

ADVERTIMENT. La consulta d'aquesta tesi queda condicionada a l'acceptació de les següents condicions d'ús: La difusió d'aquesta tesi per mitjà del servei TDX (www.tesisenxarxa.net) ha estat autoritzada pels titulars dels drets de propietat intel·lectual únicament per a usos privats emmarcats en activitats d'investigació i docència. No s'autoritza la seva reproducció amb finalitats de lucre ni la seva difusió i posada a disposició des d'un lloc aliè al servei TDX. No s'autoritza la presentació del seu contingut en una finestra o marc aliè a TDX (framing). Aquesta reserva de drets afecta tant al resum de presentació de la tesi com als seus continguts. En la utilització o cita de parts de la tesi és obligat indicar el nom de la persona autora.

ADVERTENCIA. La consulta de esta tesis queda condicionada a la aceptación de las siguientes condiciones de uso: La difusión de esta tesis por medio del servicio TDR (www.tesisenred.net) ha sido autorizada por los titulares de los derechos de propiedad intelectual únicamente para usos privados enmarcados en actividades de investigación y docencia. No se autoriza su reproducción con finalidades de lucro ni su difusión y puesta a disposición desde un sitio ajeno al servicio TDR. No se autoriza la presentación de su contenido en una ventana o marco ajeno a TDR (framing). Esta reserva de derechos afecta tanto al resumen de presentación de la tesis como a sus contenidos. En la utilización o cita de partes de la tesis es obligado indicar el nombre de la persona autora.

WARNING. On having consulted this thesis you're accepting the following use conditions: Spreading this thesis by the TDX (www.tesisenxarxa.net) service has been authorized by the titular of the intellectual property rights only for private uses placed in investigation and teaching activities. Reproduction with lucrative aims is not authorized neither its spreading and availability from a site foreign to the TDX service. Introducing its content in a window or frame foreign to the TDX service is not authorized (framing). This rights affect to the presentation summary of the thesis as well as to its contents. In the using or citation of parts of the thesis it's obliged to indicate the name of the author



UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE CATALUNYA
BARCELONATECH

Departament d'Enginyeria Electrònica

Mesura de la conductivitat elèctrica de l'aigua amb elèctrodes capacitius

Tesi doctoral presentada per a
l'obtenció del títol de Doctor per la
Universitat Politècnica de Catalunya

Carles Aliau Bonet

Director: **Dr. Ramon Pallàs Areny**

Desembre de 2015



UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE CATALUNYA
BARCELONATECH

Departament d'Enginyeria Electrònica

Mesura de la conductivitat elèctrica de l'aigua amb elèctrodes capacitius

Tesi doctoral presentada per a l'obtenció del títol de Doctor per la
Universitat Politècnica de Catalunya

Carles Aliau Bonet

Director: Dr. Ramon Pallàs Areny

Desembre de 2015

A Júlia i a Marc.

“Cantar, ballar, riure,
mirar amb lo cap ben alt,
parlar fort, i ser lliure;
anar amb lo barret tort,
contemplar l'univers,
per un sí o per un no, barallar-me
o fer un vers!

...

i, encara que no sigue alt lo meu vol,
que no arribe massa lluny,
saber que he anat tot sol!”

Cyrano de Bergerac

Agraïments

Vull agrair a Ramon Pallàs el seu suport com a director i l'oportunitat que em va donar per poder realitzar aquesta tesi. Agrair també a Marcos Quílez i Oscar Casas la seva ajuda i recolzament i per aguantar més d'una conversa d'aquelles que fan entrar mal de cap. I donar les gràcies a tots els companys de treball del grup ISI, on he estat molt a gust treballant tots aquests anys.

Part d'aquesta tesi s'ha realitzat en el marc del projecte *Instrumentación no invasiva para monitorizar y evaluar tendencias en el sistema cardiovascular* (TEC2009-13022), finançat pel Ministerio de Ciencia e Innovación.

Resum

La conductivitat elèctrica de l'aigua és un bon indicador de la seva qualitat. Es mesura amb cel·les d'elèctrodes de contacte directe entre l'elèctrode i l'electròlit, cel·les inductives o cel·les d'elèctrodes capacitius. La mesura de la conductivitat elèctrica de l'aigua amb elèctrodes capacitius és una necessitat quan es mesura des de l'exterior d'un recipient aïllant, i una conveniència quan es vol evitar la degradació dels elèctrodes.

Els models de les mesures d'impedància elèctrica sense contacte amb elèctrodes capacitius solen obviar les capacitats paràsites que podrien afectar les mesures. Els instruments habitualment emprats per mesurar la impedància elèctrica dels materials són insensibles a algunes d'aquestes capacitats paràsites però no a totes. Diversos autors han sospitat que algunes d'elles provoquen resultats imprevistos, com ara efectes inductius, però la majoria dels efectes descrits a la bibliografia s'han observat en mesures amb elèctrodes de contacte directe. Per elèctrodes capacitius, hi ha poques observacions, menys anàlisis, i cap solució coneguda.

L'objectiu principal d'aquesta tesi és concebre i verificar un mètode de mesura de la conductivitat elèctrica de l'aigua dins de recipients de parets elèctricament aïllants, mitjançant elèctrodes capacitius situats a l'exterior del recipient.

La impedància de l'aigua (R_x , que conté la informació de la conductivitat, i C_x), de l'elèctrode (R_e i C_e) i entre elèctrodes (R_{hl} i C_{hl}) s'han modelitzat com una resistència en paral·lel amb una capacitat. Els valors de R_e i C_e variaran substancialment segons el tipus d'elèctrodes. La capacitat paràsita C_g entre el material que es mesura i terra és de paràmetres distribuïts, i té efectes diferents segons el sistema de mesura usat. L'estudi s'ha centrat en els sistemes que apliquen una tensió i mesuren el corrent que surt del material, i en particular en els pseudopunts automàtics. C_g redueix el corrent que es mesura, i això s'interpreta com un efecte inductiu perquè fa que la impedància calculada augmenti amb la freqüència. L'anàlisi mostra que C_g es "gira" i queda en sèrie amb la impedància del material i dels elèctrodes. Quan es mesura un material modelitzat com R_x en paral·lel amb C_x , a més d'un efecte inductiu hi ha efectes resistius i capacitius, deguts a C_g . C_g canvia la influència de la impedància dels elèctrodes en la mesura segons el valor de la relació C_g/C_e i d'aquí se'n dedueix que les mesures amb elèctrodes capacitius són molt més sensibles a C_g que les mesures fetes amb elèctrodes de contacte directe.

Mesurant amb elèctrodes de contacte directe, les impedàncies dels elèctrodes i la de fuites no tenen efectes significatius. Els elèctrodes influeixen a baixa freqüència i els efectes de C_g es veuen més a alta freqüència. Entre mig, hi ha una banda plana on es pot mesurar bé la R_x . Si C_g es prou gran respecte a C_x , hi ha pics en el mòdul, i fins i tot fases positives. El paràmetre rellevant no és el valor de C_g sinó la relació C_g/C_x . Les mesures de C_x a alta freqüència no són fiables pels efectes de propagació d'ones quan la separació dels elèctrodes supera $\lambda/126$.

Les mesures amb quatre elèctrodes de contacte directe no solucionen els efectes de C_g sinó que també s'observen efectes inductius i ressonàncies a alta freqüència, i a més hi ha un augment de la impedància que no depèn de la freqüència quan augmenta C_g , però sí que depèn de la relació entre C_g i C_e de l'elèctrode de mesura del corrent.

La mesura de conductivitat elèctrica de l'aigua amb elèctrodes capacitius està més afectada per C_g i C_{hl} que en el cas de contacte directe, perquè C_e , C_g , C_{hl} i C_x són comparables. La resistència de fuites R_{hl} queda en paral·lel amb la dels elèctrodes R_e i si R_{hl} disminueix, augmenta la part real de la impedància mesurada a baixes freqüències. L'efecte de la capacitat paràsita entre elèctrodes C_{hl} és una disminució de la part real de la impedància, independent de la freqüència, i aquesta disminució depèn de la relació C_{hl}/C_e . Quan augmenta C_g , augmenta la part real de la impedància; aquest augment depèn de C_g/C_e i també és independent de la freqüència. Si augmenta C_g , augmenta l'efecte de C_{hl} , i fa disminuir l'interval freqüencial de treball. Coneixent el valor de C_e i de C_{hl} es pot obtenir C_g a partir de la mesura de la part imaginària de la impedància a baixa freqüència perquè augmentar C_g fa disminuir la capacitat equivalent entre els elèctrodes de mesura. C_e es pot estimar fent que un dels elèctrodes sigui de contacte directe i C_{hl} s'estima a partir de la mesura en buit de la cel·la. Conegudes C_e , C_{hl} i C_g es pot calcular R_x en la banda on la part real de la impedància és plana. A més, si fixem C_{hl} i C_g , per exemple apantallant la cel·la de mesura, els factors que depenen de C_e , C_{hl} i C_g es poden incloure a una constant de cel·la equivalent. Per tant, s'ha assolit l'objectiu principal de la tesi, que era mesurar la conductivitat elèctrica de l'aigua amb elèctrodes capacitius.

Abstract

Electric conductivity is a good estimator of water quality. It can be measured by using cells with direct contact between the electrodes and the electrolyte, inductive cells or cells with capacitive electrodes. The use of capacitive electrodes is a need when measurements are made from the outside of an insulating container, and it is advisable when electrode degradation is to be avoided.

Electrical impedance models for measurements using capacitive electrodes often obviate parasitic capacitances that may affect the measured values. The instruments commonly used for measuring the electrical impedance of materials are insensitive to some of these capacitances, but not to all of them. Some authors have pointed that parasitic capacitances may lead to unpredicted results, such as inductive effects, but most of the described phenomena are related to direct contact electrodes. Regarding capacitive electrodes there are few descriptions of stray impedances, even fewer analysis and no known solution.

The main objective of this work is to define and to verify a method to measure the conductivity of water in non-conductive containers using capacitive electrodes on the outer side of the recipient.

The impedance of water (R_x , which contains the information about conductivity, and C_x), the impedance of the electrode (R_e and C_e), and the impedance between electrodes (R_{hl} and C_{hl}) are modelled by a resistance in parallel with a capacitance. The parasitic capacitance C_g between the material under test and earth ground is an element with distributed parameters, and its effects are different depend on the measuring system. This study is focused on those systems that apply a voltage to the material and that measure the output current at the material, in particular on auto-balancing bridges. C_g diminishes the measured current, which is shown as an inductive effect as the calculated impedance increases with frequency. The analysis performed shows the gyration undergone by C_g and the effect is an “apparent” impedance connected in series with the impedance under test and the impedance of the electrodes. For materials modeled by R_x in parallel with C_x , besides the inductive effect, there are resistive and capacitive effects also due to C_g . This effects due to C_g depend on the ratio C_g/C_e .

When direct contact electrodes are used, the impedance of the electrodes and the leakage impedance have no significant effect. Electrodes have influence at the lower frequencies whereas the effects of C_g appear at higher frequencies. In the middle range, there is a flat frequency band where R_x can be easily measured. If C_g is higher than C_x , peaks in the magnitude of the impedance as well as positive phases may be found. The relevant parameter is not the value of C_g but the ratio C_g/C_x . Measurements using four electrodes do not avoid the effects of C_g . In addition to inductive effects and resonances at high frequency, There is, when C_g increases, also an increment of the impedance that is independent from the frequency.

The effects of C_g and C_{hl} are more noticeable for capacitive electrodes. The leakage resistance R_{hl} shunts R_e , and when R_{hl} decreases, the real part of the impedance increases at low frequencies. The effect of the parasitic capacitance between the electrodes C_{hl} is a reduction of the real part of the impedance that is frequency independent. When C_g increases, the real part of the impedance increases, and this increment is not frequency dependant either. If C_e and C_{hl} are known, C_g can be obtained from the measurement at low frequency of the imaginary part of the impedance, since increasing C_g makes the equivalent capacitance between the electrodes to decrease. Once C_e , C_{hl} and C_g are known, R_x can be calculated in the frequency band where the real part of the impedance is flat. In addition, setting C_{hl} and C_g , for instance by shielding the measurement cell, the parameters that depend on C_e , C_{hl} and C_g can be included in an equivalent constant cell.

Agraïments

Resum

1. Introducció: Objectius i el seu interès	1
1.1. Mesura de la conductivitat elèctrica de l'aigua	2
1.1.1. Cel·les amb elèctrodes de contacte directe amb el líquid	3
1.1.2. Cel·les sense contacte inductives	5
1.1.3. Cel·les sense contacte capacitives	6
1.2. Mesura d'impedància sense contacte amb elèctrodes capacitius	7
1.3. Mesura d'impedància a altes freqüències	13
1.3.1. Instrumentació per mesurar impedància a altes freqüències.....	13
1.3.2. Mesura d'impedància de volums conductors	15
1.4. Objectius de la tesi	20
1.5. Organització del document.....	21
2. Models d'impedància elèctrica.....	23
2.1. Model de la impedància elèctrica d'un material homogeni	24
2.2. Model de la impedància elèctrica d'un material homogeni que s'ha de mesurar	27
2.2.1. Limitacions en la mesura d'impedància elèctrica	27
2.2.2. Model de la impedància elèctrica incloent-hi les impedàncies dels elèctrodes	28
2.2.3. Model de la impedància elèctrica incloent la impedància (de fuites) entre elèctrodes	33
2.2.3.1. Efecte de la impedància de fuites entre elèctrodes quan es mesura una impedància predominantment resistiva.....	36
2.2.3.2. Efecte de la impedància de fuites entre elèctrodes quan es mesura una impedància predominantment reactiva	36
2.2.4. Model de la impedància incloent l'entorn electromagnètic.....	42
2.3. Conclusions.....	44

3. Mesura d'impedància elèctrica.....	47
3.1. Mesura d'impedància elèctrica amb dos terminals incloent-hi les capacitats paràsites	48
3.1.1. Efecte de l'acoblament a terra modelat amb paràmetres concentrats	51
3.1.2. Efecte de l'acoblament a terra modelat amb paràmetres distribuïts	53
3.1.3. Mesura d'impedància elèctrica amb injecció simètrica.....	57
3.2. Mesura d'impedància elèctrica mitjançant un pseudopont automàtic.....	58
3.3. Model de paràmetres concentrats de la mesura d'impedància elèctrica amb dos elèctrodes mitjançant un pseudopont automàtic	61
3.4. Aproximació quasi-estàtica i efectes de propagació d'ona	65
3.5. Conclusions	70
4. Mesures d'impedància bipolars amb elèctrodes de contacte directe. Efectes de les capacitats paràsites	73
4.1. Model de la impedància i anàlisi dels efectes de les capacitats paràsites	75
4.1.1. Circuit equivalent del material, elèctrodes i acoblament a terra.....	75
4.1.2. Efectes de la capacitat entre elèctrodes C_{hl}	82
4.2. Verificació experimental.....	84
4.2.1. Disseny de l'experiment.....	84
4.2.2. Resultats experimentals i discussió	86
4.2.2.1. Estimació experimental de la capacitat d'acoblament a terra.....	86
4.2.2.2. Estudi experimental de l'efecte de l'acoblament a terra.....	86
4.2.2.3. Estudi experimental de l'efecte de la capacitat paràsita entre elèctrodes	93
4.2.2.4. Discussió sobre el model de paràmetres concentrats per descriure una capacitat distribuïda.....	95
4.3. Conclusions	96
5. Mesures d'impedància tetrapolars amb elèctrodes de contacte directe. Efectes de les capacitats paràsites	99
5.1. Model de la impedància tetrapolar i el seu anàlisi.....	100
5.1.1. Mètode de mesura d'impedància amb quatre elèctrodes	100
5.1.2. Model de la impedància mesurada	103
5.2. Verificació experimental.....	106

5.2.1. Disseny de l'experiment.....	106
5.2.2. Resultats experimentals i discussió	107
5.3. Conclusions.....	109
6. Mesures d'impedància bipolars amb elèctrodes capacitius. Aplicació a la mesura de la conductivitat elèctrica de l'aigua	111
6.1. Model de la impedància i anàlisi dels efectes de les capacitats paràsites	114
6.1.1. Model de la impedància entre H i L sense incloure l'acoblament a terra C_g	117
6.1.2. Model de la impedància entre H i L incloent-hi l'acoblament a terra C_g	122
6.2. Verificació experimental.....	130
6.2.1. Disseny dels experiments	131
6.2.1.1. Cel les.....	131
6.2.1.2. Banda de freqüències de treball, instruments i materials utilitzats	132
6.2.1.3. Procediments de mesura	133
6.2.2. Resultats experimentals i discussió	135
6.2.2.1. Mesures preliminars: mesura del mòdul i de la fase de la impedància amb el procediment "pla de terra"	135
6.2.2.2. Estimació experimental de la capacitat dels elèctrodes C_e , i de les capacitats paràsites: la capacitat entre elèctrodes C_{hl} i la capacitat d'acoblament a terra C_g	137
6.2.2.3. Estudi experimental de l'efecte de la impedància de fuites: C_{hl} i R_{hl}	139
6.2.2.4. Estudi experimental de l'efecte de l'acoblament a terra: C_g	145
6.2.2.5. Mesura de la conductivitat de l'aigua amb elèctrodes capacitius	151
6.3. Conclusions.....	152
7. Conclusions Generals	155
Referències i bibliografia	163
Annexos	175
Annex A	
Punts singulars del mòdul i la fase d'una impedància mesurada amb dos elèctrodes de contacte directe i un pseudo-pont automàtic	176

Annex B	
Efecte de la capacitat entre elèctrodes en una mesura d'impedància amb dos elèctrodes de contacte directe.....	178
Annex C	
Impedància equivalent mesurada amb el mètode dels quatre elèctrodes.....	181
Annex D	
Esquema i corbes de resposta de l'amplificador d'instrumentació dissenyat mesurar impedància amb quatre elèctrodes.....	183
Annex E.	
Mesures d'impedància bipolars amb elèctrodes capacitius ideals.....	185
Articles publicats a revista i congrés	203

Capítol 1

1. Introducció: Objectius i el seu interès

La conductivitat elèctrica de l'aigua és un bon indicador de la seva qualitat perquè informa de la quantitat de sòlids que porta dissolts. La seva mesura és una de les més utilitzades, juntament amb la del pH, tot i que no és una mesura selectiva perquè no determina quin és el sòlid dissolt responsable de la conducció elèctrica (Göpel 1991). S'aplica en abastament d'aigua potable, agricultura, depuració d'aigües residuals, dessaladores, turbines de generació d'energia, a les indústries alimentària, farmacèutica i química, i altres (Ayers i Westcot 1985; Rosemount 2011; Leonard 2014). Cal destacar la importància que té en abastament, on està reglamentat que la conductivitat elèctrica de l'aigua per al consum humà no pot superar els 2500 $\mu\text{S}/\text{cm}$ a 20 °C (Real Decreto 140/2003), i també en agricultura, per la reducció del rendiment de les collites quan la conductivitat de l'aigua de reg és massa alta (Ayers i Westcot 1985).

Tot i que la mesura de conductivitat s'utilitza des de la segona meitat del segle XIX (Göpel 1991), aquest és encara un tema de recerca en aspectes com ara el disseny de sensors de

conductivitat elèctrica basats en la micromecanització en substrats de silici que permetin mesurar volums de líquid molt petits (He *et al.* 2005; Hyldgård *et al.* 2008), o el desenvolupament de sistemes de baix cost per a la mesura de diversos paràmetres relatius a la qualitat de l'aigua, inclosa la seva conductivitat elèctrica (Rao *et al.* 2013), i el disseny de sondes de baix cost per monitoritzar la qualitat de l'aigua en molts punts i poder detectar canvis i focus de contaminació en el medi ambient (Ramos *et al.* 2008). Aquesta tesi s'emmarca dins aquest darrer àmbit de noves sondes de baix cost per mesurar en volums relativament grans.

1.1. Mesura de la conductivitat elèctrica de l'aigua

La conductivitat elèctrica d'un material, en aquest cas l'aigua, és pot mesurar aplicant la llei d'Ohm. Quan s'aplica un camp elèctric a un volum d'aigua, les càrregues lliures que hi hagi, com ara els ions de les sals dissoltes, es mouen segons la seva polaritat, i el quocient entre la densitat del corrent provocat i el camp elèctric aplicat és la conductivitat elèctrica (Kissinger i Heineman 1996; Jordan i Balmain 1968). Per tant, si es coneix la intensitat del camp elèctric, mesurant la densitat de corrent es podrà calcular la conductivitat de l'aigua. Per crear un camp elèctric dins el material es pot aplicar una diferència de potencial entre uns elèctrodes immersos o que envoltin el volum que es mesura, o bé es pot aplicar un camp magnètic variable que hi indueixi un corrent elèctric (Jordan i Balmain 1968).

Atès que mesurar camp elèctric o magnètic i densitat de corrent és relativament complex, normalment la conductivitat d'un líquid es calcula a partir de mesures de tensions i corrents, que es poden fer amb aparells més convencionals. Així, per exemple, la conductivitat elèctrica de l'aigua és pot obtenir mesurant la resistència elèctrica entre dos elèctrodes conductors submergits: s'aplica entre ells una tensió coneguda i es mesura el corrent que en resulta. La conductivitat està relacionada amb aquesta resistència a través d'un factor geomètric, denominat *constant de cel·la*, que depèn de l'àrea i de la separació entre els elèctrodes i de la seva forma (Göpel 1991; Kissinger i Heineman 1996; Máriássy *et al.* 2009). Si la tensió que s'aplica entre els elèctrodes, normalment metàl·lics, és continua, a la interfície entre cada elèctrode i l'aigua hi ha reaccions d'oxidació-reducció (redox) que converteixen els corrents iònics dins l'aigua en corrents electrònics en el circuit de mesura connectat als elèctrodes metàl·lics. Aquestes reaccions modifiquen la composició de l'aigua i per tant la seva resistència elèctrica, de manera que la mesura de la conductivitat seria errònia. Per aquesta raó les mesures de conductivitat no es fan habitualment aplicant tensions ni corrents continus sinó alterns (Kissinger i Heineman 1996).

Si la tensió aplicada entre els elèctrodes és sinusoidal, el resultat de la mesura dependrà no només de la conductivitat elèctrica de l'aigua (σ) sinó també de la seva permitivitat (ϵ), i el quocient entre la tensió i el corrent serà la impedància que presenta la cel·la amb aigua. La impedància d'un material homogeni com l'aigua es pot descriure, emprant un circuit model, com una conductància G_x connectada en paral·lel amb una capacitat C_x , de manera que si la freqüència de la tensió aplicada és prou baixa, la capacitat no curtcircuitarà la conductància. En general, G_x i C_x depenen de la freqüència, sobre tot en materials compostos. G_x i C_x descriuen la capacitat del material per conduir i emmagatzemar electricitat, i estan relacionades, respectivament, amb la conductivitat elèctrica i la permitivitat elèctrica del material a través del mateix factor geomètric (constant de cel·la) (Coster *et al.* 1996). La permitivitat de l'aigua depèn també de la concentració de les sals que hi hagi dissoltes (Stogryn 1971). Tant la conductivitat com la permitivitat de l'aigua depenen de la temperatura. La dependència de la conductivitat és gairebé lineal i el coeficient de temperatura és ben conegut (UNE EN 27888 1993; ASTM D 1125-95 2007). La dependència de la permitivitat elèctrica amb la temperatura, en canvi, es descriu mitjançant una funció polinòmica (Stogryn 1971; Lide 2002). Altres factors que afecten la mesura de la conductivitat de l'aigua són la presència de bombolles d'aire, CO_2 i olis (UNE EN 27888 1993).

Segons la forma com es crea el camp elèctric en l'aigua, hi ha tres tipus de cel·les de mesura de conductivitat elèctrica: amb elèctrodes en contacte directe amb l'aigua, amb elèctrodes capacitius, i sense elèctrodes o mètode inductiu. Tan el mètode capacitiu com l'inductiu es consideren mètodes de mesura sense contacte (Göpel 1991), que vol dir que, tot i que hi ha contacte mecànic, no hi ha contacte elèctric entre els elèctrodes i l'aigua. No es tracta, però, de mesures a distància.

1.1.1. Cel·les amb elèctrodes de contacte directe amb el líquid

Les cel·les amb elèctrodes que fan contacte directe (elèctric) amb el líquid són les més habituals. Normalment consten d'un parell d'elèctrodes submergits en el líquid, i entre els quals s'aplica una tensió alterna. Aquesta tensió crea un camp elèctric altern que provoca un corrent també altern. La impedància mesurada entre els elèctrodes inclou la impedància de l'aigua i la dels propis elèctrodes, deguda sobre tot a la interfície entre l'elèctrode i l'aigua (Göpel 1991). En aquesta interfície es produeixen interaccions físico-químiques que poden afectar la mesura. Per exemple, si les amplituds de l'excitació són grans, a la interfície entre el metall i el líquid hi ha una rectificació del senyal. Per evitar-ho i tenir un comportament

lineal de la interfície, cal que l'excitació sigui de baixa amplitud (McAdams *et al.* 1995; Geddes 1997).

La impedància de la interfície entre l'elèctrode i l'aigua, denominada simplement impedància d'elèctrode, es descriu normalment mitjançant tres elements (fig. 1.1), el valor dels quals depèn de la freqüència de l'excitació, i de la tensió si no fos prou petita: la capacitat de la doble capa (C_I), la resistència de transferència de càrrega (R_t) i la impedància de difusió (R_w i C_w); R_s a la fig. 1.1 modelitza la resistència de l'aigua (Borkholder 1998). La tensió aplicada entre els elèctrodes provoca una acumulació d'ions a la superfície de cada elèctrode immers, de manera que es creen dues capes de càrregues amb signes contraris, una a l'elèctrode i l'altra a l'aigua; aquest fenomen es modelitza mitjançant la denominada *capacitat de la doble capa*. L'acumulació d'ions a la interfície provoca uns corrents de difusió, modelitzats per una impedància, denominada de Warburg o element de fase constant. Les reaccions redox a la interfície es modelitzen mitjançant la resistència de transferència de càrrega (McAdams *et al.* 1995; Geddes 1997; Borkholder 1998). Aquests tres fenòmens s'anomenen globalment *efectes de polarització* dels elèctrodes (Göpel 1991).

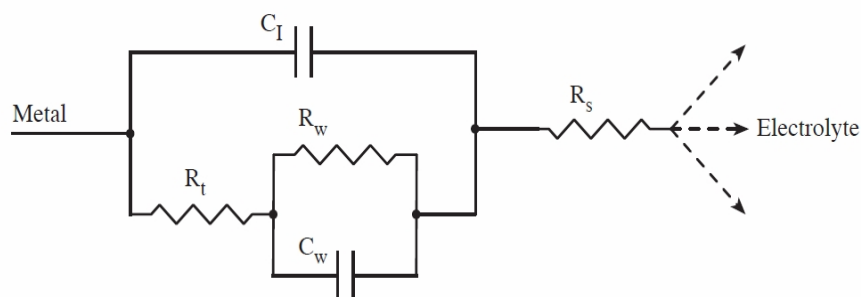


Figura 1.1. Model de la impedància de la interfície entre l'elèctrode i l'aigua. R_s és la resistència del volum d'aigua (Borkholder 1998).

Un recurs per minimitzar la impedància d'un elèctrode és recobrir-lo amb platí negre (Göpel 1991) perquè així augmenta la seva àrea efectiva; llavors, la impedància que predomina és la capacitat de la doble capa i el comportament de la interfície és més predictable (He *et al.* 2005). Una altra manera de minimitzar l'efecte de la impedància d'elèctrode és emprant més elèctrodes. A les cel·les de quatre elèctrodes s'aplica una tensió (o es fa circular un corrent) entre un parell d'elèctrodes, i es mesura, respectivament, el corrent o la diferència de potencial entre una altre parell d'elèctrodes (Göpel 1991; He *et al.* 2005; Ramos *et al.* 2008). Els circuits de mesura són, però, més complexos que quan

s'empra un sol parell d'elèctrodes perquè o bé l'excitació o la detecció ha de ser diferencial (Mazzeo i Flewitt 2007; Pliquett 2010), i tot i així sempre queden encara alguns efectes dels elèctrodes sobre la mesura (Mazzeo i Flewitt 2007; Grimnes i Martinsen 2007). Tanmateix, hi ha sondes comercials tant amb dos com amb quatre elèctrodes que empren titani (Rosemount 2011) o grafit (WTW 2012), i dissenyades per aconseguir un rang de constants de cel·la prou ampli per poder cobrir un rang de mesura de conductivitat gran.

Amb independència del nombre d'elèctrodes, un problema comú és que la seva immersió fa que s'embrutin per adherència o deposició de matèria (Ramos *et al.* 2008), fet que afecta la seva impedància i a més en fomenta la corrosió (Göpel 1991). Si la mesura es fa en aigua circulant, l'abrasió pot degradar l'elèctrode i la immersió pot obstaculitzar el flux.

1.1.2. Cel·les sense contacte inductives

Les cel·les de conductivitat inductives estan basades en l'acoblament magnètic entre un o dos bobinats i el volum d'aigua que es vol mesurar. El camp magnètic altern creat per un primer bobinat genera un camp elèctric altern dins l'aigua i aquest crea un corrent (de Foucault), que depèn de la impedància de l'aigua. Aquest corrent crea un altre camp magnètic que induïx en el primer o en un segon bobinat una tensió alterna, i mesurant aquesta tensió s'obté la informació de la conductivitat de l'aigua, fig. 1.2 (Koski i Danielson 1979; Striggow i Dankert 1985; Ribeiro *et al.* 2006).

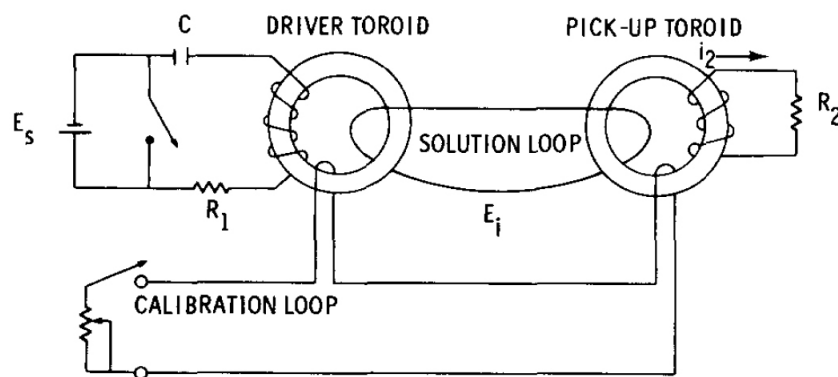


Figura 1.2. Cel·la de conductivitat inductiva (Koski i Danielson 1979).

Aquest mètode evita els elèctrodes conductors, amb les seves reaccions físico-químiques, i per tant no pateix els efectes de la impedància de la interfície entre elèctrode i líquid. Certament, les impedàncies de les autoinductàncies i inductàncies mútues entre bobinats i

l'aigua afectaran la mesura, però aquestes són impedàncies estables, a diferència de les impedàncies de les interfícies dels elèctrodes de contacte directe, que són més imprevisibles (Ribeiro *et al.* 2006).

Una limitació inherent a aquest mètode inductiu és que per crear un camp magnètic d'una certa intensitat cal un corrent elèctric relativament elevat, cosa que els fa menys atractiu per a sensors autònoms. Una altra és que les sondes inductives amb dos bobinats requereixen molt volum de mostra i les sondes d'un sol bobinat tenen una relació senyal a soroll molt baixa (Hofmann *et al.* 2005). Tanmateix, hi ha sondes comercials inductives, normalment toroïdals i amb els bobinats recoberts amb un material inert resistent a la corrosió i que s'embruta poc. Per mesurar en conductes hi ha, a més de sondes d'immersió, sondes externes que es posen al voltant del tub. Aquestes darreres sondes no obstrueixen el flux, però les seves dimensions són considerables (Rosemount 2011). En qualsevol cas, el seu àmbit d'aplicació és restringeix als líquids d'alta conductivitat, com ara en oceanografia (Striggow i Dankert 1985), on la conductivitat de l'aigua pot superar els 50 mS/cm (WTW 2012).

1.1.3. Cel·les sense contacte capacitives

Un altre tipus de sensors de conductivitat que no necessita un contacte elèctric directe amb el líquid mesurat són les cel·les capacitives. Es basen en crear un camp elèctric aplicant una tensió entre els elèctrodes d'un condensador situats a la part exterior del cos aïllant de la cel·la. Al separar l'elèctrode del líquid mitjançant un aïllant elèctric, l'única interacció química que resta és la doble capa de la interfície entre l'aïllant i l'aigua. En sèrie amb la capacitat d'aquesta doble capa hi ha la capacitat (d'elèctrode) formada entre l'elèctrode, el dielèctric de la paret de la cel·la i la superfície del líquid, que és molt més petita que la capacitat de doble capa perquè aquesta és molt més prima. Per tant, predomina la impedància de la capacitat de l'elèctrode, que afectarà la mesura perquè és una impedància en sèrie amb la de l'aigua. Tanmateix, és una impedància estable, a diferència de la impedància imprevisible de la interfície dels elèctrodes de contacte directe (Laugere *et al.* 2001; Hofmann *et al.* 2005). Per reduir el seu valor, la tensió que s'aplica als elèctrodes sovint és d'alta freqüència (1 a 100 MHz) (Göpel 1991).

Tot i que la mesura de la conductivitat elèctrica de líquids amb elèctrodes capacitius fa temps que és coneguda (Miksch 1962), és molt poc comuna per la seva baixa sensibilitat i poca fiabilitat, però la recent millora de les tècniques de mesura d'impedància a alta

freqüència han fet renéixer el seu interès, en particular en l'electroforesi capil·lar on s'investiguen diferents arranjaments dels elèctrodes, com ara els de la fig. 1.3 (Opekar i Štulík 2006; Opekar *et al.* 2013). Les seves principals limitacions són inherents a la naturalesa capacitiva dels elèctrodes, que obliguen a mesurar a freqüències altes que fan que esdevinguin importants les capacitats paràsites (Ballico 1999) entre elèctrodes i entre tots els conductors (inclosa l'aigua) i terra, i exigeixen un disseny acurat dels circuits de mesura. La identificació d'aquestes limitacions i l'estudi de mètodes per superar-les o reduir-les són un dels objectius d'aquesta tesi.

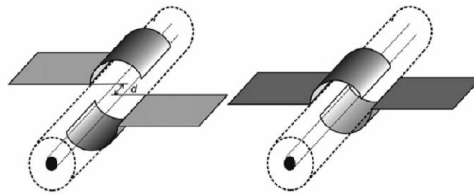


Figura 1.3. Cel·les de conductivitat capacitives (Opekar i Štulík 2006).

1.2. Mesura d'impedància sense contacte amb elèctrodes capacitius

La mesura d'impedància elèctrica (no només conductivitat, o de la conductància de l'aigua o d'altres materials) mitjançant elèctrodes capacitius, ha estat proposada en aplicacions molt diverses que van des de l'estudi de processos de fermentació i la determinació de la preservació de l'esterilitat dels envasos d'aliments, fins a l'estimació de la composició de fluids en canonades. L'extensa bibliografia sobre aquestes possibles aplicacions anticipa moltes de les dificultats concretes que cal preveure si es pretén mesurar la conductivitat de l'aigua amb elèctrodes capacitius.

Les *cel·les de punt triple*, per exemple, són una referència termomètrica i consisteixen en unes ampolletes de vidre tancades que contenen aigua d'una puresa elevada. Per determinar-la *in situ*, es mesura la seva impedància elèctrica amb elèctrodes capacitius externs a la cel·la perquè els elèctrodes amb contacte directe la contaminarien. Els elèctrodes són uns anells metàl·lics separats una certa distància. La conductivitat de l'aigua es pot obtenir determinant primer la freqüència $\omega_c = 1/R_x C_x = \sigma/\epsilon$, on R_x i C_x són la resistència i la capacitat del volum d'aigua contingut a l'ampolleta (Ballico 1999). A la freqüència ω_c , la capacitat mesurada entre els elèctrodes és $2/(C_{lo}^{-1} + C_{hi}^{-1})$, on C_{lo} i C_{hi} són les capacitats mesurades prèviament a, respectivament, baixa i alta freqüència. Llavors la conductivitat de

L'aigua és $\sigma = \omega_c \epsilon_r \epsilon_0$. La permitivitat relativa de l'aigua ϵ_r és constant perquè la concentració de sals a l'aigua emprada és molt baixa i la temperatura mentre es mesura és constant (Stogryn 1971). Llavors, la conductivitat de l'aigua no s'obté d'una forma directa sinó d'una mesura de capacitats. Segons Ballico (1999), les relacions anteriors són certes si els elèctrodes són plaques paral·leles, i per trobar ω_c en el cas de la geometria axial emprada cal multiplicar $2/(C_{lo}^{-1} + C_{hi}^{-1})$ per un factor de correcció que depèn de la separació entre elèctrodes, i que es pot calcular simulant la geometria real, per exemple mitjançant el mètode dels elements finits. Aquest càlcul té en compte les capacitats paràsites entre els elèctrodes i entre cada elèctrode i terra (fig. 1.4) (Ballico 1999), però no entre l'aigua i terra. Quan es comparen els resultats experimentals amb els de la simulació, es conclou que les capacitats paràsites, que són de valors comparables a les de l'elèctrode, afecten la mesura d'impedància però no afecten la determinació de ω_c , dins els límits d'incertesa acceptables en aquesta aplicació (Ballico 1999). Això sí, qualsevol canvi que hi hagi en el valor de les capacitats paràsites obliga com a mínim a calcular novament aquell factor de correcció.

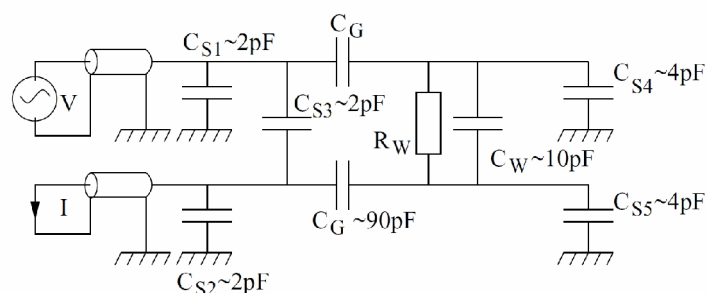


Figura 1.4. Model de la mesura de la conductivitat de l'aigua amb elèctrodes capacitius a ampolletes de vidre tancades. El model inclou la resistència de l'aigua R_W , les capacitats dels elèctrodes C_G i les capacitats paràsites C_{S1} a C_{S5} (Ballico 1999).

La mesura de la conductivitat elèctrica de l'aigua mitjançant elèctrodes capacitius en forma d'anell al voltant d'un tub aïllant ha estat proposada per detectar si a l'aigua d'una rentadora encara hi ha detergent, abans de desguassar-la (Uhov 2006). La mesura es realitza injectant una tensió d'alta freqüència i detectant el corrent. La descripció de l'invent esmenta que també el mateix mètode es podria fer servir per mesurar la duresa de l'aigua potable d'abastament a les vivendes.

Conèixer la *concentració de biomassa* durant una fermentació és important pel seguiment del procés, i si és fa amb elèctrodes capacitius n'hi ha prou amb un volum petit i no es contamina la mostra. Una proposta és emprar dos elèctrodes plans recoberts amb una capa

d'òxid (aïllant) i determinar la conductància i la capacitat del líquid a partir d'una mesura d'impedància a 3 MHz (Hofmann *et al.* 2005). El model utilitzat només contempla la capacitat paràsita entre els elèctrodes (flux de camp elèctric a través del substrat), però no inclou cap resistència de fuga en els materials aïllants ni cap de les capacitats paràsites a terra.

El creixement de microorganismes en un medi on hi hagi nutrients fa que augmentin la seva conductivitat i permitivitat elèctriques, i per tant decreix la seva impedància. Aquest fet és la base d'una proposta per determinar l'esterilitat d'envasos de llet mitjançant elèctrodes capacitius col·locats al seu voltant. Es mesura la part real de la impedància entre 1 i 10 MHz, perquè per sota d'1 MHz afecten molt les pèrdues del plàstic (resistència equivalent sèrie de la impedància de l'elèctrode) i per sobre de 10 MHz hi ha l'efecte de les capacitats paràsites (Nihtianov i Meijer 1999). El model dels elèctrodes inclou la resistència equivalent sèrie, però no es considera cap capacitat paràsita.

La *tomografia de processos* obté imatges d'un reactor químic o del flux dins un conducte, que no siguin conductors elèctrics, a partir de mesures des de l'exterior del reactor o conducte. Si s'empren elèctrodes de contacte directe, cal que facin contacte amb el medi intern i, a banda de la necessitat de foradar les parets, cal considerar la degradació que experimenten amb el temps. Els elèctrodes capacitius externs no tenen aquests problemes però les seves mides han de ser prou grans per tenir uns valors de capacitat per sobre de la resolució del sistema de mesura de capacitat i reduir els efectes de vores, però si són massa grans es perd resolució geomètrica en les imatges obtingudes. Una manera de reduir els efectes de vores és emprar guardes actives, però la seva eficàcia ve limitada pel fet de que el medi sigui heterogeni, de manera que aquest tema encara és obert (Yang 2010).

L'*electroforesi* consisteix en fer moure els ions d'un electròlit per dins d'un tub capil·lar aplicant-hi un camp elèctric continu intens. Tot i que hi ha algun sistema comercial que mesura la conductivitat amb elèctrodes de platí de contacte elèctric directe (Zemann 2001), és preferible mesurar amb elèctrodes capacitius posats sobre les parets del tub (Zemann 2001, Brito-Neto *et al.* 2005a). Aquest mètode ha portat al desenvolupament dels denominats sensors C⁴D (*Capacitively Coupled Contactless Conductivity Detectors*), que són un tema de recerca de gran actualitat (Huck *et al.* 2014; Kubáň i Hauser 2015). Quan la geometria és axial, s'usen dos elèctrodes en forma d'anell al voltant del capil·lar i separats una certa distància. El model elèctric inclou la resistència de l'electròlit en sèrie amb la capacitat d'elèctrode i la capacitat paràsita entre els elèctrodes, però ni la resistència

(d'aïllament) dels elèctrodes ni la capacitat paràsita a massa, ni la resistència superficial del suport hi solen ser presents. La capacitat paràsita entre elèctrodes és el factor que sol rebre més consideració, i per reduir-la s'ha proposat col·locar un pla de terra entre mig dels elèctrodes i perpendicular al capil·lar, fig. 1.5 (Brito-Neto *et al.* 2005b).

La conductivitat es pot detectar aplicant tensió en un elèctrode i mesurant el corrent que surt per l'altre, amb un amplificador de transimpedància. El senyal de sortida inclou una sèrie de pics de tensió (proporcionals al corrent mesurat), que permeten discriminar el tipus de ió segons l'amplitud i el retard de cada pic (Zemann 2001, Brito-Neto *et al.* 2005b). Per explicar un sobre-impuls observat en la resposta temporal, aquests darrers autors modelitzen l'elèctrode amb una xarxa RC distribuïda, mentre que l'electròlit el consideren com una resistència, sense una capacitat en paral·lel que modelitzi la seva permitivitat. Per estudiar si el sobre-impuls és degut a la capacitat paràsita entre elèctrodes, simulen amb un programa d'elements finits un disseny amb un pla de terra entre els dos elèctrodes, perpendicular al capil·lar. Conclouen que la capacitat paràsita entre elèctrodes disminueix respecte a quan no hi ha pla de terra, però no arriba mai a ser nul·la i que és la causant del sobre-impuls. Remarquem que caldria estudiar l'efecte d'acoblament entre l'electròlit de dins del capil·lar i el pla de terra (Brito-Neto *et al.* 2005b).

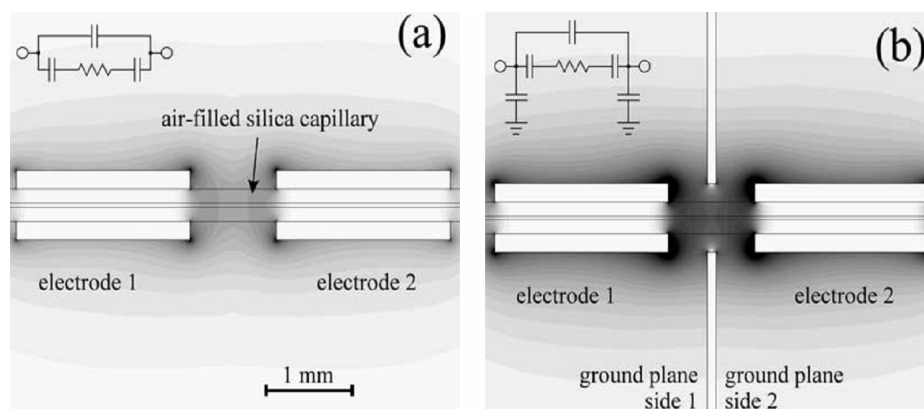


Figura 1.5. Capil·lars amb elèctrodes capacitius, (a) sense pla de terra i (b) amb pla de terra entre els elèctrodes (Brito-Neto *et al.* 2005b).

Un altre model proposat pels sensors capacitius emprats en electroforesi considera que, no només els elèctrodes, sinó també l'electròlit cal modelitzar-lo com una xarxa RC distribuïda que tingui en compte les seves capacitats paràsites a terra (Gas *et al.* 2002). L'electròlit, però, el modelitzen només com una resistència. Les simulacions mostren que la capacitat paràsita entre els elèctrodes fa que augmenti el corrent mesurat (efecte de diafonia), mentre

que l'acoblament entre l'electròlit i el pla de terra redueix el corrent mesurat. El sobre-impuls observat en els treballs experimentals l'atribueixen a la geometria axial del sensor i a les complicades sumes vectorials dels corrents complexos de la xarxa distribuïda RC.

En general, els articles d'electroforesi inclouen simulacions amb circuits elèctrics i amb elements finits, i per millorar la concordança entre les prediccions i els resultats experimentals s'afegeixen més elements al circuit model, però sense associar-los necessàriament a cap procés físic. No intenten explicar perquè disminueix el corrent ni la causa del sobre-impuls.

També hi ha mesures d'impedància amb elèctrodes capacitius en capil·lars (volums petits) per detectar gotes d'aigua dins d'olis industrials. L'estructura dels elèctrodes és la mateixa emprada a les aplicacions de l'electroforesi, inclòs el pla de terra entre mig dels elèctrodes, i el sistema de mesura també: injecten tensió per un elèctrode i mesuren el corrent que surt per l'altre, amb un analitzador d'impedàncies comercial (Cahill *et al.* 2011). Una altra aplicació per obtenir les propietats dielèctriques d'un fluid a radio freqüències utilitza dos capil·lars, un on hi ha el fluid que es vol mesurar i l'altre amb un fluid de permitivitat coneguda. El sistema de mesura està basat en un analitzador de xarxes i el marge de freqüències de mesura va des de 50 MHz fins a 1,6 GHz (Kozhevnikov 2010).

En canonades (volums grans) on circulen fluids compostos per diferents fases és important saber la proporció de cadascuna d'elles (aire, aigua, petroli, gas, etc.). Un mètode en el que fa anys que es treballa és mesurar impedància mitjançant elèctrodes capacitius col·locats a les parets externes de la canonada, fig. 1.6 (Thorn *et al.* 1997; Demori *et al.* 2010; Strazza *et al.* 2011). La variació de la permitivitat segons el tant per cent en volum de cada material fa canviar la capacitat de la mescla. Una de les configuracions d'elèctrodes més comuna empra elèctrodes semicilíndrics paral·lels posats al voltant de la canonada (Abouelwafa i Kendall 1980; Jaworek *et al.* 2004); llavors, la mesura d'impedància té més sensibilitat a la permitivitat (Opekar *et al.* 2013). En canvi, si els elèctrodes semicilíndrics no són paral·lels, com és el cas de dos semianells separats per una certa distància, la mesura de la impedància és més sensible a la conductivitat del líquid (Opekar *et al.* 2013). Hi ha estudis de diverses configuracions d'elèctrodes per aconseguir que quan varia el percentatge de volum dels components que circulen per la canonada, la capacitat (part imaginària de la impedància dels elèctrodes) variï linealment (Abouelwafa i Kendall 1980). La mescla de fluids es modelitza també com una resistència (conductivitat del fluid) amb una capacitat (permitivitat del fluid) en paral·lel i en sèrie amb aquestes les dues capacitats dels

elèctrodes. Hi ha autors que no inclouen en el model, la capacitat paràsita entre elèctrodes (Thorn *et al.* 1997; Strazza *et al.* 2011) i d'altres que sí (Jaworek *et al.* 2004). Només s'ha trobat una referència que inclou al model una impedància des del fluid a terra (Strazza 2011), i ho atribueix a pèrdues de corrent, ja que l'amperímetre (amplificador de transimpedància) té el node de referència a terra.

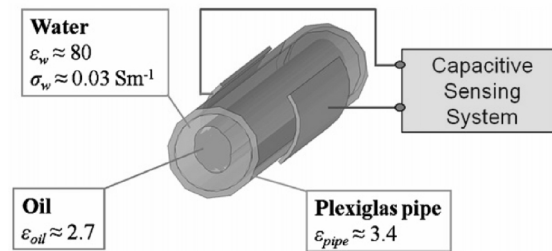


Figura 1.6. Mesura amb elèctrodes capacitius de les fases d'un líquid dins de canonades (Demori *et al.* 2010).

Un anàlisi teòric de l'admitància entre els elèctrodes capacitius externs a la canonada, comparat amb l'ús d'elèctrodes interns, mostra que tant la part real com la part imaginària depenen alhora de la conductivitat i la permitivitat del líquid, determina a quines bandes de freqüència no hi ha informació, l'efecte de la conductivitat del líquid sobre la part imaginària equivalent, i l'efecte de la permitivitat del líquid sobre la part real equivalent (Stott *et al.* 1985). Segons aquests autors, els resultats experimentals validen el seu anàlisi. Tanmateix, la capacitat d'elèctrode mesurada dona menor que la calculada (el càlcul no té en compte l'efecte de vores), tot i que normalment la capacitat mesurada surt més gran que la calculada, degut a l'efecte de vores.

En síntesi, les mesures d'impedància elèctrica sense contacte mitjançant elèctrodes capacitius tenen molt interès més enllà de la determinació de la conductivitat elèctrica de l'aigua. Tanmateix, els circuits que modelitzen les impedàncies que es mesuren, i mitjançant els quals s'interpreten els resultats, no solen considerar factors que d'entrada sembla que podrien afectar les mesures, sobre tot tenint en compte que sovint es fan a freqüències altes. Llavors, per interpretar correctament els resultats, de vegades s'afegeixen als models elements que no tenen cap relació física amb el material mesurat, o s'apliquen factors de correcció determinats mitjançant simulacions numèriques, sense aprofundir en l'estudi de les causes de les desviacions dels resultats de mesura. De fet, no es disposa ni tan sols d'un mètode que permeti determinar quina és la banda de freqüències més adient per mesurar un determinat material amb una determinada cel·la o recíprocament, con dissenyar una cel·la per mesurar un determinat material en un rang de freqüències concret.

1.3. Mesura d'impedància a altes freqüències

La impedància entre dos terminals d'un component o d'un circuit (H, terminal a potencial alt i L, terminal a potencial baix), es defineix com la relació entre el fasor de tensió mesurada entre els terminals i el fasor de corrent mesurada que els travessa, a una determinada freqüència. La impedància d'un material es defineix de la mateixa manera, però ara els dos terminals són els elèctrodes de injecció i detecció emprats. La incertesa al mesurar impedància ve limitada principalment per tres factors (Kibble *et al.* 1999): (1) les impedàncies dels contactes (cables de connexió, elèctrodes, etc.) entre els terminals de mesura y la impedància que s'està mesurant; (2) la impedància paràsita directa entre els terminals de mesura, és a dir, la que hi ha en absència del component o circuit (impedància de fuites); i (3) les impedàncies paràsites entre el conjunt de terminals, cables, elèctrodes i impedància que es mesura i el seu entorn (terra, masses conductores, etc.).

1.3.1. Instrumentació per mesurar impedància a altes freqüències

Els mètodes de mesura més comuns eren abans els ponts d'impedàncies d'alterna (Hague i Foord 1971) però actualment ho són els pseudoponts autobalancejats o automàtics (*autobalancing bridges*) (Callegaro 2009; Agilent 2013), que són la base dels mesuradors d'impedància *RLC*, dels analitzadors d'impedància, i dels mesuradors d'impedància emprats en mesures amb elèctrodes capacitius (Gas *et al.* 2002; Brito-Neto *et al.* 2005b; Strazza 2011), tant si es tracta d'aparells comercials com si són circuits dissenyats a mida.

Un pseudopont automàtic consta bàsicament d'un generador, un voltímetre (vectorial) i un amplificador de transimpedància, que fa d'amperímetre. Les capacitats paràsites des de H i L a terra no afecten perquè H queda connectat a una sortida de baixa impedància i L queda connectat a terra virtual (Yang 1996). En canvi, la capacitat paràsita entre H i L sí que afecta la mesura (Gas *et al.* 2002; Agilent 2013). Si el potencial elèctric del node de referència del circuit de mesura és el de (la massa de la) terra, llavors aquesta estructura no permet mesurar directament una impedància que també tingui un terminal connectat a terra sinó que cal un accessori (Agilent 2013).

Per mesurar capacitats i conductàncies en entorns industrials s'ha proposat un circuit basat en un amplificador de transimpedància seguit d'un detector coherent que permet obtenir la part real i la part imaginària de la impedància mesurada (Yang 1996). Aquest circuit, però treballa a freqüències de desenes de kilohertz, que són massa baixes quan les capacitats dels elèctrodes són petites perquè la seva impedància és molt més gran que la del material que es

vol mesurar. Un estudi comparatiu dels diferents mètodes per mesurar capacitats petites conclou que la millor immunitat a les capacitats paràsites l'ofereix l'estructura de mesura basada amb un pseudopont automàtic (Huang 1988), però que per sobre dels 5 MHz val més utilitzar oscil·ladors o el mètode de la ressonància (Hartshorn 1947), perquè les característiques dels components electrònics disponibles quan es va fer l'estudi es degradaven massa a freqüències més altes. En el mateix treball s'explica com utilitzar i analitzar guardes actives per evitar l'efecte de les pantalles connectades a terra.

Una limitació addicional inherent als pseudoponts automàtics, si es vol mesurar la part real i la part imaginària de la impedància, són els errors quan es mesuren impedàncies que poden tenir una part real i una part imaginària de valors absoluts molt diferents. Si per exemple la part imaginària és molt més gran que la seva part real, és a dir, si el factor de qualitat (Q) de la impedància és molt elevat, llavors és molt difícil mesurar la seva part real. Els errors en la mesura són causats per desfasaments que hi ha entre el voltímetre que mesura la caiguda de tensió a la impedància i el voltímetre que mesura la tensió a la sortida de l'amplificador de transimpedància (mesura del corrent) (Agilent 1998). Aquest desfasament fa que la mesura de la part real tingui desviacions grans respecte al seu valor real (Agilent 2000). Aquesta situació es pot donar a freqüències relativament baixes quan es mesura amb elèctrodes capacitius, segons quins siguin els valors de les capacitats dels elèctrodes i de la part real de la impedància mesurada. La situació dual, impedàncies amb baix Q , o sigui, part real de la impedància molt més gran que la part imaginària, també causa errors a la mesura i en aquest cas la part més afectada és la imaginària (Lozano *et al.* 1995).

Una alternativa als ponts i pseudoponts són els oscil·ladors que incorporen la impedància que es vol mesurar. S'ha proposat, per exemple, dos oscil·ladors per mesurar l'esterilitat d'envasos d'aliments. Un és un oscil·lador harmònic de segon ordre que consta d'una inductància en sèrie amb els elèctrodes i d'elements actius (CFA) que permeten aconseguir la condició d'oscil·lació (Nihtianov *et al.* 2001). La freqüència de ressonància només depèn de la inductància i de la capacitat entre els elèctrodes, i la condició d'oscil·lació només depèn dels elements resistius del llaç de realimentació, un dels quals és la resistència del líquid (R_x) i els altres són coneguts (resistors del circuit). Així, R_x queda determinada per la condició d'oscil·lació. Per evitar ajustos manuals amb potenciòmetres, un dels resistors és un MOSFET. Amb un multiplicador analògic s'obtenen dues tensions del circuit a baixa freqüència, i de la seva relació s'obté R_x . Aquest circuit no necessita injectar cap senyal d'alta freqüència, ni és necessària una detecció síncrona per obtenir R_x .

Una altre oscil·lador proposat per mesurar impedància és un oscil·lador de relaxació el període del qual canvia segons que la xarxa RC que determina l'oscil·lació sigui una xarxa de referència o estigui formada per la part real i la part imaginària de la impedància dels elèctrodes (Iliev *et al.* 2001). La part real es determina en funció de la part imaginària obtinguda prèviament. L'error a la mesura de la part imaginària (i de la part real) depèn del valor de la part real i de la capacitat de l'electròlit. La freqüència d'oscil·lació és relativament baixa, de l'ordre de centenes de kilohertz, i com que el senyal és quadrat, es pot processar directament amb un microcontrolador.

Una limitació de mesurar la impedància amb mètodes per ressonància o a través d'oscil·ladors és que no és fàcil aconseguir que la freqüència de treball sigui una freqüència predeterminada. Això impedeix fer un escombrat en freqüència, tal com cal per fer una espectroscòpia d'impedància, de manera que no es pot veure la evolució de la impedància en una banda ampla de freqüència.

1.3.2. Mesura d'impedància de volums conductors

El tercer factor que limita la mesura d'impedància en general, són les impedàncies paràsites entre el conjunt de terminals, cables, elèctrodes i impedància que es mesura i el seu entorn (terra, masses conductores, etc.). Aquest entorn, denominat *surrounding* (Kibble *et al.* 1999; Awan *et al.* 2011) o *environment* (Callegaro 2009), és l'entorn electromagnètic on es fa la mesura d'impedància i que inclou també el propi instrument de mesura (Callegaro 2009), que sovint té una coberta metàl·lica. Normalment aquestes impedàncies paràsites seran acoblaments capacitius (corrent de desplaçament) entre els conductors involucrats per fer la mesura i terra. Quan el circuit format pels cables de connexió té un àrea gran, hi ha també el risc d'acoblaments inductius, però aquest no és el cas quan els elèctrodes són a prop de l'aparell de mesura. Ja s'ha comentat abans que les capacitats entre cada terminal, cable de connexió i elèctrode (si n'hi ha) i terra no tenen efecte sobre la mesura d'impedància si es mesura amb un pseudopont automàtic. Però l'acoblament a terra des del cos de la impedància que es vol mesurar també forma part d'aquestes capacitats (impedàncies paràsites) i pot arribar a afectar quan el cos tingui un volum considerable (volum conductor), i quan l'acoblament sigui molt fort degut a la proximitat entre els elements que intervenen en la mesura.

Generalment, pocs autors parlen d'aquesta capacitat paràsita a terra. De la bibliografia citada anteriorment sobre mesura d'impedància amb elèctrodes capacitius, hi ha un treball

sobre electroforesi (Gas *et al.* 2002), que modelitza la capacitat (distribuïda) entre l'electròlit (volum conductor) i terra i afirma que aquesta capacitat fa disminuir el corrent mesurat per l'amplificador de transimpedància al terminal amb potencial baix, L. Però no ho analitza ni n'extreu cap conseqüència més. La principal és que per aquesta capacitat s'hi derivarà un corrent que no circularà pel "amperímetre" i per tant no serà mesurat, i que aquest efecte serà major a alta freqüència. En mesures en canonades (Strazza 2011) modelitza una impedància a terra des del volum del fluid que es mesura (situat entre els elèctrodes) i conclou que si la impedància del conjunt elèctrodes més fluid és molt més petita que la impedància entre el fluid i terra, llavors no afecta la mesura. A l'aplicació on es mesura conductivitat de l'aigua a les cel·les de punt triple (Ballico 1999), hi ha una conclusió que sembla contradictòria, perquè diu que les capacitats paràsites afecten la mesura d'impedància però en canvi no afecten la determinació de la freqüència ω_c . Però mentre demostra que les capacitats paràsites entre l'aigua i terra alteren la mesura, en canvi no demostra que no afectin la mesura de ω_c . De fet, com que per tenir una mesura precisa s'introdueix un factor de correcció per trobar ω_c , i aquest factor depèn de la separació dels elèctrodes, quan aquests se separen augmenta el volum d'aigua que no està *apantallat* pels elèctrodes, i per tant augmenta la capacitat paràsita de l'aigua a terra. Podria resultar, doncs, que el factor de correcció depengés també de la capacitat a terra.

Els volums molt petits de líquids (picolitres) es poden mesurar mitjançant la capacitat entre elèctrodes aïllats del líquid en qüestió, fig 1.7 (Wei *et al.* 2010). L'estructura consta d'un recipient cilíndric (micromecanitzat) de material aïllant envoltat (per la part exterior) de tres elèctrodes iguals i equidistants, amb una petita separació entre ells. Dos elèctrodes són els de mesura i el tercer està connectat al potencial de referència del sistema de mesura ("massa"). Si es suposa que la impedància del líquid és molt més petita que la dels elèctrodes, llavors la variació de la capacitat C_d de cada elèctrode de mesura depèn del nivell del líquid dins del recipient, i d'aquí se'n pot deduir el volum. Si es mesura amb dos elèctrodes i cap d'ells és "massa" (potencial de referència del circuit de mesura), la impedància d'acoblament entre el líquid i massa afecta la mesura. Per controlar aquesta impedància des del líquid a massa, s'afegeix un tercer elèctrode connectat a massa. La capacitat d'aquest tercer elèctrode forma una xarxa en T (fig. 1.7) amb la capacitat dels altres dos. L'efecte d'un tercer elèctrode a "massa" comporta una disminució de la capacitat mesurada entre els dos elèctrodes de mesura però, segons els autors, també comporta un control de la influència que la impedància d'acoblament entre el líquid i massa té sobre la mesura.

En mesures d'impedància amb elèctrodes capacitius no s'ha trobat cap altra referència que expliqui algun efecte causat per la capacitat paràsita des del cos de la impedància (volum conductor) a terra. En canvi, l'efecte d'aquesta capacitat paràsita ha estat observat a altres camps d'aplicació de la mesura d'impedància: de components amb apantallaments, de materials sòlids i bioimpedància, aquestes dues últimes aplicacions amb elèctrodes de contacte directe.

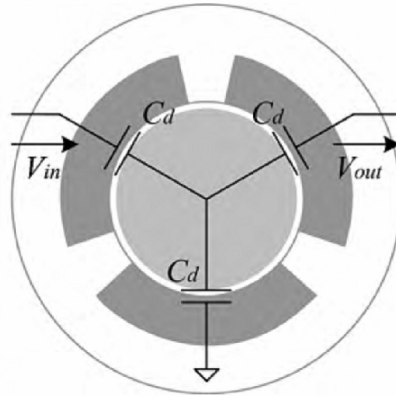


Figura 1.7. Mesura de volums molt petits mitjançant tres elèctrodes capacitius un dels quals està connectat a massa (Wei *et al.* 2010).

Per fixar l'efecte entre la capacitat paràsita a terra des del cos de la impedància quan es mesura amb elèctrodes de contacte directe, es pot envoltar-la amb un apantallament elèctric (material conductor) i fer totes les connexions amb cables i connectors coaxials (Awan *et al.* 2011). Aquest apantallament serà possible si el volum de la impedància que es mesura és petit, però és impracticable per volums grans (per exemple, mesures d'impedància sobre el cos humà). A més, tancar tota o part de la impedància amb un apantallament pot portar problemes addicionals com ara els anomenats “efectes inductius” tot i que el circuit que modelitza la impedància mesurada inclogui només resistències i capacitats. En la bibliografia clàssica sobre ponts d'alterna es descriu que quan es mesura un resistor recobert per un blindatge connectat a terra, les capacitats paràsites distribuïdes entre el cos del resistor i terra fan aparèixer una component inductiva “residual” a la mesura d'impedància, malgrat que en el circuit només hi ha resistències i capacitats (Hague i Foord 1971; Hartshorn 1947). El valor d'aquesta inductància residual (aparent) depèn del valor del resistor (resistència) que es mesura i del valor de la capacitat entre el cos del resistor i terra. A metrologia aprofiten aquesta inductància residual per compensar la capacitat paràsita entre terminals de patrons de resistència (Awan *et al.* 2011).

En aplicacions de mesura d'impedància sobre materials sòlids amb elèctrodes de contacte directe també s'han observat efectes inductius quan es mesura amb un analitzador o mesurador d'impedància comercial. Per exemple, una mesura de safir va donar arcs inductius (*inductive loops*) en els diagrames de Nyquist (o Cole-Cole) a baixa freqüència deguts al corrent de desplaçament entre el safir (mostra que es mesura) i l'apantallament elèctric de la mostra (Fleig *et al.* 1996). El safir es modelitza com una resistència i una capacitat en paral·lel. Aquests efectes inductius a baixa freqüència s'observaren amb independència del model de mesurador emprat (HP 4284, HP 4192A i Solartron 1260). Els autors analitzaren matemàticament un circuit model de paràmetres distribuïts però no arribaren a cap model que expliqués de manera clara el què estava passant. En un treball posterior (Lee *et al.* 2005) observaren el mateix efecte al mesurar impedància de zircònia i proposaren un circuit que es modelitzen amb una inductància en paral·lel amb la impedància del material, la inductància que no tenia cap significat físic directe, sinó que era el resultat d'un programa que matemàticament aproxima (fita) els resultats experimentals a la impedància d'un circuit teòric equivalent, prescindint de la possible correspondència entre els components del circuit i les propietats físiques del material. Semblantment, en mesures d'impedància de semiconductors, amb dos elèctrodes, s'hi ha trobat una “capacitat negativa” (Okawa *et al.* 2003) causada per la capacitat paràsita entre el semiconductor i terra. En aquest cas, els autors posen una inductància en sèrie amb la capacitat paràsita que hi ha entre el semiconductor i terra per modelitzar l'efecte, que altrament consideren “inexplicable” (*sic*). Mesurant impedància en formigó també s'hi ha observat efectes inductius deguts al corrent de pèrdues entre la mostra i el seu aïllament galvànic a terra i, semblantment al cas anterior, el model equivalent proposat (per ajustament de les mesures) inclou una inductància en sèrie amb la capacitat paràsita a terra (Torrents *et al.* 2007). Totes aquestes aplicacions acaben posant una inductància en el lloc on el programa d'ajustament els indica o en un lloc a priori, o bé ja està col·locada en sèrie amb la capacitat paràsita a terra i el programa en calcula el valor d'acord amb la mesura realitzada. No hi ha una interpretació senzilla del que realment està passant i això provoca desconeixement sobre aquest efecte i la seva reducció.

Canviant d'aplicació, en mesures de bioimpedància sobre el cos humà, habitualment amb quatre elèctrodes, també s'hi han observat efectes inductius. En mesures d'impedàncies resistives i capacitives s'hi van observar fases positives que van ésser atribuïdes a la capacitat paràsita entre el cos i terra, però sense donar-ne la justificació (Gersing *et al.* 1995). Altres autors han demostrat, amb simulació de circuits, que la capacitat paràsita

entre el cos i terra pot donar fases positives quan es mesura una impedància que només té components resistius i inductius (Scharfetter *et al.* 1998). Experimentalment van observar errors a la fase de la impedància causats per la capacitat paràsita del cos a terra, però no arribaren a trobar fases positives.

En mesures de permitivitat a líquids usant cel·les inductives sense contacte (Wakamatsu 1997), també s'ha trobat que la capacitat paràsita des del líquid al node de referència del sistema de mesura provoca errors.

L'efecte inductiu descrit a la bibliografia revisada podria ser també el responsable del sobre-impuls que s'observa en mesurar conductivitat en tubs capil·lars (Brito-Neto *et al.* 2005b; Gas *et al.* 2002), i per al que fins ara no hi ha cap explicació satisfactòria. Hi ha qui atribueix el sobre-impuls a la capacitat paràsita entre elèctrodes (Brito-Neto *et al.* 2005b), mentre que hi ha qui l'atribueix a la geometria axial i les complicades sumes vectorials dels corrents de la xarxa distribuïda (Gas *et al.* 2002).

Resulta, doncs, que els circuits i aparells habitualment emprats per mesurar la impedància elèctrica dels materials són insensibles a algunes de les capacitats paràsites del conjunt material-aparell-entorn electromagnètic, però no a totes. Diversos autors, en àmbits d'aplicació molt diferents, han sospitat d'alguna d'aquestes capacitats com a responsables de resultats imprevistos, i en concret de la presència d'efectes inductius que no poden ésser explicats a partir de les propietats físiques dels materials mesurats, normalment amb elèctrodes de contacte directe, i tant si es fan servir dos com quatre elèctrodes. La solució a aquest problema, sovint ha estat la inclusió d'elements inductius en els circuits equivalents, però aquesta solució només té una justificació matemàtica, no física.

La manca d'estudis sistemàtics sobre els efectes de les impedàncies paràsites, ha comportat de vegades que la solució per evitar els efectes d'una d'elles, per exemple l'acoblament capacitiu entre dos elèctrodes mitjançant un apantallament, agreugi l'efecte d'una altra, en aquest cas, la capacitat paràsita des del cos de l'objecte mesurat a terra. A més, la majoria dels efectes descrits a la bibliografia s'han observat en mesures amb elèctrodes de contacte directe, que són, de llarg, les més habituals. Per elèctrodes capacitius, hi ha poques observacions, menys anàlisis, i cap solució coneguda i de validesa demostrada.

1.4. Objectius de la tesi

L'objectiu principal d'aquesta tesi és concebre i verificar un mètode de mesura de la conductivitat elèctrica de l'aigua dins de conductes o recipients de parets elèctricament aïllants, mitjançant elèctrodes capacitius situats a l'exterior del conducte o recipient.

La mesura de conductivitat elèctrica, tant si és amb elèctrodes de contacte directe com si és amb elèctrodes capacitius, forma part d'un problema més general que és la mesura d'impedància en volums conductors, en contraposició amb les mesures en components o circuits electrònics, que es fan amb contactes òhmics. El mètode proposat és mesurar la impedància elèctrica entre dos o més elèctrodes que facin contacte amb la part exterior del conducte o recipient (aïllant) i obtenir-ne la conductivitat elèctrica de l'aigua.

De la bibliografia revisada se'n han extret les següents conclusions útils per decidir els mètodes de treball en el procés d'investigació: 1) per a que el sistema de mesura pugui ser el més senzill possible, les mesures s'haurien de realitzar amb dos elèctrodes capacitius, ja que els sistemes amb quatre elèctrodes són molt més complexos, però sense que això impliqui descartar d'entrada la possibilitat d'emprar més de dos elèctrodes; 2) al ser els elèctrodes capacitius, la freqüència o freqüències de mesura hauran de ser relativament elevades, de centenars de kilohertz a desenes de megahertz, i això determina les característiques de la instrumentació necessària; i 3) al ser les freqüències elevades, les impedàncies paràsites afectaran la mesura, sobre tot la capacitat entre els elèctrodes i la capacitat des del volum de l'aigua que es mesura (volum conductor) a terra.

Atesos els antecedents, per aconseguir l'objectiu proposat es considera necessari definir un circuit model que inclogui els elements suficients per poder explicar com afecten els principals elements paràsites quan es mesura impedància amb elèctrodes capacitius externs al conducte o recipient aïllant que conté el líquid. De l'anàlisi del model se n'ha de poder deduir les freqüències de mesura òptimes i els factors de correcció necessaris per poder determinar la conductivitat de l'aigua a partir de la impedància mesurada.

La complexitat del problema global plantejat aconsella dividir-lo en problemes més concrets que ens porten a definir uns objectius parcials:

1. Analitzar els sistemes de mesura d'impedància comercials més utilitzats per intentar esbrinar l'origen dels efectes inductius quan el model del material mesurat només conté resistències i capacitats.

2. Mesurar la capacitat paràsita entre el volum conductor (material que es mesura) i terra per saber-ne l'ordre de magnitud respecte a les altres impedàncies i poder identificar quins són els factors que determinen la seva influència.
3. Definir un model capaç d'explicar com afecten les principals capacitats paràsites a la mesura d'impedància del volum de líquid, sense tenir en compte els elèctrodes. És a dir, com afectarien les capacitats paràsites si les impedàncies dels elèctrodes fossin negligibles.
4. Definir un model capaç d'explicar com afecten les principals capacitats paràsites a la mesura d'impedància del volum de líquid quan els elèctrodes són capacitius. És a dir, quina és la influència dels elèctrodes capacitius en el efectes de les capacitats paràsites sobre la mesura d'impedància.

Per tant, les novetats més rellevants que vol aportar aquesta tesi són:

1. Mesurar la conductivitat elèctrica de l'aigua amb elèctrodes capacitius externs, és a dir, no immersos.
2. Modelitzar completament el sistema de mesura i el seu entorn electromagnètic i caracteritzar els efectes de la impedància paràsita (resistència de fuga i capacitat) entre elèctrodes i de l'acoblament entre el volum d'aigua i terra.

Tot i que el plantejament es fa a partir d'una situació de mesura en un volum relativament gran, els models i els anàlisis teòrics poden ser vàlids per al cas de mesures en volums molt petits, com ara en sensors micromecanitzats o tubs capil·lars. La principal diferència serà en el valor numèric dels paràmetres de la cel·la de mesura.

1.5. Organització del document

Després d'aquesta introducció, el capítol segon analitza els models d'impedància elèctrica en diverses situacions, per a un material homogeni, quan s'inclou l'efecte dels elèctrodes de mesura i de l'admitància de fuites, i quan es té en compte l'entorn electromagnètic.

El tercer capítol se centra en l'anàlisi teòric dels mètodes més comuns de mesura d'impedància elèctrica en general, i de la mesura amb dos elèctrodes (bipolar) de la impedància de materials no magnètics. Aquest anàlisi està orientat a la identificació dels elements que poden produir efectes inductius o d'altra mena, i del mecanisme que origina

aquests efectes. També es comenta, teòricament, els possibles efectes de propagació electromagnètica quan es mesura amb dos elèctrodes a freqüències relativament altes.

El quart capítol conté l'anàlisi teòric i les proves experimentals que validen el model extret de l'anàlisi d'una situació concreta com és la mesura de la impedància de materials mitjançant dos elèctrodes de contacte directe (metall-electròlit) i l'efecte que tenen sobre aquesta mesura les capacitats paràsites, i en particular l'acoblament entre volum conductor i terra.

En el cinquè capítol s'estudia la mesura de bioimpedància amb quatre elèctrodes i els efectes que té sobre la mesura la capacitat entre el cos humà i terra. El model definit és general i aplicable a una mesura amb aigua, perquè el circuit que modelitza la impedància elèctrica de l'aigua és més senzill que el que modelitza la impedància del cos.

El capítol sisè conté l'anàlisi teòric i les proves experimentals que validen el circuit equivalent proposat per analitzar la mesura de la impedància d'un material amb dos elèctrodes capacitius col·locats a la paret exterior de un recipient aïllant que contingui el material quan és un líquid.

Finalment el capítol setè conté les conclusions de la tesi tant pel que fa al problema específic de la mesura de la conductivitat elèctrica de l'aigua amb elèctrodes capacitius, com pel que fa al problema més general de mesura de la impedància elèctrica en cossos que tinguin un volum considerable, o bé on el valor relatiu de les impedàncies paràsites sigui considerable respecte al d'aquella que es vol mesurar.

