Universitat Autònoma
de Barcelona

Anexos de la tesis doctoral:

Estudio sobre la actuación docente y la interacción en la creación y aprovechamiento de oportunidades de aprendizaje en el aula de matemáticas

Miquel Ferrer Puigdellívol

Directores:

Josep Maria Fortuny Aymemí

Lluís Bibiloni Matos

Doctorat en Didàctica de les Matemàtiques i de les Ciències

Departament de Didàctica de la Matemàtica i de les Ciències Experimentals
Facultat de Ciències de l'Educació
Universitat Autònoma de Barcelona

Diciembre de 2015

Índice de anexos

ANEXO I

Actividades matemáticas y problemas de la secuencia instructiva[1]

[1] Debido a que la lengua vehicular de las clases de matemáticas de los centros A y B es el catalán, los enunciados de todas las tareas de semejanza se diseñaron en lengua catalana. En este anexo decidimos mantener el idioma original del texto.

Los ficheros de GeoGebra de todas las actividades y problemas matemáticos de la secuencia instructiva de tareas de semejanza se encuentran disponibles en:
https://sites.google.com/site/annexostesimiquelferrer/AnexosIyII_GeoGebra.zip?attredirects=0&d=1

Universitat Autònoma de Barcelona

SEMBLANÇA, TEOREMA DE TALES I HOMOTÈCIA

Nom i cognoms: ....

ESO III. Classe: ....

Febrer de 2014

ACTIVITATS INTRODUCTÒRIES

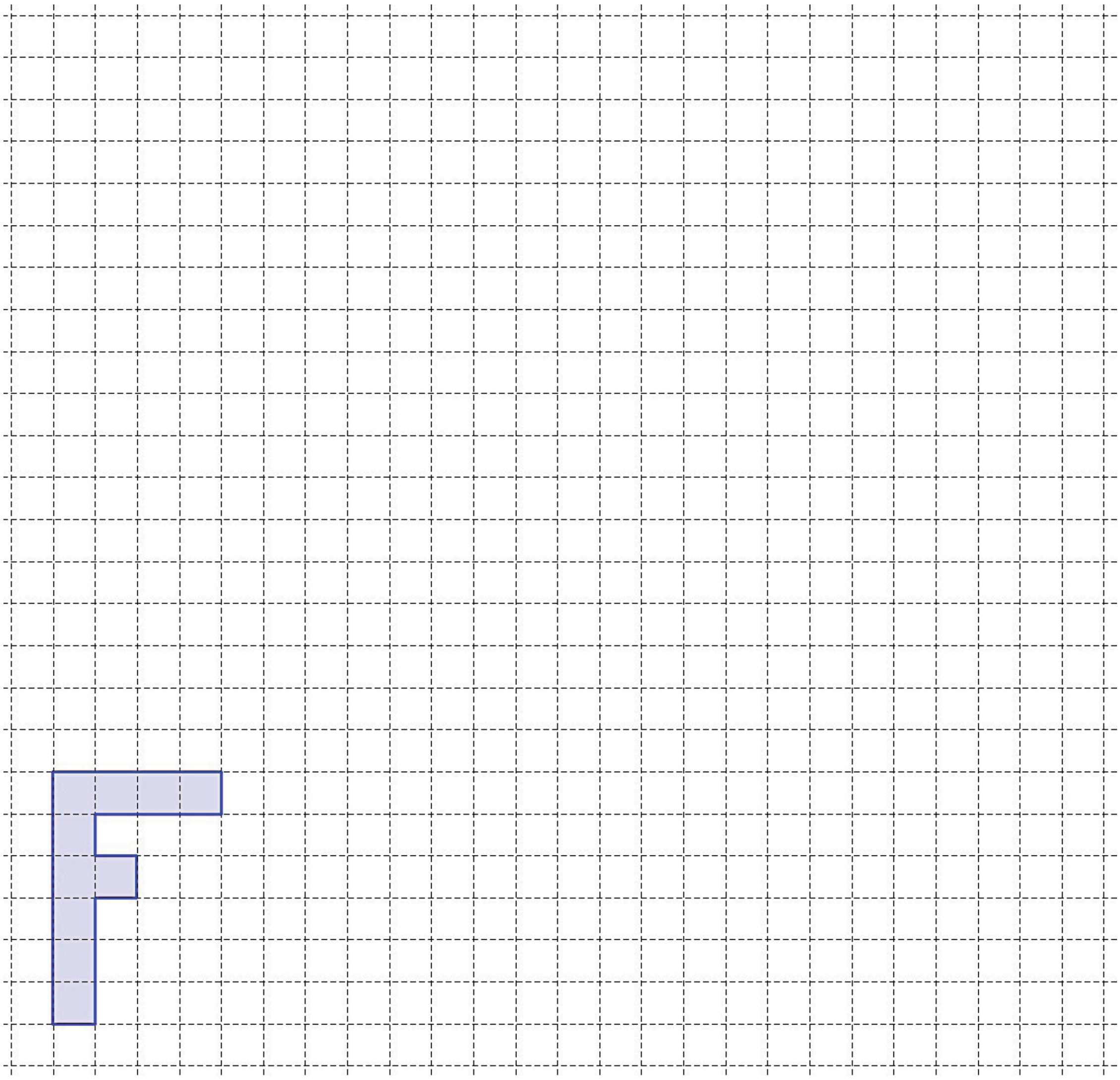
- Primerament, llegiu-vos amb atenció i individualment les cinc activitats.
- A continuació, resoleu per parelles les activitats i escriviu les vostres respostes en el mateix full. Utilitzeu només un color (llapis, bolígraf blau o negre).

POSADA EN COMÚ

- Cal que estigueu molt atents a la posada en comú per corregir els errors que tingueu i afegiu a la vostra resolució totes les noves idees que hagin sorgit durant la discussió, utilitzant un bolígraf d'un altre color (vermell o verd).

Activitat 1: Doblem figures!

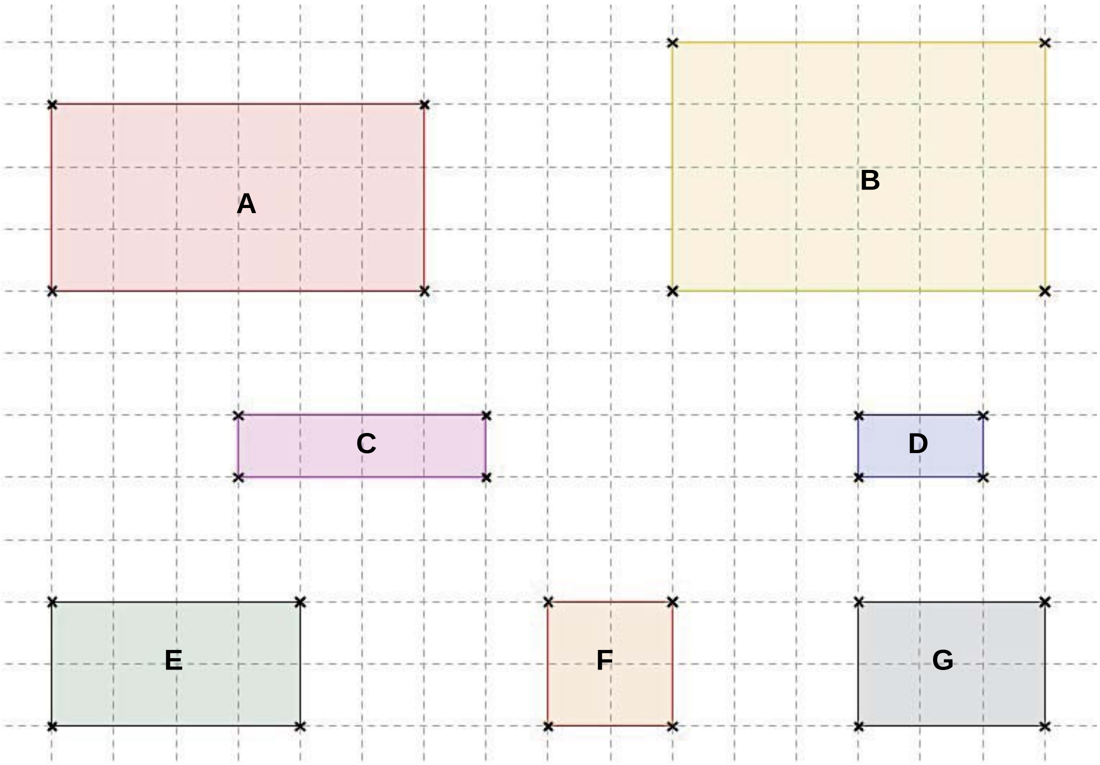
Donada la següent lletra de l'abecedari (una 'F'), representa'n altres (noves 'F's') que siguin el doble de grans. Explica breument com les has obtingudes i compara-les amb la lletra l'original.



Explica, breument, com les has obtingudes i compara-les amb l'original:

Activitat 2: Rectangles que s'assemblen

Quins dels següents rectangles són semblants? Per què?



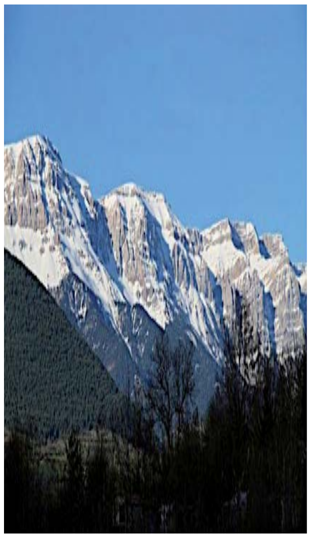
Escriu a continuació la teva resposta:

Activitat 3: Ampliem i reduïm fotocòpies

a) Tenim una fotografia d'un paisatge (original) i la volem ampliar i reduir amb una fotocopiadora. Quines de les següents imatges podríem aconseguir? Per què?

Original

Imatge 1



Imatge 2

Imatge 3

Imatge 4

Escriu a continuació la teva resposta:

b) Quin percentatge hem de posar al marcador de la fotocopiadora per reduir la fotografia original i aconseguir la reducció 1? I per aconseguir l'ampliació 1? Argumenta la teva resposta.

Original

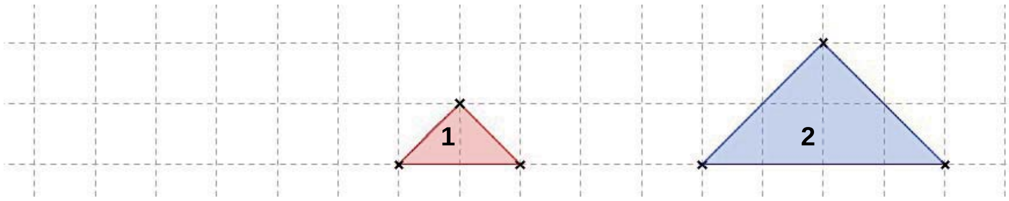
Reducció 1

Ampliació 1

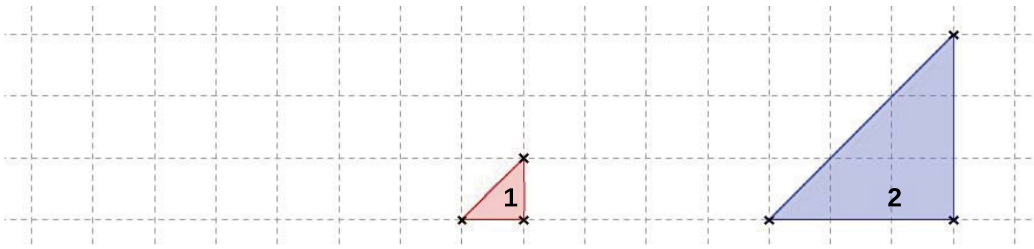
Escriu a continuació la teva resposta:

Activitat 4: Canviem la mida dels polígons!

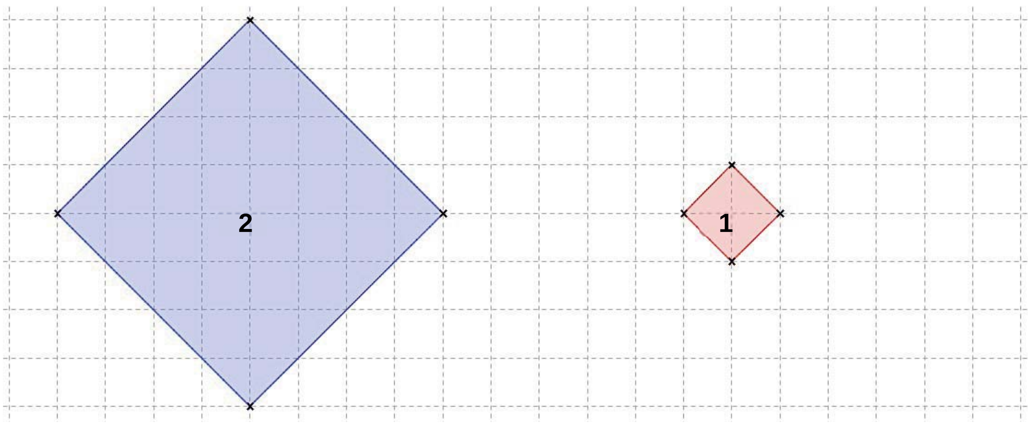
Explica breument com transformaries la figura vermella (**1**) per aconseguir la blava (**2**)? I la blava (**2**) per aconseguir la vermella (**1**)?



Fes, a continuació, l'explicació de les transformacions de l'apartat (a):



Fes, a continuació, l'explicació de les transformacions de l'apartat (b):



Fes, a continuació, l'explicació de les transformacions de l'apartat (c):

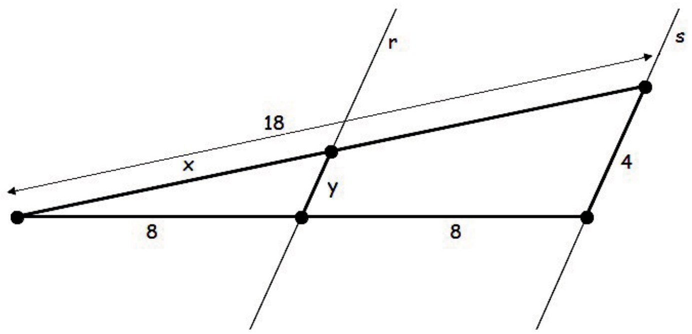
Activitat 5: Dividim un tub i recordem el teorema de Tales!

a) Com dividiries, amb la major precisió possible i sense prendre les mesures amb un regle, aquest tub de coure en tres parts, de manera que la primera mesuri la meitat de la segona i la cinquena part de la tercera? Dibuixa unes línies a sobre del tub per indicar on faries els talls.

Argumenta, a continuació, per què el procediment que has seguit divideix, exactament, la barra de coure en les parts que et demana l'enunciat:

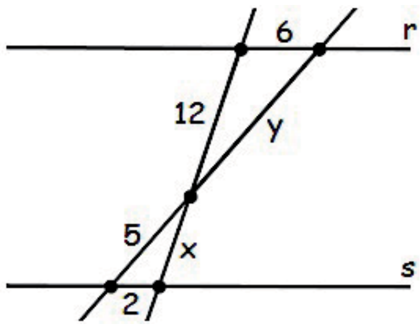
Quines són les mides de ***x*** i ***y*** en cada cas, si sabem que les rectes *r* i *s* sempre són paral·leles? En cada cas, detalla els càlculs i el plantejament que segueixis.

b)



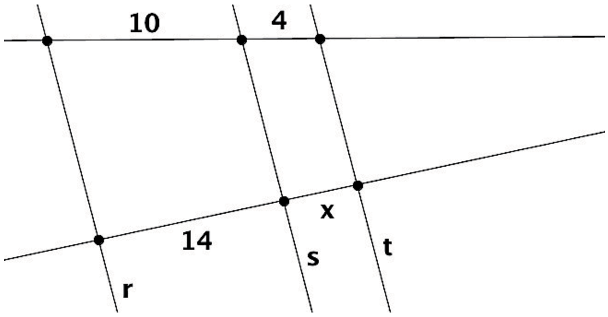
Resol, a continuació, l'apartat (b):

c)



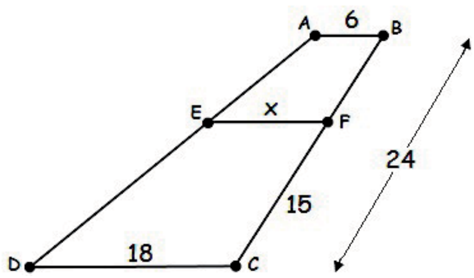
Resol, a continuació, l'apartat (c):

d) Si sabem que *r*, *s* i *t* són paral·leles. Quin és el valor de ***x*** ?



Resol, a continuació, l'apartat (d):

e) Si sabem que *AB*, *EF* i *DC* són paral·lels. Quin és el valor de ***x*** ?



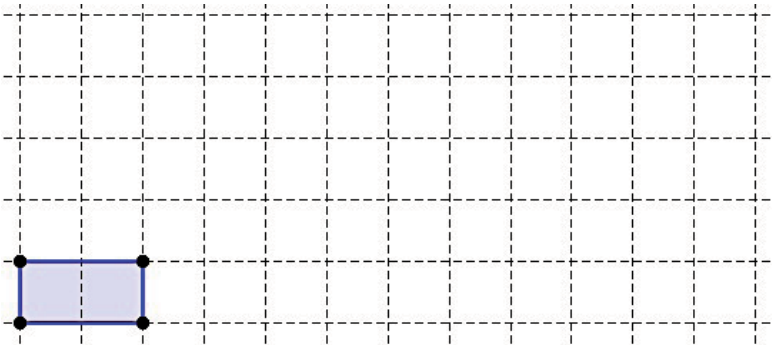
Resol, a continuació, l'apartat (e):

<u>Problema 1:</u> Relacionem perímetres i àrees de figures semblants

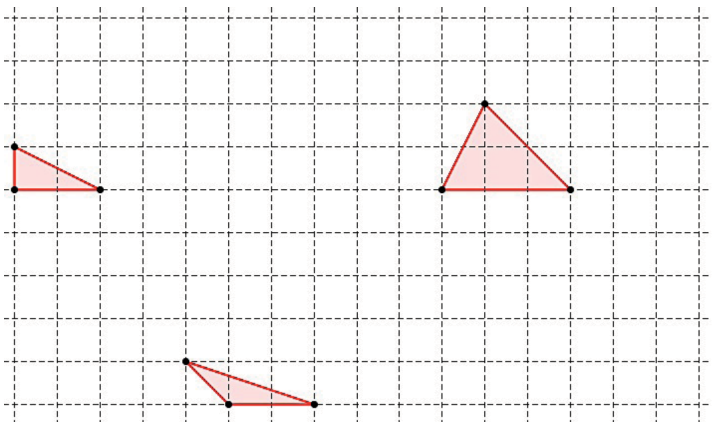
A la primera activitat (*Doblem figures!*) vàrem observar que si multiplicàvem per 2 els costats d'un quadrat la seva àrea quedava multiplicada per $4 = 2^2$ i, a més, el nou quadrat era semblant a l'original.

El mateix es produïa si multiplicàvem per 3 els costats (l'àrea quedava multiplicada per $9 = 3^2$), per 4 (l'àrea es multiplicava per $16 = 4^2$), etc. Ara bé, **com podem estar del tot segurs que aquest raonament es compleix per a qualsevol polígon?** Els següents apartats t'ajudaran a descobrir-ho!

a) Donat el següent rectangle, si multipliquem per 2 tots els seus costats, per quant es multiplicarà la seva àrea? I si els multipliquem per 3, 4, 5,...? Argumenta la teva resposta.



b) Donats els següents triangles, si multipliquem per 2 tots els seus costats, per quant es multiplicarà la seva àrea? I si els multipliquem per 3, 4, 5,...? Argumenta la teva resposta.
<u>**Nota**</u>: No utilitzis la fórmula de l'àrea del triangle en el teu raonament.



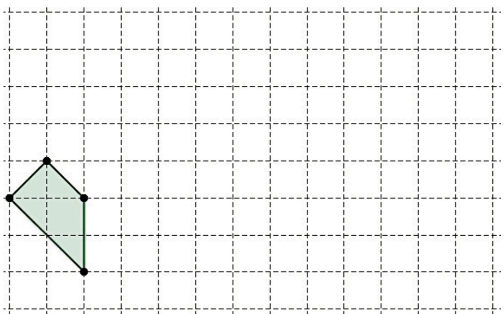
c) Els rectangles i triangles obtinguts en els apartats anteriors són semblants al polígon original? Per què?

d) Si sabem que l'àrea d'un rectangle s'obté multiplicant la longitud de la seva base per la longitud de la seva altura, com podem obtenir la fórmula de l'àrea d'un triangle? Argumenta amb detall la teva resposta.
<u>**Ajuda**</u>: Et pot ser útil començar el teu raonament amb un triangle rectangle i, després, raonar-ho per altres tipus de triangles.

Resol, a continuació, l'apartat (d):

Després de resoldre tots aquests apartats ja sabem que si multipliquem per 2, 3, 4, 5,... els costats d'un quadrat, rectangle o triangle, les seves àrees es multiplicaran per $4 = 2^2$, $9 = 3^2$, $16 = 4^2$, $25 = 5^2$, etc. i els nous polígons seran semblants a l'original.

e) Podem estar del tot segurs que aquesta mateixa propietat es complirà per al polígon de la següent imatge? I per a qualsevol altre? Argumenta la teva resposta.



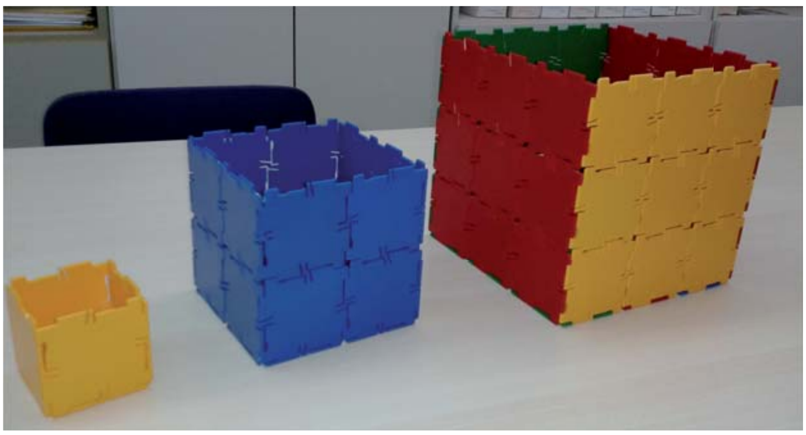
Problema 2: La semblança en les fulles d'un arbre

Fixa't en la següent fotografia, on es mostra una branca amb les seves fulles:

a) Quin és el perímetre i l'àrea de la fulla gran d'aquesta branca? Ajuda't del GeoGebra i detalla la teva resposta en un quadre de text.

b) Com podries saber la mesura del perímetre i l'àrea de la fulla mitjana i la petita sense repetir el mateix procediment? Argumenta-ho a dins d'un quadre de text del fitxer de GeoGebra.

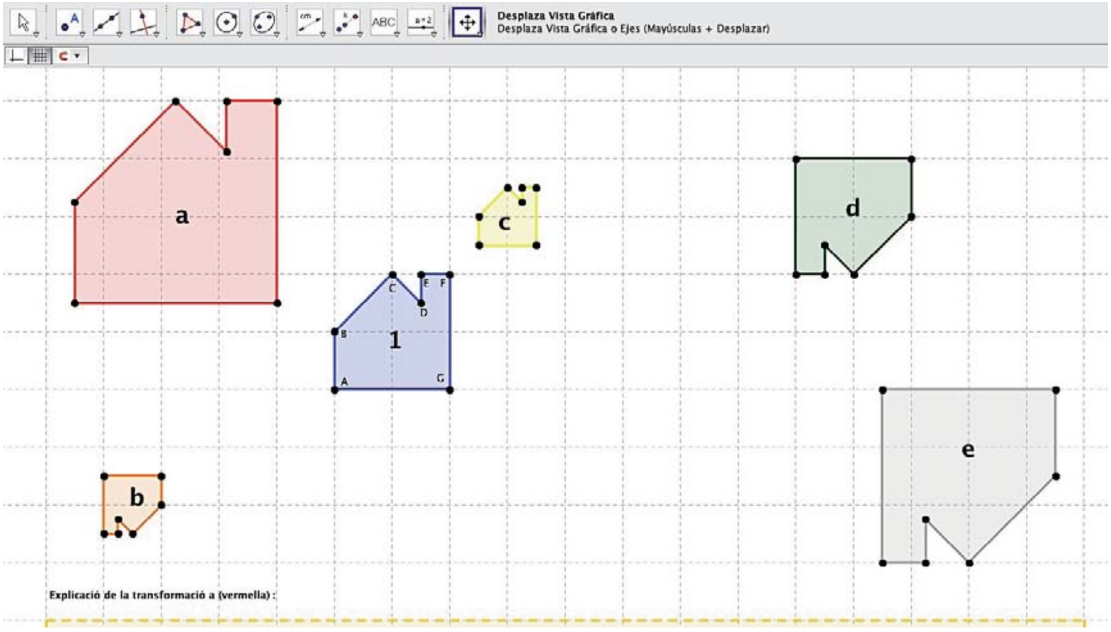
Fixa't en la següent fotografia, on s'il·lustren diferents recipients que poden mesurar capacitats:



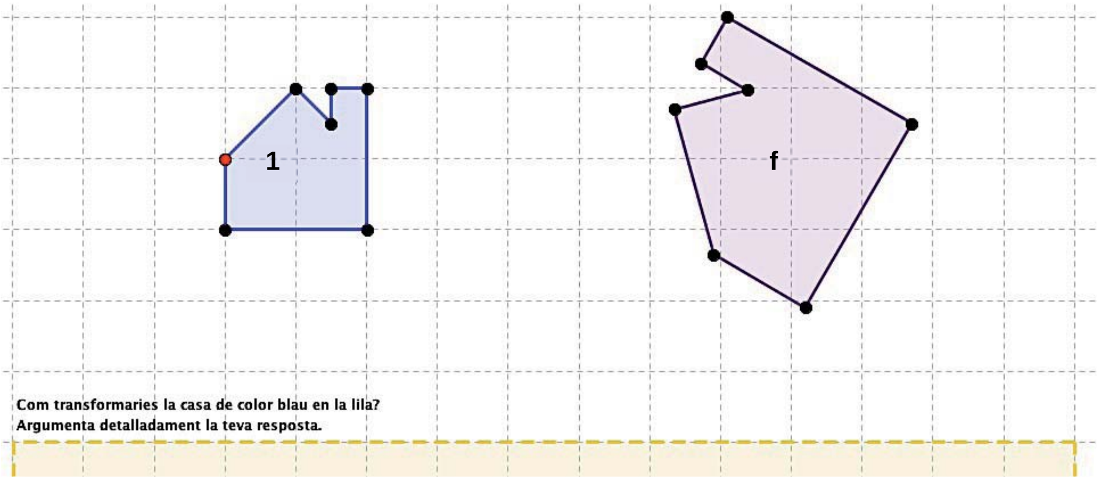
c) Calculant el volum de només un d'ells, com podríem saber el volum dels altres? Argumenta-ho amb detall a dins d'un quadre de text del fitxer del GeoGebra.

Problema 3: Transformacions geomètriques

a) A la casa de color blau (**1**) li hem aplicat cinc transformacions geomètriques per obtenir la resta de cases de colors. Quines són aquestes transformacions? Identifica-les i explica tot el que sàpigues de cadascuna d'elles.



b) Com transformaries la casa de color blau (**1**) en la lila (**f**)? Ajuda't del GeoGebra per realitzar-ho i argumenta detalladament la teva resposta.



Problema 4: Punts mitjos amb una propietat curiosa

Donada una circumferència, considerem un punt, *A*, situat a sobre de la circumferència i un punt *B* exterior a ella. Què compleixen els punts mitjos d'*A* i *B* quan anem desplaçant *A* per sobre de la circumferència? Argumenta la teva resposta.

Problema 5: Investiguem amb els miralls!

T'has preguntat mai quina ha de ser la longitud mínima d'un mirall de paret perquè ens hi puguem veure completament (des del cap fins als peus)? Creus que és important la posició que tingui a la paret? S'hauria de col·locar d'alguna manera en especial? O bé, sigui quina sigui l'altura que el posem respecte del terra el mirall funcionarà?

Quan resolguis l'activitat seràs capaç de respondre aquestes preguntes i algunes altres que se't puguin formular!

Redacta, a continuació, totes les idees, raonaments, respostes a les diferents preguntes, etc. que s'hagin discutit durant la resolució i correcció d'aquest problema:

ANEXO II

Guía para el profesorado sobre la preparación de la secuencia instructiva

GUIA D'ACTUACIÓ DEL PROFESSOR[1]

Activitats de semblança

[1] Debido a que la lengua vehicular de las clases de matemáticas de los centros A y B es el catalán, la guía para el profesorado sobre la preparación de la secuencia instructiva de tareas de semejanza se diseñó en lengua catalana. En este anexo decidimos preservar el idioma original del texto.

INTRODUCCIÓ[2]

La seqüència didàctica que es presenta en les següents pàgines forma part del disseny instructiu d'una tesi doctoral en didàctica de les matemàtiques, la qual s'està realitzant a la Universitat Autònoma de Barcelona i s'engloba en el projecte EDU2011-23240, titulat "Momentos clave en el aprendizaje de la geometría en un entorno colaborativo y tecnológico".

La unitat curricular que s'ha seleccionat és el tema de semblança, teorema de Tales i homotècia, i està pensada per posar-se en pràctica amb estudiants de tercer curs d'ESO. Se centra l'atenció en el treball col·laboratiu per parelles, l'entorn tecnològic basat en el GeoGebra i les posades en comú o discussions en gran grup gestionades pel professor en un grup complet i ordinari d'alumnes.

Amb la implementació d'aquesta seqüència didàctica es pretén experimentar i avaluar l'eficàcia d'un model d'ensenyament i aprenentatge del tema de semblança, basat en el treball col·laboratiu en un entorn tecnològic i focalitzant l'atenció en les posades en comú. Tanmateix, les dades que s'obtinguin durant la posada en pràctica de la seqüència d'activitats i problemes de semblança han de servir, entre altres aspectes, per caracteritzar les oportunitats d'aprenentatge que sorgeixen en les posades en comú i per poder aprofundir en la forma com els estudiants són capaços de consolidar aquestes oportunitats d'aprenentatge. Ens basarem en la implementació de la seqüència didàctica realitzada per diferents professors per veure de quina forma les característiques pròpies de l'estil docent influeixen en el perfil d'aprenentatge dels alumnes.

Aquest document inclou l'estructura completa del tema, el qual es basa en cinc activitats introductòries dissenyades per ser resoltes amb llapis i paper, i cinc problemes, quatre dels quals estan especialment pensats per ser treballats fent ús del GeoGebra. També s'inclouen les solucions de les activitats i problemes de la seqüència, els arbres dels problemes amb els missatges que pot donar el professor per desbloquejar els estudiants en cas de necessitat i/o per conduir-los a l'obtenció de noves solucions; i les estratègies de resolució que a priori s'han previst per a cadascuna de les activitats i problemes.

[2] Els fitxers de GeoGebra de totes les activitats i problemes matemàtics de la seqüència instructiva de tasques de semblança es troben disponibles a:
https://sites.google.com/site/annexostesimiquelferrer/AnexosIyII_GeoGebra.zip?attredirects=0&d=1

ESTRUCTURA DE LA SEQÜÈNCIA DIDÀCTICA

<table>
<tr><th colspan="6">Estructura de la seqüència didàctica d’activitats i problemes de semblança</th></tr>
<tr><th>#</th><th>LLOC</th><th>TASQUES</th><th>ANTICIPACIÓ</th><th>CONFIGURACIÓ DIDÀCTICA</th><th>MODE D’EXPLOTACIÓ</th></tr>
<tr><td rowspan="4">1</td><td rowspan="4">Classe ordinària (1 hora)</td><td rowspan="4">Realització de les 5 activitats introductòries.</td><td rowspan="4">Elaboració i consulta prèvia a la sessió dels arbres dels problemes associats a les 5 activitats introductòries i que figuren en aquesta memòria.</td><td rowspan="4">Fotocòpies en color de les activitats introductòries (1 joc de fotocòpies per a cada alumne).
Cal que els estudiants disposin del material habitual de classe (llapis, goma, bolígraf, etc.) i, preferiblement, de regle graduat i escaire / cartabó.</td><td>Explicació breu, per part del professor, de les tasques a realitzar (5’).</td></tr>
<tr><td>Els alumnes llegeixen individualment les activitats introductòries (uns 5 - 10 minuts).</td></tr>
<tr><td>Resolució per parelles i amb llapis i paper de les activitats (35’ – 40’).</td></tr>
<tr><td>Mentre els alumnes treballen, el professor va passant per la classe i els missatges que dóna se centren en possibles aclariments dels enunciats i en desbloquejar els estudiants.</td></tr>
<tr><td rowspan="3">2</td><td rowspan="3">Classe ordinària (1 hora)</td><td rowspan="3">Posada en comú de les 2 o 3 primeres activitats introductòries: A.I. 1, 2 (i iniciar la 3)</td><td rowspan="2">Visualització prèvia a la sessió de les respostes dels estudiants per seleccionar aquells que iniciaran el debat i que es vol que intervinguin.</td><td rowspan="3">Pissarra ordinària i/o digital i projector amb ordinador que tingui instal·lat el GeoGebra.</td><td>El professor gestiona la posada en comú, però són els alumnes els que exposen les seves respostes amb la guia del professor.</td></tr>
<tr><td>Es pot combinar l’ús de la pissarra ordinària, la digital i el GeoGebra.</td></tr>
<tr><td>Observar els arbres dels problemes de les 3 primeres activitats introductòries per tenir en ment els elements que volem fer sorgir a la discussió.</td><td>El professor ha de recordar que cal que els alumnes estiguin molt atents a la posada en comú, perquè corregeixin les seves respostes i incorporin les noves idees sorgides durant la discussió en el seu document de resolució.</td></tr>
</table>

3	Classe ordinària (1 hora)	Posada en comú de les 2 o 3 últimes activitats introductòries: A.I. 3 (final), 4 i 5.	Visualització prèvia a la sessió de les respostes dels estudiants per seleccionar aquells que iniciaran el debat i que es vol que intervinguin. Observar els arbres dels problemes de les 2 últimes activitats introductòries per tenir en ment els elements que es volen fer sorgir a la discussió.	Pissarra ordinària i/o digital i projector amb ordinador que tingui instal·lat el GeoGebra.	El professor gestiona la posada en comú, però són els alumnes els que exposen les seves solucions amb la guia del professor. Es pot combinar l'ús de la pissarra ordinària, la digital i el GeoGebra. El professor ha de recordar que cal que els alumnes estiguin molt atents a la posada en comú, perquè corregeixin les seves respostes i incorporin les noves idees sorgides durant la discussió en el seu document de resolució.
4	Sala d'ordinadors (1 hora)	**Problema 1**: Relacionem perímetres i àrees de figures semblants. **Problema 2**: La semblança en les fulles d'un arbre.	Elaboració i consulta prèvia a la sessió dels arbres dels problemes 1 i 2, els quals figuren en aquesta memòria.	Ordinador per a cada parella, amb accés a internet, al moodle de l'assignatura de Matemàtiques i al GeoGebra. Cal que els alumnes s'asseguin amb les mateixes parelles que el dia anterior. Fotocòpies en color per a cada alumne dels problemes 1 i 2.	Explicació breu, per part del professor, de les tasques a realitzar (uns 5 minuts). Els alumnes llegeixen individualment els dos problemes (uns 5 minuts). Els alumnes han de resoldre els problemes amb el GeoGebra i per parelles. Disposen d'uns 35 minuts per al P1 i d'uns 20 per al P2. Mentre els alumnes treballen, el professor va passant per la classe i els missatges que dóna se centren en possibles aclariments dels enunciats i en desbloquejar els estudiants, per tal que treballin i argumentin amb el major detall possible les seves respostes.

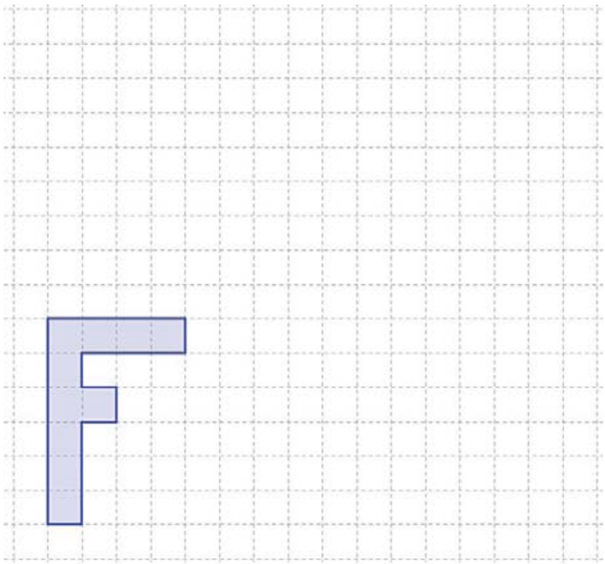
5	Classe ordinària (1 hora)	Posada en comú dels problemes 1 i 2.	Visualització prèvia a la sessió de les respostes dels estudiants per seleccionar aquells que iniciaran el debat i que es vol que intervinguin.	Pissarra ordinària i/o digital i projector amb ordinador que tingui instal·lat el GeoGebra.	El professor gestiona la posada en comú, però són els alumnes els que exposen les seves solucions amb la guia del professor.
					Centrar la posada en comú en la resolució del primer problema.
					Es pot combinar l'ús de la pissarra ordinària, la digital i el GeoGebra.
			Observar els arbres dels problemes 1 i 2 per tenir en ment els elements que volem fer sorgir a la discussió.		El professor ha de recordar que cal que els alumnes estiguin molt atents a la posada en comú, perquè corregeixin les seves respostes i puguin incorporar les noves idees sorgides durant la discussió en el seu document de GeoGebra.
6	Sala d'ordinadors (1 hora)	**Problema 3**: Transforma-cions geomètriques.	Elaboració i consulta prèvia a la sessió dels arbres dels problemes 3 i 4, els quals figuren en aquesta memòria.	Ordinador per a cada parella, amb accés a internet, al moodle de l'assignatura de Matemàtiques i al GeoGebra.	Explicació breu, per part del professor, de les tasques a realitzar (uns 5 minuts).
					Els alumnes llegeixen individualment els dos problemes (uns 5 minuts).
				Cal que els alumnes s'asseguin amb les mateixes parelles que el dia anterior.	Els alumnes han de resoldre els problemes amb el GeoGebra i per parelles. Disposen d'uns 35' pel problema 3 i d'uns 15' pel problema 4.
		Problema 4: Punts mitjos amb una propietat curiosa.		Fotocòpies en color per a cada alumne dels problemes 3 i 4.	Mentre els alumnes treballen, el professor va passant per la classe i els missatges que dóna se centren en possibles aclariments dels enunciats i en desbloquejar els estudiants, per tal que treballin i argumentin amb el major detall possible les seves respostes.

