a augmentar el valor de L. Podríem dir que els falsos negatius no són "immunes", i que un atzar favorable ens pot permetre desemmascarar-los. L'avantatge de l'atzar en aquest cas és que, si entenem un fals negatiu com un adversari que no vol ser descobert, aquest adversari no té cap garantia que un cert aresta-acoloriment aleatori inicial, i una certa seqüència d'eleccions aleatòries, no ensopegui el seu "punt feble" i permeti trobar un Tait-acoloriment. Tanmateix, en alguns casos poden fer falta molts intents a l'atzar per descobrir-lo. És d'esperar que això passi de tant en tant, a causa de la intractabilitat teòrica del problema general. La intervenció de l'atzar, amb les incerteses que comporta, fa compatible l'eficiència empírica de l'algorisme heurístic amb les limitacions teòriques imposades per l'$\mathcal{NP}$-completesa de l'aresta-acoloriment.

Recordem que en un dels passos de l'algorisme teníem quatre possibilitats per al nivell de conflicte del vèrtex u si la cadena de Kempe era un camí:

1. Que passés de 2 a 1.

2. Que passés d'1 a 2.

3. Que es mantingués en el valor 1.

4. Que passés d'1 a 0.

I teníem dues possibilitats per al nivell de conflicte del vèrtex v si la cadena de Kempe era un cicle imparell:

5. Que passés de 2 a 1.

6. Que es mantingués en el valor 1.

En els casos 1 i 4, la conflictivitat global del graf disminueix en dues unitats, una per v i una altra per u. En els casos 3 i 5, disminueix en una sola unitat, corresponent a v. En el cas 2, la conflictivitat global no canvia, ja que la disminució d'una unitat en v queda contrarrestada per l'augment d'una unitat en u. En el cas 6, la conflictivitat global no canvia, ja que la disminució inicial del nivell de conflictivitat de v queda contrarrestada per un augment quan es completa l'intercanvi en el cicle imparell i l'aresta d'arribada torna a tenir el mateix color que l'aresta de partida.

Això ens permet entendre de manera intuïtiva perquè l'algorisme funciona, i per què és important la intervenció de l'atzar: com que l'aresta-acoloriment inicial és aleatori, així com les eleccions que es fan a continuació, podem suposar que cap dels sis casos descrits no té una prevalença especial sobre els altres, i que tots sis són més o menys igual de probables. Al mateix temps, resulta que només dos dels sis casos són desfavorables (i de fet no fan augmentar la conflictivitat global, només la deixen com estava), mentre que els altres quatre casos són favorables a la disminució de la conflictivitat global i, d'aquests, dos casos hi són molt favorables, ja que comporten una disminució de dues unitats.

També veiem que els vèrtexs de nivell de conflictivitat 2 són favorables, perquè si n'escollim un com a punt de partida d'un intercanvi de Kempe, la disminució de la conflictivitat global està garantida. Això apunta al fet que, tal com veurem després, és convenient escollir els vèrtexs de nivell de conflictivitat més alt que hi hagi disponibles (després ho aplicarem als grafs de grau màxim arbitrari). D'aquí també en deduïm que el cas 2 no és tan desfavorable, perquè, sense fer augmentar la conflictivitat global, fa aparèixer un vèrtex de nivell de conflictivitat 2, i això és favorable segons el que acabem de veure. Així, el cas 6 és l'únic veritablement desfavorable a la disminució de la conflictivitat global del graf.

Per tant, podem esperar que l'algorisme progressi, especialment al principi, quan l'atzar és més prevalent i hi ha molts vèrtexs conflictius. En aquesta situació les cadenes de Kempe són força curtes. Després, a mesura que la conflictivitat global del graf va disminuint (com a conseqüència de l'acció de l'algorisme) i els nodes conflictius van desapareixent, les cadenes de Kempe es van fent cada vegada més llargues i l'aresta-acoloriment es torna menys aleatori i més estructurat. Això pot fer que canviï la distribució de probabilitats dels sis casos, i que el cas desfavorable adquireixi una probabilitat més alta, de manera que l'algorisme progressarà més lentament. Si el graf és un snark, arribarà un moment en què només es donarà el cas desfavorable, i el nombre de vèrtexs conflictius s'estabilitzarà. Per tant, si el graf és un snark, arribarà un moment en què només es donarà el cas 6, i totes les cadenes de Kempe seran cicles imparells. A partir d'aquí, l'algorisme no podrà progressar més, a no ser que es torni a començar a partir d'un nou Tait-acoloriment inicial.

3.5.5 Adaptació de l'algorisme a grafs arbitraris

L'algorisme descrit es pot aplicar, gairebé sense modificacions, a grafs arbitraris (suposant sempre que són finits i simples). Només cal tenir en compte que, si el grau màxim del graf és Δ, ara hi haurà Δ valors possibles del nivell de conflictivitat dels vèrtexs: de 0 a $\Delta - 1$.

Tal com apuntàvem abans, és convenient començar els intercanvis de Kempe pels vèrtexs que tinguin un nivell de conflictivitat més alt. En el cas dels grafs cúbics, o de grau màxim 3, això no és gaire important, però quan Δ és gran sí que és important tenir-ho en compte per millorar el rendiment de l'algorisme. Només és una observació empírica, encara que es pot justificar intuïtivament amb el raonament que hem fet a l'apartat anterior.

L'única modificació important en la nova versió de l'algorisme és que cada vegada que haguem de triar un vèrtex conflictiu el triarem entre els que tinguin un nivell de conflictivitat més alt.

Definim $Conf : V(G) \to \{0, 1, ..., \Delta - 1\}$ com l'aplicació que li assigna a cada vèrtex v del graf G el seu nivell de conflictivitat $Conf(v)$.

Cada vegada que es fa un intercanvi de Kempe l'aplicació $Conf$ canvia. Per això, en la nova versió de l'algorisme, després de cada intercanvi s'actualitza $Conf$ (a la pràctica, s'actualitza una estructura de dades que, per cada valor del nivell de conflictivitat, dóna el conjunt de vèrtexs que tenen aquell valor).

Una altra modificació no tant important però també convenient (especialment per grafs molt grans) consisteix en substituir els Δ-aresta-acoloriments aleatoris inicials per uns altres acoloriments obtinguts mitjançant un algorisme de tipus cobdiciós ("greedy") que visiti cada aresta del graf una sola vegada i li assigni un color correcte si és possible, o si no un color arbitrari: d'aquesta manera, el conjunt inicial de vèrtexs conflictius és més petit i l'algorisme DVC parteix d'una situació més favorable.

A l'Apèndix B hi ha la descripció formal de l'algorisme DVC en pseudocodi, i a l'Apèndix C una possible manera de traslladar-lo a codi en llenguatge Python (per a usos pràctics).

3.6 Algorisme heurístic de desplaçament de vèrtexs conflictius II: anàlisi de la complexitat

En aquesta secció calcularem el cost computacional de l'algorisme DVC per tenir una orientació teòrica respecte al seu rendiment, i a la secció següent compararem el resultat obtingut amb el rendiment avaluat de manera empírica.

Suposem que el graf que volem aresta-acolorir té n vèrtexs i grau màxim Δ. Per calcular el cost de l'algorisme DVC, demostrem els lemes que vénen a continuació.

Lema 3.1. *El cost dels aresta-acoloriments inicials, siguin aleatoris o "cobdiciosos", és* $O(\Delta^2 n)$.

Demostració. El graf té $O(\Delta n)$ arestes, i per cada aresta cal triar un color d'un conjunt que conté $O(\Delta)$ colors. Segons l'eficiència de la implementació, el cost d'aquesta tria podria ser inferior a $O(\Delta)$ però en tot cas no serà superior. Com a màxim es faran L aresta-acoloriments inicials, però el paràmetre L està fixat durant l'execució de l'algorisme. Per tant, el cost de tots els aresta-acoloriments inicials és $O(\Delta^2 n)$. □

Lema 3.2. *El cost de tots els intercanvis de Kempe és* $O((\Delta - 1)n^2)$.

Demostració. Després d'un aresta-acoloriment inicial, en el pitjor dels casos tots els n vèrtexs del graf tindran nivell de conflictivitat $\Delta - 1$. Per tant, la conflictivitat global inicial del graf és $O((\Delta - 1)n)$. Cada vegada que un vèrtex conflictiu és escollit, es fan com a màxim $O(n)$ intercanvis de color al llarg d'una cadena de Kempe (ja que cap cadena no pot tenir més vèrtexs dels que té el graf sencer). Si la conflictivitat global deixa de disminuir, la tria d'un nou vèrtex conflictiu no es pot repetir més de R vegades, perquè en aquest cas es tornaria a començar a partir d'un nou aresta-acoloriment inicial, i el màxim nombre d'aresta-acoloriments inicials és L. Com que els paràmetres R i L estan fixats durant l'execució de l'algorisme, el cost de tots els intercanvis de Kempe és $O((\Delta - 1)n^2)$. □

Després de cada intercanvi de Kempe s'ha d'actualitzar $Conf$ i triar un nou vèrtex.

Lema 3.3. *El cost de totes les actualitzacions de* $Conf$ *i de totes les eleccions de vèrtexs és* $O(\Delta^2 n^2)$.

Demostració. Cada actualització de $Conf$ té un cost $O(n\Delta)$, perquè cal comprovar tots els n vèrtexs del graf i l'actualització té un cost $O(\Delta)$ per cada vèrtex (cal comprovar el color de cadascuna de les Δ arestes incidents). Cada tria d'un nou vèrtex, entre un conjunt que conté $O(n)$ vèrtexs, té un cost no superior a $O(n)$, i per tant inferior a $O(n\Delta)$. Com que la conflictivitat global inicial del graf és $O((\Delta - 1)n)$, el cost de totes les actualitzacions de $Conf$

i de totes les eleccions de vèrtexs és $O((\Delta - 1)n)O(n\Delta) = O(\Delta^2 n^2)$. De nou, els possibles factors multiplicatius R i L no tenen importància perquè estan fixats i els podem considerar constants. $\square$

Teorema 3.4. *El cost total de l'algorisme DVC per un graf d'n vèrtexs i grau màxim* Δ *és* $O(\Delta^2 n^2)$.

Demostració. Sumant tots els costos que hem calculat en els lemes 3.1, 3.2 i 3.3, obtenim:

$$O(\Delta^2 n) + O((\Delta - 1)n^2) + O(\Delta^2 n^2) = O(\Delta^2 n^2).$$

$\square$

En el cas dels grafs cúbics es compleix $\Delta = 3$ i obtenim simplement $O(n^2)$. Es tracta d'una estimació pessimista, i el rendiment podria ser millor a la pràctica (vegeu la secció següent).[7]

3.7 Algorisme heurístic de desplaçament de vèrtexs conflictius III: avaluació del rendiment

Per avaluar el rendiment de l'algorisme heurístic *DVC* hem mesurat el temps necessari per Tait-acolorir grafs cúbics aleatoris de diferents ordres. Més concretament, per cada graf cúbic generat aleatòriament hem mesurat el temps necessari per trobar un Tait-acoloriment, el nombre d'iteracions (és a dir, el nombre de vegades que calia fer un aresta-acoloriment inicial), i el temps mitjà per iteració (el temps per trobar un Tait-acoloriment dividit pel nombre d'iteracions).

Per cada nombre de vèrtexs, hem obtingut el valor mínim, mitjà i màxim de cadascuna d'aquestes magnituds sobre un conjunt de trenta instàncies aleatòries, i hem representat gràficament els resultats a títol purament indicatiu. A més, per facilitar que el comportament de l'algorisme *DVC* es pugui reproduir i analitzar de manera independent amb el grau de rigor que es desitgi (per exemple, mitjançant una anàlisi de regressió), a l'Apèndix B proporcionem una descripció de l'algorisme en pseudocodi i a l'Apèndix C una implementació en llenguatge Python essencialment equivalent a la que s'ha utilitzat per obtenir les dades representades aquí. A causa del component aleatori de les dades, no tindria gaire sentit presentar una llista de números acompanyats d'un coeficient de correlació, ja que seria impossible demostrar-ne l'autenticitat. En canvi, aportant la descripció de l'algorisme, i una implementació detallada i explícita, es donen els mitjans per contrastar-ne el rendiment de manera independent i objectiva.

La representació gràfica indica que el temps mitjà creix linealment respecte al nombre n de vèrtexs (vegeu la Fig. 3), mentre que el nombre mitjà d'iteracions no sembla que depengui del nombre de vèrtexs (Fig. 4). Un creixement lineal del temps mitjà respecte a n és compatible amb el comportament esperat del temps mitjà, que és $O(n^2)$. En coherència amb el comportament lineal del temps mitjà i el comportament constant del nombre mitjà d'iteracions, el temps mitjà per iteració (no representat) es comporta linealment. En tots els casos, $R = L = 50$.

[7] El nostre enfocament, centrat en la mesura de la conflictivitat dels vèrtexs, és similar a l'enfocament, més centrat en les arestes, adoptat per Lee, Wan i Guan [26], però l'algorisme *DVC* és més simple i més fàcil de dur a la pràctica (vegeu els apèndixs B i C).

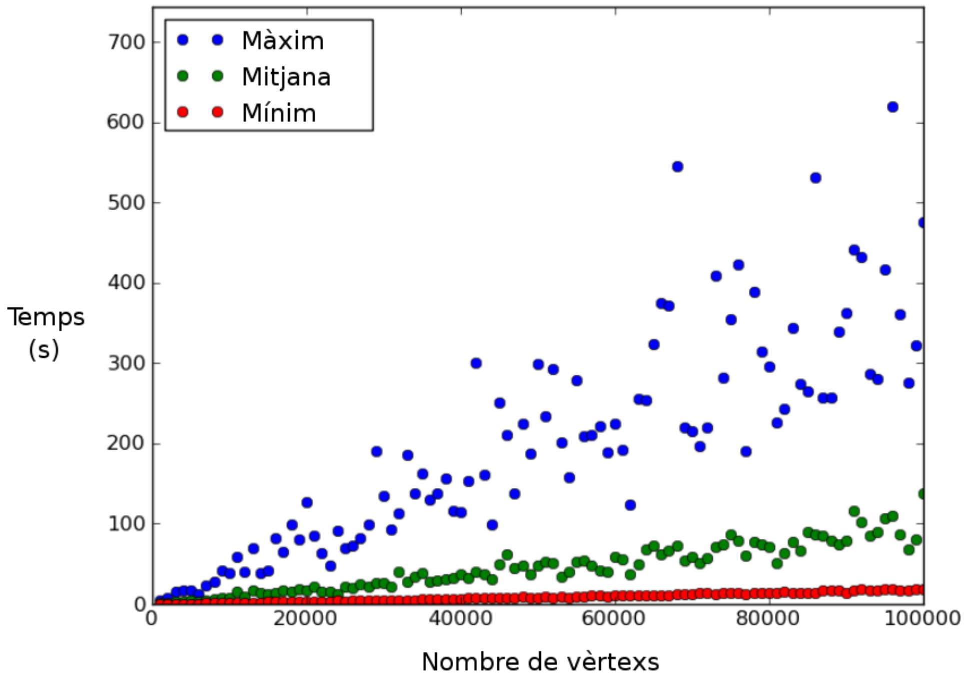


Figura 3: Gràfica del temps de Tait-acoloriment mitjà respecte al nombre de vèrtexs

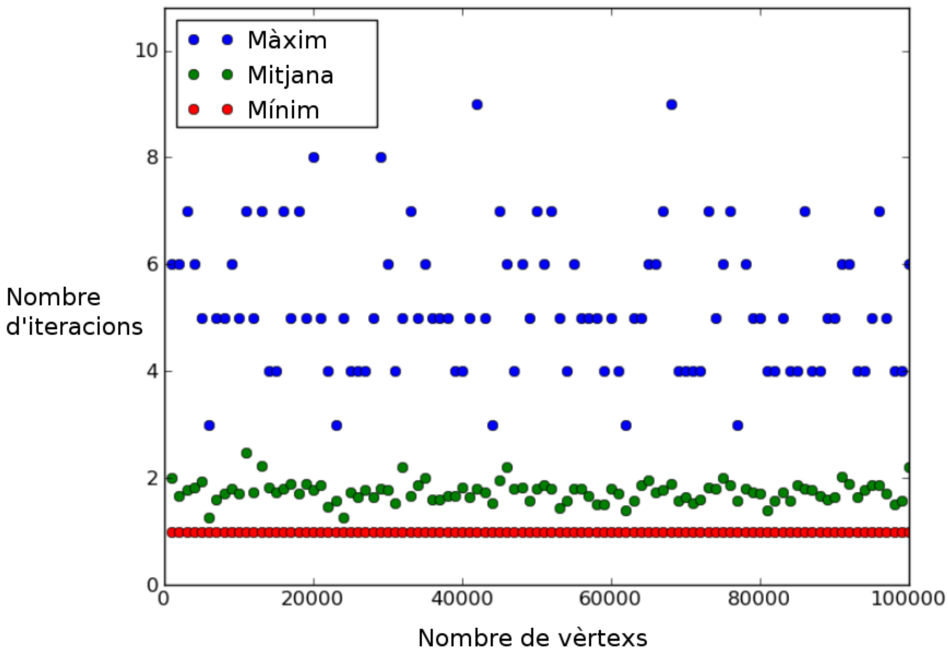


Figura 4: Gràfica del nombre mitjà d'iteracions respecte al nombre de vèrtexs

Per avaluar el rendiment de l'algorisme DVC en el cas dels grafs Δ-regulars, hem seguit un procediment similar, però variant el nombre n de vèrtexs i el valor de Δ. El creixement del temps mitjà necessari per trobar un Δ-aresta-acoloriment és compatible amb el comportament esperat, $O(\Delta^2 n^2)$. També en aquest cas, $R = L = 50$. A la Fig. 5 es poden veure quatre gràfiques, corresponents a quatre valors diferents de la variable Δ (3, 7, 11 i 15).

