

---

## Conclusions generals

---

L'objectiu central de la nostra recerca ha estat i està dirigit a analitzar i a entendre els camins a través dels quals pot emergir complexitat en el comportament dels sistemes dinàmics no lineals. No ens hem interessat en el caos, d'una banda perquè ja està prou estudiat i, de l'altra, perquè la complexitat que hi resulta associada sembla massa subtil per a ser rellevant en el comportament dels sistemes del món real. El que ens ha interessat és com i de quines maneres podem anar complicant un sistema no lineal a fi i efecte que vagi incorporant més i més graus de llibertat en la seva dinàmica efectiva. Això ens ha dut a considerar dos tipus de situacions.

En primer lloc, hem considerat el problema de generació del màxim nombre de freqüències d'oscil·lació en un mateix sistema i de com la seva barreja no lineal pot produir evolucions temporals complexes. Això ho hem fet amb sistemes dinàmics de dimensió arbitrària però relativament senzills. Des del punt de vista matemàtic aquests sistemes estan definits per camps vectorials que tenen la part no lineal unidireccional i això permet simplificar el problema en considerar només una parella sella-node de punts fixos. Les conclusions més rellevants en aquest sentit són:

- Hem mostrat com sistemes dinàmics de dimensió  $N$  poden aprofitar al màxim les seves possibilitats de patir bifurcacions de Hopf, és a dir, realitzar  $N - 1$  bifurcacions de Hopf sobre una parella sella-node de punts fixos.
- Els mecanismes no lineals poden barrejar tots aquests  $N - 1$  modes d'oscil·lació donant lloc a evolucions temporals complexes; és el que hem anomenat *comportament d'instabilitat completa*. La complexitat dels senyals acostuma a presentar també un cert grau d'autosimilaritat a diverses escales temporals, fet que pot indicar una organització jeràrquica en l'actuació dels mecanismes no lineals que hi intervenen.
- El comportament complex observat és independent del grau de caoticitat. Les simulacions numèriques proporcionen evolucions temporals estrictament periòdiques en el cas de freqüències prou diferents i els comportaments caòtics són més habituals a mesura que les diverses freqüències es fan més properes.
- El mecanisme de generació i barreja d'oscil·lacions dinàmiques és gruixut i robust i sembla relacionat amb la proposta de Landau d'explicar l'origen de la turbulència en fluids a través de successives instabilitats oscil·latòries superposades. En aquest sentit nosaltres entenem que el comportament d'instabilitat completa es desenvolupa, de fet, en un escenari de Landau generalitzat.
- El comportament d'instabilitat completa es pot considerar general, ja que es pot extrapolar a qualsevol sistema que sigui capaç de fer que els seus punts fixos hagin patit o estiguin propers a patir les diferents bifurcacions de Hopf.

El segon aspecte considerat es centra en acoblar diversos sistemes dinàmics que puguin presentar instabilitat completa. L'acoblament aporta la possible presència de molts més punts fixos i, per tant, una riquesa afegida en l'estructura de l'espai de fases. Des d'un punt de vista matemàtic, l'acoblament implica la presència d'un camp vectorial la part no lineal del qual és multidireccional, fet que és el responsable de l'aparició de l'estructura relativament complexa de punts fixos. En aquest aspecte ens hem centrat en l'estudi d'alguns fenòmens concrets especialment rellevants:

- Hem iniciat l'estudi de l'acoblament de dispositius no lineals tipus BOITAL d'igual dimensió, dels quals hem caracteritzat els diversos comportaments en

---

funció de l'acoblament i de la dimensió dinàmica de cada un dels dispositius. L'acoblament considerat ha estat del tipus difusiu i ens hem restringit al cas més senzill de només dos dispositius. Tant al laboratori com en les simulacions numèriques hem estudiat dispositius amb una dimensió dinàmica menor o igual a 3.

