



# **UNIVERSIDAD DE MURCIA**

**DEPARTAMENTO DE MÉTODOS CUANTITATIVOS  
PARA LA ECONOMÍA Y LA EMPRESA**

Herramientas para la no Linealidad

**Dña. M<sup>a</sup> Victoria Caballero Pintado  
2015**



Universidad de Murcia

Departamento de Métodos Cuantitativos para la Economía y  
la Empresa

# HERRAMIENTAS PARA LA NO LINEALIDAD

M. VICTORIA CABALLERO PINTADO

2015



---

*A mis padres*



---

# Agradecimientos

---

En primer lugar quiero agradecer al profesor Francisco Balibrea su apoyo, sus palabras de estímulo, sus sugerencias y sin lugar a dudas su paciencia, lo que han hecho posible la elaboración de esta memoria.

En particular, quiero agradecer a Manuel Ruiz su colaboración y su saber hacer con Matlab y Mathematica, así como su confianza en que acabaría esta memoria, y a mi compañera y amiga Lourdes Molera por los trabajos que hemos realizado juntas, entre los que está “Recurrence quantification analysis in Liu’s attractor”.

Quiero también expresar mi gratitud a mis compañeras y compañeros del Departamento de Métodos Cuantitativos para la Economía y la Empresa por haber facilitado mi trabajo y porque sé que se alegran de que por fin haya llegado hasta aquí.

A mis amigas, porque nos hemos echado de menos durante estos últimos meses.

A todos aquellos que me quieren, gracias.



---

*“If we knew exactly the laws of nature and the situation of the universe at the initial moment, we could predict exactly the situation of that same universe at a succeeding moment. But even if it were the case that the natural laws had no longer any secret for us, we could still only know the initial situation approximately. [...] It may happen that small differences in the initial conditions produce very great ones in the final phenomena. A small error in the former will produce an enormous error in the latter. Prediction becomes impossible, and we have the fortuitous phenomenon”.*

(H. Poincaré, 1908)

*“Poincaré generalizes an equilibrium point to an equilibrium motion; a chaotic attractor generalizes the motion to a bounded equilibrium region towards which all motions tend, or within which all motions remain; the conception of equilibrium in more or less lost since all degrees of periodic, or erratic fluctuations can occur within the region, The special relevance of this to economics is that it offers not one but two types of explanation of the pervasive irregularity of economic time series -an endogenous one in addition to the conventional exogenous shocks”.*

(R. Goodwin, 1991)





---

# Resumen

---

El interés de los investigadores de la ciencia económica por la teoría del caos comenzó en la década de los 80 y una de las razones del mismo es el comportamiento aparentemente aleatorio de sistemas dinámicos *no lineales simples* y con pocos grados de libertad. Esta especial dinámica es una de las razones que me ha llevado a realizar esta memoria, donde se estudian algunas herramientas utilizadas en el análisis de sistemas dinámicos no lineales.

Esta memoria está estructurada en 5 capítulos, el primero es una introducción, donde se incluyen generalidades sobre sistemas dinámicos discretos y una panorámica general de los distintos aspectos que se van a tratar en la tesis.

El segundo capítulo está dedicado a la teoría del embedding de la que nadie duda que el teorema de Takens [63] supone una de las justificaciones teóricas que permite construir una órbita de un sistema dinámico determinista desconocido a partir de una serie temporal de medidas obtenida de una órbita del mismo. Así, dada la serie temporal, las úplas de la órbita equivalente a la desconocida están formadas por retardos de la serie que se estudia. Un teorema previo al de Takens, y básico en la demostración de éste, es el Teorema de Whitney. En este capítulo se dan dos nuevas demostraciones del Teorema de Whitney y se demuestra una extensión del teorema de Takens (estos resultados se han publicado en [4, 16]).

En el Capítulo 3 se profundiza en las implicaciones del signo del exponente de Lyapunov de un sistema dinámico unidimensional y se obtiene un resultado que complementa el dado por Koçak y Palmer en [36], así como nuevos ejemplos de sistemas dinámicos unidimensionales y bidimensionales con el comportamiento paradójico de los sistemas dinámicos

---

mostrados en [19]. Terminamos el capítulo con sistemas dinámicos unidimensionales no autónomos y mostrando otro ejemplo de un sistema dinámico no autónomo, que en muchos casos, también tiene un comportamiento paradójico del tipo de los sistemas de [19]. En los últimos años se ha estimado el mayor exponente de Lyapunov de series temporales económicas, una vez construida una serie vectorial a partir de ella, como medida de comportamiento caótico y de la “volatilidad” de la serie (resultados publicados en [6, 7]).

El Capítulo 4 está dedicado a los gráficos de recurrencia [20], que al igual que los gráficos de recurrencia simbólicos que se definen en el siguiente capítulo, son herramientas gráficas que permiten visualizar los conceptos teóricos a partir de los que han sido construidos. En las últimas décadas este tipo de gráficos, y en particular las medidas definidas sobre ellos, se han utilizado en el análisis de series temporales económicas (entre otros [12, 26, 43]), siendo uno de sus principales objetivos encontrar los puntos de cambio del comportamiento dinámico del modelo generador de datos. En este capítulo se utilizan las medidas cuantitativas definidas sobre estos gráficos con una serie no estacionaria obtenida del sistema dinámico de Liu para aproximarnos a sus puntos de bifurcación (resultado publicado en [8]).

Un contraste no paramétrico de independencia se desarrolla en el Capítulo 5 y resulta de aplicar el principal teorema, que demostramos, sobre la distribución asintótica de una transformación lineal del estadístico que estima la correlación integral simbólica de una serie independiente e idénticamente distribuida. El concepto de correlación integral simbólica se define para cualquier conjunto compacto de  $\mathbb{R}^m$  y está basado en su simbolización, que consiste en asignar a cada elemento del conjunto la permutación del conjunto  $\{1, 2, \dots, m\}$  que representa el orden de sus componentes.

Para este contraste cuya hipótesis nula es la serie es independiente e idénticamente distribuida frente a cualquier dependencia, se ha estudiado el tamaño del test y su potencia y los resultados obtenidos han mostrado un buen comportamiento del estadístico tal como se muestra en la memoria. Se ha finalizado el capítulo definiendo gráfico de recurrencia simbólico y simbólico coloreado y se han calculado medidas sobre los mismos.

Cada capítulo finaliza con una sección dedicada a las conclusiones sobre los resultados obtenidos y a las cuestiones que han quedado abiertas y que intentaremos cerrar en próximos trabajos.

---

# Índice general

---

Índice general	IX
Índice de figuras	XI
Índice de tablas	XIII
<b>1 Introducción</b>	<b>1</b>
1.1. Generalidades sobre sistemas dinámicos discretos . . . . .	5
1.2. Descripción de la memoria . . . . .	7
<b>2 Teoremas de Whitney, Takens y Stark</b>	<b>11</b>
2.1. Definiciones y Resultados Básicos. Notación . . . . .	12
2.2. Resultados previos . . . . .	17
2.3. Teorema de Whitney . . . . .	23
2.4. Extensión del Teorema de Takens y del Teorema de Stark . . . . .	28
2.5. Aspectos prácticos: Elección de los parámetros de la reconstrucción . . . . .	39
2.6. Conclusiones . . . . .	42
<b>3 Exponentes de Lyapunov</b>	<b>43</b>
3.1. Definiciones . . . . .	44
3.2. Resultado en dimensión uno . . . . .	46
3.3. Dos ejemplos de dimensión uno . . . . .	49

3.4. Dos ejemplos de dimensión dos . . . . .	55
3.5. Exponentes de Lyapunov en sistemas dinámicos discretos no autónomos . .	59
3.6. Método de Wolf para el cálculo del mayor exponente de Lyapunov de una órbita . . . . .	61
3.7. Conclusiones . . . . .	62
<b>4 Gráficos de Recurrencia</b>	<b>63</b>
4.1. Análisis Cuantitativo de un Gráfico de Recurrencia . . . . .	64
4.2. El atractor de Liu . . . . .	69
4.3. Aplicación: Cambios en la dinámica del sistema de Liu . . . . .	70
4.4. Conclusiones . . . . .	75
<b>5 Correlación Integral Simbólica</b>	<b>77</b>
5.1. Preliminares y Notación . . . . .	78
5.2. Estadístico Correlación Integral Simbólica. . . . .	81
5.3. Resultado Principal . . . . .	86
5.4. Test de independencia: Tamaño y potencia . . . . .	89
5.5. Correlación integral simbólica de una serie vectorial no solapada . . . . .	100
5.6. Propiedades asintóticas del estadístico correlación integral simbólica . . . .	103
5.7. Gráficos de recurrencia simbólicos . . . . .	107
5.8. Medidas en gráficos de recurrencia simbólicos . . . . .	112
5.9. Detectando cambios de comportamiento dinámico . . . . .	122
5.10. Conclusiones . . . . .	125
<b>Uso de estas herramientas</b>	<b>129</b>
Un sistema dinámico no lineal: Un modelo de duopolio (Puu,[53]) . . . . .	129
Serie de rendimientos del Ibex-35 . . . . .	141
<b>Bibliografía</b>	<b>147</b>

---

# Índice de figuras

---

4.1. Gráficos de recurrencia correspondientes a distintas series embebidas en $\mathbb{R}^4$ . . . . .	65
4.2. Gráficos de recurrencia correspondientes a series no estacionarias embebidas en $\mathbb{R}^4$ . . . . .	66
4.3. Atractores del sistema de Liu para distintos valores de $e$ . . . . .	69
4.4. Mayor exponentes de Lyapunov del sistema de Liu cuando el parámetro $e$ varía de 0 a 70 . . . . .	70
4.5. Representación de una serie unidimensional obtenida del sistema (4.1) frente al parámetro $e$ . . . . .	72
4.6. Análisis de los estados recurrentes del sistema de Liu cuando el parámetro varía de 0 a 70 . . . . .	73
4.7. Distintos comportamientos asintóticos del sistema de Liu (4.1) para distintos valores del parámetro $e$ . . . . .	74
5.1. Valores de $SC_k^m$ y del estadístico (5.20) para distintas longitudes $k$ correspondientes a una serie i.i.d. . . . .	96
5.2. Valores de $SC_k^m$ y del estadístico (5.20) para distintas longitudes de $k$ correspondientes a una serie AR(1) . . . . .	97
5.3. Valores de $SC_k^m$ y del estadístico (5.20) para distintas longitudes de $k$ correspondientes a una serie ARCH(1) . . . . .	98
5.4. Valores de $SC_k^m$ y del estadístico (5.20) para distintas longitudes de $k$ correspondientes a una serie caótica . . . . .	99
5.5. Importancia del color en un gráfico de recurrencia simbólico (I) . . . . .	109
5.6. Importancia del color en un gráfico de recurrencia simbólico (II) . . . . .	110
5.7. Gráficos de recurrencia simbólicos correspondientes a una serie i.i.d. y $m = 4$ . . . . .	110

5.8. Gráficos de recurrencia simbólicos correspondientes a una serie AR(1) y $m = 4$ . . . . .	111
5.9. Gráficos de recurrencia simbólicos para la $x_t = 4x_{t-1}(1 - x_{t-1})$ con condición inicial $x_0 = 0,15$ y $m = 4$ . . . . .	112
5.10. Gráfico de recurrencia simbólico para una serie obtenida del sistema dinámico continuo (4.1) cuando $e = 0$ ( $m = 4$ ). . . . .	112
5.11. Gráfico de recurrencia simbólico para $x_t = ax_{t-1}(1 - x_{t-1})$ con condición inicial $x_0 = 0,15$ , $m = 4$ y $a$ cambiante . . . . .	113
5.12. Valores de la proporción de de puntos recurrentes según el tamaño de ventana . . . . .	124
5.13. Valores de la proporción de puntos recurrentes que forman líneas verticales según el tamaño de ventana . . . . .	125
5.14. Diagrama de bifurcación de la logística . . . . .	126
1. Curvas de reacción de una situación de dupolio para $a = 1$ y $b = 5$ . . . . .	132
2. Comportamientos asintóticos del sistema dinámico (5.41) para distintos valores del ratio $a/b$ . . . . .	133
3. Distintas reconstrucciones de una órbita del sistema (5.41) cuando $a \equiv 6,24$ . . . . .	134
4. Distintas reconstrucciones de una órbita del sistema (5.41) cuando $a \equiv 6,15$ . . . . .	135
5. Gráficos de recurrencia para una serie caótica del sistema (5.41) cuando $a/b = 6,24$ . . . . .	136
6. Gráficos de recurrencia para una serie periódica de 5.41 cuando $a/b = 6,15$ y $m = 4$ . . . . .	137
7. Gráfico de recurrencia simbólico para $m = 3$ . . . . .	138
8. Aproximación a los puntos de bifurcación del sistema dinámico (5.41) cuando $a/b \in (0,16 - 0,18)$ . . . . .	140
9. Aproximación a los puntos de bifurcación del sistema dinámico (5.41) cuando $a/b \in (5,8; 6,25)$ . . . . .	141
10. Ibex-35 en el período enero de 1994 hasta el 15 de marzo de 2010 . . . . .	142
11. Mínima dimensión embedding para la serie de rendimientos del Ibex-35 . . . . .	142
12. Gráficos de recurrencia clásicos relacionados con la serie del Ibex-35 . . . . .	143
13. Gráficos de recurrencia simbólicos de la serie logaritmo del Ibex-35 . . . . .	143
14. Valores del estadístico (5.43) para distintas longitudes de la serie de rendimientos del Ibex-35 . . . . .	145
15. Valores de la correlación integral simbólica de la serie de rendimientos del Ibex-35 para distintas longitudes . . . . .	146

---

# Índice de tablas

---

5.1. Tamaño del test: Proporción de rechazo de $H_0$ al 5% para $m = 3$ . . . . .	90
5.2. Tamaño del test: Proporción de rechazo de $H_0$ al 5% para $m = 4$ . . . . .	91
5.3. Tamaño del test: Proporción de rechazo de $H_0$ al 5% para $m = 5$ . . . . .	91
5.4. Tamaño del test: Proporción de rechazo de $H_0$ al 5% para $m = 6$ . . . . .	91
5.5. Potencia del test: Proporción de rechazo de $H_0$ al 5% para $m = 3$ . . . . .	92
5.6. Potencia del test: Proporción de rechazo de $H_0$ al 5% para $m = 4$ . . . . .	93
5.7. Potencia del test: Proporción de rechazo de $H_0$ al 5% para $m = 5$ . . . . .	93
5.8. Potencia del test: Proporción de rechazo de $H_0$ al 5% para $m = 6$ . . . . .	94
5.9. Tamaño del test: Proporción de rechazo de $H_0$ al 5% cuando la serie vectorial es no solapada . . . . .	101
5.10. Potencia del test: Proporción de rechazo de $H_0$ al 5% cuando la serie vectorial es no solapada para $m = 3$ . . . . .	102
5.11. Potencia del test: Proporción de rechazo de $H_0$ al 5% cuando la serie vectorial es no solapada para $m = 4$ . . . . .	102
5.12. Potencia del test: Proporción de rechazo de $H_0$ al 5% cuando la serie vectorial es no solapada para $m = 5$ . . . . .	103
5.13. Proporción de puntos recurrentes en los gráficos de recurrencia simbólicos de series embebidas en $\mathbb{R}^3$ y $\mathbb{R}^4$ para datos de seis procesos distintos . . . . .	113
5.14. Proporción de pares de estados que recurren a cada uno de los símbolos de $S_3$ . . . .	115
5.15. Proporción de pares de estados que recurren a cada uno de los símbolos de $S_4$ (I) . . .	115



5.16. Proporción de pares de estados que recurren a cada uno de los símbolos de $S_4$ (II) . . .	116
5.17. Proporción de puntos recurrentes que forman líneas verticales . . . . .	118
5.18. Longitud media de las líneas verticales . . . . .	120
5.19. Proporción de puntos recurrentes que forman líneas diagonales con posible repetición de símbolos . . . . .	122
5.20. Porcentaje de punto de recurrencia aislados . . . . .	122
1. Valor del estadístico (5.43) para distintas dimensiones embeddings . . . . .	144

---

# Capítulo 1

## Introducción

---

El inicio del estudio de sistemas dinámicos no lineales se remonta al matemático francés Poincaré a principios del siglo XX. Desde entonces se han desarrollado herramientas que han permitido profundizar en el comportamiento de los mismos. En Economía es a partir de la década de los 80 cuando se produce una eclosión del estudio de los sistemas dinámicos no lineales, desde un punto de vista teórico y también empírico, que se desarrolla paralelamente a un gran número de investigaciones que ya se habían empezado a realizarse años antes en otras ciencias.

Centrándonos en la Economía, ha sido tradicional la búsqueda de modelos dinámicos lineales que describieran situaciones económicas en equilibrio y estables. El uso de sistemas dinámicos lineales estaba justificado por tratarse de modelos simples, con una dinámica sencilla, cuya solución era considerada el estado ideal al que tenía que evolucionar una Economía, de modo que sin intervención externa ésta tendería a su estado de equilibrio. Pero obviamente el comportamiento de la Economía real no es tan simple, más bien es errático, parece desordenado, está sujeto a oscilaciones no periódicas y a cambios en su dinámica a lo largo del tiempo.

Hasta la década de los 50, el objetivo de muchos estudios era determinar las condiciones necesarias y suficientes de estabilidad de un sistema dinámico en equilibrio. En este contexto, si el fenómeno investigado no era lineal se excluían aquellas características (no lineales)

que desviaran la dinámica del sistema de la de uno lineal. Sin embargo, tales modelos resultaban contradictorios cuando intentaban explicar series temporales reales obtenidas de los fenómenos económicos. Estas series no reproducían el comportamiento regular típico de los modelos lineales y por tanto, estos no podían ser la respuesta para dichas series. La nueva Macroeconomía clásica [39] intenta explicar el comportamiento de estas series introduciendo perturbaciones estocásticas exógenas, denominadas *shocks*, en un modelo dinámico lineal, de modo que los términos aleatorios podrían explicar la irregularidad de las series temporales. Así las perturbaciones explican la irregularidad, mientras que las reglas dinámicas lineales describen la estructura básica de la serie; es decir, sin la acción de estos shocks aleatorios la Economía sería estable y convergería a un estado de equilibrio. Ragnar Frisch y Jan Tinbergen [52], en los años treinta, explican los ciclos económicos utilizando shock aleatorios, puesto que observan que sistemas dinámicos lineales perturbados con tales shock pueden generar series temporales similares a las series reales.

Sin embargo, hacia 1950 este enfoque para modelizar la realidad económica fue criticado por Hicks [52], porque al introducir perturbaciones aleatorias exógenas en un modelo se pone en manifiesto el desconocimiento sobre los mecanismos que existen detrás del fenómeno económico. Con esta idea, Hicks desarrolló su modelo del ciclo límite, uno de los primeros modelos macroeconómicos no lineales, aunque Hicks no era consciente de que el sistema dinámico que planteaba era realmente no lineal. En esta modelización se utilizaban funciones lineales a trozos que venían determinadas al introducir los conceptos suelo y techo en el modelo estudiado.

Tanto para Hicks como para otros investigadores de la época, las fluctuaciones de las variables económicas no se deben a shocks aleatorios exógenos, sino que son el resultado de la existencia de relaciones “no lineales” entre ellas. Es decir, el comportamiento irregular es debido a la dinámica intrínseca del fenómeno económico descrito por estas variables. Goodwin fue uno de los primeros economistas que utilizó de modo explícito un modelo no lineal para explicar el ciclo económico [52]. Sin embargo, este modelo junto con el de Hicks y otros, si bien eran no lineales, (tenían estados estacionarios localmente inestables y ciclos límites estables que intentaban explicar los ciclos económicos) sufrieron críticas puesto que las series obtenidas de la simulación de los mismos eran demasiado regulares comparadas con las series reales, incluso si algo de ruido era añadido al modelo. Luego era preciso confiar nuevamente en shocks exógenos para los que no tenían explicación.

Hasta los años 80 hubo un creciente interés por la modelización formal de los fenómenos

---

económicos y un gran desarrollo de los modelos lineales autorregresivos con shock exógenos aditivos, que fueron muy bien acogidos. En contraposición durante este periodo, pese al interés de gran número de economistas por los modelos no lineales, estos no se investigaron como en física, química o ingeniería, quizá debido a la escasez de técnicas que permitieran estimar dichos modelos no lineales. En los años 80 el interés por la dinámica no lineal en Economía vuelve a surgir, empujado por las investigaciones y aplicaciones que se habían llevado a cabo en otras ramas de conocimiento unido a la teoría del caos y a la creciente insatisfacción con los modelos lineales.

La información que los agentes económicos tienen sobre un fenómeno económico genera *expectativas* sobre la evolución del mismo y en base a ellas los agentes toman sus decisiones. La formación de expectativas de los agentes económicos es un aspecto que diferencia un modelo económico de un modelo dinámico en otros campos de la ciencia, puesto que los agentes económicos toman las decisiones en base a las expectativas sobre el estado futuro de la Economía. Las expectativas racionales son aquellas en las que se tiene en cuenta toda la información sobre el fenómeno económico para tomar la decisión óptima, de modo que en media las expectativas coinciden con el resultado de las decisiones. Si un modelo económico fuese determinista y sin ruido, tener expectativas racionales implicaría una perfecta predicción mientras que, en un modelo estocástico, las expectativas racionales coinciden con la esperanza condicionada a la información disponible.

Como ya hemos dicho, el interés de los economistas por la teoría del caos se inició en la década de los 80. Desde entonces se han realizado muchos estudios sobre caos en Economía y se han revisado modelos y planteado otros nuevos que dan cabida a este tipo de comportamiento. Además, esta teoría permite dar una explicación de la conducta errática de muchas series económicas, no precisando de shocks exógenos.

En Federici y Gandolfo [22] se puede ver que son varias las razones para mostrar dicho interés. Una, el aparente comportamiento estocástico que podía generar un sistema dinámico determinista, entendiendo por aparente, el hecho de que los datos generados por el sistema no se distinguen de los que generaría una variable aleatoria. Y otra y muy importante razón es la imposibilidad de realizar predicciones exactas, lo que podría parecer contradictorio puesto que el modelo generador de los datos es determinista. Esta imposibilidad es debida a que la dinámica de la serie es caótica, es decir, tiene *dependencia sensible a las condiciones iniciales*<sup>1</sup> y esta sensibilidad a las condiciones iniciales tiene

---

<sup>1</sup>Ver la definición en el Capítulo 3

importantes implicaciones. La primera está relacionada con las expectativas racionales de los agentes económicos, puesto que si un modelo económico generase series caóticas (determinista o determinista con una componente estocástica), los agentes económicos, pese a conocer las ecuaciones que gobiernan su dinámica (y conocer la naturaleza de los shocks exógenos, si los hubiera), no pueden impedir los efectos de la dependencia sensible a las condiciones iniciales y por tanto, se hace imposible una precisa predicción. Luego, si el modelo dinámico presenta dependencia sensible a las condiciones iniciales no se podría pensar que las expectativas son racionales y se tendrían que considerar otras posibles reglas de generación de expectativas.

Esta imposibilidad de hacer predicciones, salvo en el corto plazo, reduce el interés de la estimación de los parámetros de un modelo de estas características para unos datos disponibles. Además, la no linealidad de la función que rige estos modelos con trayectorias caóticas hace que no se tenga información única sobre el estado pasado del sistema que lo ha llevado al estado presente.

Sin embargo, pese a esta impredecibilidad no se puede ignorar la importancia de la dinámica no lineal (determinista o determinista con una componente estocástica) en el estudio de los fenómenos económicos. Lo importante es hacer comprensible la dinámica de los fenómenos que ocurren, y cuando sea posible, aunque sea en el medio o corto plazo predecir y modelizar.

En esta memoria se estudian algunas herramientas para la no linealidad, que no solo tienen cabida dentro de la dinámica determinista y prueba de ello son lo ampliamente que se han utilizado con series económicas. En muchos trabajos relacionados con la dinámica de variables económicas se empieza construyendo una serie vectorial utilizando el método del retardo, referenciando el Teorema de Takens o bien estimando el mayor exponente de Lyapunov de una serie vectorial construida con objetivo de detectar comportamiento caótico en la misma o bien estudiar su volatilidad. Los gráficos de recurrencia se han utilizado con series no estacionarias con el objetivo de detectar señales que indiquen los cambios de la dinámica, además, de lo ampliamente utilizados que son los contrastes de independencia serial. Este tipo de herramientas son el objetivo de esta memoria.

## 1.1. Generalidades sobre sistemas dinámicos discretos

En esta sección debido a la discretización de los datos económicos y a que muchos modelos de la teoría económica se modelizan de modo discreto, se recuerdan conceptos relacionados con los sistemas dinámicos discretos que implícitamente se utilizan en esta memoria.

Los elementos de una serie temporal pueden ser medidas obtenidas de los estados,  $x$ , de un sistema dinámico determinista, con  $x \in X$ , y  $X$  un subconjunto de un espacio finito-dimensional  $\mathbb{R}^m$ , donde la transición de un estado a otro está gobernada por una regla determinística, que se expresa en tiempo discreto<sup>2</sup> por una aplicación  $f$  tal que

$$x_{t+1} = f(x_t). \quad (1.1)$$

El par  $(X, f)$  se llama sistema dinámico discreto autónomo<sup>3</sup>, donde  $X$  es el espacio de estados y  $t$  representa el tiempo, de modo que si se conoce el estado del sistema en el momento inicial  $x_0$  se pueden conocer los estados sucesivos.

Se denomina órbita o trayectoria hacia adelante del sistema (1.1) de condición inicial  $x_0$  al subconjunto de  $X$

$$\{x_0, f(x_0), f^2(x_0), \dots, f^t(x_0), \dots\} = \{f^t(x_0)\}_{t=0}^{\infty} = \{x_t\}_{t=0}^{\infty}$$

con  $x_t = f^t(x_0) = \underbrace{f \circ f \circ \dots \circ f}_{t \text{ veces}}(x_0)$  y  $f^0(x_0) = x_0$ .

Si  $f$  es lineal, siempre es posible obtener la expresión analítica de la órbita de condición inicial  $x_0$ , sin embargo, si  $f$  no es lineal, es difícil dar una expresión explícita de la misma. Cuando esto ocurre, se puede realizar un análisis cualitativo del comportamiento de las órbitas, es decir, estudiar su comportamiento asintótico<sup>4</sup> (cuando  $t$  es suficientemente grande) o bien realizar un estudio local utilizando una aproximación lineal del sistema en el punto del espacio de estados que interese.

Cuando el comportamiento asintótico de una órbita no es explosivo, puede ocurrir que la órbita se aproxime asintóticamente a un punto  $x_0$  del espacio de estados (punto fijo del

---

<sup>2</sup>Esta transición también puede expresarse en tiempo continuo por un conjunto de ecuaciones diferenciales ordinarias

$$\frac{dx}{dt}(x) = F(x(t)).$$

<sup>3</sup>Cuando  $f$  depende explícitamente de la variable tiempo,  $x_{t+1} = f(t, x_t)$  el sistema dinámico es no autónomo.

<sup>4</sup>El dinámica transitoria es la que tiene un sistema dinámico antes de alcanzar la dinámica asintótica.

sistema dinámico,  $f(x_0) = x_0$ ), a un conjunto finito de puntos -ciclo- (puntos fijos de una iterada de  $f$ ) o bien a algún conjunto  $A$  mostrando una dinámica más compleja. Este conjunto es llamado atractor del sistema dinámico. Un subconjunto  $A \subset X$  es un atractor global del sistema dinámico (1.1) si verifica que:

1. Es invariante, es decir la órbita con condición inicial  $x_0 \in A$  permanecen indefinidamente en el conjunto  $A$ .
2. Para todo  $x_0 \in X$  la distancia de  $f^t(x_0)$  a  $A$  tiende a 0 cuando  $t$  se hace muy grande (la órbita de condición inicial  $x_0$  está infinitamente cerca de  $A$ ).
3. No se puede descomponer en subconjuntos que verifiquen 1.

Cuando esta situación solo se cumple para valores  $x_0 \in U$  con  $A \subset U \subset X$  se dice que  $A$  es un atractor local.

Los conjuntos atractores que tienen una estructura muy complicada se llaman atractores caóticos y son aquellos donde las trayectorias tienen un comportamiento que parece aleatorio. Aunque hay distintas definiciones de atractor caótico, nosotros vamos a considerar que un atractor es caótico cuando sus órbitas tienen dependencia sensible a las condiciones iniciales, lo que significa que órbitas de condiciones iniciales muy próximas, llega un momento en el que se separan (aunque se esperaría que se mantuvieran cerca), pudiendo volver a estar próximas.

Cuando  $A$  es un atractor global de un sistema dinámico la cuenca de atracción del atractor es todo el espacio de estados. En general, la cuenca de atracción de un conjunto atractor  $A$  es el conjunto de todas las condiciones iniciales cuyas órbitas son atraídas hacia  $A$ . Cuando el comportamiento asintótico del sistema (1.1) se concentra en un conjunto atractor de medida de Lebesgue 0 de  $\mathbb{R}^m$ , se dice que el sistema es disipativo.

Dada una órbita de condición inicial  $x_0$  del sistema dinámico (1.1) y  $A$  un conjunto atractor del mismo, puede ocurrir que la órbita no visite todas las zonas del atractor con la misma frecuencia, definiendo una medida sobre el atractor,  $\mu(x_0)dx$ , como la fracción de tiempo que la trayectoria está en el elemento  $dx$  del atractor. Si el sistema es ergódico, para todas las órbitas, la medida que se define es la misma, con independencia de la condición inicial (para casi toda condición inicial),  $x_0$ , en la cuenca de atracción de  $A$ .

La característica de un atractor caótico es la dependencia sensible a las condiciones iniciales que tienen las órbitas que evolucionan en él. Los exponentes de Lyapunov se

definen a partir de la evolución de la distancia en las distintas direcciones del espacio de fase de dos órbitas de condiciones iniciales próximas; de modo que el hecho de que dos órbitas en un atractor caótico con condiciones iniciales muy próximas se alejen, en alguna dirección y en algún momento, es debido a que las órbitas tienen un exponente de Lyapunov positivo en esa dirección. El mayor exponente indica la predecibilidad del sistema, de modo que un exponente positivo indica poca capacidad de predicción. Si el sistema dinámico es ergódico, los exponentes de Lyapunov de las órbitas no dependen de la condición inicial de la misma [51] y por tanto son una característica del atractor del sistema dinámico.

Resulta de interés, y sobre todo en un contexto económico, los cambios en la dinámica de un sistema cuando se tiene un sistema dinámico parametrizado  $(X, f)$ , con  $x_{t+1} = f(x_t, \mu)$ . Se dice que el sistema dinámico tiene una bifurcación cuando  $\mu = \mu_0$  si tiene un atractor cuando  $\mu$  es menor que  $\mu_0$  topológicamente distinto al atractor que tiene cuando  $\mu$  es menor que  $\mu_0$ .

## 1.2. Descripción de la memoria

Los métodos para el estudio de series lineales se han utilizado ampliamente y consisten en un conjunto de procedimientos que permiten describir completamente los datos utilizando un pequeño conjunto de parámetros. Sin embargo, muchas series no pueden ser analizadas con métodos lineales porque resultan insuficientes y lo que se necesitan son otros procedimientos y técnicas sensibles a las relaciones no lineales existentes en los datos. En esta memoria se muestran algunas de estas herramientas o procedimientos, unas que han sido ampliamente utilizadas y otras completamente nuevas y que han mostrado su eficacia sobre series simuladas.

A partir de una serie real de medidas obtenidas de una órbita de un sistema dinámico desconocido,  $\{\alpha_t\}$ , el Teorema de Takens [50, 60, 63] hace posible que casi siempre se pueda construir una órbita de un sistema dinámico en  $\mathbb{R}^m$  que sea equivalente a una órbita del sistema dinámico desconocido, manteniendo la estructura diferencial de la misma. Para ello, hay que elegir una dimensión  $m$ , llamada dimensión embedding, y un retardo  $\tau$ , que haga posible realizar esta reconstrucción, puesto que cada una de las úplas de la nueva órbita,  $x_t$ , llamadas  $m$ -historias, se construyen de la siguiente manera:

$$x_t = (\alpha_t, \alpha_{t+\tau}, \alpha_{t+2\tau}, \dots, \alpha_{t+(m-1)\tau})$$



donde valor del retardo,  $\tau$ , aunque no es importante desde el punto vista teórico, sí lo es desde el punto de vista práctico (este procedimiento se llama embeber la serie temporal).

Con anterioridad al Teorema de Takens, el Teorema de Menger and Nöbeling y el Teorema de Whitney hacen posible la inclusión<sup>5</sup> de un conjunto  $X$  de dimensión  $k$  en  $\mathbb{R}^m$  siempre que  $m \geq 2k + 1$ . Es decir, si un atractor de un sistema dinámico es un subconjunto de una variedad diferenciable compacta de dimensión  $k$ , y se tienen  $m$  medidas de dicho sistema, podemos visualizar el atractor en  $\mathbb{R}^m$ . El teorema de Takens reconstruye el atractor (un atractor equivalente) con solo una serie temporal de una medida obtenida del sistema dinámico de interés, de modo que ese nuevo atractor corresponde a un sistema cuya dinámica viene dada por la función vectorial  $F$ , definida de un subconjunto de  $\mathbb{R}^m$  en sí mismo, como

$$x_{t+m\tau} = (\alpha_{t+\tau}, \alpha_{t+2\tau}, \alpha_{t+3\tau}, \dots, \alpha_{t+m\tau}) = F(x_t) = F(\alpha_t, \alpha_{t+\tau}, \dots, \alpha_{t+(m-1)\tau})$$

de modo que las funciones reales que constituyen  $F$  son

$$F_i(\alpha_t, \alpha_{t+\tau}, \dots, \alpha_{t+(m-1)\tau}) = \alpha_{t+i\tau}$$
$$F_m(\alpha_t, \alpha_{t+\tau}, \alpha_{t+2\tau}, \dots, \alpha_{t+(m-1)\tau}) = \alpha_{t+m\tau}$$

con  $i = 1, 2, \dots, m - 1$ . Así el elemento  $\alpha_{t+m\tau}$  de la serie de medidas se puede explicar a partir de valores previos de la misma (método del retardo). Esta manera de proceder ha tenido mucha importancia en el desarrollo de las técnicas de análisis de series temporales, ya sean estocásticas o deterministas. Por ello, dedicamos el Capítulo 2 a realizar una nueva demostración del Teorema de Whitney, así como a demostrar una versión del Teorema de Takens [63] utilizando herramientas usadas por Stark (extensión del Teorema de Takens a sistemas no autónomos, [60]) de Topología Diferencial. Además, se introduce el concepto de conjunto prevalente de un espacio infinito dimensional definido en Sauer y otros [33, 56] y se realiza una demostración de la versión prevalente del teorema de Whitney (resultados publicados en *Acta Mathematica Hungarica*, 88(4), “On an embedding theorem” [16] y en [4]).

El valor del mayor exponente de Lyapunov de una órbita es una medida cuantitativa de su estabilidad (o variabilidad) y es habitual utilizarlo con el criterio de si es negativo, la órbita es estable. Sin embargo, no siempre es así. En el capítulo 3 se dan ejemplos de sistemas dinámicos unidimensionales y bidimensionales donde una órbita con un mayor

---

<sup>5</sup>La inclusión, que puede respetar la estructura diferenciable, de un conjunto en el conveniente espacio vectorial  $\mathbb{R}^m$ , en general, se llama embedding.

exponente de Lyapunov negativo es inestable. Además, en este capítulo, también se da un resultado, que utiliza la definición de exponente de Lyapunov fuerte de una órbita de un sistema dinámico unidimensional, y que dice que si para una órbita este exponente fuerte es negativo, el espacio de fases es compacto y la función  $f$  es  $C^1$ , entonces la órbita es estable (estos resultados obtenidos han sido publicados en *International Journal of Bifurcation and Chaos*, [6] y en el libro Springer Proceedings in Mathematics and Statistics 23 [7]).

Otra herramienta ligada al análisis de una serie temporal posiblemente obtenida de un modelo no lineal son los gráficos de recurrencia. Una vez construida una serie vectorial a partir de la serie real, un gráfico de recurrencia de la misma representa la proximidad entre cada par de elementos de la serie vectorial construida. Estos gráficos son de interés porque no se imponen condiciones a la serie, y las medidas definidas sobre ellos hacen posible identificar distintos tipos de comportamiento dinámico si lo hubiera, y aproximarnos al momento temporal donde prodría haber ocurrido un cambio en la dinámica de una serie. Este hecho es el que hemos tenido en cuenta para obtener los resultados del Capítulo 4 y encontrar posibles puntos de bifurcación de un sistema dinámico continuo (sistema de Liu) que depende de un parámetro de control (resultado publicado en *Chaos, Solitons and Fractals*, [8]).

Finalizamos esta memoria proponiendo un nuevo test de independencia basado en dinámica simbólica [13]. De modo más preciso, se describe la ausencia de dependencia de una serie independiente e idénticamente distribuida (i.i.d.) utilizando patrones de ordenación de las  $m$ -historias construidas a partir de la serie i.i.d. La dinámica simbólica particiona el espacio de estados en un número finito de regiones ( $m!$ ) y cada una de ellas tiene asignada una permutación, que describe el orden de las componentes de un vector de esta región (las componentes de cada uno de los estados que están en la misma región de la partición se ordenan igual), de modo que si se tiene una serie vectorial de estados de un sistema dinámico, a cada uno de ellos se le asigna la permutación (símbolo) correspondiente a la zona de la partición a la que pertenece y así se obtiene su correspondiente serie de símbolos. Puede parecer que al hacer esta asignación la nueva serie de símbolos pierde información de la serie de partida, obteniéndose una descripción más ruda de la dinámica subyacente, pero características esenciales de la dinámica de la serie vectorial, como periodicidades, dependencias o cambios de la dinámica, entre otras, se mantienen en la serie de símbolos.

Numerosas investigaciones han hecho uso de la dinámica simbólica en el estudio de la dinámica de series de datos, en particular se ha utilizado en recientes test de independencia

y de determinismo [45, 46]. En el Capítulo 5 de esta memoria, se parte de la simbolización de un conjunto compacto para definir la correlación integral simbólica del mismo y se presenta un nuevo test de independencia serial basado en el estadístico construido para estimar la correlación integral simbólica de un conjunto compacto. Se estudia el comportamiento asintótico del estadístico para una serie independiente e idénticamente distribuida.

La distribución de este sencillo estadístico está basado en las matrices que recogen las probabilidades de que un estado  $x_t$  en  $\mathbb{R}^m$  tenga asignado un símbolo y el estado en el momento  $t + j$ , con  $j = 1, 2, \dots$ , tenga asignado cualquier otro símbolo, cuando los estados se han obtenido de embeber una serie i.i.d. Lo interesante y sorprendente es que estas matrices no dependen del proceso generador de la serie i.i.d.

Se ha estudiado el tamaño del test realizando simulaciones de distintos procesos generadores de series i.i.d., para distintas longitudes de series y distintos valores de  $m$ . De modo análogo se ha estudiado la potencia del test simulando series dependientes generadas por distintos procesos. Los resultados obtenidos muestran un excelente tamaño y una buena potencia.

Para finalizar el capítulo hemos definido una nueva herramienta gráfica, los gráficos de recurrencia simbólicos coloreados que visualizan la correlación integral simbólica de una serie temporal embebida en un espacio  $m$ -dimensional. Cada serie tiene un solo gráfico de recurrencia simbólico para cada  $m$ . Esta nueva herramienta de análisis de series temporales se encuentra en un estado inicial de desarrollo.

---

## Capítulo 2

# Teoremas de Whitney, Takens y Stark

---

Los primeros resultados sobre embeddings topológicos<sup>1</sup> fueron obtenidos por Menger y Nöbeling en 1931 [34] para espacios métricos  $X$  de dimensión topológica<sup>2</sup>  $m$ . Más tarde, en 1936, Whitney [67] demostró análogos resultados para variedades diferenciables de dimensión  $m$ . Sin embargo, cuando el conjunto  $X$  no es una variedad diferenciable, el Teorema de Whitney no se puede utilizar y son Sauer, Yorke y Casdagli [56] los que extienden el resultado de Whitney a conjuntos compactos con dimensión box-counting  $d$ .

Empleando una aproximación diferente, en este capítulo se dan nuevas demostraciones del Teorema de Whitney [67] y de su versión prevalente [56] utilizando herramientas de Topología Diferencial. Para ello, se comienza este capítulo recordando los principales conceptos teóricos necesarios para seguir estas demostraciones.

Normalmente, si un investigador experimental dispone de una serie temporal (una serie de medidas de un cierto fenómeno) que procede de un sistema dinámico multidimensional desconocido, el análisis de tal sistema dinámico requiere la construcción de una órbita (atractor) de un sistema dinámico equivalente al desconocido. El Teorema de Takens [63]

---

<sup>1</sup>Un embedding topológico de un conjunto compacto  $X$  en  $\mathbb{R}^k$  es una aplicación inyectiva de este conjunto  $X$  en  $\mathbb{R}^k$  que conserva la estructura topológica.

<sup>2</sup>Ver Munkres [49] página 305 para una definición de dimensión topológica de un conjunto.

afirma que genéricamente<sup>3</sup> la órbita construida, a partir de sucesivos valores de la serie temporal de medidas, conserva las características topológicas y diferenciales de la órbita del sistema desconocido de la que proceden las medidas. En la penúltima sección de este capítulo se enuncian el celebrado Teorema de Takens y la extensión dada por Stark [60] y demostramos un nuevo teorema que es una variante de los dos anteriores [16].

Aunque cuando se estudian series temporales en Economía, lo importante es la aplicación de las técnicas a los datos, es bien sabido que los teoremas que fundamentan la teoría necesaria para que estas técnicas puedan ser utilizadas deben ser demostrados. Por ello, hemos dedicado este capítulo de la memoria a los aspectos teóricos que fundamentan esta importante herramienta, que es la construcción, a partir de una serie unidimensional, de una trayectoria vectorial equivalente a la del sistema dinámico desconocido que genera la serie que se estudia. Este modo de proceder es utilizado habitualmente con modelos autorregresivos expresados como

$$\alpha_t = f(\alpha_{t-\tau}, \alpha_{t-2\tau}, \dots, \alpha_{t-(m-1)\tau}, \epsilon_t)$$

donde  $\epsilon_t$  es independiente e idénticamente distribuida (i.i.d.), siendo muchos los modelos estocásticos obtenidos a partir de sistemas dinámicos deterministas perturbados. Finalizamos el capítulo describiendo algunos de los métodos más utilizados para obtener los parámetros, que son necesarios fijar a priori, para llevar a cabo este proceso de reconstrucción (o embedding).

## 2.1. Definiciones y Resultados Básicos. Notación

En esta sección se enumeran las definiciones y los resultados básicos que se utilizan en las secciones sucesivas, para ello se ha seguido principalmente el libro de Hirsch *Differential Topology* [31] entre otros [2, 49, 54]. El objetivo de esta sección es agrupar todos los conceptos y resultados básicos necesarios para poder realizar una lectura casi autocontenida de esta memoria.

---

<sup>3</sup>Informalmente quiere decir que el conjunto de sistemas dinámicos y el conjunto de medidas que permiten construir un sistema dinámico equivalente es abierto y denso en la familia de sistemas dinámicos y conjunto de medidas con la correspondiente topología.

### Definiciones básicas

1. Un espacio topológico  $M \subset \mathbb{R}^k$  es una *variedad diferenciable de clase<sup>4</sup>  $C^r$*  ( $r \geq 0$ ) y de dimensión  $m$  si existe una familia de pares  $(U_i, \varphi_i)_{i \in I}$ , con  $I$  un conjunto de índices, donde  $U_i$  son conjuntos abiertos de  $M$  y  $\varphi_i$  son homeomorfismos de  $U_i$  en un conjunto abierto de  $\mathbb{R}^m$ , verificando que:

a)  $\bigcup_{i \in I} U_i = M$ .

- b) Si  $U_i \cap U_j \neq \emptyset$  la aplicación

$$\varphi_j \varphi_i^{-1} : \varphi_i(U_i \cap U_j) \rightarrow \varphi_j(U_i \cap U_j)$$

es de clase  $C^r$ .

Cada par  $(U_i, \varphi_i)$  es una *carta de la variedad* y  $\{(U_i, \varphi_i)\}_{i \in I}$  un *atlas* de  $M$ .

2. Sean  $M$  y  $N$  dos  $C^r$  variedades y  $f : M \rightarrow N$  una aplicación de  $M$  en  $N$ . Las cartas  $(U, \varphi)$  de  $M$  y  $(V, \psi)$  de  $N$  se dicen que están *adaptadas o acopladas* a esta aplicación  $f$  si  $f(U) \subset V$  y la aplicación

$$\psi \circ f \circ \varphi^{-1} : \varphi(U) \rightarrow \psi(V)$$

se dice que es una *representación local* de  $f$  en las cartas dadas.

3. Se dice que  $f$  es diferenciable en un punto  $x \in U \subset M$ , con  $U$  un abierto de  $M$ , si tiene una representación local diferenciable en  $\varphi(x)$ . Una aplicación  $f$  es *diferenciable* si tiene una representación local diferenciable en todos los puntos de  $M$ .
4. Sean  $(U, \varphi)$  y  $(V, \psi)$  dos cartas de  $M$ , con  $x \in U \cap V$  y  $u, v \in \mathbb{R}^m$ . Se dice que  $(U, \psi, u)$  y  $(V, \varphi, v)$  son equivalentes y se denota por  $(U, \psi, u) \sim (V, \varphi, v)$ , si

$$D(\psi \circ \varphi^{-1})(\varphi(x))(u) = v.$$

5. Sea el conjunto  $T_x = \{(U, \varphi, u) : (U, \varphi) \text{ es una carta de } M, x \in U, u \in \mathbb{R}^m\}$ . El espacio tangente a  $M$  en  $x$  es el conjunto de las clases de equivalencia del conjunto  $T_x M = T_x / \sim$  y cada clase de equivalencia se llama vector tangente a  $M$  en  $x$ .

---

<sup>4</sup> $C^r$  indica continua y diferenciable  $r$  veces.

6. La unión de todos los vectores tangentes en todos los puntos de  $M$  es el *fibrado tangente* a  $M$  y se escribe  $TM$ :

$$TM = \{(x, v) : x \in M \text{ y } v \in T_x M\} = \bigcup_{x \in M} \{x\} \times T_x M$$

7. Sean  $M$  y  $N$  variedades diferenciable de dimensiones  $m$  y  $n$  respectivamente y  $f : M \rightarrow N$  una aplicación diferenciable. La derivada de  $f$  en  $x \in M$  es la aplicación lineal  $T_x f : T_x M \rightarrow T_{f(x)} N$  y la derivada de  $f$  es la aplicación  $Tf : TM \rightarrow TN$  tal que a cada  $(x, v) \in TM$  le corresponde  $(f(x), T_x f(v)) \in TN$ .

- a) Si  $T_x f$  es inyectiva se dice que  $f$  es una *inmersión en  $x$* . Cuando  $f$  es una inmersión en cada  $x \in M$ , se dice que  $f$  es una inmersión.
- b) Si  $T_x f$  es sobreyectiva entonces se dice que  $f$  es una *submersión en  $x$* . Si  $T_x f$  es sobreyectiva para todo  $x \in M$ , entonces  $f$  es una submersión.
- c) Si  $f$  es una inmersión y aplica homeomórficamente  $M$  en su imagen se dice que  $f$  es un *embedding* de  $M$  en  $f(M)$ .

8. Un punto  $x \in M$  se dice que es un *punto regular* si  $f$  es una submersión en  $x$ . En caso contrario, se dice que  $x$  es un *punto crítico* de  $f$  y  $f(x)$  su correspondiente *valor crítico*.

9. El elemento  $y \in N$  es un *valor regular* de  $f$  si  $f^{-1}(y) = \emptyset$  o bien si para todo  $x \in f^{-1}(y)$  se cumple que  $x$  es punto regular de  $f$ .

10. Sea  $M$  una variedad de dimensión  $m$ . Un subconjunto  $S \subset M$  se dice que tiene medida cero en  $M$  cuando para toda carta  $(U, \varphi)$  de  $M$ , el subconjunto  $\varphi(U \cap S)$  de  $\mathbb{R}^m$  tiene medida de Lebesgue cero.

11. Un conjunto  $S$  se dice residual en un espacio topológico  $X$  si existe un conjunto numerable de subconjuntos abiertos y densos  $\{U_j\}_{j \in \mathbb{N}}$  de  $X$ , cumpliendo que  $\bigcap_{j \in \mathbb{N}} U_j \subseteq S$ .

12. Sean  $M$  y  $N$  variedades de dimensión finita,  $f : M \rightarrow N$  una aplicación diferenciable, se dice que es transversal a una subvariedad  $L \subset N$  en  $f(x) \in N$ , si  $f(x) \notin L$ , o si cuando  $f(x) \in L$ , se verifica que

$$T_{f(x)} N = T_x f(T_x M) + T_{f(x)} L.$$

Se dice que  $f$  es transversal a una subvariedad  $L \subset N$  cuando lo es en todo  $y \in L$ .

13. Sean  $M$  una  $C^r$ -variedad compacta de dimensión  $m$ ,  $\{U_j, \varphi_j\}_{j=1}^J$  un atlas que cumple que  $\bigcup_{j=1}^J U_j = M$  y  $\{C_j\}_{j \in J}$  una familia de conjuntos compactos que cumplen  $C_j \subset U_j$  y  $\bigcup_{j=1}^J C_j = M$ . Sea el conjunto de las  $C^r$ -aplicaciones de  $M$  en  $\mathbb{R}^n$ , que se denota como  $C^r(M, \mathbb{R}^n)$ . En este conjunto se define una distancia entre  $f, g \in C^r(M, \mathbb{R}^n)$

$$d(f, g) = \sup\{\|f(x) - g(x)\|_{x \in M}, \|T^i(f \circ \varphi_j^{-1})_{\varphi_j(x)} - T^i(g \circ \varphi_j^{-1})_{\varphi_j(x)}\|_{x \in M} : x \in C_j; 1 \leq j \leq J, 1 \leq i \leq r\}$$

donde  $T^i$  denota la derivada de orden  $i \leq r$ .

14. Si en vez de considerar  $\mathbb{R}^n$  se toma una  $C^r$ -variedad  $N$  de dimensión  $n$ , la topología del conjunto  $C^r(M, N)$  es más complicada y se define utilizando una base de entornos. Si  $f \in C^r(M, N)$  y  $(U, \varphi)$  y  $(V, \psi)$  son cartas sobre las variedades  $M$  y  $N$  respectivamente,  $K \subset U$  es un conjunto compacto que cumple que  $f(K) \subset V$  y  $\epsilon > 0$ , un entorno de  $f$  es el conjunto definido de la siguiente manera:

$$\mathcal{N}^r(f, (\varphi, U), (\psi, V), K, \epsilon) = \left\{ \begin{array}{l} g : M \rightarrow N : g(K) \subset V \\ \|T^k(\psi \circ f \circ \varphi^{-1})(\varphi(x)) - T^k(\psi \circ g \circ \varphi^{-1})(\varphi(x))\| < \epsilon \\ \forall x \in K, k = 0, \dots, r \end{array} \right\}$$

15. Sean  $M$  y  $N$  variedades diferenciables y  $K$  un espacio topológico. La aplicación

$$F : K \rightarrow C^r(M, N)$$

asigna a cada  $k \in K$  la aplicación entre de  $M$  a  $N$  parametrizada por  $k \in K$ ,  $F(k) = f_k \in C^r(M, N)$ , cuya correspondiente *aplicación evaluación* es

$$\begin{aligned} ev_F & : K \times M \rightarrow N \\ ev_F(k, x) & = f_k(x) \end{aligned}$$

16. Dado un conjunto compacto  $A$  de  $\mathbb{R}^k$ , tal que para cualquier  $\epsilon > 0$   $N(\epsilon)$  es el número de subconjuntos  $A_\epsilon = \{x \in \mathbb{R}^k : \|x - a\| \leq \epsilon, a \in A\}$  verificando que  $A \subseteq \bigcup A_\epsilon$ , se dice que tiene *dimensión box-counting*  $d$  si existe el límite

$$d = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\log N(\epsilon)}{\log(\epsilon)}$$



## Resultados

A continuación se enuncian un conjunto de resultados básicos cuya demostración se puede seguir en cualquiera de las referencias introducidas anteriormente y en [60].