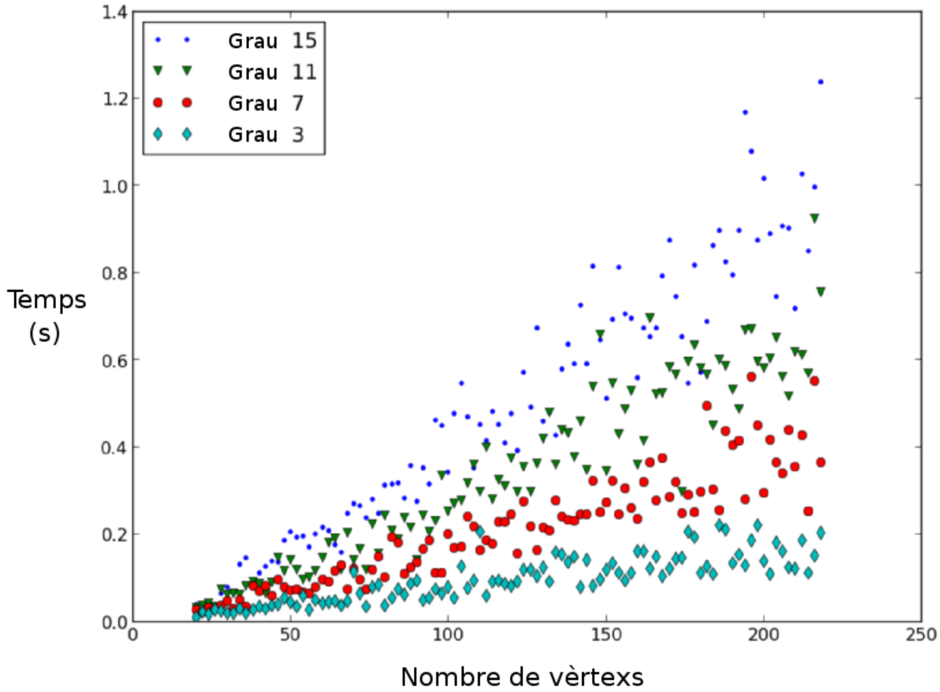


Figura 5: Gràfiques dels temps de Δ-aresta-acoloriment mitjans respecte al nombre de vèrtexs

Per posar a prova l'algorisme DVC amb grafs que no fossin aleatoris, hem fet servir (entre altres) els "odd graphs" O_k i, de passada, hem comprovat alguns casos particulars d'una conjectura de Biggs sobre aquests grafs que, pel que sabíem, no havien estat comprovats anteriorment.

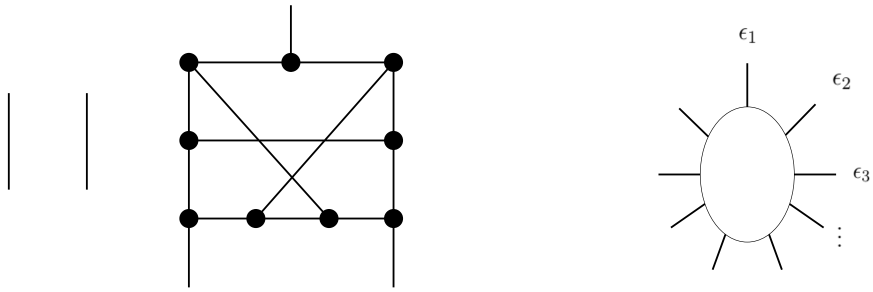
Els grafs O_k es defineixen de la següent manera: els vèrtexs corresponen als subconjunts de $k-1$ elements d'un conjunt de $2k-1$ elements, i dos vèrtexs són adjacents si els seus corresponents subconjunts són disjunts. La conjectura (Biggs [2], Fiorini i Wilson [13]) és que els grafs O_k sempre són k-acoloribles excepte en el cas $k = 3$ (el graf de Petersen) i els casos en què k és una potència de dos (aleshores el graf té un nombre imparell de vèrtexs i, de manera trivial, no pot ser k-aresta-acolorible). En el seu llibre, Fiorini i Wilson comenten resultats per $k \leq 8$. Amb l'algorisme DVC hem pogut comprovar que la conjectura es compleix per $k \leq 13$.

D'aquesta manera, hem pogut comprovar que l'algorisme funciona per grafs molt grans, ja que el graf O_{13} té més de cinc milions de vèrtexs (5.200.300) i més de trenta milions d'arestes (33.801.950). En un cas com aquest, i utilitzant el codi descrit a l'Apèndix C, poden ser necessàries diverses hores de temps de càlcul en un ordinador de potència moderada.

4 Multipols i construcció d'snarks

4.1 Definició intuïtiva i definició formal del concepte de multipol

Intuïtivament, un *multipol* és el resultat de tallar pel mig algunes arestes d'un graf, de tal manera que s'obtenen *semiarestes* amb un extrem lliure. Un multipol també pot contenir una o més arestes isolades o *arestes lliures*, les quals tenen tots dos extrems lliures (Fig. 6 (a)). De fet, el multipol més simple és el que està constituït per una sola aresta lliure. Un multipol pot no ser connex: aquest és el cas, per exemple, d'un multipol format per diverses arestes lliures.



(a) (b)

Figura 6: Un 7-pol amb dues arestes lliures (a) i un multipol genèric (b)

Formalment, podem definir un *multipol* M com una quaterna ordenada $(V, E, \mathcal{E}, L)$ de conjunts finits no ordenats, on V és un conjunt de vèrtexs (representables per nombres naturals consecutius), E és un conjunt de parells no ordenats d'elements de V, $\mathcal{E}$ és un conjunt d'elements de V (els extrems no lliures de les semiarestes) i L és un conjunt $\{l_1, ..., l_{|L|}\}$ d'arestes lliures, on $|L|$ és el nombre d'elements de L (representarem un multipol genèric com a la Fig. 6 (b)).

Si volem indicar que V, E, $\mathcal{E}$ i L són, respectivament, el conjunt de vèrtexs, d'arestes, de semiarestes i d'arestes lliures d'un cert multipol M, utilitzarem, com és habitual en els textos de teoria de grafs, la notació $V(M)$, $E(M)$, $\mathcal{E}(M)$ i $L(M)$.

Introduïm també una notació per representar arestes, semiarestes i arestes lliures: si l'aresta e és el parell no ordenat $\{u, v\}$, la podem representar simplement com uv o, indistintament, vu; una semiaresta ϵ incident al vèrtex v la podem representar com $v\_$ o $\_v$, i una aresta lliure l la podem representar com $\_\_$. La *distància* entre dues semiarestes ϵ i ϵ' ve donada per la distància en el multipol entre els respectius vèrtexs incidents (la longitud del camí més curt que els uneix), i es representa per mitjà de $\partial(\epsilon, \epsilon')$.

Dues semiarestes $\epsilon_1 = u\_$ i $\epsilon_2 = \_v$ es poden unir per formar una aresta uv: en aquesta operació, els extrems lliures respectius de les dues semiarestes s'uneixen, de manera que els vèrtexs u i v passen a ser adjacents. És l'operació inversa de tallar una aresta per obtenir dues semiarestes.

Una aresta lliure $l = \_\_$ es pot unir a una semiaresta $\epsilon = v\_$, de manera que el resultat és una semiaresta $\epsilon' = v\_$ igual que l'original. Així, l'aresta lliure és l'element neutre de l'operació d'unir extrems lliures. Si unim un extrem de l'aresta lliure l_1 amb un extrem de l'aresta lliure l_2, el resultat és una altra aresta lliure exactament igual que les anteriors (l'element neutre operat amb si mateix és l'element neutre).

Si unim els dos extrems lliures d'una mateixa aresta lliure, el resultat és una aresta circular que podem ignorar (una aresta circular no té cap tipus d'adjacència, per tant ja no intervindrà en l'estudi de grafs i multipols).

El concepte de multipol és una generalització del concepte de graf, ja que un graf és un multipol sense semiarestes ni arestes lliures, és a dir, un multipol de la forma $(V, E, \emptyset, \emptyset)$, per al qual $\mathcal{E}(M) = \emptyset$ i $L(M) = \emptyset$. Si eliminem les semiarestes i arestes lliures d'un multipol M, obtenim el seu *graf subjacent*. Si el graf subjacent a M és un cicle, diem que M és un multipol *cíclic*. Si el graf subjacent a M és connex, diem que el multipol M és connex.

El concepte de grau d'un vèrtex es pot generalitzar al cas dels multipols: definim el *grau* d'un vèrtex v d'un multipol com el nombre d'arestes o semiarestes incidents a v. En el cas d'un graf, com que no hi ha semiarestes, recuperem com a cas particular la definició habitual de grau. També podem generalitzar el concepte de graf regular: direm que un multipol és *regular* si tots els seus vèrtexs tenen el mateix grau. Aquí treballarem sobretot amb grafs i multipols *cúbics*, és a dir, de grau 3.

Diversos multipols es poden combinar, fent unions d'extrems lliures, per obtenir un graf. És l'operació inversa de tallar les arestes d'un graf per obtenir-ne multipols. No sempre que es tallen algunes arestes d'un graf aquest queda separat en components disjuntes. Pot ser que el resultat sigui un únic multipol. A la inversa, en alguns casos podrem obtenir un graf a partir d'un únic multipol, fent les unions adequades entre extrems lliures (en aquest cas necessitarem que el nombre d'extrems lliures en el multipol de partida sigui parell).

Abans d'utilitzar els multipols per analitzar l'estructura dels snarks, hem de fer intervenir els aresta-acoloriments en les nostres consideracions.

4.2 Aresta-acoloriment de multipols i el Lema de Paritat

El concepte d'aresta-acoloriment es pot generalitzar al cas dels multipols, ja que també podem assignar colors a les semiarestes i les arestes lliures, i demanar que no hi hagi colors repetits entre les arestes o semiarestes incidents a un mateix vèrtex.

Definim un *aresta-acoloriment* d'un multipol M com una aplicació $\phi : E(M) \cup \mathcal{E}(M) \cup L(M) \to N$ del conjunt d'arestes, semiarestes i arestes lliures d'M al conjunt N de nombres naturals, amb les següents propietats:

1) Si e i f són arestes incidents a un mateix vèrtex, aleshores $\phi(e) \neq \phi(f)$.

2) Si ϵ i η són semiarestes incidents a un mateix vèrtex, aleshores $\phi(\epsilon) \neq \phi(\eta)$.

3) Si e és una aresta i ϵ una semiaresta i són incidents al mateix vèrtex, aleshores $\phi(e) \neq \phi(\epsilon)$.

Definim l'*índex cromàtic* d'un multipol M com el mínim nombre possible d'elements del conjunt imatge $\phi(E \cup \mathcal{E} \cup L)$, és a dir, el mínim nombre de colors necessari per aresta-acolorir-lo, i el representem per mitjà de $\chi'(M)$.

Si tenim un multipol cúbic amb índex cromàtic 3, direm que és *Tait-acolorible*, és a dir, farem servir la mateixa expressió que en el cas dels grafs cúbics. Vegeu un exemple a la Fig. 7.

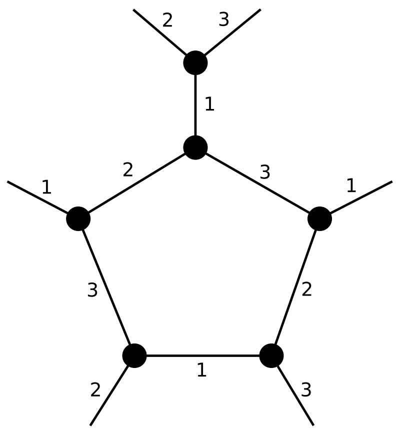


Figura 7: Un Tait-acoloriment d'un 6-pol

És evident que podem completar els extrems lliures d'un multipol amb "vèrtexs capçal" , de manera que obtinguem un graf on totes les semiarestes de la forma u_- hagin quedat substituïdes per arestes de la forma uu' on u' és de grau 1, i totes les arestes lliures hagin quedat substituïdes per arestes incidents a dos vèrtexs de grau 1. Aquest graf tindrà el mateix grau màxim que el multipol, i se li pot aplicar el Teorema de Vizing segons el qual l'índex cromàtic d'un graf de grau màxim Δ és Δ o $\Delta + 1$. Òbviament, el mateix es podrà afirmar de l'índex cromàtic del multipol original. Veiem, doncs, que el Teorema de Vizing es generalitza immediatament als multipols. En particular, l'índex cromàtic d'un multipol cúbic serà 3 o 4. Qualsevol graf cúbic on intervingui un multipol d'índex cromàtic 4 serà un snark.

Si un multipol cúbic admet un Tait-acoloriment, aleshores els colors assignats als extrems lliures no poden ser completament arbitraris. Han de complir necessàriament una restricció coneguda com el Lema de Paritat .

A partir d'ara, i si no s'indica el contrari, suposarem que tots els multipols són cúbics i que es poden Tait-acolorir.

Lema 4.1. ***Lema de Paritat*** *Donat un multipol M amb n vèrtexs, suposem que el nombre d'extrems lliures de color i és m_i, amb $i = 1, 2, 3$, i que el nombre total d'extrems lliures és $m = m_1 + m_2 + m_3$. Aleshores, s'ha de complir $m_1 \equiv m_2 \equiv m_3 \equiv m \equiv n \pmod 2$. És a dir, el nombre d'extrems lliures de cada color té la mateixa paritat que el nombre total d'extrems lliures i que el nombre de vèrtexs del multipol.*

Demostració. Comencem suposant que no hi ha arestes lliures, només arestes i semiarestes. Cada aresta normal està formada per dues semiarestes unides entre elles. Per tant, és evident que el nombre de semiarestes d'un mateix color que formen part d'alguna aresta és parell, i el mateix es pot dir del nombre total de semiarestes que formen part d'alguna aresta. De cada vèrtex surten 3 semiarestes, unides o no a altres semiarestes. Per tal que es compleixi la condició d'aresta-acoloriment, les tres semiarestes incidents a un mateix vèrtex han de ser colors diferents, és a dir, per cada vèrtex hi ha una semiaresta de cada color. D'aquestes, un nombre parell formen part d'arestes completes. Per tant, per cada $i = 1, 2, 3$, m_i és igual al nombre de vèrtexs del multipol menys un nombre parell, que és el doble del nombre d'arestes de color i. Per tant, cadascun dels m_i té la mateixa paritat que n. Només falta demostrar que, a més, $m_1 \equiv m_2 \equiv m_3 \equiv m \ (mod\ 2)$. Però això és fàcil de veure, perquè si sumem tres nombres de la mateixa paritat, dos d'ells sumaran un nombre parell, i la suma de tots tres tindrà la mateixa paritat que el nombre restant, la qual en realitat és la mateixa paritat comuna a tots tres sumands. Finalment, si considerem arestes lliures, és evident que no afecten les consideracions de paritat, ja que cadascuna té dos extrems lliures del mateix color. Per tant, la paritat dels valors m_i no queda afectada. □

El Lema de Paritat té l'avantatge que és molt general. S'aplica a qualsevol multipol, suposant només que estigui Tait-acolorit. Al mateix temps, és una restricció bastant forta, i d'aquí ve la seva utilitat. És per això que el Lema de Paritat s'utilitza molt en la literatura tècnica sobre grafs cúbics i snarks. Va ser introduït per D. Blanuša i W. Tutte.

Anomenarem $M(m)$ el conjunt de tots els multipols d'm extrems lliures, i $M(m, n)$ el conjunt de tots els multipols d'm extrems lliures i n vèrtexs. Òbviament: $M(m) = \cup_{n \geq 0} M(m, n)$.

Lema 4.2. *a) $M(m, n)$ és finit. b) Per tota $m \geq 2$, hi ha una infinitat de valors d'n pels quals $M(m, n)$ és no buit. c) Si $n! = n'$, $M(m, n) \cap M(m, n') = \emptyset$. d) $M(m)$ és infinit.*

Demostració. a) Amb cada multipol de $M(m, n)$ podem fer l'operació que consisteix en unir un "vèrtex capçal" a cadascun dels m extrems lliures, amb la qual cosa s'obté un element de $G(n + m)$, el conjunt de grafs simples amb $n + m$ vèrtexs. Aquest conjunt és finit, per tant el seu subconjunt $M(m, n)$ també ho és. b) Per construcció. c) Obvi. d) Hem vist que $M(m)$ és una unió d'infinits conjunts, dels quals una infinitat són no buits (b) i no coincidents (c). □

Més endavant farem servir aquest resultat per estudiar els multipols irreductibles.

4.3 Conjunts d'estats, estats admissibles i conjunts factibles

Suposarem que dos acoloriments són equivalents si estan relacionats per una permutació dels colors. És a dir, cada color per si mateix és irrellevant: els colors són simples etiquetes que podem intercanviar. Formalment, els Tait-acoloriments ϕ i ϕ' seran equivalents si es pot passar de l'un a l'altre per mitjà d'una permutació p, és a dir, si $\phi' = p \circ \phi$, on p pertany al grup de permutacions, o grup simètric, de 3 elements: $Sim(3)$.

Donat un multipol Tait-acolorit, anomenarem *estat* la restricció del Tait-acoloriment als extrems lliures del multipol. Suposarem que els extrems lliures són distingibles entre ells, segons algun ordre que pot venir donat per identificadors arbitraris o, en alguns casos, pot quedar induït per la immersió del multipol en alguna superfície, per exemple l'esfera o el pla.

Així, doncs, si designem per $(\epsilon_1, \epsilon_2, ..., \epsilon_m)$ els m extrems lliures del multipol M, l'estat d'aquest multipol donat pel Tait-acoloriment ϕ serà $(\phi(\epsilon_1), \phi(\epsilon_2), ..., \phi(\epsilon_m))$ i direm que ϕ *indueix* aquest estat. Dos estats $(\phi(\epsilon_1), \phi(\epsilon_2), ..., \phi(\epsilon_m))$ i $(\phi'(\epsilon_1), \phi'(\epsilon_2), ..., \phi'(\epsilon_m))$ seran *equivalents* si les restriccions de ϕ i ϕ' als extrems lliures són equivalents. Això inclou l'equivalència respecte a les permutacions de colors. En canvi, dos estats relacionats per una permutació dels extrems lliures els podrem considerar equivalents o no considerar-los-hi, depenent de si tenim o no tenim llibertat per permutar els extrems lliures (habitualment suposarem que estan fixats).

Representarem els estats per mitjà de lletres llatines minúscules, per exemple s_1, s_2, t_1, t_2, etc.

Direm que un estat és *admissible* si compleix la restricció imposada pel Lema de Paritat, i que és *realitzable* si hi ha algun multipol que té aquell estat. En aquest cas diem que el multipol *realitza* aquell estat. Tot estat realitzable és admissible, perquè qualsevol Tait-acoloriment ha de complir el Lema de Paritat. Veurem que hi ha multipols, anomenats *complets*, que realitzen tots els estats admesos pel Lema de Paritat. Per tant, tot estat admissible és realitzable.

La situació canvia quan, en lloc de considerar cada estat separadament, considerem el conjunt d'estats d'un multipol, donat per tots els seus Tait-acoloriments possibles. Pot ser que Tait-acoloriments diferents indueixin el mateix estat, si assignen exactament els mateixos colors als extrems lliures encara que assignin colors diferents a les arestes completes. També pot ser que Tait-acoloriments diferents indueixin estats equivalents.