7	Classe ordinària (1 hora)	Posada en comú dels problemes 3 i 4.	Visualització prèvia a la sessió de les respostes dels estudiants per seleccionar aquells que iniciaran el debat i que es vol que intervinguin. Observar els arbres dels problemes 3 i 4 per tenir en ment els elements que es volen fer sorgir a la discussió.	Pissarra ordinària i/o digital i projector amb ordinador que tingui instal·lat el GeoGebra.	El professor gestiona la posada en comú, però són els alumnes els que exposen les seves respostes, solucions, tècniques, dubtes, etc. amb la guia del professor. Es pot combinar l'ús de la pissarra ordinària, la digital i el GeoGebra. El professor ha de recordar que cal que els alumnes estiguin molt atents a la posada en comú, perquè corregeixin les seves respostes i puguin incorporar les noves idees sorgides durant la discussió en el seu document de GeoGebra.
8	Classe ordinària (1 hora)	Resolució i posada en comú del **problema 5**: Investiguem amb els miralls!	Elaboració i consulta prèvia a la sessió de l'arbre del problema 5 i de la gestió de la classe. Aquests elements figuren a la memòria.	Tot i tractar-se d'una sessió amb una dinàmica diferent de les anteriors, és preferible que els alumnes s'asseguin amb les mateixes parelles que els altres dies. Fotocòpies, per a cada alumne, del problema 5. Pissarra ordinària i/o digital i projector amb ordinador que tingui instal·lat el GeoGebra.	Explicació breu, per part del professor, de les tasques a realitzar (uns 5 minuts). Els alumnes llegeixen individualment la introducció breu del problema (2 minuts). En aquesta sessió es combina el treball individual i/o en petit grup, amb la resolució conjunta del problema entre tots els alumnes del grup classe. Com en els altres problemes, el professor gestiona la posada en comú, però són els alumnes els que exposen les seves respostes, solucions, tècniques i dubtes amb la guia del professor. Cal que els alumnes incorporin totes les idees de la discussió del problema en el seu document final de resolució.

SEQÜÈNCIA D'ACTIVITATS

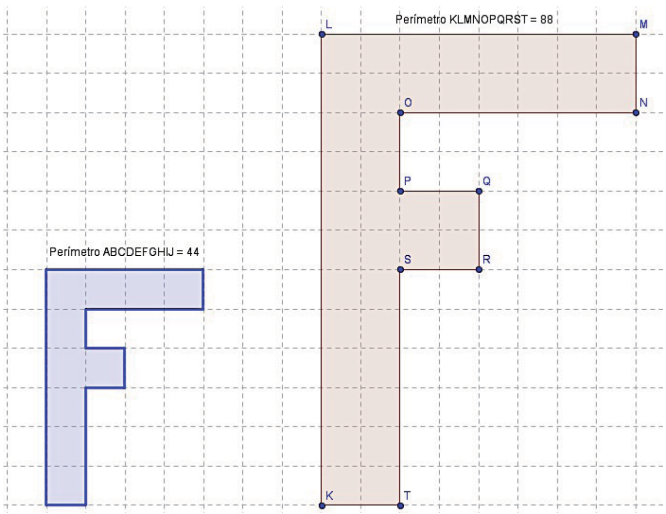
Activitat 1: Doblem figures!

Donada la següent lletra de l'abecedari (una F), representa'n altres (noves F's) que siguin el doble de grans. Explica breument com les has obtingudes i compara-les amb la lletra l'original.



L'enunciat de l'activitat possibilita que alguns estudiants representin una figura que tingui cada costat el doble de gran respecte de l'original i, per tant, el perímetre de la nova figura quedi multiplicat per 2. D'altres, en canvi, poden associar la representació d'una figura el doble de gran amb una que tingui el doble d'àrea. En aquest cas, la quadrícula permet veure amb facilitat que la figura original conté 10 quadrets i que, per tant, la seva àrea és de 10 u^2. Així, si es vol construir una nova figura multiplicant per 2 la seva àrea seran necessaris 20 quadrets.

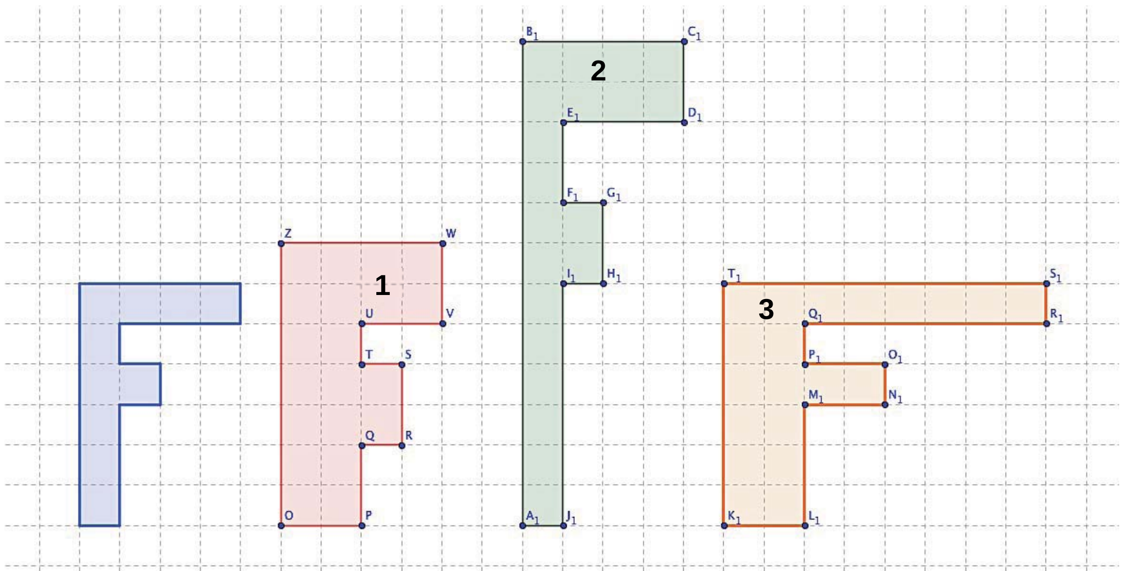
En el primer cas és previsible que els alumnes realitzin una construcció com la següent:



Per tant, hauran obtingut una ampliació de raó 2 de la figura original i podran observar que els angles de les dues figures són iguals, però els costats són proporcionals amb raó 2. Aquest fet cal emfatitzar-lo durant la posada en comú, ja que es tracta d'una definició de semblança de figures poligonals que previsiblement coneixeran del curs anterior: *Dues figures poligonals són semblants si tenen els costats homòlegs proporcionals i els angles homòlegs iguals*. Tanmateix, durant la discussió del problema es pot introduir la pregunta de: quina és l'àrea del nou quadrat respecte l'original? I si enlloc de duplicar el costat l'haguéssim triplicat, quadruplicat, etc., què passaria amb l'àrea? Previsiblement els alumnes han de ser capaços de donar resposta a aquestes preguntes, ja que es tracta de qüestions que hauran estudiat en cursos anteriors.

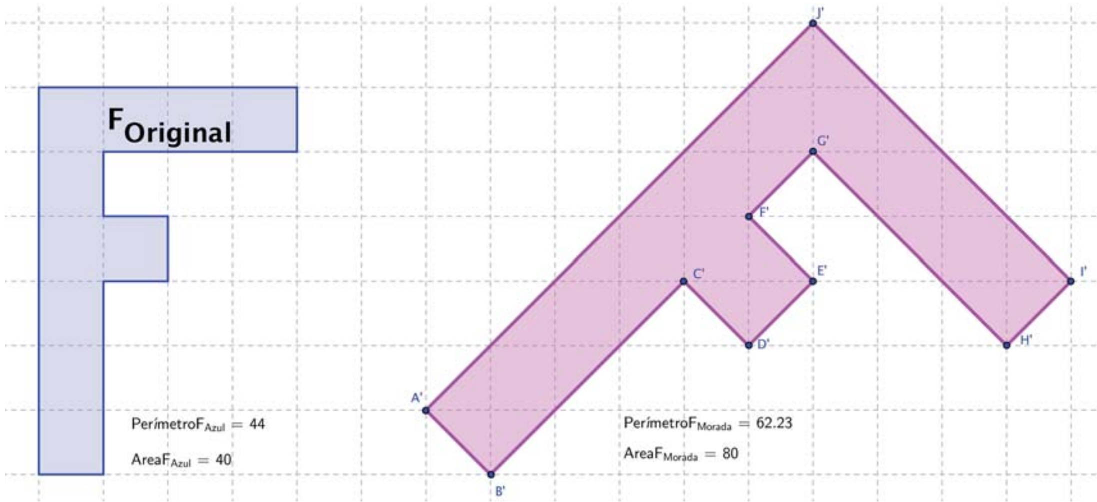
Nota: És important no introduir cap generalització d'aquest fet per altres figures geomètriques poligonals, ja que això es treballarà en el primer problema de la seqüència. És possible que els alumnes coneguin que la relació entre els perímetres de figures semblants és proporcional a la raó de semblança i la relació entre les àrees al seu quadrat. No obstant, és interessant que en aquest punt només es generalitzi pel cas dels quadrats i, si algun alumne menciona el cas general (per a tot polígon) durant la discussió en gran grup, cal evitar que el professor faci demostracions o justificacions detallades al respecte, perquè es realitzaran més endavant.

Ara bé, si intenten construir una figura que tingui el doble d'àrea, és a dir, en aquest cas una "F" amb 20 quadrets, s'observarà clarament que la forma de la figura canvia i que, per tant, no es mantenen les proporcions entre els costats de l'original i els seus homòlegs. En aquest cas, el resultat és una figura que no és semblant a la figura de l'enunciat del problema. Algunes possibles representacions són les següents:

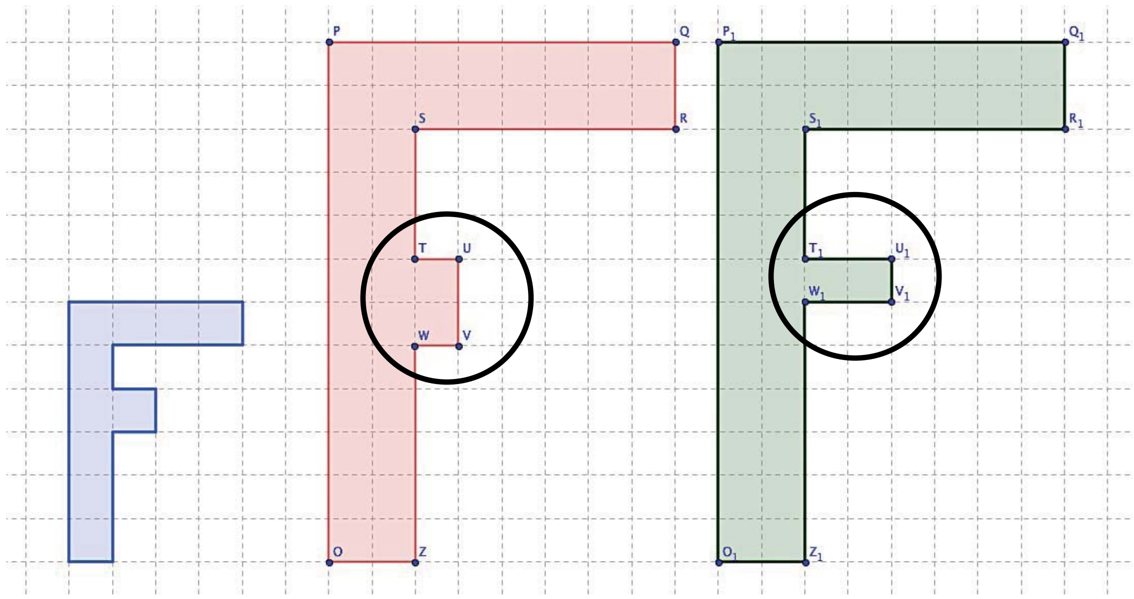


En el primer cas, la figura 1 resultant té el doble de superfície que l'original, és a dir, 20 quadrets, però sense seguir cap relació amb la duplicació de les longituds dels costats. En canvi, les figures 2 i 3 presenten també el doble d'àrea, però en el cas 2 s'han duplicat tots els costats verticals i, en canvi, en el 3 tots els horitzontals. Són moltes les possibilitats que es poden obtenir, però en qualsevol cas la forma de les figures canvia i no són semblants a l'original, perquè tot i mantenir-se la igualtat d'angles homòlegs, no es conserva la proporcionalitat dels costats homòlegs.

La representació d'una figura amb el doble d'àrea i que mantingui les proporcions amb l'original és una qüestió interessant, però complicada per a la majoria d'estudiants. La utilització d'una quadrícula de dimensions $1u^2 \times 1u^2$ pot simplificar notablement el problema, ja que fer ús de les seves diagonals permet obtenir fàcilment $\sqrt{2}$ i, d'aquesta manera, construir una figura amb el doble d'àrea respecte l'original i que preservi la semblança es converteix en una tasca més accessible per als alumnes.

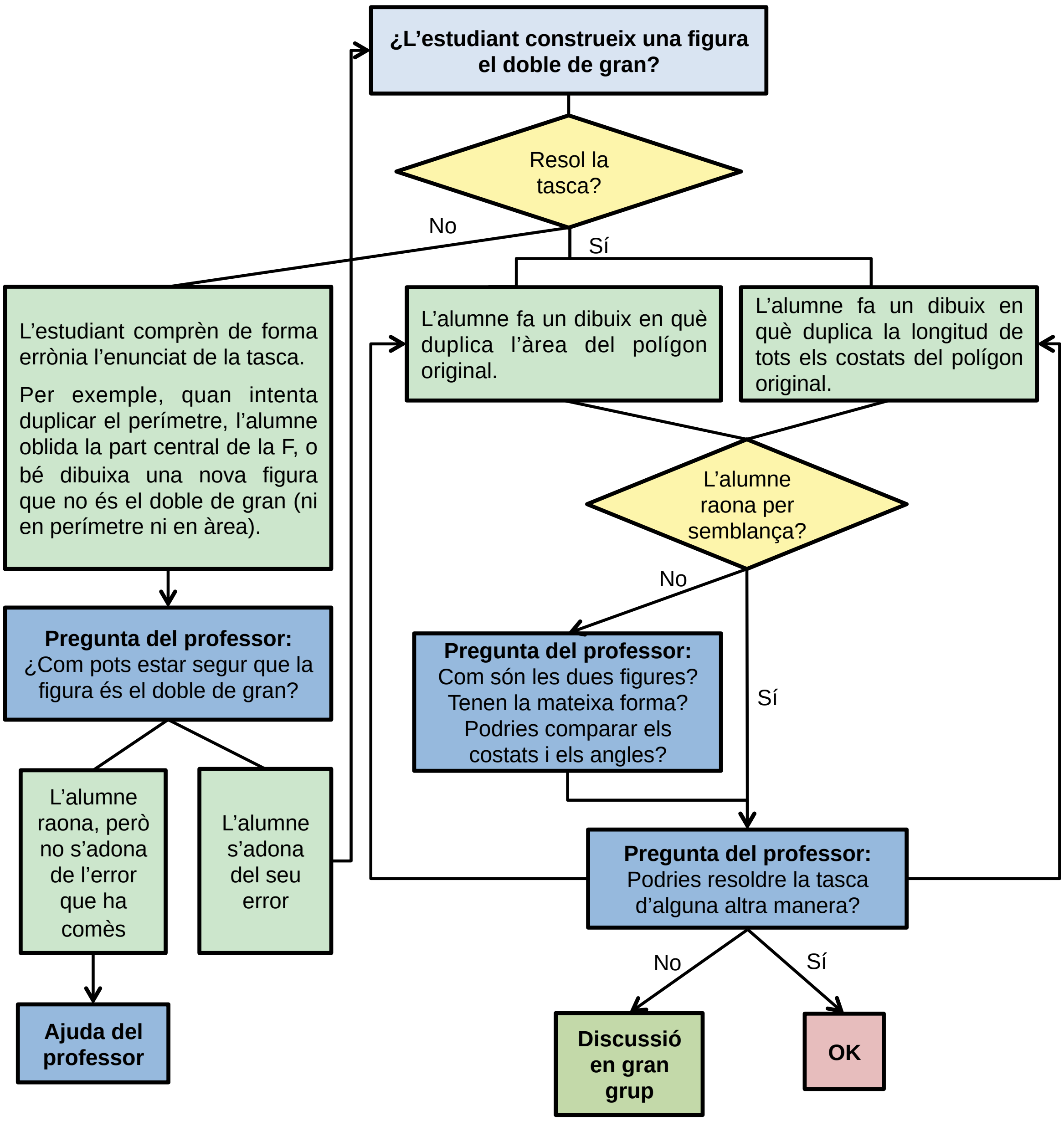


Finalment, és previsible que alguns estudiants puguin cometre errors quan intentin duplicar el perímetre de la figura i cal tenir-los en compte. Per construir una figura el doble de gran cal duplicar, seguint el cas de multiplicar per dos el perímetre, la longitud de tots els costats de la figura poligonal. Per això, en cas de produir-se construccions errònies i semblants a les següents cal que el professor les corregeixi i comentar-les durant la posada en comú:



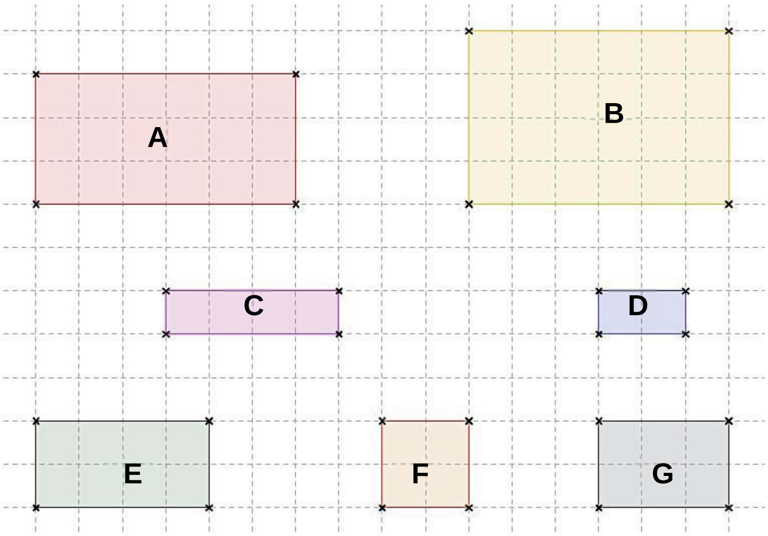
Tot i que aquesta activitat es pot resoldre perfectament amb llapis i paper i no requereix l'ús d'un software de geometria dinàmica, es pot treballar igualment amb el GeoGebra, ja que els alumnes poden realitzar les seves construccions en el mateix fitxer i poden escriure els seus raonaments utilitzant un quadre de text. De fet, si el professor ho considera adequat, pot ser interessant utilitzar aquest software durant la discussió en gran grup de l'activitat.

L'**arbre del problema de l'activitat 1** és el següent:



Activitat 2: Rectangles que s'assemblen

Quins dels següents rectangles són semblants? Per què?



L'objectiu principal d'aquesta activitat és que els estudiants siguin capaços d'identificar figures poligonals semblants a partir de la definició que hauran construït en l'activitat anterior, és a dir, dues figures poligonals són semblants si tenen tots els angles homòlegs iguals i presenten els costats homòlegs proporcionals. Naturalment, en aquest cas, la primera condició és òbvia perquè totes les figures són rectangles.

Tal com mostra l'arbre del problema, aquells alumnes que no sàpiguen per on començar l'activitat se'ls pot orientar amb unes preguntes senzilles: "Per què no et fixes i compares les mesures dels costats dels rectangles?"; o bé, "Per què no et fixes en la forma dels rectangles?" De totes maneres, en aquells casos en què el bloqueig continuï i els estudiants no s'acostin a una resposta, es preveu que el professor els ajudi amb la intenció de desbloquejar-los i que puguin continuar amb el desenvolupament de l'activitat.

El més interessant d'aquest problema és poder discutir durant la posada en comú les estratègies que han seguit els alumnes per agrupar els rectangles. En principi se'n preveuen dues: que realitzin l'agrupació a ull, és a dir, fixant-se en la forma dels rectangles i que descartin aquells que no poden ser semblants; o bé, que prenguin les mesures de cada rectangle i/o comptin els quadrets i que realitzin les divisions entre les longituds dels costats del rectangle per tal d'establir aquells que són semblants. Naturalment, també cal considerar la possibilitat que l'alumne realitzi una combinació de les dues estratègies.

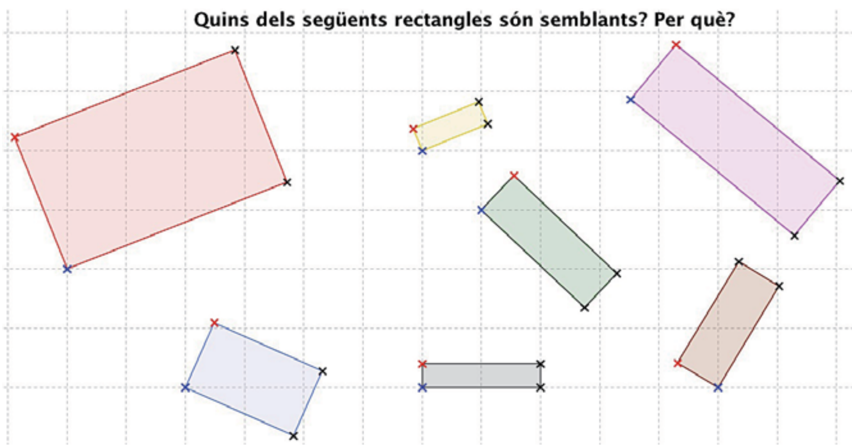
Per exemple: fixant-nos en els rectangles, clarament s'observa que el **F** no podrà ser semblant amb cap dels altres, ja que es tracta d'un quadrat i la raó entre els costats serà 1. Anàlogament es pot raonar que el **C** no podrà ser semblant a la resta, perquè a simple vista s'observa que la proporció entre el costat major i el menor és més accentuada que en els altres rectangles, ja que té una "forma més allargada". Si es compten els quadrets i es fa la divisió es visualitza que la proporció és d'1/4. Per determinar la semblança dels altres rectangles podem continuar amb el mateix raonament i fixar-nos que, si comptem quadrets, la raó entre els costats menor i major de la resta de rectangles és:

- Rectangle **A**: 3/6 = 1/2.
- Rectangle **B**: 4/6 = 2/3.
- Rectangle **D**: 1/2.
- Rectangle **E**: 2/4 = 1/2.
- Rectangle **G**: 2/3.

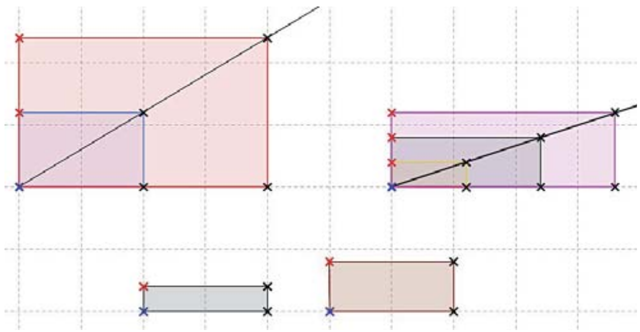
Per tant, els rectangles **A**, **D** i **E** seran semblants i, per un altre costat, el **B** i **G** també. Naturalment, si la proporció entre els costats és la mateixa, els rectangles seran semblants, ja que hi haurà un nombre tal que si el multipliquem per la longitud del costat del rectangle permetrà obtenir la longitud del costat del rectangle semblant. De totes maneres, és important que els alumnes no confonguin la relació entre els costats dels rectangles, que és igual en tots aquells que són semblants, amb la raó de semblança, és a dir, el factor de proporcionalitat entre rectangles semblants. Així, és interessant que, ja sigui durant el treball per parelles o bé durant la posada en comú, els alumnes explicitin, almenys en alguns casos, la raó de semblança entre els rectangles. Aquesta idea es considera important, ja que de rectangles semblants a un de donat n'hi ha infinits; ara bé, la raó de semblança és un valor numèric concret que queda definit en una parella de rectangles semblants.

Per exemple: si ens fixem en els rectangles **B** i **G**, observem que el costat menor del **B** mesura 4 quadrets i el major 6. En canvi, el costat menor del **G** en mesura 2 i el major 3. Per tant, quina és la raó de semblança dels rectangles **G** i **B**? Clarament, els costats del rectangle **B** són el doble que els del **G**, per tant la raó de semblança és 2. Ara bé, si ens ho mirem al revés, la raó de semblança entre els rectangles **B** i **G** és 1/2, ja que cal dividir per 2 les longituds dels costats del rectangle **B** per tal d'obtenir el **G**. Naturalment, un raonament anàleg és vàlid per a la terna dels rectangles **A**, **D** i **E**.

L'activitat que han de resoldre els alumnes per parelles acaba en aquest punt. Tot i així, amb la intenció d'enriquir la posada en comú, s'ha preparat un fitxer de GeoGebra amb un conjunt de rectangles i cal preguntar als alumnes quins són semblants.

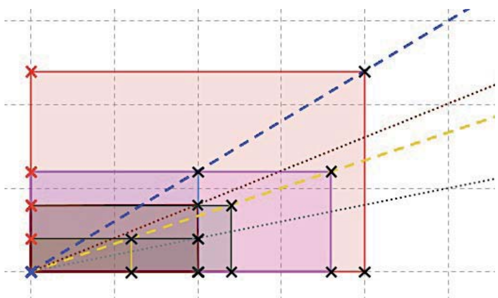


La idea és que aquest fitxer el tingui el professor i els estudiants el visualitzin durant la posada en comú. A diferència de l'activitat escrita, els rectangles del GeoGebra no estan ben disposats sobre la quadrícula i, per tant, la semblança entre ells no és tan òbvia, ni és factible fer servir inicialment l'estratègia de comptar quadrets. La intenció és que puguin aparèixer noves estratègies durant la discussió, basades en el fet que els rectangles es poden fer girar, utilitzant la creueta vermella i desplaçar per la pantalla. Naturalment, el GeoGebra permet mesurar les longituds de cada costat i establir-ne les relacions. Previsiblement, aquesta estratègia, que és anàloga a la utilitzada durant la resolució per parelles de l'activitat 2, és de les primeres que els estudiants proposaran. Tot i així, és interessant que el professor convidi als alumnes a pensar en altres opcions de resoldre el problema i, si és necessari, que els doni petites indicacions per tal que entre tots sorgeixi l'estratègia de superposar els rectangles (girant-los i desplaçant-los) amb el GeoGebra. En aquest cas, la determinació de les raons de semblança és una qüestió menor, encara que es pot comentar, però l'interessant seria obtenir una construcció com la següent:



D'aquesta manera, podem observar que els rectangles de color vermell i blau seran semblants, ja que si tracem les diagonals aquestes coincideixen. Anàlogament, per un altre costat, els rectangles de color groc, verd i lila també seran semblants. En canvi, els de color gris i marró no podran ser semblants ja que si els superposem amb els anteriors, les seves diagonals no coincideixen.

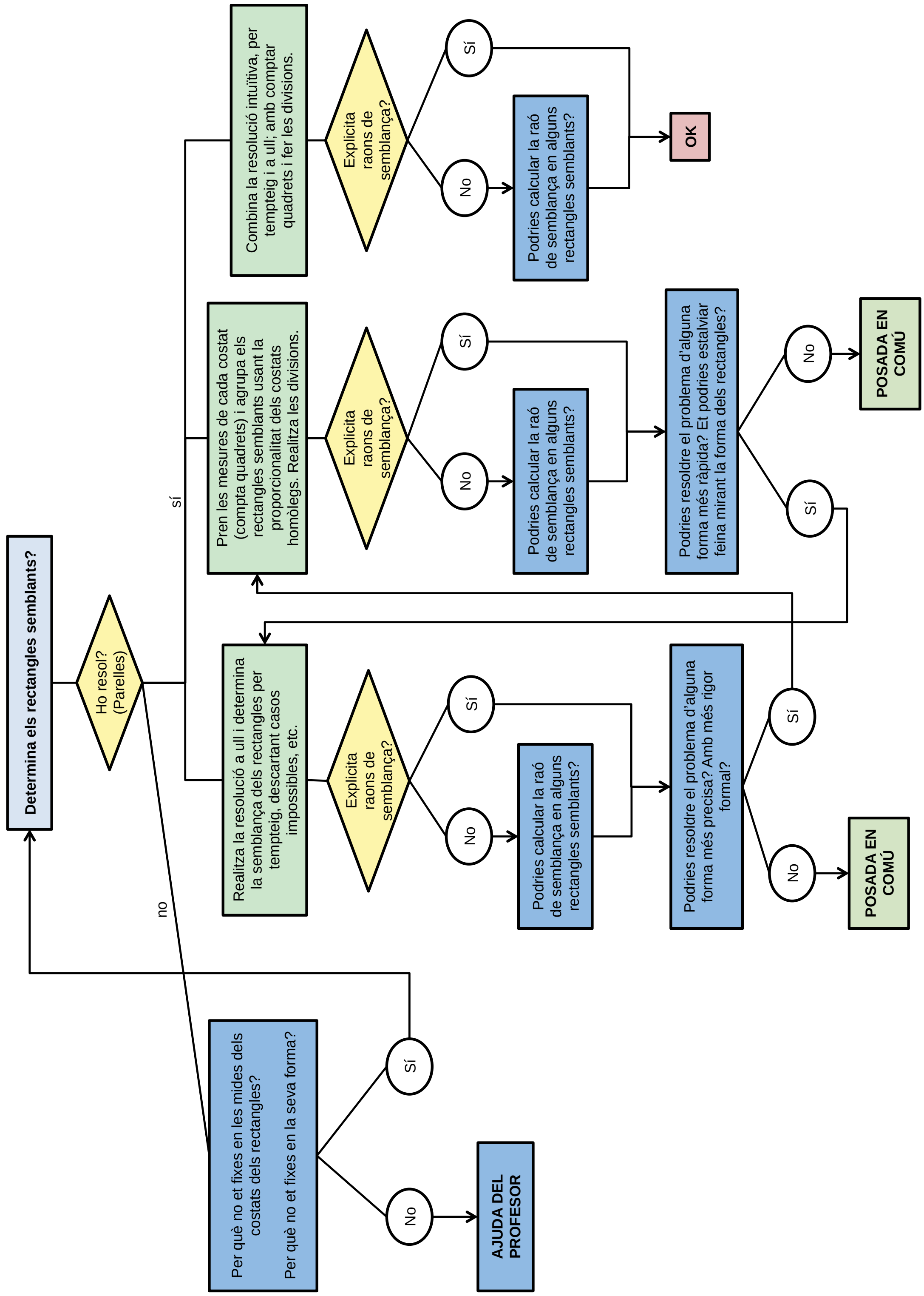
De la mateixa manera, ens podem fixar en la construcció conjunta, basada en la superposició de tots els rectangles i, així, arribem a la mateixa conclusió:



Nota: És complicat que als estudiants se'ls acudeixi l'estratègia de superposició dels rectangles en la resolució de la primera part de l'activitat, la qual es desenvolupa únicament amb llapis i paper. No obstant, cal destacar que aquest mètode també seria vàlid per resoldre-la i, per això, si alguna parella d'alumnes resol el problema d'aquesta forma, és interessant comentar-ho durant la discussió en gran grup. En tal cas, la segona part de l'activitat serviria per il·lustrar, amb el GeoGebra, l'aplicació de l'estratègia.

Per acabar la posada en comú, el professor pot preguntar als estudiants com són (o en quina posició estan) els triangles que es formen després de traçar les diagonals dels rectangles. Clarament, són triangles en posició de Tales i, ni que sigui de forma superficial i sense entrar en detalls, es pot relacionar la semblança amb la posició de Tales dels rectangles.

L'**arbre del problema de l'activitat 2** (parelles) és el següent:



Activitat 3: Ampliem i reduïm fotocòpies

a) Tenim una fotografia d'un paisatge (original) i la volem ampliar i reduir amb una fotocopiadora. Quines de les següents imatges podríem aconseguir? Per què?

Original

Imatge 1

Imatge 2

Imatge 3

Imatge 4

b) Quin percentatge hem de posar al marcador de la fotocopiadora per reduir la fotografia original i aconseguir la reducció 1? I per aconseguir l'ampliació 1? Argumenta la teva resposta.

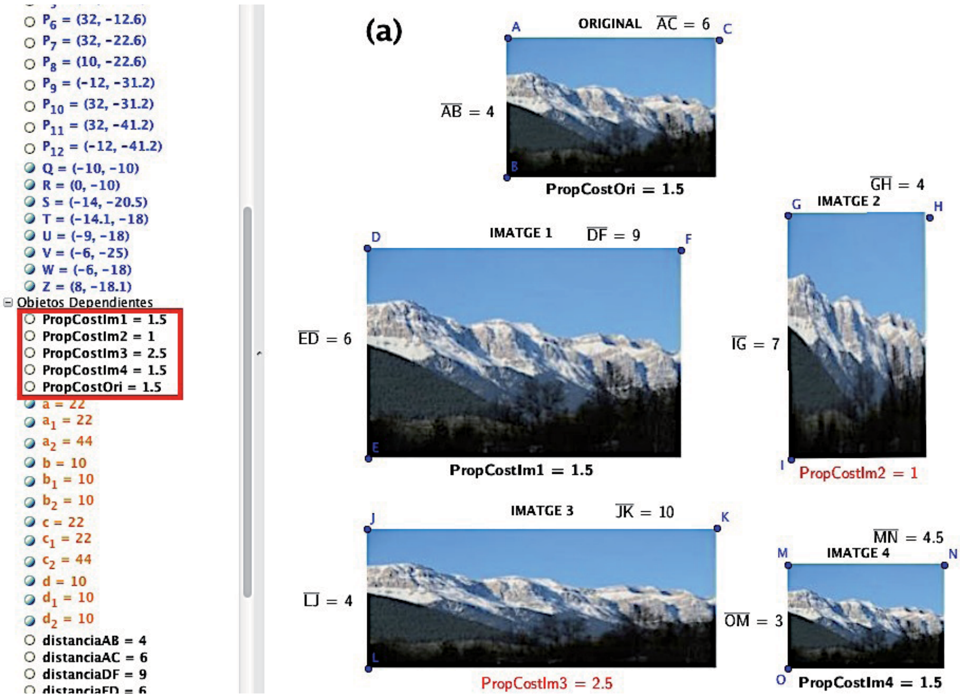
Original

Reducció 1

Ampliació 1

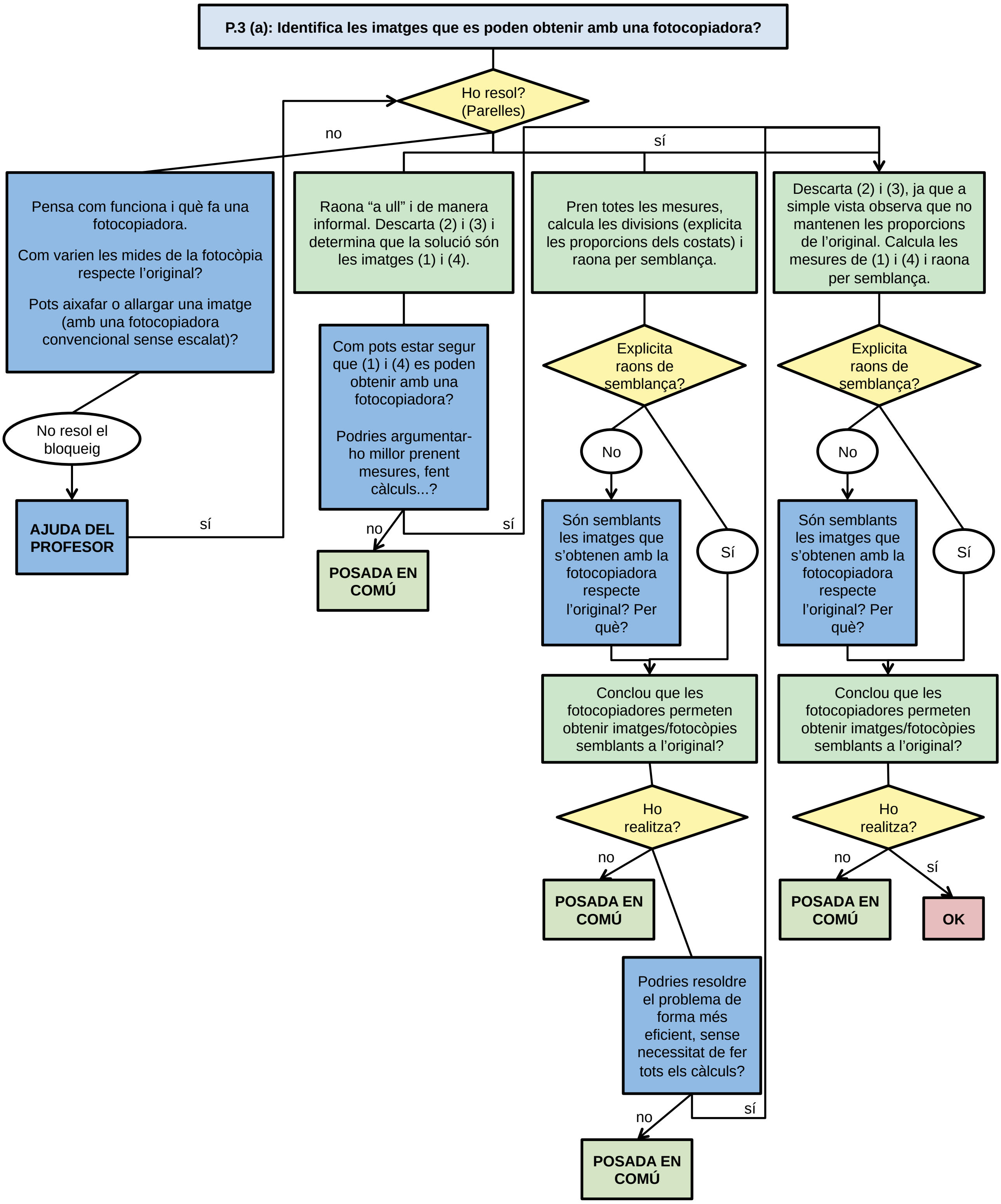
L'objectiu del primer apartat és que els alumnes s'adonin que les fotocopiadores convencionals (sense escalat) amplien i redueixen les imatges de forma proporcional, és a dir, que només es podran obtenir aquelles imatges que siguin semblants. Per aquest motiu, a simple vista s'observa que no és possible aconseguir les fotografies 2 i 3, però en canvi cal prendre les mesures per raonar sobre la 1 i la 4. Una possibilitat és calcular la proporció entre els costats dels rectangles que defineixen les figures sobre el GeoGebra i fer-ne la proporció. Després, es pot calcular la raó de semblança en cada cas. Per tant, la forma d'afrontar aquest apartat és molt semblant al procediment seguit per resoldre l'activitat anterior.