1. Sea  $M$  una variedad diferenciable de dimensión  $m$ . El conjunto  $T_x M$  tiene estructura de espacio vectorial de dimensión  $m$ .
2. Si  $M$  es una  $C^r$ -variedad de dimensión  $m$ , la aplicación  $\tau : T(M) \rightarrow M$  definida como  $\tau(v) = x$  con  $v \in T_x M$  y  $\tau^{-1}(x) = T_x M$  induce en  $T(M)$  una estructura de  $C^{r-1}$ -variedad de dimensión  $2m$  y  $\tau$  es  $C^{r-1}$ .
3. El subconjunto  $\tilde{T}M = \{(x, v) : x \in M, \|v\| = 1\} \subset T(M)$  es una variedad diferenciable de dimensión  $2m - 1$ .
4. Si  $M$  es una variedad compacta una aplicación diferenciable  $f$  de  $M$  en  $N$  es un embedding de  $M$  si y solo si  $f$  es inyectiva y una inmersión.
5. Si  $X$  es un espacio métrico completo (o espacio topológico de Baire), todo subconjunto residual es denso.
6. Si  $T_x f$  es sobreyectiva para todo  $x \in M$ , entonces la aplicación  $f$  es transversal a cualquier subvariedad de  $N$ .
7. Si  $f$  es transversal a una subvariedad  $L \subset N$ ,  $f^{-1}(L)$  es una subvariedad de  $M$ .
8. Si  $M$  es una variedad compacta, el conjunto  $C^r(M, \mathbb{R}^n)$  es una variedad [60] con

$$TC^r(M, \mathbb{R}^n) = \bigcup_{f \in C^r(M, \mathbb{R}^n)} \{f\} \times T_f C^r(M, \mathbb{R}^n)$$

siendo  $T_f C^r(M, \mathbb{R}^n) = \{\eta \in C^r(M, T\mathbb{R}^n) : \tau_{\mathbb{R}^n} \circ \eta = f\}$  y  $\tau_{\mathbb{R}^n} : T\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $\tau_{\mathbb{R}^n}(v) = f(x)$  con  $v \in T_{f(x)}\mathbb{R}^n$ .

9. Además, si  $M$  es una variedad compacta,  $\tilde{T}M$  es también una variedad compacta y  $C^{r-1}(\tilde{T}M, T\mathbb{R}^n)$  es una variedad. Por tanto, tiene sentido considerar el conjunto  $TC^{r-1}(\tilde{T}M, T\mathbb{R}^n)$  con

$$T_{T_f} C^{r-1}(\tilde{T}M, T\mathbb{R}^n) = \left\{ w \in C^{r-1}(\tilde{T}M, TT\mathbb{R}^n) : \tau_{T\mathbb{R}^n} \circ w = T_f \right\}.$$

10. La aplicación  $\omega : TTM \rightarrow TTM$  definida como  $\omega(x, v, u, w) = (x, u, v, w)$ , llamada involución canónica, es un isomorfismo que satisface  $\tau_{TM} \circ \omega = T\tau_M$  con  $\omega \circ \omega = I$ .

11.  $C^r(M, N)$  es un subconjunto denso en  $C^{r'}(M, N)$  cuando  $r > r'$ .

## 2.2. Resultados previos

Si bien en la sección anterior se enumeran los resultados básicos de Topología Diferencial que se van a utilizar en este capítulo, por su importancia, en esta sección comenzamos enunciando dos teoremas clásicos de la Topología Diferencial cuya aplicación es fundamental cuando lo que se pretende es demostrar que una propiedad se cumple en un subconjunto abierto y denso de una variedad, para continuar demostrando una serie de lemas en los que se apoyan las demostraciones de los Teoremas de las Secciones 2.3 y 2.4.

Estos dos importantes teoremas de la Topología Diferencial [31] son el Teorema de Sard y el de Transversalidad Paramétrica, que se utilizan reiteradamente en los resultados que demostramos.

**Teorema 2.1 (Morse-Sard).** *Sean  $M$  y  $N$  variedades de dimensiones  $m$  y  $n$  respectivamente y  $f : M \rightarrow N$  una  $C^r$ -aplicación. Si  $r > \max\{0, m - n\}$ , el conjunto de valores críticos de  $f$  tiene medida cero en  $N$ . El conjunto de valores regulares es residual en  $N$ , luego es denso en  $N$ .*

**Teorema 2.2 (Teorema de Transversalidad Paramétrica).** *Sean  $K$ ,  $M$  y  $N$   $C^r$ -variedades y  $L \subset N$  una  $C^r$ -subvariedad de codimensión  $p$ . Sea la aplicación continua  $F : K \rightarrow C^r(M, N)$  tal que  $ev_F$  es  $C^r$ . Si*

- i) Los espacios topológicos  $K$  y  $M$  tienen una base de entornos numerable.*
- ii)  $ev_F$  es transversal a  $L$ .*
- iii)  $r > \max\{0, m - p\}$  con  $m = \dim M$ .*

*entonces el conjunto  $A = \{k \in K : f_k \text{ es transversal a } L\}$  es residual en  $K$  y por tanto denso. Además, si  $L$  es cerrada en  $N$  y  $M$  es compacta, entonces  $A$  es también un conjunto abierto.*

Cuando  $K$  es una variedad de dimensión finita, se usa el Teorema de Morse-Sard para obtener el resultado siguiente, cuya demostración está inspirada en Stark [60].

**Teorema 2.3.** *Sean  $K, M$  y  $N$   $C^r$ -variedades y sea la aplicación  $F : K \rightarrow C^r(M, N)$  tal que  $ev_F$  es  $C^r$ . Sea  $L \subset N$  una  $C^r$ -subvariedad de codimensión  $p$  en  $N$ . Si*

i)  $K$  y  $M$  son variedades de dimensión finita.

ii)  $ev_F$  es transversal a  $L$ .

iii)  $r > \max\{0, \dim M - p\}$ .

Entonces el conjunto  $A = \{k \in K : f_k \text{ es transversal a } L\}$  es residual en  $K$  (el conjunto  $B = \{k \in K : f_k \text{ no es transversal a } L\}$  tiene medida cero en  $K$ ). Además, si  $L$  es cerrada en  $N$  y  $M$  es compacta,  $A$  es un conjunto abierto.

*Demostración.*  $ev_F^{-1}(L)$  es una subvariedad de  $K \times M$  y  $\pi : ev_F^{-1}(L) \rightarrow K$  es la proyección sobre  $K$ . Basta probar que el conjunto de valores regulares de  $\pi$  está incluido en el conjunto  $A = \{k : f_k \text{ es transversal a } L\}$ .

Sea  $k \in K$  un valor regular de  $\pi$ , entonces:

1. Si  $\pi^{-1}(k) = \emptyset$ , entonces  $f_k(x) \notin L$  para todo  $x \in M$ ,  $f_k$  es transversal a  $L$ , o lo que es lo mismo  $k \in A$ .
2. Si  $\pi^{-1}(k) \neq \emptyset$ , entonces  $y = f_k(x) \in L$  para algún  $x \in M$ . Se tiene que probar que  $f_k$  es transversal a  $L$  en  $x$ , esto es,  $T_x f_k(T_x M) + T_y L = T_y N$ .

Como  $ev_F$  es transversal a  $L$ , para todo  $w \in T_y N$ , existe  $v \in T_y L$ ,  $\alpha \in T_k K$  y  $u \in T_x M$  tal que  $T_{k,x} ev_F(\alpha, u) + v = w$ , esto es,  $\eta_\alpha(x) + T_x f_k(u) + v = w$ , cumpliendo que  $\eta_\alpha : M \rightarrow TN$  tal que  $\tau_N \circ \eta_\alpha = f_k$ .

Por otra parte,  $T_{k,x} \pi$  es sobreyectiva, es decir, para  $\alpha \in T_k K$ , existe  $u' \in T_x M$  tal que  $(\alpha, u') \in T_{k,x}(ev_F^{-1}(L))$  o lo que es lo mismo  $\eta_\alpha(x) + T_x f_k(u') \in T_y L$ . Por tanto, se tiene que  $T_x f_k(u - u') + (\eta_\alpha(x) + T_x f_k(u') + v) = w$ , con lo que queda probado que  $f_k$  es transversal a  $L$ .

Por el Teorema de Morse-Sard, el conjunto  $B$  tiene medida 0 en  $K$  y  $A$  es residual en  $K$ .

□

Los dos lemas siguientes son resultados técnicos que utilizaremos más adelante y están probados en Stark [60].

**Lema 2.4.** *Sea  $f \in C^r(M, \mathbb{R}^m)$ . Dados  $x \in M$ ,  $v \in T_{f(x)}\mathbb{R}^m$  y  $U \subset M$  un entorno abierto de  $x$ , existe  $\nu \in T_f C^r(M, \mathbb{R}^m)$  tal que  $\nu(x) = v$  y su soporte está en  $U$ .*

**Lema 2.5.** *Sea  $f \in C^r(M, \mathbb{R}^m)$ . Dados  $v \in T_x(M)$   $v \neq 0$ ,  $\bar{w} \in T_{Tf(v)}(T\mathbb{R}^m)$  y un entorno abierto  $U \subset M$  de  $x$ , existe  $\nu \in T_f C^r(M, \mathbb{R}^m)$  tal que  $w(T_x \nu(v)) = \bar{w}$ , cuyo soporte está en  $U$ .*

A continuación demostramos unos resultados en formato de lemas, los dos primeros son necesarios en la demostración que damos del Teorema de Whitney y los dos últimos en la demostración de la versión prevalente de este teorema.

**Lema 2.6.** *Sea  $M$  una variedad compacta de dimensión  $m$ . Sean la aplicación  $\sigma$ :*

$$\begin{aligned} \sigma & : C^r(M, \mathbb{R}^{2m+1}) \rightarrow C^{r-1}(\tilde{T}M, T\mathbb{R}^{2m+1}) \\ \sigma(f) & = T(f) \end{aligned}$$

y su correspondiente aplicación evaluación  $ev_\sigma$ :

$$\begin{aligned} ev_\sigma & : C^r(M, \mathbb{R}^{2m+1}) \times \tilde{T}M \rightarrow T\mathbb{R}^{2m+1} \\ ev_\sigma(f, v) & = Tf(v) \end{aligned}$$

Entonces  $ev_\sigma$  es transversal a toda subvariedad de  $T\mathbb{R}^{2m+1}$ , para  $r \geq 1$ .

*Demostración.* Sea

$$T_{f,v} ev_\sigma : T_f C^r(M, \mathbb{R}^{2m+1}) \times T_v \tilde{T}M \rightarrow T_{Tf(v)} T\mathbb{R}^{2m+1}$$

definida como

$$T_{f,v} ev_\sigma(\nu, u) = T_v Tf(u) + \omega T_x \nu(v).$$

Por el Lema 2.5, la aplicación  $T_{f,v} ev_\sigma$  es sobreyectiva para todo  $(f, v) \in C^r(M, \mathbb{R}^{2m+1}) \times \tilde{T}M$ . Por tanto,  $ev_\sigma$  es transversal a cualquier subvariedad de  $T\mathbb{R}^{2m+1}$ .  $\square$

**Lema 2.7.** *Sea  $M$  una variedad compacta de dimensión  $m$ . Sean las aplicación  $\rho$  y su correspondiente aplicación evaluación, con  $M \times M \setminus \Delta = \{(x, y) \in M \times M : x \neq y\}$*

$$\begin{aligned} \rho & : C^r(M, \mathbb{R}^{2m+1}) \rightarrow C^r(M \times M \setminus \Delta, \mathbb{R}^{2m+1} \times \mathbb{R}^{2m+1}) \\ \rho(f) & = (f, f) /_{M \times M \setminus \Delta} \\ ev_\rho & : C^r(M, \mathbb{R}^{2m+1}) \times (M \times M \setminus \Delta) \rightarrow \mathbb{R}^{2m+1} \times \mathbb{R}^{2m+1} \\ ev_\rho(f, x, y) & = (f(x), f(y)) \end{aligned}$$

con  $\Delta$  la diagonal de  $M \times M$ . Entonces  $ev_\rho$  es transversal a toda subvariedad de  $\mathbb{R}^{2m+1} \times \mathbb{R}^{2m+1}$

*Demostración.* Sea

$$T_{f,x,y}ev_\rho : T_f C^r(M, \mathbb{R}^{2m+1}) \times T_{(x,y)}(M \times M \setminus \Delta) \rightarrow T_{(f(x),f(y))} \mathbb{R}^{2m+1} \times \mathbb{R}^{2m+1}$$

definida como

$$T_{f,x,y}ev_\rho(\nu, u, v) = (T_x f(u) + \nu(x), T_y(v) + \nu(y)).$$

Por el Lema 2.4, la aplicación  $T_{f,x,y}ev_\rho$  es sobreyectiva para todo  $(f, x, y) \in C^r(M, \mathbb{R}^{2m+1}) \times (M \times M \setminus \Delta)$ . Por tanto,  $ev_\rho$  es transversal a cualquier subvariedad de  $\mathbb{R}^{2m+1} \times \mathbb{R}^{2m+1}$ .  $\square$

**Lema 2.8.** Sea  $M \subset \mathbb{R}^k$  una variedad compacta de dimensión  $m$  y sea  $\{f_1, f_2, \dots, f_p\}$  una base del espacio vectorial de las funciones polinómicas de  $\mathbb{R}^k$  en  $\mathbb{R}^{2m+1}$  de grado menor o igual 1. Sean las aplicaciones

$$\begin{aligned} \rho & : \mathbb{R}^p \rightarrow C^r(M \times M \setminus \Delta, \mathbb{R}^{2m+1} \times \mathbb{R}^{2m+1}) \\ \rho(\alpha) & = \left( \sum_{i=1}^p \alpha_i f_i, \sum_{i=1}^p \alpha_i f_i \right) \\ ev_\rho & : \mathbb{R}^p \times (M \times M \setminus \Delta) \rightarrow \mathbb{R}^{2m+1} \times \mathbb{R}^{2m+1} \\ ev_\rho(\alpha, x, y) & = \left( \sum_{i=1}^p \alpha_i f_i(x), \sum_{i=1}^p \alpha_i f_i(y) \right) \end{aligned}$$

con  $\hat{\Delta}$  la diagonal de  $\mathbb{R}^{2m+1} \times \mathbb{R}^{2m+1}$ . Entonces  $ev_\rho$  es transversal a  $\hat{\Delta}$ , para  $r \geq 1$ .

*Demostración.* Sea  $ev_\rho(\alpha, x, y) = (z, z) \in \hat{\Delta}$  con  $z = \sum_{i=1}^p \alpha_i f_i(x) = \sum_{i=1}^p \alpha_i f_i(y)$  y sea

$$\begin{aligned} T_{\alpha,x,y}ev_\rho & : T_\alpha \mathbb{R}^p \times T_{x,y}(M \times M \setminus \Delta) \rightarrow T_{z,z}(\mathbb{R}^{2m+1} \times \mathbb{R}^{2m+1}) \\ T_{\alpha,x,y}ev_\rho(\bar{a}, u, v) & = \left( \sum_{i=1}^p a_i f_i(x) + \sum_{i=1}^p \alpha_i T_x f_i(u), \sum_{i=1}^p a_i f_i(y) + \sum_{i=1}^p \alpha_i T_y f_i(v) \right) \end{aligned}$$

Se tiene que probar que la imagen de  $T_{\alpha,x,y}ev_\rho$  contiene el conjunto  $T_{z,z}(\mathbb{R}^{2m+1} \times \mathbb{R}^{2m+1})$ .

La base de las funciones polinómicas de  $\mathbb{R}^k$  en  $\mathbb{R}^{2m+1}$  de grado menor o igual 1 tiene  $2m+1$  polinomios de grado 0 y  $k(2m+1)$  polinomios homogéneos de grado 1. Por tanto, si  $x \neq y$ ,  $x_i \neq y_i$  para algún  $i$ , luego el rango de

$$((f_1(x), f_1(y)), \dots, (f_p(x), f_p(y)))$$

es  $4m + 2$ . Entonces para  $(0, \dots, e_i, \dots, 0) \in T_{z,z}(\mathbb{R}^{2m+1} \times \mathbb{R}^{2m+1})$  con  $i = 1, 2, \dots, 4m + 2$ , existe  $\bar{a} \in T_\alpha \mathbb{R}^p$  cumpliendo  $T_{\alpha,x,y} ev_\rho(\bar{a}, 0, 0) = (0, \dots, e_i, \dots, 0)$ , quedando demostrado que la aplicación  $ev_\rho$  es transversal a  $\hat{\Delta}$ .  $\square$

**Lema 2.9.** *Sea  $M \in \mathbb{R}^k$  una variedad compacta de dimensión  $m$  y sea el conjunto  $\{f_1, f_2, \dots, f_p\}$  una base del espacio vectorial de las funciones polinómicas de  $\mathbb{R}^k$  a  $\mathbb{R}^{2m+1}$  de grado menor o igual que 2. Sean las aplicaciones*

$$\begin{aligned} \sigma & : \mathbb{R}^p \rightarrow C^r(\tilde{T}M, T\mathbb{R}^{2m+1}) \\ \sigma(\alpha) & = \sum_{i=1}^p \alpha_i T f_i \\ ev_\sigma & : \mathbb{R}^p \times \tilde{T}M \rightarrow T\mathbb{R}^{2m+1} \\ ev_\sigma(\alpha, v) & = \sum_{i=1}^p \alpha_i T f_i(v) \end{aligned}$$

Entonces  $ev_\sigma$  es transversal a toda subvariedad de  $T\mathbb{R}^{2m+1}$ , para  $r \geq 1$ .

*Demostración.* Para  $\alpha \in \mathbb{R}^p$  y  $v \in \tilde{T}M$ , sea la aplicación

$$\begin{aligned} T_{\alpha,v} ev_\sigma & : T_\alpha \mathbb{R}^p \times T_v \tilde{T}M \rightarrow T_\Omega T\mathbb{R}^{2m+1} \\ T_{\alpha,v} ev_\sigma(\bar{a}, u) & = \sum_{i=1}^p \alpha_i T_v T f_i(u) + \sum_{i=1}^p a_i T f_i(v) \end{aligned}$$

con  $\Omega = \sum_{i=1}^p \alpha_i T f_i(v)$ . Bastaría probar que esta aplicación es sobreyectiva.

El número de polinomios homogéneos de grado 1 y 2 en  $\{f_1, f_2, \dots, f_p\}$  es  $(2m + 1)(2k + k(k - 1)/2)$ , siendo el rango de

$$(T f_1(v), \dots, T f_p(v))$$

$2(2m + 1)$ , para  $v \neq 0$ . Por tanto, para cada  $w \in T_\Omega T\mathbb{R}^{2m+1}$  existen  $a_i \in \mathbb{R}$  (componentes de  $\bar{a} \in T_\alpha \mathbb{R}^p$ ),  $i = 1, \dots, p$  tales que

$$w = \sum_{i=1}^p a_i T f_i(v) = T_{\alpha,v} ev_\sigma(\bar{a}, 0)$$

lo que prueba que  $ev_\sigma$  es transversal a toda subvariedad de  $T\mathbb{R}^{2m+1}$ .  $\square$

**Lema 2.10.** *Sea  $A \subset \mathbb{R}^k$  un conjunto compacto. Entonces existe una aplicación  $C^\infty$  de  $\mathbb{R}^k$  a  $\mathbb{R}^n$  inyectiva sobre  $A$  para algún  $n$ .*

*Demostración.* Como  $A \subset \mathbb{R}^k$  es compacto, existe un conjunto finito de abiertos  $\{V_i\}_{i=1}^p$  tal que  $A \subseteq \bigcup_{i=1}^p V_i$ . Sean  $\{U_i\}_{i=1}^p$  un conjunto finito de abiertos verificando  $V_i \subset \bar{V}_i \subset U_i$ .

Existen  $C^\infty$ -funciones  $\lambda_i : \mathbb{R}^k \rightarrow [0, 1]$  tal que  $\lambda_i(x) = 1$  si  $x \in \overline{V}_i$  y  $\lambda_i(x) = 0$  si  $x \in \mathbb{R}^k \setminus U_i$  para  $i = 1, \dots, p$  [31].

Sean las aplicaciones  $C^\infty$ ,  $f_i : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^k$  definidas como:

$$f_i(x) = \lambda_i(x)x$$

y sean las aplicaciones

$$g_i = (f_i, \lambda_i) : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^{k+1}$$

con  $i = 1, \dots, p$ . La aplicación

$$g = (g_1, \dots, g_p) : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^{p(k+1)}$$

es inyectiva sobre  $A$ .

Si  $x, y \in A$  con  $x \neq y$  e  $y \in \overline{V}_i$  para algún  $i$ , entonces:

- $x \notin \overline{V}_i$ , entonces  $\lambda_i(x) \neq \lambda_i(y) = 1$  y por tanto,  $g(x) \neq g(y)$ .
- $x \in \overline{V}_i$ , entonces  $\lambda_i(x) = \lambda_i(y) = 1$  pero  $f_i(x) \neq f_i(y)$ , entonces  $g(x) \neq g(y)$ .

□

**Lema 2.11.** *Sea  $A \subset \mathbb{R}^k$  un conjunto compacto de dimensión box-counting  $d < k$  y sea  $f : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^q$  una aplicación  $C^1$ . Si  $q > d$  entonces  $f(A)$  tiene medida de Lebesgue  $\mu$  cero en  $\mathbb{R}^q$ .*

*Demostración.* Denotamos por  $\overline{U}(\epsilon)$  los cubos de lado  $\epsilon > 0$  que cubren  $A$  ( $A \subseteq \bigcup \overline{U}(\epsilon)$ ). Como la dimensión box-counting de  $A$  es  $d$ ,  $N(\epsilon) \approx \epsilon^{-d}$ . Sea  $A_\epsilon = \overline{U}(\epsilon) \cap A$ , se cumple que  $A = \bigcup A_\epsilon$ . Es cierto que  $f(A) \subseteq \bigcup f(A_\epsilon) \subseteq \bigcup f(\overline{U}(\epsilon))$ , entonces  $f(A)$  está recubierto por  $\epsilon^{-d}$  conjuntos. Por otro lado, si  $x, y \in \overline{U}(\epsilon)$ , se cumple

$$\|f(x) - f(y)\| \leq K \|x - y\| \leq K\epsilon$$

con  $K$  el valor máximo que alcanza la diferencial de  $f$  sobre el conjunto compacto  $A$ . Entonces  $\mu(f(\overline{U}(\epsilon))) \leq K^q \epsilon^q$ . Por tanto,  $f(A)$  tiene medida de Lebesgue cero. □

**Lema 2.12.** *Sea  $A \subset \mathbb{R}^k$  un conjunto compacto de dimensión box-counting  $d < k$ . Entonces existe una aplicación  $C^r$  de  $\mathbb{R}^k$  en  $\mathbb{R}^n$ , con  $n = \min\{j \in \mathbb{N} : j \geq 2d + 1\}$ , que es inyectiva sobre  $A$  y  $r \geq 1$ .*

*Demostración.* Por el Lema 2.10 existe una  $C^r$ -aplicación  $f : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^q$  inyectiva sobre  $A$ , para algún  $q$ . Si  $q$  es un entero menor o igual que  $2d + 1$ , entonces estaría ya probado. Si  $q$  es un entero mayor que  $n$ , bastaría probar que se puede encontrar una aplicación de  $\mathbb{R}^k$  a  $\mathbb{R}^{q-1}$  inyectiva sobre  $A$ .

Identificamos  $\mathbb{R}^{q-1}$  con el conjunto  $\{x \in \mathbb{R}^q : x_q = 0\}$ . Sea  $v \in \mathbb{R}^q \setminus \mathbb{R}^{q-1}$  y sea la proyección paralela a  $v$   $f_v : \mathbb{R}^q \rightarrow \mathbb{R}^{q-1}$ .

La aplicación  $f_v$  es  $C^r$  y será inyectiva sobre  $f(A)$ , siempre que  $v$  no sea un vector paralelo a alguna secante de  $f(A)$ , es decir, si dados  $x$  e  $y$  dos elementos distintos de  $A$  cualesquiera, debe de cumplirse que

$$v \neq \frac{f(x) - f(y)}{\|f(x) - f(y)\|}.$$

Sea  $\Delta$  la diagonal de  $\mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^k$  y sea la aplicación diferenciable (porque lo es  $f$  y no se anula el denominador)

$$\begin{aligned} \sigma & : \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^k \setminus \Delta \rightarrow \mathbb{R}^q \\ \sigma(x, y) & = \frac{f(x) - f(y)}{\|f(x) - f(y)\|} \end{aligned}$$

El conjunto  $A \times A$  tiene dimensión box-counting  $2d$ , como  $k > d$ , el conjunto  $(A \times A) \setminus \Delta$  tiene medida de Lebesgue cero en  $(\mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^k) \setminus \Delta$  y su imagen por  $\sigma$  tiene también medida cero por ser  $q - 1 > 2d$  (Lema 2.11).

Por tanto, existe un vector  $v \notin \sigma(A \times A) \setminus \Delta$  tal que la aplicación  $f_v : \mathbb{R}^q \rightarrow \mathbb{R}^{q-1}$ , proyección paralela al vector  $v$ , es inyectiva sobre  $f(A)$  como queríamos probar.  $\square$

Los Lemas 2.10, 2.11 y 2.12 junto con el Teorema 2.16 hace posible el resultado del Teorema 2.17.

## 2.3. Teorema de Whitney

Comenzamos esta sección enunciando el teorema dado por Menger y Nöbeling en 1931, donde solo se tiene en cuenta la estructura topológica del conjunto  $X$ .

**Teorema 2.13.** [34] *Sea  $X$  un espacio topológico compacto cuya dimensión topológica finita es menor o igual que  $m$ . Entonces  $X$  es homeomorfo<sup>5</sup> a un subconjunto de  $\mathbb{R}^{2m+1}$ . Además, el conjunto de homeomorfismos de  $X$  en  $\mathbb{R}^{2m+1}$  es un subconjunto denso en el espacio de las funciones continuas de  $X$  en  $\mathbb{R}^{2m+1}$ .*

<sup>5</sup>Aplicación inyectiva de  $X$  a un subconjunto de  $\mathbb{R}^{2m+1}$ .



A diferencia del Teorema 2.13, el Teorema de Whitney tiene en cuenta la estructura diferencial de  $M$  y extiende su resultado. Aquí se va a dar una demostración del Teorema de Whitney utilizando el Teorema de Transversalidad Paramétrica.

**Teorema 2.14.** [67, 4] *Sea  $M$  una variedad compacta de dimensión  $m$ . Entonces el conjunto de embeddings de la variedad  $M$  en  $\mathbb{R}^{2m+1}$  es un subconjunto abierto y denso de  $C^r(M, \mathbb{R}^{2m+1})$ , para  $r \geq 1$ .*

*Demostración.* La demostración se realiza en dos etapas.

En la primera etapa se prueba que el conjunto de aplicaciones de  $M$  en  $\mathbb{R}^{2m+1}$  que son inmersiones es un subconjunto abierto y denso de  $C^r(M, \mathbb{R}^{2m+1})$ .

Para ello, se considera la aplicación

$$\begin{aligned} \sigma & : C^r(M, \mathbb{R}^{2m+1}) \rightarrow C^{r-1}(\tilde{T}M, T\mathbb{R}^{2m+1}) \\ \sigma(f) & = Tf \end{aligned}$$

y su correspondiente aplicación evaluación

$$\begin{aligned} ev_\sigma & : C^r(M, \mathbb{R}^{2m+1}) \times \tilde{T}M \rightarrow T\mathbb{R}^{2m+1} \\ ev_\sigma(f, v) & = Tf(v) \end{aligned}$$

Teniendo en cuenta el Lema 2.6, la aplicación  $ev_\sigma$  es transversal a cualquier subvariedad de  $T\mathbb{R}^{2m+1}$ , entonces es transversal a la subvariedad  $L = \{0_y \in T\mathbb{R}^{2m+1}\}$ , cuya dimensión y codimensión valen  $2m + 1$ .

Si  $r \geq 3$ , la aplicación  $ev_\sigma$  es  $C^1$  y  $\dim \tilde{T}M - \text{codim}L < 0$ , por el Teorema de Transversalidad Paramétrica, el subconjunto de aplicaciones  $f \in C^r(M, \mathbb{R}^{2m+1})$  tal que  $\sigma(f)$  es transversal a  $L$ , es abierto y denso en  $C^r(M, \mathbb{R}^{2m+1})$ .

Si  $Tf(v) \in L$ , teniendo en cuenta la transversalidad de  $ev_\sigma$  se cumple que

$$T_v(Tf)(T_v(\tilde{T}M)) + T_0L = T_0T\mathbb{R}^{2m+1}$$

como  $\dim(T_v(\tilde{T}M)) = 2m - 1$ , se tiene que  $\dim(T_v(Tf)(T_v(\tilde{T}M)))$  es a lo sumo  $2m - 1$ , entonces  $\dim(T_v(Tf)(T_v(\tilde{T}M)) + T_0L) \leq 4m < \dim T_0T\mathbb{R}^{2m+1} = 4m + 2$ . Por tanto,  $Tf(v)$  no puede pertenecer a  $L$  y  $f$  es una inmersión.

El subconjunto de las aplicaciones  $f \in C^r(M, \mathbb{R}^{2m+1})$  que son inmersiones, denotado por  $\mathbb{I}$ , es un conjunto abierto y denso en  $C^r(M, \mathbb{R}^{2m+1})$ .

En la segunda parte de la demostración probamos que el conjunto  $\mathbb{I}$  tiene un subconjunto abierto y denso de aplicaciones inyectivas y el teorema quedaría demostrado.

Sea la aplicación

$$\begin{aligned} \rho & : \mathbb{I} \rightarrow C^r(M \times M \setminus \Delta, \mathbb{R}^{2m+1} \times \mathbb{R}^{2m+1}) \\ \rho(f)(x, y) & = (f(x), f(y)) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} ev_\rho & : \mathbb{I} \times (M \times M \setminus \Delta) \rightarrow \mathbb{R}^{2m+1} \times \mathbb{R}^{2m+1} \\ ev_\rho(f, x, y) & = (f(x), f(y)) \end{aligned}$$

Sea  $ev_\rho(f, x, y) = (z, z) \in \hat{\Delta}$  (diagonal de  $\mathbb{R}^{2m+1} \times \mathbb{R}^{2m+1}$ ). La aplicación  $ev_\rho$  es transversal a la subvariedad  $\hat{\Delta}$  (Lema 2.7) con  $T_{f,x,y}ev_\rho(0_f, u, 0_y) = (T_x f(u), 0)$  y  $f \in \mathbb{I}$ .

Además,  $ev_\rho$  es  $C^1$  si  $r \geq 2$  y  $\dim(M \times M \setminus \Delta) - \text{codim}(\hat{\Delta}) < 0$ , por el Teorema de Transversalidad Paramétrica, el subconjunto de aplicaciones  $f \in \mathbb{I}$  tal que  $\rho(f)$  sea transversal a  $\hat{\Delta}$ , es abierto y denso en  $\mathbb{I}$ .

Contando dimensiones se tiene que  $\dim(T_{(x,y)}(M \times M \setminus \Delta)) = 2m$  y por tanto,

$$\dim(T_{(x,y)}\rho(f)(T_{(x,y)}(M \times M \setminus \Delta))) \leq 2m.$$

Como  $\dim(T_{(z,z)}\hat{\Delta}) = 2m + 1$ ,

$$\dim(T_{(x,y)}\rho(f)(T_{(x,y)}(M \times M \setminus \Delta))) + \dim(T_{(z,z)}\hat{\Delta}) \leq 4m + 1$$

Como  $\dim(\mathbb{R}^{2m+1} \times \mathbb{R}^{2m+1}) > 4m + 1$ , la imagen de  $\rho(f)$  no puede intersectar  $\hat{\Delta}$ . Luego, el conjunto de aplicaciones inyectivas en  $\mathbb{I}$  es un subconjunto abierto y denso para  $r \geq 3$ .

Se concluye, por consiguiente que el conjunto de embeddings de  $M$  en  $\mathbb{R}^{2m+1}$  es un subconjunto abierto y denso de  $C^r(M, \mathbb{R}^{2m+1})$  para  $r \geq 1$ .  $\square$

En espacios vectoriales infinito dimensionales no se dispone de un concepto como el de *medida de Lebesgue* para hacer referencia a que una propiedad se verifica para casi todos los elementos de dicho espacio. Además, un conjunto abierto y denso puede ser “pequeño”<sup>6</sup> en estos espacios vectoriales. Entonces cuando se quiere hacer referencia a que una propiedad se verifica para *casi todos los elementos de un espacio vectorial infinito dimensional* hay que hacer uso del concepto de *conjunto prevalente*, introducido por Hunt, Sauer y York [33, 56]. En este contexto, se utiliza el término *casi todo/s*, con el significado de que el

<sup>6</sup>Se puede ver un ejemplo en Embedology [56], página 584.

subconjunto del espacio infinito dimensional que verifica la propiedad es prevalente con respecto a ésta. Es decir, la prevalencia de un conjunto es una condición apropiada cuando se desean resultados probabilísticos en relación a la verificación de una propiedad en un espacio de dimensión infinita.

**Definición 2.15.** *Un subconjunto de Borel  $S$  de un espacio vectorial normado  $V$  es prevalente si existe un subespacio finito dimensional  $E \subset V$  tal que para cada  $v \in V$ ,  $v + e \in S$  para casi todo  $e \in E$  (en sentido Lebesgue).*

Cuando un subconjunto  $S$  es prevalente en  $V$  se verifica que si tomamos cualquier elemento de  $v \in V$  y le *sumamos* un elemento de  $E$ ,  $e$ , para casi todo elemento del subespacio vectorial finito dimensional  $E$  correspondiente a  $S$ , la suma  $v + e$  pertenece a  $S$ . La idea es que una propiedad se verifica en un subconjunto prevalente de un espacio infinito dimensional (se dice que la propiedad se verifica para casi todo elemento de este espacio) cuando se cumple para casi todo elemento del subespacio vectorial finito dimensional (en relación con el conjunto prevalente) que es donde tiene sentido la medida de Lebesgue.

El teorema que se demuestra a continuación es la versión prevalente del Teorema de Whitney, demostrado en [56], pero que nosotros realizamos utilizando herramientas de Topología Diferencial.

**Teorema 2.16.** [4] *Sea  $M \subset \mathbb{R}^k$  una variedad compacta de dimensión  $m$ . Entonces casi toda  $f \in C^r(\mathbb{R}^k, \mathbb{R}^{2m+1})$  es un embedding de  $M$ , para  $r \geq 1$ .*

*Demostración.* Sea el conjunto

$$S = \{f \in C^r(\mathbb{R}^k, \mathbb{R}^{2m+1}) : f \text{ es un embedding sobre } M, r \geq 1\}.$$

Se tiene que probar que este conjunto es prevalente en el conjunto  $C^r(\mathbb{R}^k, \mathbb{R}^{2m+1})$ , con  $r \geq 1$ .

Para ello, se considera el espacio vectorial de las aplicaciones polinómicas de  $\mathbb{R}^k$  en  $\mathbb{R}^{2m+1}$  de grado  $\leq 2$  y sea  $\{f_1, f_2, \dots, f_p\}$  una base de este espacio vectorial.

Sean  $f_0 \in C^r(\mathbb{R}^k, \mathbb{R}^{2m+1})$  y  $f_\alpha = f_0 + \sum_{i=1}^p \alpha_i f_i$ . Se considera la aplicación:

$$\begin{aligned} \sigma & : \mathbb{R}^p \rightarrow C^r(\tilde{T}M, T\mathbb{R}^{2m+1}) \\ \sigma(\alpha) & = Tf_\alpha \end{aligned}$$

y su correspondiente aplicación evaluación:

$$\begin{aligned} ev_\sigma & : \mathbb{R}^p \times \tilde{T}M \rightarrow T\mathbb{R}^{2m+1} \\ ev_\sigma(\alpha, v) & = Tf_\alpha(v) = Tf_0(v) + \sum_{i=1}^p \alpha_i Tf_i(v) \end{aligned}$$

El Lema 2.9 asegura que la aplicación  $ev_\sigma$  es transversal a toda subvariedad de  $T\mathbb{R}^{2m+1}$ ; en particular es transversal a  $L = \{0_y \in T\mathbb{R}^{2m+1}\}$ .

Como  $\dim(\tilde{T}M) - \text{codim}L < 0$ , aplicando el Teorema 2.3, el conjunto  $\{\alpha \in \mathbb{R}^p : \sigma(\alpha)$  es transversal a  $L\}$  es abierto y tiene medida de Lebesgue 1.

Ahora si se tienen en cuenta las dimensiones, como  $\dim T_v \tilde{T}M = 2m - 1$ , entonces la dimensión  $T_v(Tf_\alpha)(T_v \tilde{T}M) \leq 2m - 1$  y  $\dim(T_0L)$  es  $2m + 1$ . Por consiguiente,

$$T_v(Tf_\alpha)(T_v \tilde{T}M) + T_0L$$

no puede generar  $T_0T\mathbb{R}^{2m+1}$ , luego la aplicación  $Tf_\alpha$  no interseca  $L$  y el conjunto  $\{\alpha \in \mathbb{R}^p : f_\alpha \text{ es una inmersión}\}$  es abierto y de medida 1. Denotamos este conjunto por  $\mathbb{I}$ .

Ahora se considera la aplicación

$$\begin{aligned} \rho & : \mathbb{I} \rightarrow C^r(M \times M \setminus \Delta, \mathbb{R}^{2m+1} \times \mathbb{R}^{2m+1}) \\ ev_\rho & : \mathbb{I} \times (M \times M \setminus \Delta) \rightarrow \mathbb{R}^{2m+1} \times \mathbb{R}^{2m+1} \\ ev_\rho(\alpha, x, y) & = \left( f_0(x) + \sum_{i=1}^p \alpha_i f_i(x), f_0(y) + \sum_{i=1}^p \alpha_i f_i(y) \right) \end{aligned}$$

La aplicación  $ev_\rho$  es  $C^1$  y por el Lema 2.8 es transversal a  $\hat{\Delta}$ ; como

$$\dim(M \times M \setminus \Delta) - \text{codim}\hat{\Delta} < 0,$$

entonces por el Teorema 2.3, el conjunto  $\{\alpha \in \mathbb{I} : \rho(\alpha) \text{ es transversal a } \hat{\Delta}\}$  es abierto y de medida 1 en  $\mathbb{I}$ .

Para  $x, y \in (M \times M \setminus \Delta)$ , la dimensión  $\dim(T_{x,y}(M \times M \setminus \Delta)) = 2m$ , entonces

$$\dim(T_{x,y}\rho(\alpha)(T_{x,y}(M \times M \setminus \Delta))) \leq 2m.$$

Como  $\dim(T_{z,z}\hat{\Delta}) = 2m + 1$ , el conjunto  $T_{x,y}(M \times M \setminus \Delta) + T_{z,z}\hat{\Delta}$  no puede generar  $T_{z,z}(\mathbb{R}^{2m+1} \times \mathbb{R}^{2m+1})$  y por tanto,  $\rho(\alpha)(x, y) \notin \hat{\Delta}$ , esto es,  $\rho(\alpha)$  es inyectiva para casi todo  $\alpha \in \mathbb{I}$ . □

**Proposición 2.17.** *Sea  $A \subset \mathbb{R}^k$  un subconjunto compacto de dimensión box-counting  $d$ . Entonces casi toda  $f \in C^r(\mathbb{R}^k, \mathbb{R}^n)$ , con  $r \geq 1$  y  $n = \min\{j \in \mathbb{N} : j \geq 2d + 1\}$ , es inyectiva sobre  $A$ .*

*Demostración.* La demostración de esta proposición es una aplicación directa del Teorema 2.16 y el Lema 2.12 □

## 2.4. Extensión del Teorema de Takens y del Teorema de Stark

Como ya hemos dicho es el importante Teorema de Takens [63] el que proporciona el fundamento teórico para el análisis de series temporales procedentes de un sistema dinámico autónomo determinista. Esto es debido a que este teorema permite construir una órbita de un sistema dinámico autónomo desconocido a partir de una serie temporal de medidas obtenida de él.

Se denota por  $x_t$  el estado del sistema dinámico en  $t$ , que pertenece a una variedad diferenciable  $m$ -dimensional  $M$  de  $\mathbb{R}^k$ , tal que la dinámica viene dada por la aplicación  $f : M \rightarrow M$ , con  $x_t = f^t(x_0)$  y sea  $\{\alpha_t\}$  la serie temporal o serie de medidas tal que cada  $\alpha_t$  se ha obtenido de  $x_t$  a través de una función (llamada en algunos casos función medida)  $\alpha : M \rightarrow \mathbb{R}$  tal que  $\alpha_t = \alpha(x_t) = \alpha(f(x_{t-1})) = \alpha(f^t(x_0))$ .

Fijado un valor  $d$ , llamado dimensión de embedding, se define la aplicación embedding

$$\Phi_{f,\alpha} : M \rightarrow \mathbb{R}^d$$

$$\Phi_{f,\alpha}(x) = (\alpha(x), \alpha(f(x)), \dots, \alpha(f^{d-1}(x))).$$

Takens probó que si la variedad  $M$  es compacta y  $d \geq 2m + 1$ , las aplicaciones del tipo  $\Phi_{f,\alpha}$  son genéricamente embeddings de la variedad  $M$  en  $\mathbb{R}^d$ . Si  $\Phi_{f,\alpha}$  es un embedding,  $\Phi_{f,\alpha}(M)$  es equivalente (difeomorfo) a  $M$  y se puede definir la aplicación  $F = \Phi_{f,\alpha} \circ f \circ \Phi_{f,\alpha}^{-1}$  sobre  $\Phi_{f,\alpha}(M)$ , tal que este sistema dinámico  $(\Phi_{f,\alpha}(M), F)$  es equivalente al sistema dinámico  $(M, f)$ . Las propiedades relativas a conjuntos invariantes, dimensión de correlación,<sup>7</sup> exponentes de Lyapunov<sup>8</sup>,... son iguales en ambos sistemas, con la ventaja de que estas propiedades pueden ser estimadas directamente a partir de las observaciones para el sistema  $(\Phi_{f,\alpha}(M), F)$ .

---

<sup>7</sup>Dado  $\varepsilon > 0$ , la correlación integral de un conjunto  $X \subset \mathbb{R}^m$  es la probabilidad que dos puntos del conjunto estén a una distancia menor que el valor  $\varepsilon$  fijado y se denota como  $C(\varepsilon)$ . La dimensión de correlación del conjunto  $X$  se define como el valor del límite, si existe

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\log C(\varepsilon)}{\log \varepsilon}.$$

<sup>8</sup>Ver Capítulo 3.

Si se escribe  $z_n = (\alpha_n, \dots, \alpha_{n+d-1}) \in \Phi_{f,\alpha}(M)$ <sup>9</sup>

$$\begin{aligned} z_n &= (\alpha_n, \dots, \alpha_{n+d-1}) = ((\alpha(x_n), \dots, \alpha(x_{n+d-1}))) = \\ &= (\alpha(f^n(x_0)), \dots, \alpha(f^{n+d-1}(x_0))) = \Phi_{f,\alpha}(x_n) \end{aligned}$$

entonces

$$F(z_n) = (\Phi_{f,\alpha} \circ f \circ \Phi_{f,\alpha}^{-1})(z_n) = (\Phi_{f,\alpha} \circ f \circ \Phi_{f,\alpha}^{-1})(\Phi_{f,\alpha}(x_n)) = \Phi_{f,\alpha}(x_{n+1}) = z_{n+1},$$

$$F(z_n) = F(\alpha_n, \alpha_{n+1}, \dots, \alpha_{n+d-1}) = (\alpha_{n+1}, \alpha_{n+2}, \dots, \alpha_{n+d}) = z_{n+1}$$

de modo que aunque el sistema original es inobservable, la dinámica del sistema equivalente se puede expresar en términos de la serie temporal.

Desde el punto de vista práctico, reconstruir el espacio de estados del sistema dinámico desconocido a partir de una serie temporal tomada de él presenta obstáculos, entre otros, la dimensión embedding  $d$  no es conocida porque se desconoce la dimensión de  $M$  y la serie de observaciones es finita y muchas veces está contaminada por ruido.

A continuación se enuncia el Teorema de Takens [63]:

**Teorema 2.18.** [50, 60, 63] *Sea  $M$  una variedad compacta  $m$ -dimensional y sea  $d \geq 2m+1$ . Entonces el conjunto<sup>10</sup> de  $(f, \alpha) \in D^r(M) \times C^r(M, \mathbb{R})$  que cumple que la aplicación*

$$\begin{aligned} \Phi_{f,\alpha} &: M \rightarrow \mathbb{R}^d \\ \Phi_{f,\alpha}(x) &= (\alpha_t, \alpha_{t+1}, \dots, \alpha_{t+2m}) = (\alpha(x_t), \alpha(x_{t+1}), \dots, \alpha(x_{t+2m})) \end{aligned}$$

*es un embedding es abierto y denso en  $D^r(M) \times C^r(M, \mathbb{R})$  para  $r \geq 1$ .*

**Nota 2.19.** *Cuando las aplicaciones  $f$  y  $\alpha$ , que están presentes en el Teorema de Takens, son lineales la dimensión embedding puede reducirse de  $2m+1$  a  $m$ . Pero el caso lineal es excepcional, y si bien en el Teorema de Takens la dimensión  $2m+1$  es la mínima dimensión que asegura, sea cual sea  $(f, \alpha) \in D^r(M) \times C^r(M, \mathbb{R})$ , que  $\Phi_{f,\alpha}$  es un embedding de  $M$ , eso no quiere decir que no se pueda construir un embedding tomando una dimensión  $d$  menor que  $2m+1$  cuando  $(f, \alpha)$  lo permitan, como ocurre en el caso lineal.*

<sup>9</sup>La serie vectorial  $\{z_n\}$  es la serie embebida en  $\mathbb{R}^d$  de la serie real  $\{\alpha_t\}$ .

<sup>10</sup> $D^r(M) \subset C^r(M, M)$  es el conjunto de difeomorfismos de  $M$ . Un difeomorfismo es una aplicación que posee inversa, siendo ambas aplicaciones diferenciables

Los sistemas dinámicos no autónomos o los que se ven influidos por perturbaciones externas representan una situación más adecuada a la realidad. El Teorema de Stark [60] permite reconstruir el espacio de estados del sistema dinámico (2.1),

$$\begin{cases} x_t = f(x_{t-1}, y_{t-1}) \\ y_t = g(y_{t-1}) \end{cases}, \quad (2.1)$$

utilizando retardos de una serie temporal  $\{\alpha_t\}_t$  con  $\alpha_t = \alpha(x_t)$ , donde los valores de  $x_t$  son las primeras componentes de cada uno de los estados  $(x_t, y_t)$  del dicho sistema. Este teorema es el siguiente :

**Teorema 2.20.** *Sean  $M$  y  $N$  variedades compactas de dimensión  $m \geq 1$  y  $n$  respectivamente. Sea  $g \in D^r(N)$ , cuyas órbitas periódicas de periodo  $< 2d$ , con  $d \geq 2(m+n) + 1$ , son aisladas y con valores propios distintos. Entonces existe un conjunto abierto y denso<sup>11</sup> de  $D^r(M \times N, M) \times C^r(M, \mathbb{R})$ , tal que si  $(f, \alpha)$  pertenece a este conjunto la aplicación  $\Phi_{f,g,\alpha}$*

$$\begin{aligned} \Phi_{f,g,\alpha} &: M \times N \rightarrow \mathbb{R}^d \\ \Phi_{f,g,\alpha}(x, y) &= (\alpha(x), \alpha(f(x, y)), \dots, \alpha(f^{(d-1)}(x, y))) \end{aligned}$$

es un embedding para  $r \geq 1$ ; donde  $f^{(i)}(x, y) = f(f^{(i-1)}(x, y), g^{i-1}(y))$ ,  $f^{(0)}(x, y) = x$ .

Otra situación posible, variante del Teorema 2.18 y del Teorema 2.20, sería la expresada por el sistema dinámico dado por las ecuaciones,

$$\begin{cases} x_t = f(x_{t-1}, y_{t-1}) \\ y_t = g(x_{t-1}, y_{t-1}) \end{cases} \quad (2.2)$$

donde  $f \in D^r(M \times N, M)$ ,  $g \in D^r(M \times N, N)$ . La aplicación  $g$  no depende solo de la variable  $y$  sino también de  $x$  y la serie temporal (de medidas) depende solo de  $x$ ,  $\alpha \in C^r(M, \mathbb{R})$  que se expresa como  $\alpha_t = \alpha(x_t)$ , de modo que:

$$\begin{aligned} f^{(0)}(x, y) &= x; \quad g^{(0)}(x, y) = y \\ f^{(t)}(x, y) &= f(f^{(t-1)}(x, y), g^{(t-1)}(x, y)) \\ g^{(t)}(x, y) &= g(f^{(t-1)}(x, y), g^{(t-1)}(x, y)) \\ \alpha_t &= \alpha(x_t) = \alpha(f^{(t)}(x, y)) \end{aligned} \quad (2.3)$$

---

<sup>11</sup>  $f \in D^r(M \times N, M)$  significa que  $f_y \in D^r(M)$  para cada  $y \in N$ .

para  $t \geq 1$ .

A continuación se enuncia y se prueba esta extensión, haciendo uso de herramientas utilizadas por Stark [60]. Es importante tener en cuenta que en este caso se va a reconstruir una órbita de un sistema dinámico a partir de una serie temporal (de medidas)  $\alpha_t = \alpha(x_t)$  que depende solo de parte de las variables de estado del sistema dinámico tal como se describe en (2.3).

**Teorema 2.21.** [16] Sean  $M$  y  $N$  variedades compactas de dimensiones  $m \geq 1$  y  $n \geq 1$ , respectivamente, y  $d \geq 2(m+n) + 1$ . Entonces para  $r \geq 1$ , existe un conjunto abierto y denso de  $D^r(M \times N, M) \times D^r(M \times N, N) \times C^r(M, \mathbb{R})$  tal que para cada  $(f, g, \alpha)$  que pertenece a este conjunto, la aplicación

$$\begin{aligned} \Phi_{f,g,\alpha} &: M \times N \rightarrow \mathbb{R}^d \\ \Phi_{f,g,\alpha}(x, y) &= (\alpha(x), \alpha(f(x, y)), \dots, \alpha(f^{(d-1)}(x, y))) \end{aligned}$$

es un embedding.

*Demostración.* El conjunto de aplicaciones

$$(f, g, \alpha) \in D^r(M \times N, M) \times D^r(M \times N, N) \times C^r(M, \mathbb{R}),$$

tal que  $\Phi_{f,g,\alpha}$  es un embedding es un conjunto abierto, si  $d \geq 2(m+n) + 1$  [24, 60, 67].

Quedaría probar que este conjunto es denso.

La demostración se realiza en dos pasos:

**Paso 1**

i) Primero se prueba que el conjunto<sup>12</sup>

$$D^r = \left\{ \begin{array}{l} (f, g) \in D^r(M \times N, M) \times D^r(M \times N, N) : \text{los punto periódicos} \\ \text{de } (f, g) \text{ de periodo } q < 2d \text{ son aislados e hiperbólicos,} \\ \text{con valores propios distintos y distinta } x \end{array} \right\}$$

es abierto y denso en  $D^r(M \times N, M) \times D^r(M \times N, N)$  para  $r \geq 2$ .

Sabemos que el conjunto

$$D_1^r = \left\{ \begin{array}{l} (f, g) \in D^r(M \times N, M) \times D^r(M \times N, N) : \text{todas las órbitas periódicas de} \\ (f, g) \text{ de periodo } q < 2d \text{ son aisladas, hiperbólicas} \\ \text{y con valores propios distintos} \end{array} \right\}$$

<sup>12</sup>Se dice que un punto periódico de  $(f, g)$  es *hiperbólico* si el módulo de sus valores propios es distinto de 1.



es abierto y denso en  $D^r(M \times N, M) \times D^r(M \times N, N)$  [54, 60].

Por el Teorema de la Isotopía Transversal [2, 60] pequeñas perturbaciones de  $(f, g) \in D_1^r$  no cambian el número de órbitas periódicas de periodo menor que  $2d$ .