Per tal de que cada capítol sigui fins a cert punt auto-explicatiu, hi ha alguns conceptes que es repeteixen allà on s'ha considerat convenient. Tanmateix, és recomanable llegir primer els capítols 2 i 3 per tal de familiaritzar-se amb la terminologia, metodologia i notació.

Els mètodes instrumentals utilitzats a la tesi són la definició d'un model elèctric de paràmetres concentrats per descriure la mesura i els efectes de les impedàncies paràsites, i el disseny i implementació de sistemes de mesura (sensors) amb elèctrodes de contacte directe i capacitius, necessaris per poder realitzar les mesures mitjançant un analitzador d'impedàncies comercial. Les conclusions de cada experiment s'han generalitzat per poder-les aplicar en altres situacions on sigui vàlid el mateix model elèctric.

Capítol 2

2. Models d'impedància elèctrica

La mesura de la conductivitat elèctrica és una mesura d'impedància elèctrica. El concepte d'impedància elèctrica és una generalització de la llei d'Ohm per tensions i corrents alterns (Oliver i Cage 1971) i es defineix com el quocient entre el fasor de tensió entre dos punts d'un circuit elèctric i el fasor de corrent que circula per aquest circuit a una freqüència determinada (Hague i Ford 1971; Dreher 2014). Quan dins del circuit hi ha elements resistius, que dissipen energia elèctrica, i elements inductius o capacitius, que n'emmagatzemen, llavors entre la tensió i el corrent hi ha un desfasament. Al ser un quocient entre fasors, la impedància elèctrica és una magnitud complexa i s'expressa per un mòdul (relació entre els valors de pic o eficaços de la tensió i el corrent) i una fase (desfasament entre la tensió i el corrent), o bé com una part real (resistència) i una part imaginària (reactància). La representació mitjançant el mòdul i la fase ofereix una visió global ràpida del comportament de la impedància en tot un rang de freqüències. La fase en

particular permet identificar fàcilment els canvis de comportament (zones de transició d'un valor del mòdul cap a un altre). La representació mitjançant la part real i la part imaginària, en canvi, facilita la mesura de la conductivitat i permitivitat elèctriques dels materials.

El recíproc de la impedància és l'admitància i també s'expressa per un mòdul i una fase, o com una part real (conductància) i una part imaginària (susceptància). El seu ús és convenient quan la impedància té valors extrems perquè aquests sempre són més difícils de mesurar. La admitància també és útil per a determinar el circuit equivalent de xarxes on hi hagi elements connectats en paral·lel.

La mesura de la impedància elèctrica d'un material en permet conèixer les propietats elèctriques, la composició i l'estructura. Per això és important obtenir un model de la impedància elèctrica del material que es vol mesurar que reflecteixi les seves propietats (Macdonald 1987), més que treballar amb un circuit equivalent teòric que tingui una impedància similar a la mesurada, sense cercar una correspondència entre els elements del circuit i les propietats físiques del material, perquè hi ha materials que no tenen el comportament propi d'alguns dels possibles elements d'un circuit elèctric. Els instruments que mesuren impedància elèctrica, habitualment presenten el resultat de la mesura en dues quantitats (quantitat complexa), mòdul i fase, o part real i part imaginària a una determinada freqüència. Els resultats numèrics que dona l'instrument es relacionen amb les propietats del material mitjançant el model de la seva impedància elèctrica.

2.1. Model de la impedància elèctrica d'un material homogeni

La impedància elèctrica (Z_x) d'un material homogeni com ara l'aigua s'acostuma a modelitzar com una conductància G_x (o una resistència $R_x = 1/G_x$) en paral·lel amb una capacitat C_x , fig. 2.1 (Coster *et al.* 1996; Pliquet 2010), que a una freqüència determinada tenen un valor concret. G_x i C_x descriuen, respectivament, la capacitat del material per conduir i emmagatzemar electricitat. R_x i C_x estan relacionades, respectivament, amb la conductivitat elèctrica (σ) i la permitivitat elèctrica (ϵ) del material a través de la mateixa constant de cel·la (k_{cell}) (Coster *et al.* 1996, Ballico 1999). Aquest paràmetre descriu la contribució que la geometria de la cel·la que conté la mostra de material té en la impedància mesurada (Coster *et al.* 1996; Máriássy *et al.* 2009). La permitivitat elèctrica del material s'expressa habitualment com $\epsilon = \epsilon_0 \epsilon_r$, on ϵ_0 és la permitivitat elèctrica del buit i ϵ_r es defineix com la permitivitat relativa del material. Les relacions entre els elements elèctrics (resistències i capacitats) i les propietats elèctriques (conductivitat i permitivitat) del material

són $R_x = k_{\text{cell}}/\sigma$ i $C_x = \varepsilon_0\varepsilon_r/k_{\text{cell}}$. La *freqüència (angular o pulsació) característica* del material és $\omega_c = (R_x C_x)^{-1} = \sigma/\varepsilon_0\varepsilon_r$, que no depèn de la geometria (Coster *et al.* 1996). El millor model és aquell capaç de descriure la impedància elèctrica del material en un ampli rang de freqüències sense haver de modificar els valors dels seus components.

L'expressió de la impedància d'un material homogeni (circuit de la fig. 2.1) és

$$Z_x = \frac{R_x}{1 + j\omega R_x C_x} = \frac{R_x}{1 + j\omega \frac{\varepsilon}{\sigma}} = \frac{R_x}{1 + j\frac{\omega}{\omega_c}}. \quad (2.1)$$

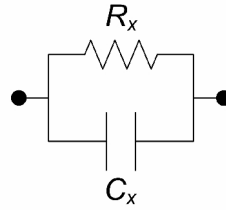


Figura 2.1. Model de la impedància elèctrica d'un material homogeni.

L'expressió de l'admitància com a recíproc de la impedància és

$$Y_x = \frac{1}{Z_x} = G_x + jB_x = \frac{1}{R_x} + j\omega C_x = \frac{1}{k_{\text{cell}}}(\sigma + j\omega\varepsilon_0\varepsilon_r), \quad (2.2)$$

i d'aquí, $\sigma^* = \sigma + j\omega\varepsilon$ s'anomena la *conductivitat complexa* (Coster *et al.* 1996). L'expressió (2.2) és més simple que la (2.1) perquè l'admitància modelitza millor els elements connectats en paral·lel.

Si la impedància Z_x es posa com a part real i part imaginària i en funció dels components de l'admitància Y_x , la seva expressió queda com

$$\begin{aligned} Z_x &= \frac{1}{Y_x} = \frac{1}{G_x + jB_x} = \frac{G_x}{G_x^2 + B_x^2} - j\frac{B_x}{G_x^2 + B_x^2} \\ &= \frac{1}{G_x} \frac{1}{1 + (B_x/G_x)^2} - j\frac{1}{B_x} \frac{(B_x/G_x)^2}{1 + (B_x/G_x)^2}. \end{aligned} \quad (2.3)$$

Substituint $G_x = 1/R_x$ i $B_x = \omega C_x$, a partir de (2.3) s'obté

$$\begin{aligned} Z_x &= \frac{R_x}{1 + (\omega R_x C_x)^2} - j\frac{1}{\omega C_x} \frac{(\omega R_x C_x)^2}{1 + (\omega R_x C_x)^2} \\ &= R_s + jX_s = R_s + \frac{1}{j\omega C_s}. \end{aligned} \quad (2.4)$$

Per tant, sempre es pot expressar la impedància com a suma d'una part real i una part imaginària, en aquest cas com una resistència equivalent sèrie R_s (fig. 2.2) i una reactància equivalent sèrie X_s a una determinada freqüència. La part imaginària també es pot expressar com una capacitat equivalent sèrie C_s , tal com mostra la fig. 2.3 (Oliver i Cage 1971; Pallàs Areny 2006).

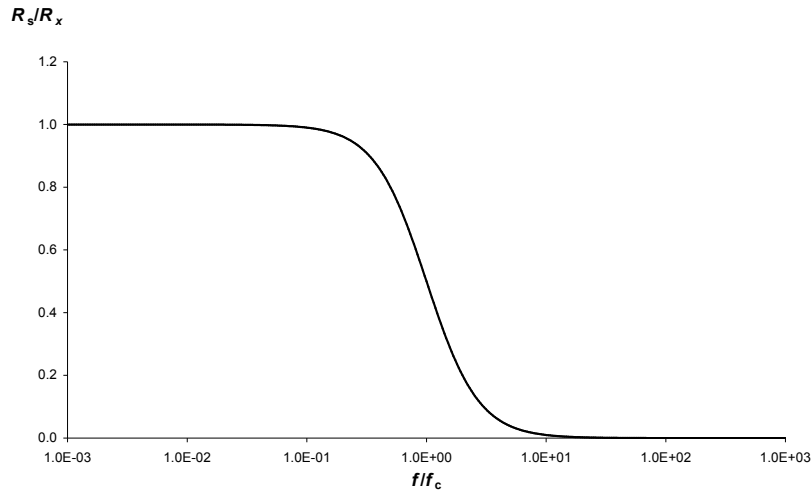


Figura 2.2. Resistència equivalent sèrie de la impedància Z_x d'un material homogeni.

De l'equació (2.4) i de la fig. 2.2 es dedueix que el valor de R_x es pot obtenir a partir del valor de R_s a freqüències baixes respecte a f_c ($f \ll f_c$), mentre a freqüències altes, $f \gg f_c$, R_s tendeix a zero. En canvi, segons la fig. 2.3, el valor de C_x a partir de C_s s'obtidria en principi a altes freqüències, però si les freqüències són prou altes i les mides de la mostra són comparables a la longitud d'ona del senyal injectat per l'instrument de mesura, hi pot haver efectes de propagació d'ona que afectin el resultat (Straub 1994).

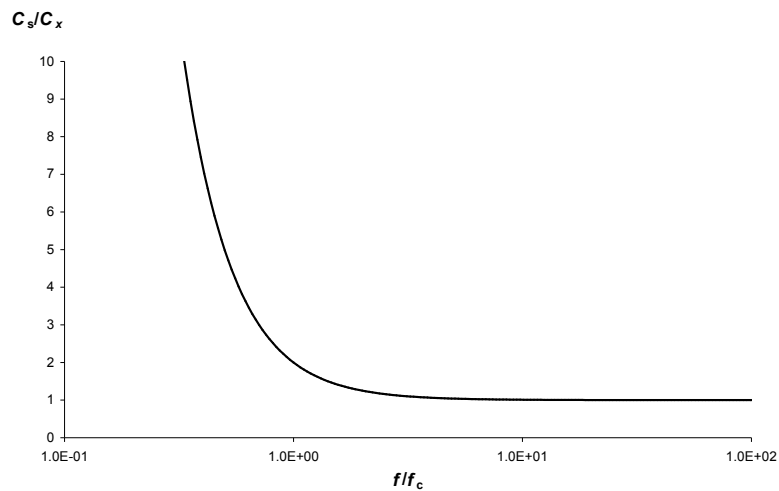


Figura 2.3. Capacitat equivalent sèrie de la impedància Z_x d'un material homogeni.

2.2. Model de la impedància elèctrica d'un material homogeni que s'ha de mesurar

Si es vol mesurar un material homogeni, per exemple una mostra d'aigua, cal un suport o recipient que contingui aquest material, uns elèctrodes de mesura que estan en contacte mecànic amb la mostra i uns cables de connexió entre els elèctrodes i l'instrument de mesura. El contacte mecànic entre els elèctrodes i la mostra pot ser també un contacte elèctric o no ser-ho. Tot aquest conjunt, sense l'instrument, constitueix la cel·la de mesura i introdueix impedàncies “paràsites” que poden alterar la mesura i limitar-ne la validesa. En aquest apartat es modelitzen i analitzen aquestes limitacions en termes de modificació de la impedància elèctrica mesurada per tal de poder extreure la informació d'interès sobre el material tenint en compte tot el sistema de mesura.

2.2.1. Limitacions en la mesura d'impedància elèctrica

Les principals limitacions en la mesura d'impedància elèctrica, segons s'ha explicat a l'apartat 1.3, són degudes a tres factors (Kibble *et al.* 1999): (1) les impedàncies dels contactes (cables de connexió, elèctrodes, etc.) entre els terminals de mesura y la impedància que s'està mesurant; (2) la impedància paràsita directa entre els terminals de mesura (impedància de fuites); i (3) les impedàncies paràsites entre el conjunt de terminals, cables, elèctrodes i impedància que es mesura i el seu entorn electromagnètic (terra, masses conductores, etc.). Aquest entorn electromagnètic inclou la presència del propi instrument de mesura (Callegaro 2009), que sovint té una coberta metàl·lica.

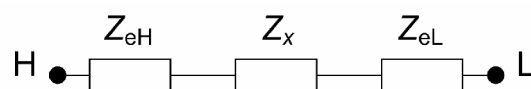


Figura 2.4. Model de la impedància elèctrica entre H i L tenint en compte les impedàncies dels elèctrodes.

Les impedàncies dels contactes són degudes principalment als elèctrodes Z_{eH} i Z_{eL} i estan en sèrie amb la impedància del material Z_x (fig. 2.4) (Máriássy *et al.* 2009). H i L designen els terminals de mesura (H: *high current/potential* i L: *low current/potential*) (Agilent 2013). La inductància dels cables que formen part del circuit de mesura poden arribar a ser importants si són llargs i es mesura a freqüències altes.

La impedància paràsita entre els terminals de mesura (impedància de fuites) descriu el corrent que circularia entre els terminals de mesura si no hi hagués el material, i es modelitza com una admitància Y_{hl} connectada en paral·lel amb tot el circuit de la fig. 2.4,

tal com mostra la fig. 2.5. Y_{hl} es modelitza com una resistència R_{hl} en paral·lel amb una capacitat C_{hl} (Agilent 2013; Oh *et al.* 2007).

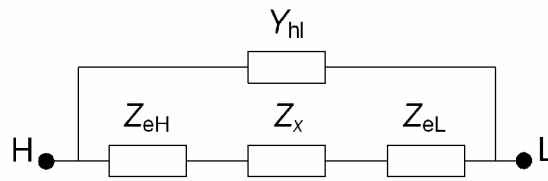


Figura 2.5. Model de la impedància elèctrica entre H i L tenint en compte l'admitància entre elèctrodes.

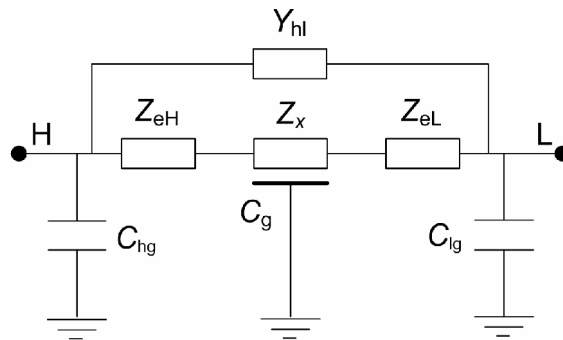


Figura 2.6. Model de la impedància elèctrica entre H i L tenint en compte les capacitats paràsites (acoblament amb l'entorn electromagnètic).

Les impedàncies “paràsites” causades per l'entorn electromagnètic són sobre tot les capacitats paràsites entre cada element conductor i terra, o qualsevol massa conductora “connectada” per una baixa impedància a terra, tal com mostra la fig. 2.6. C_{hg} i C_{lg} són les capacitats paràsites entre cada elèctrode (terminal) i terra (Yang 1996; Ballico 1999). C_g descriu l'acoblament capacitiu entre el material que es mesura (volum conductor) i terra. L'acoblament a terra C_g és una capacitat paràsita de paràmetres elèctrics distribuïts (Hague i Foord 1971; Hartshorn 1947; Fleig *et al.* 1996), és a dir, cada punt del material està acoblat a terra.

2.2.2. Model de la impedància elèctrica incloent-hi les impedàncies dels elèctrodes

Si es considera que les impedàncies dels dos elèctrodes de la fig. 2.4 són iguals, $Z_{eH} = Z_{eL} = Z_e/2$, el model esdevé el de la fig. 2.7. La impedància total dels elèctrodes Z_e està en sèrie amb la impedància del material Z_x .

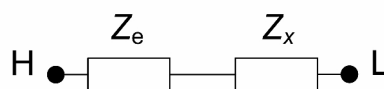


Figura 2.7. Model de la impedància elèctrica entre H i L incloent la impedància dels dos elèctrodes.

L'expressió de la impedància del circuit de la fig. 2.7, en termes de part real i part imaginària, és

$$Z_{HL} = Z_e + Z_x = \text{Re } Z_{HL} + j\text{Im } Z_{HL} = R + jX. \quad (2.5)$$

La impedància dels elèctrodes també és modelitzada com una resistència R_e en paral·lel amb una capacitat C_e (Geddes 1972), fig. 2.8.

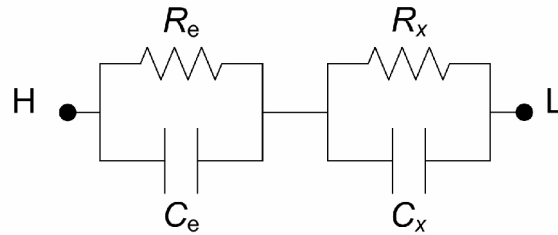


Figura 2.8. Model de la impedància elèctrica entre H i L incloent la impedància dels dos elèctrodes.

Els valors de R_e i C_e depenen de si els elèctrodes són de *contacte directe* (elèctric) entre el metall (o material conductor) de l'elèctrode i el material a mesurar (Z_x) (electròlit) o són del tipus *capacitiu*, sense contacte elèctric entre elèctrode i electròlit. En aquest segon cas, el conductor de l'elèctrode i l'electròlit estan separats per un material aïllant. Els ordres de magnitud habituals de R_e i C_e són a la Taula 2.1. Pels elèctrodes de contacte directe, els valors de R_e són de desenes de kilohms i els de C_e són de desenes de microfarads (Geddes 1972). Pels elèctrodes capacitius, els valors de C_e són de desenes de picofarads (Ballico 1999) i els valors de R_e són molt alts, ja que el material aïllant que hi ha entre l'elèctrode i l'electròlit és habitualment vidre, plàstic o ceràmic. La resistivitat d'aquests materials aïllants està entre 10^{12} i 10^{16} Ωcm (ITT 1977), i per tant, si l'elèctrode té una àrea de 1 cm^2 i el gruix de l'aïllant és 1 mm , el valor de R_e està entre 10^{11} i 10^{15} Ω . Es considerarà un valor de $R_e = 10^{12} \Omega = 1 \text{ T}\Omega$.

Per analogia amb l'equació (2.3), la part real de la impedància entre H i L de la fig. 2.8 és

$$\begin{aligned} \text{Re } Z_{HL} &= \frac{1}{G_e} \frac{1}{1 + (B_e/G_e)^2} + \frac{1}{G_x} \frac{1}{1 + (B_x/G_x)^2} \\ &= R_x \left[\frac{R_e}{R_x} \frac{1}{1 + (\omega R_e C_e)^2} + \frac{1}{1 + (\omega R_x C_x)^2} \right] \end{aligned} \quad (2.6)$$

on $G_e = 1/R_e$, $G_x = 1/R_x$, $|B_e|/G_e = \omega R_e C_e$ i $|B_x|/G_x = \omega R_x C_x$. Per tant, l'efecte de la resistència dels elèctrodes pot arribar a ser considerable si no es mesura a freqüències molt més grans que $\omega_e = [R_e C_e]^{-1}$.

Taula 2.1. Valors habituals de la impedància elèctrica dels elèctrodes emprats per mesurar impedància.

	Contacte directe (Geddes 1972)	Capacitiu (Ballico 1999)
R_c	Desenes de kilohms	Teraohms (plàstic o vidre)
C_c	Desenes de microfarads	Desenes de picofarads
R_c	50 k Ω	1 T Ω
C_c	40 μ F	100 pF
ω_c (f ϵ)	0,5 rad/s (80 mHz)	0,01 rad/s (1,6 mHz)

El valor de $R_x = k_{\text{cell}}/\sigma$ dependrà de la constant de cel·la i de la conductivitat del material. Per exemple, la conductivitat de l'aigua potable és de 0,01 dS/m a 2 dS/m i els valors de constant de cel·la (k_{cell}) per mesurar-la solen ser entre 0,1 i 10 cm⁻¹ (ASTM D 1125-95 2007). Si s'agafa $k_{\text{cell}} = 1$ cm⁻¹, els valors de R_x poden estar entre 500 Ω i 100 k Ω , que en principi són de bon mesurar, si no estan en sèrie amb una component reactiva molt més gran. Per tant, la relació R_c/R_x és relativament baixa per a elèctrodes de contacte directe, entre 0,5 i 100, i pot arribar a ser superior a 10⁶ per a elèctrodes capacitius, però la seva ω_c és més baixa. Conseqüentment, segons l'equació (2.6), la freqüència de mesura més adient per obtenir R_x sense que afectin massa els elèctrodes dependrà molt del tipus d'elèctrode i de la conductivitat de l'aigua.

La freqüència característica del material $\omega_c = (R_x C_c)^{-1} = \sigma/\epsilon_0 \epsilon_r$ depèn de la seva conductivitat elèctrica. Si es considera que l'aigua té una permitivitat relativa $\epsilon_r \approx 80$ (Von Hippel 1954), els valors de la freqüència característica són els de la Taula 2.2, i per aigües molt conductores són bastant alts, fet que dona més marge de freqüències per mesurar-la. En canvi, a la Taula 2.1 la freqüència característica dels elèctrodes, $\omega_c = (R_c C_c)^{-1}$, té valors força baixos independentment del tipus d'elèctrode. Per tant, en el cas de l'aigua la relació ω_c/ω_c pot ser més gran que 10⁶, de manera que, en principi, és factible mesurar les seva conductivitat sense que afectin els elèctrodes, a no ser que tinguin una resistència molt alta i una capacitat excepcionalment baixa.

Taula 2.2. Valors de la freqüència característica de l'aigua segons la seva conductivitat elèctrica a 25 °C. La conductivitat més baixa correspon a aigua destil·lada mentre que la més alta és de l'aigua de mar.

σ (dS/m)	ω_c (rad/s)	f_c (MHz)
0,001	$1,41 \times 10^5$	0,0225
0,01	$1,41 \times 10^6$	0,225
0,1	$1,41 \times 10^7$	2,25
1	$1,41 \times 10^8$	22,5
2	$2,82 \times 10^8$	45,0
3	$4,24 \times 10^8$	67,4
10	$1,41 \times 10^9$	225
50	$7,05 \times 10^9$	1125

Les freqüències de mesura es trien habitualment molt més altes que ω_e per tal de que no afecti la impedància dels elèctrodes i per tant, $\omega R_e C_e \gg 1$. Si al mateix temps la freqüència de mesura és molt més baixa que la freqüència característica del material, es tindrà $\omega R_x C_x \ll 1$, i llavors l'expressió (2.6) es pot aproximar per

$$\operatorname{Re} Z_{\text{HL}} \Big|_{\omega \ll \omega_e} \approx R_x \left[1 + \frac{R_e/R_x}{(\omega R_e C_e)^2} \right] = R_x \left[1 + \left(\frac{\omega_{\text{ex}}}{\omega} \right)^2 \right] \Big|_{\omega \gg \omega_{\text{ex}}} \approx R_x \quad (2.7)$$

on $\omega_{\text{ex}} = (R_e/R_x)^{1/2} \omega_e = [(R_x R_e)^{1/2} C_e]^{-1}$. Resulta, doncs, que si $R_e < R_x$, tindrem $\omega_{\text{ex}} < \omega_e$ però si $R_e > R_x$, tindrem $\omega_{\text{ex}} > \omega_e$. Les freqüències de mesura habituals són sempre més grans que ω_e , però si també són més grans que ω_{ex} i fins i tot es compleix $\omega \gg \omega_{\text{ex}}$, tindrem $\operatorname{Re} Z_{\text{HL}} \approx R_x$. Aquesta condició de mesura es pot aconseguir fàcilment amb elèctrodes de contacte directe perquè la relació R_e/R_x pot ser relativament baixa i per tant ω_{ex} estarà a prop de ω_e . En canvi, per a elèctrodes capacitius la relació R_e/R_x és sempre molt alta i per tant $\omega_{\text{ex}} \gg \omega_e$, de manera que pot ser que la condició $\omega_{\text{ex}} \ll \omega \ll \omega_e$ no es pugui complir. En aquests casos, R_x no es podrà obtenir directament de la part real de la impedància mesurada.

La fig. 2.9 és la representació de l'equació (2.6) quan $R_e/R_x = 1$ (possible situació amb elèctrodes de contacte directe) i $f_c/f_e = 1000$. Es veuen clarament les evolucions en freqüència de les dues xarxes amb R i C en paral·lel connectades en sèrie entre si. Primer es veu l'evolució de $\operatorname{Re} Z_e$ sumada a l'evolució de $\operatorname{Re} Z_x$. Al voltant de $f \approx 0,31f_e$ s'obté el valor de R_x ; per sota d'aquesta freqüència la impedància dels elèctrodes comença a influir en el valor de la part real. És a dir, la presència dels elèctrodes impedeix obtenir R_x a freqüències baixes. Cal mesurar a freqüències prou altes, però no properes a la freqüència característica del material (f). Si R_e fos més gran, R_x es podria obtenir mesurant a freqüències més baixes que les de la fig. 2.9 perquè ω_e (i ω_{ex}) serien més petites.

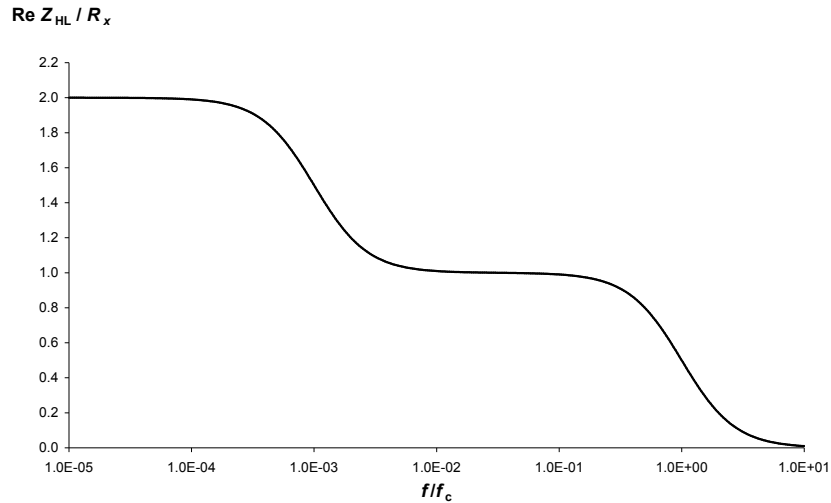


Figura 2.9. Simulació de l'equació (2.6) quan $R_e/R_x = 1$ i $f_c/f_e = 1000$.

La fig. 2.10 és la representació de l'equació (2.6) quan $R_e/R_x \geq 10^6$ (possible situació amb elèctrodes capacitius) i $f_c/f_e = 10^6$. De les gràfiques es dedueix que com més alta sigui la relació R_e/R_x , més estreta serà la banda de freqüències on la corba és plana, que és on s'obté $\text{Re } Z_{HL} \approx R_x$. A la freqüència $f \approx 0,32f_c$, si $R_e/R_x = 10^6$ (línia negra contínua) tenim $\text{Re } Z_{HL} \approx R_x$, mentre que si $R_e/R_x \approx 10^8$ (línia negra discontinua) tenim $\text{Re } Z_{HL} \approx 1,1R_x$, i si $R_e/R_x = 10^{10}$ (línia grisa, a la dreta) tenim $\text{Re } Z_{HL} \approx 10,8R_x$. Com més gran és la relació R_e/R_x , més alta és $\omega_{ex} = (R_e/R_x)^{1/2} \omega_e$, i per tant més alta és la freqüència on $\text{Re } Z_{HL} \approx R_x$. Si C_x és relativament massa gran (ω_c massa baixa), $\text{Re } Z_{HL}$ no presenta cap zona plana, de manera que no es podrà determinar R_x .

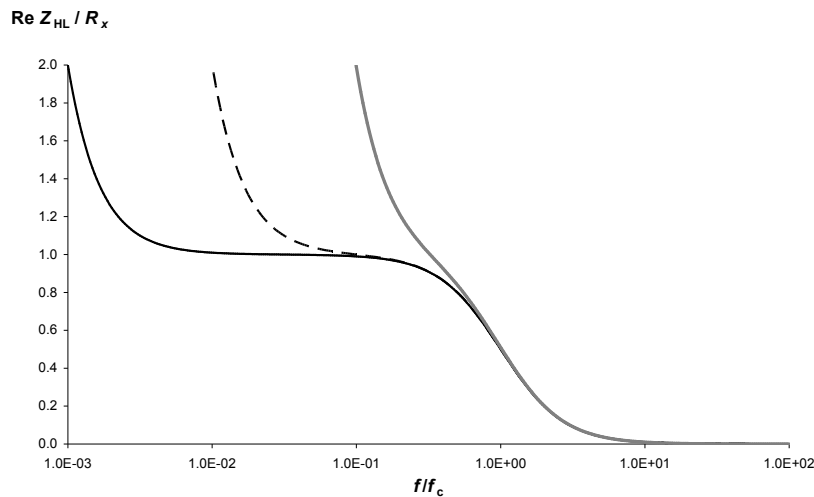


Figura 2.10. Simulació de l'equació (2.6) quan $R_e/R_x \geq 10^6$ i f_c/f_e val 10^6 (línia negra contínua), 10^8 (línia negra discontinua) o 10^{10} (línia grisa de la dreta).

Tornant ara al circuit de la fig. 2.8, la part imaginària de la impedància elèctrica entre H i L, que inclou la dels elèctrodes, és

$$\begin{aligned}
 -\text{Im} Z_{\text{HL}} &= \frac{1}{B_e} \frac{(B_e/G_e)^2}{1+(B_e/G_e)^2} + \frac{1}{B_x} \frac{(B_x/G_x)^2}{1+(B_x/G_x)^2} \\
 &= \left[\frac{1}{\omega C_e} \frac{(\omega R_e C_e)^2}{1+(\omega R_e C_e)^2} + \frac{1}{\omega C_x} \frac{(\omega R_x C_x)^2}{1+(\omega R_x C_x)^2} \right].
 \end{aligned} \tag{2.8}$$

on $G_e = 1/R_e$, $G_x = 1/R_x$, $|B_e|/G_e = \omega R_e C_e$ i $|B_x|/G_x = \omega R_x C_x$. A la banda de freqüències on $\omega_e \ll \omega \ll \omega_c$, tenim

$$-\text{Im} Z_{\text{HL}} \Big|_{\omega_e \ll \omega \ll \omega_c} = \frac{1}{\omega C_e} \tag{2.9}$$

i per tant la capacitat sèrie equivalent és la dels elèctrodes, C_e . Si en canvi es mesura a freqüències prou altes respecte a la freqüència característica del material, $\omega \gg \omega_c$ ($\omega R_x C_x \gg 1$), llavors l'equació 2.8 s'aproxima per

$$-\text{Im} Z_{\text{HL}} \Big|_{\omega \gg \omega_c} \approx \frac{1}{\omega C_e} + \frac{1}{\omega C_x} = \frac{1}{\omega C_{\text{ex}}} \tag{2.10}$$

que indica que la capacitat mesurada és la del material en sèrie amb la dels elèctrodes, que es pot expressar com

$$C_{\text{ex}} = \frac{C_e C_x}{C_e + C_x} = C_x \left(\frac{1}{1 + C_x/C_e} \right) \Big|_{C_x/C_e \ll 1} \approx C_x \left(1 - \frac{C_x}{C_e} \right) \tag{2.11}$$

i per tant, si la capacitat dels elèctrodes és prou gran, $C_e \gg C_x$, tindrem $C_{\text{ex}} \approx C_x$, i per tant, en principi, es podria estimar el valor de la permitivitat del material. Però s'ha de tenir en compte que si ω_c és alta, com és el cas d'aigües bastant conductores, com ara l'aigua potable, a $\omega \gg \omega_c$ hi pot haver efectes de propagació d'ones que afectin molt les mesures.

2.2.3. Model de la impedància elèctrica incloent la impedància (de fuites) entre elèctrodes

Els elèctrodes que entrin en contacte mecànic amb el material que es vol mesurar necessitaran un suport o estaran subjectats al recipient que conté la mostra. Aquest suport o recipient normalment serà de plàstic, vidre, ceràmica o un altre material aïllant que tindrà una resistivitat molt alta però finita. Per tant, en absència del material, hi haurà una resistència entre elèctrodes R_{hl} que es modelitza connectada en paral·lel amb el conjunt format pels elèctrodes i la mostra de material (Agilent 2013). A més, com que entre dos conductors elèctrics sempre hi ha una capacitat elèctrica (Ramo *et al.* 1994), entre els elèctrodes també hi haurà una capacitat paràsita C_{hb} , en paral·lel amb tota la impedància del

conjunt elèctrodes-material. Si es considera que el conjunt format pels elèctrodes i el material que es vol mesurar té una impedància $Z = R + jX$, l'admitància Y_{hl} (de fuites) formada per la connexió en paral·lel de R_{hl} i C_{hl} , estarà connectada també en paral·lel amb Z . Per tant, el model de la fig. 2.5 esdevé el de la fig. 2.11 i, si se substitueix Y_{hl} pels seus dos components, s'obté el circuit de la fig. 2.12.

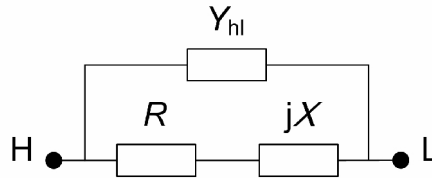


Figura 2.11. Model de la impedància elèctrica entre H i L incloent l'admitància paràsita entre elèctrodes.

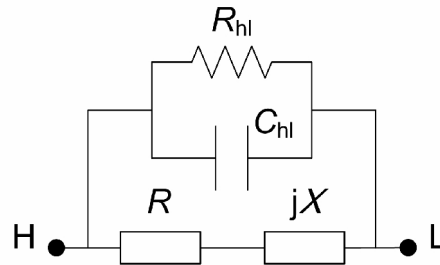


Figura 2.12. Model de la impedància elèctrica entre H i L incloent-hi la impedància de fuites.

Z pot representar qualsevol impedància elèctrica en general, en el nostre cas $Z = R + jX = Z_e + Z_x$. Quan la part imaginària és capacitiva, Z es podrà expressar com una resistència R i una capacitat C (equivalents sèrie),

$$Z = R + jX = R - j\frac{1}{\omega C}. \quad (2.12)$$

L'expressió de Y_{hl} és

$$Y_{hl} = \frac{1}{R_{hl}} + j\omega C_{hl}. \quad (2.13)$$

L'objectiu és ara determinar com afecta Y_{hl} sobre R quan es mesura la part real de tota la impedància entre H i L (Z_{HL}) i també com afecta sobre C quan es mesura la part imaginària de Z_{HL} .

Si es combinen (2.12) i (2.13), segons el circuit de la fig. 2.12 s'obté

$$Y_{HL} = Y_{hl} + \frac{1}{R + jX} = \frac{1}{R_{hl}} + \frac{R}{R^2 + X^2} + j\left(\omega C_{hl} - \frac{X}{R^2 + X^2}\right) = G_{HL} + jB_{HL}. \quad (2.14)$$

$Y_{HL} = 1/Z_{HL}$ s'expressa com una part real G_{HL} i una part imaginària B_{HL} , a una determinada freqüència. Si no hi hagués la impedància de fuites, la part real de $1/Y_{HL}$ seria R i la part imaginària seria X . R_{hl} i C_{hl} , però, afecten d'una manera no òbvia totes dues parts.

Per obtenir expressions més compactes es pot usar el factor de dissipació (Oliver i Cage 1971; Pallàs Areny 2006)

$$D = \frac{R}{|X|} = \omega RC, \quad (2.15)$$

que és un paràmetre molt comú per descriure la “qualitat” dels condensadors. Aquí, però, es fa servir per descriure el valor relatiu de la part real respecte a la part imaginària d'una impedància elèctrica genèrica, representada pels seus components sèrie (R i X) i per tant no és cap indicador de qualitat. Si D és molt menor que 1 vol dir que la part imaginària de Z és molt més gran que la seva part real i si D és molt més gran que 1 succeeix el contrari. Cal fer notar també que D correspon només a la impedància Z , no a tota la impedància Z_{HL} .

De l'expressió (2.14) tenim $\text{Re } Y_{HL} = G_{HL}$ (conductància entre H i L), i en funció de D és

$$G_{HL} = \frac{1}{R_{hl}} + \frac{R}{R^2 + X^2} = \frac{1}{R_{hl}} + \frac{1}{R} \frac{1}{1 + (X/R)^2} = \frac{1}{R_{hl}} + \frac{1}{R} \frac{D^2}{1 + D^2}. \quad (2.16)$$

Semblantment, $\text{Im } Y_{HL} = B_{HL}$ (susceptància entre H i L) és

$$B_{HL} = \omega C_{hl} - \frac{X}{R^2 + X^2} = \omega C_{hl} - \frac{1}{X} \frac{1}{1 + D^2}. \quad (2.17)$$

Ara es veu que R_{hl} afecta només la conductància i C_{hl} només la susceptància.

La impedància Z_{HL} s'obté com el recíproc de Y_{HL} ,

$$Z_{HL} = \frac{1}{Y_{HL}} = \frac{1}{G_{HL} + jB_{HL}} = \frac{G_{HL}}{G_{HL}^2 + B_{HL}^2} - j \frac{B_{HL}}{G_{HL}^2 + B_{HL}^2}. \quad (2.18)$$

La part real d'aquesta Z_{HL} és

$$\text{Re } Z_{HL} = \frac{G_{HL}}{G_{HL}^2 + B_{HL}^2} = \frac{1}{G_{HL}} \frac{1}{1 + (B_{HL}/G_{HL})^2} \quad (2.19)$$

Substituint aquí les expressions (2.16) i (2.17) s'obtindria $\text{Re } Z_{HL}$ del circuit de la fig. 2.12, però la seva expressió depèn de tants factors que seria difícil d'interpretar atès que hi intervenen tant R_{hl} com C_{hl} . Per trobar una expressió de $\text{Re } Z_{HL}$ més senzilla es pot mirar

d'aproximar les expressions de les dues parts de l'admitància, equacions (2.16) i (2.17), segons el valor de D .

2.2.3.1 Efecte de la impedància de fuites entre elèctrodes quan es mesura una impedància predominantment resistiva

Si $D \gg 1$, que implica $R \gg |X|$, per tant una impedància bàsicament resistiva, $Z \approx R$, condició que es pot complir per a elèctrodes de contacte directe, resulta $G_{\text{HL}} \approx R^{-1} + R_{\text{hl}}^{-1}$. És a dir, la part real de Y_{HL} és el recíproc de les dues resistències R i R_{hl} en paral·lel. Quasi sempre es complirà que $R_{\text{hl}} \gg R$, ja que el material del suport o recipient tindrà una resistivitat molt alta (plàstic, vidre o ceràmica) que farà que R_{hl} sigui de l'ordre de teraohms. R representa en canvi el valor de la resistència del material més la influència dels elèctrodes a la banda freqüencial de mesura i el seu valor podrà ser com a màxim d'alguns megaohms. Llavors $G_{\text{HL}} \approx R^{-1}$ i mesurant la part real de l'admitància es pot calcular R sense que l'afecti la impedància de fuites.

2.2.3.2 Efecte de la impedància de fuites entre elèctrodes quan es mesura una impedància predominantment reactiva

Quan $D \ll 1$, que implica $R \ll |X|$, condició que es pot complir fàcilment quan es mesura amb elèctrodes capacitius, el recíproc de G_{HL} a l'equació (2.16) es pot aproximar per

$$\left. \frac{1}{G_{\text{HL}}} \right|_{D \ll 1} \approx \frac{1}{\frac{1}{R_{\text{hl}}} + \frac{D^2}{R}} = \frac{R}{D^2 + \frac{R}{R_{\text{hl}}}}. \quad (2.20)$$

R_{hl} és molt més gran que R , i encara més si R és petita, i per tant R/R_{hl} serà molt més petit que 1. Però D^2 també ho serà, de manera que ara no es pot calcular R a partir del recíproc de G_{HL} .

Semblantment, si es considera la part imaginària, l'equació (2.17) es pot aproximar per

$$B_{\text{HL}} \Big|_{D \ll 1} \approx \omega C_{\text{hl}} - \frac{1}{X} = \omega(C_{\text{hl}} + C) \quad (2.21)$$

que mostra que la capacitat de fuites es suma a C . Així doncs, contràriament al que passa quan es mesura una impedància predominantment resistiva, ara la impedància de fuites afecta tant a la part real com a la part imaginària de la impedància (material i elèctrodes) mesurada.

Segons l'equació (2.19), $\text{Re } Z_{\text{HL}}$ depèn de G_{HL} i de $B_{\text{HL}}/G_{\text{HL}}$. Aquest darrer factor es pot obtenir multiplicant (2.20 i (2.21),

$$\left. \frac{B_{\text{HL}}}{G_{\text{HL}}} \right|_{D \ll 1} \approx \frac{\omega R(C_{\text{hl}} + C)}{D^2 + \frac{R}{R_{\text{hl}}}} = \frac{D \left(1 + \frac{C_{\text{hl}}}{C}\right)}{D^2 + \frac{R}{R_{\text{hl}}}}. \quad (2.22)$$

Substituint aquesta equació i la (2.20) a (2.19) s'obté l'aproximació de la part real de Z_{HL} ,

$$\text{Re } Z_{\text{HL}} \Big|_{D \ll 1} \approx \frac{R}{D^2 + \frac{R}{R_{\text{hl}}}} \frac{1}{1 + \left[\frac{D \left(1 + \frac{C_{\text{hl}}}{C}\right)}{D^2 + \frac{R}{R_{\text{hl}}}} \right]^2} = R \frac{1 + \frac{R}{D^2 R_{\text{hl}}}}{D^2 \left(1 + \frac{R}{D^2 R_{\text{hl}}}\right)^2 + \left(1 + \frac{C_{\text{hl}}}{C}\right)^2}. \quad (2.23)$$

Atès que $D^2 \ll 1$ i normalment $R_{\text{hl}} \gg R$, es complirà

$$D^2 \left(1 + \frac{R}{D^2 R_{\text{hl}}}\right)^2 = \left(D^2 + \frac{R}{R_{\text{hl}}}\right)^2 \Big|_{\substack{D^2 \ll 1 \\ R \ll R_{\text{hl}}}} \ll \left(1 + \frac{C_{\text{hl}}}{C}\right)^2, \quad (2.24)$$

de manera que al denominador de (2.23) hi predominarà el terme que depèn de les capacitats. La part real de Z_{HL} es pot aproximar llavors per

$$\text{Re } Z_{\text{HL}} \Big|_{D \ll 1} \approx \frac{R}{\left(1 + \frac{C_{\text{hl}}}{C}\right)^2} \left(1 + \frac{R}{D^2 R_{\text{hl}}}\right) \quad (2.25)$$

que mostra que quan la part real de la impedància Z mesurada és molt més petita que la part imaginària ($D \ll 1$), tant la resistència de fuites R_{hl} com la capacitat de fuites C_{hl} afecten el valor de R estimat a partir de la mesura de $\text{Re } Z_{\text{HL}}$. L'efecte de C_{hl} depèn del seu valor relatiu respecte a la capacitat C de Z_{HL} , mentre l'efecte de R_{hl} depèn del valor relatiu de $D^2 R_{\text{hl}}$ respecte a R . En definitiva, mentre que quan $D \gg 1$ es pot obtenir R calculant G_{HL}^{-1} , quan $D \ll 1$, no es pot obtenir directament ni R a partir de G_{HL} ni C a partir de B_{HL} .

Si ara la impedància Z de la fig. 2.12 es representa com una combinació de la impedància del material i la dels elèctrodes, tal com s'ha fet a la fig. 2.8, s'obté el model de la fig. 2.13 que permet considerar tant l'efecte de la impedància dels elèctrodes com el de l'admitància de fuites.

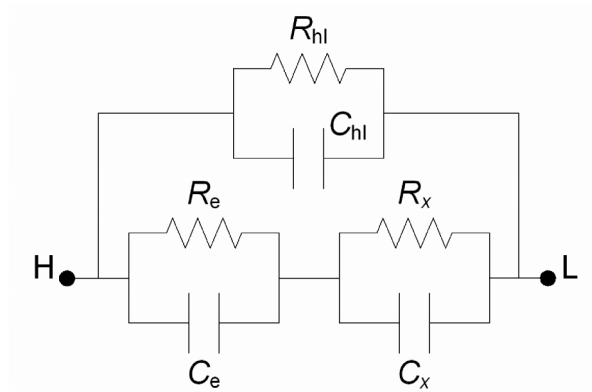


Figura 2.13. Model de la impedància elèctrica entre H i L incloent la impedància dels elèctrodes i la impedància de fuites.

Els valors de R i X s'obtenen respectivament a partir de les equacions (2.7) i (2.9). Dins el marge de freqüències de mesura, que segons l'apartat 2.2.2 és el que hi ha entre ω_{ex} y ω_c ($\omega_{ex} \ll \omega \ll \omega_c$), on $\omega_{ex} = (R_e/R_x)^{1/2}\omega_e$ i $\omega_e = (R_e C_e)^{-1}$, l'expressió de R en funció de R_e , C_e i R_x és

$$R|_{\omega \ll \omega_c} \approx R_x \frac{1 + (\omega/\omega_{ex})^2}{(\omega/\omega_{ex})^2} = R_x \left[1 + \left(\frac{\omega_{ex}}{\omega} \right)^2 \right] \quad (2.26)$$

i la de X és

$$X|_{\omega \ll \omega_c} \approx -\frac{1}{\omega C_e} \quad (2.27)$$

Per tant, $C \approx C_e$, perquè la impedància de C_x en aquesta banda de freqüències encara és força gran i no afecta la impedància mesurada.

Tenint en compte les expressions (2.26) i (2.27), el factor de dissipació és

$$D = \frac{R}{|X|} = \omega C_e R_x \left[1 + \left(\frac{\omega_{ex}}{\omega} \right)^2 \right]. \quad (2.28)$$

Per a tenir $D \ll 1$ ($R \ll |X|$), s'haurà de complir que $\omega C_e \ll R_x [1 + (\omega_{ex}/\omega)^2]$ dintre de tot el marge de freqüències d'interès ($\omega_{ex} \ll \omega \ll \omega_c$). Per a elèctrodes capacitius aquesta condició es podrà complir fàcilment perquè C_e és molt petita, com a molt de desenes de picofarads.

A partir de l'expressió (2.25), s'obté que la part real de Z_{HL} és

$$\operatorname{Re} Z_{\text{HL}}|_{D \ll 1} \approx \frac{R}{\left(1 + \frac{C_{\text{hl}}}{C}\right)^2} \left(1 + \frac{R}{D^2 R_{\text{hl}}}\right) = \frac{R + \frac{1}{\omega^2 R_{\text{hl}} C^2}}{\left(1 + \frac{C_{\text{hl}}}{C}\right)^2}. \quad (2.29)$$

Substituint aquí les expressions de R i C vàlides dins d'aquesta banda de freqüències, equacions (2.26) i (2.27), s'obté

$$\operatorname{Re} Z_{\text{HL}}|_{D \ll 1} \approx \frac{R_x \left[1 + \left(\frac{\omega_{\text{ex}}}{\omega}\right)^2\right] + \frac{R_x}{\omega^2 R_x R_{\text{hl}} C_e^2}}{\left(1 + \frac{C_{\text{hl}}}{C_e}\right)^2} = R_x \frac{1 + \left(\frac{\omega_{\text{ex}}}{\omega}\right)^2 + \left(\frac{\omega_{\text{px}}}{\omega}\right)^2}{\left(1 + \frac{C_{\text{hl}}}{C_e}\right)^2} \quad (2.30)$$

on $1/\omega_{\text{px}} = C_e(R_{\text{hl}}R_x)^{1/2}$. (El subíndex “p” fa referència a “paral·lel”, perquè R_{hl} és una resistència en paral·lel amb la impedància Z). Si s'opera el terme del numerador resulta

$$\left(\frac{\omega_{\text{ex}}}{\omega}\right)^2 + \left(\frac{\omega_{\text{px}}}{\omega}\right)^2 = \frac{1}{\omega^2 R_x C_e^2} \left(\frac{1}{R_e} + \frac{1}{R_{\text{hl}}}\right) = \frac{1}{\omega^2 R_x (R_e || R_{\text{hl}}) C_e^2} = \left(\frac{\omega_{\text{ep}}}{\omega}\right)^2. \quad (2.31)$$

Substituint (2.31) a (2.30) s'obté l'expressió de la part real de Z_{HL} de la fig. 2.13 en aquestes condicions,

$$\operatorname{Re} Z_{\text{HL}}|_{D \ll 1} \approx R_x \frac{1 + \left(\frac{\omega_{\text{ep}}}{\omega}\right)^2}{\left(1 + \frac{C_{\text{hl}}}{C_e}\right)^2} = \frac{R_x}{\left(1 + \frac{C_{\text{hl}}}{C_e}\right)^2} \frac{1 + (\omega/\omega_{\text{ep}})^2}{(\omega/\omega_{\text{ep}})^2} \Bigg|_{\omega=\omega_{\text{ep}}} = \frac{2R_x}{\left(1 + \frac{C_{\text{hl}}}{C_e}\right)^2}. \quad (2.32)$$

Si es compara aquesta equació amb la (2.7), que descriu només l'efecte dels elèctrodes, la primera diferència és que ara al numerador hi ha ω_{ep} ($= [(R_x(R_e || R_{\text{hl}}))^{1/2} C_e]^{-1}$) en lloc de ω_{ex} ($= [(R_x R_e)^{1/2} C_e]^{-1}$). És a dir, R_e ha quedat substituïda per la combinació de R_e i R_{hl} en paral·lel, que equival a dir que la resistència de fuites disminueix la de l'elèctrode. Per tant, el millor marge de freqüència per mesurar ha passat a ser entre ω_{ep} i ω_c , en lloc de entre ω_{ex} i ω_c , que era més gran. La segona diferència deguda a la impedància de fuites és que a (2.32) hi ha un denominador que depèn de la relació de capacitats C_{hl}/C_e . Si C_{hl} no és molt més petita que C_e , hi haurà un factor constant d'atenuació del valor de R_x a cada freqüència entre ω_{ep} i ω_c . En principi, doncs, si es mesura a freqüències més grans que ω_{ep} i $C_e \gg C_{\text{hl}}$ tindrem $\operatorname{Re} Z_{\text{HL}} \approx R_x$. Però si C_{hl} té un valor considerable i s'ha de complir $C_e \gg C_{\text{hl}}$, serà difícil tenir $|X| \gg R_x$ i per tant no es complirà la condició $D \ll 1$, de manera que les expressions aproximades a partir de la (2.19) deixen de ser vàlides.

La fig. 2.14 és la representació de l'equació (2.32), quan C_{hl} és zero, per observar només l'efecte de R_{hl} , i els valors dels altres elements de Z_{HL} són: $R_e = 1 \text{ T}\Omega$, $C_e = 100 \text{ pF}$, i $R_x = 1 \text{ k}\Omega$. Si es consideren diferents valors de R_{hl} , s'observa que a freqüències baixes $\text{Re } Z_{HL}$ canvia força (fig. 2.14). Quan $R_{hl} = 1 \text{ E}\Omega$ ($10^{18} \Omega$) (línia negra contínua), la desviació respecte al valor de R_x , zona plana de la figura, és mínima, i és deguda a que R_e és finita. Quan $R_{hl} = 1 \text{ T}\Omega$ (línia negra discontinúta), la desviació a baixa freqüència augmenta perquè ara $R_e || R_{hl} = 0,5R_e$. Si R_{hl} es redueix fins a $100 \text{ G}\Omega$ (línia grisa), la desviació és molt més gran perquè $R_e || R_{hl} \approx R_{hl}$. En tots tres casos, però, a freqüències prou altes tenim $\text{Re } Z_{HL} \approx R_x$.

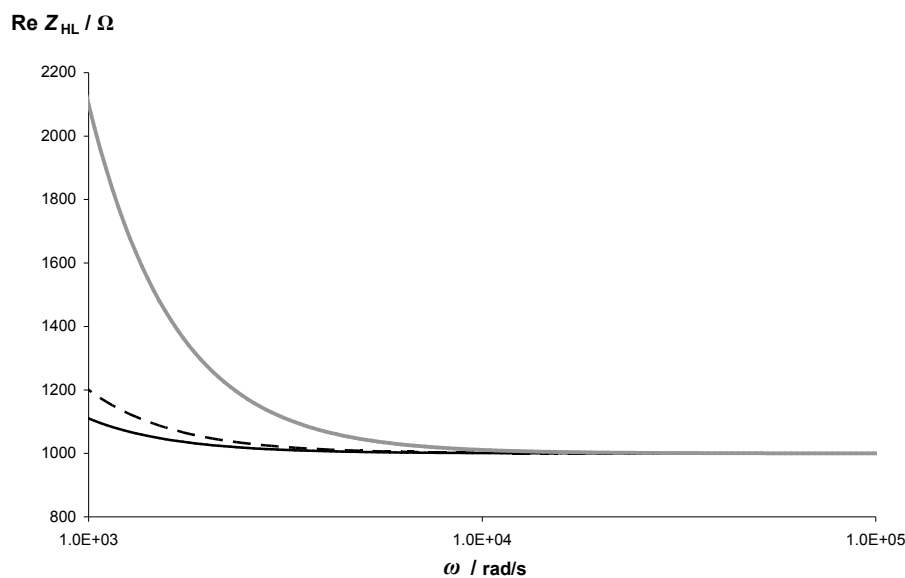


Figura 2.14. Simulació de l'equació (2.32) quan $R_e = 1 \text{ T}\Omega$, $C_e = 100 \text{ pF}$, $R_x = 1 \text{ k}\Omega$, $C_{hl} = 0$ i R_{hl} igual a $1 \text{ E}\Omega$ (línia negra), $10 \text{ T}\Omega$ (línia discontinúta) i $100 \text{ G}\Omega$ (línia gris).

La Taula 2.3 mostra l'efecte que té R_{hl} en ω_{ep} i en la desviació de la part real de Z_{HL} mesurada a 1000 rad/s respecte a R_x quan $R_x = 1 \text{ k}\Omega$. Mentre R_{hl} és molt alta respecte als elèctrodes, tindrem $R_e || R_{hl} \approx R_e$ i la desviació de $\text{Re } Z_{HL}$ respecte a R_x a 1000 rad/s (baixa freqüència de la gràfica de la fig. 2.14) es manté moderada, i l'augment de ω_{ep} no és significatiu. Aquesta desviació al voltant d'un 10 % i $\omega_{ep} \approx 316 \text{ rad/s}$ són degudes només a l'efecte de R_e . En canvi, quan $R_{hl} = R_e$, la desviació augmenta el doble respecte a la situació on $R_{hl} \gg R_e$, i pel que fa a ω_{ep} l'augment és significatiu (de 316 a 447 rad/s). Si es disminueix R_{hl} fins a $0,1R_e$, la desviació de la part real de Z_{HL} respecte a R_x i l'augment de ω_{ep} es poden considerar aberrants.

Taula 2.3. Simulació de l'equació (2.32) quan $R_x = 1 \text{ k}\Omega$, $R_c = 1 \text{ T}\Omega$, $C_c = 100 \text{ pF}$ i $\omega_{ep} = 0,01 \text{ rad/s}$.

$R_{hl} (\Omega)$	$\omega_{ep} (\text{rad/s})$	$\text{Re } Z_{HL} (\Omega) (\omega = 1 \text{ krad/s})$	Desviació: $\text{Re } Z_{HL} \text{ vs. } R_x$
10^{18}	316	1100	10,0 %
10^{14}	318	1101	10,1 %
10^{13}	332	1110	11,0 %
10^{12}	447	1200	20,0 %
10^{11}	1050	2100	110,0 %

Si la resistència R_x que es vol mesurar augmenta a $100 \text{ k}\Omega$, Taula 2.4, s'observa que per als mateixos valors de R_{hl} , les desviacions de la part real a baixa freqüència són dos ordres de magnitud inferiors respecte a quan $R_x = 1 \text{ k}\Omega$, i l'augment de ω_{ep} és un ordre de magnitud inferior. Aquests resultats estan predits a les equacions (2.31) i (2.32).

Taula 2.4. Simulació de l'equació (2.32) quan $R_x = 100 \text{ k}\Omega$, $R_c = 1 \text{ T}\Omega$, $C_c = 100 \text{ pF}$ i $\omega_{ep} = 0,01 \text{ rad/s}$.

$R_{hl} (\Omega)$	$\omega_{ep} (\text{rad/s})$	$\text{Re } Z_{HL} (\Omega) (\omega = 1 \text{ krad/s})$	Desviació: $\text{Re } Z_{HL} \text{ vs. } R_x$
10^{18}	31,6	100100	0,10 %
10^{14}	31,8	100101	0,10 %
10^{13}	33,2	100110	0,11 %
10^{12}	44,7	100200	0,20 %
10^{11}	105,0	200100	1,10 %

L'efecte que pot sorprendre molt és que quan R_{hl} és més petita, el valor de la part real de Z_{HL} a freqüències baixes augmenta. En principi això podria semblar una contradicció perquè si disminuïm la resistència que tenim en paral·lel tota la impedància disminueix i nosaltres observem un augment de la part real. Però un efecte no exclou necessàriament l'altre: si una impedància descrita per una resistència R_s en sèrie amb una capacitat C_s es descriu amb una resistència R_p en paral·lel amb una capacitat C_p , sempre es compleix que $R_p = R_s(1 + D^2)/D^2$, i per tant $R_p > R_s$. Si ara s'afegeix una resistència paràsitica R connectada en paral·lel amb la impedància, i per tant amb aquesta R_p , tindrem una nova R_p' i si bé la nova resistència sèrie equivalent R_s' serà menor que R_p' , això no exclou que pugui ser més gran que la R_s inicial. L'augment de $\text{Re } Z_{HL}$ no és perquè augmenti la impedància quan disminueix R_{hl} (que no ho fa, de fet disminueix), l'efecte que s'observa és perquè augmenta ω_{ep} .

Per veure l'efecte de R_{hl} i C_{hl} sobre la part imaginària de Z_{HL} , de l'equació (2.18) s'obté

$$-\text{Im } Z_{HL} = \frac{B_{HL}}{G_{HL}^2 + B_{HL}^2}. \quad (2.33)$$

Si $D \ll 1$, substituint les equacions (2.20) i (2.21) a (2.33) s'arriba a

$$-\text{Im} Z_{\text{HL}}|_{D \ll 1} \approx \frac{\omega(C_{\text{hl}} + C)}{\left(\frac{1}{R_{\text{hl}}} + \frac{D^2}{R}\right)^2 + \omega^2(C_{\text{hl}} + C)^2}. \quad (2.34)$$

Atès que $D \ll 1$ i $R \ll R_{\text{hl}}$, al denominador de (2.34) hi predomina el terme que depèn de les capacitats

$$\left(\frac{1}{R_{\text{hl}}} + \frac{D^2}{R}\right)^2 \Big|_{\substack{D \ll 1 \\ R \ll R_{\text{hl}}}} \ll \omega^2(C_{\text{hl}} + C)^2. \quad (2.35)$$

Llavors (2.34) es pot aproximar per

$$-\text{Im} Z_{\text{HL}}|_{D \ll 1} \approx \frac{1}{\omega(C_{\text{hl}} + C)}, \quad (2.36)$$

i per tant el resultat és que C_{hl} se suma directament a C , que és la capacitat equivalent sèrie de Z i R_{hl} no afecta el resultat. Així doncs, quan predomina la part imaginària de la impedància, els efectes de la impedància paràsita entre els elèctrodes són menors al mesurar la part imaginària que al mesurar la part real, però en qualsevol cas la capacitat dels elèctrodes, en sèrie amb la del material, pot fer difícil determinar la constant dielèctrica del material.

2.2.4. Model de la impedància incloent l'entorn electromagnètic

L'entorn electromagnètic són bàsicament les capacitats paràsites C_{hg} , C_{lg} , C_{g} i C_{hl} que es mostren a la fig. 2.15. C_{hg} i C_{lg} són les capacitats paràsites entre cada elèctrode (terminal) i terra, C_{g} és l'acoblament capacitiu entre el cos de la impedància que es mesura i terra, i C_{hl} és la capacitat paràsita entre elèctrodes (terminals). L'entorn electromagnètic també inclou la presència de l'instrument (Callegaro 2009). C_{hg} , C_{lg} i C_{hl} es poden considerar capacitats puntuals (de paràmetres concentrats) entre dos conductors. En canvi, l'acoblament a terra, C_{g} és una capacitat paràsita de paràmetres elèctrics distribuïts entre volum conductor (que té unes dimensions que no es poden considerar puntuals) i el "pla" de terra (Hague i Foord 1971; Hartshorn 1947; Fleig *et al.* 1996). El "pla" de terra són totes les masses conductores connectades a terra, inclosa la coberta de l'instrument. No es consideren inductàncies mútues paràsites perquè es pressuposa que les connexions es poden fer sense crear circuits que tinguin un àrea gran.

C_{hl} forma part de l'admitància de fuites, analitzada a l'apartat anterior, i depèn principalment de la separació entre elèctrodes, però també de la distància al “pla” de terra (Ramo *et al.* 1994), i per això s'ha inclòs com un efecte de l'entorn electromagnètic. R_{hl} no s'inclou en el model de la fig. 2.15 perquè es pot considerar que està en paral·lel amb la R_e (equivalent) dels elèctrodes.

En el model de la impedància elèctrica dels apartats anteriors només hi havia dos nodes, H i L; és el que s'anomena una xarxa d'un port, on el corrent que entra pel node H és el mateix que surt per node L. Ara, en canvi, l'entorn electromagnètic introdueix en el model un tercer node: el node de terra. Per tant, el model és una xarxa de dos ports (Seshu i Balabanian 1959).

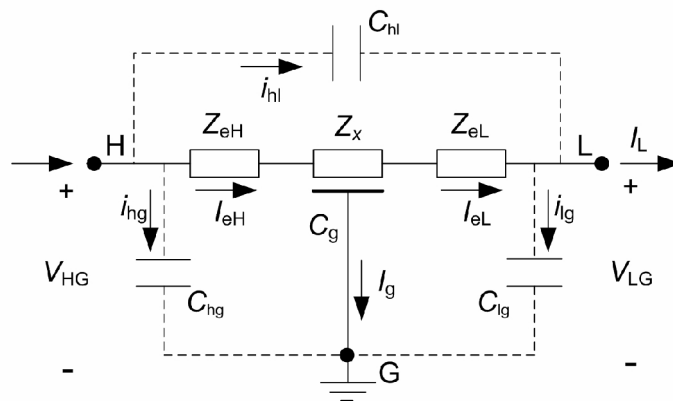


Figura 2.15. Circuit equivalent per mesurar una impedància elèctrica amb dos elèctrodes i tenint en compte totes les capacitats paràsites.

La presència del tercer node fa que I_H sigui diferent de I_L . Habitualment, els instruments que mesuren impedància posen el node L a potencial de terra, ja sigui connectant-lo directament a terra o a través d'un circuit que faci que el node L estigui la mateix potencial que terra sense que hi estigui connectat físicament (terra virtual) (Agilent 2013). Si el node L està a potencial de terra, $V_{LG} = 0$ i $i_{lg} = 0$, també es complirà que $V_{HL} = V_{HG}$.

Si es mesura I_H , la impedància que calcularà l'instrument serà V_{HG}/I_H , és el que s'anomena en anglès *driving point impedance* (impedància vista des del node d'injecció), que és la tensió mesurada a un port (V_{HG}) dividida pel corrent mesurat al mateix port (I_H). En canvi, si es mesura I_L , la impedància que calcularà l'instrument serà V_{HG}/I_L i és el que s'anomena *transimpedància*, en anglès *transfer impedance* (és una funció de transferència, com la relació de la tensió d'entrada dividida pel corrent de sortida de la xarxa), que és la tensió mesurada a un port (V_{HG}) dividida pel corrent mesurat a l'altre port (I_L) (Seshu i Balabanian 1959).

Les equacions dels corrents en el circuit de la fig. 2.15 són

$$I_H = i_{hl} + i_{hg} + I_{eH}, \quad (2.37)$$

$$I_L = i_{hl} + I_{eL}, \quad (2.38)$$

$$I_{eH} = I_g + I_{eL}, \quad (2.39)$$

i restant (2.37) i (2.38) i combinant (2.39) s'obté

$$I_H - I_L = i_{hg} + I_{eH} - I_{eL} = i_{hg} + I_g, \quad (2.40)$$

resultat que demostra que I_H és diferent de I_L i la diferència són els corrents que circulen cap terra per les capacitats paràsites C_{hg} i C_g . Resulta, doncs, que les expressions de la impedància entre H i L dependran de si l'instrument mesura I_H o I_L , tot i que el model de la impedància sempre és el mateix.

En el capítol 3 s'analitzaran els mètodes de mesura d'impedància habituals i s'obtidran les expressions de la impedància entre H i L.

2.3. Conclusions

Quan es vol mesurar la impedància elèctrica d'un material, tots els sistemes de mesura tenen una sèrie de limitacions diferents a les que sorgeixen quan es mesura un component o un circuit electrònic. Atès que l'objectiu de les mesures és poder-ne deduir les propietats del material, la impedància elèctrica amb que es modelitza el material convé que estigui formada per elements que es corresponguin a les propietats d'interès. Conseqüentment, és millor que les limitacions que sorgeixin a la mesura es formulin amb termes que no modifiquin aquells elements i que permetin determinar quines són les millors condicions per mesurar.

Quan es mesura la impedància d'un material mitjançant dos elèctrodes, la impedància d'aquests elèctrodes queda en sèrie amb la del material. En una impedància genèrica descrita mitjançant una resistència R connectada en sèrie amb una capacitat C , les mesures sense elèctrodes a una freqüència que sigui baixa respecte a la freqüència característica de la xarxa ($\omega_0 = [RC]^{-1}$), obtenen la resistència R , mentre que les mesures a alta freqüència obtenen la capacitat C . Quan es fan servir elèctrodes, la impedància dels quals disminueix per sobre d'una freqüència ω_c , la solució per evitar el seu efecte quan es vol mesurar la resistència del material és en principi mesurar també a una freqüència prou alta respecte a ω_c però que al mateix temps sigui una freqüència prou petita respecte a la freqüència característica del material, ω_c . La equació (2.7) permet definir millor aquesta banda de

freqüències, que resulta ser més estreta perquè va des de més amunt de $\omega_{ex} = [(R_x R_e)^{1/2} C_e]^{-1}$ fins força abans de ω_c . Per tal de garantir $\omega_{ex} \ll \omega_c$, caldrà que R_e i C_e siguin prou grans per que es compleixi $R_e C_e^2 \gg R_x C_x^2$. Quan es vol mesurar materials poc conductors (R_x alta) amb elèctrodes capacitius (C_e baixa), caldrà que la R_e sigui molt alta. Amb elèctrodes de contacte directe, la relació C_e/C_x és prou alta per poder mesurar materials de tota mena en un rang de freqüències prou gran.

Si s'analitza la part imaginària de la impedància mesurada, l'efecte dels elèctrodes és que a baixa freqüència s'obté la capacitat dels elèctrodes (C_e) (equació 2.9) i a freqüències més altes que la freqüència característica ω_c s'obté C_e en sèrie amb C_x (equació 2.10). Per tant, es podria mesurar primer a baixa freqüència per obtenir C_e i després descomptar el seu valor de la capacitat mesurada a alta freqüència. Aquest mètode, però, només serà vàlid si els valors de C_e i C_x són constants en tot el rang de freqüències i si a alta freqüència no hi ha efectes de propagació d'ones. En qualsevol cas, però, serà difícil mesurar una capacitat C_x molt més gran que C_e .

Si a més de la impedància dels elèctrodes es considera la impedància de fuites entre ells, els efectes es poden agreujar segons el tipus d'elèctrodes emprats i del material mesurat. Si es mesura un material poc o molt conductor, però no un aïllant, amb elèctrodes de contacte directe, el recíproc de la conductància dóna directament la resistència del material més la que aportin els elèctrodes a la freqüència de mesura emprada, sense cap efecte de la impedància de fuites.

Si es mesura amb elèctrodes capacitius, els efectes produïts per l'admitància de fuites Y_{hl} (R_{hl} en paral·lel amb C_{hl}), tant si el material mesurat és conductor com si és aïllant, són deguts tant a R_{hl} com a C_{hl} . R_{hl} disminueix el valor equivalent de R_e pel que fa a la determinació de la mínima freqüència a la que es pot obtenir R_x a partir de $\text{Re } Z_{HL}$, que passa a ser $\omega_{ep} = [(R_x(R_e || R_{hl}))^{1/2} C_e]^{-1}$ en lloc de $\omega_{ex} = [(R_x R_e)^{1/2} C_e]^{-1}$. Per tant, $\omega_{ep} > \omega_{ex}$ i la banda de freqüències útils és més estreta com més petita sigui R_{hl} . C_{hl} afecta també el valor calculat de R_x a partir de $\text{Re } Z_{HL}$ i el redueix segons el factor $(1 + C_{hl}/C_e)^2$, que és independent de la freqüència (equació 2.32). A més, C_{hl} està sempre en paral·lel amb la capacitat equivalent sèrie de la impedància $Z_e + Z_x$, com calia esperar.

La consideració de l'entorn electromagnètic introdueix capacitats paràsites addicionals en el model de la impedància elèctrica entre H i L, que passa de ser un model d'un port a un model de dos ports. Això fa que l'expressió de la impedància entre H i L depengui de si es

mesura el corrent en el port d'entrada o en el de sortida, fet que és una possible font de confusió perquè aquests corrents no són iguals. La seva diferència són els corrents que circulen cap terra des del terminal de mesura H i des del cos de la impedància que es mesura. Per tant, un mateix objecte pot presentar impedàncies elèctriques diferents segons la seva disposició i la situació de la cel·la de mesura respecte a terra, fet que pot ser una font d'errors que fins ara no ha estat analitzada, tot i que se n'ha sospitat la rellevància. En el nostre cas, quan es mesura la conductivitat elèctrica de l'aigua, l'acoblament capacitiu entre el volum de l'aigua i terra pot ser important i per tant, una font d'incertesa (d'error) en la determinació de la seva conductivitat.

Capítol 3

3. Mesura d'impedància elèctrica

La impedància elèctrica es pot mesurar mitjançant diversos mètodes que apliquen la llei d'Ohm directa o indirectament (Pallàs Areny 2006) o creen un circuit ressonant. Els mètodes basats en ponts d'impedàncies (Hague i Foord 1971) i ressonància (Hartshorn 1947) són més antics, mentre que els basats en anàlisi de xarxes (Agilent 2013) o en la mesura directa de la tensió entre els terminals de la impedància i el corrent que la travessa són més recents i més freqüents actualment (Pallàs Areny 2006). La impedància Z entre els dos terminals de mesura H i L s'obté com la relació $Z = V/I$. V és la diferència de potencial (fasor) mesurada entre el terminal H, que està a potencial alt (*high potential*) i el terminal L, que està a potencial baix (*low potential*). I és el corrent (fasor) que circula entre H i L.

La fig. 3.1 mostra dues maneres de mesurar la impedància elèctrica entre H i L segons on mesuri el corrent que circula entre un i altre. A la fig. 3.1(a) es mesura el corrent que entra

pel terminal H i s'anomena mètode $I-V$. La impedància es calcula dividint la tensió V_{HG} pel corrent I_H , $Z_{HL} = V_{HG}/I_H$. Idealment, $Z_{HL} = Z_x$. El voltímetre i l'amperímetre són vectorials (mesuren magnitud i fase) i es suposen ideals. El terminal L està connectat al node de referència del senyal injectat. A la fig. 3.1(b) es mesura el corrent que surt pel terminal L i s'anomena mètode $V-I$, que és l'emprat pels instruments basats en un pseudopont automàtic (*autobalancing bridge*) (Agilent 2013). En aquest cas, L no està connectat físicament al node que s'agafa com a referència per a les mesures de tensió (massa), però està al mateix potencial (potencial de referència virtual). La impedància entre H i L és ara $Z_{HL} = V_{HG}/I_L$. Idealment, $Z_{HL} = Z_x$. En ambdós casos, en lloc d'injectar tensió es podria injectar corrent, però el resultat seria el mateix perquè només cal substituir la font de tensió V_{osc} i Z_{osc} pel seu equivalent Norton, i cap dels paràmetres de la font afecta el resultat.

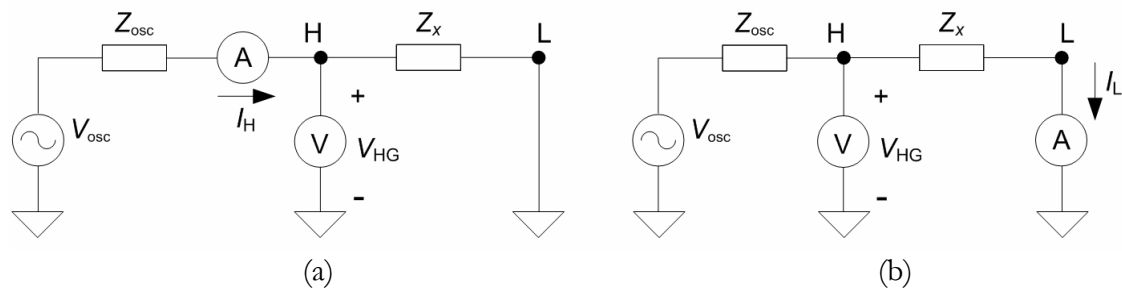


Figura 3.1. Circuits equivalents per mesurar la impedància elèctrica entre dos terminals H i L. (a) Mètode $I-V$. (b) Mètode $V-I$.

L'analitzador d'impedància Agilent 4294A emprava un pseudopont automàtic i el mètode $V-I$ on el potencial de referència és potencial de terra. Per tant, no pot mesurar impedàncies que tinguin un terminal connectat físicament a terra (Agilent 2013). Per fer-ho li cal un accessori (Agilent 42941A) que és una sonda que mesura el corrent que entra pel terminal H i manté L connectat a terra, és a dir, implementa el mètode $I-V$ (*advanced I-V method* (Agilent 2008a)).

3.1. Mesura d'impedància elèctrica amb dos terminals incloent-hi les capacitats paràsites

Segons s'ha explicat en el capítol anterior, quan en el model de la impedància elèctrica entre els terminals de mesura H i L s'hi inclouen les capacitats paràsites degudes a l'entorn electromagnètic, fig. 3.2, l'expressió matemàtica de la impedància canvia segons que es mesuri I_H o I_L . En el mètode $I-V$ es mesura I_H i en el mètode $V-I$ es mesura I_L . En els dos mètodes es mesura la tensió V_{HG} i es fixa $V_{LG} = 0$ V. Per facilitar l'estudi de quina és la impedància mesurada en cada cas, es consideren tres situacions idealitzades: 1) totes les

capacitat paràsites són nul·les (negligibles), 2) les impedàncies dels elèctrodes i l'acoblament des del component o material a terra (C_g) són nul·les i 3) les impedàncies dels elèctrodes i les capacitats paràsites entre els elèctrodes i entre els terminals i terra (C_{hl} , C_{hg} i C_{lg}) són nul·les.