La següent il·lustració mostra una forma possible de resoldre el problema fent ús del GeoGebra (anàlogament es pot resoldre amb llapis i paper):



Nota: Durant la posada en comú es pot utilitzar el GeoGebra i, aleshores, és possible que els estudiants defineixin vèrtexs sobre les imatges del document, les quals tenen forma rectangular, per prendre'n les mides. Anàlogament, prendran les mesures amb un regle graduat quan treballin per parelles. Aquests procediments depenen molt de la posició relativa dels punts que considerin. La precisió que necessitem és d'un decimal, però només per a mitges unitats, és a dir, que les mesures de les fotografies, com es pot observar a la il·lustració anterior, són enteres o bé difereixen exactament mitja unitat de l'enter més proper. Previsiblement caldrà dir-ho als alumnes, perquè ho tinguin en compte a l'hora de realitzar els càlculs.

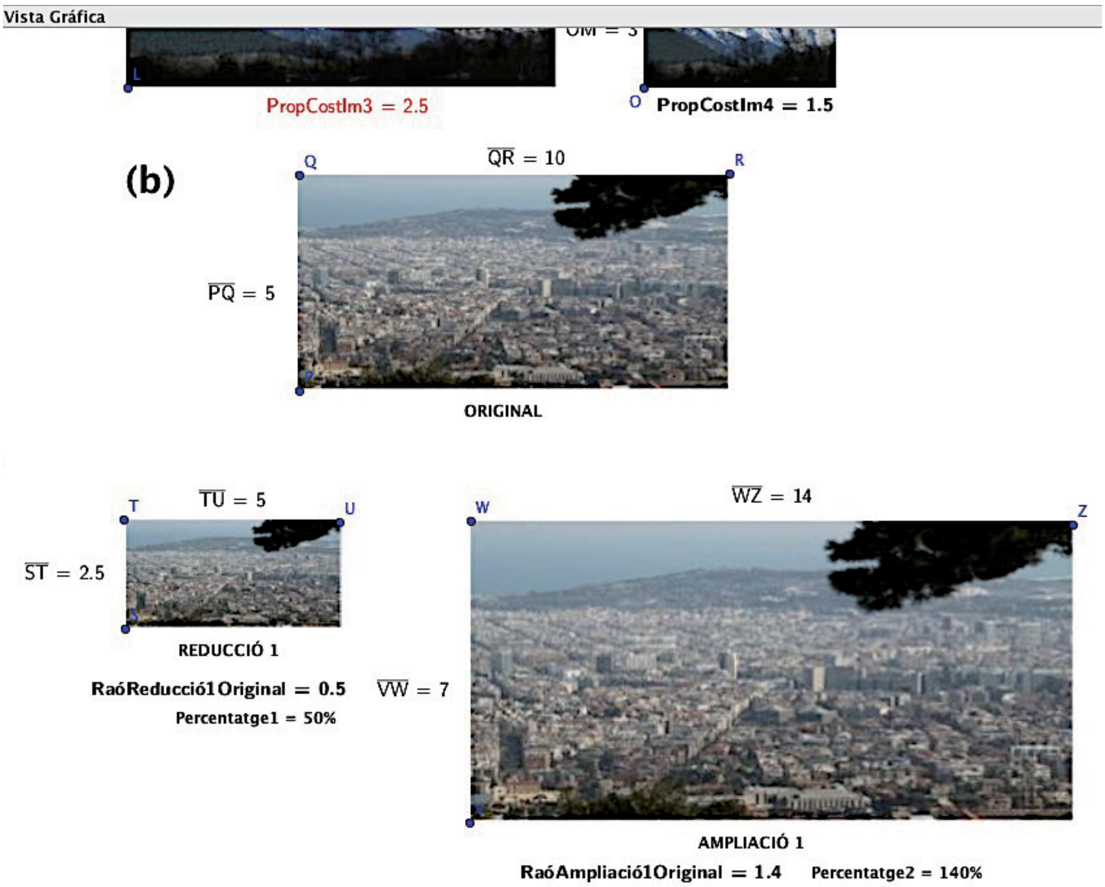
L'**arbre del problema de l'activitat 3 – apartat (a)** és el següent:



El segon apartat d'aquest problema està pensat perquè els estudiants treballin el tema de les ampliacions i les reduccions de fotocòpies i ho relacionin amb els percentatges. Per tant, per a cada parella caldrà que determinin la raó de semblança entre la fotocòpia i l'original, i que posteriorment transformin aquest valor en percentatge. Cal que s'adonin que per calcular la raó és rellevant fer-ho en l'ordre adequat, és a dir, considerant la proporció entre la figura final (fotocòpia ampliada o reduïda) i la inicial (original). Tanmateix, és interessant comentar que les raons de reducció seran sempre menors que 1 i, per tant, el percentatge serà menor al 100%. En canvi per a l'ampliació succeeix el contrari: la raó serà més gran que 1 i el percentatge major que 100%. Així, si per exemple volem ampliar un 50% una fotocòpia, a la màquina no podem posar-li aquest valor perquè ens la reduiria a la meitat; sinó, que cal introduir-li un 150%.

Nota: De forma anàloga a l'apartat anterior, la precisió que necessitem en les mesures és d'un decimal, però només per a mitges unitats, és a dir, que les mides de les fotografies són enteres o bé difereixen exactament mitja unitat de l'enter més proper. Previsiblement caldrà dir-ho als alumnes, perquè ho tinguin en compte a l'hora de realitzar els càlculs.

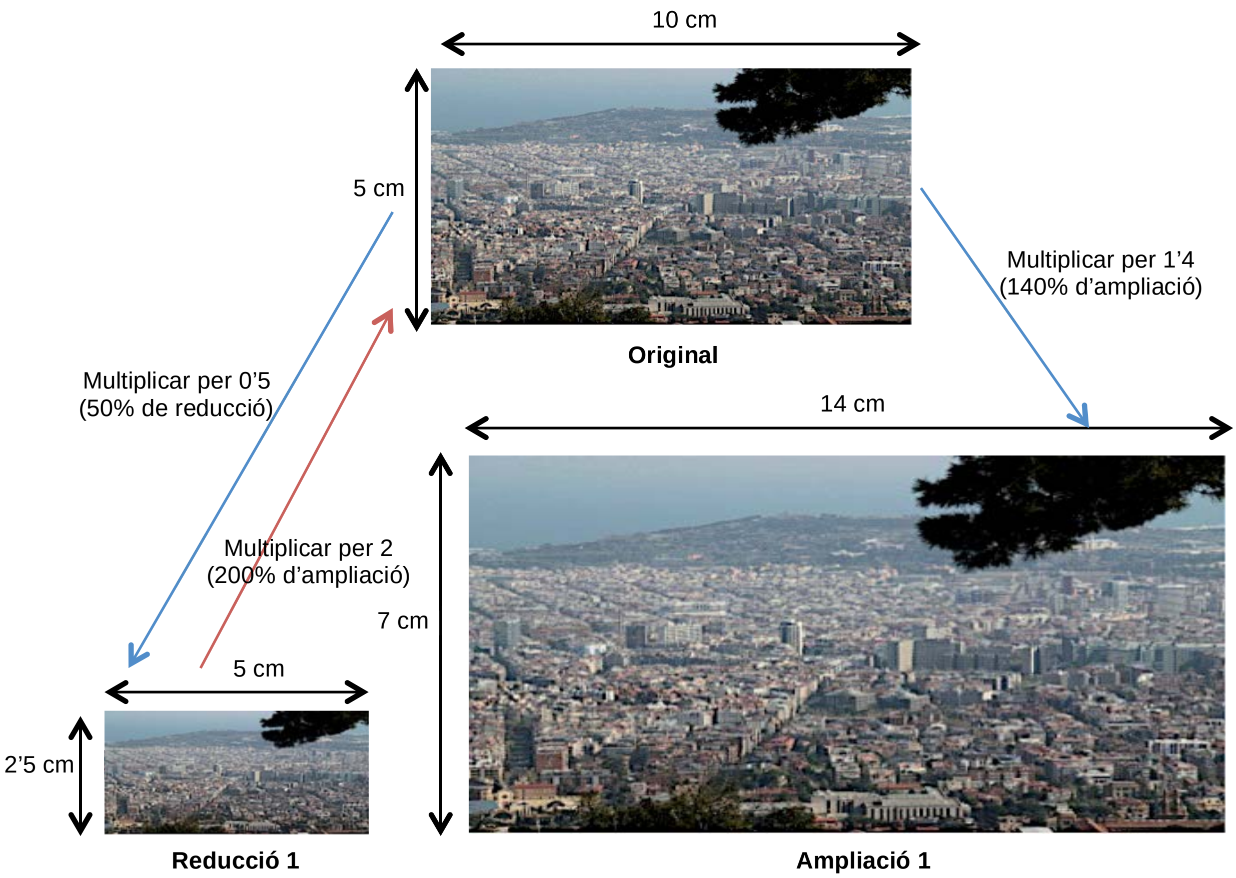
La següent il·lustració mostra una forma possible d'abordar aquest apartat fent ús del GeoGebra (anàlogament es pot resoldre amb llapis i paper):



Finalment, l'arbre del problema recull una pregunta d'ampliació que pot ser interessant treballar durant la posada en comú si el professor ho creu adequat. Es pot preguntar als alumnes que s'imaginin que es vol ampliar la reducció 1 per obtenir directament l'ampliació 1. Sense prendre mesures addicionals i sense repetir el procediment anterior es podria dissenyar una manera que permetés aconseguir-ho?

Es tracta d'una pregunta complicada i que es preveu que faci pensar els estudiants, perquè el procediment que cal seguir no és additiu per les raons de semblança, sinó que és multiplicatiu.

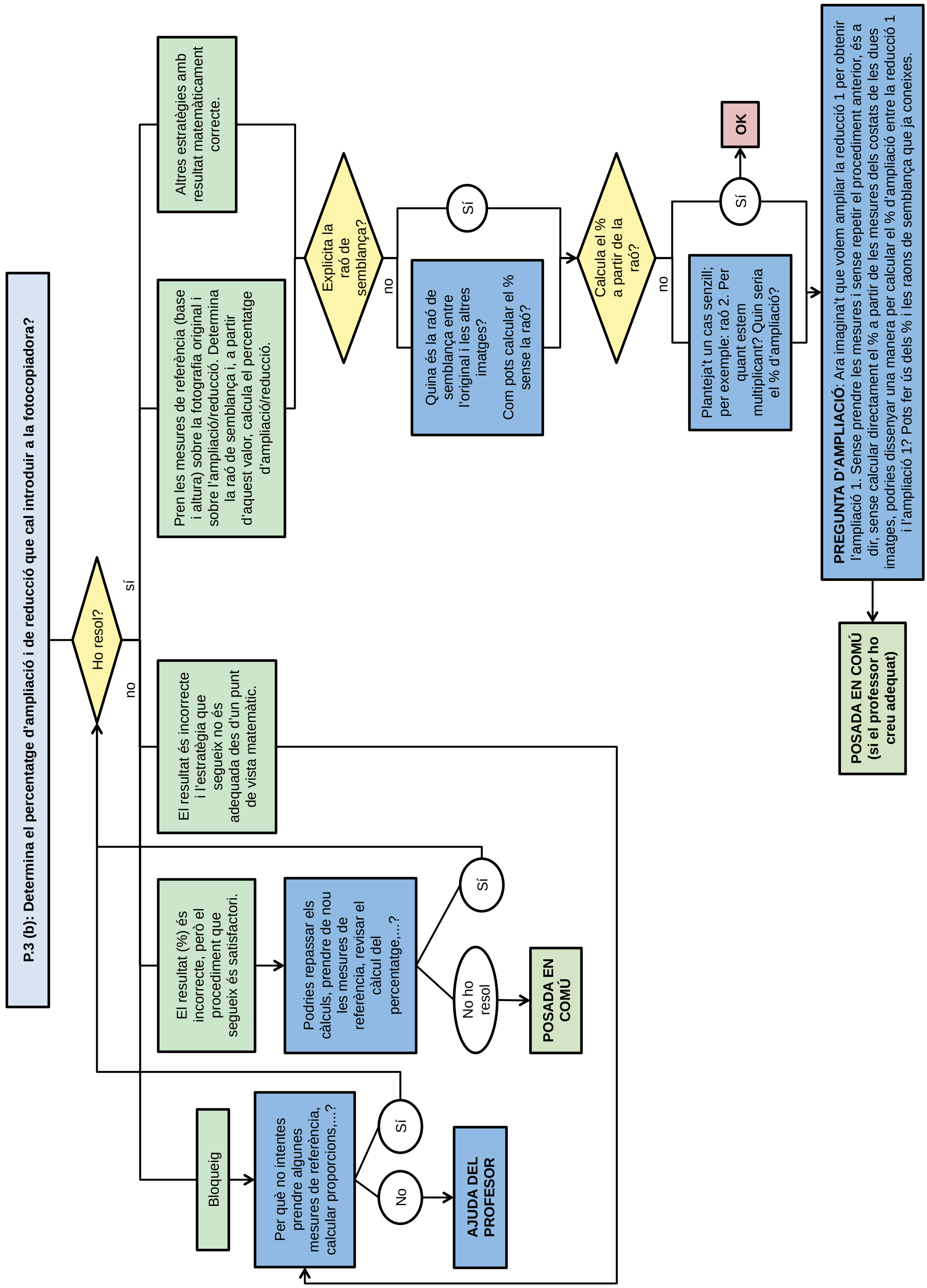
El següent esquema il·lustra, resumidament, la solució:



Segons aquest esquema, una possibilitat és ampliar la reducció 1 fins a la mida de la imatge original. Aquesta dada la podem calcular a partir de la informació que tenim, perquè si per reduir-la hem hagut de multiplicar per 0'5, per ampliar-la cal multiplicar per 2, ja que: $0'5 * 2 = 1$. Aleshores, un cop es disposa de l'original, ja sabem que per aconseguir l'ampliació 1 només cal multiplicar per 1'4. Per tant, per transformar la reducció 1 en l'ampliació 1 fent ús d'una fotocopiadora s'haurà de multiplicar (i **no** sumar) les dues raons de semblança: $2 * 1'4 = 2'8$, és a dir, caldrà ampliar-la un 280%. Per acabar, es pot realitzar la comprovació a partir de les mesures de cada fotografia i observem que el resultat és, efectivament, el mateix:

$$raó: \frac{14\ cm}{5\ cm} = \frac{7\ cm}{2'5\ cm} = 2'8 \rightarrow Percentatge: 280\%$$

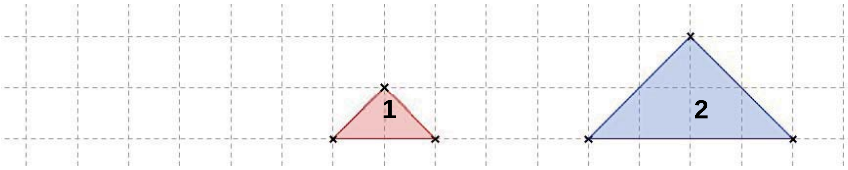
L'**arbre del problema de l'activitat 3 – apartat (b)** és el següent:



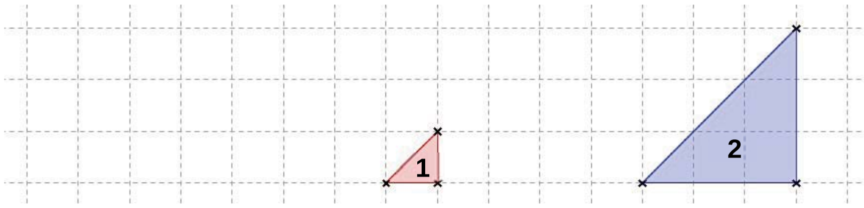
Activitat 4: Canviem la mida dels polígons!

Explica breument com transformaries la figura vermella (**1**) per aconseguir la blava (**2**)? I la blava (**2**) per aconseguir la vermella (**1**)?

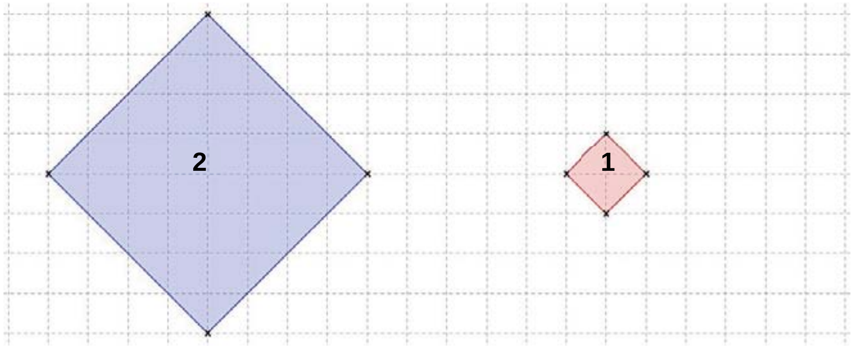
a)



b)



c)

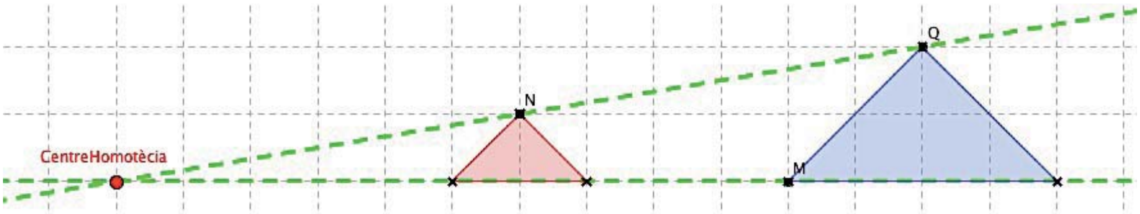


L'objectiu d'aquesta activitat és introduir l'homotècia; tot i que no es preveu que els alumnes disposin de les eines suficients per resoldre-la usant aquesta transformació. Durant la posada en comú caldrà comentar-ho, perquè l'activitat està molt relacionada amb el problema 3, que està dissenyat per estudiar i caracteritzar les homotècies.

Tal com es pot observar en l'arbre del problema, les dues estratègies que, a priori, s'espera que segueixin els alumnes són: mesurar els costats de cada polígon i establir un raonament basat en la semblança; i raonar a partir de canviar la mida (fer gran i petit) i desplaçar un cert nombre d'unitats a través de la quadrícula. És important que els alumnes formalitzin els seus raonaments. Així, si parlen de què els polígons són semblants, cal que determinin la raó de semblança en cada cas i, també, que les instruccions que donin per caracteritzar els moviments (desplaçaments) necessaris per traslladar la figura blava sobre la vermella, i al revés, siguin el més precisos possible.

Cal destacar que l'ordre en què realitzin les accions no és rellevant, però sí que es pot comentar durant la posada en comú. Per exemple: poden haver-hi estudiants que primer canviïn la mida del polígon i, després, el desplacin. En canvi, d'altres, primer poden voler-lo desplaçar i després, una vegada tinguin la figura blava posada sobre la vermella (o al revés), canviar-li la mida.

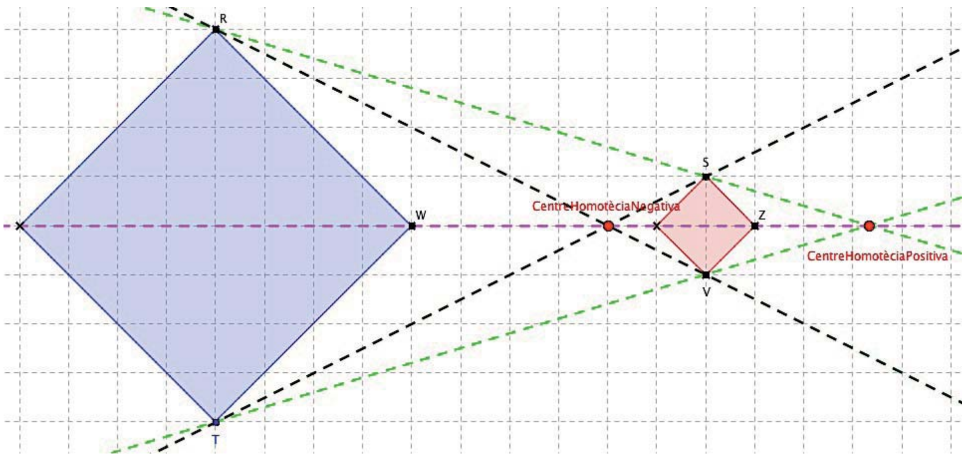
Els dos triangles de l'apartat (a) són semblants, ja que tenen els tres angles iguals i els costats homòlegs proporcionals. Per transformar el triangle vermell en el blau cal aplicar una homotècia de raó 2 i centre el punt d'intersecció de les rectes que passen pels vèrtexs homòlegs. Ara bé, tal com s'ha comentat anteriorment, és complicat que els alumnes donin aquesta resposta, perquè és difícil que se'ls acudeixi que poden transformar la figura 1 en la 2 mitjançant una única transformació, la qual queda caracteritzada pel centre (punt de tall de rectes que passen per vèrtexs homòlegs) i la raó de semblança. És previsible que responguin quelcom del tipus: cal multiplicar per dos les longituds de tots els seus costats i desplaçar-la 5 unitats (quadrets) cap a la dreta des del vèrtex situat més a l'esquerra del dibuix. És important que a la posada en comú es formalitzi la semblança a partir de la raó i, si en finalitzar la discussió dels tres apartats ningú no ha comentat la possibilitat de resoldre el problema mitjançant una única transformació, el professor pot preguntar: creieu que podríeu transformar una figura en l'altra per mitjà d'una única transformació? Què passaria si uníssim amb rectes els vèrtexs homòlegs? Aleshores, el professor pot valorar si deixa el tema obert, ja que es continuarà en el problema 3 amb la caracterització de l'homotècia, o bé ho exemplificar superficialment en un cas amb el GeoGebra.



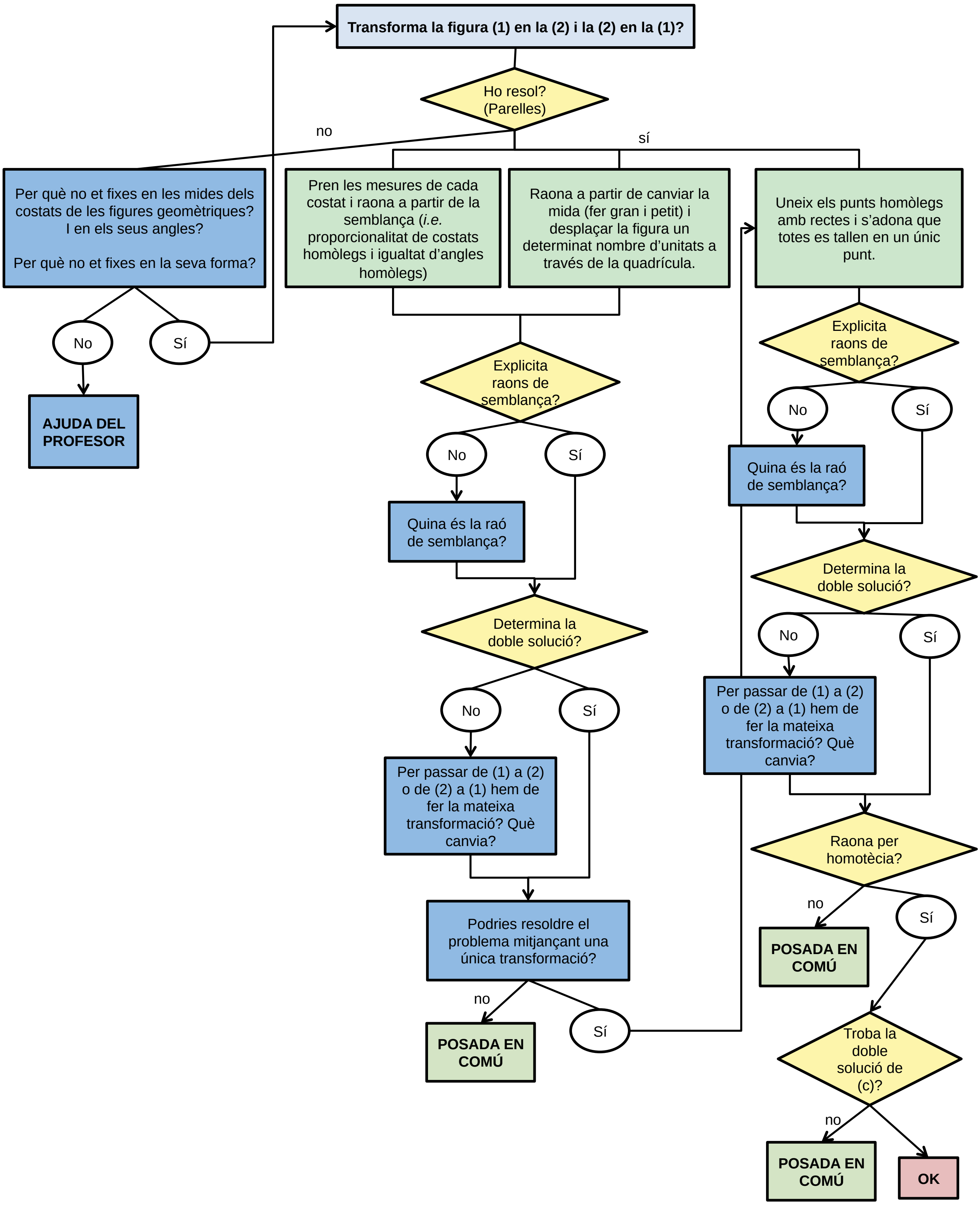
D'altra banda, si volem transformar la figura blava en la vermella, el que hem de fer és "invertir el procés". En aquest cas, la raó de semblança és 1/2 i el sentit del desplaçament és el contrari, és a dir, cap a l'esquerra enlloc de cap a la dreta.

Anàlogament es pot procedir amb els altres dos apartats. Si sintetitzem la informació usant la terminologia pròpia de l'homotècia, podem dir que el triangle vermell de l'apartat 2 és homotètic amb el blau i té raó 3; en canvi, el blau és homotètic al vermell amb raó 1/3.

El quadrat vermell de l'apartat (c) és homotètic al blau amb raó 4 i el blau ho és amb el vermell i la raó és 1/4. En aquest últim cas, però, no hi ha l'orientació definida, ja que la transformació no especifica on cal traslladar el vèrtex superior i l'inferior de cada quadrat. Per aquest motiu, si s'unissin els vèrtexs homòlegs podríem tenir dues possibilitats diferents, la segona de les quals tindria raó d'homotècia negativa:



L'**arbre del problema de l'activitat 4** és el següent:

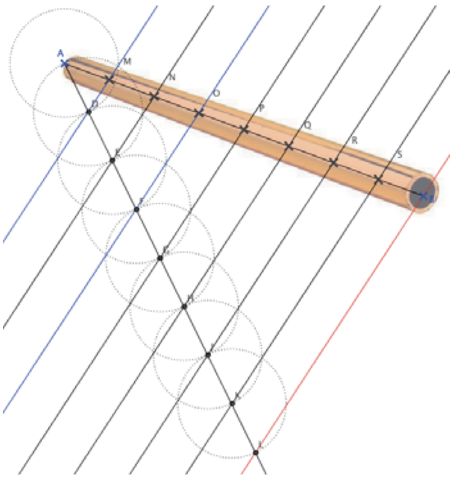


Activitat 5: Dividim un tub i recordem el teorema de Tales!

a) Com dividiries, amb la major precisió possible i sense prendre les mesures amb un regle, aquest tub de coure en tres parts, de manera que la primera mesuri la meitat de la segona i la cinquena part de la tercera? Dibuixa unes línies sobre el tub per indicar on faries els talls.

L'objectiu d'aquest apartat és aplicar el teorema de Tales per dividir un segment en parts proporcionals. Es pretén que els alumnes argumentin breument per què funciona el procediment, justificant-ho a través del teorema de Tales. Es preveuen dues estratègies: una d'algebraica i l'altra geomètrica.

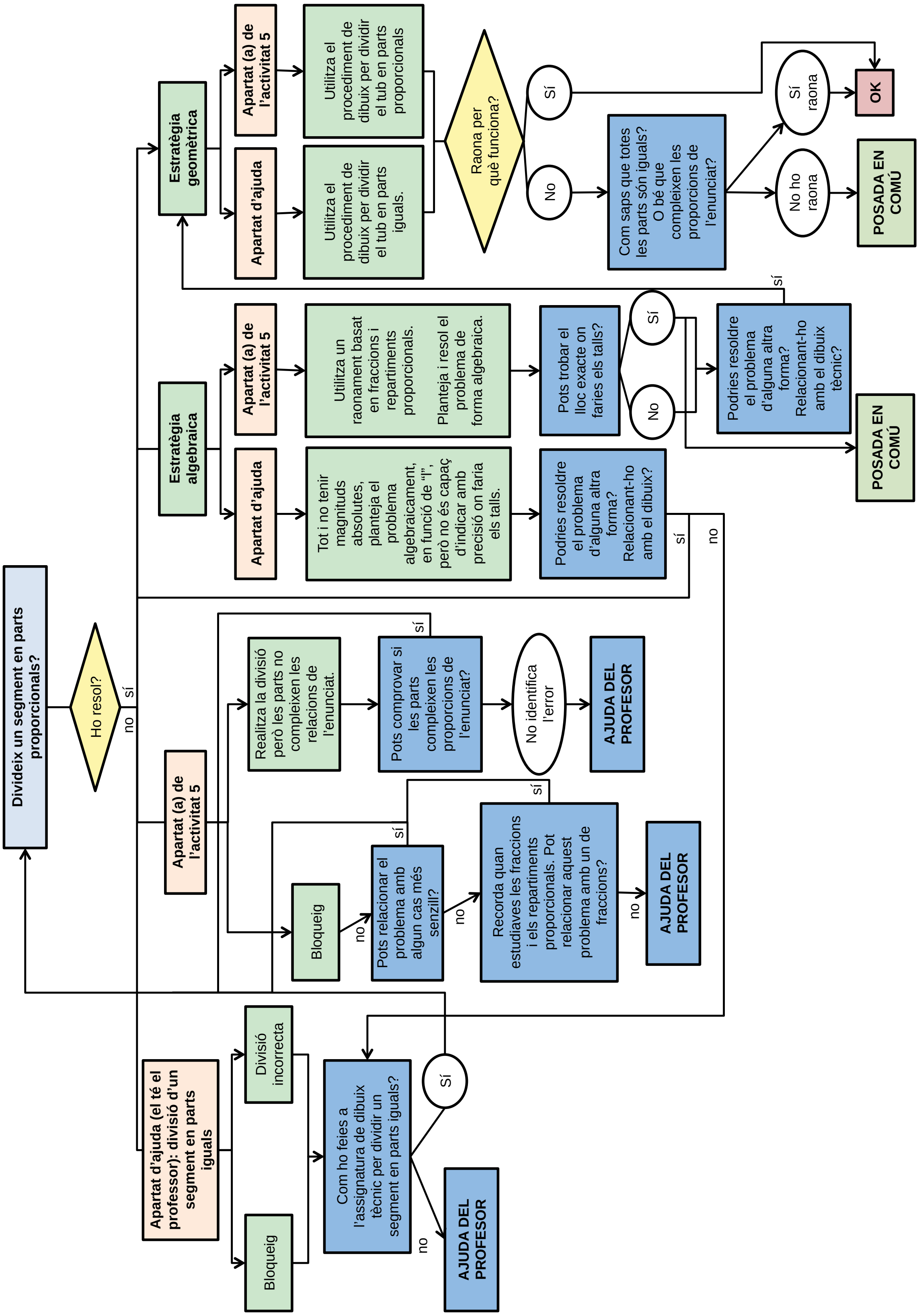
El raonament algebraic que es considera a l'arbre del problema fa referència a les fraccions i al repartiment proporcional. Ara bé, com que no s'accepta la solució de prendre les mesures amb un regle graduat, cal considerar la longitud "**l**" del tub i, aleshores, raonar per fraccions, de forma que la primera part mesuraria **l**/8, la segona 2***l**/8 i l'última 5***l**/8. De totes maneres, així no es pot determinar la posició exacta on es farien els talls i, de fet, el que es pretén és que els estudiants realitzin la construcció geomètrica sobre el tub. Per tant, seguint l'estratègia geomètrica cal dividir el segment en 8 parts iguals i, després, seleccionar-les segons les condicions de l'enunciat, tal com es mostra en la següent il·lustració:



L'argumentació de l'activitat es basa en explicar que els triangles que s'obtenen en fer les divisions estan tots en posició de Tales i, per tant, les vuit parts iguals que es dibuixen sobre la recta auxiliar es transporten per paral·leles sobre el tub de coure, el qual també queda dividit en vuit parts. Si es vol aprofundir en el raonament es poden aplicar les relacions de Tales sobre els triangles construïts i, així, veure que les vuit parts són iguals. Quan es realitza la posada en comú es pot construir la solució amb el GeoGebra, o bé il·lustrar-la amb el fitxer que conté la construcció preparada.

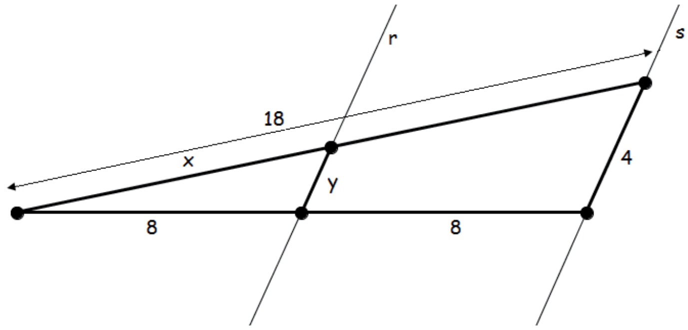
Finalment, cal comentar que la part esquerra de l'arbre inclou la possibilitat que els alumnes es bloquegin o obtinguin solucions incorrectes. En aquests casos, el docent ha d'emprar petites ajudes per tal que els estudiants puguin seguir la resolució dels apartats de l'activitat.

L'**arbre del problema de l'apartat (a) de l'activitat 5** és el següent:

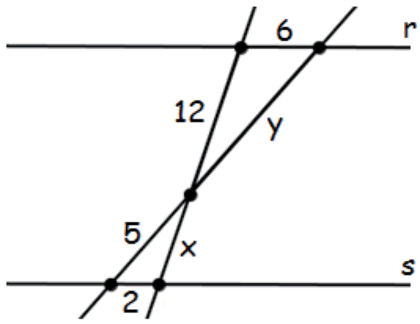


Quines són les mides de ***x*** i ***y*** en cada cas, si sabem que les rectes *r* i *s* sempre són paral·leles? Detalla els càlculs i el plantejament que segueixis.