Si  $(f, g) \in D^r$ , entonces  $(f, g) \in D_1^r$ . Además, la componente<sup>13</sup>  $x$  de los puntos  $(x, y)$  de periodo menor que  $2d$  depende diferenciablemente de  $(f, g)$ , por tanto, existe  $U_1(f, g) \subset C^r(M \times N, M) \times C^r(M \times N, N)$  abierto tal que los puntos periódicos de periodo menor que  $2d$  de los elementos de  $U_1$  tienen distinta la componente  $x$ . La intersección de  $U_1(f, g)$  y  $D_1^r$  es un entorno abierto de  $(f, g)$  contenido en  $D^r$ . Luego  $D^r$  es un subconjunto abierto en  $D_1^r$ .

Sean  $(f, g) \in D_1^r$  y  $\{(x_i, y_i)\}_{i=1}^k$  el conjunto de sus puntos periódicos de periodo menor que  $2d$  es finito por tratarse de puntos aislados. Algunos de estos puntos podrían tener igual la componente  $x$  aunque  $(x_i, y_i) \neq (x_j, y_j)$ , si  $i \neq j$ .

La aplicación  $\rho : D_1^r \rightarrow (M \times N)^k$  definida como  $\rho(f, g) = ((f, g)(x_i, y_i))_{i=1}^k$  es una submersión [60] luego es localmente sobreyectiva. Si ocurriera que  $x_i = x_j$  se podría sustituir la componente  $x$  por un valor cercano a  $x_i$  y construir una aplicación  $(f', g') \in D^r$  tal que

$$(f', g')(x_{i-1}, y_{i-1}) = (x'_i, y_i)$$

$$(f', g')(x'_i, y_i) = (x_{i+1}, y_{i+1})$$

y  $(f', g') = (f, g)$  sobre el resto de los puntos periódicos, de modo que los puntos periódicos de  $(f', g')$  tienen distinta componente  $x$ . Luego  $D^r$  es un subconjunto denso de  $D_1^r$ .

**ii)** Sea  $(f, g) \in D^r$ , denotamos  $P_{f,g}^m$  el conjunto de sus puntos periódicos de periodo menor que  $m$ , con  $1 \leq m \leq 2d$ .

Ahora queremos construir un conjunto abierto y denso  $D_{f,g} \subset C^r(M, \mathbb{R})$  tal que  $\Phi_{f,g,\alpha}$  sea una inmersión e inyectiva sobre el conjunto  $P_{f,g}^{2d}$ .

Usando resultados de Stark [2, 24, 60], el conjunto de  $\alpha \in C^r(M, \mathbb{R})$  tal que  $\Phi_{f,g,\alpha}$  es inyectiva sobre  $P_{f,g}^{2d}$  es abierto y denso en el conjunto  $C^r(M, \mathbb{R})$ . Este conjunto se denota por  $D_{f,g}^1$ .

Queda probar que el conjunto de  $\alpha \in C^r(M, \mathbb{R})$  tal que  $\Phi_{f,g,\alpha}(x, y)$  es una inmersión cuando  $(x, y) \in P_{f,g}^d$  es abierto y denso (basta considerar los puntos periódicos de periodo menor que  $d$ ), con  $(f, g) \in D^r$ .

---

<sup>13</sup>Entendemos por componente  $x$  las variables que pertenecen a  $M$ .

Sea  $T_{(x,y)}\Phi_{f,g,\alpha}$  con  $(x, y) \in P_{f,g}^d$ , llamamos

$$\alpha_i = T_{x_i}\alpha T_{(x_i,y_i)}\pi_M T_{(x,y)}(f, g)^i \in L(T_x M \times T_y N, T_{\alpha(x_i)}\mathbb{R}).$$

donde  $L(T_x M \times T_y N, T_{\alpha(x_i)}\mathbb{R})$  es el espacio de las aplicaciones lineales de  $T_x M \times T_y N$  a  $T_{\alpha(x_i)}\mathbb{R}$  y  $\pi_M : M \times N \rightarrow M$  es la proyección sobre  $M$ .

La aplicación  $T_{(x,y)}\Phi_{f,g,\alpha}$  será inyectiva cuando el rango de la matriz

$$\begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_{d-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_0 & e_1 & \cdots & e_{m+n-1} \end{pmatrix} \quad (2.4)$$

sea máximo con  $\{e_i\}_{i=0}^{m+n-1}$  una base de  $T_x M \times T_y N$ . Sea  $B$  la submatriz de (2.4) que da el rango máximo y que sin pérdida de generalidad puede considerarse que es

$$B = \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_{m+n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_0 & e_1 & \cdots & e_{m+n-1} \end{pmatrix} \quad (2.5)$$

Sea  $(x, y)$  un punto periódico de periodo  $q$ , entonces  $\{(x_i, y_i)\}_{i=0}^{q-1}$  son distintos con  $x_i \neq x_j$  si  $i \neq j$  y la aplicación

$$\alpha \mapsto (T_{x_0}\alpha, \dots, T_{x_{q-1}}\alpha) \quad (2.6)$$

es una submersión [60].

Puesto que  $(f, g) \in D^r(M \times N, M) \times D^r(M \times N, N)$ ,  $T_{(x,y)}(f, g)^i$  es un isomorfismo,  $T_{(x_i,y_i)}\pi_M T_{(x,y)}(f, g)^i$  es también una submersión, luego la aplicación

$$\alpha \mapsto (a_0, a_1, \dots, a_{q-1})$$

es una submersión.

Sea  $\{e_0, e_1, \dots, e_{m+n-1}\}$  una base de vectores propios de  $T_{(x,y)}(f, g)^q$  tal que

$$T_{(x,y)}(f, g)^q(e_i) = \lambda_i e_i,$$

con  $i = 0, 1, \dots, m+n-1$  y  $\lambda_i \neq 0$ .

$T_{(x,y)}(f, g)^i(e_j) = e_j^{(i)}$ , para  $j = 0, 1, \dots, m+n-1$ , es una base de  $T_{x_i} M \times T_{y_i} N$  con  $(e_j^{(i)}) = (u_j^{(i)}, v_j^{(i)})$ ,  $u_j^{(i)} \in T_{x_i} M$  y  $v_j^{(i)} \in T_{y_i} N$  para  $j = 0, 1, \dots, m+n-1$  e  $i = 0, 1, \dots, q-1$ .

Se tiene que

$$\begin{aligned} a_i(e_j) &= T_{x_i} \alpha T_{(x_i, y_i)} \pi_M T_{(x, y)} (f, g)^i (e_j) = \\ &= T_{x_i} \alpha T_{(x_i, y_i)} \pi_M (e_j^{(i)}) = T_{x_i} \alpha (u_j^{(i)}), \end{aligned}$$

Sea  $B_{ij} = a_i(e_j) = T_{x_i} \alpha (u_j^{(i)})$  para  $j = 0, 1, \dots, m+n-1$  e  $i = 0, 1, \dots, q-1$ . Cuando  $i \geq q$ , se puede escribir  $i = qp + k$  y por consiguiente

$$\begin{aligned} B_{ij} &= T_{x_k} \alpha T_{(x_i, y_i)} \pi_M T_{(x, y)} (f, g)^{qp+k} (e_j) = \\ &= T_{x_k} \alpha T_{(x_i, y_i)} \pi_M T_{(x, y)} (f, g)^k (\lambda_j^p e_j) = \lambda_j^p T_{x_k} \alpha (u_j^{(k)}) \end{aligned}$$

luego la matriz  $B$  se escribe

$$B = \begin{pmatrix} T_{x_0} \alpha (u_0^{(0)}) & T_{x_0} \alpha (u_1^{(0)}) & \cdots & T_{x_0} \alpha (u_{m+n-1}^{(0)}) \\ T_{x_1} \alpha (u_0^{(1)}) & T_{x_1} \alpha (u_1^{(1)}) & \cdots & T_{x_1} \alpha (u_{m+n-1}^{(1)}) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ T_{x_{q-1}} \alpha (u_0^{(q-1)}) & T_{x_{q-1}} \alpha (u_1^{(q-1)}) & \cdots & T_{x_{q-1}} \alpha (u_{m+n-1}^{(q-1)}) \\ \lambda_0 T_{x_0} \alpha (u_0^{(0)}) & \lambda_1 T_{x_0} \alpha (u_1^{(0)}) & \cdots & \lambda_{m+n-1} T_{x_0} \alpha (u_{m+n-1}^{(0)}) \\ \lambda_0 T_{x_1} \alpha (u_0^{(1)}) & \lambda_1 T_{x_1} \alpha (u_1^{(1)}) & \cdots & \lambda_{m+n-1} T_{x_1} \alpha (u_{m+n-1}^{(1)}) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \lambda_0^r T_{x_0} \alpha (u_0^{(0)}) & \lambda_1^r T_{x_0} \alpha (u_1^{(0)}) & \cdots & \lambda_{m+n-1}^r T_{x_0} \alpha (u_{m+n-1}^{(0)}) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \lambda_0^r T_{x_s} \alpha (u_0^{(s)}) & \lambda_1^r T_{x_s} \alpha (u_1^{(s)}) & \cdots & \lambda_{m+n-1}^r T_{x_s} \alpha (u_{m+n-1}^{(s)}) \end{pmatrix}$$

donde  $m+n = qr + s$ .

Por tanto, por ser la aplicación (2.6) una submersión es localmente sobreyectiva [60], luego para un valor  $\gamma > 0$  suficientemente pequeño se puede encontrar un  $\alpha$  en un entorno de  $\alpha = 0$ , tal que

$$T_{x_i} \alpha (u_j^{(i)}) = \begin{cases} \gamma \lambda_j^{i+ir} & i \leq s \\ \gamma \lambda_j^{s+ir} & i > s \end{cases},$$

obteniéndose

$$\det(B) = \begin{vmatrix} \gamma & \gamma & \cdots & \gamma \\ \gamma\lambda_0^{1+r} & \gamma\lambda_1^{1+r} & \cdots & \gamma\lambda_{m+n-1}^{1+r} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \gamma\lambda_0^{s+sr} & \gamma\lambda_1^{s+sr} & \cdots & \gamma\lambda_{m+n-1}^{s+sr} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \gamma\lambda_0^{s+(q-1)r} & \gamma\lambda_1^{s+(q-1)r} & \cdots & \gamma\lambda_{m+n-1}^{s+(q-1)r} \\ \gamma\lambda_0^{2+r} & \gamma\lambda_1^{2+r} & \cdots & \gamma\lambda_{m+n-1}^{2+r} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \end{vmatrix} = \quad (2.7)$$

$$= \gamma^{m+n} \lambda_0^r \lambda_1^r \cdots \lambda_{m+n-1}^r A \quad (2.8)$$

donde  $A$  es un determinante de Vandermonde. Este determinante es distinto de cero puesto que  $\lambda_i \neq 0, i = 0, 1, \dots, m+n-1$ . Por tanto,  $\det(B) \neq 0$ .

Fijada una base, la aplicación

$$(a_0, a_1, \dots, a_{q-1}) \mapsto (B_{i,0}, B_{i,1}, \dots, B_{i,m+n-1})_{i=0}^{q-1}$$

es un isomorfismo de  $(L(T_x M \times T_y N, T_{\alpha(x_i)} \mathbb{R}))_{i=0, \dots, q-1}$  en  $\mathbb{R}^{q \times (m+n-1)}$  y la aplicación

$$B = (B_{i,0}, B_{i,1}, \dots, B_{i,m+n-1})_{i=0, \dots, q-1} \rightarrow \det(B)$$

asigna a  $B$  un polinomio en las variables  $B_{i,j}$  cuyo  $\det(B) \neq 0$  y utilizando argumentos de [60] se obtiene, pues, un subconjunto abierto y denso de  $\alpha \in C^r(M, \mathbb{R})$  tal que  $\Phi_{f,g,\alpha}$  es una inmersión en  $(x, y) \in P_{f,g}^d$  que denotamos como  $D_{f,g}^2$ .

Sea el conjunto  $D_{f,g} = D_{f,g}^1 \cap D_{f,g}^2$ , que es residual en  $C^r(M, \mathbb{R})$ .

Denotamos por  $E^r$  el conjunto

$$\left\{ (f, g, \alpha) \in D^r(M \times N, M) \times D^r(M \times N, N) \times C^r(M, \mathbb{R}) : (f, g) \in D^r, \alpha \in D_{f,g} \right\}.$$

Este conjunto es abierto y denso en  $D^r(M \times N, M) \times D^r(M \times N, N) \times C^r(M, \mathbb{R})$  [60].

**Paso 2**

La demostración de esta segunda parte no difiere esencialmente de las pruebas dadas por Stark en [60].

Quedaría estudiar los puntos  $(x, y)$  tal que  $x_i = x_j$ ,  $i \neq j$  con  $i, j = 0, 1, \dots, d-1$ , donde  $x_k = f^{(k)}(x, y)$  y  $(x, y) \notin P_{f,g}^d$ , con  $(f, g) \in D^r$ . Para esta parte se utilizan los argumentos de Stark [60], construyendo subvariedades de  $(M \times N) - P_{f,g}^d$  donde  $\Phi_{f,g,\alpha}$  sea una inmersión e inyectiva cuando  $(f, g, \alpha)$  pertenece a un subconjunto abierto y denso de  $E^r$ . Estos conjuntos se obtienen utilizando reiteradamente el Teorema de Transversalidad Paramétrica para las convenientes aplicaciones de evaluación.

i) Primero, se busca un subconjunto residual de  $D^r$  y otro de  $D_{f,g}$  tal que  $\Phi_{f,g,\alpha}$  sea una inmersión sobre  $(M \times N) - P_{f,g}^d$ .

Para ello, se considera una partición de  $\{0, 1, \dots, d-1\}$ ,  $I = \{I_1, I_2, \dots, I_t\}$  definida por la relación de equivalencia:

$$i \sim_I i' \text{ si y solo si } i, i' \in I_k$$

con  $k = 1, \dots, t$ . Para esta partición se define el conjunto:

$$\widetilde{W}_I = \left\{ (x, y) \in \left( (M \times N) - P_{f,g}^d \right) : x_i = x_j \text{ si y solo si } i \sim_I j \right\} \quad (2.9)$$

teniendo en cuenta todas las posibles particiones  $I$  se cumple que

$$\bigcup_I \widetilde{W}_I = (M \times N) - P_{f,g}^d.$$

La estructura de subvariedad de estos conjuntos se obtiene considerando las aplicaciones

$$\begin{aligned} \tau & : D^r(M \times N, M) \times D^r(M \times N, N) \rightarrow C^d(M \times N, M^d) \\ \tau(f, g) & = (f^{(0)}, f^{(1)}, f^{(2)}, \dots, f^{(d-1)}) \\ v & : D^r(M \times N, M) \times D^r(M \times N, N) \rightarrow C^d(M \times N, (M \times N)^d) \\ v(f, g) & = ((f, g)^0, (f, g)^1, (f, g)^2, \dots, (f, g)^{d-1}) \end{aligned}$$

y estudiando la transversalidad de la aplicación de evaluación correspondiente a  $\tau$  y  $v$  a cada una de las subvariedades de  $M^d$  y  $(M \times N)^d$  cuya antiimagen por dichas aplicaciones son los conjuntos definidos por 2.9 y aplicando el Teorema de Transversalidad Paramétrica, se obtiene un conjunto residual de  $D^r$ , tal que si  $(f, g)$  pertenece a este conjunto residual, cuando  $\widetilde{W}_I \neq \emptyset$ ,  $\widetilde{W}_I$  es una subvariedad de  $(M \times N) - P_{f,g}^d$ .

Para cada partición  $I$ , se define el conjunto  $J_I$  formado por un elemento de cada subconjunto  $I_k$  de la partición  $I$ , para  $k = 1, 2, \dots, t$ . Existen distintas maneras de construir  $J_I$ . Se elige arbitrariamente uno de estos conjuntos,  $J_I$ , que tiene  $t$  elementos:

$$J_I = \{j_1, j_2, \dots, j_t\}.$$

Sea  $(x, y) \in \widetilde{W}_I$ , entonces los puntos  $x_{j_1}, x_{j_2}, \dots, x_{j_t}$  son distintos y cualquier otro  $x_j$  con  $j = 0, 1, \dots, d-1$  es igual a algún  $x_{j_i}$  para  $i = 1, \dots, t$  ( $x_j = f^{j-1}(x_{j-1}, y_{j-1})$ ).

Sea  $I' = \{i_1, i_2, \dots, i_s\}$  un subconjunto de  $J_I$  y sea el conjunto

$$\widetilde{T}_{I,I'} = \left\{ \begin{array}{l} (u, v) \in \widetilde{T}_{\widetilde{W}_I}((M \times N) - P_{f,g}^d) : \text{si } i \in J_I, \text{ entonces} \\ \widetilde{T}f^{(i)}(u, v) = 0_{x_i} \text{ si y solo si } i \in I' \end{array} \right\}$$

que cumple que  $\bigcup_{I,I'} \widetilde{T}_{I,I'} = \widetilde{T}((M \times N) - P_{f,g}^d)$  y  $\bigcup_{I'} \widetilde{T}_{I,I'} = \widetilde{T}_{\widetilde{W}_I}((M \times N) - P_{f,g}^d)$ .

Recurriendo a Stark [60], para cada  $I$  y  $I'$  y para un conjunto residual de  $D^r$  se tiene que cuando  $(f, g)$  pertenece a este conjunto, si  $\widetilde{T}_{I,I'} \neq \emptyset$ , es una subvariedad de  $\widetilde{T}((M \times N) - P_{f,g}^d)$  (se trata de utilizar ahora las aplicaciones

$$\begin{aligned} \tau' & : D^r(M \times N, M) \times D^r(M \times N, N) \rightarrow C^{d-1}(\widetilde{T}(M \times N), TM^d) \\ \tau'(f, g) & = (\widetilde{T}f^{(0)}, \widetilde{T}f^{(1)}, \widetilde{T}f^{(2)}, \dots, \widetilde{T}f^{(d-1)}) \\ v' & : D^r(M \times N, M) \times D^r(M \times N, N) \rightarrow C^{d-1}(\widetilde{T}(M \times N), (M \times N)^d) \\ v'(f, g) & = v(f, g) \circ \tau_{M \times N} \end{aligned}$$

y nuevamente aplicar convenientemente el Teorema de Transversalidad Paramétrica). La intersección de todos los conjuntos residuales de  $(f, g)$  para cada  $I, I'$  es un subconjunto residual  $\overline{D}^r \subset D^r$ .

Para  $(f, g) \in \overline{D}^r$ , tal que  $\widetilde{T}_{I,I'}$  es una subvariedad se define

$$\begin{aligned} \Phi_{\alpha, I, I'} & : M \times N \rightarrow \mathbb{R}^k \\ \Phi_{\alpha, I, I'}(x, y) & = (\alpha(x_{j'_1}), \dots, \alpha(x_{j'_k})) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \rho & : C^r(M, \mathbb{R}) \rightarrow C^1(\widetilde{T}_{I,I'}, T\mathbb{R}^k) \\ \rho(\alpha) & = \widetilde{T}\Phi_{\alpha, I, I'} \end{aligned}$$

con  $k$  el número de elementos del complementario de  $I'$  en  $J_I$ . La aplicación evaluación  $ev_\rho$  es transversal a la sección cero de  $T\mathbb{R}^k$  y aplicando el Teorema de Transversalidad

Paramétrica, esta transversalidad se verifica para un subconjunto abierto y denso de  $C^r(M, \mathbb{R})$ . Pero esta aplicación evaluación no puede intersecar dicha sección cero (basta contar dimensiones). Luego para este subconjunto abierto y denso de aplicaciones  $\alpha$ , la aplicación embedding es una inmersión. Tomando la intersección de estos subconjuntos abiertos y densos de  $C^r(M, \mathbb{R})$  para todo  $I$  e  $I'$ , se consigue el conjunto residual de  $C^r(M, \mathbb{R})$ , que denotamos por  $\overline{D}_{f,g}$ , de modo que si  $\alpha \in \overline{D}_{f,g}$  la aplicación  $\Phi_{f,g,\alpha}$  es una inmersión sobre  $(M \times N) - P_{f,g}^d$ .

Resumiendo, se tiene ahora un conjunto

$$E_1^r = \left\{ (f, g, \alpha) : (f, g) \in \overline{D}^r, \alpha \in \overline{D}_{f,g} \cap D_{f,g} \right\}.$$

tal que si  $(f, g, \alpha)$  pertenece a este conjunto  $\Phi_{f,g,\alpha}$  es una inmersión.

Este conjunto es abierto y denso en  $D^r(M \times N, M) \times \overline{D}^r(M \times N, N) \times C^r(M, \mathbb{R})$ .

ii) Para obtener un subconjunto abierto y denso de  $E^r$  tal que  $\Phi_{f,g,\alpha}$  sea inyectiva sobre  $(M \times N) - P_{f,g}^{2d}$ , se considera la aplicación

$$\begin{aligned} \sigma & : E^r \rightarrow C^1((M \times N) \times (M \times N) \setminus \Delta, \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d) \\ ev_\sigma & : E^r \times (M \times N) \times (M \times N) \setminus \Delta \rightarrow \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \\ ev_\sigma(f, g, \alpha, (x, y), (x', y')) & = (\Phi_{f,g,\alpha}(x, y), \Phi_{f,g,\alpha}(x', y')) \end{aligned}$$

que es transversal a la subvariedad  $\hat{\Delta} = \{(z, z) : z \in \mathbb{R}^d\} \subset \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$ . Para probarlo basta nuevamente seguir a Stark y aplicar el Teorema de Transversalidad Paramétrica y así obtener un subconjunto de  $(f, g, \alpha) \in E^r$  abierto y denso para el que se cumple la transversalidad de  $ev_\sigma$  a la variedad  $\hat{\Delta}$ . Contando dimensiones se tiene que esta transversalidad se cumple siempre que  $ev_\sigma(f, g, \alpha(x, y), (x', y')) \notin \hat{\Delta}$ . Es decir que para dicho conjunto residual la aplicación embedding es inyectiva. Se denota como  $E_2^r$  dicho conjunto residual.

Luego, el conjunto  $\overline{E}^r = E_1^r \cap E_2^r$  es abierto y denso en  $D^r(M \times N, M) \times D^r(M \times N, N) \times C^r(M, \mathbb{R})$  y para los elementos de este conjunto se cumple que la aplicación  $\Phi_{f,g,\alpha}$  es un embedding de  $M \times N$ .

□

**Nota 2.22.** El conjunto  $E^r$  es abierto y denso en  $D^r(M \times N, M) \times D^r(M \times N, N) \times C^r(M, \mathbb{R})$  [60] tal que  $\Phi_{f,g,\alpha}$  es una inmersión e inyectiva sobre los puntos periódicos  $P_{f,g}^d$ ,

trabajando con este conjunto residual y construyendo la aplicación:

$$\begin{aligned} \rho & : E^r \rightarrow C^1(\tilde{T}(M \times N), T\mathbb{R}^d) \\ ev_\rho & : E^r \times \tilde{T}(M \times N) \rightarrow T\mathbb{R}^d \\ ev_\rho(f, g, \alpha, (u, v)) & = T\Phi_{f,g,\alpha}(u, v) \end{aligned} \tag{2.10}$$

tambien podríamos conseguir el subconjunto abierto y denso de  $E^r$  donde  $\Phi_{f,g,\alpha}$  sea una inmersión sobre los puntos que no sean periódicos de periodo menor que  $d$ , que sería otra manera de resolver la parte i) del paso 2 de la demostración del Teorema 2.21.

## 2.5. Aspectos prácticos: Elección de los parámetros de la reconstrucción

Construir una serie vectorial utilizando retardos de una serie unidimensional es un procedimiento bastante habitual y se realiza con el objetivo de obtener información del sistema dinámico<sup>14</sup> generador de los datos.

Esta metodología de construcción se denomina *método del retardo* ( $\tau$ ) puesto que las úplas de la serie vectorial son valores de la serie unidimensional retardada. Aunque los Teoremas de Takens, Stark y la nueva versión demostrada utilizan como retardo  $\tau = 1$ , estos teoremas también son válidos cuando el retardo,  $\tau$ , se elige mayor que 1 (se estaría considerando el sistema dinámico donde las funciones que lo determinan no serían  $f$  o bien  $(f, g)$  sino iteradas de las mismas de orden  $\tau$ ). Teóricamente las úplas de la serie vectorial se pueden construir utilizando cualquier retardo, según interese.

### Elección del retardo $\tau$

Aunque la elección del retardo  $\tau$  no importa, desde un punto de vista práctico sí es importante. Si se elige demasiado pequeño, los elementos de la  $m$ -úpla serán muy parecidos y no aportarán nueva información al proceso de reconstrucción, mientras que si se elige un retardo demasiado grande no se podrá establecer la relación existente entre las variables retardadas, puesto que estarán incorreladas y la trayectoria reconstruida no representaría la dinámica de la correspondiente órbita del sistema dinámico considerado.

Aunque no existe un método riguroso y definitivo para determinar el valor óptimo del retardo, los dos métodos más utilizados son:

---

<sup>14</sup>En sentido general, no necesariamente determinista



- Usar como retardo el primer cero de la función de autocorrelación,

$$C(\tau) = \sum_t (x_t - \bar{x})(x_{t+\tau} - \bar{x}),$$

con lo que se pretende conseguir que los elementos de la serie que constituyen la  $m$ -úpla no presenten dependencia lineal.

- Utilizar el primer mínimo local de la función media de información mutua (AMI, *averaged mutual information*) [25], que mide cualquier correlación entre los datos de la serie temporal,

$$I(\tau) = \sum_{t,t+\tau} P(\alpha_t, \alpha_{t+\tau}) \log \left[ \frac{P(\alpha_t, \alpha_{t+\tau})}{P(\alpha_t)P(\alpha_{t+\tau})} \right],$$

con  $P$  la correspondiente distribución de probabilidad de las medidas  $\alpha_t$ . Se busca que los valores  $\alpha_t$  y  $\alpha_{t+\tau}$  sean suficientemente independientes, pero no tan independientes como para que no haya ninguna relación entre ellos.

Esta función se considera una generalización no lineal de la función de autocorrelación de una serie  $\alpha_t$ .

Realmente, al elegir el retardo,  $\tau$ , como el primer cero de la función de autocorrelación o bien el primer mínimo de la función de información mutua, lo que se pretende, como dicen Franser y Swinney [25], no es que los retardos de los elementos de la serie vectorial sean independientes sino que no proporcionen información redundante.

### Elección de la mínima dimensión *embedding*

A pesar de que los Teoremas de Takens y otros aseguran la construcción de un espacio de fases difeomorfo (una órbita) al espacio de fases original (una órbita) para una dimensión *embedding*  $d$  suficientemente grande, la elección de dicha dimensión debe de realizarse con cuidado cuando se dispone de una serie temporal finita cuyos datos, además, pueden tener ruido.

Para determinar una dimensión *embedding* adecuada pueden utilizarse distintos métodos, de entre los que se destacan:

1. El cálculo de algún invariante del conjunto atractor (por ejemplo, la dimensión de correlación) para distintas dimensiones *embedding*, eligiendo aquella a partir de la cual el valor del invariante es independiente de la dimensión considerada.

2. El método de los falsos vecinos (FNN, *false nearest neighbors*, [35]) está basado en el hecho de que si la dimensión embedding elegida es demasiado pequeña para reconstruir el verdadero atractor, habrá puntos que, estando cerca en ese espacio reconstruido (falsos vecinos), estarán lejos en el espacio original, por lo que se tiene que ir aumentando la dimensión embedding hasta que los falsos vecinos desaparezcan y entonces se tendrá la dimensión embedding adecuada.

Básicamente este método consiste en fijada una dimensión embedding  $d$ , construir las  $d$ -historias, de modo que si  $z_t(d) = (\alpha_t, \dots, \alpha_{t+(d-1)\tau})$  es una de ellas, se busca la  $d$ -historia más cercana, es decir su vecino más cercano,  $z_{n(t,d)}(d)$ , donde  $n(t,d)$  denota cual es el vecino más cercano a la  $d$ -historia  $t$ , cumpliendo que:

$$\|z_t(d) - z_{n(t,d)}(d)\| = \min \{\|z_t(d) - z_s(d)\| : s \neq t\}.$$

Si  $d$  no es una dimensión embedding apropiada, estos dos puntos, considerados en el espacio de dimensión correcta (y, por tanto, mayor) podrían no estar ya tan cerca, en cuyo caso se denominarán falsos vecinos. Es decir,  $z_{n(t,d)}(d)$  es un falso vecino de  $z_t(d)$ , cuando al construir las  $d+1$ -historias, la correspondiente a la  $d$ -historia  $z_{n(t,d)}(d)$ ,  $z_{n(t,d)}(d+1) = (z_{n(t,d)}(d), \alpha_{n(t,d)+d\tau})$  y comparar las distancias  $\|z_t(d) - z_{n(t,d)}(d)\|$  y  $\|z_t(d+1) - z_{n(t,d)}(d+1)\|$  se verifica que:

$$\frac{|\alpha_{t+d\tau} - \alpha_{n(t,d)+d\tau}|}{\|z_t(d) - z_{n(t,d)}(d)\|} > R_{tol},$$

donde  $R_{tol}$  es un valor umbral que hay que fijar a priori. La dimensión  $d$  será la mínima dimensión embedding cuando el porcentaje de falsos vecinos en el espacio de fases  $d$ -dimensional sea nulo o suficientemente próximo a cero. Como la serie temporal es finita y puede estar contaminada de ruido, el criterio anterior puede ser insuficiente por lo que se añade un segundo criterio dado por

$$\frac{\|z_t(d+1) - z_{n(t,d)}(d+1)\|}{R_A} > A_{tol},$$

con  $R_A$  una medida del tamaño del atractor reconstruido, estimada por

$$R_A = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{t=1}^N (\alpha_t - \bar{\alpha})^2}.$$

La bondad del algoritmo dependerá, por tanto, de la elección de los parámetros  $R_{tol}$  y  $A_{tol}$ .

3. En la aplicación del método de los falsos vecinos intervienen parámetros que tienen que fijarse a priori, Cao [17] desarrolla posteriormente otro método basado en la misma idea pero en el que no son necesarios parámetros a los que asignar valores subjetivos.

Este método consiste en, considerada la dimensión embedding  $d$ , calcular la media de los cocientes de las distancias entre cualquier punto y su vecino más cercano en  $\mathbb{R}^{d+1}$ , es decir en la dimensión embedding  $d + 1$ ,

$$E(d) = \frac{1}{N - d\tau} \sum_{t=1+d\tau}^N \frac{\|z_t(d+1) - z_{n(t,d)}(d+1)\|}{\|z_t(d) - z_{n(t,d)}(d)\|},$$

que solo depende de  $d$  y del retardo  $\tau$ , y se estudia el cociente

$$E1(d) = \frac{E(d+1)}{E(d)}.$$

Si la serie procede de un sistema determinista, habrá un claro valor de  $d$  a partir del cual  $E1(d)$  se estabiliza en torno a 1, que se toma como la mínima dimensión embedding buscada. Sin embargo, si la serie no es determinista,  $E1(d)$  crecerá suave y lentamente hacia 1.

## 2.6. Conclusiones

En este capítulo se demuestran el Teorema de Whitney y su versión prevalente utilizando herramientas de Topología Diferencial para lo que tenemos que demostrar una serie de lemas previos. También se hace una variante del teorema de Takens y se demuestra procediendo de manera análoga a como Stark demuestra la variante de Takens para sistema dinámicos autónomos (estos resultados se han publicado en [16], [4] y [5]).

Aunque en [56] hay una demostración de la versión prevalente del teorema de Takens, nos planteamos hacer una nueva demostración haciendo uso de las herramientas que se muestran en este capítulo.

---

## Capítulo 3

# Exponentes de Lyapunov

---

Los exponentes de Lyapunov de una órbita de un sistema dinámico son una medida cuantitativa que informa sobre la estabilidad de la misma. Una órbita tiene un número de exponentes de Lyapunov igual a la dimensión de su espacio de estados y estos valores pueden ordenarse, de modo que basta el mayor exponente de Lyapunov de la órbita para saber si ésta es estable o inestable en sentido Lyapunov. Frente a un concepto de carácter topológico como es la estabilidad de una órbita, sus exponentes de Lyapunov tienen una naturaleza cuantitativa y pueden calcularse a partir de las ecuaciones del sistema dinámico generador de la órbita, si se conocen, o bien se pueden estimar a partir de datos obtenidos del sistema dinámico desconocido [68].

En la práctica se asocia inestabilidad a una órbita con un mayor exponente de Lyapunov de la misma positivo, mientras que si el mayor exponente de Lyapunov es negativo se dice que la órbita es estable. Sin embargo, como se verá en los ejemplos de las Secciones 3.3 y 3.4, esta interpretación no es del todo cierta si no se exige alguna condición adicional al sistema dinámico.

Demir y Koçak, en [19], construyen dos sistemas dinámicos definidos, uno de ellos en el intervalo  $[0, 1]$ , que tiene una órbita estable con un exponente de Lyapunov positivo y otro definido en  $[0, 1)$ , que tiene una órbita inestable con un exponente de Lyapunov negativo. En ambos casos la función que define el sistema dinámico no es diferenciable en

un conjunto infinito numerable de puntos. En este capítulo se dan dos sistemas dinámicos, que al igual que los dados en [19], uno de ellos tiene una órbita estable con exponente de Lyapunov positivo y el otro una órbita inestable con un exponente de Lyapunov negativo, pero a diferencia de estos sistemas los que damos nosotros se definen a través de una función diferenciable en el intervalo  $[0, 1)$ . Continuando con la misma idea, en la Sección 3.4 se construyen dos sistemas dinámicos bidimensionales tal que cada uno de ellos tiene una órbita con el mismo comportamiento paradójico que las órbitas de los sistemas de la Sección 3.3 (estos ejemplos están publicados en [7]).

En la Sección 3.2 se prueba un resultado para un sistema dinámico  $(I, f)$  con  $I = [0, 1]$  y  $f \in C^1(I)$ , que completa el obtenido por Koçak y Palmer [36] en relación al concepto de exponente de Lyapunov fuerte, definido por estos autores para un sistema dinámico discreto unidimensional. El capítulo finaliza extendiendo la definición de exponente de Lyapunov fuerte para un sistema dinámico discreto unidimensional no autónomo y demostrando un resultado para un sistema dinámico de este tipo (resultado publicado en [6]).

Uno de los métodos más utilizado para estimar el mayor exponente de Lyapunov de una órbita, por ejemplo la obtenida embebiendo una serie temporal, es el algoritmo de Wolf [68], del que se hace una reducida descripción en la Sección 3.6.

En este capítulo cuando se haga referencia a estabilidad o inestabilidad en sentido de Lyapunov se utilizarán los términos de estabilidad o inestabilidad.

### 3.1. Definiciones

Dado un sistema dinámico  $(X, f)$  donde  $X$  es un espacio métrico y  $f : X \rightarrow X$  una aplicación continua, la *órbita o trayectoria hacia adelante* de condición inicial  $x_0 \in X$  es la sucesión  $(f^n(x_0))_{n=0}^\infty = (x_n)_{n=0}^\infty$  donde  $f^n$  denota la iteración  $n$ -ésima de  $f$ . Dos trayectorias con condiciones iniciales próximas pueden separarse o aproximarse en diferentes direcciones cuando  $n$  crece. Los exponentes de Lyapunov proporcionan una medida de lo alejadas o próximas que están estas trayectorias en las distintas direcciones del espacio de estados. Sean el subconjunto  $X \subset \mathbb{R}^m$ ,  $d$  una métrica definida en  $\mathbb{R}^m$  y  $\{x_n\}_{n=0}^\infty$  y  $\{x'_n\}_{n=0}^\infty$  dos trayectorias de condiciones iniciales  $x_0$  y  $x'_0$  con  $\delta x_n = x'_n - x_n$ . Si  $f$  tiene derivadas parciales continuas en cada  $x_i$ ,  $Df(x)$  es la diferencial de  $f$  en  $x$  (jacobiana), donde el elemento  $(i, j)$  de esta matriz es  $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}$  y  $f_i$  y  $\bar{x}_j$  son las componentes de  $f$  y  $x$  en coordenadas

locales, de modo que:

$$Df^n(x_0) = Df(x_{n-1})Df(x_{n-2})\dots Df(x_1)Df(x_0).$$

Como  $\delta x_n$  representa la separación de estas órbitas después de  $n$  iteraciones de  $f$ , ésta puede ser aproximada linealmente por:

$$\delta x_n \simeq Df^n(x_0)\delta x_0 = \prod_{i=0}^{n-1} Df(x_i)\delta x_0$$

La matriz  $(Df^n(x_0))^t(Df^n(x_0))$  tiene  $m$  valores propios positivos dados por  $\mu_i(n, x_0)$  donde  $i = 1, 2, \dots, m$ , tal que se pueden ordenar como:  $\mu_1(n, x_0) \geq \mu_2(n, x_0) \geq \dots \geq \mu_m(n, x_0)$ .

**Definición 3.1.** *El exponente de Lyapunov  $i$ -ésimo de la órbita de condición inicial  $x_0$  se define como*

$$\lambda_i(x_0) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2n} \log(|\mu_i(n, x_0)|)$$

si este límite existe.

Oseledet, en [51], establece las condiciones de existencia de este límite.

**Definición 3.2.** *La órbita hacia delante  $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$  es sensible a las condiciones iniciales o es inestable en sentido de Lyapunov si existe un  $\epsilon > 0$  tal que para cualquier  $\delta > 0$  existen  $N \geq 0$  e  $y$ , cumpliendo que  $d(x_0, y) < \delta$ , pero  $d(f^N(y), f^N(x_0)) \geq \epsilon$ .*

**Definición 3.3.** *La órbita o trayectoria hacia adelante  $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$  no es sensible a las condiciones iniciales o es estable en sentido de Lyapunov si para cualquier  $\epsilon > 0$  existe  $\delta > 0$  tal que si  $d(x_0, y) < \delta$  entonces  $d(f^n(y), f^n(x_0)) < \epsilon$ , para todo  $n \geq 0$ .*

Cuando  $m = 1$  el exponente de Lyapunov  $\lambda(x_0)$  de una órbita  $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$  es el número

$$\lambda(x_0) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \log(|f'(x_j)|) \tag{3.1}$$

si este límite existe.

A continuación se da la definición de exponente de Lyapunov en sentido fuerte fue dada por Kocak y Palmer [36]:

**Definición 3.4.** *El exponente fuerte de Lyapunov  $\Lambda(x_0)$  de una órbita hacia adelante  $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$  es*

$$\Lambda(x_0) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{j=k}^{k+n-1} \log(|f'(x_j)|)$$

si este límite existe uniformemente con respecto a  $k \geq 0$

### 3.2. Resultado en dimensión uno

En [36], Koçak and Palmer probaron el siguiente resultado:

**Teorema 3.5.** *Sea  $f \in C^1(I)$  con  $I = [0, 1]$ . Si  $\Lambda(x_0) > 0$  para algún  $x_0$ , entonces la órbita de condición inicial  $x_0$ ,  $Orb_f(x_0)$ , es inestable.*

Este teorema nos dice que para que una órbita del sistema dinámico  $(I, f)$ , con  $I = [0, 1]$ , de condición inicial  $x_0$ , con  $f \in C^1(I)$ , sea inestable no basta que su exponente de Lyapunov sea positivo si  $f \in C^1(I)$ . Es necesario que el sistema dinámico verifique alguna condición adicional. En el caso de existir el exponente fuerte de Lyapunov de la órbita, si fuese positivo, entonces la órbita efectivamente sería inestable. A continuación, nosotros demostramos un resultado análogo en relación a la estabilidad de una órbita de un sistema unidimensional.

**Teorema 3.6.** *Sea  $f \in C^1(I)$ . Si  $\Lambda(x_0) < 0$  para  $x_0$ , entonces  $Orb_f(x_0)$  es estable.*

*Demostración.* Esta demostración esta inspirada en [36].

Escribimos  $a_n = f'(x_n)$  (si  $x_i = 0$  o  $x_i = 1$ , para algún  $i$ , se utilizará la derivada lateral) y sean  $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$  y  $\{y_n\}_{n=0}^{\infty}$  las órbitas  $Orb_f(x_0)$  y  $Orb_f(y_0)$  con  $x_0 \neq y_0$ . Tomamos  $w_n = y_n - x_n$ .

Sea  $w_{n+1} = a_n w_n + g_n(w_n)$  donde

$$g_n(w) = f(x_n + w) - f(x_n) - f'(x_n)w$$

con  $|g_n(w)| \leq \omega(|w|)|w|$ , donde  $\omega(\cdot)$  denota el módulo de continuidad de la derivada.

Entonces

$$g_n(w_n) = b_n w_n$$

donde

$$b_n = \begin{cases} \frac{g_n(w_n)}{w_n} & \text{if } w_n \neq 0 \\ 0 & \text{if } w_n = 0 \end{cases}$$

con

$$|b_n| \leq \omega(|w_n|)$$

y  $w_n$  puede ser considerada como la solución de la ecuación en diferencias lineal

$$w_{n+1} = (a_n + b_n)w_n$$

Usando argumentos de [36], page 386, podemos probar que  $\inf_{n \geq 0} |f'(x_n)| = A \neq 0$  porque si

$$\frac{3\Lambda(x_0)}{2} < \frac{1}{n+1} \sum_{k=i}^{i+n} \log |f'(x_k)| < \frac{\Lambda(x_0)}{2}$$

para  $n \geq N$ . Se toma  $n = N$ ,

$$e^{(N+1)\frac{3\Lambda(x_0)}{2}} < |f'(x_i) \cdots f'(x_{i+N})| < e^{(N+1)\frac{\Lambda(x_0)}{2}} \quad (3.2)$$

entonces si se denota por

$$C = \sup_{0 \leq x \leq 1} |f'(x)|$$

teniendo en cuenta la desigualdad de la izquierda de (3.2) se tiene que

$$|f'(x_i)| > C^{-N} e^{(N+1)\frac{3\Lambda(x_0)}{2}}$$

para todo  $i$ .

Supongamos que  $Orb_f(x_0)$  es sensible a las condiciones iniciales, esto es, existe  $\epsilon > 0$  tal que para todo  $\delta > 0$  existen  $y$  cumpliendo que  $|y - x_0| < \delta$  y  $N \geq 0$  tal que

$$|w_N| = |f^N(y) - f^N(x_0)| \geq \epsilon. \quad (3.3)$$

Sea  $N$  el primer índice tal que se cumple (3.3).

Se elige  $\epsilon > 0$  tal que:

- i)  $\Lambda(x_0) + \epsilon < \frac{\Lambda(x_0)}{2} < 0$ .
- ii)  $\omega(\epsilon) < A$ ,  $\frac{\omega(\epsilon)}{A} \leq \left| \frac{\Lambda(x_0)}{2} \right|$  y suficientemente pequeño.

Para este valor de  $\epsilon$  existe  $M > 0$  tal que si  $n \geq M$  es cierto que

$$\Lambda(x_0) - \epsilon < \frac{1}{n} \sum_{k=i+1}^{i+n} \log |a_k| < \Lambda(x_0) + \epsilon \quad (3.4)$$

Consideramos dos posibilidades:

1. Si  $N > M$ , como

$$|w_N| = |a_{N-1} + b_{N-1}| \cdots |a_{N-M} + b_{N-M}| |w_{N-M}|$$



con  $|w_{N-M}| < \epsilon$ ,  $|w_N| \geq \epsilon$ , entonces

$$|a_{N-1} + b_{N-1}| \dots |a_{N-M} + b_{N-M}| > 1 \Rightarrow \frac{1}{M} \sum_{j=1}^M \log |a_{N-j} + b_{N-j}| > 0 \quad (3.5)$$

Sabiendo que  $\log(1+x) \leq x$  se tiene que

$$\begin{aligned} \frac{1}{M} \sum_{j=1}^M \log |a_{N-j} + b_{N-j}| - \frac{1}{M} \sum_{j=1}^M \log |a_{N-j}| &= \frac{1}{M} \sum_{j=1}^M \log \left| 1 + \frac{b_{N-j}}{a_{N-j}} \right| \leq \\ &\leq \frac{1}{M} \sum_{j=1}^M \left| \frac{b_{N-j}}{a_{N-j}} \right| \leq \frac{\omega(\epsilon)}{A}. \end{aligned}$$

Entonces por (3.4) and (ii)

$$\frac{1}{M} \sum_{j=1}^M \log |a_{N-j} + b_{N-j}| \leq \frac{1}{M} \sum_{j=1}^M \log |a_{N-j}| + \frac{\omega(\epsilon)}{A} < 0.$$

Esto es una contradicción con (3.5).

2. Si  $N \leq M$  tenemos que

$$|w_N| = |a_1 + b_1| \dots |a_{N-1} + b_{N-1}| |w_1|$$

y por (3.3),  $\sum_{k=1}^{N-1} \log |a_k + b_k| > 0$ .

Como

$$\frac{1}{N-1} \sum_{k=1}^{N-1} \log |a_k + b_k| - \frac{1}{N-1} \sum_{k=1}^{N-1} \log |a_k| = \frac{1}{N-1} \sum_{k=1}^{N-1} \log \left| 1 + \frac{b_k}{a_k} \right| \leq \frac{\omega(\epsilon)}{A}$$

y podemos elegir  $\epsilon$  suficientemente pequeño tal que

$$T = \sum_{k=1}^{N-1} \log |a_k| > 0 \quad (3.6)$$

Ahora, si consideramos  $n$  tal que  $n \geq M$ , es verdad que

$$\Lambda(x_0) - \epsilon < \frac{1}{N+n-1} \left[ \sum_{k=1}^{N-1} \log |a_k| + \sum_{k=N}^{N+n-1} \log |a_k| \right] < \Lambda(x_0) + \epsilon \quad (3.7)$$

y

$$\Lambda(x_0) - \epsilon < \frac{1}{n} \left[ \sum_{k=N}^{N+n-1} \log |a_k| \right] < \Lambda(x_0) + \epsilon \quad (3.8)$$

Tomando la diferencia (3.7)–(3.8) se tiene

$$-2\epsilon < \frac{1}{N+n-1} \left[ \sum_{k=1}^{N-1} \log |a_k| + \sum_{k=N}^{N+n-1} \log |a_k| \right] - \frac{1}{n} \left[ \sum_{k=N}^{N+n-1} \log |a_k| \right] < 2\epsilon$$

y entonces

$$\frac{1}{N-1} \sum_{k=1}^{N-1} \log |a_k| = \frac{1}{n} \sum_{k=N}^{N+n-1} \log |a_k|$$

que es una contradicción puesto que

$$\frac{1}{N-1} \sum_{k=1}^{N-1} \log |a_k|$$

es positivo por (3.6) y

$$\frac{1}{n} \sum_{k=N}^{N+n-1} \log |a_k|$$

es negativo por (3.8).

□

### 3.3. Dos ejemplos de dimensión uno

Vamos a construir dos sistemas dinámicos discretos definidos utilizando funciones que son una variante de las funciones lineales a trozos que definen los sistemas dinámicos discretos dados en [19]. Las funciones de nuestros sistemas dinámicos son cúbicas a trozos y  $C^1([0, 1])$ . Uno de estos sistemas dinámicos tiene una órbita con un exponente fuerte de Lyapunov negativo, pero la órbita es inestable, y el otro sistema dinámico tiene una órbita con un exponente fuerte de Lyapunov positivo, pero es estable.

Para construir los sistemas dinámicos que nos interesan es preciso que se puedan calcular los parámetros  $a, b, c$  y  $d$  de una función cúbica  $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$  que verifique las siguientes condiciones:

$$f(x_1) = y_1, \quad f(x_2) = y_2, \quad f'(x_1) = t_1 \quad \text{y} \quad f'(x_2) = t_2,$$

conocidos los valores  $x_1, x_2, y_1, y_2, t_1, t_2$  cuando  $x_1 \neq x_2$ . Obtener el valor de estos parámetros es cierto puesto que

$$\begin{vmatrix} x_1^3 & x_1^2 & x_1 & 1 \\ x_2^3 & x_2^2 & x_2 & 1 \\ 3x_1^2 & 2x_1 & 1 & 0 \\ 3x_2^2 & 2x_2 & 1 & 0 \end{vmatrix} \neq 0$$

entonces:

$$a = \frac{2(y_2 - y_1) - (t_1 + t_2)(x_2 - x_1)}{(x_1 - x_2)^3}$$

$$b = \frac{t_2 - t_1}{2(x_2 - x_1)} - \frac{3}{2}a(x_2 + x_1)$$

$$c = \frac{t_1x_2 - t_2x_1}{x_2 - x_1} + 3ax_1x_2$$

$$d = y_1 + \frac{a}{2}x_1^3 - \frac{3}{2}ax_1^2x_2 + \frac{1}{2(x_2 - x_1)}[(t_2 + t_1)x_1^2 - 2t_1x_1x_2]$$

**Ejemplo 1.** *En este ejemplo se considera el sistema dinámico  $(I = [0, 1], f)$  con  $f$  cúbica a trozos, continua en  $I$  y  $C^1$  en  $[0, 1]$ . El sistema tiene una órbita, la de condición inicial  $x_0 = 0$ ,  $Orb_f(0)$ , que es estable y tiene un exponente fuerte de Lyapunov positivo.*

Vamos a proceder a construir la función  $f$  en varios pasos:

1. Sean los puntos del intervalo  $I$ :

$$a_n = 1 - 2^{-n} - 10^{-n-1}, \quad c_n = 1 - 2^{-n} \quad \text{y} \quad b_n = 1 - 2^{-n} + 10^{-n-1}$$

para  $n = 0, 1, 2, \dots$  que verifican:

$$0 = c_0 < b_0 < a_1 \quad a_n < c_n < b_n < a_{n+1} \quad n \geq 1$$

Se definen sus imágenes por  $f$ :

$$f(a_n) = 1 - 2^{-n-1} - 2 \cdot 10^{-n-1}$$

$$f(c_n) = 1 - 2^{-n-1}$$

$$f(b_n) = 1 - 2^{-n-1} + 2 \cdot 10^{-n-1}$$

$$f'(a_n) = f'(b_n) = 0 \quad \text{y} \quad f'(c_n) = 2$$

2. Se definen los distintos trozos de  $f$ :

Denotamos por  $f_1(x)$  los trozos de  $f$  que unen los puntos  $(a_n, f(a_n))$  y  $(c_n, f(c_n))$  cumpliendo que  $f'(a_n) = 0$  y  $f'(c_n) = 2$ . Los coeficientes de  $f_1$  son

$$a = -2 \cdot 10^{2n+2}$$

$$b = -2 \cdot 10^{n+1} + 6 \cdot 10^{2n+2}(1 - 2^{-n})$$

$$c = 2 + 4 \cdot 10^{n+1}(1 - 2^{-n}) - 6 \cdot 10^{2n+2}(1 - 2^{-n})^2$$

$$d = 1 - 2^{-n-1} - 2 \cdot 10^{-n-1} + 2 \cdot 10^{n+1}(1 + 10^{n+1}(1 - 2^{-n}))(1 - 2^{-n} - 10^{-n-1})^2$$

Los trozos  $f_2(x)$  que unen los puntos  $(c_n, f(c_n))$ ,  $(b_n, f(b_n))$  que cumplen  $f'(c_n) = 2$  y  $f'(b_n) = 0$  tiene los siguientes coeficientes

$$a = -2 \cdot 10^{2n+2}$$

$$b = 2 \cdot 10^{n+1}(1 + 3 \cdot 10^{n+1}(1 - 2^{-n}))$$

$$c = 2 - 4 \cdot 10^{n+1}(1 - 2^{-n-1}) - 6 \cdot 10^{2n+2}(1 - 2^{-n})^2$$

$$d = -1 + 3 \cdot 2^{-n-1} + 2(1 - 2^{-n})^2 10^{n+1}(1 + (1 - 2^{-n})10^{n+1})$$

Los coeficientes de los trozos  $f_3(x)$  que unen  $(b_n, f(b_n))$ ,  $(a_{n+1}, f(a_{n+1}))$  con  $f'(b_n) = 0$  y  $f'(a_{n+1}) = 0$  son

$$a = \frac{(10^{n+2} - 2^{n+3} \cdot 11)2^{2(n+1)} \cdot 10^{2(n+2)}}{(-10^{n+2} + 11 \cdot 2^{n+1})^3}$$

$$b = -\frac{3}{2}a(2 - 3 \cdot 2^{-n-1} + 9 \cdot 10^{-n-2})$$

$$c = 3a(1 - 2^{-n} + 10^{-n-1})(1 - 2^{-n-1} - 10^{-n-2})$$

$$d = 1 - 2^{-n-1} + 2 \cdot 10^{-n-1} + \frac{a}{2}(1 - 2^{-n} + 10^{-n-1})^2(-2 + 2^{-n-1} + 13 \cdot 10^{-n-2})$$

De este modo se construye la función cúbica a trozos  $f$ :

$$f(x) = \begin{cases} f_1(x) & \text{si } a_n \leq x \leq c_n \text{ y } x \in I \\ f_2(x) & \text{si } c_n \leq x \leq b_n \\ f_3(x) & \text{si } b_n \leq x \leq a_{n+1} \\ 1 & \text{si } x = 1 \end{cases}$$

Por construcción la función  $f$  es continua en  $I$  y  $C^1[0,1)$  y la órbita de condición inicial  $x_0 = 0$  es

$$\{0, 1/2, 3/4, \dots, 1 - 2^{-n} \dots\}$$

La derivada en cada punto de esta órbita vale 2 (tal como se ha construido  $f$ ) y por tanto, el exponente fuerte de Lyapunov es  $\lambda(0) = \log 2 > 0$ , pero esta órbita es estable, como vamos a ver a continuación.