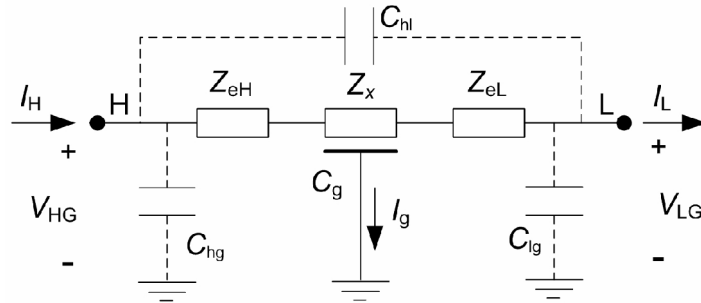


Figura 3.2. Circuit equivalent quan es mesura una impedància elèctrica amb dos elèctrodes i es tenen en compte totes les capacitats paràsites.

La impedància entre H i L quan no es considera cap capacitat paràsita és

$$Z_{HL} = Z_{eH} + Z_x + Z_{eL} \quad (3.1)$$

i aquest seria el resultat tant per al mètode I - V com per al mètode V - I .

Si es consideren només les capacitats entre H, L i terra, el circuit de la fig. 3.2 es converteix en el de la fig. 3.3.

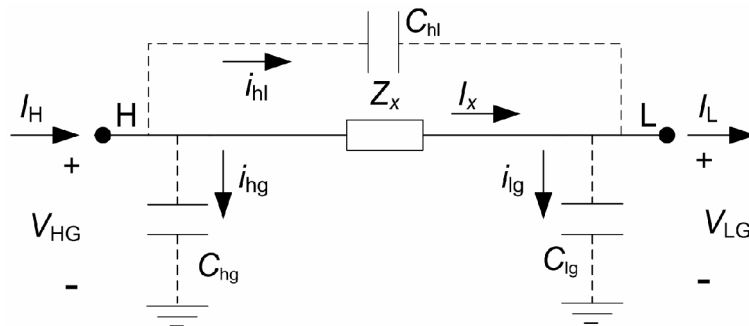


Figura 3.3. Circuit equivalent quan es mesura una impedància elèctrica amb dos terminals H i L i es tenen en compte les capacitats paràsites entre els terminals i terra.

C_{lg} no afecta la mesura perquè $V_{LG} = 0$ V atès que l'elèctrode L està connectat a terra en el mètode I - V i està al potencial de terra (terra virtual) en el mètode V - I .

La impedància entre H i L mesurada amb el mètode I - V és $Z_{HL} = V_{HG}/I_H$. El corrent que entra per l'elèctrode H és $I_H = i_{hg} + i_{hl} + I_x$, i per tant

$$\frac{1}{Z_{HL}^{I-V}} = Y_{HL}^{I-V} \approx \frac{i_{hg} + i_{hl} + I_x}{V_{HG}} = j\omega C_{hg} + j\omega C_{hl} + \frac{1}{Z_x} \quad (3.2)$$

on Y_{HL} és l'admitància entre els elèctrodes H i L. Els corrents en minúscula són “paràsits”, perquè no circulen per Z_x . De vegades és més convenient mesurar admitància que impedància perquè és més fàcil aplicar tensió i mesurar el corrent, doncs llavors el corrent mesurat dóna directament el mòdul de l'admitància normalitzada, sempre que la tensió aplicada sigui constant (Yang 2006). També quan el component o material que es vol mesurar es modelitza com impedàncies (o admitàncies) connectades en paral·lel, com és el cas de la fig. 3.3, on C_{hg} i C_{hl} estan en paral·lel amb Z_x , és més fàcil representar els resultats com admitàncies que com impedàncies (Baker 1989). Un altre cas és quan només interessa mesurar la part real de Y_x , perquè no depèn de les capacitats (C_{hg} i C_{hl}) que hi hagi en paral·lel (Mirtaheeri 2004). A més, la representació gràfica de l'admitància té més resolució a freqüències altes (Pliquett 2010). Però quan la impedància es mesura amb elèctrodes, que afegeixen llur impedància en sèrie amb Z_x , llavors és millor mesurar impedància perquè l'expressió de l'admitància és molt més complexa.

La impedància entre H i L mesurada amb el mètode $V-I$ en el circuit de la fig. 3.3 és $Z_{HL} = V_{HG}/I_L$. El corrent que surt per l'elèctrode L és $I_L = i_{hl} + I_x$, i llavors

$$\frac{1}{Z_{HL}^{V-I}} = Y_{HL}^{V-I} \approx \frac{i_{hl} + I_x}{V_{HG}} = j\omega C_{hl} + \frac{1}{Z_x} \quad (3.3)$$

La diferència entre els dos mètodes és clara, el factor diferent és $j\omega C_{hg}$, que afecta al mètode $I-V$ però no al $V-I$. C_{hl} , la capacitat mútua entre elèctrodes, que surt en tots dos casos, pot ser molt petita perquè depèn principalment de la separació entre elèctrodes i de la distància entre la cel·la de mesura i el “pla” de terra (Ramo *et al.* 1994). El “pla” de terra són totes les masses conductores connectades a terra, inclosa la coberta de l'instrument. C_{hg} és una capacitat “incontrolable” i major que C_{hl} (Jones i Richards 1973), que depèn de la distància fins al pla de terra: si disminueix la distància des de l'elèctrode H a terra, C_{hg} augmenta, mentre que C_{hl} disminueix (Ramo *et al.* 1994). C_{hg} es considera “incontrolable” perquè depèn molt de l'entorn, és a dir, de totes les masses conductores que hi hagi a prop de l'elèctrode H.

La immunitat del mètode $V-I$ (Yang 1996) a les capacitats C_{hg} i C_{lg} , fa que el mètode basat amb pseudopont automàtic sigui el sistema de mesura habitual en la majoria de mesuradors i analitzadors d'impedància comercials, i també en circuits de mesura d'impedància específics (*custom-made*, no comercials, fets a mida per cada aplicació). Per tant, aquest és el mètode que s'estudiarà amb més detall en els següents apartats, i en els capítols posteriors.

Considerant ara la tercera situació idealitzada, en la que només es té en compte l'acoblament des del cos de la impedància a terra, C_g , el circuit de la fig. 3.2 se simplifica en el de la fig. 3.4(a).

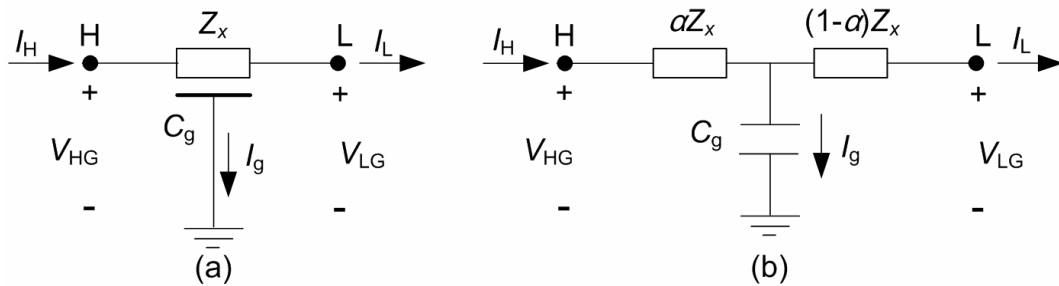


Figura 3.4. Circuits equivalents quan es mesura una impedància elèctrica amb dos terminals H i L si és té en compte l'acoblament a terra. (a) model de paràmetres distribuïts i (b) model de paràmetres concentrats.

Cada punt de l'element mesurat està acoblat a terra i per tant C_g és una capacitat paràsita de paràmetres elèctrics distribuïts (Hague i Foord 1971; Hartshorn 1947; Fleig *et al.* 1996). L'anàlisi del seu efecte es farà primer com si C_g fos de paràmetres concentrats, és a dir, considerant que els efectes de propagació són negligibles (Ramo *et al.* 1994), situació que facilita el plantejament matemàtic, i després es tindrà en compte que C_g és una capacitat distribuïda.

3.1.1. Efecte de l'acoblament a terra modelitzat amb paràmetres concentrats

Si es considera que C_g és una capacitat de paràmetres concentrats, partirà la impedància Z_x en dues parts no necessàriament iguals, i en el circuit equivalent (fig. 3.4(b)) s'hi ha d'introduir una nova variable, α , que depèn de la distribució de potencial en el cos de la impedància i té un valor entre 0 i 1. Com que els elèctrodes H i L estan a diferent potencial, les línies de camp elèctric cap a terra, i per tant el corrent de desplaçament cap a terra, estaran més concentrades a la zona de l'elèctrode H (*high potential*) (Ramo *et al.* 1994). Des de l'elèctrode L no hi ha línies de camp elèctric cap a terra perquè L i terra estan al mateix potencial. Llavors $\alpha < 0,5$. Si el potencial elèctric dels terminals H i L fos el mateix però de signe contrari, tindríem $\alpha = 0,5$: el punt central de la impedància que es vol mesurar estaria a potencial "0 V", i no circularia corrent per C_g . Per tant, es podria pensar que una injecció simètrica evitaria el problema de C_g , però a l'apartat 3.1.3 es demostrarà que això no és del tot cert. També es podrien aconseguir valors de α propers a 0,5, encara que la distribució de potencial en el cos fos asimètrica, si l'acoblament a terra no fos uniforme.

De la fig. 3.4(b) es poden obtenir les expressions de la impedància Z_{HL} per a cadascun dels dos mètode de mesura considerats. Per al mètode I - V , la capacitat C_g està en paral·lel amb $(1 - \alpha)Z_x$. Considerant $Z_g = (j\omega C_g)^{-1}$, llavors $Z_{HL} = \alpha Z_x + Z_g \parallel (1 - \alpha)Z_x$ i per tant,

$$Z_{HL}^{I-V} = \alpha Z_x + \frac{(1 - \alpha)Z_x}{1 + (1 - \alpha)\frac{Z_x}{Z_g}} = \alpha Z_x + \frac{(1 - \alpha)Z_x}{1 + j\omega C_g(1 - \alpha)Z_x}. \quad (3.4)$$

Si $Z_x = R_x$, quan augmenti la freqüència disminuirà la impedància Z_{HL} , és a dir, hi ha un *efecte capacitiu* degut a que Z_g està en paral·lel amb la part $(1 - \alpha)Z_x$ de la impedància Z_x , i a l'augmentar ω disminueix Z_g i per tant, també el paral·lel $Z_g \parallel (1 - \alpha)Z_x$. Això incrementa el corrent d'entrada i sembla com si al haver augmentat la freqüència, Z_x fos més petita, que és el que passa amb les impedàncies capacitives.

L'equació (3.4) es pot posar de la forma

$$Z_{HL}^{I-V} = Z_x \left[1 - \frac{(1 - \alpha)^2 \frac{Z_x}{Z_g}}{1 + (1 - \alpha)\frac{Z_x}{Z_g}} \right] \quad (3.5)$$

on el terme que hi ha darrera del signe menys és la desviació relativa a l'estimar Z_x a partir de la mesura de Z_{HL} . El signe menys denota una disminució de la impedància. La desviació depèn de Z_x/Z_g i de α , que en principi és desconeguda.

Per obtenir l'expressió de Z_{HL} ($Z_{HL} = V_{HG}/I_L$) quan es mesura amb el mètode V - I , podem aplicar al circuit de la fig. 3.4(b) les transformacions d'impedàncies per passar d'una configuració en estrella a una configuració en triangle (transformació Y- Δ). D'aquesta transformació en surt Z_{HL} i dues impedàncies més Z_{HG} i Z_{LG} , però, tal com passava amb les capacitats paràsites C_{hg} i C_{lg} de la fig. 3.3, aquestes dues no afecten la mesura, per les mateixes raons donades abans. Llavors la impedància entre H i L val

$$Z_{HL}^{V-I} = Z_x \left[1 + \alpha(1 - \alpha)\frac{Z_x}{Z_g} \right] = Z_x \left[1 + j\omega C_g \alpha(1 - \alpha)Z_x \right]. \quad (3.6)$$

De la fig. 3.4(b) ja es dedueix que quan augmenti ω , disminuirà Z_g i el corrent I_g augmentarà fent disminuir I_L , i per tant la impedància $Z_{HL} = V_{HG}/I_L$ augmentarà, fet que correspon a un comportament inductiu. Per veure-ho més clarament, en el cas $Z_x = R_x$, l'expressió (3.6) queda com

$$Z_{\text{HL}}^{V-I} = R_x \left[1 + j\omega C_g \alpha (1 - \alpha) R_x \right] \quad (3.7)$$

que és un resultat similar a l'obtingut a (Hague i Foord 1971), on el terme que es suma a R_x té la forma d'una inductància ("residual inductance", l'anomenen ells) de valor $\alpha(1 - \alpha)R_x^2 C_g$. Aquest resultat no deixa de sorprendre perquè, quan $Z_x = R_x$, el model de la fig. 3.4(b) només inclou resistències i capacitats (α és un paràmetre escalar). El que passa és que la transformació Y- Δ gira la impedància de l'acoblament a terra i com que és capacitiva, el terme $j\omega$ surt al numerador i provoca un efecte inductiu.

La desviació de la impedància mesurada respecte a Z_x torna a dependre de Z_x/Z_g i de α , però ara el signe més indica un augment de la impedància (diferència respecte al mètode I-V). A més, l'expressió de la desviació a l'equació (3.6) és més senzilla que a l'equació (3.5) (mètode I-V).

Aquest model amb C_g concentrat porta, doncs, a unes conclusions preliminars interessants sobre l'efecte que l'acoblament a terra té sobre la impedància mesurada. Però cal afegir que si la freqüència de mesura és elevada i les mides del cos on es mesura són grans, hi haurà propagació d'ones, i l'aproximació quasi-estàtica no es complirà (Plonsey 1969), Cal plantejar, doncs, un model de paràmetres distribuïts.

3.1.2. Efecte de l'acoblament a terra modelitzat amb paràmetres distribuïts

Si el cos que a la fig. 3.4(a) es representa com una impedància Z_x es descriu com una línia de transmissió d'ones que té pèrdues (*lossy transmission line model* (Ramo *et al.* 1994)), s'arriba al model de la fig. 3.5, on z és la impedància per unitat de longitud del material (fragments elementals de Z_x) i y és l'admitància per unitat de longitud, que descriu l'acoblament entre el cos de la impedància i terra. d és la llargada del volum conductor Z_x (distància entre elèctrodes). Tindrem, $zd = Z_x$, $yd = Y_g = j\omega C_g$ ($Y_g = 1/Z_g$). La constant de propagació és $\gamma = (zy)^{1/2}$ i la impedància característica $Z_0 = (z/y)^{1/2} = (Z_x/Y_g)^{1/2}$. Llavors, $\gamma d = (Z_x Y_g)^{1/2}$ (Ramo *et al.* 1994). L'expressió de Z_{HL} es pot obtenir utilitzant la matriu de transferència de la línia de transmissió (Ramo *et al.* 1994),

$$\begin{pmatrix} V_{\text{HG}} \\ I_{\text{H}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cosh(\gamma d) & Z_0 \sinh(\gamma d) \\ Y_0 \sinh(\gamma d) & \cosh(\gamma d) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_{\text{LG}} \\ I_{\text{L}} \end{pmatrix} \quad (3.8)$$

on $Y_0 = (Z_0)^{-1}$.

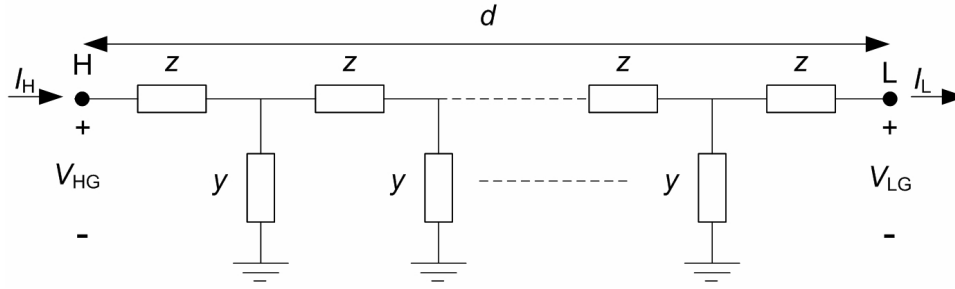


Figura 3.5. Model de la impedància elèctrica que es vol mesurar i del seu acoblament a terra com una línia de transmissió.

Per obtenir l'expressió de la impedància només cal aplicar les definicions i les condicions de la mesura. La primera és $V_{LG} = 0$ per als dos mètodes (I - V i V - I) i de (3.8) en surten dues equacions,

$$V_{HG} = Z_0 \sinh(\gamma d) I_L, \quad (3.9)$$

$$I_H = \cosh(\gamma d) I_L. \quad (3.10)$$

De (3.9) i (3.10) s'obté que l'expressió de Z_{HL} per al mètode I - V és

$$Z_{HL}^{I-V} = \frac{V_{HG}}{I_H} = Z_0 \tanh(\gamma d). \quad (3.11)$$

De (3.9) surt directament l'expressió de Z_{HL} per al mètode V - I ,

$$Z_{HL}^{V-I} = \frac{V_{HG}}{I_L} = Z_0 \sinh(\gamma d). \quad (3.12)$$

Operant amb la impedància característica i la constant de propagació, és fàcil veure que $Z_0(\gamma d) = Z_x$ i $(\gamma d)^2 = Z_x/Z_g$. Llavors, les expressions (3.11) i (3.12) es poden escriure respectivament com

$$Z_{HL}^{I-V} = \frac{V_{HG}}{I_H} = Z_0 \tanh(\gamma d) = Z_x \frac{\tanh(\gamma d)}{\gamma d} = Z_x \left[1 + \frac{\tanh(\gamma d)}{\gamma d} - 1 \right], \quad (3.13)$$

$$Z_{HL}^{V-I} = \frac{V_{HG}}{I_L} = Z_0 \sinh(\gamma d) = Z_x \frac{\sinh(\gamma d)}{\gamma d} = Z_x \left[1 + \frac{\sinh(\gamma d)}{\gamma d} - 1 \right] \quad (3.14)$$

d'on s'obté que la desviació relativa a l'estimar Z_x a partir de la Z_{HL} mesurada amb el mètode I - V és

$$\varepsilon_{I-V} (\%) = 100 \left[\frac{\tanh(\gamma d)}{\gamma d} - 1 \right] \quad (3.15)$$

mentre que amb el mètode V - I és

$$\varepsilon_{V-I}(\%) = 100 \left[\frac{\sinh(\gamma d)}{\gamma d} - 1 \right]. \quad (3.16)$$

La desviació depèn de $\gamma d = (Z_x/Z_g)^{1/2}$, que generalment serà una relació complexa. La fig. 3.6 mostra la gràfica d'aquestes desviacions quan Z_x/Z_g és real, per exemple quan es mesura la capacitat o permitivitat d'un material dielèctric perquè llavors $Z_x = 1/j\omega C_x$ i $Z_x/Z_g = C_g/C_x$. A la fig 3.6, la desviació per al mètode $I-V$ (línia negra) es negatiu perquè la impedància mesurada disminueix, com en el model de paràmetres concentrats. Per al mètode $V-I$ (línia grisa de la fig 3.6), la desviació és positiva perquè la impedància mesurada augmenta, i és menor, com en el model amb paràmetres concentrats. Per a valors de Z_x/Z_g a prop de zero, es té que $\varepsilon_{I-V}/\varepsilon_{V-I} \approx 2$ mentre que quan $Z_x/Z_g = 1$, es té que $\varepsilon_{I-V}/\varepsilon_{V-I} \approx 1,4$, és a dir, les desviacions són més semblants. Per obtenir desviacions petites amb tots dos mètodes, Z_x/Z_g ha de ser prou petita, és a dir, cal que la major part del corrent passi per Z_x i no per Z_g . Per exemple, si $Z_x/Z_g = 1/16$, les desviacions són $\varepsilon_{I-V} \approx 2\%$ i $\varepsilon_{V-I} \approx 1\%$.

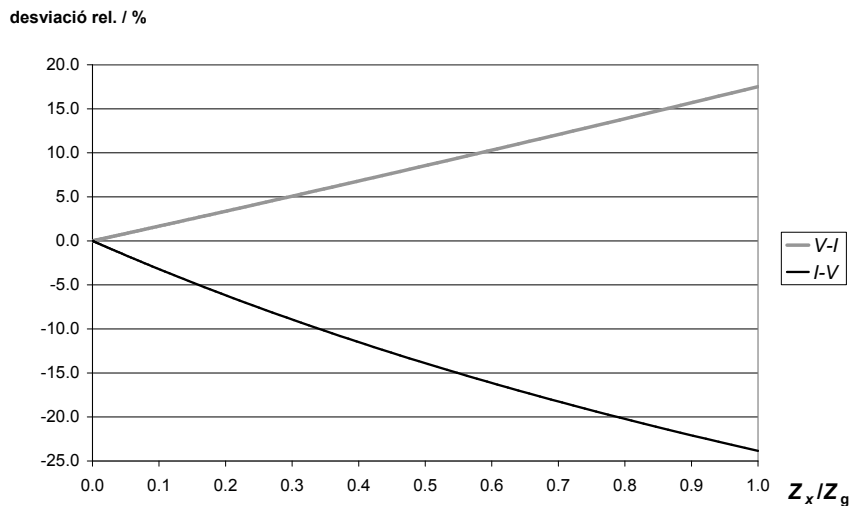


Figura 3.6. Desviacions relatives de Z_{HL} respecte a Z_x en el model de paràmetres distribuïts.

Quan $\gamma d \ll 1$ ($|\gamma d| \ll 1$), és a dir, quan Y_g és petita (acoblament a terra feble), les expressions (3.13) i (3.14) es poden aproximar substituint les funcions sinh i tanh pels seus desenvolupaments respectius en sèries de Taylor (Fleig *et al.* 1996),

$$Z_{HL}^{I-V} = \frac{V_{HG}}{I_H} = Z_x \frac{\tanh(\gamma d)}{(\gamma d)} \approx Z_x \left[1 - \frac{(\gamma d)^2}{3} \right] = Z_x \left[1 - \frac{1}{3} \frac{Z_x}{Z_g} \right], \quad (3.17)$$

$$Z_{HL}^{V-I} = \frac{V_{HG}}{I_L} = Z_x \frac{\sinh(\gamma d)}{(\gamma d)} \approx Z_x \left[1 + \frac{(\gamma d)^2}{6} \right] = Z_x \left[1 + \frac{1}{6} \frac{Z_x}{Z_g} \right]. \quad (3.18)$$

La desviació relativa de la impedància mesurada amb el mètode $I-V$ és aproximadament $\varepsilon_{I-V} = -Z_x/3Z_g$, i per tant és negativa si Z_x/Z_g és positiu, mentre que per al mètode $V-I$ és $\varepsilon_{V-I} = Z_x/6Z_g$, i per tant positiva si Z_x/Z_g és positiu, com calia esperar. La relació $\varepsilon_{I-V}/\varepsilon_{V-I}$ és 2, que coincideix amb el valor calculat per a valors de Z_x/Z_g baixos sense fer cap aproximació. Però hi ha una diferència significativa entre els dos mètodes de mesura. Per al mètode $V-I$, els models de la impedància de paràmetres concentrats, equació (3.6), i el model aproximat de paràmetres distribuïts, equació (3.18), tenen la mateixa forma i per comparació s'obté $\alpha(1-\alpha) = 1/6$. En canvi per al mètode $I-V$, el model de paràmetres concentrats (3.5) no coincideix amb el model de paràmetres distribuïts aproximat (3.17). Però si es desenvolupa en sèrie de Taylor el terme entre claus de (3.19), que és la equació (3.5) escrita d'una altra manera, i s'agafa només el terme de primer ordre (Hague i Foord 1971), s'arriba a l'expressió,

$$Z_{HL}^{I-V} = Z_x \left[1 - (1-\alpha)^2 \frac{Z_x}{Z_g} \left\{ \frac{1}{1 + (1-\alpha) \frac{Z_x}{Z_g}} \right\} \right] \quad (3.19)$$

$$\approx Z_x \left[1 - (1-\alpha)^2 \frac{Z_x}{Z_g} \left\{ 1 - (1-\alpha) \frac{Z_x}{Z_g} \right\} \right] \approx Z_x \left[1 - (1-\alpha)^2 \frac{Z_x}{Z_g} \right]$$

que comparada amb (3.17) dóna $(1-\alpha)^2 = 1/3$. Hartshorn (1947), que també considera C_g com una capacitat distribuïda i empra el factor α , arriba a la expressió (3.18) sense plantejar les equacions diferencials del model distribuït. Diu que α varia entre 0 i 1, i si la capacitat està distribuïda uniformement, $\alpha(1-\alpha)$ és en realitat el valor mig de $\alpha(1-\alpha)$. Llavors,

$$\int_0^1 \alpha(1-\alpha) d\alpha = \frac{1}{6}$$

$$\int_0^1 (1-\alpha)^2 d\alpha = \frac{1}{3} \quad (3.20)$$

i els valors concorden amb el model distribuït aproximat pels termes de primer ordre.

Si es torna al cas de Z_x/Z_g real i s'avaluen les desviacions dels models distribuïts i les seves aproximacions de primer ordre, s'obté la gràfica de la fig. 3.7. El model aproximat per al mètode $V-I$ (línia negra discontinua) no es desvia tant com el model aproximat per al mètode $I-V$ (línia grisa discontinua). Per a $Z_x/Z_g = 0,25$, el model de paràmetres distribuïts aproximat amb els termes de primer ordre es desvia un 1,2 % respecte del model distribuït complet amb el mètode $V-I$ i un 10 % amb el mètode $I-V$. Quan $Z_x/Z_g = 1$, les desviacions són del 5 % ($V-I$) i del 40 % ($I-V$).

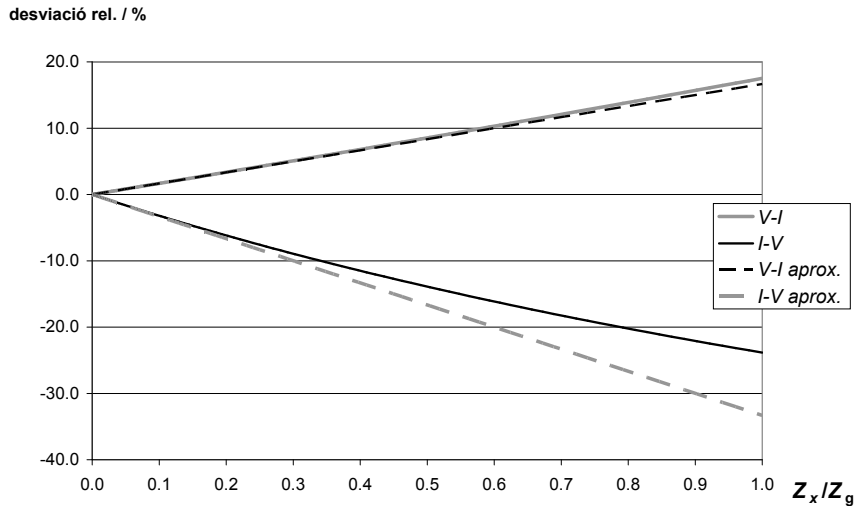


Figura 3.7. Desviacions relatives del model de paràmetres distribuïts i de les seves aproximacions de primer ordre.

3.1.3. Mesura d'impedància elèctrica amb injecció simètrica

Si els potencials elèctrics entre els terminals de mesura de la fig. 3.4(b) són simètrics i la geometria de la impedància mesurada (volum conductor) és simètrica respecte a punt mig entre H i L, el potencial en aquest punt és “0 V” (terra virtual). Llavors, la impedància queda dividida en dos meitats per aquesta terra virtual. Si el punt mig, que és des d'on es considera la capacitat a terra C_g en el model de paràmetres concentrats, està al mateix potencial de terra, per C_g no hi circularà corrent. Per tant, la injecció simètrica eliminaria el problema de l'acoblament a terra des del cos de la impedància si la capacitat C_g fos de paràmetres concentrats i el volum és simètric respecte al pla central perpendicular a la línia entre H i L. Però si es considera que cada una de les dues parts de Z_x té un cert volum, hi haurà un acoblament a terra des de cadascuna d'elles a terra. El circuit de la fig. 3.8 és el model amb les tensions a H i L simètriques respecte terra ($V_{LG} = -V_{HG}$): la impedància està partida per la meitat, si tot és simètric i uniforme, i el centre geomètric de la impedància estarà a potencial de terra, de manera que $I_H = I_L$. La injecció simètrica pot ser tant de tensió com de corrent.

En aquestes condicions es formaran dues línies de transmissió, cadascuna de llargada $d/2$. Llavors $zd/2 = Z_x/2$, $yd/2 = Y_g/2 = 1/2Z_g = j\omega C_g/2$. Les impedàncies entre cada terminal i terra seran $Z_H = V_{HG}/I_H$ des de l'elèctrode H i $Z_L = V_{LG}/(-I_L)$ des de l'elèctrode L. Com que $V_{LG} = -V_{HG}$ i $I_H = I_L$ es tindrà que $Z_L = V_{LG}/(-I_L) = V_{HG}/I_H = Z_H$.

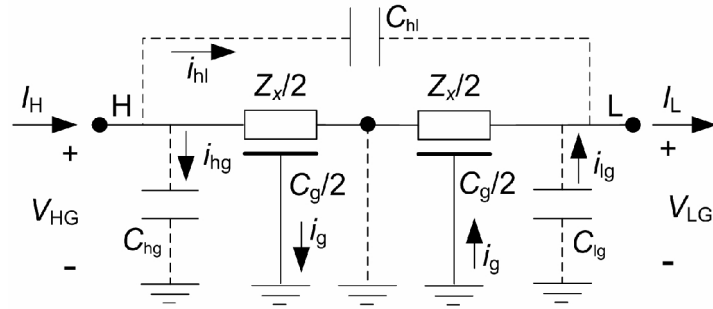


Figura 3.8. Circuit equivalent quan es mesura una impedància elèctrica amb dos terminals emprant injecció simètrica, tenint en compte totes les capacitats paràsites. No es contempen les impedàncies dels elèctrodes.

La impedància entre H i L és $Z_{HL} = V_{HL}/I_H$, $Z_{HL} = (V_{HG} - V_{LG})/I_H = 2V_{HG}/I_H = 2Z_H$. Z_H es pot obtenir de l'expressió aproximada (3.17), substituint Z_x per $Z_x/2$ i Z_g per $2Z_g$. El resultat és

$$Z_{HL}^{sim} = \frac{V_{HL}}{I_H} = 2 \frac{V_{HG}}{I_H} = 2 \frac{Z_x}{2} \left[1 - \frac{1}{3} \frac{(Z_x/2)}{(2Z_g)} \right] = Z_x \left[1 - \frac{1}{12} \frac{Z_x}{Z_g} \right]. \quad (3.21)$$

Per tant, la desviació és negativa com en el mètode $I-V$, però quatre vegades menor. En canvi la desviació amb injecció simètrica és només dues vegades menor que amb el mètode $V-I$. El corrent es pot mesurar a l'elèctrode H o a l'L, perquè si tot és simètric haurien de donar el mateix. Però ni H ni L estan a potencial de terra, de manera que C_{hg} i C_{lg} afectaran a la mesura i C_{hl} afecta en qualsevol cas. Per tot això, es pot concloure que la injecció simètrica és un cas particular del mètode $I-V$, que redueix la desviació deguda a Z_g a la meitat de la que s'obté amb el mètode $V-I$, però amb l'efecte addicional de C_{lg} i de la complexitat afegida dels circuits d'injecció del senyal a la mostra.

3.2. Mesura d'impedància elèctrica mitjançant un pseudopont automàtic

La major part de les mesures d'impedància elèctrica descrites en aquest treball estan fetes amb un analitzador d'impedància Agilent 4294A, que està basat amb un pseudopont automàtic. Per tant, cal estudiar com pot afectar el seu funcionament a les mesures obtingudes si es tenen en compte els resultats dels apartats anteriors.

La fig. 3.9 és el model funcional de l'analitzador 4294A des dels terminals de mesura (Agilent 2013). HC és el terminal d'injecció, on hi ha connectat un generador de tensió amb una impedància de sortida baixa (25Ω) (Agilent 2008b). HP és el terminal on es mesura, amb un voltímetre vectorial, la tensió injectada. LC és el terminal on es mesura el corrent, a base de mesurar, amb un altre voltímetre vectorial, la caiguda de tensió en el resistor R_p . Per a que la mesura sigui correcta, LP ha d'estar a 0 V. LP és un node de connexió a un

detector de zero (*null detector*), la sortida del qual controla un generador que es pot ajustar (en mòdul i fase) fins que $I_d = 0$ (Agilent 2008a, 2013). Llavors $I_L = I_r = -V_r/R_r$, i $Z_x = V_{HG}/I_L = -R_r V_{HG}/V_r$.

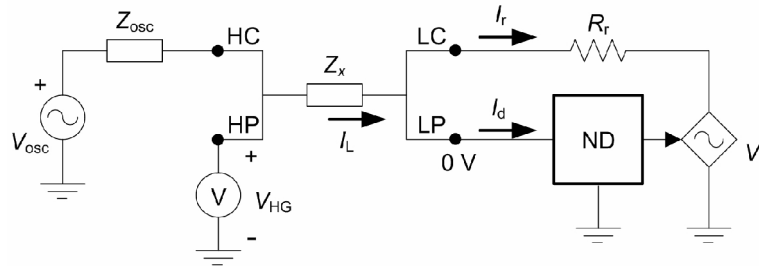


Figura 3.9. Model funcional de l'analitzador d'impedància 4294A (Agilent 2013).

El detector de zero i la mesura de corrent es poden modelitzar com un amplificador de transimpedància basat en un amplificador operacional ideal (Agilent 2008a, 2013), fig. 3.10. Aquesta representació facilita la comprensió del funcionament de l'analitzador. L'amplificador de transimpedància té dues funcions: mesurar el corrent en el node LC a través de la resistència R_r , i aconseguir $I_d = 0$, de manera que el node LP quedi fixat al potencial de terra. Llavors la impedància es pot determinar mesurant les dues tensions V_{HG} i V_r respecte a terra.

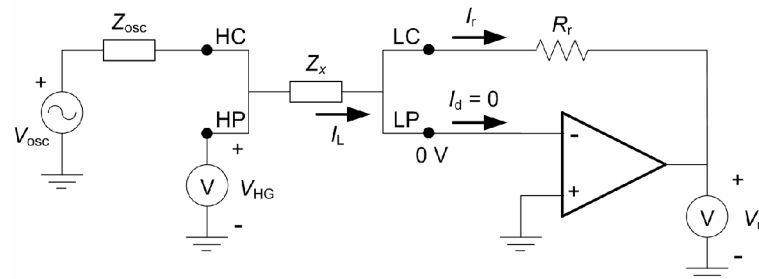


Figura 3.10. Circuit equivalent al de la fig. 3.9.

La fig. 3.11 mostra el circuit equivalent d'una mesura bipolar, és a dir, amb dos contactes, de la impedància d'una mostra de material (volum conductor), tenint en compte els elèctrodes, l'efecte de l'acoblament a terra des del cos del material, i el circuit equivalent del sistema de mesura (instrument) basat en un pseudopont automàtic. La impedància Z_{HL} es calcula dividint dos fasors: la tensió V_{HG} mesurada entre el terminal H i terra (que és el node de referència de l'instrument) i el corrent I_L mesurat al terminal L (que està virtualment a potencial de terra), a una determinada freqüència de l'excitació.

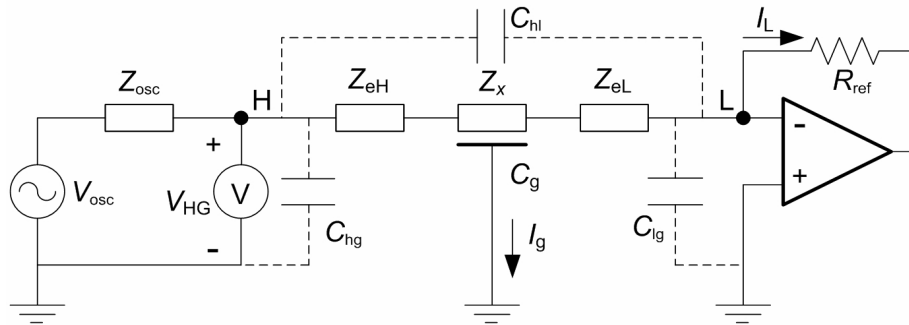


Figura 3.11. Circuit equivalent de la mesura d'impedància bipolar incorporant les capacitats paràsites i el model de l'instrument.

Z_{HL} inclou les impedàncies dels elèctrodes (Z_{eH} i Z_{eL}), la impedància del material que es vol mesurar (Z_x), i diverses capacitats paràsites. Les capacitats paràsites entre cadascun dels dos terminals de mesura H i L (i els elèctrodes respectius) i terra, C_{hg} i C_{lg} no afecten la mesura. La capacitat paràsita entre H i L (C_{hl}) i la capacitat paràsita entre el material (Z_x) i terra (C_g) sí que poden afectar la mesura (Agilent 2013; Hague i Foord 1971; Fleig *et al.* 1996). C_{hl} depèn principalment de la distància entre els elèctrodes i pot ser minimitzada col·locant una petita pantalla entre els elèctrodes i connectant-la a terra (Agilent 2013). En canvi, C_g no pot ser eliminada fàcilment. De fet, el seu efecte s'incrementa si es col·loquen pantalles a terra entre els elèctrodes. L'efecte observat per Hague i Foord (1971) i Fleig *et al.* (1996), és que quan es mesura impedància hi ha un acoblament (C_g) entre el cos de la impedància i una pantalla connectada a terra, ja sigui envoltant totalment la mostra que es mesura o fent només de suport. Per C_g hi circula un corrent I_g cap a terra que no arribarà a L, i per tant, l'amperímetre (amplificador de transimpedància) no el mesurarà. Llavors la impedància calculada per l'instrument serà més gran que $Z_{eH} + Z_x + Z_{eL}$. Com que I_g augmentarà quan augmenti la freqüència de la tensió aplicada V_{osc} , perquè la impedància de C_g disminueix al augmentar la freqüència, la impedància calculada també augmentarà amb la freqüència. Aquest efecte es pot atribuir a un comportament inductiu de la impedància mesurada (efecte inductiu), i l'han observat molts autors, segons s'ha exposat al capítol 1, i està en concordança amb el signe positiu en el terme que indica la desviació de la mesura a les expressions (3.6) i (3.18). Ara bé, aquest comportament inductiu no és degut al material sinó al mètode de mesura. Tanmateix, en el mètode I - V , C_g produeix un efecte capitiu, de manera que hi ha un major risc de que passi desapercbut.

3.3. Model de paràmetres concentrats de la mesura d'impedància elèctrica amb dos elèctrodes mitjançant un pseudopont automàtic

Per descriure la mesura de la impedància elèctrica d'un material (volum conductor) amb dos elèctrodes, s'emprarà el model de paràmetres concentrats amb el paràmetre α , expressió (3.6), atesa la bona concordança amb el model de paràmetres distribuïts aproximat, expressió (3.18).

La fig. 3.12 mostra el model del circuit de paràmetres concentrats de la impedància entre els terminals H i L de l'instrument de mesura. La impedància entre H i L (Z_{HL}) inclou les impedàncies dels elèctrodes (Z_{eH} i Z_{eL}), la impedància del material Z_x i la capacitat paràsitica entre el cos de la impedància i terra C_g . C_{hl} es considera inicialment negligible perquè pot ser minimitzada al construir la cel·la de mesura, i depèn, segons s'ha dit abans, de la separació entre els elèctrodes i de la seva distància al pla de terra (Ramo *et al.* 1994). El seu efecte s'estudia amb detall en el capítol 6. La inclusió del paràmetre α és una aproximació millor que suposar que Z_x està dividida en dos meitats iguals ($\alpha = 0,5$).

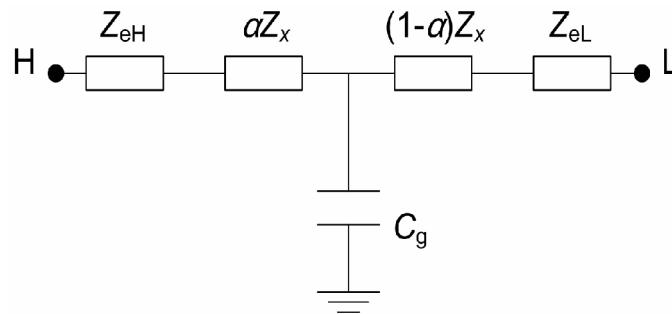


Figura 3.12. Model amb paràmetres concentrats de la impedància entre els terminals H i L de l'instrument de mesura quan es consideren les impedàncies dels elèctrodes.

A una freqüència de mesura determinada, les impedàncies dels elèctrodes, Z_{eH} i Z_{eL} , poden ser modelitzades per una resistència (R_{eH} i R_{eL} , respectivament) en paral·lel amb una capacitat (C_{eH} i C_{eL} , respectivament) (Lisdat i Schäfer 2008; Geddes 1972). Z_x també pot ser modelitzada per una resistència R_x en paral·lel amb una capacitat C_x (Coster *et al.* 1996; Pliquet 2010), tal com s'ha fet al capítol 2.

Per obtenir la impedància equivalent entre els terminals H i L, s'aplica la transformació estrella-triangle al circuit de la fig. 3.12, i dona

$$Z_{HL} = (Z_{eH} + Z_{eL}) \left[1 + \frac{Z_{eH} \| Z_{eL}}{Z_g} \right] + Z_x \left[1 + \frac{(1-\alpha)Z_{eH} + \alpha Z_{eL}}{Z_g} + \frac{\alpha(1-\alpha)Z_x}{Z_g} \right] \quad (3.22)$$

$$\frac{Z_{eH} \parallel Z_{eL}}{Z_g} = \frac{j\omega(R_{eH} \parallel R_{eL})(C_{eH} + C_{eL})}{1 + j\omega(R_{eH} \parallel R_{eL})(C_{eH} + C_{eL})} \left\{ \frac{C_g}{(C_{eH} + C_{eL})} \right\} \quad (3.22a)$$

$$\frac{(1-\alpha)Z_{eH} + \alpha Z_{eL}}{Z_g} = \frac{j\omega R_{eH} C_{eH}}{1 + j\omega R_{eH} C_{eH}} \left\{ \frac{(1-\alpha)C_g}{C_{eH}} \right\} + \frac{j\omega R_{eL} C_{eL}}{1 + j\omega R_{eL} C_{eL}} \left\{ \frac{\alpha C_g}{C_{eL}} \right\} \quad (3.22b)$$

on $Z_g = (j\omega C_g)^{-1}$. El membre de la dreta de l'equació (3.22) inclou dos termes: el primer és la contribució de les impedàncies dels elèctrodes, per tant independent de Z_x , mentre que el segon depèn de Z_x . La contribució de les impedàncies dels elèctrodes s'esperaria que fos la seva suma directa, però hi apareix un factor que depèn de la seva combinació en paral·lel dividida per la impedància de l'acoblament entre el cos de la impedància i terra, expressió (3.22a). Aquest terme és degut a C_g i els dos elèctrodes hi contribueixen per igual.

El segon terme de la dreta de (3.22) hauria de ser Z_x , però l'acoblament a terra hi introdueix el terme $\alpha(1-\alpha)Z_x/Z_g$, com s'ha vist a l'equació (3.6), i també un terme similar que depèn, de forma diferent, de la impedància de cada elèctrode, equació (3.22b). Atès que normalment $\alpha < (1-\alpha)$, la impedància de l'elèctrode connectat al terminal H tindrà més repercussió que la impedància de l'elèctrode connectat al terminal L.

Si els dos elèctrodes són iguals, llavors ($Z_{eH} = Z_{eL} = Z_e$, $R_{eH} = R_{eL} = R_e$, $C_{eH} = C_{eL} = C_e$), i substituint les impedàncies per les seves expressions com a combinació de resistències i capacitats, l'equació (3.22) queda com

$$\begin{aligned} Z_{HL}(j\omega) = & \frac{2R_e}{1 + j\omega R_e C_e} \left[1 + \frac{1}{2} \left(\frac{j\omega R_e C_e}{1 + j\omega R_e C_e} \right) \frac{C_g}{C_e} \right] \\ & + \frac{R_x}{1 + j\omega R_x C_x} \left[1 + \left(\frac{j\omega R_e C_e}{1 + j\omega R_e C_e} \right) \frac{C_g}{C_e} \right] + \frac{j\omega\alpha(1-\alpha)R_x^2 C_g}{(1 + j\omega R_x C_x)^2}. \end{aligned} \quad (3.23)$$

Aquesta impedància conté tres termes: 1) una impedància residual independent de Z_x , que inclou les impedàncies de cada elèctrode més un altre terme que també depèn de les impedàncies dels elèctrodes i de la relació C_g/C_e ; 2) la impedància que es vol mesurar Z_x multiplicada per un factor d'escala (coeficient de guany o sensibilitat) que també depèn de les impedàncies dels elèctrodes i C_g/C_e ; i 3) un terme no lineal que depèn de Z_x , C_g i α però no depèn de les impedàncies dels elèctrodes. Aquest darrer terme és $\alpha(1-\alpha)Z_x/Z_g$ i descriu la desviació de Z_{HL} respecte a Z_x deguda exclusivament a C_g , no als elèctrodes. Cada terme o factor addicional degut a C_g inclou el producte $j\omega$ en el seu numerador, i això explica l'efecte inductiu observat per diversos autors. Però l'equació (3.23) mostra que C_g produeix efectes addicionals a aquest efecte inductiu.

De l'equació (3.23) es dedueix que el factor C_g/C_e pot influir molt en la mesura d'impedància. Només quan la relació entre l'acoblament a terra i la capacitat dels elèctrodes sigui molt petita, els termes de entre claudàtors seran propers a la unitat i la influència dels elèctrodes es limitarà a l'addició de la seva impedància a Z_x .

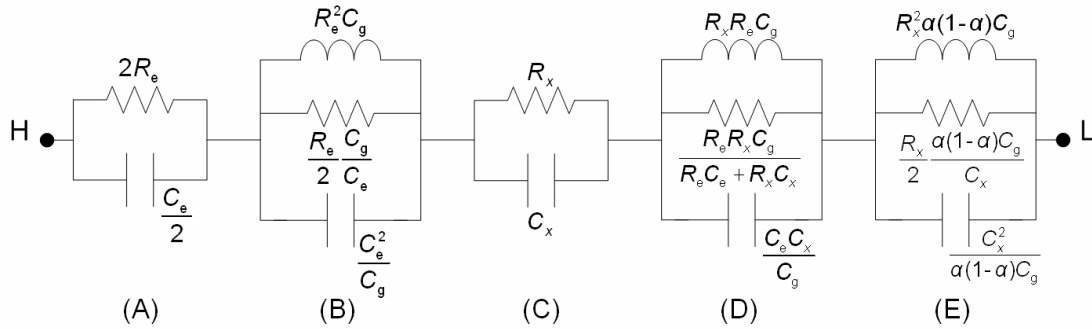


Figura 3.13. Circuit equivalent de la mesura d'impedància amb dos elèctrodes quan es contempla l'efecte de l'acoblament capacitiu a terra.

La fig. 3.13 mostra una xarxa d'impedàncies equivalent a l'expressió de la impedància mesurada (3.23). Consta de cinc subxarxes (A-E). Les subxarxes A i C són, respectivament, les impedàncies dels dos elèctrodes ($2Z_e$) i la del material que es vol mesurar (Z_x). Les altres tres subxarxes són circuits *RLC* paral·lel (tancs ressonants) causats per l'efecte de C_g . La subxarxa B depèn només de les impedàncies dels elèctrodes i de C_g , i ressona a $\omega_e = (R_e C_e)^{-1}$. La subxarxa E depèn només del material i de l'acoblament capacitiu a terra (C_g i α), i ressona a $\omega_c = (R_x C_x)^{-1} = \sigma/\epsilon_0 \epsilon_r$. La subxarxa D depèn de Z_e , Z_x i C_g , però no de α , i ressona a $(\omega_e \omega_c)^{1/2}$, freqüència que està situada entre ω_e i ω_c . Si $C_g = 0$, la mesura seria $Z_{HL} = 2Z_e + Z_x$. Però quan $C_g \neq 0$, les mesures a freqüències a prop de les de ressonància de les subxarxes *RLC* es desviaran del resultat $2Z_e + Z_x$. La subxarxa D, en particular, que depèn dels elèctrodes i del material, afectarà la mesura a la banda de freqüències de ω_e a ω_c , que a priori és la millor banda on mesurar R_x . Els factors de qualitat de les tres subxarxes Q ($= \omega_{res} RC$) són $Q_B = Q_E = 0,5$ i $Q_D = (\omega_e \omega_c)^{1/2}/(\omega_e + \omega_c)$; si $\omega_e \ll \omega_c$, llavors serà $Q_D \approx (\omega_e/\omega_c)^{1/2} \ll 1$. Com que Q és menor que 1 per a les tres subxarxes, cap dels tancs *RLC* mostrarà canvis abruptes en el mòdul ni a la fase de la seva impedància respectiva.

Cada circuit *RLC* paral·lel de la fig. 3.13 introdueix tres efectes: inductiu, resistiu i capacitiu, ja que es comporta com: una inductància a freqüències bastant inferiors a la de ressonància; una inductància en paral·lel amb una resistència a freqüències per sota i a prop de la de ressonància; una resistència (pura) a la freqüència de ressonància; una capacitat en paral·lel amb una resistència a prop i per sobre de la freqüència de ressonància; i una capacitat a freqüències molt més grans que la de ressonància.

Les inductàncies de la fig. 3.13 no descriuen cap procés d'emmagatzemament d'energia magnètica. El comportament inductiu es causat pel mètode de mesura, ja que al dividir V_{HG} per I_L "gira" la impedància de l'acoblament capacitiu a terra. Llavors, els efectes inductius són resultat d'un emmagatzemament d'energia elèctrica a C_g . Per un material on predomini el corrent de conducció ($\sigma \gg \omega \epsilon_0 \epsilon_r$) (Ramo *et al.* 1994) enfront del corrent de desplaçament, es pot considerar $C_x = 0$ i llavors els efectes inductius encara hi seran però només la subxarxa B ressonària (a ω_c , a causa dels elèctrodes i C_g). Si a més de $C_x = 0$, les impedàncies dels elèctrodes són negligibles, només hi haurà l'efecte inductiu de la subxarxa E però no hi haurà ressonància. Un terme similar fou descrit per Hague i Foord (1971) i Hartshorn (1947) en mesures amb contactes òhmics, en comptes dels elèctrodes, quan es mesuraven resistors amb apantallaments connectats a terra mitjançant ponts d'impedància en alterna. Si $C_x \neq 0$ i les impedàncies dels elèctrodes són negligibles, només ressonarà la subxarxa E (a ω). A Fleig *et al.* (1996), les mesures d'impedància sobre safir i amb un model que considera $C_x \neq 0$ i $\alpha = 0,5$ (acoblament a terra simètric), mostren el que l'autor anomena arcs inductius (*inductive loops*) en els diagrames de Cole-Cole de la impedància mesurada. El model basat en l'equació (3.23) prediu que hi haurà efectes inductius quan $C_g \neq 0$ i que les ressonàncies es donaran quan els elèctrodes o el material tinguin resistència i capacitat no negligible. Tanmateix, les ressonàncies de les subxarxes B, D i E no asseguren que $|Z_{HL}|$ tingui màxims a mitges o altes freqüències. Són només una manera de visualitzar els efectes de C_g en cadascuna de les impedàncies (elèctrodes i material).

Una altra manera de veure l'efecte de l'acoblament capacitiu a terra és representant les impedàncies amb la seva part real i imaginària. Si considerem $Z_{eH} + \alpha Z_x = R_H + jX_H$ i $Z_{eL} + (1 - \alpha)Z_x = R_L + jX_L$, el circuit de la fig. 3.12 esdevé el de la fig. 3.14. Aplicant a aquest circuit la transformació estrella-triangle s'obté la impedància equivalent entre els terminals de mesura H i L,

$$Z_{HL} = R_H + R_L - \omega C_g (R_H X_H + R_L X_L) + j [X_H + X_L + \omega C_g (R_H R_L - X_H X_L)] \quad (3.24)$$

D'aquesta expressió es dedueix que l'acoblament capacitiu a terra afectarà tant la part real com la part imaginària de Z_{HL} . L'efecte inductiu observat per Hague i Foord (1971) s'associava a la part imaginària de la impedància. X_H i X_L són negatives perquè són reactàncies d'elements capacitius, i la seva suma també serà negativa, $X_H + X_L < 0$. El terme que resta a la part real en realitat és positiu perquè al ser les reactàncies X_H i X_L negatives serà $-\omega C_g (R_H X_H + R_L X_L) > 0$ i se sumará, de manera que l'acoblament a terra incrementa la part real de la impedància (efecte resistiu).

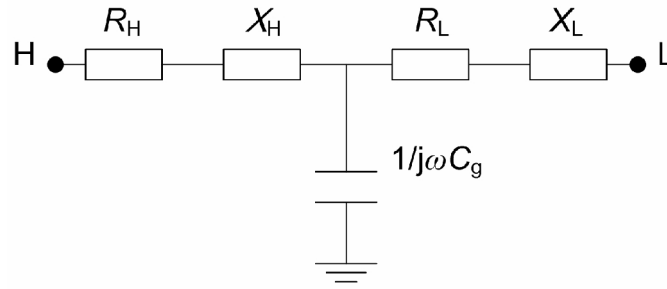


Figura 3.14. Model de paràmetres concentrats de la impedància mesurada entre els terminals H i L de l'instrument de mesura (material i elèctrodes), separant la part real i la part imaginària.

En canvi, pel signe de la part imaginària hi ha més casos possibles: (1) si $R_H R_L > X_H X_L$, tindrem $\omega C_g (R_H R_L - X_H X_L) > 0$, i si $\omega C_g (R_H R_L - X_H X_L) > |X_H + X_L|$, llavors la part imaginària serà positiva (efecte inductiu i fases positives); (2) si $R_H R_L > X_H X_L$ però $\omega C_g (R_H R_L - X_H X_L) < |X_H + X_L|$, llavors la part imaginària serà més petita en valor absolut però seguirà sent negativa (efecte inductiu) perquè $X_H + X_L < 0$. Si la part imaginària es fa més petita, s'associarà a una capacitat més gran de la que realment seria; (3) si $R_H R_L < X_H X_L$, tindrem $\omega C_g (R_H R_L - X_H X_L) < 0$ i se sumarà en valor absolut a $X_H + X_L$, que és negativa, i farà la part imaginària més gran en valor absolut però negativa (efecte capacitiu). Si la part imaginària es fa més gran, s'associarà a una capacitat més petita de la que realment seria. També pot haver-hi compensacions i ressonàncies a unes freqüències determinades, quan $R_H R_L = X_H X_L$ o si $\omega C_g (R_H R_L - X_H X_L) > 0$, o $\omega C_g (R_H R_L - X_H X_L) = |X_H + X_L|$. Aquesta última situació és la que s'utilitza en metrologia per compensar la capacitat paràsita en paral·lel amb el resistor, modificant l'apantallament (C_g) del resistor (Awan *et al.* 2011), però el terme $-\omega C_g (R_H X_H + R_L X_L)$, seguirà sumant-se a la part real i depèn de C_g . Si aquesta capacitat canvia, només hi haurà compensació a una freqüència i el valor de la part real canviarà amb C_g .

3.4. Aproximació quasi-estàtica i efectes de propagació d'ona.

Si es mesura a altes freqüències, a més dels efectes de les capacitats paràsites descrits als apartats anteriors, també hi pot haver efectes de propagació d'ona electromagnètica. El material que es vol mesurar es modelitza com una resistència ($R_x = k_{\text{cell}}/\sigma$) en paral·lel amb una capacitat ($C_x = \epsilon_0 \epsilon_r / k_{\text{cell}}$), on k_{cell} és la constant de cel·la, que depèn de la distància entre els elèctrodes i de les mides del volum conductor (material). La freqüència característica del material, $\omega_c = (R_x C_x)^{-1} = \sigma / \epsilon_0 \epsilon_r$, no depèn de k_{cell} . La impedància del material és llavors

$$Z_x = \frac{R_x}{1 + j\omega R_x C_x} = \frac{R_x}{1 + j\omega \frac{\epsilon}{\sigma}} = \frac{R_x}{1 + j\frac{\omega}{\omega_c}}. \quad (3.25)$$

El seu mòdul està representat a la fig. 3.15 quan el material és aigua de 0,01 dS/m i 1 dS/m a 25 °C, la permitivitat relativa és 78 a 25 °C, i la constant de cel·la 1 cm⁻¹.

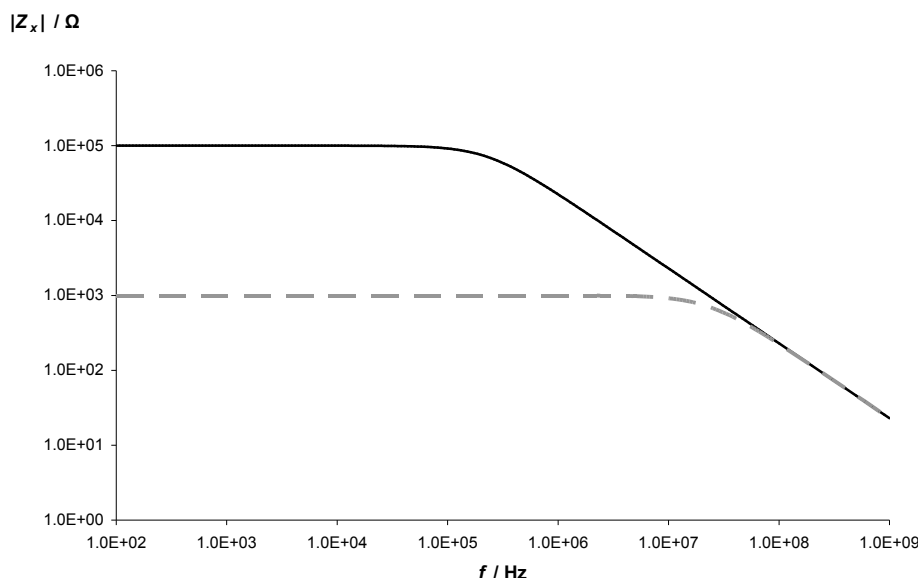


Figura 3.15. Mòdul de la impedància d'una cel·la amb $k_{\text{cell}} = 1 \text{ cm}^{-1}$ plena d'aigua de 0,01 dS/m (línia negra contínua) i 1 dS/m (línia gris discontinua).

A freqüències baixes respecte a ω_c , $\omega \ll \omega_c$ ó $\omega\epsilon/\sigma \ll 1$, tenim que $Z_x \approx R_x$, i el material es considera un “bon conductor” en termes electromagnètics. A freqüències altes, $\omega \gg \omega_c$ ó $\omega\epsilon/\sigma \gg 1$, tenim que $Z_x \approx (j\omega C_x)^{-1}$, i el material és un “bon dielèctric” en termes electromagnètics (Jordan i Balmain 1968). Aquestes afirmacions, però, s’han de matissar. A $\omega \ll \epsilon/\sigma$, la resistència de la mostra d'aigua de 0,01 dS/m és de 100 kΩ, és una resistència alta, més pròpia d'un material aïllant que d'un conductor. Per tant, un material pot ser molt poc conductor i complir la condició de “bon conductor”, $\omega\epsilon/\sigma \ll 1$. Com més baixa sigui la conductivitat més baixa serà ω_c i per això en materials molt aïllants la freqüència característica pot ser inferior a 1 Hz (fora del marge de mesura considerat en aquest treball). Per tant, cal tenir ben present que el quocient $\omega\epsilon/\sigma$ és la relació entre el corrent de desplaçament i el corrent de conducció en règim permanent sinusoidal. Per a $\omega\epsilon/\sigma \ll 1$ predomina el corrent de conducció i l'equació electromagnètica que aplica és la de difusió, de manera que no hi ha propagació d'ones. Per a $\omega\epsilon/\sigma \gg 1$ predomina el corrent de desplaçament i l'equació que aplica és l'equació d'ona sense pèrdues, i hi pot haver propagació si les mides del volum són comparables a la longitud d'ona (Ramo *et al.* 1994).

Plonsey (1969) posa tres condicions per complir l'aproximació quasi-estàtica: (1) $|\gamma d| \ll 1$, per a que no hi hagi efectes de propagació; (2) $\omega\varepsilon/\sigma \ll 1$ per a que no hi hagi efectes capacitius; i (3) $(\gamma d)^2 \ll 1$ per a que no hi hagi efectes inductius.

La primera condició $|\gamma d| \ll 1$ va lligada a la longitud d'ona i limita la distància entre els elèctrodes. Straub (1994) fita $|\gamma d| < 0,05$ i això es tradueix en $d < \lambda/126$, on λ és la longitud d'ona dins del material. Llavors, $\lambda = \lambda_0/\sqrt{\varepsilon_r}$, on λ_0 és la longitud d'ona en el buit i ε_r és la permitivitat relativa del material que es mesura (Ramo *et al.* 1994). La longitud d'ona dins a l'aigua és unes nou vegades menor que en el buit ($\varepsilon_r \approx 80$) (Von Hippel 1954). Però la relació $\lambda = \lambda_0/\sqrt{\varepsilon_r}$ és per a un medi infinit. El conjunt del material i l'entorn de mesura format per un pla de terra a prop, una mostra finita de material, un suport separador aïllant (sovint plàstic) i la resta aire, es podria tractar com una guia d'ona dielèctrica (Weeks 1964). Llavors, la longitud d'ona efectiva està entre la del buit i la del material infinit, $\lambda_0/\sqrt{\varepsilon_r} < \lambda_m < \lambda_0$, on λ_m és la longitud d'ona dins la mostra de material. Així, la condició $d < \lambda/126$ es pot relaxar, però s'utilitzarà com a referència per saber on està el límit absolut per no tenir efectes de propagació.

La segona condició per a que sigui vàlida l'aproximació quasi-estàtica, $\omega\varepsilon/\sigma \ll 1$, és per a que no hi hagi efectes capacitius. Si es mesura conductivitat a baixa freqüència, es pot complir bé si els elèctrodes no afecten la mesura. Però si es vol mesurar la permitivitat del material a freqüències altes, no es complirà. Plonsey (1969) ja avisa de que és la condició més difícil de complir, però si en el model es substitueix la conductivitat per la conductivitat complexa $\sigma^* = \sigma + j\omega\varepsilon$, llavors la aproximació quasi-estàtica es pot complir bé. Això està implícit en el model de Z_x de l'equació (3.25) perquè si a $R_x = k_{\text{cell}}/\sigma$ es substitueix σ per σ^* , s'obté $Z_x = k_{\text{cell}}/(\sigma + j\omega\varepsilon)$.

La tercera condició per complir l'aproximació quasi-estàtica és $(\gamma d)^2 \ll 1$. En termes electromagnètics vol dir que el camp elèctric ha d'estar generat per un gradient de potencial i no per una variació de camp magnètic (Plonsey 1969). Aquesta condició és la mateixa que s'ha considerat abans per poder aproximar amb el primer terme de l'expansió de Taylor les expressions de la impedància Z_{HL} mesurada amb el mètode $I-V$, equació (3.17), i el mètode $V-I$, equació (3.18). Com que $(\gamma d)^2 = Z_x/Z_g$ i $Z_g = (j\omega C_g)^{-1}$, tindrem

$$(\gamma d)^2 = \frac{Z_x}{Z_g} = \frac{j\omega R_x C_g}{1 + j\omega R_x C_x} = \frac{j\frac{\omega}{\omega_c} C_g}{1 + j\frac{\omega}{\omega_c} C_x}. \quad (3.26)$$

A baixa freqüència respecte a ω_c ($\omega \ll \omega_c$), tindrem $\omega\varepsilon/\sigma \ll 1$, $Z_x \approx R_x$ i l'expressió (3.26) s'aproxima com

$$(\gamma d)^2 \Big|_{\omega \ll \omega_c} \approx j \frac{\omega}{\omega_c} \frac{C_g}{C_x} = j \omega R_x C_g. \quad (3.27)$$

Substituint a (3.17) i (3.18) s'obté, per al mètode $I-V$,

$$Z_{\text{HL}}^{I-V} \approx Z_x \left[1 - \frac{1}{3} \frac{Z_x}{Z_g} \right] \Big|_{\omega \ll \omega_c} \approx R_x - j \omega \frac{R_x^2}{3} C_g \quad (3.28)$$

i, per al mètode $V-I$,

$$Z_{\text{HL}}^{V-I} \approx Z_x \left[1 + \frac{1}{6} \frac{Z_x}{Z_g} \right] \Big|_{\omega \ll \omega_c} \approx R_x + j \omega \frac{R_x^2}{6} C_g. \quad (3.29)$$

El terme que multiplica ω en aquestes dues equacions té dimensions d'inductància. Però mentre a (3.28) és negatiu, i per tant no té sentit com a element d'un circuit, a (3.29) si que en té i és la inductància "residual" descrita per Hague i Foord (1971).

A alta freqüència respecte a ω_c ($\omega \gg \omega_c$), tindrem $\omega\varepsilon/\sigma \gg 1$, $Z_x \approx (j\omega C_x)^{-1}$ i l'expressió (3.26) s'aproxima com

$$(\gamma d)^2 \Big|_{\omega \gg \omega_c} \approx \frac{C_g}{C_x}. \quad (3.30)$$

Substituint a (3.17) i (3.18) s'obté, per al mètode $I-V$,

$$Z_{\text{HL}}^{I-V} \approx Z_x \left[1 - \frac{1}{3} \frac{Z_x}{Z_g} \right] \Big|_{\omega \gg \omega_c} \approx \frac{1}{j\omega C_x} \left[1 - \frac{1}{3} \frac{C_g}{C_x} \right] = \frac{1}{j\omega \frac{C_x}{1 - 2c_{gx}}} \quad (3.31)$$

i per al mètode $V-I$,

$$Z_{\text{HL}}^{V-I} \approx Z_x \left[1 + \frac{1}{6} \frac{Z_x}{Z_g} \right] \Big|_{\omega \gg \omega_c} \approx \frac{1}{j\omega C_x} \left[1 + \frac{1}{6} \frac{C_g}{C_x} \right] = \frac{1}{j\omega \frac{C_x}{1 + c_{gx}}} \quad (3.32)$$

on $c_{gx} = C_g/C_x$. La condició $|\gamma d| \ll 1$ implica que $c_{gx} < 1$, i per tant la capacitat mesurada a (3.31) serà més gran que C_x , mentre que la mesurada a (3.32) serà menor. Per a que no hi hagi propagació la constant de propagació ha de molt més petita que la unitat i això comporta que $C_g < C_x$. Per garantir que $C_g < C_x$, la distància entre els elèctrodes de les

cel·les de mesura de permitivitat haurà de ser petita (poca separació entre els elèctrodes), en comparació, amb les mides dels elèctrodes. Les estructures que s'utilitzen normalment són dues plaques paral·leles (formant un condensador) amb un anell de guarda a una de les plaques (Schwan i Maczuk 1960). Si el material que es vol mesurar té una conductivitat alta, els errors per la polarització dels elèctrodes pot ser important i emascarar la permitivitat del material. Per evitar aquests errors cal augmentar la distància entre elèctrodes, Schwan i Maczuk (1960) proposen una cel·la cilíndrica amb pantalla coaxial i la cel·la la consideren com una línia de transmissió. Un dels elèctrodes està connectat directament a la pantalla i aquesta al potencial de referència del sistema (terra), per tant el sistema usa el mètode $I-V$. De l'anàlisi teòric, els autors dedueixen que hi ha un factor addicional que fa augmentar la permitivitat del material i aquest factor es degut al camp paràsit (*stray field*) entre la mostra i la pantalla i aquest factor augmenta quan augmenta la distància entre els elèctrodes. Els resultats corroboren l'anàlisi teòric. Aquest camp paràsit es modelitza per una capacitat entre la mostra i la pantalla, per tant és C_g i com el mètode és $I-V$, l'efecte de augmentar C_g fa augmentar la capacitat mesurada, equació (3.31).

La condició $|\gamma d| \ll 1$ per poder acceptar les expressions aproximades (3.17) i (3.18) o per complir la primera condició que imposa Plonsey (1969) per a que no hi hagi efectes de propagació electromagnètica i fitada per Straub (1994) ($|\gamma d| < 0,05$), no són inherentment la mateixa. El model de la impedància de paràmetres distribuïts de la fig. 3.4(a), descrit com a línia de transmissió a la fig. 3.5, només té en compte elements resistius i capacitius i no elements inductius, és a dir, només conductivitats i permitivitats elèctriques, no permeabilitats magnètiques. A altes freqüències $\omega \gg \omega_c$ ($\omega\epsilon/\sigma \gg 1$), quan el corrent de desplaçament és més gran que el corrent de conducció, i que és quan poden sorgir els efectes de propagació (Plonsey 1969; Ramo *et al.* 1994), la constant de propagació és real perquè $\gamma d \approx (C_g/C_\infty)^{1/2}$, i no hi haurà propagació d'ones pròpiament dita, sinó un terme d'atenuació (solució de l'equació d'ona, (Ramo *et al.* 1994)). Aquesta constant de propagació real, $\gamma d \approx (C_g/C_\infty)^{1/2}$, depèn de la geometria de la cel·la de mesura i de l'entorn electromagnètic, de la distància entre els elèctrodes, del volum de la mostra i de les permitivitats del material de la mostra, del recipient o el suport, i de l'aire. En canvi, la condició $|\gamma d| < 0,05$ (Straub 1994) per a altes freqüències, és imaginària pura: hi ha un terme de desplaçament de fase en funció de la distància d entre els elèctrodes, que és l'efecte de propagació pròpiament dit (Ramo *et al.* 1994). La constant de propagació γd es descriu en funció de la longitud d'ona i aquesta depèn de la permitivitat elèctrica i la permeabilitat magnètica. Per tant,

$$d < \frac{\lambda}{126} = \frac{1}{126} \frac{\lambda_0}{\sqrt{\epsilon_r}} = \frac{1}{126} \frac{1}{\sqrt{\epsilon_r}} \frac{c_0}{f} = \frac{1}{126} \frac{1}{f \sqrt{\epsilon_r \epsilon_0 \mu_0}} \quad (3.33)$$

on f és la freqüència de l'ona electromagnètica que “viatja” pel material que es mesura, c_0 la velocitat de la llum al buit, ϵ_r és la permitivitat relativa del material, ϵ_0 és la permitivitat elèctrica del buit i μ_0 és la permeabilitat magnètica del buit (Ramo *et al.* 1994). Aquí s'ha considerat $\mu_r = 1$ perquè s'ha suposat que els materials mesurats no són magnètics. Si ho fossin, a l'equació (3.33) s'hauria de multiplicar μ_0 per μ_r .

Es pot concloure que si no es compleix $C_g/C_x \ll 1$, les aproximacions de les expressions (3.17) i (3.18) no seran vàlides i si s'utilitzen hi haurà un error en la determinació de la impedància mesurada. Aquesta condició $C_g/C_x \ll 1$ depèn de la geometria de la cel·la i de les permitivitats elèctriques dels materials (de la mostra, del recipient i de l'entorn en general). Per una altra part, si la freqüència de mesura és prou elevada i la distància entre els elèctrodes d no compleix $d < \lambda/126$, hi pot haver efectes de propagació electromagnètica.

3.5. Conclusions.

Actualment hi ha dos mètodes bàsics per mesurar la impedància elèctrica entre dos terminals H i L: $I-V$, que mesura el corrent que entra en el material, i $V-I$, que mesura el corrent que en surt. Les principals diferències entre ells quan es considera la presència de capacitats paràsites entre els terminals i terra, i entre el material mesurat i terra, són: 1) La capacitat de H a terra C_{hg} , que és incontrolable perquè depèn de la presència de masses conductores a prop del terminal H, afecta quan es mesura amb el mètode $I-V$. El mètode $V-I$ és immune a les impedàncies entre cada elèctrode de mesura (H i L) i terra, tant si són capacitives com si són d'una altra mena. 2) Amb el mètode $I-V$, la capacitat entre el material i terra C_g redueix la impedància mesurada: efecte capitiu (desviació negativa). Amb el mètode $V-I$ hi ha un augment de la impedància: efecte inductiu (desviació positiva). 3) Si C_g es considera distribuïda, la diferència entre la impedància mesurada Z_{HL} i la real Z_x , deguda a la presència de C_g , és més gran per al mètode $I-V$ que per al mètode $V-I$ tant si es fan servir les equacions completes com si es substitueixen per la seva aproximació de primer ordre. En aquest cas, la desviació amb el mètode $I-V$ és el doble que amb el mètode $V-I$. 4) Per al mètode $I-V$, el model de paràmetres distribuït aproximat no coincideix amb el model de paràmetres concentrats, mentre que per al mètode $V-I$ si que coincideixen.

En el mètode de mesura $V-I$, el corrent que circula per la capacitat paràsita entre el cos i terra augmenta amb la freqüència del senyal d'excitació i per tant el corrent mesurat a la

sortida (terminal L), disminueix. Aquesta disminució de corrent es pot interpretar com un augment de la impedància al pujar la freqüència, és a dir, un efecte inductiu, que ve reflectit en el signe positiu de les desviacions entre Z_{HL} i Z_x a les expressions (3.6) i (3.18). La constatació experimental d'aquest efecte ha sorprès molts investigadors, alguns dels quals li han buscat una explicació possible en inductàncies paràsites en el circuit de mesura. Aquí s'ha demostrat que el seu origen és el "gir" que la xarxa en T en el circuit de la fig. 3.4(b) imprimeix en la reactància de C_g . També s'ha demostrat que la proposta d'una injecció simètrica que approximi el potencial elèctric del centre del material a 0 V i així pal·liar l'efecte de C_g , té una eficàcia limitada perquè llavors les capacitats paràsites C_{hg} i C_{lg} afecten la mesura, a més de l'acoblament a terra de cada part de la impedància respecte al seu centre. Val a dir que la presència de l'efecte inductiu permet detectar que C_g és gran. Amb el mètode $I-V$, en canvi, on l'efecte de C_g és capacitiu, aquesta detecció és molt més difícil.

El model desenvolupat per descriure la mesura d'impedància d'un material (volum conductor) amb dos elèctrodes i acoblament paràsit entre el cos del volum i terra, i que ha portat a les expressions (3.22) i (3.23), serveix tant per a elèctrodes de contacte directe com per a elèctrodes capacitius. Aquest model empra un paràmetre, α , $0 \leq \alpha \leq 1$, que millora els resultats respecte als models que consideren que l'acoblament a terra és des del punt central del cos mesurat (que equival a $\alpha = 0,5$). De fet, quan es mesura amb el mètode $V-I$, els resultats d'aquest nou model coincideixen amb l'aproximació de primer ordre d'un model de paràmetres distribuïts que contempli l'acoblament a terra des de cada punt del volum del cos mesurat.