- Pel que fa a la solució estacionària hem pogut observar l'aparició d'un segon cicle d'histèresi en funció de l'acoblament i l'augment de la complicació de la solució estacionària (nous punts fixos, multiplicitat de branques estacionàries), que només es reflecteix en els cicles d'histèresi per l'aparició del nou cicle. L'estudi s'ha realitzat per a dispositius unidimensionals i els resultats són extrapolables a sistemes acoblats de dimensió superior.
- Hem caracteritzat la dinàmica d'oscil·ladors acoblats, que poden presentar diversos fenòmens en funció de la intensitat de l'acoblament, els quals es poden esquematitzar de la manera següent:
  - Per a acoblaments molt forts la dinàmica és simple i molt similar a la d'un sol oscil·lador no acoblat.
  - Per a acoblaments forts el fenomen més rellevant és l'anomenada *mort d'amplitud*, la qual hem observat i caracteritzat experimentalment per primera vegada. L'anàlisi paramètrica mostra la relació d'aquest efecte amb les bifurcacions de Hopf dels dos subsistemes i del sistema global.
  - Per a acoblaments mitjans continuen existint els efectes sobre l'amplitud però prenen especial protagonisme els fenòmens basats exclusivament en la relació de fase entre els subsistemes. S'observen tant oscil·lacions en fase com en contrafase, així com transicions entre ambdós estats, que es poden produir a través d'un desplaçament continu de la fase, a través d'una duplicació de la freqüència d'oscil·lació o a través d'altres bifurcacions més complicades.
  - Per a acoblaments febles els efectes més importants són els relacionats amb la diferència de fase entre els oscil·ladors. En aquest cas les solucions periòdiques poden exhibir múltiples valors en la fase relativa, i apareixen també solucions quasiperiòdiques estables.

- En aquest darrer cas el fenomen més rellevant és el de la sincronització de fase que hem observat tant per a acoblaments d'oscil·ladors periòdics (bicapa) com d'oscil·ladors caòtics (tricapa). Per a ambdós casos s'ha observat també la transició cap a l'estat de sincronització de fase tant per la via de salts de fase, predita teòricament, com per la via de bifurcacions de Hopf de segon ordre.

Aquestes conclusions ens porten també a considerar les possibles línies futures de recerca. L'acoblament de sistemes ens proporciona una eina molt potent per poder ampliar les potencialitats del comportament d'inestabilitat completa. L'acoblament difusiu de només dos dispositius BOITAL de dimensió relativament alta ( $N = 6, 7$  o  $8$ ) pot donar lloc a un enriquiment considerable de les evolucions temporals que hem caracteritzat al capítol 2. La dinàmica es pot enriquir encara més considerant altres tipus d'acoblament, com l'acoblament no lineal, que es pot aconseguir, per exemple, mitjançant la llum reflectida pels propis dispositius i que, a més, permet acoblar dispositius BOITAL de dimensions dinàmiques diferents.

És d'esperar que una investigació experimental, numèrica i teòrica d'aquests temes proporcioni resultats significatius sobre l'aparició de complexitat en sistemes dinàmics i pugui generalitzar els resultats obtinguts en el present treball, especialment en el cas d'acoblament de sistemes. Cal també remarcar la relació que pot tenir el comportament d'inestabilitat completa, convenientment generalitzat, amb el que presenten diversos sistemes naturals, entre els quals caldria remarcar el fenomen de la turbulència o la dinàmica del cervell.

---

## Funcions no lineals utilitzades en les simulacions

---

En les diverses simulacions numèriques del capítol 2 hem utilitzat les següents funcions no lineals.

La gaussiana

$$g(\Psi) = \mu_1 + e^{-\frac{(\Psi - \mu_2)^2}{\mu_3}} \quad (\text{A.1})$$

amb  $\mu_1 = 0.1$  i  $\mu_2 = \mu_3 = 10$  per a la figura 2.1; la funció periòdica

$$g(\Psi) = \frac{\mu_1 + \mu_2 \cos \Psi}{\mu_3 + \cos \Psi} \quad (\text{A.2})$$

amb  $\mu_1 = -1.25$ ,  $\mu_2 = 1.06$  i  $\mu_3 = -1.86$  per a les figures 2.10–2.13 i 2.16a; i finalment, la funció sinusoidal

$$g(\Psi) = \sin \Psi \quad (\text{A.3})$$

per a les figures 2.14, 2.15 i 2.16b.