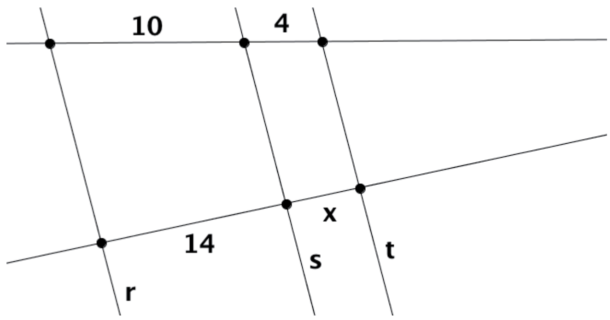
b)



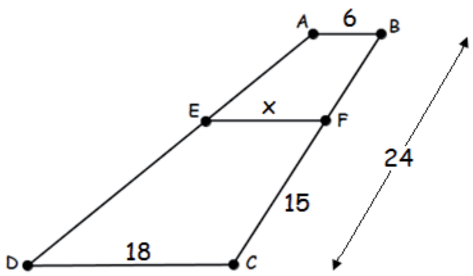
c)



d) Si sabem que *r*, *s* i *t* són paral·leles. Quin és el valor de ***x*** ?



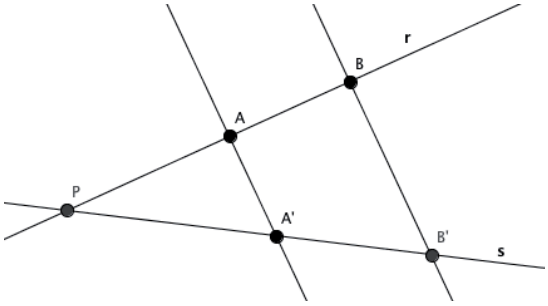
e) Si sabem que *AB*, *EF* i *DC* són paral·lels. Quin és el valor de ***x*** ?



L'objectiu dels apartats (b), (c), (d) i (e) d'aquesta activitat és aplicar les relacions del teorema de Tales per determinar les magnituds desconegudes de cada apartat.

Tal com es mostra en l'arbre del problema, en cas que els estudiants no recordin el teorema de Tales, el professor pot fer un petit esquema a la pissarra per fer memòria de les seves relacions.

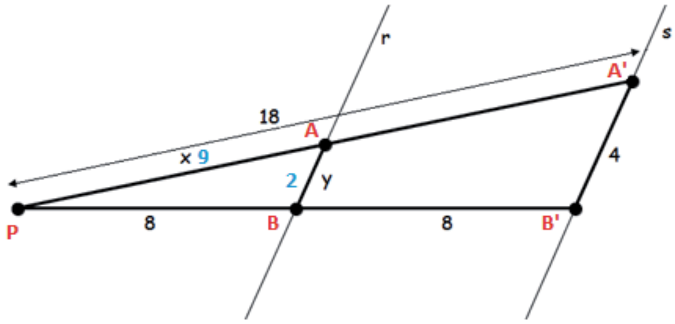
El teorema de Tales afirma que *en tallar dues rectes secants r i s per dues rectes paral·leles, els segments determinats en una de les rectes secants són proporcionals als segments determinats a l'altra recta*:



$$\frac{PA}{PA'} = \frac{PB}{PB'} \quad \text{i} \quad \frac{PA}{PA'} = \frac{AB}{A'B'} \quad \text{i} \quad \frac{PA}{AA'} = \frac{PB}{BB'} \quad \text{etc.}$$

Per tant, la resolució de cadascun dels apartats és la següent:

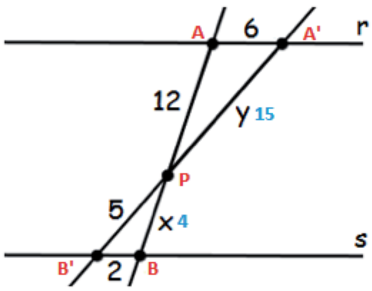
b)



$$\frac{PA}{PA'} = \frac{PB}{PB'} \leftrightarrow \frac{x}{18} = \frac{18}{16} \leftrightarrow x = \frac{8 \cdot 18}{16} = \mathbf{9}$$

$$\frac{PA}{AB} = \frac{PA'}{A'B'} \leftrightarrow \frac{9}{y} = \frac{18}{4} \leftrightarrow y = \frac{9 \cdot 4}{18} = \mathbf{2}$$

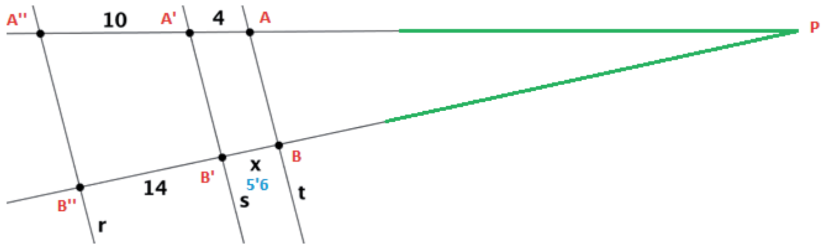
c)



$$\frac{PA}{AA'} = \frac{PB}{BB'} \leftrightarrow \frac{12}{6} = \frac{x}{2} \leftrightarrow x = \frac{12 \cdot 2}{6} = \mathbf{4}$$

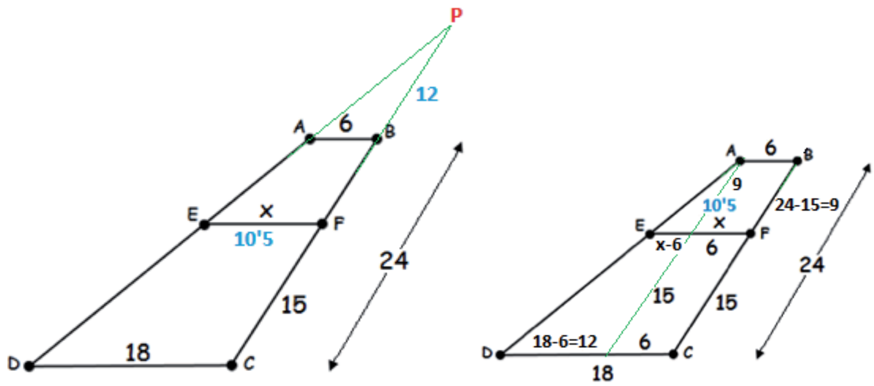
$$\frac{PA'}{A'A} = \frac{PB'}{BB'} \leftrightarrow \frac{y}{6} = \frac{5}{2} \leftrightarrow x = \frac{6 \cdot 5}{2} = \mathbf{15}$$

d)



$$\left(\frac{PA}{PB} =\right) \frac{AA'}{BB'} = \frac{A'A''}{B'B''} \leftrightarrow \frac{4}{x} = \frac{10}{14} \leftrightarrow x = \frac{4 \cdot 14}{10} = \mathbf{5'6}$$

e)



Opció 1 **Opció 2**

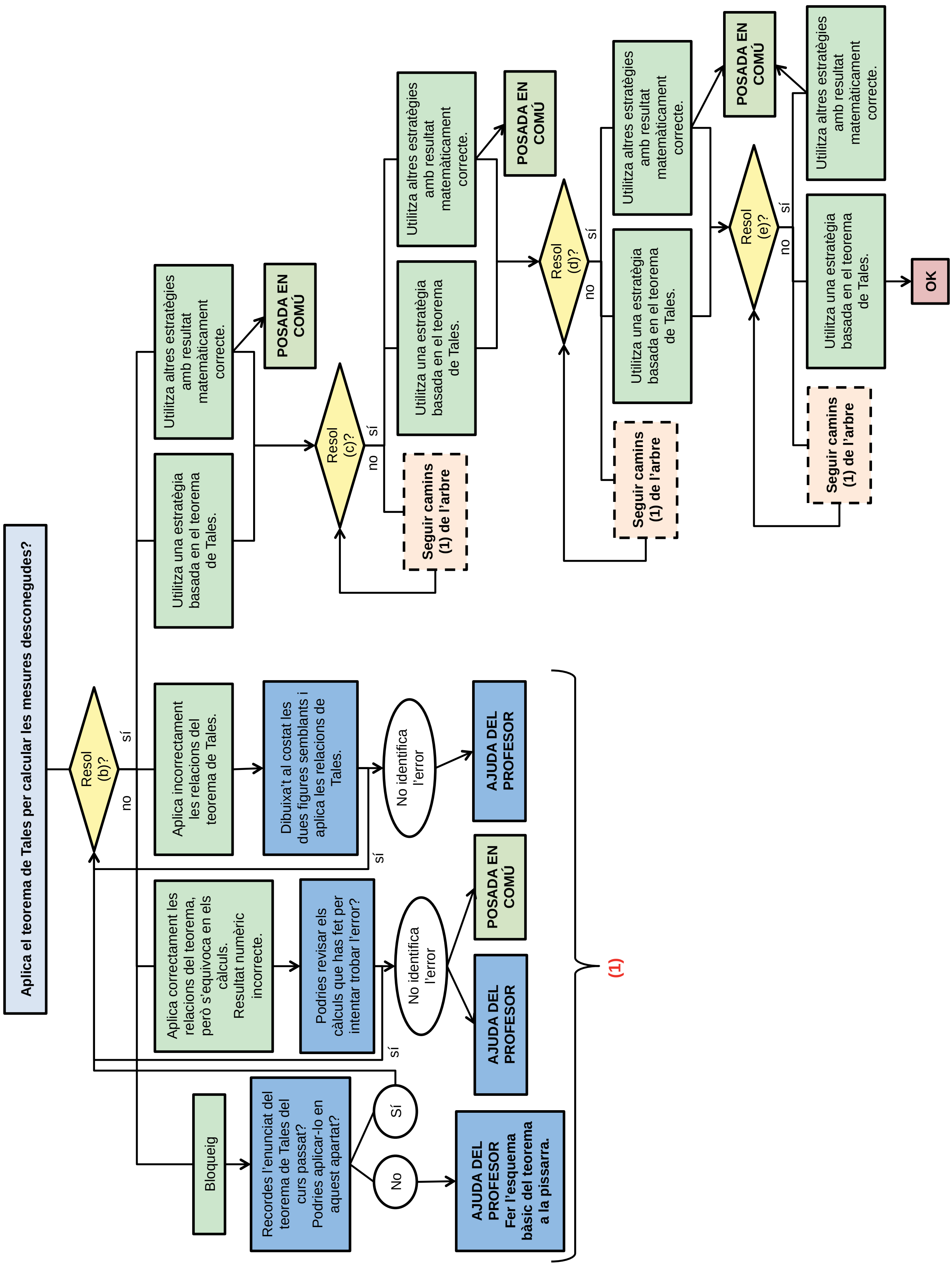
1) $\left(\frac{PA}{PD} =\right) \frac{PB}{PC} = \frac{AB}{DC} \leftrightarrow \frac{PB}{PB + 24} = \frac{6}{18} \leftrightarrow 18 \cdot PB - 6 \cdot PB = 6 \cdot 24 \leftrightarrow PB = \frac{6 \cdot 24}{12} = 12$

$$\left(\frac{PA}{PE} =\right) \frac{PB}{PF} = \frac{AB}{EF} \leftrightarrow \frac{PB}{PB + 9} = \frac{6}{x} \leftrightarrow x = \frac{6 \cdot (PB + 9)}{PB} = \frac{6 \cdot 21}{12} = \mathbf{10'5}$$

2) $\frac{9}{x - 6} = \frac{24}{12} (= 2) \leftrightarrow 2(x - 6) = 9 \leftrightarrow x = \frac{12 + 9}{2} = \mathbf{10'5}$

Finalment, l'arbre del problema dóna especial importància a què els estudiants siguin capaços d'aplicar correctament les relacions del teorema de Tales i deixa en segon lloc la correcció numèrica dels càlculs i operacions.

L’**arbre del problema dels apartats (b), (c), (d) i (e) de l’activitat 5** és el següent:



SEQÜÈNCIA DE PROBLEMES

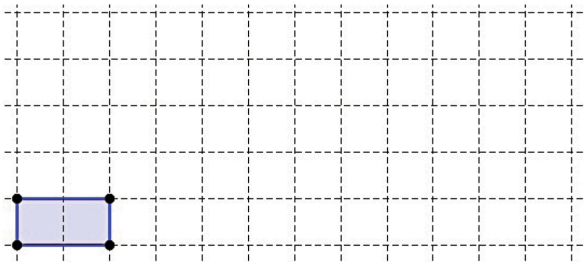
Problema 1: Relacionem perímetres i àrees de figures semblants

A la primera activitat (*Doblem figures!*) vàrem observar que si multiplicàvem per 2 els costats d'un quadrat la seva àrea quedava multiplicada per $4 = 2^2$ i, a més, el nou quadrat era semblant a l'original.

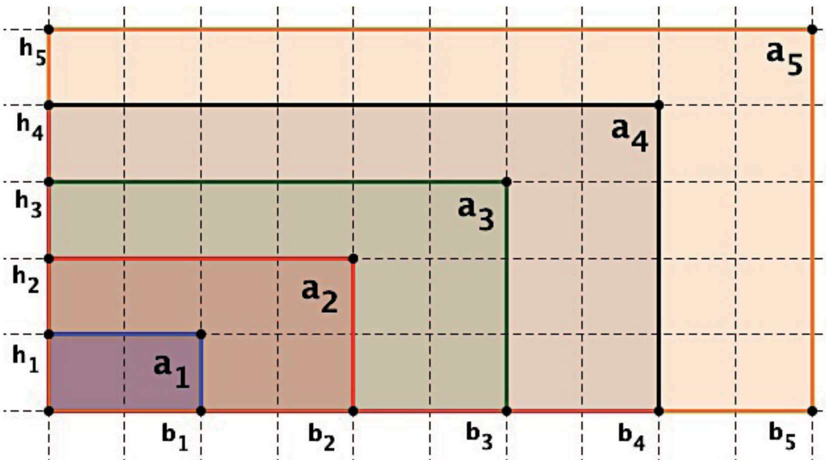
El mateix es produïa si multiplicàvem per 3 els costats (l'àrea quedava multiplicada per $9 = 3^2$), per 4 (l'àrea es multiplicava per $16 = 4^2$), etc. Ara bé, **com podem estar del tot segurs que aquest raonament es compleix per a qualsevol polígon?** Els següents apartats t'ajudaran a descobrir-ho!

Els objectius matemàtics d'aquest problema són: (a) donar significat a la relació entre els perímetres i les àrees de dues figures poligonals semblants i a la fórmula de l'àrea d'un triangle, interpretant-la com la meitat de l'àrea d'un rectangle; i (b) introduir el raonament indirecte en el camp de les matemàtiques com un mitjà per obtenir la fórmula de l'àrea d'un triangle qualsevol.

a) Donat el següent rectangle, si multipliquem per 2 tots els seus costats, per quant es multiplicarà la seva àrea? I si els multipliquem per 3, 4, 5,...? Argumenta la teva resposta.



Aquest primer apartat del problema és una particularització de l'activitat introductòria 1, pel cas d'un rectangle i fent la suposició de què volem preservar la semblança amb el polígon original. Es preveu que els estudiants construiran rectangles semblants a l'original, però augmentant la mida dels seus costats segons les proporcions de l'enunciat. És previsible que obtinguin una construcció com la següent (superposant, o no, els rectangles):



A l'hora d'argumentar per quant es multipliquen les àrees dels nous rectangles respecte de l'original es preveuen bàsicament dues estratègies, les quals seria interessant que es comentessin durant la posada en comú:

- *Estratègia 1*: Raonament algebraic a partir de la fórmula de l'àrea d'un rectangle. Previsiblement els estudiants calcularan les àrees dels rectangles a partir de la seva fórmula i, per un argument de generalització, obtindran que les àrees augmenten en un factor que és proporcional al quadrat de la raó de semblança. És possible que realitzin càlculs com els que figuren a continuació:

$$a_1 = b_1 \cdot h_1 = 2 \cdot 1 = 2$$

$$a_2 = b_2 \cdot h_2 = 4 \cdot 2 = 2^2 \cdot 2 = 2^2 \cdot a_1$$

$$a_3 = b_3 \cdot h_3 = 6 \cdot 3 = 3^2 \cdot 2 = 3^2 \cdot a_1$$

$$a_4 = b_4 \cdot h_4 = 8 \cdot 4 = 4^2 \cdot 2 = 4^2 \cdot a_1$$

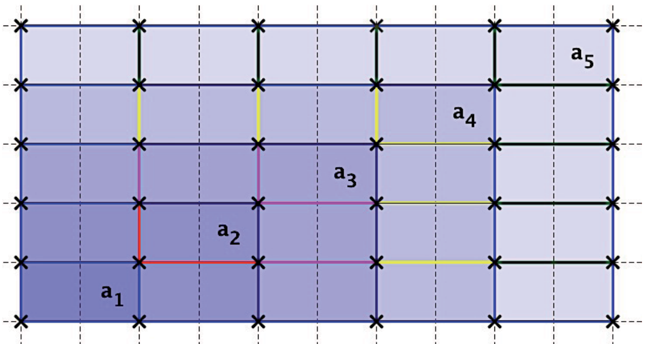
$$a_5 = b_5 \cdot h_5 = 10 \cdot 5 = 5^2 \cdot 2 = 5^2 \cdot a_1$$

...

$$a_n = b_n \cdot h_n = 2n \cdot n = n^2 \cdot 2 = n^2 \cdot a_1,$$

sent n la raó de semblança del rectangle enèsim respecte l'original (a_1).

- *Estratègia 2*: Raonament gràfic, dividint els nous rectangles en parts que continguin l'original. Els alumnes, previsiblement, dividiran els nous rectangles a partir de l'original i comptaran el nombre de divisions que han obtingut. És possible que realitzin una representació com la següent:



A partir d'aquesta construcció només cal realitzar un recompte per obtenir la relació entre l'àrea dels nous rectangles i la de l'original. Per exemple: a_2 conté quatre vegades a_1; a_3 conté nou vegades a_1, etc. En resum:

$$a_2 = 4 \cdot a_1 = 2^2 \cdot a_1$$

$$a_3 = 9 \cdot a_1 = 3^2 \cdot a_1$$

$$a_4 = 16 \cdot a_1 = 4^2 \cdot a_1$$

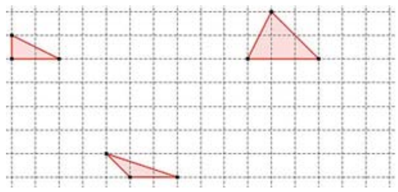
$$a_5 = 25 \cdot a_1 = 5^2 \cdot a_1$$

...

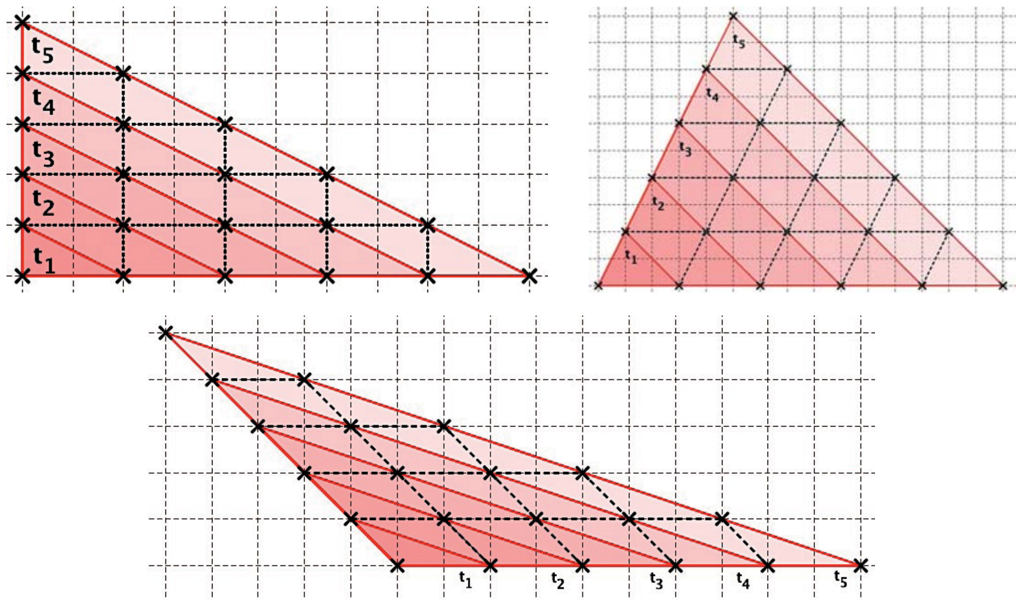
$$a_n = n^2 \cdot a_1,$$

sent n la raó de semblança del rectangle enèsim respecte l'original (a_1).

b) Donats els següents triangles, si multipliquem per 2 tots els seus costats, per quant es multiplicarà la seva àrea? I si els multipliquem per 3, 4, 5,...? Argumenta la teva resposta.
Nota: No utilitzis la fórmula de l'àrea del triangle en el teu raonament.



La resolució del segon apartat del problema és semblant a la de l'anterior, però centrat per a tres tipus de triangles: rectangle, triangle en què les seves altures cauen sobre la base corresponent, i triangle que presenta almenys una altura que cau fora de la base. Com que es demana als estudiants que no utilitzin la fórmula de l'àrea del triangle per desenvolupar la seva argumentació, ja que l'apartat (**d**) està pensat perquè l'obtinguin a partir de l'àrea del rectangle, es preveu que emprin una estratègia gràfica, completament anàloga a la del cas anterior. La següent representació mostra una construcció que poden realitzar els estudiants, ja sigui superposant, o no, els triangles sobre el polígon original:



De nou, a partir d'aquesta construcció només cal realitzar un recompte per obtenir la relació entre l'àrea dels nous triangles i la de l'original. Per exemple: t_2 conté quatre vegades t_1; t_3 conté nou vegades t_1, etc. En resum, en els tres casos es compleix:

$$t_2 = 4 \cdot t_1 = 2^2 \cdot t_1$$
$$t_3 = 9 \cdot t_1 = 3^2 \cdot t_1$$
$$t_4 = 16 \cdot t_1 = 4^2 \cdot t_1$$
$$t_5 = 25 \cdot t_1 = 5^2 \cdot t_1$$
$$\dots$$
$$t_n = n^2 \cdot t_1,$$

sent n la raó de semblança del triangle enèsim respecte l'original (t_1).

c) Els rectangles i triangles obtinguts en els apartats anteriors són semblants al polígon original? Per què?

En tots els casos els costats dels nous polígons són proporcionals als corresponents homòlegs del polígon original i, a més, els angles homòlegs són iguals. Per tant, els nous polígons obtinguts (rectangles i triangles) són semblants a l'original i les seves raons de semblança són: 2, 3, 4, 5, etc. Els alumnes no haurien de tenir dificultats per realitzar aquesta afirmació, ja que és quelcom que hauran estat treballant des de la primera activitat del tema.

d) Si sabem que l'àrea d'un rectangle s'obté multiplicant la longitud de la seva base per la de la seva altura, com podem obtenir la fórmula de l'àrea d'un triangle? Argumenta amb detall la teva resposta.
Ajuda: Et pot ser útil començar el teu raonament amb un triangle rectangle i, després, raonar-ho per altres tipus de triangles.

L'objectiu d'aquest apartat és que els estudiants siguin capaços d'obtenir la fórmula de l'àrea d'un triangle a partir de la d'un rectangle. Els apartats anteriors, especialment els tres tipus de triangles representats en (**b**), els poden servir d'indicació per començar el seu raonament. No obstant, és previsible que calgui ajudar-los, ja que els passos de la demostració són senzills però una mica tècnics, en el sentit que es basen en les dues idees següents:

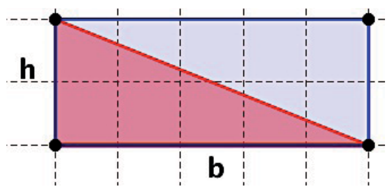
- Cal adonar-se que l'àrea d'un triangle rectangle és la meitat de l'àrea del corresponent rectangle construït.
- Cal inscriure els altres tipus de triangles (triangle escalè en què les seves altures cauen sobre la base corresponent i triangle escalè que presenta almenys una altura que cau fora de la base) en un rectangle i, aleshores, elaborar els raonaments en base a l'àrea coneguda: la del triangle rectangle.

A continuació es mostren els passos de la demostració, la qual és important comentar i detallar durant la posada en comú del problema:

Suposem coneguda l'àrea d'un rectangle, quina és la fórmula de l'àrea d'un triangle qualsevol? Centrarem la demostració en tres casos:

Cas 1: Triangle rectangle

L'àrea d'un triangle rectangle és, clarament, la meitat de l'àrea del corresponent rectangle construït, ja que la hipotenusa del triangle rectangle coincideix amb la diagonal del rectangle, la qual divideix la seva àrea en dues parts iguals.



$$A_{triangle} = \frac{A_{rectangle}}{2} = \frac{b \cdot h}{2}$$

Cas 2: Triangle escalè arbitrari les tres altures del qual cauen a sobre de les corresponents bases

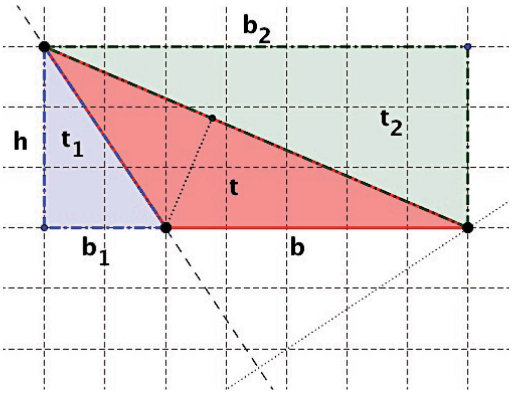
Si inscrivim el triangle original en un rectangle podem obtenir dos triangles rectangles (t_1 i t_2), l'àrea dels quals ja sabem calcular (veure cas 1). Aleshores, l'àrea del triangle de partida es pot expressar com a suma de les àrees dels dos triangles rectangles, fet que ens permet obtenir la fórmula de l'àrea del triangle també per aquest cas.

$$A_{triangle} = A_{t_1} + A_{t_2} = \frac{b_1 \cdot h}{2} + \frac{b_2 \cdot h}{2} = \frac{(b_1 + b_2) \cdot h}{2} = \frac{b \cdot h}{2}$$

Nota: Sense pèrdua de generalitat, el mateix raonament es podria realitzar considerant com a base els altres dos costats del triangle original.

Cas 3: Triangle escalè arbitrari amb almenys una altura que cau fora de la base

Si inscrivim el triangle original (t) en un rectangle podem obtenir tres triangles (t, t_1 i t_2). Els triangles t_1 i t_2 són rectangles i la seva àrea la sabem calcular. Així, l'àrea del triangle t es podrà expressar com la diferència de l'àrea del rectangle i la dels triangles rectangles t_1 i t_2. Vegem-ho a continuació:



$$A_{triangle} = A_{rectangle} - A_{t_1} - A_{t_2} =$$

$$= b_2 \cdot h - \frac{b_1 \cdot h}{2} - \frac{b_2 \cdot h}{2} = \frac{b_2 \cdot h}{2} - \frac{b_1 \cdot h}{2} =$$

$$= \frac{(b_2 - b_1) \cdot h}{2} = \frac{b \cdot h}{2} \text{, ja que } b_1 + b = b_2.$$

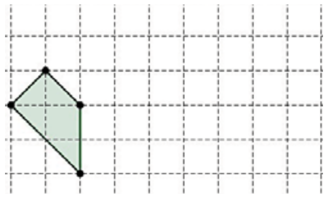
Nota: Sense pèrdua de generalitat, el mateix raonament es podria realitzar considerant com a base els altres dos costats del triangle original.

Finalment, aquests tres casos recobreixen tot el ventall de possibles triangles en funció de les posicions que poden adoptar les seves altures i, per tant, queda comprovat que l'àrea d'un triangle qualsevol sempre és la meitat de l'àrea d'un rectangle, fet que determina la fórmula:

$$A_{triangle} = \frac{b \cdot h}{2}$$

Després de resoldre tots aquests apartats ja sabem que si multipliquem per 2, 3, 4, 5,... els costats d'un quadrat, rectangle o triangle, les seves àrees es multiplicaran per $4 = 2^2$, $9 = 3^2$, $16 = 4^2$, $25 = 5^2$, etc. i els nous polígons seran semblants a l'original.

e) Podem estar del tot segurs que aquesta mateixa propietat es complirà per al polígon de la següent imatge? I per a qualsevol altre? Argumenta-ho.



És possible que els alumnes realitzin un raonament semblant al dels apartats (**a**) i (**b**) del problema, o bé que utilitzin l'eina del GeoGebra, la qual permet calcular l'àrea d'un polígon, per verificar la relació de l'enunciat. En aquest cas, però, és més difícil identificar el nombre de vegades que podem incloure el polígon de la il·lustració en un altre de semblant i que tingui raó 2, 3, 4,... ja que la seva estructura és una mica més complicada. Si el dividim en triangles potser es facilita el procés, però el propòsit de l'activitat és que els alumnes facin ús de la informació obtinguda en els apartats anteriors per elaborar un argument més general, el qual sigui vàlid per a qualsevol figura poligonal plana (convexa). Durant la posada en comú, al marge de comentar les diferents estratègies que hagin seguit els alumnes per respondre l'apartat (**e**) del problema, és importat comentar el següent raonament:

A l'apartat anterior, (**d**), hem comprovat que la fórmula de l'àrea d'un triangle sempre es pot obtenir a partir de l'àrea d'un rectangle, la qual és intuïtiva ja que només cal multiplicar la longitud de la base per la de l'altura. Tanmateix, en l'activitat introductòria 1 i en els dos primers apartats d'aquest problema hem vist que la relació entre l'àrea d'un quadrat, rectangle o triangle semblant a un altre (l'original) és proporcional al quadrat de la raó de semblança. A més, tota superfície poligonal plana (convexa) és triangulable, fet que es pot veure de forma intuïtiva representant qualsevol polígon i dividint-lo en triangles (per exemple: fixant un vèrtex i traçant segments o rectes a tots els altres vèrtexs del polígon). Per tant, si sabem que la relació de les àrees de dos triangles semblants és proporcional al quadrat de la raó de semblança, sabem també que tota figura poligonal plana (convexa) complirà aquesta mateixa relació, ja que els triangles amb què es pot dividir també la compleixen. Així, podem estar segurs que la propietat que hem observat en els apartats anteriors es compleix per a qualsevol polígon i, en particular, la compleix el polígon de la il·lustració.

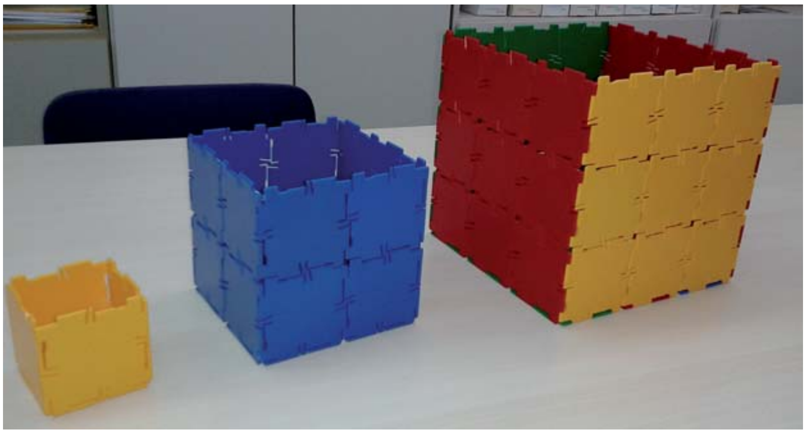
Problema 2: La semblança en les fulles d'un arbre

Fixa't en la següent fotografia, on es mostra una branca amb les seves fulles:

a) Quin és el perímetre i l'àrea de la fulla gran d'aquesta branca? Ajuda't del GeoGebra i detalla la teva resposta en un quadre de text.

b) Com podries saber la mesura del perímetre i l'àrea de la fulla mitjana i la petita sense repetir el mateix procediment? Argumenta-ho a dins d'un quadre de text del fitxer de GeoGebra.

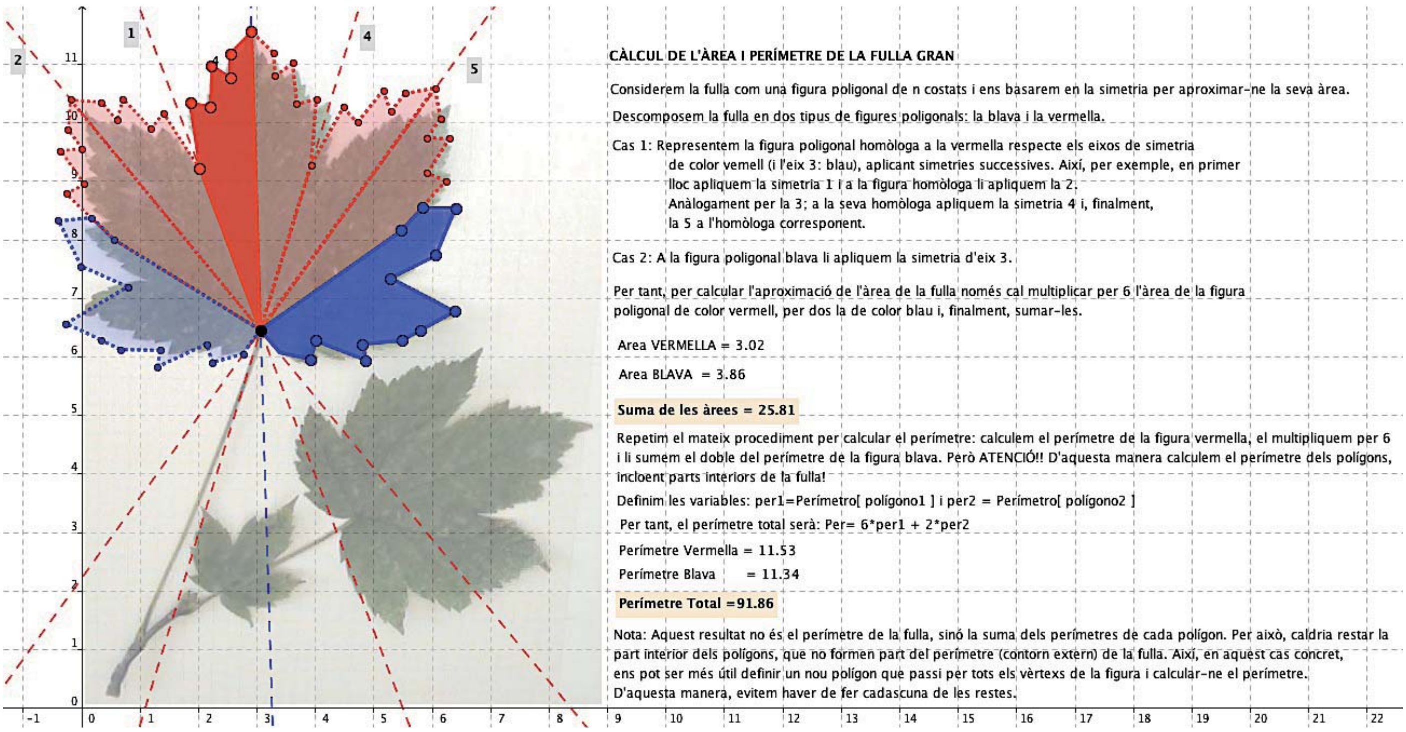
Fixa't en la següent fotografia, on s'il·lustren diferents recipients que poden mesurar capacitats:



c) Calculant el volum de només un d'ells, com podríem saber el volum dels altres? Argumenta-ho amb detall a dins d'un quadre de text del fitxer del GeoGebra.

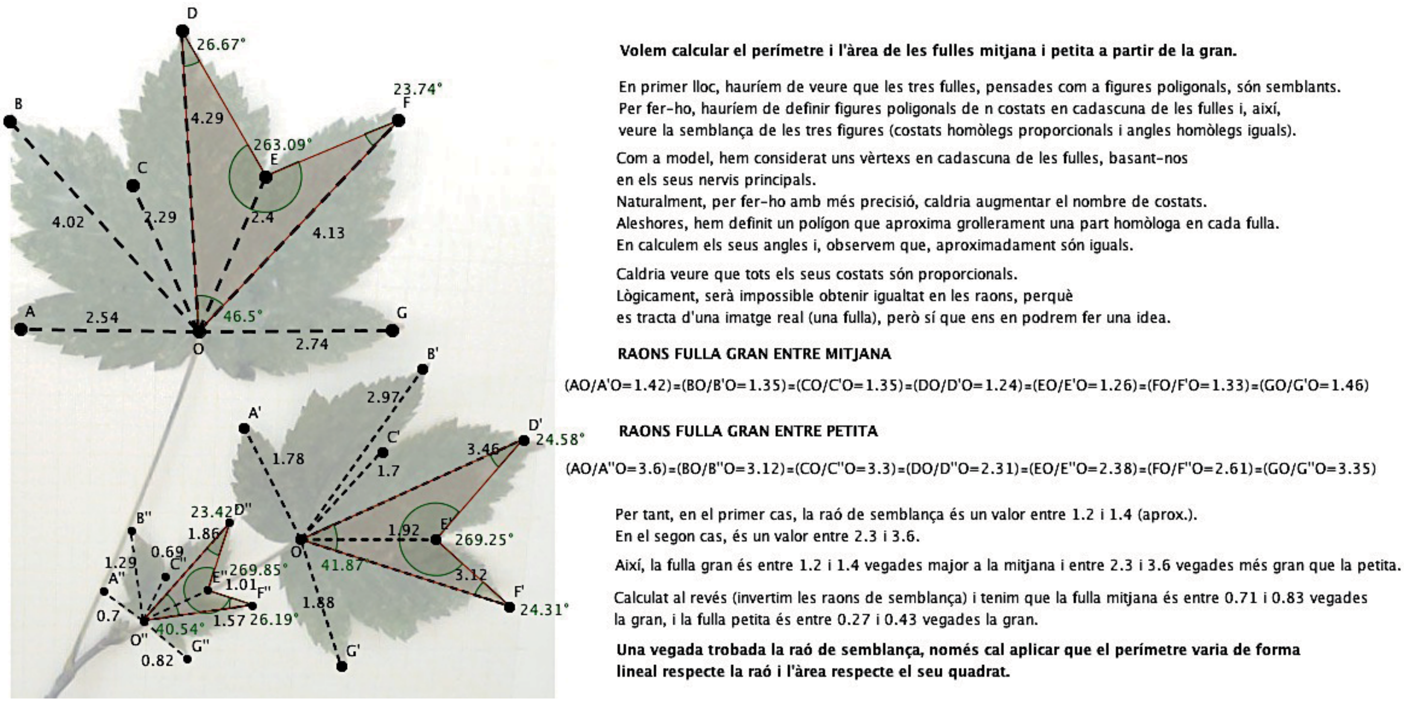
Durant la resolució de l'apartat (**a**) del problema 2 es preveu que els estudiants utilitzin tres estratègies: construir un polígon que aproximi tota la fulla; construir un polígon que aproximi una part de la fulla i utilitzar la simetria per calcular el perímetre i l'àrea; i aproximar grollerament l'àrea de la fulla comptant els quadrets del GeoGebra.