Direm que un conjunt d'estats és *admissible* si tots els seus estats són admissibles, i que és *factible* si hi ha algun multipol que té aquell conjunt d'estats. És obvi que tot conjunt d'estats factible és admissible (pel mateix motiu que en el cas dels estats individuals) però no tot conjunt d'estats admissible és factible. Tal com avançàvem a la introducció, qualsevol 5-pol té com a mínim tres estats (n'il·lustrem un cas concret a la Fig. 1 i després en veurem la demostració), de manera que el conjunt d'estats $\{abcaa, abcbb\}$ no és factible: no hi pot haver cap 5-pol que el realitzi, encara que cada estat individual compleixi el Lema de Paritat.

Representarem els conjunts d'estats per mitjà de lletres llatines majúscules, utilitzant subíndexs si és necessari: per exemple S o S_i $(i = 1, 2, 3...)$. Per indicar el conjunt d'estats d'un multipol M, escriurem $\mathrm{Col}(M)$. Si $S = \mathrm{Col}(M)$, direm que el multipol M realitza el conjunt d'estats S.

El *problema de la factibilitat* [23] consisteix en determinar si hi ha algun multipol M que tingui un conjunt d'estats donat, o fins i tot en construir M explícitament, suposant que existeixi. Aquest problema no està resolt en general, i és possible que sigui molt difícil. Després veurem que un algorisme que resolgués el problema de la factibilitat podria ajudar a resoldre qüestions importants sobre l'estructura dels snarks.

4.4 Multipols complets

Un aspecte de la factibilitat que sí que podem resoldre és la construcció de multipols que tinguin el conjunt d'estats més gran possible, és a dir, tots els compatibles amb el Lema de Paritat. Aquests multipols s'anomenen "complets" o també "color-complets". Es pot demostrar [12] que existeixen multipols complets per qualsevol nombre d'extrems lliures més gran o igual que 2, i es pot afitar superiorment i inferiorment el nombre de vèrtexs d'un multipol complet d'ordre mínim per mitjà de funcions lineals en el nombre d'extrems lliures. També es pot calcular exactament el nombre d'estats d'un multipol complet amb m extrems lliures.

A continuació exposarem tots aquests resultats, començant pel valor exacte del nombre d'estats d'un m-pol color-complet.

Proposició 4.3. *Sigui M un m-pol color-complet. Aleshores, el seu nombre d'estats és*

$$\sigma(m) = \frac{1}{8}[3^{m-1} + 2 + (-1)^m 3].$$

Demostració. Demostrem que $\sigma(m)$ satisfà la següent relació de recurrència:

$$\sigma(m) = 2\sigma(m-1) + 3\sigma(m-2) - 1, \tag{4.1}$$

amb valors inicials $\sigma(2) = \sigma(3) = 1$. Observem que, donades les semiarestes ϵ_1 i ϵ_2, el conjunt d'estats es pot subdividir en dos subconjunts: els que compleixen $\phi(\epsilon_1) = \phi(\epsilon_2)$ i els que compleixen $\phi(\epsilon_1) \neq \phi(\epsilon_2)$ per algun Tait-acoloriment ϕ. D'ara en endavant, les lletres a, b, c representen els colors 1, 2, 3 en qualsevol ordre, i '$*$' indica qualsevol color. Els següents fets dónen la recurrència:

(i) Tot estat realitzable $(a, *, \overset{(m-2)}{\ldots}, *)$ d'un $(m-1)$-pol dóna lloc a dos estats realitzables, $(b, c, *, \overset{(m-2)}{\ldots}, *)$ i $(c, b, *, \overset{(m-2)}{\ldots}, *)$, d'un m-pol.

(ii) Tot estat $(a, *, \overset{(m-3)}{\ldots}, *)$ d'un $(m-2)$-pol dóna lloc a tres estats realizables, $(a, a, a, *, \overset{(m-3)}{\ldots}, *)$, $(b, b, a, *, \overset{(m-3)}{\ldots}, *)$ i $(c, c, a, *, \overset{(m-3)}{\ldots}, *)$, d'un m-pol.

(iii) Si m és imparell, en (i) l'estat realitzable $(a, \overset{(m-1)}{\ldots}, a)$ dóna dos estats equivalents. De manera similar, si m és parell, en (ii) l'estat realitzable $(a, \overset{(m-2)}{\ldots}, a)$ dóna dos estats equivalents (en tots dos casos, llevat de permutacions dels colors b i c).

Aleshores, una solució particular de (4.1) és $\sigma(m) = 1/4$, mentre que una solució general de la corresponent equació homogènia resulta que és $\sigma(m) = \alpha 3^m + \beta(-1)^m$ on $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Sumant i imposant les condicions inicials, obtenim el resultat que volíem demostrar. $\square$

Veiem que un multipol amb un sol extrem lliure no té cap estat possible, i per tant és impossible de Tait-acolorir. Sense utilitzar la fórmula, és fàcil arribar a aquesta conclusió perquè amb un sol extrem lliure és impossible fer complir el Lema de Paritat. Com que un graf cúbic amb un pont és la combinació de dos multipols amb un sol extrem lliure cadascun, ara és fàcil veure que un graf cúbic amb un pont ha de tenir índex cromàtic 4 i constatar que, de fet, aquest resultat és trivial.

Un multipol amb dos extrems lliures només té un estat possible. Això també es pot veure a partir del Lema de Paritat, i l'únic estat possible és aquell en el qual tots dos extrems lliures tenen el mateix color. Pel que fa al seu conjunt d'estats, un 2-pol es comporta com una aresta lliure. Dit d'una altra manera, una aresta lliure és un 2-pol complet.

Un multipol amb tres extrems lliures només té un estat possible, i el Lema de Paritat dicta que cada extrem lliure ha de tenir un color diferent. Pel que fa al seu conjunt d'estats, un 3-pol es comporta com un vèrtex amb 3 extrems lliures. En altres paraules, un vèrtex amb 3 extrems lliures és un 3-pol complet.

Un 4-pol pot tenir fins a 4 estats. En cap d'ells figuraran tres colors a la vegada. Això es deu al Lema de Paritat i a la impossibilitat de fer una partició de 4 en tres enters parells sense que cap sigui 0. En efecte, suposant que els termes d'una partició sempre estan ordenats de manera no creixent, les úniques particions de 4 admissibles són 4+0+0 i 2+2+0. Aleshores, un estat d'un 4-pol pot ser monocolor o bicolor, però mai tricolor.

Sense pèrdua de generalitat, podem dir que els 4 estats d'un 4-pol color-complet són: $\{1111, 1122, 1212, 1221\}$.

El 4-pol color-complet més petit té 8 vèrtexs (Fig. 8).

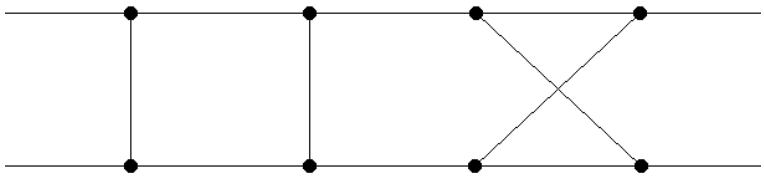


Figura 8: 4-pol color-complet d'ordre mínim

Un 5-pol pot tenir com a màxim 10 estats, i un 6-pol com a màxim 31. A la Fig. 9 es poden veure exemples d'un 5-pol color-complet i un 6-pol color-complet.

Utilitzant els multipols color-complets de 5 i 6 extrems lliures, es poden construir de manera recursiva multipols color-complets per qualsevol nombre m d'extrems lliures. A partir d'aquestes construccions s'obté una fita superior per al mínim nombre de vèrtexs d'un m-pol color-complet. La fita és lineal en m. A partir de consideracions elementals, també es pot obtenir una fita inferior lineal en m.

Per veure-ho, comencem demostrant el següent enunciat.

Proposició 4.4. *Siguin M_1 i M_2 dos multipols color-complets, amb $m^{(1)}+r$ i $m^{(2)}+r$ semiarestes respectivament, on $m^{(1)}, m^{(2)} \geq 2$, $r \geq 2$. Per $k = 1, \ldots, r$, escollim r semiarestes (u_k) de M_1 i r semiarestes (v_k) de M_2, i les unim per obtenir les r arestes (u_k, v_k). Aleshores, el multipol M obtingut, que té $m = m^{(1)} + m^{(2)}$ semiarestes, també és color-complet.*

Demostració. Sigui S un estat d'M, i per $j = 1, 2$ i $i = 1, 2, 3$, siguin m_i, r_i i $m_i^{(j)}$, respectivament, els nombres de semiarestes d'M, el nombre d'arestes (u_k, v_k) d'M, i el nombre de semiarestes de M_j, que tenen color i. Aleshores, $m^{(j)} = m_1^{(j)} + m_2^{(j)} + m_3^{(j)}$ i $r = r_1 + r_2 + r_3$ i, pel Lema de Paritat, s'ha de complir:

$$m_i^{(1)} + m_i^{(2)} \equiv m^{(1)} + m^{(2)} \pmod 2, \tag{4.2}$$

$$m_i^{(1)} + r_i \equiv m^{(1)} + r \pmod 2, \tag{4.3}$$

$$m_i^{(2)} + r_i \equiv m^{(2)} + r \pmod 2. \tag{4.4}$$

Ara afirmem que existeixen estats S_1 de M_1 i S_2 de M_2 que indueixen l'estat S d'M. En altres paraules, donats $m_i^{(1)}$ i $m_i^{(2)}$ que satisfan (4.2), volem trobar alguns valors de r_i, $i = 1, 2, 3$, que

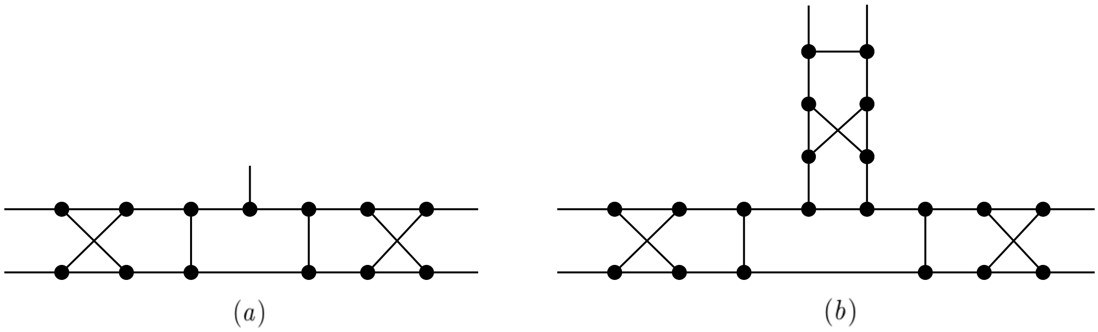


Figura 9: 5-pol (a) i 6-pol (b) color-complets

satisfacin (4.3) i (4.4). Això ens dóna

$$r_i \equiv m^{(1)} + r - m_i^{(1)} \pmod 2,$$
$$r_i \equiv m^{(2)} + r - m_i^{(2)} \pmod 2,$$

que té solució si i només si els dos termes de la dreta tenen la mateixa paritat. És a dir,

$$m^{(1)} - m_i^{(1)} \equiv m^{(2)} - m_i^{(2)} \pmod 2.$$

Però aquesta és precisament la condició (4.2). Per veure perquè és necessària la condició sobre r, en primer lloc observem que el cas $r = 0$ queda descartat per la observació que un multipol color-complet ha de ser connex: altrament, el Lema de Paritat s'hauria de complir per cada component connexa, prohibint estats que serien admissibles com a estats del multipol sencer. Per tant, si r és parell, aleshores $r \geq 2$. Considerem ara el cas $r = 1$. Estem suposant que $m^{(1)} \geq 2$. Si $m^{(1)} + r$ és imparell, l'estat amb $m_1^{(1)} \equiv m_2^{(1)} \equiv m_3^{(1)} \equiv \alpha$, on $\alpha \in \{0, 1\}$, imposa que $r_1 \equiv r_2 \equiv r_3 \equiv 1 - \alpha$. Per tant, si $\alpha = 0$ aleshores $r_1, r_2, r_3 \geq 1$, i si $\alpha = 1$ aleshores $r_i \geq 2$ per algun $i \in \{1, 2, 3\}$. El cas amb $m^{(1)} + r$ parell és similar. □

Com a conseqüència, obtenim el següent resultat sobre l'ordre mínim $n(m)$ d'un m-pol color-complet.

Teorema 4.5. *Per un valor donat de $m \geq 5$, el mínim nombre de vèrtexs d'un m-pol color-complet satisfà les següents fites:*

(*a*) *Si m és imparell, aleshores $m + 2 \leq n(m) \leq 10m - 37$.*

(*b*) *Si m és parell, aleshores $m + 2 \leq n(m) \leq 10m - 40$.*

Demostració. Comencem per les fites inferiors. Per $m \geq 5$, és obvi que un m-pol color-complet no pot tenir dues semiarestes incidents al mateix vèrtex. Això obligaria a descartar la possibilitat d'un color comú per a totes dues semiarestes, una possibilitat admesa pel Lema de Paritat. Hem vist que un multipol color-complet ha de ser connex. A més, si un multipol connex que no té cap parell de semiarestes a distància 0 té m semiarestes i només m vèrtexs, aleshores ha de ser un cicle amb una semiaresta a cada vèrtex. Però un m-pol d'aquesta mena tampoc no pot ser complet perquè certs estats admesos pel Lema de Paritat no són possibles en un m-pol cíclic amb $m \geq 5$ (vegeu el lema 5.13). També segons consideracions de paritat, $m \equiv n \pmod 2$, de manera que un multipol d'm semiarestes no pot tenir $m + 1$ vèrtexs. En resum, si $m \geq 5$, aleshores un m-pol color-complet ha de tenir com a mínim $m + 2$ vèrtexs.

Ara ens ocupem de les fites superiors. Els multipols color complets es poden construir recursivament tal com hem vist a la proposició 4.4, i específicament amb $r = 2$. Per $m = 5$, Fig. 9(a), i $m = 6$, Fig. 9(b), es coneixen explícitament multipols color-complets de 13 i 20 vèrtexs respectivament. Això ens permet començar la construcció recursiva de multipols color-complets amb valors més alts d'm. Sigui M_m un m-pol color-complet d'ordre mínim, i $|V(M_m)|$ el seu nombre de vèrtexs. Aleshores, per $m \geq 7$,

$$|V(M_m)| = |V(M_{(m-2)+6-4})| \leq |V(M_{m-2})| + |V(M_6)| = |V(M_{m-2})| + 20,$$

i això ens dóna $|V(M_m)| \leq 10m - 37$ per m imparell, i $|V(M_m)| \leq 10m - 40$ per m parell, tal com afirmàvem. $\square$

Encara que segurament aquestes fites es poden millorar, veiem que $|V(M_m)|$ té un comportament lineal. Com a corol·lari de la construcció recursiva, arribem a la conclusió que hi ha m-pols color-complets per a qualsevol $m \geq 2$.

4.5 Mínim nombre d'estats dels 4-pols, 5-pols i 6-pols

Els multipols color-complets són els multipols Tait-acoloribles que tenen el màxim nombre possible d'estats. Què hi ha del mínim nombre possible d'estats? Calcular-lo en general sembla un problema difícil, però hem pogut determinar el mínim nombre d'estats dels 4-pols, 5-pols i 6-pols Tait-acoloribles. Indiquem el mínim nombre d'estats d'un m-pol per mitjà de $\mu(m)$.

Proposició 4.6. *Els 4-pols, 5-pols, i 6-pols Tait-acoloribles tenen respectivament 2, 3 i 5 estats com a mínim.*

Demostració. Suposem que un 4-pol té l'estat S. Com a conseqüència del Lema de Paritat, podem suposar sense pèrdua de generalitat que o bé $S = (a, a, a, a)$ o bé $S = (a, a, b, b)$. Comencem un intercanvi de Kempe de tipus a-b en la primera semiaresta. Si $S = (a, a, a, a)$, el resultat ha de ser o bé (b, b, a, a), o bé (b, a, b, a) o bé (b, a, a, b), cap d'ells equivalent a S. Si $S = (a, a, b, b)$, el resultat ha de ser o bé (b, b, b, b), o bé (b, a, a, b) o bé (b, a, b, a), cap d'ells equivalent a S. Aleshores, un 4-pol Tait-acolorible té com a mínim dos estats. El 4-pol que consisteix en dues arestes lliures realitza aquesta possibilitat. Per tant, $\mu(4) = 2$.

Suposem que un 5-pol té l'estat S. De nou com a conseqüència del Lema de Paritat, podem suposar sense pèrdua de generalitat que $S = (a, a, a, b, c)$. Comencem un intercanvi de Kempe de tipus a-b en la primera semiaresta. El resultat ha de ser o bé (b, b, a, b, c), equivalent a (a, a, b, a, c), o bé (b, a, b, b, c), equivalent a (a, b, a, a, c), o bé (b, a, a, a, c). Alternativament, comencem un intercanvi de Kempe de tipus a-c en la primera semiaresta. El resultat ha de ser o bé (c, c, a, b, c), equivalent a (a, a, b, c, a), o bé (c, a, c, b, c), equivalent a (a, b, a, c, a), o bé (b, a, a, c, a). Aleshores, un 5-pol Tait-acolorible ha de tenir com a mínim tres estats no equivalents. El 5-pol que consisteix en la unió disjunta de $\boldsymbol{v}$ i una aresta lliure $\boldsymbol{e}$ realitza aquesta possibilitat. Per tant, $\mu(5) = 3$.

Suposem que un 6-pol té l'estat S. Podem suposar sense pèrdua de generalitat que o bé $S = (a, a, a, a, a, a)$, o bé $S = (a, a, a, a, b, b)$ o bé $S = (a, a, b, b, c, c)$. Primer demostrem que un 6-pol amb l'estat (a, a, a, a, a, a) té com a mínim 5 estats. Comencem un intercanvi de Kempe de tipus a-b en la primera semiaresta. Podem suposar que l'estat resultant és (b, b, a, a, a, a). Alternativament, comencem un intercanvi de Kempe del mateix tipus en la tercera semiaresta. Ara sabem que la cadena de Kempe no pot acabar en la primera o segona semiaresta. Podem suposar que l'estat resultant és (a, a, b, b, a, a). Una altra possibilitat és començar un intercanvi de Kempe del mateix tipus en la cinquena semiaresta. Ara sabem que no pot acabar en cap de les primeres quatre semiarestes. Així, suposem que l'estat resultant és (a, a, a, a, b, b). En resum, podem obtenir com a mínim tres nous estats a partir de (a, a, a, a, a, a). Ara agafem qualsevol dels tres nous estats i comencem un intercanvi de Kempe arbitrari de tipus a-c. Això ens donarà un nou estat, amb un total de cinc. El 6-pol que consisteix en tres arestes lliures realitza aquesta possibilitat. Per tant, $\mu(6) \leq 5$.