Aquestes tres funcions no lineals estan representades a la figura 2.3, però per comoditat també les presentem aquí a la figura A.1. Els diagrames també presenten els diagrames d'embranchament i la distribució dels valors de  $p$ . Els diagrames que representen  $\Psi$  i  $p$  en funció de  $(d_N/c_N)\mu_c$  són independents d' $N$  i dels coeficients  $c_j$  i  $d_j$ . Si  $c_N = d_N$  llavors els diagrames estan totalment i exclusivament determinats per la funció no lineal.

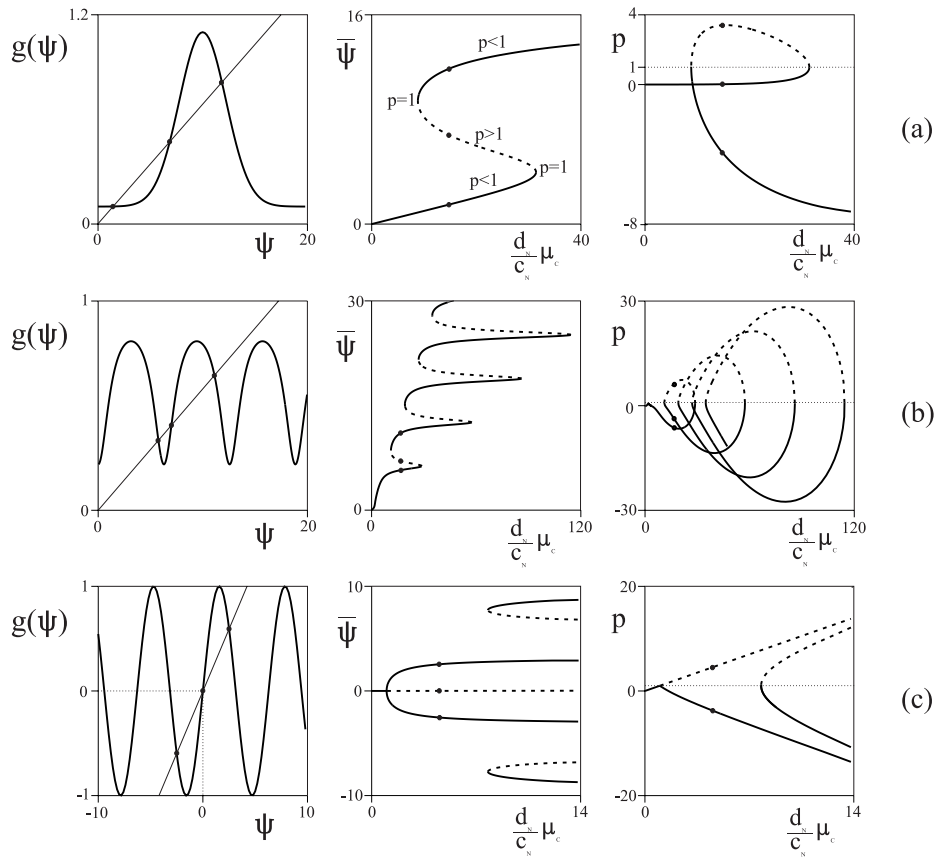


Figura A.1: Funcions no lineals utilitzades en les simulacions numèriques, juntament amb els seus corresponents diagrames d'embranchament i distribucions del valor de  $p$ . Com a la figura 2.2, representem la recta les interseccions de la qual ens donen les solucions estacionàries per a un cert valor del paràmetre  $\mu_c$ .

La funció gaussiana (A.1) produeix un diagrama d'embranchament en forma d'S amb un sol cicle d'histèresi i amb un rang de valors de  $p$  relativament limitat. La funció periòdica (A.2) és gairebé sinusoidal i sempre positiva i es una bona aproximació a la funció interferomètrica  $A(\Psi)$  que descriu les interferències de la llum

en les cavitats dels dispositius BOITAL [78]. La periodicitat produeix successives S amb una distribució de valors de  $p$  cada vegada més ampla, de manera que qualsevol valor de  $p$  és accessible anant a branques prou elevades (i augmentant, per tant, suficientment el paràmetre de control  $\mu_c$ ). La funció sinusoidal (A.3) té la particularitat de donar una bifurcació en forquilla i bifurcacions sella–node addicionals.