Aquesta última estratègia no és eficient i cal dirigir-los a què defineixin un polígon amb el GeoGebra i l'utilitzin per calcular l'àrea i el perímetre. L'estratègia més interessant és la d'utilitzar la simetria per simplificar els càlculs. Ara bé, si observem la construcció de la figura que es mostra a continuació, en aquest cas cal tenir present una qüestió: l'àrea es pot definir de forma additiva, és a dir, sumant les àrees parcials de les parts de la fulla després d'aplicar-los la simetria. En canvi, pel perímetre aquest raonament no ens serveix perquè si ho definim de forma additiva, tal com es mostra en la construcció feta amb el GeoGebra, estem sumant les parts interiors dels polígons, les quals no formen part del contorn de la fulla i, per tant, no són del seu perímetre. Aleshores, per fer-ho rigorosament caldria restar aquestes parts interiors. Una opció és definir segments per a cada part que no ens interessa i restar-ne la seva longitud al perímetre total calculat additivament (veure la il·lustració i la seva explicació).



A l'apartat (**b**) suposem que els alumnes consideraran que les fulles són semblants i que calcularan el perímetre i l'àrea segons el factor de proporcionalitat: multiplicant per la raó de semblança per trobar el perímetre de les noves fulles més petites i pel seu quadrat per calcular l'àrea. Ara bé, caldrà deixar clar a la posada en comú que s'està suposant que les fulles són semblants i aquest fet caldria demostrar-lo. Una opció seria construir un polígon que aproximés cada fulla i comprovar que tots els costats són proporcionals i tots els angles són iguals. Naturalment, això seria laboriós i el resultat no pot ser exacte ja que les fulles de la natura són elements reals. Tot i així, sí que ens en podem fer una idea per aproximació. També cal que els alumnes trobin la raó de semblança entre les fulles i, per això, caldrà prendre unes mesures de referència a sobre de cada fulla: la inicial i les dues més petites. Si en calculem diverses (quatre o cinc), després podrem fer la mitjana de les raons de semblança que s'obtinguin i, així, es pot connectar la discussió d'aquest problema amb un concepte de l'estadística.

L'arbre del problema detalla aquestes idees i la següent il·lustració mostra un exemple de com podríem resoldre el problema:



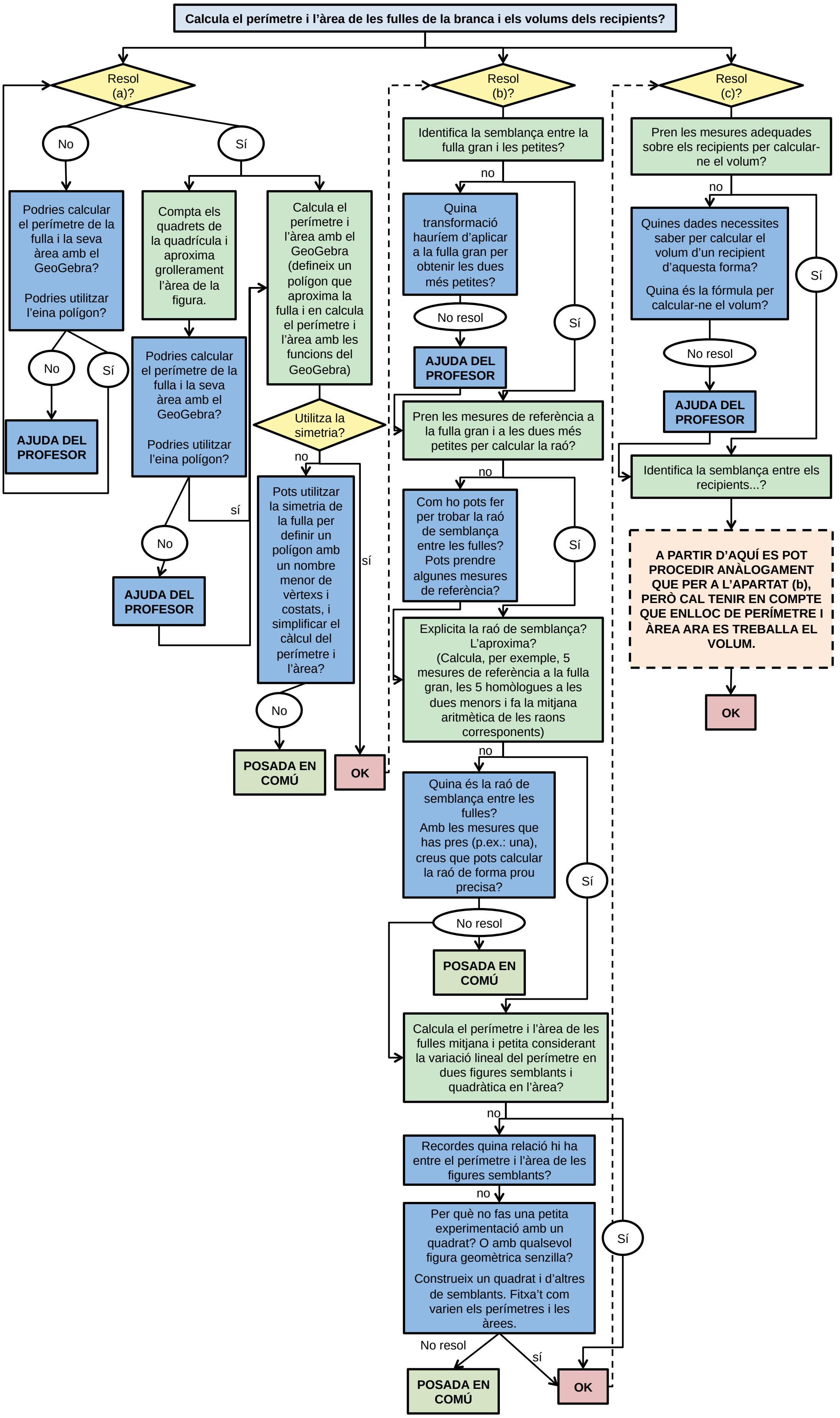
L'apartat (**c**) està pensat perquè els estudiants realitzin una generalització, pel cas dels volums (3 dimensions), del procediment que han aplicat per resoldre l'apartat anterior. A partir de la fotografia, en la qual s'observa la construcció dels recipients amb peces d'un material manipulable, els alumnes poden prendre algunes mesures, considerant com a unitat cadascuna de les peces quadrades (o bé amb el regle, tot i que el resultat que obtinguin no podrà ser tan precís) i, aleshores, han d'aplicar que la relació que s'estableix entre els volums de figures semblants de tres dimensions és proporcional al cub de la raó de semblança.

Si el professor ho creu adequat, durant la posada en comú es poden mostrar les solucions que s'expliquen en aquest document i que es troben construïdes en dos fitxers de GeoGebra. Tot i així, és interessant que els alumnes discuteixin els seus procediments de resolució i que aquestes solucions serveixin per completar les elaborades pels estudiants i no per substituir-les.

Finalment, els **objectius del problema 2** i alguns **elements matemàtics** que incorpora aquest problema són els següents:

- Treballar la proporcionalitat i la semblança sense utilitzar l'homotècia.
- Emprar les relacions entre el perímetre, l'àrea i el volum de figures semblants de tres dimensions per resoldre aquest problema.
- Establir una connexió amb l'estadística: calcular diferents mesures en cada fulla per trobar un valor mitjà de la raó de semblança que sigui més precís; i amb les isometries: usar la simetria per simplificar el càlcul de l'àrea de la fulla i, en menor mesura, del seu perímetre.

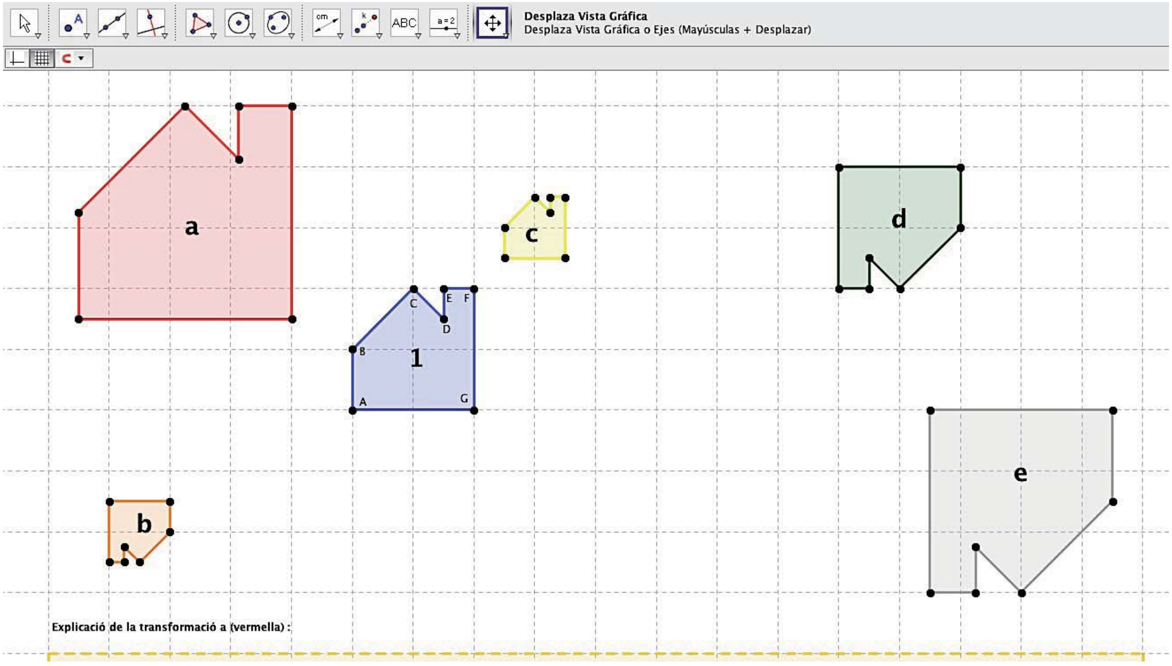
L'**arbre del problema 1** és el següent:



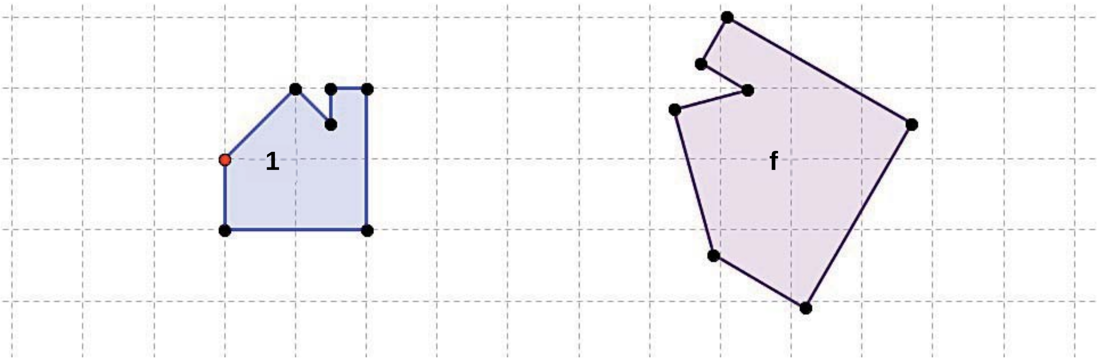
Calcula el perímetre i l'àrea de les fulles de la branca i els volums dels recipients?
Resol (a)?
No
Sí
Podries calcular el perímetre de la fulla i la seva àrea amb el GeoGebra? Podries utilitzar l'eina polígon?
Compta els quadrets de la quadrícula i aproxima grollerament l'àrea de la figura.
Calcula el perímetre i l'àrea amb el GeoGebra (defineix un polígon que aproxima la fulla i en calcula el perímetre i l'àrea amb les funcions del GeoGebra)
No
Sí
AJUDA DEL PROFESOR
Podries calcular el perímetre de la fulla i la seva àrea amb el GeoGebra? Podries utilitzar l'eina polígon?
sí
No
AJUDA DEL PROFESOR
Utilitza la simetria?
no
Pots utilitzar la simetria de la fulla per definir un polígon amb un nombre menor de vèrtexs i costats, i simplificar el càlcul del perímetre i l'àrea?
sí
No
POSADA EN COMÚ
OK
Resol (b)?
Identifica la semblança entre la fulla gran i les petites?
no
Quina transformació hauríem d'aplicar a la fulla gran per obtenir les dues més petites?
Sí
No resol
AJUDA DEL PROFESOR
Pren les mesures de referència a la fulla gran i a les dues més petites per calcular la raó?
no
Com ho pots fer per trobar la raó de semblança entre les fulles? Pots prendre algunes mesures de referència?
Sí
Explicita la raó de semblança? L'aproxima? (Calcula, per exemple, 5 mesures de referència a la fulla gran, les 5 homòlogues a les dues menors i fa la mitjana aritmètica de les raons corresponents)
no
Quina és la raó de semblança entre les fulles? Amb les mesures que has pres (p.ex.: una), creus que pots calcular la raó de forma prou precisa?
Sí
No resol
POSADA EN COMÚ
Calcula el perímetre i l'àrea de les fulles mitjana i petita considerant la variació lineal del perímetre en dues figures semblants i quadràtica en l'àrea?
no
Recordes quina relació hi ha entre el perímetre i l'àrea de les figures semblants?
no
Per què no fas una petita experimentació amb un quadrat? O amb qualsevol figura geomètrica senzilla? Construeix un quadrat i d'altres de semblants. Fitxa't com varien els perímetres i les àrees.
Sí
No resol
sí
POSADA EN COMÚ
OK
Resol (c)?
Pren les mesures adequades sobre els recipients per calcular-ne el volum?
no
Quines dades necessites saber per calcular el volum d'un recipient d'aquesta forma? Quina és la fórmula per calcular-ne el volum?
Sí
No resol
AJUDA DEL PROFESOR
Identifica la semblança entre els recipients...?
A PARTIR D'AQUÍ ES POT PROCEDIR ANÀLOGAMENT QUE PER A L'APARTAT (b), PERÒ CAL TENIR EN COMPTE QUE ENLLOC DE PERÍMETRE I ÀREA ARA ES TREBALLA EL VOLUM.
OK

Problema 3: Transformacions geomètriques

a) A la casa de color blau (**1**) li hem aplicat cinc transformacions geomètriques per obtenir la resta de cases de colors. Quines són aquestes transformacions? Identifica-les i explica tot el que sàpigues de cadascuna d'elles.



b) Com transformaries la casa de color blau (**1**) en la lila (**f**)? Ajuda't del GeoGebra per fer-ho i argumenta detalladament la teva resposta.



L'apartat (**a**) del problema està pensat per treballar l'homotècia i caracteritzar l'efecte d'aquesta transformació en funció de la raó de semblança i de la posició del centre. Tal com es mostra en l'arbre, aquest problema és una ampliació de l'activitat introductòria 4. Per tant, es pretén que els alumnes no només determinin que cal desplaçar, girar i canviar la mida de la figura blava per obtenir les altres, sinó que siguin capaços de fer-ho per mitjà d'una única transformació: l'homotècia. Per això, l'estratègia que previsiblement hauran de seguir és la d'unir els vèrtexs homòlegs amb rectes i determinar que el punt de tall és el centre d'homotècia. Per calcular la raó només cal establir les proporcions entre els costats del polígon transformat i els de l'original. Naturalment, s'hauria de verificar que per a cada costat es manté la proporció, ja que si la variació de la mida és mínima no es detectaria. Ara bé, aquest procés seria molt laboriós i mentre els alumnes tinguin clar que s'hauria de verificar per a cada costat ja és suficient. Una altra opció és prendre les mesures a partir del centre d'homotècia i fins a un vèrtex i, després, entre el centre i el corresponent vèrtex homòleg. Lògicament, si establim les proporcions en aquest cas el resultat serà el mateix i coincidirà amb la raó de semblança calculada pel mètode anterior.

Una vegada s'ha determinat el centre d'homotècia i la raó de semblança, els alumnes poden verificar el seu resultat amb l'eina *homotècia* del GeoGebra.

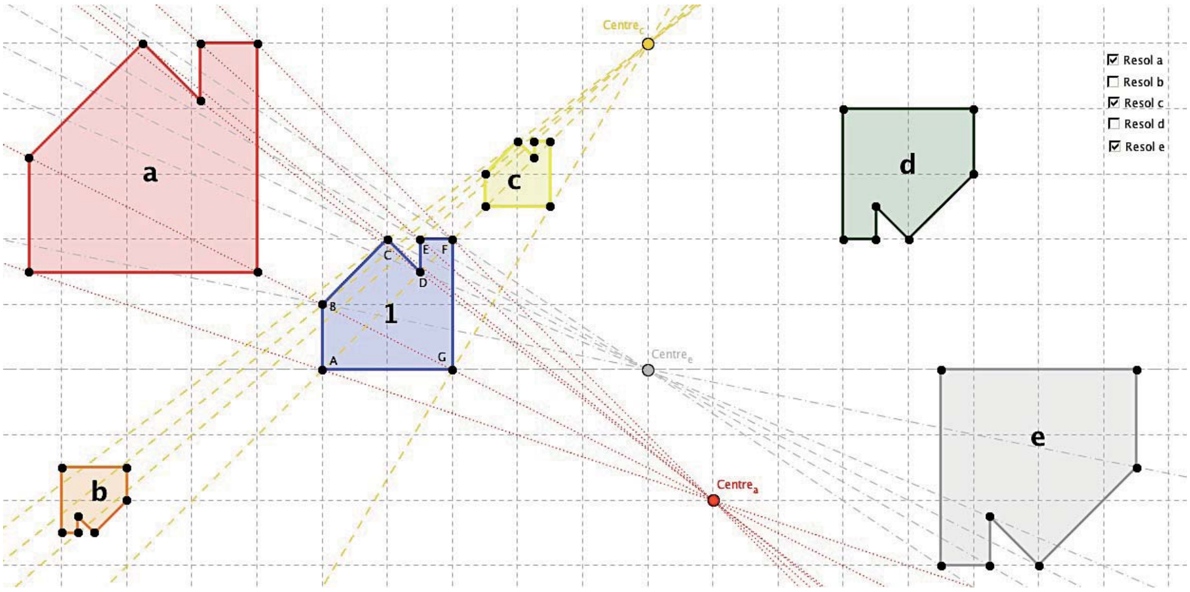
La taula següent resumeix les transformacions que hem aplicat a cada figura poligonal del problema:

Figura	Raó de semblança	Descripció de la posició del centre d'homotècia	Efecte de la transformació
Vermella (**a**)	$r_a = 1'75$	La figura blava (original) queda situada entre l'ampliada (vermella) i el centre.	Ampliació de factor la raó de semblança.
Taronja (**b**)	$r_b = -1/2$	El centre d'homotècia queda situat entre les dues figures.	Reducció de factor la raó de semblança i gir de 180º.
Groga (**c**)	$r_c = 1/2$	La figura reduïda (groga) queda situada entre l'original i el centre.	Reducció de factor la raó de semblança.
Verda (**d**)	$r_d = -1$	El centre d'homotècia queda situat entre les dues figures.	Homotècia de raó -1, que és equivalent a un gir de 180º amb centre el d'homotècia i a una simetria central respecte el centre d'homotècia.
Grisa (**e**)	$r_e = -1'5$	El centre d'homotècia queda situat entre les dues figures.	Ampliació de factor la raó de semblança i gir de 180º.

En resum, és important que els alumnes s'adonin que aquella idea intuïtiva que van desenvolupar en la resolució de l'activitat introductòria 4, la qual es basava en desplaçar i augmentar o reduir la mida de la figura, es pot formalitzar i realitzar-se directament amb una única transformació geomètrica.

A més, és important que els estudiants també s'adonin que l'homotècia és un cas particular de la semblança, perquè totes les figures poligonals homotètiques seran semblants ja que mantenen la igualtat d'angles homòlegs i la proporcionalitat de costats. Tot i així, clarament no totes les figures semblants seran homotètiques, perquè en la majoria de casos si tenim dues figures semblants i unim els vèrtexs homòlegs aquests no es tallen en un únic punt (centre d'homotècia).

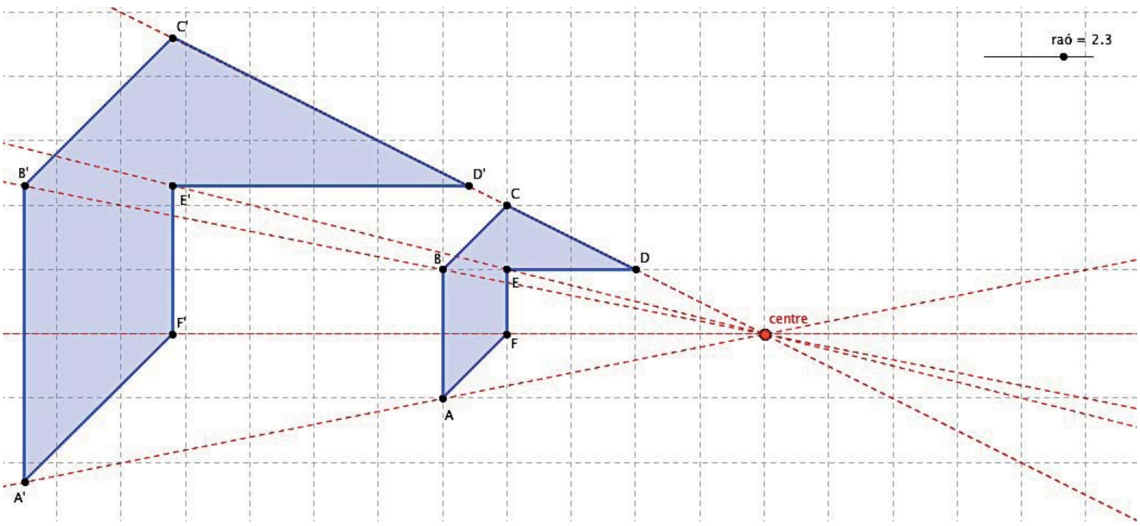
La següent il·lustració mostra una possible solució d'aquest apartat del problema feta amb el GeoGebra:



Nota: És important recordar als alumnes que procurin ser ordenats i que canviïn els colors de les rectes, la seva definició (mida dels punts de tall, rectes discontínues,...), etc. Si no ho fan, els quedarà la pantalla plena de línies i difícilment podran saber on va a parar cadascuna de les rectes. Una altra possibilitat és que defineixin botons que permetin ocultar les rectes que passen per vèrtexs homòlegs en cadascun dels casos. A més a més, disposen d'espai al final de la pàgina del GeoGebra per realitzar les explicacions corresponents. Cal comentar-los-ho si no se n'adonen.

Tal com es mostra en l'arbre del problema, durant la posada en comú seria interessant elaborar un petit esquema o mapa conceptual que il·lustri, en general, l'efecte que té l'homotècia en funció de la posició del centre i del valor de la raó. També es pot plantejar com a pregunta d'ampliació per aquells estudiants més avançats i que concloguin ràpidament la solució del problema.

Una construcció general feta amb el GeoGebra pot ser útil per visualitzar-ho. El centre es pot moure per tota la pantalla i la raó oscil·la entre valors menors que -1 i majors que 1. La següent il·lustració mostra la representació:



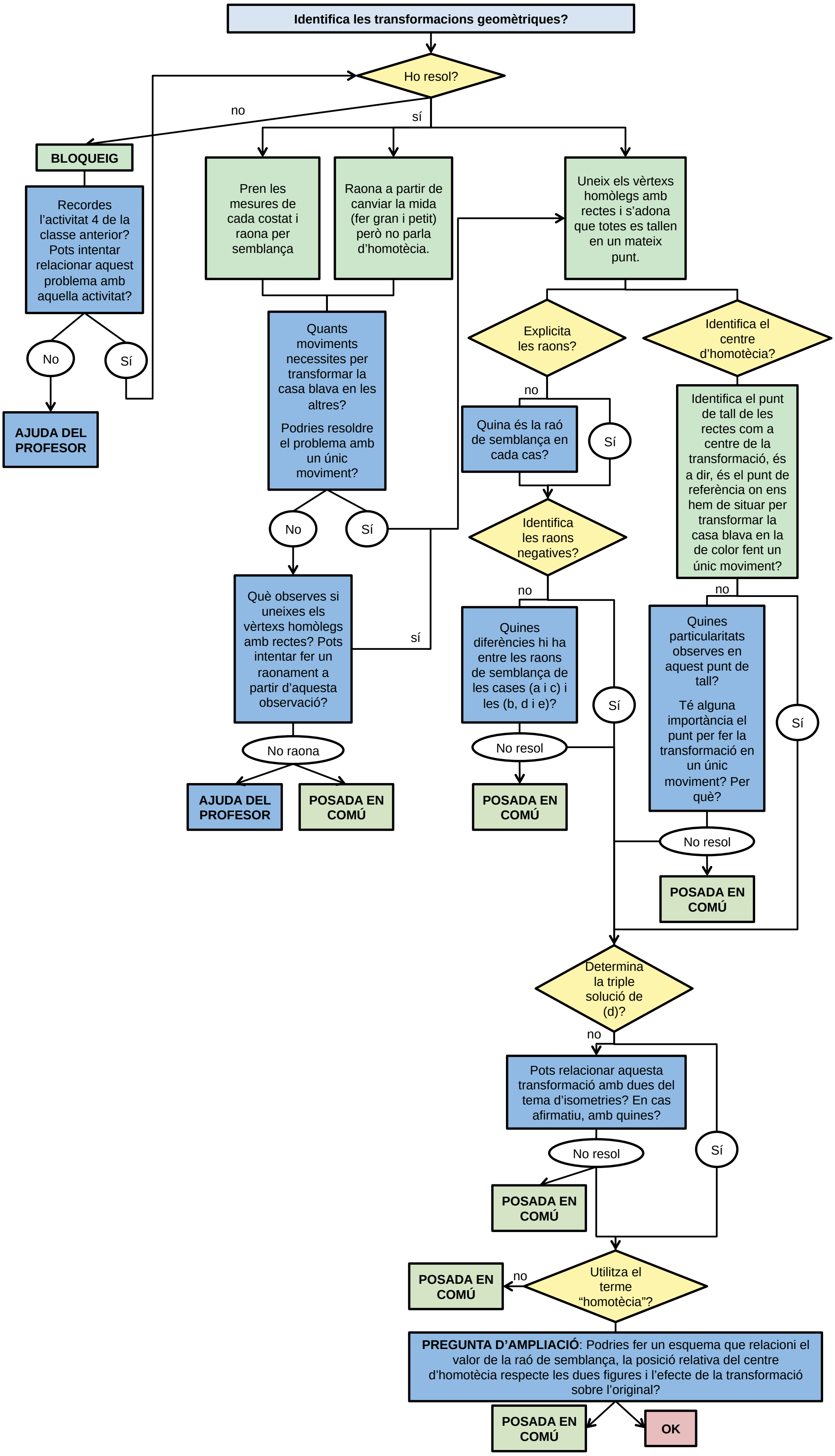
La taula següent resumeix, de forma general, l'efecte de l'homotècia sobre la figura transformada en funció de la raó de semblança i de la posició del centre d'homotècia:

Raó de semblança	Descripció de la posició del centre d'homotècia	Efecte de la transformació
$r < -1$	El centre d'homotècia queda situat entre les dues figures.	Ampliació de factor la raó de semblança i gir de 180º.
$r = -1$	El centre d'homotècia queda situat entre les dues figures.	Homotècia de raó -1, que és equivalent a un gir de 180º amb centre el d'homotècia i a una simetria central respecte el centre d'homotècia.
$-1 < r < 0$	El centre d'homotècia queda situat entre les dues figures.	Reducció de factor la raó de semblança i gir de 180º.
$r = 0$	El centre d'homotècia coincideix amb la segona figura.	És un cas degenerat. La figura transformada és un punt, el qual coincideix amb el centre d'homotècia.
$0 < r < 1$	La figura transformada queda situada entre l'original i el centre.	Reducció de factor la raó de semblança.
$r = 1$	Com que es tracta de la transformació *identitat*, a la pantalla només es visualitza un punt (centre d'homotècia) i una única figura, perquè la transformada queda situada a sobre de l'original.	És la transformació *identitat*.
$r > 1$	La figura original queda situada entre l'ampliada i el centre.	Ampliació de factor la raó de semblança.

Finalment, els **objectius de l'apartat (a) del problema 3** i alguns **elements matemàtics** que incorpora són els següents:

- Introduir l'homotècia com una transformació geomètrica.
- Caracteritzar l'homotècia en funció de la raó de semblança i la posició relativa del centre d'homotècia.
- Visualitzar l'homotècia com un cas particular de la semblança.

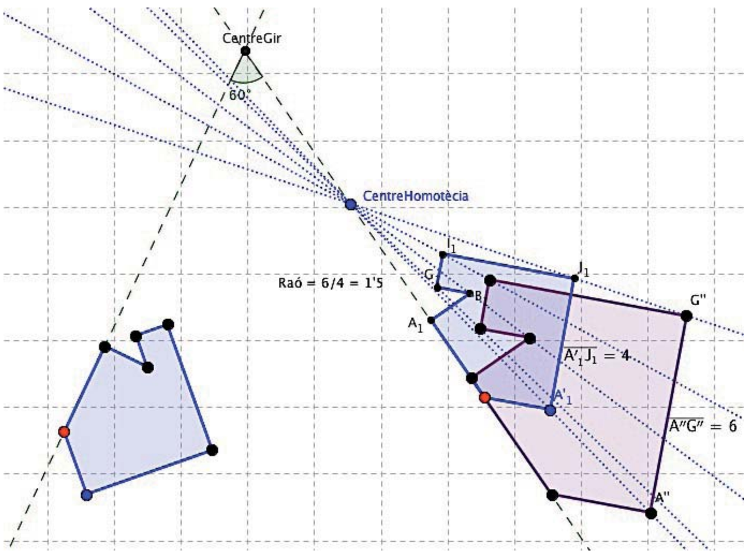
L'**arbre del problema 3 – apartat (a)** és el següent:


Identifica les transformacions geomètriques?
Ho resol?
no
sí
BLOQUEIG
Recordes l'activitat 4 de la classe anterior? Pots intentar relacionar aquest problema amb aquella activitat?
No
Sí
AJUDA DEL PROFESOR
Pren les mesures de cada costat i raona per semblança
Raona a partir de canviar la mida (fer gran i petit) però no parla d'homotècia.
Uneix els vèrtexs homòlegs amb rectes i s'adona que totes es tallen en un mateix punt.
Quants moviments necessites per transformar la casa blava en les altres?
Podries resoldre el problema amb un únic moviment?
No
Sí
Què observes si uneixes els vèrtexs homòlegs amb rectes? Pots intentar fer un raonament a partir d'aquesta observació?
sí
No raona
AJUDA DEL PROFESOR
POSADA EN COMÚ
Explicita les raons?
no
Quina és la raó de semblança en cada cas?
Sí
Identifica les raons negatives?
no
Quines diferències hi ha entre les raons de semblança de les cases (a i c) i les (b, d i e)?
Sí
No resol
POSADA EN COMÚ
Identifica el centre d'homotècia?
Identifica el punt de tall de les rectes com a centre de la transformació, és a dir, és el punt de referència on ens hem de situar per transformar la casa blava en la de color fent un únic moviment?
no
Quines particularitats observes en aquest punt de tall?
Té alguna importància el punt per fer la transformació en un únic moviment? Per què?
Sí
No resol
POSADA EN COMÚ
Determina la triple solució de (d)?
no
Pots relacionar aquesta transformació amb dues del tema d'isometries? En cas afirmatiu, amb quines?
Sí
No resol
POSADA EN COMÚ
Utilitza el terme "homotècia"?
no
POSADA EN COMÚ
PREGUNTA D'AMPLIACIÓ: Podries fer un esquema que relacioni el valor de la raó de semblança, la posició relativa del centre d'homotècia respecte les dues figures i l'efecte de la transformació sobre l'original?
POSADA EN COMÚ
OK

L’apartat (**b**) del problema 3 presenta la composició d’un gir de 60º i d’una homotècia de raó 3/2, o al revés. Aquest problema està pensat perquè els estudiants visualitzin la semblança com la composició d’una transformació isomètrica (per exemple un gir) i una homotècia. Per això, se’ls demana que dissenyin una estratègia per transformar una figura inicial en la corresponent semblant. Cal que identifiquin els elements característics de cada transformació, és a dir, s’han d’adonar que es tracta d’un gir i n’han de determinar l’angle i el centre. A més, la rotació està composada amb una homotècia i hauran de calcular la raó i situar el centre. Naturalment, poden raonar inversament i començar primer per l’homotècia i, després, treballar el gir.

Previsiblement el problema es pot abordar de moltes maneres i les estratègies que poden desenvolupar els alumnes són diverses. Tot i així, en l’arbre del problema ens centrem en les dues anteriors, les quals cal comentar durant la posada en comú:

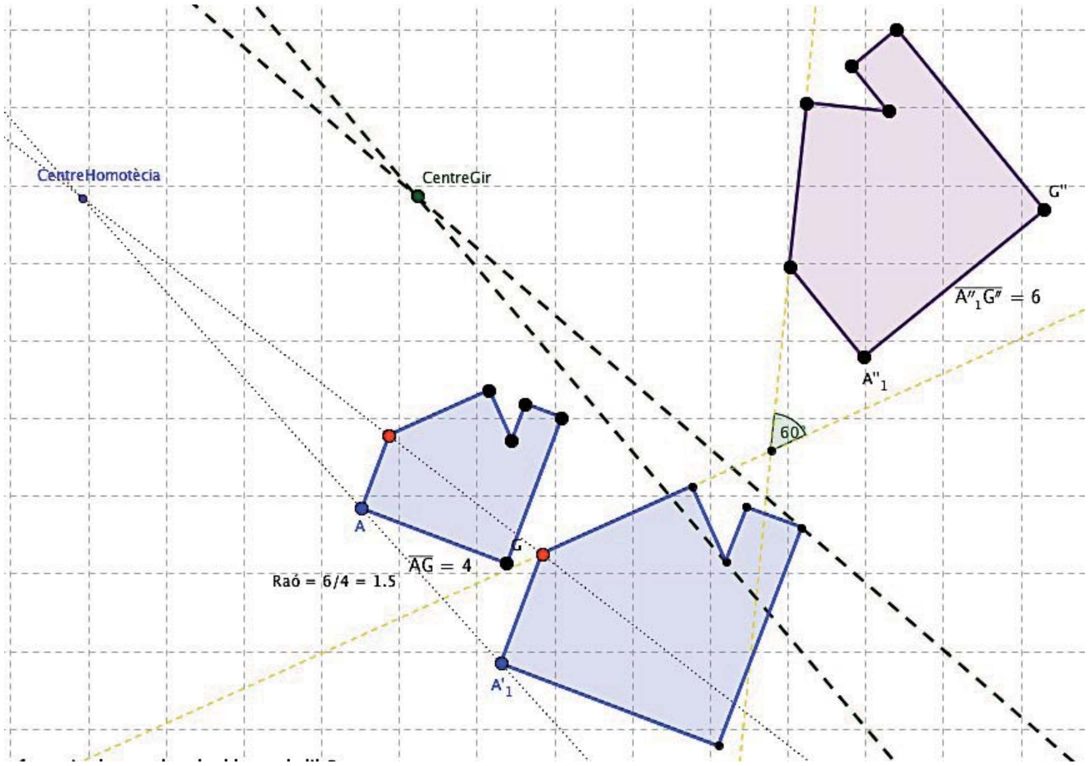
1. ***Aplicar primer un gir i després una homotècia***: tracem rectes per dos costats homòlegs (per exemple, dues parets homòlogues de la casa 1 i la f) per determinar l’angle de gir (60º). Utilitzem l’eina del GeoGebra i fem un gir respecte el punt de tall de les rectes (centre de la rotació) i que presenti un angle de 60º. Després, cal unir amb rectes els vèrtexs de la nova figura poligonal girada amb els corresponents homòlegs de la figura f. Així, veiem que es tallen totes en un mateix punt (centre d’homotècia) i només cal determinar la raó (3/2). Per això, podem definir una nova variable amb el GeoGebra i que prengui el valor de la proporció entre dos costats homòlegs qualssevol. Naturalment, caldria verificar les proporcions entre tots els costats i la igualtat de tots els angles homòlegs per estar completament segurs que existeix semblança entre les dues figures poligonals. Aquest fet, que és important, es pot comentar durant la posada en comú i cal que els alumnes el tinguin present. Tot i així, no és necessari ferho amb el GeoGebra, perquè ja hauran visualitzat que les rectes que passen per vèrtexs homòlegs es tallen totes en un mateix punt. Per tant, les dues figures estan en posició homotètica. Finalment, cal emprar l’eina ‘homotècia’ del GeoGebra i comprovar que el resultat és satisfactori independentment de la posició inicial de la figura original, la qual es pot desplaçar per la pantalla. La següent il·lustració mostra el resultat d’aplicar aquesta estratègia amb el GeoGebra:



2. ***Aplicar primer una homotècia i després un gir***: amb el GeoGebra apliquem una homotècia de centre qualsevol punt del pla i de raó 3/2. Com en el cas anterior, cal determinar raonadament el valor de la raó de semblança. Després, s'ha de determinar el centre de gir i, per això, una possibilitat és considerar un costat (segment) i el seu homòleg. Aleshores, calculem les rectes mediatrius que passen per cada vèrtex i pel vèrtex homòleg corresponent. Aquestes rectes es tallaran en un punt: el centre de gir. A continuació hem de trobar l'angle de la rotació. Una possibilitat és prolongar amb rectes els costats homòlegs i mesurar l'angle que formen en tallar-se (60º).