Ara hem de veure que si el 6-pol no té l'estat (a, a, a, a, a, a) aleshores no pot tenir menys de 5 estats. En primer lloc suposem que el 6-pol té com a mínim un estat amb dos colors, diguem $S_1 = (a, a, a, a, b, b)$. Començant un intercanvi de Kempe de tipus a-b en l'última semiaresta obtenim un dels estats (b, a, a, a, b, a), (a, b, a, a, b, a), (a, a, b, a, b, a) o (a, a, a, b, b, a), cap d'ells equivalent a S. Suposem que és $S_2 = (a, a, a, b, b, a)$. Fent servir intercanvis de Kempe arbitraris de tipus a-c podem obtenir dos nous estats no equivalents amb tres colors cadascun, un a partir de S_1 i un altre a partir de S_2. Això dóna un total de quatre estats $\{S_1, S_2, S_3, S_4\}$. Però agafant S_1 i començant un intercanvi de Kempe de tipus a-b en la primera semiaresta obtenim un dels estats (b, b, a, a, b, b), (b, a, b, a, b, b), (b, a, a, b, b, b), (b, a, a, a, a, b) o (b, a, a, a, b, a), els tres primers dels quals són equivalents a (a, a, b, b, a, a), (a, b, a, b, a, a) i (a, b, b, a, a, a). Cap d'ells no té un estat equivalent en $\{S_1, S_2, S_3, S_4\}$. Per tant, existeix un cinquè estat no equivalent S_5.

Ara suposem que el 6-pol només té estats de tres colors, i que un dels estats és $S_1 = (a, a, b, b, c, c)$. Fent servir intercanvis de Kempe i raonant com en els paràgrafs anteriors, podem suposar que el 6-pol té els estats $S_2 = (a, b, a, b, c, c)$, $S_3 = (a, c, b, b, a, c)$ i $S_4 = (a, a, b, c, b, c)$. Tots ells tenen colors consecutius repetits. Però aleshores un intercanvi de Kempe de tipus a-c que comenci en la primera semiaresta de S_4 dóna o bé l'estat (c, a, b, a, b, c) o bé l'estat (c, a, b, c, b, a). Cap d'ells no té colors consecutius repetits, és a dir, cap d'ells no té un estat equivalent en $\{S_1, S_2, S_3, S_4\}$. Per tant, existeix un cinquè estat no equivalent S_5. En resum, $\mu(6) = 5$. $\square$

4.6 Multipols minimals i multipols color-tancats

Diem que un multipol és *minimal* si té el mínim nombre de vèrtexs possible. Si m és parell, un m-pol pot no tenir cap vèrtex, ja que pot estar format per $m/2$ arestes lliures $\boldsymbol{e}$. Si m és imparell, les consideracions de paritat que ja hem vist indiquen que un m-pol ha de tenir com a mínim un vèrtex. Aquest cas és possible, ja que un m-pol pot estar format per $(m-3)/2$ arestes lliures $\boldsymbol{e}$ i un 3-pol minimal $\boldsymbol{v}$. Per tant, qualsevol multipol amb menys de dos vèrtexs és un multipol minimal. Fem servir $\rho(m)$ per indicar el nombre d'estats d'un m-pol minimal. A continuació determinem el valor d'aquesta quantitat en termes d'm.

Teorema 4.7. *(a) Si m és imparell, aleshores $\rho(m) = 3^{\frac{m-3}{2}}$,*

(b) Si m és parell, aleshores $\rho(m) = \frac{1}{2}(3^{\frac{m}{2}-1} + 1)$.

Demostració. (a) El 3-pol minimal $\boldsymbol{v}$ té un acoloriment únic, i cadascuna de les $(m-3)/2$ arestes lliures té tres possibles colors.

(b) Tenim la següent relació de recurrència: $\rho(m+2) = 3\rho(m) - 1$. Per demostrar això, considerem $(m+2)/2$ arestes lliures. Si les primeres $m/2$ tenen el mateix color, per exemple a, aleshores dues de les tres possibles assignacions de color per a la darrera aresta lliure, b i c, donen estats equivalents perquè els colors són intercanviables. Altrament, totes les assignacions de color per a la darrera aresta lliure donen estats no equivalents. Per tant, només dos dels $3\rho(m)$ estats possibles són equivalents entre ells, i n'hem de descartar un. Això dóna la relació de recurrència. El valor inicial és $\rho(2) = 1$, corresponent a l'estat únic d'una aresta lliure. Fent servir inducció sobre m, o la mateixa tècnica que en el cas dels multipols color-complets, obtenim el resultat enunciat. □

A partir de les afirmacions 4.3, 4.6 i 4.7, veiem que els primers valors no trivials de $\mu(m)$, $\rho(m)$ i $\sigma(m)$ són:

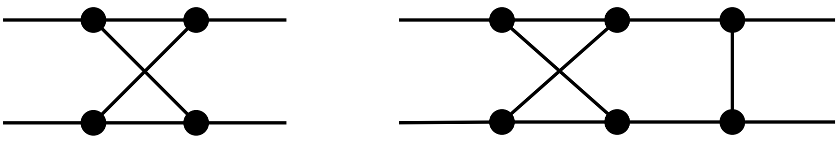
$$\mu(4) = \rho(4) = 2, \qquad \sigma(4) = 4,$$
$$\mu(5) = \rho(5) = 3, \qquad \sigma(5) = 10,$$
$$\mu(6) = \rho(6) = 5, \qquad \sigma(6) = 31.$$

A partir d'aquests resultats, conjecturem que $\mu(m) = \rho(m)$ per qualsevol $m \geq 2$, és a dir, que els nombres d'estats mínims sempre són assolits pels multipols minimals.

Seguint la terminologia de Nedela i Škoviera [27], diem que un m-pol és *color-tancat* si el seu conjunt d'estats té intersecció no buida amb el conjunt d'estats de qualsevol altre m-pol Tait-acolorible. Òbviament, un m-pol com aquest sempre es pot unir amb qualsevol altre m-pol Tait-acolorible de manera que les m arestes resultants de la unió tinguin una assignació de colors compatible. Per tant, segons el concepte d'irreductibilitat definit també a [27] i esmentat a la secció 2.4.2, un multipol color-tancat no pot formar part d'un snark irreductible.

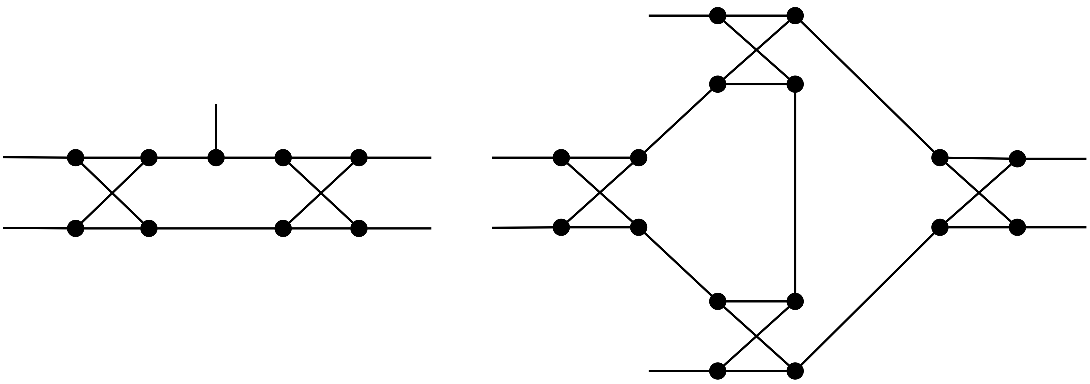
Pel principi del colomar, qualsevol m-pol amb més de $\sigma(m) - \mu(m)$ estats ha de ser color-tancat. Si té exactament $\sigma(m)$ estats es tracta d'un multipol color-complet i aleshores és trivialment color-tancat. Si té més de $\sigma(m) - \mu(m)$ estats però no arriba a ser color-complet, aleshores diem que és *color-tancat* de manera *no trivial*.

La construcció de multipols color-complets i color-tancats no trivials es pot dur a terme fàcilment per un procés d'agregació. En particular, afegir el 4-pol en forma d'X de la Fig. 10(a) a un m-pol arbitrari unint dos parells de semiarestes és molt útil per incrementar el seu nombre d'estats possibles (observeu l'ús del 4-pol en forma d'X a la Fig. 9). D'aquesta manera, hem obtingut els multipols color-tancats no trivials de les Figs. 10(b) i 11(a), (b), amb 4, 5 i 6 semiarestes respectivament, i 3, 8 i 27 estats respectivament. El 4-pol en forma d'X també és color-tancat no trivial, ja que té 3 estats.



(a) (b)

Figura 10: El 4-pol en forma d'X i un altre 4-pol color-tancat



(a) (b)

Figura 11: 5-pol i 6-pol color-tancats

De fet, els multipols color-tancats no cal que tinguin un nombre d'estats molt elevat, a prop del màxim, perquè hi ha molts conjunts d'estats que no són *realitzables* (és a dir, no són realitzats per cap multipol). A [23] es descriuen 6-pols color-tancats no trivials amb només 15 o 16 estats.

4.7 Construcció d'snarks I: conjunts d'estats incompatibles

El concepte de conjunt d'estats d'un multipol suggereix una manera de construir snarks: unir dos multipols M_1 i M_2 que siguin Tait-acoloribles per separat però que tinguin conjunts d'estats disjunts, és a dir, tals que $\mathrm{Col}(M_1) \cup \mathrm{Col}(M_2) = \emptyset$. Això vol dir que en unir els seus extrems lliures no hi haurà cap Tait-acoloriment possible del graf resultant, ja que això implicaria un estat comú als dos conjunts d'estats $\mathrm{Col}(M_1)$ i $\mathrm{Col}(M_2)$. L'existència d'estats comuns pot dependre de si admetem permutacions dels extrems lliures. Prohibir-les disminueix les possibilitats que existeixi un estat comú. Per exemple, si M_1 i M_2 són dos 5-cicles amb 5 semiarestes cadascun i tenim llibertat per unir-los de la manera que vulguem, aleshores òbviament els seus conjunts d'estats poden ser compatibles: hi haurà almenys un estat comú a $\mathrm{Col}(M_1)$ i $\mathrm{Col}(M_2)$. En canvi, si imposem una determinada manera d'unir les semiarestes aleshores pot ser que $\mathrm{Col}(M_1) \cup \mathrm{Col}(M_2) = \emptyset$: hem obtingut un snark. Aquest és justament el cas del graf de Petersen (vegeu la Fig. 2).

El graf de Petersen no és només el més petit dels snarks. També és l'exemple més senzill dels anomenats *snarks de permutació*, que s'obtenen unint els vèrtexs d'un cicle imparell, etiquetats seguint el cicle, amb els d'un altre cicle idèntic, etiquetat de la mateixa manera, segons una correspondència adequada entre els vèrtexs. La correspondència ve donada per una permutació del conjunt d'etiquetes.

Resulta clar que els cicles considerats han de ser imparells si volem construir un snark. En cas contrari, els cicles parells es podrien Tait-acolorir amb els colors a i b, i les arestes d'unió amb el color c.

4.8 Multipols com a portes lògiques

A [10], Fiol demostra que molts multipols es poden entendre com a portes lògiques, i que això permet sistematitzar la construcció d'snarks per mitjà de multipols amb conjunts d'estats incompatibles.

En la interpretació dels multipols com a portes lògiques, el Lema de Paritat és fonamental. Considerem un conjunt d'extrems lliures qualsevol (no necessàriament el conjunt de tots els extrems lliures d'un multipol) i una assignació de colors, d'un conjunt de tres colors possibles, a aquests extrems lliures. Suposem que m_i amb $i = 1, 2, 3$, és el nombre d'extrems lliures de color i. Hi ha les següents possibilitats:

- Els valors m_i tenen tots la mateixa paritat, és a dir, compleixen el Lema de Paritat. En aquest cas, els extrems lliures podrien ser els d'algun multipol Tait-acolorible (hem vist que tot estat admissible és factible). En aquest cas, assignem el valor booleà 0 (o *fals*) al conjunt d'extrems lliures.
- Els valors m_i no tenen tots la mateixa paritat. En aquest cas, els extrems lliures podrien ser un subconjunt propi del conjunt d'extrems lliures d'un multipol Tait-acolorible. Com

que una assignació de paritat només té dos valors possibles, parell o imparell, dos dels m_i tindran la mateixa paritat i un altre serà el "discrepant". En aquest cas, li assignem el valor booleà 1 (o *cert*) al conjunt d'extrems lliures. Més precisament, si el color discrepant és i, li assignem el valor 1_i.

Si agafem un multipol M i una determinada partició π del seu conjunt d'extrems lliures en subconjunts disjunts $C_1, ..., C_p$, podem fer una taula a partir dels seus possibles aresta-acoloriments $\phi_1, \phi_2, ..., \phi_k$ de la següent manera: anomenem $B(C_i, \phi_j)$ el valor booleà corresponent al subconjunt d'extrems lliures C_i segons els colors que li assigna l'aresta-acoloriment ϕ_j. La taula serà la següent:

$B(C_1, \phi_1)B(C_2, \phi_1)...B(C_p, \phi_1)$
$B(C_1, \phi_2)B(C_2, \phi_2)...B(C_p, \phi_2)$
...
$B(C_1, \phi_k)B(C_2, \phi_k)...B(C_p, \phi_k)$

Algunes d'aquestes taules es podran reduir, segons operacions que especificarem tot seguit, a taules de veritat de portes lògiques. Totes les portes lògiques que intervenen en el disseny de circuits lògics es poden obtenir a partir de certs multipols i certes particions dels seus conjunts d'extrems lliures. En particular, es poden obtenir les portes NOT, OR i AND que conjuntament són universals, és a dir, suficients per obtenir qualsevol altra porta lògica o, vist d'una altra manera, qualsevol expressió booleana.

Les operacions de reducció a les quals fèiem referència són les següents:

1. Eliminació de files redundants: si dues files de la taula són idèntiques podem eliminar-ne una. La presència de dues files idèntiques simplement vol dir que hi ha dos aresta-acoloriments que donen com a resultat la mateixa assignació de valors booleans als subconjunts $C_1, ..., C_p$.

2. Eliminació arbitrària de columnes: si volem podem ignorar el valor booleà assignat a un subconjunt d'extrems lliures. Això equival a ignorar, o eliminar, una columna de la taula.

3. Reordenació de files: òbviament és una operació permesa, ja que simplement equival a reordenar els aresta-acoloriments possibles.

4. Reordenació de columnes: també és clarament una operació permesa, ja que equival a reordenar els subconjunts d'extrems lliures.

Si eliminant files redundants, ignorant columnes i fent reordenacions podem aconseguir la taula de veritat d'una porta lògica, diem que el multipol M *representa* aquella porta lògica. Un mateix multipol podria representar una porta lògica o una altra: això dependrà de la partició escollida. Per això, si volem especificar la partició π que fa possible que el multipol M representi la porta lògica L, direm que el multipol M amb la partició π *representa* L.

Del que acabem de veure es dedueix que totes les portes lògiques són representables, encara que algunes es poden obtenir a partir de multipols petits, amb pocs vèrtexs, i altres necessitaran multipols més grans. Una de les portes lògiques més fàcils d'obtenir és la porta XOR (OR exclusiva) ja que amb un 6-pol de sis vèrtexs n'hi ha prou per representar-la (Fig. 12). És més, amb petites modificacions, a partir d'ella es poden obtenir les portes OR (Fig. 13) i NOT (Fig. 14). Després, combinant portes NOT i OR es pot obtenir la porta AND (Fig. 15), de manera que és possible reproduir qualsevol circuit lògic.

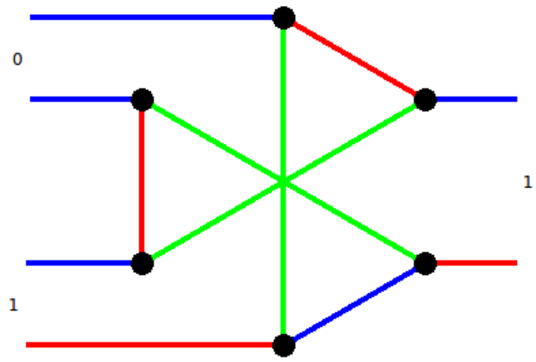


Figura 12: 6-pol corresponent a la porta XOR

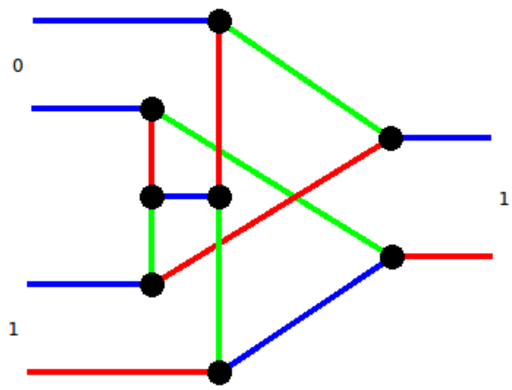


Figura 13: 6-pol corresponent a la porta OR

Tot això es descriu més detalladament a [10].

4.9 Construcció d'snarks II: enfocament booleà

Hem vist que les portes lògiques es poden representar per mitjà de multipols, i que la combinació de portes lògiques per formar un circuit lògic es pot representar mitjançant la combinació de

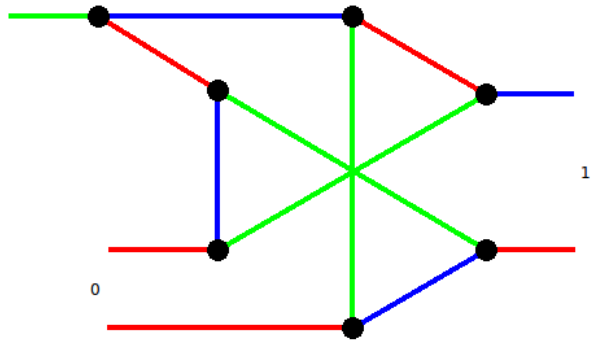


Figura 14: 5-pol corresponent a la porta NOT

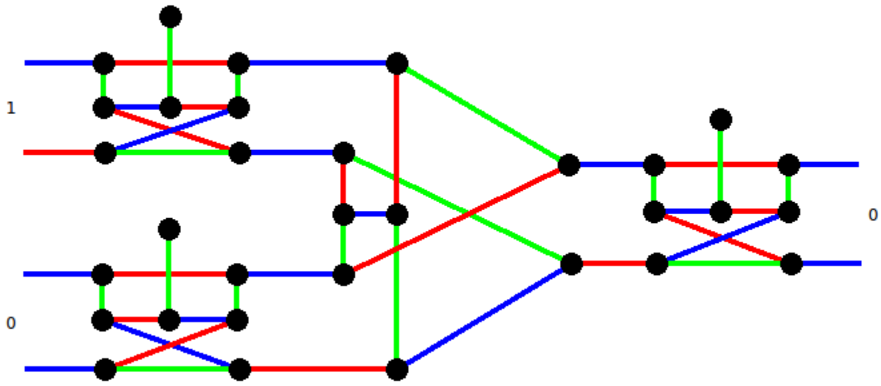


Figura 15: 9-pol corresponent a la porta AND

multipols per formar un multipol més gran o un graf cúbic. Un Tait-acoloriment del multipol o del graf equival a una assignació de valors booleans al circuit lògic corresponent, d'acord amb les taules de veritat de les portes lògiques que hi intervenen.