---

## Sistemes per al comportament d'instabilitat completa

---

Si introduïm les equacions (2.15) en les (2.18) i (2.19) podem obtenir els valors de  $p_H$  i  $\omega_H$  de les interseccions de la recta amb  $\{\pm i\omega\}$  per a un cert conjunt de coeficients  $c_j$  i  $d_j$ , però aconseguir el comportament d'instabilitat completa d'aquesta manera és bastant difícil. També és possible treballar en sentit contrari, seleccionant prèviament (i adequadament) els valors  $p_H$  i  $\omega_H$  de les  $N - 1$  bifurcacions de Hopf i determinant llavors el corresponent conjunt de  $c_j$  i  $d_j$ . Això dona dos conjunts desacoblats d' $N - 1$  equacions, les quals involucen coeficients amb índexs parells i senars respectivament. El nombre total d'incògnites és  $2N$  i, per tant, calen dues condicions addicionals. Normalment prenem  $d_N = c_N$  i escollim un valor per a  $c_1$ . La primera condició no és cap restricció, perquè sempre es pot fer amb un canvi d'escala adequat i té l'avantatge de fer que el diagrama de branques de la solució estacionària depengui només de  $g(\psi)$ . La segona condició respon al fet que quan considerem  $d_N = c_N$  el sistema d'equacions amb coeficients senars té  $N$  incògnites i una d'elles s'ha de



predeterminar. Escollim  $c_1$ , però qualsevol altre coeficient senar seria equivalent, ja que el sistema d'equacions presenta invariància d'escala respecte a les incògnites. D'aquesta manera els valors seleccionats de  $p_H$  i  $\omega_H$  determinen els coeficients senars amb un factor d'escala lliure que queda definit pel valor d'un d'ells. Aquest factor d'escala és important perquè afecta la divergència del camp vectorial. En efecte, la divergència del sistema canònic (2.2) amb una funció no lineal de la forma (2.5), (2.6) i (2.7) és donada per

$$\operatorname{div}F = -c_1 + p(\psi)\frac{c_N}{d_N}d_1 = -k_1(\psi) \quad (\text{B.1})$$

on  $p$  i  $k_1$  estan definits tal com ho hem fet al capítol 2, però per a qualsevol punt de l'espai de fases. En particular, per a sistemes que tenen una de les freqüències  $\omega_H$  clarament major que la resta, es pot veure que

$$c_1 \approx p_{HF}\frac{c_N}{d_N}d_1 \quad (\text{B.2})$$

on  $p_{HF}$  correspon a la freqüència ràpida, i la dissipació efectiva al llarg d'una trajectòria donada es pot caracteritzar per

$$\frac{\langle \operatorname{div}F \rangle}{\omega_{HF}} \approx -\frac{c_1}{\omega_{HF}} \left( 1 - \frac{\langle p \rangle}{p_{HF}} \right) \quad (\text{B.3})$$

on els parèntesis indiquen la mitjana sobre la trajectòria. Així, per a una certa funció no lineal  $g(\psi)$ , l'elecció de  $c_1$  ens permet ajustar el grau de dissipació de la família  $\mu_c$  de sistemes que, en l'espai  $k_j$  interseccionen la superfície  $\{\pm i\omega\}$  amb els valors preseleccionats de  $\omega_H$  i  $p_H$ .