El fet de mesurar amb elèctrodes produeix desviacions degudes a C_g que són addicionals a les observades quan es mesura sense elèctrodes. La presència de C_g no només modifica l'efecte que les impedàncies dels elèctrodes tenen en el valor Z_{HL} mesurat, sinó que també fa que l'efecte de C_g sobre Z_x sigui diferent al que hi ha en absència d'elèctrodes. De l'equació (3.23) es dedueix que la relació entre C_g i la capacitat dels elèctrodes (C_e) pot afectar molt la mesura d'impedància bipolar. Aquest paràmetre C_g/C_e i la seva rellevància no consten a la bibliografia.

Quan la impedància dels elèctrodes i la del material es modelitzen com una resistència en paral·lel amb una capacitat, a més dels efectes inductius observats per diversos autors, les expressions (3.22) i (3.23) indiquen que degut a C_g hi ha també efectes resistius i capacitius. És a dir, que no només la part imaginària de la impedància mesurada queda afectada, sinó també la seva part real. L'anàlisi mostra que pot arribar a haver-hi fases positives

(inesperades en un circuit amb nomé resistències i capacitats) i desviacions sistemàtiques, que depenen de C_g/C_e .

Per a que no hi hagi efectes de propagació d'ona, s'ha de complir que la distància entre els elèctrodes d sigui més petita que una certa fracció de la longitud d'ona λ de l'ona electromagnètica que intervé en la mesura d'impedància. Normalment, $d < \lambda/126$ és un criteri prou vàlid.

Capítol 4

4. Mesures d'impedància bipolars amb elèctrodes de contacte directe. Efectes de les capacitats paràsites

En el capítol 3 s'ha analitzat teòricament el problema de mesurar una impedància volumètrica amb dos elèctrodes mitjançant un instrument basat en un pseudopont automàtic i el mètode $V-I$. Quan hi ha acoblament capacitiu des del cos de la impedància que es mesura cap a terra, per aquest acoblament hi circula un corrent (I_g) que no és mesurat per l'instrument (fig. 4.1), i això comporta efectes inductius, resistius i capacitius. Ara es considerarà el cas concret en què el volum conductor que es vol mesurar és una mostra líquida: aigua, que és l'objectiu de la tesi, i metanol com a líquid diferent per poder contrastar alguns resultats, i que els dos elèctrodes són de contacte directe (metall-electròlit) i iguals, i per tant les seves impedàncies seran similars. Aquest estudi servirà per preparar el camí a l'anàlisi dels cas amb elèctrodes capacitius, que és l'objectiu final de la tesi.

Les capacitats paràsites que poden afectar la mesura són C_{hl} i C_g . L'anàlisi considera primer l'efecte de la capacitat paràsita C_g sobre la mesura d'impedància perquè, segons s'ha vist al

capítol 2, els elèctrodes de contacte directe no només afecten a molt baixa freqüència, relativa a la freqüència característica del material, sinó també a freqüències més altes, depenent de la relació entre la seva resistència i la del material (R_e/R_x a l'equació 2.6). Un cop analitzat l'acoblament a terra (C_g), es podrà analitzar l'efecte de C_{hl} a alta freqüència i veure com afecta aquesta capacitat en combinació amb C_g .

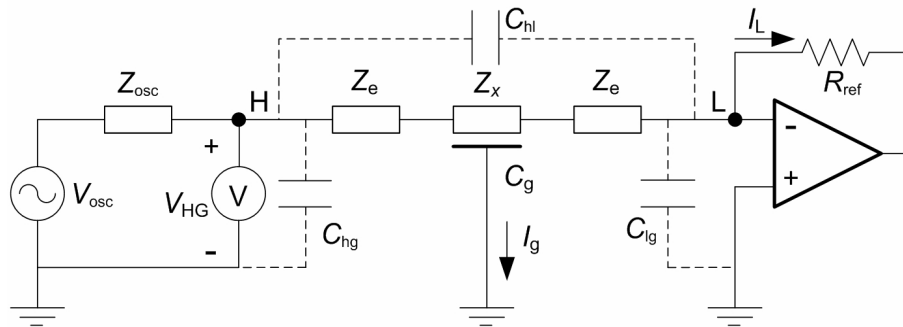


Figura 4.1. Mesura d'una impedància amb dos elèctrodes mitjançant un pseudopont automàtic.

La mesura d'impedància amb dos elèctrodes de contacte directe és la més comuna i utilitzada per la seva simplicitat. Així, per exemple, s'usa per determinar la conductivitat elèctrica de líquids, solucions iòniques aquoses (Göpel 1991; Máriássy *et al.* 2009) o en solucions biològiques (Lisdat i Schäfer 2008); en espectroscopia dielèctrica de líquids, solucions iòniques aquoses (Mazzeo i Flewitt 2007) o suspensions de cèl·lules (Asami 2011); per a mesures de bioimpedància a processos d'aliments (Pliquett 2010); mesures d'impedància al sòl (Oh *et al.* 2007), de ceràmiques (safir) (Fleig *et al.* 1996) o de semiconductors (Okawa *et al.* 2003). L'objectiu de la mesura és, generalment, obtenir la impedància del volum conductor (mostra) i d'aquesta determinar les propietats elèctriques (conductivitat i/o permitivitat elèctriques) del material.

Moltes d'aquestes aplicacions impliquen mesures sobre materials relativament voluminosos difícils d'envoltar amb una pantalla. És conegut de fa temps que la mesura d'impedància de resistors apantallats inclou efectes inductius (Hague i Foord 1971), i que el valor de la inductància "residual" (aparent) depèn del valor del resistor i de la capacitat paràsita entre el cos del resistor i l'apantallament a terra. Els arcs inductius (*inductive loops*) en els diagrames de Cole-Cole al mesurar safir (Fleig *et al.* 1996) i "capacitats negatives" en mesures sobre semiconductors (Okawa *et al.* 2003) pot ser són deguts a causes similars. Per tant, l'estudi de l'efecte de C_g quan es mesura amb elèctrodes de contacte directe és interessant per sí mateix i també com un primer pas per estudiar després l'efecte sobre elèctrodes capacitius.

4.1. Model de la impedància i anàlisi dels efectes de les capacitats paràsites

4.1.1. Circuit equivalent del material, elèctrodes i acoblament a terra

Si a la fig. 4.1 es considera que C_{hl} és negligible, el model amb acoblament distribuït des del cos de la impedància a terra passa a ser el de la fig. 4.2.

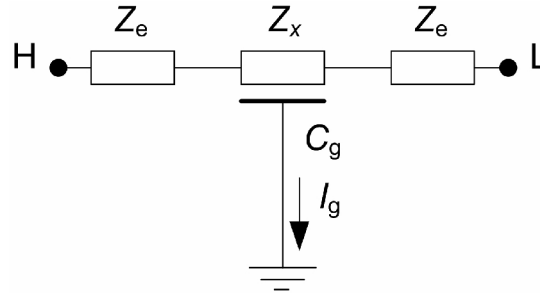


Figura 4.2. Model de la mesura d'impedància elèctrica amb dos elèctrodes i acoblament a terra distribuït.

Per simplificar l'anàlisi, l'acoblament a terra és considerat de paràmetres concentrats, però no des del centre del material sinó des d'un punt indeterminat, definit pel paràmetre α introduït al capítol 3, segons mostra la fig. 4.3.

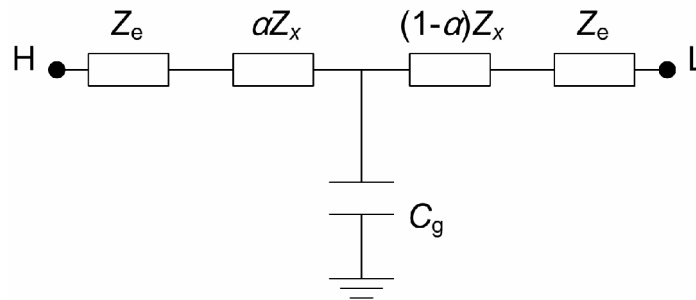


Figura 4.3. Model de la mesura d'impedància elèctrica amb dos elèctrodes i acoblament a terra de paràmetres concentrats, en un punt de Z_x indeterminat..

Si Z_e i de Z_x es modelen com una resistència en paral·lel amb una capacitat, l'equació que descriu la impedància entre H i L és la (3.23), que repetim aquí per comoditat,

$$Z_{HL}(j\omega) = \frac{2R_e}{1 + j\omega R_e C_e} \left[1 + \frac{1}{2} \left(\frac{j\omega R_e C_e}{1 + j\omega R_e C_e} \right) \frac{C_g}{C_e} \right] + \frac{R_x}{1 + j\omega R_x C_x} \left[1 + \left(\frac{j\omega R_e C_e}{1 + j\omega R_e C_e} \right) \frac{C_g}{C_e} \right] + \frac{j\omega \alpha (1 - \alpha) R_x^2 C_g}{(1 + j\omega R_x C_x)^2}. \quad (3.23)$$

Si es treu factor comú Z_x del terme no lineal, l'expressió queda com

$$\begin{aligned}
 Z_{\text{HL}}(j\omega) = & \frac{R_e}{1+j\omega R_e C_e} \left[2 + \left(\frac{j\omega R_e C_e}{1+j\omega R_e C_e} \right) \frac{C_g}{C_e} \right] \\
 & + \frac{R_x}{1+j\omega R_x C_x} \left[1 + \left(\frac{j\omega R_e C_e}{1+j\omega R_e C_e} \right) \frac{C_g}{C_e} + \left(\frac{j\omega R_x C_x}{1+j\omega R_x C_x} \right) \alpha(1-\alpha) \frac{C_g}{C_x} \right].
 \end{aligned} \tag{4.1}$$

Si l'acoblament a terra és negligible ($C_g = 0$), aquesta equació esdevé

$$Z_{\text{HL}}(j\omega) = \frac{2R_e}{1+j\omega R_e C_e} + \frac{R_x}{1+j\omega R_x C_x} \tag{4.2}$$

on el primer terme de la dreta és la suma de la impedància dels elèctrodes ($2Z_e$) i el segon terme és Z_x , com havia de ser.

L'expressió (4.1) mostra que tots els termes on hi intervé la capacitat C_g (termes entre parèntesi) tenen la mateixa forma: una estructura de passa-altes amb $j\omega$ al numerador. Els dos termes que depenen dels elèctrodes estan multiplicats per la relació entre capacitats C_g/C_e , i el terme no lineal (que depèn de Z_x) està multiplicat per la relació C_g/C_x i també per $\alpha(1-\alpha)$. Depenent dels valors d'aquestes relacions entre la capacitat de l'acoblament a terra respecte les altres (la dels elèctrodes i la del material a mesurar), els termes entre parèntesi, que són les desviacions respecte a l'equació (4.2), afectaran poc o molt la mesura d'impedància.

Les impedàncies dels elèctrodes tenen un paper important en les mesures bipolars perquè afecten tres de les cinc subxarxes de la fig. 3.13, que era una forma de representar la equació (3.23). Amb elèctrodes de contacte directe, els valors de la capacitat de l'elèctrode C_e van de 1 a 10 μF (Ragheb i Geddes 1991). En canvi, C_g depèn del volum del material que es mesura i de la distància d'aquest volum a terra. Alguns valors trobats a la bibliografia són 10 pF quan es mesura safir (Fleig *et al.* 1996), 100 pF en mesures sobre semiconductors (Okawa *et al.* 2003) i de 100 pF fins a 4 nF per a mesures sobre el cos humà (Serrano *et al.* 2003). Així, normalment es complirà $C_g/C_e \ll 1$, les impedàncies de les subxarxes B i D a la fig. 3.13 seran negligibles. En canvi, de la relació C_g/C_x no es pot dir res *a priori*, perquè C_x pot ser comparable a C_g .

Per tant, si $C_g/C_e \ll 1$, l'equació (4.1) es podrà simplificar com

$$Z_{\text{HL}}(j\omega) \approx \frac{2R_e}{1+j\omega R_e C_e} + \frac{R_x}{1+j\omega R_x C_x} + \frac{j\omega\alpha(1-\alpha)R_x^2 C_g}{(1+j\omega R_x C_x)^2}. \tag{4.3}$$

Si (4.3) s'avalua molt per sota de la freqüència característica ω_c , s'obté

$$\begin{aligned}
 Z_{\text{HL}}(j\omega)\Big|_{\omega \ll \omega_c} &\approx \frac{2R_e}{1 + j\omega R_e C_e} + R_x + j\omega\alpha(1-\alpha)R_x^2 C_g \\
 &\approx (2R_e + R_x) \frac{1 + j\frac{\omega}{\omega_{ez}}}{1 + j\frac{\omega}{\omega_e}} + j\omega\alpha(1-\alpha)R_x^2 C_g \quad \Bigg|_{\omega \gg \omega_{ez}} \\
 &\approx R_x + j\omega\alpha(1-\alpha)R_x^2 C_g
 \end{aligned} \quad (4.3a)$$

on

$$\omega_{ez} = \left(\frac{2R_e R_x C_e}{2R_e + R_x} \right)^{-1} = \left(1 + \frac{2R_e}{R_x} \right) \omega_c \Bigg|_{\frac{2R_e}{R_x} \gg 1} \approx \frac{2R_e}{R_x} \omega_c = \left(R_x \frac{C_e}{2} \right)^{-1} \quad (4.3b)$$

L'expressió (4.3) es pot modelitzar amb les tres subxarxes de la fig. 4.4, on la subxarxa E es deguda a C_g i s'afegeix a les impedàncies dels elèctrodes i a la impedància del material. Les impedàncies dels elèctrodes afectaran les mesures només a molt baixa freqüència. Si s'aproxima (4.3) per freqüències molt més baixes que la característica del material $\omega \ll \omega_c$, l'expressió que queda és l'equació (4.3a). En aquesta equació apareixen la impedància de l'elèctrode, la resistència del material i una inductància que depèn de la resistència del material, de la capacitat a terra i de α . Aquesta inductància surt de la subxarxa (E) quan no hi ha influència de C_x (perquè $\omega \ll \omega_c$ i és com si $C_x = 0$) i és el que Hague i Foord (1971) anomenen la inductància residual. Si es compacta l'expressió de la impedància dels elèctrodes i la resistència del material R_x , apareix al numerador un terme que depèn de la freqüència $(1 + j\omega/\omega_{ez})$, equació (4.3a). Aquesta freqüència ω_{ez} (4.3b), $\omega_{ez} > \omega_e$ (ω_e és la freqüència de tall de la impedància dels elèctrodes) i si s'avalua l'equació (4.3a) per freqüències $\omega \gg \omega_{ez}$, s'obté R_x més la inductància residual. Normalment aquesta inductància serà negligible enfront a R_x , per exemple, si $R_x = 1 \text{ k}\Omega$, $C_g = 10 \text{ pF}$, $\alpha = 0,5$ i la freqüència és 10 kHz , la impedància de la inductància val $j0,16 \text{ }\Omega$, negligible enfront a $1000 \text{ }\Omega$. Però a mesura que s'augmenta la freqüència aquesta inductància anirà augmentant de valor fins que a prop de ω_c esdevindrà el tanc RLC de la subxarxa E, ja que C_x comença a influir en Z_x .

La freqüència ω_{ez} (4.3b) seria la freqüència "equivalent" a ω_{ex} de l'apartat 2.2.2. A freqüències $\omega \gg \omega_{ex}$, la part real de la impedància $\text{Re } Z_{\text{HL}} \approx R_x$, és a dir, ja no hi ha la influència dels elèctrodes. Com ara estem avaluant l'expressió general de Z_{HL} , l'expressió ha canviat, i $\omega_{ez} = (2R_e/R_x)\omega_e$ en comptes de $\omega_{ex} = (2R_e/R_x)^{1/2}\omega_e$. A freqüències $\omega \gg \omega_{ez}$, quan ja no hi ha influència dels elèctrodes, l'expressió (4.3) queda com

$$Z_{HL}(j\omega)|_{\omega \gg \omega_{ez}} \approx \frac{R_x}{1 + j\omega R_x C_x} + \frac{j\omega\alpha(1-\alpha)R_x^2 C_g}{(1 + j\omega R_x C_x)^2} = \frac{R_x(1 + j\omega g_x R_x C_x)}{(1 + j\omega R_x C_x)^2} \quad (4.4)$$

on

$$g_x = 1 + \alpha(1-\alpha)\frac{C_g}{C_x}. \quad (4.5)$$

Quan $C_g \neq 0$, aquest paràmetre g_x sempre és més gran que 1. Per cada valor concret de la relació C_g/C_x , el paràmetre g_x serà màxim quan $\alpha = 0,5$, i llavors $\alpha(1-\alpha)|_{\max} = 0,25$.

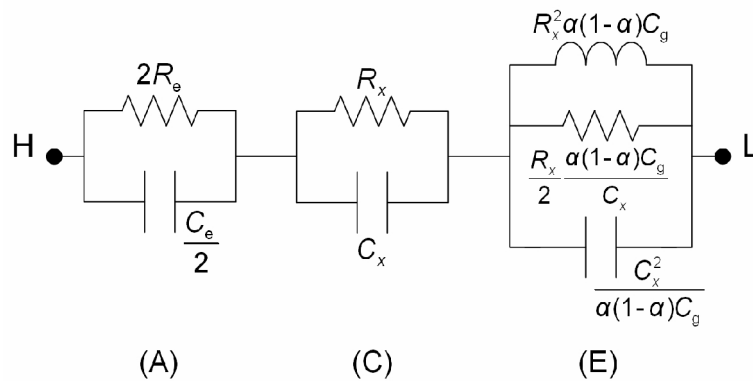


Figura 4.4. Circuit equivalent de la mesura d'impedància elèctrica amb dos elèctrodes de contacte directe quan la capacitat equivalent dels elèctrodes és molt més gran que l'acoblament del cos a terra..

L'equació (4.4) conté dos termes: la impedància del material que es mesura i el terme de la desviació de la mesura, que depèn de Z_x^2 , C_g i α , i que coincideix amb el terme de desviació de l'expressió (3.6), si aquesta es desenvolupada en funció de R_x i C_x . Si les impedàncies dels elèctrodes no afecten ($\omega \gg \omega_{ez}$), el circuit equivalent es redueix a les dues subxarxes (C) i (E) de la fig. 4.4. L'efecte de C_g està modelitzat per un circuit *RLC* paral·lel, i això significa que a més de l'efecte inductiu observat per alguns autors.

El circuit *RLC* depèn de les propietats del material que es mesura i de l'acoblament capacitiu a terra (C_g i α) i ressona a $\omega_{es} = (R_x C_x)^{-1} = \sigma/\epsilon_0 \epsilon_r = \omega_c$. Llavors, les mesures a freqüències properes a ω_c es poden desviar de Z_x . El factor de qualitat Q ($= \omega_{res} RC$) d'aquest circuit val 0,5, i per tant no hi haurà canvis abruptes ni al mòdul ni a la fase de la impedància. La ressonància del circuit *RLC* podrà provocar màxims en el mòdul de la impedància $|Z_{HL}|$.

Per un material purament conductor ($C_x = 0$), només apareixerà la inductància del circuit *RCL*, i per tant no hi haurà ressonància, de manera que l'efecte és similar al terme descrit per Hague i Foord (1971) en mesurar resistors amb ponts d'alterna. Si en canvi es mesura, per exemple, safir, Fleig *et al.* (1996), C_x ja no és zero, i les mesures d'impedància mostren

arcs inductius (*inductive loops*) en els diagrames de Cole-Cole. Però fins ara ni l'efecte resistiu ni el capacitiu no havien estat identificats.

De l'expressió de la impedància s'avaluarà el mòdul i la fase de la impedància, en canvi al capítol 2 es van avaluar la part real i imaginària de la impedància. Es feia així perquè les equacions desenvolupades havien de complir que el factor de dissipació $D \ll 1$, condició que es dóna en el cas de mesura d'impedància amb elèctrodes capacitius, la part real de la impedància és molt més petita que la part imaginària. Quan això succeeix, el mòdul és directament la part imaginària i la informació de R_x , que està majoritàriament a la part real, es perd. Però com el cas que s'estudia ara és la mesura d'impedància amb elèctrodes de contacte directe, la condició $D \ll 1$ no es compleix. De l'equació (4.3a) s'ha vist que hi haurà una banda de freqüències on Z_{HL} és igual a la R_x més una inductància residual molt més petita que R_x , llavors $D \gg 1$ i el mòdul $|Z_{HL}| \approx R_x$, mentre la freqüència no sigui prou alta per a que la inductància sigui important (en valor absolut).

El mòdul de la impedància serà

$$|Z_{HL}(\omega)|_{\omega \gg \omega_{ez}} \approx R_x \frac{\sqrt{1 + (\omega g_x R_x C_x)^2}}{1 + (\omega R_x C_x)^2}. \quad (4.6)$$

i la fase de la impedància,

$$\varphi[Z_{HL}(\omega)]_{\omega \gg \omega_{ez}} \approx \text{tg}^{-1}(\omega g_x R_x C_x) - 2 \text{tg}^{-1}(\omega R_x C_x). \quad (4.7)$$

D'aquestes dues equacions, a la banda de freqüències $\omega_{ez} \ll \omega \ll \omega_c/g_x$, s'obté que el valor del mòdul i la fase de la impedància són $|Z_{HL}| \approx R_x$ i $\varphi(Z_{HL}) \approx 0^\circ$. Però les mesures en aquesta banda de freqüències no permeten estimar el valor de C_x . Cal notar que C_g afecta la mesura a freqüències a prop de ω_c/g_x , freqüències que poden ser a prop o bastant per sota de ω_c , que en principi és la freqüència on caldria esperar una reducció del mòdul d'uns 3 dB (Taula 4.1).

Taula 4.1. Freqüències singulars, normalitzades respecte a la freqüència característica, en funció de g_x .

g_x	$\frac{\omega_c/g_x}{\omega_c}$	$\frac{\omega_{ Z_{HL} _{\max}}}{\omega_c}$	$\frac{\omega_{\varphi=0}}{\omega_c}$
1,5	0,67	0,33	-
1,8	0,56	0,62	-
2,1	0,48	0,74	0,22
2,4	0,42	0,81	0,41
2,9	0,34	0,87	0,56

Si es vol estimar el valor de C_x , cal pujar la freqüència de mesura més amunt de ω_c/g_x , i llavors $|Z_{HL}|$ i $\varphi(Z_{HL})$ augmenten a causa de l'efecte inductiu, tal com indica el numerador de l'equació (4.4) representat per la subxarxa E de la fig. 4.4. Si l'acoblament a terra fos nul ($C_g = 0, g_x = 1$), a ω_c s'esperaria tenir $|Z_{HL}(\omega_c)| \approx R_x/\sqrt{2}$, és a dir, una atenuació de -3 dB, i $\varphi[Z_{HL}(\omega_c)] \approx -45^\circ$. Però quan $C_g \neq 0$, s'obté $|Z_{HL}(\omega_c)| = 0,5R_x(1 + g_x^2)^{1/2}$ i $\varphi[Z_{HL}(\omega_c)] = \text{tg}^{-1}(g_x) - 90^\circ \geq -45^\circ$. Llavors si es volgués calcular el valor de C_x a partir del valor R_x mesurat a la banda entre ω_c i ω_e , i buscant la freqüència ω_1 on el mòdul és $|Z_{HL}(\omega_1)| \approx R_x/\sqrt{2}$, o la freqüència ω_2 on la fase és $\varphi[Z_{HL}(\omega_2)] \approx -45^\circ$, es cometrien errors grans. Si $C_g \neq 0$, resulta que ω_1 i ω_2 són més altes que ω_c i $\omega_1 \neq \omega_2$, de manera que resolent $\omega_1 = (R_x C_x^*)^{-1}$, o $\omega_2 = (R_x C_x^*)^{-1}$, la capacitat C_x^* calculada a partir d'aquestes freqüències seria més petita que la capacitat real del material, C_x .

A freqüències molt més grans que la freqüència característica del material ($\omega \gg \omega_c$), segons l'equació (4.4) la impedància val $Z_{HL} = -jg_x/\omega C_x$; és una impedància capacitiva. La capacitat mesurada ($Z_{HL} = -j/\omega C_{HL}$) és $C_{HL} = C_x/g_x$ que és menor que C_x . Per tant, atès que g_x també depèn de C_x , la relació entre C_{HL} i C_x és no lineal i resulta difícil determinar C_x a partir de mesures de Z_{HL} a altes freqüències. També s'ha de tenir en compte l'efecte de propagació d'ones electromagnètiques, ja que les freqüències de mesura comencen a ser bastant elevades i la distància entre els elèctrodes serà comparable a la longitud d'ona (apartat 3.5).

Resumint, si hi ha acoblament a terra des del volum del material que es mesura, a baixa freqüència tindrem desviacions causades pels elèctrodes; hi haurà una banda de freqüències, $\omega_e \ll \omega \ll (g_x R_x C_x)^{-1}$, on el valor de $|Z_{HL}|$ s'aproximarà a R_x (conductivitat elèctrica del material), però abans de la freqüència $\omega \approx (g_x R_x C_x)^{-1}$, l'acoblament a terra ja comença a afectar sobre Z_{HL} , i tant el mòdul com la fase augmenten (efecte inductiu). Si es vol obtenir C_x a $\omega \gg \omega_e$, és a dir, per estimar les propietats dielèctriques del material, la desviació al determinar C_x dependrà de g_x , si $g_x \approx 1$, és a dir $C_g < C_x$, l'error entre el model de paràmetres distribuïts i l'aproximat (paràmetres concentrats) tindran poc error i es podria

estimar C_x , coneixent C_g i el valor de $\alpha(1-\alpha)$. La condició de $C_g < C_x$ es compleix per a estructures d'elèctrodes tancades, poca distància entre elèctrodes, per a estructures obertes no es complirà que $C_g < C_x$ i encara que, es conegui el valor de C_g , s'hauria de conèixer el valor $\alpha(1-\alpha)$ i tenir en compte els possible efectes de la propagació d'ones si la distància entre elèctrodes és més gran que $\lambda/126$. Així, doncs, estimar la permitivitat del material (C_x) serà bastant difícil.

Un augment en la impedància mesurada quan aquesta està modelada només per capacitats i resistències i es puja la freqüència de mesura, és un indicador de que C_g no és negligible. Però, a més de l'augment del mòdul, hi pot haver pics provocats pel circuit *RLC* quan aquest ressona. Aquesta informació no es pot extreure de l'equació (4.4), sinó que cal analitzar per separar el mòdul i la fase de la impedància (Annex A). De l'equació (4.6) es troba que el màxim del mòdul de la impedància és a la freqüència

$$\omega_{|Z_{HL}|_{\max}} = \omega_c \sqrt{1 - \frac{2}{g_x^2}} \quad (4.8)$$

i el seu valor és

$$|Z_{HL}|_{\max} = \frac{R_x}{2} \frac{g_x^2}{\sqrt{g_x^2 - 1}}. \quad (4.9)$$

Llavors $|Z_{HL}|$ tindrà un pic quan $g_x > \sqrt{2}$. Semblantment, de l'equació (4.7) es troba el màxim de la fase

$$\omega_{\varphi_{\max}} = \omega_c \sqrt{\frac{g_x - 2}{g_x(2g_x - 1)}} \quad (4.10)$$

Aquí la condició per tenir un valor màxim de fase és $g_x > 2$ i de l'equació (4.7), $\varphi_{\max} > 0^\circ$ (fases positives). Per tant, pot ser que $|Z_{HL}|$ tingui pic (màxim) i no hi hagi fases positives, però si hi ha fases positives hi haurà pic en el mòdul de la impedància. El mòdul de la impedància quan la fase és màxima val

$$|Z_{HL}|_{\varphi_{\max}} = \frac{R_x}{2} g_x \sqrt{\frac{2g_x - 1}{g_x^2 - 1}}. \quad (4.11)$$

La fase de la impedància, equació (4.7) serà zero quan

$$\omega_{\varphi=0} = \omega_c \sqrt{1 - \frac{2}{g_x^2}} \quad (4.12)$$

i la condició torna a ser $g_x > 2$. El mòdul de Z_{HL} a aquesta freqüència és

$$|Z_{HL}|_{\varphi=0} = \frac{R_x}{2} g_x. \quad (4.13)$$

A partir d'aquest tres punts singulars es podria calcular R_x , ω_c i g_x , i de $Z_{HL}(\omega \gg \omega_c) = -jg_x/\omega C_x$ s'obtidria C_x sempre que R_x i C_x siguin independents de la freqüència, no hi hagi efectes de propagació i la capacitat paràsita entre elèctrodes C_{hl} sigui negligible. Però per a que hi hagi punts singulars g_x ha de ser més gran que 1,41 o 2, i això implica que $C_g > C_x$ i per tant, el model de paràmetres distribuïts i el model de paràmetres concentrats (aquest últim és el que s'ha avaluat en aquest capítol) tindran errors importants i el valor que es pugui estimar de C_x , a partir dels punts singulars, tindrà desviacions importants respecte al seu valor real.

4.1.2. Efectes de la capacitat entre elèctrodes C_{hl}

Si a la fig. 4.1 es té en compte la capacitat paràsita C_{hl} entre els elèctrodes, a més de C_g , la impedància entre H i L (Annex B) a $\omega \gg \omega_{ez}$ serà

$$Z_{HL}(j\omega)|_{\omega \gg \omega_{ez}} \approx \frac{R_x(1 + j\omega g_x R_x C_x)}{(1 + j\omega R_x C_x)^2 + j\omega R_x C_x \frac{C_{hl}}{C_x} (1 + j\omega g_x R_x C_x)} \quad (4.14)$$

en comptes de l'equació (4.4). S'observa que si augmenta C_{hl} decreix Z_{HL} , que és el què calia esperar. El mòdul de Z_{HL} a freqüències on la influència dels elèctrodes és negligible serà

$$|Z_{HL}(\omega)|_{\omega \gg \omega_{ez}} \approx R_x \left\{ \frac{1 + (\omega g_x R_x C_x)^2}{\left[1 - \left(1 + g_x \frac{C_{hl}}{C_x} \right) (\omega R_x C_x)^2 \right]^2 + \left[\left(2 + \frac{C_{hl}}{C_x} \right) (\omega R_x C_x) \right]^2} \right\}^{\frac{1}{2}} \quad (4.15)$$

que mostra que el factor que afecta la mesura és la relació C_{hl}/C_x , que l'efecte serà més perceptible a $\omega > \omega_c$, i que C_{hl}/C_x afecta encara que $C_g = 0$. Atès que normalment $C_g \neq 0$ ($g_x > 1$), l'efecte C_{hl}/C_x serà més gran que quan $C_g = 0$.

La fase de Z_{HL} a $\omega \gg \omega_{ez}$ serà

$$\varphi[Z_{\text{HL}}(\omega)]_{\omega \gg \omega_c} \approx \text{tg}^{-1}(\omega g_x R_x C_x) - \text{tg}^{-1} \left(\frac{\left[2 + \frac{C_{\text{hl}}}{C_x} \right] \omega R_x C_x}{1 - \left[1 + g_x \frac{C_{\text{hl}}}{C_x} \right] [\omega R_x C_x]^2} \right) \quad (4.16)$$

i mostra altra vegada que el factor que afecta la mesura és C_{hl}/C_x i, mentre que C_g/C_x fa augmentar la fase, C_{hl}/C_x la redueix.

El màxim del mòdul és ara a la freqüència

$$\omega_{Z_{\text{HL}} \text{ max}} = \frac{\omega_c}{g_x} \left\{ \left[1 - \frac{g_x^2}{\left(1 + g_x \frac{C_{\text{hl}}}{C_x} \right)^2} \left[\left(\frac{C_{\text{hl}}}{C_x} \right)^2 - 2(g_x - 2) \frac{C_{\text{hl}}}{C_x} + 2 - g_x^2 \right] \right]^{\frac{1}{2}} - 1 \right\}^{\frac{1}{2}} \quad (4.17)$$

Aquesta expressió és complicada per obtenir-ne el valor del mòdul. Si $C_{\text{hl}} = 0$, s'obté el resultat de l'equació (4.8). La condició per a que el mòdul tingui un màxim és ara $C_{\text{hl}}/C_x < (g_x - 2) + \sqrt{2}(g_x - 1)$, que implica $g_x > \sqrt{2} + (\sqrt{2}-1)C_{\text{hl}}/C_x$. La condició per a que hi hagi màxim al mòdul depèn de la relació C_{hl}/C_x . A més, l'acoblament a terra ha de ser més gran per a que hi hagi un màxim al mòdul de la impedància que quan $C_{\text{hl}} = 0$. És a dir, hi ha una certa compensació entre els efectes de C_{hl} i C_g : C_{hl} afegeix una capacitat en sèrie amb Z_x , C_g hi introdueix sobre tot una inductància.

De manera semblant, de l'equació (4.16) es pot obtenir la freqüència on la fase és nul·la; si la fase es fa zero, atès que la de Z_x en sèrie amb els elèctrodes és negativa, vol dir que es pot arribar a fer positiva. Aquesta freqüència de fase nul·la és

$$\omega_{\varphi=0} = \omega_c \sqrt{\frac{g_x - 2 - \frac{C_{\text{hl}}}{C_x}}{g_x \left(1 + \frac{g_x C_{\text{hl}}}{C_x} \right)}} = \omega_c \sqrt{1 - \frac{2}{g_x} \left[\frac{1 - \frac{C_{\text{hl}}}{(g_x - 2)C_x}}{1 + \frac{g_x C_{\text{hl}}}{C_x}} \right]^{\frac{1}{2}}} \quad (4.18)$$

i la fase serà positiva (hi haurà nul) quan $g_x > 2 + C_{\text{hl}}/C_x$. Per tant, igual que per al mòdul, l'acoblament a terra ha de ser més gran per a que es vegi un pas per zero de la fase de la impedància que quan $C_{\text{hl}} = 0$. A diferència de la condició que ha de complir g_x per a tenir un màxim el mòdul, on la relació C_{hl}/C_x està multiplicada per $(\sqrt{2} - 1)$, que és menor que 1,

aquí C_{hl}/C_x està multiplicada per 1. Això implica que la fase serà més sensible a les variacions de C_{hl} que el mòdul.

Finalment, de l'expressió (4.14) s'obté que la capacitat equivalent C_{HL} mesurada a $\omega \gg \omega_c$ és

$$C_{HL}(\omega)|_{\omega \gg \omega_c} \approx \frac{C_x}{g_x} + C_{hl}. \quad (4.19)$$

Aquí el factor que afecta la mesura és C_{hl} , no C_{hl}/C_x , i afecta encara que $C_g = 0$. Si $C_g = 0$, C_{hl} es suma directament a la capacitat del material i desvia la seva freqüència característica a $\omega_c^* = [R_x(C_{hl} + C_x)]^{-1} = [R_x C_x(1 + C_{hl}/C_x)]^{-1}$. Com més augmenti C_{hl} , més baixarà la freqüència ω_c^* .

4.2. Verificació experimental

4.2.1. Disseny de l'experiment

La fig. 4.5 mostra l'arranjament de mesura que s'ha fet per comprovar les prediccions dels models analitzats. Consta d'una xeringa de polipropilè de 100 ml Omnifix® (B. Braun Melsungen AG, Alemanya), de 30,6 mm de diàmetre extern i 28,0 mm de diàmetre intern. Els elèctrodes són d'acer inoxidable 316, tenen forma semiesfèrica de 6 mm de diàmetre, i els seus centres estan separats 50 mm. Els elèctrodes es connecten a l'analitzador d'impedància (Agilent 4294A) amb dos cables de 70 mm de longitud. La xeringa es col·loca damunt d'un pla de coure de 305 mm de llargada per 227 mm d'amplada, i aquest pla es connecta a la coberta de l'instrument, que està connectada a terra). La banda de freqüències de mesura que interessa va des de 100 Hz fins a 100 MHz, i la incertesa relativa de l'instrument al mesurar mòdul i capacitat és de $\pm 1\%$, a freqüències menors de 10 MHz, i $\pm 3\%$ a freqüències a partir de 10 MHz (Agilent 2008b). C_{hl} és aquí la capacitat paràsitica entre els elèctrodes (corrent de desplaçament a través de l'aire i del plàstic de la xeringa) i l'associada al cable de connexió al circuit de mesura. C_x i R_x representen la capacitat i resistència del líquid que es vol mesurar (volum conductor) i C_g és la capacitat paràsitica entre el volum de líquid i el pla de terra principalment, atès que aquest està més a prop del líquid que les altres masses metàl·liques properes, com ara la coberta metàl·lica de l'analitzador d'impedàncies.

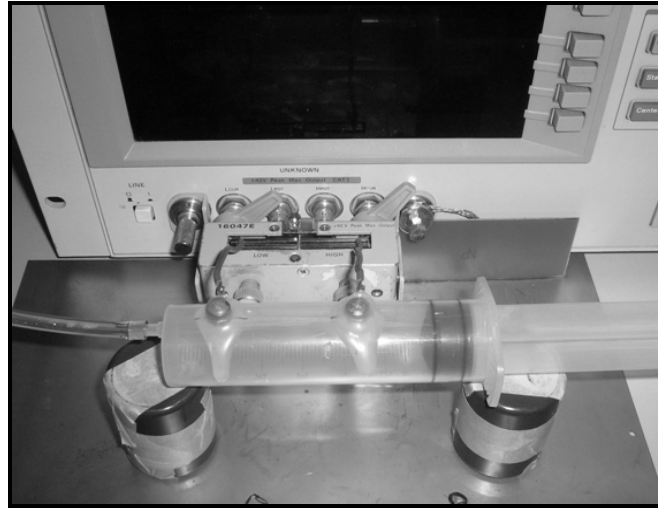


Figura 4.5. Arranjament per determinar els efectes de les capacitats paràsites quan es mesura la impedància de líquids (per determinar les seves propietats elèctriques) amb dos elèctrodes de contacte directe i usant un analitzador d'impedància comercial basat en un pseudopont.

Els materials utilitzats per als experiments són aigua i metanol a temperatura de laboratori (al voltant de 22 °C). S'han utilitzat dues mostres d'aigua de conductivitats diferents, una de $\sigma_{25} = 1,0$ dS/m i l'altra de $\sigma_{25} = 0,01$ dS/m (conductivitats a la temperatura de referència de 25,0 °C). La conductivitat s'ha mesurat amb un conductímetre WTW model Multi 340i i sonda Tetracon® 325. La incertesa de la mesura és $\pm 0,5$ % de la lectura ± 1 compte per la conductivitat i del $\pm 0,1$ °C per la temperatura (WTW 2004). La mesura de la conductivitat del metanol amb el conductímetre WTW dona $\sigma_{25} = 0,015$ dS/m; aquesta mesura és només una estimació de la conductivitat real del metanol perquè el conductímetre està dissenyat per mesurar aigua i no metanol (WTW 2004; UNE EN 27888 1993), i per tant, pot ser que la incertesa en la mesura del metanol sigui més gran que la especificada pel fabricant per a l'aigua. El coeficient de temperatura de la conductivitat per a l'aigua és del 2 %/K (ASTM D 1125-95 2007); llavors la conductivitat a 22 °C és de 0,94 dS/m per a la primera mostra i de 0,0094 dS/m per a la segona. La permitivitat relativa de l'aigua a 22 °C és de 79,5 (Von Hippel 1954), i per tant la freqüència característica respectiva ($f_c = \sigma / (2\pi\epsilon_0\epsilon_r)$) de cada mostra d'aigua és de 21,3 MHz (1 dS/m) i de 213 kHz (0,01 dS/m), una mica inferiors a les de la Taula 2.2, que corresponen a aigua a 25 °C.

Per cada mostra de líquid s'ha mesurat $|Z_{HL}|$, $\varphi(Z_{HL})$ i C_{HL} a tres altures b des de la part de baix de la xeringa al pla de terra: 52 mm, 8 mm i 0 mm. El líquid és 1,3 mm més alt degut al gruix del plàstic de la xeringa.

4.2.2. Resultats experimentals i discussió

4.2.2.1. Estimació experimental de la capacitat d'acoblament a terra

Cada altura de la xeringa respecte al pla de terra comporta una C_g diferent. Per tant, el primer pas és estimar els valors de C_g en cada cas. Usant el mètode descrit a (Aliau-Bonet i Pallas-Areny 2013), es pot mesurar la capacitat de l'acoblament des del cos de la xeringa fins al pla de terra per a les tres altures. Aquest mètode consisteix bàsicament en aprofitar el “gir de reactància” que produeix una xarxa en T com la de la fig. 4.3, a base de connectar en sèrie dos resistors coneguts i el seu node comú connectar-lo a terra mitjançant la capacitat que es vol mesurar. Els resistors connectats entre H i L són $R_1 = 9988 \Omega$ i $R_2 = 9979 \Omega$ (10 k Ω , $\pm 1 \%$) i la xeringa és connecta només per un dels seus elèctrodes a la connexió mútua dels resistors. La “connexió” d'aquest node a terra és llavors a través de la capacitat paràsita C_g entre la cel·la de mesura plena de líquid, i terra. El metanol és mesura a 10 kHz i l'aigua (1,0 dS/m) a 100 kHz, freqüències prou per sota de la freqüència característica respectiva. Els resultats de C_g per a cada altura de la xeringa respecte el pla de terra són a la Taula 4.2. La diferència de 0,1 pF entre les mesures per cadascun dels materials no és significativa. Per tant, C_g és independent del líquid que conté la xeringa, tot i que la seva conductivitat i permetivitat siguin diferents (prop de 80 per a l'aigua i 31 per al metanol (Von Hippel 1954). Això vol dir que l'acoblament és a través de l'aire i per tant ve determinat per la geometria, no per la major o menor conductivitat o permetivitat del material.

Taula 4.2. Mesura de l'acoblament a terra de la cel·la de mesura de la fig. 4.5 segons el mètode descrit a (Aliau-Bonet i Pallas-Areny 2013).

Distància sobre el pla de terra, b : (mm)	C_g^{aigua} (pF)	C_g^{metanol} (pF)
52	5,7	5,8
8	8,7	8,8
0	20,2	20,3

4.2.2.2. Estudi experimental de l'efecte de l'acoblament a terra

La fig. 4.6 mostra el mòdul $|Z_{\text{HL}}(\omega)|$ per a l'aigua de $\sigma = 1,0$ dS/m. Hi ha tres zones amb comportaments diferents: baixa freqüència ($\omega > \omega_{ez}$, però propera a ω_{ez}), freqüències intermèdies ($\omega_{ez} < \omega < \omega_c/g_s$), i altes freqüències ($\omega > \omega_c$, però properes a ω_c). Les impedàncies dels elèctrodes contribueixen significativament a Z_{HL} fins a uns 10 kHz i en aquesta zona de baixa freqüència C_g no afecta la mesura ja que les tres corbes estan solapades per a les diferents altures de la xeringa sobre el pla de terra. Això confirma que

$C_g \ll C_e$, condició que s'ha de complir per obtenir l'equació (4.3) a partir de l'equació (4.1). De 10 kHz a 1 MHz (zona de mitges freqüències), el mòdul de la impedància és constant (zona plana) i ve determinat per la constant de cel·la i la conductivitat de l'aigua, sense cap efecte significant degut a C_g : $|Z_{HL}| \approx R_x \approx 1704 \Omega$ a 100 kHz.

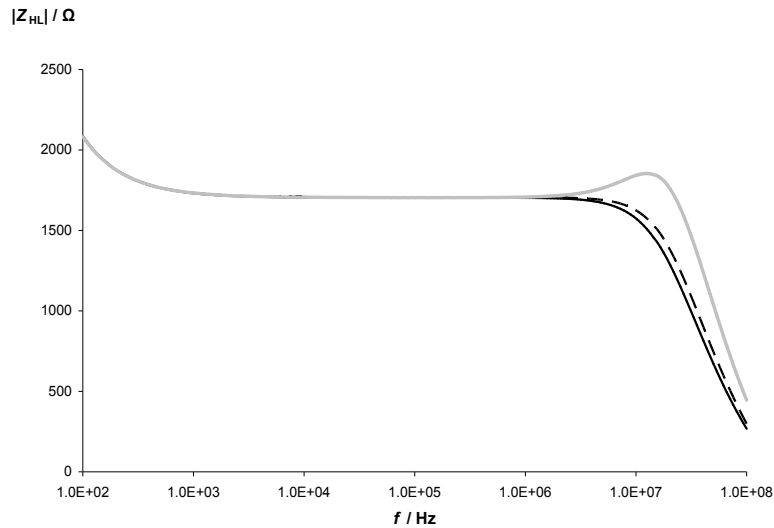


Figura 4.6. Mòdul de Z_{HL} per a aigua (1,0 dS/m) mesurada amb dos elèctrodes de contacte directe. L'alçada de la xeringa sobre el pla de terra era: 52 mm (línia negra contínua), 8 mm (línia negra discontinuada) i 0 mm (línia gris contínua).

Per damunt d'1 MHz (zona d'altres freqüències), l'efecte inductiu provocat per C_g comença a ser apreciable. Per $b = 52$ mm i $b = 8$ mm, $|Z_{HL}|$ sembla comportar-se com una impedància d'una xarxa RC en paral·lel, però quan $b = 8$ mm, la impedància és més gran que quan $b = 52$ mm. Això és degut a l'increment de C_g des de 5,8 pF fins a 8,8 pF i que comporta un increment de g_x (equació (4.5)). Llavors el mòdul de la impedància és més gran per l'efecte "inductiu" que hi ha al numerador de l'equació (4.6). Per $b = 0$ mm ($C_g \approx 20,3$ pF), l'augment encara és més gran i $|Z_{HL}|$ mostra fins i tot un pic a 12,6 MHz, freqüència inferior a f_c (21,3 MHz). La resolució de l'equació (4.8) dona $g_x = 1,75$ ($> \sqrt{2}$, condició que s'ha de complir per que el mòdul tingui un màxim). El valor màxim de $|Z_{HL}|$ és 1854 Ω i això és 1,09 vegades el valor del mòdul (R_x) a 100 kHz. Substituint $g_x = 1,75$ a l'equació (4.9) dona $|Z_{HL}|_{\max}/R_x = 1,07$, valor força proper a la relació de 1,09 calculada a partir de les mesures obtingudes, de manera que l'acompliment de les prediccions confirmen la bondat del model en aquest rang de freqüències.

La fase de Z_{HL} mesurada per la mateixa mostra d'aigua ($\sigma = 1,0$ dS/m) està representada a la fig. 4.7. A 100 Hz, $\varphi(Z_{HL}) = -23^\circ$ mentre que de Z_x tota sola s'esperaria tenir 0° , però hi intervé la capacitat C_e dels elèctrodes. A 100 kHz, tant l'efecte dels elèctrodes com de C_g

són negligibles: $-0,3^\circ$ quan $b = 52$ mm, $-0,2^\circ$ quan $b = 8$ mm i $-0,1^\circ$ quan $b = 0$ mm. Per al valor C_g més gran (20,3 pF), $g_x = 1,75 < 2$; per tant no hi ha d'haver fases positives i en la mesura no se'n observen. Per damunt dels 100 kHz, l'efecte de C_g comença a ser apreciable i les tres corbes de la fase per a les diferents altures respecte al pla de terra són divergents. Com més gran és C_g més creix la fase, cap a 0° . A 100 MHz la fase està per damunt dels -90° (per a $b = 0$ mm és -70°). Això vol dir que Z_x encara té part real i imaginària, és a dir, encara no domina la C_x , ja que la freqüència característica f_c (21,3 MHz) està relativament a prop dels 100 MHz (menys d'una dècada per sota de f). A més, la longitud d'ona a l'aigua a 100 MHz és $\lambda \approx 336$ mm, de manera que la separació màxima dels elèctrodes per poder acceptar l'aproximació quasi-estàtica és $\lambda/126 \approx 2,7$ mm i aquí tenim $d = 50$ mm. Per tant, els efectes de propagació d'ona no són negligibles.

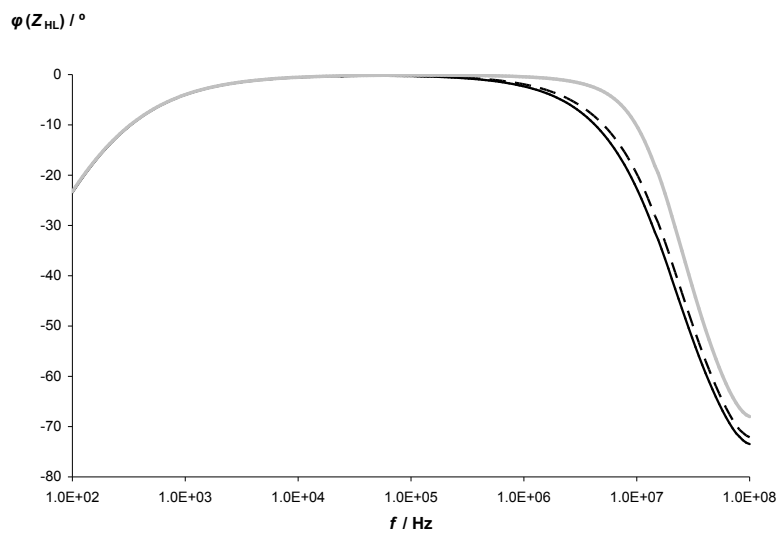


Figura 4.7. Fase de Z_{HL} per a aigua (1,0 dS/m) mesurada amb dos elèctrodes de contacte directe. L'alçada de la xeringa sobre el pla de terra era: 52 mm (línia negra contínua), 8 mm (línia negra discontinua) i 0 mm (línia gris contínua).

Per a la segona mostra d'aigua ($\sigma = 0,01$ dS/m), la freqüència característica es 100 vegades més petita, ja que la permitivitat segueix sent la mateixa. Els resultats experimentals són a la fig. 4.8 pel mòdul $|Z_{HL}|$ i a la fig. 4.9 per la fase $\varphi(Z_{HL})$, i mostren el mateix comportament que les fig. 4.6 i 4.7, respectivament, però les dues corbes estan desplaçades unes dues dècades cap a baixa freqüència, com calia esperar. Aquest desplaçament comporta: a) L'efecte de les impedàncies dels elèctrodes és negligible ja als 100 Hz (abans a 1 dS/m era als 10 kHz) perquè R_x és molt més gran i fa disminuir ω_{ez} , fins a fer-la sortir del marge de mesura de l'instrument; aquest efecte ja havia estat reportat (Asami 2011); b) La banda de freqüències on el mòdul $|Z_{HL}|$ és constant, ara és de 100 Hz a 10 kHz, mentre que abans era de 10 kHz a 1 MHz; i c) L'efecte de C_g comença a ser apreciable a freqüències per sota de

100 kHz. A 1 kHz tenim $|Z_{HL}| \approx R_x \approx 161 \text{ k}\Omega$, que és 95 vegades més gran que per un aigua 100 vegades més conductora. Quan $b = 0 \text{ mm}$, hi ha un pic cap els 130 kHz, és a dir, a una freqüència 97 vegades més baixa que per l'aigua més conductora, i el màxim de $|Z_{HL}|$ és $177 \text{ k}\Omega$, 95 vegades més gran. La relació $|Z_{HL}|_{\max}/R_x$ és ara de l'ordre de 1,1, ben a prop dels 1,09 obtinguts amb l'aigua més conductora. De fet, segons l'equació (4.9), $|Z_{HL}|_{\max}/R_x$ depèn només de g_x , que depèn de C_x però no de R_x , que és l'únic paràmetre que s'ha canviat en aquest experiment respecte l'anterior.

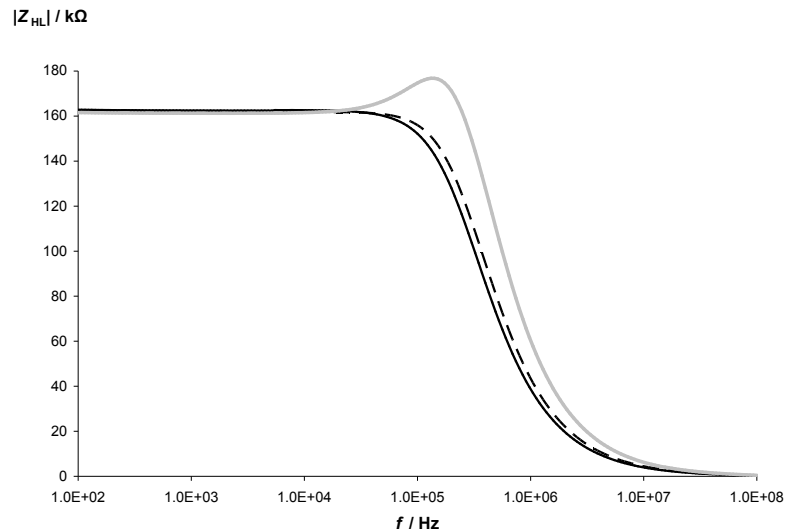


Figura 4.8. Mòdul de Z_{HL} per a aigua (0,01 dS/m) mesurada amb dos elèctrodes de contacte directe. L'alçada de la xeringa sobre el pla de terra era: 52 mm (línia negra contínua), 8 mm (línia negra discontinua) i 0 mm (línia gris contínua).

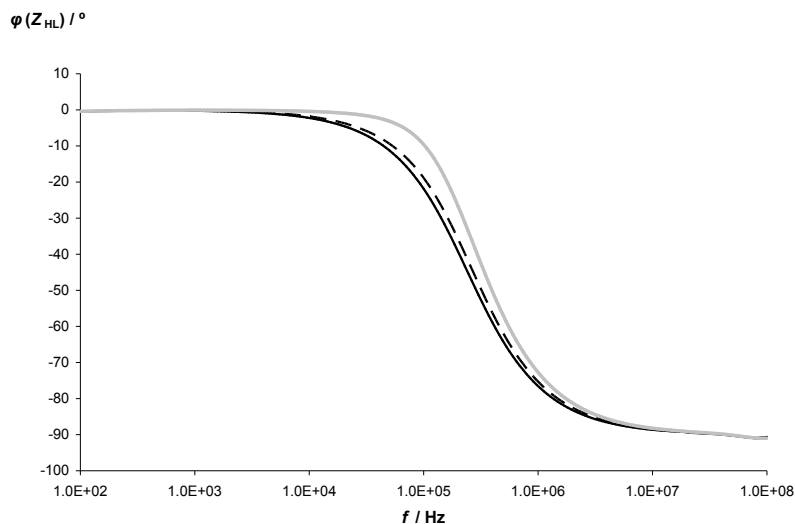


Figura 4.9. Fase de Z_{HL} per a aigua (0,01 dS/m) mesurada amb dos elèctrodes de contacte directe. La distància de la xeringa sobre el pla de terra: 52 mm (línia negra contínua), 8 mm (línia negra discontinua) i 0 mm (línia gris contínua).

El descens del mòdul i la fase de la impedància a l'augmentar la freqüència, i el desplaçament cap a baixa freqüència de les corbes (aigua a conductivitat baixa) que s'observen a les figs. 4.8 i 4.9, fan que ara s'assoleixin els -90° cap els 10 MHz ($\omega \gg \omega_c$). Això permet mesurar la capacitat equivalent entre H i L, C_{HL} ($= C_x/g_x + C_{hl}$), mentre que per l'aigua de més conductivitat no era possible fer-ho. La fig. 4.10 mostra la mesura de C_{HL} per als diferents valors de C_g : 4,0 pF quan $b = 52$ mm, 3,6 pF quan $b = 8$ mm i 2,6 pF quan $b = 0$ mm. A l'augmentar C_g disminueix C_{HL} ja que augmenta g_x , per a un valor concret (fix) de C_x . Els valors baixos obtinguts de C_{HL} confirmen que C_{hl} pugui ser menor de 1 pF, tal com s'ha vingut pressuposant, però no es poden treure més conclusions perquè a 10 MHz no es poden descartar els efectes de propagació atès que $\lambda/126 \approx 26,7$ mm només, i la distància entre elèctrodes és de 50 mm.

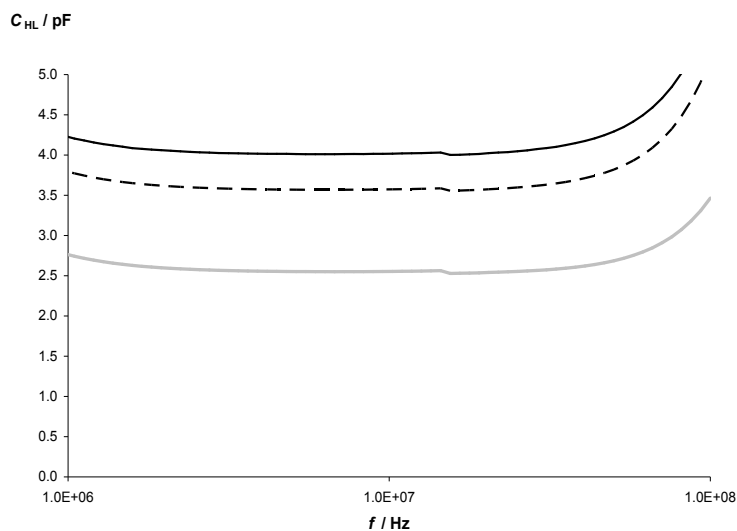


Figura 4.10. Mesura de C_{HL} per a aigua (0,01 dS/m), amb dos elèctrodes de contacte directe. L'alçada de la xeringa sobre el pla de terra era: 52 mm (línia negra contínua), 8 mm (línia negra discontinua) i 0 mm (línia gris contínua).

Per estimar la capacitat paràsita entre els elèctrodes C_{hl} , s'ha mesurat C_{HL} a 10 MHz amb la xeringa buida (aire a l'interior) i a les tres altures, $b = \{52, 8, 0\}$ mm. El resultat respectiu per a cada altura és $C_{hl} = \{181, 142, 123\}$ fF. Això confirma que C_{hl} és menor de 1 pF, i en concret $0,1 \text{ pF} < C_{hl} < 0,2 \text{ pF}$. La disminució de la capacitat de C_{hl} quan disminueix l'altura respecte al pla de terra és deguda a l'efecte que té el pla de terra sobre el camp elèctric entre els elèctrodes i terra (Ramo *et al.* 1994). Com més a prop està el pla de terra de l'elèctrode connectat a H, més línies de camp elèctric van cap al pla de terra i menys cap a l'elèctrode connectat a L; llavors la capacitat mútua entre H i L (C_{hl}) disminueix perquè hi ha menys càrrega a L (la tensió sempre és la mateixa $V_{HG} = V_{HL}$ perquè L està a potencial de terra). La capacitat C_{hl} , quan la xeringa estigui plena de líquid serà menor que quan estigui buida, ja

que les línies de camp elèctric per l'interior de la xeringa ara travessaran el líquid i formaran part de C_x .

El metanol té una constant dielèctrica relativa menor que la de l'aigua, $\epsilon_r = 31$ a 25°C i 10 MHz , mentre l'aigua té $\epsilon_r = 78$ en les mateixes condicions (Von Hippel 1954). S'ha seleccionat una mostra de metanol amb $\sigma = 0,015\text{ dS/m}$, que és propera a la de la mostra de l'aigua poc conductora mesurada abans ($\sigma = 0,01\text{ dS/m}$), i així poder avaluar la influència de la constant dielèctrica del material mesurat en els efectes de les capacitats paràsites. La fig. 4.11 mostra $|Z_{\text{HL}}(\omega)|$. A baixa freqüència, l'efecte de les impedàncies dels elèctrodes és poc perceptible perquè R_x és prou gran degut a la baixa conductivitat del metanol. Cap els 5 kHz , $|Z_{\text{HL}}|$ és constant i val $|Z_{\text{HL}}| \approx R_x \approx 116\text{ k}\Omega$. A alta freqüència hi ha pics quan $b = 8\text{ mm}$ ($121\text{ k}\Omega$ a 502 kHz) i quan $b = 0\text{ mm}$ ($172\text{ k}\Omega$ a 525 kHz). En canvi les mesures amb aigua només mostraven un pic de $|Z_{\text{HL}}|$ (figs. 4.6 i 4.8) quan $b = 0\text{ mm}$. Això es degut a que C_x és 2,5 vegades menor per al metanol, degut a la seva menor permitivitat relativa respecte l'aigua, i llavors, per a una mateixa C_g , que depèn de b però no del material de dins la xeringa, g_x serà més gran per al metanol que per a l'aigua, independentment de la seva conductivitat. Per exemple, quan $C_g = 20,3\text{ pF}$, g_x és 1,75 per a l'aigua, mentre que per a la mateixa C_g , el metanol tindrà $g_x \approx 1 + 0,75 \times 2,5 = 2,875 > 2$, valor suficient per a que hi hagi un pic en el mòdul de la impedància i que la fase arribi a ser positiva. Per $g_x = 2,875$, de l'equació (4.9) s'obté $|Z_{\text{HL}}|_{\text{max}}/R_x = 1,53$ i de la fig. 4.11 resulta $|Z_{\text{HL}}|_{\text{max}}/R_x = 1,5$, valors força propers.

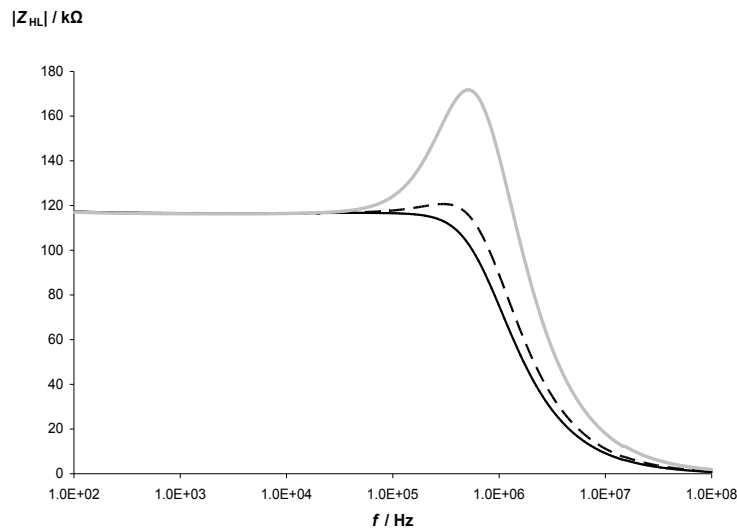


Figura 4.11. Mòdul de Z_{HL} per a metanol mesurada amb dos elèctrodes de contacte directe. L'alçada de la xeringa sobre el pla de terra era: 52 mm (línia negra contínua), 8 mm (línia negra discontinuada) i 0 mm (línia gris contínua).

La fase de Z_{HL} per al metanol és a la fig. 4.12. A baixa freqüència, la fase és negativa per l'efecte de les impedàncies dels elèctrodes. Quan $b = 0$ mm, la fase és positiva entre 1,6 kHz i 302 kHz perquè $g_x \approx 2,875 > 2$, mentre que, en les mateixes condicions de mesura, a l'aigua de igual conductivitat elèctrica no hi ha mai fases positives. La freqüència que prediu l'equació (4.12) és la més gran (302 kHz). Aquesta freqüència, $\omega_{\varphi=0} = 0,55\omega_c$ ($g_x \approx 2,875$), és més alta que $\omega_c/g_x = 0,35\omega_c$ però més baixa que ω_c , com calia esperar.

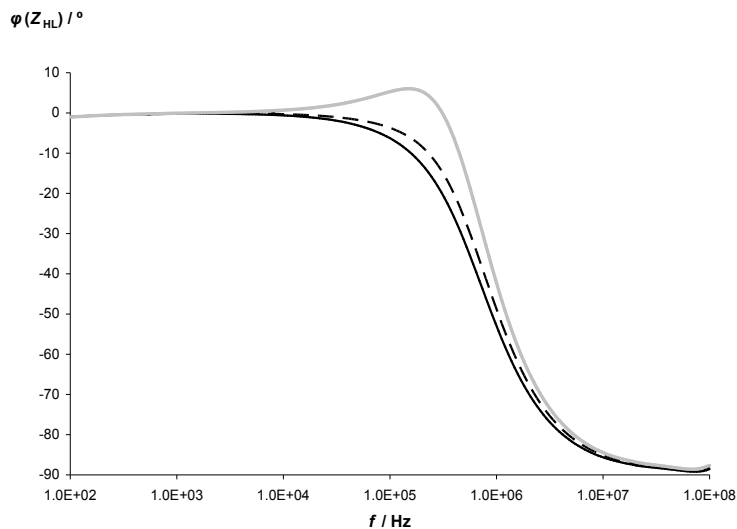


Figura 4.12. Fase de Z_{HL} per a metanol mesurada amb dos elèctrodes de contacte directe. L'alçada de la xeringa sobre el pla de terra era: 52 mm (línia negra contínua), 8 mm (línia negra discontinua) i 0 mm (línia gris contínua)

La baixa conductivitat del metanol també fa que la fase assoleixi -90° al voltant de 10 MHz ($\omega \gg \omega_c$). Això permet mesurar C_{HL} ($= C_x/g_x + C_{hl}$) per als tres valors de C_g , com en el cas de l'aigua de baixa conductivitat. El resultat es mostra a la fig. 4.13 i és: $C_{HL} = 1,7$ pF quan $b = 52$ mm, $1,4$ pF quan $b = 8$ mm i $0,9$ pF quan $b = 0$ mm. Aquests valors de capacitat són menors que els que s'havien obtingut amb aigua de baixa conductivitat, degut a la disminució de la permitivitat relativa (disminució de C_x) al canviar d'aigua a metanol, i també per l'increment de g_x al disminuir C_x . Tanmateix, a 10 MHz hi pot haver efectes de propagació tant per l'aigua com per al metanol.

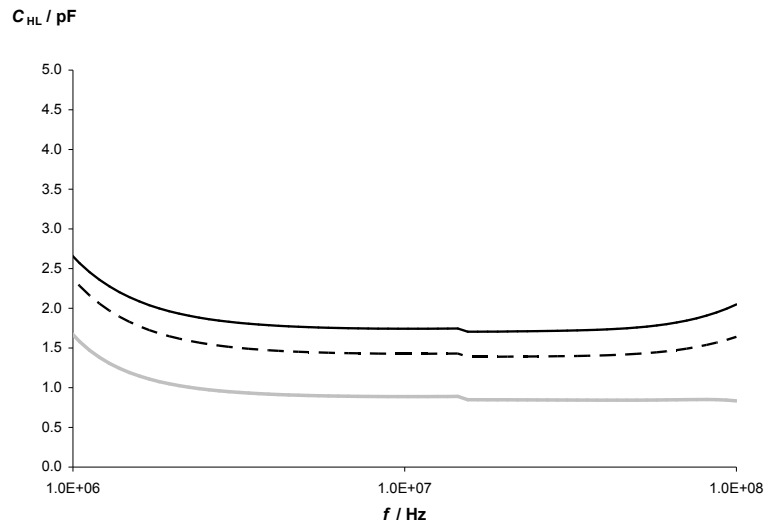


Figura 4.13. Mesura de C_{HL} per a metanol, amb dos elèctrodes de contacte directe. L'alçada de la xeringa sobre el pla de terra era: 52 mm (línia negra contínua), 8 mm (línia negra discontinua) i 0 mm (línia gris contínua).

4.2.2.3. Estudi experimental de l'efecte de la capacitat paràsita entre elèctrodes

Per poder avaluar els efectes de la capacitat paràsita entre els elèctrodes (C_{hl}), s'ha construït una cel·la com la de la fig. 4.5 amb una xeringa i elèctrodes iguals però separats 80 mm. També s'ha col·locat un accessori (*measurement fixture*) en els terminals de mesura de l'instrument que permet incrementar la capacitat entre elèctrodes en uns 0,09 pF. L'increment de la distància entre els elèctrodes augmenta la constant de cel·la (k_{cell}) i això implica una reducció de C_x i per tant un increment de g_x . Les mesures s'han fet en la posició de màxima C_g ($b = 0$ mm), que fa que g_x augmenti encara més. C_{hl} s'ha mesurat amb la xeringa buida, a una freqüència de 10 MHz, i s'ha obtingut 0,15 pF, valor una mica més gran que els 0,12 pF de la mesura amb els elèctrodes separats 50 mm, quan de fet s'esperava una reducció deguda a la major separació. Aquest augment de C_{hl} pot ser degut a la capacitat paràsita afegida pel nou accessori que permet incrementar C_{hl} de forma controlada.

Per veure l'efecte de C_{hl} sobre la impedància mesurada, s'ha omplert la cel·la amb aigua de 1 dS/m. La fig. 4.14 mostra un pic en el mòdul $|Z_{HL}|$, com calia esperar, però també es veu com canvia el mòdul amb l'increment de C_{hl} , a la banda de freqüències on es troba el màxim del mòdul. Quan s'afegeixen 0,09 pF a C_{hl} , el màxim baixa de 2587 Ω a 2572 Ω , tal com prediu l'equació (4.15). També baixa la freqüència del pic, de 15,6 MHz a 15,3 MHz. La disminució del mòdul és més pronunciada a freqüències per sobre de la del màxim i

com més augmenta la freqüència més disminueix el mòdul. Per sota de la freqüència del màxim els canvis amb la impedància per l'efecte de C_{hl} són molt més petits.

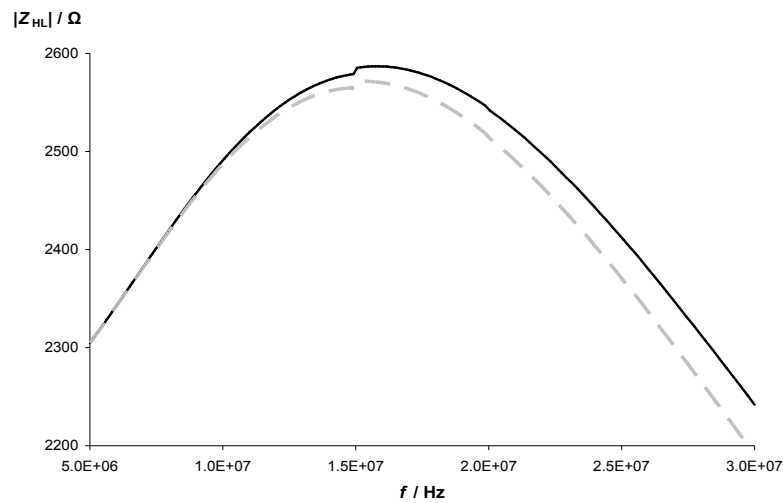


Figura 4.14. Mòdul de Z_{HL} per a aigua (1,0 dS/m) mesurada amb dos elèctrodes de contacte directe i per dos valors diferents de C_{hl} : valor inicial (més baix) de C_{hl} (línia gris discontinua), valor de C_{hl} incrementat amb 0,09 pF (línia negra contínua).

La fig. 4.15 mostra que la fase de la impedància és màxima entre 1 i 5 MHz, mentre que a la fig. 4.14 el mòdul és màxim entre 5 i 30 MHz. Un augment de C_{hl} redueix la fase de la impedància, tal com prediu l'equació (4.16) i la disminució és més gran com més augmenta la freqüència. L'augment del valor de g_v ha portat a valors positius de la fase de la impedància, que era la intenció al separar més els elèctrodes, mentre que a la fig. 4.7, que correspon a mesures amb aigua a la mateixa conductivitat però amb els elèctrodes menys separats, la fase no arriba mai a valors positius. La freqüència del pas per zero és molt sensible al canvis de C_{hl} perquè un increment de només 0,09 pF ha fet disminuir aquesta freqüència de 4,1 MHz a 3,1 MHz. En canvi, la freqüència del màxim del mòdul (fig. 4.14) només ha disminuït 0,3 MHz. Aquesta sensibilitat més gran a la fase de la impedància la prediu l'equació (4.18).

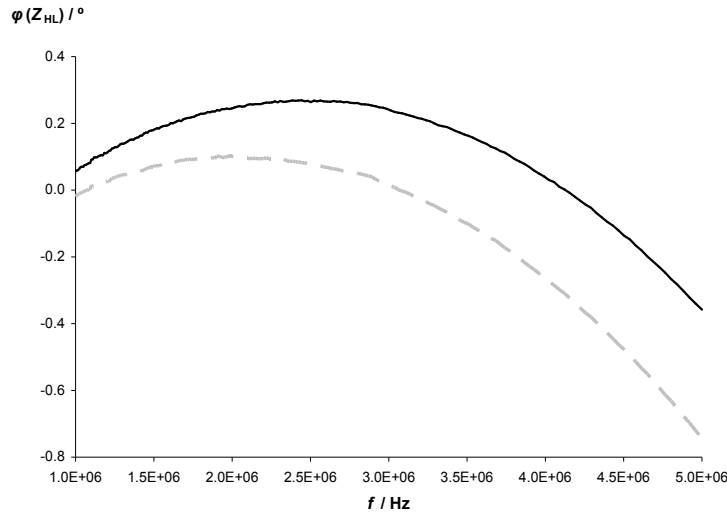


Figura 4.15. Fase de Z_{HL} per a aigua (1,0 dS/m) mesurada amb dos elèctrodes de contacte directe i per dos valors diferents de C_{hl} : valor inicial (més baix) de C_{hl} (línia gris discontinua), valor de C_{hl} incrementat amb 0,09 pF (línia negra contínua).

La disminució del mòdul i la fase de Z_{HL} quan augmenta la freqüència degut a C_{hl} és el que s'esperava, ja que aquesta capacitat està en paral·lel amb la impedància que es mesura. En aquest sentit, C_{hl} compensa una mica els efectes de C_g . Aquesta compensació és equivalent a una reducció de g_x , que comporta la reducció dels valors màxims del mòdul i de la fase mesurada. Tanmateix, mentre C_g pot ser estimada i els seus efectes explicats, C_{hl} és difícil d'estimar quan part del volum entre els elèctrodes està ocupat per la mostra de líquid a mesurar. Per tant, intentar basar-se en C_{hl} per compensar els efectes de C_g i estimar la conductivitat i permitivitat del líquid a partir dels punts singulars (valor i freqüència del màxim del mòdul o de la fase, o el pas per zero de la fase) no sembla una opció plausible. En canvi, mesurant diversos punts singulars o a diverses freqüències i ajustant les corbes a les equacions d'aquests punts o a les expressions de $Z_{HL}(\omega)$ es podrien obtenir R_x i g_x , i per tant C_g , C_{hl} i C_x , si els efectes de propagació són negligibles.

4.2.2.4. Discussió sobre el model de paràmetres concentrats per descriure una capacitat distribuïda

L'ús del coeficient α per incloure C_g , que és una capacitat distribuïda en un model de paràmetres concentrats, ha resultat força útil. El seu valor no es pot predir fàcilment, però per a dos elèctrodes iguals, segons l'equació (4.5) es pot dir que la capacitat equivalent de l'acoblament a terra és $\alpha(1 - \alpha)C_g$ (màxim $0,25C_g$), en comptes de C_g . Hi ha diversos autors (Hague i Foord 1971; Hartshorn 1947; Fleig *et al.* 1996) que modelitzen C_g uniformement distribuïda i després d'aproximar el model, l'expressió de la impedància que s'obté és

similar a (4.4), però en comptes de $\alpha(1 - \alpha)$ hi ha el factor $1/6$, i això equival a que $\alpha = 0,21$. Una capacitat uniformement distribuïda en el model pot correspondre a mostres de material petites i envoltades d'una pantalla, però per a mostres de material voluminoses, que no poden ser apantallades, el model de C_g no necessàriament ha de ser uniformement distribuït i el valor de α no podrà ser determinat fàcilment. No obstant, no cal conèixer ni α ni C_g perquè quan els resultats mostren que C_g no és negligible, per exemple, quan hi ha fases positives, o el mòdul té un pic, o quan la freqüència on el mòdul cau 3 dB no és la mateixa on la fase val -45° , les equacions dels punts singulars permeten estimar R_x i g_x sempre que C_{hl}/C_x no sigui molt gran. En aquest cas, C_x es pot estimar de l'equació (4.19) si C_{HL} s'ha mesurat a una freqüència prou alta, sempre que els efectes de propagació electromagnètica siguin insignificants. Això es pot aconseguir reduint la distància entre elèctrodes però llavors s'incrementa C_{hl} i aquesta capacitat és més difícil de determinar que C_g .