Això ens suggereix una manera de construir snarks: crear un circuit lògic que no admeti cap assignació de valors booleans compatible amb les taules de veritat de les seves portes lògiques. El multipol o graf corresponent no es podrà Tait-acolorir: si es pogués, com que el Lema de Paritat garantiria el comportament correcte de les portes lògiques, aleshores el circuit tindria una assignació correcta de valors booleans.

Si el multipol corresponent al circuit té extrems lliures, és a dir, no és un 0-pol o graf cúbic, es pot completar a un snark unint-lo a un altre multipol: per exemple, es pot unir a un altre multipol idèntic unint entre ells els extrems lliures duplicats.

4.9.1 Obtenció d'snarks a partir de circuits lògics

Una manera bastant simple i directa de construir un circuit lògic incompatible amb qualsevol assignació de valors booleans consisteix en fer un encadenament circular amb un nombre imparell de portes NOT: això condueix inevitablement a una incompatibilitat.

En efecte, el següent sistema d'equacions en valors booleans és incompatible.

$x_2 = NOT\ x_1$

$x_3 = NOT\ x_2$

...

$x_{2k+1} = NOT\ x_{2k}$

$x_1 = NOT\ x_{2k+1}$

És fàcil veure que x_1 no pot ser ni 0 (*fals*) ni 1 (*cert*), ja que si x_1 és 0, aleshores x_{2k+1} ha de ser 0 també, i aleshores x_1 hauria de ser 1, mentre que si x_1 és 1, x_{2k+1} també ha de ser 1, i aleshores x_1 hauria de ser 0. En tots els casos arribem a una contradicció.

Com que el multipol corresponent a la porta NOT té un extrem lliure més a part dels quatre extrems lliures que representen l'entrada i la sortida de valors booleans, l'encadenament circular de $2k+1$ portes NOT donarà lloc a un multipol (aquesta vegada no Tait-acolorible) amb $2k+1$ extrems lliures. Per obtenir un graf cúbic, podem unir el multipol a una còpia idèntica de si mateix tal com indicàvem abans. Com a conseqüència del que acabem de veure, el graf cúbic resultant serà necessàriament un snark.

4.9.2 Obtenció d'snarks a partir de circuits aritmètics

L'aritmètica ens proporciona una altra manera de generar circuits lògics amb incompatibilitats. Considerem per exemple un circuit que multipliqui nombres naturals expressats en codi binari i doni el resultat també en codi binari. El mateix circuit pot servir per factoritzar nombres, fent una assignació de valors a l'extrem de sortida segons les xifres binàries del nombre que es vulgui factoritzar, i estenent-la a una assignació de valors correcta per tot el circuit, incloent-hi l'extrem d'entrada on s'obtindran les xifres binàries dels factors buscats.

Pel que hem vist, això equival a estendre un Tait-acoloriment parcial d'un graf cúbic a un Tait-acoloriment del graf sencer, és a dir, podem transformar el problema aritmètic de la factorització en un problema d'aresta-acoloriment de grafs cúbics.

Suposem que el circuit multiplicador està construït de tal manera que tingui n xifres binàries d'entrada per cada factor, i $2n$ xifres binàries pel resultat de la multiplicació. Si introduïm un nombre primer p a l'extrem de sortida, per aconseguir la "factorització" $p = 1 \cdot p$ (en aquest cas impròpia perquè no n'hi ha cap altra de possible) una de les dues entrades necessitaria $2n$ xifres binàries, ja que en una d'elles hauria d'aparèixer p. Però per la construcció del circuit això és impossible: cap assignació de valors booleans podrà correspondre a l'operació $1 \cdot p$. Això vol dir que el graf cúbic subjacent al circuit no es podrà Tait-acolorir: per tant, serà un snark.

Així, doncs, llevat de casos trivials com els nombres primers molt petits, cada nombre primer ens proporciona un snark. Com que hi ha infinits nombres primers, podem aconseguir una infinitat d'snarks.

En realitat hi ha moltes operacions aritmètiques que poden conduir a incompatibilitats, i cadascuna d'elles (traduïda a un circuit lògic i, per tant, a un graf cúbic) ens proporcionaria un snark.

Pot resultar interessant que un problema de factorització es pugui convertir en un problema d'aresta-acoloriment de grafs, és a dir, que tinguem una transformació d'un problema aritmètic ben conegut (i fins i tot d'importància pràctica en l'era de la criptografia) en un problema d'optimització combinatòria també prou conegut per la seva banda.

És sabut que el problema de la factorització és en general difícil (i justament per això s'utilitza en criptografia). La determinació de l'índex cromàtic, fins i tot en el cas de grafs cúbics, se sap també que és difícil: Holyer [18] va demostrar que és un problema $\mathcal{NP}$-complet. La seva dificultat depèn de si la classe $\mathcal{P}$ és diferent de la classe $\mathcal{NP}$, la qual cosa encara no se sap però se suposa àmpliament que és certa (de fet, tant els teòrics com els practicants i els usuaris de la criptografia hi confien bastant fermament [19]).

Tanmateix, a l'hora d'atacar aquests problemes teòricament molt difícils, alguns algorismes aproximats o probabilístics poden resultar bastant eficients a la pràctica (vegeu el capítol 3).

4.10 Construcció d'snarks des d'un marc unificat

La majoria de mètodes de construcció d'snarks que s'han descrit es poden formular en termes de combinacions de multipols. Per exemple, el "dot product" d'Isaacs consisteix en obtenir dos 4-pols a partir de dos snarks (eliminant-ne alguns vèrtexs o arestes) i unir-los entre ells. El mètode de superposició utilitzat per Kochol consisteix en la substitució d'uns multipols per uns altres, i el mètode dels circuits lògics consisteix en combinar multipols que es poden entendre com a components d'un circuit, els quals es poden connectar entre ells. Continuant en la mateixa línia, els snarks de permutació es basen en la combinació de dos multipols cíclics que tenen el mateix nombre de vèrtexs i de semiarestes.

Veiem doncs que els multipols proporcionen una eina molt general per a la construcció d'snarks, i també per analitzar-los, ja que un snark donat es pot descompondre en multipols per estudiar on resideix la seva propietat de ser un snark.

5 Multipols equivalents i multipols irreductibles

5.1 Multipols equivalents

Direm que dos multipols són *equivalents* si tenen el mateix conjunt d'estats o, més precisament, si qualsevol estat de qualsevol dels dos multipols té un estat equivalent en l'altre multipol.

Suposem que els multipols M_1 i M_2 són equivalents, i que M_1 forma part d'un graf cúbic G. Aleshores, M_1 es pot substituir per M_2 en G de tal manera que l'índex cromàtic del graf G' resultant sigui el mateix. Això pot resultar interessant si M_2 té menys vèrtexs que M_1, ja que aleshores podem transformar G en un graf G' més petit però que manté el mateix comportament respecte a l'aresta-acoloriment.

5.2 Reducció de multipols

Siguin M_1 i M_2 dos multipols, amb conjunts d'estats $S(M_1)$ i $S(M_2)$ respectivament. Direm que M_1 es pot reduir a M_2, o que M_2 és una reducció de M_1, si $S(M_2)$ és un subconjunt no buit de $S(M_1)$ i M_2 té menys vèrtexs que M_1. Suposem que M_1 forma part d'un snark G. Aleshores M_1 es pot substituir per M_2 i el graf G' resultant continua sent un snark: la substitució no fa disminuir l'índex cromàtic, ja que restringeix el conjunt d'estats disponibles del multipol i per tant pot reduir el conjunt de 4-aresta-acoloriments possibles del graf, però no farà aparèixer cap Tait-acoloriment nou. D'altra banda, suposem que M_2 forma part d'un graf Tait-acolorible. Aleshores M_2 es pot substituir per M_1 i el graf resultant també és Tait-acolorible: la substitució no fa augmentar l'índex cromàtic, ja que amplia el conjunt d'estats disponibles del multipol i per tant no farà desaparèixer cap dels Tait-acoloriments ja disponibles del graf.

Així, doncs, la reducció d'un multipol permet transformar un snark en un altre de més petit, per facilitar-ne l'anàlisi.

5.3 Multipols irreductibles

Direm que un multipol és irreductible si no es pot reduir a cap altre multipol. Com acabem de veure a la secció anterior, la reducció d'un multipol en un snark no n'afecta l'índex cromàtic. Per tant, en l'anàlisi dels snarks en tenim prou de considerar multipols irreductibles, però hem de saber quins són. És evident que si dos multipols són equivalents o un és reducció de l'altre aleshores han de tenir la mateixa quantitat d'extrems lliures. Per tant, és lògic preguntar-se quins m-pols són irreductibles per cada valor no trivial d'm, quants n'hi ha, i si són gaire grans, és a dir, quants vèrtexs tenen.

Per fer aquesta mena d'indagacions, necessitarem el següent lema bàsic.

Lema 5.1. *Que un m-pol M no es pugui reduir a cap altre implica que qualsevol altre m-pol M' o bé té estats que M no té o bé compleix $|M'| \geq |M|$.*

Demostració. Es tracta simplement de la negació lògica de l'enunciat que defineix el concepte de reducció. $\square$

5.4 El conjunt $\mathcal{S}(m)$ d'm-pols irreductibles

Anomenem $\mathcal{S}(m)$ el conjunt format pels multipols irreductibles d'm extrems lliures. Considerem trivials els casos $m = 0$ (corresponent als grafs cúbics) i $m = 1$ (corresponent a multipols trivialment no Tait-acoloribles).

Teorema 5.2. *El conjunt $\mathcal{S}(m)$ és finit per qualsevol $m \geq 2$.*

Demostració. Suposem que inicialment el conjunt $\mathcal{S}(m)$ és buit. Considerem el conjunt infinit $M(m)$ de tots els m-pols, i per cada $n \geq 0$, el conjunt finit $M(m,n)$ de tots els m-pols d'n vèrtexs (vegeu el Lema 4.2). Comencem suposant que m és parell. En aquest cas, si n és imparell $M(m,n)$ serà buit. Pel Lema 5.1, tots els multipols de $M(m,0)$ són irreductibles perquè no hi ha m-pols amb menys de 0 vèrtexs. Els afegim a $\mathcal{S}(m)$. Entre els m-pols de $M(m,2)$, els que es puguin reduir a m-pols de $M(m,0)$ o del mateix $M(m,2)$ els ignorem. Els restants són irreductibles i els afegim a $\mathcal{S}(m)$. Continuem de la mateixa manera amb $M(m,4)$, i així successivament. A partir d'un cert valor d'n, tots els $M(m,n)$ estaran desproveïts de multipols irreductibles. Per veure-ho, tinguem en compte que hi ha un nombre finit de conjunts d'estats possibles (en realitat, el nombre de conjunts d'estats factibles és més petit que el d'estats possibles, ja que alguns conjunts d'estats no són realitzats per cap multipol). Quan passem de $M(m,n)$ a $M(m,n{+}2)$, passem a examinar m-pols amb més vèrtexs que qualsevol dels examinats anteriorment. Per tant, els nous irreductibles que trobem han de complir certes condicions: pel Lema 5.1, els seus conjunts d'estats no poden tenir com a subconjunt cap dels conjunts d'estats dels multipols examinats prèviament, i en particular dels multipols irreductibles ja afegits a $\mathcal{S}(m)$. Així, doncs, l'aparició de nous irreductibles implica l'aparició de nous conjunts d'estats factibles. Com que d'aquests n'hi ha un nombre finit, el procés s'acabarà tard o d'hora. En el cas d'm imparell es comença per $M(m,1)$ i es fa un raonament similar. Per tant, $\mathcal{S}(m)$ serà un conjunt finit. $\square$

$\mathcal{S}(2)$ i $\mathcal{S}(3)$ són ben coneguts i ja els hem trobat abans: $\mathcal{S}(2)$ conté l'únic 2-pol irreductible, l'aresta lliure, i $S(3)$ l'únic 3-pol irreductible, el vèrtex amb tres semiarestes. $\mathcal{S}(4)$ conté els dos 4-pols irreductibles: el format per dues arestes lliures, i l'únic 4-pol possible de dos vèrtexs.

Segons els resultats de Cameron, Chetwynd i Watkins [4], $\mathcal{S}(5)$ conté tres 5-pols: un de no connex format per la unió disjunta del 2-pol i el 3-pol irreductibles, un 5-pol acíclic de 3 vèrtexs, i un cicle de 5 vèrtexs amb una semiaresta a cada vèrtex.

$\mathcal{S}(6)$ ja és matèria d'investigació. La seva estructura ha estat estudiada a [23] i [12], però encara no es coneix exactament.

En el cas general, segons els enunciats 5.4 i 5.14, publicats a [12] i que veurem més endavant, per $m \geq 5$ els m-pols que tenen com a graf subjacent un arbre o un cicle són irreductibles i per tant pertanyen a $\mathcal{S}(m)$. El mateix es pot dir dels boscos i, en particular, dels m-pols minimals. Això permet explicar l'estructura de $\mathcal{S}(5)$ i, parcialment, de $\mathcal{S}(6)$.

5.5 La funció $v(m)$: màxim ordre d'un element de $\mathcal{S}(m)$

Si $\mathcal{S}(m)$ és un conjunt finit per qualsevol m, es pot definir [10] la funció $v(m)$ que assigna a cada m el màxim ordre d'un element de $\mathcal{S}(m)$, és a dir, el màxim nombre de vèrtexs d'un m-pol irreductible. Com a conseqüència del Teorema que acabem de demostrar, aquesta funció ha de tenir un valor ben definit per cada $m \geq 2$, encara que el seu comportament exacte només és conegut per $m \leq 5$.

Els casos $m = 0$ i $m = 1$ són trivials, i tenim: $S(0) = \mathcal{S}(1) = \emptyset$ i $v(0) = v(1) = 0$.

En el cas $m = 2$, tenim $\mathcal{S}(2) = \{\text{aresta lliure}\}$ i $v(2) = 0$. És a dir, qualsevol 2-pol amb un o més vèrtexs és reductible: es pot substituir per una aresta lliure.

En el cas $m = 3$, $\mathcal{S}(3) = \{\text{vèrtex amb tres semiarestes}\}$ i $v(3) = 1$. Qualsevol 3-pol amb més d'un vèrtex és reductible: es pot substituir per un vèrtex amb tres semiarestes.

En el cas $m = 4$, $\mathcal{S}(4) = \{\text{dues arestes lliures, 4-pol de dos vèrtexs}\}$ i $v(4) = 2$. Qualsevol 4-pol de més de dos vèrtexs es pot reduir a dues arestes lliures o a un 4-pol de dos vèrtexs.

En el cas $m = 5$, segons els resultats de Cameron, Chetwynd i Watkins [4], $\mathcal{S}(5) = \{$unió disjunta del 2-pol i el 3-pol irreductibles, 5-pol de tres vèrtexs, 5-pol cíclic$\}$ i $v(5) = 5$. Qualsevol 5-pol de més de cinc vèrtexs es pot reduir a algun dels multipols de $\mathcal{S}(5)$.

En el cas $m = 6$, $\mathcal{S}(6)$ conté com a mínim els multipols indicats a [23], però no se sap si en conté més. També segons [23], tots els 6-pols de 14, 16 i 18 vèrtexs són reductibles, però no se sap si hi ha algun 6-pol irreductible de 20 o més vèrtexs. Com a conseqüència, o bé $v(6) = 12$, o bé $v(6) \geq 20$.

5.6 Comportament de $\mathcal{S}(m)$ i $v(m)$

Hi ha pocs resultats teòrics sobre el comportament de $\mathcal{S}(m)$ i $v(m)$ per valors arbitraris d'm. En aquesta secció demostrarem que els m-pols que tenen un arbre com a graf subjacent, o multipols *arboris*, i els que tenen un bosc com a graf subjacent, o multipols *forestals*, són irreductibles i per tant han de pertànyer a $\mathcal{S}(m)$. També demostrarem la irreductibilitat dels m-pols que tenen un cicle com a graf subjacent, suposant que $m \geq 5$. Aquests resultats estan descrits a [12].

5.6.1 Multipols d'm extrems lliures necessaris en $\mathcal{S}(m)$ I: arbres i boscos

Abans de passar a demostrar la irreductibilitat dels multipols arboris, calcularem el nombre d'estats d'un m-pol arbori en funció d'm.

Lema 5.3. *Sigui T_m un m-pol amb un arbre com a graf subjacent, i sigui $t(m) = |Col(T_m)|$ el seu nombre d'estats. Es compleix que $t(m) = 2^{m-3}$.*

Demostració. Els multipols arboris es poden construir recursivament a base d'afegir vèrtexs. Un 3-pol amb un sol vèrtex, és a dir $\boldsymbol{v}$, només té un estat possible. Aleshores, $t(3) = |\mathrm{Col}(T_3)| = 1$. Cada nou vèrtex incrementa m en una unitat i dobla el nombre d'estats possibles, és a dir: $t(m) = 2t(m-1)$. Tenint en compte la condició inicial $t(3) = 1$, obtenim $t(m) = 2^{m-3}$. $\square$

Com que en l'enunciat i la demostració de la irreductibilitat de T_m també hi farem intervenir el concepte de *separabilitat*, el definim a continuació.

Diem que un m-pol M amb c components connexes és *separable* si existeix algun m-pol N, amb almenys $c+1$ components, $|V(N)| = |V(M)|$, i $\mathrm{Col}(N) \subset \mathrm{Col}(M)$.