Para ello, sea  $\epsilon > 0$  y sea  $k$  tal que  $1/2^k < \epsilon$ . Como  $f$  es creciente y  $f^k(0) = 1 - \frac{1}{2^k}$  se cumple que  $|f^n(x) - f^n(0)| \leq \frac{1}{2^n} < \epsilon$  para  $n \geq k$  y  $0 < x < \bar{\delta}$  luego queda por probar ésta última desigualdad para  $n < k$ .

Como cada  $f^j$  es una función continua, se cumple que dado  $\epsilon > 0$  existe  $\delta_j$  tal que si  $0 < x < \delta_j$ , entonces  $|f^j(x) - f^j(0)| < \epsilon$  cuando  $j = 1, \dots, n - 1$ . Luego si  $\delta = \min \{ \delta_1, \dots, \delta_{n-1}, \bar{\delta} \}$  y  $0 < x < \delta$  se cumple que  $|f^k(x) - f^k(0)| < \epsilon$  para todo  $k > 0$

**Nota 3.7.** Este ejemplo no contradice el Teorema 1 de [36] porque nuestra función no es  $C^1$  en el intervalo compacto  $I$ , es  $C^1$  en  $[0,1)$ .

**Ejemplo 2.** De modo análogo al ejemplo anterior, construimos ahora un sistema dinámico  $([0,1), g)$  con  $g$  una función cúbica a trozos en el intervalo  $[0,1)$  y  $C^1[0,1)$  cumpliendo que la órbita  $Orb_g(0)$  tiene un exponente de Lyapunov fuerte negativo y es inestable.

1. Se distinguen los siguientes puntos del intervalo  $[0,1)$ :

$$a_n = 1 - 2^{-n} - 4^{-n-1}, \quad b_n = 1 - 2^{-n}, \quad c_n = 1 - 2^{-n} + 4^{-n-1} \quad \text{y} \quad d_n = 1 - 2^{-n} + 2 \cdot 4^{-n-1}$$

cumpliendo

$$0 = b_0 < c_0 < d_0 = b_1 < c_1 < d_1 < a_2 \quad a_n < b_n < c_n < d_n < a_{n+1} \quad n \geq 2$$

de modo que la función  $g$  verifica que:

$$g(a_n) = 1 - 2^{-n-1} - (1/2) \cdot 4^{-n-1}, g(b_n) = 1 - 2^{-n-1}$$

$$g(c_n) = 1 - 2^{-n-1} + (1/2) \cdot 4^{-n-1}, g(d_n) = 0$$

$$g'(a_n) = g'(c_n) = g'(d_n) = 0 \text{ y } g'(b_n) = 1/2$$

2. Luego los coeficientes de los trozos de cúbica  $g_1(x)$ , que unen  $(a_n, g(a_n))$  y  $(b_n, g(b_n))$  y que  $g'(a_n) = 0$  y  $g'(b_n) = 1/2$  son

$$a = -2 \cdot 4^{2n+1}$$

$$b = -2 \cdot 4^n + 6 \cdot 4^{2n+1}(1 - 2^{-n})$$

$$c = 4^{n+1}(1 - 2^{-n}) - 6 \cdot 4^{2n+1}(1 - 2^{-n})^2 + 1/2$$

$$d = 1 - 2^{-n-1} - 2 \cdot 4^{-n-2} + (1 - 2^{-n} - 4^{-n-1})^2(2 \cdot 4^{2n+1}(1 - 2^{-n}) + 2 \cdot 4^n)$$

Los trozos  $g_2(x)$  que unen  $(b_n, g(b_n))$  con  $(c_n, g(c_n))$  cumpliendo que  $g'(b_n) = 1/2$  y  $g'(c_n) = 0$  tienen los siguientes coeficientes

$$a = -2 \cdot 4^{2n+1}$$

$$b = 2 \cdot 4^n + 6 \cdot 4^{2n+1}(1 - 2^{-n})$$

$$c = (1/2) - 4^{n+1}(1 - 2^{-n})(1 + 6 \cdot 4^n(1 - 2^{-n}))$$

$$d = (1/2) + 2 \cdot 4^n(1 - 2^{-n})^2(1 + 4^{n+1}(1 - 2^{-n}))$$

Los tramos denotados por  $g_3(x)$  unen  $(c_n, g(c_n))$  y  $(d_n, 0)$  verificando  $g'(c_n) = 0$  y

$g'(d_n) = 0$  tienen los coeficientes

$$a = 2 \cdot 4^{3(n+1)}(1 - 2^{-n-1}) + 4^{2n+2}$$

$$b = -\frac{3}{2}a(2(1 - 2^{-n}) + 3 \cdot 4^{-n-1})$$

$$c = 3a(1 - 2^{-n} + 4^{-n-1})(1 - 2^{-n} + 2 \cdot 4^{-n-1})$$

$$d = 1 - 2^{-n-1} + 2 \cdot 4^{-n-2} - \frac{a}{2}(1 - 2^{-n} + 4^{-n-1})^2(2(1 - 2^{-n}) + 5 \cdot 4^{-n-1})$$

Por último,  $g_4(x)$  son los trozos de la función  $g$  que unen los puntos  $(d_n, 0)$ ,  $(a_{n+1}, g(a_{n+1}))$

y verifican que  $g'(d_n) = g'(a_{n+1}) = 0$  siendo sus coeficientes

$$a = \frac{-(2^{n+2} \cdot 4^{n+2} - 4^{n+2} - 2^{n+1})(2^{2n+4})(4^{2n+4})}{(4^{n+2} - 9 \cdot 2^{n+1})^3}$$

$$b = \frac{-3a}{2}(2 - 3 \cdot 2^{-n-1} + 7 \cdot 4^{-n-2})$$

$$c = 3a(1 + 2 \cdot 4^{-n-1} - 2^{-n})(1 - 4^{-n-2} - 2^{-n-1})$$

$$d = \frac{a}{2}(1 - 2^{-n} + 2 \cdot 4^{-n-1})^2(-2 + 2^{-n-1} + 11 \cdot 4^{-n-2})$$

La función definida a trozos  $g$  es

$$g(x) = \begin{cases} g_1(x) & \text{si } a_n \leq x \leq b_n \text{ y} \\ g_2(x) & \text{si } b_n \leq x \leq c_n \\ g_3(x) & \text{si } c_n \leq x \leq d_n \\ g_4(x) & \text{si } c_n \leq x \leq a_{n+1} \end{cases}$$

Por definición, la función  $g$  es  $C^1$  en  $[0, 1)$ . En cada punto de la órbita

$$Orb_g(0) = \{0, 1/2, 3/4, \dots, 1 - 2^{-n}, \dots\}$$

la derivada es  $\frac{1}{2}$  y por tanto el exponente fuerte de Lyapunov es  $\lambda(0) = -\log 2 < 0$ , pero a pesar de ello, la órbita es inestable.

Para probar la inestabilidad de la órbita  $Orb_g(0)$ , tomamos el valor  $\epsilon = 3/8$ , de modo que para cada  $\delta > 0$  existe  $0 < x < \delta$  y  $k \geq 2$  tal que  $g^k(x) < 1/2$  y  $g^k(0) \geq 7/8$  cumpliendo que

$$|g^k(0) - g^k(x)| > \epsilon.$$

**Nota 3.8.** Hay que señalar que este ejemplo no contradice el resultado de la Sección 3.2 puesto que el sistema dinámico se define en  $[0, 1)$ , que no es un intervalo compacto.

**Observación:** La representación gráfica de las funciones de los sistemas dinámicos de los ejemplos 1 y 2, pese a ser funciones cúbicas a trozos, en gráficos de pequeño tamaño, son muy similares a las funciones de los sistemas dinámicos definidos por Demir y Koçak [19] salvo que en los puntos donde cambia la definición de la función la gráfica de la función de nuestros sistemas dinámicos es redondeada debido a la diferenciabilidad de la función.

Estos ejemplos unidimensionales y el resultado de la Sección 3.2 han sido publicados en International Joournal of Bifurcation and Chaos [6].

### 3.4. Dos ejemplos de dimensión dos

Análogamente a como hemos procedido para construir sistemas dinámicos unidimensionales, en esta sección vamos a construir dos sistemas dinámicos bidimensionales, uno  $([0, 1]^2, F)$  con una órbita con exponente de Lyapunov positivo, pero que es estable y otro  $([0, 1]^2, G)$  que tiene una trayectoria inestable con exponente de Lyapunov negativo (estos ejemplos están publicados en el libro Nonlinear Maps and Their Applications, Springer Proceedings in Mathematics and Statistics [7]).

**Ejemplo 3.** El sistema dinámico  $([0, 1]^2, F)$  con  $F = (f, g)$  tal como se define a continuación tiene la  $Orb_F(0, 0)$  estable, siendo su exponente de Lyapunov positivo.

1. La primera componente de la aplicación  $F$  es la función  $f$  definida en [19] como:

$$f(x) = \begin{cases} 2x + \frac{1}{2} - \frac{3}{2^{n+1}}(2^n - 1) & a_n < x \leq b_n \\ \frac{5^{n+2} - 22}{2 \cdot 5^{n+2} - 11}(x - b_n) + 1 + \frac{2}{10^{n+1}} - \frac{1}{2^{n+1}} & b_n < x \leq a_{n+1} \\ 1 & x = 1 \end{cases}$$

con  $a_n = 1 - 2^{-n} - 10^{-n-1}$ ,  $b_n = 1 - 2^{-n} + 10^{-n-1}$ ,  $n = 0, 1, 2, \dots$  y  $x \in [0, 1]$ .

2. La segunda componente de  $F$  es  $g : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$  definida como



$$g(x) = \begin{cases} 3x + \frac{1}{2} - \frac{5}{2^{n+1}}(2^n - 1) & a_n < x \leq b_n \\ \frac{5^{n+2} - 33}{2 \cdot 5^{n+2} - 11}(x - b_n) + 1 + \frac{3}{10^{n+1}} - \frac{1}{2^{n+1}} & b_n < x \leq a_{n+1} \\ 1 & x = 1 \end{cases}$$

donde  $a_n = 1 - 2^{-n} - 10^{-n-1}$ ,  $b_n = 1 - 2^{-n} + 10^{-n-1}$ ,  $n = 0, 1, 2, \dots$  y  $x \in I$ .

3. La aplicación  $F(x, y) = (f(y), g(x))$  es continua en  $[0, 1]^2$ , porque  $f$  y  $g$  son funciones continuas en  $[0, 1]$ . Sea la trayectoria de condición inicial  $(0, 0)$ :

$$\{(0, 0), (x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots\} = \left\{ \left( 1 - \frac{1}{2^k}, 1 - \frac{1}{2^k} \right) \right\}_{k=0}^{\infty}$$

En cada punto de esta trayectoria la aplicación es diferenciable, excepto en  $(0, 0)$ , pero como  $f$  y  $g$  son diferenciables a la derecha de 0, definimos:

$$DF(0^+, 0^+) = \begin{pmatrix} 0 & \lim_{y \rightarrow 0^+} f'(y) \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} g'(x) & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$$

y para  $n = 1, 2, \dots$

$$DF^{2n}(0, 0) = \begin{pmatrix} 6^n & 0 \\ 0 & 6^n \end{pmatrix} \quad DF^{2n-1}(0, 0) = \begin{pmatrix} 0 & 2 \cdot 6^{n-1} \\ 3 \cdot 6^{n-1} & 0 \end{pmatrix}$$

Ahora se computan los valores propios de  $(DF^k)^t(DF^k)$ , distinguiendo si  $k = 2n$  o  $k = 2n - 1$ , con  $n = 1, 2, \dots$

Cuando  $k = 2n - 1$ :

$$(DF^{2n-1}(0, 0))^t DF^{2n-1}(0, 0) = \begin{pmatrix} 3^2 \cdot 6^{2(n-1)} & 0 \\ 0 & 2^2 \cdot 6^{2(n-1)} \end{pmatrix}$$

El mayor valor propio de esta matriz es  $\mu_1(2n - 1, (0, 0)) = 3^2 6^n$ . Y cuando  $k = 2n$

$$(DF^{2n}(0, 0))^2 = \begin{pmatrix} 6^{2n} & 0 \\ 0 & 6^{2n} \end{pmatrix}$$

siendo su mayor valor propio  $\mu_1(2n, (0, 0)) = 6^{2n}$ .

Por tanto, el exponente de Lyapunov de la órbita con condición inicial  $(0, 0)$  es

$$\lambda_1(0, 0) = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{2k} \log(|\mu_1(k, (0, 0))|) = \log 6 > 0$$

La órbita de condición inicial  $(0, 0)$  es estable. Para probarlo se toma  $\epsilon > 0$  y un valor de  $k > 0$  tal que  $1/2^k < \epsilon$ . Como  $f'$  y  $g'$  son positivas, las componentes de la órbita de condición inicial  $(0, 0)$ , con la distancia del máximo (denotada por  $|\cdot|$ ) verifica que

$$\left| F^k(x, y) - F^k(0, 0) \right| \leq \left| \left( \frac{1}{2^k}, \frac{1}{2^k} \right) \right| = \frac{1}{2^k} < \epsilon \quad (3.9)$$

para  $n \geq k$  y  $0 < |(x, y)| < \bar{\delta}$ . Queda por probar que la desigualdad 3.9 se verifica para  $n < k$ . Como cada  $F^j$  es continua, entonces, dado  $\epsilon > 0$  existe  $\delta_j$  cumpliendo que si  $0 < |(x, y)| < \delta_j$ ,  $|F^j(x, y) - F^j(0, 0)| < \epsilon$  para  $j = 1, \dots, n-1$ . Luego si se toma

$$\delta = \min \{ \delta_1, \dots, \delta_{n-1}, \bar{\delta} \} \text{ y } 0 < |(x, y)| < \delta$$

es cierto que

$$\left| F^k(x, y) - F^k(0, 0) \right| < \epsilon$$

para todo  $k > 0$ .

**Ejemplo 4.** *Construimos una función vectorial continua  $G = (f^2, g)$  en  $[0, 1]^2$  cuya órbita  $Orb_G(0, 0)$  tiene un exponente de Lyapunov negativo, pero es inestable.*

1. La primera componente de  $G$  es  $f^2$  donde la aplicación  $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$  se define en el ejemplo 2 de [19] como sigue:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x + \frac{1}{2} & 0 \leq x < 7/16 \text{ o } a_n \leq x < b_n \\ (2^{n+1} - 4^{n+1} - 2^{-1})(x + 2^{-n} - 2 \cdot 4^{-n-1} - 1) & b_n \leq x < c_n \\ \frac{1 - 2^{-n-2} - 2 \cdot 4^{-n-3}}{2^{-n-1} - 9 \cdot 4^{-n-2}}(x + 2^{-n} - 2 \cdot 4^{-n-1} - 1) & c_n \leq x < a_{n+1} \end{cases}$$

donde  $a_n = 1 - 2^{-n} - 4^{-n-1}$ ,  $b_n = 1 - 2^{-n} + 4^{-n-1}$  y  $c_n = 1 - 2^{-n} + 2 \cdot 4^{-n-1}$ , para  $n = 1, 2, \dots$

2. Ahora, se define la segunda componente de  $G$ , que se denota por  $g : [0, 1) \rightarrow [0, 1)$ :

$$g(x) = \begin{cases} 3x + \frac{1}{2} & 0 \leq x \leq \frac{1}{15} \\ \frac{6}{127}x + \frac{7}{10} - \frac{2}{635} & \frac{1}{15} < x \leq \frac{1}{2} - \frac{1}{100} \\ 3x + \frac{1}{2} - \frac{5}{2^{n+1}}(2^n - 1) & a_n < x \leq b_n \\ \frac{5^{n+2} - 33}{2 \cdot 5^{n+2} - 11}(x - b_n) + 1 + \frac{3}{10^{n+1}} - \frac{1}{2^{n+1}} & b_n < x \leq a_{n+1} \end{cases}$$

donde  $a_n = 1 - 2^{-n} - 10^{-n-1}$  y  $b_n = 1 - 2^{-n} + 10^{-n-1}$ , para  $n = 1, 2, \dots$

3. La aplicación  $G(x, y) = (f^2(y), g(x))$  es continua en  $[0, 1)^2$  ya que  $f$  y  $g$  son funciones continuas en  $[0, 1)$ . Consideremos la trayectoria de  $(0, 0)$ , denotada por

$$\{(0, 0), (x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots\}$$

donde  $(x_{2n}, y_{2n}) = \left(1 - \frac{1}{2^{3n}}, 1 - \frac{1}{2^{3n}}\right)$  y  $(x_{2n-1}, y_{2n-1}) = \left(1 - \frac{1}{2^{3n-1}}, 1 - \frac{1}{2^{3n-2}}\right)$  para  $n = 1, 2, \dots$

Similarmente al ejemplo anterior, se tiene que

$$DG(0, 0) = \begin{pmatrix} 0 & 1/4 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$$

y para  $n = 1, 2, \dots$

$$DG^{2n}(0, 0) = \begin{pmatrix} (3/4)^n & 0 \\ 0 & (3/4)^n \end{pmatrix} \quad DG^{2n-1}(0, 0) = \begin{pmatrix} 0 & \frac{3^{n-1}}{4^n} \\ \frac{3^n}{4^{n-1}} & 0 \end{pmatrix}$$

Si  $k = 2n - 1$ , se tiene que

$$(DG^{2n-1}(0, 0))^t DG^{2n-1}(0, 0) = \begin{pmatrix} \frac{3^{2n}}{4^{2(n-1)}} & 0 \\ 0 & \frac{3^{2(n-1)}}{4^{2n}} \end{pmatrix}$$

luego  $\mu_1(2n - 1, (0, 0)) = \frac{3^{2n}}{4^{2(n-1)}}$ .

Si  $k = 2n$ , se tiene que  $\mu_1(2n, (0, 0)) = \frac{3^{2n}}{4^{2n}}$ .

Entonces el mayor exponente de Lyapunov de la órbita de condición inicial  $(0, 0)$  es:

$$\lambda_1(0, 0) = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{2k} \log(|\mu_1(k, (0, 0))|) = \log\left(\frac{3}{4}\right) < 0$$

La órbita  $Orb_G(0, 0)$  es inestable. Veámoslo.

Si se utiliza la distancia del máximo y se toma  $\epsilon = 3/8$ , para cada  $\delta > 0$  existe  $(x, 0)$ , tal que  $|(x, 0)| < \delta$ , y un  $k = 2n \geq 2$  cumpliendo que  $G^{2n}(x, 0) = (f^2 \circ g)^n(x) < 1/2$  y  $G^{2n}(0, 0) > 7/8$ . Por lo tanto, para este  $(x, 0)$  se cumple que

$$\left| G^{2n}(0, 0) - G^{2n}(x, 0) \right| = \left| 1 - 1/2^{3n} - (f^2 \circ g)^n(x) \right| \geq \left| \frac{7}{8} - G^{2n}(x, 0) \right| > \epsilon$$

### 3.5. Exponentes de Lyapunov en sistemas dinámicos discretos no autónomos

Sea  $X$  un espacio métrico y sea  $f_{0,\infty} = (f_i)_{i=0}^\infty$  una sucesión de aplicaciones del conjunto  $C(X)$ . Para  $n \geq 0$ , se define:

$$\begin{aligned} f_{0,\infty}^n &= f_{(n-1)} \circ \dots \circ f_1 \circ f_0 \\ f_i^0 &= I \end{aligned} \tag{3.10}$$

donde  $I$  es la identidad de  $X$ .

Cuando  $f_i = f$  para  $i = 0, 1, \dots$  se tiene el sistema dinámico discreto autónomo  $(X, f_{0,\infty}) = (X, f)$ . En caso contrario,  $(X, f_{0,\infty})$  es un *sistema dinámico discreto no autónomo*.

En el caso no autónomo, la órbita hacia adelante de condición inicial  $x_0 \in X$  es la sucesión

$$\{x_0, f_1(x_0), f_2(f_1(x_0)), \dots\} = \{x_n\}_{n=0}^\infty.$$

donde  $x_n = f_{n-1} \circ \dots \circ f_2 \circ f_1 \circ f_0(x_0)$ .

En [9] se extiende la definición de exponente de Lyapunov a estos sistema no autónomos cuando  $X$  es un subconjunto de  $\mathbb{R}$ . Esta definición es:

**Definición 3.9.**

$$\lambda(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log |(f_{n-1} \circ \dots \circ f_2 \circ f_0)'(x)| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \log |f_j'(x_j)|$$

Teniendo en cuenta la definición de exponente de Lyapunov (Definición 3.9) se puede extender de modo inmediato el concepto de órbita estable e inestable en sentido de Lyapunov a sistemas dinámicos no autónomos del tipo (3.10). A continuación ampliamos la definición de exponente fuerte de Lyapunov para estos sistemas unidimensionales no autónomos.

**Definición 3.10.**

$$\Lambda(x_0) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{j=k}^{k+n-1} \log(|f'_j(x_j)|)$$

si este límite existe uniformemente con respecto a  $k \geq 0$

Una situación a tener en cuenta es cuando la sucesión de aplicaciones que se denota por  $f_{0,\infty}$  está formada por bloques de aplicaciones que se van repitiendo, es decir, si el bloque de aplicaciones que se repite es  $f_1, f_2, \dots, f_m$ , tal que  $n = tm + k$  con  $n > 1$  y  $k < m$ , entonces la iterada  $n$ -ésima del sistema dinámico no autónomo es

$$f_{0,\infty}^n = f_k \circ \dots \circ f_1 \circ (f_m \circ \dots \circ f_1)^t$$

donde  $(f_m \circ \dots \circ f_1)^t$  significa la composición  $t$  veces del bloque  $f_m \circ \dots \circ f_1$ .

A continuación se va a calcular el exponente fuerte de Lyapunov de un sistema no autónomo, como los definidos por 3.10, pero donde las aplicaciones  $f$  y  $g$  definidas en la Sección 3.3 forman un bloque de aplicaciones que va a repetirse. En este bloque  $f$  se aplica  $p$  veces, con  $0 < p < m$  y  $g$  lo hace  $q = m - p$  veces en cualquier orden dentro del bloque con  $p \neq q$  y tenemos el siguiente resultado:

**Proposición 3.11.** *Dado el sistema dinámico no autónomo ( $I = [0, 1)$ ),  $f_{0,\infty}$ , donde  $f_{0,\infty}$  representa la repetición del bloque compuesto por  $p$  veces  $f$  y  $m - p = q$  veces  $g$  en cualquier orden, con  $p \neq q$ , entonces el exponente de Lyapunov fuerte de la órbita de condición inicial  $x_0 = 0$  es:*

$$\Lambda(0) = \frac{p - q}{m} \log 2$$

y es inestable.

*Demostración.* Dado el bloque de  $p$  veces  $f$  y  $q = m - p$  veces  $g$  en cualquier orden y  $p \neq q$ , se hace uso de la Definición 3.10 para obtener el valor del exponente de Lyapunov de la órbita de condición inicial  $x_0 = 0$ . Las sumas parciales  $S_n$  de la expresión del exponente fuerte se expresan

$$S_n = \frac{r(p - q) + i - j}{rm + i + j} \log 2$$

donde  $0 < i \leq p$ ,  $0 < j \leq q$  y  $n = rm + i + j$ , con independencia de  $k$ .

Cuando  $n \rightarrow \infty$ , esta serie es convergente y es inmediato que este valor es

$$\frac{p - q}{m} \log 2$$

que coincide con su exponente fuerte de Lyapunov  $\Lambda(0)$ .

Con independencia de  $p$  y  $q$  la órbita de condición inicial 0 de este sistema dinámico es inestable, cuya inestabilidad es debida a la inestabilidad de  $g$ . Si  $p < q$ , el exponente fuerte de Lyapunov de la órbita es negativo y la órbita de condición inicial 0 es inestable.

□

### 3.6. Método de Wolf para el cálculo del mayor exponente de Lyapunov de una órbita

El objetivo de este capítulo no es el cálculo del mayor exponente de Lyapunov de la órbita reconstruida a partir de una serie temporal sino tener en cuenta que una órbita que tiene un exponente positivo no necesariamente es inestable. Pero consideramos oportuno dar unas pinceladas de cómo se estima el mayor exponente de Lyapunov de una órbita construida a partir de una serie temporal real (método del retardo) utilizando el algoritmo de Wolf [68], que es el más habitual y sencillo (aunque hay otros) y que está implementado en algunos programas informáticos. Si la serie temporal real es  $\{x_i\}_{i=1}^T$ , que procede de un sistema dinámico estocástico o determinista desconocido y  $\{\bar{x}_i\}_{i=1}^n$  es una trayectoria vectorial, que se obtiene, como sabemos, embebiendo la serie temporal unidimensional en un espacio  $m$ -dimensional (Capítulo 2), siendo los elementos (estados) de la serie vectorial embebida

$$\bar{x}_i = (x_i, x_{i+\tau}, \dots, x_{i+(m-1)\tau})$$

con  $i = 1, 2, \dots, n$ , donde  $n = T - (m - 1)\tau$ . El algoritmo de Wolf consiste en elegido un elemento de la serie vectorial  $\bar{x}_{i_0}$ , calcular la distancia  $d(t_0)$  entre este punto y el más cercano,  $\bar{x}_{i'_0}$ . A continuación se considera el siguiente de cada uno de los puntos considerados,  $\bar{x}_{i_1}, \bar{x}_{i'_1}$ , y se mide la distancia entre ellos  $d'(t_1)$  y se repite este proceso ahora partiendo de  $\bar{x}_{i_1}$  y así sucesivamente, de modo que la estimación del mayor exponente de Lyapunov viene expresado por

$$\lambda = \frac{1}{t_M - t_1} \sum_{k=1}^M \log \frac{d'_{t_k}}{d'_{t_{k-1}}}$$

siendo  $M$  el número de veces que se repite este proceso, con  $t_M - t_1$  el período temporal de la serie vectorial que se tiene en cuenta para calcular  $\lambda$ . La elección de este período de

tiempo es importante porque es en el que se analiza la divergencia de las trayectorias con condiciones iniciales próximas.

En condiciones ideales, con infinitos datos y sin ruido, el algoritmo de Wolf converge al verdadero valor del mayor exponente de Lyapunov de la órbita desconocida. Sin embargo, en la realidad, los datos no son infinitos y suelen estar contaminados con ruido, por lo que hay que debido a éste hay que fijar una distancia mínima entre las condiciones iniciales de las órbitas consideradas, aumentando la complejidad del proceso de estimación.

### 3.7. Conclusiones

Con los ejemplos desarrollados en este capítulo se pone en relieve que el valor del mayor exponente de Lyapunov de una órbita no basta para decir si la órbita es estable o inestable. Cuando se utiliza el mayor exponente de Lyapunov en relación a la estabilidad de una órbita es porque  $f$  es suficientemente diferenciable o porque este mayor exponente de Lyapunov es fuerte en el caso de un sistema unidimensional en  $[0, 1]$ .

En relación a los contenidos de este capítulo, creemos que definiciones, resultados y ejemplos se podrían extender a sistemas dinámicos de dimensión mayor. Por ejemplo:

- Extender la definición de exponente fuerte de Lyapunov de una órbita unidimensional a la de mayor exponente de Lyapunov fuerte de una órbita de un sistema dinámico multidimensional.
- Demostrar resultados análogos a los Teoremas 3.5 y 3.6 para sistemas dinámicos de dimensión mayor o igual a 2.
- Construir sistemas dinámicos  $n$ -dimensionales en  $([0, 1]^n, f)$  para  $n \geq 3$  que tuvieran el comportamiento paradójico descrito en este capítulo.

---

## Capítulo 4

# Gráficos de Recurrencia

---

Los gráficos de recurrencia y su análisis cuantitativo son una herramienta útil para estudiar y comprender la dinámica de un sistema a través de las series temporales obtenidas de órbitas generadas por el mismo, y son especialmente interesantes cuando el sistema dinámico es no lineal o la serie no es estacionaria.

Los gráficos de recurrencia (RP) fueron propuestos por Eckmann et al. [20] para visualizar patrones de recurrencia en los datos, que es una característica de los sistemas dinámicos deterministas disipativos. Por tratarse de una herramienta gráfica, su interpretación puede resultar ambigua; por ello, Zbilut y Webber [66, 71], y más tarde Marwan [42] desarrollaron una serie de medidas, conocidas como medidas de *Análisis Cuantitativo de la Recurrencia* (RQA), que sirven para cuantificar la información que hay en un gráfico de recurrencia. Tanto estos gráficos como su análisis cuantitativo (RQA) han sido usados para analizar series temporales en Física, Química, Biología y en los últimos años en Economía, donde se han aplicado, entre otras, a series temporales de tipos de cambio [3, 30] y a series financieras [10, 21, 26, 61, 62].

En este capítulo, comenzamos recordando qué se entiende por un gráfico de recurrencia junto con las medidas utilizadas para el análisis de los mismos, puesto que la cuantificación de los estados recurrentes es una herramienta que permite aproximar cuándo se produce un cambio en el comportamiento dinámico de la órbita de la que procede la serie que se



estudie. Estas medidas han sido utilizadas con datos procedentes de sistemas dinámicos bien conocidos, como son el sistema dinámico discreto generado por la aplicación logística [29] y el sistema de Lorenz [65] y han confirmando su capacidad para aproximar los valores de bifurcación de estos sistemas dinámicos, es decir, el valor del parámetro que provoca un cambio en el atractor. Para ello, se tiene en cuenta que las medidas definidas por Zbilut and Webber permiten encontrar los puntos de transición entre un comportamiento dinámico caótico y otro periódico y las desarrolladas por Marwan permiten identificar transiciones entre distintas situaciones caóticas [41].

En nuestro trabajo “Análisis de las recurrencias del atractor de Liu” [8] usamos RQA para estudiar el comportamiento asintótico del sistema dinámico tridimensional propuesto por Liu y otros en [38] cuando un parámetro de control sumando en la segunda ecuación del sistema cambia. Se representan gráficamente distintos atractores de este sistema dinámico para diferentes valores del parámetro de control con objeto de entender el mecanismo generador del atractor cuando este parámetro vale 0, y para realizar el estudio generamos, a partir de este sistema dinámico e incrementando el parámetro de control en cada iteración, una serie temporal no estacionaria que será la base del estudio que se realiza.

#### 4.1. Análisis Cuantitativo de un Gráfico de Recurrencia

Sea  $\{\bar{x}_i\}_{i=1}^n$ , con  $\bar{x}_i \in \mathbb{R}^m$  una serie temporal vectorial (podría ser una trayectoria de un sistema dinámico). Fijado un valor real  $\varepsilon > 0$ , se dice que dos estados  $\bar{x}_i$  y  $\bar{x}_j$  son recurrentes cuando  $\|\bar{x}_i - \bar{x}_j\| < \varepsilon$ , donde  $\|\cdot\|$  es una métrica definida en  $\mathbb{R}^m$ . El gráfico de recurrencia correspondiente a este valor de  $\varepsilon$  y a esta trayectoria (que se puede denotar como  $RP(\{\bar{x}_i\}_{i=1}^n, \varepsilon)$ ) puede expresarse algebraicamente por una matriz  $R \in M_n$ , llamada matriz de recurrencia, donde

$$R_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } \|\bar{x}_i - \bar{x}_j\| < \varepsilon \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

con  $i, j = 1, 2, \dots, n$ , de modo que el gráfico de recurrencia se obtiene representando la matriz  $R$  en el plano, donde cada uno de los ejes se representa el tiempo, de modo que cuando  $R_{ij} = 1$  se sitúa un punto en la posición  $(i, j)$  y cuando  $R_{ij} = 0$ , la posición  $(i, j)$  está vacía. Por definición de matriz de recurrencia, el gráfico correspondiente tiene una línea diagonal, puesto que  $R_{ii} = 1$  con  $i = 1, 2, \dots, n$ .

A gran escala, fijado un valor de  $\varepsilon > 0$ , un gráfico de recurrencia de una serie vectorial  $\{\bar{x}_i\}_{i=1}^n$ , puede tener características topológicas que indican distintos comportamientos dinámicos:

- *Homogeneidad*, que está presente en los gráficos de recurrencia de trayectorias deterministas o aleatorias estacionarias (Figura 4.1).
- *Abruptos cambios de la dinámica* que vienen representados por amplias zonas o bandas con escasos estados recurrentes (Figura 4.2b)).
- *Drift* que ocurre cuando algún parámetro del sistema generador de datos va cambiado lentamente durante el proceso.

A pequeña escala también se distinguen estructuras como:

- Puntos recurrentes aislados que se dan cuando el sistema tiene estados que no persisten en el tiempo (Figura 4.2b)).
- Línea diagonal de longitud  $l$ , que ocurre cuando, fijado un valor de  $\varepsilon$ , los estados  $\bar{x}_i$  y  $\bar{x}_j$  están a una distancia menor que  $\varepsilon$  y también lo están los estados  $\bar{x}_{i+k}$  y  $\bar{x}_{j+k}$  con  $k = 0, 1, 2, \dots, l - 1$ . Se trata de agrupaciones de puntos consecutivos que se disponen paralelos a la línea diagonal del gráfico de recurrencia (Figura 4.1b)).
- Líneas verticales y horizontales, que son aquellas que se obtienen cuando  $R_{i,j+k} = 1$  con  $k = 0, 1, \dots, v - 1$ , con  $v$  la longitud de la línea vertical y  $R_{i+k,j} = 1$  con  $k = 0, 1, \dots, h - 1$ , siendo  $h$  la longitud de la línea horizontal, respectivamente (Figura 4.1b) y c)).

Figura 4.1: Gráficos de recurrencia correspondientes a distintas series embebidas en  $\mathbb{R}^4$ .

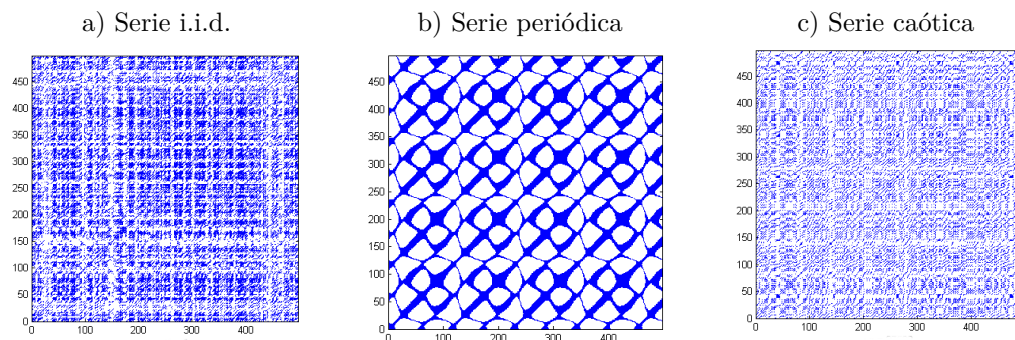
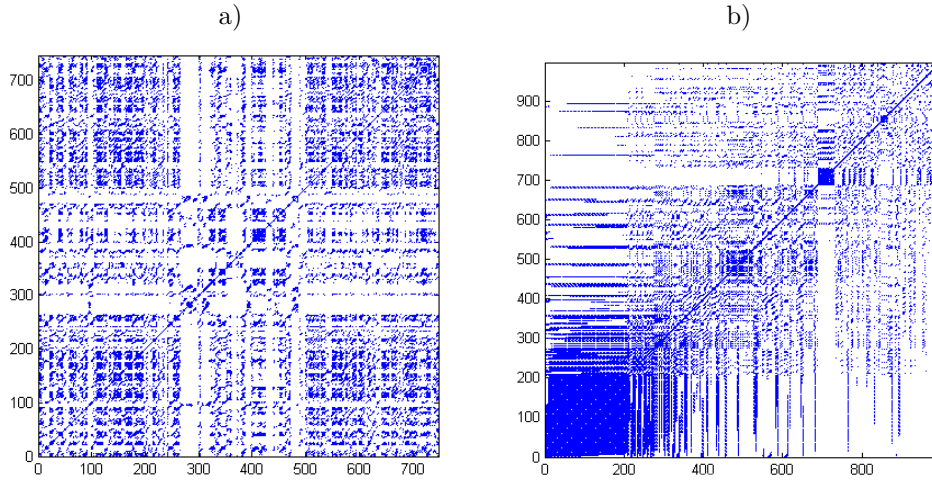


Figura 4.2: Gráficos de recurrencia correspondientes a series no estacionarias embebidas en  $\mathbb{R}^4$



Las líneas diagonales y verticales son la base de las medidas que constituyen el análisis cuantitativo de un gráfico de recurrencia de una serie vectorial, fijado un valor de  $\varepsilon$ .

A principio de la década de los 90, Zbilut and Webber [66, 71] definieron medidas basadas en las líneas diagonales, algunas de ellas son:

1. **Porcentaje de recurrencia:** De todos los pares de estados de la trayectoria  $\{\bar{x}_i\}_{i=1}^n$ , este porcentaje nos da cuántos son recurrentes. Se escribe:

$$\%REC = \frac{100}{n^2} \sum_{i,j=1}^n R_{ij},$$

Esta medida se corresponde con el estimador de la correlación integral<sup>1</sup> [14, 28]. Para un serie temporal, el valor de esta medida depende de la elección de  $\varepsilon$ , un valor de  $\varepsilon$  demasiado grande consideraría estados recurrentes aquellos que no lo son, mientras un  $\varepsilon$  demasiado pequeño detectaría solo el ruido. Zbilut [70] recomienda un valor de  $\varepsilon$  que asegure un porcentaje mínimo de un 1% de estados recurrentes.

2. **Porcentaje de determinismo:** Es el ratio de puntos recurrentes que forman líneas diagonales. Se define como:

$$\%DET = 100 \frac{\sum_{l=l_{\min}}^N lP(l)}{\sum_{i,j=1}^N R_{i,j}},$$

<sup>1</sup>Informalmente hablando la correlación integral de un conjunto,  $X \subset \mathbb{R}^m$ , para un valor de  $\varepsilon$ , es la probabilidad de que eligidos dos elementos del conjunto al azar estén a una distancia menor que  $\varepsilon$  [28].

donde  $P(l)$  es el número de líneas diagonales de longitud  $l$ . La longitud mínima de estas líneas,  $l_{\min}$ , tendría que ser mayor o igual que 2, porque si tomamos  $l_{\min} = 1$  estaríamos considerando todos los pares de estados recurrentes.

Si una serie temporal vectorial está generada por un proceso estocástico las líneas diagonales de su gráfico de recurrencia son mucho más cortas que la líneas diagonales que aparecen en el gráfico de recurrencia de una serie que proceda de un proceso determinista, en los que es menor el número de puntos recurrentes aislados. En el caso de los gráficos de recurrencia de una serie temporal periódica determinista las líneas diagonales son más largas que si fuese una serie caótica o estocástica.

3. **Máxima longitud de las líneas diagonales:** En un gráfico de recurrencia hay una línea diagonal de longitud  $l$  cuando  $R_{i+k, j+k} = 1$  para  $k = 0, 1, \dots, l - 1$ . Al menos el cardinal de una línea diagonal tiene que ser 2.

Una interesante medida es la máxima longitud de las líneas diagonales de un gráfico de recurrencia. Según Eckmann [20] “La máxima longitud de las líneas diagonales está relacionada con el mayor exponente de Lyapunov positivo” de la órbita estudiada con el gráfico de recurrencia.

Marwan [42] analizó las líneas verticales y definió medidas basadas en ellas. A continuación se recogen algunas de estas medidas:

1. **Laminaridad:** Se trata del porcentaje de puntos recurrentes que forman líneas verticales en un gráfico de recurrencia. Se define como:

$$LAM = 100 \frac{\sum_{v=v_{\min}}^{v_{\max}} vP(v)}{\sum_{i,j=1}^n R_{ij}},$$

donde  $v_{\min}$  es la longitud mínima que se toma para las líneas verticales y  $P(v)$  denota el número de líneas verticales de longitud  $v$ . Una línea vertical que comience en  $\bar{x}_i$  de longitud  $v$  ocurre cuando cuando  $R_{i, j+k} = 1$  para  $k = 0, 1, \dots, v - 1$ , es decir  $v$  estados sucesivos están próximos a  $\bar{x}_i$ . Normalmente se considera una longitud mínima de las líneas verticales,  $v_{\min}$ . Esta medida se utiliza para estudiar las transiciones en la dinámica caótica debida a cambios en los parámetros de un sistema.

2. **Trapping time:** Se trata de la longitud media de las líneas verticales, que se expresa como

$$TT = \frac{\sum_{v=v_{\min}}^{v_{\max}} vP(v)}{\sum_{v=v_{\min}}^{v_{\max}} P(v)},$$

y da el tiempo medio que el sistema esta atrapado cerca de un estado específico.

En particular, nosotros estamos interesados en el análisis de series temporales reales,  $\{x_i\}_{i=1}^T$ , que proceden de un sistema dinámico estocástico o determinista desconocido. Si la serie procede de un sistema determinista, a partir de la serie real se puede construir una trayectoria vectorial equivalente a una trayectoria del sistema dinámico original, embebiendo la serie temporal unidimensional en un espacio  $m$ -dimensional (Capítulo 2). Los teoremas de Takens y Stark [16, 60, 63] garantizan que la estructura topológica y diferenciable del sistema original queda preservada cuando la dimensión embedding,  $m$ , y el retardo,  $\tau$ , necesarios para embeber la serie, son elegidos propiamente. Los elementos (estados) de la serie vectorial embebida son

$$\bar{x}_i = (x_i, x_{i+\tau}, \dots, x_{i+(m-1)\tau})$$

con  $i = 1, 2, \dots, T$ , donde  $n = T - (m - 1)\tau$ .

Hemos reconstruido una órbita vectorial en  $\mathbb{R}^4$  de distintas series unidimensionales para obtener sus gráficos de recurrencia, fijado un cierto valor de  $\varepsilon$ , tal como se pueden ver en las Figuras 4.1 y 4.2. Los gráficos de recurrencia de la Figura 4.1 corresponden a series temporales estacionarias:

- Figura 4.1a) serie independiente e idénticamente distribuida.
- Figura 4.1b) serie periódica.
- Figura 4.1c) serie caótica generada por la aplicación logística.

En la Figura 4.2 se pueden ver los gráficos de recurrencia de dos series no estacionarias:

- Figura 4.2a) serie generada utilizando dos modelos AR(1) distintos.
- Figura 4.2b) serie generada por el sistema dinámico  $([0, 1], f(x) = ax(1 - x))$  donde el parámetro  $a$  cambia abruptamente.

Es importante notar que para utilizar estos gráficos no es necesario imponer restricciones sobre la distribución de la serie que se quiera estudiar. Dada una serie real, para cada  $m$  y para cada valor de  $\varepsilon$  se puede construir un gráfico de recurrencia.

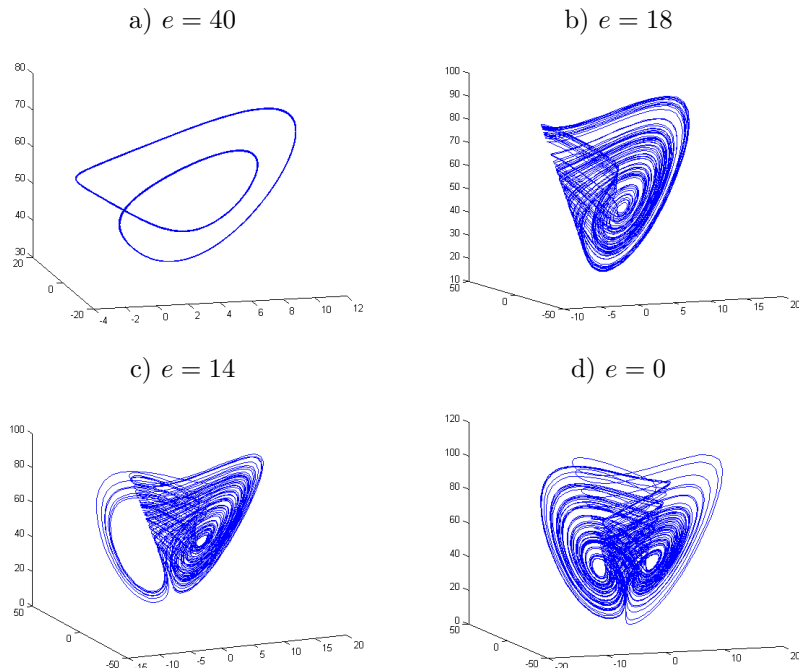
## 4.2. El atractor de Liu

El siguiente sistema de ecuaciones diferenciales describe el sistema dinámico autónomo propuesto por Liu et al.[38],

$$\begin{aligned}\dot{x} &= 10(y - x) \\ \dot{y} &= 40x - xz + e \\ \dot{z} &= -2,5z + 4x^2,\end{aligned}\tag{4.1}$$

donde  $e$  es un parámetro de control. Para conocer el mecanismo generador del atractor caótico del sistema (4.1) cuando  $e = 0$ , estos investigadores exploran, utilizando simulación numérica, el comportamiento dinámico del sistema para diferentes valores de  $e$  y condición inicial  $(2, 2; 2, 4; 38)$ . De este modo se obtiene una órbita periódica cuando  $|e| = 40$  (Figura 4.3a), surge un atractor caótico con un ala (*scroll*) cuando  $e = 18$  (Figura 4.3b) y el comportamiento asintótico se va extendiendo a una nueva ala conforme disminuye el valor de  $|e|$ , como se puede ver cuando  $|e| = 14$  (Figura 4.3c) y, por fin, cuando  $e = 0$  el atractor es muy complicado puesto que tiene dos alas (*dos scrolls*) (Figura 4.3d).

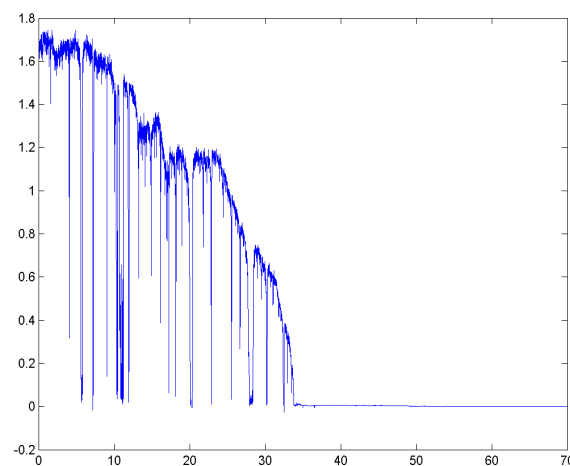
Figura 4.3: Atractores del sistema de Liu para distintos valores de  $e$



Para obtener un conocimiento más amplio de este sistema dinámico, se ha calculado el mayor exponente de Lyapunov cuando  $0 \leq e \leq 70$ . Los exponentes de Lyapunov miden la

divergencia de órbitas cuyas condiciones iniciales están próximas. Si el mayor exponente de Lyapunov de una órbita es negativo quiere decir que ésta se aproxima a un punto fijo. Si el comportamiento de las órbitas convergen a un ciclo límite, el mayor exponente de Lyapunov es cero, mientras que si dos trayectorias de condiciones iniciales cercanas se separan exponencialmente, el máximo exponente de Lyapunov es positivo. Para la computación del mayor exponente de Lyapunov, se ha utilizado el algoritmo de Wolf [68]. Los resultados se muestran en la Figura 4.4. Hay un amplio rango de valores de  $|e|$  (aproximadamente de 0 a 33,5) donde el sistema tiene un comportamiento caótico con pequeñas ventanas de comportamiento periódico. Cuando  $e$  varía de 33,5 a 229,13 el sistema tiene un ciclo límite y finalmente para valores de  $e$  mayores que 229,13 el atractor tiene un punto fijo. Este sistema es disipativo para todos los valores del parámetro  $|e|$ .

Figura 4.4: Mayor exponentes de Lyapunov del sistema de Liu cuando el parámetro  $e$  varía de 0 a 70



### 4.3. Aplicación: Cambios en la dinámica del sistema de Liu

En esta sección, hemos aplicado el análisis cuantitativo de los gráficos de recurrencia para encontrar transiciones en el comportamiento asintótico del sistema dinámico de Liu (4.1) cuando cambia el parámetro de control  $e$ . Para ello, inspirados en los trabajos de Trulla et al. y Iwanski y Bradley, que trabajan con la ecuación logística y el sistema dinámico de Lorenz, respectivamente, [29, 65], se genera una serie temporal sin eliminar el comportamiento transitorio. Para ello, numéricamente se integran las ecuaciones de

Liu usando el método de Runge-Kutta de orden cuatro, incrementando el parámetro  $e$  en cada iteración desde 0 a 70, y obtenemos una serie vectorial de  $\mathbb{R}^3$  de 150000 datos. La condición inicial seleccionada es  $(2, 2; 2, 4; 38)$ . En el análisis se ha utilizado la serie unidimensional obtenida de la proyección de la primera componente,  $\{x_i\}$ , de la serie tridimensional obtenida (con las componente  $y$  o  $z$  se consiguen resultados similares).

La Figura 4.5b) representa la serie temporal unidimensional  $\{x_i\}$  frente al parámetro  $e$ . A simple vista, se pueden observar distintos comportamientos: una zona donde los puntos se disponen sin orden aparente, con posibles pequeñas ventanas de comportamiento menos complicado que no se aprecian; otra zona donde el comportamiento debe ser periódico pero complejo; y, por último, una donde el comportamiento periódico es más simple (se trata de un ciclo límite, donde las diferencias visuales se deben únicamente al muestreo y a los puntos utilizados en el gráfico). La Figura 4.5a) es un diagrama de bifurcación del sistema de Liu obtenido integrando el sistema para cada valor del parámetro.

Antes de aplicar el análisis cuantitativo, se reconstruye un espacio de estados equivalente al espacio de estados del sistema (4.1) a partir de la serie unidimensional  $\{x_i\}_{i=1}^{150000}$ . Para ello hay que elegir una dimensión embedding  $m$  y un retardo  $\tau$  de modo conveniente. Como esta serie no es estacionaria, se tendrá que elegir una dimensión embedding suficientemente grande de modo que el espacio de estados  $m$ -dimensional reconstruido contenga toda la dinámica relevante del sistema dinámico del que en realidad procede la serie temporal que se estudia [70]. En este caso usamos  $m = 7$ , puesto que el sistema original es tridimensional [63, 60]. En cualquier otra situación, para determinar la dimensión embedding se podrían utilizar métodos como el de falsos vecinos cercanos [35] o el método de Cao [17]. El valor elegido para el retardo  $\tau$  es el mínimo de la función de información mutua [42]. En este caso con  $m = 7$  y  $\tau = 9$  se obtiene una serie vectorial de 149964 datos que es equivalente a la serie tridimensional.