Els models de les figures 4.1 i 4.3 i els resultats de l'anàlisi posterior poden ser aplicats a avaluar mesures, no només de líquids, sinó de qualsevol material que es pugui descriure amb una xarxa RC simple, de paràmetres constants, en una banda de freqüències determinada. Per exemple, els arcs inductius (*inductive loops*) a baixa freqüència observats en mesures d'impedància sobre safir (Fleig *et al.* 1996), poden ser una conseqüència de l'alta resistivitat del safir i de C_g (circuit RLC a la fig. 4.4). No hi ha cap necessitat de incloure cap component inductiu (paràsit) en el material ni a l'acoblament a terra, per tal de descriure l'efecte observat. Si R_x i C_x depenen de la freqüència, els efectes qualitatius de C_g i C_{hl} són els mateixos però la descripció analítica pot ser molt complicada, de manera que cal evitar tant com se pugui aquestes dues capacitats.

4.3. Conclusions

Les mesures de la impedància elèctrica d'un material mitjançant dos elèctrodes es veuen afectades per les impedàncies dels elèctrodes. Normalment, aquest efecte es minimitza mesurant a una freqüència prou alta on la impedància dels elèctrodes esdevingui negligible respecte a la freqüència característica del material que s'està mesurant. Però augmentar la freqüència de mesura comporta una major influència de les capacitats paràsites, particularment l'acoblament paràsit entre el material mesurat i terra (C_g) però també de la capacitat entre elèctrodes (C_{hl}).

La fig. 4.1 i la fig. 4.3 mostren un model de paràmetres concentrats que descriu el circuit equivalent per mesures d'impedància bipolars usant un instrument basat en un pseudopont automàtic. L'aproximació mostrada a la fig. 4.4 per descriure l'efecte de C_g prediu efectes inductius, resistius i capacitius. La presència de components inductives quan es mesura impedància de materials no magnètics sovint ha sorprès els investigadors, però el model proposat en aquest capítol explica que aquests efectes són deguts al mode de funcionament de l'instrument de mesura que gira la impedància de C_g i el terme $j\omega C_g$ fa cap al numerador de l'expressió de la impedància mesurada. No cal incloure cap inductància en el model del material ni a l'acoblament a terra (en sèrie amb C_g). Amb elèctrodes de contacte directe, aquests efectes inductius augmenten proporcionalment a C_g i a la resistència del material que s'està mesurant. Això explica per què els efectes inductius apareixen fàcilment quan es mesura materials de baixa conductivitat i mostres de material o components electrònics envoltats per una pantalla (conductora, metàl·lica) connectada a terra.

Un aacoblament a terra important produeix un pic en el mòdul de la impedància mesurada, encara que aquesta només consti de resistències i capacitats, sempre que $C_x \neq 0$ i l'acoblament a terra compleixi la condició $C_g > C_x(\sqrt{2} - 1)/\alpha(1 - \alpha)$, és a dir, $C_g \approx 1,6 C_x$ si $\alpha = 0,5$ i $C_g \approx 2,5 C_x$ si $\alpha = 0,2$. Si el valor C_g/C_x és considerable, quan $C_g > C_x/\alpha(1 - \alpha)$, que implica $C_g \approx 4C_x$ si $\alpha = 0,5$ i $C_g \approx 6,25 C_x$ si $\alpha = 0,2$, també apareixen fases de la impedància positives. Un màxim al mòdul i fases positives poden aparèixer encara que C_x sigui petita, per exemple en mostres de volum petit, tot i que C_g sigui petita. El que compta és la relació C_g/C_x .

La millor banda de freqüències per estimar la conductivitat d'un material que té una freqüència característica ω_c a partir de R_x , és a freqüències mitjanes, per sobre de $\omega_{ez} = (1 + 2R_e/R_x)\omega_c$ però per sota de ω_c ($\omega \ll \omega_c$), o per sota de ω_c/g_x si es té $g_x \gg 1$. Aquesta banda de freqüències es fàcil d'identificar perquè és on el mòdul de la impedància és constant. La permitivitat pot ser estimada a partir de C_x mesurant el mòdul de la impedància a freqüències més altes que la freqüència característica del material ω_c , si abans s'ha estimat el valor de la capacitat C_g entre la mostra i terra i el valor de $\alpha(1 - \alpha)$, per exemple, a partir dels punt singulars com ara el màxim del mòdul, sempre i quant la capacitat paràsita entre els elèctrodes sigui negligible i la distància entre els elèctrodes sigui prou petita per que no apareguin efectes de propagació. Tanmateix aquests dos darrers requeriments són contradictoris.

Per tant, el model de circuit equivalent proposat permet identificar la presència de la capacitat paràsita a terra, determinar la banda de freqüències on obtindre la conductivitat del material sense efectes de C_g , o minimitzar-los. Si es vol determinar la permitivitat s'hauran de tenir en compte els efectes de C_g , però només es podrà estimar si $C_x \gg C_g$ (com es va deduir a l'apartat 3.4), és a dir, $g_x \approx 1$, i la freqüència de mesura és prou baixa per fer que els efectes de propagació d'ona siguin insignificants.

La capacitat entre elèctrodes C_{hl} fa decreïxer el mòdul i la fase de la impedància mesurada, particularment a freqüències altes, i per tant compensa en part l'efecte de C_g . Això afecta els punts singulars de la impedància, sobre tot la freqüència on s'anul·la la fase. Per minimitzar aquests efectes, C_{hl}/C_x ha de ser el més petita possible.

Aquest estudi de l'origen, multiplicitat i importància d'aquests efectes amb elèctrodes de contacte directe, ha de facilitar l'anàlisi de les mesures fetes amb elèctrodes capacitius.

Capítol 5

5. Mesures d'impedància tetrapolars amb elèctrodes de contacte directe. Efectes de les capacitats paràsites

Les mesures amb quatre elèctrodes són una alternativa habitual per reduir l'efecte de la impedància dels elèctrodes en les mesures efectuades amb només dos elèctrodes (Grimnes i Martinsen 2008). Atenent als resultats dels capítols anteriors, cal preguntar-se si els sistemes de mesura d'impedància basats amb quatre elèctrodes, eviten o minimitzen d'alguna manera els efectes de la capacitat paràsit des del cos de la impedància que es mesura a terra.

La mesura de bioimpedància amb quatre elèctrodes té, a part de l'avantatge assenyalat, diversos problemes ben identificats a la bibliografia, alguns del quals, però, sense solució provada. Passa, per exemple, que, com en el cas de mesures bipolars, en cossos on només hi ha elements resistius i capacitius de vegades es mesuren fases positives, fet que d'entrada sembla contradictori. Gersing *et al.* (1995) suggeriren que aquestes fases positives s'obtenen quan l'objecte que es mesura és gran, segons la posició relativa dels elèctrodes d'injecció i detecció, per culpa de les impedàncies de polarització dels elèctrodes, pels diferents camins

alternatius que poden seguir les línies de corrent entre els elèctrodes d'injecció, i per les capacitats paràsites. Els resultats obtinguts per Grimnes i Martinsen (2007) confirmen els de Gersing *et al.* (1995) pel que fa a l'aparició de fases positives quan hi ha camins paral·lels per a les línies de corrent, i hi afegixen que les tensions en mode comú en els elèctrodes de detecció també poden causar desviacions de fase i donar fases positives. Scharfetter *et al.* (1998) van estudiar amb detall totes les capacitats paràsites en la mesura de bioimpedància: la capacitat dels cables, entre elèctrodes, entre el cos i terra, i entre la referència de senyal i terra (impedància d'aïllament). No van trobar fases positives però sí que van concloure que les capacitats a terra modifiquen el mòdul i la fase de la impedància mesurada. Manca, però, un estudi quantitatiu d'aquests efectes. En aquest capítol s'estudia quins són els factors que determinen els efectes de la capacitat a terra un cop es disposa d'aquest coneixement obtingut en el capítol anterior per a les mesures bipolars.

5.1. Model de la impedància tetrapolar i el seu anàlisi

5.1.1. Mètode de mesura d'impedància amb quatre elèctrodes

Per mesurar la impedància d'un volum conductor amb quatre elèctrodes mitjançant un analitzador d'impedàncies model 4294A, el seu fabricant suggereix el circuit de la fig. 5.1 (Agilent 2013). Les impedàncies dels quatre elèctrodes són: 1) Z_{ch} : per on s'injecta tensió o corrent, 2) Z_{cl} , mesura de corrent, 3) Z_{ph} , mesura de tensió i 4) Z_{pl} , tensió de referència (0 V, terra virtual, d'acord amb la fig. 3.10). Els elèctrodes 1 i 2 s'anomenen elèctrodes de corrent, perquè entre ells hi circula el corrent que passa pel cos, i el 3 i el 4 són els anomenats elèctrodes de tensió perquè l'instrument mesura la diferència de potencial entre ells. La impedància Z_x és la que es vol mesurar. Hi ha dues impedàncies més que cal tenir en compte: Z_{cp} i Z_{pc} , que són les impedàncies dels segments del volum conductor que hi ha entre cada elèctrode de corrent i l'elèctrode de tensió que tinguin respectivament més a prop. Les impedàncies dels elèctrodes no són negligibles i no formen part del volum mesurat, ja que són la impedància de la interfície conductor-electròlit (Borkholder 1998). Per diferenciar-les de les impedàncies del volum conductor, representades amb color blanc a la fig. 5.1, les dels elèctrodes són de color gris.

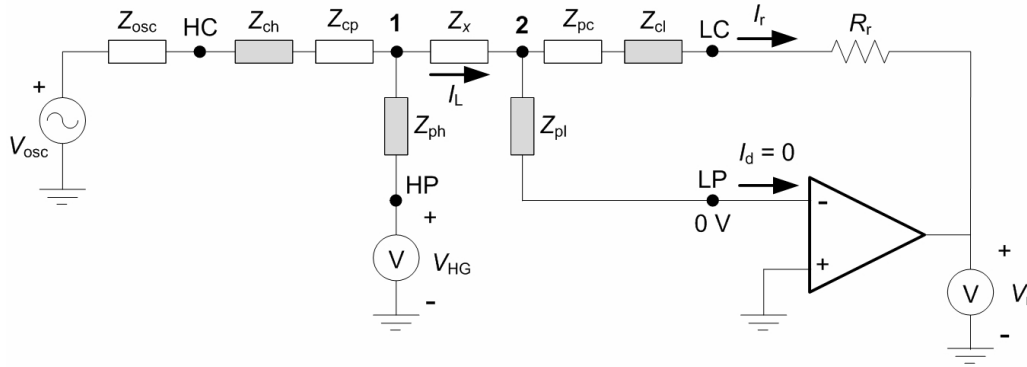


Figura 5.1. Circuit equivalent d'una mesura d'impedància amb quatre elèctrodes amb l'anàlitzador d'impedància 4294A.

Si es consideren totes aquestes impedàncies, el potencial al terminal LC de l'instrument ja no és 0 V com quan es mesurava amb dos elèctrodes i tindrem $V_r = -I_r(R_r + Z_{cl} + Z_{pc})$, és a dir, per calcular I_r no n'hi ha prou amb saber R_r i mesurar V_r sinó que caldria conèixer també Z_{cl} i Z_{pc} . Si s'ignoren aquestes dues impedàncies, hi haurà desviacions en la mesura del corrent I_L que ha circulat pel cos, i en conseqüència desviacions en la determinació de la impedància. La desviació no depèn només de la impedància Z_{cl} de l'elèctrode, sinó també del lloc on estiguin col·locats els elèctrodes, és a dir, de la impedància segmental Z_{pc} . A més, com que Z_{cl} és incontrolable, perquè depèn del tipus de material, concentració de sals a l'electròlit, densitat de corrent aplicada, etc. (Ragheb i Geddes 1991) i com que està dins del llaç de realimentació, pot provocar inestabilitats en el circuit de mesura. També poden produir inestabilitat la capacitat dels cables coaxials de connexió entre els elèctrodes i l'instrument, en particular si es mesura lluny de l'anàlitzador (cables llargs) (Bragós 1997).

Una possible solució a aquest problema es basa en dues accions (Gersing 1991, Bragós 1997, Torrents i Pallas-Areny 2002,). La primera és connectar directament els terminals de mesura LC i LP per tal de que estiguin en curtcircuit, amb una connexió el més curta possible i a prop de l'instrument. La segona acció és mesurar la tensió amb un amplificador diferencial (d'instrumentació) d'amplada de banda molt gran, tal com s'indica a la fig. 5.2. Si es connecten LC i LP, no hi haurà cap impedància d'elèctrode ni segmental dins del llaç de realimentació i per la capacitat paràsita del cable coaxial (si n'hi ha) que connecta Z_{cl} a l'instrument, no hi circularà cap corrent perquè el conductor intern i la malla estan al mateix potencial (terra). El que no està a potencial de terra són els extrems de la impedància Z_x i per tant hi pot haver errors causats per les impedàncies paràsites entre els extrems de Z_x i terra. També hi pot haver errors causats per les impedàncies en mode comú i pel CMRR de l'amplificador diferencial (Bragós 1997, Casas 1998).

El valor de la impedància es calcula ara dividint la tensió mesurada per l'amplificador diferencial pel corrent mesurat a LC/LP. S'està mesurant realment una impedància de transferència (transimpedància), ja que els ports on es detecta la tensió i on es mesura el corrent són diferents (Grimnes i Martinsen 2008). Per tant, els resultats no es poden comparar directament amb els d'una mesura d'impedància bipolar. Això implica que les impedàncies Z_x , Z_{cp} i Z_{pc} en els models de les figures 5.1 i 5.2 no són les que s'obtidrien fent mesures bipolars entre els dos elèctrodes que hi ha en els seus extrems respectius, com si el seu valor quedés determinat pel material que hi ha entre aquests elèctrodes, sinó que al mesurar amb quatre elèctrodes, cadascuna d'aquestes tres impedàncies queda afectada també per la conductivitat de la resta del material del cos, tal com demostraren Grimnes i Martinsen (2007).

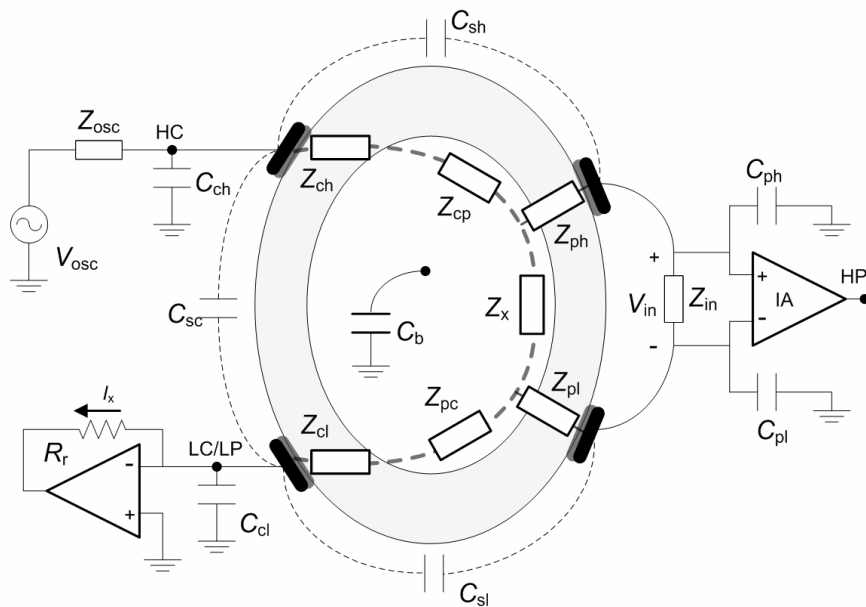


Figura 5.2. Esquema de la mesura d'impedància elèctrica amb quatre elèctrodes i amb l'anàlitzador d'impedància 4294A usant un amplificador d'instrumentació extern per mesurar la tensió, quan es consideren totes les capacitats paràsites.

La zona grisa de la fig. 5.2 representa la interfície elèctrode-pell i la línia discontinua representa un possible camí del corrent dins del volum conductor. Les capacitats paràsites a terra, C_{ch} i C_{cl} no afecten: la primera perquè està connectada a la sortida d'una font de tensió i la segona perquè està situada entre terra i terra virtual, és a dir, els seus dos extrems estan al mateix potencial. Les capacitats entre els elèctrodes de tensió i terra si que poden afectar a la mesura, i estan incloses a C_{ph} i C_{pl} juntament amb les de mode comú de l'amplificador d'instrumentació (IA). C_{sh} , C_{sl} i C_{sc} són les capacitats entre elèctrodes (diafonia); la capacitat entre els elèctrodes de detecció està inclosa a Z_{in} (impedància d'entrada de l'amplificador d'instrumentació). C_g és la capacitat paràsita entre el cos i terra, i

és una capacitat distribuïda (Scharfetter *et al.* 1998) que afecta a les impedàncies: Z_x , Z_{cp} i Z_{pc} , però no afecta a Z_{ch} , Z_{cl} , Z_{ph} i Z_{pl} , ja que aquestes quatre no tenen un volum sinó que són el resultat de la interacció a la interfície conductor-electròlit (pell) i a més es pressuposa que la seva superfície és petita en relació a la superfície del cos on es mesura.

5.1.2. Model de la impedància mesurada

El model de la impedància mesurada amb quatre elèctrodes és el circuit de la fig. 5.3. Inicialment es considera que la capacitat a terra només afectarà a la impedància Z_x i no a les impedàncies segmentals, perquè aquestes poden ser molt més petites. Per poder tenir un circuit de paràmetres concentrats, s'usa el paràmetre α introduït en el capítol 3.

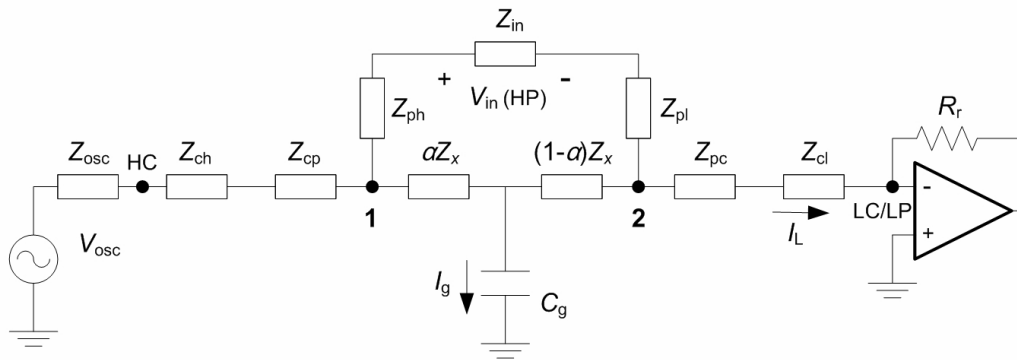


Figura 5.3. Circuit equivalent de la mesura d'impedància elèctrica amb quatre elèctrodes i amb l'analitzador d'impedància 4294A usant un amplificador d'instrumentació extern per mesurar la tensió quan es tenen en compte la seva impedància d'entrada i l'acoblament capacitiu entre el cos mesurat i terra.

La impedància que mesurarà l'instrument serà $Z_m = V_{in}/I_L$. Analitzant el circuit (Annex C) s'obté la seva expressió,

$$Z_m = \frac{V_{in}}{I_L} = \frac{Z_{in}}{Z_{in} + Z_{ph} + Z_{pl} + Z_{12}} Z_x \left[1 + \alpha \frac{(Z_{pc} + Z_{cl})}{Z_g} + \alpha(1-\alpha) \frac{Z_x}{Z_g} \right] \quad (5.1)$$

on Z_x ve multiplicada per dos factors,

$$\frac{Z_{in}}{Z_{in} + Z_{ph} + Z_{pl} + Z_{12}} \quad (5.1a)$$

$$1 + \alpha \frac{(Z_{pc} + Z_{cl})}{Z_g} + \alpha(1-\alpha) \frac{Z_x}{Z_g} \quad (5.1b)$$

i on $Z_g = (j\omega C_g)^{-1}$ designa la impedància de l'acoblament a terra, i Z_{12} és

$$Z_{12} = Z_x \left[1 + \alpha(1 - \alpha) \frac{Z_x}{Z_g} \right]. \quad (5.2)$$

El primer factor que multiplica Z_x descriu l'efecte de càrrega, expressió (5.1a): si la impedància d'entrada de l'amplificador és molt gran (idealment infinita), aquest factor valdrà gairebé 1. Z_{in} vindrà determinada habitualment per una capacitat molt petita, de manera que la seva influència sobre el factor (5.1a) possiblement serà perceptible només a altes freqüències. La capacitat a terra C_g intervé en l'efecte de càrrega perquè està inclosa dins la impedància Z_{12} , expressió (5.2), que coincideix amb la Z_{III} analitzada teòricament als capítols 3 i 4 (impedància bipolar on el terminal 1 és el terminal H d'abans i el terminal 2 és el terminal L). Els efectes de C_g sobre aquesta impedància han estat comprovats experimentalment al capítol 4. Per tant, segons quin sigui el model elèctric de Z_x , Z_{12} introduirà dins l'efecte de càrrega combinacions d'inductàncies, resistències i capacitats paràsites. Això implica que la mesura amb quatre elèctrodes no és immune a l'acoblament a terra.

El segon factor que multiplica a Z_x a (5.1) és l'expressió (5.1b), que descriu l'efecte de la capacitat a terra quan la impedància d'entrada de l'amplificador de instrumentació és infinita. Al terme $\alpha(1 - \alpha)Z_x/Z_g = j\omega\alpha(1 - \alpha)Z_xC_g$ (no lineal) que sortia al mesurar amb dos elèctrodes, s'hi ha afegit un altre terme: $\alpha(Z_{pc} + Z_{cl})/Z_g = j\omega\alpha(Z_{pc} + Z_{cl})C_g$, que depèn de la impedància de l'elèctrode on es mesura el corrent i de la impedància segmental que hi ha entre aquest elèctrode i el segon elèctrode de mesura de tensió (potencial baix). Resulta, doncs, que l'anàlisi teòric de l'efecte de la capacitat a terra sobre la mesura d'impedància mostra que aquesta capacitat fa que la impedància dels elèctrodes afecti la mesura, quan el que es pretenia amb els quatre elèctrodes era precisament evitar l'efecte de les impedàncies dels elèctrodes. Encara més, si la capacitat a terra no és nul·la, la impedància segmental externa a Z_x també afectarà perquè si el material que es mesura és homogeni, com ara aigua, aquesta impedància segmental tindrà el mateix model que Z_x (només canviarà un factor geomètric, que farà que les constants de cel·la siguin diferents) i el seu efecte estarà barrejat amb l'efecte no lineal, i el farà augmentar. En canvi, si el volum conductor que es mesura és no uniforme i no homogeni, com per exemple el cos humà, llavors l'efecte d'aquesta impedància segmental sobre la mesura d'impedància serà diferent al del terme amb Z_x (terme no lineal) que hi ha a l'expressió (5.1b).

Per valorar la repercussió d'aquest segon factor quan no hi ha efecte de càrrega, és a dir, quan l'expressió (5.1a) és propera a 1, però la capacitat paràsita a terra no és nul·la, la impedància mesurada es pot expressar d'una forma generalitzada com

$$Z_m = \frac{V_m}{I_L} \approx Z_x \left[1 + \sum_i c_i \frac{Z_i}{Z_g} \right] = Z_x \left[1 + j\omega C_g \sum_i c_i Z_i \right] \quad (5.3)$$

on c_i pot ser α o $\alpha(1 - \alpha)$ i Z_i són les impedàncies que hi ha “corrent avall” de la capacitat C_g en el circuit de la fig. 5.3, és a dir, Z_x , Z_{pc} , Z_{cl} i qualsevol altra impedància que estigui dins el camí del corrent I_L . L'efecte del terme Z_i/Z_g dependrà de quin sigui el model elèctric de Z_i . Si $Z_i = R_b$, una resistència pura, $Z_i/Z_g = j\omega R_b C_g$, i hi ha un efecte inductiu, és a dir, un augment de la impedància (mòdul i fase) a l'augmentar la freqüència a la que es mesura. Si a més Z_x és una resistència, el factor $Z_x Z_i/Z_g$ és una inductància, però en canvi, si Z_x és una resistència en paral·lel amb una capacitat, el factor $Z_x Z_i/Z_g$ és una inductància en paral·lel amb una resistència. Totes aquestes impedàncies “residuals” $Z_x Z_i/Z_g$ fruit de l'acoblament a terra i del mètode de mesura, estan en sèrie amb la impedància que es vol mesurar Z_x . Si $Z_i = (j\omega C_i)^{-1}$, una capacitat pura, $Z_i/Z_g = C_g/C_i$, i llavors l'efecte de C_g és independent de la freqüència i multiplica Z_x , (“amplifica”); si només hi hagués un factor Z_i/Z_g al sumatori, la impedància mesurada seria $Z_x(1 + C_g/C_i)$ i afectaria en tot l'ample de banda. Si $C_g/C_i \ll 1$, on C_i és la capacitat dels elèctrodes de contacte directe, llavors l'efecte és negligible, tal com s'ha vist en el capítol 4. Però si la condició $C_g/C_i \ll 1$ no es compleix, el resultat és una impedància més gran que la que s'esperaria (error de sensibilitat constant amb ω). Si Z_x i Z_i es modelitzen totes dues com una resistència en paral·lel amb una capacitat, el resultat de $Z_x Z_i/Z_g$ és un circuit ressonant paral·lel RLC , del tipus que s'ha vist en els capítols 3 i 4.

Alguns d'aquests efectes de l'acoblament a terra han estat estudiats en mesures tetrapolars de bioimpedància sobre el cos humà (Aliau-Bonet i Pallas-Areny 2012) i s'ha vist que combinats amb l'efecte de càrrega produeixen una ressonància, a una freqüència que depèn de la impedància que es mesura (Z_x) i de les capacitats C_{in} (entrada de l'amplificador d'instrumentació) i de l'acoblament a terra C_g .

Si els models de les impedàncies són: per a la impedància que es vol mesurar,

$$Z_x = R_x + \frac{R}{1 + j\omega RC}; \quad (5.4)$$

per a la impedància de l'elèctrode on es mesura el corrent,

$$Z_{cl} = R_a + \frac{R_c}{1 + j\omega R_c C_c}; \quad (5.5)$$

i per a les impedàncies dels elèctrodes de tensió (considerats iguals)

$$Z_{pl} = Z_{ph} = R_e + \frac{R_p}{1 + j\omega R_p C_p}, \quad (5.6)$$

L'expressió de la impedància mesurada (Aliau-Bonet i Pallas-Areny 2012), és

$$Z_m = \frac{V_{in}}{I_L} \approx Z_x \frac{1 + \alpha C_g / C_c + j\omega \alpha C_g [(1 - \alpha) R_x + R_a + Z_{pc}]}{1 - \omega^2 \alpha (1 - \alpha) R_x^2 C_g C_{in} + j\omega (R_x + 2R_e) C_{in}}. \quad (5.7)$$

Llavors, la capacitat d'acoblament a terra implica: 1) un error de sensibilitat independent de la freqüència ($1 + C_g/C_c$), on C_c és la capacitat de l'elèctrode on es mesura el corrent; 2) un error de sensibilitat que augmenta quan puja la freqüència (efecte inductiu) i quan augmenta ($R_a + Z_{pc}$), on R_a és la resistència de l'elèctrode on és mesura el corrent; 3) un error no lineal, que augmenta quan ho fa la freqüència i la resistència R_x que es mesura; i 4) una ressonància que es dona a una freqüència que depèn de R_x , C_g i C_{in} (impedància d'entrada de l'amplificador d'instrumentació que mesura la tensió). L'expressió (5.7) mostra el paper que juguen les impedàncies dels elèctrodes en els errors analitzats. La resistència i capacitat de l'elèctrode on es mesura el corrent tenen un paper força important i les resistències dels elèctrodes de tensió afectaran si C_{in} és prou gran. Això reafirma el que s'ha comentat abans, que l'efecte de l'acoblament a terra no s'evita amb les mesures amb quatre elèctrodes, sinó que fa aparèixer les impedàncies dels elèctrodes en els termes d'error de la mesura d'impedància, quan el que es volia evitar era precisament la seva influència.

5.2. Verificació experimental

5.2.1. Disseny de l'experiment

L'arranjament experimental per verificar els resultats de l'anàlisi anterior és el descrit per Aliau-Bonet i Pallas-Areny (2012) i es basa en un analitzador d'impedància Agilent 4294A, amb quatre elèctrodes col·locats dos a cada braç, entre el canell i el colze. Els elèctrodes d'injecció de tensió i de mesura de corrent estan situats més a prop dels canells i separats 10 cm dels elèctrodes de mesura de tensió. La tensió es mesura amb un amplificador d'instrumentació d'alta freqüència dissenyat a mida (Annex D), i que té les següents característiques de guany/fase/CMRR a 1 MHz i 10 MHz respectivament: 1/-0,8°/86 dB i 1,03/-8°/66 dB. La capacitat d'entrada C_{in} era d'entre 1 i 2 pF. Els elèctrodes eren Skintact

RT-34 de 22 mm per 34 mm, aplicats amb gel per a ECG, Aqua-Tac. Els cables de connexió entre els elèctrodes i l'instrument eren de 10 cm els de corrent (injecció i mesura) i de 15 cm els de tensió.

S'ha mesurat la impedància entre 100 Hz i 10 MHz d'un subjecte, home de 1,64 m d'altura i 63 kg de pes. El subjecte estava assegut en una cadira de despatx fabricada majoritàriament amb plàstic reforçat, per tant, sense cap peça metàl·lica gran. En una primera posició, els peus estaven sobre les rodes de la cadira (10 cm per damunt del terra). En una segona posició, els peus estaven directament sobre el terra, construït amb mosaic (rajola de ciment hidràulic). S'ha mesurat la capacitat C_g del subjecte amb el mètode descrit a (Aliau-Bonet i Pallas-Areny 2013). La capacitat mesurada a 100 kHz era de 78 pF amb els peus 10 cm per sobre del terra i de 136 pF amb els peus directament sobre el terra.

5.2.2. Resultats experimentals i discussió

Els resultats de les mesures fetes són a la fig. 5.4 (mòdul) i fig. 5.5 (fase). El mòdul de la impedància està representat a la fig. 5.4; la línia negra correspon al cas amb els peus a 10 cm sobre el terra i la línia grisa al cas amb els peus directament a terra. El primer efecte que s'observa és l'error de sensibilitat independent de la freqüència ($1 + C_g/C_e$). La diferència que hi ha entre les dues línies és constant des de baixa freqüència fins passats els 100 kHz, que és on es comencen a veure els efectes inductius, l'efecte que depèn de l'elèctrode on es mesura el corrent i de la impedància segmental, i també el terme no lineal, que depèn de la pròpia R_x . L'efecte inductiu es distingeix per l'augment del mòdul de la impedància quan augmenta la freqüència. La diferència entre les dues corbes és constant i de valor entre 3,0 i 3,1 Ω fins als 150 kHz; a 1 MHz ja és de 11,4 Ω , i a partir de 1 MHz comencen a aparèixer una sèrie de ressonàncies. El model teòric només prediu una ressonància causada per la combinació de la capacitat C_{in} i la "inductància equivalent" deguda a C_g . Les ressonàncies addicionals observades podrien ser causades per les altres capacitats d'acoblament a terra des del cos (volum) de les impedàncies segmentals juntament amb les capacitats paràsites entre elèctrodes, ja que formarien la mateixa estructura que l'analitzada a l'apartat 5.2.

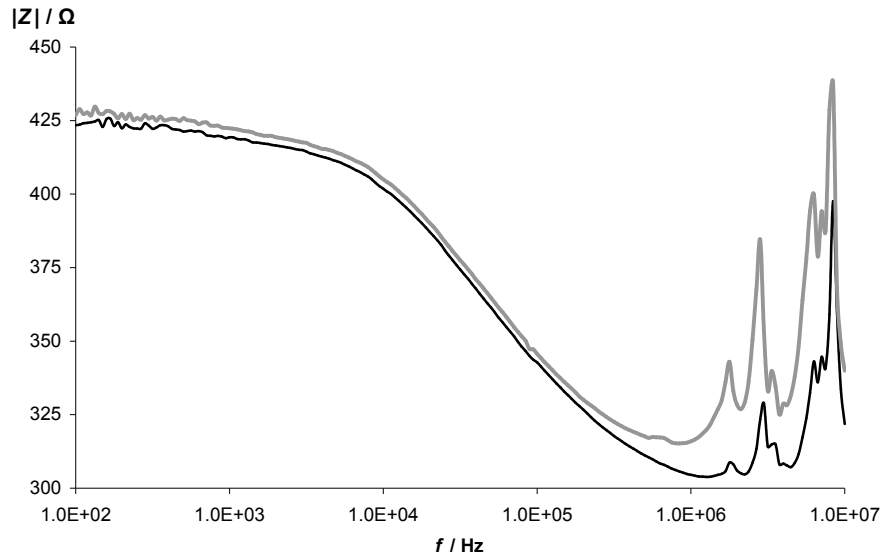


Figura 5.4. Mòdul de la impedància mesurada amb quatre elèctrodes, dos a cada braç prop dels canells.

A 1 kHz el mòdul val respectivament 419,3 Ω i 422,4 Ω per a les dues posicions de menys a més capacitat a terra (de 78 pF a 136 pF). La relació entre els dos valors és $422,4/419,3 \approx 1,0074$. D'aquesta relació i de les estimacions de la C_g per a les dues posicions del cos, es pot estimar que la capacitat de l'elèctrode de mesura de corrent (capacitat de la interfície elèctrode-pell), és de $C_c \approx 7,8$ nF, valor que concorda amb els trobats per Rosell *et al.* (1988).

La mesura de la fase de la impedància està representada a la fig. 5.5. A baixa freqüència, les dues corbes estan superposades, i comencen a separar-se ja als 10 kHz. A 100 kHz la diferència de fases és evident; la corba negra correspon al cas amb els peus a 10 cm del terra i la corba grisa correspon al cas amb els peus directament a terra. L'augment de la fase amb la posició de més capacitat a terra és símptoma de l'efecte inductiu. La fase es fa positiva a 1,06 MHz quan els peus són a 10 cm del terra i a 0,63 MHz quan els peus toquen a terra. De fases positives n'havien observat diversos autors (Gersing *et al.* 1995, Grimnes i Martinsen 2007) i entre els factors que ho podien provocar s'inclouïa la capacitat des del cos a terra. Amb aquest experiment queda clar que la capacitat a terra fa augmentar la fase de la impedància i si augmenta la capacitat augmenta la fase, que fins i tot arriba a fer-se positiva a freqüències relativament baixes. Per dalt de 1 MHz comencen a veure's les ressonàncies, igual que per al mòdul.

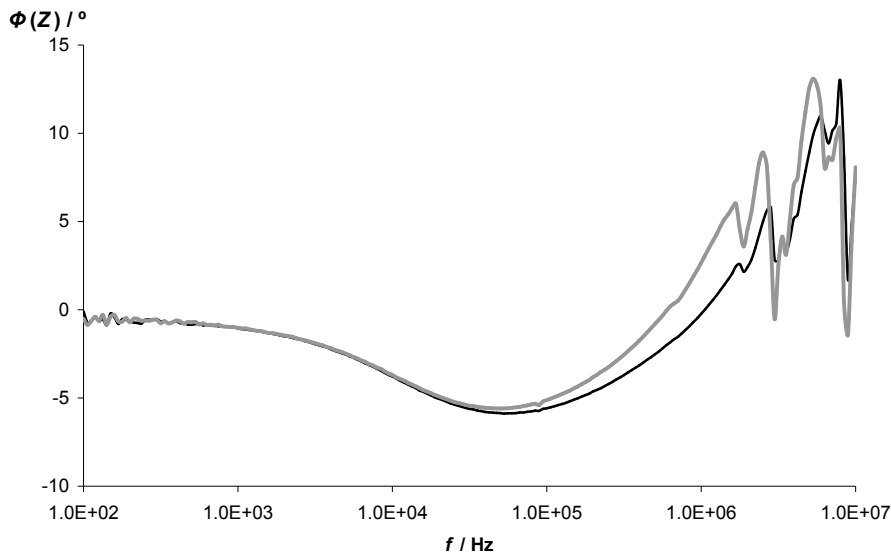


Figura 5.5. Fase de la impedància mesurada amb quatre elèctrodes, dos a cada braç prop dels canells.

Els resultats per a més subjectes i altres detalls són explicats a Aliau-Bonet i Pallas-Areny (2012). Tots ells demostren que mesurant amb quatre elèctrodes no s'eviten els efectes de les impedàncies d'alguns dels elèctrodes sinó que la capacitat del cos a terra fa que afectin la mesura. Tot això reforça l'interès, en alguns casos, de mesurar impedància amb només dos elèctrodes, perquè són sistemes de mesura més senzills que els sistemes de quatre elèctrodes. També s'ha comprovat l'afirmació que es feia en el capítol 3, de que la relació entre la capacitat a terra i la dels elèctrodes pot afectar la mesura d'impedància.

5.3. Conclusions

La mesura d'impedància feta amb quatre elèctrodes no evita els efectes de la capacitat paràsita des del cos de la impedància (volum conductor) a terra, al contrari, fa aparèixer a la mesura termes d'error que depenen d'aquesta capacitat a terra i de les impedàncies d'alguns dels elèctrodes. Això contradiu l'objectiu d'aquest sistema de mesura que és evitar la influència de les impedàncies dels elèctrodes en la mesura, com extrapolació del mètode de Kelvin per evitar la resistència dels contactes en mesures de resistència en contínua.

Que la capacitat a terra no sigui negligible fa que la mesura de la impedància amb quatre elèctrodes quedi afectada per desviacions de sensibilitat, unes independents i unes altres dependents de la freqüència, provoca efectes no lineals que també depenen de la freqüència i de la pròpia impedància mesurada, i ressonàncies quan la impedància (capacitat) d'entrada de l'amplificador d'instrumentació que fa la mesura la tensió, és finita, encara que sigui molt

petita (2 pF). Les desviacions de sensibilitat i no lineals que depenen de la freqüència es consideren efectes inductius, igual que passa a les mesures amb dos elèctrodes. Aquest efectes són aparents perquè no hi ha inductàncies en els models de les impedàncies (o les inductàncies són molt petites). L'efecte inductiu és causat per la capacitat a terra i pel mètode de mesura (mesura el corrent que surt del volum, I_I). Les mesures demostren l'existència d'aquest efecte i el seu augment quan augmenta la capacitat a terra. Les mesures també demostren que una de les causes de l'existència de fases positives en mesures de bioimpedància és la capacitat paràsitica des del volum conductor a terra. Però el paràmetre que determina aquests efectes no és sempre el valor absolut d'aquesta capacitat sinó que alguns efectes depenen del seu valor relatiu al de la capacitat dels elèctrodes de corrent. Per tant, poden aparèixer també quan es mesura en volums petits.

Capítol 6

6. Mesures d'impedància bipolars amb elèctrodes capacitius. Aplicació a la mesura de la conductivitat elèctrica de l'aigua

Les mesures d'impedància elèctrica mitjançant elèctrodes capacitius eviten la interacció electroquímica entre el conductor de l'elèctrode i el material que es vol mesurar (electròlit) (Göpel 1991, Hofmann *et al.* 2005). El camps d'aplicació són diversos, mesura de la conductivitat de l'aigua de dins d'ampolletes segellades (Miksch 1962; Ballico 1999), mesures a processos de fermentació (Hofmann *et al.* 2005), detecció de la proporció de diferents líquids a l'interior d'una canonada (Demori *et al.* 2010; Strazza *et al.* 2011) o la detecció de determinats ions dins de capil·lars molt petits (Gas *et al.* 2002; Opekar *et al.* 2013).

En aquest capítol es considerarà que el volum conductor que es vol mesurar és aigua i que els elèctrodes que s'utilitzen per fer la mesura d'impedància són capacitius, que és objectiu principal de la tesi. Per tant, a diferència dels casos en què es mesuren les propietats elèctriques d'altres líquids, aquí s'haurà de tenir en compte que la impedància dels

elèctrodes podrà ser molt més gran que la de l'aigua que es vol mesurar. L'instrument de mesura d'impedància es considerarà que és un pseudopont automàtic que aplica el mètode $V-I$.

La fig. 6.1 és el circuit equivalent que modelitza la mesura d'impedància d'un material (volum conductor) mitjançant elèctrodes capacitius tenint en compte l'instrument, el mètode de mesura i tot l'entorn electromagnètic (capacitats paràsites que poden afectar la mesura). Z_x modelitza el material (aigua) i, segons ja s'ha exposat als capítols anteriors, està representada per una resistència en paral·lel amb una capacitat i la corresponent freqüència característica. La resistència és $R_x = \kappa_{\text{cell}} / \sigma$ (σ conductivitat elèctrica del material, κ_{cell} constant de cel·la), en paral·lel amb la capacitat $C_x = \epsilon_0 \epsilon_r / \kappa_{\text{cell}}$ (ϵ_0 permitivitat elèctrica del buit, ϵ_r permitivitat elèctrica relativa del material), i la freqüència característica del material és $\omega_c = (R_x C_x)^{-1} = \sigma / \epsilon_0 \epsilon_r$.

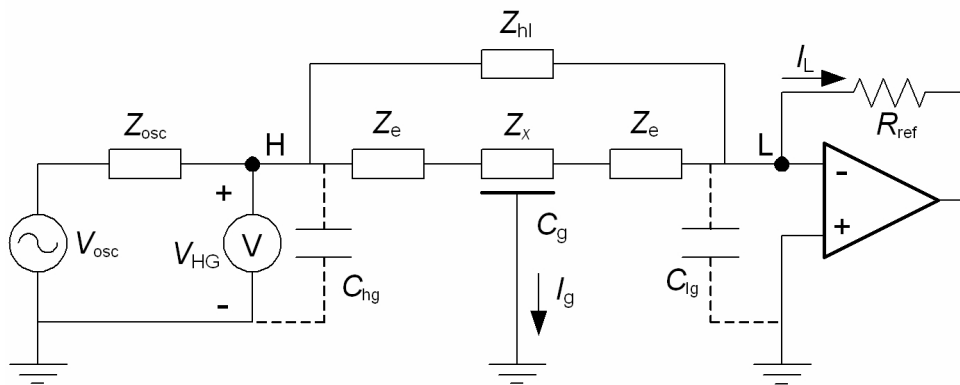


Figura 6.1. Circuit equivalent de la mesura d'impedància bipolar incorporant les capacitats paràsites, l'admitància de fuites i el model de l'instrument.

El material es connecta a l'instrument mitjançant dos elèctrodes capacitius connectats als seus terminals de mesura, que són els nodes designats com H i L a la fig. 6.1. Se suposa que els dos elèctrodes són iguals i cadascun es modelitza mitjançant una impedància Z_e , que és la de contacte entre el terminal i el material). Z_e es representa també per una resistència R_e en paral·lel amb una capacitat C_e . Entre els elèctrodes i el material no hi ha contacte elèctric sinó que entre el metall de l'elèctrode i l'electròlit hi ha un aïllant elèctric (dielèctric) (fig. 6.2). El metall, el dielèctric i la superfície del volum conductor a mesurar (electròlit adjacent a zona de l'elèctrode), formen un condensador de capacitat C_e , que està en sèrie amb la capacitat de doble capa que es forma a la interfície entre el material aïllant i el volum conductor. R_e modelitza la resistència de pèrdues del material dielèctric (vidre, plàstic o ceràmica) i, segons s'ha vist al capítol 2, la resistivitat d'aquests materials és molt alta, entre

10^{12} i 10^{16} Ω cm (ITT 1977). Per tant, R_e tindrà un valor molt alt. En canvi, els valors de C_e seran baixos, de desenes de picofarads (Ballico 1999), i per tant molt més petits que els dels elèctrodes de contacte directe, on C_e era del ordre de desenes de microfarads (Geddes 1972).

Entre els elèctrodes connectats a H i L també hi ha una impedància paràsita Z_{hl} (de fuites, és a dir, en absència del material) (fig. 6.1 i fig. 6.2), que es modelitza com C_{hl} en paral·lel amb R_{hl} , connectada també en paral·lel amb el conjunt format pels elèctrodes i la mostra de material (Agilent 2013). R_{hl} descriu les pèrdues del material dielèctric, degudes per exemple a la humitat, pols o altres impureses dipositades a la superfície del recipient aïllant entre els elèctrodes. A més, com que entre dos conductors elèctrics sempre hi ha una capacitat elèctrica (Ramo *et al.* 1994), entre els elèctrodes també hi haurà una capacitat paràsita C_{hl} (“per l’aire”).

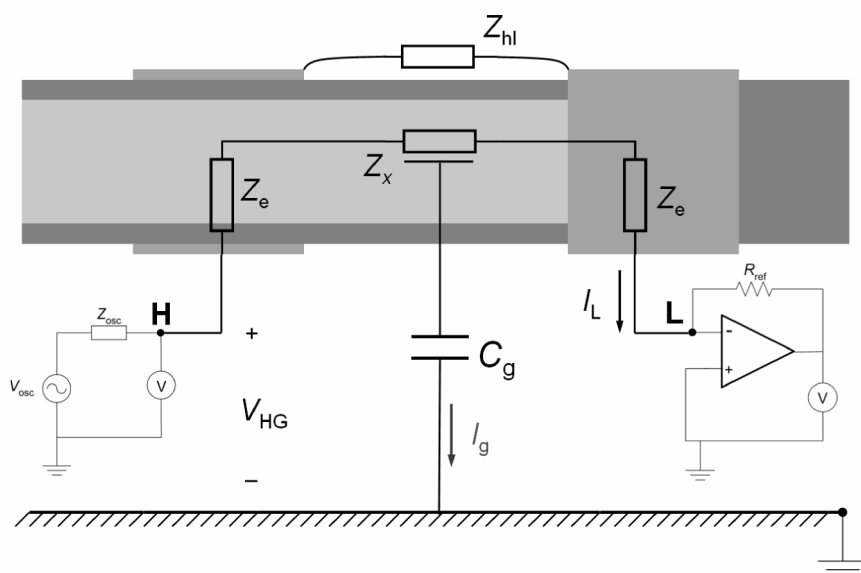


Figura 6.2. Secció d'una cel·la per mesurar impedància amb elèctrodes capacitius del tipus anell (color gris intermèdi), el recipient tubular de material aïllant (color gris fosc) i el material (aigua) a mesurar (color gris clar). La capacitat paràsita C_g és entre el volum d'aigua que hi ha entre els elèctrodes i el pla de “terra”.

Les altres capacitats paràsites considerades a la fig. 6.1 són les que hi ha entre el cos del material i terra (C_g) i des de cada elèctrode a terra (C_{hg} i C_{lg}). Segons s'ha explicat a l'apartat 3.1, C_{hg} i C_{lg} no afecten la mesura. Tal com ja s'ha explicat també prèviament, l'acoblament a terra C_g és una capacitat paràsita distribuïda entre el cos del material que es vol mesurar (volum conductor que té unes dimensions que no es poden considerar puntuals) i el “pla” de terra (Hague i Foord 1971; Hartshorn 1947; Fleig *et al.* 1996). El “pla” de terra són totes les masses conductores connectades a terra, inclosa la coberta metàl·lica de l'instrument.

Per tant, les capacitats que podran afectar la mesura són C_{hl} i C_g . C_{hl} pot ser petita, 1 o 2 pF (Ballico 1999), però ara no es podrà negligir d'entrada tal com s'ha fet al capítol 4 pels elèctrodes de contacte directe perquè, d'acord amb els resultats teòrics del capítol 2, la mesura d'impedància vindrà afectada per la relació C_{hl}/C_e i C_e ha disminuït en un factor que pot ser de l'ordre de 10^6 . Amb la capacitat C_g passarà el mateix perquè a l'expressió general de la impedància $Z_{HL}(j\omega)$ mesurada, equació (3.23), hi ha uns factors que depenen de la relació C_g/C_e que al capítol 4 es van negligir per ser C_e un valor molt gran. Ara, en canvi, C_g i C_e poden ser comparables i aquests factors no es podran negligir. A més, a l'equació (3.23) també hi ha un factor que depèn de Z_x , C_g i α , que ja s'ha comprovat que afecta la mesura en el cas dels elèctrodes de contacte directe (capítol 4); com que els valors de C_x i C_g quan es mesuri amb elèctrodes capacitius no tenen per què variar molt, aquest factor hauria de seguir afectant, en principi, la mesura d'impedància.

En ser els elèctrodes capacitius i com que les seves impedàncies estan en sèrie amb el material, caldrà pujar la freqüència de treball per tal de reduir la seva impedància (Göpel 1991, Reiley i McCurdy 1953), però això farà augmentar també el corrent a través de C_g (I_g) i de C_{hl} . El corrent que travessa C_{hl} no passa a través del material i arriba al terminal de mesura de corrent de l'instrument L, augmentant així I_L i disminuint la impedància mesurada entre H i L que es calcula com V_{HG}/I_L . En canvi, el corrent I_g no arribarà al terminal L i per tant reduirà I_L i augmentarà la impedància mesurada entre H i L. Així doncs, els efectes de C_{hl} i C_g seran contraris i cal espera que hi hagi una certa compensació. Per tant, no convé que la freqüència de treball sigui massa alta, ni massa baixa (per evitar l'efecte de ω_{ex} o ω_{ep} analitzat al capítol 2). La freqüència de treball queda també condicionada per la freqüència característica ω_c del material que es mesura: si es vol mesurar la seva conductivitat, la freqüència de mesura haurà de ser, en principi, molt més baixa que ω_c , mentre que si es vol determinar la permitivitat, la freqüència haurà de ser molt més alta que ω_c . Per tant, cal estudiar quina és la millor banda de freqüències en cada cas. Caldrà tenir present també la limitació de l'instrument al mesurar a freqüències baixes, perquè els elèctrodes faran molt gran la component imaginària de la impedància entre H i L, i pot ser difícil distingir la part real, molt més petita, que és on hi ha la informació sobre la conductivitat, perquè la resolució de l'instrument és limitada (Agilent 1998, 2000).

6.1. Model de la impedància i anàlisi dels efectes de les capacitats paràsites

Al capítol 3 s'ha demostrat teòricament i al capítol 4 s'ha verificat experimentalment per al cas dels elèctrodes de contacte directe, que l'acoblament a terra C_g afecta la mesura de la

impedància. El darrer terme de l'equació (3.23), que depèn de Z_x , C_g i α (tanc ressonant RLC), provoca efectes inductius, resistius i capacitius “aparents” en la mesura d'impedància. Aquest terme ressona a ω_c i al voltant d'aquesta freqüència (característica) és on hi ha més error degut a C_g . Per tant, l'anàlisi teòric es limitarà a freqüències molt més baixes que ω_c . Com que els elèctrodes són capacitius, la seva impedància serà molt més gran que la impedància del material (aigua) i és d'esperar que el mòdul de la impedància estigui dominat per la part capacitiva (part imaginària). Per tant, s'analitzarà la part real de la impedància que segons el capítol 2 és on es preveu que hi hagi la informació sobre la conductivitat elèctrica de l'aigua (R_x).

El mètode per analitzar la impedància mesurada a freqüències $\omega \ll \omega_c$, serà el que s'ha desenvolupat al capítol 2. Com que la mesura es fa amb elèctrodes capacitius i la seva impedància serà molt més gran que la impedància del material (aigua), el factor D , que és el factor de dissipació de la impedància entre H i L (elèctrodes + material, sense tindre en compte la Z_{hl}), serà molt més petit que 1 i es podran aplicar les aproximacions del capítol 2.

El model general per a l'anàlisi és el de la fig. 6.3, on la impedància entre H i L sense tindre en compte Z_{hl} és $Z = R + jX$, Z representa la impedància dels elèctrodes més la del material afectada o no per l'acoblament a terra.

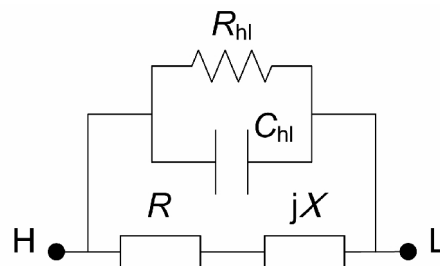


Figura 6.3. Model de la impedància elèctrica entre H i L.

Com que els elèctrodes són capacitius, Z es podrà expressar com una resistència R ($\text{Re } Z$) i una reactància X ($\text{Im } Z$) o bé la seva capacitat equivalent sèrie C ,

$$Z = R + jX = R - j\frac{1}{\omega C}. \quad (6.1)$$

El factor de dissipació D de Z és

$$D = \frac{R}{|X|} = \omega RC, \quad (6.2)$$

i com que se suposa $D \ll 1$, les expressions de la part real i de la part imaginària de Z_{HL} en funció de R , C i D són

$$\operatorname{Re} Z_{HL} \Big|_{D \ll 1} \approx \frac{R}{\left(1 + \frac{C_{hl}}{C}\right)^2} \left(1 + \frac{R}{D^2 R_{hl}}\right) = \frac{R + \frac{1}{\omega^2 C^2 R_{hl}}}{\left(1 + \frac{C_{hl}}{C}\right)^2} \quad (6.3)$$

i

$$-\operatorname{Im} Z_{HL} \Big|_{D \ll 1} \approx \frac{1}{\omega(C_{hl} + C)}. \quad (6.4)$$

Les equacions (6.2), (6.3) i (6.4) coincideixen, respectivament, amb (2.15), (2.25) i (2.36). La condició $D \ll 1$ porta implícit que $\omega \ll \omega_c$, segons es veurà després en casos concrets.

Per tant, el procediment per determinar les expressions de $\operatorname{Re} Z_{HL}$ i $\operatorname{Im} Z_{HL}$ i veure els efectes de les impedàncies dels elèctrodes i les capacitats paràsites quan $\omega \ll \omega_c$ serà:

- 1) Determinar R i C per a cada cas concret que es vulgui analitzar.
- 2) Analitzar les expressions resultants i l'interval de freqüències de treball.
- 3) Posar les expressions de R i C dins de les equacions (6.2), (6.3) i (6.4).
- 4) Tornar a analitzar les expressions resultants per treure'n el nou interval de freqüències de treball que se'n dedueix.

Els casos concrets que s'analitzaran seran, primer, la impedància dels elèctrodes en sèrie amb la impedància del material sense considerar cap influència de la capacitat paràsit a terra C_g i, segon, la impedància dels elèctrodes en sèrie amb la impedància del material afectada per l'acoblament a terra C_g .

Si es vol extreure la informació de la permitivitat del material a partir de la capacitat C_x estimada, s'haurà de treballar a freqüències molt per sobre de ω_c . Llavors, a més dels errors deguts a C_g també hi haurà efectes de propagació d'ona, que seran més grans com més augmenti la freqüència del senyal injectat a la impedància. Per això, la part imaginària de la impedància (o la seva capacitat equivalent) s'analitzarà a freqüències molt més altes que ω_c només per veure com afecten les capacitats paràsites a la determinació de C_x però sense aprofundir en els detalls, atès que els efectes de propagació provocaran desviacions que no es podran determinar analíticament i la mesura de C_x no serà correcta.

Els resultats teòrics que s'obtidran són els efectes sobre la mesura d'impedància d'un material amb elèctrodes capacitius deguts a les capacitats paràsites C_{hl} (inclosa a Z_{hl}) i C_g , i a la resistència de pèrdues de l'elèctrode (del material aïllant) R_e i la resistència de fuites R_{hl} (inclosa a Z_{hl}). L'anàlisi de la mesura d'impedància amb dos elèctrodes capacitius sense tindre en compte R_e i R_{hl} , és a dir, elèctrodes capacitius ideals i amb aïllament perfecte entre ells, que és la situació més habitual a la bibliografia, és a l'annex E, on es mostra que fins i tot en aquest cas la capacitat paràsita a terra té efectes molt considerables.

6.1.1. Model de la impedància entre H i L sense incloure l'acoblament a terra C_g

El model de la impedància entre H i L que es vol analitzar és el circuit de la fig. 6.4. L'única diferència amb la impedància entre H i L de la fig. 6.1, és que la mesura de la impedància del material no està afectada per l'acoblament a terra C_g .

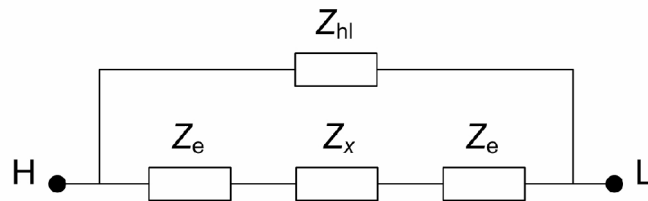


Figura 6.4. Model de la impedància elèctrica entre H i L incloent-hi les impedàncies dels elèctrodes i la impedància de fuites entre ells.

Si substituïm les impedàncies del circuit de la fig. 6.4 pels seus models equivalents amb una resistència connectada en paral·lel amb una capacitat, s'obté el model circuital de la fig. 6.5. La diferència entre la fig. 6.5 i la fig. 2.13 és que en aquest capítol es posa la impedància de cada elèctrode (capitiu) per separat i entre mig hi ha el material (aigua). Per tant, a les expressions s'han obtingut a l'apartat 2.2.3 del capítol 2, s'haurà de substituir R_e per $2R_e$ i C_e per $C_e/2$.

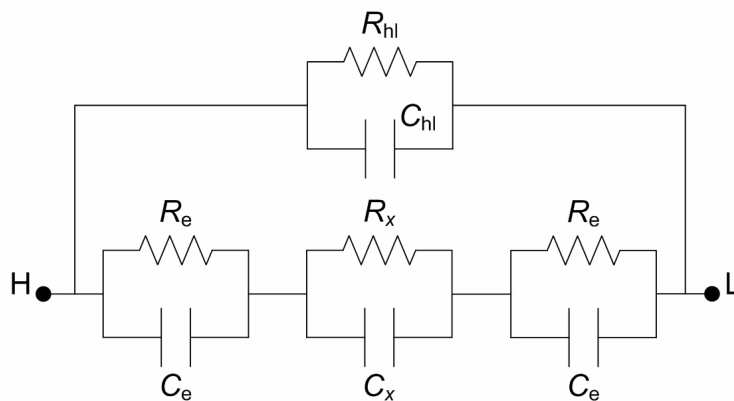


Figura 6.5. Model de la impedància elèctrica entre H i L incloent-hi les impedàncies dels elèctrodes i la impedància de fuites.

R i C són la resistència i la capacitat equivalent sèrie del circuit de la fig. 6.5 considerant que la impedància “de fuites” entre elèctrodes Z_{hl} és infinita. L'expressió de R , segons l'equació (2.7), és

$$R \approx R_x \frac{1 + (\omega/\omega_{ex})^2}{(\omega/\omega_{ex})^2} = R_x \left[1 + \left(\frac{\omega_{ex}}{\omega} \right)^2 \right] \quad (6.5)$$

on $\omega_{ex} = (2R_e/R_x)^{1/2}\omega_e$ i $\omega_e = (R_e C_e)^{-1}$.

L'expressió de la reactància X , segons l'equació (2.9), és

$$X \approx -\frac{1}{\omega \frac{C_e}{2}} \quad (6.6)$$

Per tant, $C \approx C_e/2$ i com que la freqüència de treball és $\omega \ll \omega_e$ i a aquestes baixes freqüències la impedància de l'aigua és $Z_x \approx R_x$, la seva capacitat C_x no afecta.

El factor de dissipació D dins l'interval de freqüències $\omega_e \ll \omega \ll \omega_c$ és

$$D = \frac{R}{|X|} = \omega \frac{C_e}{2} R_x \left[1 + \left(\frac{\omega_{ex}}{\omega} \right)^2 \right] \Bigg|_{\omega \gg \omega_{ex}} \approx \omega \frac{C_e}{2} R_x, \quad (6.7)$$

Per tenir $D \ll 1$ ($R \ll |X|$), segons aquesta equació s'ha de complir $\omega C_e/2 \ll R_x$, per a freqüències $\omega \gg \omega_{ex}$.

S'ha dit abans que la freqüència de treball ha d'estar per sobre la freqüència de tall dels elèctrodes i per sota la freqüència característica de l'aigua ($\omega_e \ll \omega \ll \omega_c$). L'equació (6.5) afegeix que la zona on R és constant i s'aproxima a R_x és quan $\omega \gg \omega_{ex}$, i la condició $D \ll 1$ ($\omega R_x C_e/2 \ll 1$) per a $\omega \gg \omega_{ex}$ dóna que el límit superior de la freqüència de treball per poder aplicar les aproximacions (6.3) i (6.4), és $\omega \ll 2/R_x C_e = \omega_D$, on el subíndex D és per indicar que aquesta condició és per aconseguir $D \ll 1$. Per tant, d'un interval de freqüències de treball “inicial” o “general” que està entre la freqüència de tall dels elèctrodes i la freqüència característica del material, $\omega_e \ll \omega \ll \omega_c$, passem a un interval de freqüències més estret $\omega_{ex} \ll \omega \ll \omega_D$, només pel fet d'haver inclòs en el model la impedància dels elèctrodes, R_e i C_e , i considerar $\omega_D < \omega_c$, ja que sempre es complirà que $C_e/2 > C_x$. Si s'expressa aquest interval de freqüències en funció de ω_e i ω_c , s'obté

$$\omega_{ex} = \left(\frac{2R_e}{R_x} \right)^{1/2} \omega_e \ll \omega \ll \frac{1}{R_x C_e / 2} = \frac{C_x}{C_e / 2} \omega_e = \omega_D. \quad (6.8)$$

Hi ha, doncs, “dualitat o simetria” entre els factors que multipliquen ω_e i ω_c : $(2R_e/R_x)^{1/2}$, que serà sempre més gran que 1 perquè normalment tindrem major resistència als elèctrodes que al material ($2R_e \gg R_x$), redueix l'interval de mesura a freqüències baixes; en canvi, $C_x/(C_e/2)$, que serà menor que 1 quan la capacitat del material sigui menor que la dels elèctrodes ($C_e/2 > C_x$), redueix l'interval de mesura a freqüències altes. L'expressió (6.8) de ω_D és la mateixa que l'expressió (4.3b) de ω_{ex} , però els papers que juguen són diferents, mentre ω_D és el límit superior de l'interval freqüencial de treball per al cas de les mesures d'impedància amb elèctrodes capacitius, ω_{ex} és el límit inferior per al cas de les mesures amb elèctrodes de contacte directe. La diferència entre els valors de C_e dependent del tipus d'elèctrode, fa jugar papers diferents a expressions iguals.

Substituint les expressions de R , C i D a (6.3) s'obtenen les parts real i imaginària de la impedància entre H i L a la fig. 6.5,

$$\operatorname{Re} Z_{HL} |_{D \ll 1} \approx \frac{R_x \left[1 + \left(\frac{\omega_{ex}}{\omega} \right)^2 \right] + \frac{R_x}{\omega^2 R_x R_{hl} (C_e/2)^2}}{\left(1 + \frac{C_{hl}}{C_e/2} \right)^2} = R_x \frac{1 + \left(\frac{\omega_{ep}}{\omega} \right)^2}{\left(1 + 2 \frac{C_{hl}}{C_e} \right)^2} \quad (6.9)$$

on $D \ll 1$ implica $\omega \ll \omega_D$ i

$$\omega_{ep}^2 = \frac{1}{R_x \left(\frac{C_e}{2} \right)^2} \left(\frac{1}{2R_e} + \frac{1}{R_{hl}} \right) = \frac{1}{R_x (2R_e || R_{hl}) \left(\frac{C_e}{2} \right)^2}. \quad (6.10)$$

Quan $\omega \gg \omega_{ep}$, la part real de la impedància és

$$\operatorname{Re} Z_{HL} |_{D \ll 1} \approx R_x \frac{1 + \left(\frac{\omega_{ep}}{\omega} \right)^2}{\left(1 + 2 \frac{C_{hl}}{C_e} \right)^2} \Bigg|_{\omega \gg \omega_{ep}} \approx \frac{R_x}{\left(1 + 2 \frac{C_{hl}}{C_e} \right)^2} \quad (6.11)$$

i la part imaginària és

$$\operatorname{Im} Z_{HL} |_{D \ll 1} \approx \frac{-1}{\omega \left(C_{hl} + \frac{C_e}{2} \right)}. \quad (6.12)$$

L'equació (6.11) ens diu que la zona plana on $\text{Re } Z_{\text{HL}} \approx R_x / (1 + 2C_{\text{hl}}/C_e)^2$ ara és a partir de $\omega \gg \omega_{\text{ep}}$ i aquesta freqüència és més gran que ω_{ex} ; només quan $R_{\text{hl}} \gg R_e$ serà $\omega_{\text{ep}} \approx \omega_{\text{ex}}$. Per tant, l'interval de freqüències de mesura passa a ser $\omega_{\text{ep}} \ll \omega \ll \omega_D$, és dir, queda reduït encara una mica més a la part de baixes freqüències. També de l'equació (6.9) es pot deduir que quan $C_{\text{hl}} \neq 0$ i es mesura amb elèctrodes capacitius (C_e és petit i podria ser comparable a C_{hl}), la banda de freqüències on $\text{Re } Z_{\text{HL}}$ és plana queda afectada pel factor $1/(1 + 2C_{\text{hl}}/C_e)^2$, que no depèn de la freqüència. De l'equació (6.10) se'n treu que quan R_{hl} es finita, la resistència dels elèctrodes $2R_e$ queda substituïda per la combinació de $2R_e$ i R_{hl} en paral·lel, és a dir, la resistència de fuites entre elèctrodes redueix la resistència equivalent dels elèctrodes i això fa augmentar la part real de Z_{HL} a baixa freqüència (ω_{ep} creix), i com més petita sigui la combinació de $2R_e$ i R_{hl} en paral·lel, major és aquest augment.

L'equació (6.12) diu que la capacitat equivalent sèrie és la capacitat C_{hl} s'afegeix a la dels elèctrodes, $C_e/2$, resultat que és congruent atès que, al tenir $D \ll 1$, la impedància de Z_{HL} és deguda més a la capacitat dels elèctrodes que a la resistència del material; es compleix $2/j\omega C_e \gg R_x$. Això vol dir que dins l'interval $\omega_{\text{ep}} \ll \omega \ll \omega_D$ tindrem $Z \approx 2/j\omega C_e + R_x \approx 2/j\omega C_e$, i la capacitat equivalent de Z és $C_e/2$, que segons la fig. 6.5 queda en paral·lel amb C_{hl} . Aquest raonament justificaria la mesura de la part real de la Z per obtenir R_x , si l'instrument té prou resolució per detectar parts reals petites en front de parts imaginàries molt grans, perquè si es mesurés el mòdul de Z obtindríem gairebé $2/\omega C_e$, o sigui, el valor absolut de la part imaginària de Z .

Com que R_e i R_{hl} només afecten a baixa freqüència, a freqüències $\omega \gg \omega_{\text{ep}}$ no cal considerar ni R_e , ni R_{hl} en el model de la fig. 6.5, que es pot reduir al de la fig. E.6 de l'annex E. La impedància entre H i L és llavors

$$Z_{\text{HL}}(j\omega) = \text{Re } Z_{\text{HL}}(\omega) + j\text{Im } Z_{\text{HL}}(\omega) = \frac{\frac{1}{\omega_z} - \frac{1}{\omega_p}}{\left(C_{\text{hl}} + \frac{C_e}{2}\right)\left(1 + \frac{\omega^2}{\omega_p^2}\right)} - j \frac{1 + \frac{\omega^2}{\omega_z \omega_p}}{\omega \left(C_{\text{hl}} + \frac{C_e}{2}\right)\left(1 + \frac{\omega^2}{\omega_p^2}\right)} \quad (6.13)$$

que és la mateixa que l'equació (E.17) de l'annex E, on

$$\omega_z = \frac{1}{R_x(C_x + C_e/2)} < \frac{1}{R_x C_x} = \omega_c \quad (6.14)$$

i

$$\omega_p = \frac{1}{R_x \left(C_x + \frac{C_{hl} C_e / 2}{C_{hl} + C_e / 2} \right)} < \omega_c. \quad (6.15)$$

La part real de Z_{HL} és

$$\operatorname{Re} Z_{HL}(\omega) \approx \frac{\frac{1}{\omega_z} - \frac{1}{\omega_p}}{\left(C_{hl} + \frac{C_e}{2} \right) \left(1 + \frac{\omega^2}{\omega_p^2} \right)} = \frac{R_x}{\left(1 + 2 \frac{C_{hl}}{C_e} \right)^2 \left(1 + \frac{\omega^2}{\omega_p^2} \right)} \Bigg|_{\omega \ll \omega_p} \approx \frac{R_x}{\left(1 + 2 \frac{C_{hl}}{C_e} \right)^2}. \quad (6.16)$$

Es pot veure que a freqüències $\omega \ll \omega_p$, aquesta equació coincideix amb l'expressió (6.11) per a $\omega \gg \omega_{ep}$. Això corrobora que si no es tenen en compte la resistència de pèrdues del dielèctric i la de fuites entre elèctrodes, es perd informació de la impedància (part real) a baixa freqüència i és difícil interpretar la part real mesurada. Però, a més, el terme del denominador (6.16), abans d'aproximar-la, depèn de ω_p i no ω_c . Si $C_{hl} = 0$ llavors $\omega_p = \omega_c$, però com que $C_{hl} \neq 0$, tindrem $\omega_p < \omega_c$, que implica que la part real comença a decreixer abans d'arribar a ω_c , estrenyent encara més la zona on $\operatorname{Re} Z_{HL}$ és plana, i aquesta reducció serà tant més gran com més augmenti C_{hl} respecte a C_e .

Si s'analitza la capacitat equivalent sèrie C_{HL} a partir de la part imaginària de Z_{HL} , s'obté

$$C_{HL}(\omega) = \frac{-1}{\omega \operatorname{Im} Z_{HL}(\omega)} = (C_{hl} + C_e / 2) \frac{1 + \omega^2 / \omega_p^2}{1 + \omega^2 / \omega_z \omega_p} \quad (6.17)$$

on es pot veure que C_{hl} es suma a $C_e / 2$, tal com passa a l'expressió de ω_p , (6.15). A freqüències baixes respecte a ω_p , la capacitat C_{HL} serà

$$C_{HL} \Big|_{\omega \ll \omega_p} \approx C_{LF} = C_{hl} + \frac{C_e}{2}, \quad (6.18)$$

on el subíndex LF indica baixes freqüències. Es pot observar que C_{hl} es suma a la capacitat dels elèctrodes, tal com passava a l'equació (6.12). De (6.11) o (6.16) es podria obtenir R_x si es coneguessin C_{hl} i C_e . Fent una mesura de C_{HL} a baixa freqüència, segons (6.18) es pot obtenir la suma $C_{hl} + C_e / 2$, i si C_e es conegués a priori, per exemple per geometria, el problema de trobar R_x quedaria resolt.

La capacitat C_{HL} per a freqüències altes respecte a ω_p és

$$C_{HL} \Big|_{\omega \gg \omega_p} \approx C_{HF} = C_{LF} \frac{\omega_z}{\omega_p} = C_{hl} + \frac{C_x C_e / 2}{C_x + C_e / 2} < C_{LF}, \quad (6.19)$$

on el subíndex HF indica altes freqüències. C_{hl} se suma a la combinació sèrie de la capacitat dels elèctrodes amb la del material, com calia esperar. Quan $\omega \gg \omega_p$, el circuit de la fig. 6.5 esdevé el de la fig. 6.6, on només hi intervenen les capacitats, i si es combinen totes les capacitats s'obté directament (6.19). El mateix raonament per trobar R_x es vàlid aquí per trobar C_x , mesurant C_{HF} i coneixent C_{hl} i C_e , però tal com s'ha anat comentat en aquest treball, a freqüències prou altes ($\omega \gg \omega_p$), la propagació d'ones pot provocar desviacions en les mesures d'impedància.

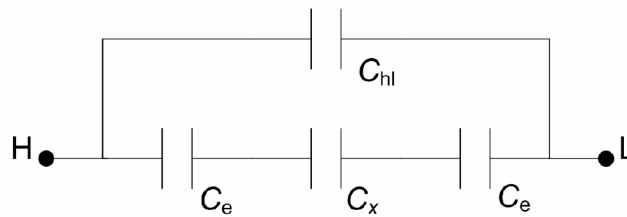


Figura 6.6. Model de la impedància elèctrica entre H i L quan $\omega \gg \omega_p$.

6.1.2. Model de la impedància entre H i L incloent-hi l'acoblament a terra C_g

Si es considera el model complet de la impedància entre H i L presentat a la fig. 6.1, a més de la impedància dels elèctrodes $Z_e = R_e \parallel C_e$ i la impedància de fuites $Z_{hl} = R_{hl} \parallel C_{hl}$, hi ha l'acoblament a terra C_g . Com que C_g és una capacitat de paràmetres distribuïts, per poder considerar-la de paràmetres concentrats s'usa el paràmetre α emprat en capítols anteriors, i el model esdevé el de la fig. 6.7.

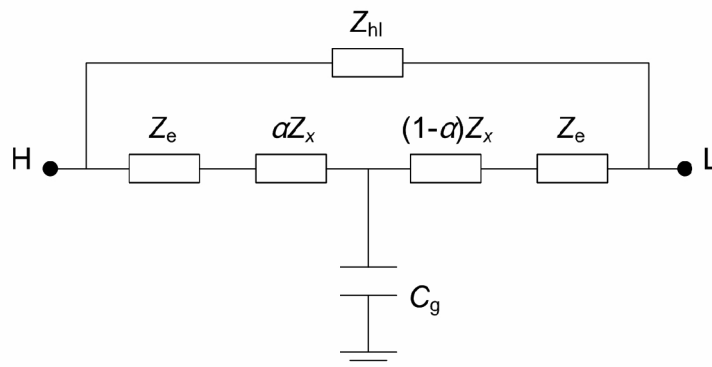


Figura 6.7. Model amb paràmetres concentrats de la impedància entre els terminals H i L quan es consideren les impedàncies dels elèctrodes, la impedància de fuites entre elèctrodes i l'acoblament a terra.

Primer s'ha d'analitzar la impedància Z , que és el circuit que queda fent Z_{hi} infinita, i això correspon al model de la fig. 6.8.

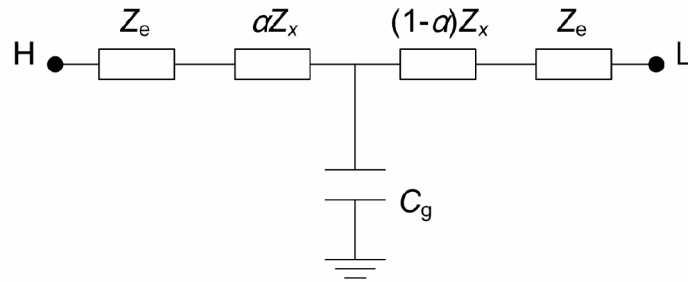


Figura 6.8. Model de la impedància Z amb paràmetres concentrats, sense la impedància de fuites.