Teorema 5.4. *Tot multipol arbori T_m és no separable i irreductible.*

Demostració. La demostració és per inducció. Com que $T_2 = \boldsymbol{e}$ i $T_3 = \boldsymbol{v}$, el resultat és trivial per $m = 2, 3$. Ara, suposem que el resultat és correcte per algun T_m amb $m > 3$. Per alguna semiaresta (u), considerem el $(m+1)$-pol M obtingut unint una semiaresta de $\boldsymbol{v}$ a u, convertint d'aquesta manera (u) en dues semiarestes $\epsilon_1 = (v)_1$ i $\epsilon_2 = (v)_2$. Primer demostrem que M és irreductible. Altrament, existiria un $(m+1)$-pol M' amb $|V(M')| < |V(M)| = m-1$ (i per tant $|V(M')| \leq m-3$) i $\mathrm{Col}(M') \subset \mathrm{Col}(M)$. Així, M' ha de tenir almenys dues components connexes, per exemple M_1' i M_2'. A més, com que ϵ_1 i ϵ_2 han de tenir colors diferents en qualsevol Tait-acoloriment d'M, el mateix és cert per les corresponents semiarestes ϵ_1' i ϵ_2' de M'. Per tant, aquestes semiarestes no poden estar en components diferents de M'. Suposem, sense pèrdua de generalitat, que $\epsilon_1', \epsilon_2' \in \mathcal{E}(M_1')$. Ara, unint ϵ_1' i ϵ_2' a dues semiarestes de $\boldsymbol{v}$, i fent la mateixa operació amb ϵ_1 i ϵ_2, tot creant un dígon, obtenim respectivament els multipols N' i N amb les següents propietats:

- $\mathrm{Col}(N') \subset \mathrm{Col}(N) = \mathrm{Col}(T_m)$ (ja que el dígon o 2-pol creat en N és equivalent a $\boldsymbol{e}$).
- $|V(N')| \leq m-2 = |V(T_m)|$.

Així, si $|V(N')| < m-2$, T_m seria reductible, i si $|V(N')| = m-2$, T_m seria separable. En qualsevol cas, obtenim una contradicció.

Per demostrar que M també és no separable, de nou suposem el contrari i iterem el procediment anterior fins a demostrar que M és equivalent a algun petit multipol arbori T, mentre que M' és equivalent a un multipol N constituït per unes quantes arestes isolades. Però de nou això contradiu el fet que $\mathrm{Col}(M') \subset \mathrm{Col}(M)$. $\square$

Aquest resultat permet entendre millor per què el conjunt $\mathcal{S}(6)$ (vegeu [23]) conté determinats 6-pols, ja que explica la presència dels que són de tipus arbori (i, generalitzant-lo al resultat que veurem tot seguit, també dels que són de tipus forestal). En general, ens permet afirmar que, per $m \geq 2$, tots els m-pols arboris (de fet, tots els forestals) han de pertànyer a $\mathcal{S}(m)$.

Com que tot m-pol arbori té $m-2$ vèrtexs, aquest teorema ens permet afirmar que $v(m) \geq m-2$ per $m \geq 2$. És a dir, tenim una fita lineal inferior per $v(m)$. A la secció següent la millorarem una mica.

Abans, però, observem que, partint essencialment de la mateixa demostració, podem afirmar (tal com anunciàvem) que es compleix la proposició següent.

Proposició 5.5. *Tot multipol que tingui un bosc com a graf subjacent és no separable i irreductible.*

També podem precisar una mica més el comportament dels multipols que tenen boscos com a grafs subjacents. El seu nombre d'estats, que representarem amb $f(n, m)$, només depèn del nombre de vèrtexs n i del nombre de semiarestes m. Per veure-ho, partim del següent lema.

Lema 5.6. *Si $n \leq m-4$, es compleix la següent relació de recurrència:*

$f(n, m) = f(n, m-2) + f(n+1, m-1)$,

amb valors inicials $f(0,2) = 1$ i $f(n, n+2) = 2^{n-1}$ per $n > 0$.

Demostració. En primer lloc observem que, si $n = m-2 > 0$ aleshores un m-pol forestal d'n vèrtexs és de fet un m-pol arbori, el nombre d'estats del qual és 2^{m-3} o 2^{n-1}. Si $n = 0$ i $m = 2$, aleshores tenim una aresta isolada amb un sol estat. Això ens dóna els valors inicials. Si $n \leq m-4$, un m-pol forestal d'n vèrtexs no és un arbre i té com a mínim dues components. Aleshores, donades dues semiarestes ϵ_1 i ϵ_2 (que no pertanyin a la mateixa component connexa), el seu conjunt d'estats es pot subdividir en dos subconjunts: els que compleixen $\phi(\epsilon_1) = \phi(\epsilon_2)$, i els que compleixen $\phi(\epsilon_1) \neq \phi(\epsilon_2)$, per algun Tait-acoloriment ϕ d'M.

En el cas que $\phi(\epsilon_1) = \phi(\epsilon_2)$, les dues semiarestes es poden unir i obtenim un m'-pol M' amb $m' = m-2$ semiarestes i $n' = n$ vertexs. Com a conseqüència de $n \leq m-4$, la relació $n' \leq m'-2$ es compleix. Per tant, el nombre d'estats de M' és $f(n', m') = f(n, m-2)$.

En el cas que $\phi(\epsilon_1) \neq \phi(\epsilon_2)$, les dues semiarestes es poden unir a dues semiarestes ϵ_1'' i ϵ_2'' d'un 3-pol minimal $\boldsymbol{v}$. Representem amb ϵ_3'' la semiaresta restant de $\boldsymbol{v}$. El resultat de la unió és un nou m''-pol M'' amb $m'' = m-1$ semiarestes, que ara inclouen ϵ_3'', i $n'' = n+1$ vèrtexs. De nou, la relació $n'' \leq m''-2$ es compleix com a conseqüència de $n \leq m-4$. Per tant, el nombre d'estats de M'' és $f(n'', m'') = f(n+1, m-1)$.

Finalment, sumant tots els estats obtenim la relació de recurrència. □

Per mitjà d'un càlcul farragós però directe, es pot demostrar que, si

$0 \leq 2k \leq m-2$

i

$n \leq m-2(k+1)$

aleshores es compleix la següent fórmula: $f(n, m) = \sum_{i=0}^{k} f(n+i, m-2k+i)\binom{k}{i}$.

Com a conseqüència, $f(n, m)$ es pot calcular fàcilment.

Teorema 5.7. (*a*) *El nombre d'estats d'un m-pol forestal de 0 vèrtexs és:*

$$f(0, m) = \frac{1}{2}(3^{\frac{m-2}{2}} + 1).$$

(*b*) *El nombre d'estats d'un m-pol forestal de $n \geq 1$ vèrtexs és:*

$$f(n, m) = 2^{n-1}3^{\frac{m-n}{2}-1}.$$

Demostració. (*a*) Suposant que $n = 0$ i $m = 2k + 2$ en (5.6), i fent servir els valors inicials, tenim:

$$
\begin{aligned}
f(0,m) =& f(0,2k+2) = \sum_{i=0}^{k} f(i,i+2)\binom{k}{i} = f(0,2) + \sum_{i=1}^{k} f(i,i+2)\binom{k}{i} = \\
=& 1 + \sum_{i=1}^{k} 2^{i-1}\binom{k}{i} = 1 + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{k} 2^{i}\binom{k}{i} = \\
=& 1 + \frac{1}{2}(3^k - 1) = \frac{1}{2}(3^k + 1) = \frac{1}{2}(3^{\frac{m-2}{2}} + 1).
\end{aligned}
$$

(*b*) Suposant que $n \geq 1$ i $m = n + 2k + 2$ en (5.6), i fent servir els valors inicials, tenim:

$$
\begin{aligned}
f(n,m) =& f(n, n+2k+2) = \sum_{i=0}^{k} f(n+i, n+i+2)\binom{k}{i} = \\
=& \sum_{i=0}^{k} 2^{n+i-1}\binom{k}{i} = 2^{n-1}\sum_{i=0}^{k} 2^{i}\binom{k}{i} = 2^{n-1}3^k = 2^{n-1}3^{\frac{m-n}{2}-1}.
\end{aligned}
$$

□

A partir del Teorema 5.7 es pot demostrar el següent resultat, el qual implica que el mínim nombre d'estats d'un m-pol forestal M s'assoleix quan M és un m-pol minimal. Es pot comprovar que en tots dos casos obtenim $\rho(m)$.

Proposició 5.8. *Per un valor parell fix d'm, el mínim de* $f(n,m)$ *és* $\frac{1}{2}(3^{\frac{m-2}{2}}+1)$*, i per un valor imparell fix d'm, el mínim de* $f(n,m)$ *és* $3^{\frac{m-3}{2}}$*.*

A aquests resultats enumeratius hi podem afegir un algorisme per obtenir explícitament els estats d'un multipol arbori.

Teorema 5.9. *El conjunt d'estats d'un m-pol arbori d'n vèrtexs es pot obtenir explícitament per mitjà d'un procediment algorísmic.*

Demostració. El procediment és el següent. Escollim un vèrtex v qualsevol, però que sigui incident com a mínim a una semiaresta ϵ. Suposem, sense pèrdua de generalitat, que ϵ és de color a i que les dues arestes o semiarestes restants són dels colors b i c. La semiaresta ϵ es pot ignorar i la resta de l'arbre es pot entendre com si fos un arbre binari amb v com a arrel. Per cadascun dels $n-1$ vèrtexs restants es pot prendre una decisió binària d'acoloriment (es poden fer servir dos colors en dos ordres possibles), i cadascuna de les 2^{n-1} seqüències binàries corresponents dóna un estat possible. □

Aquest algorisme ens dóna una formulació una mica més precisa de la demostració del Lema 5.3.

m

n	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
0	1		2		5		14		41		122		365
1		1		3		9		27		81		243	
2	1		2		6		18		54		162		486
3		1		4		12		36		108		324	
4			3		8		24		72		216		648
5				5		16		48		144		432	
6					11		32		96		288		864
7						21		64		192		576	
8							43		128		384		1152
9								85		256		768	
10									171		512		1536
11										341		1024	
12											683		2048

Figura 16: Nombres d'estats dels m-pols forestals amb n vèrtexs. Les files $n = 0$ i $n = 1$ corresponen als m-pols minimals, i la diagonal $n = m - 2$ correspon als m-pols arboris. Els nombres d'estats dels m-pols cíclics, corresponents a la diagonal $n = m$, també estan representats.

5.6.2 Multipols d'm extrems lliures necessaris en $\mathcal{S}(m)$ II: cicles

En aquesta secció demostrarem que, si $m \geq 5$, els m-pols que tenen un cicle com a graf subjacent són irreductibles i per tant han de pertànyer a $\mathcal{S}(m)$.

Però, tal com hem fet amb els multipols arboris, abans determinarem el nombre d'estats d'un multipol cíclic.

Proposició 5.10. *El nombre $c(m)$ d'estats d'un m-pol cíclic C_m amb $m \geq 1$ és:*

$c(m) = \frac{1}{3}(2^{m-1} + (-1)^m)$.

Demostració. L'acoloriment de les semiarestes queda determinat per l'acoloriment de les arestes del cicle. Aleshores, el nombre $c(m)$ compleix la següent fórmula de recurrència:

$c(m) = c(m-1) + 2c(m-2)$.

Per veure-ho, considerem una aresta arbitrària del cicle, i les dues arestes que hi són adjacents. Si aquestes dues arestes són de colors diferents, aleshores el color de l'aresta del mig queda determinat. Si tenen el mateix color, alahores l'aresta del mig pot ser de dos colors diferents. En el primer cas, esborrem l'aresta del mig i fem que les dues arestes que hi eren adjacents siguin adjacents entre elles: el cicle resultant té $m-1$ arestes i $c(m-1)$ Tait-acoloriments. En el segon cas, esborrem l'aresta del mig i identifiquem les dues arestes que hi eren adjacents com si fossin una sola aresta: el cicle resultant té $m-2$ arestes i $c(m-2)$ Tait-acoloriments, però en aquest cas l'aresta esborrada tenia dos colors possibles. Això dóna la fórmula de recurrència per $c(m)$. Els seus valors inicials són $c(1)=0$ i $c(2)=1$, corresponents als casos trivials d'un llaç i un dígon. Fent inducció sobre m, o utilitzant les tècniques algebraiques habituals per resoldre problemes de recurrències, obtenim el resultat. □

En aquest cas també podem precisar una mica més el resultat enumeratiu per mitjà d'un procediment algorísmic que permet obtenir tots els estats d'un multipol cíclic de manera explícita i sistemàtica.

Teorema 5.11. *El conjunt d'estats d'un m-pol cíclic es pot obtenir explícitament per mitjà d'un procediment algorísmic.*

Demostració. El procediment és el següent. Tallem una aresta arbitrària (u,v) del cicle per obtenir un $(m+2)$-pol arbori, però mantenint la condició que les semiarestes resultants $(u)_1$ i $(v)_1$ han de ser del mateix color. Suposem, sense pèrdua de generalitat, que són de color a. Com a resultat del tall, u i v es troben en extrems oposats de l'arbre. De moment, ignorem v, el seu vèrtex més pròxim i les semiarestes incidents a tots dos. El resultat és un m-pol arbori el nombre d'estats del qual es pot determinar com en la secció anterior, escollint u com l'arrel i ignorant $(u)_1$ per obtenir un arbre binari. Ara és obvi que es poden estendre els estats del m-pol arbori parcial als estats del $(m+2)$-pol arbori sencer, amb la condició que $(v)_1$ sigui de color a per tal que el seu color coincideixi amb el de $(u)_1$. □

Passem ara a demostrar que, com els multipols arboris, els multipols cíclics també són irreductibles. Abans, però, necessitarem uns quants lemes auxiliars.

Lema 5.12. *Siguin $\epsilon_1,\epsilon_2,\epsilon_3$ tres semiarestes (ordenades) d'un m-pol arbori T_m amb $m\geq 3$. Aleshores, l'estat $(...,\epsilon_1,\epsilon_2,\epsilon_3,...)=(...,a,b,a,...)$ és realitzable a no ser que es compleixi una de les següents condicions:*

(i) $\partial(\epsilon_1,\epsilon_3)=0$.

(ii) $\partial(\epsilon_1,\epsilon_2)=\partial(\epsilon_2,\epsilon_3)=1$.

Demostració. Siguin $\epsilon_i=(v_i)$, $i=1,2,3$. En primer lloc observem que, com que ϵ_1 i ϵ_2 són diferents, un acoloriment de la forma $(...,\epsilon_1,\epsilon_2,\epsilon_3,...)=(...,a,b,*,...)$ sempre és posible. Aleshores, els únics casos en què el color $*$ no pot ser a són *(i)* (trivialment perquè en aquest cas $v_1=v_3$) i *(ii)* perquè, en aquest cas, l'aresta v_1v_2 ha de ser de color c i, per tant, l'aresta v_2v_3 hauria de ser de color a, el qual està prohibit. □

Lema 5.13. *Siguin $\epsilon_i,\epsilon_{i+1},\ldots,\epsilon_{i+r-1}$, r semiarestes successives d'un m-pol cíclic C_m amb $r\geq m$ (els subíndexs s'han d'entendre mòdul m). Aleshores, els següents estats no són realitzables:*

(*i*) *Per* $r = 3$, $(..., \epsilon_i, \epsilon_{i+1}, \epsilon_{i+2}, ...) = (..., a, b, a, ...)$.

(*ii*) *Per* $r = 4$, $(..., \epsilon_i, \epsilon_{i+1}, \epsilon_{i+2}, \epsilon_{i+3}, ...) = (..., a, b, b, c, ...)$.

Demostració. Siguin $\epsilon_{i+j} = (v_{i+j})$, $j = 0, \dots, 3$. El cas (*i*) es demostra igual que en el lema 5.12. El cas (*ii*) també es demostra fàcilment considerant els dos possibles colors diferents, a i c, de l'aresta $v_{i+1}v_{i+2}$ i concloent que tots dos condueixen a una contradicció. □

Teorema 5.14. *Tot* m*-pol cíclic* C_m *amb* $m \geq 5$ *és irreductible.*

Demostració. La demostració és per reducció a l'absurd. Suposem que C_m es pot reduir a un m-pol T. Com que $|T| \leq m - 2$, o bé T és un multipol arbori o bé T té com a mínim dues components. Com que $\mathrm{Col}(T) \subseteq \mathrm{Col}(C_m)$, hi ha d'haver un ordre cíclic $(\epsilon_0, \dots, \epsilon_{m-1}, \epsilon_0, \dots)$ de les semiarestes de T, corresponent a les successives semiarestes de C_m, de tal manera que cada estat de T també sigui realitzable en C_m. No obstant, demostrarem que, independentment de l'ordre escollit, no es dóna el cas. Considerem tres possibilitats:

(*a*) T és un multipol arbori.

(*a*1) Suposem que les semiarestes de T vénen en parells (és a dir, cada parell és incident a un vèrtex donat). Sense pèrdua de generalitat, suposem que ϵ_i i ϵ_{i+1} són incidents a u_i per $i = 0, 2, \dots, (m-2)/2$. Aleshores, pel lema 5.12, en l'ordre cíclic i per evitar els estats $(\dots, a, b, a, \dots)$ estem obligats a agafar $(\dots, \epsilon_1, \epsilon_j, \epsilon_2, \epsilon_{j+1}, \dots)$ amb $j \geq 3$. Però cada possible elecció per a la semiaresta ϵ_k contigua a ϵ_{j+1} permet l'estat $(..., a, b, a, ...)$ per a les semiarestes $(..., \epsilon_2, \epsilon_{j+1}, \epsilon_k, ...)$, un estat que segons el lema 5.13 no és realitzable en C_m.

(*a*2) Altrament, T ha de tenir alguna semiaresta ζ a distància no nul·la de qualsevol altra semiaresta, i també algun parell $(\epsilon_i, \epsilon_{i+1})$ de semiarestes incidents. Així, en algun punt de l'ordre cíclic, hem de tenir $(\dots, \zeta, \epsilon_j, \epsilon_k, \dots)$ on $j \in \{i, i+1\}$. Aleshores, novament totes les possibles eleccions de ϵ_k permeten l'estat $(..., a, b, a, ...)$.