Com podem observar, si seguim aquest raonament, el problema connecta amb un del tema d'isometries: donades dues figures poligonals que han girat, determinar el centre i l'angle de gir.

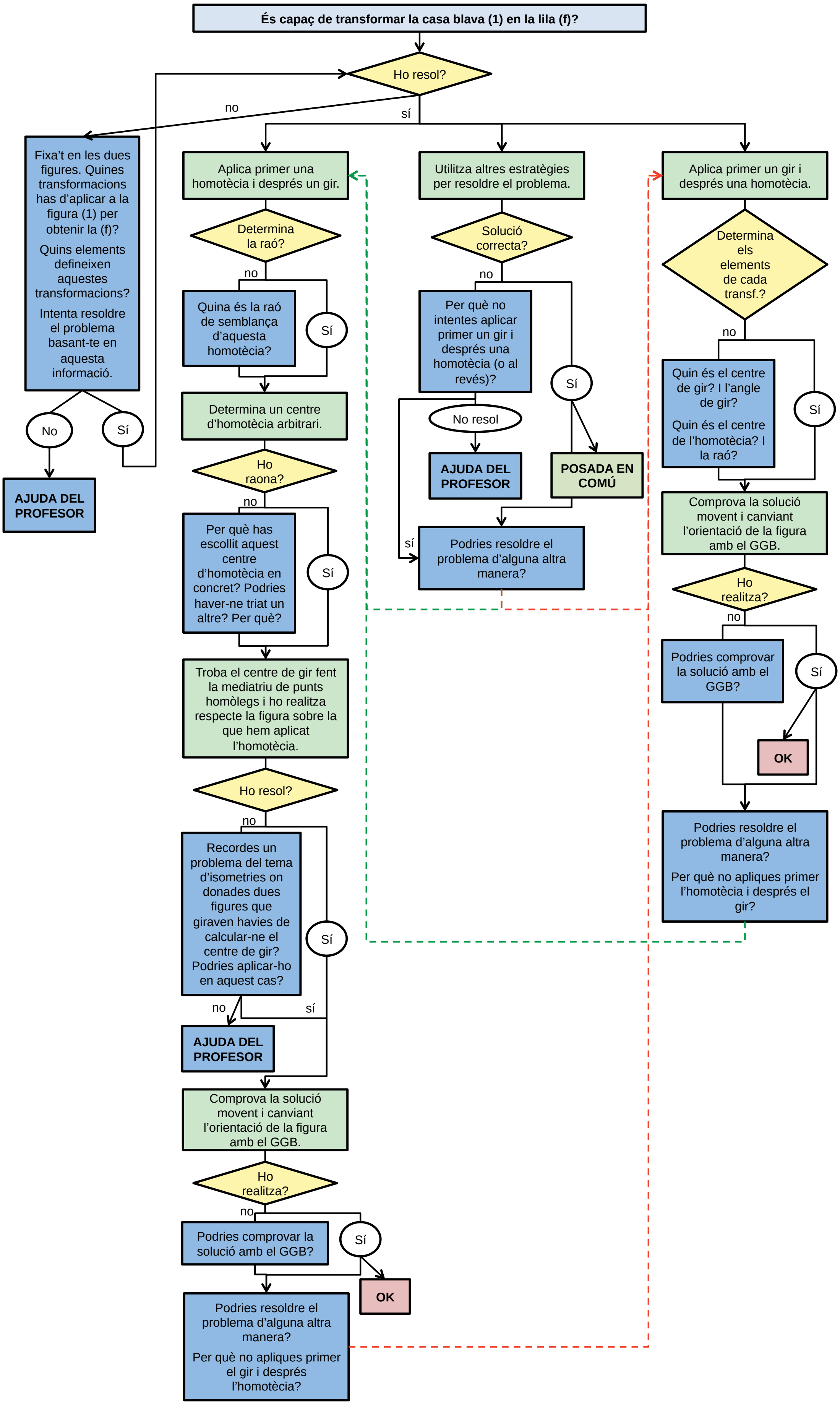
La següent il·lustració mostra el resultat d'aplicar aquesta estratègia amb el GeoGebra:



Finalment, els **objectius de l'apartat (b) del problema 3** i alguns **elements matemàtics** que incorpora són els següents:

- Visualitzar la semblança com la composició d'una transformació isomètrica (gir en aquest cas) i una homotècia; o al revés.
- Determinar els elements característics d'una homotècia i d'un gir, i establir connexions amb el tema d'isometries.

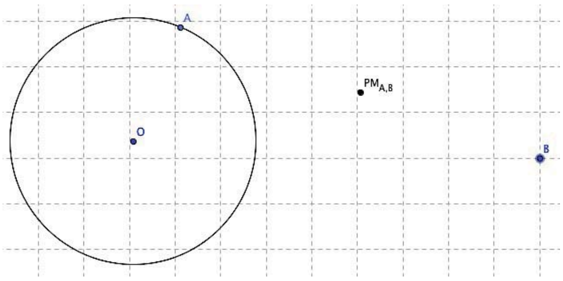
L'**arbre del problema 3 – apartat (b)** és el següent:


És capaç de transformar la casa blava (1) en la lila (f)?
Ho resol?
no
sí
Fixa't en les dues figures. Quines transformacions has d'aplicar a la figura (1) per obtenir la (f)?
Quins elements defineixen aquestes transformacions?
Intenta resoldre el problema basant-te en aquesta informació.
No
Sí
AJUDA DEL PROFESOR
Aplica primer una homotècia i després un gir.
Determina la raó?
no
Quina és la raó de semblança d'aquesta homotècia?
Sí
Determina un centre d'homotècia arbitrari.
Ho raona?
no
Per què has escollit aquest centre d'homotècia en concret? Podries haver-ne triat un altre? Per què?
Sí
Troba el centre de gir fent la mediatriu de punts homòlegs i ho realitza respecte la figura sobre la que hem aplicat l'homotècia.
Ho resol?
no
Recordes un problema del tema d'isometries on donades dues figures que giraven havies de calcular-ne el centre de gir? Podries aplicar-ho en aquest cas?
Sí
no
sí
AJUDA DEL PROFESOR
Comprova la solució movent i canviant l'orientació de la figura amb el GGB.
Ho realitza?
no
Podries comprovar la solució amb el GGB?
Sí
OK
Podries resoldre el problema d'alguna altra manera?
Per què no apliques primer el gir i després l'homotècia?
Utilitza altres estratègies per resoldre el problema.
Solució correcta?
no
Per què no intentes aplicar primer un gir i després una homotècia (o al revés)?
Sí
No resol
AJUDA DEL PROFESOR
POSADA EN COMÚ
sí
Podries resoldre el problema d'alguna altra manera?
Aplica primer un gir i després una homotècia.
Determina els elements de cada transf.?
no
Quin és el centre de gir? I l'angle de gir?
Quin és el centre de l'homotècia? I la raó?
Sí
Comprova la solució movent i canviant l'orientació de la figura amb el GGB.
Ho realitza?
no
Podries comprovar la solució amb el GGB?
Sí
OK
Podries resoldre el problema d'alguna altra manera?
Per què no apliques primer l'homotècia i després el gir?

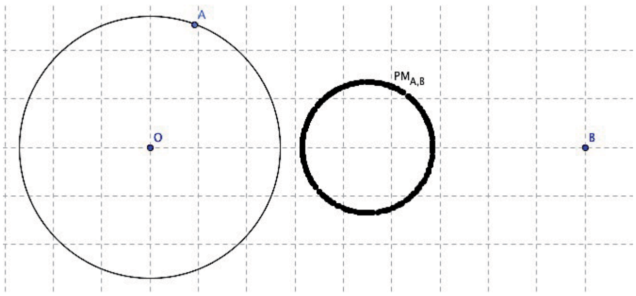
Problema 4: Punts mitjos amb una propietat curiosa

Donada una circumferència, considerem un punt, *A*, situat a sobre de la circumferència i un punt *B* exterior a ella. Què compleixen els punts mitjos de *A* i *B* quan anem desplaçant *A* per sobre de la circumferència? Argumenta la teva resposta.

Si representem la situació descrita per l'enunciat del problema amb el GeoGebra obtenim el següent:

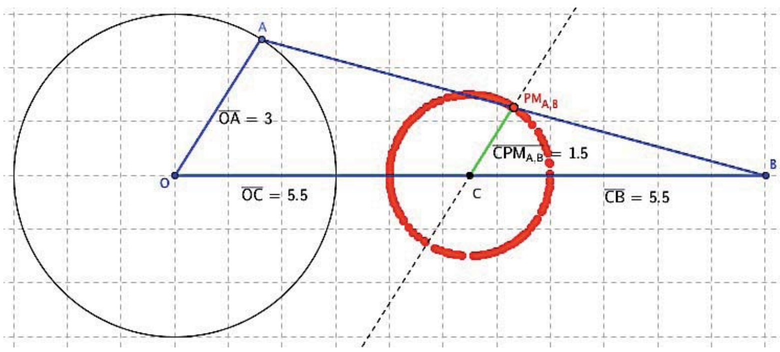


Aleshores, segons l'arbre del problema 4, el primer que haurien de ser capaços de realitzar els estudiants és conjecturar la solució del problema. Amb el GeoGebra és una tasca senzilla, sobretot si s'activa el rastre del punt mig entre *A* i *B* i es desplaça *A* per sobre de la circumferència. La situació que s'obté és la següent:



Per tant, clarament s'observa que la solució d'aquest problema és una circumferència més petita que l'original. Ara bé, quant mesura el radi de la circumferència solució? Com la podríem obtenir? Són homotètiques les dues circumferències? Aquestes preguntes estan recollides a l'arbre del problema i cal que els alumnes les responguin i, en la mesura del possible, les han d'argumentar i justificar.

La següent construcció il·lustra una forma possible de raonar la resposta del problema i de justificar que la solució és una circumferència homotètica a la primera amb radi la meitat de la circumferència original. Vegem-ho:



Si construïm els triangles *OAB* i tracem una paral·lela a *OA* que passi per $PM_{A,B}$ observem que, pel teorema de Tales, aquesta recta tallarà *OB* pel seu punt mig, *C*. Així, els triangles *OAB* i $CPM_{A,B}B$ estan en posició de Tales i, com que $PM_{A,B}$ és el punt mig de *A* i *B*, pel teorema de Tales, *C* també ho serà de *OB*. Aleshores, el radi de la circumferència original, *OA*, serà el doble que el de la circumferència solució:

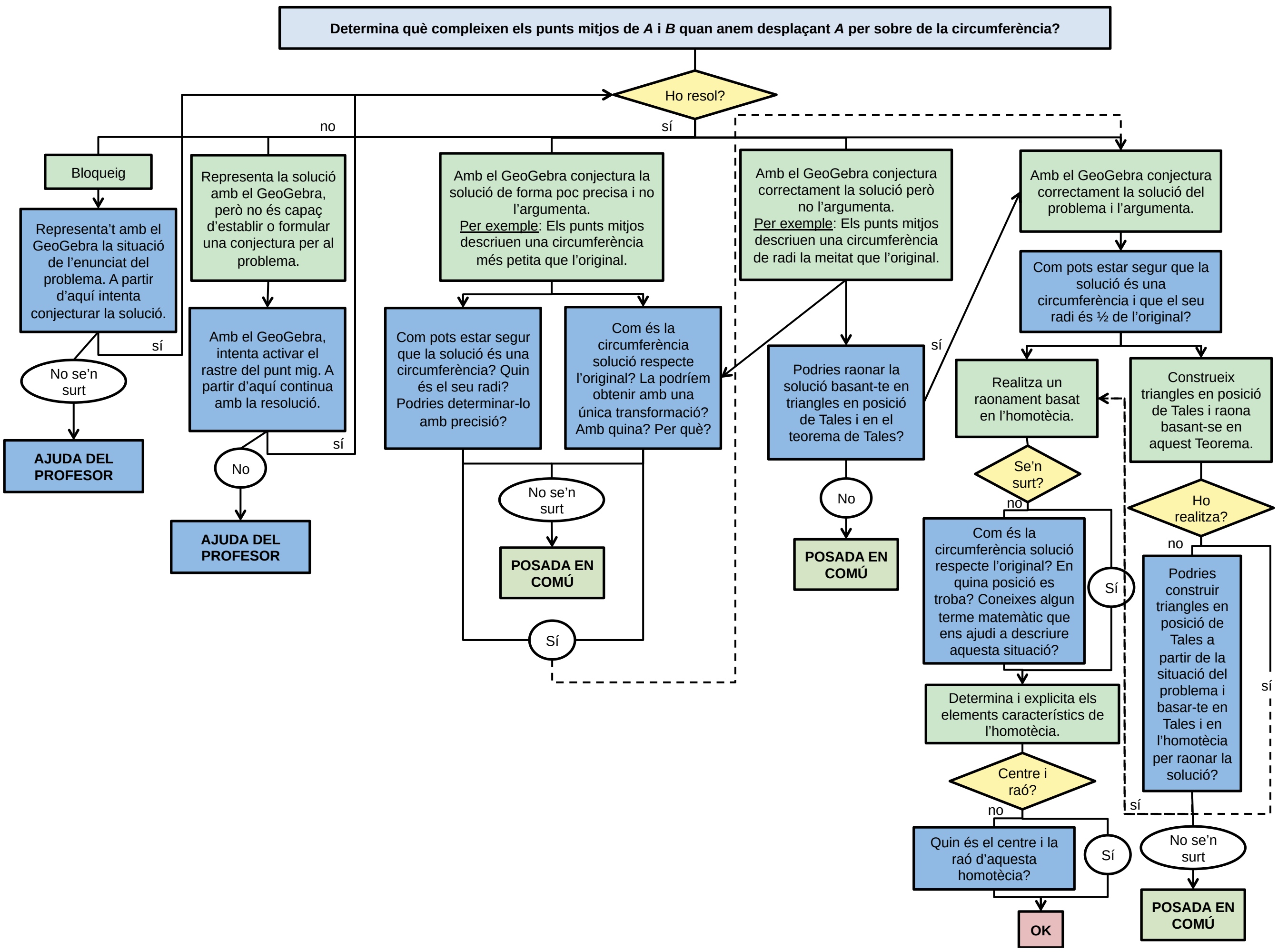
$$\frac{BPM_{A,B}}{PM_{A,B}C} = \frac{BA}{AO} \leftrightarrow \frac{BPM_{A,B}}{PM_{A,B}C} = \frac{2BPM_{A,B}}{OA} \leftrightarrow \frac{OA}{PM_{A,B}C} = \frac{2BPM_{A,B}}{BPM_{A,B}} (= 2) \leftrightarrow \boldsymbol{PM_{A,B}C = \frac{1}{2}OA}$$

Per tant, queda comprovat que la solució del problema 4 és una circumferència homotètica a la primera, respecte el centre d'homotècia *B*, i de radi la meitat que la circumferència original.

Nota: En la construcció que facin els alumnes amb el GeoGebra poden considerar una circumferència de radi arbitrari, a partir d'un punt lliscant, i així visualitzaran que, efectivament, la solució no depèn del radi de la circumferència original.

Finalment, durant la posada en comú es molt important realitzar l'argumentació detallada del problema, ja que un aspecte és ser capaç de conjecturar la solució (fàcil amb el GeoGebra) i l'altre poder-lo argumentar matemàticament a partir de les eines que s'han treballat i après en l'estudi d'aquest tema (més difícil).

L'**arbre del problema 4** és el següent:



Finalment, els **objectius del problema 4** i alguns **elements matemàtics** que incorpora són els següents:

- Treballar l'homotècia com un cas particular de la semblança en un problema on la transformació geomètrica queda amagada en la solució.
- Fer ús del teorema de Tales per argumentar la solució d'un problema basat en l'homotècia i en triangles que es troben en posició de Tales.

Emprar el GeoGebra per conjecturar la solució del problema i usar-lo com una eina de suport per a la posterior argumentació.

Problema 5: Investiguem amb els miralls!

La naturalesa de l'últim problema de la seqüència didàctica és diferent de la resta d'activitats i problemes que s'han plantejat fins ara. La intenció és realitzar una sessió de resolució i posada en comú de forma conjunta amb tot el grup d'alumnes durant una sessió de classe.

Es tracta d'una activitat pensada per treballar el teorema de Tales en el context d'un problema de miralls. A diferència dels casos anteriors, no és necessari repartir un protocol de preguntes per a cada parella d'alumnes, sinó que amb un breu text d'introducció com el següent i la gestió del professor serà suficient:

Problema 5: Investiguem amb els miralls!

T'has preguntat mai quina ha de ser la longitud mínima d'un mirall de paret perquè ens hi puguem veure completament (des del cap fins als peus)? Creus que és important la posició que tingui a la paret? S'hauria de col·locar d'alguna manera especial? O bé, sigui quina sigui l'altura respecte del terra que el posem funcionarà?

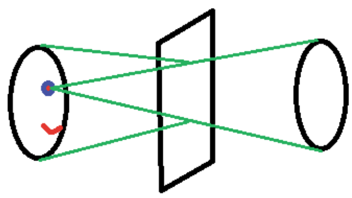
Quan resolguis l'activitat seràs capaç de respondre preguntes i algunes altres que se't puguin formular!

Per començar, una vegada presentada l'activitat es poden fer sortir quatre voluntaris i que dibuixin sobre els vidres de la classe, amb un ull tapat, la seva cara. Per això, cal disposar de retoladors de pissarra i que, després, es puguin esborrar. Inicialment, es deixa que els alumnes dibuixin i no es comenta res. Després, es fa la reflexió de què han representat unes cares molt petites. Es poden utilitzar les següents preguntes:

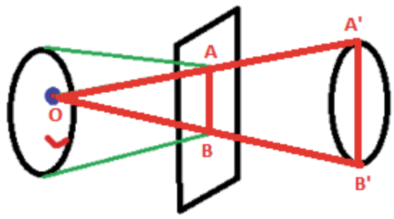
1.- Com és que la cara ha quedat tan petita?

2.- Hi ha alguna relació entre la mida de la cara original i la del dibuix?

Aleshores, s'ha d'establir una discussió amb el grup classe i procurar que els alumnes facin les seves hipòtesis. Seria interessant que entre tots els estudiants i amb l'ajuda del professor es pogués deduir el següent esquema:



A més, es pot preguntar als alumnes pels angles i que s'adonin que, en aquest cas, estem treballant una simetria. De fet, el vidre actua com un mirall, el qual queda situat a la meitat de la distància entre la persona i la imatge reflectida del darrere. La següent il·lustració mostra els dos triangles en posició de Tales que apareixen:



Nota: És possible que alguns alumnes es preguntin per què el vidre/mirall queda situat a la meitat de la distància entre l'observador i la imatge virtual. En tal cas podem dir-los que la construcció funciona així perquè en el fons es tracta d'una simetria axial, on l'eix de simetria és la recta que descriu el mirall. Més endavant es podran comentar casos generals on el mirall no estigui situat en aquesta posició.

Arribats en aquest punt es pot obrir el document de GeoGebra de la noia i el mirall, que s'obté de: http://www.geogebratube.org/material/show/id/17496

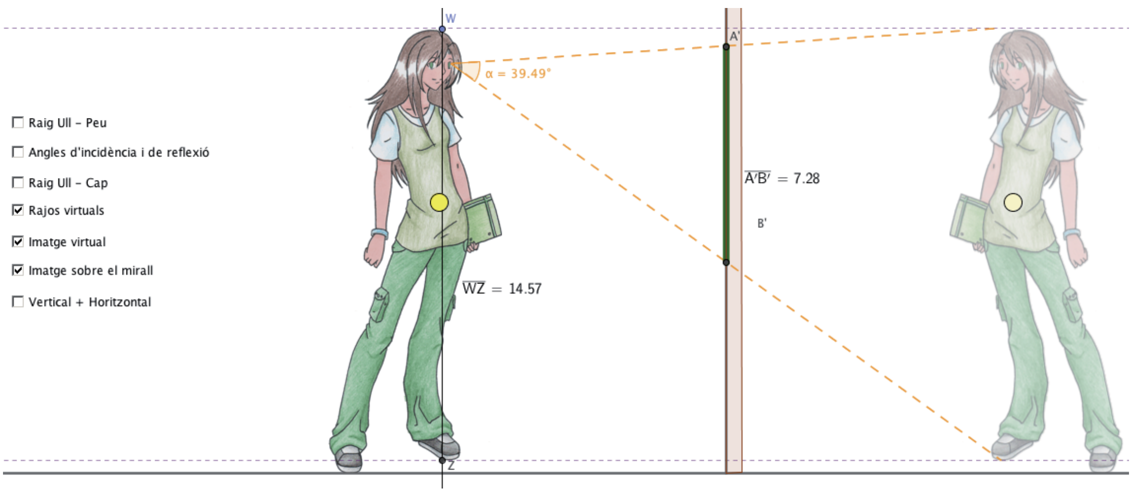
Els diferents botons de la construcció permeten activar els rajos de llum descrits per la noia i les corresponents projeccions sobre la imatge virtual, la qual queda reflectida a l'altra banda del mirall.

Si s'explora el fitxer de GeoGebra, els alumnes haurien de ser capaços de respondre les següents preguntes:

3.- Quant mesura la imatge que queda a sobre del mirall i quina proporció representa respecte l'altura de la noia?

4.- És independent aquest fet de la distància que estigui la noia del mirall?

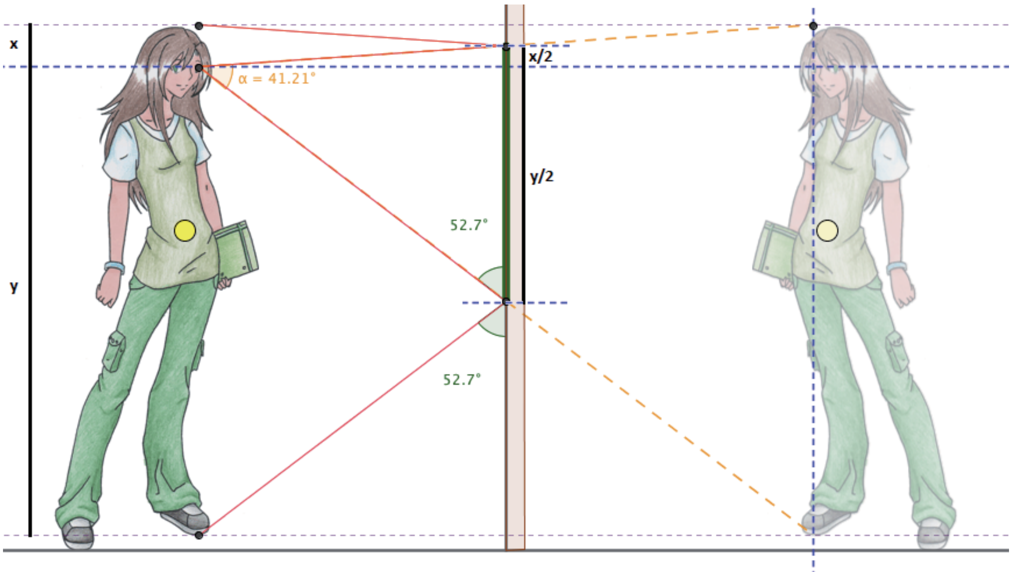
Prenent mesures amb el GeoGebra i desplaçant la imatge de la noia usant el punt groc, es pot deduir que el mirall sempre queda situat a la meitat i que la imatge sobre ell sempre és la meitat de l'altura de la noia, sigui quina sigui la distància d'ella respecte el mirall. La següent il·lustració mostra aquesta idea:



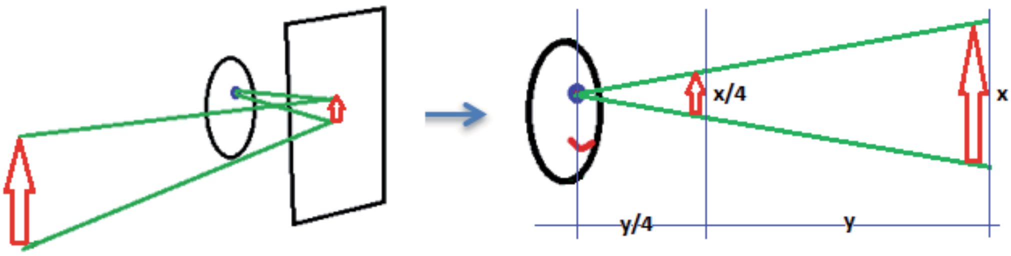
A partir d'aquí es poden introduir qüestions una mica més complicades i, per això, se'ls pot preguntar:

5.- Quant d'alt ha de ser un mirall perquè t'hi puguis veure sencer? N'hi ha prou que mesuri la meitat de la teva altura? Cal que estigui col·locat d'alguna manera en especial o bé funcionarà sempre?

Es pot establir un petit debat amb el grup classe, el qual hauria de conduir a què els alumnes deduïssin que és suficient que el mirall mesuri la meitat de la nostra altura, sempre i quan estigui situat adequadament, és a dir, que els nostres ulls han d'estar alineats correctament amb el mirall. La següent il·lustració, obtinguda a partir del fitxer de GeoGebra de la noia, mostra aquestes idees:

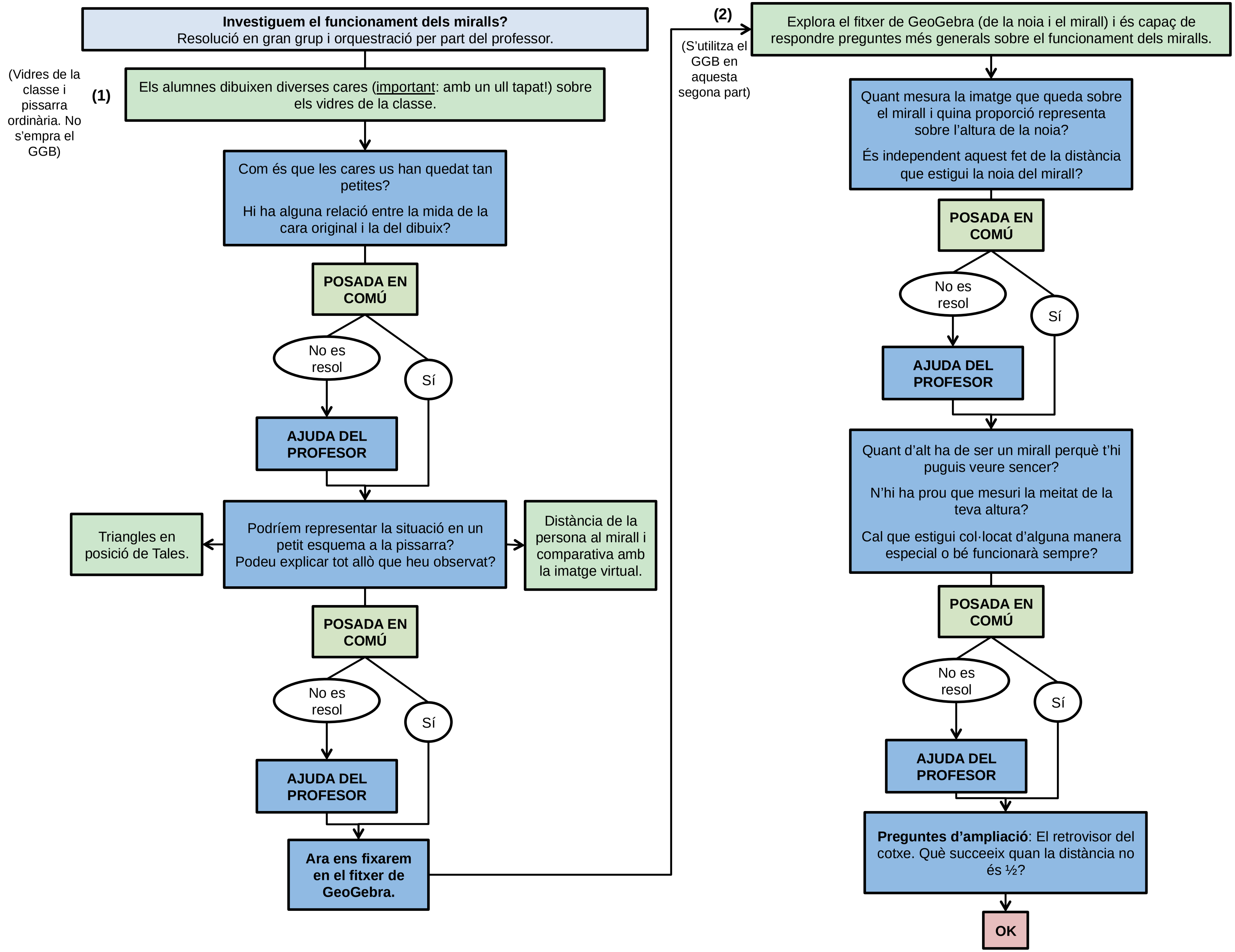


Finalment, es pot intentar generalitzar el problema i relacionar-lo amb què passaria si el mirall no estigués situat a la meitat de la distància entre les dues imatges. Per exemple, podem plantejar-nos el cas del retrovisor interior del cotxe. El raonament també es basa en el teorema de Tales i la justificació informal es pot realitzar a partir de les següents construccions:



Per acabar la resolució cal que els alumnes posin per escrit totes les idees treballades durant la classe. Si queda temps es pot iniciar aquesta tasca al final de la sessió i, sinó, es pot deixar aquesta part per deures i que els alumnes l'entreguin el proper dia.

Donada la naturalesa d'aquest problema i les diferències evidents amb la resta de la seqüència, l'**arbre del problema 5** recull, essencialment, les preguntes que s'han formulat en aquests paràgrafs i alguns elements de gestió. Vegem-ho a continuació:


Investiguem el funcionament dels miralls?
Resolució en gran grup i orquestració per part del professor.
(Vidres de la classe i pissarra ordinària. No s'empra el GGB)
(1)
Els alumnes dibuixen diverses cares (important: amb un ull tapat!) sobre els vidres de la classe.
Com és que les cares us han quedat tan petites?
Hi ha alguna relació entre la mida de la cara original i la del dibuix?
POSADA EN COMÚ
No es resol
Sí
AJUDA DEL PROFESOR
Podríem representar la situació en un petit esquema a la pissarra?
Podeu explicar tot allò que heu observat?
Triangles en posició de Tales.
Distància de la persona al mirall i comparativa amb la imatge virtual.
POSADA EN COMÚ
No es resol
Sí
AJUDA DEL PROFESOR
Ara ens fixarem en el fitxer de GeoGebra.
(2)
(S'utilitza el GGB en aquesta segona part)
Explora el fitxer de GeoGebra (de la noia i el mirall) i és capaç de respondre preguntes més generals sobre el funcionament dels miralls.
Quant mesura la imatge que queda sobre el mirall i quina proporció representa sobre l'altura de la noia?
És independent aquest fet de la distància que estigui la noia del mirall?
POSADA EN COMÚ
No es resol
Sí
AJUDA DEL PROFESOR
Quant d'alt ha de ser un mirall perquè t'hi puguis veure sencer?
N'hi ha prou que mesuri la meitat de la teva altura?
Cal que estigui col·locat d'alguna manera especial o bé funcionarà sempre?
POSADA EN COMÚ
No es resol
Sí
AJUDA DEL PROFESOR
Preguntes d'ampliació: El retrovisor del cotxe. Què succeeix quan la distància no és ½?
OK

ANEXO III

Documentos de autorización para la obtención de datos distribuidos a las familias de los alumnos

Universitat Autònoma de Barcelona

Benvolguda família,

En unes classes de matemàtiques del seu fill/a, l'investigador en formació Miquel Ferrer, vol realitzar una activitat de recerca pedagògica, que formarà part de la seva tesi doctoral, la qual està realitzant a la Universitat Autònoma de Barcelona, dins del marc del projecte "Momentos clave en el aprendizaje de la geometría en un entorno colaborativo y tecnológico" del Ministerio de Economía y Competitividad, amb codi de referència EDU2011-23240.

Aquest treball inclou la gravació, per a l'anàlisi posterior, de moments concrets de l'aprenentatge matemàtic durant aquestes sessions de classe.

Tot i que en general es procurarà no agafar els alumnes de cara, els volem demanar l'autorització per efectuar la gravació i poder utilitzar les imatges en la presentació del document. Els agrairíem molt que ens donessin la seva autorització.

Molt cordialment,

La Direcció del centre

Universitat Autònoma de Barcelona

El/la sotasignat ____,

amb DNI ____________________,

domiciliat a ____,

com a pare/mare de ____________________, alumne de tercer curs d'ESO.

AUTORITZO que el meu fill/a pugui ser enregistrat/da per l'investigador en formació Miquel Ferrer durant aquestes sessions de classe de matemàtiques, com a part de l'activitat de recerca pedagògica que formarà part de la seva tesi doctoral, la qual està realitzant a la Universitat Autònoma de Barcelona.

Barcelona, el ___ de ___________ del 2014

ANEXO IV

Transcripción y caracterización de episodios de la discusión en gran grupo de la primera tarea de la profesora Pilar (centro B)

Episodio 1 (*Experimentar el instrumento; Situación del problema*)

Professora: A veure, la primera activitat: Alícia, llegeix.

***Profesora**: A ver, el primer ejercicio: Alicia, lee.*

Alumne 1: Donada la següent lletra de l'abecedari, representa'n una altra que sigui el doble de gran.

***Alumno 1**: Dada la siguiente letra del abecedario, representa otra que sea el doble de grande.*

Professora: D’acord.

***Profesora**: De acuerdo.*

Episodio 2 (*Experimentar el instrumento; Presentación de una solución*)

Professora: Què vàreu fer vosaltres?

***Profesora**: ¿Qué hicisteis vosotros?*

Alumne 1: Calculàvem...

***Alumno 1**: Calculábamos…*

Professora: Surt a fer-ho. Sí, fes-ho aquí al costat. Fes el que vau fer, exactament i després ho calculem. Fes-ho potser amb punts, eh Alícia, perquè amb segments no et sortirà tan exacte. Així et serà més fàcil. [L'Alumne 1 representa la solució a la pantalla del GeoGebra.]

***Profesora**: Sal a hacerlo. Sí, hazlo aquí al lado. Haz lo que hicisteis, exactamente y después lo calculamos. Hazlo quizás con puntos, eh Alicia, porque con segmentos no te saldrá tan exacto. Así te será más fácil. [Alumno 1 representa la solución en la pantalla de GeoGebra.]*

Professora: Vale, hem fet una ‘F’. Sí? I què compleix?

***Profesora**: Vale, hemos hecho una ‘F’. ¿Sí? ¿Y qué cumple?*

Alumne 1: Que l'àrea sigui el doble que l’àrea de l'original.

***Alumno 1**: Que el área sea el doble que el área del original.*

Professora: Molt bé, compleix que és el doble. Altres coses que podeu fer? Gràcies, Alícia, ja pots seure.

***Profesora**: Muy bien, cumple que es el doble. ¿Otras cosas que podéis hacer? Gracias, Alicia, ya puedes sentarte.*

Episodio 3 (*Discutir el artefacto; Estudio de estrategias para resolver o argumentar*)

Alumne 2: I com ho sap que és el doble?

***Alumno 2**: ¿Y cómo lo sabe que es el doble?*

Professora: A veure, per què vau fer aquesta manera vosaltres? Alícia, tu mateixa.

***Profesora**: A ver, ¿por qué hicisteis esta manera vosotros? Alicia, tu misma.*

Alumne 1: Perquè et demanava que fos el doble de gran.

***Alumno 1**: Porque te pedía que fuese el doble de grande.*

Professora: La blava quant té d'àrea?

***Profesora**: ¿La azul cuánto tiene de área?*

Alumne 1: 10 quadrets.

***Alumno 1**: 10 cuadraditos.*

Professora: 10 quadrets. Quant té l'altra?

***Profesora**: 10 cuadraditos. ¿Cuánto tiene la otra?*

Alumne 1: 20.

***Alumno 1**: 20.*

Professora: 20. Per tant, nois, l'enunciat què diu?

***Profesora**: 20. Por lo tanto, chicos, ¿el enunciado qué dice?*

Grup d'alumnes: Fer-la el doble de gran.

***Grupo de alumnos**: Hacerla el doble de grande.*

Professora: Diu el doble de gran. Pot ser això?

***Profesora**: Dice el doble de grande. ¿Puede ser esto?*

Alumne 3: No diu res de l'àrea, diu el doble de gran.

***Alumno 3**: No dice nada del área, dice el doble de grande.*

Professora: Jo no he dit ni que un estigui bé, ni que l'altre estigui malament, però llegint l'enunciat un altre cop... Fèlix!, llegint l'enunciat un altre cop i això pot ser. És el doble d'àrea. Vale, a veure, una altra opció; Ada, tu com ho vas fer?