La selecció dels valors de  $\omega_H$  i  $p_H$  s'ha de fer adequadament. Una orientació útil per obtenir sistemes amb comportament d'instabilitat completa és escollir la seqüència ordenada de freqüències  $\omega_H$  associada alternativament bé amb  $p_H < 0$  bé amb  $p_H > 1$ , és a dir, bé amb el punt node o bé amb el punt sella. La condició  $p_H < 0$  en lloc de  $p_H < 1$  facilita que el punt de coordenades  $(c_j)$  amb  $p = 0$  aparegui en la regió de zero dimensions inestables i que les bifurcacions d'autovalor zero involucrin punts fixos amb zero i una dimensions inestables. Per altra banda, la selecció dels valors de  $p_H$  ens permet obtenir situacions particulars. Per exemple, es pot obtenir una recta que travessi la degeneració  $\{\pm i\omega_1, \dots, \pm i\omega_q\}$  tot imposant  $q$  bifurcacions de Hopf al mateix valor de  $p$ .

---

# Bibliografia

---

- [1] R. M. Harris-Warrick *et al.* (eds.): *Dynamic Biological Networks* (MIT, Cambridge, 1992).
- [2] M. Steriade *et al.* (eds): *Thalamus* (Elsevier, Amsterdam, 1997).
- [3] K. Lehnertz *et al.* (eds.): *Chaos in Brain* (World Scientific, 1999).
- [4] P. Chen: *System Dynamics Review* **4**, 81 (1988).
- [5] S. Barnett, R. G. Cameron: *Introduction to Mathematical Control Theory* (Clarendon, Oxford, 1985).
- [6] W. A. Barnett *et al.* (eds.): *Economic Complexity and Chaos* (Cambridge University Press, Cambridge, 1990).
- [7] P. W. Anderson *et al.* (eds.): *The Economy as an Evolving Complex System* (Addison-Wesley, 1990).
- [8] J. Benhabib *et al.* (eds.): *Cycles and Chaos in Economic Equilibrium* (Princeton University Press, Princeton, 1992).
- [9] D. M. Sigman, E. A. Boyle: *Nature* **407**, 859 (2000).

- 
- [10] C. F. Keller: *Physica* **D133**, 296 (1999).
- [11] G. B. Mindlin, N. Merener, P. T. Boyd: *Europhys. Lett.* **42**, 31 (1998).
- [12] H. Poincaré: *Les Méthodes Nouvelles de la Mécanique Céleste* (Gauthier-Villars, Paris, 1899).
- [13] G. D. Birkhoff: *Acta Mathem.* **43**, 1 (1920).
- [14] A. N. Kolmogorov: *The General Theory of Dynamical Systems and Classical Mechanics* dins Proceedings of the 1954 International Congress of Mathematics (North-Holland, Amsterdam, 1954).
- [15] V. I. Arnold: *Usp. mat. Nauk.* **18**, 13 (1963) [Trad. a *Russ. Math. Surv.* **18**, 9 (1963)].
- [16] J. Moser: *Nachr. Akad. Wiss. Göttingen* **K1**, 1 (1962).
- [17] E. N. Lorenz: *J. Atmos. Sci.* **20**, 130 (1963).
- [18] S. Wiggins: *Introduction to Applied Nonlinear Dynamical Systems and Chaos* (Springer, New York, 1990).
- [19] J. Banks: *Am. Math. Month.* **99**, 332 (1992).
- [20] I. Stewart: *Nature* **406**, 948 (2000).
- [21] J. Guckenheimer, P. Holmes: *Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems and Bifurcations of Vector Fields* (Springer, New York, 1983).
- [22] S. Wolfram: *Nature* **311**, 419 (1984).
- [23] T. Toffoli, N. Margolus: *Cellular Automata Machines* (MIT Press, Cambridge, 1987).
- [24] G. Nicolis, I. Prigogine: *La estructura de lo complejo* (Alianza, Madrid, 1994).
- [25] P. Grassberger: *Int. J. Theor. Phys.* **25**, 907 (1986).
- [26] J. P. Crutchfield, K. Young: *Computation at the onset of chaos* dins “Complexity, Entropy and the Physics of Information” (Addison-Wesley, New York, 1990).