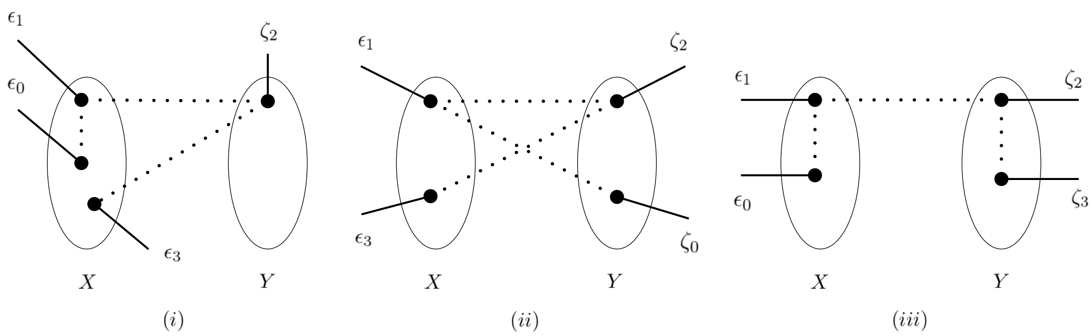


Figura 17: Possibles successions de semiarestes

(*b*) T té dues components connexes X, Y: suposem que X i Y tenen semiarestes ϵ_i i ζ_j, respectivament. Observem que o bé X o bé Y té com a mínim tres semiarestes. Aleshores, en algun punt de l'ordre cíclic, hem de passar de, per exemple, $\epsilon_1 \in \mathcal{E}(X)$ a $\zeta_2 \in \mathcal{E}(Y)$. Llevat de simetries, hi ha tres possibilitats per a les semiarestes contigües a ϵ_1 i ζ_2 (vegeu la Fig. 17 on 'l'adjacència cíclica' entre semiarestes es representa mitjançant línies de punts). Sense pèrdua de claredat, en alguns llocs ometrem els punts suspensius en la notació dels estats:

(*b*1) Cas $(\ldots, \epsilon_0, \epsilon_1, \zeta_2, \epsilon_3, \ldots)$: aquí, per qualsevol Tait-acoloriment ϕ de T, i per evitar l'estat (a, b, a) per a les ternes de semiarestes $(\epsilon_0, \epsilon_1, \zeta_2)$ i $(\epsilon_1, \zeta_2, \epsilon_3)$, s'han de complir $\phi(\epsilon_0) = \phi(\epsilon_1)$ i $\phi(\epsilon_1) \neq \phi(\epsilon_3)$. Així, l'estat de les semiarestes successives ha de ser $(a, a, *, b)$. Ara considerem la cadena de Kempe a-b en X, partint d'ϵ_3, i intercanviem-ne els colors per aconseguir el nou Tait-acoloriment ϕ'. Si acaba en una semiaresta diferent d'ϵ_0, ϵ_1 obtenim el nou estat $(a, a, *, a)$. Altrament, si acaba en ϵ_0 o ϵ_1 obtenim $(b, a, *, a)$ o $(a, b, *, a)$ respectivament. En tots els casos podem triar adequadament el color $*$ per aconseguir l'estat (a, b, a) per a tres semiarestes successives.

(*b*2) Cas $(\ldots, \zeta_0, \epsilon_1, \zeta_2, \epsilon_3, \ldots)$: per evitar l'estat (a, b, a) per a les dues ternes de semiarestes s'ha de complir $\phi(\zeta_0) \neq \phi(\zeta_2)$ i $\phi(\epsilon_1) \neq \phi(\epsilon_3)$. Així, l'estat de les semiarestes successives es pot triar de manera que sigui (a, a, b, b). Considerem les diferents possibilitats per a la semiaresta que ve després d'ϵ_3. Si és $\epsilon_4 \in \mathcal{E}(X)$, les semiarestes $(\epsilon_1, \zeta_2, \epsilon_3, \epsilon_4)$ són com en el cas (*i*), que ja hem tractat. Alternativament, si la semiaresta en qüestió és $\zeta_4 \in \mathcal{E}(Y)$, no pot ser de color c a causa del lema 5.13(*ii*). Així, suposem que ζ_4 és d'un color diferent de c, per exemple a, considerem la cadena de Kempe a-b en Y que comença en ζ_4 i n'intercanviem els colors. Aleshores, raonant com en el cas anterior, obtenim l'estat realitzable (a, b, a) per a tres semiarestes successives.

(*b*3) Cas $(\ldots, \epsilon_0, \epsilon_1, \zeta_2, \zeta_3, \ldots)$: ara, per evitar l'estat (a, b, a) per a les dues ternes de semiarestes s'ha de complir $\phi(\epsilon_0) = \phi(\epsilon_1)$ i $\phi(\zeta_2) = \phi(\zeta_3)$, de manera que puguem triar l'estat de les semiarestes successives per tal que sigui (a, a, b, b). Així, la semiaresta que segueix ζ_3 no pot ser de color c a causa del lema 5.13(*ii*). Per al cas d'aquesta semiaresta, considerem de nou dues possibilitats: si $\zeta_4 \in Y$ i és de color a, l'intercanvi de colors en la cadena de Kempe a-c porta novament a l'estat (a, a, b, b, c). Altrament, si ζ_4 és de color b, la cadena de Kempe b-c porta novament a aquest estat o al color c per alguna de les semiarestes ζ_2 o ζ_3. Però, un cop més, totes dues alternatives condueixen a un estat realitzable (c, b, c) (canviant el color d'ϵ_1 d'a a c, si és necessari). Finalment, si $\epsilon_4 \in X$ i és de color a o b, raonem com abans amb les respectives cadenes de Kempe a-c o b-c per arribar als estats de tipus (a, a, b, b, c) or (a, b, a).

(*c*) T té com a mínim tres components X, Y, Z: indiquem les semiarestes de X i Y com abans i suposem que les semiarestes de Z són η_k. Observem que en l'ordre cíclic, i per evitar l'estat (a, b, a), no podem tenir tres semiarestes successives en components diferents X, Y, Z. Per tant, l'única possibilitat que cal considerar, que sigui diferent de les del cas (*b*), és $(\epsilon_0, \zeta_1, \zeta_2, \eta_3)$. Aleshores s'ha de complir $\phi(\zeta_1) = \phi(\zeta_2)$ i l'estat corresponent es pot escollir per tal que sigui (a, b, b, c). Però aquest és un dels estats no desitjats del lema 5.13.

Resumint, T sempre té un estat no realitzable en C_m. Però això contradiu la nostra suposició.

Per tant, arribem a la conclusió que C_m és irreductible. $\square$

Amb aquest resultat podem entendre encara una mica millor el contingut de $\mathcal{S}(6)$, ja que explica la presència del 6-cicle. En general, ens permet afirmar que, per cada $m \geq 5$, un m-pol cíclic ha de pertànyer a $\mathcal{S}(m)$.

5.6.3 Conseqüències per $v(m)$: fites i monotonia parcial

El comportament general de $v(m)$ és bastant desconegut, però el resultat que acabem d'obtenir sobre els m-pols cíclics ens permet donar una fita lineal inferior una mica millor que la que hem obtingut anteriorment. Suposant que $m \geq 5$, com que $\mathcal{S}(m)$ sempre ha de contenir un m-pol consistent en un cicle d'm vèrtexs amb una semiaresta a cada vèrtex, aleshores el màxim nombre de vèrtexs d'un m-pol irreductible no pot ser més petit que m. Això ens dóna la fita $v(m) \geq m$, per $m \geq 5$.

Aquesta fita lineal inferior ens indica que, en termes generals, la funció $v(m)$ tendeix a créixer, però no ens permet descartar la possibilitat que $v(m)$ decreixi en alguns intervals de valors. Per precisar una mica més el comportament de $v(m)$, demostrarem dos enunciats més.

Lema 5.15. *Sigui M un multipol irreductible. Aleshores, tot submultipol $N \subset M$ també és irreductible.*

Demostració. La demostració és per reducció a l'absurd. Si un submultipol N d'M es pot reduir, posem per cas, a un multipol N', aleshores M es pot reduir a un multipol M' obtingut substituint N per N'. Això contradiu el fet que M és irreductible. $\square$

Teorema 5.16. *Sigui M un multipol irreductible. Aleshores, la unió disjunta d'M i una aresta lliure $\boldsymbol{e}$ també és un multipol irreductible.*

Demostració. La demostració és per reducció a l'absurd. Suposem que la unió disjunta d'M i $\boldsymbol{e}$ es pot reduir a un submultipol M'. Representem les semiarestes d'$\boldsymbol{e}$ amb ϵ_0 i ϵ_1, i les seves corresponents semiarestes en M' amb ϵ_0' i ϵ_1'. En el conjunt d'estats de $M \cup e$ (respectivament M'), tots els estats han de tenir $\phi(\epsilon_0) = \phi(\epsilon_1)$ (respectivament $\phi(\epsilon_0') = \phi(\epsilon_1')$). Això implica que ϵ_0' i ϵ_1' no són adjacents (és a dir, $\partial(\epsilon_0', \epsilon_1') > 0$) a no ser que constitueixin una aresta lliure $\boldsymbol{e}'$ també en el submultipol M', però aleshores M es podria reduir trivialment al multipol resultant d'eliminar $\boldsymbol{e}'$ en M' i ja hauríem arribat a una contradicció. Altrament, podem unir ϵ_0 a ϵ_1 en $M \cup \boldsymbol{e}$ i ϵ_0' a ϵ_1' en M'. En el primer cas, obtenim M i una aresta circular trivial que podem ignorar. En el segon cas, obtenim un multipol M'' el nombre de vèrtexs del qual és $|V(M'')| = |V(M')| < |V(M + \boldsymbol{e})| = |V(M)|$ i el nombre d'estats del qual és un subconjunt del conjunt d'estats d'M. Per definició, M es podria reduir a M'', contradient la suposició que havíem fet. $\square$

Pel lema 5.15, com que tot m-pol de $n \geq 1$ vèrtexs conté un $(m+1)$-pol de $n-1$ vèrtexs (n'hi ha prou d'esborrar una semiaresta $\epsilon = (v)$ i el seu vèrtex incident v per crear dues noves semiarestes ϵ' i ϵ''), tenim que $v(m + 1) \geq v(m) - 1$. Per tant, a partir dels resultats de [23], sabem que $v(7) \geq 11$.

Observem que $v(m)$ ha de tenir la mateixa paritat que m. Com a conseqüència del teorema 5.16, tenim que $v(m) \geq v(m-2)$. Per tant, la funció $v(m)$ és, com a mínim, parcialment monòtona en el sentit que els seus valors parells es comporten de manera monòtona, i els seus valors imparells també.

A més, com que $v(m+1) \geq v(m) - 1$, qualsevol decreixement local és com a màxim d'una unitat entre dos valors consecutius. Tanmateix, com que $v(m) \geq v(m-2)$, no hi pot haver dues disminucions consecutives d'una unitat cadascuna.

5.7 El problema de la factibilitat

5.7.1 Factibilitat de conjunts d'estats i el comportament de $v(m)$

Les dificultats a l'hora de determinar d'una manera general el contingut de $\mathcal{S}(m)$, i per tant el comportament de $v(m)$, estan relacionades amb el *problema de la factibilitat*, és a dir, el problema de determinar si un conjunt d'estats donat és factible, i fins i tot de trobar algun multipol que el realitzi. De moment no es coneix cap procediment general ben definit per determinar la factibilitat d'un conjunt d'estats ni per construir un multipol que el realitzi. La relació dels multipols amb problemes aritmètics que se suposen difícils, tal com ha quedat descrit a la secció 5.9, fa pensar que probablement la qüestió de la factibilitat és inherentment difícil. Això explicaria també les dificultats que presenta l'anàlisi de $\mathcal{S}(m)$ en el cas general.

5.7.2 Escletxes en el problema de la factibilitat

Malgrat la duresa del problema de la factibilitat, podem saber algunes coses. Tal com s'ha descrit a la secció 5.4, per qualsevol $m \geq 2$, el conjunt de tots els estats compatibles amb el Lema de Paritat és factible, i fins i tot sabem construir explícitament un multipol que el realitza: un multipol complet. A més, la quantitat de vèrtexs d'un m-pol complet d'ordre mínim té una fita inferior i una fita superior, totes dues lineals respecte a m.

També, la factibilitat d'alguns conjunts d'estats es pot descartar per mitjà de raonaments basats en intercanvis successius de colors (cadenes de Kempe) i en el coneixement dels casos amb el mínim nombre d'estats possible.

Els raonaments basats en cadenes de Kempe permeten demostrar que certs estats n'impliquen d'altres, de manera que es pot descartar la factibilitat de qualsevol conjunt d'estats que no sigui compatible amb aquesta mena d'implicacions. En particular, és impossible que un 6-pol tingui menys de 5 estats, ja que la presència de qualsevol estat implica la presència de com a mínim quatre estats més.

Així, els conjunts d'estats es poden dividir en tres categories: els factibles (per als quals es coneix almenys un multipol que els realitza), els demostrablement no factibles, i els de factibilitat indeterminada.

El nombre d'estats possibles segons el nombre d'extrems lliures m creix molt ràpidament, de manera exponencial, i el nombre d'm-pols d'n vèrtexs també creix molt ràpidament respecte a n, de manera que una anàlisi exhaustiva esdevé ràpidament molt costosa o materialment impracticable a mesura que m i n creixen.

Els conjunts d'estats d'm extrems lliures formen un ordre parcial respecte a la relació d'inclusió. El conjunt d'estats d'un m-pol complet n'inclou qualsevol altre. En l'altre extrem de la jerarquia, el conjunt buit està inclòs en qualsevol altre, però aquest és un cas trivial que correspondria a un multipol no Tait-acolorible. Els nivells intermedis de la jerarquia són els més nombrosos i els més difícils d'analitzar.

Suposant que tinguéssim un "oracle" de la factibilitat, el següent procediment permetria determinar $\mathcal{S}(m)$ i $v(m)$:

1. Agafem l'ordre parcial P dels conjunts d'estats d'm extrems lliures.

2. Invocant l'oracle, n'eliminem els que no siguin factibles. El resultat és un nou ordre parcial P', subordre de l'anterior.

3. Agafem els conjunts d'estats de P' que no n'inclouen cap altre (els elements minimals de l'ordre parcial P'). Invocant l'oracle, per cadascun d'aquests conjunts d'estats seleccionem, d'entre tots els m-pols que el realitzen, el que tingui menys vèrtexs. D'aquesta manera, haurem obtingut els m-pols irreductibles, és a dir, el conjunt $\mathcal{S}(m)$.

4. Identificant l'element de $\mathcal{S}(m)$ que tingui més vèrtexs, obtenim el valor de $v(m)$.

Un coneixement parcial de $\mathcal{S}(m)$, és a dir, el coneixement d'un subconjunt $s(m)$ de $\mathcal{S}(m)$, ens dóna una fita inferior de $v(m)$, ja que en $\mathcal{S}(m)$ pot haver-hi algun m-pol amb més vèrtexs dels que té qualsevol m-pol de $s(m)$. Per obtenir una fita superior, hauríem de trobar un conjunt $\Sigma(m)$ d'm-pols que tingués $\mathcal{S}(m)$ com a subconjunt. Aleshores, l'element de $\Sigma(m)$ amb una quantitat més gran de vèrtexs en tindria com a mínim tants com l'element més gran de $\mathcal{S}(m)$, o potser més. Per tant, es compleix la següent desigualtat:

$max_{\mu \in s(m)}|\mu| \leq v(m) \leq max_{M \in \Sigma(m)}|M|.$

Els resultats de [23] ens donen una fita inferior per al cas $m = 6$, mentre que el teorema 5.14, resultat publicat a [12], dóna una fita lineal inferior en el cas general per $m \geq 5$.

5.8 Les conjectures de Jaeger i Swart

5.8.1 Conjectura 1 desmentida per Kochol: relació amb el problema de $v(6)$

Jaeger i Swart van conjecturar que tot snark no trivial té "girth"com a màxim 6 (Conjectura 1 a [22]). Si aquesta conjectura fos certa, tindria conseqüències importants, ja que, tal com s'indica a [4], una caracterització dels snarks de "girth"6 com la que resultaria de conèixer $\mathcal{S}(6)$ exactament permetria determinar en temps polinòmic l'índex cromàtic d'un graf cúbic. Com que aquest és un problema $\mathcal{NP}$-complet, es demostraria que $\mathcal{P} = \mathcal{NP}$ (!). Com que en general es considera molt improbable que $\mathcal{P} = \mathcal{NP}$, o bé la possibilitat d'obtenir un coneixement exacte de $\mathcal{S}(6)$ seria igualment improbable, o bé la Conjectura 1 de Jaeger i Swart és falsa.

El cas és que l'esmentada conjectura és falsa: ho va demostrar Martin Kochol [24], el qual va construir famílies infinites d'snarks amb "girth"arbitràriament gran. La interessant construcció descrita per Kochol es basa en la combinació de diverses còpies del graf de Petersen. Gràcies al desmentiment de la conjectura, encara podem admetre la possibilitat que conèixer $\mathcal{S}(6)$, i per tant el valor exacte de $v(6)$, sigui més fàcil que resoldre la famosa qüestió $\mathcal{P}$ vs. $\mathcal{NP}$. Dit d'una altra manera, encara que determinar el valor de $v(6)$ sigui un problema difícil, encara podem suposar que resoldre'l no és desmesuradament ambiciós.

5.8.2 Conjectura 2 oberta: relació amb el problema de $v(6)$

La Conjectura 2 de Jaeger i Swart [22] té una formulació molt similar a la Conjectura 1, però substituint el "girth"per l'aresta-connectivitat cíclica: afirma que tot snark no trivial té aresta-connectivitat cíclica com a màxim 6. Aquest enunciat, més feble que el de la Conjectura 1, encara no s'ha pogut confirmar ni desmentir. No s'ha trobat cap contraexemple, ni tampoc s'ha pogut demostrar que la conjectura sigui certa en general.

Si la conjectura fos certa, això tindria conseqüències per a l'anàlisi d'snarks ja que, tal com avançàvem a la introducció, els casos de $\mathcal{S}(6)$ i de $v(6)$ serien els últims veritablement rellevants. La diferència entre haver d'examinar tots els talls per arestes possibles i haver d'examinar només els talls de fins a 6 arestes és la diferència entre una quantitat de casos exponencial i una quantitat de casos polinòmica respecte al nombre d'arestes. A més, l'aresta-connectivitat cíclica es pot determinar en temps polinòmic [8]. Per tant, una demostració de la conjectura implicaria una reducció considerable en la dificultat de l'anàlisi dels snarks. Tanmateix, continuaria sent un problema difícilment tractable, ja que no n'hi hauria prou d'identificar un tall cíclic de 6 arestes: caldria determinar si els conjunts d'estats dels 6-pols resultants són compatibles, la qual cosa tornaria a ser un problema d'aresta-acoloriment.

6 Conclusions

"No puc baixar fins que caigui." (Dit anant en bicicleta.)

Alan Turing, segons la biografia "Alan M. Turing" escrita per la seva mare Sara.

Hem vist que un problema de formulació molt senzilla com el del Tait-acoloriment de grafs cúbics té implicacions bastant profundes, ja que està relacionat amb el Teorema dels Quatre Colors, la qüestió $\mathcal{P}$ vs. $\mathcal{NP}$ i la factorització de nombres enters. També té relació amb qüestions importants de la teoria de grafs, com la Conjectura del Doble Recobriment per Cicles. No és estrany, doncs, que el Tait-acoloriment de grafs cúbics, i la identificació dels grafs cúbics no Tait-acoloribles, els snarks, siguin problemes costosos. Encara que la dificultat teòrica dels problemes $\mathcal{NP}$-complets no està aclarida, se suposa habitualment que $\mathcal{P} \neq \mathcal{NP}$, de manera que no hi podria haver cap algorisme exacte i general per determinar l'índex cromàtic d'un graf cúbic en temps polinòmic respecte a la mida del graf.