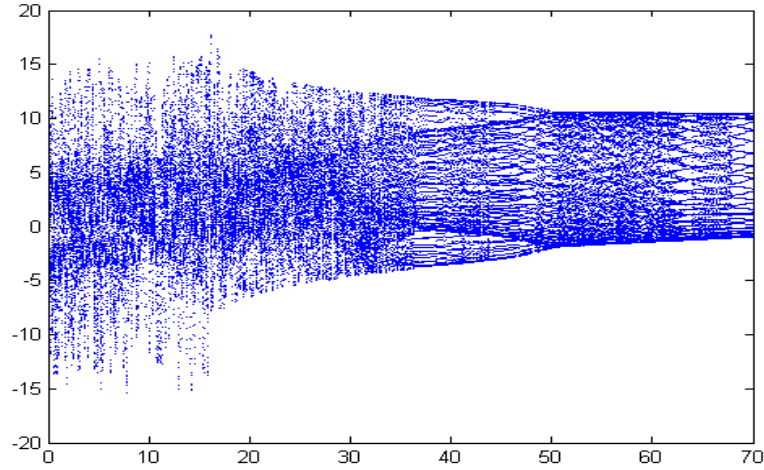
Se aplica el análisis cuantitativo de la recurrencia, repetidamente, en ventanas móviles de 1000 datos de la serie 7-dimensional, de modo que dos ventanas consecutivas tiene 990 datos en común y para cada una de ellas se computan las medidas %determinismo, máxima longitud de las líneas diagonales, laminaridad y TT (*time trapping*), utilizando el programa desarrollado por Zbilut y Webber, que es un conjunto de ejecutables bajo DOS [71, 12], y se obtienen un total de 14895 valores para cada una de las medidas.

En la Figura 5.8a), se representan los valores de la medida determinismo frente a valores del parámetro  $e$ . Los primeros tres máximos relativos se alcanzan para valores

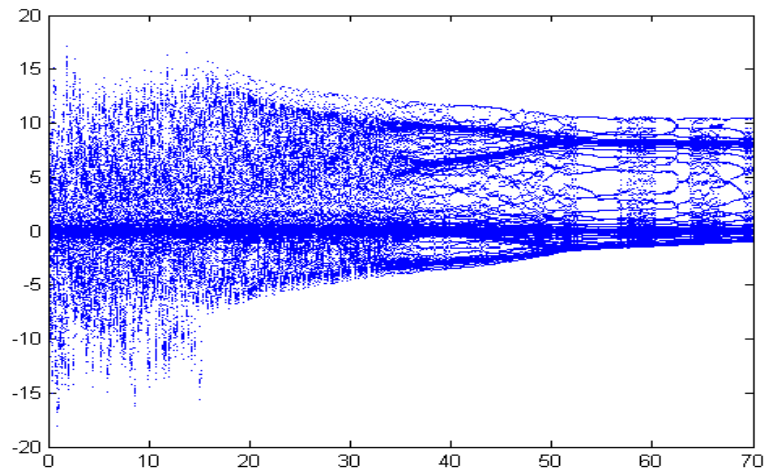


Figura 4.5: Representación de una serie unidimensional obtenida del sistema (4.1) frente al parámetro  $e$

a) Simulación del diagrama de bifurcación del sistema (4.1)

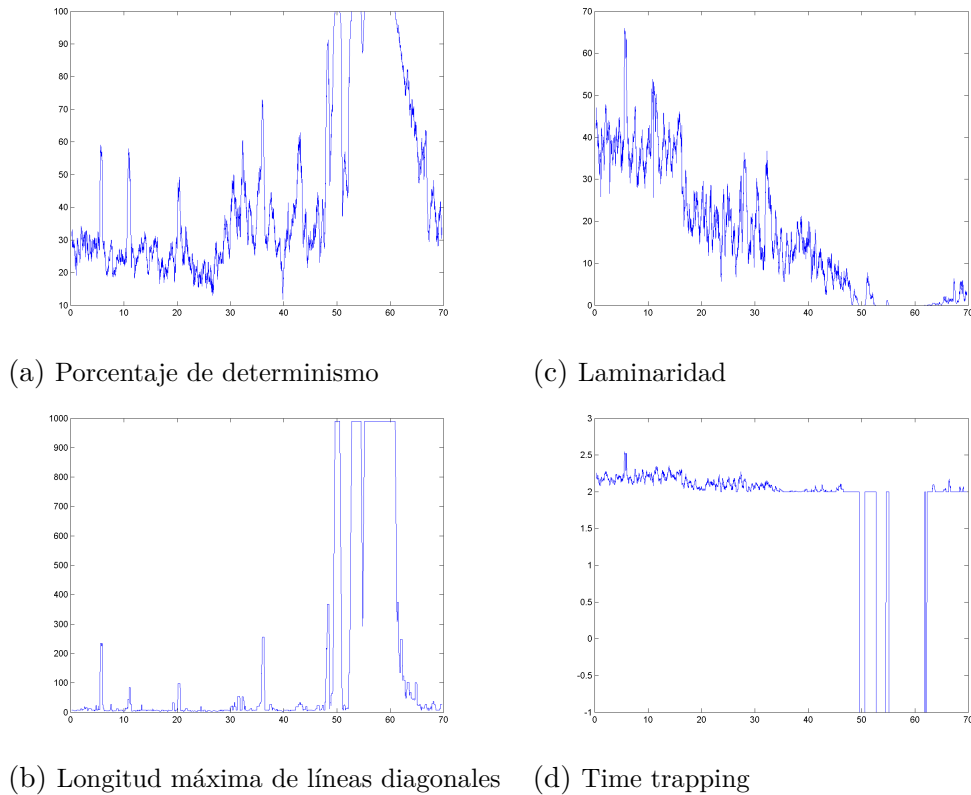


b) Serie  $\{x_i\}_{i=1}^{150000}$



de  $e$  próximos a 5, 8, 11 y 20, indicando la existencia de un ciclo límite para valores del parámetro  $e$  cercanos a estos valores. Aproximadamente a partir de  $e = 28,5$ , los valores de la medida de determinismo crece, destacando los valores alcanzados cuando el parámetro  $e$  está próximo a 37,5. Conforme el parámetro  $e$  va creciendo el valor de esta medida aumenta. También merece considerar el alto valor alcanzado por el porcentaje de determinismo cuando el valor de  $e$  está cerca de 33,5. Estos resultados son confirmados con los obtenidos por la medida máxima longitud de las líneas diagonales (Figura 5.8b)). En relación al gráfico que recoge los valores de la laminaridad (Figura 5.8c)), hay que señalar que esta

Figura 4.6: Análisis de los estados recurrentes del sistema de Liu cuando el parámetro varía de 0 a 70



medida decrece abruptamente cuando el valor del parámetro  $e$  se sitúa en torno a  $e = 16,3$  indicando posiblemente que se pasa de un atractor caótico a otro también caótico, a partir de este valor del parámetro  $e$ , los valores de la laminaridad se mantienen oscilando hasta  $e = 33,5$  y entonces comienza a decrecer suavemente, que es cuando el comportamiento periódico comienza.

El estadístico trapping time (Figura 5.8d)) confirma la existencia de los distintos comportamientos dinámicos corroborando el cambio de dinámica producida en torno al valor del parámetro  $e = 16,3$ .

En resumen, el sistema debe presentar los siguientes comportamientos asintóticos: Para valores del parámetro mayores que 50, tiene un comportamiento periódico; cuando el parámetro se mueve entre 33,5 y 50, aproximadamente la conducta asintótica es cíclica aproximadamente, pero más complicada (*period-doubling bifurcations*); entre 28,5 y 33,5 el atractor es caótico, como para valores menores que 28,1. Para  $e < 28,1$  el atractor es caótico pero su complejidad se incrementa para valores menores que 16,3 (el atractor caótico tiene dos scrolls, pero solo tiene un scrolls cuando el valor del parámetro es mayor

que 16,3), aunque hay ventanas donde el comportamiento es periódico.

Puesto que el sistema es conocido, a la vista de los resultados obtenidos de las distintas medidas (para distintos valores destacables de  $e$ , como algún máximo de la medida de determinismo o laminaridad, por ejemplo), numéricamente hemos integrado el sistema (4.1) para algunos valores del parámetro de control  $e$  confirmando los resultados obtenidos con el análisis cuantitativo de los estados recurrentes, como se puede ver en la Figura 4.7.

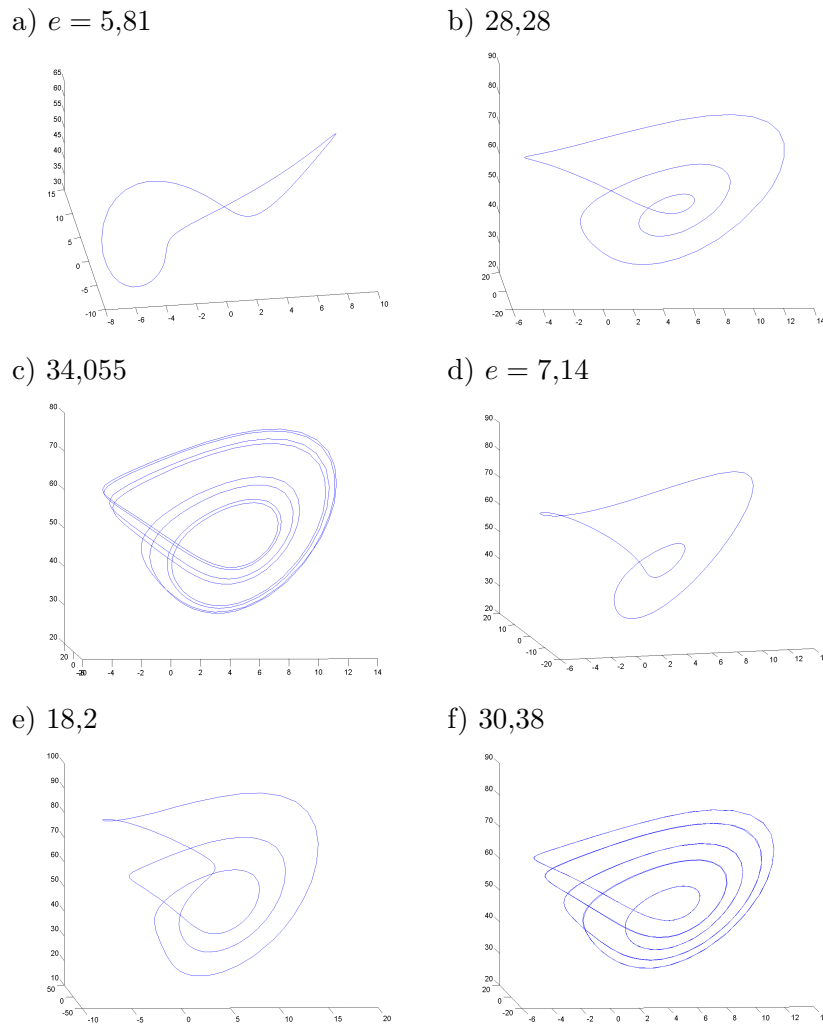


Figura 4.7: Distintos comportamientos asintóticos del sistema de Liu (4.1) para distintos valores del parámetro  $e$

## 4.4. Conclusiones

En nuestro trabajo “Análisis de las recurrencias del atractor de Liu” [8] conseguimos, utilizando RQA, obtener valores aproximados del parámetro  $e$  donde cambia la dinámica de la serie no estacionaria generada.

Esta herramienta se ha utilizando ampliamente en los últimos años con series económicas con el objetivo de ver los cambios de dinámica y estudiar, si utilizando estas medidas se puede obtener información que anticipe los cambios o crisis se van a producir, de modo que sea posible influir para provocar cambios en la dinámica de las variables económicas que se estudien.

Ahora nos planteamos ver qué tipo de relación existe entre estos gráficos de recurrencia y los gráficos de recurrencia que proponemos en el último capítulo de esta memoria.



---

## Capítulo 5

# Correlación Integral Simbólica

---

El concepto de *correlación integral* se ha utilizado ampliamente en diferentes campos de investigación para estimar la dimensión de correlación [28] de datos deterministas (caóticos) o para analizar propiedades de series temporales [11, 23, 44, 47]. En particular, el test no paramétrico BDS (Brock, Dechert, Sheinkeman y LeBaron,[14]) está basado en la correlación integral de una serie independiente e idénticamente distribuida y su uso se ha mostrado recomendable en el análisis de las series temporales económicas de mercados financieros, de tipo de cambio, de precios de materias primas... (entre otros [32, 40, 48]). Además, el test BDS forma parte del paquete de análisis de datos de muchos programas informáticos.

Por construcción, la correlación integral y por tanto, cualquier procedimiento basado en ella, depende de un parámetro de proximidad  $\varepsilon$ , cuya elección debe realizarse antes de ser utilizado y es posible que se obtengan conclusiones estadísticas distintas dependiendo del valor de este parámetro. Por ello, no se puede elegir un único valor de  $\varepsilon$ , sino un rango de valores para los que debe de evaluarse el procedimiento utilizado. En esta situación se ha probado empíricamente [23] que la distribución asintótica del test BDS depende de la elección del parámetro de proximidad.

En este capítulo, de modo análogo a como se construye del test BDS, que se basa, como se ha dicho anteriormente, en el concepto de correlación integral, se define la *correlación*

*integral simbólica* de un subconjunto compacto de  $\mathbb{R}^m$ , y a partir de este concepto, se construye un nuevo test no paramétrico de independencia de series temporales. Este test se basa en el estadístico construido para estimar la correlación integral simbólica de la serie vectorial que se obtiene de embeber una serie unidimensional utilizando el método del retardo (Capítulo 2). Como la definición de correlación integral simbólica no tiene en cuenta ni la estructura métrica de  $\mathbb{R}^m$  ni la geometría de la serie vectorial, no es preciso fijar un parámetro de proximidad  $\varepsilon$  para la utilización del nuevo test.

Una vez estudiadas las propiedades de este nuevo estadístico, se define una nueva herramienta gráfica. Se trata del *gráfico de recurrencia simbólico coloreado* de una serie vectorial de  $\mathbb{R}^m$ . Al igual que un gráfico de recurrencia clásico (Capítulo 4) permite visualizar la correlación integral de una serie vectorial de  $\mathbb{R}^m$  fijado un valor de  $\varepsilon$ , estos nuevos gráficos representan gráficamente la correlación integral simbólica de una serie vectorial, con la diferencia de que no es necesario fijar un valor para el parámetro de proximidad  $\varepsilon$ , necesario en los gráficos de recurrencia clásicos. En los gráficos de recurrencia simbólicos, al igual que ocurre con la correlación integral simbólica, la proximidad entre cada par de elementos de la serie vectorial que se estudie no es lo que importa, lo importante es si las componentes de dos elementos de la serie tienen el mismo orden. Continuamos definiendo medidas sobre un gráfico de recurrencia simbólico coloreado y mostrando que pueden ser útiles en el estudio de series temporales, y en particular para detectar cambios de su dinámica.

## 5.1. Preliminares y Notación

En este capítulo se denotan una serie vectorial como  $\{\bar{x}\}_{t=1}^n \subset \mathbb{R}^m$  y una serie unidimensional, que es la realización de un proceso estocástico real, como  $\{x_t\}_{t=1}^T$ . Para  $m \geq 2$ , se puede construir la serie vectorial que se obtiene de embeber la serie temporal unidimensional en un espacio  $m$ -dimensional y sus elementos son (Capítulo 2,  $\tau = 1$ ):

$$\bar{x}_t = (x_t, x_{t+1}, \dots, x_{t+(m-1)}).$$

Cada  $\bar{x}_t$  es una  $m$ -historia y  $m$  es la dimensión embedding. Si la longitud de la serie unidimensional es  $T$ , la serie vectorial embebida,  $\{\bar{x}_t\}_{t=1}^n$ , es de longitud  $n = T - m + 1$ .

Para cada  $m \geq 2$ ,  $S_m$  es el grupo simétrico de orden  $m!$ , que está formado por todas las permutaciones del conjunto  $\{1, 2, 3, \dots, m\}$ . Cada elemento  $\pi = (i_1, i_2, \dots, i_m) \in S_m$  se

dice que es un símbolo. A continuación definimos cómo se asigna a cada vector de  $\mathbb{R}^m$  un símbolo de  $S_m$ .

**Definición 5.1.** *Se dice que un vector  $\bar{x} \in \mathbb{R}^m$  es de tipo  $\pi \in S_m$ , si y solo si,  $\pi = (i_1, i_2, \dots, i_m)$  es el único símbolo que satisface las siguientes condiciones:*

- a)  $x_{i_1} \leq x_{i_2} \leq \dots \leq x_{i_m}$  y
- b)  $i_{s-1} < i_s$  if  $x_{i_{s-1}} = x_{i_s}$ .

La condición (b) garantiza la unicidad del símbolo  $\pi$  asignado a un vector  $\bar{x}$ . Luego, se dice que el vector  $\bar{x} \in \mathbb{R}^m$  es de tipo  $\pi$  si este símbolo es la permutación que ordena de menor a mayor las componentes de la  $m$ -historia.

Sea un subconjunto  $X \subseteq \mathbb{R}^m$ , se define la aplicación:

$$s : X \rightarrow S_m$$

que asigna a cada elemento de  $X$  el símbolo de  $S_m$  que da el orden de sus componentes, es decir, su tipo. En particular, si  $X = \{\bar{x}_t\}_{t=1}^n$ , la aplicación  $s$  transforma la serie vectorial en una sucesión de símbolos.

Se define la función indicador  $I : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$

$$I(\bar{x}, \bar{y}) = I(s(\bar{x}), s(\bar{y})) = \begin{cases} 1 & \text{si } s(\bar{x}) = s(\bar{y}) \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases} \quad (5.1)$$

que vale 1 siempre que las componentes de  $\bar{x}$  e  $\bar{y}$  tengan el mismo patrón de orden y 0 en caso contrario.

Si  $\{x_t\}_{t=1}^T$  es una serie unidimensional, la serie vectorial embebida en  $\mathbb{R}^m$ ,  $\{\bar{x}_t\}_{t=1}^n$ , tiene, como se observa a continuación, solapamientos:

$$\begin{array}{cccccccc} \bar{x}_t = (x_t & x_{t+1} & x_{t+2} & \dots & x_{t+m-1}) & & & \\ & \bar{x}_{t+1} = (x_{t+1} & x_{t+2} & \dots & x_{t+m-1} & x_{t+m}) & & \\ & & \bar{x}_{t+2} = (x_{t+2} & \dots & x_{t+m-1} & x_{t+m} & x_{t+m+1}) & \\ & & & \vdots & \vdots & \vdots & & \\ & & & & \bar{x}_{t+m-1} = (x_{t+m-1} & x_{t+m} & x_{t+m+1} & \dots & x_{t+2(m-1)}) \end{array}$$



En general, dadas dos  $m$ -historias,  $\bar{x}_t$  y  $\bar{x}_s$ ,

- se solapan cuando  $|s - t| < m$ , es decir, si llamamos  $N(t) = \{s \in \mathbb{R} : |s - t| < m\}$ ,  $\bar{x}_t$  y  $\bar{x}_s$  se solapan cuando  $s \in N(t)$  o  $t \in N(s)$ .
- la probabilidad de que la  $m$ -historia  $\bar{x}_t$  tenga asignado el símbolo  $\pi \in S_m$  y la  $m$ -historia  $\bar{x}_s$  tenga asignado el símbolo  $\delta \in S_m$  se denota por  $p_{ts}^{\pi\delta}$ .

Nos interesan estas probabilidades cuando **la serie unidimensional es i.i.d.**, para lo que hay que tener en cuenta que la serie vectorial embebida es  $(m - 1)$ -dependiente, debido al solapamiento de las  $m$ -historias. En esta situación, dadas dos  $m$ -historias,  $\bar{x}_t$  y  $\bar{x}_s$ , distinguimos

1. que las  $m$ -historias no se solapen ( $|s - t| \geq m$ ), esto es,  $s \notin N(t)$  (o bien  $t \notin N(s)$ ), en cuyo caso las probabilidades  $p_{ts}^{\pi\delta}$  para cualesquiera  $\pi, \delta \in S_m$  toman el valor  $(1/m!)^2$ . Estas probabilidades se pueden escribir en una matriz  $PM$  de orden  $m!$ , llamada matriz de probabilidades y se denota:

$$PM(|s - t|) = \left( (1/m!)^2 \right)_{m!}.$$

2. que  $|s - t| < m$ , en cuyo caso para cada uno de los  $m - 1$  valores que toma  $|s - t|$  se tiene una matriz de probabilidades de orden  $m!$  distinta y se escribe:

$$PM(|s - t|) = (p_{ts}^{\pi\delta})_{\pi\delta}, \tag{5.2}$$

o bien

$$PM(|s - t|) = (p_{|s-t|}^{\pi\delta})_{\pi\delta}, \tag{5.3}$$

**Importante:** Estas matrices no dependen del modelo generador de la serie i.i.d.<sup>1</sup>

Por ejemplo para  $m = 3$ , las diferentes matrices de probabilidad, cuando  $|s - t| = 1$ ,  $|s - t| = 2$  y  $k = |s - t| \geq 3$ , son:

$$PM(1) = 1/3! \begin{pmatrix} 0,25 & 0,25 & 0 & 0 & 0,5 & 0 \\ 0 & 0 & 0,25 & 0,25 & 0 & 0,5 \\ 0,25 & 0,5 & 0 & 0 & 0,25 & 0 \\ 0,5 & 0,25 & 0 & 0 & 0,25 & 0 \\ 0 & 0 & 0,25 & 0,5 & 0 & 0,25 \\ 0 & 0 & 0,5 & 0,25 & 0 & 0,25 \end{pmatrix}$$

---

<sup>1</sup>Se han calculado estas matrices si serie unidimensional es i.i.d. para las dimensiones embeddings 3, 4, 5 y 6, utilizando los programa MATLAB y Mathematica.

$$PM(2) = 1/3! \begin{pmatrix} 0,05 & 0,05 & 0,15 & 0,3 & 0,15 & 0,3 \\ 0,15 & 0,15 & 0,2 & 0,15 & 0,2 & 0,15 \\ 0,05 & 0,05 & 0,15 & 0,3 & 0,15 & 0,3 \\ 0,15 & 0,15 & 0,2 & 0,15 & 0,2 & 0,15 \\ 0,3 & 0,3 & 0,15 & 0,05 & 0,15 & 0,05 \\ 0,3 & 0,3 & 0,15 & 0,05 & 0,15 & 0,05 \end{pmatrix}$$

$$PM(k) = 1/3! \begin{pmatrix} 1/3! & 1/3! & 1/3! & 1/3! & 1/3! & 1/3! \\ 1/3! & 1/3! & 1/3! & 1/3! & 1/3! & 1/3! \\ 1/3! & 1/3! & 1/3! & 1/3! & 1/3! & 1/3! \\ 1/3! & 1/3! & 1/3! & 1/3! & 1/3! & 1/3! \\ 1/3! & 1/3! & 1/3! & 1/3! & 1/3! & 1/3! \\ 1/3! & 1/3! & 1/3! & 1/3! & 1/3! & 1/3! \end{pmatrix}$$

Cuando la serie unidimensional  $\{x_t\}_{t=1}^{\infty}$  es i.i.d. la función indicador  $I(\bar{x}_t, \bar{x}_s)$ , definida en la ecuación (5.1), es una variable Bernoulli de parámetro

$$\mu_{ts} = \sum_{\pi \in S_m} p_{ts}^{\pi\pi} = \text{traza}(PM(|s-t|)) = \begin{cases} p_{ts} & \text{si } t \in N(s) \\ \frac{1}{m!} & \text{si } t \notin N(s) \end{cases}. \quad (5.4)$$

donde  $\mu_{ts}$  es la probabilidad de que las  $m$ -historias  $\bar{x}_t$  y  $\bar{x}_s$  tengan asignado el mismo símbolo y esta probabilidad solo depende de  $|t-s|$ . Cuando  $|t-s| < m$  esta probabilidad vale  $p_{ts}$  mientras que vale  $\frac{1}{m!}$  cuando  $|t-s| \geq m$ .

## 5.2. Estadístico Correlación Integral Simbólica.

Comenzamos esta sección definiendo el concepto de *correlación integral simbólica* de un conjunto compacto:

**Definición 5.2.** *La correlación integral simbólica de un conjunto compacto  $X$  de  $\mathbb{R}^m$ , distribuido de acuerdo a una medida  $\mu$ , se define como:*

$$SC(X) = \int \int I(s(\bar{x}), s(\bar{y})) d\mu(\bar{x}) d\mu(\bar{y}) \quad (5.5)$$

La correlación integral simbólica mide la probabilidad de que elegidos al azar dos elementos del conjunto  $X$  tengan asignado el mismo símbolo.

Nosotros estamos interesados en la correlación integral simbólica de una serie vectorial de  $m$ -historias construida a partir de una serie unidimensional. En esta situación, para  $m \geq 2$  y  $\{\bar{x}_t\}_{t=1}^n$  la serie vectorial embebida en  $\mathbb{R}^m$ , una estimación de la correlación integral simbólica del conjunto  $X = \{\bar{x}_t\}_{t=1}^\infty$  viene dada por la siguiente expresión:

$$SC_n^m = \frac{2}{n(n-1)} \sum_{t=1}^{n-1} \sum_{s=t+1}^n I(s(\bar{x}_t), s(\bar{x}_s)) \quad (5.6)$$

Cuando se satisfacen las condiciones del teorema U de Aaronson et al.[1], es decir, cuando la serie temporal  $\{x_t\}_{t=1}^\infty$  es estacionaria y ergódica, el estadístico  $SC_n^m$  cumple:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{n(n-1)} \sum_{t=1}^{n-1} \sum_{s=t+1}^n I(s(\bar{x}_t), s(\bar{x}_s)) = \int \int I(s(\bar{x}), s(\bar{y})) d\mu(\bar{x}) d\mu(\bar{y}) \quad (5.7)$$

esto es

$$SC(\{\bar{x}_t\}_{t=1}^\infty) = SC^m = \lim_{n \rightarrow +\infty} SC_n^m.$$

Cuando  $\{x_t\}_{t=1}^\infty$  es una serie i.i.d., las hipótesis del teorema de Aaronson se verifican, luego nos planteamos la correlación integral simbólica de la serie vectorial de las  $m$ -historias obtenida de la serie i.i.d.

### Media de $SC_n^m$ para una serie i.i.d

En esta sección vamos a computar el valor esperado del estadístico  $SC_n^m$  de la serie vectorial de longitud  $n$  construida a partir de una serie unidimensional i.i.d.,  $\{x_t\}_{t=1}^\infty$ , y dimensión embedding  $m \geq 2$ .

$$\begin{aligned} E[SC_n^m] &= \frac{2}{n(n-1)} \sum_{t=1}^{n-1} \sum_{s=t+1}^n E[I(s(\bar{x}_t), s(\bar{x}_s))] = \\ &= \frac{2}{n(n-1)} \left( \sum_{t=1}^{n-m+1} \sum_{s=t+1}^{t+m-1} E[I(s(\bar{x}_t), s(\bar{x}_s))] + \right. \\ &\quad \left. + \sum_{t=n-m+2}^{n-1} \sum_{s=t+1}^n E[I(s(\bar{x}_t), s(\bar{x}_s))] + \right. \\ &\quad \left. + \sum_{t=1}^{n-1} \sum_{s=t+m}^n E[I(s(\bar{x}_t), s(\bar{x}_s))] \right) \quad (5.8) \end{aligned}$$

Como cada  $I(s(\bar{x}_t), s(\bar{x}_s))$  es una variable aleatoria Bernoulli,  $b(\mu_{ts})$  (5.4) se obtiene que la esperanza del estadístico  $SC_n^m$ , que se denota por  $\mu_n^m$ , vale:

$$\begin{aligned} \mu_n^m = E[SC_n^m] &= \frac{2}{n(n-1)} \left[ \sum_{t=1}^{n-m+1} \sum_{s=t+1}^{t+m-1} \text{traza}(PM|s-t|) \right. \\ &\quad \left. + \sum_{t=n-m+2}^{n-1} \sum_{s=t+1}^n \text{traza}(PM|s-t|) + \sum_{t=1}^{n-1} \sum_{s=t+m}^n \frac{1}{m!} \right] \end{aligned} \quad (5.9)$$

haciendo cálculos se tiene

$$\begin{aligned} \mu_n^m = E[SC_n^m] &= \frac{2}{n(n-1)} \left[ (n-m+1) \sum_{s=2}^m \mu_{1s} \right. \\ &\quad \left. + \sum_{s=2}^{m-1} (m-s) \mu_{1s} + \frac{(n-m)(n-m+1)}{2} \frac{1}{m!} \right] \end{aligned} \quad (5.10)$$

y tomando límites, se tiene que:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} E[SC_n^m] = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu_n^m = E[SC^m] = \frac{1}{m!}. \quad (5.11)$$

Luego, la esperanza asintótica del estadístico  $SC_n^m$  es  $\frac{1}{m!}$  con independencia del proceso generador de la serie i.i.d.

### Varianza de $SC_n^m$ para una serie i.i.d.

Vamos a calcular la varianza asintótica de una transformación lineal del estadístico  $SC_n^m$  correspondiente a la serie vectorial embebida construida a partir de la serie i.i.d. Esta transformación lineal es

$$\sqrt{\frac{n(n-1)}{2}} (SC_n^m - \mu_n^m).$$

Se definen las variables aleatorias  $I_{ts} = I(s(\bar{x}_t), s(\bar{x}_s)) - \mu_{ts}$ , donde  $\mu_{ts}$  viene dada por la ecuación (5.4) e  $\{I_{ts}\}_{t,s}$  con  $t = 1, 2, \dots, n-1$  y  $s = t+1, \dots, n$ , es la familia de estas variables, que tienen media cero.

**Lema 5.3.** Sea  $\{x_t\}_{t \in I}$  una serie i.i.d. y sea sea  $m \geq 2$ . Entonces

$$E[I_{ts}I_{t's'}] = 0$$

siempre que  $|t' - t| > m - 1$  ó  $|s - s'| > m - 1$ .

*Demostración.* Como  $I_{ts} = I(s(\bar{x}_t), s(\bar{x}_s)) - \mu_{ts}$  se tiene que:

$$E[I_{ts}I_{t's'}] = E[I(s(\bar{x}_t), s(\bar{x}_s))I(s(\bar{x}_{t'}), s(\bar{x}_{s'}))] - \mu_{ts}\mu_{t's'}$$

Fijados  $t, s$ , si  $|t' - t| > m - 1$  y  $|s - s'| > m - 1$ , entonces  $I_{ts}$  y  $I_{t's'}$  son variables independientes por lo que  $E[I_{ts}I_{t's'}] = 0$ . Por simetría para probar el lema basta considerar que  $|t' - t| \leq m - 1$  y  $|s' - s| > m - 1$ :

- Si  $s \notin N(t)$ , entonces

1. Cuando  $s' \notin N(t)$  y  $s' \notin N(t')$ :

$$E[I(s(\bar{x}_t), s(\bar{x}_s))I(s(\bar{x}_{t'}), s(\bar{x}_{s'}))] = \frac{1}{m!^2} \quad \text{y} \quad \mu_{ts} = \mu_{t's'} = \frac{1}{m!}.$$

2. Cuando  $s' \notin N(t)$  y  $s' \in N(t')$  o cuando  $s' \in N(t)$  y  $s' \in N(t')$ :

$$E[I(s(\bar{x}_t), s(\bar{x}_s))I(s(\bar{x}_{t'}), s(\bar{x}_{s'}))] = \frac{1}{m!} \text{traza}(PM(|t' - s'|)) = \mu_{ts}\mu_{t's'}$$

- Si  $s \in N(t)$ , se distinguen dos situaciones:

1. Cuando  $s' \in N(t')$  se tiene que:

$$E[I(s(\bar{x}_t), s(\bar{x}_s))I(s(\bar{x}_{t'}), s(\bar{x}_{s'}))] = \text{traza}(PM(|t - s|))\text{traza}(PM(|t' - s'|)) = \mu_{ts}\mu_{t's'}.$$

2. Y cuando  $s' \notin N(t')$  se cumple que:

$$E[I(s(\bar{x}_t), s(\bar{x}_s))I(s(\bar{x}_{t'}), s(\bar{x}_{s'}))] = \text{traza}(PM(|t - s|))\frac{1}{m!} = \mu_{ts}\mu_{t's'}.$$

En todos los casos  $E[I_{ts}I_{t's'}] = 0$ . □

**Lema 5.4.** *Sea  $\{x_t\}_{t \in I}$  una serie i.i.d y sea  $m \geq 2$ . Cuando  $s \geq t + 2m - 1$  se cumple que la covarianza de la variable  $I_{ts}$  con cualquier otra variable  $I_{t's'}$  solo dependen de  $h_1 = |t' - t|$  y  $h_2 = |s' - s|$*

$$\delta(h_1, h_2) = E[I_{ts}I_{t's'}]$$

*Demostración.* Sabemos que las probabilidades  $p_{tt'}^{\pi\delta}$  recogidas en la matriz  $PM(|t - t'|)$  y  $p_{ss'}^{\pi\delta}$  en  $PM(|s - s'|)$ . Fijados  $t$  y  $s$  con  $s \geq t + 2m - 1$  se cumple que:

1. El Lema 5.3 asegura que si  $h_1 \geq m$  o  $h_2 \geq m$ ,  $\delta(h_1, h_2) = 0$ .

2. Cuando  $h_1 < m$  o  $h_2 < m$ , distinguimos:

- Si  $t' > t$  y  $s' > s$

$$E[I(s(\bar{x}_t), s(\bar{x}_s))I(s(\bar{x}_{t'}), s(\bar{x}_{s'}))] = \frac{1}{m!} \sum_{\pi} \sum_{\delta} p_{tt'}^{\pi\delta} p_{ss'}^{\pi\delta} \quad (5.12)$$

$$\delta(h_1, h_2) = E[I_{ts}I_{t's'}] = \frac{1}{m!} \sum_{\pi} \sum_{\delta} p_{tt'}^{\pi\delta} p_{ss'}^{\pi\delta} - \left(\frac{1}{m!}\right)^2.$$

- Cuando  $t' > t$  y  $s > s'$

$$E[I(s(\bar{x}_t), s(\bar{x}_s))I(s(\bar{x}_{t'}), s(\bar{x}_{s'}))] = \frac{1}{m!} \sum_{\pi} \sum_{\delta} p_{tt'}^{\pi\delta} p_{s's}^{\delta\pi} \quad (5.13)$$

$$\delta(h_1, h_2) = E[I_{ts}I_{t's'}] = \frac{1}{m!} \sum_{\pi} \sum_{\delta} p_{tt'}^{\pi\delta} p_{s's}^{\delta\pi} - \left(\frac{1}{m!}\right)^2.$$

- Si  $t' = t$  y  $s' \neq s$

$$E[I(s(\bar{x}_t), s(\bar{x}_s))I(s(\bar{x}_t), s(\bar{x}_{s'}))] = \frac{1}{m!} \text{traza}(PM|s' - s) \quad (5.14)$$

$$\delta(h_1, h_2) = E[I_{ts}I_{t's'}] = \frac{1}{m!} \text{traza}(PM|s' - s) - \left(\frac{1}{m!}\right)^2.$$

Los casos  $t' < t$ ,  $s < s'$ ;  $t' < t, s' < s$  y  $t \neq t'$  y  $s = s'$  son simétricos a los casos anteriores. Puesto que las probabilidades que se utilizan en las ecuaciones (5.12), (5.13) y (5.14) dependen de  $h_1$  y  $h_2$  (ver 5.3) con lo que queda demostrado lo que queríamos.  $\square$

**Proposición 5.5.** Sea  $\{x_t\}_{t \in I}$  una serie i.i.d. y sea  $m \geq 2$ . Se cumple que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n(n-1)}{2} \text{Var}(SC_n^m - \mu_n^m) = \sigma_m^2$$

donde

$$\sigma_m^2 = \sum_{h_1=-m+1}^{m-1} \sum_{h_2=-m+1}^{m-1} E[I_{ts}I_{t+h_1s+h_2}] \quad (5.15)$$

con  $s \geq t + 2m - 1$ .

*Demostración.* La varianza de  $\text{Var}(SC_n^m - \mu_n^m)$  se puede expresar como:

$$\begin{aligned} \frac{n(n-1)}{2} \text{Var}(SC_n^m - \mu_n^m) &= \frac{2}{n(n-1)} \text{Var} \left( \sum_{t=1}^{n-1} \sum_{s=t+1}^n I_{ts} \right) \\ &= \frac{2}{n(n-1)} \sum_{t=1}^{n-1} \sum_{t'=1}^{n-1} \sum_{s=t+1}^n \sum_{s'=t'+1}^n E[I_{ts}I_{t's'}] \end{aligned} \quad (5.16)$$

Por el Lema 5.3, la expresión (5.16) se puede escribir como

$$\begin{aligned} \frac{2}{n(n-1)} &\left[ \sum_{t=1}^{n-1} \sum_{t' \in N(t)} \sum_{s \geq t+2m-1} \sum_{s' \in N(s)} E[I_{ts}I_{t's'}] + \right. \\ &\left. + \sum_{t=1}^{n-1} \sum_{t' \in N(t)} \sum_{s=t+1}^{t+2m-2} \sum_{s' \in N(s)} E[I_{ts}I_{t's'}] \right] \end{aligned} \quad (5.17)$$

El segundo sumando de (5.17) es de orden  $n$  puesto que  $N(t)$  y  $N(s)$  son finitos, luego este sumando converge a cero cuando  $n$  tiende a infinito.

Fijados  $t$  y  $s$  tal que  $s \geq t + 2m - 1$ , por el Lema 5.4 se tiene que

$$E[I_{ts}I_{t's'}] = E[I_{ts}I_{t+h_1s+h_2}]$$

luego como

$$\sum_{t' \in N(t)} \sum_{s' \in N(s)} E[I_{ts}I_{t's'}] = \sum_{h_1=-m+1}^{m-1} \sum_{h_2=-m+1}^{m-1} E[I_{ts}I_{t+h_1s+h_2}] = \sigma_m^2. \quad (5.18)$$

Teniendo en cuenta (5.18) se verifica que

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n(n-1)}{2} \text{Var}(SC_n^m - \mu_n^m) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{n(n-1)} \sum_{t=1}^{n-1} \sum_{t' \in N(t)} \sum_{s \geq t+2m-1} \sum_{s' \in N(s)} E[I_{ts}I_{t's'}] \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{n(n-1)} \sum_{t=1}^{n-1} \sum_{s=t+2m-1}^n \sigma_m^2. \end{aligned} \quad (5.19)$$

Como el número de sumandos de  $\sum_{t=1}^{n-1} \sum_{s=t+2m-1}^n$  es  $\frac{1}{2}(n-2m+1)(n-2m+2)$  se tiene que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n(n-1)}{2} \text{Var}(SC_n^m - \mu_n^m) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{n(n-1)} \sum_{t=1}^{n-1} \sum_{s=t+2m-1}^n \sigma_m^2 = \sigma_m^2.$$

□

### 5.3. Resultado Principal

En esta sección se prueba el principal resultado de este capítulo. Se trata de un teorema que hace posible el contraste de hipótesis no paramétrico que proponemos en la Sección 5.4 cuya hipótesis nula es la serie unidimensional  $\{x_t\}_t$  es i.i.d. frente a cualquier alternativa (no i.i.d.).

**Teorema 5.6.** *Sea  $\{x_t\}_{t \in I}$  una serie i.i.d. y sea  $m \geq 2$ . Entonces el estadístico*

$$\sqrt{\frac{n(n-1)}{2}} \left( \frac{SC_n^m - \mu_n^m}{\sigma_m} \right) \quad (5.20)$$

*se distribuye asintóticamente como una  $\mathcal{N}(0, 1)$  donde  $\mu_n^m$  y  $\sigma_m$  se definen en (5.9) y en (5.18), respectivamente.*

*Demostración.* Para cada entero  $k > 3(m-1)$ , se definen las variables aleatorias:

$$Y_n^k = \sqrt{\frac{2}{n(n-1)}} \left( \sum_{j_1=1}^{r_1} \sum_{j_2=j_1+1}^{r_2} S_{j_1 j_2} + \sum_{j=1}^{r_1} T_j \right),$$

donde

$$S_{j_1 j_2} = \sum_{t=(j_1-1)k+1}^{j_1 k-2m+2} \sum_{s=(j_2-1)k+1}^{j_2 k-2m+2} I_{ts}$$

$$T_j = \sum_{t=(j-1)k+1}^{jk-2m+1} \sum_{s=t+1}^{jk-2m+2} I_{ts}$$

con  $r_1 = [(n-1)/k]$  y  $r_2 = [n/k]$ , la parte entera de  $(n-1)/k$  y  $n/k$ , respectivamente.

Las variables aleatorias  $S_{j_1 j_2}$  son i.i.d. de media 0 y varianza

$$v = \sum_{t=1}^{k-2m+2} \sum_{s=k+1}^{2k-2m+2} \sum_{t'=1}^{k-2m+2} \sum_{s'=k+1}^{2k-2m+2} E[I_{ts} I_{t's'}]. \quad (5.21)$$

Por el Lema 5.4 se sigue que

$$v = \sum_{|h_1| < m} \sum_{|h_2| < m} (k-2m+2-|h_1|)(k-2m+2-|h_2|) E[I_{ts} I_{t+h_1 s+h_2}]$$

Luego por el Teorema Central del Límite para variables aleatorias i.i.d. se tiene que

$$\sqrt{\left(\frac{2}{n(n-1)}\right)} \left( \sum_{j_1=1}^{r_1} \sum_{j_2=j_1+1}^{r_2} S_{j_1 j_2} \right)$$

se distribuye asintóticamente como una  $\mathcal{N}\left(0, \frac{v}{k^2}\right)$ , cuando  $n \rightarrow \infty$ .

Por otra parte las variables aleatorias  $T_j$  son i.i.d. de media cero e independientes de las variables  $\sum_{j_1=1}^{r_1} \sum_{j_2=j_1+1}^{r_2} S_{j_1 j_2}$  con

$$\lim_{n \rightarrow \infty} Var \left( \sqrt{\frac{2}{n(n-1)}} \sum_{j=1}^{r_1} T_j \right) = 0.$$

Luego se tiene que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} Y_n^k = Y^k \quad (5.22)$$

donde  $Y^k \sim \mathcal{N}\left(0, \frac{v}{k^2}\right)$ . Pero como

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{v}{k^2} = \sigma_m^2$$

entonces cuando  $k \rightarrow \infty$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \lim_{n \rightarrow \infty} Y_n^k = Y \quad (5.23)$$

donde  $Y \sim \mathcal{N}(0, \sigma_m^2)$ .



Solo queda probar que:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \limsup_{n \rightarrow \infty} P \left( \left| \sqrt{\frac{n(n-1)}{2}} (SC_n^m - \mu_n^m) - Y_n^k \right| > \varepsilon \right) = 0 \quad (5.24)$$

para todo  $\varepsilon > 0$ , para aplicar la proposición 6.3.9 de [15], de modo que (5.24) implica que (5.20) se distribuye asintóticamente como una  $\mathcal{N}(0, 1)$ .

Para probar (5.24) escribimos

$$\left( \sqrt{\frac{n(n-1)}{2}} (SC_n^m - \mu_n^m) - Y_n^k \right) = \sqrt{\frac{2}{n(n-1)}} (\mathfrak{T}_n^k + U_n^k + UT_n^k)$$

donde

$$\mathfrak{T}_n^k = \sum_{j_1=1}^{r_1-1} \sum_{t=(j_1-1)k+1}^{j_1k-2m+2} \sum_{j_2=j_1+1}^{r_2-1} \sum_{s=j_2k-2m+3}^{j_2k} I_{ts} + \sum_{j_1=1}^{r_1-1} \sum_{t=j_1k-2m+3}^{j_1k} \sum_{s=j_1k+1}^{r_2k-2m+2} I_{ts}$$

$$U_n^k = \sum_{t=1}^{r_1k-2m+2} \sum_{s=r_2k-2m+3}^n I_{ts} + \sum_{t=r_1k-2m+3}^{n-1} \sum_{s=t+1}^n I_{ts}$$

$$UT_n^k = \sum_{j_1=1}^{r_1-1} \sum_{t=(j_1-1)k+1}^{j_1k-2m+2} \sum_{s=j_1k-2m+3}^{j_1k} I_{ts} + \sum_{j_1=1}^{r_1-1} \sum_{t=j_1k-2m+3}^{j_1k-1} \sum_{s=t+1}^{j_1k} I_{ts}$$

y bastaría probar que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \limsup_{n \rightarrow \infty} \text{Var} \left( \sqrt{\frac{n(n-1)}{2}} (SC_n^m - \mu_n^m) - Y_n^k \right) = 0 \quad (5.25)$$

puesto que (5.25) implica (5.24) por la desigualdad de Chebyshev.

Teniendo en cuenta que  $\text{Var}(I_{ts}) \leq 1$  para todo  $t, s$ ,  $|\text{Cov}(X, Y)| \leq \sqrt{\text{Var}(X)\text{Var}(Y)}$  y el Lema 5.3 se cumple que:

$$\text{Var} \left( \sum_{t=\alpha_1}^{\alpha_2} \sum_{t=\beta_1}^{\beta_2} I_{ts} \right) \leq (\alpha_2 - \alpha_1 + 1)(\beta_2 - \beta_1 + 1)(1 + (2m - 1)^2) \quad (5.26)$$

luego, basta contar y se tiene

$$\begin{aligned} \text{Var} \left( \sqrt{\frac{2}{n(n-1)}} \mathfrak{T}_n^k \right) &\leq \frac{2}{n(n-1)} \left( \frac{(r_1-1)(r_2-2)}{2} (k-2m+2)(2m-2)(1+(2m-1)^2) + \right. \\ &+ (r_1-1)((r_2-1)k-2m+2)(1+(2m-1)^2) + \\ &+ \left. 2(r_1-1)(1+(2m-1)^2) \right) \\ &\quad + \sqrt{\frac{r_2-2}{2} (k-2m+2)(2m-2)((r_2-1)k-2m+2)} \end{aligned} \quad (5.27)$$

$$\begin{aligned}
 \text{Var} \left( \sqrt{\frac{2}{n(n-1)}} U_n^k \right) &\leq \frac{2}{n(n-1)} ((r_1 k - 2m + 2)m(1 + (2m-1)^2) + \\
 &+ m^2(1 + (2m-1)^2) + \\
 &+ 2m(1 + (2m-1)^2)\sqrt{(r_1 k - 2m + 2)m})
 \end{aligned} \tag{5.28}$$

$$\begin{aligned}
 \text{Var} \left( \sqrt{\frac{2}{n(n-1)}} UT_n^k \right) &\leq \frac{2}{n(n-1)} ((r_1 - 1)(k - 2m + 2)(2m - 2)(1 + (2m-1)^2) + \\
 &+ (r_1 - 1)(2m - 3)^2(1 + (2m-1)^2) + \\
 &+ 2(r_1 - 1)(2m - 3)(1 + (2m-1)^2)\sqrt{(k - 2m + 2)(2m - 2)})
 \end{aligned} \tag{5.29}$$

cumpléndose que

$$\begin{aligned}
 \lim_{k \rightarrow \infty} \limsup_{n \rightarrow \infty} \text{Var} \left( \sqrt{\frac{2}{n(n-1)}} \mathbb{T}_n^k \right) &= 0 \\
 \lim_{k \rightarrow \infty} \limsup_{n \rightarrow \infty} \text{Var} \left( \sqrt{\frac{2}{n(n-1)}} U_n^k \right) &= 0 \\
 \lim_{k \rightarrow \infty} \limsup_{n \rightarrow \infty} \text{Var} \left( \sqrt{\frac{2}{n(n-1)}} UT_n^k \right) &= 0
 \end{aligned}$$

Por tanto se tiene que:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \limsup_{n \rightarrow \infty} \text{Var} \left( \sqrt{\frac{n(n-1)}{2}} (SC_n^m - \mu_n^m) - Y_n^k \right) = 0$$

con lo que queda demostrado el teorema.  $\square$

## 5.4. Test de independencia: Tamaño y potencia

El objetivo de esta sección es estudiar el tamaño y la potencia del estadístico (5.20) en muestras finitas para contrastar la hipótesis de que la serie temporal  $\{x_t\}$  es i.i.d. ( $H_0$ ) frente a cualquier alternativa ( $H_1$ ).

Para realizar este contraste, fijado un valor de  $m$ , se utiliza el estadístico (5.20) y se tiene en cuenta que la distribución asintótica del mismo bajo la hipótesis nula es  $\mathcal{N}(0, 1)$ .

Para mostrarlo se simulan series de longitudes 250, 500, 1000, 1500, 2000, 2500 y 3000 de distintos modelos generadores de datos para las dimensiones embedding  $m = 3$ ,  $m = 4$ ,  $m = 5$  y  $m = 6$ . Se han utilizado estas dimensiones porque son las adecuada a los tamaños muestrales que encontramos normalmente en las serie económicas y para ellas se han calculado las matrices de probabilidades definidas en la Sección 5.1 de este capítulo, que son necesarias para calcular  $\sigma_m^2$  (ver 5.15).

### Tamaño del test

Para ver el tamaño de este test se han generado 2000 series i.i.d. de cada una de las distribuciones siguientes [45]:

1. Distribución normal con media cero y varianza 1,  $\mathcal{N}(0, 1)$ .
2. Distribución uniforme en el intervalo  $(0, 1)$ ,  $\mathcal{U}(0, 1)$ .
3. Distribución Chi-cuadrado con 4 grados de libertad,  $\chi_4^2$ .
4. Distribución  $t$  de Student con 4 grados de libertad,  $t_4$ .

Se han elegido éstas porque representan un amplio espectro de distribuciones: simétricas, no simétricas, gaussianas y no gaussianas... En cada caso se ha calculado la proporción de rechazo de la hipótesis nula a un valor nominal del 5%. Los resultados se muestran en las Tablas 5.1, 5.2, 5.3 y 5.4.

Tabla 5.1: Tamaño del test: Proporción de rechazo de  $H_0$  al 5% para  $m = 3$

$m = 3$	$T = 250$	$T = 500$	$T = 1000$	$T = 1500$
$\mathcal{N}(0, 1)$	0,045	0,53	0,049	0,05
$\chi_4^2$	0,047	0,045	0,046	0,05
$\mathcal{U}(0, 1)$	0,047	0,055	0,049	0,043
$t_4$	0,048	0,054	0,05	0,046
$m = 3$	$T = 2000$	$T = 2500$	$T = 3000$	
$\mathcal{N}(0, 1)$	0,053	0,048	0,049	
$\chi_4^2$	0,055	0,054	0,043	
$\mathcal{U}(0, 1)$	0,055	0,05	0,047	
$t_4$	0,059	0,047	0,051	

Estos resultados muestran que el tamaño empírico del estadístico se encuentra en valores muy cercanos al su valor nominal del 5%, lo que asegura la aplicabilidad y la reproductividad del test.

Tabla 5.2: Tamaño del test: Proporción de rechazo de  $H_0$  al 5% para  $m = 4$ 

$m = 4$	$T = 250$	$T = 500$	$T = 1000$	$T = 1500$
$\mathcal{N}(0, 1)$	0,049	0,042	0,045	0,047
$\chi_4^2$	0,042	0,046	0,056	0,042
$\mathcal{U}(0, 1)$	0,047	0,049	0,0505	0,044
$t_4$	0,044	0,053	0,042	0,044
$m = 4$	$T = 2000$	$T = 2500$	$T = 3000$	
$\mathcal{N}(0, 1)$	0,043	0,045	0,043	
$\chi_4^2$	0,043	0,04	0,055	
$\mathcal{U}(0, 1)$	0,041	0,041	0,041	
$t_4$	0,047	0,041	0,0525	

Tabla 5.3: Tamaño del test: Proporción de rechazo de  $H_0$  al 5% para  $m = 5$ 

$m = 5$	$T = 250$	$T = 500$	$T = 1000$	$T = 1500$
$\mathcal{N}(0, 1)$	0,041	0,044	0,05	0,043
$\chi_4^2$	0,046	0,043	0,047	0,047
$\mathcal{U}(0, 1)$	0,04	0,049	0,051	0,046
$t_4$	0,049	0,05	0,044	0,045
$m = 5$	$T = 2000$	$T = 2500$	$T = 3000$	
$\mathcal{N}(0, 1)$	0,049	0,05	0,05	
$\chi_4^2$	0,049	0,045	0,044	
$\mathcal{U}(0, 1)$	0,044	0,047	0,048	
$t_4$	0,046	0,049	0,048	

Tabla 5.4: Tamaño del test: Proporción de rechazo de  $H_0$  al 5% para  $m = 6$ 

$m = 6$	$T = 2000$	$T = 2500$	$T = 3000$	$T = 3500$	$T = 4000$
$\mathcal{N}(0, 1)$	0,046	0,056	0,044	0,055	0,045
$\chi_4^2$	0,043	0,0465	0,052	0,0485	0,0505
$\mathcal{U}(0, 1)$	0,056	0,0455	0,0495	0,0455	0,048
$t_4$	0,049	0,0465	0,0505	0,0515	0,045

### Potencia del test

Para estudiar la potencia de este nuevo estadístico, se han generado 1000 series para cada uno de los procesos generadores de datos (PGD) utilizados por Granger y Lin [27], por su variedad y distintos comportamientos no lineales, para cada una de las longitudes consideradas y las distintas dimensiones embedding ya mencionadas. Cuatro de los procesos son medias móviles no lineales (PGD1, PGD2, PGD3 y PGD4), del PGD5 al PGD8 son

procesos autorregresivos lineales y no lineales. El PGD9 es bilineal de orden 1 y 2, el PGD10 es determinista (la logística) y el último PGD11 responde a un modelo ARCH.

$$\begin{array}{ll}
 \text{PGD 1: } x_t = \epsilon_t + 0,8\epsilon_{t-1}^2, & \text{PGD 2: } x_t = \epsilon_t + 0,8\epsilon_{t-2}^2, \\
 \text{PGD 3: } x_t = \epsilon_t + 0,8\epsilon_{t-3}^2, & \text{PGD 4: } x_t = \epsilon_t + 0,8\epsilon_{t-1}^2 + 0,8\epsilon_{t-2}^2 + 0,8\epsilon_{t-3}^2, \\
 \text{PGD 5: } x_t = |x_{t-1}|^{0,8} + \epsilon_t, & \text{PGD 6: } x_t = \text{sign}(x_{t-1}) + \epsilon_t, \\
 \text{PGD 7: } x_t = 0,5x_{t-1} + \epsilon_t, & \text{PGD 8: } x_t = x_{t-1} + \epsilon_t, \\
 \text{PGD 9: } x_t = 0,6\epsilon_{t-1}x_{t-2} + \epsilon_t, & \text{PGD 10: } x_t = 4x_{t-1}(1 - x_{t-1}), \\
 \text{PGD 11: } x_t = \sqrt{h_t}\epsilon_t, h_t = 1 + 0,8x_{t-1}^2 & 
 \end{array}$$

Se ha computado el número de veces que se rechaza la hipótesis nula para cada uno de estos procesos para un nivel de confianza del 5%. Los resultados se muestran en las Tablas 5.5, 5.6, 5.7 y 5.8.