- 
- [27] R. Solé, S. Manrubia, B. Luque, J. Delgado, J. Bascompte: *Complexity* ??, 13 (1996).
- [28] R. Solé, S. Manrubia: *Orden y caos en sistemas complejos* (UPC, Barcelona, 1996).
- [29] P. Bak, C. Tang, K. Wiesenfeld: *Phys. Rev.* **A38**, 364 (1988).
- [30] P. Bak, M. Creutz: *Fractals and self-organized criticality* dins “Fractals in Science” (Springer-Verlag, Berlin, 1994).
- [31] P. Bak: *How Nature Works* (Springer-Verlag, New York, 1996).
- [32] D. L. Turcotte: *Rep. Prog. Phys.* **62**, 1377 (1999).
- [33] S. A. Kaufmann: *Origins of Order: Self-Organization and Selection in Evolution* (Oxford University Press, New York, 1993).
- [34] S. A. Kaufmann: Antichaos and adaptation, *Scientific American* **265**, 78 (1991).
- [35] D. Avnir, O. Biham, D. Lidar, O. Malcai: *Science* **279**, 39 (1998).
- [36] L. D. Landau: *C.R. Dokl. Acad. Sci. USSR* **44**, 311 (1944).
- [37] D. Y. Tang, J. Pujol, C. O. Weiss: *Phys. Rev.* **A44**, R35 (1991).
- [38] R. Herrero: *Opt. Commun.* **113**, 324 (1994).
- [39] R. Herrero,: *Phys. Rev.* **E53**, 5627 (1996).
- [40] R. Herrero: *Homoclinic phenomena in thermo-optical devices* Tesi doctoral, UAB 1996.
- [41] R. Herrero, J. Farjas, R. Pons, F. Pi, G. Orriols: *Phys. Rev.* **E57**, 5366 (1988).
- [42] R. Herrero, M. Figueras, J. Rius, F. Pi, G. Orriols: *Phys. Rev. Lett.* **84**, 5312 (2000).
- [43] R. Herrero, M. Figueras, F. Pi, G. Orriols: *Phys. Rev.* *E* en viat ,
- [44] D. Ruelle, F. Takens: *Comm. Math. Phys.* **20**, 167 (1971).
- [45] S. Newhouse, D. Ruelle, F. Takens: *Comm. Math. Phys.* **64**, 35 (1978).

- 
- [46] A. Arnéodo, P. Couillet, E. A. Spiegel, C. Tresser: *Physica* **D14**, 327 (1985).
- [47] V. I. Arnold, V. S. Afraimovich, Yyu. S. Il'yashenko, L. P. Shil'nikov: a *Dynamical Systems V* (Springer-Verlag, Berlin, 1994).
- [48] D. G. Aronson, G. B. Ermentrout, N. Kopell: *Physica* **41D**, 403 (1990).
- [49] G. Baier, S. Sahle: *Phys. Rev.* **E51**, 2712 (1995).
- [50] K. Bar-Eli: *Physica* **D14** 242 (1985).
- [51] R. I. Bogdanov: *Functional Anal. Appl.* **9**, 144 (1975).
- [52] A. R. Champneys, Y. A. Kuznetsov: *Int. J. Bif. Chaos* **4**, 785 (1994).
- [53] L. O. Chua, C. W. Wu, A. S. Huang, G. Q. Zhong: *IEEE Trans. Circuits and Systems* **40**, 732 (1993).
- [54] M. Crowley, I. Epstein: *J. Phys. Chem.* **93**, 2496 (1989).
- [55] G. Duffing: *Erzwungene Schwingungen bei Veränderlicher Eigenfrequenz* (Braunschweig, 1918).
- [56] R.C. Elson, A.I. Selverston, R. Huerta, N.F. Rulkov, M.I. Rabinovich, H.D.I Abarbanel: *Phys. Rev. Lett.* **81**, 5692 (1998).
- [57] G. B. Ermentrout: *Physica* **D41**, 219 (1990).
- [58] J. Farjas, J. I. Rosell, R. Herrero, R. Pons, F. Pi, G. Orriols: *Physica* **D95**, 107 (1996)
- [59] P. Gaspard: *Physica* **D62**, 94 (1993).
- [60] H. M. Gibbs: *Appl. Phys. Lett.* **41**, 221 (1982).
- [61] P. Glendinning, C. Sparrow: *J. Stat. Phys.* **35**, 645 (1984).
- [62] P. Glendinning: a *New Directions in Dynamical Systems*, edited by T. Belford and J. Swift (Cambridge University Press, Cambridge, 1988).
- [63] A. Goldbeter: *Biochemical Oscillations and Cellular Rhythms* (Cambridge University Press, Cambridge, 1996).