***Profesora**: Yo no he dicho ni que uno esté bien, ni que el otro esté mal, pero leyendo el enunciado otra vez… ¡Félix", leyendo el enunciado otra vez y esto puede ser. Es el doble de área. Vale, a ver, otra opción; Ada, ¿tú cómo lo hiciste?*

Alumne 4: Sra. Pilar, però una cosa: hem de respectar la forma de l'original?

***Alumno 4**: Sra. Pilar, pero una cosa: ¿tenemos que respetar la forma de la original?*

Professora: Ara ho veurem. Ara veurem a veure. Ada, tu com ho vas fer?

***Profesora**: Ahora lo veremos. Ahora veremos a ver. Ada, ¿tú cómo lo hiciste?*

Alumne 5: Sí, sí, però a veure... això que era el doble de l'àrea, llavors podríem haver agafat una altra forma, no? Fer el pal del mig una mica més gran o...

***Alumno 5**: Sí, sí, pero a ver… esto que era el doble del área, entonces podríamos haber considerado otra forma, ¿no? Hacer el palo del medio un poco más grande o…*

Professora: Vale, és a dir, aquí l'enunciat deia el doble de gran, vale? Clàudia, et gires, vale! El que diu l'Ada és que una altra opció hagués estat allargar una mica aquest i aquest una mica menys, no?

***Profesora**: Vale, o sea, aquí el enunciado decía el doble de grande, ¿vale? ¡Claudia, te giras, vale! Lo que dice Ada es que otra opción hubiese sido alargar un poco más este y este un poco menos, ¿no?*

Alumne 5: O sinó multiplicar totes les unitats per dos, que és el que vaig fer jo.

***Alumno 5**: O bien multiplicar todas las unidades por dos, que es lo que hice yo.*

Professora: Vale, és a dir, amb el doble d'àrea podia haver-hi més opcions. Val?

***Profesora**: Vale, o sea, con el doble de área podía haber más opciones. ¿Vale?*

Episodio 4 (*Explicar a través del artefacto; Presentación de una solución*)

Professora: Una altra opció que vau fer tots menys ells [referint-se a l'Alícia i el Jordi] és... surt a fer-la [la professora demana a l'Ada que surti a la pissarra per fer la seva solució].

***Profesora**: Otra opción que hicisteis todos menos ellos [refiriéndose a Alicia y Jordi es… sal a hacerla [la profesora pide a Ada que salga a la pizarra para hacer su solución].*

Alumne 6: Però aquesta no és la mateixa figura.

***Alumno 6**: Pero esta no es la misma figura.*

Professora: Ara veurem. A veure, la mateixa figura sí que és: és una ‘F’.

***Profesora**: Ahora veremos. A ver, la misma figura sí que es: es una ‘F’.*

Alumne 6: Però no és la mateixa, no són proporcionals.

***Alumno 6**: Pero no es la misma, no son proporcionales.*

Professora: Ara ho veurem. Ho deia l'enunciat que havien de ser proporcionals? Fèlix, vols no parlar pel teu cantó!

***Profesora**: Ahora lo veremos. ¿Lo decía el enunciado que tenían que ser proporcionales? ¡Félix, quieres no hablar por tú lado!*

Alumne 5: Com es fa per tirar endavant? [Raclama ajuda tècnica amb el GeoGebra i l'Alumna 2 l'ajuda.]

***Alumno 5**: ¿Cómo se hace para avanzar? [Reclama ayuda técnica con el GeoGebra y la Alumna 2 le ayuda.]*

Alumne 2: Amb la fletxeta aquesta.

***Alumno 2**: Con la flechita esta.*

Professora: No la borris, eh, fes-la aquí al costat.

***Profesora**: No la borres, eh, hazla aquí al lado.*

Alumne 2: Sí, sí! [I la professora ajuda l'alumna amb la qüestió tècnica del GeoGebra: ha esborrat accidentalment la figura i la professora l'ajuda per desfer l'acció.]

***Alumno 2**: Sí, sí! [Y la profesora ayuda a la alumna con la cuestión técnica de GeoGebra: ha borrado accidentalmente la figura y la profesora le ayuda para deshacer la acción.]*

Alumne 6: Però llavors fas un quadrat amb els mateixos quadrats de la ‘F’ i ja està. Llavors feies un quadrat i ja està bé, no?

***Alumno 6**: Pero entonces haces un cuadrado con los mismos cuadrados de la ‘F’ y ya está. Entonces hacías un cuadrado y ya está bien, ¿no?*

Professora: Bé, anem-ho a veure!

***Profesora**: Bien, ¡vamos a verlo!*

Alumne 7: Però em pot dir si l'altra està bé [referint-se a la solució que ha proposat l'Alícia]? Em pot dir que les dues estan bé?

***Alumno 7**: ¿Pero me puede decir si la otra está bien [refiriéndose a la solución que ha propuesto Alicia]? ¿Me puede decir que las dos están bien?*

Professora: Aquesta hem dit que sí que està bé i és una opció perquè l'enunciat ho diu. Ara veurem l'altra. Però un moment, no t'avancis Bruno.

***Profesora**: Esta hemos dicho que sí que está bien y es una opción porque el enunciado lo dice. Ahora veremos la otra. Pero un momento, no te avances Bruno.*

Alumne 2: Ah, la primera és una opció. Està bé?

***Alumno 2**: Ah, la primera es una opción. ¿Está bien?*

Professora: Clar, que deia l'enunciat que havia de ser proporcional?

***Profesora**: Claro, ¿a caso decía el enunciado que tuviese que ser proporcional?*

Alumne 2: No ho sé.

***Alumno 2**: No lo sé.*

Professora: L'Òscar ha dit que aquesta no és proporcional. Nois, si us plau!

***Profesora**: Óscar ha dicho que esta no es proporcional. ¡Chicos, por favor!*

Alumne 2: Clar, han de ser semblants i aquí de semblants no ho són.

***Alumno 2**: Claro, tienen que ser semejantes y aquí de semejantes no lo son.*

Professora: L'enunciat no ho diu. Vale, el que vau fer tots, vale? Igualment alguns de vosaltres us vau descomptar, eh!, comptant quadrets. Per tant, per favor, compteu-ho bé a la correcció no sigui que ho heu fet malament, perquè nois de comptar en sabem tots, perquè el raonament estava ben fet, però després alguns de vosaltres els quadrets no estaven ben fets. Val. Aquest [referint-se a la construcció final feta per l'Ada a la pantalla amb el GeoGebra] és el que vau fer tots menys l'Alícia i el Jordi. Aleshores, què vau pensar tots? Ada, per què ho vau fer d'aquesta manera?

***Profesora**: El enunciado no lo dice. Vale, lo que hicisteis todos, ¿vale? Igualmente algunos de vosotros os descontasteis, eh!, contando cuadraditos. Por lo tanto, por favor, contadlo bien en la corrección no sea que lo habéis hecho mal, porque chicos de contar sabemos todos, porque el razonamiento estaba bien hecho, pero después algunos de vosotros los cuadraditos no estaban bien hechos. Vale. Este [refiriéndose a la construcción final hecha por Ada en la pantalla con el GeoGebra] es lo que hicisteis todos menos Alicia y Jordi. Entonces, ¿en qué pensasteis todos? Ada, ¿por qué lo hicisteis de esta forma?*

Alumne 5: Bueno, perquè deia el doble i vam multiplicar totes les mides per 2.

***Alumno 5**: Bueno, porque decía el doble y multiplicamos todas las medidas por 2.*

Professora: Val, aleshores, com que deia el doble també podíem haver entès que era el doble de costat. Vale? Per tant, aquesta opció també és bona. Però què passa, quina és l'àrea de la blava?

***Profesora**: Vale, entonces, como decía el doble también podíamos haber entendido que era el doble de lado. ¿Vale? Por lo tanto, esta opción también es buena. ¿Pero qué pasa, cuál es el área de la azul?*

Alumne 3: 10.

***Alumno 3**: 10.*

Professora: I d'aquesta?

***Profesora**: ¿Y de esta?*

Alumne 3: 40.

***Alumno 3**: 40.*

Professora: Vale, és a dir, aquí no es compleix el doble de l'àrea, vale? Tot depèn de l'argumentació que vau fer.

***Profesora**: Vale, o sea, aquí no se cumple el doble del área, ¿vale? Todo depende de la argumentación que hicisteis.*

Episodio 5 (*Discutir el artefacto; Contraste entre soluciones*)

(1) Professora: Josep, tu què vas entendre, és a dir, per què vas construir aquesta [assenyalant a sobre del projector una figura que té el doble de perímetre] i no aquesta altra [assenyalant una figura amb el doble d'àrea]?

***Profesora**: ¿José, tú qué entendiste, es decir, por qué construiste esta [señalando sobre el proyector una figura que tiene el doble de perímetro] y no esta otra [señalando una figura con el doble de área]?*

(2) José: Perquè aquestes dues són semblants [referint-se a la 'F' de l'enunciat i a una altra que té el doble de perímetre].

***José**: Porque estas dos son semejantes [refiriéndose a la 'F' del enunciado y a otra que tiene el doble perímetro].*

(3) Professora: Vale, per tant, la definició de semblança. Què creieu que són dues figures semblants?

***Profesora**: Vale, por tanto, la definición de semejanza. ¿Qué creéis que son dos figuras semejantes?*

(4) José: Tots els costats multiplicats per un número, sempre el mateix.

***José**: Todos los lados multiplicados por un número, siempre el mismo.*

(5) Professora: Vale, és a dir, com són els costats?

***Profesora**: Vale, es decir, ¿cómo son los lados?*

(6) José: Proporcionals.

***José**: Proporcionales.*

(7.1.) Professora: Proporcionals, vale.

***Profesora**: Proporcionales, vale.*

(7.2.) Professora: I a més a més què fa falta?

***Profesora**: ¿Y además qué hace falta?*

(8) Pedro: Que tots els angles siguin iguals.

***Pedro**: Que todos los ángulos sean iguales.*

(9) Professora: És a dir, aquí, nois, els angles no els comprovem perquè es tracta d'una 'F' i és evident que tots són de 90º, però s'hauria de fer.

***Profesora**: Es decir, aquí, chicos, los ángulos no los comprobamos porque se trata de una 'F' y es evidente que todos son de 90º, pero se debería hacer.*

Episodio 6 (*Explicar a través del artefacto; Estudio de estrategias para resolver o argumentar*)

Alumne 2: Pot repetir la definició de semblança?

***Alumno 2**: ¿Puede repetir la definición de semejanza?*

Professora: Sí. Com han de ser dues figures semblants? Doncs que els costats han de ser proporcionals; nois, important, tots els costats han de ser proporcionals, val? És a dir, si fèiem només l'altura el doble però els altres no, està malament. És a dir, tots els costats han de ser proporcionals amb el seu homòleg, vale?

***Profesora**: Sí. ¿Cómo tienen que ser dos figuras semejantes? Pues que los lados tienen que ser proporcionales; chicos, importante, todos los lados tienen que ser proporcionales, ¿vale? O sea, si hacíamos solo la altura el doble pero los otros no, está mal. O sea, todos los lados tienen que ser proporcionales con su homólogo, ¿vale?*

Alumne 9: Sra. Pilar al GeoGebra hi ha alguna eina per veure si dues figures són semblants?

***Alumno 9**: ¿Sra. Pilar en el GeoGebra hay alguna herramienta para ver si dos figuras son semejantes?*

Professora: Ehm, ja ho veurem això. Vale, aleshores...

***Profesora**: Ehm, ya lo veremos esto. Vale, entonces…*

Alumne 2: Però aleshores, la definició de semblança?

***Alumno 2**: Pero entonces, ¿la definición de semejanza?*

Professora: A veure Clàudia, estem parlant allà!

***Profesora**: A ver Claudia, ¡estamos hablando allá!*

Alumne 2: Ai, perdó!

***Alumno 2**: ¡Ai, perdón!*

Professora: Definició de semblança: l'estem dient. Els costats han de ser proporcionals. De la mateixa manera que en el tema anterior parlàvem de punts homòlegs, aquí també podem parlar de costats homòlegs. Vale? Aquest costat i el seu homòleg és aquest [la professora assenyala els dos costats a la corresponent imatge del GeoGebra que està a la pantalla]. Vale? Per tant, els costats han de ser proporcionals amb els seus corresponents homòlegs, vale? Però, no ens oblidem d'això dels angles, vale? Aquí ja es veu molt ràpid que els angles són iguals, vale? Però els angles, perquè dos polígons siguin semblants han de ser iguals. Per tant, no ens oblidem, val.

***Profesora**: Definición de semejanza: la estamos diciendo. Los lados tienen que ser proporcionales. De la misma forma que en el tema anterior hablábamos de puntos homólogos, aquí también podemos hablar de lados homólogos. ¿Vale? Este lado y su homólogo es este [la profesora señala los dos lados en la correspondiente imagen de GeoGebra que está en la pantalla]. ¿Vale? Por lo tanto, los lados tienen que ser proporcionales con sus correspondientes homólogos, ¿vale? Pero no nos olvidemos de esto de los ángulos, ¿vale? Aquí ya se ve muy rápido que los ángulos son iguales, ¿vale? Pero los ángulos para que dos polígonos sean semejantes tiene que ser iguales. Por lo tanto, no nos olvidemos, ¿vale?*

Episodio 7 (*Conectar artefactos; Generalización y conceptualización*)

Professora: Per tant, tornem-hi: aquesta és la que vau fer quasi tots. Vale? Està bé lògicament, vale? Però també està bé aquesta [la professora ha assenyalat les dues figures representades a sobre de la pantalla] perquè aquí no parlava de què havien de ser els costats. Vale? Aleshores, quina és la raó de semblança, com podríem definir la raó de semblança d'aquesta amb aquesta? [La professora ho assenyala a sobre de la pantalla: es refereix de la figura original a l'ampliada i que té raó 2.] Bruno.

***Profesora**: Por lo tanto, volvamos otra vez: esta es la que hicisteis casi todos. ¿Vale? Está bien lógicamente, ¿vale? Pero también está bien esta [la profesora ha señalado las dos figuras representadas en la pantalla] porque aquí no se hablaba de que tenían que ser los lados. ¿Vale? Entonces, ¿cuál es la razón de semejanza? ¿Cómo podríamos definir la razón de semejanza de esta con esta? [La profesora lo señala en la pantalla: se refiere de la figura original a la ampliada y que tiene razón 2.] Bruno.*

Alumne 7: El perímetre és el doble.

***Alumno 7**: El perímetro es el doble.*

Professora: Vale, el perímetre... un moment, ara et preguntaré pel perímetre, però la raó de semblança dels costats quina és?

***Profesora**: Vale, el perímetro… un momento, ahora te preguntaré por el perímetro, ¿pero la razón de semejanza de los lados cuál es?*

Alumne 7: Ah, sí, sí... els costats són el doble.

***Alumno 7**: Ah, sí, sí… los lados son el doble.*

Professora: Per tant, podem dir que la raó de semblança... Vale, si ho mirem així, podem definir la *k*. Podem posar: raó de semblança de costats és 2. [La professora ho ha escrit a la pissarra.] Val, Bruno, la blava quin perímetre té?

***Profesora**: Por lo tanto, podemos decir que la razón de semejanza… Vale, si lo miramos así, podemos definir la k. Podemos poner: razón de semejanza de lados es 2. [La profesora lo ha escrito en la pizarra.] Vale, Bruno, ¿la azul qué perímetro tiene?*

Alumne 7: Un, dos, tres, quatre,... [està comptant el perímetre]: 22.

***Alumno 7**: Uno, dos, tres, cuatro… [está contando el perímetro]: 22.*

Professora: 22. I l'altra?

***Profesora**: 22. ¿Y la otra?*

Alumne 7: 44.

***Alumno 7**: 44.*

Professora: És a dir, la raó de semblança entre el perímetre també podem dir que és 2. [La professora ho apunta a la pissarra.] Vale? És la mateixa *k*. Quina és la de l'àrea?

***Profesora**: O sea, la razón de semejanza entre el perímetro también podemos decir que es 2. [La profesora lo apunta en la pizarra.] ¿Vale? Es la misma k. ¿Cuál es la del área?*

Alumne 10: 4 o 1/4.

***Alumno 10**: 4 o 1/4.*

Alumne 9: Perquè la de l'àrea sempre s'haurà de multiplicar per dos... s'ha d'elevar a la dos, no?

***Alumno 9**: Porque la del área siempre se tendrá que multiplicar por dos… ¿se tiene que elevar a la dos, no?*

Professora: Si jo fes el triple, si jo us hagués dit que vull fer aquesta ‘F’ el triple de gran, quina hagués sigut l'àrea?

***Profesora**: Si yo hiciese el triple, si yo os hubiese dicho que quiero hacer esta ‘F’ el triple de grande, ¿cuál hubiese sido el área?*

Alumne 11: Sis vegades més gran. Ai, no, nou!

***Alumno 11**: Seis veces más grande. ¡Ai, no, nueve!*

Professora: Sis vegades més gran, nou vegades més gran?

***Profesora**: ¿Seis veces más grande, nueve veces más grande?*

Alumne 11: Nou.

***Alumno 11**: Nueve.*

Professora: Nou. Per tant, què vol dir?

***Profesora**: Nueve. Por lo tanto, ¿qué quiere decir?*

Alumne 11: Que s'ha d'elevar a la dos.

***Alumno 11**: Que se tiene que elevar a la dos.*

Professora: Quadrat, eh!, no multiplicar per dos. Per tant, la raó de semblança de les àrees, sí?, és k^2 i en aquest cas és 4.

***Profesora**: Cuadrado, eh!, no multiplicar por dos. Por lo tanto, la razón de semejanza de las áreas, sí?, es k^2 y en este caso es 4.*

Episodio 8 (*Explicar a través del artefacto; Contraste entre soluciones*)

Alumne 5: Però això comparant la figura blava i quina altra?

***Alumno 5**: ¿Pero esto comparando la figura azul y qué otra?*

Professora: Aquella [ho assenyala a la pantalla del GeoGebra] perquè és proporcional. Estem parlant de proporcionalitat o de semblança, vale? És a dir, d'aquesta encara hem dit poc.

***Profesora**: Aquella [lo señala en la pantalla del GeoGebra] porque es proporcional. Estamos hablando de proporcionalidad o de semejanza, ¿vale? O sea, de esta aún hemos dicho poco.*

Alumne 5: Però vull dir que aquella només serà proporcional pels costats.

***Alumno 5**: Pero quiero decir que aquella solo será proporcional por los lados.*

Professora: Aquesta és proporcional amb tots els costats. Per tant, per definició, què hem dit? Que els costats han de ser proporcionals i els angles han de ser iguals.

***Profesora**: Esta es proporcional con todos los lados. Por lo tanto, por definición, ¿qué hemos dicho? Que los lados tienen que ser proporcionales y los ángulos tienen que ser iguales.*

Alumne 5: Sí, sí, però llavors la raó de semblança d'àrees era sobre aquella, oi?

***Alumno 5**: Sí, sí, ¿pero entonces la razón de semejanza de áreas era sobre aquella?*

Professora: Aquesta. És semblant aquesta amb aquesta? [La professora assenyala les dues figures a sobre de la pantalla.]

***Profesora**: Esta. ¿Es semejante esta con esta? [La profesora señala las dos figuras en la pantalla.]*

Alumne 5: Sí, bueno, per àrees.

***Alumno 5**: Sí, bueno, por áreas.*

Professora: No, però la definició de semblança què hem dit que era? Hem dit els costats proporcionals i els angles iguals. Per tant, aquestes dues figures són semblants? Ada, aquesta amb aquesta?

***Profesora**: No, ¿pero la definición de semejanza qué hemos dicho que era? Hemos dicho los lados proporcionales y los ángulos iguales. Por lo tanto, ¿estas dos figuras son semejantes? Ada, ¿esta con esta?*

Alumne 5: No.

***Alumno 5**: No.*

Professora: No. Aquesta l'únic que complia és que tenia el doble d'àrea. L'enunciat no deia que havien de ser figures semblants. Per tant, la podíem haver fet, però no és semblant. Vale? Per tant, aquesta amb aquesta compleix la definició de semblança i, per tant, lògicament podem fer això. Amb aquesta no té sentit perquè no són semblants. Vale? Aleshores, en aquesta... tothom veu clar que no és semblant?

***Profesora**: No. Esta lo único que cumplía es que tenía el doble de área. El enunciado no decía que tenían que ser figuras semejantes. Por lo tanto, la podríamos haber hecho, pero no es semejante. ¿Vale? Por lo tanto, esta con esta cumple la definición de semejanza y, por lo tanto, lógicamente podemos hacer esto. Con esta no tiene sentido porque no son semejantes. ¿Vale? Entonces, en esta… ¿todo el mundo ve claro que no es semejante?*

Grup d'alumnes: Sí.

***Grupo de alumnos**: Sí.*

Professora: Digues, Clàudia.

***Profesora**: Di, Claudia.*

Alumne 2: Una pregunta: amb totes les figures es compleix això que la raó de semblança és la mateixa que la de...?

***Alumno 2**: Una pregunta: ¿con todas las figuras se cumple esto de que la razón de semejanza es la misma que la de…?*

Professora: És clar, amb totes les figures semblants, clar.

***Profesora**: Claro, con todas las figuras semejantes, claro.*

Alumne 2: No, però vull dir que sempre el perímetre i els costats són el mateix?

***Alumno 2**: No, ¿pero quiero decir que siempre el perímetro y los lados son lo mismo?*

Professora: La raó és la mateixa. Diga'm, Fèlix.

***Profesora**: La razón es la misma. Dime, Félix.*

Alumne 8: Hem de dir això de la raó de semblança?

***Alumno 8**: ¿Tenemos que decir esto de la razón de semejanza?*

Professora: Nois, ja us ho he dit: no és només corregir, és a dir, podeu afegir informació. Com més ben explicat estigui el que diguem millor estarà. A veure, va seguim! Va nois, que sinó no avancem!

***Profesora**: Chicos, ya os lo he dicho: no solo es corregir, o sea, podéis añadir información. Como mejor explicado esté lo que digamos mejor estará. A ver, ¡venga, seguimos! ¡Venga chicos, que sino no avanzamos!*

Episodio 9 (*Conectar artefactos; Generalización y conceptualización*)

Professora: Aleshores, la pregunta que falta: podríem construir la 'F'... què hauríem de fer per construir-la i que complís que mantingués la raó de semblança?, és a dir, que fos proporcional i que mantingués la raó de semblança. Què hauríem de fer?

***Profesora**: Entonces, la pregunta que falta: podríamos construir la 'F'… ¿qué tendríamos que hacer para construirla y que cumpliese que se mantuviese la razón de semejanza?, o sea, que fuese proporcional y que mantuviese la razón de semejanza. ¿Qué tendríamos que hacer?*

Grup d'alumnes: Com?

***Grupo de alumnos**: ¿Cómo?*

Professora: És a dir, podríem aconseguir que tingués el doble d'àrea i que fos semblant?

***Profesora**: O sea, ¿podríamos conseguir que tuviese el doble de área y que fuese semejante?*

Grup d'alumnes: Sí... / No...

***Grupo de alumnos**: Sí… / No…*

Professora: Com? Aixequem la mà eh, si us plau, que sinó és un embolic això! Òscar.

***Profesora**: ¿Cómo? ¡Levantemos la mano eh, por favor, que sino es un lío esto! Óscar.*

Alumne 6: Ha dit la raó de semblança de les àrees de...?

***Alumno 6**: ¿Ha dicho la razón de semejanza de las áreas de…?*

Professora: És a dir, vull que sigui, que tingui el doble d'àrea, vale?, però que a més a més sigui semblant i hem vist que aquesta [la professora l'assenyala a sobre de la pantalla] no ho és. Què hauríem de fer?

***Profesora**: O sea, quiero que sea, que tenga el doble de área, ¿vale?, pero que además sea semejante y hemos visto que esta [la profesora la señala en la pantalla] no lo es. ¿Qué tendríamos que hacer?*

Alumne 6: Que la raó de semblança dels costats sigui √2.

***Alumno 6**: Que la razón de semejanza de los lados sea √2.*

Professora: Val. Això ho veieu clar?

***Profesora**: Vale. ¿Esto lo veis claro?*

Alumne 7: No.

***Alumno 7**: No.*

Professora: És a dir, la meva pregunta és: aquesta figura l'hem feta el doble de gran, però no és semblant, vale? La meva pregunta és: podríem haver fet una ‘F’ que fos semblant i que tingués el doble d'àrea? Aleshores, què passa? Jo el que estic preguntant és: la k al quadrat serà igual a dos ($k^2=2$) [la professora ho escriu a la pissarra]. Per tant, quant valdrà k?

***Profesora**: O sea, mi pregunta es: esta figura la hemos hecho el doble de grande, pero no es semejante, ¿vale? Mi pregunta es: ¿podríamos haber hecho una ‘F’ que fuese semejante y que tuviese el doble de área? Entonces, ¿qué pasa? Yo lo que estoy preguntando es: la k al cuadrado será igual a dos ($k^2=2$) [la profesora lo escribe en la pizarra]. Por lo tanto, ¿cuánto valdrá k?*

Grup d’alumnes: L'√2.

***Grupo de alumnos**: La √2.*

Professora: [Representa $k=\sqrt{2}$ a la pissarra.] Vale? És a dir, sí que es pot fer, però és més complicat. Això es pot fer amb regle i compàs?

***Profesora**: [Representa $k=\sqrt{2}$ en la pizarra.] ¿Vale? O sea, sí que se puede hacer, pero es más complicado. ¿Esto se puede hacer con regla y compás?*

Grup d’alumnes: No.

***Grupo de alumnos**: No.*

Alumne 11: Sí, amb el cercle aquest. Amb el cercle aquest.

***Alumno 11**: Sí, con el círculo este. Con el círculo este.*

Professora: Això ho heu fet, eh! És a dir, √2 es pot fer amb regle i compàs. Ens en recordem? És a dir, si construíem un triangle rectangle de costat 1, quant mesuraria aquesta hipotenusa? [La professora ho ha escrit a la pissarra.]

***Profesora**: ¡Esto lo habéis hecho, eh! O sea, √2 se puede hacer con regla y compás. ¿Nos acordamos? O sea, si construíamos un triángulo rectángulo de lado 1, ¿cuánto mediría esta hipotenusa? [La profesora lo escribe en la pizarra.]*

Grup d'alumnes: √2.

***Grupo de alumnos**: √2.*

Professora: √2, vale? Si transportem aquesta distància amb el compàs aconseguiríem √2. Vale? És a dir, seria més complicat però es pot fer.

***Profesora**: √2, ¿vale? Si transportamos esta distancia con el compás conseguiríamos √2. ¿Vale? O sea, sería más complicado pero se puede hacer.*

Alumne 3: No, però si el costat fos un número diferent...

***Alumno 3**: No, pero si el lado fuese un número diferente…*

Professora: Hauria de mantenir aquesta raó. Per tant, el costat hauria de ser alguna cosa multiplicada per √2. Per tant, l'√2 en algun lloc apareixeria. És a dir, que tingueu en compte que es pot fer, però és més complicat.

***Profesora**: Tendría que mantener esta razón. Por lo tanto, el lado tendría que ser algo multiplicado por √2. Por lo tanto, la √2 en algún sitio aparecería. O sea, tened en cuenta que se puede hacer, pero es más complicado.*

Alumne 7: Jo no sé com s'ha de fer, eh.

***Alumno 7**: Yo no sé cómo se tiene que hacer, eh.*

Professora: El que?

***Profesora**: ¿El qué?*

Alumne 7: Però llavors com ho faria si sap que *k* és √2?

***Alumno 7**: ¿Pero entonces cómo lo haría si sabe que k es √2?*

Professora: Vale. Què és la *k*? Què estem dient?

***Profesora**: Vale. ¿Qué es la k? ¿Qué estamos diciendo?*

Alumne 7: La raó de semblança.

***Alumno 7**: La razón de semejanza.*

Professora: Vale. Per tant, en aquest cas [la professora assenyala la 'F' corresponent a sobre de la pantalla] com l'hem calculada? En aquest cas i en aquest cas com l'hem calculat? Què hem fet?

Profesora*: Vale. Por lo tanto, ¿en este caso [la profesora señala la ‘F’ correspondiente en la pantalla] cómo la hemos calculado? ¿En este caso y en este caso cómo la hemos calculado? ¿Qué hemos hecho?*

Alumne 7: No ho sé.

Alumno 7*: No lo sé.*

Professora: Per què ens ha donat dos?

Profesora*: ¿Por qué nos ha dado dos?*

Alumne 7: Com?

Alumno 7*: ¿Cómo?*

Professora: Per què ens ha donat dos?

Profesora*: ¿Por qué nos ha dado dos?*

Alumne 7: Perquè era el doble.

Alumno 7*: Porque era el doble.*

Professora: Vale, però què és el doble? El doble de què?

Profesora*: Vale, ¿pero qué es el doble? ¿El doble de qué?*

Alumne 7: Del perímetre.

Alumno 7*: Del perímetro.*

Professora: Del perímetre, vale, però també el doble de...?

Profesora*: Del perímetro, vale, ¿pero también el doble de…?*

Alumne 7: De cada costat.

Alumno 7*: De cada lado.*

Professora: Vale, per tant, què estàs fent? Estàs dividint aquest 2, és a dir, aquest segment l'estàs dividint entre aquest segment [la professora ho assenyala a sobre de la pantalla i apunta la divisió a la pissarra]. Sí? Estàs fent això, no? Això et dóna *k*. Si ho estiguéssim fent amb l'àrea, Bruno, faríem el mateix. L'àrea d'aquesta què vols que sigui?

Profesora*: Vale, por lo tanto, ¿qué estás haciendo? Estás dividiendo este 2, es decir, este segmento lo estás dividiendo entre este segmento [la profesora lo señala en la pantalla y anota la división en la pizarra]. ¿Sí? Estás haciendo esto, ¿no? Esto te da k. Si lo estuviésemos haciendo con el área, Bruno, haríamos lo mismo. ¿El área de esta qué quieres que sea?*

Alumne 7: El quàdruple.

***Alumno 7**: El cuádruple.*

Professora: És el cas que no saps. És a dir, tu saps ara que la *k* és l'√2, vale? I saps que aquesta quina àrea té?

***Profesora**: Es el caso que no sabes. O sea, tú sabes ahora que la k es la √2, ¿vale? ¿Y sabes que esta qué área tiene?*

Alumne 7: Deu.

***Alumno 7**: Diez.*

Professora: Àrea? Hauries de calcular quant hauria de ser l'àrea. Per tant l'√2 apareixeria. Vale? L'√2 és la constant. No ens emboliquem. Albert, digues.

***Profesora**: ¿Área? Tendrías que calcular cuánto tendría que ser el área. Por lo tanto, la √2 aparecería. ¿Vale? La √2 es la constante. No nos liemos. Albert, di.*

Alumne 4: Però la raó de semblança, la constant, seria... o sigui, si volem passar de l'original a l'altra és 2, però si volem passar de l'altra a l'original seria la meitat, no?

***Alumno 4**: Pero la razón de semejanza, la constante, sería… o sea, si queremos pasar de la original a la otra es 2, pero si queremos pasar de la otra a la original sería la mitad, ¿no?*

Professora: Clar, és a dir, d'aquí hem dit que la raó de semblança és 2 [la professora ho assenyala a sobre de la pantalla]. Per fer-ho al revés què faríem?

***Profesora**: Claro, o sea, de aquí hemos dicho que la razón de semejanza es 2 [la profesora lo señala en la pantalla]. ¿Para hacerlo al revés qué haríamos?*

Alumne 4: Una meitat.

***Alumno 4**: Una mitad.*

Professora: Una meitat, exacte. Què són els números 2 i 1/2?

***Profesora**: Una mitad, exacto. ¿Qué son los números 2 y 1/2?*

Alumne 4: Com?

***Alumno 4**: ¿Cómo?*

Professora: Què són? Quina relació tenen els números 2 i 1/2?

***Profesora**: ¿Qué son? ¿Qué relación tienen los números 2 y 1/2?*

Alumne 10: Inversos.

***Alumno 10**: Inversos.*

Professora: Inversos, sí. Són inversos. Estem fent l'invers, vale? S’ha entès aquesta activitat?

***Profesora**: Inversos, sí. Son inversos. Estamos haciendo el inverso, ¿vale? ¿Se ha entendido esta actividad?*

Grup d'alumnes: Sí.

***Grupo de alumnos**: Sí.*

ANEXO V

Transcripción y caracterización de episodios de la discusión en gran grupo de la primera tarea del profesor Luis (centro A)

Episodio 1 (*Experimentar el instrumento; Presentación de una solución*)

Professor: Però això penseu-hi, eh! Anoteu les correccions i si heu d'afegir-hi comentaris doncs també. Val. Ahh... vinga, la primera. Qui s'atreveix amb la primera?

***Profesor**: Pero recordadlo, ¡eh! Anotad las correcciones y si tenéis que añadir comentarios pues también. Vale. Ah… venga, la primera. ¿Quién se atreve con la primera?*

Professor: Va, doncs vinga. Com el vas interpretar tu [mirant a l'alumne 1] aquesta?

***Profesor**: Venga, pues venga. ¿Cómo lo interpretaste tú [mirando al alumno 1] esta?*

Alumne 1: Jo...? Fent el doble de quadrats.

***Alumno 1**: ¿Yo…? Haciendo el doble de cuadrados.*

Professor: Crideu... Hauríeu de cridar una mica més, no, potser a les intervencions, perquè sinó no se sentirà res.

***Profesor**: Gritad… Tendríais que gritar un poco más, no, quizá en las intervenciones, porque sino no se escuchará nada.*

Professor: Dius que cal fer el doble de quadrats. Per tant, quants quadrats hi havia inicialment?

***Profesor**: Dices que hay que hacer el doble de cuadrados. Por lo tanto, ¿cuántos cuadrados había inicialmente?*

Alumne 1: Deu.

***Alumno 1**: Diez.*

Professor: I en la teva ‘F’ quants n'hi ha al final?

***Profesor**: ¿Y en tú ‘F’ cuántos hay al final?*

Alumne 1: Doncs 20, suposo.

***Alumno 1**: Pues 20, supongo.*

Episodio 2 (*Experimentar el instrumento; Presentación de una solución*)

Professor: Tothom va interpretar això? Quan diu doble de gran...

***Profesor**: ¿Todo el mundo interpretó esto? Cuando dice el doble de grande…*

Grup d’alumnes: No, n’hi ha 40!

***Grupo de alumnos**: ¡No, hay 40!*

Alumne 2: Una cosa... jo crec que el doble de gran és que si l'alçada és 6 que sigui 12.

***Alumno 2**: Una cosa… yo creo que el doble de grande es que si la altura es 6 que sea 12.*

Professor: No parleu tots alhora perquè sinó em sembla que no s'entendrà res. Digues, Àlex.

***Profesor**: No habléis todos a la vez porque sino me parece que no se entenderá nada. Di, Álex.*

Alumne 2: Jo he fet, per exemple, l'alçada és de 6 quadrats doncs... l'alçada la primera és de 6 quadradets. Doncs la segona és de 12 quadradets i d'ample 2.

***Alumno 2**: Yo he hecho, por ejemplo, la altura es de 6 cuadrados pues… la altura de la primera es de 6 cuadraditos. Pues la segunda es de 12 cuadraditos y de ancho 2.*

Professor: I llavors quants quadrats et surten al final?

***Profesor**: ¿Y entonces cuántos cuadrados te salen al final?*

Alumne 2: 40.

***Alumno 2**: 40.*

Professor: 40, perquè el que heu doblat què era?

***Profesor**: 40, porque ¿lo que habéis doblado qué era?*

Professor: Heu doblat el perímetre, no? Clar.

***Profesor**: Habéis doblado el perímetro, ¿no? Claro.*

Episodio 3 (*Explicar a través del artefacto; Contraste entre soluciones*)

Professor: Val. I aquí... Bé, jo vaig entendre que gran... gran es refereix a la superfície. Tu [dirigint-se a l'alumne 1] quants quadrats t'han quedat al final? 40, veritat?

***Profesor**: Vale. Y aquí… Bien, yo entendí que grande… grande se refería a la superficie. Tú [dirigiéndose al alumno 1] ¿cuántos cuadrados te han quedado al final? 40, ¿verdad?*

Professor: Algú l'ha fet que li quedin 20 quadrats? Per allà ho heu fet? Llavors, heu agafat també la 'F', perquè a l'enunciat tampoc quedava clar que fos exactament una 'F'.

***Profesor**: ¿Alguien lo ha hecho que le queden 20 cuadrados? ¿Por allá lo habéis hecho? Entonces, habéis tomado también la 'F', porque en el enunciado tampoco quedaba claro que fuese exactamente una 'F'.*

Professor: L'enunciat diu: "representa una altra". Jo vaig entendre una altra 'F', però no sé si era una altra 'F' o una altra lletra qualsevol.

***Profesor**: El enunciado dice: "representa otra". Yo entendí otra 'F', pero no sé si era otra 'F' o otra letra cualquiera.*

Alumne 3: Nosaltres vam fer una 'F'.

***Alumno 3**: Nosotros hicimos una 'F'.*

Professor: Però què us ha quedat? Llavors què us ha passat amb la forma?

***Profesor**: ¿Pero qué os ha quedado? ¿Entonces qué os ha pasado con la forma?*

Alumne 4: No, però representa que és el mateix, l'únic que l'hem com doblat però amb l'amplada, de manera que quedessin 20 quadrats.

***Alumno 4**: No, pero representa que es lo mismo, lo único que lo hemos como doblado pero con la anchura, de forma que quedasen 20 cuadrados.*

Professor: Sí, o sigui, heu respectat l'alçada i, en canvi, s'ha estirat d'amplada. Val.