Tabla 5.5: Potencia del test: Proporción de rechazo de  $H_0$  al 5% para  $m = 3$

$m = 3$	$T = 250$	$T = 500$	$T = 1000$	$T = 1500$	$T = 2000$	$T = 2500$	$T = 3000$
PGD1	0,328	0,61	0,854	0,973	1	1	1
PGD2	0,139	0,26	0,482	0,714	0,862	0,953	0,984
PGD3	0,062	0,045	0,058	0,059	0,064	0,057	0,051
PGD4	0,75	0,98	1	1	1	1	1
PGD5	0,78	0,99	1	1	1	1	1
PGD6	0,48	0,84	0,996	1	1	1	1
PGD7	0,64	0,93	1	1	1	1	1
PGD8	0,997	1	1	1	1	1	1
PGD9	0,041	0,04	0,048	0,049	0,042	0,058	0,047
PGD10	1	1	1	1	1	1	1
PGD11	0,062	0,098	0,161	0,232	0,287	0,387	0,47

En la Tabla 5.5 se observa que la potencia del estadístico es baja para todas las longitudes de serie cuando ésta ha sido generada por los modelos PGD3 y PGD9. En el caso del proceso PGD11, la potencia es baja, pero va aumentando con la longitud de la serie aunque siempre es menor del 50%.

En el resto de los casos la potencia del estadístico aumenta con la longitud de la serie e incluso, para longitudes pequeñas, se obtienen buenos resultados, salvo en el caso de la serie generada por el proceso PGD2 donde se necesita que la serie tenga una longitud mayor de 1000 datos para que la potencia supere el 50%.

En las Tablas 5.6 y 5.7 se observa que la potencia del estadístico con las series generadas por los procesos PGD3, PGD9 y PGD11 mejoran y en los tres casos la potencia aumenta conforme aumenta la longitud de la serie.

Tabla 5.6: Potencia del test: Proporción de rechazo de  $H_0$  al 5% para  $m = 4$

$m = 4$	$T = 250$	$T = 500$	$T = 1000$	$T = 1500$	$T = 2000$	$T = 2500$	$T = 3000$
PGD1	0,48	0,87	1	1	1	1	1
PGD2	0,213	0,51	0,9	0,99	1	1	1
PGD3	0,095	0,22	0,52	0,79	0,94	0,994	0,995
PGD4	0,96	1	1	1	1	1	1
PGD5	0,93	1	1	1	1	1	1
PGD6	0,7	0,97	1	1	1	1	1
PGD7	0,79	0,994	1	1	1	1	1
PGD8	1	1	1	1	1	1	1
PGD9	0,20	0,52	0,92	0,999	1	1	1
PGD10	1	1	1	1	1	1	1
PGD11	0,103	0,245	0,46	0,65	0,85	0,93	0,97

Tabla 5.7: Potencia del test: Proporción de rechazo de  $H_0$  al 5% para  $m = 5$

$m = 5$	$T = 500$	$T = 1000$	$T = 1500$	$T = 2000$	$T = 2500$	$T = 3000$
PGD1	0,912	1	1	1	1	1
PGD2	0,68	0,98	1	1	1	1
PGD3	0,35	0,81	0,98	0,99	1	1
PGD4	1	1	1	1	1	1
PGD5	1	1	1	1	1	1
PGD6	0,99	1	1	1	1	1
PGD7	0,99	1	1	1	1	1
PGD8	1	1	1	1	1	1
PGD9	0,65	0,98	1	1	1	1
PGD10	1	1	1	1	1	1
PGD11	0,25	0,57	0,82	0,945	0,99	1

Por los resultados que se muestran en las tablas, se puede ver que la potencia de este estadístico frente a cualquier dependencia en la serie es bastante buena, sobre todo si la dependencia se da en el primer momento. Si el proceso generador de datos es lineal (PGD7), el estadístico discrimina siempre para todas las dimensiones embedding cuando la longitud de la serie es mayor de 1000, pero para series de menor longitud también se obtienen buenos resultados. Si la serie es determinista caótica (PGD10), el estadístico tiene una potencia del 100% en todos los casos.

Cuando la serie está generada por un proceso ARCH(1), como es el PGD11, el estadístico precisa de una serie más larga o una dimensión embedding mayor para poder rechazar la hipótesis nula en más del 50% de los casos; lo que no ocurre con las series generadas por otros procesos.

Para estos modelos generadores de datos los resultados obtenidos para  $m = 6$  son similares a los conseguidos con  $m = 5$ . Cuando la dimensión embedding es  $m = 6$ , como el número de símbolos es 720, se necesitan series más largas para aplicar el estadístico y realizar el contraste.

Consideramos ahora los siguientes procesos generadores de datos

PGD 12:  $x_t = \sqrt{h_t}\epsilon_t, h_t = 1 + 0,8x_{t-5}^2$

PGD 13:  $x_t = 0,8x_{t-5} + \epsilon_t$

PGD 14:  $x_t = 0,3x_{t-2} + 0,7x_{t-5} + \epsilon_t$

PGD 15:  $x_t = \epsilon_t + 0,8\epsilon_{t-5}^2$

PGD 16:  $x_t = 0,6x_{t-5}\epsilon_{t-1} + \epsilon_t$

y repetimos el procedimiento realizado con los modelos desde el PGD1 hasta el PGD11, pero ahora con series de longitud 2000, 2500, 3000 y 3500 y dimensiones embedding  $m = 5$  y  $m = 6$ . Los resultados obtenidos se muestran en la Tabla 5.8.

Tabla 5.8: Potencia del test: Proporción de rechazo de  $H_0$  al 5% para  $m = 6$

$m = 5$	$T = 2000$	$T = 2500$	$T = 3000$	$T = 3500$
PGD12	0,060	0,058	0,049	0,066
PGD13	0,496	0,516	0,50	0,475
PGD14	1	1	1	1
PGD15	0,051	0,045	0,052	0,051
PGD16	0,188	0,244	0,291	0,345
$m = 6$	$T = 2000$	$T = 2500$	$T = 3000$	$T = 3500$
PGD12	0,268	0,3	0,44	0,573
PGD13	1	1	1	1
PGD14	1	1	1	1
PGD15	0,389	0,559	0,701	0,838
PGD16	0,823	0,944	0,994	1

Para series generadas por los modelos PGD12, PGD13, PGD15 y PGD16, la potencia del test es mayor cuando  $m = 6$ . En estos procesos generadores de datos  $x_t$  depende de modo explícito y muy importante del retardo  $t - 5$  y si el embedding se realiza en  $\mathbb{R}^5$ ,  $x_t$  y  $x_{t-5}$  no están en la misma  $m$ -historia y esa podría ser una causa de la menor potencia del test cuando  $m = 5$ . Sin embargo, tanto para  $m = 5$  como para  $m = 6$  se rechaza la hipótesis nula en el 100% de los casos si la serie se ha generado con el PGD14, lo que puede ser debido a que en el modelo generador  $x_t = 0,3x_{t-2} + 0,7x_{t-5} + \epsilon_t$ ,  $x_t$  depende linealmente de  $x_{t-2}$  y  $x_{t-5}$  y es la dependencia de  $x_{t-2}$  la que se muestra en los resultados

obtenidos.

### Aspectos gráficos

En este apartado vamos a visualizar cómo se comporta la correlación integral simbólica (5.6) y el estadístico (5.20) conforme la longitud de la serie aumenta, para series temporales generadas por distintos procesos cuando  $m = 3$  y  $m = 4$ . Estas series son, una i.i.d., otra generada por un modelo AR(1), una serie ARCH(1) y una serie correspondiente a una órbita caótica de la logística. Para ello, hemos generado series temporales de 8000 datos de cada PGD y se han calculado 700 valores de la correlación integral simbólica (5.6) y del estadístico (5.20), tal que el  $k$ -ésimo valor calculado corresponde a la subserie de longitud  $1000 + (k - 1)10$  de la serie de partida. Para cada una de las series y de las dimensiones embedding, los resultados se recogen en dos gráficos, representando en cada uno de ellos el valor de  $SC_k^m$  para cada  $k$  y, en el otro, se representa el valor del estadístico (5.20) para cada  $k$ .

Para todas las series con estructura en los datos, los valores del estadístico (5.20) crecen cuando  $k$  crece, tanto para  $m = 3$  como para  $m = 4$  (Figura 5.2b y d, Figura 5.3b y d y Figura 5.4b y d). Sin embargo, si la serie es i.i.d., el estadístico toma valores en torno a 0 (Figura 5.1b y d).

Observamos también que cuando la serie es determinista caótica, como en el caso de la correspondiente a la Figura 5.4, la representación del estadístico (5.20) frente a las longitudes de serie  $k$  es prácticamente una recta.

Las Figuras 5.2a y c), 5.3a y c) y 5.4a y c) representan los valores de  $SC_k^m$  para las distintas longitudes  $k$  de las series correspondientes a procesos AR, ARCH y caótico, respectivamente, mientras que la Figura 5.1a) y c) corresponde a la serie i.i.d. Se observa que en este último caso el valor de  $SC_k^m$  se estabiliza en torno a  $1/3!$  y  $1/4!$  respectivamente. Parece ocurrir algo similar en el caso de la serie ARCH (Figura 5.3a), pero basta aumentar  $m$  o bien fijarse en la gráfica del estadístico (5.20) para  $m = 4$  para saber que no se trata de una serie i.i.d.



Figura 5.1: Valores de  $SC_k^m$  y del estadístico (5.20) para distintas longitudes  $k$  correspondientes a una serie i.i.d.

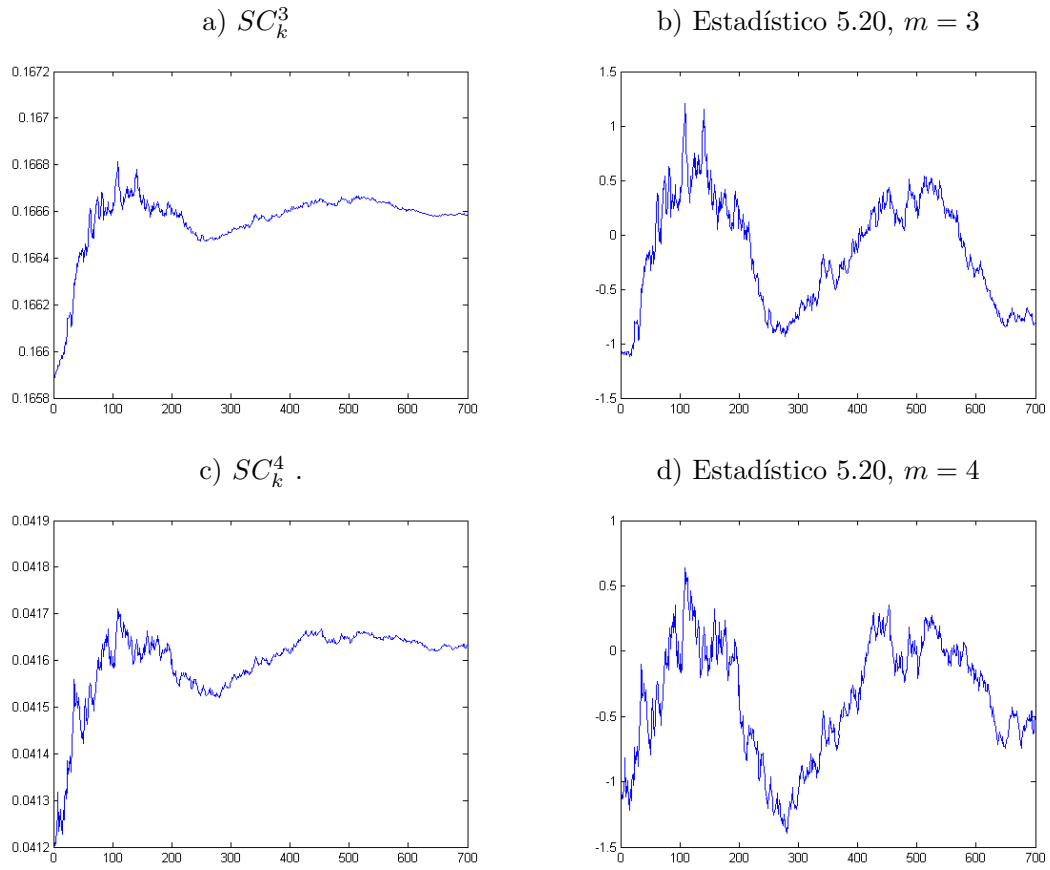


Figura 5.2: Valores de  $SC_k^m$  y del estadístico (5.20) para distintas longitudes de  $k$  correspondientes a una serie AR(1)

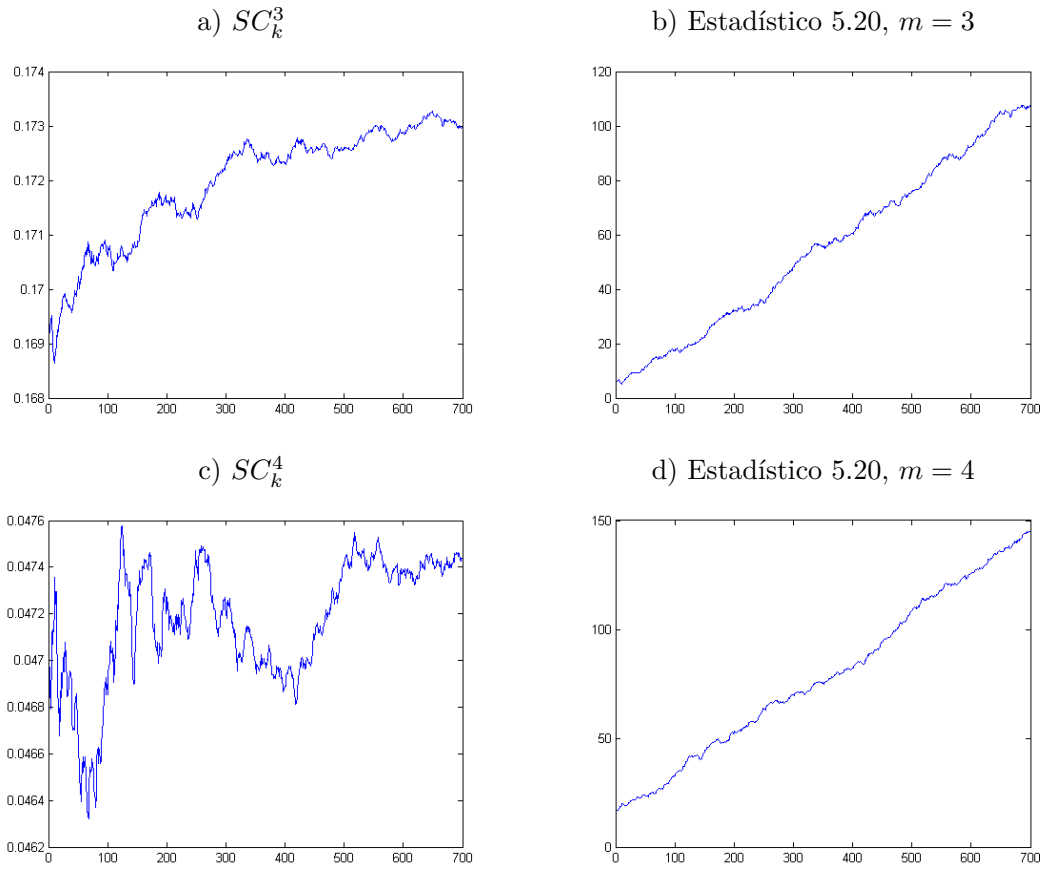


Figura 5.3: Valores de  $SC_k^m$  y del estadístico (5.20) para distintas longitudes de  $k$  correspondientes a una serie ARCH(1)

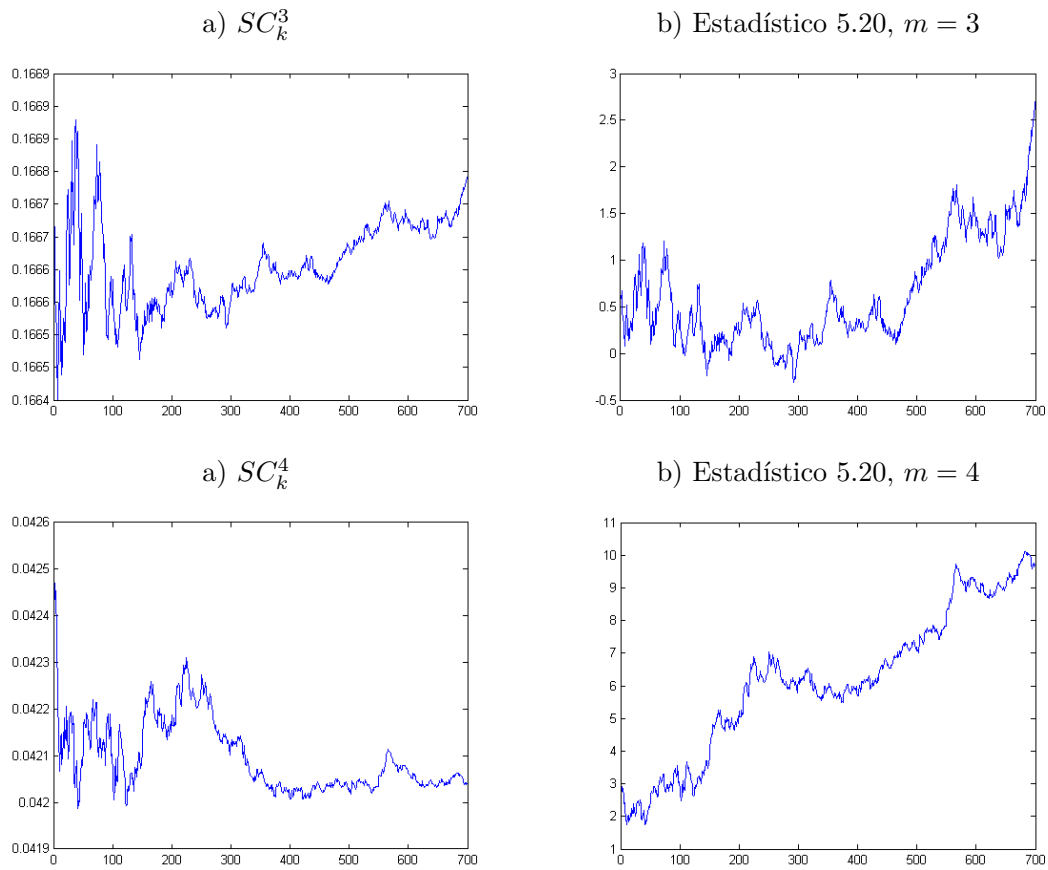
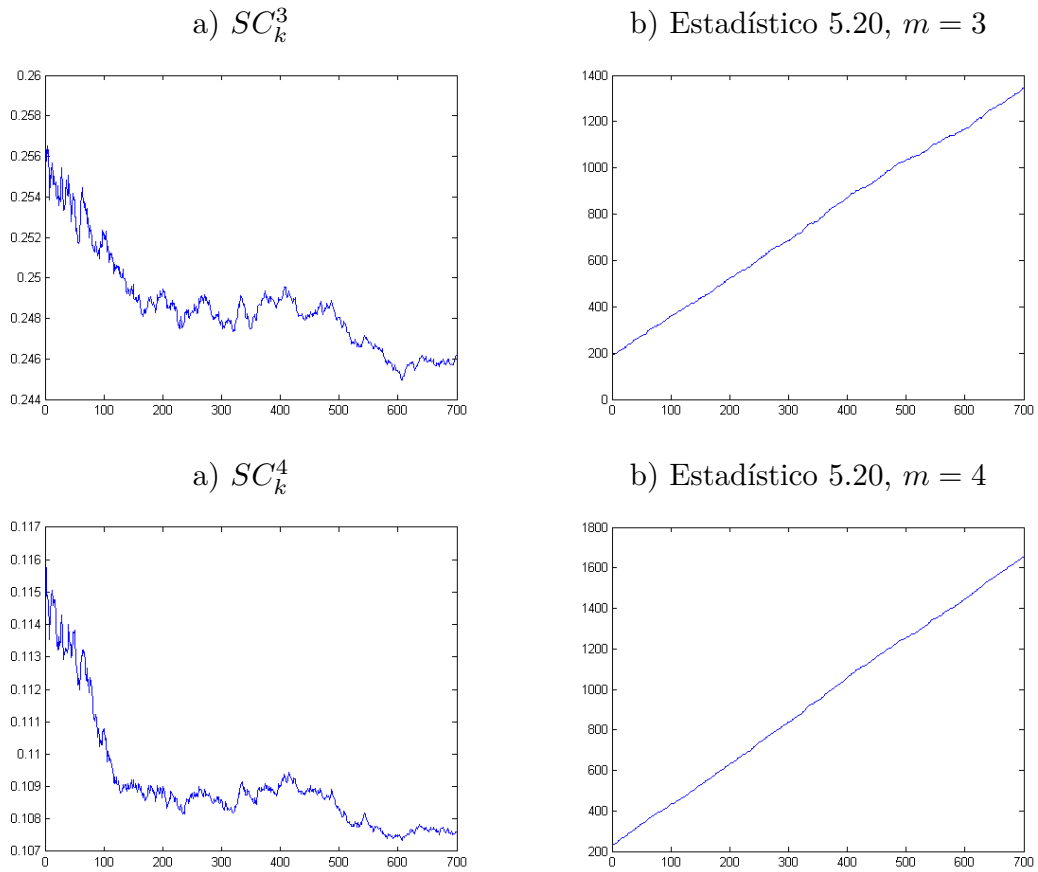


Figura 5.4: Valores de  $SC_k^m$  y del estadístico (5.20) para distintas longitudes de  $k$  correspondientes a una serie caótica



### 5.5. Correlación integral simbólica de una serie vectorial no solapada

Dada una serie  $\{x_t\}_t$  i.i.d., se denota por  $\{\tilde{x}_t\}_{t=1}^k$  la serie vectorial de las  $m$ -historias que no se solapan, que es de longitud  $k = \lceil T/m \rceil$  (donde  $\lceil \cdot \rceil$  indica parte entera de  $T/m$ ), cuyos elementos son de la forma:

$$\tilde{x}_t = (x_{(t-1)m+1}, x_{(t-1)m+2}, \dots, x_{tm})$$

con  $t = 1, 2, \dots, k$ . Las  $m$ -historias de esta serie temporal no tienen elementos comunes y por tanto, si la serie  $\{x_t\}_t$  es i.i.d., cada  $\tilde{x}_t$  es independiente de cada  $\tilde{x}_s$ , con  $t \neq s$ .

La siguiente proposición muestra el comportamiento asintótico del estadístico correlación integral simbólica cuando se aplica a la serie vectorial no solapada  $\{\tilde{x}_t\}_{t=1}^k$ , construida a partir de una serie  $\{x_t\}_{t=1}^\infty$  que sea i.i.d.

**Proposición 5.7.** *Sea  $\{x_t\}_{t=1}^T$  una serie i.i.d. y sea  $m \geq 2$  una dimensión embedding. Entonces el estadístico  $SC_k^m$  de la serie vectorial de  $m$ -historias no solapadas sigue una distribución*

$$\frac{2}{k(k-1)} \mathcal{B}\left(\frac{k(k-1)}{2}, \frac{1}{m!}\right)$$

donde  $\mathcal{B}\left(\frac{k(k-1)}{2}, \frac{1}{m!}\right)$  es una variable binomial de parámetros  $k(k-1)/2$  y  $1/m!$ .

*Demostración.* En este caso las funciones indicador  $I(s(\tilde{x}_t), s(\tilde{x}_s))$  son variables independientes Bernoulli de parámetro  $\frac{1}{m!}$ . Luego la suma de variables Bernoulli iguales e independientes es un variable aleatoria binomial:

$$\sum_{t=1}^{k-1} \sum_{s=t+1}^k I(s(\tilde{x}_t), s(\tilde{x}_s)) \sim \mathcal{B}\left(\frac{k(k-1)}{2}, \frac{1}{m!}\right) \tag{5.30}$$

donde  $k = \lceil T/n \rceil$ . Por tanto, la distribución del estadístico correlación integral simbólica de la serie no solapada,  $SC_k^m$ , que es una transformación lineal de la variable aleatoria binomial (5.30), es

$$SC_k^m \sim \frac{2}{k(k-1)} \mathcal{B}\left(\frac{k(k-1)}{2}, \frac{1}{m!}\right)$$

□

El teorema de Movire-Laplace permite aproximar una variable binomial de parámetros  $n$  y  $p$ , cuando  $n > 10$ ,  $n \cdot p > 5$  y  $n \cdot q > 5$  por una variable aleatoria normal  $\mathcal{N}(np, \sqrt{npq})$ .

En este caso

$$\frac{2}{k(k-1)} \mathcal{B}\left(\frac{k(k-1)}{2}, \frac{1}{m!}\right) \sim \mathcal{N}\left(\frac{1}{m!}, \sqrt{\frac{2}{k(k-1)} \left(\frac{1}{m!} \left(1 - \frac{1}{m!}\right)\right)}\right)$$

tipificando se obtiene:

$$\frac{SC_k^m - \frac{1}{m!}}{\sqrt{\frac{2}{k(k-1)} \left(\frac{1}{m!} \left(1 - \frac{1}{m!}\right)\right)}} \sim \mathcal{N}(0, 1). \quad (5.31)$$

### Tamaño y potencia del test

Para mostrar el buen comportamiento del estadístico (5.31) en series finitas en relación al contraste propuesto en la Sección 5.4, se han simulado 2000 series unidimensionales i.i.d. de longitudes 250, 500, 1000, 1500 y 2000, generadas por la distribución  $\mathcal{N}(0, 1)$ . Los resultados se muestran en la Tabla 5.9.

Tabla 5.9: Tamaño del test: Proporción de rechazo de  $H_0$  al 5% cuando la serie vectorial es no solapada

	$T = 250$	$T = 500$	$T = 1000$	$T = 1500$	$T = 2000$
$m = 3$	0,040 (83)	0,047 (166)	0,0485 (333)	0,0455 (500)	0,053 (666)
$m = 4$	0,045 (62)	0,0496 (125)	0,0515 (250)	0,046 (350)	0,0455 (500)
$m = 5$	0,036 (50)	0,0465 (100)	0,047 (200)	0,0545 (300)	0,0496 (400)

Se han obtenido similares resultados para series i.i.d. que responden a otras distribuciones.

Se observa que para  $m = 5$ , si la serie tiene una longitud  $T = 250$ , el estadístico a un nivel de significación del 5% rechaza la hipótesis nula en el 3,6% de los casos. En esta situación el número de  $m$ -historias no solapadas es pequeño ( $\leq 50$ ) en relación al número de símbolos y posiblemente ésta sea la causa de este resultado (infratamaño).

Con respecto a la potencia se ha procedido de modo análogo a la Sección 5.4, para lo que se han generado 1000 series de cada PGD y cada dimensión embedding y los resultados se muestran en las Tablas 5.10, 5.11 y 5.12.

Al comparar estos resultados con los obtenidos para series solapadas, se puede decir que es mayor la potencia del test cuando se toma la serie vectorial completa, teniendo en cuenta todas las  $m$ -historias, que cuando solo se utiliza la serie vectorial de las  $m$ -historias no

Tabla 5.10: Potencia del test: Proporción de rechazo de  $H_0$  al 5% cuando la serie vectorial es no solapada para  $m = 3$

$m = 3$	$T = 250$ (83)	$T = 500$ (166)	$T = 1000$ (333)	$T = 1500$ (500)	$T = 2000$ (666)
PGD1	0,11	0,186	0,43	0,62	0,75
PGD2	0,06	0,1	0,17	0,23	0,31
PGD3	0,06	0,053	0,051	0,04	0,058
PGD4	0,244	0,494	0,851	0,964	0,997
PGD5	0,26	0,525	0,871	0,978	0,996
PGD6	0,086	0,15	0,307	0,433	0,601
PGD7	0,177	0,358	0,70	0,896	0,964
PGD8	0,667	0,951	1	1	1
PGD9	0,041	0,04	0,048	0,049	0,042
PGD10	1	1	1	1	1
PGD11	0,052	0,062	0,075	0,08	0,096

Tabla 5.11: Potencia del test: Proporción de rechazo de  $H_0$  al 5% cuando la serie vectorial es no solapada para  $m = 4$

$m = 4$	$T = 500$ (125)	$T = 1000$ (250)	$T = 1500$ (350)	$T = 2000$ (500)
PGD1	0,285	0,616	0,852	0,957
PGD2	0,103	0,244	0,411	0,615
PGD3	0,088	0,123	0,207	0,294
PGD4	0,768	0,99	1	1
PGD5	0,703	0,967	0,999	1
PGD6	0,148	0,319	0,537	0,719
PGD7	0,481	0,904	0,983	1
PGD8	0,988	1	1	1
PGD9	0,134	0,279	0,43	0,608
PGD10	1	1	1	1
PGD11	0,072	0,129	0,171	0,234

solapadas, ello se debe a que al considerar solo las  $m$ -historias que no se solapan hay una pérdida de información que está presente en la serie vectorial solapada y además, la serie vectorial de las  $m$ -historias no solapadas es de menor tamaño, lo que ralentiza la convergencia del estadístico a su distribución límite.

Pese a la pérdida de información que supone considerar solo las  $m$ -historias que no se solapan, el test rechaza la hipótesis nula cuando la serie unidimensional procede del modelo determinista PGD10 en todos los casos.

Tabla 5.12: Potencia del test: Proporción de rechazo de  $H_0$  al 5% cuando la serie vectorial es no solapada para  $m = 5$

$m = 5$	$T = 1000$ (200)	$T = 1500$ (300)	$T = 2000$ (400)
PGD1	0,5523	0,80	0,95
PGD2	0,293	0,404	0,661
PGD3	0,141	0,264	0,358
PGD4	0,99	1	1
PGD5	0,954	0,998	1
PGD6	0,223	0,369	0,528
PGD7	0,803	0,969	1
PGD8	1	1	1
PGD9	0,257	0,457	0,652
PGD10	1	1	1
PGD11	0,109	0,161	0,283

## 5.6. Propiedades asintóticas del estadístico correlación integral simbólica

En esta sección se prueban algunas propiedades asintóticas que verifica el estadístico correlación integral simbólica.

### i) Consistencia

**Proposición 5.8.** *Sea  $m \geq 2$  un entero positivo. Si  $E(SC^m) \neq \frac{1}{m!}$  se cumple que*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P \left( \sqrt{\frac{n(n-1)}{2}} \left( \frac{|SC_n^m - \mu_n^m|}{\sigma_m} \right) > C \right) = 1 \quad (5.32)$$

para todo  $C \in \mathbb{R}^+$ , donde  $\mu_n^m$  y  $\sigma_m$  se definen en las expresiones (5.9) y (5.18), respectivamente.

*Demostración.* La expresión

$$\sqrt{\frac{n(n-1)}{2}} \left( \frac{|SC_n^m - \mu_n^m|}{\sigma_m} \right) > C$$

es equivalente a

$$|SC_n^m - \mu_n^m| > \frac{\sqrt{2}\sigma_m C}{\sqrt{n(n-1)}}$$

Si la serie  $\{x_t\}_t$  es i.i.d., se cumple que  $\lim_{n \rightarrow \infty} \mu_n^m = \frac{1}{m!}$ .



Si  $E(SC^m) \neq \frac{1}{m!}$  se tiene que existe un  $n_0$  y un número real positivo  $\delta$  tal que para todo  $n \geq n_0$  se cumple que  $|SC_n^m - \mu_n^m| > \delta$ .

Por otra parte, ya que  $\sigma_m$  y  $C$  son número reales positivos, existe un  $n_1$  tal que para todo  $n \geq n_1$  se cumple que  $\frac{\sqrt{2}\sigma_m C}{\sqrt{n(n-1)}} < \delta$ .

Si se toma  $n_2 = \max\{n_0, n_1\}$ , entonces para todo  $n \geq n_2$  se tiene que

$$|SC_n^m - \mu_n^m| > \frac{\sqrt{2}\sigma_m C}{\sqrt{n(n-1)}}$$

y por tanto

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P\left(|SC_n^m - \mu_n^m| > \frac{\sqrt{2}\sigma_m C}{\sqrt{n(n-1)}}\right) = 1$$

como se quería demostrar. □

Es importante determinar cuándo  $E(SC^m) \neq \frac{1}{m!}$ , que es normalmente el caso cuando la serie temporal que se estudia no es i.i.d.

## ii) Nuisance free parameter

Si se tiene un modelo generador de datos

$$X_t = G(I_{t-1}, \theta) + u_t \tag{5.33}$$

donde  $\{u_t\}_t$  es i.i.d., se cumple, tal como se ha visto en las secciones anteriores, que la distribución asintótica del estadístico (5.20) correspondiente a las  $m$ -historias de esta serie,  $\{u_t\}$ , (residuos) sigue una distribución normal y se puede escribir:

$$\sqrt{n} \left( \frac{SC^m(\theta) - \mu(\theta)}{\sigma(\theta)} \right) \rightarrow^d \mathcal{N}(0, 1)^2$$

donde  $\mu(\theta) = \lim_{n \rightarrow \infty} E[SC_n^m(\theta)]$  y  $\sigma(\theta) = \lim_{n \rightarrow \infty} E[(SC_n^m(\theta) - \mu(\theta))^2]$ .

Nos planteamos bajo qué condiciones el estadístico correlación integral simbólica de los residuos estimados, obtenidos de estimar consistentemente el modelo (5.33), tiene la misma distribución asintótica que la de los residuos teóricos  $\{u_t\}_t$ . Cuando se da esta situación, es decir la distribución del estadístico (5.20) no se ve afectada por la estimación de los parámetros del modelo, se dice que *es nuisance-parameter free* [18].

Más formalmente, si se denota por  $SC^m(\theta)$  el estadístico correlación integral simbólica para los residuos  $\{u_t\}_t$ , con  $\theta$  el vector de parámetros del modelo, y  $SC^m(\hat{\theta})$  es el estadístico

---

<sup>2</sup> $\rightarrow^d$  significa convergencia en distribución.

correlación integral simbólica para los residuos estimados, con  $\hat{\theta}$  el vector de parámetros estimados consistentemente, entonces  $SC^m$  es un estadístico nuisance-free parameter si

$$\sqrt{n} \left( SC^m(\theta) - SC^m(\hat{\theta}) \right) \xrightarrow{P} 0^3 \quad (5.34)$$

El teorema que demostramos a continuación da las condiciones bajo las que se verifica (5.34).

**Teorema 5.9.** *Supongamos que el proceso generador de datos se expresa como*

$$X_t = G(I_{t-1}, \theta) + u_t \quad (5.35)$$

donde  $I_{t-1}$  es un conjunto finito de regresores,  $\theta$  es un vector de parámetros,  $\{u_t\}$  es i.i.d. y  $G$  es una función continua definida sobre un conjunto compacto. Entonces la estadístico correlación integral simbólica  $SC_n^m$  es nuisance-parameter free.

*Demostración.* Sea  $\hat{\theta}$  una estimación consistente del vector de parámetros  $\theta$  y sea  $m \geq 2$ . Entonces se quiere probar que se verifica que

$$\sqrt{\frac{n(n-1)}{2}} \left( SC_n^m(\theta) - SC_n^m(\hat{\theta}) \right) \xrightarrow{P} 0.$$

Los residuos estimados se pueden expresar:

$$u_t(\hat{\theta}) = X_t - G(I_{t-1}, \hat{\theta}) = u_t(\theta) + G(I_{t-1}, \theta) - G(I_{t-1}, \hat{\theta}) \quad (5.36)$$

entonces

$$|u_t(\theta) - u_t(\hat{\theta})| = |G(I_{t-1}, \theta) - G(I_{t-1}, \hat{\theta})|. \quad (5.37)$$

Se sabe que los  $m!$  símbolos proporcionan una partición de  $\mathbb{R}^m$  en  $m!$  subconjuntos

$$\{A_{\pi_1}, A_{\pi_2}, \dots, A_{\pi_{m!}}\},$$

y que se cumple que  $P(\bar{u}_t(\theta) \in A_{\pi_i} \cap A_{\pi_j}) = 0$  para todo  $i \neq j$ , si los residuos  $u_t$  proceden de una distribución continua. Luego, sin pérdida de generalidad, se puede considerar que una  $m$ -historia  $\bar{u}_t(\theta)$  pertenece a una bola de radio  $\varepsilon > 0$  que verifica que  $B(\bar{u}_t(\theta), \varepsilon) \subset A_\pi$  para algún  $\pi \in S_m$ . Para este  $\varepsilon$ , y dado que  $G$  es una función continua en un conjunto compacto (y por consiguiente es uniformemente continua) existe un  $\delta > 0$  independiente de  $I_{t-1}, \theta$  y  $\hat{\theta}$  tal que si  $\| (I_{t-1}, \theta) - (I_{t-1}, \hat{\theta}) \| < \delta$ , por (5.37),

$$|u_t(\theta) - u_t(\hat{\theta})| < \varepsilon$$

<sup>3</sup> $\xrightarrow{P}$  significa convergencia en probabilidad.

y por consiguiente  $\bar{u}_t(\hat{\theta}) \in A_\pi$ .

Luego se sigue que la función indicador

$$I(s(\bar{u}_t(\theta)), s(\bar{u}_s(\theta))) = I(s(\bar{u}_t(\hat{\theta})), s(\bar{u}_s(\hat{\theta})))$$

para casi todo  $t$  y  $s$ , y por consiguiente

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P \left( \sqrt{\frac{n(n-1)}{2}} |SC_n^m(\theta) - SC_n^m(\hat{\theta})| > 0 \right) = 0$$

con lo que queda demostrado el teorema.  $\square$

**Nota 5.10.** Hay que señalar que hemos usado que la aplicación  $G$  sea uniformemente continua, por lo que podríamos haber considerado esta hipótesis en el Teorema 5.9 y no sería necesario que el dominio de  $G$  fuese compacto.

**Nota 5.11.** Una prueba similar podría realizarse utilizando el desarrollo de Taylor de  $G$ , si  $G$  es diferenciable respecto de  $\theta$  y se cumpliera  $\sup_t \sup_\theta E|\nabla G(I_{t-1}, \theta)| < \infty$ .

**Nota 5.12.** También tengamos en cuenta que si el proceso generador de datos fuese multiplicativo, es decir

$$X_t = G(I_{t-1}, \theta)u_t$$

puesto que la correlación integral simbólica es invariante bajo transformaciones monótonas, podemos considerar  $|X_t| = |G(I_{t-1}, \theta)||u_t|$  y tomando logaritmos aplicar el Teorema 5.9 a  $\{|u_t|\}_t$ .

## 5.7. Gráficos de recurrencia simbólicos

Dada una serie vectorial en  $\mathbb{R}^m$  y su correspondiente serie de símbolos de  $S_m$ , la función indicador  $I(\cdot, \cdot)$ , definida en la página 79, nos ayuda a saber cuándo y cuántas veces la serie  $\{\bar{x}_t\}$  visita cada una de las  $m!$  zonas de la partición simbólica.<sup>4</sup>

Para la serie temporal vectorial  $\{\bar{x}_i\}_{i=1}^n$  de  $\mathbb{R}^m$  (y su correspondiente serie de símbolos  $\{s(\bar{x}_i)\}_{i=1}^n$ ) se puede definir, al igual que para los gráficos de recurrencia clásicos (Capítulo 4), una matriz  $S \in M_n$ , llamada matriz de recurrencia simbólica, donde

$$S_{ij} = I(s(\bar{x}_i), s(\bar{x}_j))$$

con  $i, j = 1, 2, \dots, n$ . Cuando  $S_{ij} = 1$ , se dice que los estados  $\bar{x}_i$  y  $\bar{x}_j$  son *recurrentes* al mismo símbolo  $s(\bar{x}_i) = s(\bar{x}_j)$ . Esta matriz de recurrencia simbólica puede representarse en el plano, donde en cada uno de los ejes se representa el tiempo  $i, j = 1, 2, \dots, n$  de modo que si  $\bar{x}_i$  y  $\bar{x}_j$  son estados recurrentes, en la posición  $(i, j)$  se sitúa un punto<sup>5</sup> de color negro y cuando los estados  $\bar{x}_i$  y  $\bar{x}_j$  no son recurrentes, es decir,  $S_{ij} = 0$ , la posición  $(i, j)$  está vacía. Esta representación es *el gráfico de recurrencia simbólico* para la serie vectorial.

En [41] Marwan cita a Groft [37] en relación a este tipo de gráficos de recurrencia como una variante de los gráficos de recurrencia clásicos, aunque ya en [37] se utilizaban los símbolos asignados a los elementos de una serie vectorial para estudiar si dos series tenían algún tipo de dependencia entre ellas. Estos autores, si bien mencionan la posibilidad de estos gráficos de recurrencia simbólicos, no definen ni consideran medidas sobre ellos que puedan ayudar a la comprensión de las series cuando se hace uso de esta herramienta gráfica, ni muestran propiamente que los gráficos también pueden aportar información de la serie que se estudie.

Si en la matriz de recurrencia simbólica de una serie vectorial se distingue entre los distintos símbolos recurrentes se obtiene la matriz simbólica *coloreada* de la serie vectorial, que se define como:

$$\bar{S}_{ij} = \bar{I}(s(\bar{x}_i), s(\bar{x}_j)) = \begin{cases} s_\pi & \text{si } s(\bar{x}_i) = s(\bar{x}_j) = \pi \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

<sup>4</sup>La partición simbólica de  $\mathbb{R}^m$  es la familia de subconjuntos de  $\mathbb{R}^m$  determinados por los  $\binom{m}{2}$  hiperplanos definidos por las igualdades de las  $m$  componentes de un elemento de  $\mathbb{R}^m$  tomadas de dos en dos. Estos hiperplanos son  $\{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^m : x_i = x_j, i \neq j\}$ , de modo que todos los elementos de un subconjunto de la partición tienen asignado el mismo símbolo (Definición 5.1).

<sup>5</sup>Punto donde los dos estados son recurrentes, llamado punto de recurrencia.

donde  $s_\pi$  es el número asignado al símbolo  $s(\bar{x}_i) = \pi$ , con  $i, j = 1, 2, \dots, n$ . Luego, si a cada símbolo recurrente se le asigna un color se obtendría la representación de la matriz simbólica coloreada, que consistiría en situar en la posición  $(i, j)$ , un punto cuyo color dependerá del símbolo  $\pi$  asignado a los estados recurrentes  $\bar{x}_i$  y  $\bar{x}_j$  ( $\bar{S}_{ij} = s_\pi$ ) y que cuando  $\bar{S}_{ij} = 0$  estará vacía. Estos nuevos gráficos se llaman *gráficos de recurrencia simbólicos coloreados*.

Es importante resaltar que para utilizar esta herramienta gráfica no es necesario fijar el valor de un parámetro de proximidad  $\varepsilon > 0$ . El gráfico de recurrencia simbólico coloreado (y el no coloreado) de una serie vectorial es único, mientras que para cada valor del parámetro  $\varepsilon$  se obtiene un gráfico de recurrencia clásico distinto (Capítulo 4).

El gráfico de recurrencia simbólico de una serie vectorial de  $\mathbb{R}^m$  aporta información de interés acerca de la dinámica de la misma, muestra de ello son los gráficos de recurrencia simbólicos que se verán a continuación. Como en particular, esta herramienta se quiere usar en el análisis de serie temporales, para tener constancia de la información que revelan, se van a utilizar con seis series vectoriales obtenidas de series temporales generadas por distintos procesos: Dos series periódicas, una procedente de un sistema dinámico discreto y otra de un sistema dinámico continuo; una serie caótica generada por la aplicación logística, una serie procedente de un modelo autorregresivo AR(1) y una serie i.i.d. La longitud de las series es de 1000 datos, siendo cada una de ellas embebida en  $\mathbb{R}^4$ .

#### ▪ Series periódicas

Las Figuras 5.5a) y 5.5b) son los gráficos de recurrencia simbólicos correspondientes a la serie vectorial de  $m$ -historias que se ha construido a partir de la componente  $x$  de una órbita periódica obtenida de un sistema dinámico de Liu [8]. Se puede observar la importancia del color; en la Figura 5.5a) se utiliza el mismo color para los distintos símbolos recurrentes, mientras que en la Figura 5.5b) se utilizan colores distintos para mostrar las recurrencias a símbolos diferentes. Este segundo gráfico aporta más información, puesto que muestra que la serie de símbolos está principalmente formada por dos de ellos (hay algunos otros estados recurrentes a otros símbolos, pero muchos menos y no se percibe su color debido a la longitud de la serie y a las dimensiones del gráfico), luego la serie vectorial alterna su permanencia en dos zonas de la partición simbólica<sup>6</sup> de  $\mathbb{R}^4$  y en ambas se mantiene durante un periodo de tiempo similar.

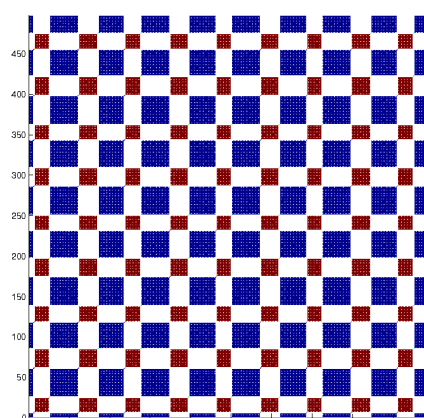
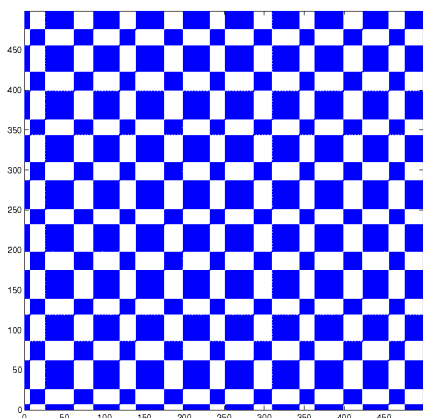
---

<sup>6</sup>Se trata de las zonas de la partición simbólica correspondientes a símbolos asignados al orden ascendente

La Figura 5.6a) muestra el gráfico de recurrencia simbólico correspondiente a la serie embebida de una órbita periódica del sistema dinámico  $([0, 1], f(x) = 3,845x(1-x))$ . Cuando en la matriz de recurrencia simbólica no se distingue entre los símbolos recurrentes, el gráfico de recurrencia que resulta está formado por líneas diagonales del mismo color. Sin embargo, si distinguimos entre los símbolos, se puede observar que las líneas están formadas por puntos de seis colores distintos ( $abcdefabcdefabcde f\dots$ ), indicando que la serie vectorial visita seis zonas de la partición simbólica de  $\mathbb{R}^4$  y pasa de una a otra sucesivamente (Figura 5.6b). Este comportamiento puede ser percibido debido al uso del color.

Figura 5.5: Importancia del color en un gráfico de recurrencia simbólico (I)

a) Gráfico de recurrencia simbólico      b) Gráfico de recurrencia simbólico coloreado



#### ■ Serie i.i.d.

La Figura 5.7a) muestra el gráfico de recurrencia simbólico correspondiente a una serie temporal i.i.d ( $\mathcal{N}(0, 1)$ ) y la Figura 5.7b) es el gráfico de recurrencia simbólico cuando se hace un zoom sobre los estados recurrentes de los 200 primeros datos de la serie vectorial. Como a simple vista se puede ver, los estados recurrentes parecen distribuirse homogéneamente y no se observan estructuras ni colores que predominen sobre los restantes.

#### ■ Serie procedente de un modelo AR(1)

La Figura 5.8a) muestra el gráfico de recurrencia simbólico correspondiente a una serie procedente de un modelo autorregresivo AR(1) ( $x_t = 0,5x_{t-1} + \epsilon_t$ ) y la Figura 5.8b)

y descendente de una úpla.

Figura 5.6: Importancia del color en un gráfico de recurrencia simbólico (II)

a) Gráfico de recurrencia simbólico      b) Gráfico de recurrencia simbólico coloreado

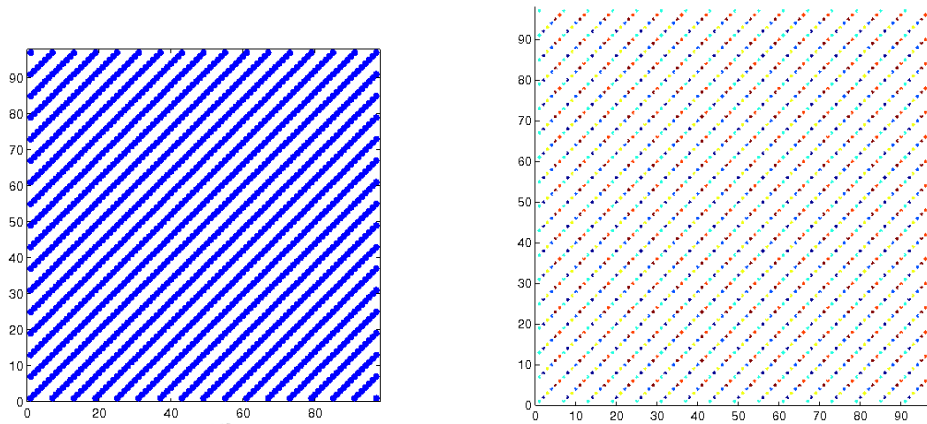
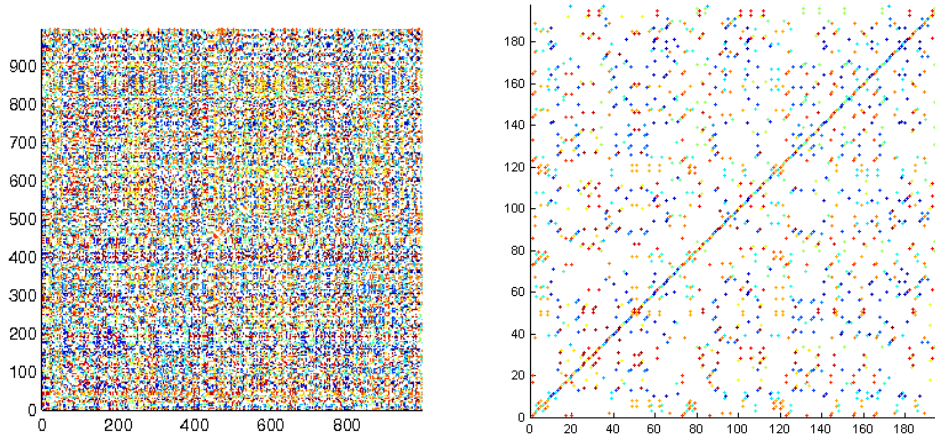


Figura 5.7: Gráficos de recurrencia simbólicos correspondientes a una serie i.i.d. y  $m = 4$

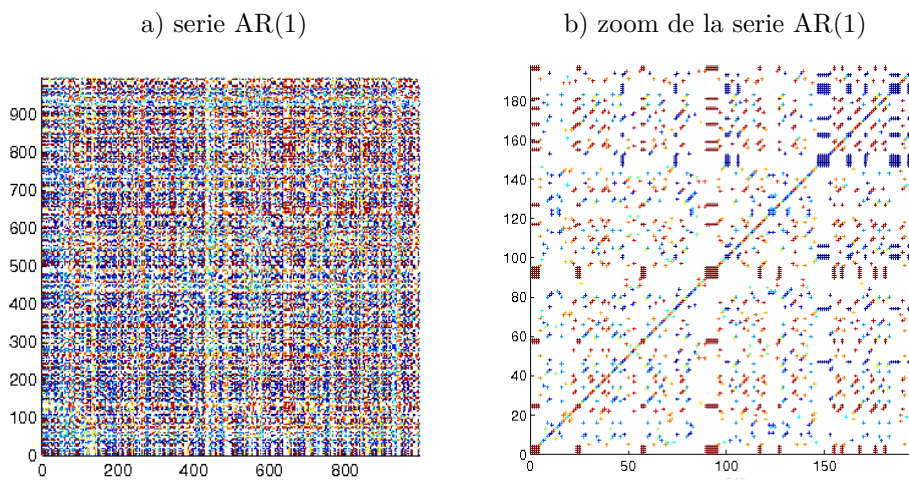
a) serie i.i.d.      b) zoom serie i.i.d.



es el gráfico de recurrencia simbólico correspondiente a los 200 primeros datos de la serie vectorial. A diferencia del gráfico correspondiente a una serie i.i.d., se pueden ver ciertas estructuras que forman los estados recurrentes simbólicos y predominio de algún color, es decir los estados de la serie de  $m$ -historias recurren a unos símbolos en mayor proporción que a otros.