Si al circuit de la fig. 6.8 se li aplica la conversió estrella-triangle, substituint cada impedància pel seu model de resistència en paral·lel amb una capacitat, l'expressió de la impedància Z és

$$Z(j\omega) = \frac{2R_e}{1 + j\omega R_e C_e} \left[1 + \frac{1}{2} \left(\frac{j\omega R_e C_e}{1 + j\omega R_e C_e} \right) \frac{C_g}{C_e} \right] + \frac{R_x}{1 + j\omega R_x C_x} \left[1 + \left(\frac{j\omega R_e C_e}{1 + j\omega R_e C_e} \right) \frac{C_g}{C_e} \right] + \frac{j\omega \alpha(1-\alpha) R_x^2 C_g}{(1 + j\omega R_x C_x)^2} \quad (6.20)$$

que coincideix amb l'expressió (3.23) del capítol 3. Pel fet de considerar la impedància dels elèctrodes, $Z_e = R_e || C_e$, apareixen els primers dos termes de (6.20) (entre claudàtors) que depenen de l'elèctrode i de la relació C_g/C_e . L'últim terme només depèn del material Z_x , C_g i α , i és el mateix que sortia al capítol 4 al mesurar amb elèctrodes de contacte directe. Els dos primers termes de (6.20) no es tenien en compte al capítol 4 perquè amb elèctrodes de contacte directe la relació C_g/C_e era molt petita. Però amb elèctrodes capacitius, la relació C_g/C_e no serà petita perquè C_g pot ser comparable a C_e . El circuit equivalent de l'expressió (6.2) és a la fig. 6.9.

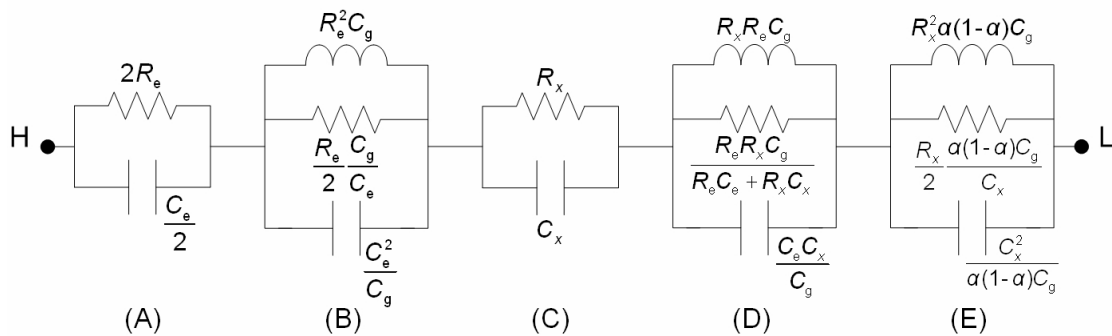


Figura 6.9. Circuit equivalent de la impedància Z amb dos elèctrodes capacitius quan es contempla la resistència de pèrdues del dielèctric R_e i l'efecte de l'acoblament capacitiu a terra C_g .

El circuit amb tres nodes de la fig. 6.8 és el mateix que el de la fig. 3.12, i el circuit equivalent amb dos nodes és la impedància Z de la fig. 3.13, reproduïda aquí com fig. 6.9 per major comoditat. La subxarxa A és deguda només als elèctrodes, la subxarxa C és deguda només al material, i la presència de C_g hi afegeix la subxarxa B, degut als elèctrodes, la subxarxa E deguda al material, i la subxarxa D deguda a ambdós.

Si s'aproxima l'expressió (6.20) per a l'interval de freqüències $\omega_e \ll \omega \ll \omega_c$, que en principi és el millor per mesurar Z , s'obté

$$Z(j\omega) \approx R_x \left(1 + \frac{C_g}{C_e} \right) + \frac{\left(2 + \frac{C_g}{C_e} \right)}{j\omega C_e} + j\omega\alpha(1-\alpha)R_x^2 C_g. \quad (6.21)$$

Per tant, les expressions respectives de R i X són

$$R \approx R_x \left(1 + \frac{C_g}{C_e} \right), \quad (6.22)$$

i

$$X \approx \frac{\left(2 + \frac{C_g}{C_e} \right)}{j\omega C_e} + j\omega\alpha(1-\alpha)R_x^2 C_g. \quad (6.23)$$

De l'equació (6.22) es pot deduir que l'acoblament a terra augmenta pel factor $(1 + C_g/C_e) > 1$ la part real de la impedància mesurada, i que R_e no afecta perquè, en ser els elèctrodes capacitius, la seva impedància és molt més gran que la del material i la part imaginària, on intervé molt C_e i poc R_e si és molt gran, domina l'expressió de la impedància.

A l'equació (6.23) hi ha dos termes, el primer dels quals és la impedància dels elèctrodes augmentada pel factor $(2 + C_g/C_e)$, que és més gran que 2. Per tant, la capacitat equivalent de X és menor que $C_e/2$; és a dir, l'acoblament a terra comporta una reducció aparent de la capacitat dels elèctrodes, que de per si ja és minsa. El segon terme de (6.23) és la denominada inductància "residual" (Hague i Foord 1971) deguda a l'acoblament a terra. En principi la impedància dels elèctrodes modificada serà molt més gran que el terme de la inductància "residual", i l'expressió (6.23) es podrà aproximar com

$$X \approx \frac{\left(2 + \frac{C_g}{C_e} \right)}{j\omega C_e}, \quad (6.24)$$

de manera que la capacitat equivalent sèrie de Z és

$$C \approx \frac{C_e}{2 + \frac{C_g}{C_e}} \Bigg|_{C_g=0} = \frac{C_e}{2}, \quad (6.25)$$

i si $C_g = 0$ recuperem el valor de C de l'apartat anterior.

Per obtindre la informació de baixa freqüència de la part real de Z , R , s'ha de multiplicar i dividir la seva expressió pels conjugats corresponents. A partir de (6.20) resulta,

$$\begin{aligned} R = \operatorname{Re} Z(j\omega) &= \frac{2R_e}{1 + (\omega R_e C_e)^2} \left[1 + \frac{(\omega R_e C_e)^2}{1 + (\omega R_e C_e)^2} \frac{C_g}{C_e} \right] \\ &+ \frac{R_x}{1 + (\omega R_x C_x)^2} \left[1 + \frac{(\omega R_e C_e)^2}{1 + (\omega R_e C_e)^2} \left(1 + \frac{R_x C_x}{R_e C_e} \right) \frac{C_g}{C_e} \right] \\ &+ R_x \frac{2(\omega R_x C_x)^2}{[1 + (\omega R_x C_x)^2]^2} \alpha (1 - \alpha) \frac{C_g}{C_x}. \end{aligned} \quad (6.26)$$

on es conserven els tres termes de (6.20): el primer depèn només dels elèctrodes i de C_g , el segon del material, elèctrodes i C_g , i el tercer depèn del material Z_x , C_g i α .

Dins de l'interval de freqüències de mesura general, $\omega_e \ll \omega \ll \omega_c$, on $\omega_e = (R_e C_e)^{-1}$ i $\omega_c = (R_x C_x)^{-1}$, es complirà $R_x C_x / R_e C_e \ll 1$ i l'expressió (6.26) se simplifica com

$$\begin{aligned} R = \operatorname{Re} Z(\omega) &\approx \left[\frac{2R_e}{(\omega R_e C_e)^2} + R_x \right] \left(1 + \frac{C_g}{C_e} \right) \\ &= R_x \left[1 + \frac{1}{(\omega C_e)^2 \frac{R_e}{2} R_x} \right] \left(1 + \frac{C_g}{C_e} \right) = R_x \left(1 + \frac{C_g}{C_e} \right) \left[1 + \left(\frac{\omega_{ex}}{\omega} \right)^2 \right], \end{aligned} \quad (6.27)$$

on

$$\omega_{ex} = \frac{1}{(2R_e R_x)^{1/2} \frac{C_e}{2}} = \left(\frac{2R_e}{R_x} \right)^{1/2} \omega_e. \quad (6.28)$$

A l'equació (6.27) es veu l'efecte dels elèctrodes a baixa freqüència, que fa augmentar R fins arribar a una freqüència ω_{ex} , tal com passava a l'apartat anterior i al capítol 2. Atès que ω_{ex} és la mateixa que a l'apartat anterior, es pot concloure que la presència de C_g no modifica el valor de ω_{ex} . Les expressions (6.27) i (6.5) són similars i coincidirien si $C_g = 0$, l'única diferència és que a (6.27) hi ha el factor $1 + C_g/C_e$, independent de la freqüència, que augmenta el valor de R fins i tot quan $\omega \gg \omega_{ex}$, que és la zona plana de (6.27). Amb

elèctrodes de contacte directe (capítol 4) això no s'observava perquè la relació C_g/C_e era molt petita. Però aquest factor ja va aparèixer al mesurar amb quatre elèctrodes de contacte directe, que segons s'ha obtingut al capítol 5, lluny d'evitar l'efecte de l'acoblament a terra, introdueixen una desviació independent de la freqüència a la zona plana del mòdul, que depèn de la relació entre la capacitat a terra i la capacitat de l'elèctrode de mesura del corrent al terminal L. Aquesta desviació sistemàtica e independent de la freqüència augmenta amb la capacitat a terra, i s'observà perquè al mesurar bioimpedància en el cos humà, les capacitats a terra i de l'elèctrode de mesura de corrent són comparables.

A partir de R i C es pot calcular el factor D de Z mitjançant (6.25) i (6.27),

$$D \approx \omega RC = \omega \left[1 + \left(\frac{\omega_{ex}}{\omega} \right)^2 \right] \left(1 + \frac{C_g}{C_e} \right) R_x \frac{C_e}{2 + \frac{C_g}{C_e}} \Bigg|_{\omega \gg \omega_{ex}} \approx \omega \frac{1 + \frac{C_g}{C_e}}{1 + \frac{C_g}{2C_e}} R_x \frac{C_e}{2}. \quad (6.29)$$

Per tant, mentre segons (6.28) ω_{ex} no està afectada per C_g , D sí que depèn de l'acoblament a terra i això implica que la freqüència de mesura màxima per complir $D \ll 1$, també en dependrà. Aquesta freqüència és ara

$$\omega_{Dg} = \frac{1 + \frac{C_g}{2C_e}}{1 + \frac{C_g}{C_e}} \frac{1}{R_x \frac{C_e}{2}} = \frac{1 + \frac{C_g}{2C_e}}{1 + \frac{C_g}{C_e}} \omega_D. \quad (6.30)$$

El factor que multiplica ω_D és més petit que 1, i per tant $\omega_{Dg} < \omega_D$, de manera que l'interval de freqüències general de treball $\omega_e \ll \omega \ll \omega_c$ queda reduït a $\omega_{ex} \ll \omega \ll \omega_{Dg}$.

Tenint ja R i C , quan $D \ll 1$ podem utilitzar les aproximacions de $\text{Re } Z_{HL}$ i $\text{Im } Z_{HL}$ que ens donen les equacions (6.3) i (6.4), i substituint R i C dins l'expressió (6.3), s'obté

$$\text{Re } Z_{HL} \Big|_{D \ll 1} \approx R_x \frac{1 + \frac{C_g}{C_e}}{\left[1 + \left(2 + \frac{C_g}{C_e} \right) \frac{C_{hl}}{C_e} \right]^2} \left[1 + \left(\frac{\omega_{eg}}{\omega} \right)^2 \right] \quad (6.31)$$

on

$$\omega_{eg}^2 = \frac{1}{R_x \left(\frac{C_e}{2}\right)^2} \left[\frac{1}{2R_e} + \frac{1}{R_{hl}} \frac{\left(2 + \frac{C_g}{C_e}\right)^2}{4 \left(1 + \frac{C_g}{C_e}\right)} \right]. \quad (6.32)$$

L'equació (6.31) inclou tots els efectes de les capacitats paràsites (entorn electromagnètic) i tots els efectes de la resistència de pèrdues del dielèctric de l'elèctrode, R_e , i de la resistència de fuites (humitat i impureses) entre els elèctrodes, R_{hl} . Com passava a l'apartat anterior i al capítol 2, aquestes resistències només afecten a baixa freqüència. El seu efecte és un augment de la part real de la impedància quan es va disminuint la freqüència de treball i ens anem apropant a ω_{eg} (el subíndex "g" és perquè aquesta freqüència depèn de la C_g). A diferència del que passa amb ω_{ex} , ω_{eg} sí que està afectada per l'acoblament a terra, o més ben dit, per la relació C_g/C_e . Però segons l'expressió (6.32), el factor que depèn de la relació C_g/C_e (F_{hl} , Taula 6.1 columna 2) només afecta a la R_{hl} , no la R_e . Si es considera R_e infinita, tenim $\omega_{eg} = F_{eg}\omega_{ep}$, on ω_{ep} és la freqüència que caracteritza el comportament a baixa freqüència de la $Re Z_{HL}$ quan $C_g = 0$, i F_{eg} és un factor descrit a la Taula 6.1 i que té els valors indicats a la columna 3. Com més augmenta C_g/C_e , més augmenta ω_{eg} respecte a ω_{ep} , però aquest augment és poc significatiu; quan $C_g = C_e$ (i això pot ser un cas molt extrem), l'augment de ω_{eg} respecte a ω_{ep} seria un 6,1 %. Els valors més habituals de C_g/C_e , possiblement estaran entre 0,2 i 0,4, i per tant, els augments de ω_{eg} respecte a ω_{ep} seran poc significatius: del 0,4 al 1,4 %. Això és degut a que la disminució del factor F_{hl} que multiplica R_{hl} és també poc significativa (columna 2, Taula 6.1). Aquests augments de la freqüència ω_{eg} quan augmenta C_g/C_e són augments molt petits i com que això succeeix a baixes freqüències i l'instrument de mesura té una resolució limitada quan es mesuren parts imaginàries molt més grans en valor absolut que les parts reals, llavors aquests augments poden quedar emmascarats per la resolució de l'instrument.

A l'equació (6.30), en canvi, ω_{Dg} disminueix quan augmenta C_g/C_e i, si es compara el seu valor amb ω_D ($C_g = 0$), s'observa que ara els canvis són més significatius (columna 4, Taula 6.1). Per a valors de C_g/C_e entre 0,2 i 0,4, la disminució de freqüència va del 8,3 % al 14,3 %, i arriba a un 25 % quan $C_g = C_e$. Cal advertir, que ω_{Dg} és el límit superior de l'interval de freqüències de treball, i les aproximacions de les equacions que s'han desenvolupat podrien no ser vàlides per sobre d'aquesta freqüència.

Taula 6.1. Factors que afecten R_{hl} , ω_{eg} (2) i ω_{Dg}

C_g/C_e	F_{hl} (1)	F_{eg} (2)	F_D (3)
0	1	1	1
0,2	0,992	1,004	0,917
0,3	0,983	1,009	0,885
0,4	0,972	1,014	0,857
0,5	0,960	1,021	0,833
0,6	0,947	1,028	0,813
0,7	0,933	1,035	0,794
1,0	0,889	1,061	0,750

$$(1) F_{hl} = 4 \left(1 + \frac{C_g}{C_e} \right) / \left(2 + \frac{C_g}{C_e} \right)^2 ; \text{ Terme que multiplica } R_{hl} \text{ a } \omega_{eg} \text{ (6.32)}$$

$$(2) F_{eg} = (F_{hl})^{-1/2} = \left(1 + \frac{C_g}{2C_e} \right) / \left(1 + \frac{C_g}{C_e} \right)^{1/2} ; \text{ Terme que augmenta } \omega_{eg} \text{ respecte } \omega_{ep} \text{ quan } R_e = \infty$$

$$(3) F_D = \left(1 + \frac{C_g}{2C_e} \right) / \left(1 + \frac{C_g}{C_e} \right) ; \text{ Terme que disminueix } \omega_{Dg} \text{ respecte } \omega_D \text{ (6.30)}$$

Per tant, l'interval de freqüències de treball serà $\omega_{eg} \ll \omega \ll \omega_{Dg}$ i, dins d'aquest interval, la part real de la impedància s'aproxima com

$$\text{Re } Z_{HL} |_{D \ll 1} \approx R_x \frac{1 + \frac{C_g}{C_e}}{\left[1 + \left(2 + \frac{C_g}{C_e} \right) \frac{C_{hl}}{C_e} \right]^2} \quad (6.33)$$

de manera que no depèn de la freqüència, és a dir, $\text{Re } Z_{HL}$ és plana dins l'interval $\omega_{eg} \ll \omega \ll \omega_{Dg}$. L'efecte de C_g (numerador de (6.33)) fa augmentar la part real de la impedància i l'efecte de C_{hl} (denominador) la fa disminuir. Però C_g també és al denominador, i com més augmenta C_g més pes tindrà el denominador i l'augment de la part real no serà proporcional a $1 + C_g/C_e$, és a dir, l'efecte de C_g no és lineal. Per tant, si C_{hl} es manté constant i augmenta C_g , augmentarà el numerador, però també augmentarà el denominador, i com més augmenti C_g hi haurà més efecte de disminució causat per C_{hl} . Si aquestes capacitats paràsites varien durant la mesura de la part real de Z_{HL} , llavors serà molt difícil determinar R_x . Cal tenir en compte que C_{hl} i C_g depenen de la distància al "pla" de terra o de la distància de totes les masses conductores a prop del volum conductor que s'està mesurant, incloent-hi la persona que fa la mesura.

Si les capacitats C_{hl} i C_g és fixen, per exemple apantallant (blindant) la mostra, atès que aquestes capacitats paràsites depenen només d'un factor geomètric, es podrien incloure

dins la constant de cel·la del sistema de mesura, considerant que aquesta consta dels elèctrodes i el recipient del material,

$$\operatorname{Re} Z_{\text{HL}}(\omega) \Big|_{D \ll 1} \approx \frac{1}{\sigma} \frac{k_{\text{cell}} \left(1 + \frac{C_g}{C_e} \right)}{\left[1 + \left(2 + \frac{C_g}{C_e} \right) \frac{C_{\text{hl}}}{C_e} \right]^2} = \frac{k'_{\text{cell}}}{\sigma} \quad (6.34)$$

i com que C_e en principi també és fixa, l'efecte d'aquestes capacitats paràsites es podria incloure dins d'una constant de cel·la equivalent k'_{cell} . Per tant, és podria obtenir la conductivitat elèctrica del material mesurant la part real de la impedància dins l'interval de freqüències $\omega_{\text{eg}} \ll \omega \ll \omega_{Dg}$ (zona plana), si prèviament s'ha calibrat la cel·la i s'ha obtingut k'_{cell} .

Si s'augmenta la freqüència de treball, la part real disminuirà quan ens apropem a ω_c , però treure una expressió compacta de $\operatorname{Re} Z_{\text{HL}}$, com s'ha fet amb (6.16) a l'apartat anterior, serà molt difícil. Només cal veure la complexitat del circuit de la fig. 6.9 i a més hi ha la influència de C_{hl} . Al capítol 4 s'ha comprovat que l'efecte de C_g és que la resposta de la impedància cau a freqüències més elevades de les que s'esperaria degut a ω_c , i a l'apartat anterior s'ha vist que l'efecte de C_{hl} és que la resposta de la impedància cau a freqüències més baixes que ω_c (ω_p). Per tant, podrà haver-hi efectes de compensació produïts per les capacitats paràsites.

La part imaginària per al mateix interval de freqüències de treball per obtenir R_x , $\omega_{\text{eg}} \ll \omega \ll \omega_{Dg}$, és

$$\operatorname{Im} Z_{\text{HL}} \Big|_{D \ll 1} \approx \frac{-1}{\omega \left(C_{\text{hl}} + \frac{C_e}{2 + \frac{C_g}{C_e}} \right)}. \quad (6.35)$$

Per tant, la capacitat equivalent sèrie entre H i L a freqüències baixes respecte a ω_{Dg} , $C_{\text{HL}} = C_{\text{LF}}$, és

$$C_{\text{LF}} \approx C_{\text{hl}} + \frac{C_e}{2 + \frac{C_g}{C_e}}. \quad (6.36)$$

La mesura de C_{LF} podria donar una estimació de C_g , si es coneixen C_e i C_{hl} . Sabent aquestes tres capacitats, es podria estimar el valor de R_x de la mesura de la part real de la impedància entre H i L aplicant l'equació (6.33).

Per trobar la capacitat equivalent sèrie entre H i L a freqüències altes respecte a ω_c , $C_{HL} = C_{HF}$, primer s'aproximarà l'equació (6.20) per a $\omega \gg \omega_c$ i dóna

$$Z(j\omega) \approx \frac{2 + \frac{C_g}{C_e}}{j\omega C_e} + \frac{1 + \frac{C_g}{C_e} + \alpha(1-\alpha)\frac{C_g}{C_x}}{j\omega C_x}. \quad (6.37)$$

Llavors, C_{HF} quan $\omega \gg \omega_c$ és

$$C_{HF} \approx C_{hl} + \left[\frac{1}{\frac{C_e}{2 + \frac{C_g}{C_e}}} + \frac{1}{\frac{C_x}{1 + \frac{C_g}{C_e} + \alpha(1-\alpha)\frac{C_g}{C_x}}} \right]^{-1}. \quad (6.38)$$

Ara el circuit equivalent de la impedància entre H i L són les cinc capacitats en sèrie de la fig. 6.9 i totes en paral·lel amb la capacitat C_{hl} , fig. 6.10. Combinant totes aquestes capacitats s'obté la capacitat equivalent C_{HF} , però extreure la informació de C_x de la mesura de C_{HF} serà difícil perquè s'ha de tenir en compte que depèn de la pròpia capacitat C_x (efecte no lineal), de l'acoblament a terra C_g , de la capacitat entre elèctrodes C_{hl} , del paràmetre α , de la capacitat de cada elèctrode C_e , i dels possibles efectes de propagació.

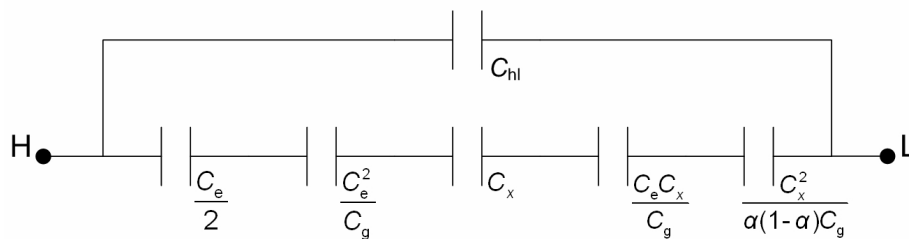


Figura 6.10. Model de la impedància elèctrica entre H i L quan $\omega \gg \omega_c$.

6.2. Verificació experimental

Per validar experimentalment els anàlisis anteriors i les aproximacions que s'hi han introduït, s'han construït tres cel·les de conductivitat i s'han definit diversos procediments de mesura adients.

6.2.1. Disseny dels experiments

6.2.1.1. Cel 1es

Cel 1a 1: Consta d'una xeringa de polipropilè de 100 ml Omnifix® (B. Braun Melsungen AG, Alemanya), de 30.6 mm de diàmetre extern i 28.0 mm d'intern. Els elèctrodes són dos anells de coure enganxats a la paret exterior de la xeringa. L'amplada dels anells és de 25 mm, la distància entre els seus extrems interiors és 50 mm, i els cables de connexió tenen una longitud de 90 mm, fig. 6.11.

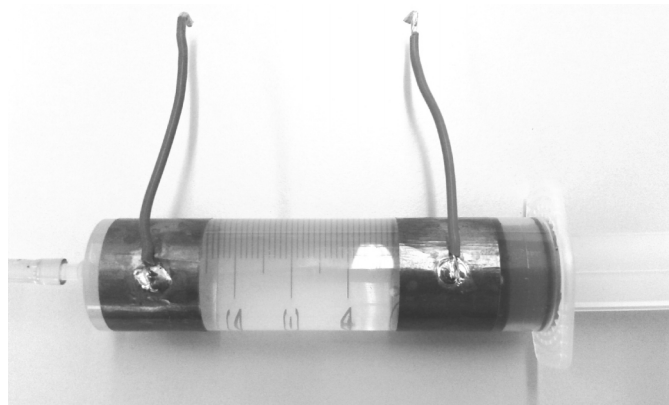


Figura 6.11. Cel 1a 1, xeringa amb anells de coure enganxats a la part exterior del plàstic.

Cel 1a 2: Consta del mateix model de xeringa i un elèctrode capacitiu igual (anell de coure de 25 mm d'amplada) col·locat al centre de la xeringa. Ara el segon elèctrode és de contacte directe, d'acer inoxidable 316 i de forma semiesfèrica de 6 mm de diàmetre, com els del capítol 4. Aquest elèctrode de contacte directe està col·locat a un extrem de la xeringa, fig. 6.12. Els cables de connexió tenen una longitud d'uns 90 mm.

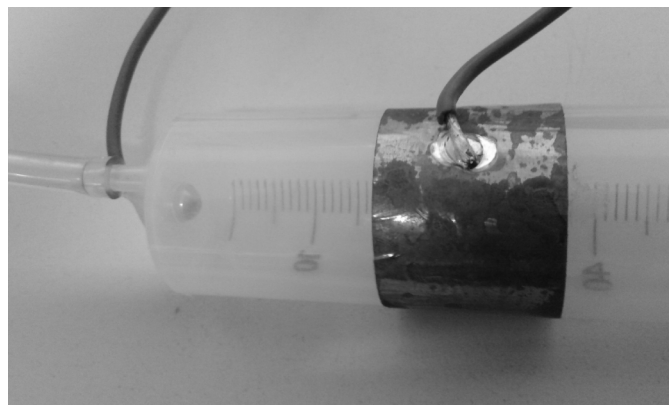


Figura 6.12. Cel 1a 2, xeringa amb un anell de coure enganxat a la part exterior del plàstic i un elèctrode de contacte directe.

Cel 1a 3: Consta d'un tub de PVC de 32.2 mm i 26.8 mm de diàmetre exterior i interior, respectivament, d'uns 25 cm de longitud. Els elèctrodes són dos anells de coure de 47 mm

d'amplada separats de 10 mm i els cables de connexió tenen una longitud d'uns 60 mm i estan trenats, fig. 6.13.



Figura 6.13. Cel·la 3, tub de PVC amb anells de coure enganxats a la part exterior del plàstic.

6.2.1.2. Banda de freqüències de treball, instruments i materials utilitzats

La banda de freqüències de mesura que interessa va des de 1 kHz fins a 100 MHz. S'ha utilitzat un analitzador d'impedància de precisió Agilent 4294A que té una incertesa relativa al mesurar mòdul i capacitat de $\pm 1\%$ a freqüències menors de 10 MHz, i $\pm 3\%$ a freqüències a partir de 10 MHz (Agilent 2008b). Puntualment, també s'ha utilitzat un mesurador d'impedància de baix cost alimentat a piles, Agilent U1733C, que té una incertesa del $1\% + 20$ comptes a 10 kHz i del $2,5\% + 10$ comptes a 100 kHz (Agilent 2014). Atès que aquestes incerteses són millors que les derivades d'altres factors que intervenen en els resultats, en general no ha calgut considerar-les.

Els materials utilitzats per als experiments són aigua i metanol a temperatura de laboratori. S'han utilitzat dues mostres d'aigua de conductivitats diferents, una de $\sigma_{25} = 1,0$ dS/m i l'altra de $\sigma_{25} = 0,01$ dS/m (conductivitats a la temperatura de referència de 25,0 °C). La conductivitat s'ha mesurat amb un conductímetre WTW model Multi 340i i sonda Tetracon® 325. La incertesa de la mesura és $\pm 0,5\%$ de la lectura ± 1 compte per la conductivitat i del $\pm 0,1$ °C per la temperatura (WTW 2004). La mesura de la conductivitat del metanol amb el conductímetre WTW dona $\sigma_{25} = 0,015$ dS/m; aquesta mesura és només una estimació de la conductivitat real del metanol perquè el conductímetre està dissenyat per mesurar aigua i no metanol (WTW 2004; UNE EN 27888 1993) i, per tant, pot ser que la incertesa en la mesura del metanol sigui més gran que la especificada pel fabricant per a

l'aigua. Les temperatures de les mostres eren de 16 °C i 22 °C, segons l'experiment (uns experiments s'han fet a l'hivern i d'altres a la primavera). El coeficient de temperatura de la conductivitat per a l'aigua és del 2 %/K (ASTM D 1125-95 2007); llavors la conductivitat a 16 °C i a 22 °C és de 0,82 dS/m i 0,94 dS/m, respectivament, per a la mostra de $\sigma_{25} = 1,0$ dS/m, i de 0,0082 dS/m i 0,0094 dS/m, respectivament, per a la mostra de $\sigma_{25} = 0,01$ dS/m. La permitivitat relativa de l'aigua a 16 °C és de 81,6 i a 22 °C és de 79,5 (Von Hippel 1954; Stogryn 1971), i per tant la freqüència característica respectiva ($f_c = \sigma / (2\pi\epsilon_0\epsilon_r)$) de cada mostra d'aigua i per a cada temperatura és 18,1 MHz (0,82 dS/m) de 21,3 MHz (0,94 dS/m), 181 kHz (0,0082 dS/m) i 213 kHz (0,0094 dS/m), per tant una mica inferiors a les de la Taula 2.2, que corresponen a aigua a 25 °C.

6.2.1.3. Procediments de mesura

Procediment “pla de terra”: Per veure la influència que té l'acoblament a terra (C_g) en la mesura d'impedància, la cel·la 1 es col·loca damunt d'un pla de coure de 305 mm de llargada per 227 mm d'amplada, i aquest pla es connecta a la coberta de l'instrument, que està connectada a terra, fig. 6.14. La xeringa es posa successivament a diferents altures respecte al pla de terra: com més a prop del pla més gran serà l'acoblament a terra des del volum de la xeringa que hi ha entre els elèctrodes. Les tres altures b des de la part de baix de la xeringa sobre el pla de terra són 52 mm, 8 mm i 1,7 mm. La b més petita és el gruix d'una làmina de metacrilat de 1,7 mm que separa la xeringa del pla perquè altrament els anells de coure (elèctrodes) es curtcircuitarien al tocar el pla. El líquid és 1,3 mm més alt degut al gruix del plàstic de la xeringa.

Procediment “cilindre”: Dissenyat per evitar els efectes de l'acoblament a terra i veure la influència d'altres efectes com ara els provocats per la impedància de fuites (efectes de la capacitat paràsita entre elèctrodes C_{hl} i de la resistència de fuites entre elèctrodes R_{hl}). La xeringa (cel·la 1) es col·loca dins d'un cilindre de secció ovalada de 30 cm de longitud, 17 cm de diàmetre horitzontal i 15 cm de diàmetre vertical. El cilindre és de tela metàl·lica i la tela té un quadre de 7 mm de costat, fig. 6.15. Aquest cilindre està connectat al terminal H de l'analitzador 4294A. Les posicions de la xeringa dins al cilindre són posició #1 que correspondrà al màxim valor de C_{hl} (fig. 6.16 (a)) i posició #2 que correspondrà al valor de C_{hl} molt menor que el màxim (fig. 6.16 (b)). A la posició #2 es consideren dues situacions: la posició #2 (sec) i la posició #2 (humit). La primera situació (sec) és deixant la xeringa a la humitat ambient mentre que en la segona situació (humit) es provocarà un canvi d'humitat ambient, tirant el baf (bufant-li vapor a través de la tela metàl·lica), acció que

provoça la condensació de vapor a la superfície externa de la xeringa, entre mig dels elèctrodes.

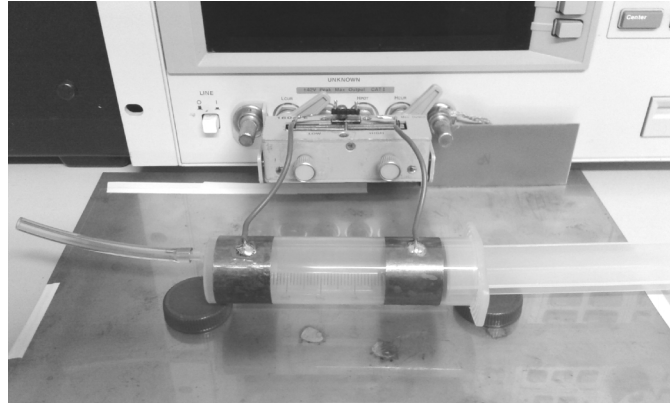


Figura 6.14. Procediment “pla de terra”, per determinar els efectes de la capacitat paràsit a terra quan es mesura la impedància de líquids (per determinar les seves propietats elèctriques) amb dos elèctrodes capacitius i usant un analitzador d'impedància comercial basat en un pseudo-pont.

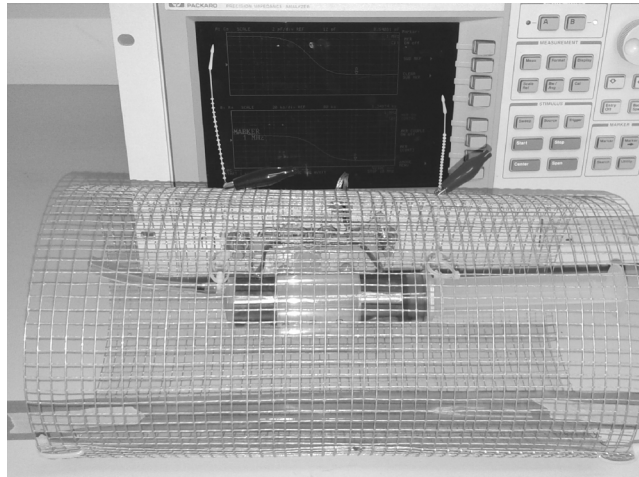


Figura 6.15. Procediment “cilindre”, per determinar els efectes de la capacitat paràsit entre elèctrodes i evitar els efectes de l'acoblament a terra, quan es mesura la impedància de líquids amb dos elèctrodes capacitius i usant un analitzador d'impedància comercial basat en un pseudo-pont.

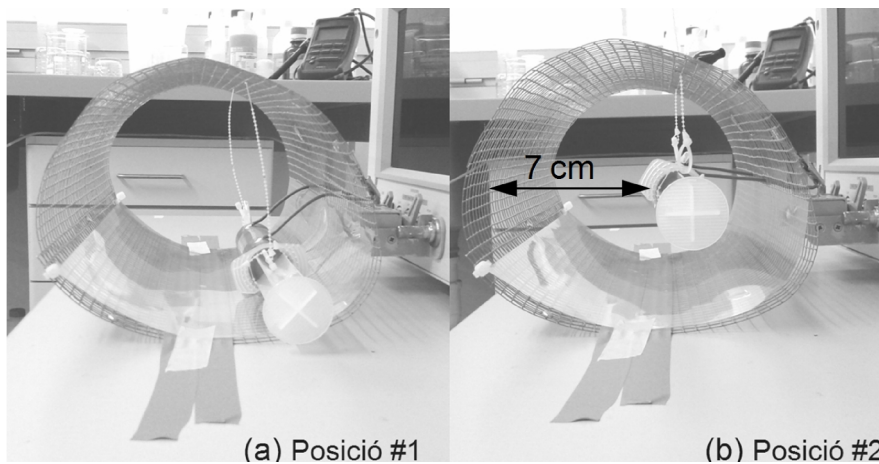


Figura 6.16. Posicions de la xeringa dins del cilindre.

6.2.2. Resultats experimentals i discussió

6.2.2.1. Mesures preliminars: mesura del mòdul i de la fase de la impedància amb el procediment “pla de terra”

Primer s'ha mesurat el mòdul $|Z_{HL}|$ i la fase $\varphi(Z_{HL})$ a les tres altures h de la xeringa (cel·la 1) respecte al pla de terra, per analogia a les mesures fetes al capítol 4 amb elèctrodes de contacte directe. La mostra d'aigua era la de conductivitat $\sigma_{25} = 0,01$ dS/m i temperatura 22 °C.

La figura 6.17 mostra $|Z_{HL}|$ per cada valor de h , i representat segons dues escales logarítmiques. S'observa que la component capacitiva de la impedància domina dins tot l'interval de freqüències de mesura i que una mica per sobre dels 100 kHz ($f_c \approx 213$ kHz) hi ha una inflexió, que és deguda a la part resistiva de Z_x (R_x). Per sota de 50 kHz, el valor del mòdul està entre 1 M Ω i 10 M Ω , i les tres corbes, que mostren una evolució que correspon a una capacitat, es separen una mica entre sí: A 10 kHz $|Z_{HL}|$ val 956 k Ω a 52 mm, 993 k Ω a 8 mm i 1047 k Ω a 1,7 mm. Aquest augment de la impedància amb l'augment de C_g és degut a l'efecte inductiu, resistiu i capacitiu “aparent”. Per sobre dels 500 kHz les corbes també tenen una tendència capacitiva i també es distingeixen les tres corbes. A 1 MHz $|Z_{HL}|$ val 33 k Ω a 52 mm, 36 k Ω a 8 mm i 40 k Ω a 1,7 mm. A alta freqüència, doncs, l'efecte de C_g és més evident tal com s'esperava. Gràficament, la corba per sota de 50 kHz correspon a una capacitat equivalent més gran que la representada per damunt de 500 kHz perquè a baixa freqüència ($\omega \ll \omega_c$) només hi intervenen les capacitats de les subxarxes A i B de la fig. 6.9, mentre que a alta freqüència ($\omega \ll \omega_c$) hi intervenen les cinc capacitats de la fig. 6.9.

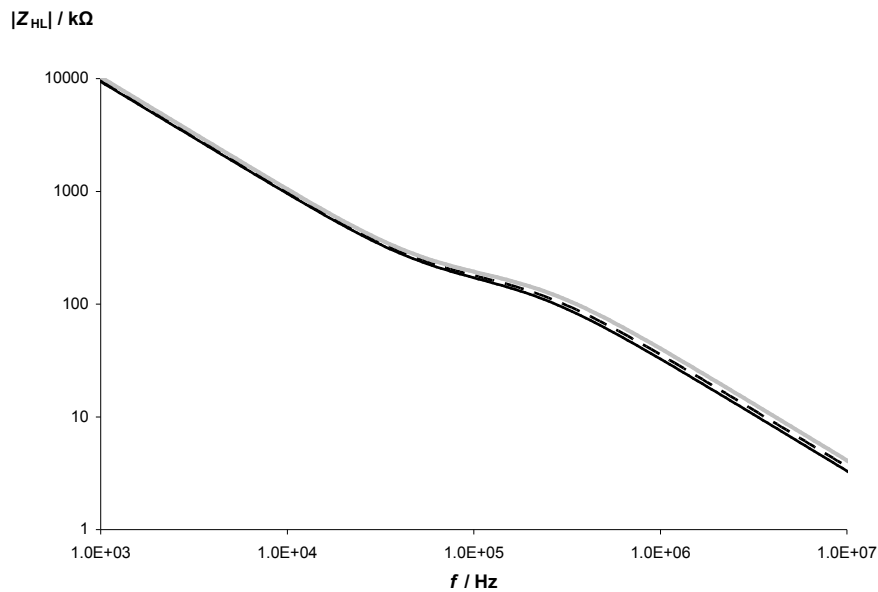


Figura 6.17. Mòdul de Z_{HL} per a aigua (0,01 dS/m) mesurada amb dos elèctrodes capacitius. L'altura de la xeringa sobre el pla de terra era: 52 mm (línia negra contínua), 8 mm (línia negra discontinua) i 1,7 mm (línia gris contínua).

La fig. 6.18 correspon la fase de Z_{HL} , que també augmenta al fer-ho l'acoblament a terra. A baixes i a altes freqüències, la fase tendeix a -90° , tal com correspon a un comportament capacitiu. Per tant, la tendència sempre és l'augment de la impedància i de la fase amb l'augment de C_g , tal com s'esperava.

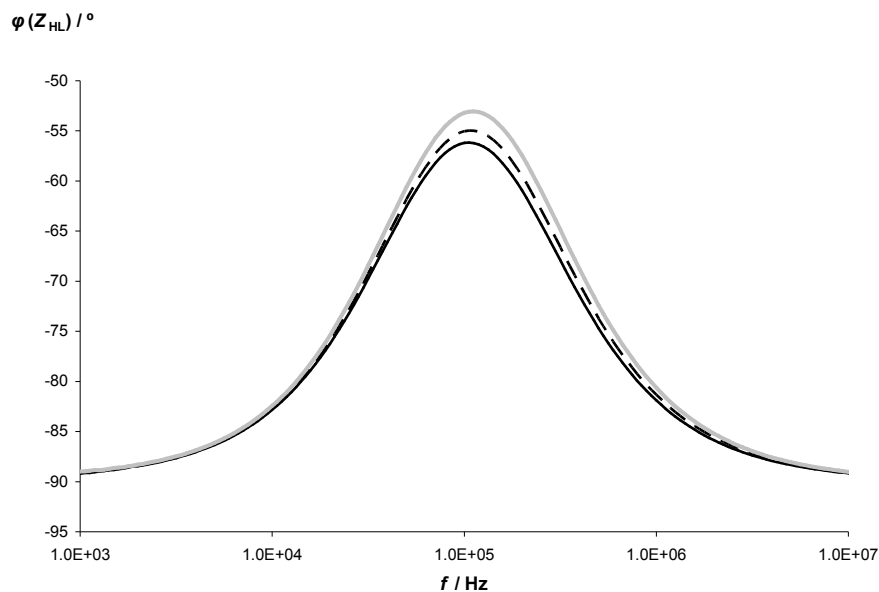


Figura 6.18. Fase de Z_{HL} per a aigua (0,01 dS/m) mesurada amb dos elèctrodes capacitius. L'altura de la xeringa sobre el pla de terra era: 52 mm (línia negra contínua), 8 mm (línia negra discontinua) i 1,7 mm (línia gris contínua).

Tal com predeia l'anàlisi teòric, el mòdul de la impedància de l'aigua queda "emascarat" per la impedància capacitiva dels elèctrodes, que és la impedància que domina i aquest fet fa

difícil poder extreure la informació de la conductivitat de l'aigua (no hi ha cap zona plana). Això justifica que a l'estudi teòric es proposi mesurar la part real de la impedància i fer-ho a unes freqüències prou baixes per evitar els problemes de propagació.

6.2.2.2. Estimació experimental de la capacitat dels elèctrodes C_e , i de les capacitats paràsites: la capacitat entre elèctrodes C_{hi} i la capacitat d'acoblament a terra C_g

De l'anàlisi teòric es dedueix la necessitat de conèixer C_e , C_g i C_{hi} , per poder extreure el valor de R_x de les mesures de la part real de la impedància.

La primera mesura que s'ha de fer és la capacitat que hi ha entre els elèctrodes amb la xeringa buida. S'ha mesurat la capacitat de la cel·la 1 amb l'analitzador Agilent 4294A a una freqüència de 1 MHz i sense cap pla de terra (només la pròpia coberta de l'instrument), i s'ha obtingut 0,7 pF. Fent el mateix amb el mesurador U1733C a una freqüència de 100 kHz, dóna 1,1 pF. La diferència pot ser deguda a que quan es mesura amb l'analitzador 4294A, la seva coberta fa de pla de terra i està a uns 10-12 cm dels elèctrodes, i la capacitat entre dos conductors disminueix quan s'apropa un pla de terra (Ramo *et al.* 1994). El mesurador U1733C en canvi està alimentat amb piles, no està connectat a terra i és molt més petit que l'analitzador, de manera que la seva influència en la mesura és menor.

El següent pas ha estat col·locar el pla de terra sobre la taula, davant l'analitzador 4294A, i mesurar a les tres diferents altures (procediment "pla de terra"). El resultat, amb la xeringa encara buida, és a la Taula 6.2. Fent el mateix amb l'U1733C però amb el pla de terra connectat al terminal de guarda de l'instrument, els valors són semblants i disminueixen quan la xeringa s'apropa al pla de terra, que és l'efecte esperat.

Taula 6.2. Valors de la capacitat (pF) entre els elèctrodes de la cel·la 1 (xeringa buida) mesurada amb dos instruments diferents

	$b = 52 \text{ mm}$	$b = 8 \text{ mm}$	$b = 1,7 \text{ mm}$
4294A	0,40	0,24	0,19
U1733C	0,40	0,22	0,18

El valor de C_{hi} serà menor que els de la Taula 6.2 i de les mesures anteriors sense pla de terra, 0,7 pF (4294A) i del 1,1 pF (U1733C). Quan la xeringa està buida i s'aplica una diferència de potencial entre els elèctrodes, les línies de camp elèctric (corrents de desplaçament) entre els dos elèctrodes aniran per fora i per dins de la xeringa. Quan la

xeringa conté aigua (o un altre material), els corrents de desplaçament (línies de camp) que van per dins de la xeringa es modelitzen mitjançant C_x i, per tant, quan la xeringa estigui plena de material, C_{hl} serà menor que els valors mesurats amb la xeringa buida.

Una simulació amb COMSOL de la cel·la 3, revela que la disminució de C_{hl} (buit) a C_{hl} (ple d'aigua) és del 50 % aproximadament. El raonament no és trivial perquè les línies de camp interior representen en termes de capacitat un 23 % de la capacitat total, de manera que la disminució “volumètrica” és del 77 %. Però al col·locar l'aigua a l'interior, com que té una permitivitat relativa de 80, augmenta la densitat de línies de camp a través d'ella i la disminució de la capacitat exterior de la xeringa es d'un 70 %. Per tant la disminució total de la capacitat entre elèctrodes quan hi ha aigua a l'interior respecte de la mesura en buit serà de l'ordre del 54 %. A efectes pràctics, una estimació ràpida es considerar que C_{hl} és un 50 % del valor mesurat en buit. Si es suposa que aquests resultats de la simulació de la cel·la 3 són aplicables a la cel·la 1, s'obté la Taula 6.3, que mostra l'estimació dels valors de C_{hl} per a la cel·la 1 a les tres distàncies al pla de terra.

Taula 6.3. Estimació de C_{hl} (pF) a partir de ponderar pel 50 % la mesura de la capacitat entre elèctrodes en buit (pF) de la cel·la 1

	$h = 52 \text{ mm}$	$h = 8 \text{ mm}$	$h = 1,7 \text{ mm}$
4294A (buit)	0,40	0,24	0,19
4294A (ple)	0,20	0,12	0,10

Per mesurar la capacitat dels elèctrodes C_e hem emprat primer la cel·la 2, en la que l'elèctrode de contacte directe, connectat al terminal L de l'analitzador 4294A, té una capacitat (C_{eL}) molt més gran que l'elèctrode capacitiu (C_{eH}). Com que les dues capacitats estan en sèrie, equació (E20) annex E, si $C_{eL} \gg C_{eH}$, la capacitat sèrie resultant dels tres primers termes de l'equació serà C_{eH} . La mesura cal fer-la sense cap pla de terra. Primer s'ha mesurat la capacitat entre elèctrodes en buit i s'ha obtingut 0,3 pF (a 1 MHz). Per tant, la C_{hl} de la cel·la 2 plena serà d'uns 0,15-0,2 pF. Després s'ha mesurat la capacitat entre elèctrodes amb la cel·la plena amb aigua bastant conductora (5 dS/m, $f_c \approx 100 \text{ MHz}$), de manera que a 10 kHz la influència de la R_x de l'aigua serà poca. S'ha obtingut de 35,1 pF, de manera que C_e és de l'ordre de 34,8-34,9 pF.

Per mesurar C_e a la cel·la 1, s'ha omplert amb aigua prou conductora (al voltant de 1 dS/m) i s'ha mesurat la capacitat entre els dos elèctrodes amb el mesurador U1733C, sense cap pla de terra a prop, ni connectat a l'instrument. El resultat a 10 kHz ha estat 17,9 pF a 10 kHz.

Com que la capacitat en buit de la cel·la 1 mesurada amb U1733C és de 1,1 pF, l'estimació de C_{hl} serà de 0,5-0,6 pF. Per tant, com que al mesurar dos elèctrodes en sèrie s'obté $C_e/2 \approx 17,3-17,4$ pF, cada elèctrode té $C_e \approx 34,6-34,8$ pF, que són valors similars als obtinguts amb la cel·la 2.

Considerant $C_e \approx 34,8$ pF i els valors de C_{hl} de l'última fila de la Taula 6.3, es pot mesurar la capacitat entre elèctrodes C_{HL} de la cel·la 1 a baixa freqüència (C_{LF}), per estimar C_g a partir de l'equació (6.26) i mitjançant el procediment "pla de terra" (tres altures respecte al pla de massa) i l'anàlitzador d'impedància 4294A. Les mesures s'han fet amb la cel·la plena de aigua de 0,01 dS/m a 1 kHz, aigua d'1 dS/m a 10 kHz, i amb metanol a 10 kHz.

Taula 6.4. Valors de C_{HL} (C_{LF} equació(6.36)) i C_g (pF) cel·la 1

	$b = 52$ mm	$b = 8$ mm	$b = 1,7$ mm
C_{HL} aigua 0,01 dS/m	16,9	16,3	15,4
C_{HL} aigua 1 dS/m	16,9	16,3	15,4
C_{HL} metanol	17,0	16,4	15,4
C_g	3,1	5,5	9,8

La Taula 6.4 mostra que el valor de C_{HL} a baixa freqüència ($\omega \ll \omega_c$) disminueix quan augmenta C_g , que augmenta la impedància mesurada entre H i L. Els valors de C_{HL} obtinguts a baixa freqüència per a l'aigua i per al metanol són iguals, i això vol dir que C_e és independent del material que hi hagi dins la xeringa. Segons es va veure al capítol 4 (4.2.2.1), el valor de C_g tampoc depèn del material. Els valors de C_g de la Taula 6.4 són aproximadament la meitat dels mesurats a la Taula 4.2 del capítol 4, potser perquè ara els anells que conformen els elèctrodes capacitius tapen (apantallen) part del cos de la xeringa que conté el líquid. Per això, mentre amb elèctrodes de contacte directe el volum acoblat a terra era quasi tot el volum de la xeringa (cilindre amb una altura de 100 mm), amb aquests elèctrodes capacitius el volum susceptible d'acoblament a terra s'ha reduït a la meitat, atès que els dos anells fan 25 mm d'amplada cadascun i la distància entre els anells és de 50 mm. En qualsevol cas, aquestes mesures demostren que la suposició inicial que C_e i C_g en el cas d'elèctrodes capacitius són comparables, és certa.

6.2.2.3. Estudi experimental de l'efecte de la impedància de fuites: C_{hl} i R_{hl}

Per comprovar els resultats teòrics de l'apartat 6.1.1, on C_g s'exclou del circuit equivalent de la impedància mesurada, s'ha d'evitar l'acoblament a terra. Llavors es podran validar experimentalment els efectes de la capacitat entre elèctrodes C_{hl} i de la resistència de fuites R_{hl} . El procediment "cilindre", descrit a l'apartat 6.2.1.3, evita l'acoblament des del cos de la

xeringa a terra, perquè la cel·la està totalment envoltada per una tela metàl·lica connectada al potencial alt de l'analitzador d'impedància (terminal H de mesura). Si connectéssim la tela al terminal L també s'evitaria l'efecte de terra, però com que el terminal L és on es mesura el corrent, qualsevol corrent interferent podria distorsionar la mesura. Una vegada col·locada la xeringa dins del cilindre metàl·lic i connectat al terminal H, tota la malla passa a ser part de l'elèctrode H i això fa augmentar la capacitat paràsita entre H i L, C_{hl} . Aquest augment serà més gran quan la xeringa estigui més a prop de la tela.

La fig. 6.19 mostra la mesura de la part real de Z_{HL} per a una conductivitat de 0,01 dS/m. Al voltant d'1 kHz es veu l'efecte de ω_{ep} , que és l'augment de la part real quan la freqüència disminueix de 10 a 1 kHz. Aquest augment de la part real de la impedància a freqüències baixes el predeïa l'equació (6.9) i com que la capacitat de l'elèctrode és bastant petita ($C_e/2 \approx 17,4$ pF), encara que R_e sigui molt gran, atès que queda en paral·lel amb R_{hb} , i aquesta última pot ser molt més baixa que R_e segons la humitat i netedat de la superfície de la cel·la entre els elèctrodes, l'efecte de ω_{ep} s'acaba veient a freqüències relativament altes (1-10 kHz). Si s'agafa el valor de $\text{Re } Z_{HL}$ a 1 kHz dividit pel valor a 10 kHz (Taula 6.5) s'obté una relació de 1,33 per a la posició #1 (línia grisa contínua) i de 1,21 per a la posició #2 (sec) (línia negra contínua), valors que estan bastant a prop. També cal tenir en compte, tal com s'observa a la fig. 6.19, que a la zona propera a 1 kHz, les corbes tenen "soroll". Aquest "soroll" és degut a que al voltant de 1 kHz l'instrument no pot mesurar bé una part real que és molt més petita que la part imaginària. Les corbes de línia contínua es veuen "paral·leles" fins abans d'arribar a 100 kHz; aquest decalat entre gràfiques és degut al factor $(1 + 2C_{hl}/C_e)^2$ del denominador de (6.9), ja que entre la posició #1 i #2 s'ha variat C_{hl} . Si dividim el valor a 10 kHz (Taula 6.5) de la posició #2 (sec) per la posició #1 s'obté 1,52, relació entre la línia negra contínua i la línia grisa contínua de la fig. 6.19.

Taula 6.5. Mesures de la $\text{Re } Z_{HL}$ (k Ω) per a l'aigua de 0,01 dS/m.

f (kHz)	Posició #1	Posició #2 (sec)	Posició #2 (humit)
1	79,9	110,3	125,5
10	60,1	91,4	92,5

Al voltant de 100 kHz, les corbes de la fig. 6.19 comencen a baixar per l'efecte de ω_p ($2\pi f_p$), equació (6.16). Si s'agafa el valor de $\text{Re } Z_{HL}$ a 10 kHz com a referència d'una zona plana i es busca on disminueix (més o menys) a la meitat, es trobarà on és, més o menys, la freqüència del pol (f_p). Aquesta freqüència és de 91 kHz per a la posició #1 i de 120 kHz per a la posició #2 (sec). El valor teòric de la f_c per a 0,01 dS/m i 16 °C és de 181 kHz. Per

tant, es confirma que la freqüència del pol f_p depèn de C_{hl} : al passar de la posició #1 a la posició #2 (sec), C_{hl} disminueix i això fa que la f_p de la posició #2 sigui més a prop de f_c .

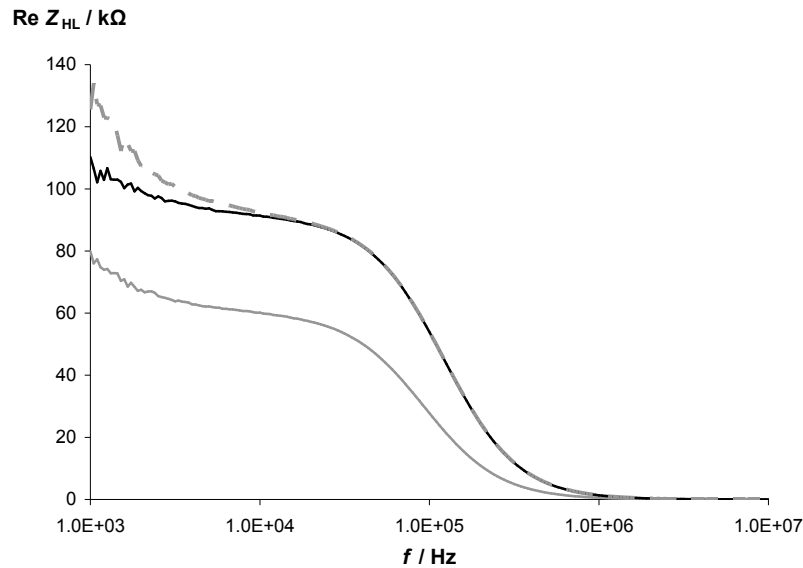


Fig. 6.19. Part real de la impedància entre H i L amb la cel·la 1 plena d'aigua a 0,01 dS/m i col·locada dins al cilindre conductor que apantalla la cel·la. Posició #1 (línia gris contínua), posició #2 (sec) (línia negra contínua) i posició #2 (humit) (línia gris discontinua).

Quan es bufa sobre la cel·la apantallada, posició #2 (humit) (línia gris discontinua, de la fig. 6.19), a baixa freqüència la part real de la impedància ha pujat perquè s'ha condensat vapor entre els elèctrodes i això ha fet disminuir R_{hl} , i la freqüència ω_{ep} puja, tal com prediu l'expressió (6.9). A 1 kHz, la part real augmenta de 110,3 kΩ (sec) a 125,5 (humit) (Taula 6.5), mentre que a 10 kHz el canvi és només de 91,4 kΩ (sec) a 92,5 (humit). L'efecte és més pronunciat a baixes freqüències degut a la influència de ω_{ep} . Les dues corbes de la posició #2 a partir de 25 kHz (fig. 6.19) gairebé coincideixen i el canvi entre (sec) i (humit) a f_p (o a una freqüència propera a f_p , perquè aquesta no la sabem en certesa), és menor de 0,2 %.

La fig. 6.20 mostra la capacitat equivalent sèrie entre H i L (C_{HL}) mesurada quan la cel·la 1 és plena d'aigua de conductivitat 0,01 dS/m. Quan es passa de la posició #1 a la #2 (sec), al voltant d'1 kHz hi ha una disminució clara de la capacitat sèrie equivalent $C_{HL} = C_{LF} \approx C_{hl} + C_e/2$ (equació (6.12) o (6.18)). Com que C_e no varia (34,8 pF), el canvi només pot ser degut a C_{hl} . Per tant, agafant els valors de C_{HL} a 1 kHz de la Taula 2 tenim, per a la posició #1, $C_{hl} \approx 8$ pF i per a la posició #2 (sec), $C_{hl} \approx 3,3$ pF. Hi ha un canvi de 4,7 pF entre les dues posicions. L'efecte de bufar entre els elèctrodes fa augmentar la C_{HL} en 0,2 pF (Taula 6.6) a baixa freqüència, perquè el vapor condensat augmenta la permitivitat entre els elèctrodes.

Tenint els valors de C_{hl} es recuperar el valor de R_x a partir dels valors de $\text{Re } Z_{HL}$ a 10 kHz (Taula 6.5). El terme $(1 + 2C_{hl}/C_e)^2$ val 2,13 a la posició #1 i 1,42 a la posició #2 i, per tant, resulta $R_x = 130 \text{ k}\Omega$ a la posició #1 i $R_x = 128 \text{ k}\Omega$ a la posició #2, valors que difereixen només un 1,5 %.

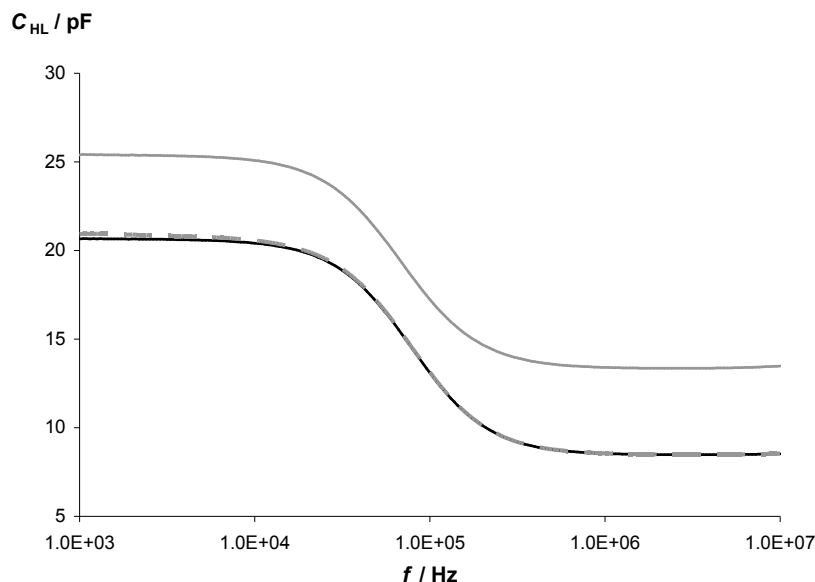


Fig. 6.20. Capacitat entre H i L amb la cel·la 1 plena d'aigua de 0,01 dS/m i col·locada dins el cilindre conductor. Posició #1 (línia gris contínua), posició #2 (sec) (línia negra contínua) i posició #2 (humit) (línia gris discontinua).

Com que $C_e/2 \approx 17,4 \text{ pF}$ i R_x és d'uns $130 \text{ k}\Omega$ per l'aigua menys conductora, la condició $2/\omega C_e \gg R_x$ per tenir $D \ll 1$, que també es pot formular en funció de la $\omega_D = (R_x C_e/2)^{-1}$, resulta $f_D \approx 70 \text{ kHz}$, que és més gran que la freqüència de mesura (10 kHz), de manera que pot semblar que no es compleix. Però, segons s'ha vist al capítol 2, la condició que realment s'ha de complir és $D^2 \ll 1$ (apartat 6.2.1.3). Com que $D = \omega/\omega_D = f/f_D \approx 0,14$ i $D^2 \approx 0,02 \ll 1$, la condició es compleix i les aproximacions de les equacions desenvolupades a l'apartat 6.1.1 són vàlides.

Taula 6.6. Mesures de la C_{HL} (pF) per a l'aigua de 0,01 dS/m.

f (kHz)	Posició #1	Posició #2 (sec)	Posició #2 (humit)
1	25,4	20,7	20,9
10	25,1	20,4	20,6

A prop dels 10 MHz, la diferència de C_{HL} entre les dues posicions de la cel·la és de 4,9 pF a la fig. 6.20, quan, si se suposa que C_e i C_x no varien d'una a l'altra posició, hauria de ser 4,7 pF. Aquesta petita desviació podria ser deguda a efectes de propagació d'ona electromagnètica, perquè la distància entre elèctrodes i la longitud d'ona del senyal que

injecta l'instrument a aquestes freqüències pot ser comparable, o podria ser una conseqüència de la incertesa de l'analitzador.

Al canviar la conductivitat de l'aigua a 1 dS/m, la nova C_{HL} és la presentada a la fig. 6.21. La baixada de capacitat se desplaça cap a alta freqüència, i ha desaparegut la zona plana que s'observava a la fig. 6.20 entre 1 MHz i 10 MHz. La conductivitat ha augmentat en dues dècades i els valors de C_{HL} a 100 MHz (Taula 6.7) amb aigua de 1 dS/m són comparables als valors amb aigua de 0,01 dS/m a 1 kHz (Taula 6.6). Això és degut a que la freqüència característica és directament proporcional a la conductivitat de l'aigua, i per tant es comprèn que hagi augmentat dues dècades. Per tant, els valors de C_{HL} a baixa freqüència són els mateixos per a les dues conductivitats.

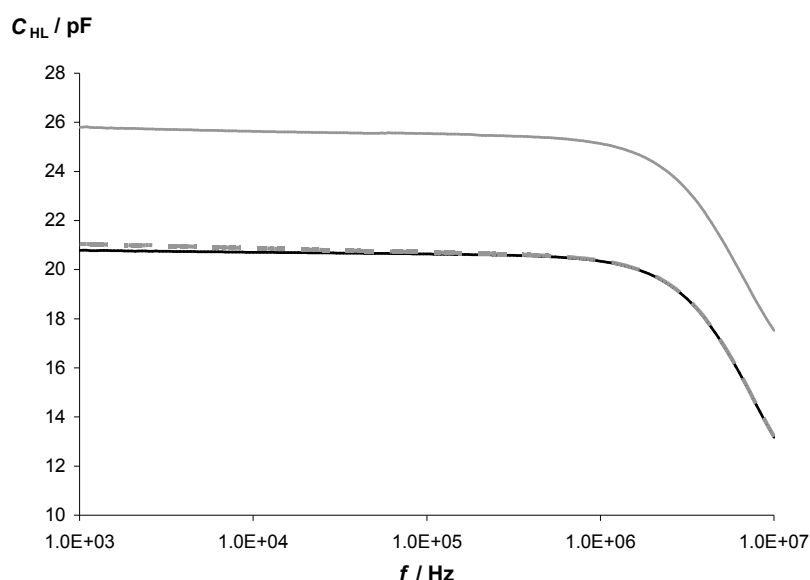


Fig. 6.21. Capacitat entre H i L amb la cel·la plena d'aigua a 1 dS/m i col·locada dins el cilindre conductor. Posició #1 (línia gris contínua), posició #2 (sec) (línia negra contínua) i posició #2 (humit) (línia gris discontinúta).

A les freqüències d'1 kHz i 10 kHz, l'efecte de condensació de vapor (bufant) es tradueix en un augment de C_{HL} de 0,2 pF (Taula 6.7, fig. 6.21 línia gris discontinúta). A 100 kHz i a 1 MHz l'augment només és de 0,1 pF, això podria ser degut a que l'escombrat que fa l'instrument és lent i potser la humitat dipositada entre els elèctrodes s'ha evaporat, o també a la incertesa de l'analitzador.

Taula 6.7. Mesures de la C_{HL} (pF) per a l'aigua de 1 dS/m.

f (kHz)	Posició #1	Posició #2 (sec)	Posició #2 (humit)
1	25,8	20,8	21,0
10	25,6	20,7	20,9
100	25,5	20,6	20,7
1000	25,1	20,3	20,4

La fig. 6.22 mostra la mesura de la part real de Z_{HL} per una conductivitat de 1 dS/m. Aquesta gràfica només conté les mesures amb la posició #2 (sec) i (humit). S'hi observa que l'efecte del pol ω_p comença a ser visible poc abans dels 10 MHz, mentre que a la fig. 6.19 començava abans dels 100 kHz (dos dècades abans), proporcional a la conductivitat, com ha de ser.

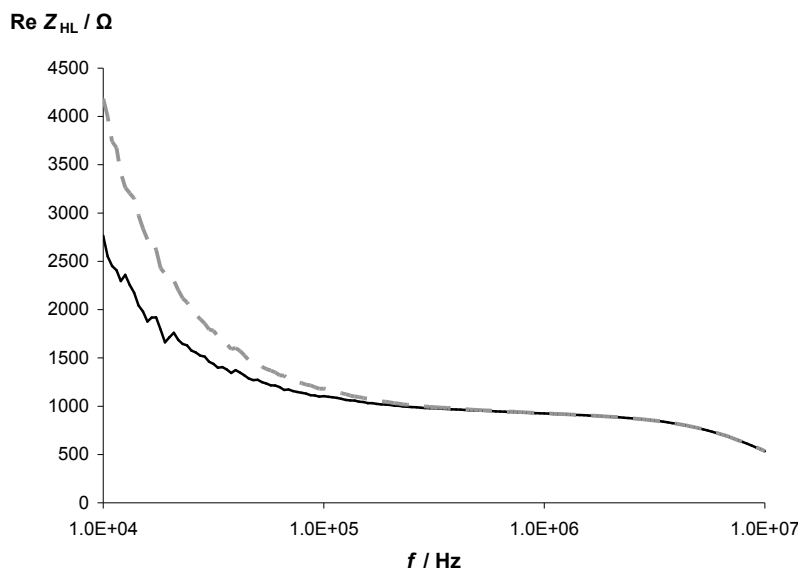


Fig. 6.22. Part real de la impedància entre H i L amb la cel·la 1 plena d'aigua de 1 dS/m i col·locada dins el cilindre conductor. Posició #2 (sec) (línia negra contínua) i posició #2 (humit) (línia gris discontinua).

Aquest experiment ha de permetre comprovar que l'efecte de reduir R_x (augmentant la conductivitat) serà un augment de la freqüència ω_p , perquè aquesta freqüència també depèn de R_x , equació (6.10). De la Taula 6.8, per a la situació (sec), el valor a la “zona plana” a 1 MHz és 1,19 vegades més petit que el valor a 100 kHz (resultat similar al que s'ha obtingut amb l'aigua a 0,01 dS/m que era 1,22), 2,98 vegades més petit que el valor a 10 kHz i 26,51 vegades més petit que el valor a 1 kHz. Al reduir R_x la part real de la impedància augmenta tal com prediuen les equacions (6.9) i (6.10).

Taula 6.8. Mesures de $\text{Re } Z_{HL}$ (Ω) per a l'aigua de 1 dS/m.

f (kHz)	Posició #1	Posició #2 (sec)	Posició #2 (humit)
1	-	2452	43525
10	-	2763	4183
100	796	1105	1183
1000	605	926	928

L'efecte del factor $(1 + 2C_{hl}/C)^2$ en el denominador de (6.9) també es pot comprovar amb els valors de la Taula 6.8 per a les dues posicions #1 i #2 (sec). Dividint el valor a 1 MHz de la posició #2 (sec) pel de la posició #1 s'obté 1,53, valor molt similar al que s'ha

obtingut per a l'aigua de 0,01 dS/m (que era 1,52). Això ens diu que la disminució de C_{hl} és la mateixa per a les dues aigües.

La condensació de vapor a la superfície de la xeringa, situació #2 (humit) (fig. 6.22), torna a fer augmentar la part real de la impedància a baixa freqüència, com era d'esperar. A 100 kHz es passa de 1105 Ω en (sec) a 1183 Ω en (humit), relació 1,07 (7 % de d'augment), però a 1 kHz es passa de 24552 Ω en (sec) a 43525 Ω en (humit), que és una relació de 1,77 (77 % d'augment).

S'ha demostrat, doncs, que col·locant una cel·la dins d'una pantalla metàl·lica s'evita l'acoblament a terra. Encara que es toqui la tela amb les mans, aquesta acció no afecta la mesura d'impedància. Per contra, al col·locar la pantalla (cilindre) augmenta C_{hl} , es passa d'una situació on C_{hl} val menys de 1 pF fora del cilindre, a valer entre 3,3 i 8 pF dins del cilindre. Aquest augment de C_{hl} causa fa que la freqüència característica del material baixi de valor, expressió de ω_p (6.15). Això escurça la part alta de l'interval de freqüències de mesura. Per altra banda, la humitat ambient i la brutícia acumulada a la superfície de la cel·la redueixen la resistència de fuites R_{hl} . Si baixa R_{hl} puja la freqüència ω_{ep} , i s'escurça la part baixa de l'interval de freqüències de mesura. Aquesta freqüència ω_{ep} depèn de l'equivalent de R_{hl} i R_e en paral·lel, i aquesta té un valor molt alt perquè representa les pèrdues del dielèctric. Per tant, l'equivalent paral·lel és proper a R_{hl} i només amb la humitat ambient ja deu ser prou baixa perquè augmenti la part real de la impedància a baixa freqüència. Un altre factor que fa variar ω_{ep} és R_{cs} , de manera que quan puja la conductivitat baixa ω_{ep} , i pot passar que per a conductivitats altes no hi hagi zona plana fins a freqüències molt elevades, on els errors per propagació d'ones comencen a ser importants.

6.2.2.4. Estudi experimental de l'efecte de l'acoblament a terra: C_g

Un cop comprovats experimentalment els efectes de la impedància de fuites, es va posar el pla de terra per tornar al procediment "pla de terra" i així poder avaluar què passa en la part real de la impedància i en la capacitat equivalent entre H i L quan varia l'acoblament a terra C_g .

La figura 6.23 és la part real de Z_{HL} per a l'aigua a 0,01 dS/m i a 22 °C. Es pot veure que quan augmenta la capacitat a terra C_g augmenta $\text{Re } Z_{HL}$. Als voltants dels 15 kHz hi ha la zona plana de la corba, a diferència del mòdul que era fortament capacitiu. Les tres corbes són paral·leles en aquesta zona, de manera que l'augment degut a C_g és independent de la freqüència, validant així l'equació (6.33). Els valors de la part real a 15 kHz són a la Taula

6.9. A les corbes es veu que l'augment de la part real a baixa freqüència és degut l'efecte de l'augment de ω_{eg} (ω_{ep} però afectada per C_g), equació (6.31), i que la resolució de l'instrument a aquesta banda de baixes freqüències és limitada. Als voltants de 100 kHz, les corbes comencen a disminuir per efecte de la freqüència característica del material. Probablement, al voltant de ω_c hi haurà els efectes inductius, resistius i capacitius provocats pel terme no lineal que depèn de Z_x , C_g i α , però ja s'ha dit abans que no s'analitzaria el que passa al voltant de ω_c . Amb elèctrodes capacitius no es detecta cap ressonància (ni punts singulars) com passava amb el cas d'elèctrodes de contacte directe. Les corbes de la $\text{Re } Z_{HL}$ per al metanol són molt similars a la fig. 6.23, i per tant no aporten nova informació.

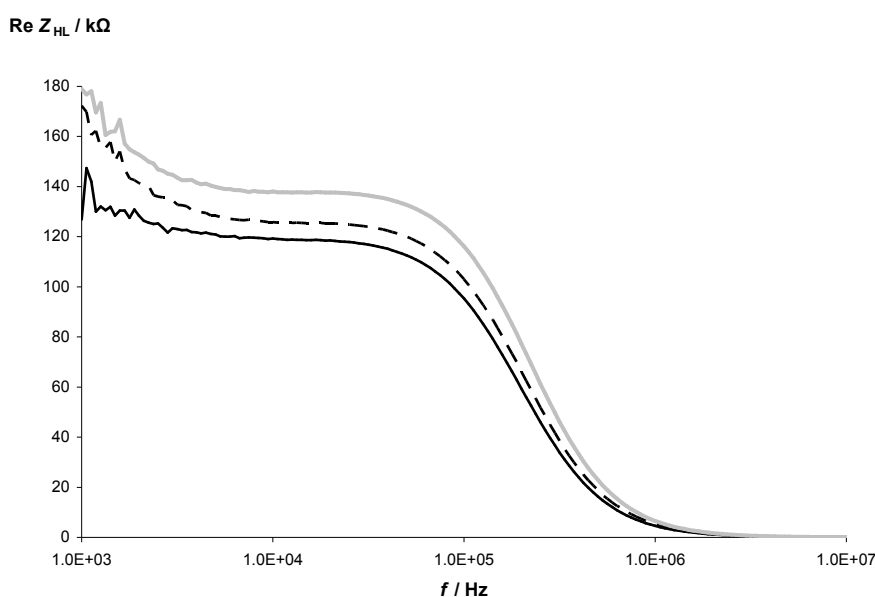


Figura 6.23. Part real de Z_{HL} per a aigua (0,01 dS/m) mesurada amb dos elèctrodes capacitius. L'altura de la xeringa sobre el pla de terra era: 52 mm (línia negra contínua), 8 mm (línia negra discontinua) i 1,7 mm (línia gris contínua).

Tenint en compte que els valors de C_e , C_{hl} i C_g estimats abans, es pot aplicar l'equació (6.33) i estimar de R_x , Taula 6.9. El resultat és $R_x = 110,5 \text{ k}\Omega$, amb una dispersió del 1,2 % per als diferents valors de C_g . Com que de la Taula 6.4 tenim el valor de C ($C_{HL} = C_{LF}$) i de la Taula 6.9 tenim el valor de R ($\text{Re } Z_{HL}$), es pot calcular $\omega_{Dg} = (RC)^{-1}$. En el pitjor cas, $R = 138 \text{ k}\Omega$ i $C = 16,9 - 0,2 = 16,7 \text{ pF}$, on s'ha descomptat el valor de C_{hl} , resulta $f_{Dg} \approx 69 \text{ kHz}$, $D = 15\text{kHz}/69 \text{ kHz} \approx 0,21$. Per tant, $D^2 \approx 0,05 \ll 1$, que és la condició per que les aproximacions per a les equacions (6.31) i (6.33) sigui vàlida.