La suposada dificultat inherent dels problemes $\mathcal{NP}$-complets té conseqüències per la caracterització dels snarks no trivials i per problemes relacionats com ara el problema de la factibilitat, és a dir, la determinació de si un conjunt d'estats donat és factible o fins i tot la construcció d'un multipol que el realitzi. Malgrat aquestes dificultats, hem vist que els multipols proporcionen una eina molt valuosa per l'anàlisi i la síntesi d'snarks. És a través de l'enfocament basat en multipols, en particular dels interpretables com a portes lògiques, que podem constatar la relació entre el Tait-acoloriment de grafs cúbics i els circuits lògics i aritmètics, la qual cosa facilita la síntesi d'snarks arbitràriament grans a partir de circuits que no admeten cap assignació booleana i també a partir de nombres primers.

A l'hora d'analitzar els snarks, per mitjà de descomposicions, el concepte de multipol també resulta molt útil, especialment el de multipol irreductible, ja que la reducció de multipols permet substituir un snark per un altre de més petit però que manté la propietat de no ser Tait-acolorible. Naturalment, serà més fàcil estudiar i caracteritzar aquesta propietat si ens centrem en els snarks més petits possibles. Malgrat la conveniència d'aquest plantejament, l'estructura i el comportament dels multipols irreductibles és relativament desconeguda. En aquest treball hem intentat obrir una escletxa en aquesta qüestió, obtenint resultats generals sobre determinats tipus de multipols. Concretament, hem pogut demostrar que, per qualsevol nombre d'extrems lliures més gran o igual que cinc, els multipols forestals (en particular els arboris) i els multipols cíclics sempre són irreductibles. Encara que aquests resultats els hem demostrat matemàticament de manera rigorosa, havíem basat les nostres primeres conjectures en l'observació de regularitats detectades utilitzant mitjans informàtics. Així, doncs, els ordinadors no només poden ser crucials en casos com el del Teorema dels Quatre Colors, sinó que també poden ser extremadament útils per facilitar o fer possible la descoberta de lleis que després, quan ja han quedat exposades a la intuïció, es poden establir rigorosament.

També hem intentat obrir una escletxa en el problema de la factibilitat, demostrant que, de dos extrems lliures en amunt, els multipols complets sempre són factibles, i establint fites lineals que delimiten el creixement dels multipols complets d'ordre mínim. A més, podem donar construccions explícites de multipols complets, i sabem calcular el seu nombre exacte d'estats en funció del nombre d'extrems lliures.

En el front de les aplicacions pràctiques, hem proposat un algorisme heurístic ràpid i fàcil d'implementar que dóna resultats empíricament bons a l'hora de Tait-acolorir grafs cúbics grans. L'algorisme es pot generalitzar al Δ-aresta-acoloriment de grafs arbitraris de grau màxim Δ, també amb bons resultats empírics. Això ens ha permès comprovar una conjectura de Biggs sobre els anomenats "odd graphs" en casos concrets que, pel que sabíem, no havien estat inspeccionats prèviament. També ens ha servit per constatar que les limitacions teòriques a la viabilitat general dels algorismes d'aresta-acoloriment no tenen perquè impedir-nos resoldre aquest problema per instàncies concretes, fins i tot en el cas de grafs força grans, en un exemple del que a vegades s'anomena "ruptura de la intractabilitat".

7 Bibliografia

[1] G. M. Adelson-Velski i A. Titov, On 4-chromatic cubic graphs, *Voprosu Kibernetiki* **1** (1974).

[2] N. L. Biggs, Automorphic graphs and the Krein condition, *Geom. Dedicata* **5** (1976), 117–127.

[3] D. Blanuša, Problem cetiriju boja (en rus, "El Problema dels quatre colors"), *Glasnik Mat. Fiz. Astr. Ser. II* **1** (1946), 31–42.

[4] P. J. Cameron, A. G. Chetwynd i J. J. Watkins, Decomposition of snarks, *J. Graph Theory* **11** (1987), 13–19.

[5] L. Carroll, *The Hunting of the Snark*, Macmillan Publishers (1876).

[6] A. G. Chetwynd i R. J. Wilson, Snarks and supersnarks, in *The Theory and Applications of Graphs* (eds. G. Chartrand, Y. Alavi, D. L. Goldsmith, L. Lesniak-Foster i D. R. Lick.) John Wiley & Sons, New York (1981), 215–241.

[7] B. Descartes, Network-colourings, *Math. Gazette* **32** (1948), 67–69.

[8] Z. Dvořák, J. Kára, D. Král', O. Pangrác, An Algorithm for Cyclic Edge Connectivity of Cubic Graphs, *Lecture Notes in Computer Science*, Springer, vol. 3111 (2004), 236–247.

[9] M. A. Fiol, Contribución a la Teoría de Grafos Regulares. Projecte Final de Carrera, Universitat Politècnica de Catalunya (1979).

[10] M. A. Fiol, A Boolean algebra approach to the construction of snarks, in *Graph Theory, Combinatorics and Applications*, vol. 1 (eds. Y. Alavi, G. Chartrand, O. R. Oellermann i A. J. Schwenk) John Wiley & Sons, New York (1991), 493–524.

[11] M. A. Fiol i J. Vilaltella, A simple and fast heuristic algorithm for edge-coloring of graphs, *AKCE Int. J. Graphs Comb.* **10** (2013), no. 3, 263–272.

[12] M. A. Fiol i J. Vilaltella, Some results on the structure of multipoles in the study of snarks, *El. J. of Combinatorics* **22** (2015), no. 1, #P1.45.

[13] S. Fiorini i R. J. Wilson, Edge-colourings of graphs. *Research Notes in Mathematics* **16**, Pitman, London (1977).

[14] R. Fritsch i G. Fritsch, *The Four-Color Theorem: History, Topological Foundations, and Idea of Proof.* Translated by Julie Peschke. Springer (1998).

[15] M. Gardner, Mathematical Games: Snarks, Boojums and other conjectures related to the four-color-map theorem, *Sci. Amer* **234** (1976) 126–130.

[16] M. K. Goldberg, Construction of class 2 graphs with maximum vertex degree 3, *J. Combin. Theory, Ser. B* **31** (1981) 282–291.

[17] E. Grinberg, `https://dspace.lu.lv/dspace/bitstream/handle/7/2099/grinberg.before.flower.sn.pdf?sequence=4` (2013).

[18] I. Holyer, The $\mathcal{NP}$-completeness of edge-colouring, *SIAM J. Comput.* **10** (1981) 718–720.

[19] R. Impagliazzo, A personal view of average-case complexity, `http://cseweb.ucsd.edu/~russell/` (1995).

[20] R. Isaacs, Infinite families of nontrivial trivalent graphs which are not Tait colorable, *Am. Math. Monthly* **82** (1975), no. 3, 221–239.

[21] R. Isaacs, Loupekhine's snarks: a bifamily of non-Tait-colorable graphs. Technical Report 263, Dpt. of Math. Sci., The Johns Hopkins University, Maryland, U.S.A. (1976).

[22] F. Jaeger, T. Swart, Conjectures 1 i 2, a: M. Deza, I.G. Rosenberg (Eds.), Combinatorics, Vol. 79, in: *Ann. Discrete Math.* **9** (1980), North-Holland, Amsterdam, p. 305. Problem Session.

[23] J. Karabáš, E. Máčajová i R. Nedela, 6-decomposition of snarks, *European J. Combin.* **34** (2013), no. 1, 111–122.

[24] M. Kochol, Snarks without small cycles, *J. Combin. Theory, Ser. B* **67** (1996), 34–47.

[25] M. Kochol, A cyclically 6-edge-connected snark of order 118, Discrete Math. **161** (1996), 297–300.

[26] T. T. Lee, Y. Wan i H. Guan, Randomized Δ-edge-Coloring via quaternion of complex colors (Extended Abstract), *arXiv:1104.1852v1 [cs.DS]* (2011).

[27] R. Nedela i M. Škoviera, Decompositions and reductions of snarks, *J. Graph Theory* **22** (1996), 253–279.

[28] J. Petersen, Sur le théorème de Tait, *L'intermédiare des Mathématiciens* **5** (1898), 225–227.

[29] R. W. Robinson i N. C. Wormald, Almost all cubic graphs are hamiltonian, *Random struct. & alg.* **5** (1994) 363–374. doi: 10.1002/rsa.3240050209.

[30] T. L. Saaty i P. C. Kainen, *The Four-Color Problem. Assaults and Conquest*, Dover Publications, New York (1986).

[31] P. D. Seymour, Sums of circuits. *Graph theory and related topics (Proc. Conf., Univ. Waterloo, Waterloo, Ont., 1977)*, Academic Press, New York-London (1979), 341–355.

[32] E. Steffen, Classification and characterizations of snarks, *Discrete Math.* **188** (1998), no. 1-3, 183–203.

[33] G. Szekeres, Polyhedral decompositions of cubic graphs, *Bulletin of the Australian Mathematical Society* **8** (1973), no. 3, 367–387.

[34] P. G. Tait, On the colouring of maps, *Proc. Roy. Soc. Edinburgh* **10** (1880), 501–503.

[35] P. G. Tait, Further remarks on the colouring of maps, *Proc. Roy. Soc. Edinburgh* **10** (1880), 728–729.

[36] V. G. Vizing, On an estimate of the chromatic class of a p-graph, *Metody Diskret. Analiz.* **3** (1964), 25–30.

[37] J. J. Watkins, On the construction of snarks, *Ars Combin.* **16** (1983), 111–124.

Apèndix A: Autograph, un editor de grafs multiús

Durant l'elaboració d'aquest treball s'ha desenvolupat i utilitzat una eina d'edició i anàlisi de grafs anomenada *Autograph*. La versió actual, 1.2, es pot obtenir per mitjà del següent enllaç:

`http://www.ecograph.org/`

que també servirà per obtenir les versions futures.

En cas de topar amb alguna dificultat, si us plau contacteu amb l'autor:

`joanvilaltella@gmail.com`

Apèndix B: Descripció formal de l'algorisme DVC

Variables:

CG: Conflictivitat global del graf G
CGA: Valor anterior de la conflictivitat global del graf G (per poder fer la comparació amb CG)
$Conf$: Estructura de dades (diccionari) que relaciona cada valor del nivell de conflictivitat amb el conjunt de vèrtexs que tenen aquell valor
N: Nombre de vegades consecutives que s'ha escollit un vèrtex conflictiu i CG no ha disminuït
I: Nombre de vegades que N ha superat el màxim valor admès sense que s'arribés a anul·lar CG

Constants:

G: Graf d'n vèrtexs i grau màxim Δ
$R = 50$, màxim valor admès d'N
$L = 50$, màxim valor admès d'I

Algorisme:

$I \leftarrow 0$

Si G és cúbic:

Mentre $I \leq L$:

Fer un Tait-acoloriment inicial aleatori de G

Calcular el valor de CG

$CGA \leftarrow CG$

$N \leftarrow 0$

Mentre $N \leq R$:

Escollir un vèrtex conflictiu v
Escollir una aresta e entre les arestes incidents a v que són de color repetit
$a \leftarrow$ color actual de l'aresta e
Escollir un color b que, en ser assignat a l'aresta e, faci disminuir el nivell de conflictivitat del vèrtex v
Intercanviar els colors a i b al llarg de la cadena de Kempe que parteix de v i e
Calcular el valor de CG
Si $CG = 0$:
Desar el graf correctament Tait-acolorit
Notificar l'èxit de l'operació
Sortir
Altrament:
Si $CG < CGA$:
$N \leftarrow 0$

Altrament:

Incrementar N en una unitat

$CGA \leftarrow CG$

Incrementar I en una unitat

Notificar el fracàs de l'operació

Sortir

Altrament:

Mentre $I \leq L$:

Fer un Δ-aresta-acoloriment inicial cobdiciós de G

Actualitzar $Conf$

Calcular el valor de CG

$CGA \leftarrow CG$

$N \leftarrow 0$

Mentre $N \leq R$:

En base a $Conf$, escollir un vèrtex conflictiu v entre els que actualment tenen el nivell de conflictivitat més alt

Escollir una aresta e entre les arestes incidents a v que són de color repetit

$a \leftarrow$ color actual de l'aresta e

Escollir un color b que, en ser assignat a l'aresta e, faci disminuir el nivell de conflictivitat del vèrtex v

Intercanviar els colors a i b al llarg de la cadena de Kempe que parteix de v i e

Actualitzar $Conf$

Calcular el valor de CG

Si $CG = 0$:

Desar el graf correctament Δ-aresta-acolorit

Notificar l'èxit de l'operació

Sortir

Altrament:

Si $CG < CGA$:

$N \leftarrow 0$

Altrament:

Incrementar N en una unitat

$CGA \leftarrow CG$

Incrementar I en una unitat

Notificar el fracàs de l'operació

Sortir

Apèndix C: Codi en llenguatge Python de l'algorisme *DVC*

```
### Dades del sistema on s'ha executat el codi per fer les proves ###

#Operating system: Linux-3.2.0-31-generic-x86_64-with-Ubuntu-12.04-precise
#CPU: Intel(R) Core(TM) i3 CPU M 370 @ 2.40GHz. Cache size: 3072 KB
#CPU speed: 933.000 Hz


### Codi en llenguatge Python ###

from random import choice,randint
import networkx as nx

def properlyColored(G,u,D):
    return len(set(G[u].values()))==G.degree(u)
            and all(color in range(D) for color in G[u].values())

def checkEdgeColoring(G,D):
    return all(properlyColored(G,u,D) for u in G.nodes())

def conflictLevel(G,u): return G.degree(u)-len(set(G[u].values()))

def createConflictDictionary(G,D):
    conflict_dictionary=dict([(i,set([])) for i in range(1,D)])
    for u in G.nodes():
        conflict_level_u=conflictLevel(G,u)
        if conflict_level_u>0: conflict_dictionary[conflict_level_u].add(u)
    return conflict_dictionary

def updateConflictDictionary(G,u,conflict_dictionary,old_conflict_level_u):
    conflict_level_u=conflictLevel(G,u)
    if old_conflict_level_u>0:
        conflict_dictionary[old_conflict_level_u].remove(u)
    if conflict_level_u>0:
        conflict_dictionary[conflict_level_u].add(u)
    return conflict_level_u-old_conflict_level_u

def maxConflictLevel(conflict_dictionary):
    return max([conflict_level for conflict_level in conflict_dictionary
                if len(conflict_dictionary[conflict_level])>0])

def totalNumberOfConflicts(conflict_dictionary):
    return sum(conflict_level*len(conflict_dictionary[conflict_level])
                for conflict_level in conflict_dictionary)
```

```
def colorEdgeAndUpdate(G,u,v,color,conflict_dictionary):
    old_conflict_level_u=conflictLevel(G,u)
    old_conflict_level_v=conflictLevel(G,v)
    G[u][v]=G[v][u]=color
    updateConflictDictionary(G,u,conflict_dictionary,old_conflict_level_u)
    return updateConflictDictionary(G,v,conflict_dictionary,old_conflict_level_v)

def KempeNext(G,last,node,new_color,conflict_dictionary):
    available_for_next=[w for w in G[node] if w!=last and G[node][w]==new_color]
    if available_for_next==[]: next_node=None
    else: next_node=choice(available_for_next)
    old_color=G[last][node]
    conflict_level_variation=
        colorEdgeAndUpdate(G,last,node,new_color,conflict_dictionary)
    return conflict_level_variation,old_color,next_node

def KempeStep(G,last,node,new_color,conflict_dictionary):
    conflict_level_variation,old_color,next_node=
        KempeNext(G,last,node,new_color,conflict_dictionary)
    if conflict_level_variation<0 or next_node==None: return node,None,None
    return node,next_node,old_color

def KempeProcess(G,last,node,new_color,conflict_dictionary):
    Kempe_chain=set([])
    while new_color!=None and last not in Kempe_chain:
        Kempe_chain.add(last)
        last,node,new_color=KempeStep(G,last,node,new_color,conflict_dictionary)

def KempeStart(G,D,node,conflict_dictionary):
    colors=set(range(D))
    next_node=None
    for adjacent in G[node]:
        edge_color=G[node][adjacent]
        if edge_color in colors: colors.remove(edge_color)
        else: next_node=adjacent
    if next_node!=None:
        KempeProcess(G,node,next_node,choice(list(colors)),conflict_dictionary)

def preColoring(G,D): #Pre-coloring with a greedy algorithm
    for e in G.edges(): G[e[0]][e[1]]=G[e[1]][e[0]]=None
    for e in G.edges():
        available_colors=set(range(D))
        available_colors-=set(G[e[0]].values())
        available_colors-=set(G[e[1]].values())
        if available_colors==set(): G[e[0]][e[1]]=G[e[1]][e[0]]=randint(0,D-1)
```

```
        else: G[e[0]][e[1]]=G[e[1]][e[0]]=choice(list(available_colors))

#def preColoring(G,D): #Random pre-coloring
#    for e in G.edges(): G[e[0]][e[1]]=G[e[1]][e[0]]=randint(0,D-1)

def heuristic(G,D,repetition_limit):
    repetitionCounter=0
    conflict_dictionary=createConflictDictionary(G,D)
    previous=current=totalNumberOfConflicts(conflict_dictionary)
    while previous>0:
        highest_conflict_level=maxConflictLevel(conflict_dictionary)
        node=choice(list(conflict_dictionary[highest_conflict_level]))
        KempeStart(G,D,node,conflict_dictionary)
        current=totalNumberOfConflicts(conflict_dictionary)
        if current==0: return True
        if current>=previous:
            repetitionCounter+=1
            if repetitionCounter>repetition_limit: return False
        else: repetitionCounter=0
        previous=min(previous,current)
    return True

def applyHeuristic(G,D,repetition_limit,iteration_limit):
    preColoring(G,D)
    number_of_iterations=1
    while not heuristic(G,D,repetition_limit):
        if number_of_iterations>iteration_limit: break
        preColoring(G,D)
        number_of_iterations+=1
    print "Number of iterations:",number_of_iterations
    print "Edge-coloring successful:",checkEdgeColoring(G,D)



### Exemple ###

repetition_limit=iteration_limit=50
NUMBER_OF_VERTICES=50000
DEGREE=3
G=nx.random_regular_graph(DEGREE,NUMBER_OF_VERTICES)
applyHeuristic(G,DEGREE,repetition_limit,iteration_limit)
```

Índex alfabètic[8]

[8] Els números indiquen: o bé la primera aparició d'un autor o concepte, o bé la definició formal d'un concepte (encara que s'hagi esmentat prèviament a la introducció). Hem preferit utilitzar els identificadors dels capítols, seccions i subseccions en lloc dels números de pàgina.

Disc òptic digital amb el contingut d'aquest treball