■ **Serie caótica**

Análogamente, la Figura 5.9a) muestra el gráfico de recurrencia simbólico para una órbita del sistema dinámico  $([0, 1], f(x) = 4x(1 - x))$ . En la Figura 5.9 se observa un mayor predominio de un color o equivalentemente más estados recurrentes al símbolo

Figura 5.8: Gráficos de recurrencia simbólicos correspondientes a una serie AR(1) y  $m = 4$ 

asignado a dicho color, así como la mayoría de los estados recurrentes se distribuyen formando cortas líneas diagonales con distintos símbolos que se repiten o bien líneas verticales formadas por el mismo símbolo (ver Figura 5.9b)).

En la Figura 5.10 vemos el gráfico de recurrencia obtenido de embeber la proyección de la primera componente de una serie vectorial del sistema dinámico continuo 4.1 cuando  $e = 0$ . Se pueden observar la inestabilidad de la dinámica.

#### ■ Serie no estacionaria

La Figura 5.11 corresponde al gráfico de recurrencia simbólico de una serie vectorial construida a partir de una serie temporal no estacionaria generada con el sistema dinámico  $([0, 1], f(x) = ax(1 - x))$  variando el parámetro  $a$  cada cien datos. En el gráfico se percibe el cambio de comportamiento dinámico del sistema cuando cambia el valor del parámetro  $a$ .

Con estos ejemplos se muestra que el uso de gráficos de recurrencia simbólicos puede ayudar a comprender el comportamiento de series unidimensionales. Es claro, que los graficos solo no bastan al igual que ocurre con los gráficos de recurrencia clásicos. En la siguiente sección se definen diferentes medidas basadas en las estructuras existentes en estos gráficos y en el número de estados recurrentes a cada uno de los posibles símbolos.



Figura 5.9: Gráficos de recurrencia simbólicos para la  $x_t = 4x_{t-1}(1 - x_{t-1})$  con condición inicial  $x_0 = 0,15$  y  $m = 4$

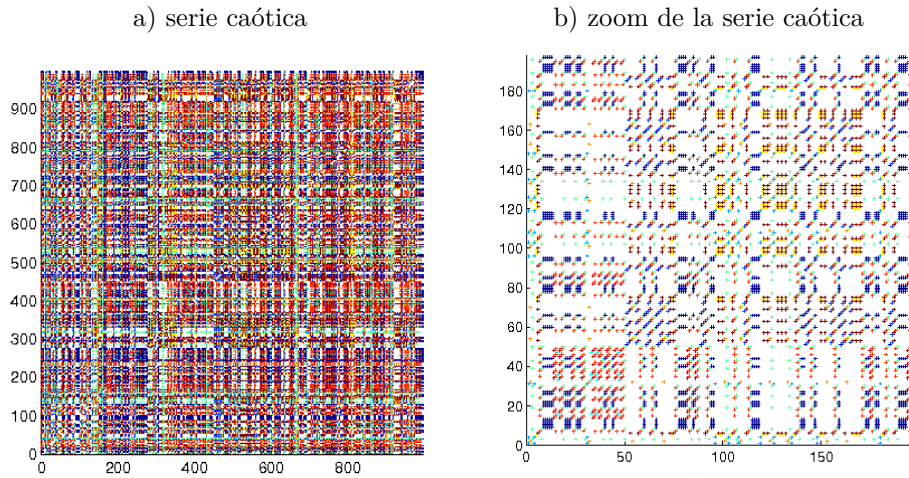
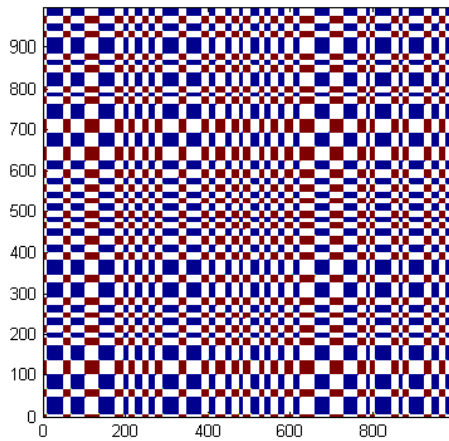


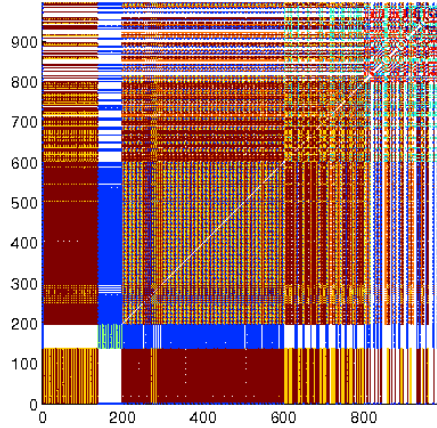
Figura 5.10: Gráfico de recurrencia simbólico para una serie obtenida del sistema dinámico continuo (4.1) cuando  $e = 0$  ( $m = 4$ ).



### 5.8. Medidas en gráficos de recurrencia simbólicos

En esta sección se van a definir medidas sobre el gráfico de recurrencia simbólico de una serie vectorial. En particular, estas medidas van a ser calculadas para los gráficos de la sección anterior y los que se obtendrían si hiciéramos el embedding de las series en  $\mathbb{R}^3$ . Además, también se ha trabajado con una serie temporal generada por un modelo ARCH(1) (PGD 11), debido al interés económico de estos modelos. Esta serie ha sido tratada igual que las de la sección anterior: a partir de una serie unidimensional de longitud 1000, se ha construido una serie vectorial para  $m = 3$  y  $m = 4$ .

Figura 5.11: Gráfico de recurrencia simbólico para  $x_t = ax_{t-1}(1 - x_{t-1})$  con condición inicial  $x_0 = 0,15$ ,  $m = 4$  y  $a$  cambiante



### Proporción de puntos recurrentes

La proporción de puntos recurrentes de un gráfico de recurrencia simbólico es una medida de la densidad de los pares de estados recurrentes a los distintos símbolos. Se define como:

$$RECS = \frac{1}{n^2} \sum_{i,j=1}^n S_{ij}.$$

Esta definición se corresponde con una estimación de la correlación integral simbólica definida en (5.6). En la Tabla 5.13 se han recogido los valores de esta medida para los gráficos de recurrencia simbólicos de las series temporales de la sección anterior y la nueva serie ARCH(1), cuando  $m = 3$  y  $m = 4$ .

Tabla 5.13: Proporción de puntos recurrentes en los gráficos de recurrencia simbólicos de series embebidas en  $\mathbb{R}^3$  y  $\mathbb{R}^4$  para datos de seis procesos distintos

Modelo	$RECS, m = 3$	$RECS, m = 4$
$N(0, 1)$	0,1662	0,0417
$AR(1)$	0,1826	0,0567
$x_{t+1} = 4x_t(1 - x_t)$	0,2566	0,1162
Periodic 1	0,4915	0,4576
Periodic 2	0,3327	0,1658
ARCH(1)	0,1688	0,0432

- Para la serie i.i.d. considerada, se observa que la proporción de puntos recurrentes toma valores próximos a  $1/3!$  o  $1/4!$  (en coherencia con los resultados de la Sección 5.2), dependiendo de si la serie se ha embebido en  $\mathbb{R}^3$  o  $\mathbb{R}^4$ .

En general, teniendo en cuenta los resultados de la Sección 5.3, la probabilidad de que dos estados obtenidos de embeber una serie unidimensional i.i.d. sean recurrentes es fija, y depende solo de la dimensión embedding.

- En el caso de que la serie presente algún tipo de dependencia, como puede ser la serie que procede de un modelo AR(1) o de un modelo ARCH(1), la proporción de puntos recurrentes debería diferenciarse del número de puntos recurrentes de una serie i.i.d., puesto que dos estados serán recurrentes al mismo símbolo no solo por azar, sino que la relación de dependencia de los elementos de la serie influye en ello. Se observa que en el caso de la serie ARCH(1) que hemos generado, como la dependencia se da en la varianza, con una serie de longitud 1000 esta proporción de estados recurrentes no se diferencia de la correspondiente a una serie i.i.d. Si en vez de la serie se utilizará la serie de las varianzas estimadas, se obtendrían valores de esta medida mayores que los que se obtendrían si se considerara que la serie de las varianzas es i.i.d., pero este caso todavía necesita ser interpretado.
- Para las series deterministas simuladas (periódicas y caótica) los valores de esta medida son sensiblemente mayores que para los gráficos correspondientes a series estocásticas. En general, para las series vectoriales procedentes de series periódicas o caóticas, que dos estados tengan el mismo patrón de orden en sus componentes no depende del azar sino de la relación determinista generadora de los datos.

### Proporción de pares de estados que recurren a cada uno de los símbolos

Dada una serie vectorial de  $\mathbb{R}^m$ , la proporción de pares de estados recurrentes al símbolo  $\pi$  mide la proporción de parejas de estados que tienen asignado el símbolo  $\pi$  de  $S_m$  (también informa sobre el tiempo que la serie vectorial permanece en cada una de las zonas de la partición simbólica de  $\mathbb{R}^m$ ). Se define como:

$$RECS(\pi) = \frac{1}{n^2} \sum_{i,j=1}^n S_{ij}(\pi),$$

es decir, solo se tienen en cuenta los elementos de la matriz de recurrencia simbólica que tienen asignado un 1 cuando  $s(\bar{x}_i) = s(\bar{x}_j) = \pi$  (lo que es equivalente a calcular de los estados que recurren a cualquier símbolo cuantos lo hacen a un símbolo concreto).

Se calcula esta medida para cada uno de los símbolos en los gráficos de recurrencia de la sección anterior y en los gráficos que se obtendrían al embeber las series en  $\mathbb{R}^3$ .

Tabla 5.14: Proporción de pares de estados que recorren a cada uno de los símbolos de  $S_3$

	Periódica 1	Periódica 2	$x_{t+1} = 4x_t(1 - x_t)$	AR(1)	$N(0, 1)$	ARCH(1)
$\pi_1$	0,3564	0,1111	0,1372	0,0626	0,031	0,0424
$\pi_2$	$9,0452 \cdot 10^{-5}$	0,1104	0,0036	0,0256	0,0256	0,0182
$\pi_3$	$3,0151 \cdot 10^{-5}$	0,1111	0,0156	0,0275	0,0275	0,0243
$\pi_4$	$1,3266 \cdot 10^{-4}$	0	0,0357	0,0176	0,0243	0,0256
$\pi_5$	$5,628 \cdot 10^{-5}$	0	0,0646	0,0171	0,0265	0,0331
$\pi_6$	0,1343	0	0	0,0534	0,0313	0,0252

Tabla 5.15: Proporción de pares de estados que recorren a cada uno de los símbolos de  $S_4$  (I)

	AR(1)	$N(0, 1)$	$x_{t+1} = 4x_t(1 - x_t)$
$\pi_1$	0,0144	0,0026	0,0429
$\pi_2$	0,0037	0,0017	0,0011
$\pi_3$	0,0015	0,0013	0,0036
$\pi_4$	$6,5457 \cdot 10^{-4}$	$9,3654 \cdot 10^{-4}$	0,0028
$\pi_5$	0,0015	0,0017	$8,1771 \cdot 10^{-4}$
$\pi_6$	$5,0956 \cdot 10^{-4}$	0,002	0,0177
$\pi_7$	0,0035	0,0015	$7,0694 \cdot 10^{-4}$
$\pi_8$	$9,9898 \cdot 10^{-4}$	0,0024	0,0042
$\pi_9$	0,0016	0,0024	0,0029
$\pi_{10}$	$7,613 \cdot 10^{-4}$	0,0013	0,0182
$\pi_{11}$	$1,571 \cdot 10^{-4}$	0,0012	0,0057
$\pi_{12}$	$4,6526 \cdot 10^{-4}$	0,0011	0,0156
$\pi_{13}$	$4,2296 \cdot 10^{-4}$	0,0013	0
$\pi_{14}$	$3,4441 \cdot 10^{-4}$	$9,3654 \cdot 10^{-4}$	0
$\pi_{15}$	$9,3654 \cdot 10^{-4}$	0,0015	0
$\pi_{16}$	0,0011	0,0029	0
$\pi_{17}$	$7,0694 \cdot 10^{-4}$	0,0020	0
$\pi_{18}$	0,0037	0,0024	0
$\pi_{19}$	$8,7612 \cdot 10^{-4}$	0,0017	0
$\pi_{20}$	0,0015	0,0022	0
$\pi_{21}$	$3,4441 \cdot 10^{-4}$	0,0018	0
$\pi_{22}$	0,0018	0,0013	0
$\pi_{23}$	0,0041	0,0025	0
$\pi_{24}$	0,0011	0,0012	0

- Los resultados que se recogen en las Tablas 5.14 y 5.16 indican que cuando la serie es periódica, hay símbolos con un número de recurrencias grande frente a otros símbolos que no tienen recurrencias o cuyo número de recurrencias es próximo a cero.

Tabla 5.16: Proporción de pares de estados que recorren a cada uno de los símbolos de  $S_4$  (II)

	Periodica 1	Periodica 2	ARCH(1)
$\pi_1$	0,33524	0,0276	0,0056
$\pi_2$	$9,0452 \cdot 10^{-5}$	0,0276	0,0015
$\pi_3$	$3,0151 \cdot 10^{-5}$	0,0276	0,0011
$\pi_4$	$1,3266 \cdot 10^{-4}$	0,0276	$9,3654 \cdot 10^{-4}$
$\pi_5$	$5,628 \cdot 10^{-5}$	0,0276	0,0016
$\pi_6$	0,1214	0,0279	0,0019
$\pi_7$	$5,628 \cdot 10^{-5}$	0	0,0021
$\pi_8$	$9,0452 \cdot 10^{-5}$	0	0,0013
$\pi_9$	$3,0151 \cdot 10^{-5}$	0	$9,9898 \cdot 10^{-4}$
$\pi_{10}$	$1,3266 \cdot 10^{-4}$	0	0,0028
$\pi_{11}$	0	0	$5,5588 \cdot 10^{-4}$
$\pi_{12}$	0	0	0,0012
$\pi_{13}$	0	0	0,0019
$\pi_{14}$	0	0	0,0025
$\pi_{15}$	0	0	0,0017
$\pi_{16}$	0	0	0,0014
$\pi_{17}$	0	0	0,0015
$\pi_{18}$	0	0	0,0016
$\pi_{19}$	0	0	0,0027
$\pi_{20}$	0	0	$7,0695 \cdot 10^{-4}$
$\pi_{21}$	0	0	0,0024
$\pi_{22}$	0	0	0,0016
$\pi_{23}$	0	0	0,0023
$\pi_{24}$	0	0	0,0016

El gráfico de recurrencia de la Figura 5.5b) muestra que los estados recurrentes se concentran en dos símbolos, denotados por  $\pi_1$  y  $\pi_6$  en coherencia con los resultados de la Tabla 5.16. En el caso del gráfico de la Figura 5.6b) son seis los símbolos donde se concentran las recurrencias de la serie vectorial de  $\mathbb{R}^4$  y los restantes símbolos no tienen recurrencias, tal como se cuantifica en las Tabla 5.16 (análogo comportamiento se observa en la Tabla 5.14, pero para la partición simbólica de  $\mathbb{R}^3$ ).

Esta medida también se puede interpretar en términos de color (o tiempo). En la Figura 5.5b) el color correspondiente al símbolo  $\pi_1$  está presente aproximadamente dos veces y media el color del símbolo  $\pi_6$  y los restantes colores no se perciben. Es decir, los estados visitan esencialmente dos zonas de la partición simbólica de  $\mathbb{R}^4$  y el tiempo que la órbita reconstruida permanece en una de ellas es casi tres veces el tiempo que permanece en la otra.

En el caso de la Figura 5.6b) los colores asignados a los seis símbolos con recurrencias no nulas (de  $\pi_1$  a  $\pi_6$ ) aparecen en la misma proporción, indicando que se visitan por

igual 6 zonas de la partición simbólica de  $\mathbb{R}^4$ , siendo el gráfico de recurrencia el que nos indica el orden, siempre el mismo, en el que es visitada cada una de las zonas de la partición.

- Los valores, que toma esta medida para los distintos símbolos correspondiente al gráfico de recurrencia de la serie caótica (Figura 5.9), indican que la mayor parte de pares de estados recurrentes se concentran en los símbolos  $\pi_1$ ,  $\pi_6$ ,  $\pi_{10}$  y  $\pi_{12}$ . Contrariamente a los símbolos desde  $\pi_{13}$  hasta  $\pi_{24}$  no les corresponden pares de estados recurrentes.
- Cuando la serie es i.i.d. la proporción de pares de estados que recurren a cada uno de los símbolos es aproximadamente igual, indicando que todas las zonas de la partición simbólica de  $\mathbb{R}^4$  son visitadas por igual. Es decir, dos estados son recurrentes a cualquiera de los símbolos de  $S_4$  con la misma probabilidad (Tabla 5.15).
- Si la serie ha sido generada por un modelo AR(1), se distingue un símbolo con un mayor número de pares de estados que recurren a dicho símbolo. El número de recurrencias a este símbolo es aproximadamente cinco veces el número de puntos de recurrencia del símbolo que menor número tiene (Tabla 5.15).
- En el caso de la serie ARCH(1) también ocurre que hay un símbolo que se distingue por un mayor número de recurrencias. Sin embargo, el número de recurrencias a este símbolo no es tan significativamente grande como en el caso de la serie que procede del modelo AR(1) o de un modelo determinista (Tabla 5.16). Se necesita una serie más larga embebida en  $\mathbb{R}^4$  o en  $\mathbb{R}^m$ , con  $m > 4$ , para observar que un símbolo acumula mayor número de recurrencias.

De los resultados obtenidos podemos decir que si se tiene una serie determinista, hay símbolos de un cierto  $S_m$  para los que la probabilidad de encontrar dos  $m$ -historias recurrentes a estos símbolos es 0.

El comportamiento de estas series en relación a las recurrencias a los distintos símbolos de  $S_3$  se recogen en la Tabla 5.14 e indican comportamientos similares a los mostrados en las Tablas 5.15 y 5.16.

Tabla 5.17: Proporción de puntos recurrentes que forman líneas verticales

Modelo	$VS, m = 3$	$VS, m = 4$
Periódica 1	0,9993	0,9985
Periódica 2	0	0
$x_{t+1} = 4x_t(1 - x_t)$	0,4402	0,2846
$AR(1)$	0,4630	0,3062
$N(0, 1)$	0,1612	0,03867
$ARCH(1)$	0,2021	0,0691

### Líneas verticales

Al igual que en los gráficos de recurrencia clásicos, en un gráfico de recurrencia simbólico se pueden observar líneas verticales. Una línea vertical de longitud  $v$  que comienza en  $(i, j)$  (los estados  $i$  y  $j$  tienen asignado el mismo símbolo) ocurre cuando  $S_{ij+k} = 1$  para  $k = 0, 1, \dots, v - 1$  (análogamente se podrían definir líneas horizontales). La longitud mínima de una línea vertical es  $v_{\min} = 2$ .

Para una serie embebida y su serie de símbolos, los que hacen posible este tipo de líneas son solo dos símbolos, el que da el patrón de orden ascendente y el que da el patrón de orden descendente en las componentes de los elementos de la serie vectorial<sup>7</sup>. Si una línea vertical tiene longitud  $v$  en un gráfico de recurrencia de una serie vectorial, se tienen  $v$  estados consecutivos de la serie de  $m$ -historias que permanecen en la misma zona de la partición simbólica de  $\mathbb{R}^m$  y que corresponde al símbolo asignado al patrón de orden de las componentes ascendente o descendente.

La proporción de los pares de estados que siendo recurrentes forman líneas verticales en un gráfico de recurrencia simbólico se define como:

$$VS = \frac{\sum_{v=v_{\min}}^n vN(v)}{\sum_{i,j=1}^n S_{ij}},$$

donde  $N(v)$  es el número de líneas verticales de longitud  $v$ .

- En el gráfico de recurrencia simbólico de Figura 5.5, el 99,85 % de estados recurrentes forman líneas verticales. Sin embargo, en el gráfico de recurrencia correspondiente a la Figura 5.6 los símbolos asociados a los estados recurrentes no forman líneas verticales, sino solo líneas diagonales, por lo que para esta serie se obtiene un valor

<sup>7</sup>Observación: el orden de las componentes de la segunda componente hasta la última de la  $m$ -historia  $\bar{x}_i$  determinan el orden de la primeras  $m - 1$  componentes de  $\bar{x}_{i+1}$ .

de esta medida igual a 0 (cuando se realiza el estudio para la serie embebida en  $\mathbb{R}^3$  los resultados, como se muestra en la Tabla 5.17, no varían).

Tengamos en cuenta que ambos gráficos de recurrencia corresponden a series embebidas de series periódicas, una de un sistema dinámico continuo y otro discreto.

- Para la serie simulada i.i.d. (Figura 5.7a) solo un 3,87 % de los estados recurrentes se distribuyen formando líneas verticales, un número significativamente menor que cuando se estudian estas líneas en los gráficos de recurrencia de las series restantes. Para estas series la probabilidad de que dos estados consecutivos tengan asignado el mismo símbolo (ascendente o descendente) es fija y no depende del proceso generador de la serie i.i.d.
- Cuando la serie corresponde a la órbita caótica simulada de la aplicación logística se obtiene que el 28,5 % de los estados recurrentes forman líneas verticales. En este caso, el comportamiento caótico provoca inestabilidad de las órbitas periódicas, con lo que estados recurrentes a distintos símbolos forman cortas líneas diagonales, tal que estas líneas se repiten en el gráfico de recurrencia simbólico.
- Cuando la serie responde a un modelo AR(1), un 30,6 % de los estados recurrentes forman líneas verticales, mientras que si la serie es ARCH(1) solo el 6,9 %, casi el doble de los estados recurrentes que forman líneas verticales si la serie es i.i.d.

### Longitud media de las líneas verticales

La longitud media de las líneas verticales da el tiempo medio (la media del número de estados consecutivos de una serie vectorial de  $\mathbb{R}^m$ ) que la serie vectorial embebida está en las zonas de la partición simbólica correspondientes a los símbolos ascendente y descendente de  $\mathbb{R}^m$  y se define como:

$$TV = \frac{\sum_{v=v_{\min}}^n vN(v)}{\sum_{v=1}^n N(v)},$$

Esta medida vale 0 cuando la serie es periódica y corresponde a un sistema dinámico discreto, no hay dos estados consecutivos que tengan asignado el mismo símbolo, porque no se dan líneas verticales.

Se observa que los valores más bajos de esta medida corresponden a la serie ARCH(1) pese a que el número de estados recurrentes que forman líneas verticales es mayor que



Tabla 5.18: Longitud media de las líneas verticales

Modelo	$TV$
Periódica 1	26,394
Periódica 2	0
$N(0, 1)$	2,341
$AR(1)$	2,7767
$x_{t+1} = 4x_t(1 - x_t)$	3,1372
$ARCH(1)$	2,16

cuando la serie es i.i.d. Si bien la estructura existente en los datos hace posible un mayor número de estos estados recurrentes que forman líneas verticales, éstas son principalmente de longitud 2. En el caso de la serie i.i.d. hay menos estados recurrentes formando líneas verticales pero la proporción de líneas de longitud 2 es menor comparada con la serie generada por el modelo ARCH(1).

### Líneas diagonales

A la vista de los gráficos de recurrencia, las líneas diagonales también tienen importancia en el análisis de los mismos. Se define una línea diagonal de longitud  $p$  en un gráfico de recurrencia simbólico a la línea formada por los puntos que representan pares de estados recurrentes a distintos símbolos (los puntos son de distintos colores) lo que ocurre cuando  $S_{i+kj+k} = 1$  para  $k = 0, 1, \dots, p - 1$ , pero  $s(\bar{x}_t) \neq s(\bar{x}_{t+1})$  con  $t = i, \dots, i + p - 2$  y se define como:

$$DS = \frac{\sum_{p=p_{\min}}^n pD(p)}{\sum_{i,j=1}^n S_{ij}},$$

donde  $D(p)$  es el número de estas líneas diagonales de longitud  $p$ . Se considera una línea diagonal cuando tiene al menos dos puntos.

Estas líneas son interesantes cuando en ellas se repite la misma secuencia de símbolos (la misma disposición de los colores en la línea diagonal), lo que indicaría que la línea diagonal no aparece solo debido al azar sino que esa misma disposición de los símbolos se repite debido a la estructura existente en la serie.

La Figura 5.6 corresponde al gráfico de recurrencia en  $\mathbb{R}^4$  de una órbita periódica del sistema dinámico generado por la función logística para  $a = 3,84$ . En este caso solo hay líneas diagonales que repiten el mismo patrón de símbolos y que indican que la serie

vectorial construida va pasando de una región de la partición simbólica a otra siempre con la misma pauta, recorriendo seis de estas regiones, para volver a empezar.

No tenemos todavía un programa que permita calcular esta medida tal como ha sido definida. Sin embargo, sí se pueden hacer los cálculos si se consideran líneas diagonales sin la exigencia de que estén formadas por estados recurrentes a símbolos distintos, es decir se da cabida a las líneas diagonales que tienen símbolos repetidos y las denotamos como *DVS*.

La Tabla 5.19 muestra los valores de la medida *DVS* para los gráficos de recurrencia simbólicos de la Sección 5.7. Se observa que un 78 % de los estados recurrentes forman líneas diagonales aún teniendo en cuenta las líneas diagonales formadas por el mismo símbolo (contabilizadas en los estados recurrentes que forman líneas verticales) los valores que toma esta medida (*DVS*) para esta serie caótica es grande, lo mismo que ocurre cuando las series son periódicas. En el caso de las serie periódicas simuladas cuando procede de un sistema dinámico discreto todos los puntos recurrentes forman líneas diagonales mientras que, cuando la serie periódica procede de un sistema dinámico continuo los puntos recurrentes forman bloques de líneas verticales luego hay muchas líneas diagonales formadas por el mismo símbolo.

Análogamente al caso de las líneas verticales, cuando se miden las líneas diagonales también podríamos considerar, en media, qué longitud tienen estas líneas, aunque creemos que sería más interesante computar los patrones de líneas diagonales que se dan con mayor frecuencia.

Buscar patrones de líneas diagonales debe distinguir series con estructura de aquellas que son i.i.d. porque si observamos los resultados de esta medida para la serie i.i.d. simulada, el azar hace que un 49,31 % de los estados recurrentes formen líneas diagonales, similar al valor obtenido cuando la serie ha sido generada por un proceso ARCH, aunque, claro, en este último caso el número de estados recurrentes es mayor.

### **Puntos recurrentes aislados**

Otra medida a tener en cuenta son la proporción de los puntos de recurrencia que están aislados. Dos estados recurrentes  $\bar{x}_t$  y  $\bar{x}_s$  dan lugar a un punto de recurrencia aislado  $S_{ts} = 1$  cuando para  $i = t - 1, i = t + 1, j = s - 1, s, s + 1, S_{ij} = 0$  y además, también  $S_{t,s-1} = 0$  y  $S_{t,s+1} = 0$  (gráficamente alrededor del punto de recurrencia  $(t, s)$  no hay

Tabla 5.19: Proporción de puntos recurrentes que forman líneas diagonales con posible repetición de símbolos

Modelo	DVS
Periódica 1	0,9969
Periódica 2	1
$x_{t+1} = 4x_t(1 - x_t)$	0,7824
$AR(1)$	0,5267
$N(0, 1)$	0,4929
$ARCH(1)$	0,4931

ningún otro punto de recurrencia.

Tabla 5.20: Porcentaje de punto de recurrencia aislados

Modelo	$ARS, m = 3$	$ARS, m = 4$
$N(0, 1)$	16,43	45,56
$AR(1)$	9,8	26,98
$x_{t+1} = 4x_t(1 - x_t)$	3,04	8,69
Periodic 1	0	0
Periodic 2	0	0
$ARCH(1)$	15,17	44,68

La Tabla 5.20 muestra que de las series simuladas, aquellas que son deterministas tienen un porcentaje muy bajo de puntos recurrentes que sean aislados, mientras que cuando la serie es i.i.d. el número de puntos recurrentes que son aislados es sensiblemente mayor.

### 5.9. Detectando cambios de comportamiento dinámico

Cuando se estudia una serie temporal, puede ocurrir que la serie no sea estacionaria porque el proceso generador haya cambiado en algún o algunos momentos durante el periodo temporal. Teniendo en cuenta cómo se comportan las medidas definidas en la sección anterior, éstas podrían ayudarnos a distinguir cambios en el comportamiento dinámico de la serie que se estudia. Para ello, elegida una dimensión embedding  $m$ , se ha seguido la siguiente metodología: se han calculado medidas sobre los gráficos de recurrencia simbólicos correspondientes a ventanas consecutivas de  $w$  datos de la serie, de modo que dos ventanas sucesivas no se solapan en  $ns$  datos y lo hacen en  $w - ns$ . Así, la ventana de datos  $k$  corresponde a la subseries formada por los datos  $\{x_t\}_{t=(k-1)ns+1}^{(k-1)ns+w}$ .

Vamos a ver cómo se comportan estas medidas en los dos casos:

1. Sea una serie temporal de longitud 8000, tal que cada bloque de 2000 datos se ha generado con un modelo autorregresivo AR(1), en el orden siguiente:

$$x_t = 0,8x_{t-1} + \epsilon_t \quad x_t = 0,3x_{t-1} + \epsilon_t \quad x_t = 0,6x_{t-1} + \epsilon_t \quad x_t = 0,4x_{t-1} + \epsilon_t.$$

Con el objetivo de saber si se puede detectar cuándo cambia el modelo generador de la serie se ha utilizado la medida proporción de puntos recurrentes, cuyo valor se representa en el eje de ordenadas y en el eje de abscisas se representan las ventanas de datos, de modo que a los  $w$  primeros datos de la serie, primera ventana, le corresponderá la proporción de puntos recurrentes del gráfico de recurrencia correspondiente a estos  $w$  datos. Se desplaza la ventana 10 datos y se repite el proceso, y así sucesivamente

Para  $ns = 10$  y  $m = 4$ , se han tomado dos longitudes de ventanas de datos  $w = 500$  y  $w = 1000$ . En la Figura 5.12a) se visualizan los resultados obtenidos cuando  $w = 500$  y en la Figura 5.12b) los resultados para  $w = 1000$ . En ambos gráficos se observan los cambios en el modelo generador de datos.

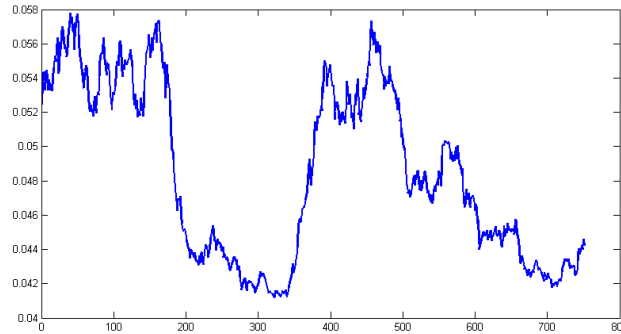
En este caso los gráficos son muy similares aunque cuando el tamaño de la ventana es más pequeño los puntos en los que cambia el modelo se pueden precisar más.

Cuando  $w = 1000$  y  $ns = 10$ , la ventana de datos 152 ( $\{x_t\}_{t=1511}^{2010}$ ) es la primera en la que los 10 últimos datos no se obtienen utilizando el primer modelo autorregresivo, que es el que genera los 990 primeros datos de esa ventana; la primera ventana con todos sus elementos obtenidos del segundo modelo autorregresivo es la 201 ( $\{x_t\}_{t=2001}^{2500}$ ). De modo análogo la primera ventana con elementos del segundo proceso generador y los 10 últimos del tercer proceso generador de la serie es la 352, siendo la ventana 401 la que tiene todos sus elementos generados por el tercer proceso. Y por último la ventana 552 es la primera cuyos 10 últimos términos se obtienen utilizando el cuarto proceso y la 601 la generada por el cuarto proceso en su totalidad. En la Figura 5.12a) se observan los cambios del modelos generador de datos en torno a las ventanas que hemos dicho.

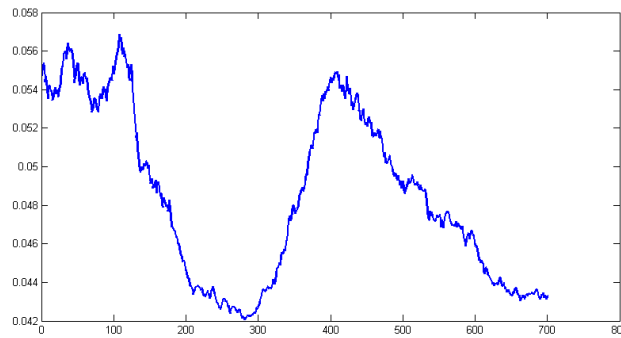
También se pueden utilizar otras de las medidas que se han definido en la sección anterior. Por ejemplo, podemos utilizar la proporción de puntos recurrentes que forman líneas verticales. En la Figura 5.13 se muestran los resultados de esta medida cuando el tamaño de la ventana es de 500 y 1000 datos, respectivamente.

Figura 5.12: Valores de la proporción de de puntos recurrentes según el tamaño de ventana

a)  $w = 500, ns = 10$  y  $m = 4$



b)  $w = 1000, ns = 10$  y  $m = 4$



Los resultados obtenidos dependen del tamaño de la ventana de datos, pero también del número de datos que no tienen en común las ventanas ( $ns$ ) y de la dimensión embedding.

2. Para mostrar como se comportan estas medidas ante cambios en la dinámica de un modelo determinista se ha generado una serie de 100000 datos obtenidos a partir del sistema dinámico discreto  $([0, 1], f(x) = ax(1 - x))$ . Para generarla el parámetro  $a$  se ha ido cambiando en cada iteración, aumentándolo 0,00003, con  $a \in [1, 4]$ . Análogamente, al caso anterior, se han tomado ventanas de 1000 datos de modo que dos ventanas sucesivas tienen en común 990 datos y se ha utilizado la dimensión embedding  $m = 5$ . Los resultados obtenidos se muestran en el gráfico superior de la Figura 5.14, donde se distinguen los distintos comportamientos dinámicos del sistema cuando el parámetro  $a$  cambia atendiendo a los cambios en la proporción de puntos recurrentes. Se ha obtenido un nuevo diagrama que aproxima el diagrama de bifurcación de este modelo determinista como se puede ver en el gráfico inferior de la

Figura 5.13: Valores de la proporción de puntos recurrentes que forman líneas verticales según el tamaño de ventana

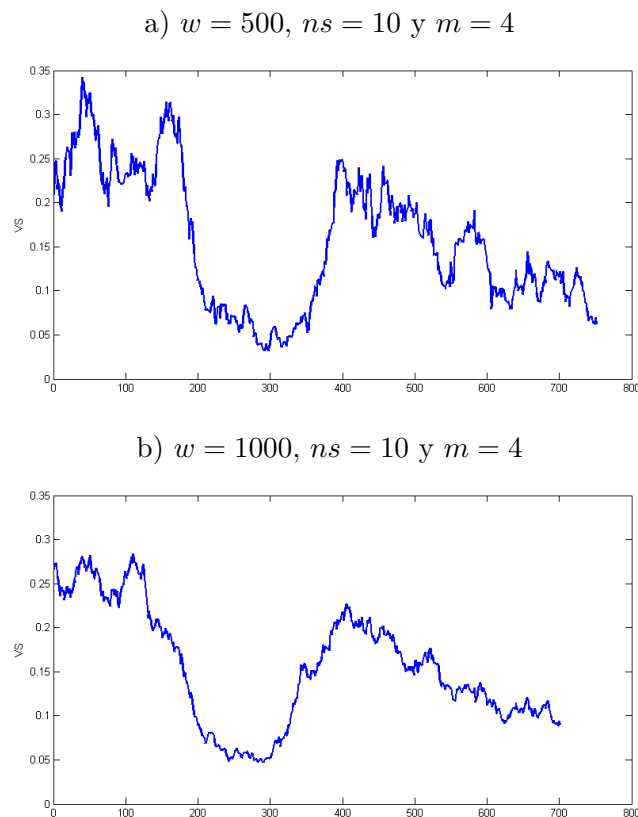


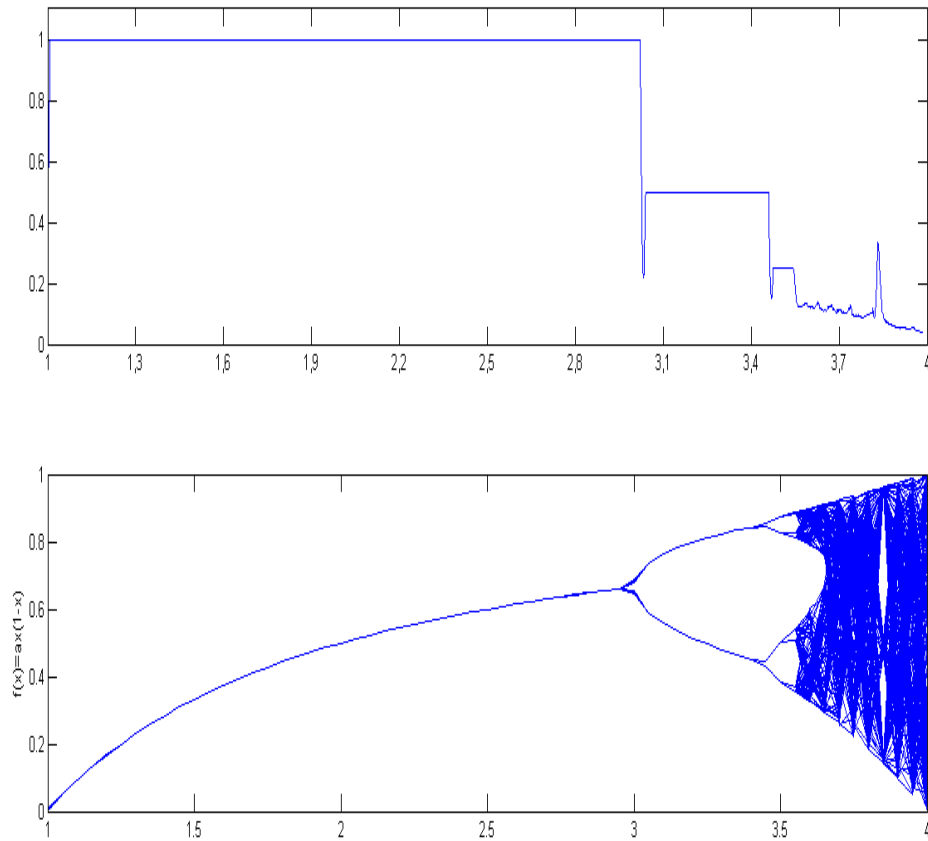
Figura 5.14.

## 5.10. Conclusiones

En este capítulo se propone un nuevo contraste de independencia de series temporales para el que se ha utilizado un nuevo estadístico del que hemos estudiado su distribución asintótica bajo la hipótesis nula de una serie i.i.d. El estadístico está basado en la estimación de la correlación integral simbólica de esta serie embebida en  $\mathbb{R}^m$ . Se ha comprobado que el estadístico tiene un buen tamaño y una buena potencia frente a distintos tipos de dependencia en los datos. Relacionado con este estadístico nos han quedado muchas cuestiones abiertas y algunas de ellas son las siguientes:

- Para obtener tanto la media como la varianza del estadístico de contraste ha sido fundamental el cálculo de las matrices de probabilidades (página 80) que recogen la probabilidad de que dos  $m$ -historias tengan asignados unos determinados símbolos

Figura 5.14: Diagrama de bifurcación de la logística



cuando la serie unidimensional es i.i.d. Estas matrices no dependen del proceso generador de la serie i.i.d., solo dependen de la dimensión embedding elegida para construir la serie vectorial. En relación a estas matrices nos planteamos si hay otros procesos estocásticos generadores de series unidimensionales para los que se puedan construir matrices de este tipo dependiendo de alguna de las características del mismo y de la dimensión embedding.

- Los valores de  $\mu_n^m$  y  $\sigma_m$ , que se definen en (5.9) y en (5.18), respectivamente, precisan tener en cuenta cómo se solapan dos  $m$ -historias consecutivas para ser calculados, que en el caso estudiado lo hace considerando un retardo  $\tau = 1$  para la construcción de las  $m$ -historias a partir de la serie unidimensional i.i.d. Creemos que resultaría de interés calcular  $\mu_n^m$  y  $\sigma_m$  cuando  $\tau > 1$ .

- Este estadístico (5.20) muestra una gran potencia para discriminar si la serie procede de un sistema dinámico determinista. Ahora nos planteamos cómo utilizar la correlación integral simbólica como herramienta para contrastar determinismo frente a estocasticidad.
- Quedaría estudiar la potencia del estadístico frente a una serie determinista más ruido y establecer, si es posible, ¿para qué niveles de ruido el estadístico tiene una buena potencia?
- Nos planteamos cómo podemos utilizar la correlación integral simbólica para estudiar causalidad entre series.
- En la página 95 hemos representado valores de  $SC_n^m$  frente a longitudes crecientes de una serie unidimensional correspondiente a distintos procesos generadores de datos. Conforme la longitud de la serie aumenta el valor de  $SC_n^m$  se estabiliza porque se trata de datos cuyo proceso generador es ergódico. En el caso de una serie i.i.d. el valor de  $SC_n^m$  se estabiliza en torno a  $1/m!$ . Para otras serie, ¿en torno a qué valor se estabiliza  $SC_n^m$ ? obviamente dependerá de  $m$  y de características propias de modelo que genera los datos.

También en este capítulo hemos definido una herramienta gráfica, los gráficos de recurrencia simbólicos, aunque tan importantes como los gráficos son las medidas que se definen sobre ellos. Hemos utilizado este tipo de gráficos y la medida proporción de puntos recurrentes para detectar cambios de la dinámica en una serie temporal no estacionaria. Se ha mostrado su eficacia para aproximarnos a los puntos de bifurcación de un sistema dinámico discreto parametrizado. Creemos que esta herramienta también puede ser eficaz para aproximarnos a la cuenca de atracción de un sistema dinámico así como para estudiar los cambios en la dinámica de un sistema dinámico continuo.





---

# Uso de estas herramientas

---

Aunque esta memoria está dedicada a aspectos teóricos de algunas herramientas para el análisis de serie temporales, nos ha parecido interesante utilizar éstas con un modelo económico sencillo, donde se conocen las ecuaciones dinámicas que lo rigen, y con una serie financiera, por el interés que tienen las mismas para la investigación en economía, teniendo en cuenta que el objetivo ahora, no es el estudio ni del modelo en sí, ni la modelización de la serie temporal que hemos elegido, sino ver de modo sencillo la aplicación de las herramientas desarrolladas.

## **Un sistema dinámico no lineal: Un modelo de duopolio (Puu,[53])**

### **Generalidades**

Existen distintos tipos de mercados para un producto, desde el mercado competitivo, donde muchas empresas ofertan un producto de modo que la decisión de una empresa sobre su producción no afecta decisión sobre la producción de las restantes, hasta el monopolio, donde solo una empresa oferta un producto y por tanto, su decisión sobre la cantidad ofertada determinara el precio que maximiza sus beneficios. Entre un tipo y otro de mercado, está el oligopolio, donde no hay una sola empresa, pero tampoco demasiadas, de modo que las decisiones de producción de cada empresa afecta a las decisiones de producción de las restantes, puesto que la producción total determina el precio que lleva a

cada empresa a decidir el nivel de producción que maximiza sus beneficios. En particular, en una situación de duopolio, dos empresas, que producen el mismo producto y cuyos niveles de producción son  $x$  e  $y$ , tienen que decidir la cantidad que deben ofertar para maximizar sus beneficios teniendo en cuenta la producción de la otra empresa (puesto que el precio depende de la producción de ambas). El resultado de esta maximización son las curvas de reacción de cada empresa,  $x(y)$  e  $y(x)$ , que dan su producción óptima para cada nivel de producción de su competidora. La intersección de ambas curvas de reacción es el punto de equilibrio de Cournot.

Nosotros vamos a utilizar una variante del modelo de duopolio lineal de Cournot, un modelo de duopolio no lineal sencillo debido a Puu ([53]): La cantidad producida por cada una de las empresas es  $x$  e  $y$  y la función de demanda de este producto es isoelástica y viene dada por  $p = \frac{1}{x+y}$ , siendo los costes marginales de producción  $a$  y  $b$  (u.m.), respectivamente. Luego, las funciones de beneficio son:

$$B_1(x, y) = \frac{x}{x+y} - ax$$

$$B_2(x, y) = \frac{y}{x+y} - by$$

resultando que la producción de cada empresa que maximiza su beneficio en función de la producción de su competidora, es:

$$x(y) = \sqrt{\frac{y}{a}} - y \tag{5.38}$$

$$y(x) = \sqrt{\frac{x}{b}} - x \tag{5.39}$$

La condición de segundo orden asegura que se trata de los niveles de producción que maximizan el beneficio de cada una de ellas.

Las funciones de reacción de cada una de las empresas no son lineales. La función de reacción de la empresa 1, dada por la ecuación (5.38), tiene dos puntos de corte con el eje  $OY$ :  $(0, 0)$  y  $(0, 1/a)$  y un máximo cuando  $y = 1/4a$ . Análogamente, los puntos  $(0, 0)$  y  $(1/b, 0)$  verifican la función de reacción de la empresa 2, dada por la ecuación (5.39), que tiene un máximo cuando  $x = 1/4b$  (Figura 1).

Resolviendo el sistema de ecuaciones (5.38) y (5.39) se obtienen los niveles de producción de ambas empresas donde se alcanza el equilibrio de Cournot:

$$\left( \frac{b}{(a+b)^2}, \frac{a}{(a+b)^2} \right) \tag{5.40}$$

Consideramos la dinámica de cada una de las empresas en una situación de duopolio como la descrita, donde las empresas van ajustando su producción en cada periodo temporal  $t$  dada la producción de la otra empresa en el período anterior  $t - 1$ . Así, el proceso de ajuste de las producciones viene dado por el sistema dinámico discreto:

$$(x_t, y_t) = F(x_{t-1}, y_{t-1}) = \left( \sqrt{\frac{y_{t-1}}{a}} - y_{t-1}, \sqrt{\frac{x_{t-1}}{b}} - x_{t-1} \right) \quad (5.41)$$

siendo el equilibrio de Cournot un punto fijo de este sistema dinámico, cuya matriz jacobiana es:

$$DF \left( \frac{b}{(a+b)^2}, \frac{a}{(a+b)^2} \right) = \begin{pmatrix} 0 & \frac{b-a}{2a} \\ \frac{a-b}{2b} & 0 \end{pmatrix} \quad (5.42)$$

El punto de equilibrio de Cournot es un punto fijo estable del sistema dinámico (5.41) siempre que los exponentes de Lyapunov de la órbita de condición inicial dicho punto sean menores que cero, lo que es equivalente a que el determinante de la matriz jacobiana sea menor que 1 (puesto que los exponentes de Lyapunov, como se ve en el Capítulo 3, se calculan a partir de los valores propios de la matriz jacobiana del sistema dinámico):

$$\left| \frac{(a-b)^2}{4ab} \right| < 1$$

lo que ocurre cuando

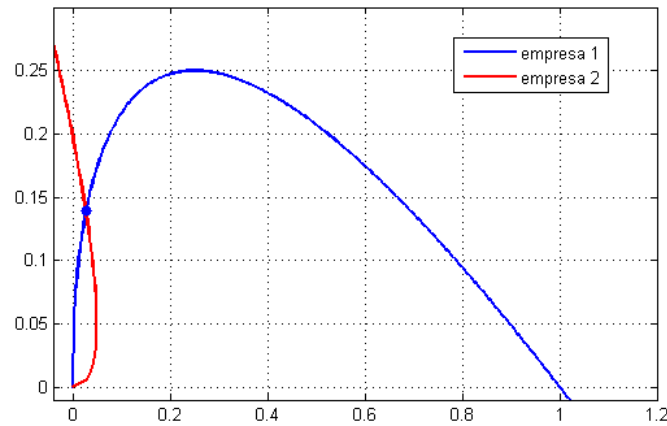
$$\frac{a}{b} \in (3 - 2\sqrt{2}, 3 + 2\sqrt{2})$$

(o bien  $b/a$ ). El comportamiento de este sistema también puede ser explosivo o imposible, lo que no ocurrirá siempre que el ratio  $\frac{a}{b} \in \left( \frac{4}{25}, \frac{25}{4} \right)$ . Luego, para condiciones iniciales próximas al punto de equilibrio se podrá dar un comportamiento más complejo cuando el ratio  $\frac{a}{b}$  se sitúe en alguna de las dos estrechas franjas,

$$\frac{a}{b} \in \left( \frac{4}{25}, 3 - 2\sqrt{2} \right) \text{ ó } \frac{a}{b} \in \left( 3 + 2\sqrt{2}, \frac{25}{4} \right).$$

Cuando el ratio  $a/b$  pertenece a uno de estos intervalos, el equilibrio de Cournot del sistema (5.41) no es estable y para condiciones iniciales próximas a este punto el comportamiento asintótico del sistema puede ser muy diverso, como se puede ver en las Figuras 2a), b), c) y d) (dinámica periódica y caótica, respectivamente).

La dinámica interesante ocurre cuando el ratio  $a/b$  está alejado de 1, es decir cuando una empresa tiene altos costes unitarios de producción frente a otra empresa que tiene costes unitarios bajos.

Figura 1: Curvas de reacción de una situación de dupolio para  $a = 1$  y  $b = 5$ 

### Embeddings de algunas series temporales obtenidas del modelo de Puu ([53])

Fijado un valor del ratio  $a/b$ , se obtiene una órbita del sistema dinámico (5.41) y a partir de ellas generamos distintas series temporales unidimensionales (distintas  $\alpha(x, y)$ )  $\alpha_t$ . Para cada una de ellas vamos a realizar un embedding y así obtener una órbita vectorial equivalente a aquella a partir de la que hemos obtenido la serie temporal de medidas  $\alpha_t$  (Capítulo 2). Vamos a realizar el embedding de las series unidimensionales en  $\mathbb{R}^5$ . Se ha utilizado  $m = 5$  porque el teorema de Takens ([63], teorema 2.21) asegura que con esta dimensión embedding se consigue una órbita equivalente a la original <sup>8</sup>.