Ara es pot comprovar si l'aproximació per passar de l'equació (6.23) a la (6.24) és vàlida, és a dir, que la impedància de la inductància residual, $\omega\alpha(1 - \alpha)R_x^2 C_g$ sigui negligible enfront de la capacitat $1/\omega C_e/(2 + C_g/C_e)$. Tenint en compte els valors següents $C_g \approx 9,8 \text{ pF}$,

$R_x \approx 110,5 \text{ k}\Omega$, $\alpha(1 - \alpha) = 0,25$, $C_e/(2+C_g/C_e) \approx 15,3 \text{ pF}$ i $\omega = 2\pi 10^4 \text{ rad/s}$, resulta $\omega\alpha(1 - \alpha)R_x^2 C_g \approx 1880 \text{ }\Omega$ i $1/\omega C_e/(2+C_g/C_e) \approx 1,04 \text{ M}\Omega$, això suposa que la inductància restaria part de la impedància del terme capacitiu i en comptes de ser $15,3 \text{ pF}$ serà $15,33 \text{ pF}$, és a dir, una desviació de només el $0,2 \%$. Per tant, l'aproximació de (6.24) és vàlida.

Taula 6.9. Mesures de $\text{Re } Z_{\text{HL}}$ ($\text{k}\Omega$) i R_x ($\text{k}\Omega$) per a l'aigua de $0,01 \text{ dS/m}$

	$b = 52 \text{ mm}$	$b = 8 \text{ mm}$	$b = 1,7 \text{ mm}$
$\text{Re } Z_{\text{HL}}(15 \text{ kHz})$	119	125	138
Estimació de R_x ($\text{k}\Omega$)	111,8	109,6	109,1
	$f_{Dg} \approx 69 \text{ kHz}$	$110,5 \pm 1.3$ (1,2 %)	$D \approx 0,05 \ll 1$
		$D \approx 0,21$	

Quan la conductivitat de l'aigua era $1,0 \text{ dS/m}$, a $22 \text{ }^\circ\text{C}$ la part real de Z_{HL} fou la de la fig. 6.24. La possible zona plana està situada al voltant de 1 MHz , però la corba no acaba de ser plana. Es veu l'augment de $\text{Re } Z_{\text{HL}}$ quan augmenta C_g , igual que l'aigua poc conductora, però tot desplaçat 2 dècades, com era d'esperar. L'efecte de baixa freqüència és molt pronunciat, com s'ha vist a l'apartat anterior; R_x també fa pujar ω_{eg} (ω_{ep} però afectada per C_g). El valors de la part real a 1 MHz per a les diferents C_g són a la Taula 6.10. També són en aquesta taula, les estimacions de R_x i ω_{Dg} . El valor estimat de R_x és $1135,9 \text{ }\Omega$ amb una dispersió del $0,9 \%$. I pel valor de D (Taula 6.10), la condició per a les aproximacions de les equacions es complirà.

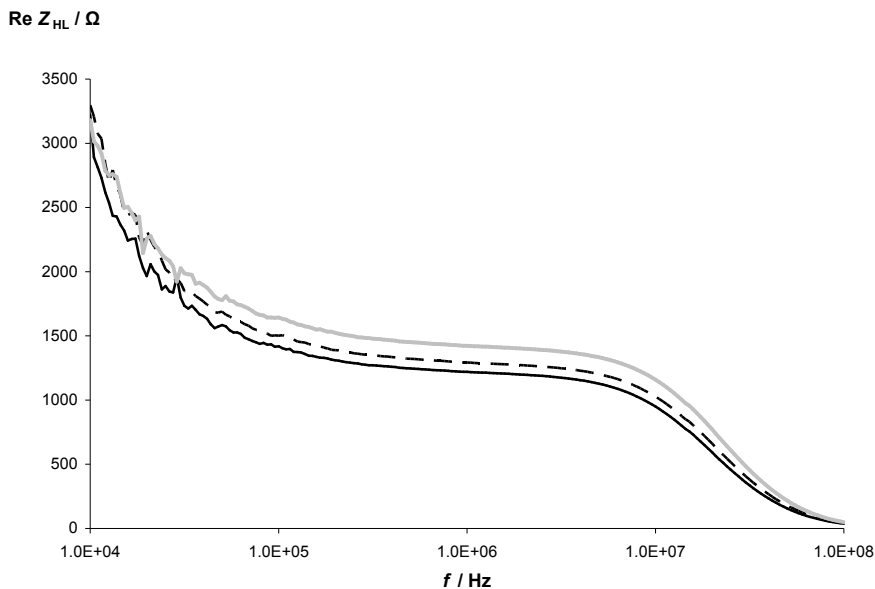


Figura 6.24. Part real de Z_{HL} per a aigua ($1,0 \text{ dS/m}$) mesurada amb dos elèctrodes capacitius. L'altura de la xeringa sobre el pla de terra era: 52 mm (línia negra contínua), 8 mm (línia negra discontinua) i 1.7 mm (línia gris contínua).

Taula 6.10. Mesures de la $\text{Re } Z_{\text{HL}} (\Omega)$ i $R_x (\Omega)$ per a l'aigua de 1 dS/m

	$b = 52 \text{ mm}$	$b = 8 \text{ mm}$	$b = 1,7 \text{ mm}$
$\text{Re } Z_{\text{HL}}(1 \text{ MHz})$	1220	1293	1423
Estimació de $R_x (\Omega)$	1146,4	1134,2	1125,3
	$f_{Dg} \approx 6,7 \text{ MHz}$	$D \approx 0,15$	$D^2 \approx 0,02 \ll 1$

La fig. 6.25 és la capacitat equivalent mesurada entre els terminals H i L, C_{HL} , per a l'aigua de 0,01 dS/m. S'hi observen tres zones: la zona plana de capacitat a baixa freqüència, la zona plana de capacitat a alta freqüència i la zona de transició. Aquesta zona de transició entre les dues zones planes està situada al voltant de la freqüència característica. A l'augmentar C_g disminueix la capacitat mesurada tant a baixa ($\omega \ll \omega_c$) com a alta freqüència ($\omega \gg \omega_c$). Aquesta disminució del valor de capacitat és un augment del valor de la impedància quan augmenta C_g , com calia esperar. Els valors de C_{HL} a baixa freqüència (C_{LF}) són a la Taula 6.4 i ja han estat analitzats; de fet, s'han usat per estimar la capacitat a terra per a les diferents altures, equació (6.36). Com s'ha comprovat a l'apartat 6.2.2.2, els valors de C_{HL} (C_{LF}) són iguals per a les dues aigües i per al metanol, cosa que demostra que C_e i C_g són iguals tant per a l'aigua i com per al metanol.

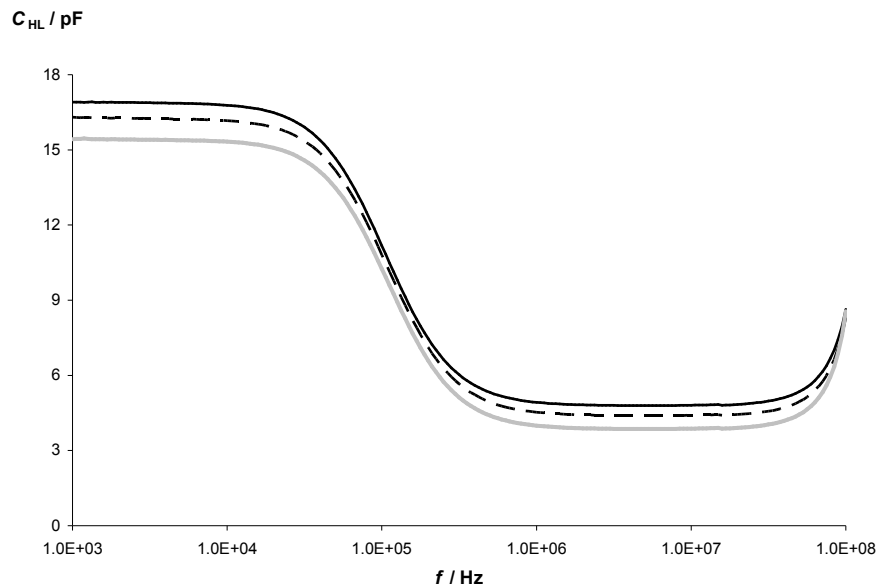


Figure 6.25. C_{HL} per a aigua (0,01 dS/m) mesurada amb dos elèctrodes capacitius. L'altura de la xeringa sobre el pla de terra era: 52 mm (línia negra contínua), 8 mm (línia negra discontinua) i 1.7 mm (línia gris contínua).

La mesura de C_{HL} (C_{HF}) a alta freqüència ($\omega \gg \omega_c$) (10 MHz), per a l'aigua a 0,01 dS/m i per al metanol són a la Taula 6.11. Aquests valors mesurats a 10 MHz corresponen a la zona plana que hi ha al voltant de 10 MHz de la fig. 6.25. Les corbes de capacitat per al

metanol són molt similars a les de l'aigua. L'única diferència és que el valor de C_{HL} per a l'aigua és més gran que per al metanol, i això és degut a que l'aigua té una permitivitat relativa al voltant de 80 mentre que el metanol la té al voltant de 33. Es podrien usar les estimacions de C_e , C_g i C_{hl} obtingudes i calcular C_x a partir de l'equació (6.38), però caldria conèixer $\alpha(1 - \alpha)$ i, tal com ja s'ha comentat, a aquestes freqüències de mesura els efectes deguts a la propagació d'ones poden ser importants. De tot això se'n dedueix que la presència de C_g impedeix determinar la permitivitat del material que es mesura.

La C_{HL} a alta freqüència (C_{HF}) de l'aigua de 1 dS/m no es mesura a 10 MHz perquè les mesures caurien dins la zona de transició, atès que la ω_c està per sobre de 10 MHz perquè les corbes s'han desplaçat dues dècades, tal com ho ha fet la conductivitat.

Taula 6.11. Mesures de la C_{HL} (pF) a 10 MHz, per a l'aigua de 0,01 dS/m i per al metanol.

	$b = 52$ mm	$b = 8$ mm	$b = 1,7$ mm
Aigua	4,8	4,4	3,9
Metanol	2,7	2,4	2,0

Per veure l'efecte combinat de C_{hl} i C_g sobre la part real de Z_{HL} , s'ha mesurat $\text{Re } Z_{HL}$ d'aigua de 1 dS/m i per cada altura de la xeringa respecte al pla de terra, en dues situacions: 1) amb la capacitat paràsita entre elèctrodes C_{hl} pròpia del sistema i 2) incrementant C_{hl} 1,0 pF, posant un condensador fix entre els terminals de mesura H i L. S'ha substituït la placa de metacrilat de 1,7 mm per una làmina de plàstic molt fina, per poder col·locar la xeringa damunt del pla de terra (0 mm). Els resultats són els de la fig. 6.27, on es veu novament que l'efecte de augmentar C_g és un augment de la part real de la impedància i l'efecte d'incrementar C_{hl} es tradueix com una disminució de la part real, com calia esperar. També s'observa que a baixa freqüència hi ha l'efecte de ω_{eg} , augment de la part real. La zona al voltant d'1 MHz és més plana que les corbes de la fig. 6.24. De fet, a partir d'1 MHz la part real augmenta una mica i després cau per l'efecte de la ω_c . L'efecte de baixa freqüència és més pronunciat a la fig. 6.24 i això emmascara els augments que s'observen en aquest cas (fig. 6.26). Aquests augments de la part real, són les ressonàncies descrites al capítol 4 i degudes al terme no lineal de $\text{Re } Z_{HL}$, que depèn de Z_x , C_g i α . Aquestes ressonàncies estan atenuades per l'efecte de la capacitat de l'elèctrode, perquè el valor de C_g en aquest cas és la meitat que al capítol 4 i que la C_x segurament és més gran ara que al capítol 4, ja que es passa de dos elèctrodes quasi puntuals a dos anells de mides considerables, i per tant la constant de cel·la per a elèctrodes capacitius ha pogut disminuir. L'estimació per a R_x de la

Taula 6.10 és de 1136Ω mentre que al capítol 4 era d'uns 1700Ω , de manera que la constant de cel la ha disminuït.

Tornat a l'efecte de baixa freqüència (ω_{eg}) per veure si la fig. 6.24 té més augment a baixes freqüències que la fig. 6.26, només cal analitzar la diferència de valors de la part real entre 100 kHz i 1 MHz (zona plana). A la fig. 6.24, aquestes diferències van de 200Ω (C_g mínim, 52 mm) a 220Ω (C_g màxim, 1,7 mm), mentre que a la fig. 6.26 van de 120Ω (C_g mínim, 52 mm) a 140Ω (C_g màxim, 0 mm). Del valor d'aquestes diferències es pot deduir que la fig. 6.24 té una ω_{eg} més elevada que la fig. 6.26. Aquest fet pot ser degut a que les mesures s'han fet en èpoques diferents i amb humitats ambientals diferents, i en concret que la humitat ambient quan es van fer les mesures de la fig. 6.26 era més baixa que quan es van fer les de la fig. 6.24. També s'observa que aquesta diferència augmenta uns 20Ω entre la situació de mínima a màxima C_g en tots dos casos, i això vol dir que ω_{eg} augmenta quan també ho fa C_g , tal com predeïa l'equació (6.32) i la tercera columna de la Taula 6.1.

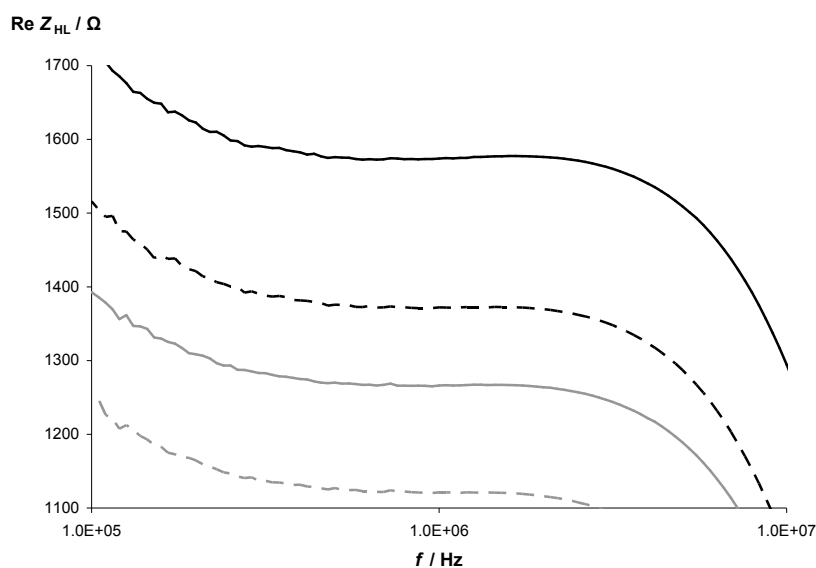


Figura 6.26. Part real de Z_{HL} per a aigua de $1,0 \text{ dS/m}$ mesurada amb dos elèctrodes capacitius. Efecte d'incrementar C_{hl} 1 pF . Les línies negres corresponen a l'altura de la xeringa respecte el pla de terra de 0 mm i les línies grises corresponen a l'altura de 52 mm . Les línies discontinúes són la part real de Z_{HL} quan s'ha afegit un condensador de 1 pF entre els elèctrodes.

Segons l'equació (6.33), C_g també intervé en el denominador de $\text{Re } Z_{HL}$, augmentant l'efecte de C_{hl} , o sigui, incremental la disminució de la part real deguda a C_{hl} . Això es manifesta en la separació de les corbes per a un mateix valor de C_g . A la fig. 6.25 es veu que la separació més gran correspon al valor màxim de C_g . Dividint els valors de $\text{Re } Z_{HL}$ a 1 MHz per a cada valor de C_g s'obindrà una estimació de com ha canviat el denominador de (6.33) en funció de C_g des de la situació en què C_{hl} és el propi de la cel·la a la situació on s'ha afegit 1 pF a

C_{hl} . Les relacions són 0,886 per a 52 mm, 0,881 per a 8 mm i 0,872 per a 0 mm. Això vol dir que el denominador de (6.33) ha disminuït respecte a la situació sense incrementar C_{hl} , un 11,4 % per a 52 mm quan incrementem 1 pF C_{hl} , 11,9 % per a 8 mm quan incrementem 1 pF C_{hl} i 12,8 % per a 0 mm quan incrementem 1 pF C_{hl} . Per tant, C_g afecta el denominador de (6.33) augmentant l'efecte de C_{hl} (disminució de la part real), tal com prediu l'equació.

6.2.2.5. Mesura de la conductivitat de l'aigua amb elèctrodes capacitius

Per comprovar l'equació (6.34) que suggereix que les capacitats C_e , C_g i C_{hl} es poden incloure dins el factor de cel·la, s'ha usat la cel·la 3, que minimitza la capacitat a terra C_g . La separació entre els elèctrodes és de 10 mm, i per tant, augmentarà C_{hl} . La mesura s'ha fet sense cap pla de terra. S'han preparat 4 dissolucions d'aigua i sal de 0,5, 1, 1,5 i 2 dS/m, a 22 °C. S'ha mesurat la part real de la impedància entre els elèctrodes a una freqüència de 1 MHz, és a dir, una dècada per sota de la freqüència característica de l'aigua de 0,5 dS/m que seria de 10,7 MHz. La fig. 6.27 mostra la part real de Z_{HL} mesurada respecte a l'invers de la conductivitat (resistivitat). La corba es lineal i la recta de regressió i els punts mesurats tenen un coeficient de correlació de 0,9997, amb un petit offset de 134,6 Ω , i el pendent de la recta, que correspon a la constant de cel·la, és 60,6 m^{-1} . Aquestes mesures confirmen que si les capacitats paràsites són constants, el seu efecte es pot incloure a la constant de cel·la del sistema, perquè només depenen de la geometria.

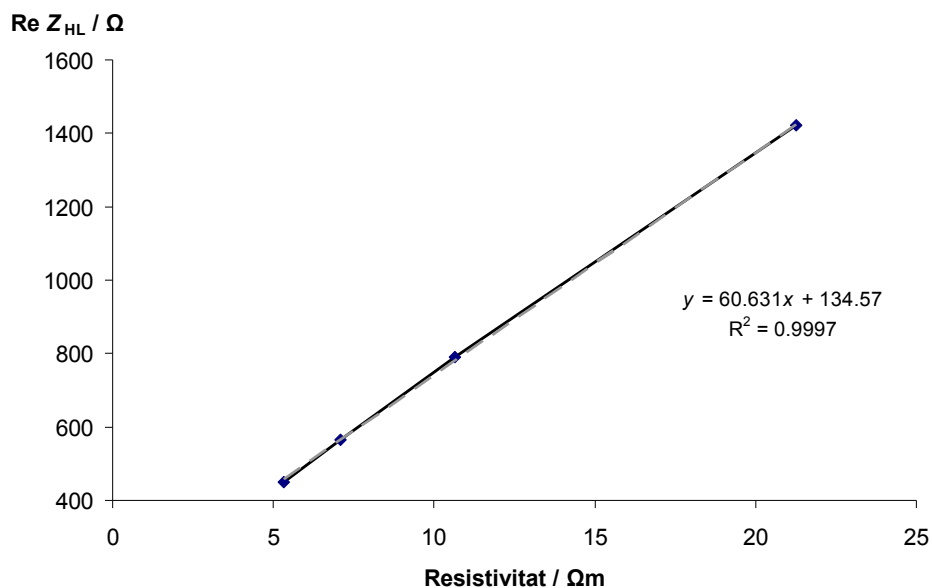


Figura 6.27. Mesura de la conductivitat de l'aigua a partir de la part real de la impedància a 1 MHz.

6.3. Conclusions

Quan es mesura la impedància d'un líquid, en el nostre cas aigua, mitjançant elèctrodes capacitius i l'instrument de mesura està basat amb un pseudopont automàtic, l'entorn electromagnètic afecta molt la mesura d'impedància. Aquest entorn electromagnètic el constitueixen les capacitats paràsites entre elèctrodes C_{hl} i l'acoblament des del cos de la impedància (volum conductor) a terra C_g . A més de les capacitats paràsites, la resistència de pèrdues de l'elèctrode R_e , en paral·lel amb C_e , i la resistència de fuites R_{hl} , en paral·lel amb C_{hl} , també afecten les mesures.

L'acoblament a terra es pot evitar apantallant la cel·la amb un cilindre de tela metàl·lica i connectant-lo al terminal H de l'instrument. Aquesta pantalla evita C_g però augmenta C_{hl} . Els efectes de C_{hl} són: 1) disminució de la part real de la impedància $\text{Re } Z_{HL}$ per un factor que depèn de la relació C_{hl}/C_e , que és en el denominador de l'equació (6.11) i és independent de la freqüència; 2) disminució de la freqüència característica i fa que $\text{Re } Z_{HL}$ comenci a créixer abans (en freqüència) de quan ho faria si $C_{hl} = 0$; i 3) C_{hl} se suma directament a la capacitat equivalent sèrie mesurada entre H i L.

R_{hl} afecta a freqüències baixes i es pot considerar que està en paral·lel amb R_e . El seu efecte és l'augment de la part real de la impedància quan disminueix la freqüència de treball. En principi pot sorprendre que al condensar-se vapor d'aigua a la superfície de la cel·la, per exemple, bufant (tirant el baf), augmenti $\text{Re } Z_{HL}$ perquè el vapor fa créixer R_{hl} , però és un fet previsible que la disminució d'una resistència en paral·lel comporti l'augment de la resistència sèrie equivalent. Aquí l'augment es degut a l'augment de la freqüència ω_{ep} , que determina el límit inferior de l'interval de freqüències de treball.

Segons (6.10), ω_{ep} també augmenta quan R_x disminueix. Per a les aigües molt conductores aquest efecte provoca que el marge freqüencial de treball disminueixi, obligant a mesurar a freqüències molt altes amb el perill de que la mesura es vegi afectada per errors per la propagació d'ones.

L'efecte de l'acoblament a terra provoca un efecte contrari al de C_{hl} ; la part real de la impedància augmenta en fer-ho C_g . Aquest augment és degut a un factor que depèn de C_g/C_e , i per tant és independent de la freqüència, segons es veu en el numerador de l'equació (6.33). C_g també intervé en el denominador de (6.33), augmentant l'efecte de C_{hl} quan C_g augmenta. L'acoblament a terra influeix en la resposta a baixa freqüència de

Re Z_{HL} , augmentant ω_{eg} quan C_g augmenta. La conseqüència és una disminució de l'aportació de R_{hl} a ω_{eg} , equació (6.32), augmentant el límit inferior de l'interval de freqüències de treball. C_g també afecta ω_{Dg} fent-la disminuir quan C_g augmenta, reduint la part alta de l'interval de freqüències de treball.

Les mesures a la zona plana de la corba de C_{HL} a baixa freqüència donen que els valors són iguals per a les dues aigües i per al metanol. Atès que C_{HL} a baixa freqüència és $C_e/(2+C_g/C_e)$, això demostra que C_e és igual per a l'aigua i per al metanol i reafirma la conclusió extreta de la mesura de C_g per a elèctrodes de contacte directe, que C_g és igual per a l'aigua i per al metanol encara que siguin materials elèctricament diferents. L'efecte de l'acoblament a terra és la disminució de la capacitat C_{HL} (a freqüències baixes) quan augmenta C_g . Per a la mesura de C_{HL} a alta freqüència (10 MHz), la tendència també és una disminució de la capacitat quan augmenta C_g . Per tant, no es podrà saber fàcilment el valor de la permitivitat del material perquè a les freqüències que cal mesurar hi pot haver efectes de propagació d'ona.

Es pot usar la mesura de la capacitat C_{HL} , a freqüències baixes, per estimar els valors de C_g , si prèviament es coneixen C_e i C_{hl} . C_e es pot estimar mesurant amb una cel·la que tingui un elèctrode capacitiu i un altre de contacte directe. C_{hl} s'estima com el 50 % del valor de la mesura de capacitat de la cel·la buida. Tenint les estimacions de C_g , C_e i C_{hl} , es pot estimar el valor de R_x . Els resultats obtinguts són 110,5 k Ω per a l'aigua de 0,01 dS/m de conductivitat i 1135,9 Ω per a l'aigua de 1,0 dS/m. Les dispersions d'aquests resultats són del 1,2 % (0,01 dS/m) i del 0,95 % (1,0 dS/m). La relació entre els dos valors de R_x per a les diferents conductivitats és de 97,3, molt a prop de les dues dècades.

Per comprovar l'equació (6.34) que suggereix que les capacitats C_e , C_g i C_{hl} es poden incloure dins el factor de cel·la, s'ha mesurat la conductivitat de l'aigua amb elèctrodes capacitius a partir de la mesura de la part real de la impedància entre H i L, evitant que cap de les capacitats paràsites variïn. El resultat ha estat una característica lineal amb un petit offset, figura 6.27, confirmant així l'equació (6.34) i que les capacitats C_e , C_g i C_{hl} es poden incloure dins el factor de cel·la. Per tant, s'ha assolit l'objectiu principal de la tesi, que era mesurar la conductivitat elèctrica de l'aigua amb elèctrodes capacitius.

Capítol 7

7. Conclusions generals

La mesura de la conductivitat elèctrica de l'aigua amb elèctrodes capacitius és una necessitat quan s'ha de mesurar des de l'exterior d'un tub o recipient aïllant, i una conveniència quan es vol evitar la degradació que pateixen els elèctrodes immersos o el seu recobriment amb materials que en poden modificar les característiques elèctriques i afectar el resultat de la mesura.

Atesa la complexitat que suposaria mesurar amb quatre elèctrodes capacitius, perquè, entre altres coses, caldria preveure alguna solució per oferir un camí als corrents de polarització de l'entrada dels amplificadors, s'han considerat només les mesures amb dos elèctrodes. En aquest cas, cal mesurar a alta freqüència per reduir la impedància dels elèctrodes, que estarà en sèrie amb la del aigua i això obliga a tenir en compte les impedàncies paràsites i en particular les capacitives, perquè el seu valor disminueix a l'augmentar la freqüència.

Per mesurar correctament la conductivitat d'un material modelitzat com una resistència R_x en paral·lel amb una capacitat C_x , emprant dos elèctrodes modelitzats com una resistència R_e en paral·lel amb una capacitat C_e , cal que la freqüència de treball sigui prou alta respecte a la de tall dels elèctrodes, $\omega_e = [R_e C_e]^{-1}$, per tal de que la seva impedància sigui negligible respecte a la del material, i prou baixa respecte a la freqüència característica del material, $\omega_x = [R_x C_x]^{-1}$. En el cas de l'aigua, aquesta va des de uns 20 kHz per l'aigua destil·lada fins a més de 1 GHz per l'aigua de mar. Per tant, per aigua poc conductora caldrà que la freqüència de tall dels elèctrodes sigui prou baixa, i això requereix una capacitat C_e alta i una resistència R_e d'aïllament molt alta. En elèctrodes capacitius, C_e difícilment passarà d'uns quants picofarads, i per tant el seu aïllament cal que sigui excel·lent. En canvi, en elèctrodes de contacte directe, com que C_e és de l'ordre de microfarads, no hi fa res que R_e sigui relativament baixa, de l'ordre de kilohms.

Conclusió 1: El rang de freqüències on es pot determinar la conductivitat de l'aigua directament a partir de la part real de la impedància mesurada és diferent segons quina sigui la conductivitat de l'aigua i més estret pels elèctrodes capacitius que pels elèctrodes de contacte directe.

Si es té en compte la impedància de fuites entre els elèctrodes, és a dir, la impedància entre ells en absència del material que es vol mesurar, modelitzada com una resistència R_{hl} en paral·lel amb una capacitat C_{hl} , resulta que R_{hl} queda en paral·lel amb R_e , i C_{hl} no només queda en paral·lel amb la capacitat equivalent de la impedància dels elèctrodes en sèrie amb la del material, sinó que a més atenua el valor de R_x pel factor $(1 + C_{hl}/C_e)^2$. Aquest darrer efecte no havia estat descrits abans i per minimitzar-lo es pot reduir C_{hl} separant els elèctrodes. Això en principi no afecta a R_{hl} , que convé que sigui gran per no reduir el valor equivalent de R_e , efecte no descrit tampoc fins ara. Però a l'augmentar la separació major és la probabilitat de que la superfície del material (aïllant) que hi ha entre els elèctrodes, i que forma part de la cel·la de mesura, quedi contaminada, per exemple per condensació de vapor d'aigua o absorció d'humitat, i això reduirà R_{hl} . Aquests resultats desaconsellen l'ús de models d'elèctrodes capacitius que consideren només la seva capacitat C_e .

Conclusió 2: La resistència de fuites entre elèctrodes capacitius queda en paral·lel amb la resistència d'aïllament dels elèctrodes i per tant en redueix el valor equivalent, provocant un augment de la part real de la impedància mesurada a baixa freqüència. La capacitat de fuites provoca una disminució sistemàtica de la conductivitat mesurada, segons el factor $(1 + C_{hl}/C_e)^2$.

La influència d'altres capacitats paràsites en les mesures d'impedància elèctrica depèn del mètode de mesura emprat. Bona part dels analitzadors d'impedància comercials es basen en aplicar una tensió constant i mesurar el corrent que en resulta. Alguns sistemes desenvolupats expressament per determinades aplicacions mesuren en canvi el corrent que surt de la font de tensió, i encara d'altres apliquen un corrent constant i mesuren la caiguda de tensió entre els elèctrodes connectats al material. Però com que els sistemes basats en aplicar una tensió i mesurar el corrent que surt del material són els més habituals, amb diferència, l'estudi s'ha centrat en aquest mètode, i en particular en els pseudoponts automàtics.

En un pseudopont automàtic basat en aplicar tensió i mesurar el corrent que surt del material, i que tingui el terminal de mesura de corrent al potencial de terra (terra virtual), les capacitats entre cadascun dels elèctrodes i l'entorn, i en particular el terra i els objectes conductors, no afecten la mesura. En canvi, l'acoblament capacitiu entre el material que es mesura i aquest entorn té uns efectes considerables que, malgrat haver estat assenyalat per diversos autors com a possible font de resultats anòmals, mai no havien estat analitzats de forma sistemàtica. Una primera dificultat d'aquesta anàlisi és que no es tracta d'una capacitat concentrada sinó distribuïda. Una conseqüència d'aquest fet és que substituir la injecció de tensió per una injecció simètrica de corrent, tal com han proposat alguns autors, no evita l'acoblament entre el material i l'entorn (apartat 3.1.3).

Un mètode per modelitzar la capacitat C_g entre el material i terra mitjançant un circuit de paràmetres concentrats, és introduir un paràmetre (α) que deixa indeterminat el punt de connexió de C_g dins el material, tal com va proposar Hartshorn (1947) quan analitzava l'efecte de l'acoblament a terra en mesures de resistors apantallats. Aquí s'ha utilitzat α per modelitzar l'efecte de l'acoblament a terra C_g en mesures d'una impedància genèrica Z_x i mitjançant elèctrodes amb impedància de contacte Z_c no nul·la. Amb aquest mètode s'ha pogut demostrar que la reducció del corrent a través del material quan es mesura a freqüències més altes, i que s'interpreta com un efecte inductiu degut a que fa augmentar la impedància calculada, fa innecessària la inclusió de inductàncies en el material o en l'acoblament amb l'entorn que per altra banda són difícils de justificar quan els materials no són magnètics, ni hi ha corrents elevats, ni inductàncies mútues grans, atesa la petita àrea dels circuits de connexió. L'anàlisi mostra que el circuit de mesura és una xarxa en T on la reactància de la capacitat C_g és "girada" de manera que queda en sèrie amb la impedància del material (i dels elèctrodes), i per això provoca un efecte "inductiu".

Aquest efecte ha estat observat per diversos autors des de fa anys i encara es troba sense cap explicació vàlida en articles molt recents. El mètode d'anàlisi emprat en aquesta tesi demostra que la presència de components inductives és una prova de que C_g és gran i això és un avantatge per aquest mètode de mesura perquè l'efecte de C_g en altres mètodes és capacitiu i per tant és més fàcil de que passi totalment desapercbut. L'anàlisi de l'efecte de C_g també mostra que, quan es mesura amb un material modelitzat com una R_x en paral·lel amb un C_x , a més d'un efecte inductiu hi ha efectes resistius i capacitius, deguts a que C_g . Si a més es té en compte la impedància dels elèctrodes, C_g canvia la influència de la impedància dels elèctrodes en la mesura, i també canvia la forma com afecta a la impedància mesurada respecte a quan es mesura sense elèctrodes. El paràmetre clau en aquests efectes és la relació C_g/C_e , i d'aquí se'n dedueix directament que les mesures amb elèctrodes capacitius són molt més sensibles a C_g que les mesures fetes amb elèctrodes de contacte directe, on C_e és fàcilment de l'ordre de microfarads.

Conclusió 3: La capacitat paràsitica C_g entre l'aigua i terra fa augmentar la impedància mesurada a altes freqüències i provoca desviacions en la part real de la impedància, que és a partir d'on es determina la seva conductivitat. Tots els efectes augmenten quan C_g/C_e és més gran, i per tant seran pitjors en elèctrodes capacitius que en elèctrodes de contacte directe.

La quantificació dels efectes de C_g s'ha fet primer mesurant amb elèctrodes de contacte directe perquè el rang de freqüències on es pot determinar més fàcilment la conductivitat és més gran i l'efecte de la impedància de fuites entre elèctrodes és més petit. S'ha trobat que, d'acord amb les prediccions, la banda de freqüències on el mòdul de la impedància és constant depèn de la conductivitat de l'aigua i que els efectes inductius són majors per a l'aigua més pura. Dintre de la banda on el mòdul és constant, una C_g més gran no provoca desviacions perceptibles. També s'ha vist que si C_g es prou gran respecte a C_x , hi ha pics en el mòdul, i si és encara més gran, es troben fins i tot fases positives. Mesurant en metanol, que té una constant dielèctrica molt menor que la de l'aigua, s'ha comprovat que el paràmetre rellevant no és el valor absolut de C_g sinó la relació C_g/C_x . Això vol dir que en sensors basats en micromecanitzat, on pel petit volum de la mostra C_g serà en principi petita, també es poden produir aquests efectes. D'altra banda, s'ha trobat que la capacitat de fuites C_{hl} compensa una mica els efectes inductius. La capacitat a terra C_g d'una cel·la determinada no depèn del material que contingui, només depèn de la seva geometria (volum, llargada, forma,...).

Conclusió 4: La banda de freqüències on es pot determinar la conductivitat a partir de la resistència mesurada depèn del valor de la conductivitat que es vol determinar i de la relació C_g/C_x entre la capacitat d'acoblament a terra i del material.

Amb elèctrodes de contacte directe es podria estimar la permitivitat del material a partir de C_x mesurant el mòdul de la impedància a freqüències més altes que la freqüència característica del material ω_c , si primer es determina el valor de α i de la capacitat C_g entre la mostra i terra, sempre i quant C_g i la capacitat paràsita C_{hl} entre els elèctrodes siguin molt més petites que C_x . Aquesta condició és més fàcil de complir en l'aigua, atesa la seva gran constant dielèctrica, que en altres líquids. I tot això, si també es compleix que la distància entre els elèctrodes sigui prou petita en relació a $\lambda/126$. Així, doncs, estimar la permitivitat del material (C_x) serà bastant difícil.

L'impacte negatiu de C_g en les mesures amb dos elèctrodes podria portar a pensar que les mesures amb quatre elèctrodes, que sovint es consideren, injustificadament, "la solució" als problemes deguts a les impedàncies dels elèctrodes en la mesura d'impedàncies, potser podrien també resoldre el problema de C_g pel que fa a la modificació de la repercussió de la impedància dels dos elèctrodes en mesures d'impedància bipolars. Resulta, però, que en el cas concret de mesures de bioimpedància, diversos autors ja van manifestar fa anys les seves sospites de que la impedància paràsita entre el cos mesurat i terra podien ésser responsable dels efectes inductius i fases positives observades en algunes mesures. Aplicant el mètode proposat en el capítol 3, en el capítol 5 s'ha demostrat que l'ús de quatre elèctrodes no alleuja els efectes de C_g , sinó que els agreuja perquè als efectes observats al mesurar amb dos elèctrodes se n'hi afegeix altres. La mesura amb quatre elèctrodes evita en principi els errors deguts a les impedàncies dels elèctrodes, però si C_g és important, a la mesura s'hi observa un error constant amb la freqüència i que depèn de la relació entre la capacitat de l'elèctrode de mesura del corrent i C_g (ja que en mesures de bioimpedància aquestes dues capacitats poden ser comparables). A més, s'hi afegeix la ressonància entre la reactància "girada" de C_g i la capacitat d'entrada de l'amplificador que mesura la caiguda de tensió entre els dos elèctrodes de detecció. De fet, les mesures experimentals del capítol 5 mostren ressonàncies addicionals, l'origen de les quals no ha estat investigat. Per tant, a les raons exposades abans per descartar les mesures de conductivitat de l'aigua amb quatre elèctrodes capacitius, s'hi poden afegir les derivades dels efectes de C_g . Això fa que el perfeccionament de les mesures fetes amb dos elèctrodes sigui encara més interessant, perquè l'ús de quatre elèctrodes no és de cap manera la solució.

Les mesures d'impedància amb instruments alimentats a bateries redueix l'efecte de C_g , ja que l'instrument és flotant i la capacitat d'aïllament C_{iso} entre l'instrument i terra pot ser bastant petita. Per tant, la capacitat entre la mostra que es mesura i el node de referència de l'instrument seria l'equivalent sèrie de C_g i C_{iso} . Però si la capacitat C_{iso} no és tant petita i les relacions entre capacitat d'elèctrode i de material no són negligibles, es podrien observar efectes produïts per l'acoblament a terra. A més, el problema d'aquests instruments és que al ser de baix cost la resolució que tenen és limitada i no es poden mesurar parts reals petites quan les parts imaginàries són molt més grans.

Les mesures de conductivitat elèctrica de l'aigua amb dos elèctrodes capacitius està més afectada per les capacitats paràsites C_g i C_{hl} que en el cas d'elèctrodes de contacte directe. En aquest últim cas, els efectes provocats pels elèctrodes i les capacitats paràsites eren "independents", mentre que amb elèctrodes capacitius aquests efectes estan tots interrelacionats perquè la capacitat dels elèctrodes C_e i C_g , C_{hl} i també la C_x del material, són comparables.

Posant una pantalla a la cel·la, s'evita l'efecte de C_g però augmenta el valor de C_{hl} . Els resultats experimentals del capítol 6, corroboren les expressions teòriques trobades al capítol 2. C_{hl} fa disminuir la part real de la impedància segons el factor $(1 + C_{hl}/C_e)^2$. La disminució de la R_{hl} , fent condensar vapor a la superfície de la cel·la entre els elèctrodes, fa augmentar la part real de la impedància a baixa freqüència degut a un augment de la mínima freqüència de treball, ω_{ep} . A més, a l'augmentar C_{hl} disminueix la freqüència del denominador ω_p (freqüència de tall) de la part real de la impedància. Aquesta freqüència ω_p seria la característica del material ω_e , si C_{hl} fos nul. Tenint una estimació de la capacitat dels elèctrodes C_e es pot estimar el valor de C_{hl} a partir de la mesura de la part imaginària de la impedància a baixa freqüència. En aquest cas es pot obtenir el valor de R_x de la mesura de la part real de la impedància a la zona on la corba és constant (plana). Aquesta zona plana correspon a l'interval de freqüències $\omega_{ep} \ll \omega \ll \omega_D$, on ω_D surt de la condició que $D \ll 1$, a diferència de la freqüència ω_{ep} que surt de l'expressió de la part real de la impedància.

Conclusió 5: L'efecte de C_g s'evita apantallant la cel·la, però això augmenta C_{hl} i aquest augment provoca una disminució de la part real de la impedància i una disminució de la freqüència de tall de la part real. Disminuir R_{hl} redueix l'interval de freqüències de treball possibles perquè augmenta ω_{ep} .

L'efecte de l'acoblament a terra C_g és un augment de la part real de la impedància en un factor $(1 + C_g/C_e)$, independent de la freqüència. A més, quan augmenta C_g també augmenta l'efecte de C_{hl} i es redueix disminuir l'interval de freqüències de treball, perquè queden afectades ω_{eg} i ω_{Dg} . Amb una estimació de C_e i de C_{hl} es podem estimar C_g a partir de la mesura de la part imaginària de la impedància a baixa freqüència perquè un augment de C_g fa disminuir la capacitat equivalent entre els elèctrodes de mesura. C_e es pot estimar fent que un dels elèctrodes sigui de contacte directe i C_{hl} s'estima a a partir de la mesura en buit de la cel·la. Tenint les estimacions de C_e , C_{hl} i C_g es pot obtenir el valor de R_x a l'interval de mesura $\omega_{eg} \ll \omega \ll \omega_{Dg}$. Si C_{hl} i C_g no varien, els factors que depenen de C_e , C_{hl} i C_g , es poden incloure a la constant de cel·la, ja que C_e , C_{hl} i C_g depenen de la geometria de la cel·la.

Conclusió 6: Augmentar C_g fa augmentar la part real de la impedància mesurada, augmenta l'efecte de C_{hl} (disminució de la part real), i disminueix l'interval de freqüència de mesura de la part real per obtenir el valor R_x quan es coneixen les estimacions de C_e , C_{hl} i C_g . La mesura de la conductivitat elèctrica de l'aigua amb elèctrodes capacitius és viable a partir de la mesura de la part real de la impedància, sempre que les capacitats paràsites no varien, i per tant els factors que depenen d'aquestes capacitats es puguin incloure en la constant de cel·la.

Segons s'ha anat advertint en els llocs escaients, la validesa d'algunes de les estimacions quantitatives de la conductivitat obtingudes a partir dels resultats d'algunes mesures efectuades a freqüències relativament altes és qüestionable degut als possibles efectes de propagació d'ona i al caràcter distribuït de l'acoblament a terra C_g . De l'estudi d'aquests efectes s'ha conclòs que són negligibles quan la distància entre els elèctrodes d és més petita que una fracció de la longitud d'ona λ de l'ona electromagnètica que intervé en la mesura d'impedància, i que el criteri $d < \lambda/126$ habitual a la bibliografia és prou vàlid també aquí.

Un avantatge addicional del mètode d'anàlisi emprat és que permet estudiar l'efecte de la impedància de cada elèctrode per separat, i això és interessant quan no són iguals. Un altre avantatge és que també es pot aplicar a les mesures fetes amb tres elèctrodes, que tenen l'avantatge de que no necessiten amplificadors diferencials.

Tot i que el treball s'ha centrat en la mesura de la conductivitat de l'aigua, és obvi que la metodologia es pot aplicar a la mesura de la conductivitat, i en alguns casos la permitivitat,

d'altres líquids simples. De fet, algunes mesures en altres líquids poden ser més fàcils perquè ni tenen una conductivitat que varia dins d'un rang de més de set dècades, ni tenen una constant dielèctrica tan alta, que pot comportar una freqüència característica molt baixa. En materials compostos, que no es poden descriure amb una sola relaxació com s'ha fet aquí, moltes conclusions qualitatives seran vàlides, però una formulació orientada a la espectroscòpia d'impedàncies seria certament molt més complexa. Però això no significa que els resultats qualitius obtinguts no siguin aplicables.

A diferència de l'obtenció de R_x que és viable si les capacitats paràsites no varien i la mesura és fa a prou baixa freqüència per a que no hi hagi efectes de propagació d'ona, la mesura de la permitivitat del material a partir de l'obtenció de C_x és molt difícil. Només es pot aconseguir amb cel·les tancades (poca separació entre els elèctrodes) i relació $C_g/C_e \ll 1$. Si el material que es mesura és bastant conductor, s'han de separar els elèctrodes per tenir una bona resolució en l'obtenció de R_x , però ja s'ha vist que mesurar C_x amb aquestes cel·les no serà viable degut a la propagació d'ones que fa que l'aproximació dels models de paràmetres distribuïts no sigui correcta ateses les desviacions importants entre el model de paràmetres concentrats i el de paràmetres distribuïts. Per tant, això deixa una porta oberta a un possible treball futur, que seria estudiar aquests models de paràmetres distribuïts per poder obtenir la mesura de la permitivitat elèctrica del material amb cel·les on també és mesura la conductivitat elèctrica del material. Si aquestes cel·les són amb elèctrodes capacitius, una aplicació de la mesura de la permitivitat seria obtindre la temperatura de l'aigua a partir de la variació de la permitivitat i així compensar l'efecte de la temperatura en la conductivitat elèctrica del material i això suposaria que el sensor fos totalment sense contacte.

Referències i bibliografia

Agilent (1998). Amorese, G. *RF impedance measurements basics. Back to basics seminar*, Kobe Instrument division, Hewlett-Packard Company, 1998. 5965-7921E.

Agilent (2000). *8 Hints for Successful Impedance Measurements*, Application Note 346-4, Agilent Technologies Co. Ltd., 2000. 5968-1947E.

Agilent (2008a). Agilent PN 4294A, *New Technologies for Accurate Impedance Measurement (40 Hz to 110 MHz)*, Product Note, Agilent Technologies Co. Ltd., 2008. 5968-4506E.

Agilent (2008b). Agilent 4294A, *Precision Impedance Analyzer*, Data Sheet, Agilent Technologies Co. Ltd., 2008. 5968-3809E.

Agilent (2013). *The Impedance Measurement Handbook, A Guide to Measurement Technology and Techniques*, 4th Ed., Agilent Technologies Co. Ltd., 2013. 5950-3000.

Agilent (2014). *Keysight Technologies U1730C Series. Handheld LCR Meters*, Data Sheet, Agilent Technologies Co. Ltd., 2014. 5990-7778EN.

Abouelwafa, M. S. A. and Kendall, E. J. M. (1980). The use of capacitance sensors for phase percentage determination in multiphase pipelines. *Instrumentation and Measurement, IEEE Transactions on*, 29(1), 24-27.

Aliau-Bonet, C. and Pallas-Areny, R. (2012). A fast method to estimate body capacitance to ground. Proc. XX IMEKO World Congress, 9-14.

Aliau-Bonet, C. and Pallas-Areny, R. (2012). On the effect of body capacitance to ground in tetrapolar bioimpedance measurements. *Biomedical Engineering, IEEE Transactions on*, 59(12), 3405-3411.

Aliau-Bonet, C. and Pallas-Areny, R. (2013). A novel method to estimate body capacitance to ground at mid frequencies. *Instrumentation and Measurement, IEEE Transactions on*, 62(9), 2519-2525.

Asami, K. (2011). Design of a measurement cell for low-frequency dielectric spectroscopy of biological cell suspensions. *Measurement Science and Technology*, 22(8), 085801.

ASTM D 1125-95 (2007). Standard test methods for electrical conductivity and resistivity of water. West Conshohocken: ASTM.

Awan, S., Kibble, B. and Schurr, J. (2011). *Coaxial Electrical Circuits for Interference-Free Measurements*, IET Electrical Measurement Series vol. 13, London, UK, The Institution of Engineering and Technology. ISBN 978-1-84919-069-5.

Ayers, R.S. and Westcot, D.W. (1985). *Water quality for agriculture, FAO Irrigation and Drainage Paper*, Food and Agriculture Organization of the United Nations Rome, 1985. ISBN 92-5-102263-1.

Ballico, M. (1999). A technique for in situ measurement of the conductivity of water in triple point of water cells. *Measurement Science and Technology*, 10(7), L33.

Baker, L. E. (1988). Principles of the impedance technique. *IEEE engineering in medicine and biology magazine: the quarterly magazine of the Engineering in Medicine & Biology Society*, 8(1), 11-15.

Borkholder, D. A. (1998). *Cell Based Biosensors Using Microelectrodes*. Ph.D. dissertation, Stanford University.

Bragós, R. (1997) *Contribució a la caracterització de teixits i sistemes biològics mitjançant tècniques d'espectroscòpia d'impedància elèctrica*, tesi doctoral, Universitat Politècnica de Catalunya.

Brito-Neto, J. G. A., Fracassi da Silva, J. A., Blanes, L. and do Lago, C. L. (2005). Understanding capacitively coupled contactless conductivity detection in capillary and microchip electrophoresis. Part 1. Fundamentals. *Electroanalysis*, 17(13), 1198-1206.

Brito-Neto, J. G. A., Fracassi da Silva, J. A., Blanes, L. and do Lago, C. L. (2005). Understanding capacitively coupled contactless conductivity detection in capillary and microchip electrophoresis. Part 2. Peak shape, stray capacitance, noise, and actual electronics. *Electroanalysis*, 17(13), 1207-1214.

Buller, W. and Wilson, B. (2006). Measurement and modeling mutual capacitance of electrical wiring and humans. *Instrumentation and Measurement, IEEE Transactions on*, 55(5), 1519-1522.

Cahill, B. P., Land, R., Nacke, T., Min, M. and Beckmann, D. (2011). Contactless sensing of the conductivity of aqueous droplets in segmented flow. *Sensors and Actuators B: Chemical*, 159(1), 286-293.

Callegaro, L. (2009). The metrology of electrical impedance at high frequency: a review. *Measurement Science and Technology*, 20(2), 022002.

Casas, J. O. (1998). *Contribución a la obtención de imágenes paramétricas en tomografía de impedancia eléctrica para la caracterización de tejidos biológicos*, tesis doctoral, Universitat Politècnica de Catalunya.

Coster, H. G., Chilcott, T. C. and Coster, A. C. (1996). Impedance spectroscopy of interfaces, membranes and ultrastructures. *Bioelectrochemistry and Bioenergetics*, 40(2), 79-98.

De Santis, V., Beeckman, P. A., Lampasi, D. A. and Feliziani, M. (2011). Assessment of human body impedance for safety requirements against contact currents for frequencies up to 110 MHz. *Biomedical Engineering, IEEE Transactions on*, 58(2), 390-396.

Demori, M., Ferrari, V., Strazza, D., and Poesio, P. (2010). A capacitive sensor system for the analysis of two-phase flows of oil and conductive water. *Sensors and Actuators A: Physical*, 163(1), 172-179.

Dreher, A. (2014). Webster, J. G. and Eren, H. (Editors) *Measurement, Instrumentation, and Sensors Handbook, Second Edition: Electromagnetic, Optical, Radiation, Chemical, and Biomedical Measurement*, "C.31 Immittance Measurement", 2ⁿ Ed., CRC Press, ISBN: 978-1439848913.

Fleig, J., Jamnik, J., Maier, J. and Ludvig, J. (1996). Inductive loops in impedance spectroscopy caused by electrical shielding. *Journal of The Electrochemical Society*, 143(11), 3636-3641.

Fletcher, S. (2001). The two-terminal equivalent network of a three-terminal electrochemical cell. *Electrochemistry communications*, 3(12), 692-696.

Gaš, B., Zuska, J., Coufal, P. and van de Goor, T. (2002). Optimization of the high-frequency contactless conductivity detector for capillary electrophoresis. *Electrophoresis*, 23(20), 3520-3527.

Geddes, L. A. (1972). *Electrodes and the measurement of bioelectric events*. Wiley-Interscience. ISBN 0-471-29490-X.

Geddes, L. A. (1997). Historical evolution of circuit models for the electrode-electrolyte interface. *Annals of biomedical engineering*, 25(1), 1-14.

Gersing, E. (1991). Measurement of electrical-impedance in organs-measuring equipment for research and clinical-applications. *Biomedizinische Technik*, 36(1-2), 6-11.

Gersing, E., Schäfer, M. and Osypka, M. (1995). The appearance of positive phase angles in impedance measurements on extended biological objects. *Innovation et technologie en biologie et médecine*, 16, 71-76.

Göpel, W., Hesse, J. and Zemel, J. N. (1991). *Sensors. A Comprehensive Survey*, Vol. 2, VCH Verlagsgesellschaft mbH. ISBN 0-89573-674-8.

George, B., Zangl, H., Bretterkieber, T. and Brasseur, G. (2009). Seat occupancy detection based on capacitive sensing. *Instrumentation and Measurement, IEEE Transactions on*, 58(5), 1487-1494.

Grimnes, S. and Martinsen, Ø. G. (2007). Sources of error in tetrapolar impedance measurements on biomaterials and other ionic conductors. *Journal of Physics D: Applied Physics*, 40(1), 9.

Grimnes, S. and Martinsen, Ø. G. (2007). *Bioimpedance and Bioelectricity Basics*, 2nd Ed., Butterworth-Heinemann, Elsevier. ISBN 978-0-12-374004-5.

Haberman, M., Cassino, A. and Spinelli, E. (2011). Estimation of stray coupling capacitances in biopotential measurements. *Medical & biological engineering & computing*, 49(9), 1067-1071.

Hague, B. and Foord, T. R. (1971). *Alternating current bridge methods*, 6th Ed., Pitman. ISBN 0-273-40291-9.

Hartshorn, L. (1947). *Radio-frequency measurements by bridge and resonance methods*, 4th impr., Chapman & Hall LTD.

He, D., Shannon, M. A. and Miller, N. R. (2005). Micromachined silicon electrolytic conductivity probes with integrated temperature sensor. *Sensors Journal, IEEE*, 5(6), 1185-1196.

Hofmann, M. C., Ellersiek, D., Kensy, F., Büchs, J., Mokwa, W. and Schnakenberg, U. (2005). Galvanic decoupled sensor for monitoring biomass concentration during fermentation processes. *Sensors and Actuators B: Chemical*, 111, 370-375.

Huang, S. M., Stott, A. L., Green, R. G. and Beck, M. S. (1988). Electronic transducers for industrial measurement of low value capacitances. *Journal of Physics E: Scientific Instruments*, 21(3), 242.

Huck, C., Poghossian, A., Bäcker, M., Chaudhuri, S., Zander, W., Schubert, J., ... and Schöning, M. J. (2014). Capacitively coupled electrolyte-conductivity sensor based on high-k material of barium strontium titanate. *Sensors and Actuators B: Chemical*, 198, 102-109.

Hyldgård, A., Mortensen, D., Birkelund, K., Hansen, O. and Thomsen, E. V. (2008). Autonomous multi-sensor micro-system for measurement of ocean water salinity. *Sensors and Actuators A: Physical*, 147(2), 474-484.

Iliev, B. P., Nihtianov, S. N., Shterev, G. P. and Meijer, G. C. (2001). A multi-period interface system for impedance measurements. In *Sensors for Industry, 2001. Proceedings of the First ISA/IEEE Conference* (pp. 276-280).

ITT (1977). *Reference Data for Radio Engineers*, 6th Ed., Howard W. Sams & Co., Inc., International Telephone and Telegraph Corp. ISBN 0-672-21218-8.

Jaworek, A., Krupa, A. and Trela, M. (2004). Capacitance sensor for void fraction measurement in water/steam flows. *Flow Measurement and Instrumentation*, 15(5), 317-324.

Jonassen, N. (1998). Human body capacitance: static or dynamic concept?[ESD]. In *Electrical Overstress/Electrostatic Discharge Symposium Proceedings*, IEEE, (pp. 111-117).

Jones, R. V., & Richards, J. C. S. (1973). The design and some applications of sensitive capacitance micrometers. *Journal of Physics E: Scientific Instruments*, 6(7), 589.

Jordan, E. C. and Balmain, K. G. (1968). *Electromagnetic waves and radiating systems*. 2nd Ed., Prentice-Hall, Inc.

Kanai, H., Chatterjee, I. and Gandhi, O. P. (1984). Human body impedance for electromagnetic hazard analysis in the VLF to MF band. *Microwave Theory and Techniques, IEEE Transactions on*, 32(8), 763-772.

Kibble, B., Williams, J., Henderson, L., et al. (1999). *A guide to measuring resistance and impedance below 1 MHz*, The Institute of Measurement and Control (NPL). ISBN 0-904457-31-1.

- Kissinger, P. T. and Heineman, W. R. (1996). *Laboratory techniques in electroanalytical chemistry*, 2nd Ed., Marcel Dekker, Inc. ISBN 0-8247-9445-1.
- Koski, O. H., and Danielson, M. J. (1979). Design and construction of a high temperature and pressure electrodeless conductivity probe. *Review of Scientific Instruments*, 50(11), 1433-1436.
- Kozhevnikov, A. (2010). Wideband radio-frequency device for measurements of dielectric properties of small volumes of liquids. *Measurement Science and Technology*, 21(4), 043001.
- Kubáň, P., and Hauser, P. C. (2015). Contactless conductivity detection for analytical techniques-Developments from 2012 to 2014. *Electrophoresis*, 36(1), 195-211.
- Laugere, F., Lubking, G. W., Berthold, A., Bastemeijer, J. and Vellekoop, M. J. (2001). Downscaling aspects of a conductivity detector for application in on-chip capillary electrophoresis. *Sensors and Actuators A: Physical*, 92(1), 109-114.
- Lee, J. S., Fleig, J., Maier, J., Chung, T. J. and Kim, D. Y. (2005). Microcontact impedance spectroscopy in nitrogen-graded zirconia. *Solid state ionics*, 176(19), 1711-1716.
- Leonard, k. M. (2014). Webster, J. G. and Eren, H. (Editors) *Measurement, Instrumentation, and Sensors Handbook, Second Edition: Electromagnetic, Optical, Radiation, Chemical, and Biomedical Measurement*, "C.78 Water Quality Measurement", 2ⁿ Ed., CRC Press, ISBN: 978-1439848913.
- Lide, D.R. (2002). *Handbook of Chemistry and Physics*, 83rd Ed., CRC Press, Inc. ISBN: 978-0849304835.
- Lisdat, F. and Schäfer, D. (2008). The use of electrochemical impedance spectroscopy for biosensing. *Analytical and bioanalytical chemistry*, 391(5), 1555-1567.
- Lozano, A., Rosell, J. and Pallas-Areny, R. (1995). A multifrequency multichannel electrical impedance data acquisition system for body fluid shift monitoring. *Physiological measurement*, 16(4), 227.
- Macdonald, J. R. (1987). *Impedance spectroscopy, emphasizing solid materials and systems*, Wiley-Interscience. ISBN 978-0471831228.

Máriássy, M., Pratt, K. W. and Spitzer, P. (2009). Major applications of electrochemical techniques at national metrology institutes. *Metrologia*, 46(3), 199-213.

Mazzeo, B. A. and Flewitt, A. J. (2007). Two-and four-electrode, wide-bandwidth, dielectric spectrometer for conductive liquids: Theory, limitations, and experiment. *Journal of Applied Physics*, 102(10), 104106.

McAdams, E. T., Lacknermeier, A., McLaughlin, J. A., Macken, D. and Jossinet, J. (1995). The linear and non-linear electrical properties of the electrode-electrolyte interface. *Biosensors and Bioelectronics*, 10(1), 67-74.

Miksch, E. S. (1962). Measuring conductivity of water in a closed system. *Review of Scientific Instruments*, 33, 569-570.

Mirtaheri, P., Grimnes, S., Martinsen, Ø. G and Tønnessen, T. I. (2004). A new biomedical sensor for measuring PCO₂. *Physiological measurement*, 25(2), 421.

Nihtianov, S. N., Shterev, G. P., Petrov, N. and Meijer, G. C. (2001). Impedance measurements with second-order harmonic oscillator for testing food sterility. *Instrumentation and Measurement, IEEE Transactions on*, 50(4), 976-980.

Nihtianov, S. N. and Meijer, G. C. M. (1999). Non-destructive on-line sterility testing of long-shelf-life aseptically packaged food products by impedance measurements. In *AUTOTESTCON'99. IEEE Systems Readiness Technology Conference, 1999*. (pp. 243-249).

Oh, M., Kim, Y. and Park, J. (2007). Factors affecting the complex permittivity spectrum of soil at a low frequency range of 1 kHz–10 MHz. *Environmental geology*, 51(5), 821-833.

Okawa, Y., Norimatsu, H., Suto, H. and Takayanagi, M. (2003). The negative capacitance effect on the CV measurement of ultra thin gate dielectrics induced by the stray capacitance of the measurement system. In *Microelectronic Test Structures, 2003. International Conference on*, IEEE (pp. 197-202).

Oliver, B. M., and Cage, J. M. (1971). *Electronic Measurements and Instrumentation*, Inter-University Electronics Series, McGraw-Hill, Inc. ISBN: 978-0070476509.

Opekar, F., Tůma, P. and Štulík, K. (2013). Contactless Impedance Sensors and Their Application to Flow Measurements. *Sensors*, 13(3), 2786-2801.

Opekar, F. and Štulík, K. (2006). Renaissance of HF impedimetry in application to CE detection. *Electroanalysis*, 18(13-14), 1282-1288.

Pallas Areny, R. (2006) *Instrumentos electrónicos básicos*, Marcombo. ISBN: 84-267-1390-4.

Pallas-Areny, R. and Colominas, J. (1991). Simple, fast method for patient body capacitance and power-line electric interference measurement. *Medical and Biological Engineering and Computing*, 29(5), 561-563.

Pliquet, U. (2010). Bioimpedance: a review for food processing. *Food engineering reviews*, 2(2), 74-94.

Plonsey, R. (1969). *Bioelectric phenomena*. MacGraw-Hill, Inc. ISBN: 978-0070503427.

Ragheb, T. and Geddes, L. A. (1991). The polarization impedance of common electrode metals operated at low current density. *Annals of biomedical engineering*, 19(2), 151-163.

Ramo, S., Whinnery, J. R. and Van Duzer, T. (1994). *Fields and waves in communication electronics*, 3rd Ed., John Wiley & Sons, Inc. ISBN: 0-471-58551-3.

Ramos, P. M., Pereira, J. D., Ramos, H. M. G. and Ribeiro, A. L. (2008). A four-terminal water-quality-monitoring conductivity sensor. *Instrumentation and Measurement, IEEE Transactions on*, 57(3), 577-583.

Rao, A. S., Marshall, S., Gubbi, J., Palaniswami, M., Sinnott, R. and Pettigrovet, V. (2013). Design of low-cost autonomous water quality monitoring system. In *Advances in Computing, Communications and Informatics (ICACCI), 2013 International Conference on*, IEEE (pp. 14-19).

Real Decreto 140/2003, de 7 de febrero, por el que se establecen los criterios sanitarios de la calidad del agua para consumo humano. BOE núm. 45, pp. 7228-7245, Feb. 2003.

Reilley, C. N., and McCurdy Jr, W. H. (1953). Principles of high-frequency titrimetry. *Analytical Chemistry*, 25(1), 86-93.

Ribeiro, A. L., Ramos, H. M. G., Ramos, P. M. and Pereira, J. D. (2006). Inductive conductivity cell for water salinity monitoring. In *proceedings of XVIII Imeko World Congress, Metrology for a Sustainable Development* (pp. 17-22).

Rosell, J., Colominas, J., Riu, P., Pallas-Areny, R. and Webster, J. G. (1988). Skin impedance from 1 Hz to 1 MHz. *Biomedical Engineering, IEEE Transactions on*, 35(8), 649-651.

Rosemount (2011) *Liquid Analytical Solutions*, Emerson Process Management, Rosemount Analytical Inc. http://www2.emersonprocess.com/siteadmincenter/PM%20Rosemount%20Analytical%20Documents/Liq_Brochure_91-6012.pdf

Scharfetter, H., Hartinger, P., Hinghofer-Szalkay, H. and Hutten, H. (1998). A model of artefacts produced by stray capacitance during whole body or segmental bioimpedance spectroscopy. *Physiological measurement*, 19(2), 247.

Schwan, H. P., and Maczuk, J. (1960). Simple technique to control the stray field of electrolytic cells. *Review of Scientific Instruments*, 31(1), 59-62.

Serrano, R. E., Gasulla, M., Casas, O. and Pallas-Areny, R. (2003). Power line interference in ambulatory biopotential measurements. In *Engineering in Medicine and Biology Society, 2003. Proceedings of the 25th Annual International Conference of the IEEE* (Vol. 4, pp. 3024-3027).

Seshu, S. and Balabanian, N. (1959). *Linear Network Analysis*, John Wiley & Sons, Inc.

Stogryn, A. (1971). Equations for calculating the dielectric constant of saline water (Correspondence). *Microwave Theory and Techniques, IEEE Transactions on*, 19(8), 733-736.

Stott, A. L., Green, R. G. and Seraji, K. (1985). Comparison of the use of internal and external electrodes for the measurement of the capacitance and conductance of fluids in pipes. *Journal of Physics E: Scientific Instruments*, 18(7), 587.

Straub, A. (1994). Boundary element modeling of a capacitive probe for in situ soil moisture characterization. *Geoscience and Remote Sensing, IEEE Transactions on*, 32(2), 261-266.

Strazza, D., Demori, M., Ferrari, V. and Poesio, P. (2011). Capacitance sensor for hold-up measurement in high-viscous-oil/conductive-water core-annular flows. *Flow Measurement and Instrumentation*, 22(5), 360-369.

Striggow, K. and Dankert, R. (1985). The exact theory of inductive conductivity sensors for oceanographic application. *Oceanic Engineering, IEEE Journal of*, 10(2), 175-179.

Torrents, J. M. and Pallàs-Areny, R. (2002). Compensation of impedance meters, when using an external front-end amplifier. *Instrumentation and Measurement, IEEE Transactions on*, 51(2), 310-313.

Torrents, J. M., Juan-Garcia, P. and Aguado, A. (2007). Electrical impedance spectroscopy as a technique for the surveillance of civil engineering structures: considerations on the galvanic insulation of samples. *Measurement Science and Technology*, 18(7), 1958.

Thorn, R., Johansen, G. A. and Hammer, E. A. (1997). Recent developments in three-phase flow measurement. *Measurement Science and Technology*, 8(7), 691.

Uhov, A. (2006) *Contactless water conductivity measuring device*, Rusia, european patent application, EP1677109A1. 2006-07-05.

UNE EN 27888: *Calidad del agua – Determinación de la conductividad eléctrica*. Madrid: AENOR, 1993.

Von Hippel A. R. (1954). *Dielectric materials and applications*. The MIT Press, Cambridge Mass.

Wakamatsu, H. (1997). A dielectric spectrometer for liquid using the electromagnetic induction method. *Hewlett Packard Journal*, 48, 37-44.

Weeks, W. L. (1964). *Electromagnetic theory for engineering applications*, John Wiley & Sons, Inc.

Wei, J., Yue, C., Van Der Velden, M., Chen, Z. L., Liu, Z. W., Makinwa, K. A. A. and Sarro, P. M. (2010). Design, fabrication and characterization of a femto-farad capacitive sensor for pico-liter liquid monitoring. *Sensors and Actuators A: Physical*, 162(2), 406-417.

WTW (2004). WTW Multi 340i, Operating manual 2004. Wissenschaftlich-Technische Werkstätten GmbH. <http://www.wtw.de/en/home/downloadsinfocenter/manuals.html>

WTW (2012). *Lab and field instrumentation*, Wissenschaftlich-Technische Werkstätten GmbH. www.WTW.com

Yang, W. Q. (1996). A self-balancing circuit to measure capacitance and loss conductance for industrial transducer applications. *Instrumentation and Measurement, IEEE Transactions on*, 45(6), 955-958.

Yang, C., Rairigh, D., & Mason, A. (2006). On-chip electrochemical impedance spectroscopy for biosensor arrays. *In Sensors, 2006. 5th IEEE Conference on* (pp. 93-96).

Yang, W. (2010). Design of electrical capacitance tomography sensors. *Measurement Science and Technology*, 21(4), 042001.

Zemann, A. J. (2001). Conductivity detection in capillary electrophoresis. *TrAC Trends in Analytical Chemistry*, 20(6), 346-354.

Annexos

Annex A

Punts singulars del mòdul i la fase d'una impedància mesurada amb dos elèctrodes de contacte directe i un pseudo-pont automàtic

De l'equació (4.4), quan $C_{hl} = 0$ tenim

$$Z_{HL}(j\omega) \Big|_{\substack{C_{hl}=0 \\ \omega \gg \omega_c}} \approx \frac{R_x(1 + j\omega g_x R_x C_x)}{(1 + j\omega R_x C_x)^2} \quad (\text{A.1})$$

Per facilitar el desenvolupament canviem la nomenclatura de les variables i traiem els subíndex i superíndex de la impedància,

$$\begin{aligned} Z_{HL} &\approx R_x \frac{1 + jnx}{(1 + jx)^2}, \\ x &= \omega R_x C_x, \\ n &= g_x. \end{aligned} \quad (\text{A.2})$$

Llavors el mòdul de la impedància queda

$$|Z_{HL}| \approx R_x \frac{\sqrt{1 + (nx)^2}}{1 + x^2}. \quad (\text{A.3})$$

i la fase,

$$\varphi[Z_{HL}] \approx \text{tg}^{-1}(nx) - 2 \text{tg}^{-1}(x). \quad (\text{A.4})$$

Per trobar el màxim del mòdul es deriva i s'igualava a zero l'expressió (A.3),

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} |Z_{HL}| &= \frac{R_x}{(1 + x^2)^2} \left[\frac{n^2 x (1 + x^2)}{\sqrt{1 + (nx)^2}} - 2x \sqrt{1 + (nx)^2} \right] = 0 \\ n^2 (1 + x^2) &= 2 (1 + (nx)^2) \rightarrow x^2 = 1 - \frac{2}{n^2}. \end{aligned} \quad (\text{A.5})$$

Tornant ara a la nomenclatura inicial, la freqüència del màxim del mòdul és

$$\omega_{|Z_{HL}|_{\max}} = \omega_c \sqrt{1 - \frac{2}{g_x^2}}. \quad (\text{A.6})$$

La condició per tenir un màxim en el mòdul és $g_x > \sqrt{2}$ i el valor del mòdul a aquesta freqüència serà

$$|Z_{HL}|_{\max} = \frac{R_x}{2} \frac{g_x^2}{\sqrt{g_x^2 - 1}}. \quad (\text{A.7})$$

Per trobar el pas per zero de la fase, s'ha de complir que

$$\text{tg}^{-1}(nx) = 2 \text{tg}^{-1}(x) = \text{tg}^{-1}\left(\frac{2x}{1 + x^2}\right), \quad (\text{A.8})$$

i usant la identitat

$$\text{tg}(2\phi) = \frac{2 \text{tg}(\phi)}{1 + \text{tg}^2(\phi)}, \quad (\text{A.8a})$$

$$\text{on} \quad x = \text{tg}(\phi), \quad (\text{A.8b})$$

s'obté

$$nx = \frac{2x}{1+x^2} \rightarrow x^2 = 1 - \frac{2}{n}. \quad (\text{A.8c})$$

Tornant a la nomenclatura inicial, s'arriba a la freqüència de fase nul·la,

$$\omega_{\varphi=0} = \omega_c \sqrt{1 - \frac{2}{g_x}}, \quad (\text{A.9})$$

i la condició per existència de fase nul·la és $g_x > 2$. El mòdul de Z_{HL} a aquesta freqüència és

$$|Z_{\text{HL}}|_{\varphi=0} = \frac{R_x}{2} g_x. \quad (\text{A.10})$$

Per trobar el màxim de la fase s'ha de derivar i igualar a zero l'expressió (A.4),

$$\frac{d}{dx} \varphi[Z_{\text{HL}}] = \frac{n}{1+(nx)^2} - \frac{2}{1+x^2} = 0, \quad (\text{A.11})$$

$$n(1+x^2) = 2[1+(nx)^2] \rightarrow x^2 = \frac{1}{n} \left(\frac{n-2}{2n-1} \right). \quad (\text{A.12})$$

Tornant a la nomenclatura inicial, la freqüència de fase màxima és

$$\omega_{\varphi_{\text{max}}} = \omega_c \sqrt{\frac{g_x - 2}{g_x(2g_x - 1)}}, \quad (\text{A.13})$$

i la condició per existència de fase màxima és també $g_x > 2$. El mòdul de Z_{HL} a aquesta freqüència és

$$|Z_{\text{HL}}|_{\varphi_{\text{max}}} = \frac{R_x}{2} g_x \sqrt{\frac{2g_x - 1}{g_x^2 - 1}}. \quad (\text{A.14})$$

Per tant, és més fàcil que hi hagi un màxim en el mòdul que una fase positiva (i un màxim a la fase). Quan l'acoblament a terra és prou gran per tenir $C_g > C_x$, llavors hi ha totes dues coses.

Annex B

Efecte de la capacitat entre elèctrodes en una mesura d'impedància amb dos elèctrodes de contacte directe

L'expressió de la impedància mesurada a la fig. 4.1 si es considera $C_{hl} = 0$ és,

$$Z_{HL}(j\omega) \Big|_{\omega \gg \omega_e}^{C_{hl}=0} \approx \frac{R_x (1 + j\omega g_x R_x C_x)}{(1 + j\omega R_x C_x)^2}. \quad (B.1)$$

Si ara es considera $C_{hl} \neq 0$, atès que C_{hl} és una capacitat en paral·lel, la nova expressió de la impedància serà

$$Z_{HL}(j\omega) \Big|_{\omega \gg \omega_e}^{C_{hl} \neq 0} = \frac{\frac{1}{j\omega C_{hl}} Z_{HL}(j\omega) \Big|_{\omega \gg \omega_e}^{C_{hl}=0}}{\frac{1}{j\omega C_{hl}} + Z_{HL}(j\omega) \Big|_{\omega \gg \omega_e}^{C_{hl}=0}} = \frac{Z_{HL}(j\omega) \Big|_{\omega \gg \omega_e}^{C_{hl}=0}}{1 + j\omega C_{hl} Z_{HL}(j\omega) \Big|_{\omega \gg \omega_e}^{C_{hl}=0}}. \quad (B.2)$$

Substituint (B.1) dins (B.2) s'obté

$$Z_{HL}(j\omega) \Big|_{\omega \gg \omega_e}^{C_{hl} \neq 0} \approx \frac{R_x (1 + j\omega g_x R_x C_x)}{(1 + j\omega R_x C_x)^2 + j\omega R_x C_x \frac{C_{hl}}{C_x} (1 + j\omega g_x R_x C_x)}. \quad (B.3)$$

Per fer més fàcil el desenvolupament, canviem la nomenclatura de les variables i traiem els subíndexs i superíndexs de la impedància, i queda

$$Z_{HL} \approx R_x \frac{1 + jnx}{(1 + jx)^2 + jx \frac{C_{hl}}{C_x} (1 + jnx)},$$

$$x = \omega R_x C_x,$$

$$n = g_x. \quad (B.4)$$

Arreglant l'expressió, la podem posar com

$$Z_{HL} \approx R_x \frac{1 + jnx}{1 - Ax^2 + jBx}, \quad (B.5)$$

$$\text{on} \quad A = 1 + n \frac{C_{hl}}{C_x} \quad (B.5a)$$

$$\text{i} \quad B = 2 + \frac{C_{hl}}{C_x}. \quad (B.5b)$$

El mòdul de la impedància queda

$$|Z_{HL}| \approx R_x \left[\frac{1 + (nx)^2}{(1 - Ax^2)^2 + (Bx)^2} \right]^{\frac{1}{2}}. \quad (B.6)$$

Per trobar el seu màxim serà més fàcil treballar amb el quadrat del mòdul, ja que quan el mòdul sigui màxim també ho serà el seu quadrat,

$$|Z_{\text{HL}}|^2 \approx R_x^2 \frac{1+(nx)^2}{1+(B^2-2A)x^2+A^2x^4}. \quad (\text{B.7})$$

Derivant aquesta expressió respecte a x (que és el factor que inclou la freqüència) i igualant a zero s'obté el polinomi

$$x^4 + \frac{2}{n^2}x^2 + \frac{(B^2-2A)-n^2}{(nA)^2} = 0. \quad (\text{B.7})$$

Si $C_{\text{hl}} = 0$, $A = 1$ i $B = 2$ llavors

$$x^4 + \frac{2}{n^2}x^2 + \frac{2-n^2}{n^2} = 0 \rightarrow x^2 = 1 - \frac{2}{n^2}, \quad (\text{B.8})$$

que és el resultat obtingut quan $C_{\text{hl}} = 0$, expressió (A.5).