***Profesor**: Sí, o sea, habéis respetado la altura y, en cambio, se ha estirado de anchura. Vale.*

Episodio 4 (*Explicar a través del artefacto; Estudio de estrategias para resolver o argumentar*)

Professor: No sé, una opció per exemple: vosaltres què heu fet amb quadrets? Per exemple la base...

***Profesor**: No sé, una opción por ejemplo: ¿vosotros qué habéis hecho con cuadraditos? Por ejemplo la base…*

Professor: Dos quadrets. I llavors l'altura em dieu la mateixa, no?

***Profesor**: Dos cuadraditos. ¿Y entonces la altura me decís la misma, no?*

Alumne 5: Sí, sis.

***Alumno 5**: Sí, seis.*

Professor: Sis. Vale, llavors el pal aquest quants quadrats té?

***Profesor**: Seis. Vale, ¿entonces el palo este cuántos cuadrados tiene?*

Alumne 3: Vuit.

***Alumno 3**: Ocho.*

Professor: Vuit. Què més? Aquí quants baixo? [El professor està representant la figura a la pissarra.]

***Profesor**: Ocho. ¿Qué más? ¿Aquí cuántos bajo? [El profesor está representando la figura en la pizarra.]*

Professor: Un i prou, clar, perquè esteu respectant el que és l'alçada. Vale, un quadrat. Llavors d'aquí enrere aneu tirant?

***Profesor**: Uno y basta, claro, porque estáis respetando lo que es la altura. Vale, un cuadrado. ¿Entonces de aquí atrás vais tirando?*

Alumne 5: Sis.

***Alumno 5**: Seis.*

Professor: Sis, no? I fins aquí. Què més?

***Profesor**: Seis, ¿no? Y hasta aquí. ¿Qué más?*

Alumne 5: Baixem un.

***Alumno 5**: Bajamos uno.*

Professor: Baixem un i prou.

***Profesor**: Bajamos uno y basta.*

Professor: I en tireu dos, no? Un i dos; i tornem a baixar un i llavors dos enrere i ara ja cap avall, no? Aquesta és la vostra ‘F’. Val i aquesta té 20 quadrets.

***Profesor**: Y tiráis dos, ¿no? Uno y dos; y volvemos a bajar uno y entonces dos atrás y ahora ya hacia abajo, ¿no? Esta es vuestra ‘F’. Vale y esta tiene 20 cuadraditos.*

Episodio 5 (*Explicar a través del artefacto; Contraste entre soluciones*)

(10) Clàudia: Llavors, què seria correcte? Perquè una en té 40 i l’altra en té 20.

***Claudia**:* Entonces, ¿qué sería correcto? Porque una tiene 40 y la otra tiene 20.

(11.1) Professor: A veure, pel que fa a qüestions lingüístiques, el doble de gran es refereix al doble de superfície. Vale? Per tant, l’opció aquesta és correcta, però tampoc ens quedava gaire clar si s’havien de respectar les mateixes proporcions.

***Profesor**:* A ver, con respecto a cuestiones lingüísticas, el doble de grande se refiere al doble de superficie. ¿Vale? Por lo tanto, la opción esta es correcta, pero tampoco nos quedaba demasiado claro si se debían respetar las mismas proporciones.

(11.2) Professor: Aquí sembla que ningú... jo tampoc ho he fet, eh? Intentar aconseguir el doble d’àrea respectant les proporcions. De totes maneres, és que l’enunciat tampoc ens deia que haguéssim de respectar les proporcions. Només ens deia que fos el doble de gran.

***Profesor**:* Aquí nadie al parecer… yo tampoco lo he hecho, ¿eh? Intentar conseguir el doble de área respetando las proporciones. De todos modos, es que el enunciado tampoco nos dice que tengamos que respetar las proporciones. Solo nos dice que sea el doble de grande.

(11.3) Professor: Entenem una altra ‘F’ el doble de gran. Jo ho veig així, vosaltres sembla que també.

***Profesor**:* Entendemos otra ‘F’ el doble de grande. Yo lo veo así, vosotros parece que también.

(11.4) Professor: I la resta de persones el que ha fet al final és...?

***Profesor**:* ¿Y el resto de la gente lo que ha hecho al final es…?

(12) Clàudia: Doblar el perímetre.

***Claudia**:* Doblar el perímetro.

(13) Aitor: Cada quadradet fer un quadre gran, fer-ne quatre.

***Aitor**:* Cada cuadradito hacer un cuadro grande, hacer cuatro.

(14) Professor: Doblar el perímetre. És a dir, heu doblat directament; és a dir, heu mantingut les proporcions respecte dels costats.

***Profesor**:* Doblar el perímetro. Es decir, habéis doblado directamente; es decir, habéis mantenido las proporciones con respecto a los lados.

Episodio 6 (*Explicar a través del artefacto; Generalización y conceptualización*)

Professor: Però us ha quedat no el doble de gran, sinó...

***Profesor**: Pero no os ha quedado el doble de grande, sino…*

Alumnes 3 i 4: Quatre vegades.

***Alumnos 3 y 4**: Cuatro veces.*

Professor: Quatre vegades. D'aquí en podríem treure una conclusió, no? Pel que fa a quan doblem les longituds, què passa amb l'àrea?

***Profesor**: Cuatro veces. De aquí podríamos sacar una conclusión, ¿no? Por lo que respecta a cuando doblamos las longitudes, ¿qué pasa con el área?*

Alumne 5: Que és quatre vegades més gran que l'altra.

***Alumno 5**: Que es cuatro veces más grande que la otra.*

Professor: És quatre vegades més gran. Sempre serà quatre vegades més gran? Esteu segurs que la relació és aquesta?

***Profesor**: Es cuatro veces más grande. ¿Siempre será cuatro veces más grande? ¿Estáis seguros que la relación es esta?*

Professor: Clar, aquí el problema és el número 2, perquè el número 2 quan passes a 4 és el mateix multiplicar-lo per dos que...?

***Profesor**: Claro, aquí el problema es el número 2, porque el número 2 cuando pasas a 4 ¿es lo mismo multiplicarlo por dos que…?*

Alumne 4: Sumar.

***Alumno 4**: Sumar.*

Professor: Sí, també, però que... també?

***Profesor**: Sí, también, pero que… ¿también?*

Alumne 2: Elevar-lo.

***Alumno 2**: Elevarlo.*

Professor: Exacte, elevar-lo. En realitat el canvi de longitud a superfície no és doblar, sinó que és elevar al quadrat.

***Profesor**: Exacto, elevarlo. En realidad el cambio de longitud a superficie no es doblar, sino que es elevar al cuadrado.*

ANEXO VI

Transcripción y caracterización de episodios de la discusión en gran grupo de la primera tarea de la profesora Sara (centro B)

Episodio 1 (*Explicar a través del artefacto; Situación del problema*)

Professora: El primer problema era de doblar figures. Teniu una lletra 'F' i us demanaven que féssiu altres 'F' el doble de grans, d'acord?

***Profesora**: El primer problema era de duplicar figuras. Tenéis una letra 'F' y os pedían que hicieseis otras 'F' el doble de grandes, ¿de acuerdo?*	
Interpretación:	*Establecimiento de consenso sobre el enunciado de la primera tarea.*

Episodio 2 (*Experimentar el instrumento; Presentación de una solución*)

Professora: Vinga algú que vulgui explicar el que ha fet. [L'Àlex aixeca la mà]. Àlex vosaltres què vau fer?

***Profesora**: Venga, alguien que quiera explicar lo que ha hecho. [Álex levanta la mano]. Álex, ¿vosotros qué hicisteis?*	
Interpretación:	*Invitación a la participación para presentar una solución.*

Àlex: Duplicar els costats. Fer el doble de gran.

***Álex**: Duplicar los lados. Hacer el doble de grande.*	
Interpretación:	*Exposición sin argumentación sobre la duplicación de los lados de un polígono.*

Professora: Vau agafar cada costat i què més?

***Profesora**: Tomasteis cada lado, ¿y qué más?*	
Interpretación:	*Petición de explicación sobre la exposición de un alumno.*

Àlex: Els vam fer el doble de grans i vam mantenir els angles.

***Álex**: Los hicimos el doble de grandes y mantuvimos los ángulos.*	
Interpretación:	*Exposición de evidencia empírica sobre la construcción de un polígono el doble de grande.*

Professora: D'acord. Tothom ha sentit el que ha dit l'Àlex? [Alguns alumnes assenteixen amb el cap]. Algú ha fet alguna cosa diferent, o tothom està d'acord amb això que ha fet ell? [L'Adrià aixeca la mà]. Adrià, digues.

***Profesora**: De acuerdo. ¿Todo el mundo ha oído lo que ha dicho Álex? [Algunos alumnos asienten]. ¿Alguien ha hecho alguna cosa distinta, o todo el mundo está de acuerdo con esto que ha hecho él? [Adrià levanta la mano]. Adrià, di.*	
Interpretación:	*Invitación a la búsqueda de alternativas para encontrar una nueva solución a la tarea matemática.*

Adrià: Duplicar els quadradets.

***Adrià**: Duplicar los cuadraditos.*

Interpretación:	*Exposición sin argumentación sobre la duplicación del área.*

Professora: Duplicar els quadradets vols dir que quan hi havia un quadradet al final tu en tenies dos, o a què et refereixes?

***Profesora**: Duplicar los cuadraditos, ¿quieres decir que cuando había un cuadradito al final tú tenías dos? ¿O a qué te refieres?*	
Interpretación:	*Petición de formalización sobre la duplicación del área.*

Adrià: No, per costat.

***Adrià**: No, por lado.*	
Interpretación:	*Formalización sobre la solución planteada por un alumno.*

Professora: Per costat; per tant, dius el mateix que l'Àlex.

***Profesora**: Por lado; por lo tanto, dices lo mismo que Álex.*	
Interpretación:	*Validación sobre la formalización expuesta por un alumno.*

Episodio 3 (*Discutir el artefacto; Estudio de estrategias para resolver o argumentar*)

Professora: Algú ha fet alguna altra construcció?

***Profesora**: ¿Alguien ha hecho alguna otra construcción?*	
Interpretación:	*Invitación a la búsqueda de alternativas para encontrar una nueva solución a la tarea.*

Martí: Cada quadrat són dos… Ah, però és el mateix!

***Martí**: Cada cuadrado son dos… ¡Ah, pero es lo mismo!*	
Interpretación:	*Exposición sin argumentación sobre una solución de la tarea.*

Àlex: Es pot fer de moltes maneres...

***Àlex**: Se puede hacer de muchas maneras…*	
Interpretación:	*Exposición sin argumentación sobre el número de soluciones de la tarea matemática.*

(15) Professora: Respecte a tot això que s'està dient, tothom creu que és el mateix? O sigui, quan l'Àlex ha dit "jo he agafat cada costat i he fet el doble", és a dir, si tinc un costat que val 1 [assenyalant a la pantalla la lletra 'F'], Àlex, de quant l'has fet?

***Profesora**: Respecto de todo lo que se está diciendo, ¿todo el mundo cree que es lo mismo? O sea, Álex ha dicho "yo he tomado cada lado y he hecho el doble", es decir, si tengo un lado que vale 1 [señalando sobre la pantalla la base de la 'F'], Álex, ¿de cuánto lo has hecho?*

Interpretación:	*Establecimiento de consenso sobre la construcción de una figura con el doble de perímetro.*

(16) Àlex: De 2.

***Álex**: De 2.*	
Interpretación:	*Exposición sin argumentación sobre la longitud del lado de un cuadrado.*

(17) Professora: Per tant, si aquesta altura [de la ‘F’] valia 6, l'has feta de 12. Però abans, què han dit en Martí i l’Adrià?

***Profesora**: Por tanto, si esta altura [de la ‘F’] valía 6, la has hecho de 12. Pero antes, ¿qué han dicho Martí y Adrià?*	
Interpretación:	*Invitación a la participación para recordar la construcción de una figura con el doble de perímetro.*

(18) Adrià: Cada nou quadrat són quatre dels inicials.

***Adrià**: Cada nuevo cuadrado son cuatro de los iniciales.*	
Interpretación:	*Exposición de evidencia empírica sobre el área de un cuadrado.*

(19) Professora: És a dir, cada quadrat d'àrea 1 s'ha transformat en quatre?

***Profesora**: Es decir, ¿cada cuadrado de área 1 se ha transformado en cuatro?*	
Interpretación:	*Petición de comprobación sobre la nueva área de un cuadrado.*

(20) Adrià: Sí.

***Adrià**: Sí.*	
Interpretación:	*Asentimiento.*

(21) Professora: Per tant, quan l'heu fet el doble de gran, tothom l'ha fet el doble d'ample i d'alt? Algú ho ha fet diferent?

***Profesora**: Por tanto, cuando habéis hecho el doble de grande, todo el mundo ha hecho el doble de ancho y de alto. ¿Alguien lo ha hecho distinto?*	
Interpretación:	*Invitación a la búsqueda de alternativas sobre la construcción de una figura el doble de grande.*

(22) Isabel: No, perquè sinó seria desproporcionat.

***Isabel**: No, porque sino sería desproporcionado.*	
Interpretación:	*Exposición de evidencia empírica para duplicar una figura.*

(23) Professora: Isabel, dius que seria desproporcionat, si haguéssim fet què?

***Profesora**: Isabel, dices que sería desproporcionado, ¿si hubiésemos hecho qué?*	
Interpretación:	*Petición de formalización sobre la duplicación de una figura.*

(24) Isabel: Que a l'eix de les *Y* féssim el doble, però en el de les *X* no.

***Isabel**: Que en el eje de las Y hiciésemos el doble, pero en el de las X no.*	
Interpretación:	*Formalización sobre las proporciones de una figura poligonal el doble de grande.*

Episodio 4 (*Experimentar el instrumento; Contraste entre soluciones*)

Professora: Algú ho ha fet això? Jo crec que sí. A veure, Adrià, ensenya'ls-ho i explica el que vas fer.

***Profesora**: ¿Alguien lo ha hecho esto? Yo creo que sí. A ver, Adrià, enséñales esto y explica lo que hiciste.*	
Interpretación:	*Petición de explicación sobre la solución de la tarea.*

Adrià: [L'Adrià mostra el seu full a la resta dels companys, on hi ha tres figures dibuixades]. Aquesta és el doble d'alçada [primera figura], aquesta és el doble d'alçada i d'amplada [segona figura] i aquesta és el doble d'amplada [tercera figura].

***Adrià**: [Adrià muestra su hoja de resolución a los demás compañeros, donde hay tres figuras dibujadas]. Esta es el doble de altura [primera figura], esta es el doble de altura y de anchura [segunda figura] y esta es el doble de anchura [tercera figura].*	
Interpretación:	*Exposición de evidencia empírica sobre distintas soluciones de la primera tarea.*

Professora: Per tant, ell té tres. Quina és realment el doble de gran? De les tres que ha fet hi ha alguna que sigui la correcta i les altres dues estiguin malament? Aquesta és la que tu deies, Àlex. Aquesta és el doble de gran…

***Profesora**: Por lo tanto, él tiene tres. ¿Cuál es realmente el doble de grande? De las tres que ha hecho, ¿hay alguna que sea la correcta y las otras dos estén mal? Esta es la que tú decías, Álex. Esta es el doble de grande…*	
Interpretación:	*Petición de comprobación sobre la corrección matemática de tres soluciones de la tarea.*

Anna: Proporcional.

***Anna**: Proporcional.*	
Interpretación:	*Exposición sin argumentación sobre proporcionalidad.*

Professora: Proporcional diu l'Anna, d'acord. [Assenyala la primera i la tercera figura de l'Adrià]. Aquesta és el doble d'alta i aquesta és el doble d'ampla.

***Profesora**: Proporcional dice Anna, de acuerdo. [Señala la primera y la tercera figura de Adrià]. Esta es el doble de alta y esta es el doble de ancha.*	
Interpretación:	*Validación y complemento de la explicación anterior de un alumno.*

Professora: Però aquesta que dieu que és el doble de gran si ens fixem en els costats, però si ens fixem en l'àrea… Adrià, què deies?

***Profesora**: Pero esta que decís que es el doble de grande si nos fijamos en los lados, pero si nos fijamos en el área… Adrià, ¿qué decías?*	
Interpretación:	*Invitación a la participación de un alumno para que explique su solución de la tarea.*

Adrià: Que és quatre vegades més gran.

***Adrià**: Que es cuatro veces más grande.*	
Interpretación:	*Exposición de evidencia empírica sobre la cuadruplicación del área de un polígono.*

Professora: O sigui aquesta [segona figura] és quatre vegades més gran que aquesta [figura de l'enunciat]. Tothom ho veu això? Si comptem l'àrea de la blava [figura de l'enunciat], quina àrea té? Quina àrea té la blava?

***Profesora**: O sea esta [segunda figura] es cuatro veces más grande que esta [figura del enunciado]. ¿Todo el mundo ve esto? Si contamos el área de la azul [figura del enunciado], ¿qué área tiene? ¿Qué área tiene la azul?*	
Interpretación:	*Establecimiento de consenso y petición de comprobación sobre el área de un polígono.*

Isabel: 10 quadradets.

***Isabel**: 10 cuadraditos.*	
Interpretación:	*Exposición de evidencia empírica sobre el área de un polígono.*

Professora: 10 unitats quadrades, perquè no sabem si és un centímetre o mig o… i la gran?

***Profesora**: 10 unidades cuadradas, porque no sabemos si es un centímetro o medio o… ¿y la grande?*	
Interpretación:	*Formalización sobre las unidades de medida del área y petición de comprobación sobre el área de un polígono.*

Àlex: 40.

***Álex**: 40.*	
Interpretación:	*Exposición de evidencia empírica sobre el área de un polígono.*

Episodio 5 (*Descubrir a través del artefacto; Generalización y conceptualización*)

(25) Professora: O sigui, que no heu fet una ‘F’ el doble de gran en àrea, sinó quatre vegades més gran, veritat?

***Profesora**: O sea, que no habéis hecho una ‘F’ el doble de grande en área, sino cuatro veces más grande, ¿verdad?*

Interpretación:	*Petición de comprobación sobre el área de una figura.*

(26) Isabel: Sí, però en aquesta quadrícula no hi ha cap costat que sigui √2 per fer...

***Isabel**: Sí, pero en esta cuadrícula no hay ningún lado que sea √2 para hacer…*	
Interpretación:	*Asentimiento y establecimiento de conjetura sobre la obtención de √2 utilizando una cuadrícula.*

(27) Professora: Tu voldries √2?

***Profesora**: ¿Tú querrías √2?*	
Interpretación:	*Petición de explicación sobre el uso de √2.*

(28) Isabel: Sí.

***Isabel**: Sí.*	
Interpretación:	*Asentimiento.*

(29) Professora: Per fer què?

***Profesora**: ¿Para hacer qué?*	
Interpretación:	*Petición de explicación sobre el uso de √2.*

(30) Isabel: Per fer el doble de l'àrea i amb aquesta quadrícula no es pot fer.

***Isabel**: Para hacer el doble de área y con esta cuadrícula no se puede hacer.*	
Interpretación:	*Exposición sin argumentación sobre la duplicación del área de una figura utilizando una cuadrícula.*

(31) Professora: Tothom ha entès això de l'√2?

***Profesora**: ¿Todo el mundo ha entendido esto de la √2?*	
Interpretación:	*Establecimiento de consenso sobre el término √2.*

(32) Grup d'alumnes: No.

***Grupo de alumnos**: No.*	
Interpretación:	*Negación para pedir aclaración sobre el término √2.*

(33) Professora: Isabel, explica bé això!

***Profesora**: Isabel, ¡explica bien esto!*	
Interpretación:	*Petición de explicación sobre el término √2.*

(34) Isabel: Doncs que a la figura inicial cada quadrat té costat 1 i aquí a cada quadrat el costat és 2, aleshores l'àrea és quatre vegades més gran. Per això, ens interessaria que el costat del quadradet fos √2.

***Isabel**: Pues que en la figura inicial cada cuadrado tiene lado 1 y aquí en cada cuadradito el lado es 2, entonces el área es cuatro veces más grande. Por esto, nos interesaría que el lado del cuadradito fuese √2.*	
Interpretación:	*Justificación empírica sobre el uso de √2 para conseguir una figura con el doble de área.*

(35) Professora: Per tal que l'àrea fos...?

***Profesora**: ¿Para que el área fuese…?*	
Interpretación:	*Petición de formalización sobre el área de una figura.*

(36) Isabel: Dos.

***Isabel**: Dos.*	
Interpretación:	*Formalización del valor del área.*

(37) Professora: [Dibuixa a la pissarra quadrats de diferents mides] La Isabel diu: "jo tinc uns quadrats que mesuren 1x1" i, per tant, l'àrea és 1. Quan dupliquem l'altura i l'amplada obtinc quadrats que són 2x2, però resulta que l'àrea és quatre vegades més gran, ja que és 2x2. La Isabel diu: “per aconseguir un quadrat que tingués àrea 2, que fos el doble d'aquesta [assenyalant a la pissarra un quadrat d'àrea 1], els costats haurien de mesurar √2”. Per demostrar-ho, si anomenem *x* al costat del quadrat, aleshores x^2 és igual a 2, és a dir, x ha de ser √2 [la professora fa totes aquestes anotacions a la pissarra].

***Profesora**: [Dibuja en la pizarra cuadrados de diferentes dimensiones.] Isabel dice: “yo tengo unos cuadrados que miden 1x1” y, por tanto, el área es 1. Cuando duplicamos la altura y la anchura obtengo cuadrados que son 2x2, pero resulta que el área es cuatro veces más grande, ya que es 2x2. Isabel dice: “para conseguir un cuadrado que tuviese área 2, que fuese el doble de esta [señalando en la pizarra un cuadrado de área 1], los lados deberían medir √2”. Para demostrarlo, si llamamos x al lado del cuadrado, entonces x^2 es igual a 2, es decir, x debe ser √2 [la profesora hace estas anotaciones en la pizarra].*	
Interpretación:	*Recapitulación sobre la construcción de un cuadrado con el doble de área y cómo calcular √2.*

Professora: Algú sabria com dibuixar una ‘F’ que la base en comptes de fer dos fes √2? On està amagada una √2 dins d'un quadrat?

***Profesora**: ¿Alguien sabría cómo dibujar una ‘F’ que la base en vez de hacer dos hiciese √2? ¿Dónde está escondida una √2 dentro de un cuadrado?*	
Interpretación:	*Invitación a la participación para construir una figura con el doble de área y representar √2.*

Àlex: Entre 1 i 2.

***Álex**: Entre 1 y 2.*	
Interpretación:	*Exposición sin argumentación sobre el valor numérico de √2.*

Professora: És entre 1 i 2. Però no és la meitat? Què és?

Profesora*: Es entre 1 y 2. ¿Pero no es la mitad? ¿Qué es?*	
Interpretación:	*Validación y petición de formalización sobre el valor numérico de √2.*

Àlex: 1,414…

Álex*: 1,414…*	
Interpretación:	*Formalización sobre el valor numérico de √2.*

Professora: 1,41… i infinits nombres decimals. Algú s'ho imagina?

Profesora*: 1,41… e infinitos números decimales. ¿Alguien se lo imagina?*	
Interpretación:	*Validación e invitación a la participación sobre el significado matemático de √2.*

Àlex: A ull?

Álex*: ¿A ojo?*	
Interpretación:	*Petición de aclaración sobre la pregunta formulada por la profesora.*

Professora: A ull, ho podríem fer… i una manera exacta? On surt √2 a dins d'un quadrat unitari. En aquest quadrat d'aquí [quadrat de costat 1] hi ha alguna cosa que mesuri √2? En el petit, hi ha alguna cosa que mesuri √2?

Profesora*: A ojo, lo podríamos hacer… ¿y una forma exacta? ¿Dónde sale √2 dentro de un cuadrado unitario? ¿En este cuadrado de aquí [cuadrado de lado 1] hay alguna cosa que mida √2? ¿En el pequeño, hay alguna cosa que mida √2?*	
Interpretación:	*Petición de explicación sobre la obtención de √2 en un cuadrado unitario.*

Àlex: La diagonal.

Álex*: La diagonal.*	
Interpretación:	*Exposición sin argumentación sobre la obtención de √2 en un cuadrado unitario.*

Professora: Per què?

Profesora*: ¿Por qué?*	
Interpretación:	*Petición de argumentación sobre la obtención de √2 utilizando la diagonal de un cuadrado unitario.*

Adrià: Perquè és la hipotenusa.

Adrià*: Porque es la hipotenusa.*	
Interpretación:	*Exposición de evidencia empírica sobre la obtención de √2.*

Professora: Sí… la hipotenusa aquesta [assenyala la diagonal del quadrat unitari] sabem que és l'arrel del catet al quadrat, que és 1, més l'altre catet al quadrat i això és √2.

Profesora*: Sí… la hipotenusa esta [señala la diagonal del cuadrado unitario] sabemos que es la raíz del cateto al cuadrado, que es 1, más otro cateto al cuadrado y esto es √2.*	
Interpretación:	*Complemento de la explicación de un alumno sobre la obtención de √2 utilizando el teorema de Pitágoras.*

Episodio 6 (*Explicar a través del artefacto; Estudio de estrategias para resolver o argumentar*)

Professora: Llavors com faríem aquí [en el paper] una ‘F’ que tingués de base √2? A veure, Saray, digues.

Profesora*: Entonces, ¿cómo haríamos aquí [en el papel] una ‘F’ que tuviese de base √2? A ver, Saray, di.*	
Interpretación:	*Invitación a la participación para construir una figura geométrica cuya base mida √2.*

Saray: Fas la diagonal d'un dels quadrats i la transportes.

Saray*: Haces la diagonal de uno de los cuadrados y la transportas.*	
Interpretación:	*Exposición sin argumentación sobre la construcción de √2 utilizando una cuadrícula.*

Professora: Ah, com amb el compàs a dibuix tècnic. Vindries aquí, agafes [assenyalant la diagonal del quadrat unitari], i llavors vens aquí i ho poses, i a partir d'aquí construeixes.

Profesora*: Ah, como con el compás en dibujo técnico. Vendrías aquí, tomas [señalando la diagonal del cuadrado unitario], y entonces vienes aquí y lo pones, y a partir de aquí construyes.*	
Interpretación:	*Complemento de la explicación anterior de un alumno.*

Saray: Sí.

Saray*: Sí.*	
Interpretación:	*Asentimiento.*

Professora: Però per exemple, aquesta amplada d'aquí, de la ‘F’, ara voldries fer 4·√2… se'ns complica. A veure una manera geomètrica de fer-ho?

Profesora*: Pero por ejemplo, esta anchura de aquí, de la ‘F’, ahora querrías hacer 4·√2… se nos complica. A ver, ¿una forma geométrica de hacerlo?*	
Interpretación:	*Invitación a la búsqueda de alternativas para construir una figura cuyos lados midan un múltiplo de √2.*

Adrià: En diagonal.

***Adrià**: En diagonal.*	
Interpretación:	*Exposición sin argumentación sobre la obtención de múltiplos de √2.*

Professora: Fer-ho en diagonal. Com? Dibuixar la ‘F’ en diagonal. A veure, jo en tinc aquí una de feta, a veure si us convenç. [La professora projecta la seva proposta a la pantalla de GeoGebra]. Agafaríem de punta a punta d'un quadradet unitari [referint-se a la diagonal] i llavors ho construiria a sobre i aniria fent. Clar, aquí m'han quedat uns quadrats. Aquesta té d'altura 1, 2, 3, 4, 5 i 6, però ara són sis que mesuren més. Cada un no mesura 1, sinó que mesura √2. D’acord?

***Profesora**: Hacerlo en diagonal. ¿Cómo? Dibujar la ‘F’ en diagonal. A ver, yo tengo aquí una de hecha, a ver si os convence. [La profesora proyecta su propuesta en la pantalla de GeoGebra]. Tomaríamos de punta a punta de un cuadradito unitario [refiriéndose a la diagonal] y entonces lo construiría encima e iría haciendo. Claro, aquí me han quedado unos cuadrados. Esta tiene de altura 1, 2, 3, 4, 5 y 6, pero ahora son seis que miden más. Cada uno no mide 1, sino que mide √2. ¿De acuerdo?*	
Interpretación:	*Recapitulación sobre la construcción de una figura poligonal cuyos lados miden un múltiplo de √2.*

(38) Professora: Quines són les particularitats d’aquesta [‘F’ amb el doble d’àrea], de la ‘F’ blava [original] i d’aquesta altra [‘F’ amb el doble de perímetre]?

***Profesora**: ¿Cuáles son las particularidades de esta [‘F’ con el doble de área], de la ‘F’ azul [original] y de esta otra [‘F’ con el doble de perímetro?*	
Interpretación:	*Petición de explicación para contrastar distintas soluciones.*

(39) Alba: Que són proporcionals.

***Alba**: Que son proporcionales.*	
Interpretación:	*Exposición sin argumentación sobre la proporcionalidad de figuras geométricas.*

(40) Professora: Què vols dir amb ‘proporcionals’? A veure, Alba, explica-ho.

***Profesora**: ¿Qué quieres decir con ‘proporcionales’? A ver, Alba, explícalo.*	
Interpretación:	*Petición de explicación sobre el término ‘proporcional’.*

(41) Alba: Què un costat i l’altre mantinguin la mateixa proporció. Per exemple, si hi ha tres quadrats en vertical i quatre en horitzontal, llavors serien sis en vertical i vuit en horitzontal.

***Alba**: Que un lado y el otro mantengan la misma proporción. Por ejemplo, si hay tres cuadrados en vertical y cuatro en horizontal, luego serían seis en vertical y ocho en horizontal.*	
Interpretación:	*Exposición con argumentación sobre proporcionalidad.*

(42) Professora: Val, per tant, quines són proporcionals? Una ‘F’ de l’altra?

***Profesora**: Vale, por tanto, ¿cuáles son proporcionales? ¿Una ‘F’ de la otra?*	
Interpretación:	*Validación y petición de formalización sobre proporcionalidad.*

(43) Alba: La divisió entre els costats.

***Alba**: La división entre los lados.*	
Interpretación:	*Formalización para obtener la razón entre lados proporcionales.*

(44) Professora: La divisió entre el costat d'una ‘F’ amb l’homòleg de l'altra.

***Profesora**: La división entre un lado de una ‘F’ con el homólogo de la otra.*	
Interpretación:	*Formalización sobre la proporcionalidad entre lados homólogos.*

(45) Àlex: La *k*.

***Álex**: La k.*	
Interpretación:	*Aclaración sobre la constante de proporcionalidad.*

(46) Professora: I a aquesta proporció li dieu *k*, que és la constant de proporcionalitat. Ara bé, en aquests polígons, per afirmar que són semblants, a més a més, què heu utilitzat? És a dir, què s’ha de complir?

***Profesora**: Y a esta proporción le llamáis k, que es la constante de proporcionalidad. Ahora, a estos dos polígonos, para afirmar que son semejantes, además, ¿qué habéis utilizado? Es decir, ¿qué se debe cumplir?*	
Interpretación:	*Petición de explicación sobre polígonos semejantes.*

(47) Adrià: Que es mantinguin els angles.

***Adrià**: Que se mantengan los ángulos.*	
Interpretación:	*Exposición de evidencia empírica sobre la igualdad de ángulos homólogos en dos figuras semejantes.*

(48) Professora: Exacte, els mateixos angles em faltava. Perquè sinó us podria dibuixar un rombe de costat quatre i aquests dos polígons [rombe i quadrat] no són semblants. Per tant, no només els costats han de ser proporcionals, sinó que els angles homòlegs han de ser iguals. Ho teniu tots clar?

***Profesora**: Exacto, los mismos ángulos me faltaba. Porque sino podría dibujaros un rombo de lado cuatro y estos dos polígonos [rombo y cuadrado] no son semejantes. Por tanto, no solo los lados han de ser proporcionales, sino que los ángulos homólogos han de ser iguales.*	
Interpretación:	*Recapitulación sobre la definición de semejanza.*

Grup d’alumnes: Iguals?

***Grupo de alumnos**: ¿Iguales?*

Interpretación:	*Petición de aclaración sobre la igualdad de ángulos homólogos entre dos polígono semejantes.*

Professora: Sí, iguals. Si aquest és de 90º [assenyalant els angles del quadrat] aquí [en el rombe] hauria de tenir el seu equivalent a 90º, aquí no en tinc cap de 90º, per tant, no podran ser proporcionals. No seran figures semblants.

***Profesora**: Sí, iguales. Si este es de 90º [señalando los ángulos del cuadrado] aquí [en el rombo] tendría que tener su equivalente a 90º, aquí no tengo ninguno de 90º, por lo tanto, no podrán ser proporcionales. No serán figuras semejantes.*	
Interpretación:	*Formalización sobre la igualdad de ángulos homólogos entre dos figuras semejantes.*

Episodio 7 (*Explicar a través del artefacto; Conexiones con otras situaciones*)

Àlex: I de quant són els angles del rombe?

***Àlex**: ¿Y de cuánto son los ángulos del rombo?*	
Interpretación:	*Petición de aclaración sobre la amplitud de los ángulos de un rombo.*

Professora: Puc fer diverses opcions; aquest en concret l'hauríem de mesurar. Podríem fer qualsevol rombe mantenint que el costat sigui quatre. Algú va fer altres 'F's'?

***Profesora**: Puedo hacer varias opciones; este en concreto tendríamos que medirlo. Podríamos hacer cualquier rombo manteniendo que el lado sea cuatro. ¿Alguien hizo otras 'F's'?*	
Interpretación:	*Formalización sobre la amplitud de los ángulos de un rombo.*

Berta: No.

***Berta**: No.*	
Interpretación:	*Negación sobre la construcción de nuevos polígonos.*

Professora: Ho sigui, us van sortir aquestes tres bàsicament. La que va inclinada és la que us faltava. Que seria la que fas el doble de l'àrea. L'enunciat estava posat expressament amb trampa, ja que si vull demanar-vos que feu una figura el doble de gran haig d'especificar si la vull amb el doble de perímetre o amb el doble d'àrea. Nosaltres us ho vam posar així "el doble de gran" perquè sortissin més coses. Així donava més joc. Si haguéssim dit el doble d'àrea només hi havia una opció, la de fer el costat √2, i si haguéssim dit el doble de perímetre i que segueixi sent proporcional només hi havia l'opció que heu fet la majoria.

***Profesora**: O sea, os salieron estas tres básicamente. La que va sesgada es la que os faltaba. Que sería la que haces el doble de área. El enunciado estaba puesto intencionadamente con trampa, ya que si quiero pediros que hagáis una figura el doble de grande tengo que especificar si quiero el doble de perímetro o el doble de área. Nosotros os lo pusimos así "el doble de grande" porque saliesen más cosas. Así daba más juego. Si hubiésemos dicho el doble*

de área solo había una opción, la de hacer el lado √2, y si hubiésemos dicho el doble de perímetro y que siga siendo proporcional solo había la opción que habéis hecho la mayoría.	
Interpretación:	*Recapitulación sobre distintas soluciones de la tarea matemática.*

Isabel: Perquè sigui el doble de l'àrea…?

***Isabel**: ¿Para que sea el doble del área…?*	
Interpretación:	*Petición de aclaración sobre la duplicación del área.*

Professora: Què vols dir?

***Profesora**: ¿Qué quieres decir?*	
Interpretación:	*Petición de explicación sobre la pregunta formulada por un alumno.*

Isabel: Si només n'hem de fer un per anar cap aquí…

***Isabel**: Si solo tenemos que hacer uno para ir hacia aquí…*	
Interpretación:	*Petición de aclaración sobre la duplicación del área.*

Professora: La Isabel pregunta, ella té una quadrícula i quan ha de fer la ‘F’ inclinada; aquesta que hem dit "he de fer, si la ‘F’ d'abans era així [la de l’enunciat] i té amplada 1 i ara la volem fer d’amplada √2”, què he de fer així [dibuixa la diagonal] i ja anirà cap allà? o he de fer el doble de la diagonal [és a dir, 2·√2] i tirar cap allà?

***Profesora**: Isabel pregunta, ella tiene una cuadrícula y cuando tiene que hacer la ‘F’ sesgada; esta que hemos dicho “tengo que hacer, si la ‘F’ de antes era así [la del enunciado] y tiene anchura 1, y ahora la queremos hacer de anchura √2”, ¿qué tengo que hacer así [dibuja la diagonal], e irá hacia allá? O bien, ¿tengo que hacer el doble de la diagonal [es decir, 2·√2] y desplazarme hacia allá?*	
Interpretación:	*Establecimiento de consenso sobre la pregunta formulada por un alumno durante la discusión en gran grupo.*

Alba: No.

***Alba**: No.*	
Interpretación:	*Negación sobre la medida de la diagonal de un cuadrado.*

Professora: Val, perquè si l'agafo de dos diagonals de llarg, quant mesura?

***Profesora**: Vale, porque si la tomo de dos diagonales de largo, ¿cuánto mide?*	
Interpretación:	*Petición de comprobación sobre la medida de la diagonal de un cuadrado.*

Àlex: 2·√2.

***Àlex**: 2·√2.*	
Interpretación:	*Exposición sin argumentación sobre la medida de la diagonal.*

Professora: 2·√2. I tu no la vols de 2·√2. Si la 'F' inicial era de sis d'alt, de sis quadrets d'alt, aquí l'ha de fer de sis diagonals d'aquestes de llarg.

***Profesora**: 2·√2. I tú no la quieres de 2·√2. Si la 'F' inicial era de seis de alto, de seis cuadrados de alto, aquí la tiene que hacer de seis diagonales de largo.*	
Interpretación:	*Validación y complemento de la explicación de un alumno.*