- 
- [64] M. Golubitsky, D. G. Schaeffer: *Singularities and Groups in Bifurcation Theory* (Springer-Verlag, New York, 1985).
- [65] E. A. Jackson: *Perspectives on nonlinear dynamics* (Cambridge University Press, Cambridge, 1989).
- [66] K. Kaneko: *Phys. Rev. Lett.* **63**, 219 (1989).
- [67] K. Kaneko: *Phys. Rev. Lett.* **65**, 1391 (1990).
- [68] K. Lee, Y. Kwak, T. Kun Lin: *Phys. Rev. Lett.* **81**, 321 (1998).
- [69] T. Meyer, M. J. Bünner, A. Kittel, J. Parisi: *Phys. Rev.* **E56**, 5069 (1997).
- [70] G. Orriols, C. Schmidt, F. Pi: *Opt. Comm.* **63**, 66 (1987).
- [71] B. van der Pol, J. van der Merk: *Nature* **120**, 363 (1927).
- [72] I. Prigogine, R. Lefebvre: *J. Chem. Phys.* **48**, 1695 (1968).
- [73] D. V. Ramana Reddy, A. Sen, G. L. Johnston: *Phys. Rev. Lett.* **80**, 5109 (1998).
- [74] D. V. Ramana Reddy, A. Sen, G. L. Johnston: *Physica* **D129**, 15 (1999).
- [75] J. Rius, M. Figueras, R. Herrero, F. Pi, G. Orriols: *Phys. Rev.* **E62**, 333 (2000).
- [76] J. Rius, M. Figueras, R. Herrero, J. Farjas, F. Pi, G. Orriols: *Chaos* **10**, 760 (2000).
- [77] J. I. Rosell: *Opt. Commun.* **82**, 162 (1991).
- [78] J. I. Rosell: *Physica* **D85**, 509 (1995).
- [79] M. Rosenblum, A. Pikovsky, J. Kurths: *Phys. Rev. Lett.* **81**, 321 (1996).
- [80] O. E. Rössler: *Phys. Lett.* **A57**, 397 (1976).
- [81] C. Schäfer, M. G. Rosenblum, J. Kurths, H. Abel: *Nature* **392**, 239 (1998).
- [82] H. Schuster, P. Wagner: *Prog. Theor. Phys.* **81**, 939 (1989).
- [83] S. K. Scott: *Chemical Chaos* (Clarendon Press, Oxford, 1993).
- [84] L. P. Shil'nikov: *Math. USSR Sb.* **10**, 91 (1970).

- [85] L. P. Shil'nikov: *Int. J. Bif Chaos* **4**, 489 (1994).
- [86] E. Sismondo: *Science* **249**, 55 (1990).
- [87] S. H. Strogatz: *Nature* **394**, 316 (1998).
- [88] F. Takens: *Publ. Math. IHES* **43**, 47 (1974).
- [89] V. Volterra: *Leçons sur la théorie mathématique de la lutte pour la vie* (Gauthier-Villars, Paris, 1936).
- [90] X. J. Wang, G. Nicolis: *Physica* **D26**, 140 (1987).
- [91] A. Wolf, B. Swift, H. L. Swinney, J. A. Vastano: *Physica* **D16**, 285 (1985).
- [92] Z. Zheng, G. Hu, B. Hu: *Phys. Rev. Lett.* **24**, 5318 (1998).
- [93] Z. Zheng, B. Hu, G. Hu: *Phys. Rev.* **E62**, 402 (2000).

breuis esse laboro, obscurus fio.

M. F. A.

BARCINONE

SATVRNALIBVS

MMDCCCLIV