Quan $C_{\text{hl}} \neq 0$, de (B.7) s'obté

$$x^2 = \frac{1}{n^2} \left\{ \left[1 - \frac{n^2}{A^2} (B^2 - 2A - n^2) \right]^{\frac{1}{2}} - 1 \right\}, \quad (\text{B.9})$$

de manera que tornant a la nomenclatura inicial, el mòdul de la impedància és

$$|Z_{\text{HL}}(\omega)|_{\omega \gg \omega_c} \approx R_x \left\{ \frac{1 + (\omega g_x R_x C_x)^2}{\left[1 - \left(1 + g_x \frac{C_{\text{hl}}}{C_x} \right) (\omega R_x C_x)^2 \right]^2 + \left[\left(2 + \frac{C_{\text{hl}}}{C_x} \right) (\omega R_x C_x) \right]^2} \right\}^{\frac{1}{2}} \quad (\text{B.10})$$

i la freqüència a la qual es produeix el màxim del mòdul és

$$\omega_{|Z_{\text{HL}}|_{\text{max}}} = \frac{\omega_c}{g_x} \left[\left\{ 1 - \frac{g_x^2}{\left(1 + g_x \frac{C_{\text{hl}}}{C_x} \right)^2} \left[\left(\frac{C_{\text{hl}}}{C_x} \right)^2 - 2(g_x - 2) \frac{C_{\text{hl}}}{C_x} + 2 - g_x^2 \right] \right\}^{\frac{1}{2}} - 1 \right]^{\frac{1}{2}}. \quad (\text{B.11})$$

Per a que hi hagi una freqüència real on el mòdul sigui màxim, el terme de dintre de les arrels quadrades ha de ser positiu, de manera que s'ha de complir la condició

$$\begin{aligned} \left(\frac{C_{\text{hl}}}{C_x} \right)^2 - 2(g_x - 2) \frac{C_{\text{hl}}}{C_x} + 2 - g_x^2 < 0 &\rightarrow \frac{C_{\text{hl}}}{C_x} < (g_x - 2) + \sqrt{2}(g_x - 1) \\ \frac{C_{\text{hl}}}{C_x} < (g_x - 2) + \sqrt{2}(g_x - 1) &\rightarrow g_x > \sqrt{2} + (\sqrt{2} - 1) \frac{C_{\text{hl}}}{C_x}. \end{aligned} \quad (\text{B.12})$$

Si $C_{\text{hl}} = 0$, s'arriba a la mateixa condició de (A.6).

La impedància també es pot expressar com a part real i part imaginària, així

$$Z_{\text{HL}} \approx R_x \frac{1 + jnx}{1 - Ax^2 + jBx} = \text{Re} Z_{\text{HL}} + j \text{Im} Z_{\text{HL}}, \quad (\text{B.13})$$

$$\operatorname{Re} Z_{\text{HL}} = R_x \frac{1 + (2n-1)x^2}{(1-Ax^2)^2 + (Bx)^2}, \quad (\text{B.13a})$$

$$\operatorname{Im} Z_{\text{HL}} = R_x \frac{nx(1-Ax^2) - Bx}{(1-Ax^2)^2 + (Bx)^2}. \quad (\text{B.13b})$$

De l'expressió de la impedància s'obté que la fase és

$$\varphi[Z_{\text{HL}}] \approx \operatorname{tg}^{-1}(nx) - \operatorname{tg}^{-1}\left(\frac{Bx}{1-Ax^2}\right). \quad (\text{B.14})$$

Tornant ara a la nomenclatura inicial

$$\varphi[Z_{\text{HL}}(\omega)]_{\omega \gg \omega_c} \approx \operatorname{tg}^{-1}(\omega g_x R_x C_x) - \operatorname{tg}^{-1}\left(\frac{\left[2 + \frac{C_{\text{hl}}}{C_x}\right] \omega R_x C_x}{1 - \left[1 + g_x \frac{C_{\text{hl}}}{C_x}\right] [\omega R_x C_x]^2}\right). \quad (\text{B.15})$$

Per trobar quan la fase es fa zero és més fàcil obtenir la fase a partir de la part real i imaginària de la impedància,

$$\varphi[Z_{\text{HL}}] \approx \operatorname{tg}^{-1}\left[\frac{nx(1-Ax^2) - Bx}{1 + (2n-1)x^2}\right], \quad (\text{B.16})$$

$$\varphi[Z_{\text{HL}}] = 0 \rightarrow nx(1-Ax^2) - Bx = 0 \rightarrow x^2 = \frac{n-B}{nA}. \quad (\text{B.17})$$

Amb la nomenclatura inicial, queda

$$\omega_{\varphi=0} = \omega_c \sqrt{\frac{g_x - 2 - \frac{C_{\text{hl}}}{C_x}}{g_x \left(1 + \frac{g_x C_{\text{hl}}}{C_x}\right)}} = \omega_c \sqrt{1 - \frac{2}{g_x} \left[\frac{1 - \frac{C_{\text{hl}}}{(g_x - 2)C_x}}{1 + \frac{g_x C_{\text{hl}}}{C_x}}\right]^{\frac{1}{2}}}. \quad (\text{B.18})$$

Per haver-hi una freqüència de fase nul·la s'ha de complir

$$g_x - 2 - \frac{C_{\text{hl}}}{C_x} > 0 \rightarrow g_x > 2 + \frac{C_{\text{hl}}}{C_x}. \quad (\text{B.19})$$

Si $C_{\text{hl}} = 0$, s'arriba a la mateixa condició de (A.9). Per tant, segueix sent més difícil que hi hagi màxims a la fase que al mòdul, i la presència de C_{hl} fa que encara sigui una mica més difícil que quan $C_{\text{hl}} = 0$. Tal com s'explica en el text principal, això és degut a que C_{hl} tendeix a compensar l'efecte inductiu de la C_g .

Annex C

Impedància equivalent mesurada amb el mètode dels quatre elèctrodes

Per trobar l'expressió (5.1), que representa quan val la impedància $Z_m = V_{in}/I_L$ mesurada en el circuit de la fig. 5.3, se n'analitza el fragment mostrat a la fig. C.1,

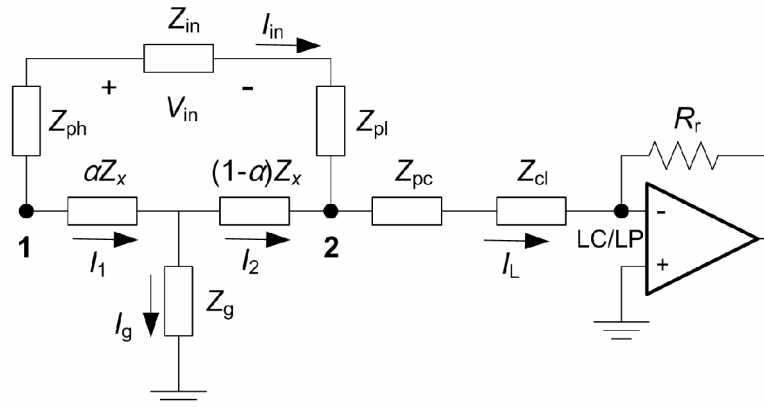


Figura C.1. Fragment del circuit de la fig. 5.3 analitzat per trobar la impedància mesurada.

Si s'anomena $Z_1 = \alpha Z_x$, $Z_2 = (1 - \alpha) Z_x$ i $Z_3 = Z_{pc} + Z_{cl}$, el circuit de la fig. C.1 es transforma en el circuit de la fig. C.2, que és més fàcil d'analitzar.

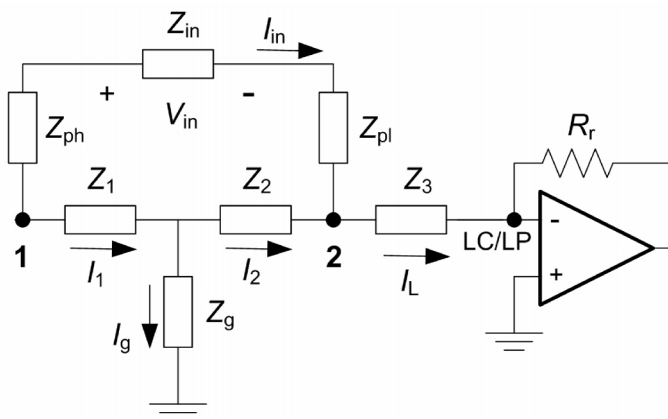


Figura C.2. Circuit de la fig. C.1 simplificat i canviant la nomenclatura de les impedàncies.

Les equacions de corrents i tensions en el circuit de la fig. C.2 són

$$I_1 = I_g + I_2, \quad (C.1)$$

$$I_L = I_{in} + I_2, \quad (C.2)$$

$$V_{12} = I_{in} (Z_{in} + Z_{ph} + Z_{pl}), \quad (C.3)$$

$$V_{12} = I_1 Z_1 + I_2 Z_2, \quad (C.4)$$

$$I_g Z_g = I_2 Z_2 + I_L Z_3 \rightarrow I_g = I_2 \frac{Z_2}{Z_g} + I_L \frac{Z_3}{Z_g}. \quad (C.5)$$

Combinant (C.5) amb (C.1) i posant-ho a (C.4) s'obté

$$V_{12} = (I_g + I_2) Z_1 + I_2 Z_2 = \left(I_2 \frac{Z_2}{Z_g} + I_L \frac{Z_3}{Z_g} + I_2 \right) Z_1 + I_2 Z_2. \quad (C.6)$$

Operant i usant (C.2) per substituir I_2 s'obté

$$V_{12} = I_2 \left(Z_1 + Z_2 + \frac{Z_1 Z_2}{Z_g} \right) + I_L \frac{Z_1 Z_3}{Z_g} = (I_L - I_{in}) \left(Z_1 + Z_2 + \frac{Z_1 Z_2}{Z_g} \right) + I_L \frac{Z_1 Z_3}{Z_g}, \quad (C.7)$$

$$V_{12} + I_{in} \left(Z_1 + Z_2 + \frac{Z_1 Z_2}{Z_g} \right) = I_L \left(Z_1 + Z_2 + \frac{Z_1 Z_2}{Z_g} + \frac{Z_1 Z_3}{Z_g} \right), \quad (C.8)$$

$$Z_{12} = Z_1 + Z_2 + \frac{Z_1 Z_2}{Z_g}. \quad (C.9)$$

Usant (C.3) i considerant que $I_{in} = V_{in}/Z_{in}$ resulta

$$\frac{V_{in}}{Z_{in}} (Z_{in} + Z_{ph} + Z_{pl} + Z_{12}) = I_L \left(Z_1 + Z_2 + \frac{Z_1 Z_2}{Z_g} + \frac{Z_1 Z_3}{Z_g} \right), \quad (C.10)$$

$$Z_m = \frac{V_{in}}{I_L} = \frac{Z_{in}}{Z_{in} + Z_{ph} + Z_{pl} + Z_{12}} \left(Z_1 + Z_2 + \frac{Z_1 Z_2}{Z_g} + \frac{Z_1 Z_3}{Z_g} \right). \quad (C.11)$$

Substituint les expressions de Z_1 , Z_2 i Z_3 s'arriba a l'expressió (5.1)

$$Z_m = \frac{V_{in}}{I_L} = \frac{Z_{in}}{Z_{in} + Z_{ph} + Z_{pl} + Z_{12}} Z_x \left[1 + \alpha \frac{(Z_{pc} + Z_{cl})}{Z_g} + \alpha(1 - \alpha) \frac{Z_x}{Z_g} \right], \quad (5.1)$$

$$Z_{12} = Z_1 + Z_2 + \frac{Z_1 Z_2}{Z_g} = Z_x \left[1 + \alpha(1 - \alpha) \frac{Z_x}{Z_g} \right]. \quad (5.2)$$

Z_{12} és la transformació estrella a triangle de les impedàncies entre els nodes 1 i 2.

Annex D

Esquema i corbes de resposta de l'amplificador d'instrumentació dissenyat mesurar impedància amb quatre elèctrodes

L'esquema elèctric de l'amplificador d'instrumentació d'alta freqüència dissenyat a mida per fer les mesures d'impedància amb 4 elèctrodes és el de la fig. D.1.

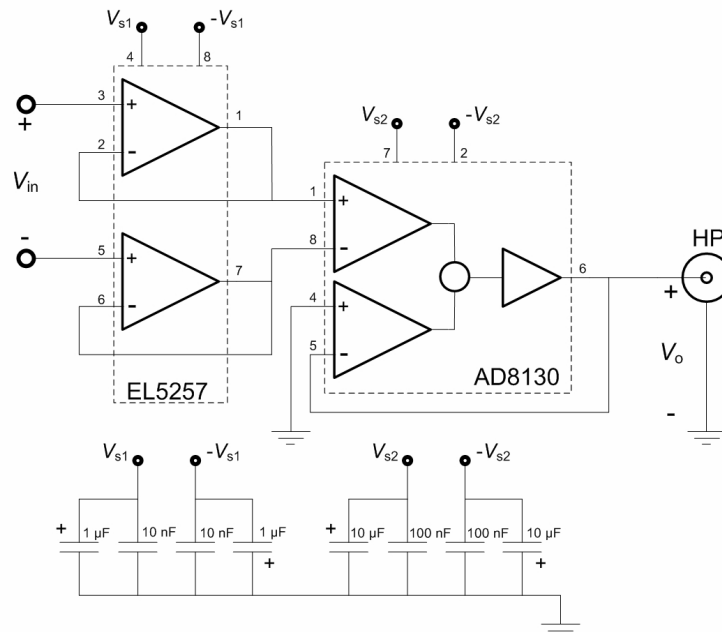


Figura D.1. Esquema elèctric de l'amplificador d'instrumentació d'alta freqüència i condensadors de desacoblament connectats als terminals d'alimentació dels xips.

El guany de l'amplificador entre 100 Hz i 100 MHz és el de la fig. D.2.

Guany: $|V_o/V_{in}|$

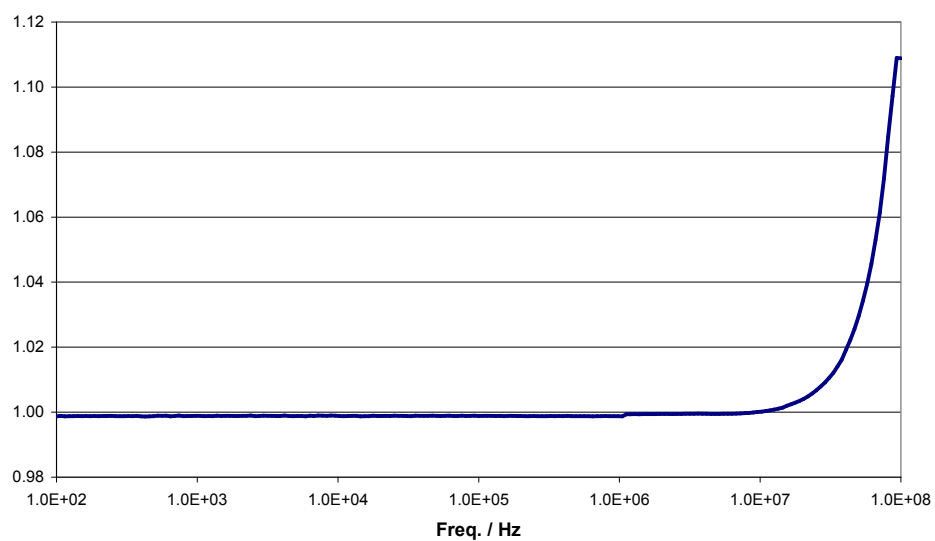


Figura D.2. Guany de l'amplificador entre 100 Hz i 100 MHz.

La fase de l'amplificador entre 100 Hz i 100 MHz és a la fig. D.3.

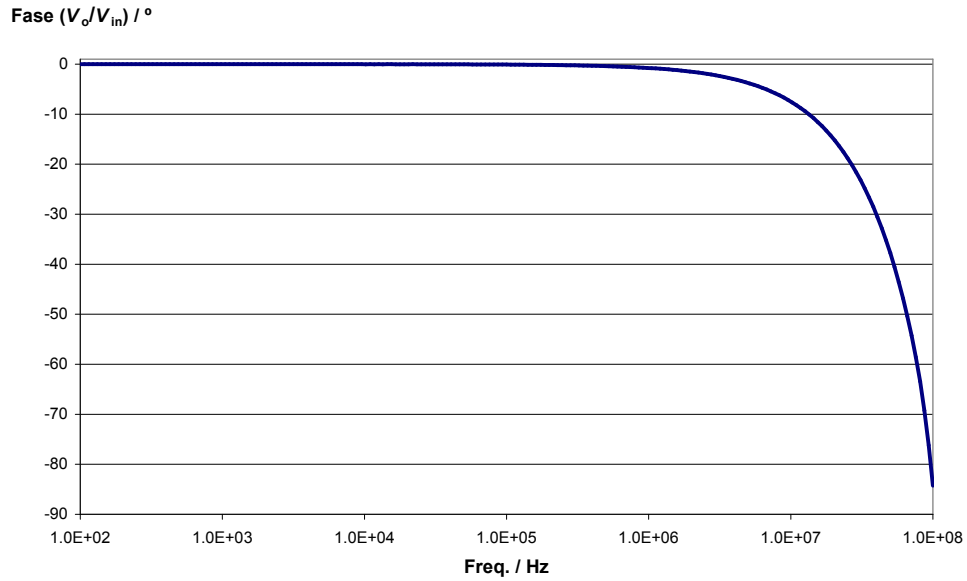


Figura D.3. Fase de l'amplificador entre 100 Hz i 100 MHz.

El CMRR de l'amplificador entre 100 Hz i 100 MHz és a la fig. D.4.

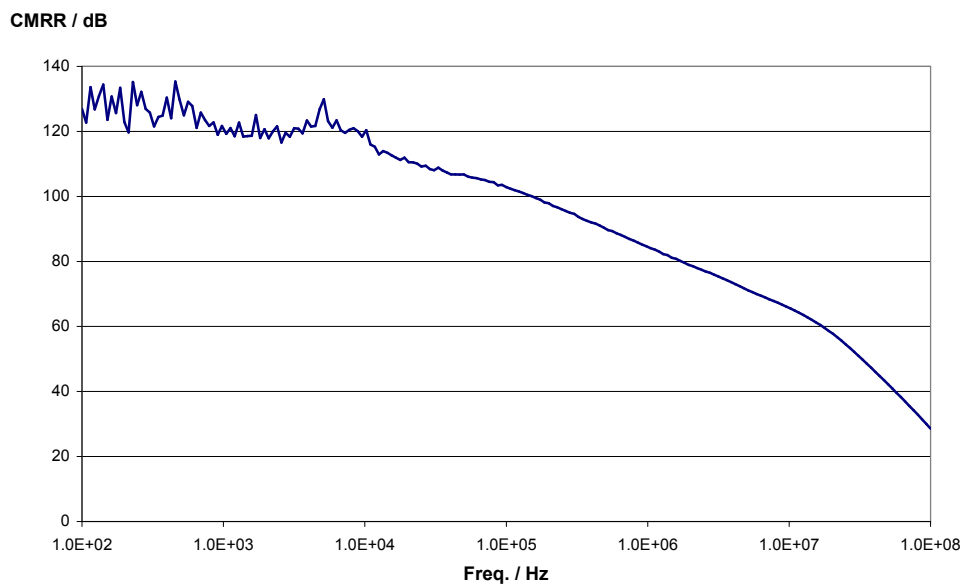


Figura D.4. CMRR de l'amplificador entre 100 Hz i 100 MHz.

El resum de les característiques més importants de l'amplificador d'instrumentació (guany/fase/CMRR) a 1 MHz i 10 MHz són, respectivament: 1/-0,8°/86 dB i 1,03/-8°/66 dB.

Annex E.

Mesures d'impedància bipolars amb elèctrodes capacitius ideals

En aquest annex s'analitza la mesura de la conductivitat elèctrica d'electròlits (líquids o sòlids), i de l'aigua en particular, amb un pseudo-pont automàtic que apliqui el mètode $V-I$ utilitzant elèctrodes capacitius modelats com una capacitat ideal (sense pèrdues), que és un model molt comú en diferents camps d'aplicació (Göpel 1991; Nihtianov i Meijer 1999; Ballico 1999; Hofmann *et al.* 2005; Gas *et al.* 2002; Opekar *et al.* 2013; Yang 2010). Per aquest motiu, en lloc de fer l'estudi a partir dels models generals del capítol 6, on s'inclou la resistència de fuites dels elèctrodes, es parteix de l'elèctrode ideal considerat a la bibliografia. D'aquesta manera es poden veure més clarament quins són els efectes de la capacitat paràsita entre elèctrodes i la capacitat d'acoblament a terra en el model d'elèctrode ideal, que pot ser prou vàlid en algunes aplicacions.

E.1. Mètode de mesura basat en un pseudo-pont automàtic

La fig. E.1 és el circuit equivalent quan es mesura la impedància d'un cos amb dos elèctrodes capacitius ideals connectats als nodes H i L d'un pseudo-pont automàtic basat en el mètode $V-I$. A més del material, entre H i L hi ha les impedàncies dels elèctrodes i la capacitat paràsita ("per l'aire") entre els elèctrodes, C_{hl} . Hi ha també una capacitat paràsita distribuïda C_g entre el cos que es mesura i terra. Les capacitats C_{hg} i C_{lg} no afecten la mesura, segons s'ha explicat a l'apartat 3.1.

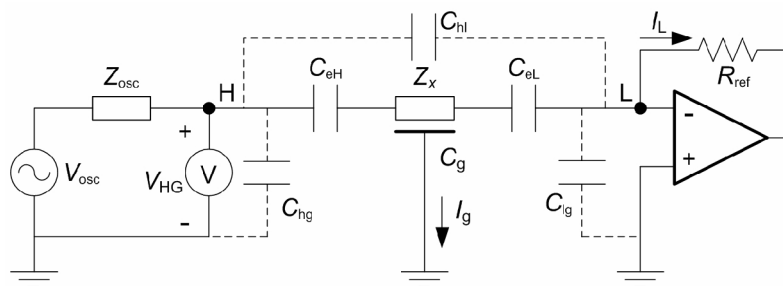


Figura E.1. Circuit equivalent i mètode de mesura d'impedància amb elèctrodes capacitius.

Z_x es modelitza amb una resistència R_x en paral·lel amb una capacitat C_x . R_x és k_{cell}/σ , on σ és la conductivitat elèctrica del material i k_{cell} és la constant de cel·la, i C_x és $\epsilon_0\epsilon_r/k_{\text{cell}}$, on ϵ_0 es la permitivitat elèctrica del buit i ϵ_r és la permitivitat relativa del material. La constant de cel·la és la mateixa per R_x i C_x (Ballico 1999). La freqüència (angular o pulsació) característica del material és $\omega_c = (R_x C_x)^{-1} = \sigma/\epsilon_0\epsilon_r$, i no depèn de la geometria (Coster *et al.* 1996). Els valors

de ω_c per aigua de diferents conductivitats són a la Taula 2.2 i, òbviament, el seu rang és igual que el de σ .

En ser els elèctrodes capacitius i fer la mesura amb dos elèctrodes en sèrie amb el material, cal pujar la freqüència de treball per tal de reduir la seva impedància (Göpel 1991, Reiley i McCurdy 1953), però això farà augmentar també I_g . Aquest corrent no arribarà al terminal L i reduirà I_1 , augmentant així la impedància mesurada entre H i L, calculada com V_{HG}/I_1 . Per tant, no convé que la freqüència de treball sigui massa alta. Aquesta freqüència queda també condicionada per la freqüència característica ω_c del material que es mesura: si es vol mesurar la seva conductivitat, la freqüència de mesura haurà de ser, en principi, molt més baixa que ω_c , mentre que si es vol determinar la permitivitat, la freqüència haurà de ser molt més alta que ω_c . Per tant, cal estudiar quina és la millor banda de freqüències en cada cas. Caldrà tenir present també la limitació de l'instrument al mesurar a freqüències baixes, perquè els elèctrodes faran molt gran la component imaginària de la impedància entre H i L, i pot ser difícil distingir la part real, molt més petita, que és on hi ha la informació sobre la conductivitat, perquè la resolució de l'instrument és limitada (Agilent 1998, 2000).

E.2 Model de la impedància elèctrica mesurada sense capacitats paràsites

Per poder identificar l'efecte concret de cadascuna de les dues capacitats paràsites que afecten el valor de la impedància mesurada, primer s'analitza Z_{HL} sense tenir-les en compte, després s'analitza l'efecte de la seva presència per separat, i finalment es consideren totes dues a l'ensems.

En absència de C_g i C_{hl} , de la fig. E.1 s'obté el model de Z_{HL} que es mostra a la fig. E.2.

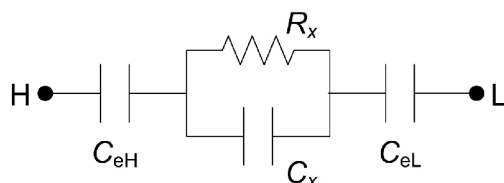


Figura E.2. Model de la impedància mesurada amb dos elèctrodes capacitius considerant $C_g = 0$ i $C_{hl} = 0$.

Si els elèctrodes es suposen, $C_{eH} = C_{eL} = C_e$, el circuit esdevé el de la fig. E.3.

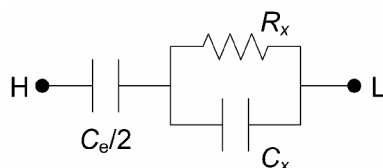


Figura E.3. Model de la impedància mesurada amb dos elèctrodes capacitius iguals quan $C_g = 0$ i $C_{hl} = 0$.

La impedància entre H i L és ara

$$Z_{\text{HL}}(j\omega) = \frac{1}{j\omega C_e/2} + \frac{R_x}{1+j\omega/\omega_c} = \frac{1}{j\omega C_e/2} \frac{(1+j\omega/\omega_z)}{(1+j\omega/\omega_c)} \quad (\text{E.1})$$

on

$$\omega_z = \frac{1}{R_x(C_x + C_e/2)} < \frac{1}{R_x C_x} = \omega_c. \quad (\text{E.2})$$

De l'expressió (E.1) es dedueix que Z_{HL} és principalment capacitiva. De (E.2) es conclou que $\omega_z < \omega_c$. Si C_e és comparable a C_x , ω_z i ω_c estaran tan a prop que només s'observarà la impedància deguda als elèctrodes. Si $C_e/2 \gg C_x$, ω_z i ω_c estaran força separades i si es mesura a una freqüència intermèdia ($\omega_z \ll \omega \ll \omega_c$), tindrem $Z_{\text{HL}}(j\omega) \approx R_x(1 + 2C_x/C_e) \approx R_x$. Però mentre amb elèctrodes de contacte directe és fàcil tenir una capacitat gran (la de la doble capa), C_e en els elèctrodes capacitius dependrà molt del dielèctric i del disseny de la cel·la. Per tant, per mesurar líquids d'alta conductivitat caldrà una constant de cel·la gran per aconseguir que R_x sigui prou alta.

El mòdul de la impedància entre H i L és

$$|Z_{\text{HL}}(\omega)| = \frac{1}{\omega C_e/2} \sqrt{\frac{1+(\omega/\omega_z)^2}{1+(\omega/\omega_c)^2}} \quad (\text{E.3})$$

i la fase

$$\varphi[Z_{\text{HL}}(\omega)] = -\tan^{-1} \left[\frac{\omega^2 + \omega_z \omega_c}{\omega(\omega_c - \omega_z)} \right]. \quad (\text{E.4})$$

Quan $\omega_z \approx \omega_c$, el mòdul no aportarà gaire informació sobre el material però en canvi la fase té un màxim a $\omega_{\text{max}} = \sqrt{\omega_z \omega_c}$ i per tant sempre hi és qualsevulla que sigui el valor relatiu de ω_z respecte a ω_c . El valor de la fase màxima és

$$\varphi[Z_{\text{HL}}(\sqrt{\omega_z \omega_c})]_{\text{max}} = -\tan^{-1} \left[\frac{2\sqrt{\omega_z \omega_c}}{\omega_c - \omega_z} \right]. \quad (\text{E.5})$$

Com més separades estiguin ω_z i ω_c , més a prop de 0° estarà el màxim de la fase, mentre que quan $\omega_z \approx \omega_c$, el màxim estarà més a prop de 90° , on la incertesa de les mesures de fase és molt gran. Aquest valor màxim depèn de les capacitats C_e i C_x , però no de R_x . En canvi, la situació del màxim ω_{max} és

$$\omega_{\max} = \sqrt{\omega_z \omega_c} = \frac{1}{R_x C_x} \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{C_e}{2C_x}}} = \frac{\sigma}{\epsilon_0 \epsilon_r} \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{C_e}{2C_x}}} \quad (\text{E.6})$$

que si que depèn de la conductivitat i per tant en podria permetre la determinació. Però també depèn de C_e i C_x , de manera que cal conèixer C_e per poder determinar R_x i C_x , o bé, si es coneix R_x , per poder determinar C_e i C_x . Cal tenir en compte, però, que si C_e és comparable a C_x la propagació d'incerteses a (E.5) serà molt desfavorable. A més, en el cas de l'aigua ($\epsilon_r \approx 80$), ω_c és alta per valors de conductivitat relativament baixos (Taula 2.2). Per exemple, si $\sigma = 1,5$ dS/m, $C_e = 50$ pF i $C_x = 5$ pF, resulta $\omega_{\max} = \omega_c / \sqrt{11}$, i $f_{\max} = \omega_{\max} / 2\pi \approx 10$ MHz, i a aquestes freqüències ja hi pot haver efectes de propagació d'ones.

Si en lloc de descriure Z_{HL} amb el mòdul i la fase, que donen una visió global, es descriu com a suma de part real i part imaginària per intentar mesurar millor σ i ϵ_r , tenim

$$\begin{aligned} Z_{\text{HL}}(j\omega) &= \frac{1}{j\omega C_e/2} + \frac{R_x}{1 + j\omega/\omega_c} = \text{Re} Z_{\text{HL}}(j\omega) + j\text{Im} Z_{\text{HL}}(j\omega) \\ &= \frac{R_x}{1 + (\omega/\omega_c)^2} - j \left[\frac{1}{\omega C_e/2} + \frac{1}{\omega C_x} \frac{(\omega/\omega_c)^2}{1 + (\omega/\omega_c)^2} \right]. \end{aligned} \quad (\text{E.7})$$

Si es mesura a freqüències baixes respecte a ω_c , l'expressió (E.7) s'aproxima per

$$Z_{\text{HL}}(j\omega)|_{\omega \ll \omega_c} \approx R_x - j \frac{1}{\omega C_e/2} \quad (\text{E.8})$$

i el seu circuit equivalent és el de la fig. E.4,

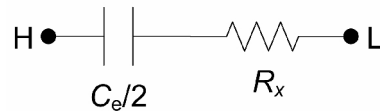


Figura E.4. Model de la impedància mesurada a baixa freqüència ($\omega \ll \omega_c$) amb dos elèctrodes capacitius iguals quan $C_g = 0$ i $C_{\text{hl}} = 0$.

Per tant, mesurant a freqüències molt per sota de ω_c , de la part real de Z_{HL} , s'obté la conductivitat elèctrica, sempre i quant ho permeti la resolució de l'instrument, i mesurant la part imaginària, que pot ser molt més gran, s'obté la capacitat dels elèctrodes.

Si ara es mesura a freqüències molt altes respecte a ω_c , l'expressió (E.7) s'aproxima per

$$Z_{\text{HL}}(j\omega)|_{\omega \gg \omega_c} \approx -j \frac{1}{\omega \frac{C_x C_e/2}{C_x + C_e/2}}, \quad (\text{E.9})$$

que és una impedància capacitiva pura i el circuit equivalent és el de la fig. E.5. Si de la mesura de la part imaginària a baixes freqüències s'ha obtingut C_e , ara es pot obtenir C_x i la permitivitat elèctrica del material, sempre i quan no hi hagi efectes de propagació d'ones.

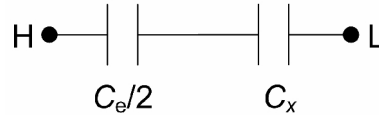


Figura E.5. Model de la impedància mesurada a alta freqüència ($\omega \gg \omega_c$) amb dos elèctrodes capacitius iguals quan $C_g = 0$ i $C_{\text{hl}} = 0$.

En resum, quan la resolució de l'instrument ho permeti, per determinar la conductivitat i la permitivitat és millor mesurar la part real i la part imaginària de Z_{HL} que el seu mòdul i fase. Llavors, a baixa freqüència es pot deduir la conductivitat de la part real i la capacitat dels elèctrodes de la part imaginària. A alta freqüència es pot obtenir la permitivitat, descomptant la capacitat dels elèctrodes, sempre i quan no hi hagi efectes de propagació.

E.3 Model de la impedància mesurada incloent-hi la capacitat entre elèctrodes

Si al model de la impedància mesurada amb dos elèctrodes capacitius (ideals) iguals, (fig. E.3) se li afegeix la capacitat paràsita entre elèctrodes C_{hl} , s'obté el model equivalent de la fig. E.6.

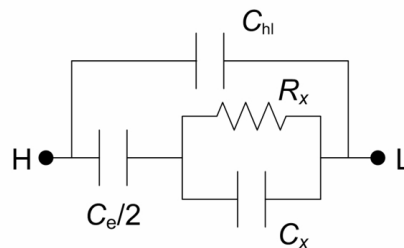


Figura E.6. Model circuital de la mesura d'impedància realitzada amb dos elèctrodes capacitius considerant $C_g = 0$ i $C_{\text{hl}} \neq 0$.

La impedància entre H i L és ara

$$Z_{\text{HL}}(j\omega) = \frac{1}{j\omega(C_{\text{hl}} + C_e/2)} \frac{(1 + j\omega/\omega_z)}{(1 + j\omega/\omega_p)} \quad (\text{E.10})$$

on

$$\omega_p = \frac{1}{R_x \left(C_x + \frac{C_{hl} C_e / 2}{C_{hl} + C_e / 2} \right)} < \omega_c. \quad (\text{E.11})$$

Comparant amb l'expressió de ω_z a (E.2), és dedueix $\omega_z < \omega_p < \omega_c$. Per tant, comparant (E.1) amb (E.10), ω_c ha quedat substituïda per una freqüència ω_p més baixa.

La impedància Z_{HL} segueix essent principalment capacitiva. A freqüències molt baixes respecte a ω_z , Z_{HL} és la impedància d'una capacitat pura de valor

$$C_{LF} = C_{hl} + \frac{C_e}{2} \quad (\text{E.12})$$

és a dir, C_{hl} es suma a la impedància dels dos elèctrodes en sèrie. A freqüències molt altes respecte a ω_p , Z_{HL} és la impedància d'una capacitat pura de valor

$$C_{HF} = C_{LF} \frac{\omega_z}{\omega_p} = C_{hl} + \frac{C_x C_e / 2}{C_x + C_e / 2} < C_{LF} \quad (\text{E.13})$$

és a dir, C_{hl} es suma a la combinació en sèrie de la capacitat dels elèctrodes i del material. A la zona de transició entre aquestes freqüències extremes hi ha ω_z , ω_p i ω_c , i la seva amplada dependrà de la separació entre ω_z i ω_p , i per tant de la mida dels elèctrodes i de la seva separació: com més grans siguin, major serà C_e , i com més separats, menor serà C_{hl} .

El mòdul de la impedància Z_{HL} serà

$$|Z_{HL}(\omega)| = \frac{1}{\omega(C_{hl} + C_e/2)} \sqrt{\frac{1 + \omega^2/\omega_z^2}{1 + \omega^2/\omega_p^2}} \quad (\text{E.14})$$

que sempre és més petit que el del cas $C_{hl} = 0$, equació (E.3), perquè el numerador és el mateix i el denominador és més gran. La fig. E.7 és la representació d'aquesta equació quan $C_x = 5$ pF, $C_e = 100$ pF i $C_{hl} = 0$ pF (línia grisa) i 2 pF (línia negra), i $C_e = 2$ nF i $C_{hl} = 2$ pF (línia discontinua). Quan $C_{hl} \neq 0$, el mòdul és sempre menor. Es distingeixen clarament el dos pendents del mòdul (un per cada capacitat equivalent C_{LF} i C_{HF}) i la zona de transició. A baixa freqüència, la línia grisa i la negra gairebé coincideixen, $C_{LF} = 50$ pF i 52 pF, respectivament. La línia discontinua, en canvi, té $C_{LF} = 1002$ pF i això fa que les freqüències ω_p i ω_z estiguin molt separades, $\omega_p/\omega_z = 72,2$, fet que permet observar una zona de transició pràcticament plana de valor 1: el mòdul de Z_{HL} és igual a R_x . Amb elèctrodes capacitius, però, costarà d'observar aquesta zona plana perquè és difícil fer que la seva capacitat sigui alta. La relació ω_p/ω_z és 6,0 per a la línia grisa i 4,4 per a la línia negra. Per

tant, la capacitat C_{hl} fa baixar aquesta relació i fa que el mòdul sigui més capaçiu i aporti encara menys informació sobre la conductivitat.

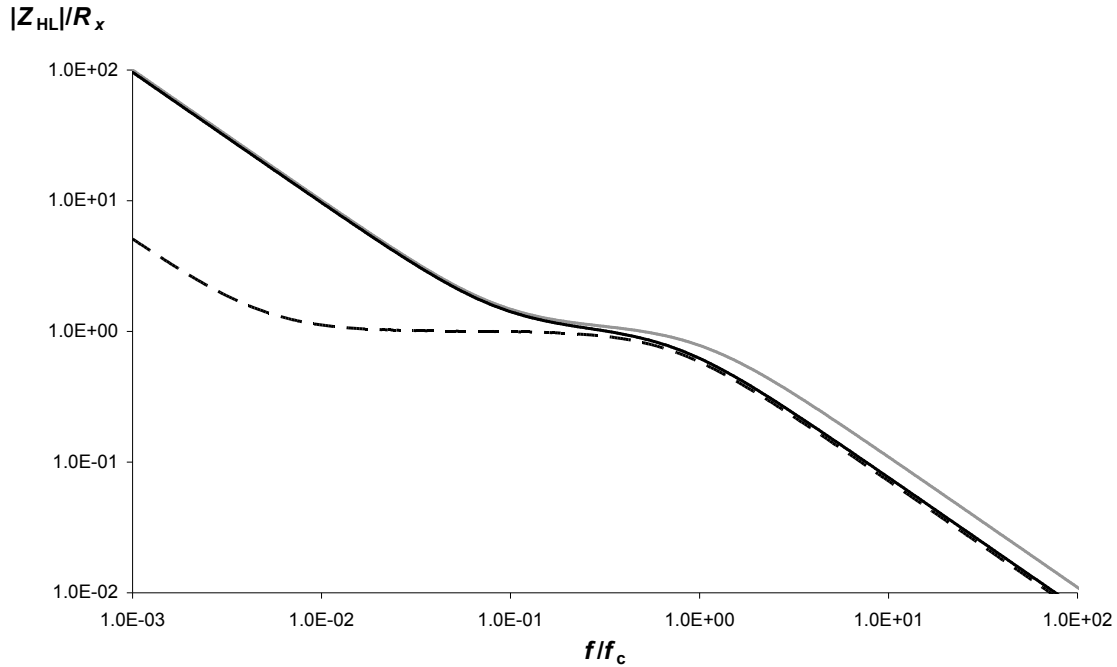


Figura E.7. Mòdul normalitzat de la impedància Z_{HL} de la fig. E.6 quan $C_x = 5$ pF, $C_e = 100$ pF i $C_{hl} = 0$ pF (línia grisa) i 2 pF (línia negra), i $C_e = 2$ nF i $C_{hl} = 2$ pF (línia discontinua).

La fase de la impedància de Z_{HL} és

$$\varphi[Z_{HL}(\omega)] = -\tan^{-1} \left[\frac{\omega^2 + \omega_z \omega_p}{\omega(\omega_p - \omega_z)} \right] \quad (\text{E.15})$$

que té un màxim a $\omega_{\max} = \sqrt{(\omega_z \omega_p)}$, de valor

$$\varphi[Z_{HL}(\sqrt{\omega_z \omega_p})]_{\max} = -\tan^{-1} \left[\frac{2\sqrt{\omega_z \omega_p}}{\omega_p - \omega_z} \right]. \quad (\text{E.16})$$

La fig. E.8 mostra la fase quan $C_x = 5$ pF: les línies grisa i negra corresponen a $C_e = 100$ pF i $C_{hl} = 0$ pF i 2 pF, respectivament; la línia discontinua correspon a $C_e = 2$ nF i $C_{hl} = 2$ pF. Els màxims de la fase i les seves freqüències relatives (f_{\max}/f_c) són: -44° i 0,41 per a la línia grisa, -51° i 0,36 per a la línia negra i per a la línia discontinua -13° i 0,08. Una C_e més gran fa augmentar el valor màxim de la fase (menys negativa) i fa baixar la freqüència on es troba, mentre que C_{hl} fa augmentar també el valor de la fase però fa pujar la freqüència del màxim.

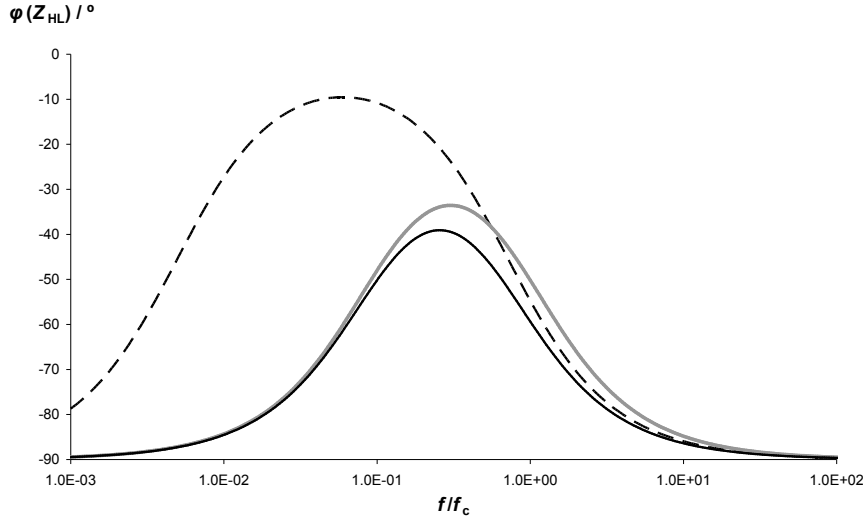


Figura E.8. Fase de la impedància de la impedància Z_{HL} de la fig. E.6 quan $C_x = 5$ pF, $C_e = 100$ pF i $C_{hl} = 0$ pF (línia grisa) i 2 pF (línia negra), i $C_e = 2$ nF i $C_{hl} = 2$ pF (línia discontinúta).

Si Z_{HL} es descriu mitjançant les seves parts real i imaginària, de l'equació (E.10) s'obté

$$Z_{HL}(j\omega) = \text{Re} Z_{HL}(\omega) + j \text{Im} Z_{HL}(\omega) = \frac{\frac{1}{\omega_z} - \frac{1}{\omega_p}}{\left(C_{hl} + \frac{C_e}{2}\right) \left(1 + \frac{\omega^2}{\omega_p^2}\right)} - j \frac{1 + \frac{\omega^2}{\omega_z \omega_p}}{\omega \left(C_{hl} + \frac{C_e}{2}\right) \left(1 + \frac{\omega^2}{\omega_p^2}\right)}. \quad (\text{E.17})$$

La part real a freqüències baixes respecte a ω_p és

$$\text{Re} Z_{HL}(\omega) \Big|_{\omega \ll \omega_p} \approx \frac{\frac{1}{\omega_z} - \frac{1}{\omega_p}}{C_{hl} + C_e/2} = R_x \left(\frac{C_e/2}{C_{hl} + C_e/2} \right)^2 = R_x k_{hl} < R_x. \quad (\text{E.18})$$

Per tant, hi ha una desviació sistemàtica respecte al valor R_x desitjat. Aquesta desviació és sempre negativa perquè la resistència mesurada és inferior a R_x ($k_{hl} \leq 1$), no depèn de la freqüència, i disminueix com més gran sigui C_e respecte a C_{hl} . Amb elèctrodes de contacte directe (Capítol 4), aquesta desviació independent de la freqüència només es dona a alta freqüència.

La fig. E.9 representa la part real de Z_{HL} en els tres mateixos casos d'abans amb $C_x = 5$ pF: $C_e = 100$ pF i $C_{hl} = 0$ pF (línia grisa) i 2 pF (línia negra), i $C_e = 2$ nF i $C_{hl} = 2$ pF (línia discontinúta). La zona de "baixa freqüència" (zona plana de la corba) arriba fins unes dues dècades per sota de ω_c . Per a la línia grisa ($C_{hl} = 0$), $k_{hl} = 1$, però $C_{hl} = 2$ pF (i $C_e = 100$ pF) dóna $k_{hl} = 0,925$ (línia negra), és a dir, una desviació del 7,5 %. Si C_e s'augmenta fins a 2 nF (línia discontinúta), $k_{hl} = 0,996$ i la desviació és del 0,4 %.

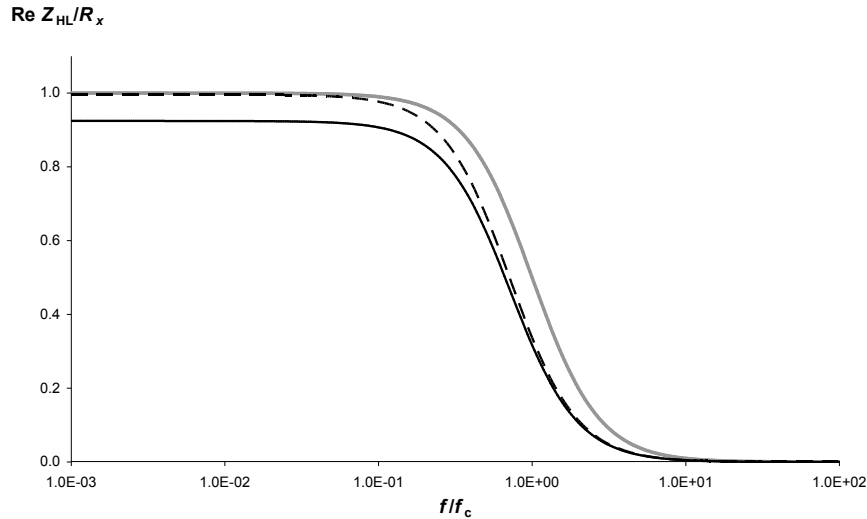


Figura E.9. Part real normalitzada de la impedància Z_{HL} de la fig. E.6 quan $C_x = 5$ pF, $C_e = 100$ pF i $C_{hl} = 0$ pF (línia gris) i 2 pF (línia negra), i $C_e = 2$ nF i $C_{hl} = 2$ pF (línia discontinua).

Si la part real és massa petita per mesurar-la bé amb l'instrument disponible, es pot mesurar la part imaginària. Com que aquesta tindrà una dependència amb la freqüència similar a la del mòdul de la impedància, és millor mesurar la capacitat equivalent sèrie entre H i L. L'expressió d'aquesta capacitat és

$$C_{HL}(\omega) = \frac{-1}{\omega \text{Im} Z_{HL}(\omega)} = (C_{hl} + C_e/2) \frac{1 + \omega^2/\omega_p^2}{1 + \omega^2/\omega_z\omega_p} \quad (\text{E.19})$$

on C_{hl} intervé sumant-se a $C_e/2$ i també dins de ω_p , expressió (E.11).

Per tant, C_{hl} afecta a baixes i altes freqüències, el seu efecte depèn del seu valor respecte a C_e i pot arribar a ser significatiu. Així, per exemple, en una aplicació de la mesura de la conductivitat de l'aigua dins d'ampolles segellades, mitjançant elèctrodes capacitius (Ballico 1999), es mesurava la capacitat equivalent sèrie i es buscava un punt singular fent una mesura de capacitat a baixa freqüència, C_{LF} , i una altra a alta freqüència, C_{HF} . Si $C_{hl} = 0$, a partir de (E.19), (E.12) i (E.13) es pot comprovar que a la freqüència característica del material es compleix

$$C_{HL}(\omega_c) = 2 \left(\frac{2}{C_e} + \frac{2C_x + C_e}{C_x C_e} \right)^{-1} = 2 \left(\frac{1}{C_{LF}} + \frac{1}{C_{HF}} \right)^{-1}. \quad (\text{E.19a})$$

Per tant, mesurant la capacitat entre H i L i determinant la freqüència a la que es compleix l'equació (E.19a), s'obté $\omega_c = \sigma/\epsilon_0\epsilon_r$ i d'aquesta se n'extreu la conductivitat elèctrica de l'aigua si es coneix la seva permitivitat.

Però si $C_{hl} \neq 0$, aquest punt singular no es dóna a ω_c sinó a ω_p ,

$$C_{HL}(\omega_p) = 2 \left(\frac{2}{C_e} + \frac{2C_x + C_e}{C_x C_e} \right)^{-1} = 2 \left(\frac{1}{C_{LF}} + \frac{1}{C_{HF}} \right)^{-1} \quad (\text{E.19b})$$

i com que $\omega_p \neq \omega_c$ i ω_p , C_{LF} i C_{HF} depenen de C_{hl} i estimar el valor d'aquesta capacitat pot ser difícil, també serà difícil determinar la conductivitat, encara que no hi hagi efectes de propagació d'ona.

En resum, C_{hl} es suma a la capacitat dels elèctrodes, de manera que afecta la capacitat mesurada a freqüències molt baixes i molt altes, respecte a la freqüència característica del material. Però afecta també la part real de la impedància mesura a baixes freqüències, que és d'on s'intenta obtenir la conductivitat del material. L'efecte és una desviació sistemàtica negativa que fa que la resistència real sigui sempre major que la mesurada, i per tant la conductivitat real sigui menor. Tots aquests efectes disminueixen al fer-ho C_{hl}/C_e .

E.4 Model de la impedància mesurada incloent-hi la capacitat a massa

La fig. E.10 mostra el circuit equivalent que modela amb paràmetres concentrats la impedància mesurada entre els terminals H i L amb elèctrodes capacitius. Z_{HL} inclou les capacitats dels elèctrodes (C_{eH} i C_{eL}), la impedància del material Z_x i la capacitat paràsita entre el cos de la impedància i terra, C_g . C_{hl} es considera inicialment nul·la. C_g és una capacitat distribuïda i es descriu amb paràmetres concentrats mitjançant el paràmetre α .

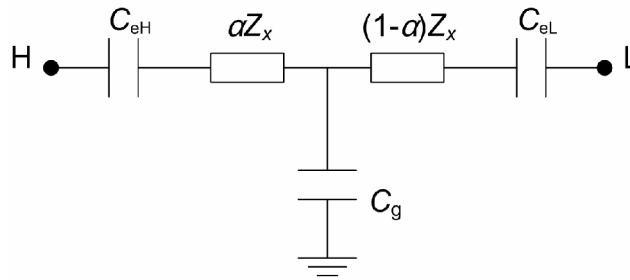


Figura E.10. Model equivalent de la impedància Z_{HL} mesurada amb dos elèctrodes capacitius considerant $C_g \neq 0$ i $C_{hl} = 0$.

La transformació estrella-triangle aplicada al circuit de la fig. E.10 dóna

$$Z_{HL}(j\omega) = \frac{1}{j\omega C_{eH}} + \frac{1}{j\omega C_{eL}} + \frac{1}{j\omega \frac{C_{eH} C_{eL}}{C_g}} + Z_x \left[1 + (1-\alpha) \frac{C_g}{C_{eH}} + \alpha \frac{C_g}{C_{eL}} + j\omega \alpha (1-\alpha) C_g Z_x \right] \quad (\text{E.20})$$

on els termes que no depenen de Z_x són les contribucions de les impedàncies dels elèctrodes, en aquest cas capacitives, i n'hi ha tres: les dues primeres són les dels elèctrodes

H i L, i la tercera és el producte d'aquestes dues capacitats dividida per C_g . Per tant, l'acoblament a terra introdueix una tercera capacitat en sèrie amb la dels elèctrodes, de manera que la capacitat resultant sempre serà menor que la capacitat sèrie dels dos elèctrodes, fet que d'entrada és desfavorable perquè reduirà el valor relatiu de Z_x respecte a la impedància contribuïda pels elèctrodes.

Els termes de l'equació (E.20) que depenen de Z_x són un factor de sensibilitat i un factor no lineal. Aquest últim és igual al descrit al capítol 4 per a mesures d'impedància amb elèctrodes de contacte directe. El factor de sensibilitat, en canvi, ara no depèn de la freqüència, sinó que només depèn de la relació entre C_g i la capacitat de cada elèctrode. La contribució de cada elèctrode és diferent, tal com passava a l'equació (3.22), que és vàlida per a qualsevol tipus d'elèctrode.

Si les capacitats dels elèctrodes són iguals ($C_{eH} = C_{eL} = C_e$), l'expressió (E.20) queda com

$$Z_{HL}(j\omega) = \frac{1}{j\omega \frac{C_e}{2}} \left(1 + \frac{C_g}{2C_e} \right) + \frac{R_x}{1 + j\omega R_x C_x} \left(1 + \frac{C_g}{C_e} \right) + \frac{j\omega\alpha(1-\alpha)R_x^2 C_g}{(1 + j\omega R_x C_x)^2}. \quad (\text{E.21})$$

Aquest resultat també es pot obtenir a partir de l'expressió (3.23), si es suposa que la resistència de pèrdues del material aïllant és prou gran per tenir $\omega C_e R_e \gg 1$. Per als elèctrodes de contacte directe es compleix $C_g/C_e \ll 1$, però no per als elèctrodes capacitius, de manera que ara la relació C_g/C_e afecta més, i ho fa modificant tant la contribució dels elèctrodes com la de Z_x .

La fig. E.11 mostra el circuit equivalent de l'equació (E.21). Cada subxarxa correspon a un dels cinc termes de l'equació desenvolupada, com en el cas del circuit general de la fig. 3.13, però l'absència de R_e fa que ara només la subxarxa E sigui un tanc ressonant *RLC* en lloc dels tres de la fig. 3.13. Les subxarxes A i B corresponen als elèctrodes i a l'efecte de C_g sobre la seva impedància. El segon terme de (E.21) és la impedància del material Z_x multiplicada per un factor de sensibilitat que depèn de C_g/C_e però no de la freqüència, perquè s'ha suposat $\omega C_e R_e \gg 1$, i correspon a la subxarxa D de la fig. E.11. El tercer terme de (E.21) és el terme no lineal (subxarxa E), que és idèntic al del model general (equació 3.23) i al cas d'elèctrodes de contacte directe (equació 4.3), perquè és un terme que no depèn dels elèctrodes. Per tant hi haurà els mateixos efectes inductiu, resistiu i capacitiu "aparents", i la freqüència de ressonància del tanc *RLC* seguirà sent la freqüència característica del material que s'està mesurant.

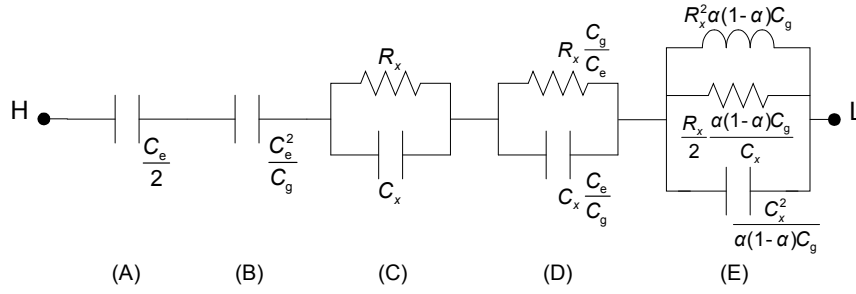


Figura E.11. Circuit equivalent de la mesura bipolar d'impedància feta amb elèctrodes capacitius.

Agrupant els termes de l'equació (E.21) on hi ha R_x s'obté

$$Z_{\text{HL}}(j\omega) = \frac{1}{j\omega \frac{C_e}{(1+g_e)}} + g_e R_x \frac{(1+j\omega g_{xe} R_x C_x)}{(1+j\omega R_x C_x)^2}, \quad (\text{E.22})$$

$$g_e = 1 + \frac{C_g}{C_e}, \quad (\text{E.23})$$

$$g_{xe} = 1 + \frac{\alpha(1-\alpha) C_g}{g_e C_x} = 1 + \alpha(1-\alpha) \frac{1}{C_x} \frac{C_g C_e}{(C_g + C_e)}, \quad (\text{E.24})$$

de manera que $g_e \geq 1$ i $g_{xe} \geq 1$. La reducció de C_e pel factor $1 + g_e$ fa que ara sigui més difícil trobar una freqüència prou alta on els elèctrode no influeixin en la mesura, i la impedància Z_{HL} tindrà una component fortament capacitiva deguda als elèctrodes que “emascararà” Z_x .

A freqüències prou baixes respecte a ω_c/g_{xe} , l'equació (E.22) es pot aproximar per

$$Z_{\text{HL}}(j\omega) \Big|_{\omega \ll \frac{\omega_c}{g_{xe}}} \approx g_e R_x + \frac{1}{j\omega \frac{C_e}{(1+g_e)}} + j\omega \alpha(1-\alpha) R_x^2 C_g \approx g_e R_x + \frac{1}{j\omega \frac{C_e}{(1+g_e)}} \quad (\text{E.25})$$

on és immediat identificar les parts real i imaginària de Z_{HL} . En particular, $\text{Re } Z_{\text{HL}} \approx g_e R_x$, de manera que, a diferència de les mesures amb elèctrodes de contacte directe, R_x no es pot obtenir directament de la part real sinó que queda multiplicada pel factor g_e , que depèn de C_g/C_e . La part imaginària de Z_{HL} a l'equació (E.25) és la capacitat de l'elèctrode “disminuïda” per l'acoblament a terra, $C_e/(1+g_e)$, més la inductància residual $\alpha(1-\alpha)R_x^2 C_g$ que depèn de C_g però no dels elèctrodes. Normalment, a baixa freqüència el terme capacitiu predominarà sobre l'inductiu. Per tant, si es coneguéssim C_e , mesurant la part real i la part imaginària es podria determinar R_x i C_g . Tanmateix, estimar C_e per exemple a partir de la geometria és difícil a causa dels efectes de vores.

Tornant a l'equació general (E.22), si el terme que multiplica R_x (*i.e.*, la sensibilitat) es reescriu en funció de la freqüència característica s'obté

$$g_e \frac{1 + j\omega g_{xe} R_x C_x}{(1 + j\omega R_x C_x)^2} = g_e \frac{1 + j\omega \frac{g_{xe}}{\omega_c}}{\left(1 + j\frac{\omega}{\omega_c}\right)^2}, \quad (\text{E.26})$$

mentre que si es fa el mateix amb el terme que multiplica R_x a l'expressió (4.4), corresponent a la mesura de Z_{HL} amb elèctrodes de contacte directe a freqüències prou altes respecte a $\omega_{ex} = [(R_x R_e)^{1/2} C_e]^{-1}$, queda

$$\frac{1 + j\omega g_x R_x C_x}{(1 + j\omega R_x C_x)^2} = \frac{1 + j\omega \frac{g_x}{\omega_c}}{\left(1 + j\frac{\omega}{\omega_c}\right)^2}. \quad (\text{E.27})$$

A banda de la presència de g_e en el primer cas, els dos termes tenen la mateixa forma: un zero i un pol doble a ω_c . El numerador modelitza l'efecte inductiu: augment de la impedància i de la fase quan la freqüència de mesura s'apropa a la freqüència del zero (numerador), que és sempre menor que la freqüència característica perquè el factor que divideix ω_c és més gran que la unitat atès que, segons (E.24), $g_{xe} > 1$, i segons (4.5), $g_x = 1 + \alpha(1 - \alpha)C_g/C_x > 1$. Com que $g_e = 1 + C_g/C_e > 1$, de (E.24) resulta $g_{xe} < g_x$ i per tant les freqüències dels zeros compleixen $\omega_c/g_x < \omega_c/g_{xe} < \omega_c$. És a dir, la freqüència del zero per a elèctrodes capacitius està més a prop de la freqüència característica i per tant el seu efecte quedarà més compensat per l'efecte del pol. Conseqüentment, a igualtat de ω_c i C_g/C_x , l'efecte inductiu causat per l'acoblament a terra serà menys visible amb elèctrodes capacitius que amb elèctrodes de contacte directe.

En resum, l'acoblament a terra empitjora per una banda la impedància equivalent dels elèctrodes perquè la fa més gran i està en sèrie amb la impedància Z_x que volem mesurar, i per altra incrementa la desviació de la sensibilitat en la determinació de R_x , tot i que ara aquesta desviació no depèn de la freqüència. Tots dos efectes depenen de C_g/C_e , i per tant una C_g petita pot ser important si C_e també ho és. El resultat pot ser una impedància Z_{HL} amb una component capacitiva molt gran que emmascari R_x . D'altra banda, la inductància residual deguda a C_g té ara menys repercussió que en el cas d'elèctrodes de contacte directe perquè a la part imaginària de la impedància mesurada hi predomina la contribució dels elèctrodes.

E.5 Model de la impedància mesurada incloent-hi les capacitats paràsites

Si ara es té en compte la capacitat paràsita C_{hl} entre H i L a la fig. E.1, $1/j\omega C_{hl}$ està en paral·lel amb tota la impedància de l'expressió (E.20). Per veure com afecta aquesta capacitat a Z_{HL} , i tenint en compte que, segons l'apartat anterior, la impedància dels elèctrodes pot emascarar Z_x , l'anàlisi se centrarà en la part real de la impedància per a $\omega \ll \omega_c$ i en l'anàlisi de la impedància (capacitat equivalent) per a $\omega \gg \omega_c$.

Per obtenir l'expressió completa de Z_{HL} , es planteja el circuit de la fig. E.12 on Z ($= R + jX$) i C seran posteriorment substituïdes per les expressions corresponents obtingudes per als cas $C_g \neq 0$.

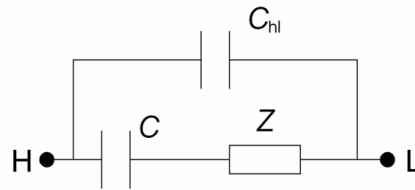


Figura E.12. Circuit per estudiar l'efecte de connectar C_{hl} en paral·lel amb una impedància Z i una capacitat C .

La impedància entre H i L és

$$Z_{HL}(j\omega) = \frac{1}{j\omega C_{hl}} \parallel \left(\frac{1}{j\omega C} + Z \right) = \frac{\frac{1}{j\omega C} + Z}{1 + \frac{C_{hl}}{C} + j\omega C_{hl}Z} \quad (\text{E.28})$$

i substituint Z per la seva expressió, s'arriba a

$$Z_{HL}(j\omega) = \frac{\frac{1}{j\omega C} + R + jX}{1 + \frac{C_{hl}}{C} + j\omega C_{hl}(R + jX)} = \frac{R + j\left(X - \frac{1}{\omega C}\right)}{1 + \frac{C_{hl}}{C} - \omega C_{hl}X + j\omega C_{hl}R}. \quad (\text{E.29})$$

Per obtenir la part real i la part imaginària de la impedància, es multiplica i divideix pel conjugat del denominador,

$$Z_{HL}(j\omega) = \frac{\left[R + j\left(X - \frac{1}{\omega C}\right) \right] \left[1 + \frac{C_{hl}}{C} - \omega C_{hl}X - j\omega C_{hl}R \right]}{\left(1 + \frac{C_{hl}}{C} - \omega C_{hl}X \right)^2 + (\omega C_{hl}R)^2}. \quad (\text{E.30})$$

Operant i agrupant termes dona

$$\operatorname{Re} Z_{\text{HL}}(\omega) = \frac{R}{\left(1 + \frac{C_{\text{hl}}}{C} - \omega C_{\text{hl}} X\right)^2 + (\omega C_{\text{hl}} R)^2} \quad (\text{E.31})$$

$$\operatorname{Im} Z_{\text{HL}}(\omega) = \frac{\frac{-1}{\omega C} \left(1 + \frac{C_{\text{hl}}}{C}\right) + X \left(1 + 2 \frac{C_{\text{hl}}}{C}\right) - \omega C_{\text{hl}} (R^2 + X^2)}{\left(1 + \frac{C_{\text{hl}}}{C} - \omega C_{\text{hl}} X\right)^2 + (\omega C_{\text{hl}} R)^2} \quad (\text{E.32})$$

Si la Z i la C de la fig. E.12 s'identifiquen amb els termes corresponents de l'equació (E.25), vàlida a freqüències prou baixes respecte a ω_c/g_{ve} , és immediat obtenir

$$C = \frac{C_e}{1 + g_e} \quad (\text{E.33})$$

$$Z = g_e R_x + j\omega\alpha(1-\alpha)R_x^2 C_g$$

i d'aquí,

$$\operatorname{Re} Z_{\text{HL}}(\omega) \Big|_{\omega \ll \frac{\omega_c}{g_{\text{ve}}}} \approx \frac{g_e R_x}{\left[1 + \frac{(1+g_e)C_{\text{hl}}}{C_e} - \omega^2 \alpha(1-\alpha)R_x^2 C_g C_{\text{hl}}\right]^2 + (\omega R_x g_e C_{\text{hl}})^2}. \quad (\text{E.34})$$

Atès que en aquest rang de freqüències es complirà $\omega \ll \omega_c$ (perquè $g_{\text{ve}} > 1$), si es compleix $\alpha(1-\alpha)C_g C_{\text{hl}} \leq C_x^2$, tindrem

$$\omega^2 R_x^2 \alpha(1-\alpha)C_g C_{\text{hl}} \leq \omega^2 R_x^2 C_x^2 = \frac{\omega^2}{\omega_c^2} \ll 1 \quad (\text{E.35})$$

i si $g_e C_{\text{hl}} \leq C_x$,

$$\omega R_x g_e C_{\text{hl}} \leq \omega R_x C_x = \frac{\omega}{\omega_c} \ll 1. \quad (\text{E.36})$$

Llavors, l'expressió (E.34) es redueix a

$$\operatorname{Re} Z_{\text{HL}}(\omega) \Big|_{\omega \ll \frac{\omega_c}{g_{\text{ve}}}} \approx \frac{g_e R_x}{\left[1 + \frac{(1+g_e)C_{\text{hl}}}{C_e}\right]^2} = \frac{\left(1 + \frac{C_g}{C_e}\right) R_x}{\left[1 + \left(2 + \frac{C_g}{C_e}\right) \frac{C_{\text{hl}}}{C_e}\right]^2} \quad (\text{E.37})$$

que descriu l'efecte combinat de C_g i C_{hl} sobre la part real de Z_{HL} . Si C_g i C_{hl} són nul·les, s'obté efectivament $\operatorname{Re} Z_{\text{HL}} = R_x$, que és el què es desitjava. Si $C_g = 0$, s'obté

$$\operatorname{Re} Z_{\text{HL}}(\omega) \Big|_{\omega \ll \frac{\omega_c}{g_{xe}}, C_g=0} = \frac{R_x}{\left(1 + 2 \frac{C_{\text{hl}}}{C_e}\right)^2} \quad (\text{E.38})$$

que coincideix amb l'equació (E.18), i que reflexa que hi ha una atenuació de R_x que és més gran quan augmenta C_{hl}/C_e . L'efecte de C_g sola, en canvi, és augmentar el valor aparent de R_x (només cal fer $C_{\text{hl}} = 0$ a l'equació E.37 per veure-ho). Per tant, tot i que quan C_{hl} no és nul·la, C_g també contribueix al denominador de (A.37), l'efecte en el numerador és directe mentre que l'efecte en el denominador depèn de C_{hl} . Hi haurà, doncs, una certa compensació, però al dependre de la proximitat de masses conductores connectades a terra, fora del laboratori difícilment es podrà obtenir una compensació controlada.

Si les capacitats de l'expressió (E.37) és fixen, per exemple envoltant la mostra amb una pantalla conductora connectada a terra, llavors aquestes capacitats paràsites es podrien incloure dins la constant de cel·la perquè només depenen d'un factor geomètric,

$$\operatorname{Re} Z_{\text{HL}}(\omega) \Big|_{\omega \ll \frac{\omega_c}{g_{xe}}} \approx \frac{1}{\sigma} \frac{k_{\text{cell}} \left(1 + \frac{C_g}{C_e}\right)}{\left[1 + \left(2 + \frac{C_g}{C_e}\right) \frac{C_{\text{hl}}}{C_e}\right]^2} = \frac{k'_{\text{cell}}}{\sigma} \quad (\text{E.39})$$

i de la part real de Z_{HL} es podria obtenir la conductivitat del material.

Per obtenir C_x , es pot mirar d'analitzar la capacitat equivalent entre els terminals H i L, C_{HL} , a freqüències molt baixes i molt altes, i veure si se'n pot treure alguna conclusió. A freqüències molt baixes respecte a ω_c/g_{xe} , a partir de (E.29) es conclou que C_{hl} es suma a C (la deguda als elèctrodes) i, segons (E.25), a baixa freqüència la capacitat deguda als elèctrodes queda reduïda pel factor $1 + g_e$, degut a C_g . Per tant,

$$C_{\text{HL}}(\omega) \Big|_{\omega \ll \frac{\omega_c}{g_{xe}}} \approx C_{\text{hl}} + \frac{C_e}{1 + g_e}. \quad (\text{E.40})$$

A freqüències molt altes respecte a ω_c , l'expressió (E.22), que inclou nomé l'efecte de C_g , es pot aproximar com

$$Z_{\text{HL}}(j\omega) = \frac{1}{j\omega \frac{C_e}{(1 + g_e)}} + g_e R_x \frac{(1 + j\omega g_{xe} R_x C_x)}{(1 + j\omega R_x C_x)^2} \approx \frac{1}{j\omega \frac{C_e}{(1 + g_e)}} + \frac{1}{j\omega \frac{C_x}{g_e g_{xe}}} \quad (\text{E.41})$$

i C_{hl} queda en paral·lel amb aquesta impedància, que és una capacitat. Per tant,

$$C_{\text{HL}}(\omega)|_{\omega \gg \omega_c} \approx C_{\text{hl}} + \left(\frac{1 + g_e}{C_e} + \frac{g_x + g_e - 1}{C_x} \right)^{-1}. \quad (\text{E.42})$$

Resulta doncs, que amb només dues equacions no es pot determinar directament C_x perquè a les equacions hi intervenen, a més de la capacitat dels elèctrodes, tres factors no controlats: C_{hl} , C_g i α . Tenint en compte, a més, el risc de que a freqüències altes i hagi efectes de propagació d'ona, sembla millor alternativa mesurar a freqüències més baixes i fer un ajustament de corbes, que haurà de ser no lineal perquè g_{xe} depèn de la pròpia C_x .

Articles publicats a revista i congrés

Aliau-Bonet, C., & Pallas-Areny, R. (2012). On the effect of body capacitance to ground in tetrapolar bioimpedance measurements. *Biomedical Engineering, IEEE Transactions on*, 59(12), 3405-3411. **Índex d'impacte: 2.348, Quartil 2.**

Aliau-Bonet, C., & Pallas-Areny, R. (2013). A novel method to estimate body capacitance to ground at mid frequencies. *Instrumentation and Measurement, IEEE Transactions on*, 62(9), 2519-2525. **Índex d'impacte: 1.71, Quartil 2.**

Aliau-Bonet, C., & Pallas-Areny, R. (2014). Effects of stray capacitance to ground in bipolar material impedance measurements based on direct-contact electrodes. *Instrumentation and Measurement, IEEE Transactions on*, 63(10), 2414-2421. **Índex d'impacte: 1.71, Quartil 2.**

Aliau, C., & Pallas-Areny, R. (2012). Effects of Stray Capacitance to Ground in Tetrapolar Bioimpedance Measurements. In *5th European Conference of the International Federation for Medical and Biological Engineering, Springer Berlin Heidelberg, Volume 37 of the series IFMBE Proceedings* (pp. 1225-1228). Budapest, Hungary, 14-18 September 2011. ISBN: 978-3-642-23507-8. **Notable.**

Aliau-Bonet, C., & Pallas-Areny, R. (2012). A fast method to estimate body capacitance to ground. *XX IMEKO World Congress "Metrology for Green Growth"* (pp. 1-4). Busan, Republic of Korea, 09-14 September 2012. ISBN: 978-89-950000-5-2. **Notable.**

Aliau-Bonet, C. & Pallas, R. (2013). Transient Reduction in pulse-based impedance measurements. *Proceedings 19th IMEKO TC-4* (pp. 12-17). Barcelona, Spain, 18-19 July 2013. ISBN: 978-84-616-5438-3. **Notable.**

Aliau-Bonet, C., & Pallas-Areny, R. (2015). Effects of stray capacitance to ground in bipolar water impedance measurements based on capacitive electrodes. *XXI IMEKO World Congress "Measurement in Research and Industry"* (pp. 676-679). Prague, Czech Republic, August 30-September 4, 2015. ISBN: 978-80-01-05793-3. **Notable.**

Aliau-Bonet, C., & Pallas-Areny, R. (2015) Effects of interelectrode impedance in water conductivity measurements with capacitive electrodes. *10th International Conference in Bioelectromagnetism (iCBEM)*, 16-18 June 2015 in Tallinn, Estonia. <http://www.isbem.org/conf/2015/proc/05.pdf>

Kalvøy, H., Aliau-Bonet, C., Pallas-Areny, R. & Martinsen, Ø. G. (2015). Effects of Stray Capacitance to Ground in Three Electrode Monopolar Needle Bioimpedance Measurements. *37th Annual International Conference of the IEEE Engineering in Medicine and Biology Society (EMBC IEEE)*. Milano, Italy, 25-29 August 2015. **Notable.** <http://emb.citengine.com/event/embc-2015/paper-details?pdID=6372>

Aliau-Bonet, C. & Pallas, R. (2011) Efecto de las capacidades parásitas a tierra en las medidas de impedancia eléctrica con dos terminales. *Seminario Anual de Automática, Electrónica Industrial e Instrumentación-SAAEI* (pp. 373-378). Badajoz 2011. ISBN: 978-84-933682-3-4

Aliau-Bonet, C. & Pallas, R. (2014) Método de bajo coste para estimar la capacidad parásita del cuerpo humano a tierra a frecuencias medias. *Actas VII International Conference on Electrical Engineering FIE* (pp. Bio04-1-Bio04-4). Santiago de Cuba 2014. ISBN: 978-959-207-529-0

Aliau, C., López, O., Pallàs Areny, R. (2009) Método no invasivo y sin contacto para medir la conductividad del agua. *3er Congreso agricultura, alimentación y medio ambiente* (pp. 196-201). Castelldefels, juliol 2009. ISBN: 978-84-613-0510-0.