La Figura 3a) representa la órbita del sistema dinámico (5.41) cuando  $a/b = 6,24$  a partir de la que vamos a obtener la serie real  $\alpha_t$ .

- Serie unidimensional obtenida utilizando la función medida  $\alpha(x, y) = x$ . La proyección de las tres primeras componentes de la órbita embebida en  $\mathbb{R}^5$  se ve en la Figura 3b).
- Se procede de la misma manera si la serie temporal se obtiene a partir de  $\alpha(x, y) = \ln x$ . La Figura 3c) se obtiene de la proyección de las componentes 2,3 y 4 de la órbita 5-dimensional.
- Igualmente si  $\alpha(x, y) = x + y$ , se visualiza la proyección en  $\mathbb{R}^3$  de las componentes tercera, cuarta y quinta tal como se ve en la Figura 3d).

<sup>8</sup>En muchos casos también se obtiene una órbita equivalente a la original embebido la serie unidimensional en un espacio  $\mathbb{R}^m$  con en una dimensión  $m$  menor. En este caso se podrían utilizar también las dimensiones embedding  $m = 3$  o  $m = 4$  y se obtendrían similares resultados.

Se ha procedido de manera análoga utilizando la serie periódica representada en la Figura 4a).

Figura 2: Comportamientos asintóticos del sistema dinámico (5.41) para distintos valores del ratio  $a/b$

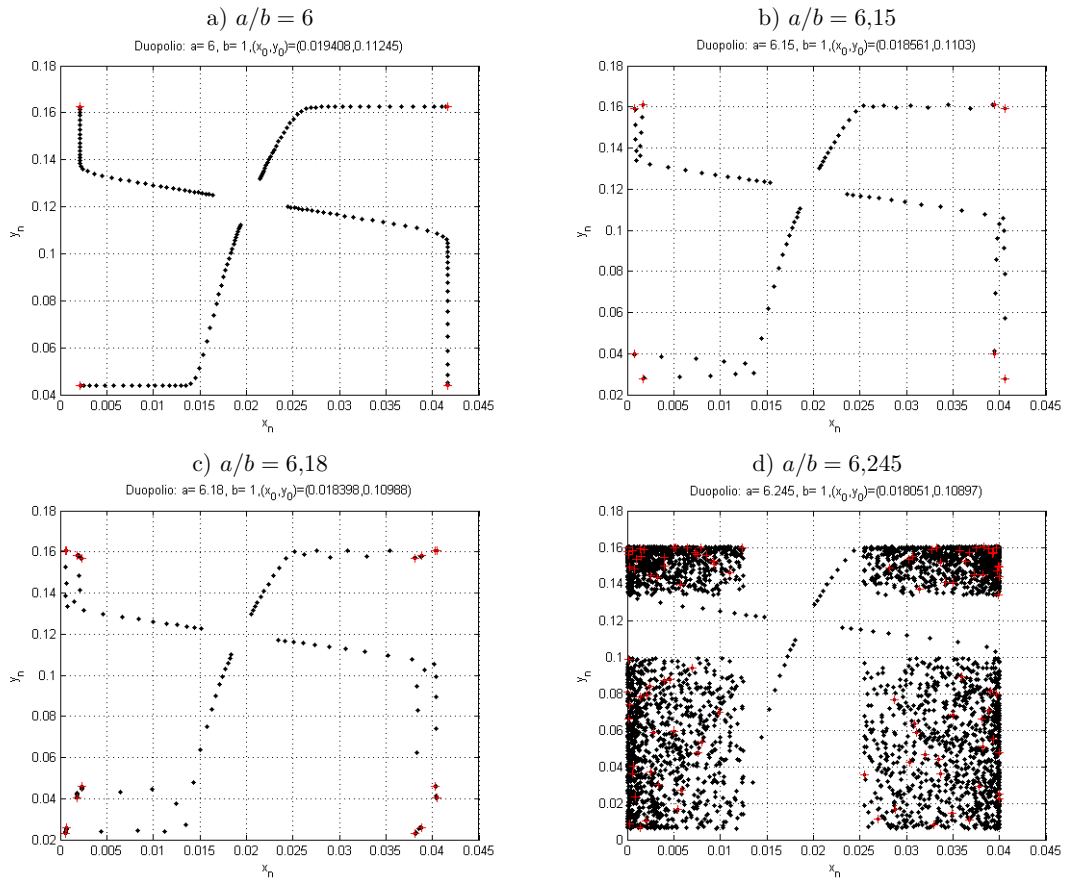


Figura 3: Distintas reconstrucciones de una órbita del sistema (5.41) cuando  $a=6,24$

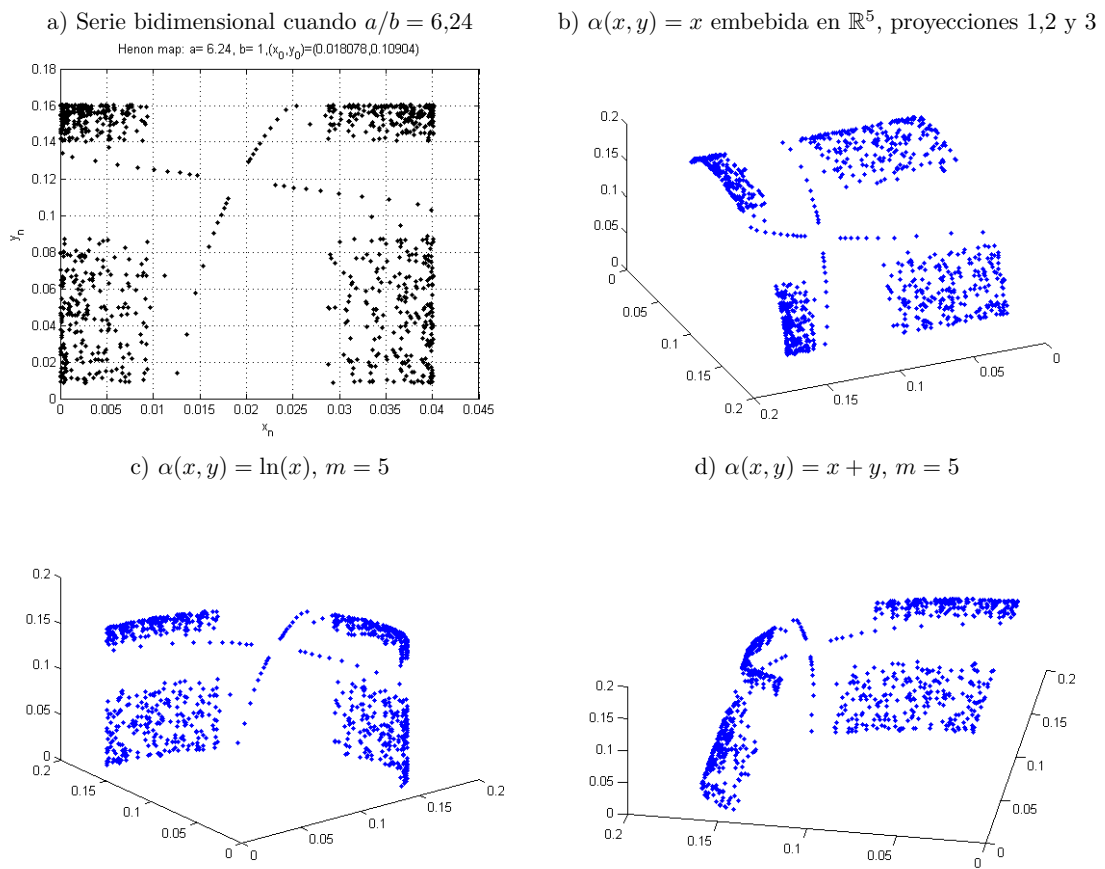
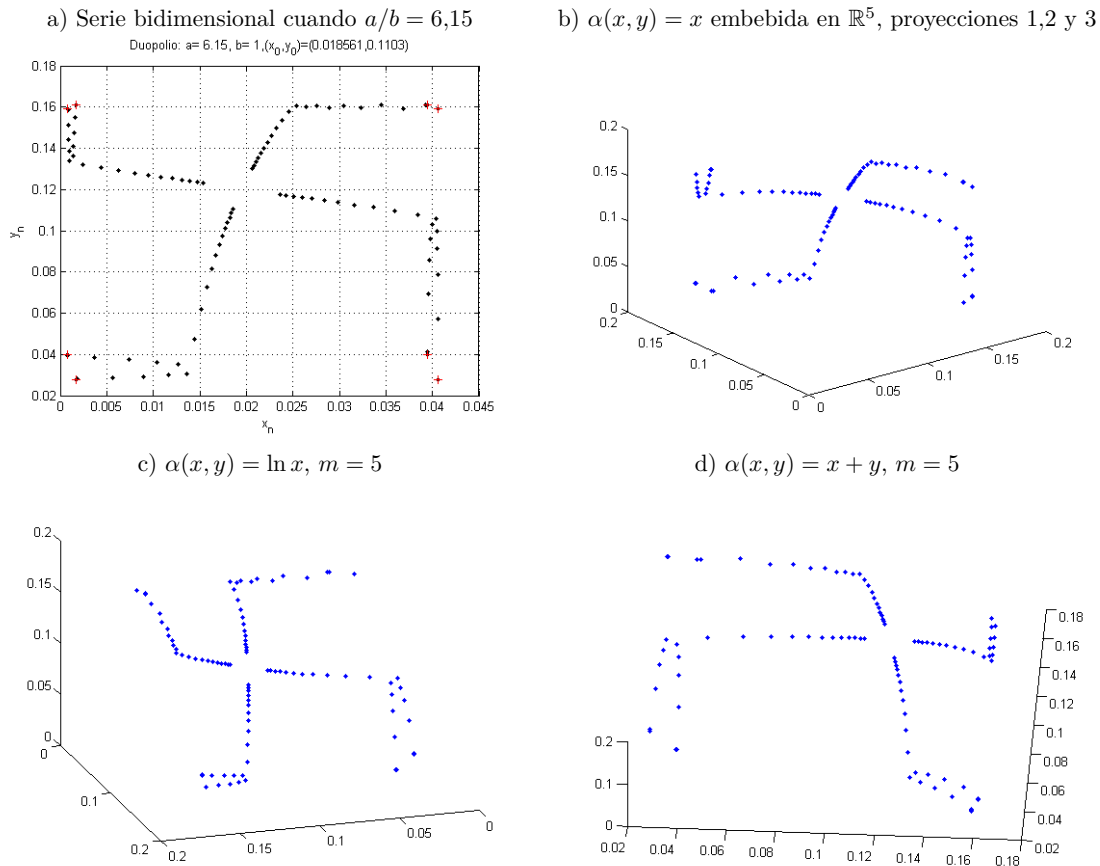


Figura 4: Distintas reconstrucciones de una órbita del sistema (5.41) cuando  $a=6,15$



### Gráficos de recurrencia

Para mostrar como informan los gráficos de recurrencia clásicos y simbólicos del comportamiento dinámico del sistema (5.41), cuando  $a/b = 6,24$ , a partir de una serie real que ha sido embebida en  $\mathbb{R}^m$  ( $m = 3, 4$ ) hemos realizados los gráficos que se muestran en la Figura 5.

En las Figuras 5 a) y b) se representan los gráficos de recurrencia clásicos correspondientes a una órbita caótica embebida en  $\mathbb{R}^3$  para dos valores distintos del parámetro de proximidad  $\varepsilon$ .

Las Figuras 5c) y d) muestran los gráficos de recurrencia simbólicos coloreados para la misma serie embebida en  $\mathbb{R}^3$  y en  $\mathbb{R}^4$ , respectivamente. Sobre todo en el gráfico de recurrencia simbólico correspondiente a la serie embebida en  $\mathbb{R}^4$ , se observan distintos tipos de pequeñas líneas diagonales con el mismo patrón de símbolos. No hay líneas verticales,

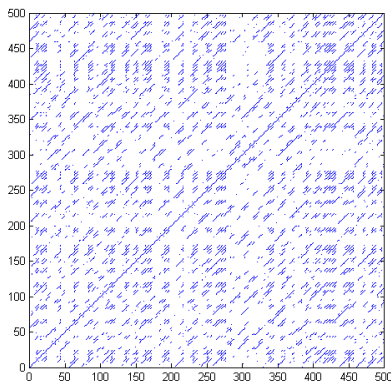


pero de los puntos recurrentes el 86,55 % forman líneas diagonales, esto es debido a la inestabilidad de las órbitas periódicas.

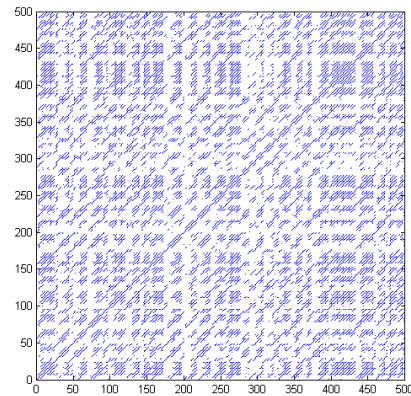
De modo análogo se ha procedido con una serie periódica de periodo 8, correspondiente al sistema (5.41) para  $a/b = 6,15$ . Embebida la serie en  $\mathbb{R}^3$ , aproximadamente 1/3 de los puntos recurrentes forman líneas verticales y 2/3 líneas diagonales como se puede ver en la Figura 7. Si la serie periódica se embebe en  $\mathbb{R}^4$ , el gráfico b) de la Figura 6 muestra el gráfico de recurrencia simbólico donde el 100 % de los puntos recurrentes forman líneas diagonales repitiéndose el mismo grupo de símbolos de  $S_4$ .

Figura 5: Gráficos de recurrencia para una serie caótica del sistema (5.41) cuando  $a/b = 6,24$

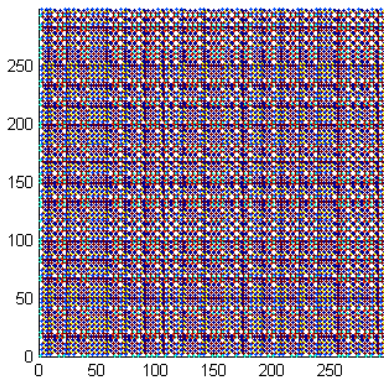
a) Gráfico de recurrencia clásico 1



b) Gráfico de recurrencia clásico 2



c) Gráfico de recurrencia simbólico para  $m = 3$



d) Gráfico de recurrencia simbólico para  $m = 4$ .

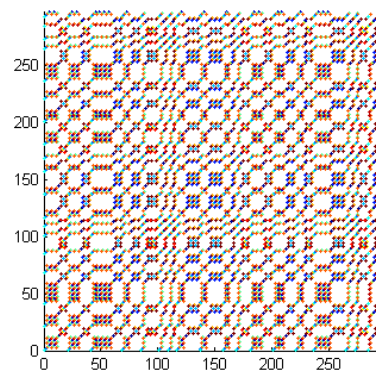
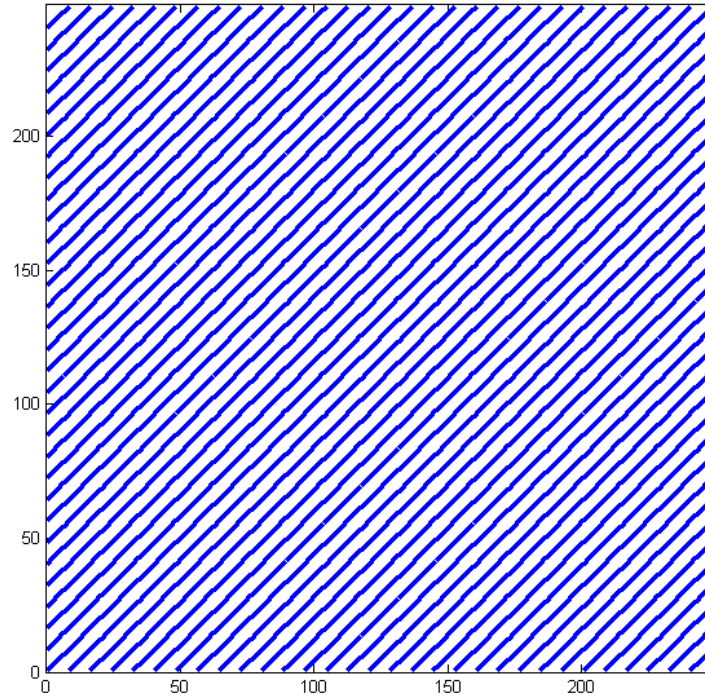


Figura 6: Gráficos de recurrencia para una serie periódica de 5.41 cuando  $a/b = 6,15$  y  $m = 4$

a) Gráfico de recurrencia clásico



b) Gráfico de recurrencia simbólico

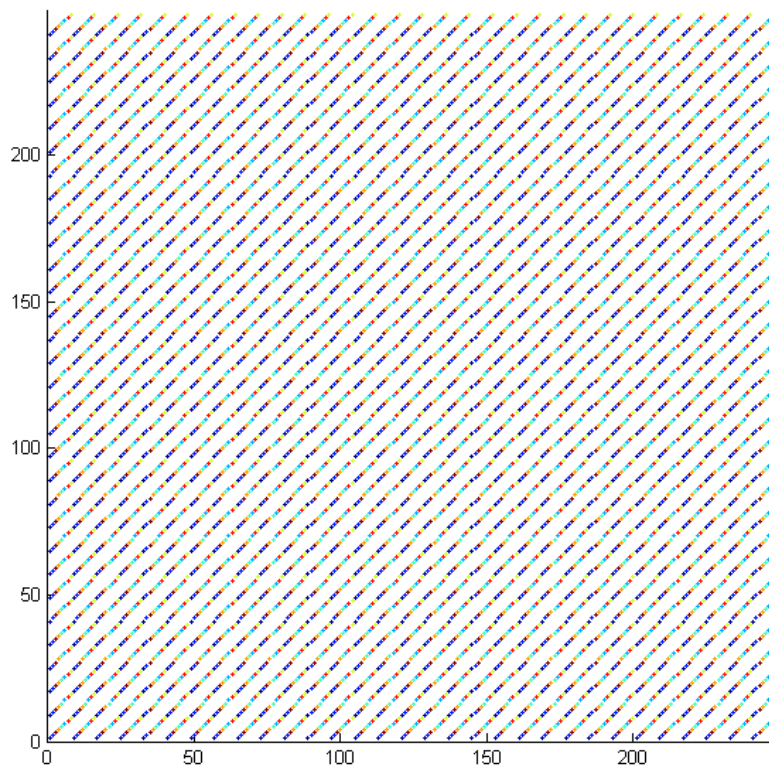
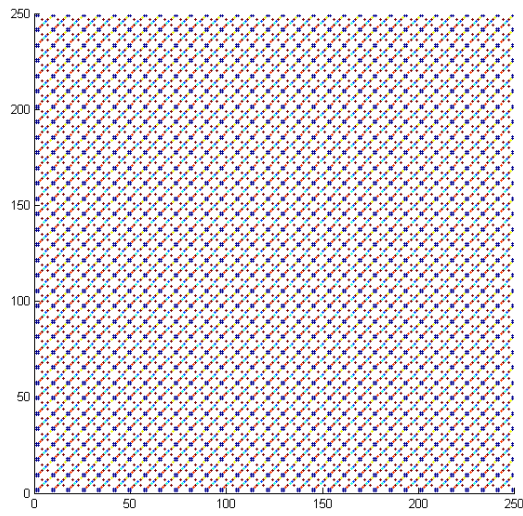


Figura 7: Gráfico de recurrencia simbólico para  $m = 3$



**Cambios en la dinámica del sistema (5.41)**

Las Figuras 8b) y 9b) son una aproximación a los gráficos de bifurcación del sistema dinámico (5.41) cuando  $a/b \in \left(\frac{4}{25}, 3 - 2\sqrt{2}\right)$  y  $a/b \in \left(3 + 2\sqrt{2}, \frac{25}{4}\right)$ , respectivamente. Para obtener los gráficos que se pueden ver en las Figuras 8a) y 9a) se ha procedido como en la Sección 5.9: Se ha generado una serie no estacionaria del sistema (5.41) cuando el ratio  $a/b$  varía en la ventana  $\left(\frac{4}{25}, 3 - 2\sqrt{2}\right)$  y bien cuando lo hace en la ventana  $a/b \in \left(3 + 2\sqrt{2}, \frac{25}{4}\right)$ , se han utilizado ventanas móviles de 1000 datos, de modo que dos sucesivas tienen en común 990 datos. Para cada ventana se ha calculado su gráfico de recurrencia simbólico y se ha medido la proporción de puntos recurrentes y el resultado se muestra en tales gráficos, donde se observa una aproximación a los valores del ratio  $a/b$  donde cambia el comportamiento dinámico del modelo.

Esta metodología podría resultar de utilidad cuando se estudia un nuevo sistema dinámico y queremos saber en torno a qué valores de los parámetros del sistema cambia la dinámica del mismo.

Figura 8: Aproximación a los puntos de bifurcación del sistema dinámico (5.41) cuando  $a/b \in (0,16 - 0,18)$

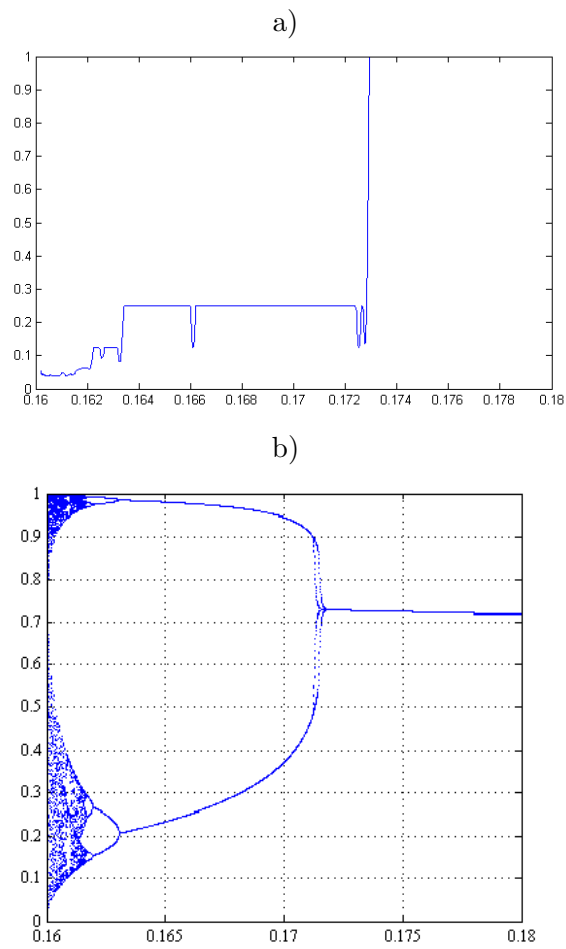
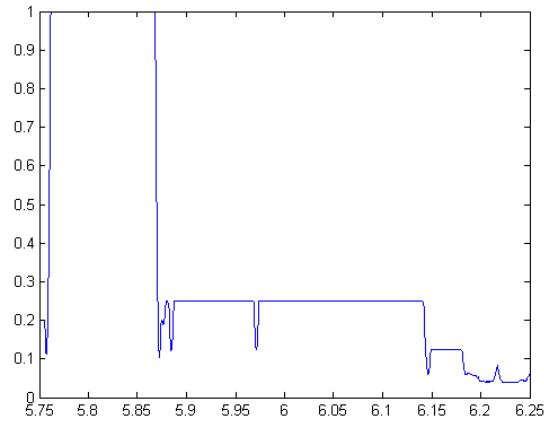
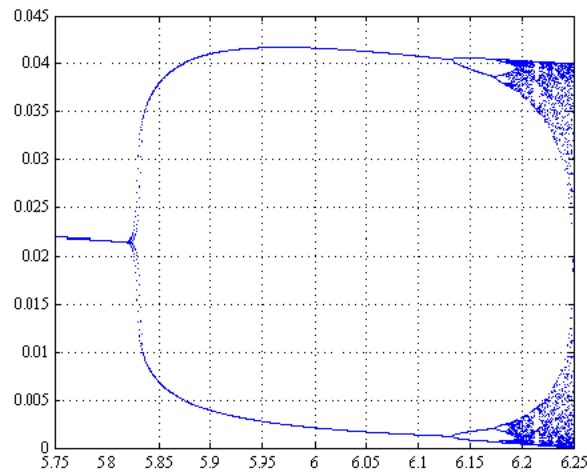


Figura 9: Aproximación a los puntos de bifurcación del sistema dinámico (5.41) cuando  $a/b \in (5,8; 6,25)$

a) Proporción de puntos recurrentes en ventanas



b) Gráfico de bifurcación



## Serie de rendimientos del Ibex-35

La serie temporal que vamos a describir ahora es la formada por los datos diarios del Ibex-35 al cierre de la bolsa de Madrid desde enero de 1994 hasta el 15 de marzo de 2010 de longitud 4066 (<http://finance.yahoo.com>). La Figura 10 representa las gráficas de la serie del logaritmo del Ibex-35 y la serie de rendimientos del Ibex-35, que se ha calculado como la diferencia del logaritmo del índice Ibex-35. Se observan periodos en los que hay solo pequeños cambios en la serie (desde mediados de 2003 a 2005) y otros en los que hay bloques de grandes aumentos y disminuciones en la rentabilidad de este índice.

Siguiendo a Soofi-Cao [58, 59] el retardo elegido para construir una serie vectorial a

partir de esta serie es 1 ( $\tau = 1$ ). Se calcula la mínima dimensión embedding para la serie de rendimientos del Ibex-35, utilizando el método de Cao (capítulo 2), implementado en Matlab (toolbox TSTOOLS).

En la Figura 11 no se observa claramente una mínima dimensión embedding a partir de la cual el valor de  $E1$  se estabilice alrededor de 1, sino que la curva crece suavemente, lo que indicaría la posible presencia de una componente estocástica en la serie o bien un sistema dinámico de alta dimensionalidad. No obstante, como  $E1(m)$  ya está suficientemente cerca de 1 entre las dimensiones  $m = 7$  y  $m = 10$ , se ha elegido como dimensión embedding  $m = 8$ .

Figura 10: Ibex-35 en el período enero de 1994 hasta el 15 de marzo de 2010

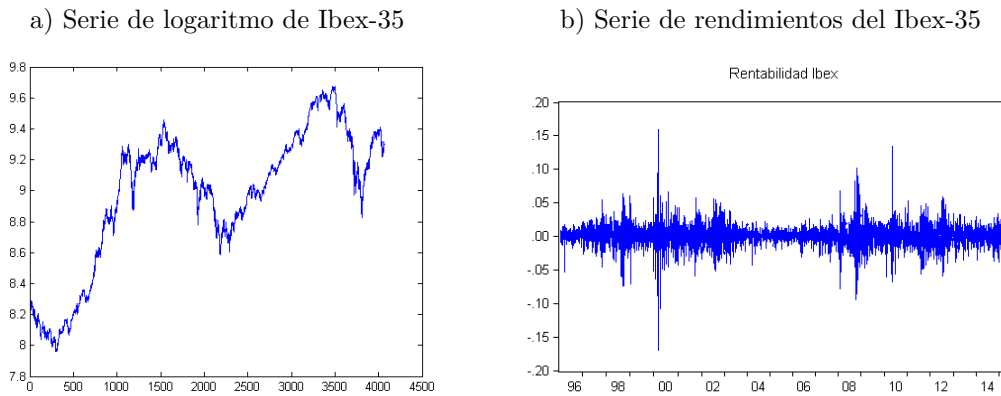
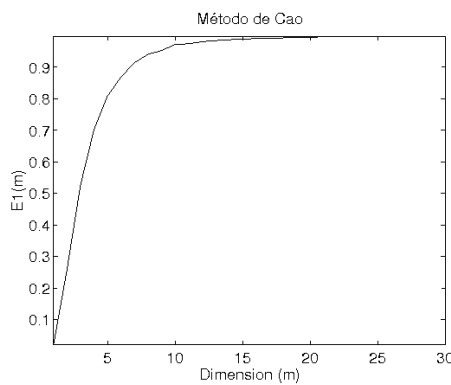


Figura 11: Mínima dimensión embedding para la serie de rendimientos del Ibex-35



El gráfico de recurrencia clásico representado en la Figura 12a) corresponde a la serie no estacionaria del logaritmo del Ibex-35. Este gráfico indica que el comportamiento dinámico de la serie en este periodo temporal no responde a un único modelo. El gráfico de recurrencia de la serie de rendimientos que se representa en la Figura 12b) corrobora que la serie tiene distintos comportamientos dinámicos en este periodo.

En la Figura 13 se tienen los gráficos de recurrencia simbólicos coloreado b) y no coloreado a) de la serie de logaritmos del Ibex-35. Observando los gráficos, la no homogeneidad confirma lo que decían los gráficos de recurrencia clásicos.

Figura 12: Gráficos de recurrencia clásicos relacionados con la serie del Ibex-35

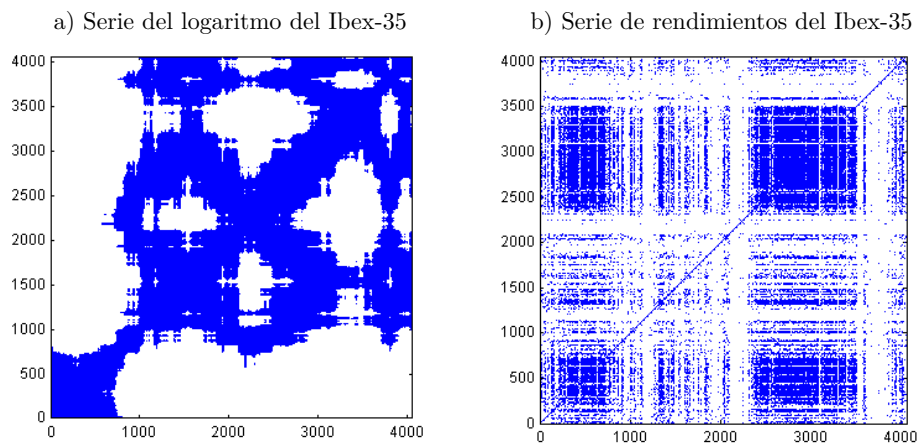
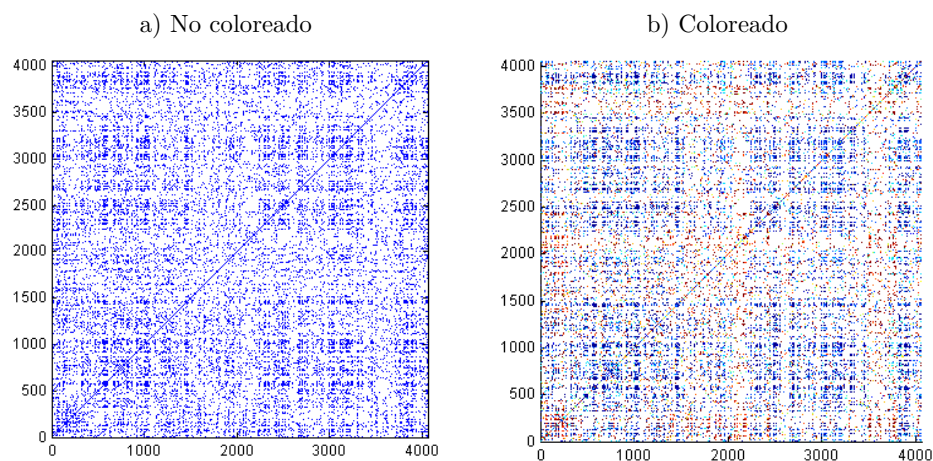


Figura 13: Gráficos de recurrencia simbólicos de la serie logaritmo del Ibex-35





Teniendo en cuenta que el objetivo de esta sección no es la modelización de la serie de rendimientos del Ibex-35, sino la reflexión sobre si esta serie tiene estructura que la aleje de ser i.i.d., se ha calculado el valor del estadístico estudiado en el Capítulo 5.

$$\sqrt{\frac{n(n-1)}{2}} \left( \frac{SC_n^m - \mu_n^m}{\sigma_m} \right) \tag{5.43}$$

para  $n = 4066 - m$  y distintos valores de  $m$ . La Tabla 1 muestra estos valores.

Tabla 1: Valor del estadístico (5.43) para distintas dimensiones embeddings

$m = 3$	$m = 4$	$m = 5$	$m = 6$
1,648	2,2615	1,9048	0,8738

Si solo tuviéramos los resultados para  $m = 3$ ,  $m = 5$  y  $m = 6$  diríamos que no hay evidencia de que la serie de rendimientos del Ibex no sea i.i.d. Sin embargo, el valor del estadístico para  $m = 4$  indicaría la existencia de estructura en los 4065 datos de de la serie vectorial de los que consta la serie. Bastaría que el estadístico rechazara la hipótesis de que la serie sea i.i.d. para un valor de  $m$  para poder decir que la serie no es i.i.d.

Las gráficas de la Figura 14 muestran el valor del estadístico para distintas longitudes de la serie, siendo el primer valor del estadístico el que corresponde a una serie de longitud 500, aumentamos 10 datos y el segundo valor del estadístico corresponde a 510 datos,.... es decir el valor  $k$ -ésimo del estadístico le corresponde a una subserie de la serie de rendimientos del Ibex-35 que tiene  $500 + (k - 1)10$  datos. Se ha procedido así para dimensiones embedding 3,4 y 5. Si comparamos el comportamiento del estadístico para la serie que analizamos y para las series de subsección “Aspectos gráficos”, página 95, donde observábamos que los valores del estadístico crecen con el tamaño muestral salvo si la serie es i.i.d., en cuyo caso los valores del estadístico se sitúan en torno a 0, podemos decir que no es lo que ocurre para esta serie. En el caso de la serie de rendimientos del Ibex, si nos fijamos en el gráfico de la Figura 14 correspondiente a  $m = 4$ , los valores del estadístico no crecen en todo el periodo temporal considerado, pero tampoco toma valores en torno a 0. Más bien parece que hay distintos comportamientos dinámicos y no uno global en todo el periodo.

En la Figura 15 se muestran los valores de la correlación integral simbólica para las mismas subseries que se ha calculado el estadístico (5.43), confirmando que los 2000 o 2300 primeros datos tienen una estructura que no comparten los restantes.

Figura 14: Valores del estadístico (5.43) para distintas longitudes de la serie de rendimientos del Ibex-35

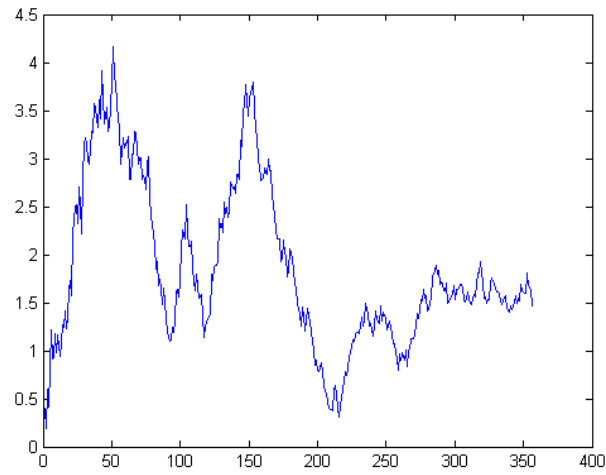
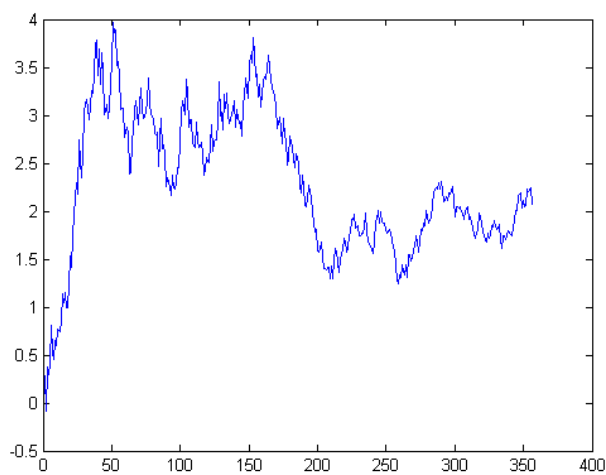
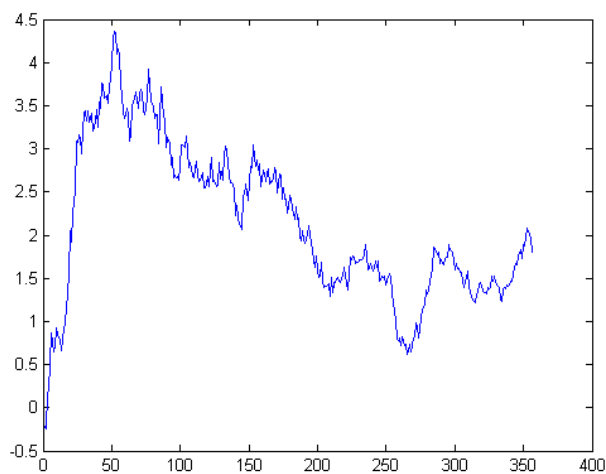
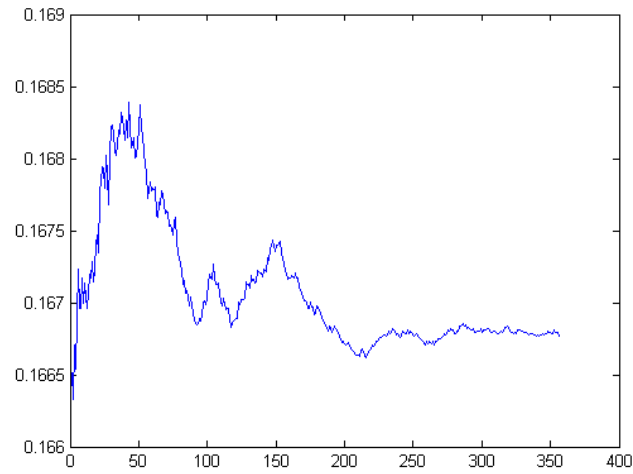
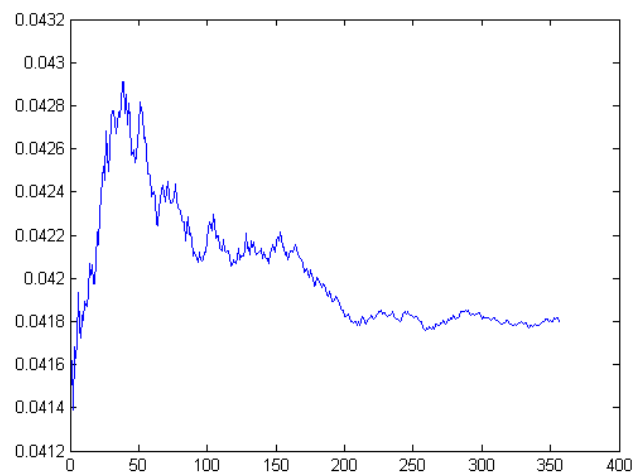
a)  $m = 3$ b)  $m = 4$ c)  $m = 5$ 

Figura 15: Valores de la correlación integral simbólica de la serie de rendimientos del Ibex-35 para distintas longitudes

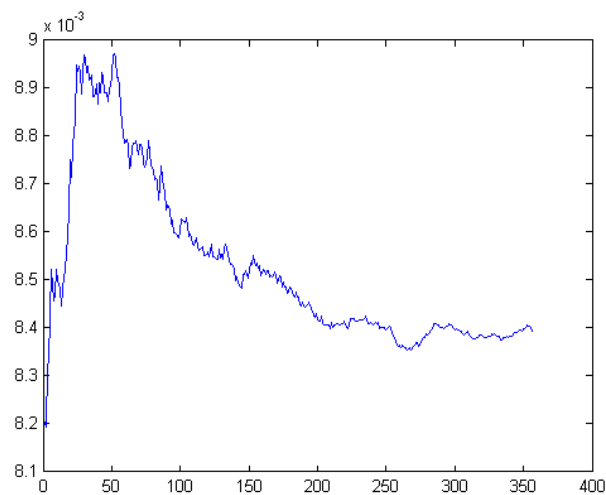
a)  $m = 3$



b)  $m = 4$



c)  $m = 5$



---

# Bibliografía

---

- [1] Aaronson, J., Burton, R.M., Dehling, H.G., Gilart, D., Hill, T. and Weiss, B. (1996) Strong laws for L- and U-statistics. *Transactions of the American Mathematical Society*, 348, 2845-2866.
- [2] Abraham, R. and Robbin, J. (1967) *Transversal mapping and Flows*. New York: W.D. Benjamin.
- [3] Aparicio, T., Pozo, E.F. and Saura, D. (2013). Do Exchange Rate Series Present General Dependence? Some Results using Recurrence Quantification Analysis. *Journal of Economics and Behavioral Studies*, 5(10), 678-686.
- [4] Balibrea, F. and Caballero, M.V. (2004). A transversality approach del Whitney's prevalent theorem. *Grazer Mathematische Berichte*, 346, 29-36.
- [5] Balibrea, F. and Caballero, M.V. and Tanderó, A. (2006). Some applications of the transversality in embedology *Far East Journal of Dynamical Systems*, 8(1), 149-174.
- [6] Balibrea, F. and Caballero, M.V. (2013). Stability of orbits via Lyapunov exponents in autonomous and nonautonomous systems. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 23, 1350127.
- [7] Balibrea, F. and Caballero, M.V. (2014). Examples of Lyapunov exponents in Two-dimensional systems. In Grácio, C, Fournier-Prunaret, D., Ueta, T. and Nishio, Y (ediors), *Nonlinear Maps and Their Applications*, 9-15. New York: Springer Proceedings in Mathematics and Statistics.

- [8] Balibrea, F., Caballero, M.V. and Molera, L. (2008). Recurrence quantification analysis in Liu's attractor. *Chaos, Solitons and Fractals*, 36(3), 664-670.
- [9] Balibrea, F. and Chacón, R. (2011). A simple non-autonomous system with complicated dynamics. *Journal of Difference Equations and Applications*, 17(2), 131-136.
- [10] Bastos, J.A. and Caiado J. (2011). Recurrence quantification analysis of global stock market. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications* 390(7) 1315-1325.
- [11] Baxter, M. and Kirchner, T. (2013). Correlation in time-dependent density-functional-theory studies of antiproton-helium collisions, *Phys. Rev. A*, 87 (6), 062507.
- [12] Beldjoudi-Franch J., Contreras D. and Tordera-Lledó, L. (2002). Assessing nonlinear structures in real exchange rates using recurrence plot strategies. *Physica D* 171, 249-264.
- [13] Brandt, C. and Pompe, B. (2002). Permutation entropy: a natural complexity measure for time series. *Physical Review Letters*, 88, 174102(4).
- [14] Brock, W.A., Dechert, W.D., Scheinkman, J.A. and LeBaron, B. (1996). A test for independence based on the correlation dimension. *Econometric Review*, 15(3), 197.
- [15] Brockwell, P.J. and Davis, R.A. (1986). *Time Series: Theory and Methods*. Second Edition. New York: Springer-Verlag.
- [16] Caballero, M.V. (2000). On an embedding theorem. *Acta Mathematica Hungarica*, 88(4), 269-278.
- [17] Cao L. (1997) Practical method for determining the minimum embedding dimension of a scalar time series. *Physica D* 110, 43-50.
- [18] De Lima Pedro J. F.(1996). Nuisance Parameter Free properties of Correlation Integral Based Statistics. *Econometric Reviews*, 15(3), 237-259.
- [19] Demir, D. and Koçak, S. (2001). A note on positive Lyapunov exponent and sensitive dependence on initial conditions. *Chaos, Solitons and Fractals* 12, 2119-2121.
- [20] Eckmann, J., Kamphorst, S. and Ruelle, D. (1987). Recurrence plots of dynamical systems. *Europhysics Letters*, 5, 973-977.

- 
- [21] Fabretti, A. and Ausloos, M. (2005). Recurrence plot and recurrence quantification analysis techniques for detecting a critical regime: Examples for financial markets indices. *International Journal of Modern Physics*, 16(5), 671-706.
- [22] Federici, D. and Gandolfo, G. (2014). Chaos in Economics. *Journal of Economics and Development Studies*, 2(1), 51-79.
- [23] Figueiredo C., Diambra L., and Pereira C. (2011). Convergence Criterium of Numerical Chaotic Solutions Based on Statistical Measures. *Applied Mathematics*, 2, 436-443.
- [24] Foster, M.J. (1975). Calculus on vector bundles, *Journal of London Mathematical Society*, 11, 65.
- [25] Fraser, A.M. and Swinney, H.I. (1986). Independent coordinates for strange attractors from mutual information. *Physical Review A*, 33(2), 1134-1140.
- [26] Guhathakurta, K., Bhattacharya, B. and Roychowdhury, A. R. (2010). Using recurrence plot analysis to distinguish between endogenous and exogenous stock market crashes. *Physica A: Statistical Mechanics and Its Applications*, 389, 1874-1882.
- [27] Granger, C. and Lin, J-L (1994) Using the mutual information coefficient to identify lags in nonlinear models. *Journal of Time Series Analysis*, 15(4), 371-384.
- [28] Grassberger P. and Procaccia, I. (1983). Measuring the strangeness of strange attractors. *Physica 9D*, 189-208.
- [29] Iwanski, J.S. and Bradley E. (1998). Recurrence plots of experimental data: To embed or not to embed? *Chaos* 8, 861-871.
- [30] Hirata, Y. and Aihara, K. (2012). Timing matters in foreign exchange markets. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications* 391,(3), 760-766.
- [31] M.W. Hirsch (1994). *Differential Topology*. Fifth Edition. New York: Springer Verlag.
- [32] Hsieh, D.A., (1989) Testing for Nonlinear Dependence in Daily Foreign Exchange Rate Changes. *Journal of Business*, 62, 339.
- [33] Hunt, B.R., Sauer, T. and Yorke, J.A. (1992). Prevalence: A translation-invariant almost every on infinite-dimensional spaces. *Bulletin of the American Mathematical Society*, 27(2), 217-238.

- [34] Hurewicz, W. and Wallman, H. (1948). *Dimension theory*. Princenton: Princenton University Press.
- [35] Kennel, M.B., Brown, R. and Abarbanel, H.D.I. (1992). Determining embedding dimension for phase-space reconstruction using geometrical constructions. *Physical Review A* 45(6), 3403-3411.
- [36] Koçak, H. and Palmer, K. (2010). Lyapunov Exponents and Sensitive Dependence. *Journal of Dynamics and Differential Equations* 22(3), 381-398.
- [37] Groth, A. (2005). Visualization of coupling in time series by order recurrence plots. *Physical Review E* 72, 046220(8).
- [38] Liu C., Liu T., Liu L. and Liu K. (2004). A new chaotic attractor. *Chaos, Solitons and Fractals* 22, 1031-1038.
- [39] Lorenz, H-W. (1993) *Nonlinear Dynamical Economics and Chaotic Motion*. Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems. Second Edition. Springer.
- [40] McMillan, D. G. (2003). Non-linear Predictability of UK Stock Market Returns *Oxford Bulletin of Economics and Statistics* 65(5), 557.
- [41] Marwan N., Romano, M.C., Thiel, M. and Kurths, J. (2007). Recurrence plots for the analysis of complex systems. *Physics Reports* 438, 237-329.
- [42] Marwan N. (2003). *Encounters with neighbours-Current Developments of Concepts Based on Recurrence Plots and their Applications-*. (PhD Thesis), Institute of Physics, Postdam. Postdam.
- [43] Marwan, N. and Webber, C.L., Jr. (2015). Mathematical and computational foundations of recurrence quantifications. In: *Recurrence Quantification Analysis: Theory and Best Practices*. Springer Series: Understanding Complex Systmes, 3-44. Switzerland: Springer International Publishing.
- [44] Mathew N. and Picu R.C. (2011). Molecular conformational stability in cyclotri-methylene trinitramine crystals. *Journal of Chemical Physics* 135(2)
- [45] Matilla-Garcia M., Ruiz Marin, M. (2008). A non-parametric independence test using permutation entropy. *Journal of Econometric*, 144, 139-155.

- 
- [46] Matilla-Garcia M., Ruiz Marin, M. (2010). A new test for chaos and determinism based on Symbolic Dynamic. *Journal of Economic Behavior & Organization*, 76(3), 600-614.
- [47] Matilla-Garcia M., Ruiz Marin, M., Mohammed, D. and Ojeda, RinaB. (2013). Nonparametric correlation integral-based tests for linear and nonlinear stochastic processes. *Decisions in Economics and Finance*, 37(1),181-193.
- [48] Matilla-Garcia M. (2007). Nonlinear Dynamics in Energy Futures, *The Energy Journal*, 28(3), 7-30.
- [49] Munkres, J.R. (2000). *Topology*. Second edition. Prentice Hall. Upper Saddle River.
- [50] Noakes, L. (1991). The Takens embedding theorem. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 1(4), 867-872.
- [51] Osedelets, I. (1968). A multiplicative ergodic theorem. Lyapunov characteristic numbers for dynamical systems. *Trans.Moscow Math.Soc.*,19, 179-210.
- [52] Perona, E. (2005). Birth and Early History of Nonlinear Dynamics in Economics. *Revista de Economía y Estadística*, XLIII(2), 29-60 .
- [53] Puu,T. (1991) Chaos in Duopoly Pricing. *Chaos, Solitons and Fractals*, 1(6), 573-581.
- [54] C. Robinson, *Dynamical Systems. Stability, Symbolic Dynamic, and Chaos*, CRC Press (London, 1995).
- [55] Sajjan, S.G. (2000) A note on central limit theorems for lattice models. *Journal of Statistical Planning and Inference*, 83(2), 283-290.
- [56] Sauer, T., Yorke, J.A. and Casdagli, M. (1991). Embedology, *Journal of Statistic Physics*, 65(3/4), 579-616.
- [57] Schreiber, T. (1999). Interdisciplinary application of nonlinear time series methods. *Physics Reports*, 308, 1-64.
- [58] Soofi, A. and Cao, L. (1999). Nonlinear deterministic forecasting of daily peseta-dollar exchange rate. *Economics Letters* 62(2), 175-180.
- [59] Soofi, A. and Cao, L.(eds.), 2002. Modelling and Forecasting Financial Data: Techniques of Nonlinear Dynamics. Boston: Kluwer Academic Publisher.



- [60] Stark, J. (1999). Delay Embedding for Forced Systems: I. Deterministic Forcing. *Journal Nonlinear Science*, 9, 225-332.
- [61] Strozzi, F., Zaldivar, J.-M., Zbilut, J.P. (2007). Recurrence quantification analysis and state space divergence reconstruction for financial time series analysis. *Physica A* 376, 487-499.
- [62] Strozzi, F., Gutiérrez, E., Noé, C., Rossi, T., Serati, M., Zaldivar, J.M. (2008). Measuring volatility in the Nordic spot electricity market using recurrence quantification analysis. *The European Physical Journal - Special Topics* 164, 105-115.
- [63] Takens, F., *Detecting strange attractor in turbulence*, Lecture Notes in Mathematics, 898, D.A. Rand and L.S. Young (eds.) Springer Verlag, New York (1981) 366-383.
- [64] Tong, H. (1990). *Non-linear Time Series. A dynamical System Approach*. Oxford: Oxford University Press.
- [65] Trulla LL, Giuliani A, Zbilut JP and Webber CL. (1996). Recurrence quantification analysis of the logistic equation with transients. *Phys Lett A* 223, 255-260.
- [66] Webber CL and Zbilut JP. (1994). Dynamical assessment of physiological systems and states using recurrence plot strategies. *J Appl Physiol*, 76(2), 965-973.
- [67] Whitney, H. (1936). Differentiable Manifolds, *Annals of Mathematical*, 37, (1936), 645-680.
- [68] Wolf, A., Swift, J.B., Swinney, H.L. and Vastano J.A. (1985). Determining Lyapunov exponents from a time series. *Physica16D*, 285-317.
- [69] Zbilut, J.P. (2005). Use of Recurrence Quantification Analysis in Economic Time Series. *Economic: Complex Windows. New Economic Windows*, Springer 91-104.
- [70] Zbilut, J.P., Thomasson, N., Webber, C.L., Jr. (2002). Recurrence quantification analysis as a tool for nonlinear exploration of nonstationary cardiac signals. *Med. Engin. Physics*, 24, 53.
- [71] Zbilut, J.P. and Webber CL. (1992). Embeddings and delays as derived from quantification of recurrence plots. *Phys Lett A*, 171, 199-203.